Видавничий дім Освіта

Г. П. Бевз
В. Г. Бевз
В. М. Владіміров
Н. Г. Владімірова

Геометрія

Профільний рівень

10 клас

УДК 514*кл10(075.3)
Г36

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 31.05.2018 № 551)

ВИДАНО ЗА ДЕРЖАВНІ КОШТИ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна
ВЛАДІМІРОВ Володимир Миколайович
ВЛАДІМІРОВА Наталія Григорівна

ГЕОМЕТРІЯ

Профільний рівень

Підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти

Редактор *Т. П. Єресько*
Технічний редактор *Л. І. Аленіна*
Комп’ютерна верстка *П. В. Ширнін*
Коректор *Л. А. Еско*

Формат 70×100 1/16.
Ум. друк. арк. 22,032 + 0,324 форзац.
Обл.-вид. арк. 21,37 + 0,55 форзац.
Наклад 6170 пр. Зам. №

ТОВ «ВИДАВНИЧИЙ ДІМ «ОСВІТА»
Свідоцтво «Про внесення суб’єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції»
Серія ДК № 6109 від 27.03.2018 р.

Адреса видавництва: 04053, м. Київ, вул. Обсерваторна, 25
www.osvita-dim.com.ua

Віддруковано у ПРАТ «Харківська книжкова фабрика “Глобус”»
61052, м. Харків, вул. Різдвяна, 11.
Свідоцтво ДК № 3985 від 22.02.2011 р.
www.globus-book.com

Г36 **Геометрія.** Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, В. М. Владіміров, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. — 272 с. : іл.

ISBN 978-617-656-898-8.

УДК 514*кл10(075.3)

ISBN 978-617-656-898-8

Шановні десятикласники і десятикласниці!

Геометрія — одна з найдавніших, найшляхетніших, корисних і цікавих наук. У ній — згусток значної частини загальнолюдської культури, надбаної людством за кілька тисячоліть. А ще вона є незамінним інструментарієм для науковців і виробничників, засобом для розвитку логічного мислення, просторової уяви, раціоналізаторських здібностей та інших позитивних і корисних рис характеру молоді. Ось що говорив про геометрію Платон:

« *Геометрія є пізнання всього існуючого* »

Геометрія складається з двох частин: *планіметрії* і *стереометрії*. У попередніх класах ви вивчали в основному планіметрію, тепер переходите до вивчення стереометрії (від грец. στερεοζ — просторовий), у якій розглядають властивості геометричних фігур у просторі.

Підручник складається з чотирьох розділів, кожний із яких розпочинається короткими відомостями про творців відповідних теорій, про зміст навчального матеріалу, а також характеристикою окремих **професій**, які ви можете обрати у майбутньому.

Розділи містять теоретичний матеріал і задачі. Читаючи теорію, основну увагу слід звертати на слова, надруковані *курсивом* і **жирним шрифтом.** Це нові поняття і твердження, засвоївши які ви зможете впевнено розв'язувати абстрактні та прикладні задачі. Для тих, хто хоче знати більше, призначена рубрика **ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ**, яку можна використати для поглиблення знань, розширення кругозору, виконання навчальних проектів та написання дослідницьких робіт.

Знати геометрію — це насамперед уміти користуватися нею у повсякденному житті, подальшому навчанні та майбутній професійній діяльності. Набувати досвіду використовувати геометричні знання найкраще під час розв'язування геометричних задач і виконання практичних завдань. У підручнику вміщено задачі різних видів (на обчислення, дослідження, доведення, побудову) та рівнів складності. Є задачі з реальними даними, що стосуються різних галузей знань, господарської діяльності, природних ресурсів, фінансів, громадській відповідальності тощо. Розвитку критичного мислення, креативності та раціоналізаторських здібностей присвячені практичні завдання.

Завдання, рекомендовані для домашньої роботи, виділено **блакитним** кольором. Задачі і вправи в підручнику поділено на: **Виконайте усно**, рівень **А**, рівень **Б** і **Вправи для повторення**. Порівняно важкі задачі позначені зірочкою (*). Вони розраховані на учнів, які цікавляться математикою. У кожному розділі є **Задачі за готовими малюнками**. Умови таких задач подано у вигляді малюнків та коротких записів. Параграфи підручника містять рубрику **Виконаємо разом**, де запропоновано задачі з розв'язаннями.

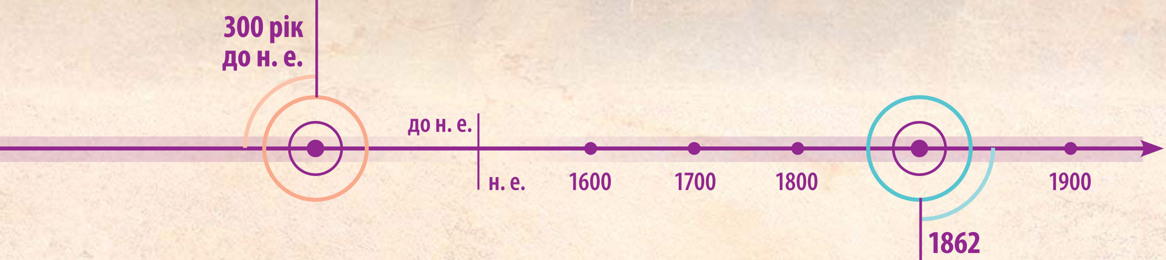
Запрошуємо вас у багатий і дивний світ Геометрії і сподіваємося, що вивчення геометрії за цим підручником буде для вас цікавим і нескладним.

Автори

Евклід

(III ст. до н. е.)

Автор перших теоретичних трактатів, що дійшли до нашого часу. У творі «Основи» здійснив першу спробу аксіоматичної побудови геометрії. Його аксіоматика не задовольняє вимоги сучасної математики, але її значення для науки незаперечне.



Давид Гільберт

(1862–1943)

У праці «Основи геометрії» (1899) увів неозначувані поняття, абстрагуючись від їх природи, і дав повну систему аксіом евклідової геометрії, класифікуючи їх на 5 груп. У такий спосіб побудував геометрію на міцній основі та дослідив її логічну структуру.

Розділ 1 | Chapter 1

Вступ до стереометрії | Introduction to Stereometry

Як наука стереометрія сформувалася у Стародавній Греції. Спочатку властивості геометричних фігур були знайдені дослідним шляхом. Згодом ці твердження довели, а Евклід звів їх у систему в роботі «Основи». Це була перша спроба аксіоматичної побудови геометрії. Греки уявляли геометрію як дедуктивну науку, що займається чисто логічними висновками з невеликої кількості заздалегідь встановлених аксіом.

Евклід сформулював аксіоми, постулати і намагався дати описове означення основних просторових об'єктів і співвідношень, що наявні в його аксіомах. Евкліда цікавив реальний простір фізичного світу, у якому сформульовані аксіоми були очевидними.

Аксіоматика Евкліда не була досконалою, з часом її суттєво доповнили й уточнили.

Але і зараз геометрію, що вивчається в школі, називають евклідовою геометрією. Науковці та студенти університетів розглядають також і неевклідові геометрії.

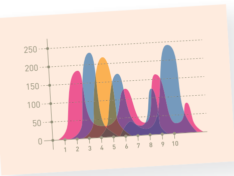
Навчальний проект

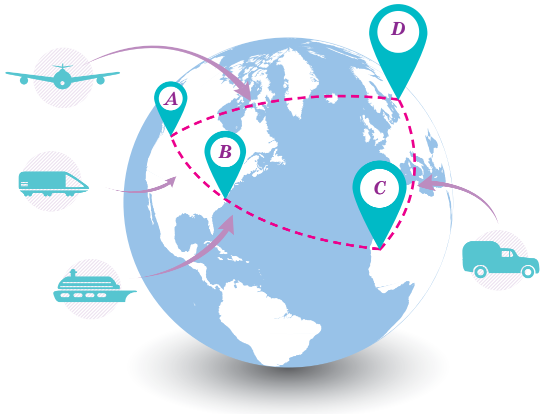
«Побудова перерізів многогранників з використанням ІКТ»

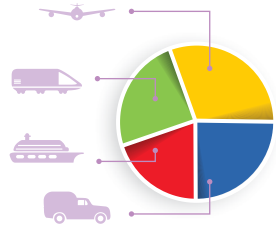
Логістика

logistikos — обчислювати, міркувати.

Регулювання переміщення матеріальних та інформаційних потоків







Математика в моїй професії

Нанотехнології

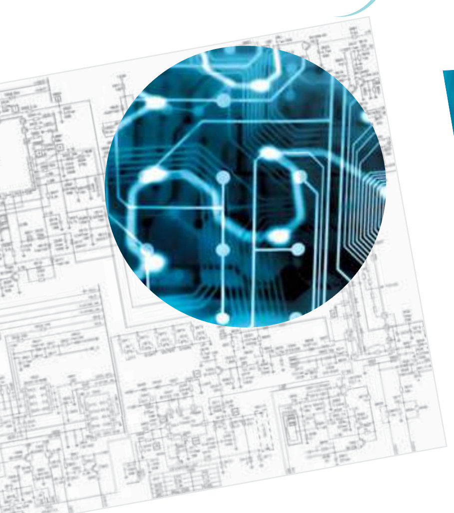
Нано- (карлик) — префікс у системі одиниць СІ, що означає множник 10^{-9}.

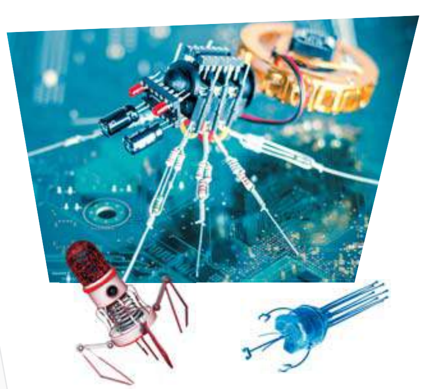
Пов'язана з математикою, фізикою, геофізикою, астрономією

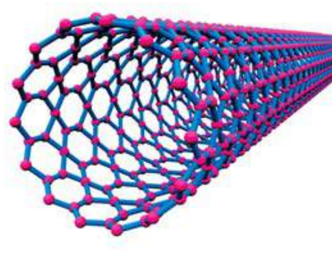
Розробка наномікросхем

Створення нанороботів

Інженерія на атомному рівні







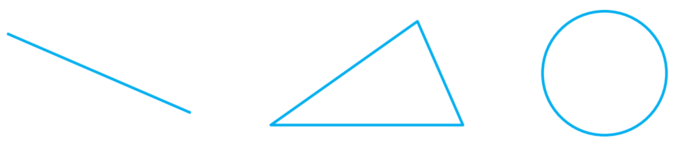
§ 1 Основні поняття стереометрії

Геометрія — наука про властивості геометричних фігур. Вона складається з двох частин: планіметрії і стереометрії. У планіметрії розглядають фігури в одній площині. Стереометрія (від грец. *stereoz* — просторовий і *metrew* — вимірюю) вивчає властивості геометричних фігур у просторі.

Геометрична фігура — будь-яка множина точок: скінченна або нескінченна, на площині або в просторі.

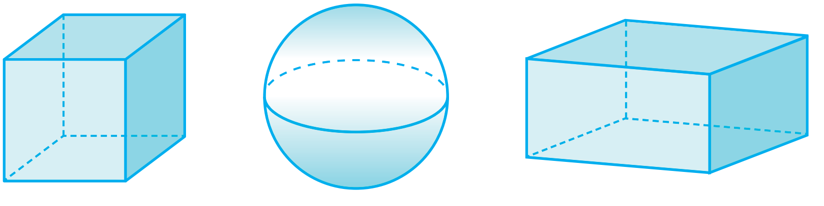
У стереометрії вивчають властивості як плоских геометричних фігур, так і неплоских.

Приклади плоских фігур: пряма, трикутник, коло (мал. 1).



Мал. 1

Фігуру називають неплоскою (просторовою), якщо не всі її точки лежать в одній площині. Приклади неплоских фігур: куб, куля, паралелепіпед (мал. 2).



Мал. 2

У стереометрії розглядають й інші геометричні поняття:

— *геометричні величини* (довжини, площі, об'єми, міри кутів);

— *геометричні перетворення* (паралельні перенесення, різні види симетрії, повороти, перетворення подібності тощо);

— *вектори*;

— *геометричні відношення* (перпендикулярності, паралельності, рівності, подібності тощо).

Зміст більшості наукових понять звичайно розкривають за допомогою означень. Але не все можна означити. Щоб означити якесь поняття, треба підвести його під інше поняття, зміст якого вже відомий. Наприклад, формулюючи означення «паралелограмом називають чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні», означуване поняття «паралелограм» підводять під уже відоме поняття «чотирикутник». А під які геометричні поняття можна підвести перші поняття, такі як «точка», «пряма», «площина»? Їх вводять без означень і називають **основними** (неозначуваними) поняттями.

Властивості неозначуваних понять розкривають за допомогою **аксіом**. Далі ми сформулюємо аксіоми стереометрії. Але спочатку зробимо кілька зауважень про поняття «площина».

Про площину говорять і в планіметрії (згадайте хоча б означення паралельних прямих). Але там розглядають тільки одну площину; усі фігури, які вивчають у планіметрії, належать цій єдиній площині. Отже, у планіметрії за універсальну множину точок взято **площину**.

У стереометрії універсальною множиною точок є **простір** (тривимірний), у ньому існує безліч різних площин. Матеріальними моделями частини площини є, наприклад, поверхня віконного скла, добре відполірована поверхня стола, мармурової плити, поверхня аеродрому тощо. Уявлення про частину площини можна отримати, дивлячись на гладеньку поверхню озера, злітні смуги аеропорту чи футбольне поле (мал. 3).

Озеро Синевир

Злітні смуги аеропорту Бориспіль

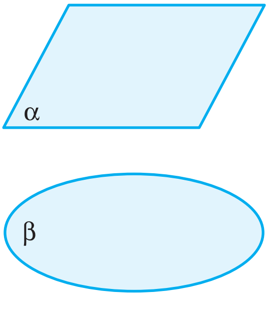
Футбольне поле стадіону «Металіст» у Харкові

Мал. 3

Зрозуміло, що це грубі моделі. У геометрії площину мислять необмеженою, ідеально рівною і гладенькою, що не має ніякої товщини.

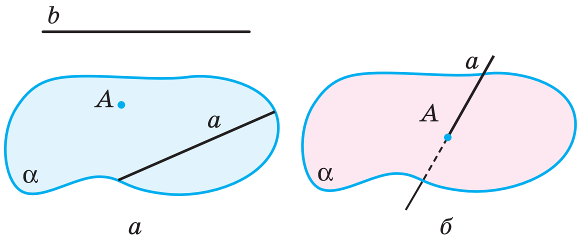
Зображають площини у вигляді паралелограмів або «шматків» площини, обмежених довільними замкненими лініями (мал. 4). Позначають їх зазвичай грецькими літерами α, β, γ, δ, ω тощо.

Як і будь-яка геометрична фігура, площина складається з точок. Якщо точка A **лежить** у площині α, кажуть, що площина α **проходить** через точку A, і записують: $A \in \alpha$. Запис $A \notin \alpha$ означає, що точка A **не лежить** у площині α. Якщо кожна з точок A, B, C (що не лежать на одній прямій) лежить у деякій площині α, то її можна позначати символом (ABC).

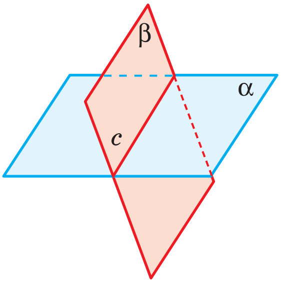


Мал. 4

Якщо кожна точка прямої a належить площині α, кажуть, що пряма a **лежить у площині** α, або **площина** α **проходить через пряму** a. За допомогою символів записують це так: $a \subset \alpha$. На малюнку 5, *а* зображено площину α, яка проходить через пряму a і точку A. Запис $b \not\subset \alpha$ означає, що пряма b не лежить у площині α.



Мал. 5



Мал. 6

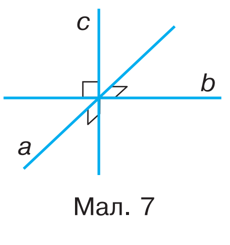
Якщо пряма a і площина α мають тільки одну спільну точку A, кажуть, що вони **перетинаються в точці** A. Записують: $a \cap \alpha = A$. На малюнку невидиму частину прямої зображають штриховою лінією (мал. 5, *б*).

Якщо через пряму c проходять дві площини α і β, кажуть, що ці площини перетинаються по прямій c. Записують: $\alpha \cap \beta = c$ (мал. 6).

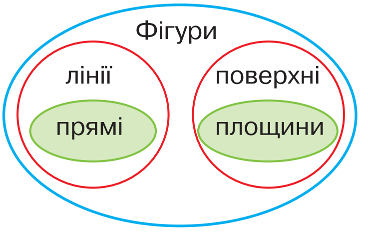
Зауваження. Коли кажуть «дві площини», то вважають, що вони різні, не збігаються. Так само розумітимемо вирази «дві точки», «дві прямі» тощо.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Не слід до неплоских фігур відносити тільки такі, як куб, куля, циліндр, конус, які мають поверхню чи об'єм. Дві площини, які перетинаються (мал. 6), утворюють одну неплоску фігуру; три прямі, які перетинаються в одній точці і перпендикулярні кожна до кожної (мал. 7), — також неплоска фігура. Такі фігури не мають ні площі, ні об'єму.



Мал. 7



Мал. 8

Крім понять «пряма» і «площина», нерідко розглядають ще поняття **лінія** і **поверхня**. Розуміють, що пряма — окремий вид ліній, а площина — вид поверхонь (мал. 8). Однак пояснити, що таке лінія і що таке поверхня, надто важко.

Існує безліч різних ліній, деякі з них мають окремі назви: коло, ламана, парабола, спіраль, гвинтова лінія (мал. 9). Відрізок, промінь, пряма — простіші приклади ліній. І різних поверхонь безліч: сфера, циліндрична, конічна, многогранна. Існують і досить цікаві поверхні: «лист Мебіуса» (мал. 10, *а*), «пляшка Клейна» (мал. 10, *б*) тощо. Їх розглядають у вищій геометрії. Площина та її частини (кут, смуга, трикутник, круг) — приклади простіших поверхонь.

Символи $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, використовують не лише в геометрії. Це — важливі символи теорії множин, на основі якої будують усю сучасну математику. Їх читають:

$\in$ — є елементом;

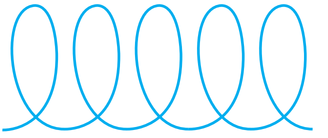
$\notin$ — не є елементом;

$\subset$ — є частиною (підмножиною);

$\not\subset$ — не є підмножиною.

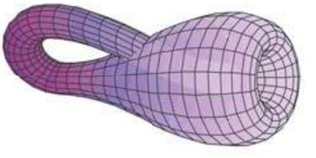
Крім зазначених, часто використовують інші символи: $\varnothing$ — порожня множина; $\bigcup$ — об'єднання множин; $\bigcap$ — переріз множин.

Наприклад, якщо пряма *а* і площина α не мають спільних точок, то $a \bigcap \alpha = \varnothing$. $a \bigcup \alpha$ — множина точок (фігура), якій належать усі точки прямої *а* і площини α (мал. 5, *б*).



Мал. 9

а



б

Мал. 10

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Поясніть походження слова *стереометрія*.
2. Які фігури називають неплоскими?
3. Які поняття в стереометрії приймають без означень?
4. Що означають записи: $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$?
5. Що означають записи: $a \subset \alpha$, $a \not\subset \beta$?

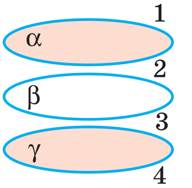
Виконаємо разом

1 Дано пряму *с* і площину α. Яким може бути $c \bigcap \alpha$?

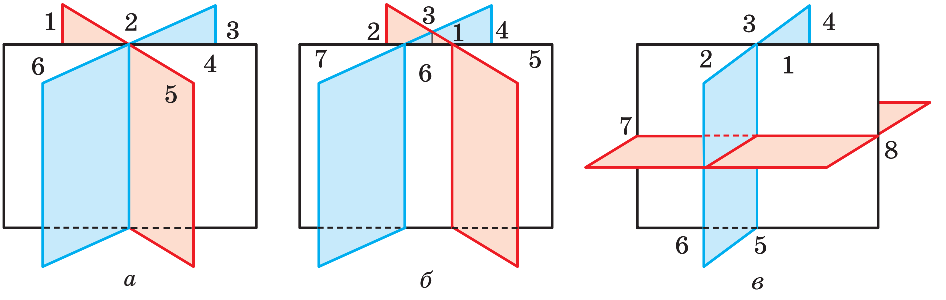
- Якщо пряма *с* не має спільних точок з площиною α, то $c \bigcap \alpha = \varnothing$. Якщо пряма *с* перетинає площину α в точці *А*, то $c \bigcap \alpha = A$. Якщо пряма *с* лежить у площині α, то $c \bigcap \alpha = c$.

2 На скільки частин можуть поділити простір три різні площини?

● Якщо жодні дві з трьох даних площин не мають спільних точок (мал. 11), то вони поділяють простір на 4 частини. В інших випадках три площини можуть ділити простір на 6, 7 чи 8 частин (мал. 12).



Мал. 11



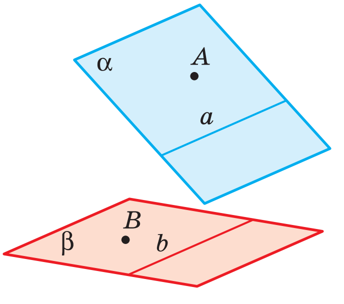
Мал. 12

3 На прямій дано 27 різних точок. На скільки частин вони ділять пряму?

● Одна внутрішня точка ділить пряму, промінь чи відрізок на 2 частини, дві точки — на 3 частини і т. д. Зі збільшенням на одиницю числа точок на прямій збільшується на одиницю і кількість частин прямої. Отже, 27 різних точок прямої ділять її на 28 частин. Дві із цих частин — промені, а решта — відрізки.

4 Чи правильні записи:
а) $a \in \alpha$; б) $A \in \alpha$; в) $b \in \beta$; г) $B \subset \beta$ (мал. 13)?

● б) — правильно; а), в), г) — ні. Слід писати:
а) $a \subset \alpha$, в) $b \subset \beta$, г) $B \in \beta$.



Мал. 13

Задачі і вправи

Виконайте усно

1. Наведіть приклади геометричних фігур: а) плоских; б) неплоских.
2. Чи є геометричними фігурами фігури вищого пілотажу, які виконують льотчики? А шахові фігури?
3. Чи відрізняються поняття «площина» і «площа»?
4. Які з перелічених фігур неплоскі: відрізок, коло, призма, циліндр, прямий кут, прямокутний трикутник, прямокутний паралелепіпед, площина?
5. Скільки спільних точок можуть мати: а) дві прямі; б) пряма і площина; в) дві площини?
6. Скільки спільних точок можуть мати: а) пряма і відрізок; б) пряма і коло; в) коло і площина?

А

7. Намалюйте площину α і точку M, що лежить у ній. Запишіть це за допомогою символів.

8. Намалюйте площину β, що проходить через пряму x. Запишіть це за допомогою символів.

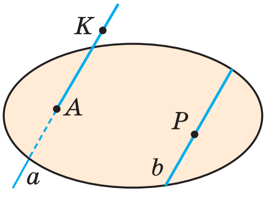
9. Намалюйте площину α і пряму c, які перетинаються у точці M. Скільки точок прямої c лежить у площині α?

10. Намалюйте площини α і ω, що перетинаються по прямій m.

11. Пряма a лежить у площині α, а пряма b — у площині β (мал. 13). Чи випливає із цього, що прямі a і b не лежать в одній площині?

12. Пряма a проходить через точку A площини α. Чи випливає з цього, що пряма a перетинає площину α?

13. Запишіть за допомогою символів взаємне розташування точок, прямих і площин, зображених на малюнку 14.



Мал. 14

14. Накресліть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Запишіть за допомогою символів відповіді на запитання:

а) по якій прямій перетинаються площини:
1) (ABC) і (AA_1D_1);
2) (AA_1B_1) і (AA_1D);
3) (BB_1C_1) і (CC_1D_1)?

б) яким площинам належить точка: 1) A; 2) C_1; 3) D?

в) чи належить точка B_1 площині: 1) (ABC); 2) (BB_1C_1); 3) $(A_1B_1C_1)$?

15. Накресліть трикутну піраміду $ABCD$. Запишіть за допомогою символів відповіді на запитання:

а) по якій прямій перетинаються площини (ABC) і (ABD)?

б) якій площині не належить точка B?

в) яким площинам належить пряма AC?

Б

16. Площини α, β, пряма a і точка A задовольняють такі умови: $a \subset \alpha$, $a \subset \beta$, $A \in \beta$, $A \notin \alpha$. Зобразіть це на малюнку.

17. Площини α, β, γ попарно перетинаються по прямих a, b і c, причому $a \parallel b$ і $b \parallel c$. Зобразіть це на малюнку.

18. Пряма a перетинає площину α в точці A. У площині α дано ще точку B. Площина β проходить через пряму a і точку B. Зробіть відповідний малюнок.

19. Точки A і B лежать у площині α, а точка C — поза нею. Намалюйте площину, у якій лежать усі три точки.

20. На скільки частин розділяється простір двома площинами?

21*. На скільки частин можуть розділити простір чотири площини?

Практичне завдання

22. Зробіть з цупкого паперу чи картону модель площин, що перетинаються: а) двох площин; б) трьох; в) чотирьох.

Задачі для повторення

23. Площа паралелограма $ABCD$ дорівнює 48 см^2, а точки M і N — середини його сторін AD і DC. Установіть відповідність між фігурами (1–4) та їхніми площами (А–Д).

1	Трикутник DMN	**А**	24 см^2
2	Чотирикутник $MBND$	**Б**	42 см^2
3	Чотирикутник $MACN$	**В**	12 см^2
4	П’ятикутник $MABCN$	**Г**	6 см^2
		Д	18 см^2

24. Чи лежать точки M, N, K на одній прямій, якщо:

а) $MN = 5\dfrac{11}{15}$ м, $MK = 11{,}65$ м, $NK = 5\dfrac{11}{25}$ м;

б) $MN = 17$ см, $NK = 21{,}5$ см, $MK = 5{,}5$ см?

25. Дніпропетровський «Агро-Союз» робить обладнання не лише для українців, а й продає свої агрегати на експорт. Універсальна сівалка «Агро-Союз FM-3090» призначена для сівби різних культур — як зернових, так і просапних. Основні технічні характеристики цієї сівалки подано в таблиці.

Кількість сошників для зернових культур, шт.	31
Ширина захвату для зернових культур, мм	5425
Міжряддя для зернових культур, мм	175
Кількість сошників для просапних культур, шт.	8
Ширина захвату для просапних культур, мм	5600
Міжряддя для просапних культур, мм	700

а) Відомо, що під час висівання пшениці сівалка рухалася зі швидкістю 9,3 км/год. Встановіть: 1) яку площу (у га) засіяли за 30 хв; 2) скільки погонних метрів засіяли за 1 год.

б) Відомо, що під час висівання кукурудзи сівалка рухалася зі швидкістю 7,5 км/год. Встановіть: 1) яку площу (у га) засіяли за 40 хв; 2) скільки погонних метрів засіяли за 1 год.

§ 2 Аксіоми стереометрії і наслідки з них

У справедливості математичних тверджень переконуються за допомогою *доведень*. Довести дане твердження — означає показати, що воно випливає з інших тверджень, істинність яких уже встановлено. Твердження, які доводять, називають **теоремами**.

Не кожне геометричне твердження можна довести. Коли виклад геометрії тільки починається, неможливо вивести наслідки з інших тверджень, оскільки їх (інших тверджень) ще немає. Ось чому кілька перших тверджень приймають без доведення. Їх називають **аксіомами**.

За геометричні аксіоми зазвичай приймають твердження, які відповідають формам і відношенням, що спостерігаються в матеріальному світі. У справедливості цих тверджень люди переконалися в результаті багатовікової практичної діяльності.

Вперше про необхідність використання аксіом у геометрії ви дізналися в 7 класі, коли вивчали планіметрію та її аксіоми. Пригадайте аксіоми планіметрії (див. с. 259 у *Додатку «Опорні факти планіметрії»*).

На будь-якій площині, як вона не була б розташована у просторі, виконуються всі аксіоми планіметрії.

Але для стереометрії одних цих аксіом недостатньо. Потрібні аксіоми, що виражають основні властивості точок, прямих і площин у просторі. Сформулюємо їх.

C_1. У просторі існує (принаймні одна) площина і точка, що не лежить у цій площині.

C_2. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

C_3. Якщо дві точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.

C_4. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Зауваження. Ніяких інструментів, якими можна було б проводити у просторі площини, немає. Тому вираз «можна провести» в аксіомі C_2 вжито в розумінні «існує». В аксіомі C_4 слова «яка проходить через цю точку» не обов'язкові. Але сформульованою так аксіомою зручніше користуватися.

Розглянемо найважливіші наслідки з аксіом стереометрії.

У просторі є безліч точок. Адже простір містить площину (аксіома C_1), а з планіметрії відомо, що множина точок площини нескінченна.

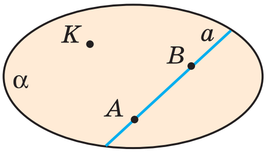
З аксіом C_1 і C_2 випливає, що в просторі є безліч площин. У кожній з них існують прямі, відрізки, кути, кола та інші плоскі фігури. Отже, усі вони є і в просторі. Причому відстань між двома точками у просторі не залежить від того, у якій площині ці точки знаходяться.

Два наслідки з аксіом стереометрії сформулюємо у вигляді теорем.

ТЕОРЕМА 1

Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну.

ДОВЕДЕННЯ.



Мал. 15

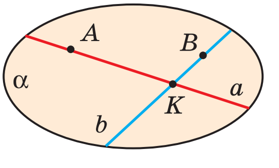
Нехай дано пряму a і точку K, що не лежить на ній (мал. 15).

Позначимо на прямій a дві довільні точки A і B. Точки A, B і K не лежать на одній прямій, тому через них можна провести площину α (аксіома C_2). Точки A і B прямої a лежать у площині α, отже, і вся пряма a лежить у цій площині (аксіома C_3). Як бачимо, через пряму a і точку K одну площину провести можна. А чи можна провести ще одну? Якби це було можливо, то через точки A, B і K проходили б дві площини. Останнє суперечить аксіомі C_2. Отже, через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести тільки одну площину. □

ТЕОРЕМА 2

Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину і до того ж тільки одну.

ДОВЕДЕННЯ.



Мал. 16

Нехай дано прямі a і b, що перетинаються в точці K (мал. 16).

Позначимо на них точки A і B, відмінні від K. Через точки A, B і K можна провести площину α (аксіома C_2). Прямі a і b лежать у площині α (аксіома C_3). Отже, через прямі a і b площину провести можна.

Припустимо, що через дані прямі a і b можна провести ще площину β, відмінну від α. У такому разі через точки A, B і K, що не лежать на одній прямій, проходять дві різні площини. Це суперечить аксіомі C_2. Отже, через дві прямі, які перетинаються, можна провести тільки одну площину. □

З аксіоми C_2 і доведених теорем випливає, що площину можна задати:
1) трьома точками, що не лежать на одній прямій;
2) прямою і точкою, що не лежить на ній;
3) двома прямими, які перетинаються.
Про задання площини двома паралельними прямими див. на с. 67.

Строгі наукові курси геометрії будують за такою схемою. Спочатку називають неозначувані поняття і формулюють аксіоми. Після того за допомогою означень поступово вводять інші поняття (і відношення) і доводять інші важливіші твердження. Такий виклад геометрії (і науки взагалі) називають **аксіоматичним.** (Детальніше про це див. на с. 256).

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Перша спроба аксіоматичної побудови геометрії належить давньогрецькому математику Евкліду (365–300 рр. до н. е.) і реалізована у його роботі «Основи» (грец. *Στοιχεία*, лат. *Elementa*). У ній спочатку сформульовані означення і аксіоми, а всі наступні твердження доведені як теореми. Евклід настільки вдало систематизував математичні відомості, що його «Основи» були головним підручником математики майже для всього світу протягом більш як 2000 років.

Строге аксіоматичне обґрунтування геометрії Евкліда вперше було здійснено наприкінці XIX ст. у роботах італійського математика Маріо Пієрі (1860–1904), професора Геттінгенського університету Давида Гільберта (1862–1943) і приват-доцента Новоросійського (Одеського) університету Веніаміна Федоровича Кагана (1869–1953).

Системи неозначуваних понять і аксіом можуть бути різними. У нашому підручнику неозначуваними вважаються поняття: *точка, пряма, площина* і відношення: *належить, не належить, лежить між, перетинаються* та деякі інші.

Кожний строгий аксіоматичний курс геометрії досить громіздкий і важкий. Наш курс також побудовано на аксіоматичній основі, але — не строгій. У ньому доводяться не всі теореми, а тільки найважливіші. А ще, аби полегшити сприймання, у ньому розглядаються деякі стереометричні поняття, відомі вам з попередніх класів, наприклад *куб, піраміда, грань, куля, множина, простір* тощо. Простір — це множина всіх точок (універсальна множина).

Аксіоматичний метод широко застосовується в деяких інших галузях математики, зокрема в теорії ймовірностей і математичній логіці, а також у деяких розділах фізики і біології. І все ж за межами логіко-математичних наук сфера його застосування незначна.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Наведіть приклади геометричних понять.
2. Наведіть приклад геометричного твердження.
3. Що називають аксіомою?
4. Сформулюйте аксіоми стереометрії.
5. Сформулюйте і доведіть наслідки з аксіом стереометрії.
6. Як можна задати площину в просторі?

Виконаємо разом

1 Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Доведіть, що ніякі три з них не лежать на одній прямій.

- Припустимо, що які-небудь три з даних точок, наприклад A, B, C, лежать на одній прямій. Через цю пряму і точку D можна провести площину α (теорема 1). Усі чотири дані точки лежать у площині α. А це суперечить умові задачі. Отже, ніякі три з даних точок не можуть лежати на одній прямій.

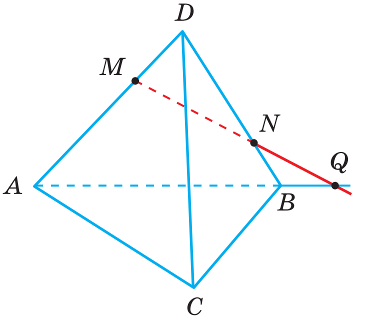
2 Доведіть, що через будь-які дві точки простору можна провести пряму і до того ж тільки одну.

- Нехай A і B — довільні точки простору. Через них і яку-небудь третю точку проведемо площину α. У цій площині через точки A і B можна провести єдину пряму a.
  Припустимо, що через точки A і B у просторі проходить ще пряма a_1, відмінна від a. Її точки A і B лежать у площині α, тому і пряма a_1 лежить в α (аксіома C_3). Виходить, що через точки A і B у площині α проходять дві різні прямі a і a_1. Це суперечить планіметричній аксіомі 2 (див. с. 259 *у Додатку «Опорні факти планіметрії»*). Отже, через точки A і B у просторі можна провести тільки одну пряму.

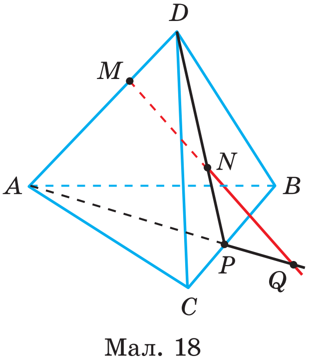
3 На піраміді $ABCD$ задано точки M і N. Побудуйте точку перетину прямої MN з площиною (ABC), якщо: а) $M \in AD$, $N \in BD$; б) $M \in AD$, $N \in (BCD)$.

- а) Точки M і N і пряма AB лежать в одній площині — площині (ABD). У цій площині знайдемо точку перетину прямих MN і AB — точку Q (мал. 17). Оскільки $Q \in AB$, $AB \subset (ABC)$, то точка $Q \in (ABC)$. Маємо: $Q \in MN$, $Q \in (ABC)$. Отже, Q — точка перетину прямої MN з площиною (ABC). Якщо $MN \parallel AB$, то задача розв'язків не має.

  б) У площині (BCD) проведемо пряму DN, що перетинає BC у точці P. Тоді прямі MN і AP лежать в одній площині — площині (ADP). У цій площині знайдемо точку перетину прямих MN і AP — точку Q (мал. 18). Оскільки $Q \in AP$, $AP \subset (ABC)$, то точка $Q \in (ABC)$. Маємо: $Q \in MN$, $Q \in (ABC)$. Отже, Q — точка перетину прямої MN з площиною (ABC). Якщо $MN \parallel AP$, то задача розв'язків не має.



Мал. 17



Мал. 18

Задачі і вправи

Виконайте усно

26. Скільки спільних точок можуть мати дві площини?

27. Два кінці відрізка належать площині. Чи належать цій площині інші точки відрізка?

28. Дві різні точки відрізка не належать площині. Чи може яка-небудь точка відрізка лежати на цій площині?

29. Один кінець відрізка належить площині, інший не належить. Скільки спільних точок мають відрізок і площина?

30. Чи можна провести площину через три (чотири) точки, які лежать на одній прямій?

31. Через три точки проведено дві різні площини. Як розміщені ці точки?

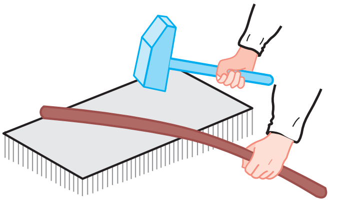
32. Чи можуть належати даній площині: а) тільки дві вершини ромба; б) тільки три вершини ромба?

33. ***Задача-жарт.*** Три ластівки розлетілися в різні боки. За яких умов вони будуть в одній площині?

34. Вугільний пласт зазвичай залягає так, що його верхня межа (у грубому наближенні) є частиною площини. Яку найменшу кількість свердловин слід пробурити, щоб визначити, як розміщено пласт?

35. Щоб перевірити, чи добре оброблено плоску поверхню, у різних її місцях прикладають вивірену лінійку і дивляться, чи немає зазору між ними. У якому випадку кажуть, що поверхня «неплоска»? Чому?

36. Якщо не всі точки дроту дотикаються до плоскої поверхні ковадла, дріт «непрямий». Чому? Щоб вирівняти його, б'ють молотком по його опуклостях, як показано на малюнку 19. Після кількох ударів дріт перевертають. Навіщо?



Мал. 19

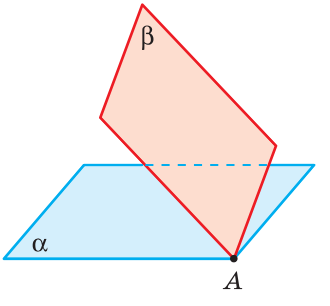
А

37. Доведіть, що в просторі існує безліч площин.

38. Площини α і β мають спільну точку A (мал. 20). Чи мають ці площини спільні точки, відмінні від A? Скільки їх? Зобразіть їх на малюнку.

39. У площині α лежать точки A і B, у площині β — точки B і C, у площині γ — точки A, B і C. Зробіть відповідний малюнок.

40. Доведіть, що через будь-яку точку простору можна провести площину. Скільки площин можна провести через дану точку?



Мал. 20

41. Прямі a і b не мають спільних точок. Чи випливає з цього, що через них не можна провести площину?

42. Скільки площин можна провести через дві дані точки? Зобразіть відповідний малюнок.

43. Чотири точки не лежать в одній площині. Скільки площин можна провести через трійку цих точок?

44. Точка A належить площині α, а B не належить. Чи належить площині α середина відрізка AB?

45. Дано пряму a і точку B, що не лежить на ній. Доведіть, що всі прямі, які проходять через точку B і перетинають a, лежать в одній площині.

46. Дві вершини і точка перетину діагоналей трапеції належать площині α. Як розміщені дві інші вершини трапеції відносно α?

47. Вершини A і B ромба $ABCD$ і точка перетину його діагоналей лежать у площині α. Доведіть, що $C \in \alpha$, $D \in \alpha$.

48. Вершина A і медіана BM трикутника ABC належать площині α. Чи належить цій площині висота CN?

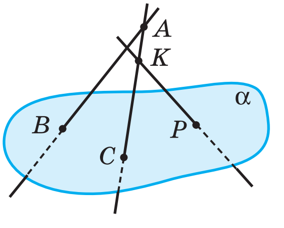
49. Три вершини трикутника лежать у площині α. Доведіть, що кожна точка цього трикутника лежить у площині α.

50. Три різні точки трикутника ABC лежать у площині α. Чи випливає з цього, що кожна точка трикутника ABC лежить у площині α?

51. Прямі MA і MB перетинаються в точці M. Доведіть, що всі прямі, які їх перетинають, але не проходять через точку M, лежать в одній площині. Чи можна через точку M провести пряму, яка не лежить у цій площині?

Б

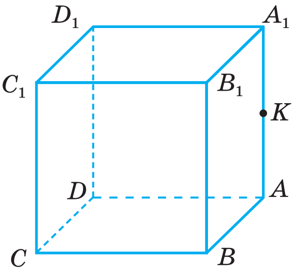
52. Прямі AB, AK і KP перетинають площину α в точках B, C і P, як показано на малюнку 21. Чи перетинаються прямі AB і KP?



Мал. 21

53. Доведіть, що існує: а) пряма, яка перетинає дану площину; б) площина, що перетинає дану площину.

54. На малюнку 22 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K — середина ребра AA_1. Площини яких граней куба перетинає пряма BK? А пряма CK?



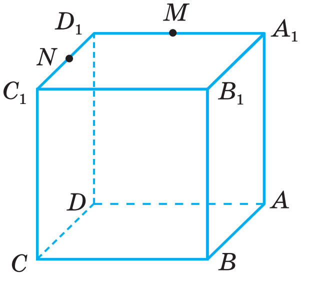
Мал. 22

55. Використовуючи малюнок 22, побудуйте точку перетину: а) прямої D_1K з площиною (ABC); б) прямої BK з площиною $(A_1B_1C_1)$.

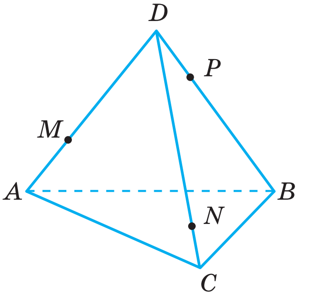
56. Площини α і β перетинаються по прямій a. У площині β взято пряму b, яка перетинає площину α в точці K. Доведіть, що $K \in a$.

57. Прямі a, b, c лежать у площині α. На них взято точки $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, які належать площині β. Доведіть, що точки A, B, C лежать на одній прямій.

58. Накресліть малюнок 23 у зошиті і побудуйте: а) точку перетину прямих MN і A_1B_1; б) точку перетину прямої MN з (B_1BC); в) лінію перетину площин (MNB) і (BB_1D_1); г) лінію перетину площин (MND) і (AA_1D).



Мал. 23



Мал. 24

59. Установіть відповідність між елементами (1–4) куба, зображеного на малюнку 23, і площинами (А–Д), які цими елементами визначаються.

1	Точки M, N і B_1	**А**	(B_1DD_1)
2	Ребро BB_1 і точка D	**Б**	(A_1CD)
3	Ребра A_1B_1 і CD	**В**	(C_1DD_1)
4	Відрізки A_1M і AM	**Г**	(A_1DD_1)
		Д	$(A_1B_1C_1)$

60. Точки A, B, C, D, які не лежать на одній площині, попарно сполучені відрізками. $M \in AD$, $N \in CD$, $P \in BD$ (мал. 24). Накресліть малюнок 24 у зошиті й побудуйте: а) точку перетину прямих MN і AC; б) точку перетину прямої MP з (ABC); в) точку перетину прямої NP з (ABC); г) лінію перетину площин (MNP) і (ADB).

61. Уявіть, що на малюнку 24 точка N може змінювати положення на прямій CD. Визначте точку перетину прямої MN з площиною (ABC). Чи завжди така точка існує?

62. ***Відкрита задача.*** Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і точки P, Q і R такі, що $P \in AA_1$, $Q \in A_1B_1$ і $R \in DD_1$. Побудуйте точку перетину **...** .

63. На малюнку 24 зображено точки M, P і N такі, що $M \in AD$, $P \in BD$, $N \in CD$. Прямі MP і AB перетинаються в точці Q, прямі PN і BC — у точці R, а прямі MN і AC — у точці S. Доведіть, що точки Q, R, S лежать на одній прямій.

64*. Дано дві прямі, які не лежать в одній площині. Через кожну з них проведено площину, що перетинає другу пряму. Доведіть, що пряма перетину цих площин перетинає кожну з даних прямих.

65*. Доведіть, що в просторі існують прямі, які не лежать в одній площині.

66*. Дано n прямих. Доведіть, що в просторі є точки, які не лежать на жодній із цих прямих.

Практичне завдання

67. 1. Зробіть із дроту триногу і перевірте її стійкість, якщо всі її «ноги» мають: а) однакові довжини; б) різні довжини.
2. Зробіть аналогічну конструкцію із 4 дротиків. Перевірте її стійкість, якщо всі її «ноги» мають: а) однакові довжини; б) різні довжини.
3. Розгляньте малюнок 25. Поясніть, чому для здійснення фотозйомки в студії і геодезичної зйомки місцевості використовують триноги.

Мал. 25

Задачі для повторення

68. Зобразіть: $\alpha \cap \beta = l$, $a \subset \alpha$, $M \in \alpha$, $K \in \alpha$, $K \in \beta$.

69. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $F \in CC_1$. Яким площинам належить точка F?

70. На марках (мал. 26) зображено дві картини художниці Марії Примаченко «Гороховий звір» і «Дикий чаплун». Оригінали цих картин мають розміри 74 × 85 см і 62 × 85 см. Знайдіть наближено:
а) площу кожної картини у м^2 (відповідь округліть до сотих);
б) на скільки м^2 площа картини «Гороховий звір» перевищує площу картини «Дикий чаплун».
Дізнайтеся більше про життя і творчість народної художниці. Зверніть увагу на те, що її «Звірина серія» — явище унікальне і не має аналогів ні у вітчизняному, ні у світовому мистецтві.

Мал. 26

§ 3 Многогранники та їх перерізи

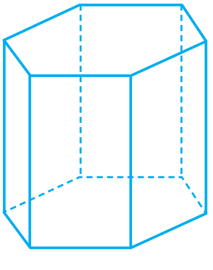
Світ навколо нас — цікавий і різноманітний. Багато об'єктів довкілля мають поверхню, що складається з многокутників. Наприклад, лічильники газу, коробки для подарунків, контейнери для сортування сміття тощо (мал. 27).

Мал. 27

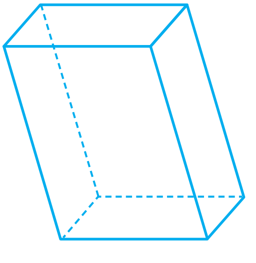
У математиці також розглядають геометричні тіла, поверхня яких складається з плоских многокутників. Їх називають **многогранниками.** Окремі з них мають власні (спеціальні) назви: *призма* і *піраміда*.

Призма — це многогранник, дві грані якого — рівні n-кутники з відповідно паралельними сторонами, а всі інші n граней — **паралелограми**. Два n-кутники — *основи призми*, решта граней — *бічні грані*. На малюнку 28 зображено шестикутну призму. Ребра призми, які не є сторонами її основ, називають **бічними ребрами**. Усі бічні ребра призми попарно паралельні й рівні.

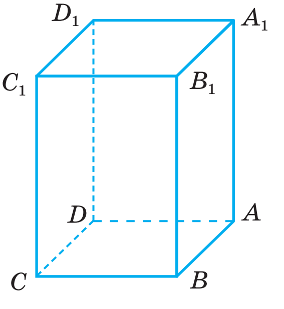
Окремі види призми — **паралелепіпед** і **куб**. У паралелепіпеда всі грані — паралелограми (мал. 29), а в куба — рівні квадрати. Якщо всі грані паралелепіпеда — прямокутники, його називають **прямокутним паралелепіпедом** (мал. 30). Він має 6 граней, 12 ребер, 8 вершин. Записуючи «паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$», мають на увазі, що його основи — $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, а бічні ребра — AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.



Мал. 28

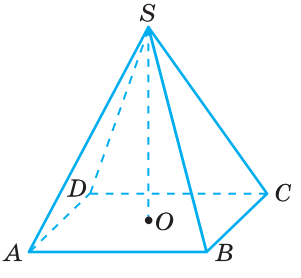


Мал. 29

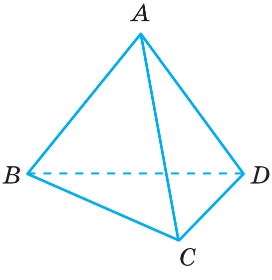


Мал. 30

Піраміда — многогранник, одна грань якого — довільний многокутник, а всі інші грані — трикутники, що мають спільну вершину. Якщо основою піраміди є трикутник, чотирикутник, ..., то її називають відповідно трикутною, чотирикутною, ... пірамідою. На малюнку 31 зображено чотирикутну піраміду $SABCD$. Трикутну піраміду називають також тетраедром.



Мал. 31



Мал. 32

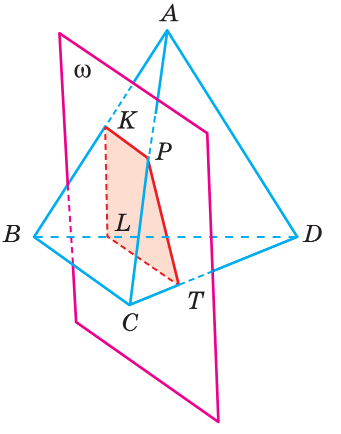
Тетраедр — чотиригранник (грец. *тетра* — чотири). Він має 4 грані, 6 ребер, 4 вершини (мал. 32).

Усі грані тетраедра — трикутники. Якщо всі вони — правильні трикутники, його називають **правильним тетраедром**.

Властивості многогранників та їх види ґрунтовно вивчатимуться в 11-му класі, але з курсу математики 5-го класу вам уже відомі два види многогранників: прямокутний паралелепіпед і піраміда.

Розглянуті в попередньому параграфі способи задання площин часто використовують під час побудови перерізів многогранників.

Що таке переріз многогранника? Якщо жодна з двох точок не належить площині, а відрізок, що їх сполучає, має з цією площиною спільну точку, то кажуть, що дані точки лежать по різні боки від площини. А якщо принаймні дві точки многогранника лежать по різні боки від площини, кажуть, що площина перетинає многогранник. У цьому разі її називають **січною площиною**. Фігуру, яка складається з усіх точок, спільних для многогранника і січної площини, називають **перерізом многогранника** даною площиною. На малюнку 33 зображено тетраедр $ABCD$ і січну площину ω. Точки A і B лежать по різні боки від січної площини. Плоский чотирикутник $KPTL$ — переріз даного тетраедра площиною ω.



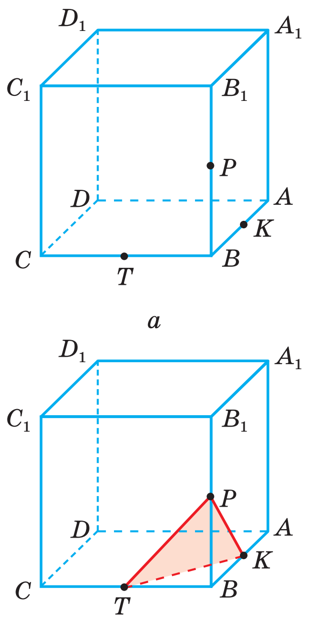
Мал. 33

Щоб побудувати переріз многогранника площиною, треба задати цю площину: вказати три (що не лежать на одній прямій) точки, через які проходить ця площина, або точку і пряму тощо.

Приклад 1. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки K, P, T — середини ребер AB, BB_1 і BC (мал. 34, *а*).

Розв'язання. Точки K, P, T не лежать на одній прямій, тому задають деяку площину. Треба на зображенні куба побудувати зображення шуканого перерізу.

Точки K і P лежать у площині грані ABB_1A_1 куба і в січній площині. Отже, ці площини перетинаються по прямій KP. Січна площина перетинає квадрат ABB_1A_1 по відрізку KP. Аналогічно переконуємося, що дві інші грані куба січна площина перетинає по відрізках KT і TP. Побудувавши їх, дістанемо трикутник KPT. Це і є шуканий переріз (мал. 34, *б*).



а *б*

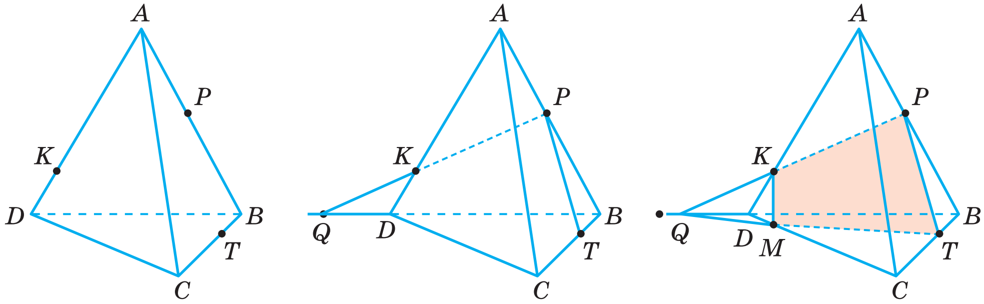
Мал. 34

Іноді в задачах потрібно не тільки побудувати переріз, а й знайти його площу або периметр. Для цього треба знати розміри даної фігури. Наприклад, якщо довжина ребра розглядуваного куба a,

то $BK = BP = BT = \dfrac{a}{2}$, $KP = PT = TK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Отже,

площа знайденого перерізу $S = \dfrac{KP^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}a^2$.

Приклад 2. На ребрах тетраедра $ABCD$ дано точки K, P, T, як показано на малюнку 35, *а*. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через дані точки.



а *б* *в*

Мал. 35

Розв'язання. Проводимо відрізки KP і PT.

Щоб побудувати інші сторони шуканого перерізу, знайдемо точку, у якій січна площина KPT перетинає ребро CD. Прямі KP і BD лежать у площині (ABD) і не паралельні, отже, перетинаються у деякій точці Q (мал. 35, *б*). Точка Q належить площинам (KPT) і (BCD). І точка T належить цим площинам. Тому кожна точка прямої QT належить січній площині, у тому числі й точка M, у якій перетинаються прямі CD і QT. Визначивши точку M, сполучаємо її відрізками з K і T. Чотирикутник $KPTM$ — шуканий переріз (мал. 35, *в*).

Цей метод побудови перерізів називають **методом слідів**.

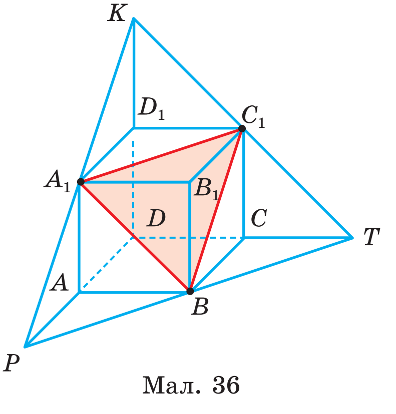
Слід січної площини в площині α — це пряма, по якій січна площина перетинає площину α. Точка, у якій січна площина перетинає пряму, — слід січної площини на цій прямій.

У даному випадку пряма QT — слід січної площини в площині основи BCD. З означення сліду випливає, що кожна його точка — це точка перетину прямих, одна з яких належить січній площині, а друга — площині грані многогранника. Саме цю властивість використовують для побудови перерізів многогранників методом слідів.

Іноді доводиться здійснювати перерізи многогранників площинами, заданими точками, які лежать не на ребрах многогранника, а поза ними.

Приклад 3. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AB = a$) і точки K, P, T такі, що вершини куба D_1, A, C — середини відрізків DK, DP, DT. Побудуйте переріз куба площиною (KPT) і знайдіть площу перерізу.

Розв'язання. На променях DD_1, DA, DC позначимо дані точки K, P, T і сполучимо їх відрізками (мал. 36).



Мал. 36

Уявімо, що AM — середня лінія $\triangle PDT$, вона паралельна DT і дорівнює половині DT. Ребро AB даного куба також паралельне DT і дорівнює половині DT. Отже, точка M збігається з B, відрізок PT, а отже, і січна площина, проходить через вершину B куба. Так само можна показати, що січна площина проходить через вершини A_1 і C_1 куба. Отже, розглядуваним перерізом є трикутник A_1BC_1. Сторони цього трикутника — діагоналі рівних квадратів, тому трикутник A_1BC_1 рівносторонній.

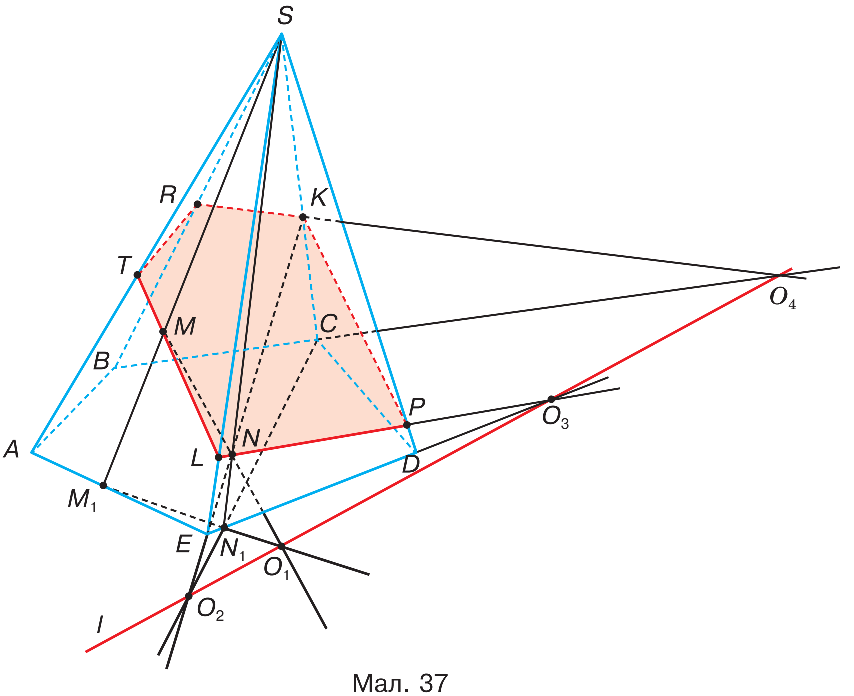
Якщо сторона квадрата дорівнює a, то його діагональ $a\sqrt{2}$. Тому шукана площа перерізу:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$$

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Для розв'язування складніших задач на перерізи можна скористатися програмними засобами, наприклад GRAN 3D, DG, GeoGebra. Розглянемо розв'язання однієї задачі двома способами.

Задача. Побудуйте переріз п'ятикутної піраміди $SABCDE$ площиною, яка проходить через точки M, N, K, де $M \in (ASE)$, $N \in (SED)$, $K \in SC$ (мал. 37).



Мал. 37

П е р ш и й с п о с і б. Проведемо прямі SM і SN, які перетинають сторони AE і ED у точках M_1 і N_1. Пряма MN належить січній площині, а пряма M_1N_1 — площині основи. Прямі MN і M_1N_1 лежать в одній площині (M_1SN_1). Якщо вони не паралельні, то перетинаються в деякій точці O_1. Аналогічно будуємо точку O_2 — точку перетину прямих KN і CN_1. Тоді пряма O_1O_2, або l — слід січної площини в площині основи.

Знайдемо тепер лінії перетину січної площини з гранями піраміди. Продовжимо DE до перетину з l у точці O_3 і проведемо пряму O_3N, яка перетне грань ESD по відрізку LP. Тоді LT і PK — лінії перетину січної площини з гранями ASE і CSD. Продовжимо BC до перетину з l і через утворену точку O_4 проведемо пряму O_4L, яка перетне грань BSC по відрізку KR. Сполучивши точки T і R, отримаємо шуканий переріз $TRKPL$.

Якщо точки M, N і K розташовані так, що пряма MN чи KN не перетинають площину основи піраміди, розв'язання задачі треба змінити. Як це зробити, розглянемо далі.

Д р у г и й с п о с і б (з використанням GRAN 3D, DG, GeoGebra).

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Наведіть приклади многогранників.
2. Скільки граней, ребер і вершин має куб? А паралелепіпед?
3. Скільки граней, ребер і вершин має тетраедр?
4. Що називають січною площиною?
5. Скількома точками можна задати січну площину?
6. Що називають перерізом многогранника?
7. Що називають слідом січної площини?

Виконаємо разом

1 Дано правильний тетраедр $PABC$, а на його ребрі PB точку K таку, що $PK = 2KB = 8$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через ребро AC і точку K. Знайдіть площу перерізу.

● Сполучимо точку K з точками A і C (мал. 38). Трикутник KAC — шуканий переріз. У $\triangle KAC$: $AK = KC$, оскільки трикутники APK і CPK рівні. Якщо KH — висота $\triangle AKC$, то $AH = HC$. Знайдемо AC і KH.

Оскільки $PK = 2KB = 8$, то $KB = 4$, $PB = 12$. Кожне ребро тетраедра дорівнює 12, тому $CH = 6$.

У $\triangle CBK$: $BC = 12$, $BK = 4$, $\angle KBC = 60°$.

Тоді за теоремою косинусів знаходимо:

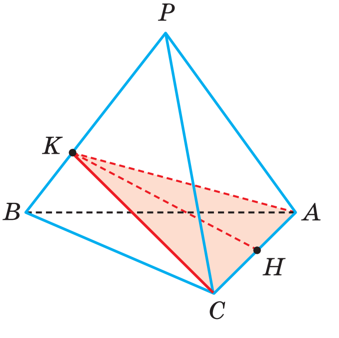
$CK^2 = BC^2 + BK^2 - 2BC \cdot BK \cdot \cos 60° = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 0{,}5 = 112.$

За теоремою Піфагора з $\triangle CHK$ знаходимо KH:

$$KH = \sqrt{CK^2 - CH^2} = \sqrt{112 - 36} = 2\sqrt{19}.$$

Отже, шукана площа:

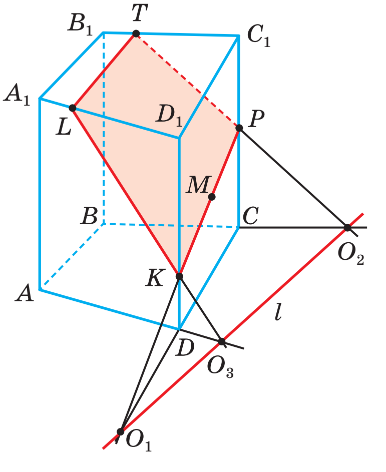
$$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{19} = 12\sqrt{19}.$$



Мал. 38

2 Побудуйте переріз чотирикутної призми площиною, заданою слідом l в площині основи і точкою M грані CC_1D_1D (мал. 39).

● Нехай CD перетинає l в точці O_1. Тоді пряма O_1M перетинає грань CC_1D_1D по відрізку KP. Якщо O_2 — точка перетину BC і l, то PT — лінія перетину січної площини з площиною BB_1C_1C. Аналогічно будуємо відрізок LK ($AD \cap l = O_3$, $O_3K \cap (AA_1D) = KL$). Сполучивши точки L і T, отримаємо шуканий переріз $LTPK$.



Мал. 39

Задачі і вправи

Виконайте усно

71. Чи може перерізом прямокутного паралелепіпеда бути прямокутник? А квадрат?

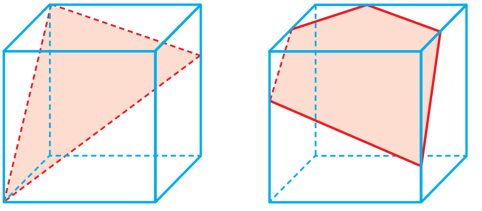
72. Чи може січна площина перетинати всі ребра куба? А всі грані куба?

73. На скільки частин можуть розрізати куб дві січні площини? А три?

74. Чи може бути перерізом куба рівнобедрений трикутник, правильний трикутник, прямокутник, квадрат, трапеція?

75. Доведіть, що перерізом тетраедра не може бути п'ятикутник.

76. Учень намалював переріз куба площиною (мал. 40, *а–б*). Чи є помилка на малюнках?



а *б*

Мал. 40

А

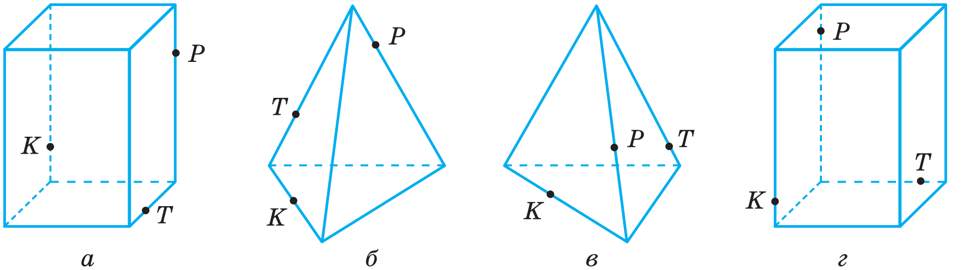
77. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через: а) точки A, B_1 і D_1; б) точки A, C і середину ребра DD_1.

78. Точка K — середина ребра AD тетраедра $ABCD$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки B, C і K.

79. Точка M — середина ребра CD тетраедра $ABCD$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через пряму AB і точку M.

80. $ABCD$ — тетраедр. Точки K і M — середини ребер AD і CD. Побудуйте переріз тетраедра площиною (BKM).

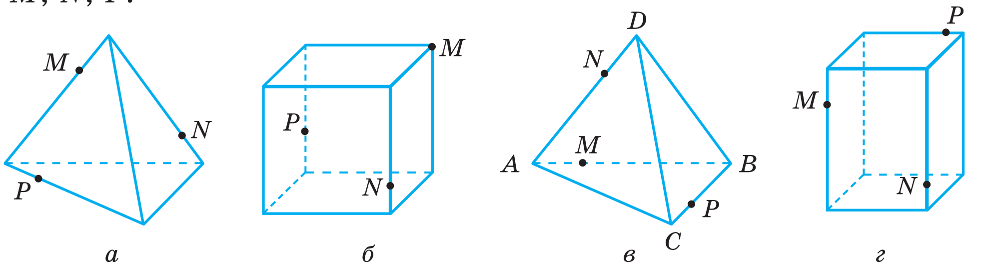
81. Накресліть малюнки 41, *а–г* у зошиті і на кожному з них побудуйте переріз многогранника площиною, яка проходить через точки K, P, T.



а *б* *в* *г*

Мал. 41

82. Накресліть малюнки 42, *а–г* у зошиті й на кожному з них побудуйте переріз многогранника площиною, яка проходить через точки M, N, P.



Мал. 42

83. Побудуйте точку перетину прямої з площиною основи чотирикутної піраміди, якщо ця пряма проходить через дві точки, які належать: а) бічним ребрам однієї грані; б) протилежним бічним ребрам; в) бічному ребру і протилежній бічній грані; г) двом суміжним бічним граням; ґ) двом протилежним бічним граням. За якої умови побудова неможлива?

84. Розв'яжіть попередню задачу у випадку шестикутної піраміди.

85. Дано правильний тетраедр, довжина ребра якого a. Побудуйте його переріз площиною, що проходить через середини трьох ребер, які виходять з однієї вершини. Знайдіть периметр і площу перерізу.

86. Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, дорівнюють 6 см, 6 см і 8 см. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через середини цих ребер, і знайдіть його площу.

87. Знайдіть периметр і площу перерізу куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AB = a$) площиною, яка проходить через точки A, C, B_1.

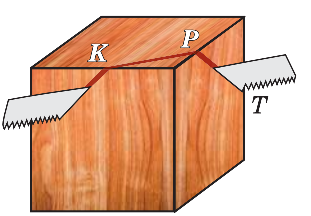
88. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M і N — середини ребер BC і DC, $AB = a$. Знайдіть площу перерізу куба площиною, яка проходить через точки M, N і C_1.

89. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AB = a$. Знайдіть периметр і площу перерізу куба площиною, яка проходить через точки M, A, D_1, якщо M — середина A_1B_1.

Б

90. Задайте на ребрах куба три точки так, щоб площина, яка проходить через них, перетинала даний куб по: а) трикутнику; б) чотирикутнику; в) п'ятикутнику.

91. Дерев'яний куб розпилюють так, що пилка проходить через точки K, P, T, як показано на малюнку 43. Яка фігура буде в перерізі?



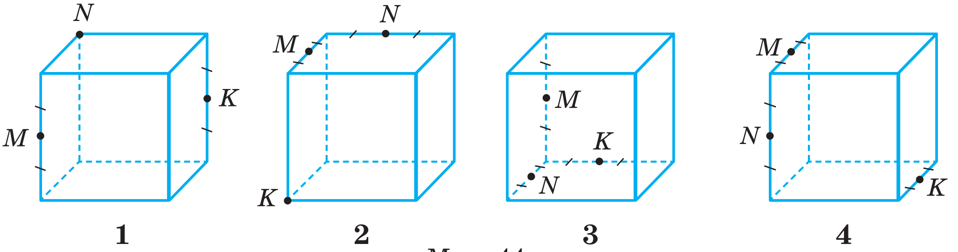
Мал. 43

92. Ребро куба дорівнює a. Чи може площа перерізу цього куба мати значення, більше за $2a^2$?

93. На ребрах AA_1 і CC_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано точки K і P такі, що $AK = KA_1$, $CP : PC_1 = 1 : 2$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною (D_1KP).

94. Спробуйте перерізати куб площиною так, щоб перерізом став правильний шестикутник. Знайдіть площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

95. Точки M, N і K — вершини або середини відповідних ребер куба (мал. 44). Установіть відповідність між перерізами кубів (1–4) площиною, що проходить через точки M, N, K, і многокутниками (А–Е), що утворилися.



Мал. 44

А трикутник **В** ромб **Д** шестикутник
Б прямокутник **Г** трапеція **Е** п'ятикутник

96. Дано тетраедр $ABCD$, M — середина BC. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки A, D, M, і знайдіть його периметр і площу, якщо $DA = DB = DC = 5$ см, $AB = BC = AC = 6$ см.

97. $ABCD$ — правильний тетраедр, $AB = a$, $BM : MD = 1 : 3$. Знайдіть периметр і площу перерізу, який проходить через точки A, C, M.

98. Дано правильний тетраедр $ABCD$, $AB = l$. AM і AK — медіани, $M \in BC$, $K \in BD$. Знайдіть периметр і площу перерізу, який проходить через точки A, M, K.

99. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $AB = a$, M — середина AA_1, N — середина CC_1. Знайдіть периметр і площу перерізу, який проходить через точки M, N, B_1.

100. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. M, N, K — середини відрізків B_1C_1, C_1D_1 і DD_1 відповідно. Побудуйте переріз куба площиною (MNK) та знайдіть периметр і площу утвореного перерізу, якщо $AA_1 = a$.

101. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, точка B_1 — середина відрізка BB_2. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки A, B_2 і C.

102. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка B_1 — середина відрізка BB_2, а C — середина відрізка BC_2. Побудуйте переріз куба площиною (AB_2C_2). Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = a$.

103. Точки M, N і K — вершини або середини відповідних ребер куба, ребро якого дорівнює 6 см (див. мал. 44). Установіть відповідність між перерізами кубів (1–4) площиною, що проходить через точки M, N, K, і периметрами многокутників (А–Д), що утворилися.

А $18\sqrt{2}$ **Б** $3(3\sqrt{2}+5)$ **В** $12\sqrt{5}$ **Г** $3(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})$ **Д** $9\sqrt{2}$

104. Точки M, N і K — вершини або середини відповідних ребер куба, ребро якого дорівнює a см (див. мал. 44). Установіть відповідність між перерізами кубів (1–4) площиною, що проходить через точки M, N, K, і площами многокутників (А–Д), що утворилися.

А $\frac{9a^2}{8}$ Б $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ В $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$ Г $\frac{3a^2\left(\sqrt{3}+1\right)}{16}$ Д $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$

105. У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено відрізок, який сполучає вершину A із серединою ребра CC_1. Побудуйте точку перетину цього відрізка з площиною (BDA_1). У якому відношенні цей відрізок ділиться даною площиною?

106. Побудуйте переріз чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка задана слідом у площині основи і точкою P, $P \in DD_1$, якщо: а) l не перетинає основу $ABCD$; б) l проходить через точки A і C; в) l перетинає сторони AB і BC.

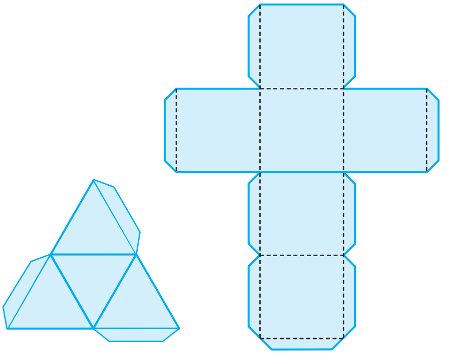
107. Виконайте попередню задачу, якщо $SABCD$ — чотирикутна піраміда, $P \in SD$.

108. Побудуйте переріз піраміди $SABCDE$ площиною, яка проходить через точки M, N, K, які належать: а) ребрам SA, SC, SE; б) $M \in SB$, $N \in SD$, $K \in (ASE)$; в) $M \in SA$, $N \in SC$, $K \in DE$.

109. Побудуйте переріз п'ятикутної призми площиною, яка проходить через три точки, які лежать на трьох послідовних бічних ребрах.

Практичне завдання

110. Зробіть з цупкого паперу моделі тетраедра і паралелепіпеда (мал. 45). Позначте середини трьох ребер многогранника, проведіть через них переріз, накресливши на гранях відповідні відрізки. Обчисліть площі перерізів, виконавши потрібні вимірювання.



Мал. 45

Задачі для повторення

111. Три вершини прямокутника належать площині α. Доведіть, що цій площині належить і точка перетину діагоналей прямокутника.

112. M — внутрішня точка грані BCD тетраедра $ABCD$. Побудуйте лінії перетину площини (ADM) з площинами (BCD) і (ABC).

113. З точки M до прямої l проведено перпендикуляр $MO = 12$ см і похилі MA, MB, різниця довжин яких дорівнює 7 см. Знайдіть довжини похилих, якщо їх проекції відносяться як 5 : 16.

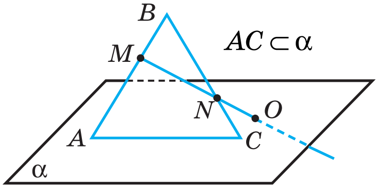
Задачі за готовими малюнками

А | **Б**

1 Укажіть помилку на малюнку.

А

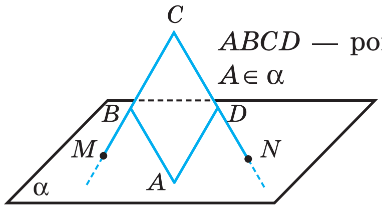
$AC \subset \alpha$



Б

$ABCD$ — ромб

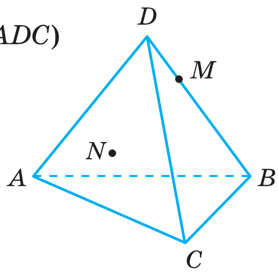
$A \in \alpha$



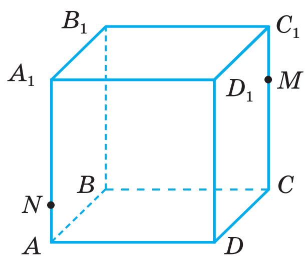
2 Знайдіть точку перетину прямої MN з (ABC).

А

$N \in (ADC)$

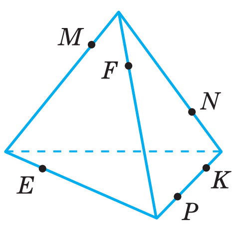


Б

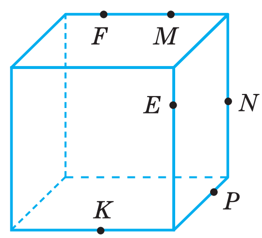


3 Побудуйте лінію перетину площин (MNP) і (EFK).

А



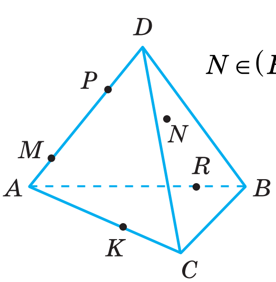
Б



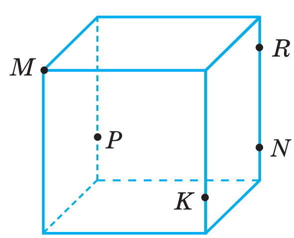
4 Знайдіть точку перетину прямої MN з (PRK).

А

$N \in (BCD)$



Б

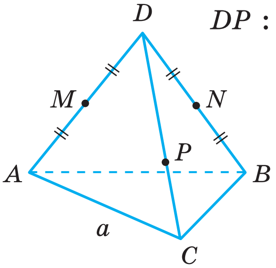


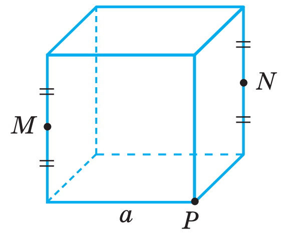
А | **Б**

Побудуйте переріз правильного тетраедра і куба площиною (MNP). Знайдіть периметр і площу перерізу.

5

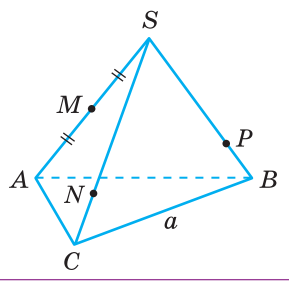
$DP : PC = 2 : 1$



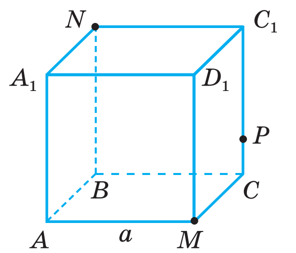


6

$SN : NC = SP : PB = 3 : 1$



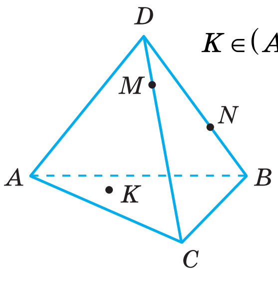
$C_1P : PC = 3 : 1$

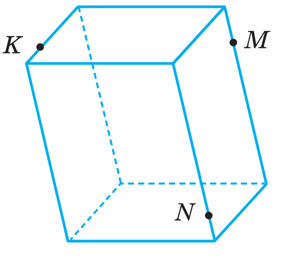


Побудуйте перерізи многогранників площиною, яка проходить через точки M, N, K.

7

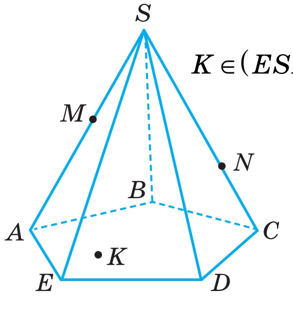
$K \in (ABC)$

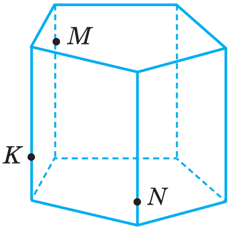




8

$K \in (ESD)$





Тестові завдання 1

1	Пряма a лежить у площині α. Який знак слід поставити замість зірочки у запису $a * \alpha$?	а) $\in$; б) $\subset$; в) $\cap$; г) $\supset$.
2	Чи можуть дві площини мати тільки одну спільну точку?	а) Так; б) ні; в) не можна встановити; г) залежить від розташування площин.
3	Скільки площин можна провести через три точки?	а) Одну; б) безліч; в) три; г) одну або безліч.
4	Пряма a перетинає площину β у точці A. Тоді:	а) $A \subset \beta$, $A \in a$; б) $A \in a$, $A \notin \beta$; в) $A \in \beta$, $A \in a$; г) $A \in \beta$, $A \notin a$.
5	Три прямі попарно перетинаються. Скільки різних площин можна провести через ці прямі?	а) Одну; б) три; в) безліч; г) жодної.
6	Площини α і β перетинаються по прямій m. Пряма a лежить у площині α і перетинає пряму m. Яке взаємне розташування прямої a і площини β?	а) Перетинаються; б) не мають спільних точок; в) a лежить у площині β; г) не можна встановити.
7	Пряма a перетинає площину α і лежить у площині β. Скільки спільних точок мають площини α і β?	а) Одну; б) дві; в) жодної; г) безліч.
8	Точки M і N належать ребрам BB_1 і CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть лінію перетину площин (BB_1C_1) і (AMN).	а) AM; б) MN; в) DN; г) площини не перетинаються.
9	Бісектриса AL $\triangle ABC$ і центр кола, вписаного в цей трикутник, лежать у площині α. Чи належать цій площині вершини B і C?	а) Так; б) ні; в) одна належить, інша — ні; г) не можна встановити.
10	Перерізом куба площиною не може бути:	а) трикутник; б) п'ятикутник; в) шестикутник; г) восьмикутник.

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Площина α, прямі a і b та точка A задовольняють такій умови: $a \subset \alpha$, $a \cap b = A$. Зобразіть на малюнку всі можливі варіанти.

2°. Чи може середня лінія трикутника не лежати в площині цього трикутника? Відповідь обґрунтуйте.

3°. Діагоналі прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Точка P не лежить у площині (ABC). Чи можна провести площину через: а) пряму PD і точки B і O; б) пряму AO і точки P і D? Відповідь обґрунтуйте.

4°. Побудуйте переріз правильного тетраедра площиною, що проходить через бісектрису грані і протилежну цій грані вершину. Обчисліть площу утвореного перерізу, якщо ребро тетраедра дорівнює 6 см.

5•. Дві вершини трикутника лежать у площині α. Чи належить цій площині третя вершина трикутника, якщо відомо, що площині α належить центр кола, описаного навколо трикутника.

6•. Точки M і N лежать у бічних гранях тетраедра $ABCD$. Побудуйте точку перетину прямої MN з основою ABC.

7•. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки K, L, M, якщо $K \in AA_1$, $L \in CD$, $M \in CC_1$, $AK : KA_1 = 1 : 3$, $DL : LC = 1 : 1$, $CM : MC_1 = 3 : 4$.

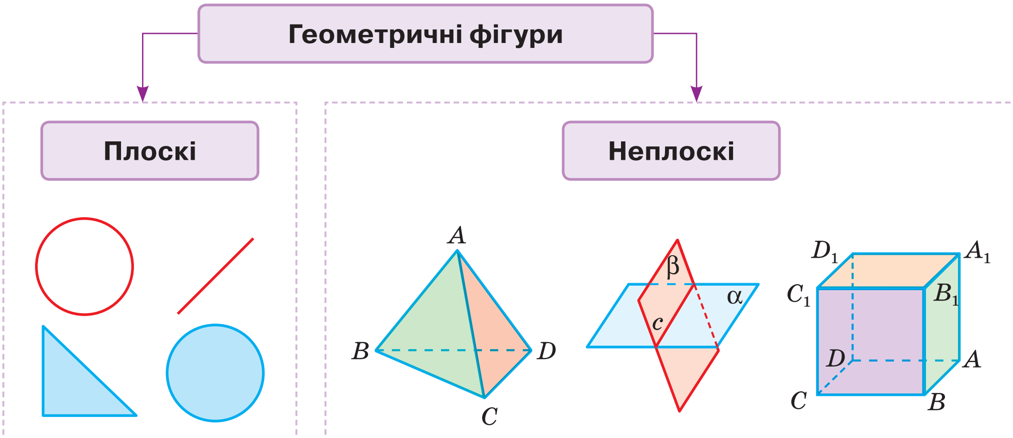
8•. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте лінію перетину площин (A_1C_1D) і (AD_1C). Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, що знаходиться всередині куба, якщо ребро куба дорівнює a.

9••. Точка M лежить у грані APC тетраедра $PABC$. Побудуйте точку перетину прямої BM з площиною (APK), якщо $K \in CB$, $CK : KB = 1 : 2$.

10••. Побудуйте переріз п'ятикутної піраміди площиною, яка задана трьома точками, дві з яких належать суміжним бічним граням піраміди, а третя — її основі.

Головне в розділі 1

Геометрична фігура — будь-яка множина точок. Скінченна або нескінченна, на площині або в просторі.



1. Як відомо, при аксіоматичному викладі геометрії кілька перших понять і відношень приймаються без означень, а всі інші означаються. У цьому підручнику за неозначувані прийнято поняття **точка, пряма, площина, простір** і відношення *належати* (точка належить прямій чи площині), *лежати між* (точка A лежить між B і C) та ін.

2. Властивості неозначуваних понять розкривають за допомогою **аксіом**.

Аксіомами тут вважають усі 10 аксіом площини (див. *Додаток*, с. 259) і 4 стереометричні аксіоми:

C_1. У просторі існує (принаймні одна) площина і точка, що не лежить у цій площині.

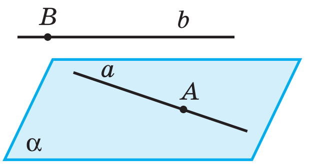
C_2. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

C_3. Якщо дві точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.

C_4. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

3. Якщо точка B належить, а точка A не належить прямій b, то пишуть відповідно: $B \in b$, а $A \notin b$. (мал. 46).

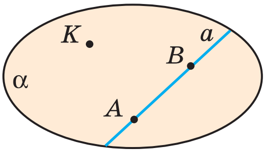
Якщо пряма a лежить, а пряма b не лежить у площині α, то пишуть відповідно: $a \subset \alpha$, а $b \not\subset \alpha$.



