Форзац 1

Квадрати й куби натуральних чисел від 1 до 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Степені чисел 2 і 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Властивості степеня з натуральним показником

$$a^m a^n = a^{m+n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0,\ m > n)$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$

Формули скороченого множення

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Формули різниці та суми кубів

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

АЛГЕБРА

Навчальний посібник для 7 класу
з поглибленим вивченням математики

ПРОПЕДЕВТИКА ПОГЛИБЛЕНОГО ВИВЧЕННЯ

Схвалено для використання
у загальноосвітніх навчальних закладах

Харків
«Гімназія»
2015

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721
М52

Схвалено для використання
у загальноосвітніх навчальних закладах
комісією з математики
Науково-методичної ради з питань освіти
Міністерства освіти і науки України
(лист Інституту інноваційних технологій і змісту освіти
від 28.05.2015 № 14.1/12-Г-318)

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра. Пропедевтика поглибленого вивчення : навч. посіб. для 7 кл. з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2015. — 240 с. : іл.
ISBN 978-966-474-256-3.

Посібник містить матеріал підручника «Алгебра. 7 клас» (автори А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір) і додатковий матеріал для поглибленого вивчення курсу алгебри 7 класу. Подано величезний дидактичний матеріал — від простих задач до задач високого рівня складності.

Матеріал посібника є пропедевтикою для засвоєння курсу поглибленого вивчення алгебри у 8 і 9 класах. Учні та вчителі гімназій, ліцеїв, класів з поглибленим вивченням математики можуть використовувати посібник як повноцінний і самодостатній курс алгебри 7 класу.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721

© А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір, 2015
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет, художнє оформлення, 2015

ISBN 978-966-474-256-3

Від авторів

УЧНЯМ

ЛЮБІ СЕМИКЛАСНИКИ!

Ви зробили серйозний крок у своєму житті: вирішили продовжувати освіту в класі з поглибленим вивченням математики. Вітаємо вас із цим вибором і сподіваємося, що ви не розчаруєтесь у своєму рішенні.

Навчатися в математичному класі не просто. Треба бути наполегливим і завзятим, уважним і акуратним, при цьому найголовніше — не бути байдужим до математики, а любити цю красиву науку.

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — **алгебру**.

Алгебра — це стародавня й мудра наука. На вас чекає знайомство з її азами. Знати алгебру надзвичайно важливо. Мабуть, немає сьогодні такої галузі знань, де не застосовувалися б досягнення цієї науки: фізики та хіміки, астрономи та біологи, географи та економісти, навіть мовознавці та історики використовують «алгебраїчний інструмент».

Алгебра — не тільки корисний, а й дуже цікавий предмет, який розвиває кмітливість і логічне мислення. І ми сподіваємося, що ви в цьому скоро переконаєтеся за допомогою підручника, який тримаєте в руках. Ознайомтеся з його будовою.

Текст підручника поділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Найважливіші відомості виділено **жирним *шрифтом*** і *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і важкі задачі (особливо ті, що позначено зірочкою (*)).

У рубриці «Коли зроблено уроки» ви зможете прочитати оповідання з історії алгебри.

Дерзайте! Бажаємо успіху!

УЧИТЕЛЯМ

ШАНОВНІ КОЛЕГИ!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

Бажаємо творчої наснаги й терпіння.

Умовні позначення

n° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

▲ закінчення доведення теореми;

● закінчення розв'язування прикладу;

 ключові задачі, результат яких можна використовувати під час розв'язування інших задач;

 рубрика «Коли зроблено уроки».

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, синім кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

1. Вступ до алгебри

Алгебра — для вас новий шкільний предмет. Проте ви вже знайомі з «азбукою» цієї науки. Так, коли ви записували формули та складали рівняння, вам доводилося позначати числа буквами, «будуючи» **буквені вирази**.

Наприклад, записи a^2, $(x + y)^2$, $2\,(a + b)$, $\frac{x-y+z}{2}$, abc, $\frac{m}{n}$ є буквеними виразами.

Наголосимо, що не будь-який запис, складений із чисел, букв, знаків арифметичних дій і дужок, є буквеним виразом. Наприклад, запис $2x +) - ($ є беззмістовним набором символів.

Разом з тим вираз, складений з однієї букви, вважають буквеним виразом.

Розглянемо буквений вираз $2\,(a + b)$. Ви знаєте, що за його допомогою можна знайти периметр прямокутника зі сторонами a і b. Якщо, наприклад, букви a і b замінити відповідно числами 3 і 4, то дістанемо числовий вираз $2\,(3 + 4)$. За таких умов периметр прямокутника дорівнюватиме 14 одиницям довжини. Число 14 називають **значенням числового виразу** $2\,(3 + 4)$.

Зрозуміло, що замість букв a і b можна підставляти й інші числа, отримуючи щоразу новий числовий вираз.

Оскільки букви можна заміняти довільними числами, то ці букви називають **змінними**, а сам буквений вираз — **виразом зі змінними** (або зі змінною, якщо вона одна).

Розглянемо вираз $2x + 3$. Якщо змінну x замінити, наприклад, числом $\frac{1}{2}$, то дістанемо числовий вираз $2 \cdot \frac{1}{2} + 3$. При цьому говорять, що $\frac{1}{2}$ — **значення змінної** x, а число 4 — значення виразу $2x + 3$ при $x = \frac{1}{2}$.

Числові вирази та вирази зі змінними називають **алгебраїчними виразами**.

Алгебраїчні вирази

Числові вирази | **Вирази зі змінними (буквені вирази)**

Розглянемо дві групи алгебраїчних виразів:

I група	II група
$x - y^3$	$\frac{1}{x}$
$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{(a+b)^2}$
$\frac{1}{3}b^2 + 5a$	$\frac{m}{n+3}$
$\frac{mn}{7}$	$5 - \frac{x}{y^2}$

Вирази кожної групи містять такі дії: додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня, ділення. Однак вирази першої групи не містять ділення на вирази зі змінними. Тому вирази першої групи називають **цілими виразами**. Вирази другої групи не є цілими.

У 7 класі ми вивчатимемо цілі вирази.

ПРИКЛАД Значення змінних a, b і m такі, що $a - b = 4$, $m = -5$. Чому дорівнює значення виразу $7bm - 7am$?

Розв'язання. Використовуючи розподільну та сполучну властивості множення, отримуємо:

$7bm - 7am = 7m(b - a) = 7 \cdot (-5) \cdot (-4) = 7 \cdot 20 = 140.$

Відповідь: 140.

?

1. Як інакше називають буквені вирази?
2. Які вирази називають алгебраїчними?
3. Які алгебраїчні вирази називають цілими?

ВПРАВИ

1.1.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $18\frac{5}{12} - \frac{7}{12} \cdot 1\frac{19}{21} - \frac{17}{72} \cdot \frac{2}{3}$;

2) $\left(6\frac{3}{4} - 5\frac{1}{8} : 1\frac{9}{32}\right) \cdot \frac{5}{11}$;

3) $(-1{,}42 - (-3{,}22)) : (-0{,}4) + (-6) \cdot (-0{,}7)$;

4) $\left(-\frac{7}{18} + \frac{11}{12}\right) : \left(-\frac{19}{48}\right)$;

5) $\left(-3\frac{1}{12} - 2\frac{1}{15}\right) : \left(-5\frac{3}{20}\right)$?

1.2.° Обчисліть значення числового виразу:

1) $14\frac{7}{15} - 3\frac{3}{23} \cdot \frac{23}{27} - 1\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$;

2) $\left(5\frac{8}{9} : 1\frac{17}{36} + 1\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{5}{21}$;

3) $(-3{,}25 - 2{,}75) : (-0{,}6) + 0{,}8 \cdot (-7)$;

4) $\left(-1\frac{3}{8} - 2\frac{5}{12}\right) : 5\frac{5}{12}$.

1.3.° Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:

1) добуток суми чисел −12 і 8 та числа 0,5;
2) сума добутку чисел −12 і 8 та числа 0,5;
3) частка суми й різниці чисел −1,6 і −1,2;
4) квадрат суми чисел −10 і 6;
5) сума квадратів чисел −10 і 6.

1.4.° Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:

1) частка від ділення суми чисел $\frac{4}{9}$ і $-\frac{5}{6}$ на число $-\frac{14}{27}$;
2) різниця добутку чисел −1,5 і 4 та числа 2;
3) добуток суми та різниці чисел −1,9 і 0,9;
4) куб різниці чисел 6 і 8.

1.5.° Знайдіть значення виразу:

1) $2x - 3$ при $x = 4;\ 0;\ -3$;
2) $\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}b$ при $a = -6,\ b = 16$;
3) $3m - 5n + 3k$ при $m = -7,\ n = 1{,}4,\ k = -0{,}1$.

1.6.° Обчисліть значення виразу:

1) $0{,}4y + 1$ при $y = -0{,}5;\ 8;\ -10$;
2) $\frac{2}{7}c-0{,}2d$ при $c = -28,\ d = 15$.

1.7.° Які з даних виразів є цілими:

1) $7a + 0{,}3$;
2) $5x\left(y-\frac{1}{3}\right)$;
3) $\frac{a+b}{c}$;
4) $\frac{a+b}{4}$;
5) $\frac{3m}{5}+\frac{5}{3m}$;
6) $9x-5y+\frac{1}{z}$?

1.8.° Користуючись термінами «сума», «різниця», «добуток», «частка», прочитайте алгебраїчні вирази та вкажіть, які з них є цілими:

1) $a - (b + c)$;
2) $a + bc$;
3) $x-\frac{y}{z}$;
4) $2m - 10$;
5) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$;
6) $(a + b)\,c$;
7) $ac + bc$;
8) $\frac{a}{b+4}$;
9) $(a - b)(c + d)$.

1.9.° Запишіть у вигляді виразу:

1) число, протилежне числу a;
2) число, обернене до числа a;
3) суму чисел x і y;
4) число, обернене до суми чисел x і y;
5) суму чисел, обернених до чисел x і y;
6) суму числа a та його квадрата;
7) частку від ділення числа a на число, протилежне числу b;
8) добуток суми чисел a і b та числа, оберненого до числа c;
9) різницю добутку чисел m і n та частки чисел p і q.

1.10.° Олівець коштує x грн, а зошит — y грн. Запишіть у вигляді виразу зі змінними:

1) скільки коштують 5 олівців і 7 зошитів;
2) на скільки більше треба заплатити за a зошитів, ніж за b олівців.

1.11.° Робітнику видали заробітну плату однією купюрою номіналом 100 грн, a купюрами номіналом 50 грн і b купюрами по 20 грн. Запишіть у вигляді виразу зі змінними, яку суму грошей отримав робітник.

1.12.° Із двох міст, відстань між якими дорівнює 300 км, вирушили одночасно назустріч один одному два автомобілі зі швидкостями m км/год і n км/год. Запишіть у вигляді виразу зі змінними, через скільки годин після початку руху вони зустрінуться.

1.13.° Із двох селищ, відстань між якими дорівнює s км, одночасно в одному напрямі вирушили пішохід і велосипедист. Пішохід іде попереду зі швидкістю a км/год, а велосипедист їде зі швидкістю b км/год. Запишіть у вигляді виразу зі змінними, через скільки годин після початку руху велосипедист наздожене пішохода. Обчисліть значення отриманого виразу при $a = 4$, $b = 12$, $s = 12$.

1.14.• Запишіть у вигляді виразу:

1) потроєний добуток різниці чисел a і b та їхньої суми;
2) суму трьох послідовних натуральних чисел, менше з яких дорівнює n;
3) добуток трьох послідовних парних натуральних чисел, більше з яких дорівнює $2k$;
4) число, у якому a тисяч, b сотень і c одиниць;
5) кількість сантиметрів у x метрах і y сантиметрах;
6) кількість секунд у m годинах, n хвилинах і p секундах.

1.15.• Запишіть у вигляді виразу:

1) добуток чотирьох послідовних натуральних чисел, більше з яких дорівнює x;
2) різницю добутку двох послідовних непарних чисел і меншого з них, якщо більше число дорівнює $2k + 1$;
3) кількість кілограмів у a тоннах і b центнерах.

1.16.• Складіть вирази для обчислення довжини синьої лінії та площі фігури, яку вона обмежує (рис. 1.1).

1.17.• Складіть вирази для обчислення довжини синьої лінії та площі фігури, яку вона обмежує (рис. 1.2).

1.18.• Значення змінних a і b такі, що $a + b = -8$, $c = 4$. Чому дорівнює значення виразу:

1) $a + b - c$; 2) $0,5\,(a + b) + c$; 3) $3ac + 3bc$?

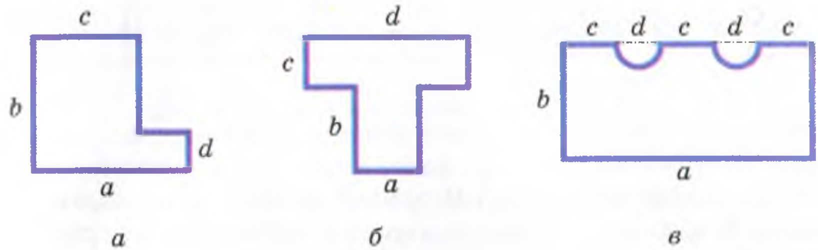


Рис. 1.1

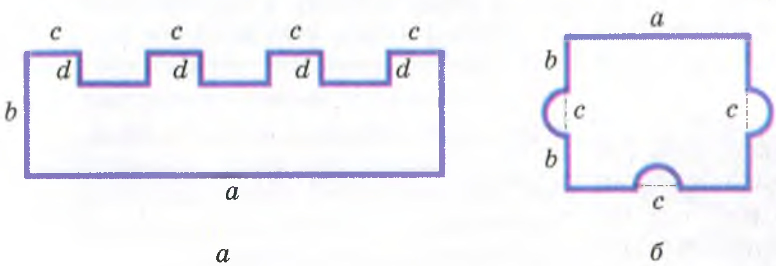


Рис. 1.2

1.19. Значення змінних m і n такі, що $m - n = 5$, $k = -2$. Чому дорівнює значення виразу:

1) $(n - m)\,k$;   2) $2m - 2n + 3k$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1.20. (*Задача з українського фольклору.*) Мірошник бере за роботу $\frac{1}{10}$ змеленого борошна. Скільки пудів борошна намололи селянину, якщо додому він повіз 99 пудів?

1.21. До їдальні завезли капусту, моркву та картоплю. Капусти було 64 кг, маса моркви становила $\frac{5}{8}$ маси капусти, а маса картоплі — 180 % маси моркви. Скільки всього кілограмів овочів завезли до їдальні?

1.22. Відомо, що a і b — натуральні числа, а число $\frac{a}{b}$ — правильний дріб. Чи можна стверджувати, що:

1) $a - b > 0$;   2) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;   3) $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$?

Книга про відновлення та протиставлення

Ви знаєте основні властивості рівнянь. Знаменно, що з однією із цих властивостей пов'язано походження слова «алгебра».

У IX ст. видатний учений Мухаммед ібн Муса аль-Хорезмі (що означає Мухаммед, син Муси, з Хорезма) написав трактат про способи розв'язування рівнянь. У ті часи від'ємні числа вважали хибними, брехливими, абсурдними. Тому якщо під час розв'язування рівнянь отримували «хибне число», то його перетворювали на «справжнє», переносячи в іншу частину рівняння. Таке перетворення Мухаммед аль-Хорезмі назвав *відновленням* (арабською мовою — «аль-джебр»). Знищення однакових членів в обох частинах рівняння він назвав *протиставленням* (арабською мовою — «аль-мукабала»).

Мухаммед ібн Муса аль-Хорезмі (IX ст.)

Середньоазіатський математик, астроном і географ. Він був першим, хто у своїх наукових працях розглядав алгебру як самостійний розділ математики.

Сам трактат мав назву «Коротка книга про відновлення та протиставлення» (арабською мовою — «Кітаб аль-мухтасар фі хісаб аль-джебр ва-аль-мукабала»).

Слово «аль-джебр» із часом перетворилося на добре відоме всім слово «алгебра».

У XII ст. праці аль-Хорезмі було перекладено латинською мовою. У середньовічній Європі ім'я аль-Хорезмі записували як *Algorizmi*, і багато правил з його праць починалися словами *Dixit Algorizmi* («Алгоризмі сказав»). Поступово стали звикати, що із цих слів починається багато правил, а слово *Algorizmi* перестали пов'язувати з ім'ям автора. Так виник термін «алгоритм», яким позначають процес, що дозволяє за скінченну кількість кроків отримати розв'язок задачі.

З такими процесами ви докладно ознайомитеся на уроках інформатики.

§ 1 ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

- У цьому параграфі ви повторите властивості рівнянь, зможете вдосконалити навички розв'язування рівнянь і задач на складання рівнянь.
- Ви дізнаєтеся, що багато відомих вам рівнянь можна об'єднати в один клас.

2. Лінійне рівняння з однією змінною

Розглянемо три рівняння:

$$2x = -3,$$
$$0x = 0,$$
$$0x = 2.$$

Число $-1,5$ є єдиним коренем першого рівняння.

Оскільки добуток будь-якого числа на нуль дорівнює нулю, то коренем другого рівняння є будь-яке число.

Третє рівняння коренів не має.

Незважаючи на істотні відмінності отриманих відповідей, наведені рівняння зовні схожі: усі вони мають вигляд $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа.

Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Наведемо ще приклади лінійних рівнянь:

$$\frac{1}{2}x = 7; \ -0,4x = 2,8; \ -x = 0.$$

Зауважимо, що, наприклад, рівняння $x^2 = 0$, $(x - 2)(x - 3) = 0$, $|x| = 5$ не є лінійними.

Текст, виділений **жирним шрифтом**, роз'яснює зміст терміна «лінійне рівняння з однією змінною». У математиці речення, яке розкриває сутність терміна (поняття, об'єкта), називають **означенням**.

Отже, ми сформулювали (або, як говорять, дали) означення лінійного рівняння з однією змінною.

Розв'яжемо рівняння $ax = b$ для різних значень a і b.

1) Якщо $a \neq 0$, то, поділивши обидві частини рівняння $ax = b$ на a, отримаємо $x = \frac{b}{a}$. Тоді можна зробити такий висновок: *якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ має єдиний корінь, що дорівнює $\frac{b}{a}$.*

2) Якщо $a = 0$, то лінійне рівняння набуває такого вигляду: $0x = b$. Тоді можливі два випадки: $b = 0$ або $b \neq 0$.

У першому випадку отримуємо рівняння $0x = 0$. Тоді можна зробити такий висновок: *якщо $a = 0$ та $b = 0$, то рівняння $ax = b$ має безліч коренів: будь-яке число є його коренем.*

У другому випадку, коли $b \neq 0$, то при будь-якому значенні x маємо хибну рівність $0x = b$. Тоді можна зробити такий висновок: *якщо $a = 0$ та $b \neq 0$, то рівняння $ax = b$ коренів не має.*

Отримані висновки подамо у вигляді таблиці.

Значення a і b	$a \neq 0$	$a = 0,\ b = 0$	$a = 0,\ b \neq 0$
Корені рівняння $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	x — будь-яке число	Коренів немає

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x + 2{,}1)(8 - 2x) = 0$;
2) $|5x - 6| = 4$;
3) $|4x + 2| = |3x - 1|$.

Розв'язання. 1) Ви знаєте, що добуток кількох множників дорівнює нулю тоді, коли принаймні один із множників дорівнює нулю, і навпаки, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю, то й добуток дорівнює нулю. Тому для розв'язування даного рівняння достатньо розв'язати кожне з рівнянь:

$$3x + 2{,}1 = 0, \quad 8 - 2x = 0.$$

Звідси $x = -0{,}7$ або $x = 4$.

Відповідь: $-0{,}7$; 4.

2) Ураховуючи, що існують тільки два числа, -4 і 4, модулі яких дорівнюють 4, отримуємо:

$$5x - 6 = 4 \text{ або } 5x - 6 = -4.$$

Звідси $x = 2$ або $x = 0{,}4$.

Відповідь: 2; $0{,}4$.

3) Модулі двох чисел є рівними в одному з двох випадків: коли ці числа є рівними або коли ці числа є протилежними. Отримуємо:

$$4x + 2 = 3x - 1 \text{ або } 4x + 2 = -(3x - 1).$$

Звідси $x = -3$ або $x = -\frac{1}{7}$.

Відповідь: -3; $-\frac{1}{7}$.

Звертаємо вашу увагу на те, що наведені рівняння не є лінійними, проте розв'язування кожного з них зводиться до розв'язування одного або кількох лінійних рівнянь.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння:

1) $(a - 1)x = 2$; 2) $(a + 9)x = a + 9$.

Розв'язання. 1) При $a = 1$ рівняння набуває вигляду $0x = 2$. У цьому випадку коренів немає. При $a \neq 1$ отримуємо: $x = \frac{2}{a-1}$.

Відповідь: якщо $a = 1$, то рівняння не має коренів; якщо $a \neq 1$, то $x = \frac{2}{a-1}$.

2) При $a = -9$ рівняння набуває вигляду $0x = 0$. У цьому випадку коренем рівняння є будь-яке число. При $a \neq -9$ отримуємо: $x = 1$.

Відповідь: якщо $a = -9$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq -9$, то $x = 1$.

1. Яке рівняння називають лінійним рівнянням з однією змінною?
2. Скільки коренів має лінійне рівняння $ax = b$, якщо:
   1) $a \neq 0$; 2) $a = 0$, $b \neq 0$; 3) $a = b = 0$?

ВПРАВИ

2.1.° Які з наведених рівнянь є лінійними:

1) $3x = 6$; 3) $x^2 = 4$; 5) $\frac{4}{x} = 2$; 7) $x = 0$;

2) $x = 4$; 4) $|x| = 2$; 6) $\frac{1}{4}x = 2$; 8) $0x = 8$?

2.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $18 - 16x = -30x - 10$;
2) $-7x + 2 = 3x - 1$;
3) $10 - 2x = 12 + x$;
4) $6x - 19 = -2x - 15$;
5) $0{,}2x + 3{,}4 = 0{,}6x - 2{,}6$;
6) $\frac{5}{6}x + 12 = \frac{1}{4}x - 2$.

2.3.° Знайдіть корінь рівняння:

1) $10x + 7 = 8x - 9$;
2) $20 - 3x = 2x - 45$;
3) $2{,}7 + 1{,}9x = 2x + 1{,}5$;
4) $\frac{13}{18}x + 13 = \frac{7}{12}x + 8$.

2.4.° Доведіть, що:

1) коренем рівняння $4(x-5)=4x-20$ є будь-яке число;

2) рівняння $2y-8=4+2y$ не має коренів.

2.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $-3(x-4)=5x-12$;

2) $(16x-5)-(3-5x)=6$;

3) $26-4x=3x-7(x-3)$;

4) $-2(3-4x)+5(2-1{,}6x)=4$.

2.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $4(13-3x)-17=-5x$;

2) $(18-3x)-(4+2x)=10$;

3) $14-x=0{,}5(4-2x)+12$;

4) $4x-3(20-x)=10x-3(11+x)$.

2.7.° Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}8-(1{,}5x-2)=-0{,}8+4{,}5x$;

2) $0{,}6x-5(0{,}3x+0{,}2)=0{,}5(x-1)-0{,}8$;

3) $\frac{1}{7}\left(\frac{7}{8}y+7\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{9}y+1\frac{7}{9}\right)=\frac{1}{12}$;

4) $\frac{5}{27}(5{,}4-8{,}1y)=0{,}03+\frac{4}{17}(6{,}8-3{,}4y)$.

2.8.° Знайдіть корінь рівняння:

1) $0{,}9x-0{,}6(x-3)=2(0{,}2x-1{,}3)$;

2) $-0{,}4(3x-1)+8(0{,}8x-0{,}3)=5-(3{,}8x+4)$;

3) $\frac{4}{7}(0{,}56-4{,}2y)+0{,}4=\frac{5}{13}(0{,}52-6{,}5y)$.

2.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $8(7x-3)=-48(3x+2)$;

2) $4{,}5(8x+20)=6(6x+15)$.

2.10.° Чому дорівнює корінь рівняння:

1) $-36(6x+1)=9(4-2x)$;

2) $3{,}2(3x-2)=-4{,}8(6-2x)$?

2.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(4x-1{,}6)(8+x)=0$;

2) $x(5-0{,}2x)=0$;

3) $(3x-2)\left(4+\frac{1}{3}x\right)=0$;

4) $(2x+1{,}2)(x+1)(0{,}7x-0{,}21)=0$.

2.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(1{,}8-0{,}3y)(2y+9)=0$;

2) $(5y+4)(1{,}1y-3{,}3)=0$.

2.13.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{5x-4}{2}=\frac{16x+1}{7}$;

2) $\frac{4y+33}{3}=\frac{17+y}{2}$.

2.14.° Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{3m+5}{4}=\frac{5m+1}{3}$;

2) $\frac{5x+3}{5}=\frac{x-5}{8}$.

2.15.° Чому дорівнює корінь рівняння:

1) $\frac{2x}{3}+\frac{5x}{4}=23$;

2) $\frac{x}{6}-\frac{x}{8}=\frac{7}{36}$;

3) $\frac{3x}{10}-\frac{4}{15}=\frac{x}{6}$;

4) $\frac{x}{7}+\frac{3x-1}{14}=\frac{x}{3}$;

5) $\frac{2x-1}{8}-\frac{x+2}{4}=x$?

2.16.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{7x}{6} - \frac{5x}{18} = \frac{4}{27}$;
3) $-\frac{x}{8} + 1 = \frac{x}{12}$;
2) $\frac{2x}{7} + \frac{x}{4} = \frac{15}{14}$;
4) $\frac{2x+3}{5} + \frac{3x-1}{2} = 2x$.

2.17.° При якому значенні змінної:

1) значення виразу $4x - 0{,}2\,(8x - 7)$ дорівнює $-22{,}6$;
2) вирази $0{,}2\,(3 - 2y)$ і $0{,}3\,(7 - 6y) + 2{,}7$ набувають рівних значень;
3) значення виразу $0{,}6y$ на 1,5 більше за значення виразу $0{,}3\,(y - 4)$;
4) значення виразу $5x - 1$ у 5 разів менше від значення виразу $6{,}5 + 2x$?

2.18.° При якому значенні змінної:

1) вирази $6 - (2x - 9)$ і $(18 + 2x) - 3\,(x - 3)$ набувають рівних значень;
2) значення виразу $-4\,(2y - 0{,}9)$ на 2,4 менше від значення виразу $5{,}6 - 10y$?

2.19.• Розв'яжіть рівняння:

1) $3x - \frac{2x+3}{2} = \frac{x+6}{3}$;
4) $\frac{8x-5}{3} - \frac{4x+3}{4} + \frac{2-9x}{2} = -3$;
2) $\frac{6x-7}{5} - \frac{3x+1}{6} = \frac{11-x}{15}$;
5) $\frac{8x^2-3x}{16} - \frac{6x^2+1}{12} = -1$.
3) $\frac{5x-3}{9} - \frac{4x+3}{6} = x - 1$;

2.20.• Знайдіть корінь рівняння:

1) $x - \frac{7x+1}{8} = \frac{4x+3}{4}$;
3) $\frac{2x+3}{3} - \frac{5x+13}{6} + \frac{5-2x}{2} = 6$;
2) $\frac{2x+1}{6} - \frac{3x+1}{7} = 2$;
4) $\frac{4x^2+5x}{14} + \frac{10-2x^2}{7} = 5$.

2.21.• Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| + 6 = 13$;
5) $|9 + x| = 0$;
9) $|3x - 2| = |x + 1|$;
2) $|x| - 7 = -12$;
6) $|x - 4| = -2$;
10) $|x + 4| = |x - 6|$;
3) $7|x| - 3 = 0$;
7) $|3x + 4| = 2$;
11) $||x| - 3| = 5$.
4) $|x - 5| = 4$;
8) $|2x + 1| + 13 = 14$;

2.22.• Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| - 8 = -5$;
4) $|8 - 0{,}2x| = 12$;
7) $||x| - 2| = 2$;
2) $|x| + 5 = 2$;
5) $|2x - 1| = 0$;
8) $|3x + 2| = |x - 1|$;
3) $|x + 12| = 3$;
6) $|10x - 7| - 32 = -16$;
9) $|x - 5| = |x + 1|$.

2.23.• При якому значенні a рівняння:

1) $5ax = -45$ має корінь, що дорівнює числу 3;
2) $(a - 4)\,x = -5a + 4x - 7$ має корінь, що дорівнює числу -6?

2.24.° При якому значенні a рівняння:
1) $3ax = 12 - x$ має корінь, що дорівнює числу -9;
2) $(5a + 2)\,x = 8 - 2a$ має корінь, що дорівнює числу 2?

2.25.° Укажіть яке-небудь значення b, при якому буде цілим числом корінь рівняння:
1) $0{,}1x = b$; 2) $bx = 21$; 3) $\frac{1}{6}x = b$; 4) $bx = \frac{1}{6}$.

2.26.° Складіть рівняння, яке:
1) має єдиний корінь, що дорівнює числу -4;
2) має безліч коренів;
3) не має коренів.

2.27.° При яких значеннях b число 3 є коренем рівняння
$$(b + 2)\,(x - 1) = 2\,(x + b - 1)?$$

2.28.°° Знайдіть усі цілі значення m, при яких є цілим числом корінь рівняння:
1) $mx = 3$; 2) $(m + 4)\,x = 49$.

2.29.°° Знайдіть усі цілі значення n, при яких є натуральним числом корінь рівняння:
1) $nx = -5$; 2) $(n - 6)\,x = 25$.

2.30.°° При якому значенні b мають один і той самий корінь рівняння:
1) $7 - 3x = 6x - 56$ і $x - 3b = -35$;
2) $2y - 9b = 7$ і $3{,}6 + 5y = 7\,(1{,}2 - y)$?

2.31.°° При якому значенні c мають один і той самий корінь рівняння:
1) $(4x + 1) - (7x + 2) = x$ і $12x - 9 = c + 5$;
2) $\frac{1}{7}cx = x + c$ і $6 - 3\,(2x - 4) = -8x + 4$?

2.32.°° При якому значенні a не має коренів рівняння:
1) $ax = 6$; 2) $(3 - a)\,x = 4$; 3) $(a - 2)\,x = a + 2$?

2.33.°° При якому значенні a будь-яке число є коренем рівняння:
1) $ax = a$; 2) $(a - 2)\,x = 2 - a$; 3) $a\,(a + 5)\,x = a + 5$?

2.34.°° При яких значеннях a має єдиний корінь рівняння:
1) $(a - 5)\,x = 6$; 2) $(a + 7)\,x = a + 7$?

2.35.°° Розв'яжіть рівняння:
1) $(b + 1)\,x = 9$; 2) $(b^2 + 1)\,x = -4$.

2.36.°° Розв'яжіть рівняння $(m + 8)\,x = m + 8$.

2.37.°° Яким виразом можна замінити зірочку в рівності $6x + 8 = 4x + *$, щоб утворилося рівняння, яке:
1) не має коренів; 2) має безліч коренів; 3) має один корінь?

2.38.°° У рівності $2\,(1{,}5x - 0{,}5) = 7x + *$ замініть зірочку таким виразом, щоб утворилося рівняння, яке:
1) не має коренів; 2) має безліч коренів; 3) має один корінь.

2.39.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| + 3x = 12$;
2) $|x| - 4x = 9$;
3) $2(x - 5) - 6|x| = -18$;
4) $||x|-1| = |x-1|$.

2.40.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $2x - |x| = -1$;
2) $7|x| - 3(x + 2) = -10$;
3) $||x|-2| = |x+2|$.

2.41.•• При яких цілих значеннях a корінь рівняння:
1) $x - 2 = a$; 2) $x + 7a = 9$; 3) $2x - a = 4$; 4) $x + 2a = 3$
є цілим числом, яке ділиться націло на 2?

2.42.•• При яких цілих значеннях b корінь рівняння:
1) $x + 3 = b$; 2) $x - 2 = b$; 3) $x - 3b = 8$
є цілим числом, яке ділиться націло на 3?

2.43.•• При яких значеннях b корінь рівняння є меншим від b:
1) $3x = b$; 2) $x = 2b$?

2.44.•• При яких значеннях d корінь рівняння є більшим за d:
1) $4x = d$; 2) $\frac{1}{5}x = d$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

2.45. Один робітник може виконати завдання за 45 год, а другому для цього потрібно в $1\frac{1}{2}$ раза менше часу, ніж першому. За скільки годин вони виконають це завдання, працюючи разом? Яку частину завдання при цьому виконає кожен із них?

2.46. За перший день Василь прочитав $\frac{8}{15}$ сторінок книжки, за другий — $\frac{5}{12}$ сторінок книжки та за третій день — решту 12 сторінок. Скільки сторінок у цій книжці?

2.47. Відомо, що n — натуральне число. Яким числом, парним чи непарним, є значення виразу:
1) $4n$; 2) $2n - 1$; 3) $n(n + 1)$?

2.48. Чи є правильним твердження, що при будь-якому значенні a:
1) $2a > a$; 2) $2|a| > |a|$?

3. Розв'язування задач за допомогою рівнянь

Вам неодноразово доводилося розв'язувати задачі за допомогою складання рівнянь. Різноманітність цих задач є найкращим підтвердженням універсальності цього методу. У чому ж секрет його сили?

Річ у тім, що умови несхожих між собою задач удається записати математичною мовою. Отримане рівняння — це результат перекладу умови задачі з української мови на математичну.

Часто умова задачі є описом якоїсь реальної ситуації. Складене за цією умовою рівняння називають **математичною моделлю** цієї ситуації.

Зрозуміло, щоб дістати відповідь, рівняння треба розв'язати. Для цього в алгебрі розроблено різні методи та прийоми. З деякими з них ви вже знайомі, вивчення багатьох інших на вас ще чекає.

Знайдений корінь рівняння — це ще не відповідь задачі. Треба з'ясувати, чи не суперечить отриманий результат реальній ситуації, яка описана в умові задачі.

Розглянемо, наприклад, такі задачі.

1) За 4 год зібрали 6 кг ягід, причому кожної години збирали однакову за масою кількість ягід. Скільки кілограмів ягід збирали щогодини?
2) Кілька хлопчиків зібрали 6 кг ягід. Кожен із них зібрав по 4 кг. Скільки хлопчиків збирали ягоди?

За умовою обох задач можна скласти одне й те саме рівняння $4x = 6$, коренем якого є число 1,5. Проте в першій задачі відповідь «щогодини збирали 1,5 кг ягід» є прийнятною, а в другій — «ягоди збирали півтора хлопчика» — ні. Тому друга задача не має розв'язків.

Під час розв'язування задач на складання рівнянь бажано дотримуватися такої послідовності дій:

1) за умовою задачі скласти рівняння (побудувати математичну модель задачі);

2) розв'язати отримане рівняння;

3) з'ясувати, чи відповідає знайдений корінь змісту задачі, і дати відповідь.

Цю послідовність дій, яка складається з трьох кроків, можна назвати **алгоритмом** розв'язування текстових задач.

ПРИКЛАД 1 Робітник мав виконати замовлення за 8 днів. Проте, виготовляючи щодня 12 деталей понад норму, він уже за 6 днів роботи не тільки виконав замовлення, а й виготовив додатково 22 деталі. Скільки деталей щодня виготовляв робітник?

Розв'язання. Нехай робітник виготовляв щодня x деталей. Тоді за нормою він мав виготовляти щодня $(x - 12)$ деталей, а всього їх мало бути виготовлено $8(x - 12)$. Насправді він виготовив $6x$ деталей. Оскільки за умовою значення виразу $6x$ на 22 більше за значення виразу $8(x - 12)$, то отримуємо рівняння:

$$6x - 22 = 8(x - 12).$$

Тоді $6x - 22 = 8x - 96$;

$$6x - 8x = -96 + 22;$$

$$-2x = -74;$$

$$x = 37.$$

Відповідь: 37 деталей.

ПРИКЛАД 2 Велосипедист проїхав 65 км за 5 год. Частину шляху він їхав зі швидкістю 10 км/год, а решту — зі швидкістю 15 км/год. Скільки часу він їхав зі швидкістю 10 км/год і скільки — зі швидкістю 15 км/год?

Розв'язання. Нехай велосипедист їхав x год зі швидкістю 10 км/год. Тоді зі швидкістю 15 км/год він їхав $(5 - x)$ год. Перша частина шляху становить $10x$ км, а друга — $15(5 - x)$ км. Оскільки весь шлях складав 65 км, то маємо рівняння:

$$10x + 15(5 - x) = 65.$$

Звідси $10x + 75 - 15x = 65$;

$$-5x = -10;$$

$$x = 2.$$

Отже, зі швидкістю 10 км/год він їхав 2 год, а зі швидкістю 15 км/год — 3 год.

Відповідь: 2 год, 3 год.

ВПРАВИ

3.1.° Петро купив 24 зошити, причому зошитів у лінійку він купив на 6 більше, ніж у клітинку. Скільки зошитів кожного виду купив Петро?

3.2.° Із двох дерев зібрали 65,4 кг вишень, причому з одного дерева зібрали на 12,6 кг менше, ніж із другого. Скільки кілограмів вишень зібрали з кожного дерева?

3.3.° Периметр прямокутника дорівнює 7,8 см, а одна з його сторін на 1,3 см більша за другу. Знайдіть сторони прямокутника.

3.4.° Одна зі сторін прямокутника в 11 разів менша від другої. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 144 см.

3.5.° Три найвищі гірські вершини України — Говерла, Бребенескул і Петрос знаходяться в найвищому гірському масиві Чорногори в Карпатах. Сума їхніх висот дорівнює 6113 м, причому Говерла на 29 м вища за Бребенескул і на 41 м вища за Петрос. Знайдіть висоту кожної з вершин.

3.6.° Три найглибші печери України — Солдатська, Каскадна та Нахімовська знаходяться в Криму. Сума їхніх глибин дорівнює 1874 м, причому глибина Каскадної в 1,2 раза менша від глибини Солдатської та на 26 м більша за глибину Нахімовської. Знайдіть глибину кожної з печер.

3.7.° У будинку є 160 квартир трьох видів: однокімнатні, двокімнатні та трикімнатні. Однокімнатних квартир у 2 рази менше, ніж двокімнатних, і на 24 менше, ніж трикімнатних. Скільки в будинку квартир кожного виду?

3.8.° Троє робітників виготовили 96 деталей. Один із них виготовив у 3 рази більше деталей, ніж другий, а третій — на 16 деталей більше, ніж другий. Скільки деталей виготовив кожний робітник?

3.9.° У трьох цехах заводу працює 101 робітник. Кількість робітників першого цеху становить $\frac{4}{9}$ кількості робітників третього цеху, а кількість робітників другого цеху — 80 % кількості робітників третього. Скільки робітників працює в першому цеху?

3.10.° Велосипедисти взяли участь у триденному поході. За другий і третій дні вони проїхали відповідно 120 % і $\frac{4}{5}$ відстані, яку подолали за перший день. Який шлях вони проїхали за перший день, якщо довжина всього маршруту становить 270 км?

3.11.° У 6 великих і 8 маленьких ящиків розклали 232 кг яблук. Скільки кілограмів яблук було в кожному ящику, якщо в кожному маленькому ящику було на 6 кг яблук менше, ніж у кожному великому?

3.12.° У двох залах кінотеатру 534 місця. В одному залі 12 однакових рядів, а в другому — 15 однакових рядів. У кожному ряді першого залу на 4 місця більше, ніж у кожному ряді другого. Скільки місць у кожному залі кінотеатру?

3.13.° Відстань між двома містами мотоцикліст проїхав за 0,8 год, а велосипедист — за 4 год. Швидкість велосипедиста на 48 км/год менша від швидкості мотоцикліста. Знайдіть швидкість кожного з них.

3.14.° За 2 кг цукерок одного виду заплатили стільки, скільки за 3,5 кг цукерок другого виду. Яка ціна кожного виду цукерок, якщо 1 кг цукерок першого виду на 12 грн дорожчий за 1 кг цукерок другого виду?

3.15.° Кілограм огірків на 0,8 грн дешевший від кілограма помідорів. Скільки коштує 1 кг помідорів, якщо за 3,2 кг помідорів заплатили стільки, скільки за 3,6 кг огірків?

3.16.° В одному баку було в 3 рази більше води, ніж у другому. Коли в перший бак долили 16 л води, а в другий — 80 л, то в обох баках води стало порівну. Скільки літрів води було спочатку в кожному баку?

3.17.° На одній полиці було в 4 рази більше книжок, ніж на другій. Коли з першої полиці взяли 5 книжок, а на другу поставили 16 книжок, то на обох полицях книжок стало порівну. Скільки книжок було спочатку на кожній полиці?

3.18.° Зараз батькові 26 років, а його синові — 2 роки. Через скільки років батько буде в 5 разів старший за сина?

3.19.° Зараз матері 40 років, а її доньці — 18 років. Скільки років тому донька була в 3 рази молодша від матері?

3.20.• Для шкільної бібліотеки придбали 40 орфографічних і тлумачних словників української мови, заплативши разом 690 грн. Скільки було словників кожного виду, якщо орфографічний словник коштує 15 грн, а тлумачний — 24 грн?

3.21.• Вкладник поклав у банк 3000 грн на два різних депозитних рахунки, причому за першим рахунком йому нараховували 7 % річних, а за другим — 8 % річних. Через рік він одержав 222 грн прибутку. Яку суму було внесено на кожний рахунок?

3.22.• У касі було 19 купюр по 2 і 5 грн на загальну суму 62 грн. Скільки купюр кожного виду було в касі?

3.23.• У двох сховищах була однакова кількість вугілля. Коли з першого сховища вивезли 680 т вугілля, а з другого — 200 т, то в першому залишилося в 5 разів менше вугілля, ніж у другому. Скільки тонн вугілля було в кожному сховищі спочатку?

3.24.• У Петра й Василя було порівну грошей. Коли на купівлю книжок Петро витратив 30 грн, а Василь — 45 грн, то в Петра залишилось у 2 рази більше грошей, ніж у Василя. Скільки грошей було в кожного хлопця спочатку?

3.25.• В одному мішку було в 5 разів більше борошна, ніж у другому. Коли з першого мішка пересипали 12 кг борошна в другий мішок, то маса борошна в другому мішку склала $\frac{5}{7}$ маси борошна в першому. Скільки кілограмів борошна було в кожному мішку спочатку?

3.26.° В одному контейнері було в 3 рази більше вугілля, ніж у другому. Коли з першого контейнера пересипали 300 кг вугілля в другий контейнер, то маса вугілля в першому контейнері склала 60 % маси вугілля в другому. Скільки кілограмів вугілля було в кожному контейнері спочатку?

