ОСВІТА
ВИДАВНИЧИЙ ДІМ

Григорій Бевз, Валентина Бевз,
Дарина Васильєва, Наталія Владімірова

Алгебра

7 клас

МАТЕМАТИКА

- АРИФМЕТИКА
- АЛГЕБРА
- ГЕОМЕТРІЯ
- МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Лінійні рівняння

$ax = b$

$a \neq 0$	$a = 0$, $b = 0$	$a = 0$, $b \neq 0$
$x = \dfrac{b}{a}$	$0 \cdot x = 0$	$0 \cdot x = b$
Єдиний корінь	Безліч коренів	Коренів немає

Закони дій

$a + b = b + a,$

$(a + b) + c = a + (b + c),$

$ab = ba,$

$(ab)c = a(bc),$

$a(b + c) = ab + ac.$

Властивості степенів

$a^m a^n = a^{m+n},$

$a^m : a^n = a^{m-n},$

$(a^m)^n = a^{mn},$

$(ab)^n = a^n b^n,$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}.$

Формули скороченого множення

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$

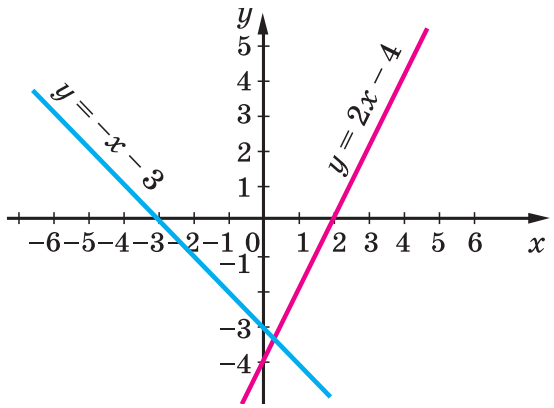
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$

Функції

Функція — відповідність, при якій кожному значенню однієї змінної відповідає єдине значення другої.

Графік кожної лінійної функції ($y = kx + b$) — пряма.



Григорій Бевз, Валентина Бевз,
Дарина Васильєва, Наталія Владімірова

Алгебра

Підручник для 7 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Київ
Видавничий дім «Освіта»
2024

УДК 512*кл7(075.3)
А34

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 05.02.2024 № 124)

ВИДАНО ЗА РАХУНОК ДЕРЖАВНИХ КОШТІВ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Підручник розроблено за модельною навчальною програмою «Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (авт. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В.)

Умовні позначення

— попрацюйте в парах
— попрацюйте в групах
— склади розповідь чи задачу
— завдання для обговорення в парі
— завдання дослідницького характеру
— завдання з використанням ІКТ
* — завдання підвищеної складності
34. — завдання, рекомендоване для домашньої роботи

До уваги вчителів!
Підручник підтримано інтерактивними уроками алгебри.
Цифрові додатки та інші додаткові матеріали за посиланням:
http://inform1.yakistosviti.com.ua/matematyka/algebra-7
https://vse.ee/ciud

А34 **Алгебра** : підруч. для 7 класу закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Д. В. Васильєва, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2024. — 272 с. : іл.

ISBN 978-966-983-466-9.

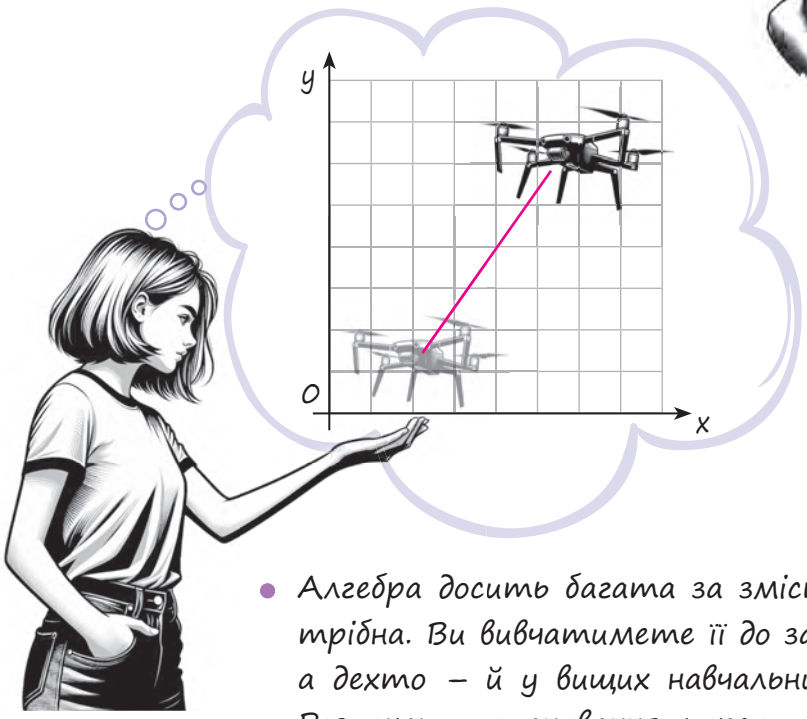
УДК 512*кл7(075.3)

ISBN 978-966-983-466-9

© Бевз Г. П., Бевз В. Г., Васильєва Д. В., Владімірова Н. Г., 2023
© Видавничий дім «Освіта», 2024

Дорогі семикласники і семикласниці!

- **Алгебра** – частина математики, яка разом з арифметикою та геометрією належить до найдавніших складових цієї науки.
- Знання алгебри необхідні не тільки тому, що вона дає найкращі методи розв'язування найважчих задач, а й тому, що в ній формується математична мова, яка використовується фахівцями/фахівчинями різних галузей науки і техніки.



- Алгебра досить багата за змістом і дуже потрібна. Ви вивчатимете її до закінчення школи, а дехто – й у вищих навчальних закладах.
- Розпочати опанування курсу шкільної алгебри вам допоможе цей підручник.

Як працювати з підручником

Читаючи теоретичний матеріал, основну увагу звертай на слова, надруковані **жирним шрифтом**. Це математичні терміни. 1 Треба зрозуміти, що ці слова означають, і запам'ятати їх. Виділені **жирним** речення — це правила або інші важливі математичні твердження. 2 Їх треба пам'ятати й уміти застосовувати. Кожен параграф підручника містить рубрику «Хочеш знати ще більше?», 3 у якій пропонуються додаткові відомості для учнів та учениць, котрі особливо цікавляться математикою.

1

Розв'язуючи різні задачі, часто доводиться множити двочлени виду $a + b$ і $a - b$, $a + b$ і $a + b$ тощо. Щоб у таких випадках відразу можна було написати відповіді, корисно запам'ятати певні тотожності, які називають **формулами скороченого множення**.

Помножимо двочлен $a + b$ на $a + b$:

$$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Отже, $$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}.$$

2

Розділ 2. Розкладання многочленів на множники

Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку їх суми і різниці.

Приклади. $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x + 4)(x - 4)$,

$25a^2 - c^4 = (5a)^2 - (c^2)^2 = (5a + c^2)(5a - c^2)$.

Формула різниці квадратів досить зручна для розкладання многочленів на множники.

3

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Іноді вдається розкласти многочлен на множники, якщо додати і відняти від нього один і той самий вираз.

Приклад. Розклади на множники двочлен $a^4 + 4$.

Розв'язання. Додамо до даного двочлена вираз $4a^2 - 4a^2$.

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 - 4a^2 + 4 = (a^4 + 4a^2 + 4) - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 =$$
$$= (a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a) = (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2).$$

Відповідай на запитання рубрики «Перевір себе» 4, і ти зможеш закріпити, узагальнити й систематизувати здобуті знання, уміння та навички, одержані під час вивчення теми. У рубриці «Виконаємо разом!» 5 наведено зразки розв'язання найважливіших видів вправ. Пропонуємо ознайомитися з цими прикладами, перш ніж виконувати домашні завдання.

ПЕРЕВІР СЕБЕ 4

1. Які вирази називають многочленами?
2. Що означає «розкласти многочлен на множники»?
3. Із якого закону дій випливає спосіб розкладання многочлена на множники винесенням за дужки спільного множника?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ! 5

1. Піднеси до квадрата двочлен:
   а) $3x - c$; б) $-2x - 3y$.

   Розв'язання.

   а) $(3x - c)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot c + c^2 = 9x^2 - 6xc + c^2$;

   б) $(-2x - 3y)^2 = (-(2x + 3y))^2 = (2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$.

Добре підготуватися до тематичного оцінювання або самостійно оцінити свої навчальні результати також допоможе цей підручник. Перевірити свої знання ти зможеш, виконуючи завдання рубрик «Завдання для самостійної роботи», «Готуємося до тематичного оцінювання» та «Типові завдання для контрольної роботи».

А виконати проєкти ти зможеш, якщо перейдеш на сторінку із цифровими додатками https://vse.ee/ciud та обереш посилання «Учнівські проєкти».

Перш ніж працювати з підручником, перейди на сторінку із цифровими додатками https://vse.ee/ciud та обери посилання «Відомості за 5–6 клас» та «Що ти вже знаєш?»

Бажаємо успіхів у навчанні!

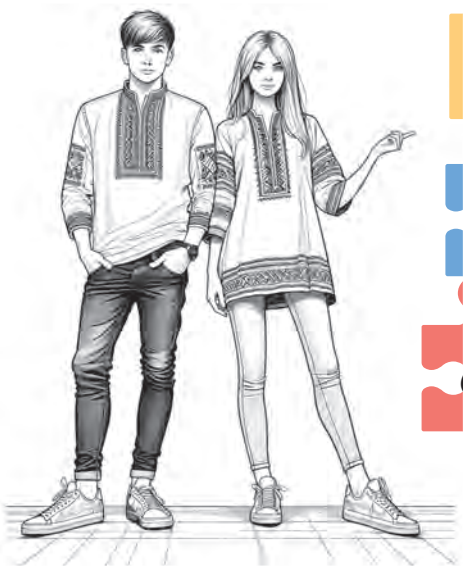
РОЗДІЛ 1. ЦІЛІ ВИРАЗИ

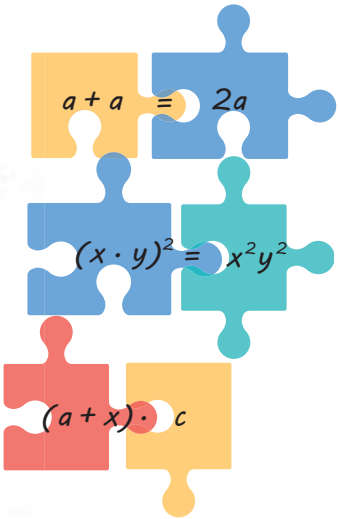
«Алгебру можна розглядати як мову особливої властивості.»

М. В. Остроградський

Вирази в математиці відіграють приблизно таку саму роль, як слова в мові або як окремі цеглини в будинку.

Математична мова — це мова виразів. Щоб опанувати її, треба навчитися оперувати математичними виразами, розуміти їх зміст, уміти записувати в зручному вигляді. Існують різні види математичних виразів.





У цьому розділі ти дізнаєшся про:

- вирази зі змінними;
- вирази зі степенями;
- одночлени;
- многочлени;
- дії над многочленами.

§ 1. Вирази зі змінними

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- вирази зі змінними — *expressions with variables*
- цілі вирази — *integer expression*
- числові вирази — *numerical expression*

У математиці вирази відіграють дуже важливу роль. Вирази бувають числові та зі змінними.

ВИРАЗИ

Числові: $-\frac{3}{5}:45;\ \frac{0{,}2\cdot 3-15:7}{2(3{,}5-1{,}8)}$

Зі змінними: $17-3a;\ \ 2x^2(a+4)$

Далі ми розглядатимемо переважно вирази зі змінними.

Вираз $\frac{2}{3}(x-5)+3x$ містить одну змінну x.

Вираз $2ax+cx^2$ містить три змінні: a, c і x.

Кожний числовий вираз (який не містить ділення на 0) має одне значення.

Вираз зі змінними при різних значеннях цих змінних може набувати різних значень. Для прикладу знайдемо значення виразу $3a+5$, якщо a дорівнює 1, 2, 3 і −4.

Якщо $a=1$, то $3a+5=3\cdot 1+5=8$;

Якщо $a=2$, то $3a+5=3\cdot 2+5=11$;

Якщо $a=3$, то $3a+5=3\cdot 3+5=14$;

Якщо $a=-4$, то $3a+5=3\cdot(-4)+5=-7$.

Результати обчислень можемо також записати в таблицю.

a	1	2	3	−4
$3a+5$	8	11	14	−7

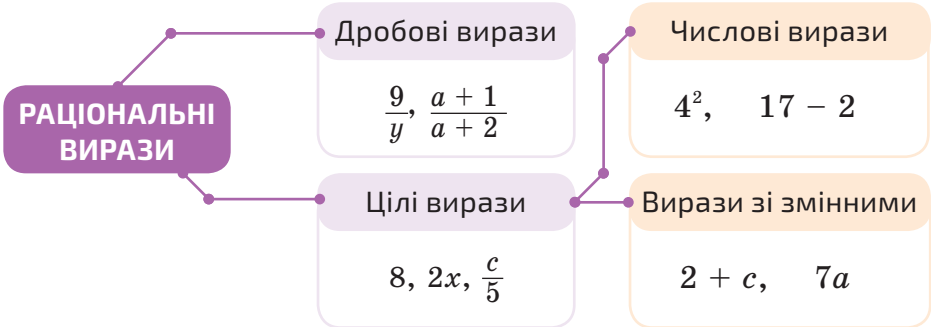
Якщо вираз містить кілька змінних, наприклад $2a-3x$, то для знаходження його значення слід мати або надавати значення для кожної змінної.

Якщо $a=7$ і $x=5$, то $2a-3x=2\cdot 7-3\cdot 5=14-15=-1$.

Якщо вираз не містить ніяких інших дій, крім додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня і ділення, його називають **раціональним виразом**.

Наприклад, $2x + n$, $-\frac{2}{3}(x-5)^3$, $\frac{a-c}{2a+c}$, $a+\frac{1}{x+c}$.

Раціональний вираз, який не містить ділення на вираз зі змінною, називають **цілим**.



У цьому розділі ми розглядатимемо тільки цілі вирази.

Вирази $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ — відповідно сума, різниця, добуток і частка змінних a і b. Читають їх і так: «сума чисел a і b», «різниця чисел a і b» тощо.

Математичними виразами вважають також окремі числа або змінні. Наприклад, 2, 0, x, $-a$.

Записи, що містять знаки рівності або нерівності, наприклад: $2 + 3 = 5$, $x < 5$, не є виразами.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Раніше ти розрізняв/розрізняла *числові вирази* і *буквені вирази*, однак у сучасній математиці буквами позначають не тільки невідомі числа. Наприклад, буква π позначає відношення довжини кола до його діаметра; його наближене значення дорівнює 3,14. Тому вираз $\pi + 2{,}5$, хоч і містить букву π, є числовим виразом. Згодом ти ознайомишся з виразами P_4, C_5^2, $\sin\pi$ та багатьма іншими, які містять букви, але не такі, замість яких можна підставляти числа. Тому далі ті букви, замість яких можна підставляти різні числа, ми називатимемо *змінними*, розуміючи, що їх значення можуть змінюватися. А вирази, які містять такі змінні, називатимемо *виразами зі змінними*.

Словом *вираз* в українській мові часто називають і висловлення (наприклад, крилатий вираз), і вияв настрою (вираз обличчя) тощо. У математиці цим словом коротко називають математичний вираз. А *математичний вираз* — це написані в якому-небудь зрозумілому порядку математичні символи, включаючи числа, букви, знаки дій, дужки, знаки відсотків, модуля тощо. Наприклад, старшокласники і старшокласниці, крім інших, розглядають і такі вирази:

$$\lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad \sum_{n=1}^{9} n^2, \quad \int_0^a x^2 dx.$$

Що вони означають, ти згодом дізнаєшся.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

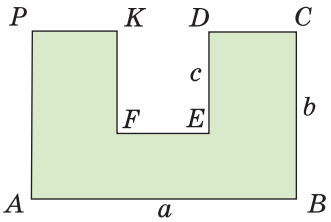
1. Наведи приклад числового виразу.
2. Наведи приклади виразів зі змінною, із двома змінними.
3. Які вирази називають: а) раціональними; б) цілими?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Запиши у вигляді виразу число, яке має:
а) a сотень, b десятків і c одиниць;
б) m тисяч і n десятків.
Розв'язання. а) $100a + 10b + c$; б) $1000m + 10n$.

2. Відомо, що $a + b = 35$. Знайди значення виразу $7a + 7 + 7b$.
Розв'язання. Скористаємося переставним і сполучним законами додавання та розподільним законом множення:
$7a + 7 + 7b = 7a + 7b + 7 = (7a + 7b) + 7 = 7(a + b) + 7 =$
$= 7 \cdot 35 + 7 = 252$
або
$7a + 7 + 7b = 7a + 7b + 7 = 7(a + b + 1) = 7(35 + 1) = 7 \cdot 36 = 252$

3. Знайди периметр многокутника, зображеного на малюнку 1.1, якщо $AB = a$, $BC = b$, $DE = c$.
Розв'язання.
Оскільки $CD + EF + KP = AB$,
то $AB + BC + CD + DE + EF + FK +$
$+ KP + PA = 2AB + 2BC + 2DE =$
$= 2a + 2b + 2c$.



Мал. 1.1

ВИКОНАЙ УСНО

1. Прочитай вирази, використовуючи терміни «сума», «різниця», «добуток» і «частка».
а) $m + n$; б) $m - x$; в) $1 : c$;
г) $2ax$; ґ) $\frac{1}{2}(x+y)$; д) $\frac{2}{3}(x-2)$.

2. Які із записів є виразами?
А $2ax - x^2$ **Б** $a + b = b + a$ **В** $2(3 - 0{,}7) - 3{,}5$ **Г** $3x = 7$

3. Який із виразів є виразом зі змінною?
А $37a - 2{,}4$ **Б** $2{,}5$ **В** $48 - 3{,}7(2 - 3{,}5)$ **Г** $24\ \%$

4. Знайди значення змінної x, при якому значення виразу $2x - 2$ дорівнює 4.

А 1 **Б** 2 **В** 3 **Г** −4

5. Довжини сторін картини прямокутної форми становлять a і b. Що означають вирази: ab; $2(a + b)$; $a + b$?

6. Альбом коштує x грн, а кольорові олівці y грн. Що означає вираз:

а) $x + y$; б) $x - y$; в) $2x + 3y$; г) $x : y$?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

7. Запиши у вигляді числового виразу та обчисли його значення:

а) суму чисел 5 і 7; б) піврізницю чисел 8 і −3;
в) добуток чисел 15 і −4; г) відношення чисел 12 і 4.

8. Запиши у вигляді виразу й обчисли його значення:

а) подвоєний добуток чисел 74 і 0,5; б)різницю чисел 38 і 7,6;
в) добуток суми чисел 38 і 12 на їх різницю.

9. Запиши суму, різницю, добуток і частку виразів:

а) 2 і c; б) $2x$ і $c - x$; в) $2k^2$ і p.

10. Запиши:

а) суму чисел a і x; б) добуток чисел k і n;
в) різницю чисел c і d; г) півсуму чисел x і y;
ґ) частку чисел a і x; д) подвоєний добуток a і x.

11. Знайди значення виразу.

а) $0{,}5x - 3$, якщо $x = 10$; б) $x + 9{,}7$, якщо $x = -10$;
в) $x(x + 2{,}4)$, якщо $x = 0{,}6$; г) $3x(5 - x)$, якщо $x = -2{,}5$.

12. Find the value of the expression.

a) $a + c - 3$, if $a = 2$, $c = 7{,}5$; b) $2x - 3z + 1$, if $x = 1$, $z = \frac{1}{3}$;

c) $2xy(x - y)$, if $x = 2$ and $y = 5$;

d) $3a(x + y - 4)$, if $a = \frac{1}{3}$, $x = 7$ and $y = 5$.

13. Заповни таблицю.

n	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$5 - 2n$								

14. Заповни таблицю.

a	3	4	5	6	7	8	9
n	0	1	–1	2	–2	3	–3
$2a + 5n$							

15. Запиши у вигляді виразу число, яке має:
а) a десятків і 6 одиниць; б) 5 десятків і b одиниць;
в) a одиниць, b десятків і c сотень.

16. Запиши у вигляді виразу число, яке має:
а) m десятків і n одиниць; б) a сотень і c одиниць;
в) a одиниць, c сотень і d тисяч.

17. **Гра.** Перший гравець / перша гравчиня задає буквою кількість сотень, другий/друга — кількість десятків, третій/третя — кількість одиниць. Четвертий/четверта має записати у вигляді виразу це число. Потім поміняйтеся ролями.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Знайди значення виразу **(18, 19)**.

18. а) $(2{,}75 - 0{,}65 : 2{,}6) \cdot 4 - 1$; б) $5 - (0{,}8 + 15{,}15 : 7{,}5)$;
в) $\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10} + \frac{1}{20}\right) \cdot 1\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$; г) $\left(0{,}02 \cdot 0{,}5 + 7{,}904 : 0{,}38 - 21 : 10\frac{1}{2}\right) \cdot 2{,}9$.

19. а) $3{,}18 - (0{,}13 + 4{,}27 : 1{,}4)$; б) $5{,}9 - (6{,}3 : 3{,}5 - 5{,}6)$;
в) $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + 12\frac{2}{15}\right) : \frac{1}{15}$; г) $\left(7{,}344 : 0{,}36 + 16\frac{1}{4} : 5 - 0{,}5 \cdot 0{,}2\right) \cdot 0{,}08$.

Для яких значень x дорівнюють одне одному значення виразів **(20, 21)**?

20. а) $3(x + 1) - 7$ і $2x - 9$;
б) $2x + 5x$ і $2(x + 5)$;
в) $0{,}5x + 2(7 - x)$ і $1{,}5x - 5(x + 2)$.

Пригадай розподільну властивість множення — зіскануй QR-код

https://vse.ee/cfyp

21. а) $8 - 2(3 - x)$ і $5 - 3(3 - 2x)$;
б) $1 + 3(x - 5)$ і $(1 + 3x) - 5x$;
в) $\frac{2}{3}x - \frac{7}{9} + 5$ і $x - \frac{1}{6}(2 - 6x)$.

22. Запиши у вигляді виразу:
а) число хвилин в x годинах;
б) число кілометрів в p метрах;
в) швидкість в метрах за секунду, якщо вона дорівнює v кілометрів за годину.

23. Запиши у вигляді виразу:

а) число грамів в x кілограмах;

б) число копійок в p гривнях;

в) швидкість в м/год, якщо вона дорівнює v км/год.

24. Запиши відповідь до задач у вигляді виразу.

а) Скільки заплатили за 5 м вовняної тканини та x метрів шовку, якщо ціна 1 м вовняної тканини — k грн, а 1 м шовку — 900 грн?

б) Довжина ділянки прямокутної форми становить a м, а її ширина на 10 м менша. Цю ділянку потрібно обнести огорожею. Знайди довжину огорожі.

25. За малюнком 1.2 запишіть відповідні вирази.

а) Яка вартість s пар шкарпеток, якщо ціну вказано за роздрібну покупку і покупець має готівку?

б) Яка вартість n сірих і k чорних шкарпеток за умови, що покупець розплачується універсальною картою Mastercard?

в) Яку знижку зробив магазин за оптову закупку покупцю, що розплачувався готівкою, якщо в результаті ціна пари шкарпеток становила p грн?

Мал 1.2

26. Запиши у вигляді виразу число, яке має:

а) a одиниць, n десятих і m сотих;

б) c десятків, a одиниць, n десятих і m сотих.

27. Трицифрове число має a сотень, b десятків і c одиниць. Запиши у вигляді виразу суму даного числа і числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку.

28. Відомо, що $x - y = 12$. Знайди значення виразу:

а) $\frac{1}{3}(x-y)$; б) $4y - 4x$; в) $\frac{y-6-x}{9}$; г) $\frac{4(x+y)-8y}{15}$.

29. Відомо, що $a = -5$, $b - c = 4$. Знайди значення виразу:

а) $3a + 2b - 2c$; б) $\frac{ac-ab}{10}$; в) $\frac{3a(b-c+1)}{7{,}5}$; г) $\frac{6c-6b}{5} - \frac{a+6}{4}$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

30. Склади формулу числа:

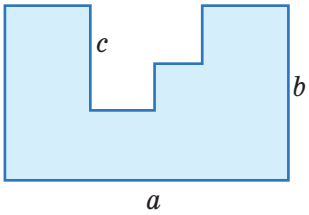
а) кратного 5;

б) кратного 5 і парного;

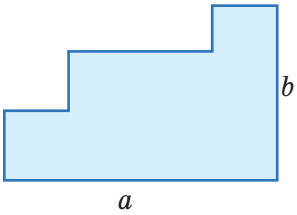
в) кратного 5 і непарного;

г) кратного 5 і 3 одночасно.

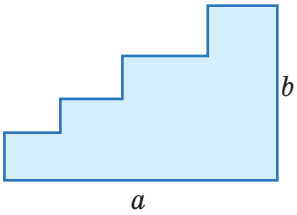
31. Визнач периметри многокутників, зображених на малюнках.



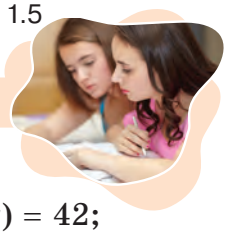
Мал. 1.3



Мал. 1.4



Мал. 1.5



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

32. Розв'яжи рівняння.

а) $(2x + 3) + (4x - 8) = 37$; б) $5 - 3z - (3 - 4z) = 42$;

в) $0{,}7 + x - (-0{,}7 + 4x) = -37$; г) $-7{,}2 - (3{,}6 - 4{,}5x) = 2{,}7x$.

33. Дві учениці, які в інтерактивному конкурсі посіли I і II місця, разом одержали для своїх шкіл 120 нетбуків. Скільки нетбуків одержала кожна школа, якщо за перше місце вручили вдвічі більше нетбуків, ніж за друге?

34. Знайди суму всіх дільників числа: а) 8; б) 18; в) 28; г) 38.

§ 2. Тотожні вирази

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- тотожність — *identity*

Два вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких значеннях змінних, називають *тотожно рівними*, або *тотожними*.

Пригадай — зіскануй QR-код.

https://vse.ee/cfyq

Наприклад, $5a + 8a$ і $13a$ — тотожно рівні вирази, бо при кожному значенні змінної a ці вирази мають рівні значення (за розподільним законом множення).

Два тотожно рівні вирази, сполучені знаком рівності, утворюють ***тотожність***.

Наприклад, $5a + 8a = 13a$, $2(x - 3) = 2x - 6$.

Тотожністю є кожна рівність, що виражає закони дій:
$a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c$,
$ab = ba$, $a(bc) = (ab)c$, $a(b + c) = ab + ac$.

Тотожностями також прийнято вважати правильні числові рівності. Наприклад, $3^2 + 4^2 = 5^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$.

Заміну даного виразу іншим, тотожно рівним йому, називають *тотожним перетворенням виразу*.

Кожна рівність — це твердження, яке може бути правильним або неправильним. Говорячи «тотожність», розуміють, що вона правильна.

Щоб довести правильність (істинність) числової тотожності, наприклад $3^2 + 4^2 = 5^2$, досить обчислити її ліву і праву частини і показати, що вони рівні:

$3^2 + 4^2 = 5^2$ — тотожність, бо $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ і $5^2 = 25$.

Щоб довести тотожність, яка містить змінні, як правило, перетворюють одну з її частин (ліву або праву) так, щоб одержати іншу її частину.

Приклад 1. Доведи тотожність $9x - 18 + 3(1 - 2x) = 3x - 15$.

Доведення. Спростимо ліву частину тотожності.

$$9x - 18 + 3(1 - 2x) = \underline{9x} - 18 + 3 \underline{- 6x} =$$
$$= \underline{9x} \underline{- 6x} - 18 + 3 = 3x - 15.$$

Ліва частина рівності тотожно дорівнює правій. Отже, тотожність доведено.

Інколи для доведення тотожності доцільно перетворити кожну з її частин.

Приклад 2. Доведи тотожність $a - 3(3 + a) = 4(1 - a) - (13 - 2a)$.

Доведення. Спростимо кожну частину тотожності.

$$a - 3(3 + a) = \underline{a} - 9 \underline{- 3a} = -2a - 9,$$
$$4(1 - a) - (13 - 2a) = 4 \underline{- 4a} - 13 \underline{+ 2a} = -2a - 9.$$

Права й ліва частини тотожності дорівнюють одному і тому самому виразу $-2a - 9$. Тотожність доведено.

Існують й інші способи доведення тотожностей. З ними ти ознайомишся пізніше.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Кажучи, що якийсь вираз тотожний, обов'язково слід зазначити, якому саме виразу він тотожний. Ідеться про *відношення тотожності* двох виразів (як про відношення перпендикулярності прямих, відношення рівності кутів тощо).

Відношення тотожності виразів має такі *властивості*:

1) *кожний вираз тотожний самому собі*;

2) *якщо вираз A тотожний виразу B, то й вираз B тотожний виразу A*;

3) *якщо вираз A тотожний виразу B, а вираз B тотожний виразу C, то й вираз A тотожний виразу C*.

Подібні властивості мають також відношення рівності чисел або фігур, паралельності прямих тощо.

Якщо в тотожності замість змінної скрізь написати один і той самий вираз, дістанемо нову тотожність.

Наприклад, якщо в тотожності $4(a-2)+8=4a$ змінну a замінити на $z+3$, то дістанемо рівність

$$4((z+3)-2)+8=4(z+3-2)+8=4(z+1)+8=4z+4+8=$$
$$=4z+12=4(z+3),$$

яка також є тотожністю.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Які два вирази називають тотожно рівними?
2. Що таке: а) тотожність; б) тотожне перетворення виразу?
3. Чи кожна рівність є тотожністю?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Доведи тотожність $2a+6=6-4(a-5)+2(3a-10)$.

Доведення. Спростимо праву частину тотожності:

$$6-4(a-5)+2(3a-10)=6\underline{-4a}+20\underline{+6a}-20=2a+6.$$

Права частина рівності тотожно дорівнює лівій, тому ця рівність — тотожність.

2. Чи завжди правильна рівність $|a^2|=a^2$?

Розв'язання. Яким би не було значення a, значення виразу a^2 додатне або дорівнює нулю. Модуль невід'ємного числа дорівнює цьому самому числу. Отже, рівність $|a^2|=a^2$ правильна для кожного значення a.

3. Доведи, що рівність $(x+3)^2=x^2+9$ не є тотожністю.

Доведення. Щоб довести, що рівність є тотожністю, потрібно показати, що вона виконується при будь-яких значеннях змінних, що входять до неї. А щоб довести, що рівність не є

тотожністю, досить вказати одне значення змінної, при якому рівність не виконується, тобто навести контрприклад.
При $x = 0$ рівність справджується, але при $x = 1$ маємо: $(1+3)^2 = 4^2 = 16 \neq 1+9$. Цього досить, щоб можна було стверджувати, що рівність не є тотожністю.

ВИКОНАЙ УСНО

35. Чи тотожні вирази:

а) $2a + a$ і $3a$;
б) $x + 2x - 3x$ і 0;
в) $8c - 3c$ і $5c$;
г) $ax + ax + ax$ і $3ax$;
ґ) $7xy - 2x$ і $5y$;
д) $-3c + 9$ і $9 - 3c$;
е) p^2p і p^3;
є) $x + x^2 + x^3 + x^4$ і x^5;
ж) $a - c$ і $c - a$;
з) $-a^2$ і $(-a)^2$;
и) $4a + p$ і $5ap$;
і) $x - 2a$ і $-2a + x$?

36. Який із виразів не тотожний виразу $2x - y$?

А $-y + 2x$ **Б** $4(y - 2x) + 10x - 5y$ **В** $y - 2x + 3$ **Г** $-(y - 2x)$

37. Якому з виразів тотожно дорівнює вираз $3(2a + c) - 3c$?

А $6a - 2c$ **Б** $6a$ **В** $2a - 2c$ **Г** $6ac - 3c$

38. Чи є рівність $(m + 2) - (m - 2) = 0$ тотожністю?

39. Наведи контрприклад, щоб довести, що рівність $(c - 2)^3 = c^3 - 8$ не є тотожністю.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

Спрости вираз, замінивши його тотожно рівним виразом **(40, 41)**.

40. а) $2c + 3c - 5$; б) $3x - 4x + x$; в) $12n - 17 - 2n$;
г) $19c - 3c + 8$; ґ) $63 - 23p + 32p$; д) $4x + 65 - 10x$.

41. а) $-4 + 3a - 7a$; б) $9 - 23x + 40x$; в) $-4 - 12 + 8ac$.

42. **Гра.** Перший/перша з гравців/гравчинь записує вираз зі змінною, другий/друга — ще один вираз з цією ж змінною, третій/третя — число і знаки дій між записаними виразами, а четвертий/четверта — спрощує утворений вираз.

Чи є тотожністю рівність **(43, 44)**?

43. а) $19x - 4(x + 5) + 20 = 15x$;
б) $7(2 - 3x) + 21 = 14$;

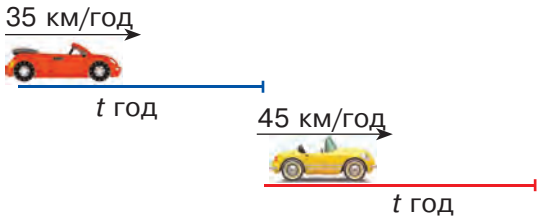
в) $2{,}5 + 5(a - 1{,}5) - a = 4a - 5$;
г) $-2(x + 5) + 3(x - 7) = x + 11$.

44. а) $35 + 7(x - 1) - 28 = 7x$;
б) $-3(2y + 1) + 6 = -3$;
в) $-13 - 3(5 - 6x) + 6x = 12x - 28$;
г) $1{,}5(5 - 2x) + 5(1{,}1 + x) = 13 + 2x$.

45. Доведи тотожність.
а) $3c - 3(c - 1) = 3$;
б) $2xy + 2(3 - xy) = 6$;
в) $15x = 9 - 3(3 - 5x)$;
г) $1 - 2x = 5 - 2(x + 2)$.

46. Prove the identity.
a) $8x = 6 + 2(4x - 3)$;
b) $5(2x + y) = 10(x + y) - 5y$;
c) $7 = 12x - (-7 + 12x)$;
d) $3c - 3(1 + c - x) = 3x - 3$.

47. Проаналізуйте дані на малюнку 2.1.
1) Що означає вираз:
а) $35t$; б) $45t$?
2) Запишіть вираз для знаходження:
а) загальної відстані, що проїдуть машини разом;
б) на скільки більше довжина червоного маршруту, ніж синього?



Мал. 2.1

До кожного з виразів запишіть тотожно рівний йому.

48. Для перевезення дітей до оздоровчого табору замовлено 5 автобусів по a місць у кожному, 3 автобуси по b місць у кожному та мікроавтобус, у якому 13 місць. Запиши формулу для знаходження тієї кількості дітей (N), яких можна перевезти на цих автобусах за один раз.

49. Група туристів повинна спуститися вниз вздовж річки. Для цього туристам було надано a човнів на 4 особи кожен, b човнів на 3 особи кожен та k плотів, які вміщали 15 осіб. Запиши формулу для знаходження тієї кількості (M) туристів, яких можна перевезти цими засобами.

50. Група велосипедистів виїхала з міста A до міста B, при цьому перші p год вони їхали зі швидкістю 12 км/год, наступні k год — зі швидкістю 10 км/год та останню годину зі швидкістю 8 км/год. Запиши формулу для знаходження відстані s між містами A та B.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Спрости вираз, замінивши його тотожно рівним виразом **(51, 52)**.

51. а) $2x + 4 + 2(x + 4) + 4(x - 8)$; б) $-(5a - c + 2) + 3a - c + 2$;
в) $5(12a - 23x) - 8(6x - 13a)$; г) $-6(ac - 4) + 3(7 - 2ac)$.

52. а) $2(x^2 - 3) - 4(17 - 4x^2)$; б) $4(x^2 - 3) - x(4x - 5)$;
в) $c(3 - 2c) + 3(c - 2c^2)$; г) $2y - 3 - 2(a + y - 1)$.

Доведи тотожність **(53–55)**.

53. а) $2(x - 3) - 5(x - 4) = 14 - 3x$;
б) $3(2a - 1) - 2(3a - 1) = -1$;
в) $5(0{,}5 + 2x) - 5(1{,}1 - x) = 15x - 3$;
г) $9(x - 1) - 3(2x - 3) = 3x$.

54. а) $9x - 4(x + 5) - 1 = 7(x - 3) - 2x$;
б) $-2(2a + 5) = 5(2a - 9) - 7(2a - 5)$;
в) $0{,}5(a + b + c) - 0{,}5(a - b + c) - (a + b - c) = c - a$.

55. а) $3(a + c + x) - 2(a + c - x) - (a - c + x) = 2(c + 2x)$;
б) $2x + 2 = 2(x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1) - (x^2 + x - 1)$.

Чи тотожні вирази **(56, 57)**?

56. а) $1 - (1 - (1 - c))$ і $1 - c$;
б) $a - b + 1 - 2(b + 1)$ і $2(a - b - 1) - (a + b - 1)$.

57. а) $0{,}5(x + y) - 0{,}5(x - y) - y$ і 0;
б) $n - (1 - (n - (1 - n)))$ і $3n - 2$.

58. Замініть у тотожності $3x - 2 = 2(x - 1) + x$ змінну x виразом:
а) $c + 3$; б) $ac - 1$; в) $m + 5$.
Чи є тотожністю одержана рівність?

59. У тотожності $5x + 3x = 8x$ заміни змінну x виразом.
а) $a - b$; б) $a^2 - ac + c^2$.
Чи є тотожністю одержана рівність?

60. Довжина прямокутника дорівнює a см, а ширина — на c см менша. Чому дорівнює периметр прямокутника?

61. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a см, а бічна сторона — на 2 см довша. Чому дорівнює периметр трикутника?

62. Запиши у вигляді тотожності твердження:
а) сума двох взаємно протилежних чисел дорівнює нулю;
б) добуток двох взаємно обернених чисел дорівнює 1;
в) добуток двох чисел дорівнює добутку протилежних до них чисел.

63. Запиши у вигляді тотожності твердження:

а) квадрати протилежних чисел — рівні;

б) куби протилежних чисел — протилежні числа;

в) квадрат числа дорівнює квадрату модуля цього числа;

г) модуль куба числа дорівнює кубу модуля цього числа.

64. Заповни таблицю.

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$2(x^2-4)+6$								
$2x^2-2$								

Чи тотожні вирази $2(x^2 - 4) + 6$ і $2x^2 - 2$?

65. Заповніть таблицю.

a	0	1	2	3	4	5	100	100 000
$\lvert a\rvert+1$								
$\lvert a+1\rvert$								

Чи правильна тотожність $|a|+1=|a+1|$?

Чи є тотожністю рівність **(66, 67)**?

66. а) $|x+3|=x+3$; б) $|x^2+5|=x^2+5$; в) $|a-b|\cdot|b-a|=(a-b)^2$.

67. а) $|x-y|=x-y$; б) $|a+b|=|a|+|b|$; в) $|x|-|y|=|y|-|x|$.

68. Проаналізуй формули та виконай завдання.

а) З формули $l = 2\pi R$ вирази R через l і π.

б) З формули $V=\dfrac{m}{\rho}$ вирази: ρ через m та V; m через ρ та V.

в) З формули $s = vt + l$ вирази: l через s, v і t; v через s, t і l.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

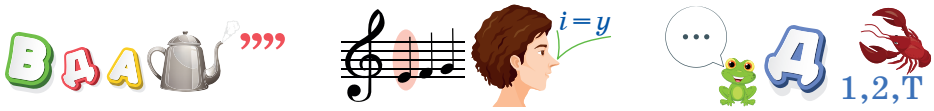
69. Знайди відповідність між умовою задачі та буквеним виразом до неї.

1 За блокнот та ручку заплатили a грн. Блокнот коштував на b грн дорожче ручки. Скільки гривень коштувала ручка?

2 Автомобіль та автобус проїхали разом a км. Автобус проїхав на b км менше, ніж автомобіль. Скільки кілометрів проїхав автомобіль?

А $\dfrac{a+b}{2}$ **Б** a **В** $\dfrac{a}{b+1}$ **Г** $\dfrac{a-b}{2}$ **Д** $\dfrac{ab}{b+1}$

70. Розгадай ребуси.

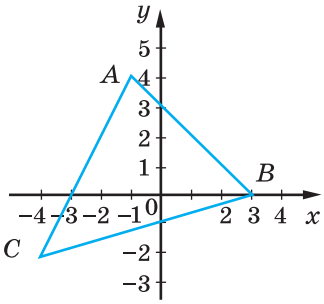


ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

71. Із 150 випускників та випускниць економічного коледжу 10 % було направлено на роботу в банки, 20 % — у заклади торгівлі, а 30 % продовжили навчання в університеті. Скільки випускників/випускниць ще не працевлаштовано?

72. Укажи координати точок, позначених на малюнку 2.2. Знайди координати точок перетину сторін трикутника ABC з осями координат.

73. За якої умови правильна пропорція?
а) $3 : x = x : 27$;
б) $y : 4 = 16 : y^2$.



Мал. 2.2

§ 3. Вирази зі степенями

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- степінь — *power*, показник степеня — *exponent*,
- основа степеня — *base*

Степенем **числа** a **з натуральним показником** n**, більшим за 1, називають добуток** n **множників, кожний із яких дорівнює** a**.**

Першим степенем будь-якого числа домовилися вважати саме число: a^1 — те саме, що й a.

Показник степеня 1 не прийнято писати.

$$a^1 = a,$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}, \text{ де } n \text{ — натуральне число, } n \neq 1.$$

Наприклад, $3 \cdot 3 = 3^2$ — другий степінь (або квадрат) числа 3,
$xxx = x^3$ — третій степінь (або куб) змінної x,
$cccccc = c^6$ — шостий степінь змінної c.

Піднести число 2 до десятого степеня — означає перемножити десять двійок:

$$2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024.$$

Число, яке підносять до степеня, називають *основою степеня*. Число, яке показує, до якого степеня підносять основу, називають *показником степеня*.

a^n — степінь
показник степеня
основа степеня

ЗАПАМЯТАЙ!

a^2 — a квадрат $S = a^2$

a^3 — a куб $V = a^3$

Основою степеня може бути і дробове число, і від'ємне. Наприклад,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}, \quad (-0{,}2)^3 = (-0{,}2) \cdot (-0{,}2) \cdot (-0{,}2) = -0{,}008.$$

Щоб піднести до степеня від'ємне число, треба піднести до такого самого степеня модуль цього числа і перед результатом поставити знак «плюс», якщо показник степеня парний, або «мінус», якщо показник степеня непарний.

Якщо $a \geq 0$, то $a^n \geq 0$.

Якщо $a < 0$, то $a^{2n} > 0$ і $a^{2n-1} < 0$.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

У математиці, фізиці, астрономії, біології та інших науках часто використовують степені числа 10 для запису чисел у *стандартному вигляді*.

Будь-яке число A, більше за 10, можна записати у вигляді $A = a \cdot 10^n$, де $1 \le a < 10$ і n — натуральне число. Такий запис числа A називають стандартним, а показник n — порядком *числа* A.

Наприклад, в астрономії за одиницю довжини приймають 1 парсек (скорочено — пк).

$$1 \text{ пк} = 30800000000000 \text{ км} = 3{,}08 \cdot 10^{13} \text{ км}.$$

Степені числа 10 із цілим показником:

1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}

Вважають, що 10^{-n}, де n — число натуральне, позначає десятковий дріб 0,0000... 01 з n десятковими знаками.

Наприклад, $10^{-5} = 0{,}00001$, $10^{-10} = 0{,}0000000001$.

Швидкість руху равлика в стандартному вигляді записують так:

$$0{,}000003 \text{ м/с} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}.$$

У стандартному вигляді можна записати будь-яке число:

$$A = a \cdot 10^n, \quad \text{де } 1 \le a < 10 \text{ і } n \text{ — } \textbf{ціле число.}$$

Якщо число A велике, його порядок — додатне число, а якщо додатне число A дуже мале, то його порядок — від'ємне число.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що таке:

а) степінь числа;

б) основа степеня;

в) показник степеня?

2. Що називають квадратом числа, кубом числа?

3. Додатним чи від'ємним числом є степінь додатного числа?

4. Додатне чи від'ємне число отримаємо при піднесенні від'ємного числа до степеня з:

а) парним показником;

б) непарним показником?

5. Що називають стандартним виглядом числа? А порядком числа?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Знайди значення виразу $3x^2 - 2x^3$, якщо:

а) $x = -0{,}2$; б) $x = 1\frac{1}{2}$.

Розв'язання.

а) Якщо $x = -0{,}2$, то $3 \cdot (-0{,}2)^2 - 2 \cdot (-0{,}2)^3 =$
$= 3 \cdot 0{,}04 - 2 \cdot (-0{,}008) = 0{,}12 + 0{,}016 = 0{,}136$.

б) Якщо $x = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, то $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3 \cdot \frac{9}{4} - 2 \cdot \frac{27}{8} = \frac{27}{4} - \frac{27}{4} = 0$.

2. Скільки коренів мають рівняння $x^5 = 0$; $x^5 = 1$; $x^4 = 1$; $x^4 = -1$?

Розв'язання.

Рівняння $x^5 = 0$ має тільки один корінь $x = 0$, оскільки $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$, і не існує такого числа x, відмінного від 0, щоб виконувалась рівність $xxxxx = 0$.

Так само можна переконатися, що рівняння $x^5 = 1$ має тільки один корінь $x = 1$, а рівняння $x^4 = 1$ має два корені: $x = 1$ і $x = -1$, бо $1^4 = 1$ і $(-1)^4 = 1$.

Рівняння $x^4 = -1$ розв'язків не має, бо степінь числа з парним показником є числом невід'ємним.

3. Запиши у стандартному вигляді числа:

а) 2000000000; б) 0,00000005; в) 0,00123.

Розв'язання.

а) $2000000000 = 2 \cdot 1000000000 = 2 \cdot 10^9$.

б) $0{,}00000005 = 5 \cdot 10^{-8}$;

в) $0{,}00123 = 1{,}23 \cdot 10^{-3}$.

4. Запиши число $6{,}7 \cdot 10^8$ без показника степеня.

Розв'язання. $6{,}7 \cdot 10^8 = 6{,}7 \cdot 100000000 = 670000000$.

5. Доведи, що:

а) $111^{11} + 11^{111}$ ділиться на 2;

б) $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ ділиться на 3.

Доведення.

а) Останні цифри чисел 111^{11} і 11^{111} — одиниці, а тому остання цифра суми цих чисел — двійка. Отже, число $111^{11} + 11^{111}$ ділиться на 2.

б) Кожний із доданків — це число, яке можна записати у вигляді одиниці з наступними нулями. Сума цифр трьох таких чисел дорівнює трьом, тому саме число ділиться на три.

ВИКОНАЙ УСНО

74. Назви основу та показник степеня.

а) $3{,}5^4$; б) $(-0{,}1)^3$; в) $(-100)^4$; г) $(-a)^6$; ґ) $\left(\frac{1}{2}x\right)^5$.

75. Знайди квадрати чисел.

1; −3; 7; 8; −9; 10; 20; 30; −40; 0,2; 0,03.

76. Знайди куби чисел.

1; −2; 3; 4; −5; 10; 0,1; $-\frac{1}{3}$; $-1\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$.

77. Чи правильно, що:

а) $5^1 = \frac{1}{5}$; б) $7^1 = 7$; в) $-2^4 = 16$; г) $(-7)^2 = 49$;

ґ) число 0,16 є квадратом числа 0,4;

д) $\frac{2}{3}$ в п'ятому степені записують так: $\frac{2^5}{3}$;

е) добуток $5 \cdot 5 \cdot 5$ можна записати так: 3^5;

є) значення виразу 2^3 дорівнює $2 \cdot 3 = 6$?

78. Істинною чи хибною є нерівність?

а) $(-15)^{10} < 0$; б) $(-3{,}2)^{13} > 0$; в) $-4{,}1^{12} < 0$;

г) $-(-2)^{62} > 0$; ґ) $(-3{,}4)^2 > -3{,}4^2$; д) $x^{122} < 0$;

е) $\frac{(-15)^4}{-15^4} < 0$; є) $(-6{,}5)^4 > (-8{,}4)^3$.

79. Прочитай вираз, використовуючи терміни «квадрат суми та різниці», «сума та різниця квадратів».

а) $a^2 + b^2$; б) $(a + b)^2$; в) $a^2 - b^2$; г) $(a - b)^2$.

80. Розв'яжи рівняння.

а) $x^7 = 0$; б) $x^8 = -1$; в) $15x^6 = 0$; г) $x^8 = 1$; ґ) $x^3 = 1$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

81. Запиши добуток у вигляді степеня.

а) $0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3$; б) $c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c$;

в) $(-16) \cdot (-16) \cdot (-16) \cdot (-16)$; г) $(-b) \cdot (-b) \cdot (-b) \cdot (-b) \cdot (-b)$.

82. Write the product as a power.

a) $(a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b)$; b) $k \cdot k \cdot k \cdot k$; c) $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{18\text{times}}$.

83. Запиши добуток у вигляді степеня.
а) $(-y)\cdot(-y)\cdot(-y)\cdot(-y)$; б) $(ab)\cdot(ab)\cdot(ab)\cdot(ab)\cdot(ab)\cdot(ab)$;

в) $\underbrace{m\cdot m\cdot m\cdot\ldots\cdot m}_{20\text{ разів}}$; г) $(p-a)\cdot(p-a)\cdot(p-a)\cdot(p-a)\cdot(p-a)$.

84. **Гра.** Один з учасників/одна з учасниць називає показник степеня (до 6), а інший/інша — знаходить значення степеня із заданим показником і основою 2. Потім учні/учениці міняються ролями.

85. *Стародавня єгипетська задача.*

У семи людей по сім кішок, кожна кішка з'їдає по сім мишей, кожна миша з'їдає по сім колосків, із кожного колоска може вирости по сім мірок ячменю. Скільки кішок? Скільки вони з'їдають мишок? Скільки при цьому спасають колосків?

86. Подай числа, якщо це можливо, у вигляді степеня:
а) з основою 2: 4; 8; 64; 16; 144; 256; –8; –32; –64;
б) з основою 5: 5; 25; 125; 225; –25; –125.

87. Подай числа, якщо це можливо, у вигляді степеня:
а) з основою 3: 27; 81; –9; –27;
б) вибери основу самостійно: 100; 49; 121; –144; 169; 196.

Обчисли **(88–91)**.

88. а) 5^2, 2^5, 10^3, 100^3, 25^2; б) $(0{,}2)^3$, $(0{,}3)^2$, $(0{,}04)^3$;
в) 3^4, $(-3)^4$, $-(3^4)$, -3^4; г) $(-0{,}5)^2$, $-0{,}5^2$, $(-1)^{160}$, $(-1)^{105}$.

89. а) 8^2, 10^2, 3^3, 5^3, 6^3; б) $(0{,}1)^2$, $(0{,}3)^3$, $(0{,}5)^3$;
в) $1{,}1^2$, $1{,}6^2$, $2{,}7^2$, $3{,}5^2$; г) $(-1)^5$, $(-2)^6$, $(-9)^3$, $(-12)^2$.

90. а) $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2$; б) $3^2-4^2+5^2-6^2+7^2$.

91. а) $(-2)^2+(-2)^3+(-2)^4+(-2)^5$; б) $9^2-8^2+7^2-6^2$.

92. Чи правильна рівність?
а) $3^2+4^2=5^2$; б) $15^2+16^2=17^2$; в) $35^2+36^2=37^2$;
г) $3^3+3^2=6^2$; ґ) $4^3+6^2=10^2$; д) $97^2-96^2=97+96$.

93. Доведи, що:
а) $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$; б) $1^3+2^3+3^3+\ldots+9^3=45^2$.

94. Обчисли площу квадратної серветки, сторона якої дорівнює:
а) 3 дм; б) 10 см.

95. Обчисли об'єм бака у формі куба, ребро якого дорівнює:
а) 2 м; б) 5 дм.

Знайди значення виразу **(96–99)**.

96. а) $(-7)^2 - (-1)^9 \cdot 3^4$; б) $(0{,}02 + 0{,}28)^4 \cdot 10^5$; в) $6^3 - \left(4 \cdot \frac{2}{5}\right)^2 \cdot 6\frac{1}{4}$;

г) $(-1)^{24} : \left(\frac{1}{2}\right)^6 + (-3)^5$; ґ) $(5{,}6 - 5{,}5)^3 : 0{,}1$; д) $(0{,}3^2 + 0{,}4^2) - 0{,}5^2$.

97. а) $10^2 - (-1)^{12} \cdot 6^2$; б) $(0{,}44 + 0{,}46)^3 \cdot (-10)^4$;
в) $(7{,}8 - 7{,}7)^4 : (0{,}1)^5$; г) $3^2 \cdot (2{,}7 - 2{,}8)^2$.

98. а) $3a^4 - 2a^2$, якщо $a = -3$; б) $(2m - 1)^2 : m^3$, якщо $m = 2$.

99. а) $n^3 + (n - 3)^2$, якщо $n = -2$; б) $5c^3 - 2c^2 + c$, якщо $c = 0{,}5$.

Не виконуючи обчислень, порівняй значення виразів **(100, 101)**.

100. а) $(-7)^{10}$ і 0; б) $(-10)^7$ і 0; в) $(-2)^6$ і $(-3)^5$; г) -5^6 і $(-5)^6$.

101. а) $(-21)^7$ і 0; б) $(-3)^6$ і 0; в) $(-5)^5$ і $(-4)^4$; г) -7^8 і $(-7)^8$.

Розв'яжи рівняння **(102, 103)**.

102. а) $5x^4 = 5$; б) $4x^2 = x^2$; в) $x^2 + 5 = 0$; г) $-2x^3 = 2$.

103. а) $x^2 + 1 = 0$; б) $x^8 - 1 = 0$; в) $2x^7 = 2$; г) $x^3 - 6 = 2$.

104. Запиши у стандартному вигляді значення величин.

а) Швидкість світла — 300000 км/с;

б) маса Землі — 6000000000000000000000 т;

в) маса Місяця — 73500000000000000000 т;

г) об'єм Землі — 1083000000000 км^3.

Мал. 3.1 Фото NASA темної сторони Місяця на тлі Землі

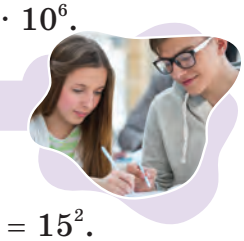
105. Запиши у стандартному вигляді числа.

а) 20000; б) 7530000; в) 10500000;
г) 909900000; ґ) 33000; д) 105;
е) 1000000000; є) 7004.

106. Запиши у вигляді натуральних чисел.

а) $9 \cdot 10^4$; б) $1{,}31 \cdot 10^3$; в) $7{,}1 \cdot 10^5$;
г) $4{,}3 \cdot 10^2$; ґ) $2{,}05 \cdot 10^4$; д) $3{,}125 \cdot 10^6$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



Чи правильна рівність **(107, 108)**?

107. а) $2^2 + 2^2 + 6^2 + 10^2 = 12^2$; б) $2^2 + 4^2 + 6^2 + 13^2 = 15^2$.

108. а) $2^2 + 6^2 + 8^2 + 25^2 = 27^2$; б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$.

109. Обчисли значення виразу.

а) $(36 - 4^2)^3$; б) $(3^4 + 19)^5$; в) $(0{,}875 + 0{,}5^3)^{10}$;

г) $(-0{,}3)^4 \cdot 10^3$; ґ) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$; д) $(4^4 - 3^5 - 13)^{12}$.

110. Установи відповідність між виразами (1–4) та їх числовими значеннями (А–Д).

1 $(35 - 2^5)^4$	**А** -1
2 $10^4 \cdot 0{,}2^3$	**Б** 0,01
3 $(0{,}3^3 - 0{,}017)^2$	**В** 80
4 $(2^7 - 5^3 - 4)^{15}$	**Г** 81
	Д 0,0001

Знайди значення виразу **(111, 112)**.

111. а) $(4x^2 - y^2)^2 : (2x - y)^2$, якщо $x = 0{,}6$, $y = -0{,}2$;

б) $(1 + b)^2 - (a - 1)^2 - (a + b)^2$, якщо $a = 1{,}1$, $b = -0{,}1$.

112. а) $2xy + (x + 2y)^3 + y^2$, якщо $x = -2$, $y = 3$;

б) $(2m - n)^2 - (4m^2 + n^2 - 4mn)$, якщо $m = 1{,}3$, $n = 2{,}5$.

113. Заповніть таблиці.

а)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$2x^2$									

б)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$(2x)^2$									

114. Обчисли, користуючись калькулятором:

а) $3{,}4^5$; б) $5{,}75^4 + 57$; в) $47{,}2 \cdot 2{,}84^3$; г) $3{,}7 + 2{,}7^4$.

Обчисли і порівняй **(115, 116)**.

115. а) Суму квадратів чисел 3 і 5 та квадрат їх суми;

б) різницю квадратів чисел 10 і 6 та квадрат їх різниці.

116. а) Суму кубів чисел 3 і 2 та куб їх суми;

б) різницю кубів чисел 5 і 2 та куб їх різниці.

117. Якщо твердження неправильне, наведи контрприклад (приклад, що його спростовує).

а) Якщо квадрати двох чисел рівні, то рівні й самі числа;

б) якщо куби двох чисел рівні, то рівні і самі числа;

в) якщо до від'ємного числа додати його квадрат, то отримаємо додатне число;

г) якщо від від'ємного числа відняти його квадрат, то отримаємо від'ємне число.

118. Значення якого з виразів є: 1) найбільшим; 2) найменшим?

а) $\frac{7^2+3^2}{2}$, $\left(\frac{7+3}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$; б) $\frac{7^2-5^2}{2}$, $\left(\frac{7-5}{2}\right)^2$, $\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2$.

119. Значення якого з виразів найменше?

$\frac{5^3+3^3}{2}$, $\left(\frac{5+3}{2}\right)^3$, $\left(\frac{5}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{2}\right)^3$.

120. Доведи, що рівняння не має розв'язків.

а) $x^4 + 3 = 0$; б) $3x^2 + 8 = 0$; в) $(y - 3)^2 + 1 = 0$.

121. Яке найменше значення і при якому значенні змінної x приймає вираз? а) $x^2 + 9$; б) $4+(2-a)^2$; в) $(x^2+2)^4-10$.

122. Яке найбільше значення і при якому значенні змінної x приймає вираз? а) $3 - x^2$; б) $6-(x-4)^8$.

123. Запиши у стандартному вигляді числа.

а) 287287000; 17530000; 220500; 90,99;

б) 0,0003; 0,235; 0,05; 0,0000000041;

в) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{200}$; $\frac{3}{5000}$; $\frac{73}{500000}$; $\frac{999}{1000000000}$.

124. Запиши у звичайному вигляді числа.

а) $1{,}2 \cdot 10^3$; $3{,}47 \cdot 10^5$; $7{,}3 \cdot 10^4$; $14{,}23 \cdot 10^6$;

б) $2 \cdot 10^{-4}$; $1{,}1 \cdot 10^{-3}$; $9 \cdot 10^{-5}$; $6{,}75 \cdot 10^{-6}$.

125.* Доведи, що: а) $10^{12} + 2$ ділиться на 3;

б) $6^{91} - 11^{91}$ ділиться на 5; в) $10^{15} + 8$ ділиться на 9;

126.* Доведи, що: а) $1 + 10^{10} + 10^{100}$ ділиться на 3;

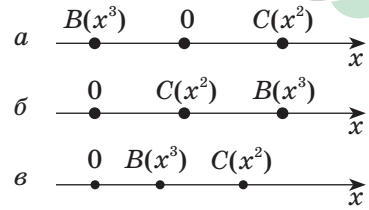
б) $26^{13} + 10^{13}$ ділиться на 2; в) $10^{10} - 1$ ділиться на 9.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

127. Вкажи на координатній прямій (мал. 3.2), де може бути розташована точка $A(x)$.

128. Заміни букви цифрами так, щоб була правильною рівність:

а) куб = *ее*; б) степінь = *еее*.



Мал. 3.2

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

129. Чи тотожні вирази?
а) $2a + a + a$ і $4a$; б) $2b - 2a$ і $-2(a - b)$; в) $x + x + x$ і x^3;
г) $5 + 5 + 5x$ і $15x$; ґ) $3y + 2y + y - 6$ і y; д) $a^3 - a$ і a^2?

130. Площа Києва приблизно дорівнює 840 км^2, а площа держави Ватикан — 44 га. Який приблизно відсоток площі Києва становить площа Ватикану?

131. Бічна сторона рівнобедреного трикутника на 3 см довша за основу. Знайди їх довжини, якщо периметр трикутника:
а) 54 см; б) 36 см; в) a см.

§ 4. Властивості степенів

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- властивості степенів — *properties of powers*

Яке б не було число a і натуральні показники степенів m і n, завжди $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Доведення. $a^m \cdot a^n = \underbrace{aa\ldots a}_{m\text{ разів}}\underbrace{aa\ldots a}_{n\text{ разів}} = \underbrace{aa\ldots a}_{(m+n)\text{ разів}} = a^{m+n}$.

Тотожність $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ називають *основною властивістю степеня*.

Щоб помножити степені з однаковими основами, потрібно показники додати, а основу залишити без змін.

Наприклад, $3^2 \cdot 3^5 = 3^7$; $1{,}3^4 \cdot 1{,}3^5 = 1{,}3^9$; $x^3x^5 = x^8$.

Яке б не було число a $(a \neq 0)$ і натуральні показники степеня m і n $(m > n)$, завжди $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Доведення. За правилом множення степенів:
$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$, тому $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Щоб поділити степені з однаковими основами (за умови, що показник степеня діленого більший за показник степеня дільника), потрібно основу залишити без змін, а від показника степеня діленого відняти показник степеня дільника.

Наприклад, $7^5 : 7^3 = 7^2$; $(-13)^{11} : (-13)^7 = (-13)^4$.

Яке б не було число a і натуральні показники степеня m і n, завжди $(a^n)^m = a^{nm}$.

Доведення. $(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m \text{ разів}} = a^{\overbrace{n+n+\ldots+n}^{m}} = a^{nm}$.

Щоб піднести степінь до степеня, потрібно показники степенів перемножити, а основу залишити без змін.

Наприклад, $(2^3)^4 = 2^{12}$; $(0{,}7^2)^5 = 0{,}7^{10}$; $(c^7)^3 = c^{21}$.

Для будь-яких чисел a і b та натурального показника степеня n $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

Доведення. $(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{n \text{ разів}} = \underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ разів}} \cdot \underbrace{bb\ldots b}_{n \text{ разів}} = a^n \cdot b^n$.

Отже, **n-й степінь добутку дорівнює добутку n-х степенів множників.**

Наприклад, $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$; $(3m)^6 = 3^6 m^6 = 729m^6$.

Можна довести (спробуй зробити це самостійно, записавши вираз $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ у вигляді добутку $\left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^n$), що для будь-яких чисел a і b $(b \neq 0)$ і натурального показника степеня n правильна рівність:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Отже, за вказаних умов:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad (a^n)^m = a^{nm}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}; \qquad (ab)^n = a^n b^n;$$

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Розглянуті властивості можна поширити і на степені з цілими від'ємними показниками.

Наприклад, $10^{-5} \cdot 10^{-3} = 10^{-5+(-3)} = 10^{-8}$;

$(10^{-2})^{-3} = 10^{6}$.

Використовуючи властивості степенів з цілими показниками, можна спростити виконання дій з будь-якими числами, записаними у стандартному вигляді.

Наприклад, якщо $a = 3{,}5 \cdot 10^{7}$, $b = 4 \cdot 10^{-3}$, то

$$a \cdot b = 3{,}5 \cdot 10^{7} \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 3{,}5 \cdot 4 \cdot 10^{7} \cdot 10^{-3} = 14 \cdot 10^{4} = 1{,}4 \cdot 10^{5};$$

$$a : b = (3{,}5 \cdot 10^{7}) : (4 \cdot 10^{-3}) = (3{,}5 : 4)\,(10^{7} : 10^{-3}) = 0{,}875 \cdot 10^{7-(-3)} =$$
$$= 0{,}875 \cdot 10^{10} = 8{,}75 \cdot 10^{9}.$$

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Сформулюй основну властивість степенів.
2. Як поділити степені з однаковими основами?
3. Як підносити до степеня: а) степінь; б) добуток; в) дріб?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Запиши у вигляді степеня вираз.

а) $a^5 \cdot a^3 \cdot a$; б) $(x - 2y)(x - 2y)^2$;

в) $(a^3)^5 : (a^4)^2$; г) $81 \cdot 3^5 \cdot 27$.

Розв'язання.

а) $a^5 \cdot a^3 \cdot a = a^{5+3+1} = a^9$;

б) $(x - 2y)(x - 2y)^2 = (x - 2y)^{1+2} = (x - 2y)^3$;

в) $(a^3)^5 : (a^4)^2 = a^{3 \cdot 5} : a^{4 \cdot 2} = a^{15} : a^8 = a^{15-8} = a^7$;

г) $81 \cdot 3^5 \cdot 27 = 3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^3 = 3^{4+5+3} = 3^{12}$.

2. Розв'яжи рівняння $2x^2 \cdot x = 2$.

Розв'язання.

Подамо ліву частину рівняння у вигляді степеня з основою x:

$2x^2 \cdot x = 2$, $2x^3 = 2$, тоді $x^3 = 1$, звідси $x = 1$.

3. Обчисли: а) $0{,}5^{10} \cdot 4^5$; б) $0{,}2^8 \cdot 5^6$; в) $9^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8$.

Розв'язання.

а) $0{,}5^{10} \cdot 4^5 = (0{,}5^2)^5 \cdot 4^5 = 0{,}25^5 \cdot 4^5 = (0{,}25 \cdot 4)^5 = 1^5 = 1$;

б) $0{,}2^8 \cdot 5^6 = 0{,}2^2 \cdot 0{,}2^6 \cdot 5^6 = 0{,}04 \cdot (0{,}2 \cdot 5)^6 = 0{,}04 \cdot 1^6 = 0{,}04$;

в) $9^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 = 9^5 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 = 9 \cdot 9^4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 = 9 \cdot \left(9 \cdot \frac{1}{9}\right)^4 = 9 \cdot 1^4 = 9$.

4. Знайди суму, різницю, добуток і частку чисел $a = 1{,}2 \cdot 10^5$ і $c = 2 \cdot 10^4$.

Розв'язання.

$a + c = 1{,}2 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 = 12 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4 = 14 \cdot 10^4 = 1{,}4 \cdot 10^5$;

$a - c = 1{,}2 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^4 = 12 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^4 = 10 \cdot 10^4 = 10^5$;

$a \cdot c = 1{,}2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^4 = 1{,}2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^4 = 2{,}4 \cdot 10^9$;

$a : c = (1{,}2 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^4) = (1{,}2 : 2) \cdot (10^5 : 10^4) = 0{,}6 \cdot 10 = 6$.

ВИКОНАЙ УСНО

132. Спрости $b^{30} : b^5$.

А b^{26} **Б** b^{25} **В** b^{35} **Г** b^{150}

133. Обчисли $(2^2)^3$.

А 2 **Б** 32 **В** 64 **Г** 128

Спрости вираз **(134, 135)**.

134. а) $3^5 \cdot 3^7$; б) $12^4 : 12^3$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$; г) $(-4)^2\,(-4)^3$.

135. а) $x^5 \cdot x^8$; б) $m^3 \cdot m^7$; в) $f^4 : f$; г) $c^3 \cdot c^4 \cdot c^5$; ґ) $z^2 \cdot z^5 \cdot z$.

136. Подай вираз у вигляді степеня.

а) 625; б) $(x^3)^5$; в) $x^2 \cdot y^2$; г) $8 \cdot 3^3$; ґ) $64 \cdot 49$; д) $x^4 \cdot y^6$.

137. Розв'яжи рівняння.

а) $z^3 z = 0$; б) $4x^5x^6 = 0$; в) $y^5y^2 = 1$; г) $xx^3 = 1$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

Подай добуток у вигляді степеня **(138–141)**.

138. а) $3^{13} \cdot 3^6$; б) $18 \cdot 18^{14}$; в) $(-11)^5 \cdot (-11)^4$;

г) $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7$; ґ) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)$; д) $\left(-\frac{2}{5}\right)^9 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{16}$.

139. а) $5^5 \cdot 5^7$; б) $(-1{,}2)^{13} \cdot (-1{,}2)$; в) $7^{10} \cdot 7^7$;

г) $(1{,}8)^5 \cdot (1{,}8)^7$; ґ) $(0{,}66)^{15} \cdot (0{,}66)^{25}$; д) $(-12)^{12} \cdot (-12)^{13}$.

140. а) $a^5 \cdot a^3$; б) $x^4 \cdot x^4$; в) $m \cdot m^8$;

г) $y^7 \cdot y \cdot y^7 \cdot y$; ґ) $z \cdot z^2 \cdot z^3 \cdot z^5$; д) $(a + b)^2 \cdot (a + b)^5$.

141. а) $c^7 \cdot c^5$; б) $a^7 \cdot a^7$; в) $p \cdot p^{12}$;

г) $x \cdot x^2 \cdot x^3$; ґ) $m \cdot m^7 \cdot m^3 \cdot m^{10}$; д) $(x - y)^3(x - y)$.

Подай у вигляді степеня вираз **(142, 143)**.

142. а) $5^8 \cdot 25$; б) $3^{12} \cdot 27$; в) $6^{15} \cdot 36$;
г) $2^9 \cdot 32$; ґ) $0{,}4^5 \cdot 0{,}16$; д) $0{,}001 \cdot 0{,}1^4$.

143. а) $3^6 \cdot 9$; б) $5^{17} \cdot 125$; в) $2^{11} \cdot 16$;
г) $4^{22} \cdot 64$; ґ) $0{,}3^9 \cdot 0{,}027$; д) $0{,}01 \cdot 0{,}1^{18}$.

Подай у вигляді степеня частку **(144, 145)**.

144. а) $x^{12} : x^5$; б) $a^7 : a^6$; в) $m^{23} : m$;
г) $c^{17} : c^{16}$; ґ) $y^{19} : y^5$; д) $(m + n)^5 : (m + n)^3$.

145. а) $p^8 : p^3$; б) $n^{11} : n^8$; в) $a^{23} : a$;
г) $x^{12} : x^7$; ґ) $y^{17} : y^{15}$; д) $(a + c)^{16} : (a + c)^{12}$.

Знайди значення виразу **(146, 147)**.

146. а) $7^6 : 7^5$; б) $12^{13} : 12^{11}$; в) $1{,}8^6 : 1{,}8^4$;
г) $\frac{2^{10}}{2^6}$; ґ) $\frac{3^{12}}{3^{10}}$; д) $\frac{5^{10}}{25^5}$.

147. а) $2{,}7^{13} : 2{,}7^{12}$; б) $6^5 : 6^3$; в) $0{,}5^8 : 0{,}5^6$;
г) $\frac{(-0{,}8)^5}{(-0{,}8)^3}$; ґ) $\left(1\frac{1}{3}\right)^8 : \left(1\frac{1}{3}\right)^6$; д) $\frac{2^{24}}{4^{10}}$.

Виконай піднесення до степеня **(148, 149)**.

148. а) $(a^2)^3$; б) $(x^3)^2$; в) $(y^7)^2$;
г) $((x^5)^6)^3$; ґ) $((2 - a)^3)^4$; д) $(((x - y)^5)^4)^3$.

149. а) $(m^8)^3$; б) $(x^{10})^3$; в) $(a^5)^n$;
г) $((z^2)^8)^3$; ґ) $((3 - b)^3)^7$; д) $(((m + n)^3)^5)^2$.

150. **Гра.** Один з учасників/одна з учасниць записує одночлен, другий/друга дописує, до якого степеня його треба піднести, а третій/третя виконує піднесення до степеня. Потім учасники/учасниці міняються ролями.

151. Подай вирази $(c^4)^2$ та $(c^2)^4$ у вигляді степеня з основою c. Зроби висновок. Аргументуй відповідь за допомогою прикладів.

Виконай піднесення до степеня **(152, 153)**.

152. а) $(xy)^4$; б) $(3a)^2$; в) $(5x)^3$;
г) $(-10ab)^2$; ґ) $(-2xy)^5$; д) $(-0{,}3b^2d)^3$.

153. а) $(ac)^9$; б) $(5x)^3$; в) $(2y)^6$;
г) $(-8mn)^2$; ґ) $(-3pk)^3$; д) $(-0{,}5c^4d)^3$.

154. Додатне чи від'ємне значення виразу?
а) $(-5)^{21} : (-5)^{13}$; б) $(-8)^8 \cdot (-8)^{11}$; в) $(-3)^5 \cdot (-3)^7 \cdot (-3)^4$.

155. Порівняй значення виразів.

а) $(-2)^3 \cdot (-2)^{10}$ і $(-2)^8$; б) $(-3)^7 : (-3)^5$ і $(-3)^{75}$;
в) $(-10)^5 \cdot (-10)^{35}$ і $(-100)^{91}$; г) $(-7)^{32} : (-7)^{31}$ і $(-7) : (-7)$.

156. Compare the values of the expressions.

a) $(-6)^{21} \cdot (-6)^2$ і $(-6)^{30}$; b) $(-4)^{12} : (-4)^7$ і $(-4)^{16}$;
c) $(-2)^9 \cdot (-2)^{15}$ і $(-2)^{25}$; d) $(-5)^6 \cdot (-5)^5$ і $(-5) : (-5)$.

157. Обчисли значення виразу.

а) $2^{13} \cdot 0{,}5^{13}$; б) $0{,}5^{18} \cdot 2^{18}$; в) $25^7 \cdot 0{,}04^7$;
г) $5^{33} \cdot 0{,}2^{33}$; ґ) $8^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5$; д) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{12}$.

158. Знайди значення виразу.

а) $2^7 \cdot 5^7$; б) $0{,}25^{10} \cdot 4^{10}$; в) $(-8)^{11} \cdot 0{,}125^{11}$;
г) $0{,}2^8 \cdot 0{,}5^8$; ґ) $6^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6$; д) $\left(1\frac{3}{5}\right)^{16} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{16}$.

159. Чи має розв'язки рівняння?

а) $x^2x^4 = -1$; б) $x^3x^6 = -1$; в) $(x^7)^3 = 0$; г) $(x^8)^2 = 1$.

160. Розв'яжи рівняння.

а) $x^8 \cdot x^7 = 1$; б) $y^4 \cdot y^5 = -1$; в) $x^2 \cdot x^2 = 1$; г) $z^3 \cdot z^2 \cdot z^8 = -1$.

161. Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел.

а) $2{,}4 \cdot 10^5$ і $3 \cdot 10^5$; б) $1{,}5 \cdot 10^7$ і $5 \cdot 10^7$; в) $6{,}4 \cdot 10^4$ і $3{,}2 \cdot 10^4$.

162. Виконай дії.

а) $2{,}5 \cdot 10^5 + 3{,}3 \cdot 10^5$; б) $7{,}7 \cdot 10^7 - 5 \cdot 10^7$;
в) $(6{,}4 \cdot 10^6) : (1{,}6 \cdot 10^6)$; г) $(6{,}4 \cdot 10^3) \cdot (2 \cdot 10^3)$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Заміни зірочку степенем так, щоб утворилась тотожність **(163, 164)**.

163. а) $x^6 \cdot * = x^{15}$; б) $a^{10} \cdot * \cdot a = a^{17}$; в) $(*)^5 = x^{20}$.

164. а) $m^8 \cdot * = m^{13}$; б) $x^3 \cdot x \cdot * = x^9$; в) $(*)^7 = a^{21}$.

Обчисли **(165–168)**.

165. а) $0{,}5^{12} \cdot 2^{13}$; б) $0{,}1^{21} \cdot 10^{20}$; в) $0{,}125^{41} \cdot (-8)^{40}$;
г) $5^{27} \cdot 0{,}2^{30}$; ґ) $(-0{,}25)^{15} \cdot 4^{16}$; д) $4^{31} \cdot 2{,}5^{30}$.

166. а) $5^{20} \cdot 0{,}2^{18}$; б) $0{,}04^{12} \cdot 25^{11}$; в) $(-2{,}5)^{17} \cdot (0{,}4)^{19}$;
г) $10^{26} \cdot 0{,}1^{28}$; ґ) $2^{22} \cdot 0{,}5^{20}$; д) $(-1{,}25)^{22} \cdot (-0{,}8)^{23}$.

167. а) $\left(-\frac{5}{7}\right)^{12}\cdot\left(-\frac{7}{5}\right)^{14}$; б) $7^{15}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^{16}$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)^{11}$;

г) $(-0{,}4)^8\cdot 3^4\cdot(-2{,}5)^8$; ґ) $0{,}2^7\cdot 0{,}3^2\cdot 5^7$; д) $25^{10}\cdot 2^8\cdot 0{,}04^{10}$.