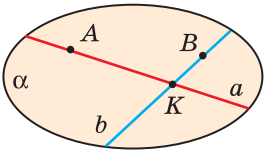
Мал. 46

Наслідки з аксіом стереометрії

Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну.



Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину і до того ж тільки одну.



4. З такої системи аксіом випливають, зокрема, такі твердження. У просторі:

— *пряма однозначно визначається двома точками;*

— *площина визначається:*

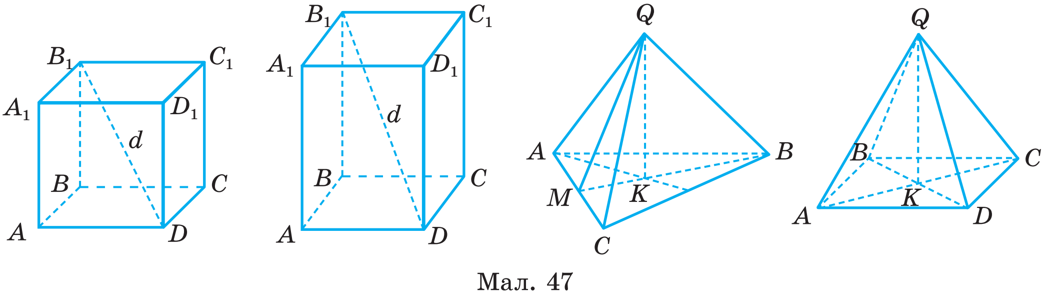
1) трьома точками, які не лежать на одній прямій (аксіома C_2);

2) прямою і точкою, яка не належить їй (теорема 1);

3) двома прямими, які перетинаються (теорема 2);

4) двома паралельними прямими (означення паралельних прямих).

5. У цьому розділі даються перші уявлення про простіші многогранники (мал. 47): **призми** (куби, паралелепіпеди) і **піраміди** (зокрема, тетраедри).



Мал. 47

6. Для наочної ілюстрації розглядуваних геометричних понять і відношень найкраще підходять задачі про *перерізи многогранників* площинами. Задачі на побудови перерізів тут також розглядаються найпростіші, розв'язувати які можна на основі стереометричних аксіом C_3 і C_4 та за допомогою методу слідів.

Методи складніших побудов перерізів розглянуто в наступних розділах.

Микола Лобачевський

(1792–1856)

Його твір «Про початки геометрії» (1829) — перша в світі публікація з неевклідової геометрії, у якій на площині через точку, що не лежить на даній прямій, проходить більше ніж одна пряма, яка не перетинає дану. Відкриття Лобачевського поклало початок створенню інших неевклідових геометрій і справило величезний вплив на подальший розвиток математики й фізики, зокрема на розвиток сучасного вчення про простір.

Бернгард Ріман

(1826–1866)

У доповіді «Про гіпотези, що лежать в основі геометрії» (1853) узагальнив теорію поверхонь на багатовимірний випадок. Висловив припущення, що геометрія в нескінченно малому і в незмірно великому може відрізнятися від тривимірної евклідової. Після публікації ця робота стала епохальною подією для геометрії, а висловлені в ній глибокі ідеї — стимулом для розвитку науки.

Розділ 2 | Chapter 2

Паралельність прямих і площин у просторі | Parallel Lines and Planes in Space

Важлива роль у геометрії відводиться паралельним прямим і площинам. Їх матеріальними моделями є, наприклад, лінії електропередач, частини залізничних колій, міжповерхові перекриття у будинках тощо.

Ми звикли уявляти собі весь світ і всі його явища за анологією до оточуючої нас дійсності. Ці уявлення ми переносимо на мікро- і макросвіт, а вони можуть бути влаштовані зовсім інакше. Усвідомити це дозволяє створення нової геометрії — неевклідової. Аксіому паралельності замінили на іншу, і це стало поштовхом до появи низки нових геометрій — геометрії Лобачевського, геометрії Рімана тощо.

У цьому розділі ви ознайомитеся з властивостями паралельних прямих і площин у тривимірній евклідовій геометрії, де дві прямі, що не перетинаються, можуть бути не тільки паралельними, а й мимобіжними.

Навчальний проект

«Неевклідові геометрії та їх моделі»

Актуарна справа

Актуарій — це експерт із математики страхування: спеціаліст з оцінки ризиків і фінансовий аналітик.

Ризикове страхування

Ризик-менеджмент

Тарифікація

Страхування життя

Фінансовий аналіз

Оцінка резервів

Математика в моїй професії

Енергетика і теплотехніка

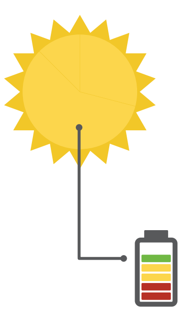
Вивчення та використання енергетичних і теплових ресурсів з метою вироблення, перетворення, передачі й розподілу енергії та тепла.

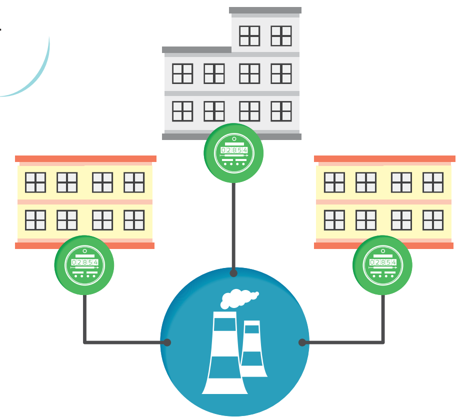
Проектування електромереж

Енергоменеджмент

Транспортування теплової енергії

Відновлювана енергетика

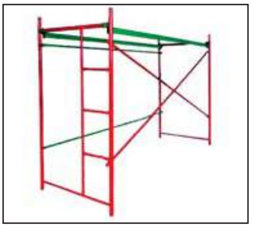




§ 4 Мимобіжні і паралельні прямі

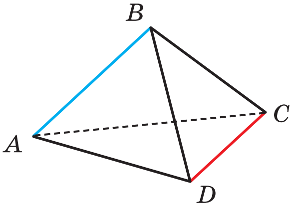
Ви вже знаєте, що в геометрії прямі уявляють необмеженими, ідеально рівними і гладенькими, що не мають ніякої товщини. Матеріальними моделями частини прямої є, наприклад, олівець, плінтус на підлозі, лінії електропередач (мал. 48), частини риштування (мал. 49), залізничні колії (мал. 50) тощо.

Мал. 48



Мал. 49

Мал. 50



Мал. 51

Розгляньте малюнки і згадайте, як можуть розміщуватися дві прямі.

Якщо дві прямі лежать в одній площині, вони або перетинаються, або паралельні. Знайдіть зображення таких прямих на малюнках 1–3. Розгляньте уважніше малюнки 2 і 3 та знайдіть на них зображення прямих, що не перетинаються і не є паралельними. Як бачимо, у стереометрії можливий і третій випадок розташування двох прямих.

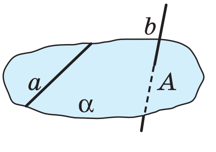
Наприклад, якщо *ABCD* — тетраедр (мал. 51), то прямі *AB* і *CD* не перетинаються і не паралельні. Вони не лежать в одній площині.

■ Дві прямі, які не лежать в одній площині, називають **мимобіжними**.

ТЕОРЕМА 3

(Ознака мимобіжності прямих.) **Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину, але не перетинає першу пряму, то дані прямі мимобіжні.**

ДОВЕДЕННЯ.



Мал. 52

Нехай пряма a лежить у площині α, а пряма b перетинає цю площину в точці A такій, що $A \notin a$ (мал. 52).

Доведемо, що прямі a і b мимобіжні, тобто не лежать в одній площині. Скористаємося методом від супротивного. Припустимо, що через прямі a і b можна провести деяку площину β. Вона не збігається з α, оскільки $b \not\subset \alpha$ і $b \subset \beta$. Площини α і β проходять через точку A. За аксіомою C_4 вони повинні перетинатися по прямій, що проходить через точку A. Але вони мають спільну пряму a, яка не проходить через точку A. Отже, зроблене припущення приводить до суперечності. Виходить, що прямі a і b не лежать в одній площині. Що і треба було довести. □

■ Два відрізки називають **мимобіжними**, якщо вони лежать на мимобіжних прямих.

Якщо прямі або відрізки a і b мимобіжні, то пишуть: $a \dot{-} b$.

■ Дві прямі називають **паралельними**, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються.

З означення випливає, що через дві паралельні прямі завжди можна провести площину, причому тільки одну. Адже якщо припустити, що через паралельні прямі a і b проведено дві різні площини, то з цього випливало б, що через пряму a і деяку точку прямої b проведено дві різні площини. Але цього не може бути (теорема 1).

Отже, до перелічених на с. 16 способів задання площини можна додати ще один: площину можна однозначно задати двома паралельними прямими.

З аксіоми паралельності Евкліда випливає, що в площині через дану точку можна провести не більше однієї прямої, паралельної даній. А скільки таких прямих можна провести в просторі?

ТЕОРЕМА 4

Через будь-яку точку простору, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і тільки одну.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай дано пряму a і точку A, що не лежить на ній. Через них можна провести єдину площину (теорема 1). У цій площині можна провести пряму, паралельну прямій a, до того ж тільки одну (аксіома Евкліда). Отже, у просторі через дану точку A можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій a. □

Зауваження. Доведена теорема справедлива тільки в евклідовій геометрії. Про неевклідові геометрії дивіться на с. 256.

Дві паралельні прямі завжди лежать в одній площині. А три чи більше? Можуть і не лежати в одній площині. Наприклад, усі ребра прямозубої циліндричної шестірні (мал. 53) лежать на паралельних прямих, але не належать одній площині.

Те саме можна сказати і про поздовжні ребра шпунтових дощок (мал. 54), вертикальні колони будинку тощо.

Мал. 53

Мал. 54

ТЕОРЕМА 5

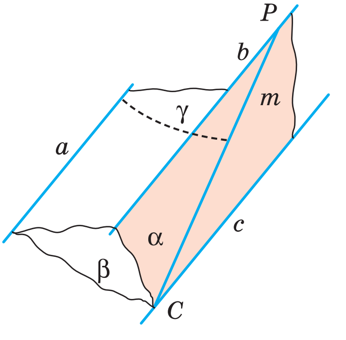
Дві прямі, паралельні третій, паралельні.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $a \parallel b$ і $b \parallel c$. Доведемо, що $a \parallel c$. Прямі a і c не можуть перетинатися. Інакше через точку їх перетину проходили б дві різні прямі, паралельні b, що суперечило б теоремі 4.

Припустимо, що прямі a і c — мимобіжні (мал. 55). Через паралельні прямі a і b, b і c проведемо площини γ і α, а через пряму a і яку-небудь точку C прямої c — площину β. Нехай площини α і β перетинаються по прямій m. Прямі b, c і m лежать в одній площині α, причому $b \parallel c$. Тому пряма m, яка перетинає c, перетинає в деякій точці P і пряму b. Прямі m і b лежать відповідно у площинах β і γ. Тому їх спільна точка P належить цим площинам, а отже, і їх спільній прямій a. Як бачимо, з припущення випливає, що паралельні (за умовою) прямі a і b мають спільну точку P. Це — суперечність.

Отже, прямі a і c не можуть ні перетинатися, ні бути мимобіжними. Залишається єдино можливе: $a \parallel c$. □



Мал. 55

Доведену теорему називають теоремою **про транзитивність паралельності прямих** (від лат. *transitivus* — перехідний), оскільки в ній йде мова про перехід властивості паралельності двох пар прямих на третю: з $a \parallel b$ і $b \parallel c$ випливає: $a \parallel c$.

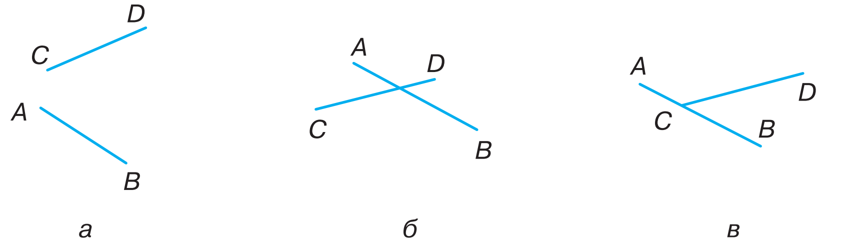
Примітка. Щоб ця властивість була правильною завжди, навіть з $a \parallel b$ і $b \parallel a$ випливало, що $a \parallel a$, часто домовляються, що кожна пряма паралельна сама собі.

Паралельними бувають не тільки прямі, а й відрізки, промені. Два відрізки (промені) називають **паралельними**, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Як можуть розташовуватися в просторі частини двох прямих: відрізки або промені? Оскільки мимобіжні прямі не лежать в одній площині, то й будь-які відрізки чи промені двох таких прямих не лежать в одній площині.

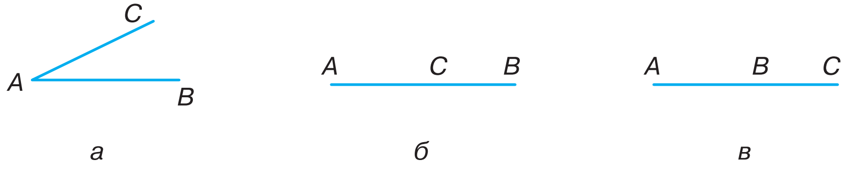
Якщо ж дві прямі простору перетинаються, то їх відрізки можуть не мати спільних точок (мал. 56, *а*) або мати одну спільну точку. Кажуть, що два відрізки перетинаються, якщо вони мають тільки одну спільну точку, яка є внутрішньою точкою для кожного з них (мал. 56, *б*). Відрізки *AB* і *CD* не перетинаються (мал. 56, *в*), хоча переріз їх як множин точок не порожній.



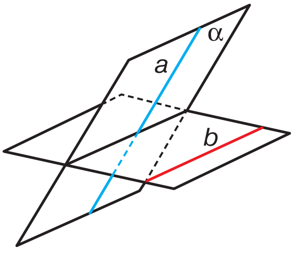
Мал. 56

Коли прямі і відрізки розглядають як множини точок, то їх позначають різними символами: (*AB*) — пряма, [*AB*] — відрізок.

Переріз множин точок відрізків [*AB*] і [*AC*] не порожній: [*AB*] $\cap$ [*AC*] може дорівнювати точці *A* або відрізку *AC* чи *AB* (мал. 57).



Мал. 57



Мал. 58

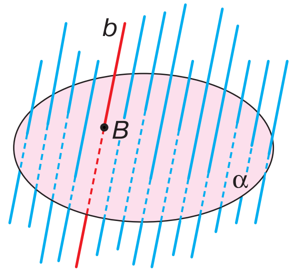
У геометрії в останніх випадках відрізки не вважають такими, що перетинаються. Коли кажуть, що два відрізки чи промені перетинаються, то розуміють, що вони мають тільки одну спільну точку, яка не є кінцем відрізка чи початком променя.

Нехай *a* і *b* — дві довільні мимобіжні прямі (мал. 58). Уявіть, що через кожну точку прямої *a* проведено пряму, паралельну прямій *b*. Усі вони заповнять деяку площину α. Кажуть, що геометричним місцем прямих, які паралельні одній з двох даних мимобіжних прямих і перетинають другу, є площина.

У даному випадку це — площина α.

Якщо пряма b перетинає площину α, то геометричним місцем прямих, які паралельні прямій b і перетинають площину α, є весь простір (мал. 59).

Площина α розбиває простір на два **півпростори**. Площина α — **межа** півпростору. Зверніть увагу на аналогію: точка розбиває пряму на дві півпрямі (два промені), пряма розбиває площину на дві півплощини.



Мал. 59

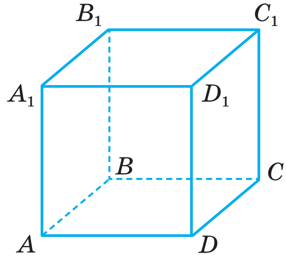
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які дві прямі називають паралельними?
2. Які дві прямі називають мимобіжними?
3. Наведіть приклади мимобіжних прямих, моделюючи їх: двома олівцями, речами, що є в класі.
4. Сформулюйте і доведіть ознаку мимобіжності прямих.
5. Скільки прямих можна провести через дану точку паралельно даній прямій?
6. Сформулюйте теорему про транзитивність паралельних прямих.
7. Які відрізки чи промені називають паралельними?

Виконаємо разом

1 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Доведіть, що пряма AB мимобіжна з прямою CC_1 (мал. 60).

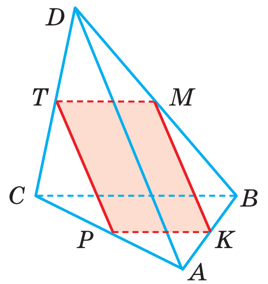
● Пряма CC_1 лежить у площині BCC_1B_1, а пряма AB перетинає цю площину в точці B, яка не лежить на CC_1. Тому згідно з ознакою мимобіжності прямі AB і CC_1 мимобіжні.



Мал. 60

2 K, P, T, M — середини ребер AB, AC, CD, DB тетраедра $ABCD$. Доведіть, що чотирикутник $KPTM$ — паралелограм.

● Відрізки KP і MT — середні лінії трикутників ABC і DBC (мал. 61). Тому кожний з них паралельний ребру BC і дорівнює його половині. За властивістю транзитивності відрізки KP, MT паралельні й рівні. Отже, чотирикутник $KPTM$ — паралелограм.



Мал. 61

3 Прямі AB і CD мимобіжні. Чи можуть бути паралельними прямі AC і BD? А перетинатися?

- Якби прямі AC і BD були паралельними або перетиналися, через них можна було б провести площину. У цій площині лежали б точки A, B, C і D, а отже, і прямі AB і CD. Але за умовою прямі AB і CD не лежать в одній площині. Отже, прямі AC і BD не можуть бути ні паралельними, ні перетинатися.

Задачі і вправи

Виконайте усно

114. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 62). Назвіть його ребра, які: а) паралельні AA_1; б) перетинають AA_1; в) мимобіжні з AA_1.

115. Назвіть три пари мимобіжних прямих, на яких лежать ребра тетраедра $ABCD$ (мал. 63).

116. $ABCD$ — тетраедр (мал. 63). Чи паралельні його ребра AB і CD? Чи перетинаються прямі AC і BD?

117. Чи паралельні відрізки a і c, якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$?

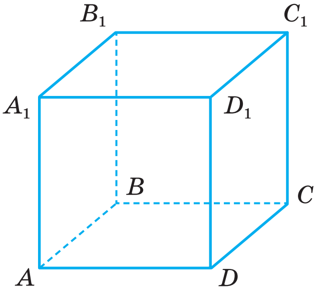
118. Відомо, що $a \subset \alpha$, $b \parallel a$. Чи може пряма b перетинати α?

119. Прямі AB і CD паралельні. Чи можуть бути мимобіжними прямі AC і BD? А перетинатися?

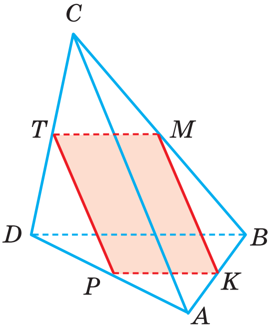
120. Чи можна вважати правильним таке означення: «Дві прямі називають мимобіжними, якщо вони не перетинаються і не паралельні»?

121. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 62). Установіть відповідність між прямими (1–3) та їх взаємним розміщенням (А–Г).

1 DC і DD_1	**А** Паралельні
2 B_1D і BC	**Б** Перетинаються
3 AB_1 і DC_1	**В** Суміщаються
	Г Мимобіжні



Мал. 62



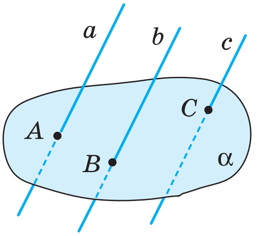
Мал. 63

Мал. 64

122. Розгляньте малюнок 64. Знайдіть на ньому матеріальні моделі частин прямих: а) паралельних; б) мимобіжних; в) що перетинаються.

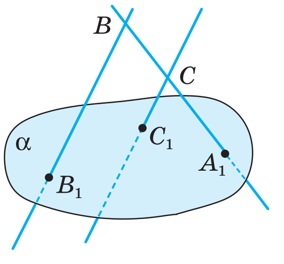
А

123. Попарно паралельні прямі a, b і c перетинають площину α в точках A, B і C, як показано на малюнку 65. Чи належать дані прямі одній площині?



Мал. 65

124. Прямі BB_1 і CC_1, зображені на малюнку 66, перетинають пряму A_1B у точках B і C, а площину α — у точках B_1 і C_1. Чи паралельні прямі BB_1 і CC_1?



Мал. 66

125. Паралелограми $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у різних площинах. Доведіть, що чотирикутник CDD_1C_1 — теж паралелограм.

126. Точка M не лежить у площині $\triangle ABC$. Яке взаємне розміщення прямих MA і BC? А прямих EF і PK, якщо точки E і P лежать на прямій MA, а точки F і K — на прямій BC?

127. Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведено пряму a, яка не лежить у площині паралелограма, а через точку C — пряму b, яка паралельна BD. Доведіть, що a і b — мимобіжні.

128. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед. Доведіть, що площина (ACC_1) проходить через точку A_1.

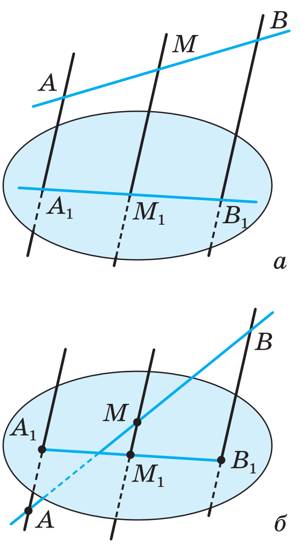
129. Прямі a і b паралельні, а b і c не паралельні. Доведіть, що прямі a і c не паралельні.

130. Доведіть, що паралельні прямі, які перетинають дану пряму, лежать з нею в одній площині.

131. Площини α і β перетинаються по прямій c. $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \beta$, $D \in \beta$. Прямі AB і c перетинаються у точці M, а CD і c — у точці N. Яке взаємне розміщення прямих AB і CD, якщо: а) точки M і N збігаються; б) точки M і N не збігаються?

132. Відрізки OA і OB перетинають площину α в точках A_1 і B_1, які є серединами цих відрізків. Знайдіть відстань AB, якщо $A_1B_1 = 3{,}8$ см.

133. Вершинами трикутника ABC є середини відрізків OA_1, OB_1, OC_1. Точка O не лежить у площині трикутника ABC. У скільки разів периметр трикутника $A_1B_1C_1$ більший за периметр трикутника ABC?



Мал. 67

134. Через кінці відрізка AB і його середину M проведено паралельні прямі, які перетинають деяку площину в точках A_1, B_1, M_1 (мал. 67). Знайдіть довжину відрізка MM_1, якщо $AA_1 = 6{,}5$ м, $BB_1 = 8{,}5$ м.

135. З точок A і B площини α проведено поза нею паралельні відрізки $AK = 16$ см і $BM = 12$ см. Пряма KM перетинає площину α в точці C. Знайдіть відстань AC, якщо $AB = 9$ см. Розгляньте два випадки.

136. Точка C ділить відрізок AB у відношенні $AC : CB = 2 : 3$. Паралельні прямі, які проходять через точки A, C, B, перетинають деяку площину в точках A_1, C_1, B_1. Знайдіть відношення $A_1B_1 : A_1C_1$.

137. Через кінець A відрізка AB проведено площину α. Через кінець B і точку C цього відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1 і C_1. Знайдіть довжину відрізка CC_1, якщо:
а) $AC : CB = 3 : 2$ і $BB_1 = 16$ дм;
б) $AC_1 : C_1B_1 = 2 : 1$ і $BB_1 = 12$ дм;
в) $AB : BB_1 = 4 : 3$ і $AC = m$.

138. Підприємець виготовляє з прямокутної алюмінієвої труби розсувні драбини з двома запобіжними ременями (мал. 68). На кожній стороні драбини є 7 щаблів, що закріплені на двох опорних жердинах.
а) Укажіть, які елементи цієї драбини є паралельними, а які мимобіжними.
б) Установіть, скільки погонних метрів труби має купити підприємець для виготовлення однієї такої драбини, якщо ширина драбини 0,5 м, а довжина у 3,3 разу більша. Врахуйте, що довжина профіля труби — 6 м.
в) Чи вистачить підприємцю 18 000 грн, щоб придбати труби на виготовлення 5 таких драбин, якщо погонний метр труби коштує 255 грн?


Мал. 68

139. У тетраедрі $ABCD$ точки M, N, P, K — середини відрізків DC, DB, AB, AC. Знайдіть AD і BC, якщо $AD : BC = 3 : 2$, а периметр чотирикутника $MNPK$ дорівнює 10 см.

140. Точки M_1, N_1, P_1, K_1 — середини ребер DB, DC, AB і AC тетраедра $ABCD$. Точки M, N, P, K — середини відрізків DM_1, DN_1, AP_1, AK_1. Знайдіть периметри чотирикутників $MNPK$ і $M_1N_1P_1K_1$, якщо $BC =$ $= 20$ см, а $AD = 16$ см.

Б

141. Прямі a і b мимобіжні. Точка M не належить прямим a і b. Чи можна через точку M провести дві прямі, які будуть перетинати прямі a і b?

142. Прямі a і b паралельні. $M \notin a$, $M \notin b$. Через точку M та прямі a і b проведено площини α і β відповідно, які перетинаються по прямій c. Доведіть, що $a \parallel c$ і $b \parallel c$.

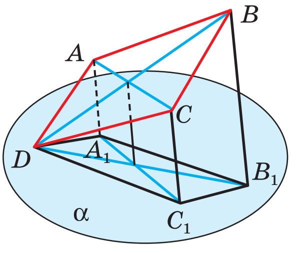
143. Прямі a і b мимобіжні. $M \notin a$, $M \notin b$. Через точку M та прямі a і b проведено площини α і β відповідно, які перетинаються по прямій c. Яке взаємне розміщення прямих a і c, b і c? Відповідь обґрунтуйте.

144. Дано точки A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі, які сполучають середини відрізків AB і DC, AD і BC, перетинаються в одній точці.

145. Дано точки A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі, які сполучають середини відрізків AB і CD, AC і BD, AD і BC, перетинаються в одній точці.

146. ***Відкрита задача.*** Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть взаємне розміщення прямих MN і PK та прямих MP і NK, якщо точки M, N, P — середини ребер AA_1, AD, CC_1 відповідно, а точка K **...** .

147. Через вершину D паралелограма $ABCD$ проведено площину, а через точки A, B, C — паралельні прямі, які перетинають цю площину в точках A_1, B_1, C_1 (мал. 69). Знайдіть BB_1, якщо $AA_1 = 15$ см, $CC_1 = 17$ см.



Мал. 69

148. Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, а α — площина, яка не перетинає паралелограм. Через точки A, B, C, D, O проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1, D_1, O_1. Доведіть, що: а) $AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$; б) $AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 = 4 \cdot OO_1$.

149. Яку фігуру утворюють усі відрізки, що сполучають будь-які точки двох мимобіжних відрізків?

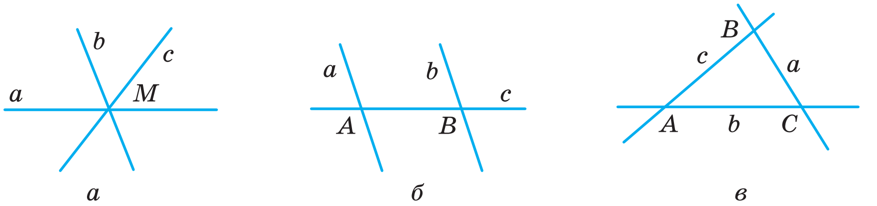
150*. Дано два мимобіжних відрізки. Знайдіть геометричне місце середин відрізків, що сполучають будь-яку точку одного з них з будь-якою точкою другого.

151*. Доведіть, що в просторі існує принаймні три попарно мимобіжні прямі.

152*. Як побудувати пряму, що перетинає три дані попарно мимобіжні прямі?

Практичне завдання

153. Три прямі у просторі можна розташувати багатьма різними способами. Усі вони можуть перетинатися в одній точці (мал. 70, *а*), одна з них може перетинати дві інші, які не мають спільних точок (мал. 70, *б*), вони можуть перетинатися попарно у трьох різних точках (мал. 70, *в*).



Мал. 70

а) Зробіть із соломинок (справжніх чи для коктейлю) моделі для кожного з перелічених вище випадків. Чи завжди всі три прямі належать одній площині? Установіть, у якому випадку всі три прямі обов'язково належать одній площині. Обґрунтуйте.

б) За допомогою аркуша паперу (перегинанням) спробуйте створити модель розташування трьох прямих, одна з яких мимобіжна кожній з двох інших.

Задачі для повторення

154. Побудуйте переріз правильного тетраедра $PABC$ площиною, яка проходить через точки P, M, N, де M і N — середини ребер AC і BC. Знайдіть косинус кута MPN.

155. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, M — середина AA_1. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки B, D, M. Знайдіть діагональ куба, якщо площа перерізу дорівнює $64\sqrt{6}$ см^2.

156. Різниця катетів прямокутного трикутника — 7 см, а медіана, проведена з вершини прямого кута, дорівнює 6,5 см. Знайдіть площу трикутника.

§ 5 Паралельність прямої і площини

Як можуть розташовуватися в просторі пряма і площина? Розгляньте малюнок 71, *а–в*.

а *б* *в*

Мал. 71

Вони можуть:
1) перетинатися, тобто мати тільки одну спільну точку;
2) не мати жодної спільної точки;
3) кожна точка прямої може лежати в площині.

У другому випадку кажуть про паралельність прямої і площини.

Пряму і площину називають **паралельними**, якщо вони не мають спільних точок.

Якщо пряма a паралельна площині α, пишуть: $a \parallel \alpha$.

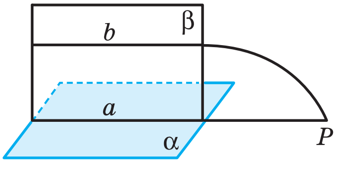
ТЕОРЕМА 6

(Ознака паралельності прямої і площини.) **Якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій площини, то вона паралельна і самій площині.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай пряма b не лежить у площині α, пряма a лежить в α і $b \parallel a$. Доведемо, що і $b \parallel \alpha$.

Припустимо, що пряма b не паралельна площині α, а перетинає її у деякій точці P (мал. 72). Ця точка лежить у площині α і у площині β, яка проходить через паралельні прямі a і b. Отже, точка P лежить на прямій a, по якій перетинаються площини α і β. Прийшли до суперечності: прямі a і b паралельні й одночасно мають спільну точку P. Отже, пряма b не може перетинати площину α. □



Мал. 72

ТЕОРЕМА 7

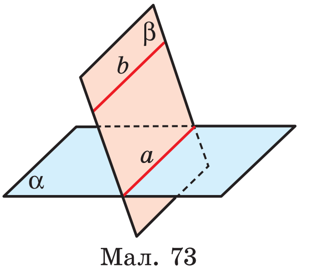
Якщо площина проходить через пряму, паралельну другій площині, і перетинає цю площину, то пряма їх перетину паралельна даній прямій.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $b \parallel \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = a$ (мал. 73). Доведемо, що $a \parallel b$. Якби прямі a і b перетиналися, їх точка перетину була б спільною для прямої b і площини α. Це неможливо, оскільки $b \parallel \alpha$. Отже, прямі a і b не перетинаються, а лежать в одній площині β. Тому $a \parallel b$. □

Відрізок або промінь називають **паралельним** площині, якщо він є частиною прямої, паралельної площині.

Кожне ребро паралелепіпеда паралельне площинам двох його граней. Муляри кладуть стіну під висок, шнур якого паралельний площині стіни.



Мал. 73

Горизонтальні планки мотовила зернозбирального комбайна хоч і змінюють своє положення під час роботи, залишаються паралельними площині поля (див. мал. 64). І пряма, проведена в грані бруска за допомогою рейсмуса (мал. 74), — площинам трьох граней. Усе це — матеріальні моделі паралельності прямої і площини.

Мал. 74

Запитання і завдання для самоконтролю

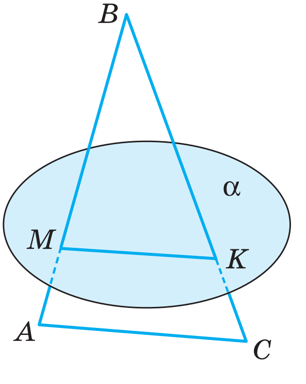
1. Як можуть бути розташовані в просторі пряма і площина?
2. Сформулюйте означення паралельності прямої і площини.
3. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямої і площини.
4. Чи може відрізок або промінь бути паралельним площині?
5. Який відрізок називають паралельним площині?

Виконаємо разом

1 Площина перетинає сторони $\triangle ABC$ у точках M і K ($M \in AB$ і $K \in BC$) так, що $AC \parallel \alpha$, $AM : MB = 2 : 5$ (мал. 75). Знайдіть AC, якщо $MK = a$.

- Оскільки $AC \parallel \alpha$ і $AC \subset (ABC)$, то площина $\triangle ABC$ перетинає площину α по прямій, яка паралельна AC (теорема 7), тобто $MK \parallel AC$. Тоді $\triangle MBK \sim \triangle ABC$. Маємо:

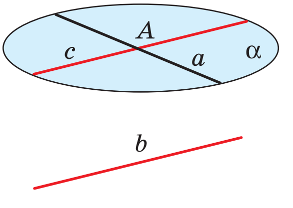
$$\frac{MK}{AC} = \frac{MB}{AB} \text{ або } \frac{a}{AC} = \frac{5}{7}, \text{ звідси } AC = 1{,}4a.$$



Мал. 75

2 Доведіть, що через будь-яку з двох мимобіжних прямих a і b можна провести площину α, паралельну іншій прямій.

- На малюнку 76 зображено мимобіжні прямі a і b. Візьмемо на прямій a точку A і проведемо через неї пряму c, паралельну прямій b. Через прямі a і c, що перетинаються, проведемо площину α. Це і є шукана площина.

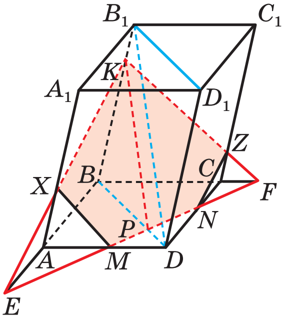


Мал. 76

3 Через середини M і N ребер AD і CD паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину паралельно B_1D. Побудуйте переріз паралелепіпеда цією площиною та встановіть, у якому відношенні вона ділить ребро BB_1.

● Нехай у паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M і N — середини ребер AD і CD (мал. 77). Побудуємо площину BB_1D_1D, яка перетинає відрізок MN у точці P. Через точку P у площині BB_1D_1D проведемо $PK \parallel B_1D$.

Знайдемо точку E — точку перетину прямих AB і MN — та проведемо відрізок EK, який перетинає ребро AA_1 у точці X. Аналогічно будуємо відрізок KZ. Провівши відрізки XM і ZN, отримаємо шуканий переріз $MXKZN$. Оскільки $ABCD$ — паралелограм, то $BP : PD = 3 : 1$. Тоді з подібності трикутників B_1BD і KBP випливає, що $BK : KB_1 = 3 : 1$.



Мал. 77

Задачі і вправи

Виконайте усно

157. Знайдіть серед навколишніх предметів моделі прямих і площин, які паралельні між собою.

158. Спростуйте твердження: «Якщо прямі a, b і площина α такі, що $a \parallel \alpha$ і $b \parallel \alpha$, то $a \parallel b$».

159. Пряма a паралельна прямій b, а b паралельна площині α. Чи випливає з цього, що $a \parallel \alpha$?

160. Кожна з площин α і β паралельна прямій a. Чи можуть ці площини перетинатися?

161. Пряма a перетинає площину α. Скільки можна провести прямих, що: а) перетинають площину α і паралельні прямій a; б) перетинають пряму a і паралельні площині α?

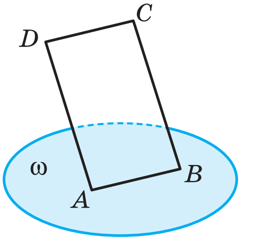
162. Скільки прямих, паралельних даній площині α, можна провести через дану точку A, якщо $A \notin \alpha$?

163. Скільки площин, паралельних даній прямій, можна провести через дану точку?

А

164. $ABCD$ — паралелограм. Площина ω проходить через його вершини A, B і не проходить через вершину C (мал. 78). Доведіть, що $CD \parallel \omega$.

165. Доведіть, що коли площина перетинає трапецію по її середній лінії, то вона паралельна основам трапеції. Зобразіть відповідний малюнок.



Мал. 78

166. Точки A і B лежать у площині α, а O — поза площиною. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини відрізків OA і OB, паралельна площині α.

167. Площина α перетинає відрізки AB і AC в їхніх серединах — точках K і P. Доведіть, що відрізок BC паралельний площині α. Як відносяться: а) периметри трикутників ABC і AKP; б) площі трикутників ABC і AKP; в) площі многокутників AKP і $BKPC$?

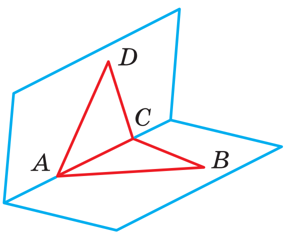
168. Площини α і β перетинаються по прямій c. Пряма $a \in \alpha$. Установіть взаємне розміщення прямої a і площини α. Зобразіть ці випадки.

169. У трикутнику ABC через точку M — середину сторони AB — проведено площину α, $\alpha \parallel BC$, $\alpha \cap AC = N$. Знайдіть: а) BC, якщо $MN = a$; б) $S_{BMNC} : S_{MAN}$.

170. Площина α перетинає середини катетів AB і AC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC у точках M і N. Доведіть, що $BC \parallel \alpha$, і знайдіть відношення $P_{BMNC} : P_{MAN}$.

171. Через точку M — середину гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC — проведено площину α, паралельну катету BC, яка перетинає катет AC у точці N. Знайдіть CM, якщо $BC : AC = 6 : 8$, $S_{\triangle AMN} = 24$ см^2.

172. Дано неплоску замкнену ламану $ABCDA$ (мал. 79). Доведіть, що середини всіх її ланок лежать в одній площині.



Мал. 79

173. $PABC$ — тетраедр, кожне ребро якого 6 см. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через середину ребра PB паралельно ребрам PA, PC. Знайдіть периметр цього перерізу.

174. Побудуйте переріз тетраедра $PABC$ площиною, паралельною ребру AB, яка проходить через вершину P і середину ребра BC. Знайдіть площу перерізу, якщо $AB = BC = CA = a$, $PA = PB = PC = b$.

175. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребер AB, AD і паралельна прямій CC_1. Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо $AB = l$.

176. Побудуйте переріз тетраедра $ABCD$ площиною, яка проходить через середину ребра CB паралельно прямим AC і DB. Визначте вид утвореного перерізу.

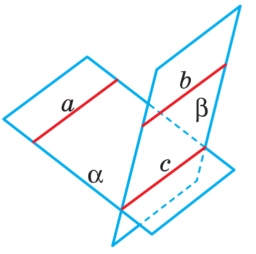
177. Побудуйте переріз тетраедра $ABCD$ площиною, яка паралельна прямим AD і BC та проходить через точку M, $M \in AC$, $AM : MC = 2 : 1$. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AD = a$, $BC = b$.

Б

178. Точки B і C не лежать на прямій a. Скільки існує площин, паралельних a, які проходять через точки B і C? Розгляньте всі можливі випадки.

179. Якщо через кожну з двох паралельних прямих проведено площину, причому ці площини перетинаються, то лінія їх перетину паралельна кожній з даних прямих (мал. 80). Доведіть.

180. Пряма, яка паралельна кожній із двох площин, що перетинаються, паралельна лінії їх перетину. Доведіть.



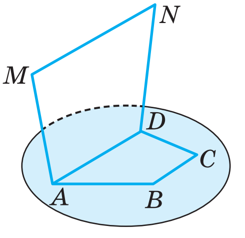
Мал. 80

181. Доведіть, що коли кожна площина, яка перетинає одну з двох даних прямих, перетинає і другу, то ці прямі паралельні.

182. Доведіть, що всі прямі, які перетинають одну з двох мимобіжних прямих і паралельні другій, лежать в одній площині.

183. Через точку M — середину гіпотенузи AB трикутника ABC — проведено площину α, яка паралельна катету AC і перетинає катет BC у точці N. $CM = a$. Знайдіть $S_{\triangle ABC}$.

184. На бічній стороні AB трапеції $ABCD$ взято точки M_1, M_2, M_3 так, що $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3B$, і через точки M_1, M_2, M_3 проведено площини, які паралельні AD. Ці площини перетинають сторону CD у точках N_1, N_2, N_3 відповідно. Знайдіть: а) $S_{M_1M_3N_3N_1} : S_{ABCD}$; б) $S_{AM_1N_1D} : S_{M_3BCN_3}$, якщо $AD = a$, $BC = b$.



Мал. 81

185. Трапеції $ABCD$ і $AMND$ лежать у різних площинах. Побудуйте точку перетину площини (BCP) і прямої ND, якщо P — довільна точка прямої AM (мал. 81).

186. У тетраедрі $ABCD$ точка M — середина AD, $N \in DB$, $DN : NB = 1 : 3$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки M і N паралельно BC. Обчисліть периметр і площу перерізу, якщо всі ребра тетраедра дорівнюють a.

187. Дано тетраедр $ABCD$, у якого $\angle ADC = 90°$, $M \in AD$, $AM : MD = 1 : 3$, $N \in DC$, $DN : NC = 1 : 3$. Знайдіть площу перерізу, який проходить через точки M і N паралельно BC, якщо $DA = DB = DC = b$, $AB = BC = AC$.

188. Побудуйте переріз тетраедра $ABCD$ площиною, яка проходить через точки C, M $(M \in AB)$ і паралельна прямій DE, де E — середина BC.

189. Дано правильний тетраедр $ABCD$, ребро якого дорівнює 12 см, і точка M — середина AC. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку M і задовольняє умови (1–4). Установіть відповідність між побудованими перерізами та їх периметрами (А–Д).

1 Площина перерізу паралельна прямим AD і BC
2 Площина перерізу паралельна прямим AD і BD
3 Площина перерізу проходить через точку B паралельно прямій AD
4 Площина перерізу проходить через точку K паралельно прямій CD, якщо $K \in BC$ і $CK : KB = 1 : 2$

А 18 см
Б $6(2\sqrt{3}+1)$ см
В 24 см
Г $18\sqrt{3}$ см
Д $2\sqrt{7}(2+\sqrt{7})$ см

190. Точка M — середина ребра BB_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки A і M паралельно B_1D. Знайдіть площу перерізу, якщо $AA_1 = a$, $AB = BC = b$.

191. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра AA_1. Через точки M, B, D проведено переріз. Доведіть, що цей переріз паралельний прямій A_1C, та знайдіть площу перерізу, якщо $A_1C = d$.

192. У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взято точки $M \in A_1B_1$, $N \in A_1D_1$ такі, що $B_1M : MA_1 = A_1N : ND_1 = 3 : 1$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки N і M паралельно D_1D. Знайдіть периметр перерізу, якщо всі ребра паралелепіпеда дорівнюють a, $\angle ABC = 120°$.

193*. Через середини M і N ребер AD і CC_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину паралельно B_1D. Побудуйте переріз паралелепіпеда цією площиною та встановіть, у якому відношенні вона ділить ребро BB_1.

Практичне завдання

194. Підготуйте презентацію на тему «Взаємне розміщення прямої і площини у ...», обравши одну з підтем: техніка, побут, природа, будівництво, торгівля, сільське господарство, мистецтво, спорт тощо.

Паралельність прямої і площини

Задачі для повторення

195. Дано два паралелограми ABB_1A_1 і ACC_1A_1, які лежать у різних площинах. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

196. На відрізку AB взято точку M таку, що $AM : MB = 1 : 3$. Через точки A, B, M проведено паралельні прямі, які перетинають площину α у точках A_1, B_1, M_1 відповідно. $AA_1 = 10$ см, $BB_1 = 16$ см. Знайдіть MM_1, якщо: а) відрізок AB не перетинає площину α; б) відрізок AB перетинає площину α.

197. Сторона ромба дорівнює a, а гострий кут α. Знайдіть діагоналі ромба та його площу.

§ 6 Паралельність площин

Подивіться навколо себе. Які елементи довкілля можна вважати матеріальними моделями площин чи їхніх частин? Яким є взаємне розміщення цих «площин» (мал. 82)?

Мал. 82

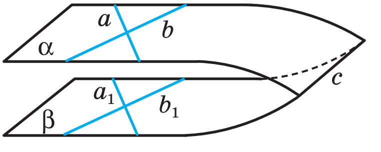
Дві площини називають **паралельними**, якщо вони не перетинаються. Якщо площини α і β паралельні, пишуть: $\alpha \parallel \beta$.

ТЕОРЕМА 8

(Ознака паралельності площин.) **Якщо дві прямі, що перетинаються і лежать в одній площині, паралельні двом прямим другої площини, то такі площини паралельні.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай прямі a і b, що перетинаються, лежать у площині α, а паралельні їм прямі a_1 і b_1 — у площині β (мал. 83). Доведемо, що $\alpha \parallel \beta$.



Мал. 83

Припустимо, що площини α і β не паралельні, тобто перетинаються по якійсь прямій c. Оскільки прямі a і b паралельні прямим a_1 і b_1 площини β, то згідно з теоремою 6 $a \parallel \beta$ і $b \parallel \beta$.

Прямі a і b не перетинають c, оскільки пряма c лежить у площині β, з якою a і b не мають спільних точок. Лежать усі ці прямі в одній площині α. Виходить, $a \parallel c$ і $b \parallel c$ — дві прямі, які перетинаються і паралельні третій. Це суперечить аксіомі паралельності. Отже, площини α і β не можуть перетинатися, тобто вони паралельні. $\square$

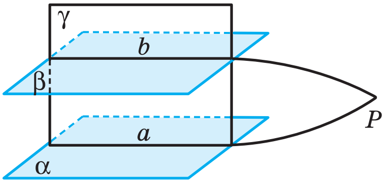
Наслідок

Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини паралельні другій площині, то такі площини паралельні.

ТЕОРЕМА 9

Паралельні площини перетинаються січною площиною по паралельних прямих.

ДОВЕДЕННЯ.



Мал. 84

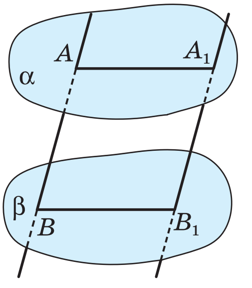
Нехай площина γ перетинає паралельні площини α і β по прямих a і b (мал. 84). Доведемо, що $a \parallel b$.

Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Тоді вони перетинаються в деякій точці P, оскільки лежать в одній площині γ. Точка P належить прямим a і b, отже, і площинам α і β, у яких лежать ці прямі. Прийшли до суперечності: паралельні площини α і β мають спільну точку P. Отже, прямі a і b не можуть перетинатися — вони паралельні. □

ТЕОРЕМА 10

Відрізки паралельних прямих, що відтинаються паралельними площинами, рівні.

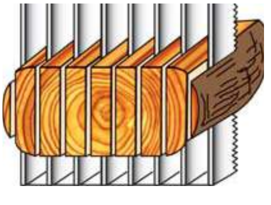
ДОВЕДЕННЯ.



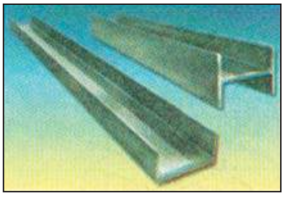
Мал. 85

Нехай відрізки AB і A_1B_1 паралельні, а їх кінці лежать у паралельних площинах α і β (мал. 85). Площина, яка проходить через прямі AB і A_1B_1, перетинає паралельні площини α і β по паралельних прямих: $AA_1 \parallel BB_1$. Крім того, за умовою теореми $AB \parallel A_1B_1$. Чотирикутник ABB_1A_1 — паралелограм, отже, $AB = A_1B_1$. Що і треба було довести. □

У паралельних площинах розміщують перекриття поверхів багатоповерхових будинків, шибки подвійних вікон, верхні грані сходинок. Паралельні шари фанери, пилки, що розпилюють колоду на дошки (мал. 86), протилежні грані цеглини, швелера, двотаврової балки (мал. 87), губки слюсарних лещат та ін.



Мал. 86



Мал. 87

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Теореми 8 і 9 доведені для випадків, коли площини α і β різні. Якщо вони суміщаються ($\alpha = \beta$), часто їх також вважають паралельними. Для цього випадку теореми 8 і 9 очевидні.

Відношення паралельності площин має такі самі властивості, як і відношення паралельності прямих.

Кожна площина паралельна сама собі (рефлексивність).

Якщо $\alpha \parallel \beta$, то $\beta \parallel \alpha$ (симетричність).

Якщо $\alpha \parallel \beta$ і $\beta \parallel \gamma$, то $\alpha \parallel \gamma$ (транзитивність).

Спробуйте обґрунтувати таке твердження: «Якщо пряма a і площини α і β такі, що $a \parallel \alpha$ і $\alpha \parallel \beta$, то $a \parallel \beta$».

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які площини називають паралельними?
2. Сформулюйте ознаку паралельності площин.
3. Сформулюйте і доведіть теорему про перетин паралельних площин січною площиною.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про перетин двох паралельних прямих паралельними площинами.

Виконаємо разом

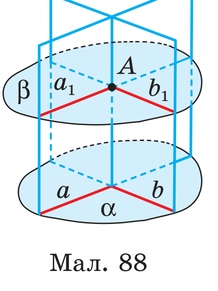
1 Площини α і β паралельні, але не суміщаються. Доведіть, що кожна пряма площини α паралельна площині β.

● Нехай площини α і β паралельні. У площині α візьмемо довільну пряму a. Доведемо, що $a \parallel \beta$.

Припустимо, що пряма a не паралельна площині β. Тоді пряма a або перетинає площину β, або лежить у цій площині.

Якщо пряма a перетинає площину β у деякій точці M, то ця точка спільна для паралельних площин α і β, що неможливо. Якщо пряма a лежить у площині β, то паралельні площини α і β перетинаються по прямій a, що також неможливо.

Отже, пряма a не може перетинати площину β і не може лежати у цій площині, тобто $a \parallel \beta$.



Мал. 88

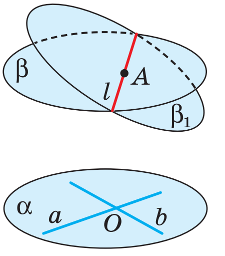
2 Як через точку поза даною площиною провести площину, паралельну даній? Скільки існує таких площин?

● У даній площині α проведемо які-небудь прямі a і b, що перетинаються (мал. 88). Через дану точку A проведемо паралельні їм прямі a_1 і b_1.

Прямі a_1 і b_1 перетинаються, тому через них можна провести площину β. За теоремою 8 площина β паралельна площині α.

Спробуйте розв'язати задачу іншим способом, як показано на малюнку 93.

Доведемо методом від супротивного, що така площина єдина. Припустимо, що існує інша площина β_1, така що $\alpha \parallel \beta_1$ і $A \in \beta_1$ (мал. 89). За цих умов площини β і β_1 мають спільну точку A, а тому перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку. Нехай $\beta \cap \beta_1 = l$, $A \in l$.

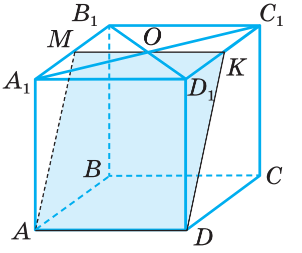


Мал. 89

Візьмемо у площині α прямі a і b, які перетинаються у точці O. Оскільки $a \subset \alpha$, $\alpha \parallel \beta$ і $\alpha \parallel \beta_1$, то $a \parallel \beta$ і $a \parallel \beta_1$, а тому $a \parallel l$ (див. задачу 159). Аналогічно, $b \parallel \beta$ і $b \parallel \beta_1$, а тому $b \parallel l$. Прийшли до суперечності: через точку O проходять дві прямі, кожна з яких паралельна прямій l. Отже, існує єдина площина, яка проходить через точку A і паралельна площині α.

3 Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через ребро нижньої основи і точку перетину діагоналей верхньої основи.

● Нехай переріз проходить через ребро AD і точку O перетину діагоналей A_1C_1 і B_1D_1. Оскільки основи паралелепіпеда паралельні, то січна площина перетинає їх по паралельних прямих. Тому через точку O проведемо відрізок MK, такий, що $MK \parallel AD$. Сполучимо точки A і M, K і D. Тоді $AMKD$ — шуканий переріз (мал. 90).



Мал. 90

Задачі і вправи

Виконайте усно

198. Відомо, що дві прямі, які лежать у площині α, паралельні площині β. Чи випливає з цього, що $\alpha \parallel \beta$?

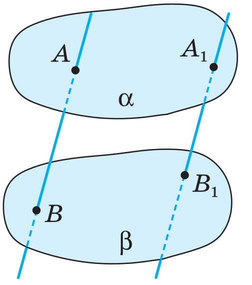
199. Кожна діагональ ромба $ABCD$ паралельна площині α. Як розміщені площини α і (ABC)?

200. Чи буде площина трапеції паралельна площині α, якщо цій площині паралельні: а) основи трапеції; б) бічні сторони трапеції?

201. Чи можуть мати однакові довжини відрізки непаралельних прямих, що містяться між паралельними площинами?

202. Площина γ перетинає площини α і β по паралельних прямих. Чи випливає з цього, що площини α і β паралельні?

203. Чи паралельні прямі AB і A_1B_1, якщо паралельні площини α і β вони перетинають у точках A, B, A_1, B_1, як показано на малюнку 91?



Мал. 91

А

204. Площини α і β паралельні. Промені SA і SA_1 перетинають площину α в точках A і A_1 (мал. 92). SA перетинає площину β у точці B. Побудуйте точку B_1 перетину SA_1 з площиною β.

205. Пряма a паралельна площині α. Як через пряму a провести площину, паралельну α?

206. Відрізки OA, OB і OC не лежать в одній площині. Доведіть, що площина, яка проходить через їхні середини, паралельна площині (ABC) (мал. 93).

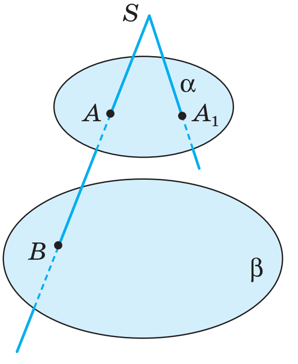
207. Точка O — спільна середина кожного з відрізків AA_1, BB_1, CC_1, які не лежать в одній площині. Доведіть, що площини (ABC) і $(A_1B_1C_1)$ паралельні.

208. Чи можуть перетинатися площини α і β, якщо кожна з них паралельна площині γ?

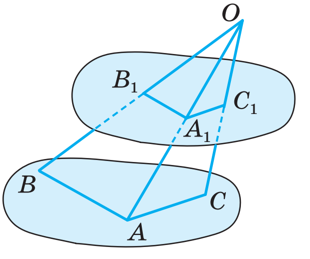
209. Доведіть, що коли пряма або площина перетинають одну з двох паралельних площин, то перетинають і другу.

210. Площини α і β перетинаються. Доведіть, що будь-яка площина простору перетинає хоча б одну з цих площин.

211. Доведіть, що через дві будь-які мимобіжні прямі можна провести єдину пару паралельних площин.



Мал. 92



Мал. 93

212. Доведіть, що геометричним місцем прямих, що проходять через точку поза даною площиною і паралельні цій площині, є площина, яка проходить через дану точку і паралельна даній площині.

213. Через точку C, яка лежить поза паралельними площинами α і β, проведено прямі a і b, що перетинають площину α в точках A і A_1, а площину β — у точках B і B_1 відповідно. Знайдіть AA_1, якщо:

а) $AC = 2$ см, $AB = 6$ см, $BB_1 = 10$ см;
б) $A_1C : A_1B_1 = 2 : 3$, $BB_1 = 10$ см;
в) $AC = 2$ см, $BB_1 = 8$ см, $CB = AA_1$;
г) $AC = 2$ см, $BB_1 = 24$ см, $BA = AA_1$.

214. Точка C лежить між паралельними площинами α і β. Через точку C проведено прямі a і b, які перетинають площину α в точках A і A_1, а площину β — у точках B і B_1 відповідно. Знайдіть AA_1, якщо:
а) $AC = 2$ см, $BC = 5$ см, $B_1B = 15$ см;
б) $AC : BC = 2 : 3$, $BB_1 = 9$ см;
в) $AC = 1$ см, $B_1B = 6$ см, $AA_1 = AB$;
г) $AC = 3$ см, $B_1B = 12$ см, $AA_1 = CB$.

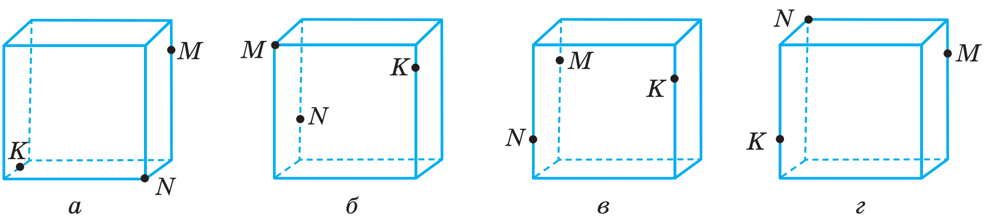
215. Паралельні відрізки AB і CD містяться між паралельними площинами α і β так, що точки A і C належать площині α, а B і D — площині β. Знайдіть AD і BC, якщо:
а) $DC = 25$ см, $AC = 7$ см, $\angle CAD = 90°$;
б) $AC = 5$ см, $CD = 8$ см, $\angle ACD = 120°$.

216. Дано тетраедр $ABCD$. $M \in DB$, $N \in DB$, $DM = MN = NB$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точку M паралельно площині (ANC). Обчисліть периметр і площу перерізу, якщо $AN = CN = 25$ см, $AC = 14$ см.

217. Точка A_1 ділить ребро PA тетраедра $PABC$ у відношенні $PA_1 : A_1A = 2 : 3$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка паралельна площині (ABC) і проходить через точку A_1. Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо ABC — рівносторонній трикутник і $AB = 20$ см.

218. Точка X ділить ребро AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у відношенні $AX : XB = 2 : 3$. Побудуйте переріз цього куба площиною, яка паралельна площині (AA_1C_1) і проходить через точку X. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = a$.

219. Накресліть паралелепіпеди (мал. 94, *а–г*) у зошиті і побудуйте їх перерізи, які проходять через точки M, N, K.



Мал. 94

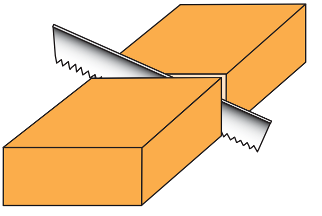
220. Уявіть паралельні бруси — гімнастичний спортивний снаряд. У спортивних змаганнях для чоловіків використовують бруси таких розмірів: висота жердин — 195 см, довжина — 350 см, відстань між жердинами — від 42 до 52 см, діаметр жердин — 4 см.
а) Установіть взаємне розміщення площини підлоги спортивної зали і площини, що проходить через обидва бруси. Відповідь обґрунтуйте.
б) Складіть аналогічну задачу про різновисокі бруси. Дізнайтеся про історію створення брусів та олімпійських чемпіонів у вправах на брусах з України.

Б

221. Рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розміщено в площинах α і β так, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 паралельні. Чи випливає з цього, що площини α і β паралельні?

222. Доведіть, що коли перерізом паралелепіпеда є шестикутник, то його протилежні сторони паралельні.

223. Кожна грань дошки — прямокутник (мал. 95). Доведіть, що в якому напрямі не розпилювали б дошку, перетинаючи всі її поздовжні ребра, у перерізі завжди буде паралелограм.



Мал. 95

224. Чи може перерізом куба бути правильний п'ятикутник?

225. $ABCDEFA$ — неплоска замкнена ламана із шести ланок. Доведіть, що коли $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ і $CD \parallel FA$, то $AB = DE$, $BC = EF$ і $CD = FA$.

226. Відрізки AB і CD паралельних прямих розміщені між паралельними площинами α і β так, що точки A і C лежать у площині α, а B і D — у площині β. $CB = 7$ см, $AD = \sqrt{129}$ см. Знайдіть AB і BD, якщо DC на 3 см більший, ніж AC.

227. Дано тетраедр $ABCD$, $M \in AD$, $AM : MD = 1 : 3$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точку M паралельно площині (BDC). Знайдіть площу і периметр перерізу, якщо $\triangle BDC$ — рівносторонній і його площа дорівнює 64 см^2.

228. Дано тетраедр $ABCD$. $P \in BC$, $BP = CP$, $M \in AC$, $CM : AC = 1 : 3$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точку M паралельно площині (ADP). Знайдіть сторони перерізу, якщо $AB = AC = 20$ см, $BC = 16$ см, $AD = DB = DC = 17$ см.

229. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AM : MA_1 = DN : ND_1 = C_1K : KC = 2 : 1$. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точки M, N, K. Знайдіть його периметр, якщо $AB = a$.

230. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, M — середина A_1B_1. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через точку M паралельно площині (BB_1D_1). Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$.

231. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед, $AB = BC = a$, K — середина ребра A_1B_1 і $\angle KAC = \alpha$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через точки A, C, K, і знайдіть його площу. Обчисліть, якщо $a = 3{,}78$ дм, $\alpha = 75°$.

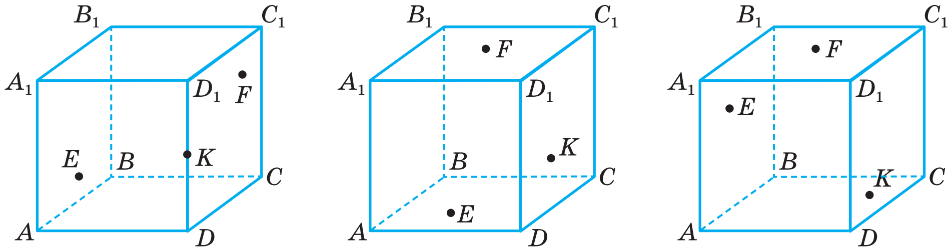
232. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, M — середина ребра CC_1. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через вершину C_1 паралельно площині (BMD). Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо ребро куба a.

233. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AB = a$. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через вершину D паралельно площині (AB_1C). Знайдіть периметр і площу перерізу.

234. Точка M — середина ребра B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точку M паралельно заданій площині. Установіть відповідність між площиною (1–4), паралельно якій будувався переріз, та площею (А–Д) фігури, що утворилася в перерізі, якщо ребро куба дорівнює 10.

1 (BB_1D_1)	**А** $44\sqrt{6}$	**Г** $50\sqrt{2}$
2 (CC_1D_1)	**Б** 100	**Д** $\dfrac{175\sqrt{6}}{4}$
3 (AB_1C)	**В** $75\sqrt{3}$	
4 (BKD), де K — середина CC_1		

235. Накресліть малюнки 96, *а–в* у зошиті і на кожному з них побудуйте переріз многогранника площиною, що проходить через точки E, F і K.

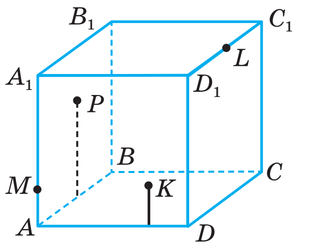


а	*б*	*в*
$E \in (ABB_1)$ $F \in (DCC_1)$	$E \in (ABC)$ $F \in (BB_1C_1)$ $K \in (DCC_1)$	$E \in (ABB_1)$ $F \in (BB_1C_1)$ $K \in (DCC_1)$

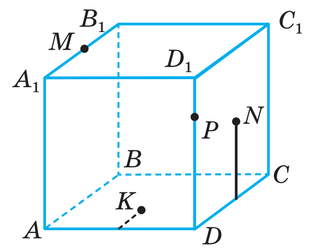
Мал. 96

236*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед. Точка P лежить в грані AA_1B_1B, K — в грані AA_1D_1D, $L \in C_1D_1$, $M \in AA_1$ (мал. 97). Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через точку M, паралельно площині (PKL).

237*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед. $M \in A_1B_1$, N лежить у площині грані DD_1C_1C, K — у площині грані $ABCD$ (мал. 98). Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через точку $P \in DD_1$, паралельно площині (MNK).



Мал. 97



Мал. 98

238*. Дано три паралельні площини α, α_1, α_2 і прямі a, b, які перетинають їх відповідно в точках A, A_1, A_2 і B, B_1, B_2. Доведіть, що $AA_1 : A_1A_2 = BB_1 : B_1B_2$.

239*. Проведіть дві паралельні площини, які відтинають на трьох даних попарно мимобіжних прямих рівні відрізки.

Практичне завдання

240. Зробіть з картону або цупкого паперу модель до теореми 9.

Задачі для повторення

241. Середня лінія трапеції дорівнює 8 см і поділяється діагоналлю на два відрізки так, що різниця між ними дорівнює 2 см. Знайдіть основи трапеції.

242. Прямі a і b — мимобіжні. Точки A і B лежать на прямій a, а точки M і N — на прямій b. Яке взаємне розміщення прямих AN і BM?

243. $ABCD$ — квадрат, точка K не лежить в його площині. Знайдіть периметр чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$, якщо A_1, B_1, C_1, D_1 — середини відрізків AK, BK, CK, DK і $AB = 8$ см.

§ 7 Паралельне проекціювання і його властивості

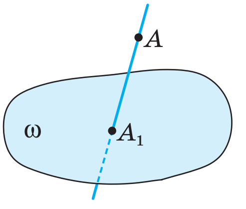
Зі шкільного курсу фізики відомо, що в реальному світі будь-який об'єкт незалежно від розміру відкидає тінь. Зображення предмета, «відкинуте» на площину за допомогою променів, називають **проекцією**. Ймовірно, ви бачили або й самі робили цікаві фігури за допомогою рук і тіні (мал. 99). Якщо тінь отримано за допомогою сонячних променів (які можна вважати паралельними), то зображені на малюнку 99 фігурки є паралельними проекціями долонь, складених певним чином.

Мал. 99

Паралельне проекціювання (проектування)* використовують для зображення просторових фігур у стереометрії.

Нехай дано довільну площину ω і точку A (мал. 100). Проведемо через точку A пряму, яка перетинає площину ω у деякій точці A_1. Знайдену в такий спосіб точку A_1 називають **проекцією точки** A на площину ω, пряму AA_1 — **проектуючою прямою**, ω — **площиною проекцій**.

Щоб побудувати проекцію будь-якої фігури, треба спроектувати на площину проекцій кожну точку даної фігури. Якщо проектуючі прямі проводять через одну точку, кажуть про **центральне проектування**. Якщо проектування здійснюється паралельними прямими, його називають **паралельним проектуванням**, а побудовані проекції — **паралельними проекціями**. У стереометрії фігури зображають зазвичай за допомогою паралельного проектування.



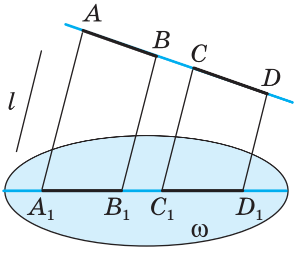
Мал. 100

ТЕОРЕМА 11

Якщо відрізки, що проектуються, не паралельні проектуючій прямій, то при паралельному проектуванні:
1) **відрізки фігури зображуються відрізками;**
2) **паралельні відрізки — паралельними відрізками або відрізками однієї прямої;**
3) **відношення довжин паралельних відрізків або відрізків однієї прямої зберігається.**

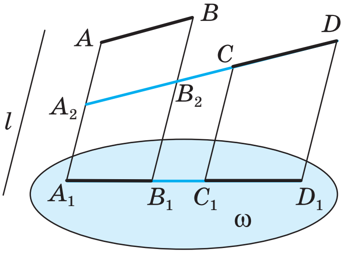
ДОВЕДЕННЯ.

1) Усі прямі, паралельні проектуючій прямій l, які перетинають даний відрізок AB, заповнюють частину площини α, обмежену паралельними прямими AA_1 і BB_1 (див. задачу 109). Ця частина площини перетинає площину проекцій ω по відрізку A_1B_1 — проекції відрізка AB на площину ω (мал. 101).



Мал. 101

2) Нехай відрізки AB і CD, що проектуються, паралельні. Усі прямі, що їх перетинають і паралельні l, заповнюють частини однієї площини (мал. 102) або паралельних площин (мал. 103). Ці частини площин перетинають площину ω відповідно по відрізках однієї прямої або по паралельних відрізках A_1B_1 і C_1D_1 — проекціях даних відрізків на площину ω.



Мал. 102

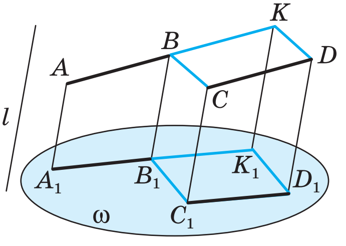
* Обидва терміни є правильними. Далі використовується *проектування*.

3) Якщо відрізки AB і CD, які проектують, розміщені на одній прямій (мал. 101), то за теоремою Фалеса:

$$A_1B_1 : C_1D_1 = AB : CD.$$

Якщо відрізки AB і CD паралельні, а їх проекції A_1B_1 і C_1D_1 лежать на одній прямій (мал. 102), то ABB_2A_2 — паралелограм. У цьому випадку

$$A_1B_1 : C_1D_1 = A_2B_2 : CD = AB : CD.$$



Мал. 103

Нарешті, якщо проекції A_1B_1 і C_1D_1 даних паралельних відрізків AB і CD не лежать на одній прямій (мал. 103), то побудуємо паралелограм $CDKB$. Його проекція — паралелограм $C_1D_1K_1B_1$. Маємо:

$$A_1B_1 : C_1D_1 = A_1B_1 : B_1K_1 = AB : BK = AB : CD.$$

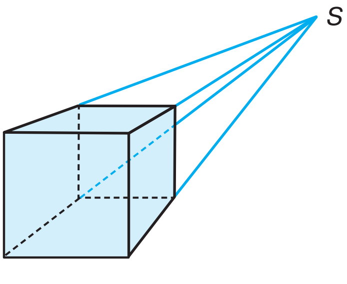
Отже, завжди $A_1B_1 : C_1D_1 = AB : CD$, тобто **довжини проекцій паралельних відрізків або відрізків однієї прямої відносяться, як довжини відрізків, які проектують.** □

Розглянуті властивості паралельного проектування дають змогу наочно і з більшою визначеністю зображати неплоскі фігури на площині.

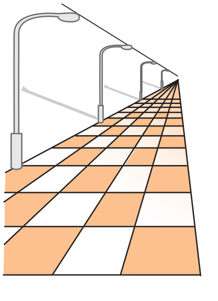
Оскільки інших проекцій, крім паралельних, далі не розглядатимемо, умовимося їх називати просто проекціями без слова «паралельні».

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Крім паралельного проектування, чимало фахівців користуються і центральним проектуванням, коли проектуючі прямі проходять через одну точку (мал. 104). Таким проектуванням, зокрема, користуються художники, називаючи його перспективою (мал. 105). Властивості центрального проектування відрізняються від паралельного проектування. Леонардо да Вінчі писав: «Живописець і є той, хто за потребою свого мистецтва створив... перспективу». А. Дюрер зізнавався: «Виявити закони перспективи я бажав більше, ніж отримати королівство».



Мал. 104


Мал. 105

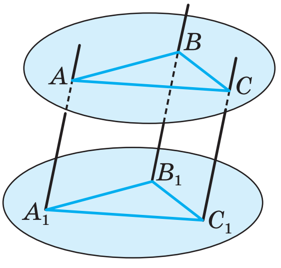
Властивості центрального проектування ми не розглядатимемо. Говорячи далі про проекції, матимемо на увазі тільки паралельні проекції.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Поясніть кількома реченнями, що називають проектуванням.
2. Які види проектування вам відомі?
3. Що називають паралельним проектуванням?
4. Сформулюйте і доведіть найважливіші властивості паралельного проектування.

Виконаємо разом

1 Доведіть, що коли $\triangle A_1B_1C_1$ — проекція $\triangle ABC$ і площини цих трикутників паралельні, то $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.



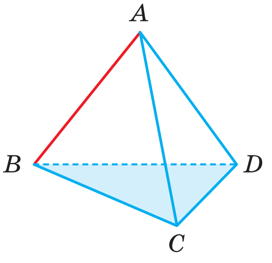
Мал. 106

● Оскільки площини трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ паралельні (мал. 106), то паралельні відрізки AA_1, BB_1, CC_1, що містяться між ними, рівні. Отже, чотирикутники ABB_1A_1, ACC_1A_1 і BCC_1B_1 — паралелограми, $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$. За трьома сторонами трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні.

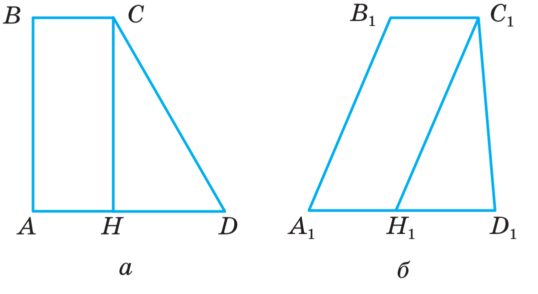
2 Чи правильно, що плоска фігура дорівнює своїй проекції тільки за умови, якщо вона розміщена в площині, паралельній площині проекцій?

● Ні. Наприклад, якщо $ABCD$ — правильний тетраедр, а проектуюча пряма AB, то грань BCD — проекція грані ACD (мал. 107). Ці грані рівні, хоча й не лежать у паралельних площинах.

3 Нехай трапеція $A_1B_1C_1D_1$ (мал. 108, *б*) є паралельною проекцією прямокутної трапеції $ABCD$ (мал. 108, *а*). Побудуйте проекцію висоти CH цієї трапеції.



Мал. 107



Мал. 108

● Нехай у трапеції $ABCD$ кути A і B прямі. Тоді висота CH буде паралельна стороні AB. Оскільки при паралельному проектуванні паралельні прямі переходять у паралельні прямі, то через точку C_1 потрібно провести пряму C_1H_1, паралельну A_1B_1.

Задачі і вправи

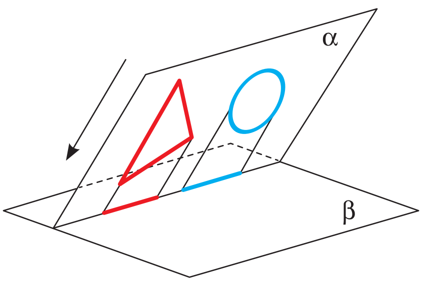
Виконайте усно

244. Проекція фігури — точка. Назвіть цю фігуру.

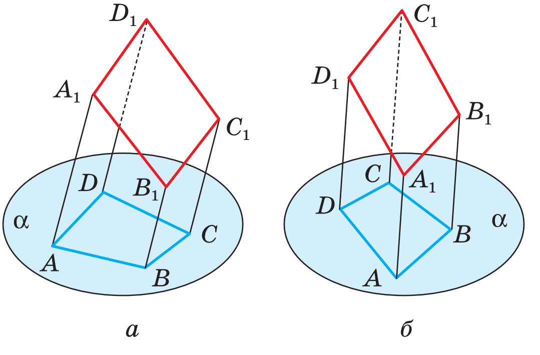
245. Відрізок a — проекція відрізка b. Чи завжди a коротший, ніж b?

246. Розгляньте малюнок 109 і назвіть інші фігури, проекціями яких може бути відрізок. Обґрунтуйте.

247. $ABCD$ — паралельна проекція паралелограма $A_1B_1C_1D_1$ на площину α (мал. 110). Укажіть помилки на малюнках.



Мал. 109



Мал. 110

248. Чи може бути:

а) ромб проекцією квадрата;
б) ромб проекцією трапеції;
в) рівнобічна трапеція проекцією нерівнобічної;
г) нерівнобічна трапеція проекцією рівнобічної;
ґ) відрізок проекцією неплоскої фігури?

249. Учень говорить: «Якщо фігура A така, що її проекції на дві різні площини — відрізки, то A — відрізок». Чи правильно це?

А

250. Кожна сторона трикутника паралельна його проекції. Зобразіть малюнок. Доведіть, що ці трикутники рівні.

251. Чи можуть непаралельні прямі проектуватися в паралельні прямі? Відповідь обґрунтуйте. Виконайте малюнки.

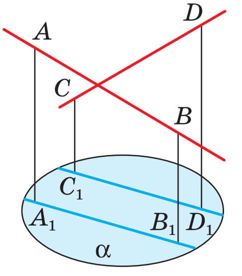
252. Якою фігурою може бути паралельна проекція на площину двох прямих, які: а) перетинаються; б) паралельні; в) мимобіжні? Розгляньте різні випадки. Виконайте малюнки.

253. Якою фігурою може бути проекція прямого кута?

254. Як потрібно розмістити у просторі три точки, щоб їх паралельними проекціями були: а) одна точка; б) дві точки; в) три точки, які лежать на одній прямій; г) три точки, які не лежать на одній прямій? Виконайте малюнки.

255. Доведіть, що паралельною проекцією многокутника, площина якого паралельна площині проекцій, є многокутник, рівний даному.

256. Чи перетинаються прямі AB і CD, зображені на малюнку 111, якщо A_1B_1 і C_1D_1 — їхні проекції на площину α?



Мал. 111

257. Трикутник $A_1B_1C_1$ — проекція трикутника ABC. Побудуйте проекції середніх ліній і медіан трикутника ABC.

258. Намалюйте довільний паралелограм. Нехай він — проекція ромба з кутом 120°. Побудуйте проекцію висоти ромба, проведеної з вершини цього кута.

259. Нехай паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ — проекція квадрата $ABCD$. Побудуйте проекції осей симетрії цього квадрата.

260. Накресліть довільний паралелограм $A_1B_1C_1D_1$. Нехай він — проекція деякого прямокутника $ABCD$. Побудуйте проекції прямих, які проходять через точку перетину діагоналей паралельно його сторонам.

261. BH, BM, BL — висота, медіана і бісектриса трикутника ABC. $\triangle A_1B_1C_1$ — паралельна проекція $\triangle ABC$. Чи буде паралельною проекцією відрізків BH, BM, BL висота, медіана і бісектриса $\triangle A_1B_1C_1$? Відповідь обґрунтуйте.

262. Накресліть довільний трикутник $A_1B_1C_1$. Нехай він є паралельною проекцією рівностороннього $\triangle ABC$. Побудуйте проекції прямих, які проходять через точку M $(M \in AB)$ перпендикулярно до сторін трикутника.

263. Паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ є паралельною проекцією ромба $ABCD$. Побудуйте проекції перпендикулярів, проведених з точки M $(M \in BC)$ до діагоналей ромба.

264. M — внутрішня точка квадрата $ABCD$. Нехай паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ і його внутрішня точка M_1 — паралельна проекція цього квадрата і точки M. Побудуйте проекції прямих, які проходять через точку M перпендикулярно до: а) сторін квадрата; б) діагоналей квадрата.

Б

265. Якою фігурою може бути паралельна проекція на площину: а) куба; б) тетраедра; в) чотирикутної піраміди? Виконайте відповідні малюнки.

266. Намалюйте довільну трапецію $A_1B_1C_1D_1$. Нехай вона — проекція деякої рівнобічної трапеції $ABCD$. Побудуйте проекцію висоти цієї трапеції, проведеної з вершини B.

267. Нехай паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ є паралельною проекцією ромба $ABCD$, у якого $\angle A = 60°$. Побудуйте проекції висот ромба, проведених з точки A.

268. Накресліть довільний $\triangle A_1B_1C_1$. Нехай він — паралельна проекція $\triangle ABC$ $(\angle C = 90°)$ з катетами 6 см і 8 см. Побудуйте проекції центрів кіл, вписаного в трикутник і описаного навколо нього.

269. Паралельною проекцією точок M, N, K, що лежать на одній прямій, на площину α є точки M_1, N_1, K_1. Знайдіть M_1N_1 і M_1K_1, якщо $MN = 6$ см, $MK = 4$ см, $N_1K_1 = 5$ см.

270. Чи правильно, що коли F_1 — проекція плоскої фігури F, то і F — проекція фігури F_1?

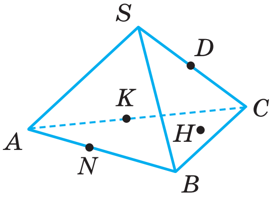
271. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 6 см. Знайдіть площу проекції трикутника AB_1C:
а) на площину грані $ABCD$ в результаті проектування в напрямі B_1B;
б) на площину грані ABB_1A_1 в результаті проектування в напрямі C_1A_1;
в) на площину грані CBB_1C_1 в результаті проектування в напрямі AC_1.

272*. $PABC$ — тетраедр, площа грані ABC дорівнює Q. Знайдіть площу паралельної проекції його грані PBC на площину (ABC) у результаті проектування: а) у напрямі PA; б) у напрямі PM, де M — середина ребра AB.

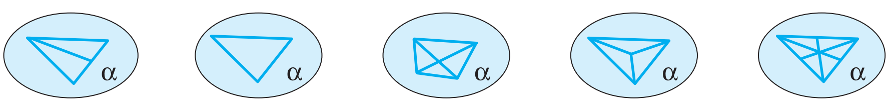
273*. Паралельною проекцією правильного п'ятикутника є п'ятикутник $ABCDE$, у якого $AB = BC = 1$, $\angle ABC = 90°$. Знайдіть довжини решти сторін п'ятикутника $ABCDE$.

274. Дано тетраедр $SABC$ (мал. 112), у якого $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $K \in AC$, $D \in SC$, $N \in AB$, $H \in (ABC)$. Установіть відповідність між проектуючою прямою (1–4) та зображенням тетраедра $SABC$ (А–Д) при паралельному проектуванні на площину α.

1 SA **3** SK
2 SH **4** DN



Мал. 112



А **Б** **В** **Г** **Д**

Практичне завдання

275. За допомогою настільної лампи створіть зображення прямокутного аркуша паперу, «відкинуте» променями на площину столу. Дослідіть, якою фігурою може бути проекція прямокутника при центральному проектуванні.

Задачі для повторення

276. Дано пряму a і точку M, $M \notin a$. Через точку M проведіть пряму b так, щоб прямі a і b були: а) паралельні; б) мимобіжні; в) перетиналися.

277. K, P, T — середини ребер AB, CD і A_1B_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз цього паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки: а) K, P, T; б) K, P, A_1; в) C, D, T.

278. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед, $AB = BC = a$ і $\angle B_1AC = \alpha$. Знайдіть площу трикутника AB_1C.

§ 8 Зображення фігур у стереометрії

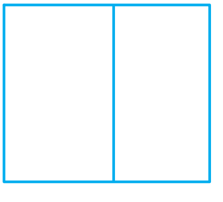
У стереометрії розглядаються не тільки плоскі, а й неплоскі фігури. Зображати неплоскі фігури на площині непросто: неминуче доводиться спотворювати деякі їхні елементи.

Особливо живописці намагалися з'ясувати, як найкраще зображати просторові фігури на плоскому полотні, щоб отримати зображення, схожі з реальними. Вони виявили, що для цього найбільш придатна перспектива — центральне проектування (див. мал. 104, 105).

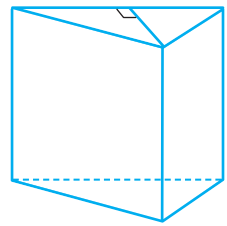
Для геометрів, креслярів та інших фахівців кращим виявилося паралельне проектування, коли паралельні відрізки фігури-оригіналу проектуються на паралельні відрізки.

Якщо маємо яку-небудь фігуру F — оригінал і її паралельну проекцію F_1 на площині, то F_1 можна вважати зображенням фігури F. А як зображати на аркуші паперу надто великі об'єкти, наприклад куб зі стороною 10 м? Домовилися зображенням такого куба вважати його проекцію на площину, зменшену в кілька разів.

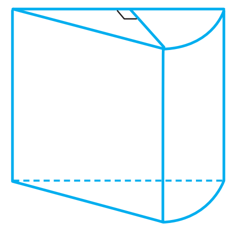
У геометрії **зображенням фігури** називають будь-яку фігуру, подібну до паралельної проекції даної фігури. При цьому мають на увазі проекції, які дають змогу однозначно визначити форму зображуваної фігури. Оскільки, наприклад, кожний многокутник можна спроектувати на площину так, що його проекцією буде відрізок. Паралельною проекцією куба може бути, крім інших, прямокутник з відрізком (мал. 113). А такі зображення ненаочні і незрозумілі: існує безліч різних геометричних тіл, відмінних від куба, що мають такі самі проекції (мал. 114, 115).


Мал. 113

Якщо проектуюча пряма паралельна площині плоскої фігури, то проекцією такої фігури є точка, відрізок, промінь чи пряма. Зокрема, проекцією трикутника, довільного многокутника, кола і круга може бути відрізок. Такі проекції називають **виродженими.** Здебільшого у стереометрії розглядають невироджені проекції.

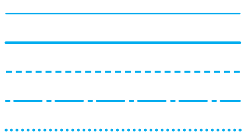


Мал. 114



Мал. 115

Щоб зображення многогранника було зрозумілішим, з усіх можливих його проекцій вибирають такі, на яких є зображення усіх його ребер. При цьому «невидимі» ребра (розташовані за іншими частинами многогранника) зображають *штриховими відрізками.* Креслярі користуються й іншими видами ліній (мал. 116).



Мал. 116

У стереометрії найчастіше доводиться мати справу із зображеннями неплоских фігур: призм, пірамід тощо. А щоб правильно виконувати їх, бажано знати, якими можуть бути зображення трикутника, паралелограма, кола тощо.