3.27.° Одному робітникові треба було виготовити 90 деталей, а другому — 60. Перший робітник щодня виготовляв 4 деталі, а другий — 5 деталей. Через скільки днів першому робітникові залишиться виготовити вдвічі більше деталей, ніж другому, якщо вони почали працювати в один день?

3.28.° В одній цистерні було 200 л води, а в другій — 640 л. Коли з другої цистерни використали вдвічі більше води, ніж із першої, то в другій залишилося в 3,5 раза більше води, ніж у першій. Скільки літрів води використали з кожної цистерни?

3.29.° Із двох міст, відстань між якими дорівнює 385 км, виїхали назустріч один одному легковий і вантажний автомобілі. Легковий автомобіль їхав зі швидкістю 80 км/год, а вантажний — 50 км/год. Скільки часу їхав до зустрічі кожен із них, якщо вантажний автомобіль виїхав на 4 год пізніше за легковий?

3.30.° З одного села до другого вирушив пішохід зі швидкістю 4 км/год, а через 1,5 год після цього з другого села назустріч йому виїхав велосипедист зі швидкістю 16 км/год. Через скільки хвилин після виїзду велосипедист зустрівся з пішоходом, якщо відстань між селами дорівнює 14 км?

3.31.° Відстань між двома містами річкою на 55 км менша, ніж по шосе. З одного міста до другого можна дістатися теплоходом за 6 год, а по шосе автобусом — за 3 год 30 хв. Знайдіть швидкості автобуса й теплохода, якщо швидкість теплохода на 30 км/год менша від швидкості автобуса.

3.32.° Теплохід пройшов 4 год за течією річки та 3 год проти течії. Шлях, який пройшов теплохід за течією, на 48 км більший за шлях, пройдений ним проти течії. Знайдіть швидкість теплохода в стоячій воді, якщо швидкість течії дорівнює 2,5 км/год.

3.33.° Турист плив 5 год на плоту за течією річки та 1,5 год на моторному човні проти течії. Швидкість човна в стоячій воді дорівнює 24 км/год. Знайдіть швидкість течії, якщо проти течії турист проплив на 23 км більше, ніж за течією.

3.34.• У двох ящиках було 55 кг печива. Коли з першого ящика переклали в другий $\frac{1}{3}$ маси печива, яке в ньому містилося, то в першому ящику залишилося на 5 кг більше печива, ніж стало в другому. Скільки кілограмів печива було в кожному ящику спочатку?

3.35.• У двох кошиках було 24 кг груш. Коли з одного кошика переклали в другий $\frac{3}{7}$ маси груш, які були в першому, то маса груш у другому кошику стала вдвічі більшою за масу груш, що залишилися в першому. Скільки кілограмів груш було в кожному кошику спочатку?

3.36.• На трьох полицях стояли книжки. На першій полиці стояло $\frac{4}{15}$ усіх книжок, на другій — 60 % усіх книжок, а на третій — на 8 книжок менше, ніж на першій. Скільки всього книжок стояло на трьох полицях?

3.37.• У чотири бідони розлили молоко. У перший бідон налили 30 % усього молока, у другий — $\frac{5}{6}$ того, що в перший, у третій — на 26 л менше, ніж у перший, а в четвертий — на 10 л більше, ніж у другий. Скільки літрів молока розлили в чотири бідони?

3.38.• Під час розселення туристів у намети виявилося, що коли в кожний намет поселити по 6 туристів, то 5 туристам місця не вистачить, а якщо розселяти по 7 туристів, то 6 місць залишаться вільними. Скільки було туристів?

3.39.• Під час підготовки новорічних подарунків для учнів 7 класу виявилося, що коли в кожний подарунок покласти по 4 апельсини, то не вистачить 3 апельсинів, а коли покласти по 3 апельсини, то залишаться зайвими 25 апельсинів. Скільки було апельсинів?

3.40.• Робітник планував щодня виготовляти по 20 деталей, щоб вчасно виконати виробниче завдання. Проте щодня він виготовляв на 8 деталей більше, ніж планував, і вже за 2 дні до кінця терміну роботи виготовив 8 деталей понад план. Скільки днів за планом робітник мав виконувати завдання?

3.41.• Готуючись до екзамену, учень планував щодня розв'язувати 10 задач. Оскільки він щодня розв'язував на 4 задачі більше, то вже за 3 дні до екзамену йому залишилося розв'язати 2 задачі. Скільки всього задач планував розв'язати учень?

3.42.° У двоцифровому числі кількість десятків у 3 рази більша за кількість одиниць. Якщо цифри числа переставити, то отримане число буде на 54 меншим від даного. Знайдіть дане двоцифрове число.

3.43.° У двоцифровому числі кількість десятків на 2 менша від кількості одиниць. Якщо цифри числа переставити, то отримане число буде в $1\frac{3}{4}$ раза більшим за дане. Знайдіть дане двоцифрове число.

3.44.•• Із двох міст, відстань між якими дорівнює 270 км, виїхали одночасно назустріч один одному два автомобілі. Через 2 год після початку руху відстань між ними становила 30 км. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо швидкість одного з них на 10 км/год більша за швидкість другого.

3.45.•• Маємо два сплави міді й цинку. Перший сплав містить 9 % цинку, а другий — 30 %. Скільки кілограмів кожного сплаву треба взяти, щоб отримати сплав масою 300 кг, який містить 23 % цинку?

3.46.•• Маємо два водно-сольових розчини. Перший розчин містить 25 % солі, а другий — 40 %. Скільки кілограмів кожного розчину треба взяти, щоб отримати розчин масою 50 кг, який містить 34 % солі?

3.47.* Із двох селищ, відстань між якими дорівнює 7 км, одночасно вирушили пішохід і велосипедист. Швидкість пішохода дорівнює 3,6 км/год, а велосипедиста — 12 км/год. Через який час після початку руху відстань між ними становитиме 1,4 км?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

3.48. Обчисліть значення виразу:

1) $-9{,}6 : 12 - 29 : (-5{,}8) + 4 : (-25)$;

2) $-3{,}4 \cdot (4 - 4{,}6) + 12{,}4 \cdot (-0{,}8 - 2{,}2)$;

3) $\left(0{,}4 - \frac{3}{20}\right) \cdot 6\frac{2}{3} - 1{,}75 : \left(-7\frac{7}{8}\right)$;

4) $\left(6{,}3 : \left(-\frac{9}{20}\right) - 2{,}6 : \left(-\frac{1}{20}\right)\right) \cdot \left(-\frac{4}{19}\right) - 0{,}6 : (-0{,}36)$.

3.49. Знайдіть значення виразу:

1) $14 - 6x$, якщо $x = 4; -2; 0; -0{,}3; \frac{3}{8}$;

2) $a^2 + 3$, якщо $a = 7; -2; 0; 0{,}4; -1\frac{1}{3}$;

3) $(2m - 1)\,n$, якщо $m = 0{,}2$, $n = -0{,}6$.

3.50. Заповніть таблицю, обчислюючи значення виразу $-3x + 2$ для наведених значень x:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$-3x + 2$									

3.51. Яку цифру треба приписати ліворуч і праворуч до числа 37, щоб отримане число ділилося націло на 6?

3.52. Чи має корені рівняння:

1) $x^2 = 0$; 2) $x^2 = -1$; 3) $|x| = x$; 4) $|x| = -x$?

У разі ствердної відповіді вкажіть їх.

3.53. Чи може бути цілим числом значення виразу:

1) $\frac{1}{x}$; 2) $\frac{x}{x+1}$?

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Лінійне рівняння з однією змінною

Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Розв'язування лінійного рівняння з однією змінною

Значення a і b	$a \neq 0$	$a = 0$, $b = 0$	$a = 0$, $b \neq 0$
Корені рівняння $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	x — будь-яке число	Коренів немає

Схема розв'язування задач на складання рівнянь

1) За умовою задачі скласти рівняння (побудувати математичну модель задачі);
2) розв'язати отримане рівняння;
3) з'ясувати, чи відповідає знайдений корінь змісту задачі, і дати відповідь.

§ 2 ЦІЛІ ВИРАЗИ

- У цьому параграфі ви навчитеся спрощувати вирази, ознайомитеся з формулами та прийомами, які допомагають полегшити роботу з перетворення виразів.
- Ви дізнаєтеся, що піднесення числа до квадрата й куба – окремі випадки нової арифметичної дії.
- Ви навчитеся класифікувати алгебраїчні вирази.

4. Тотожно рівні вирази. Тотожності

Розглянемо дві пари виразів:

1) $x^5 - x$ і $5x^3 - 5x$;

2) $2(x - 1) - 1$ і $2x - 3$.

У таблицях наведено значення цих виразів при *деяких* значеннях змінної x.

x	-2	-1	0	1	2
$x^5 - x$	-30	0	0	0	30
$5x^3 - 5x$	-30	0	0	0	30

x	-2	-1	0	1	2
$2(x - 1) - 1$	-7	-5	-3	-1	1
$2x - 3$	-7	-5	-3	-1	1

Бачимо, що ці значення збігаються для кожної окремо взятої пари виразів.

Чи збережеться підмічена закономірність при *будь-яких інших* значеннях x?

Для виразів, записаних у першій таблиці, відповідь на це запитання заперечна: якщо, наприклад, $x = 3$, то $x^5 - x = 3^5 - 3 = 240$, а $5x^3 - 5x = 5 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3 = 120$.

Проте значення виразів, записаних у другій таблиці, збігаються при *будь-яких* значеннях x. Доведемо це.

$2(x-1)-1=2x-2-1=2x-3$, тобто після спрощення вираз $2(x-1)-1$ перетворився на вираз $2x-3$.

Означення. **Вирази, відповідні значення яких є рівними при будь-яких значеннях змінних, що входять до них, називають тотожно рівними.**

Наприклад, вирази $2(x-1)-1$ і $2x-3$ — тотожно рівні, а вирази x^5-x і $5x^3-5x$ не є тотожно рівними.

Ось ще приклади тотожно рівних виразів:

$$7(a+b) \text{ і } 7a+7b;$$
$$3x+y \text{ і } y+3x;$$
$$m^2np \text{ і } nm^2p;$$
$$a-(b+c) \text{ і } a-b-c.$$

Розглянемо рівність $7(a+b)=7a+7b$. Згідно з розподільною властивістю множення відносно додавання вона є правильною при будь-яких значеннях змінних a і b.

Означення. **Рівність, яка є правильною при будь-яких значеннях змінних, що входять до неї, називають тотожністю.**

З пари тотожно рівних виразів легко отримати тотожність.

Наприклад, усі рівності

$$3x+y=y+3x;$$
$$m^2np=nm^2p;$$
$$a-(b+c)=a-b-c$$

є тотожностями.

Зазначимо, що з тотожностями ви стикалися й раніше. Так, рівності, що виражають властивості додавання та множення чисел, є прикладами тотожностей:

$$a+b=b+a;$$
$$(a+b)+c=a+(b+c);$$
$$ab=ba;$$
$$(ab)c=a(bc);$$
$$a(b+c)=ab+ac.$$

Знайдемо значення виразу $11a-3a+2$ при $a=\frac{1}{8}$. Звичайно, можна відразу підставити в цей вираз замість a число $\frac{1}{8}$ та знайти значення числового виразу $11\cdot\frac{1}{8}-3\cdot\frac{1}{8}+2$. Однак набагато зручніше спочатку звести подібні доданки, замінивши даний вираз $11a-3a+2$ на тотожно рівний: $8a+2$. Тепер знайдемо значення отриманого виразу при $a=\frac{1}{8}$. Маємо: $8\cdot\frac{1}{8}+2=3$.

Заміну одного виразу іншим, тотожно рівним йому, називають **тотожним перетворенням** виразу.

Зведення подібних доданків і розкриття дужок — приклади тотожних перетворень виразів. Спрощуючи вираз, ми фактично заміняємо його простішим, тотожно рівним йому.

Для того щоб довести, що дана рівність є тотожністю (або, як ще говорять, довести тотожність), використовують такі прийоми (методи):

- *тотожно перетворюють одну із частин даної рівності, отримуючи іншу частину;*
- *тотожно перетворюють кожну із частин даної рівності, отримуючи один і той самий вираз;*
- *показують, що різниця лівої і правої частин даної рівності тотожно дорівнює нулю.*

ПРИКЛАД 1 Доведіть тотожність:

1) $2(3a + 4b) + 3(a - 7b) - 7(2a - 7b) = -5a + 36b$;
2) $0,6(x - 5) + 0,4(x + 1) = 0,8(x + 2) + 0,2(x - 21)$;
3) $a(b - c) + b(c - a) = c(b - a)$.

Розв'язання. 1) Спростимо ліву частину рівності:

$$2(3a + 4b) + 3(a - 7b) - 7(2a - 7b) =$$
$$= 6a + 8b + 3a - 21b - 14a + 49b = -5a + 36b.$$

Тотожність доведено.

2) Спростимо ліву та праву частини рівності:
$0,6(x - 5) + 0,4(x + 1) = 0,6x - 3 + 0,4x + 0,4 = x - 2,6$;
$0,8(x + 2) + 0,2(x - 21) = 0,8x + 1,6 + 0,2x - 4,2 = x - 2,6$.
Отримали один і той самий вираз. Отже, тотожність доведено.

3) Розглянемо різницю лівої і правої частин:
$a(b - c) + b(c - a) - c(b - a) = ab - ac + bc - ab - bc + ac = 0$.
Тотожність доведено.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що рівність $(a + 2)(a - 3) = a^2 - 6$ не є тотожністю.

Розв'язання. Щоб довести, що рівність не є тотожністю, достатньо навести *контрприклад*: указати таке значення змінної (змінних, якщо їх кілька), при якому дана рівність не справджується.

Наприклад, при $a = 1$ маємо:

$$(a + 2)(a - 3) = (1 + 2)(1 - 3) = -6; \quad a^2 - 6 = 1 - 6 = -5.$$

Отже, дана рівність не є тотожністю.

?

1. Які вирази називають тотожно рівними?
2. Що називають тотожністю?
3. Що називають тотожним перетворенням виразу?
4. Які тотожні перетворення виразів ви знаєте?
5. Які прийоми використовують для доведення тотожностей?

ВПРАВИ

4.1.° Які властивості арифметичних дій дають можливість стверджувати, що дані вирази є тотожно рівними:

1) $ab + cd$ і $cd + ab$;
2) $(a + 1) + b$ і $a + (1 + b)$;
3) $a \cdot 4b$ і $4ab$;
4) $(x + 2)(x + 3)$ і $(3 + x)(2 + x)$;
5) $7(a - 4)$ і $7a - 28$?

4.2.° Чи є тотожністю рівність:

1) $2x - 12 = 2(x - 6)$;
2) $a - b = -(b - a)$;
3) $3m + 9 = 3(m + 9)$;
4) $(a+b)\cdot 1 = a+b$;
5) $(a+b)\cdot 0 = a+b$;
6) $(a - a)(b + b) = 0$;
7) $3a - a = 3$;
8) $4x + 3x = 7x$;
9) $a - (b + c) = a - b + c$;
10) $m + (n - k) = m + n - k$;
11) $4a - (3a - 5) = a + 5$;
12) $(a - 5)(a + 3) = (5 - a)(3 + a)$?

4.3.° Чи є тотожно рівними вирази:

1) $8(a - b + c)$ і $8a - 8b + 8c$;
2) $-2(x - 4)$ і $-2x - 8$;
3) $(5a - 4) - (2a - 7)$ і $3a - 11$?

4.4.° Порівняйте значення виразів a^2 і $|a|$ при $a = -1$; 0; 1. Чи можна стверджувати, що рівність $a^2 = |a|$ є тотожністю?

4.5.° Якому з наведених виразів тотожно дорівнює вираз $-3a + 8b - a - 11b$:

1) $-4a + 3b$; 2) $-3a + 3b$; 3) $-4a - 3b$; 4) $-3a - 3b$?

4.6.° Серед виразів $-10a + 7$; $-10a - 7$; $-14a + 7$; $-14a - 7$ знайдіть такий, який тотожно дорівнює виразу $-12a + (7 - 2a)$.

4.7.° Доведіть тотожність:

1) $-5x - 6(9 - 2x) = 7x - 54$;
2) $\frac{1}{3}(12 - 0{,}6y) + 0{,}3y = 0{,}1y + 4$;
3) $3(7 - a) - 7(1 - 3a) = 14 + 18a$;
4) $(6x - 8) - 5x - (4 - 9x) = 10x - 12$;
5) $3(2{,}1m - n) - 0{,}9(7m + 2n) = -4{,}8n$;
6) $\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{8}x + 6\right) - \frac{1}{6}\left(24 - 1\frac{1}{2}x\right) = 0$.

4.8.° Доведіть тотожність:

1) $-0{,}2(4b - 9) + 1{,}4b = 0{,}6b + 1{,}8$;
2) $(5a - 3b) - (4 + 5a - 3b) = -4$;
3) $5(0{,}4x - 0{,}3) + (0{,}8 - 0{,}6x) = 1{,}4x - 0{,}7$;
4) $\frac{1}{9}(3y - 27) - 2\left(\frac{1}{12}y - 1{,}5\right) = \frac{1}{6}y$.

4.9.° Які з наведених рівностей є тотожностями:

1) $(2a - 3b)^2 = (3b - 2a)^2$;
2) $(a - b)^3 = (b - a)^3$;
3) $|a + 5| = a + 5$;
4) $|a - b| = |b - a|$;
5) $|a^2 + 4| = a^2 + 4$;
6) $|a + b| = |a| + |b|$;
7) $|a - 1| = |a| - 1$;
8) $a^2 - b^2 = (a - b)^2$?

4.10.° Запишіть у вигляді рівності твердження:

1) сума протилежних чисел дорівнює нулю;
2) добуток даного числа та числа 1 дорівнює 1;
3) добутком даного числа та числа -1 є число, протилежне даному;
4) модулі протилежних чисел рівні;
5) різниця протилежних чисел дорівнює нулю.

Які із цих рівностей є тотожностями?

4.11.° Доведіть тотожність:

1) $4(2 - 3m) - (6 - m) - 2(3m + 4) = -17m - 6$;
2) $a + b - 10ab = 2a(3 - b) - 3b(a - 2) - 5(ab + a + b)$;
3) $6(5a - 3) + (10 - 20a) - (6a - 4) = 5a - (3a - (2a - 4))$.

4.12.° Доведіть тотожність:

1) $(3m - 7) \cdot 0{,}6 - 0{,}8(4m - 5) - (-1{,}7 - 1{,}4m) = 1{,}5$;
2) $7a(3b + 4c) - 3a\left(b + \frac{1}{3}c\right) = 9a(2b + 3c)$.

4.13.° Доведіть, що не є тотожністю рівність:

1) $(a + 3)^2 = a^2 + 9$;
2) $(b - 1)(b + 1) = (b - 1)b + 1$;
3) $(c + 1)^3 = c^3 + 1$;
4) $|m| - |n| = |n| - |m|$.

4.14.° Доведіть, що не є тотожно рівними вирази:

1) $4 - m^2$ і $(2 - m)^2$; 2) $|-m|$ і m; 3) $m^3 + 8$ і $(m + 2)(m^2 + 4)$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

4.15. Пасажирський поїзд проходить відстань між двома станціями за 12 год. Якщо одночасно від цих станцій вирушать назустріч один одному пасажирський і товарний поїзди, то вони зустрінуться через 8 год після початку руху. За який час товарний поїзд може подолати відстань між цими станціями?

4.16. Фермер вирощував гречку на двох ділянках загальною площею 24 га. На одній ділянці він зібрав по 8 ц гречки з гектара, а на другій — по 9 ц з гектара. Скільки всього центнерів гречки зібрав фермер, якщо з другої ділянки він зібрав на 46 ц гречки більше, ніж із першої?

4.17. Відомо, що $a > 0$ і $a + b < 0$. Порівняйте:

1) b і 0; 2) $|a|$ і $|b|$.

4.18. Ціну товару спочатку збільшили на 50 %, а потім зменшили на 50 %. Збільшилася чи зменшилася початкова ціна товару та на скільки відсотків?

4.19. Загальна довжина річки Дніпро 2201 км, з них у межах України — 981 км. Загальна довжина річки Десна 1130 км, з них у межах України — 591 км. Яка із цих річок має більший відсоток довжини в межах України?

5. Степінь з натуральним показником

Як ви знаєте, у математиці придумали спосіб коротко записувати добуток, усі множники якого рівні.

Наприклад, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Вираз $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ називають **степенем**, число $\frac{1}{2}$ — **основою степеня**, а число 3 — **показником степеня**.

Означення. Степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a.

Степінь з основою a та показником n позначають a^n і читають: «a в n-му степені». Степені з показниками 2 і 3 можна прочитати інакше: запис a^2 читають «a у квадраті», запис a^3 — «a в кубі».

Звернемо увагу, що в означенні степеня на показник n накладено обмеження $n > 1$. І це зрозуміло: адже не прийнято розглядати добуток, що складається з одного множника.

А чи може показник степеня дорівнювати 1? Відповідь на це запитання дає таке означення.

Означення. Степенем числа a з показником 1 називають саме це число.

Це означення дає змогу будь-яке число вважати степенем з показником 1.

Отже, з наведених означень випливає, що

$$a^n = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ множників}}, \text{ де } n > 1,$$

$$a^1 = a.$$

Легко підрахувати, що, наприклад, $2^5 = 32$. У таких випадках говорять, що число 2 **піднесли до п'ятого степеня** й отримали число 32. Також можна сказати, що виконали **дію піднесення до п'ятого степеня** числа 2.

Рівність $(-3)^2 = 9$ означає, що число -3 **піднесли до квадрата** й отримали число 9, а рівність $(-3)^3 = -27$ означає, що число -3 **піднесли до куба** й отримали число -27.

Зауважимо, що алгебраїчний вираз може бути побудований не тільки за допомогою додавання, віднімання, множення та ділення, а й за допомогою дії піднесення до степеня.

Очевидно, що коли $a > 0$, то $a^n > 0$; коли $a = 0$, то $0^n = 0$.

Отже, ***підносячи невід'ємне число до степеня, отримуємо невід'ємне число.***

При піднесенні від'ємного числа до степеня можливі два випадки.

1) Якщо показник степеня — парне число, то при піднесенні до степеня множники можна розбити на пари.

Наприклад, $(-2)^6 = ((-2)\,(-2)) \cdot ((-2)\,(-2)) \cdot ((-2)\,(-2))$.

2) Якщо показник степеня — непарне число, то один множник залишиться без пари.

Наприклад, $(-2)^5 = ((-2)\,(-2)) \cdot ((-2)\,(-2)) \cdot (-2)$.

Оскільки кожні два від'ємні множники дають у добутку додатне число, то справедливе таке твердження:

підносячи від'ємне число до степеня з парним показником, отримуємо додатне число, а підносячи від'ємне число до степеня з непарним показником, отримуємо від'ємне число.

Чи можна, наприклад, число 5 піднести до степеня 0 або до степеня -2? Можна. Як це зробити, ви дізнаєтеся з курсу алгебри 8 класу.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $(x - 10)^8 = -1$.

Розв'язання. Оскільки при піднесенні до степеня з парним показником будь-якого числа отримуємо невід'ємне число, то дане рівняння не має коренів.

Відповідь: коренів немає.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що значення виразу $10^{200} + 2$ ділиться націло на 3.

Розв'язання. Запис значення виразу 10^{200} складається із цифри 1 і двохсот цифр 0, а запис значення виразу $10^{200} + 2$ — із цифри 1, цифри 2 і ста дев'яноста дев'яти цифр 0. Отже, сума цифр числа, яка є значенням даного виразу, дорівнює 3. Тому й саме це число ділиться націло на 3.

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що значення виразу $9^n - 1$ ділиться націло на 10 при будь-якому парному значенні n.

Розв'язання. Якщо n — парне число, то вираз 9^n можна подати у вигляді добутку, який містить парну кількість дев'яток. Тоді можна записати: $9^n = (9 \cdot 9)(9 \cdot 9) \cdot \ldots \cdot (9 \cdot 9)$. Оскільки $9 \cdot 9 = 81$, то останньою цифрою значення виразу $(9 \cdot 9)(9 \cdot 9) \cdot \ldots \cdot (9 \cdot 9)$ є одиниця. Тому останньою цифрою значення виразу $9^n - 1$ є нуль. Отже, значення виразу $9^n - 1$ ділиться націло на 10 при будь-якому парному значенні n.

1. Що називають степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1?
2. Як читають запис a^n? a^2? a^3?
3. Що називають степенем числа a з показником 1?
4. Чому дорівнює значення виразу 0^n при будь-якому натуральному значенні n?
5. Яке число, додатне чи від'ємне, отримують при піднесенні до степеня додатного числа?
6. Яким числом, додатним чи від'ємним, є значення степеня від'ємного числа, якщо показник степеня є парним числом? непарним числом?

ВПРАВИ

5.1.° Прочитайте вираз, назвіть основу та показник степеня:

1) 9^6; 3) $0{,}3^5$; 5) $(-0{,}6)^3$; 7) 73^1;
2) $2{,}4^7$; 4) $(-8)^2$; 6) $(-a)^{11}$; 8) $(3p)^{12}$.

5.2.° Спростіть вираз, замінивши добуток однакових множників степенем:

1) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;
2) $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$;
3) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$;
4) $2m \cdot 2m \cdot 2m \cdot 2m \cdot 2m$;
5) $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$;
6) $\underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{10 \text{ множників}}$;
7) $\underbrace{0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot \ldots \cdot 0{,}4}_{k \text{ множників}}$;
8) $\underbrace{c \cdot c \cdot \ldots \cdot c}_{m \text{ множників}}$.

5.3.° Користуючись означенням степеня, подайте у вигляді добутку степінь:

1) 11^6; 3) $\left(-\frac{1}{6}\right)^2$; 5) $(-3{,}6)^7$;
2) $0{,}1^4$; 4) $(5c)^3$; 6) $(a + b)^5$.

5.4.° Знайдіть значення виразу:

1) 2^5; 3) $1,5^3$; 5) 1^{12}; 7) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$;

2) $0,6^2$; 4) 0^6; 6) $(-1)^{12}$; 8) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$.

5.5.° Виконайте піднесення до степеня:

1) 7^2; 3) $1,2^2$; 5) $(-0,8)^3$; 7) $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$;

2) $0,5^3$; 4) $(-1)^7$; 6) $\left(\frac{1}{6}\right)^4$; 8) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$.

5.6.° Заповніть таблицю:

a	2	−2	10	−10	0,1	−0,1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
a^2								
a^3								
a^4								

5.7.° Заповніть таблицю:

a	−6	6	−0,4	0,4	3	0,03	$\frac{1}{2}$	−1	0
$10a^2$									
$(10a)^2$									

5.8.° Площа Кримського півострова — найбільшого півострова України дорівнює $2,55 \cdot 10^4$ км². Виразіть цю площу натуральним числом у квадратних кілометрах.

5.9.° Відстань від Землі до Сонця дорівнює $1,495 \cdot 10^{11}$ м. Виразіть цю відстань натуральним числом у метрах.

5.10.° Площа материків і островів Землі становить $1,49 \cdot 10^8$ км², а площа океанів — $3,61 \cdot 10^8$ км². Виразіть ці площі натуральними числами у квадратних кілометрах.

5.11.° Обчисліть:

1) $8^2 - 1^{10}$; 3) $(4,2-3,8)^4 \cdot 25^2$;

2) $0,3 \cdot 2^4$; 4) $(6^3 : 200 - 0,4^2) : 0,2^3$.

5.12.° Обчисліть:

1) $4^3 + 3^5$; 2) $0,6^3 - 0,4^3$; 3) $0,12 \cdot 5^4$.

5.13.° Знайдіть значення виразу:

1) $x^2 - x^3$, якщо $x = 0,1$;

2) $15a^2$, якщо $a = 0,4$;

3) $(x - y)^5$, якщо $x = 0{,}8$, $y = 0{,}6$;
4) a^2b^3, якщо $a = 0{,}6$, $b = 0{,}5$;
5) $(x^2 - y^2) : (x - y)$, якщо $x = 5$, $y = 3$;
6) $(x^2 - y^2) : x - y$, якщо $x = 5$, $y = 3$;
7) $x^2 - y^2 : (x - y)$, якщо $x = 5$, $y = 3$;
8) $x^2 - y^2 : x - y$, якщо $x = 5$, $y = 3$.

5.14.° Знайдіть значення виразу:
1) $16 - c^3$, якщо $c = 2$;
2) $(16x)^6$, якщо $x = 0{,}125$;
3) a^3b^2, якщо $a = 10$, $b = 0{,}1$;
4) $4a^4 - a$, якщо $a = 3$.

5.15.° Не виконуючи обчислення, порівняйте:
1) $(-5{,}8)^2$ і 0;
2) 0 і $(-3{,}7)^3$;
3) $(-12)^7$ і $(-6)^4$;
4) -8^8 і $(-8)^8$;
5) $(-17)^6$ і 17^6;
6) $(-34)^5$ і $(-39)^5$.

5.16.° Не виконуючи обчислення, порівняйте:
1) 0 і $(-1{,}9)^{10}$;
2) 0 і $(-76)^{15}$;
3) $(-0{,}1)^{12}$ і $(-12)^{25}$;
4) $\left(-4\frac{7}{9}\right)^9$ і $\left(-5\frac{8}{11}\right)^9$.

5.17.° Порівняйте з нулем значення виразів: 2^{100}; $(-2)^{100}$; -2^{100}; $-(-2)^{100}$. Чи є серед цих виразів такі, що набувають рівних значень?

5.18.° Порівняйте з нулем значення виразів: 5^{101}; -5^{101}; $(-5)^{101}$; $-(-5)^{101}$. Чи є серед цих виразів такі, що набувають рівних значень?

5.19.° Чи є правильною рівність:
1) $3^2 + 4^2 = 7^2$;
2) $5^2 + 12^2 = 13^2$;
3) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = 13^2$;
4) $(1 + 2 + 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$?

5.20.° Доведіть, що $1^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 = 11^2$.

5.21.• Розташуйте в порядку зростання значення виразів:
1) $0{,}3$; $0{,}3^2$; $0{,}3^3$;
2) $-0{,}4$; $(-0{,}4)^2$; $(-0{,}4)^3$.

5.22.• Порівняйте з нулем значення виразу:
1) $(-4)^7 \cdot (-12)^9$; 2) $(-5)^6 \cdot (-17)^{11}$; 3) $(-14)^4 \cdot (-25)^{14}$; 4) $(-7)^9 \cdot 0^6$.

5.23.• Порівняйте з нулем значення виразу:
1) $(-2)^{14} \cdot (-3)^{15} \cdot (-4)^{16}$;
2) $(-5)^{17} \cdot (-6)^{18} \cdot (-7)^{19}$.

5.24.• Запишіть:
1) числа 16; 64; 256 у вигляді степеня з основою 4;
2) числа 0,09; 0,027; 0,00243 у вигляді степеня з основою 0,3.

5.25.• Подайте число: 1) 10 000; 2) −32; 3) 0,125; 4) −0,00001; 5) $-\frac{8}{343}$ у вигляді степеня з показником, більшим за 1, і з найменшою за модулем основою.

5.26.• Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:
1) квадрат різниці чисел 7 і 5;
2) різниця квадратів чисел 7 і 5;
3) куб суми чисел 4 і 3;
4) сума кубів чисел 4 і 3.

5.27.° Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:

1) сума куба числа 5 і квадрата числа 8;
2) куб різниці чисел 9 і 8;
3) сума квадратів чисел 2,5 і 0,25;
4) квадрат суми чисел 7,8 і 8,2.

5.28.° Скільки в 1 км міститься:

1) метрів; 2) сантиметрів; 3) міліметрів?

Відповідь запишіть у вигляді степеня числа 10.

5.29.° Швидкість світла у вакуумі дорівнює 300 000 км/с.

1) Запишіть цю величину, використовуючи степінь числа 10.
2) Виразіть швидкість світла в метрах за секунду; запишіть результат, використовуючи степінь числа 10.

5.30.° Скільки в 1 м^2 міститься:

1) квадратних дециметрів; 3) квадратних міліметрів?
2) квадратних сантиметрів;

Відповідь запишіть у вигляді степеня числа 10.

5.31.° Які із чисел –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3 є коренями рівняння:

1) $x^4 = 16$; 3) $x^2 + x = 2$;
2) $x^5 = -243$; 4) $x^3 + x^2 = 6x$?

5.32.° При якому значенні x дорівнює нулю значення виразу:

1) $(2x - 3)^2$; 2) $(x + 4)^4$; 3) $(6x - 1)^5$?

5.33.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{10} = -1$; 2) $(x - 5)^4 = -16$.

5.34.° При яких натуральних значеннях n є правильною нерівність $8 < 3^n < 85$?

5.35.° При яких натуральних значеннях m є правильною нерівність $0{,}07 < 0{,}4^m < 0{,}5$?

5.36.•• Доведіть, що вираз $x^2 + (x - 1)^2$ набуває лише додатних значень.

5.37.•• Доведіть, що вираз $(x + 1)^2 + |x|$ набуває лише додатних значень.

5.38.•• Доведіть, що не має додатних коренів рівняння:

1) $2x^2 + 5x + 2 = 0$; 2) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$.

5.39.•• Доведіть, що не має від'ємних коренів рівняння:

1) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7x + 5 = 0$; 2) $x^8 + x^4 + 1 = x^7 + x^3 + x$.

5.40.•• При яких значеннях x і y є правильною рівність:

1) $x^2 + y^2 = 0$; 2) $(x - 1)^4 + (y + 2)^6 = 0$?

5.41.•• При яких значеннях x і y є правильною рівність $x^8 + (y - 3)^2 = 0$?

5.42.•• При якому значенні змінної набуває найменшого значення вираз:

1) $x^2 + 7$; 2) $(x - 1)^4 + 16$?

5.43.** При якому значенні змінної набуває найбільшого значення вираз:

1) $10 - x^2$;　　　　2) $24 - (x + 3)^6$?

5.44.** Доведіть, що значення виразу:

1) $101^{101} + 103^{103}$ ділиться націло на 2;
2) $16^7 + 15^8 - 11^9$ ділиться націло на 10;
3) $10^{10} - 7$ ділиться націло на 3;
4) $6^n - 1$ ділиться націло на 5 при будь-якому натуральному значенні n.

5.45.** Доведіть, що значення виразу:

1) $10^{100} + 8$ ділиться націло на 9;
2) $111^n - 6$ ділиться націло на 5 при будь-якому натуральному значенні n.

5.46.** Числа a, b, c і d відмінні від нуля. Чи можна стверджувати, що серед значень виразів $-ab$, $-bc$, cd, $-da$ є як додатні, так і від'ємні?

5.47.* Розв'яжіть ребус:

1) $М^3$ = КУБ;　　　　2) $СМ^3$ = КУБИК.

5.48.* Розв'яжіть ребус:

1) $С^У$ = РУКА;　　　　2) $СОМ^2$ = ОГОГО.

5.49.* Відновіть запис $ААА^А$ = ********.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

5.50. Обчисліть значення виразу:

$$\left(3\frac{1}{3}\cdot 1{,}3-7{,}2\cdot\frac{2}{27}-9{,}1:3{,}5\right):\frac{2}{5}.$$

5.51. До зливку сплаву масою 400 кг, що містить 15 % міді, додали 25 кг міді. Яким став відсотковий вміст міді в новому зливку?

5.52. В одному мішку було 80 кг цукру, а в другому — 60 кг. З першого мішка взяли в 3 рази більше цукру, ніж із другого, після чого в другому мішку залишилося цукру у 2 рази більше, ніж у першому. Скільки кілограмів цукру взяли з кожного мішка?

5.53. Розв'яжіть рівняння:

1) $9(2x - 1) - 5(11 - x) = 3(x + 4)$;　2) $5x - 26 = 12x - 7(x - 4)$.

5.54. Відомо, що одне із чисел a, b і c додатне, друге — від'ємне, а третє дорівнює нулю, причому $|a| = b^2(b - c)$. Установіть, яке із чисел є додатним, яке — від'ємним і яке дорівнює нулю.

6. Властивості степеня з натуральним показником

Розглянемо добуток двох степенів з однаковими основами, наприклад a^2a^5. Цей вираз можна подати у вигляді степеня з основою a:

$$a^2a^5 = (aa)\cdot(aaaaa) = aaaaaaa = a^7.$$

Отже, $a^2a^5 = a^{2+5}$.

Аналогічно легко переконатися в тому, що, наприклад, $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$, $a \cdot a^9 = a^{1+9} = a^{10}$.

Простежується закономірність: $a^m a^n = a^{m+n}$, де m і n — довільні натуральні числа.

Проте жодна кількість конкретних прикладів не може гарантувати, що наведена рівність є правильною для *будь-яких* натуральних m і n. Істинність її можна встановити тільки шляхом **доведення.**

У математиці твердження, справедливість якого встановлено за допомогою доведення, називають **теоремою.**

Теорема 6.1. ***Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n є справедливою рівність***

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Доведення. Для $m > 1$ і $n > 1$ маємо:

$$a^m a^n = (\underbrace{aa\cdot\ldots\cdot a}_{m \text{ множників}})(\underbrace{aa\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ множників}}) = \underbrace{aa\cdot\ldots\cdot a}_{(m+n) \text{ множників}} = a^{m+n}.$$

Оскільки не прийнято розглядати добуток, що складається з одного множника, то для повноти доведення слід окремо розглянути випадки: $m = 1$ і $n > 1$; $m > 1$ і $n = 1$; $m = n = 1$. Так, якщо $m = 1$ і $n > 1$, то

$$a \cdot a^n = a\cdot(\underbrace{aa\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ множників}}) = \underbrace{aa\cdot\ldots\cdot a}_{(n+1) \text{ множників}} = a^{n+1}.$$

Випадки, коли $m > 1$ і $n = 1$ або коли $m = n = 1$, розгляньте самостійно. ▲

Тотожність $a^m a^n = a^{m+n}$ виражає **основну властивість степеня.**

Аналогічна властивість має місце й для добутку трьох і більше степенів. Наприклад,

$$3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^7 = (3^2 \cdot 3^3)\cdot 3^7 = 3^{2+3}\cdot 3^7 = 3^{(2+3)+7} = 3^{2+3+7} = 3^{12}.$$

Отже, ***перемножуючи степені з однаковими основами, показники додають, а основу залишають тією самою.***

Розглянемо вираз $a^9 : a^4$, де $a \neq 0$. Він є часткою двох степенів з однаковими основами. Оскільки $a^4 \cdot a^5 = a^9$, то за означенням частки можна записати: $a^9 : a^4 = a^5$, тобто $a^9 : a^4 = a^{9-4}$. Цей приклад підказує, що має місце така теорема.

Теорема 6.2. ***Для будь-якого числа a, відмінного від нуля, і будь-яких натуральних чисел m і n таких, що m > n, є справедливою рівність***

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Доведення. Розглянемо добуток степенів a^n і a^{m-n}. Використовуючи основну властивість степеня, маємо:

$$a^n \cdot a^{m-n} = a^{n+(m-n)} = a^{n+m-n} = a^m.$$

Тоді за означенням частки:

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \blacktriangle$$

Із цієї теореми випливає таке правило:

при діленні степенів з однаковими основами від показника степеня діленого віднімають показник степеня дільника, а основу залишають тією самою.

Розглянемо вираз $(a^3)^4$. Він є степенем з основою a^3 і показником 4. Тому

$$(a^3)^4 = a^3a^3a^3a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3\cdot 4} = a^{12}.$$

Цей приклад підказує, що має місце така теорема.

Теорема 6.3. ***Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n є справедливою рівність***

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Доведення. Очевидно, що для $n = 1$ рівність, яка доводиться, є правильною. Для $n > 1$ маємо:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ множників}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ доданків}}} = a^{mn}. \blacktriangle$$

Із цієї теореми випливає таке правило:

при піднесенні степеня до степеня показники перемножують, а основу залишають тією самою.

Наприклад, $(3^7)^2 = 3^{7\cdot 2} = 3^{14}$, $(x^k)^3 = x^{k\cdot 3} = x^{3k}$.

Покажемо, як можна перетворити степінь добутку, наприклад вираз $(ab)^3$:

$$(ab)^3 = (ab)\cdot(ab)\cdot(ab) = (aaa)\cdot(bbb) = a^3b^3.$$

У загальному випадку має місце така теорема.

Теорема 6.4. ***Для будь-яких чисел a і b та будь-якого натурального числа n є справедливою рівність***

$$(ab)^n = a^nb^n.$$

Доведення. Очевидно, що для $n = 1$ рівність, яка доводиться, є правильною. Для $n > 1$ маємо:

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n \text{ множників}} = (\underbrace{aa\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ множників}})(\underbrace{bb\cdot\ldots\cdot b}_{n \text{ множників}}) = a^nb^n. \blacktriangle$$

Аналогічна властивість має місце й для добутку трьох або більше множників. Наприклад, $(abc)^n = ((ab)\cdot c)^n = (ab)^n \cdot c^n = a^n b^n c^n$.

Отже, ***при піднесенні добутку до степеня кожний множник підносять до степеня й отримані результати перемножують.***

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз: 1) $(a^5)^2 \cdot (a^6)^7$; 2) $(-a^4)^9$; 3) $(-a^4)^8$.

Розв'язання. 1) Застосувавши послідовно правило піднесення степеня до степеня та правило множення степенів з однаковою основою, отримаємо:

$$(a^5)^2 \cdot (a^6)^7 = a^{10} \cdot a^{42} = a^{52}.$$

2) Оскільки $-a^4 = -1 \cdot a^4$, то, застосувавши правило піднесення добутку до степеня, отримаємо:

$$(-a^4)^9 = (-1 \cdot a^4)^9 = (-1)^9 \cdot (a^4)^9 = -1 \cdot a^{36} = -a^{36}.$$

3) Маємо: $(-a^4)^8 = (-1 \cdot a^4)^8 = (-1)^8 \cdot (a^4)^8 = 1 \cdot a^{32} = a^{32}$.

ПРИКЛАД 2 Подайте у вигляді степеня вираз $216a^3b^6$.

Розв'язання. Маємо: $216a^3b^6 = 6^3 \cdot a^3 \cdot (b^2)^3 = (6ab^2)^3$.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть значення виразу $\left(1\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$.

Розв'язання. $\left(1\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = \left(\frac{4}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

ПРИКЛАД 4 Порівняйте значення виразів:

1) $(-11)^{14} \cdot (-11)^3$ і $(-11)^{16}$;
2) $(-12)^{19}$ і $(-12)^{15}$;
3) 5^{30} і 9^{20};
4) 16^3 і 65^2.