168. а) $\left(\frac{3}{8}\right)^{15}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{13}$; б) $6^{12}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^{14}$; в) $\left(-\frac{5}{9}\right)^{13}\cdot\left(-1\frac{4}{5}\right)^{14}$;

г) $(-0{,}2)^7\cdot 6^3\cdot(-5)^7$; ґ) $2{,}5^9\cdot 0{,}7^3\cdot 0{,}4^9$; д) $0{,}25^{12}\cdot 5^4\cdot 4^{12}$.

Подай у вигляді степеня добуток **(169–172)**.

169. а) $a^5\cdot(a^2)^7$; б) $(x^2)^3\cdot(x^3)^4$; в) $y\cdot(y^5)^2\cdot y^6$;
г) $(b^3\cdot b^5)^2$; ґ) $(x\cdot x^8)^3\cdot x^3$; д) $(-a^2)^3\cdot(a^3)^5$;
е) $(-y)^6\cdot(-y^4)^5$; є) $((-x)^3)^2\cdot(-x)^4$; ж) $(-a^4)^3\cdot((-a)^3)^5$.

170. а) $c^6\cdot(c^3)^9$; б) $(a^4)^3\cdot(a^3)^6$; в) $x\cdot(x^5)^4\cdot(x^6)^3$;
г) $(p^5\cdot p^7)^3$; ґ) $(-x)^6\cdot(-x^8)^3$; д) $(-a^6)^3\cdot((-a)^2)^5$.

171. а) $5^6\cdot 125$; б) $2^{10}\cdot 64$; в) $0{,}001\cdot 0{,}1^5$;
г) $\frac{27}{64}\cdot\frac{9}{16}$; ґ) $0{,}4\cdot 0{,}16$; д) $(-0{,}3)^5\cdot(-0{,}027)^2$.

172. а) $36\cdot 6^8$; б) $128\cdot 2^5$; в) $0{,}25\cdot 0{,}125$;
г) $\frac{16}{625}\cdot\left(-\frac{8}{125}\right)$; ґ) $0{,}6\cdot 0{,}216$; д) $(-0{,}4)^6\cdot(-0{,}064)^4$.

Знайди значення виразу **(173, 174)**.

173. а) $\frac{(11^6)^4}{11^{23}}$; б) $\frac{(6^5)^3\cdot(6^2)^5}{6^{17}\cdot(6^2)^3}$; в) $\frac{5^6\cdot 25^4}{25\cdot 125^4}$;

г) $\frac{6^9}{2^9\cdot 3^{10}}$; ґ) $\frac{5^7\cdot 3^8}{15^6}$; д) $\frac{12^9}{3^8\cdot 8^6}$.

174. а) $\frac{(13^5)^6}{13^{29}}$; б) $\frac{(8^4)^3\cdot(8^3)^4}{8^{10}\cdot(8^2)^6}$; в) $\frac{9^4\cdot 27^5}{3^5\cdot 81^4}$;

г) $\frac{3^9\cdot 4^8}{12^8}$; ґ) $\frac{7^9\cdot 3^8}{21^7}$; д) $\frac{16^9\cdot 5^{20}}{20^{18}}$.

175. Розв'яжи рівняння.
а) $3x^2\cdot x^5+3=0$; б) $-2y^4\cdot y^7=2$;
в) $(2x)^5=-32$; г) $(x^9\cdot x^4)^3=-1$.

Знайди таке значення змінної, при якому рівність буде правильною. Виконай перевірку **(176, 177)**.

176. а) $5^3\cdot 5^4=5^{5+z}$; б) $3^x\cdot 3^5=(3^2)^x$; в) $((4^3)^x)^4=4^x\cdot 4^{22}$.

177. а) $6^x\cdot 6^4=(6^3)^x$; б) $(7^6)^8=7^{12x}$; в) $(2^5)^x\cdot 2^2=(2^3)^x\cdot(2^x)^4$.

Знайди суму, різницю, добуток і частку чисел **(178, 179)**.

178. а) $3 \cdot 10^{-7}$ і $2 \cdot 10^{-7}$; б) $4{,}5 \cdot 10^{10}$ і $3 \cdot 10^{9}$; в) $-6 \cdot 10^{13}$ і $1{,}2 \cdot 10^{12}$.

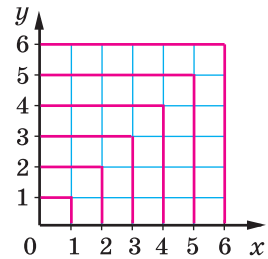
179. а) $1{,}4 \cdot 10^{-6}$ і $7 \cdot 10^{-6}$; б) $3{,}5 \cdot 10^{-4}$ і $5 \cdot 10^{-4}$; в) $2{,}8 \cdot 10^{21}$ і $7 \cdot 10^{20}$.

180. Виконай дії.

а) $2{,}5 \cdot 10^{4} + 3{,}3 \cdot 10^{5}$; б) $5{,}5 \cdot 10^{7} + 8{,}3 \cdot 10^{6}$;
в) $7{,}7 \cdot 10^{7} - 7{,}1 \cdot 10^{6}$; г) $6{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{4}$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

181. Користуючись малюнком 4.1, вирази квадрат довільного натурального числа n через суму n перших непарних чисел.



Мал. 4.1

182. Продовж послідовність.

а) 1, 4, 9, 16, ... б) 1, 8, 27, 64, ...

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

183. Чи є тотожністю рівність?

а) $3x + 5 = 3(x + 5)$; б) $3(x - 4) = 3x - 12$;
в) $(2a - b)^2 = (b - 2a)^2$; г) $(2x - 3y)^3 = (3y - 2x)^3$;
ґ) $(a + b) \cdot 0 = a + b$; д) $y(x - x) = 0$.

184. Добова потреба підлітка — 52–75 ккал на 1 кг маси тіла. Внаслідок інтенсивного росту та при збільшенні навантажень ця кількість кілокалорій може збільшуватись на $\frac{1}{6}$ частину. Виконай відповідні підрахунки і встанови кількість калорій, необхідну тобі щоденно. Склади тижневе меню, враховуючи, що їжа підлітка повинна містити білки, жири й вуглеводи у співвідношенні 1 : 1 : 4, а при фізичних навантаженнях — 1 : 1 : 6.

185. Розклади числа 400 та 6561 на прості множники. Запиши їх розклад за допомогою степенів.

§ 5. Одночлени

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- одночлени — *monomials*

Найпростіші вирази — числа, змінні, їх степені й добутки — називають *одночленами*.

Наприклад, $\underbrace{6,\ -\frac{7}{12},\ z,\ x^5,\ 0{,}3a^2x,\ 3a \cdot 5c}_{\text{Одночлени стандартного вигляду}}$.

Якщо одночлен містить тільки один числовий множник, до того ж поставлений на перше місце, і якщо кожна змінна входить тільки до одного множника, такий одночлен називають **одночленом стандартного вигляду**.

Одночлени $3a \cdot 5c$, $2x^3x^2$, $ab \cdot 8$ записано в нестандартному вигляді.

Скориставшись переставним і сполучним законами множення, кожний одночлен можна записати в стандартному вигляді.

Наприклад, $3a \cdot 5c = 3 \cdot 5 \cdot a \cdot c = 15ac$,

$$0{,}5xy \cdot 4y^3 = 0{,}5 \cdot 4 \cdot x \cdot y \cdot y^3 = 2xy^4,$$

$$4cx(-2cx^3) = 4 \cdot (-2) \cdot c \cdot c \cdot x \cdot x^3 = -8c^2x^4.$$

Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають **коефіцієнтом** цього одночлена.

Одночлен	$15xz$	$-8{,}3a^2$	m^3	$-p$
Коефіцієнт	15	−8,3	1	−1

Коефіцієнти 1 і −1 не прийнято писати.

Зведення одночлена до стандартного вигляду полягає в множенні двох чи кількох одночленів.

Щоб перемножити одночлени, числові множники перемножують, а до буквених застосовують правило множення степенів з однаковими основами.

Якщо виникає потреба перемножити кілька одночленів, то їх сполучають знаком множення, а утворений таким способом одночлен зводять до стандартного вигляду.

Наприклад, знайдемо добуток одночленів $5a^2b$ і $-0{,}2ab^3$.

$$5a^2b \cdot (-0{,}2ab^3) = 5 \cdot (-0{,}2)a^2abb^3 = -a^3b^4.$$

В одночлені $-a^3b^4$ сума показників змінних дорівнює 7. Цю суму називають **степенем одночлена** $-a^3b^4$.

Степінь одночлена $5xy$ дорівнює 2.

Узагалі, степінь одночлена — це сума показників усіх змінних, що входять до нього. Якщо одночлен — число, вважають, що його степінь дорівнює нулю.

Наприклад, одночлени 0,3, 5^3, $(-2)^6$ мають нульовий степінь.

Одночлени можна підносити до степенів.

$$(2ax^5)^3 = 2ax^5 \cdot 2ax^5 \cdot 2ax^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot x^5 \cdot x^5 \cdot x^5 = 8a^3x^{15}.$$

З тотожності $(ab)^n = a^nb^n$ випливає таке правило.

Щоб піднести до степеня одночлен, слід піднести до цього степеня кожний множник одночлена і знайдені степені перемножити.

Поглянь — зіскануй QR-код.

https://vse.ee/cfyr

Приклади. $(2my^2)^5 = 2^5m^5(y^2)^5 = 32m^5y^{10}$,

$$\left(-\frac{1}{3}a^2x^3\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \cdot (a^2)^4 \cdot (x^3)^4 = \frac{1}{81}a^8x^{12}.$$

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Одночлени, як і числа, можна додавати, віднімати, множити і ділити. Проте сума, різниця і частка двох одночленів не завжди є одночленом. Наприклад, сума і різниця одночленів $6x$ і $2x$ дорівнюють відповідно одночленам $8x$ і $4x$. Але сума і різниця одночленів $8ax$ і $4ay$ дорівнюють виразам $8ax + 4ay$ і $8ax - 4ay$, а ці два вирази — не одночлени.

Частка одночленів $6c^3$ і $3c$ дорівнює одночлену $2c^2$ (оскільки $2c^2 \cdot 3c = 6c^3$). Але частка від ділення $3c$ на $6c^3$ — не одночлен.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що називають: а) одночленом; б) коефіцієнтом одночлена?
2. Коли говорять, що одночлен записаний у стандартному вигляді?
3. Як перемножити два одночлени?
4. Як піднести до степеня одночлен?
5. Що називають степенем одночлена?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Запиши одночлен у стандартному вигляді.

а) $ax^2 \cdot 25x^3$; б) $-5a^2n \cdot 2a^2n^3$; в) $\frac{2}{3}xy^2 \cdot (-3x^3)$.

Розв'язання.

а) $ax^2 \cdot 25x^3 = 25ax^2 \cdot x^3 = 25ax^5$;

б) $-5a^2n \cdot 2a^2n^3 = -5 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot n \cdot n^3 = -10a^4n^4$;

в) $\frac{2}{3}xy^2 \cdot (-3x^3) = \frac{2}{3} \cdot (-3) \cdot x \cdot x^3 \cdot y^2 = -2x^4y^2$.

2. Піднеси до квадрата і куба одночлен $-2xz^3$.

Розв'язання. $(-2xz^3)^2 = (-2)^2 \cdot x^2 \cdot (z^3)^2 = 4x^2z^6$;

$(-2xz^3)^3 = (-2)^3 \cdot x^3 \cdot (z^3)^3 = -8x^3z^9$.

3. Спрости вираз $(0{,}2xy^3)^2 \cdot (5x^3y^5)^3$.

Розв'язання. Спочатку виконаємо піднесення до степеня, а потім помножимо отримані одночлени.

$(0{,}2xy^3)^2 \cdot (5x^3y^5)^3 = 0{,}04x^2y^6 \cdot 125x^9y^{15} = 5x^{11}y^{21}$.

ВИКОНАЙ УСНО

186. Чи є вирази одночленами?

а) $\frac{2}{3}abc^3$; б) $(a + b)x$; в) $c^2 \cdot (-y^2)$; г) $-3{,}5$; ґ) $t^{125} : z$.

187. Який з одночленів записано у стандартному вигляді?

А axa^5 **Б** $2a^3c^5$ **В** $0{,}3^5ap^3$ **Г** $a^2x^2y^5x^5$

188. Степінь якого з одночленів дорівнює 5?

А a^5x^5 **Б** $2^5a^5c^5$ **В** $5ak$ **Г** m^2n^2p

189. Вкажи коефіцієнт одночлена $(3x^2y^5z)^4$.

А 3 **Б** 4 **В** 81 **Г** 32

190. Назви коефіцієнт одночлена.

а) $2na^3$; б) xy^2z^3; в) $-ab^3c$; г) $3^2a^2 \cdot x^3$; ґ) $-2xy \cdot 3x^2$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

191. Один/одна із вас записує вираз, а другий/друга каже, чи є він одночленом. Потім поміняйтеся ролями.

192. Склади вирази до задач. Чи є вони одночленами?

а) Марина придбала 3 пачки сиру за ціною a грн. Яка вартість її покупки?

б) В кожному ящику 6 пачок печива, в кожній пачці a штук печива. Скільки печива в 20 ящиках?

в) Викупили дві сусідні квадратні ділянки довжиною a кожна. Яка площа новоутворені ділянки?

193. Запиши одночлен у стандартному вигляді й підкресли його коефіцієнт.

а) $2a \cdot 3b$; б) $12ax \cdot a^2$; в) $-5cz \cdot cz$;
г) $0{,}3a \cdot 2ab^2$; ґ) $(-2ab) \cdot (-3)$; д) $2{,}5ax \cdot (-0{,}4)x^2$;
е) $\frac{1}{3}x \cdot x^2 \cdot 1\frac{1}{2}x^3$; є) $-3xy \cdot 1\frac{1}{3}x^2yz$; ж) $1\frac{2}{5}ab \cdot 3\frac{4}{7}bc$.

194. Write the monomial in standard form and underline its coefficient.

a) $5x \cdot 6y$; b) $-3mn \cdot 2m^2$; c) $1{,}5k^2p^3 \cdot 2k^4$;
d) $-6ac \cdot 0{,}2a^2c^3$; e) $k \cdot (-2kc) \cdot c^2$; f) $3{,}5m \cdot 3n$;
g) $27 \cdot (-0{,}3)kc$; h) $3{,}2x \cdot 5xy \cdot y^6$.

Обчисли значення одночлена **(195, 196)**.

195. а) $2a^4b$, якщо $a = -1$, $b = 5$; б) $-x^2y^3$, якщо $x = 0{,}2$, $y = -3$;
в) $\frac{2}{3}a^2b$, якщо $a = 6$, $b = \frac{1}{2}$; г) $-5xc^3$, якщо $x = -0{,}2$, $c = -\frac{1}{2}$.

196. а) $3a^3b^2$, якщо $a = -2$, $b = -1$; б) $-20k^2c^3$, якщо $k = 0{,}1$, $c = 2$.

Перемнож одночлени **(197, 198)**.

197. а) $2ab$ і $3a^2c$; б) $0{,}2xy$ і $-5xy$; в) $-am^2$ і $3m^3p$;
г) $3a^3$, $2a^2z$ і $6az^3$; ґ) $3xy^2$ і $\frac{1}{3}x^2y$; д) $1\frac{2}{3}ax$ і $\frac{3}{5}z$.

198. а) $3m^2n$ і mn^2; б) $3xy$ і $1{,}5x^3y^2$; в) $-a^5c^3$ і $9ac^3$;
г) $abcd$ і $-ab^2c^3$; ґ) $2y$, $-3y^2$ і y^3; д) $\frac{2}{5}x^5y^4$ і $-\frac{5}{7}xy^3$.

199. **Гра.** Перший гравець / перша гравчиня записує одночлен, другий/друга — ще один, третій/третя — знаходить їх добуток. Потім поміняйтеся ролями.

Піднеси до квадрата і до куба одночлен **(200, 201)**.

200. а) $2ax$; б) $5bc^2$; в) $-\frac{1}{2}x^5c^2$; г) $0{,}2x^2y^5$.

201. а) $-3a^2$; б) $0{,}2x^3m$; в) $0{,}3a^3c^4$; г) $-\frac{2}{3}a^2x^3$.

Спрости вираз **(202, 203)**.

202. а) $(3ax^2)^3$; б) $(x^3y^3)^2$; в) $(-2ab)^3$;

г) $(-3xy^3)^2 \cdot 2xy^2$; ґ) $\frac{2}{3}a^3(-3ax)^4$; д) $-0{,}7y^3\left(-\frac{1}{7}y^3\right)^2$.

203. а) $(3m^3c)^2$; б) $(k^5p^3)^7$; в) $(-2a^2b)^4$;

г) $(-2a^2c)^3 \cdot a^3c^2$; ґ) $\frac{1}{8}c^2(-2xc)^3$; д) $\left(-\frac{1}{3}pq^2\right)^4 \cdot p^3 \cdot p^3$.

204. Подай вираз у вигляді квадрата одночлена.

а) $16a^4b^2$; б) $0{,}36x^8y^{12}$; в) $0{,}01a^{18}c^{10}$;

г) $361m^6n^{30}$; ґ) $\frac{9}{25}a^{26}b^{14}$; д) $\frac{16}{49}x^{16}y^{12}z^4$.

205. Подайте вираз у вигляді куба одночлена.

а) $-8a^6$; б) $27x^9y^{15}$; в) $-0{,}001a^3b^{12}$;

г) $0{,}064x^{18}y^{27}$; ґ) $-\frac{1}{125}a^9b^6c^3$; д) $1\ 000\ 000y^{21}x^{30}$.

206. Перемножте одночлени, щоб заповнити таблицю.

	x	$5x$	$-0{,}1x$	$2x^2$
a				
$2a$				
$-3ax$				
$4a^2$				

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Запиши у стандартному вигляді одночлен **(207, 208)**.

207. а) $2a \cdot 5x \cdot \left(-1\frac{2}{5}a\right)$; б) $c^3 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)cx$; в) $-5a^2z^3 \cdot \left(-\frac{3}{5}z\right)$;

г) $-3ax^2 \cdot 2a \cdot (-6x^3)$; ґ) $\frac{2}{3}ac^3(-c^2)$; д) $-4a \cdot 3axy\left(-\frac{3}{4}x^2y\right)$.

208. а) $0{,}8xyz \cdot (-5y)^3$; б) $3a^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}ab^5c^2\right)$; в) $\frac{5}{7}xy \cdot \left(-\frac{7}{10}xy\right)$;

г) $-2cz^3 \cdot 3z \cdot (-5cz)$; ґ) $\left(-\frac{3}{4}acx\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}ax^3\right)$; д) $-\frac{1}{2}cz^2 \cdot 4cx \cdot (-c)$.

Обчисли значення одночлена **(209, 210)**.

209. а) $-\frac{2}{3}a^2c^4$, якщо $a=\frac{1}{2}$, $c=-3$;

б) $0{,}5a^5b$, якщо $a=2$, $b=-0{,}1$.

210. а) $2c^2x^3$, якщо $c=1{,}5$, $x=-10$;

б) $-8xz^5$, якщо $x=0{,}1$, $z=-2$;

в) $1\frac{13}{27}\cdot(xy^3)^2\cdot(3xy)^3$, якщо $x=3$, $y=\frac{1}{2}$.

Знайди добуток одночленів **(211, 212)**.

211. а) $-axyz$, $2az^2$ і $-3x$; б) $6x^2y$, $0{,}25x^2z$ і $10y^2z$;

в) $5a^2$, $3xy^3$ і $-\frac{2}{3}axy^3$; г) $-2\frac{1}{3}ab^2$, $-\frac{3}{7}ab^2$ і $3b^2$.

212. а) $0{,}5mnk^3$, m^2n^2 і $4nk^2$; б) $-1\frac{2}{3}an^2m$, $-3an^2$ і $-0{,}2a$.

213. Піднеси до куба одночлен.

а) $3cx$; б) $2a^2m$; в) $-\frac{2}{3}ab^2c^3$; г) $-1\frac{1}{2}c^2n^2p$; ґ) $-1\frac{2}{3}an^2c^3$.

214. Піднеси до четвертого степеня одночлен.

а) $3x^2$; б) $-0{,}1ac^2$; в) $-\frac{2}{3}x^2y$; г) $-1\frac{1}{2}ab^2c$.

Спрости вираз **(215, 216)**.

215. а) $-x^2\cdot(3x^3y)^3$; б) $c^3\cdot(3cx^2)^2$; в) $0{,}5mn^4\cdot(-2m)^5$;

г) $(-a^6b^3)^7\cdot 6a^3b^4$; ґ) $(2a^2x)^2\cdot\frac{1}{2}a$; д) $(3nz^3)^2\cdot\left(\frac{1}{3}nzx\right)^3$.

216. Установи відповідність між виразами (1–3) та многочленами, що їм відповідають (А–Д).

1 $3x^2\cdot(-5x^3y^4)^2$	**А** $-x^9y^6$
2 $(-0{,}1x^2y)^4\cdot 1000xy^2$	**Б** $-500x^7y^{12}$
3 $(-2x^2y^3)^2\cdot(-5xy^2)^3$	**В** $0{,}1x^9y^6$
	Г $75x^8y^8$
	Д $50x^7y^{12}$

217. Покажи, що рівняння не має розв'язків.

а) $x^4\cdot x^8+3=0$; б) $2x^7\cdot x^5=-31$; в) $-8y^4\cdot y^8=64$.

218. Розв'яжи рівняння.
а) $(x^3)^4 \cdot x \cdot x^2 = -1$; б) $(-x^2)^3 \cdot x^5 \cdot (x^3)^3 = -1$; в) $x^4 \cdot x^5 \cdot x^7 = 1$.

219. Замініть зірочку одночленом так, щоб утворилася правильна рівність.

а) $* \cdot \frac{1}{3}x^4y^6 = -0{,}1x^4y^8$; б) $-8a^2b^2 \cdot * = 4a^5b^7$;

в) $0{,}6a^2b \cdot * = 6a^2b^3$; г) $5m^2n^3 \cdot * = -m^5n^6$.

220. Відомо, що $3x^2y^3 = 7$. Знайди значення виразу.

а) $1{,}8x^2y^3$; б) $5x^2y^3$; в) $-9x^4y^6$; г) $7\frac{5}{7}x^6y^9$.

221. Відомо, що $2b^2c = 5$, $(a^2b)^2 = 2$. Знайди значення виразу.
а) a^4b^4c; б) a^8b^6c; в) $a^4b^6c^2$;
г) $(-2a^2b^2c)^3 \cdot (3ab^2)^2$; ґ) $(-0{,}5a^2b^4)^2 \cdot (2a^2bc)^3 \cdot a^2b$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

222. Заповни порожні клітинки такими степенями змінної a, щоб добутки степенів у кожному рядку, у кожному стовпчику і в кожній діагоналі були тотожно рівними.

a		a^3
	a^4	a^2
	1	

223. *Неоднаково вродила на полі пшениця:*
на третині із гектара —
центнерів по тридцять, а на решті —
по пів сотні зерна золотого.
То ж по скільки в середньому взяли з поля того?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

224. Знайди: а) суму довжин усіх ребер куба, якщо вона більша за периметр його грані на 16 см; б) площу поверхні та об'єм куба.

225. У саду росли яблуні та вишні, причому яблуні становили 40 % усіх дерев. Вишень було на 64 більше, ніж яблунь. Скільки дерев росло в саду? Скільки серед них було вишень? Скільки — яблунь?

226. Розв'яжи рівняння.
а) $2x - 3(x + 1) = 0$; б) $2x + 3 = 3(x + 1) - x$;
в) $7(2x - 5) + 3 = 45$; г) $9(x + 2) - 3x = 6(x + 2)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРІАНТ I

1. Обчисли: а) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; б) $0{,}7^2 - 8 \cdot 0{,}5^3$; в) $(3^5)^9 : (3^6)^7$.

2. Піднеси до квадрата вираз $0{,}3ax^3$.

3. Спрости вираз $(-2ac^2)^2 \cdot (0{,}5a^2x)^3$ і вкажи його коефіцієнт.

4. Доведи тотожність: $4(7x - 1) + 3x + 6 = 31x + 2$.

5. Запиши число 27 500 000 000 у стандартному вигляді.

ВАРІАНТ II

1. Обчисли: а) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$; б) $0{,}1^2 - 16 \cdot 0{,}5^4$; в) $(5^3)^6 : (5^2)^8$.

2. Піднеси до квадрата одночлен $-5cz^3$.

3. Спрости вираз $\left(3am^2\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}xm^4\right)^2$ і вкажи його коефіцієнт.

4. Доведи тотожність: $5 - x + 3(3x - 4) = 8x - 7$.

5. Запиши число 17 700 000 000 у стандартному вигляді.

ВАРІАНТ III

1. Обчисли: а) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3$; б) $0{,}6^2 - 4 \cdot 0{,}5^3$; в) $(7^3)^8 : (7^2)^{11}$.

2. Піднеси до куба одночлен $-2ac^2$.

3. Спрости вираз $(-0{,}5ac^2)^2 \cdot (4a^2x)^3$ і вкажи його коефіцієнт.

4. Доведи тотожність: $5x - 2(x - 4) - 6 = 3x + 2$.

5. Запиши число 350 000 000 000 у стандартному вигляді.

ВАРІАНТ IV

1. Обчисли: а) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$; б) $0{,}3^2 - 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$; в) $(8^4)^5 : (8^9)^2$.

2. Піднеси до куба одночлен $-3x^2y$.

3. Спрости вираз $(-0{,}4x^3)^2 \cdot (-10ax^2)^3$ і вкажи його коефіцієнт.

4. Доведи тотожність: $9x - 2(2x + 6) - 5 = 5x - 17$.

5. Запиши число 98 700 000 000 у стандартному вигляді.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання №1

1. Подай у вигляді степеня число 0,0009.

А $0{,}3^3$ **Б** $0{,}3^2$ **В** $0{,}03^2$ **Г** $0{,}03^3$

2. Подай у вигляді степеня одночлен $625x^8$.

А $(5x^2)^8$ **Б** $(5x^2)^4$ **В** $(5x)^4$ **Г** $(5x)^8$

3. Який вираз тотожний виразу ax^2?

А $a \cdot x(-x)$ **Б** $a \cdot x + ax$ **В** $a(-x)(-x)$ **Г** $ax \cdot ax$

4. При якому значенні m справедлива рівність $a^{16}a^m = a^{32}$?

А 14 **Б** 2 **В** 1 **Г** 16

5. При якому значенні p справедлива рівність $(c^3)^p = c^{12}$?

А 1 **Б** 0 **В** 2 **Г** 4

6. Спрости вираз $(x^2)^7 \cdot (x^3)^4$.

А x^2 **Б** x^{26} **В** x^{16} **Г** x^{168}

7. При якому значенні d вирази $9(x - 3) - 2(3x + 5)$ і $dx - 37$ є тотожними?

А -3 **Б** 3 **В** -4 **Г** 4

8. Запиши суму квадратів чисел x і y.

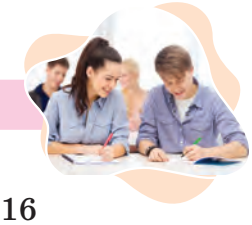
А $x^2 + y^2$ **Б** $(x + y)^2$ **В** $2x + 2y$ **Г** x^2y^2

9. Запиши у стандартному вигляді число 24 000 000 000.

А $24 \cdot 10^9$ **Б** $2{,}4 \cdot 10^9$ **В** $2{,}4 \cdot 10^{10}$ **Г** $0{,}24 \cdot 10^{10}$

10. Знайди значення виразу $x^4 - 3x^2 + 4$, якщо $x = 2$.

А 6 **Б** 7 **В** 8 **Г** 9



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 1

1. Піднеси до степеня $(0{,}2)^4$.

А 0,8 **Б** 0,0008 **В** 0,16 **Г** 0,0016

2. Знайди значення виразу $0{,}5a^3 - 3{,}9$, якщо $a = 2$.

А −3,54 **Б** 4,3 **В** 0,1 **Г** 3,5

3. Подай у вигляді одночлена стандартного вигляду вираз $6xy \cdot 0{,}5ax$.

А $3ax^2y$ **Б** $30a^2x^2y$ **В** $3axy$ **Г** $6{,}5axy$

4. Установи відповідність між виразами, заданими умовами (1–3), та їх числовими значеннями (А–Д).

1 $27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$	**А** 9
2 $3^5 \cdot 3^7 : 3^{10}$	**Б** 15
3 $\frac{15^4}{3^3 \cdot 5^3}$	**В** 18
	Г 8
	Д 72

5. Спрости вираз $\frac{(a^5)^6 \cdot (a^3)^5}{(a^6)^7}$ і знайди його значення, якщо $a = -0{,}5$.

6. Подай у вигляді одночлена стандартного вигляду. Вкажи його коефіцієнт і степінь.

а) $\left(\frac{1}{2}ab^3\right) \cdot (-6a^2b)$; б) $(-0{,}2m^2n)^2 \cdot (-5mn^2)^3$.

7. Обчисли.

а) $\frac{18^5}{6^4 \cdot 3^5}$; б) $(-0{,}6)^{17} \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)^{19}$.

8. Відомо, що $5x^2y^3 = 2$. Знайди значення виразу.

а) $25x^2y^3$; б) x^4y^6.

Додаткове завдання

9. Доведи, що для будь-якого натурального n значення дробу $\frac{7^{4n} - 1}{10}$ є натуральним числом.

§ 6. Многочлени

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- многочлени — *polynomials*
- двочлен — *binomials*, тричлен — *trinomials*
- степінь многочлена — *degree of a polynomial*

Суму кількох одночленів називають *многочленом*.

Наприклад, $7x + 2a$, $7x - 2a$.

Вираз $7x - 2a$ можна вважати також сумою одночленів $7x$ і $-2a$, бо $7x + (-2a) = 7x - 2a$.

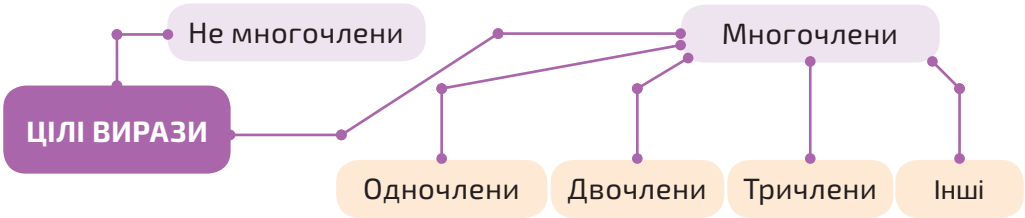
Кожний доданок многочлена називають його *членом*.

Наприклад, многочлен $2xy - 5x + 6$ містить три члени: $2xy$, $-5x$ і 6.

Якщо многочлен містить два доданки, його називають *двочленом*, три — *тричленом*. Одночлен також вважають окремим видом многочлена.

Існують цілі вирази, які не є многочленами.

Наприклад, вирази $(a + b)^2$, $2a - (b + x)^3$ — цілі, але не є многочленами.



У тричлені $4x + 7x - 5$ перші два члени — **подібні**, бо мають однакову буквену частину.

Зведемо подібні доданки: $\underline{4x} + \underline{7x} - 5 = 11x - 5$.

Члени многочлена можна записувати в різній послідовності. Здебільшого їх упорядковують за спаданням показників тієї чи іншої змінної. Наприклад, упорядкувавши многочлен $5ax^2 + 6x^3 - 4a^2x + a^4$ за спаданням степенів змінної x, одержимо: $6x^3 + 5ax^2 - 4a^2x + a^4$. Найвищий показник степеня змінної x дорівнює трьом, тому такий многочлен називають многочленом третього степеня відносно x.

Його можна впорядкувати і за спаданням степенів змінної a: $a^4 - 4a^2x + 5ax^2 + 6x^3$. Це многочлен четвертого степеня відносно змінної a.

Якщо кожен член многочлена є одночленом стандартного вигляду і цей многочлен не містить подібних членів, то такий многочлен називають **многочленом стандартного вигляду**.

Степенем многочлена стандартного вигляду називають найбільший степінь одночлена, який входить до цього многочлена.

Наприклад, многочлен $3x^3y^2 - 2x^2y^2 + 5x^2y$ записано у стандартному вигляді і до нього входять одночлени п'ятого, четвертого та третього степенів. Тоді заданий многочлен є многочленом п'ятого степеня.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Чи є многочленом вираз $(a + b)c$? Іноді відповідають на це запитання ствердно, бо, мовляв, згідно з розподільним законом множення даний вираз тотожно дорівнює двочлену $ac + bc$, а отже і він є двочленом. Це неправильно. **В алгебрі вирази прийнято називати відповідно до того, як вони записані, а не до того, як їх можна записати.**

Розглянемо приклад. Вираз $8a$ можна подати у вигляді суми двох, трьох чи будь-якої іншої кількості доданків:

$$8a = 3a + 5a, \quad 8a = a + 3a + 4a, \quad 8a = a + a + a + a + 4a.$$

Якщо, виходячи з цього, вираз $8a$ називати і одночленом, і двочленом, і тричленом тощо, то це буде дуже незручно. Тому в алгебрі домовилися вирази називати так, як вони записані, а не так, як їх можна записати, виконавши ті чи інші тотожні перетворення.

Отже, вираз $(a + b)c$ не є ні одночленом, ні многочленом.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що називають многочленом?
2. Наведи приклади двочлена, тричлена, чотиричлена.
3. Які члени многочлена називають подібними?
4. Чи можна одночлен вважати видом многочлена?
5. Коли говорять, що многочлен записано в стандартному вигляді?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Запиши многочлен у стандартному вигляді.
   а) $5x + 4x^2 + 3x^3 - 5x^3 - 4x^2 - 3x$;
   б) $2ab + 3a^2 \cdot ab + 7ab^2(-ab) + 3b$.

Розв'язання.

а) Зведемо подібні доданки і впорядкуємо за степенями члени многочлена:

$$5x + 4x^2 + 3x^3 - 5x^3 - 4x^2 - 3x = -2x^3 + 2x.$$

б) Зведемо до стандартного вигляду кожний одночлен заданого многочлена і впорядкуємо його члени за степенями змінної a:

$$2ab + 3a^2 \cdot ab + 7ab^2(-ab) + 3b = 2ab + 3a^3b - 7a^2b^3 + 3b =$$
$$= 3a^3b - 7a^2b^3 + 2ab + 3b.$$

2. Обчисли значення многочлена

$5x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 7 + 2x^4 - 4x^3 + x^4 - 4x^5 + 2$, якщо $x = 2$.

Розв'язання. Зведемо многочлен до стандартного вигляду:

$$5x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 7 + 2x^4 - 4x^3 + x^4 - 4x^5 + 2 = x^5 + 9.$$

Якщо $x = 2$, то $x^5 + 9 = 2^5 + 9 = 32 + 9 = 41$.

Відповідь. 41.

3. Дві велосипедистки одночасно виїхали з пунктів A і B назустріч одна одній. Знайди відстань між A і B, якщо вони їхали зі швидкостями a км/год і b км/год і зустрілися через t год.

Розв'язання.

I спосіб. За t год перша велосипедистка проїхала at км, а друга — bt км. Отже, вся відстань дорівнює $(at + bt)$ км або $(a + b)t$ км.

II спосіб. За 1 год велосипедистки наближалися на $(a + b)$ км, до моменту зустрічі через t год вони проїхали $(a + b)t$ км. Це і є шукана відстань.

Відповідь. $(a + b)t$ км.

ВИКОНАЙ УСНО

227. Які із виразів є многочленами?

А $2x - 3$ **Б** $37am^2$ **В** $x^2 - 3x + \frac{5}{x}$ **Г** $y(x - y)$ **Ґ** -21

228. Сумою яких одночленів є многочлен?

а) $ax - cx^2 + 3$; б) $-2x^2 + 3x - 7$; в) $-m^2 - n^2$; г) $2c^3 - 3c^2 - 5c + 1$.

229. Обери многочлен стандартного вигляду.

А $2x + 3a - 5$ **В** $-x + 3xa - ax + a^2$

Б $a^2 - a + 5a + b$ **Г** $-0{,}5a - 4a^2 + 3a - 1$

230. Укажи степінь многочлена відносно змінної x.

а) $2ax - 3a + 5$; б) $x^3 - x^8 + 4x$; в) $2x^3y - 3x^2y^2 - 1$;

г) $0{,}7ax + 8a^2x + 5$; ґ) $3x - x^3 + 27px$; д) $y^5x - a^3y$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

231. **Гра.** Один з учнів / одна з учениць записує многочлен, а інший/інша має назвати степінь цього многочлена. Потім учні/учениці міняються ролями.

Запиши вираз до задач **(232, 233)**. Чи є він многочленом? Якого степеня?

232. Один кілограм картоплі коштує m грн, а один кілограм капусти — n грн. Скільки потрібно заплатити за 8 кг картоплі й 4 кг капусти?

233. Книжка коштує a грн, а 10 зошитів — m грн. Скільки треба заплатити разом за 3 книжки і 5 зошитів?

234. Зведи подібні члени многочлена.

а) $4x^2 + x - 5x^2 - 12x$;
б) $-6ab + 2a^2 + a^2 + 6ab$;
в) $8a - 10ab + 3a + 10ab$;
г) $-0{,}5x^2 - y^2 + 2{,}2x^2 + 0{,}8y^2$;
ґ) $2a^2b - b^2a + 7ab^2$;
д) $\frac{2}{3}xy^3 - \frac{3}{5}x^3y + 1\frac{1}{3}xy^3 - \frac{2}{5}x^3y$.

235. Виконай зведення подібних членів многочлена. Знайди степінь многочлена.

а) $4x^2 + 2x - 7x^2 - 9x^3 - 2x$;
б) $3a^4 - 12a^2 + 13a^2 + 5 - a^2 + a^4$;
в) $27m^5 - 17m^3 + 3m^5 + 10m^3 - 30m^5$;
г) $y^4 - 2y^3 + 2y + 5y^3 - 2y^3 - 14 + 7y^4$.

236. Спрости вираз. Знайди степінь многочлена.

а) $a - b + 3a + 2b^2$;
б) $7x - y^2 + 5xy - 2x \cdot 3y$;
в) $37 - z^3 + 3t - 35z^3$;
г) $-105p + 15q + 10p \cdot 10{,}5$.

237. Simplify the expression. Find the degree of the polynomial.

a) $x + x^2 + x^3 - 2x^2 - x$;
b) $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a \cdot 3c - ac$.

238. Обчисліть значення многочлена.

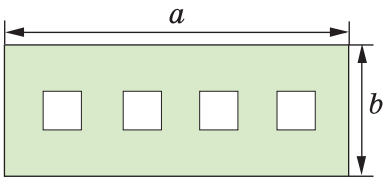
а) $x^2 - 5x + 6$, якщо $x = 2$;
б) $0{,}7x^2 + 0{,}3x^2$, якщо $x = 0{,}5$;
в) $2{,}8a^2 - 1{,}8a^2$, якщо $a = -0{,}2$;
г) $3a^2b + 2ab^2 - 2{,}5a^2b + ab^2 - 0{,}5a^2b$, якщо $a = 0{,}4$, $b = -0{,}5$.

239. Обчисли значення многочлена.

а) $m^3 - n^2$, якщо $m = 2$, $n = -3$;
б) $s + 2t^2 - 2{,}8$, якщо $s = 2{,}3$, $t = 0{,}5$.

Запиши вираз до задач **(240–242)**. Чи є він многочленом?

240. Визнач площу деталі, зображеної на малюнку 6.1, якщо кожний із чотирьох її отворів — квадрат, сторона якого дорівнює c.



Мал. 6.1

241. Друзі на квадроциклах виїхали з міста A до міста B, при цьому перші k год вони їхали зі швидкістю 25 км/год, наступні p год — зі швидкістю 35 км/год та останню годину їх швидкість становила 40 км/год. Яку відстань вони подолали?

242. Спершу пан Андрій пошив 6 квадратних серветок довжиною a см, а потім побачив цікаве сервірування столу за допомогою двох серветок різних розмірів і пошив ще 6 серветок, довжина сторони кожної — c см. Знайди площу всіх пошитих серветок.

243. На машину навантажили m мішків пшениці, m мішків гречки й один мішок цукру. Знайдіть масу всього вантажу, якщо маса одного мішка пшениці — 25 кг, гречки — 20 кг, а цукру — 50 кг. Запишіть вираз до задачі. Спростіть його. Чи є він многочленом? Знайдіть значення цього виразу, якщо $m = 12$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Обчисли значення многочлена, попередньо звівши подібні члени **(244, 245)**.

244. а) $2c^3 - 5c^2 - 2c^3 + 7c^2 + 1{,}18$, якщо $c = -2{,}1$;
б) $3a^2 - 2ax - x^2 - 2a^2 + x^2$, якщо $a = -0{,}4$ і $x = 1{,}2$.

245. а) $9x^2 - 4x^2 + 15x^5 - 7x^5 + 6x - 7x^2 - 8x^5$, якщо $x = -7$;
б) $-6a^3b^2 + a^2b^3 - 10ab + 5a^3b^2 - a^2b^3$, якщо $a = 10$, $b = 0{,}9$.

246. Установіть відповідність між значеннями числових виразів (1–4) і значеннями многочленів (А–Г), якщо $x = 0{,}1$.

1 $(3 + 5) : 5$	**А** $100x^2 + 2x - 0{,}8$
2 $(2 - 7) + 0{,}4$	**Б** $1{,}01 + 40x - x^2$
3 $1 : (1{,}2 + 1{,}3)$	**В** $1 + 6x$
4 $17 : (5 - 1{,}6)$	**Г** $40x^2 - 20x - 3$

Спрости вираз та знайди степінь многочлена **(247, 248)**.

247. а) $(2a^2)^3 + 4 \cdot 3a^6 - 5a - 9 - 13a^6 + a$;
б) $x^2 + 2x^3 - (3x)^2 - 4x^2 \cdot x^3 + 7x^5 - 2x^3$.

248. а) $(3a^3)^3 + 4 \cdot 3a^6 - 14a^9 - 9 - 13a^6 - 3a^4 \cdot 4a^5$;
б) $(-5x) \cdot 2x - (x^4)^2 + 6x^2 + 10 + x^3 \cdot 3x^5 - 3x^2$.

249. Запиши у вигляді многочлена число, яке має:
а) a тисяч, b сотень, 0 десятків і c одиниць;
б) a десятків тисяч, b сотень, c десятків і 0 одиниць.

250. Запиши у вигляді двочлена число, яке від ділення на число a:
а) дає частку 29 і остачу 7; б) дає частку 52 й остачу c.

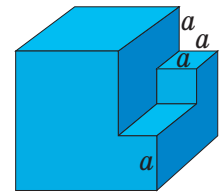
Запиши у вигляді многочленів відповіді до задач **(251–255)**. Якого степеня ці многочлени?

251. У конкурсі «Левенятко» бере участь a учнів та учениць, а в конкурсі «Кенгуру» — на b учнів та учениць більше. Жодний учень/учениця не є учасником двох конкурсів. Скільки всього учнів/учениць беруть участь в обох конкурсах?

252. Перший поїзд їде зі швидкістю v_1 км/год, а другий — v_2 км/год. На скільки кілометрів вони наблизяться за пів години, рухаючись назустріч один одному?

253. З міста до села виїхала одна велосипедистка, а через пів години назустріч їй із села до міста — інша. Їхали вони зі швидкостями v_1 км/год і v_2 км/год відповідно і зустрілися через півгодини після виїзду другої. Знайди відстань від міста до села.

254. З дерев'яного куба, ребро якого дорівнює $3a$, вирізали два прямокутні паралелепіпеди, як показано на малюнку 6.2. Знайди об'єм і площу поверхні многогранника, що залишився.



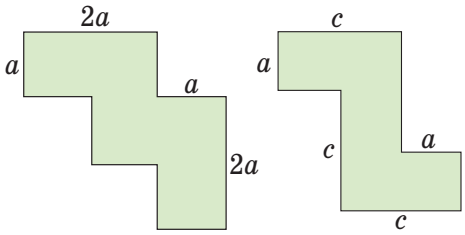
Мал. 6.2

255. З міст A і B одночасно в одному напрямку виїхали автомобіль і мотоцикл. Їхали вони зі швидкостями v_1 км/год і v_2 км/год відповідно. Знайди відстань від A до B, якщо автомобіль наздогнав мотоцикл через 1,5 год.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

256. *Якщо відкрити меншу лиш трубу —*
басейн наповниться водою за добу;
коли ж відкрити разом дві труби,
він вщерть наповниться за чверть доби.
Як довго наповнявся б він водою
одною тільки більшою трубою?

257. Визнач периметри фігур, зображених на малюнку 6.3.



Мал. 6.3

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

258. Обчисли.

а) 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10};

б) $(-1)^2$, $(-1)^3$, $(-1)^4$, ... $(-1)^{2n}$, $(-1)^{2n+1}$;

в) 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8;

г) $0{,}1^2$, $0{,}1^3$, $0{,}1^4$, $0{,}1^5$, $0{,}2^2$, $0{,}3^3$, $0{,}4^4$.

259. Дано вирази $3x$ і $5y$. Запиши: а) різницю їх квадратів; б) квадрат їх різниці; в) суму їх квадратів; г) квадрат їх суми.

260. Пенсіонер одержав путівку до санаторію зі знижкою 90 % і заплатив за неї 5600 грн. Яка вартість путівки?

§ 7. Додавання і віднімання многочленів

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- додавання многочленів — *adding polynomials*
- віднімання многочленів — *subtracting polynomials*
- розкриття дужок — *expanding parentheses*

Щоб знайти суму многочленів, достатньо сполучити їх знаком «плюс».

Наприклад, сумою многочленів $a^2 + ax + x^3$ і $c^2 + cx + x$ є многочлен $a^2 + ax + x^3 + c^2 + cx + x$.

Якщо у знайденій сумі є подібні члени, їх слід звести. Так само додають три і більше многочленів.

Наприклад, $(x^2 + 2x + 4) + (3x^2 - 4) + (3 - 2x) = x^2 + 2x + 4 + 3x^2 - 4 + 3 - 2x = x^2 + 3x^2 + \cancel{2x} - \cancel{2x} + \cancel{4} - \cancel{4} + 3 = 4x^2 + 3.$

Додавання многочленів підпорядковується *переставному* і *сполучному законам додавання*: які б не були многочлени A, B і C, завжди

$$A + B = B + A \quad \text{і} \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

Щоб знайти різницю двох многочленів, треба від першого з них відняти другий.

Виконуючи таке завдання, потрібно кожен многочлен взяти у дужки і записати їх різницю, поставивши знак «мінус» перед другим многочленом. Потім розкрити дужки і звести подібні члени.

Розкриваючи дужки, перед якими стоїть знак «мінус», знаки всіх членів, що були в цих дужках, змінюють на протилежні.

Поглянь — зіскануй QR-код.

https://vse.ee/cfys

Наприклад, знайдемо різницю многочленів

$$ab + c - 4 \text{ і } 2ab + c - 3.$$

$$(ab + c - 4) - (2ab + c - 3) = ab + c - 4 - 2ab - c + 3 =$$
$$= ab - 2ab + c - c - 4 + 3 = -ab - 1.$$

Отже, і сума, і різниця довільних многочленів — многочлени.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Сума двох многочленів може мати кілька членів або дорівнювати якому-небудь числу, зокрема й нулю. Додайте, наприклад, до двочлена $4c - 5x$ послідовно двочлени $c^2 + 1$, $-c^2 - 5x$, $5x - 7$, $5x - 4c$ і переконайтеся в цьому.

Оскільки многочленами вважають і одночлени, і будь-які числа, зокрема й нуль, то сума будь-яких многочленів є многочленом. Тому говорять, що у множині многочленів додавання і віднімання завжди можливе.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Як додають многочлени? Як їх віднімають?
2. Чи завжди сума кількох многочленів є многочленом?
3. Сформулюй правила розкриття дужок.
4. Як ти розумієш твердження, що у множині многочленів дії додавання і віднімання завжди можливі?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Знайди суму і різницю многочленів

$$x^2 - 2x + 1 \text{ і } 2x^2 - x.$$

Розв'язання.

$(x^2 - 2x + 1) + (2x^2 - x) = \underline{x^2} \underline{\underline{- 2x}} + 1 + \underline{2x^2} \underline{\underline{- x}} = 3x^2 - 3x + 1;$

$(x^2 - 2x + 1) - (2x^2 - x) = \underline{x^2} \underline{\underline{- 2x}} + 1 \underline{- 2x^2} + \underline{\underline{x}} = -x^2 - x + 1.$

2. Доведи, що сума трьох послідовних натуральних чисел завжди ділиться на 3.

Доведення.

I спосіб. Позначимо довільне натуральне число буквою n. Тоді наступні за ним натуральні числа будуть $n + 1$ і $n + 2$. Їх сума становитиме:

$n + (n + 1) + (n + 2) = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1).$

Число $3(n + 1)$ при кожному натуральному n ділиться на 3. Отже, сума $n + (n + 1) + (n + 2)$ завжди ділиться на 3, яке не було б натуральне число n. А це й вимагалося довести.

II спосіб. Якщо n — друге з трьох послідовних цілих чисел, то перше з них — $(n - 1)$, а третє — $(n + 1)$.
Тоді $(n - 1) + n + (n + 1) = n - 1 + n + n + 1 = 3n$.
Число $3n$ ділиться на 3.

3. Доведи, що різниця чисел $\overline{abc}$ і $\overline{cba}$ ділиться на 99.

Запис $\overline{abc}$ означає трицифрове число, яке має a сотень, b десятків і c одиниць.

Доведення. Запишемо кожне з чисел у вигляді многочлена, знайдемо їх різницю.

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c; \quad \overline{cba} = 100c + 10b + a.$$

Тоді $\overline{abc} - \overline{cba} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) =$

$$= 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 99(a - c).$$

Отже, $\overline{abc} - \overline{cba}$ ділиться на 99.

ВИКОНАЙ УСНО

261. Знайди суму і різницю многочленів.

а) $2x^3 - c$ і $3c$;
б) $5ax - 4$ і $-4ax + 4$;
в) $0{,}5n - p^2$ і p^2;
г) $-2y + c^2$ і $c^2 + 2y$.

262. Який многочлен потрібно додати до тричлена $x^2 - 3x - 2$, щоб отримати 0?
А $x^2 - 3x + 2$ **Б** $-x^2 + 3x$ **В** $-x^2 + 3x - 2$ **Г** $-x^2 + 3x + 2$

263. Різниця многочленів $x + y$ і $x - y$ дорівнює:
А 0 **Б** $2x$ **В** $2y$ **Г** $2x - 2y$

264. Обчисли значення виразу.
а) $(2a - 3c + 5) + (a + 3c - 2)$, якщо $a = 3$, $c = -0{,}5$;
б) $(2a - 3c + 5) - (2a + 3c + 2)$, якщо $a = -0{,}3$, $c = 2$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

Додай многочлени **(265, 266)**.

265. а) $3a^2 + 8a - 5$ і $-5a^2 + 2a + 4$;
б) $7a^2 + 15$ і $3a^2 + 2a - 15$;
в) $12x^2 - 7x$ і $4x^2 + 3x - 2$;
г) $-7a^3b + 5ab^2 - ab$ і $3ab^2 - 4ab + 7a^3b$;
ґ) $6a^2 - 4b^2 + c^2 + 2ab - 3bc$ і $-10b^2 - 6a^2 - c^2 - ac$.

266. а) $-3n^3 + 3p^2$ і $-3n^3 + 3p^2 - 5$;
б) $3x^2y^3 + 5xy^2 - x^2y^2$ і $-3x^2y^2 + 5xy^2 - 3x^2y^3$.

267. Знайдіть різницю многочленів.
а) $2x^3 - x^2 - 3x + 7$ і $x^3 - 3x + 17$;
б) $4x^5 + x - 2x^3 - 7$ і $x^5 + 3x - 2x^3$.

268. Find the difference of polynomials.
a) $8a^2c - 7ac^2 - a + c$ and $-7ac^2 - a + 4$;
b) $-3x^2y - 2xy^2 - 9$ and $3x^2y - 2xy^2 - 4$.

269. Знайди різницю многочленів.
а) $5a^3 - 3a^2 + 9a$ і $3a^3 - 3a^2 + 11$;
б) $12c^5 + 2c^3 - 3c + 6$ і $2c^5 - 3c - 2c^3$.

270. **Гра.** Один з учнів/одна з учениць записує многочлен, другий/друга — ще один, а третій/третя записує їх різницю і спрощує вираз, якщо це можна зробити. Потім учасники/учасниці міняються ролями.

Спрости вираз **(271, 272)**.

271. а) $(7x^3 - 2x) + (5 + 11x - 6x^3)$;
б) $(8ab + 7b) - (4ab + 7b - 3)$;
в) $(1 - n + n^2) - (3n^2 - 2n + 5) - 7n$;
г) $(x^2y + xy^2) - (3x^2y - 2xy^2 - 7) + 2x^2y$;
ґ) $8ac - (3a^2 - 2c^2 + 2ac) - (4a^2 + 2c^2)$.

272. а) $(2a^2 + 3a - 4) + (5a^2 - a + 7)$;
б) $(6x^3 + 8x - 5) - (4x^2 + 8x - 5)$;
в) $(3z^4 - 2z^3 + 12z - 5) - (3z^4 - 2z - 5)$;
г) $(-5c^3 - 2c + 3c^2) - (1 - c - 2c^2 - 5c^3)$.

Обчисли значення виразу **(273, 274)**.

273. а) $(c^3 - 2c^2 + 3c - 4) - (c^3 - 3c^2 - 5)$, якщо $c = 2$;
б) $4x^2 - (-2x^3 + 4x^2 - 5)$, якщо $x = -3$;
в) $2p - (1 - p^2 - p^3) - (2p + p^2 - p^3)$, якщо $p = -4$.

274. а) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - (3x - 3x^2)$, якщо $x = 3$;
б) $(5a^4 - 2a^3) - (4a^4 - 2a^3 + 1)$, якщо $a = -2$;
в) $a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - b^2 - 3)$, якщо $a = 5$, $b = 4$.

275. При якому значенні x значення многочленів $x^2 + 8x + 9$ і $x^2 + 6x + 4$ дорівнюють один одному?

276. При якому значенні x значення многочленів $2x^2 + 10x + 12$ і $2x^2 - 4x - 2$ дорівнюють один одному?

277. При якому значенні t значення тричлена $7t^2 - 2t + 1$ на 2 більше за значення двочлена $7t^2 + 5$?

278. При якому значенні y значення тричлена $3y^2 + 5y - 3$ на 4 менше за значення двочлена $3y^2 + 11$?

Розв'яжи рівняння **(279, 280)**.

279. а) $(4x - 5) - (7x + 8) = 2$; б) $9z + 17 - (4z - 6) = 38$;
в) $(5x + x^3 - 7) - (2x^3 + 3x) = -(1 + x^3)$;
г) $19 - (3x^2 - 2x) - (6x - x^2) = 7 - 2x^2$.

280. а) $(2x - 8) - (5x + 6) = 4$; б) $16y - (3 - 2y) + (7y + 1) = 48$;
в) $24 - (x^2 + 8x - 17) = 5 - 5x - x^2$;
г) $(x - 2x^4 + 7) - (3x + 3 - 5x^4) = 6 + 3x^4$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

281. Знайди суму многочленів.
а) $-5xy - 4x^2 + y^2$ і $y^3 - 3x^2 + 5xy - y^2 - 2$;
б) $2a^4 - 12a^2 + 15a - 8$ і $-3a^4 + 12a^2 - 5a + 8$;
в) $\frac{3}{5}m^3 - \frac{5}{8}m^2 + 6$ і $\frac{2}{5}m^3 + \frac{3}{8}m^2 - 6$.

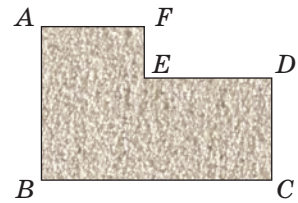
282. Знайди різницю многочленів.
а) $-2xc^2 - 2{,}5x^2 + 7{,}2x$ і $-2{,}8x + 0{,}25xc^2 - 2x^2$;
б) $-4a^3 - b^3 + 4a^3b^2 + 3a^2b^2$ і $3a^3 - b^3 + 3a^2b^2 - 4a^3b^2$;
в) $-\frac{2}{3}xy - \frac{3}{5}x^2y$ і $2\frac{1}{3}xy - x^2y - 2\frac{1}{2}y^2$.

Спрости вираз **(283, 284).**

283. а) $(2az - 3z^2) + (-az - z^2) + (4z^2 - 5az)$;
б) $(0{,}7a - 0{,}7a^2 - 0{,}7) - (5{,}7a^2 - 4{,}7a - 1{,}7)$;
в) $-4m^2 - (m - n^2) + (3m + 4m^2) - 2n^2$;
г) $2\frac{1}{2}an - 3\frac{1}{2}am - \left(\frac{1}{2}an + 3{,}5am - 5\right) - 1{,}5an$.

284. а) $(2x^2 - x + c) - (x^2 + c + 5) - (3c - x^2 - x)$;
б) $3{,}6cx^2 + 1{,}8c^2x - 1{,}2x + (-1{,}8c^2x - 1{,}6cx^2 - 1{,}2x)$;
в) $2\frac{1}{2}ax^2c + 1\frac{1}{3}x^2c - \left(\frac{4}{3}cx^2 + \frac{5}{2}ax^2c\right)$;
г) $2\frac{1}{3}az^2 - \left(\frac{2}{3}a^2z - 2\frac{1}{6}az^2 - 1\frac{2}{3}z\right) - 4\frac{1}{2}az^2$.

285. Периметр килима $ABCDEF$ дорівнює $2p$. $AB = a$, $AF = c$, $EF = b$. Знайди довжину BC, ED і DC (мал. 7.1).



Мал. 7.1

286. Доведи, що при будь-яких значеннях змінної вираз набуває додатного значення.
а) $(x^3 + 3x^2 - 3x) + (x^2 + 4x^3 - 7x) - (5x^3 - 10x - 5)$;
б) $-((2x^3)^2 - 7x^9) - (6(x^3)^2 - (x^3)^3 - 3) + (10(x^2)^3 - (2x^3)^3)$.

287. Доведи, що при будь-яких значеннях змінної вираз набуває від'ємного значення.
а) $(5x^5 + 3x^3 - 1) - (x^4 + 4x^5 - 8x^3) - (x^5 + 5x^4 + 11x^3)$;
б) $(4 - (3x^5)^3) - ((3x^5)^2 - (2x^3)^5) - ((x^2)^5 + 9 + 5x^{15})$.

288. Установіть відповідність між рівняннями, заданими умовами (1–4), та їх коренями (А–Д).

1 $0{,}5y - (4{,}3y + 2{,}7) + 0{,}3y = 46{,}3$	**А** 0,25
2 $-2{,}5x - (3{,}7 - 4{,}3x) = 1{,}7$	**Б** 3
3 $\frac{1}{3}t + \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}t\right) = 2 - 3t$	**В** 1,4
4 $\frac{2}{5}z = -\left(\frac{2}{5} - z\right) + \frac{3}{5}z + 10$	**Г** −8
	Д −14

289. Заміни зірочку многочленом так, щоб утворилась тотожність.
а) $* - (8a^3 - 2a^2 + 7) = 3 - a^2$;
б) $* + (3x + 8) = -3x^2 + 2x - 15$;
в) $(2xy - 11x^2 + 10y^2) - * = 5x^2 + 4y^2 - 6$.

290. Який многочлен слід додати до $2a^3 - a^2 - a + 3$, щоб одержати:
а) $3a^3 - 5a^2 - a + 7$; б) $a^2 - 6a + 13$?

Доведи тотожність **(291, 292)**.

291. а) $2a^4 - (6a^4 - 5ab) + (4a^4 - 3ab + 2) = 2ab + 2$;
б) $(3a^2 + 2b^2 + c^2) - (3c^2 + 2a^2 - b^2) + (-3b^2 + 2c^2 - a^2) = 0$;
в) $-z^2 - (x^2 + (y^2 - (x^2 + y^2 + z^2) + z^2) + y^2) - x^2 = -x^2 - y^2 - z^2$;
г) $a^3 - (b^3 - (a^2b - ab^2)) - (-(-(a^2b - ab^2) + b^3) - a^3) = 2a^3$.

292. а) $3a^2 + (-2a^2 + 5a + 1) - (a^2 + 5a - 1) = 2$;
б) $(-3a^5 + a + 17) - (a^5 - a + 2) - (4a^5 + 2a + 10) = -8a^5 + 5$;
в) $ab + bc + ac - (abc + ab - (abc - bc - (abc + ac))) = -abc$.

293. Доведи, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу:
а) $(7n + 21) - (10 - 4n)$ кратне 11;
б) $8n^2 + 7n - 4 - (3n^2 + 12n - 19)$ кратне 5;
в) $(12n - 5) - (5n - 9)$ при діленні на 7 дає в остачі 4.

294. Доведи, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу:
а) $(12n + 17) - (10 + 5n)$ кратне 7;
б) $9n^2 + (21n - 4) - (12n - 13)$ кратне 9;
в) $(10n - 3) - (4n - 6)$ при діленні на 6 дає в остачі 3.

Подай у вигляді многочлена число **(295, 296)**.

295. а) $\overline{abc}$; б) $\overline{abc} + \overline{ac}$; в) $\overline{xyz} - \overline{zxy}$.

296. а) $\overline{xyx}$; б) $\overline{xyz} - \overline{xy}$; в) $\overline{abc} + \overline{bca}$;

297. Доведи, що: а) різниця чисел $\overline{ab}$ і $\overline{ba}$ кратна 9;
а) сума чисел $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ і $\overline{ca}$ кратна 11;
б) різниця чисел $\overline{a0b}$ і $\overline{b0a}$ кратна 99.

298. Доведи, що: а) сума чисел $\overline{ab}$ і $\overline{ba}$ кратна 11;
б) різниця чисел $\overline{abc}$ і $\overline{cba}$ кратна 99;
в) різниця $(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc}) - (\overline{ca} + \overline{cb} + \overline{ba})$ кратна 18.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

299. Покажи, що числа, розташовані так, як на малюнку 7.2, утворюють магічний квадрат при будь-яких значеннях змінних a і c.

$a + 7c$	a	$a + 5c$
$a + 2c$	$a + 4c$	$a + 6c$
$a + 3c$	$a + 8c$	$a + c$

Мал. 7.2

300. Доведи, що:

а) сума семи послідовних натуральних чисел завжди ділиться на 7;

б) сума чотирьох послідовних натуральних чисел завжди при діленні на 4 дає в остачі 2;

в) сума трьох послідовних парних натуральних чисел завжди ділиться на 6.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Обчисли (301, 302).

301. а) $-\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{2}{9}+\left(-\frac{2}{3}\right)^2$; б) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)\cdot(-2)^2-3\frac{1}{4}$.

302. а) $6-(-0{,}2):0{,}4+0{,}8-2{,}4:6$; б) $-2\frac{3}{5}-6:(-1{,}5)+(3{,}2-0{,}2\cdot 6)^2$.

303. Знайди невідомий член пропорції.

а) $2 : x = 7 : 10$; б) $1 : 4 = 3 : (x + 2)$; в) $6 : 5 = 0{,}9 : 3x$.

§ 8. Множення многочлена на одночлен

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- множення многочлена на одночлен — *multiplying a polynomial by monomial*

Помножимо двочлен $a + b$ на одночлен m. За розподільним законом множення:

$$(a + b)m = am + bm.$$

Так само можна множити довільний многочлен $a + b - c$ на m:

$$(a + b - c)m = am + bm - cm.$$

Кожна із цих рівностей — тотожність. Якщо в будь-яку з них замість якої-небудь змінної написати один і той самий вираз, то знову одержимо тотожність:

$$(2x + b)m = 2xm + bm.$$

$$(a + b - c) \cdot 4a^2 = a \cdot 4a^2 + b \cdot 4a^2 - c \cdot 4a^2 = 4a^3 + 4a^2b - 4a^2c.$$

Щоб помножити многочлен на одночлен, потрібно кожний член многочлена помножити на даний одночлен і результати додати.

За цим правилом можна також множити одночлен на многочлен, бо множники можна міняти місцями.

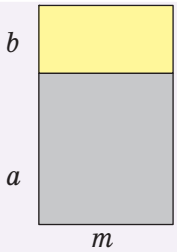
Наприклад, $2ax \cdot (3x^2 - x + 4) = 2ax \cdot 3x^2 - 2ax \cdot x + 2ax \cdot 4 =$
$= 6ax^3 - 2ax^2 + 8ax.$

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Для додатних значень a, b, m рівність

$$(a + b)m = am + bm$$

можна проілюструвати геометрично (мал. 8.1). Площа прямокутника з основою m і висотою $a + b$ дорівнює сумі площ двох прямокутників, основи яких — a і b, а висота — m.



Мал. 8.1

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Як помножити многочлен на одночлен?
2. Сформулюй розподільний закон множення.
3. Чи правильна тотожність $(a + b)c = c(a + b)$? Чому?
4. Чому дорівнює добуток різниці $a - b$ і c?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Помнож вирази $2a + 3b - c$ і $5xy$.
Розв'язання. $(2a + 3b - c) \cdot 5xy =$
$= 2a \cdot 5xy + 3b \cdot 5xy - c \cdot 5xy = 10axy + 15bxy - 5cxy.$

2. Розв'яжи рівняння $(3x - 5) \cdot 2x = 6x^2 + 7$.
Розв'язання. $3x \cdot 2x - 5 \cdot 2x = 6x^2 + 7$
$$6x^2 - 10x = 6x^2 + 7$$
$$-10x = 7$$
$$x = -0{,}7.$$

3. Один брат старший за іншого на 6 років, а 3 роки тому він був старший від брата у два рази. Скільки років кожному з них?
Розв'язання.
Якщо молодшому брату x років, то старшому — $(x + 6)$ років. Три роки тому молодшому було $(x - 3)$ роки, а старшому — $(x + 6 - 3) = (x + 3)$ роки.

Тоді старшому брату було у два рази більше років, ніж молодшому, отже,

$$x + 3 = 2(x - 3)$$
$$x + 3 = 2x - 6$$
$$-x = -9$$
$$x = 9.$$

Отже, молодшому братові — 9 років, а старшому $9 + 6 = 15$.

ВИКОНАЙ УСНО

304. Подай у вигляді многочлена добуток.

а) $(x + y)c$, $(x - y)c$, $(2x - y)c$;
б) $(x + y)n$, $(x - y)n$, $(3x - y)n$;
в) $(2 + a)c$, $(2 - a)c$, $(2 - an)c$.

305. Чи тотожні вирази?

а) $2(a - 5)$ і $2a - 10$; б) $(x - y)5$ і $5x - 5y$;
в) $3c(a - x)$ і $3ac - x$; г) $(x - 7)(-2)$ і $14 - 2x$.

306. Розв'яжи рівняння $2(x - 3) + 2(x + 3) = 8$.

А 5 **Б** −0,5 **В** 2 **Г** 0,5

307. Знайди значення виразу $3(a + 2) - 3(a - 1)$, якщо $a = -0{,}07$.

А −9,42 **Б** 2,58 **В** 3 **Г** 9

308. Скільки доданків має утворитися після множення:
а) двочлена на одночлен; б) тричлена на одночлен?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

309. Помнож вирази.

а) $3a + c$ і $2a$; б) $8x - y$ і $3xy$; в) $x^2 - x$ і $2x$;
г) $m^3 + 3m$ і m^2; ґ) $2a + 3$ і $4a$; д) $3x - y$ і $-2xy$.

Подай у вигляді многочлена вираз **(310, 311)**.

310. а) $(x + 1)x^2$; б) $a^2(b - c)$; в) $(n^2 - n)n^3$;
г) $3(2x - 7)$; ґ) $-3n(n^2 + 5n - 1)$; д) $2ac(3a - 5ac + 2c)$.

311. а) $(2a + 3b^2)a$; б) $(-a + ac)c^2$; в) $-2a^2(a^2 - 1)$;
г) $6(2xy - 3)$; ґ) $5p(2p^2 - 3p + 4)$; д) $3xy(5x + 6xy - 9y)$.

Чи тотожні вирази **(312, 313)**?

312. а) $a(a - x)$ і $a^2 - ax$; б) $(x - y)x^2$ і $x^3 - y$;
в) $(2p^2 + q)q$ і $q^2 + 2p^2q$; г) $mn(m - n - 1)$ і $m^2n - n^2m - 1$.

313. а) $6a(a - 2b)$ і $6a^2 - 12ab$; б) $(4x - y)xy$ і $4x^2y + xy^2$;
в) $-2c(3c - 5)$ і $10c - 6c^2$; г) $(2xy - 3y + 5)y$ і $2xy^2 - 3y^2 + 5$.

Спрости вираз **(314, 315)**.

314. а) $2a^3(4a^2 + 3a) - 6a^4$; б) $7x^2 - 2x(3x - y)$;
в) $2x(x - 1) - x^2$; г) $(3 - a)a^2 - 3a^2$;
ґ) $(m - n)mn + m(mn + n^2)$; д) $-3z(z - 2) - z(6 + 2z)$.

315. а) $-3c^3 + c(3c^2 - 1)$; б) $2p - (p^2 + 2)p$;
в) $5m(6 - 2m^2) + 10(m^3 - 3m)$; г) $-2p(3p - 2q) - 4q(p + q)$.

316. Обчисли значення виразу.
а) $(b^2 - 4)b - (b^3 - 3b)$, якщо $b = -2{,}7$;
б) $(a^2 - 1)a - (a - 1)a^2$, якщо $a = 0{,}8$.

317. Find the value of the expression.
a) $c(1 + c + c^2) - c(1 + c)$, if $c = -0{,}5$;
b) $(x - y)x + (x - y)y$, if $x = 2$ and $y = 3$.

318. Спрости вираз і знайди його значення.
а) $(a - 2)a^2 + (a - a^3)$, якщо $a = -0{,}5$;
б) $(c - 3)c^3 - (c^2 - 1)c^2$, якщо $c = 2$.

Розв'яжи рівняння **(319, 320)**.

319. а) $2(x - 3) + 5(x - 2) = 12$; б) $3(1 - x) - 2(3 - x) = 5$;
в) $3z - 7(2z + 4) = 16$; г) $2 + 3y - 7(5 - y) = 15$;
ґ) $x^2 - 3x + 1 = x(x - 2)$; д) $0{,}7x + 0{,}5 = 2{,}6(x - 2)$.

320. а) $2z - 15(1 - 2z) = 7z$; б) $8c - 2(3 - 7c) = 9c + 20$;
в) $1 - 8(3 - 2y) = 2(2 - y)$; г) $3z - (z - 5) \cdot 4 = (2 - 5z) \cdot 3$;
ґ) $3t - t^2 + 7 = t(2 - t)$; д) $1{,}7(a - 3) + 0{,}2 = 2{,}3(a + 1)$.

Доведи тотожність **(321, 322)**.

321. а) $5(8y - 1) - 7(4y + 1) + 2y(y - 6) = 2y^2 - 12$;
б) $3(-5z - 2) + 5z(7 - 12z) + 6(1 + 10z^2) = 20z$.

322. а) $3x(2x - 5) + 7(3x - 4) - 2(3x^2 - 14) = 6x$;
б) $8(x^2 + 5x) - 3x^2(5x + 1) + 5x(3x^2 - 8) = 5x^2$.

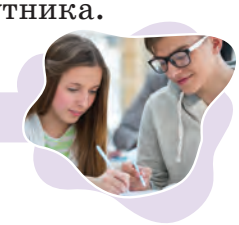
323. На 315 грн купили кілька наліпок по 6 грн і кілька олівців по 13 грн, разом 35 штук. Скільки купили наліпок і скільки олівців? Розв'яжіть задачу за запропонованим планом.

1. *Позначте кількість куплених наліпок за x.*
2. *Виразіть через x кількість куплених олівців, знаючи, що наліпок і олівців разом 35 штук.*
3. *Запишіть виразом вартість всіх наліпок.*
4. *Запишіть виразом вартість всіх олівців.*
5. *Складіть рівняння, знаючи, що загальна вартість покупки 315 грн, та розв'яжіть його.*

324. Купили 30 односторонніх і двосторонніх листівок, заплативши за всю покупку 300 грн. Скільки купили односторонніх листівок і скільки двосторонніх, якщо ціна односторонньої 9 грн, а двосторонньої — 12 грн? Склади план для розв'язування задачі і розв'яжи її.

325. Одна сторона прямокутника в 4 рази більша за іншу. Якщо меншу сторону збільшити на 3 см, то площа прямокутника збільшиться на 24 см^2. Знайдіть сторони прямокутника. Складіть план для розв'язування задачі і розв'яжіть її.

326. Одна сторона прямокутника у 3 рази більша за іншу. Якщо більшу сторону зменшити на 5 см, то площа прямокутника зменшиться на 200 см^2. Знайди сторони прямокутника.



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

327. Перетвори у многочлен добуток.

а) $2ac^3 \cdot (3a^2 - 4ac + 5c)$; б) $0{,}4a^2c \cdot (5a^3 - 10a^2c + 7c^2 - 20)$;

в) $15yz^2 \cdot \left(\frac{1}{3}z^4 - \frac{2}{5}z^3 - 2z + \frac{3}{5}\right)$; г) $-\frac{2}{3}xy^2 \cdot (6xy^2 - 3x^2y - 9xy)$.

328. Подай у вигляді многочлена вираз.

а) $(2ax + 3a - 5) \cdot a^2x^3$; б) $(-0{,}7cy^2 - z^2) \cdot 2c^3z$;

в) $0{,}3nz \cdot \left(\frac{1}{3}n^2 - \frac{2}{3}z^3\right)$; г) $-2\frac{1}{3}x^3y \cdot \left(6xy^2 + \frac{3}{7}x^2\right)$.

Розв'яжи рівняння **(329, 330)**.

329. а) $0{,}4(2x - 3) - 0{,}5(3x - 0{,}2) = -2{,}5$;

б) $6(2z - 12) - 5(11 + 3z) = -3z + 5$;

в) $-\frac{2}{3}(y-6) - \frac{3}{4}(2y-16) = -3\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{3}(3x+2) - \frac{1}{3}(9-2x) = \frac{1}{2}x$.

330. а) $0{,}8(x - 0{,}4) + 0{,}6(x - 0{,}6) = 1$;

б) $4(3y - 13) + 7(15 - 3y) = -9y + 47$;

в) $4{,}3 - 2x - 3\left(1{,}1 + \frac{2}{3}x\right) = x + \frac{2}{3}$; г) $\frac{1}{6}(8-z) - \frac{1}{3}(5-4z) = \frac{1}{2}z + 3$.

331. Доведи, що при будь-яких значеннях x значення виразу є додатним числом.

а) $9x(3x - 4) + 4(x + 2) - 8x(2x - 4)$;

б) $2x(3x - 4) + 5(x + 6) - x(x - 3)$.

332. Доведи, що при будь-яких значеннях y значення виразу є від'ємним числом.

а) $6(-3y - 4) - 5y(y - 3) + 3(y - 11y^2)$;

б) $5y(1 - 2y) - 2(y + 5) - y(3 + 5y)$.

Доведи, що значення виразу не залежить від значення змінної, що входить до нього **(333, 334)**.

333. а) $2(a^3 + 6) + 5a(3a - a^2) - 3a^2(5 - a)$;

б) $6x(2y^2 - (5x + y) \cdot 3y) + 3xy(2y + 30x)$.

334. а) $2x^3(8 - 5x) - 8x(2x^2 + x^3) + 6(3x^4 - 4)$;

б) $3ab + 6((2a + b)a + 5) - 3a(3b + 4a)$.

Спрости вираз і знайди його значення **(335, 336)**.

335. а) $-4x(x^2 - x - 3) + 2x(2x^2 + x - 5)$, якщо $x = -3$;

б) $(5a(a - 4b) + 12ab) \cdot 2b + 16ab^2$, якщо $a = 3$, $b = 1{,}2$.

336. а) $3a(4a^2 - 3a) - 6(4 + 2a^3) - 5a(2 - 5a)$, якщо $a = 0{,}5$;

б) $\frac{1}{2}x\left(6y(3x+2y)-8xy\right)-5x^2y$, якщо $x=-\frac{1}{6}$, $y = 11$.

Розв'яжи рівняння **(337, 338)**.

337. а) $\frac{2x-3}{3}+\frac{6-3x}{2}=-3$; б) $\frac{4x-1}{2}-\frac{3x+5}{4}=2$;

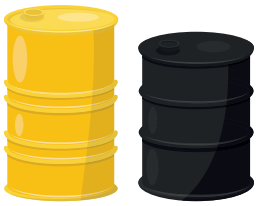
в) $\frac{x-5}{2}+\frac{3x-8}{5}=-3$; г) $2x-\frac{x+2}{8}=\frac{3x-2}{2}$.

338. а) $\frac{2-3x}{4}+\frac{x+1}{3}=5$; б) $\frac{3x-7}{3}+\frac{5-9x}{6}=2$.

339. Три роки тому батько був старший за сина вп'ятеро, а тепер — учетверо. Скільки років кожному?