Зображенням паралелограма може бути будь-який інший паралелограм, оскільки при паралельному проектуванні паралельні підрізки відображаються на паралельні відрізки. Зокрема, ромб, прямокутник, квадрат можна зображати будь-яким паралелограмом. І навпаки, будь-який паралелограм можна вважати зображенням квадрата, ромба, прямокутника чи іншого паралелограма.

Зображенням трапеції може бути будь-яка інша трапеція з таким самим відношенням довжин основ, оскільки при паралельному проектуванні відношення довжин паралельних відрізків зберігається.

Зображаючи плоскі фігури при паралельному проектуванні, корисно враховувати дві такі теореми.

ТЕОРЕМА 12

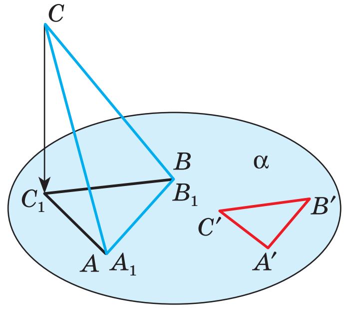
Довільний трикутник $A'B'C'$ може бути зображенням даного трикутника ABC.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай у площині α дано $\triangle A'B'C'$, а в просторі — $\triangle ABC$. Доведемо, що $\triangle ABC$ можна так розмістити у просторі відносно площини α і задати такий напрям проектування, що проекцією $\triangle ABC$ буде трикутник, подібний до $\triangle A'B'C'$.

Побудуємо у площині α $\triangle A_1B_1C_1$, подібний до $\triangle A'B'C'$ так, щоб $A_1B_1 = AB$ (мал. 117). $\triangle ABC$ розмістимо у просторі так, щоб сторони A_1B_1 і AB сумістилися, а площина $\triangle ABC$ не збігалася з площиною α. Тоді при паралельному проектуванні в напрямі CC_1 проекцією $\triangle ABC$ буде $\triangle A_1B_1C_1$, подібний до $\triangle A'B'C'$. А це означає, що $\triangle A'B'C'$ — зображення $\triangle ABC$. □

Із цієї теореми випливає, що зображенням даного трикутника (у тому числі й рівнобедреного, рівностороннього, прямокутного) може бути довільний трикутник.



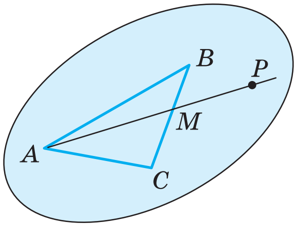
Мал. 117

ТЕОРЕМА 13

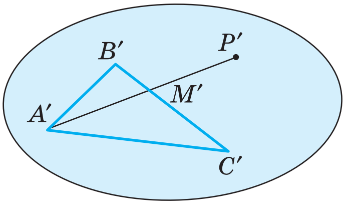
Якщо на площині зображень α зображенню $\triangle ABC$ відповідає $\triangle A'B'C'$, то на площині α можна однозначно побудувати зображення довільної точки, яка лежить у площині $\triangle ABC$.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай P — довільна точка, що лежить у площині $\triangle ABC$ (мал. 118), і промінь AP перетинає сторону BC у точці M. Побудуємо зображення точки P у площині α. Нехай $\triangle A'B'C'$ — зображення $\triangle ABC$ (мал. 119). Скориставшись умовою $B'M' : M'C' = BM : MC$, на прямій $B'C'$ побудуємо єдину точку M'. А за умовою $A'M' : M'P' = AM : MP$ можемо побудувати точку P' — зображення точки P. □



Мал. 118



Мал. 119

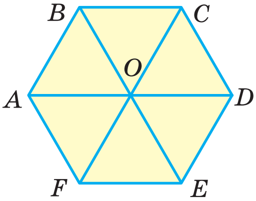
На основі цих теорем зображення плоскої фігури F можна виконувати в такий спосіб:

1. Виділити у фігурі F який-небудь трикутник.
2. Зобразити цей трикутник довільним трикутником.
3. Побудувати зображення інших точок фігури F, користуючись тільки тими її властивостями, які зберігаються при паралельному проектуванні.

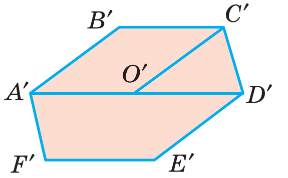
Для виконання деяких зображень доцільно в заданій фігурі виділяти не трикутник, а інший многокутник. Наприклад, щоб побудувати зображення правильного шестикутника $ABCDEF$ (мал. 120), потрібно врахувати, що $ABCO$ — ромб, точка O — центр симетрії шестикутника. Отже, щоб зобразити цей шестикутник, потрібно (мал. 121):

1. Побудувати довільний паралелограм $A'B'C'O'$ — зображення ромба $ABCO$.

2. Побудувати точки D', E', F', симетричні точкам A', B', C' відносно точки O'.



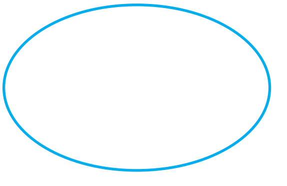
Мал. 120



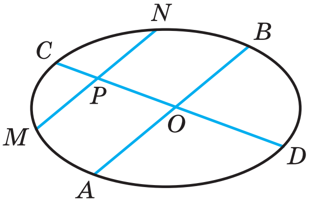
Мал. 121

Правильний шестикутник можна зображати довільним шестикутником, кожна сторона якого паралельна протилежній стороні й одній з діагоналей, що проходить через центр шестикутника.

При паралельному проектуванні коло відображається на еліпс. Тому в стереометрії коло зображають довільним еліпсом (мал. 122), а зображення циліндра, конуса та інших фігур обертання містять різні еліпси. Детальніше з ними ви ознайомитеся в 11-му класі.


Мал. 122

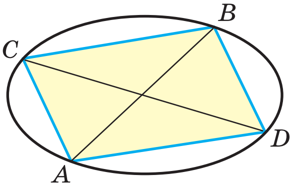
При зображенні многокутників, вписаних у коло або описаних навколо нього, користуються поняттям спряжених діаметрів. Два діаметри еліпса називають **спряженими**, якщо кожний з них ділить хорди, паралельні іншому, навпіл. На оригіналі спряженим діаметрам еліпса відповідають перпендикулярні діаметри кола. Щоб побудувати спряжені діаметри еліпса (мал. 123), потрібно:



Мал. 123

1. Побудувати довільний діаметр AB.
2. Провести довільну хорду $MN \parallel AB$.
3. Знайти точку P — середину хорди MN.
4. Через точки O і P провести діаметр CD.

Якщо сполучити послідовно точки A, C, B, D, то отримаємо зображення квадрата, вписаного в коло (мал. 124). Чому?



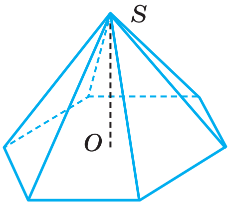
Мал. 124

Креслити просторові фігури потрібно так, щоб зображення було правильним (було фігурою, подібною до паралельної проекції оригіналу) і наочним (давало правильне уявлення про форму оригіналу), швидко і легко виконувалося.

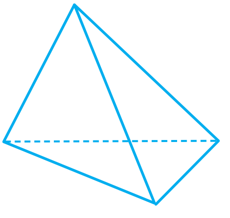
Щоб зобразити піраміду (мал. 125), потрібно:

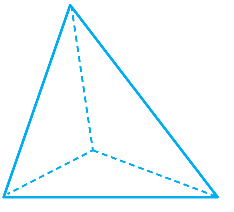
1. Побудувати зображення многокутника, який лежить в її основі.
2. За умовою задачі знайти положення точки O — основи висоти SO (див. с. 108).
3. З точки O вертикально вгору провести промінь, на якому вибрати точку S — вершину піраміди.
4. Сполучити точку S з вершинами основи.
5. Виділити видимі і невидимі ребра піраміди.

Зображенням довільного тетраедра при паралельному проектуванні може бути будь-який чотирикутник з проведеними в ньому діагоналями. Для наочності невидимі ребра тетраедра зображають штриховими лініями (мал. 126). Зображення тетраедра на малюнку 127 правильне, але ненаочне.



Мал. 125

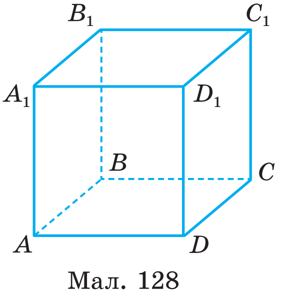

Мал. 126


Мал. 127

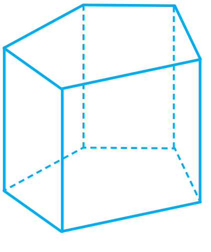
Паралелепіпед краще будувати, починаючи з основи (мал. 128):

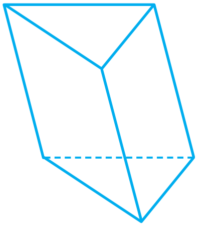
1. Побудувати довільний паралелограм $ABCD$.
2. По один бік від площини цього паралелограма провести паралельні відрізки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, що мають рівні довжини.
3. Побудувати паралелограм $A_1B_1C_1D_1$.
4. Виділити видимі й невидимі ребра.

Побудову призми виконують аналогічно, починаючи з основи. Для наочності бічні ребра прямої призми зображають вертикальними відрізками (мал. 129), а похилої призми — похилими (мал. 130).



Мал. 128


Мал. 129


Мал. 130

Різні способи зображення просторових фігур на площині розглядаються в кресленні і в нарисній геометрії.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Художники намагаються відтворити багатогранне багатство світу, об'ємність та повноту предметів на полотні чи папері. До того ж є картини, на яких зображено просторові об'єкти, створені на основі оптичних ілюзій з використанням «неможливих фігур». Це, наприклад, відома робота М. Ешера «Водоспад» (мал. 131). У ній поєднано два «неможливих трикутники», придумані математиком Роджером Пенроузом. Створюється враження, що водоспад є замкненою системою і працює як вічний двигун. Знайдіть на малюнку «неможливі трикутники». Дізнайтеся більше про «неможливі фігури».

«Неможливі фігури» — фігури, що на перший погляд здаються проекцією звичайного тривимірного об'єкта, але під час уважного їх дослідження можна побачити суперечливі поєднання елементів фігури.

Мал. 131

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

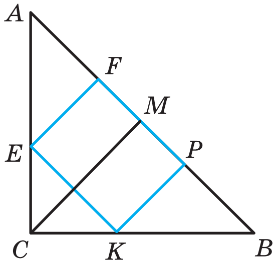
1. Що називають зображенням фігури у стереометрії?
2. Який вид проектування використовують при зображенні фігур у стереометрії?
3. Сформулюйте і доведіть теорему про зображення трикутника.
4. Якими фігурами можна зображати паралелограм, прямокутник, квадрат, ромб?
5. Якими фігурами можна зображати трапецію?
6. Якою фігурою у стереометрії зображають коло?
7. Як побудувати спряжені діаметри еліпса?
8. Як побудувати прямокутний паралелепіпед, похилий паралелепіпед, трикутну призму, чотирикутну піраміду?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

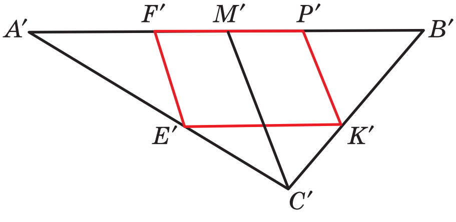
1 Побудуйте зображення квадрата, вписаного в рівнобедрений прямокутний трикутник, якщо дві вершини квадрата лежать на гіпотенузі, а дві інші — на катетах.

● Нехай квадрат $EFPK$ вписаний у $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90°$, $AC = BC$ (мал. 132). Якщо трикутник рівнобедрений прямокутний, то $\angle A = 45°$, тоді $\angle AEF = 45°$. Значить, $\triangle AEF$ — рівнобедрений прямокутний і $AF = FE = FP$. Аналогічно доводиться, що $BP = PK = PF$. Тоді $AF = FP = PB$.

Проведемо $CM \perp AB$, тоді M — середина AB. Оскільки $KP \perp AB$, $EF \perp AB$, то $KP \parallel EF \parallel CM$. Враховуючи це, можемо виконати побудову зображення (мал. 133).



Мал. 132



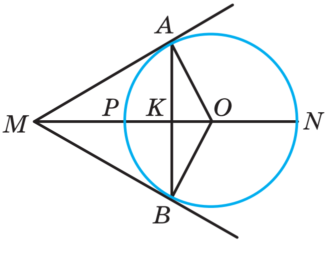
Мал. 133

1. Побудуємо довільний $\triangle A'B'C'$, який є зображенням $\triangle ABC$.
2. Точками F' і P' поділимо відрізок $A'B'$ на три рівні частини.
3. Проведемо відрізок $C'M'$, де M' — середина $A'B'$.
4. Проведемо $E'F' \parallel C'M'$ і $P'K' \parallel C'M'$. Чотирикутник $E'F'P'K'$ — зображення шуканого квадрата.

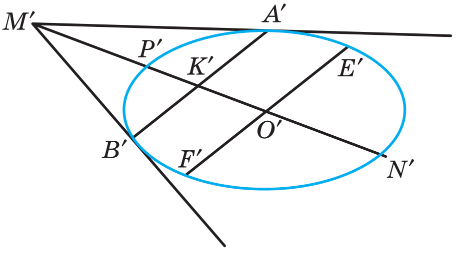
2 PN — діаметр кола. На промені NP знайдіть точку M таку, що дотичні, проведені з неї до кола, утворюють кут $60°$ (мал. 134). Побудуйте зображення точки M та дотичних.

● Нехай MA і MB — дотичні, $\angle AMB = 60°$. Тоді $\angle AMO = \angle OAK = 30°$, тому $MO = 2OA = 2OP$ і $OK = 0{,}5OA = 0{,}5OP$. Враховуючи, що $AB \perp MO$, можемо будувати зображення.

Нехай еліпс із центром O' є зображенням даного кола, а діаметр $P'N'$ — зображенням діаметра PN (мал. 135).



Мал. 134



Мал. 135

1. Проведемо промінь $N'P'$ і позначимо на ньому точку M' таку, що $O'M' = 2O'P'$.
2. Позначимо точку K' — середину $P'O'$.
3. Побудуємо діаметр $E'F'$, спряжений до $P'N'$.
4. Через точку K' проведемо $A'B' \parallel E'F'$.
5. Проведемо промені $M'A'$ і $M'B'$, які і будуть зображенням шуканих дотичних.

Задачі і вправи

Виконайте усно

279. Чи може рівносторонній трикутник бути зображенням прямокутного трикутника? А тупокутного?

280. Чи може зображенням квадрата бути ромб? А зображенням трапеції паралелограм?

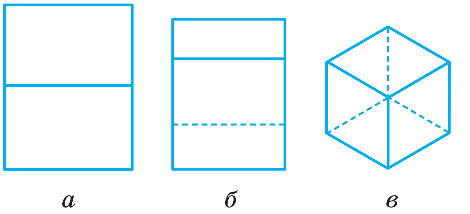
281. Зображенням якого трикутника є трикутник ABC, якщо точка B лежить на еліпсі, а AC — діаметр цього еліпса?

282. AB і CD — два довільні діаметри еліпса. Зображенням якого чотирикутника є чотирикутник $ACBD$? А якщо діаметри спряжені?

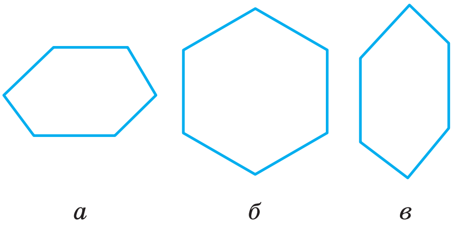
283. Яка з наведених на малюнку 136 фігур є зображенням (паралельною проекцією) куба?

284. Який із шестикутників (мал. 137) є зображенням правильного шестикутника? Чому?

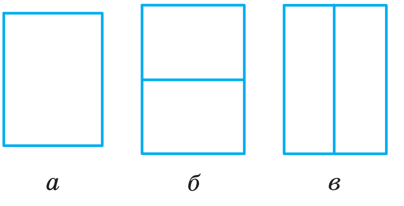
285. Чи можна малюнок 138 вважати зображенням прямокутного паралелепіпеда? Чи наочне таке його зображення?



Мал. 136



Мал. 137



Мал. 138

А

286. Точки A_1, A_2, A_3, які не лежать на одній прямій, є паралельними проекціями двох вершин і точки перетину діагоналей паралелограма. Побудуйте зображення паралелограма. Скільки розв'язків має задача?

287. Точки A_1, A_2, A_3, які не лежать на одній прямій, є паралельними проекціями однієї вершини і середин двох сторін трикутника. Побудуйте зображення трикутника. Скільки розв'язків має задача?

288. Побудуйте зображення прямих, які проходять через точку M — внутрішню точку рівностороннього $\triangle ABC$, перпендикулярно до сторін цього трикутника.

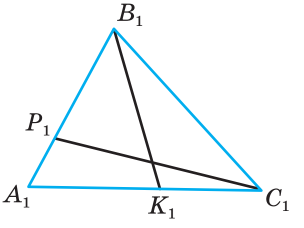
289. Трикутник $A'B'C'$ — паралельна проекція рівностороннього $\triangle ABC$. Побудуйте зображення центра кола, вписаного в трикутник.

290. Трикутник $A'B'C'$ — паралельна проекція рівнобедреного прямокутного $\triangle ABC$ $(\angle C = 90°)$. Побудуйте зображення серединних перпендикулярів, проведених до сторін трикутника.

291. Дано зображення трикутника і двох його висот (мал. 139). Побудуйте зображення центра описаного кола.

292. Трикутник $A'B'C'$ — паралельна проекція прямокутного $\triangle ABC$ $(\angle C = 90°)$. Побудуйте зображення центра вписаного в трикутник кола, якщо $BC : AB = 4 : 5$.

293. У трикутнику ABC $AB : AC = 2 : 3$. Побудуйте зображення бісектриси, проведеної з вершини A.



Мал. 139

294. Основи рівнобедреної трапеції пропорційні числам 1 і 2. Побудуйте зображення цієї трапеції, її середньої лінії та висот.

295. Накресліть еліпс і проведіть довільний діаметр AB. Побудуйте діаметр, спряжений до AB.

296. Побудуйте зображення: а) квадрата, вписаного в коло; б) квадрата, описаного навколо кола.

297. Побудуйте зображення правильного трикутника: а) вписаного в коло; б) описаного навколо кола.

298. Побудуйте зображення прямокутного трикутника, вписаного в коло.

299. Побудуйте зображення прямокутника, вписаного в коло.

300. На зображенні кола дано точку M. Побудуйте зображення дотичної, проведеної до кола в цій точці.

301. Побудуйте зображення квадрата, вписаного в прямокутний трикутник, якщо вони мають спільний прямий кут і:
а) трикутник рівнобедрений;
б) катети, пропорційні числам 3 і 5;
в) гіпотенуза і катет відносяться як 13 : 5.

Б

302. Побудуйте зображення паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо дано зображення точок: а) A, B, C, D_1; б) A, B, D, A_1; в) B, B_1, C_1, D.

303. Гострий кут ромба дорівнює 60°. Побудуйте зображення висот цього ромба, проведених з вершини: а) тупого кута; б) гострого кута.

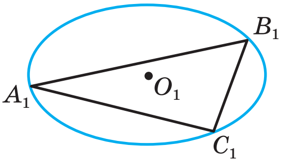
304. Бічна сторона і основа рівнобедреного трикутника відносяться як 3 : 2. Побудуйте зображення центра кола, вписаного в трикутник.

305. У рівнобедреному трикутнику ABC висота AH ділить сторону BC у відношенні $BH : HC = 3 : 1$. Побудуйте зображення центра кола, описаного навколо трикутника.

306. Еліпс, центр якого невідомий, є зображенням кола. Побудуйте зображення центра кола.

307. Дано зображення кола, його центра та трикутника, вписаного в це коло (мал. 140). Побудуйте зображення висот цього трикутника.

308. Побудуйте зображення правильного шестикутника: а) вписаного в коло; б) описаного навколо кола.



Мал. 140

309. На площині дано зображення кола, його центра O, пряма l і точка M, яка не належить ні прямій, ні колу. Побудуйте зображення перпендикуляра, проведеного з точки M до прямої l.

310. Побудуйте зображення правильного п'ятикутника.

311. Сторони прямокутника відносяться як $\sqrt{3}:1$. Побудуйте зображення перпендикуляра, проведеного з вершини прямокутника до його діагоналі.

312. Побудуйте зображення правильного трикутника, вписаного в квадрат, якщо одна його вершина збігається з вершиною квадрата, а дві інші — лежать на сторонах квадрата.

313. Побудуйте зображення ромба $AMNK$, вписаного в $\triangle ABC$ так, що $\angle A$ в них спільний, якщо:
а) $AB = BC = AC$; б) $AB = BC = 2AC$; в) $AB : AC = 3 : 5$.

314. $ABCDEF$ — правильний шестикутник. Побудуйте зображення перпендикуляра, проведеного з вершини A на: а) діагональ CF; б) сторону CD; в) сторону BC.

315. ***Відкрита задача.*** $ABCDEF$ — правильний шестикутник. Побудуйте зображення перпендикуляра, проведеного з вершини D на **...** .

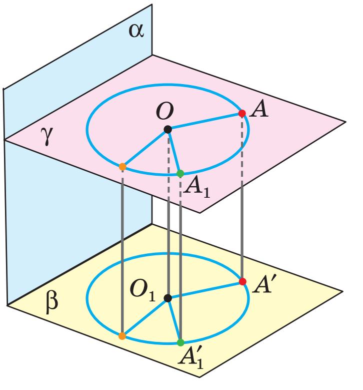
316*. Діагоналі ромба відносяться як 1 : 2. Побудуйте зображення висоти, проведеної з вершини тупого кута.

317*. Побудуйте зображення квадрата, вписаного в рівносторонній трикутник так, що дві його сусідні вершини лежать на одній стороні трикутника, а дві інші — по одній на двох інших сторонах трикутника.

318*. Побудуйте зображення правильного трикутника, вписаного в квадрат так, що вони мають спільну сторону, а вершина трикутника лежить всередині цього квадрата.

Практичне завдання

319. За допомогою моделі, зображеної на малюнку 141, можна показати, що паралельною проекцією кола є таке саме коло. Створіть модель, за допомогою якої можна показати, що паралельною проекцією кола є: а) відрізок; б) еліпс.



Мал. 141

Задачі для повторення

320. Правильний шестикутник і площина α розміщені так, що: а) $AB \parallel \alpha$ і $BE \parallel \alpha$; б) $BC \parallel \alpha$ і $AE \parallel \alpha$; в) $AB \parallel \alpha$ і $FC \parallel \alpha$. Чи будуть паралельними площина шестикутника і площина α?

321. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через середину ребра: а) A_1D_1; б) CC_1 проведено площину паралельно площині (AB_1D_1). Знайдіть периметр і площу утвореного перерізу, якщо $AB = a$.

322. Площини α і β перетинаються по прямій c. У площині α проведено пряму a, $a \parallel c$. Укажіть кілька способів побудови прямої b, $b \subset \beta$, $b \parallel a$.

§ 9 Методи побудови перерізів многогранників

Раніше ви вже будували перерізи многогранників площиною. Виконували їх, використовуючи аксіоми стереометрії та теореми про паралельність прямих і площин. Існують й інші методи побудови перерізів. Найефективнішими є такі три методи: 1) метод слідів; 2) метод внутрішнього проектування; 3) комбінований метод.

Метод слідів. З методом слідів ви ознайомилися в § 3. Нагадаємо, що пряму, по якій січна площина перетинає площину α, називають **слідом січної площини в площині α**. Точка, у якій січна площина перетинає пряму, — **слід січної площини на цій прямій.**

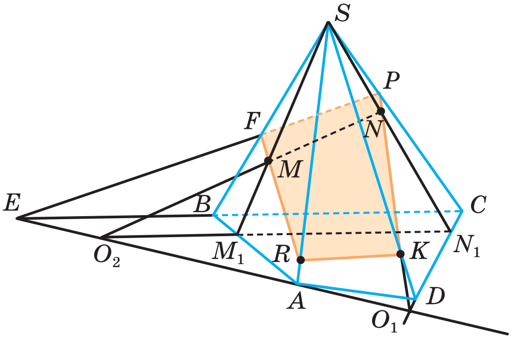
Розглянемо кілька прикладів.

Задача 1. Побудуйте переріз чотирикутної піраміди $SABCD$ площиною, яка проходить через точки M, N, K (мал. 142).

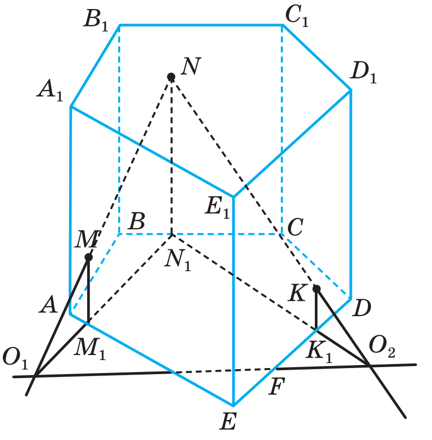
Побудуємо слід січної площини у площині основи. Для цього спроектуємо точки M, N, K на площину основи з точки S. Отримаємо точки M_1, N_1, а проекція точки K збіжиться з точкою D. Знайдемо дві точки сліду, побудувавши точки O_1 $\left(NK \cap N_1D = O_1\right)$ і O_2 $\left(MN \cap M_1N_1 = O_2\right)$. Отже, пряма O_1O_2 — слід січної площини у площині основи. Тепер можемо побудувати шуканий переріз. Нехай $BC \cap O_1O_2 = E$, а $NK \cap SC = P$. Провівши пряму EP, отримаємо відрізок PF, по якому січна площина перетинає грань BSC. Далі, якщо $FM \cap AS = R$, проведемо відрізки FR і RK. Чотирикутник $RFPK$ — шуканий переріз.

Задача 2. Побудуйте переріз п'ятикутної призми площиною, яка проходить через точки M, N, K (мал. 143).

Спроектуємо точки M, N, K на площину основи паралельно бічному ребру призми. Отримаємо точки M_1, N_1, K_1. Побудуємо точки сліду як точки



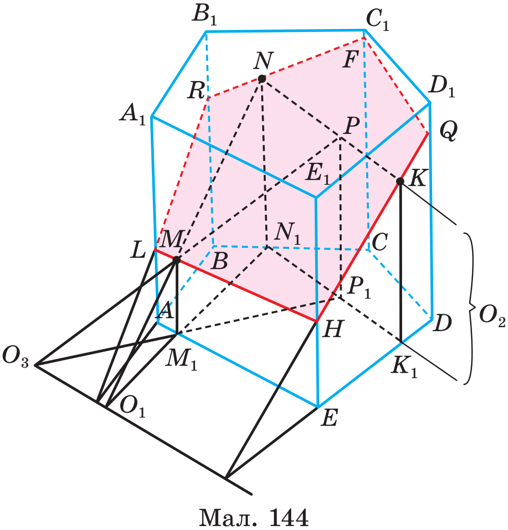
Мал. 142



Мал. 143

перетину прямих MN і M_1N_1 та прямих NK і N_1K_1. Побудувавши слід O_1O_2, зможемо побудувати і шуканий переріз. Пропонуємо зробити це самостійно.

Якщо точку K грані DEE_1D_1 дано вище (мал. 144), то точку O_2 побудувати складно, бо прямі перетнуться далеко за межами малюнка. У цьому випадку краще користуватися іншим методом. Виберемо на прямій NK довільну точку P. Тоді $P \in (MNK)$, а значить, точки M, N, P визначають ту саму площину, що і точки M, N, K. Тепер побудуємо слід площини (MNP). Для цього спочатку на прямій N_1K_1 побудуємо точку P_1, яка є паралельною проекцією точки P (напрям проектування не змінюється — паралельний бічному ребру призми). Знайдемо точку O_3 — точку перетину прямих PM і P_1M_1. Отримали пряму O_1O_3 — слід січної площини. Зробивши відповідні побудови, отримаємо шуканий переріз — п'ятикутник $LRFQH$.

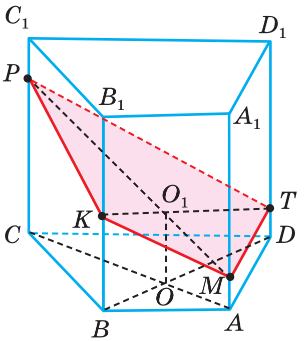


Мал. 144

Метод внутрішнього проектування*. Цей метод універсальний і має деякі переваги над методом слідів, особливо, коли слід січної площини знаходиться далеко за межами малюнка (як це було в задачі 2).

Якщо многогранником, переріз якого будується, є призма, то найчастіше використовуємо паралельне проектування на площину основи. При цьому його напрям визначається бічним ребром призми. Якщо ж многогранником є піраміда, то використовується центральне проектування на площину основи. Центром проектування є вершина піраміди, у якій сходяться всі бічні ребра.

Задача 3. Побудуйте переріз призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки K, P, T (мал. 145).



Мал. 145

Нехай $KPTM$ — переріз, який треба побудувати. Одну з його діагоналей KT можна побудувати, оскільки дано точки K і T. Задача зводиться до побудови другої діагоналі. Проекції обох цих діагоналей побудувати неважко, оскільки вони є діагоналями основи призми. Встановимо відповідність: діагоналі перерізу KT відповідає проекція BD; діагоналі перерізу PM — проекція CA; перетину діагоналей перерізу O_1 — точка O.

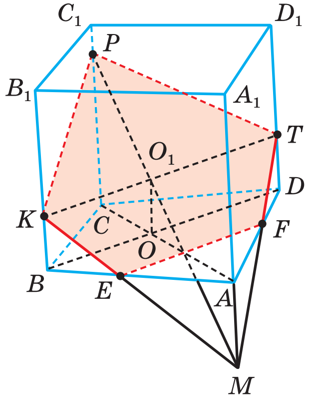
З описаного аналізу випливає такий спосіб розв'язання задачі:

1) проводимо діагоналі основи призми AC, BD і позначаємо точку O їх перетину;

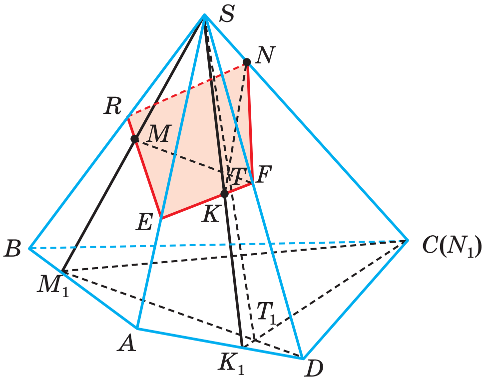
2) проводимо діагональ перерізу KT, яку можна провести;

3) через точку O проводимо пряму, паралельну AA_1, до перетину з діагоналлю KT у точці O_1;

4) проводимо пряму PO_1 до перетину з AA_1 у точці M.



Мал. 146



Мал. 147

Залежно від того, як розміщені дані точки K, P і T, у перерізі може бути чотирикутник $KPTM$ (мал. 145) або п'ятикутник $KPTFE$ (мал. 146).

Будувати переріз піраміди методом внутрішнього проектування можна аналогічно, тільки слід користуватися центральним проектуванням.

Задача 4. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точки M, N, K (мал. 147).

Спроектуємо точки M, N, K з вершини S на площину $ABCD$. Отримаємо точки M_1, K_1, а точка N_1 збіжиться з точкою C.

Якщо $DM_1 \cap CK_1 = T_1$, а $ST_1 \cap NK = T$, то $MT \cap SD = F$. Визначаємо точки E і R, у яких січна площина перетинає ребра SA і SB.

$FK \cap SA = E$, $EM \cap SB = R$. Провівши відрізки RN і NF, матимемо шуканий переріз $ERNF$.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

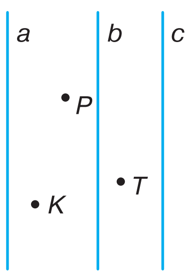
З побудовами перерізів многогранників тісно пов'язані деякі планіметричні задачі на побудову.

Задача 5. Дано три паралельні прямі однієї площини і три точки між ними. Побудуйте трикутник так, щоб його вершини лежали на даних прямих, а сторони проходили через дані точки (мал. 148).

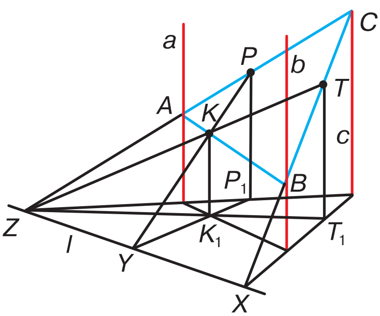
Якщо користуватися тільки методами планіметрії, задачу розв'язати важко (спробуйте!). Методами стереометрії вона розв'язується порівняно просто.

Уявімо, що відрізки даних прямих — ребра трикутної призми, а точки K, P, T лежать на її бічних гранях.

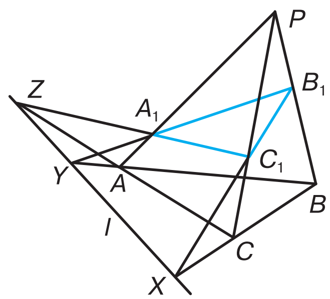
Залишається побудувати переріз призми площиною, яка проходить через точки K, P, T (мал. 149). Проекція побудованого перерізу ABC — трикутник, який задовольняє умову задачі. Оскільки точки K і P можна уявляти то в одній грані призми, то в іншій, задача може мати два різні розв'язки. Переконайтеся самостійно.



Мал. 148



Мал. 149



Мал. 150

Як бачимо, розв'язувати деякі планіметричні задачі можна методами стереометрії, «вийшовши в простір». Іноді зручно моделлю планіметричної задачі вважати деяку стереометричну конфігурацію. Це стосується не тільки задач, а й багатьох важливих теорем. Одна з них — теорема Дезарга.

Якщо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розташовані так, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 проходять через одну точку, то прямі AB і A_1B_1, BC і B_1C_1, CA і C_1A_1 перетинаються в точках, що лежать на одній прямій, або паралельні.

Спробуйте довести теорему, користуючись малюнком 150 або задачею 5. Покажіть на малюнку випадок, коли $XY \parallel AC \parallel A_1C_1$.

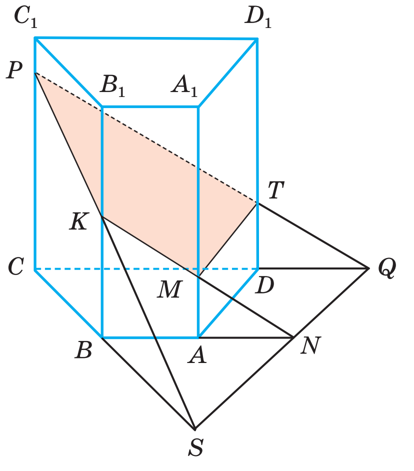
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Яку пряму називають слідом січної площини в площині α?
2. Які методи побудови перерізів ви знаєте?
3. Як будувати перерізи многогранників методом слідів?

Виконаємо разом

1 Побудуйте переріз чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через три точки K, P, T, що лежать на ребрах BB_1, CC_1, DD_1 відповідно.

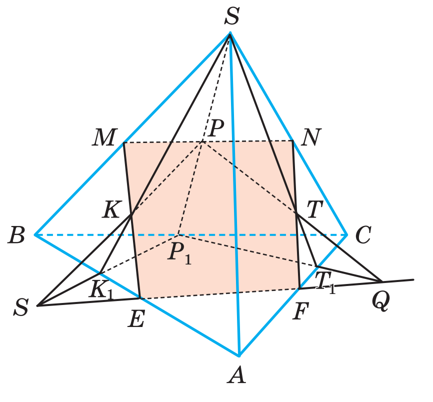
- Побудуємо слід січної площини у площині основи. Прямі PK і PT належать січній площині, тому й точка S, у якій перетинаються прямі BC і PK, і точка Q, у якій перетинаються прямі PT і CD, належать січній площині (мал. 151). Крім того, точки S і Q належать площині основи даної призми. Отже, кожна точка прямої SQ належить січній площині та площині основи. SQ — слід січної площини в площині ABC.
Знайдемо точку N перетину прямих BA і SQ, а потім точку M, у якій перетинаються прямі NK і AA_1. Точки M і T лежать в площині DAA_1D_1 і в січній площині. Тому відрізок MT належить шуканому перерізу. Отримали шуканий переріз призми — чотирикутник $KPTM$.



Мал. 151

2 Побудуйте переріз трикутної піраміди $SABC$ площиною, яка проходить через три точки K, P, T, що лежать у гранях ABS, BCS, ACS відповідно.

- Побудуємо слід січної площини у площині основи. Для цього спроектуємо точки K, P, T на площину основи з точки S (мал. 152). Отримаємо точки K_1, P_1, T_1. Прямі PK і PT належать січній площині, тому й точка S, у якій перетинаються прямі P_1K_1 і PK, і точка Q, у якій перетинаються прямі PT і P_1T_1, належать січній площині. Крім того, точки S і Q належать площині основи даної призми. Отже, кожна точка прямої SQ належить січній площині та площині основи. SQ — слід січної площини в площині ABC.
Точки E і F (точки перетину сліду з ребрами AB і AC) належать перерізу. Знайдемо точки перетину площини перерізу з ребрами SB і SC. Маємо: $EK \cap SB = M$ і $FT \cap SC = N$. Шуканий переріз піраміди — чотирикутник $EMNF$.



Мал. 152

Задачі і вправи

Виконайте усно

323. Чи може п'ятикутник бути перерізом шестикутної призми? А семикутник?

324. Чи може правильний п'ятикутник бути перерізом паралелепіпеда?

325. Яку кількість сторін може мати многокутник, отриманий у перерізі чотирикутної піраміди площиною?

А

326. Побудуйте переріз чотирикутної похилої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через три точки, що лежать на ребрах BB_1, CC_1, AD.

327. Побудуйте переріз п'ятикутної призми $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ площиною, яка проходить через точки, що лежать на ребрах AA_1, CC_1, EE_1.

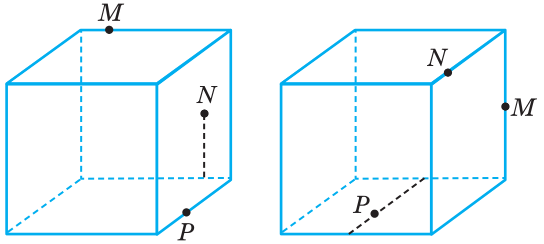
328. Побудуйте переріз п'ятикутної піраміди $SABCDE$ площиною, що проходить через точки M, N, P, якщо $M \in SA$, $N \in SC$, $P \in (DSE)$.

329. Побудуйте переріз паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною (MNR), якщо $M \in CC_1$, $N \in DD_1$, $R \in A_1B_1$. Задачу розв'яжіть:
а) методом слідів;
б) методом внутрішнього проектування;
в) комбінованим методом.

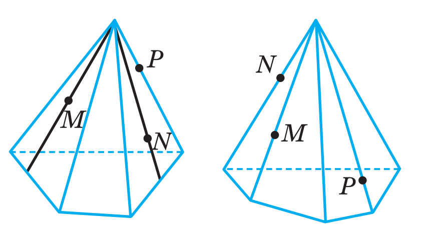
330. Побудуйте переріз похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки K, L, N, якщо $K \in (CC_1D_1)$, $L \in (AA_1D_1)$, $N \in BB_1$. Задачу розв'яжіть: а) методом слідів; б) методом внутрішнього проектування; в) комбінованим методом.

331. Точка R належить ребру SA піраміди $SABCD$, а точки P і T — бічним граням SBC та SCD. Побудуйте переріз піраміди площиною (PRT).

332. Побудуйте перерізи многогранника площиною, яка проходить через точки M, N, P (мал. 153, 154).



Мал. 153



Мал. 154

Б

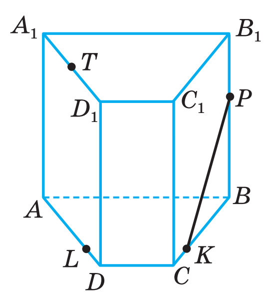
333. Побудуйте переріз піраміди $SABCDE$ площиною, яка проходить через точки P і Q, які лежать у площинах (ASB) і (ABC), та внутрішню точку R ребра SE.

334. Побудуйте переріз призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки K, L, M, якщо вони лежать відповідно в гранях AA_1B_1B, AA_1D_1D, CC_1D_1D.

335. Побудуйте переріз призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки E, F, T, якщо $E \in AC_1$, $F \in B_1D$, $T \in C_1D_1$.

336. Дано призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основі якої лежить трапеція $ABCD$ (мал. 155). Установіть відповідність між перерізом призми площиною, що проходить через пряму KP паралельно прямій (1–4), та видом утвореного перерізу (А–Д).

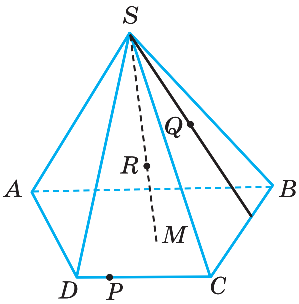
1 DA	**А** Шестикутник
2 AB	**Б** Трикутник
3 BL	**В** Трапеція
4 TL	**Г** Чотирикутник
	Д П'ятикутник



Мал. 155

337. На ребрах AC, SB і SC піраміди $SABC$ задано точки M, N, K. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через пряму MN паралельно прямій BK.

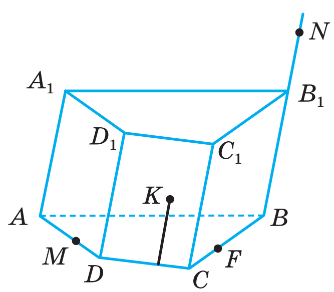
338. Побудуйте переріз піраміди $SABCD$ площиною, яка проходить через точки P, Q, R, якщо $Q \in (SBC)$, $P \in CD$, $R \in SM$, де M — точка з площини ($ABCD$) (мал. 156).



Мал. 156

339. ***Відкрита задача.*** Побудуйте переріз тетраедра $PABC$ площиною, яка проходить через точки **...** , методом **...** .

340*. На ребрі AD, на продовженні ребра BB_1 і в площині грані CC_1D_1D призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задано відповідно точки M, N, K. Побудуйте переріз призми площиною (MNK) і знайдіть точку перетину цієї площини з прямою EF, якщо $E \in A_1B_1$, $F \in BC$ (мал. 157).



Мал. 157

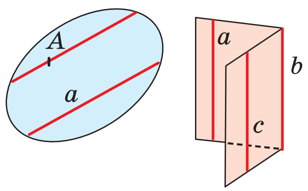
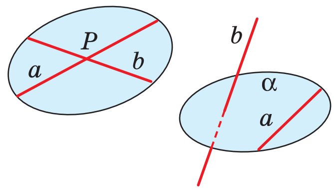
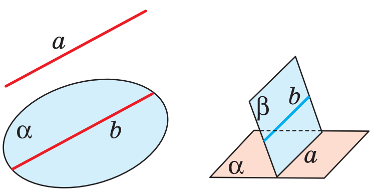
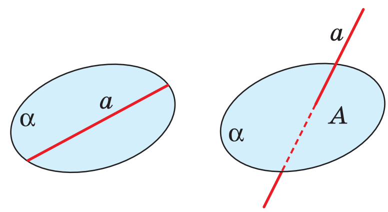
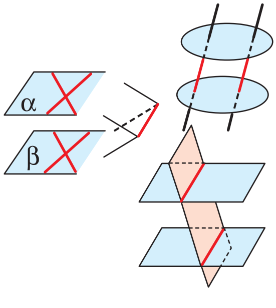
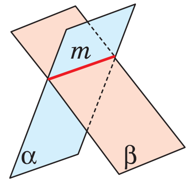
341*. На ребрах BB_1, EE_1 і на продовженні ребра CC_1 призми $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ задано точки M_1, N_1, P_1 відповідно, а на ребрах AA_1, BB_1 і CC_1 — точки M_2, N_2, P_2. Побудуйте переріз призми площиною, що проходить через точки: а) M_1, N_1, P_1; б) M_2, N_2, P_2; в) лінію перетину площин ($M_1N_1P_1$) і ($M_2N_2P_2$).

Задачі для повторення

342. Кожні дві з трьох прямих перетинаються, але не лежать в одній площині. Як розташовані дані прямі? Виконайте малюнок.

343. Побудуйте зображення прямокутного рівнобедреного трикутника, вписаного в коло, і точки перетину з колом прямих, які проходять через середину гіпотенузи перпендикулярно до катетів.

344. Користуючись наведеною нижче таблицею, підготуйте розповідь про різні види розташування прямих і площин у просторі.

Відношення	Паралельні	Не паралельні
Пряма і пряма	$a \parallel b$, $b \parallel c$  O, T_4, T_5	*Пересічні* *Мимобіжні*  T_3
Пряма і площина	$a \cap \alpha = \varnothing$ O, T_6, T_7 	$a \subset \alpha$ $a \cap \alpha = A$  O
Площина і площина	$\alpha \cap \beta = \varnothing$  O, T_8, T_9, T_{10}	$a \cap \beta = m$ 

Тут O — означення, T — теорема.

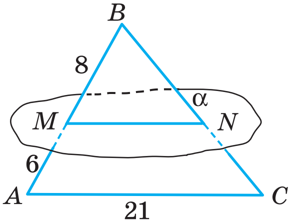
Задачі за готовими малюнками

1

А

$AC \parallel \alpha$

MN

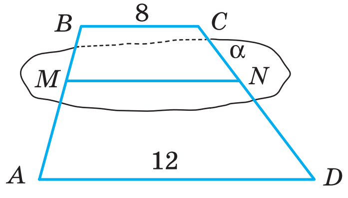


Б

$BM : MA = 1 : 3,$

$BC \parallel \alpha,$ $ABCD$ — трапеція

MN

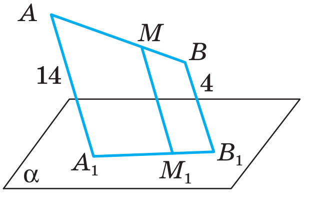


2

А

$AA_1 \parallel BB_1 \parallel MM_1$; $AM : MB = 3 : 2$

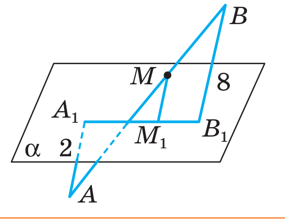
MM_1



Б

$AA_1 \parallel BB_1 \parallel MM_1$; $AM : MB = 3 : 1$

MM_1

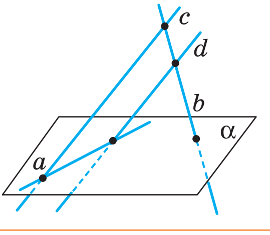


3

А

---

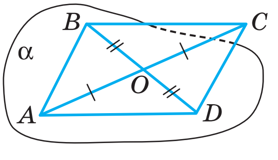
c і d — мимобіжні



Б

$A \in \alpha$; $B \in \alpha$; $O \notin \alpha$

Довести: $CD \parallel \alpha$

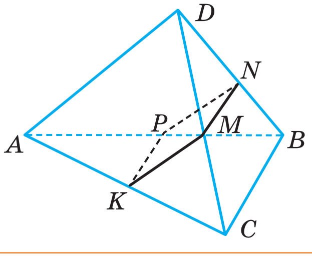


4

А

M, N, P, K — середини ребер;
$NP - MN = 3$; $P_{MNPK} = 26$

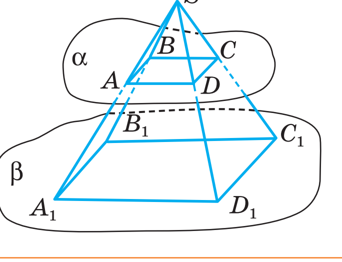
AD; BC



Б

$\alpha \parallel \beta$; $ABCD$ — паралелограм

$A_1B_1C_1D_1$ — паралелограм



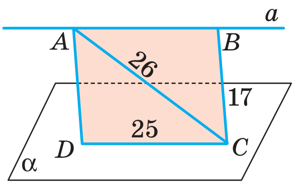
	А	Б

5

А

$a \parallel \alpha$; $AC \parallel BD$

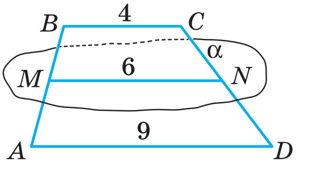
P_{ABCD}; S_{ABCD}



Б

$ABCD$ — трапеція;
$S_{AMND} = 54$ см²

S_{ABCD}

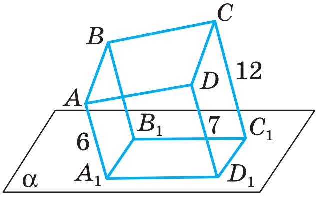


6

А

$ABCD$ — паралелограм;
$DD_1 = 7$ см;
$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$

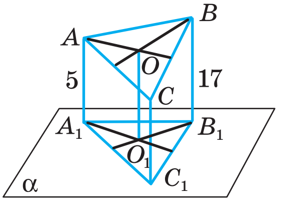
BB_1



Б

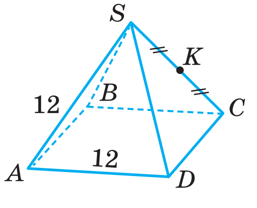
$AC \parallel \alpha$;
O — точка перетину медіан;
$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel OO_1$

OO_1



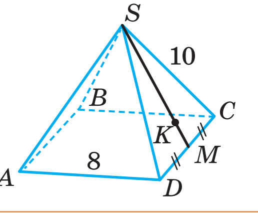
7 Знайдіть площу перерізу правильної піраміди площиною, що проходить через AB і точку K.

А



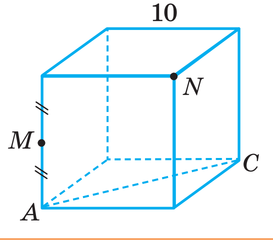
Б

$SK : KM = 2 : 1$

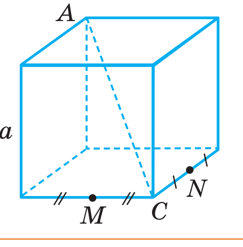


8 Знайдіть периметр перерізу куба площиною, яка паралельна AC і проходить через задані точки M і N.

А



Б



Тестові завдання 2

1	AB і CD — основи трапеції $ABCD$. Пряма простору a паралельна AB. Яке взаємне розміщення прямих a і CD?	а) Перетинаються; б) паралельні; в) мимобіжні; г) не можна встановити.
2	Прямі a і b паралельні площині α. Яке взаємне розміщення прямих a і b?	а) Перетинаються; б) паралельні; в) мимобіжні; г) усі відповіді а)–в).
3	Площина проходить через пряму, паралельну іншій площині. Як розташовані ці площини?	а) Перетинаються або паралельні; б) паралельні; в) перетинаються; г) не можна встановити.
4	Точка M не лежить у площині прямокутника $ABCD$. Яке взаємне розміщення прямих MA і BD?	а) Перетинаються; б) паралельні; в) мимобіжні; г) не можна встановити.
5	Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Яке взаємне розміщення прямих AC і BD?	а) Перетинаються; б) паралельні; в) мимобіжні; г) не можна встановити.
6	Прямі a і b мимобіжні. Скільки існує різних площин, які проходять через a паралельно b?	а) Одна; б) жодної; в) безліч; г) жодної або безліч.
7	У трикутнику ABC $AC = 8$ см, $M \in AB$, $AM : MB = 1 : 3$. Через точку M паралельно AC проведено площину, яка перетинає BC у точці P. Знайдіть MP.	а) 24 см; б) 2,6 см; в) 6 см; г) 4 см.
8	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $M \in AB$. Через точку M проведено площину, паралельну площині BB_1D_1D. У якому відношенні точка M ділить AB, якщо в перерізі утворився квадрат?	а) $1 : 2$; б) $1 : \sqrt{2}$; в) $1 : (\sqrt{2} - 1)$; г) перерізом квадрат бути не може.
9	Ребро правильного тетраедра $ABCD$ дорівнює 24 см, $M \in BD$, $BM : MD = 3 : 1$. Знайдіть площу перерізу тетраедра площиною, яка проходить через точку M паралельно площині (ABC).	а) $16\sqrt{3}$ см^2; б) $9\sqrt{3}$ см^2; в) $81\sqrt{3}$ см^2; г) $36\sqrt{3}$ см^2.
10	Ребро правильного тетраедра $ABCD$ дорівнює a. Через середини ребер BD і CD паралельно AD проведено площину. Знайдіть периметр утвореного перерізу.	а) $1{,}5a$; б) $3a$; в) $2a$; г) $4a$.

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Площини α і β паралельні. Прямі SA, SB, SC перетинають площину α в точках A, B, C, а площину β — у точках A_1, B_1, C_1. M і M_1 — середини відрізків BC і B_1C_1. Знайдіть A_1M_1, якщо $AM = 6$ см і $SA : AA_1 = 3 : 2$.

2°. Чи можуть перетинатися діагоналі просторового чотирикутника, не всі вершини якого лежать в одній площині?

3°. Побудуйте зображення перпендикулярів, проведених з центра кола, описаного навколо трапеції, до її сторін, якщо діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони.

4°. Точки M, N, P, K — середини ребер AD, BD, BC, AC тетраедра $ABCD$. Знайдіть довжини ребер AB і CD, якщо $MP = NK = 10$ см і $\angle KMP = 60°$. Доведіть, що $DC \parallel (MNK)$.

5•. Площина α перетинає сторону AB трикутника ABC в її середині і паралельна стороні AC. Знайдіть площу $\triangle ABC$, якщо площа чотирикутника, який відтинає від трикутника площина α, дорівнює 24 см^2.

6•. $ABCD$ — правильний тетраедр, O — центр вписаного в трикутник ABC кола. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку O і паралельна BC і AD. У якому відношенні ця площина ділить відрізок EF, якщо E і F — середини ребер AD і BC?

7•. Точки M і N лежать відповідно на ребрах AB і CD паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте лінію перетину площин (AA_1N) і (DD_1M). Доведіть, що вона паралельна AA_1.

8•. У чотирикутній піраміді $SABCD$ O_1 і O_2 — точки перетину медіан граней SAD і SDC. Чи паралельна пряма O_1O_2 площині (SAC)?

9••. У просторі проведено три прямі, які не лежать в одній площині і при цьому жодні дві з них не мимобіжні. Доведіть, що всі ці прямі проходять через одну точку або паралельні.

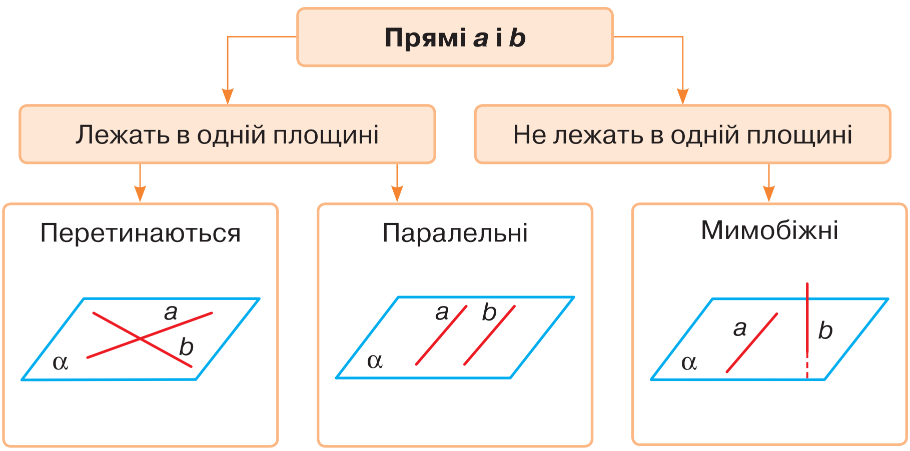
10••. Усі ребра чотирикутної піраміди $SABCD$ дорівнюють по 12 см. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через середину ребра SC паралельно площині (ASM), де M — середина CD. Знайдіть периметр утвореного перерізу.

Головне в розділі 2

1. Якщо дві прямі мають тільки одну спільну точку, кажуть, що вони перетинаються. Іноді їх називають **пересічними** прямими.

2. Дві прямі в просторі можуть перетинатися, бути паралельними або мимобіжними. Дві прямі називають **мимобіжними**, якщо вони не лежать в одній площині. Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину, але не перетинає першу пряму, то дані прямі мимобіжні (ознака мимобіжності прямих).

3. Дві прямі простору, які лежать в одній площині і не перетинаються, називають **паралельними прямими**. Два промені або відрізки, які лежать на паралельних прямих або на одній прямій, називають **паралельними**.



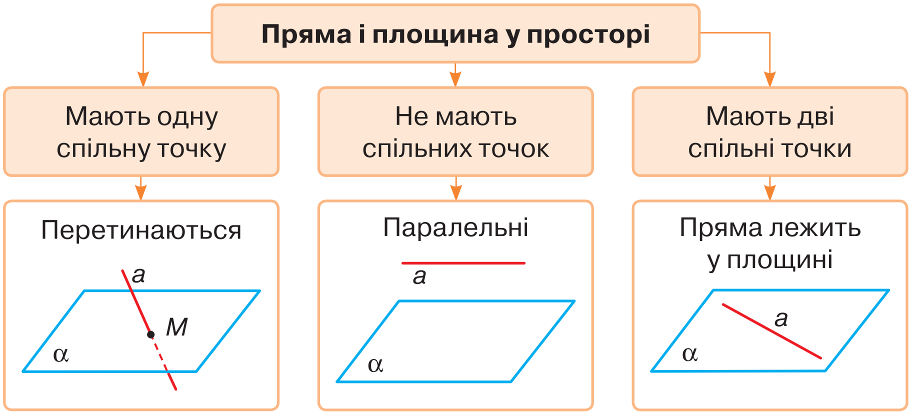
Відношення паралельності прямих рефлексивне $(a \parallel a)$, симетричне (якщо $a \parallel b$, то і $b \parallel a$) і транзитивне (якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$). Три або більше попарно паралельних прямих простору можуть не лежати в одній площині.

Через будь-яку точку простору можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій.

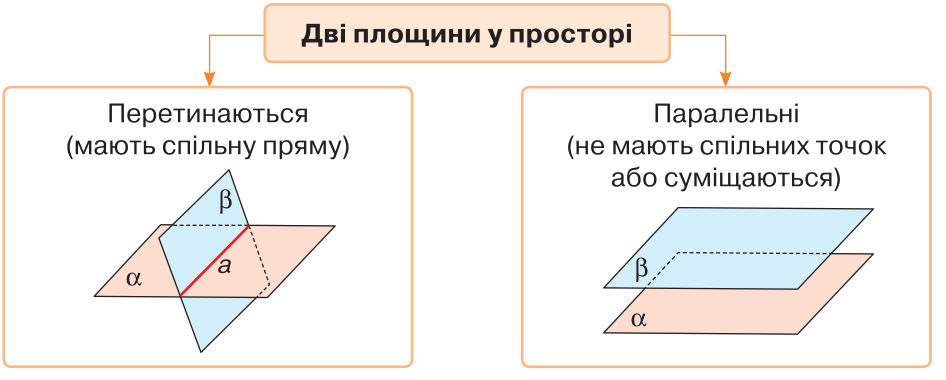
Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.

4. Пряму і площину називають **паралельними**, якщо вони не мають спільних точок. Якщо пряма a паралельна якій-небудь прямій площини α, але не лежить у цій площині, то $a \parallel \alpha$ (ознака паралельності прямої і площини).

Пряма і площина можуть мати одну спільну точку (тобто перетинатися) або не мати спільних точок взагалі (паралельні). Якщо пряма і площина мають дві спільні точки, то всі точки прямої належать площині (пряма лежить у площині).



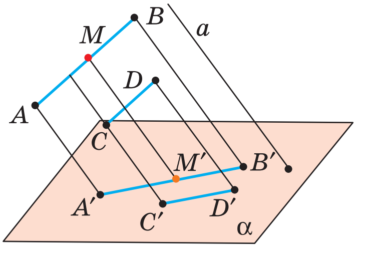
5. Дві площини називають **паралельними**, якщо вони не перетинаються. Паралельні площини або не мають спільних точок, або суміщаються всіма своїми точками.



Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини паралельні двом прямим другої площини, то такі площини паралельні (ознака паралельності площин).

Якщо одну з паралельних площин перетинає яка-небудь пряма або площина, то вона перетинає й другу площину. Паралельні площини перетинаються січною площиною по паралельних прямих. Паралельні площини, перетинаючи паралельні прямі, відтинають від них рівні відрізки.

6. При паралельному проектуванні відрізки, які не паралельні проектуючій прямій, зображаються відрізками; паралельні відрізки — паралельними відрізками, при цьому відношення їх довжин зберігається: $AM : MB = A'M' : M'B'$ (мал. 158).



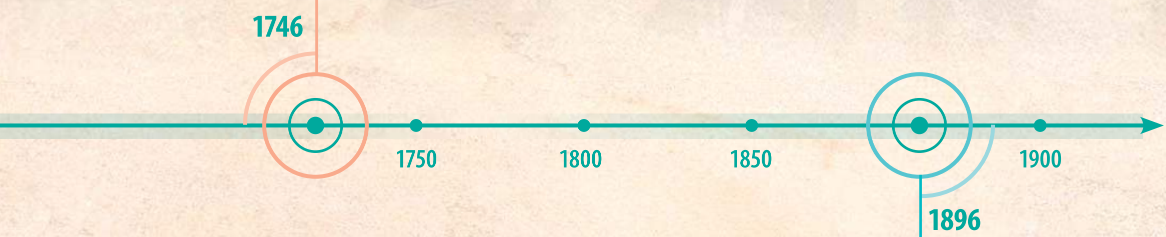
Мал. 158

7. Зображенням фігури називають фігуру, подібну проекції даної фігури на деяку площину.

Гаспар Монж

(1746–1818)

Основні праці стосуються геометрії. Здобув всесвітнє визнання створенням сучасних методів проекційного креслення та його основ нарисної геометрії. Розробив теорію побудови ортогональних проекцій тривимірних об'єктів на площині і виклав її у роботі «Нарисна геометрія», однак 20 років уряд Франції зберігав це відкриття як військову таємницю.



Олександр Смогоржевський

(1896–1969)

Основні геометричні роботи стосуються теорії геометричних побудов на евклідовій та гіперболічній площинах, розв'язання конструктивних задач геометрії Лобачевського за допомогою обмежених засобів тощо. У 50-60-ті рр. XX ст. його було визнано головою київської школи геометрів. Вважав, що геометрія Евкліда є лише першим кроком до вивчення форм реального простору.

Розділ 3 | Chapter 3

Перпендикулярність прямих і площин у просторі | Lines Perpendicularity and Planes in Space

Геометрія — потужній засіб пізнання реального світу за допомогою дослідження відповідних математичних моделей. Вивчаючи властивості геометричних фігур, ми маємо можливість отримати уявлення про геометричні властивості реальних предметів.

У цьому розділі ви ознайомитеся з властивостями перпендикулярних прямих і площин у тривимірній евклідовій геометрії, а також з правилами ортогонального проектування. Навчитеся визначати відстані і кути в стереометрії.

Навчальний проект

«Відстані та кути у просторі»

Архітектор

Організація всіх рівнів просторового середовища: від малих форм до великих територіальних систем.

Математика — граматика архітектора.
Ле Корбюзьє

Містобудування

Архітектура будівель і споруд

Дизайн архітектурного середовища

Математика в моїй професії

IT-професії

Створення, розвиток і експлуатація інформаційних систем. Прийом, переробка, зберігання та передача інформації.

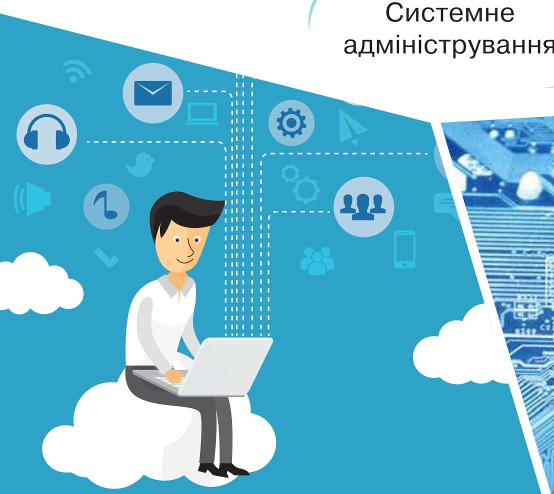
Мережеві технології

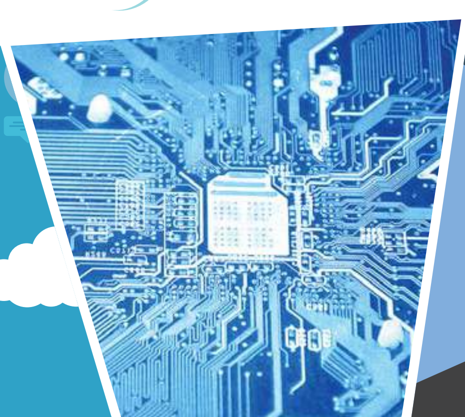
Розробка програмного забезпечення

Комп'ютерна графіка та дизайн

Системне адміністрування

Тестування





§ 10 Кут між прямими. Перпендикулярність прямих

Розгляньте малюнок 159 і згадайте, як можуть розташовуватися у просторі дві прямі. Спробуйте уявити, які кути утворюють ці прямі в кожному випадку.

Щоб увести поняття *кута між прямими* у просторі, слід розглянути три випадки:

— прямі перетинаються;
— прямі паралельні;
— прямі мимобіжні.

Мал. 159

Якщо дві прямі перетинаються, вони утворюють чотири кути. Кутову міру не найбільшого з них називають **кутом між даними прямими, що перетинаються**. Кут між прямими, що перетинаються, не перевищує 90°.

Позначають кут між прямими a і b символом $\angle(ab)$.

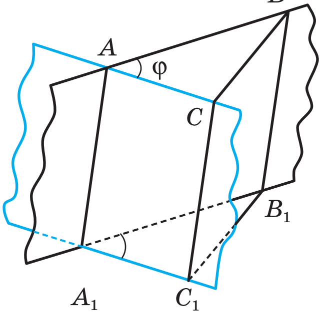
Зауваження. Кут між прямими — не фігура, а кутова міра, величина.

ТЕОРЕМА 14

Якщо дві прямі, які перетинаються, паралельні іншим прямим, що перетинаються, то кут між першими прямими дорівнює куту між другими.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай прямі AB і AC, що перетинаються, паралельні відповідно прямим A_1B_1 і A_1C_1. Доведемо, що кут між прямими AB і AC дорівнює куту між прямими A_1B_1 і A_1C_1 (мал. 160).



Мал. 160

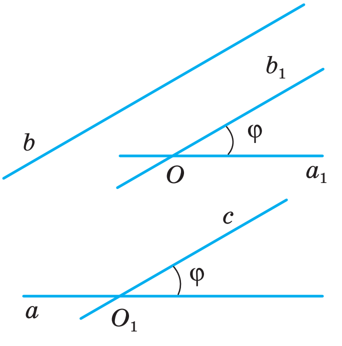
Розглянемо спочатку випадок, коли дані прямі лежать у різних площинах. Якщо $\angle BAC = \varphi$ — кут між прямими AB і AC ($\varphi \le 90°$), то через довільні точки B і C його сторін проведемо прямі BB_1 і CC_1, паралельні AA_1. Нехай прямі BB_1

і A_1B_1 перетинаються в точці B_1, а прямі CC_1 і A_1C_1 — у точці C_1. Чотирикутники AA_1B_1B і AA_1C_1C — паралелограми, оскільки їх протилежні сторони попарно паралельні. Відрізки BB_1 і CC_1 паралельні та рівні, оскільки кожний із них паралельний відрізку AA_1 і дорівнює йому. Отже, чотирикутник BB_1C_1C теж паралелограм, тому $CB = C_1B_1$. За трьома сторонами $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, тому $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC = \varphi$. Отже, кут між прямими A_1B_1 і A_1C_1 дорівнює куту між прямими AB і AC.

У випадку, коли прямі AB, AC, A_1B_1 і A_1C_1 лежать в одній площині, можна дослівно повторити наведені міркування. Тільки точку C треба брати поза прямою BB_1, щоб паралелограм BB_1C_1C не виродився у відрізок. □

Якщо дві прямі паралельні, то вони не мають спільних точок, а тому кут як геометричну фігуру не утворюють. Вважають, що кут між паралельними прямими дорівнює 0°.

Тепер введемо поняття *кута між мимобіжними прямими*. Нехай a і b — довільні мимобіжні прямі. Через будь-яку точку O простору проведемо прямі, паралельні a і b (мал. 161). Кут φ між побудованими так прямими a_1 і b_1, які перетинаються, називають кутом між даними мимобіжними прямими: $\angle(ab) = \angle(a_1b_1)$. Цей кут не залежить від вибору точки O. Адже якщо через яку-небудь іншу точку простору провести прямі, паралельні прямим a і b, кут між ними теж дорівнює φ (теорема 14). Точку O можна брати і на будь-якій з даних прямих. Якщо $b \parallel c$, то завжди $\angle(ab) = \angle(ac)$; кожний із цих кутів дорівнює $\angle(a_1b_1)$.



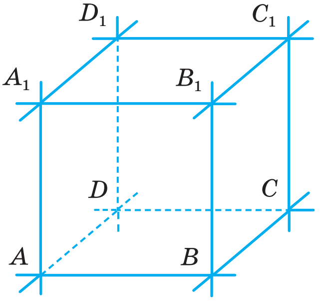
Мал. 161

■ **Кутом між мимобіжними прямими** називають кут між прямими, які перетинаються і паралельні відповідно даним мимобіжним прямим.

Кут між мимобіжними прямими, як і між прямими однієї площини, не може мати більше від 90°.

■ Дві прямі називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°.

Перпендикулярними можуть бути як прямі, що перетинаються, так і мимобіжні прямі. Наприклад, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, то кожна з прямих AB, BC, CD, DA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 перпендикулярна до прямої AA_1 (мал. 162).



Мал. 162

■ Відрізки (промені) називають **перпендикулярними**, якщо вони належать перпендикулярним прямим.

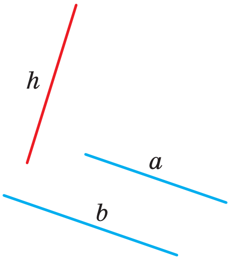
ТЕОРЕМА 15

Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай прямі a і b паралельні і $h \perp a$. Доведемо, що $h \perp b$ (мал. 163).

Якщо $b \parallel a$, то завжди $\angle(hb) = \angle(ha)$. У даному випадку $\angle(ha) = 90°$, тому і $\angle(hb) = 90°$, тобто $h \perp b$. Що й треба було довести. □



Мал. 163

Коли будують багатоповерховий будинок, то спочатку будують каркас, у якому кожна горизонтальна балка перпендикулярна до вертикальної колони (мал. 164). Під прямими кутами зварюють стальні прути в арматурі залізобетонних конструкцій, скріплюють суміжні деталі віконної рами тощо.

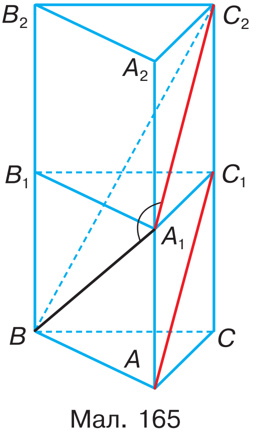
Мал. 164

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Як визначити кут між двома мимобіжними прямими? Пізніше ви навчитеся робити це, користуючись векторним чи координатним методом. А в багатьох випадках це можна робити, утворивши допоміжний трикутник, дві сторони якого паралельні даним мимобіжним прямим.

Задача. Усі ребра правильної трикутної призми рівні. Знайдіть косинус кута між мимобіжними прямими, яким належать діагоналі двох бічних граней цієї призми.

Розв'язання. Нехай усі ребра призми $ABCA_1B_1C_1$ рівні. Знайдемо кут між прямими AC_1 і BA_1 (мал. 165).



Мал. 165

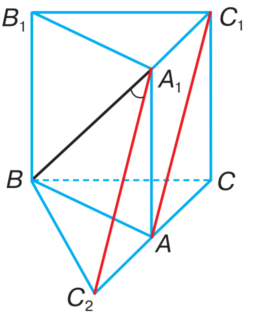
На даній призмі побудуємо рівну їй призму $ABCA_2B_2C_2$ і розглянемо трикутник A_1BC_2. Оскільки $AC_1 \parallel A_1C_2$, то шуканий кут між прямими AC_1 і BA_1 дорівнює куту BA_1C_2 або суміжному з ним.

Нехай довжина ребра даної призми дорівнює 1. Тоді $BA_1 = A_1C_2 = \sqrt{2}$. За теоремою Піфагора з $\triangle BCC_2$ знаходимо $BC_2 = \sqrt{5}$.

За теоремою косинусів

$BC_2^2 = A_1B^2 + A_1C_2^2 - 2A_1B \cdot A_1C_2 \cdot \cos\varphi$,

$5 = 2 + 2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\varphi$.



Мал. 166

Звідси $4\cos\varphi = -1$, $\cos\varphi = -0{,}25$.

Кут φ тупий, тому кут між прямими AC_1 і BA_1 дорівнює $180° - \varphi$. А $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi = 0{,}25$.

Отже, косинус шуканого кута дорівнює 0,25.

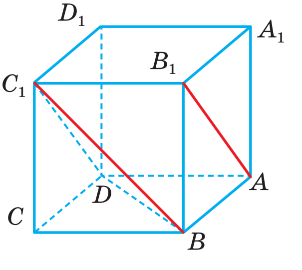
Спробуйте розв'язати задачу іншим способом (мал. 166). Оскільки $C_2A_1 \parallel AC_1$, то треба знайти косинус кута BA_1C_2.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що називають кутом між двома прямими, які перетинаються?
2. Що називають кутом між двома мимобіжними прямими?
3. Чи може кут між прямими бути тупим або розгорнутим?
4. Які дві прямі простору називають перпендикулярними?
5. Які відрізки або промені називають перпендикулярними?
6. Чому дорівнює кут між паралельними прямими? А між перпендикулярними прямими?

Виконаємо разом

1 Знайдіть кут між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба.

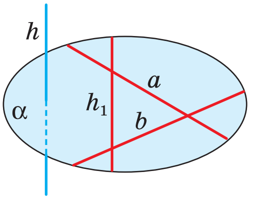


Мал. 167

- Знайдемо кут між діагоналями AB_1 і BC_1 граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 167). Оскільки $DC_1 \parallel AB_1$, то кут між прямими AB_1 і BC_1 дорівнює куту BC_1D. $\angle BC_1D = 60°$, оскільки $\triangle BC_1D$ рівносторонній.

2 Доведіть, що пряма, перпендикулярна до двох прямих, які перетинаються, перетинає площину, що проходить через них.

● Припустимо, що пряма h, перпендикулярна до двох прямих a і b, які перетинаються, не перетинає площину α, що проходить через них (мал. 168). Тоді $h \parallel \alpha$ або $h \subset \alpha$. В обох випадках у площині α знайдеться пряма h_1, паралельна h. І якщо пряма h перпендикулярна до прямих a і b, то паралельна їй пряма h_1 теж перпендикулярна до цих прямих. Прийшли до суперечності, оскільки пряма, яка лежить у площині, не може бути перпендикулярною до двох прямих цієї площини, що перетинаються. Отже, пряма h перетинає площину α.



Мал. 168

Задачі і вправи

Виконайте усно

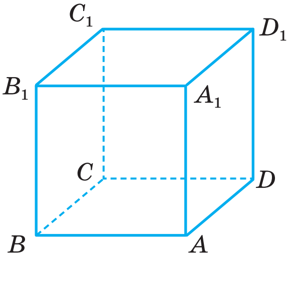
345. Кут між прямими — це фігура чи величина?

346. Скільки прямих, перпендикулярних до даної прямої, можна провести через дану на цій прямій точку? А через точку, яка не лежить на даній прямій?

347. Дано площину α і паралельну їй пряму a. Скільки прямих, перпендикулярних до прямої a, можна провести у площині α?

348. З планіметрії відомо: дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні. Чи правильне це твердження для стереометрії?

349. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 169). Знайдіть кут між прямими:
а) DC і BC; б) AB і BB_1; в) AA_1 і D_1C;
г) AA_1 і D_1C_1; ґ) A_1C_1 і AC; д) AB і B_1D_1.



Мал. 169

А

350. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між прямими AB_1 і AD_1.

351. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. Знайдіть кут між мимобіжними прямими AD_1 і B_1C, якщо:
а) $\angle B_1CB = 50°$; б) $BC = a$, $BC_1 = 2a$.

352. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між прямими:
а) DC_1 і A_1B; б) A_1C і AB; в) B_1D_1 і C_1C; г) B_1D і AC.

353. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед, $AA_1 = 2AB$, $ABCD$ — квадрат. Знайдіть кут між прямими:
а) B_1C і AD; б) AB_1 і CD_1; в) AB_1 і A_1C_1.

354. Дано чотири прямі: $a \parallel a_1$ і $b \parallel b_1$. Доведіть, що коли $a \perp b$, то $a_1 \perp b_1$.

355. Чи можуть бути перпендикулярними прямі OB і OC, якщо $\angle AOB = \angle AOC = 60°$?

356. Прямі a і b перетинаються під кутом 30°, а прямі a і c — під кутом 40°. Чи можуть бути перпендикулярними прямі b і c?

357. Чи існує замкнена неплоска ламана з п'яти ланок, кожна ланка якої перпендикулярна до суміжної?

358. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Доведіть, що $AB_1 \perp CD_1$.

359. A, B, C — точки на попарно перпендикулярних променях OA, OB, OC. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $OA = OB = OC$.

360. Промені OA, OB, OC попарно перпендикулярні. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо:
а) $OA = OB = OC = 4$ см;
б) $OA = OB = OC = a$;
в) $OA = OB = 3$ дм, $OC = 4$ дм.

361. Доведіть, що діагоналі протилежних граней куба або паралельні, або перпендикулярні. Чи виконується це твердження для прямокутного паралелепіпеда?

362. M — середина ребра AD правильного тетраедра $ABCD$. Опустіть перпендикуляри з точки M на прямі AB, BD, BC. Знайдіть довжину кожного перпендикуляра, якщо довжина ребра тетраедра дорівнює a.

Б

363. Основою прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат зі стороною a. Його бічне ребро дорівнює $a\sqrt{3}$. Знайдіть кут між прямими:
а) AB_1 і D_1C; б) AB_1 і A_1C_1;
в) A_1C і BD; г) AB_1 і A_1D_1.

364. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, O — точка перетину діагоналей AC і BD. Знайдіть кут між прямими:
а) OB_1 і DD_1; б) OB_1 і A_1C_1;
в) B_1O і BD_1; г) B_1O і BC.

365. $ABCD$ — тетраедр, $M \in AC$, $N \in BD$, $AM : MC = DN : NB = 2 : 1$, $BC = 10{,}5$ см, $AD = 24$ см, $MN = 13$ см. Знайдіть кут між AD і BC.

366. У правильному тетраедрі $ABCD$ $CM = MB$ $(M \in CB)$. Знайдіть кут між прямими AM і BD.

367. Дано тетраедр $ABCD$, у якому $AC = 6$ см, $BD = 8$ см, M — середина AB, N — середина CD і $MN = 5$ см. Знайдіть кут між BD і AC.

368. $ABCD$ — тетраедр, у якого $DA = DB = DC$, $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = 90°$. Знайдіть кут між прямими DM і AB, якщо M — середина BC.

369. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M, N, K — середини ребер A_1B_1, B_1C_1, AA_1 відповідно, O — точка перетину діагоналей грані DD_1C_1C. Знайдіть кут між прямими:
а) MC_1 і KO; б) C_1K і OM; в) OA_1 і MN.

370. Кут між мимобіжними діагоналями суміжних граней прямокутного паралелепіпеда дорівнює α. Знайдіть кут між діагоналями цих граней, які виходять з однієї вершини.

371. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основі якого лежить квадрат $ABCD$, $AA_1 = 2AB$. Установіть відповідність між кутами (1–4) та їх косинусами (А–Д).

1 Кут між AA_1 і DC_1	**А** 0,8
2 Кут між A_1C_1 і BD	**Б** −0,6
3 Кут між CB_1 і DC_1	**В** $0,4\sqrt{5}$
4 Кут між A_1D і BC_1	**Г** 0,6
	Д 0

372. K і P — середини ребер AB і AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Опустіть перпендикуляр з вершини A_1 на прямі BD, AD_1, KP, C_1D, KD_1. Знайдіть довжину кожного перпендикуляра, якщо $AB = a$.

373. Точки K і M — середини ребер AB і CD правильного тетраедра $ABCD$. Доведіть, що $KM \perp AB$ і $KM \perp CD$. Знайдіть довжину KM, якщо $AB = a$.

374. Усі грані паралелепіпеда — ромби з кутом 60°. Знайдіть кут між мимобіжними меншими діагоналями двох його суміжних граней.

375*. Знайдіть косинус кута між медіанами двох граней правильного тетраедра. Розгляньте всі можливі випадки.

Практичне завдання

376. Три стрижні з'єднані зварюванням своїми серединами один до одного так, що кожний перпендикулярний до двох інших. Чи можна такого «їжака» протягти через люк, діаметр якого 1,8 м, якщо довжина і товщина кожного стрижня дорівнюють відповідно 2 м і 0,1 м? Зробіть модель до задачі (у масштабі 1 : 10) і спробуйте розв'язати її дослідним шляхом, а потім підтвердіть отриманий результат логічними міркуваннями.

Задачі для повторення

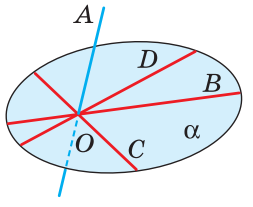
377. Через точку M проведіть пряму, паралельну кожній з двох площин, що перетинаються.

378. Побудуйте переріз тетраедра $ABCD$ площиною, яка проходить через внутрішню точку грані (ACD) паралельно прямим AB і CD.

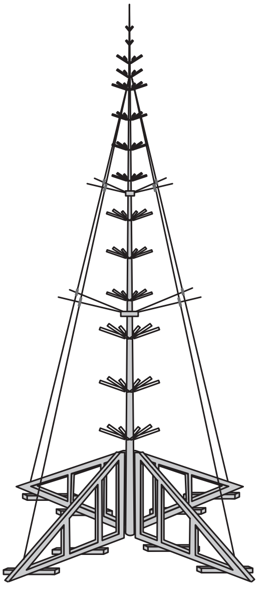
379. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 10 см, 10 см і 16 см.

§ 11 Перпендикулярність прямої і площини

Якщо пряма не лежить у площині і не паралельна їй, вона перетинає площину. Нехай пряма AO перетинає площину α в точці O, а прямі OB, OC, OD,… лежать у площині α (мал. 170).



Мал. 170



Мал. 171

Кути AOB, AOC, AOD,… можуть бути різними. Заслуговує на увагу випадок, коли всі вони прямі. У такому разі кажуть, що пряма AO *перпендикулярна до площини* α.

Пишуть: $AO \perp \alpha$, або $\alpha \perp AO$. Матеріальною моделлю цього випадку є каркас штучної ялинки з хрестовиною (мал. 171).

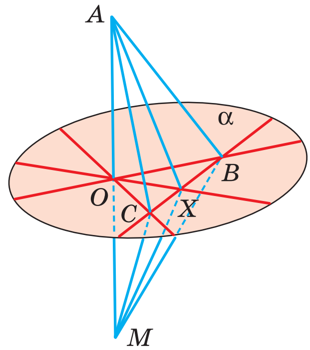
■ Пряму називають **перпендикулярною до площини**, якщо вона перетинає цю площину і перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у площині і проходить через точку перетину.

ТЕОРЕМА 16

(Ознака перпендикулярності прямої і площини.) **Якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох прямих цієї площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна до площини.**

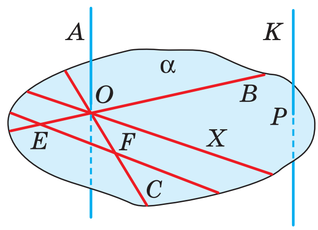
ДОВЕДЕННЯ.

Нехай пряма AO, яка перетинає площину α в точці O, перпендикулярна до прямих OB і OC цієї площини (мал. 172). Доведемо, що пряма AO перпендикулярна до будь-якої прямої OX, яка лежить у площині α. Для цього проведемо довільну пряму, яка перетинає прямі OB, OC і OX у точках B, C і X. А на прямій OA по різні боки від O відкладемо рівні відрізки OA і OM. Сполучивши відрізками точки A і M з точками B, C, X, дістанемо кілька пар трикутників. Трикутники ABM і ACM рівнобедрені, оскільки їхні медіани BO, CO є і висотами. Отже, $AB = BM$ і $AC = CM$. Трикутники ABC і MBC рівні за трьома сторонами, тому $\angle ABC = \angle MBC$. Рівні також трикутники ABX і MBX — за двома сторонами і кутом між ними. Отже, $AX = MX$. Оскільки трикутник AXM рівнобедрений, то його медіана XO є і висотою, тобто $AO \perp XO$. Що й треба було довести. □



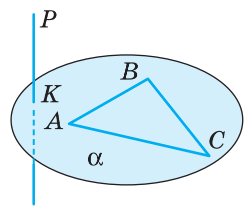
Мал. 172

Доведену теорему можна узагальнити. На основі теореми 15 пряму AO можна замінити будь-якою прямою KP, паралельною їй, а пряму OX — будь-якою прямою EF, що лежить у площині α і паралельна OX (мал. 173). Варто також врахувати, що пряма, перпендикулярна до двох прямих, які перетинаються, обов'язково перетинає площину, що проходить через них (задача 2, с. 103). Тому можна вважати доведеними такі твердження.