Розв'язання. 1) Маємо: $(-11)^{14} \cdot (-11)^3 = (-11)^{17} < 0$. Разом з тим $(-11)^{16} > 0$.

Отже, $(-11)^{14} \cdot (-11)^3 < (-11)^{16}$.

2) Оскільки $|(-12)^{19}| > |(-12)^{15}|$, а числа, що порівнюються, від'ємні, то $(-12)^{19} < (-12)^{15}$.

3) Оскільки $5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$ і $9^{20} = (9^2)^{10} = 81^{10}$, то $5^{30} > 9^{20}$.

4) Маємо: $16^3 = (4^2)^3 = (4^3)^2 = 64^2$. Отже, $16^3 < 65^2$.

ПРИКЛАД 5 Якою цифрою закінчується значення виразу 2^{100}?

Розв'язання. Маємо: $2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25}$. Оскільки $6 \cdot 6 = 36$, то добуток будь-яких чисел, що закінчуються на 6, є числом, остання цифра якого дорівнює 6.

Тому коли число закінчується цифрою 6, то будь-який його степінь закінчується цифрою 6.

Відповідь: 6.

ПРИКЛАД 6 **Порівняйте значення виразів 127^{23} і 513^{18}.**

Розв'язання. Маємо: $127^{23} < 128^{23}$. Запишемо: $128^{23} = (2^7)^{23} = 2^{161}$. Маємо: $2^{161} < 2^{162}$. Запишемо: $2^{162} = (2^9)^{18} = 512^{18}$. Маємо: $512^{18} < 513^{18}$.

Отже, $127^{23} < 513^{18}$.

1. Запишіть тотожність, яка виражає основну властивість степеня.
2. Як помножити степені з однаковими основами?
3. Як поділити степені з однаковими основами?
4. Як піднести степінь до степеня?
5. Як піднести добуток до степеня?

ВПРАВИ

6.1.° Подайте у вигляді степеня добуток:

1) m^5m^4; 5) $y^3y^5y^9$; 9) $x^4xx^{11}x^2$;
2) xx^7; 6) c^8c^9c; 10) $(ab)^5\cdot(ab)^{15}$;
3) a^3a^3; 7) $(b-c)^{10}(b-c)^6$; 11) $(2x+3y)^6\cdot(2x+3y)^{14}$;
4) $6^8\cdot6^3$; 8) $11^2\cdot11^4\cdot11^6$; 12) $(-xy)^2\cdot(-xy)^7\cdot(-xy)^9$.

6.2.° Подайте у вигляді степеня вираз:

1) a^5a^8; 3) a^9a; 5) $(m+n)^{13}\cdot(m+n)$;
2) a^2a^2; 4) aa^2a^3; 6) $(cd)^8\cdot(cd)^{18}\cdot(cd)$.

6.3.° Замініть зірочку таким степенем з основою a, щоб виконувалася рівність:

1) $a^6\cdot * = a^{14}$; 2) $*\cdot a^6 = a^7$; 3) $a^{10}\cdot*\cdot a^2 = a^{18}$.

6.4.° Подайте вираз a^{12} у вигляді добутку двох степенів з основами a, один з яких дорівнює:

1) a^6; 2) a^4; 3) a^3; 4) a^5; 5) a.

6.5.° Подайте у вигляді степеня частку:

1) $a^{12} : a^3$; 2) $b^6 : b$; 3) $c^7 : c^6$; 4) $(a+b)^8 : (a+b)^4$.

6.6.° Знайдіть значення виразу:

1) $7^7 : 7^5$; 2) $10^{18} : 10^{14}$; 3) $0{,}6^9 : 0{,}6^6$; 4) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^5 : \left(-1\frac{1}{8}\right)^3$.

6.7.° Виконайте ділення:

1) $m^{10} : m^2$; 2) $x^5 : x^4$; 3) $y^{18} : y^6$.

6.8.° Подайте у вигляді степеня з основою m вираз:

1) $(m^5)^3$; 2) $(m^3)^4$; 3) $((m^2)^4)^6$; 4) $(m^7)^2\cdot(m^4)^9$.

6.9.° Подайте у вигляді степеня з основою n вираз:
1) $(n^2)^8$; 2) $(n^9)^5$; 3) $((n^3)^2)^{10}$; 4) $(n^{12})^4 \cdot (n^{21})^2$.

6.10.° Подайте степінь у вигляді добутку степенів:
1) $(ab)^6$; 3) $(3c)^7$; 5) $(-0,2cd)^4$;
2) $(mnp)^5$; 4) $(-8xy)^3$; 6) $\left(\frac{3}{7}kt\right)^9$.

6.11.° Подайте степінь у вигляді добутку степенів:
1) $(ax)^2$; 2) $(xyz)^{12}$; 3) $(7m)^8$; 4) $(-0,3bc)^{11}$.

6.12.° Спростіть вираз:
1) $-x \cdot x^2$; 3) $-x \cdot (-x)^2$;
2) $(-x)^2 \cdot x$; 4) $(-x) \cdot (-x)^2 \cdot (-x)$.

6.13.° Спростіть вираз:
1) $(-a)^2 \cdot a^3$; 2) $-a^2 \cdot a^3$; 3) $a^2 \cdot (-a)^3$; 4) $-a^2 \cdot (-a)^3$.

6.14.° Спростіть вираз:
1) $(-a^5)^2$; 2) $(-a^3)^3$; 3) $(-a^4)^7 \cdot (-a^2)^6$.

6.15.° Спростіть вираз:
1) $((-a^6)^5)^9$; 2) $((-a^{11})^2)^3$.

6.16.° Подайте у вигляді степеня вираз:
1) a^3b^3; 3) $9m^2n^2$; 5) $-\frac{27}{343}c^3d^3$;
2) $-m^7$; 4) $64x^3y^3$; 6) $0,0001k^4p^4$.

6.17.° Подайте у вигляді степеня вираз:
1) $x^{12}y^{12}$; 2) $-125m^3n^3$; 3) $32p^5q^5$; 4) $1\ 000\ 000\ 000a^9b^9c^9$.

6.18.° Подайте вираз у вигляді степеня та обчисліть його значення (у разі потреби скористайтеся таблицею степенів чисел 2 і 3, розташованою на форзаці підручника):
1) $2^3 \cdot 2^4$; 3) $0,2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,2^3$; 5) $2^{12} : 2^8$; 7) $\left(\frac{1}{3}\right)^9 \cdot 9^9$;
2) $(3^2)^3$; 4) $0,5^{12} \cdot 2^{12}$; 6) $(3^4)^5 : 3^{19}$; 8) $2,5^5 \cdot 40^5$.

6.19.° Подайте вираз у вигляді степеня та обчисліть його значення (у разі потреби скористайтеся таблицею степенів чисел 2 і 3, розташованою на форзаці підручника):
1) $2^2 \cdot 2^3$; 3) $3^2 \cdot 3 \cdot 3^3$; 5) $7^9 \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^9$;
2) $(2^2)^3$; 4) $0,3^8 : 0,3^5$; 6) $12,5^3 \cdot 8^3$.

6.20.° Знайдіть у наведених прикладах помилки:
1) $a^4a^3 = a^{12}$; 4) $3^2 \cdot 5^2 = 15^4$; 7) $3 \cdot 4^3 = 12^3$;
2) $a \cdot a = 2a$; 5) $2^2 \cdot 7^3 = 14^5$; 8) $a^7b^7 = (ab)^{14}$;
3) $(a^3)^2 = a^9$; 6) $(2a)^4 = 8a^4$; 9) $a^3b^2 = (ab)^6$.

6.21.° Замість зірочки запишіть такий вираз, щоб виконувалася рівність:
1) $(*)^4 = c^{20}$; 2) $(*)^2 = c^{14}$; 3) $(*)^n = c^{8n}$; 4) $(*)^7 = c^{7n}$,
де n — натуральне число.

6.22.° Подайте степінь a^7 у вигляді добутку двох степенів з основою a всіма можливими способами.

6.23.° Подайте у вигляді степеня вираз:
1) $a^n a^5$; 2) aa^n; 3) $a^3 a^n$; 4) $(a^3)^n$; 5) $(a^n)^2 \cdot (a^5)^n$,
де n — натуральне число.

6.24.° Подайте у вигляді степеня вираз:
1) $2^4 \cdot 2^4$; 2) $2^4 + 2^4$; 3) $2^n \cdot 2^n$; 4) $2^n + 2^n$,
де n — натуральне число.

6.25.° Подайте у вигляді степеня вираз:
1) $3^5 + 3^5 + 3^5$; 2) $4^k + 4^k + 4^k + 4^k$, де k — натуральне число.

6.26.° Доведіть, що коли сторону квадрата збільшити в n разів, то його площа збільшиться в n^2 разів.

6.27.° У скільки разів збільшиться об'єм куба, якщо його ребро збільшити в m разів?

6.28.° Запишіть у вигляді степеня з показником 2 вираз:
1) a^2b^6; 2) x^8y^{14}; 3) $x^4y^{10}z^{18}$; 4) $4m^{12}n^{16}$; 5) $81c^{10}d^{32}p^{44}$.

6.29.° Запишіть у вигляді степеня з показником 3 вираз:
1) a^3b^6; 2) x^9y^{15}; 3) $8x^{12}y^{18}z^{24}$; 4) $0{,}001m^{30}n^{45}$.

6.30.° Подайте у вигляді степеня з основою 5 вираз:
1) 125^6; 2) $(25^4)^2$.

6.31.° Подайте у вигляді степеня з основою -5 вираз:
1) 625^5; 2) $((-25)^2)^3$.

6.32.° Подайте у вигляді степеня з основою 2 вираз:
1) $8^9 \cdot 4^5$; 2) $32 \cdot 16^6 \cdot 64^3$.

6.33.° Знайдіть значення виразу:
1) $(6^4)^4 : (6^5)^3$; 3) $\dfrac{7^{14} \cdot (7^2)^3}{(7^3)^6 \cdot 7^2}$; 5) $\dfrac{3^8 \cdot 7^8}{21^7}$;
2) $8^3 : 4^4$; 4) $\dfrac{25^3 \cdot 125^2}{5^{10}}$; 6) $\dfrac{5^9 \cdot 4^6}{20^6}$.

6.34.° Обчисліть:
1) $100^5 : 1000^2$; 2) $\dfrac{3^{10} \cdot (3^3)^5}{(3^5)^4 \cdot 3}$; 3) $\dfrac{4^3 \cdot 16^2}{2^{12}}$; 4) $\dfrac{45^{10}}{5^8 \cdot 3^{19}}$.

6.35.° Обчисліть значення виразу:
1) $\left(1\dfrac{1}{6}\right)^9 \cdot \left(\dfrac{6}{7}\right)^{10}$; 2) $5^{14} \cdot 0{,}2^{12}$; 3) $\left(-1\dfrac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^8$.

6.36.° Знайдіть значення виразу:
1) $10^5 \cdot 0{,}1^7$; 2) $1{,}9^{14} \cdot \left(\dfrac{10}{19}\right)^{15}$.

6.37.° Порівняйте значення виразів:
1) $(-5)^{21} \cdot (-5)$ і $(-5)^{24}$; 3) $(-8)^5 \cdot (-8)^4$ і $(-8)^8$;
2) $(-7)^8 \cdot (-7)^7$ і $(-7)^{17}$; 4) $(-6)^3 \cdot (-6)^9$ і $(-6)^{13}$.

6.38.° Замініть зірочку таким степенем, щоб виконувалася рівність:
1) $8 \cdot * = 2^8$; 2) $a^n \cdot * = a^{3n+2}$, де n — натуральне число.

6.39.° Запишіть вираз 3^{24} у вигляді степеня з основою:
1) 3^3; 2) 3^{12}; 3) 9; 4) 81.

6.40.° Запишіть вираз 2^{48} у вигляді степеня з основою:
1) 2^4; 2) 2^{16}; 3) 8; 4) 64.

6.41.° Розв'яжіть рівняння:
1) $x^7 = 6^{14}$; 2) $x^4 = 5^{12}$.

6.42.•• Порівняйте значення виразів:
1) 2^{300} і 3^{200}; 2) 4^{18} і 18^9; 3) 27^{20} і 11^{30}; 4) $3^{10} \cdot 5^8$ і 15^9.

6.43.•• Порівняйте значення виразів:
1) 10^{40} і $10\,001^{10}$; 2) 124^4 і 5^{12}; 3) 8^{12} і 59^6; 4) 6^{14} і $2^{16} \cdot 3^{12}$.

6.44.•• Помножили квадрат натурального числа на куб натурального числа. Чи могли отримати шостий степінь натурального числа?

6.45.•• Відомо, що сума $625 + 625 + \ldots + 625$ дорівнює 5^{101}. Скільки доданків у цій сумі?

6.46.•• Відомо, що сума $8 + 8 + 8 + \ldots + 8$ дорівнює 4^{87}. Скільки доданків у цій сумі?

6.47.•• Якою цифрою закінчується значення виразу (n — натуральне число):
1) 4^{100}; 2) 3^{4n}; 3) 4^n; 4) 3^n; 5) $2^n \cdot 3^{n+1}$?

6.48.•• Якою цифрою закінчується значення виразу (n — натуральне число):
1) 9^{2n}; 2) 7^{4n}; 3) 7^{2n}; 4) $3^{n+2} \cdot 7^n$?

6.49.•• Доведіть, що значення виразу:
1) $17^8 + 19$ ділиться націло на 10;
2) $64^{64} - 1$ ділиться націло на 5;
3) $3^{4n} + 14$, де n — натуральне число, ділиться націло на 5.

6.50.•• Доведіть, що значення виразу:
1) $4^{40} - 1$; 2) $2004^{171} + 171^{2004}$
ділиться націло на 5.

6.51.* Подайте число 171 у вигляді дробу, чисельник якого є дев'ятим степенем натурального числа, а знаменник — десятим.

6.52.* Доведіть, що будь-яке натуральне число можна подати у вигляді дробу, чисельник якого є четвертим степенем натурального числа, а знаменник — п'ятим.

6.53.* Чи існує таке натуральне число, при множенні якого на 2 буде отримано квадрат натурального числа, при множенні на 3 — куб натурального числа, при множенні на 5 — п'ятий степінь натурального числа?

6.54.* Порівняйте значення виразів:

1) 126^{12} і 24^{18}; 2) 31^{11} і 17^{14}.

6.55.* Доведіть, що $48^{25} < 344^{17}$.

6.56.* Число $\frac{1}{5^{100}}$ записали у вигляді скінченного десяткового дробу. Знайдіть останню цифру цього запису.

6.57.* Чи існують чотири таких натуральних числа, що кожне з них не ділиться націло на жодне з решти, а квадрат кожного із цих чисел ділиться націло на кожне з решти?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

6.58. (*Задача з українського фольклору.*) Кум Іван спитав у кума Степана: «Скільки в тебе качок?» Кум Степан відповів: «Качок у мене стільки, що як висидять вони мені ще стільки каченят, та ще придбаю одну качку, та ще тричі куплю стільки, скільки цих качок і каченят, то всього буде їх у мене 100». Скільки качок було в кума Степана?

6.59. Один маляр може пофарбувати кімнату за 6 год, а другий — за 4 год. Спочатку перший маляр працював 2 год, а потім до нього приєднався другий маляр. За скільки годин було пофарбовано кімнату?

6.60. Від пристані за течією річки відправилася на човні група туристів, розраховуючи повернутися через 4 год. Швидкість човна в стоячій воді становить 10 км/год, а швидкість течії — 2 км/год. На яку найбільшу відстань туристи можуть відплисти від пристані, якщо вони хочуть перед тим, як повертатися, зробити зупинку на 2 год?

6.61. Розв'яжіть рівняння:

1) $2{,}5 - 3x = 3(x - 2{,}5) - 2$;

2) $17(2 - 3x) - 5(x + 12) = 8(1 - 7x) - 34$.

6.62. У шестицифровому числі перша й четверта, друга й п'ята, третя й шоста цифри однакові. Доведіть, що це число кратне числам 7, 11 і 13.

7. Одночлени

Розглянемо вирази:

$$2b;\ \frac{1}{3}xy^2;\ -ab;\ m^3\cdot 3k^5;\ (3{,}14)^2pq^3\cdot(-7)\,r^2t^4.$$

Кожен із них є добутком чисел, змінних та їхніх степенів. Такі вирази називають **одночленами**.

Домовилися також вважати одночленами всі числа, будь-які змінні та їхні степені. Наприклад, одночленами є:

$$-5;\ 0{,}3;\ x;\ t^2;\ 2^3.$$

Зауважимо, що, наприклад, вирази

$$2a+b;\ x-1;\ a:b;\ y^2+y-2$$

не є одночленами, оскільки вони, крім множення та піднесення до степеня, містять ще й інші дії.

Коли ми бачимо одночлен $3ab^3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)abc$, виникає природне бажання спростити його. Маємо:

$$3ab^3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)abc=3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)aab^3bc=-2a^2b^4c.$$

Отриманий одночлен містить *тільки один числовий множник, відмінний від нуля, який стоїть на першому місці*. Усі інші множники — це степені з *різними* основами. Такий вигляд одночлена називають **стандартним виглядом одночлена**.

Наведемо ще приклади одночленів стандартного вигляду:

$$-\frac{1}{8}xy;\ 2{,}8a^3;\ 7x^2yz^3t^5.$$

Зауважимо, що, наприклад, вирази $a^2\cdot 2b^3$ і $-3x^2xy^3$ не є одночленами стандартного вигляду. Справді, хоча перший із них і має єдиний числовий множник, але він не стоїть на першому місці. У другому — степінь з основою x записано двічі.

Проте ці одночлени легко **привести** (перетворити) до стандартного вигляду:

$$a^2\cdot 2b^3=2a^2b^3 \text{ і } -3x^2xy^3=-3x^3y^3.$$

До одночленів стандартного вигляду також відносять числа, відмінні від нуля, змінні та їхні степені. Так, -2, 3^2, x, b^3 — одночлени стандартного вигляду.

Число 0, а також одночлени, які тотожно дорівнюють нулю, наприклад $0x^2$, $0ab$ тощо, називають **нуль-одночленами**. Їх не відносять до одночленів стандартного вигляду.

Означення. Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають коефіцієнтом одночлена.

Наприклад, коефіцієнти одночленів $-3a^2bc$ і $0,07x$ відповідно дорівнюють -3 і $0,07$.

Узагалі, будь-який одночлен стандартного вигляду має коефіцієнт. І навіть, наприклад, в одночленів x^2y і $-mn$, при записі яких числовий множник не використовують, коефіцієнтами є числа 1 і -1 відповідно. І це зрозуміло, адже $x^2y = 1 \cdot x^2y$, $-mn = -1 \cdot mn$.

Розглянемо одночлени $\frac{2}{3}x^3yz$ і $-2zx^3y$. У них однакові буквені частини, тобто буквені частини є тотожно рівними виразами. Такі одночлени називають **подібними**. До подібних одночленів також відносять і числа. Наприклад, 7 і -5 — подібні одночлени.

Звернемо увагу на те, що, наприклад, в одночленів $\frac{2}{3}x^3y^2z$ і $-2zx^3y$ буквені частини не однакові, хоча й складаються з одних і тих самих змінних. Тому ці одночлени не є подібними.

Означення. Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, що входять до нього. Степінь одночлена, який є числом, відмінним від нуля, вважають рівним нулю.

Також вважають, що нуль-одночлен степеня не має.

Наприклад, степінь одночлена $-3,8m^2xy^7$ дорівнює 10, а степені одночленів x^3 і 9 дорівнюють відповідно 3 і 0.

Розглянемо два одночлени $\frac{1}{5}ab^3$ і $10abx$. Одночлен $\frac{1}{5}ab^3 \cdot 10abx$ є їхнім добутком. Спростимо його:

$$\frac{1}{5}ab^3 \cdot 10abx = \left(\frac{1}{5} \cdot 10\right)(aa)(b^3b)\,x = 2a^2b^4x.$$

Отже, добутком двох одночленів є одночлен. Його зазвичай записують у стандартному вигляді.

При піднесенні одночлена до степеня також отримують одночлен. Піднесемо, наприклад, до четвертого степеня одночлен $-\frac{1}{2}xy^3z^2$. Маємо:

$$\left(-\frac{1}{2}xy^3z^2\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot x^4 \cdot (y^3)^4 \cdot (z^2)^4 = \frac{1}{16}x^4y^{12}z^8.$$

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз $0,2a^2b^4 \cdot (-5a^3b)^2$.

Розв'язання. Маємо:

$$0,2a^2b^4 \cdot (-5a^3b)^2 = 0,2a^2b^4 \cdot (-5)^2 \cdot (a^3)^2b^2 = 0,2a^2b^4 \cdot 25a^6b^2 =$$
$$= 0,2 \cdot 25a^2a^6b^4b^2 = 5a^8b^6.$$

ПРИКЛАД 2 Значення змінних a і b такі, що $4a^3b^4 = 7$. Знайдіть значення виразу $-\frac{2}{7}a^6b^8$.

Розв'язання. Маємо:

$$-\frac{2}{7}a^6b^8 = -\frac{1}{56}\cdot 16a^6b^8 = -\frac{1}{56}\cdot(4a^3b^4)^2 = -\frac{1}{56}\cdot 7^2 = -\frac{1}{56}\cdot 49 = -\frac{7}{8}.$$

1. Які вирази називають одночленами?
2. Поясніть, який вигляд одночлена називають його стандартним виглядом.
3. Що називають коефіцієнтом одночлена?
4. Які одночлени називають подібними?
5. Що називають степенем одночлена?

ВПРАВИ

7.1.° Чи є одночленом вираз:

1) $5xy$; 4) 8; 7) $\frac{6m^2k^3}{11a^5}$; 10) $3(a^2-b^2)$;

2) $-\frac{1}{3}a^2b^3c$; 5) 0; 8) b^9; 11) $-2\frac{4}{9}aa^2b^3b^6$;

3) $m+n$; 6) $\frac{4}{7}pk^4$; 9) m^4m; 12) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^2 x^5x^3yz^{10}$?

7.2.° Укажіть, які з одночленів записано в стандартному вигляді:

1) $5mnm^2$; 3) $-7t^3\cdot 4t^5$; 5) $\frac{6}{13}x^8y^9$;

2) $1{,}4ab^7c^3$; 4) $-abc$; 6) $m^6n^4\cdot 10$.

7.3.° Чи є подібними одночлени:

1) $5a$ і $7a$; 3) $8x^2y^4$ і $8x^2y^5$; 5) $\frac{1}{2}m^7n^8$ і $\frac{1}{2}m^8n^7$;

2) $3a^2b^3c$ і $6a^2b^3c$; 4) $3y^2$ і $2y^3$; 6) $-0{,}1a^9b^{10}$ і $0{,}1a^9b^{10}$?

7.4.° Запишіть одночлен, подібний даному, коефіцієнт якого в 4 рази більший за коефіцієнт даного одночлена:

1) $1{,}4x^3y^7$; 2) $c^4d^{10}p^2$; 3) $1\frac{1}{4}a^5b^5c^9$.

7.5.° Зведіть одночлен до стандартного вигляду, укажіть його коефіцієнт і степінь:

1) $9a^4aa^6$; 3) $7a\cdot(-9ac)$; 5) $-5x^2\cdot 0{,}1x^2y\cdot(-2y)$;

2) $3x\cdot 0{,}4y\cdot 6z$; 4) $-3\frac{1}{3}m^5\cdot 9mn^9$; 6) $c\cdot(-d)\cdot c^{18}$.

7.6.° Подайте одночлен у стандартному вигляді, підкресліть його коефіцієнт:

1) $6bb^2$; 3) $-0{,}8u^4\cdot 4t^3\cdot(-2t^7)$;

2) $1{,}5c^3d^4\cdot 8c^2d^5$; 4) $4{,}5a^2bc^7\cdot 1\frac{1}{9}a^8b^6c$.

7.7.° Знайдіть значення одночлена:

1) $5x^2$, якщо $x=-4$;

2) $-4{,}8a^4b^3$, якщо $a=-1$, $b=\frac{1}{2}$;

3) $0{,}04c^3d^5$, якщо $c=-10$, $d=2$;

4) $\frac{4}{9}m^3n^2p^3$, якщо $m=-3$, $n=5$, $p=-1$.

7.8.° Знайдіть значення одночлена:

1) $3m^3$, якщо $m=-3$;

2) $\frac{7}{16}a^2b^4$, якщо $a=-\frac{1}{7}$, $b=2$;

3) $0{,}8m^2n^2k$, якщо $m=0{,}3$, $n=\frac{1}{2}$, $k=2000$.

7.9.° Виконайте множення одночленів:

1) $0{,}6a^4b^3\cdot 4a^2b$;

2) $-2{,}8x^2y^5\cdot 0{,}5x^4y^6$;

3) $13c^2d\cdot(-3cd)$;

4) $0{,}7x^6y^9\cdot 0{,}3xy$;

5) $-\frac{3}{20}p^2q^8\cdot\frac{40}{81}p^8q^2$;

6) $-6\frac{1}{2}mn^8p^{11}\cdot 3\frac{5}{13}m^5n^5$.

7.10.° Спростіть вираз:

1) $12a^2\cdot 5a^3b^7$;

2) $-4m^3\cdot 0{,}25m^6$;

3) $3ab\cdot(-17a^2b)$;

4) $56x^5y^{14}\cdot\frac{2}{7}x^2y$;

5) $-\frac{1}{3}p^2\cdot(-27k)\cdot 5pk$;

6) $2\frac{1}{4}b^2c^5d^3\cdot\left(-3\frac{1}{3}b^3c^4d^7\right)$.

7.11.° Перетворіть в одночлен стандартного вигляду вираз:

1) $(3a^2b)^2$;

2) $(-0{,}2x^3y^4)^3$;

3) $(-10m^2y^8)^5$;

4) $(16x^6y^7z^8)^2$;

5) $\left(-\frac{1}{5}c^6d\right)^4$;

6) $\left(1\frac{1}{2}a^8b^9\right)^6$.

7.12.° Виконайте піднесення до степеня:

1) $(-6m^3n^3)^3$;

2) $(-7x^9y^{10})^2$;

3) $(0{,}5a^{12}b^{14})^2$;

4) $(3ab^4c^5)^4$;

5) $\left(-\frac{1}{2}x^8y^9\right)^5$;

6) $\left(2\frac{1}{7}a^6b^8\right)^2$.

7.13.• Подайте даний вираз у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $3a^2b^6$:

1) $3a^6b^8$;
2) $-12a^2b^{10}$;
3) $-2{,}7a^5b^7$;
4) $2\frac{2}{7}a^{20}b^{30}$.

7.14.• Яким одночленом треба замінити зірочку, щоб виконувалася рівність:

1) $*\cdot 3b^4=12b^6$;

2) $-5a^5b^2\cdot *=-20a^6b^8$;

3) $-7a^3b^9\cdot *=4{,}2a^5b^{12}$;

4) $23a^{12}b^{16}\cdot *=-23a^{29}b^{17}$?

7.15.• Виконайте множення одночленів, де m і n — натуральні числа:

1) $2\frac{5}{6}a^{n+2}b^{m+3} \cdot \frac{9}{17}a^{5n-4}b^{2m-1}$; 2) $-7\frac{1}{3}a^{2n-1}b^{3n-1} \cdot 1\frac{1}{11}a^{n+6}b^{3n+1}$.

7.16.• Подайте у вигляді квадрата одночлена стандартного вигляду вираз:

1) $4a^{10}$; 2) $36a^8b^2$; 3) $0{,}16a^{14}b^{16}$; 4) $289a^{20}b^{30}c^{40}$.

7.17.• Подайте у вигляді куба одночлена стандартного вигляду вираз:

1) $8x^6$; 2) $-27x^3y^9$; 3) $0{,}001x^{12}y^{18}$; 4) $-\frac{125}{216}x^{15}y^{21}z^{24}$.

7.18.• Подайте одночлен $64a^6b^{12}$ у вигляді:

1) добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $2a^2b^8$;
2) квадрата одночлена стандартного вигляду;
3) куба одночлена стандартного вигляду.

7.19.• Подайте одночлен $81m^4n^{16}$ у вигляді:

1) добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $-\frac{1}{3}mn^{14}$;
2) квадрата одночлена стандартного вигляду;
3) четвертого степеня одночлена стандартного вигляду.

7.20.• Спростіть вираз:

1) $2a^3 \cdot (-5a^4b^5)^2$; 4) $-1\frac{3}{11}m^4n^9 \cdot \left(-\frac{1}{7}mn^5\right)^2$;

2) $(-x^6y)^3 \cdot 11x^4y^5$; 5) $1\frac{7}{9}x^7y^2 \cdot \left(\frac{3}{4}x^2y^9\right)^4$;

3) $(-0{,}6a^3b^5c^6)^2 \cdot 3a^2c^8$; 6) $-(-2c^2d^5)^7 \cdot \left(-\frac{1}{2}c^4d^5\right)^4$.

7.21.• Спростіть вираз:

1) $20a^8 \cdot (9a)^2$; 4) $(0{,}2x^7y^8)^3 \cdot 6x^2y^2$;

2) $(-b^5)^4 \cdot 12b^6$; 5) $\left(-\frac{1}{2}ab^4\right)^3 \cdot (4a^6)^2$;

3) $(3m^6n^3)^4 \cdot \left(-\frac{1}{81}m^9n\right)$; 6) $\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)^5 \cdot \left(-\frac{3}{4}xy^2\right)^2$.

7.22.•• Замініть зірочки такими одночленами, щоб виконувалася рівність:

1) $(*)^2 \cdot (*)^3 = 9a^2b^3c^5$; 3) $(*)^3 \cdot (*)^2 = -72m^8n^{11}$;

2) $(*)^3 \cdot (*)^4 = 16a^7b^6c^8$; 4) $(*)^2 \cdot (*)^5 = 32x^{29}y^{21}z^9$.

7.23.•• Замініть зірочки такими одночленами, щоб виконувалася рівність:

1) $(*)^2 \cdot (*)^3 = 72m^7n^{11}$; 3) $(*)^2 \cdot (*)^5 = -288a^9b^{11}c^{12}$.

2) $(*)^3 \cdot (*)^4 = -81x^{10}y^{17}z^{13}$;

7.24.•• Значення змінних x і y такі, що $5x^2y^4 = 6$. Знайдіть значення виразу:

1) $1{,}5x^2y^4$; 2) $25x^4y^8$; 3) $-25x^6y^{12}$.

7.25.•• Значення змінних a і b такі, що $3ab^3 = 4$. Знайдіть значення виразу:

1) $-1{,}2ab^3$; 2) $27a^3b^9$; 3) $-\frac{2}{3}a^2b^6$.

7.26.•• Значення змінних a, b і c такі, що $2a^2b = 7$, $a^3c^2 = 2$. Знайдіть значення виразу:

1) $6a^5bc^2$; 2) $a^7b^2c^2$; 3) $2\frac{1}{7}a^8bc^4$.

7.27.•• Значення змінних m, n і p такі, що $m^3n^2 = 3$, $\frac{1}{3}n^3p^2 = 5$. Знайдіть значення виразу:

1) $m^3n^5p^2$; 2) $2m^3n^8p^4$; 3) $-0{,}4m^{12}n^{11}p^2$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

7.28. Деяке число спочатку зменшили на 10 %, а потім результат збільшили на 20 %. Після цього отримали число, яке на 48 більше за дане. Знайдіть дане число.

7.29. (*Задача з російського фольклору.*) Летіла зграя гусей, а назустріч їм летить одна гуска й каже: «Здрастуйте, сто гусей!» — «Нас не сто гусей, — відповідає їй вожак зграї, — якби нас було стільки, скільки зараз, та ще стільки, та півстільки, та чверть стільки, та ще ти, гуско, то тоді нас було б сто гусей». Скільки гусей було в зграї?

7.30. Замініть зірочки такими цифрами, щоб:

1) число *5* ділилося націло на 3 і на 10;
2) число 13*2* ділилося націло на 9 і на 5;
3) число 58* ділилося націло на 2 і на 3.

Знайдіть усі можливі розв'язки.

8. Многочлени

У попередньому пункті ви дізналися, що добуток одночленів є одночленом. Інша справа із сумою одночленів. Наприклад, вирази $2a + b^2$ і $2a - b^2$ не є одночленами. Перший із них є сумою одночленів $2a$ і b^2, а другий — сумою одночленів $2a$ і $-b^2$.

Означення. **Вираз, який є сумою кількох одночленів, називають многочленом.**

Ось ще приклади многочленів: $7xy + y - 11$, $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1$, $3a - a + b$, $11x - 2x$.

Одночлени, з яких складено многочлен, називають **членами многочлена**. Так, членами многочлена $7xy+y-11$ є одночлени $7xy$, y і -11.

Многочлен, який складається з двох членів, називають **двочленом**, а той, який складається з трьох членів, — **тричленом**. Домовилися розглядати одночлен як окремий вид многочлена. Вважають, що такий многочлен складається з одного члена.

Зв'язки між многочленами, одночленами та їхнім окремим видом — числами ілюструє схема, зображена на рисунку 8.1.

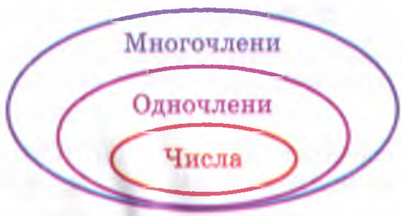


Рис. 8.1

Якщо серед одночленів, з яких складається многочлен, є подібні, то їх називають **подібними членами многочлена**. Наприклад, у многочлені $\underline{7a^2b}-\underline{\underline{3a}}+\underline{\underline{\underline{4}}}-\underline{a^2b}-\underline{\underline{\underline{1}}}+\underline{\underline{a}}+b$ подібні члени підкреслено однаковою кількістю рисочок.

Використовуючи правило зведення подібних доданків, спростимо цей многочлен:

$$7a^2b-3a+4-a^2b-1+a+b=6a^2b-2a+b+3.$$

Таке спрощення називають **зведенням подібних членів многочлена**. Це перетворення дає змогу замінити многочлен на тотожно рівний йому, але простіший — з меншою кількістю членів.

Розглянемо многочлен $2x^3y-xy+1$. Цей многочлен складений з одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних.

Означення. Многочлен, складений з одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних, називають многочленом стандартного вигляду.

Многочлени xy^2+x^2y, $2a^2b$, 5 є прикладами многочленів стандартного вигляду.

Зауважимо, що многочлен $3bab^2+a\cdot 5+a\cdot 2b^3-a$ не є многочленом стандартного вигляду. Проте його можна перетворити в многочлен стандартного вигляду таким чином: записати в стандартному вигляді одночлени, з яких він складений, а потім звести подібні доданки.

Маємо: $3bab^2 + a \cdot 5 + a \cdot 2b^3 - a = \underline{3ab^3} + \underline{\underline{5a}} + \underline{2ab^3} - \underline{\underline{a}} = 5ab^3 + 4a.$

Розглянемо многочлен стандартного вигляду $2x^3y - x^2y^2 + 5x^2y + y - 2$. Він складений з одночленів: $2x^3y$, $-x^2y^2$, $5x^2y$, y, -2, степені яких відповідно дорівнюють числам 4, 4, 3, 1, 0. Найбільший із цих степенів дорівнює числу 4. У цьому разі говорять, що степінь многочлена $2x^3y - x^2y^2 + 5x^2y + y - 2$ дорівнює 4.

Означення. Степенем многочлена стандартного вигляду називають найбільший зі степенів одночленів, з яких цей многочлен складений.

Наведемо ще приклади:

- степінь многочлена $3x^2 - xy + 5y^2$ дорівнює двом;
- степінь многочлена $3x^4y^2$ дорівнює шести;
- степінь многочлена 3 дорівнює нулю.

Розглянемо многочлени $3x - 3$, $5y^2 - 3y + 1$, $a^4 + 7a^3 - a + 2$, $2b^5 - b^3 + 2b^2 - 3b$. Усі вони є многочленами стандартного вигляду з однією змінною. Будь-який многочлен n-го степеня з однією змінною, де n — натуральне число, може бути подано у вигляді

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0, \qquad (*)$$

де x — змінна, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — деякі числа, причому $a_n \neq 0$.

Якщо многочлен n-го степеня з однією змінною, де n — натуральне число, подано у вигляді (*), то числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ називають **коефіцієнтами многочлена** з однією змінною. Число a_n називають **старшим коефіцієнтом**, а число a_0 — **вільним членом.**

Наприклад, коефіцієнти многочлена $2x - 3$ є такими: $a_0 = -3$, $a_1 = 2$. Коефіцієнти многочлена $5y^2 - 3y + 1$ такі: $a_0 = 1$, $a_1 = -3$, $a_2 = 5$.

Щоб знайти коефіцієнти многочлена $x^4 + 7x^3 - x$, подамо його у вигляді (*), тобто так: $x^4 + 7x^3 + 0x^2 - x + 0$. Тоді $a_0 = 0$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 7$, $a_4 = 1$.

Число 0, а також многочлени, які тотожно дорівнюють нулю (наприклад, $0a + 0b$, $x - x$ і т. п.), називають **нуль-многочленами.** Їх не відносять до многочленів стандартного вигляду.

Вважають, що нуль-многочлен степеня не має.

?

1. Що називають многочленом?
2. Який многочлен називають двочленом? тричленом?
3. Що називають подібними членами многочлена?
4. Який многочлен називають многочленом стандартного вигляду?
5. Що називають степенем многочлена стандартного вигляду?
6. Як знайти коефіцієнти многочлена n-го степеня з однією змінною?

ВПРАВИ

8.1.° Назвіть одночлени, сумою яких є даний многочлен:

1) $-5a^4+3a^2-a+8$;
2) $6x^3-10x^2y+7xy^2+y^3$;
3) t^3+3t^2-4t+5;
4) $1{,}8a^3b-3{,}7a^2b^2+16ab^3-b^4$.

8.2.° Знайдіть значення многочлена:

1) $2x^2+x-3$ при $x=0{,}5$;
2) x^3+5xy при $x=3$, $y=-2$;
3) $a^2-2ab+b^2$ при $a=-4$, $b=6$;
4) $y^4+7y^3-2y^2-y+10$ при $y=-1$.

8.3.° Знайдіть значення многочлена $2y^3-3y^2+4y-6$ при:

1) $y=1$;
2) $y=0$;
3) $y=-5$.

8.4.° Перетворіть многочлен у многочлен стандартного вигляду. Укажіть його степінь:

1) $4b^2+a^2+9ab-18b^2-9ab$;
2) $8m^3-13mn-9n^2-8m^3-2mn$;
3) $2a^2b-7ab^2-3a^2b+2ab^2$;
4) $0{,}9c^4+1{,}1c^2+c^4-0{,}6c^2$;
5) $3x^2+6x-5-x^2-10x+3$;
6) $b^3-3bc+3b^3+8bc-4b^3$.

8.5.° Перетворіть многочлен у многочлен стандартного вигляду. Укажіть його степінь:

1) $5x^2-10x+9-2x^2+14x-20$;
2) $-m^5+2m^4-6m^5+12m^3-18m^3$;
3) $0{,}2a^3+1{,}4a^2-2{,}2-0{,}9a^3+1{,}8a^2+3$;
4) $6x^2y-xy^2-8x^2y+2xy^2-xy+7$.

8.6.° Зведіть подібні члени та знайдіть значення многочлена при вказаних значеннях змінних:

1) $-3a^5+4a^3+7a^5-10a^3+12a$, якщо $a=-2$;
2) $x^3y-3xy^2-4x^3y+8xy^2$, якщо $x=-1$, $y=-3$;
3) $0{,}8x^2-0{,}3x-x^2+1{,}6+1{,}1x-0{,}6$, якщо $x=5$;
4) $\frac{1}{3}a^2c+\frac{3}{4}ac^2+\frac{1}{6}a^2c+1{,}25ac^2$, якщо $a=-4$, $c=3$.

8.7.° Зведіть подібні члени та знайдіть значення многочлена при вказаних значеннях змінних:

1) $2a^3+3ab-b^2-6a^3-7ab+2b^2$, якщо $a=2$, $b=-6$;
2) $mn-6mn^2-8mn-6mn^2$, якщо $m=0{,}5$, $n=-2$;
3) $10xy^2-12x^2y+9x^2y-9xy^2$, якщо $x=\frac{1}{3}$, $y=9$.

8.8.° З одночленів $4a$, $-3ab$, $7a^2$, $-8a^2$, $9ab$, $5a$ виберіть кілька та складіть із них:

1) многочлен стандартного вигляду;
2) многочлен, який містить подібні члени;
3) два многочлени стандартного вигляду, використавши при цьому всі дані одночлени.

8.9.° Знайдіть коефіцієнти многочлена з однією змінною. Укажіть старший коефіцієнт і вільний член:

1) $-3x^4+2x^3-\frac{1}{2}x^2+x-5$; 2) $4a^3+1$; 3) y^4+y.

8.10.° Знайдіть коефіцієнти многочлена з однією змінною. Укажіть старший коефіцієнт і вільний член:

1) $\frac{5}{9}x^3+x^2-x-4$; 2) $-0{,}7b^2+2b$; 3) m^4.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

8.11. Цукерки за ціною 42 грн за 1 кг змішали із цукерками за ціною 57 грн за 1 кг і отримали суміш за ціною 48 грн за 1 кг. Яка маса цукерок кожного виду міститься в 1 кг суміші?

8.12. На пошті продають 20 різних конвертів і 15 різних марок. Скільки існує варіантів придбання конверта з маркою?

9. Додавання і віднімання многочленів

Нехай треба додати два многочлени $3xy^2+5x^2y^2-7xy+x+11$ і $-2xy^2+x^2y^2+2xy+y-2$. Для цього візьмемо їх у дужки й поставимо між ними знак «плюс». Потім розкриємо дужки та зведемо подібні доданки (якщо такі є).

Маємо:

$$(3xy^2+5x^2y^2-7xy+x+11)+(-2xy^2+x^2y^2+2xy+y-2)=$$
$$=\underline{3xy^2}+\underline{\underline{5x^2y^2}}-\underline{\underline{\underline{7xy}}}+x+11-\underline{2xy^2}+\underline{\underline{x^2y^2}}+\underline{\underline{\underline{2xy}}}+y-2=$$
$$=xy^2+6x^2y^2-5xy+x+y+9.$$

Отриманий многочлен є сумою двох даних многочленів.

Нехай тепер треба від першого з даних многочленів відняти другий. Для цього кожний із многочленів візьмемо в дужки й поставимо перед від'ємником знак «мінус». Потім розкриємо дужки та зведемо подібні доданки.