340. Скільки років учневі, якщо відомо, що через 10 років він буде у 5 разів старший, ніж був 10 років тому?

341. В одній бочці 99 л бензину, а в іншій — 57 л. З першої щодня беруть по 12 л бензину, а з другої — по 10 л. Через скільки днів у першій бочці бензину стане у 3 рази більше, ніж у другій?



342. У першій посудині 84 г кислоти, а у другій — 12 г. Скільки кислоти слід перелити з першої посудини в другу, щоб у першій її стало у два рази більше, ніж у другій?

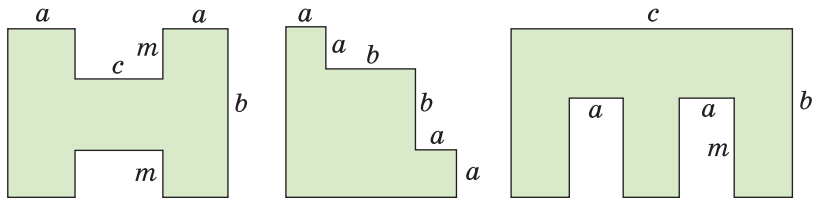
Замість зірочок запиши такі одночлени, щоб утворилась тотожність **(343, 344)**.

343. а) $-4x^3 \cdot (* - *) = 2x^3 + 12x^4$;
б) $5ac \cdot (* - * - *) = 50a^2c - 15ac^2 - ac$;
в) $(-x^2 - *) \cdot (-6x) = * + 42x^5$.

344. а) $(* + 0{,}25xy + *) \cdot 4x^2y = 2x^2y^2 + * + 20x^2y^3$;
б) $(2m^3 - 9m) \cdot * = 10m^6 - *$;
в) $*(* - xy^3 + 4y^4) = 12x^2y^3 - 4x^3y^4 + *$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

345. Визнач площі фігур, зображених на малюнку 8.2.



Мал. 8.2

346. Перемалюй в зошит таблицю і заповни її порожні клітинки так, щоб утворився магічний квадрат.

	3	2	13
5		11	
	6	7	
4			

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

347. Додатне чи від'ємне значення виразу?
а) $(-5)^7 \cdot (-8)^5$; б) $(-4)^8 \cdot (-13)^{10}$;
в) $(-61)^{12} \cdot (-7)^{17}$; г) $(-9)^3 \cdot (-10)^{25}$.

348. Який із виразів є одночленом стандартного вигляду?
а) $5a^2 \cdot 3x$; б) $-0{,}5a^2c$; в) $2a \cdot (-3x)$; г) $(-2y)^3$; ґ) $2x^2yx$.

349. Обчисли.

а) $\left(2-\frac{1}{2}\right)^2 - 3^2 - (1-3^3) - 1{,}5^2$; б) $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2$.

§ 9. Множення многочленів

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- множення многочленів — *multiplying polynomials*

Помножимо многочлени $a + b - c$ і $x + y$. Якщо позначимо многочлен $x + y$ однією буквою m, то матимемо:

$$(a + b - c)(x + y) = (a + b - c)m = am + bm - cm =$$
$$= a(x + y) + b(x + y) - c(x + y) = ax + ay + bx + by - cx - cy.$$

Отже, $(a + b - c)(x + y) = ax + ay + bx + by - cx - cy$.

Щоб помножити многочлен на многочлен, треба кожний член першого многочлена помножити на кожний член другого многочлена й одержані добутки додати.

Наприклад, $(x^2 - 2x + 3)(a - 5) = x^2 \cdot a + x^2 \times$
$\times(-5) - 2x \cdot a - 2x \cdot (-5) + 3 \cdot a + 3 \cdot (-5) =$
$= ax^2 - 5x^2 - 2ax + 10x + 3a - 15.$

Множити многочлени можна двома способами:

$$(a + b + c + \ldots)(x + y + z + \ldots) = ax + ay + az + \ldots;$$

$$(a + b + c + \ldots)(x + y + z + \ldots) = ax + bx + cx + \ldots .$$

Поглянь, як множити многочлени — зіскануй QR-код

https://vse.ee/ciwo

Якщо потрібно перемножити більше ніж два многочлени, то спочатку множать перші два з них, потім одержаний результат множать на третій многочлен тощо. Для прикладу перемножимо многочлени $x - a$, $x + a$ і $x^2 - a^2$.

$$(x - a)(x + a) = x^2 + ax - ax - a^2 = x^2 - a^2,$$
$$(x^2 - a^2)(x^2 - a^2) = x^4 - a^2x^2 - a^2x^2 + a^4 = x^4 - 2a^2x^2 + a^4.$$

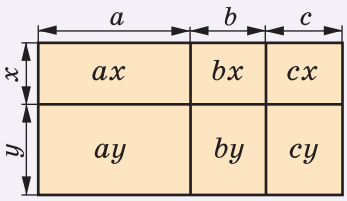
Отже, $(x - a)(x + a)(x^2 - a^2) = x^4 - 2a^2x^2 + a^4$.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Тотожність

$(a + b + c)(x + y) = ax + bx + cx + ay + by + cy$

для додатних значень змінних відповідає малюнку 9.1. Адже якщо сторони прямокутника відповідно дорівнюють $a + b + c$ і $x + y$, то його площа становить:



Мал. 9.1

$(a + b + c)(x + y)$, або $ax + bx + cx + ay + by + cy$.

Отже, ці два вирази тотожно рівні.

В алгебрі рівність $(a + b + c)(x + y) = ax + bx + cx + ay + by + cy$ вважається правильною за умови, що її букви позначають не тільки додатні числа, а й будь-які числа або вирази.

Зверни увагу: якщо тричлен помножити на двочлен, то в результаті матимемо шестичлен. Якщо перемножати многочлени, у яких відповідно k і p членів, то одержимо многочлен, що має $k \cdot p$ членів. Тільки після зведення подібних доданків кількість членів добутку може зменшитися.

Наприклад, $(x^2 + x + 1)(x - 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Сформулюй правило множення многочлена на одночлен.
2. Сформулюй правило множення многочлена на многочлен.
3. Як можна перемножити три многочлени? А чотири?
4. Скільки членів може мати многочлен, що дорівнює добутку двох двочленів? А двох тричленів?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Перемнож многочлени $2x + 3$ і $a - x$.
Розв'язання. $(2x + 3)(a - x) = 2xa - 2x^2 + 3a - 3x$.

2. Спрости вираз $4a - 2ax - (2a - 1)(2 - x)$.
Розв'язання. $4a - 2ax - (4a - 2ax - 2 + x) =$
$= 4a - 2ax - 4a + 2ax + 2 - x =$
$= 2 - x$.

3. Подай у вигляді многочлена вираз $(3x - 5y)^2$.
Розв'язання. $(3x - 5y)^2 = (3x - 5y)(3x - 5y) =$
$= 9x^2 - 15xy - 15xy + 25y^2 = 9x^2 - 30xy + 25y^2$.

ВИКОНАЙ УСНО

350. Подай у вигляді многочлена добуток.

а) $(1 + y)(1 + x)$; б) $(x + 1)(a + 1)$; в) $(x - 1)(n + 1)$;
г) $(2 + a)(c + 1)$; ґ) $(3 - y)(5 + c)$; д) $(2 - a)(c + 1)$.

351. Розкрий дужки у виразі.

а) $(x + 1)(x + 1)$; б) $(1 - y)(1 - y)$; в) $(a + c)(a - c)$.

352. Якому з многочленів тотожно дорівнює добуток $(a + 2)(a + 3)$?

А $a^2 + 6$ **Б** $a^2 + 5a + 5$ **В** $2a + 5$ **Г** $a^2 + 5a + 6$

353. Яке з чисел є коренем рівняння $(x - 1)(x + 2) - x^2 = 0$?

А 1 **Б** 2 **В** –2 **Г** 0

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

Перемнож многочлени **(354, 355)**.

354. а) $a + b$ і $m - n$; б) $x - y$ і $x + y$; в) $2a - 1$ і $a - 2$;
г) $c + ax$ і $a + x$; ґ) $1 - c$ і $1 + c^2$; д) $-a + 1$ і $2a - 3$.

355. а) $x - 2$ і $2x + 3$; б) $3y + 5$ і $2y - 6$; в) $7 - c$ і $c + 2$;

Подай у вигляді многочлена **(356, 357)**.

356. а) $(a - b)(c + d)$; б) $(x - 2)(x - 3)$;
в) $(2x - 3)(a - b)$; г) $(2a - 3c)(a + 5c)$;
ґ) $(a^2 - b)(a - b^2)$; д) $(1 - 2xz)(1 + 2xz)$;
е) $(x^2 - x + 1)(x + 1)$; є) $(c - q)(1 - c - q)$.

357. а) $(2x + 3)(3x - 2)$; б) $(5a - 4)(3a - 2)$;
в) $(7c - 1)(5 - 6c)$; г) $(-2n + 3)(3n - 2)$;
ґ) $(a^2 + b)(a^2 + b)$; д) $(-2 + c)(-3 + c)$;
е) $(p - 1)(p^2 + p + 1)$; є) $(x - 2)(x^2 - 5x + 2)$.

358. **Гра.** Один з гравців / одна з гравчинь записує двочлен, другий/друга — ще один двочлен, третій/третя має їх перемножити. Потім поміняйтеся ролями.

359. Установи відповідність між виразами, заданими умовами (1–3), та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $(a - c)(a + c)$	**А** $a^2 + c^2$
2 $(a + c)(a + c)$	**Б** $a^3 - 2ac^2 + 2a^2c + c^3$
3 $(a + c)(a^2 - ac + c^2)$	**В** $a^2 + 2ac + c^2$
	Г $a^2 - c^2$
	Д $a^3 + c^3$

Спрости вираз **(360, 361)**.

360. а) $(x - 1)(x + 2) - x(x + 1)$; б) $(1 + a)(a^2 - a) + a(1 + a^2)$;
в) $(a + 2)(a - 5) + 3(a - 1)$; г) $(n - 2)(n - 2) + 4(n - 1)$;

ґ) $(x - 4)(3x + 5) + 3x(7 - x) + 20$;
д) $(a + b)(a - b) - (a - 2b)(a + 2b)$.

361. а) $(a + 1)(a - 3) + 2a(1 - a)$; б) $(3a + b)(a - b) - (3a^2 - b^2)$;
в) $(3x + 1)(x - 6) + (2 - 3x)(x - 5)$;
г) $(x - y)(x + 7) - (y + x)(x + 7) + 14y$.

362. Спрости вираз і знайди його значення.
а) $(a + 2)(a - 3) + (a + 6)(a - 4) - 2a^2$, якщо $a = 6$;
б) $(2x + 3)(x - 1) - (x - 3)(x + 4)$, якщо $x = -3$;
в) $(a + b)(a - b) + b^2$, якщо $a = 0{,}6$ і $b = 0{,}237$;
г) $-x^2 + y^4 + xy + (x - y^2)(x + y^2)$, якщо $x = 5$ і $y = -7$.

363. Обчисли значення виразу.
а) $(a - 3)(a - 5) + (a + 1)(a + 7)$, якщо $a = -2$;
б) $(x - 4)(2x + 5) - (1 + 2x)(x + 3)$, якщо $x = -3{,}3$;

364. Find the value of the expression.
a) $(x + y)(x + y) - (x^2 - y^2)$, if $x = 0{,}2$ and $y = 5$;
b) $(a^2 - b)(a^2 + b) - a^4$, if $b = 0{,}2$ and $a = 3{,}27$.

Подай у вигляді многочлена вираз **(365, 366)**.

365. а) $(a + b)^2$; б) $(x - y)^2$; в) $(2a - x)^2$; г) $(3a + 2)^2$.

366. а) $(x + y)^2$; б) $(a - c)^2$; в) $(3x + y)^2$; г) $(2a - 3)^2$.

Розв'яжи рівняння **(367, 368)**.

367. а) $(x - 1)(x - 3) = x^2 - 5$; б) $(y + 2)(y - 5) - y(y - 1) = 2$;
в) $(2x + 1)(x - 5) = 2(x^2 + 11)$;
г) $3z(z - 2) - 9 = (1 - z)(1 - 3z)$.

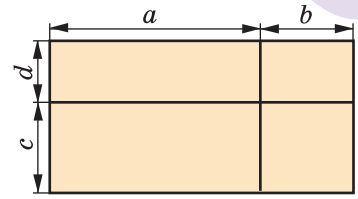
368. а) $(x - 2)(x + 5) = x^2 + 2$; б) $(x - 6)(x - 2) - x(x + 2) = 2$;
в) $(x - 1)(x + 5) = (x + 2)(x + 3)$;
г) $(2x + 3)(x - 7) + 6 = (x + 3)(2x + 1)$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

369. Доведи тотожність

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd,$$

користуючись:
а) правилом множення многочленів;
б) малюнком 9.2.
Яке доведення є більш загальним?



Мал. 9.2

370. Зобразіть у вигляді прямокутників геометричну модель, яка ілюструвала б множення виразів $a + b + c + d$ і $m + n$.

Подай у вигляді многочлена **(371, 372)**.

371. а) $(a^2 - 2a - 2)(a - 1)$; б) $(4x^2 + 6x + 9)(2x - 3)$;

372. а) $(x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$; б) $(4a^2 - 2ab + b^2)(2a + b)$;

Спрости вираз **(373, 374)**.

373. а) $(a^2 - a + 1)(a + 1) - a^3$;

б) $(2a + 3x)(4a^2 - 6ax + 9x^2) - 27(x^3 - a^3)$;

в) $(c - 5)(c + 2) + 3(c + 4)$; г) $(x^2 - y)(x - y^2) + xy(1 + xy)$;

ґ) $\frac{4}{9} - \left(\frac{2}{3} - a^3\right)\left(\frac{2}{3} + a^3\right)$; д) $\frac{1}{8}x^3 - \left(\frac{1}{2}x - a^2\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}a^2x + a^4\right)$.

374. а) $(x^2 + ax + a^2)(x - a) + a^3$;

б) $(9c^2 + 12ac + 16a^2)(4a - 3c) - 64(a^3 - c^3)$;

в) $(m + 7)(3 - m) + 4(m - 5)$;

г) $(4n^2 - p)(2n - p^2) + 2np(2np + 1)$;

375. Подай у вигляді многочлена вираз.

а) $(2x - 3y)^2$; б) $(3ac + b^2)^2$; в) $(2a - 1)^3$.

Доведи тотожність **(376, 377)**.

376. а) $(2a - 3)(a + 6) - 3(3a - 6) = 2a^2$;

б) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) + 1 = a^4$;

в) $(2a - 3)^2 + 3(4a - 3) = 4a^2$;

г) $(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3$.

377. а) $(3x + 2)(x - 4) + 2(4 + 5x) = 3x^2$;

б) $c^4 - (c - 1)(c + 1)(c^2 + 1) = 1$;

в) $(3a + 2)^2 - 4(3a + 1) = 9a^2$;

г) $(x + y)^3 - 3xy(x + y) = x^3 + y^3$.

Доведи, що значення виразу не залежить від значення змінної **(378, 379)**.

378. а) $(x + 5)(x^2 - 2x - 3) - (5x + x^2)(x - 2) + 3(x + 5)$;

б) $(2x^2 - 3x + 6)(x + 4) - (x^2 + 4x + 3)(2x - 3)$.

379. а) $(2x - 4)(3x + 2) - (2x - 3)(4x + 2) + 2x^2$;

б) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) - (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$.

380. Доведіть, що при всіх натуральних значеннях n значення виразу $(n - 3)(n + 6) - (n - 9)(n + 6)$ кратне 6.

381. Доведи, що при всіх натуральних значеннях n значення виразу $(n + 12)(n + 3) - (n - 3)(n + 9)$ кратне 9.

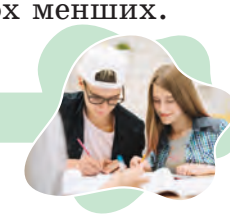
Розв'яжи рівняння (382, 383).

382. а) $(3z^2 - 1)(z - 1) = 3z^2(z - 1) + 7$;
б) $(1 - 2y)^2 = 2(y - 2)(2y - 3)$;
в) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = x^4 + x^2 + x$.

383. а) $(2x^2 - 3)(x - 3) = 2x^2(x - 3) + 6$;
б) $(0{,}1 + x)(0{,}01 - 0{,}1x + x^2) = 2x(0{,}5 + 0{,}5x^2)$;
в) $(3z - 2)^2 = 9(z - 2)(z + 3) - 5$;
г) $(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1) = x^4 + 10x$;
ґ) $\frac{2}{3}x - \left(\frac{2}{3}x - 3\right)\left(\frac{4}{9}x^2 + 2x + 9\right) = \frac{4}{9}x\left(6 - \frac{2}{3}x^2\right)$.

384. Знайди три послідовні натуральні числа, якщо квадрат меншого з них на 8 менший за добуток двох інших чисел.

385. Знайди чотири послідовні натуральні числа, якщо добуток двох більших чисел на 18 більший за добуток двох менших.



ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

386. Дано два добутки: $11 \cdot 44$ і $16 \cdot 32$. На яке число треба збільшити кожний із чотирьох множників, щоб нові добутки дорівнювали один одному?

387. Дано два добутки: $25 \cdot 51$ і $31 \cdot 40$. На яке число треба зменшити кожний із чотирьох множників, щоб нові добутки дорівнювали один одному?

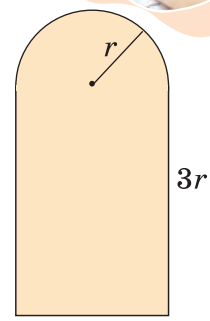
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

388. Знайди периметр і площу фігури, зображеної на малюнку 9.3, якщо $r = 0{,}8$ м.

389. Обчисли.

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{16} - 3.$$

390. Подай кількома способами одночлен у вигляді добутку двох одночленів стандартного вигляду.
а) $36a^8$; б) $30x^4y^9$; в) $-18a^{10}b^5$.



Мал. 9.3

Перейди за посиланням та
- підсумуй головне в розділі https://vse.ee/cgbg
- ознайомся з історичними відомостями https://vse.ee/cgbf
- дай відповіді на запитання https://vse.ee/cgbe

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРІАНТ I

1. Перетвори на многочлен вираз $3(2x^2 - x + 2) - 2x(3x - 5)$.
2. Знайди суму, різницю і добуток многочленів $a^2 + a - 3$ і $a^2 - a$.
3. Спрости вираз $9 - (3 + x)(3 - x)$ і знайди його значення, якщо $x = -5$.
4. Розв'яжи рівняння $(x - 5)(x + 1) = x^2 - 13$.

ВАРІАНТ II

1. Перетвори на многочлен вираз $4(a^2 - 3a + 1) - 2a(5a - 6)$.
2. Знайди суму, різницю і добуток многочленів $n^2 - n - 2$ і $n^2 + n$.
3. Спрости вираз $25 - (5 - c)(5 + c)$ і знайди його значення, якщо $c = -7$.
4. Розв'яжи рівняння $(x - 2)(x + 4) = x^2 + 6$.

ВАРІАНТ III

1. Перетвори на многочлен вираз $2(z^2 - 2z + 3) - z(2z - 6)$.
2. Знайди суму, різницю і добуток многочленів $2a^2 - a - 1$ і $2a^2 + a$.
3. Спрости вираз $p^2 - (2 + p)(2 - p)$ і знайди його значення, якщо $p = -3$.
4. Розв'яжи рівняння $(x - 1)(x + 3) = x^2 + 3$.

ВАРІАНТ IV

1. Перетвори на многочлен вираз $5(2c^2 - 3c + 7) - 3c(2c - 5)$.
2. Знайди суму, різницю і добуток многочленів $c^2 + 2c + 1$ і $c^2 - 2c$.
3. Спрости вираз $x^2 - (4 - x)(4 + x)$ і знайди його значення, якщо $x = -2$.
4. Розв'яжи рівняння $(x + 5)(x - 3) = x^2 - 7$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання №2

1. Який із виразів є многочленом?

А $(x + y)^2$ **Б** $x^2 + y^2$ **В** $\frac{x^2}{y^2}$ **Г** $x^2 : y^2$

2. Запиши у стандартному вигляді многочлен
$3x^2 - 1 - 5x - 4x^2 - 7 + 5x - x^3 + 8$.

А $x^3 + x^2$ **Б** $-x^3 + x^2$ **В** $-x^3 - x^2$ **Г** $-x^3$

3. Який із виразів набуває тільки додатних значень?

А x^2 **Б** $x^2 - 1$ **В** $x^2 + 1$ **Г** $1 - x^2$

4. Спрости вираз $(2a + 3b) + (7b - 3a) - (8a - 6b)$.

А $13a - 4b$ **Б** $-9a + 16b$ **В** $7a - 16b$ **Г** $-32a + 4b$

5. Виконай множення $(x - 1)(x + 1)$.

А $x^2 - 1$ **Б** $x^2 + 1$ **В** x^2 **Г** $x^2 - 2x + 1$

6. Обчисли значення многочлена $0{,}6x^3 + 0{,}4x^3$, якщо $x = 0{,}2$.

А 0,8 **Б** 0,08 **В** 0,008 **Г** 0,0008

7. При якому значенні x різниця многочленів
$5x^3 - 9x + 17$ і $5x^3 + 4x + 17$ дорівнює 13?

А 1 **Б** −1 **В** 2 **Г** −2

8. Запиши у вигляді двочлена число, яке від ділення на число m дає частку 8 і остачу r.

А $8m + r$ **Б** $8m - r$ **В** $8r - m$ **Г** $8r + m$

9. Розв'яжи рівняння $x(x + 1) - x(x - 2) = 3$.

А −1 **Б** 0 **В** 1 **Г** 2

10. Який многочлен треба додати до многочлена $a^3 - a^2 + 3$, щоб одержати $a^2 + 3$?

А $a^3 - a^2$ **Б** $a^2 - a^3$ **В** $2a^3 - a^2$ **Г** $2a^2 - a^3$

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 2

1. Обчисли значення виразу $3(2a - 1) - 2(5 + 3a)$, якщо $a = -2{,}7$.

А $-45{,}4$ **Б** $19{,}4$ **В** -13 **Г** -7

2. Якому з многочленів тотожно дорівнює добуток $(2c - 3)(3 + c)$?

А $3c$ **Б** $c - 6$ **В** $2c^2 + 9c - 9$ **Г** $2c^2 + 3c - 9$

3. Який многочлен потрібно додати до тричлена $n^2 - 2n - 1$, щоб отримати двочлен $n^2 + 3$?

А $n^2 + 4$ **Б** $2n + 4$ **В** $n^2 + 2n + 2$ **Г** $2n + 2$

4. Установи відповідність між виразами, заданими умовами (1–3), та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1	$(a + b) + (b - a)$	**А**	$2a$
2	$(a + b) - (b - a)$	**Б**	$2b$
3	$(a + b)(b - a)$	**В**	$a^2 - b^2$
		Г	$b^2 - a^2$
		Д	0

5. Доведи тотожність.

а) $(2a + 3)(3a - 5) - (3a - 2)(2a + 1) = -13$;

б) $a(b+c-bc)-b(a+c-ac)+c(b-a+ab)=abc$.

6. Спрости вираз і знайди його значення.

а) $5x^2(x - 3) + 3x(5x - 2x^2)$, якщо $x = -2$;

б) $3a(a^2 - a + 2) - (3a^3 - 6a^2 + a)$, якщо $a = 4$.

7. Розв'яжи рівняння.

а) $(x - 2)(x + 3) = x^2 - x$;

б) $\frac{2x-3}{5}-\frac{5x-1}{3}=1$.

8. Доведи, що значення виразу

$$3ab + 6((2a + b)a + 5) - 3a(3b + 4a)$$

не залежить від значення змінних, що входять до нього.

Додаткове завдання

9. Дано чотири послідовні натуральні числа. Доведи, що добуток середніх чисел на 2 більший за добуток крайніх чисел.

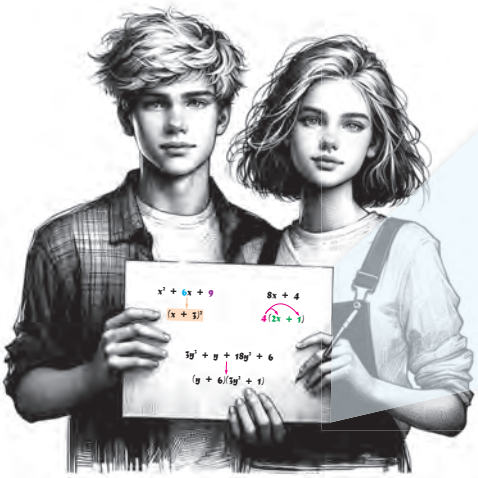
РОЗДІЛ 2. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

«Алгебра і геометрія — єдині країни, де панують тиша і мир.»

Марія Аньєзі

Розкладання многочленів на множники — операція, обернена до множення многочленів. Як ти вже знаєш, розв'язуючи різні задачі, іноді перемножують два чи більше чисел, а іноді розкладають дане число на множники. Подібні задачі виникають і у процесі перетворення цілих алгебраїчних виразів.

Розкладання многочленів на множники



$$x^2 + 6x + 9 \qquad 8x + 4$$

$$(x + 3)^2 \qquad 4(2x + 1)$$

$$3y^3 + y + 18y^2 + 6$$

$$(y + 6)(3y^2 + 1)$$

У цьому розділі ти дізнаєшся про:

- винесення спільного множника за дужки;
- спосіб групування;
- формули скороченого множення;
- застосування різних способів розкладання многочленів на множники.

§ 10. Винесення спільного множника за дужки

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- розкладання многочлена на множники — *factoring polynomials*
- винесення спільного множника за дужки — *tacking out a common factor*

Ти вже вмієш розкладати на множники натуральні числа. Наприклад, $15 = 3 \cdot 5$, $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

На множники розкладають і многочлени.

Розкласти многочлен на множники — це означає замінити його добутком кількох многочленів, тотожним даному многочлену. Наприклад, $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

Один зі способів розкладання многочленів на множники — ***винесення спільного множника за дужки***.

За розподільним законом множення $ax + ay = a(x + y)$.

Інші приклади: $4ab - 2ab^2 = 2ab \cdot 2 - 2ab \cdot b = 2ab(2 - b)$;

$3x + 6x^2 - 9x^3 = 3x \cdot 1 + 3x \cdot 2x - 3x \cdot 3x^2 = 3x(1 + 2x - 3x^2)$.

Щоб переконатися, чи правильно розкладено многочлен на множники, слід перемножити одержані множники. Якщо правильно, то в результаті має утворитися даний многочлен.

Іноді доводиться розкладати на множники і такі вирази, у яких спільний множник — многочлен.

Наприклад, $a(b - c) + x(b - c) = (b - c)(a + x)$.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Один і той самий многочлен можна подати у вигляді добутку по-різному. Наприклад,

$$4x^4 + 2ax^2 = 2(2x^4 + ax^2); \quad 4x^4 + 2ax^2 = 2x(2x^3 + ax); \quad 4x^4 + 2ax^2 = 2x^2(2x^2 + a).$$

Як правило, подаючи многочлен у вигляді добутку, намагаються винести за дужки такий спільний множник, щоб у дужках залишився найпростіший вираз. Тому найчастіше за коефіцієнт спільного множника беруть найбільший спільний дільник (НСД) коефіцієнтів усіх членів даного многочлена або їх модулів. Але не завжди. Усе залежить від того, з якою метою розкладають на множники многочлен.

Приклад. Знайди значення виразу $4x^4 + 2ax^2$, якщо $x^2 + \frac{1}{2}a = 0$.

Щоб використати умову, цю вправу можна розв'язати так:

$$4x^4 + 2ax^2 = 4x^2\left(x^2 + \frac{1}{2}a\right) = 4x^2 \cdot 0 = 0.$$

Тут винесено за дужки не $2x^2$, а $4x^2$. Тоді в дужках маємо вираз, значення якого відомо з умови.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Які вирази називають многочленами?
2. Що означає розкласти многочлен на множники?
3. Із якого закону дій випливає спосіб розкладання многочлена на множники винесенням за дужки спільного множника?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Розклади на множники многочлен.

а) $-6a^2 + 24a - 9$;

б) $15ab^4 + 10a^2b^3 - 5a^3b^2 - 15a^4b^2$;

в) $a(x - 2) + c(2 - x)$.

Розв'язання.

а) $-6a^2 + 24a - 9 = 3(-2a^2 + 8a - 3)$, або

$-6a^2 + 24a - 9 = -3(2a^2 - 8a + 3)$.

б) $15ab^4 + 10a^2b^3 - 5a^3b^2 - 15a^4b^2 = 5ab^2 \cdot 3b^2 + 5ab^2 \cdot 2ab - 5ab^2 \cdot a^2 - 5ab^2 \cdot 3a^3 = 5ab^2(3b^2 + 2ab - a^2 - 3a^3)$.

в) Множники $x - 2$ і $2 - x$ відрізняються тільки знаком. У виразі $2 - x$ винесемо за дужки -1. Тоді отримаємо:

$a(x - 2) + c(2 - x) = a(x - 2) - c(x - 2) = (x - 2)(a - c)$.

2. Доведи, що число $19^{15} + 19^{14}$ ділиться на 20.

Доведення. $19^{15} + 19^{14} = 19^{14} \cdot (19 + 1) = 19^{14} \cdot 20$.

Останній добуток ділиться на 20, тому і сума ділиться на 20.

3. Розв'яжи рівняння $5x^4 - x^3 = 0$.

Розв'язання. $x^3(5x - 1) = 0$

Отже, $x^3 = 0$ або $5x - 1 = 0$

$x = 0$ $\quad$ $5x = 1$

$x = 0{,}2$

Добуток двох чисел дорівнює нулю тоді, коли хоч одне з них дорівнює нулю.

ВИКОНАЙ УСНО

391. Знайди спільний множник многочлена. Розклади його на множники.

а) $cx + cy$; б) $a^2x - a^2y$; в) $nx + ax$;

г) $2ax + 4ax^2$; ґ) $6cy - 9cy^2$; д) $-ac^2 + c^2$.

392. Які з рівностей хибні?

А $ay - 5y = y(a - 5)$ **Б** $cx + x = x(c + x)$

В $-9 + 6x = -3(3 + 2x)$ **Г** $a^6 - a = a(a^5 - 1)$

393. Розклади на множники $18x^6 - 12x^3$.

А $6(3x^6 + 2x^3)$ **Б** $6x^3(3x^3 - 2)$
В $x^3(18x^2 - 12)$ **Г** $2x(9x^3 - 6x^3)$

394. Розклади на множники $4 - 4x$.

А $4(4 - x)$ **Б** $4x$ **В** $4 - x$ **Г** $4(1 - x)$

395. Розв'яжи рівняння $x^2 - 3x = 0$.

А $x = 0$ **Б** $x = 3$
В $x = 0$ або $x = -3$ **Г** $x = 0$ або $x = 3$.

396. Обчисли зручним способом.

а) $6 \cdot 19 + 6$; б) $27 \cdot 5 + 13 \cdot 5$;
в) $17 \cdot 6 + 17 \cdot 4$; г) $5 \cdot 32 + 32 \cdot 15$.

397. Обчисли. $2{,}74 \cdot 1{,}68 + 2{,}74 \cdot 8{,}32$.

А 2,74 **Б** 27,4 **В** 274 **Г** 0,274

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

398. Винеси за дужки спільний множник.

а) $xa + xb$; б) $2m + 2p$; в) $cp + tp$;
г) $ab + 3b^2$; ґ) $4b^2 - 2ab$; д) $6x^2 - 2x$;
е) $m^2x + my$; є) $3a^2x - 2ax$; ж) $a^3b^3 - 6ab^4$;
з) $5y^3z + 20az^3$; и) $-3a^2b - 6ab^2$; і) $-12x - 15x^2$.

399. Taking out a common factor.

a) $12a + 12b$; b) $7n - 14n^2$; c) $5p^3 - 5p$;
d) $2a^2 + 3a$; e) $13x - 26y$; f) $15ab + 45c$;
g) $4cy^2 - 2c^2y$; h) $10a^2x + 5a^2x^2$.

Розклади на множники многочлен **(400–403)**.

400. а) $2ac^2 - 8c^3d + 4acd$; б) $3acx - 6a^2x - 9a^3c^2x$;
в) $8a^4x + 7a^2x^2 + ax^3$; г) $10n^2c^3 - 15nc^2 - 5nc^3$;
ґ) $-a^2x^3 - a^5cx^4 + 3a^2cx^2$; д) $7x^3 - 14x^2 + 21x - 28x^4$.

401. а) $5c + 12c^2 - c^3$; б) $5x + 10x^2 - 15x^3$;
в) $6py^2 + 8p^2y - 4p^2z$; г) $3x^3 - 6x^2y - 12xy^4$;
ґ) $-m^2x + 4mx^2 + 3m^3$; д) $a^2b - 2a^3b^2 + 3ab^3 - ab^2$.

402. а) $3x(a + b) - 2y(a + b)$; б) $3(2x + 5) + x(5 + 2x)$;
в) $5a(x - y) + 3(x - y)$; г) $2(m^2 - 2) - x(m^2 - 2)$;
ґ) $7p(3x + y) + (3x + y)$; д) $(3x - 1) - 17x(3x - 1)$.

403. а) $7p(a + b) + 8k(a + b)$; б) $3y(5x + 2) + 2(5x + 2)$;
в) $5z(m - n) - 2(m - n)$; г) $2n(a^2 + 2b) - 3(a^2 + 2b)$;
ґ) $2a(3a - b) - (3a - b)$; д) $(6n + 5) - x(6n + 5)$.

Знайди значення виразу, попередньо розклавши його на множники **(404, 405)**.

404. а) $12{,}3x + 12{,}3y$, якщо $x = 0{,}23$, $y = 0{,}77$;
б) $x^2 - 1{,}3x$, якщо $x = 11{,}3$;
в) $2{,}63x - 2{,}63y$, якщо $x = 0{,}16$, $y = -0{,}84$;
г) $5{,}24x - x^2$, якщо $x = 4{,}24$.

405. а) $16{,}23a + 16{,}23b$, якщо $a = 8{,}37$, $b = 1{,}63$;
б) $a^2 + 3{,}6a$, якщо $a = -13{,}6$;
в) $6{,}34a - 6{,}34b$, якщо $a = 0{,}36$, $b = -0{,}64$;
г) $17{,}3a - a^2$, якщо $a = 7{,}3$.

Обчисли зручним способом **(406, 407)**.

406. а) $1{,}2 \cdot 24{,}44 + 1{,}2 \cdot 75{,}56$; б) $17{,}8 \cdot 0{,}13 - 0{,}13 \cdot 7{,}8$;
в) $0{,}12^2 + 0{,}12 \cdot 0{,}88$.

407. а) $3{,}7 \cdot 2{,}16 + 3{,}7 \cdot 7{,}84$; б) $36{,}6 \cdot 2{,}34 - 2{,}34 \cdot 26{,}6$;
в) $93{,}7^2 - 93{,}7 \cdot 83{,}7$.

Розв'яжи рівняння **(408, 409)**.

408. а) $x(x - 3) = 0$; б) $y(5 - y) = 0$; в) $3z(z + 4) = 0$;
г) $x^2 - 12x = 0$; ґ) $10x - 4x^2 = 0$; д) $4x^2 + x = 0$.

409. а) $x(x + 2) = 0$; б) $z(3 - z) = 0$; в) $4y(y - 2) = 0$;
г) $x^2 - 6x = 0$; ґ) $10x^2 + x = 0$; д) $5x^2 - x = 0$.

Винеси за дужки спільний множник **(410, 411)**.

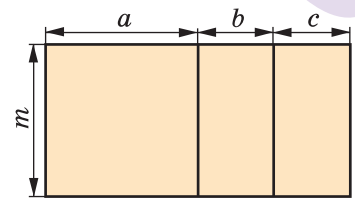
410. а) $3a^2b + 2ab - 5a$; б) $7xy^3 + 8x^2y^2 - 9y^4$;
в) $5ac^2 - ac^3 - 3a^2c$; г) $8az^4 - 7az^3 - 4az^2$;
ґ) $4a^2b^3c^4 - 5ab^3c^2$; д) $9x^3yz^4 + 7x^4y^2z^3$.

411. а) $4a^2 - 5ab + a$; б) $3x^2 + 8x^2y - x^3$; в) $-7m^2 - m^2z + m^3$;
г) $-x^6 - 10x^4y^2 - x^2$; ґ) $18a^3c^2x - 9ac^2x^3$; д) $15mn^2y + 45m^2n^3$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

412. За малюнком 10.1 з'ясуйте геометричний зміст тотожності.

$am + bm + cm = (a + b + c)m$ для додатних значень a, b, c і m.



Мал. 10.1

Винеси за дужки спільний множник **(413–415)**.

413. а) $a^3 + 3a^2x - 3ax^2 - a^4 + 2a$;
б) $1{,}2a^2b^3c^4 - 0{,}6a^3b^3c^4 + 1{,}8a^4b^3c^4$;
в) $144x^{20}y^{18} + 36x^{18}y^{10}$; г) $169a^{23}b^{20} - 49a^{20}b^{18}$.

414. а) $3x^3 - 2ax^2 + 4a^2x + ax - x^4$; б) $10{,}5b^2c^4 + 1{,}5b^3c^2a^2 - 20b^5c^3a$;
в) $92a^{15}m^{35} - 46a^{17}b^{30}$; г) $576n^{20}x^{31} + 240n^{17}x^{32}$.

415. а) $3{,}24a^7c^{19} - 6{,}48a^{10}c^{15}$; б) $28{,}9m^{30}x^{16} - 57{,}8m^{45}x^{13}$;
в) $\frac{2}{5}a^2x^{10} - \frac{3}{5}a^4x^7$; г) $\frac{6}{7}x^5y^{18} + \frac{3}{7}x^{18}y^5$.

Розклади на множники вираз **(416–418)**.

416. а) $x(a - 2) + y(a - 2)$; б) $(x + 1)^2 - 2x(x + 1)$;
в) $2y(y - 6)^3 - 3y(y - 6)^2$; г) $4(x - y) - 3a(y - x)$;
ґ) $3(2x - 5) - 2x(5 - 2x)$; д) $6(m - n)^2 - m(n - m)$;
е) $(4x - 3y)(x + 2y) + 2x(x + 2y)$;
є) $(a + b)(x - y) + (b - a)(y - x)$.

417. а) $a(a^2 + 1) + 5(a^2 + 1)$; б) $8(a^2 - 3) + (a^2 - 3)^2$;
в) $5b(3 + 2c)^3 + 2b(3 + 2c)^2$; г) $x(a - b) + 3y(b - a)$;
ґ) $4(b - 3) + 5b(3 - b)$; д) $7(a - 4)^2 + (4 - a)$;
е) $5a(3a - b) + (b - 3a)(5a + 2b)$;
є) $(a + 7b)(a - 5b) - (b - 3a)(a - 5b)$.

418. а) $6a(x - 2) + 8b(x - 2) + 4c(2 - x)$;
б) $(x^3 + 1)(2x + 3) + 3(2x^4 + 3x^3) + (x^3 - 1)(3 + 2x)$;
в) $(x^3 - 1) + 5a(x^3 - 1) + b(1 - x^3)$;
г) $(2x - 1)(x^2 + 1) + (x^2 - 1)(2x - 1) + (1 - 2x)(x^2 + 2)$.

Винеси за дужки спільний множник **(419, 420)**.

419. а) $(5x + 10)^2$; б) $(3 - 12y)^2$; в) $(4a - 4b)^3$;
г) $(3a + 6c)^4$; ґ) $(6ab^2 - 3a^2)^3$; д) $(-6a - 2ab)^4$.

420. а) $(16y + 12)^2$; б) $(15 - 5y)^2$; в) $(6x - 8)^3$;
г) $(3x - 9)^4$; ґ) $(2x^3y + 4x^4)^2$; д) $(-2x^3 + 4x^2)^4$.

Розв'яжи рівняння **(421, 422)**.

421. а) $3(4x - 1)^2 - (1 - 4x) = 0$; б) $x^2 + 6(x + 2) = 12$;
в) $2x^3 - 5(x^2 - 2) = 10$; г) $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}(4 - x^3) = 1$.

422. а) $2(3x - 2)^2 - (2 - 3x) = 0$; б) $x^2 - 5(x - 3) = 15$;
в) $2z^4 - 7(z^3 - 3) = 21$; г) $2z^4 - \frac{1}{3}z(6z^2 - 3) = z$.

Обчисли **(423, 424)**.

423. а) $\frac{3{,}72 \cdot 2{,}41 - 2{,}41 \cdot 2{,}72}{24{,}1 \cdot 1{,}4 + 24{,}1 \cdot 1{,}01 - 24{,}1 \cdot 1{,}41}$;

б) $\frac{1{,}3 \cdot 27 + 1{,}3 \cdot 63 + 2{,}3 \cdot 64 + 2{,}3 \cdot 26}{1{,}8 \cdot 5{,}7 + 1{,}8 \cdot 4{,}3}$.

424. а) $\dfrac{7{,}6\cdot4{,}6+7{,}6\cdot6{,}6-7{,}6\cdot1{,}2}{0{,}4\cdot2{,}3-0{,}4\cdot1{,}3}$;

б) $\dfrac{17{,}3\cdot2{,}4-3{,}27\cdot1{,}2-8{,}8\cdot3{,}27-3{,}4\cdot17{,}3}{12{,}5\cdot8{,}7+3{,}2\cdot12{,}5-10{,}9\cdot12{,}5}$.

425. Доведи, що:
а) $16^{17}+16^{16}$ ділиться на 17; б) $6^9-6^8+6^7$ ділиться на 31;
в) 49^5+7^8 ділиться на 350; г) $7^{100}+3\cdot7^{99}$ ділиться на 490.

426. Доведи, що:
а) $5^{12}+5^{10}$ ділиться на 13; б) $8^{15}-8^{14}-8^{13}$ ділиться на 11;
в) $81^{31}-9^{60}$ ділиться на 720; г) $37^{60}+63\cdot37^{59}$ ділиться на 100.

427.* Подай у вигляді добутку, якщо n, m і k — натуральні числа.
а) $x^{n+1}+x^n$; б) a^m-a^{m-2}; в) $9a^{k+5}-3a^{k+2}$;
г) $8^{2n+1}-4^{3n+4}$; ґ) $y^{m+5}-y^m$; д) $x^{k+1}+x^{k+3}$;
е) $4x^{n+6}+12x^{n+1}$; є) $3^{2n+1}+9^{n+2}$.

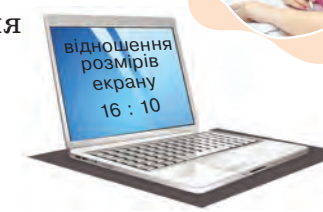
ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

428. Продовж послідовність:
а) $4x$, $12x$, $36x$, ... б) $2a-4x$, $4a-8x$, $8a-16x$, ...

429. Із букв, написаних на окремих квадратних картках, складено слово ЦИВІЛІЗАЦІЯ. Потім ці картки перевернуто, перемішано і навмання взято одну. Яка ймовірність того, що на ній написано букву: а) «Ц»; б) «І»; в) «Я»?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

430. Знайди ширину екранного зображення ноутбука, якщо його висота 19 см.



431. Обчисли.
а) $-2\frac{1}{8}+\frac{2}{3}$; б) $3\frac{2}{5}+\left(-\frac{3}{7}\right)$;
в) $-4\frac{3}{4}+\left(-5\frac{1}{2}\right)$; г) $4\frac{1}{2}+\left(-1\frac{1}{3}\right)$; ґ) $\frac{3}{4}+(-0{,}5)$; д) $-\frac{3}{5}+4{,}2$.

432. Знайди суму многочленів.
а) $3a^2+2a+7$ і a^3-2a^2+a-3;
б) $1{,}5x-x^2-x^3$ і $2{,}5x^4-1{,}5x^3-2x+3$.

§ 11. Спосіб групування

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- спосіб групування — *grouping*

Розкладемо на множники многочлен $ab + ac + xb + xc$.

1) Розіб'ємо його члени на дві групи: $(ab + ac) + (xb + xc)$.

2) Винесемо з першої групи за дужки спільний множник a, із другої — спільний множник x і дістанемо вираз $a(b + c) + x(b + c)$.

3) Доданки цього виразу мають спільний множник $b + c$. Винесемо його за дужки, одержимо $(b + c)(a + x)$.

Указані перетворення можна записати ланцюжком:

$$ab + ac + xb + xc = (ab + ac) + (xb + xc) =$$
$$= a(b + c) + x(b + c) = (b + c)(a + x).$$

Такий спосіб розкладання многочленів на множники називають ***способом групування***.

Зауваження. Розкладаючи на множники поданий вище многочлен, можна згрупувати його члени інакше:

$$ab + ac + xb + xc = (ab + xb) + (ac + xc) =$$
$$= b(a + x) + c(a + x) = (a + x)(b + c).$$

Одержали такий самий результат.

Розкладемо на множники многочлен $an + cn + a + c$:

$$an + cn + a + c = (an + cn) + (a + c) =$$
$$= n(a + c) + 1(a + c) = (a + c)(n + 1).$$

Записувати суму $a + c$ у вигляді $1(a + c)$ необов'язково, але спочатку, щоб не допускати помилок, можна писати і так.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Щоб скористатися способом групування, іноді доводиться якийсь член даного многочлена подавати у вигляді суми чи різниці одночленів. Щоб розкласти на множники тричлен $x^2 + 5x + 6$, запишемо одночлен $5x$ у вигляді $2x + 3x$:

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 3x + 2x + 6 = (x^2 + 3x) + (2x + 6) =$$
$$= x(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(x + 2).$$

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що означає розкласти многочлен на множники?
2. Які способи розкладання многочленів на множники ти знаєш?
3. Розкажи, як розкладають многочлен на множники способом групування.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Розклади на множники многочлен.

а) $3c - x^2 + cx - 3x$;

б) $2 - a - x + ac + cx - 2c$.

Розв'язання.

а) $3c - x^2 + cx - 3x = (3c + cx) - (x^2 + 3x) =$
$= c(3 + x) - x(x + 3) = (3 + x)(c - x)$;

б) $2 - a - x + ac + cx - 2c = (2 - a - x) + (ac + cx - 2c) =$
$= (2 - a - x) + c(a + x - 2) = (2 - a - x) - c(2 - a - x) =$
$= (2 - a - x)(1 - c)$.

2. Розв'яжи рівняння $2y^3 - 3y^2 + 10y - 15 = 0$.

Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники:
$2y^3 - 3y^2 + 10y - 15 = 0$;
$(2y^3 - 3y^2) + (10y - 15) = 0$;
$y^2(2y - 3) + 5(2y - 3) = 0$;
$(2y - 3)(y^2 + 5) = 0$,
звідси $2y - 3 = 0$, або $y^2 + 5 = 0$.
Коренем першого рівняння є $y = 1{,}5$, а друге рівняння розв'язків не має, бо $y^2 \neq -5$.
Відповідь. $y = 1{,}5$.

ВИКОНАЙ УСНО

433. Розклади на множники вираз.

а) $(a + 1)x + (a + 1)y$; б) $x(2 - c) - y(2 - c)$;

в) $p - n + c(p - n)$; г) $(x + y)^2 + x + y$.

434. Розклади на множники вираз $ax - ay + 7x - 7y$.

А $a(x - y) + 7(x - y)$ **Б** $(x - y)(a + 7)$

В $x(a + 7) + y(a - 7)$ **Г** $(x + y)(a - 7)$

435. Які доданки слід згрупувати, щоб вираз можна було розкласти на множники? Розгляньте кілька варіантів.

а) $2a + 4b + ca + 2bc$; б) $kx + ky + 5x + 5y$;

в) $x^3 + 3x^2 + x + 3$; г) $am + 3n + an + 3m$.

436. Чи правильно виконано перетворення?

$$ax + 7x + a + 7 = (ax + a) + (7x + 7) =$$
$$= a(x + 1) + 7(x + 1) = (x + 1)(a + 7)$$

437. Розкладаючи на множники многочлен $ax + ay + bx + by + x + y$, учень одержав вираз $(x + y)(a + b)$. Якої помилки він припустився?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

Подай вираз у вигляді добутку **(438–440).**

438. а) $xa + x + ya + y$; б) $3m - xm + 3n - xn$;
в) $3c + 3y + ac + ay$; г) $2ax - 2ay + 3x - 3y$;
ґ) $ax - ay - bx + by$; д) $ca + 2cx - na - 2nx$;
е) $3m + 3n - am - an$; є) $am - an - m + n$;
ж) $a(x + y + z) + b(x + y + z)$.

439. а) $2x + 2y + ax + ay$; б) $xa - xb + ca - cb$;
в) $2a - 2b + ca - cb$; г) $nx + ny + mx + my$;
ґ) $ax - bx - ay + by$; д) $mx + my - cx - cy$;
е) $2x + 2y - ax - ay$; є) $ap - ak - p + k$.

440. а) $a(x + 3) + b(x + 3) + c(x + 3)$;
б) $m(a - z) - n(a - z) + 2(a - z)$.

Розклади на множники многочлен **(441–443).**

441. а) $az - z^2 + ac - cz$; б) $5a - 10 + ac^3 - 2c^3$;
в) $2a^2b + ac - 6abc - 3c^2$; г) $3a^3 - 5a^2 - 3ab + 5b$.

442. а) $3m^2 + 9mn - 2m - 6n$; б) $a^3 - a^2n - 3a + 3n$;
в) $y^3 - 3y^5 + 3y^2 - 9y^4$; г) $3a^3 + 12a^2 - a - 4$;
ґ) $4x^2y^2 - 4xy - 5axy + 5a$; д) $a^3x^2 + a^2x^3 - a - x$.

443. а) $ac + bc + a^2 + ab$; б) $7x^4 - x^2 + 7ax^2 - a$;
в) $m^2p + 3my - mnp - 3ny$; г) $3a^2 + 6ab - 2a - 4b$;
ґ) $5a^3c^2 - 5ax - 8a^2c^3 + 8cx$; д) $2x^5y^2 + 2x^3y - x^2y - 1$.

Обчисли значення виразу, розклавши його спочатку на множники **(444, 445).**

444. а) $x^3 - 9x^2 + x - 9$, якщо $x = 19$;
б) $m^2 - mn - 2m + 2n$, якщо $m = 0{,}35$ і $n = 0{,}25$.

445. а) $a^3 - 5a^2 + a - 5$, якщо $a = -15$;
б) $x^2 + 2xy - 3x - 6y$, якщо $x = 0{,}7$ і $y = 0{,}15$.

Обчисли **(446, 447).**

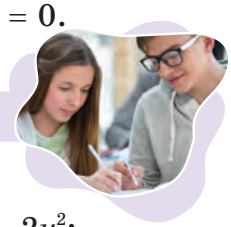
446. а) $20{,}5 \cdot 17 + 79{,}5 \cdot 17 + 20{,}5 \cdot 0{,}28 + 79{,}5 \cdot 0{,}28$;
б) $42{,}2^2 - 42{,}2 \cdot 41{,}2 + 57{,}8^2 - 57{,}8 \cdot 56{,}8$.

447. а) $36{,}7 \cdot 15 + 63{,}3 \cdot 15 + 36{,}7 \cdot 1{,}3 + 63{,}3 \cdot 1{,}3$;
б) $76{,}2^2 - 76{,}2 \cdot 73{,}2 + 23{,}8^2 - 23{,}8 \cdot 20{,}8$.

Розв'яжи рівняння **(448, 449).**

448. а) $x^3 - 5x^2 + 3x - 15 = 0$; б) $x^2 - 2x^3 + 7 - 14x = 0$;
в) $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$; г) $x^3 + 4x^2 + 3x + 12 = 0$.

449. а) $2z^3 - 3z^2 + 2z - 3 = 0$; б) $z^3 - 5z^2 + 2z - 10 = 0$;
в) $y^3 + 3y^2 + 5y + 15 = 0$; г) $3x^3 + 9x^2 + x + 3 = 0$.



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Подай у вигляді добутку вираз **(450, 451).**

450. а) $4a^2 + 3z - 4az - 3a$; б) $3x^2 - 2y^3 - 3x^2y + 2y^2$;
в) $a^3 - 2c^2 - a^2c + 2ac$; г) $a^3 - 3b^3 + a^2b^2 - 3ab$.

451. а) $a + 12ab^2 - 3b - 4a^2b$; б) $a^3 - 2x^2 - 2a^2x + ax$;
в) $a^2b + c^3 + a^2c^2 + bc$; г) $m^2n + 2x^2 + 2mnx + mx$.

452. Знайдіть помилки в роботах учнів. Виконайте правильно.

Учениця
1) $ax + ay - az + nx + ny - nz = a(x + y + z) + n(x + y + z) = (a + n)(x + y + z)$
2) $2ax + cx - 6ax^2 - 3cx^2 + 2ac + c^2 = x(2a + c) - 3x^2(2a + c) + c(2a + c) = (x + 3x^2 + c)(2a + c)$

Учень
1) $a + b - 2 - ax - bx + 2x = (a + b - 2) - x(a + b - 2) = (a + b - 2)x$
2) $ax^2 + bx^2 - bx - ax + cx^2 - cx = (ax^2 + bx^2 + cx^2) - (bx - ax - cx) = x^2(a + b + c) - x(b - a - c)$

Розклади на множники многочлен **(453–455).**

453. а) $ax^2 + bx^2 - cx^2 + am + bm - cm$;
б) $a + b + ax^2 + bx^2 - bx - ax$;
в) $2am + 3mx - 7m - 2ac - 3cx + 7c$;
г) $4ax^2 - ax + 5a - 4bx^2 + bx - 5b$.

454. а) $9c^3x^2 + 2c^3x - c^3 + 9x^2 + 2x - 1$;
б) $4abc^2 - 4ac + 4b + abc^2x - acx + bx$;
в) $x^3 + x^2y + x^3y - xy^3 - xy^2 - y^3$;
г) $x^2 - x^3 + y - y^2 - xy + xy^2$.

455. а) $az^2 - bz^2 - bz + az - a + b$;
б) $x^2 + 2x - ca - 2c - cx + ax$;
в) $x^4 - a^4 + a^3x - ax^3 + c^3x - ac^3$;
г) $a^3 - a^2 + x^3 - x^2 + a^2x + ax^2$;
ґ) $x^3 + y^3 + xy^2 + x^2y + x^2z + y^2z$; д) $a^3 + a + ab^2 - a^2b - b - b^3$.

456. Розклади многочлен на множники і виконай перевірку.
а) $15a^2mx - 20am - 21ax + 28$;
б) $0{,}9ax + 1{,}2x^2 - 1{,}2ac - 1{,}6cx$.

457. Factoring polynomial and check.
a) $a^2b + 10ab - 20a - 2a^2 - b + 2$;
b) $\frac{3}{13}ax^2y - \frac{1}{13}x + \frac{12}{13}a^2xy^2 - \frac{4}{13}ay$.

Розклади на множники тричлен **(458, 459)**.

458. а) $x^2 + 4x + 3$; б) $x^2 + 6x + 8$;
в) $x^2 - 4x + 3$; г) $x^2 + 3x - 10$.

459. а) $x^2 + 6x + 5$; б) $x^2 + 7x + 6$;
в) $x^2 - 10x + 21$; г) $x^2 + 2x - 8$.

Розв'яжи рівняння **(460, 461)**.

460. а) $x^2 + 7x + 10 = 0$; б) $x^2 + 8x + 7 = 0$; в) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

461. а) $x^2 + 4x + 3 = 0$; б) $x^2 + 8x + 12 = 0$; в) $x^2 - 9x + 18 = 0$.

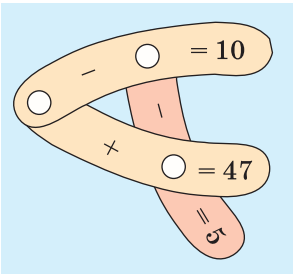
462. Доведи, що:
а) $2^9 \cdot 3^5 + 2^9 \cdot 3^3 - 2^6 \cdot 3^5 - 2^6 \cdot 3^3$ ділиться на 420;
б) $5^{10} \cdot 7^{10} + 5^{10} \cdot 7^8 - 5^8 \cdot 7^{10} - 5^8 \cdot 7^8$ ділиться на 1200;
в) $2^{11} \cdot 3^6 - 2^7 \cdot 3^6 - 2^7 \cdot 3^4 + 2^{11} \cdot 3^4$ ділиться на 150.

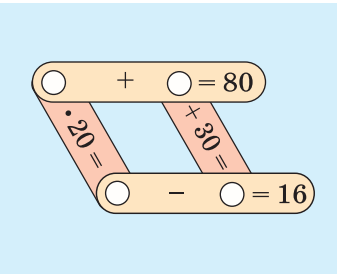
463. Доведи, що:
а) $2^{10} \cdot 3^{12} + 2^8 \cdot 3^{12} + 2^{10} \cdot 3^{10} + 2^8 \cdot 3^{10}$ ділиться на 300;
б) $5^{10} \cdot 3^{15} - 5^8 \cdot 3^{16} + 5^{11} \cdot 3^{12} - 5^9 \cdot 3^{13}$ ділиться на 110;
в) $-7^{10} \cdot 2^{10} + 7^9 \cdot 2^{14} - 7^8 \cdot 2^{10} + 7^7 \cdot 2^{14}$ ділиться на 450.

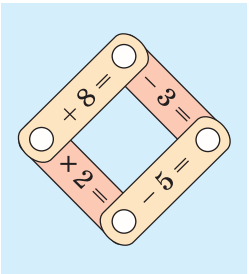
ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

464. Розклади на множники.
а) $a^2 + 3ab + 2b^2$; б) $2x^2 - 7xy + 3y^2$.

465. Розв'яжи математичні кросворди.







ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

466. Скільки існує цілих чисел, які задовольняють нерівність $|x| < 5$? Познач їх на координатній прямій.

467. Обчисли. а) 20% від 45; б) 0,5% від 56; в) 400% від 28.

468. Яка ймовірність того, що, витягуючи навмання картку, виберуть картку з літерою А? З А Д А Ч А

§ 12. Квадрат двочлена

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- формули скороченого множення — *short multiplication formulas*
- квадрат різниці — *square of difference*
- квадрат суми — *square of sum*

Розв'язуючи різні задачі, часто доводиться множити двочлени виду $a + b$ і $a - b$, $a + b$ і $a + b$ тощо. Щоб у таких випадках відразу можна було написати відповіді, корисно запам'ятати певні тотожності, які називають **формулами скороченого множення**.

Помножимо двочлен $a + b$ на $a + b$:

$$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Отже, $$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}.$$

Квадрат двочлена дорівнює квадрату першого його члена плюс подвоєний добуток першого члена на другий плюс квадрат другого члена.

Доведена рівність — тотожність, її називають ***формулою квадрата двочлена*** або ***квадрата суми двох виразів***.

Аналогічно $(a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Отже, $$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}.$$

Отримали формулу ***квадрата різниці двох виразів***.

Користуючись цими формулами, можна відразу записати:

$(2x + y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$.

$(a - 3c)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot (3c) + (3c)^2 = a^2 - 6ac + 9c^2$.

Проміжні перетворення бажано виконувати усно, тим самим скорочуючи запис: $(m + 5a^2b)^2 = m^2 + 10ma^2b + 25a^4b^2$.

За формулою квадрата двочлена можна підносити до квадрата будь-які двочлени, у тому числі $a - b$, $-a + b$ і $-a - b$:

$(a - b)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

$(-a + b)^2 = (-a)^2 + 2(-a)b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

$(-a - b)^2 = (-a)^2 + 2(-a)(-b) + (-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Формули квадрата двочлена використовують і у «зворотному напрямі»:

$$\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;}$$

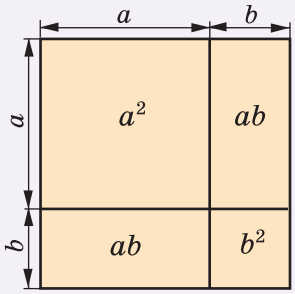
$$\boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.}$$

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ для додатних чисел a і b можна довести геометрично, як показано на малюнку 12.1. Так її доводили ще стародавні греки. Адже площа квадрата зі стороною $a + b$ дорівнює сумі площ квадратів a^2 і b^2, а також прямокутників ab і ab.

Існують ще й інші формули скороченого множення:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$



Мал. 12.1

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Чому дорівнює квадрат двочлена?
2. Чому дорівнює квадрат різниці двох виразів?
3. Чи може бути від'ємним числом квадрат різниці двох чисел? А різниця квадратів двох чисел?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Піднеси до квадрата двочлен.

а) $3x - c$; б) $-2x - 3y$.

Розв'язання.

а) $(3x - c)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot c + c^2 = 9x^2 - 6xc + c^2$;

б) $(-2x - 3y)^2 = (-(2x + 3y))^2 = (2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$.

2. Спрости вираз $(2n + 3)^2 - 4n(n + 3)$.

Розв'язання. $(2n + 3)^2 - 4n(n + 3) = 4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 - 12n = 9$.

3. Подай у вигляді многочлена вираз $(m^2 - 2n)^3$.

Розв'язання.

$$(m^2 - 2n)^3 = (m^2)^3 - 3(m^2)^2 \cdot 2n + 3 \cdot m^2 \cdot (2n)^2 - (2n)^3 =$$
$$= m^6 - 6m^4n + 12m^2n^2 - 8n^3.$$

4. Подай вираз у вигляді степеня двочлена.

а) $1 + 8m + 16m^2$;

б) $9a^2c^2 - 60ab^2c + 100b^4$;

в) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$.

Розв'язання.

а) $1 + 8m + 16m^2 = 1^2 + 2 \cdot 4m + (4m)^2 = (1 + 4m)^2$;

б) $9a^2c^2 - 60ab^2c + 100b^4 = (3ac)^2 - 2 \cdot (3ac) \cdot (10b^2) + (10b^2)^2 =$
$= (3ac - 10b^2)^2$;

в) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3 = (3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot (2y) +$
$+ 3 \cdot (3x) \cdot (2y)^2 + (2y)^3 = (3x + 2y)^3$.

5. Якого найменшого значення набуває вираз $a^2 + 6a + 10$?

Розв'язання. Запишемо даний тричлен у вигляді:

$$a^2 + 6a + 10 = (a^2 + 6a + 9) + 1 = (a + 3)^2 + 1.$$

Оскільки $(a + 3)^2 \geq 0$, то найменше значення виразу дорівнює 1 за умови, що $a = -3$.

Зверни увагу: подання виразу $a^2 + 6a + 10$ у вигляді $(a + 3)^2 + 1$ називають ***виділенням повного квадрата*** з тричлена.

ВИКОНАЙ УСНО

469. Який вираз є квадратом суми двох виразів?

А $x^2 + y^2$ **Б** $(x + y)^3$ **В** $(x + y)^2$ **Г** $(x + y)^4$

470. Перетвори на многочлен $(x - 2y)^2$.

А $x - 4y$ **Б** $x^2 - 4y^2$ **В** $x^2 - 2xy + 4y^2$ **Г** $x^2 - 4xy + 4y^2$

471. Якому тричлену тотожно дорівнює кожен вираз?

а) $(a + x)^2$; б) $(x + 1)^2$; в) $(a - 2)^2$; г) $(x - 1)^2$.

472. Піднеси до квадрата двочлен.

а) $1 + c$; б) $1 - x$; в) $a - n$; г) $x + 2$.

473. Якому з виразів тотожно дорівнює вираз $a^2 - 8a + 16$?

А $(a + 8)^2$ **Б** $(a - 8)^2$ **В** $(a - 4)^2$ **Г** $(a + 4)^2$

474. Подай у вигляді степеня.

а) $1 + 2a + a^2$; б) $x^2 - 4yx + 4y^2$; в) $16 - 8c + c^2$;
г) $9z^2 + 12z + 4$; ґ) $25p^2 + 20px + 4x^2$; д) $y^2 - 14y + 49$.

475. Вкажи вираз, що є квадратом двочлена.

А $9x^2 - 3x + 1$ **Б** $9x^2 - 1$ **В** $9x^2 - 6x + 1$ **Г** $9x^2 + 1$

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

Піднеси до квадрата двочлен **(476, 477)**.

476. а) $a + c$; б) $x + y$; в) $n + 2$; г) $m + 3$;
ґ) $1 + ab$; д) $p + 3q$; е) $2x + 4$; є) $3a + b$;
ж) $3x + 2y$; з) $5a + 3b$; и) $2a^2 - 3x$; і) $3a^2 - 5c^3$.

477. а) $m + 2$; б) $2a + x$; в) $3 + 6a$; г) $x - 1$;
ґ) $2c - 3a$; д) $5x - y$; е) $1 - ab$; є) $cq - 2p$;
ж) $ax + 5$; з) $a + c^2$; и) $n^2 + 2a^3$; і) $2a^2 - 3cx^2$.

Подай у вигляді многочлена вираз **(478, 479)**.

478. а) $(m + 2)(m + 2)$; б) $(3 + p)(3 + p)$;
в) $(3a - 5)(3a - 5)$; г) $(2a - b^2)(2a - b^2)$.

479. а) $(5 + c)(5 + c)$; б) $(p - 10)(p - 10)$;
в) $(2a^3 + 1)(2a^3 + 1)$; г) $(1 - xy)(1 - xy)$.

480. Віднови записи на дошці.

а) $a^2 - 4ab^2 + 4b^4 = (a$ [redacted] $)^2$ б) [redacted] $12abc + 36c^2 = (ab +$ [redacted] $)^2$

Подай тричлен у вигляді квадрата двочлена **(481, 482)**.

481. а) $m^2 + 2m + 1$; б) $x^2 - 4x + 4$; в) $c^2 - 12c + 36$;
г) $a^2 + 14a + 49$; ґ) $9 - 6x + x^2$; д) $4x^2 + 25y^2 - 20xy$.

482. а) $a^2 + 4a + 4$; б) $n^2 - 12n + 36$; в) $x^2 - 10x + 25$;
г) $9a^2 + 6ac + c^2$; ґ) $4m^2 + 4m + 1$; д) $b^4 - 6b^2 + 9$.

483. Спрости вираз.

а) $(x - 3)^2 - x(x - 6)$; б) $(m + 5)^2 - (m - 5)^2$;
в) $1 - (2a - 1)^2$; г) $z^2 + 1 - (1 + z)^2$;
ґ) $(x - 2)(x - 4) - (x - 6)^2$; д) $(2a - 3c)^2 - 3c(3c - 4a)$.

484. Simplify the expression.

a) $(x - 2)^2 + (x + 5)(x - 1)$; b) $(3a - 1)^2 + 3a(2 - 3a)$;
c) $y(y + 2x) - (x + y)^2$; d) $(b + 4)^2 - (b - 3)^2$;
e) $4(1 - 3a) - (3a - 2)^2$; f) $(2x + 3y)^2 - 3y(4x + 3y)$.

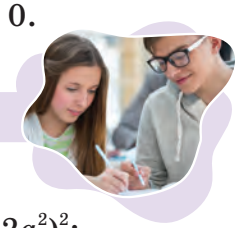
Розв'яжи рівняння **(485–488).**

485. а) $(x - 2)^2 = x(x - 3)$; б) $(3y + 5)^2 = 9y^2 + 55$;
в) $(c - 7)^2 - 2(c - 2) = c^2 + 21$; г) $(6 - x)^2 = (x + 8)(x - 4) + 4$.

486. а) $(x - 4)^2 = x(x + 8)$; б) $(5 - 2y)^2 = 4y^2 + 65$;
в) $(x + 7)^2 - x^2 = 3(5x + 15)$; г) $(x - 3)(x - 4) - (x - 5)^2 = -10$.

487. а) $x^2 + 10x + 25 = 0$; б) $25x^2 - 30x + 9 = 0$;
в) $1 - 8x + 16x^2 = 0$; г) $36 + 12x + x^2 = 0$.

488. а) $x^2 - 14x + 49 = 0$; б) $9x^2 + 12x + 4 = 0$;
в) $4 - 12x + 9x^2 = 0$; г) $1 + 16x + 64x^2 = 0$.



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

489. Подай у вигляді многочлена вираз.
а) $(0{,}5x^2 + 3y^3)^2$; б) $(0{,}2m^5 + 5ab)^2$; в) $(7a^3 + 2a^2)^2$;
г) $(2x^2y^4 + 0{,}5y^3)^2$; ґ) $(-3c^2 + 0{,}8x^2y^3)^2$; д) $(-5x^2 - 0{,}4y^3)^2$.

490. Замініть зірочки одночленами, щоб утворилась тотожність.
а) $(* + b)^2 = c^2 + 2cb + b^2$; б) $(a + *)^2 = a^2 + 2am + *$;
в) $(3x - *)^2 = 9x^2 - * + 1$; г) $(* - 3bx)^2 = * - 6abx + *$.

Спрости вираз та обчисли його значення **(491, 492).**

491. а) $(2a - 5)^2 - (2a - 3)(2a - 6)$, якщо $a = 1{,}5$;
б) $(6x - 2)(6x + 2) - (6x - 2)^2$, якщо $x = 0{,}5$;
в) $2(x - 1)^2 + 3(5 - x)^2 + 34x$, якщо $x = 2$;
г) $0{,}5(2c - 3)^2 + 0{,}75(c + 4)^2$, якщо $c = 2$.

492. а) $(a - 5)^2 - a(a + 8)$, якщо $a = 0{,}5$;
б) $(3c + 0{,}5)^2 - (3c - 0{,}5)^2$, якщо $c = -1{,}2$;
в) $(2x - 5)^2 - 4(x - 2)(x - 3)$, якщо $x = 0{,}125$.

Спрости вираз **(493, 494).**

493. а) $(a - 5)^2 - (a - 3)(a + 3) + 10a$;
б) $(4a^2 + c)^2 + (a^2 - 4c)^2 - 17a^4$;
в) $10c^2 - (x^2 + 3c)^2 - (3x^2 - c)^2$;
г) $3a^2z^2 - 9\left(\frac{2}{3}az - 3\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}az - 1\right)^2$.

494. а) $(3a - 2b)^2 - (2a - 3b)^2 + 5b^2$;
б) $(2c - 1)^2 - (2c + 7)(2c - 7) + 5c$;
в) $3(2x - y)^2 - 2(3x - y)^2 + 6x^2$;
г) $1{,}5(ac - 2x^2)^2 - 3(x^2 - ac)^2$.

Доведи тотожність **(495, 496)**.

495. а) $(a - b)^2 = (b - a)^2$; б) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$;
в) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$; г) $(2a + b)^2 + (a - 2b)^2 = 5(a^2 + b^2)$.

496. а) $(-a - b)^2 = (a + b)^2$;
б) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$;
в) $(3a + b)^2 + (a - 3b)^2 = 10(a^2 + b^2)$.

Знайди корінь рівняння **(497–501)**.

497. а) $(x - 6)^2 + (2x + 3)^2 = 5x(x - 9)$;
б) $2(3 - x)^2 - x(x + 6) = (x - 4)^2$.

498. а) $(x - 5)^2 - 2x(x + 3) + (x - 6)^2 = 5$;
б) $(3z + 1)^2 - 8z(z + 1) = (z - 3)^2$.

499. а) $(2x + 5)^2 + 2x(x - 6{,}5) = (2x - 3)(3x + 1)$;
б) $(3x + 8)^2 + 11(x^2 + 2) - 2(3x + 4)^2 = 2(x - 3)^2$;
в) $(6x - 5)^2 - 4(2x + 1)^2 = 10(2x - 1)(x - 3)$.

500. а) $\frac{1}{4}x^2 + 1 + x = 0$; б) $16 + 4x + 0{,}25x^2 = 0$.

501. а) $\frac{1}{36}x^2 - x + 9 = 0$; б) $2x + 25 + 0{,}04x^2 = 0$.

Обчисли, використовуючи формулу квадрата двочлена **(502, 503)**.

502. а) 11^2; б) 99^2; в) 101^2; г) 202^2.

503. а) 52^2; б) 61^2; в) 79^2; г) 81^2.

Виділи повний квадрат з тричлена **(504, 505)**.

504. а) $x^2 + 10x + 30$; б) $x^2 - 12x + 41$;
в) $9x^2 - 24x + 19$; г) $x^2 + 22x + 130$.

505. а) $a^2 - 14a + 50$; б) $a^2 + 16a + 65$;
в) $25a^2 - 20a + 7$; г) $a^2 + 26a + 190$.

Якого найменшого значення і при якому значенні змінної набуває вираз **(506, 507)**?

506. а) $a^2 - 4a + 10$; б) $a^2 + 8a + 180$.

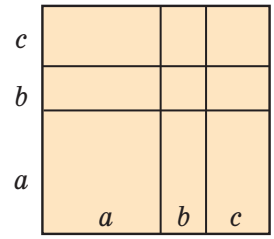
507. а) $n^2 - 14n + 50$; б) $m^2 + 6m + 38$.

Для яких значень x і y виконується рівність **(508, 509)**?

508. а) $x^2 + y^2 + 10x + 2y + 26 = 0$;
б) $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 40 = 0$.

509. а) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 25 = 0$;
б) $x^2 + y^2 + 14x - 2y + 50 = 0$.

510. Доведи тотожність
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
двома різними способами і поясни її геометричний зміст за малюнком 12.2.



Мал. 12.2

Використовуючи тотожність, наведену в попередній задачі, запиши у вигляді многочлена вираз **(511, 512).**

511. а) $(x + y + 5)^2$; б) $(x + 2y + 3z)^2$; в) $(x + y - 1)^2$.

512. а) $(a + b + 1)^2$; б) $(a + 3b + c)^2$; в) $(a + c - 3)^2$.

513. **Доведіть формули куба двочлена:**

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Користуючись ними, піднесіть до куба двочлен.
а) $x + 3$; б) $4a + c$; в) $x - y$; г) $m + 2a$.

514. Подай вираз у вигляді многочлена.
а) $(x + 2)^3$; б) $(y - 2)^3$; в) $(2x - 1)^3$; г) $(3x + 1)^3$.

Подай многочлен у вигляді степеня **(515, 516).**

515. а) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$; б) $8y^3 - 36y^2 + 54y - 27$.

516. а) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$; б) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

517. Доведи тотожність.
а) $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$;
б) $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.

518. Розв'яжи рівняння $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$.
А 0 **Б** 1 **В** –1 **Г** інша відповідь

Розв'яжи рівняння **(519, 520).**

519. а) $(x - 1)^3 = x^2(x - 3)$; б) $(x - 2)^3 + 6x^2 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

520. а) $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 - 2$; б) $(x + 2)^3 - 6x^2 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

521. Заміни * такими цифрами, щоб рівність була правильною.
а) $577* = *5 \cdot 7 \cdot 11$; б) $8*5 = *3 \cdot 5 \cdot 7$.

522. *Задача Ж. Л. Лагранжа* (1736–1813). Перевір тотожність.

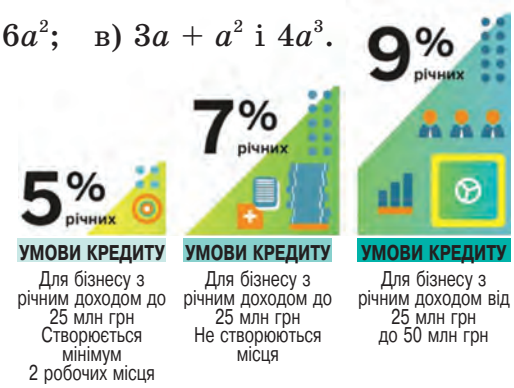
$$(A^2 + B^2 + C^2)(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) - (A \cdot A_1 + B \cdot B_1 + C \cdot C_1)^2 =$$
$$= (A \cdot B_1 - A_1B)^2 + (A \cdot C_1 - A_1 \cdot C)^2 + (B \cdot C_1 - B_1 \cdot C)^2.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

523. Обчисли. а) $\left(-1\frac{1}{24}-1\frac{3}{8}\right):\left(1\frac{2}{3}-3\frac{3}{4}\right)$; б) $-1\frac{1}{3}:1\frac{7}{9}+2{,}4:\left(-1\frac{3}{5}\right)$.

524. Чи тотожні вирази?
а) $x + 2x$ і $3x$; б) $7a^2 - a^2$ і $6a^2$; в) $3a + a^2$ і $4a^3$.

525. ФОП, що має річний дохід до 25 млн грн і не створює робочих місць, хоче взяти кредит 500 000 грн на рік. Визнач, скільки гривень ФОП має повернути банку і який прибуток отримає банк.



§ 13. Різниця квадратів

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- різниця квадратів — *difference of squares*

Помножимо суму змінних a і b на їх різницю:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Отже, $$\boldsymbol{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.}$$

Добуток суми двох виразів та їх різниці дорівнює різниці квадратів цих виразів.

Користуючись доведеною формулою, можна відразу записати:

$$(2a + 3c)(2a - 3c) = 4a^2 - 9c^2, \qquad (1 - ax)(1 + ax) = 1 - a^2x^2.$$

Ліву і праву частини доведеної формули можна поміняти місцями. Одержимо ***формулу різниці квадратів двох виразів***:

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).}$$

Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку їх суми і різниці.