Мал. 173

- **Пряма, перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, перпендикулярна до площини, яка проходить через ці прямі.**
- **Пряма, перпендикулярна до площини, перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині.**
- **Якщо пряма перпендикулярна до двох сторін трикутника, то вона перпендикулярна і до третьої його сторони** (мал. 174).



Мал. 174

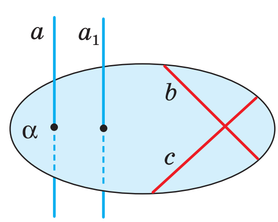
ТЕОРЕМА 17

Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то і друга пряма перпендикулярна до цієї площини.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $a \parallel a_1$ і $a \perp \alpha$. Доведемо, що $a_1 \perp \alpha$ (мал. 175).

Оскільки $a \perp \alpha$, то в площині α знайдуться прямі b і c, які перетинаються і перпендикулярні до a. Через те що b і c перпендикулярні до прямої a, то за теоремою 15 вони



Мал. 175

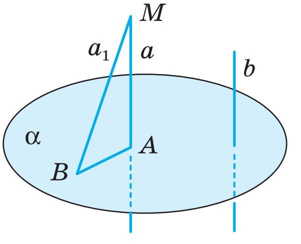
перпендикулярні і до прямої a_1, паралельної a. Отже, пряма a_1 перпендикулярна до прямих b і c площини α, що перетинаються, тобто $a_1 \perp \alpha$. □

ТЕОРЕМА 18

Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $a \perp \alpha$ і $b \perp \alpha$. Доведемо, що $a \parallel b$ (мал. 176). Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Тоді через яку-небудь точку M прямої a проведемо пряму a_1, паралельну b. Оскільки $b \perp \alpha$, то і $a_1 \perp \alpha$ (теорема 17). А за умовою $a \perp \alpha$. Якщо A і B — точки перетину прямих a і a_1 з площиною α, то з припущення випливає, що в $\triangle MAB$ два прямих кути. Цього не може бути. Тому прямі a і b паралельні. □



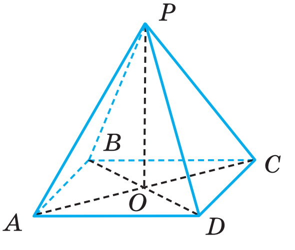
Мал. 176

■ Відрізок називають **перпендикулярним до площини**, якщо він лежить на прямій, перпендикулярній до даної площини.

■ **Перпендикуляром, опущеним з даної точки на дану площину**, називають відрізок прямої, перпендикулярної до площини, що міститься між даною точкою і площиною.

Розгляньте малюнок 176. Оскільки пряма a перпендикулярна до площини α і перетинає її в точці A, а точка M лежить на прямій a, то відрізок MA — перпендикуляр, опущений з точки M на площину α. Точка A — основа перпендикуляра.

Проілюструємо використання ознаки перпендикулярності прямої і площини та поняття перпендикуляра, опущеного з точки на площину, на прикладі чотирикутної піраміди.



Мал. 177

Задача. В основі чотирикутної піраміди $PABCD$ лежить квадрат $ABCD$ і $AP = CP = BP = DP$ (мал. 177). Доведіть, що $PO \perp ABC$, де O — точка перетину діагоналей квадрата.

Доведення. Розглянемо трикутник APC. За умовою $AP = PC$, $AO = OC$, тому PO — висота APC або $PO \perp AC$.

Аналогічно, $PO \perp DB$, оскільки $\triangle DPB$ — рівнобедрений. Маємо: $PO \perp DB$ і $PO \perp AC$. Оскільки пряма PO перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, то вона перпендикулярна до площини, яка проходить через ці прямі. Тобто, $PO \perp ABC$.

За цих умов відрізок PO називають висотою піраміди, а саму таку піраміду — правильною чотирикутною пірамідою. У загальному випадку:

■ **висота піраміди** — перпендикуляр, опущений з її вершини на площину основи, або довжина цього перпендикуляра.

■ Піраміду називають **правильною**, якщо її основа — правильний многокутник, а його центр співпадає з основою висоти піраміди.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Деякі стереометричні твердження схожі на твердження планіметричні, тільки в них замість поняття «пряма» треба написати «площина».

Співставимо деякі планіметричні і стереометричні твердження.

У планіметрії	У стереометрії
1) Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні. 2) Через дану точку проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної прямої.	1) Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні. 2) Через дану точку проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної площини.

Подібних аналогій між твердженнями планіметрії і стереометрії можна навести багато. Корисно помічати їх. Науковці на такі аналогії звертають особливу увагу.

С. Банах: «Математик — це той, хто вміє знаходити аналогії між твердженнями».

Й. Кеплер: «І я найбільше ціную Аналогії, моїх найвірніших учителів. Вони знають усі секрети Природи, і ними найменше треба нехтувати в Геометрії».

Спробуємо, міркуючи аналогічно, здогадатися, чим є в просторі геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців відрізка. Пригадаємо, що на площині таким ГМТ є серединний перпендикуляр даного відрізка. А у просторі?

Розглянувши кілька прикладів, можна здогадатися, що таким ГМТ є площина. Залишається довести, що це справді площина, і з'ясувати, як вона розміщена відносно даного відрізка (див. задачу 1 на с. 110 і мал. 178).

Запитання і завдання для самоконтролю

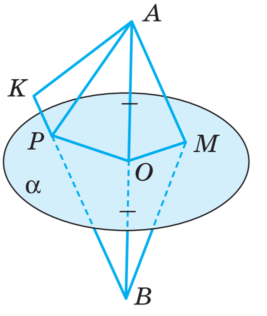
1. Яку пряму називають перпендикулярною до площини?
2. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності прямої і площини.
3. Наведіть кілька властивостей відношення перпендикулярності прямих і площин.
4. Сформулюйте властивість прямих, перпендикулярних до однієї площини.
5. Що називають перпендикуляром, опущеним з даної точки на дану площину?

6. Яке слово пропущене в такому реченні:
а) Якщо один катет прямокутного трикутника перпендикулярний до площини, то другий катет... до неї;
б) Якщо одна діагональ ромба перпендикулярна до площини, то друга... до неї?

Виконаємо разом

1 Доведіть, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є площина, яка перпендикулярна до даного відрізка і проходить через його середину.

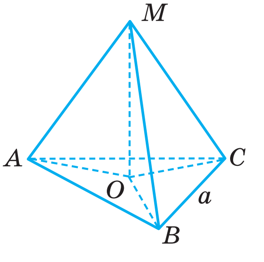
- Нехай площина α перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину O (мал. 178). Точка O рівновіддалена від A і B. Якщо M — будь-яка інша точка площини α, то $\triangle MOA = \triangle MOB$ (за двома катетами). Тому $MA = MB$. Як бачимо, кожна точка площини α рівновіддалена від кінців відрізка AB. Якщо точка K не лежить у площині α, а розміщена, наприклад, з точкою B по різні боки від α, то відрізок KB перетинає площину α у такій точці P, що $PA = PB$. Тоді $BK = BP + PK = AP + PK > AK$. Виходить, $BK > AK$. Отже, тільки точки площини α рівновіддалені від кінців відрізка AB.



Мал. 178

2 Точка M знаходиться на відстані $a\sqrt{3}$ від кожної вершини рівностороннього трикутника зі стороною a. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до площини трикутника.

- Нехай MO — перпендикуляр до площини $\triangle ABC$ (мал. 179). $\triangle MOA = \triangle MOB = \triangle MOC$ за катетом і гіпотенузою, тоді $OA = OB = OC$. Значить, O — центр кола, описаного навколо $\triangle ABC$. Тоді $OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
З $\triangle MOA$ за теоремою Піфагора $OM^2 = MA^2 - OA^2$.
$$OM^2 = 3a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{8a^2}{3}, \quad OM = \frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}a}{3}.$$

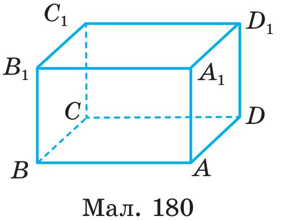


Мал. 179

Задачі і вправи

Виконайте усно

380. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед (мал. 180). Назвіть прямі, перпендикулярні до площини грані:
а) BB_1C_1C; б) $A_1B_1C_1D_1$; в) ABB_1A_1.



Мал. 180

381. Пряма h перпендикулярна до прямих a і b площини α. Чи випливає з цього, що пряма h перпендикулярна до площини α?

382. Скільки площин, перпендикулярних до даної прямої, можна провести через дану точку?

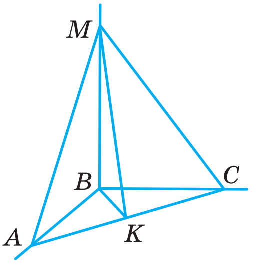
383. Скільки прямих, перпендикулярних до даної площини, можна провести через дану точку? А відрізків?

384. Пряма a перпендикулярна до площини α. Як розміщені відносно площини α прямі, перпендикулярні до прямої a?

385. Пряма a перпендикулярна до площини α. Чи існують у площині α прямі, не перпендикулярні до прямої a?

А

386. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через середину його ребра перпендикулярно до цього ребра. Знайдіть площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.



Мал. 181

387. Трикутник ABC — рівнобедрений, $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см. Пряма MB перпендикулярна до AB і BC, K — середина AC (мал. 181). Доведіть, що $\triangle MBK$ і $\triangle MAK$ прямокутні. Знайдіть їхні площі, якщо $MB = 15$ см.

388. Пряма MO перпендикулярна до діагоналей паралелограма $ABCD$, які перетинаються в точці O. Встановіть вид трикутника MOK. Знайдіть MO і MK, якщо $K \in AB$, $OK = a$, $\angle OMK = \alpha$.

389. До площини квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр MB. Яким є трикутник MAD? Знайдіть MD, якщо $AB = MB = a$.

390. До площини квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр MB, O — точка перетину діагоналей квадрата. Доведіть, що $MO \perp AC$. Знайдіть MO, якщо $\triangle AMC$ — рівносторонній і $AB = a$.

391. Через вершину прямого кута C трикутника ABC з катетами 6 см і 8 см до його площини проведено перпендикуляр MC, $MC = 12$ см, CL — медіана даного трикутника. Знайдіть ML.

392. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. Доведіть, що AB_1C_1D — прямокутник.

393. Відстані від точки M до всіх вершин квадрата однакові, точка O — центр квадрата. Доведіть, що пряма MO перпендикулярна до площини квадрата.

394. Точка M рівновіддалена від вершин квадрата $ABCD$. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до площини квадрата, якщо $AM = 10$ см, $AB = 6\sqrt{2}$ см.

395. O — центр кола, описаного навколо прямокутника $ABCD$, MO — перпендикуляр до площини прямокутника. Знайдіть відстані від точки M до вершин прямокутника, якщо $OM = a\sqrt{5}$, а довжина кола $4\pi a$.

396. Сторони прямокутника пропорційні числам 2 і 3, а його периметр 40 см. Точка P рівновіддалена від вершин прямокутника, $PA = 14$ см. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки P до площини прямокутника.

397. Точка M рівновіддалена від вершин трикутника ABC, MO — перпендикуляр до площини трикутника, $O \in (ABC)$. Доведіть, що O — центр кола, описаного навколо трикутника.

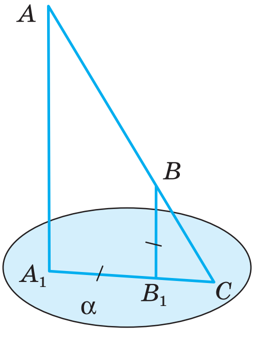
398. Точка M рівновіддалена від вершин рівностороннього трикутника ABC, $AB = a$, $AM = 2a$. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до площини трикутника.

399. Точка S знаходиться на відстані 13 см від вершин трикутника зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки S до площини трикутника.

400. Трикутник ABC рівносторонній, а відрізок AM перпендикулярний до його площини. Знайдіть периметр і площу трикутника MBC, якщо:
а) $AB = 3$ см, $AM = 4$ см; б) $AB = AM = c$.

401. Площина α перпендикулярна до катета AC прямокутного трикутника ABC і ділить його у відношенні $AA_1 : A_1C = m : n$. У якому відношенні площина α ділить гіпотенузу AB?

402. Прямі AA_1 і BB_1, перпендикулярні до площини α, перетинають її у точках A_1 і B_1, а пряма AB — у точці C (мал. 182). Знайдіть відстань B_1C, якщо $AA_1 = 12$ см, $A_1B_1 = BB_1 = 3$ см.



Мал. 182

403. З кінців відрізка AB і точки M цього відрізка до площини α, яка не перетинає відрізок AB, проведено перпендикуляри AA_1, BB_1 і MM_1. Знайдіть MM_1, якщо $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 10$ см і:
а) M — середина AB; б) $AM : MB = 1 : 3$.

404. З вершин паралелограма $ABCD$ на площину α, яка не перетинає паралелограм, опущено перпендикуляри AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Знайдіть DD_1, якщо:
а) $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 20$ см, $CC_1 = 13$ см;
б) $AA_1 = 15$ см, $BB_1 = 25$ см, $CC_1 = 13$ см.

Б

405. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Доведіть, що пряма AC перпендикулярна до площини, яка проходить через точки B, B_1, D_1.

406. Побудуйте переріз правильного тетраедра $ABCD$ площиною, яка перпендикулярна до ребра AB і проходить через його середину. Знайдіть площу перерізу, якщо $AB = 12$ см.

407. Через вершину B тупого кута ромба $ABCD$ до площини ромба проведено перпендикуляр BM. Знайдіть MD, якщо різниця діагоналей ромба дорівнює 4 см, $AB = 10$ см, $AM = 2\sqrt{89}$ см.

408. MA — перпендикуляр до площини ромба $ABCD$. Доведіть, що $MC \perp BD$.

409. O — центр квадрата $ABCD$, MO — перпендикуляр до його площини, K — середина BC. Доведіть, що $DC \perp (MOK)$. Знайдіть MO, якщо $MC = 2\sqrt{34}$ см, MK = 10 см.

410. AP — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, $K \in PC$. Доведіть, що $BD \perp AK$.

411. Через вершину A рівнобедреного прямокутного трикутника ABC $(\angle C = 90°)$ до його площини проведено перпендикуляр PA. Знайдіть площу трикутника PCB, якщо AB = 10 см, $\angle PCA = 30°$.

412. Площа рівностороннього трикутника дорівнює $27\sqrt{3}$ см^2. Через точку O перетину медіан трикутника до його площини проведено перпендикуляр MO, MO = 8 м. Доведіть, що точка M рівновіддалена від вершин трикутника, і знайдіть цю відстань.

413. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 15 см і 17 см. Через точку S, яка рівновіддалена від вершин трикутника, до його площини проведено перпендикуляр SO. Знайдіть SA, якщо $SO = 2\sqrt{21}$ см.

414. Точка M рівновіддалена від вершин прямокутного трикутника і не лежить у його площині, F — середина гіпотенузи. Доведіть, що MF — перпендикуляр до площини трикутника.

415. Точка P знаходиться на відстані 26 см від усіх вершин трикутника ABC $(\angle C = 90°)$. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки P до площини трикутника, якщо його площа 96 см^2, а різниця катетів 4 см.

416. Довжина перпендикуляра, проведеного з точки M до площини прямокутного трикутника, дорівнює 10 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо бісектриса, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки, пропорційні числам 24 і 7, а точка M знаходиться на відстані 12,5 см від усіх вершин трикутника.

417. Точка Q рівновіддалена від вершин трапеції з основами 4 см і 20 см та бічною стороною 10 см. Довжина перпендикуляра, проведеного з точки Q до площини трапеції, дорівнює $5\sqrt{11}$ см. Знайдіть відстань від точки Q до вершин трапеції.

418. ***Відкрита задача.*** Точка M віддалена від вершин чотирикутника $ABCD$ на 10 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до площини чотирикутника, якщо $ABCD$ — ... , у якого ... .

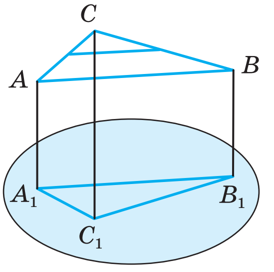
419. З кінців відрізка AB і точку M $(M \in AB)$ до площини α, яка перетинає відрізок AB, проведено перпендикуляри AA_1, BB_1, MM_1. Знайдіть MM_1, якщо AA_1 = 5 см, BB_1 = 11 см і:

а) M — середина AB;

б) $AM : MB = 3 : 1$.

420. Через вершини трикутника ABC $(\angle C = 90°)$ до площини α, яка паралельна найбільшій середній лінії трикутника, проведено перпендикуляри AA_1,

BB_1, CC_1 (мал. 183). Знайдіть сторони трикутника ABC, якщо $A_1B_1 = 4\sqrt{43}$ см, $B_1C_1 = 16$ см, $A_1C_1 = 12$ см.



Мал. 183

421. BK — пряма, проведена перпендикулярно до площини квадрата $ABCD$. Знайдіть відстань від точки K до вершин квадрата, якщо $AB = a$, $BK = b$.

422. **Доведіть, що дві площини, перпендикулярні до однієї і тієї самої прямої, паралельні.**

423. **Доведіть, що дві прямі, перпендикулярні до паралельних площин, паралельні.** Чи можуть бути паралельними прямі, перпендикулярні до двох площин, які перетинаються?

424. Через дану точку проведіть пряму, перпендикулярну до даної площини.

425. На даній прямій a знайдіть точки, однаково віддалені від даних точок A і B.

426. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від усіх вершин квадрата.

427. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від вершин трикутника.

428. Рівнобедрені трикутники ABC і ADC мають спільну основу і лежать у різних площинах. Доведіть, що $AC \perp BD$.

429. Точки A, B, C, D розміщені в просторі так, що $AB = BC$ і $CD = DA$. Доведіть, що $AC \perp BD$.

430*. $KABC$ і $PABC$ — правильні тетраедри. Доведіть, що пряма KP перпендикулярна до площини трикутника ABC.

431*. Точка O — центр грані ABC правильного тетраедра $PABC$. Доведіть, що пряма PO перпендикулярна до площини грані ABC.

432*. Периметр рівностороннього трикутника ABC дорівнює $2p$, а відрізки AA_1 і BB_1 перпендикулярні до площини цього трикутника. Знайдіть периметр, площу і косинуси кутів трикутника A_1B_1C, якщо ABB_1A_1 — квадрат.

Задачі для повторення

433. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, M, N, K — середини ребер A_1B_1, B_1C_1, AA_1 відповідно. Знайдіть кут між прямими MN і AC, MN і BD, C_1K і AC, MK і AC.

434. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції з діагоналлю d і гострим кутом α.

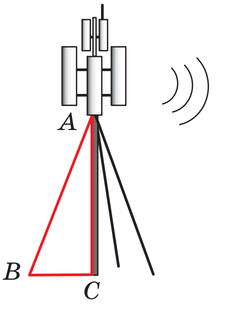
435. З точки P до прямої a проведено перпендикуляр PM і похилі $PA = 15$ см, $PB = 13$ см. Знайдіть PM, якщо різниця проекцій похилих дорівнює 4 см.

§ 12 Перпендикуляр і похила до площини

Озирніться навколо себе і придивіться до оточуючих предметів. Ви зможете навести не один приклад їх взаємного розміщення, що характеризується властивістю «перпендикулярності».

У спортивній залі, наприклад, перпендикулярно до підлоги висить канат. Гімнастична перекладина та її стойка перпендикулярні відповідно до стіни та до підлоги (мал. 184). Не перпендикулярні до підлоги розтяжки перекладини, а також і ніжки гімнастичного коня.

Мал. 184



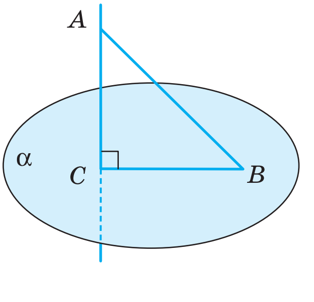
Мал. 185

На малюнку 185 зображено базову станцію стільникового оператора. Тут опора AC перпендикулярна до площини, а розтяжки нахилені до неї під деяким гострим кутом. У стереометрії відрізки AC і AB називають відповідно перпендикуляром і похилою.

Перпендикулярно до площини зазвичай забивають палі, бурять свердловини, проходять шахтні стволи, запускають космічні апарати. Тільки піднявшись на певну висоту, ракета-носій відхиляється в потрібному напрямі.

Ви вже знаєте, що **перпендикуляром, опущеним з даної точки на дану площину**, називають відрізок прямої, перпендикулярної до площини, що міститься між даною точкою і площиною. На малюнку 186 AC — перпендикуляр, опущений з точки A на площину α. Точка C — **основа перпендикуляра**.

Якщо AC — перпендикуляр до площини α, а B — відмінна від C точка цієї площини, то відрізок AB називають **похилою**, проведеною з точки A на площину α. Точка B — **основа похилої**, а відрізок CB — **проекція похилої** AB на площину α.



Мал. 186

Зауважимо, що тут ідеться про *прямокутну проекцію похилої*. Такі проекції дістають за умови, що всі проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій.

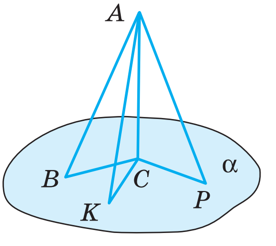
ТЕОРЕМА 19

Якщо з однієї точки, взятої поза площиною, проведені до цієї площини перпендикуляр і похилі, то:
1. Дві похилі, які мають рівні проекції, рівні.
2. З двох похилих та більша, проекція якої більша.
3. Перпендикуляр коротший за будь-яку похилу.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай AC — перпендикуляр, а AB, AK, AP — похилі до площини α (мал. 187).

1) Якщо $CB = CK$, то $\triangle ACB = \triangle ACK$ (за двома катетами). Тому $AB = AK$.
2) З прямокутних трикутників ACB і ACP маємо: $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$ і $AP = \sqrt{AC^2 + CP^2}$. Отже, якщо $CB < CP$, то $AB < AP$.
3) Перпендикуляр AC — катет, а будь-яка похила AB — гіпотенуза трикутника ABC. Тому $AC < AB$. Теорему доведено. □



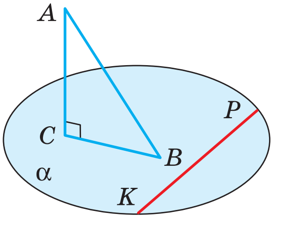
Мал. 187

ТЕОРЕМА 20

(Про три перпендикуляри.) **Пряма, проведена на площині перпендикулярно до проекції похилої, перпендикулярна до цієї похилої. І навпаки, якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай AC і AB — перпендикуляр і похила до площини α (мал. 188). Якщо пряма KP лежить у площині α, то $KP \perp AC$. Якщо, крім того, пряма KP перпендикулярна до BC або AB, то вона перпендикулярна до площини трикутника ABC (наслідок з теореми 16), а отже, і до прямої AB або BC. Тобто: якщо $KP \perp BC$, то $KP \perp AB$; якщо $KP \perp AB$, то $KP \perp BC$. Що і треба було довести. □



Мал. 188

З доведення випливає, що коли пряма KP не перпендикулярна до BC, то вона не перпендикулярна і до AB. Тому теорему можна сформулювати одним твердженням.

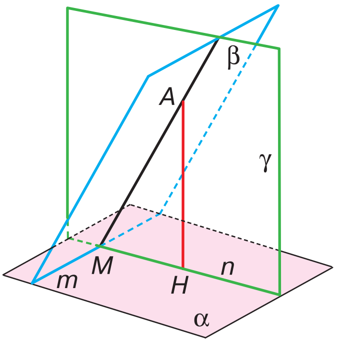
Пряма, яка лежить у площині, перпендикулярна до похилої тоді і тільки тоді, коли ця пряма перпендикулярна до проекції похилої.

Це твердження називають теоремою про три перпендикуляри, маючи на увазі перпендикуляри: $AC \perp \alpha$, $BC \perp KP$, $AB \perp KP$.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Як побудувати перпендикуляр, опущений з даної точки A на площину α? Виконати це можна таким способом (мал. 189).

1) У даній площині α проведемо довільну пряму m.
2) Через m і дану точку A проведемо площину β.
3) У площині β через точку A проведемо пряму AM, перпендикулярну до прямої m.
4) У площині α через точку M проведемо пряму n, перпендикулярну до m.
5) Через прямі AM і n проведемо площину γ.
6) У площині γ з точки A опустимо перпендикуляр AH на пряму n. Цей перпендикуляр — відрізок, який і треба було побудувати.



Мал. 189

Доведення. Оскільки пряма m перпендикулярна до n і AM, то вона перпендикулярна до площини γ, а отже, і до прямої AH. Пряма AH перпендикулярна до прямих n і m, які перетинаються, тому — і до площини α. Відрізок AH перпендикулярний до площини α, тому він — перпендикуляр, опущений з A на α.

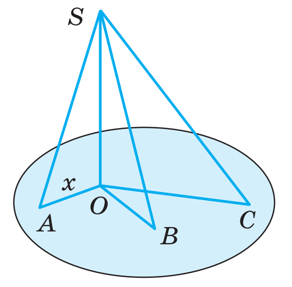
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що називають перпендикуляром до площини?
2. Що називають похилою, проведеною з даної точки до площини? А проекцією похилої на площину?
3. Укажіть найважливіші властивості перпендикуляра, похилої і її проекції на площину.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про три перпендикуляри.

Виконаємо разом

1 З точки S до площини проведено три похилі завдовжки 25 см, 30 см і 40 см. Знайдіть проекцію третьої похилої на цю площину, якщо різниця проекцій перших двох похилих дорівнює 11 см.

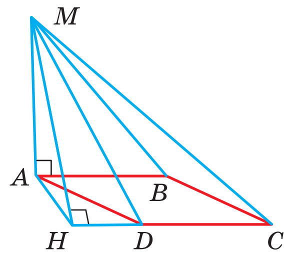
● Нехай $OA = x$, тоді $OB = x + 11$ (мал. 190). З $\triangle SOA$ і $\triangle SOB$ за теоремою Піфагора $SO^2 = SA^2 - OA^2$ і $SO^2 = SB^2 - OB^2$. Тоді $SA^2 - OA^2 = SB^2 - OB^2$, або $625 - x^2 = 900 - (x + 11)^2$, звідси $x = 7$. Тоді $AO = 7$ см, $BO = 18$ см, $SO = \sqrt{625 - 49} = 24$ (см). З $\triangle SOC$ за теоремою Піфагора знайдемо, що $OC = \sqrt{1600 - 576} = 32$ (см).



Мал. 190

2 MA — перпендикуляр до площини ромба $ABCD$, $\angle BAD = 60°$. Побудуйте висоту MH трикутника MCD.

● Проведемо $AH \perp CD$ (мал. 191). Оскільки $\angle ADH = 60°$, то точка H повинна лежати на прямій CD поза відрізком CD так, щоб $HD = 0{,}5CD$. Побудувавши точку H, проводимо відрізок MH. Він і є висотою $\triangle MCD$, яку треба було побудувати: якщо $AH \perp CD$, то за теоремою про три перпендикуляри $MH \perp CD$.



Мал. 191

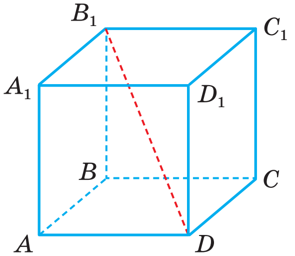
Задачі і вправи

Виконайте усно

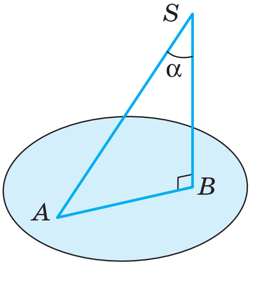
436. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 192). Укажіть проекції відрізка B_1D на площини $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1, BCC_1B_1.

437. З точки S до площини проведено перпендикуляр і похилу, кут між якими α (мал. 193). Знайдіть: а) довжину перпендикуляра і проекції похилої, якщо довжина похилої l; б) довжину похилої і її проекції, якщо перпендикуляр дорівнює h; в) довжину похилої і перпендикуляра, якщо довжина проекції дорівнює a.

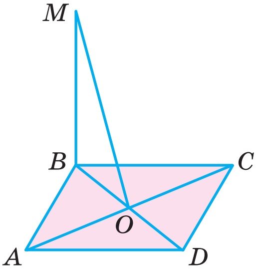
438. Доведіть, що в кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 192) $DC_1 \perp BC$, $A_1C \perp BD$, $AC \perp BD_1$.



Мал. 192



Мал. 193



Мал. 194

439. BM — перпендикуляр до площини чотирикутника $ABCD$ (мал. 194). Які з пар прямих MA і AD, MC і CD, MO і AC перпендикулярні, якщо: а) $ABCD$ — прямокутник, відмінний від квадрата; б) $ABCD$ — ромб, відмінний від квадрата; в) $ABCD$ — квадрат?

А

440. З точки A проведено до однієї і тієї самої площини перпендикуляр $AC = 40$ см і похилу $AB = 50$ см. Знайдіть довжину проекції похилої.

441. З точки M до площини проведено перпендикуляр MO і похилі MA та MB. Знайдіть MO, якщо довжини похилих пропорційні числам 5 і 13, а їх проекції дорівнюють 4 см і $4\sqrt{10}$ см.

442. З точки M до площини проведено перпендикуляр MO і похилі MA, MB. $\angle AMO = 60°$, $\angle BMO = 45°$. Знайдіть довжини похилих, якщо проекція меншої похилої дорівнює a.

443. З точки P до площини проведено перпендикуляр PO і похилі PA та PB. $PO = a$, $\angle PAO = 45°$, $\angle PBO = 30°$. Знайдіть кут між похилими, якщо кут між їх проекціями дорівнює 90°.

444. З точки S до площини проведено перпендикуляр SO та похилі $SA = 13$ см і $SB = 20$ см. Знайдіть кут між проекціями похилих, якщо $AO = 5$ см, а косинус кута між похилими дорівнює 0,4.

445. Через вершину A ромба $ABCD$ проведено пряму AM, перпендикулярну до його площини. Знайдіть відстані MB і MC, якщо $MA = AB = a$ і $\angle ABC = 120°$.

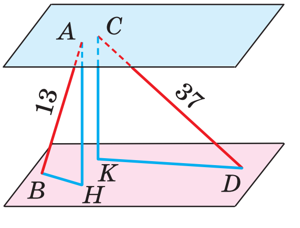
446. Знайдіть сторону ромба $ABCD$, якщо AC — проекція похилої MC на площину цього ромба і $MA = a$, $\angle BAD = \angle MCA = \alpha$.

447. AB — перпендикуляр до площини α, $C \in \alpha$ і $D \in \alpha$. Доведіть, що $AC = AD$ тоді і тільки тоді, коли $BC = BD$.

448. Через вершину C прямокутного трикутника ABC $(\angle C = 90°)$ проведено площину α, $\alpha \parallel AB$. Проекція меншого катета на площину дорівнює 8 см. Знайдіть проекції інших сторін трикутника на площину α, якщо $AB = 26$ см, а різниця катетів 14 см.

449. З вершин B і C ромба $ABCD$ до площини α, яка проходить через сторону AD, проведено перпендикуляри BB_1 і CC_1. Знайдіть проекції діагоналей і сторін ромба на площину α, якщо $AC = 16$ см, $BD = 12$ см, $BB_1 = 8$ см.

450. Два відрізки, довжини яких 13 дм і 37 дм, упираються кінцями в дві паралельні площини (мал. 195). Проекція меншого з них на площину дорівнює 5 дм. Знайдіть довжину проекції другого відрізка.



Мал. 195

451. Пряма a перетинає площину α, точка M належить α. Проведіть у площині α пряму MK, перпендикулярну до a.

452. Учень каже: «Пряма, перпендикулярна до похилої, перпендикулярна і до проекції цієї похилої». Наведіть контрприклад.

453. Трикутник ABC — рівнобедрений, $AB = BC$, BM — перпендикуляр до площини трикутника. Побудуйте $MK \perp AC$, $K \in AC$.

454. $ABCD$ — прямокутник, O — точка перетину його діагоналей, MO — перпендикуляр до площини прямокутника. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки M до сторін прямокутника.

455. Трикутник ABC — прямокутний, $\angle C = 90°$. MB — перпендикуляр до площини трикутника. На прямій AC знайдіть точку K, у якій $MK \perp AC$.

456. Через точку O перетину медіан рівностороннього трикутника проведено перпендикуляр MO до його площини. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки M до сторін трикутника.

457. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між прямими AC_1 і BD.

458. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. $AC_1 \perp BD$. Доведіть, що грань $ABCD$ — квадрат.

459. MA — перпендикуляр до площини рівностороннього трикутника ABC, K — середина сторони BC. Доведіть, що $MK \perp BC$.

460. MB — перпендикуляр до площини прямокутника $ABCD$. Доведіть, що трикутники AMD і MCD прямокутні.

461. Основою тетраедра $SABC$ є прямокутний трикутник ABC $(\angle C = 90°)$. Ребро AS перпендикулярне до площини основи. Доведіть, що всі бічні грані піраміди — прямокутні трикутники.

462. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точки K, L, M — середини ребер AA_1, CC_1, AD відповідно, O — точка перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що $OM \perp AD$ і $OD \perp KL$.

463. K — середина сторони ромба, $MK = 12$ см — перпендикуляр, проведений до площини ромба. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки M до діагоналей ромба. Знайдіть довжини цих перпендикулярів, якщо сторона ромба дорівнює 20 см, а кут — 60°.

464. O — середина гіпотенузи прямокутного трикутника з катетами 10 см і 18 см. OS — перпендикуляр до площини трикутника, $OS = 12$ см. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки S до катетів трикутника, і знайдіть їхні довжини.

465. Сторони трикутника ABC дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см, O — центр вписаного в трикутник кола, MO — перпендикуляр до площини трикутника. Знайдіть довжини відрізків перпендикулярів, проведених з M до сторін трикутника, якщо $MO = 3$ см.

466. У трикутнику ABC $AB = BC = 10$ см, $\angle ABC = 120°$. MB — перпендикуляр, проведений до площини трикутника. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до AC, якщо $MC = 15$ см.

467. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = 12$ см, $BC = 16$ см. CM — перпендикуляр до площини трикутника. Знайдіть CM, якщо $MK \perp AB$, $K \in AB$ і $MK = 10$ см.

468. $ABCD$ — тетраедр, усі ребра якого дорівнюють a. DO — перпендикуляр до площини $\triangle ABC$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через DO, перпендикулярно до AC. Знайдіть площу перерізу.

Б

469. З точки M до площини проведено перпендикуляр MO і похилі MA та MB. Різниця між похилими дорівнює 7 см, а між проекціями — 11 см. Знайдіть довжину MO, якщо більша похила відноситься до своєї проекції як 5 : 4.

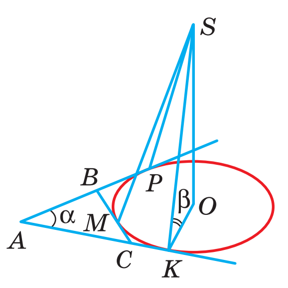
470. З точки P до площини проведено перпендикуляр PO і три похилі PA, PB, PC, $C \in AB$, $AC = BC = 10$ см. Знайдіть довжини найбільшої і найменшої похилих, якщо $BO = 16$ см, $\angle AOB = 90°$, $\operatorname{tg} \angle PCO = 0,5$.

471. Із центра O кола, вписаного в прямокутний трикутник, до його площини проведено перпендикуляр OM. Точка дотику ділить гіпотенузу на відрізки 5 см і 12 см. Знайдіть довжини похилих, проведених в точки дотику, якщо $OM = 4$ см.

472. Відрізки AB і MN з кінцями на паралельних площинах α і β ($A \in \alpha$, $M \in \alpha$) лежать на мимобіжних прямих. Знайдіть KN — проекцію відрізка MN на площину β, якщо $AB \perp \beta$, $AM = 3$ см, $BN = 8$ см, $\angle KBN = 60°$.

473. З вершин A і C ромба $ABCD$ до площини α, яка проходить через діагональ BD, проведено перпендикуляри AM і CN. Знайдіть проекції сторін та діагоналей ромба на площину α, якщо $AC : BD = 12 : 5$, $AM = 2\sqrt{11}$ м, а площа ромба — 120 м².

474. Коло з центром O дотикається до сторони BC трикутника ABC у точці M, а продовження сторін AB і AC — у точках P і K (мал. 196). SO — перпендикуляр до площини трикутника. Знайдіть довжини похилих SM, SP, SK, якщо периметр $\triangle ABC$ дорівнює $2p$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle SKO = \beta$.



Мал. 196

475. Одна зі сторін правильного трикутника ABC, площа якого $16\sqrt{3}$ см², лежить у площині α, а проекції двох інших сторін на цю площину дорівнюють $2\sqrt{7}$ см. Знайдіть довжини проекцій медіан цього трикутника на площину α.

476. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 5 см і 15 см, а кут 120°. З точки перетину діагоналей трапеції до площини, яка проходить через більшу основу, проведено перпендикуляр завдовжки 6 см. Знайдіть довжини проекцій сторін трапеції на цю площину.

477. Дано правильний тетраедр $ABCD$. Побудуйте його переріз ABK, який би мав найменшу площу.

478. З вершини A прямокутника $ABCD$ проведено перпендикуляр до його площини. Знайдіть довжину цього перпендикуляра, якщо його кінець H віддалений від вершин B, C і D відповідно на 5 м, 11 м і 10 м.

479. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Доведіть, що пряма A_1C перпендикулярна до площини трикутника AB_1D_1.

480. Доведіть, що коли в тетраедрі $ABCD$ $AB \perp CD$ і $AC \perp BD$, то $AD \perp BC$.

481. Доведіть, що в правильному тетраедрі протилежні ребра перпендикулярні.

482. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, M і N — середини AD і CD відповідно. Доведіть, що $B_1M \perp AN$.

483*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед, $AB = a$, $AD = 2a$, K — середина AA_1, M — точка перетину діагоналей грані DD_1C_1C, $N \in AD$, $AN : ND = 1 : 7$. Доведіть, що $KM \perp B_1N$.

484. Ромб $ABCD$ зігнули по діагоналі BD так, що точка A не належить площині (BCD), O — точка перетину діагоналей ромба. Доведіть, що: а) проекція AO на площину (BCD) лежить на прямій CO; б) перпендикуляр, опущений з точки C на площину (ABD), перетне пряму AO.

485. O — точка перетину діагоналей ромба $ABCD$, $AB = 10$ см, $AC : BD = 4 : 3$. MO — перпендикуляр, проведений до площини ромба. Знайдіть довжини відрізків, проведених з точки M перпендикулярно до сторін ромба, якщо $MO = 2$ см.

486. SB — перпендикуляр до площини трикутника ABC. Знайдіть площу трикутника ASC, якщо $AB = 15$ м, $BC = 13$ м, $AC = 14$ м, $SB = 5$ м.

487. BK — перпендикуляр, проведений до площини рівнобедреного прямокутного трикутника ABC $(\angle C = 90°)$. Знайдіть площу трикутника AKC, якщо $BK = h$, $\angle KCB = \alpha$.

488. $SABC$ — правильний тетраедр, SO — його висота. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку O паралельно AS і BC, та знайдіть площу перерізу, якщо $AB = a$.

489*. Три ребра прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, мають довжини a, a і $a\sqrt{2}$. Знайдіть площу перерізу паралелепіпеда площиною, яка перпендикулярна до діагоналі паралелепіпеда і проходить через її середину.

490*. Через середину діагоналі куба, перпендикулярно до неї, проведено площину. Визначте площу фігури, утвореної в перерізі, якщо ребро куба дорівнює a.

Задачі для повторення

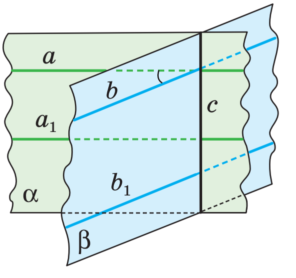
491. Основою піраміди $SABCD$ є ромб $ABCD$, $SA = SC$. Доведіть, що $AC \perp (SBD)$.

492. AK і AP — медіани граней ABD і ABC тетраедра $ABCD$. Чи паралельна пряма KP якій-небудь грані тетраедра?

493. Пряма m паралельна одній із двох мимобіжних прямих. Доведіть, що m не може бути паралельною іншій прямій.

§ 13 Перпендикулярні площини

Спочатку введемо поняття *кута між площинами*. Нехай α і β — площини, які перетинаються по прямій c (мал. 197). Проведемо в цих площинах прямі a і b, перпендикулярні до прямої c. Нехай кут між ними $\angle(ab)=\varphi$. Якщо в даних площинах провести які-небудь інші прямі a_1 і b_1, перпендикулярні до c, кут між ними буде такий самий: $\angle(a_1b_1)=\varphi$ (див. теорему 14, с. 99). Тому можна прийняти таке означення.



Мал. 197

■ **Кутом між площинами, що перетинаються,** називають кут між прямими, проведеними в цих площинах перпендикулярно до лінії їх перетину. Якщо площини паралельні, то вважають, що кут між ними дорівнює 0°.

Кут між площинами α і β позначають $\angle(\alpha\beta)$. Він набуває значень у тих самих межах, що і кут між прямими: $0° \le \angle(\alpha\beta) \le 90°$.

■ Дві площини називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°.

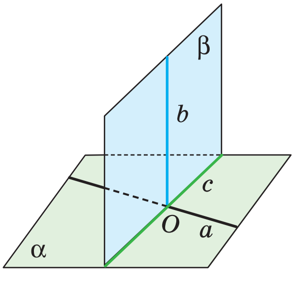
ТЕОРЕМА 21

(Ознака перпендикулярності площин.) **Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай площина β проходить через пряму b, перпендикулярну до площини α (мал. 198). Доведемо, що $\beta \perp \alpha$.

Пряма b перетинає площину α у деякій точці O. Ця точка спільна для площин α і β. Тому дані площини перетинаються по прямій c, яка проходить через точку O. Проведемо у площині α через точку O пряму a, перпендикулярну до c. Оскільки прямі a і c лежать у площині α і $b \perp \alpha$, то $b \perp a$ і $b \perp c$. Крім того, $a \perp c$. Отже, $\angle(\alpha\beta)=\angle(ab)=90°$, тобто $\beta \perp \alpha$. □



Мал. 198

ТЕОРЕМА 22

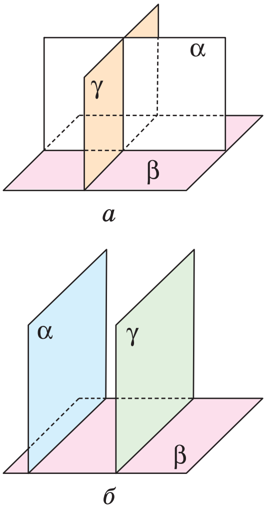
Пряма, проведена в одній з двох перпендикулярних площин перпендикулярно до прямої їх перетину, перпендикулярна до другої площини.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай перпендикулярні площини α і β перетинаються по прямій c, і в площині β проведено пряму b перпендикулярно до c (див. мал. 198). Доведемо, що $b \perp \alpha$. Для цього проведемо у площині α пряму a, перпендикулярну до прямої перетину площин α і β. Тоді кут між прямими a і b дорівнює куту між площинами α і β, тобто $90°$. Отже, пряма b перпендикулярна до прямих a і c площини α, які перетинаються. Маємо: $b \perp \alpha$. Що й треба було довести. □

Під однаковими кутами до горизонтальної площини бувають нахилені вугільні пласти, стіни каналів, відкоси насипів, схили дахів тощо. У перпендикулярних площинах розміщені суміжні грані цеглини, бруска, швелера, багатьох столярних виробів, стіна і підлога, стіна і стеля кімнати.

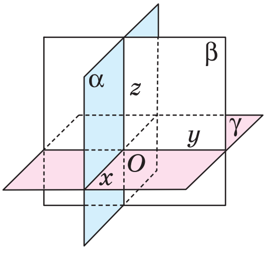
Теорему 22 можна ілюструвати таким наочним прикладом. Якщо пряма, яка проходить через центри петель дверей, перпендикулярна до площини підлоги, то як би не повертали двері, їхня площина буде перпендикулярною до площини підлоги.



Мал. 199

Відношення перпендикулярності площин симетричне (якщо $\alpha \perp \beta$, то $\beta \perp \alpha$), але не транзитивне: якщо $\alpha \perp \beta$ і $\beta \perp \gamma$, то площини α і γ не обов'язково перпендикулярні. Вони можуть перетинатися під довільним гострим кутом (мал. 199, *а*) і можуть бути навіть паралельними (мал. 199, *б*).

Якщо три площини α, β і γ попарно перпендикулярні, то вони перетинаються по попарно перпендикулярних прямих x, y і z таких, що $x \perp y$, $y \perp z$, $z \perp x$ (мал. 200). Якщо такі попарно перпендикулярні прямі x, y, z — координатні прямі зі спільним початком координат O, то вони становлять систему координат тривимірного простору. Вона дає можливість кожній точці простору поставити у відповідність єдину впорядковану трійку дійсних чисел, а кожній трійці дійсних чисел — єдину точку простору. Із системою координат тривимірного простору ви ознайомитеся згодом.

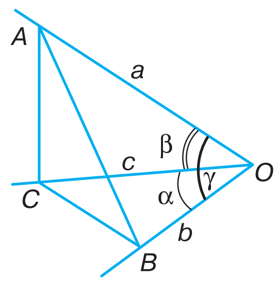


Мал. 200

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Розглянемо задачу.

Три промені, які виходять з однієї точки, утворюють три гострі кути: α, β, γ. Доведіть, що коли площини кутів α і β перпендикулярні, то $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos\gamma$.



Мал. 201

Розв'язання. Нехай $\angle(bc)=\alpha$, $\angle(ca)=\beta$, $\angle(ab)=\gamma$ (мал. 201). З довільної точки A променя a опустимо перпендикуляри AC на промінь c і AB на промінь b. Оскільки площини кутів α і β перпендикулярні, то CB — проекція AB на площину кута α. За теоремою про три перпендикуляри $CB \perp b$. Отже, трикутники ACO, CBO і ABO прямокутні. Тому

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{BO}{CO} \cdot \frac{CO}{AO} = \frac{BO}{AO} = \cos\gamma.$$

Доведену рівність $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos\gamma$ називають **теоремою про три косинуси**.

Справедливе й обернене твердження.

Якщо три промені, що виходять з однієї точки, утворюють три гострі кути α, β і γ, *для яких* $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos\gamma$, *то площини кутів* α і β *— перпендикулярні*. Спробуйте це довести методом від супротивного.

Доведіть, що теорема має місце і у випадку, коли не всі кути α, β, γ — гострі.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення кута між площинами.
2. Які площини називають перпендикулярними?
3. Чому дорівнює кут між паралельними площинами?
4. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності площин.
5. Сформулюйте властивість прямої, проведеної в одній із двох перпендикулярних площин.
6. Чи є відношення перпендикулярності площин симетричним? А транзитивним?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1 Катети прямокутного трикутника ABC дорівнюють a і b. Площина α проходить через гіпотенузу трикутника й утворює з його площиною кут φ. Знайдіть відстань від вершини прямого кута до її проекції на площину α.

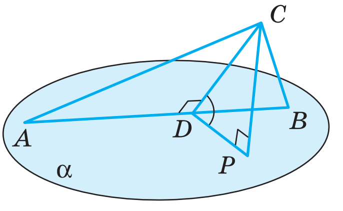
- Нехай $CP \perp \alpha$ і $CD \perp AB$, тоді PD — проекція CD на площину α (мал. 202). За теоремою про три перпендикуляри $PD \perp AB$. Отже, $\angle PDC = \varphi$.

  З $\triangle ABC$: $CD \cdot AB = AC \cdot BC$, звідси

  $$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

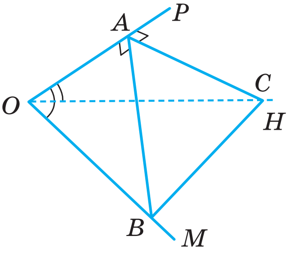
  З $\triangle CPD$: $CP = CD \cdot \sin\varphi$. Отже,

  $$CP = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\varphi.$$



Мал. 202

2 Промінь OP утворює з променями OH і OM кути по $45°$. Знайдіть кут між площинами POM і POH, якщо $\angle MOH = 60°$.



Мал. 203

- *Перший спосіб*. На промені OP оберемо довільну точку A і побудуємо $AB \perp OP$ і $AC \perp OP$ (мал. 203). Тоді $\angle BAC$ — шуканий. Трикутники BAO і CAO — прямокутні і рівнобедрені, а тому $AB = AO$, $AC = AO$ і $OB = OC$. Оскільки $\triangle COB$ рівнобедрений і містить кут в $60°$, то він рівносторонній, а тому $OB = CB$. Маємо: $\triangle CAB = \triangle OAB$ (за трьома сторонами). Отже, $\angle BAC = \angle BAO = 90°$.
- *Другий спосіб*. Оскільки за умовою задачі промені утворюють між собою кути $45°$, $45°$ і $60°$, а $\cos 45° \cdot \cos 45° = \frac{1}{2} = \cos 60°$, то для цих кутів виконується рівність $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos\gamma$. Отже, за теоремою, оберненою до теореми про три косинуси, площини (POM) і (POH) утворюють прямий кут.

Задачі і вправи

Виконайте усно

494. Скільки площин, які перетинають дану площину під кутом $50°$, можна провести через дану точку?

495. Дано площину α і паралельну їй пряму a. Скільки площин, які перетинають площину α під даним кутом φ, можна провести через пряму a?

496. Скільки пар перпендикулярних площин можна провести через дану пряму?

497. Скільки пар перпендикулярних площин можна провести через дві дані паралельні прямі?

498. Чи можна через пряму a, перпендикулярну до площини α, провести площину, не перпендикулярну до α?

499. Чи правильно, що дві площини, перпендикулярні до третьої, паралельні?

А

500. Чи можна через дві перпендикулярні прямі провести площини, які перетинаються під кутом 30°? А під будь-яким наперед заданим гострим кутом?

501. Точка M рівновіддалена від вершин квадрата $ABCD$. Доведіть, що площини (MAC) і (MBD) перпендикулярні.

502. O — точка перетину діагоналей ромба, OM — перпендикуляр до площини ромба. Доведіть, що площини, які проходять через точку M і діагоналі ромба, — перпендикулярні.

503. Трикутник ABC і прямокутник $ABMN$ лежать у взаємно перпендикулярних площинах. Доведіть, що кут CAN прямий.

504. Із центра O квадрата $ABCD$ проведено відрізок OM перпендикулярно до площини квадрата. Знайдіть кут між площиною квадрата і площиною, проведеною через DC і точку M, якщо квадрат і $\triangle DMC$ — рівновеликі.

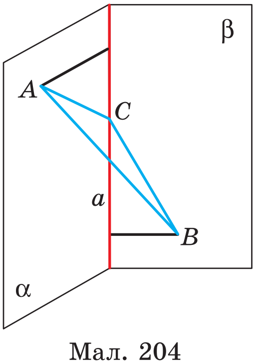
505. Доведіть, що коли дві площини, які перетинаються, перпендикулярні до третьої, то лінія їх перетину перпендикулярна до цієї площини.

506. Доведіть, що площина, перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, перпендикулярна і до другої.

507. Кінці відрізка AB лежать у перпендикулярних площинах. AC і BD — перпендикуляри, проведені до лінії перетину цих площин. Знайдіть CD, якщо: а) AC = 6 см, BD = 8 см, AB = 12 см; б) AD = 4 см, BC = = 7 см, AB = 8 см; в) $AC = BD = a$, $AB = 2a$.

508. Кінці відрізка AB лежать у перпендикулярних площинах. AC і BD — перпендикуляри, проведені до лінії перетину цих площин, AC = 6 м, $BD = 3\sqrt{3}$ м. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $\angle DBC = 30°$.

509. Трикутник ABC — рівнобедрений, $AB = 24$ см, $\angle C = 120°$. Точки A і B лежать у перпендикулярних площинах, а точка C на прямій a — лінії перетину цих площин. Знайдіть довжини перпендикулярів, проведених з точок A і B до прямої a, якщо кут між AC і прямою a дорівнює 45° (мал. 204).



Мал. 204

510. Квадрат $ABCD$ зігнули по діагоналі AC так, що площини (ABC) і (ADC) стали перпендикулярними. Знайдіть відстань між точками B і D, якщо $AB = a$.

511. Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у площинах, кут між якими 60°. Знайдіть відстань між їхніми центрами, якщо $AB = 2m$.

512. Площини квадратів $ABCD$ і ABC_1D_1 перпендикулярні, $AB = a$. Знайдіть: а) відстань CC_1; б) відстань C_1D; в) кут між діагоналями AC і AC_1.

513. Два рівносторонні трикутники ABM і ABN лежать у різних площинах. Знайдіть MN, якщо $AB = a$ і кут між площинами дорівнює: а) 90°; б) 60°.

514. Площини рівносторонніх трикутників ABC і ABD перпендикулярні. Знайдіть: а) $\angle CAD$; б) довжину AB, якщо $CD = a$.

515. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. Точки M, N і K — середини ребер AB, B_1C_1 і BC відповідно. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки M, N і K. Доведіть, що площина основи і площина перерізу перпендикулярні. Обчисліть периметр і площу перерізу, якщо $B_1B = 16$ м, $B_1D = 20$ м.

516. Основою прямого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$. Доведіть, що площини перерізів ACC_1 і BB_1D — взаємно перпендикулярні. Знайдіть відношення площ утворених перерізів, якщо $AC : BD = m : n$.

517. Основою тетраедра $ABCD$ є трикутник ABC $(\angle C = 90°)$ і $DA = DB = DC$. На ребрі CD взято точку K так, що $CK : KD = 2 : 1$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точку K паралельно AD і BD. Доведіть, що площина перерізу перпендикулярна до площини основи. Знайдіть площу перерізу, якщо площа грані ABD дорівнює S.

Практичне завдання

518. Підготуйте презентацію про перпендикулярність площин у... (довкіллі, архітектурі, техніці, сільському господарстві). Проілюструйте на конкретних прикладах вивчені властивості, що стосуються перпендикулярних площин.

Б

519. Доведіть, що площина, яка перетинає одну з двох паралельних площин під кутом φ, перетинає і другу під кутом φ.

520. Площини α, β, γ попарно перпендикулярні. Доведіть, що і прямі, по яких вони перетинаються, попарно перпендикулярні.

521. Точка M рівновіддалена від вершин прямокутного трикутника ABC, $\angle C = 90°$. Доведіть, що площини (AMB) і (ABC) перпендикулярні.

522. Прямокутник $ABCD$ і ромб $ABMN$ розміщені так, що їх площини перпендикулярні. Доведіть, що кут MBC — прямий.

523. Два правильні трикутники ABC і MBC розміщені у двох перпендикулярних площинах. Знайдіть кут між площинами (ABC) і (AMB).

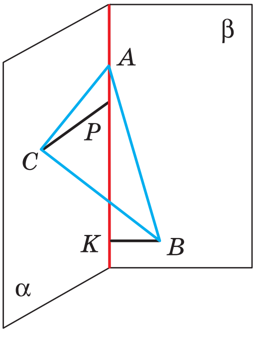
524*. $ABCD$ — ромб, $\angle B = 120°$. Пряма AP перпендикулярна до площини ромба, $AB = AP$. Знайдіть кут між площинами (1–5) та установіть відповідність між знайденими кутами та їх мірами (А–Е).

1 (ABC) і (APB)
2 (APB) і (APD)
3 (CPD) і (ABC)
4 (APD) і (BPC)
5 (BCP) і (DCP)

А $\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
Б $\dfrac{\pi}{3}$
В $\arccos\dfrac{1}{7}$
Г $\dfrac{\pi}{2}$
Д $\pi - \arccos\dfrac{1}{7}$
Е $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

525. Точки A і B розміщені у двох взаємно перпендикулярних площинах, C і D — основи перпендикулярів, проведених з точок A і B відповідно до лінії перетину площин. $AC = 2\sqrt{11}$ см, BD = 12 см, CD = 15 см. Знайдіть $\angle AMB$, якщо $M \in CD$, $CM : MD = 2 : 1$.

526. Катет і гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника лежать у двох взаємно перпендикулярних площинах. Вершина прямого кута віддалена від лінії перетину площин на 12 см, а вершина гострого кута — на $5\sqrt{7}$ см. Знайдіть площу трикутника (мал. 205).



Мал. 205

527. Прямокутник $ABCD$ зі сторонами AB = 15 см, AD = 20 см зігнули по діагоналі BD так, що площини (ABD) і (BCD) виявилися перпендикулярними. Знайдіть довжину відрізка AC.

528. У трикутнику ABC $(\angle C = 90°)$, AC = 12 м, BC = 16 м. Трикутник зігнули по медіані CM так, що площини (ACM) і (BCM) стали перпендикулярними. Знайдіть довжину відрізка AB.

529. Два рівнобедрені трикутники мають спільну основу завдовжки 16 см, а їх площини утворюють кут 60°. Бічна сторона одного трикутника дорівнює 17 см, а другий трикутник прямокутний. Знайдіть відстань між вершинами трикутників.

530. Площі двох рівнобедрених трикутників, які мають спільну основу, дорівнюють 48 см^2 і 90 см^2. Бічна сторона першого трикутника дорівнює 10 см. Знайдіть кут між площинами трикутників, якщо відстань між їхніми вершинами дорівнює 13 см.

531*. Трикутники ABC і ABD лежать у перпендикулярних площинах. Знайдіть відстань CD, якщо $AC = AD = a$, $BC = BD = b$ і $AB = c$.

532*. Площини правильних шестикутників $ABCDEF$ і $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ перпендикулярні. Знайдіть міри кутів EAE_1, DAD_1 і CAC_1.

533. Площини квадрата $ABCD$ і правильного трикутника ABK перпендикулярні. Знайдіть міру кута ACK.

534. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед, $M \in A_1B_1$, $A_1M : MB_1 = 1 : 2$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною α, яка проходить через AD і точку M. а) Доведіть, що площина перерізу перпендикулярна до площини грані AA_1B_1B. Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо AB = 15 см, AA_1 = 12 см, AD = 20 см. б) Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через BC, перпендикулярно до площини α. Знайдіть його периметр і площу.

535. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Побудуйте перерізи куба площинами (BCD_1) і (DC_1B_1). Доведіть, що площини перерізів перпендикулярні.

536. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $M \in DC$, $N \in CC_1$, $DM : MC = CN : NC_1 = 2 : 1$. Доведіть, що площини перерізів, проведені через AD і N та A_1D_1 і M, взаємно перпендикулярні. Знайдіть площі перерізів, якщо ребро куба a.

537. $ABCD$ — правильний тетраедр з ребром a. M, K — середини AC і BD відповідно. Побудуйте перерізи тетраедра площинами, які проходять через точки M, D, B і K, A, C. Доведіть, що площини перерізів перпендикулярні. Знайдіть відношення їхніх площ та периметрів.

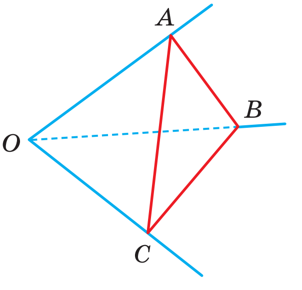
538. Основою тетраедра $ABCD$ є трикутник ABC $(\angle C = 90°)$, M — середина CD. Точка D рівновіддалена від вершин $\triangle ABC$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку M, перпендикулярно до (ABC) так, щоб у перерізі утворився:

а) довільний трикутник; б) рівнобедрений трикутник;
в) трапеція; г) довільний чотирикутник.

539. З вершини B трикутника ABC проведено похилу BL, яка утворює зі сторонами BA і BC рівні кути. Доведіть, що площина (LBK) перпендикулярна до площини трикутника (BK — бісектриса $\triangle ABC$).

540. Плоскі кути при одній вершині тетраедра дорівнюють 45°, 60° і 45°. Який кут утворюють грані тетраедра, що містять рівні кути?

541. Промені OA, OB і OC утворюють три гострі кути такі, що $\angle AOB = \angle AOC = 60°$, а $\angle BOC = 90°$ (мал. 206). Доведіть, що площина (ABC), яка відтинає на променях відрізки рівної довжини, перпендикулярна до площини прямого кута.



Мал. 206

542*. З вершини прямого кута A трикутника ABC проведено перпендикуляр AM до площини трикутника. Знайдіть косинуси кутів трикутника MBC, якщо $\angle ABM = \alpha$, $\angle ABC = \beta$.

543*. З точки поза площиною проведено перпендикуляр і дві похилі, що утворюють з площиною кути α, а між собою кут β. Знайдіть кут γ між проекціями цих похилих.

544*. Як через дану пряму провести площину, перпендикулярну до даної площини? Розгляньте всі можливі випадки.

Задачі для повторення

545. Один із кутів ромба дорівнює 60°. Побудуйте зображення цього ромба і його висот, проведених з вершини:

а) тупого кута; б) гострого кута.

546. Пряма BK перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$. Доведіть, що пряма перетину площин (ADK) і (BCK) перпендикулярна до площини (ABK).

547. Дано прямокутний паралелепіпед. Доведіть, що пряма, яка проходить через центри його протилежних граней, перпендикулярна до площин цих граней.

§ 14 Ортогональне проектування

Ви вже знаєте, що для зображення просторових фігур на площині використовують різні види проектування — паралельне чи центральне. Про паралельне проектування йшлося в § 7.

■ Якщо проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій, то таке проектування називають **ортогональним**, або **прямокутним.**

Ортогональне проектування — вид паралельного проектування, тому воно має властивості, доведені в § 7. Ортогональне проектування застосовують інженери-конструктори у машинобудуванні, легкій промисловості, будівництві та інших галузях виробничої діяльності.

У геометрії ортогональне проектування основне. Далі, говорячи про проектування і проекції, ми матимемо на увазі тільки ортогональне проектування, ортогональні проекції.

■ **Проекцією точки**, що не лежить на площині, називають основу перпендикуляра, опущеного з даної точки на площину. Якщо точка лежить на площині проекцій, то вона збігається зі своєю проекцією.

■ **Проекцією фігури** на площину називають множину проекцій усіх точок цієї фігури на дану площину.

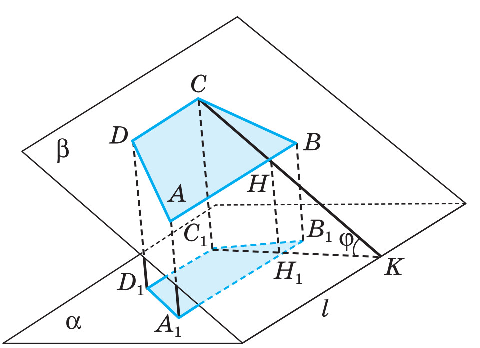
Проекцією відрізка, променя або прямої, не перпендикулярних до площини проекцій, є відповідно відрізок, промінь або пряма. Проекцією n-кутника, площина якого не перпендикулярна до площини проекцій, є n-кутник.

ТЕОРЕМА 23

Площа проекції многокутника на площину дорівнює площі даного многокутника, помноженій на косинус кута між їх площинами.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай площина β даного многокутника і площина проекцій α перетинаються під кутом φ по прямій l. Розглянемо спочатку випадок, коли даний многокутник — трапеція $ABCD$, основи якої AB і CD паралельні l (мал. 207). Проекцією даної трапеції є трапеція $A_1B_1C_1D_1$, її основи A_1B_1 і C_1D_1 теж паралельні l (чому?). ABB_1A_1 і DCC_1D_1 — прямокутники, тому $A_1B_1 = AB$, $C_1D_1 = CD$.



Мал. 207

Якщо CK — перпендикуляр до l, то за теоремою про три перпендикуляри і $C_1K \perp l$. Отже, $\angle CKC_1 = \varphi$. Якщо $CK \cap AB = H$ і $C_1K \cap A_1B_1 = H_1$, то CH і C_1H_1 — висоти розглядуваних трапецій, причому C_1H_1 — проекція CH. Отже, $C_1H_1 = CH \cos\varphi$. Тому, якщо S і $S_п$ площі трапецій $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, то

$$S_п = \frac{1}{2}(A_1B_1 + C_1D_1)C_1H_1 = \frac{1}{2}(AB + CD)CH\cos\varphi = S\cos\varphi.$$

У випадку, коли дана фігура — трикутник ABC, у якого $AB \parallel l$, повторивши майже дослівно наведені вище міркування, дістанемо ту саму залежність: $S_п = S\cos\varphi$.

Нарешті, нехай дано довільний многокутник $ABC...F$. Проведемо через його вершини прямі, паралельні l. Вони розіб'ють даний многокутник на скінченне число трапецій і трикутників, основи яких паралельні прямій l. Якщо $S_1, S_2, ..., S_k$ — площі цих трапецій і трикутників, а $S_1', S_2', ... S_k'$ — площі їх проекцій, то за доведеним вище:

$$S_1' = S_1\cos\varphi,\quad S_2' = S_2\cos\varphi, ...,\quad S_k' = S_k\cos\varphi.$$

Отже, $S_п = S_1' + S_2' + \ldots + S_k' = (S_1 + S_2 + \ldots + S_k)\cos\varphi = S\cos\varphi.$

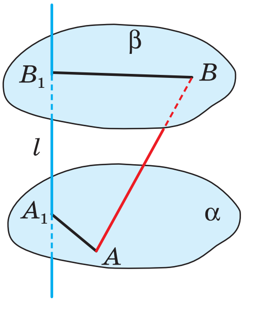
Теорему доведено. □

Розглянемо ще проекції фігур на пряму.

■ **Проекцією точки на пряму** (що не проходить через цю точку) називають основу перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму. Якщо точка лежить на прямій, то вона є своєю проекцією на дану пряму.

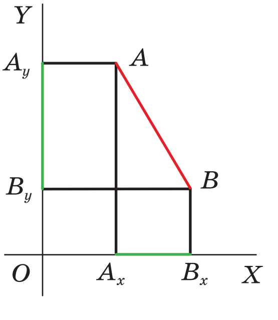
■ **Проекцією фігури на пряму** називають множину проекцій усіх точок цієї фігури на дану пряму.

Щоб побудувати проекцію відрізка AB на пряму l, достатньо через точки A і B провести площини, перпендикулярні до прямої l (мал. 208). Обмежений цими площинами відрізок A_1B_1 прямої l і буде шуканою проекцією відрізка AB на пряму l. Довжини проекцій двох паралельних відрізків на пряму відносяться як довжини відрізків, що проектуються.



Мал. 208

Нехай у площині дано перпендикулярні прямі OX, OY і відрізок AB (мал. 209). Якщо A_xB_x, A_yB_y — проекції відрізка AB на прямі OX, OY і якщо $AB \nparallel OX$, $AB \nparallel OY$, то за теоремою Піфагора $AB^2 = A_xB_x^2 + A_yB_y^2$. Ця рівність справедлива і тоді, коли $AB \parallel OX$ або $AB \parallel OY$. Отже, теорему Піфагора можна узагальнити так: *квадрат довжини відрізка дорівнює сумі квадратів його проекцій на дві перпендикулярні прямі.*



Мал. 209

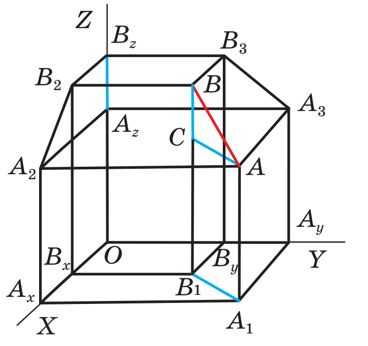
Аналогічне твердження правильне і для простору.

ТЕОРЕМА 24

(Просторова теорема Піфагора.) **Квадрат довжини будь-якого відрізка дорівнює сумі квадратів довжин його проекцій на три взаємно перпендикулярні прямі.**

ДОВЕДЕННЯ.

Розглянемо загальний випадок, коли даний відрізок AB не перпендикулярний до жодної з даних попарно перпендикулярних прямих OX, OY, OZ (мал. 210). Проекції відрізка AB на площини XOY, XOZ, YOZ позначимо відповідно через A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, а на прямі OX, OY, OZ — через A_xB_x, A_yB_y, A_zB_z. Тоді, якщо $AC \perp BB_1$, то $AC = A_1B_1$ і $BC = B_zA_z$. Отже, $AB^2 = AC^2 + BC^2 = A_1B_1^2 + A_zB_z^2$. За доведеним вище $A_1B_1^2 = A_xB_x^2 + A_yB_y^2$. Тому



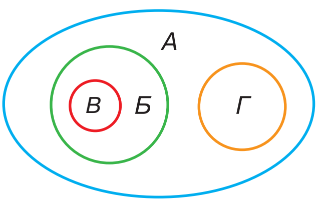
Мал. 210

$$AB^2 = A_xB_x^2 + A_yB_y^2 + A_zB_z^2. \qquad (*)$$

Якщо, наприклад, $AB \perp OZ$, то $A_zB_z = 0$ і $AB^2 = A_1B_1^2 = A_xB_x^2 + A_yB_y^2$. Бачимо, що рівність (*) справедлива при будь-якому розташуванні відрізка AB. □

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Поняття *проектування, паралельне проектування і ортогональне проектування* пов'язані між собою, як показано на діаграмі (мал. 211). Тобто ортогональне проектування — окремий вид паралельного проектування, а паралельне проектування — вид проектування. Інший вид останнього — центральне проектування (перспектива).

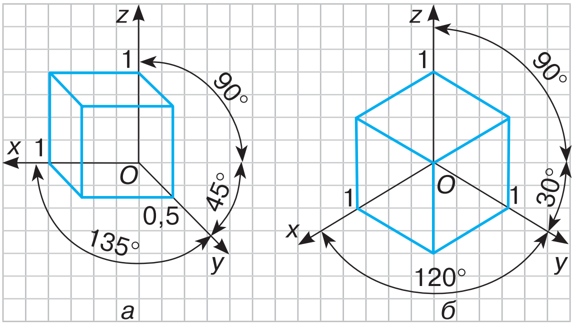


А — проектування
Б — паралельне
В — ортогональне
Г — перспектива

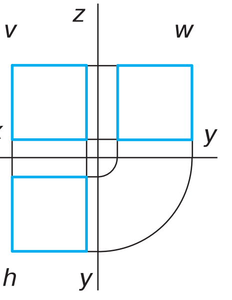
Мал. 211

Зображати фігури можна різними способами. У кресленні для більшої наочності використовують *диметричні* й *ізометричні* зображення. У нарисній геометрії зображення тривимірних об'єктів подають у вигляді *епюрів*, на яких просторова фігура зображена її ортогональними проекціями, суміщеними в одній площині.

На малюнку 212 подані *диметричне* й *ізометричне* зображення куба. У диметричній проекції (диметрія — подвійний вимір) розміри зображуваного предмета відкладають по осях *z*, *x* і *y* пропорції 1 : 1 : 0,5. В ізометричній проекції (ізометрія — однаковий вимір) розміри по всіх осях відкладають у пропорції 1 : 1 : 1. На малюнку 213 подано зображення куба за допомогою епюра (фронтальна, горизонтальна і профільна проекції).



Мал. 212



Мал. 213

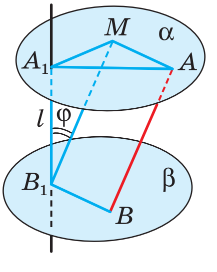
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які види проектування ви знаєте?
2. Яке проектування називають ортогональним?
3. Що називають проекцією точки на площину?
4. Сформулюйте означення проекції фігури на площину.
5. Сформулюйте теорему про площу ортогональної проекції многокутника.
6. Що називають проекцією точки на пряму?
7. Сформулюйте просторову теорему Піфагора.

Виконаємо разом

1 Доведіть, що коли A_1B_1 — проекція відрізка AB на пряму l, а φ — кут між AB і l, то $A_1B_1 = AB\cos\varphi$.

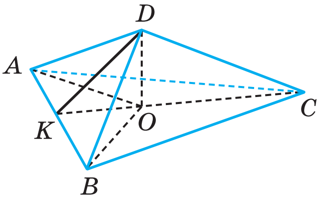
● Проведемо через кінці даного відрізка AB площини α і β, перпендикулярні до прямої l (мал. 214). Вони перетнуть пряму l у точках A_1 і B_1. Площини α і β паралельні, тому якщо ABB_1M — паралелограм, то $MB_1 = AB$, $\angle MB_1A_1 = \varphi$ і $A_1B_1 : MB_1 = \cos\varphi$, звідси $A_1B_1 = MB_1\cos\varphi = AB\cos\varphi$.



Мал. 214

2 У тетраедрі $ABCD$ $AC = BC = 37$ см, $AD = BD = 13$ см, $AB = 24$ см, $DC = 35$ см. Знайдіть площу ортогональної проекції грані ABD на площину (ABC).

● Нехай $ABCD$ заданий тетраедр (мал. 215). Знайдемо кут між площинами (ADB) і (ABC). Якщо K — середина AB, то $CK \perp AB$ і $DK \perp AB$, оскільки $\triangle ABC$ і $\triangle ADB$ рівнобедрені. Тоді $\angle DKC$ — шуканий кут. З $\triangle AKC$ і $\triangle AKD$ за теоремою Піфагора знайдемо, що $KC = 35$ см, $KD = 5$ см. Тоді за теоремою косинусів з $\triangle DKC$ знайдемо:



Мал. 215

$$\cos \angle DKC = \frac{KC^2 + KD^2 - DC^2}{2KC \cdot KD} = \frac{1}{14}.$$

Оскільки $S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} AB \cdot DK = 60$ (см^2), то $S_{пр} = S_{\triangle AOB} \cdot \cos \angle DKC = \frac{30}{7}$ (см^2).

Задачі і вправи

Виконайте усно

548. Чи може площа ортогональної проекції фігури бути більшою за площу самої фігури? А дорівнювати?

549. Сторона квадрата дорівнює 6 см, а площа його ортогональної проекції 18 см^2. Знайдіть кут між площинами квадрата та його проекції.

550. Площа трикутника дорівнює S. Знайдіть площу ортогональної проекції цього трикутника на площину, яка утворює з площиною трикутника кут $60°$.

551. Як розміщені дві прямі, якщо їх проекції на площину — прямі, які перетинаються?

552. Як розміщені дві прямі, якщо їх проекції на площину — паралельні прямі?

553. Чи може проекцією правильного тетраедра на площину бути: а) правильний трикутник; б) неправильний трикутник; в) квадрат; г) чотирикутник, відмінний від квадрата?

554. Чи може проекцією куба на площину бути: а) квадрат; б) прямокутник, відмінний від квадрата; в) п'ятикутник; г) шестикутник?

А

555. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $M \in BB_1$. Доведіть, що проекції трикутника MDD_1 на площини граней ABB_1A_1 і BCC_1B_1 рівні.

556. Доведіть, що проекції будь-якого многокутника на дві паралельні площини рівні.

557. Чи можуть бути рівними проекції однієї і тієї самої фігури на непаралельні площини? Наведіть приклади.

558. Площини α і β перетинаються по прямій a. Довільна точка A проектується на α, β і a. Доведіть, що точка A і її проекції лежать в одній площині.

559. Дві похилі, проведені з однієї точки, дорівнюють 15 і 20. Проекція однієї з них 16. Знайдіть проекцію другої.

560. Кожна з похилих AB і CD дорівнює 10 см, їх проекції HB і HD дорівнюють відповідно 6 см і 8 см. Знайдіть відстань AC.

561. З точки M до площини проведено похилі MA і MB, довжини яких дорівнюють 10 см і $8\sqrt{2}$ см. Різниця проекцій цих похилих 2 см, кут між проекціями 90°. Знайдіть проекції похилих на пряму AB.

562. Відрізки двох прямих лежать між паралельними площинами і відносяться як 20 : 13. Проекція одного відрізка на одну з площин дорівнює 16 см, а іншого відрізка на іншу площину — 5 см. Знайдіть довжини цих відрізків.

563. Відрізок завдовжки 26 см опирається кінцями на дві взаємно перпендикулярні площини. Довжини перпендикулярів, опущених з кінців відрізка до лінії перетину площин, дорівнюють 10 см і 20 см. Знайдіть проекцію відрізка на кожну з площин.

564. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу, довжини яких дорівнюють 16 см і 20 см. Обчисліть проекцію перпендикуляра на похилу.

565. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу, різниця довжин яких дорівнює 2 см. Обчисліть проекцію перпендикуляра на похилу, якщо проекція похилої на площину дорівнює 6 см.

566. Яка довжина відрізка, якщо довжини його проекцій на три попарно перпендикулярні прямі дорівнюють a, b і c?

567. Яка довжина відрізка, якщо довжини його проекцій на три попарно перпендикулярні площини дорівнюють a, b і c?

568. Через вершини рівностороннього трикутника провели три прямі, перпендикулярні до його площини. Чи можуть на таких прямих лежати вершини прямокутного або тупокутного трикутника?

569. Площа многокутника — 70 см^2, а його проекції — 35 см^2. Знайдіть кут між площиною многокутника і площиною проекції.

570. Ортогональною проекцією прямокутника, сторони якого дорівнюють 6 см і 4 см, є чотирикутник, площа якого 12 см^2. Обчисліть кут між площинами чотирикутників. Чи може дана проекція бути квадратом?

571. Ортогональною проекцією прямокутника є квадрат. Площа прямокутника 128 см^2, а кут між площинами 60°. Знайдіть периметр прямокутника.

572. Ортогональною проекцією правильного трикутника зі стороною 20 см на площину, паралельну одній із сторін, є рівнобедрений трикутник, одна зі сторін якого $5\sqrt{13}$ см. Знайдіть кут між площинами трикутників.

573. Ортогональною проекцією правильного трикутника є трикутник зі сторонами 13 м, 14 м, 15 м. Кут між площинами трикутників 30°. Знайдіть периметр даного трикутника.

574. Ортогональною проекцією трапеції, площа якої $52\sqrt{2}$ см^2, є рівнобічна трапеція з основами 16 см і 10 см та бічною стороною 5 см. Знайдіть кут між площинами трапецій.

575. Чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ — ортогональна проекція ромба $ABCD$ на площину, паралельну меншій діагоналі. Знайдіть довжини проекцій діагоналей, якщо AB = 20 см, BB_1 = 10 см, $\angle B = 120°$.

576. Ортогональною проекцією паралелограма $ABCD$ на площину, яка проходить через вершину A паралельно BD, є чотирикутник $AB_1C_1D_1$. Обчисліть AC, якщо $BD = 3\sqrt{21}$ м, CC_1 = 10 м, AD_1 = 12 м, D_1C_1 = 9 м.

577. $ABCD$ — правильний тетраедр, ребро якого дорівнює a. Побудуйте проекцію грані CDB на площину (ABC). Знайдіть площу проекції та кут між площинами (ABC) і (CDB).

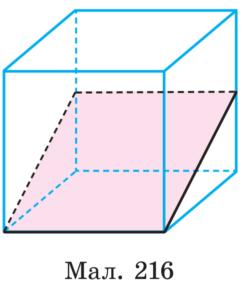
578. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. Його ребра AB, AD і AA_1 пропорційні відповідно числам 1, 2 і 3, а $M \in CC_1$, $CM : MC_1$ = = 2 : 1. Знайдіть кут між площиною $\triangle MBD$ та його проекцією на площину: а) (ABC); б) (BB_1D).

Б

579. Побудуйте проекцію діагоналі основи куба на площину, яка проходить через дві діагоналі його суміжних бічних граней. Знайдіть довжину проекції, якщо довжина діагоналі основи дорівнює d.

580. У кубі через ребро основи і середини двох бічних ребер проведено площину (мал. 216). Знайдіть кут між даною площиною і площиною основи та площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

581. В основі тетраедра лежить правильний трикутник зі стороною l. Через ребро основи і середину протилежного ребра проведено площину, яка утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу перерізу, якщо всі бічні ребра тетраедра рівні.



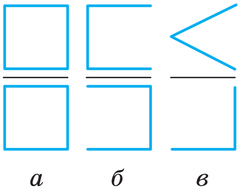
Мал. 216

582. В основі прямого паралелепіпеда лежить квадрат зі стороною a. Через середини двох суміжних сторін основи проведена площина, яка перетинає три бічні ребра паралелепіпеда і утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу перерізу.

583. Нехай Q — площа грані правильного тетраедра, Q_1 — площа проекції цієї грані на площину другої грані. Знайдіть $Q_1 : Q$.

584. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть площу проекції цього тетраедра на площину, перпендикулярну до його ребра.

585. Намалюйте або опишіть фігури, проекції яких на дві взаємно перпендикулярні площини зображено на малюнку 217.



Мал. 217

586. Сторони прямокутника дорівнюють 20 см і 25 см. Його проекція на площину подібна до нього. Знайдіть периметр проекції.

587. З точки K до площини проведено похилі $KA = 13$ см і $KB = 20$ см, а кут між їх проекціями дорівнює $120°$. Проекція більшої похилої дорівнює 16 см. Знайдіть проекцію на цю площину відрізка KP, якщо $P \in AB$ і $AP : PB = 5 : 16$.

588. Основа рівнобедреного трикутника паралельна площині α, а його ортогональна проекція на цю площину — правильний трикутник. Кут між площинами трикутників $30°$. Обчисліть кут при вершині рівнобедреного трикутника.

589. Ортогональною проекцією трапеції є рівнобічна трапеція з основами 7 см і 25 см та діагоналями, які перпендикулярні до бічних сторін. Кут між площинами трапецій $45°$. Обчисліть площу даної трапеції.

590. Ортогональною проекцією трапеції, основи якої паралельні площині проекції, є рівнобічна трапеція з основами a і b, діагоналі якої взаємно перпендикулярні. Кут між площинами трапецій φ. Знайдіть висоту даної трапеції.

591. Через більшу основу AD рівнобічної трапеції $ABCD$ проведено площину. AB_1C_1D — ортогональна проекція трапеції $ABCD$ на цю площину. O — точка перетину діагоналей AC і BD, O_1 — її проекція. Обчисліть площу трапеції $ABCD$, площу її проекції та кут між площинами трапецій, якщо $OO_1 = 12$ см, $AB_1 = 15$ см, $AD = 42$ см, $BC = 28$ см.

592. Рівнобедрені трикутники ABC і ABD зі спільною основою AB лежать у різних площинах. Знайдіть площу ортогональної проекції $\triangle ABC$ на площину ABD, якщо $AB = 24$ м, $AC = 13$ м, $AD = 37$ м, $CD = 35$ м.

593. В основі тетраедра $ABCD$ лежить трикутник ABC, у якого $\angle C = 90°$, $BC = a$, $AC = b$. Побудуйте проекцію грані ADC на площину (ABC). Знайдіть кут між площинами (ADC) і (ABC), якщо $DA = DB = DC = l$.

594. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, M — середина BB_1. Побудуйте проекцію перерізу куба площиною, яка проходить через точки A, M, C_1, на площину (BB_1D_1). Знайдіть кут між площинами.

595*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, M, N, K — середини ребер B_1C_1, CC_1, CD відповідно. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки M, N, K. Обчисліть проекцію діагоналі B_1D на цю площину, якщо ребро куба дорівнює a.

596. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, M, N, K — середини ребер AA_1, AD, B_1C_1 відповідно. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки M, N, K, і побудуйте проекцію цього перерізу на площину (ABC). Обчисліть площі перерізу та проекції, якщо $AB = a$. Знайдіть кут між цими площинами.

597. Якщо проекція прямої AB на площину α утворює з прямими AC і AD цієї площини рівні кути, то і пряма AB з прямими AC і AD утворює рівні кути. Доведіть це.

598. Через вершину B кута ABC проведено промінь BM, який утворює з BA і BC рівні кути. Доведіть, що проекція точки M на площину кута лежить на бісектрисі цього кута.

599. Через вершину C трикутника ABC проведено похилу CM, яка утворює зі сторонами AC і BC рівні кути. M_1 — проекція точки M на площину (ABC), $M_1 \in AB$. Знайдіть довжину похилої та її проекцію, якщо $AB = 13$ см, $BC = 18$ см, $AC = 21$ см, $MM_1 = 4\sqrt{15}$ см.

600. Через вершину прямого кута C трикутника ABC проведено похилу CM, яка утворює зі сторонами AC і BC рівні кути. N — проекція M на площину трикутника, $N \in AB$. Знайдіть проекцію похилої CM, якщо проекції AM і BM дорівнюють відповідно 20 м і 15 м.

601. У тетраедрі $ABCD$ $\angle ADB = \angle BDC = \angle ADC = 90°$. Доведіть, що ортогональною проекцією точки D на площину (ABC) є точка перетину висот (ортоцентр) трикутника ABC.

602. Доведіть, що проекція прямого кута на площину буде прямим кутом лише тоді, коли хоча б одна сторона кута паралельна площині проекцій.

603. Доведіть, що коли проекцією паралелепіпеда на площину є шестикутник, то кожна сторона цього шестикутника паралельна протилежній.

604*. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть площу проекції цього тетраедра на площину, паралельну двом мимобіжним його ребрам.

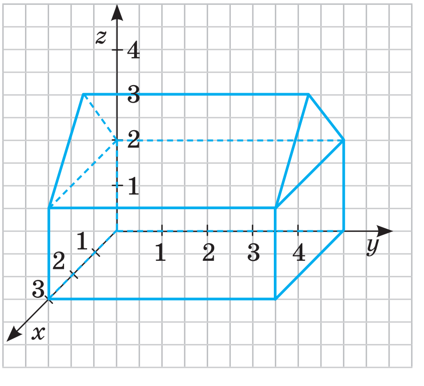
605*. Доведіть, що проекцією куба на площину, перпендикулярну до його діагоналі, є правильний шестикутник. Знайдіть площу цього шестикутника, якщо ребро куба дорівнює a.