Маємо:

$$(3xy^2+5x^2y^2-7xy+x+11)-(-2xy^2+x^2y^2+2xy+y-2)=$$
$$=\underline{3xy^2}+\underline{\underline{5x^2y^2}}-\underline{\underline{\underline{7xy}}}+x+11+\underline{2xy^2}-\underline{\underline{x^2y^2}}+\underline{\underline{\underline{2xy}}}-y+2=$$
$$=5xy^2+4x^2y^2-9xy+x-y+13.$$

Отриманий многочлен є різницею двох даних многочленів.

При додаванні та відніманні многочленів завжди отримуємо многочлен.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що різниця двоцифрового числа й числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться націло на 9.

Розв'язання. Нехай дане число має a десятків і b одиниць. Тоді воно дорівнює $10a + b$.

Число, записане тими самими цифрами у зворотному порядку, дорівнює $10b + a$.

Розглянемо різницю $(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a =$
$$= 9a - 9b = 9(a - b).$$

Очевидно, що число $9(a - b)$ ділиться націло на 9. ●

Запис $\overline{ab}$ є позначенням двоцифрового числа, яке має a десятків і b одиниць, тобто $\overline{ab} = 10a + b$. Аналогічно запис $\overline{abc}$ є позначенням трицифрового числа, яке має a сотень, b десятків і c одиниць, тобто $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що різниця $(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc}) - (\overline{ba} + \overline{ca} + \overline{cb})$ ділиться націло на 18.

Розв'язання. Маємо: $(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc}) - (\overline{ba} + \overline{ca} + \overline{cb}) =$
$$= (10a + b + 10a + c + 10b + c) - (10b + a + 10c + a + 10c + b) =$$
$$= (20a + 11b + 2c) - (20c + 11b + 2a) =$$
$$= 20a + 11b + 2c - 20c - 11b - 2a = 18a - 18c = 18(a - c).$$

Очевидно, що число $18(a - c)$ ділиться націло на 18. ●

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що сума чотирьох послідовних парних натуральних чисел не ділиться націло на 8.

Розв'язання. Нехай перше із цих чисел дорівнює $2n$, де n — довільне натуральне число. Тоді наступними трьома числами є $2n + 2$, $2n + 4$, $2n + 6$ відповідно.

Розглядувана сума має такий вигляд:
$$2n + (2n + 2) + (2n + 4) + (2n + 6) = 8n + 12.$$

Перший доданок $8n$ суми $8n + 12$ ділиться націло на 8, а другий доданок 12 — не ділиться. Отже, сума $8n + 12$ не ділиться націло на 8. ●

ВПРАВИ

9.1.° Знайдіть суму многочленів:

1) $-5x^2 - 4$ і $8x^2 - 6$; 2) $2x + 16$ і $-x^2 - 6x - 20$.

9.2.° Знайдіть різницю многочленів:

1) $x^2 + 8x$ і $4 - 3x$;
2) $2x^2 + 5x$ і $4x^2 - 2x$;
3) $4x^2 - 7x + 3$ і $x^2 - 8x + 11$;
4) $9m^2 - 5m + 4$ і $-10m + m^3 + 5$.

9.3.° Спростіть вираз:

1) $(5a^4 + 3a^2b - b^3) - (3a^4 - 4a^2b - b^2)$;
2) $(12xy - 10x^2 + 9y^2) - (-14x^2 + 9xy - 14y^2)$;
3) $(7ab^2 - 8ab + 4a^2b) + (10ab - 7a^2b)$;
4) $(2c^2 + 3c) + (-c^2 + c) - (c^2 + 4c - 1)$.

9.4.° Спростіть вираз:

1) $(3x^2 - 2x) + (-x^2 + 3x)$;
2) $(4c^2 - 2cd) - (10c^2 + 8cd)$;
3) $(12m^2 - 7n - 3mn) - (6mn - 10n + 14m^2)$;
4) $(3n^3 - 2mn + 4m^3) - (2mn + 3n^3)$.

9.5.° Який двочлен треба додати до даного двочлена, щоб їхня сума тотожно дорівнювала нулю:

1) $a + b$;
2) $a - b$;
3) $-a - b$?

9.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2 - (2x^2 - 8x) - (x^2 - 3) = x$;
2) $12 - (6 - 9x - x^2) = x^2 + 5x - 14$;
3) $4y^3 - (4y^3 - 8y) - (6y + 3) = 7$;
4) $(y^2 - 4y - 17) - (6y^2 - 3y - 8) = 1 - y - 5y^2$.

9.7.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(5x^2 - 3) - (2x + 5) = 5x^2$;
2) $x^2 - (x + 1) - (x^2 - 7x + 32) = 3$;
3) $(y^3 + 3y - 8) - (5y - y^3 + 7) = 2y^3 - 2y - 15$.

9.8.° Доведіть тотожність:

1) $(a^2 + b^2 - c^2) - (b^2 + c^2 - a^2) + (c^2 - a^2) = a^2 - c^2$;
2) $(4 - 3a^2) - a^2 + (7 + 2a^2) - (-2a^2 + 11) = 0$;
3) $(x^3 + 4x^2) - (x + 6) + (1 + x - x^3) = 4x^2 - 5$.

9.9.° Доведіть тотожність:

1) $4a^2 - (6a^2 - 2ab) + (3ab + 2a^2) = 5ab$;
2) $(9x^6 - 4x^3) - (x^3 - 9) - (8x^6 - 5x^3) = x^6 + 9$.

9.10.° Знайдіть значення виразу:

1) $(5a^3 - 20a^2) - (4a^3 - 18a^2)$, якщо $a = -3$;
2) $4b^2 - (7b^2 - 3bc) + (3b^2 - 7bc)$, якщо $b = -1{,}5$, $c = 4$.

9.11.° Обчисліть значення виразу:

1) $(5{,}7a^2 - 2{,}1ab + b^2) - (3{,}9ab - 0{,}3a^2 + 2b^2)$, якщо $a = -1$, $b = 5$;
2) $(5m^2n - m^3) + 7m^3 - (6m^3 - 3m^2n)$, якщо $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{3}{16}$.

9.12.° Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної, що входить до нього:

1) $1{,}6-7a^2-(0{,}8-4a^2)+(3a^2-0{,}7)$;

2) $3x^2-9x-(8-5x^2-(9x-8x^2))$.

9.13.° Доведіть, що значення виразу $(2c^2-3c)+1{,}8-c^2-(c^2-3c-2{,}2)$ не залежить від значення змінної, що входить до нього.

9.14.° Який многочлен треба додати до тричлена $2a^2-5a+7$, щоб сума дорівнювала:

1) 5; 2) 0; 3) a^2; 4) $-2a$?

9.15.° Який многочлен треба відняти від двочлена $4a^3-8$, щоб різниця дорівнювала:

1) -4; 2) 9; 3) $-2a^3$; 4) $3a$?

9.16.• Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоб утворилася тотожність:

1) $*-(3x^2-4xy+2y^2)=9x^2+y^2$;

2) $a^3-6a^2+2a-(*)=a^5+2a^2-7$.

9.17.• Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоб утворилася тотожність:

1) $(2x^2-14x+9)+(*)=20-10x$;

2) $(19a^4-17a^2b+b^3)-(*)=20a^4+5a^2b$.

9.18.• Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоби після зведення подібних членів отриманий многочлен не містив змінної a:

1) $4a^2-3ab+b+8+*$; 2) $9a^3-9a+7ab^2+bc+bm+*$.

9.19.• Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоби після зведення подібних членів многочлен $3x^2+5x^2y+7x-8y+15+*$ не містив:

1) членів з x^2;

2) членів зі змінною x;

3) членів зі змінною y.

9.20.• Подайте у вигляді многочлена число, яке складається:

1) із 4 сотень, x десятків та y одиниць;

2) з a тисяч, b сотень, 5 десятків і c одиниць.

9.21.• Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $\overline{cba}$; 2) $\overline{abc}-\overline{ab}$; 3) $\overline{a0c}+\overline{ac}$.

9.22.• Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $\overline{cab}+\overline{ca}$; 2) $\overline{abc}+\overline{bca}$; 3) $\overline{ab9}+\overline{7a}$.

9.23.• Доведіть, що значення виразу $(9-18n)-(6n-7)$ кратне 8 при будь-якому натуральному значенні n.

9.24.• Доведіть, що значення виразу $(6m+8)-(3m-4)$ кратне 3 при будь-якому натуральному значенні m.

9.25.• Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $(5n+9)-(5-2n)$ при діленні на 7 дає остачу, яка дорівнює 4.

9.26.° Чому дорівнює остача при діленні на 9 значення виразу $(16n+8)-(7n+3)$, де n — довільне натуральне число?

9.27.° Подайте многочлен $3a^2b+8a^3-6a+12b-9$ у вигляді суми двох многочленів таких, щоб один із них не містив змінної b.

9.28.° Подайте многочлен $4mn^2+11m^4-7m^5+14mn-9n+3$ у вигляді різниці двох многочленів з додатними коефіцієнтами.

9.29.° Подайте многочлен $6x^2-3xy+5x-8y+2$ у вигляді різниці двох многочленів таких, щоб один із них не містив змінної y.

9.30.° Доведіть, що значення різниці двочленів $13m+20n$ і $7m+2n$, де m і n — довільні натуральні числа, ділиться націло на 6.

9.31.° Доведіть, що значення суми двочленів $16a-6b$ і $27b-2a$, де a і b — довільні натуральні числа, ділиться націло на 7.

9.32.° Подайте многочлен $x^2-6x+14$ у вигляді різниці:
1) двох двочленів;
2) тричлена й двочлена.

9.33.° Подайте многочлен $3x^2+10x-5$ у вигляді різниці двочлена й тричлена.

9.34.° Доведіть, що вираз $(2x^4+4x-1)-(x^2+8+9x)+(5x+x^2-3x^4)$ набуває від'ємного значення при будь-якому значенні x. Якого найбільшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x?

9.35.° Доведіть, що вираз $(7y^2-9y+8)-(3y^2-6y+4)+3y$ набуває додатного значення при будь-якому значенні y. Якого найменшого значення набуває цей вираз і при якому значенні y?

9.36.° Доведіть, що:
1) сума п'яти послідовних натуральних чисел ділиться націло на 5;
2) сума трьох послідовних парних натуральних чисел ділиться націло на 6;
3) сума чотирьох послідовних непарних натуральних чисел ділиться націло на 8;
4) сума чотирьох послідовних натуральних чисел не ділиться націло на 4;
5) остача від ділення на 6 суми шести послідовних натуральних чисел дорівнює 3.

9.37.° Доведіть, що:
1) сума трьох послідовних натуральних чисел кратна 3;
2) сума семи послідовних натуральних чисел ділиться націло на 7;
3) сума чотирьох послідовних парних натуральних чисел ділиться націло на 4;
4) сума п'яти послідовних парних натуральних чисел ділиться націло на 10.

9.38.•• Доведіть, що:

1) сума чисел $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ і $\overline{ca}$ ділиться націло на 11;

2) різниця чисел $\overline{abc}$ і $\overline{cba}$ ділиться націло на 99.

9.39.•• Доведіть, що:

1) сума чисел $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ і $\overline{cab}$ кратна 111;

2) різниця числа $\overline{abc}$ і суми його цифр ділиться націло на 9.

9.40.•• Доведіть, що не існує таких значень x і y, при яких многочлени $5x^2-6xy-7y^2$ і $-3x^2+6xy+8y^2$ одночасно набували б від'ємних значень.

9.41.•• Доведіть, що не існує таких значень x і y, при яких многочлени $-5x^2+3xy+4y^2$ і $6x^2-3xy-y^2$ одночасно набували б від'ємних значень.

9.42.•• Розставте дужки так, щоб рівність стала тотожністю:

1) $x^2-2x+1-x^2-2x-1=2$;

2) $x^2-2x+1-x^2-2x-1=-2$;

3) $x^2-2x+1-x^2-2x-1=0$.

9.43.* Натуральні числа m і n є такими, що значення виразу $3m+4n$ ділиться націло на 171. Доведіть, що значення виразу $177m+179n$ також ділиться націло на 171.

9.44.* Цілі числа a, b і c є такими, що значення виразів $a-b+101$, $b-c+101$, $c-a+101$ є трьома послідовними натуральними числами. Знайдіть ці натуральні числа.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

9.45. Деяке число спочатку збільшили на 20 %, а потім зменшили результат на 20 %. Установіть, більше чи менше від початкового отримали число та на скільки відсотків.

9.46. Через першу трубу басейн можна наповнити водою за 3 год, а через другу — за 6 год. Спочатку 2 год була відкрита перша труба, потім її закрили, але відкрили другу. За скільки годин було наповнено басейн?

9.47. Відомо, що в парку $\frac{7}{24}$ дерев становлять каштани, а $\frac{5}{18}$ — берези. Скільки всього дерев у парку, якщо їх більше за 100, але менше від 200?

9.48. Із села до станції вийшов пішохід зі швидкістю 4 км/год. Через годину із села зі швидкістю 10 км/год виїхав велосипедист, який прибув на станцію на 0,5 год раніше за пішохода. Яка відстань від села до станції?

10. Множення одночлена на многочлен

Помножимо одночлен $2x$ на многочлен $3x+2y-5$. Для цього запишемо добуток $2x(3x+2y-5)$. Розкриємо дужки, застосувавши розподільну властивість множення. Маємо:

$$2x(3x+2y-5)=2x\cdot 3x+2x\cdot 2y-2x\cdot 5=6x^2+4xy-10x.$$

Отриманий многочлен $6x^2+4xy-10x$ є добутком одночлена $2x$ і многочлена $3x+2y-5$.

Добуток одночлена й многочлена завжди можна подати у вигляді многочлена.

Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно помножити цей одночлен на кожний член многочлена й отримані добутки додати.

При множенні одночлена й многочлена виконується переставна властивість множення. Тому наведене правило дає змогу множити многочлен на одночлен.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз $6x(x-1)-3(2x^2-3x+4)$.

Розв'язання. Маємо:

$$6x(x-1)-3(2x^2-3x+4)=$$
$$=\underline{6x^2}-\underline{\underline{6x}}-\underline{6x^2}+\underline{\underline{9x}}-12=3x-12.$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $0{,}5x(3+4x)=2x(x-2)-11$.

Розв'язання. Маємо:

$$1{,}5x+2x^2=2x^2-4x-11;$$
$$1{,}5x+2x^2-2x^2+4x=-11;$$
$$5{,}5x=-11;$$
$$x=-2.$$

Відповідь: -2.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\frac{5x+4}{12}-\frac{x+3}{8}=2$.

Розв'язання. Помноживши обидві частини даного рівняння на число 24, яке є найменшим спільним знаменником дробів, що містить це рівняння, отримуємо:

$$\left(\frac{5x+4}{12}-\frac{x+3}{8}\right)\cdot 24=2\cdot 24.$$

Звідси $24 \cdot \frac{5x+4}{12} - 24 \cdot \frac{x+3}{8} = 48;$

$$2\,(5x + 4) - 3\,(x + 3) = 48;$$
$$10x + 8 - 3x - 9 = 48;$$
$$7x - 1 = 48;$$
$$x = 7.$$

Відповідь: 7.

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що при будь-якому значенні змінної a значення виразу $3a\,(a^2 - 4) - 2a^2(1,5a + 4a^4) + 6\,(2a - 1)$ є від'ємним числом.

Розв'язання. $3a\,(a^2 - 4) - 2a^2(1,5a + 4a^4) + 6\,(2a - 1) =$
$= 3a^3 - 12a - 3a^3 - 8a^6 + 12a - 6 = -8a^6 - 6.$

Вираз $-8a^6$ при будь-якому значенні a набуває недодатного значення. Отже, значення виразу $-8a^6 - 6$ є від'ємним числом при будь-якому значенні a.

ПРИКЛАД 5 Остача при діленні натурального числа m на 6 дорівнює 5, а остача при діленні натурального числа n на 4 дорівнює 2. Доведіть, що значення виразу $2m + 3n$ ділиться націло на 4 і не ділиться націло на 12.

Розв'язання. Нехай неповна частка при діленні m на 6 дорівнює a, а при діленні n на 4 дорівнює b. Тоді $m = 6a + 5$, $n = 4b + 2$.

Отже, маємо:

$$2m + 3n = 2\,(6a + 5) + 3\,(4b + 2) =$$
$$= 12a + 10 + 12b + 6 = 12a + 12b + 16.$$

Кожний доданок отриманої суми ділиться націло на 4, тому й сума ділиться націло на 4.

Перших два доданки діляться націло на 12, а третій — не ділиться. Тому й сума не ділиться націло на 12.

Як помножити одночлен на многочлен?

ВПРАВИ

10.1.° Перетворіть у многочлен добуток:

1) $3x\,(2x + 5)$;
2) $4x\,(x^2 - 8x - 2)$;
3) $-2a\,(a^2 + a - 3)$;
4) $5b^2\,(3b^2 - 7b + 10)$;
5) $mn\,(m^2n - n^3)$;
6) $2ab\,(a^3 - 3a^2b + b^2)$;

7) $(4y^3-6y+7)\cdot(-1{,}2y^3)$;
8) $0{,}4x^2y(3xy^2-5xy+13x^2y^3)$;
9) $(2{,}3a^3b-1{,}7b^4-3{,}5b)\cdot(-10a^2b)$;
10) $-4pk^3(3p^2k-p+4k-2)$;
11) $\frac{2}{3}mn^2(6m-1{,}8n+9)$;
12) $1\frac{1}{7}cd\left(\frac{7}{8}c^5-\frac{7}{24}c^2d^7-\frac{1}{4}d^{10}\right)$.

10.2.° Виконайте множення:
1) $3x(4x^2-x)$;
2) $-5a^2(a^2-6a-3)$;
3) $(8b^2-10b+2)\cdot 0{,}5b$;
4) $x^3(x^5-x^2+7x-1)$;
5) $-2c^2d^4(4c^2-c^3d+5d^4)$;
6) $(5m^3n-8mn^2-2n^6)\cdot(-4m^2n^8)$.

10.3.° Спростіть вираз:
1) $8x-2x(3x+4)$;
2) $7a^2+3a(9-5a)$;
3) $6x(4x-7)-12(2x^2+1)$;
4) $c(c^2-1)+c^2(c-1)$;
5) $2m(m-3n)+m(5m+11n)$;
6) $8x(x^2+y^2)-9x(x^2-y^2)$;
7) $5b^3(2b-3)-2{,}5b^3(4b-6)$;
8) $x(5x^2+6x+8)-4x(2+2x+x^2)$.

10.4.° Спростіть вираз:
1) $7x(x-4)-x(6-x)$;
2) $5ab(4a+3b)-10a^2(2b-4)$;
3) $xy(2x-11y)-x(xy+14y^2)$;
4) $5c^3(4c-3)-2c^2(8c^2-12)$.

10.5.° Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $3x(2x-5)-8x(4x-3)$, якщо $x=-1$;
2) $2x(14x^2-x+5)+4x(2{,}5+3x-7x^2)$, якщо $x=7$;
3) $8ab(a^2-2b^2)-7a(a^2b-3b^3)$, якщо $a=-3$, $b=2$.

10.6.° Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $6x(6x-4)+9x(3-4x)$, якщо $x=-\frac{1}{9}$;
2) $2m(m-n)-n(3m-n)-n(n+6)$, якщо $m=-4$, $n=0{,}5$.

10.7.° Розв'яжіть рівняння:
1) $5x(3x-2)-15x(4+x)=140$;
2) $1{,}2x(4+5x)=3x(2x+1)-9$;
3) $6x(7x-8)-2x(21x-6)=3-30x$;
4) $12x-3x(6x-9)=9x(4-2x)+3x$;
5) $7x^2-x(7x-5)-2(2{,}5x+1)-3=0$;
6) $8(x^2-4)-4x(3{,}5x-7)=20x-6x^2$.

10.8.° Знайдіть корінь рівняння:
1) $0{,}4x(5x-6)+7{,}2=2x(x+0{,}6)$;
2) $x(3x+2)-9(x^2-7x)=6x(10-x)$;
3) $12(x^3-2)-7x(x^2-1)=5x^3+2x+6$.

10.9.° Доведіть тотожність:
1) $ab(b-c)+ac(c-b)-a(b^2-3bc+c^2)=abc$;
2) $4a(a+b)-a(3a-4b)-8ab=a^2$;
3) $a(a+2b)+b(a+b)=b(2a+b)+a(a+b)$;
4) $a(b+c-bc)-b(a+c-ac)=(a-b)c$.

10.10.° Доведіть тотожність:

1) $a(a+b)-b(a-b)=a^2+b^2$;

2) $b(a-b)+b(b+c)=b(a+b)-b(b-c)$.

10.11.° Доведіть, що коли:

1) $a+b+c=0$, то $a(bc-1)+b(ac-1)+c(ab-1)=3abc$;

2) $a^2+b^2=c^2$, то $c(ab-c)-b(ac-b)-a(bc-a)+abc=0$.

10.12.° Доведіть, що значення виразу

$$x(12x+11)-x^2(x^2+8)-x(11+4x-x^3)$$

не залежить від значення змінної.

10.13.° Доведіть, що значення виразу

$$6x(x-3)-9\left(\frac{2}{3}x^2-2x+7\right)$$

не залежить від значення змінної.

10.14.° Доведіть, що при будь-яких значеннях x значення виразу $4(x^2-2x+4)-0{,}5x(6x-16)$ є додатним числом.

10.15.° Доведіть, що вираз $3x^2(3-4x)-6x(1{,}5x-2x^2+x^3)$ набуває недодатних значень при всіх значеннях x.

10.16.° Доведіть, що вираз $7a^4(a+3)-a^3(21a+7a^2-3a^5)$ набуває невід'ємних значень при всіх значеннях a.

10.17.• Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $*\cdot(a-b+c)=-abc+b^2c-bc^2$;

2) $*\cdot(ab-b^2)=a^3b-a^2b^2$;

3) $-3a^2(*-*)=6a^3+15a^4$.

10.18.• Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $(x-y)\cdot *=x^2y^2-x^3y$;

2) $(-9x^2+*)\cdot y=*+y^4$;

3) $(1{,}4x-*)\cdot 3x=*-0{,}6x^3$;

4) $*(*-x^2y^5+5y^6)=8x^3y^3+5x^3y^8-*$.

10.19.• Спростіть вираз:

1) $15a\cdot\frac{a+4}{3}+12a^2\cdot\frac{5-2a}{6}$;

2) $24c^3\cdot\frac{c^2+2c-3}{8}-18c^2\cdot\frac{c^3-c^2+2}{9}$;

3) $34x\cdot\frac{x-y}{17}-45y\cdot\frac{x-2y}{15}-y(6y-5x)$.

10.20.• Спростіть вираз:

1) $6b^2\cdot\frac{5b^2-4}{3}+20b\cdot\frac{3b-2b^3}{4}$;

2) $14m\cdot\frac{m+n}{7}-\frac{m-n}{8}\cdot 16n-2(m^2+n^2)$.

10.21.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-7}{4}-\frac{x}{6}=2$;

2) $\frac{x+6}{2}-\frac{x-7}{7}=4$;

3) $\frac{2x+3}{6}+\frac{1-4x}{8}=\frac{1}{3}$;

4) $3x-\frac{2x+3}{2}=\frac{x+6}{3}$;

5) $\frac{6x-7}{5}-\frac{3x+1}{6}=\frac{11-x}{15}$;

6) $\frac{5x-3}{9}-\frac{4x+3}{6}=x-1$;

7) $\frac{8x-5}{3}-\frac{4x+3}{4}+\frac{2-9x}{2}=-3$;

8) $\frac{8x^2-3x}{16}-\frac{6x^2+1}{12}=-1$.

10.22.° Знайдіть корінь рівняння:

1) $x-\frac{7x+1}{8}=\frac{4x+3}{4}$;

2) $\frac{2x+1}{6}-\frac{3x+1}{7}=2$;

3) $\frac{2x+3}{3}-\frac{5x+13}{6}+\frac{5-2x}{2}=6$;

4) $\frac{4x^2+5x}{14}+\frac{10-2x^2}{7}=5$.

10.23.° При якому значенні змінної значення виразу $8y\ (y-7)$ на 15 більше за значення виразу $2y\ (4y-10{,}5)$?

10.24.° Довжина прямокутника в 3 рази більша за його ширину. Якщо ширину зменшити на 6 см, то площа прямокутника зменшиться на 144 см^2. Знайдіть початкову ширину прямокутника.

10.25.° Ширина прямокутника на 8 см менша від його довжини. Якщо довжину збільшити на 6 см, то площа прямокутника збільшиться на 72 см^2. Знайдіть периметр даного прямокутника.

10.26.° За три дні турист пройшов 108 км. За другий день він пройшов на 6 км більше, ніж за перший, а за третій — $\frac{5}{13}$ відстані, пройденої за два перших дні. Скільки кілометрів турист пройшов за кожний із цих днів?

10.27.° Три бригади робітників виготовили за зміну 80 деталей. Перша бригада виготовила на 12 деталей менше, ніж друга, а третя — $\frac{3}{7}$ кількості деталей, виготовлених першою та другою бригадами разом. Скільки деталей виготовила кожна бригада?

10.28.•• Спростіть вираз:

1) $x^{n+1}\,(x^{n+6}-1)-x^{n+2}\,(x^{n+5}-x^3)$;

2) $x^{n+2}\,(x^2-3)-x^n\,(x^{n+2}-3x^2-1)$,

де n — натуральне число.

10.29.•• Спростіть вираз:

1) $x^n\,(x^{n+4}+2x)+x\,(3x^n-x^{2n+3})$;

2) $x\,(4x^{n+1}+2x^{n+4}-7)-x^{n+2}\,(4+2x^3-x^n)$,

де n — натуральне число.

10.30.•• Остача при діленні натурального числа a на 3 дорівнює 1, а остача при діленні натурального числа b на 9 дорівнює 7. Доведіть, що значення виразу $4a+2b$ ділиться націло на 3.

10.31.•• Остача при діленні натурального числа m на 5 дорівнює 3, а остача при діленні натурального числа n на 3 дорівнює 2. Доведіть, що значення виразу $3m+5n$ не ділиться націло на 15.

10.32.* Чи існують такі попарно різні числа a, b і c, що

$$a(b-c)=b(c-a)=c(a-b)?$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

10.33. Три найбільших лимани України — Дніпровсько-Бузький, Дністровський і Сасик (Кундук) знаходяться на узбережжі Чорного моря. Їхня загальна площа 1364,8 км^2. Площа Дністровського лиману у $2\frac{2}{9}$ раза менша від площі Дніпровсько-Бузького, а площа лиману Сасик становить 25,6 % площі Дніпровсько-Бузького. Знайдіть площу кожного лиману.

10.34. Першого дня Василь прочитав $\frac{2}{7}$ сторінок книжки, другого — 64 % решти, а третього — 54 сторінки, що залишилися. Скільки сторінок у книжці?

10.35. Яка ймовірність того, що при киданні грального кубика випаде:
1) непарне число;
2) число, яке ділиться націло на 3;
3) число, яке не ділиться націло на 3?

10.36. Велосипедист проїхав першу половину шляху за 3 год, а другу — за 2,5 год, оскільки збільшив швидкість на 3 км/год. Яку відстань проїхав велосипедист?

10.37. На одному складі було 184 т мінерального добрива, а на другому — 240 т. Перший склад відпускає щодня по 15 т добрива, а другий — по 18 т. Через скільки днів маса добрива, що залишиться на першому складі, становитиме $\frac{2}{3}$ маси добрива, що залишиться на другому складі?

11. Множення многочлена на многочлен

Покажемо, як помножити многочлен на многочлен, на прикладі добутку $(a+b)(x-y-z)$. Позначимо другий множник буквою c. Тоді отримуємо:

$$(a+b)(x-y-z)=(a+b)c=ac+bc.$$

Тепер у вираз $ac+bc$ підставимо замість c многочлен $x-y-z$. Запишемо:

$$ac+bc=a(x-y-z)+b(x-y-z)=ax-ay-az+bx-by-bz.$$

Отриманий многочлен і є шуканим добутком.

Цей самий результат можна отримати, якщо добуток знаходити за схемою:

$$(a + b)(x - y - z)$$

Вона роз'яснює таке правило:

щоб помножити многочлен на многочлен, можна кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого й отримані добутки додати.

Отже, при множенні многочлена на многочлен завжди отримуємо многочлен.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз $(3x - 4)(2x + 3) - (x - 2)(x + 5)$.

Розв'язання. Маємо:

$$(3x - 4)(2x + 3) - (x - 2)(x + 5) =$$
$$= 6x^2 + 9x - 8x - 12 - (x^2 + 5x - 2x - 10) =$$
$$= 6x^2 + 9x - 8x - 12 - x^2 - 5x + 2x - 10 = 5x^2 - 2x - 2.$$

ПРИКЛАД 2 Подайте у вигляді многочлена вираз

$$(a + 2)(a - 5)(a + 3).$$

Розв'язання. $(a + 2)(a - 5)(a + 3) = (a^2 - 5a + 2a - 10)(a + 3) =$

$$= (a^2 - 3a - 10)(a + 3) = a^3 + 3a^2 - 3a^2 - 9a - 10a - 30 =$$
$$= a^3 - 19a - 30.$$

ПРИКЛАД 3 Знайдіть чотири послідовних натуральних числа таких, що добуток третього й четвертого з них на 38 більший за добуток першого та другого.

Розв'язання. Нехай менше із цих чисел дорівнює x, тоді три наступних за ним числа дорівнюватимуть $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$. Оскільки за умовою добуток $(x + 2)(x + 3)$ на 38 більший за добуток $x(x + 1)$, то:

$$(x + 2)(x + 3) - x(x + 1) = 38.$$

Звідси $x^2 + 2x + 3x + 6 - x^2 - x = 38;$

$$4x = 38 - 6;$$
$$x = 8.$$

Отже, шуканими числами є 8, 9, 10 і 11.

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що значення виразу

$$(n + 39)(n - 4) - (n + 31)(n - 3)$$

кратне 7 при всіх натуральних значеннях n.

Розв'язання. Виконаємо перетворення:

$$(n + 39)(n - 4) - (n + 31)(n - 3) =$$
$$= n^2 - 4n + 39n - 156 - (n^2 - 3n + 31n - 93) =$$
$$= \underline{\underline{n^2}} - \underline{4n} + \underline{39n} - 156 - \underline{\underline{n^2}} + \underline{3n} - \underline{31n} + 93 = 7n - 63 = 7(n - 9).$$

Даний вираз подано у вигляді добутку двох множників, один з яких дорівнює 7, а другий набуває тільки цілих значень. Отже, при будь-якому натуральному n значення даного виразу ділиться націло на 7.

Як помножити многочлен на многочлен?

ВПРАВИ

11.1.° Виконайте множення:

1) $(a - 2)(b + 5)$;
2) $(m + n)(p - k)$;
3) $(x - 8)(x + 4)$;
4) $(x - 10)(x - 9)$;
5) $(c + 5)(c + 8)$;
6) $(3y + 1)(4y - 6)$;
7) $(-2m - 3)(5 - m)$;
8) $(5x^2 - x)(6x^2 + 4x)$;
9) $(-c - 4)(c^3 + 3)$;
10) $(x - 5)(x^2 + 4x - 3)$;
11) $(2a + 3)(4a^2 - 4a + 3)$;
12) $a(5a - 4)(3a - 2)$.

11.2.° Перетворіть у многочлен вираз:

1) $(a + b)(c - d)$;
2) $(x - 6)(x - 4)$;
3) $(a - 3)(a + 7)$;
4) $(11 - c)(c + 8)$;
5) $(d + 13)(2d - 1)$;
6) $(3y - 5)(2y - 12)$;
7) $(2x^2 - 3)(x^2 + 4)$;
8) $(x - 6)(x^2 - 2x + 9)$;
9) $(5x - y)(2x^2 + xy - 3y^2)$;
10) $b(6b + 7)(3b - 4)$.

11.3.° Спростіть вираз:

1) $(x + 2)(x + 11) - 2x(3 - 4x)$;
2) $(a + 5)(a - 2) + (a - 4)(a + 6)$;
3) $(y - 9)(3y - 1) - (2y + 1)(5y - 7)$;
4) $(4x - 1)(4x - 3) - (2x - 10)(8x + 1)$.

11.4.° Спростіть вираз:

1) $(a - 2)(a - 1) - a(a + 1)$;
2) $(b - 5)(b + 10) + (b + 6)(b - 8)$;
3) $(2c + 3)(3c + 2) - (2c + 7)(2c - 7)$;
4) $(3d + 5)(5d - 1) - (6d - 3)(2 - 8d)$.

11.5.° Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(x + 2)(x - 5) - (x - 3)(x + 4)$, якщо $x = -5{,}5$;
2) $(y + 9)(y - 2) + (3 - y)(6 + 5y)$, якщо $y = -1\frac{1}{2}$.

11.6.° Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(a + 3)(a - 10) - (a + 7)(a - 4)$, якщо $a = -0{,}01$;

2) $(8c + 12)(3c - 1) + (3c + 2)(-5c - 6)$, якщо $c = 1\frac{1}{3}$.

11.7.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x - 3)(4x + 3) - 8x^2 = 33$;

2) $(2x - 6)(8x + 5) + (3 - 4x)(3 + 4x) = 55$;

3) $21x^2 - (3x - 7)(7x - 3) = 37$;

4) $(x + 1)(x + 2) - (x - 3)(x + 4) = 12$;

5) $(-4x + 1)(x - 1) - x = (5 - 2x)(2x + 3) - 17$.

11.8.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x - 1)(15 + 9x) - 6x(3x - 5) = 87$;

2) $(14x - 1)(2 + x) = (2x - 8)(7x + 1)$;

3) $(x + 10)(x - 5) - (x - 6)(x + 3) = 16$;

4) $(3x + 7)(8x + 1) = (6x - 7)(4x - 1) + 93x$.

11.9.• Виконайте множення:

1) $(x + 2)(x - 1)(x - 4)$;

2) $(2x + 1)(x + 5)(x - 6)$;

3) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x - 3)$;

4) $(a + 2b - c)(a - 3b + 2c)$;

5) $(a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$;

6) $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

11.10.• Перетворіть у многочлен вираз:

1) $(a + 1)(a - 2)(a - 3)$;

2) $(3a - 2)(a + 3)(a - 7)$;

3) $(a^2 - 2a + 1)(a^2 + 3a - 2)$;

4) $(a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$.

11.11.• Замініть степінь добутком, а потім добуток перетворіть у многочлен:

1) $(a + 5)^2$; 2) $(4 - 3b)^2$; 3) $(a + b + c)^2$; 4) $(a - b)^3$.

11.12.• Доведіть, що при будь-якому значенні змінної значення виразу $(x + 3)(x^2 - 4x + 7) - (x^2 - 5)(x - 1)$ дорівнює 16.

11.13.• Доведіть, що при будь-якому значенні змінної значення виразу $(x - 3)(x^2 + 7) - (x - 2)(x^2 - x + 5)$ дорівнює -11.

11.14.• Задумали чотири натуральних числа. Друге число на 1 більше за перше, третє — на 5 більше за друге, а четверте — на 2 більше за третє. Знайдіть ці числа, якщо відношення першого числа до третього дорівнює відношенню другого числа до четвертого.

11.15.• Задумали три натуральних числа. Друге число на 4 більше за перше, а третє — на 6 більше за друге. Знайдіть ці числа, якщо відношення першого числа до другого дорівнює відношенню другого числа до третього.

11.16.• Знайдіть чотири послідовних натуральних числа таких, що добуток четвертого й другого із цих чисел на 17 більший за добуток третього та першого.

11.17.° Знайдіть три послідовних натуральних числа таких, що добуток другого та третього із цих чисел на 50 більший за квадрат першого.

11.18.° Сторона квадрата на 3 см менша від однієї зі сторін прямокутника та на 5 см більша за його другу сторону. Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа на 45 см² більша за площу даного прямокутника.

11.19.° Периметр прямокутника дорівнює 60 см. Якщо одну його сторону зменшити на 5 см, а другу збільшити на 3 см, то його площа зменшиться на 21 см². Знайдіть сторони даного прямокутника.

11.20.° Довжина прямокутника на 2 см більша за його ширину. Якщо довжину збільшити на 2 см, а ширину зменшити на 4 см, то площа прямокутника зменшиться на 40 см². Знайдіть початкові довжину та ширину прямокутника.

11.21.° Доведіть тотожність:

1) $x^2-8x+7=(x-1)(x-7)$;
2) $y^2(y-7)(y+2)=y^4-5y^3-14y^2$;
3) $a^3-8=(a-2)(a^2+2a+4)$;
4) $(a-1)(a+1)(a^2+1)=a^4-1$;
5) $(a^4-a^2+1)(a^4+a^2+1)=a^8+a^4+1$.

11.22.° Доведіть тотожність:

1) $3a^2+10a+3=3(a+3)\left(a+\frac{1}{3}\right)$;
2) $(a+1)(a^2+5a+6)=(a^2+3a+2)(a+3)$;
3) $(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)=a^5+1$.

11.23.° Чи при всіх натуральних значеннях n значення виразу $(n+9)(n+11)-(n+3)(n+5)$ кратне 12?

11.24.° Чи при всіх натуральних значеннях n значення виразу $(n+29)(n+3)-(n+7)(n+1)$ кратне 8?

11.25.° Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $(a-2)(*+6)=a^2+*-*$; 2) $(2a+7)(a-*)=*+*-14$.

11.26.° Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $(x+3)(*+5)=3x^2+*+*$; 2) $(x-4)(x+*)=*+*+24$.

11.27.°° Вибрали деякі чотири послідовних натуральних числа й обчислили різницю добутку другого й третього із цих чисел і добутку першого та четвертого. Чи залежить ця різниця від вибору чисел?

11.28.°° Вибрали деякі три послідовних натуральних числа й обчислили різницю квадрата другого із цих чисел і добутку першого та третього. Чи залежить ця різниця від вибору чисел?

11.29.•• Доведіть, що значення виразу $\overline{ab} \cdot \overline{ba} - ab$ ділиться націло на 10 незалежно від значень a і b.

11.30.•• Остача при діленні натурального числа x на 6 дорівнює 3, а остача при діленні натурального числа y на 6 дорівнює 2. Доведіть, що добуток чисел x і y ділиться націло на 6.

11.31.•• Остача при діленні натурального числа a на 8 дорівнює 3, а остача при діленні натурального числа b на 8 дорівнює 7. Доведіть, що остача при діленні добутку чисел a і b на 8 дорівнює 5.

11.32.•• Остача при діленні натурального числа m на 11 дорівнює 9, а остача при діленні натурального числа n на 11 дорівнює 5. Доведіть, що остача при діленні добутку чисел m і n на 11 дорівнює 1.

11.33.•• Доведіть, що коли $ab + bc + ac = 0$, то

$$(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)=a^2+b^2+c^2.$$

11.34.•• Доведіть тотожність:

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

11.35.* На дошці записано два двочлени $x^2 + 2$ і $x + 1$. Дозволено записувати суму, різницю або добуток будь-яких записаних многочленів. Чи можна за допомогою таких операцій отримати многочлен $x^3 + 2$?

11.36.* Вираз $(4x^{15} + 3x - 6)^{15}$ подали у вигляді многочлена стандартного вигляду. Знайдіть суму коефіцієнтів цього многочлена.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

11.37. Двоє робітників виготовили разом 108 деталей. Перший робітник працював 5 год, а другий — 3 год. Скільки деталей виготовляв щогодини кожний робітник, якщо разом за 1 год вони виготовляють 26 деталей?

11.38. Змішали 72 г 5 %-го розчину солі та 48 г 15 %-го розчину солі. Знайдіть відсотковий вміст солі в утвореному розчині.

11.39. Розв'яжіть рівняння:

1) $\overline{1x} + \overline{2x} = \overline{x6}$; 2) $\overline{x4} + \overline{x8} = \overline{1x2}$.

11.40. Доведіть тотожність:

1) $18^{16n} = 12^{8n} \cdot 9^{12n}$; 2) $75^{8n} = 225^{4n} \cdot 625^{2n}$,

де n — натуральне число.

11.41. (*Старовинна грецька задача.*) Демохар[1] четверту частину життя прожив хлопчиком, п'яту частину — юнаком, третю частину — зрілою людиною та 13 років — у літах. Скільки років прожив Демохар?

[1] Демохар (IV–III ст. до н. е.) — давньогрецький політик, оратор та історик.

12. Розкладання многочлена на множники. Винесення спільного множника за дужки

Помножимо многочлен $2x - 1$ на многочлен $x + 1$. Маємо:

$$(2x-1)(x+1) = 2x^2 + 2x - x - 1 = 2x^2 + x - 1.$$

Отримали тотожність $(2x-1)(x+1) = 2x^2 + x - 1$, яку можна записати ще й так: $2x^2 + x - 1 = (2x-1)(x+1)$.

Про такий запис говорять, що многочлен $2x^2 + x - 1$ **розклали на множники** $2x - 1$ і $x + 1$.

Узагалі, подання многочлена у вигляді добутку кількох многочленів називають **розкладанням многочлена на множники**.

Розкладання многочлена на множники є ключем до розв'язування багатьох задач. Наприклад, кожне з рівнянь $2x - 1 = 0$ і $x + 1 = 0$ розв'язати дуже легко, а ось рівняння $2x^2 + x - 1 = 0$ ви поки що розв'язувати не вмієте. Проте якщо скористатися розкладанням многочлена $2x^2 + x - 1$ на множники, то рівняння $2x^2 + x - 1 = 0$ можна записати так:

$$(2x-1)(x+1) = 0.$$

Звідси $2x - 1 = 0$ або $x + 1 = 0$. Шуканими коренями є числа 0,5 і -1.

Отже, розкладання многочлена на множники дозволило звести розв'язання складного рівняння до розв'язання двох простіших.

Існує чимало способів розкладання многочлена на множники. Найпростіший із них — **винесення спільного множника за дужки**.

Це перетворення вам уже відоме. Наприклад, у 6 класі значення виразу $1{,}62 \cdot 1{,}08 - 0{,}08 \cdot 1{,}62$ знаходили так:

$$1{,}62 \cdot 1{,}08 - 0{,}08 \cdot 1{,}62 = 1{,}62\,(1{,}08 - 0{,}08) = 1{,}62.$$

Тут використано розподільну властивість множення відносно додавання $c\,(a + b) = ac + bc$, прочитану справа наліво: $ac + bc = c\,(a + b)$.

Скористуємося цією ідеєю, розв'язуючи такі приклади.

ПРИКЛАД 1 Розкладіть на множники:

1) $8a^2b^2 - 12ab^3$; 2) $10a^8 - 5a^5$.