Приклади. $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x + 4)(x - 4)$,

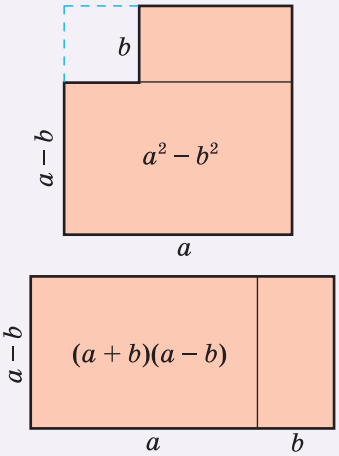
$25a^2 - c^4 = (5a)^2 - (c^2)^2 = (5a + c^2)(5a - c^2)$.

Формула різниці квадратів досить зручна для розкладання многочленів на множники.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Формулу $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ для додатних чисел a і b можна проілюструвати геометрично (мал. 13.1). Але ця тотожність правильна не тільки для додатних чисел, а й для будь-яких інших чисел і виразів.

Справедливість формули різниці квадратів випливає з правила множення многочленів, а це правило — із законів дій додавання і множення. Отже, закони додавання і множення чисел — це своєрідні аксіоми, наслідками яких є алгебраїчні тотожності.



Мал. 13.1

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Чому дорівнює добуток суми двох виразів на їх різницю?
2. Чому дорівнює різниця квадратів двох виразів?
3. Чи можна у формулу різниці квадратів замість змінних підставляти будь-які числа, одночлени чи многочлени?
4. Чи кожну різницю квадратів двох виразів можна розкласти на множники?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Розклади на множники вираз.

а) $a^2 - 4n^2$; б) $9 - 25x^2$; в) $(5a - 2)^2 - 16a^2$.

Розв'язання.

а) $a^2 - 4n^2 = a^2 - (2n)^2 = (a - 2n)(a + 2n)$;

б) $9 - 25x^2 = 3^2 - (5x)^2 = (3 - 5x)(3 + 5x)$;

в) $(5a - 2)^2 - 16a^2 = (5a - 2)^2 - (4a)^2 =$
$= (5a - 2 - 4a)(5a - 2 + 4a) = (a - 2)(9a - 2)$.

2. Розв'яжи рівняння $x^2 - 81 = 0$.

Розв'язання. Скористаємося формулою різниці квадратів і умовою рівності добутку нулю.

$$(x - 9)(x + 9) = 0;$$
$$x - 9 = 0 \text{ або } x + 9 = 0;$$
$$x = 9 \qquad x = -9.$$

3. Подай у вигляді двочлена вираз.

а) $(x + 2y)(x - 2y)$;
б) $(3xy - 1)(3xy + 1)$;
в) $(4mn + 5a^3)(5a^3 - 4mn)$.

Розв'язання.

а) $(x + 2y)(x - 2y) = x^2 - (2y)^2 = x^2 - 4y^2$;
б) $(3xy - 1)(3xy + 1) = (3xy)^2 - 1^2 = 9x^2y^2 - 1$;
в) $(4mn + 5a^3)(5a^3 - 4mn) = (5a^3 + 4mn)(5a^3 - 4mn) =$
$= 25a^6 - 16m^2n^2$.

ВИКОНАЙ УСНО

526. Подай у вигляді многочлена вираз.

а) $(x + m)(x - m)$; б) $(x + z)(x - z)$; в) $(m + 4)(m - 4)$;
г) $(5 + a)(5 - a)$; ґ) $(ab + c)(ab - c)$; д) $(ab - 1)(ab + 1)$.

527. Подай у вигляді многочлена добуток $(a - 2b)(a + 2b)$.

А $a^2 + 4b^2$ **Б** $a^2 - 4b^2$ **В** $a^2 + 2b^2$ **Г** $a^2 - 2b^2$

528. На який вираз треба помножити двочлен $6x - p$, щоб дістати $36x^2 - p^2$?

А $36x^2 + p^2$ **Б** $6x - p$ **В** $6x + p$ **Г** $(6x + p)^2$

529. На який вираз треба помножити двочлен $1 + 9a^2$, щоб дістати $1 - 81a^4$?

530. Якому з виразів тотожно дорівнює двочлен $16 - c^2$?

А $(8 - c)(8 + c)$ **Б** $(8 - c)^2$ **В** $(c + 4)(c - 4)$ **Г** $(4 + c)(4 - c)$

531. Розклади на множники двочлен.

а) $25 - x^2$; б) $a^2 - 1$; в) $m^2 - 4n^2$; г) $100a^2 - 9b^2$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

Подай у вигляді многочлена вираз **(532, 533)**.

532. а) $(4a + 1)(4a - 1)$; б) $(2a - c)(2a + c)$; в) $(2d + x)(2d - x)$;
г) $(a - c^2)(a + c^2)$; ґ) $(8x - y^2)(y^2 + 8x)$; д) $(2a^2 + 3b)(3b - 2a^2)$.

533. а) $(3p - q)(3p + q)$; б) $(m - 4c^2)(m + 4c^2)$; в) $(4a - b)(4a + b)$;
г) $(5 + abc)(5 - abc)$; ґ) $(2y + x^2)(x^2 - 2y)$; д) $(m^2 - n^2)(n^2 + m^2)$.

Спрости вираз **(534, 535)**.

534. а) $(2x - c)(2x + c) - 4x^2$; б) $49z^2 - (7z - 3x)(7z + 3x)$;
в) $(4a - 5b)(4a + 5b) - 8a(2a - b)$;
г) $(y - 2)(y + 3) + (7c - y)(7c + y)$.

535. а) $(a - 2b)(a + 2b) + 4b^2$; б) $(m^2 + 3y)(m^2 - 3y) - m^4$;
в) $(3a + x)(3a - x) - 9a(a - x)$;
г) $(4a - 1)(a + 3) - (2a - 5y)(2a + 5y)$.

Розв'яжи рівняння **(536, 537)**.

536. а) $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 8x$; б) $(3 + c)(3 - c) = 3c - c^2$;
в) $x(x + 4) + (3 - x)(3 + x) = x$; г) $(y + 4)(y - 4) = y^2 - 8y$.

537. а) $(9 - x)(9 + x) = 3x - x^2$; б) $1 - z^2 = 2z - (z + 3)(z - 3)$;
в) $x(x + 4) + (3 - x)(3 + x) = x$;
г) $2b - 9b^2 = (2 - 3b)(2 + 3b)$.

538. Замініть зірочки одночленом, щоб утворилась тотожність.
а) $(5m - *)(5m + *) = * - 9a^2$; б) $(4a - *)(* + 3x^2) = 16a^2 - 9x^4$;
в) $(* + 2p)(* - 2p) = 16m^2 - *$; г) $(6x - *)(* + 5a^2) = 36x^2 - 25a^4$.

Подай у вигляді добутку **(539, 540)**.

539. а) $x^2 - m^2$; б) $a^2 - 9$; в) $b^2 - 16c^2$; г) $1 - 16z^2$;
ґ) $q^2 - p^2n^2$; д) $0{,}04 - x^2$; е) $c^4 - 9a^2$; є) $121x^2 - y^6$.

540. а) $n^2 - m^2$; б) $x^2 - 16$; в) $4c^2 - 9$; г) $1 - 25n^2$;
ґ) $9q^2 - p^2$; д) $0{,}01 - a^2$; е) $x^4 - 4y^6$; є) $169a^2 - c^8$.

Розв'яжи рівняння **(541, 542)**.

541. а) $x^2 - 16 = 0$; б) $4x^2 - 9 = 0$; в) $x^2 + 64 = 0$.

542. а) $x^2 - 25 = 0$; б) $9x^2 - 16 = 0$; в) $x^2 + 81 = 0$.

Обчисли **(543, 544)**.

543. а) $35^2 - 15^2$; б) $73^2 - 27^2$; в) $136^2 - 64^2$;
г) $\frac{17^2 - 8^2}{150}$; ґ) $\frac{16^2 - 9^2}{13^2 - 12^2}$; д) $\frac{45^2 - 35^2}{26^2 - 24^2}$.

544. а) $51^2 - 49^2$; б) $27^2 - 23^2$; в) $146^2 - 54^2$;
г) $\frac{19^2 - 17^2}{144}$; ґ) $\frac{32^2 - 12^2}{23^2 - 21^2}$; д) $\frac{56^2 - 46^2}{33^2 - 18^2}$.

Обчисли без калькулятора **(545, 546)**.

545. а) $104 \cdot 96$; б) $1007 \cdot 993$; в) $0{,}95 \cdot 1{,}05$.

546. а) $102 \cdot 98$; б) $1001 \cdot 999$; в) $0{,}97 \cdot 1{,}03$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Запиши у вигляді многочлена **(547–552).**

547. а) $(-3a + 5x^2y)(3a + 5x^2y)$; б) $(-2abc - 3a^2)(-2abc + 3a^2)$;
в) $(-5x^3 + 3y)(-5x^3 - 3y)$; г) $(-0{,}5ac + 1{,}1c^2)(-0{,}5ac - 1{,}1c^2)$.

548. а) $\left(-\frac{1}{2}ax+\frac{2}{3}z^2\right)\left(-\frac{1}{2}ax-\frac{2}{3}z^2\right)$; б) $\left(-1\frac{1}{2}ac-\frac{1}{3}a^2\right)\left(-1\frac{1}{2}ac+\frac{1}{3}a^2\right)$.

549. а) $2(4x - 1)(4x + 1)$; б) $k(m^2 - 2pt)(m^2 + 2pt)$;
в) $9a\left(\frac{2}{3}x-1\right)\left(\frac{2}{3}x+1\right)$; г) $\left(\frac{2}{5}m-2n\right)\left(\frac{2}{5}m+2n\right)\cdot 25m^2$.

550. а) $3(2q - cn)(2q + cn)$; б) $(0{,}5 + 2a)(0{,}5 - 2a) \cdot 2c^2$;
в) $\left(\frac{1}{4}a+4b\right)\left(\frac{1}{4}a-4b\right)\cdot 16a$; г) $4c\left(\frac{1}{2}c-p\right)\left(\frac{1}{2}c+p\right)$.

551. а) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$; б) $(4a^2 + 1)(2a + 1)(2a - 1)$;
в) $(1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16})$.

552. а) $(m + 5)(m - 5)(m^2 + 25)$; б) $(9y^2 + z^2)(z + 3y)(3y - z)$;
в) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16})$.

Розв'яжи рівняння **(553, 554).**

553. а) $(2x - 1)(2x + 1) = 9 + 4x(x + 5)$;
б) $8z^2 - (3z + 5)(3z - 5) = z(5 - z)$;
в) $(2{,}5y - 2)(2{,}5y + 2) - (1{,}5y + 3)(1{,}5y - 3) = 4y(y - 5)$;
г) $(2x + 3)(2x - 3) - 2x(x - 4) = (x + 3)(2x - 1)$.

554. а) $(3z + 2)(3z - 2) = 7z + 9(z^2 - 2)$;
б) $x^2 - (1{,}2x - 3)(3 + 1{,}2x) = 0{,}2x(1{,}5 - 2{,}2x)$;
в) $3x(x - 2) - (3x - 1)(3x + 1) = (3 + 2x)(1 - 3x)$.

Спрости вираз **(555, 556).**

555. а) $(a - 2)(a + 2)(a^2 + 4) - (a^2 - 2)^2$;
б) $a^4b^4 - (ab - c)(ab + c)(a^2b^2 + c^2)$;
в) $(3x^2 + y)(3x^2 - y)(9x^4 + y^2) - 9(9x^8 - y^4)$;
г) $\frac{1}{16}-\left(\frac{1}{2}-3a^2b\right)\left(\frac{1}{2}+3a^2b\right)\left(\frac{1}{4}+9a^4b^2\right)$.

556. а) $(2x^2 - 1)(2x^2 + 1)(4x^4 + 1) - (4x^4 + 1)^2$;
б) $4(4a^4 - c^8) - (2a - c^2)(2a + c^2)(4a^2 + c^4)$.

Обчисли **(557, 558).**

557. $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) - 2^{32}$.

558. $(3 + 2)(3^2 + 2^2)(3^4 + 2^4)(3^8 + 2^8)(3^{16} + 2^{16}) - 3^{32} + 2^{32}$.

Розклади на множники (559, 560).

559. а) $(a - 3)^2 - 4$; б) $(x + 5)^2 - 16y^2$;
в) $(3n + 5)^2 - (2n - 1)^2$; г) $(m - 6)^2 - (m + 7)^2$.

560. а) $(p + 6)^2 - 16$; б) $(a - 7)^2 - 25c^2$;
в) $(2x - 5y)^2 - (6x + y)^2$; г) $(a - 9)^2 - (a + 5)^2$.

561. Доведи, що $60^2 + 899^2 = 901^2$.

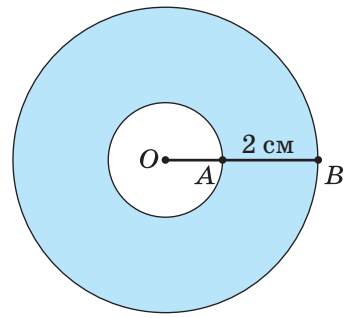
562. Prove that $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.

563. Доведи, що:
а) $65^2 + 2112^2 = 2113^2$;
б) $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$.

564. Доведи, що при кожному натуральному значенні n:
а) число $(n + 5)^2 - n^2$ ділиться на 5;
б) число $(n + 7)^2 - n^2$ ділиться на 7;
в) число $(2n + 9)^2 - (2n - 5)^2$ ділиться на 56.

565. Доведи, що при кожному натуральному n значення виразу:
а) $(6n + 1)^2 - 1$ ділиться на 12;
б) $(5n + 8)^2 - (5n - 6)^2$ ділиться на 28.

566. Площа кільця, зображеного на малюнку 13.2, дорівнює 18,84 см^2. Знайди його зовнішній і внутрішній радіуси, якщо їх різниця дорівнює 2 см.



Мал. 13.2

567. *Доведи тотожність Платона (IV ст. до н. е.).*

$$(p^2 + 1)^2 - (p^2 - 1)^2 = 4p^2.$$

568. *Доведи тотожність Піфагора (VI ст. до н. е.).*

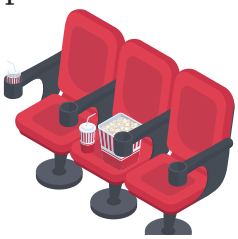
$$(2a^2 + 2a + 1)^2 - (2a^2 + 2a)^2 = (2a + 1)^2.$$

Платон
(428/427 до н. е. — 348/347 до н. е.)

Піфагор Самоський
(570–497 до н. е.)

569. Доведи, що кожне непарне натуральне число, більше за 1, є різницею квадратів двох послідовних натуральних чисел.

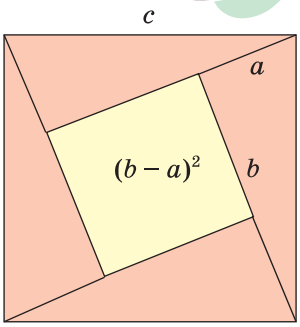
570. Доведи, що сума двох послідовних номерів на кріслах в одному ряду кінотеатра дорівнює різниці квадратів цих номерів.



ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

571. Користуючись малюнком 13.3 і формулою квадрата різниці, доведи, що в кожному прямокутному трикутнику сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи (теорема Піфагора).

572. На основі теореми Піфагора з попередньої задачі знайди гіпотенузу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють:
а) 3 см і 4 см;
б) 5 м і 12 м;
в) 7 дм і 24 дм.



Мал. 13.3

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

573. Обчисли.
а) $4{,}7 \cdot 5{,}8 + (-4{,}7) \cdot (-4{,}2)$;
б) $-6{,}3 : (-0{,}21) - 1{,}7$;
в) $-1{,}7 - 36{,}6 : (-6{,}1)$.

574. Автомобіль, швидкість якого дорівнює v км/год, за t год пройшов відстань 300 км. Вирази формулою залежність v від t. Як змінюватиметься значення v, якщо значення t збільшувати в 2; 3; 4 рази?

575. Займаючи менше 6% площі Європи, Україна володіє 35% її біорізноманіття. Біота[1] України налічує 70 тис. видів. Знайди кількість видів біоти всієї Європи.

[1] *Біота — комплекс живих організмів.*

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРІАНТ I

1. Піднеси до квадрата двочлен.

а) $x + 3$; б) $a^2 - c$.

2. Розклади на множники вираз.

а) $3a^2 - 9ac$; б) $cx - cy + 5x - 5y$; в) $9a^2 - b^2$.

3. Спрости вираз $(2a + 3b)^2 - 4a(a + 3b)$.

4. Розв'яжи рівняння. а) $x^2 - 4x = 0$; б) $(x - 3)^2 = (x - 9)(x + 9)$.

ВАРІАНТ II

1. Піднеси до квадрата двочлен.

а) $m - 5$; б) $x^2 - z$.

2. Розклади на множники вираз.

а) $4x^2 - 2xy$; б) $a^2 - 3a + 6ax - 18x$; в) $4m^2 - n^2$.

3. Спрости вираз $(3x - 5c)^2 - 3x(3x - 10c)$.

4. Розв'яжи рівняння. а) $x^2 - 5x = 0$; б) $(x + 2)^2 = (x + 4)(x - 4)$.

ВАРІАНТ III

1. Піднеси до квадрата двочлен.

а) $3 - y$; б) $a - x^3$.

2. Розклади на множники вираз.

а) $5a^2 + 10ac$; б) $5a - 5c + xa - xc$; в) $x^2 - 25y^2$.

3. Спрости вираз $(4m + 3a)^2 - 3a(3a + 8m)$.

4. Розв'яжи рівняння. а) $x^2 + 12x = 0$; б) $(x - 5)^2 = (x - 2)(x + 2)$.

ВАРІАНТ IV

1. Піднеси до квадрата двочлен.

а) $7 - a$; б) $c^2 - a$.

2. Розклади на множники вираз.

а) $4n^2 - 12n$; б) $ax - ay + 7x - 7y$; в) $16m^2 - p^2$.

3. Спрости вираз $(2a - 4b)^2 - 4a(a - 4b)$.

4. Розв'яжи рівняння. а) $x^2 - 16x = 0$; б) $(x + 4)^2 = (x - 6)(x + 6)$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання №3

1. Винеси спільний множник за дужки: $6cx - 9cy$.

А $6c(x - 3y)$ **Б** $3x(2x - 3y)$ **В** $3c(2x - 3y)$ **Г** $6x(c - 3c)$

2. Який із наведених виразів є різницею квадратів двох виразів?

А $x^2 - y^2$ **Б** $(x - y)^2$ **В** $2(x - y)$ **Г** $x - y$

3. Спрости вираз $(a - b)(a + b) + b^2$.

А $a^2 - b^2$ **Б** a^2 **В** $a^2 + b^2$ **Г** b^2

4. Піднеси до степеня: $(a + 2b)^2$.

А $a^2 + 4b^2$ **Б** $a^2 + 4ab + 4b^2$
В $a^2 + 4ab + 2b^2$ **Г** $a^2 + 2ab + 2b^2$

5. Розклади на множники вираз $x^3 - 3x^2 + 3x - 9$.

А $(x + 3)(x - 3)$ **Б** $(x - 3)^3$
В $(x + 3)(x^2 - 3)$ **Г** $(x - 3)(x^2 + 3)$

6. Подай як квадрат двочлена вираз $y^2 - xy + 0{,}25x^2$.

А $(y + 0{,}5x)^2$ **Б** $(y - 0{,}5x)^2$ **В** $0{,}5(2y - x)^2$ **Г** $0{,}5(2x - y)^2$

7. Знайди корені рівняння $x^2 + 5x = 0$.

А 5 **Б** 0 **В** 0 або −5 **Г** 0 або 5

8. Яке число слід поставити замість *, щоб рівність $(6x - 8)^2 = * (3x - 4)^2$ стала тотожністю?

А 6 **Б** 8 **В** 4 **Г** 2

9. На який вираз треба помножити суму $2a^4 + b^3$, щоб дістати різницю $4a^8 - b^6$?

А $2a^4b^3$ **Б** $2a^4 - b^3$ **В** $2a^2b^2$ **Г** $2a^4 + b^3$

10. Розв'яжи рівняння $x^2 - 16x + 64 = 0$.

А $x = 8$ **Б** $x = -8$ **В** $x = 16$ **Г** $x = -16$

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 3

1. Який із наведених виразів є різницею квадратів виразів x і $2y$?

А $(x - 2y)^2$ **Б** $x^2 - 2y^2$ **В** $x^2 - 4y^2$ **Г** $x^2 + 4y^2$

2. Подай у вигляді многочлена вираз $(2a - 5c)^2$.

А $4a^2 + 25c^2$ **Б** $4a^2 - 25c^2$
В $4a^2 + 20ac + 25c^2$ **Г** $4a^2 - 20ac + 25c^2$

3. Який вираз слід поставити замість *, щоб рівність $(a^2 - 3c) \cdot (*) = a^4 - 9c^2$ була тотожністю?

А $a^2 - 3c$ **Б** $a^2 + 3c$
В $a^2 + 6a^2c + 3c^2$ **Г** $a^2 - 6a^2c + 9c^2$

4. Установи відповідність між рівняннями, заданими умовами (1–3), та їх коренями (А–Д).

1	$x^2 - 3x = 0$	**А**	3
2	$x^2 - 6x + 9 = 0$	**Б**	–3
3	$x^2 - 9 = 0$	**В**	3 або –3
		Г	0 або –3
		Д	0 або 3

5. Розклади на множники.

а) $12a^3 - 18a^2$; б) $5a + 5b - ab - b^2$;
в) $16x^2 - 25y^2$; г) $(3a + 2)^2 - 36a^2$.

6. Спрости вираз $(2m + 3)(2m - 3) - (2m - 1)^2 + 10$ і знайди його значення, якщо $m = -0{,}3$.

7. Обчисли. а) $52^2 - 42^2$; б) $\dfrac{168^2 - 132^2}{78^2 - 72^2}$.

8. Розв'яжи рівняння.

а) $(x - 4)(x + 4) - (2x + 3)^2 = (1 - 3x)(x + 3)$;
б) $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$.

Додаткове завдання

9. Обчисли.

$(6 + 1)(6^2 + 1)(6^4 + 1)(6^8 + 1)(6^{16} + 1) - 0{,}2 \cdot 6^{32}$.

§ 14. Різниця і сума кубів

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- різниця кубів — *difference of cubes*
- сума кубів — *sum of cubes*

Перемножимо многочлени $a - b$ і $a^2 + ab + b^2$:
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$.
Отже, при будь-яких значеннях a і b:

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).}$$

Тричлен $a^2 + ab + b^2$ називають ***неповним квадратом суми*** виразів a і b (від $a^2 + 2ab + b^2$ він відрізняється тільки коефіцієнтом середнього члена). Тому доведену формулу словами читають так:

Різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їх суми.

Перемножимо многочлени $a + b$ і $a^2 - ab + b^2$:
$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$.
Отже, при будь-яких значеннях a і b:

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a - ab + b^2).}$$

Тричлен $a^2 - ab + b^2$ називають ***неповним квадратом різниці*** виразів a і b. Тому одержану формулу читають так:

Сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їх різниці.

За допомогою доведених формул можна розкладати на множники многочлени, що є різницями або сумами кубів.

Наприклад, $x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3 = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$;
$1 + 0{,}027a^6 = 1^3 + (0{,}3a^2)^3 = (1 + 0{,}3a^2)(1 - 0{,}3a^2 + 0{,}09a^4)$.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

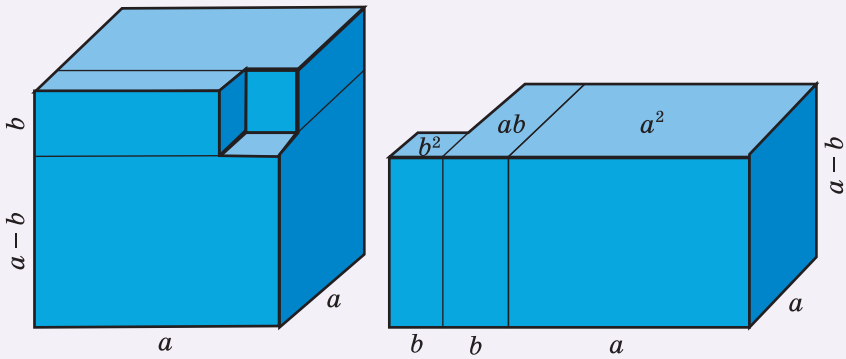
Формулу «різниця кубів» для додатних значень a і b можна проілюструвати геометрично, як показано на малюнку 14.1.

Якщо помножити на $a - b$ вирази
$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ і $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$, то одержимо формули:
$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$;
$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.

Можна довести, що для кожного натурального значення n правильна формула:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Формули «різниця квадратів» і «різниця кубів» — найпростіші випадки цієї загальної формули.



Мал. 14.1

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Який вираз називають неповним квадратом суми? А неповним квадратом різниці?
2. Чому дорівнює добуток суми двох виразів і неповного квадрата їх різниці?
3. Чому дорівнює добуток різниці двох виразів і неповного квадрата їх суми?
4. Чому дорівнює: а) сума; б) різниця кубів двох виразів?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Розклади на множники двочлен.

а) $8 - 27x^3y^3$;

б) $64x^3 + 125y^9$;

в) $(x - 2)^3 - 27$.

Розв'язання.

а) $8 - 27x^3y^3 = 2^3 - (3xy)^3 = (2 - 3xy)(2^2 + 2 \cdot 3xy + (3xy)^2) =$
$= (2 - 3xy)(4 + 6xy + 9x^2y^2)$;

б) $64x^3 + 125y^9 = (4x + 5y^3)(16x^2 - 20xy^3 + 25y^6)$;

в) $(x - 2)^3 - 27 = (x - 2)^3 - 3^3 = (x - 2 - 3)((x - 2)^2 + 3(x - 2) + 9) =$
$= (x - 5)(x^2 - 4x + 4 + 3x - 6 + 9) = (x - 5)(x^2 - x + 7)$.

2. Знайди добуток многочленів $x^4 - x^2y + y^2$ і $x^2 + y$.

Розв'язання.

1-й спосіб. За формулою суми кубів:

$(x^2 + y)(x^4 - x^2y + y^2) = (x^2)^3 + y^3 = x^6 + y^3$.

2-й спосіб. За правилом множення многочленів:

$(x^2 + y)(x^4 - x^2y + y^2) = x^6 - x^4y + x^2y^2 + x^4y - x^2y^2 + y^3 = x^6 + y^3$.

ВИКОНАЙ УСНО

576. Чому дорівнює неповний квадрат:
а) суми виразів a і c; б) різниці виразів a і c?

577. Як можна спростити вираз?
а) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$; б) $(a^2 - a + 1)(a + 1)$.

578. Спрости вираз $(2m + 1)(4m^2 - 2m + 1)$ і знайди його значення, якщо $m = -1$.
А 9 **Б** – 5 **В** 7 **Г** –7

579. Яка з рівностей правильна?
А $a^3 - 27 = (a - 3)(a^2 + 3a - 9)$ **Б** $a^3 - 27 = (a - 3)(a^2 - 3a + 9)$
В $a^3 - 27 = (a - 3)(a^2 + 3a + 9)$ **Г** $a^3 - 27 = (a - 3)(a^2 - 6a + 9)$

580. Розклади на множники $x^3 - 8$.
А $(x^2 - 4)(x - 2)$ **Б** $(x - 2)(x^3 - 2x + 4)$
В $(x - 2)(x^2 + 4x + 4)$ **Г** $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

581. Розклади на множники двочлен. а) $n^3 - 1$; б) $c^3 + 27$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

Розклади на множники двочлен **(582, 583)**.

582. а) $a^3 - c^3$; б) $x^3 + 8$; в) $1 - p^3$; г) $c^3 - 64x^3$;
ґ) $n^6 - 1$; д) $27a^3 + b^3$; е) $a^3 - 8m^3n^3$; є) $-z^3 - p^3$;
ж) $\frac{1}{125} + y^3z^9$; з) $\frac{1}{8} + c^3$; и) $\frac{8}{27}x^3 + 1$; і) $\frac{27}{64} + z^3$.

583. а) $p^3 + q^3$; б) $1 - a^3$; в) $c^3 + 8x^3$; г) $a^3 - 8$;
ґ) $27 + m^3$; д) $64a^3 - n^3$; е) $-125 - z^3$; є) $27x^6 - a^3y^3$;
ж) $\frac{1}{1000} - a^6$; з) $\frac{1}{8}a^3x^3 - c^3$; и) $\frac{1}{64}a^3 - x^3y^3$; і) $\frac{8}{27} - a^3x^3z^3$.

Подай у вигляді многочлена **(584, 585).**

584. а) $(a - x)(a^2 + ax + x^2)$; б) $(b + 2)(b^2 - 2b + 4)$;
в) $(2a - n)(4a^2 + 2an + n^2)$; ґ) $(9x^2 - 15x + 25)(3x + 5)$.

585. а) $(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$; б) $(y + m)(y^2 - ym + m^2)$;
в) $(x - a^2)(x^2 + a^2x + a^4)$; г) $(a^4 + 1)(a^8 - a^4 + 1)$;
ґ) $(2 - y)(4 + 2y + y^2)$; д) $(25 - 10m + 4m^2)(5 + 2m)$.

586. Знайди значення виразу.
а) $(x + 1)(x^2 - x + 1) - x^3$, якщо $x = 5{,}73$;
б) $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) + 8$, якщо $z = 0{,}2$.

587. Find the value of the expression.
a) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) + 27$, if $x = 0{,}5$;
b) $(a + 5)(a^2 - 5a + 25) - a^3$, if $a = 1{,}02$.

Розв'яжи рівняння **(588, 589).**

588. а) $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 2x + x^3$; б) $(y + 2)(y^2 - 2y + 4) = y^3 + 2y$;
в) $(1 + y)(y^2 - y + 1) - y^3 = 5y$; г) $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x(5 + x^2)$.

589. а) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) + 3x = x^3$;
б) $(z - 4)(16 + 4z + z^2) = z(z^2 - 4)$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Знайди добуток многочленів **(590, 591).**

590. а) $0{,}5a^2 + b$ і $0{,}25a^4 - 0{,}5a^2b + b^2$;
б) $4m - m^2$ і $m^4 + 4m^3 + 16m^2$.

591. а) $3a - 2b$ і $9a^2 + 6ab + 4b^2$;
б) $0{,}2a - xy$ і $0{,}04a^2 + 0{,}2axy + x^2y^2$.

Обчисли значення виразу **(592, 593).**

592. а) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) - x^3 - x$, якщо $x = 2{,}5$;
б) $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) + 27y^3$, якщо $x = 1$ і $y = -3{,}8$;
в) $28y^3 + (5x - y)(25x^2 + 5xy + y^2) - 61x^3$, якщо $x = \frac{3}{4}$, $y = 1\frac{2}{3}$.
г) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) + (1 - x)(1 + x + x^2)$, якщо $x = -0{,}7$.

593. а) $(1 + 2x)(4x^2 - 2x + 1) - 3x^3$, якщо $x = \frac{1}{5}$;
б) $5x^3 + (3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2) + 19y^3$, якщо $x = \frac{1}{2}$, $y = 1\frac{2}{3}$.
в) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$, якщо $x = -0{,}4$.

Розв'яжи рівняння **(594, 595)**.

594. а) $(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = 1$;
б) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) - (x - 5)(x^2 + 5x + 25) = 4(20 - x)$;
в) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) - x(x + 3)(x - 3) = 1$;
г) $(4x^2 - 1)(4x^2 - 2x + 1) = 8x^3(2x - 1)$.

595. а) $(x^3 + 3)(x^6 - 3x^3 + 9) - 26 = 0$;
б) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) - (x + 4)(x^2 - 4x + 16) = 6(2x - 9)$;
в) $(x + 5)(x^2 - 5x + 25) - x(x - 4)(x + 4) = -3$;
г) $(x^2 - 4)(x^2 - 2x + 4) = x^3(x - 2)$.

Доведи **(596, 597)**, що:

596. а) $327^3 - 227^3$ ділиться на 100; б) $737^3 + 263^3$ ділиться на 10^3;
в) $128^3 - 8$ ділиться на 126; г) $9^6 - 1$ ділиться на 80.

597. а) $723^3 - 223^3$ ділиться на 500; б) $352^3 + 648^3$ ділиться на 10^3;
в) $726^3 - 64$ ділиться на 722; г) $7^6 + 1$ ділиться на 50.

Розклади на множники вираз **(598–601)**.

598. а) $(a + 2)^3 - 8$; б) $(z - 1)^3 + z^3$.

599. а) $8 - (a - 2)^3$; б) $(x + y)^3 - y^3$;
в) $(3 - 2x)^3 + 8x^3$; г) $(3 - a)^3 - (a - 2)^3$.

600. а) $x^3 - y^3 - x + y$; б) $x^3 + y^3 - x^2 + xy - y^2$;
в) $x^3 - 5x^2 + 5x - 1$; г) $x^3 - 8y^3 + x^2y + 2xy^2 + 4y^3$.

601. а) $a^3 + b^3 - a - b$; б) $a^3 - b^3 - a^2 - ab - b^2$;
в) $a^3 - 3a^2 - 3a + 1$; г) $a^3 - 27c^3 - a^2c - 3ac^2 - 9c^3$.

Подай у вигляді добутку **(602, 603)**.

602. а) $x^9 - y^{3n}$; б) $a^{3m - 3} + b^{21}$;
в) $a^{18n + 9} - c^{36 - 3n}$; г) $x^{12n - 3} + 64y^{27 + 3n}$.

603. а) $a^6 + b^{3p}$; б) $a^{3m + 6} - b^{12}$;
в) $a^{15m + 3} + b^{33 - 3m}$; г) $a^{9n - 6} - 27b^{6 - 12n}$.

604. Доведи тотожність.
а) $a^3 - b^3 - (a - b)(a^2 + b^2) = ab(a - b)$;
б) $a^6 - b^6 = (a^2 - b^2)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$.

605. Доведи, що три останні цифри числа $1993^3 + 7^3$ — нулі.

606. У Діани і Матвія є певна кількість яблук. Доведи, що коли сума їх яблук ділиться на якесь число, то і сума кубів кількості кожного ділиться на те саме натуральне число.

607. Доведи, що різниця кубів двох послідовних натуральних чисел при діленні на 6 завжди дає в остачі 1.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

608. Петро з'їв $\frac{1}{3}$ всіх яблук та ще 2 яблука. Іван з'їв $\frac{1}{4}$ всіх яблук та ще 1 яблуко, а Микола — половину тих яблук, що залишилися. Після цього залишилась $\frac{1}{6}$ від тих яблук, що були спочатку. Скільки яблук було спочатку?

609. Доведи, що різниця кубів двох послідовних непарних номерів шаф у спортзалі при діленні на 24 завжди дає в остачі 2.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

610. Яке із тверджень правильне?

а) Якщо $|a| < b$, то $a < b$; б) якщо $a < |b|$, то $a < b$;

в) якщо $|a| < |b|$, то $a < b$.

611. Знайди відношення пів різниці $\frac{5}{6}$ і $\frac{1}{3}$ до їх суми.

612. Скільки кілограмів води треба випарити з 200 кг сухофруктів, що містять 75% води, щоб отримати сухофрукти, що містять 60% води?

§ 15. Застосування різних способів розкладання многочленів на множники

Щоб розкласти многочлен на множники, іноді доводиться використовувати кілька способів.

Приклад 1. Розклади на множники многочлен $4a^3 - ab^2$.

Розв'язання. $4a^3 - ab^2 = a(4a^2 - b^2) = a(2a + b)(2a - b)$.

Спочатку за дужки винесено спільний множник a, потім вираз у дужках розкладено на множники за формулою різниці квадратів.

Приклад 2. Розклади на множники вираз $x^5 - x^4y + x^2y^3 - xy^4$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} x^5 - x^4y + x^2y^3 - xy^4 &= \\ &= x^4(x - y) + xy^3(x - y) = \\ &= (x - y)(x^4 + xy^3) = \\ &= (x - y) \cdot x(x^3 + y^3) = \\ &= x(x - y)(x + y)(x^2 - xy + y^2). \end{aligned}$$

Тут застосовано спосіб групування, винесення спільного множника за дужки і формулу суми кубів. Можна було спочатку винести x за дужку, а потім групувати.

Щоб розкласти на множники складніші многочлени, доводиться застосовувати кілька відомих способів або штучні прийоми. У цьому випадку можна використати таке **правило-орієнтир**.

Щоб розкласти многочлен на множники, треба:

1. Винести спільний множник (якщо він є) за дужки.
2. Перевірити, чи не є вираз у дужках різницею квадратів, різницею або сумою кубів.
3. Якщо це тричлен, то перевірити, чи не є він квадратом двочлена.
4. Якщо многочлен містить більше трьох членів, то треба спробувати згрупувати їх і до кожної групи застосувати п. 1–3.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Іноді вдається розкласти многочлен на множники, якщо додати і відняти від нього один і той самий вираз.

Приклад. Розклади на множники двочлен $a^4 + 4$.

Розв'язання. Додамо до даного двочлена вираз $4a^2 - 4a^2$.

$$\begin{aligned} a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 - 4a^2 + 4 = (a^4 + 4a^2 + 4) - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = \\ = (a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a) = (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2). \end{aligned}$$

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що означає розкласти многочлен на множники?
2. Які ти знаєш способи розкладання многочленів на множники?
3. За якими формулами можна розкладати многочлени на множники?
4. Наведи приклади розкладання многочлена на множники з використанням кількох способів.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Розклади на множники вираз $ax^4 - ax^2 + 0{,}25a$.

Розв'язання.

$ax^4 - ax^2 + 0{,}25a = 0{,}25a(4x^4 - 4x^2 + 1) = 0{,}25a(2x^2 - 1)^2$.

2. Розклади на множники вираз $n^4 - 5n^2 + 2nx - x^2 + 4$.

Розв'язання.

$n^4 - 5n^2 + 2nx - x^2 + 4 = (n^4 - 4n^2 + 4) - (n^2 - 2nx + x^2) =$
$= (n^2 - 2)^2 - (n - x)^2 = ((n^2 - 2) - (n - x))((n^2 - 2) + (n - x)) =$
$= (n^2 - 2 - n + x)(n^2 - 2 + n - x)$.

3. Розв'яжи рівняння $x^2(2x - 5) - 4x(2x - 5) + 8x - 20 = 0$.

Розв'язання.

$x^2(2x - 5) - 4x(2x - 5) + 8x - 20 = 0$;
$x^2(2x - 5) - 4x(2x - 5) + 4(2x - 5) = 0$;
$(2x - 5)(x^2 - 4x + 4) = 0$;
$(2x - 5)(x - 2)^2 = 0$;
$2x - 5 = 0$ або $(x - 2)^2 = 0$;
$2x = 5$; $\quad x - 2 = 0$;
$x = 2{,}5$. $\quad x = 2$.

ВИКОНАЙ УСНО

Розклади на множники многочлен **(613–616)**.

613. а) $5a - 10c$; б) $4x^2 - 4x$; в) $a^2c^2 - ac$.

614. а) $a^2 - n^2$; б) $1 - c^2x^2$; в) $9 - a^4$.

615. а) $1 - 2n + n^2$; б) $x^2 - 2xy + y^2$; в) $1 + 2c^2 + c^4$.

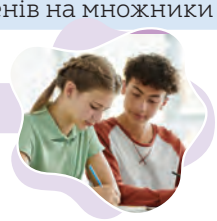
616. а) $x^3 - y^3$; б) $a^3 + 8$; в) $27 - c^3$.

617. Розклади на множники многочлени, наведені в таблиці.

	А	Б	В
1	$a^2 - 1$	$a^2 + 2a + 1$	$1 + x^3$
2	$x^2 - 4$	$x^2 - 6x + 9$	$27 - c^2$
3	$4c^2 - 1$	$1 - 2m + m^2$	$x^3 + y^3$
4	$9x^2 - c^2$	$a^2 - 2am + m^2$	$8x^3 + 1$

618. Розклади на множники вираз $a^3 + a^2 + a + 1$.

А $(a^2 + 1)(a + 1)$ **Б** $a^2(a + 1)$
В $(a + 1)(a + 1)$ **Г** $a(a + 1)^2$



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

Розклади на множники многочлен **(619, 620)**.

619. а) $ap^2 - ax^2$; б) $c^3 - cp^2$; в) $2 - 8a^2$;
г) $27x^2 - 75$; ґ) $18c^2x - 2x$; д) $100a^4 - a^2$.

620. а) $xa^2 - xc^2$; б) $a^3 - an^2$; в) $20x^2 - 5$;
г) $100am^2 - 25ax^2$; ґ) $3x^3 - 27x$; д) $45a - 5a^3$.

621. Розв'яжи рівняння.
а) $x^5 - x^3 = 0$; б) $x^4 - 36x^2 = 0$; в) $12x^7 - 3x^5 = 0$;
г) $2x^3 - 8x = 0$; ґ) $4x^4 - 9x^2 = 0$; д) $x^5 = 4x^3$.

622. Solve the equation.
a) $x^4 - x^2 = 0$; b) $x^3 - 25x = 0$; c) $x^4 - 0{,}04x^2 = 0$.

Розклади на множники многочлен **(623–632)**.

623. а) $ax^2 - 2ax + a$; б) $20a^3 - 20a^2 + 5a$;
в) $27a^6 + 3a^2 - 18a^4$; г) $45x^3 + 20x - 60x^2$;
ґ) $mx^2 + 4mx + 4m$; д) $p^2 + 6xp^2 + 9x^2p^2$.

624. а) $4am^2 + 4am + a$; б) $3 - 6a + 3a^2$;
в) $7a^2 - 28a^4 + 28a^6$; г) $6x^2 - 15x^3 - 24x^4$.

625. а) $ax^4 - x^4 + ax^3 - x^3$; б) $x^3 - x^2y + x^2 - xy$;
в) $a^2b - 6a^2 - bc^2 + 6c^2$; г) $ap^2 - b + bp^2 - a$.

626. а) $4ab + 12b - 4a - 12$; б) $10y^2 - 6xy^2 - 5y + 3xy$;
в) $n^2a + n^2b - 4a - 4b$; г) $9a - 9 - c^2a + c^2$.

627. а) $m^2 - 2mn + n^2 - 25$; б) $a^2 - 6a + 9 - b^2$;
в) $64 - x^2 + 4xy - 4y^2$; г) $16 - b^2 - 8a + a^2$.

628. а) $x^2 - 2ax + a^2 - 16$; б) $x^2 + 2x + 1 - a^2$;
в) $m^2 - x^2 - 4x - 4$; г) $x^2 - y^2 - 6x + 9$.

629. а) $x - a + x^2 - a^2$; б) $a^2 - b^2 + a - b$;
в) $2k + 3p + 4k^2 - 9p^2$; г) $c^2 - c - m^2 - m$;
ґ) $a^3 + b^3 - a - b$; д) $x - y - x^3 + y^3$.

630. а) $a^2 - b^2 - a - b$; б) $3c - 3d + c^2 - d^2$;
в) $5a - 2c - 25a^2 + 4c^2$; г) $x^2 + y - y^2 + x$;
ґ) $x^3 - a^3 + x - a$; д) $a + b - a^3 - b^3$.

631. а) $ac^2 + bc - bc^2 - ac$; б) $a^2b + 3a + 3ab + a^2$;
в) $ax - a^2 + ax^2 - a^3$; г) $9a^2 + 6ab + b^2 + 3a + b$.

632. а) $2ax - axy + 2ay - ay^2$; б) $nx + cx + c^3x + c^2nx$;
в) $a^3 - ab^2 - a^2 - ab$; г) $x^2 - 2xy + y^2 + x - y$.

633. Наведіть приклад двочлена, який є одночасно різницею квадратів і різницею кубів. Розкладіть його на множники.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Розклади на множники многочлен **(634–641).**

634. а) $\frac{1}{8}x-2x^3$; б) $\frac{2}{3}a^4-\frac{3}{8}a^2x^4$;
в) $\frac{1}{4}ac^2-ac+a$; г) $2\frac{1}{4}x^6-\frac{4}{9}x^2y^4$.

635. а) $3x^2-\frac{27}{16}x^4$; б) $\frac{2}{9}a-\frac{1}{2}a^3c^2$.

636. а) $a^4-6a^3+54a-81$; б) $x^4-10x^3+250x-625$.

637. а) $m^4+4m^3-16m-16$; б) $a^4-8a^3+128a-256$.

638. а) $ac+bc-2c-acx-bcx+2cx$;
б) $a^2x^2+a^2y^2+2ax^2+2ay^2+x^2+y^2$.

639. а) $x^3+2x^2-acx-2cx-cx^2+ax^2$;
б) $a^2x^2+a^2y^2-2ax^2-2ay^2+x^2+y^2$.

640. а) $(2n+3)^2-(n-1)^2$; б) $4(x-y)^2-(x+y)^2$;
в) $a^2-2ac+c^2-x^2-2x-1$; г) $c^2+4ac+4a^2-m^2+2mn-n^2$.

641. а) $(3a+2p)^2-(a+p)^2$; б) $9(p+q)^2-(p-q)^2$;
в) $a^4-2a^2+1-p^2+2pc-c^2$; г) $p^2+6pq+9q^2-a^2+4a-4$.

Подай вираз у вигляді добутку чотирьох множників **(642, 643).**

642. а) $3x^5-x^4-3x+1$; б) $2a^2+a^3-18a^4-9a^5$; в) x^4-37x^2+36.

643. а) $c^5-16c-c^4+16$; б) $2x^2-x^3-2x^4+x^5$; в) x^4-26x^2+25.

Розв'яжи рівняння **(644, 645).**

644. а) $x^3+2x^2-x=2$; б) $y^3-3y^2+4y=12$;
в) $x^2(x-3)+2x(x-3)+x-3=0$;
г) $x^2(x^2-4x+4)-9(x^2-4x+4)=0$.

645. а) $y^3-2y^2-y+2=0$; б) $2x^3-3x^2+8x=12$;
в) $x^2(2x+1)-4x(2x+1)+8x+4=0$;
г) $x^3(x^2-6x+9)-4x(x^2-6x+9)=0$.

646. При яких значеннях a значення виразу $8a^3-4a^2+2a-1$:
а) дорівнює 0; б) дорівнює значенню виразу $4a^2+1$?

647. При яких значеннях x сума квадратів виразів $x+1$ і $x-1$:
а) на 6 більша за квадрат їх пів суми;
б) на 84 більша за їх добуток?

648. При яких значеннях a: значення виразу $a^3 + 3a^2 - a$ дорівнює 3?

Доведи твердження **(649, 650)**.

649. Різниця квадратів двох послідовних непарних чисел ділиться на 8.

650. Квадрат непарного числа при діленні на 8 дає в остачі 1.

Знайди корені рівняння **(651, 652)**.

651. а) $x^2(x^2 + 4x + 4) = (5x)^2 + 100x + 100$;
б) $4x^4 - 12x^3 + 9x^2 = 36x^2 - 108x + 81$.

652. а) $x^2(9x^2 - 6x + 1) = (6x)^2 - 24x + 4$;
б) $4x^4 + 56x^3 + 196x^2 = x^2 + 14x + 49$.

653. Розклади на множники вираз.
а) $x^4 - 10x^2 + 9$; б) $a^4 + 4b^4$; в) $x^4 + x^2 + 1$.

654.* Доведи тотожність.
$(a - b)^3 + (b - c)^3 - (a - c)^3 = -3(a - b)(b - c)(a - c)$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

655. Розв'яжи рівняння *Р. Декарта (1596–1650)*.
а) $y^3 - 8y^2 - y + 8 = 0$; б) $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$.

656. Запиши відповідні числові послідовності та доповни їх.

а)
б)
в)

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

657. Спрости вираз.
а) $(0{,}875 + 0{,}5^3)^{10}$; б) $(3^4 + 19)^8$; в) $(4^4 - 3^5 - 13)^{12}$.

658. Розв'яжи рівняння.
а) $(x - 3)^2 - x(x + 4) = -1$; б) $(4x + 5)(x - 2) - (2x - 1)^2 = -9$.

659. Знайди помилку в записі.

$$2\frac{6}{7} + 4\frac{8}{9} = 2\frac{6 \cdot 9}{7 \cdot 9} + 4\frac{8 \cdot 7}{9 \cdot 7} = 2\frac{54}{63} + 4\frac{8}{63} = 6\frac{62}{63}.$$

Перейди за посиланням та
- підсумуй головне в розділі https://vse.ee/cgbd
- ознайомся з історичними відомостями https://vse.ee/cgbc
- дай відповіді на запитання https://vse.ee/cgbb

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРІАНТ I

1. Розклади на множники многочлен.

а) $27 + a^3$; б) $x^3 - 2x^2y + xy^2$;

в) $(2x + 1)^2 - 49$; г) $c^3 + 3c^2 - 4c - 12$.

2. Доведи, що число $325^3 - 125$ ділиться на 320.

3. Розв'яжи рівняння $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = x^3 - 3x$.

ВАРІАНТ II

1. Розклади на множники многочлен.

а) $8c^3 - 1$; б) $a^4 - 2a^3c + a^2c^2$;

в) $(3x - 2)^2 - 64$; г) $a^3 + 2a^2 - 9a - 18$.

2. Доведи, що число $127^3 + 27$ ділиться на 130.

3. Розв'яжи рівняння $(x - 4)(x^2 + 4x + 16) = x^3 + 2x$.

ВАРІАНТ III

1. Розклади на множники многочлен.

а) $27n^3 + a^3$; б) $m^2n^2 - 2mn^2 + n^2$;

в) $(2 - 5x)^2 - 36$; г) $x^3 + 5x^2 - x - 5$.

2. Доведи, що число $332^3 - 8$ ділиться на 330.

3. Розв'яжи рівняння $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 4x$.

ВАРІАНТ IV

1. Розклади на множники многочлен.

а) $x^3 - 8z^3$; б) $x^5 - 2x^4 + x^3$;

в) $(1 - x)^2 - 25$; г) $n^3 + 2n^2 - 16n - 32$.

2. Доведи, що число $186^3 + 64$ ділиться на 190.

3. Розв'яжи рівняння $(x + 5)(x^2 - 5x + 25) = x^3 - 25x$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання №4

1. Знайди неповний квадрат суми виразів 4 і y.

А $16 + 8y + y^2$ **Б** $16 + y^2$
В $(16 + y)^2$ **Г** $16 + 4y + y^2$

2. Спрости вираз $(x - y)(x^2 + xy + y^2) - x^3$.

А y^3 **Б** $x^3 - y^3$ **В** $-y^3$ **Г** $2x^3 - y^3$

3. Розклади на множники многочлен $5a^2 - 5$.

А $5(a^2 - 5)$ **Б** $5(a - 1)^2$ **В** $5(a + 1)^2$ **Г** $5(a - 1)(a + 1)$

4. Яке з чисел є коренем рівняння $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$?

А 2 **Б** −2 **В** −4 **Г** 4

5. Розклади на множники двочлен $x^3 - 27$.

А $(x - 3)(x^2 - 3x + 9)$ **Б** $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$
В $(x - 3)(x - 3)$ **Г** $(x - 3)^3$

6. Знайди значення виразу $\left(\frac{z}{2}-3\right)\left(\frac{z^2}{4}+\frac{3z}{2}+9\right)$, якщо $z = 4$.

А −19 **Б** 19 **В** $-\frac{19}{2}$ **Г** $\frac{19}{2}$

7. Яке число не є коренем рівняння $4x^3 - 16x = 0$?

А 0 **Б** −2 **В** 2 **Г** −3

8. Запиши у вигляді добутку вираз $x^5 - 2x^4 + x - 2$.

А $(x - 2)(x^4 + 1)$ **Б** $(x + 2)(x^4 + 1)$
В $(x - 2)(x^3 + 1)(x + 1)$ **Г** $(x - 2)(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$

9. Спрости вираз $(y^4 - 4y^2 + 16)(y^2 + 4)$.

А $(4 + y^2)^3$ **Б** $y^6 + 64$
В $(y^4 - 16)(y^2 + 4)$ **Г** $(16 - y^2)^2$

10. Число $15^3 - 9^3$ не ділиться на:

А 2 **Б** 3 **В** 6 **Г** 12

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 4

1. Розклади на множники многочлен $3x^2 - 48$.

А $3(x^2 - 45)$ **Б** $3(x - 4)^2$
В $(3x - 48)(3x + 48)$ **Г** $3(x - 4)(x + 4)$

2. Розв'яжи рівняння $x^2 - 6x + 9 = 0$.

А 0 **Б** 3 **В** –3 **Г** 3 або –3

3. Подай у вигляді многочлена $(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$.

А $a^3 - 4$ **Б** $a^3 - 8$ **В** $(a - 2)^3$ **Г** $a^3 - 2$

4. Установи відповідність між виразами (1–3) та їх розкладом на множники (А–Д).

1 $2a - 8a^2$	**А** $a(a + 3)(a^2 - 3a + 9)$
2 $2a^2 - 4a + 2$	**Б** $2a(1 - 2a)(1 + 2a)$
3 $a^4 + 27a$	**В** $2a(1 - 4a)$
	Г $a(a - 3)(a + 3)$
	Д $2(a - 1)^2$

5. Знайди значення виразу, якщо $p = 0{,}897$.

$27p^3 - (3p - 1)(9p^2 + 3p + 1) + p + 2$.

6. Розклади многочлен на множники.

а) $3a^5b^3 - 24a^2b^3c^6$;
б) $25x^2 - 10xy + y^2 - 36$;
в) $8a^3 + 4a^2b - 2ab^2 - b^3$.

7. Спрости вираз $3a^2(a + 2) - 6a(a + 2) + 12a + 24$.

8. Розв'яжи рівняння.

а) $x^5 - 4x^3 = 0$;
б) $x^5 + 3x^4 - x^3 - 3x^2 = 0$;
в) $x^4 - 4x^3 + 16x - 16 = 0$.

Додаткове завдання

9. Розклади на множники вираз.

а) $a^4 + 4b^4$; б) $a^4 + 5a^2 + 4$.

РОЗДІЛ 3. ФУНКЦІЯ

«Немає жодної галузі людського знання, куди не входили б поняття про функції та їх графічне зображення.»

К. Ф. Лебединцев

Функція — одне з найважливіших понять математики, вона дає можливість досліджувати і моделювати не тільки стани, а й процеси. Дослідження процесів і явищ за допомогою функцій — один з основних методів сучасної науки. Ти вивчатимеш функції в усіх наступних класах й у вищих навчальних закладах.

У цьому розділі ти дізнаєшся про:

- функціональну відповідність;
- способи задання функції;
- графік функції;
- лінійну функцію;
- пряму пропорційність.

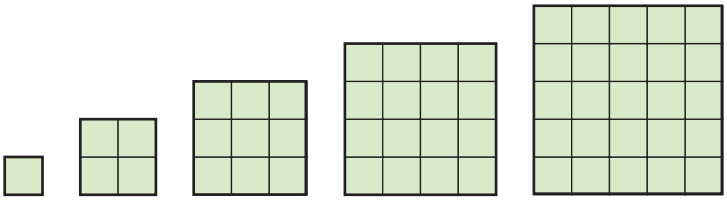
§ 16. Що таке функція?

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- функція — *function*, аргумент — *argument*
- область визначення — *domain*, область значень — *range*

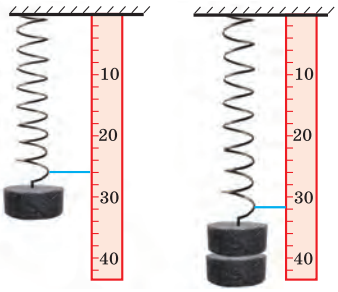
Можна навести чимало прикладів залежностей і відповідностей між змінними.

- Площа квадрата залежить від довжини його сторони. Кожному значенню довжини сторони квадрата відповідає єдине значення його площі (мал. 16.1).



Мал. 16.1

- Маса куска крейди залежить від його об'єму. Кожному значенню об'єму V куска крейди відповідає єдине значення його маси m.
- Кожному значенню маси важка, підвішеного до пружини, відповідає певна довжина пружини (мал. 16.2).
- Кожному значенню температури повітря t відповідає єдине значення висоти h стовпчика рідини в термометрі.
- Кожному значенню змінної x відповідає єдине значення виразу $2x - 1$.



Мал. 16.2

Для науки і практики важливо вміти досліджувати такі відповідності, які називають *функціональними відповідностями*, або *функціями*.

У розглянутих прикладах ідеться про зв'язок між двома змінними. Одні з них, значення якої вибирають довільно, називають *незалежною змінною*, або *аргументом*. Іншу змінну, яка залежить від аргументу, називають *залежною змінною*, або *функцією*.

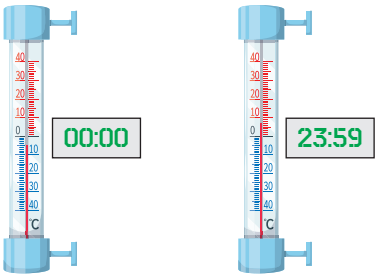
Наприклад, незалежними змінними (аргументами) є: довжина сторони квадрата, об'єм куска крейди, маса важка, температура повітря. Їх значення можна обирати довільно. Залежними змінними будуть: площа квадрата, маса крейди, довжина пружини, висота стовпчика рідини в термометрі.

Якщо кожному значенню незалежної змінної x відповідає єдине значення залежної змінної y, то змінну y називають *функцією* від x.

За таких умов змінну x називають аргументом функції y, а відповідність між x і y — функціональною відповідністю, або функцією.

Усі значення, які може набувати аргумент функції (x), утворюють *область визначення функції* (D). А всі відповідні значення функції (y) — *область значень функції* (E).

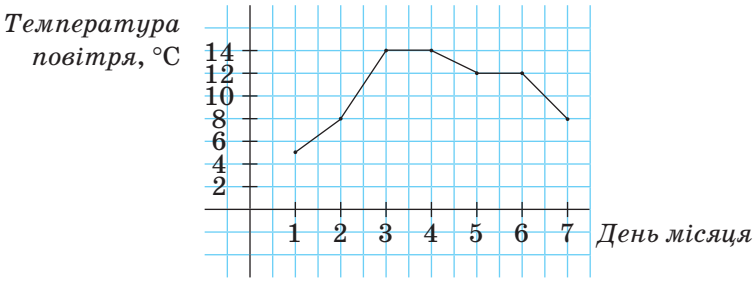
- Висота h стовпчика рідини в термометрі — функція від температури t (мал. 16.3).
  h — функція,
  t — аргумент.
  Якщо за добу температура t змінилася від -5° до 7°, висота h — від 20 см до 32 см, то областю визначення функції є проміжок від -5° до 7°, а областю значень — проміжок від 20 см до 32 см.



Мал. 16.3

За допомогою функцій моделюють і досліджують різноманітні процеси, що відбуваються навколо нас. Для цього реальну ситуацію перекладають зі звичайної мови на алгебраїчну, тобто складають математичну модель даної відповідності.

Зображені графік (мал. 16.4) і таблиця — моделі функціональних відповідностей між конкретними днями місяця і середньою температурою повітря в ці дні.



Мал. 16.4

01.11	02.11	03.11	04.11	05.11	06.11	07.11
+5°	+8°	+14°	+14°	+12°	+12°	+8°

Функцію можна задати формулою.

- $S = a^2$ — відповідність між довжиною a сторони квадрата і його площею S;
- $l = 2\pi r$ — відповідність між радіусом r кола і довжиною l;
- $y = 2x - 1$ — відповідність між значеннями змінної x і змінної y.

Таке задання дає можливість знаходити значення функції для довільного значення аргументу.

Якщо функцію задають формулою і нічого не говорять про область її визначення, то вважають, що ця область — множина всіх значень змінної, при яких формула має зміст. Наприклад, область визначення функції $y = 2x - 1$ — множина всіх чисел, область визначення функції $y = \frac{3}{x-1}$ — множина всіх чисел, крім числа 1, оскільки на 0 ділити не можна.

Областю визначення функції, яка задається многочленом з однією змінною, є множина всіх чисел.

Функцію можна задати таблицею.

Наприклад, функцію $y = 2x - 1$ для перших десяти натуральних значень x можна задати у вигляді такої таблиці.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

Тут: область визначення: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;
область значень: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

Табличний спосіб задання функції зручний тим, що для певних значень аргументу до таблиці вже занесено відповідні значення функції, тому не треба робити будь-яких обчислень. Незручний він тим, що таблиця займає більше місця. До того ж, як правило, містить значення функції не для всіх значень аргументу, а тільки для деяких.

Функцію можна задати словами.

Наприклад, якщо кожному цілому числу поставити у відповідність його квадрат, то одержимо функцію, областю визначення якої є множина цілих чисел, а областю значень — множина квадратів натуральних чисел і число 0.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Слово *функція* має й інше значення: діяльність, виконання. Наприклад, говорять про функції старости класу, функції печінки в організмі людини. І слово «аргумент» нерідко використовують в іншому значенні. У логіці під словом «аргумент» розуміють доказ, підставу, на основі якої встановлюють істинність або хибність того чи іншого судження.

Зверни увагу на співвідношення понять «функціональна залежність» і «функціональна відповідність» (мал. 16.5). З малюнка видно, що існують відповідності, які не є залежностями. Наприклад, формули $y = 5 + 0 \cdot x$, $y = 1^x$ задають функції, але в них змінні y не залежать від x.

Мал. 16.5

На координатній прямій, крім точок з раціональними координатами, існує безліч таких точок, координати яких — числа не раціональні. Їх називають *ірраціональними*.

Раціональні числа разом з ірраціональними утворюють **множину дійсних чисел (R)**. Докладно з дійсними числами та їх властивостями ти ознайомишся у 8 класі. А доти, маючи на увазі множину дійсних чисел, будемо використовувати словосполучення «усі числа».

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Сформулюй означення функції та наведи приклад.
2. Що називають аргументом функції?
3. Що називають: а) областю визначення функції;
   б) областю значень функції?
4. Як можна задавати функції?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Знайди значення функції, заданої формулою $y = 2x + 7$, які відповідають таким значенням аргументу: 0; 4; 0,8.

   Розв'язання.

   Якщо $x = 0$, то $y = 2 \cdot 0 + 7 = 7$;
   якщо $x = 4$, то $y = 2 \cdot 4 + 7 = 15$;
   якщо $x = 0{,}8$, то $y = 2 \cdot 0{,}8 + 7 = 8{,}6$.

2. Знайди область визначення функції.

   а) $y = 1 - 5x + 3x^2 + x^3$; б) $y = \dfrac{5}{x^2 - 9}$.

Розв'язання.

а) Формула, за допомогою якої задається функція, — многочлен, а тому її область визначення — множина всіх чисел;

б) змінна x може набувати будь-яких значень, крім тих, при яких знаменник дробу $\frac{5}{x^2-9}$ дорівнює нулю.

$x^2 - 9 \neq 0$, $(x - 3)(x + 3) \neq 0$, звідси $x \neq 3$ або $x \neq -3$.
Отже, область визначення функції — множина усіх чисел, крім $x = 3$ і $x = -3$.

ВИКОНАЙ УСНО

660. Чи залежить периметр квадрата P від довжини його сторони a? Чи є P функцією від a?

661. Об'єм куба знаходять за формулою $V = a^3$, де a — довжина ребра куба. Чи задає ця формула функцію? Який її аргумент?

662. Площу круга знаходять за формулою $S = \pi r^2$. Чи задає ця формула функцію? Яка її область визначення?

663. Густина міді — 8,6 г/см^3. Вирази формулою відповідність між об'ємом V куска міді та його масою m. Чи є m функцією від V? Який її аргумент? Яка область визначення?

664. Швидкість автобуса — 55 км/год. Як залежить пройдений автобусом шлях s від часу t? Чи є змінна s функцією від t?

665. Площа прямокутника зі сторонами 5 см і x см дорівнює s см^2. Чи є змінна s функцією від x? Який її аргумент?

666. Функцію задано формулою $y = 3x - 1$. Знайди значення функції, що відповідає значенню аргументу -2.

А 8 **Б** -9 **В** -7 **Г** 5

667. Установи відповідність між значенням аргументу (1–3) та значенням функції (А–Г), заданої формулою $y = 4x + 1$.

1 2,5 **2** $-2,5$ **3** -3
А -11 **Б** 9 **В** -9 **Г** 11

668. Про яку з функцій не можна сказати, що її областю визначення є всі числа?

А $y = 12x$ **Б** $y = 12 - x$ **В** $y = \frac{x}{12}$ **Г** $y = \frac{12}{12 - x}$

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО **РІВЕНЬ А**

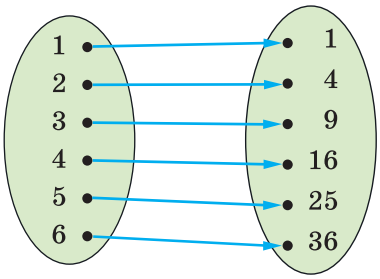
669. Виразіть формулою відповідність між довжиною a сторони рівностороннього трикутника і його периметром P. Чи є змінна P функцією від a?

670. Міри суміжних кутів — α і β. Задай формулою залежність α від β. Чи є α функцією від β? Який її аргумент?

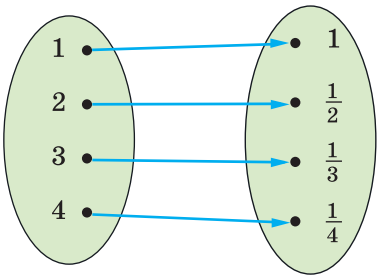
671. Чи залежить діаметр кола d від його радіуса r? Вирази цю залежність формулою.

672. Відповідність між шістьма першими натуральними числами та їх квадратами зображено на малюнку 16.6. Чи є ця відповідність функцією? Запиши її: а) область визначення; б) область значень.

673. На малюнку 16.7 зображено відповідність між числами 1, 2, 3, 4 та оберненими до них числами. Чи є ця відповідність функцією? Запиши її: а) область визначення; б) область значень.



Мал. 16.6



Мал. 16.7

674. Функцію задано формулою $y = \frac{6}{x}$. Заповни таблицю.

x	–6	–3	–2	–1	1	2	3	6
y								

675. The function is given by the formula $y = 0{,}3x$. Fill in the table.

x	–10	–3					
y			–0,3	0	1,2	1,5	15

676. Функцію задано формулою $y = x^2 + 3$. Склади таблицю її значень для перших десяти натуральних значень її аргументу.

677. Склади таблицю значень функції $m = 42 - 3n$ для перших десяти натуральних значень змінної n.

678. Знайди область визначення функції, заданої формулою:

а) $y = 3x - 7$; б) $y = \frac{x}{x+5}$; в) $y = 5x^2 - x + 3$.

679. Учень мав 50 грн. Він купив x наліпок по 6 грн, після чого в нього залишилось y грн. Задайте формулою функцію, яка виражає залежність y від x. Яка її область визначення?

680. Ціна 1 кг товару — 250 грн. Як залежить вартість цього товару y від його маси m? Яка вартість товару, маса якого дорівнює 18 кг? Товар якої маси коштує 125 грн?

681. Нафта проходить трубою зі швидкістю 12 т/год. Скільки нафти проходить такою трубою за 3 год; за t год? Напиши відповідну формулу.

682. Скільки хвилин у t год? Вирази цю відповідність формулою. Склади таблицю для 10 значень аргументу.

683. Запиши формулу функції, якщо:

а) значення функції протилежні подвоєним значенням аргументу;

б) значення функції в 5 разів більші від значень аргументу.

684. Функцію задано формулою $y = 2x + 5$. Знайди значення функції, якщо x дорівнює: 1; 0; −3; 7; 1000.

685. Знайди значення функції, заданої формулою:

а) $y = 8x - 5$, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює −2; 0; 1,5; 12; 25;

б) $y = -\frac{x}{2} + 1$, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює −8; −1; 0; 1; 20.

686. Функцію задано формулою $y = \frac{2}{3}x$. При якому значенні аргументу значення функції дорівнює 20?

687. Знайди значення аргументу, при якому:

а) значення функції $y = 3x + 2$ дорівнює 8; 2;

б) значення функції $y = \frac{4}{x-3}$ дорівнює −2; 2.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

688. Напиши формулу, яка виражає залежність кута α при основі рівнобедреного трикутника від кута β при його вершині. Чи задає ця формула функцію? Яка її область визначення?

689. Швидкість автомобіля — 70 км/год. Вирази формулою залежність шляху s, пройденого цим автомобілем, від часу t. Заповни таблицю.

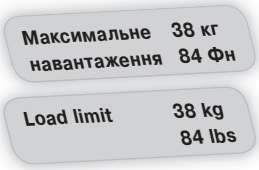
t, год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s, км										

690. Турист перебуває на відстані 5 км від міста і наближається до нього зі швидкістю 4 км/год. На якій відстані від міста буде турист через 10; 20; 30 хв? Чи є ця відстань функцією від часу? Задай її формулою. Яка її область визначення?

691. На складі було 600 т вугілля. Щодня зі складу вивозили по 40 т вугілля. Вирази формулою залежність кількості вугілля m на складі від часу t. Чи є ця залежність функцією?

692. В одному дюймі — 2,54 см. Вирази формулами відповідності, які дають змогу переводити довжини в дюймах у сантиметри і в сантиметрах — у дюйми. Склади відповідні таблиці.

693. На багажних полицях літака містяться такі надписи. Виразіть формулами відповідності, які дають змогу переводити масу в кілограмах у фунти і масу у фунтах — у кілограми. Використовуйте числа, округлені до сотих.



694. Довжина кола $l = 2\pi r$, де r — його радіус. Вирази r через l.

695. З формули $I = \dfrac{U}{R}$ вирази: а) U; б) R.

696. Периметр квадрата $P = 4a$, де a довжина його сторони. Вирази a через P.

697. Знайди область визначення функції.

а) $y = \dfrac{3}{4}x$; б) $y = \dfrac{3}{4x}$; в) $y = \dfrac{3}{4+x}$; г) $y = \dfrac{1}{x(x-3)}$; ґ) $y = x^2$.

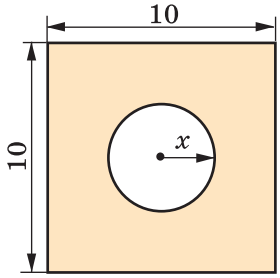
698. Знайди область визначення функції, заданої формулою.

а) $y = x(x + 5)$; б) $y = (x^2 + 6)(x + 8)$; в) $y = \dfrac{16}{x+5}$;

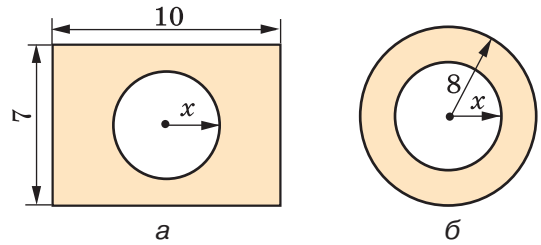
г) $y=\dfrac{10}{8x-1}$; ґ) $y=\dfrac{x}{x^2-36}$; д) $y=\dfrac{2x}{1-25x^2}$.

699. Із квадрата, сторона якого дорівнює 10 см, вирізали круг радіуса x см (мал. 16.8). Як залежить площа утвореної фігури від x? Знайди область визначення цієї функції.

700. Запишіть формулу, за допомогою якої знаходять площі зафарбованих фігур, зображених на малюнку 16.9, *а*, *б*. Знайдіть область визначення одержаних функцій.



Мал. 16.8



Мал. 16.9

701. Склади таблицю значень функції для цілих значень аргументу x, якщо $-3 \le x \le 3$:

а) $y=\begin{cases}2x+5, \text{ якщо } x\le 0,\\ -2x+5, \text{ якщо } x>0;\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}x^2+3, \text{ якщо } x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}+3, \text{ якщо } x>0.\end{cases}$

702. З'ясуй числові дані, які характеризують народжуваність в Україні за роки існування незалежної України. Запиши дані в таблицю. Чи є така відповідність функцією? Побудуй її графік за допомогою «Майстра діаграм». Коли народжуваність була найвищою, а коли — найнижчою?

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

703. На дверях будинку встановлено домофон із цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Для кожної квартири надається кодовий ключ із двох будь-яких цифр. Скільки кодових ключів є вільними, якщо в будинку 96 квартир?

704. Знайди останню цифру значення виразу.

а) $77^{77}-33^{33}+22^{22}$; б) $142^{2003}-2003^{142}$;

в) $248\cdot 157^{326}+842\cdot 326^{157}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

705. Велосипедист їде з одного села в інше зі швидкістю 10 км/год. Якби він їхав зі швидкістю 12 км/год, то приїхав би на годину раніше. Яка відстань між селами?

706. Познач на координатній площині точки $A(5;\ 2)$, $B(3;\ 2)$, $C(0;\ 2)$, $M(-1;\ 2)$, $H(-3;\ 2)$, $P(2;\ 2)$. Чи всі вони лежать на одній прямій? Які координати мають точки, що є серединами відрізків AB, AC, AM, AH і AP?

707. Розв'яжи рівняння.

а) $4(x - 3) + 2(5 - x) = 8$; б) $7(5 - y) + 8(y - 3) = 18$.

§ 17. Графік функції

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- графік функції — *graph of a function*
- координатна площина — *coordinate plane*

Проведемо на площині дві перпендикулярні координатні прямі x і y, які перетинаються в початку відліку — точці O (мал. 17.1).

Площину, на якій задано такі координатні прямі, називають *координатною* площиною, пряму x — віссю абсцис, пряму y — віссю ординат, точку O — початком координат.

Мал. 17.1

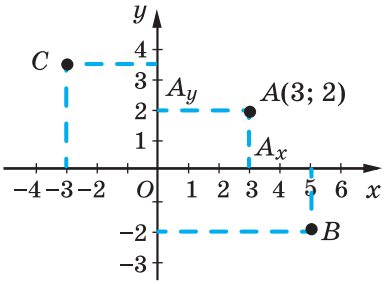
Кожній точці координатної площини відповідає пара чисел (мал. 17.2).

Говорять, що точка A має координати 3 і 2 (мал. 17.2).

Записують: $A(3;\ 2)$.

абсциса ордината

Першою завжди пишуть абсцису.



Мал. 17.2

Кожній парі чисел на координатній площині відповідає єдина точка.

$$B(5;\ -2) \text{ і } C\left(-3; 3\frac{1}{2}\right).$$

Нехай маємо функцію $y = 2x - 3$, де $-1 \le x \le 5$. Складемо таблицю значень цієї функції для цілих значень аргументу.

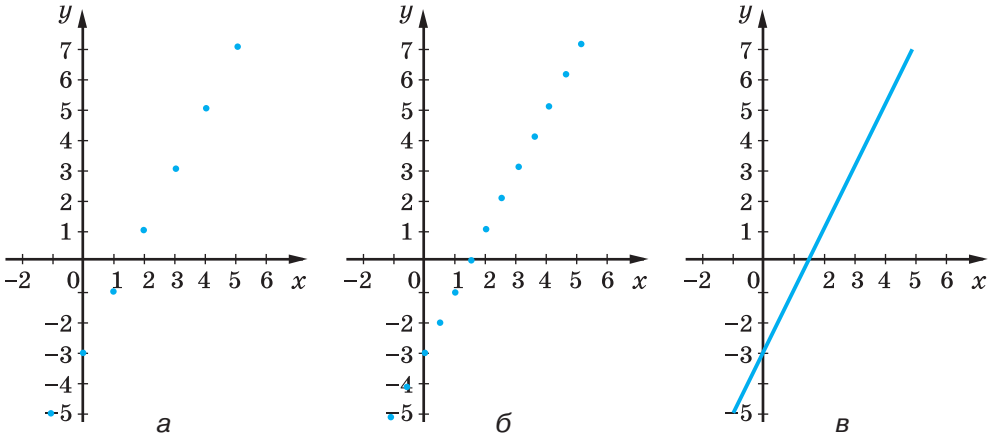
x	−1	0	1	2	3	4	5
y	−5	−3	−1	1	3	5	7

Нанесемо на координатну площину точки, координати яких подано в цій таблиці. Побудуємо точки з координатами (−1; −5), (0; −3) і т. д. Дістанемо 7 точок (мал. 17.3, *а*), усі вони належать одній прямій.

Надамо аргументу x ще кілька дробових значень й обчислимо відповідні їм значення функції.

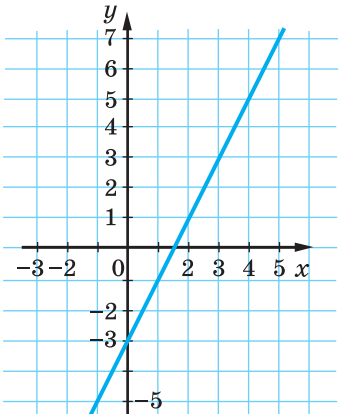
x	−0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
y	−4	−2	0	2	4	6

Доповнимо малюнок 17.3, *а* точками, координати яких подано в цій таблиці (мал. 17.3, *б*). Вони також розміщені на тій самій прямій. Якщо надавати аргументу x інших значень (таких, що $-1 \le x \le 5$) і позначати на координатній площині відповідні точки, то ці точки утворять відрізок (мал. 17.3, *в*). Цей відрізок — графік функції $y = 2x - 3$, область визначення якої — проміжок $-1 \le x \le 5$, а область значень $-5 \le y \le 7$.