606*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Доведіть, що проекції точок B і B_1 на діагональ AC_1 ділять цю діагональ на три рівні частини.

607*. Доведіть, що квадрат площі трикутника дорівнює сумі квадратів площ його проекцій на три взаємно перпендикулярні площини.

Практичне завдання

608. Розгляньте малюнок будинку на папері в клітинку (мал. 218). Його побудовано так, що вісь y розташована горизонтально, вісь z — вертикально, а вісь x проходить у напрямку діагоналей клітинок. За одиничні відрізки на осях y і z обрано 2 клітинки, а на осі x — діагональ клітинки. Установіть справжні розміри будиночка (без даху), якщо одна клітинка позначає довжину 1 м. Побудуйте в такій системі координат



Мал. 218

зображення куба. Порівняйте його із зображенням у системі координат, що має однакові одиничні відрізки на всіх осях. Яке зображення, на вашу думку, є більш наочним?

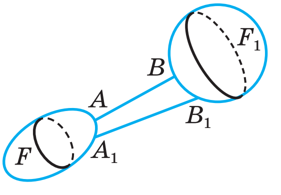
Задачі для повторення

609. Через точку перетину прямих AB і AC проведено пряму l, яка не лежить з ними в одній площині. Доведіть, що прямі l і BC не перетинаються.

610. AP — перпендикуляр до площини паралелограма $ABCD$, $PC \perp BD$. Доведіть, що $ABCD$ — ромб.

611. З точок A і B, які лежать у перпендикулярних площинах, опущено перпендикуляри AC і BD на пряму CD перетину цих площин. Знайдіть довжину AB, якщо $AC = a$, $CD = b$, $BD = c$.

§ 15 Відстані між фігурами



Мал. 219

Що таке відстань між точками, нам уже відомо. Узагальнимо це поняття для випадку довільних фігур.

Нехай дано дві фігури F і F_1 (мал. 219). Точки $A \in F$ і $B \in F_1$ називають найближчими точками цих фігур, якщо для будь-яких точок $A_1 \in F$ і $B_1 \in F_1$ виконується нерівність $AB \leq A_1B_1$.

■ **Відстанню між двома фігурами** називають відстань між найближчими точками цих фігур (якщо такі точки існують). Якщо дві фігури мають спільні точки, то вважають, що відстань між ними дорівнює 0.

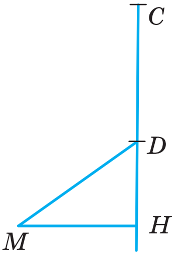
Зауваження. Не будь-які дві фігури мають найближчі точки. Про це дізнаєтеся згодом, а поки ми вивчатимемо тільки такі фігури, для яких найближчі точки існують.

Розглянемо конкретні приклади.

Відстань від точки до прямої. Перпендикуляр, опущений з точки на пряму, коротший від будь-якого відрізка, що сполучає цю точку з даною прямою. **Тому відстань від точки до прямої дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму.**

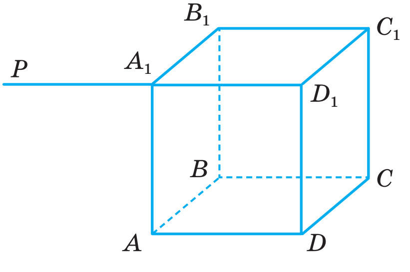
Відстань від точки до відрізка не завжди дорівнює відстані від точки до прямої, якій належить цей відрізок. Вона може дорівнювати відстані від даної точки до кінця відрізка. Подивіться на малюнок 220. Відстань від точки M до відрізка DC дорівнює MD, а не MH.

Відстань від точки до площини. Оскільки перпендикуляр коротший від похилої (теорема 19), то **відстань від точки до площини дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з даної точки на площину.** Наприклад, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб з ребром a, то відстань від точки A_1 до площини грані $ABCD$ дорівнює a. Але якщо A_1 — середина відрізка D_1P, то відстань від точки P до квадрата $ABCD$ дорівнює $a\sqrt{2}$ (мал. 221). Взагалі, відстань від точки до плоскої фігури не завжди дорівнює відстані від цієї точки до площини, у якій лежить дана фігура.

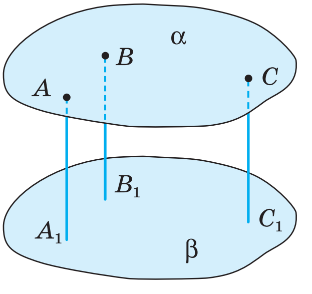


Мал. 220

Відстань між паралельними площинами. Якщо площини α і β паралельні, то перпендикуляри, опущені з точок однієї з цих площин на другу, рівні (мал. 222). Справді, всі ці перпендикуляри паралельні один одному, а відрізки паралельних прямих, які відтинаються паралельними площинами, рівні (теорема 10). **Довжина перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки площини на паралельну їй площину, є відстанню між даними паралельними площинами.**



Мал. 221

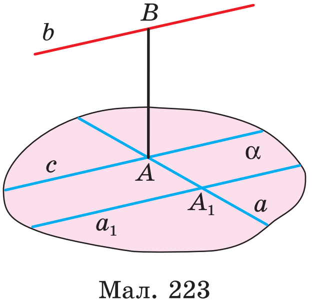


Мал. 222

З тієї самої причини **відстань між прямою і паралельною їй площиною** дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки прямої на дану площину.

Відстань між паралельними прямими дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки однієї прямої на другу.

Відстань між мимобіжними прямими. Нехай дано мимобіжні прямі a і b. Проведемо через яку-небудь точку A_1 прямої a пряму a_1, паралельну b (мал. 223). Прямі a_1 і a визначають площину α, паралельну прямій b. Нехай c — проекція прямої b на площину α і $c \cap a = A$. Пряма, яка проходить через A і перпендикулярна до площини α, перетинає пряму b у деякій точці B. Відрізок AB



Мал. 223

перпендикулярний до кожної з даних мимобіжних прямих a і b, його називають **спільним перпендикуляром мимобіжних прямих**. Для будь-яких мимобіжних прямих існує єдиний їх спільний перпендикуляр. Спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих коротший від будь-якого відрізка, що сполучає довільні точки цих прямих. Тому **відстань між двома мимобіжними прямими дорівнює довжині їх спільного перпендикуляра.**

Корисно пам'ятати таке. Дві мимобіжні прямі визначають пару паралельних площин (див. задачу 211, с. 61). Відстань між цими площинами дорівнює відстані між даними прямими.

Отже, відстань між мимобіжними прямими можна знайти кількома способами:

1) побудувати спільний перпендикуляр до даних мимобіжних прямих. Його довжина дорівнює шуканій відстані;

2) через одну з мимобіжних прямих a провести площину α, паралельну прямій b, і знайти відстань від довільної точки прямої b до площини α або до ортогональної проекції прямої b на площину α. Ця відстань і буде шуканою;

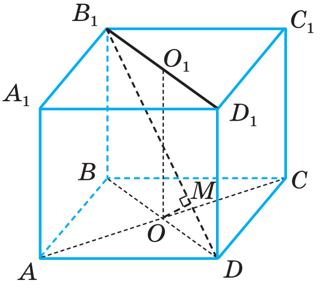
3) через дані мимобіжні прямі провести паралельні площини і знайти відстань між цими площинами. Це і буде шукана відстань.

Проілюструємо всі ці способи при розв'язуванні задачі.

Задача. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб з ребром a (мал. 224). Знайдіть відстань d між прямими:

а) BB_1 і CD; б) CC_1 і B_1D;

в) AB_1 і CD_1; г) AC і B_1D.



Мал. 224

а) Оскільки $BC \perp BB_1$ і $BC \perp CD$, то BC — спільний перпендикуляр прямих BB_1 і CD, тому відстань між ними дорівнює довжині відрізка BC. Отже, $d = a$.

б) Через пряму B_1D проведемо площину BB_1D_1D, яка паралельна CC_1, оскільки $CC_1 \parallel BB_1$. Знайдемо відстань від точки C до площини BB_1D_1D. Ця відстань дорівнює довжині відрізка CO. Дійсно, $CO \perp BD$ і $CO \perp OO_1$. Отже, $CO \perp (BB_1D)$. Якщо $AB = a$, то $AC = a\sqrt{2}$, тоді $CO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Отже, $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

в) Прямі AB_1 і CD_1 лежать у паралельних площинах AA_1B_1B і CC_1D_1D відповідно. Тому відстань між прямими AB_1 і CD_1 дорівнює відстані між цими площинами, тобто довжині відрізка AD, який перпендикулярний до цих площин. Отже, $d = a$.

г) Через B_1D проведемо площину BB_1D_1D і в цій площині проведемо $OM \perp B_1D$. OM — спільний перпендикуляр до прямих AC і B_1D. Дійсно, $AC \perp BD$ і $AC \perp OO_1$, тоді $AC \perp (BB_1D_1)$. Оскільки $OM \subset (BB_1D_1)$, то $AC \perp OM$. $OM \perp B_1D$ за побудовою. Отже, відстань між даними прямими дорівнює довжині відрізка OM.

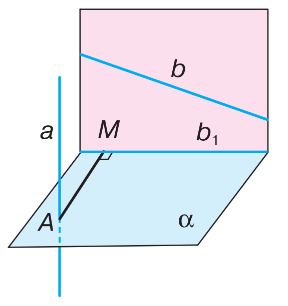
$\triangle MOD \sim \triangle BB_1D$, тоді $\dfrac{OM}{OD} = \dfrac{BB_1}{B_1D}$, звідси $OM = \dfrac{OD \cdot BB_1}{B_1D}$.

Оскільки $OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $B_1D = a\sqrt{3}$, то $OM = \dfrac{a\sqrt{2} \cdot a}{2 \cdot a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Отже, $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Інколи для знаходження відстані між мимобіжними прямими зручно користуватися методом ортогонального проектування. Нехай a і b — мимобіжні прямі (мал. 225). Побудуємо площину α, перпендикулярну до прямої a, і спроектуємо на площину α пряму b. Отримаємо пряму b_1. У площині α з точки A проведемо $AM \perp b_1$. Оскільки площина, яка проходить через b і b_1, перпендикулярна до α, то вона паралельна a. Отже, відстань між мимобіжними прямими a і b дорівнює довжині перпендикуляра AM.



Мал. 225

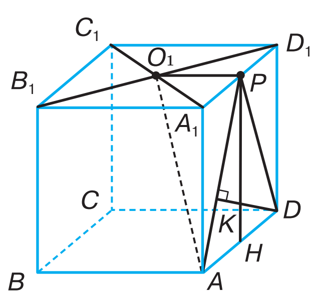
Задача 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб з ребром a (мал. 226). Знайдіть відстань між прямими O_1A і CD, де O_1 — центр грані $A_1B_1C_1D_1$.

Оскільки $CD \perp (AA_1D_1)$, то спроектуємо O_1A на площину (AA_1D_1). Отримаємо відрізок AP. У площині (AA_1D_1) проведемо $DK \perp AP$. Довжина DK і є шукана відстань. Розглянемо $\triangle APD$. Якщо H — середина AD, то, використовуючи метод площ, отримаємо, що $AD \cdot PH = AP \cdot DK$, звідси

$DK = \dfrac{AD \cdot PH}{AP}$. Оскільки $AD = PH = a$

і $AP = \sqrt{AA_1^2 + A_1P^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$,

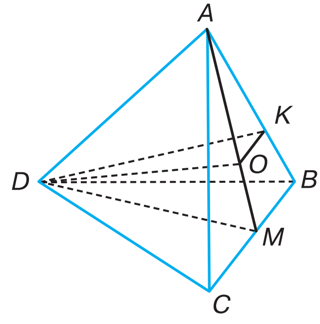
то $DK = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Мал. 226

Задача 2. Точка K ділить ребро AB правильного тетраедра $ABCD$ у відношенні $AK : KB = 2 : 1$. Знайдіть відстань між DK і BC, якщо $AB = a$ (мал. 227).

Нехай M — середина BC. Проведемо площину (ADM). Оскільки $DM \perp BC$ і $AM \perp BC$, то $BC \perp (ADM)$. Спроектуємо DK на площину (ADM).



Мал. 227

Оскільки тетраедр правильний, то центр O грані ABC лежить на AM і $AO : OM = AK : KB = 2 : 1$.

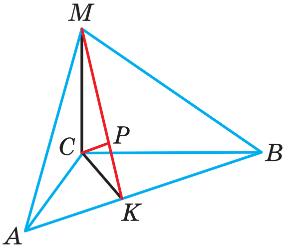
Отже, проекцією точки K буде точка O. Тоді шукана відстань дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного у площині (ADM) з точки M до DO, тобто довжині MO. Якщо $AB = a$, то $OM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що називають відстанню між двома фігурами?
2. Дайте означення відстані від точки до:
   а) прямої; б) відрізка; в) площини.
3. Як знайти відстань між паралельними площинами? А між прямою і паралельною їй площиною?
4. Що називають спільним перпендикуляром двох мимобіжних прямих?
5. Як знайти відстань між мимобіжними прямими?

Виконаємо разом

1 Через вершину прямого кута C $\triangle ABC$ проведено перпендикуляр CM до площини трикутника (мал. 228). $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, $CM = 6{,}4$ см. Знайдіть відстань: а) від точки M до прямої AB; б) від точки C до площини (AMB).



Мал. 228

а) Проведемо $CK \perp AB$ і сполучимо точку K з точкою M. За теоремою про три перпендикуляри $MK \perp AB$. Отже, довжина відрізка MK — відстань від точки M до AB.

З $\triangle ABC$ за теоремою Піфагора знайдемо, що $AB = 10$ см. Тоді за методом площ $CK = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8.$

З $\triangle MCK$ за теоремою Піфагора знайдемо MK:

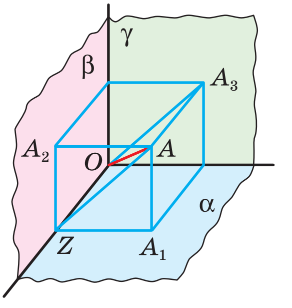
$MK = \sqrt{MC^2 + CK^2} = \sqrt{6{,}4^2 \cdot 4{,}8^2} = 8$ (см).

б) Оскільки $KC \perp AB$ і $KM \perp AB$, то $AB \perp (MKC)$, а отже, площини (AMB) і (MKC) перпендикулярні, MK — лінія їх перетину. У площині (MKC) проведемо $CP \perp MK$, тоді за властивістю перпендикулярних площин $CP \perp (AMB)$. Отже, CP — відстань від точки C до площини (AMB). Знайдемо її.

З $\triangle MCK$ за методом площ: $CP = \dfrac{CK \cdot CM}{KM} = \dfrac{4,8 \cdot 6,4}{8} = 3,84$.

Отже, CP = 3,84 см.

2 Кожна з трьох попарно перпендикулярних площин проходить через точку O. Точка A віддалена від цих площин на 90 см, 120 см і 80 см. Знайдіть відстань OA.



Мал. 229

● Нехай $AA_1 = 80$ см, $AA_2 = 90$ см і $AA_3 = 120$ см — відстані від даної точки A до площин α, β і γ (мал. 229). Площина, яка проходить через точки A, A_1 і A_2, перетинає пряму перетину площин α і β у такій точці Z, що чотирикутник AA_1ZA_2 — прямокутник. Чотирикутник AA_3OZ теж прямокутник. За теоремою Піфагора:

$$OA = \sqrt{AA_3^2 + AZ^2} = \sqrt{AA_3^2 + AA_2^2 + AA_1^2} = \sqrt{120^2 + 90^2 + 80^2} = 170 \text{ (см)}.$$

Задачі і вправи

Виконайте усно

612. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб з ребром a, M — середина AD (мал. 230).

а) Знайдіть відстані AC, MC, MD_1.

б) Яка з відстаней AC, MC, BC найбільша, а яка найменша?

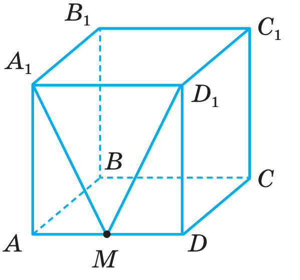
в) Порівняйте відстані MC, MD_1, MA_1.

г) Знайдіть відстань від точки M до прямих A_1D_1, B_1C_1, до площин $A_1B_1C_1D_1$, DD_1C_1C.

ґ) Знайдіть відстань між площинами $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$.

д) Знайдіть відстань від прямої A_1M до площини BB_1C_1C.

е) Знайдіть відстань між прямими AD і B_1C_1, CC_1 і A_1D_1.



Мал. 230

А

613. Через середину відрізка AB проведено площину. Доведіть, що відстані від точок A і B до даної площини рівні.

614. Через діагональ паралелограма проведено площину. Доведіть, що кінці другої діагоналі однаково віддалені від цієї площини.

615. Кінці відрізка, який не перетинає площину, віддалені від неї на 7 см і 13 см. Як віддалена від площини середина відрізка?

616. Точки C і D, які ділять відрізок AB на три рівні частини, віддалені від площини, що не перетинає відрізок AB, на 4 см і 8 см. Як віддалені від площини кінці відрізка?

617. Відрізок завдовжки a перетинає площину, а його кінці віддалені від площини на b і c. Знайдіть довжину проекції відрізка на площину.

618. MA — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Знайдіть відстань від точки M до прямих AB, BC і BD, якщо $AB = 3$ дм, $MA = 4$ дм.

619. До площини трикутника з центра вписаного в нього кола радіуса r проведено перпендикуляр завдовжки h. Знайдіть відстань від кінця цього перпендикуляра до сторін трикутника.

620. Проекція точки, рівновіддаленої від сторін трикутника, на площину цього трикутника співпадає з центром кола, вписаного у цей трикутник. Доведіть.

621. З вершини B рівнобедреного трикутника ABC до його площини проведено перпендикуляр $BK = 12$ см. Знайдіть відстань від точки K до сторони AC, якщо $AC = 24$ см, $AB = BC = 20$ см.

622. З вершини B рівнобедреного прямокутного трикутника ABC $(\angle C = 90°)$ до його площини проведено перпендикуляр BM. Відстань від точки M до сторони AC дорівнює 15 см, а до точки A — $3\sqrt{34}$ см. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника.

623. З центра O кола, описаного навколо прямокутного трикутника з кутом 30°, до площини трикутника проведено перпендикуляр OK. Точка K віддалена від більшого катета на 10 см. Знайдіть відстань від точки K до меншого катета, якщо $OK = 8$ см.

624. AK — перпендикуляр, проведений до площини трикутника ABC. Знайдіть відстань від точки K до сторони BC, якщо $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см, $AK = 16$ см.

625. Через вершину B трикутника ABC проведено перпендикуляр BM до площини трикутника. Точка M рівновіддалена від вершин A і C. Знайдіть відстань від точки M до сторони AC, якщо $AC = a$, $BM = \frac{a}{2}$, $\angle B = 60°$.

626. Периметр трикутника ABC дорівнює 96 см, $AC = 36$ см. Через вершину B проведено перпендикуляр BP до площини трикутника, $PA = PC = 50$ см. Знайдіть відстань: а) від P до площини трикутника ABC; б) від точки B до площини трикутника APC.

627. Точка M знаходиться на відстані 26 см від усіх сторін прямокутного трикутника. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника, якщо його висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 24 см і ділить гіпотенузу у відношенні 9 : 16.

628. Точка P знаходиться на відстані $2a$ від усіх сторін правильного трикутника зі стороною a. Знайдіть відстань від точки P до площини трикутника.

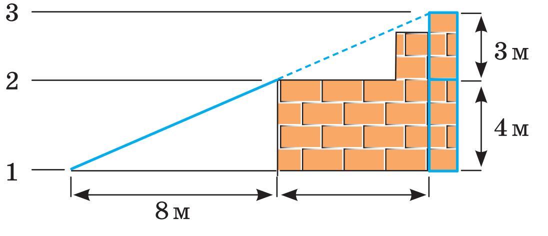
629. Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см. Точка простору O знаходиться на відстані 12,5 см від усіх сторін трикутника. Знайдіть відстань від O до площини трикутника.

630. Більша діагональ ромба дорівнює d, а гострий кут α. Точка простору M рівновіддалена від сторін ромба і знаходиться на відстані $2d$ від його площини. Знайдіть відстань від точки M до сторін ромба.

631. З точки P до площини проведено дві рівні похилі PM і PN, кут між якими $60°$, а кут між їх проекціями $120°$. Знайдіть відстань від точки P до площини і до прямої MN, якщо $MN = a$.

632. З точки до площини проведено дві похилі, які дорівнюють 17 м і 10 м. Різниця проекцій цих похилих 9 м. Знайдіть відстань від даної точки до площини.

633. На будівництві використовують похилий конвеєр для транспортування витратних матеріалів з рівня 1 до рівня 2, що знаходиться на 4 м вище рівня 1, як показано на малюнку 231. Конвеєр підтримується опорою, основа якої віддалена на 8 м від початку конвеєра на рівні 1. Потрібно подовжити конвеєр, щоб досягти нового рівня 3, який знаходиться на 3 м вище рівня 2, зберігаючи при цьому кут нахилу конвеєра. Знайдіть відстань від першої опори до другої, яка буде підтримувати конвеєр на його новому кінці на рівні 3. Обчисліть загальну довжину нового конвеєра.



Мал. 231

634. Точка A віддалена від однієї з двох перпендикулярних площин на x, а від другої — на y. Знайдіть відстань від точки A до прямої перетину даних площин.

635. Площина α проходить через сторону AB паралелограма $ABCD$ і віддалена на d від точки перетину його діагоналей. Знайдіть відстань від прямої CD до площини α.

636. Вершини A, B, C квадрата $ABCD$ віддалені від площини, яка не перетинає його, на 13 м, 14 м і 17 м відповідно. Як віддалені від площини центр квадрата і вершина D?

637. Вершини трикутника віддалені від площини, яка не перетинає його, на 6 м, 8 м і 10 м відповідно. Знайдіть відстань від точки перетину медіан трикутника до площини.

638. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть відстань від його вершини до протилежної грані.

639. Дві вершини трикутника і точка перетину медіан віддалені від площини, яка не перетинає його, на 40 см, 24 см і 38 см відповідно. Знайдіть відстань від третьої вершини до площини.

640. Відстань між двома паралельними площинами дорівнює 40 см. Відрізок завдовжки 50 см своїми кінцями впирається в ці площини. Знайдіть довжини проекцій відрізка на кожну з площин.

641. ***Задача з несподіваною відповіддю.*** На книжковій полиці стоїть тритомник (мал. 232). Товщина кожної книжки 40 мм, а книжки без обкладинки — 35 мм. Знайдіть відстань від першої сторінки першого тому до останньої сторінки третього тому.

Мал. 232

642. З точки K, розміщеної по один бік від паралельних площин α і β, проведено дві прямі, які перетинають α у точках A і C, а β — у точках B і D відповідно. Знайдіть відстань між площинами, якщо точка K віддалена від β на 14 м, $AK = 9$ м, $CD = 16$ м, $KC = AB$.

643. Через точку O, яка лежить між паралельними площинами α і β, проведено дві прямі, які перетинають α у точках A і C, а β — у точках B і D відповідно. $AO = OD$, $OC = 18$ м, $OB = 32$ м. Знайдіть відстань між площинами, якщо точка O віддалена від β на 16 м.

644. M, N, K — середини ребер PA, PB, PC правильного тетраедра $PABC$. Знайдіть відстань між площинами (MNK) і (ABC), якщо $AB = a$.

645. AK — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, $AB = a$, $AK = 2a$. Знайдіть відстань між прямими KB і CD, KB і AD.

646. Ребро куба дорівнює 6 см. Знайдіть відстань між діагоналлю куба і мимобіжною з нею діагоналлю основи.

647. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Знайдіть відстань між CC_1 і BD.

648. Ребро правильного тетраедра a. Знайдіть відстань між його протилежними ребрами.

649. Ребро куба — a. Знайдіть відстань між мимобіжними діагоналями його протилежних граней.

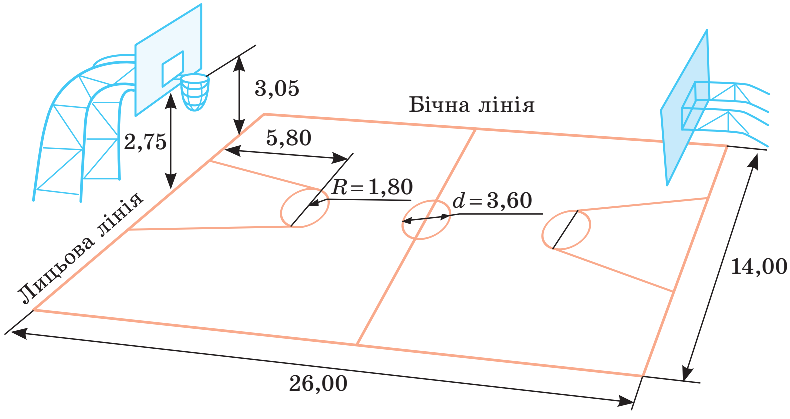
650. Знайдіть відстань між діагоналлю куба, ребро якого дорівнює a, і будь-яким ребром, мимобіжним з цією діагоналлю.

651. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Установіть відповідність між прямими (1–4) та відстанню між ними (А–Д).

1 DC_1 і AB	**А** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	**Г** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$
2 B_1D і AC	**Б** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$	**Д** $a\sqrt{2}$
3 A_1D_1 і C_1D	**В** a	
4 A_1B_1 і DC		

Практичне завдання

652. Дізнайтеся про стандартні розміри баскетбольного майданчика і правила встановлення баскетбольного щита (мал. 233). Знайдіть приблизну відстань, яку має подолати м’яч до попадання у кошик, якщо баскетболіст, зріст якого 2 м, буде кидати м’яч двома руками від грудей, перебуваючи у центрі майданчика. З якої відстані від щита ви можете попасти м’ячом у кошик?



Мал. 233

Б

653. Діагоналі ромба $ABCD$ дорівнюють 30 см і 40 см. З вершини A до площини ромба проведено перпендикуляр AK. Знайдіть відстань від точки K до сторін ромба та до прямих, які містять сторони ромба, якщо $AK = 10$ см.

654. Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, ділить висоту, проведену до основи, у відношенні 5 : 4, бічна сторона трикутника дорівнює 60 см. Точка M рівновіддалена від сторін трикутника і знаходиться на відстані 12 см від площини трикутника. Знайдіть відстань від точки M до сторін трикутника.

655. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 18 см. Точка P віддалена від сторін трапеції на 10 см. Знайдіть відстань від P до площини трапеції.

656. Центр кола, вписаного в трапецію, віддалений від кінців бічної сторони на 30 см і 40 см. Точка S віддалена від сторін трапеції на 26 см. Знайдіть відстань від точки S до площини трапеції.

657. Точка простору рівновіддалена від двох сторін трикутника і перпендикуляр, проведений через цю точку до площини трикутника, перетинає третю сторону. Доведіть, що основа цього перпендикуляра лежить на бісектрисі кута трикутника.

658. $MK = 2$ см — перпендикуляр, проведений з точки M до площини трикутника ABC $(\angle C = 90°)$, $K \in AB$. Точка M рівновіддалена від сторін AC і BC. Знайдіть відстань від точки M до катетів трикутника, які дорівнюють 6 см і 8 см.

659. Точка P рівновіддалена від сторін AB і BC трикутника ABC, PK — перпендикуляр до площини трикутника, $K \in AC$. Знайдіть відстань від точки P до сторін AB і BC, якщо $PK = 4\sqrt{5}$ см, $AB = 4$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$.

660. У трикутнику ABC $AB = 15$ см, $BC = 21$ см, $AC = 24$ см. MN — перпендикуляр до площини трикутника, $N \in AC$, а точка M віддалена від сторін AB і BC на 10 см. Обчисліть відстань від точки M до площини трикутника.

661. У прямокутному трикутнику дано гіпотенузу c і гострий кут, що дорівнює $30°$. Визначте відстань від вершини прямого кута до площини, яка проходить через гіпотенузу і нахилена до площини даного трикутника під кутом $45°$.

662. У рівнобедреному трикутнику основа і бічна сторона пропорційні числам 6 і 7. Вершини основи трикутника віддалені від площини, яка не перетинає трикутник, на 20 см і 12 см, а центр вписаного кола на 19 см. Знайдіть відстань від третьої вершини трикутника до цієї площини.

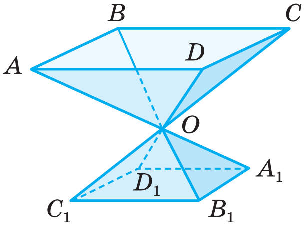
663. Середня лінія трапеції паралельна площині α і віддалена від неї на 12 см, а точка перетину діагоналей віддалена від α на 10 см. Знайдіть відстань від основ трапеції до площини α, якщо основи трапеції відносяться як $1 : 3$ і площина α трапецію не перетинає.

664. Діагоналі A_1C і BD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перетинаються в точці O. Знайдіть відстань від точки O до площини (AB_1D_1), якщо ребро куба дорівнює a.

665. $ABCD$ і ABC_1D_1 — квадрати, $AB = a$, $\angle CBC_1 = \alpha$. Знайдіть відстань між відрізками: а) DC і BC_1; б) DC і D_1C_1.

666. У тетраедрі $PABC$ $AP = PC$, $AB = BC$, $AC = 20$ см, $PB = 25$ см. Знайдіть відстань між AC і PB, якщо площі трикутників APC і ABC дорівнюють відповідно 250 см^2 і 300 см^2.

667. Волонтери вирішили прикрасити парк вуличними вазами, щоб висаджувати в них навесні квіти. Передбачалося каркас ваз виготовити з металевих стрижнів однакової довжини, зваривши їх в одній точці так, щоб тупі кути між протилежними стрижнями дорівнювали $120°$ (мал. 234). Відстань від землі до верхньої вершини вази має бути 60 см, а $CO : OC_1 = 2 : 1$. Установіть, скільки метрів металевих стрижнів піде на виготовлення однієї такої вази.



Мал. 234

Чи вистачить зібраних волонтерами грошей (1900 грн), щоб закупити стрижні для виготовлення 20 таких ваз, якщо стрижні продаються завдовжки 11,75 м, а вартість одного метра становить 15 грн?

668. $PABC$ — правильний тетраедр з ребром a, O — проекція точки P на площину ABC. Знайдіть відстань між BC і: а) PO; б) PL — бісектрисою грані APC; в) AM — медіаною грані APC.

669. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямий паралелепіпед, $A_1B = 25$ м, $AD = 13$ м, $AA_1 = 20$ м, $BD = 14$ м. Знайдіть відстань між DD_1 і A_1B.

670. Прямі a, b — мимобіжні і лежать у перпендикулярних площинах α і β. Пряма a перпендикулярна до лінії перетину площин. Відстань від точки M $(M \in a)$ до площини β дорівнює m, а до прямої b — n. Знайдіть відстань між прямими a і b.

671. Площини рівностороннього трикутника ABC і рівнобедреного трикутника ABD ($AD = BD = 10$ см, $AB = 16$ см) перпендикулярні. Знайдіть відстань між прямими AB і CD.

672. У правильному тетраедрі $ABCD$ з ребром a точка O — проекція точки D на площину ABC, F і E — середини ребер BD і CD відповідно. Знайдіть відстань між прямими:
а) AD і BC; б) AC і EF; в) OD і EF; г) AD і EF.

673*. Знайдіть відстань між мимобіжними діагоналями двох сусідніх граней куба, ребро якого дорівнює a.

674. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від сторін трикутника.

675*. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від прямих, на яких лежать сторони трикутника.

676*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб з ребром a. Знайдіть відстань між тетраедрами $AA_1B_1D_1$ і C_1CBD.

Задачі для повторення

677. Ортогональною проекцією трикутника є прямокутний трикутник з гіпотенузою 15 см і катетами, які пропорційні числам 3 і 4. Кут між площинами цих трикутників 30°. Знайдіть площу даного трикутника. Чи може цей трикутник бути правильним?

678. Чи можуть бути паралельними прямі, утворені при перетині двох площин, що перетинаються, третьою площиною?

679. $ABCD$ — правильний тетраедр, $AB = a$, O — точка перетину медіан трикутника ABC. Знайдіть площу перерізу тетраедра площиною, яка перпендикулярна до відрізка OD і проходить через його середину.

§ 16 Кути в стереометрії

Вище ми розглянули випадки розташування прямої і площини: пряма лежить у площині; пряма паралельна площині; пряма перпендикулярна до площини. Залишається дослідити випадок, коли пряма перетинає площину, але не перпендикулярна до неї. Такі прямі можуть бути нахилені до площини під різними кутами і часто зустрічаються у довкіллі (мал. 235).

Мал. 235

Що розуміють під кутом між прямою і площиною?

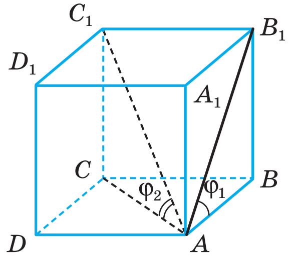
Якщо пряма паралельна площині або належить їй, то вважають, що кут між такою прямою і площиною дорівнює 0°. Якщо пряма перпендикулярна до площини, кут між ними дорівнює 90°. У решті випадків **кутом між прямою і площиною** називають кут між прямою і її проекцією на площину.

Якщо φ — кут між прямою і площиною, то $0° \le \varphi \le 90°$.

Приклад. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 236). Під якими кутами нахилені до площини його грані $ABCD$ прямі AB_1 і AC_1?

Розв'язання. Проекції відрізків AB_1 і AC_1 на площину грані $ABCD$ — відрізки AB і AC. Тому шукані кути: $\varphi_1 = \angle B_1AB$ і $\varphi_2 = \angle C_1AC$, $\varphi_1 = 45°$, оскільки $\triangle ABB_1$ — прямокутний і рівнобедрений.

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{CC_1}{CA} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707, \text{ звідси } \varphi_2 \approx 35°16'.$$



Мал. 236

Кутом між похилою і площиною називають кут між похилою і її проекцією на дану площину. Якщо φ — кут між похилою і площиною, то $0° < \varphi < 90°$.

ТЕОРЕМА 25

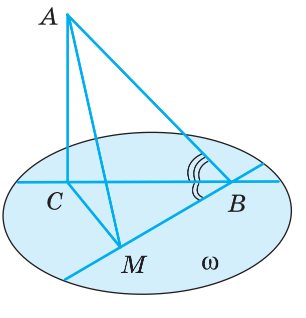
Кут між похилою і площиною найменший з усіх кутів, які похила утворює з прямими, проведеними на площині через основу похилої.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай AB — похила, AC — перпендикуляр до площини ω, BM — будь-яка відмінна від BC пряма площини ω, $\angle ABM$ — кут між прямими AB і BM. Доведемо, що $\angle ABC < \angle ABM$ (мал. 237).

Якщо прямі BM і BC не перпендикулярні, то опустимо перпендикуляр CM на BM і проведемо відрізок AM. За теоремою про три перпендикуляри $AM \perp MB$. Отже,

$$\sin\angle ABC = \frac{AC}{AB}, \quad \sin\angle ABM = \frac{AM}{AB}.$$



Мал. 237

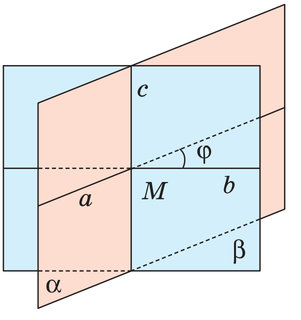
Оскільки $AC < AM$, то $\sin\angle ABC < \sin\angle ABM$. Розглянуті кути не перевищують 90°, тому $\angle ABC < \angle ABM$.

Якщо $BM \perp BC$, то за теоремою про три перпендикуляри $\angle ABM = 90°$. Кут ABC менший від 90°. Отже, і в цьому випадку $\angle ABC < \angle ABM$. Теорему доведено. □

Поняття кута між прямою або похилою і площиною використовується багатьма фахівцями. Під певними кутами до площини горизонту споруджують ескалатори на станціях метро, шахтні уклони, фунікулери, похилі мости доменних печей і багато інших споруд. Під різними кутами до площини аеродрому злітають літаки.

Які ще кути розглядають у стереометрії?

Кут між площинами. Ви вже знаєте з § 13, як знайти кут між площинами. Якщо дві площини паралельні, то вважається, що кут між ними дорівнює 0°. Якщо площини α і β перетинаються по прямій c, то, щоб визначити кут між цими площинами, у кожній з них через довільну точку M прямої c можна провести прямі a і b, перпендикулярні до прямої c (мал. 238). Кут між прямими a і b приймають за кут між даними площинами α і β. Можна довести, що міра цього кута φ не залежить від вибору точки O на прямій c. Кут між двома площинами, як і між двома прямими, знаходиться в межах від 0° до 90°.



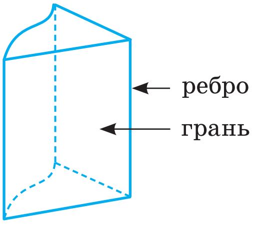
Мал. 238

Якщо кут між двома площинами дорівнює 90°, то площини перпендикулярні.

Крім відомих вам геометричних понять *кут, кут між прямими, кут між площинами, кут між прямою і площиною*, у стереометрії розглядають ще кілька понять, назви яких містять слово «кут»: *двогранний кут, тригранний кут, многогранний кут, тілесний кут, кут між векторами* тощо.

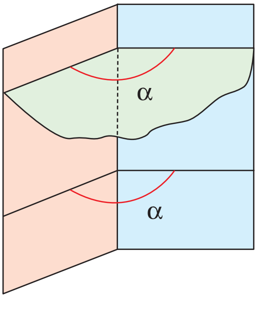
■ **Двогранним кутом** називають частину простору, обмежену двома півплощинами, що виходять з однієї прямої.

Півплощини, які обмежують двогранний кут, називають його гранями, а їх спільну пряму — ребром двогранного кута (мал. 239). Фігуру, утворену двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує, також називають двогранним кутом.



Мал. 239

■ Кут, утворений перетином двогранного кута з площиною, перпендикулярною до його ребра, називають **лінійним кутом** даного двогранного кута. Будь-які два лінійні кути двогранного кута рівні (мал. 240). Тому двогранні кути можна характеризувати відповідними лінійними кутами. Якщо, наприклад, лінійний кут деякого двогранного кута дорівнює 60°, то кажуть, що це — двогранний кут 60°. Двогранний кут називають гострим, прямим, тупим, розгорнутим чи більшим від роз-

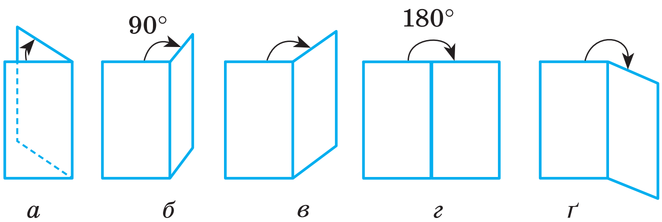


Мал. 240

горнутого залежно від того, чи є його лінійний кут гострим, прямим, тупим, розгорнутим чи більшим від розгорнутого (мал. 241).

Не слід ототожнювати міру двогранного кута з кутом між площинами. Кут між площинами може змінюватися в межах від $0°$ до $90°$, а міра двогранного кута — від $0°$ до $360°$ (мал. 242).

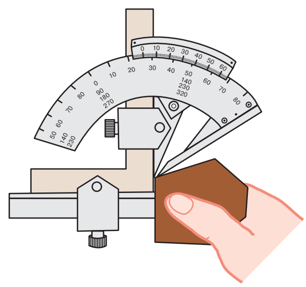
Замість «двогранний кут, міра якого дорівнює α» нерідко кажуть коротше: «двогранний кут α». У таких випадках під двогранним кутом розуміють і певну фігуру, і відповідне її числове значення.



Мал. 241

Мал. 242

Найпростішими матеріальними моделями двогранного кута є краї різальних інструментів: зубил, стамесок, різців для токарних верстатів тощо. Вони бувають більш або менш гострими. Вимірюють такі кути кутомірами (мал. 243).



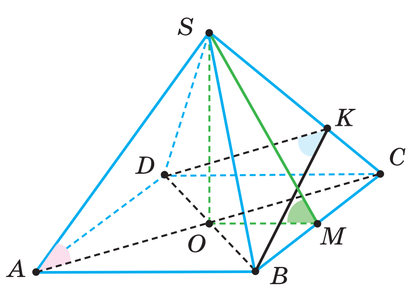
Мал. 243

Моделлю, на якій одночасно можна показати розглянуті кути в просторі (кут між прямими, кут між прямою і площиною та двогранні кути), є піраміда. На малюнку 244 зображено перераховані види кутів на правильній чотирикутній піраміді. Якщо $SO \perp ABC$, $MO \perp BC$, $MS \perp BC$, $BK \perp CS$ і $DK \perp CS$, то:

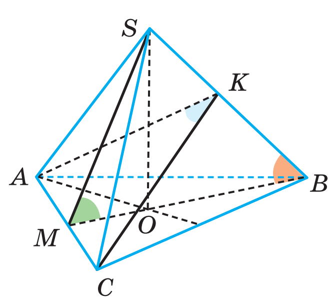
— SAC — кут нахилу бічного ребра SA до площини ABC;

— SMO — кут нахилу бічної грані SBC до площини ABC або двогранний кут при ребрі основи;

— BKD — двогранний кут при бічному ребрі.



Мал. 244



Мал. 245

На малюнку 245 зображено перераховані види кутів на правильній трикутній піраміді. Якщо $SO \perp ABC$, $MO \perp AC$, $MS \perp AC$, $CK \perp BS$ і $AK \perp BS$, то:

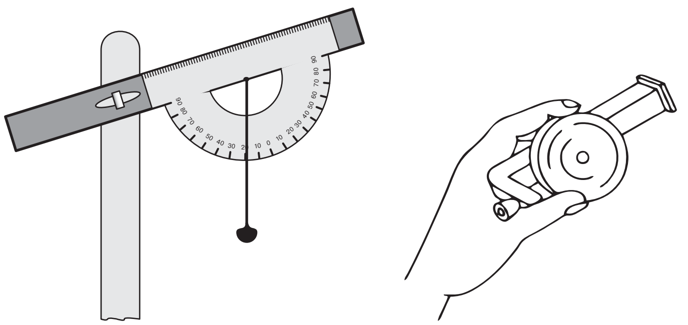
— SBO — кут нахилу бічного ребра SB до площини ABC;

— SMO — кут нахилу бічної грані SAC до площини ABC або двогранний кут при ребрі основи;

— AKC — двогранний кут при бічному ребрі.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Кути між прямими і площинами часто доводиться вимірювати астрономам, геодезистам, географам, маркшейдерам, працівникам транспорту. Найпростіший саморобний прилад для вимірювання кутів між горизонтальною площиною і похилими — **екліметр** (мал. 246, *а*).



а *б*

Мал. 246

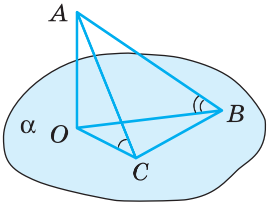
Мал. 247

Бувають екліметри і фабричного виготовлення (мал. 246, *б*). Якщо потрібна більша точність, користуються **теодолітом** (мал. 247). Теодоліт має два круги з градусними поділками (лімби). Користуючись горизонтальним лімбом, визначають кути у горизонтальній площині. Вертикальний лімб дає змогу вимірювати кут між горизонтальною площиною і похилими до неї напрямами.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають кутом між прямою і площиною?
2. Яким може бути кут між прямою і площиною?
3. Що називають кутом між похилою і площиною?
4. Сформулюйте теорему про кут між похилою і площиною.
5. Що називають кутом між двома площинами?
6. Що називають двогранним кутом? Які бувають двогранні кути?
7. Що називають лінійним кутом двогранного кута?
8. У яких межах може змінюватися міра двогранного кута?

Виконаємо разом



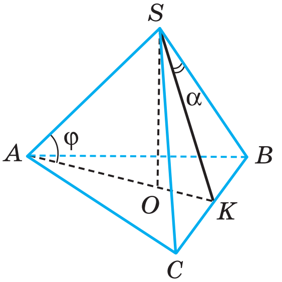
Мал. 248

1 Якщо один із катетів рівнобедреного прямокутного трикутника лежить у площині α, а другий утворює з нею кут 45°, то кут між гіпотенузою і площиною — 30°. Доведіть це.

- Нехай ABC — трикутник, у якого $\angle ACB = 90°$, $AC = CB$, а AO — перпендикуляр до площини α, яка проходить через BC (мал. 248). Доведемо, що коли $\angle ACO = 45°$, то $\angle ABO = 30°$. Нехай $AC = a$, тоді $BC = a$, $AO = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $AB = a\sqrt{2}$,

$$\sin \angle ABO = \frac{AO}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}} : a\sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Отже, $\angle ABO = 30°$.



Мал. 249

2 $SABC$ — трикутна піраміда, $\triangle ABC$ — правильний, O — точка перетину медіан, $SO \perp ABC$, $\angle BSC = 2\alpha$. Знайдіть кут нахилу бічного ребра піраміди до площини основи.

- Нехай $SABC$ — трикутна піраміда (мал. 249), у якої $\angle BSC = 2\alpha$. Знайдемо $\angle SAO = \varphi$.

Проведемо $SK \perp BC$. Нехай $BC = a$, тоді з $\triangle SKB$ $SB = \frac{BK}{\sin\alpha}$, $SB = \frac{a}{2\sin\alpha}$.

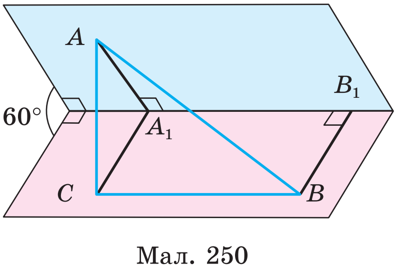
Оскільки $\triangle ABC$ — правильний, то $OA = \frac{2}{3}AK$, $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, отже,

$OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Тоді $\cos\varphi = \frac{OA}{SA}$, $\cos\varphi = \frac{a\sqrt{3}\cdot 2\sin\alpha}{3a} = \frac{2\sqrt{3}\sin\alpha}{3}$.

Отже, $\cos\varphi = \frac{2\sqrt{3}\sin\alpha}{3}$, а $\varphi = \arccos\frac{2\sqrt{3}\sin\alpha}{3}$.

3 Із точок A і B, що лежать у гранях двогранного кута, опущені перпендикуляри AA_1 і BB_1 на ребро кута. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 6$ см, $A_1B_1 = \sqrt{69}$ см, а міра двогранного кута дорівнює 60°.

- Проведемо прямі $A_1C \parallel B_1B$ і $BC \parallel A_1B_1$ (мал. 250). Оскільки утворений чотирикутник A_1CBB_1 — прямокутник, то $A_1C = B_1B = 6$ см. Пряма A_1B_1 перпендикулярна до площини трикутника ACA_1, бо вона перпендикулярна двом прямим цієї площини AA_1 і CA_1. Пряма BC перпендикулярна до площини



Мал. 250

трикутника ACA_1, бо $BC \parallel A_1B_1$. Маємо: $BC \perp AC$, а тому трикутник ACB — прямокутний.

Розглянемо трикутник AA_1C. За теоремою косинусів

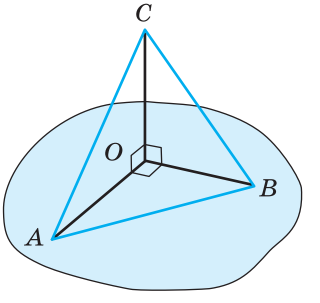
$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\alpha = 64 + 36 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 0,5 = 52.$

З трикутника ACB за теоремою Піфагора маємо: $AB^2 = AC^2 + BC^2$, звідки $AB^2 = 52 + 69 = 121$. Отже, $AB = 11$ см.

Задачі і вправи

Виконайте усно

680. Відрізки OA, OB, OC рівні і попарно перпендикулярні (мал. 251). Знайдіть: а) кути $\triangle ABC$; б) кут між площиною (AOB) та прямими AC, BC, OC; в) кут між площиною (AOC) та прямими AB і BC.



Мал. 251

681. Скільки прямих, які перетинають дану площину під кутом 50°, можна провести через дану точку?

682. Під яким кутом до площини потрібно провести відрізок MN, щоб він був удвічі більший за свою проекцію?

683. Кут між перпендикуляром і похилою, проведеними до площини α, дорівнює 40°. Знайдіть кут між похилою і площиною α.

684. Є два двогранні кути, лінійні кути яких дорівнюють 100° і 120°. Чи може їх об'єднання бути двогранним кутом?

685. Є два двогранні кути, лінійні кути яких дорівнюють по 200°. Чи може їх об'єднання бути двогранним кутом?

686. Три площини, які проходять через одну пряму, ділять простір на рівні двогранні кути. Знайдіть міру одного з них.

А

687. Пряма AB з площиною α утворює кут 60°. Знайдіть довжину проекції похилої AB на площину α, якщо $AB = 48$ см.

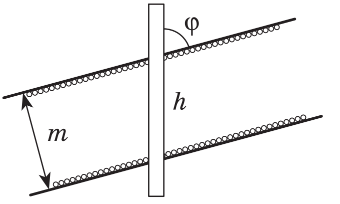
688. Довжина похилої AB дорівнює 50 см, а точка A віддалена від площини на 25 см. Знайдіть кут між похилою і площиною.

689. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед, виміри якого $AB = a$, $AA_1 = b$, $AD = c$. Знайдіть тангенси кутів нахилу прямих AB_1, AD_1, AC_1 до площини грані $ABCD$.

690. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних площин під кутом φ, то і другу площину вона перетинає під таким самим кутом.

691. Доведіть, що паралельні прямі нахилені до однієї і тієї самої площини під рівними кутами. Чи правильне обернене твердження?

692. Визначте товщину m вугільного пласта, якщо вертикальна свердловина нахилена до нього під кутом $\varphi = 72°$ і проходить по вугіллю відстань $h = 2{,}5$ м (мал. 252).



Мал. 252

693. На якій глибині знаходиться станція метро, якщо її ескалатор завдовжки 85 м нахилений до площини горизонту під кутом 42°?

694. Одна з двох прямих, що перетинаються під кутом 50°, перпендикулярна до деякої площини. Доведіть, що і друга пряма перетинає цю площину. Знайдіть кут між другою прямою і площиною.

695. Знайдіть кут між мимобіжними прямими, якщо одна з них перпендикулярна до деякої площини, а друга перетинає цю площину під кутом φ.

696. Як через пряму, що перетинає площину α під кутом φ, провести площину, яка перетинає площину α також під кутом φ?

697. Пряма a перетинає площину α під кутом 45°. Чи можна через пряму a провести площину, яка перетинає площину α під кутом 30°? А під кутом 60°?

698. Пожежна автодрабина — спеціальний пожежний автомобіль, призначений для підйому пожежних на верхні поверхи будинків та споруд для рятування людей та цінностей у багатоповерхових будинках, а також для гасіння пожеж водою і повітряно-механічною піною (мал. 253). Його параметри:

- довжина автомобіля — 11 м;
- ширина автомобіля — 2,5 м;
- висота автомобіля — 3,2 м;
- висота підйому стріли — 30,2 м;
- діапазон кута підйому — 0–75°.


Мал. 253

Оберіть потрібні дані та встановіть: чи можна цією автодрабиною спасти людей з 16 поверху; найвищий поверх, до якого можна дістатися цією автодрабиною; максимальну довжину драбини у розкладеному вигляді. На якій найбільшій відстані від будинку може знаходитися у цей час автомобіль, щоб здійснювати порятунок людей або цінностей. З'ясуйте, чи є можливість вільно під'їхати пожежному автомобілю на таку відстань до вашого чи сусіднього будинку. Зробіть висновки.

699. AH — перпендикуляр до площини трикутника ABC, $AB = AC$. Доведіть, що похилі HB і HC з площиною даного трикутника утворюють рівні кути.

700. Площина β проходить через вершини B і D ромба $ABCD$. Доведіть, що прямі AB, CB, AD і CD утворюють з площиною β рівні кути.

701. З однієї точки до площини проведено дві рівні похилі. Кут між ними $60°$, а між їхніми проекціями $90°$. Знайдіть кути між похилими і площиною.

702. З точки, віддаленої від площини на 8 дм, проведено дві похилі під кутами $45°$ до площини. Знайдіть відстань між їхніми основами, якщо кут між проекціями похилих $120°$.

703. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 6 см, точка M знаходиться на відстані 6 см від кожної з його вершин. Знайдіть кут між прямою MA і площиною квадрата.

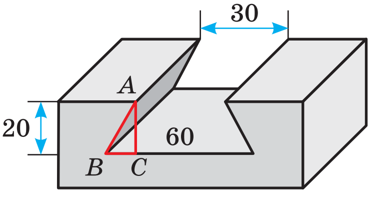
704. Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює a, точка M віддалена від кожної з його вершин на $\frac{2}{3}a$. Під якими кутами нахилені прямі MA, MB і MC до площини трикутника ABC?

705. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника ABC дорівнює c. Через вершину прямого кута C до площини трикутника проведено перпендикуляр CK. Точка K віддалена від AB на $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. Знайдіть кути, які утворюють прямі AK і BK з площиною трикутника.

706. Трикутник ABC — рівнобедрений, $\angle A = 120°$, $AP = a$ — перпендикуляр, проведений до площини трикутника. Знайдіть відстань від точки P до сторони BC, якщо пряма BP утворює з площиною трикутника кут α.

707. Дано двогранний кут $60°$. Точка A однієї його грані віддалена на 12 см від другої. Знайдіть відстань від точки A до ребра даного двогранного кута.

708. У металевій деталі зроблено паз, поперечний переріз якого має форму рівнобічної трапеції (мал. 254). За зазначеними на малюнку розмірами (в міліметрах) обчисліть: а) кути нахилу бічних граней паза; б) площу поперечного перерізу паза.



Мал. 254

709. Знайдіть кут між двома прямими, перпендикулярними до граней двогранного кута, міра якого дорівнює $100°$.

710. Визначте міру двогранного кута, якщо точка, взята на одній грані, віддалена від ребра вдвічі далі, ніж від другої грані.

711. Точка, взята всередині двогранного кута $60°$, віддалена від обох граней на відстань a. Знайдіть відстань від точки до ребра.

712. На одній грані двогранного кута взято дві точки, що віддалені від ребра на 51 см і 34 см. Відстань від першої точки до другої грані дорівнює 15 см. Визначте відстань від другої точки до другої грані.

713. A і B — точки на ребрі прямого двогранного кута; AC і BD — перпендикуляри до ребра, проведені в різних гранях. Визначте відстань CD, якщо $AB = 6$ см, $AC = 3$ см і $BD = 2$ см.

714. Розв'яжіть попередню задачу, замінивши прямий двогранний кут кутом $120°$ і взявши:
а) $AB = AC = BD = a$;
б) $AB = 3$, $AC = 2$, $BD = 1$.

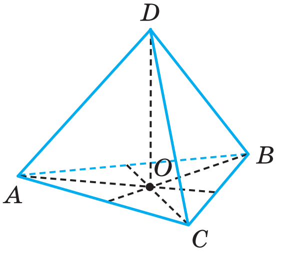
715. Відрізки OA, OB, OC рівні і попарно перпендикулярні (див. мал. 251). Знайдіть кути між прямими OA, OB, OC і площиною $\triangle ABC$.

716. У тетраедрі $PABC$ $PA = PB = PC = c$. Знайдіть відстань від точки P до площини (ABC), якщо ребро PA утворює з площиною (ABC) кут α.

717. Дано правильний тетраедр $ABCD$ (мал. 255). Установіть відповідність між кутами (1–4) та їх мірами (А–Д).

1 Кут між AD і (ABC)
2 Кут між (ABC) і (ADC)
3 Кут між висотою DO і (BCD)
4 Кут між AC і BD

А $90°$
Б $\arccos\frac{1}{3}$
В $60°$
Г $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$
Д $\arcsin\frac{1}{3}$



Мал. 255

Б

718. Точка P знаходиться на відстані a від усіх вершин квадрата $ABCD$. Знайдіть відстані від точки P до площини квадрата і до його сторін, якщо пряма PA утворює з площиною квадрата кут α.

719. Точка M рівновіддалена від вершин правильного трикутника ABC і віддалена від площини трикутника на h. Знайдіть відстань від точки M до сторін трикутника, якщо кут між прямою MA і площиною (ABC) дорівнює α.

720. Точка простору M знаходиться на відстані 20 см від усіх вершин трикутника ABC. Знайдіть периметр трикутника, якщо його площа дорівнює 96 см^2, а пряма MC утворює з площиною трикутника кут $60°$.

721. Висота крісел дитячої каруселі 0,4 м (мал. 256). Вони розташовані на ланцюгах завдовжки 1,6 м, що прикріплені до металевого кола радіуса 2 м. Під час руху каруселі максимальне відхилення крісел від осі становить $45°$. Якого радіусу слід спорудити загорожу навколо каруселі, якщо відомо, що до працюючої каруселі не можна підходити ближче, ніж на 2 м?


Мал. 256

722. В основі прямокутного паралелепіпеда лежить квадрат. Знайдіть об'єм цього паралелепіпеда, якщо його діагональ дорівнює d і утворює з площиною основи кут β.

723. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює l і утворює з площиною основи кут α, а з площиною бічної грані кут β. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

724. Кінці відрізка AB, які лежать у перпендикулярних площинах α і β, віддалені від лінії перетину площин c на 15 см і 6 см, а відстань між основами перпендикулярів, проведених з цих точок до прямої c, дорівнює 8 см. Знайдіть довжину відрізка AB та кути, які цей відрізок утворює з площинами α і β.

725. Кінці відрізка AB лежать у перпендикулярних площинах α і β. Знайдіть відстань між основами перпендикулярів, проведених з точок A і B до лінії перетину площин, якщо довжина відрізка AB дорівнює a і він утворює з площинами α і β кути 30° і 45°.

726. Висота і бічна сторона трапеції дорівнюють відповідно 12 см і 15 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Прямі, які проходять через вершини трапеції та деяку точку M, утворюють з площиною трапеції кути 45°. Знайдіть відстань від точки M до площини трапеції.

727. Точка простору P віддалена від вершин трапеції $ABCD$ на 4 см. Знайдіть кути, які утворюють з площиною трапеції прямі, що проходять через точку P і вершини трапеції, якщо $\angle A = 60°$, $AC = 2\sqrt{3}$ см.

728. У трикутнику ABC $AB = BC = a$, $\angle C = 30°$. MB — перпендикуляр до площини трикутника, $MB = a\sqrt{2}$. Знайдіть кут між прямою AM та площиною (MBC).

729. CK — перпендикуляр до площини трикутника ABC, у якого $AC = BC$, $\angle C = 120°$. Пряма AK утворює з площиною (ABC) кут α, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Знайдіть кут, який утворює пряма AK з площиною (KCB).

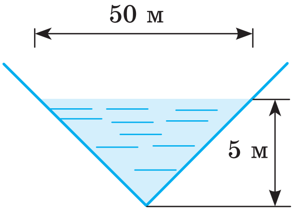
730. З однієї точки проведено до площини дві похилі, проекції яких дорівнюють 4,5 м і 1,5 м. Знайдіть довжини похилих, якщо одна з них утворює з площиною кут, удвічі більший, ніж друга.

731. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть міру двогранного кута з гранями AC_1B та AC_1D.

732. У тетраедрі $ABCD$ ребра AB, AC і AD попарно перпендикулярні і рівні. Знайдіть міри його двогранних кутів при ребрах BC, CD, BD.

733. Кінці відрізка лежать на гранях прямого двогранного кута і віддалені від його ребра на 12 см і 16 см. Знайдіть відстань від даного відрізка до ребра двогранного кута.

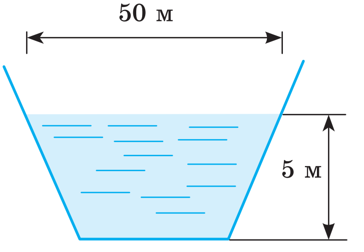
734. Для поліпшення земель і підвищення родючості ґрунтів з несприятливим водним режимом створюють спеціальні гідротехнічні споруди — канали різної форми. На малюнку 257



Мал. 257

зображено переріз каналу, що має форму двогранного кута. Знайдіть лінійний кут цього двогранного кута, якщо ширина води в каналі 50 м, а глибина — 5 м.

735. Важливою характеристикою під час будівництва каналів є гідравлічний радіус (R) — величина, що дорівнює відношенню площі потоку (поперечного перерізу каналу) до змоченого периметра. На малюнку 258 зображено переріз каналу з двома двогранними кутами, кожен з яких дорівнює 135°. Знайдіть гідравлічний радіус каналу.



Мал. 258

736*. З однієї точки проведено до площини дві похилі, довжини яких 3 см і 8 см. Знайдіть проекції похилих на цю площину, якщо різниця кутів, утворених похилими з площиною, дорівнює 60°.

737. Усі ребра чотирикутної піраміди рівні. Знайдіть кут між бічним ребром і площиною основи.

738. Дано площину ω і пряму AB, віддалену від неї на відстань a. Через точку A проведено прямі, перпендикулярні до AB, які утворюють з даною площиною кути 45° і 30° та перетинають цю площину в точках P і Q. Знайдіть довжину відрізка PQ.

739*. У правильній трикутній піраміді задано кути: α — кут нахилу бічного ребра до площини основи, β — кут нахилу бічної грані до площини основи і δ — двогранний кут при бічному ребрі. Доведіть, що мають місце формули:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta \qquad \sin\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\delta}{2}$$

740*. У правильній чотирикутній піраміді задано кути: α — кут нахилу бічного ребра до площини основи, β — кут нахилу бічної грані до площини основи і δ — двогранний кут при бічному ребрі. Доведіть, що мають місце формули:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\beta \qquad \sin\beta = \sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2}$$

741*. Через дві точки, які лежать у даній площині на відстані a, проведено паралельні похилі під кутом 45° до площини. Визначте відстань між ними, якщо відстань між їхніми проекціями на дану площину дорівнює b.

742*. У просторі дано три попарно мимобіжні прямі. Через одну з них проведіть площину так, щоб інші дві прямі були до неї однаково нахилені.

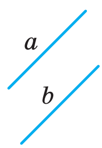
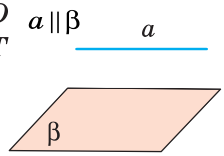
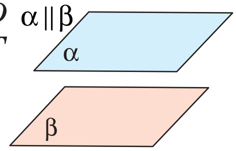
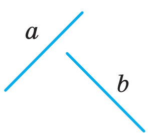
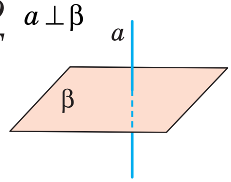
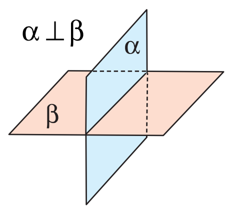
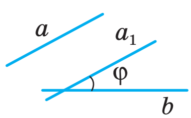
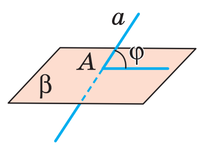
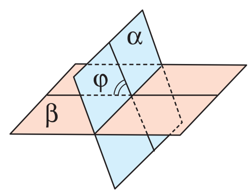
743*. У просторі дано площину α і дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок P площини α, для яких прямі AP і BP утворюють з площиною α рівні кути.

Задачі для повторення

744. Пряма a лежить у площині α, а пряма $b \perp a$. Відстань від точки M $(M \in b)$ до площини α дорівнює 4 см, а до прямої a — 5 см. Знайдіть відстань між прямими a і b.

745. $ABCD$ — правильний тетраедр з ребром a. Через центр O основи ABC проведено площину, яка паралельна BC і перетинає ребро AD у точці M. У яких межах можуть змінюватися периметр і площа утвореного перерізу залежно від положення точки M на ребрі AB?

746. Користуючись таблицею, перерахуйте всі можливі випадки розташування прямих і площин у просторі, сформулюйте їх найважливіші властивості.

	Пряма і пряма	**Пряма і площина**	**Площина і площина**
Паралельність	*O* *T* $a \parallel b$ 	*O* *T* $a \parallel \beta$ 	*O* *T* $\alpha \parallel \beta$ 
Перпендикулярність	*O* *T* $a \perp b$ 	*O* *T* $a \perp \beta$ 	*O* *T* $\alpha \perp \beta$ 
Інші випадки	 *O* (кут між прямими) *O* (мимобіжні прямі)	 *O* (кут між прямою та площиною) *T* *T*	 *O* (кут між площинами)

Тут *O* — означення, *T* — теорема.

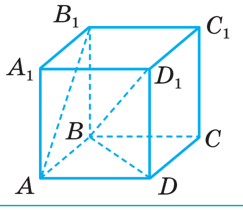
Задачі за готовими малюнками

А | **Б**

1

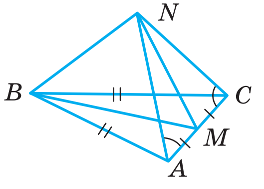
А. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб

Знайдіть кут між прямими:
1) AB_1 і CD;
2) AB_1 і BC;
3) AB_1 і BC_1.



Б. $AB = BC$

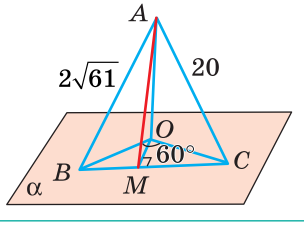
Доведіть: $BN \perp AC$



2

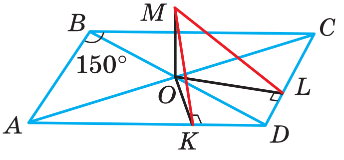
А. $AO \perp \alpha$
$BO : OC = 5 : 8$

AM



Б. $ABCD$ — паралелограм,
$MO \perp (ABC)$, $AB = 24$ см,
$AD = 40$ см, $MO = 8$ см

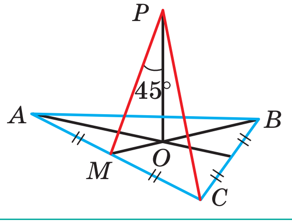
MK; ML



3

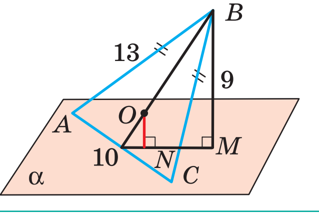
А. $AB = BC = AC = 8$ см; $PO \perp (ABC)$

PM; PC



Б. $BM \perp \alpha$; O — центр кола, вписаного у $\Delta\ ABC$

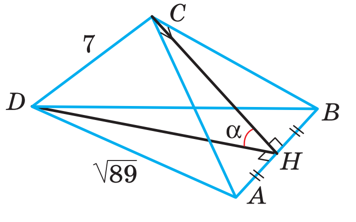
ON



4

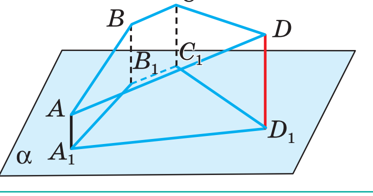
А. $AB = 10$; $\angle ACB = 90°$; $AC = BC$

$\angle\alpha$



Б. $AD \parallel BC$, $AB : BC = 3 : 1$,
$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$,
$AA_1 \perp \alpha$, $AA_1 = 11$ см,
$BB_1 = 21$ см, $CC_1 = 23$ см

DD_1



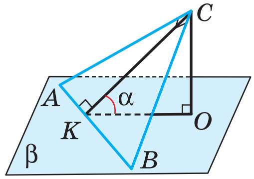
А | **Б**

5

А

$CO \perp \beta$; $\angle ACB = 90°$;
$AC = 15$; $CB = 20$; $CO = 6$

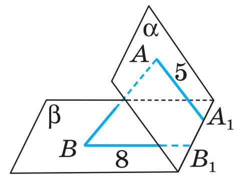
$\angle\alpha$



Б

$AB = 25$; $A_1B_1 = 24$; $AA_1 \perp A_1B_1$;
$BB_1 \perp A_1B_1$

Кут між α і β

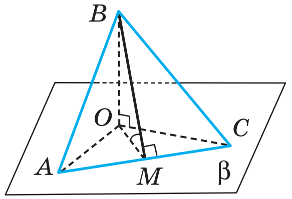


6

А

$BO \perp \beta$, $AB = BC = AC$;
$\angle OMB = 60°$

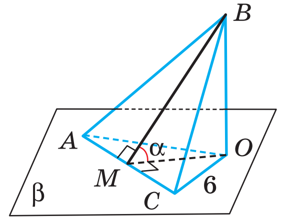
$\angle OAB$; $\angle OCB$



Б

$BO \perp \beta$; $S_{ABC} = 48$ см^2;
$AC = 14$ см; $AO = 16$ см

$\angle\alpha$

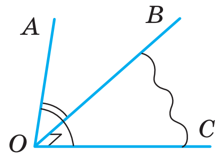


7

А

$\angle AOB = \angle AOC = 60°$;
$\angle BOC = 90°$

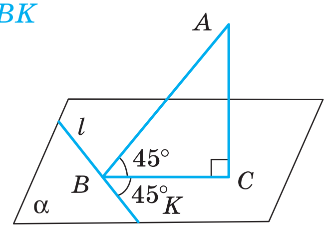
Кут між OA і (BOC)



Б

$AC \perp \alpha$

$\angle ABK$

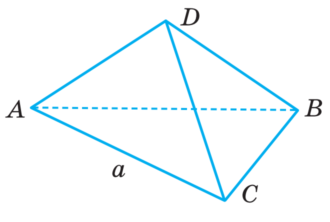


8

А

$ABCD$ — правильний тетраедр;
$AC = a$

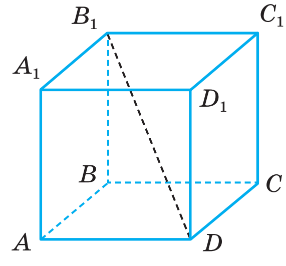
Відстань між AD і BC



Б

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб;
$AB = 8$ см

Відстань між AB і B_1D



Тестові завдання 3

1	Дано три різні площини α, β, γ: $\alpha \perp \beta$, $\beta \perp \gamma$. Яке взаємне розташування площин α і β?	а) Паралельні; б) перетинаються, але не перпендикулярні; в) перпендикулярні; г) усі відповіді а)–в).
2	Дано $b \perp \alpha$, $b \parallel c$. Яке взаємне розташування площини α і прямої c?	а) Паралельні; б) перпендикулярні; в) перпендикулярні або паралельні; г) інша відповідь.
3	Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Яка з площин не перпендикулярна до площини (AA_1C_1)?	а) (BDD_1); б) (ABC); в) (BCC_1); г) $(A_1B_1C_1)$.
4	SA — перпендикуляр до площини ромба $ABCD$, O — точка перетину його діагоналей. Установіть вид трикутника SOD.	а) Гострокутний; б) прямокутний; в) тупокутний; г) не можна встановити.
5	Перпендикуляр, проведений з точки, рівновіддаленої від вершин трикутника, до площини цього трикутника, проходить через:	а) центр вписаного кола; б) центр описаного кола; в) точку перетину медіан; г) точку перетину висот.
6	Перпендикуляр, проведений з точки, рівновіддаленої від сторін трикутника, до площини цього трикутника, проходить через:	а) центр вписаного кола; б) центр описаного кола; в) точку перетину медіан; г) точку перетину висот.
7	M і M_1 — середини ребер CD і C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть відстань між прямими AB_1 і MM_1, якщо $AB = 2a$.	а) $2a$; б) $2a\sqrt{2}$; в) $a\sqrt{5}$; г) $a\sqrt{3}$.
8	Ортогональною проекцією трикутника, площа якого 8 см², є рівносторонній трикутник зі стороною 4 см. Знайдіть кут між площинами трикутників.	а) $30°$; б) $60°$; в) $45°$; г) $150°$.
9	M — середина ребра BC правильного тетраедра $ABCD$. Кутом між площинами (ABC) і (DBC) є кут:	а) $\angle ACD$; б) $\angle DMA$; в) $\angle DBA$; г) $\angle ADM$.
10	Правильний трикутник ABM і квадрат $ABCD$ мають спільну сторону AB, а їх площини перпендикулярні. Знайдіть $\angle MAD$.	а) $60°$; б) $90°$; в) $120°$; г) не можна встановити.

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Ребро правильного тетраедра $ABCD$ дорівнює a. Знайдіть периметр і площу перерізу тетраедра площиною, яка проходить через ребро AC перпендикулярно до BD.

2°. Точка A віддалена від граней прямого двогранного кута на 3 дм і 4 дм. Знайдіть відстань від точки A до ребра двогранного кута.

3°. З точки, що знаходиться на відстані 12 см від площини, проведено до цієї площини дві похилі, кут між якими 90°. Знайдіть кут між проекціями похилих, які дорівнюють 9 см і 16 см.

4°. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см. Точка M знаходиться на відстані 13 см від кожної його вершини. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника.

5•. Основи трапеції дорівнюють 12 см і 20 см. Через більшу основу трапеції проведено площину α на відстані 16 см від меншої основи. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей трапеції до площини α.

6•. У тетраедрі $ABCD$ $AB = BC$, $\angle DBC = \angle DBA$. Доведіть, що $AC \perp DB$.

7•. Кінці відрізка AB, довжина якого 24 см, належать площинам α і β, $\alpha \perp \beta$. Відстань між основами перпендикулярів, проведених з точок A і B до лінії перетину площин, дорівнює 12 см. Знайдіть кут, який пряма AB утворює з площиною α, якщо з площиною β вона утворює кут 30°.

8•. Сторони прямокутника 2 см і 6 см. Менша сторона прямокутника лежить у площині α, а його діагональ утворює з α кут 60°. Знайдіть кут між площиною прямокутника і площиною α.

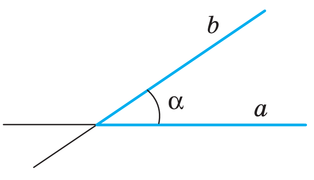
9••. Висоти тетраедра $ABCD$, проведені з вершин A і D, перетинаються. Доведіть, що $AD \perp BC$.

10••. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a, M — середина BB_1. Знайдіть кут і відстань між прямими AB_1 і DM.

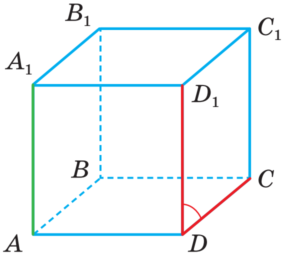
Головне в розділі 3

1. Кут між прямими. Кут між двома прямими, що перетинаються, — не найбільший з утворених ними чотирьох кутів (мал. 259). Кут між паралельними прямими дорівнює 0°. **Кутом між мимобіжними прямими** називають кут між прямими, що перетинаються і паралельні даним прямим (мал. 260).

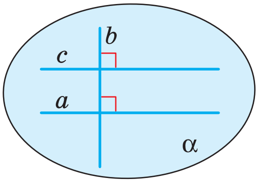
2. Дві прямі називають **перпендикулярними,** якщо кут між ними дорівнює 90° (мал. 260). Якщо пряма перпендикулярна до однієї з паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої (мал. 261).



Мал. 259



Мал. 260

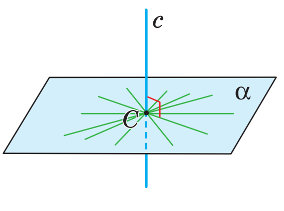


Мал. 261

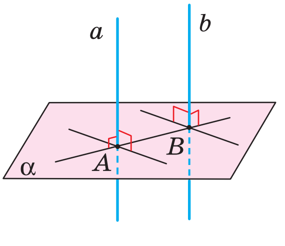
3. Пряму називають **перпендикулярною до площини**, якщо вона перетинає цю площину і перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у площині і проходить через точку перетину (означення) (мал. 262). Якщо пряма перетинає площину і перпендикулярна до двох різних прямих цієї площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна і до площини (ознака перпендикулярності прямої і площини).

4. Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то й друга пряма перпендикулярна до неї. Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні (мал. 263). **Перпендикуляром**, опущеним з даної точки на дану площину, називають відрізок прямої, перпендикулярної до площини, що міститься між даною точкою і площиною.

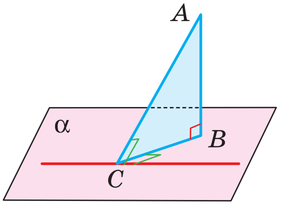
5. Пряма, яка лежить у площині, перпендикулярна до похилої тоді і тільки тоді, коли вона перпендикулярна до проекції похилої (теорема про три перпендикуляри) (мал. 264).



Мал. 262



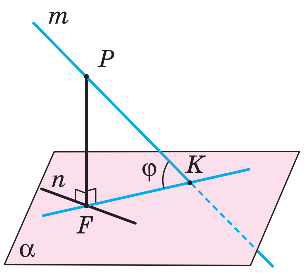
Мал. 263



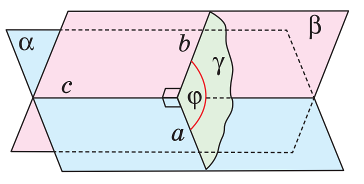
Мал. 264

6. Кутом між прямою і площиною називають кут між прямою і її проекцією на площину. Якщо пряма паралельна (перпендикулярна) площині, то кут між ними дорівнює 0° (90°) (мал. 265). **Кутом між площинами** називають кут між прямими, проведеними в цих площинах перпендикулярно до лінії їх перетину (мал. 266). Кут між паралельними площинами дорівнює 0°.

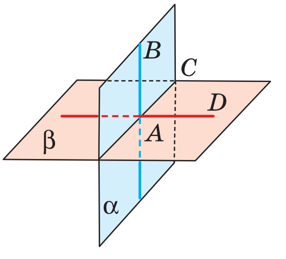
7. Дві площини називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90° (мал. 267). Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої, то такі площини перпендикулярні (ознака перпендикулярності площин).



Мал. 265



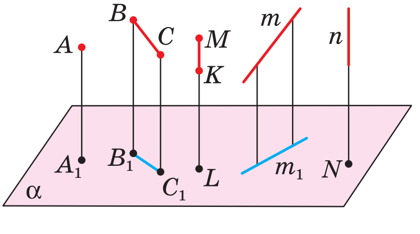
Мал. 266



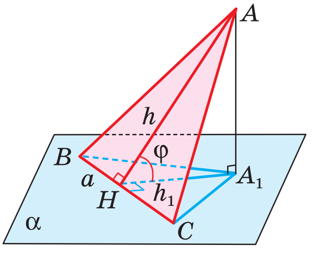
Мал. 267

8. Двогранним кутом називають частину простору, обмежену двома півплощинами, які виходять з однієї прямої. Фігуру, утворену двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує, також називають **двогранним кутом**. Кут, утворений перетином двогранного кута з площиною, перпендикулярною до його ребра, називають лінійним кутом даного двогранного кута.

9. Проектування називають **прямокутним**, або **ортогональним**, якщо проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій (мал. 268). Якщо S і $S_{\text{пр}}$ — площі многокутника і його ортогональної проекції, а кут між їх площинами φ, то $S_{\text{пр}} = S \cos \varphi$ (мал. 269).

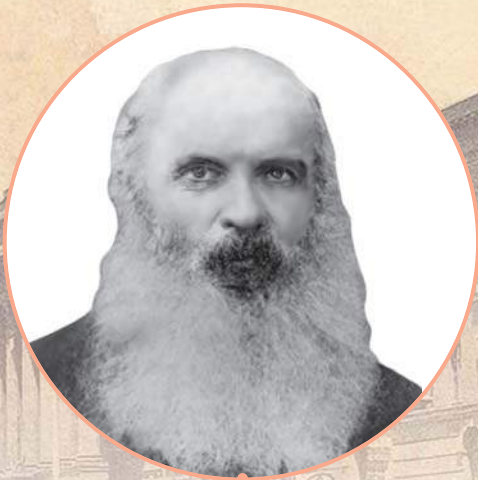


Мал. 268



Мал. 269

10. Відстань від точки до прямої дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму, а до площини — довжині перпендикуляра, опущеного з даної точки на площину. Відстань між прямою і паралельною їй площиною дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки прямої на дану площину. Відстань між паралельними прямими дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки однієї прямої на другу, а між двома мимобіжними прямими — довжині їх спільного перпендикуляра.



Василь Єрмаков

(1845–1922)

Заслужений професор Київського університету св. Володимира (1890). Першим серед вітчизняних математиків розробляв геометричний напрям теорії векторного числення. Автор «Теорії векторного числення» (1887) і «Аналітичної геометрії» (1899). Засновник науково-популярного журналу «Журнал елементарної математики» (1884). Один з організаторів Київського фізико-математичного товариства (1899).

Герман Вейль

(1885–1955)

Видатний німецький і американський математик, фізик і філософ. Основні наукові праці стосуються алгебри, математичної логіки, теорії чисел, основ математики, тригонометричних рядів, теорії функцій, диференціальних рівнянь. Запропонував узагальнений погляд на вектор як елемент векторного простору, що описується відповідною системою аксіом (1918).

Розділ 4

Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі

Chapter 4

Coordinates, Geometric Transformations and Vectors In Space

Цікавий і довгий шлях пройшли у своєму розвитку координати, вектори і геометричні перетворення у просторі. Сьогодні ці важливі розділи математики, об'єднані спільною назвою «аналітична геометрія», вивчаються у всіх вищих і середніх технічних закладах і на математичних факультетах класичних і педагогічних університетів.

Координатний і векторний методи, а також метод геометричних перетворень дають змогу розв'язувати широкий клас задач, зокрема алгебраїчні задачі за допомогою геометрії, а геометричні — за допомогою алгебри. На основі цих методів доводять складні твердження з різних розділів математики та розв'язують задачі, які іншими методами розв'язати надто важко чи зовсім неможливо.

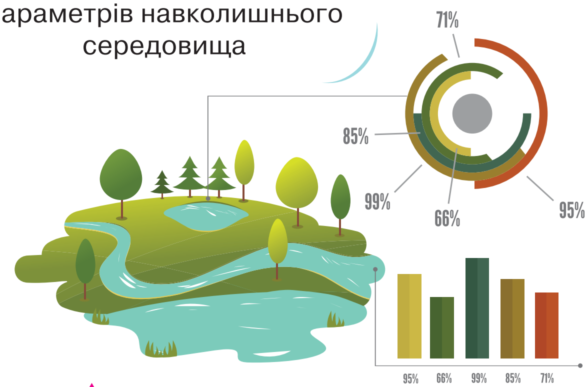
Екологія

Вивчення взаємодії живої і неживої природи.

Моделювання наслідків природних катаклізмів

Створення та дослідження природно-промислових систем

Вимірювання та аналіз параметрів навколишнього середовища



Математика в моїй професії

Геодезія

γεωδαισία — поділ землі

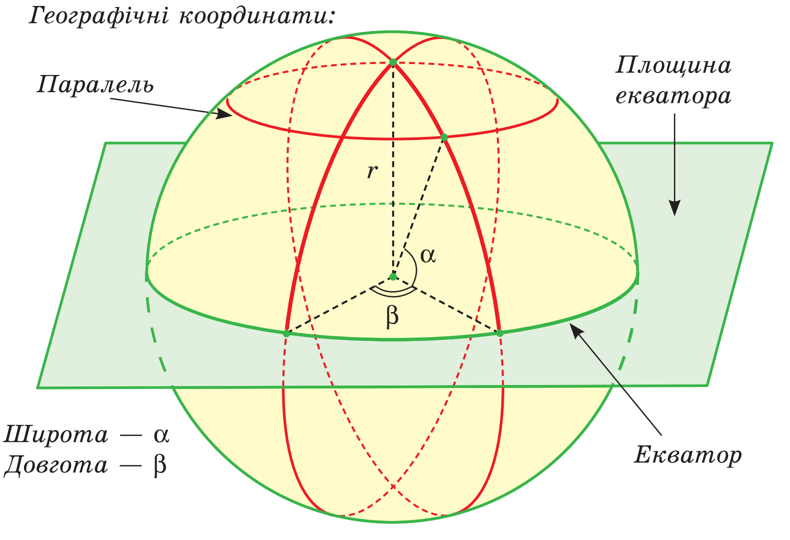
Визначення форми, розмірів і гравітаційного поля планети Земля

Побудова мереж пунктів з єдиною системою просторових координат

Топографічне знімання, створення паперових та цифрових планів і карт

§ 17 Прямокутна система координат

Місцеположення точок на площині чи у просторі задають координатами. З цією метою використовують різні системи координат. У фізиці, щоб описати рух тіл, задають три просторові координати і додаткове число, яким вимірюється час. В астрономії за допомогою координат визначають положення зір на небосхилі. У географії положення на місцевості визначають трьома числами: широтою, довготою і висотою над рівнем моря (мал. 270). Наприклад, найвища вершина Українських Карпат і найвища точка України — гора Гове́рла (мал. 271) — має координати 48°09′38″ пн. ш., 24°30′11″ сх. д., а найвища її висота над рівнем моря — 2061 м.

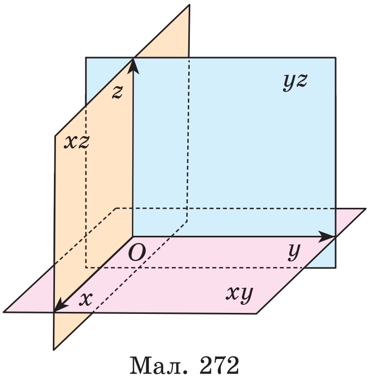


Мал. 270

Мал. 271

Спеціальні системи координат використовують у медичних дослідженнях й аграрній науці, у промисловості та геодезії. Координати місцезнаходження автомобілів, кораблів, літаків визначають за допомогою сучасних навігаційних приймачів.