Розв'язання. 1) Якщо коефіцієнти многочлена — цілі числа, то за дужки зазвичай виносять найбільший спільний дільник модулів цих коефіцієнтів (у нашому прикладі це число 4). Одночлени a^2b^2 і ab^3 містять такі спільні множники: a, b, ab, b^2 і ab^2. Будь-який із цих множників можна винести за дужки. Але зазвичай спільний множник вибирають такий, щоб члени многочлена, який залишається в дужках, не мали спільного буквеного множника. Такі міркування підказують винести за дужки спільний множник ab^2:

$$8a^2b^2 - 12ab^3 = 4ab^2(2a - 3b).$$

2) Маємо: $10a^8 - 5a^5 = 5a^5(2a^3 - 1)$.

Щоби перевірити, чи правильно розкладено многочлен на множники, треба перемножити отримані множники.

ПРИКЛАД 2 Подайте у вигляді добутку многочленів вираз:

1) $a(m - 3) + b(m - 3)$;
2) $x(c - d) + y(d - c)$;
3) $6x(x - 7) - (x - 7)^2$.

Розв'язання. 1) У даному випадку спільним множником є многочлен $m - 3$:

$$a(m - 3) + b(m - 3) = (m - 3)(a + b).$$

2) Маємо:

$$x(c-d)+y(d-c)=x(c-d)+y\cdot(-1)\cdot(c-d)=$$
$$= x(c - d) - y(c - d) = (c - d)(x - y).$$

3) Маємо:

$$6x(x - 7) - (x - 7)^2 = (x - 7)(6x - (x - 7)) =$$
$$= (x - 7)(6x - x + 7) = (x - 7)(5x + 7).$$

ПРИКЛАД 3 Винесіть за дужки спільний множник у виразі $(12x - 18y)^2$.

Розв'язання. Маємо: $(12x - 18y)^2 = (6(2x - 3y))^2 = 6^2(2x - 3y)^2 =$
$$= 36(2x - 3y)^2.$$

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння:

1) $4x^2 - 12x = 0$; 2) $(3x - 7)(x + 4) + (x - 1)(x + 4) = 0$.

Розв'язання. 1) Розклавши ліву частину рівняння на множники та застосувавши умову, за якої добуток дорівнює нулю, отримуємо:

$$4x(x - 3) = 0;$$
$$x = 0 \text{ або } x - 3 = 0;$$
$$x = 0 \text{ або } x = 3.$$

Відповідь: 0; 3.

2) $(3x - 7)(x + 4) + (x - 1)(x + 4) = 0$;

$$(x + 4)(3x - 7 + x - 1) = 0;$$
$$x + 4 = 0 \text{ або } 4x - 8 = 0;$$
$$x = -4 \text{ або } x = 2.$$

Відповідь: –4; 2.

ПРИКЛАД 5 Доведіть, що значення виразу: 1) $8^7 - 4^9$ ділиться націло на 14; 2) $20^3 - 4^4$ ділиться націло на 121.

Розв'язання. 1) Подамо вирази 8^7 і 4^9 у вигляді степенів з основою 2 та винесемо за дужки спільний множник. Отримуємо:

$$8^7-4^9=(2^3)^7-(2^2)^9=2^{21}-2^{18}=2^{18}(2^3-1)=2^{18}\cdot(8-1)=$$
$$=2^{18}\cdot 7=2^{17}\cdot 2\cdot 7=2^{17}\cdot 14.$$

Отже, даний вираз дорівнює добутку двох натуральних чисел, одним з яких є 14. Звідси випливає, що значення виразу 8^7-4^9 ділиться націло на 14.

2) Маємо: $20^3-4^4=(5\cdot 4)^3-4^4=5^3\cdot 4^3-4^4=4^3(5^3-4)=$
$$=4^3(125-4)=4^3\cdot 121.$$

Отже, значення даного виразу ділиться націло на 121.

ПРИКЛАД 3 При якому значенні a рівняння $(x+2)(x+a)-x(x+1)=3a+1$ має безліч коренів?

Розв'язання. Маємо:

$$x^2+ax+2x+2a-x^2-x=3a+1;$$
$$ax+x+2a=3a+1;$$
$$ax+x=a+1;$$
$$(a+1)x=a+1.$$

При $a=-1$ останнє рівняння набуває вигляду $0x=0$ і має безліч коренів. Зазначимо, що коли $a\neq -1$, то рівняння має єдиний корінь $x=(a+1):(a+1)$, який дорівнює 1.

Відповідь: при $a=-1$.

?

1. Поясніть, що називають розкладанням многочлена на множники.
2. Яку властивість множення використовують при винесенні спільного множника за дужки?

ВПРАВИ

12.1.° Винесіть за дужки спільний множник:

1) $am+an$;
2) $6x-6y$;
3) $4b+16c$;
4) $12x-15y$;
5) $-cx-cy$;
6) $4bk+4bt$;
7) $-8a-18b$;
8) $ax+a$;
9) $7c-7$;
10) $24x+30y$;
11) $10mx-15my$;
12) x^2+xy;
13) $3d^2-3cd$;
14) $4a^2+16ab$;
15) a^6-a^3;
16) b^2+b^8;
17) $7p^3-5p$;
18) $15c^2d-3cd$;
19) $14x^2y+21xy^2$;
20) $-2x^9+16x^6$;
21) $8a^4b^2-36a^3b^7$.

12.2.° Розкладіть на множники:

1) $3a+6b$;
2) $12m-16n$;
3) $10ck-15cp$;

4) $8ax + 8a$;   7) $n^{10} - n^5$;   10) $18y^5 + 12y^4$;
5) $5b - 25bc$;   8) $m^6 + m^7$;   11) $56a^{10}b^6 - 32a^4b^8$;
6) $14x^2 + 7x$;   9) $9x - 27x^4$;   12) $36mn^5 + 63m^2n^6$.

12.3.° Обчисліть, використовуючи винесення спільного множника за дужки:
1) $173^2 + 173 \cdot 27$;   2) $214 \cdot 314 - 214^2$;   3) $0{,}4^3 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}6$.

12.4.° Знайдіть значення виразу:
1) $516^2 - 516 \cdot 513$;   2) $0{,}7^3 + 0{,}7 \cdot 0{,}51$;   3) $0{,}2^4 - 0{,}2^3 \cdot 1{,}2$.

12.5.° Обчисліть значення виразу, попередньо розклавши його на множники:
1) $6{,}32x - x^2$, якщо $x = 4{,}32$;
2) $a^3 + a^2b$, якщо $a = 1{,}5$, $b = -2{,}5$;
3) $m^3p - m^2n^2$, якщо $m = 3$, $p = \frac{1}{3}$, $n = -3$.

12.6.° Знайдіть значення виразу:
1) $0{,}74x^2 + 26x$, якщо $x = 100$;   2) $x^2y^3 - x^3y^2$, якщо $x = 4$, $y = 5$.

12.7.° Розв'яжіть рівняння:
1) $y^2 - 6y = 0$;   3) $4m^2 - 20m = 0$;   5) $9x^2 - 6x = 0$;
2) $x^2 + x = 0$;   4) $13x^2 + x = 0$;   6) $12x - 0{,}3x^2 = 0$.

12.8.° Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 - x = 0$;   3) $5x^2 - 30x = 0$;
2) $p^2 + 15p = 0$;   4) $14x^2 + 18x = 0$.

12.9.° Розкладіть на множники:
1) $2x(a + b) + y(a + b)$;   7) $b(b - 20) + (20 - b)$;
2) $(a - 4) - b(a - 4)$;   8) $6a(a - 3b) - 13b(3b - a)$;
3) $5a(m - n) + 7b(m - n)$;   9) $(m - 9)^2 - 3(m - 9)$;
4) $6x(4x + 1) - 11(4x + 1)$;   10) $a(a + 5)^2 + (a + 5)$;
5) $a(c - d) + b(d - c)$;   11) $(m^2 - 3) - n(m^2 - 3)^2$;
6) $x(x - 6) - 10(6 - x)$;   12) $8c(p - 12) + 7d(p - 12)^2$.

12.10.° Подайте вираз у вигляді добутку многочленів:
1) $c(x - 3) - d(x - 3)$;   5) $4x(2x - y) - 5y(y - 2x)$;
2) $m(p - k) - (p - k)$;   6) $(y + 1)^2 - 4y(y + 1)$;
3) $m(x - y) - n(y - x)$;   7) $10(a^2 - 5) + (a^2 - 5)^2$;
4) $x(2 - x) + 4(x - 2)$;   8) $(a - 2)^2 - 6(a - 2)$.

12.11.• Розкладіть на множники:
1) $2a^5b^2 - 4a^3b + 6a^2b^3$;   4) $9x^3 + 4x^2 - x$;
2) $mn^3 + 5m^2n^2 - 7m^2n$;   5) $-6m^4 - 8m^5 - 2m^6$;
3) $xy^2 + x^2y - xy$;   6) $42a^4b - 28a^3b^2 - 70a^5b^3$.

12.12.• Винесіть за дужки спільний множник:
1) $m^2n + mn + n$;   3) $7a^4b^3 - 14a^3b^4 + 21a^2b^5$;
2) $3x^6 + 6x^5 - 15x^4$;   4) $20b^6c^5 - 45b^5c^6 - 30b^5c^5$.

12.13.° Знайдіть і виправте помилки в рівностях:
1) $4a + 4 = 4(a + 4)$;
2) $6ab - 3b = b(6a - 2b)$;
3) $-5x - 10y = -5(x - 2y)$;
4) $x^6 - x^4 + x^2 = x^2(x^3 - x^2 + x)$.

12.14.° Доведіть, що сума будь-якого натурального числа та його квадрата є парним числом.

12.15.° Розкладіть на множники:
1) $a(2a+b)(a+b)-4a(a+b)^2$;
2) $3m^2(m-8)+6m(m-8)^2$;
3) $(2a + 3)(a + 5) + (a - 1)(a + 5)$;
4) $(3x + 7)(4y - 1) - (4y - 1)(2x + 10)$;
5) $(5m - n)^3(m + 8n)^2 - (5m - n)^2(m + 8n)^3$.

12.16.° Подайте у вигляді добутку многочленів вираз:
1) $(x - 6)(2x - 4) + (x - 6)(8 - x)$;
2) $(x^2-2)(3y+5)-(x^2-2)(y+12)$;
3) $(4a - 3b)(5a + 8b) + (3b - 4a)(2a + b)$;
4) $(p - 9)^4(2p + 1)^3 + (p - 9)^3(2p + 1)^4$.

12.17.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи розкладання на множники:
1) $(x - 3)(x + 7) - (x + 7)(x - 8) = 0$;
2) $(4x - 9)(x - 2) + (1 - x)(x - 2) = 0$;
3) $0{,}2x(x - 5) + 8(x - 5) = 0$;
4) $7(x-7)-(x-7)^2=0$.

12.18.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи розкладання на множники:
1) $(2x - 9)(x + 6) - x(x + 6) = 0$;
2) $(3x + 4)(x - 10) + (10 - x)(x - 8) = 0$;
3) $3(3x+1)^2-4(3x+1)=0$;
4) $(9x - 12) - x(9x - 12) = 0$.

12.19.° Винесіть за дужки спільний множник:
1) $(2x-6)^2$;
2) $(5y+5)^2$;
3) $(36x+30y)^2$;
4) $(2x+4)^4$;
5) $(6x-9y)^3$;
6) $(a^2+ab)^2$;
7) $(-7a-14ab)^2$;
8) $(3c^4-6c^3)^4$.

12.20.° Винесіть за дужки спільний множник:
1) $(4x-4y)^2$;
2) $(18a+27b)^2$;
3) $(8m-10n)^3$;
4) $(a^2-9a)^2$;
5) $(16x^2y+40xy^2)^2$;
6) $(22x^4-28x^2y^3)^5$.

12.21.° Доведіть, що значення виразу:
1) 19^5+19^4 кратне 20;
2) $8^{10}-8^9-8^8$ кратне 11;
3) 8^7+2^{15} кратне 5;
4) $2\cdot3^{2006}+5\cdot3^{2005}+7\cdot3^{2004}$ кратне 10;
5) 27^4-9^5 кратне 24;
6) 12^4-4^6 кратне 130.

12.22.° Доведіть, що значення виразу:
1) $25^{25}-25^{24}$ ділиться націло на 12;
2) $16^4+8^5-4^7$ ділиться націло на 10;

3) $36^5 + 6^9$ ділиться націло на 42;

4) $10^5 - 5^7$ ділиться націло на 7.

12.23.• Знайдіть передостанню цифру числа, яке є значенням виразу $9^{108} + 9^{109}$.

12.24.• Доведіть, що коли:

1) $a + b = 2$, то $a^2b + ab^2 - 2ab = 0$;

2) $3a + 4b = -2$, то $12a^3b + 16a^2b^2 + 32a^2b = 24a^2b$;

3) $a + b = c$, то $a^3b^3c + a^2b^4c - a^2b^3c^2 = 0$.

12.25.• Доведіть, що коли:

1) $a + b + c = 0$, то $a^3b^3c^2 + a^2b^4c^2 + a^2b^3c^3 = 0$;

2) $a^2 - b^2 = 2ab + 1$, то $a^6b^4 - 2a^5b^5 - a^4b^6 = a^4b^4$;

3) $a - 2b = 3$, то $2ab^2 - a^2b + 3ab = 0$.

12.26.• Розв'яжіть рівняння:

1) $8x^2 - 3(x - 4) = 12$;

2) $5x^3 - x(2x - 3) = 3x$;

3) $4x - 0{,}2x(x + 20) = x^3$;

4) $9x(x - 3) + (x - 4)(x - 5) = 20$.

12.27.• Знайдіть корені рівняння:

1) $(3x - 2)(3x + 2) - (2x - 5)(8x - 3) = 4x - 19$;

2) $\frac{1}{3}(12 + x^3) = \frac{1}{9}x^2 + 4$.

12.28.• Спростіть вираз, використовуючи винесення спільного множника за дужки:

1) $(a - 1)(a + 2) - (a - 2)(a + 2) + (a - 3)(a + 2) - (a - 4)(a + 2)$;

2) $(3a - 2)(5b^2 - 4b + 10) + (2 - 3a)(5b^2 - 6b + 10)$;

3) $(4a - 7b)(2a^2 - 4ab + b^2) - (4a - 7b)(2a^2 - 4ab - b^2)$.

12.29.• Спростіть вираз, використовуючи винесення спільного множника за дужки:

1) $ab(a^2 + ab + b^2) - ab(a^2 - ab + b^2)$;

2) $(a + b)(a + 1) - (a + b)(1 - b) + (b + a)(b - a)$.

12.30.• Розв'яжіть рівняння $4x^2 - 1{,}2x = a$, якщо один із його коренів дорівнює 0,3.

12.31.• Розв'яжіть рівняння $5x^2 + 8x = a$, якщо один із його коренів дорівнює −1,6.

12.32.• Винесіть за дужки спільний множник (n — натуральне число):

1) $a^{n+1} + a^n$;

2) $b^n - b^{n-3}$, $n > 3$;

3) $c^{n+2} + c^{n-4}$, $n > 4$;

4) $d^{2n} - d^n$;

5) $2^{n+3} + 3 \cdot 2^{n+2} - 5 \cdot 2^{n+1}$;

6) $9^{n+1} + 3^{n+2}$;

7) $49^{n+2} - 7^{n+3}$;

8) $64^{n+2} - 32^{n+2} + 16^{n+2}$.

12.33.• Розкладіть на множники (n — натуральне число):

1) $a^{n+2} - a^n$;

2) $3b^{n+2} - 2b^{n+1} + b^n$;

3) $32^n + 16^{2n+1}$;

4) $27^{n+1} + 9^{n+1} - 3^{n+1}$.

12.34.* Відомо, що при деякому значенні y значення виразу $y^2 - 4y + 2$ дорівнює 6. Знайдіть при цьому значенні y значення виразу:

1) $5y^2 - 20y + 10$;
2) $y^2(y^2 - 4y + 2) - 4y(y^2 - 4y + 2)$;
3) $3y^2 - 12y + 8$.

12.35.* Відомо, що при деякому значенні a значення виразу $a^2 + 2a - 5$ дорівнює -4. Знайдіть при цьому значенні a значення виразу:

1) $-2a^2 - 4a + 10$;
2) $a^2(a^2 + 2a - 5) + 2a(a^2 + 2a - 5)$;
3) $4a^2 + 8a - 16$.

12.36.** При якому значенні a не має коренів рівняння:

1) $(x + 1)(x - 3) - x(x - 3) = ax$;
2) $x(5x - 1) - (x - a)(5x - 1) = 4x - 2a$;
3) $(2x - 5)(x + a) - (2x + 3)(x + 1) = 4$?

12.37.** При якому значенні a має безліч коренів рівняння:

1) $(x - 4)(x + a) - (x + 2)(x - a) = -6$;
2) $x(3x - 2) - (x + 2a)(3x + 2) = 5a + 6$?

12.38.* Числа a, b і c є такими, що $(a + b)(a + b + c) = 5$, $(b + c) \times (a + b + c) = 6$, $(a + c)(a + b + c) = 7$. Знайдіть $(a + b + c)^2$.

12.39.* Знайдіть усі двоцифрові числа, які дорівнюють добутку їхніх цифр, збільшених на 1.

12.40.* Значення змінної x є таким, що $3x^2 - x = 3$. Знайдіть значення виразу $6x^2 - 2x + 7$.

12.41.* Значення змінної x є таким, що $x^2 - 7x = 5$. Знайдіть значення виразу $x^4 - 7x^3 - 35x - 1$.

12.42.* Доведіть, що значення виразу 1 111 111 111 − 22 222 є квадратом натурального числа.

12.43.* Знайдіть такі натуральні числа m і n, що $2^m - 2^n = 240$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

12.44. Спростіть вираз:

1) $0{,}42ac^3 \cdot 1\frac{3}{7}a^4c^2$;
2) $1{,}2xyz \cdot 2\frac{1}{6}x^5y^6$;
3) $-2\frac{1}{3}m^2np^3 \cdot \left(\frac{3}{7}np^4\right)^2$;
4) $\left(1\frac{1}{2}x^2y^3\right)^5 \cdot \frac{16}{27}x^8y^2$.

12.45. Вміст солі в морській воді становить 5 %. Скільки кілограмів прісної води треба додати до 30 кг морської води, щоби вміст солі в утвореному розчині становив 3 %?

12.46. Для ремонту школи придбали фарбу. Першого дня витратили на 2 банки фарби більше за половину всієї фарби, а другого — $\frac{5}{8}$ кількості банок фарби, витраченої за перший день.

Після цього залишилося 2 банки. Скільки банок фарби було придбано?

12.47. У коробці лежать 2 червоних, 4 зелених і 10 синіх олівців. Яка ймовірність того, що навмання взятий олівець буде:

1) червоним; 2) зеленим; 3) не зеленим?

Яку найменшу кількість олівців треба взяти навмання, щоб серед них обов'язково був синій олівець?

12.48. Чи існує двоцифрове число, у якому цифра десятків на 4 більша за цифру одиниць, а різниця між даним числом і числом, записаним тими самими цифрами, але у зворотному порядку, дорівнює 27?

13. Розкладання многочлена на множники. Метод групування

Многочлен $ax + bx + ay + by$ не вдасться розкласти на множники методом винесення за дужки спільного множника, оскільки множника, спільного для всіх доданків, немає. Проте члени цього многочлена можна об'єднати в групи так, що доданки кожної групи матимуть спільний множник:

$$ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by) = x(a + b) + y(a + b).$$

Ми отримали вираз, у якому обидва доданки мають множник $(a + b)$. Винесемо його за дужки:

$$x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y).$$

Заданий многочлен удалося розкласти на множники завдяки тому, що ми у зручний спосіб об'єднали його члени в групи. Тому описаний прийом розкладання многочлена на множники називають **методом групування**.

ПРИКЛАД 1 Розкладіть на множники многочлен:

1) $2ac + 2bc + 5am + 5bm$; 3) $xy - 12 + 4x - 3y$.

2) $x^4 - 2x^3 - 3x + 6$;

Розв'язання. 1) Згрупувавши члени даного многочлена так, щоб доданки в кожній групі мали спільний множник, отримуємо:

$$2ac + 2bc + 5am + 5bm = (2ac + 2bc) + (5am + 5bm) =$$
$$= 2c(a + b) + 5m(a + b) = (a + b)(2c + 5m).$$

Той самий результат можна отримати, якщо доданки згрупувати в інший спосіб:

$$(2ac + 5am) + (2bc + 5bm) = a(2c + 5m) + b(2c + 5m) =$$
$$= (2c + 5m)(a + b).$$

2) Маємо: $x^4 - 2x^3 - 3x + 6 = (x^4 - 2x^3) - (3x - 6) =$
$= x^3(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x^3 - 3).$

3) $xy - 12 + 4x - 3y = (xy + 4x) + (-12 - 3y) = x(y + 4) - 3(4 + y) =$
$= (y + 4)(x - 3).$

ПРИКЛАД 2 Розкладіть на множники тричлен $x^2 + 6x + 8$.

Розв'язання. Подавши доданок $6x$ у вигляді суми $2x + 4x$, застосуємо метод групування:

$$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x + 4x + 8 = (x^2 + 2x) + (4x + 8) =$$
$$= x(x + 2) + 4(x + 2) = (x + 2)(x + 4).$$

ВПРАВИ

13.1.° Розкладіть на множники многочлен:

1) $ma + mb + 4a + 4b$;
2) $3x + cy + cx + 3y$;
3) $5a - 5b + ap - bp$;
4) $7m + mn + 7 + n$;
5) $a - 1 + ab - b$;
6) $xy + 8y - 2x - 16$;
7) $ab + ac - b - c$;
8) $3p - 3k - 4ap + 4ak$.

13.2.° Подайте у вигляді добутку многочленів вираз:

1) $ay - 3y - 4a + 12$;
2) $9a + 9 - na - n$;
3) $6x + ay + 6y + ax$;
4) $8x - 8y + xz - yz$;
5) $mn + m - n - 1$;
6) $ab - ac - 2b + 2c$.

13.3.° Розкладіть на множники многочлен:

1) $a^3 + a^2 + a + 1$;
2) $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 12$;
3) $c^6 - 10c^4 - 5c^2 + 50$;
4) $y^3 - 18 + 6y^2 - 3y$;
5) $a^2 - ab + ac - bc$;
6) $20a^3bc - 28ac^2 + 15a^2b^2 - 21bc$;
7) $x^2y^2 + xy + axy + a$;
8) $24x^6 - 44x^4y - 18x^2y^3 + 33y^4$.

13.4.° Розкладіть на множники многочлен:

1) $8c^3 - 2c^2 + 4c - 1$;
2) $x^2y + x + xy^2 + y$;
3) $9a^2b - 3a^2 + 3b^2 - b$;
4) $8a^2 - 2ab - 4ac + bc$;
5) $2b^3 - 7b^2c - 4b + 14c$;
6) $6x^5 + 4x^2y^2 - 9x^3y - 6y^3$.

13.5.° Знайдіть значення виразу, розклавши його попередньо на множники:

1) $2a^3 - 3a^2 - 2ab + 3b$, якщо $a = 0{,}5$, $b = 2{,}25$;
2) $xy + y^2 - 12x - 12y$, якщо $x = 10{,}8$, $y = -8{,}8$;
3) $27x^3 - 36x^2 + 6x - 8$, якщо $x = -1\frac{1}{3}$.

13.6.° Знайдіть значення виразу:

1) $2a + b + 2a^2 + ab$, якщо $a = -3$, $b = 4$;
2) $3x^3 - x^2 - 6x + 2$, якщо $x = \frac{2}{3}$.

13.7.° Обчисліть, не використовуючи калькулятора:

1) $3{,}74^2 + 3{,}74 \cdot 2{,}26 - 3{,}74 \cdot 1{,}24 - 2{,}26 \cdot 1{,}24$;
2) $58{,}7 \cdot 1{,}2 + 36 \cdot 3{,}52 - 34{,}7 \cdot 1{,}2 - 2{,}32 \cdot 36$;
3) $2\frac{4}{9} \cdot 3\frac{2}{7} + 1\frac{5}{7} \cdot 2{,}8 + 2\frac{5}{9} \cdot 3\frac{2}{7} + 1\frac{5}{7} \cdot 2{,}2$.

13.8.° Знайдіть значення виразу:

1) $34{,}4 \cdot 13{,}7 - 34{,}4 \cdot 8{,}7 - 15{,}6 \cdot 8{,}7 + 13{,}7 \cdot 15{,}6$;
2) $0{,}6^3 - 2 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}8^2 - 2 \cdot 0{,}8^3$.

13.9.• Розкладіть на множники многочлен:

1) $ax^2 + ay - bx^2 - by + cx^2 + cy$;
2) $a^2b + a + ab^2 + b + 3ab + 3$;
3) $x^3 - x^2 + x^2y + x - xy + y$;
4) $m^2n + mn - 5 - 5m + n - 5m^2$;
5) $x^6 - 2x^5 + 4x^3 - 8x^2 + 5x - 10$;
6) $a^3b + ab^2 - abc^3 - a^2c - bc + c^4$.

13.10.• Подайте вираз у вигляді добутку многочленів:

1) $ab + ac + ad + bx + cx + dx$;
2) $7p - 7k - px + kx + k - p$;
3) $x^3y^3 - x^2y^2 + xy - 6 + 6xy - 6x^2y^2$;
4) $a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$.

13.11.• Розкладіть на множники вираз (n — натуральне число):

1) $a^{n+1} + a^n + a + 1$;
2) $b^{n+2} - b - 1 + b^{n+1}$;
3) $3y^{n+3} - 3y^2 - 5 + 5y^{n+1}$.

13.12.• Розкладіть на множники (n — натуральне число):

1) $x^{n+2} + x^n - x^2 - 1$;
2) $4y^{n+4} + y^{n+2} + 4y^3 + y$.

13.13.•• Розкладіть на множники тричлен, подавши попередньо один із його членів у вигляді суми подібних доданків:

1) $x^2 + 8x + 12$;
2) $x^2 - 5x + 4$;
3) $x^2 + 7x - 8$;
4) $x^2 - 4x - 5$;
5) $2x^2 - x - 1$;
6) $3x^2 + 4x + 1$.

13.14.•• Розкладіть на множники тричлен:

1) $x^2 + 4x + 3$;
2) $x^2 - 10x + 16$;
3) $x^2 + 3x - 18$;
4) $x^2 - 4x - 32$;
5) $5y^2 - 6y + 1$;
6) $6z^2 - 5z + 1$.

13.15.•• Доведіть, що при всіх натуральних значеннях n значення виразу $n^3 + 3n^2 + 2n$ ділиться націло на 6.

13.16.•• Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n, яке більше за 1, значення виразу $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ ділиться націло на 10.

13.17.•• Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n, яке більше за 1, значення виразу $7^{n+2} - 5^{n+2} + 5^n + 7^n$ ділиться націло на 50.

13.18.* Відомо, що при деяких значеннях x і y виконується рівність $x^2 + y^2 = 1$. Знайдіть при цих самих значеннях x і y значення виразу $2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2$.

13.19.* Відомо, що $a^2 - b^2 = 2$. Знайдіть значення виразу $a^6 - a^4b^2 - 2b^4 - 8b^2$.

13.20.* Цілі числа a, b і c є такими, що $ab + bc + ac = 1$. Доведіть, що значення виразу $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ є квадратом цілого числа.

13.21.* Цілі числа a, b і c є такими, що $a + b + c = 1$. Доведіть, що значення виразу $(a + bc)(b + ac)(c + ab)$ є квадратом цілого числа.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

13.22. (*Задача з українського фольклору.*) Підпасок привів на полонину овець. На полонині були кілки. Якщо до кожного кілка він прив'яже по вівці, то для однієї кілка не вистачить. Якщо ж до кожного кілка він прив'яже по дві вівці, то один кілок залишиться вільним. Скільки овець привів підпасок?

13.23. Петро й Дмитро можуть прополоти город, працюючи разом, за 2,4 год. Петро може зробити це самостійно за 4 год. Скільки часу потрібно Дмитру, щоб самостійно прополоти город?

13.24. В одному бідоні було в 4 рази більше молока, ніж у другому. Коли з першого бідона перелили 10 л молока в другий, то об'єм молока в другому бідоні склав $\frac{2}{3}$ об'єму молока, що залишилося в першому бідоні. Скільки літрів молока було в кожному бідоні спочатку?

14. Добуток різниці та суми двох виразів

Нерідко в математиці, крім знання загального закону (теореми), зручно користуватися правилами, що застосовуються в окремих (особливих) випадках.

Наприклад, коли множать десятковий дріб на 10, 100, 1000 й т. д., то немає потреби використовувати загальний алгоритм множення у стовпчик, а набагато зручніше застосувати правило перенесення коми.

Особливі ситуації трапляються також при множенні многочленів.

Розглянемо окремий випадок, коли в добутку двох многочленів один із них є різницею двох виразів, а другий — їхньою сумою.

Маємо:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Отримали тотожність

$$\boxed{(a-b)(a+b)=a^2-b^2}$$

Тепер при множенні різниці виразів на їхню суму можна скоротити роботу, одразу записавши результат — різницю квадратів цих виразів. Тому цю тотожність називають **формулою скороченого множення.** Її виражає таке правило:

добуток різниці двох виразів та їхньої суми дорівнює різниці квадратів цих виразів.

ПРИКЛАД 1 Виконайте множення многочленів:

1) $(2a - 5b)(2a + 5b)$;
2) $(y^2 + 3x^4)(3x^4 - y^2)$;
3) $(-4mn - p)(4mn - p)$.

Розв'язання. 1) $(2a - 5b)(2a + 5b) = (2a)^2 - (5b)^2 = 4a^2 - 25b^2$.
2) $(y^2 + 3x^4)(3x^4 - y^2) = (3x^4 + y^2)(3x^4 - y^2) = (3x^4)^2 - (y^2)^2 = 9x^8 - y^4$.
3) $(-4mn - p)(4mn - p) = (-p - 4mn)(-p + 4mn) =$
$= (-p)^2 - (4mn)^2 = p^2 - 16m^2n^2$. ●

ПРИКЛАД 2 Спростіть вираз:

1) $(b - 3)(b + 3) - (2b + 1)(2b - 1)$;
2) $-2x(x + 5)(5 - x)$;
3) $(a^3 - 2)(a^3 + 2)(a^6 + 4)$.

Розв'язання. 1) $(b - 3)(b + 3) - (2b + 1)(2b - 1) =$
$= b^2 - 9 - (4b^2 - 1) = b^2 - 9 - 4b^2 + 1 = -3b^2 - 8$.
2) $-2x(x + 5)(5 - x) = -2x(25 - x^2) = -50x + 2x^3$.
3) Застосувавши двічі формулу добутку суми й різниці двох виразів, отримаємо:

$$(a^3 - 2)(a^3 + 2)(a^6 + 4) = (a^6 - 4)(a^6 + 4) = a^{12} - 16.$$ ●

ПРИКЛАД 3 Знайдіть значення виразу:

$$(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) - 2^{64}.$$

Розв'язання. Очевидно, що даний вираз дорівнює такому:
$(2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) - 2^{64}$.
Отримуємо: $(2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) - 2^{64} =$
$= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) - 2^{64} = \ldots =$
$= 2^{64} - 1 - 2^{64} = -1$.

Відповідь: -1. ●

?

1. Чому дорівнює добуток різниці двох виразів та їхньої суми?
2. Запишіть формулу добутку різниці та суми двох виразів.

ВПРАВИ

14.1.° Якому з наведених многочленів тотожно дорівнює добуток $(7a-2b)(7a+2b)$:

1) $7a^2-2b^2$; 2) $7a^2+2b^2$; 3) $49a^2-4b^2$; 4) $49a^2+4b^2$?

14.2.° Виконайте множення многочленів:

1) $(m-n)(m+n)$;
2) $(x-1)(x+1)$;
3) $(9-y)(9+y)$;
4) $(3b-1)(3b+1)$;
5) $(10m-7)(10m+7)$;
6) $(4a-b)(b+4a)$;
7) $(5b+1)(1-5b)$;
8) $(3x-5y)(3x+5y)$;
9) $(13c-10d)(13c+10d)$;
10) $(8m+11n)(11n-8m)$.

14.3.° Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(c-2)(c+2)$;
2) $(12-x)(12+x)$;
3) $(3x+y)(3x-y)$;
4) $(6x-9)(6x+9)$;
5) $(x+7)(7-x)$;
6) $(5a-8b)(5a+8b)$;
7) $(8m+2)(2-8m)$;
8) $(13c-14d)(14d+13c)$.

14.4.° Виконайте множення:

1) $(a^2-3)(a^2+3)$;
2) $(5+b^2)(b^2-5)$;
3) $(3x-2y^2)(3x+2y^2)$;
4) $(10p^3-7k)(10p^3+7k)$;
5) $(4x^2-8y^3)(4x^2+8y^3)$;
6) $(11a^3+5b^2)(5b^2-11a^3)$;
7) $(7-xy)(7+xy)$;
8) $\left(8a^3b-\frac{1}{3}ab^2\right)\left(8a^3b+\frac{1}{3}ab^2\right)$;
9) $(0{,}3m^5+0{,}1n^3)(0{,}3m^5-0{,}1n^3)$;
10) $\left(\frac{7}{9}a^2c-1{,}4b^4\right)\left(1{,}4b^4+\frac{7}{9}a^2c\right)$.

14.5.° Виконайте множення:

1) $(x^3+4)(x^3-4)$;
2) $(ab-c)(ab+c)$;
3) $(x-y^2)(y^2+x)$;
4) $(3m^2-2c)(3m^2+2c)$;
5) $(6a^3-8b)(6a^3+8b)$;
6) $(5n^4-m^4)(5n^4+m^4)$;
7) $(0{,}2m^8-0{,}8n^6)(0{,}2m^8+0{,}8n^6)$;
8) $\left(\frac{2}{7}p^7+\frac{4}{11}k^9\right)\left(\frac{4}{11}k^9-\frac{2}{7}p^7\right)$.

14.6.° Спростіть вираз:

1) $(2a-b)(2a+b)+b^2$;
2) $10x^2+(y-5x)(y+5x)$;
3) $64m^2-(8m+9)(8m-9)$;
4) $(4x-7y)(4x+7y)+(7x-4y)(7x+4y)$;
5) $(a-2)(a+3)+(6-a)(a+6)$;
6) $3a(a-b)-(3a+2b)(3a-2b)$.

14.7.° Спростіть вираз:

1) $(9a-2)(9a+2)-18a^2$;
2) $25m^2-(5m-7)(5m+7)$;
3) $(b+7)(b-4)+(2b-6)(2b+6)$;
4) $4x(3x-10y)-(4x+y)(4x-y)$.

14.8.° На який вираз треба помножити двочлен $0{,}3x^3 - xy^2$, щоб добуток дорівнював двочлену $0{,}09x^6 - x^2y^4$?

14.9.° На який вираз треба помножити многочлен $7t^4 + 9p^5$, щоб добуток дорівнював многочлену $49t^8 - 81p^{10}$?

14.10.• Які одночлени треба поставити замість зірочок, щоб виконувалася тотожність:

1) $(* - 12a)(* + *) = 9b^2 - *$;
2) $(* - 5c)(* + 5c) = 16d^2 - *$;
3) $(0{,}7p + *)(* - 0{,}7p) = \frac{1}{9}m^8 - 0{,}49p^2$;
4) $(3m^2 + *)(* - *) = 9m^4 - n^6$?

14.11.• Поставте замість зірочок такі одночлени, щоб виконувалася тотожність:

1) $(8a^2b - *)(8a^2b + *) = * - 25c^6$;
2) $\left(* - \frac{1}{12}x^4y^5\right)\left(\frac{1}{15}a^2 + *\right) = \frac{1}{225}a^4 - \frac{1}{144}x^8y^{10}$.

14.12.• Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $a(a - 2)(a + 2)$;
2) $-3(x + 3)(x - 3)$;
3) $7b^2(b + 4)(4 - b)$;
4) $(c - d)(c + d)(c^2 + d^2)$;
5) $(2a - 1)(2a + 1)(4a^2 + 1)$;
6) $(c^3 - 5)(c^3 + 5)(c^6 + 25)$.

14.13.• Виконайте множення:

1) $5b(b - 1)(b + 1)$;
2) $(c + 2)(c - 2) \cdot 8c^2$;
3) $(m - 10)(m^2 + 100)(m + 10)$;
4) $(a^2 + 1)(a^2 - 1)(a^4 + 1)$.

14.14.• Виконайте множення двочленів (n — натуральне число):

1) $(a^n - 4)(a^n + 4)$;
2) $(b^{2n} + c^{3n})(b^{2n} - c^{3n})$;
3) $(x^{4n} + y^{n+2})(y^{n+2} - x^{4n})$;
4) $(a^{n+1} - b^{n-1})(a^{n+1} + b^{n-1})$, $n > 1$.

14.15.• Спростіть вираз:

1) $(8a - 3)(8a + 3) - (7a + 4)(8a - 4)$;
2) $0{,}6m(2m - 1)(2m + 1) + 0{,}3(6 + 5m)(6 - 5m)$;
3) $(7 - 2x)(7 + 2x) - (x - 8)(x + 8) - (4 - 3x)(5 + 3x)$;
4) $-b^2c(4b - c^2)(4b + c^2) + 16b^4c$.

14.16.• Спростіть вираз:

1) $(x + 1)(x - 1) - (x + 5)(x - 5) + (x + 1)(x - 5)$;
2) $81a^8 - (3a^2 - b^3)(9a^4 + b^6)(3a^2 + b^3)$.

14.17.• Розв'яжіть рівняння:

1) $8x(3 + 2x) - (4x + 3)(4x - 3) = 9x - 6$;
2) $7x - 4x(x - 5) = (8 - 2x)(8 + 2x) + 27x$;
3) $(6x + 7)(6x - 7) + 12x = 12x(3x + 1) - 49$;
4) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)(x^4 + 16) = x^8 + 10x$.

14.18.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 17)(x + 17) = x^2 + 6x - 49$;
2) $(1{,}2x - 4)(1{,}2x + 4) - (1{,}3x - 2)(1{,}3x + 2) = 0{,}5x(8 - 0{,}5x)$.

14.19.• Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної (змінних):

1) $(x-9)(x+9)-(x+19)(x-19)$;

2) $(2a-b)(2a+b)+(b-c)(b+c)+(c-2a)(c+2a)$.

14.20.• Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу

$$(7n+8)(7n-8)-(5n+10)(5n-10)$$

ділиться націло на 12.

14.21.• Доведіть, що не існує такого натурального числа n, при якому значення виразу

$$(4n+3)(9n-4)-(6n-5)(6n+5)-3(n-2)$$

ділиться націло на 8.

14.22.• Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу

$$(9n-4)(9n+4)-(8n-2)(4n+3)+5(6n+9)$$

ділиться націло на 7.

14.23.•• Знайдіть значення виразу:

1) $3^{20}\cdot 6^{20}-(18^{10}-2)(18^{10}+2)$;

2) $(5+28^{17})(5-28^{17})+14^{34}\cdot 2^{34}$;

3) $7^{36}\cdot 8^{12}-(14^{18}+3)(14^{18}-3)$;

4) $(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)-3^{64}$.

14.24.•• Чому дорівнює значення виразу:

1) $81^{15}\cdot 8^{20}-(6^{30}+1)(6^{30}-1)$;

2) $5^{24}-(5^3-2)(5^3+2)(5^6+4)(5^{12}+16)$?

14.25.•• Порівняйте значення виразів, не обчислюючи їх:

1) $415\cdot 425$ і $426\cdot 414$;
2) $1\,234\,567\cdot 1\,234\,569$ і $1\,234\,568^2$.

14.26.•• Порівняйте значення виразів, не обчислюючи їх:

1) $253\cdot 259$ і $252\cdot 260$;
2) 987654^2 і $987\,646\cdot 987\,662$.

14.27.* Відомо, що $a=b+1$. Спростіть вираз:

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32}).$$

14.28.* Доведіть, що:

$$(1-2+2^2)(1-2^2+2^4)(1-2^4+2^8)(1-2^8+2^{16})(1-2^{16}+2^{32})=\frac{1+2^{32}+2^{64}}{7}.$$

14.29.* Доведіть, що значення виразу $1000\cdot 1002(1001^2+1)+1$ є четвертим степенем натурального числа.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

14.30. Від села до станції Василько може доїхати на велосипеді за 3 год, а дійти пішки — за 7 год. Швидкість пішки на 8 км/год менша від швидкості руху на велосипеді. З якою швидкістю їздить Василько на велосипеді? Яка відстань від села до станції?

14.31. В одному мішку було 60 кг цукру, а в другому — 100 кг. Коли з другого мішка взяли в 4 рази більше цукру, ніж із першого, то в першому залишилося у 2 рази більше цукру, ніж у другому. Скільки кілограмів цукру взяли з кожного мішка?

14.32. Один вантажний автомобіль може перевезти зібраний з поля врожай за 10 год, другий — за 12 год, а третій — за 15 год. За скільки годин вони зможуть перевезти врожай, працюючи разом?

14.33. (*Старовинна єгипетська задача.*) Кожний із 7 чоловіків має 7 кішок. Кожна кішка з'їдає по 7 мишей, кожна миша за одне літо може знищити 7 ячмінних колосків, а із зерен одного колоска може вирости 7 жмень ячмінного зерна. Маса однієї жмені зерна — 80 г. Скільки жмень зерна щорічно рятують кішки? Скільки це становить тонн зерна? Відповідь округліть до сотих.

14.34. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4x-1}{12}-\frac{3x+1}{8}=x+1$; 2) $\frac{3x-2}{9}-\frac{2x+1}{6}=\frac{5-x}{3}$.

15. Різниця квадратів двох виразів

Ви вже знаєте два способи розкладання многочленів на множники: винесення спільного множника за дужки та метод групування. Розглянемо ще один спосіб.

Формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ перепишемо так:

$$\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$$

Цю тотожність називають **формулою різниці квадратів двох виразів**.

Тепер можна сформулювати правило.

Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів та їхньої суми.

Наведемо приклади застосування цієї формули для розкладання многочленів на множники.

ПРИКЛАД 1 Розкладіть на множники:

1) a^2-4; 2) $36m^2-2\frac{7}{9}n^8$; 3) $-a^2b^6+1$.

Розв'язання. 1) Маємо: $a^2-4=a^2-2^2=(a-2)(a+2)$.

2) $36m^2 - 2\frac{7}{9}n^8 = 36m^2 - \frac{25}{9}n^8 = (6m)^2 - \left(\frac{5}{3}n^4\right)^2 =$

$$= \left(6m - \frac{5}{3}n^4\right)\left(6m + \frac{5}{3}n^4\right).$$

3) $-a^2b^6 + 1 = 1 - a^2b^6 = (1 - ab^3)(1 + ab^3)$.