Мал. 17.3

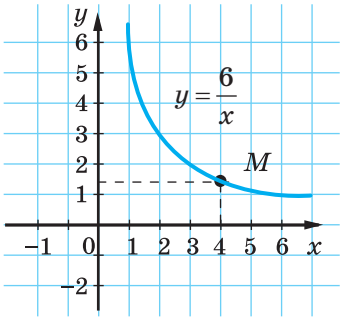
Якщо побудований відрізок продовжити уявно в обидва боки, то одержимо пряму. Ця пряма — графік функції, заданої тією самою формулою ($y = 2x - 3$), але на множині всіх чисел (мал. 17.4).



Мал. 17.4

Графіком функції **називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, ординати — відповідним значенням функції.**

Якщо описаним способом побудувати графік функції $y = \frac{6}{x}$ за умови, що $1 \le x \le 6$, то дістанемо криву лінію (мал. 17.5).



Мал. 17.5

Маючи графік функції, можна для будь-якого значення аргументу (з області визначення) вказати відповідне значення функції. Наприклад, знайдемо значення функції $y = \frac{6}{x}$, якщо $x = 4$. Шукаємо на осі x точку з абсцисою 4, на графіку знаходимо точку M з абсцисою 4, а на осі ординат — ординату точки M; вона дорівнює 1,5. Отже, користуючись графіком функції, можна скласти таблицю її значень, тобто графік задає функцію.

Графічний спосіб задання функції зручний своєю наочністю. Дивлячись на графік, одразу можна з'ясувати властивості функції:

- область визначення і область значень функції;
- при яких значеннях аргументу значення функції додатні, при яких — від'ємні, при яких дорівнюють нулю;
- на яких проміжках функція *зростає*, а на яких — *спадає*.

Функцію називають *зростаючою*, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Функцію називають *спадною*, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Функція на малюнку 17.4 є зростаючою, а функція на малюнку 17.5 — спадною.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

У сучасній математиці функції відіграють важливу роль. Їх часто використовують для створення математичних моделей різних процесів, явищ. Коли росте дитина, змінюються її зріст, об'єм, маса; коли злітає літак, змінюються його швидкість, відстань від поверхні землі, маса пального в баках; коли будують висотний будинок, змінюються його висота, маса, вартість тощо. Усі такі процеси (а їх — мільярди) зручно моделювати за допомогою функцій. Функція — математична модель реальних процесів. Докладніше про це ти дізнаєшся в старших класах.

Існують прилади, які самі викреслюють графіки функцій: барографи, термографи, кардіографи тощо. Наприклад, кардіограф креслить графік-кардіограму (мал. 17.6), який характеризує роботу серця. Прилад термограф відмічає зміну температури за добу, тиждень, місяць. Фахівцям треба вміти читати такі графіки.

Мал. 17.6

ПЕРЕВІР СЕБЕ

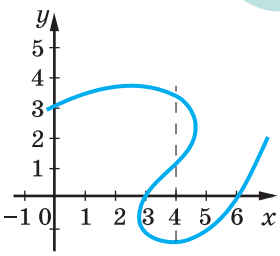
1. Що називають координатними осями, початком координат?
2. Що називають абсцисою, ординатою, координатами точки?
3. Що називають графіком функції?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Чи є графіком функції лінія, зображена на малюнку 17.7?

Розв'язання. На даній лінії є три різні точки з абсцисою 4. Якби така функція y від аргументу x існувала, то одному значенню $x = 4$ відповідали б три різні значення функції. За означенням функції такого не може бути.

Відповідь. Дана лінія не є графіком функції.



Мал. 17.7

2. Визнач, чи належать графіку функції $y=\frac{4}{x}-3$ точки $A(-4;\ -4)$; $B(-2;\ -1)$.

Розв'язання. Якщо точка належить графіку функції, то її координати мають задовольняти рівність, що задає дану функцію. Перевіримо це для кожної з точок A і B.

Підставимо координати точки $A(-4;\ -4)$ в рівність $y=\frac{4}{x}-3$.

Маємо: $-4=\frac{4}{-4}-3$; $-4=-1-3$; $-4=-4$. Отже, точка A належить графіку функції $y=\frac{4}{x}-3$.

Для точки $B(-2;\ -1)$: $-1=\frac{4}{-2}-3$; $-1=-2-3$; $-1\neq-5$.

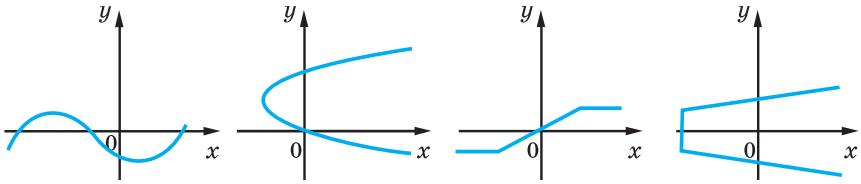
Отже, точка B не належить графіку функції $y=\frac{4}{x}-3$.

Відповідь. Точка A належить графіку, а B — не належить.

ВИКОНАЙ УСНО

708. Провідміняй слово:
а) *аргумент*; б) *функція*; в) *графік*.

709. Чи є графіками функцій лінії, зображені на малюнку 17.8?



Мал. 17.8

710. Доведи, що графік функції $y=x^2+1$ не перетинає вісь абсцис.

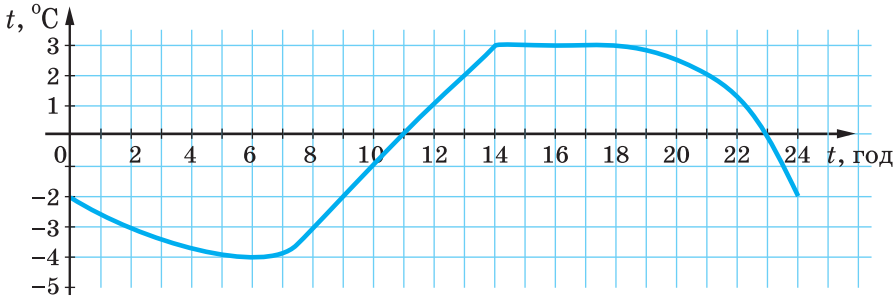
711. Чи перетинає вісь абсцис графік функції $y=x^2-9$?

712. Графік якої з функцій проходить через початок координат?
а) $y=0{,}5x-1$; б) $y=-25x^2$; в) $y=3x$;
г) $y=6x+2$; ґ) $y=3-3x$; д) $y=x-3x^2$.

713. Яка з точок належить графіку функції $y=7x-2$?
А (0; 4) **Б** (−2; −12) **В** (1; 5) **Г** (−1; −7)

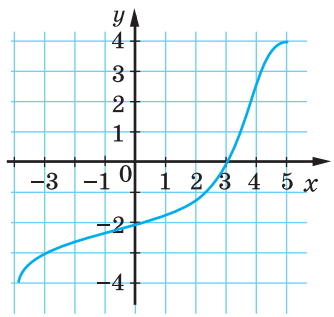
714. На малюнку 17.9 зображено графік зміни температури повітря (в градусах Цельсія) за добу (по годинах). Установи:
а) проміжок часу, впродовж якого температура була додатною; від'ємною;

б) о котрій годині температура дорівнювала −3°; −1°; 0°; 2°;
в) яка температура була о 6 год ранку; о 14 год; о 21 год;
г) із якого і по який час температура знижувалася; підвищувалася;
ґ) упродовж якого часу температура була сталою; якого значення при цьому досягла;
д) проміжок часу, коли температура була нижча, ніж −3°.

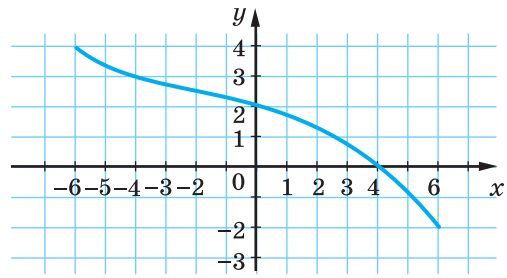


Мал. 17.9

715. Установи відповідність між графіками функцій (1–2) та їх областями значень (А–Г).



1



2

А $-2 \le y \le 4$
В $-4 \le y \le 4$

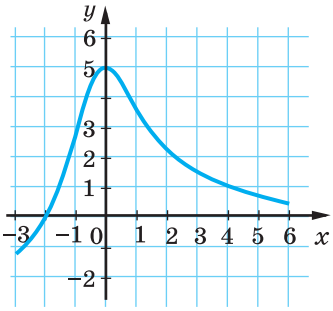
Б $-6 \le y \le 6$
Г $-4 \le y \le 5$

Визнач для кожної з функцій її область визначення. Яка з функцій зростаюча, а яка — спадна?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО **РІВЕНЬ А**

716. Познач на координатній площині точки $A(5; 4)$, $B(3; 3)$, $C(1; 0)$, $D(7; 3)$, $E(-2; 5)$, $F(-2; -2)$. Побудуй прямі AC, BD, EF. Знайди координати точок, у яких ці прямі попарно перетинаються.

717. На малюнку 17.10 зображено графік деякої функції. Знайди:
а) значення цієї функції, які відповідають таким значенням аргументу: −1; 0; 3; 4;
б) значення аргументу, які відповідають таким значенням функції: −1; 0; 3; 5.



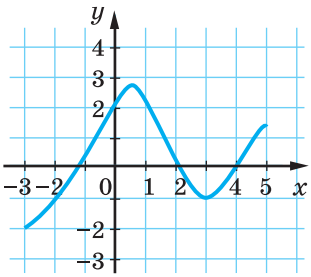
Мал. 17.10

718. За графіком функції (мал. 17.11) заповни таблицю.

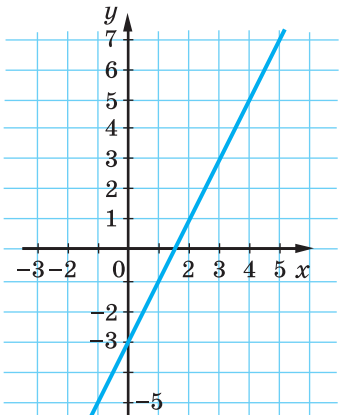
x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y									

719. За графіком функції (мал. 17.12) заповни таблицю.

x	−1	−0,5			1,5			3	3,5
y			−3	−1		1	2		

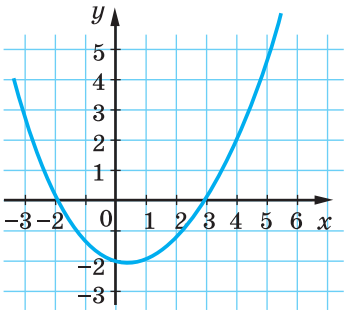


Мал. 17.11



Мал. 17.12

720. За малюнком 17.13 знайди:
а) значення y, для яких $x = -3; -1; 0; 1; 4$;
б) значення x, для яких $y = -2; -1; 0; 1; 3$;
в) значення x, для яких значення y додатні;
г) значення x, для яких значення y від'ємні.

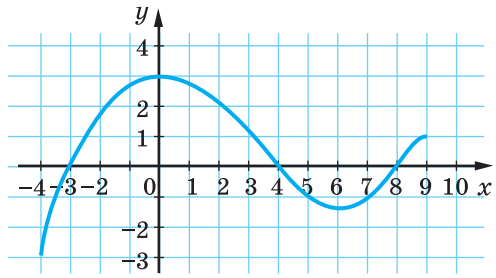


Мал. 17.13

721. На малюнку 17.14 зображено графік деякої функції.

1. Знайди: а) область визначення функції; б) значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює −4; −3; 0; 2; 3; 4; 6.

2. При яких значеннях аргументу: а) значення функції дорівнює −1; 0; 2; 3; б) функція набуває додатних значень; в) функція зростає; г) функція спадає?



Мал. 17.14

722. Функцію задано формулою $y = \frac{1}{2}x$, якщо $1 \le x \le 12$. Заповни таблицю і побудуй графік даної функції.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y												

723. Визнач, чи належать графіку функції $y = -2x - 1$ точки.
а) $A(5; 1)$; б) $B(-1; 3)$; в) $C(-1; -3)$; г) $D(3; -7)$.

724. Які з точок $A(5; -4)$, $B(3; 3)$, $C(1; 0)$, $D(1; 7)$, $E(-2; 5)$ належать графіку функції?
а) $y = 5x + 2$; б) $y = -x + 1$;
в) $y = x^2 + 1$; г) $y = 10x - 3$.

Побудуй графік функції **(725, 726)**.

725. а) $y = -x$, якщо $-5 \le x \le 4$; б) $y = 0{,}5x + 3$, якщо $-6 \le x \le 6$.

726. а) $y = 2x$, якщо $-3 \le x \le 6$; б) $y = 2x - 1$, якщо $0 \le x \le 7$.

727. Функцію $y = 0{,}5x + 3$ задано на множині натуральних чисел, не більших від числа 8. Побудуй її графік.

728. Функцію $y = 5 - x$ задано на множині цілих чисел, що задовольняють умову $-7 \le x \le 7$. Побудуй графік цієї функції.

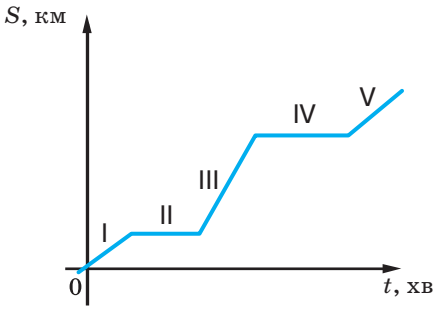
729. Побудуй графік функції, заданої формулою $y = 4 - 2x$. Користуючись цим графіком, знайди:
а) значення y, для яких $x = 0; 1; -1; 2; -2; 2{,}5$;
б) значення x, для яких $y = -6; -2; 0; 4$;

в) значення x, для яких значення y додатні;
г) значення x, для яких значення y від'ємні.

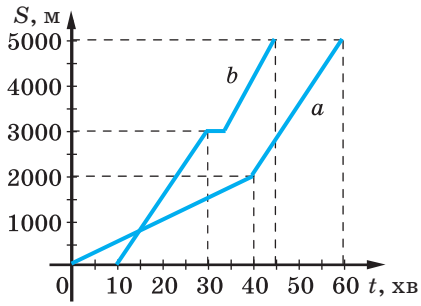
730. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = \frac{x-4}{2}$.
За допомогою графіка знайдіть:
а) значення x, для яких $y = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$;
б) значення y, для яких $x = -2; 0; 2; 4; 6; 8$;
в) значення x, для яких значення y додатні;
г) значення x, для яких значення y від'ємні.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

731. Марина вирушила до Праги на конференцію. Вона взяли таксі з дому до аеропорту і з аеропорту до готелю. Яка частина графіка (мал. 17.15) відображає її рух на таксі до готелю?



Мал. 17.15



Мал. 17.16

732. На малюнку 17.16 зображено графіки руху пішохода (лінія a) і велосипедиста (лінія b). Користуючись графіком, визначте:
а) чи одночасно вони почали рухатись;
б) чи сталою була швидкість кожного.

733. Графік якої функції проходить через точку $A(3; -2)$?
а) $y = 3x - 8$; б) $y = 2(x - 4)$; в) $y = 7(1 - 5x)$;
г) $y = 3x - 2$; ґ) $y = 2\frac{1}{3}x - 9$; д) $y = \frac{1}{7}(1 - 5x)$.

734. Визнач, чи належать графіку функції дані точки.
а) $y = 0{,}5x + 4$; $A(4; 6)$, $B(-8; 0)$, $C(2; 5)$;
б) $y = -12x + 17$; $A(1; 5)$, $B\left(-\frac{1}{3}; 11\right)$, $C(0{,}5; 11)$.

735. Визнач, чи належать графіку функції дані точки.

а) $y = x(x - 5)$; $A(0; -5)$, $B(5; 0)$, $C(0; 0)$;

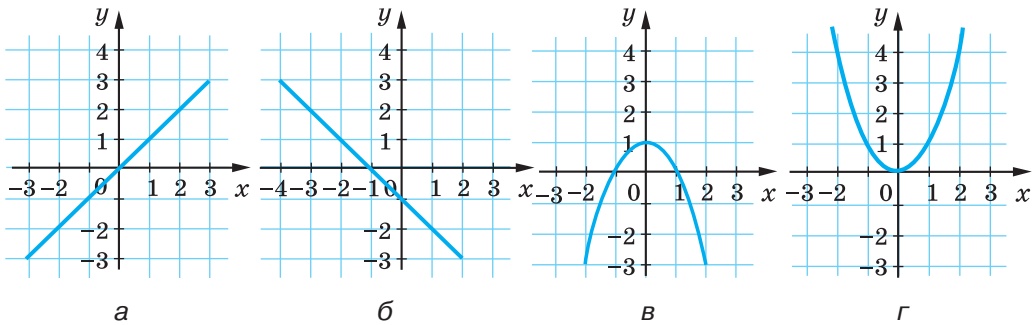
б) $y = 4 - \frac{8}{x}$; $A(1; -4)$, $B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $C(4; -2)$.

736. Determine whether the points belong to the graph of the function.

a) $y = \frac{1}{x-6}$; $A(7; 1)$, $B(2; 0)$, $C\left(3; \frac{1}{3}\right)$;

b) $y = (6 - x)^2$; $A(7; -1)$, $B(8; 4)$, $C(4; 4)$.

737. Функцію задано графічно (мал. 17.17). Для кожного з випадків *а–г* складіть таблицю чотирьох її значень. Спробуйте задати функції *а* і *б* формулами.



Мал. 17.17

Побудуй графік функції та опиши її властивості **(738, 739)**.

738. а) $y = 1{,}5x + 2$, якщо $-3 < x < 4$;

б) $y = 4 - 2t$, якщо $-2 \le t \le 5$.

739. а) $y = \frac{x+6}{2}$, якщо $-8 \le x \le 14$; б) $y = -\frac{1}{5}x$, якщо $-5 \le x \le 5$.

За допомогою графічного калькулятора Desmos

https://www.desmos.com/calculator?lang=en

побудуй графік кожної функції та з'ясуй, які з даних функцій зростаючі, а які — спадні **(740, 741)**.

740. а) $y = 3 - 2x$; б) $y = 0{,}1x$; в) $y = \frac{3x-1}{5}$.

741. а) $y = 2x - 5$; б) $y = -\frac{1}{5} + 2x$; в) $y = \frac{17-x}{5}$.

742. Побудуй графік функції, заданої формулою $y = 2(1 - x)$. Знайди значення аргументу, при яких значення функції більші за -3 і менші від 7.

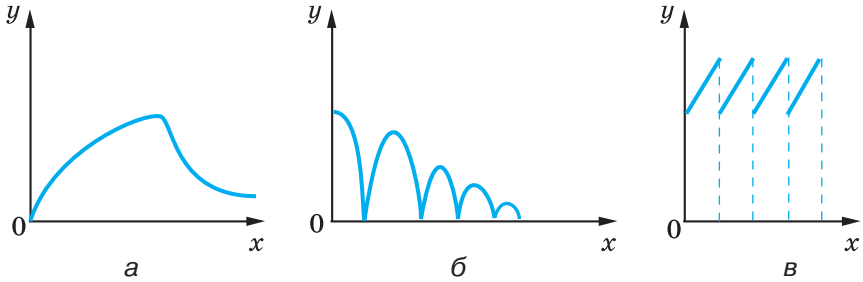
743. Графік функції $y = 2x + m$ проходить через точку $A(-2; 5)$. Знайди значення m.

744. Графік функції $y = kx + 2$ проходить через точку $B(3; 8)$. Знайди значення k.

745. Функцію задано формулою $y = x^2 - m$. При якому значенні m графік цієї функції проходить через початок координат?

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

746. Установіть, який із графіків (мал. 17.18) відповідає кожній з описаних ситуацій.



Мал. 17.18

а) На газоні росте трава, яку регулярно викошують (x — час, y — висота трави);
б) груша росте, потім її зривають і висушують (x — час, y — маса груші);
в) м'яч падає з деякої висоти на підлогу (x — час, y — висота м'яча над підлогою).

747. Доведи тотожність $(n^2 + 1)^2 - (n^2 - 1)^2 = 4n^2$. Користуючись нею, доведи, що квадрат кожного парного числа дорівнює різниці квадратів двох деяких цілих чисел.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

748. Розв'яжи рівняння.

а) $(x + 3)^2 = x^2 + 9x$;
б) $(y - 5)^2 = y(y + 2)$;
в) $(1 - z)^2 = 3 + z^2$;
г) $(7 - x)^2 - x^2 = 35$.

749. Підприємиця купує у фермера картоплю зі знижкою 10 % її оптової ціни, а продає картоплю в роздріб за ціною, що перевищує оптову на 10 %. Який відсоток прибутку має підприємиця?

750. Спрости вираз.

а) $10x^2y(0{,}2x + 2y)(-0{,}2x + 2y)$;

б) $\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right)\cdot(-9xy)$.

§ 18. Лінійна функція

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- лінійна функція — *linear function*
- пряма пропорційність — *direct variation*

Багато функцій, які доводиться досліджувати, можна задати формулою $y = kx + b$, де k і b — деякі числа.

Наприклад, якщо маса порожньої бочки дорівнює 30 кг, а густина бензину — 0,8 кг/дм^3, то залежність між масою m бочки з бензином і об'ємом V л бензину в ній можна виразити формулою $m = 0{,}8V + 30$.

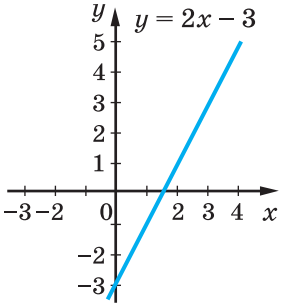
Якщо маса 1 м дроту дорівнює 50 г, а котушки без дроту — 200 г, то залежність між масою m котушки з дротом і довжиною l намотаного на ній дроту можна виразити формулою $m = 50l + 200$ (мал. 18.1). Такі функції називають лінійними.

Мал. 18.1

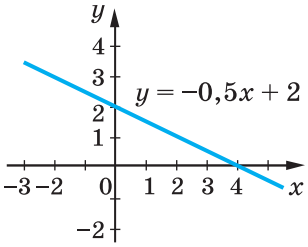
Лінійною **називають функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де x — аргумент, k і b — деякі числа.**

Розглянемо дві лінійні функції, задані на множині всіх чисел формулами $y = 2x - 3$ і $y = -0{,}5x + 2$.

Побудуємо графіки даних функцій (мал. 18.2, 18.3).



Мал. 18.2



Мал. 18.3

Бачимо, що графік кожної з наведених функцій — пряма.

Графік кожної лінійної функції, заданої на множині всіх чисел, — пряма.
І кожна пряма на координатній площині, не перпендикулярна до осі абсцис, — графік деякої лінійної функції.

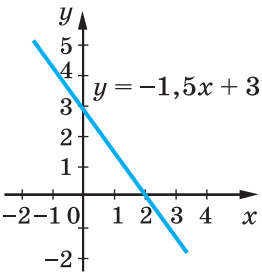
Це буде доведено у старших класах.

Для побудови прямої, якою є графік кожної лінійної функції, достатньо знати координати двох точок. Щоб побудувати графік функції $y = -1{,}5x + 3$, треба скласти таблицю для двох будь-яких значень аргументу.

Наприклад:

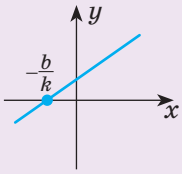
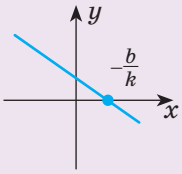
x	0	2
y	3	0

Позначимо на координатній площині точки з координатами (0; 3) і (2; 0) та проведемо через них пряму (мал. 18.4). Це і є графік функції $y = -1{,}5x + 3$.

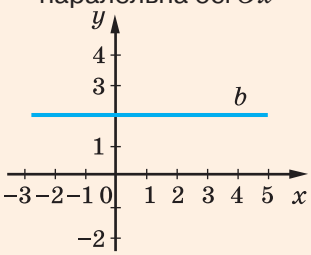


Мал. 18.4

Властивості лінійної функції $y = kx + b$ для різних значень k

Властивості функції	Вид функції $(k \neq 0)$	
	$y = kx + b, \quad k > 0$ 	$y = kx + b, \quad k < 0$ 
Область визначення	Усі числа (R)	Усі числа (R)
Область значень	Усі числа (R)	Усі числа (R)
Додатні значення	$x > -\frac{b}{k}$	$x < -\frac{b}{k}$
Від'ємні значення	$x < -\frac{b}{k}$	$x > -\frac{b}{k}$
Проміжки зростання	Усі числа (R)	—
Проміжки спадання	—	Усі числа (R)

Розглянемо окремі випадки лінійних функцій.

Значення коефіцієнтів	Вид функції	Особливості
$k = 0$	$y = b$	Графіком є пряма, паралельна осі Ox 
$b = 0, k = 0$	$y = 0$	Графіком є вісь Ox
$b = 0$	$y = kx$	Пряма пропорційність

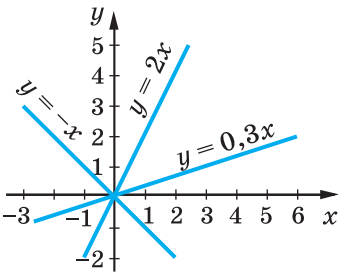
Функцію $y = kx$ називають *прямою пропорційністю*, оскільки будь-які (відмінні від нуля) значення такої функції пропорційні відповідним значенням аргументу. Для прикладу складемо таблицю значень функції $y = 3x$.

x	−2	−1	1	2	3	4	5
y	−6	−3	3	6	9	12	15

Тут числа 12 і 15 пропорційні числам 4 і 5, адже $12 : 15 = 4 : 5$; числа −6 і 9 пропорційні числам −2 і 3, адже $-6 : 9 = -2 : 3$ тощо.

На малюнку 18.5 зображено графіки функцій $y = 2x$, $y = -x$, $y = 0{,}3x$.

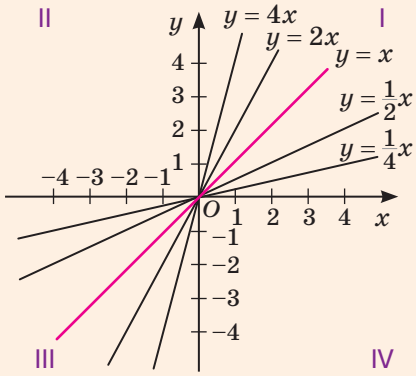
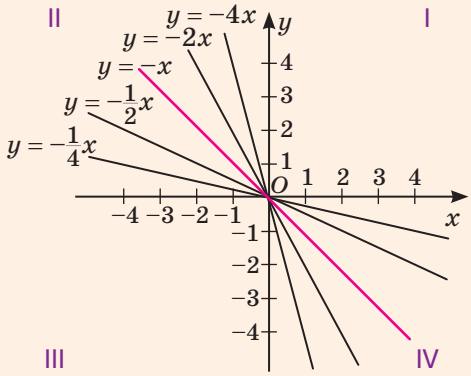
Графік прямої пропорційності — пряма, що проходить через початок координат.



Мал. 18.5

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Розташування графіка функції $y = kx$ на координатній площині залежить від знака коефіцієнта k.

Якщо $k > 0$, то графік розташований у I та III координатних чвертях (мал. 18.6).	**Якщо $k < 0$, то графік розташований у II та IV координатних чвертях** (мал. 18.7).
 Мал. 18.6	 Мал. 18.7

ПЕРЕВІР СЕБЕ

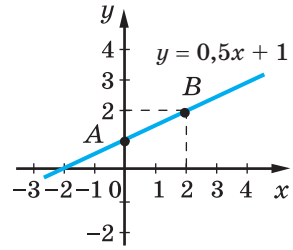
1. Сформулюй означення лінійної функції.
2. Що є графіком лінійної функції? Як побудувати такий графік?
3. Чи правильно, що кожна пряма на координатній площині — графік деякої лінійної функції?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Побудуй графік функції, заданої формулою $y = 0{,}5x + 1$.

Розв'язання. Дана функція лінійна, її графік — пряма. Визначимо координати двох точок цієї прямої, склавши таблицю.

x	0	2
y	1	2



Мал. 18.8

Позначимо на координатній площині точки $A(0;\ 1)$ і $B(2;\ 2)$ і проведемо через них пряму (мал. 18.8). Це і є графік даної функції.

2. Побудуй графік функції $y = |x - 1|$.

Розв'язання. За означенням модуля:

- якщо $x - 1 \geq 0$, то $|x-1| = x - 1$;
- якщо $x - 1 < 0$, то $|x-1| = -(x-1) = -x + 1$.

Отже, $y = |x-1| = \begin{cases} x-1, \text{ якщо } x \geq 1, \\ -x+1, \text{ якщо } x < 1. \end{cases}$

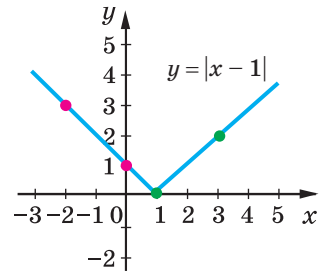
Це функція, яка на двох різних проміжках задається різними формулами лінійних функцій:

- якщо $x \geq 1$, то $y = x - 1$;
- якщо $x < 1$, то $y = -x + 1$.

Складемо таблиці їх значень у двох довільних точках.

x	1	3
y	0	2

x	–2	0
y	3	1



Мал. 18.9

Побудуємо графік функції (мал. 18.9).

ВИКОНАЙ УСНО

751. Чи є лінійною функція, задана формулою?

а) $y = 5x + 0{,}2$; б) $y = -3{,}5x + 2{,}8$; в) $y = 3 - 2x$;

г) $y = x + 5$; ґ) $y = \dfrac{2x-5}{3}$; д) $y = \dfrac{1-2x}{2x}$.

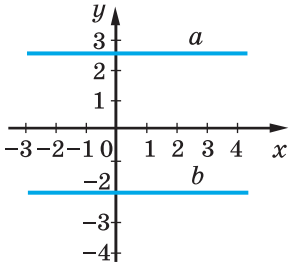
752. Чи є прямою пропорційністю функція, задана формулою?

а) $y = 0{,}7x$; б) $y = \dfrac{x}{3}$; в) $y = \dfrac{2x-1}{3}$;

г) $z = 5 - 2t$; ґ) $z = 7t^2$; д) $z = -3t$.

753. Лінійну функцію задано формулою $y = 0{,}5x + 3$. Яке значення цієї функції відповідає значенню $x = -2$? При якому значенні аргументу значення функції дорівнює 3?

754. Задай формулами функції, графіки яких зображено на малюнку 18.10.

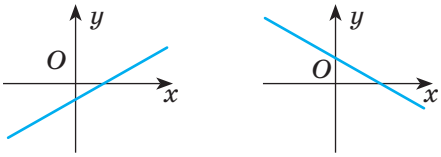


Мал. 18.10

755. Не виконуючи побудови графіка функції $y = 1{,}6x - 2$, вкажи, через які з даних точок не проходить цей графік.

А $A(1;\ -0{,}4)$ **Б** $B(2;\ 0{,}6)$
В $C(5;\ 6)$ **Г** $D(-0{,}5;\ -3)$

756. Установіть відповідність між графіками функції $y = kx + b$ (1–2) та значеннями k та b (А–Г).



1 **2**

А $k > 0$ та $b < 0$ **Б** $k > 0$ та $b > 0$
В $k < 0$ та $b < 0$ **Г** $k < 0$ та $b > 0$

757. Чи може графік лінійної функції бути розташованим в таких координатних чвертях?

а) в I та II; б) в II та IV; в) в III та IV;
г) в I та III; ґ) в II та III; д) в I та в IV.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

758. Побудуй графік функції.
а) $y = 3x - 2$; б) $y = 5 - 4x$; в) $y = -2x$; г) $y = 3{,}5x$.

759. Побудуй графік функції.
а) $y = 5x - 3$; б) $y = 4 - 2x$; в) $y = 2{,}5x$; г) $y = -4x$.

760. Plot the graph of the function.
a) $y = 3$; b) $y = -2$; c) $y - 1{,}5$.

761. Побудуй графік функції. а) $y = 5$; б) $y = -3$; в) $y = 2{,}5$.

762. Побудуй графік функції $y = x - 4$. Користуючись ним, знайди: а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює −2; 0; 3; 6; б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює −3; −5; 0; 2.

763. Побудуй графік функції $y = 3 - 2x$. Користуючись ним, знайди:
а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює -1; 0; 2; 5;
б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює -5; -3; 1; 2.

764. Побудуй графік функції $y = -2x + 4$. Знайди координати точок перетину графіка заданої функції з осями координат.

765. Побудуй графік функції $y = 3x - 6$. Знайди координати точок перетину графіка заданої функції з осями координат.

В одній системі координат побудуй графіки функцій і вкажи координати точки їх перетину **(766, 767).**

766. а) $y = \frac{x}{2} + 1$ і $y = -x + 4$; б) $y = x - 5$ і $y = 3 - x$;
в) $y = 2x$ і $y = -4$; г) $y = x + 3$ і $y = 2x + 6$.

767. а) $y = 3x - 1$ і $y = -x - 1$; б) $y = -1{,}5x$ і $y = 6$.

768. Чи проходить графік функції $y = 2x - 1$ через точку:
а) $A(3; 5)$; б) $B(-10; -5)$; в) $C(100; 199)$?

769. Чи проходить графік функції $y = 5 - 3x$ через точку:
а) $A(-1; 2)$; б) $B(2; -1)$; в) $C(10; -25)$?

770. Для функції $y = 7x - 12$, не виконуючи побудови, знайди:
а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 2; 6; 0; -1; -4;
б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 2; 30; -5; -26.

771. Для функції $y = 8 - 5x$, не виконуючи побудови, знайди:
а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює -2; -4; 0; 1; 6;
б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 3; 18; -12; 38.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Побудуй графік функції **(772, 773).**

772. а) $y = 2(x + 1)$; б) $y = \frac{1}{2}x - 5$; в) $y = 3 - \frac{1}{3}x$; г) $y = \frac{3 - 2x}{3}$.

773. а) $y = 3(2 - x)$; б) $y = \frac{1}{2}(7x - 4)$; в) $y = \frac{4x - 6}{6}$.

774. Ціна кілограму яблук становить 20 грн. Задай формулою залежність вартості покупки яблук від маси куплених яблук. Побудуй графік для випадку наявності у покупця 100 грн.

775. Побудуй графік функції $y = -0{,}5x + 2$. Знайди координати точок перетину графіка з осями координат. При яких значеннях x значення функції додатні, а при яких— від'ємні? Зростаюча чи спадна ця функція?

776. Побудуй графік функції $y = 2x - 4$. Знайди координати точок перетину побудованого графіка з осями координат. При яких значеннях x значення функції додатні, а при яких — від'ємні? Зростаюча чи спадна ця функція?

777. Побудуй за допомогою сервісу Desmos Calculator в одній системі координат графіки функцій, заданих формулою $y = 2x + b$, якщо $b = -3$; 0; 4. Як розташовані побудовані графіки?

778. Побудуй за допомогою сервісу Desmos Calculator в одній системі координат графіки функцій, заданих формулою $y = kx + 3$, якщо $k = -1$; 0,5; 2. Як розташовані побудовані графіки?

779. Дано функцію $y = \frac{2}{3}x - 1$, де $-3 \le x \le 6$. Чи належать графіку цієї функції точки $A(0; -1)$, $B(3; 1)$, $C(9; 5)$?

Не виконуючи побудови, знайди координати точок перетину з осями координат графіка функції **(780, 781).**

780. а) $y = 4x + 28$; б) $y = -9x + 27$; в) $y = 0{,}5 - 2x$.

781. а) $y = 35x - 70$; б) $y = 1{,}7x - 3{,}4$; в) $y = 2{,}5x + 5$.

Не виконуючи побудови, знайди координати точок перетину графіків функцій **(782, 783).**

782. а) $y = 4x + 5$ і $y = -2x + 17$; б) $y = -1{,}2x + 3$ і $y = 3{,}4x - 6{,}2$.

783. а) $y = -3x + 8$ і $y = 4x - 13$; б) $y = 2{,}3x + 4{,}2$ і $y = 4{,}5x - 6{,}8$.

784. Функцію задано формулою $y = kx - 2$. При якому значенні k графік функції проходить через точку $M(-3; 4)$?

785. Функцію задано формулою $y = 5x - b$. При якому значенні b графік функції проходить через точку $P(2; -3)$?

786. За якої умови графіки функцій $y = kx - 1$ і $y = px + 5$ перетинаються в точці $P(4; 3)$? Знайди значення k та p. Побудуй в одній системі координат графіки цих функцій.

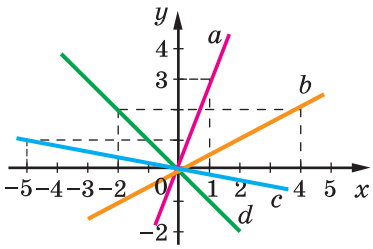
787. За якої умови графіки функцій $y = ax + 3$ і $y = cx - 2$ перетинаються в точці $A(3; 4)$? Знайди значення a та c. Побудуй в одній системі координат графіки цих функцій.

788. Задай формулою функцію виду $y = kx + p$, якщо її графік проходить через точки:
а) $A(0; 1)$ і $B(2; 2)$; б) $K(1; -1)$ і $P(0; 5)$.

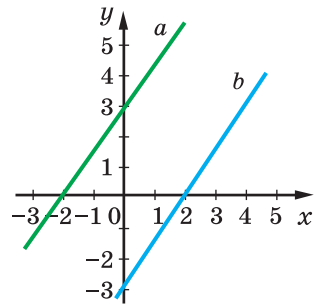
789. Задай формулою функцію виду $y = kx + p$, якщо її графік проходить через точки:
а) $M(0; 3)$ і $C(-4; 1)$; б) $K(-3; 1)$ і $T(0; -2)$.

790. На малюнку 18.11 зображено графіки функцій виду $y = kx$ $(k \neq 0)$. Для кожного графіка визначте знак коефіцієнта k. Складіть формули, що відповідають графікам цих функцій.

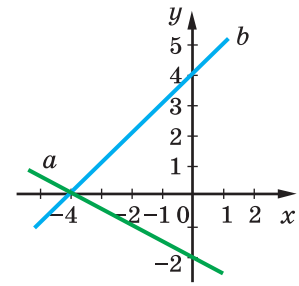
791. Напиши формули функцій, графіки яких зображено на:
а) малюнку 18.12; б) малюнку 18.13.



Мал. 18.11



Мал. 18.12



Мал. 18.13

792. На фарбування 1 м^2 підлоги затрачують 180 г фарби. Виразіть формулою залежність маси m фарби від площі s підлоги, яку фарбуватимуть. Чи є ця залежність прямою пропорційністю?

793. Витрати виробництва на 200 одиниць продукції становлять 100 грн, а на 2000 одиниць — 800 грн. Знайди графічно витрати на виробництво 400, 1000, 1200 одиниць продукції, вважаючи, що функція витрат — лінійна.

794. Побудуй графік функції, заданої формулою:
а) $y = x + 4$; б) $y = 1 - 2x$; в) $y = 3x$.
Для кожного графіка побудуй графік, симетричний даному відносно осі ординат. Задай формулою відповідну функцію.

795. Побудуй графік функції, заданої формулою:
а) $y = -x + 2$; б) $y = 2x + 4$; в) $y = 2{,}5x$.
Для кожного графіка побудуй графік, симетричний даному відносно осі абсцис. Задай формулою відповідну функцію.

Побудуй графік функції **(796–799)**.

796. а) $y = \begin{cases} 2x + 3, x \leq 0, \\ -x + 3, x > 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -3x + 3, x \leq 1, \\ x - 1, x > 1. \end{cases}$

797. а) $y = \begin{cases} 3x - 2, x \le 0, \\ -x - 2, x > 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -2x - 2, x \le -1, \\ x + 1, x > -1. \end{cases}$

798. а) $y = |x|$; б) $y = |x + 3|$; в) $y = |x| + 3x$.

799. а) $y = |x + 2|$; б) $y = 2x + |x|$; в) $y = 2|x| - 1$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

800. Витрати при перевезенні вантажу двома видами транспорту обчислюються за формулами: $y_1 = 100 + 30x$, $y_2 = 150 + 20x$, де x — відстань перевезень у сотнях кілометрів, y_1 і y_2 — транспортні витрати при перевезенні вантажу першим і другим видами транспорту в тисячах гривень. Визнач, на які відстані і яким видом транспорту краще перевозити вантаж.

801. Фірма платить продавчині за x одиниць проданого товару $(2x + 50)$ грн, якщо продано товару менш ніж 40 одиниць, і доплачує їй 20 % комісійних, якщо товару продано 40 одиниць і більше. Опиши залежність між кількістю проданого товару та заробітною платою продавчині і побудуй графік цієї залежності.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

802. Розклади на множники многочлен.

а) $ab + bc + a + c$; б) $2x - yx + 2y - y^2$;

в) $3 - 6a + z - 2az$; г) $10ax - 5bx + 2ay - by$.

803. Розв'яжи рівняння.

а) $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 3$; б) $(5 - 3y)^2 - 9y^2 = 55$;

в) $(4z + 2)^2 = 2(8z^2 + 13)$; г) $(4 - 5x)^2 = (3 + 5x)^2$.

804. Мотоцикліст проїжджає відстань від Жашкова до Умані за 1 год, а велосипедист від Умані до Жашкова — за 5 год. Через скільки годин вони зустрінуться, якщо виїдуть одночасно?

Перейди за посиланням та
- підсумуй головне в розділі https://vse.ee/cgba
- ознайомся з історичними відомостями https://vse.ee/cgaz
- дай відповіді на запитання https://vse.ee/cgay

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРІАНТ I

1. Знайди значення функції $y = 2x^2 - 3$, якщо:
а) $x = 2$; б) $x = -3$.

2. Через яку з точок $A(-1; -2)$; $B(-2; 19)$ проходить графік функції $y = 5 - 7x$?

3. Побудуй графік функції $y = 2x - 1$. Користуючись ним, знайди:
а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 2; –1;
б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює –5; 7.

4. Знайди область визначення функції.

а) $y = x^2 - 3x + 2$;

б) $y = \dfrac{2}{x+3}$.

ВАРІАНТ II

1. Знайди значення функції $y = 3x^2 + 7$, якщо:
а) $x = 3$; б) $x = -2$.

2. Через яку з точок $A(3; 37)$; $B(-2; 28)$ проходить графік функції $y = -2 + 13x$?

3. Побудуй графік функції $y = 5 - 3x$. Користуючись ним, знайди:
а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 3; –1;
б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 2; –1.

4. Знайди область визначення функції.

а) $y = x^3 - x + 3$;

б) $y = \dfrac{3}{x-2}$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 5

1. Через яку з точок проходить графік функції $y = 3x + 2$?

А $A(3; 5)$ **Б** $B(8; 13)$ **В** $C(2; 7)$ **Г** $D(4; 14)$

2. Графік фікції $y = 2x + 10$ перетинає вісь абсцис у точці з координатами:

А (0; 0) **Б** (–5; 0) **В** (0; 10) **Г** (–5; 10)

3. Графік функції $y = -x + 5$ перетинає вісь ординат у точці з координатами:

А (1; 1) **Б** (0; 0) **В** (5; 0) **Г** (0; 5)

4. Яка з даних функцій є лінійною?

А $y=\frac{x}{2}+3$ **Б** $y=\frac{2}{x}-2$ **В** $y=\frac{x^2}{4}+2$ **Г** $y=-\frac{2}{x^2}+4$

5. Яка з функцій є прямою пропорційністю?

А $y = 2x + 3$ **Б** $y = 3$ **В** $y = x^2$ **Г** $y = 3x$

6. Задай формулою функцію, значення якої на 4 більші за відповідні значення аргументу.

А $y = 4x$ **Б** $y = x + 4$ **В** $y = x - 4$ **Г** $y = -4x$

7. При якому значенні k графік функції $y = kx + 7$ проходить через точку $C(2; -1)$?

А –4 **Б** 4 **В** –3 **Г** 3

8. Які значення x не входять до області визначення функції $y=\frac{3}{x(x-2)}$?

А 0 і 3 **Б** –2 **В** 0 і 2 **Г** 2 і 3

9. Який із графіків функцій не перетинає вісь абсцис?

А $y = x$ **Б** $y = 2x + 3$ **В** $y = -x$ **Г** $y = -3$

10. Знайди значення функції $y=-\frac{1}{4x+1}$, якщо $x = -0{,}2$.

А 5 **Б** 0,5 **В** –5 **Г** –0,5

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 5

1. Не виконуючи побудови графіка функції $y = 7x - 3$, укажи, через яку з точок проходить графік функції.

А $A(1; 10)$ **Б** $B(2; 10)$ **В** $C(3{,}5; 0{,}06)$ **Г** $D(0; -3)$

2. Графік функції $y = 8x - 24$ перетинає вісь абсцис у точці з координатами:

А $(-3; 0)$ **Б** $(0; -3)$ **В** $(3; 0)$ **Г** $(0; -24)$

3. Яка з даних функцій набуває лише додатних значень?

А $y = 12x - 7$ **Б** $y = -6{,}8x$ **В** $y = 3$ **Г** $y = 1 - 5x$

4. Установи відповідність між функціями, заданими умовами (1–3), та значеннями цих функцій (А–Д) за умови, що $x = -1{,}2$.

1 $y = 2x - 0{,}4$ **2** $y = -5x + 3$ **3** $y = 0{,}2x - 0{,}24$

А 0 **Б** 2 **В** 9 **Г** −2,8 **Д** −0,48

5. Побудуй графік функції $y = -2x + 4$. Користуючись графіком, знайди:

а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює −1; 0; 3;

б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює −6; 0; 2;

в) координати точок перетину графіка функції з осями координат;

г) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень.

6. Знайди область визначення функції $y = \dfrac{6}{x^2 - 5x}$.

7. Побудуй в одній системі координат графіки функцій $y = -3x + 5$ і $y = x + 1$ та вкажи координати їх точки перетину.

8. Задай формулою лінійну функцію, графік якої проходить через початок координат і точку $A(-4; -6)$.

Додаткове завдання

9. Одна сторона прямокутника дорівнює x см, а інша — на 2 см більша. Вирази формулою залежність периметра P прямокутника від x. Побудуй графік утвореної функції. Знайди її область визначення і множину значень. Користуючись графіком, знайди периметр прямокутника для $x = 1$ см.

РОЗДІЛ 4. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ

«Система — сукупність визначених елементів, між якими існує закономірний зв'язок чи взаємодія.»

Із філософського словника

Рівняння — одне з найважливіших понять не тільки математики, а й багатьох прикладних наук. Це найзручніша математична модель, найкращий засіб для розв'язування найважчих задач. Образно кажучи, рівняння та їх системи — це ключ, яким можна відчиняти тисячі дверей у невідоме.

У цьому розділі ти дізнаєшся про:

- лінійні рівняння з однією та двома змінними;
- системи лінійних рівнянь та способи їх розв'язування;
- розв'язування задач за допомогою рівнянь та їх систем.

§ 19. Загальні відомості про рівняння

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- корінь рівняння — *solution of the equation*
- рівносильні рівняння — *equivalent equation*
- властивості рівнянь — *properties of the equations*

Алгебра багато століть розвивалась як наука про рівняння.

Рівняння — це *рівність*, яка містить невідомі числа, позначені буквами.

Приклади: $2y - 3 = 7y$; $x^2 = 9$; $y^2(z - 1) = 0$.

Невідомі числа в рівнянні називають *змінними*. Змінні найчастіше позначають буквами x, y, z тощо.

Кожне рівняння має ліву і праву частини.

$$\underbrace{5x - 27}_{\text{ліва частина}} = \underbrace{3x + 15}_{\text{права частина}} \qquad \underbrace{5x,\ \ -27,\ \ 3x,\ \ 15}_{\text{члени рівняння}}$$

Розглянемо рівняння $13x - 30 = 7x$.

замість x підставимо число 5

$$13 \cdot 5 - 30 = 7 \cdot 5$$

$$35 = 35$$

Утворилась правильна рівність, бо 5 задовольняє дане рівняння.

Число, яке задовольняє рівняння, називають його *коренем*, або розв'язком.

Рівняння $13x - 30 = 7x$ має тільки один корінь: $x = 5$.

Рівняння $x(x - 2)(x + 3) = 0$ має три корені: $x = 0$, $x = 2$, $x = -3$.

Рівняння $x + 7 = x$ не має жодного кореня, бо після спрощення отримаємо $0x = -7$, що не можливо, бо $0 \neq -7$.

Рівняння $2x + 3 = 1 + 2(x + 1)$ має безліч коренів, бо після спрощення отримаємо $0x = 0$, що справедливо для кожного значення змінної x.

Розв'язати **рівняння — означає знайти всі його розв'язки або показати, що їх не існує.**

Розглянемо два рівняння: $x - 3 = 2$ і $x + 7 = 12$. Кожне з них має один і той самий розв'язок: $x = 5$.

Два рівняння називають *рівносильними*, якщо кожне з них має ті самі розв'язки, що й інше. Рівносильними вважають і такі рівняння, які не мають розв'язків.

Наприклад, $x + 5 = x$ і $2 - x = 3 - x$ — рівносильні.

Щоб розв'язувати складніші рівняння, слід уміти замінювати їх простішими і рівносильними даним. Для цього використовують такі основні властивості рівнянь.

Властивості рівнянь

1. У будь-якій частині рівняння можна звести подібні доданки або розкрити дужки, якщо вони є.
2. Будь-який член рівняння можна перенести з однієї частини рівняння до іншої, змінивши його знак на протилежний.
3. Обидві частини рівняння можна помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля.

У результаті таких перетворень завжди дістаємо рівняння, рівносильне даному. Для прикладу розв'яжемо рівняння

$$\frac{3x-2}{3} = 2 + \frac{2x+1}{3}.$$

Помножимо обидві частини рівняння на 3:

$$3x - 2 = 2 \cdot 3 + 2x + 1$$

Перенесемо невідомі в одну, а відомі в іншу частину рівняння:

$$3x - 2x = 6 + 1 + 2$$
$$x = 9.$$

Відповідь. $x = 9$.

Рівняння бувають різних видів, зокрема такі, що містять невідому змінну в квадраті, у кубі, під знаком модуля тощо. Розв'яжемо, наприклад, рівняння:

$(x + 5)^2 = (x - 2)(x + 2)$ — *Розкриємо дужки*

$x^2 + 10x + 25 = x^2 - 4$

$\cancel{x^2} + 10x + 25 = \cancel{x^2} - 4$ — *Взаємознищимо x^2*

$10x + 25 = -4$ — *Перенесемо невідомі в одну, а відомі в іншу частину рівняння*

$10x = -4 - 25$

$10x = -29$

$x = -2{,}9.$

Відповідь. $x = -2{,}9.$

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Звідки походить назва науки — *алгебра*? Від назви книжки про рівняння узбецького математика IX ст. Мухаммеда аль-Хорезмі (Мухаммед з Хорезма). У ті далекі часи від'ємні числа не вважалися справжніми. Тому коли в результаті перенесення від'ємного члена рівняння з однієї його частини в іншу цей член ставав додатним, вважалося, що він відновлювався, переходив із несправжнього в справжній. Таке перетворення рівнянь Мухаммед аль-Хорезмі назвав відновленням (аль-джебр). Властивість про знищення однакових членів рівняння в обох частинах він назвав протиставленням (аль-мукабала). Книжка про ці перетворення мала назву «Кітаб мухтасар аль-джебр ва-л-мукабала» («Книжка про відновлення і протиставлення»). Згодом її переклали латинською мовою, узявши для назви тільки одне слово, яке стали писати *Algebr*. Звідси і пішла назва науки — алгебра. Перетворення «аль-джебр» стало важливим кроком у розвитку алгебри, бо спростило розв'язування рівнянь.

Мухаммед аль-Хорезмі (787 — бл. 850 рр.)

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що називають: а) рівнянням; б) коренем (розв'язком) рівняння?
2. Що означає розв'язати рівняння?
3. Які рівняння називають рівносильними?
4. Сформулюй основні властивості рівнянь.
5. Від чого походить назва науки «алгебра»?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Розв'яжи рівняння $3(1 - 3x) = 75$.

Розв'язання.

Перший спосіб	Другий спосіб
$3 \cdot 1 - 3 \cdot 3x = 75$ $3 - 9x = 75,$ $-9x = 72,$ $x = 72 : (-9),$ $x = -8.$	$1 - 3x = 75 : 3,$ $1 - 3x = 25,$ $-3x = 24,$ $x = 24 : (-3),$ $x = -8.$

2. При якому значенні a рівняння $(a + 5) \cdot x = 12$ матиме корінь $x = 3$?

Розв'язання.

Підставимо в рівняння $(a + 5) \cdot x = 12$ замість змінної x число 3:

$$(a + 5) \cdot 3 = 12.$$
$$a + 5 = 12 : 3,$$
$$a + 5 = 4,$$
$$a = -1.$$

Відповідь. Якщо $a = -1$, то рівняння $(a + 5) \cdot x = 12$ має корінь $x = 3$.

3. Розв'яжи рівняння.

а) $(x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9) = 27$; б) $(2x - 1)^2 = (5 - 3x)^2$.

а) Скористаємося формулою суми кубів і отримаємо:

$$(x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9) = 27,$$
$$(x^2)^3 + 3^3 = 27,$$
$$x^6 + 27 = 27,$$
$$x^6 = 0, \text{ звідси } x = 0.$$

б) Перенесемо всі члени рівняння у ліву сторону і розкладемо на множники за формулою різниці квадратів:

$$(2x - 1)^2 = (5 - 3x)^2,$$
$$(2x - 1)^2 - (5 - 3x)^2 = 0,$$
$$((2x - 1) - (5 - 3x))((2x - 1) + (5 - 3x)) = 0,$$
$$(2x - 1 - 5 + 3x)(2x - 1 + 5 - 3x) = 0,$$
$$(5x - 6)(-x + 4) = 0,$$
$$5x - 6 = 0 \text{ або } -x + 4 = 0,$$
$$x = 1{,}2 \quad \text{або} \quad x = 4.$$

Відповідь. а) $x = 0$; б) $x = 1{,}2$ або $x = 4$.

ВИКОНАЙ УСНО

805. Розв'яжи рівняння.

а) $x + 10 = 23$; б) $x - 10 = 15$; в) $x + 7 = 13$;
г) $2x + 10 = 30$; ґ) $3x - 5 = 40$; д) $4x - 8 = 0$;
е) $10y = 70$; є) $10y = -3$; ж) $-y = 15$;
з) $x(x - 3) = 0$; и) $(x + 5)x = 0$; і) $-3{,}5x^2 = 0$.

806. Чи рівносильні рівняння?

а) $4x + 5x = 18$ і $9x = 18$; б) $7x - x = 24$ і $6x = 24$;
в) $2(x + 3) = 16$ і $2x + 3 = 16$; г) $0{,}4 \cdot (y - 2) = 1$ і $0{,}4y - 0{,}8 = 1$.

807. Поясніть, чому не має розв'язків рівняння.

а) $x^2 + 1 = 0$; б) $x^2 + 8 = 7$;
в) $2x^2 + 3 = -7$; г) $(x + 2)^2 = -4$.

808. Для якого з рівнянь число 12 не є розв'язком?

А $x - 5 = 7$ **Б** $7 - 2x = 17$ **В** $3x + 4 = 40$ **Г** $0{,}5x + 5 = 11$

Розв'яжи рівняння розкладанням на множники **(809, 810)**.

809. а) $x^2 = 16$; б) $x^3 = 8$; в) $x^2 = 0{,}01$; г) $2x^2 = 18$.

810. а) $x^2 = 4$; б) $x^3 = 27$;
в) $(x - 2)(x + 2) = 0$; г) $x(x - 2) = 0$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

Розв'яжи рівняння **(811, 812)**.

811. а) $25 + x = 37$; б) $x - 12 = 23$;
в) $24 - 10x = 18$; г) $13x + 6 = 32$.

812. а) $2x + 3 = 19$; б) $3y - 4 = -1$;
в) $1 - 3x = 25$; г) $4z - 12 = -8$.

813. **Гра.** Перший учень/перша учениця із групи задає значення a для рівняння $2x - a = c$, другий/друга — значення c, а третій/третя розв'язує утворене рівняння. Потім поміняйтеся ролями.

Розв'яжи рівняння **(814, 815)**.

814. а) $5{,}7y = 57$; б) $7x = 4{,}2$; в) $0{,}6x = 0{,}3$; г) $3{,}7x = 11{,}1$.

815. а) $\frac{2}{3}x = 5$; б) $-\frac{5}{7}y = 1$; в) $1 - \frac{3}{4}x = \frac{5}{8}$.

816. Покажи, що рівняння:

а) $x - 2 = 3x$ має розв'язок $x = -1$;

б) $z(z - 2)(z + 3) = 0$ має розв'язки $z = 0$, $z = 2$ і $z = -3$.

817. Покажи, що рівняння:
а) $8z - 5 = 5z$ має розв'язок $z = \frac{5}{3}$;
б) $x(x - 3) = 0$ має розв'язки $x = 0$ і $x = 3$.

818. Які з чисел -2, -1, 0, 1, 2 задовольняють рівняння?
а) $x(3x - 6) = 0$; б) $(2n + 2)n = 0$?

819. Розв'яжи рівняння і зроби перевірку.
а) $x - (3 - 2x) = 9$; б) $8 - (3x - 2) = 13$; в) $3(x - 2) = 27$.

820. Solve the equations and check.
a) $x - (3x - 5) = 9$; b) $12 - (5x + 4) = 13$; c) $6(2x - 1) = 18$.

Розв'яжи рівняння **(821–823)**.

821. а) $2(x - 3) = 36$; б) $4(5 - x) = 12$;
в) $3x + (8 - x) = 10x$; г) $36 - (y - 3) = 12y$;
ґ) $2x - (3 - x) = 18 - 4x$; д) $8z - 3(5 - 4z) = 25$.

822. а) $3(x + 5) = 27$; б) $5(x - 3) = 15$;
в) $8(3 - x) + 4x = 40$; г) $17 + 2(x + 4) = 7x$;
ґ) $12x - (x - 9) = 20x$; д) $5 - (4y - 7) = -10y$.

823. а) $8(4 - 7z) = 5(4 - 11z)$; б) $4(x + 1) = 3(3x - 17)$;
в) $0{,}2(3 - 8x) = 0{,}5(-2x + 6)$; г) $17 + 3(z - 2) = 5(z - 1)$;
ґ) $0{,}4z - 0{,}3(7 + 3z) = 1{,}4$; д) $1{,}7(y + 1) + 0{,}2(8 - 15y) = 3$.

824. Складіть і розв'яжіть задачу за малюнком 19.1.

Мал. 19.1

Розв'яжи рівняння **(825, 826)**.

825. а) $16 - x^2 = 0$;
б) $36x^2 = 1{,}44$.

826. а) $4x^2 - 1 = 0$;
б) $0{,}09x^2 = 36$.

Знайди корінь рівняння **(827, 828)**.

827. а) $x^2 - 16x + 64 = 0$; б) $0{,}25x^2 + 3x + 9 = 0$.

828. а) $x^2 - 18x + 81 = 0$; б) $0{,}25x^2 + 5x + 25 = 0$.

829. Перевір частину коду для розв'язування рівняння $c - ax = b$.

[1] Усі приклади об'єктів мистецтва та їх фрагменти в підручнику наведено виключно з навчальною метою.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Розв'яжи рівняння **(830–833)**.

830. а) $2(11 - 6x) - 3(7 - 4x) = 1$; б) $2{,}5(y + 6) = y + 1{,}5(y - 10)$;
в) $0{,}4(6x - 1) = 0{,}1(12x + 5)$; г) $5(0{,}6m - 2) = 2(m - 3{,}6)$;
ґ) $\frac{2}{3}(6-9x)=15$; д) $\frac{3}{4}(12-x)=\frac{3}{2}$.

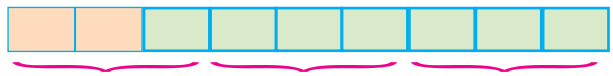
831. а) $3(5 - 8x) - 2(7 - 12x) = 1$; б) $1{,}2(x + 3) = 2x - 4(0{,}2x - 5)$;
в) $7(y + 6) = 4(3y - 5) - 3$; г) $7{,}5(4 - x) - 5x = 5(0{,}5x + 3)$;
ґ) $\frac{2}{5}(8-5x)=\frac{1}{5}$; д) $\frac{1}{3}(6+x)=\frac{2}{3}(2x-15)$.

832. а) $\frac{3x+7}{4}-\frac{x-3}{2}=\frac{5x+2}{8}$; б) $\frac{5x-4}{3}=\frac{7-x}{2}+\frac{3x+1}{6}$.

833. а) $\frac{8-3y}{5}-\frac{1-2y}{2}=\frac{6y+17}{10}$; б) $\frac{2-4x}{5}=\frac{1-2x}{2}+\frac{x+3}{4}$.

834. Яке число треба відняти від чисел 135 і 83, щоб перша різниця була в 3 рази більша за другу?

835. *Стародавня єгипетська задача.* Пастуха, який вів 70 биків, запитали: «Яку частину биків своєї череди ти ведеш?» Він відповів: «Я веду дві третини від третини худоби». Скільки биків мав пастух? Розв'яжи задачу кількома способами, зокрема скориставшись малюнком 19.2.



Мал. 19.2

За властивістю пропорції, розв'яжи рівняння **(836, 837)**.

836. а) $6x : 8 = 3 : 2$; б) $5 : (2x) = 3 : 18$; в) $(x - 5) : 2 = 5 : 4$;
г) $7 : 2 = 5(x - 1) : 3$; ґ) $2 : m = m : 8$; д) $2n : 9 = 2 : n$.

837. а) $1 : (3x) = 4 : 12$; б) $5 : (c - 3) = 2 : 3$; в) $x : 10 = 0{,}1 : x$.

Розв'яжи рівняння **(838, 839)**.

838. а) $(x + 4)(x - 4) = x^2 - 5x + 9$;
б) $8 + 9x(x + 4) = (3x - 2)(3x + 2)$.

839. а) $(6 - y)(y + 6) = y^2 - 2y(y - 3)$;
б) $2x(2x - 4) - 17 = (5 + 2x)(2x - 5)$.

Знайди корені рівняння **(840, 841)**.

840. а) $(x + 1)^2 - 9 = 0$; б) $(3x - 2)^2 = 121$;
в) $(x - 1)^2 - (3 - x)^2 = 0$; г) $(4x - 10)^2 = (3x - 4)^2$;
ґ) $(x^2 + x + 1)(x - 1) = x(x^2 + 1)$;
д) $(9x^2 + 4) \cdot 3x = (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$.

841. а) $4 - (x - 3)^2 = 0$; б) $(5x + 4)^2 = 196$;
в) $(3x - 2)^2 - (x + 6)^2 = 0$; г) $(2x - 1)^2 = (4 - 5x)^2$;
ґ) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = 4x(2x^2 - 5)$;
д) $x(8x^2 - 5) = (4x^2 - 10x + 25)(2x + 5)$.

При якому значенні a рівняння мають задані корені **(842, 843)**?

842. а) $3ax + 96 = 0$ матиме корінь $x = -8$;
б) $1 - \frac{a}{4}x = -\frac{1}{2}$ матиме корінь $x = 2$.

843. а) $5ax + 120 = 0$ матиме корінь $x = -3$;
б) $4(a - 3)x = 48$ матиме корінь $x = 6$.

При яких значеннях a рівносильними є рівняння **(844, 845)**?

844. а) $2(x - 1) = 4 - x$ і $ax = x + a$;
б) $(1 - a)x = x$ і $x^2 = 0$.

845. а) $3(x - 2) + 5 = 2x$ і $ax + a = x$; б) $(1 + 2a)x = x$ і $x - 1 = 0$.

При яких значеннях m рівняння мають спільний корінь **(846, 847)**?

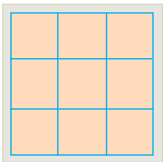
846. а) $4(x + 3) = 36$ і $3x + 2m = 19$;
б) $(8 - x) - 7 = 28$ і $5(2x - 3m) = 0$.

847. $2m(x + 8) = 44$ і $2(3x - 2) = 11 + x$.

848. При якому значенні k рівняння не матиме коренів?
а) $x^2 = k$; б) $|x| + k = 0$; в) $k + 2x = 2(x - 3)$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

849. Запиши у клітинках квадрата (мал. 19.3) числа -9; 8; -7; 6; -5; 4; -3; 2; -1 так, щоб їх добутки в кожному рядку, у кожному стовпці й у кожній діагоналі були від'ємними.



Мал. 19.3

850. Знайди суму всіх двоцифрових натуральних чисел.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

851. Розклади на прості множники число:
а) 80; б) 1024; в) 1001.

852. Обчисли $\left(4{,}3\cdot\frac{3}{43}+11\frac{3}{5}\cdot 2{,}25\right):2{,}75.$

853. Є білий хліб, чорний хліб, сир, ковбаса і масло. Скільки видів бутербродів можна приготувати? Розглянь всі можливі випадки.

§ 20. Лінійні рівняння

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- лінійне рівняння — *linear equation,* коефіцієнт — *coefficient*

Рівняння виду $ax = b$, де a і b — деякі числа, називають *лінійним рівнянням* зі змінною x.

Числа a і b — *коефіцієнти рівняння* $ax = b$, a — *коефіцієнт при змінній* x, b — *вільний член рівняння*.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ називають *рівнянням першого степеня з однією змінною*. Його корінь $x = \frac{b}{a}$.

$ax = b$

$a \neq 0$	$a = 0$, $b = 0$	$a = 0$, $b \neq 0$
$x = \frac{b}{a}$	$0 \cdot x = 0$	$0 \cdot x = b$
Єдиний корінь	Безліч коренів	Коренів немає
Наприклад, $2x = 0$	$0x = 0$	$0x = 5$

Кожне рівняння першого степеня з однією змінною має один корінь. Лінійне рівняння може не мати коренів або мати один корінь чи безліч коренів.

Розв'язуючи рівняння, його спочатку намагаються спростити, звести до лінійного. Роблять це здебільшого в такій послідовності.

1. Позбуваються знаменників (якщо вони є).

2. Розкривають дужки (якщо вони є).

3. Переносять члени зі змінними в ліву частину рівняння, а інші — в праву.

4. Зводять подібні доданки.

У результаті таких перетворень отримують рівняння, рівносильне даному; його корені є також коренями даного рівняння.

Приклад. Розв'яжи рівняння $\frac{2x+5}{4}+\frac{x}{12}=\frac{x}{3}-1\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на 12 — найменше спільне кратне знаменників 2, 3, 4 і 12:

$$3(2x + 5) + x = 4x - 18,$$
$$6x + 15 + x = 4x - 18,$$
$$6x + x - 4x = -18 - 15,$$
$$3x = -33,$$
$$x = -11.$$

Відповідь. −11.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Рівняння першого степеня — це окремий вид лінійних рівнянь. Співвідношення між цими двома видами рівнянь наочно ілюструє малюнок 20.1.

Далі наведемо приклади лінійних рівнянь, які не є рівняннями першого степеня.

$\left(0{,}25-\frac{1}{4}\right)x=0$ або $\left(0{,}25-\frac{1}{4}\right)x=2{,}5$.

Рівняння $2x+3=27-x$, $\frac{x-3}{5}=0{,}8$, $|x-4|=0$ не є лінійними, але такі, що зводяться до лінійних.

Мал. 20.1

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Які рівняння називають: а) лінійними;
б) рівняннями першого степеня?

2. Скільки коренів може мати лінійне рівняння?

3. Скільки коренів може мати рівняння першого степеня?

4. За якої умови рівняння $ax = b$ не має розв'язків? А за якої умови має безліч розв'язків?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Розв'яжи рівняння.

а) $3(x - 5) + x = 4x - 18$;

б) $5(2 + 3x) - 7(2x + 3) = x - 11$.

Розв'язання

а) $3x - 15 + x = 4x - 18$,
$3x + x - 4x = 15 - 18$,
$0x = -3$.
Рівняння розв'язків не має.

б) $10 + 15x - 14x - 21 = x - 11$,
$15x - 14x - x = 21 - 10 - 11$,
$0x = 0$.
Будь-яке число задовольняє рівняння.

Відповідь. а) Рівняння розв'язків не має; б) x — будь-яке число.

2. Розв'яжи рівняння $|x-2|=5$.

Розв'язання. $|x-2|=5$. Якщо модуль числа $x - 2$ дорівнює 5, то це число дорівнює 5 або -5.
$x - 2 = 5$ або $x - 2 = -5$; $x = 7$ або $x = -3$.

Отже, рівняння $|x-2|=5$ має два корені: $x = 7$ або $x = -3$.

3. Розв'яжи рівняння $(a - 5)x = 8$.

Розв'язання. Щоб знайти невідомий множник, потрібно добуток поділити на відомий множник, тобто 8 поділити на $a - 5$. Але якщо $a - 5 = 0$, то ділення виконати неможливо. Тому потрібно розглянути декілька випадків.

1. Якщо $a - 5 = 0$, тобто $a = 5$, то рівняння набуває вигляду $0x = 8$. Отже, якщо $a = 5$, то рівняння коренів не має.

2. Якщо $a \neq 5$, то рівняння має один корінь $x = \dfrac{8}{a-5}$.

Відповідь. Якщо $a = 5$, то рівняння коренів не має;

якщо $a \neq 5$, то $x = \dfrac{8}{a-5}$.

ВИКОНАЙ УСНО

854. Яке рівняння не є лінійним?

А $-2x = 5$ **Б** $\frac{1}{x} = 2$ **В** $3 - 2x = 0$ **Г** $4x = 5 - x$

855. Яке рівняння є рівнянням першого степеня?

А $0x = 7$ **Б** $-2x = 0$ **В** $3x^2 = 0$ **Г** $0x = 0$

856. Яке повідомлення має бути виведено у частині коду для рівняння $ax = b$?

857. Знайди корінь рівняння.

а) $0x = 35$; б) $0y = 13 - 13$;
в) $2x = 3 + 2x$; г) $2x + 5 = 3(x + 5)$.

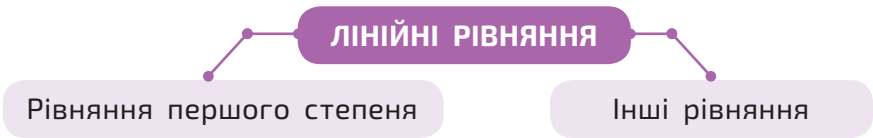
858. Поясни, чому не має розв'язків рівняння.

а) $x + 15 = x$; б) $3x - 7 = 3x$; в) $17 - x = 5 - x$.

859. Поясни, чому має безліч розв'язків рівняння.

а) $3x = 2x + x$; б) $6y = 7y - y$; в) $8z + 2 = 3z + 2 + 5z$.

860. Чи правильна схема, зображена на малюнку 20.2?



Мал. 20.2

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

Зведи рівняння до лінійного та розв'яжи його **(861, 862).**

861. а) $2 - 3x = 5 - 7x$; б) $15 - 3x = 7x - 5$;
в) $3x + 2(x + 7) = 2x$; г) $4(2 + x) - x = 3x + 9$;
ґ) $\frac{1}{3}x = 6 - \frac{1}{2}x$; д) $\frac{x-4}{2} = 1$.

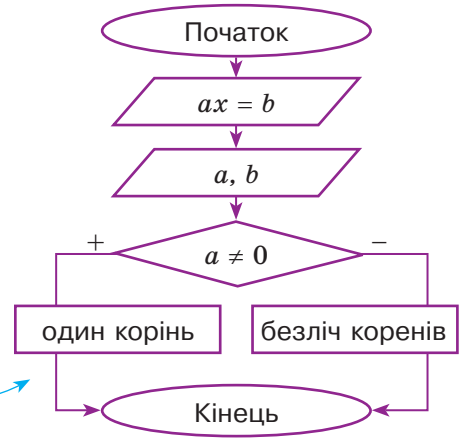
862. а) $2x + x - 7x + 3 = 8$; б) $y - 5y = 8 - y$;
в) $-c + 31(2 - c) = 32c$; г) $0{,}7 = 2(x + 3{,}5) - 2x$.

Розв'яжи рівняння **(863, 864)**.

863. а) $32x = -16$; б) $x + 4x = 5x$;
в) $x = 3(x + 1) - 2x$; г) $2(5 - 8x) = -4(4x + 3)$;
ґ) $2(x - 3) = 3(2x - 1)$; д) $4(5 - x) = -5x + 2$.

864. а) $-0{,}5y = -0{,}5$;
б) $6x = 8 + 6x$;
в) $4 - 3x = 8(1 - x)$;
г) $2 - 5y = 5(1 - 2y)$;
ґ) $8(9 - 2x) = 5(2 - 3x)$;
д) $5(z + 3) = 8(10 - z)$.

865. Марк вирішив скласти блок-схему для алгоритму розв'язування рівнянь виду $ax = b$. Чи правильно він її склав? Побудуй свою блок-схему.



866. Установіть відповідність між рівняннями (1–3) та кількістю їх розв'язків (А–Г).

1 $2x - 3 = x + 7$	**А** жодного
2 $3x + 7 = 3x - 9$	**Б** один
3 $2(3x - 1) + 5 = 3(2x + 1)$	**В** два
	Г безліч

Розв'яжи рівняння **(867–870)**.

867. а) $3(x + 4) + 6(11 - x) = 9$; б) $8(1 - x) + 5(x - 2) = 2$;
в) $7(x - 5) - 3(2x - 6) = 10$; г) $18 + 3(x - 5) + 8x = 2(5 + 2x)$.

868. а) $7(4 - t) + 3(t - 5) = 9t$; б) $3(x + 1{,}5) + 2(3 + x) = -5$;
в) $5(3 - 2x) - (12 - 7x) = 0$; г) $5z + 2(4 + z) = 3z + 28$.

869. а) $3(2x + 3) - 5(7 - 4x) - 2(5x + 4) = -2$;
б) $8(4 - 3x) + 7(x - 3) + 3(9 + 7x) = 10$.

870. а) $6(x + 2) + 3(3x + 7) = 4(5 + 4x) - 7$;
б) $5(12 - x) - 11(4x - 5) = 9(9 - 5x) - 26$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Розв'яжи рівняння **(871–874)**.

871. а) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(x - 2) = x$; б) $\frac{1}{2}(4x - 5) + \frac{3}{2}(2x + 1) = x + 3$;

в) $\frac{2}{3}(5-3x)+\frac{1}{3}(2+9x)=2x-1$; г) $2+\frac{1}{4}(8x+1)=5x+\frac{3}{4}(4x-1)$.

872. а) $\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{3}n+1\right)=3n$; б) $\frac{3}{5}(6+7x)-2x=\frac{2}{5}(4+3x)+3$.

873. а) $\frac{2x-3}{3}+\frac{x-1}{2}=\frac{5x-3}{6}$; б) $\frac{3x+1}{4}-\frac{2x-4}{3}=3-\frac{7-x}{2}$;

в) $\frac{2-3x}{2}+\frac{6x+1}{5}=\frac{x-4}{4}$; г) $\frac{x+6}{5}-\frac{5-2x}{3}=2x-\frac{3x-2}{2}$.

874. а) $\frac{x+1}{2}+\frac{3x-5}{6}=\frac{5x-6}{4}$; б) $\frac{3x+1}{5}-\frac{6-x}{4}=3x+\frac{5x+16}{2}$.

875. Одне число більше за інше на 6. Якщо перше помножити на 5, а друге — на 4, то перший добуток буде більший за другий на 40. Знайдіть ці числа.

876. Одне число більше за інше в 6 разів. Якщо від більшого з них відняти 37, а до меншого додати 73, то результати будуть рівні. Знайди ці числа.

877. Яке число більше від своєї третьої частини на $\frac{1}{3}$?

Розв'яжи рівняння і зроби перевірку **(878, 879)**.

878. а) $|x|+5=12$; б) $2|x|+3=25$; в) $|x-2|=12$; г) $|2x-3|+8=5$.

879. а) $|x|-8=-3$; б) $|2x|-3=5$; в) $|x+4|=0$; г) $|x-1|+7=3$.

880. Розв'яжи тільки ті рівняння, які можна звести до лінійних рівнянь.

а) $(x^2-2)^2-x^4=0$;
б) $(x+2)^2-(x+1)^2=0$;
в) $(4x+3)(16x^2-12x+9)=9(7x^3+3)$;
г) $(2{,}6x-3)(2{,}6x+3)-(2{,}4x-5)(2{,}4x+5)=2x(0{,}5x+4)$;
ґ) $(2x-1)(4x^2+2x+1)=x(3x-2)(3x+2)-x^3$.