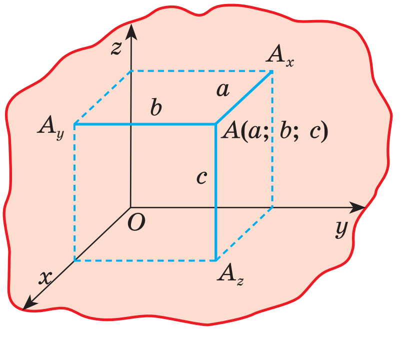
Прямокутна система координат на площині розглядалась у попередніх класах. Аналогічну систему координат можна ввести і для простору.



Мал. 272

Нехай x, y, z — три попарно перпендикулярні координатні прямі, які перетинаються в точці O (мал. 272). Назвемо їх *координатними осями*: «вісь x», «вісь y», «вісь z». Або відповідно: вісь *абсцис*, вісь *ординат* і вісь *аплікат*.

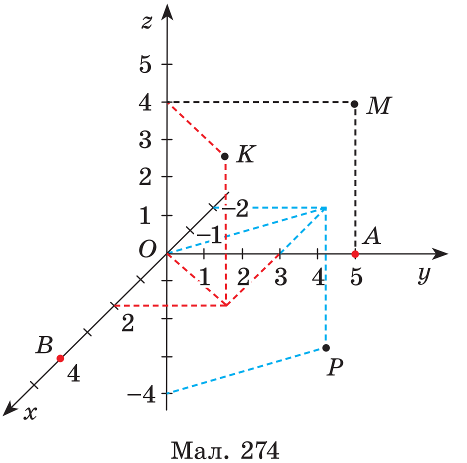
Точка O — *початок координат*. Кожна вісь точкою O розбивається на дві півосі — додатну, позначену стрілкою, і від'ємну. Площини, які проходять через осі x і y, x і z, y і z, — координатні площини. Позначають їх відповідно: xy, xz і yz. Координатні площини розбивають простір на 8 *октантів*.



Мал. 273

Якщо задано таку систему координат, кожній точці простору можна поставити у відповідність єдину впорядковану трійку дійсних чисел, а кожній трійці чисел — єдину точку.

Нехай дано точку A. Опустимо з неї на площини yz, xz, xy перпендикуляри AA_x, AA_y, AA_z (мал. 273). Довжини a, b, c цих перпендикулярів, узяті з відповідними знаками, називають **координатами точки** A. Записують: $A(a; b; c)$. Тут a — абсциса, b — ордината, c — апліката точки A. Якщо точка лежить у якій-небудь координатній площині, її відповідна координата дорівнює нулю. Наприклад, точка $B(0; 2; -3)$ лежить у площині yz, точка $C(5; 0; 0)$ — на осі x.



Мал. 274

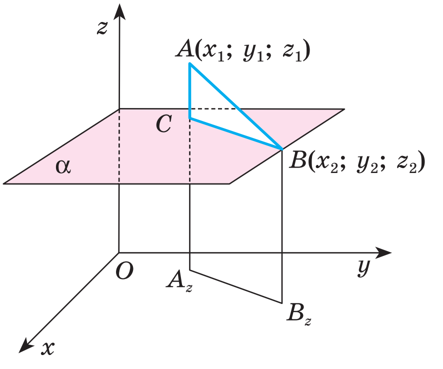
Якщо через точку $A(a; b; c)$ провести площину, перпендикулярну до осі x, то вона цю координатну вісь перетне в точці з координатою a. Площини, які проходять через точку A перпендикулярно до осей y і z, перетинають їх відповідно у точках з координатами b і c. Взагалі, координати точки $A(a;\ b;\ c)$ — це координати проекцій даної точки відповідно на координатні осі x, y, z.

Наприклад, точки, зображені на малюнку 274, мають такі координати: $A(0;\ 5;\ 0)$, $B(4;\ 0;\ 0)$, $M(0;\ 5;\ 4)$, $K(2;\ 3;\ 4)$, $P(-2;\ 3;\ -4)$.

ТЕОРЕМА 26

Квадрат відстані між двома точками дорівнює сумі квадратів різниць їхніх відповідних координат.

ДОВЕДЕННЯ.



Мал. 275

Нехай дано дві точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ (мал. 275). Доведемо, що

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Розглянемо випадок, коли дані точки розміщені, як показано на малюнку 4. Прямі AA_z і BB_z, паралельні осі z, перетинають площину xy в точках $A_z(x_1;\ y_1;\ 0)$ і $B_z(x_2;\ y_2;\ 0)$. Проведемо через точку B площину α, паралельну площині xy. Вона перетне пряму AA_z у деякій точці C.

За теоремою Піфагора

$$AB^2 = AC^2 + CB^2.$$

Відрізки CB і A_zB_z рівні та, як відомо з планіметрії,

$$A_zB_z^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2.$$

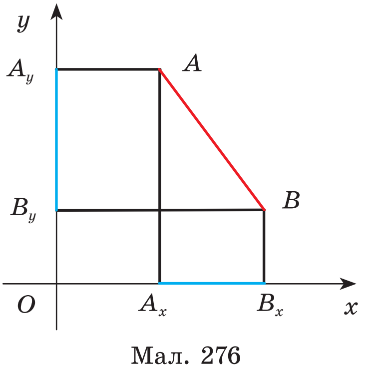
Довжина відрізка $AC = \left|z_2 - z_1,\right|$ тому

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Якщо відрізок AB паралельний, наприклад, осі z, то $AB = \left|z_2 - z_1\right|$. Такий самий результат дає і загальна формула при $x_2 = x_1$ і $y_2 = y_1$.

Аналогічно можна розглянути й інші випадки і переконатися, що завжди $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$. □

Доведена теорема тісно пов'язана з узагальненою для простору теоремою Піфагора.



Мал. 276

Нехай у площині дано перпендикулярні прямі Ox, Oy і відрізок AB, де $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ (мал. 276). Тоді $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Якщо A_xB_x, A_yB_y — проекції відрізка AB на координатні осі Ox, Oy та якщо $AB \nparallel Ox$, $AB \nparallel Oy$, то $A_xB_x = |x_2 - x_1|$ і $A_yB_y = |y_2 - y_1|$. Маємо: $AB^2 = A_xB_x^2 + A_yB_y^2$. Ця рівність справедлива і в тому випадку, коли $AB \parallel Ox$ або $AB \parallel Oy$.

Отже, теорему Піфагора можна узагальнити так: *квадрат довжини відрізка дорівнює сумі квадратів його проекцій на дві перпендикулярні прямі*.

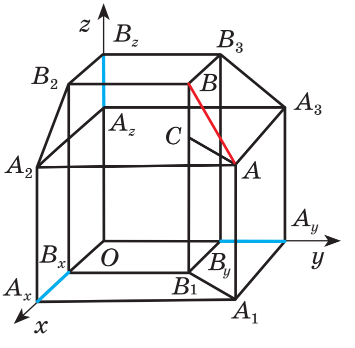
Аналогічне твердження справедливе і для простору.

ТЕОРЕМА 27

(Просторова теорема Піфагора.) **Квадрат довжини будь-якого відрізка дорівнює сумі квадратів довжин його проекцій на три взаємно перпендикулярні прямі.**

ДОВЕДЕННЯ.

Розглянемо загальний випадок, коли даний відрізок AB не перпендикулярний до жодної з даних попарно перпендикулярних прямих Ox, Oy, Oz (мал. 277).



Мал. 277

Координати проекцій точок $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ на координатні осі x, y і z дорівнюють x_1 і x_2, y_1 і y_2, z_1 і z_2. Довжини проекцій відрізка AB на ці осі:

$$A_xB_x = |x_2 - x_1|,$$
$$A_yB_y = |y_2 - y_2|,$$
$$A_zB_z = |z_2 - z_1|.$$

З доведеної раніше рівності (с. 175) випливає:

$$AB^2 = A_xB_x^2 + A_yB_y^2 + A_zB_z^2. \qquad (*)$$

А якщо $AB \perp Oz$, то $A_zB_z = 0$ і $AB^2 = A_1B_1^2 = A_xB_x^2 + A_yB_y^2$. Бачимо, що рівність (*) справедлива при будь-якому розміщенні відрізка AB. □

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що називають прямокутною системою координат у просторі?
2. Що називають координатними осями; початком координат?
3. Назвіть абсцису, ординату й аплікату точки $A(m;\ n;\ k)$.
4. Чому дорівнює квадрат відстані між двома точками?
5. Сформулюйте узагальнену теорему Піфагора.
6. Сформулюйте просторову теорему Піфагора.

Виконаємо разом

1 Складіть рівняння геометричного місця точок простору, рівновіддалених від точки $A(1; 2; 3)$ і початку координат.

● Нехай $M(x; y; z)$ — будь-яка точка шуканого геометричного місця точок. Тоді $MA^2 = MO^2$, або

$$(1 - x)^2 + (2 - y)^2 + (3 - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

звідси

$$x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

Це і є шукане рівняння.

2 Знайдіть координати точки C, яка лежить на осі ординат, якщо відомо, що $\triangle ABC$ з вершинами в точках $A(-7; 1; 2)$ і $B(5; 3; 1)$ — прямокутний.

● У задачі не сказано, який із кутів повинен бути прямим. Тому потрібно розглянути три варіанти, коли прямим буде кут при вершині A, або при вершині B, або при вершині C.

Розглянемо випадок, коли $\angle A = 90°$.

Тоді за теоремою Піфагора $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Нехай $C(0; y; 0)$ — шукана точка.

Тоді

$$BC^2 = 25 + (y - 3)^2 + 1 = (y - 3)^2 + 26;$$
$$AB^2 = 144 + 4 + 1 = 149;$$
$$AC^2 = 49 + (y - 1)^2 + 4 = (y - 1)^2 + 53.$$

Отримаємо рівняння

$$(y - 3)^2 + 26 = 149 + (y - 1)^2 + 53.$$

Його корінь $y = 42$. Отже, $C_1(0; 42; 0)$.

Розглянувши випадки, коли прямим буде кут B або кут C, отримаємо остаточну відповідь:

$$C_1(0; 42; 0);\ C_2(0; 32{,}5; 0);\ C_3\left(0; 2+\sqrt{39}; 0\right);\ C_4\left(0; 2-\sqrt{39}; 0\right).$$

Задачі та вправи

Виконайте усно

747. Назвіть координати точок, зображених на малюнку 278.

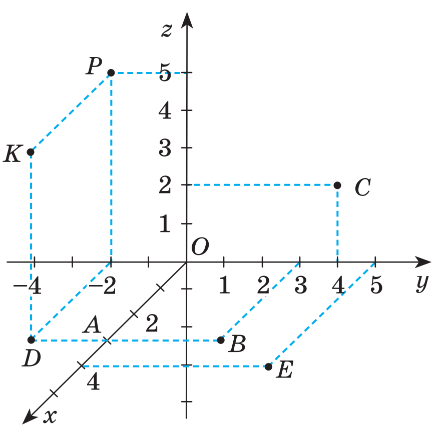
748. Дано точки $A(0; 3; 1)$, $B(-2; 0; 0)$, $C(0; 0; 4)$, $D(0; -3; 0)$. Які з них лежать:

а) на осі x;

б) на осі z;

в) у площині xy;

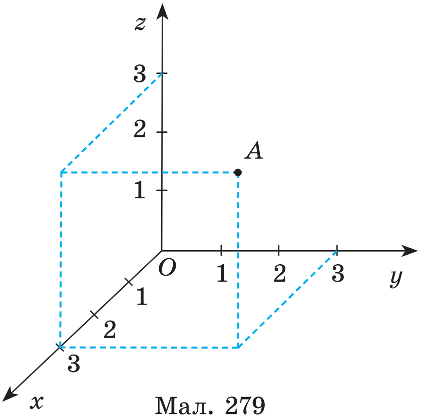
г) у площині yz?



Мал. 278

749. Чим є геометричне місце точок простору, для яких дорівнює нулю:
а) перша координата;
б) друга координата;
в) третя координата;
г) перші дві координати;
ґ) другі дві координати;
д) перша і третя координати;
е) усі три координати?

750. Дано точку $A(3;\ 3;\ 3)$ (мал. 279). Знайдіть відстань від неї до:
а) координатних площин;
б) осей координат;
в) початку координат.



Мал. 279

751. Знайдіть відстані від точки $M(2; -3; 1)$ до координатних площин.

752. Дано точку $K(2;\ -3;\ 1)$. Знайдіть координати основ перпендикулярів, опущених із цієї точки на координатні площини.

753. Дано точку $P(2; 3; 1)$. Знайдіть координати основ перпендикулярів, опущених із цієї точки на координатні осі.

754. Тетраедр $ABCD$ задано координатами вершин: $A(2;\ 0;\ 3)$, $B(-1;\ 0;\ 2)$, $C(4;\ 0;\ -1)$, $D(1;\ 3;\ 1)$. У якій координатній площині лежить основа ABC тетраедра?

755. Піраміда $SABCD$ задана координатами своїх вершин: $S(-2;\ 3;\ -5)$, $A(3;\ 1;\ -1)$, $B(3;\ 2;\ 2)$, $C(3;\ -1;\ 4)$, $D(3;\ -2;\ -2)$. Як розміщена площина основи $ABCD$ відносно координатних площин?

756. Які з координатних площин перетинають площину $\triangle MNK$, якщо $M(-2;\ 2;\ 4)$, $N(0;\ -1;\ 4)$, $K(3;\ 5;\ 4)$?

А

757. Побудуйте в прямокутній системі координат точки:
$A(6;\ 0;\ 0)$, $D(4;\ -2;\ 0)$,
$B(0;\ 0;\ 5)$, $E(2;\ 4;\ 4)$,
$C(0;\ 3;\ -2)$, $F(6;\ -4;\ -3)$.

758. Знайдіть координати точок, які віддалені від кожної з координатних площин на 4.

759. Знайдіть відстань між точками $B(-2;\ 0;\ 3)$ і $K(3;\ 4;\ -2)$.

760. Яка з точок — $A(2;\ 1;\ 5)$ чи $B(-2;\ 1;\ 6)$ — лежить ближче до початку координат?

761. Дано точки $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(2;\ 3;\ 1)$ і $C(3;\ 1;\ 2)$. Знайдіть периметр трикутника ABC.

762. Дано точки $K(0;\ 1;\ 1)$, $P(2;\ -1;\ 3)$ і $T(-1;\ y;\ 0)$. Знайдіть таке значення y, щоб виконувалась умова $KT = PT$.

763. Чи є точки $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(2;\ 3;\ 4)$ і $C(3;\ 4;\ 5)$ вершинами трикутника?

764. Дано точки $A(a;\ b;\ c)$, $B(2a;\ 2b;\ 2c)$, $C(3a;\ 3b;\ 3c)$ і $D(4a;\ 4b;\ 4c)$, де $a^2+b^2+c^2\neq 0$. Доведіть, що точки B і C ділять відрізок AD на три рівні частини.

765. Знайдіть координати точки, яка лежить на осі y і рівновіддалена від точок $A(4;\ -1;\ 3)$ і $B(1;\ 3;\ 0)$.

766. Установіть відповідність між точками (1–4) і їх відстанню до осі аплікат (А–Д).

1 $A(-5;\ 12;\ 2)$	**А** 17
2 $C(3;\ 4;\ 6)$	**Б** 5
3 $D(0;\ -6;\ 5)$	**В** 6
4 $B(-8;\ -15;\ 0)$	**Г** 13
	Д 2

767. Знайдіть довжини проекцій відрізка AB на координатні площини та осі, якщо координати його кінців $A(1;\ 1;\ 1)$ і $B(1;\ 4;\ 5)$.

768. Доведіть, що точки $A(-2;\ 0;\ 5)$, $B(-1;\ 2;\ 3)$, $C(1;\ 1;\ -3)$ і $D(0;\ -1;\ -1)$ є вершинами паралелограма.

769. Установіть вид $\triangle ABC$ та знайдіть його периметр і площу, якщо:
а) $A(3;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 3;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 3)$;
б) $A(2;\ 0;\ 5)$, $B(3;\ 4;\ 0)$, $C(2;\ 4;\ 0)$;
в) $A(2;\ 4;\ -1)$, $B(-1;\ 1;\ 2)$, $C(5;\ 1;\ 2)$.

770. Точки $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(b;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ c;\ 0)$ і $D(0;\ 0;\ h)$ — вершини паралелепіпеда. Знайдіть координати решти його вершин.

771. Точки $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(-1;\ 1;\ 1)$, $C(-1;\ -1;\ 1)$ і $C_1(-1;\ -1;\ -1)$ — вершини куба. Знайдіть координати решти вершин цього куба.

Б

772. Установіть вид чотирикутника $MNPK$ і знайдіть його площу, якщо:
а) $M(0;\ -2;\ 0)$, $N(4;\ 1;\ 0)$, $P(4;\ 1;\ 5)$, $K(0;\ -2;\ 5)$;
б) $M(6;\ 8;\ 2)$, $N(2;\ 4;\ 3)$, $P(4;\ 2;\ 8)$, $K(8;\ 6;\ 7)$;
в) $M(-1;\ -3;\ -8)$, $N(-1;\ 4;\ -9)$, $P(7;\ 5;\ -2)$, $K(7;\ -2;\ -1)$.

773. Чотирикутник $ABCD$ заданий координатами вершин. Установіть відповідність між видом чотирикутника (1–3) і координатами його вершин (А–Г).

1 Квадрат	**А** $A(-5;\ 2;\ 2)$, $B(-1;\ 6;\ 3)$, $C(3;\ 2;\ 6)$, $D(-1;\ -2;\ 5)$
2 Ромб з різними кутами	**Б** $A(-5;\ -1;\ 2)$, $B(-4;\ 6;\ 7)$, $C(1;\ 1;\ 2)$, $D(0;\ -6;\ -3)$
3 Прямокутник з різними сторонами	**В** $A(-9;\ -1;\ 4)$, $B(-2;\ 7;\ 5)$, $C(-1;\ 7;\ -2)$, $D(-8;\ -1;\ -3)$
	Г $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ -1;\ 6)$, $C(5;\ -1;\ 6)$, $D(5;\ -1;\ 2)$

774. Зобразіть у системі координат пряму, яка проходить через точки $A(0;\ 0;\ 5)$ і $B(0;\ 5;\ 0)$. Знайдіть кути між прямою AB і прямими, що збігаються з осями координат.

775. Дано точки $A(0;\ 0;\ 4)$, $B(0;\ 4;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 2)$ і $D(2;\ 0;\ 0)$. Знайдіть кут між прямими AB і CD.

776. Зобразіть у системі координат площину, яка проходить через точки $A(0;\ 0;\ 4)$, $B(0;\ 4;\ 0)$ і $C(4;\ 0;\ 0)$. Під якими кутами до цієї площини нахилені осі координат?

777. Знайдіть координати точки, яка лежить у площині xy і рівновіддалена від точок $A(0;\ 1;\ -1)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$ і $C(0;\ -1;\ 0)$.

778. Знайдіть точки, рівновіддалені від точок $A(0;\ 0;\ 1)$, $B(0;\ 1;\ 0)$, $C(1;\ 0;\ 0)$ і віддалені від площини yz на відстань 2.

779. Дано точки $P(3;\ 8;\ 1)$ і $Q(2;\ 9;\ 1)$. У площині xy знайдіть координати точки R, коли відомо, що $\triangle PQR$ — правильний.

780. У $\triangle ABC$ вершини A і C мають координати: $A(3;\ 2;\ 1)$, $C(-2;\ -1;\ 3)$. На осі Oz знайдіть точку B таку, що $\triangle ABC$ буде: а) рівнобедреним; б) прямокутним; в) рівностороннім.

781. Доведіть, що піраміда $SABC$, задана координатами своїх вершин $S(0;\ 0;\ 0)$, $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 2;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 2)$, — правильна.

782. Основа ABC правильного тетраедра $ABCD$ лежить у площині yz. Знайдіть координати вершин B і D, якщо $A(0;\ -2;\ 0)$, $C(0;\ 2;\ 0)$.

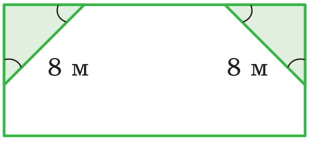
783. Укажіть геометричне місце точок простору, які задовольняють таке рівняння:

а) $\sqrt{(x-6)^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}=10$;

б) $\sqrt{x^2+(y-3)^2+z^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-4)^2}=4$.

Задачі для повторення

784. Господарі однієї прямокутної садиби для захисту ґрунту під плодовими кущами від пересихання й перегрівання вирішили вкрити ґрунт мульчою. Відомо, що з одного мішка мульчі (50 л) можна покрити ділянку 3,5–3,75 м². Скільки мішків мульчі слід купити, щоб замульчувати дві ділянки, які показано на малюнку 280?



Мал. 280

Дізнайтеся ціни на різні види мульчі і встановіть можливу вартість покупки.

785. Знайдіть довжину медіани ND трикутника MNK, якщо $M(-2;\ 4)$, $N(2;\ 5)$, $K(0;\ -2)$.

786. Скільки прямих, паралельних площинам α і β, можна провести через точку, яка не належить цим площинам?

§ 18 Поділ відрізка в заданому відношенні

Як виражаються координати x, y, z точки $C(x; y; z)$ — середини відрізка AB — через координати його кінців $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$?

ТЕОРЕМА 28

Якщо $C(x; y; z)$ — середина відрізка з кінцями $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$, то $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

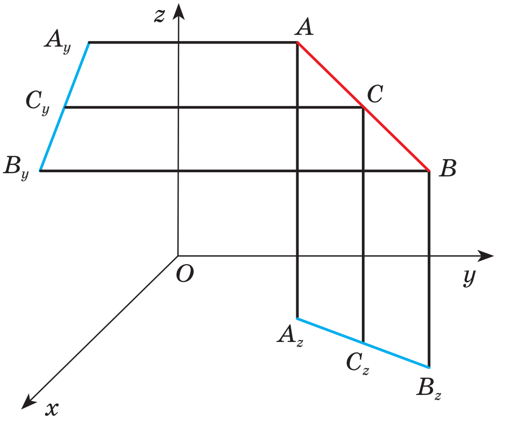
ДОВЕДЕННЯ.

Спроектуємо точки A, B і C на площину xy; їхніми проекціями є точки $A_z(x_1; y_1; 0)$ і $B_z(x_2; y_2; 0)$, $C_z(x; y; 0)$ (мал. 281).

Оскільки проекцією середини відрізка є середина його проекції, то точка C_z — середина відрізка A_zB_z. А з планіметрії відомо, що на площині xy координати середини відрізка виражаються через координати його кінців за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



Мал. 281

Спроектувавши точки A, B, C на площину xz, аналогічно знайдемо

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad \square$$

Наприклад, якщо $C(x; y; z)$ — середина відрізка з кінцями $A(3; 6; 5)$ і $B(1; 0; -7)$, то

$$x = \frac{3+1}{2} = 2, \quad y = \frac{6+0}{2} = 3, \quad z = \frac{5-7}{2} = -1.$$

Отже, серединою відрізка AB є точка $C(2; 3; -1)$.

Узагальнимо теорему 28.

ТЕОРЕМА 29

Якщо точка $P(x; y; z)$ відрізка з кінцями $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ така, що $AP : PB = m : n$, то

$$x = \frac{1}{m+n}(nx_1 + mx_2), \quad y = \frac{1}{m+n}(ny_1 + my_2), \quad z = \frac{1}{m+n}(nz_1 + mz_2).$$

ДОВЕДЕННЯ.

Припустимо, що $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$ (мал. 282). Спроектувавши точки A, B і P на площину xy і вісь Ox, матимемо:

$A_zP_z : P_zB_z = AP : PB = m : n$, або $(x_1 - x) : (x - x_2) = m : n$.

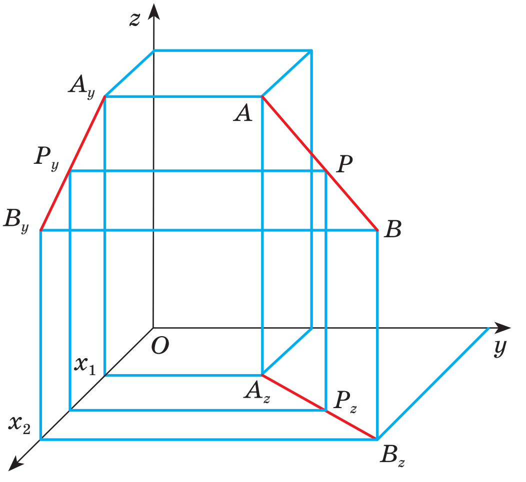
Звідси

$$x = \frac{1}{m+n}(nx_1 + mx_2).$$

Аналогічно можна отримати

$$y = \frac{1}{m+n}(ny_1 + my_2),$$

$$z = \frac{1}{m+n}(nz_1 + mz_2). \quad \square$$



Мал. 282

Якщо $x_1 = x_2$, або $y_1 = y_2$, або $z_1 = z_2$, то формули також правильні. Переконайтеся в цьому самостійно.

Якщо чисельники і знаменники розглядуваних формул поділити на n і позначити $AP : PB = \lambda$, то отримаємо формули:

$$\boldsymbol{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}}.$$

Ці формули задають координати точки P, яка ділить відрізок AB у відношенні $AP : PB = \lambda$.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте теорему про координати середини відрізка.
2. Чому дорівнюють координати точки, яка ділить у відношенні $m : n$ відрізок з кінцями $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$?
3. Як знайти координати точки M, яка ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = \lambda$?
4. Чому дорівнюють координати середини відрізка, кінці якого $A(4; 0; 2)$ і $B(6; 8; 6)$?

Виконаємо разом

1 Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(7; 0; 6)$, $B(4; 2; 2)$, $C(-3; 2; 2)$, $D(0; 0; 6)$ — паралелограм.

● Знайдемо координати середини діагоналей AC і BD.

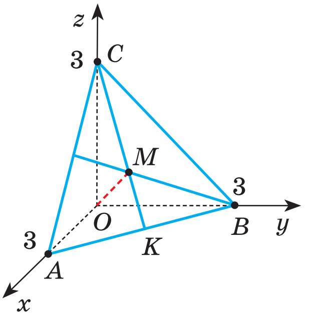
$$x_1 = \frac{7-3}{2} = 2, \quad y_1 = \frac{0+2}{2} = 1, \quad z_1 = \frac{6+2}{2} = 4.$$

Отже, середина діагоналі AC має координати $O_1(2; 1; 4)$. Аналогічно

$$x_2 = \frac{4+0}{2} = 2, \quad y_2 = \frac{2+0}{2} = 1, \quad z_2 = \frac{2+6}{2} = 4.$$

Тобто середина діагоналі BD має координати $O_2(2; 1; 4)$.
Оскільки координати середин діагоналей збігаються, то це означає, що діагоналі чотирикутника перетинаються та точкою перетину діляться навпіл. Отже, $ABCD$ — паралелограм.

2 Піраміда $OABC$ задана координатами своїх вершин: $O(0; 0; 0)$, $A(3; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 3)$ (мал. 283). Знайдіть довжину висоти OM.



Мал. 283

● Знайдемо довжини ребер даної піраміди. Оскільки $AB = BC = AC = 3\sqrt{2}$ і $OA = OB = OC = 3$, то піраміда правильна.
Отже, $M(x; y; z)$ — точка перетину медіан $\triangle ABC$.
За властивістю медіан трикутника $CM : MK = 2 : 1$, тобто $\lambda = 2$.
Оскільки точка K — середина AB — має координати $K\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$, то

$$x = \frac{0+2\cdot 1,5}{1+2} = 1, \quad y = \frac{0+2\cdot 1,5}{1+2} = 1, \quad z = \frac{3+2\cdot 0}{1+2} = 1.$$

Отже, координати точки $M(1; 1; 1)$. Тоді $OM = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$

Задачі та вправи

Виконайте усно

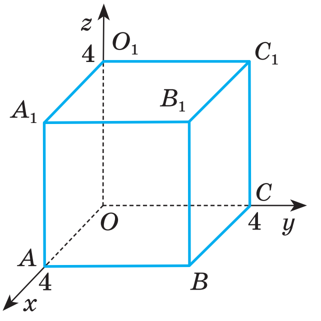
787. Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо:
а) $A(-1; 0; 0)$, $B(1; 2; 0)$;
б) $A(0; 0; 0)$, $B(2; 2; 2)$;
в) $A(-2; 4; 2)$, $B(2; -4; 2)$.

788. Чи є початок координат серединою відрізка CD, якщо:
а) $C(-1;\ 0;\ 2)$, $D(1;\ 0;\ -2)$;
б) $C(-4;\ 2;\ 6)$, $D(4;\ -2;\ 6)$?

789. На якій координатній осі лежить середина відрізка MN, якщо:
а) $M(2;\ 4;\ -6)$, $N(-2;\ 2;\ 6)$;
б) $M(-3;\ 0;\ 7)$, $N(3;\ 0;\ 2)$?

790. Якій координатній площині належить середина відрізка KP, якщо:
а) $K(2;\ 1;\ 4)$, $P(4;\ 0;\ -4)$;
б) $K(-6;\ 2;\ 1)$, $P(4;\ -2;\ 3)$?

791. Знайдіть координати середини ребер і центрів граней куба, зображеного на малюнку 284.



Мал. 284

А

792. Знайдіть координати середини відрізка PQ, якщо:
а) $P(1{,}2;\ -3;\ 6{,}3)$, $Q(-2{,}6;\ 3{,}2;\ -5{,}1)$;
б) $P\left(\sqrt{3};\ 2;\ 1-\sqrt{2}\right)$, $Q\left(3\sqrt{3};\ 1;\ 1+\sqrt{2}\right)$.

793. Дано точки $A(3;\ -1;\ 4)$, $B(-1;\ 1;\ -8)$, $C(2;\ 1;\ -6)$, $D(0;\ 1;\ 2)$. Знайдіть відстань між серединами відрізків:
а) AB і CD;
б) AC і BD.

794. Точка M — середина відрізка AB. Знайдіть координати точки B, якщо $A(2;\ -1;\ 6)$, $M(1;\ 4;\ 0)$.

795. Точки M і N ділять відрізок AB на три рівні частини. Знайдіть координати кінців відрізка, якщо $M(1;\ -1;\ 2)$, $N(-3;\ 2;\ 4)$.

796. Знайдіть довжини медіан $\triangle ABC$, якщо $A(3;\ 3;\ 0)$, $B(-5;\ 1;\ 2)$, $C(5;\ -3;\ -2)$.

797. Знайдіть довжини середніх ліній $\triangle EFK$, заданого координатами своїх вершин: $E(-1;\ 4;\ 2)$, $F(-3;\ 2;\ -2)$, $K(1;\ -2;\ -2)$.

798. Точки M і N — середини сторін AB і BC трикутника ABC. Знайдіть координати вершин A і C, якщо $B(2;\ 0;\ -4)$, $M(3;\ -1;\ 2)$, $N(1;\ -4;\ 0)$.

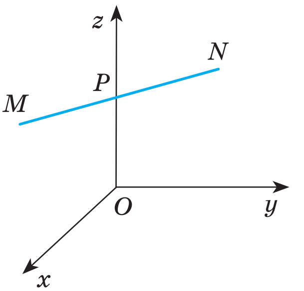
799. AM — медіана $\triangle ABC$. Знайдіть довжину медіани BN, якщо $A(2;\ -4;\ 2)$, $C(0;\ 0;\ 6)$, $M(1;\ 2;\ 4)$.

800. Чи буде чотирикутник $ABCD$ паралелограмом, якщо:
а) $A(1;\ -3;\ 12)$, $B(0;\ 2;\ 6)$, $C(3;\ 3;\ -10)$, $D(4;\ -2;\ -4)$;
б) $A(4;\ 2;\ -5)$, $B(-6;\ 2;\ 8)$, $C(2;\ -3;\ 9)$, $D(12;\ 2;\ -4)$?

801. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо:
а) $A(4;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ -3;\ -2)$, $C(-6;\ 2;\ 1)$;
б) $A(-1;\ 7;\ 4)$, $B(1;\ 5;\ 2)$, $C(9;\ -3;\ -8)$.

802. O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати вершин C і D, якщо $A(1;\ 3;\ -2)$, $B(-4;\ 0;\ 5)$, $O(1;\ 0;\ 2)$.

803. Середина P відрізка MN лежить на осі z (мал. 285). Знайдіть числа a і b, якщо:
а) $M(a; -2; 3)$, $N(2; b; -1)$;
б) $M(2a^2; -b; 1)$, $N(a-1; 1; 5)$;
в) $M(3a; b+1; 4)$, $N(b; 1-a; -2)$.



Мал. 285

804. Знайдіть висоту $\triangle ABC$, проведену до найбільшої сторони, та його площу, якщо $A(1; -1; 2)$, $B(4; 2; -1)$, $C(1; 5; 2)$.

805. Трикутник ABC задано координатами своїх вершин: $A(1; 3; -1)$, $B(3; -1; 1)$, $C(3; 1; -1)$. Знайдіть:
а) висоту, проведену до найбільшої сторони;
б) кути трикутника;
в) площу трикутника.

Б

806. Знайдіть координати точки M, яка ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = \lambda$, якщо:
а) $A(-5; 4; 2)$, $B(1; 1; -1)$, $\lambda = 2$;
б) $A(1; -1; 2)$, $B(2; -4; 1)$, $\lambda = 0{,}5$;
в) $A(1; 0; -2)$, $B(9; -3; 6)$, $\lambda = \frac{1}{3}$.

807. Знайдіть координати точки перетину медіан $\triangle MNP$, якщо $M(3; 2; 4)$ $N(1; 3; 2)$, $P(-3; 4; 3)$.

808. Дано координати трьох вершин паралелограма: $A_1(1; -2; 3)$, $A_2(3; 2; 1)$, $A_3(-1; 4; -1)$. Знайдіть координати четвертої вершини. Скільки розв'язків має задача?

809. Знайдіть відстань від початку координат до точки перетину медіан $\triangle ABC$, якщо $A(-1; 2; 10)$, $B(1; 0; 2)$, $C(3; 4; -6)$.

810. Знайдіть координати центра кола, описаного навколо $\triangle ABC$, якщо:
а) $A(-1; 1; 5)$, $B(5; -1; 1)$, $C(1; 5; -1)$;
б) $A(-1; 3; 1)$, $B(2; 4; 1)$, $C(3; 1; 3)$.

811. Знайдіть координати центра кола, вписаного в $\triangle ABC$, якщо:
а) $A(-2; 6; 4)$, $B(4; -2; 6)$, $C(6; 4; -2)$;
б) $A(5; 1; 2)$, $B(2; 4; -1)$, $C(-1; 1; 2)$.

812. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого основа $ABCD$ лежить у площині xy і $A(-2; 4; 0)$, $B(2; 7; 0)$, $C(5; 3; 0)$.
Знайдіть координати інших вершин куба і координати точки перетину його діагоналей.

813. Знайдіть координати вершини C трикутника ABC, якщо дано вершини $A(3; 4; 0)$, $B(7; 6; -5)$ і точку перетину медіан $M(1; 2; -2)$.

814. BL — бісектриса $\triangle ABC$. Знайдіть координати точки L, якщо $A(5; 6; 3)$, $B(3; 5; 1)$, $C(0; 1; 1)$.

815. Знайдіть довжину бісектриси ML трикутника MNK, якщо $M(4; 0; 1)$, $N(5; -2; 1)$, $K(4; 8; 5)$.

816. M і N — середини сторін AB і BC $\triangle ABC$, BL — його бісектриса. Установіть відповідність між умовами (1–4) та координатами відповідних точок (А–Д), якщо $B(1; 3; 2)$, $C(-3; -5; 1)$, $M(2; 2{,}5; 3)$.

1 Координати точки A
2 Координати точки N
3 Координати точки перетину медіан $\triangle ABC$
4 Координати точки L

А $\left(\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}\right)$
Б $(3; 2; 4)$
В $(1; 1; 1)$
Г $(-1; -1; 1{,}5)$
Д $(1{,}5; 0{,}25; 3{,}25)$

817. Знайдіть відстань від початку координат до площини, яка проходить через точки $A(6; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$, $C(0; 0; 6)$.

818. Площина α проходить через точки $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ і $C(0; 0; 2)$, а площина β — через точки $K(4; 0; 0)$, $P(0; 4; 0)$ і $T(0; 0; 4)$. Доведіть, що $\alpha \parallel \beta$. Знайдіть відстань між цими площинами.

819. Знайдіть висоту SO піраміди $SABC$ і кути нахилу її бічних ребер до площини основи, якщо:
а) $S(2; 2; 2)$, $A(-2; 0; 4)$, $B(4; -2; 0)$, $C(0; 4; -2)$;
б) $S(2; -1; 0)$, $A(0; 4; 1)$, $B(4; 4; 1)$, $C(0; 0; 5)$.

Задачі для повторення

820. Установіть вид $\triangle EFK$, заданого координатами вершин: $E(1; 5; 3)$, $F(3; 1; 5)$, $K(5; 3; 1)$. Знайдіть його периметр і площу.

821. Запишіть рівняння кола, описаного навколо трикутника BCD, якщо $B(-6; 2)$, $C(-2; 5)$, $D(1; 1)$.

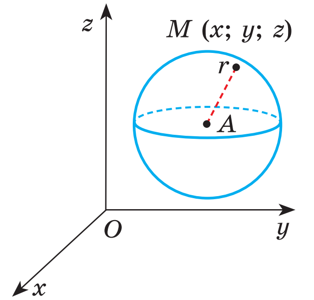
822. На малюнку 286 зображено марку і купон «Слобожанщина», розроблені українським художником-графіком і письменником Юрієм Логвиним. Відомо, що довжина марки в 1,4 разу більша за ширину, а площа марки і площа купона, що має форму квадрата, разом дорівнюють 25,35 см^2.
Знайдіть площу марки і площу купона окремо. Складіть свою задачу про марки цього автора.

Мал. 286

§ 19 Рівняння сфери, площини та прямої

Рівнянням фігури називають таке рівняння, яке задовольняють координати будь-якої точки даної фігури і тільки точки даної фігури. З планіметрії відомі рівняння прямої $ax + by + c = 0$ і кола $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, розміщених на координатній площині. Аналогічні рівняння відповідають багатьом фігурам у просторі.

Рівняння сфери. Сферою називають геометричне місце точок простору, які віддалені на одну й ту саму відстань r $(r > 0)$ від даної точки. Ця точка — центр сфери, а відстань r — її радіус.



Мал. 287

Сфера радіуса r із центром у точці $A(a; b; c)$ — це множина всіх точок, віддалених від A на відстань r (мал. 287), тобто $AM = r$. За теоремою 26 кожна точка $M(x; y; z)$ даної сфери задовольняє рівняння:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Це *рівняння сфери радіуса r із центром у точці $A(a; b; c)$*.

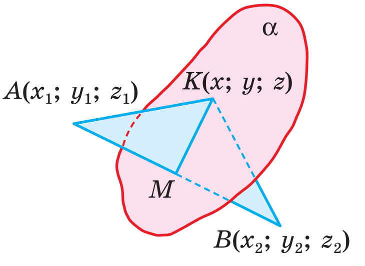
Якщо $a = b = c = 0$, дістанемо рівняння сфери радіуса r із центром у початку координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Приклад. Сфері з центром у точці $A(1; -2; 3)$ радіуса $r = 4$ відповідає рівняння

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16, \text{ або}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0.$$



Мал. 288

Рівняння площини. Нехай α — довільна площина, а точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ такі, що дана площина α перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину M (мал. 288). Будь-яка точка $K(x; y; z)$ площини α рівновіддалена від A і B, оскільки $\triangle KMA = \triangle KMB$. Отже, $AK^2 = BK^2$, або

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2. \qquad (*)$$

Навпаки, якщо координати x, y, z задовольняють рівняння (*), то точка $K(x; y; z)$ рівновіддалена від A і B, а отже, належить площині α.

Як бачимо, рівняння (*) є рівнянням даної площини. Його можна подати в іншому вигляді:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 = 0.$$

Якщо позначимо $2(x_2 - x_1) = a$, $2(y_2 - y_1) = b$, $2(z_2 - z_1) = c$, $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 = d$, то дістанемо рівняння:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Отже, будь-якій площині в декартовій системі координат відповідає рівняння $ax + by + cz + d = 0$, яке називають **загальним рівнянням площини.**

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Рівняння прямої. Пряма у просторі — лінія перетину двох площин. Тому їй відповідає система двох лінійних рівнянь:

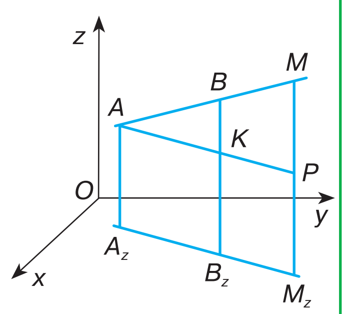
$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0. \end{cases}$$

Координати кожної точки даної прямої задовольняють цю систему рівнянь, і кожний розв'язок системи — трійка значень x, y і z — координати точки, яка лежить на даній прямій.

Якщо пряма AB, яка проходить через точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$, не паралельна жодній координатній площині, їй відповідає система рівнянь

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (**)$$

Щоб переконатися у цьому, розглянемо малюнок 289. Тут $M(x; y; z)$ — довільна точка прямої AB, A_z, B_z, M_z — проекції точок A, B і M на площину xy, а пряма AP, паралельна A_zB_z, перетинає прямі BB_z і MM_z у точках K і P.



Мал. 289

Прямокутні трикутники AMP і ABK подібні,

$$MP : BK = AM : AB,$$

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = AM : AB.$$

Аналогічно, спроектувавши пряму AB на інші координатні площини, дістанемо:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = AM : AB \text{ і } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = AM : AB.$$

З трьох останніх рівностей випливає система рівнянь (**), яку називають **рівнянням прямої, що проходить через дві точки.**

Наприклад, прямій, яка проходить через точки $A(1; -2; 0)$ і $B(3; 1; 4)$, відповідає система:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z}{4}.$$

Якщо у системі рівнянь (**) ввести позначення

$$x_2 - x_1 = m,\ y_2 - y_1 = n,\ z_2 - z_1 = p,$$

то отримаємо *канонічне рівняння прямої*

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}. \qquad (***)$$

Якщо у цьому рівнянні всі відношення позначити через t, тобто $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}=t$, то отримаємо систему

$$\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \\ z = z_1 + pt. \end{cases}$$

Отриману систему рівнянь називають **параметричним рівнянням** прямої. Користуючись параметричним рівнянням прямої, зручно знаходити точки перетину прямих, прямої та площини, прямої та сфери.

Зауважимо, що у канонічному рівнянні прямої одне або два (але не три) з чисел m, n, p може дорівнювати нулю, оскільки в даному випадку це означає не ділення на нуль, а умовну форму запису. При цьому, якщо одне з цих чисел дорівнює нулю, то пряма буде паралельною одній з координатних площин. Якщо ж нулю дорівнюють два числа, то пряма буде паралельною одній з координатних осей. Наприклад, якщо $m = 0$, то пряма паралельна площині yz, а якщо одночасно $m = 0$ і $n = 0$, то пряма буде паралельною осі Oz.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Що називають рівнянням фігури?
2. Яку геометричну фігуру називають сферою?
3. Який вигляд має рівняння сфери? А сфери з центром у початку координат?
4. Який вигляд має рівняння площини?

Виконаємо разом

1 Складіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(4;\ 2;\ -1)$, $B(-1;\ 0;\ 3)$ і $C(0;\ 0;\ 1)$.

● Рівняння площини $ax + by + cz + d = 0$. Оскільки точки A, B, C належать площині, їхні координати задовольняють її рівняння, тобто $4a + 2b - c + d = 0$, $-a + 3c + d = 0$, $c + d = 0$. Виразимо коефіцієнти a, b, c через d: $c = -d$, $a = -2d$, $b = 3d$. Маємо: $-2dx + 3dy - dz + d = 0$. Оскільки $d \neq 0$ (чому?), то отримаємо рівняння $2x - 3y + z - 1 = 0$.

2 Знайдіть довжину лінії перетину сфери $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 25$ площиною $z = 2$.

● Щоб знайти рівняння лінії перетину сфери і площини, розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 25; \\ z = 2. \end{cases}$$

Отримаємо: $(x-1)^2+(y+2)^2+(2+1)^2=25$,
звідки $(x-1)^2+(y+2)^2+9=25$, або
$(x-1)^2+(y+2)^2=16$ — рівняння кола радіуса $r=4$.
Знайдемо довжину цього кола: $C=2\pi r$, $C=8\pi$.

3 Знайдіть довжину хорди, яку сфера $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=35$ відтинає від прямої AB, якщо $A(2;\ 0;\ 1)$, $B(6;\ 1;\ -2)$.

● Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Тоді рівняння прямої AB матиме вигляд: $\frac{x-2}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-3}=t$,
звідки

$$\begin{cases}x=4t+2,\\ y=t,\\ z=-3t+1.\end{cases}$$

Знайдемо координати точок перетину прямої та сфери:

$$(4t+1)^2+(t+2)^2+(2-3t)^2=35,$$

або $16t^2+8t+1+t^2+4t+4+4-12t+9t^2=35$, звідки $26t^2=26$, тобто $t=\pm1$. Тоді $M_1(6;\ 1;\ -2)$, $M_2(-2;\ -1;\ 4)$.
Тому $M_1M_2=\sqrt{64+4+36}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$.

Задачі та вправи

Виконайте усно

823. Які з рівнянь не є рівнянням площини:
а) $2x+3y-z-2=0$;
б) $x+y=5$;
в) $z=4$;
г) $x^2+y^2-z^2=5$;
ґ) $y=0$;
д) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1$;
е) $x+2y-xy+3z=2$?

824. Яка з площин проходить через початок координат:
а) $x+2y+z=5$;
б) $3x-2y+2=0$;
в) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-\frac{z}{4}=0$?

825. Які фігури задають такі рівняння:
а) $z=0$;
б) $y=2$;
в) $x^2-2x+1=0$;
г) $x^2-y^2=0$;
ґ) $(x-2)(y+3)=0$;
д) $(z-2)(z+4)=0$?

826. Складіть рівняння сфери з центром у початку координат радіуса 2.

А

827. Складіть рівняння сфери радіуса $r = 5$ із центром у точці $A(1;\ 0;\ 4)$.

828. Назвіть координати трьох точок, що належать сфері радіуса $r = 10$ із центром у початку координат.

829. Чи належить точка $M(3;\ 2;\ -1)$ сфері, рівняння якої $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$?

830. Складіть рівняння сфери із центром у точці $B(1;\ 1;\ 3)$, коли відомо, що вона проходить через точку $M(2;\ 0;\ -1)$.

831. Напишіть рівняння сфери з діаметром AB, якщо $A(-2;\ 1;\ 4)$, $B(0;\ 3;\ 2)$.

832. Напишіть рівняння сфери, радіусом якої є відрізок AB, якщо $A(-2;\ 1;\ 3)$, $B(0;\ 2;\ 1)$.

833. Знайдіть точки перетину сфери, заданої рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 12$, з віссю x.

834. Які з координатних осей перетинає сфера, задана рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - 16x - 12y + 19 = 0$? Знайдіть координати точок перетину.

835. Дано сферу радіуса $r = 5$ із центром у точці $A(2;\ 4;\ 3)$. Знайдіть довжину лінії перетину цієї сфери з площиною xy.

836. Напишіть рівняння сфери з центром у точці $(-2;\ 3;\ 1)$, яка дотикається до площини: а) xy; б) yz; в) xz.

837. ***Відкрита задача.*** Напишіть рівняння сфери з центром у точці $M(-1;\ 3;\ -2)$, яка **...** .

838. Знайдіть радіус і координати центра сфери:
а) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z = 19$; б) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y = 26$.

839. Чи проходить площина, задана рівнянням $2x + 4y + 3z - 7 = 0$, через точку $A(2;\ 3;\ -1)$? А через точку $B(-1;\ 0;\ 3)$?

840. Знайдіть координати точок, у яких площина, задана рівнянням $2x - y + 3z + 6 = 0$, перетинає координатні осі.

841. Складіть рівняння площини, яка проходить через вісь x і точку $A(1;\ 1;\ 1)$.

842. Складіть рівняння площини, яка паралельна площині xy і проходить через точку $A(2;\ 3;\ 4)$.

843. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(1;\ 2;\ -3)$ і $B(2;\ -2;\ 5)$.

844. Доведіть, що кожній площині, яка проходить через початок координат, відповідає рівняння виду $ax + by + cz = 0$.

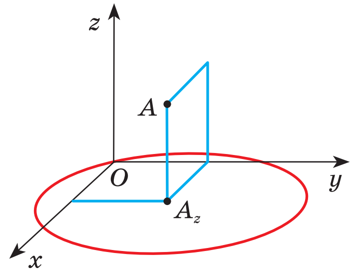
Б

845. На координатних осях дано точки A, B, C такі, що $OA = OB = OC = 2$. Складіть рівняння площини, яка проходить через ці точки.

846. Доведіть, що коли на координатних осях x, y, z дано точки A, B, C такі, що $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, то площині, яка проходить через ці точки, відповідає рівняння $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

847. Площина і сфера задані рівняннями $4x + 3y - 4 = 0$ і $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y + 8 = 0$. Чи належить центр сфери даній площині?

848. Сфера з центром $A(2; 3; 4)$ проходить через початок координат (мал. 290). Напишіть рівняння кіл, по яких координатні площини перетинають сферу.



Мал. 290

849. Складіть рівняння сфери, яка проходить через точки: $O(0; 0; 0)$, $A(4; 4; 2)$, $B(0; 0; 2)$ і $C(0; 4; 0)$.

850. Складіть рівняння сфери, коли відомо, що вона проходить через точки $A(0; 5; 1)$, $B(-2; 0; 4)$, а її центр лежить на осі z.

851. Знайдіть геометричне місце точок простору, відстань від яких до сфери $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 25$ дорівнює 2.

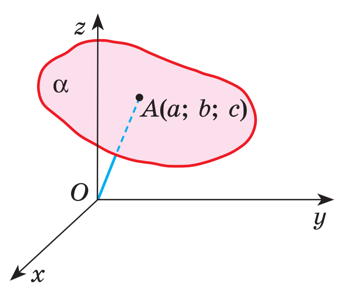
852. Залежно від значень параметра a встановіть взаємне розташування сфер: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 4$ і $(x - 6)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = a^2$.

853. Зобразіть площину, задану рівнянням:

а) $x = 3$;
б) $y = -4$;
в) $z = 5$;
г) $y - 4x = 0$;
ґ) $y - z - 2 = 0$;
д) $x + y = 5$;
е) $x + y + 2 = 4$.

854. Доведіть, що коли точка $A(a; b; c)$ — основа перпендикуляра, проведеного з початку координат на площину α (мал. 291), то рівняння цієї площини:

$$ax + by + cz - (a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$



Мал. 291

855. Точки $O(0; 0; 0)$, $A(3; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$ і $O_1(0; 0; 5)$ — вершини прямокутного паралелепіпеда. Складіть рівняння площин усіх його граней.

856. Координати точок якої фігури задовольняють систему нерівностей: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$, $0 \le z \le 4$?

857*. Знайдіть довжину лінії, по якій площина $z = 2 - y$ перетинає сферу, $x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 25$.

858. У якому відношенні площина $3x + 2y + z - 17 = 0$ ділить відрізок AB, якщо $A(1; -1; 4)$, $B(5; 3; 2)$?

859. Пряму задано системою рівнянь $x - y + 4z = 0$ і $2x + y + 3z - 1 = 0$. Знайдіть координати точок перетину цієї прямої з координатними площинами.

860. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(1; 3; 2)$ і $B(-5; 7; 4)$.

861. Пряму задано системою рівнянь $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-4}{-3} = \dfrac{z-2}{7}$.

Назвіть координати яких-небудь трьох точок цієї прямої.

862. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $P(-1;\ 4;\ 2)$ і ділить відрізок MN навпіл, якщо $M(4;\ -1;\ 3)$, $N(-2;\ 3;\ 5)$.

863. Площина і пряма задані рівняннями

$$3x - 2y + z - 7 = 0 \text{ і } \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-3}{3}.$$

Чи перетинаються вони? У якій точці?

864. Пряма і сфера задані рівняннями

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{4} \text{ і } x^2 + y^2 + z^2 = 13.$$

Чи перетинаються вони? У яких точках?

Задачі для повторення

865. Напишіть рівняння кола, вписаного в $\triangle ABC$, якщо $A(-3;\ 0)$, $B(1;\ 3)$, $C(1;\ -3)$.

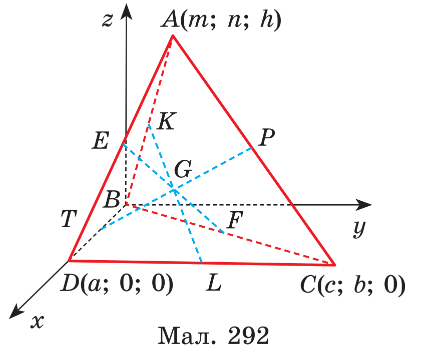
866. Використовуючи координатний метод, доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола, вписаного в квадрат, до вершин цього квадрата є величиною сталою.

867. Точка M не належить мимобіжним прямим a і b. Чи завжди можна через точку M провести пряму, яка перетинатиме кожну з прямих a і b?

§ 20 Застосування координат

Якщо розв'язують задачу або доводять теорему, застосовуючи координати точок, рівняння ліній або поверхонь, говорять про *метод координат*. Для прикладу розв'яжемо цим методом кілька задач.

Задача 1. Доведіть, що всі три середні лінії тетраедра проходять через одну точку і діляться цією точкою навпіл (*середньою лінією* тетраедра називають відрізок, який сполучає середини його протилежних ребер).



Мал. 292

Доведення. Нехай $ABCD$ — довільний тетраедр, KL, EF і PT — його середні лінії. Розмістимо систему координат, як показано на малюнку 292, і позначимо координати вершин тетраедра: $A(m;\ n;\ h)$,

$B(0;\ 0;\ 0)$, $C(c;\ b;\ 0)$, $D(a;\ 0;\ 0)$. Тоді координати середин ребер і відповідних середніх ліній тетраедра будуть:

$$K\left(\frac{m}{2}; \frac{n}{2}; \frac{h}{2}\right),\quad L\left(\frac{a+c}{2}; \frac{b}{2}; 0\right),$$

$$G\left(\frac{m+a+c}{4}; \frac{n+b}{4}; \frac{h}{4}\right),$$

$$E\left(\frac{m+a}{2}; \frac{n}{2}; \frac{h}{2}\right),\quad F\left(\frac{c}{2}; \frac{b}{2}; 0\right),\quad G_1\left(\frac{m+a+c}{4}; \frac{n+b}{4}; \frac{h}{4}\right),$$

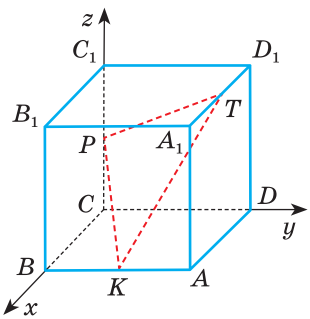
$$P\left(\frac{m+c}{2}; \frac{n+b}{2}; \frac{h}{2}\right),\quad T\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right),\quad G_2\left(\frac{m+a+c}{4}; \frac{n+b}{4}; \frac{h}{4}\right).$$

Відповідні координати точок G, G_1 і G_2 рівні. Отже, ці точки збігаються. G — середина кожної середньої лінії даного тетраедра. (Розв'яжіть задачу іншим способом.)

Точку G, у якій перетинаються всі середні лінії тетраедра, називають **центроїдом тетраедра.**

Задача 2. Знайдіть на трьох попарно мимобіжних ребрах куба такі три точки, сума квадратів відстаней між якими була б мінімальною.

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — довільний куб, K, P, T — точки на його попарно мимобіжних ребрах AB, CC_1, A_1D_1. Якщо систему координат розмістити, як показано на малюнку 293, і позначити довжину ребра куба буквою a, то координати розглядуваних точок будуть: $K(a;\ y;\ 0)$, $P(0;\ 0;\ z)$, $T(x;\ a;\ a)$. Сума квадратів відстаней між точками:



Мал. 293

$$KP^2+PT^2+TK^2=a^2+y^2+z^2+x^2+a^2+(a-z)^2-(a-x)^2+(a-y)^2+a^2=$$

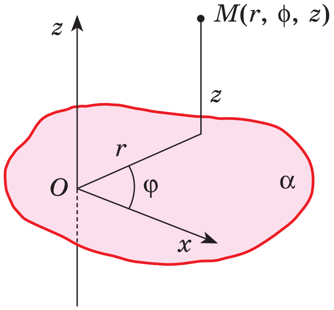
$$=2\left(3a^2+x^2+y^2+z^2-ax-ay-az\right)=2\left(\frac{9}{4}a^2+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2\right).$$

Найменшого значення ця сума набуває, коли $x=y=z=\dfrac{a}{2}$. Тому K, P, T — середини мимобіжних ребер куба.

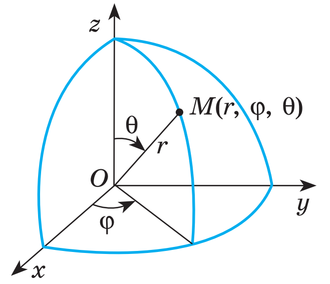
Розглянута вище прямокутна система координат широко застосовується у прикладних науках і на виробництві.

У трьох взаємно перпендикулярних напрямах (по осях координат) переміщуються робочі вузли багатьох сучасних верстатів (мал. 294). Існують координатно-розточувальні та інші верстати із числовим програмним керуванням. Звичайно, прямокутна система координат — найпростіша. У прикладних науках і техніці використовуються циліндрична, сферична та інші системи координат. У циліндричній системі кожна точка простору задається двома відстанями r і z та кутом φ (мал. 295).

Мал. 294



Мал. 295



Мал. 296

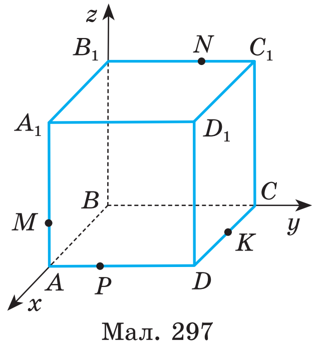
У сферичній — двома кутами φ і θ та відстанню r (мал. 296). Приклад сферичної системи координат — сітка паралелей і меридіанів на глобусі (тут r стале). Конструктори і наладчики різних роботів і роторних механізмів зазвичай використовують циліндричну систему координат.

Відомо, що комп'ютери видають різні траєкторії, графіки, схеми та інші геометричні образи. Здійснюється це завдяки обчисленням координат їхніх точок.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. У чому суть методу координат?
2. Що називають тетраедром?
3. Що називають середньою лінією тетраедра?
4. Як називають точку перетину середніх ліній тетраедра?
5. Доведіть, що центроїд тетраедра — середина кожної його середньої лінії.
6. Які існують системи координат у просторі?

Виконаємо разом



Мал. 297

1 Площина проходить через точки M, N і K куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причому $M \in AA_1$, $N \in B_1C_1$, $K \in CD$, $AM : MA_1 = 1 : 2$, $B_1N : NC_1 = 3 : 2$, $CK = KD$. У якому відношенні ця площина ділить ребро AD?

● Розмістимо систему координат відносно даного куба, як показано на малюнку 297, і позначимо $AB = 1$. Дані точки мають такі координати:

$$M\left(1; 0; \frac{1}{3}\right), \quad N\left(0; \frac{3}{5}; 1\right), \quad K\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right).$$

Площину, яка проходить через ці точки, можна задати рівнянням: $ax + by + cz + d = 0$. Якщо підставимо в це рівняння координати названих точок, дістанемо систему

$$\begin{cases} a+\frac{1}{3}c+d=0, \\ \frac{3}{5}b+c+d=0, \\ \frac{1}{2}a+b+d=0. \end{cases}$$

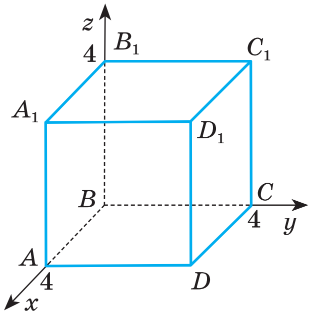
Звідси $a = 26$, $b = 20$, $c = 21$, $d = -33$. Отже, січній площині відповідає рівняння $26x + 20y + 21z - 33 = 0$.
Точка $P(1;\ y;\ 0)$ лежить на січній площині.

Отже, $26 + 20y - 33 = 0$, звідки $y=\frac{7}{20}$. Якщо $AP=\frac{7}{20}$, то $PD=\frac{13}{20}$.
Отже, $AP : PB = 7 : 13$.

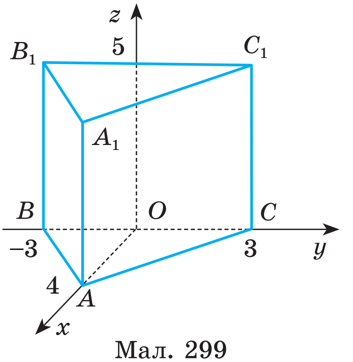
Задачі та вправи

Виконайте усно

868. Назвіть координати вершин куба, зображеного на малюнку 298.



Мал. 298



Мал. 299

869. Назвіть координати вершин трикутної призми, зображеної на малюнку 299.

870. Вершина трикутної піраміди лежить у початку координат, а вершини основи лежать на координатних осях у точках, які віддалені від початку координат на a. Назвіть координати вершин піраміди.

871. Чому дорівнює ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо $A(2;\ 0;\ 0)$, $A_1(2;\ 0;\ 4)$? Чи може одна з вершин цього куба знаходитися в початку координат?

872. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано координати вершин $A(1;\ -1;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 0)$. Укажіть координати вершин A_1 і D_1.

А

873. а) Виберіть прямокутну систему координат і зобразіть куб, заданий системою нерівностей: $-2 \le x \le 2$, $0 \le y \le 4$, $0 \le z \le 4$.
б) Задайте системою нерівностей інший куб з ребром 4.

874. Задайте системою нерівностей прямокутний паралелепіпед з ребрами 3, 3 і 6.

875. Ребро куба дорівнює 1. Запишіть координати вершин такого куба, що:
а) одна з вершин куба лежить у початку координат;
б) осі Ox і Oy є осями симетрії нижньої основи куба, перпендикулярними до його сторін;
в) діагоналі нижньої основи куба лежать на осях Ox і Oy.

876. Знайдіть координати вершини D правильного тетраедра $ABCD$ і відстань від неї до площини ABC, якщо $A(6;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 6;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 6)$.

877. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = AD = a$, $AA_1 = 2a$. E, F, M, N — середини A_1D_1, D_1C, CD і A_1D відповідно. Доведіть, що відрізки EM і FN перетинаються і точкою перетину діляться навпіл.

878. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребрами $AB = 2$, $BC = 4$, $AA_1 = 6$. У якому відношенні площина AB_1C ділить відрізок BK, де K — середина DD_1?

879. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і точки M і N на ребрах AA_1 і CC_1. Чи проходить площина MB_1N через вершину D, якщо: а) $AM = MA_1$, $CN = NC_1$; б) $AM : MA_1 = 3 : 1$, $CN : NC_1 = 1 : 3$?

Б

880. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Знайдіть радіус сфери, яка проходить через точки A, A_1 і центри граней зі спільним ребром CC_1.

881. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть радіус сфери, яка проходить через одну з його вершин і середини трьох ребер, які містять цю вершину.

882. Сфера проходить через середини трьох ребер куба, які містять одну вершину, і через вершину куба, протилежну першій. Знайдіть радіус сфери, якщо ребро куба дорівнює 20.

883. Чотири точки A, B, C, D розміщені у просторі так, що $AD \perp BC$. Доведіть, що $AB^2 + DC^2 = AC^2 + DB^2$.

884. Знайдіть геометричне місце точок простору, сума квадратів відстаней від яких до кінців даного відрізка стала.

885. Знайдіть на грані куба точку, сума квадратів відстаней від якої до всіх вершин протилежної грані найменша. Чому дорівнює ця сума, якщо довжина ребра куба a?

886. Центр квадрата є центром сфери, яка проходить через вершини квадрата. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки сфери до всіх вершин квадрата стала для даного квадрата (не залежить від вибору точки на сфері).

887. Усі вершини куба лежать на сфері. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки сфери до вершини куба стала для даного куба.

888. В одну з граней куба вписано коло. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки цього кола до вершин протилежної грані куба стала.

889. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 2. N і K — середини ребер A_1D_1 і CD відповідно. $P \in B_1C_1$, $B_1P : PC_1 = 3 : 1$.
Установіть відповідність між відрізками (1–4) та їх довжинами (А–Д).

1 BN	**А** $0{,}5\sqrt{21}$
2 NK	**Б** $\sqrt{6}$
3 PK	**В** $0{,}5\sqrt{41}$
4 PA	**Г** 3
	Д $\sqrt{5}$

890*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, M — середина ребра AA_1, K — центр грані CC_1D_1D. У якому відношенні площина, яка проходить через точки B_1, M і K, ділить ребра CC_1 і DD_1?

891*. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і точки M, N, P на відрізках AB_1, DC, A_1C_1 відповідно. У якому відношенні площина MNP ділить відрізок D_1C_1, якщо $AM : MB_1 = 1 : 3$, $DN : DC = 1 : 2$, $A_1P : A_1C_1 = 2 : 3$?

892*. На якій відстані від основи куба розміщено паралельний основі відрізок завдовжки b, якщо один кінець відрізка лежить на діагоналі куба, а другий — на мимобіжній з нею діагоналі бічної грані? Довжина ребра куба дорівнює a.

893*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед, $AB = BC = a$, $AA_1 = 2a$. Знайдіть довжину відрізка MK, паралельного грані ABB_1A_1, якщо $M \in AD_1$, $K \in DB_1$, $AM : AD_1 = 2 : 3$.

894*. Знайдіть відстань від вершини D тетраедра $ABCD$ до його грані ABC, якщо $AC = CB = 10$, $AB = 12$, $DA = 7$, $DB = \sqrt{145}$, $DC = \sqrt{29}$.

895*. Знайдіть довжину ребра AD тетраедра $ABCD$, якщо $AB = AC = BC = 10$, $DB = 2\sqrt{29}$, $DC = \sqrt{46}$ і відстань від вершини D до площини грані ABC дорівнює 5.

Задачі для повторення

896. Напишіть рівняння фігури, яка складається з точок, рівновіддалених від точок $A(-2; 1; -1)$ і $B(4; -1; 3)$.

897. На малюнку 300 подано поштовий блок з 6 марок «Мінерали України» (2009 р.). Знайдіть площу однієї марки, прямокутника і шестикутника, зображених на малюнку, якщо формат блока — 132×86 мм, а кожна сторона трикутника дорівнює 47 мм. Яку частину площі блока займає площа шестикутника? Дізнайтеся більше про мінерали, зображені на марці. Які з них є у вашій місцевості?

- Кварц
- Сірка самородна
- Топаз
- *α*-керченіт
- Берил
- Око тигрове

Мал. 300

898. Накресліть два довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Побудуйте вектори $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $2\vec{a}-3\vec{b}$.

§ 21 Вектори у просторі

Величини бувають *скалярні* та *векторні*. Значення скалярних величин — числа, значення векторних величин — *вектори*. Вектори на площині розглядали у попередніх класах. Тепер вивчимо найважливіші властивості векторів у просторі. Як і раніше, зображатимемо їх напрямленими відрізками.

Відомий геометр академік О. Д. Александров роз'яснює: «Часто векторами називають самі напрямлені відрізки. Це не зовсім точно: предмет і його зображення не одне й те саме. Але в розмовній мові, показуючи, наприклад, слона на фотографії, кажуть: „Це слон", і ніхто не каже: „Це зображення слона". Так і в геометрії з векторами: малюючи напрямлений відрізок, говорять, що намалювали вектор, хоча це тільки зображення вектора».

Ми також замість «вектор, зображений напрямленим відрізком $\overrightarrow{AB}$» писатимемо і говоритимемо «вектор $\overrightarrow{AB}$». Усе ж не забудемо, що напрямленими відрізками зображають не тільки вектори. І зображати вектори можна не тільки напрямленими відрізками.

Вектори часто задають за допомогою координат. **Координатами вектора** $\overrightarrow{AB}$, початок якого $A(x_1; y_1; z_1)$, а кінець $B(x_2; y_2; z_2)$, називають числа $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$.

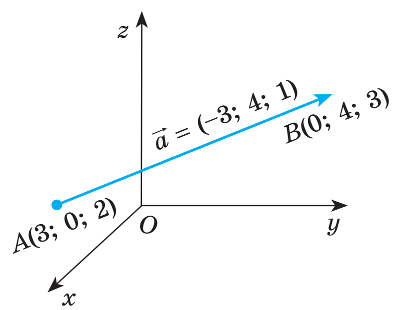
Записують такий вектор, зазначаючи його координати:

$$\overrightarrow{AB} = (x; y; z) \text{ або } \vec{a} = (x; y; z).$$

Наприклад, якщо точки $A(3; 0; 2)$ і $B(0; 4; 3)$ — початок і кінець напрямленого відрізка AB (мал. 301), то:

$x = 0 - 3 = -3$, $y = 4 - 0 = 4$, $z = 3 - 2 = 1$.

Отже, напрямленому відрізку $\overrightarrow{AB}$ відповідає вектор $\vec{a} = (-3; 4; 1)$. Числа -3, 4 і 1 — координати цього вектора.



Мал. 301

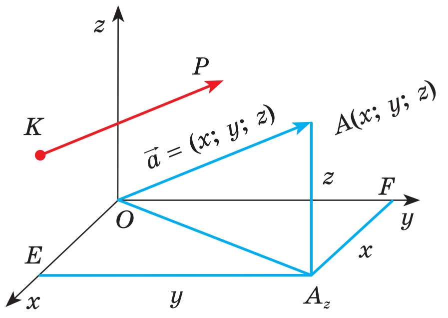
Два вектори називають **рівними**, якщо їхні відповідні координати рівні.

Рівним векторам відповідають рівні за довжиною й однаково напрямлені відрізки, і навпаки.

Координати вектора можуть бути будь-якими дійсними числами. Якщо всі координати вектора — нулі, то його називають **нульовим вектором** і позначають символом $\vec{0}$. Це єдиний вектор, якому не відповідає напрямлений відрізок і який не має напряму.

Якщо O — початок координат, а числа x, y, z — координати точки A, то ці самі числа є і координатами вектора $\overrightarrow{OA}$ (мал. 302). Вектор $\overrightarrow{OA}$ можна зобразити і напрямленим відрізком $\overrightarrow{KP}$, де $K(x; y; z)$ — будь-яка точка простору, а P — точка з координатами $k_1 + x$, $k_2 + y$, $k_3 + z$. Адже $k_1 + x - k_1 = x$, $k_2 + y - k_2 = y$, $k_3 + z - k_3 = z$.

Говорять: «Будь-який вектор можна відкласти від будь-якої точки простору».



Мал. 302

Довжиною, або **модулем**, вектора називають довжину напрямленого відрізка, що зображає його.

Позначають довжину вектора $\vec{a}$ символом $|\vec{a}|$. Довжину вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ можна виразити через його координати (див. мал. 28). Сторони прямокутника OEA_zF дорівнюють x і y, тому $OA_z^2 = x^2 + y^2$. У прямокутному трикутнику OA_zA катет $A_zA = z$, отже,

$$OA^2 = OA_z^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Звідси

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Довжина будь-якого ненульового вектора — число додатне. Довжина нульового вектора дорівнює нулю.

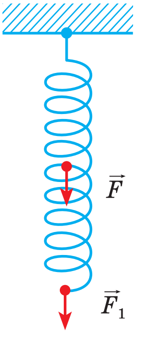
■ Вектори, яким відповідають паралельні напрямлені відрізки, називають **колінеарними**.

Вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ колінеарні тільки тоді, коли точки O, A і B лежать на одній прямій. Колінеарні вектори бувають співнапрямлені або протилежно напрямлені.

■ Три вектори називають **компланарними**, якщо відповідні їм напрямлені відрізки розміщені в одній площині або в паралельних площинах.

Вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$ компланарні тільки за умови, що точки O, A, B і C лежать в одній площині.

Зауваження. У геометрії розглядаються тільки вільні вектори. Фізики частіше використовують прикладені (зв'язані) вектори, які визначаються не лише довжиною і напрямом, а й точкою прикладання. Хоч вони мають багато спільного з вільними векторами, все ж відрізняються від них суттєво. Наприклад, щоб розв'язати задачу про дію сил, прикладених до пружини (мал. 303), вільні вектори не підходять. Адже в таких задачах не однаково, у яких точках прикладено сили.



Мал. 303

У картографії векторами називають будь-які відрізки, навіть криволінійні, які показують напрями морських течій, руху армії тощо. Такі «вектори» не можна ні додавати, ні множити.

Далі розглядатимемо лише вільні вектори, називаючи їх просто векторами.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Які величини називають векторними?
2. Що називають координатами вектора?
3. Які вектори називають нульовими? Як їх позначають?
4. Що називають модулем вектора?
5. Які вектори називають колінеарними?
6. Які вектори називають компланарними?
7. Які вектори називають вільними, а які — прикладеними?

Виконаємо разом

1 Знайдіть координати вектора $\vec{a} = (a;\ 2a;\ -a)$, якщо його довжина $\sqrt{54}$.

● $\sqrt{a^2 + (2a)^2 + (-a)^2} = \sqrt{54}$, $6a^2 = 54$, $a^2 = 9$, звідки $a_1 = 3$, $a_2 = -3$. Отже, $\vec{a} = (3;\ 6;\ -3)$ або $\vec{a} = (-3; -6;\ 3)$.

2 Доведіть, що при будь-яких значеннях a_2, a_3, b_2, b_3, c_2, c_3 вектори $\vec{a}=(0;\,a_2;\,a_3)$, $\vec{b}=(0;\,b_2;\,b_3)$ і $\vec{c}=(0;\,c_2;\,c_3)$ компланарні.

- Перші координати даних векторів — нулі. Тому, якщо відкласти ці вектори від початку координат, усі відповідні їм напрямлені відрізки розмістяться у площині yz. Отже, дані вектори компланарні.

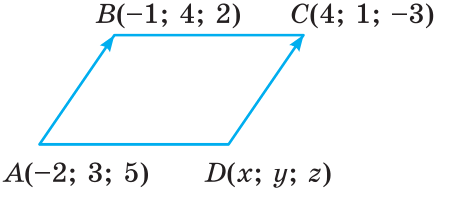
3 Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо $A(-2;\,3;\,5)$, $B(-1;\,4;\,2)$, $C(4;\,1;\,-3)$.

- Якщо $ABCD$ паралелограм, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (мал. 304). Нехай точка D має координати $D(x;\,y;\,z)$. Тоді $\overrightarrow{AB}=(1;\,1;\,-3)$ і $\overrightarrow{DC}=(4-x;\,1-y;\,-3-z)$. Оскільки рівні вектори мають рівні координати, то

$$\begin{cases}4-x=1,\\1-y=1,\\-3-z=-3.\end{cases}$$

Звідси $\begin{cases}x=3,\\y=0,\\z=0.\end{cases}$

Отже, $D(3;\,0;\,0)$.



Мал. 304

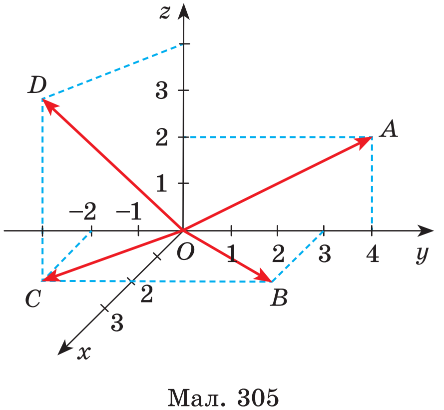
Задачі та вправи

Виконайте усно

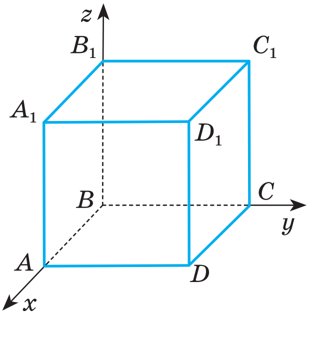
899. Назвіть координати векторів, зображених на малюнку 305.

900. Дано точки $A(1;\,1;\,1)$, $B(-7;\,0;\,2)$, $C(3;\,-1;\,4)$, $O(0;\,0;\,0)$. Укажіть координати векторів $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{AB}$.

901. Які координати має вектор $\overrightarrow{MN}$, якщо $\overrightarrow{NM}=(2;\,-1;\,4)$?



Мал. 305



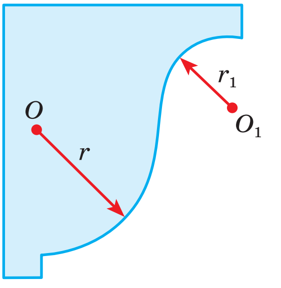
Мал. 306

902. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 306). Назвіть вектори:
а) рівні векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{AC}$;
б) протилежні до векторів $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{BD}$;
в) колінеарні з векторами $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AA_1}$;
г) компланарні з векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{A_1C}$.

903. Відомо, що $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Чи випливає з цього, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні?

904. Відомо, що $\vec{a} = \vec{b}$. Чи завжди $|\vec{a}| = |\vec{b}|$?

905. У кресленні напрямленими відрізками (прямолінійними стрілками) позначають радіуси кіл і дуг (мал. 307). Чи зображають такі напрямлені відрізки вектори?



Мал. 307

A

906. Точки A, B, C, D, E, F — вершини заданого у просторі правильного шестикутника. Задайте за їх допомогою пару векторів:
а) рівних;
б) протилежно напрямлених;
в) співнапрямлених, але не рівних.

907. Точка B — середина відрізка AC, а C — середина відрізка BD. Чи рівні між собою вектори:
а) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{DB}$;
б) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$?

908. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:
а) $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(3;\ 7;\ 6)$;
б) $A(-3;\ 2;\ 1)$, $B(1;\ -4;\ 3)$;
в) $A(a;\ -a;\ 3a)$, $B(2a;\ -3a;\ -a)$.

909. Знайдіть довжини векторів $\vec{m} = (1;\ -1;\ 1)$, $\vec{n} = (0;\ 2;\ -4)$, $\vec{a} = (2;\ 3;\ -4)$, $\vec{b} = (1;\ 2;\ 5)$, $\vec{c} = (-1;\ 4;\ 8)$, $\vec{d} = (0;\ 1;\ -3)$.

910. Знайдіть координати і довжину вектора $\overrightarrow{MN}$, якщо:
а) $M(4;\ -1;\ 3)$, $N(1;\ -1;\ -1)$;
б) $M(19;\ 4;\ 35)$, $N(20;\ 3;\ 40)$;
в) $M(2a;\ a;\ -4a)$, $N(3a;\ 4a;\ -5a)$.

911. Дано точки $A(-1;\ 3;\ -2)$, $B(4;\ 2;\ 1)$, $C(-3;\ -1;\ 2)$, $D(2;\ -2;\ 5)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$. Чи є серед цих векторів рівні вектори?

912. Знайдіть координати початку напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$, що відповідає вектору $\vec{a} = (3;\ 4;\ 2)$, якщо його кінець — точка $B(-5;\ 4;\ 1)$.

913. Знайдіть координати кінця напрямленого відрізка $\overrightarrow{CB}$, який відповідає вектору $\vec{c} = (-1;\ 3;\ -2)$, якщо його початок — точка $C(-2;\ -1;\ -3)$.

914. Дано точки $M(1; 3; 4)$, $N(7; 5; 1)$, $K(5; -1; 4)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{MK}$ та їхні модулі. Установіть вид $\triangle MNK$ та знайдіть його периметр і площу.

915. Чи буде чотирикутник $ABCD$ паралелограмом, якщо:
а) $A(1; -2; 3)$, $B(4; -2; -1)$, $C(-2; 2; -3)$, $D(-5; 2; 1)$;
б) $A(-2; 4; 1)$, $B(-1; 1; 5)$, $C(4; 2; -3)$, $D(3; -1; -7)$?

916. Довжини векторів $\vec{a} = (2; 1; 3)$ і $\vec{b} = (-1; x; 2)$ рівні. Знайдіть x.

917. Як відносяться довжини ненульових векторів

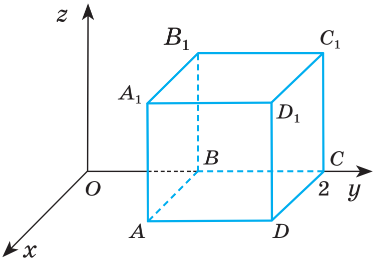
$$\vec{a} = (a; b; c) \text{ і } \vec{n} = (2a; 2b; 2c)?$$

918. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.
а) Чи колінеарні вектори:
1) $\overrightarrow{A_1B_1}$ і $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{C_1D_1}$; 3) $\overrightarrow{BC_1}$ і $\overrightarrow{CD_1}$; 4) $\overrightarrow{AD_1}$ і $\overrightarrow{BA_1}$?
б) Напишіть трійку компланарних векторів.

919. У прямокутній системі координат зобразіть вектори $\vec{a} = (2; 4; 0)$, $\vec{b} = (0; 3; 1)$, $\vec{c} = (0; 0; 2)$, $\vec{d} = (2; 2; 3)$.

920. У прямокутній системі координат розмістіть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 1, як на малюнку 308. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{BB_1}$.

921. Знайдіть координати вектора, якщо його довжина дорівнює $2\sqrt{2}$, а всі координати рівні.



Мал. 308

Б

922. Знайдіть координати вектора, які є послідовними членами арифметичної прогресії, якщо його довжина $2\sqrt{14}$, а ордината дорівнює 4.

923. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо:
а) $A(1; -3; 1)$, $B(2; 4; -6)$, $C(3; -1; 1)$;
б) $A(2; -2; 1)$, $B(4; 0; -1)$, $C(1; 2; -3)$.

924. Дано чотирикутники $ABCD$ і $MNPK$. Який із чотирикутників є ромбом, а який — квадратом, якщо:
$A(6; 7; 8)$, $B(8; 2; 6)$, $C(4; 3; 2)$, $D(2; 8; 4)$ і $M(3; 5; 2)$, $N(7; 1; 2)$, $P(3; -3; 2)$, $K(-1; 1; 2)$?

925. M, N, K — середини сторін AB, BC, AC трикутника ABC. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{NK}$, якщо $A(-1; 3; -5)$, $M(3; 2; -6)$.

926. При якому значенні a довжина вектора $\vec{m}$ дорівнює $\sqrt{21}$, якщо:
а) $\vec{m} = (4; a; 2)$;
б) $\vec{m} = (a-1; 1; 4)$;
в) $\vec{m} = (a; 1; a+2)$;
г) $\vec{m} = (a-1; a-2; a+1)$?

927. При якому значенні m вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні, якщо:

а) $\vec{a}=(1;\ 2;\ m^2)$, $\vec{b}=(1;\ -2;\ m)$;

б) $\vec{a}=(m-1;\ 9;\ 2m)$; $\vec{b}=(-4;\ m^2;\ -6)$;

в) $\vec{a}=(m^2-m;\ m+3;\ 2m)$, $\vec{b}=(2;\ 2m+1;\ m^2)$;

г) $\vec{a}=(m^2-3;\ m^2;\ -2)$, $\vec{b}=(-2m;\ 2m-1;\ -2)$?

928. Чи колінеарні вектори:

а) $\vec{a}=(1;\ 1;\ 0)$ і $\vec{b}=(1;\ 1;\ 2)$;

б) $\vec{k}=(0;\ 1;\ 0)$ і $\vec{p}=(0;\ -2;\ 0)$?

929. $ABCD$ — тетраедр, K, P, T — середини його ребер AB, AC і AD. Чи компланарні вектори:

а) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{KP}$;

б) $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{KT}$ і $\overrightarrow{CB}$?

930. Чи компланарні вектори $\vec{a}=(3;\ 2;\ 0)$; $\vec{b}=(6;\ 3;\ 0)$ і $\vec{c}=(8;1;\ 0)$?

931. $ABCD$ — довільний тетраедр, K і M — середини його ребер AC і BD. Доведіть, що вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{KM}$ компланарні.

Задачі для повторення

932. Дано вектори $\vec{a}=(1;\ -2)$, $\vec{b}=(4;\ -5)$. Знайдіть:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; в) $2\vec{a}+3\vec{b}$;

б) $\vec{a}-\vec{b}$; г) $3\vec{b}-2\vec{a}$.

933. Знаки «Крутий спуск» (мал. 309) і «Крутий підйом» (мал. 310) встановлюють для попередження відповідно про крутий (або затяжний) спуск або підйом. Вказівка про величину спуску або підйому подається не в градусах, а в процентах.
Так, наприклад, значення 12 % означає, що кожні 100 м дорога знижується або піднімається на 12 м. Використовуючи малюнки, знайдіть відповідні міри кутів спуску і підйому (у градусах).

Мал. 309

Мал. 310

934. Пряма b перетинає пряму a, яка паралельна площині α. Яким може бути взаємне розміщення прямої b і площини α?

§ 22 Дії над векторами

Дії над векторами у просторі означаються аналогічно до того, як вони означалися для векторів на площині.

■ **Сумою векторів** $\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$ називають вектор

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2).$$

Властивості суми векторів. Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ справедливі рівності:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ — переставний закон додавання;

2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ — сполучний закон додавання.