ПРИКЛАД 2 Розкладіть на множники, використовуючи формулу різниці квадратів:

1) $100 - (a + 5)^2$; 2) $(2a + 3b)^2 - (3a - b)^2$.

Розв'язання. 1) $100 - (a + 5)^2 = 10^2 - (a + 5)^2 =$

$$= (10 - (a + 5))(10 + (a + 5)) =$$

$$= (10 - a - 5)(10 + a + 5) = (5 - a)(15 + a).$$

2) $(2a + 3b)^2 - (3a - b)^2 = ((2a + 3b) - (3a - b))((2a + 3b) + (3a - b)) = (2a + 3b - 3a + b)(2a + 3b + 3a - b) = (4b - a)(5a + 2b)$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 36 = 0$; 2) $(2x - 7)^2 - 81 = 0$.

Розв'язання. 1) Застосувавши формулу різниці квадратів і умову рівності добутку нулю, отримуємо:

$$(x - 6)(x + 6) = 0;$$

$$x - 6 = 0 \text{ або } x + 6 = 0;$$

$$x = 6 \text{ або } x = -6.$$

Відповідь: 6; –6.

2) Маємо:

$$(2x - 7 - 9)(2x - 7 + 9) = 0;$$

$$(2x - 16)(2x + 2) = 0;$$

$$2x - 16 = 0 \text{ або } 2x + 2 = 0;$$

$$x = 8 \text{ або } x = -1.$$

Відповідь: 8; –1.

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $(6n + 7)^2 - (2n - 1)^2$ ділиться націло на 8.

Розв'язання. Маємо:

$$(6n + 7)^2 - (2n - 1)^2 = (6n + 7 - 2n + 1)(6n + 7 + 2n - 1) =$$
$$= (4n + 8)(8n + 6) = 4(n + 2) \cdot 2(4n + 3) = 8(n + 2)(4n + 3).$$

Даний вираз подано у вигляді добутку трьох множників, один з яких дорівнює 8, а два інших — теж натуральні числа. Звідси випливає, що значення даного виразу ділиться націло на 8 при будь-якому натуральному n.

?

1. Запишіть формулу різниці квадратів двох виразів.

ВПРАВИ

15.1.° Яким з наведених добутків многочленів тотожно дорівнює многочлен a^2-144:

1) $(a-12)^2$;
2) $(a-12)(a+12)$;
3) $(12-a)(12+a)$;
4) $(12-a)(-12-a)$?

15.2.° Яка з даних рівностей є тотожністю:

1) $-49+b^2=(7-b)(7+b)$;
2) $-49+b^2=(b-7)(b+7)$;
3) $-49+b^2=(7-b)^2$;
4) $-49+b^2=(b-49)(b+49)$?

15.3.° Чи можна, застосовуючи формулу різниці квадратів, розкласти на множники вираз:

1) a^2-9;
2) b^2+1;
3) $4-c^2$;
4) $25+x^2$;
5) $1-y^2$;
6) $16a^2-b^2$;
7) $81+100p^2$;
8) $81-100p^2$;
9) m^2n^2-25;
10) $-m^2n^2-25$?

Якщо це можливо, то виконайте розкладання на множники.

15.4.° Розкладіть на множники:

1) b^2-d^2;
2) x^2-1;
3) $-x^2+1$;
4) $36-c^2$;
5) $4-25a^2$;
6) $49a^2-100$;
7) $900-81k^2$;
8) $16x^2-121y^2$;
9) b^2c^2-1;
10) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2$;
11) $-4a^2b^2+25$;
12) $144x^2y^2-400$;
13) $a^2b^2c^2-1$;
14) $100a^2-0{,}01b^2$;
15) a^4-b^2;
16) $p^2t^2-0{,}36k^2d^2$;
17) $y^{10}-9$;
18) $4x^{12}-1\frac{11}{25}y^{16}$.

15.5.° Розкладіть на множники:

1) $16-b^2$;
2) c^2-49;
3) $0{,}04-a^2$;
4) $x^2-\frac{4}{9}$;
5) $4x^2-25$;
6) $81c^2-64d^2$;
7) $0{,}09x^2-0{,}25y^2$;
8) $a^2b^4-c^6d^8$;
9) $4a^2c^2-9x^2y^2$;
10) $x^{24}-y^{22}$;
11) $-1600+a^{12}$;
12) $a^{18}-\frac{49}{64}$.

15.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-49=0$;
2) $\frac{1}{4}-z^2=0$;
3) $x^2+36=0$;
4) $9x^2-4=0$.

15.7.° Розв'яжіть рівняння:

1) $c^2-0{,}25=0$;
2) $81x^2-121=0$;
3) $-0{,}09+4x^2=0$.

15.8.° Розкладіть на множники, користуючись формулою різниці квадратів:

1) $(x+2)^2-49$;
2) $(x-10)^2-25y^2$;
3) $25-(y-3)^2$;
4) $(a-4)^2-(a+2)^2$;
5) $(m-10)^2-(n-6)^2$;
6) $(8y+4)^2-(4y-3)^2$;
7) $(5a+3b)^2-(2a-4b)^2$;
8) $4(a-b)^2-(a+b)^2$;
9) $(x^2+x+1)^2-(x^2-x+2)^2$;
10) $(-3x^3+y)^2-16x^6$.

15.9.° Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $(x-2)^2-4$; 3) $121-(b+7)^2$; 5) $(4x-9)^2-(2x+19)^2$;
2) $(b+7)^2-100c^2$; 4) $a^4-(7b-a^2)^2$; 6) $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2$.

15.10.° Знайдіть значення виразу:

1) $(9x-4)^2-(7x+5)^2$, якщо $x=1{,}5$;
2) $(5x+3y)^2-(3x+5y)^2$, якщо $x=2{,}1$, $y=1{,}9$.

15.11.° Знайдіть значення виразу $(2{,}5a-1{,}5b)^2-(1{,}5a-2{,}5b)^2$, якщо $a=-1{,}5$, $b=-3{,}5$.

15.12.• Чому дорівнює площа заштрихованої фігури, зображеної на рисунку 15.1? Обчисліть значення отриманого виразу при $a=7{,}4$ см, $b=2{,}6$ см.

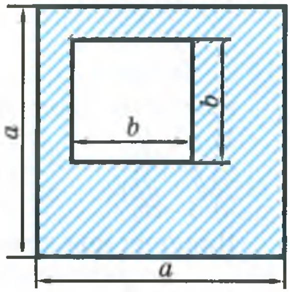


Рис. 15.1

15.13.• Два кола, радіуси яких дорівнюють R і r ($R>r$), мають спільний центр. Виразіть через π, R і r площу фігури, обмеженої цими колами. Обчисліть значення отриманого виразу при $R=5{,}1$ см, $r=4{,}9$ см.

15.14.• Подайте у вигляді добутку трьох множників вираз:

1) m^4-625; 3) $2^{4n}-16$, де n — натуральне число;
2) $x^{16}-81$; 4) $c^{20}-y^{12}$.

15.15.• Розкладіть на множники:

1) a^8-b^8; 2) $a^{16}-256$; 3) x^8-z^{20}.

15.16.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x-5)^2-49=0$; 3) $(a-1)^2-(2a+9)^2=0$;
2) $(4x+7)^2-9x^2=0$; 4) $25(3b+1)^2-16(2b-1)^2=0$.

15.17.• Розв'яжіть рівняння:

1) $16-(6-11x)^2=0$; 2) $(7m-13)^2-(9m+19)^2=0$.

15.18.• Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

1) $(7n+4)^2-9$ ділиться націло на 7;
2) $(8n+1)^2-(3n-1)^2$ ділиться націло на 11;
3) $(3n+7)^2-(3n-5)^2$ ділиться націло на 24;
4) $(7n+6)^2-(2n-9)^2$ ділиться націло на 15.

15.19.• Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

1) $(5n+4)^2-(5n-4)^2$ ділиться націло на 80;
2) $(9n+10)^2-(9n+8)^2$ ділиться націло на 36;
3) $(10n+2)^2-(4n-10)^2$ ділиться націло на 12.

15.20.$^{\bullet}$ Доведіть, що:
1) різниця квадратів двох послідовних натуральних чисел дорівнює сумі цих чисел;
2) різниця квадратів двох послідовних парних чисел ділиться націло на 4.

15.21.$^{\bullet}$ Доведіть, що:
1) різниця квадратів двох послідовних парних чисел дорівнює подвоєній сумі цих чисел;
2) різниця квадратів двох послідовних непарних чисел ділиться націло на 8.

15.22.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть тотожність

$$(m^3-n^3)^2(m^3+n^3)^2-(m^6+n^6)^2=-4m^6n^6.$$

15.23.$^{\bullet\bullet}$ Різниця квадратів двох двоцифрових чисел, записаних одними й тими самими цифрами, дорівнює 693. Знайдіть ці числа.

15.24.$^{\bullet\bullet}$ Остача від ділення на 7 одного натурального числа дорівнює 4, а другого числа — 3. Доведіть, що різниця квадратів цих чисел кратна 7.

15.25.$^{\bullet\bullet}$ При якому значенні b рівняння $(b^2-4)x=b-2$:
1) має безліч коренів;
2) не має коренів;
3) має один корінь?

15.26.$^{\bullet\bullet}$ При якому значенні a рівняння $(a^2-25)x=a+5$:
1) має безліч коренів;
2) не має коренів;
3) має один корінь?

15.27.* Знайдіть значення виразу $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{144}\right)$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

15.28. Човен рухався 2,4 год за течією річки та 3,6 год проти течії. Відстань, яку пройшов човен за течією, на 5,4 км більша за відстань, пройдену проти течії. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії становить 2,5 км/год.

15.29. За 3 дні продали 130 кг апельсинів. Другого дня продали $\frac{4}{9}$ того, що продали за перший день, а третього — стільки, скільки за перші два дні разом. Скільки кілограмів апельсинів продали за перший день?

15.30. У послідовності ..., a, b, c, d, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... кожне число дорівнює сумі двох попередніх. Чому дорівнює число a?

15.31. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-1}{8}-\frac{x+2}{4}=x$; 2) $3(2x+3)-2(3x+5)=-1$.

15.32. Для пари виразів знайдіть усі значення a, при яких значення другого виразу в 3 рази більше за відповідне значення першого виразу:

1) a і $3a$; 2) a^2 і $3a^2$; 3) a^2+1 і $3a^2+3$.

16. Квадрат суми та квадрат різниці двох виразів. Квадрат суми кількох виразів

Перетворимо в многочлен вираз $(a+b)^2$. Маємо:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

Отже,

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

Цю тотожність називають **формулою квадрата суми двох виразів**. Тепер можна сформулювати правило.

Квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток першого й другого виразів плюс квадрат другого виразу.

Перетворимо в многочлен вираз $(a-b)^2$. Маємо:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2.$$

Ми отримали **формулу квадрата різниці двох виразів:**

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток першого й другого виразів плюс квадрат другого виразу.

Зауважимо, що формулу квадрата різниці двох виразів можна отримати за допомогою формули квадрата суми двох виразів:

$$(a-b)^2=(a+(-b))^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Піднесемо до квадрата тричлен $a+b+c$. Маємо:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=(a+b+c)(a+b+c)=\\&=a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2=\\&=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.\end{aligned}$$

Ми отримали формулу квадрата суми трьох виразів:

$$\boxed{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$$

Квадрат суми трьох виразів дорівнює сумі квадратів цих виразів, до якої додано суму подвоєних добутків кожних двох виразів.

Міркуючи аналогічно, можна отримати формулу квадрата суми чотирьох і більше виразів. Наприклад, запишемо формулу квадрата суми чотирьох виразів:

$$(a + b + c + d)^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

За допомогою отриманих формул можна простіше підносити до квадрата суму кількох виразів, не застосовуючи правила множення двох многочленів. Тому їх відносять до формул скороченого множення.

ПРИКЛАД 1 Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(3b - 4c)^2$; 2) $(a^3 + 5a)^2$; 3) $(a + b - c)^2$.

Розв'язання. 1) За формулою квадрата різниці двох виразів отримуємо:

$$(3b-4c)^2 = (3b)^2 - 2\cdot 3b\cdot 4c + (4c)^2 = 9b^2 - 24bc + 16c^2.$$

2) За формулою квадрата суми двох виразів отримуємо:

$$(a^3+5a)^2 = (a^3)^2 + 2\cdot a^3\cdot 5a + (5a)^2 = a^6 + 10a^4 + 25a^2.$$

3) Подамо даний вираз у вигляді $(a + b + (-c))^2$. Тепер можна скористатися формулою квадрата суми трьох виразів. Маємо: $(a + b + (-c))^2 = a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2ab + 2a(-c) + 2b(-c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$.

ПРИКЛАД 2 Перетворіть у многочлен вираз:

1) $(-a - b)^2$; 2) $(-x^2 - 6)^2$.

Розв'язання. 1) Маємо: $(-a-b)^2 = (-a)^2 - 2(-a)\cdot b + b^2 =$

$$= a^2 + 2ab + b^2.$$

Цей приклад можна розв'язати інакше.

Оскільки $(-a-b)^2 = (-1\cdot(a+b))^2 = (-1)^2\cdot(a+b)^2 = (a+b)^2$, тобто вирази $(-a - b)^2$ і $(a + b)^2$ тотожно рівні, то:

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

2) $(-x^2 - 6)^2 = (x^2 + 6)^2 = x^4 + 12x^2 + 36.$

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $(x - 10)^2 = (x + 7)^2 - 17$.

Розв'язання. Маємо:

$$x^2 - 20x + 100 = x^2 + 14x + 49 - 17;$$
$$x^2 - 20x - x^2 - 14x = 49 - 17 - 100;$$
$$-34x = -68;$$
$$x = 2.$$

Відповідь: 2.

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що остача при діленні квадрата натурального числа на число 3 дорівнює 0 або 1.

Розв'язання. Нехай n — деяке натуральне число. Розглянемо три випадки.

1) Число n кратне 3. Тоді $n = 3k$, де k — натуральне число. Маємо: $n^2 = (3k)^2 = 9k^2$. Значення виразу $9k^2$ кратне 3, тобто остача при діленні n^2 на 3 дорівнює 0.

2) Остача при діленні на 3 числа n дорівнює 1. Тоді n можна подати у вигляді $n = 3k + 1$, де k — натуральне число. Маємо:
$n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3\,(3k^2 + 2k) + 1 = 3p + 1$,
де $p = 3k^2 + 2k$ — неповна частка при діленні n^2 на 3, а остача при цьому дорівнює 1.

3) Остача при діленні на 3 числа n дорівнює 2. Тоді $n = 3k + 2$, де k — натуральне число. Маємо: $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = (9k^2 + 12k + 3) + 1 = 3\,(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Очевидно, що й у цьому випадку остача при діленні n^2 на 3 дорівнює 1. ●

?

1. Яку тотожність називають формулою квадрата суми двох виразів? трьох виразів?
2. Сформулюйте правило піднесення до квадрата суми двох виразів; суми трьох виразів.
3. Яку тотожність називають формулою квадрата різниці двох виразів?
4. Сформулюйте правило піднесення до квадрата різниці двох виразів.

ВПРАВИ

16.1.° Якому з наведених многочленів тотожно дорівнює вираз $(5a + 3)^2$:

1) $25a^2+15a+9$;
2) $25a^2+30a+9$;
3) $25a^2+9$;
4) $5a^2+3$?

16.2.° Яка з даних рівностей є тотожністю:

1) $(12a-b)^2=144a^2-b^2$;
2) $(12a-b)^2=144a^2+24ab+b^2$;
3) $(12a-b)^2=144a^2-24ab+b^2$;
4) $(12a-b)^2=12a^2-24ab+b^2$?

16.3.° Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(a+x)^2$;
2) $(x+2)^2$;
3) $(y-1)^2$;
4) $(5-p)^2$;
5) $(4+k)^2$;
6) $(3a-2)^2$;

7) $(7b+6)^2$; 11) $(y-13)^2$; 15) $(x^2+y^3)^2$;
8) $(8x+4y)^2$; 12) $(13-y)^2$; 16) $(a^3-4b)^2$;
9) $(0{,}4m-0{,}5n)^2$; 13) $(b^2-11)^2$; 17) $(a^2+a)^2$;
10) $\left(3a+\frac{1}{3}b\right)^2$; 14) $(a^2+4b)^2$; 18) $(3b^2-2b^5)^2$.

16.4.° Виконайте піднесення до квадрата:
1) $(a+8)^2$; 6) $(4x-3)^2$; 11) $(c^2-6)^2$;
2) $(b-2)^2$; 7) $(5m-4n)^2$; 12) $(15+k^2)^2$;
3) $(7+c)^2$; 8) $(10c+7d)^2$; 13) $(m^2-3n)^2$;
4) $(6-d)^2$; 9) $\left(4x-\frac{1}{8}y\right)^2$; 14) $(m^4-n^3)^2$;
5) $(2m+1)^2$; 10) $(0{,}3a+0{,}9b)^2$; 15) $(5a^4-2a^7)^2$.

16.5.° Спростіть вираз:
1) $a^2+(3a-b)^2$; 6) $3m(m-4)-(m+2)^2$;
2) $(4x+5)^2-40x$; 7) $(y-9)^2+(4-y)(y+6)$;
3) $50a^2-(7a-1)^2$; 8) $(x-4)(x+4)-(x-1)^2$;
4) $c^2+36-(c-6)^2$; 9) $(2a-3b)^2+(3a+2b)^2$;
5) $(x-2)^2+x(x+10)$; 10) $(x-5)^2-(x-7)(x+7)$.

16.6.° Спростіть вираз:
1) $(x-12)^2+24x$; 4) $(y+7)^2+(y+2)(y-7)$;
2) $(x+8)^2-x(x+5)$; 5) $(a+1)(a-1)-(a+4)^2$;
3) $2x(x+2)-(x-2)^2$; 6) $(x-10)(9-x)+(x+10)^2$.

16.7.° Розв'яжіть рівняння:
1) $(x-8)^2-x(x+6)=-2$; 3) $(2x+1)^2-(2x-1)(2x+3)=0$;
2) $(x+7)^2=(x-3)(x+3)$; 4) $x(x-2)-(x+5)^2=35$.

16.8.° Розв'яжіть рівняння:
1) $(x+9)^2-x(x+8)=1$; 3) $(x-4)(x+4)-(x+6)^2=-16$;
2) $(x-11)^2=(x-7)(x-9)$; 4) $(1-3x)^2-x(9x-2)=5$.

16.9.° Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:
1) $(*+b)^2=*+4ab+b^2$; 3) $(*-5c)^2=*-20b^2c+25c^2$;
2) $(4x-*)^2=16x^2-*+100y^2$; 4) $(7a^2+*)^2=*+*+9b^6$.

16.10.° Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:
1) $(*+6b)^2=*+24ab+*$; 2) $(*-*)^2=9m^4-42m^2n^8+*$.

16.11.° Доведіть тотожність $(a-b)^2=(b-a)^2$.

16.12.° Перетворіть у многочлен вираз:
1) $(-x+1)^2$; 3) $(-5a+3b)^2$; 5) $(-0{,}7c-10d)^2$;
2) $(-m-9)^2$; 4) $(-4x-8y)^2$; 6) $\left(-4a^2+\frac{1}{8}ab\right)^2$.

16.13.° Виконайте піднесення до квадрата:

1) $(-3m+7n)^2$;
2) $(-0{,}4x-1{,}5y)^2$;
3) $(-x^2-y)^2$;
4) $(-a^2b^2+c^{10})^2$.

16.14.• Виконайте піднесення до квадрата:

1) $(10a^2-7ab^2)^2$;
2) $(0{,}8b^3+0{,}2b^2c^4)^2$;
3) $(30m^3n+0{,}04n^2)^2$;
4) $(0{,}5x^4y^5-20y^6)^2$;
5) $\left(1\frac{1}{3}a^2b+2\frac{1}{4}ab^2\right)^2$;
6) $\left(2\frac{1}{3}x^3y^2-\frac{9}{14}y^8x\right)^2$;
7) $\left(15m^9+\frac{5}{6}m^3\right)^2$;
8) $\left(3\frac{1}{8}x^8y^{10}+\frac{16}{25}x^2y^6\right)^2$.

16.15.• Перетворіть у многочлен вираз:

1) $6(1-2c)^2$;
2) $-12\left(x+\frac{1}{3}y\right)^2$;
3) $a(a-6b)^2$;
4) $5b(b^2+7b)^2$;
5) $(a+3)(a-4)^2$;
6) $(2x+4)^2(x-8)$;
7) $(a-5)^2(a+5)^2$;
8) $(3x+4y)^2(3x-4y)^2$;
9) $(x+y-1)^2$;
10) $(a^2-b-c^2)^2$.

16.16.• Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(0{,}02p^3k+20p^2k^4)^2$;
2) $\left(1\frac{1}{6}mn-\frac{4}{21}m^2n^5\right)^2$;
3) $-15\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{5}b\right)^2$;
4) $7x(x^3-2x)^2$;
5) $(5y-2)^2(2y+1)$;
6) $(10p-k)^2(10p+k)^2$;
7) $(m-2n+3)^2$.

16.17.• Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(a+3)^2-(a-9)(a+9)$, якщо $a=-2{,}5$;
2) $(5x-8)^2-(4x-3)^2+26x$, якщо $x=-\frac{1}{3}$;
3) $(3y^2+4)^2+(3y^2-4)^2-2(1-3y^2)(1+3y^2)$, якщо $y=\frac{1}{2}$.

16.18.• Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $2m(m-6)^2-m^2(2m-15)$, якщо $m=-4$;
2) $(2x-5)^2-4(x+1)(x-7)$, якщо $x=-3{,}5$.

16.19.• При якому значенні змінної значення квадрата двочлена $x+12$ на 225 більше за відповідне значення квадрата двочлена $x-13$?

16.20.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-12)(x+12)=2(x-6)^2-x^2$;
2) $(3x-1)^2+(4x+2)^2=(5x-1)(5x+1)$;
3) $(6x-1)^2-(3-8x)(3+8x)=(10x+1)^2$;
4) $5(x+2)^2+(2x-1)^2-9(x+3)(x-3)=22$.

16.21.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x+2)^2+(4x-1)(4x+1)=(5x-1)^2$;
2) $(4x+1)^2-(1-3x)(1+3x)=(5x+2)^2$;
3) $2(m+1)^2+3(m-1)^2-5(m+1)(m-1)=-4$.

16.22.° Знайдіть сторону квадрата, якщо при збільшенні її на 5 см отримаємо квадрат, площа якого на 95 см^2 більша за площу даного.

16.23.° Якщо сторону квадрата зменшити на 8 см, то отримаємо квадрат, площа якого на 352 см^2 менша від площі даного. Знайдіть сторону даного квадрата.

16.24.° Знайдіть три послідовних натуральних числа, якщо подвоєний квадрат більшого з них на 79 більший за суму квадратів двох інших чисел.

16.25.° Знайдіть чотири послідовних натуральних числа, якщо сума квадратів другого й четвертого з них на 82 більша за суму квадратів першого й третього.

16.26.° При яких значеннях a і b є правильною рівність:

1) $(a+b)^2=a^2+b^2$; 2) $(a-b)^2=(a+b)^2$?

16.27.° Доведіть тотожність:

1) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$;
2) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$;
3) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$;
4) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

16.28.° Доведіть тотожність:

1) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$; 2) $(a-b)^2+(ab+1)^2=(a^2+1)(b^2+1)$.

16.29.° Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $(x-3)^2+(x+3)^2-2(x-6)(x+6)$;
2) $(4x^3+5)^2+(2x^3-1)^2-4(5x^3+4)(x^3+1)$.

16.30.° Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної x:

1) $(6x-8)^2+(8x+6)^2-(10x-1)(10x+1)$;
2) $2(4x-y)(8x+5y)-(8x-5y)^2-4y(26x+1)$.

16.31.° Яким числом, парним чи непарним, є квадрат непарного натурального числа?

16.32.• Давньогрецький учений Евклід (III ст. до н. е.) доводив формули квадрата суми та квадрата різниці двох виразів геометрично. Користуючись рисунками 16.1 і 16.2, відтворіть його доведення.

16.33.• За допомогою рисунка 16.3 доведіть формулу квадрата суми трьох виразів.

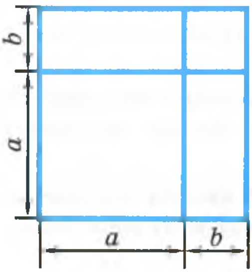


Рис. 16.1

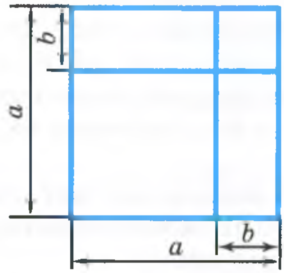


Рис. 16.2

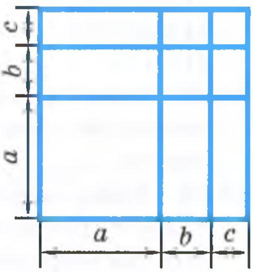


Рис. 16.3

16.34.•• Чому дорівнює остача при діленні квадрата непарного натурального числа на 8?

16.35.•• З'ясуйте, яку остачу може давати квадрат натурального числа при діленні на 4.

16.36.•• Доведіть, що різниця між сумою квадратів двох послідовних цілих чисел та їхнім подвоєним добутком не залежить від вибору чисел.

16.37.•• Доведіть, що коли остача при діленні натурального числа на 16 дорівнює 4, то квадрат цього числа ділиться націло на 16.

16.38.•• Доведіть, що коли остача при діленні натурального числа на 25 дорівнює 5, то квадрат цього числа кратний 25.

16.39.•• Остача при діленні деякого натурального числа на 9 дорівнює 5. Чому дорівнює остача при діленні на 9 квадрата цього числа?

16.40.•• Остача при діленні деякого натурального числа на 11 дорівнює 6. Чому дорівнює остача при діленні на 11 квадрата цього числа?

16.41.•• Використовуючи формули скороченого множення, подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(a + b + c)(a + b - c)$;
2) $(a + b + c)(a - b - c)$;
3) $(a + b + c + d)(a + b - c - d)$.

16.42.•• Використовуючи формули скороченого множення, подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(a - b - c)(a + b - c)$;
2) $(a - b + c + d)(a - b - c - d)$.

16.43.** При якому значенні a рівняння $(6x-a)^2+(8x-3)^2=(10x-3)^2$ не має коренів?

16.44.** При якому значенні a рівняння $(2a-3x)^2+(x-1)^2=10(x-2)\times$ $\times(x+2)$ не має коренів?

16.45.** Доведіть тотожність:

$$(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2=(2n^2+2n+1)^2.$$

Наведена тотожність є правилом великого давньогрецького вченого Піфагора (VI ст. до н. е.) для обчислення цілочислових значень довжин сторін прямокутного трикутника. При одному й тому самому натуральному значенні n значення виразів $2n+1$, $2n^2+2n$, $2n^2+2n+1$ є довжинами сторін прямокутного трикутника.

16.46.* Доведіть, що сума квадратів п'яти послідовних натуральних чисел не може дорівнювати квадрату натурального числа.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

16.47. Цукровий буряк, що є найсолодшою коренеплідною рослиною, яку вирощують в Україні, накопичує до 25 % цукру, тоді як цукрова тростина — лише 18 %. Скільки тонн цукрової тростини треба переробити, щоб отримати стільки цукру, скільки одержують з 3600 т цукрових буряків?

16.48. До магазину завезли 740 кг апельсинів і бананів у 80 ящиках. У кожному ящику було 10 кг апельсинів або 8 кг бананів. Скільки кілограмів апельсинів завезли до магазину?

16.49. У першій коробці було 45 кульок, з них 15 — білих; у другій — 75 кульок, з них 25 — білих; у третій — 24 білих і 48 червоних кульок; у четвертій — порівну білих, червоних і зелених кульок. Для якої коробки ймовірність навмання витягнути з неї білу кульку є більшою?

16.50. Якого найменшого значення та при якому значенні змінної набуває вираз:

1) x^2;　　2) x^2-16;　　3) $(x+4)^2+20$?

16.51. Якого найбільшого значення та при якому значенні змінної набуває вираз:

1) $-x^2$;　　2) $-x^2+4$;　　3) $12-(x-1)^2$?

16.52. При якому значенні змінної виконується рівність:

1) $(x-1)^2+(x+1)^2=-10$;

2) $(x-1)^2+(x+1)^2=0$;

3) $(x^2-1)^2+(x+1)^2=0$?

16.53. При яких значеннях змінних x і y виконується рівність:

1) $(x+2)^2+(y-6)^2=-1$;　　2) $(x+2)^2+(y-6)^2=0$?

17. Перетворення многочлена у квадрат суми або різниці двох виразів або у квадрат суми кількох виразів

Перепишемо формули квадрата суми та квадрата різниці двох виразів, помінявши місцями їхні ліві й праві частини:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

У такому вигляді ці формули в ряді випадків дозволяють «згорнути» тричлен у квадрат двочлена.

Тричлен, який можна подати у вигляді квадрата двочлена, називають **повним квадратом.**

Запишемо формулу квадрата суми трьох виразів так:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$$

Ця формула в ряді випадків дозволяє перетворити многочлен у квадрат тричлена.

ПРИКЛАД 1 Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:
1) $x^2 + 10x + 25$; 2) $9a^6 - 42a^3b^2 + 49b^4$.

Розв'язання. 1) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (x + 5)^2$.
2) $9a^6 - 42a^3b^2 + 49b^4 = (3a^3)^2 - 2 \cdot 3a^3 \cdot 7b^2 + (7b^2)^2 = (3a^3 - 7b^2)^2$. ●

ПРИКЛАД 2 Знайдіть, користуючись перетворенням виразу у квадрат двочлена, значення суми $5{,}2^2 + 10{,}4 \cdot 4{,}8 + 4{,}8^2$.

Розв'язання. Маємо: $5{,}2^2 + 10{,}4 \cdot 4{,}8 + 4{,}8^2 =$
$$= 5{,}2^2 + 2 \cdot 5{,}2 \cdot 4{,}8 + 4{,}8^2 = (5{,}2 + 4{,}8)^2 = 10^2 = 100. \text{ ●}$$

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Розв'язання. Подамо ліву частину рівняння у вигляді квадрата різниці:
$$(2x - 3)^2 = 0.$$

Оскільки значення квадрата дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли його основа дорівнює нулю, то отримуємо:
$$2x - 3 = 0;$$
$$x = 1{,}5.$$

Відповідь: 1,5. ●

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що значення виразу $(2x+1)^2 - 2(2x+1) \times \times (2x-5) + (2x-5)^2$ не залежить від значення змінної.

Розв'язання. Маємо: $(2x+1)^2 - 2(2x+1)(2x-5) + (2x-5)^2 =$
$= ((2x+1) - (2x-5))^2 = (2x+1-2x+5)^2 = 6^2 = 36.$

ПРИКЛАД 5 Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ є квадратом натурального числа.

Розв'язання. Маємо: $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 =$
$= (n(n+3))((n+1)(n+2)) + 1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 =$
$= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1 = (n^2+3n+1)^2.$

ПРИКЛАД Доведіть, що вираз $x^2 - 4x + 5$ набуває додатних значень при будь-яких значеннях x. Якого найменшого значення набуває вираз і при якому значенні x?

Розв'язання. Перетворимо даний вираз:

$$x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1.$$

Подання виразу у вигляді суми, одним із доданків якої є квадрат деякого виразу (у нашому прикладі це $(x-2)^2$), називають **виділенням повного квадрата** з даного виразу.

Оскільки $(x-2)^2 \geqslant 0$ при будь-яких значеннях x, то вираз $(x-2)^2 + 1$ набуває лише додатних значень. Також зрозуміло, що $(x-2)^2 + 1 \geqslant 1$. Звідси найменшого значення, яке дорівнює 1, даний вираз набуває при $x = 2$.

ПРИКЛАД При яких значеннях x і y значення многочлена $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 40$ дорівнює нулю?

Розв'язання. Маємо: $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 40 =$
$= x^2 - 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 = (x-6)^2 + (y+2)^2.$

Ми подали даний многочлен у вигляді суми двох доданків, які можуть набувати лише невід'ємних значень. Їхня сума, а отже, і даний многочлен набуватимуть нульового значення тоді й тільки тоді, коли кожен із доданків дорівнюватиме нулю, тобто коли $x = 6$ і $y = -2$.

Відповідь: $x = 6$, $y = -2$.

ПРИКЛАД Числа a, b і c є такими, що $a^2 + b^2 + c^2 = 12$ і $ab - ac - bc = 2$. Знайдіть значення виразу $a + b - c$.

Розв'язання. Маємо: $2ab - 2ac - 2bc = 4$. Тоді $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc = 16$. Запишемо цю рівність так: $(a+b-c)^2 = 16$. Звідси $a + b - c = 4$ або $a + b - c = -4$.

ВПРАВИ

17.1.° Якому з наведених виразів тотожно дорівнює многочлен $a^2-18a+81$:

1) $(a-3)^2$; 2) $a-9$; 3) $(a-9)(a+9)$; 4) $(a-9)^2$?

17.2.° Яка з даних рівностей є тотожністю:

1) $a^2+8ab+16b^2=(a+8b)^2$;
2) $a^2+8ab+16b^2=(a+4b)^2$;
3) $a^2+8ab+16b^2=(ab+4)^2$;
4) $a^2+8ab+16b^2=(a+2b)^2$?

17.3.° Подайте многочлен у вигляді квадрата суми або квадрата різниці двох виразів:

1) a^2+2a+1;
2) $x^2-12x+36$;
3) $y^2-18y+81$;
4) $100-20c+c^2$;
5) $a^2-6ab+9b^2$;
6) $9a^2-30ab+25b^2$;
7) $b^4-2b^2c+c^2$;
8) $m^8+m^4n^2+\frac{1}{4}n^4$;
9) $36a^2b^2-12ab+1$;
10) x^4+2x^2+1;
11) $\frac{1}{16}x^4-2x^2y^3+16y^6$;
12) $0{,}01a^8+25b^{14}-a^4b^7$.

17.4.° Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

1) b^2-2b+1;
2) $4+4n+n^2$;
3) $x^2-14x+49$;
4) $4a^2+4ab+b^2$;
5) $9x^2-24xy+16y^2$;
6) a^6-2a^3+1;
7) $36a^6-84a^3b^5+49b^{10}$;
8) $81x^4y^8-36x^2y^4z^6+4z^{12}$.

17.5.° Знайдіть значення виразу, подавши його попередньо у вигляді квадрата двочлена:

1) $y^2-8y+16$, якщо $y=-4$;
2) $c^2+24c+144$, якщо $c=-10$;
3) $25x^2-20xy+4y^2$, якщо $x=3$, $y=5{,}5$;
4) $49a^2+84ab+36b^2$, якщо $a=1\frac{1}{7}$, $b=2\frac{5}{6}$.

17.6.° Знайдіть значення виразу:

1) $b^2-30b+225$, якщо $b=6$;
2) $100a^2+60ab+9b^2$, якщо $a=0{,}8$, $b=-3$.

17.7.• Який одночлен слід поставити замість зірочки, щоб можна було подати у вигляді квадрата двочлена вираз:

1) $*-56a+49$;
2) $9c^2-12c+*$;
3) $*-42xy+49y^2$;
4) $0{,}01b^2+*+100c^2$;
5) $a^2b^2-4a^3b^5+*$;
6) $1{,}44x^2y^4-*y+0{,}25y^6$;
7) $64-80y^{20}+*y^{40}$;
8) $\frac{9}{25}a^6b^2-a^5b^5+*$?

17.8.° Замініть зірочки такими одночленами, щоб виконувалася тотожність:

1) $n^2+60n+*=(*+30)^2$;
2) $25c^2-*+*=(*-8k)^2$;
3) $225a^2-*+64b^4=(*-*)^2$;
4) $0{,}04x^2+*+*=(*+0{,}3y^3)^2$.

17.9.° Подайте, якщо це можливо, у вигляді квадрата двочлена або у вигляді виразу, протилежного квадрату двочлена, тричлен:

1) $-8x+16+x^2$;
2) $a^8+4a^4b^3+4b^6$;
3) $2x-25-0{,}04x^2$;
4) $25m^2-30mn+9n^2$;
5) $81c^2-54b^2c+9b^2$;
6) $b^{10}-a^2b^5+0{,}25a^4$;
7) $\frac{1}{16}x^2-xy+4y^2$;
8) $-\frac{9}{64}n^6-3mn^5-16m^2n^4$.

17.10.° Подайте, якщо це можливо, у вигляді квадрата двочлена або у вигляді виразу, протилежного квадрату двочлена, тричлен:

1) $-a^4-0{,}8a^6-0{,}16a^8$;
2) $121m^2-44mn+16n^2$;
3) $-a^6+4a^3b-4b^2$;
4) $\frac{25}{49}a^8-10a^4b^6+49b^{12}$;
5) $80xy+16x^2+25y^2$;
6) $b^{10}-\frac{1}{3}b^5c+\frac{1}{9}c^2$.

17.11.° Подайте у вигляді квадрата двочлена вираз:

1) $(4a+3b)^2-8b(4a+b)$;
2) $(10x+3y)^2-(8x+4y)(8x-4y)$.

17.12.° Перетворіть у квадрат двочлена вираз:

1) $(3m-2n)^2+5m(4n-m)$;
2) $(9x+2y)^2-(8x+3y)(4x-4y)$.

17.13.° Користуючись перетворенням виразів у квадрат суми або різниці двох чисел, знайдіть значення даного виразу:

1) $1{,}02^2-1{,}02\cdot 1{,}96+0{,}98^2$;
2) $24^2+96\cdot 38+76^2$.

17.14.° Обчисліть:

1) $203^2-406\cdot 103+103^2$;
2) $1{,}58^2+1{,}58\cdot 2{,}84+1{,}42^2$.

17.15.° Яке число треба додати до многочлена $81a^2b^2-36ab+9$, щоб отриманий вираз тотожно дорівнював квадрату двочлена?

17.16.° Яке число треба додати до многочлена $100m^4+120m^2+40$, щоб отриманий вираз тотожно дорівнював квадрату двочлена?

17.17.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-16x+64=0$;
2) $81x^2+126x+49=0$;
3) $(x-1)^2+(x-2)^2=2(1-x)(x-2)$.

17.18.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2+12x+36=0$;
2) $25x^2-30x+9=0$;
3) $(x+3)^2+(4-x)^2=2(x-4)(x+3)$.

17.19.• Чи є тотожністю рівність

$$(a-2)(a-3)(a+3)(a+2)+a^2=(a^2-6)^2?$$

17.20.• Доведіть тотожність:

1) $(a-1)^2+2(a-1)+1=a^2$;

2) $(a+b)^2-2(a+b)(a-b)+(a-b)^2=4b^2$;

3) $(a-8)^2+2(a-8)(3-a)+(a-3)^2=25$;

4) $(x^n-2)^2-2(x^n-2)(x^n+2)+(x^n+2)^2=16$, де n — довільне натуральне число.

17.21.• Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $(3x+8)^2-2(3x+8)(3x-8)+(3x-8)^2$;

2) $(4x-7)^2+(4x-11)^2+2(4x-7)(11-4x)$.

17.22.• Доведіть, що рівняння не має коренів:

1) $x^2-14x+52=0$; 2) $4x^2-2x+1=0$.

17.23.• Доведіть, що рівняння не має коренів:

1) $x^2-8x+17=0$; 2) $x^2-x+1=0$.

17.24.•• Доведіть, що даний вираз набуває додатних значень при всіх значеннях x. Укажіть, якого найменшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x:

1) $x^2-6x+10$; 2) $16x^2+24x+25$; 3) x^2+x+1.

17.25.•• Чи може набувати від'ємних значень вираз:

1) $x^2-24x+144$; 2) $4x^2+20x+28$?

17.26.•• Доведіть, що даний вираз набуває від'ємних значень при всіх значеннях x. Укажіть, якого найбільшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x:

1) $-x^2+4x-12$; 2) $22x-121x^2-2$; 3) $-56-36x^2-84x$.

17.27.•• Чи може набувати додатних значень вираз:

1) $-x^2+20x-100$; 2) $-x^2-10-4x$?

17.28.•• Якого найбільшого значення та при якому значенні змінної набуває вираз:

1) $-x^2-16x+36$; 2) $2-16x^2+24x$?

17.29.•• Якого найменшого значення та при якому значенні змінної набуває вираз:

1) $x^2-28x+200$; 2) $9x^2+30x-25$?

17.30.•• Подайте многочлен $\frac{81}{16}x^4+y^8-\frac{9}{2}x^2y^4$ у вигляді добутку квадратів двох двочленів.

17.31.•• Доведіть, що вираз $(a-3b)(a-3b-4)+4$ набуває невід'ємних значень при будь-яких значеннях змінних.

17.32.** Подайте у вигляді суми квадратів двох виразів многочлен:

1) $2a^2-2a+1$;
2) $a^2+b^2+2a+2b+2$;
3) $x^2+6x+y^2-2y+10$;
4) $10x^2-6xy+y^2$;
5) $x^2+5y^2+4xy-4y+4$;
6) $2a^2+2b^2$.

17.33.** Подайте многочлен у вигляді суми квадратів двох виразів:

1) a^4+17a^2+16;
2) $10x^2+2xy+y^2$;
3) $2x^2-6xy+9y^2-6x+9$;
4) $x^2+y^2-10x+14y+74$.

17.34.** При яких значеннях x і y дорівнює нулю значення многочлена:

1) $x^2+y^2+8x-10y+41$;
2) $x^2+37y^2+12xy-2y+1$?

17.35.** Чи існують такі значення x і y, при яких дорівнює нулю значення многочлена:

1) $x^2+4y^2+2x-4y+2$;
2) $9x^2+y^2-12x+8y+21$?

17.36.** Значення змінних a і b є такими, що $a+b=7$, $ab=2$. Знайдіть значення виразу a^2+b^2.

17.37.** Відомо, що $a^2+b^2=37$, $ab=6$. Знайдіть значення виразу $a-b$.

17.38.** Додатні значення змінних a і b є такими, що $a^2+b^2=34$, $ab=15$. Знайдіть значення виразу $a+b$.

17.39.** Від'ємні значення змінних a і b є такими, що $a^2+b^2=68$, $ab=16$. Знайдіть значення виразу $a+b$.

17.40.** Доведіть, що вираз $(n^2-1)(m^2-1)$ можна подати у вигляді різниці квадратів двох виразів.

17.41.** Доведіть, що добуток двох чисел, кожне з яких є сумою квадратів двох цілих чисел, можна подати у вигляді суми квадратів двох цілих чисел.

17.42.** Подайте число 24 у вигляді суми таких двох чисел, щоб їхній добуток був найбільшим.