881. Solve only those equations that can be reduced to linear equations.

a) $(x^2-4)^2-x^4=8$; b) $(x+3)^2-(x-3)^2=12$;
c) $(2x-1)(4x^2+2x+1)=x(3x-2)(3x+2)-x^3$;
d) $(2x-3)(4x^2+6x+9)=7(x^3-4)$;
e) $(3{,}7x-2)(3{,}7x+2)-(1{,}3x-1)(1{,}3x+1)=6x(2x-1)$.

Розв'яжи рівняння **(882, 883)**.

882. а) $(a+3)x=12$; б) $(a-6)x=a-6$; в) $(a^2+5)x=2$.

883. а) $(a-4)x=15$; б) $(a+7)x=a+7$; в) $(a^2+2)x=4$.

Доведи, що при будь-яких значеннях a рівняння має єдиний корінь **(884, 885).**

884. а) $(a^2 + 3)x = 5$; б) $(a^2 + 1)x = a$; в) $4 - 5x = a^2x$.

885. а) $(a^2 + 6)x = 5$; б) $(a^2 + 8)x = a$; в) $a^2x = -2x + 3$.

886. Для кожного з пунктів *а–г* визнач, при яких значеннях коефіцієнта k рівняння: 1) має єдиний корінь; 2) не має коренів; 3) має безліч коренів.

а) $kx = 8$; б) $(k + 3)x = 5$; в) $kx = k$; г) $(2 - k)x = (2 - k)$.

887. Для кожного з пунктів *а–г* визнач, при яких значеннях коефіцієнта m рівняння: 1) має єдиний корінь; 2) не має коренів; 3) має безліч коренів.

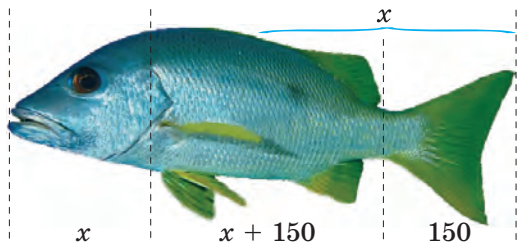
а) $mx = 12$; б) $(m - 5)x = 15$;
в) $mx = 2m$; г) $(7 + m)x = (7 + m)$.

888. Для кожного пункту *а–в* допишіть після знаку рівності замість крапок такий вираз, щоб утворилось рівняння, яке: 1) має один корінь; 2) має безліч коренів; 3) не має коренів.

а) $5x - 4 + 2x = ...$; б) $2(1{,}5x - 7) - 3x = ...$; в) $\frac{3x+2}{5} = ...$

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

889. *Задача з болгарського фольклору.* На запитання, яка маса його риби, рибалка відповів: «Хвіст має масу 150 г, голова — стільки, скільки хвіст і половина тулуба, а тулуб — скільки голова і хвіст разом» (мал. 20.3). Яка маса риби?



Мал. 20.3

890. Значення виразу $\frac{3(x+a)}{2} + 0{,}5x + 3$ дорівнює 4, якщо $x = -1$.

Чому дорівнює значення виразу, якщо $x = 5$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

891. Перебуваючи за кордоном, ти маєш можливість користуватися послугами одного з двох мобільних операторів. Перший пропонує сплачувати 10 грн за першу хвилину і 2 грн за кожну наступну хвилину розмов, а другий — 7 грн і 3 грн відповідно. Побудуй графік залежності вартості розмови від часу, що не перевищує 6 хв, для кожного оператора. Який висновок можна зробити?

892. Знайди значення виразу.

а) $5a^3$, якщо $a = 0{,}2$;
б) $2x^2 - x^4 - 5$, якщо $x = -2$;
в) $a^3 + 3a^2$, якщо $a = 0{,}2$;
г) $3a^4 - a^2$, якщо $a = -1{,}2$.

893. Знайди:

а) 20 % від 350;
б) 30 % від 56 000;
в) 12 % від 0,75;
г) 125 % від 1,4.

§ 21. Розв'язування задач за допомогою рівнянь

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- прикладна задача — *applied problem*
- математична модель — *mathematical model*

Серед задач розрізняють прикладні й абстрактні.

Абстрактна задача	Прикладна задача
Знайди числа, сума яких дорівнює 34, а різниця 24.	Скільки років батьку і доньці, якщо разом їм 34 роки і батько старший за доньку на 24 роки?

У математиці *прикладними* називають задачі, умови яких містять нематематичні поняття. Для того, щоб розв'язати прикладну задачу, спочатку будують її математичну ***модель***.

Математичні моделі створюють із геометричних фігур, чисел, виразів тощо.

Щоб розв'язати прикладну задачу за допомогою рівняння, спочатку слід скласти відповідне до цієї задачі рівняння. Власне кажучи, треба перекласти задачі зі звичайної мови на алгебраїчну, тобто скласти *математичну модель* даної задачі.

Задача 1. На двох токах 1000 т зерна. Скільки зерна на кожному току, якщо на першому його на 200 т менше, ніж на другому?

Розв'язання. Нехай на першому току x т зерна. Тоді на другому — $(x + 200)$ т, а на обох — $(x + x + 200)$ т. Маємо рівняння:

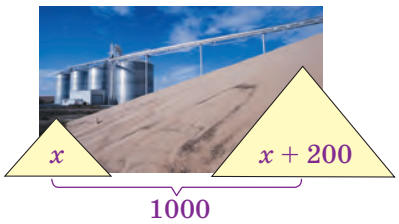
$$x + x + 200 = 1000, \leftarrow \text{математична модель}$$
$$2x = 800,$$
$$x = 400.$$

Отже, на першому току 400 т зерна, а на другому

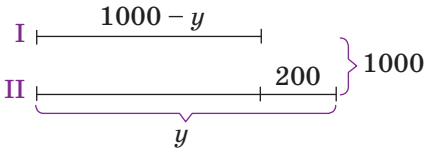
$$400 + 200 = 600 \text{ т}.$$

Відповідь. 400 т і 600 т.

Часто у складанні рівняння допомагає інша модель — рисунок (мал. 21.1) або схема (мал. 21.2).



Мал. 21.1



Мал. 21.2

Дану задачу можна розв'язати й за допомогою інших рівнянь.

Якщо на другому току є y т зерна, то на першому $(1000 - y)$ т (мал. 21.2). Оскільки на другому току зерна на 200 т більше, то можна скласти рівняння:

$$1000 - y + 200 = y \qquad \text{або} \qquad y - (1000 - y) = 200.$$

Малюнок (мал. 21.1), рівняння $1000 - y + 200 = y$, схема (мал. 21.2) — це три різні математичні моделі прикладної **задачі 1.**

Для розв'язування задач на рух також використовують різні моделі. Бажано пам'ятати, що при рівномірному русі пройдена тілом відстань дорівнює добутку швидкості на час ($s = vt$). При цьому всі значення величин слід виражати у відповідних одиницях. Наприклад, якщо час дано в годинах, а відстань — у кілометрах, то швидкість треба виражати в кілометрах за годину.

Якщо тіло рухається при наявності течії, то його швидкість руху за течією (проти течії) дорівнює сумі (різниці) його власної швидкості та швидкості течії.

Деякі задачі вимагають для розв'язування побудови кількох моделей. Розглянемо задачу, скласти рівняння до якої допомагає інша модель — таблиця.

Задача 2. Катер мав пройти відстань між містами зі швидкістю 15 км/год, а насправді йшов зі швидкістю 12 км/год і тому запізнився на 3 год. Знайди відстань між містами.

Розв'язання. Побудуємо таблицю і заповнимо стовпчики для відстані та швидкості. Виразимо час у кожному з випадків.

I спосіб

Умова	Відстань, км	Швидкість, км/год	Час, год
Мав пройти	x	15	$\frac{x}{15}$
Пройшов	x	12	$\frac{x}{12}$

Катер ішов на 3 год довше, ніж мав іти. Цій умові відповідає рівняння: $\frac{x}{12} - \frac{x}{15} = 3.$

$5x - 4x = 180,$

$x = 180.$

Помножимо обидві частини рівняння на 60

II спосіб

Не обов'язково за x позначати величину, яку потрібно знайти за умовою задачі. Наприклад, нехай час, за який катер мав пройти відстань між містами, становить t год.

Умова	Час, год	Швидкість, км/год	Відстань, км
Мав пройти	t	15	$15t$
Пройшов	$t + 3$	12	$12(t + 3)$

Відстань між містами стала, тож маємо рівняння:

$$15t = 12(t + 3),$$
$$15t = 12t + 36,$$
$$15t - 12t = 36,$$
$$3t = 36,$$
$$t = 12.$$

Отже, катер мав рухатися 12 год зі швидкістю 15 км/год і пройти $15 \cdot 12 = 180$ км.

Відповідь. 180 км.

Розв'язавши задачу за допомогою рівняння, треба завжди аналізувати одержане значення невідомого. Може статися, що знайдений розв'язок рівняння не задовольняє умову задачі.

Задача 3. Периметр трикутної підставки дорівнює 17 см. Знайди її сторони, якщо перша з них коротша від другої на 2 см, а від третьої — на 6 см.

Розв'язання. Нехай довжина найкоротшої сторони підставки дорівнює x см. Тоді довжини інших сторін відповідно становитимуть $(x + 2)$ см і $(x + 6)$ см. Маємо рівняння:

$$x + x + 2 + x + 6 = 17,$$
$$3x + 8 = 17,$$
$$3x = 9,$$
$$x = 3 \text{ (см)} \text{ — перша сторона}$$

$x + 2 = 3 + 2 = 5$ (см) — друга сторона

$x + 6 = 3 + 6 = 9$ (см) — третя сторона

Чи існує трикутник з такими сторонами? Ні, тому що кожна сторона трикутника коротша від суми двох інших, а $9 > 3 + 5$.

Відповідь. Задача не має розв'язку.

Розв'язування прикладних задач методом математичного моделювання здійснюється в **три етапи:**

1) створення математичної моделі даної задачі;

2) розв'язування відповідної математичної задачі;

3) аналіз відповіді.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Іноді за допомогою рівняння розв'язують не всю задачу, а тільки її частину.

Покажемо, наприклад, як можна заповнювати порожні клітинки *магічного квадрата* — таблиці чисел з однаковою кількістю рядків і стовпчиків, з однаковою сумою чисел у всіх рядках, стовпчиках і по діагоналях.

Задача. Перемалюй в зошит малюнок 21.3 і в його порожніх клітинках напиши такі числа, щоб утворився магічний квадрат.

5	6	
	7	

Мал. 21.3

Розв'язання. Позначимо буквою x число у правій верхній клітинці. Тоді сума всіх чисел першого рядка дорівнюватиме $5 + 6 + x$, або $11 + x$. Такими мають бути суми і в кожній діагоналі, і в середньому стовпчику, тому в нижньому рядку слід написати 4, $x - 2$, $x - 1$ (мал. 21.4). Оскільки сума чисел має дорівнювати $11 + x$, то складаємо рівняння:

$$4 + (x - 2) + (x - 1) = 11 + x,$$
$$2x + 1 = 11 + x,$$
$$x = 10.$$

5	6	x
	7	
4	$x-2$	$x-1$

Мал. 21.4

Підставимо замість x його значення 10, після чого порожні клітинки малюнка 21.5 заповнити неважко.

5	6	10
	7	
4	8	9

Мал. 21.5

У даному випадку рівняння $4 + (x - 2) + (x - 1) = 11 + x$ — модель частини сформульованої задачі, що дає змогу обчислити тільки значення x.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Наведи приклад задачі та її математичної моделі.
2. Які бувають математичні моделі?
3. З яких етапів складається розв'язування задачі методом математичного моделювання?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Катер пройшов відстань між пристанями за течією річки за 2 год, а повернувся назад — за 2,5 год. Знайди власну швидкість катера, якщо швидкість течії становить 2 км/год.

Розв'язання. Нехай власна швидкість катера дорівнює x км/год. Тоді:

$(x + 2)$ км/год — швидкість катера за течією;
$(x - 2)$ км/год — швидкість катера проти течії;
$(x + 2) \cdot 2$ км — відстань, яку катер пройшов за течією;
$(x - 2) \cdot 2{,}5$ км — відстань, яку катер пройшов проти течії.

Відстані $(x - 2) \cdot 2{,}5$ і $(x + 2) \cdot 2$ рівні. Отже, маємо рівняння

$2{,}5(x - 2) = 2(x + 2)$, звідси

$2{,}5x - 5 = 2x + 4, \qquad 0{,}5x = 9, \qquad x = 18.$

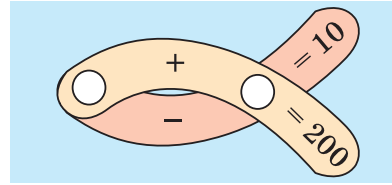
Відповідь. 18 км/год.

2. Розв'яжи математичний кросворд (мал. 21.6).

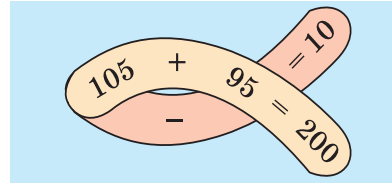
Розв'язання. В кружки слід вписати два числа, щоб їх сума дорівнювала 200, а різниця — 10. Якщо друге число позначимо буквою x, то перше дорівнюватиме $200 - x$. Їх різниця становить 10, отже, $200 - x - x = 10$, звідси

$2x = 190$, $x = 95$, $200 - x = 105$.

Відповідь. На малюнку 21.7.



Мал. 21.6



Мал. 21.7

ВИКОНАЙ УСНО

894. Наведи приклад: а) абстрактної задачі;
б) прикладної задачі.

895. Чи правильні висновки зробила Діана, прочитавши параграф?
1) До однієї прикладної задачі можна побудувати декілька моделей.
2) Іноді знайдений математичний розв'язок прикладної задачі не відповідає змісту її умови, а отже, не є її розв'язком.

896. Знайди два числа, сума яких дорівнює 3, а різниця 1.

897. Знайди два числа, якщо одне з них у 4 рази більше за друге, а їх сума дорівнює 10.

898. Знайди числа x і y, якщо $x + y = 25$ і $x = y$.

899. Учень задумав число. Якщо від нього відняти 7 і результат поділити на 3, то одержимо 5. Яке число задумав учень?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

900. Прикладною чи абстрактною є кожна з наведених задач? Розв'яжіть їх.

а) Знайдіть число, половина якого більша за його третю частину на 0,5. Зробіть перевірку.

б) Сума двох чисел дорівнює 13,6, а різниця становить 1,6. Знайдіть ці числа.

в) Сума двох чисел дорівнює 105, а їх відношення становить 1 : 2. Знайдіть ці числа.

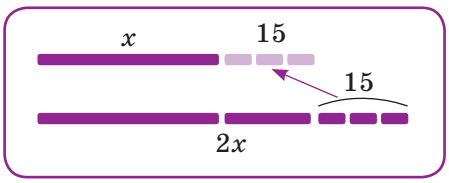
901. Поле площею 430 га поділено на дві частини так, що одна з них на 130 га більша за іншу. Знайди площу кожної частини. За планом склади рівняння до задачі та розв'яжи її.

1) *Познач меншу частину поля за x.*
2) *Вирази другу частину поля через x.*
3) *Знаючи, що сума площ двох полів дорівнює 430 га, склади рівняння до задачі.*

902. Мотузку завдовжки 84 м розрізали на дві частини, одна з яких утричі довша за іншу. Знайди довжину кожної частини. Запиши план для складання рівняння та розв'яжи задачу.

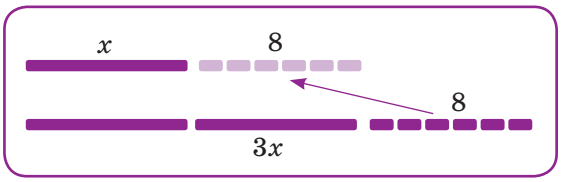
903. Периметр прямокутника дорівнює 118 см, одна його сторона на 12 см довша за іншу. Знайдіть довжини сторін прямокутника. Запишіть план для складання рівняння та розв'яжіть задачу.

904. В другому басейні людей у два рази більше, ніж у першому. Якщо з другого басейну перемістити 15 людей у перший, то в обох басейнах людей стане порівну (мал. 21.8). Скільки людей у кожному басейні?



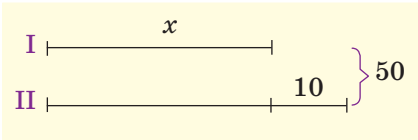
Мал. 21.8

905. В другому кошику яблук у три рази більше, ніж у першому. Коли з другого кошика переклали 8 яблук у перший, то в обох кошиках яблук стало порівну (мал. 21.9). Скільки яблук було у кожному кошику спочатку?



Мал. 21.9

906. Склади і розв'яжи задачу за схемою 21.10.



Мал. 21.10

907. В Оксани й Івана грошей було порівну. Коли Оксана витратила 48 грн, а Іван 87 грн, то в Оксани грошей залишилося у чотири рази більше, ніж у Івана. Скільки грошей було у кожного з них спочатку? За планом на наступній сторінці складіть рівняння до задачі та розв'яжіть її.

1) *Позначте за x те, про що запитують в задачі.*
2) *Виразіть через x кількість грошей, що залишилася в Оксани.*
3) *Виразіть через x кількість грошей, що залишилася в Івана.*
4) *Знаючи, що в Оксани залишилося в 4 рази більше грошей, складіть рівняння.*

908. Для благодійної ярмарки Остап і Катруся сплели однакову кількість браслетів. Коли Остап продав 6 браслетів, а Катруся 15, то в Остапа залишилося браслетів у два рази більше, ніж у Катрусі. Скільки браслетів сплів кожен?

909. Три трактористи зорали разом 72 га. Перший зорав на 6 га більше за другого, а другий на 9 га більше за третього. Скільки гектарів зорав кожний тракторист?

910. У трьох класах 79 учениць. У другому — на 3 учениці більше, ніж у першому, а в третьому — на 2 учениці менше, ніж у першому. Скільки учениць у кожному класі?

911. За 3 дні було здійснено 56 доставок їжі. У перший день було здійснено на 12 доставок менше, ніж у другий, а в третій — удвічі більше, ніж у перший. Скільки доставок було здійснено кожного дня?

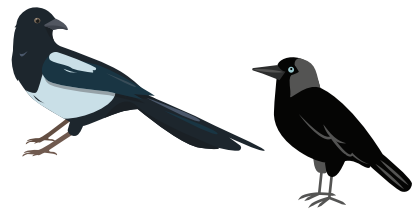
912. Поле площею 860 га поділено на 3 ділянки так, що сума площ двох перших ділянок дорівнює площі третьої, а площа другої ділянки в 1,5 рази більша за площу першої. Знайди площі ділянок.

913. Батько в 5 разів старший за сина, а син на 32 роки молодший від батька. Скільки років кожному з них?

914. Матері 38 років, а доньці — 12. Коли донька була чи буде втричі молодшою від матері? А вдвічі?

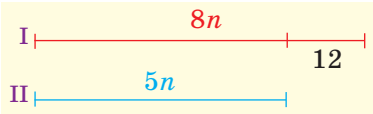
915. A father is 40 years old and his son is 10. In how many years will the son be three times younger than the father?

916. Скільки років тій Сороці, що за Галку старша вдвічі, а в позаминулім році старшою була утричі?



917. Скільки років матері й доньці, якщо в позаминулому році донька була молодшою від матері в 5 разів, а в наступному буде молодшою в 4 рази?

918. Кількість поверхів одного будинку відноситься до кількості поверхів іншого будинку, як 8 : 5. Скільки поверхів у кожному будинку, якщо в першому їх на 12 більше, ніж у другому? Скористайся схемою (мал. 21.11).



Мал. 21.11

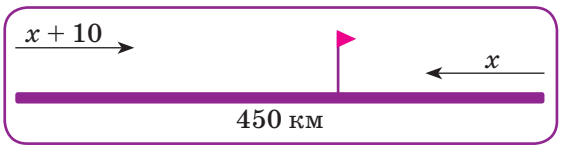
919. Мати на 20 років старша за сина, а їх роки відносяться, як 7 : 2. Скільки років матері?

920. Поїзд проходить відстань від A до B за 3 год. Якби він їхав зі швидкістю на 10 км/год більшою, то в дорозі був би на пів години менше. Знайди відстань між A і B. Заповни порожні клітинки таблиці, склади рівняння та розв'яжи задачу.

	s, км	v, км/год	t, год
I		x	3
II		$x + 10$	2,5

921. Швидкість катера в стоячій воді відноситься до швидкості течії річки, як 25 : 2. За течією катер ішов 3 год 50 хв. Скільки часу потрібно йому, щоб повернутися назад?

922. Із двох міст, відстань між якими 450 км, одночасно виїхали назустріч один одному два автомобілі й зустрілися через 3 год (мал. 21.12). По скільки кілометрів проїхали вони до зустрічі, якщо один їхав зі швидкістю, на 10 км/год більшою, ніж інший? Зроби перевірку.



Мал. 21.12

923. Із міст A і B, відстань між якими 210 км, одночасно виїхали назустріч один одному два автомобілі й зустрілися через півтори години. Знайди швидкості автомобілів, якщо до зустрічі перший автомобіль проїхав на 30 км більше, ніж другий. Побудуй схему та розв'яжи задачу.

924. Велосипедист їхав 2 год ґрунтовою дорогою, 1 год — асфальтованою і проїхав 28 км. Знайди його швидкість на кожній ділянці шляху, якщо асфальтованою дорогою він їхав зі швидкістю, на 4 км/год більшою, ніж ґрунтовою.

925. Катер у стоячій воді йде зі швидкістю 20 км/год. Швидкість течії річки становить 2 км/год. Знайди відстань між двома пристанями, якщо рейс туди й назад катер здійснює за 5 год. Заповни порожні клітинки таблиці, склади рівняння та розв'яжи задачу.

	s, км	v, км/год	t, год
За течією			x
Проти течії			$5 - x$

926. Катер у стоячій воді проходить 16 км за 1 год, швидкість течії річки дорівнює 2 км/год. Знайди відстань між двома пристанями, якщо в один бік катер проходить її на пів години швидше, ніж в інший.

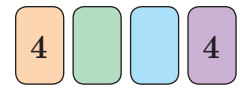
ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

927. До якого числа слід додати 4 і 19, щоб утворені суми відносились, як 8 : 11?

928. Сума цифр даного двоцифрового числа дорівнює 8. Якщо цифри поміняти місцями, то вийде число, на 18 більше, ніж дане. Знайди дане число.

929. Якщо до трицифрового числа зліва дописати цифру 8 і до утвореного чотирицифрового числа додати 619, то сума буде в 40 разів більша, ніж дане трицифрове число. Знайдіть це число. Зробіть перевірку.

930. Якщо до двоцифрового числа дописати справа і зліва цифру 4, то утворене число буде в 54 рази більше за дане двоцифрове. Знайди це двоцифрове число.



931. Якщо до даного числа дописати справа цифру 9 і до утвореного числа додати подвоєне дане число, то сума дорівнюватиме 633. Знайди дане число.

932. Відстань між двома станціями поїзд може проїхати зі швидкістю 70 км/год на пів години швидше, ніж зі швидкістю 60 км/год. Знайди цю відстань.

933. Пасажирський поїзд протягом 3 год проходить на 10 км більше, ніж товарний — за 4 год. Швидкість товарного поїзда на 20 км/год менша від швидкості пасажирського. Знайди ці швидкості.

934. Від станції до турбази туристи йшли зі швидкістю 4 км/год, а назад — зі швидкістю 5 км/год, тому на той самий шлях затратили на 1 год менше. Знайди відстань від станції до турбази.

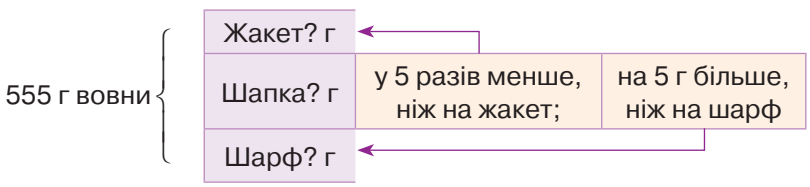
935. Теплохід вийшов з порту K у порт P зі швидкістю 32 км/год. На відстані 216 км від порту K він потрапив у шторм і мав зменшити швидкість на 5 км/год, тому прибув у порт P із запізненням на 25 хв. Знайди відстань між портами K і P.

936. Майстри мали скласти шафи для шкільних кабінетів за 5 днів, а виконали роботу за 4 дні, бо складали щодня на 12 шаф більше. Скільки шаф склали майстри?

937. Мотузку завдовжки 25 м розрізали на дві частини, одна з яких на 50 % довша за іншу. Знайди довжини цих частин мотузки. Зроби перевірку.

938. Кількість уболівальників та уболівальниць команди A відноситься до кількості уболівальників та уболівальниць команди B, як 3 : 2. Якщо 8 уболівальників та уболівальниць перейдуть з команди A до команди B, то попереднє відношення зміниться на таке: 5 : 6. Скільки уболівальників та уболівальниць буде в кожній команді?

939. За моделлю складіть умову задачі та розв'яжіть її (мал. 21.13).



Мал. 21.13

940. Із двох сіл, відстань між якими 36 км, назустріч один одному повинні виїхати дві велосипедистки. Якщо вони виїдуть одночасно, то зустрінуться через півтори години. Якщо ж друга виїде на півгодини пізніше, ніж перша, то вони зустрінуться після того через 1,25 год. Знайди швидкості велосипедисток.

941. О 5 год 30 хв з міста A в місто B вилетів вертоліт зі швидкістю 250 км/год, зробив у місті B посадку на 30 хв і зі швидкістю 200 км/год повернувся в місто A о 12 год 45 хв. Знайди відстань між містами A і B.

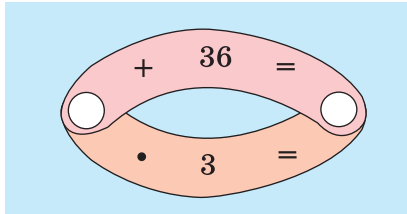
942. *Стародавня індійська задача.* З букета квіток лотоса принесено в жертву: Шіві — третю частину, Вішну — п'яту, Сонцю — шосту. Одну чверть одержав Бхавані, а решту, 6 лотосів, дано шанованому вчителеві. Скільки було квіток у букеті?

943. *Стародавня грецька задача.* На запитання, скільки учнів навчається в школі, Піфагор відповів: «Половина всіх учнів вивчають математику, чверть — музику, сьома частина — мовчать і, крім того, є ще три жінки». Скільки тоді було учнів у Піфагора?

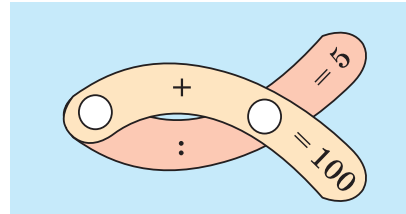
Піфагор
(бл. 570 — бл. 500 рр. до н. е.)

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

944. Розв'яжи математичні кросворди (мал. 21.14 і 21.15).



Мал. 21.14



Мал. 21.15

945. Сума двох чисел дорівнює 100. Якщо більше з них поділити на менше, то в частці буде 4 і в остачі 5. Знайди ці числа.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

946. Обчисли значення виразу. а) $|-2,7|+2,4$;

б) $-2,4+|-2,3|$; в) $|-10,5|:7-3,2$; г) $4,8-|3,2|:|-0,8|$.

947. Ти забув/забула останню цифру номера телефону свого знайомого. Яка ймовірність того, що відразу, коли набереш навмання першу цифру, ти зателефонуєш саме до нього?

948. Розкрий дужки і спрости вираз.

а) $(2c - 1) - (3c - 2)$; б) $-(1 - 2a) + 3(1 - a)$;

в) $x^2 - 2(8 + x) + 16$; г) $x^2 - 2x + 2(2 - x)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРІАНТ I

1. Розв'яжи рівняння.

а) $12x + 2(3 - 5x) = 10$; б) $25 - x^2 = 0$; в) $\frac{2x-3}{4} = \frac{7-x}{3}$.

2. При якому значенні a коренем рівняння $(2a - 3)x = 3 + a$ є число 2?

3. Із двох міст, відстань між якими 450 км, одночасно виїхали назустріч один одному два автомобілі й зустрілися через 3 год. Знайди швидкість кожного автомобіля, якщо один їхав зі швидкістю, на 10 км/год більшою, ніж інший.

ВАРІАНТ II

1. Розв'яжи рівняння.

а) $2(6x - 3) - 5x = 8$; б) $x^2 - 16 = 0$; в) $\frac{4-x}{2} = \frac{5x-7}{3}$.

2. При якому значенні a коренем рівняння $(3a - 5)x = 7 - a$ є число 5?

3. З одного пункту одночасно у протилежних напрямах виїхали два автомобілі. Знайди швидкість кожного автомобіля, якщо один їхав зі швидкістю, на 15 км/год більшою, ніж інший, і через дві години відстань між ними була 310 км.

ВАРІАНТ III

1. Розв'яжи рівняння.

а) $3x + 5(2 - 3x) = -26$; б) $9 - x^2 = 0$; в) $\frac{3x-2}{4} = \frac{8+2x}{5}$.

2. При якому значенні a коренем рівняння $(5a - 4)x = 2 + a$ є число 3?

3. Із двох міст, відстань між якими 648 км, одночасно виїхали назустріч один одному два автомобілі й зустрілися через 4 год. Знайди швидкість кожного автомобіля, якщо один їхав зі швидкістю, на 12 км/год більшою, ніж інший.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 6

1. Яке рівняння не має коренів?

А $2x + x = 10$ **Б** $x : 5 = 0$
В $5 = x$ **Г** $0 : x = 10$

2. Яке з чисел є коренем рівняння $3x + 5 = 1$?

А $\frac{3}{5}$ **Б** $-1\frac{1}{3}$ **В** $-1\frac{2}{3}$ **Г** $-1\frac{1}{5}$

3. Яке рівняння має тільки один корінь?

А $x = x + 5$ **Б** $|x| = 4$ **В** $x^2 = 0$ **Г** $x(x - 1) = 0$

4. Розв'яжи рівняння $5x + 13 = 3x + 2$.

А $-5{,}5$ **Б** $5{,}5$ **В** $4{,}5$ **Г** $-4{,}5$

5. Рівняння $2(2 - x) = x - 2$ має розв'язків:

А безліч **Б** жодного **В** один **Г** два

6. Яке з рівнянь рівносильне рівнянню $5x = -10$?

А $5x - 10 = 0$ **Б** $10x = -5$
В $-10 : 5 = x$ **Г** $5(x + 10) = 0$

7. При якому значенні a рівняння $|x| = a$ має єдиний корінь?

А 1 **Б** -1 **В** 0 **Г** 2

8. При якому значенні a рівняння $(a - 1)x = 1 - a$ має безліч коренів?

А 1 **Б** -1 **В** 0 **Г** 2

9. При якому значенні a рівняння $5(a - 3)x = 48$ має корінь $x = 6$?

А $5{,}5$ **Б** $-5{,}5$ **В** $4{,}6$ **Г** $5{,}6$

10. Вкажи найменший корінь рівняння $|x - 2| - 5 = 0$.

А 7 **Б** -7 **В** 0 **Г** -3

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 6

1. Яке з рівнянь не є лінійним?

А $2x = 5$ **Б** $0{,}2x = 7$ **В** $x^2 - 16 = 0$ **Г** $0x = -5$

2. Знайди корінь рівняння $5x - 4 = 36$.

А 6 **Б** 8 **В** −8 **Г** −1,8

3. Яке рівняння не задовольняє число 5?

А $2x = 10$ **Б** $5 - x = 0$ **В** $0x = 0$ **Г** $x + 5 = 0$

4. Установи відповідність між рівняннями, заданими умовами (1–4), та кількістю їх розв'язків (А–Д).

1 $2(x + 3) = 7 - (1 - 2x)$	**А** один розв'язок
2 $9 - x^2 = 0$	**Б** два розв'язки
3 $x^2 - 10x + 25 = 0$	**В** три розв'язки
4 $x^2 + 16 = 0$	**Г** безліч розв'язків
	Д жодного розв'язку

5. В одній шафі книжок було у три рази більше, ніж у другій. Коли у другу шафу поклали 38 книжок, а з першої взяли 46, то в обох шафах книжок стало порівну. Скільки книжок було у кожній шафі спочатку?

6. Розв'яжи рівняння.

а) $3(x - 8) + 5 = 2(3x - 0{,}5)$;

б) $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 6x + 8$;

в) $\frac{2x+3}{5} + \frac{9+x}{10} = \frac{1+3x}{2}$.

7. Катер рухався 5 год за течією річки і 6 год проти течії, пройшовши всього 328 км. Знайди власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки становить 2 км/год.

8. При яких значеннях a рівносильними є рівняння?

$\frac{1}{2}(4x-5)+\frac{3}{2}(2x+7)=x+6$ і $ax = x + a$

Додаткове завдання

9. Знайди корені рівняння $|2-5x|+3=12$.

§ 22. Рівняння з двома змінними

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- рівняння з двома змінними — *equations with two variables*

Досі ми розглядали рівняння з однією змінною. Проте є задачі, розв'язування яких приводить до рівнянь із двома змінними.

Задача. На 220 грн купили кілька ручок по 50 грн і кілька кольорових олівців по 30 грн. Скільки купили ручок і олівців?

Розв'язання. Нехай купили x ручок і y олівців. За ручки заплатили $50x$ грн, а за олівці — $30y$ грн. Усього заплатили 220 грн, отже, $50x + 30y = 220$.

Це рівняння з двома змінними. Наведемо й інші приклади таких рівнянь із двома змінними: $xy = 8$, $2x = 3y$, $x^2 + y = 7$.

Рівняння виду $ax + by = c$, де a, b, c — деякі числа, називають *лінійним* рівнянням із двома змінними x і y. Якщо $a \neq 0$ і $b \neq 0$, його називають рівнянням першого степеня з двома змінними.

Лінійні рівняння

$$\underbrace{5x + 3y = 22, \quad x - 2{,}7y = 0,}_{\text{Рівняння першого степеня з двома змінними}} \qquad 0x + 2y = 4.$$

Пара чисел $x = -1$ і $y = 9$ задовольняє рівняння $5x + 3y = 22$, бо $5 \cdot (-1) + 3 \cdot 9 = 22$.

Пара чисел $x = 1$ і $y = 2$ це рівняння не задовольняє, оскільки $5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \neq 22$.

Кожну пару чисел, яка задовольняє рівняння з двома змінними, тобто перетворює це рівняння в правильну рівність, називають *розв'язком* цього рівняння.

Зверни увагу: один розв'язок складається з двох чисел, на першому місці записують значення x, на другому — y. Коренями їх не називають.

Щоб знайти розв'язки рівняння з двома змінними, слід підставити в рівняння довільне значення однієї змінної, розв'язати утворене рівняння і знайти відповідне значення іншої змінної.

Знайдемо кілька розв'язків рівняння $3x - y = 5$.

Якщо $x = 1$, то $3 \cdot 1 - y = 5$, звідси $y = -2$.

Пара чисел $x = 1$ і $y = -2$ — розв'язок даного рівняння.

Записують ще й так: $(1; -2)$.

Надаючи змінній x значення 2, 3, 4, так само можна знайти скільки завгодно розв'язків рівняння: $(2; 1)$, $(3; 4)$, $(4; 7)$, $(5; 10)$, ...

Кожне рівняння першого степеня з двома змінними має безліч розв'язків.

Рівняння $50x + 30y = 220$ також має безліч розв'язків, але сформульовану вище **задачу про олівці та ручки** задовольняє тільки один із них: $(2; 4)$.

Два рівняння з двома змінними називають *рівносильними*, якщо кожне з них має ті самі розв'язки, що й інше. Рівняння, які не мають розв'язків, також вважають рівносильними.

Для рівняння з двома змінними залишаються правильними властивості, сформульовані для рівнянь із однією змінною.

Обидві частини рівняння з двома змінними можна помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число.

Будь-який член такого рівняння можна перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний.

Наприклад, рівняння $8x = 7 + 3(1 - 2y)$ можна перетворити так:

$$8x = 7 + 3 - 6y,$$
$$8x + 6y = 10,$$
$$4x + 3y = 5.$$

Кожне з цих рівнянь рівносильне одне одному

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Іноді виникає потреба розв'язати рівняння з двома змінними в множині цілих чисел, тобто визначити тільки такі розв'язки, які є парами цілих чисел. Способи розв'язування таких рівнянь опрацював давньогрецький математик Діофант (III ст.), тому їх називають *діофантовими рівняннями*. Наприклад, задача про ручки та олівці зводиться до рівняння $50x + 30y = 220$, де x і y можуть бути тільки цілими (навіть тільки натуральними) числами.

Поділимо обидві частини рівняння на 10 і змінну y виразимо через x: $y = \frac{22-5x}{3}$.

Підставлятимемо в рівність замість x перші натуральні числа доти, поки не одержимо ціле значення змінної y. Це можна робити усно. Якщо $x = 2$, то $y = 4$. Підставивши $x = 3$ і $x = 4$, переконаємося, що інших натуральних розв'язків рівняння не має. Тому задача має єдиний розв'язок: 2 ручки і 4 олівці.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Яке рівняння називають лінійним рівнянням із двома змінними? Наведи приклади таких рівнянь.
2. Що називають розв'язком рівняння з двома змінними?
3. Які рівняння з двома змінними називають рівносильними?
4. Сформулюй основні властивості рівнянь. Чи правильні вони для рівнянь із двома змінними?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Розв'яжи рівняння.
а) $x^2 + 6y^2 = -7$; б) $(x - 3)^2 + y^2 = 0$.
Розв'язання.
а) Ні за яких значень x і y значення виразу $x^2 + 6y^2$ не може бути від'ємним числом. Тому рівняння розв'язків не має.
б) Значення виразу $(x - 3)^2 + y^2$ дорівнює нулю тільки за умови, коли $x - 3 = 0$ і $y = 0$. Отже, рівняння має тільки один розв'язок: $x = 3$, $y = 0$.
2. Склади рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел (1; −5).
Розв'язання. Пишемо будь-який двочлен зі змінними x і y, наприклад $3x - 5y$. Якщо $x = 1$, а $y = -5$, то значення даного двочлена дорівнює 28. Отже, рівняння $3x - 5y = 28$ відповідає умові задачі. Є безліч інших лінійних рівнянь із двома змінними, які мають такий самий розв'язок (1; −5).

ВИКОНАЙ УСНО

949. Назви рівняння з двома змінними.
а) $3x - y = 5$; б) $x^3 + 4z = 9$; в) $xy - 28 = 3$;
г) $2y - xz = 0$; ґ) $0{,}72 = 8t + 5$; д) $x - 2(3 - y) = 5$.

Які з цих рівнянь лінійні?

950. Знайдіть кілька розв'язків рівняння.
а) $x + y = 5$; б) $x - y = 2$; в) $xy = 30$.

951. Чи має розв'язки рівняння?
а) $x^2 + y^2 = -3$; б) $|x| + |y| = 0$; в) $x^4 + |y| = -8$.

952. Чи задовольняють значення $x = 5$ і $y = -2$ рівняння $5x - 2y = 10$?

953. Яка з пар чисел є розв'язком рівняння $2x - 5y = 9$?
А (1; 2) **Б** (−1; 2) **В** (−2; 1) **Г** (2; −1)

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

954. Які з пар (3; 2), (4; −3), (1; 4) є розв'язками рівняння?
а) $2x + 7y = 20$; б) $-2t + 3z = 10$; в) $x - 4y = 16$.

955. Які з пар (1; 2), (2; 7), (−1; 1) є розв'язками рівняння?
а) $x + y = 0$; б) $5x - y = 3$; в) $2x + 3y = 1$.

956. Знайди три будь-які розв'язки рівняння.
а) $x - y = 16$; б) $2x + y = 3{,}5$; в) $4a + 5b = 20$.

957. Find any two solutions of the equation.
a) $2x + y = 7$; b) $2x - 3z = 10$; c) $4x + 5n = 21$.

958. **Гра.** Перший учень/перша учениця має записати лінійне рівняння з двома змінними, другий/друга має записати його розв'язок, третій/третя — називає його інший розв'язок. Потім поміняйтеся ролями.

959. Заміни зірочки числами так, щоб пари (1; *), (4; *), (−2; *), (*; 2), (*; 0), (*; −5) задовольняли рівняння $x + 3y = 10$.

960. Заміни зірочки числами так, щоб пари (1; *), (3; *), (−4; *), (*; 2), (*; −3), (*; 0) задовольняли рівняння $5x + y = 12$.

Склади рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел **(961, 962)**.

961. а) (3; 2); б) (−2; 5); в) $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right)$.

962. а) (1; 4); б) (−2; 3); в) (−4,2; −1,5).

963. З лінійного рівняння вирази: 1) y через x; 2) x через y.
а) $x - y = 2$; б) $5x + y = 15$; в) $x - 2y = 6$.

964. З лінійного рівняння вирази: 1) x через y; 2) y через x.
а) $x - y = 7$; б) $x + 3y = 12$; в) $3x - y = 2$.

965. Знайдіть таке число c, щоб пара $(c; -c)$ задовольняла рівняння.
а) $2x + 3y = 20$; б) $5x - y = 12$;
в) $x - 8y = 9$; г) $7x - 3y = 20$.

966. Знайди таке число n, щоб пара $(n; -n)$ задовольняла рівняння.
а) $5x + 4y = 3$; б) $9x^2 - y = 70$;
в) $x^2 + 4y = 0$; г) $x + |y| = 4$.

967. Знайди значення коефіцієнта a в рівнянні $ax + 5y = 1$, якщо відомо, що пара $x = 3$, $y = -4$ є розв'язком цього рівняння.

968. Знайди значення коефіцієнта k в рівнянні $3x + ky = 14$, якщо відомо, що пара $(-2; 5)$ є розв'язком цього рівняння.

969. Знайди значення коефіцієнта a в рівнянні $5x - ay = 2$, якщо його задовольняє пара чисел:
а) $(2; 1)$; б) $(1; 2)$; в) $(4; 3)$; г) $(-5; 9)$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

970. Доведіть, що рівняння $x^2 + y^2 = -5$ не має розв'язків.

971. Чи має розв'язки рівняння з двома змінними?
а) $x^2 + y^2 = -1$; б) $x^2 - y^2 = -3$; в) $x^2 + 3y^2 = 0$.

972. Доведи, що рівняння не має розв'язків.
а) $x^2 + (y - 1)^2 = -3$; б) $x^2 + y^2 + 2 = 2y$; в) $|x| + y^2 + 1 = 0$.

Розв'яжи рівняння **(973–976)**.

973. а) $x^2 + (y - 1)^2 = 0$; б) $(x + 3)^2 + y^2 = 0$;
в) $(2x + 3)^4 + y^2 = 0$.

974. а) $x^2 + (y - 2)^2 = 0$; б) $(x - 3)^2 + (y + 1)^4 = 0$;
в) $|x| + y^2 = 0$.

975. а) $x^2 + y^2 + 1 = 2x$; б) $x^2 + y^2 + 9 = 6x$;
в) $x^2 + 4y^2 + 1 = 4y$; г) $4x^2 + y^2 + 2 = 2(2x - y)$.

976. а) $x^2 + y^2 + 4 = -4x$; б) $x^2 + y^2 + 16 = 8y$;
в) $x^2 + 2x + y^2 + 5 = 4y$; г) $x^2 + y^2 + 8 = 4(y - x)$.

При яких значеннях n рівняння має тільки один розв'язок **(977, 978)**?

977. а) $x^2 + y^2 = n$; б) $x^2 + |y| = n - 1$.

978. а) $|x| + |y| = n + 2$; б) $(x - 3)^4 + y^4 = n^4$.

979. Установи відповідність між рівняннями (1–3) та кількістю їх розв'язків (А–Г).

1 $x^2 + y^2 = 0$	**А** один
2 $x^2 + y^2 = -2$	**Б** два
3 $x(x^2 + y^2) = 0$	**В** жодного
	Г безліч

Знайди натуральні значення x і y, які задовольняють рівняння **(980, 981).**

980. а) $x + 4y = 13$; б) $5x + y = 14$; в) $3x + 2y = 22$.

981. а) $x + 12y = 37$; б) $3x + y = 16$; в) $4x + 5y = 29$.

Знайди цілі розв'язки рівняння **(982, 983).**

982. а) $x^2 + y^2 = 2$; б) $2x^2 + y^2 = 9$.

983. а) $x^2 + y^2 = 5$; б) $x^2 + 3y^2 = 31$.

984. Знайди таке значення a, щоб рівняння $3x - 2y^2 = 6$ мало розв'язок.
а) $(a; 3)$; б) $(2; a)$; в) $(a; 0)$; г) $(8; a)$.

985. Знайдіть двоцифрове число, яке більше за суму його цифр у: а) 2 рази; б) 6 разів; в) 4 рази.

986. Знайди двоцифрове число, яке більше за суму його цифр у: а) 3 рази; б) 5 разів; в) 8 разів.

987. Знайди двоцифрове число, яке у 2,5 рази більше за добуток його цифр.

988. Знайди двоцифрове число, яке в 2 рази більше за добуток його цифр.

989. Є труби завдовжки 7 м і 8 м. Скільки треба взяти таких труб, щоб прокласти трубопровід завдовжки 67 м?

990. Хлопчик має монети вартістю 2 грн і 5 грн. Як він може без решти заплатити 37 грн?

991. Цукерки розфасовано в коробки по 200 г і 300 г. Скільки і яких треба взяти таких коробок, щоб було 3 кг цукерок?

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

992. Якщо деяке двоцифрове число помножити на суму його цифр, то вийде 370. Знайди це число.

993. Склади таке рівняння зі змінними x і y, щоб його задовольняли дві пари чисел.

а) $(-2;\ 6)$ і $(0;\ 0)$;
б) $(5;\ 0)$ і $(-1;\ -3)$;
в) $(-3;\ 2)$ і $(0;\ -4)$;
г) $(2;\ 1)$ і $(1;\ -1)$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

994. Побудуй графік функції $y = -1{,}5x + 2$.

995. Доведи тотожність двома способами.

а) $4a^4 + 1 = (2a^2 - 2a + 1)(2a^2 + 2a + 1)$;
б) $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$.

996. За якої умови рівняння $(a - 1)x = 3a - 3$ має безліч розв'язків?

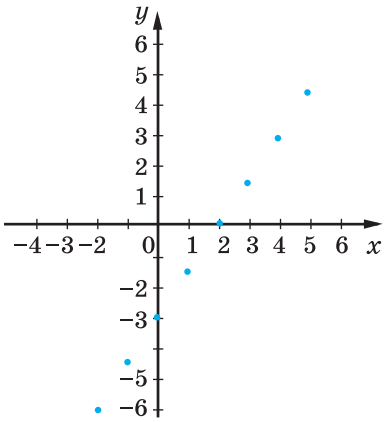
§ 23. Графік лінійного рівняння з двома змінними

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- графік рівняння — *graph of the equation*

Розглянемо рівняння $3x - 2y = 6$. Надавши змінній x значень $-2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$, знайдемо відповідні значення змінної y. Матимемо розв'язки даного рівняння: $(-2;\ -6)$, $(-1;\ -4{,}5)$, $(0;\ -3)$, $(1;\ -1{,}5)$, $(2;\ 0)$, $(3;\ 1{,}5)$, $(4;\ 3)$, $(5;\ 4{,}5)$.

Якщо на координатній площині позначити відповідні цим парам точки, то виявиться, що всі вони розміщені на одній прямій (мал. 23.1). Цю пряму (мал. 23.2) називають графіком даного рівняння.

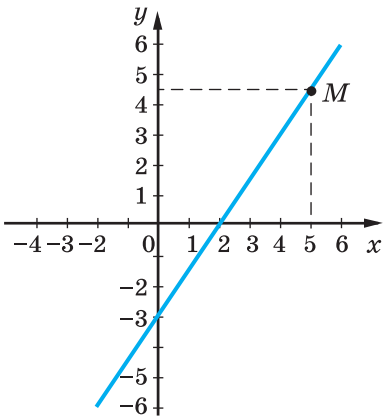


Мал. 23.1

Виразимо з рівняння $3x - 2y = 6$ його змінну y через x:

$$2y = 3x - 6, \text{ звідси } y = \frac{3}{2}x - 3.$$

Це функція, графік якої зображено на малюнку 23.2. Узагалі, якщо $b \neq 0$, то з рівняння $ax + by = c$ змінну y можна виразити через x. Одержимо рівність, яка є формулою лінійної функції. А її графік — пряма.



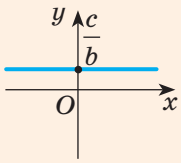
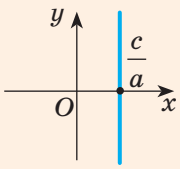
Мал. 23.2

Графік кожного рівняння першого степеня з двома змінними — пряма, і кожна пряма координатної площини — графік деякого лінійного рівняння з двома змінними.

Кожна точка графіка рівняння має координати, що задовольняють дане рівняння. Наприклад, точка M графіка рівняння $3x - 2y = 6$ має абсцису 5 і ординату 4,5 (див. мал. 23.2). Ці значення x і y задовольняють дане рівняння: $3 \cdot 5 - 2 \cdot 4{,}5 = 6$.

Графік лінійної функції є водночас графіком деякого лінійного рівняння з двома змінними. Наприклад, $3x + 2y = 6$ і $y = -1{,}5x + 3$ рівносильні, а рівносильні рівняння мають однакові графіки.

Щоб побудувати графік рівняння першого степеня з двома змінними, досить знайти два його розв'язки, позначити на координатній площині відповідні їм точки і провести через них пряму.

Часткові випадки графіка рівняння $ax + by = c$			
$a = 0, b \neq 0$	$a \neq 0, b = 0$	$a = 0, b = 0, c \neq 0$	$a = 0, b = 0, c = 0$
$by = c$	$ax = c$	$0x + 0y = c$	$0x + 0y = 0$
$y = \frac{c}{b}$	$x = \frac{c}{a}$	немає розв'язків	розв'язком є будь-яка пара чисел
		графік не існує	усі точки координатної площини

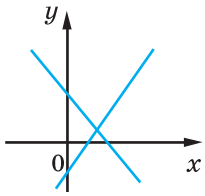
ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Відомо, що дві прямі на площині можуть перетинатися, бути паралельними або збігатися. Так само можуть розташовуватися на координатній площині й графіки двох рівнянь першого степеня з двома змінними (мал. 23.3).

Взаємне розташування графіків рівнянь

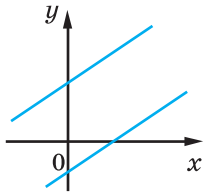
$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ і } a_2x + b_2y = c_2$$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$



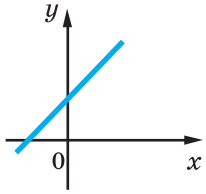
Прямі перетинаються

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$



Прямі паралельні

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$



Прямі збігаються

Мал. 23.3

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що є графіком рівняння першого степеня з двома змінними?
2. Наведи приклад лінійного рівняння з двома змінними.
3. Яким може бути графік лінійного рівняння з двома змінними?

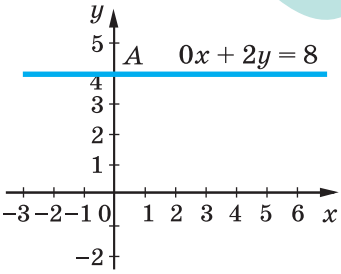
ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Побудуй графік рівняння.

а) $0x + 2y = 8$; б) $3x + 0y = 6$;

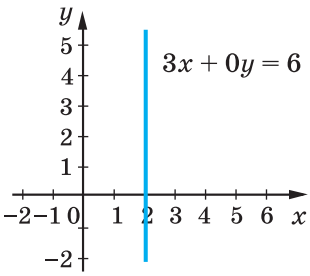
в) $0x + 0y = 0$; г) $0x + 0y = 7$.

Розв'язання. Рівняння а) задовольняє кожна пара чисел $(c; 4)$, де c — довільне число. Графік цього рівняння — пряма, паралельна осі x, яка проходить через точку $A(0; 4)$ (мал. 23.4).



Мал. 23.4

Множина розв'язків рівняння б) — безліч пар (2; p), де p — довільне число. Графік цього рівняння — пряма, паралельна осі y (мал. 23.5).



Мал. 23.5

Рівняння в) задовольняє кожна пара чисел; графік цього рівняння — уся координатна площина.

Рівняння г) не має жодного розв'язку; на координатній площині не існує жодної точки, яка могла б бути графіком цього рівняння.

2. Використовуючи інформацію на мал. 23.3, установи взаємне розміщення графіків рівнянь.

а) $5x - 3y = 6$ і $2x - 7y = 14$; б) $x + 2y = 3$ і $4x + 8y = 10$.

Розв'язання. а) У даному рівнянні $a_1 = 5$, $b_1 = -3$, $a_2 = 2$, $b_2 = -7$. Знайдемо відношення $\frac{a_1}{a_2}$ і $\frac{b_1}{b_2}$.

Оскільки $\frac{5}{-3} \neq \frac{2}{-7}$, то прямі перетинаються.

б) У даному рівнянні $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 4$, $b_2 = 8$.

Оскільки $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} \neq \frac{3}{10}$, то прямі паралельні.

ВИКОНАЙ УСНО

997. Скільки розв'язків має рівняння?

а) $0x + 0y = 20$; б) $0x + 0y = 0$; в) $0x + 2y = 0$;
г) $9x + 0y = 18$; ґ) $x + y = 0$; д) $x - y = 1$.

998. Графіком якої функції є графік рівняння $2x + y = 8$?

А $y = -2x$ **Б** $y = -2x + 8$ **В** $y = 2x - 8$ **Г** $y = -2x - 8$

999. Чи відрізняється графік функції $y = 0{,}5x - 2$ від графіка рівняння $x - 2y = 4$?

1000. Чи проходить через початок координат графік рівняння?

а) $3x - 2y = 0$; б) $2x - 3y = 7$; в) $3(x - 4) = 4(y - 3)$.

1001. Яка з точок не належить графіку рівняння $x - 3y = 5$?

А (5; 0) **Б** (8; 1) **В** (−1; −2) **Г** (4; −3)

1002. Точка з абсцисою 2 належить графіку рівняння $7x - 2y = 12$. Знайди ординату цієї точки.

1003. Точка з ординатою 1,5 належить графіку рівняння $5x + 4y = 16$. Знайди абсцису цієї точки.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

1004. Чи належить точка $A(-3;\ 2)$ графіку рівняння?
а) $5x + 12y = 9$; б) $2x + 3y = x$; в) $5(x + 3) = 4(y - 2)$.

1005. Чи належить точка $M(2;\ -1)$ графіку рівняння?
а) $3x + 5y = 1$; б) $3x + 7y = y$; в) $2(x - 2) = 4(y - 1)$.

1006. Виразіть з даного рівняння змінну y через змінну x і знайдіть два розв'язки цього рівняння.
а) $x + y = 7$; б) $2x + y = 5$; в) $4x + 3y = 12$.

1007. Вирази з даного рівняння змінну x через змінну y і знайди два розв'язки цього рівняння.
а) $x - y = 4$; б) $x + 3y = 6$; в) $2x + 5y = 10$.

1008. Знайди п'ять розв'язків рівняння $3x + 4y = 8$ і познач відповідні їм точки на координатній площині. Як вони розміщені?

1009. Знайди чотири розв'язки рівняння $2x - 3y = 6$ і познач відповідні їм точки на координатній площині. Як вони розміщені?

1010. Побудуй графік рівняння.
а) $x + y = 4$; б) $2x + y = 6$; в) $3x + 2y = 0$.

1011. Graph the equation.
a) $2x + y = 5$; b) $3x - 2y = 3$; c) $x + 3y = 0$.

1012. На графіку рівняння $0{,}6x + y = 2{,}2$ взято точку. Яка ордината цієї точки, якщо її абсциса дорівнює: а) -8; б) -3; в) 2; г) 7?

1013. Знайди абсцису точки, взятої на прямій, що є графіком рівняння $11x - 4y = 80$, якщо її ордината дорівнює:
а) -31; б) -20; в) $-3{,}5$; г) 2.

1014. Графік рівняння $2x + 5y = c$ проходить через задані точки. Установи відповідність між точками, заданими умовами (1–4), та значенням c (А–Д), яке відповідає цим умовам.

1 $A(3;\ 1)$	**А** -14
2 $B(-5;\ 2)$	**Б** -9
3 $C(-3;\ 4)$	**В** 0
4 $D(-2;\ -1)$	**Г** 11
	Д 14

1015. Яким має бути коефіцієнт a рівняння $ax - 4y = 12$, щоб графік цього рівняння проходив через точку: а) $M(10;\ 2)$; б) $N(-1;\ -1)$; в) $P(2;\ -3)$; г) $Q(6;\ 6)$?

1016. При якому значенні b графік рівняння $6x + by = 0$ проходить через точку?
а) $N(2; 3)$; б) $O(0; 0)$; в) $P(-4; 8)$; г) $R(-3; -2)$.

1017. За якої умови графік функції $y = 1{,}5x + c$ є графіком рівняння $3x - 2y = 4$?

Не виконуючи побудови, знайди координати точок перетину з осями координат графіка рівняння **(1018, 1019)**.

1018. а) $3x + 2y = 6$; б) $x + 5y = 10$; в) $3x + 4y = 24$.

1019. а) $2x - 7y = 14$; б) $-x + 2y = 4$; в) $5x - 6y = 30$.

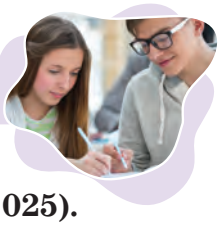
1020. Побудуй в одній координатній площині графіки рівнянь $2x + 3y = 5$ і $2x + 3y = 10$.

1021. Побудуй в одній координатній площині графіки рівнянь $5x - y = 7$ і $10x - 2y = 14$.

Не виконуючи побудову і використовуючи мал. 23.3, установи взаємне розміщення графіків рівнянь **(1022, 1023)**.

1022. а) $2x - 9y = 18$ і $3x - 5y = 15$;
б) $2x - 9y = 18$ і $4x - 18y = 20$;
в) $3x - 5y = 15$ і $9x - 15y = 45$.

1023. а) $3x + 2y = 6$ і $2x + 4y = 11$;
б) $3x + 2y = 6$ і $6x + 4y = 12$;
в) $2x - 7y = 1$ і $6x - 21y = 5$.



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Побудуй в одній координатній площині графіки рівнянь та знайди координати точки їх перетину **(1024, 1025)**.

1024. а) $x + y = 5$ і $x - y = -1$; б) $2x - y = 6$ і $4x - 3y = 12$.

1025. а) $2x + 3y = -9$ і $x + 3y = -6$; б) $x - 5y = 0$ і $2x - 5y = -10$.

Використовуючи мал. 23.3, установи взаємне розміщення графіків рівнянь та побудуй в одній координатній площині графіки цих рівнянь **(1026, 1027)**.

1026. а) $4x + 5y = 20$ і $-4x + 5y = 20$;
б) $-3x + 2y = 6$ і $-3x + 2y = -6$.

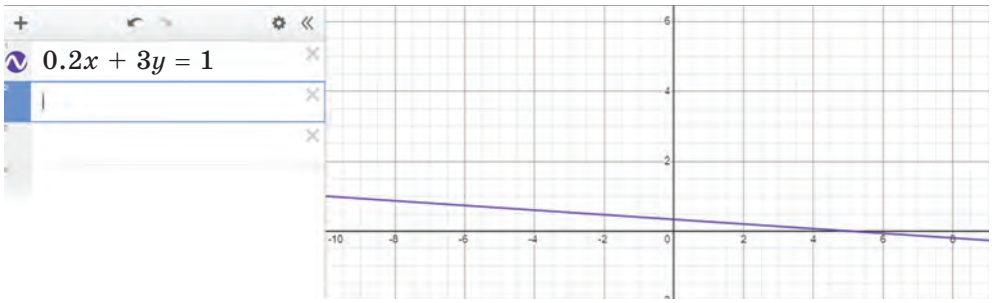
1027. а) $2x + 3y = 6$ і $2x - 3y = 6$;
б) $5x - 2y = 10$ і $10x - 4y = 20$.

Побудуй графік рівняння **(1028, 1029).**

1028. а) $0x + 5y = 10$; б) $3x + 0y = 9$; в) $x = -4$; г) $3y = -15$.

1029. а) $x + 0y = 4$; б) $0 \cdot x + 3y = 6$; в) $2x = 6$; г) $y = -1$.

1030. За допомогою ресурсу Desmos Calculator побудуй графік рівняння $0{,}2x + 3y = 1$. Зверни увагу на запис десяткового дробу. В другому рядку введи своє рівняння і побудуй його графік.



1031. Склади три різні рівняння, графіки яких проходять через одну й ту саму точку:
а) $A(4; 3)$; б) $C(0; -3)$; в) $K(-2; 4)$; г) $M(1; 0)$.

1032. **Гра.** Один учень/одна учениця має записати координати точки, а інші учні/учениці — рівняння, що проходить через цю точку. Потім поміняйтеся ролями.

Склади рівняння, графік якого проходить через початок координат і задану точку **(1033, 1034).**

1033. а) $X(2; 2)$; б) $Y(-5; 2)$.

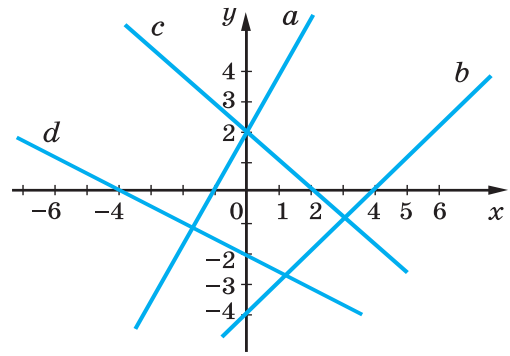
1034. а) $P(-4; -6)$; б) $T(3; -1)$.

Склади рівняння, графік якого перетинає осі координат у точках **(1035, 1036).**

1035. а) $A(-3; 0)$ і $B(0; 1)$;
б) $M(4; 0)$ і $N(0; 5)$.

1036. а) $P(0; -3)$ і $Q(3; 0)$;
б) $C(0; -4)$ і $D(-2; 0)$.

1037. Запиши рівняння, графіки яких зображено на малюнку 23.6.



Мал. 23.6

1038. Склади рівняння, графік якого проходить паралельно графіку рівняння $2x - y = 0$ через точку:
а) $K(4; 2)$; б) $L(0; 5)$.

1039. Склади рівняння, графік якого проходить паралельно графіку рівняння $3x - y = 0$ через точку:
а) $M(-3; 0)$; б) $A(2; -1)$.

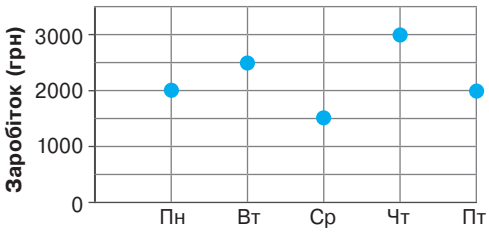
ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

1040. Чи правильно, що графіком рівняння $|x-2|+|y-3|=0$ є одна точка $K(2; 3)$? А рівняння $|x-2|=|y-3|$?

1041. Побудуй графік рівняння.
а) $x^2 - 9y^2 = 0$; б) $(y - 2)^2 = (x + 1)^2$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1042. Оля працює вебдизайнеркою, щодня виконуючи певні проєкти для соціальних мереж замовників. Проаналізуй її заробіток продовж 5 днів (мал. 23.7). В який день вона заробила: а) найменше; б) найбільше? Скільки вона заробила у вівторок? Чи вистачить їй заробітку за тиждень, щоб придбати онлайн-курс для підвищення кваліфікації, ціна якого 11500 грн?



Мал. 23.7

1043. Розв'яжи рівняння.
а) $x^2 = 64$; б) $(x - 2)^2 = 25$.

1044. З Києва до Одеси виїхав автобус, а через 20 хв слідом за ним — легковий автомобіль, який через 1 год наздогнав автобус. З якою швидкістю їхав автобус, якщо швидкість автомобіля дорівнювала 80 км/год?

§ 24. Системи рівнянь

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- системи рівнянь — *system of equations*

Задача. 4 альбоми і 3 пензлі коштують 260 грн, а 6 альбомів і 2 пензлі — 340 грн. Скільки коштує 1 альбом і 1 пензлик?

Цю задачу можна розв'язати за допомогою системи рівнянь.

Нехай 1 альбом коштує x грн, а 1 пензлик — y грн.

Тоді $4x + 3y = 260$ і $6x + 2y = 340$.

Маємо два рівняння. Треба знайти ***спільний*** *розв'язок* обох рівнянь з двома змінними, або розв'язати *систему* даних *рівнянь*.

Записують: $\begin{cases} 4x + 3y = 260, \\ 6x + 2y = 340. \end{cases}$

Розв'язком системи рівнянь називають спільний розв'язок усіх її рівнянь.

Пара чисел (3; 2) є розв'язком системи $\begin{cases} x + 3y = 9, \\ 2x - y = 4, \end{cases}$ (*)

адже $3 + 3 \cdot 2 = 9$ і $2 \cdot 3 - 2 = 4$.

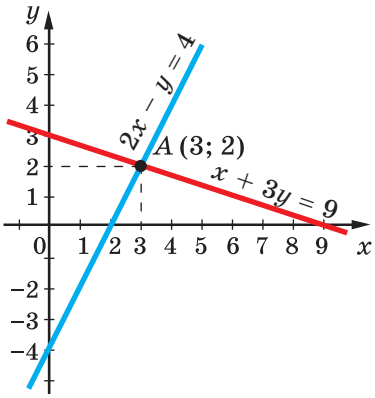
Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Розв'язувати системи рівнянь можна графічним способом. Розв'яжемо, наприклад, систему (*). Для цього побудуємо в одній координатній площині графіки обох її рівнянь (мал. 24.1):

$$x + 3y = 9 \text{ та } 2x - y = 4.$$

Побудовані графіки перетинаються в точці $A(3; 2)$. Тому пара чисел (3; 2) — єдиний розв'язок даної системи рівнянь.

Графічним способом зазвичай знаходять наближені розв'язки. Але, підставивши значення $x = 3$ і $y = 2$ в дану систему рівнянь, переконуємося, що (3; 2) — точний розв'язок.

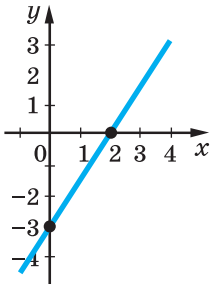


Мал. 24.1

Чи кожна система двох рівнянь має тільки один розв'язок? Ні. Наприклад, система рівнянь

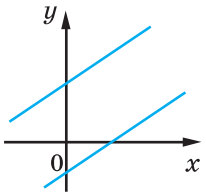
$$\begin{cases} 3x-2y=6, \\ 6x-4y=12 \end{cases}$$

має безліч розв'язків. Адже графіки обох цих рівнянь — одна й та сама пряма (переконайся у цьому самостійно). Отже, координати кожної точки цієї прямої, наприклад (0; −3), (1; −1,5), (2; 0), ... — розв'язок даної системи рівнянь (мал. 24.2).



Мал. 24.2

Є системи рівнянь, які не мають жодного розв'язку. Графіки таких рівнянь — паралельні прямі (мал. 24.3).



Мал. 24.3

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Ти вже знаєш, що рівняння і функції — зручні математичні моделі багатьох задач. Системи рівнянь також використовують як математичні моделі. При цьому за умовою задачі систему рівнянь із двома змінними буває легше скласти, ніж одне рівняння. І розв'язувати систему рівнянь із двома змінними буває легше, ніж рівняння з однією змінною, що відповідає умові тієї самої задачі.

Існують системи рівнянь із трьома і більшою кількістю змінних.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що називають розв'язком системи рівнянь із двома змінними?
2. Що означає розв'язати систему двох рівнянь?
3. Як розв'язати систему рівнянь графічним способом?
4. Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь з двома змінними?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Скільки розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases} 2x-7y=5, \\ 7x-2y=5? \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки коефіцієнти при x і y не пропорційні, бо $2:7 \neq (-7):(-2)$, то прямі перетинаються, а, отже, система має єдиний розв'язок. Перевір графічно.

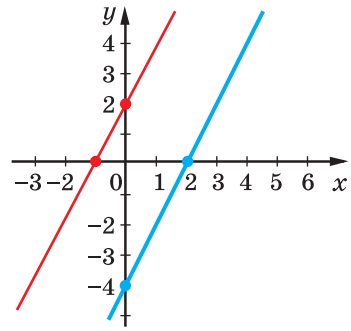
2. Розв'яжи графічно систему рівнянь $\begin{cases} x-0,5y=2, \\ 2x-y=-2. \end{cases}$

Розв'язання. Графіком кожного з рівнянь є пряма. Тому достатньо знайти координати будь-яких двох її точок. Іноді знаходять координати точок перетину графіків рівнянь системи з осями координат, але це не обов'язково. Знайдені координати зручно записувати у вигляді таблиці.

Побудуємо графіки даних рівнянь (мал. 24.4). Ці графіки — паралельні прямі; вони не мають спільних точок.

x	0	2
y	–4	0

x	0	–1
y	2	0



Мал. 24.4

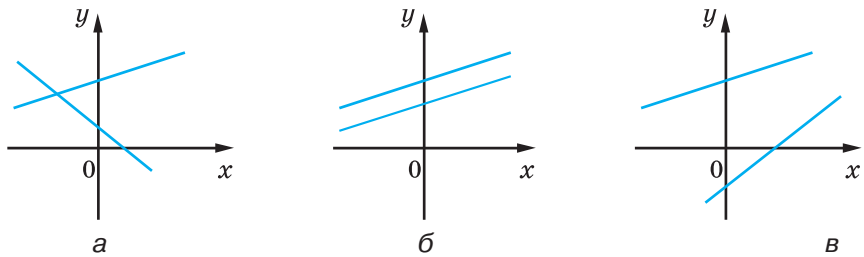
Відповідь. Система рівнянь розв'язків не має.

ВИКОНАЙ УСНО

1045. Яка із систем є системою двох лінійних рівнянь з двома змінними?

А $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y=3 \end{cases}$ **Б** $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x-y=3 \end{cases}$ **В** $\begin{cases} x-2y=4, \\ 2x+3y=1 \end{cases}$ **Г** $\begin{cases} xy=6, \\ x+2y=2 \end{cases}$

1046. Скільки розв'язків має система рівнянь, графіки яких зображено на малюнку 24.5?



Мал. 24.5

1047. Яка з пар чисел є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x-y=-4, \\ x-2y=-7? \end{cases}$

А (0; 4) **Б** (−1; 3) **В** (−7; −3) **Г** (1; 4)

1048. Скільки розв'язків має система рівнянь?

а) $\begin{cases} 3x+4y=2, \\ 9x+12y=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y=5, \\ 4x+2y=10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-5y=4, \\ -2x+10y=8. \end{cases}$

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

1049. Чи є пара чисел (2; −1) розв'язком системи рівнянь?

а) $\begin{cases} x+y=1, \\ x-2y=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=1, \\ 4x-3y=11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-y=3, \\ 2x+y=3. \end{cases}$

1050. Чи є пара чисел (−1; 3) розв'язком системи рівнянь?

а) $\begin{cases} x+y=2, \\ 3x-y=-6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+y=0, \\ x+2y=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x-2y=-9, \\ 3x+2y=-3. \end{cases}$

Склади систему рівнянь, що має розв'язок **(1051, 1052)**:

1051. а) (3; 4); б) (2; −5); в) (0; 3); г) (−2; 0).

1052. а) (2; 1); б) (−3; 2); в) (5; 0); г) (0; −4).

Розв'яжи графічно систему лінійних рівнянь **(1053–1057)**.

1053. а) $\begin{cases} x+y=6, \\ x-y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=0, \\ 4x-y=6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+y=4, \\ 3x-y=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y=-2, \\ x+3y=-10. \end{cases}$

1054. а) $\begin{cases} x-y=0, \\ 3x-y=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=7, \\ x-y=3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-y=2, \\ 3x-y=5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2. \end{cases}$

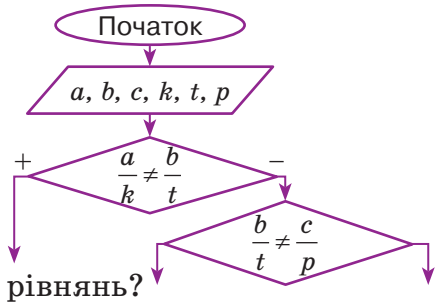
1055. а) $\begin{cases} 4x-y=5, \\ 3x+2y=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x+4y=13, \\ 3x+5y=13; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+3y=5, \\ 3x+9y=21; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=1, \\ -2x-2y=-2. \end{cases}$

1056. а) $\begin{cases} 5x-2y=-3, \\ 2x-3y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -3x+5y=1, \\ 4x-y=10. \end{cases}$

1057. а) $\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}y=6, \\ 4x+y=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=-2, \\ 3x-3y=6. \end{cases}$

1058. Діана почала будувати блок-схему для того, щоб визначити, скільки розв'язків має довільна система рівнянь $\begin{cases} ax + by = c \\ kx + ty = p \end{cases}$, але не завершила. Допоможи їй.



1059. Скільки розв'язків має система рівнянь?

а) $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ 8x + 9y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 4y = 1, \\ 2x - 8y = 3. \end{cases}$

1060. How many solutions does the system of equations have?

a) $\begin{cases} x + y = 8, \\ 2x - y = 13; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + 5y = 7, \\ 2x - 10y = -14. \end{cases}$

1061. Не будуючи графіків, доведи, що система рівнянь не має розв'язків.

а) $\begin{cases} 8x + 2y = 15, \\ 8x + 2y = 35; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y = 8, \\ 3x - y = 16. \end{cases}$

1062. Не будуючи графіків, доведи, що має безліч розв'язків система рівнянь $\begin{cases} 6x + 10y = 36, \\ 3x + 5y = 18. \end{cases}$ Знайди три будь-які її розв'язки.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Розв'яжи графічно систему рівнянь **(1063, 1064).**

1063. а) $\begin{cases} 0{,}5x + y = 2, \\ -0{,}4x + y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}5x - y = 3, \\ 0{,}3x + y = -1{,}2. \end{cases}$

1064. а) $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}6y = 1{,}8, \\ x - 0{,}5y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}1x + y = 0{,}1, \\ 1{,}2x - y = 2{,}2. \end{cases}$

1065. Із даних рівнянь утворіть та розв'яжіть усі можливі системи.
а) $3x - 2y = -6$; б) $x + 2y = -2$; в) $5x + 2y = 22$.

1066. Розв'яжи систему рівнянь $\begin{cases} 5x - 4y = 1, \\ 12x + 22y = 33 \end{cases}$ графічно та перевір, чи є одержаний розв'язок точним. Чи задовольняє систему рівнянь пара чисел $\left(\frac{77}{79}; \frac{153}{158}\right)$?

1067. Розв'яжи систему рівнянь $\begin{cases} 3x+2y=7, \\ 11x-20y=55 \end{cases}$ графічно та перевір, чи є одержаний розв'язок точним. Чи задовольняє систему рівнянь пара чисел $\left(3\frac{2}{41}; -1\frac{3}{41}\right)$?

Склади рівняння з двома змінними, яке в системі з даним: 1) має безліч розв'язків; 2) не має жодного розв'язку; 3) має один розв'язок **(1068, 1069)**.

1068. а) $3x - y = 5$; б) $3x - 2y = 2$.

1069. а) $5x + 4y = 1$; б) $x + y = -4$.

1070. При якому значенні a система рівнянь має: 1) один розв'язок; 2) безліч розв'язків?

а) $\begin{cases} 3x-y=3, \\ x-ay=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x+2y=11, \\ ax+4y=22. \end{cases}$

1071. При якому значенні b система рівнянь: 1) не має розв'язків; 2) має єдиний розв'язок?

а) $\begin{cases} bx+2y=7, \\ 3x-y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x+8y=5, \\ 2x+by=-1. \end{cases}$

1072. Чи має розв'язок система рівнянь?

а) $\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=3, \\ 2x=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y=1, \\ x+y=3, \\ 4y=8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x+y=13, \\ 5x-4y=-1, \\ 7x-5y=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x+7y=16, \\ 3x-y=1, \\ x+4y=1. \end{cases}$

1073.* При якому значенні k система рівнянь має розв'язок?

а) $\begin{cases} 3x-2y=-1, \\ 5x-3y=2, \\ 2x+ky=25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} k(x+y)+5x=2, \\ 9x+11y=7, \\ 4x-3y=11. \end{cases}$

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

1074. Розв'яжи графічно систему рівнянь.

а) $\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ 2x-y=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=9, \\ 2x+y=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x-y|=2, \\ |x+y|=2. \end{cases}$

1075. Допиши ще один рядок послідовності.

$$1 + 2 = 3$$
$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$
$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

_____

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1076. Обчисли значення виразу.

а) $3x^3 - 2x^2 - x(3x^2 + 2x - 5)$, якщо $x = 5$;

б) $(8a^2 - a^3)a + (a^2 - 8a + 5)a^2$, якщо $a = 0{,}2$.

1077. Перемнож двочлени.

а) $x + 3$ і $x - 2$; б) $a - 5$ і $a + 4$;

в) $m + n$ і $m - n$; г) $3 - z$ і $5 + z$.