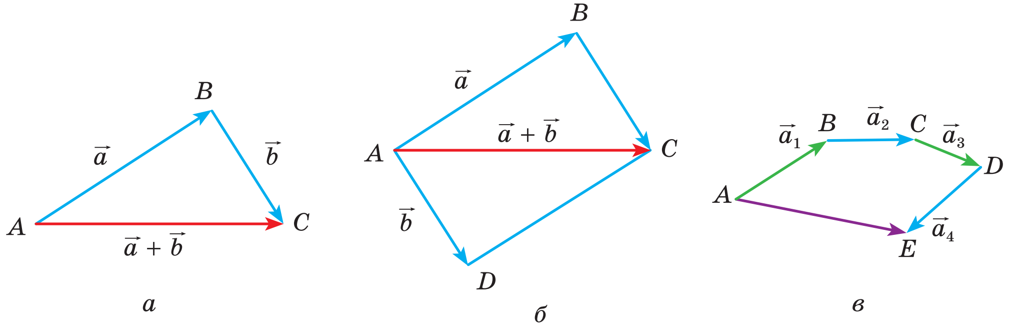
Щоб довести ці властивості, достатньо порівняти відповідні координати лівої та правої частин кожної векторної рівності.

Геометрично суму двох векторів простору можна знаходити, користуючись *правилом трикутника:* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (мал. 311, *а*). Адже для будь-яких трьох точок $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ і $C(x_3;\ y_3;\ z_3)$:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1),$$
$$\overrightarrow{BC}=(x_3-x_2;\ y_3-y_2;\ z_3-z_2).$$

Тому

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(x_3-x_1;\ y_3-y_1\ z_3-z_1)=\overrightarrow{AC}.$$

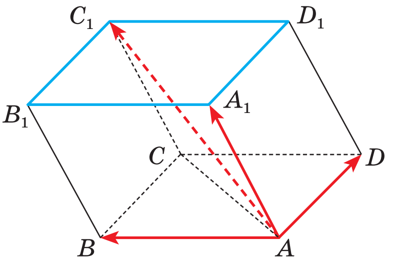


Мал. 311

Можна користуватися і *правилом паралелограма:* якщо *ABCD* — паралелограм, то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (мал. 311, *б*).

Суму кількох векторів можна знаходити за *правилом многокутника*. Наприклад, як би не були розміщені в просторі точки *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, завжди $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$ (мал. 311, *в*).

Суму трьох некомпланарних векторів можна знаходити за *правилом паралелепіпеда:* якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед (мал. 312), то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}$. Адже за правилом паралелограма $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}$.



Мал. 312

Два вектори, сума яких дорівнює нульовому вектору, називають **протилежними.** Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ завжди протилежні один одному. При будь-яких значеннях x, y, z вектори $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$ і $\vec{a}_1=(-x;\ -y;\ -z)$ протилежні.

■ **Різницею векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

З цього означення випливає, що завжди $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.

І якщо $\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2)$.

Множити на число вектор простору можна так, як і вектор площини. Якщо $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$, то $\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda=(\lambda x;\ \lambda y;\ \lambda z)$.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справедливі рівності:

1) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$, де λ — число;
2) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$, де λ, μ — числа;
3) $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, де λ — число.

Ці властивості безпосередньо випливають з означення множення вектора на число.

При множенні вектора на число отримуємо вектор, колінеарний даному, тобто якщо $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, то $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — колінеарні. І навпаки, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то, позначивши відношення їхніх довжин через λ, отримаємо, що $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ ($\lambda > 0$), якщо вектори співнапрямлені, і $\vec{b}=-\lambda\vec{a}$, якщо вектори протилежно напрямлені.

Тому має місце така **ознака колінеарності двох векторів:**

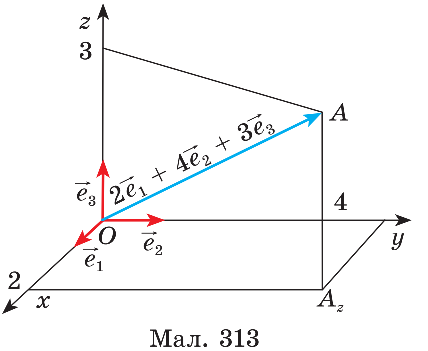
вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли існує число λ таке, що $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, або вектори $\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли їхні відповідні координати пропорційні, тобто $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$.

Компланарність векторів. Кілька векторів компланарні, якщо відповідні їм напрямлені відрізки паралельні деякій площині. Три вектори, серед яких є принаймні один нульовий або два колінеарні, компланарні.

З 9-го класу відомо, що будь-який вектор $\vec{c}$ площини можна розкласти за двома неколінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто існує єдина впорядкована пара чисел α, β таких, що $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Отже, якщо вектор $\vec{c}$ компланарний з неколінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то має місце рівність $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. І навпаки, якщо для векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ виконується рівність $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні.

Розкладання вектора. Вектори $\vec{e}_1=(1;\,0;\,0)$, $\vec{e}_2=(0;\,1;\,0)$, $\vec{e}_3=(0;\,0;\,1)$ називають **ортами.** Завжди, якщо $\vec{a}=(x;\,y;\,z)$, то $\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$. Таке подання вектора у вигляді суми називають **розкладом даного вектора за ортами.** Він завжди можливий і однозначний. Наприклад, якщо $\vec{a}=(2;\,4;\,3)$, то його можна подати у вигляді $\vec{a}=2\vec{e}_1+4\vec{e}_2+3\vec{e}_3$ (мал. 313).

Взагалі, якщо дано три некомпланарні вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, то будь-який вектор $\overrightarrow{OM}$ можна подати, причому єдиним способом, у вигляді $\overrightarrow{OM}=a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}$, де a, b, c — деякі дійсні числа.



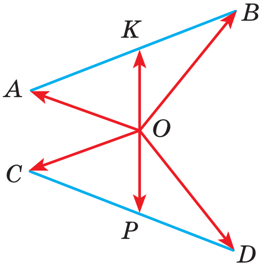
Мал. 313

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Які дії можна виконувати над векторами у просторі?
2. Що називають сумою векторів?
3. Як знаходять суму векторів за правилом трикутника; паралелограма; многокутника; паралелепіпеда?
4. Чому дорівнює різниця векторів $\vec{a}=(a;\,a;\,a)$ і $\vec{b}=(b;\,b;\,b)$?
5. Що називають ортами?
6. Що означає розкласти даний вектор за ортами?

Виконаємо разом

1 Нехай K і P — середини відрізків AB і CD, які лежать на мимобіжних прямих, а O — середина відрізка KP.
Доведіть, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

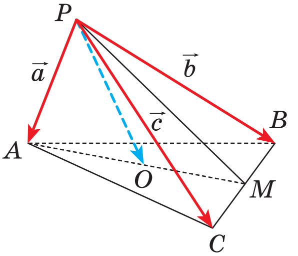


Мал. 314

- Вектори $\overrightarrow{OK}$ і $\overrightarrow{OP}$ протилежні (мал. 314). Отже,
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\cdot\overrightarrow{OK}+2\cdot\overrightarrow{OP}=2\left(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OP}\right)=\vec{0}$.

2 M — середина ребра BC тетраедра $PABC$, O — середина AM. Виразіть вектор $\overrightarrow{PO}$ через вектори $\overrightarrow{PA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{PB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{PC}=\vec{c}$ (мал. 315).

- За правилом паралелограма (побудованого на відрізках PB і PC) маємо: $2\cdot\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$, звідки $\overrightarrow{PM}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.



Мал. 315

Аналогічно знаходимо:

$$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PM}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$$

3 Доведіть, що коли точка M ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = m : n$, а X — будь-яка точка простору, то

$$\overrightarrow{XM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}.$$

● $\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{XB}$.

Отже, $n\overrightarrow{XM}+n\overrightarrow{MA}=n\overrightarrow{XA}$, $m\overrightarrow{XM}+m\overrightarrow{MB}=m\overrightarrow{XB}$. Якщо додати почленно ці векторні рівності та врахувати, що $n\overrightarrow{MA}+m\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, дістанемо: $(m+n)\overrightarrow{XM}=n\overrightarrow{XA}+m\overrightarrow{XB}$, звідки $\overrightarrow{XM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}$.

4 Чи компланарні вектори:

а) $\vec{a}=(1;\ 3;\ -2)$, $\vec{b}=(-2;\ -6;\ 4)$, $\vec{c}=(0,5;\ 1,5;\ -1)$;

б) $\vec{a}=(-1;\ 2;\ 1)$, $\vec{b}=(-2;\ 5;\ 3)$, $\vec{c}=(4;\ -5;\ -1)$?

● а) Відповідні координати даних векторів пропорційні, тому ці вектори колінеарні, а отже, компланарні. Вони або лежать в одній площині, або паралельні одній площині.

б) Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні, бо їхні відповідні координати не пропорційні. Якщо вектор $\vec{c}$ можна розкласти за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ будуть компланарними. Якщо такий розклад неможливий, то вектори не будуть компланарними. Тому встановимо, чи існують такі числа α і β, що $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, тобто чи має розв'язки система рівнянь

$$\begin{cases}-\alpha-2\beta=4,\\ 2\alpha+5\beta=-5,\\ \alpha+3\beta=-1.\end{cases}$$

Додаючи перше і третє рівняння, отримаємо, що $\beta = 3$, тоді $\alpha = -10$. Отже, $\vec{c}=-10\vec{a}+3\vec{b}$. Це означає, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — компланарні.

Задачі та вправи

Виконайте усно

935. Знайдіть суму та різницю векторів:

а) $\vec{a}=(-2;\ 0;\ 3)$ і $\vec{b}=(1;\ 1;\ 0)$; б) $\vec{c}=(-2;\ -1;\ 4)$ і $\vec{d}=(3;\ 1;\ -1)$.

936. Дано вектори $\vec{a}=(2;\ -3;\ 1)$, $\vec{b}=(-4;\ 1;\ 2)$. Знайдіть координати векторів $\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{a}-\vec{b}$; $\vec{a}+\vec{a}$; $\vec{b}-\vec{b}$.

937. Помножте вектор $\vec{m}=(-6;\ 4;\ 0)$ на: 2; -3; $0,5$; $-\frac{1}{4}$.

938. Чи колінеарні вектори:

а) $\vec{a}=(1;\ 1;\ 2)$ і $\vec{b}=(2;\ 2;\ 4)$;

б) $\vec{a}=(1;\ 2;\ 3)$ і $\vec{b}=(3;\ 2;\ 1)$;

в) $\vec{a}=(2;\ 4;\ 7)$ і $\vec{b}=(1;\ 2;\ 3,5)$?

939. Знайдіть суму векторів: а) $\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{XB}$; б) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PK}$.

940. Знайдіть різницю векторів: а) $\overrightarrow{XA}-\overrightarrow{XT}$; б) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}$.

А

941. Знайдіть суму векторів:

а) $\vec{a}=(3;\ 1;\ -2)$, $\vec{b}=(3;\ -2;\ 5)$;

б) $\vec{a}=(-2;\ 4;\ 11)$, $\vec{b}=(2;\ 6;\ 2)$;

в) $\vec{a}=(-3,2;\ 4,6;\ 3)$, $\vec{b}=(-0,2;\ 2;\ 3,5)$;

г) $\vec{a}=\left(\frac{1}{3};\ 0,3;\ \frac{2}{5}\right)$, $\vec{b}=\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ -\frac{3}{4}\right)$.

942. Знайдіть суму векторів $\vec{x}=\left(0;\ 3;\ \frac{1}{4}\right)$, $\vec{y}=\left(1;\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right)$ і $\vec{z}=\left(-4;\ \frac{1}{2};\ 2\right)$.

943. Знайдіть суму векторів:

а) $\overrightarrow{CX}$ і $\overrightarrow{XP}$; б) $\overrightarrow{BT}$ і $\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$.

944. $ABCD$ — тетраедр. Чому дорівнює $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$?

945. Доведіть, що коли O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, то $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

946. Доведіть, що коли O — центр правильного шестикутника $ABCDEF$, то $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$.

947. Знайдіть різницю $\vec{a}-\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}=(4;\ 1;\ 5)$, $\vec{b}=(3;\ 5;\ -1)$;

б) $\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{b}=(3;\ 4;\ -2)$.

948. Нехай O — центр правильного шестикутника $ABCDEF$. Доведіть, що:

а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}$; б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AO}$.

949. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$. Виразіть через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектори $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{A_1C}$.

950. Помножте вектор $\vec{a}=(3;\ -4;\ 2)$ на: 3; $\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$; 0.

951. Дано вектор $\vec{p}=(6;\ -8;\ 0)$. Знайдіть координати вектора:

а) $2\vec{p}$; б) $-\vec{p}$; в) $-1,5\vec{p}$; г) $\frac{1}{2}\vec{p}$; д) $0\cdot\vec{p}$.

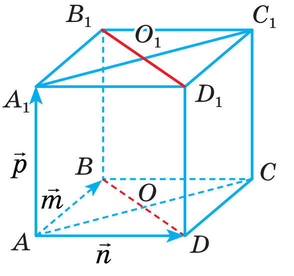
952. Дано вектори $\vec{a}=(-1;\ 3;\ 7)$ і $\vec{b}=(6;\ 2;\ -8)$. Знайдіть координати вектора:

а) $2\vec{a}+3\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}$; в) $0,5\vec{a}-1,5\vec{b}$.

953. Знайдіть довжини векторів $3\vec{a}-\vec{b}$ і $2\vec{a}+3\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(2;\ 0;\ -3)$, $\vec{b}=(5;\ -1;\ 2)$.

954. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 316), у якого $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{n}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{p}$. Установіть відповідність між векторами (1–4) та їх розкладом (А–Д) за векторами $\vec{m}$, $\vec{n}$ і $\vec{p}$.

1 $\overrightarrow{OC_1}$	**А** $\vec{n}-\vec{m}-\vec{p}$
2 $\overrightarrow{B_1D}$	**Б** $\vec{n}+\vec{m}-\vec{p}$
3 $\overrightarrow{A_1C}$	**В** $0,5\vec{n}+0,5\vec{m}+\vec{p}$
4 $\overrightarrow{O_1B}$	**Г** $0,5\vec{m}-0,5\vec{n}-\vec{p}$
	Д $0,5\vec{n}-0,5\vec{m}-\vec{p}$



Мал. 316

955. Розкладіть за ортами вектор:

а) $\vec{a}=(3;\,-4;\,7)$; б) $\vec{b}=\left(\frac{1}{2};\,\frac{3}{5};\,-1\right)$.

956. Знайдіть координати вектора $2\vec{e}_1+3\vec{e}_2-\vec{e}_3$.

957. Знайдіть числа a, b, c, якщо $\vec{m}=(2;\,3;\,4)=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2-c\vec{e}_3$.

958. Чи колінеарні вектори $\vec{a}-2\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо $\vec{a}=(2;\,-2;\,4)$, $\vec{b}=(-1;\,3;\,2)$, $\vec{c}=(-8;\,16;\,0)$?

959. При яких значеннях k вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні:

а) $\vec{a}=(2;\,k;\,-3)$, $\vec{b}=(-4;\,10;\,6)$;

б) $\vec{a}=(k;\,-2;\,-1)$, $\vec{b}=(-3;\,6;\,3k)$.

Б

960. Доведіть, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, якщо:

а) $\vec{a}=(-2;\,4;\,6)$, $\vec{b}=(-1;\,2;\,3)$, $\vec{c}=(1;\,-2;\,-3)$;

б) $\vec{a}=(1;\,2;\,5)$, $\vec{b}=(0,3;\,0,2;\,1)$, $\vec{c}=(-3;\,-2;\,-10)$.

961. Дано точки $A(-3;\,2;\,5)$, $B(4;\,-1;\,2)$, $C(1;\,0;\,-2)$, $D(-2;\,6;\,1)$. Знайдіть координати векторів: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$.

962. Дано вектори $\vec{a}=(3;\,-2;\,1)$, $\vec{b}=(2;\,-3;\,-1)$, $\vec{c}=(-1;\,5;\,7)$.
Знайдіть: $|\vec{a}+\vec{b}|$; $|\vec{a}+\vec{c}|$; $|2\vec{a}+3\vec{c}|$; $|\vec{b}-2\vec{a}|$; $|2\vec{b}-\vec{c}|$.

963. Доведіть, що коли O — точка перетину медіан трикутника ABC, то $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

964. Знайдіть числа x, y, z, якщо $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}=(x;\,2;\,z)$, $\vec{b}=(-3;\,2y;\,3z-1)$:

а) $\vec{p}=(1;\,-5;\,3)$; б) $\vec{p}=(3;\,-7;\,12)$; в) $\vec{p}=(-1;\,6;\,-9)$.

965. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, співнапрямленого з вектором $\vec{p}$, якщо $\vec{p}=(2;\,-2;\,-1)$ і $|\vec{a}|=6$.

966. Знайдіть координати одиничного вектора, протилежно напрямленого до вектора $\vec{c}=(1;\,-3;\,2)$.

967. Чи лежать точки A, B, C на одній прямій, якщо $\overrightarrow{OA}=(-1;\,2;\,-6)$, $\overrightarrow{OB}=(2;\,-4;\,3)$, $\overrightarrow{OC}=(2;\,-4;\,6)$?

968. Знайдіть координати точки P, яка лежить на прямій MN, якщо $M(4;\,-1;\,2)$, $N(3;\,2;\,1)$ і $|\overrightarrow{MP}|=2\sqrt{11}$.

969. Знайдіть усі значення a, при яких вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ колінеарні, якщо:
а) $\vec{m}=(-1;\ 4;\ -2)$, $\vec{n}=(2;\ a;\ 4)$;
б) $\vec{m}=(a+1;\ 2;\ a)$, $\vec{n}=(1;\ a;\ 2)$;
в) $\vec{m}(3;\ 5-a;\ a)$, $\vec{n}(5+a;\ 7a+1;\ 2)$.

970. При яких значеннях a і b точки A, B, C лежать на одній прямій, якщо $\overrightarrow{AB}=(-1;\ a;\ b)$, $\overrightarrow{AC}=(3;\ 6;\ -1)$?

971. Чи компланарні вектори:
а) $\vec{a}=(-2;\ 1;\ 1)$, $\vec{b}=(1;\ -1;\ 2)$, $\vec{c}=(0;\ 2;\ -1)$;
б) $\vec{a}=(1\ -2;\ -1)$, $\vec{b}=(3;\ -4;\ 2)$, $\vec{c}=(-1;\ 4;\ 6)$?

972. Вектори $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ — некомпланарні. Доведіть, що компланарними є вектори $\vec{a}=-2\vec{m}+\vec{n}-2\vec{p}$, $\vec{b}=-3\vec{m}+4,5\vec{n}-7\vec{p}$, $\vec{c}=\vec{m}-2\vec{n}+3\vec{p}$.

973. Дано вектори $\vec{a}=(1;\ 2;\ -3)$, $\vec{b}=(0;\ 3;\ 1)$, $\vec{c}=(2;\ 5;\ 2)$ і $\vec{m}=(4;\ 0;\ -7)$. Знайдіть числа a, b і c такі, щоб виконувалася рівність $\vec{m}=a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}$.

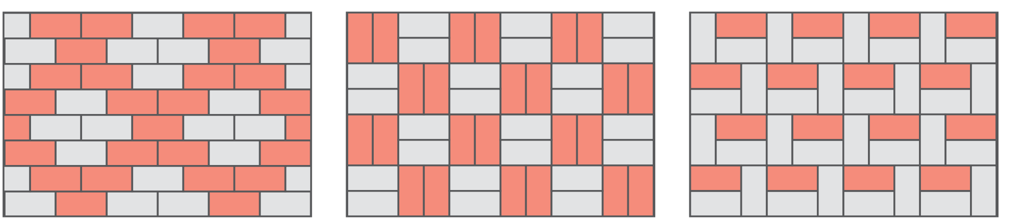
974*. Доведіть, що кожний відрізок, який сполучає вершину тетраедра з точкою перетину медіан протилежної грані, проходить через центроїд тетраедра і ділиться ним у відношенні 3 : 1, починаючи від вершини.

975*. Доведіть, що коли O — центр правильного многокутника $A_1A_2A_3\ldots A_n$, то $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.

Задачі для повторення

976. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}=(-1;\ 4)$ і $\vec{b}=(2;\ 5)$.

977. Тротуарна плитка має розміри 200×100 мм. Скільки червоної та сірої плитки знадобиться для замощення доріжки довжиною 10 м і шириною 1 м 20 см? Розрахуйте кількість кожного виду плитки, якщо доріжки замощуватимуть так, як показано на малюнках 317. Порівняйте вартість плитки для кожного способу замощення, якщо 100 штук сірої плитки коштують 370 грн, а 100 штук червоної — 310 грн. Яке замощення (за цих умов) є економнішим?



а *б* *в*

Мал. 317

978. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Через точку D проведіть пряму, паралельну площині ABC.

§ 23 Скалярний добуток векторів. Кут між векторами

■ **Кутом між двома ненульовими векторами** називають кут між відповідними їм напрямленими відрізками, які виходять з однієї точки.

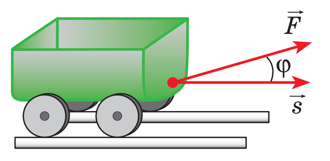
Від вибору цієї точки міра розглядуваного кута не залежить. Вважають, що кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180°, а між співнапрямленими — 0°.

■ Два вектори називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°.

Тепер введемо поняття скалярного добутку двох векторів простору.

■ **Скалярним добутком** двох векторів називають добуток довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Якщо кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює φ, то їхній скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$. Якщо хоч один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.



Мал. 318

Приклад застосування скалярного добутку векторів відомий з фізики. Механічна робота A, яку виконує стала сила $\vec{F}$ при переміщенні $\vec{s}$ (мал. 318), дорівнює скалярному добутку даних векторів: $A=\vec{F}\cdot\vec{s}=|\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cos\varphi$.

Застосовується це поняття й в геометрії. З означення скалярного добутку векторів випливає, що відрізки AB і CD перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ дорівнює нулю *(ознака перпендикулярності векторів).*

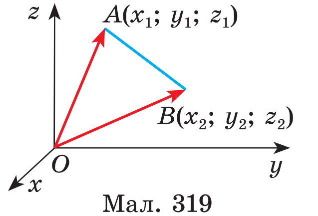
Важливі й інші наслідки. Щоб користуватися ними, треба знати властивості скалярного добутку векторів.

ТЕОРЕМА 30

Скалярний добуток векторів $\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$ дорівнює $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

ДОВЕДЕННЯ.

Відкладемо дані вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від початку координат (мал. 319). Їм відповідають напрямлені відрізки $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, кінці яких $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Якщо дані вектори неколінеарні, то ABO — трикутник.



Мал. 319

За теоремою косинусів

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\varphi,$$

звідки

$$OA \cdot OB \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(OA^2 + OB^2 - AB^2\right). \qquad (*)$$

Виразимо квадрати довжин векторів $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{AB}$ через їхні координати:

$$OA^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad OB = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$
$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Тому

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = OA \cdot OB \cdot \cos\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2\right) =$$
$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \ \square$$

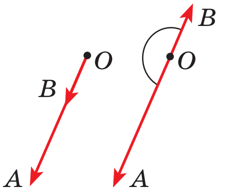
Доведене співвідношення справджується і для кутів φ, що дорівнюють 0° або 180° (мал. 320).

Адже у першому з цих випадків

$$AB^2 = |OA - OB|^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 0°,$$

а у другому

$$AB^2 = (OA + OB)^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 180°.$$



Мал. 320

Отже, теорема, яку доводимо, правильна і для колінеарних векторів. Завжди

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \ \square$$

Приклад. Якщо $\vec{a} = (2; -1; 4)$, $\vec{b} = (1; 0; 3)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 3 = 14$.

Якими б не були вектори $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, завжди $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ і $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$, і $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k \cdot \vec{b}) = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Істинність цих властивостей випливає з тотожностей:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_1z_2;$$
$$(x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3 + (z_1 + z_2)z_3 =$$
$$= (x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) + (x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3);$$
$$(kx_1)x_2 + (ky_1)y_2 + (kz_1)z_2 = x_1(kx_2) + y_1(ky_2) + z_1(kz_2) =$$
$$= k(x_1x_2) + k(y_1y_2) + k(z_1z_2).$$

Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ позначають $\vec{a}^2$ і називають **скалярним квадратом вектора** $\vec{a}$. За означенням скалярного добутку $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0° = |\vec{a}|^2$, звідки випливає, що $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Доведені властивості дають можливість порівняно легко виконувати перетворення векторних виразів — за тими самими правилами, за якими виконують тотожні перетворення алгебраїчних виразів. З іншого боку, знаючи скалярний добуток двох векторів та їхні довжини, легко можна обчислити косинус кута між ними. А це дає можливість застосовувати скалярний добуток векторів під час розв'язування багатьох задач.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Чому говорять «скалярний добуток векторів», а не «добуток векторів»? Бо у вищій математиці розглядають ще векторний, косий та інші добутки.

Косим добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів і синуса орієнтованого кута між першим і другим векторами.

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між якими дорівнює φ, називають такий вектор $\vec{c}$, що

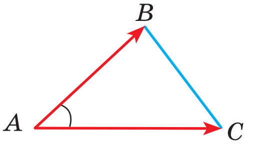
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$;
2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
3) вектор $\vec{c}$ напрямлений так, що з його кінця найкоротший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ видно проти руху годинникової стрілки.

Важливу роль тут відіграє й орієнтація простору, кута тощо. Тому для таких добутків переставний закон не має місця.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення скалярного добутку двох векторів.
2. Сформулюйте означення кута між двома векторами.
3. Чому дорівнює скалярний добуток векторів:
$$\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1) \text{ і } \vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)?$$
4. Чому дорівнює скалярний добуток векторів, принаймні один із яких нульовий?
5. Сформулюйте умову перпендикулярності двох векторів.
6. Як знайти довжину вектора $\vec{a}$?

Виконаємо разом



Мал. 321

1 Знайдіть косинус кута A трикутника ABC, якщо $A(1;\ -3;\ -5)$, $B(1;\ 1;\ -2)$, $C(1;\ 3;\ 3)$.

● Введемо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ (мал. 321) і знайдемо їхні координати: $\overrightarrow{AB} = (0;\ 4;\ 3)$, $\overrightarrow{AC} = (0;\ 6;\ 8)$.

За означенням скалярного добутку $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos A$.

Тому $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$.

Оскільки

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 + 24 + 24 = 48$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0 + 16 + 9} = 5$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0 + 36 + 64} = 10$,

то $\cos A = \dfrac{48}{5 \cdot 10} = \dfrac{24}{25}$.

2 Знайдіть $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3\sqrt{3}$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}})=30^\circ$.

- Оскільки $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$, то

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 30^\circ+|\vec{b}|^2}=$$

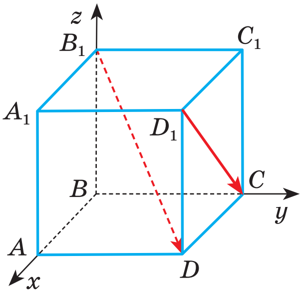
$$=\sqrt{2^2+2\cdot 2\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+18+27}=\sqrt{49}=7.$$

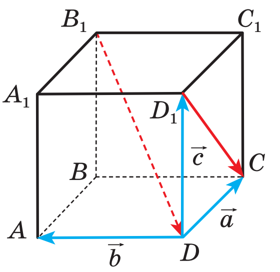
3 Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}=(1;\,2;\,2)$ і $\vec{b}=(2;\,3;\,6)$.

- $$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 6}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{20}{3\cdot 7}=\frac{20}{21}.$$

4 Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що $B_1D\perp D_1C$.

- *Спосіб 1*. Розмістимо даний куб у прямокутній системі координат (мал. 322, *а*) і введемо вектори $\overrightarrow{B_1D}$ і $\overrightarrow{D_1C}$.





Мал. 322

Оскільки $B_1(0;\,0;\,a)$, $D(a;\,a;\,0)$, $D_1(a;\,a;\,a)$, $C(0;\,a;\,0)$, то $\overrightarrow{B_1D}=(a;\,a;\,-a)$, $\overrightarrow{D_1C}=(-a;\,0;\,-a)$. Тоді $\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{D_1C}=-a^2+0+a^2=0$. Отже, $\overrightarrow{B_1D}\perp\overrightarrow{D_1C}$. З чого випливає, що перпендикулярними будуть і відрізки B_1D і D_1C.

Спосіб 2. Введемо вектори $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DA}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DD_1}=\vec{c}$ (мал. 322, *б*).
Тоді $\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BD}=-\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{D_1C}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DD_1}=\vec{a}-\vec{c}$.
Тоді $\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{D_1C}=-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})(\vec{a}-\vec{c})=-(\vec{a}^2-\vec{c}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c})=-(|\vec{a}|^2-|\vec{c}|^2)=0$,
бо $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ і $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$. Отже, $\overrightarrow{B_1D}\perp\overrightarrow{D_1C}$, тоді $B_1D\perp D_1C$.

Задачі та вправи

Виконайте усно

979. Знайдіть кут між двома одиничними векторами, якщо їхній скалярний добуток дорівнює:

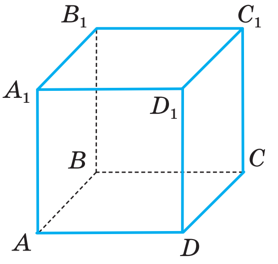
а) $\frac{1}{2}$; в) 0; ґ) $-0{,}5$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) 1; д) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

980. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб з ребром 1 (мал. 323).

а) Знайдіть кут між векторами: $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{B_1C_1}$; $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{D_1C_1}$; $\overrightarrow{AD_1}$ і $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BB_1}$; $\overrightarrow{B_1B}$ і $\overrightarrow{DD_1}$.

б) Знайдіть: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DD_1}$; $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{D_1D}$; $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}$.



Мал. 323

981. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}=(0;\,1;\,2)$, $\vec{b}=(-3;\,0;\,1)$;
б) $\vec{a}=(1;\,1;\,1)$, $\vec{b}=(2;\,3;\,4)$;
в) $\vec{a}=(6;\,0;\,-3)$; $\vec{b}=(-2;\,-5;\,0)$;
г) $\vec{a}=(4;\,2;\,1)$; $\vec{b}=(4;\,-2;\,-1)$.

982. Який знак має скалярний добуток двох векторів, якщо кут між ними:
а) гострий; б) тупий?

983. Укажіть вид кута між векторами, якщо їхній скалярний добуток:
а) дорівнює нулю; б) додатний; в) від'ємний.

А

984. У трикутнику ABC $\angle A=50°$, $\angle C=90°$. Знайдіть кути між векторами:

а) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$;
б) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{AB}$;
в) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$.

985. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо їх довжини і кут між ними дорівнюють:

а) 5, 12, 60°;
б) 3, $\sqrt{2}$, 45°;
в) 5, 6, 120°;
г) 4, 7, 180°.

986. Трикутник ABC — рівносторонній, $AB = 12$. Знайдіть скалярний добуток:

а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

987. Знайдіть скалярний добуток векторів:

а) $\vec{a}=(1;\,2;\,-3)$ і $\vec{b}=(-8;\,2;\,4)$;
б) $\vec{m}=(-2;\,-3;\,2)$ і $\vec{n}=(2;\,3;\,0{,}5)$;
в) $\vec{p}=(-3;\,-7;\,1)$ і $\vec{k}=(-2;\,10;\,-6)$;
г) $\vec{c}=\left(4\frac{1}{2};\,-\frac{2}{3};\,\frac{3}{5}\right)$ і $\vec{d}=(2;\,3;\,-10)$.

988. Дано вектори $\vec{p}=(1;\,-5;\,2)$, $\vec{q}=(3;\,1;\,2)$. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

а) $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q}$ і $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$;
б) $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$ і $\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}$;
в) $\vec{a}=2\vec{p}+\vec{q}$ і $\vec{b}=3\vec{p}-2\vec{q}$.

989. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}=(1;\ 2;\ 0)$, $\vec{b}=(3;\ 1;\ 1)$;

б) $\vec{a}=(2;\ 6;\ 4)$, $\vec{b}=(3;\ 0;\ -1)$;

в) $\vec{a}=(-4;\ -8;\ 1)$, $\vec{b}=(-3;\ 3;\ 0)$;

г) $\vec{a}=(-3;\ -4;\ 0)$, $\vec{b}=(3;\ -1;\ 2)$.

990. Знайдіть кут між векторами:

а) $\vec{a}=(-2;\ 0;\ 2)$, $\vec{b}=(0;\ 0;\ 4)$;

б) $\vec{x}=(1;\ 1;\ 0)$, $\vec{y}=(0;\ -1;\ 1)$;

в) $\vec{c}=(0;\ 0;\ 2)$, $\vec{d}=(1;\ 0;\ -1)$;

г) $\vec{p}=(0;\ 2;\ 2)$, $\vec{k}=(3;\ 0;\ 3)$.

991. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $A(2;\ 1;\ 3)$, $B(7;\ 4;\ 5)$, $C(4;\ 2;\ 1)$ — прямокутний.

992. За яких значень x вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ перпендикулярні:

а) $\vec{m}=(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{n}=(x;\ 3;\ 1)$;

б) $\vec{m}=(-3;\ x;\ 3)$, $\vec{n}=(9;\ x;\ 1)$;

в) $\vec{m}=(x+2;\ x;\ 3)$, $\vec{n}=(1;\ 3;\ -2)$;

г) $\vec{m}=(x-3;\ x;\ 1)$, $\vec{n}=(4;\ x;\ -3x)$?

993. Знайдіть довжину вектора $\vec{a}$, якщо він колінеарний вектору $\vec{b}=(2;\ -1;\ 2)$ і $\vec{a}\cdot\vec{b}=18$.

994. Обчисліть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$; б) $|\vec{a}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$.

995. Дано: $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\perp\vec{c}$, $(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}})=(\widehat{\vec{b};\ \vec{c}})=60^\circ$. Обчисліть скалярний добуток:

а) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{c})$;

б) $(2\vec{a}+\vec{b})(3\vec{b}-2\vec{c})$.

996. Обчисліть $|\vec{a}+\vec{b}|$ та $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо:

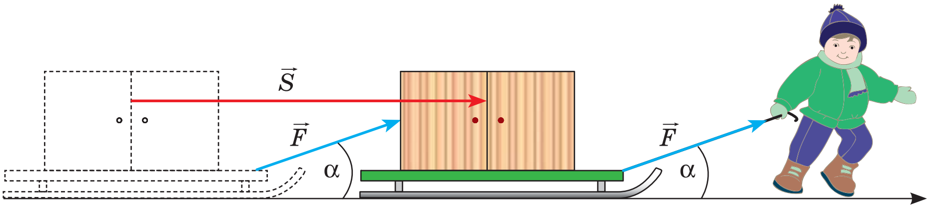
а) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\perp\vec{b}$;

б) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $\vec{a}\perp\vec{b}$;

в) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}})=60^\circ$;

г) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}})=120^\circ$.

997. Навісну шафу рівномірно тягнуть на санчатах по горизонтальній поверхні (мал. 324). Мотузка, за допомогою якої тягнуть санчата, утворює з горизонтальною поверхнею кут 30°. Сила натягу мотузки 25 Н. Яку роботу виконали під час переміщення шафи на 50 м?



Мал. 324

998. Під дією сили 20 Н, прикладеної під кутом 30° до напряму переміщення, фізичне тіло перемістилося на 3 м. Знайдіть виконану цією силою роботу.

Б

999. Усі ребра піраміди $SABCD$ рівні, а в основі лежить квадрат $ABCD$ (мал. 325). Знайдіть кут між векторами:

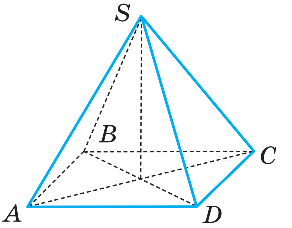
а) $\overrightarrow{SA}$ і $\overrightarrow{SB}$;

б) $\overrightarrow{SD}$ і $\overrightarrow{AD}$;

в) $\overrightarrow{SB}$ і $\overrightarrow{SD}$;

г) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$;

д) $\overrightarrow{AS}$ і $\overrightarrow{AC}$.



Мал. 325

1000. Доведіть, що коли довжини ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні, то вектори $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярні.

1001. Знайдіть косинуси кутів трикутника ABC, якщо:

а) $A(0;\ -1;\ 1)$, $B(-4;\ -1;\ -2)$, $C(-3;\ -5;\ 1)$;

б) $A(2;\ -1;\ 1)$, $B(0;\ 1;\ 3)$, $C(-1;\ 1;\ 0)$.

1002. Дано точки $A(1;\ 4;\ 8)$ і $B(-4;\ 0;\ 3)$. Під яким кутом відрізок AB видно з початку координат?

1003. Дано три точки: $A(0;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 0;\ 1)$, $C(-1;\ 1;\ 2)$. Знайдіть координати точки D такої, щоб виконувалася умова $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$, якщо точка D лежить:

а) на осі Ox;

б) на осі Oy;

в) на осі Oz.

1004. Дано вектори $\vec{a}=(3;\ 4;\ 5)$ і $\vec{b}=(-1;\ 2;\ 0)$. Знайдіть число l, при якому вектор $\vec{a}+l\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.

1005. Обчисліть $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$, $|\vec{a}-\vec{b}|=24$.

1006. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $|\vec{a}|=12$, $|\vec{b}|=13$, $|\vec{a}+\vec{b}|=19$;

б) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$;

в) $|\vec{a}+\vec{b}|=3$, $|\vec{a}-\vec{b}|=1$.

1007. Дано: $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)=\left(\widehat{\vec{a};\vec{c}}\right)=60^\circ$, $\vec{b}\perp\vec{c}$. Знайдіть довжину вектора:

а) $\vec{m}=\vec{a}+3\vec{b}$;

б) $\vec{m}=\vec{a}+2\vec{c}$;

в) $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

1008. Обчисліть кут між векторами $\vec{m}=2\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c}$ і $\vec{n}=\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$, де $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

1009. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, якщо його довжина дорівнює $2\sqrt{3}$ і він перпендикулярний до векторів $\vec{m}=(1;\ -2;\ 1)$, $\vec{n}=(2;\ 1;\ -3)$.

1010. Висота правильної трикутної призми у 2 рази більша за сторону основи. Знайдіть кут між прямими:
а) CA_1 і BC_1; б) AB_1 і BC_1.

1011. Знайдіть кути між медіанами двох граней правильного тетраедра.

Задачі для повторення

1012. Підлогу кімнати, яка має форму прямокутника зі сторонами 4,7 м і 5 м, треба покрити паркетом прямокутної форми. Довжина кожної плитки паркету дорівнює 30 см, а ширина — 5 см. Скільки таких плиток потрібно для покриття всієї підлоги? Чи залежить ця кількість від способу укладки паркету? Дізнайтеся про найбільш уживані способи укладки паркету і встановіть відсоток відходів у двох з них для укладки паркету з умови задачі.

1013. Від точки $A(2; -5; 1)$ відкладено вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Знайдіть координати точки B, якщо $\vec{a} = (1; 3; -2)$.

1014. Побудуйте переріз паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки M, N, P, якщо $M \in B_1C_1$, $N \in CC_1$, $P \in AB$.

§ 24 Застосування векторів

Вектори часто застосовують у математиці та фізиці. У геометрії за їх допомогою доводять теореми і розв'язують багато цікавих задач.

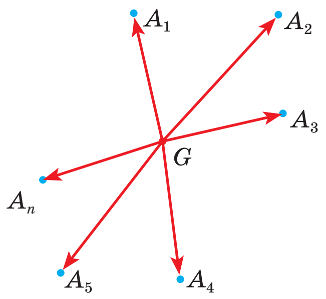
Багатьом властивостям геометричних фігур відповідають ті чи інші векторні рівності. Наприклад, якщо:

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ — точки A і B збігаються;
$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ — прямі AB і CD паралельні;
$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ — точки A, B, C лежать на одній прямій;
$\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}$ — точки O, A, B, C однієї площини;
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ — прямі AB і CD перпендикулярні;
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює φ.

Користуючись такими співвідношеннями, можна розв'язувати багато геометричних задач. Для цього дані в задачі співвідношення між геометричними об'єктами спочатку немовби «перекладають» мовою векторів.

Потім перетворюють знайдені векторні рівності та знову перекладають їх звичайною мовою геометрії. Особливо часто при цьому застосовують теорему про центроїд системи точок.

■ Точку G називають **центроїдом** n даних точок A_1, A_2, ..., A_n, якщо $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\ldots+\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$ (мал. 326).



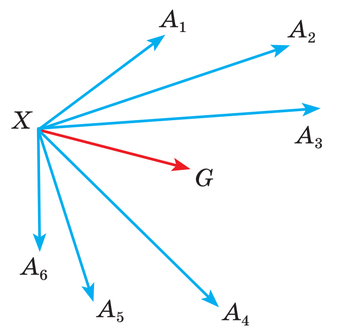
Мал. 326

ТЕОРЕМА 31

Якщо G — центроїд n точок A_1, A_2, ..., A_n, а X — довільна точка простору, то $\overrightarrow{XG}=\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{XA_1}+\overrightarrow{XA_2}+\ldots+\overrightarrow{XA_n}\right)$.

ДОВЕДЕННЯ.

Для будь-яких точок $X, G, A_1, A_2, \ldots, A_n$ справджуються векторні рівності $\overrightarrow{XA_i}=\overrightarrow{XG}+\overrightarrow{GA_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (мал. 327).



Мал. 327

Додавши їх, дістанемо

$$\overrightarrow{XA_1}+\overrightarrow{XA_2}+\ldots+\overrightarrow{XA_n}=n\overrightarrow{XG}+\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\ldots+\overrightarrow{GA}.$$

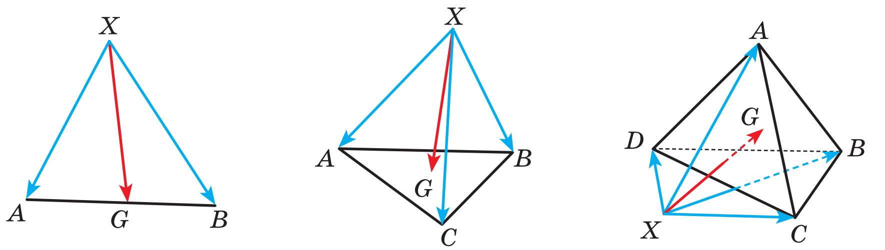
Якщо G — центроїд точок A_1, A_2, ..., A_n, то сума n останніх доданків цієї векторної рівності дорівнює $\vec{0}$. Отже,

$$n\overrightarrow{XG}=\overrightarrow{XA_1}+\overrightarrow{XA_2}+\ldots+\overrightarrow{XA_n}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на $\frac{1}{n}$, дістанемо те, що й треба було довести. □

Наслідки. Якщо G — середина відрізка AB або точка перетину медіан трикутника ABC, або центроїд тетраедра $ABCD$ (мал. 328), то відповідно:

$$\overrightarrow{XG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}\right),\quad \overrightarrow{XG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right),\quad \overrightarrow{XG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}\right).$$



а *б* *в*

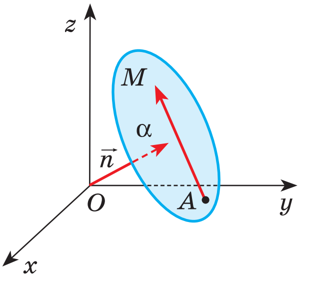
Мал. 328

Центроїд тетраедра — те саме, що й центроїд його вершин.

Задача. Доведіть, що рівняння площини, перпендикулярної до вектора $\vec{n}=(a;\ b;\ c)$, має вигляд $ax + by + cz + d = 0$.

Доведення. Нехай площина α проходить через точку $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(a;\ b;\ c)$, а $M(x;\ y;\ z)$ — довільна точка площини α (мал. 329). Вектори $\vec{n}=(a;\ b;\ c)$ і $\overrightarrow{AM}=(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0)$ перпендикулярні. Отже, їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (*)$$



Мал. 329

Це — рівняння площини, яка проходить через точку $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}=(a;\ b;\ c)$. Цей вектор називають **нормаллю до площини.**

Якщо в рівнянні (*) позначити $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d$, його можна подати у вигляді $ax + by + cz + d = 0$. Це **загальне рівняння площини.**

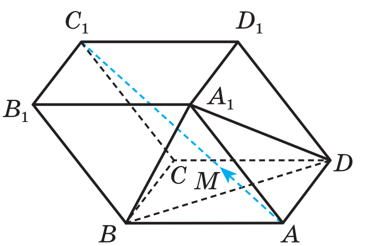
Використовуючи векторний метод, можна записати і рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і паралельна вектору $\vec{s}=(m;\ n;\ p)$, який називають **напрямним вектором даної прямої.**

Візьмемо на шуканій прямій l довільну точку $M(x;\ y;\ z)$. Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ — колінеарні, тобто $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$. Отримали вже відоме вам канонічне рівняння прямої, де числа m, n, p — координати напрямного вектора даної прямої.

Враховуючи, що загальне рівняння площини задає координати вектора, перпендикулярного до цієї площини, а канонічне рівняння прямої — координати напрямного вектора, то, використовуючи властивості векторів, можна знаходити кут між прямими, між прямою і площиною та кут між площинами.

Використовуючи векторний метод, можна довести ще одну дуже корисну формулу, а саме — формулу відстані від точки до площини. Відстань d від точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до площини, заданої рівнянням $ax + by + cz + d = 0$, визначається за формулою:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$



Мал. 330

Пропонуємо довести цю формулу самостійно.

Отже, векторним методом можна розв'язувати не тільки ті задачі, які містять вектори в умові, а набагато ширший клас задач. Але потрібно пам'ятати, що під час розв'язування таких задач потрібно спочатку ввести вектори і сформулювати умову задачі векторною мовою.

Задача. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед, M — точка перетину медіан трикутника A_1BD (мал. 330). Доведіть, що пряма AC_1 проходить через точку M. У якому відношенні точка M ділить відрізок AC_1?

Розв'язання. За правилом паралелепіпеда $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$. А оскільки M — точка перетину медіан трикутника A_1BD, то $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}\right)$.

Маємо: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$. Отже, точка M лежить на прямій AC_1, причому $AC_1 = 3AM$, тобто $AM : MC_1 = 1 : 2$.

Вектори можна застосовувати не тільки в геометрії, а й під час розв'язування алгебраїчних задач. Особливо зручно це робити при доведенні нерівностей і знаходженні найбільшого і найменшого значень функції або виразу.

Наприклад, знайдемо найбільше значення функції $y = \sqrt{x} + 4\sqrt{1 - \frac{x}{2}} + 3\sqrt{2}$.

Перетворимо дану функцію $y = \sqrt{x} + 4\sqrt{\frac{2-x}{2}} + 3\sqrt{2} = \sqrt{x} + 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x} + 3\sqrt{2}$ і врахуємо, що її область визначення $D(y) = [0;\ 2]$.

Введемо вектори $\vec{a} = \left(1;\ 2\sqrt{2};\ 3\right)$ і $\vec{b} = \left(\sqrt{x};\ \sqrt{2-x};\ \sqrt{2}\right)$. Тоді дану функцію можна записати у вигляді $y = \vec{a}\cdot\vec{b}$, адже $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot\sqrt{x} + \sqrt{2} - \sqrt{2-x} + 3\cdot\sqrt{2}$.

Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{1+8+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x+2-x+2} = 2$, то

$$y = \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = 6\sqrt{2}\cos\varphi.$$

Тому найбільше значення функції дорівнює $6\sqrt{2}$ і досягається тоді, коли значення $\cos\varphi$ — найбільше, тобто якщо $\cos\varphi = 1$, а $\varphi = 0°$.

Знайдемо, при яких x функція набуває свого найбільшого значення. Оскільки $\varphi = 0°$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — співнапрямлені, тоді їхні координати пропорційні, тобто $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, або $\begin{cases} 3\sqrt{x} = \sqrt{2}, \\ 3\sqrt{2-x} = 4, \end{cases}$ звідки $x = \frac{2}{9}$.

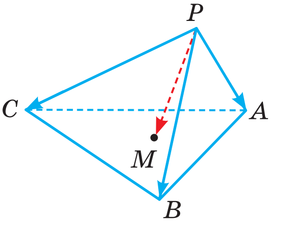
Отже, найбільше значення функції дорівнює $6\sqrt{2}$ і досягається при $x = \frac{2}{9}$.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Що називають векторним методом розв'язування задач?
2. Які векторні формули вам відомі?
3. Як мовою векторів записати, що прямі паралельні; перпендикулярні; що точки збігаються; лежать на одній прямій?
4. Чи можна застосовувати векторний метод до задач, умова яких не містить векторів? Як це зробити?
5. Чи можна застосовувати векторний метод до розв'язування задач з алгебри? Наведіть приклади.
6. Сформулюйте теорему про центроїд n точок.
7. Який вигляд має рівняння площини, перпендикулярної до вектора $\vec{n} = \left(a;\ b;\ c\right)$?

Виконаємо разом

1 M — точка перетину медіан грані ABC тетраедра $PABC$, $PA = 3$, $PB = 6$, $PC = 9$ і $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = \alpha$. Знайдіть PM.



Мал. 331

- $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)$ (мал. 331).

Тому

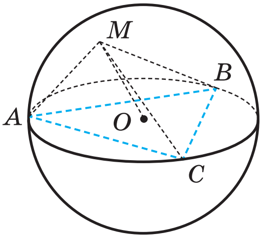
$$PM^2 = \frac{1}{9}\left(PA^2 + PB^2 + PC^2 + 2\cdot\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} + 2\cdot\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} + 2\cdot\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(3^2 + 6^2 + 9^2 + 2\cos\alpha\left(3\cdot 6 + 6\cdot 9 + 9\cdot 3\right)\right) = 14 + 22\cos\alpha.$$

Тому $PM = \sqrt{14 + 22\cos\alpha}$.

2 Усі вершини правильного трикутника лежать на сфері, центр якої збігається з центром трикутника. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки сфери до вершин трикутника стала (не залежить від розміщення точки на сфері).

- Нехай ABC — правильний трикутник, а M — довільна точка на сфері радіуса r (мал. 332).



Мал. 332

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB},$$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}.$$

Отже,

$$MA^2 = MO^2 + OA^2 + 2\cdot\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OA},$$

$$MB^2 = MO^2 + OB^2 + 2\cdot\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OB},$$

$$MC^2 = MO^2 + OC^2 + 2\cdot\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OC}.$$

Додамо ці рівності:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{MO}\cdot\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

Враховуючи, що $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ і що $MO^2 = OA^2 = OB^2 = OC^2 = r^2$, дістанемо $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6r^2$. Це значення одне й те саме для будь-якої точки M на сфері.

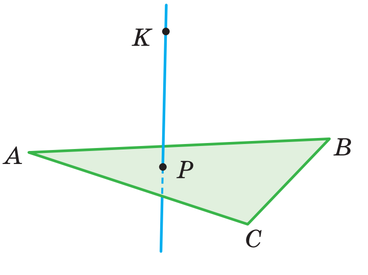
3 Доведіть за допомогою векторів, що коли пряма перпендикулярна до двох сторін трикутника, то вона перпендикулярна і до третьої його сторони (мал. 333).

- Якщо $KP \perp AB$ і $KP \perp AC$, то

$$\overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KP}\cdot\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) =$$

$$= \overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{AC} = 0.$$

Отже, $KP \perp BC$.



Мал. 333

Задачі та вправи

Виконайте усно

1015. Що можна сказати про відрізки AB і CD, якщо $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$?

1016. Установіть взаємне розміщення точок A, B, C, якщо:

а) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{BA}$.

1017. Чи лежать точки A, B, C на одній прямій, якщо:

а) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$; в) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$?

б) $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC}$;

1018. Установіть вид чотирикутника $ABCD$, якщо: а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{BC} = 0,3\overrightarrow{AD}$.

А

1019. Установіть вид трикутника ABC, якщо $\overrightarrow{CA} = (-2; 3; 0)$, $\overrightarrow{CB} = (3; 2; -4)$.

1020. Установіть взаємне розміщення площин:

а) $2x + 3y - 5z - 16 = 0$ і $2x + 3y - 5z + 12 = 0$;

б) $3x - 2y - 3z - 5 = 0$ і $x + 3y - z + 2 = 0$.

1021. Складіть рівняння площини, яка перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (5; 0; -3)$ і проходить через точку $A(2; -1; 4)$.

1022. Дано точки $A(1; 2; -3)$ і $B(4; -2; 4)$. Складіть рівняння площини, яка перпендикулярна до вектора AB і проходить через точку A.

1023. Дано точку $A(a; b; c)$. Напишіть рівняння площини, яка проходить через початок координат O перпендикулярно до прямої OA.

1024. Напишіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(1; -3; 5)$ і паралельна площині $2x - 3y + z + 10 = 0$.

1025. Знайдіть кут між площинами $2x + 3y - z + 2 = 0$ і $x - 2y + z - 4 = 0$.

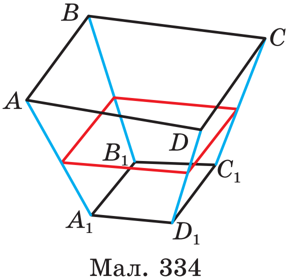
1026. Напишіть рівняння площини, яка дотикається до сфери $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$ у початку координат.

1027. У тетраедрі $ABCD$ $AB \perp CD$. Доведіть, що $AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$.

Б

1028. Точки K, L, M, N — середини ребер AB, BC, CD, DA тетраедра $ABCD$. Доведіть, що точки перетину медіан трикутників AML і CNK збігаються.

1029. Доведіть, що як би не були розміщені у просторі паралелограми $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, середини відрізків AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — вершини паралелограма або лежать на одній прямій (мал. 334).



Мал. 334

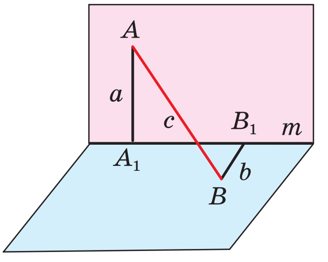
1030. Дано неплоску замкнену ламану $ABCDA$. Довжини ланок AB і CD дорівнюють a і b, а кут між мимобіжними прямими AB і CD дорівнює φ. Знайдіть відстань між серединами ланок AD і BC.

1031. Використовуючи векторний метод, доведіть теорему про три перпендикуляри.

1032. Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівносторонній $\triangle ABC$. $\angle A_1AB = \angle A_1AC$. Доведіть, що $AA_1 \perp BC$.

1033. Медіани граней DAB і DAC тетраедра $ABCD$ перетинаються відповідно в точках M_1 і M_2. Доведіть, що $M_1M_2 \parallel BC$.

1034. Кінці відрізка AB лежать на перпендикулярних площинах, які перетинаються по прямій m. Відстані AA_1 і BB_1 від точок A і B до прямої m дорівнюють відповідно a і b, а $A_1B_1 = c$. Знайдіть довжину відрізка AB (мал. 335).



Мал. 335

1035. Три ребра тетраедра, які виходять з однієї вершини, рівні, кути між ними теж рівні. Доведіть, що кожне ребро такого тетраедра перпендикулярне до протилежного.

1036. Точка K — середина ребра AC правильного тетраедра $ABCD$. Знайдіть косинус кута між прямими AB і KB.

1037. Знайдіть косинус кута між прямими, яким належать мимобіжні медіани двох граней правильного тетраедра.

1038. Усі вершини правильного тетраедра лежать на сфері. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки сфери до вершин тетраедра стала.

1039. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ діагональ BD_1 перпендикулярна до площини, яка проходить через точки A, B_1, C. Доведіть, що $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

1040. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки простору до вершин A, B_1, C_1, D дорівнює сумі квадратів відстаней від цієї точки до вершин A_1, B, C, D_1.

1041. Знайдіть кут між прямою, яка проходить через точки $A(1;\ 3;\ -2)$ і $B(-3;\ 4;\ -1)$ та площиною $x + 2y - z + 3 = 0$.

1042. Знайдіть кут між прямими

$$\frac{x-1}{2} - \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2} \quad \text{і} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-3}{-2}.$$

1043*. Знайдіть множину точок, рівновіддалених від площин:

а) $2x - y + 3z - 5 = 0$ і $2x - y + 3z + 3 = 0$;

б) $2x + y - 2z + 5 = 0$ і $x - 2y + 2z - 4 = 0$.

1044*. Знайдіть відстань між двома мимобіжними діагоналями суміжних граней куба, ребро якого дорівнює a.

1045*. Знайдіть відстань між прямими AB і CD, якщо

$$A(2;\ -1;\ 0),\ B(3;\ 2;\ 1),\ C(1;\ 2;\ 2),\ D(-3;\ 0;\ 4).$$

1046*. Знайдіть найбільше значення виразу:

а) $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$; б) $y=3x+4\sqrt{1-x^2}+5$.

При якому значенні x воно досягається?

Задачі для повторення

1047. Зобразіть різносторонній трикутник. Використовуючи послідовно осьову та центральну симетрію, побудуйте кілька цікавих орнаментів. Чи завжди можна отримати такий самий орнамент, використавши паралельне перенесення? Перевірте на практиці.

1048. Знайдіть довжину вектора $\vec{a}$, якщо $\vec{a}=3\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$, де $|\vec{m}|=|\vec{n}|=|\vec{p}|=2$, а кути між ними $60°$.

1049. Як розрізати куб на три рівні чотирикутні піраміди? А на шість рівних чотирикутних пірамід?

§ 25 Геометричні перетворення у просторі

Що називають геометричним перетворенням площини, ви вже знаєте з курсу планіметрії. У просторі навколо нас також існують різного роду переміщення, моделями яких є геометричні перетворення. Розгляньте малюнок 336 і вкажіть, про які перетворення йдеться.

Мал. 336

Якщо точки даної фігури F змістити яким-небудь способом, дістанемо нову фігуру F_1. Якщо різні точки першої фігури зміщуються (відображаються) на різні точки другої, говорять про *перетворення* даної фігури.

Весь простір — теж фігура. Тому можна говорити і про перетворення простору. У стереометрії, як і в планіметрії, з усіх перетворень особливо важливу роль відіграють рухи.

■ **Рухом** називають перетворення, при якому зберігаються відстані між точками.

Далі ми розглянемо найважливіші рухи простору: симетрії (відносно точки, площини, прямої), поворот, паралельне перенесення та ін. Але спочатку доведемо загальні властивості всіх рухів.

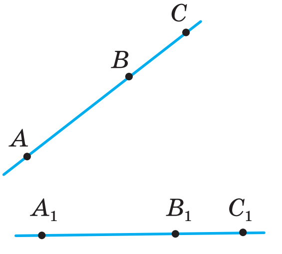
ТЕОРЕМА 32

Точки, які лежать на прямій, у результаті руху переходять у точки, які лежать на прямій, і зберігається порядок їхнього взаємного розміщення.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай точки A, B і C лежать на прямій, причому B — між A і C, тобто $AB + BC = AC$ (мал. 337). Якщо який-небудь рух відображає дані точки на точки A_1, B_1, C_1, то внаслідок збереження відстаней між точками $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$, тобто має місце рівність $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$. А це означає, що точка B_1 лежить на прямій A_1C_1 між точками A_1 і C_1.

Теорему доведено. □



Мал. 337

Наслідок. Рух пряму відображає на пряму, промінь — на промінь, відрізок — на відрізок, що дорівнює даному.

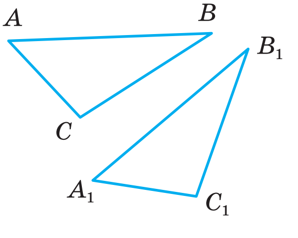
ТЕОРЕМА 33

Рух відображає трикутник на трикутник, що дорівнює даному.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай дано довільний трикутник ABC (мал. 338). Рух відображає його сторони AB, BC, CA на відрізки A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, які утворюють трикутник $A_1B_1C_1$. При цьому внаслідок збереження відстаней $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, $C_1A_1 = CA$. Отже, за трьома сторонами $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

Теорему доведено. □



Мал. 338

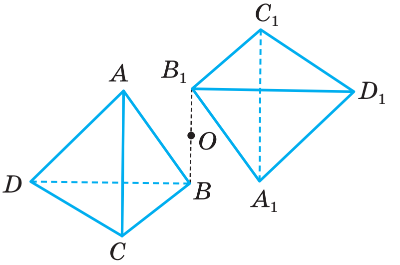
Наслідок. Рух відображає кут на кут, що дорівнює йому.

Можна довести, що рух площину відображає на площину, тетраедр — на тетраедр тощо.

Означення симетрії відносно точки, відоме з планіметрії, залишається правильним і для стереометрії.

Точки A і A_1 називають **симетричними відносно точки** O, якщо O — середина відрізка AA_1.

Перетворення, при якому кожна точка даної фігури відображається на точку, симетричну їй відносно O, називають **симетрією відносно точки** O.



Мал. 339

Наприклад, якщо дано тетраедр $ABCD$ і точку O (мал. 339), то, побудувавши точки A_1, B_1, C_1, D_1, симетричні вершинам даного тетраедра відносно O, дістанемо вершини нового тетраедра $A_1B_1C_1D_1$, симетричного даному.

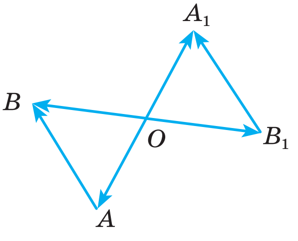
ТЕОРЕМА 34

Симетрія відносно точки — рух.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай симетрія відносно точки O відображає будь-які дві точки A і B на точки A_1 і B_1. Доведемо, що $A_1B_1 = AB$ (мал. 340). Оскільки $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA_1}$ і $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OB_1}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{B_1A_1}$.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ дорівнює вектору $\overrightarrow{B_1A_1}$, отже, рівні і їхні довжини: $AB = B_1A_1$. А це й треба було довести. □

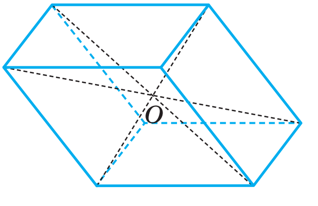


Мал. 340

З доведеної рівності $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B_1A_1}$ випливає також, що відрізки AB і A_1B_1 паралельні або лежать на одній прямій.

Отже, симетрія відносно точки відображає пряму на паралельну пряму (або таку, що збігається з нею), площину на паралельну площину (або таку, що збігається з нею).

Якщо симетрія відносно деякої точки O відображає дану фігуру на ту саму фігуру, таку фігуру називають **центрально-симетричною**, а точку O — її **центром симетрії**.

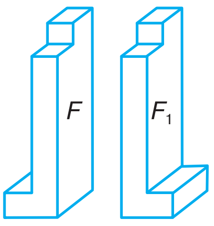


Мал. 341

Наприклад, центрально-симетричною фігурою є кожний паралелепіпед. Точка перетину діагоналей — його центр симетрії (мал. 341). Центрально-симетричною є правильна n-кутна призма, якщо n — число парне. Жодна піраміда не має центру симетрії.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

З геометричними рухами тісно пов'язане поняття *рівності фігур*. Дві фігури називають **рівними**, якщо існує рух, який відображає одну з них на іншу. Мають на увазі будь-які рухи. Хоча деталь F, зображену на малюнку 342, не можна замінити деталлю F_1, але у геометрії такі фігури вважають рівними.



Мал. 342

Мал. 343

Рівними в геометрії є також «держателі» для ручок і олівців, які використовують для навчання правильному письму праворуких і ліворуких дітей (мал. 343).

Відношення рівності геометричних фігур *транзитивне*: якщо перша фігура дорівнює другій, а друга — третій, то перша і третя фігури також рівні.

З рівними матеріальними предметами доводиться мати справу багатьом робітникам. Сучасна промисловість виробляє великі партії геометрично рівних виробів. Рівні всі заготовки, вилиті в одній формі, всі деталі, виготовлені верстатом-автоматом за однією програмою. На багато виробів існують спеціальні Державні стандарти. Служба стандартизації зобов'язує випускати такі вироби встановлених стандартів, геометрично рівні один одному.

Запитання та завдання для самоконтролю

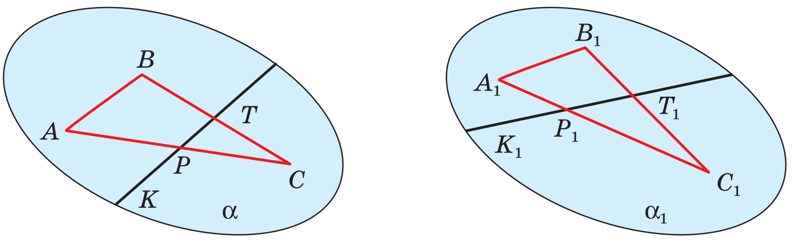
1. Що називають геометричним перетворенням? А рухом?
2. Які дві точки називають симетричними відносно даної точки? А дві фігури?
3. Що називають симетрією відносно точки у просторі? Які її властивості?
4. Які фігури називають центрально-симетричними? Наведіть приклади.

Виконаємо разом

1 Доведіть, що рух відображає площину на площину.

● Нехай α — довільна площина (мал. 344). Побудуємо на ній трикутник ABC. Унаслідок руху він відобразиться на $\triangle A_1B_1C_1$, який лежить у деякій площині α_1. Покажемо, що в результаті такого руху площина α відображається на α_1.

Нехай K — довільна точка площини α. Проведемо через K пряму, яка перетинає $\triangle ABC$ у точках P і T. Пряма KT відображається рухом на пряму K_1T_1, яка перетинає $\triangle A_1B_1C_1$ у точках P_1 і T_1.



Мал. 344

Оскільки $P_1 \in \alpha_1$ і $T_1 \in \alpha_1$, то і $K_1 \in \alpha_1$ (аксіома C_3). Виходить, у результаті розглядуваного руху будь-яка точка K площини α відображається на точку K_1 площини α_1. І будь-яка точка K_1 площини α_1 є образом деякої точки K даної площини α (теорема 32). Отже, рух відображає площину α на α_1.

2 Знайдіть координати точки, симетричної точці $A(1; 2; 3)$ відносно точки $M(a; b; c)$.

● Нехай $A_1(x; y; z)$ — шукана точка. Оскільки $M(a; b; c)$ — середина відрізка AA_1, то $a = \frac{x+1}{2}$, $b = \frac{y+2}{2}$, $c = \frac{z+3}{2}$.

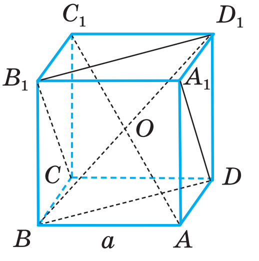
Звідки $x = 2a - 1$, $y = 2b - 2$, $z = 2c - 3$.

Отже, $A_1(2a - 1; 2b - 2; 2c - 3)$.

3 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

Доведіть рівність пірамід AA_1BD і $C_1CB_1D_1$.

● Нехай O — середина діагоналі AC_1 куба. У результаті симетрії відносно точки O вершини піраміди AA_1BD відображаються на вершини піраміди $C_1CD_1B_1$ (мал. 345). Ці піраміди симетричні відносно точки O, отже, рівні.



Мал. 345

Задачі та вправи

Виконайте усно

1050. Наведіть приклади центрально-симетричних і не центрально-симетричних фігур.

1051. Чи може центр симетрії фігури не належати самій фігурі?

1052. Чи правильно, що центрально-симетричний опуклий многогранник має парне число вершин, ребер, граней?

1053. Доведіть, що точки $A(1;\ 3;\ 5)$ і $B(-1;\ -3;\ -5)$ симетричні відносно початку координат.

1054. Чи симетричні точки A і A_1 відносно точки O, коли відомо, що $OA = OA_1$?

1055. При деякому відображенні сфера $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 1$ відобразилася на сферу $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$. Чи є дане відображення рухом? Чому?

1056. Чи симетричні будь-які дві точки простору відносно деякої третьої точки?

1057. У просторі дано дві паралельні прямі. Чи симетричні вони відносно точки? Скільки таких точок існує?

А

1058. Чи існують точки, прямі, площини, які при центральній симетрії відображаються на себе? Виконайте відповідні малюнки.

1059. Чи можуть два нерівні відрізки бути симетричними відносно деякої точки?

1060. Знайдіть координати точок, симетричних відносно початку координат точкам $A(1;\ -3;\ 2)$, $B(-5;\ 0;\ 2)$, $C(3;\ -1;\ 0)$, $D(0;\ 0;\ 0)$.

1061. Знайдіть координати точки M, відносно якої симетричні точки $A(-3;\ 4;\ 6)$ і $B(1;\ 2;\ -4)$. Знайдіть координати точок, симетричних точці M відносно точок A і B.

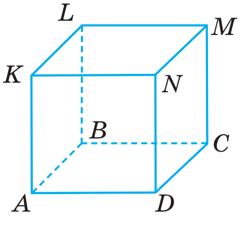
1062. Запишіть рівняння сфери, симетричної відносно точки $S(2;\ 3;\ -2)$ сфері $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 4$.

1063. Дано відрізок AB і точку O, яка не належить прямій AB. Побудуйте фігуру, симетричну даному відрізку відносно точки O. Доведіть, що побудований відрізок лежить у площині OAB.

1064. Побудуйте фігуру, симетричну даному $\triangle ABC$ відносно:
а) довільної точки O;
б) вершини C;
в) середини M сторони AB.

1065. Побудуйте трикутник, симетричний даному $\triangle ABC$ відносно точки O, яка не лежить у площині ABC. Доведіть, що даний і побудований трикутники рівні та лежать у паралельних площинах.

1066. $ABCDKLMN$ — куб. Побудуйте фігуру, симетричну йому відносно:
а) точки A;
б) середини ребра CM;
в) центра грані $CDNM$ (мал. 346).



Мал. 346

1067. Дано правильний тетраедр. Побудуйте тетраедр, симетричний даному відносно:
а) вершини тетраедра;
б) центра грані;
в) середини бічного ребра.

Б

1068. Точки A, B, C, D розміщені у просторі так, що A і C симетричні відносно B, а B і D симетричні відносно C. Чи можна через усі ці точки провести площину? А пряму?

1069. Чи можуть відрізки, які перетинаються або мимобіжні, бути симетричними відносно деякої точки?

1070. Чи є центрально-симетричною правильна призма:
а) трикутна;
б) чотирикутна;
в) п'ятикутна;
г) шестикутна?

1071. Чи має центр симетрії похила призма, основа якої — правильний шестикутник?

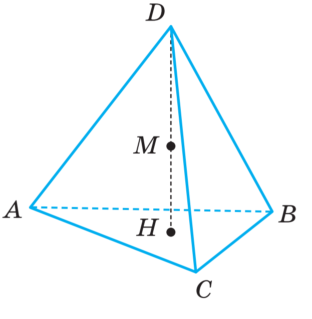
1072. Доведіть, що центр симетрії центрально-симетричного многогранника є центроїдом його вершин.

1073. Доведіть, що рух відображає пряму, перпендикулярну до площини, у пряму, перпендикулярну до площини.

1074. Доведіть, що рух відображає двогранний кут у рівний йому двогранний кут.

1075. Побудуйте паралелепіпед, симетричний прямокутному паралелепіпеду $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відносно точки M такої, що $B_1M : MD = 3 : 1$. Різними кольорами зафарбуйте об'єднання та переріз даного і побудованого паралелепіпедів.

1076. Побудуйте тетраедр, симетричний правильному тетраедру $ABCD$ відносно середини M його висоти, проведеної з вершини D (мал. 347). Різними кольорами зафарбуйте об'єднання та переріз даного і побудованого тетраедрів.



Мал. 347

1077. У кожному з двох тетраедрів три ребра мають довжину a і три — довжину b. Чи рівні ці тетраедри?

1078. Діагоналі паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перетинаються у точці O. Чи рівні піраміди $OABCD$ і $OA_1B_1C_1D_1$? А піраміди $OABCD$ і $OABB_1A_1$?

1079. Чи правильно, що діагональний переріз прямого паралелепіпеда розбиває його на дві рівні призми? А якщо паралелепіпед похилий?

1080. Напишіть рівняння площини, яка є симетричною площині $x - 2y + 3z - 2 = 0$ відносно початку координат.

1081. Напишіть рівняння прямої, симетричної прямій AB відносно початку координат, якщо $A(1; -2; 4)$, $B(2; -1; 3)$.

Задачі для повторення

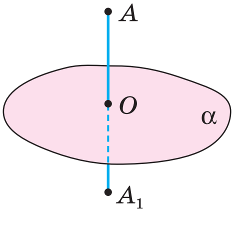
1082. Чи перпендикулярні площини:
а) $2x - 3y + 4z - 1 = 0$ і $3x - 2y - 4z - 5 = 0$;
б) $5x - 6y + z - 12 = 0$ і $2x + y - 4z = 0$?

1083. Дано тетраедр $ABCD$.
Доведіть, що має місце рівність

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=0.$$

1084. O — центр кола, описаного навколо $\triangle ABC$. Чи належить точка C площині, у якій лежать точки A, B, O?

§ 26 Симетрія відносно площини



Мал. 348

Точки A і A_1 називають **симетричними відносно площини**, якщо ця площина перпендикулярна до відрізка AA_1 і ділить його навпіл (мал. 348).

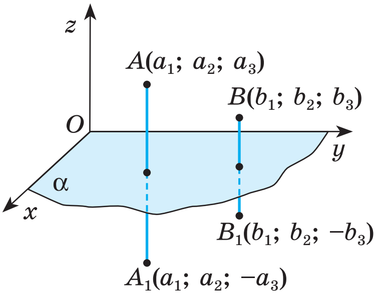
Перетворення, яке відображає кожну точку фігури на точку, симетричну їй відносно даної площини, називають **симетрією відносно площини**.

ТЕОРЕМА 35

Симетрія відносно площини — рух.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай симетрія відносно площини α відображає точки A і B на точки A_1 і B_1 (мал. 349). Доведемо, що $A_1B_1 = AB$.



Мал. 349

Введемо систему координат так, щоб координатна площина xy сумістилась з площиною α. Нехай координати даних точок $A(a_1;\ a_2;\ a_3)$ і $B(b_1;\ b_2;\ b_3)$. Симетричними їм відносно площини α будуть точки $A(a_1;\ a_2;\ -a_3)$ і $B(b_1;\ b_2;\ -b_3)$.

За теоремою 25

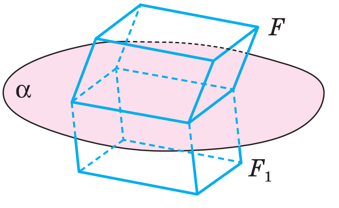
$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (-b_3 + a_3)^2}.$$

Як бачимо, $AB = A_1B_1$. А це й треба було довести. □

Отже, симетрія відносно площини — рух. Виходить, вона відображає відрізок на відрізок, що дорівнює йому, пряму — на пряму, площину — на площину, тіло — на тіло.

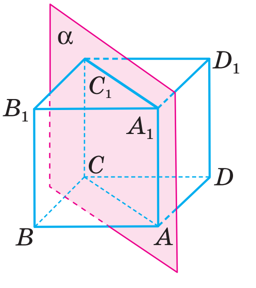
Чи можна сумістити (уявно) фігури F і F_1, якщо вони симетричні відносно деякої площини? Не завжди. Наприклад, якщо ребра a, b, c похилого паралелепіпеда F не рівні, то симетричний йому відносно площини α паралелепіпед F_1 сумістити з F неможливо (мал. 350). Говорять, що паралелепіпеди F і F_1 мають *різні орієнтації базисів*. Вони відрізняються, як правий і лівий черевики однієї пари, як права і ліва нарізки на болтах тощо.



Мал. 350

Симетрія відносно площини змінює орієнтацію базису.

Розглянемо куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і площину α, яка проходить через його ребра AA_1 і CC_1 (мал. 351). Симетрія відносно площини α точки B і B_1 відображає на D і D_1, ребро BB_1 — на ребро DD_1, грань ABB_1A_1 — на грань ADD_1A_1, кожну внутрішню точку X на внутрішню точку X_1 цього самого куба. Говорять, що симетрією відносно площини α даний куб відображається *на себе*.

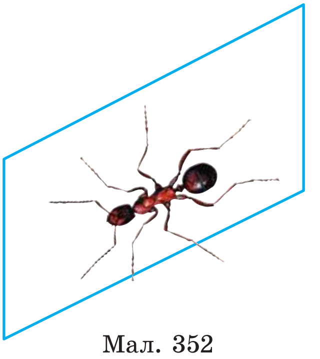


Мал. 351

■ Якщо деяка фігура симетрією відносно площини α відображається на себе, цю фігуру називають **симетричною відносно площини**, а α — **площиною симетрії** даної **фігури**.

Наприклад, правильна трикутна призма має чотири площини симетрії, а куля — безліч.

Симетричні відносно площини молотки, рубанки, стамески, лопати, викрутки, цеглини, труби, підшипники, автомобілі, літаки, ракети, кораблі і багато інших знарядь праці і механізмів, а також деякі овочі, комахи (мал. 352) тощо. Вчення про симетрію многогранників важливе для кристалографії. Виявляється, один і той самий кристал у різних напрямах має різні фізичні властивості, наприклад твердість. І виявляти ці напрями допомагають дослідження симетрії кристалів.

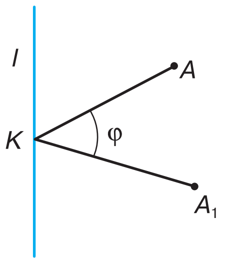

Мал. 352

Симетрію відносно площини називають ще відображенням у площині. Пригадайте, як відображаються фігури у дзеркалі чи на поверхні спокійної водойми: озера, річки тощо.

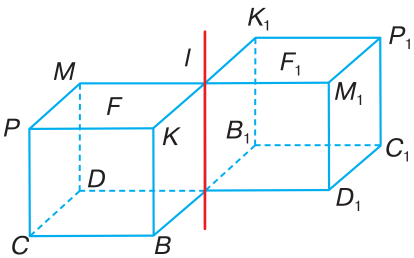
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Вивчаючи геометричні перетворення у 9 класі, ви ознайомилися з поворотом і його частинним випадком — симетрією відносно точки. Чи розглядають такі геометричні перетворення в просторі?

Нехай дано пряму l та дві точки A і A_1. Якщо перпендикуляри AK і A_1K, опущені на пряму l, рівні, мають спільну основу K та утворюють кут φ, то говорять, що *поворот навколо прямої l* на кут φ відображає точку A на A_1 (мал. 353). Кут φ може бути додатним або від'ємним.



Мал. 353



Мал. 354

Якщо кожну точку деякої фігури F повернути навколо прямої l на той самий кут φ, дістанемо нову фігуру F_1. Говорять, що поворот навколо прямої l на кут φ відображає фігуру F на F_1. Наприклад, якщо куб F повернути на кут $180°$ навколо прямої l, яка проходить через його ребро, дістанемо новий куб F_1 (мал. 354). Поворот навколо прямої l на кут $180°$ відображає куб F на F_1. Цей самий поворот відображає вершину C на C_1, ребро CP на ребро C_1P_1, грань $BCPK$ на грань $B_1C_1P_1K_1$ тощо.

Можна довести, що поворот навколо прямої є рухом. А це означає, що поворот пряму відображає на пряму, промінь — на промінь, відрізок — на відрізок, що дорівнює даному. Поворот також відображає трикутник на трикутник, що дорівнює даному. Можна довести, що поворот площину відображає на площину, тетраедр — на тетраедр тощо.

У стереометрії (як і в планіметрії) окремо розглядають поворот на $180°$.

Поворот навколо прямої l на кут $180°$ називають **симетрією відносно прямої** l.

Дві точки A і A_1 простору називають **симетричними відносно прямої** l, якщо ця пряма перпендикулярна до відрізка AA_1 і проходить через його середину.

Наприклад, куби F і F_1, зображені на малюнку 354, симетричні відносно прямої l. Оскільки поворот є рухом, а симетрія відносно прямої — вид повороту, то і симетрія відносно прямої — рух. Вона пряму відображає на пряму, площину — на площину, трикутник — на трикутник, що дорівнює йому.

▼

Якщо поворотом навколо деякої прямої на кут 180° фігура суміщається із собою, то цю пряму називають **віссю симетрії** *фігури.*

Якщо поворотом навколо деякої прямої на кут 360° : n, де натуральне число $n \geq 2$, фігура суміщається із собою, то цю пряму називають *віссю симетрії* n*-го порядку*. Наприклад, правильна п'ятикутна піраміда має вісь симетрії п'ятого порядку. Сфера має нескінченно багато осей симетрії будь-якого порядку. Зверніть увагу: вісь симетрії n-го порядку не завжди є віссю симетрії даної фігури.

З поворотами матеріальних тіл часто мають справу токарі, фрезерувальники, свердлильники, бурильники та ін. Теоретичні питання, пов'язані з поворотами фігур у просторі, важливі для спеціалістів, які створюють турбіни, електромотори, відцентрові насоси, різноманітні центрифуги та особливо — сучасні роторні та роторно-конвеєрні машини.

На практиці повороти фігур у просторі застосовують у каруселях (мал. 355), флюгерах (мал. 356), точильних верстатах (мал. 357), автомобілях тощо.

Мал. 355

Мал. 356

Мал. 357

Наведіть приклади застосування симетрії відносно прямої l у природі, побуті, культурі, техніці тощо. Чи є навколо вас предмети, що мають вісь симетрії?

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Які дві точки називають симетричними відносно площини?
2. Які дві фігури називають симетричними відносно площини?
3. Що називають симетрією відносно площини у просторі? Які її властивості?
4. Яку фігуру називають симетричною відносно площини? Наведіть приклади.
5. Які властивості має фігура, симетрична відносно площини?

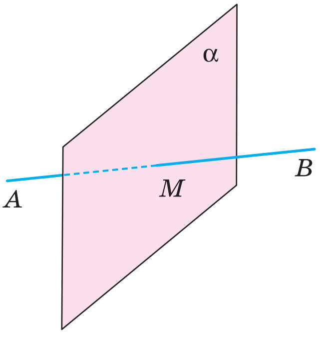
Виконаємо разом

1 Чи правильно, що які б не були площини α і β, вони симетричні відносно деякої площини ω?

- Розглянемо два випадки.

Якщо дані площини α і β перетинаються, вони симетричні, наприклад, відносно площини ω, яка проходить через пряму їхнього перетину та ділить кут між даними площинами навпіл. Якщо площини α і β паралельні, вони симетричні відносно площини ω, рівновіддаленої від α і β.

Сформульоване твердження правильне.



Мал. 358

2 Напишіть рівняння площини, відносно якої симетричні точки $A(-1; 3; -2)$ і $B(3; 1; -4)$.

- Якщо точки A і B симетричні відносно площини, то ця площина проходить через середину M відрізка AB перпендикулярно до нього (мал. 358).

Оскільки координати середини відрізка $(1; 2; -3)$, а координати вектора $\overrightarrow{AB} = (4; -2; -2)$, то рівняння площини матиме вигляд:

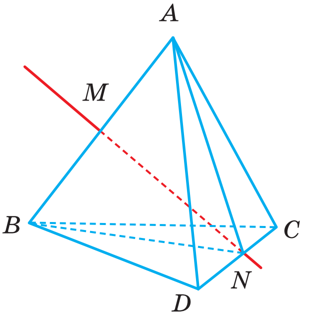
$$4(x - 1) - 2(y - 2) - 2(z + 3) = 0$$

$$\text{або } 4x - 2y - 2z - 6 = 0,$$

звідки $2x - y - z - 3 = 0$. Отже, точки $A(-1; 3; -2)$ і $B(3; 1; -4)$ симетричні відносно площини $2x - y - z - 3 = 0$.

3 Доведіть, що пряма, яка містить середини протилежних ребер правильного тетраедра, є його віссю симетрії.

- Нехай M і N — середини ребер AB і CD правильного тетраедра $ABCD$ (мал. 359). Тоді $\triangle ANB$ — рівнобедрений ($AN = BN$), тому $MN \perp AB$. Аналогічно, $\triangle DMC$ — рівнобедрений, тому $MN \perp DC$. Отже, пряма l, яка проходить через точки M і N, є спільним серединним перпендикуляром для відрізків AB і CD. Тоді при симетрії відносно прямої l відрізок AB відображається на відрізок BA, CD — на DC, AC — на BD (бо точка A переходить у точку B, а точка C — у D) і BC відображається на AD.



Мал. 359

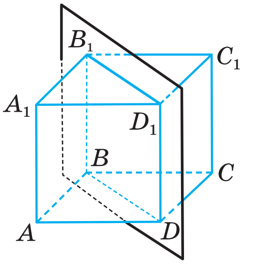
Це означає, що симетрія відносно прямої відображає вершини, ребра і грані тетраедра $ABCD$ на вершини, ребра і грані цього самого тетраедра, тобто тетраедр $ABCD$ при симетрії відносно прямої відображається на себе. Отже, пряма є віссю симетрії цього тетраедра.

Задачі та вправи

Виконайте усно

1085. Укажіть площини симетрії (якщо вони існують) таких фігур: прямої, відрізка, променя, правильного трикутника, квадрата, ромба, прямокутника.

1086. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 360). Що є образом при симетрії відносно площини BDD_1B_1:
а) точок A, B, C_1;
б) відрізків AA_1, BB_1, BD_1, AC_1;
в) $\triangle AB_1C$, $\triangle BC_1D$;
г) квадрата ABB_1A_1?



Мал. 360

1087. Знайдіть координати точок, симетричних точці $M(3;\ 1;\ 2)$ відносно координатних площин.

1088. Два однакові кола лежать в одній площині. Чи будуть вони симетричні відносно деякої площини? Якщо так, то що це за площина?

1089. Скільки площин симетрії має сфера? Як вони розміщені?

1090. Чи має площини симетрії фігура, яка складається з двох сфер, які мають зовнішній дотик, якщо радіуси сфер:
а) однакові;
б) різні?

А

1091. Накресліть фігуру, симетричну даному відрізку AB відносно площини α. Розгляньте усі можливі випадки.