17.43.** Знайдіть сторони прямокутника, що має найбільшу площу з усіх прямокутників, периметр кожного з яких дорівнює 20 см.

17.44.** Числа a і b такі, що $b^2+\frac{a^2}{4}=1$, $ab=3$, $a>0$, $b>0$. Знайдіть значення виразу $a+2b$.

17.45.** Числа a, b і c такі, що $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$. Чому дорівнює значення виразу $a+b-2c$?

17.46.** Обчисліть значення виразу $a^2+b^2+c^2$, якщо $a+b+c=7$ і $ab+bc+ac=-5$.

17.47.** Відомо, що $a^2+b^2+c^2=30$ і $a-b-c=4$. Доведіть, що $bc-ab-ac=-7$.

17.48.** Відомо, що $a^2 + b^2 + c^2 = 26$ і $ab - ac - bc = -11$. Знайдіть значення виразу $a + b - c$.

17.49.* Розкладіть на множники вираз $a^2 + b^2 + 3c^2 + 2ab + 4ac + 4bc$.

17.50.* Розкладіть на множники вираз $a^2 + 8b^2 + c^2 - 6ab - 6bc + 2ac$.

17.51.* Чи існує таке натуральне число n, при якому значення виразу $2^8 + 2^{11} + 2^n$ є квадратом натурального числа?

17.52.* Доведіть, що значення виразу $1000^2 + 1000^2 \cdot 1001^2 + 1001^2$ є квадратом натурального числа.

17.53.* Доведіть, що значення виразу $999 \cdot 1001 \cdot 1003 \cdot 1005 + 16$ є квадратом натурального числа.

17.54.* Доведіть, що рівняння $x^4 - x + \frac{1}{2} = 0$ не має коренів.

17.55.* Доведіть, що рівняння $x^4 - 4x + 5 = 0$ не має коренів.

17.56.* Знайдіть усі натуральні значення n, при яких значення виразу $n^2 + 3n$ є квадратом натурального числа.

17.57.* Натуральне число n є таким, що остання цифра значення виразу $n(n + 8)$ дорівнює 4. Знайдіть передостанню цифру значення цього виразу.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

17.58. Першого дня турист проїхав 0,4 усього шляху, другого — $\frac{2}{3}$ решти, а третього — 20 км, що залишилися. Знайдіть довжину шляху.

17.59. Загальна площа двох ділянок, засіяних кукурудзою, дорівнює 100 га. На першій ділянці зібрали по 90 т зеленої маси кукурудзи з 1 га, а на другій — по 80 т. Знайдіть площу кожної ділянки, якщо з першої ділянки зібрали на 2200 т більше, ніж із другої.

17.60. Розкладіть на множники:

1) $2ab - 3ab^2$;
2) $8x^4 + 2x^3$;
3) $12a^2b^2 + 6a^2b^3 + 12ab^3$;
4) $2a - 2b + ac - bc$;
5) $m^2 - mn - 4m + 4n$;
6) $ax - ay + cy - cx - x + y$.

17.61. При деякому значенні x значення виразу $3x^2 - x + 7$ дорівнює 10. Якого значення набуває вираз $6x^2 - 2x + 7$ при цьому значенні x?

17.62. (*Старовинна болгарська задача.*) Сім рибалок ловили на озері рибу. Перший ловив рибу щодня, другий — через день, третій — через 2 дні й т. д., сьомий — через 6 днів. Сьогодні всі рибалки прийшли на озеро. Через яку найменшу кількість днів усі сім рибалок зберуться разом на озері?

18. Сума й різниця кубів двох виразів

Помножимо двочлен $a+b$ на тричлен a^2-ab+b^2. Отримаємо:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-\underline{a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}+\underline{a^2b}-\underline{\underline{ab^2}}+b^3=a^3+b^3.$$

Тим самим ми довели тотожність

$$\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

Цю тотожність називають **формулою суми кубів** двох виразів.

Многочлен a^2-ab+b^2, який стоїть у правій частині, називають **неповним квадратом різниці**. Така назва пояснюється його зовнішньою схожістю з многочленом $a^2-2ab+b^2$, який дорівнює квадрату різниці a і b.

Тепер можна сформулювати правило.

Сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їхньої різниці.

Розкладемо на множники вираз a^3-b^3. Маємо:

$$a^3-b^3=a^3+(-b)^3=(a+(-b))(a^2-a(-b)+(-b)^2)=$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Ми довели тотожність

$$\boxed{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

Цю тотожність називають **формулою різниці кубів** двох виразів.

Многочлен a^2+ab+b^2 називають **неповним квадратом суми.**

Отже, сформулюємо правило.

Різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їхньої суми.

Зауважимо, що цю формулу також можна довести, перемноживши многочлени, які стоять у правій частині.

ПРИКЛАД 1 Розкладіть на множники:

1) $8a^3+27b^3$; 2) x^6-y^9.

Розв'язання. 1) Подавши даний многочлен у вигляді суми кубів двох виразів, отримуємо:

$$8a^3+27b^3=(2a)^3+(3b)^3=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2).$$

2) Подавши даний многочлен у вигляді різниці кубів двох виразів, отримуємо:

$$x^6-y^9=(x^2)^3-(y^3)^3=(x^2-y^3)(x^4+x^2y^3+y^6).$$

ПРИКЛАД 2 **Спростіть вираз $(4y - 1)(16y^2 + 4y + 1)$ і знайдіть його значення при $y = \frac{1}{2}$.**

Розв'язання. Маємо: $(4y - 1)(16y^2 + 4y + 1) = (4y)^3 - 1 = 64y^3 - 1$.

При $y = \frac{1}{2}$:

$$64y^3 - 1 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1 = 64 \cdot \frac{1}{8} - 1 = 8 - 1 = 7.$$

ПРИКЛАД 3 **Подайте у вигляді добутку вираз $(m - 4)^3 + 216$.**

Розв'язання. Застосувавши формулу суми кубів, отримуємо:

$$(m - 4)^3 + 216 = (m - 4)^3 + 6^3 =$$
$$= (m - 4 + 6)((m - 4)^2 - 6(m - 4) + 36) =$$
$$= (m + 2)(m^2 - 8m + 16 - 6m + 24 + 36) =$$
$$= (m + 2)(m^2 - 14m + 76).$$

ПРИКЛАД 4 **Доведіть, що значення виразу $25^3 - 1$ ділиться націло на 24.**

Розв'язання. Застосувавши формулу різниці кубів, матимемо:

$$25^3 - 1 = (25 - 1)(25^2 + 25 + 1) = 24(25^2 + 26).$$

Даний вираз подано у вигляді добутку, один із множників якого дорівнює 24, а другий є натуральним числом. Отже, значення цього виразу ділиться націло на 24.

1. Яку тотожність називають формулою суми кубів?
2. Який многочлен називають неповним квадратом різниці?
3. Сформулюйте правило розкладання на множники суми кубів двох виразів.
4. Яку тотожність називають формулою різниці кубів?
5. Який многочлен називають неповним квадратом суми?
6. Сформулюйте правило розкладання на множники різниці кубів двох виразів.

ВПРАВИ

18.1.° Якому з даних виразів тотожно дорівнює многочлен $a^3 - 27$:

1) $(a - 3)(a^2 + 6a + 9)$;
2) $(a - 3)(a^2 - 9)$;
3) $(a - 3)(a^2 - 3a + 9)$;
4) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9)$?

18.2.° Яка з даних рівностей є тотожністю:

1) $m^3+8n^6=(m+2n^2)(m^2+2mn^2+4n^4)$;
2) $m^3+8n^6=(m-2n^2)(m^2+2mn^2+4n^4)$;
3) $m^3+8n^6=(m+2n^2)(m^2-2mn^2+4n^4)$;
4) $m^3+8n^6=(m-2n^2)(m^2-2mn^2+4n^4)$?

18.3.° Розкладіть на множники:

1) a^3+8;
2) c^3-64;
3) $125-b^3$;
4) $1+x^3$;
5) a^3+1000;
6) $27a^3-1$;
7) $1000c^3-216$;
8) a^3b^3-1;
9) $m^3n^3+0{,}001$;
10) $\frac{64}{343}m^3-\frac{125}{216}n^3$;
11) $8m^6+27n^9$;
12) $m^6n^3-p^{12}$;
13) $0{,}027x^{21}+0{,}125y^{24}$;
14) $0{,}216-8c^{27}$;
15) $1000a^{12}b^3+0{,}001c^6d^{15}$.

18.4.° Розкладіть на множники:

1) x^3-1;
2) $27+a^3$;
3) $216-y^3$;
4) $\frac{1}{8}a^3+b^3$;
5) a^6-8;
6) $a^3b^3-c^3$;
7) $a^3-b^{15}c^{18}$;
8) $125c^3d^3+0{,}008b^3$;
9) $\frac{64}{729}x^3-\frac{27}{1000}y^6$.

18.5.° Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(x-2)(x^2+2x+4)$;
2) $(2a-1)(4a^2+2a+1)$;
3) $(a^2+1)(a^4-a^2+1)$;
4) $(0{,}5xy+2)(0{,}25x^2y^2-xy+4)$.

18.6.° Виконайте множення:

1) $(b-4)(b^2+4b+16)$;
2) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$;
3) $(x^3+6y^2)(x^6-6x^3y^2+36y^4)$;
4) $\left(\frac{1}{4}a-\frac{1}{5}b\right)\left(\frac{1}{16}a^2+\frac{1}{20}ab+\frac{1}{25}b^2\right)$.

18.7.° Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(9a^2+3a+1)(3a-1)$, якщо $a=\frac{1}{3}$;
2) $(5y-2)(25y^2+10y+4)+8$, якщо $y=-\frac{1}{5}$.

18.8.° Знайдіть значення виразу:

1) $(1-b^2)(1+b^2+b^4)$, якщо $b=-2$;
2) $2x^3+7-(x+1)(x^2-x+1)$, якщо $x=-1$.

18.9.• Розкладіть на множники:

1) $(a+6)^3-27$;
2) $(2x-1)^3+64$;
3) $8a^6-(4a-3)^3$;
4) $1000+(y-10)^3$;
5) $(x+y)^3-(x-y)^3$;
6) $(a-2)^3+(a+2)^3$.

18.10.° Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $(b-5)^3+125$;
2) $(4-3x)^3-8x^3$;
3) $(a-b)^3+(a+b)^3$;
4) $(c+3)^3-(c-3)^3$.

18.11.° Спростіть вираз:

1) $(x+1)(x^2-x+1)+(2-x)(4+2x+x^2)$;
2) $(x-4)(x^2+4x+16)-x(x-5)(x+5)$;
3) $a(a-3)^2-(a+3)(a^2-3a+9)$;
4) $(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)(a^6+1)(a^{12}+1)$.

18.12.° Спростіть вираз:

1) $(a-5)(a^2+5a+25)-(a-1)(a^2+a+1)$;
2) $(y-3)(y^2+3y+9)-y(y-3)(y+3)-(y+3)^2$;
3) $(a-b)(a+b)(a^4+a^2b^2+b^4)$.

18.13.° Поставте замість зірочок такі одночлени, щоби справджувалася тотожність:

1) $(7k-p)(*+*+*)=343k^3-p^3$;
2) $(*+*)(25a^4-*+36b^2)=125a^6+216b^3$;
3) $(mn+*)(*-*+k^6)=m^3n^3+k^9$.

18.14.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-1)(x^2+x+1)+x^2=x^2(x+1)-2x$;
2) $(3x-1)(9x^2+3x+1)-9x(3x^2-4)=17$;
3) $(x+4)(x^2-4x+16)-x(x-7)(x+7)=15$;
4) $(x+6)(x^2-6x+36)-x(x-9)^2=4x(4{,}5x-13{,}5)$.

18.15.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+2)(x^2-2x+4)+3x^2=x^2(x+3)-2x$;
2) $(7-2x)(49+14x+4x^2)+2x(2x-5)(2x+5)=43$;
3) $100(0{,}2x+1)(0{,}04x^2-0{,}2x+1)=5x(0{,}16x^2-4)$.

18.16.° Доведіть, що значення виразу:

1) 456^3-156^3 ділиться націло на 300;
2) 254^3+238^3 ділиться націло на 123;
3) 17^6-1 ділиться націло на 36.

18.17.° Доведіть, що значення виразу:

1) 341^3+109^3 ділиться націло на 90;
2) $2^{15}+3^3$ ділиться націло на 35.

18.18.** Укажіть найменше натуральне значення n таке, щоб вираз $x^{2n}-y^{3n}$ можна було розкласти на множники як за формулою різниці квадратів, так і за формулою різниці кубів. Розкладіть отриманий многочлен на множники за цими формулами.

18.19.•• Придумайте многочлен, який можна розкласти на множники як за формулою різниці квадратів, так і за формулою різниці кубів. Розкладіть придуманий многочлен на множники за цими формулами.

18.20.•• Чи можна стверджувати, що коли сума двох натуральних чисел ділиться націло на деяке натуральне число, то на це число ділиться націло:

1) різниця їхніх квадратів;
2) сума їхніх квадратів;
3) сума їхніх кубів?

18.21.•• Доведіть, що сума кубів двох послідовних непарних натуральних чисел ділиться націло на 4.

18.22.•• Доведіть, що сума кубів двох послідовних натуральних чисел, жодне з яких не кратне 3, ділиться націло на 9.

18.23.•• Відомо, що числа x і y такі, що $x^2+y^2=1$. Знайдіть значення виразу $x^6+3x^2y^2+y^6$.

18.24.•• Відомо, що числа x і y такі, що $x^3-y^2=2$. Знайдіть значення виразу $x^9-6x^3y^2-y^6$.

18.25.•• Доведіть, що коли $2a - b = 1$, то $8a^3 - b^3 = 6ab + 1$.

18.26.•• Доведіть, що коли $a + 3b = 2$, то $a^3+27b^3=8-18ab$.

18.27.•• Доведіть, що коли $a + b + c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

18.28.•• Використовуючи результат задачі 18.27, розкладіть на множники вираз $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

18.29. В одному ящику було на 12 кг яблук більше, ніж у другому. Коли з першого ящика переклали в другий 4 кг яблук, то виявилося, що маса яблук у другому ящику становить $\frac{5}{7}$ маси яблук у першому. Скільки кілограмів яблук було в кожному ящику спочатку?

18.30. Якою є остання цифра значення виразу $3^{16}+7^{16}$?

18.31. Знайдіть значення кожного з даних виразів при $a=1$ і $a=-1$:

1) $a+a^2+a^3+a^4+\ldots+a^{99}+a^{100}$;
2) $a+a^2+a^3+a^4+\ldots+a^{98}+a^{99}$;
3) $aa^2a^3a^4\ldots a^{99}a^{100}$;
4) $aa^2a^3a^4\ldots a^{98}a^{99}$.

19. Куб суми та куб різниці двох виразів

Перетворимо в многочлен вираз $(a+b)^3$. Маємо:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) =$$
$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Цю тотожність називають **формулою куба суми двох виразів.**

Тепер можна сформулювати правило.

Куб суми двох виразів дорівнює кубу першого виразу плюс потроєний добуток квадрата першого виразу та другого виразу плюс потроєний добуток першого виразу та квадрата другого виразу плюс куб другого виразу.

Перетворимо в многочлен вираз $(a-b)^3$. Маємо:

$$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2-2ab+b^2)(a-b) =$$
$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + b^2a - b^2 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Ми отримали **формулу куба різниці двох виразів:**

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

Тепер можна сформулювати правило.

Куб різниці двох виразів дорівнює кубу першого виразу мінус потроєний добуток квадрата першого виразу та другого виразу плюс потроєний добуток першого виразу та квадрата другого виразу мінус куб другого виразу.

Зауважимо, що формулу куба різниці двох виразів можна отримати за допомогою формули куба суми двох виразів:

$$(a-b)^3 = (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 =$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

За допомогою отриманих формул можна простіше підносити до куба суму або різницю будь-яких двох виразів, не використовуючи правило множення многочленів. Тому їх відносять до формул скороченого множення.

Запишемо формули куба суми та куба різниці двох виразів, помінявши місцями їхні ліві й праві частини:

$$\boxed{\begin{array}{c} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3 \\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3 \end{array}}$$

У такому вигляді ці формули дають змогу в деяких випадках «згорнути» многочлен у куб двочлена.

ПРИКЛАД 1 Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(2x + 3)^3$; 2) $(m^2 - 2n)^3$.

Розв'язання. 1) За формулою куба суми двох виразів отримуємо:

$$(2x+3)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 3+3\cdot 2x\cdot 3^2+3^3=8x^3+36x^2+54x+27.$$

2) За формулою куба різниці двох виразів отримуємо:

$$(m^2-2n)^3=(m^2)^3-3\cdot(m^2)^2\cdot 2n+3\cdot m^2\cdot(2n)^2-(2n)^3=$$
$$= m^6 - 6m^4n + 12m^2n^2 - 8n^3.$$

ПРИКЛАД 2 Числа x і y є такими, що $x^3 + y^3 = 65$, $x^2y + xy^2 = 20$. Знайдіть значення виразу $x + y$.

Розв'язання. Маємо: $3x^2y + 3xy^2 = 60$. З урахуванням того, що $x^3 + y^3 = 65$, отримуємо $3x^2y + 3xy^2 + x^3 + y^3 = 60 + 65$. Звідси $(x + y)^3 = 125$. Тоді $x + y = 5$.

ПРИКЛАД 3 Розкладіть на множники многочлен $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

Розв'язання. Маємо: $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 =$

$$= x^3 + (x + 1)^3 = (x + x + 1)(x^2 - x(x + 1) + (x + 1)^2) =$$
$$= (2x + 1)(x^2 - x^2 - x + x^2 + 2x + 1) =$$
$$= (2x + 1)(x^2 + x + 1).$$

?

1. Яку тотожність називають формулою куба суми двох виразів?
2. Сформулюйте правило піднесення суми двох виразів до куба.
3. Яку тотожність називають формулою куба різниці двох виразів?
4. Сформулюйте правило піднесення різниці двох виразів до куба.

ВПРАВИ

19.1.° Якому з наведених многочленів тотожно дорівнює вираз $(a + 2b)^3$:

1) $a^3 + 8b^3$;
2) $a^3 + 3a^2b + 12ab^2 + 8b^3$;
3) $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$;
4) $a^3 + 6a^3b + 3ab^2 + 8b^3$?

19.2.° Яка з даних рівностей є тотожністю:

1) $(3x - 1)^3 = 27x^3 - 1$;
2) $(3x - 1)^3 = 27x^3 + 1^3$;
3) $(3x - 1)^3 = 27x^3 - 27x^2 + 9x + 1$;
4) $(3x - 1)^3 = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$?

19.3.° Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(a+1)^3$;
2) $(m-3)^3$;
3) $(a+2b)^3$;
4) $(3-n)^3$;
5) $(-2+3x)^3$;
6) $(-3-2y)^3$.

19.4.° Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(b+2)^3$;
2) $(c-1)^3$;
3) $(3b+c)^3$;
4) $\left(a-\frac{2}{3}\right)^3$;
5) $(-3+y)^3$;
6) $\left(-4-\frac{1}{3}m\right)^3$.

19.5.° Виконайте піднесення до куба:

1) $(2x^2-y^3)^3$; 2) $(x^n+y^{2n})^3$; 3) $(2^{n+1}-3^m)^3$,

де m і n — натуральні числа.

19.6.° Виконайте піднесення до куба:

1) $(3x^4+2y^2)^3$; 2) $(a^{2m}-b^{3n})^3$; 3) $(3^n+4^{m-1})^3$,

де m і n — натуральні числа.

19.7.• Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $(x+*)^3 = *+21x^2+*+*$;
2) $(*-2a)^3 = 27m^6-*+*-*$.

19.8.• Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $(*+y)^3 = *+*+12y^2+*$;
2) $(3b-*)^3 = *-*+*-64a^3$.

19.9.• Доведіть тотожність:

1) $(x+y)^3-x^3-y^3 = 3xy\,(x+y)$;
2) $(3x+1)^3-9x\,(3x+1) = 27x^3+1$;
3) $(2+y^2)^3-4\,(2+3y^2) = y^4\,(6+y^2)$;
4) $(2^n-3^n)^3-8^n+27^n = -3\cdot 6^n\,(2^n-3^n)$, де n — натуральне число.

19.10.• Доведіть тотожність:

1) $x^3-y^3-(x-y)^3 = 3xy\,(x-y)$;
2) $(6x-1)^3-216x^3+1 = 18x\,(1-6x)$;
3) $(b^2+3)^3-27\,(b^2+1) = b^4\,(b^2+9)$;
4) $(3^n-2)^3-27^n+8 = 2\cdot 3^{n+1}\,(2-3^n)$, де n — натуральне число.

19.11.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3-6x^2+12x-8=0$;
2) $216x^3+108x^2+18x+1=0$;
3) $27x^3+54x^2+36x+8=0$.

19.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = 0$;
2) $125x^3 - 75x^2 + 15x - 1 = 0$;
3) $64x^3 + 144x^2 + 108x + 27 = 0$.

19.13.•• Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $(2n-1)^3 - 4n^2 + 2n + 1$ ділиться націло на 16.

19.14.•• Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 2y^3$;
2) $7a^3 - 12a^2 + 6a - 1$.

19.15.•• Розкладіть на множники многочлен:

1) $28a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
2) $63x^3 + 48x^2 + 12x + 1$.

19.16.•• Числа x і y є такими, що $x^3 - y^3 = 7$, $x^2y - xy^2 = 2$. Знайдіть значення виразу $x - y$.

19.17.•• Числа x і y є такими, що $x(y^2 + 3x^2) = 26$, $y(y^2 + 27x^2) = 109$. Знайдіть значення виразу $3x - y$.

19.18.•• Числа x і y є такими, що $x(x^2 + 12y^2) = 32$, $y(4y^2 + 3x^2) = 16$. Знайдіть значення виразу $x + 2y$.

19.19.* Доведіть, що значення виразу $1002 \cdot 1004^3 - 1003 \cdot 1001^3$ є кубом натурального числа.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

19.20. У ящику лежать 36 карток, пронумерованих числами від 1 до 36. Яка ймовірність того, що номер навмання взятої картки буде кратним числу 9?

19.21. Місткість бака автомобіля становить 40 л, а витрати пального на кожні 100 км — 10 л. Яку найменшу кількість разів доведеться водію заїхати на заправку, якщо йому потрібно проїхати 1300 км, а бак у момент початку руху заповнений наполовину?

19.22. Відомо, що $2a + b = k$. Чому дорівнює значення виразу $4a^2 - b^2 + k(b - 2a)$?

19.23. Десять автобусних зупинок розташовані на прямій вулиці так, що відстані між будь-якими сусідніми зупинками однакові. Відстань між першою та третьою зупинками становить 1,2 км. Яка відстань між першою та останньою зупинками?

19.24. Розставте числа $2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^9$ у клітинках квадратної таблиці 3×3 так, щоб добутки чисел, які стоять у кожному рядку, у кожному стовпчику та на кожній діагоналі, були рівними.

20. Застосування різних способів розкладання многочлена на множники

У попередніх пунктах ми розглянули такі способи розкладання многочлена на множники:

- винесення спільного множника за дужки;
- метод групування;
- застосування формул скороченого множення.

Проте в математиці під час розв'язування багатьох задач часто доводиться використовувати кілька прийомів, застосовуючи їх у певній послідовності. Зокрема, є багато многочленів, для розкладання яких на множники треба застосувати одразу кілька способів.

Виникає природне запитання: які способи та у якій послідовності треба застосовувати при розкладанні многочлена на множники? Універсальних рекомендацій не існує, усе залежить від конкретного многочлена. І все ж дамо кілька загальних порад:

1) якщо це можливо, то розкладання треба починати з винесення спільного множника за дужки;

2) далі потрібно перевірити, чи можна застосувати формули скороченого множення;

3) якщо не вдається застосувати формули скороченого множення, то можна спробувати скористатися методом групування.

ПРИКЛАД 1 Розкладіть на множники многочлен:

1) $3a^2b - 12b$;
3) $24m^4 + 3m$;
2) $-5x^2 + 30xy - 45y^2$;
4) $3a^3 + 21a^2 - 6a^2b - 42ab$.

Розв'язання. 1) Застосувавши послідовно винесення спільного множника за дужки й формулу різниці квадратів, отримаємо:

$$3a^2b - 12b = 3b\,(a^2 - 4) = 3b\,(a - 2)\,(a + 2).$$

2) Застосувавши послідовно винесення спільного множника за дужки й формулу квадрата різниці, отримаємо:

$$-5x^2 + 30xy - 45y^2 = -5\,(x^2 - 6xy + 9y^2) = -5\,(x - 3y)^2.$$

3) Винесемо спільний множник за дужки та застосуємо формулу суми кубів:

$$24m^4 + 3m = 3m\,(8m^3 + 1) = 3m\,(2m + 1)\,(4m^2 - 2m + 1).$$

4) Комбінуючи метод винесення спільного множника за дужки та метод групування, матимемо:

$$3a^3 + 21a^2 - 6a^2b - 42ab = 3a\,(a^2 + 7a - 2ab - 14b) =$$
$$= 3a\,((a^2 + 7a) + (-2ab - 14b)) = 3a\,(a\,(a + 7) - 2b\,(a + 7)) =$$
$$= 3a\,(a + 7)\,(a - 2b).$$

ПРИКЛАД 2 Подайте у вигляді добутку многочленів:

1) $x^{16} - 1$; 2) $a^{12} - b^{12}$.

Розв'язання. 1) $x^{16} - 1 = (x^8 - 1)(x^8 + 1) =$

$= (x^4 - 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) =$

$= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1).$

2) $a^{12} - b^{12} = (a^6 - b^6)(a^6 + b^6) = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)(a^6 + b^6).$

Ми отримали три множники, один з яких є різницею кубів, а два інших — сумою кубів. Використовуючи відповідні формули, остаточно отримуємо:

$$a^{12} - b^{12} = (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2) \times$$
$$\times (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4).$$

ПРИКЛАД 3 Розкладіть на множники:

1) $m^2 - 16n^2 + 2m - 8n$; 2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16$.

Розв'язання. 1) $m^2 - 16n^2 + 2m - 8n = (m^2 - 16n^2) + (2m - 8n) =$

$= (m - 4n)(m + 4n) + 2(m - 4n) = (m - 4n)(m + 4n + 2).$

2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16 = (x^2 + 4xy + 4y^2) - 16 =$

$= (x + 2y)^2 - 4^2 = (x + 2y - 4)(x + 2y + 4).$

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$.

Розв'язання. Маємо:

$$x^2(x + 1) - 4(x + 1) = 0;$$
$$(x + 1)(x^2 - 4) = 0;$$
$$(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0;$$
$$x + 1 = 0, \text{ або } x - 2 = 0, \text{ або } x + 2 = 0;$$
$$x = -1, \text{ або } x = 2, \text{ або } x = -2.$$

Відповідь: -1; 2; -2.

ПРИКЛАД 5 Розкладіть на множники тричлен $x^2 + 8x - 9$, виділивши попередньо квадрат двочлена.

Розв'язання. Якщо до суми $x^2 + 8x$ додати число 16, то отриманий вираз $x^2 + 8x + 16$ можна «згорнути» за формулою квадрата суми. Тому, додавши до даного тричлена число 16 і віднявши від нього 16, отримуємо:

$$x^2 + 8x - 9 = x^2 + 8x + 16 - 16 - 9 = (x + 4)^2 - 25 =$$
$$= (x + 4 - 5)(x + 4 + 5) = (x - 1)(x + 9).$$

ПРИКЛАД 6 Розкладіть на множники многочлен $x^4 + 4y^4$.

Розв'язання. Оскільки $x^4 = (x^2)^2$, $4y^4 = (2y^2)^2$, то, додавши до даного многочлена $4x^2y^2$ (подвоєний добуток одночленів x^2 і $2y^2$) і віднявши від нього такий самий одночлен, отримуємо:

$$x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 =$$
$$= (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy).$$

ПРИКЛАД 7 Розкладіть на множники тричлен $a^5 + a + 1$.

Розв'язання

I спосіб

Маємо: $a^5 + a + 1 = a^5 + a^4 - a^4 + a^3 - a^3 + a^2 - a^2 + a + 1 =$
$= a^5 + a^4 + a^3 - a^4 - a^3 - a^2 + a^2 + a + 1 =$
$= a^3(a^2 + a + 1) - a^2(a^2 + a + 1) + a^2 + a + 1 =$
$= (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1)$.

II спосіб

Маємо: $a^5 + a + 1 = a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 = a^2(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1) =$
$= a^2(a - 1)(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1) =$
$= (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1)$. ●

ВПРАВИ

20.1.° Розкладіть на множники многочлен:

1) $2a^2 - 2b^2$; 4) $3ab^2 - 27a$; 7) $x^4 - x^2$;
2) $cx^2 - cy^2$; 5) $x^3 - 4x$; 8) $0{,}09t^4 - t^6$;
3) $3x^2 - 3$; 6) $2y^3 - 18y$; 9) $\frac{16}{49}a^2b^4c^5 - b^2c^3$.

20.2.° Подайте у вигляді добутку многочлен:

1) $12b^2 - 12c^2$; 3) $5a^2 - 20$; 5) $7y^3 - 7y$;
2) $2a^2c - 2b^2c$; 4) $3mn^2 - 48m$; 6) $a^3 - a^5$.

20.3.° Розкладіть на множники:

1) $3a^2 + 6ab + 3b^2$; 4) $-7b^2 - 14bc - 7c^2$;
2) $5m^2 + 5n^2 - 10mn$; 5) $x^2y + 14xy^2 + 49y^3$;
3) $-3x^2 + 12x - 12$; 6) $-8a^3b + 56a^2b^2 - 98ab^3$.

20.4.° Розкладіть на множники:

1) $8x^2 + 16xy + 8y^2$; 3) $-12b^3 - 12b^2 - 3b$;
2) $-2a^2 + 24ab - 72b^2$; 4) $48m^3n - 72m^2n + 27mn$.

20.5.° Подайте у вигляді добутку многочлен:

1) $a^4 - b^4$; 2) $c^4 - 81$.

20.6.° Розкладіть на множники:

1) $x^4 - 16$; 2) $y^8 - 1$.

20.7.° Розкладіть на множники:

1) $4a^3 - 4b^3$; 3) $7 + 7b^3$; 5) $2a^4 - 250a$;
2) $2m^3 - 16$; 4) $-x^4 + 27x$; 6) $9a^5 - 9a^2$.

20.8.° Подайте у вигляді добутку многочлен:

1) $3x^3 + 3y^3$; 2) $5m^4 - 320mn^3$; 3) $6c^5 - 6c^8$.

20.9.° Розкладіть на множники:
1) $a^7 + ab^6$; 2) $x^8 - y^8$; 3) $c^6 - 1$.

20.10.° Розкладіть на множники:
1) $c^6 + c^9$; 2) $m^9 - n^9$; 3) $a^8 - b^4$.

20.11.° Подайте у вигляді добутку многочлен:
1) $3ab + 15b - 3a - 15$;
2) $84 - 42y - 7xy + 14x$;
3) $abc + 6ac + 8ab + 48a$;
4) $m^3 - m^2n + m^2 - mn$;
5) $a^3 + a^2 - a - 1$;
6) $2x^3 - 2xy^2 - 8x^2 + 8y^2$;
7) $5a^2 - 5b^2 - 15a^3b + 15ab^3$;
8) $a^2b^2 - 1 - b^2 + a^2$.

20.12.° Розкладіть на множники:
1) $15cx + 2cy - cxy - 30c$;
2) $35a^2 - 42ab + 10a^2b - 12ab^2$;
3) $x^3 + x^2y + x^2 + xy$;
4) $mn^4 - n^4 + mn^3 - n^3$.

20.13.• Розкладіть на множники:
1) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$;
2) $81 - (x^2 + 6x)^2$;
3) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$;
4) $c^2 + 4c + 4 - k^2$;
5) $9a^2 + c^2 + 6ac - 9$;
6) $a^2 - b^2 - 10b - 25$;
7) $49 - y^2 + x^2 - 14x$;
8) $mn^2 - m^3 - 12m^2 - 36m$.

20.14.• Подайте у вигляді добутку вираз:
1) $(m^2 - 2m)^2 - 1$;
2) $16 - (m^2 + 4m)^2$;
3) $x^2 - 18xy + 81y^2 - z^2$;
4) $64x^2 + 48xy + 9y^2 - 144$;
5) $c^2 - a^2 + 22a - 121$;
6) $100 - 25y^2 - 60x^2y - 36x^4$.

20.15.• Розкладіть на множники:
1) $a^2 - b^2 - a - b$;
2) $x - y - x^2 + y^2$;
3) $4m^2 - 9n^2 + 2m + 3n$;
4) $c^2 - d^2 + 4c - 4d$;
5) $5x^2y - 5xy^2 - x^2 + y^2$;
6) $a^2 - 10a + 25 - ab + 5b$;
7) $8mp + 8np - m^2 - 2mn - n^2$;
8) $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2$;
9) $m^3 - 8n^3 - m^2 + 4mn - 4n^2$;
10) $a^3 - 4a^2 + 4a - 1$.

20.16.• Розкладіть на множники:
1) $m^2 - n^2 - m + n$;
2) $c + d - c^2 + d^2$;
3) $16x^2 - 25y^2 - 4x - 5y$;
4) $12a^2b^3 + 3a^3b^2 + 16b^2 - a^2$;
5) $49c^2 - 14c + 1 - 21ac + 3a$;
6) $ax^2 + ay^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4$;
7) $27c^3 - d^3 + 9c^2 + 3cd + d^2$;
8) $b^3 - 2b^2 - 2b + 1$.

20.17.• Розкладіть на множники:
1) $x^2(x-2) - 18x(x-2) + 81(x-2)$;
2) $4x(y^2 - 9) + 4x^2(y^2 - 9) - 9 + y^2$;
3) $b^2(a+1) - a^2(b+1)$;
4) $(a-b)(b^2 - c^2) - (b-c)(a^2 - b^2)$.

20.18. Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $x^2(x+4)-20x(x+4)+100(x+4)$;
2) $a^2-36-2a(36-a^2)-a^2(36-a^2)$;
3) $a^2(b-1)-b^2(a-1)$;
4) $(m-n)(n^3-p^3)-(n-p)(m^3-n^3)$.

20.19. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3-4x=0$;
2) $x^4-x^2=0$;
3) $x^5-36x^3=0$;
4) $9x^3-x=0$;
5) $x^3-10x^2+25x=0$;
6) $x^3+2x^2-9x-18=0$;
7) $x^3-5x^2+4x-20=0$;
8) $x^5-x^4-x+1=0$.

20.20. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3-x=0$;
2) $x^4+x^2=0$;
3) $x^4-8x^3=0$;
4) $49x^3+14x^2+x=0$;
5) $x^3+x^2-x-1=0$;
6) $x^3-4x^2-25x+100=0$.

20.21. Чи є тотожністю рівність:

1) $(a-1)^3-9(a-1)=(a-1)(a-4)(a+2)$;
2) $(x^2+1)^2-4x^2=(x-1)^2(x+1)^2$?

20.22. Доведіть тотожність:

1) $(a+2)^3-25(a+2)=(a+2)(a+7)(a-3)$;
2) $a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2=(a+b+c-d)(a+b-c+d)$.

20.23. Розкладіть вираз на множники двома способами:

а) застосуйте формулу різниці квадратів;
б) розкрийте дужки та застосуйте метод групування:

1) $(ab+1)^2-(a+b)^2$;
2) $(a+2b)^2-(ab+2)^2$.

20.24. Доведіть тотожність:

1) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(a+c)$;
2) $(a-b)^3+(b-c)^3-(a-c)^3=-3(a-b)(b-c)(a-c)$.

20.25. Розкладіть на множники вираз:

1) $(x-y)(x+y)+2(x+3y)-8$;
2) $(2a-3b)(2a+3b)-4(a+3b)-3$.

20.26. Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $(5x-y^2)(5x+y^2)-2(15x-7y^2)-40$;
2) $(3m-2n)(12m+5n)+3m(3n+4)-2(3n^2-20n+12)$.

20.27. Розкладіть на множники тричлен, виділивши попередньо квадрат двочлена:

1) $x^2-10x+24$;
2) $a^2+4a-32$;
3) b^2-3b-4;
4) $4a^2-12a+5$;
5) $9x^2-24xy+7y^2$;
6) $36m^2-60mn+21n^2$.

20.28.** Розкладіть на множники многочлен:

1) x^2-4x+3;
2) $a^2+2a-24$;
3) $y^2+12y+35$;
4) x^2+x-6;
5) $c^2+8cd+15d^2$;
6) $9x^2-30xy+16y^2$.

20.29.** Значення змінних x_1 і x_2 є такими, що виконуються рівності $x_1 - x_2 = 8$, $x_1x_2 = 5$. Знайдіть значення виразу:

1) $x_1x_2^2-x_1^2x_2$;
2) $x_1^2+x_2^2$;
3) $(x_1+x_2)^2$;
4) $x_1^3-x_2^3$.

20.30.** Значення змінних x і y є такими, що виконуються рівності $x + y = 6$, $xy = -3$. Знайдіть значення виразу:

1) $x^3y^2+x^2y^3$;
2) $(x-y)^2$;
3) x^4+y^4.

20.31.** Розкладіть на множники:

1) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9$;
2) $y^8 - y^4 + 4y^2 - 4$;
3) $(x + 2y)(x + 2y + 2) - (y - 1)(y + 1)$.

20.32.** Розкладіть на множники:

1) $x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 25$;
2) $(a + 3b)(a + 3b - 6) - (b + 3)(b - 3)$.

20.33.** Про додатні числа a і b відомо, що $a^2 + b = b^2 + a$. Чи можна стверджувати, що $a = b$?

20.34.* Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^2 + 2x - 9y^2 + 12y - 3$;
2) $x^2 - 4y^2 + 4x + 4y + 3$;
3) $a^2b^2+2ab-c^2-8c-15$;
4) $8a^2 - 12a + 2ab - b^2 + 4$.

20.35.* Розкладіть на множники:

1) $x^2 + 2x - y^2 + 4y - 3$;
2) $x^4y^2 + 2x^2y - x^2 + 6x - 8$;
3) $3x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 4$.

20.36.* Розкладіть на множники:

1) $a^3 + 2a^2 - 3$;
2) $b^3 + b^2 + 4$;
3) $x^3 - 7x - 6$;
4) $a^3 - 2ab^2 - b^3$;
5) $m^5 + m^4 + 1$;
6) x^8+x^4-2.

20.37.* Розкладіть на множники:

1) $x^3 - 3x + 2$;
2) $x^3 - 3x^2 + 2$;
3) $x^3 + x^2 + 18$;
4) $a^3 - 3ab^2 - 2b^3$;
5) $x^8 + x^7 + 1$;
6) $x^4 - 7x^2 - 18$.

20.38.* Розкладіть на множники:

1) x^4-5x^2+4;
2) x^4+x^2+1;
3) $4x^4-12x^2+1$;
4) $x^4 + 9x^2 + 18$;
5) x^4+4.

20.39.* Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $x^4 + 5x^2 + 9$;
2) x^4-8x^2+4;
3) $n^4 + 64$.

20.40.* Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n, відмінному від 1, значення виразу $n^8 + n^4 + 1$ є складеним числом.

20.41.* Доведіть, що значення виразу $2^{10} + 5^{12}$ є складеним числом.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

20.42. Дано три числа, з яких кожне наступне на 4 більше за попереднє. Знайдіть ці числа, якщо добуток меншого й більшого з них на 88 менший від добутку більшого й середнього.

20.43. Петро спочатку піднявся на гору зі швидкістю 2,5 км/год, а потім спустився по іншій дорозі зі швидкістю 4 км/год. Знайдіть загальний шлях, пройдений Петром, якщо дорога на гору на 3 км коротша від дороги з гори, а час, витрачений на весь шлях, становить 4 год.

20.44. Розв'яжіть рівняння:

1) $|7x - 3| = 4$;
2) $||x| - 10| = 8$;
3) $4(x - 2) + 5|x| = 10$;
4) $|x| = 3x - 8$.

20.45. Доведіть, що сума трицифрового числа та подвоєної суми його цифр ділиться націло на 3.

21. Формули для розкладання на множники виразів виду $a^n - b^n$ і $a^n + b^n$

Вам добре знайомі такі дві формули:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \qquad (1)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2). \qquad (2)$$

Розкладемо на множники двочлен $a^4 - b^4$. Маємо:

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) =$$
$$= (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

Отже,

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3). \qquad (3)$$

У структурі формул (1) – (3) можна помітити певну закономірність: якщо степені одночленів у лівій частині формули дорівнюють n, то права частина — добуток двочлена $a - b$ на многочлен, який складається з усіх одночленів степеня $n - 1$, коефіцієнти яких дорівнюють одиниці.

Можна висунути припущення, що формула розкладу двочлена $a^5 - b^5$ має такий вигляд:

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

Щоб довести цю тотожність, достатньо перемножити многочлени, записані в правій частині:

$$(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) =$$
$$= a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 -$$
$$- a^4b - a^3b^2 - a^2b^3 - ab^4 - b^5 =$$
$$= a^5 - b^5.$$

Розглянуті приклади підказують, що формула для розкладання на множники різниці n-х ($n > 1$) степенів має такий вигляд:

$$\boxed{\boldsymbol{a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})}} \quad (4)$$

Переконаємося в справедливості цієї тотожності, перемноживши многочлени, записані в правій частині:

$$(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) =$$
$$= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \ldots + ab^{n-1} -$$
$$- a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 - \ldots - ab^{n-1} - b^n =$$
$$= a^n - b^n.$$

Якщо у формулі (2) замінити b на $-b$, то отримаємо відому формулу для розкладання на множники суми кубів:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Скористаємося цією ідеєю для розкладання на множники двочлена $a^n + b^n$, де n — непарне натуральне число. Маємо:

$$a^n + b^n = a^n - (-b)^n = (a - (-b))(a^{n-1} + a^{n-2}(-b) +$$
$$+ a^{n-3}(-b)^2 + \ldots + a(-b)^{n-2} + (-b)^{n-1}) =$$
$$= (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Отже, якщо n — непарне натуральне число, більше за 1, то справедливою є така формула:

$$\boxed{\boldsymbol{a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})}}$$

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $3^{2n} \cdot 7^n - 2^{5n}$ кратне 31.