1078. Щоб одержати бронзу, беруть 17 частин міді, 2 частини цинку й одну частину олова. Скільки кілограмів міді, цинку й олова слід узяти, щоб виготовити 200 кг бронзи?

§ 25. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом підстановки

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- метод підстановки — *substitution method*

Графічний спосіб розв'язування систем рівнянь громіздкий і дає, як правило, наближені розв'язки. Тому частіше системи розв'язують іншими способами, зокрема *способом підстановки*.

Щоб розв'язати систему

$$\begin{cases} x + 3y = 9, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Виразимо змінну x через y $\xrightarrow{1}$ $x = 9 - 3y$

$\downarrow 2$

$\xleftarrow{3}$ *Підставимо* $(9 - 3y)$ *замість x у друге рівняння.*

Отримаємо систему $\begin{cases} x = 9 - 3y, \\ 2(9 - 3y) - y = 4. \end{cases}$

Друге рівняння цієї системи — рівняння з однією змінною. Розв'яжемо його:

$$2(9 - 3y) - y = 4,$$
$$18 - 6y - y = 4,$$
$$-7y = -14,$$
$$y = 2.$$

Підставимо значення $y = 2$ у рівняння $x = 9 - 3y$ і знайдемо відповідне значення змінної x: $x = 9 - 3 \cdot 2 = 3$.

Отже, розв'язком системи є пара чисел (3; 2).

Щоб розв'язати систему рівнянь способом підстановки, треба:

1) **виразити з якого-небудь її рівняння одну змінну через іншу;**
2) **підставити в інше рівняння системи замість цієї змінної здобутий вираз;**
3) **розв'язати утворене рівняння з однією змінною;**
4) **знайти відповідне значення іншої змінної.**

Цим способом можна розв'язувати будь-яку систему лінійних рівнянь із двома змінними. Найзручніше, коли коефіцієнт при якій-небудь змінній у рівнянні дорівнює 1. Але це буває не завжди.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Іноді можна підставляти з одного рівняння системи в інше не значення окремої змінної, а значення цілого виразу. Наприклад, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} 3\cdot(2x-4y)-y=44, \\ 2x-4y=14, \end{cases}$$

можна значення виразу $2x - 4y$ з другого рівняння підставити в перше:

$$3 \cdot 14 - y = 44, \quad y = 42 - 44, \quad y = -2.$$

Тоді $2x - 4 \cdot (-2) = 14, \quad 2x = 14 - 8, \quad x = 3.$

Перевірка. $3 \cdot (6 + 8) + 2 = 42 + 2 = 44, \quad 2 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) = 6 + 8 = 14.$

Знайдена пара чисел (3; –2) задовольняє дану систему рівнянь.

Відповідь. (3; –2).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Наведи приклади систем рівнянь із двома змінними.
2. Які ти знаєш способи розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними?
3. Як розв'язують систему двох рівнянь із двома змінними способом підстановки?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Розв'яжи систему рівнянь $\begin{cases} 3x = 2(y+6), \\ 6x + 3y = 1 + x. \end{cases}$

Розв'язання. Виконаємо перетворення: $\begin{cases} 3x - 2y = 12, \\ 5x + 3y = 1. \end{cases}$

Виразимо з першого рівняння змінну x через y:

$$3x = 2y + 12,$$

$$x = \frac{2}{3}y + 4.$$

Підставимо знайдений вираз у друге рівняння. Отримаємо систему: $\begin{cases} x = \frac{2}{3}y + 4, \\ 5\left(\frac{2}{3}y + 4\right) + 3y = 1. \end{cases}$

Розв'яжемо друге рівняння системи:

$$5\left(\frac{2}{3}y + 4\right) + 3y = 1, \quad \frac{10}{3}y + 20 + 3y = 1, \quad \frac{19}{3}y = -19, \quad y = -3.$$

Тоді $x = \frac{2}{3}(-3) + 4 = 2.$

Відповідь. (2; −3).

2. Розв'яжи систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 6x - 5y = -27. \end{cases}$

Розв'язання.

З першого рівняння виразимо $2x$ через y: $2x = 5 - 3y$. Оскільки $6x = 3 \cdot 2x$, то можемо у друге рівняння підставити не значення x, а значення $2x$.

Після підстановки отримаємо: $\begin{cases} 2x = 5 - 3y, \\ 3(5 - 3y) - 5y = -27. \end{cases}$

Розв'яжемо друге рівняння системи:

$3(5 - 3y) - 5y = -27, \quad 15 - 9y - 5y = -27, \quad -14y = -42, \quad y = 3.$

Тоді $2x = 5 - 3 \cdot 3, \quad 2x = -4, \quad x = -2.$

Відповідь. (−2; 3).

ВИКОНАЙ УСНО

1079. Вирази із рівняння змінну y через x.
а) $2x + y = 3$; б) $5x - y = 0$; в) $x - 2y = 0$.

1080. Вирази із рівняння змінну x через y.
а) $x - y = 2$; б) $x + 3y = 5$; в) $2x + 5y = 0$.

1081. Розв'яжи систему рівнянь.
а) $\begin{cases} x = y + 2, \\ x + y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 2x - 1, \\ x + y = 5. \end{cases}$

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

Розв'яжи способом підстановки систему рівнянь **(1082–1085).**

1082. а) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 5y = 26; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 4y = 10, \\ 7x - y = 13; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y - 2z = 6, \\ y + 2z = 10; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2z + 3y = 3, \\ z + y = 2; \end{cases}$ ґ) $\begin{cases} 9x + 2y - 4 = 0, \\ 8x + y - 2 = 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 5u + 7v + 33 = 0, \\ 10u - v + 6 = 0. \end{cases}$

1083. а) $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ 3x + 8y = 19; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2y = 27, \\ x + 5y = 35; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2p + q = 11, \\ 5p - 2q = 41; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 6a - 3b = 9, \\ 2a + b = 5; \end{cases}$ ґ) $\begin{cases} 3x + z - 1 = 0, \\ 5x + 4z - 11 = 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 5x + 7z - 45 = 0, \\ 7x - z - 9 = 0. \end{cases}$

1084. а) $\begin{cases} 15y - 8z = 29, \\ 3y + 2z = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 8t = 30, \\ 6x + 5t = 27; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 14u - 9v = 24, \\ 7u - 2v = 17; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x + 4y = 13, \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$

1085. а) $\begin{cases} 6a - 5b = 13, \\ 2a + 7b = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2a - 7b = 5, \\ 4a - 9b = 15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6x - 4y = -2, \\ 3x - 5y = -7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 7x + 4y = -3, \\ 9x + 16y = 7. \end{cases}$

Не виконуючи побудови, знайди координати точки перетину графіків рівнянь **(1086, 1087).**

1086. а) $x + y = 37$ і $x - y = 5$; б) $2x - 3y = 16$ і $x + 2y = 1$.

1087. а) $x + 2y = 8$ і $x - 2y = 2$; б) $4x - 7y = 15$ і $3x + y = 5$.

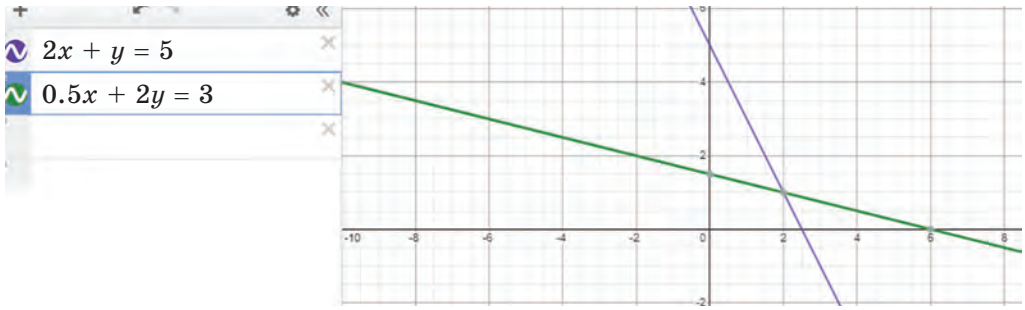
1088. Розв'яжи способом підстановки систему рівнянь.

а) $\begin{cases} 3x + 0{,}5y = 1, \\ x + 0{,}25y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}2x + y = 7, \\ 1{,}5x + y = 13{,}5. \end{cases}$

1089. Solve the system of equations by substitution.

a) $\begin{cases} 0{,}6x + 0{,}8y = 1, \\ x + 4y = 3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0{,}5x - y = 1{,}5, \\ 0{,}3x - 0{,}4y = 1. \end{cases}$

1090. За малюнком 25.1 запиши систему рівнянь і розв'яжи її способом підстановки. Перевір розв'язок з отриманим графічним способом.



Мал. 25.1

Розв'яжи систему рівнянь **(1091, 1092).**

1091. а) $\begin{cases} 4(x + 2y) = 5x + 6, \\ 3(2x - y) = 24y + 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5(x - 3y) = 2x + 7, \\ 3(x + 6y) = 9y + 15. \end{cases}$

1092. а) $\begin{cases} 5x - 2 = 4(x + 2y) - 8, \\ 3(2x - y) + 6 = 24y + 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3 = 5(x - y), \\ 2(3x - 1) = y - 35. \end{cases}$

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Знайди розв'язок системи рівнянь **(1093–1096).**

1093. а) $\begin{cases} \dfrac{7 + x}{2} = \dfrac{y + 13}{3}, \\ 5x - 3y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{5x - 3y}{4} = \dfrac{x - 5y}{3}, \\ 7x + y = 12; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}(x + y) - \dfrac{1}{4}(x - y) = 5, \\ \dfrac{1}{12}(x + y) + \dfrac{1}{3}(x - y) = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{4} = 3 + \dfrac{3x - 5y}{2}, \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{2}y = 7 - \dfrac{1}{4}(x - 2y). \end{cases}$

1094. а) $\begin{cases} 4(x-3z)+33z=50, \\ 5(x+2z)-3x=18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x+7=5(x+t), \\ 3(x+5t)-6t=15. \end{cases}$

1095. а) $\begin{cases} 3x+1=5(3-2y), \\ 4(x-1)=2(8{,}5-5y); \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6(x-2y)=7-9y, \\ 8x+3y=5(2x+1). \end{cases}$

1096. а) $\begin{cases} \dfrac{2x-5}{5}=\dfrac{y-3}{4}, \\ x-2y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{4x-1}{3}=\dfrac{3y-11}{2}, \\ 4x-y=9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{1}{4}(y-1)-\dfrac{1}{3}(x+1)=2, \\ \dfrac{1}{4}(x+3)-\dfrac{1}{3}(y+1)=-4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{x-y}{3}=5, \\ \dfrac{x+y}{8}+\dfrac{x-y}{6}=1{,}5. \end{cases}$

1097. При яких значеннях a і b графік прямої $ax + by = 1$ проходить через точки $A(1;\ 3)$ і $C(-1;\ -1)$?

1098. При яких значеннях a і b графік прямої $ax + by = 7$ проходить через точки $M(1;\ 4)$ і $K(3;\ -2)$?

1099. Установіть відповідність між системами, заданими умовами (1–3), та їх розв'язками (А–Д).

1 $\begin{cases} 7(2x+y)-5(3x+y)=6, \\ 3(x+2y)-2(x+3y)=-6 \end{cases}$

2 $\begin{cases} u+\dfrac{1}{3}(u+v-3)=14, \\ \dfrac{1}{3}v-\dfrac{1}{6}(u+v)=\dfrac{5}{6} \end{cases}$

3 $\begin{cases} 0{,}2a+4b=-5-0{,}8a, \\ 2{,}5a+0{,}5b=1-\dfrac{1}{2}b \end{cases}$

А (1; −1,5) **Г** (−6; 0)
Б (6; 6) **Д** (3; −2)
В (8; 13)

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

1100. *Задача з французького підручника XVI ст.*

Розв'яжи систему $\begin{cases} x+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{3}z=14, \\ y+\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}z=8, \\ z+\dfrac{1}{5}x+\dfrac{1}{5}y=8. \end{cases}$

1101. *Задача Е. Безу (1730–1783).* Розв'яжи систему $\begin{cases} 5x+3y=65, \\ 2y-z=11, \\ 3x+4z=57. \end{cases}$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1102. Який многочлен треба додати до $3y^4 - 2y^2 + 5$, щоб одержати многочлен $5y^4 + y^3 - 2y^2 + 8$?

1103. Знайди добуток многочленів.
а) $(2a - n)(4a^2 + 2an + n^2)$; б) $(1 + c + c^2)(1 - c)$.

1104. Обчисли значення виразу.
а) $2^{13} \cdot 0{,}5^{13}$; б) $0{,}5^{18} \cdot 2^{18}$; в) $25^7 \cdot 0{,}04^7$; г) $5^{33} \cdot 0{,}2^{33}$.

§ 26. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом додавання

КЛЮЧОВІ СЛОВА
- метод додавання — *addition method*

Дано систему рівнянь $\begin{cases} 8x-3y=34, \\ 5x+3y=31. \end{cases}$

Спочатку розв'яжемо її способом підстановки. Виразимо з першого рівняння змінну y через x і підставимо одержаний вираз замість y у друге рівняння:

$$3y = 8x - 34, \quad y = \frac{1}{3}(8x-34),$$

$$5x+3\cdot\frac{1}{3}(8x-34)=31, \quad 5x + 8x = 34 + 31.$$

Далі вже нескладно закінчити розв'язування системи.

А чи можна рівняння $5x + 8x = 34 + 31$ одержати іншим способом? Так, для цього достатньо додати ліві й праві частини рівнянь системи. Оскільки коефіцієнти при y — протилежні числа,

то члени зі змінною y знищаться. Тому, розв'язуючи будь-яку іншу подібну систему, замість підстановки можемо виконувати почленне додавання рівнянь. Оформляти розв'язання будемо, наприклад, так:

$$+\begin{cases} 8x-3y=34, \\ 5x+3y=31. \end{cases}$$

$$13x = 65,$$
$$x = 5.$$
$$8 \cdot 5 - 3y = 34,$$
$$40 - 3y = 34,$$
$$-3y = -6,$$
$$y = 2.$$

Відповідь. (5; 2).

У такий спосіб розв'язують системи, у яких коефіцієнти при якій-небудь змінній — протилежні числа. А до такого вигляду можна звести будь-яку систему лінійних рівнянь із двома змінними.

Нехай, наприклад, дано систему $\begin{cases} 3x+7y=31, \\ 2x+9y=12. \end{cases}$

Оформляти розв'язання можна таким чином:

$$\begin{cases} 3x+7y=31, & \times 2 \\ 2x+9y=12; & \times(-3) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 6x+14y=62, \\ -6x-27y=-36. \end{cases}$$

Помножимо обидві частини першого рівняння на 2, а другого — на –3; дістанемо систему, у якій коефіцієнти при змінній x — протилежні числа.

$$-13y = 26,$$
$$y = -2,$$
$$2x + 9 \cdot (-2) = 12,$$
$$2x - 18 = 12,$$
$$2x = 30,$$
$$x = 15.$$

Відповідь. (15; –2).

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Способом додавання можна розв'язувати не тільки системи лінійних рівнянь, а й багатьох нелінійних.

Приклад. Розв'яжи систему рівнянь $\begin{cases} 2x-y^2=5, \\ 2x+y^2=7. \end{cases}$

Розв'язання. Додамо ліві та праві частини даних рівнянь, одержимо:

$$4x = 12, \text{ або } x = 3.$$

Тоді $2 \cdot 3 - y^2 = 5$.

$y^2 = 1$, звідси $y_1 = 1$, $y_2 = -1$.

Перевірка показує, що знайдені пари чисел (3; 1) і (3; –1) задовольняють дану систему рівнянь.

Відповідь. Система рівнянь має два розв'язки: (3; 1) і (3; –1).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь із двома змінними?
2. Які ти знаєш способи розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними?
3. Як розв'язують систему двох лінійних рівнянь із двома змінними способом додавання?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

Розв'яжи систему рівнянь $\begin{cases} 2x + \dfrac{5(x-y)}{3} = 13, \\ -\dfrac{7x-3y}{5} + 6x = 19. \end{cases}$

Розв'язання. Помножимо всі члени першого рівняння на 3, а другого — на 5. Спростимо одержані рівняння:

$$\begin{cases} 6x + 5x - 5y = 39, \\ -7x + 3y + 30x = 95; \end{cases} \qquad \begin{cases} 11x - 5y = 39, \\ 23x + 3y = 95. \end{cases}$$

Щоб скористатися способом додавання, ще раз помножимо всі члени першого рівняння на 3, а другого — на 5 та почленно додамо їх:

$$\begin{cases} 11x - 5y = 39, \\ 23x + 3y = 95; \end{cases} \begin{matrix} \times 3 \\ \times 5 \end{matrix} \qquad \begin{cases} 33x - 15y = 117, \\ 115x + 15y = 475. \end{cases}$$

$148x = 592$, $x = 4$,

тоді $44 - 5y = 39$, $-5y = -5$, $y = 1$.

Відповідь. (4; 1).

ВИКОНАЙ УСНО

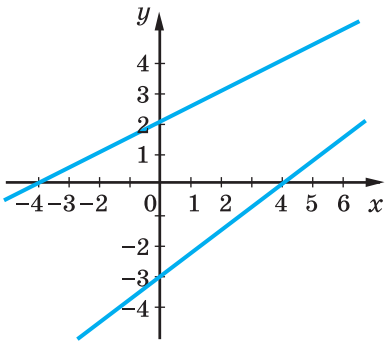
1105. Додай почленно ліві й праві частини рівнянь.

а) $3x + 2y = 7$ і $5x - y = 12$; б) $x - 8y = 15$ і $4x - 3y = 2$.

1106. Розв'яжи систему рівнянь способом додавання.

а) $\begin{cases} x+y=5, \\ 2x-y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y=2, \\ 3x+2y=6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} a-c=3, \\ 2a+c=6. \end{cases}$

1107. Скільки розв'язків має система рівнянь, графіки яких зображено на малюнку 26.1?



Мал. 26.1

1108. Розв'яжи способом додавання систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=6, \\ \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=2. \end{cases}$$

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

Розв'яжи способом додавання систему рівнянь **(1109–1112).**

1109. а) $\begin{cases} x+y=7, \\ x-y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x-y=16, \\ x+y=14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x+2y=18, \\ 7x-2y=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x-3y=2, \\ 3x+3y=5. \end{cases}$

1110. а) $\begin{cases} 2x+y=17, \\ 2x-y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3u-v=26, \\ 5u+v=38; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-2y=5, \\ 3x+2y=7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+4y=25, \\ 7x-4y=5. \end{cases}$

1111. а) $\begin{cases} x-4y=5, \\ x-3y=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y=1, \\ 3x+8y=19; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 15y-8z=29, \\ 3y+2z=13; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+8t=29, \\ 6x+5t=47. \end{cases}$

1112. а) $\begin{cases} x+7z=26, \\ x+4z=17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x+7z=29, \\ 5x-2z=-34; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 14u-9v=24, \\ 7u-2v=17; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x+4y=13, \\ 3x+2y=13. \end{cases}$

1113. Розв'яжи способом додавання систему рівнянь.

а) $\begin{cases} 3a-5b=13, \\ 2a+7b=81; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2a-7b=8, \\ 5a-9b=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x+2y=27, \\ 4x+5y=50; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x+5y=-11, \\ 3x+8y=-4. \end{cases}$

1114. Solve the following system of equations by addition.

a) $\begin{cases} 8z+3t=7, \\ -3z-5t=9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3m-7n=-8, \\ 5m+8n=26; \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x+5y=-7, \\ 5x+6y=26; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x+3y=22, \\ 3x-7y=-2. \end{cases}$

Знайди координати точки перетину графіків рівнянь та зроби перевірку, побудувавши графіки цих рівнянь **(1115, 1116)**.

1115. а) $x - 2y = 1$ і $2x + y = 7$; б) $5x + 2y = 1$ і $4x - 7y = 18$.

1116. а) $2x - y = 3$ і $x - 3y = 4$; б) $3x + 2y = -8$ і $5x - 3y = -7$.

Розв'яжи різними способами систему рівнянь **(1117, 1118)**.

1117. а) $\begin{cases} 3x+y=7, \\ 4x-y=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-2y=2, \\ 5x+4y=18. \end{cases}$

1118. а) $\begin{cases} 3x-y=11, \\ 5x+y=13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x+3y=10, \\ -2x+7y=12. \end{cases}$

1119. Установи відповідність між точками, заданими умовами (1–3), та рівняннями прямих (А–Д), графіки яких проходять через задані точки.

1 $A(0;\ 3)$ і $B(2;\ 7)$	**А** $3x + 2y = 1$
2 $K(-1;\ 2)$ і $P(3;\ -6)$	**Б** $2x + y = 0$
3 $C(5;\ 1)$ і $E(7;\ 4)$	**В** $2x - y = -3$
	Г $3x - 2y = 13$
	Д $5x + 4y = 3$

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

1120. **Гра.** Один із учнів/учениць має записати систему, яку зручно розв'язувати способом додавання, а другий/друга має її розв'язати. Потім поміняйтеся ролями.

1121. Розв'яжи систему рівнянь способом додавання та перевір її розв'язок за допомогою графічного способу і сервісу Desmos Calculator.

а) $\begin{cases} 10x-21y=9, \\ 5x+14y=29; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x-3y=2, \\ 2x+5y=12. \end{cases}$

Розв'яжи способом додавання систему рівнянь **(1122–1128)**.

1122. а) $\begin{cases} 0{,}1p+0{,}2q=0{,}3, \\ 0{,}4p+0{,}5q=0{,}9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}2x-3{,}4y=12, \\ 2{,}5x+1{,}4y=25. \end{cases}$

1123. а) $\begin{cases} 5x-2=4(x+2y)-8, \\ 3(2x-y)+6=24y+12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 10u+7v=51, \\ u-\frac{1}{5}v=2\frac{2}{5}. \end{cases}$

1124. а) $\begin{cases} 5x-6=5(x-y), \\ 2(3x-1)=4y-5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{4}x-\frac{1}{5}y=0, \\ \frac{3}{4}x+\frac{2}{5}y=10. \end{cases}$

1125. а) $\begin{cases} 1{,}5x-2{,}2y=0{,}1, \\ 4{,}2x-2{,}5y=7{,}6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2{,}7x-3(x+y)=2{,}1, \\ 3{,}2x-2(y-x)=17{,}6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6(x-1)-\frac{5y-2x}{2}=0, \\ \frac{12x}{5}-y=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-3\left(\frac{2}{3}y-x\right)=12, \\ \frac{2}{3}x-2\left(\frac{1}{2}x-y\right)=\frac{2}{3}. \end{cases}$

1126. а) $\begin{cases} 2{,}5u-0{,}2(u-v)=2{,}3, \\ 3{,}7u-1{,}5(v-u)=5{,}2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3{,}5y-0{,}2(2y-z)=31{,}2, \\ 5{,}2z+0{,}7(y-2z)=10{,}8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+\frac{7(x-y)}{2}=5, \\ 5(x-1)+\frac{3x-7y}{2}=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{2}{5}x-\frac{3}{4}y=y-8, \\ \frac{1}{3}(x-3y)=3x-10. \end{cases}$

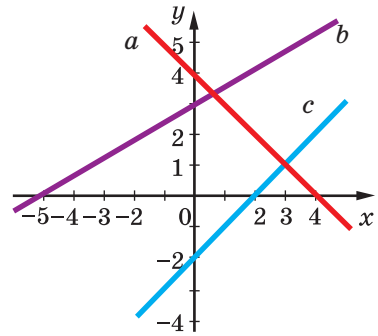
1127. а) $\begin{cases} \frac{a}{3}+\frac{b}{4}=5, \\ a-\frac{b}{2}=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1-3x}{4}-\frac{4-2y}{3}=0, \\ 0{,}7=0{,}4y-0{,}3x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1, \\ \frac{2x-1}{2}=\frac{3y-1}{3}+\frac{5}{6}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=2, \\ x+y-\frac{x-y}{6}=7. \end{cases}$

1128. а) $\begin{cases} \frac{m}{3}-\frac{n}{3}=0, \\ m-\frac{7n}{2}=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2x-1}{6}-\frac{9-5y}{8}=0, \\ 2x=1{,}5y+2{,}5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8, \\ \frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}=11; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{5x-3}{7}+y=9, \\ \frac{x+y}{4}-\frac{x-5}{9}=2. \end{cases}$

1129. Запишіть рівняння прямих, графіки яких зображено на малюнку 26.2.



Мал. 26.2

Розв'яжи відносно змінних x і y систему рівнянь **(1130, 1131)**.

1130. а) $\begin{cases} 3x-8y=a, \\ 4x+8y=20a; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x+7y=m, \\ 8x+7y=n. \end{cases}$

1131. а) $\begin{cases} -5x+y=10c, \\ 5x-2y=10c; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-4y=k, \\ 5x-4y=p. \end{cases}$

Знайди розв'язок системи рівнянь **(1132, 1133)**.

1132. а) $\begin{cases} (x+3)^2-2y=x^2+13, \\ 6x+(y-1)^2=y(y-5); \end{cases}$ б) $\begin{cases} -10x+(y+4)^2=y^2+18, \\ (2x-1)^2+7y=2x(2x+3). \end{cases}$

1133. а) $\begin{cases} x(x+3)+9=(x-y)(x+y)+y(y-3), \\ 26+3(2x-y)=9x-5(3x+2y); \end{cases}$

б) $\begin{cases}(x+3)^2-5+y(y-1)=x(x+3)+(y+1)^2,\\ 7(2x+3)-6x=9-4(2y-7).\end{cases}$

Розв'яжи систему рівнянь **(1134–1135)**.

1134. а) $\begin{cases}x+y=3,\\ x+z=4,\\ y+z=5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=5,\\ x-z=2,\\ y-z=1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}7x+6y+7z=100,\\ x-2y+z=0,\\ 3x+y-2z=0.\end{cases}$

1135. а) $\begin{cases}2x+3y=11,\\ 3x+2z=13,\\ 3y+4z=29;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y-z=11,\\ x-y+z=1,\\ y+z-x=5;\end{cases}$ в) $\begin{cases}2x-2z-3t=1,\\ x+4z+2t=7,\\ 3x-z+t=0.\end{cases}$

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

1136. Проаналізуй послідовність. Запиши відповідну числову послідовність і ще наступні її два члени.

1137. *Задача з трактату XV ст.* Розв'яжи у цілих додатних числах систему.

а) $\begin{cases}x+y+z=12,\\ 2x+y+\frac{1}{2}z=12;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y+z=12,\\ 8x+5y+3z=60;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x+y+z=12,\\ 4x+3y+2z=36.\end{cases}$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1138. Обчисли значення многочлена.

а) $2y^2 + 8{,}6y - 6{,}5$, якщо $y = -4{,}3$;

б) $19{,}7a + 19{,}7c + 10$, якщо $a = 3{,}8$ і $c = 6{,}2$.

1139. Доведи, що сума п'яти послідовних натуральних чисел ділиться на 5. Чи може сума чотирьох послідовних натуральних чисел ділитися на 4?

1140. Функцію задано формулою $y=-\frac{6}{x}$. При яких значеннях аргументу її значення дорівнює: а) 12; б) –12?

§ 27. Розв'язування задач складанням системи рівнянь

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- розв'язування задач — *problem solving*

Багато задач, особливо таких, у яких треба знайти значення двох величин, зручно розв'язувати за допомогою систем рівнянь.

Задача 1. За 5 блокнотів і 6 зошитів заплатили 690 грн. Скільки коштує один блокнот і один зошит, якщо 4 блокноти дорожчі за 3 зошити на 240 грн?

Розв'язання. Припустимо, що блокнот коштує x грн, а зошит — y грн. За 5 блокнотів заплатили $5x$ грн, а за 6 зошитів — $6y$ грн. Разом за них заплатили 690 грн, отже, $5x + 6y = 690$.

Оскільки 4 блокноти дорожчі за 3 зошити на 24 грн, маємо ще одне рівняння: $4x - 3y = 240$.

Змінні x і y в обох рівняннях позначають ті самі ціни. Отже, треба розв'язати систему цих двох рівнянь:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 690, \\ 4x - 3y = 240; \end{cases} \Big|\times 2 \quad + \begin{cases} 5x + 6y = 690, \\ 8x - 6y = 480; \end{cases}$$

$$13x = 1170,$$
$$x = 90,$$
$$4 \cdot 90 - 3y = 240,$$
$$-3y = 240 - 360,$$
$$3y = 120,$$
$$y = 40.$$

Відповідь. Блокнот коштує 90 грн, зошит — 40 грн.

Будь-яку задачу, що розв'язується складанням системи лінійних рівнянь, можна розв'язати і за допомогою рівняння з однією змінною. Тільки систему рівнянь здебільшого скласти легше, ніж рівняння з однією змінною.

Є чимало задач, які зручно розв'язувати за допомогою системи трьох рівнянь із трьома змінними. Розв'яжемо одну з них.

Задача 2. Капітал в 10000 грн поділи на три частини так, щоб перша була на 2000 грн більша за другу і на 3000 грн — за третю.

Розв'язання. Позначимо шукані частини капіталу буквами x, y і z. За умовою задачі

$$x + y + z = 10000, \quad x - y = 2000, \quad x - z = 3000.$$

Шукані значення змінних мають задовольняти систему трьох рівнянь із трьома змінними:

$$\begin{cases} x+y+z=10000, \\ x-y=2000, \\ x-z=3000. \end{cases}$$

Додамо почленно ліві й праві частини цих рівнянь, матимемо:

$3x = 15000$, звідси $x = 5000$.

Тоді з другого рівняння одержимо:

$5000 - y = 2000$, $y = 3000$,

а з третього обчислимо:

$5000 - z = 3000$, $z = 2000$.

Відповідь. 5000 грн, 3000 грн і 2000 грн.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Узагальнимо задачу 1 цього параграфа.

Задача. За 5 блокнотів і 6 зошитів заплатили m грн. Скільки коштує один блокнот і один зошит, якщо 4 блокноти дорожчі за 3 зошити на n грн?

Тут m і n — параметри, тобто букви, які в умовах задачі вважаються даними, незмінними. Задачі з параметрами так само можна розв'язувати за допомогою рівнянь чи системи рівнянь, тільки відповідями до них будуть не конкретні числа, а вирази, що містять параметри.

Розв'язання. $\begin{cases} 5x+6y=m, \\ 4x-3y=n; \end{cases} \Big| \times 2 \quad \begin{cases} 5x+6y=m, \\ 8x-6y=2n; \end{cases}$

$$13x = m + 2n;$$

$$x = \frac{1}{13}(m+2n).$$

Тоді $3y = 4x - n$, $3y = \frac{4}{13}(m+2n) - n$, $3y = \frac{1}{13}(4m-5n)$.

Отже, $y = \frac{1}{39}(4m-5n)$.

Відповідь. Блокнот коштує $\frac{1}{13}(m+2n)$ грн, а зошит — $\frac{1}{39}(4m-5n)$ грн.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Чи будь-яку задачу, що розв'язується складанням системи лінійних рівнянь, можна розв'язати за допомогою рівняння з однією змінною?
2. Склади кілька різних моделей задачі: «Знайди два числа, якщо їх сума дорівнює 3, а різниця — 2».

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Поділи капітал 810 000 грн на дві частини так, щоб менша частина становила 80 % від більшої.

Розв'язання. Нехай більша частина дорівнює x грн, тоді менша — 80 % від x, тобто $0{,}8x$. Маємо систему двох рівнянь: $\begin{cases} x+y=810\,000, \\ y=0{,}8x, \end{cases}$

звідси $x + 0{,}8x = 810\,000$,
$1{,}8x = 810\,000$,
$x = 810\,000 : 1{,}8$,
$x = 450\,000$.

Тоді $y = 0{,}8 \cdot 450\,000 = 360\,000$.

Відповідь. 450 000 грн і 360 000 грн.

2. Знайди два числа, якщо їх сума дорівнює 15, а різниця їх квадратів — на 60 більша.

Розв'язання. Якщо шукані числа дорівнюють x і y, то

$$\begin{cases} x+y=15, \\ x^2-y^2=75. \end{cases}$$

Оскільки $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ і $x + y = 15$, то $15(x - y) = 75$, а $x - y = 5$. Маємо систему рівнянь $\begin{cases} x+y=15, \\ x-y=5. \end{cases}$

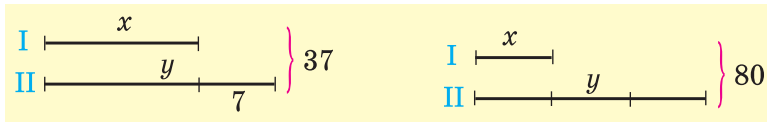
Її розв'язок $x = 10$, $y = 5$ є розв'язком і даної задачі.

Відповідь. 10 і 5.

ВИКОНАЙ УСНО

1141. Склади системи рівнянь для розв'язування задач. Знайди два числа, якщо:
а) їх сума дорівнює 40, а відношення — 3;
б) їх сума дорівнює 40, а різниця — 20;
в) їх різниця дорівнює 10, а відношення — 3.

1142. Якій системі рівнянь відповідає кожна схема (мал. 27.1)?



Мал. 27.1

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО **РІВЕНЬ А**

Розв'яжи задачі складанням системи рівнянь **(1143–1148).**

1143. Знайди два числа, сума яких дорівнює 35,5, а різниця — 12,5.

1144. Знайди два числа, півсума яких дорівнює 37,9, а піврізниця — 7,5.

1145. Купили 9 м тканини двох сортів ціною по 1200 грн і 900 грн за 1 м. За всю покупку заплатили 9900 грн. Скільки метрів тканини кожного сорту купили? За планом склади систему рівнянь та розв'яжи задачу.

1) *Познач кількість метрів однієї тканини за x, а кількість метрів іншої — за y;*
2) *запиши перше рівняння, знаючи, що загалом купили 9 м тканини;*
3) *запиши друге рівняння, знаючи, що за покупку заплатили 9900 грн.*

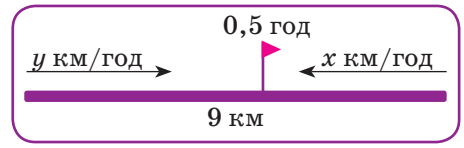
1146. На будівництві працювали 50 мулярів і теслярів. Згодом кількість мулярів збільшилась у 2 рази, а теслярів — у 3 рази, і всіх стало 130. Скільки мулярів і теслярів було спочатку? За планом склади систему рівнянь та розв'яжи задачу.

1) *Познач кількість мулярів за x, а кількість теслярів — за y;*
2) *запиши перше рівняння, знаючи, що всього було 50 мулярів і теслярів;*
3) *запиши друге рівняння, знаючи, що після збільшення кількості мулярів і теслярів їх всіх стало 130.*

1147. Швидкість моторного човна за течією — 23 км/год, а проти течії — 17 км/год. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії. Складіть план розв'язування задачі та розв'яжіть її.

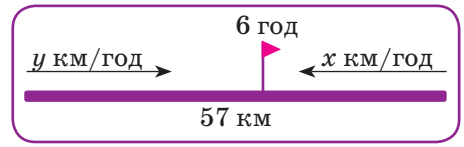
1148. Швидкість катера за течією річки — 37 км/год, а проти течії — 33 км/год. Знайди власну швидкість катера і швидкість течії. Склади план розв'язування задачі та розв'яжи її.

1149. Дві велосипедистки виїхали одночасно з двох сіл, відстань між якими становить 9 км, і зустрілися через 0,5 год (мал. 27.2). Визнач швидкість руху кожної, якщо швидкість першої велосипедистки на 1,6 км/год більша за швидкість другої велосипедистки.



Мал. 27.2

1150. Два туристи вийшли одночасно з двох міст, відстань між якими — 57 км, і зустрілися через 6 год (мал. 27.3). З якою швидкістю йшов кожний, якщо перший до зустрічі пройшов на 3 км більше, ніж другий?



Мал. 27.3

1151. Туристи проїхали 570 км. 6 год вони їхали поїздом і 3 год — автобусом. Знайди швидкість поїзда, якщо вона на 5 км/год більша за швидкість автобуса. Доповни таблицю та розв'яжи задачу.

	v, км/год	t, год	s, км
Поїзд	x	6	
Автобус	y	3	

1152. Три «дорослі» тополі й 5 «дорослих» лип з травня по вересень поглинають 212 кг вуглекислого газу. Такі самі 5 тополь і 3 липи поглинають 268 кг вуглекислого газу. Скільки вуглекислого газу поглинає за цей час кожне дерево?

1153. На годівлю 10 коней і 16 корів щодня відпускали 160 кг сіна, причому 5 коней одержували на 5 кг сіна більше, ніж 7 корів. Скільки кілограмів сіна давали щодня коневі й скільки корові?

1154. Периметр ділянки прямокутної форми дорівнює 168 м. Знайди довжини її сторін, якщо одна з них на 8 м довша.

1155. Мати старша за доньку на 24 роки, а донька молодша від матері втричі. Скільки років матері й скільки доньці?

1156. Знайди довжини сторін рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 82 см, а основа більша за бічну сторону на 10 см.

1157. Скільки років Антону й Насті, якщо разом їм — сімнадцять, і тепер їй вдвічі більше, ніж було Антону вісім років тому?

1158. У двох рядах паркувального майданчика 65 автомобілів. У I ряді на 7 автомобілів більше, ніж у II. Скільки автомобілів у кожному ряді?

1159. На двох полицях разом 78 книжок. Якщо з другої полиці переставити на першу 9 книжок, то на обох полицях книжок стане порівну. Скільки книжок на кожній полиці?

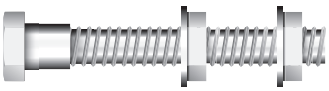
1160. There are 72 students in two seventh grades. If 2 students moved from class 7A to class 7B, there would be an equal number of students in both classes. How many students are in each class?

1161. Порівняй розв'язання двох задач.

а) Різниця двох чисел дорівнює 4, а різниця їх квадратів — 44. Знайди ці числа.

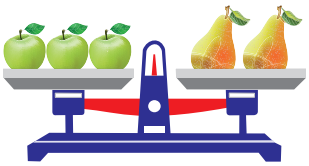
б) Знайди два числа, якщо відомо, що їх сума дорівнює 12, а різниця квадратів — 60.

1162. Сформулюйте задачі, що відповідають малюнкам 27.4, 27.5 та системам рівнянь. Розв'яжіть задачі.



$$\begin{cases} x + 2y = 250 \\ x - y = 130 \end{cases}$$

Мал. 27.4



$$\begin{cases} y - x = 50 \\ 3x = 2y \end{cases}$$

Мал. 27.5

1163. *Стародавня китайська задача.* Скільки в клітці фазанів і кролів, якщо разом у них 35 голів і 94 ноги?

1164. *Стародавня китайська задача.* 5 волів і 2 барани коштують 11 таєлів, а 2 воли і 8 баранів — 8 таєлів. Скільки баранів можна купити за гроші, одержані від продажу 5 волів?

1165. *Стародавня грецька задача.* Навантажені осел і мул ідуть повільно. Осел скаржиться на важку ношу, мул йому відповідає: «Чого ти скаржишся? Коли я взяв би один твій мішок, то моя ноша стала б удвічі важчою від твоєї. А коли ти взяв би один мій мішок, то твоя ноша дорівнювала б моїй». По скільки мішків несли осел і мул?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

1166. Півсума двох чисел більша від меншого з них на 5, а від пів різниці — на 1. Знайди ці числа.

1167. Піврізниця двох чисел менша від більшого з них на 13, а від їх різниці — на 12. Знайди ці числа.

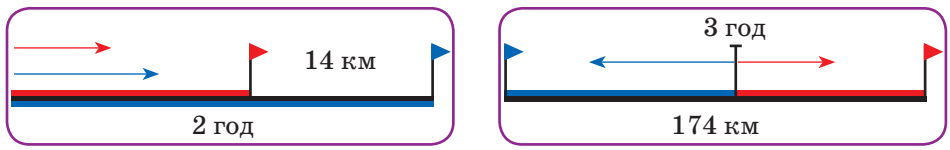
1168. Різниця квадратів двох додатних чисел і квадрат їх різниці дорівнюють відповідно 275 і 121. Знайди ці числа.

1169. Відстань 320 км моторний човен проходить за течією річки за 8 год, а проти течії — за 10 год. Знайди швидкість течії річки і власну швидкість моторного човна. Познач власну швидкість моторного човна за x, а швидкість течії річки — за y. Заповни таблицю та розв'яжи задачу.

	v, км/год	t, год	s, км
За течією			
Проти течії			

1170. Відстань 210 км катер проходить за течією річки за 5 год, а проти течії — за 6 год. Знайди швидкість течії річки і власну швидкість катера.

1171. Якщо з одного пункту одночасно і в одному напрямку виїдуть велосипедист і мотоцикліст, то через 2 год відстань між ними буде дорівнювати 14 км. Якщо ж вони виїдуть одночасно в протилежних напрямках, то через 3 год відстань між ними становитиме 174 км (мал. 27.6). Знайди швидкість кожного з них.



Мал. 27.6

1172. Якби велосипедистка збільшила швидкість на 3 км/год, то відстань між пунктами A і B проїхала б на 1 год швидше. А якби їхала зі швидкістю на 2 км/год меншою, то їхала б на 1 год довше. Знайдіть швидкість велосипедистки і відстань між пунктами A і B.

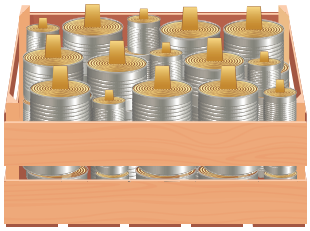
1173. Якби мотоциклістка збільшила швидкість на 24 км/год, то відстань між містами A і B проїхала б на 1 год швидше. А якби зменшила швидкість на 12 км/год, то їхала б на 1 год довше. Знайди швидкість мотоциклістки і відстань між містами A і B.

1174. На двох рахунках разом 10000 гривень. Якщо з першого перевести половину грошей на другий, то на другому стане

у чотири рази більше грошей, ніж залишиться на першому рахунку. Скільки грошей на рахунках?

1175. На двох полицях разом 80 книжок. Якщо з другої полиці третину книжок переставити на першу, то на першій стане у три рази більше книжок, ніж залишиться на другій. Скільки книжок на кожній полиці?

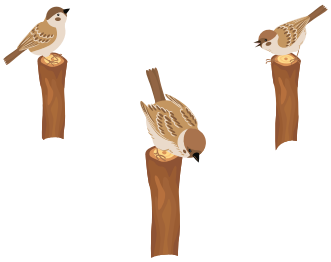
1176. В одному ящику великі і малі свічки. Всього їх 100. За перший день використали 35 % малих свічок і 40 % великих свічок. Скільки свічок кожного виду в ящику, якщо всього використали 38 свічок?



1177. До магазину завезли 760 кг апельсинів і бананів. За перший день продали 30 % апельсинів і 40 % бананів. Скільки завезли апельсинів і скільки бананів, якщо апельсинів продали на 59 кг менше, ніж бананів?

1178. Якщо розсадити дітей по двоє за стіл, то не вистачить трьох столів. Якщо розсадити їх по троє, то один стіл виявиться зайвим. Скільки дітей і скільки столів?

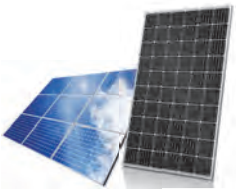
1179. Метушливі горобці
хочуть сісти на стовпці.
По одному якщо сісти,
двом не вистачило б місця,
а як вмостяться по парі,
буде вільна стовпців пара.
Скільки ж там було стовпців
і літало горобців?



1180. По колу, довжина якого 120 м, рухаються два тіла. Вони зустрічаються кожні 10 с, рухаючись в одному напрямку, і кожні 4 с, рухаючись у протилежних напрямках. З якою швидкістю рухаються ці тіла?

1181. По колу, довжина якого 90 м, рухаються дві подружки на скейтах в одному напрямку й зустрічаються через 6 с. Знайди їх швидкість, якщо швидкість однієї в 4 рази більша за швидкість іншої.

1182. Система з 2 сонячних батарей має загальну потужність 35 кВт. Знайди потужність кожної з них, якщо потужність однієї на 50 % більша за потужність іншої.



1183. Мотузку завдовжки 35 м розрізали на дві частини так, що одна з них на $33\frac{1}{3}\%$ коротша від другої. Знайди довжини цих частин.

1184. Найбільшими забруднювачами вод України є електроенергетика, комунальне господарство і сільське господарство — 79 % від усього обсягу зливу в річки. Відомо, що відсоток зливів електроенергетики перевищує сукупні зливи сільського і комунального господарства на 7 %, а зливи одного сільського господарства — на 26,5 %. Який відсоток обсягу всіх зливів припадає на: а) комунальне господарство; б) електроенергетику?

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

1185. *Задача В. А. Лебега.* Розв'яжи у цілих додатних числах систему $\begin{cases} 2x+3y+7z=131, \\ 2x+3y+8z=140. \end{cases}$

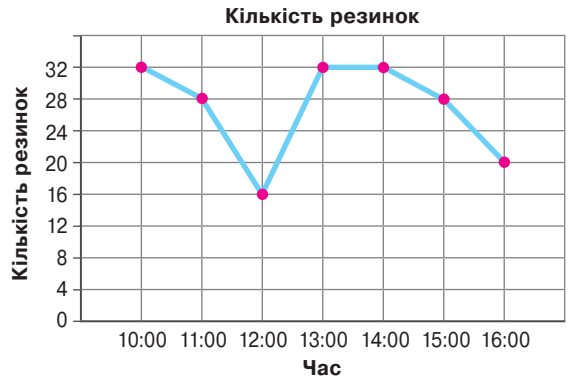
1186. Знайди число, яке при діленні на 4, 7 і 11 дає відповідно остачі 2, 1 і 6, причому сума часток на 2 менша від половини шуканого числа.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1187. Побудуй в одній координатній площині графіки рівнянь $x - y = 3$ і $3x + y = 1$. Знайди координати точки перетину графіків.

1188. Не виконуючи побудови, знайди координати точки перетину графіків рівнянь $x + 2y = 0$ і $x - y = -6$.

1189. У фітнес-студії є ваза з резинками, які можуть брати відвідувачі. О котрій годині була: а) найбільша; б) найменша кількість резинок у вазі? Протягом якої години була найбільша зміна кількості резинок? Що відбувалось з 13:00 до 14:00.



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРІАНТ I

1. Розв'яжи систему рівнянь $\begin{cases} 5x+6y=4, \\ 3x-2y=8. \end{cases}$

2. Розв'яжи графічно систему рівнянь $\begin{cases} 2x-y=4, \\ x-y=3. \end{cases}$

3. 2 кг помідорів на 16 грн дорожчі за 3 кг огірків. Скільки коштує 1 кг огірків і 1 кг помідорів, якщо за 1 кг помідорів і 4 кг огірків заплатили 107 грн?

ВАРІАНТ II

1. Розв'яжи систему рівнянь $\begin{cases} 4x+3y=-1, \\ 2x-5y=19. \end{cases}$

2. Розв'яжи графічно систему рівнянь $\begin{cases} 2x-y=3, \\ x+y=3. \end{cases}$

3. 3 кг моркви на 4 грн дорожчі за 2 кг картоплі. Скільки коштує 1 кг моркви і 1 кг картоплі, якщо за 5 кг картоплі і 1 кг моркви заплатили 58 грн?

ВАРІАНТ III

1. Розв'яжи систему рівнянь $\begin{cases} 5x-2y=7, \\ 3x+8y=-5. \end{cases}$

2. Розв'яжи графічно систему рівнянь $\begin{cases} x-2y=3, \\ x+y=-3. \end{cases}$

3. 4 кг печива на 40 грн дорожчі за 2 кг цукерок. Скільки коштує 1 кг печива і 1 кг цукерок, якщо за 3 кг печива і 1 кг цукерок заплатили 355 грн?

Перейди за посиланням та
- підсумуй головне в розділі https://vse.ee/cgax
- ознайомся з історичними відомостями https://vse.ee/cgaw
- дай відповіді на запитання https://vse.ee/cgav

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 7

1. На графіку рівняння $3x - 5y = 6{,}2$ взято точку з абсцисою 0,4. Яка ордината цієї точки?

А 1 **Б** −1 **В** 0 **Г** 0,4

2. Розв'язком якого рівняння є пара чисел (2; 3)?

А $2x + y = 7$ **Б** $2y + 4x = 15$
В $5x + y = 17$ **Г** $0{,}5x + 3y = 1$

3. Яке з рівнянь не має розв'язків?

А $x^4 + y^4 = -5$ **Б** $x^2 - y^2 = -3$
В $x^4 + 5y^2 = 0$ **Г** $x^2 + y^2 = 5$

4. Графіком якого рівняння є пряма, паралельна осі ординат?

А $y = x + 2$ **Б** $y = 2$ **В** $x = y$ **Г** $x = 2$

5. При якому значенні a графік рівняння $2x + ay = 4$ проходить через точку (1; 2)?

А −1 **Б** 6 **В** 1 **Г** 2

6. Знайди розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 14, \\ x - y = 8. \end{cases}$

А (11; 3) **Б** (3; 11) **В** (−11; 3) **Г** (−3; 11)

7. Знайди розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x = y, \\ x + y = 10. \end{cases}$

А (−1; −1) **Б** (5; 5) **В** (1; 1) **Г** (−5; −5)

8. Знайди координати точки перетину графіків рівнянь $2x - 3y = 16$ і $x + 2y = 1$.

А (5; 2) **Б** (5; −2) **В** (−5; 2) **Г** (−5; −2)

9. Скільки спільних точок мають графіки рівнянь $2x + 3y = 7$ і $2x - 3y = 7$?

А одну **Б** дві **В** жодної **Г** безліч

10. При яких значеннях a система рівнянь $\begin{cases} 3x + ay = 15, \\ 12x - 8y = 60 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

А −2 **Б** −32 **В** 2 **Г** 32

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №7

1. Через яку з точок проходить графік рівняння $3x - 5y = -2$?

А (–1; –1) **Б** (5; 2) **В** (1; 1) **Г** (–3; –1)

2. При якому значенні y пара чисел (3 ; y) є розв'язком рівняння $5x + 7y = 36$?

А 13 **Б** 3 **В** –3 **Г** –13

3. У якій точці графік рівняння $2x + 3y = 6$ перетинає вісь абсцис?

А (0; 2) **Б** (0; 3) **В** (3; 0) **Г** (2; 0)

4. Установи відповідність між значеннями a і b, заданими умовами (1–3), та кількістю розв'язків (А–Д) системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ ax + by = 5. \end{cases}$$

1 $a = 3$, $b = 4$
2 $a = 10$, $b = -15$
3 $a = -4$, $b = 6$

А один розв'язок
Б два розв'язки
В жодного розв'язку
Г безліч розв'язків
Д не можна встановити

5. Розв'яжи систему рівнянь графічно.

$$\begin{cases} x + y = -2, \\ 2x - y = 8. \end{cases}$$

6. Розв'яжи систему рівнянь.

а) $\begin{cases} 5x - 3y = -9, \\ 2x - y = -2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{3x - 2y}{5} + \dfrac{2x - y}{3} - x = 1, \\ \dfrac{4x + y}{3} - \dfrac{3x + y}{2} - y = 1. \end{cases}$

7. У сараї є гуси та кролі. У них 50 голів і 160 ніг. Скільки гусей і скільки кролів у сараї?

8. Знайди значення коефіцієнтів a і b рівняння $ax + by = 13$, якщо його графік проходить через точки $M(5; -3)$ і $N(9; 5)$.

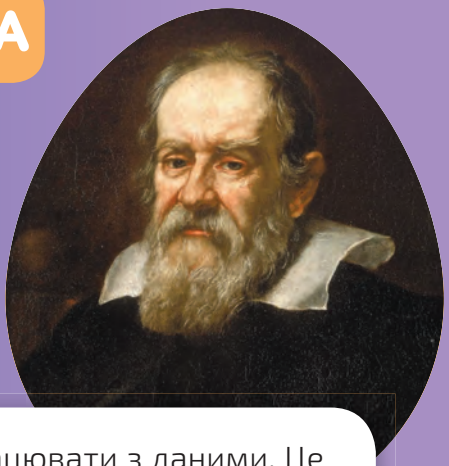
Додаткове завдання

9. На складі було 1500 м^3 березових і соснових дров. За перший місяць використали 15 % соснових і 20 % березових дров, а разом — 270 м^3. Скільки соснових і скільки березових дров окремо було на складі?

РОЗДІЛ 5. СТОХАСТИКА

«Книга природи написана мовою математики.»

Галілео Галілей



Сучасній людині постійно доводиться працювати з даними. Це потребує знань про відсотки, вміння читати та будувати різні види діаграм, а також прогнозувати певні явища. Для прогнозування важливими є знання з комбінаторики та теорії ймовірностей. Опанування цього розділу допоможе легше орієнтуватися в сучасному інформаційному суспільстві.

У цьому розділі ти дізнаєшся про:

- відсоткові розрахунки;
- комбінаторні задачі;
- елементи статистики та теорії ймовірностей.

§ 28. Відсоткові розрахунки

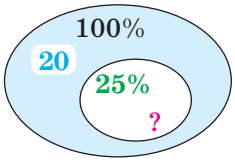
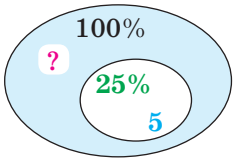
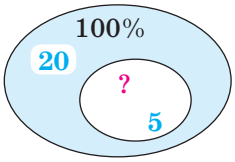
КЛЮЧОВІ СЛОВА

- відсоток — *percent*

Відсоток — сота частина.

Найпростіші задачі, в умовах яких зустрічаються прості відсотки, бувають трьох видів.

Задачі на відсотки

Знаходження відсотків від числа	**Знаходження числа за його відсотками**	**Знаходження відсоткового відношення**
У класі 20 учнів та учениць. 25 % з них — дівчата. Скільки дівчат у класі?	У класі 25 % дівчат. Скільки учнів у класі, якщо дівчат 5?	У класі, в якому 20 учнів та учениць, 5 дівчат. Який відсоток учнів та учениць класу складають дівчата?
		
Учнів — 100 % — 20 Дівчат — 25 % — ? *Розв'язання* 20 · 0,25 = 5 (дівчат) **Відповідь: 5 дівчат**	Учнів — 100 % — ? Дівчат — 25 % — 5 *Розв'язання* 5 : 0,25 = 20 (учнів) **Відповідь: 20 учнів**	Учнів — 100 % — 20 Дівчат — ? — 5 *Розв'язання* 5 : 20 = 0,25 **Відповідь: 25 %**

Важливо вміти розрізняти ці види задач та знати правила, що допомагають їх розв'язувати.

Щоб знайти число x, яке складає a % від числа b, треба $x = b \cdot \frac{a}{100}$.

Наприклад, 7 % від числа 200 дорівнюють $200 \cdot \frac{7}{100} = 14$.

Щоб знайти число x, про яке відомо, що a % від нього дорівнюють b, треба $x = b : \frac{a}{100}$.

Наприклад. Якщо число 24 складає 12 % від числа x, то $x = 24 : \frac{12}{100} = 200$.

Щоб знайти, скільки відсотків число *a* складає від числа *b*, треба $\frac{a}{b}\cdot 100\%$.

Наприклад, число 15 складає від числа 120: $\frac{15}{120}\cdot 100 = 12{,}5\%$.

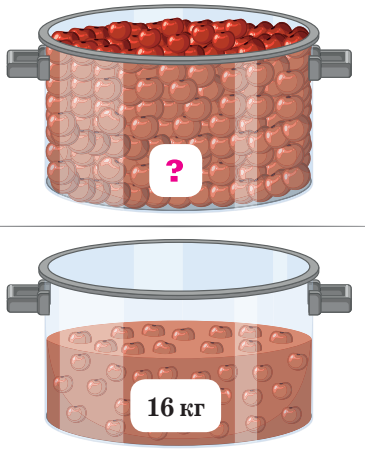
Кожну задачу на відсотки можна розв'язати декількома способами:

1) зведенням до одного відсотка;

2) за правилами знаходження відсотка від числа та числа за значенням його відсотка;

3) за допомогою пропорції.

Задача 1. Під час варіння варення втрачає 60 % своєї маси. Скільки кілограмів сирої суміші треба взяти, щоб отримати 16 кг готового варення?



Якщо втрати складають 60 %, то лишається 40 % усієї маси.

Сира суміш — 100 % — ?

Варення — 40 % — 16 кг

Розв'язання

I спосіб (зведення до одного відсотка)

16 : 40 = 0,4 (кг) — припадає на один відсоток;

0,4 · 100 = 40 (кг) — сирої суміші треба взяти.

II спосіб (за правилом)

40 % = 0,4

16 : 0,4 = 40 (кг) — сирої суміші треба взяти.

III спосіб (за допомогою пропорції)

$\frac{100}{40} = \frac{x}{16}$;

$40 \cdot x = 16 \cdot 100$; $40x = 1600$; $x = 40$ (кг).

Відповідь: 40 кг.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Які види задач на відсотки ти знаєш? Наведи приклад до кожного виду задач.
2. Якими способами можна розв'язати задачу на відсотки?
3. Які моделі допомагають розв'язувати задачі на відсотки?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

Задачі на розчини і сплави

Розв'язати задачі на розчини і сплави зазвичай допомагають 2 моделі: таблиця і рівняння.

1. Є два сплави міді й цинку. Перший містить 10 % цинку, другий — 30 % цинку. Скільки треба взяти першого і другого сплавів, щоб, сплавивши їх, одержати 400 т сплаву, що містить 25 % цинку?

Розв'язання

1) Модель до задачі — таблиця.

Сплав	Загальна маса, т	Відсотковий вміст цинку	Маса цинку, т
I		10 %	
II		30 %	
III	400	25 %	

Нехай маса першого сплаву x т, тоді другого — $(400 - x)$ т. Знаходимо масу цинку для кожного рядка і заповнюємо далі третій стовпчик таблиці.

Сплав	Загальна маса, т	Відсотковий вміст цинку	Маса цинку, т
I	x	10 %	$0{,}1x$
II	$400 - x$	30 %	$0{,}3 \cdot (400 - x)$
III	400	25 %	$0{,}25 \cdot 400$

Використовуючи дані стовпця «Маса цинку», складемо математичну модель — лінійне рівняння:

$$0{,}1\,x + 0{,}3\,(400 - x) = 0{,}25 \cdot 400,$$
$$0{,}1x + 120 - 0{,}3x = 100,$$
$$-0{,}2x = -20,$$
$$x = 100 \text{ (т)} \text{ — маса першого сплаву;}$$

$400 - x = 400 - 100 = 300$ (т) — маса другого сплаву.

Відповідь: маса I сплаву — 100 т, маса II сплаву — 300 т.

ЗВЕРНИ УВАГУ!

В задачах на розчини:

1) якщо до розчину, в якому є 5 г солі, долити води, то в добутому розчині буде 5 г цієї солі;
2) якщо змішати два розчини, в одному з яких є 25 г, а в другому — 45 г солі, то в добутому розчині буде 70 г цієї солі.

ВИКОНАЙ УСНО

1190. Вирази у відсотках число $\frac{1}{5}$.

А 2 % **Б** 20 % **В** 50 % **Г** 0,2 %

1191. Скільки грамів солі в 200 грамах 10 % розчину?

А 0,2 г **Б** 2 г **В** 20 г **Г** 2000 г

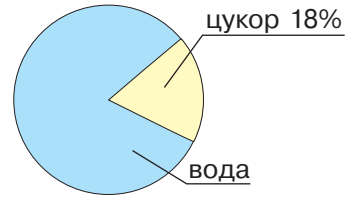
1192. У скількох грамах 20 %-го розчину є 12 г солі?

А 2,4 г **Б** 0,24 г **В** 60 г **Г** 600 г

1193. У 300 г розчину є 3 г солі. Яка його концентрація?

А 100 % **Б** 3 % **В** 30 % **Г** 1 %

1194. Який відсоток води у напої? Яка концентрація цукру у ньому (мал. 28.1)?



Мал. 28.1

1195. Установи відповідність між умовами задач (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1	Скільки відсотків становить 3 від 12?	**А** 10%
2	На скільки відсотків 2 більше за 1?	**Б** 25%
3	На скільки відсотків 8 менше від 16?	**В** 15%
4	Скільки відсотків становить 20, якщо 80 становить 40%?	**Г** 50%
		Д 100%

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

1196. Скільки грамів солі в 125 грамах 8 % розчину?

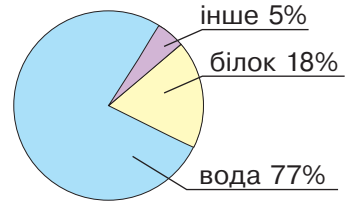
1197. У скількох грамах 16 %-го розчину є 24 г солі?

1198. How many grams of the 15 % solution contain 30 g of salt?

1199. У 750 г розчину є 15 г солі. Яка його концентрація?

1200. Шляхом випаровування з 20 г розчину отримали 4 г солі. Якої концентрації був розчин?

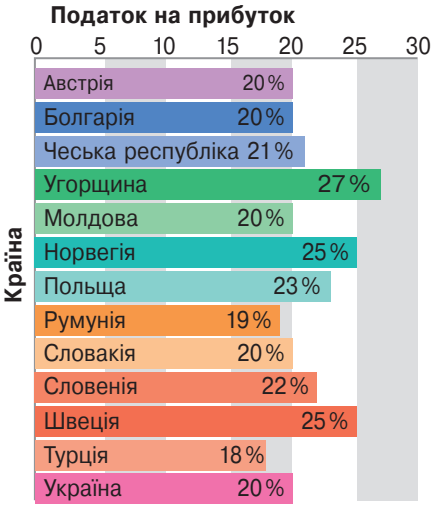
1201. Розгляньте діаграму складу напою (мал. 28.2) і розв'яжіть задачі.
1) Яка маса білка в напої масою 200 г?
2) Яка маса напою, якщо відомо, що для його створення використали 154 г води?



Мал. 28.2

1202. Щорічний приріст деревини на дослідній ділянці становить 10 %. Яка кількість деревини буде через рік, якщо зараз її 10^5 м^3?

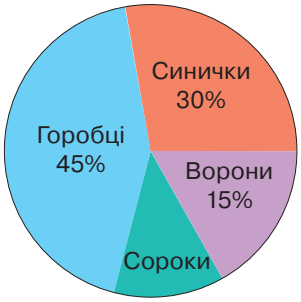
1203. Розглянь діаграму (мал. 28.3) про податок на додану вартість від ціни товару в різних країнах. Який ПДВ нарахують:
1) українцю в магазині Ужгорода за диван ціною 6840 грн;
2) угорцю в магазині Будапешта за антикваріат ціною 6840 угорських форінтів;
3) норвежцю в магазині Осло за вазу ціною 6840 євро?



Мал. 28.3

1204. За деяку роботу робітникові нарахували 42650 грн. Із них 13 % — прибутковий податок, 2 % — відрахування у пенсійний фонд, 1 % — відрахування у фонд зайнятості, 1 % — профспілковий внесок.
Скільки одержить працівник після всіх відрахувань?

1205. Розглянь діаграму, що ілюструє кількість пташок, яких побачила Тетяна, прогулюючись в парку (мал. 28.4). Дай відповіді на запитання.
1) Скільки відсотків припадає на сорок?
2) Яку кількість всіх птахів побачила дівчинка, якщо сорок серед них було лише 2?



Мал. 28.4

1206. Першого дня волонтерський пункт розвіз 20 % всієї маси накопичених продуктів, другого — 32 %, а третього дня — 240 кг, що лишилися. Яку масу продуктів було накопичено у пункті?

1207. Першого дня туристи пройшли 15 % всього шляху, другого — 25 % всього шляху, а третього дня — 24 км, що лишилися. Яка довжина маршруту туристів?

1208. 55 % сімейного бюджету витрачається на харчування, а 30 % решти — на сплату комунальних послуг. Скільки відсотків залишається для вільного використання?

1209. Магазин продав одному покупцю 25 % полотна, другому покупцю — 30 % остачі. Скільки відсотків полотна залишилось непроданим?

1210. На скільки відсотків число 3,2 більше за число 2,5?

1211. На скільки відсотків число 40 більше за число 32? На скільки відсотків число 32 менше від числа 40?

1212. До 80 г 15 %-го розчину додали 20 г води. Якої концентрації став розчин?

1213. До 40 г 20 %-го розчину додали 60 г води. Якої концентрації став розчин?

1214. Зливок міді зі сріблом загальною масою 15 кг містить 45 % міді. Скільки чистого срібла потрібно додати до нього, щоб утворений сплав містив 30 % міді?

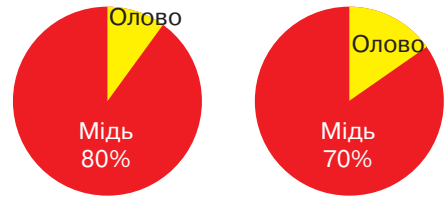
1215. Розчин містить 5 % солі. Скільки кілограмів прісної води треба додати до 40 кг розчину, щоб його концентрація стала 2 %?

1216. Скільки грамів 6 %-го розчину солі можна отримати з 300 г рідини, яка містить 40 % солі?

1217. Змішали 100 г 20 %-го і 50 г 32 %-го розчину деякої речовини. Якої концентрації отримали розчин?

1218. Є два водно-сольові розчини. Перший розчин містить 15 %, а другий — 30 % солі. Скільки грамів кожного розчину потрібно взяти, щоб отримати розчин масою 800 г, який містить 18 % солі?

1219. Є два сплави міді і олова, їх склад поданий у вигляді діаграм (мал. 28.5). Скільки кілограмів кожного сплаву потрібно взяти, щоб отримати сплав масою 200 кг, який містить 24 % олова?



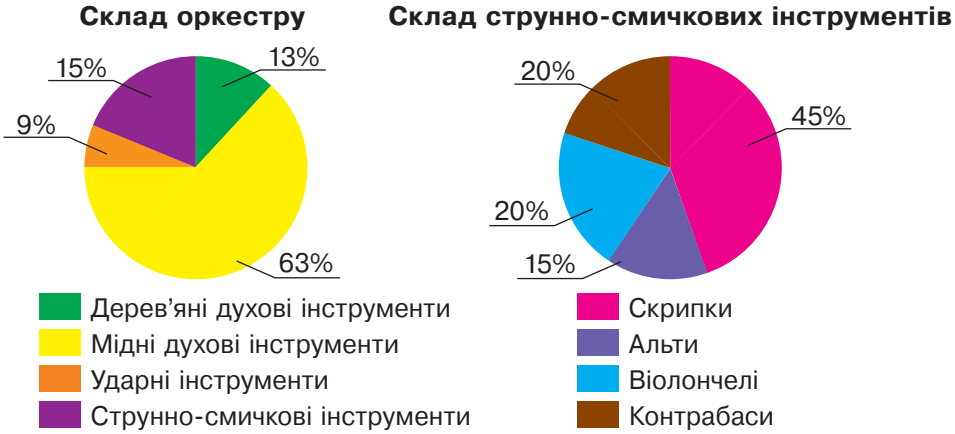
Мал. 28.5

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

1220. Власник магазину підняв ціну на батон на 25 %, але через вищу ціну попит на нього знизився. Це змусило власника зменшити нову ціну на 25 %, після чого ціна батону становила 24 грн. Якою була його початкова ціна?

1221. Зарплату спочатку збільшили на 20 %, а потім зменшили на 20 %. Як вона змінилась?

1222. Розгляньте діаграми, на яких зображено склад симфонічного оркестру (мал. 28.6). Зі скількох музикантів складається оркестр, якщо в ньому грає 27 скрипачів та скрипачок?



Мал. 28.6

Попроси однокласника/однокласницю доповнити запитання: «Скільки в оркестрі... » та дай відповідь на нього.

1223. Сплав складається з 50 % цинку, 40 % міді і 10 % алюмінію. Скільки грамів кожного з цих металів входить до сплаву, якщо відомо, що алюмінію на 600 г менше, ніж міді?

1224. З 1 т руди, яка містила деяку кількість заліза, вилучили 400 кг домішок. Хоча в цих домішках було 12 % заліза, у решті руди вміст заліза підвищився на 20 %. Яка кількість заліза залишилася в руді?

1225. Торговельна організація придбала за 25000 грн дві партії товарів і після їх продажу отримала 40 % прибутку. Скільки заплатила організація за кожну партію, якщо перша принесла 25 % прибутку, а друга — 50 %?

1226. Три ящики наповнено горіхами. У другому ящику на 10 % більше, ніж у першому, і на 30 % більше, ніж у третьому. Скільки горіхів у кожному ящику, якщо у першому на 80 горіхів більше, ніж у третьому?

1227. За 2 столи і 8 стільців заплатили 8800 грн. Після того як стіл подорожчав на 10 %, а стілець подешевшав на 20 %, за стіл і 5 стільців заплатили 4520 грн. Скільки коштував стіл і скільки стілець?

1228. За 5 футбольних і 3 волейбольні м'ячі заплатили 4650 грн. Після того як ціна на футбольний м'яч підвищилась на 20 %, а на волейбольний знизилась на 10 %, за 3 футбольні і 2 во-

лейбольні м'ячі заплатили 3222 грн. Скільки коштував футбольний м'яч і скільки волейбольний?

1229. Вкладник поклав до двох різних банків 100000 грн. Перший банк виплачує 12 % річних, а другий — 15 % річних. Скільки грошей вкладник поклав до кожного банка, якщо у кінці року він отримав 13800 грн відсоткових грошей?

1230. Вкладник поклав до двох різних банків 80000 грн. Перший банк виплачує 12 % річних, а другий — 14 % річних. Скільки грошей вкладник поклав до кожного банку, якщо у кінці року він отримав у першому банку на 3400 грн відсоткових грошей менше, ніж у другому?

1231. За перший тиждень шахта перевиконала норму на p %, за другий — на k %, добувши за ці два тижні понад норму m тонн вугілля. Скільки вугілля за тиждень мала добувати шахта за планом?

1232. Зніми відео або напиши допис на тему: «Відсоткові розрахунки в житті моїх батьків».

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

1233. Марина роздавала друзям яблука. Першому другові вона віддала половину всіх яблук та ще 1 яблуко, другому — половину залишку та ще 2 яблука, третьому — половину нового залишку та ще 3 яблука. Після цього у неї залишилось 1 яблуко. Скільки яблук було у Марини спочатку?

1234. Запиши наступні члени числової послідовності.
а) 11, 33, 99,... б) 45, 23, 69, 47, 141,...

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1235. Знайди добуток многочленів.
а) $(a^3 - 1)(a^3 + 1)(a^6 + 1)$; б) $(m - 2)(m + 2)(m^2 + 4)$.

1236. Склади рівняння прямої виду $y = kx + p$, яка проходить через точки: а) $A(1; 3)$ і $B(3; 7)$; б) $K(3; 2)$ і $P(-1; -2)$;
в) $C(2; 4)$ і $D(5; -2)$; г) $E(1; 2)$ і $F(3; 3)$.

1237. В якій квартирі живе Орися, якщо її номер квартири від множення на 7 збільшується на 30?

§ 29. Збір та аналіз даних

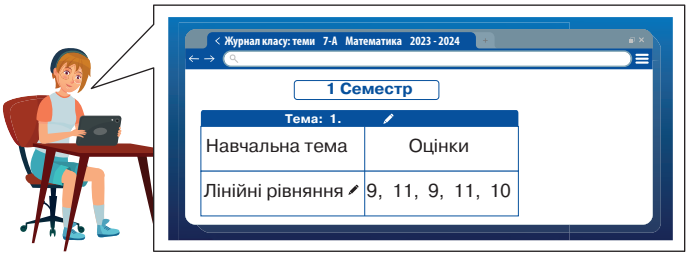
КЛЮЧОВІ СЛОВА

- частотна таблиця — *frequency table,* вибірка — *sample*
- найбільше (найменше) значення вибірки — *the greatest (lowest) value of the sample*
- середнє значення вибірки — *sample mean*

Досить часто доводиться проводити дослідження і збирати різні дані. Наприклад, за тему «Лінійні рівняння» учениця отримала оцінки 9, 11, 9, 11, 10.

Зібрані числові результати досліджень називають **вибіркою**.

Щоб робити певні висновки про дослідження, вибірку часто характеризують.



Вибірка: 9, 11, 9, 11, 10.
Найбільше значення: 11.
Найменше значення: 9.
Середнє арифметичне: 10.

Наприклад, зазначають найбільше значення вибірки, найменше значення вибірки або вказують її середнє значення.

Середнє значення вибірки — середнє арифметичне всіх її значень.

Щоб знайти середнє значення вибірки, треба знайти суму всіх значень і поділити на їх кількість.

Задача. При опитуванні 14 учнів та учениць класу щодо місяця, в якому вони народилися, отримали такі результаті: *жовтень, вересень, травень, червень, червень, грудень, жовтень, липень, вересень, червень, вересень, червень, липень, червень.*

Для подачі даних зручно використовувати **частотну таблицю**.

Місяці	Гр.	Тр.	Чер.	Лип.	Вер.	Жов.
К-сть	1	1	5	2	3	2

Наочно уявити результати частотної таблиці може допомогти **діаграма** (мал. 29.1).

Мал. 29.1

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. У якому вигляді можуть бути подані дані певного дослідження?
2. Що називають вибіркою?
3. Які характеристики вибірки ти знаєш?
4. Що називають середнім арифметичним вибірки?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

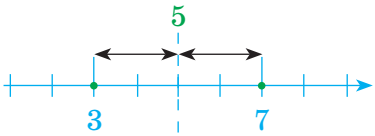
1. Який середній бал учня, якщо він має бали:

1) 3 і 7; 2) 3, 7, 8; 3) 3, 7, 8, 9?

Розв'язання

1) Вибірка: 3, 7 (мал. 29.2 *а*).

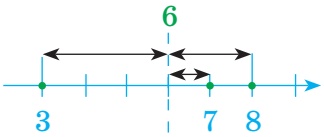
Середнє значення вибірки: $\frac{3+7}{2}=5$.



а

2) Вибірка: 3, 7, 8 (мал. 29.2 *б*).

Середнє значення вибірки: $\frac{3+7+8}{3}=6$.



б

Мал. 29.2

3) Вибірка: 3, 7, 8, 9.

Середнє значення вибірки: $\frac{3+7+8+9}{4}=6{,}75$.

Немає такої оцінки 6,75, тож, округлюючи, отримаємо 7.
Відповідь: середній бал 1) 5; 2) 6; 3) 7.

ВИКОНАЙ УСНО

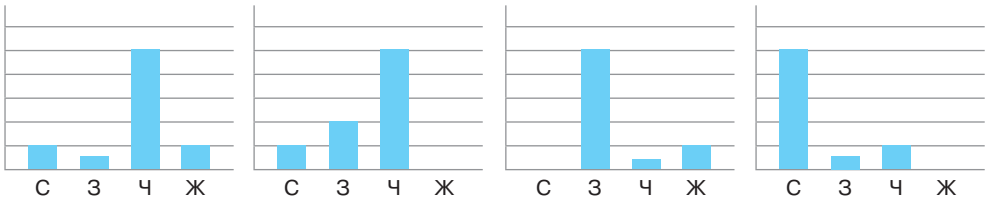
1238. Користуючись малюнком 29.3, поясніть, що таке середнє арифметичне вибірки.

6 + 11 + 7 = 8 + 8 + 8

Мал. 29.3

1239. Шукаючи основні характеристики вибірки: 2, 10, 7, 10, 5, 5, 20, Олег написав: «Середнє арифметичне 10». Чи не допустив Олег помилки?

1240. Вихованці дитсадка виготовляли святкові ліхтарики з кольорового паперу: синіх ліхтарів — 2, зелених — 4, червоних — 10, жовтих — жодного. Яка з діаграм описує наведену ситуацію (мал. 29.4)?

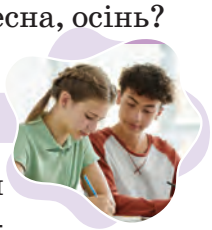


Мал. 29.4

1241. Класний керівник провів опитування своїх учнів щодо їх улюбленої пори року і склав частотну таблицю.

Пора року	Зима	Весна	Літо	Осінь
Число учнів	3	2	20	0

1) Скільки дітей опитав класний керівник?
2) Яка пора року найулюбленіша серед опитаних учнів?
3) У скількох учнів найулюбленішою порою року є весна, осінь?



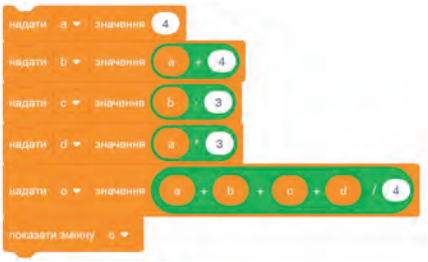
ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

1242. В таблиці наведено середній дохід підприємця у гривнях за перше півріччя. Який середній місячний дохід підприємця?