1092. Площина β не перетинає трикутник ABC. Накресліть фігуру, симетричну трикутнику ABC відносно площини β.

1093. Знайдіть координати точок, симетричних точці $A(a_1;\ a_2;\ a_3)$ відносно координатних площин.

1094. Відрізки AB і A_1B_1 симетричні відносно деякої площини. Чи можуть вони належати мимобіжним прямим? А прямим, що перетинаються?

1095. Чи можуть бути симетричними відносно деякої площини α два відрізки однієї прямої? Як розміщена площина α відносно цієї прямої?

1096. Точки A і B симетричні відносно площини β. Доведіть, що коли $M \in \beta$, то $MA = MB$.

1097. Відрізок AB перетинає площину ω у точці O. Відрізок OB_1 — проекція відрізка OB на площину ω. Побудуйте фігуру, симетричну відрізку AB відносно площини ω.

1098. Пряма AB нахилена до деякої площини під кутом φ і симетрична відносно цієї площини прямій A_1B. Знайдіть кут між прямими AB і A_1B.

1099. Дано зображення тетраедра $ABCD$ і його висоти DH. Побудуйте зображення фігури, симетричної йому відносно площини ABC.

1100. Скільки площин симетрії має правильна чотирикутна призма, відмінна від куба?

1101. Скільки площин симетрії має правильна трикутна піраміда, якщо її бічна грань не дорівнює основі?

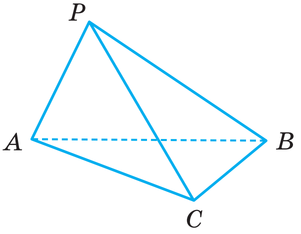
1102. Скільки площин симетрії має правильна чотирикутна піраміда? Намалюйте їх.

1103. Скільки площин симетрії має куб? Зробіть відповідний малюнок.

1104. Скільки площин симетрії має правильний тетраедр? Зробіть відповідний малюнок.

1105. Доведіть, що точки $A(2; -1; 4)$ і $B(2; 1; 4)$ симетричні відносно площини xz.

1106. Відносно яких координатних площин симетричні точки:
а) $A(4; 2; -3)$, $B(-4; 2; -3)$;
б) $M(-3; 2; 6)$, $N(-3; 2; -6)$;
в) $P(7; -2; -4)$, $K(7; 2; -4)$?



Мал. 361

1107. Скільки площин симетрії має тетраедр, одне ребро якого вдвічі коротше від кожного з решти ребер (мал. 361)?

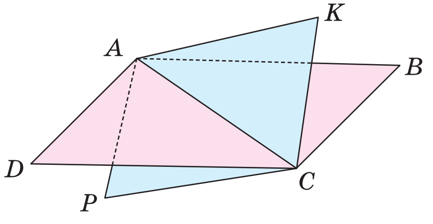
1108. Скільки площин симетрії має пряма призма, в основі якої — рівнобічна трапеція? А якщо трапеція не рівнобічна?

1109. Скільки площин симетрії має правильна піраміда, в основі якої лежить многокутник з:
а) парним числом сторін;
б) непарним числом сторін?

1110. Знайдіть координати точки, симетричної точці $A(2; 5; 0)$ відносно площини $y = x$.

1111. Дано точки $A(2; -4; 3)$ і $B(-6; 2; 1)$. Напишіть рівняння площини симетрії даних точок.

Практичне завдання



Мал. 362

1112. З цупкого паперу зробіть фігуру, яка складається з двох рівних квадратів, що перетинаються по їхній спільній діагоналі (мал. 362). Установіть дослідним шляхом, чи має ця фігура:
а) центр симетрії;
б) площину симетрії;
в) вісь симетрії.
Визначте кількість вказаних об'єктів у кожному випадку (за умови, що такі існують).

Б

1113. Дано сферу $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 30$. Напишіть рівняння площини, дотичної до сфери в точці $A(1; -1; 2)$, і рівняння сфери, симетричної даній відносно цієї площини.

1114. У кубі дві грані зафарбували іншим кольором. Скільки площин симетрії має такий куб? Розгляньте всі можливі випадки.

1115. Точки B і C симетричні точці A відносно перпендикулярних площин β і γ, що перетинаються по прямій a. Знайдіть відстань від A до прямої a, якщо $BC = 6$ м.

1116. Чи правильно, що які б не були прямі a і b, вони симетричні відносно деякої площини α?

1117. Побудуйте тетраедр, симетричний тетраедру $ABCD$ відносно площини, яка проходить через середини ребер DA, DB, DC. Різними кольорами зафарбуйте об'єднання та переріз даного і побудованого тетраедрів.

1118. Побудуйте піраміду, симетричну правильній чотирикутній піраміді відносно площини, яка проходить через середину висоти піраміди, перпендикулярно до неї.

1119. Укажіть координати точки, у яку відобразиться точка $A(0; 5; 0)$ при повороті навколо осі Oz за рухом годинникової стрілки на кут:

а) $90°$; в) $270°$;
б) $180°$; г) $360°$.

1120. Знайдіть координати точки, на яку відображається точка $A(1; 2; 0)$ поворотом навколо осі x на кут $90°$.

1121. Укажіть координати точки, симетричної точці $M(1; 2; 3)$ відносно:

а) осі Ox; в) осі Oz.
б) осі Oy;

1122. Знайдіть координати кінців відрізка, утвореного в результаті повороту навколо осі y на кут $90°$ відрізка з кінцями $A(0; 3; 4)$ і $B(0; 6; 0)$.

1123. Знайдіть координати вершин трикутника, утвореного поворотом трикутника з вершинами $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C(0; 0; a)$ навколо осі z на кут $90°$.

1124. Скільки осей симетрії має куб? А прямокутний паралелепіпед, відмінний від куба? Зобразіть їх.

1125. Доведіть, що пряма, яка містить точки перетину діагоналей протилежних граней прямокутного паралелепіпеда, є його віссю симетрії.

1126. Доведіть, що точки $A(2; -3; 1)$ і $B(2; 3; -1)$ симетричні відносно осі Ox. Укажіть координати точок, симетричних точкам A і B відносно осі:

а) Oy; б) Oz.

1127. Знайдіть координати точки, симетричної точці $A(1; -2; 3)$ відносно площини $2x - y + 3z + 1 = 0$.

1128. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(3; -1; 2)$ і $B(1; 2; 4)$, та прямої, симетричної даній відносно площини:

а) xy; б) yz.

1129. Точки A і B лежать по різні боки від площини α. Знайдіть у площині α точку, різниця відстаней від якої до точок A і B найбільша.

1130. Точки A і B не лежать у площині α та розміщені в одному півпросторі від неї. Знайдіть у площині α таку точку P, що сума відстаней $PA + PB$ буде найменшою.

Практичне завдання

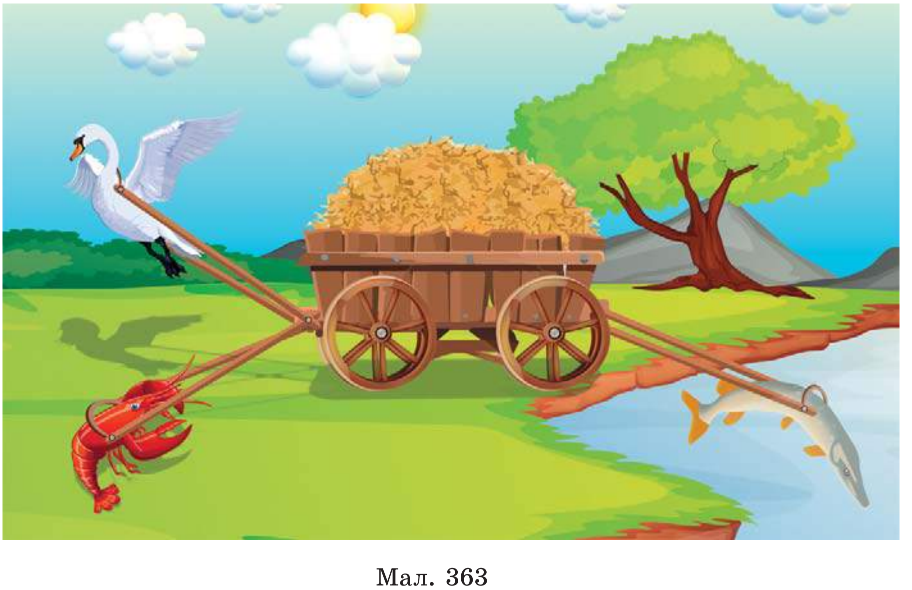
1131. Зробіть дротяні моделі ламаних з трьох рівних і попарно перпендикулярних ланок і розмістіть їх так, щоб вони виявилися симетричними відносно:
а) точки;
б) площини.

Задачі для повторення

1132. Побудуйте тетраедр, симетричний даному відносно точки, яка лежить:
а) зовні тетраедра;
б) всередині тетраедра.

1133. Знайдіть вершини трикутника, симетричного трикутнику ABC відносно точки $M(1; -2; 4)$, якщо $A(4; 0; 1)$, $B(4; 4; 1)$, $C(-1; 2; 0)$.

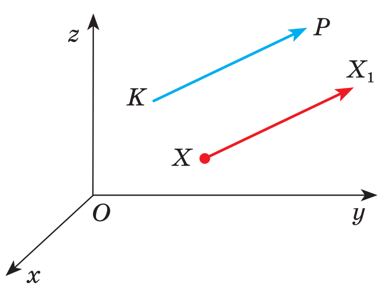
1134. Згадайте байку Л. Глібова «Лебідь, щука і рак» (мал. 363). Змоделюйте ситуацію, що розглядається в ній, за допомогою векторів. Які можливі варіанти розташування цих векторів і співвідношень між ними? Зробіть висновки.



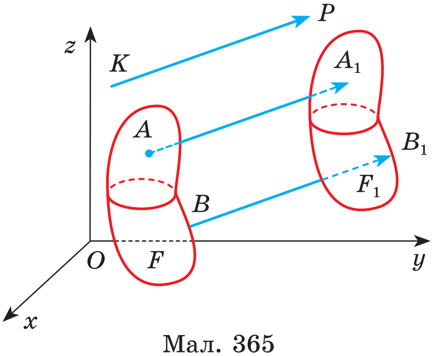
Мал. 363

§ 27 Паралельне перенесення

Одним із прикладів руху є **паралельне перенесення**. Нехай $\overrightarrow{KP}$ — який-небудь вектор, а X — довільна точка простору (мал. 364). Якщо точка X_1 така, що $\overrightarrow{XX_1} = \overrightarrow{KP}$, то говорять, що паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{KP}$ відображає точку X на X_1. Якщо виконати паралельне перенесення кожної точки деякої фігури F на один і той самий вектор $\overrightarrow{KP}$, дістанемо нову фігуру F_1. Говорять, що паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{KP}$ відображає фігуру F на F_1 (мал. 365). У результаті паралельного перенесення всі точки даної фігури переносяться в одному напрямі на однакові відстані.



Мал. 364



Мал. 365

ТЕОРЕМА 36

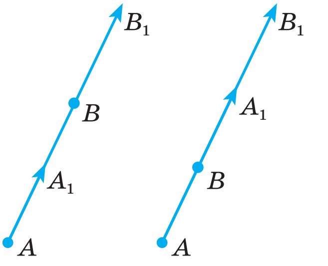
Паралельне перенесення — рух.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай при паралельному перенесенні точки A і B відображаються відповідно на A_1 і B_1. Доведемо, що $A_1B_1 = AB$.

Можливі два випадки. Якщо точки A, B, A_1, B_1 не лежать на одній прямій, то ABB_1A_1 — паралелограм (мал. 365) і, отже, $A_1B_1 = AB$. Якщо точки A, B, A_1, B_1 лежать на одній прямій (мал. 366), то з рівності $AA_1 = BB_1$ випливає:

$$A_1B_1 = AB_1 - AA_1 = AB_1 - BB_1 = AB.$$



Мал. 366

Отже, якщо паралельне перенесення відображає точки A і B на A_1 і B_1, то завжди $A_1B_1 = AB$. Як бачимо, паралельне перенесення зберігає відстані між точками, тобто є рухом. □

З теорем 31, 32 і 36 випливає, що паралельне перенесення пряму відображає на пряму, відрізок — на відрізок, що дорівнює йому, трикутник — на трикутник, що дорівнює йому, тощо.

Нехай при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p} = (a;\ b;\ c)$ точка $A(x;\ y;\ z)$ переходить у точку $A'(x';\ y';\ z')$. Тоді $\overrightarrow{AA'} = \vec{p}$.

Оскільки $\overrightarrow{AA'} = (x' - x;\ y' - y;\ z' - z)$, то з умови рівності векторів отримаємо систему рівнянь

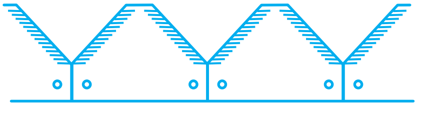
$$\begin{cases} x' - x = a, \\ y' - y = b, \\ z' - z = c, \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \\ z' = z + c. \end{cases}$$

Ці співвідношення називають **формулами паралельного перенесення** простору на вектор $\vec{p} = (a;\ b;\ c)$.

Приклад. Знайдіть координати образу точки $A(-1;\ 3;\ -5)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p} = (1;\ 2;\ 6)$.

Розв'язання. Користуючись встановленими співвідношеннями, отримаємо:

$$x' = -1 + 1 = 0;\ y' = 3 + 2 = 5;$$
$$z' = -5 + 6 = 1.$$



Мал. 367

Отже, $A'(0;\ 5;\ 1)$.

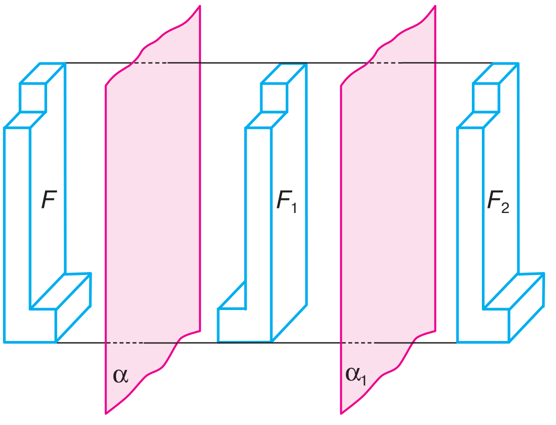
Паралельне перенесення, розглядуване в геометрії, — абстрактна модель поступального руху фізичного тіла. Кожний сегмент ножа зернозбирального комбайна (мал. 367) можна дістати в результаті паралельного перенесення суміжного сегмента.

Те саме можна сказати про окремі секції розкладеної на площині гусениці трактора, застібки «блискавка», про цеглини у стіні, про окремі поверхи сучасного багатоповерхового будинку тощо.

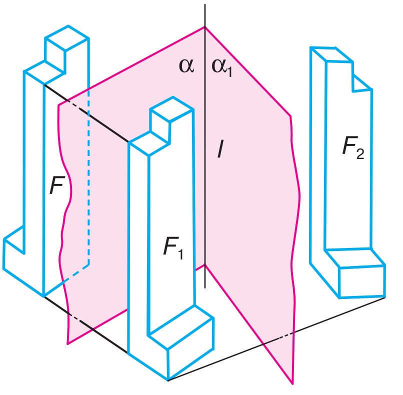
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Досі ми розглядали окремі види рухів. Заслуговують на увагу і їхні композиції — послідовні виконання одного геометричного перетворення за іншим. Наприклад, якщо симетрія відносно площини α відображає дану фігуру F на фігуру F_1, а симетрія відносно площини α_1 — фігуру F_1 на F_2, то відображення фігури F на F_2 називають **композицією двох симетрій** відносно даних площин. Якщо площини α і α_1 паралельні, то ця композиція — паралельне перенесення, яке відображає фігуру F на F_2 (мал. 368). Якщо площини α і α_1 перетинаються по прямій l, то композиція таких двох симетрій є поворотом фігури F навколо прямої l (мал. 369).

Зокрема, якщо $\alpha \perp \alpha_1$, композиція двох розглядуваних симетрій — поворот навколо прямої l на $180°$, тобто симетрія відносно осі l.



Мал. 368



Мал. 369

Деякі композиції мають спеціальні назви. Композицію повороту навколо прямої та паралельного перенесення вздовж цієї прямої називають **гвинтовим рухом**. Композицію повороту навколо прямої та симетрії відносно площини, перпендикулярної до цієї прямої, називають **дзеркальним поворотом**.

Розрізняють рухи *першого* і *другого роду.* Рухи, які зберігають орієнтації базисів, називають **рухами першого роду**. До них належать паралельне перенесення та поворот навколо прямої. Рухи першого роду можуть бути реалізовані неперервним переміщенням фігур у просторі. Композиція будь-якого числа рухів першого роду — рух першого роду.

Рухи, які змінюють орієнтації базисів, називають **рухами другого роду**. До них належить симетрія відносно точки і відносно площини. Оскільки кожний рух другого роду змінює орієнтацію фігури, то композиція парного числа таких рухів — рух першого роду, а композиція непарного числа рухів другого роду — рух другого роду.

Будь-який рух простору першого роду є композицією двох або чотирьох симетрій відносно площини; рух простору другого роду є або симетрією відносно площини, або композицією трьох таких симетрій.

Зауваження. Зверніть увагу на те, що симетрія відносно точки на площині — рух першого роду, а в просторі — рух другого роду. Симетрія відносно прямої на площині — рух другого роду, а в просторі — рух першого роду.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Яке перетворення називають паралельним перенесенням у просторі?
2. Які властивості має паралельне перенесення фігур у просторі?
3. Як знайти координати образу точки $A(x;\ y;\ z)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p}=(a;\ b;\ c)$?

Виконаємо разом

1 Є два кола однакових радіусів із центрами в точках O_1 і O_2. При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ точка O_1 відображається на точку O_2. Чи правильно, що при цьому паралельному перенесенні коло з центром O_2 є образом кола з центром O_1?

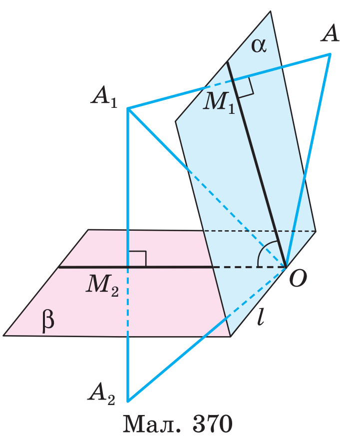
- З того, що точка O_1 при паралельному перенесенні відображається на точку O_2, не випливає, що кожна точка першого кола відображається на точку другого кола. Це буде тільки тоді, коли ці кола лежать в одній площині або у паралельних площинах. Отже, ні, не завжди.

2 Напишіть рівняння площини, яка є образом площини $2x + y - 3z + 2 = 0$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p} = (1; -2; 3)$.

- У заданій площині виберемо довільну точку, наприклад точку $M(1; 2; 2)$. Образом точки M при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p} = (1; -2; 3)$ буде точка $M'(2; 0; 5)$. Оскільки при паралельному перенесенні площина відображається на паралельну площину, то потрібно записати рівняння площини, яка проходить через точку M' паралельно площині $2x + y - 3z + 2 = 0$, тобто $2(x - 2) + 1(y - 0) - 3(z - 5) = 0$, або $2x + y - 3z + 11 = 0$.

3 Доведіть, що композиція двох симетрій відносно двох площин, які перетинаються, є поворотом. Знайдіть вісь і кут цього повороту.

- Нехай дано площини α і β, які перетинаються по прямій l, а кут між ними дорівнює φ. A — деяка точка простору, яка при симетрії відносно площини α відображається у точку A_1, яка при симетрії відносно площини β відображається у точку A_2 (мал. 370).
Уявіть, що через прямі AA_1 і A_1A_2 проведено площину γ. Вона перпендикулярна до l (чому?). Нехай O — точка перетину прямої l і площини γ.



Мал. 370

Розглянемо $\triangle AOA_1$. Оскільки точки A і A_1 симетричні відносно площини α, то $AM_1 = M_1A_1$ і $OM_1 \perp AA_1$. Отже, $\triangle AOA_1$ — рівнобедрений і $OA = OA_1$. Аналогічно $OA_1 = OA_2$. З чого випливає, що $OA = OA_2$. А це означає, що відобразити точку A в точку A_2 можна поворотом навколо осі l.
Визначимо кут повороту.
Нехай $\angle AOM_1 = \angle M_1OA_1 = \varphi_1$ і $\angle A_1OM_2 = \angle M_2OA_2 = \varphi_2$.
Тоді

$$\angle AOA_2 = 2\varphi_1 + 2\varphi_2 = 2(\varphi_1 + \varphi_2) = 2\varphi.$$

Отже, композицією двох симетрій відносно площин α і β, які перетинаються по прямій l під кутом φ, є поворот навколо прямої l на кут 2φ.

Задачі та вправи

Виконайте усно

1135. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 371).

а) Знайдіть образ відрізка:

1) AA_1 при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{D_1C_1}$;

2) AD при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BB_1}$; $\overrightarrow{DC_1}$.

б) При якому паралельному перенесенні квадрат:

1) $ABCD$ є образом квадрата $A_1B_1C_1D_1$;

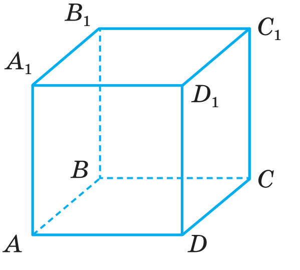
2) AA_1B_1B є образом квадрата DD_1C_1C?

в) Чи існує паралельне перенесення, при якому образом:

1) відрізка A_1C_1 є відрізок AC;

2) відрізка AB_1 є відрізок CD_1;

3) квадрата AA_1B_1B є квадрат BB_1C_1C?



Мал. 371

1136. Дано два рівні трикутники. Чи завжди існує паралельне перенесення, яке один із трикутників відображає на другий?

1137. Як мають бути розміщені дві рівні фігури, одну з яких можна отримати з другої паралельним перенесенням, якщо цими фігурами є: а) два кола; б) два квадрати; в) дві сфери; г) два куби?

1138. Відрізок AB паралельним перенесенням відображається на відрізок A_1B_1. Чи рівні їхні проекції на одну й ту саму площину? Чому?

А

1139. При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ точка $M(5; -1; 3)$ відобразилася на точку $N(2; 4; -1)$.
Знайдіть координати вектора $\vec{a}$.

1140. Знайдіть координати образу точки $A(-4; 10; 2)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p} = (1; 3; -2)$.

1141. Знайдіть координати точки, у яку переходить точка $X(2; 3; -1)$ у результаті паралельного перенесення, яке відображає початок координат на точку $A(1; 1; 2)$.

1142. Знайдіть координати точки, у яку переходить точка $M(3; -2; 1)$ у результаті паралельного перенесення на $\overrightarrow{OM}$, якщо O — початок координат.

1143. Дано точки $K(1; 0; 0)$, $P(-1; 3; 0)$ і трикутник з вершинами $A(2; 2; 2)$, $B(-1, 0; 3)$, $C(0; 0; 1)$. Знайдіть координати вершин трикутника, який утворився в результаті паралельного перенесення на $\overrightarrow{KP}$ трикутника ABC.

1144. Чи існує паралельне перенесення, яке точку A відображає на точку B, а точку M — на точку N, якщо:
а) $A(1; 3; -2)$, $B(3; -2; 1)$, $M(4; 6; 2)$, $N(6; 1; 5)$;
б) $A(5; 3; -2)$, $B(4; 8; -3)$, $M(1; 3; -9)$, $N(0; -2; -10)$?

1145. Шестикутник F_1 — проекція куба F. Чи можна вважати, що фігуру F_1 дістали в результаті перетворення фігури F?

1146. Чи можна паралельним перенесенням відобразити одну з мимобіжних прямих на іншу?

1147. Скількома паралельними перенесеннями можна відобразити одну з двох паралельних прямих на іншу?

1148. Чи існує паралельне перенесення, яке відображає сторону:
а) прямокутника на протилежну їй сторону;
б) рівностороннього трикутника на іншу його сторону?

1149. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні та лежать у паралельних площинах. Чи можна один із них паралельним перенесенням відобразити на інший?

1150. Доведіть, що при паралельному перенесенні паралелограм переходить у рівний йому паралелограм.

1151. При паралельному перенесенні тетраедр $A_1B_1C_1D_1$ є образом тетраедра $ABCD$. Доведіть, що висоти DO і D_1O_1 цих тетраедрів рівні.

1152. Побудуйте фігуру, на яку відображається тетраедр $PABC$ паралельним перенесенням на $\overrightarrow{AB}$.

1153. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте зображення фігури, у яку переходить цей куб у результаті паралельного перенесення на $\overrightarrow{AB}$.

1154. При паралельному перенесенні точка $A(1; -2; 3)$ переходить у точку $B(2; 4; -1)$. У яку точку перейде точка M, симетрична точці A відносно: а) початку координат; б) площини yz; в) точки $P(-1; 4; 1)$; г) площини xy?

1155. Напишіть рівняння площини, яка є образом площини $x + y - 2z + 4 = 0$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{s} = (2; -1; 3)$.

Б

1156. Доведіть, що при паралельному перенесенні прямі, паралельні напряму переносу, переходять самі в себе.

1157. Доведіть, що при паралельному перенесенні площини, паралельні напряму переносу, переходять самі в себе.

1158. Доведіть, що коли паралельне перенесення відображає пряму a на b, то ці прямі паралельні або збігаються.

1159. Доведіть, що коли паралельне перенесення відображає площину α на β, то ці площини паралельні або збігаються.

1160. Пряма a нахилена до площини α під кутом 30°. Під яким кутом нахилена до площини α пряма b, якщо вона паралельним перенесенням відображається на пряму a?

1161. Тетраедр $ABCD$ паралельним перенесенням відображається на тетраедр $A_1B_1C_1D_1$. Чи випливає з цього, що:
а) їхні грані ABC і $A_1B_1C_1$ рівні;
б) існує паралельне перенесення, яке відображає тетраедр $A_1B_1C_1D_1$ на $ABCD$?

1162. Одне паралельне перенесення відображає відрізок AB на A_1B_1, а друге — відрізок A_1B_1 на A_2B_2. Чи існує паралельне перенесення, яке відображає відрізок AB на A_2B_2?

1163. Дано точку $M(1;\ 2;\ 3)$. Знайдіть координати точки, у яку відобразиться точка M при композиції таких рухів:
а) симетрій відносно початку координат і площини xy;
б) симетрій відносно площин xy і yz;
в) симетрії відносно осі Ox і паралельного перенесення на вектор $\vec{a} = (1;\ 1;\ 1)$.

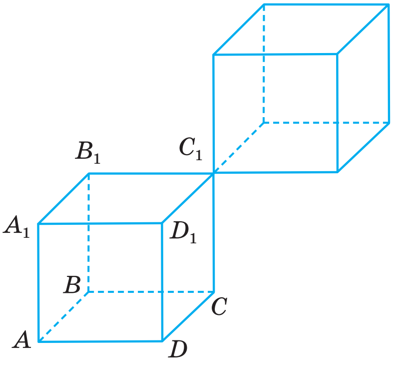
1164. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
$M \in AA_1$, $AM : MA_1 = 1 : 2$.
Площина α проходить через точку M перпендикулярно до AA_1. Побудуйте образ цього паралелепіпеда при композиції паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{AC}$ та симетрії відносно площини α.

1165. Дано точку $A(1;\ -2;\ 5)$. Знайдіть координати образу цієї точки при композиції центральної симетрії відносно точки M і паралельного перенесення на вектор $\vec{s} = (-1;\ 2;\ 4)$, якщо: а) $M(0;\ 0;\ 0)$; б) $M(3;\ 4;\ -1)$.

1166. Дано сферу $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z = 9$. Напишіть рівняння сфери, яка є образом даної при композиції центральної симетрії відносно початку координат і симетрій відносно площин xy та xz.

1167. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралельним перенесенням на $\overrightarrow{AC_1}$ відображається на інший куб (мал. 372). Знайдіть найбільшу відстань між точками цих двох кубів, якщо $AB = a$.

1168. Точка M — середина висоти DO правильного тетраедра $ABCD$.
Побудуйте тетраедр, який є образом даного тетраедра при паралельному перенесенні на вектор:
а) $\overrightarrow{AO}$; б) $\overrightarrow{OM}$; в) $\overrightarrow{AM}$.



Мал. 372

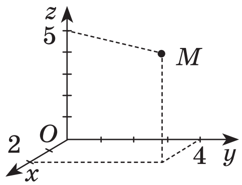
1169. Задайте напрям паралельного перенесення, щоб перетином куба та його образу були:
а) квадрат;
б) точка;
в) прямокутний паралелепіпед;
г) куб.

1170. Напишіть рівняння прямої, яка є образом прямої AB при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p} = (1;\ -1;\ 2)$, якщо $A(3;\ -2;\ 1)$, $B(1;\ 4;\ -2)$.

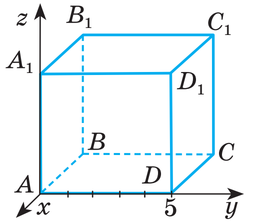
Задачі за готовими малюнками

А | **Б**

1



Знайдіть відстань від точки M до: а) $O(0;\ 0;\ 0)$; б) координатних площин; в) координатних осей

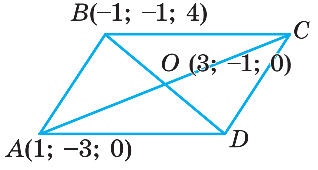


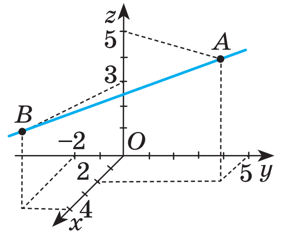
Знайдіть координати вершин куба

2

$ABCD$ — паралелограм

Знайдіть: а) координати точок C і D; б) $\angle COD$; в) S_{ABCD}



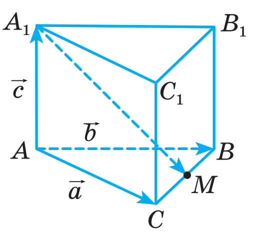


Знайдіть довжину відрізка AB

3

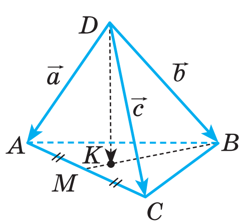
$CM = MB$

Розкладіть $\overrightarrow{A_1M}$ за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$



$MK : KB = 1 : 3$

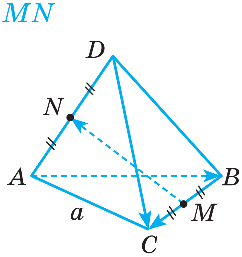
Розкладіть вектор $\overrightarrow{DK}$ за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$



4

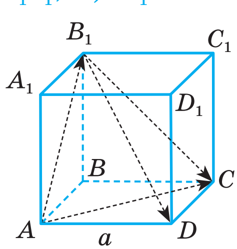
$ABCD$ — правильний тетраедр

Знайдіть: а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{MN}$



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб

Знайдіть: а) $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}$; в) $\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{AC}$

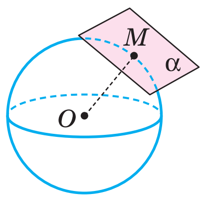


5

А

Площина α — дотична до сфери в точці $M(2; -1; 4)$; $O(1; -2; 3)$

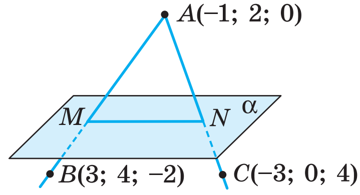
Напишіть рівняння α



Б

$AM = MB$, $AN = NC$, $(ABC) \perp \alpha$

Напишіть рівняння α

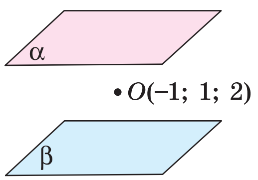


6

А

α і β симетричні відносно точки O; α: $x - 2y + 3z - 4 = 0$

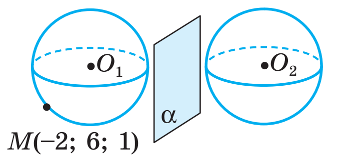
Напишіть рівняння β



Б

Сфери O_1 і O_2 симетричні відносно α: $O_1(1; 3; -2)$, $O_2(5; -1; 4)$

Напишіть рівняння
а) сфери O_1 і O_2; б) площини α

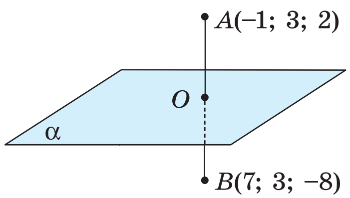


7

А

$A(-1; 3; 2)$ $B(7; 3; -8)$
$AO = OB$, $AB \perp \alpha$

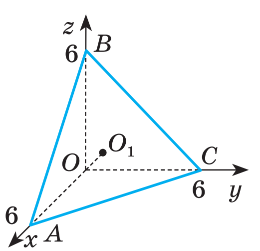
Запишіть рівняння α



Б

OO_1 — висота тетраедра $OABC$

Знайдіть OO_1

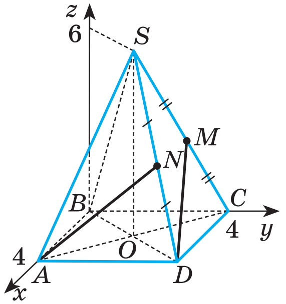


8

А

$SABCD$ — правильна піраміда

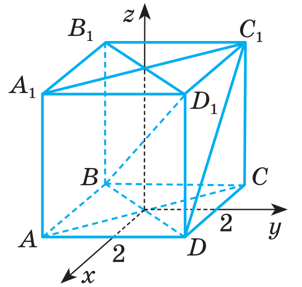
Знайдіть кут між AN і DM



Б

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб

Знайдіть кут і відстань між BD_1 і DC_1



Тестові завдання 4

1	Дано точки $A(0; -3; 2)$ і $B(4; 0; -2)$. Середина відрізка AB належить:	а) осі Ox; б) осі Oy; в) осі Oz; г) площині xy.
2	Знайдіть відстань від точки $A(3; 4; -3)$ до осі Oz.	а) 3; б) 5; в) $2\sqrt{3}$; г) $\sqrt{34}$.
3	При якому значенні m колінеарні вектори $\vec{a}=(m^2; 3; -4m-3)$ і $\vec{b}=(3; 4; 2m+7)$?	а) 1,5; б) −1,5; в) −1,5 або 1,5; г) −0,5 або 0,5.
4	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $AB = 1$. Обчисліть $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BB_1}$.	а) 1; б) 0; в) −1; г) 0,5.
5	Знайдіть координати одиничного вектора, співнапрямленого з вектором $\vec{m}=(2; -1; 2)$.	а) $\left(1; -\frac{1}{2}; 1\right)$; б) $\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; в) $\left(-1; -\frac{1}{2}; -1\right)$; г) $\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.
6	При яких значеннях p кут між векторами $\vec{a}=(1; 1; 0)$ і $\vec{b}=(0; 4; p)$ дорівнює $60°$?	а) 4; б) −4 або 4; в) 16; г) −16 або 16.
7	Укажіть рівняння сфери з центром у точці $(0; -1; 0)$, яка дотикається до площини $y = 2$.	а) $x^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 4$; б) $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$; в) $x^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9$; г) $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3$.
8	Яка з точок симетрична точці $M(-1; 2; -4)$ відносно площини yz?	а) $(1; -2; 4)$; б) $(1; 2; -4)$; в) $(-1; -2; -4)$; г) $(-1; 2; 4)$.
9	Яка з площин симетрична відносно початку координат площині $x + y - 2z + 5 = 0$?	а) $-x + y - 2z + 5 = 0$; б) $x + y - 2z - 5 = 0$; в) $x - y + 2z - 5 = 0$; г) $x + y - 2z + 5 = 0$.
10	Площини α і β задані відповідно рівняннями $x + y - 2z + 3 = 0$ і $2x + 2y - 4z + 9 = 0$. Яке взаємне розміщення прямих $a\subset\alpha$ і $b\subset\beta$?	а) Перетинаються або паралельні; б) паралельні; в) паралельні або мимобіжні; г) перетинаються.

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Знайдіть координати точки, симетричної точці $A(-1;\ 3;\ 2)$ відносно точки $Q(3;\ -1;\ 4)$.

2°. Знайдіть кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, якщо $A(2; -1;\ 3)$, $B(1;\ -1;\ 2)$, $C(4;\ 5;\ -2)$, $D(4;\ 4;\ -1)$.

3°. Знайдіть довжину медіани BM $\triangle ABC$, заданого координатами своїх вершин $A(-2;\ 3;\ 5)$, $B(1;\ -3;\ 2)$ і $C(4;\ -3;\ 1)$.

4°. Складіть рівняння площини, яка проходить через середину відрізка MN перпендикулярно до нього, якщо $M(-1;\ 2;\ 4)$, $N(3;\ 0;\ 6)$.

5•. Напишіть рівняння сфери з центром у точці $A(1;\ -2;\ 3)$, яка проходить через точку $M(3;\ -2;\ 4)$, і сфери, утвореної при паралельному перенесенні даної на вектор $\vec{p} = (-2;\ 1;\ -1)$.

6•. Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$, якщо $A(7;\ 6;\ 8)$, $B(2;\ 8;\ 6)$, $C(3;\ 4;\ 2)$, $D(8;\ 2;\ 4)$.

7•. У якому відношенні площина $z = 1{,}5$ ділить діаметр сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, який проходить через точку $A(0;\ 4;\ 3)$?

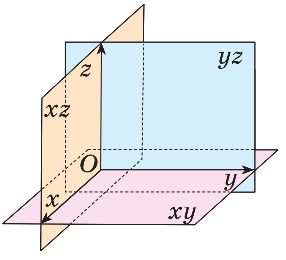
8•. На прямій l взято вектор $\overrightarrow{AB} = (3;\ 4;\ -5)$. Знайдіть кут між прямою l і площиною xy.

9••. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$ такого, що $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, $|\vec{c}| = 2\sqrt{3}$, якщо $\vec{a} = (1;\ -2;\ 2)$, $\vec{b} = (2;\ 3;\ -1)$.

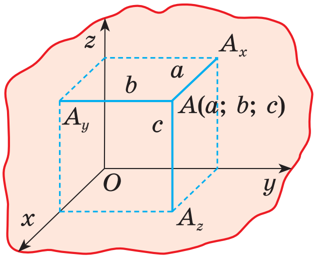
10••. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(-2;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 2;\ 0)$, $A_1(0;\ 0;\ 1)$. Знайдіть кут між прямими AB_1 і BD_1 та відстань між ними.

Головне в розділі 4

1. Прямокутна система координат дає можливість встановити взаємно однозначну відповідність між точками простору та трійками дійсних чисел. $A(a; b; c)$ — точка з абсцисою a, ординатою b та аплікатою c (мал. 373, *а*, *б*).



а



б

Мал. 373

2. Квадрат відстані між двома точками дорівнює сумі квадратів різниць їхніх відповідних координат: $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$.

3. Квадрат довжини відрізка дорівнює сумі квадратів довжин його проекцій на три взаємно перпендикулярні прямі.

4. Якщо точка $C(x; y; z)$ — середина відрізка з кінцями $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$, то $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Якщо точка $P(x; y; z)$ ділить відрізок AB у відношенні $AP : PB = \lambda$, то

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

5. Загальне рівняння площини: $ax + by + cz + d = 0$.

6. Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (a; b; c)$: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

7. Рівняння сфери радіуса r з центром у початку координат $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, з центром у точці $A(a; b; c)$: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$.

8. Вектор — елемент векторного простору. **Координатами вектора** з початком у точці $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінцем $B(x_2; y_2; z_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1$; $y = y_2 - y_1$; $z = z_2 - z_1$. Записують так: $\overrightarrow{AB} = (x; y; z)$.

9. Модулем вектора називають довжину напрямленого відрізка, що його зображає. Позначають його символом $|\overrightarrow{AB}|$ або $|\vec{a}|$.

Якщо $\vec{a} = (x; y; z)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

10. Сумою двох векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ називають вектор $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$.

11. **Різницю** двох векторів $\vec{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1)$ і $\vec{b}=(x_2;\,y_2;\,z_2)$ можна знаходити, користуючись рівністю:

$$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2;\,y_1-y_2;\,z_1-z_2).$$

12. **Множити** будь-який вектор $\vec{a}=(x;\,y;\,z)$ на довільне дійсне число k можна так: $k\vec{a}=(kx;\,ky;\,kz)$.

Вектори $\vec{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1)$ і $\vec{b}=(x_2;\,y_2;\,z_2)$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$, або $\vec{b}=k\vec{a}$.

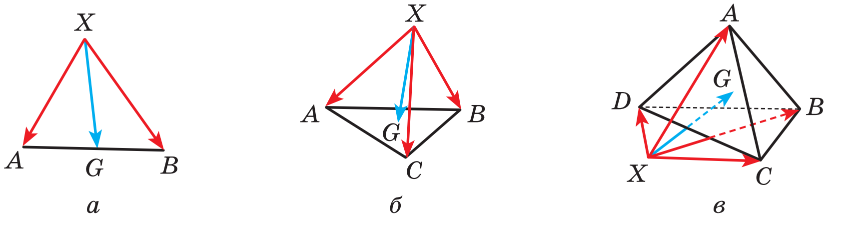
13. **Скалярним добутком двох векторів** називають добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$.

14. Якщо $\vec{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1)$ і $\vec{b}=(x_2;\,y_2;\,z_2)$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

15. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

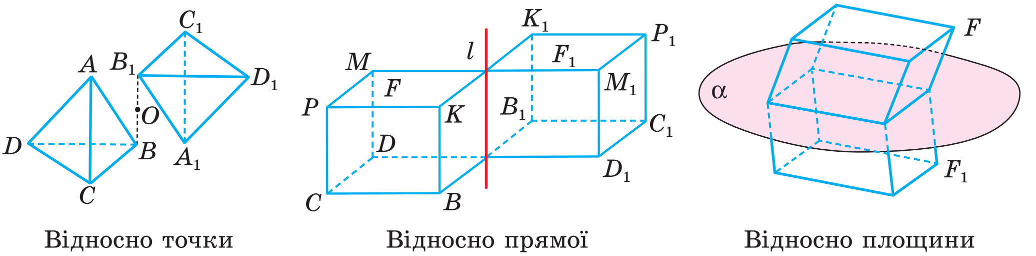
16. Якщо X — довільна точка простору, G — середина відрізка AB або точка перетину медіан трикутника ABC, або центроїд тетраедра $ABCD$ (мал. 374, *а–в*), то відповідно

$$\overline{XG}=\frac{1}{2}(\overline{XA}+\overline{XB});\quad \overline{XG}=\frac{1}{3}(\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC});\quad \overline{XG}=\frac{1}{4}(\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC}+\overline{XD}).$$



Мал. 374

17. Перетворення, яке відображає кожну точку фігури на точку, симетричну їй відносно точки (даної прямої чи площини), називають **симетрією** відносно точки (даної прямої чи площини).



18. **Формули паралельного перенесення** простору (точки $A(x;\,y;\,z)$) на вектор $\vec{p}=(a;\,b;\,c)$: $x'=x+a$; $y'=y+b$; $z'=z+c$.

Додатки

Історичний нарис

Сучасна геометрія займається здебільшого дослідженням абстрактних геометричних фігур, розміщених в абстрактних геометричних просторах. Таких просторів відомо багато: двовимірні, тривимірні, чотиривимірні, n-вимірні, евклідові, неевклідові тощо. Стереометрія — це розділ геометрії про властивості фігур тривимірного евклідового простору.

Аксіоматичний метод. У розвитку аксіоматичного методу розрізняють три етапи. Перший етап характеризується змістовим застосуванням аксіоматичного методу. Характерним для нього є використання посилань на геометричну очевидність та інтуїцію, а також відсутність точного опису структури доведень. Як змістову аксіоматичну теорію викладено геометрію в «Основах» Евкліда. «Основи» Евкліда були зразком логічної строгості до XIX ст., аж поки не виявилися суттєві недоліки в їх побудові.

На другому етапі (кінець XIX — початок XX ст.) відбуваються поступове звільнення від спроб змістової аксіоматичної побудови теорій і перехід до формального розуміння аксіоматичного методу. Строге аксіоматичне обґрунтування геометрії Евкліда вперше було здійснено наприкінці XIX ст. у роботах італійського математика Маріо Пієрі (1860–1904), професора Геттінгенського університету Давида Гільберта (1862–1943) і приват-доцента Новоросійського (Одеського) університету Веніаміна Федоровича Кагана (1869–1953). В. Ф. Каган побудував «метричну» систему аксіом евклідової геометрії. Векторну аксіоматику евклідової геометрії створив Герман Вейль (1885–1955).

На третьому, сучасному, етапі аксіоматичний метод розуміють як спосіб конструювання формалізованих мовних систем, що веде до чіткого розрізнення штучної формалізованої мови і тієї змістової предметної області, яка в ній відображена.

У другій половині минулого тисячоліття створювалися нові методи дослідження властивостей геометричних фігур і зароджувалися не відомі раніше галузі: аналітична, проективна, нарисна, диференціальна геометрії. Особливо вагомим є внесок у їх розробку Р. Декарта, Ж. Дезарга, Л. Ейлера, Г. Монжа.

М. І. Лобачевський перший відкрив існування зовсім нової геометрії, пізніше названої на його честь геометрією Лобачевського. Ця геометрія істотно відрізняється від евклідової. Наприклад, у ній стверджується, що через дану точку можна провести безліч прямих, паралельних даній прямій, що сума кутів будь-якого трикутника менша від 180°. У геометрії Лобачевського не існує прямокутників, подібних трикутників тощо. Багато в чому дивна і незвичайна ця геометрія, хоча в логічному відношенні не поступається евклідовій.

Метод координат на площині вперше розробили Р. Декарт і П. Ферма в XVII ст. Терміни «абсциса», «ордината» й «апліката» мають грецьке походження і використовувалися в теорії про конічні перерізи. У сучасному розумінні їх почав застосовувати Г. Лейбніц, він також увів термін «координати», щоб підкреслити рівноправність «абсциси» й «ординати». Але загальновживаними ці терміни стали лише з середини XVIII ст. Термін «вісь абсцис» увів І. Барроу (1670 р.), а термін «вісь ординат» — значно пізніше Г. Крамер (1750 р.). Спочатку метод координат розробили для площини, а у XVIII ст. Й. Бернуллі, А. Клеро та інші математики поширили його на тривимірний простір. Вивів рівняння площини і розв'язав більшість задач тривимірної аналітичної геометрії Г. Монж. Систематичний виклад аналітичної геометрії простору дав Л. Ейлер.

Вектори у математику входили з трьох джерел: числення відрізків, дослідження векторних величин і теорії кватерніонів. Теорію напрямлених відрізків на площині та в просторі вперше виклав норвезький геодезист і картограф К. Вессель у праці «Досвід про аналітичне представлення напряму і його застосування, переважно до розв'язування плоских і сферичних многокутників». Нове числення напрямлених відрізків К. Вессель будував майже так, як воно подається у сучасних підручниках: уводив поняття напрямленого відрізка, базисної одиниці, напряму (відхилення) відрізка, формулював правила для виконання дій з напрямленими відрізками й показував їхнє застосування на площині та в просторі. Векторні величини стосовно проблем механіки дослідив англійський математик Д. Валліс у праці «Механіка, чи геометричний трактат про рух».

Поняття «вектор» увів 1846 р. ірландський математик В. Р. Гамільтон, розглядаючи вектори у зв'язку з кватерніонами (числами виду $a + bi + cj + dk$, де i, j, k — уявні одиниці). Він писав: «Відрізок AB, у якого розглядається не тільки довжина, але і напрям, називається вектором. Його початкова точка називається origin, його кінцева точка — term. Вектор AB, ... — різниця двох своїх граничних точок». Позначення $\vec{r}$ запропонував 1887 р. О. Коші.

Одним із перших вітчизняних учених, які розробляли теорію векторів, був професор Київського університету П. Ромер. Систематичний і детальний виклад векторного числення та теорії кватерніонів він здійснив у докторській дисертації «Основні початки методу кватерніонів» (1866 р.). Серед вітчизняних учених геометричний напрям у формуванні теорії векторного числення представляв професор Київського університету В. Єрмаков. У Києві 1887 р. він видав працю «Теорія векторів на площині. Застосування до дослідження конічних перерізів».

Найзагальніший погляд на вектори як елементи векторного простору запропонував Г. Вейль. **Векторним простором** називається будь-яка множина, для елементів якої визначені операції додавання і множення на число (при цьому мають виконуватися 4 закони додавання і 4 закони множення). Приклади векторних просторів: множина всіх пар точок простору; множина всіх трійок дійсних чисел; множина всіх паралельних перенесень площини чи простору тощо.

У середині XIX століття у математиці почали розглядати n-вимірні простори. Геометрію чотирьох вимірів одним із перших опрацював український учений і громадський діяч М. І. Гулак.

Микола Іванович Гулак
(1822–1899)

Народився на Полтавщині, працював у канцелярії Київського генерал-губернатора. Був одним із засновників Кирило-Мефодіївського братства. За це у 1847 р. його заарештували. Тільки через 12 років він повернувся в Україну, працював учителем математики, географії та російської мови в Одесі, Керчі, Ставрополі, у Грузії.

У 1877 р. у Тифлісі опублікував монографію «Спроба геометрії чотирьох вимірів». Ще одну працю — «Етюди про трансцендентні рівняння» (французькою мовою) — він надрукував в Одесі. Р. Іваничук написав про М. Гулака роман «Четвертий вимір».

Багато зробив для розвитку геометрії відомий український математик Г. Ф. Вороний (1868–1908) — творець геометричної теорії чисел. Зокрема він досліджував різні заповнення простору рівними многогранниками. Значний внесок у розвиток геометричної науки зробили українські математики М. Є. Ващенко-Захарченко (1825–1912), С. Й. Шатуновський (1859–1929), В. Ф. Каган (1869–1953), О. С. Смогоржевський (1896–1969), М. І. Кованцов (1924–1987) та багато інших.

Георгій Феодосійович Вороний
(1868–1908)

Український математик. Народився в с. Журавка Чернігівської області. Досліджував проблеми геометричної теорії чисел, геометрії многогранників. Математики всього світу все частіше використовують поняття: алгоритм Вороного, клітини Вороного, метод Вороного, многокутники Вороного, діаграми Вороного, розбиття Вороного, мозаїка Вороного та ін.

Світ, що нас оточує, у майбутньому, безумовно, зміниться, але геометрія залишиться. Навіть ще більше збагатиться новими відомостями та методами і продовжуватиме служити людям.

З цього приводу один із найвідоміших архітекторів XX ст. Ле Корбюзьє писав: «Ніколи ще до нашого часу ми не жили в такий геометричний період... Навколишній світ — це світ геометрії, чистий, істинний, бездоганний у наших очах. Усе навколо — геометрія».

Опорні факти планіметрії

Пригадаємо найважливіші відомості з планіметрії, які часто використовують в стереометрії.

Аксіоми планіметрії

1. *Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.*

2. *Через будь-які дві різні точки можна провести пряму і тільки одну.*

3. *Із трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.*

4. *Кожний відрізок має певну довжину.*

5. *Кожний кут має певну міру.*

6. *Пряма розбиває площину на дві півплощини.*

7. *На будь-якій прямій від заданої точки у заданому напрямі можна відкласти відрізок даної довжини і тільки один.*

8. *Від будь-якого променя у даній півплощині можна відкласти даний кут з вершиною у початку променя і тільки один.*

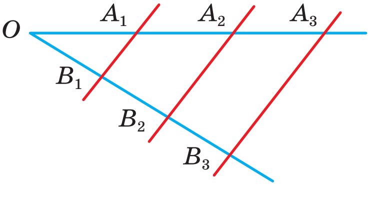
9. *Який би не був трикутник, існує рівний йому трикутник у заданому розміщенні відносно заданої прямої.*

10. *Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій (аксіома Евкліда).*

Теорема Фалеса

Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній із них рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на другій стороні.

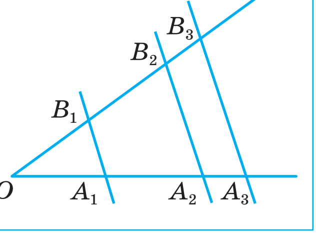
Якщо $A_1A_2 = A_2A_3$ і $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$.



Узагальнена теорема Фалеса

Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від них пропорційні відрізки.

Якщо $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, то $\dfrac{B_1B_2}{B_2B_3} = \dfrac{A_1A_2}{A_2A_3}$.

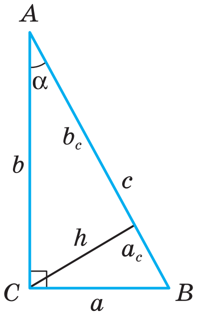


Прямокутний трикутник

$$\frac{a}{c}=\sin\alpha;$$
$$\frac{b}{c}=\cos\alpha;$$
$$\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha;$$
$$\frac{b}{a}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

$a^2+b^2=c^2$ (теорема Піфагора);

$$a^2=a_c\cdot c;$$
$$b^2=b_c\cdot c;$$
$$h^2=a_c\cdot b_c;\ h=\frac{ab}{c}.$$



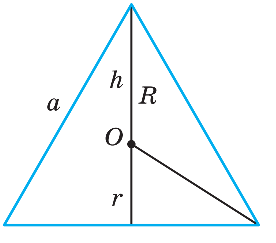
$$S=\frac{1}{2}ab;\quad S=\frac{1}{2}ch;\quad S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

$$R=\frac{c}{2};\quad r=\frac{a+b-c}{2}.$$

Рівносторонній трикутник

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2};\quad r=\frac{1}{3}h;$$
$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$
$$h=R+r.$$

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{6};$$
$$R=\frac{2}{3}h;\quad R=\frac{a\sqrt{3}}{3};$$
$$R=2r.$$



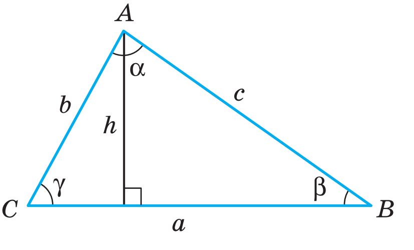
Довільний трикутник

$$S=\frac{1}{2}ah;\quad S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Формула Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\quad p=\frac{a+b+c}{2}.$$

$$r=\frac{S}{p};\quad R=\frac{abc}{4S};\quad R=\frac{a}{2\sin\alpha}.$$



Теорема косинусів:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$

Теорема синусів:

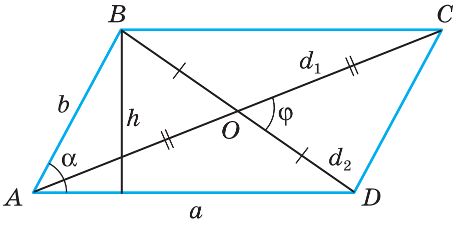
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Паралелограм

$\angle A + \angle B = 180°$;
$P = 2(a + b)$;
$S = ah$; $S = ab \sin \alpha$;

$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi$;

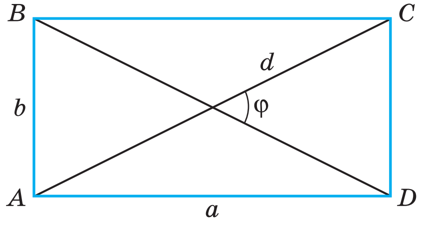
$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.



Прямокутник

$AC = BD$;
$P = 2(a + b)$;
$S = ab$;

$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$; $R = \frac{1}{2} d$.



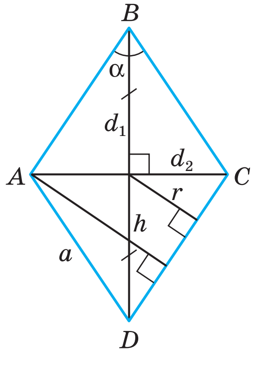
Ромб

$P = 4a$;
$S = ah$;
$S = a^2 \sin \alpha$;

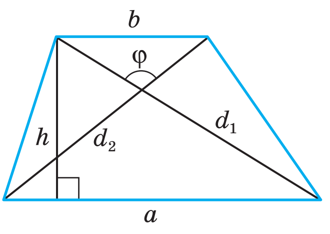
$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.

$r = \frac{1}{2} h$;

$r = \frac{d_1 d_2}{4a}$.

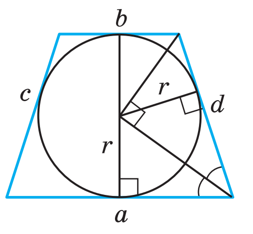


Трапеція



$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$;

$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin \varphi$.



$a + b = c + d$;
$h = 2r$.

Відповіді

Розділ 1.

11. Ні. **20.** На 3 або 4 частини. **21.** На 5, 8, 9, 10, 12, 14 частин. **38.** Безліч. **41.** Ні. **42.** Безліч. **43.** Чотири. **44.** Ні. **50.** Ні. **51.** Так. **52.** Ні. **61.** Не завжди. **85.** $\frac{3a}{2}$; $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. **86.** $\frac{3\sqrt{41}}{2}$ см^2. **87.** $3\sqrt{2}a$; $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **88.** $\frac{3a^2}{8}$. **89.** $S=\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$. **91.** Шестикутник. **92.** Ні. **94.** $S=\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. **96.** $S=\frac{3\sqrt{39}}{2}$ см^2. **97.** $a\left(1+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$; $\frac{3}{8}a^2$. **98.** $\frac{l\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$; $\frac{l^2\sqrt{11}}{16}$. **99.** $2a\sqrt{5}$; $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. **100.** $3a\sqrt{2}$; $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **102.** $2a\sqrt{5}$. **105.** 2 : 3.

Розділ 2.

132. 7,6 см. **134.** 7,5 см або 1 см. **135.** 36 см або $5\frac{1}{7}$ см. **136.** 5 : 2. **137.** а) 9,6 дм; б) 8 дм; в) $\frac{3m}{4}$. **139.** 6 см і 4 см. **140.** 34 см; 36 см. **147.** 32 см. **149.** Тетраедр. **150.** Паралелограм. **167.** а) 2; б) 4; в) 1 : 3. **169.** а) $2a$; б) 3 : 1. **170.** $\left(2\sqrt{2}-1\right):1$. **171.** 10 см. **173.** 9 см. **174.** $\frac{a\sqrt{16b^2-5a^2}}{16}$. **175.** $\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)l$; $\frac{\sqrt{2}}{2}l^2$. **176.** Паралелограм. **177.** $\frac{2}{3}(a+2b)$. **183.** $0{,}75a^2$. **184.** а) 1 : 2; б) $\frac{7a+b}{a+7b}$. **186.** $\frac{a}{4}\left(1+2\sqrt{3}\right)$; $\frac{a^2\sqrt{11}}{64}$. **187.** $\frac{b^2\sqrt{19}}{32}$. **190.** $\frac{b\sqrt{4b^2+2a^2}}{4}$. **191.** $\frac{d^2\sqrt{6}}{12}$. **192.** $\frac{a}{2}\left(4+\sqrt{7}\right)$. **193.** 1 : 5. **213.** а) 2,5 см; б) 4 см; в) 4 см; г) 6 см. **214.** а) 6 см; б) 6 см; в) 3 см; г) 6 см. **215.** а) 24 см; $2\sqrt{193}$ см; б) $\sqrt{129}$ см; 7 см. **216.** 32 см; 42 см^2. **217.** 24 см; $16\sqrt{3}$ см^2. **218.** $\left(\frac{6\sqrt{2}}{5}+2\right)a$. **221.** Ні. **226.** 8 см і 5 см. **227.** $4\sqrt[4]{27}$ см; 4 см^2. **228.** 5 см; $\frac{17}{3}$ см; $\frac{4\sqrt{21}}{3}$ см. **229.** $\frac{2a\left(\sqrt{10}+3\right)}{3}$. **230.** $2c+\sqrt{a^2+b^2}$; $\frac{1}{2}c\sqrt{a^2+b^2}$. **231.** $\frac{3}{8}a^2\operatorname{tg}\alpha\approx 19{,}99$. **232.** $2a\sqrt{5}$; $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. **233.** $3a\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$. **239.** Вказівка: через довільну точку однієї з прямих проведіть прямі, паралельні двом іншим прямим, і відкладіть три однакові відрізки. **269.** 15 см і 10 см або 3 см і 2 см. **270.** Ні.

271. а) 18 см^2; б) 0; в) 18 см^2. **272.** а) Q; б) $0,5Q$. **273.** $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$.

311. Вказівка: доведіть, що основа перпендикуляра ділить діагональ у відношенні 1 : 3. **316.** Вказівка: доведіть, що основа висоти ділить сторону у відношенні 2 : 3. **317.** Вказівка: доведіть, що сторона трикутника ділить діагональ у відношенні 1 : $\sqrt{3}$. **318.** Вказівка: висота трикутника відноситься до сторони квадрата як $\sqrt{3}$: 2.

Розділ 3.

350. 60°. **351.** а) 80°; б) 60°. **352.** а) 90°; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) 90°; г) 90°. **353.** а) arctg 2; б) arccos 0,6; в) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$. **355.** Так. **356.** Ні. **357.** Так. **359.** 60°. **360.** а) $12\sqrt{2}$; б) $3a\sqrt{2}$; в) $\left(10+3\sqrt{2}\right)$ дм. **362.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\frac{a}{4}$. **363.** а) 60°; б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$; в) 90°; г) 90°. **364.** а) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 90°; в) 90°; г) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$. **366.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$. **367.** 60°. **368.** 60°. **369.** а) 0°; б) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$; в) 30°. **370.** α. **372.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\frac{3\sqrt{2a}}{4}$; $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **373.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **374.** 60°. **375.** $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$. **376.** Так. **388.** $a\operatorname{ctg}\alpha$; $\frac{a}{\sin\alpha}$. **389.** $a\sqrt{3}$. **390.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **391.** 13 см. **394.** 8. **395.** $3a$. **396.** 12 см. **398.** $\frac{a\sqrt{33}}{3}$. **399.** $\frac{3\sqrt{231}}{4}$ см. **400.** а) 13 см; $\frac{3\sqrt{91}}{4}$ см^2; б) $c\left(1+2\sqrt{2}\right)$; $c^2\frac{\sqrt{7}}{4}$. **401.** $m : n$. **402.** 1 см. **403.** б) 7 см. **404.** а) 2 см; б) 3 см. **406.** $36\sqrt{2}$ см^2. **407.** 20 см. **409.** 8 см. **411.** $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ см^2. **412.** 10 см. **413.** 12,5 см. **415.** 24 см. **416.** 33,6 см. **417.** 20 см. **419.** а) 3 см; б) 7 см. **420.** $12\sqrt{2}$ см; 20 см; $4\sqrt{43}$ см. **421.** $KA=KC=\sqrt{a^2+b^2}$; $KD=\sqrt{b^2+2a^2}$. **432.** $\frac{2}{3}p\left(2\sqrt{2}+1\right)$; $\frac{p^2\sqrt{7}}{9}$; $\cos A_1=\cos B_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos C=\frac{3}{4}$. **441.** 3 см. **442.** $2a$; $a\sqrt{2}$. **443.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. **444.** 120°. **445.** $a\sqrt{2}$; $2a$. **446.** $\frac{a\operatorname{ctg}\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **448.** $6\sqrt{15}$ см; 26 см. **449.** $4\sqrt{5}$ см; $8\sqrt{3}$ см; 10 см; 10 см; 6 см; 6 см. **450.** 35 см. **457.** 90°. **463.** 13 см; $\sqrt{219}$ см.

464. 13 см; 15 см. **465.** 5 см. **466.** $5\sqrt{6}$ см. **467.** 2,8 см. **468.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **469.** 12 см. **470.** $\sqrt{281}$ см; $5\sqrt{5}$ см. **471.** 5 см. **472.** 7 см. **473.** $5\sqrt{5}$ см; 20 см; 10 см. **474.** $\frac{p\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}$. **475.** $2\sqrt{3}$ см; $\sqrt{39}$ см; $\sqrt{39}$ см. **476.** 6 см; 6 см; 5 см; 15 см. **478.** 2 см. **485.** 5,2 см. **486.** 91 м². **487.** $\frac{h^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2\sin\alpha}$. **488.** $\frac{2a^2}{9}$. **489.** $a^2\sqrt{2}$. **490.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **504.** $\arccos\frac{1}{4}$. **507.** а) $2\sqrt{11}$ см; б) 1 см; в) $a\sqrt{2}$. **508.** $6\sqrt{2}$ см. **509.** $4\sqrt{6}$ см. **510.** a. **511.** m. **512.** а) $a\sqrt{2}$; б) $a\sqrt{3}$. **513.** а) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **514.** а) $\arccos\frac{1}{4}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **515.** 44 м; 96 м². **516.** $m : n$. **517.** $\frac{4}{9}S$. **523.** $\mathrm{arctg}\,2$. **525.** $\pi-\arccos\frac{25\sqrt{154}}{1001}$. **526.** 200 см². **527.** $\sqrt{337}$ см. **528.** $0,8\sqrt{337}$ м. **529.** 13 см. **530.** 60° або $\pi-\arccos\frac{103}{2160}$. **531.** $\frac{\sqrt{2(a+c+b)(a+c-b)(a-c+b)(b-a+c)}}{2c}$. **532.** 90°; $\arccos\frac{1}{4}$; $\arccos\frac{3}{4}$. **533.** $\arccos\frac{3}{4}$. **534.** а) 66 см; 260 см². б) 72,5 см; 325 см². **536.** $\frac{a^2\sqrt{13}}{3}$. **540.** 90°. **542.** $\cos B=\cos\alpha\cos\beta$; $\cos C=\frac{\sin\beta}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\beta\,\mathrm{tg}^2\alpha}}$ і $M=\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta}}$. **543.** $2\arcsin\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\alpha}$. **559.** 9 см. **560.** 2 см. **561.** 3,6 см і 6,4 см. **562.** 13 см і 14 см. **563.** 24 см і $2\sqrt{69}$ см. **564.** 12,8 см. **565.** 6,4 см. **566.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **567.** $\frac{\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{2}$. **568.** Так. **569.** 60°. **570.** 60°; ні, квадратом бути не може. **571.** 48 см. **572.** 30°. **573.** $12\sqrt{14}$ см. **574.** 45°. **575.** 20 см; $20\sqrt{2}$ см. **576.** 19 см. **577.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$; $\arccos\frac{1}{3}$. **578.** а) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$; б) $\arccos\sqrt{\frac{5}{6}}$. **579.** d і $\frac{d\sqrt{3}}{3}$. **580.** $\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$ і $\frac{a^2\sqrt{5}}{2}$. **581.** $\frac{l^2\sqrt{3}}{6\cos\beta}$. **582.** $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$. **583.** 1 : 3. **584.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **586.** 72 см або 90 см. **587.** $3\frac{17}{21}$ см. **588.** 2arcctg2. **589.** $192\sqrt{2}$ см². **590.** $\frac{a+b}{2\cos\varphi}$. **591.** 840 см²;

$140\sqrt{11}$ см^2; $\arccos\frac{\sqrt{11}}{6}$. **592.** $4\frac{2}{7}$ м^2. **593.** $\arccos\frac{a}{\sqrt{4l^2-b^2}}$. **594.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **595.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. **596.** $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$; $\frac{3a^2}{4}$; $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **599.** 24 см; $4\sqrt{21}$ см. **600.** $12\sqrt{2}$ см. **602.** $a^2\sqrt{3}$. **604.** $0{,}5a^2$. **615.** 10 см. **616.** 0 см і 12 см. **617.** $\sqrt{a^2-(b+c)^2}$. **618.** 4 дм і 5 дм; $\sqrt{20{,}5}$ дм. **619.** $\sqrt{h^2+r^2}$. **621.** 20 см. **622.** 12 см. **623.** $2\sqrt{43}$ см. **624.** 20 см. **625.** a. **626.** а) 40 см; б) $\frac{60\sqrt{34}}{17}$ см. **627.** 24 см. **628.** $\frac{a\sqrt{141}}{6}$. **629.** 12 см. **630.** $\frac{d}{2}\sqrt{16+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **631.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **632.** 8 м. **634.** $\sqrt{x^2+y^2}$. **635.** $2d$. **636.** 15 см; 16 см. **637.** 8 м. **638.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **639.** 50 см. **640.** 30 см. **641.** 45 мм. **642.** 8 м. **643.** 28 м. **644.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **645.** a; $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. **646.** $\sqrt{6}$ см. **647.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **648.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **649.** a. **650.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **653.** До сторін — 10 см; 10 см; $5\sqrt{29}$ см; $5\sqrt{29}$ см; до прямих — 10 см; 10 см; 26 см; 26 см. **654.** 20 см. **655.** 8 см. **656.** 10 см. **658.** $\frac{2\sqrt{193}}{7}$ см. **659.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$. **660.** 5 см. **661.** $\frac{c\sqrt{6}}{8}$. **662.** 26 см. **663.** 8 см і 16 см. **664.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **665.** а) $a\sin\alpha$; б) $2a\sin\frac{\alpha}{2}$. **666.** 24 см. **668.** а) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; б) $\frac{a\sqrt{22}}{11}$; в) $\frac{a\sqrt{22}}{11}$. **669.** 11,2 см. **670.** $\sqrt{n^2-m^2}$. **671.** $\frac{24\sqrt{19}}{19}$ см. **672.** а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; в) $\frac{a\sqrt{3}}{12}$; г) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **673.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **674.** Пряма, яка перпендикулярна до площини трикутника і проходить через центр вписаного кола. **675.** 4 прямі. **676.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (див. задачу 673). **687.** 24 см. **688.** 30°. **689.** $\frac{b}{a}$; $\frac{b}{c}$; $\frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}}$. **691.** Ні, неправильне. **692.** $\approx 2{,}38$ м. **693.** $\approx 56{,}88$ м. **694.** 40°. **695.** $90^0-\varphi$. **701.** 45°. **702.** $8\sqrt{3}$ дм. **703.** 45°. **704.** 30°. **705.** 45°. **706.** $\frac{a}{2}\sqrt{4+\mathrm{ctg}^2\,\alpha}$. **707.** $8\sqrt{3}$. **708.** а) $\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}$; б) 900 см^2. **709.** 80°.

710. 30°. **711.** $2a$. **712.** 10 см. **713.** 7 см. **714.** а) $\frac{a\sqrt{7}}{2}$; б) 4. **715.** $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$. **716.** $c\sin\alpha$. **718.** $a\sin\alpha$; $a\sqrt{\frac{1+\sin^2\alpha}{2}}$. **719.** $\frac{1}{2}h\sqrt{4+\mathrm{ctg}^2\alpha}$. **720.** 48 см. **722.** $\frac{1}{2}d^3\sin\beta\cos^2\beta$. **723.** $l^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}$. **724.** $5\sqrt{13}$; $\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2}$; $\mathrm{arctg}\,\frac{6}{17}$. **725.** $\frac{a}{2}$. **726.** 12,5 см. **727.** 60°. **728.** 30°. **729.** 30°. **730.** 3 м; $3\sqrt{3}$ м. **731.** 120°. **732.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **733.** 9,6 см. **734.** $\pi-\arccos\frac{12}{13}$. **735.** $\frac{45\left(4-\sqrt{2}\right)}{28}$. **736.** $\frac{3}{7}$ см; $\frac{52}{7}$ см. **737.** 45°. **738.** $a\left(\sqrt{3}\pm1\right)$. **741.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Розділ 4.

761. $3\sqrt{6}$. **762.** –4. **763.** Ні. **765.** (0; –2; 0). **769.** а) Рівносторонній, $P=9\sqrt{2}$, $S=\frac{9\sqrt{3}}{2}$; б) прямокутний, $P=\sqrt{42}+\sqrt{41}+1$, $S=\frac{1}{2}\sqrt{41}$; в) рівнобедрений, $P=6\left(1+\sqrt{3}\right)$, $S=9\sqrt{2}$. **770.** (b; c; 0); (b; c; h); (0; c; h); (b; 0; h). **771.** (1; 1; –1); (–1; 1; –1); (1; –1; 1); (1; –1; –1). **772.** а) Квадрат, $S=25$; б) ромб, $S=2\sqrt{266}$; в) прямокутник, $S=\sqrt{57}$. **775.** 60°. **776.** $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$. **777.** (–0,25; 0,25; 0). **778.** (2; 2; 2) або (–2; –2; –2). **779.** (3; 9; 0) або (2; 8; 0). **780.** а) (0; 0; 0); (0; 0; 6); (0; 0; –4); $\left(0;\ 0;\ 3\pm\sqrt{33}\right)$; б) $\left(0;\ 0;\ \frac{19}{4}\right)$; (0; 0; 6); (0; 0; –1); (0; 0; 5); в) не існує. **782.** $B_1\left(0;\ 0;\ 2\sqrt{3}\right)$, $D_1=\left(\frac{4\sqrt{6}}{3};\ 0;\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ або $D_1\left(-\frac{4\sqrt{6}}{3};0;\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$; $B_2\left(0;\ 0;\ -2\sqrt{3}\right)$, $D_2\left(\frac{4\sqrt{6}}{3};\ 0;\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ або $D_2\left(-\frac{4\sqrt{6}}{3};\ 0;\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. **783.** а) Точки відрізка AB, де A(6; 0; 0), B(0; 0; 8); б) таких точок не існує. **792.** а) (–0,7; 0,1; 0,6); б) $\left(2\sqrt{3};\ 1,5;\ 1\right)$. **793.** а) 1; б) $\sqrt{14}$. **794.** B(0; 9; –6). **795.** A(5; –4; 0), B(–7; 5; 6). **796.** $5;\sqrt{70};\sqrt{91}$. **797.** $\sqrt{14}$; $\sqrt{6}$; $2\sqrt{2}$. **798.** A(4; –2; 8); C(0; –8; 4). **799.** $\sqrt{41}$. **800.** а) Так; б) ні. **801.** а) $D\left(-3;\ 7;\ 20\right)$; б) $D\left(7;\ -1;\ -6\right)$. **802.** C(1; –3; 6); D(6; 0; –1). **803.** а) a = –2; b = 2; б) a = –1 або a = 0,5; b = 1; в) a = 0,5; b = –1,5. **804.** $h=3\sqrt{2}$; $S=9\sqrt{2}$. **805.** а) $\sqrt{2}$; б) 30°; 30°; 120°; в) $2\sqrt{3}$. **806.** а) (–1; 2; 0); б) $\left(\frac{4}{3};\ -2;\ \frac{5}{3}\right)$;

в) $\left(3; -\frac{3}{4}; 0\right)$. **807.** $\left(\frac{1}{3}; 3; 3\right)$. **808.** $A_4(5; -4; 4)$; $A_4(-3; 0; 1)$; $A_4(1; 8; -3)$. **809.** 3. **810.** а) $\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$; б) (1; 2; 2). **811.** а) $\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$; б) $\left(2; \frac{3\sqrt{3}-1}{2}; \frac{7-3\sqrt{3}}{2}\right)$. **812.** $D(1; 0; 0)$; $A_1(-2; 4; 5)$; $B_1(2; 7; 5)$, $C_1(5; 3; 5)$; $D_1(1; 0; 5)$; $O(1,5; 3,5; 2,5)$ або $D(1; 0; 0)$; $A_1(-2; 4; -5)$; $B_1(2; 7; -5)$, $C_1(5; 3; -5)$; $D_1(1; 0; -5)$; $O(1,5; 3,5; -2,5)$. **813.** $C(-7; -4; -1)$. **814.** $\left(\frac{25}{8}; \frac{33}{8}; \frac{9}{4}\right)$. **815.** $\frac{4\sqrt{2}}{5}$. **817.** $2\sqrt{3}$. **818.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **819.** а) $SO = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$; б) $SO = 3\sqrt{2}$; $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{5}$. **827.** $(x-1)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25$. **829.** Ні, не належить. **830.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 18$. **831.** $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3$. **832.** $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$ або $x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. **833.** (6; 0; 0) і (−2; 0; 0). **834.** OX: $\left(8+4\sqrt{3}; 0; 0\right)$; $\left(8-4\sqrt{3}; 0; 0\right)$; OY: $\left(0; 6+\sqrt{17}; 0\right)$; $\left(0; 6-\sqrt{17}; 0\right)$; вісь OZ сфера не перетинає. **835.** 8π. **836.** а) $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 1$; б) $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 4$; в) $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$. **838.** а) (1; −2; 1), $R = 5$; б) (−3; 1; 0), $R = 6$. **840.** а) (−3; 0; 0); б) (0; 6; 0); в) (0; 0; −2). **841.** $y - z = 0$. **842.** $z = 4$. **843.** $4x - 11y - 6z = 0$. **845.** $x + y + z - 2 = 0$. **847.** Ні. **848.** $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$; $(y-3)^2 + (z-4)^2 = 25$; $(x-2)^2 + (z-4)^2 = 20$. **849.** $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. **850.** $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 29$. **851.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 49$ і $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 9$. **852.** $a \in (-\infty; -8) \cup (2; 2) \cup (8; +\infty)$ — спільних точок немає, $a \in (-8; -2) \cup (2; 8)$ перетинаються, $a = \pm 8$ — внутрішній дотик, $a = \pm 2$ — зовнішній дотик. **855.** $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $x = 3$; $y = 4$; $z = 5$. **856.** Прямокутний паралелепіпед. **857.** $7\sqrt{2}\pi$. **858.** 2 : 1. **859.** $M_x\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$; $M_y\left(\frac{4}{5}; 0; -\frac{1}{5}\right)$; $M_z\left(0; \frac{4}{7}; \frac{1}{7}\right)$. **850.** $\frac{x-1}{-6} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{2}$. **862.** $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-2}{2}$. **863.** (4; 7; 9). **864.** $\left(-\frac{4}{9}; \frac{10}{3}; \frac{1}{3}\right)$ і $\left(-\frac{12}{7}; \frac{22}{7}; -\frac{3}{7}\right)$.

876. $D(6; 6; 6)$ або $D(-2; -2; -2)$, $h = 4\sqrt{3}$. **878.** 2 : 3. **879.** а) Так. **880.** $\frac{a\sqrt{17}}{6}$. **881.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **882.** $9\sqrt{3}$. **884.** Сфера з центром в середині відрізка. **885.** $6a^2$. **890.** 3 : 1. **891.** 5 : 17. **892.** $\frac{2a \pm \sqrt{5b^2 - a^2}}{5}$. Бажано зробити дослідження $\frac{a\sqrt{5}}{5} \le b \le a\sqrt{2}$. **893.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **894.** 3. **895.** $2\sqrt{14}$ або $\sqrt{206}$. **912.** $A(-8; 0; -1)$.

913. $B(-3;\ 2;\ -5)$. **914.** $P=14+4\sqrt{2}$; $S=2\sqrt{82}$. **915.** а) Так; б) ні. **916.** $x = \pm 3$. **917.** $1:2$. **921.** $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3};\ \frac{2\sqrt{6}}{3};\ \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ або $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3};\ -\frac{2\sqrt{6}}{3};\ -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. **922.** (2; 4; 6) або (6; 4; 2). **923.** а) (2; −8; 8); б) (−1; 0; −1). **924.** $ABCD$ — ромб; $MNPK$ — квадрат. **925.** (−4; 1; 1). **926.** а) $a = 1$ і $a = -1$; б) $a = 3$ і $a = -1$; в) $a = -4$ і $a = 2$; г) $a=-\frac{5}{3}$ і $a = 3$. **927.** а) $m = 0$ і $m = 1$; б) $m = -3$; в) $m = 2$; г) $m = 1$. **928.** а) Ні; б) так. **929.** а) Так; б) так. **930.** Так. **942.** (−3; 4; 3). **947.** а) (1; −4; 6); б) (−3; −4; 2). **953.** $\sqrt{123}$ і $\sqrt{370}$. **956.** (2; 3; −1). **958.** Так. **959.** а) $k = -5$; б) $k = 1$. **962.** $5\sqrt{2}$; $\sqrt{77}$; $\sqrt{659}$; $\sqrt{26}$; $\sqrt{227}$. **964.** а) $x = 4$; $y = -3{,}5$; $z = 1$; б) $x = 6$; $y = -4{,}5$; $z = 3{,}25$; в) $x = 2$; $y = 2$; $z = -2$. **965.** (4; −4; −2). **966.** $\left(-\frac{1}{\sqrt{14}};\ \frac{3}{\sqrt{14}};\ -\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$. **967.** Ні. **968.** $P(2;\ 5;\ 0)$ або $P(6;\ -7;\ 4)$. **969.** б) $a = -2$; в) $a = 1$. **970.** $a = -2$; $b=\frac{1}{3}$. **971.** а) Ні; б) так. **973.** $a = 2$; $b = -3$; $c = 1$. **984.** а) 40°; б) 130°; в) 140°. **985.** а) 30; б) 3; в) −15; г) −28. **986.** а) 72; б) −72. **987.** а) −16; б) −12; в) −70; г) 1. **988.** а) 16; б) 72; в) 150. **989.** а) $\frac{\sqrt{55}}{11}$; б) $\frac{\sqrt{35}}{70}$; в) $-\frac{2\sqrt{2}}{9}$; г) $-\frac{\sqrt{14}}{14}$. **990.** а) 45°; б) 120°; в) 135°; г) 60°. **992.** а) $x = -9$; б) $x = -5$; $x = 5$; в) $x = 1$; г) $x = -4$; $x = 3$. **993.** 6. **994.** а) 30°; б) 135°. **995.** а) 1; б) 5. **996.** а) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}$; б) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{29}$; в) $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$; $|\vec{a}-\vec{b}|=1$; г) $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$; $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{37}$. **998.** $30\sqrt{3}$ Дж. **999.** а) 60°; б) 60°; в) 90°; г) 90°; д) 45°. **1001.** а) $\frac{12}{25}$; $\frac{\sqrt{26}}{10}$; $\frac{\sqrt{26}}{10}$; б) $\frac{2\sqrt{42}}{21}$; $\frac{\sqrt{30}}{15}$; $\frac{3\sqrt{35}}{35}$. **1002.** $\arccos\frac{4}{9}$. **1003.** а) $D(-0{,}5;\ 0;\ 0)$; б) $D(0;\ 1;\ 0)$; в) $D(0;\ 0;\ 1)$. **1004.** −10. **1005.** 22. **1006.** а) 24; б) 0; в) 2. **1007.** а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$. **1008.** $\pi-\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$. **1009.** (2; 2; 2) або (−2; −2; −2). **1010.** а) $\arccos 0{,}7$; б) $\arccos 0{,}7$. **1011.** $\arccos\frac{5}{6}$; $\arccos\frac{2}{3}$; $\arccos\frac{1}{6}$; $\arccos\frac{1}{3}$. **1021.** $5x - 3z + 2 = 0$. **1022.** $3x - 4y + 7z + 26 = 0$. **1023.** $ax + by + cz = 0$. **1024.** $2x - 3y + z - 16 = 0$. **1025.** $\arccos\frac{5\sqrt{21}}{42}$. **1026.** $x - y + 2z = 0$. **1030.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\varphi}$. **1034.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **1036.** $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}$. **1037.** $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{3}$. **1041.** $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}$. **1042.** $\arccos\frac{1}{9}$. **1043.** а) $2x - y + 3z - 1= 0$; б) $x + 3y - 4z + 9 = 0$;

$3x - y + 1 = 0$. **1044.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **1045.** $\frac{3\sqrt{2}}{10}$. **1046.** а) 2 при $x = 0$; б) 10 при $x = 0{,}6$. **1062.** $x^2 + (y - 5)^2 + (z + 6)^2 = 4$. **1068.** Безліч площин і одну пряму. **1069.** Ні. **1070.** а) Ні; б) так; в) ні; г) так. **1071.** Так. **1077.** Не обов'язково. **1079.** Так. **1080.** $x - 2y + 3z + 2 = 0$. **1081.** $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{-1}$. **1098.** 2φ, якщо $\varphi \le 45°$, $180° - 2\varphi$, якщо $\varphi > 45°$. **1100.** 5. **1101.** 3. **1102.** 4. **1103.** 9. **1104.** 6. **1107.** 2. **1108.** 2; 1. **1110.** (5; 2; 0). **1111.** $4x - 3y + z + 3 = 0$. **1113.** $x + 2y - 5z + 11 = 0$; $x^2 + (y + 3)^2 + (z - 7)^2 = 30$. **1114.** 1 або 4. **1115.** 3 м. **1116.** Ні. **1120.** (1; 0; 2) або (1; 0; −2). **1127.** (−3; 0; −3). **1128.** $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$; а) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-2}$; б) $\frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$. **1129.** Знайдіть точку A_1, симетричну точці A відносно площини α. Доведіть, що $C = \alpha \cap AA_1$ шукана точка. **1141.** (−3; 5; −4). **1142.** (−3; 13; 0). **1143.** (3; 4; 1). **1144.** (6; −4; 2). **1145.** $A'(0;\ 5;\ 2)$; $B'(-3;\ 3;\ 3)$; $C'(-2;\ 3;\ 1)$. **1146.** а) Так; б) ні. **1148.** Ні. **1149.** Безліч. **1150.** а) Так; б) ні. **1151.** Не завжди. **1156.** а) (0; 8; −7); б) (0; 4; −1); в) (−2; 16; −5); г) (2; 4; −7). **1157.** $x + y - 22z + 69 = 0$. **1162.** 30°. **1163.** а) Так; б) так. **1164.** Так. **1165** а) (−1; −2; 3); б) (−1; 2; −3); в) (2; −1; −2). **1167.** а) (−2; 4; −1); б) (4; 12; −3). **1168.** $(x + 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 14$. **1169.** $2\sqrt{3}a$. **1172.** $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+3}{6} = \frac{z-3}{-3}$.

Предметний покажчик

ЗМІСТ

Розділ 1. Вступ до стереометрії

Розділ 2. Паралельність прямих і площин у просторі

Розділ 3. Перпендикулярність прямих і площин у просторі

Розділ 4. Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі

Додатки