Місяць	I	II	III	IV	V	VI
Дохід, грн	56 000	46 000	30 000	35 000	38 000	26 000

А 32 500 грн **Б** 35 000 грн **В** 38 500 грн **Г** 38 000 грн

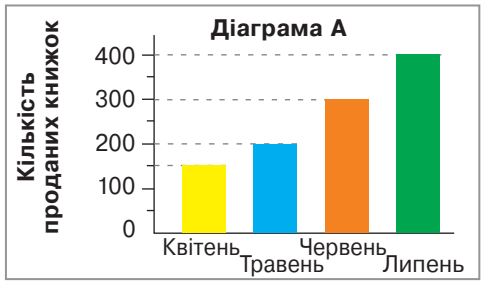
1243. Проаналізуй задану частину коду (мал. 29.5). Якою характеристикою вибірки a, b, c, d є змінна e? Обчисли значення змінної e.



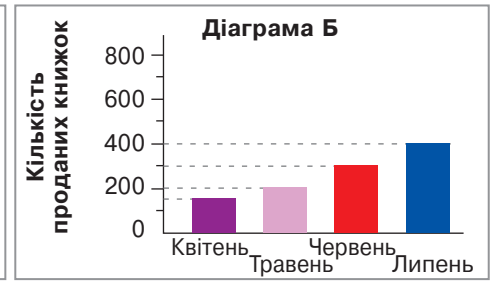
Мал. 29.5

1244. Три мішки картоплі мають масу 162 кг. Яка маса четвертого мішка, якщо середнє арифметичне 4 мішків 59 кг?

1245. Марина й Олексій намалювали дві різних діаграми, маючи одні й ті самі дані про продаж книжок в магазині продовж 4 місяців (мал. 29.6). Чому діаграми різні? Яку середню кількість книжок купували в магазині щомісяця? Скільки загалом книжок продали за 4 місяці? Побудуй на основі цих даних діаграму з ціною поділки 25 книжок.



Діаграма Марини



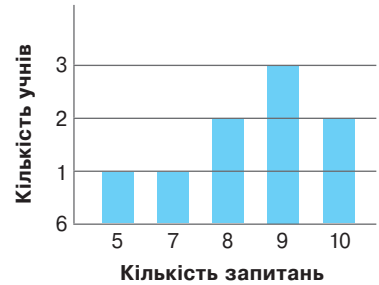
Діаграма Олексія

Мал. 29.6

1246. Вчитель, перевіряючи тести з 10 запитань, написані учнями, склав діаграму результатів (мал. 29.7).

Скільки учнів відповіли на всі запитання тесту? Скільки учнів писали тест?

Знайди середнє арифметичне вибірки.



Мал. 29.7

1247. Знайди найбільше, найменше та середнє значення вибірки:

а) 2; 5; 4; 5; 3; 2; 2; 2; 4; 5; 5; 6; 5; 6; 5;

б) 1,5; 1,6; 1,2; 2,1; 2,4; 2,7; 2,8; 3,0; 3,0; 3,0; 3,1; 3,1; 3,1; 3,4.

1248. Find the greatest and the lowest values of the sample and sample mean:

a) 12; 17; 11; 13; 14; 15; 16; 13; 13.

b) 0,95; 0,99; 1,03; 1,06; 0,97; 0,97; 1,0; 1,01; 0,98; 0,97; 0,99; 0,96; 1,02; 0,97; 1,0.

1249. В частотній таблиці подано частоту середніх температур щодня продовж місяця.

Температура (°C)	+10	+9	+8	+7	+6	+5	+4	+3	+2
Частота	2	2	1	1	4	4	6	5	4

1) Скільки днів денна середня температура була:

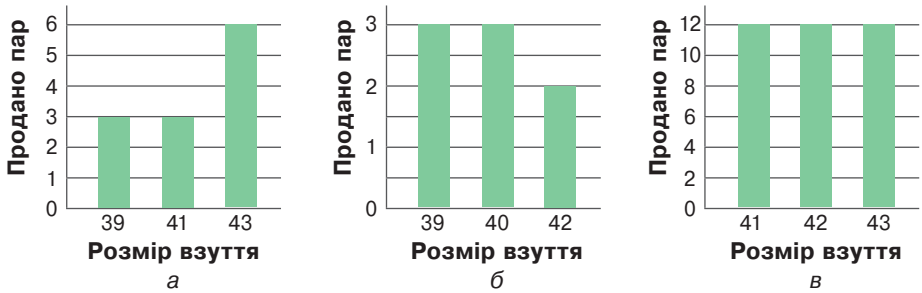
а) +7 °C; б) +2 °C; в) +1 °C?

2) Якою: а) найбільшою; б) найменшою була денна середня температура?

3) Знайди середнє значення середніх температур місяця.

4) На твою думку, про який місяць іде мова?

1250. Чому дорівнює середнє значення в кожному з випадків? Відповіді округліть до одиниць (мал. 29.8).



Мал. 29.8

1251. За діаграмою (мал. 29.9) склади частотну таблицю. Знайди загальну кількість опитаних учнів, якщо кожен з них вибрав лише один найулюбленіший вид спорту.

Мал. 29.9

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

1252. На основі таблиці про кількість театрів в деяких містах України побудуй стовпчасту діаграму.

Місто	Київ	Дніпро	Львів	Одеса	Харків	Запоріжжя
К-сть театрів	18	9	8	6	5	5

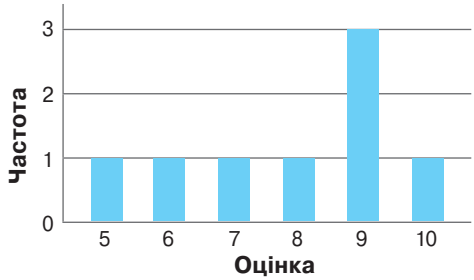
1253. При відгодівлі 10 тварин протягом 5 днів зареєстровано такі прирости в масі (у кілограмах): 5, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 0, 3, 2. Побудуй за цими даними діаграму і знайди найбільше, найменше та середнє значення вибірки.

1254. Для прийняття на роботу фірма перевіряє кандидатів за допомогою тестування за 100-бальною системою. Одержано такі результати тестування 10 кандидатів: 90, 65, 55, 90, 90, 65, 55, 45, 90, 75. Побудуй за цими даними діаграму і знайди найбільше, найменше та середнє значення вибірки.

1255. Перед вами оцінки Микити за півріччя з трьох предметів:
Математика: 6, 10, 4, 7, 8, 4, 9, 10, 6, 8, 5, 9, 10
Англійська мова:

Оцінки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Частота	0	0	0	1	0	3	2	4	4	2

Географія:



Мал. 29.10

1) Знайдіть середню оцінку Микити за півріччя з математики, з англійської мови, з географії (мал. 29.10).

2) Знайдіть найбільше і найменше значення вибірки оцінок Микити з кожного предмету.

3) На останньому уроці вчитель математики викликав Микиту до дошки. Чи може Микита покращити чи погіршити свою оцінку за півріччя?

1256. За розв'язання задач п'ять учасників та учасниць олімпіади одержали від 0 до 3 балів, десять — від 4 до 6, тридцять — від 7 до 9, сорок чотири — від 10 до 12, шістнадцять — від 13 до 15, десять — від 16 до 18, два — від 19 до 21, три — від 22 до 24 балів. Склади частотну таблицю. Побудуй за допомогою комп'ютера стовпчасту діаграму та знайди найбільше і найменше значення вибірки.

1257. Зібрані дані щодо кількості пожеж у певному населеному пункті за 12 місяців: червень — 5, липень — 7, серпень — 3, вересень — 4, жовтень — 2, листопад — 3, грудень — 3, січень — 4, лютий — 1, березень — 6, квітень — 6, травень — 7. Склади частотну таблицю. Побудуй за допомогою комп'ютера стовпчасту діаграму та знайди найбільше і найменше значення вибірки.

1258. Опитавши 60 чоловік про розміри їх взуття (у см), склали таблицю:

27,5	28	25,5	28	29	28,5	26	28	27,5	29,5	26,5	30,5	26,5	27,5	29,5
27,5	26	30	27,5	27	29	27	28,5	27,5	29,5	25,5	27	28,5	28	27
28	25	26	28	30	27	27	28,5	29	26	26,5	28,5	26,5	27,5	28
29,5	26,5	29	28	27,5	28,5	27,5	29	27	28	29	27	26,5	28,5	27,5

Складіть частотну таблицю. Знайдіть найбільше, найменше та середнє значення вибірки.

1259. Опитавши 60 жінок про розміри їх взуття (у см), склали таблицю:

23,5	24	23,5	23	23	24,5	22,5	24,5	22,5	23,5	23,5	23,5	23,5	25,5	21
24	25	23,5	22	23	24,5	23	24,5	24,5	23	24,5	25	21,5	24	23,5
24,5	22,5	22	23,5	26,5	25,5	25	26	24	23	24	24,5	22	24	23,5
21,5	23,5	25	24	22,5	25,5	21,5	24,5	26	25	23,5	22,5	24	22,5	23

Склади частотну таблицю. Знайди найбільше, найменше та середнє значення вибірки.

1260. Побудуй в Excel діаграму «Курс долара», користуючись даними за останній рік.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

1261. Мама попросила Мар'яну: «Візьми борошно, що я відсипала, влий туди 150 мл води і заміси тісто на вареники». Коли мама пішла, то Мар'яна уважно оглянула буфет, знайшла каструлю і 2 пляшки: на одній було написано 200 мл, а на іншій — 250 мл. Як їй відміряти 150 мл?

1262. За книгу заплатили 60 грн та ще третину її вартості. Скільки коштує книга?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

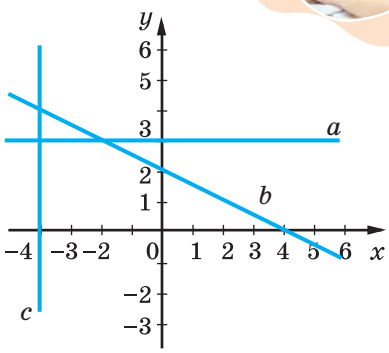
1263. Склади рівняння прямих, зображених на малюнку 29.11.

1264. Доведи тотожність.

а) $a^2 + 3a + 2 = (a + 1)(a + 2)$;

б) $7x^3 + 5x^2 - 6x + 3 =$
$= ((7x + 5)x - 6)\,x + 3$.

1265. Після подорожчання товару на 20 % його ціна становить 1056 грн. Яка початкова ціна товару?



Мал. 29.11

§ 30. Комбінаторні задачі

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- комбінаторні задачі — *combinatorial problems*

Розглянемо два найпростіші види комбінаторних задач. Одна з них розв'язується за допомогою дії додавання, а друга — за допомогою дії множення. Проаналізуй, в чому різниця між задачами.

Задача 1. Учневі сьомого класу за рік треба виконати одну проєктну роботу. Йому пропонують 4 теми з фізики або 3 теми з алгебри. Скільки варіантів вибору теми однієї проєктної роботи має учень?

Розв'язання.

В учня є 4 варіанти вибрати одну тему з фізики або 3 варіанти вибрати одну тему з алгебри. Обирати він може між двома предметами, тож загальна кількість варіантів $4 + 3 = 7$.

Відповідь: 7 варіантів.

Задача 2. Від пункту A до пункту B ведуть чотири стежки, а від B до C — дві. Скількома маршрутами можна пройти від пункту A до пункту C через пункт B?

Розв'язання.

Щоб пройти від пункту A до пункту B, треба вибрати одну з чотирьох стежок: 1, 2, 3 або 4 (мал. 30.1). І після того слід вибрати одну з двох інших стежок: 5 чи 6.

Мал. 30.1

З кожним маршрутом від A до B можна взяти один із двох маршрутів від B до C. Усього від пункту A до пункту C ведуть 8 маршрутів, бо $4 \cdot 2 = 8$.

Відповідь: 8.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Наведи приклад комбінаторної задачі.
2. За допомогою яких двох дій можна розв'язати найпростіші комбінаторні задачі?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 6, 7, 8, щоб цифри у числі не повторювалися?

Розв'язання.

На перше місце можна поставити будь-яку цифру. Це можна зробити трьома способами. На друге місце можна поставити будь-яку із тих цифр, що залишилися. Це можна зробити двома способами. Як тільки вибрані перші дві цифри, то на третє місце можна поставити лише одну цифру, що залишилася.

Маємо: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Відповідь: 6 трицифрових чисел.

ВИКОНАЙ УСНО

1266. На таці лежать 3 солодкі і 5 несолодких пиріжків. Кожен з пиріжків має свою форму. Скільки є різних варіантів вибрати один пиріжок?

А 3 **Б** 5 **В** 15 **Г** 8

1267. Учнівство вирішило провести толоку і прибрати у парку чи сквері. Поруч є 3 парки та 2 сквери. Скільки варіантів для прибирання є в учнівства?

1268. Скількома способами з шести членів валейбольної команди можна вибрати капітана?

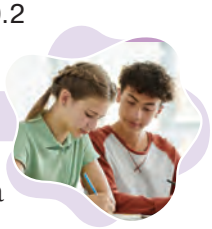
1269. Скількома способами з п'яти членів баскетбольної команди (мал. 30.2) можна вибрати капітана та його заступника?

А 9 **Б** 20 **В** 24 **Г** 10

1270. Скількома способами можна доїхати з міста A через місто B у місто C, якщо з A до B веде 4 дороги, а з B до C — 6 доріг?

А 10 **Б** 12 **В** 18 **Г** 24

Мал. 30.2



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

1271. Сім'я, що складається з мами, тата та підлітка 13 років, хоче зупинитися в одному номері готелю. Там є 20 номерів, розрахованих на двох, 10 тримісних номерів

та 3 чотиримісних. Вже зайнято: 5 двомісних, 3 тримісних та 1 чотиримісний. Скільки варіантів поселення для цієї сім'ї існує в цьому готелі?

1272. У меню їдальні є 3 перші страви, 6 других страв і 4 салати. Скільки є способів обрати одну страву, щоб пообідати?

1273. Олег, Толя та Ігор купили разом цікаву книгу та вирішили її читати по черзі. Запиши всі варіанти такої черги. Скільки є варіантів, в яких: а) Ігор на першому місці; б) Олег не на останньому місці?

1274. Туристична фірма планує відвідання туристами в Польщі трьох міст: Варшава, Краків та Гданськ. Скільки існує варіантів такого маршруту?

1275. Марина хоче відвідати 3 конкретні країни Європи і 2 конкретні країни Азії. Щороку вона запланувала відвідувати одну з країн. Скільки є варіантів для вибору першої країни? Скільки існує послідовностей відвідати бажані країни?

1276. Скількома способами можна розставити на полиці 5 різних книжок?

А 60 **Б** 120 **В** 25 **Г** 240

1277. How many ways can 4 different books be arranged on a shelf?

1278. Скільки парних п'ятицифрових чисел, усі цифри яких різні, можна записати, використовуючи цифри 3, 4, 5, 7 і 1?

А 24 **Б** 12 **В** 120 **Г** 60

1279. Скільки непарних чотирицифрових чисел, усі цифри яких різні, можна записати, використовуючи цифри 3, 4, 6, 8?

1280. У кафе є бананове, шоколадне, лимонне, полуничне та ванільне морозиво та 3 види посипок (мал. 30.3). Скільки варіантів морозива з посипкою може запропонувати кафе?

Мал. 30.3

1281. У хазяйки є блакитна та зелена тканина. Необхідно оббити диван, крісло та стілець. Скільки існує варіантів оббивок?

1282. Код на дверях створено з нулів і одиниць та містить чотири цифри. Скільки варіантів коду в найгіршому випадку необхідно перебрати, щоб відчинити двері?

1283. У групі 13 учнів/учениць. Скількома способами можна скласти список учнів/учениць?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

1284. Зустрілися семеро друзів і потиснули один одному руку. Скільки всього було рукостискань? Намалюй модель до цієї задачі.

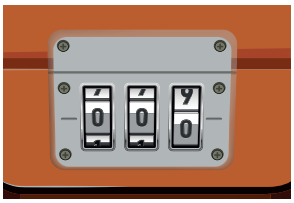
А 6 **Б** 7 **В** 36 **Г** 21

1285. Вісім друзів вирішили провести турнір по шашкам так, щоб кожний зіграв із кожним одну партію. Намалюй модель до цієї задачі. Скільки партій буде зіграно?

1286. У чемпіонаті України з футболу взяло участь 14 клубів. Кожен клуб зіграв із кожним по 2 гри. Скільки при цьому було зіграно матчів?

1287. Знайди кількість трицифрових чисел, всі цифри яких різні.

1288. Кодовий замок на багажі складається з трьох цифр. Скільки можна придумати різних кодів для цього замка (мал. 30.4)?



Мал. 30.4

1289. З цифр 1, 3, 5, 7 і 9 склали різні трицифрові числа, в кожному з яких всі цифри різні. Скільки чисел було складено?

1290. Скільки існує парних чотирицифрових чисел, складених із цифр 0; 3; 6; 9, якщо всі цифри в числі різні?

1291. Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких непарні і різні?

А 30 **Б** 60 **В** 120 **Г** 125

1292. Скільки звичайних дробів, не рівних 1, можна скласти з одноцифрових простих чисел?

1293. Телефонна станція обслуговує абонентів, номери телефонів яких містять 7 цифр і починаються з 127. На яку кількість абонентів розрахована ця станція?

А 1 000 000 **Б** 100 000 **В** 10 000 **Г** 1000

1294. Із цифр від 0 до 9 складають двоцифрове число, що має певну властивість. Установіть відповідність між сформульованою властивістю числа (1–3) та кількістю способів його утворення (А–Г).

1 Число, що ділиться на 5	**А** 9
2 Число, що ділиться на 10	**Б** 45
3 Число, що ділиться на 2	**В** 36
	Г 18

1295. Комплексний обід, вартість якого 72 грн, включає в себе першу страву, другу (гарнір і м'ясо) та напій. Кафе пропонує на вибір 2 перші страви, 3 гарніри, 2 м'ясні страви та напій. Скільки існує варіантів різних обідів з перелічених страв?

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

1296. Скількома нулями закінчується добуток всіх цілих чисел від 1 до 100 включно?

1297. Скільки існує варіантів заплатити за покупку вартістю 10 грн монетами по 1, 2 та 5 грн?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

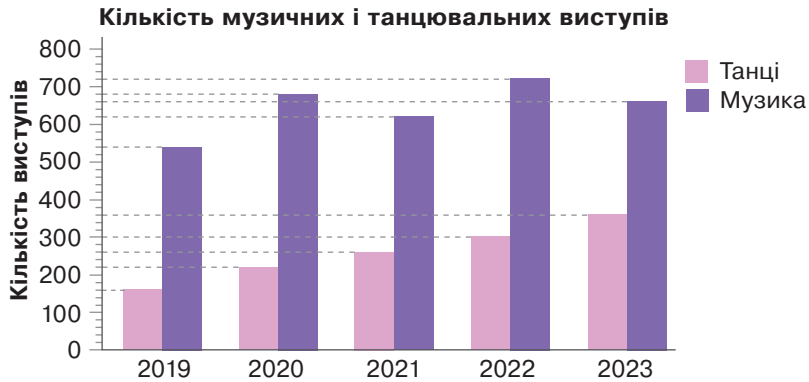
1298. Розв'яжи рівняння.

а) $z^2 + 14z + 49 = 0$; б) $x^2 - x + 0{,}25 = 0$.

1299. В таблиці подано дані про кількість танцювальних і музичних виступів на деякому токшоу. Знайди найменше, найбільше і середнє значення вибірки: а) танцювальних номерів; б) музичних номерів.

Рік	2019	2020	2021	2022	2023
Танець	180	220	260	300	360
Музика	540	680	620	760	660

Чи відповідає подана діаграма (мал. 30.5) таблиці?



Мал. 30.5

1300. Знайди суму, різницю, добуток і частку чисел.

а) $4 \cdot 10^8$ і $2 \cdot 10^7$; б) $3{,}6 \cdot 10^{19}$ і $2 \cdot 10^{19}$.

§ 31. Поняття ймовірності. Ймовірність неможливої, достовірної та випадкової події

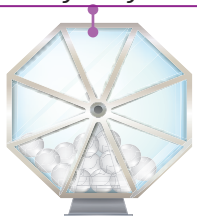
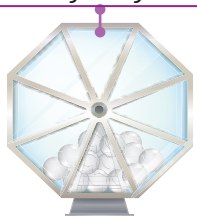
КЛЮЧОВІ СЛОВА

- ймовірність — *probability*, випадкова подія — *probably event*
- неможлива подія — *impossible event*, достовірна подія — *certain event*

Подія — те, що діється, відбувається, трапляється.

ПОДІЇ

Неможливі	Достовірні	Випадкові
З барабана з білими кульками витягнути чорну кульку	З барабана з білими кульками витягнути білу кульку	З барабана з білими і чорними кульками витягнути білу кульку

Випадковою подією називають подію, яка може відбутися або не відбутися під час здійснення певного випробування.

Подію, яка при кожному випробуванні обов'язково відбувається, називають **достовірною**.

Подію, що не може відбутися при жодному випробуванні, називають **неможливою**.

Ступінь упевненості в тому, що подія відбудеться, можна характеризувати числом.

Для знаходження ймовірності деяких подій можна скористатися досвідом, логічними міркуваннями та вмінням розв'язувати комбінаторні задачі.

Ймовірністю події називають відношення кількості сприятливих для цієї події результатів до кількості всіх можливих результатів.

Ймовірність події А позначають так: $P(A)$.

$$P(A) = \frac{\text{кількість сприятливих для події А результатів}}{\text{кількість всіх можливих результатів}}$$

Розглянемо експеримент з підкиданням звичайної монети. Внаслідок підкидання завжди отримаємо один із двох результатів: «випав герб» або «випала цифра». Ймовірність того, що відбу-

деться подія B: «випаде герб» — це один із двох можливих результатів, тож $P(B) = \frac{1}{2}$.

Розглянемо підкидання звичайного грального кубика. Всіх можливих наслідків такого експерименту 6: «випаде одне очко», «випаде два очка», «випаде три очка», «випаде чотири очка», «випаде п'ять очок», «випаде шість очок». Сприяє появі події C: «випаде одне очко» тільки 1 подія. Отже, $P(C) = \frac{1}{6}$.

Ймовірність достовірної події (наприклад, що випаде очко, менше 7) завжди дорівнює 1.

Ймовірність неможливої події (наприклад, що випаде очко, більше 7) завжди дорівнює 0.

Ймовірність випадкової події знаходиться в межах від 0 до 1.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Наведи приклади випадкових подій, неможливих, достовірних.
2. Чому дорівнює ймовірність достовірної події? А неможливої?
3. Якою може бути ймовірність випадкової події?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

У кошику є 12 помідорів і 10 яблук. Яка ймовірність витягнути з кошика навмання:
а) помідор; б) яблуко?

Розв'язання.

Позначимо літерою A подію «витягнути помідор», а літерою B подію «витягнути яблуко».

Знайдемо, скільки загалом є варіантів обрати один плід: $12 + 10 = 22$.

а) Очікуваних подій «витягнути помідор» може бути 12. Тому

$$P(A) = \frac{12}{22} = \frac{6}{11};$$

б) очікуваних подій «витягнути яблуко» може бути 10. Тому

$$P(A) = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}.$$

Відповідь: ймовірність обрати помідор $\frac{6}{11}$, а ймовірність обрати яблуко $\frac{5}{11}$.

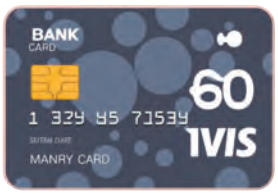
ВИКОНАЙ УСНО

1301. Яка з чотирьох наведених подій є випадковою?
А За нормальних умов при температурі 0°С вода замерзає
Б Після понеділка наступає вівторок
В У березні 31 день
Г При підкиданні грального кубика випало 6 очок

1302. Яка з наведених подій є неможливою?
А Виграти в лотерею
Б Сонце зійшло на заході
В Після 1 березня настане 2 березня
Г При підкиданні монети випав герб

1303. У кошику 20 яблук, з яких 7 червоних. Навмання витягують одне яблуко. Яка ймовірність того, що воно червоне?
А $\frac{1}{7}$ **Б** $\frac{1}{20}$ **В** $\frac{7}{20}$ **Г** $\frac{13}{20}$

1304. Власник банківської карти забув останню цифру свого чотирицифрового коду, але пам'ятає, що вона є парною. Знайди ймовірність того, що він із першої спроби отримає доступ до системи.



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

1305. Яка ймовірність того, що 29 лютого високосного року випаде на вихідний день?

1306. Яка ймовірність із 7 різних подарунків обрати навмання бажаний?

1307. Яка ймовірність того, що при одному підкиданні грального кубика випаде кількість очок, що дорівнює парному числу?

1308. Із 10 учнів, що брали участь у районній олімпіаді, троє посіли призові місця. З цих 10 учнів навмання вибирають одного. Яка ймовірність того, що він став призером олімпіади?
А 0,3 **Б** 0,7 **В** 0,1 **Г** 0,5

1309. Із 36 гральних карт навмання взяли 1 карту. Яка ймовірність того, що ця карта:
а) червоного кольору; б) дама пікова; в) чорний король; г) туз?

1310. З усіх натуральних чисел, більших за 9 і менших від 20, навмання вибирають одне число. Установіть відповідність між подією (1–4) та ймовірністю її появи (А–Д).

1 Вибране число буде простим	**А** 0
2 Вибране число буде двоцифровим	**Б** 0,2
3 Вибране число буде дільником числа 5	**В** 0,3
4 Сума цифр вибраного числа буде ділитися на 3	**Г** 0,4
	Д 1

1311. Яка ймовірність того, що при підкиданні грального кубика випаде число: а) кратне 3; б) не менше 2?

1312. Яка ймовірність того, що навмання вибране двоцифрове число: а) є кратним числа 13; б) є дільником числа 80; в) має суму цифр 9; г) складається з двох однакових цифр?

1313. З натуральних чисел від 1 до 30 включно учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 28?

1314. У непрозорому пакеті лежать кулькові ручки, що відрізняються тільки кольором: 10 синіх, 4 фіолетових, 8 червоних і 5 зелених. Знайди ймовірність того, що вчитель з першої спроби навмання витягне з пакета червону ручку.

1315. **Гра.** У торбинці є a виграшних квитків і b звичайних. Один із гравців задає значення a, другий — значення b, третій визначає ймовірність витягнути виграшний квиток навмання.

1316. Букет складено з 13 білих та 18 червоних троянд. Навмання з букету виймають одну квітку. Яка ймовірність того, що ця квітка виявиться: а) червоною; б) білою?

1317. У коробці 6 синіх, 3 червоних і 1 зелена картки. Навмання беруть одну. Яка ймовірність того, що вона не синя?

1318. There are 5 blue, 2 red and 4 green cards in the box. One is taken at random. What is the probability that it is not blue?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

1319. У шухляді лежать три картки, на яких написано букви Д, І, М. Яка ймовірність того, що коли брати навмання по одній картці, то вони будуть йти в такій послідовності, що утвориться слово ДІМ?

1320. Серед 100 деталей є 28 деталей виду A, 36 деталей виду B, а решта деталей — виду C. Яка ймовірність того, що навмання вибрана деталь буде або виду A, або виду B?

1321. У коробці лежать 42 олівці, з них 14 олівців — червоні, 16 олівців — сині, а решта — зелені. Яка ймовірність того, що навмання взятий олівець не буде ні червоним, ні синім?

1322. У лотереї розігрується 16 грошових і 20 речових призів. Усього є 1800 лотерейних квитків. Яка ймовірність, придбавши один квиток, не виграти жодного призу?

1323. Двічі підкидають монету. Яка ймовірність того, що герб випаде: а) хоча б один раз; б) двічі?

1324. У коробці лежать 6 білих і 2 синіх кульки. Яку найменшу кількість кульок треба вийняти навмання, щоб ймовірність того, що серед них є хоча б одна синя кулька, дорівнювала 1?

1325. У коробці лежать 12 чорних і 9 червоних кульок. Яку найменшу кількість кульок треба вийняти навмання, щоб ймовірність того, що серед них є хоча б одна червона кулька, дорівнювала 1?

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

1326. Із букв слова «УКРАЇНА» почали створювати нові слова і записувати кожне з них на картках. Випиши утворені слова. Яка ймовірність витягнути слово, що складається з 4 букв?

1327. Пароплав з пункту A до пункту B йде 5 діб. З пункту B до пункту A — 7 діб. Скільки діб буде плисти пліт від A до B?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1328. Розклади на множники.

а) $1 - (a - b)^2$; б) $(x + c)^2 - 9x^2c^4$.

1329. Розв'яжи рівняння.

а) $9x^2 + 6x + 1 = 0$; б) $48x^3 + 12x = 0$.

1330. Мама і донька йдуть на прогулянку. У мами є 5 кишень, а у доньки 4 кишені. Скільки є варіантів покласти серветки в одну з кишень?

Перейди за посиланням https://vse.ee/cgau та підсумуй головне в розділі

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРІАНТ I

1. У перші 10 днів травня була зафіксована така температура повітря:
18^0, 21^0, 22^0, 17^0, 20^0, 22^0, 18^0, 24^0, 22^0, 21^0. За наведеними даними склади частотну таблицю. Знайди середню температуру повітря за ці дні. Якого числа була найнижча температура повітря, а якого — найвища?

2. У магазині є три види мінеральної води і шість видів соку. Скількома способами Іван може купити: а) воду або сік; б) воду і сік?

3. У кошику лежить 5 яблук і 7 груш. Яка ймовірність взяти навмання: а) яблуко; б) грушу; в) сливу; г) яблуко або грушу?

4. Футболка коштує 300 грн. У магазині діє акція: на кожну другу футболку знижка 15 %, а на кожну третю — 20 %. Олеся купила 2 футболки, а Соня — 3 футболки. Скільки коштувала покупка кожної дівчини? Чи можуть вони на разом зекономлені гроші купити пиріг вартістю 120 грн?

ВАРІАНТ II

1. У перші 10 днів жовтня була зафіксована така температура повітря: 13^0, 14^0, 13^0, 10^0, 12^0, 12^0, 8^0, 9^0, 10^0, 9^0. За наведеними даними склади частотну таблицю. Знайди середню температуру повітря за ці дні. Якого числа була найнижча температура повітря, а якого — найвища?

2. У магазині є три види кексів і сім видів круасанів. Скількома способами Дмитро може купити: а) кекс або круасан; б) кекс і круасан?

3. У вазі лежить 9 цукерок і 4 шоколадки. Яка ймовірність взяти навмання: а) цукерку; б) шоколадку; в) печиво; г) цукерку або шоколадку?

4. Сорочка коштує 500 грн. У магазині діє акція: на кожну другу сорочку знижка 10 %, а на кожну третю — 15 %. Коля купив 2 сорочки, а Толя — 3 сорочки. Скільки коштувала покупка кожного хлопця? Чи можуть вони на разом зекономлені гроші купити пиріг вартістю 150 грн?

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 8

1. Яка ймовірність того, що при одному киданні грального кубика випаде число очок, що дорівнює трьом?

А $\frac{1}{3}$ **Б** $\frac{1}{2}$ **В** $\frac{1}{6}$ **Г** $\frac{3}{4}$

2. Знайди середнє значення вибірки 7; 2; 4; 6; 8.

А 2 **Б** 5,4 **В** 13,5 **Г** 5

3. Скільки солі міститься у 200 г 5 %-го розчину?

А 10 г **Б** 12 г **В** 120 **Г** 100 г

4. У кафе є 8 видів десертів і 3 види напоїв. Скільки існує способів взяти 1 десерт і 1 напій?

А 3 **Б** 11 **В** 32 **Г** 24

5. Самостійна робота тривала 18 хв. Скільки відсотків часу уроку було відведено на самостійну роботу?

А 4 % **Б** 12 % **В** 40 % **Г** 45 %

6. Яка з подій є випадковою?

А лютий — зимовий місяць

Б 1 — просте число

В тільки влітку світить сонце

Г із пронумерованих карток від 1 до 10 витягти картку з цифрою 8

7. Скільки парних чотирицифрових чисел (цифри не повторюються) можна скласти з цифр 1, 2, 3, 5?

А 12 **Б** 6 **В** 4 **Г** 18

8. Чому дорівнює ймовірність достовірної події?

А 1 **Б** 0,5 **В** 0 **Г** не можна встановити

9. Банк сплачує своїм вкладникам 12 % річних. Скільки грошей потрібно покласти в банк, щоб через рік отримати 6000 грн прибутку?

А 5000 грн **Б** 20000 грн **В** 50000 грн **Г** 200000 грн

10. У літературному гуртку 8 дівчат і 5 хлопців. Яка ймовірність, що першою читати своє оповідання буде дівчинка?

А $\frac{1}{2}$ **Б** $\frac{5}{8}$ **В** $\frac{5}{13}$ **Г** $\frac{8}{13}$

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 8

1. Яка ймовірність того, що при підкиданні монети випаде герб?

А 0 **Б** 1 **В** 0,5 **Г** 0,2

2. У пеналі Андрія лежить 3 ручки, 2 олівці і 2 лінійки. До уроку він має підготувати ручку, олівець і лінійку. Скількома способами він може це зробити?

А 1 **Б** 6 **В** 7 **Г** 12

3. До 160 г води додали 40 г солі. Якою буде концентрація розчину?

А 2,5 % **Б** 2 % **В** 25 % **Г** 20 %

4. Знайди дільники числа 24 й установи відповідність між подією (1–3) та ймовірністю її появи (А–Д).

1 Вибране з дільників число буде парним
2 Вибране з дільників число буде простим
3 Вибране з дільників число буде ділитися на 3

А $\frac{1}{4}$ **Б** $\frac{1}{2}$ **В** $\frac{3}{4}$ **Г** 0 **Д** 1

5. Олег отримав за тему з алгебри такі оцінки: 7, 8, 10, 11, 9, 8, 7, 8, 10, 10, 11, 9, 8, 9, 10. Склади частотну таблицю та обчисли середній бал Олега з цієї теми.

6. Дано цифри 2, 3 і 4. Скільки різних трицифрових чисел можна скласти з даних цифр, якщо: а) цифри не можуть повторюватися; б) цифри можуть повторюватися. Скільки парних чисел, усі цифри яких різні, можна скласти. Скільки непарних чисел можна скласти (цифри не можуть повторюватися)?

7. У коробці лежало 16 синіх ручок і 9 чорних. Одна ручка загубилася. Якого кольору ручка загубилася, якщо тепер ймовірність дістати чорну ручку дорівнює $\frac{3}{8}$?

8. Є два водно-сольові розчини. Перший розчин містить 20 %, а другий — 32 % солі. Скільки грамів кожного розчину потрібно взяти, щоб отримати 600 г розчину, який містить 25 % солі?

Додаткове завдання

9. Фірмі потрібно купити 5 столів і 10 стільців. Стіл коштує 5000 грн, а стілець — 2000 грн. На наступний день ціни змінилися на 10 %, але відповідальний за покупку забув, на яку продукцію ціна знизилася, а на яку підвищилася. У якому випадку фірмі вистачить заготовлених грошей: ціна на стіл підвищилася, а на стільці знизилася чи навпаки?

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Цілі вирази

Знайди значення виразу **(1331–1333)**.

1331. а) $\left(2\frac{3}{4}-2\frac{3}{8}-0,3\right):6$; б) $\left(5\frac{9}{25}-2,36\right):\left(3\frac{4}{5}+0,2\right)$.

1332. а) $\left(3\frac{3}{4}:1\frac{1}{4}-0,75\right):1\frac{1}{2}+0,75$; б) $12,5\cdot 2\frac{1}{4}-\left(4,128-3\frac{3}{4}\right):\frac{2}{5}$.

1333. а) $9x^4 - 4x^2$, якщо $x=\frac{1}{3}$; б) $10a^2 + 125a^3$, якщо $a = -0,2$.

Перемнож одночлени **(1334, 1335)**.

1334. а) $5a^2b$, $\frac{3}{5}ab^3$ і $3ac^4$; б) $-8xy$, $(-2,5)b^2$ і $0,1ax$.

1335. а) $4pq^2$, $0,15pz^2$ і $5pqz$; б) $-1\frac{5}{7}ax^2$, $-\frac{1}{3}ax^2y$ і $-2\frac{5}{8}xy$.

1336. Піднеси до степеня одночлен.
а) $(2x^3)^5$; б) $(-xy)^7$; в) $(-3a)^4$; г) $(0,5m^2)^3$.

1337. Спрости вираз. а) $3x^2 \cdot 4x^2ym$; б) $\frac{2}{3}a^{n+1}\cdot 6a^{n-2}$.

1338. Знайди різницю многочленів.
а) $6x^3 - 2x^5 + x$ і $8x^3 + 3x^5 - 4x^2$;
б) $3a^2 + 2ab - b^2$ і $2b^2 - 2a^2$;

1339. Перетвори вираз у многочлен стандартного вигляду.
а) $-12x^2 - (-3x^6 + 8 - 10x^2)$;
б) $9m^3 - 5m + (m - 6m^3 - 2m^4)$;
в) $(-4xy + 7y^2) - (-8x^2) + (6xy - 10x^2 - 5)$;
г) $-(3b^2 + 4b^2c) + (6b^2 - c^2b + b^2c) - (2b^2 + 5b^2c)$.

1340. Виконай множення.
а) $3x(2x^4 - 5x + 1)$; б) $-5a^2(3a^2 + 4a - 2)$;
в) $(-ab + 2a^2 - 3b^2)(-a^2b)$; г) $(4x^2y - 3xy^2 + 5)\cdot 2xy$;
ґ) $-0,25(2m^2 - 4m + 6)$; д) $(-10n^5 - 6n^3 + 2)(-1,5m)$.

1341. Перемнож вирази.
а) $-12x^3$ і $\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{4}$; б) $10xy$ і $-0,7x^3 + 3,2y^2 - x^2y^2$;
в) $-\frac{3}{5}ax^2$ і $5ax^2-\frac{5}{8}a^2x+\frac{1}{2}a$; г) $0,5y^6$ і $-0,8xy + 1,2x^3 + 7x^2y$.

1342. Перетвори вираз у многочлен стандартного вигляду.

а) $5x(x + 4) - x(6 - 2x^2)$; б) $-y^2(2y - 6) + 4y(y^2 - y)$;
в) $6a^2b^3 - b^2(5a^2b + b^2 - 1)$; г) $3xy(2 - 4x^2y + xy^2) - 7xy$.

1343. Доведи тотожність.

а) $x(y - z) + y(z - x) = z(y - x)$;
б) $x(y + z - yz) - y(x + z - xz) = z(x - y)$;
в) $ab(a + b + c) - b^2(a - c) = bc(a + b + c) - b(c^2 - a^2)$;
г) $ab(b + c) - bc(a + b) + ac(a + c) = a(b^2 + c^2) + c(a^2 - b^2)$.

1344. Знайди добуток.

а) $-2a - b$ і $-2a + b$; б) $-x^2 + y^3$ і $-x^2 - y^3$;
в) $-abc + 1$ і $abc + 1$; г) $-0{,}2x^4 - x$ і $x - 0{,}2x^4$;
ґ) $a + b + c$ і $a - b - c$; д) $x + y - z$ і $x - y + 2$.

1345. Спрости вираз.

а) $(2x - 3)(2x + 3)(4x^2 + 9) + 81$;
б) $(5 + x^5)(5 - x^5)(x^{10} + 25) + x^{20}$;
в) $256a^4 - (4a - b^3)(4a + b^3)(16a^2 + b^6)$;
г) $(0{,}1y^2)^4 + (-x - 0{,}1y^2)(0{,}1y^2 - x)(0{,}01y^4 + x^2)$.

1346. Подай двочлен у вигляді добутку.

а) $p^2 - q^2$; б) $25 - 0{,}25m^2$; в) $9x^2 - a^4$;
г) $0{,}04x^6 - 1$; ґ) $-x^2y^4 + a^6b^8$; д) $a^2b^2c^2 - 121x^6$;
е) $\frac{4}{81}z^{10} - x^{16}$; є) $-64 + 36m^4n^2$; ж) $a^2 - (b + c)^2$.

1347. Обчисли.

а) $24^2 - 14^2$; б) $62^2 - 38^2$; в) $98^2 - 97^2$;
г) $52{,}5^2 - 48{,}5^2$; ґ) $14{,}3^2 - 4{,}3^2$; д) $5{,}9^2 - 5{,}1^2$;
е) $\left(17\frac{3}{4}\right)^2 - \left(16\frac{3}{4}\right)^2$; є) $\left(7\frac{2}{3}\right)^2 - \left(2\frac{1}{3}\right)^2$.

Подай вираз у вигляді многочлена **(1348, 1349)**.

1348. а) $(0{,}4a^2 - 5ab)^2$; б) $(6{,}5xy + 8y^2)^2$; в) $(xy - 1)^2$; г) $(2 + a^6b^4)^2$.

1349. а) $(-x + y^2)^2$; б) $(-2a^2 + 3y^3)^2$; в) $\left(-\frac{1}{3} - 3x^2\right)^2$;
г) $\left(-\frac{1}{2}m^3 - 0{,}2n\right)^2$; ґ) $(-0{,}1xy + 5)^2$; д) $(-6x^2y - 0{,}5y)^2$.

1350. Спрости вираз.

а) $(3x - 5y)^2 - 3x(3x - 10y)$; б) $8a(b - 2a) + (4a + b)^2$;
в) $(4x + y)(3x + 4y) - (2y + 3x)^2$;
г) $(3a + 6b)^2 - (2a + 9b)(3a + 4b)$.

Доведи, що значення виразу не залежить від x **(1351, 1352).**

1351. а) $(2x - 5y)^2 + 4x(5y - x)$; б) $3x(12x - 4y) - (6x - y)^2$.

1352. а) $(4x + 5y)^2 - 8(2x - y)(x + 3y)$;
б) $4(x - 6y)(x - 3y) - (2x - 9y)^2$.

1353. Подай вираз у вигляді многочлена.
а) $(x + 3)^3$; б) $(y - 2)^3$; в) $(2x - 1)^3$;
г) $(3x + 1)^3$; ґ) $(m - 2n)^3$; д) $(2a + 3)^3$.

Розкладання многочленів на множники

Розклади на множники многочлен **(1354, 1355).**

1354. а) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy$; б) $a^3c^2 - a^2c^2 + a^3 - a^2$;
в) $4xy + 12x^2y - 4x - 12x^2$; г) $6a^2b - 18a^2 - 3ab + 9a$;
ґ) $xyz - 4xz - 5xy + 20x$; д) $4ab + 3ac - abc - 12a$.

1355. а) $a^2 - b^2 - a + b$; б) $x + y + x^2 - y^2$;
в) $4a^2 - 9 - 2a - 3$; г) $5 - 3x + 25 - 9x^2$.

1356. Подай у вигляді добутку.
а) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$; б) $a^2 + 2a + 1 - b^2$;
в) $x^2 - y^2 + 8y - 16$; г) $a^2 - b^2 - 14b - 49$.

1357. Подай у вигляді добутку трьох множників.
а) $ab^2 - 4a - b^3 + 4b$; б) $x^3 + x^2y - 9x - 9y$;
в) $x^2a + 3a^2 - a^3 - 3x^2$; г) $x^3 - 5b^2 + 5x^2 - xb^2$.

Розклади на множники **(1358, 1359).**

1358. а) $a^2x^2 - 2abx^2 + 2ab + b^2x^2 - a^2 - b^2$;
б) $a^2x^2 - 4b^2x + 4b^2 + 4a^2 - 4a^2x + b^2x^2$.

1359. а) $a^2 - b^2 + x^2 - y^2 + 2ax + 2by$;
б) $x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 2x^2y^2 - 2xy$.

1360. Доведи, що:
а) $145^2 - 144^2 = 17^2$; б) $221^2 - 220^2 = 21^2$.

Обчисли **(1361, 1362).**

1361. а) $\frac{47^2 - 41^2}{28^2 - 16^2}$; б) $\frac{57^2 - 42^2}{29^2 - 26^2}$; в) $\frac{51^2 - 12^2}{30^2 - 9^2}$; г) $\frac{61^2 - 11^2}{36^2 - 24^2}$.

1362. а) $6^{32} \cdot 4^{32} - (24^{16} - 5)(24^{16} + 5)$;
б) $(56^{10} - 7)(56^{10} + 7) - 7^{20} \cdot 8^{20}$;
в) $4^{18} \cdot 9^{18} + (4 - 36^9)(36^9 + 4)$.

Розв'яжи рівняння **(1363, 1364).**

1363. а) $5x^5 - x^4 = 0$; б) $3x^3 - 12x = 0$; в) $10x^6 = 3x^5$.

1364. а) $x^3 + 4x^2 - x = 4$; б) $x^3 - 3x^2 + 2x = 6$;
в) $2x^3 + x^2 - 8x = 4$; г) $12x^3 - 8x^2 - 3x = -2$.

Функції

1365. Задай формулою функцію, значення якої:
а) на 4 більші за значення аргументу;
б) на 9 менші від значень аргументу;
в) втричі більші за значення аргументу;
г) протилежні значенням аргументу;
ґ) обернені до значень аргументу.

1366. Прямокутний паралелепіпед зі сторонами основи a см і b см і висотою 6 см має об'єм, що дорівнює 72 см^3. Вирази формулою залежність b від a.

1367. У трикутнику один із кутів дорівнює α, а другий — удвічі більший. Запиши формулу для знаходження третього кута.

1368. Щоб пошити одну сорочку, потрібно 2,5 м тканини. Запиши формулу для обчислення залишку тканини після пошиття x сорочок, якщо в сувої 200 м тканини. Яких значень може набувати x?

1369. Знайди область визначення функції, заданої формулою.

а) $y = x(x - 5)$; б) $y = x^2 + 6x + 8$; в) $y = \frac{16 - x^2}{x + 5}$;

г) $y = \frac{x^2 + 9}{3x - 1}$; ґ) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x - 2}$; д) $y = \frac{3}{x(x + 1)}$.

1370. Функцію задано формулою $y = 0{,}25x - 1$. Склади таблицю значень функції для перших десяти натуральних значень аргументу.

1371. Склади таблицю значень функції $y = \frac{24}{2 - x}$ для цілих значень аргументу x, якщо $-6 \le x \le 6$.

1372. Знайди значення аргументу, при якому значення функції:
а) $y = -3x + 2$ дорівнює -7; 0; 5;
б) $y = x(x - 3)$ дорівнює -2; 0; 10.

1373. Задай формулою одну з функцій, значення якої для деяких значень аргументу подано в таблиці:

x	–4	–1	0	2	3	5
y	–12	–3	0	6	9	15

1374. На малюнку 32.1 зображено графіки руху пішохода (лінія a) і велосипедиста (лінія b). Використовуючи графік, визнач:

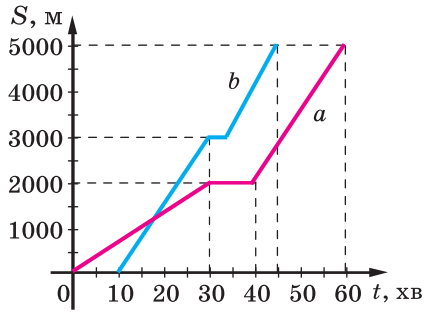
а) чи одночасно вони почали рух;

б) чи сталою була швидкість кожного;

в) які швидкості пішохода і велосипедиста на кожній ділянці шляху;

г) хто з них зупинявся і на який час;

ґ) на якій відстані один від одного вони перебували через пів години після початку руху пішохода.



Мал. 32.1

Побудуй графік функції, заданої формулою **(1375, 1376).**

1375. а) $y = 5x$; б) $y = 5x - 1$; в) $y = -5x$; г) $y = -5x + 3$.

1376. а) $y = x + 4$; б) $y = 1 - 2x$; в) $y = 3x$; г) $y = -\frac{x}{3}$.

Для кожного графіка побудуй графік, симетричний відносно осі ординат. Задай формулою відповідну функцію.

1377. Графік лінійної функції проходить через точки A і B. Склади формулу функції, якщо $A(3;\ 2)$ і $B(-5;\ 4)$.

Рівняння і системи рівнянь

Розв'яжи рівняння **(1378–1382).**

1378. а) $7x + 15 + 15x + 8 - 10 = 9x$;
б) $25 + 5y - 17 + 7y = 150 - 130y$.

1379. а) $7x - 39 = 2(x + 3) + 11 - 2x$;
б) $3(x - 5) = 5(x - 3) - 4(7 - 3x)$.

1380. а) $\frac{1}{2}(2x-4)+\frac{1}{2}(4x-2)=x+5$; б) $\frac{2}{3}(3x+1)+\frac{1}{3}(6x-2)=x+6$.

1381. а) $5(x - 3) + 7(3x + 6) = 2(x - 2) + 103$;
б) $8(y - 2) + 5(3y - 2) = 3(y - 5) + 69$.

1382. а) $\frac{1}{4}(x-3)+\frac{1}{8}(x-4)=\frac{1}{2}(x-5)+\frac{1}{8}(x-1)$;

б) $\frac{1}{6}(8-x)-\frac{1}{3}(5-4x)=\frac{1}{2}(x+6)$.

1383. Покажи, що при будь-якому значенні a рівняння $(a + 2)x - (a + 3)x = 5$ має один розв'язок. Знайди цей розв'язок.

1384. Чи може рівняння $(a^2 + 1)x = 7$ при якому-небудь значенні a мати безліч коренів? Чому?

1385. За якої умови рівняння $ax = 12$ не має розв'язків?

1386. За якої умови рівняння $(a - 2)x = x + 1$ не має розв'язків?

1387. Побудуй графік рівняння.
а) $x + y = 4$; б) $2x + y = 6$; в) $-3x + 2y = 5$; г) $-x - 7y = 7$.

1388. Яким має бути коефіцієнт b рівняння $4x + by = 0$, щоб графік цього рівняння проходив через точку $B(10; 8)$?

1389. Чому дорівнює значення c, коли відомо, що графік рівняння $2x + 3y = c$ проходить через точку $A(6; -1)$?

1390. Побудуй в одній координатній площині графіки рівнянь $3x - 2y = 12$ і $5x + 3y = 1$. Знайди координати точки їх перетину. Переконайся, що знайдена пара чисел є розв'язком кожного з даних рівнянь.

Розв'яжи систему рівнянь **(1391–1395)**.

1391. а) $\begin{cases} 2x+y=12, \\ 3x-5y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-4y=11, \\ 3x+2y=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-3y=-3, \\ x+3y=21. \end{cases}$

1392. а) $\begin{cases} 2x-3(x-y)=7, \\ 5y-2(x-2y)=23; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4y-5(y-x)=8, \\ 2(3x-y)+7y=-9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0,5x+0,3y=8, \\ 1,2x-0,5y=7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 1,4x-2,5y=39, \\ 0,8x-1,3y=21. \end{cases}$

1393. а) $\begin{cases} \frac{4}{5}x-y=7, \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{5}y=11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3}{7}x-z=15, \\ \frac{2}{5}x+\frac{3}{7}z=14; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{x+y}{3}+x=15, \\ y-\frac{y-x}{5}=6. \end{cases}$

1394. а) $\begin{cases} \frac{7+x}{5}-\frac{2x-y}{4}=3y-5, \\ \frac{5y-7}{6}+\frac{4x-3}{2}=20-5x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-y^2=80, \\ x+y=10. \end{cases}$

1395. а) $\begin{cases} \frac{5+y}{3}-\frac{3x+4y}{4}=3x+1, \\ \frac{7x+2}{3}+\frac{4x-3}{2}+\frac{11}{6}=1-3x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{7+x}{5}-\frac{2x-y}{4}-3y=-5, \\ \frac{5y-7}{2}-\frac{3-4x}{6}-18=-5x. \end{cases}$

1396. Установи відповідність між коренями рівнянь (1–4) та значеннями функцій (А–Д) в точці $x = 1$.

1 $2x + 3 = -7$	**А** $y = 6x - 1$
2 $(x - 7)^2 = 0$	**Б** $y = x - 1$
3 $3x^2 + 2x = 3x(x - 1)$	**В** $y = 10x + 3$
4 $(5 + x) : 7 = 1$	**Г** $y = 1 + 6x$
	Д $y = x^2 + x$

1397. *Стародавня китайська задача.* Кілька чоловік разом купують барана. Якщо кожен внесе по 5 монет, то не вистачить до вартості барана 45. Якщо кожний внесе по 7, то не вистачить 3 монет. Скільки коштує баран? Скільки було купців?

1398. *Із напису на могилі Діофанта.* Діофант провів шосту частину свого життя в дитинстві, дванадцяту — в юності. Коли після того пройшла ще сьома частина його життя і 5 років, у нього народився син. Син прожив удвічі менше років, ніж батько. Після смерті сина Діофант прожив ще 4 роки. Скільки років жив Діофант?

1399. *Стародавня індійська задача.* П'ята частина бджолиного рою сидить на квітці кадамба, третя — на квітах силиндха. А різниця цих двох кількостей, помножена на 3, — на квітах кутая. І тільки одна бджілка насолоджується пахощами жасмину і пандануса. Скажи мені, красуне, скільки всього бджіл?

1400. *Стародавня арабська задача.* Поділи число 10 на дві частини, різниця яких дорівнювала б 5.

1401. *Стародавня німецька задача.* Число 10 поділи на дві такі частини, щоб після множення першої на 5 і ділення одержаного результату на другу частину одержати $\frac{10}{3}$.

1402. *Задача з німецького трактату XVI ст.* Один погодився працювати на умовах, що в кінці року він одержить одяг і 10 флоринів. Але попрацював він тільки 7 місяців, тому одержав одяг і 2 флорини. У скільки флоринів оцінили той одяг?

1403. *Задача з болгарського фольклору.* Селянин хвалився сусідові: «Скільки маю овець, стільки й ягняток вони народять. Потім куплю ще одну молоду вівцю і ще три рази куплю по стільки, скільки стане овець і ягнят, і матиму їх 100». Скільки овець мав той селянин?

1404. *Задача для студентів Києво-Могилянської академії (1707 р.).* Батько трьох синів каже, що середній із них на 2 роки старший за молодшого, а найстаршому стільки років, скільки двом іншим разом і ще понад того 6. Сума усіх їхніх років дорівнює 58. Скільки років кожному синові?

ВІДПОВІДІ

18. а) 9; б) 2,18; в) 1; г) 54,549. **19.** а) 0; б) 9,7; в) 186,5; г) 1,884. **28.** а) 4; б) −48; в) −2; г) 3,2. **29.** а) −7; б) 2; в) −10; г) −5,05. **98.** а) 225; б) 1,125. **99.** а) 17; б) 0,625.

107. а) Так; б) так. **108.** а) Так; б) так. **109.** а) 8000; в) 1; г) 8,1; д) 0. **110.** Г, В, Д, А. **111.** а) 1; б) −0,2. **112.** а) 61; б) 0. **121.** а) 9, якщо $x = 0$; б) 4, якщо $a = 2$; в) 6, якщо $x = 0$. **122.** а) 3, якщо $x = 0$; б) 6, якщо $x = 4$. **173.** а) 11; б) 36; в) 1; д) 3. **174.** а) 13; б) 64; в) 9; г) 3; ґ) 147; д) 25. **175.** а) −1; в) −1. **176.** а) 7; б) 5; в) 2. 177. а) 2; б) 4; в) 1.

202. г) $18x^3y^8$; ґ) $54a^7x^4$. **203.** г) $-8a^9c^5$; ґ) $-x^3c^5$. **218.** а) −1; б) −1, 1; в) −1, 1. **220.** а) 4,2; в) −49; г) 98. **221.** а) 5; б) 10; в) 12,5; г) −4500. **244.** а) 10; б) 1,12. **245.** а) −140; б) −900. **246.** В, Г, А, Б. **273.** а) 11; б) −49; в) −129. **274.** а) 26; б) 15; в) −5. **277.** −3. **278.** 2. **279.** а) −5; б) 3; в) 3; г) 3. **280.** а) −6; б) 2; в) 12; г) −1. **288.** Д, Б, А, Г.

319. а) 4; б) −8; в) −4; г) 4,8; д) 3. **320.** б) 2; в) 1,5; г) −1; ґ) −7; д) −12. **323.** 20 і 15. **324.** 20 і 10. **325.** 2 см і 8 см. **326.** 40 см і 120 см. **329.** а) 2; б) коренів немає; в) 9; г) 2. **330.** а) 1,2; б) коренів немає; г) 5. **335.** а) 48; б) 108. **336.** а) −25; б) −121. **337.** а) 6; б) 3; в) 1; г) −2. **338.** а) −10; б) −7. **339.** 12 років і 48 років. **340.** 15 років. **341.** 4 дні. **342.** 20 г. **359.** Г, В, Д. **362.** а) −24; б) 18; в) 0,36; г) −35. **367.** а) 2; б) −6; в) −3; г) −5. **368.** а) 4; б) 1; в) −11, г) −1. **382.** а) −6; б) 1,1; в) 1. **383.** а) 1; б) 0,001; в) 3; г) −0,1; ґ) 13,5. **384.** 2, 3, 4. **385.** 3, 4, 5, 6.

405. а) 162,3; б) 136; в) 6,34; г) 73. **408.** в) 0, −4; ґ) 0, 2,5; д) 0; −0,25. **409.** в) 0, 2; ґ) 0, −0,1; д) 0, 0,2. **419.** а) $25(x + 2)^2$; г) $81(a + 2c)^4$; д) $16a^4(3 + b)^4$. **420.** а) $16(4y + 3)^2$; в) $8(3x - 4)^3$; г) $81(x - 3)^4$; д) $16x^8(x - 2)^4$. **421.** б) 0, −6; в) 0, 2,5; г) 0, 3. **422.** б) 0, 5; в) 0, 3,5; г) 0, 1. **423.** а) 0,1; б) 18. **424.** а) 190; б) −4. **444.** а) 3620; б) −0,165. **445.** а) −4520; б) −2,3. **446.** а) 1728; б) 100. **447.** а) 1630; б) 300. **448.** а) 5; б) 0,5; в) 3; г) −4. **449.** а) 1,5; б) 5; в) −3; г) −3. **454.** в) $(x^2 - y^2)(x + y + xy)$; г) $(1 - x)(x^2 + y - y^2)$. **455.** в) $(x - a)(x^3 + a^3 + c^3)$; г) $(a^2 + x^2)(a + x - 1)$; ґ) $(x^2 + y^2)(x + y + z)$; д) $(a - b)(a^2 + b^2 + 1)$. **458.** а) $(x + 1)(x + 3)$; б) $(x + 2)(x + 4)$; в) $(x - 3)(x - 1)$; г) $(x + 5)(x - 2)$. **459.** а) $(x + 1)(x + 5)$; б) $(x + 1)(x + 6)$; в) $(x - 3)(x - 7)$; г) $(x + 4)(x - 2)$. **460.** а) −2, −5; б) −1, −7; в) 2, 3. **461.** а) −1, −3; б) −2, −6; в) 3, 6. **485.** а) 4; б) 1; в) 2; г) 4. **486.** а) 1; б) −2; в) 4; г) 1. **487.** а) −5; б) 0,6; в) 0,25; г) −6. **492.** а) 16; б) −7,2; в) 1. **494.** а) $5a^2$; б) $c + 50$; в) y^2; г) $3x^4 - 1{,}5a^2c^2$. **497.** а) −1; б) 0,2. **498.** а) 2; б) 2. **499.** а) −2; б) −3; в) −1,5.

500. а) −2; б) −8. **501.** а) 18; б) −25. **506.** а) 6, якщо $a = 2$; б) 164, якщо $a = -4$. **507.** а) 1, якщо $n = 7$; б) 29, якщо $m = -3$. **508.** а) $x = -5$,

$y = -1$; б) $x = 6$, $y = -2$. **509.** а) $x = -4$, $y = -3$; б) $x = -7$, $y = 1$. **515.** а) $(a - 1)^3$; б) $(2y - 3)^3$. **516.** а) $(x + 3)^3$; б) $(x + 2)^3$. **520.** а) −1; б) 0. **536.** а) 0,5; б) 3; в) −3; г) 2. **537.** а) 27; б) −4; в) −3; г) 2. **553.** а) −0,5; б) 5; в) −0,25; г) 2. **554.** а) 2; б) 30; в) 2. **557.** а) −1. **558.** 0. **566.** 0,5 см і 2,5 см. **588.** а) −0,5; б) 4; в) 0,2; г) 0,2. **589.** а) 9; б) 16. **592.** а) 24,5; б) 8; в) 152; г) 9. **593.** а) 1,04; б) 26; в) 129; г) −35. **594.** а) 0; б) −18; в) 1; г) 0,5. **595.** а) −1; б) −1,5; в) −8; г) 2.

600. а) $(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1)$; б) $(x^2 - xy + y^2)(x + y - 1)$; в) $(x - 1)\times$ $\times(x^2 - 4x + 1)$; г) $(x - y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$. **601.** а) $(a + b)(a^2 - ab + b^2 - 1)$; б) $(a^2 + ab + b)(a - b - 1)$; в) $(a + 1)(a^2 - 4a + 1)$; г) $(a - 4c)(a^2 + 3ac + 9c^2)$. **621.** а) 0, 1, −1; в) 0, 0,5, −0,5. **626.** а) $4(a + 3)(b - 1)$; в) $(a + b)(n - 2)\times$ $\times(n + 2)$. **628.** а) $(x - a - 4)(x - a + 4)$; в) $(m - x - 2)(m + x + 2)$; г) $(x - 3 - y)\times$ $\times(x - 3 + y)$. **636.** а) $(a - 3)^3(a + 3)$; б) $(x - 5)^3(x + 5)$. **637.** а) $(m + 2)^3(m - 2)$; б) $(a - 4)^3(a + 4)$. **638.** а) $c(1 - x)(a + b - 2)$; б) $(x^2 + y^2)(a + 1)^2$. **639.** а) $x(a + 2 + x)(x - c)$; б) $(a - 1)^2(x^2 + y^2)$. **644.** а) −2, −1, 1; б) 3; в) −1, 3; г) −3, 3, 2. **645.** а) −1, 1, 2; б) 1,5; в) −0,5, 2; г) −2, 0, 2, 3. **646.** а) 0,5; б) 1. **647.** а) −2, 2; б) −9, 9. **648.** а) −3, −1, 1; б) −2, 2, 1. **651.** а) −2, −5, 5; б) −3, 3, 1,5. **652.** б) −7, −0,5, 0,5. **653.** а) $(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$; б) $(a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$; в) $(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$.

743. $m = 9$. **744.** $k = 2$. **745.** $m = 0$. **782.** а) (2; 13); б) (2; 0,6). **783.** а) (3; −1); б) (5; 15,7). **784.** $k = -2$. **785.** $b = 13$. **786.** $k = 1$, $p = -0{,}5$. **788.** а) $y = 0{,}5x + 1$; б) $y = -6x + 5$. **790.** а) $y = 3x$; b) $y = 0{,}5x$; c) $y = -0{,}2x$.

830. а) Коренем рівняння є будь-яке число; б) коренів немає; в) 0,75. **831.** а) Коренем рівняння є будь-яке число; б) коренів немає. **832.** а) 8. **833.** а) −3. **834.** 57. **835.** 315. **837.** а) 1; б) 10,5; в) 1, −1. **838.** а) 5. **839.** а) 6; б) 1. **840.** а) 2, −4; в) 2; г) 2, 6; ґ) −1. **841.** а) 1, 5; б) 2; −3,6; в) −1,4; ґ) −0,05; д) −25. **842.** а) 4; б) 3. **843.** а) 8; б) 5. **871.** а) −2; б) 1; в) 5; г) 0,5. **873.** а) 3; б) 5; в) 4; г) 4. **875.** 16 і 10. **876.** 22 і 132. **877.** 0,5. **878.** в) −10, 14; г) коренів немає. **879.** б) −4, 4; в) −4; г) коренів немає.

910. 26, 29, 24. **912.** 172 га, 258 га, 430 га. **913.** 8 років і 40 років. **914.** Буде через 1 рік; через 14 років. **917.** 11 років і 47 років. **921.** 4,5 год. **922.** 210 км, 240 км. **923.** 80 км/год, 60 км/год. **924.** 12 км/год, 8 км/год. **925.** 49,5 км. **926.** 31,5 км. **927.** 36. **928.** 35. **929.** 221. **930.** 91. **931.** 52. **932.** 210 км. **933.** 50 км/ год і 70 км/год. **934.** 20 км. **935.** 288 км. **938.** 25 та 30. **940.** 12 км/год і 12 км/год. **941.** 750 км. **942.** 120 квіток. **943.** 28 учнів. **974.** а) (0; 2); б) (3; −1); в) (0; 0). **976.** а) (−2; 0); б) (0; 4); в) (−1; 2); г) (−2; 2). **978.** а) −2; б) 0. **979.** А, В, Г. **981.** а) (25; 1); (13;2); (1; 3); в) (6; 1); (1; 5). **986.** а) 27; в) 72. **988.** 36.

1033. а) $y = x$. **1034.** а) $y = 1{,}5x$. **1036.** а) $y = x - 3$; б) $y = -2x - 4$. **1039.** а) $y = 3x + 9$; б) $y = 3x - 7$. **1072.** а) Ні; б) так. **1073.** а) 1; б) −8.

1082. а) (7; 1); б) (2; 1); в) (8; 1). **1083.** а) (1; 2); б) (5; 6); в) (7; –3). **1088.** а) (–1; 8); б) (5; 6). **1092.** а) (10; 2); б) (–6; –3). **1095.** а) (7; –0,7). **1096.** а) (0; –1); б) (4; 7); в) (5; 17); г) (6,5; 9,5). **1098.** $a = 3$, $b = 1$. **1099.** Г, В, А.

1100. (11; 4; 5).**1101.** (7; 10; 9). **1112.** а) (5; 3); б) (–4; 7); в) (3; 2); г) (13; –13). **1119.** В, Б, Г. **1122.** а) (1; 1); б) (10; 0). **1123.** а) (10; 2); б) (3; 3). **1124.** а) (0,3; 1,2); б) (8; 10). **1125.** а) (3; 2); б) (3; –1); в) (1; 0,4); г) (4; 1). **1126.** а) (1; 0); б) (10; 1). **1127.** а) (9; 8); в) (4, 3); г) (7; 1). **1128.** а) (–0,8; –0,8); б) (2; 1); в) (18; 6); г) (23; –7). **1130.** а) ($3a$; a). **1131.** а) ($-6c$; $-20c$). **1132.** б) (2,2; 3). **1133.** а) (–1; –2); б) (0,5; 1,5). **1134.** а) (1; 2; 3); б) (3; 2; 1); в) (3; 5; 7). **1135.** а) (1; 3; 5); б) (6; 8; 3); в) (1; 2; –1). **1157.** 6 років і 11 років. **1159.** 30 книжок і 48 книжок. **1163.** 23 фазани і 12 кролів. **1164.** 20 баранів. **1165.** 5 мішків і 7 мішків. **1166.** 11 і 1. **1167.** 25 і 1. **1170.** 38,5 км/год, 3,5 км/год. **1171.** 25,5 км/год, 32,5 км/год. **1172.** 12 км/год, 60 км/год. **1173.** 48 км/год, 144 км. **1175.** 50 книжок і 30 книжок. **1176.** 40 свічок і 60 свічок. **1177.** 350 кг і 410 кг. **1178.** 9 столів, 24 дитини. **1179.** 6 стовпців, 8 горобців. **1180.** 21 м/с, 9 м/с. **1181.** 5 м/с, 20 м/с. **1197.** 150 г.

1200. 20%. **1209.** 52,5%. **1210.** 28%. **1211.** 25%, 20%. **1213.** 8%. **1214.** 7,5 кг. **1217.** 24%. **1218.** 640 г, 160 г. **1219.** 120 кг, 80 кг. **1222.** 400. **1224.** 372 кг. **1226.** 520, 572, 440. **1227.** 1200 грн, 800 грн. **1229.** 40000 грн, 60000 грн. **1244.** 74 кг. **1272.** 13. **1274.** 6. **1279.** 6. **1287.** 648. **1288.** 1000. **1289.** 60. **1290.** 10.

1309. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{36}$; в) $\frac{1}{18}$; г) $\frac{1}{9}$. **1310.** Г, Д, А, В. **1311.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{6}$. **1313.** $\frac{1}{5}$. **1317.** $\frac{2}{5}$. **1322.** $\frac{49}{50}$. **1323.** а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{4}$. **1324.** 7 кульок. **1325.** 13 кульок. **1331.** а) 0,0125; б) 0,75. **1332.** а) 2,25; б) 27,18. **1357.** а) $(a - b)\times$ $\times(b - 2)(b + 2)$; в) $(a - 3)(x - a)(x + a)$. **1358.** а) $(x - 1)(x + 1)\times$ $\times(a - b)^2$; б) $(a^2 + b^2)(x - 2)^2$. **1359.** а) $(a + x + b - y)(a + x - b + y)$; б) $(x^2 + y^2 + x + y)(x^2 + y^2 - x - y)$. **1361.** а) 1; б) 9. **1362.** а) 25; б) –49; в) 16. **1364.** а) 1; –1; –4; б) 3; в) 2; –2; –0,5. **1372.** б) 1 і 2; 0 і 3; 5 і –2. **1377.** $y = -0{,}25x + 2{,}75$. **1385.** $a = 0$. **1386.** $a = 3$. **1388.** $b = -5$. **1390.** (2; –3). **1391.** а) (5; 2); б) (3; –2). **1392.** а) (2; 3); в) (10; 10). **1393.** а) (15; 5); б) (35; 0). **1396.** а) (0; 1). **1398.** 84 роки.

1400. 2,5 і 7,5. **1403.** 12 овець.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Абсциса точки 130
Алгебра 3, 154, 156
Аргумент функції 120, 121

Вибірка 239, 240
Винесення за дужки 77
Вирази
— зі змінними 7, 105
— раціональні 7
— цілі 8
— числові 7
Віднімання многочленів 54
Відношення тотожності виразів 15
Відсотки 231
Вільний член рівняння 162
Вісь
— абсцис 129
— ординат 129
Властивості
— лінійної функції 142
— степенів 29

Графік
— функції 129, 131
— лінійного рівняння з двома змінними 190
— лінійної функції 141
— прямої пропорційності 143
Графічний спосіб задання функції 131
Групування 83

Ділення степенів з однаковими основами 30
Двочлен 47
Додавання многочленів 53, 54

Залежна змінна 120

Ймовірність події 251

Квадрат
— двочлена 88
— різниці 88
— суми 88
Коефіцієнт
— одночлена 37
— рівняння 162
Координати точки 129
Координатна площина 129
Корінь рівняння 154

Математична модель 169
Математичний вираз 8
Метод
— підстановки 204
— додавання 210
Многочлен 47
— стандартного вигляду 48
Множення
— многочленів 60, 67
— одночленів 37
— степенів з однаковими основами 29

Незалежна змінна 120
Неповний квадрат
— суми 105
— різниці 105

Область
— визначення функції 121, 122
— значень функції 121
Одночлен 37
— стандартного вигляду 37
Ордината точки 130
Основа степеня 21
Основна властивість степеня 29

Піднесення до степеня 21
— одночлена до степеня 38
— степеня до степеня 30
Подія
— випадкова 251
— достовірна 251
— неможлива 251
Показник степеня 21, 38
Початок координат 129
Прикладні задачі 169
Пряма пропорційність 142

Рівняння 154
— з двома змінними 184
— лінійне 162
— першого степеня 162
— рівносильні 155, 185
Різниця
— квадратів 95
— кубів 105
— многочленів 54
Розв'язок
— рівняння 155, 184
— системи рівнянь 198

Різниця кубів 105
Розкладання
— на множники 76
— многочлена 77, 111

Середнє значення вибірки 239
Система рівнянь 198, 204, 210
Спосіб групування 83
Способи задання функції 122
— формулою 122
— таблицею 122
— словами 122
Степінь числа 20
— одночлена 38
Сума кубів многочленів 105

Тотожнє перетворення виразу 14
Тотожні вирази 13
Тотожність 14
Тричлен 47

Формула різниці квадратів 95
Формули скороченого множення 88
Функція 120
— зростаюча 131
— лінійна 140
— спадна 131
Частотна таблиця 239

ЗМІСТ

Передмова 3
Як працювати з підручником 4

Розділ 1. ЦІЛІ ВИРАЗИ 6

§ 1. Вирази зі змінними 7
§ 2. Тотожні вирази 13
§ 3. Вирази зі степенями 20
§ 4. Властивості степенів 29
§ 5. Одночлени 37
§ 6. Многочлени 47
§ 7. Додавання і віднімання многочленів 53
§ 8. Множення многочлена на одночлен 60
§ 9. Множення многочленів 67

Розділ 2. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ 76

§ 10. Винесення спільного множника за дужки 77
§ 11. Спосіб групування 83
§ 12. Квадрат двочлена 88
§ 13. Різниця квадратів 95
§ 14. Різниця і сума кубів 105
§ 15. Застосування різних способів розкладання многочленів на множники 110

Розділ 3. ФУНКЦІЯ 119

§ 16. Що таке функція? 120
§ 17. Графік функції 129
§ 18. Лінійна функція 140

Розділ 4. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ 153

§ 19. Загальні відомості про рівняння 154
§ 20. Лінійні рівняння 162
§ 21. Розв’язування задач за допомогою рівнянь 169
§ 22. Рівняння з двома змінними 184
§ 23. Графік лінійного рівняння з двома змінними 190
§ 24. Системи рівнянь 198
§ 25. Розв’язування систем лінійних рівнянь методом підстановки . . 204
§ 26. Розв’язування систем лінійних рівнянь методом додавання 210
§ 27. Розв’язування задач складанням системи рівнянь 218

Розділ 5. СТОХАСТИКА 230

§ 28. Відсоткові розрахунки 231
§ 29. Збір та аналіз даних 239
§ 30. Комбінаторні задачі 246
§ 31. Поняття ймовірності. Ймовірність неможливої, достовірної та випадкової події 251
Задачі і вправи для повторення 259
Відповіді 266

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна
ВАСИЛЬЄВА Дарина Володимирівна
ВЛАДІМІРОВА Наталія Григорівна

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

Редактор *Т. П. Єресько*
Технічний редактор *Л. І. Аленіна*
Комп'ютерна верстка *Д. Д. Карачов*
Коректор *Н. М. Левчук*
Дизайн обкладинки *П. В. Ширнін*

Формат 70 x 100 $^{1}/_{16}$.
Ум. друк. арк. 22,032 + 0,324 форзац.
Обл.-вид. арк. 18,20 + 0,55 форзац.
Наклад 30 500 пр.
Зам. .

У підручнику використано малюнки художника І. В. Денисова, зображення @shutterstock таких авторів: Naci Yavuz, Natata, GreenSkyStudio, Emil Timplaru, PeopleImages.com - Yuri A, GoXxu Chocolate, OLGA RAZUMOWSKA, Africa Studio, Julija Sapic, Prostock-studio, wee dezign, LightField Studios

ТОВ «ВИДАВНИЧИЙ ДІМ «ОСВІТА»
Свідоцтво «Про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції»
Серія ДК № 6109 від 27.03.2018 р.

Адреса видавництва: 04053, м. Київ, О. Довженка, 3
www.osvita-dim.com.ua

Віддруковано
в АТ «ХАРКІВСЬКА КНИЖКОВА ФАБРИКА «ГЛОБУС»
61011, м. Харків, вул. Різдвяна, 11.
Свідоцтво ДК № 7032 від 27.12.2019 р.
www.globus-book.com

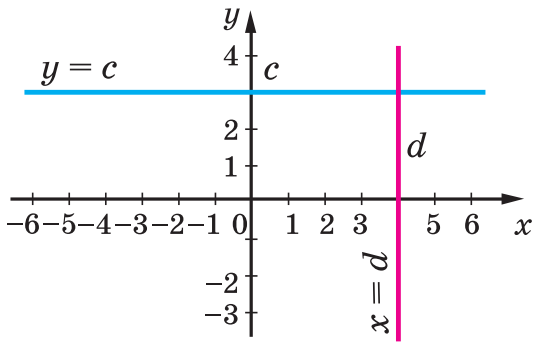
Рівняння з двома змінними

Лінійне рівняння з двома змінними

$$ax + by = c$$

має безліч розв'язків
або не має жодного (якщо $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$).

Графіки рівнянь $y = c$, $x = d$

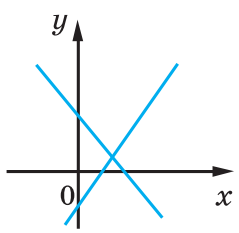


Система лінійних рівнянь

Система лінійних рівнянь

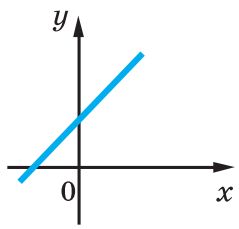
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$



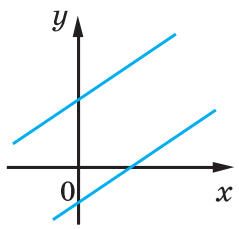
Має один розв'язок

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$



Має безліч розв'язків

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$



Не має жодного розв'язку

Квадрати натуральних чисел

Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3121	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Квадрати і куби натуральних чисел від 1 до 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Степені чисел 2 і 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049