Розв'язання. Маємо: $3^{2n} \cdot 7^n - 2^{5n} = (3^2)^n \cdot 7^n - (2^5)^n =$

$$= 9^n \cdot 7^n - 32^n = 63^n - 32^n =$$
$$= (63 - 32)(63^{n-1} + 63^{n-2} \cdot 32 + \ldots + 63 \cdot 32^{n-2} + 32^{n-1}).$$

Перший множник отриманого добутку дорівнює 31, а другий є виразом, який набуває натуральних значень. Отже, значення даного виразу кратне 31. ●

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть рівняння

$$(1 + x + \ldots + x^7)(1 + x + \ldots + x^5) = (1 + x + \ldots + x^6)^2.$$

Розв'язання. Перевіркою встановлюємо, що число 1 не є коренем даного рівняння. Помножимо обидві частини рівняння на вираз $(1 - x)^2$:

$$(1 - x)(1 + x + \ldots + x^7)(1 - x)(1 + x + \ldots + x^5) =$$
$$= ((1 - x)(1 + x + \ldots + x^6))^2;$$
$$(1 - x^8)(1 - x^6) = (1 - x^7)^2;$$
$$1 - x^6 - x^8 + x^{14} = 1 - 2x^7 + x^{14};$$
$$x^8 - 2x^7 + x^6 = 0;$$
$$x^6(x - 1)^2 = 0;$$
$$x = 0 \text{ або } x = 1.$$

На початку розв'язування було встановлено, що число 1 не є коренем даного рівняння.

Відповідь: 0.

1. Запишіть формулу для розкладання на множники різниці n-х степенів двох виразів.
2. Запишіть формулу для розкладання на множники суми непарних n-х степенів двох виразів.

ВПРАВИ

21.1.° Розкладіть на множники:

1) $a^7 - b^7$;
2) $a^7 + b^7$;
3) $x^9 - 1$;
4) $x^5 + 1$;
5) $y^5 - 32$;
6) $m^{10} + n^5$;
7) $x^7y^{14} + 1$;
8) $a^5b^{10} + c^{15}$.

21.2.° Розкладіть на множники:

1) $a^5 + b^5$;
2) $a^{11} - 1$;
3) $y^7 - 128$;
4) $m^7n^{14}k^{21} + 1$.

21.3.° Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

1) $7^n - 1$ кратне 6;
2) $19^{2n+1} + 1$ кратне 20;
3) $16^n - 11^n$ кратне 5.

21.4.° Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:
1) $17^n - 1$ кратне 16;
2) $23^{2n+1} + 1$ кратне 24;
3) $13^{2n+1} + 1$ кратне 14.

21.5.• Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:
1) $15^n + 13$ кратне 7;
2) $9^n + 5^n - 2$ кратне 4;
3) $5 \cdot 25^n + 13 \cdot 13^{2n}$ кратне 9;
4) $21^n + 4^{n+2}$ кратне 17.

21.6.• Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:
1) $27^n + 12$ кратне 13;
2) $17^n + 15$ кратне 16;
3) $8^n + 15^n - 2$ кратне 7;
4) $3 \cdot 9^n + 7 \cdot 7^{2n}$ кратне 10.

21.7.• Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:
1) $2^{2n} \cdot 5^n - 3^{2n}$ кратне 11;
2) $7^n \cdot 3^{3n} - 2^{2n}$ кратне 37.

21.8.• Доведіть, що число є складеним:
1) $2^{1234} + 1$;
2) $1\underbrace{000\ldots0}_{16\text{ нулів}}1$.

21.9.•• Доведіть тотожність:
1) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$;
2) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2 - x^5 =$
$= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$.

21.10.•• Спростіть вираз:
1) $3^{99} + 3^{98} \cdot 2 + 3^{97} \cdot 2^2 + \ldots + 3 \cdot 2^{98} + 2^{99} + 2^{100}$;
2) $4^{20} - 4^{19} \cdot 3 + 4^{18} \cdot 3^2 - \ldots - 4 \cdot 3^{19} + 3^{20}$.

21.11.•• Відомо, що n і a — натуральні числа ($n > 1$), а значення виразу $a^n - 1$ є простим числом. Знайдіть a.

21.12.•• Відомо, що значення виразу $2^n + 1$, де n — натуральне число, є простим числом. Доведіть, що $n = 1$ або n — степінь числа 2.

21.13.•• Доведіть, що значення виразу $1^{101} + 2^{101} + 3^{101} + \ldots + 30^{101}$ ділиться націло на 31.

21.14.* Розв'яжіть рівняння:
1) $(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = (1 + x + x^2 + x^3)^2$;
2) $(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + \ldots + x^7) =$
$= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^2$.

21.15.* Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

1) $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^{n}$ ділиться націло на 19;
2) $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ ділиться націло на 57;
3) $13^{n+2} + 14^{2n+1}$ ділиться націло на 183;
4) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ ділиться націло на 11.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

21.16. У ящику лежить деяка кількість яблук. Виявилося, що їх можна розкласти в 5 однакових рядів, або у 8 однакових рядів, або у 12 однакових рядів. Яка найменша кількість яблук може бути у ящику?

21.17. Машиніст пасажирського поїзда, який рухався зі швидкістю 56 км/год, помітив, що зустрічний товарний поїзд, який рухався зі швидкістю 34 км/год, пройшов повз нього за 15 с. Яка довжина товарного поїзда?

21.18. Зелений, жовтий і червоний сигнали світлофора горять послідовно 50 с, 5 с і 20 с. У певний момент часу загорівся зелений сигнал. Який сигнал горітиме через 3 хв?

21.19. Визначимо операцію Δ так: якщо a і b — натуральні числа, то $a \Delta b = a^b + b^a$. Знайдіть значення виразу $(2 \Delta 3) \Delta 2$.

21.20. Доведіть, що значення виразу $5^{40} + 4$ — складене число.

Мова, зрозуміла всім

Тут трьома східними мовами — арабською, китайською та івритом — записано добре відому вам властивість: від перестановки місць доданків сума не змінюється.

في الجمع تبديل أماكن الأعداد لا يغير النتيجة

加数的次序不影响加和的结果

כאשר מחברים שני מספרים, אין חשיבות לשאלה מי הראשון ומי השני.

Проте людина, яка не володіє цими мовами, такого простого речення не зрозуміє. Тоді на допомогу приходить інтернаціональна математична мова. Переклад нею має такий вигляд:

$$a + b = b + a.$$

Як і будь-яка інша мова, вона має свій алфавіт — математичні символи. Це цифри, букви, знаки математичних дій тощо. З них складають «слова» математичної мови, наприклад вирази. Зі слів складають «речення» математичної мови, наприклад формули й т. д.

Здавалося б, що може бути простішим — використати математичну фразу «$2x = 4$» для запису лінійного рівняння. Однак навіть великий аль-Хорезмі[1] записував це речення громіздко: «Два корені дорівнюють 4 дирхемам[2]». Це пов'язано з тим, що за часів аль-Хорезмі математичної символіки ще не існувало.

Сказане зовсім не означає, що до IX ст. вчені не робили спроб створити математичну мову.

Ще в I ст. грецький математик Герон Александрійський почав позначати невідому величину буквою ς («сигма»). Наступний крок у створенні символіки зробив у III ст. Діофант Александрійський. У своїй знаменитій праці «Арифметика» він запровадив позначення не лише для невідомої величини, але й для деяких її степенів:

перший степінь	—	σ;
другий степінь	—	Δ^{v} (від Δυναμις — «дюнаміс», що означає «сила», «степінь»);
третій степінь	—	K^{v} (від Κυβος — «кубос», тобто «куб»).

Для рівності Діофант застосовував знак ισ — перші дві букви слова ισος — «ісос», тобто «рівний».

Навряд чи символіку Діофанта можна вважати зручною та наочною. Наприклад, він не запровадив ніяких спеціальних символів для позначення додавання та множення. Позначення всіх невідомих величин однією буквою ς також значною мірою ускладнювало запис розв'язання задач, у яких фігурувало кілька змінних. Із занепадом епохи античності алгебраїчну символіку Діофанта практично було забуто.

---

[1] Ми розповідали про нього на с. 10.

[2] **Дирхем** — старовинна арабська срібна монета.

Відновлення процесу створення алгебраїчної символіки пов'язане з роботами талановитого німецького вченого XIII ст. Йордана Неморарія, який відродив у європейській математиці ідею буквеної символіки.

У XV ст. широкого розповсюдження набули символи, які застосовував видатний італійській математик Лука Паччолі.

Чимало зробили для вдосконалення математичної мови німецькі математики XVI ст. Ян Відман і Адам Різе.

Засновником буквеної символіки по праву вважають найвидатнішого французького математика XVI ст. Франсуа Вієта. Він перший позначив буквами не тільки невідомі, але й дані величини. Вієт запропонував: «Шукані величини будемо позначати буквою A або іншою голосною (E, I, O, U), а дані — буквами B, D, G та іншими приголосними». Такі позначення дали змогу Вієту не тільки розв'язувати окремі рівняння, але й досліджувати процес розв'язування одразу цілого класу рівнянь. Наприклад, завдяки символіці Вієта всі лінійні рівняння можна записати у вигляді $ax = b$, а отже, побудувати процес розв'язування рівняння в загальному вигляді так, як ми це зробили в п. 2.

Франсуа Вієт
(1540–1603)

Мови багатьох народів продовжують розвиватися. Не є винятком і математична мова. Нові відкриття приносять у математику нові символи й терміни.

Великий внесок у розвиток і систематизацію української математичної термінології зробив професор фізико-математичного факультету Львівського університету Володимир Йосипович Левицький. Його науково-методичні праці значною мірою сприяли становленню й розвитку української математичної школи.

В. Й. Левицький
(1872–1956)

М. О. Зарицький
(1889–1961)

Фундатором української математичної культури по праву вважають ученого з європейським іменем, доктора філософії, професора Мирона Онуфрійовича Зарицького. Його наукові праці та педагогічні здобутки добре відомі в багатьох країнах світу.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Тотожно рівні вирази

Вирази, відповідні значення яких є рівними при будь-яких значеннях змінних, що входять до них, називають тотожно рівними.

Тотожність

Рівність, яка є правильною при будь-яких значеннях змінних, що входять до неї, називають тотожністю.

Прийоми доведення тотожностей

- Тотожно перетворюють одну із частин даної рівності, отримуючи іншу частину;
- тотожно перетворюють кожну із частин даної рівності, отримуючи один і той самий вираз;
- показують, що різниця лівої та правої частин даної рівності тотожно дорівнює нулю.

Степінь з натуральним показником

Степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a.
Степенем числа a з показником 1 називають саме це число.

Знак степеня

Підносячи невід'ємне число до степеня, отримуємо невід'ємне число.
Підносячи від'ємне число до степеня з парним показником, отримуємо додатне число, а підносячи від'ємне число до степеня з непарним показником, отримуємо від'ємне число.

Властивості степеня з натуральним показником

$a^m a^n = a^{m+n}$ (основна властивість степеня)

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(ab)^n = a^n b^n$

Одночлен

Вираз, який являє собою добуток чисел, змінних та їхніх степенів, називають одночленом.

Одночлен стандартного вигляду

Одночленом стандартного вигляду називають одночлен, що містить тільки один числовий множник, відмінний від нуля, який стоїть на першому місці; решта його множників є степенями з різними основами.

Коефіцієнт одночлена

Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають коефіцієнтом одночлена.

Степінь одночлена

Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, що входять до нього. Степінь одночлена, який є числом, відмінним від нуля, вважають рівним нулю.

Многочлен

Вираз, який є сумою кількох одночленів, називають многочленом.

Многочлен стандартного вигляду

Многочлен, складений з одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних, називають многочленом стандартного вигляду.

Степінь многочлена

Степенем многочлена стандартного вигляду називають найбільший зі степенів одночленів, з яких цей многочлен складений.

Множення одночлена на многочлен

Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно помножити цей одночлен на кожний член многочлена й отримані добутки додати.

Множення многочленів

Щоб помножити многочлен на многочлен, можна кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого й отримані добутки додати.

Добуток різниці та суми двох виразів

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

Різниця квадратів двох виразів

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

Квадрат суми двох виразів

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Квадрат суми трьох виразів

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

Квадрат різниці двох виразів

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Сума кубів двох виразів

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Різниця кубів двох виразів

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Куб суми двох виразів

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Куб різниці двох виразів

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Формули для розкладання на множники виразів виду a^n-b^n і a^n+b^n

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$,
де n — натуральне число, більше за 1

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1})$,
де n — натуральне число, більше за 1

§ 3 ФУНКЦІЇ

- У цьому параграфі ви вивчатимете зв'язки між величинами.
- Ознайомитеся з особливим видом правила, яке визначає ці зв'язки, — функцією.
- Опануєте основні способи задання функції.

22. Множина та її елементи

Розглянемо словосполучення: стадо баранів, букет квітів, колекція моделей автомобілів, косяк риб, зграя птахів, рій бджіл, зібрання картин, набір ручок, компанія друзів.

Якщо в цих словосполученнях перемішати слова, то може вийти смішно, наприклад: букет баранів, косяк картин, колекція друзів. Так ніхто не говорить. Водночас такі словосполучення, як колекція риб, колекція птахів, колекція картин, колекція ручок тощо мають сенс. Річ у тім, що слово «колекція» досить універсальне. Однак у математиці є всеосяжне слово, яким можна замінити будь-яке з перших слів у наведених парах. Це слово — **множина**.

Наведемо ще кілька прикладів множин:

- множина учнів вашого класу;
- множина планет Сонячної системи;
- множина парних чисел;
- множина точок, які лежать на одній прямій;
- множина натуральних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{N}$.

Як правило, множини позначають великими латинськими буквами: A, B, C, D і т. д.

Об'єкти, які утворюють дану множину, називають **елементами** цієї множини. Зазвичай елементи позначають маленькими латинськими буквами: a, b, c, d і т. д.

Якщо a належить множині A, то пишуть: $a \in A$ (читають: «a належить множині A»). Якщо b не належить множині A, то пишуть: $b \notin A$ (читають: «b не належить множині A»).

Наприклад, $12 \in \mathbb{N}$, $-3 \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$.

Якщо множина A складається з трьох елементів a, b, c, то пишуть: $A = \{a, b, c\}$.

Наприклад, якщо M — множина натуральних дільників числа 6, то пишуть: $M = \{1, 2, 3, 6\}$. Множина дільників числа 6, які є складеними числами, має такий вигляд: $\{6\}$. Це приклад **одноелементної** множини.

Задавати множину за допомогою фігурних дужок, у яких указано список її елементів, зручно в тих випадках, коли множина складається з невеликої кількості елементів.

Означення. **Дві множини A і B називають рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B і, навпаки, кожний елемент множини B належить множині A.**

Якщо множини A і B рівні, то пишуть: $A = B$.

З означення випливає, що ***множина однозначно визначається своїми елементами.***

Якщо множину записано за допомогою фігурних дужок, то порядок, у якому виписано її елементи, не має значення. Так, множина, яка складається з трьох елементів a, b, c, припускає шість варіантів запису:

$$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}.$$

Оскільки з означення рівних множин випливає, що, наприклад, $\{a, b, c\} = \{a, a, b, c\}$, то надалі розглядатимемо множини, які складаються з різних елементів. Так, множина букв слова «космодром» має вигляд {к, о, с, м, д, р}.

Зауважимо, що $\{a\} \neq \{\{a\}\}$. Справді, множина $\{a\}$ складається з одного елемента a; множина $\{\{a\}\}$ складається з одного елемента — множини $\{a\}$.

Найчастіше множину задають одним із двох таких способів.

Перший спосіб полягає в тому, що множину задають указанням (переліком) усіх її елементів. Ми вже використовували цей спосіб, записуючи множину за допомогою фігурних дужок, у яких вказували список її елементів.

Зрозуміло, що не будь-яку множину можна задати в такий спосіб. Наприклад, множину парних чисел так задати неможливо.

Другий спосіб полягає в тому, що вказують **характеристичну властивість** елементів множини, тобто властивість, яка притаманна всім елементам даної множини й тільки їм. Наприклад, властивість «натуральне число при діленні на 2 дає в остачі 1» задає множину непарних чисел.

Якщо задавати множину характеристичною властивістю її елементів, то може виявитися, що жодний об'єкт такої властивості не має. Звернемося до прикладів.

- Множина трикутників, сторони яких пропорційні числам 1, 2, 5. З нерівності трикутника випливає, що ця множина не містить жодного елемента.
- Позначимо через A множину учнів вашого класу, які є майстрами спорту із шахів.
  Може виявитися, що множина A також не містить жодного елемента.
- Розглядаючи множину коренів довільного рівняння, потрібно передбачити ситуацію, коли рівняння коренів не має.

Наведені приклади вказують на те, що зручно до сукупності множин віднести ще одну особливу множину, яка не містить жодного елемента. Її називають **порожньою множиною** та позначають символом $\varnothing$.

Зауважимо, що множина $\{\varnothing\}$ не є порожньою. Вона містить один елемент — порожню множину.

1. Як позначають множину та її елементи?
2. Як позначають множину натуральних чисел?
3. Як записати, що елемент належить (не належить) множині A?
4. Які множини називають рівними?
5. Які існують способи задання множин?
6. Яку множину називають порожньою? Як її позначають?

ВПРАВИ

22.1.° Як називають множину точок кута, рівновіддалених від його сторін?

22.2.° Як називають множину вовків, які підкоряються одному ватажку?

22.3.° Назвіть яку-небудь множину учнів вашої школи.

22.4.° Як називають множину вчителів, які працюють в одній школі?

22.5.° Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб утворилося правильне твердження:

1) $-8 * \mathbb{N}$; 2) $0{,}2 * \mathbb{N}$; 3) $7 * \mathbb{N}$.

22.6.° Нехай M — множина дільників числа 8. Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб утворилося правильне твердження:

1) $1 * M$; 2) $3 * M$; 3) $4 * M$.

22.7.° Які з поданих тверджень є правильними:

1) $1 \in \{1, 2, 3\}$; 3) $\{1\} \in \{1, 2\}$; 5) $\varnothing \notin \{1, 2\}$;
2) $1 \notin \{1\}$; 4) $\{1\} \in \{\{1\}\}$; 6) $\varnothing \in \{\varnothing\}$?

22.8.° Запишіть множину коренів рівняння:

1) $x(x - 1) = 0$; 3) $x = 2$;
2) $(x - 2)(x^2 - 4) = 0$; 4) $x^2 + 3 = 0$.

22.9.° Задайте за допомогою переліку елементів множину:

1) правильних дробів зі знаменником 7;
2) правильних дробів, знаменник яких не більший за 4;
3) букв слова «математика»;
4) цифр числа 5555.

22.10.• Чи рівні множини A і B, якщо:

1) $A = \{3, -2\}$, $B = \{-2, 3\}$; 2) $A = \{0\}$, $B = \{\{0\}\}$?

22.11.• Чи рівні множини A і B, якщо:

1) A — множина коренів рівняння $|x| = x$, B — множина невід'ємних чисел;
2) A — множина трикутників, у яких усі кути рівні; B — множина трикутників, у яких усі висоти збігаються з бісектрисами?

22.12.• Які з поданих множин дорівнюють порожній множині:

1) множина трикутників, сума кутів яких дорівнює 181°;
2) множина гірських вершин заввишки понад 8800 м;
3) множина пар суміжних кутів, різниця яких дорівнює 1°;
4) множина коренів рівняння $|x| + 5 = 1$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

22.13. Кирилові потрібно 30 хв, щоб дістатися до стадіону й повернутися додому, якщо до стадіону він іде пішки, а повертається автобусом. Якщо ж він їде автобусом в обидва кінці, то на весь шлях він витрачає 12 хв. Скільки часу йому потрібно, щоби пішки подолати шлях до стадіону й назад?

22.14. Кожне третє дерево в саду — яблуня, а кожне восьме — груша. Визначте, скільки дерев росте в саду, якщо відомо, що їхня кількість менша від 100, але більша за 80.

22.15. Розкладіть на множники многочлен $27x^3 - 18x^2y - 12xy^2 + 8y^3$.

22.16. Доведіть, що значення виразу $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$ є квадратом натурального числа.

23. Зв'язки між величинами. Функція

Учитель пише на дошці. При цьому змінюється довжина сліду крейди, маса, об'єм і навіть температура шматочка крейди.

Працює шкільна їдальня. Протягом дня змінюються кількість учнів, що її відвідали, витрати електроенергії та води, грошова виручка тощо.

Узагалі, у процесах, що відбуваються навколо нас, багато величин змінюють свої значення. Деякі із цих величин пов'язані між собою, тобто зміна однієї величини спричиняє зміну другої.

Багато наук, такі як фізика, хімія, біологія та інші, досліджують залежності між величинами. Вивчає ці зв'язки й математика, будуючи **математичні моделі** реальних процесів. З поняттям математичної моделі ви вже ознайомилися в п. 3.

Розглянемо кілька прикладів.

ПРИКЛАД 1 Змінюється сторона квадрата. Зрозуміло, що при цьому змінюватиметься також його периметр. Якщо довжину сторони квадрата позначити a, а периметр — P, то залежність значення змінної P від значення змінної a (коротко говорять: «залежність змінної P від змінної a») можна задати формулою

$$P = 4a.$$

Ця формула є математичною моделлю зв'язку між такими величинами, як довжина сторони квадрата та його периметр.

За допомогою цієї формули можна, вибравши довільну довжину сторони, знайти відповідне значення периметра квадрата. Тому в цій моделі змінну a називають **незалежною змінною**, а змінну P — **залежною змінною**.

Наголосимо, що ця формула задає правило, за допомогою якого за значенням незалежної змінної можна *однозначно* знайти значення залежної змінної. ●

ПРИКЛАД 2 Сім'я поклала в банк 10 000 грн під 10 % річних. Тоді через рік величина M — сума грошей на рахунку — становитиме

$$M = 10\,000 + \frac{10\,000 \cdot 10}{100} = 11\,000 \text{ (грн)}.$$

Через два роки ця сума складатиме

$$M = 11\,000 + \frac{11\,000 \cdot 10}{100} = 12\,100 \text{ (грн)}.$$

Аналогічно можна встановити, що через три роки $M = 13\,310$ грн, через чотири роки $M = 14\,641$ грн, через п'ять років $M = 16\,105{,}1$ грн.

У таблиці показано, як залежить сума грошей на рахунку від кількості років, які минули з моменту відкриття рахунку.

Кількість років n	1	2	3	4	5
Сума грошей на рахунку M, грн	11 000	12 100	13 310	14 641	16 105,1

Ця таблиця є математичною моделлю залежності величини M від величини n. Тут n виступає в ролі незалежної змінної, а M — залежної.

Наголосимо, що ця таблиця задає правило, за допомогою якого за значенням незалежної змінної можна *однозначно* знайти значення залежної змінної.

ПРИКЛАД 1 На рисунку 23.1 зображено графік залежності температури повітря від часу доби.

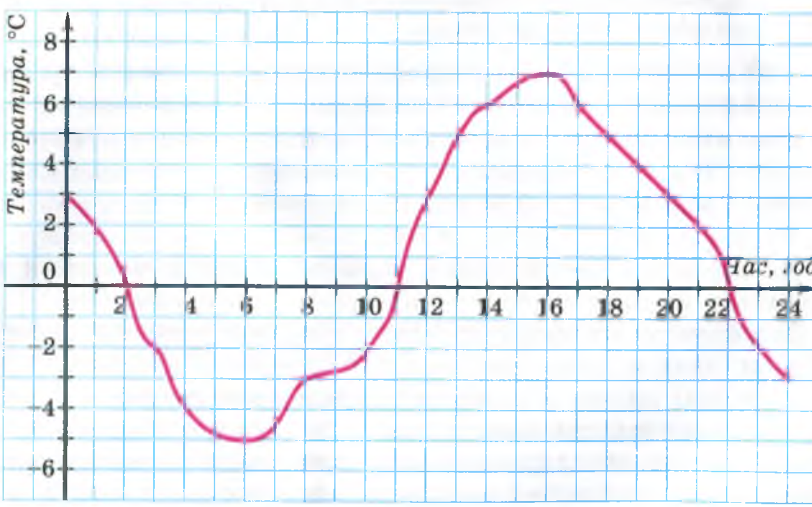


Рис. 23.1

Використовуючи цей графік, можна, вибравши довільний момент часу t, знайти відповідну температуру повітря T (у градусах Цельсія). Таким чином, величина t є незалежною змінною, а величина T — залежною.

Цей графік можна розглядати як математичну модель залежності величини T (температури) від величини t (часу).

Наголосимо, що цей графік задає правило, за допомогою якого за значенням незалежної змінної можна *однозначно* знайти значення залежної змінної.

Незважаючи на істотні відмінності моделей залежностей, описаних у цих трьох прикладах, їм усім притаманне таке: *указано правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної*. Таке правило називають **функцією**, а відповідну залежність однієї змінної від другої — **функціональною**.

Отже, правила, описані в прикладах 1, 2 і 3, є функціями.

Не кожна залежність однієї змінної величини від другої є функціональною. Наприклад, нехай довжина маршруту автобуса дорівнює 15 км. Вартість проїзду визначається за такою таблицею:

Вартість проїзду, грн	2	4	6
Довжина шляху, який проїжджає пасажир, км	до 5	від 5 до 10	від 10 до 15

Зрозуміло, що змінні величини «вартість проїзду» й «довжина шляху, який проїжджає пасажир», пов'язані між собою. Проте якщо вважати вартість проїзду незалежною змінною, то описана залежність не є функціональною. Справді, якщо пасажир заплатив 2 грн, то не можна *однозначно* встановити довжину шляху, який він проїхав.

Якщо в прикладі 3 температуру T вважати незалежною змінною, то не завжди можна за значенням величини T *однозначно* знайти значення величини t. Тому наведена залежність часу t від температури T не є функціональною.

Роз'яснити, що таке функція, можна за допомогою поняття множини.

Нехай X — множина значень незалежної змінної, Y — множина значень залежної змінної. Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y.

Іншими словами, *функція — це правило, яке кожному елементу множини X ставить у відповідність єдиний елемент множини Y.*

Наприклад, нехай X — множина учнів вашого класу, Y — множина, елементами якої є дні тижня. Кожному учню поставимо у відповідність день тижня, у який він народився. Описане правило дає змогу за кожним елементом множини X знайти єдиний елемент множини Y. Отже, це правило є функцією.

Зазвичай незалежну змінну позначають буквою x, залежну — буквою y, функцію (правило) — буквою f. Якщо змінна y функціонально залежить від змінної x, то цей факт позначають так: $y = f(x)$ (читають: «ігрек дорівнює еф від ікс»).

Незалежну змінну ще називають **аргументом функції.**

Усі значення, яких набуває аргумент, утворюють множину, яку називають **областю визначення функції.** Так, у прикладі 1 областю визначення функції є множина додатних чисел; у прикладі 2 — множина {1, 2, 3, 4, 5}; у прикладі 3 — множина невід'ємних чисел, що не перевищують 24.

Для функції f кожному значенню аргументу x відповідає деяке значення залежної змінної y. Значення залежної змінної ще називають **значенням функції.** Значення функції f, яке відповідає значенню x_0 аргументу x, позначають $f(x_0)$. Наприклад, $f(7)$ — це значення функції при $x = 7$.

Так, якщо кожне з правил, описаних у прикладах 1, 2 і 3, позначити буквою f, то в першому прикладі $f(2) = 8$, у другому прикладі $f(2) = 12\ 100$, у третьому прикладі $f(2) = 0$. Узагалі, запис $f(a) = b$ означає, що значенню a аргументу відповідає значення b функції.

Усі значення, яких набуває залежна змінна, утворюють множину, яку називають **областю значень функції.**

У прикладі 1 область значень функції — це множина додатних чисел; у прикладі 2 — множина {110 000, 121 000, 133 100, 146 410, 161 051}; у прикладі 3 — множина всіх чисел, які не менші від –5 й не більші за 7.

?

1. Яке правило називають функцією?
2. Яку залежність однієї змінної від другої називають функціональною?
3. Як читають запис $y = f(x)$?
4. Що називають аргументом функції?
5. Що таке область визначення функції?
6. Що називають значенням функції?
7. Що означає запис $f(a) = b$?
8. Що таке область значень функції?

ВПРАВИ

23.1.° Чи пов'язані між собою периметр рівностороннього трикутника та його сторона? Якщо сторона трикутника дорівнює a, а периметр — P, то якою формулою задається залежність змінної P від змінної a? Чи є ця залежність функціональною?

23.2.° Чи пов'язані між собою площа квадрата та його сторона? Якщо сторона квадрата дорівнює a, а площа — S, то якою формулою задається залежність змінної S від змінної a? Чи є ця залежність функціональною?

23.3.° Автомобіль рухається зі швидкістю 60 км/год. Як залежить довжина пройденого ним шляху s від часу руху t? Задайте цю залежність формулою. Чи є ця залежність функціональною? У разі ствердної відповіді назвіть аргумент відповідної функції.

23.4.° У цистерні було 300 л води. Через відкритий кран щохвилини із цистерни виливається 2 л води. Задайте формулою залежність об'єму V води в цистерні від часу t, протягом якого з неї виливається вода. Чи є правило, за допомогою якого за значенням змінної t можна знайти значення змінної V, функцією? У разі ствердної відповіді вкажіть область визначення та область значень цієї функції.

23.5.° Нехай a — довжина ребра куба, V — його об'єм. Задайте формулою залежність змінної V від змінної a. Чи є ця залежність функціональною?

23.6.° Автомобіль проїхав 120 км зі швидкістю v. Якою формулою задається залежність часу t, витраченого на поїздку, від швидкості v автомобіля? Чи є ця залежність функціональною? У разі ствердної відповіді вкажіть, що є аргументом відповідної функції.

23.7.° Нехай градусні міри двох суміжних кутів дорівнюють α і β. Задайте формулою залежність β від α. Чи є ця залежність функціональною? У разі ствердної відповіді вкажіть, що є аргументом відповідної функції, її область визначення та область значень.

23.8.° У вашому класі було проведено контрольну роботу з математики.

1) Кожному учню поставили у відповідність оцінку, яку він отримав.
2) Кожній оцінці поставили у відповідність учня, який її отримав.

Яке із цих правил є функцією?

23.9.° Розглянемо правило, згідно з яким кожному натуральному числу відповідає протилежне йому число. Чи є таке правило функцією?

23.10.° Кожному невід'ємному числу поставили у відповідність саме це число, а кожному від'ємному числу — число, йому протилежне. Чи є таке правило функцією?

23.11.° Розглянемо правило, за яким кожному натуральному числу ставиться у відповідність перша ліворуч цифра його десяткового запису. Чи є це правило функцією? У разі ствердної відповіді вкажіть її область значень.

23.12.° Кожному раціональному числу, відмінному від нуля, відповідає обернене до нього число. Чи є таке правило функцією?

23.13.° На рисунку 23.2 зображено графік зміни температури розчину під час хімічного досліду.

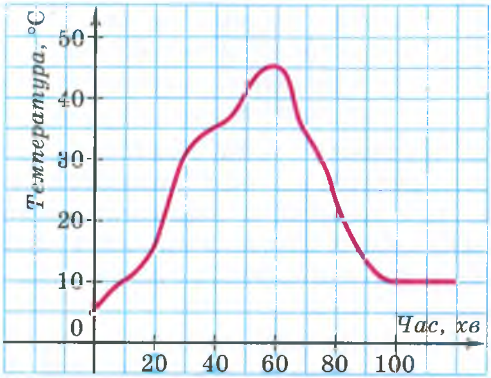


Рис. 23.2

1) Якою була початкова температура розчину?
2) Якою була температура розчину через 30 хв після початку досліду; через півтори години?
3) Якою була найвища температура розчину та через скільки хвилин після початку досліду?
4) Через скільки хвилин після початку досліду температура розчину була 35 °C?

Складіть за графіком таблицю зміни температури розчину через кожні 10 хв протягом перших двох годин після початку досліду.

23.14.° На рисунку 23.3 зображено графік зміни температури повітря протягом доби. Користуючись цим графіком, визначте:
1) якою була температура повітря о 2 год; о 8 год; о 12 год; о 16 год; о 22 год;
2) о котрій годині температура повітря була −3 °C; −4 °C; 0 °C;
3) якою була найнижча температура та о котрій годині;
4) якою була найвища температура та о котрій годині;
5) протягом якого проміжку часу температура повітря була нижчою від 0 °C; вищою за 0 °C;
6) протягом якого проміжку часу температура повітря підвищувалася; знижувалася.

Складіть за графіком таблицю зміни температури повітря протягом доби через кожні 2 год.

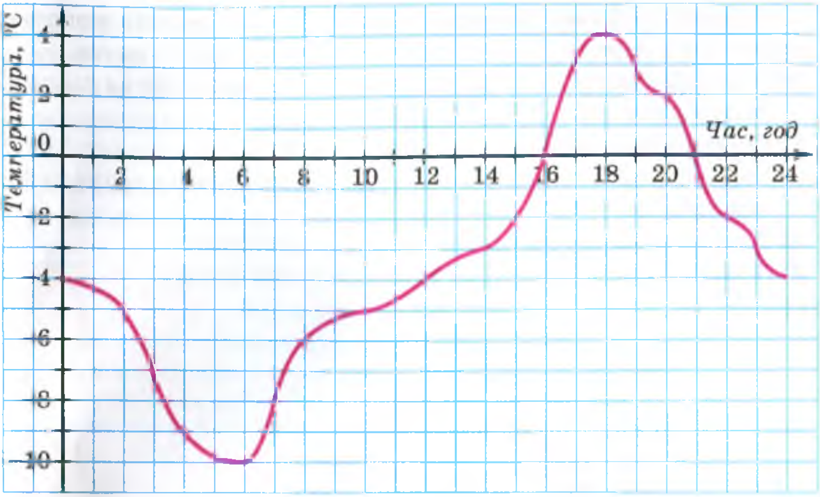


Рис. 23.3

23.15.° Мотоцикліст виїхав з дому й через деякий час повернувся. На рисунку 23.4 зображено графік зміни відстані від мотоцикліста до дому залежно від часу (*графік руху мотоцикліста*). Користуючись графіком, визначте:

1) яку відстань проїхав мотоцикліст за першу годину руху;
2) на якій відстані від місця початку руху мотоцикліст зупинився відпочити першого разу; другого разу;
3) скільки часу тривала перша зупинка; друга зупинка;
4) на якій відстані від дому був мотоцикліст через 5 год після початку руху;
5) з якою швидкістю рухався мотоцикліст останні півгодини.

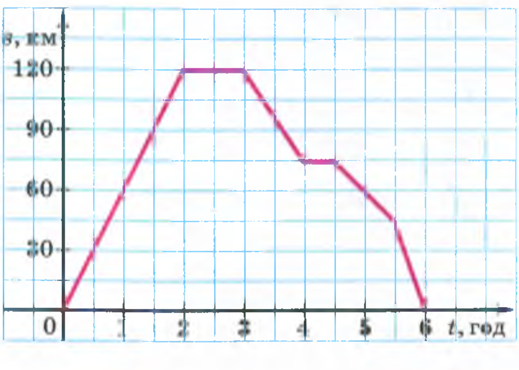


Рис. 23.4

23.16. Турист вийшов з базового табору й через деякий час повернувся. На рисунку 23.5 зображено графік руху туриста.

1) На якій відстані від табору був турист через 10 год після початку руху?
2) Скільки часу він витратив на зупинку?
3) Через скільки годин після виходу турист був на відстані 8 км від табору?
4) З якою швидкістю йшов турист до зупинки?
5) З якою швидкістю йшов турист останні 2 год?

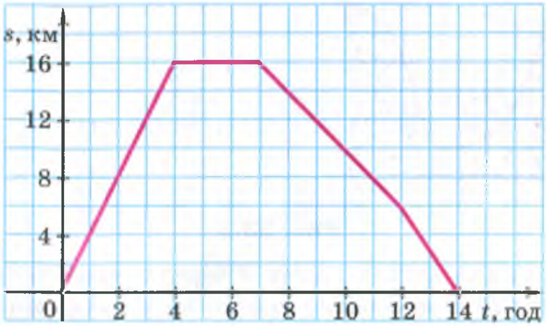


Рис. 23.5

23.17. Кожному числу поставили у відповідність відстань від точки, що зображає це число на координатній прямій, до початку відліку. Поясніть, чому описане правило є функцією. Знайдіть її область визначення та область значень. Позначивши цю функцію буквою f, знайдіть $f(2)$, $f(-5)$, $f(0)$.

23.18. Розглянемо функцію g, задану таким правилом: кожному одноцифровому натуральному числу поставили у відповідність останню цифру його квадрата.

1) Запишіть, чому дорівнює $g(7)$; $g(3)$; $g(1)$; $g(9)$; $g(4)$.
2) Знайдіть область визначення та область значень функції.

23.19. Розглянемо правило, за яким числу 0 ставляться у відповідність усі парні числа, а числу 1 — усі непарні числа. Чи є це правило функцією?

23.20. Розглянемо правило, за яким кожному натуральному числу ставиться у відповідність сума цифр його десяткового запису (одноцифровому числу відповідає саме це число). Чи є це правило функцією? У разі ствердної відповіді вкажіть її область значень.

23.21. Придумайте функцію f, областю визначення якої є множина натуральних чисел, а областю значень — множина $\{0, 1, 2\}$. Знайдіть $f(7)$; $f(15)$; $f(101)$.

23.22.° Розглянемо правило, за яким кожному натуральному числу поставили у відповідність остачу при діленні його на 7. Чи є це правило функцією? У разі ствердної відповіді знайдіть область визначення та область значень цієї функції.

23.23.° У таблиці наведено виміри температури повітря протягом доби через кожну годину[1]. Побудуйте за цими даними графік зміни температури.

Час доби, год	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Температура, °C	2	3	1	0	−2	−3	−5	−4	−2	0	1	4	7
Час доби, год	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
Температура, °C	8	9	7	5	4	3	2	1	0	−2	−3	−6	

Користуючись графіком, знайдіть, протягом якого часу температура підвищувалася та протягом якого часу знижувалася.

23.24.° Велосипедист виїхав з дому на прогулянку. Спочатку він їхав 2 год зі швидкістю 12 км/год, потім відпочив годину й повернувся додому зі швидкістю 8 км/год. Побудуйте графік руху велосипедиста.

23.25.° У таблиці наведено дані про рівень води в річці порівняно з ординаром (середнім рівнем води) з 1 по 15 травня.

Дата	Рівень води, см	Дата	Рівень води, см	Дата	Рівень води, см
1	8	6	20	11	4
2	10	7	18	12	0
3	12	8	14	13	−3
4	15	9	10	14	−5
5	16	10	8	15	− 6

Побудуйте графік зміни рівня води в річці за вказаний час.

[1] У наведеній таблиці значення аргументу в кожному наступному стовпці на 1 більше за значення аргументу в попередньому стовпці. У такому випадку говорять, що таблицю складено з *кроком* 1.

23.26.° На початку нагрівання температура води була 6 °С. Під час нагрівання температура води підвищувалася щохвилини на 2 °С.

1) Запишіть формулу залежності температури T води від часу t її нагрівання.
2) Складіть таблицю значень функції $T(t)$ за час нагрівання від 0 хв до 10 хв із кроком 1 хв.
3) Побудуйте графік зміни температури води залежно від зміни часу нагрівання протягом перших 10 хв.

23.27.° Прямолінійна дорога проходить повз туристичний табір. Турист, перебуваючи на відстані 5 км від табору, почав рухатися цією дорогою зі швидкістю 4 км/год, віддаляючись від табору.

1) Знайдіть відстань s від табору, на якій перебуватиме турист через t год після початку руху.
2) Заповніть таблицю значень s:

t, год	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
s, км									

3) Користуючись заповненою таблицею, побудуйте графік залежності відстані до табору від часу руху.

23.28.° В економічних дослідженнях часто використовують криву попиту. *Крива попиту* — це графік, який показує, як залежить попит на товар від його ціни. У таблиці наведено залежність попиту на картоплю в деякому регіоні (у тисячах тонн) від ціни 1 кг картоплі.

Ціна 1 кг картоплі, грн	3	4	5	6	7	8
Попит, тис. т	15	12	10	6	4	1

Подайте дані, наведені в таблиці, графічно. Сполучивши отримані точки відрізками, побудуйте криву попиту на картоплю.

23.29.° У міській раді Сонячного міста представлено дві партії: партія Знайка й партія Незнайка. Усього в міській раді 20 місць. У таблиці наведено кількість депутатських місць, які отримала партія Знайка протягом 8 останніх виборів.

Вибори	1	2	3	4	5	6	7	8
Кількість депутатів від партії Знайка	14	12	10	16	18	15	14	10

1) Складіть аналогічну таблицю для партії Незнайка.

2) В одній системі координат подайте дані кожної таблиці графічно. Сполучивши отримані точки відрізками, побудуйте «криві популярності» кожної партії.

23.30.˙ У баку було 8 л гасу. Щохвилини в бак уливають 4 л.

1) Запишіть залежність кількості y літрів гасу в баку від часу x, протягом якого гас уливали в бак.
2) Накресліть графік зміни y, надаючи x значень від 0 до 10.
3) Користуючись графіком, визначте:
 а) скільки літрів гасу буде в баку через 3 хв; через 5 хв;
 б) через скільки хвилин у баку буде 40 л гасу.
4) Через скільки хвилин бак буде наповнено, якщо його місткість — 80 л?

23.31.˙ На складі було 100 т вугілля. Щодня на склад привозили по 20 т вугілля.

1) Виразіть формулою залежність кількості m вугілля на складі від часу t.
2) Накресліть графік цієї залежності.

23.32.˙˙ Який із наведених графіків (рис. 23.6) ілюструє залежність змінної y від змінної x, подану нижче:

1) вартість проїзду в автобусі зростає на 1 грн через кожні 10 км шляху (x км — довжина шляху, y грн — вартість проїзду);
2) металеву пружину розтягнули й відпустили (x с — час, y см — довжина пружини);
3) вартість полуниці на ринку протягом травня — червня (x днів — час, y грн — вартість)?

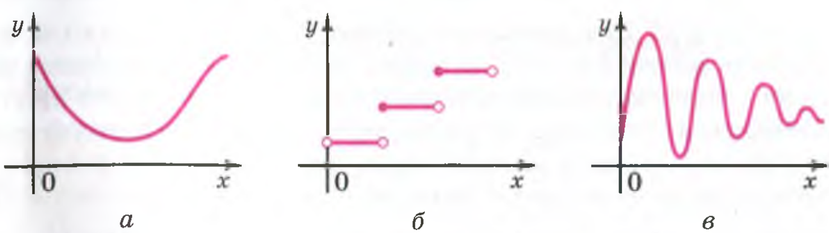


Рис. 23.6

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

23.33. Розв'яжіть рівняння:

1) $-1{,}2x + 7{,}2 = 0$;
2) $-\frac{1}{3}x - 6 = 0$;
3) $3x + 1{,}5 = -2{,}5$;
4) $6 - 0{,}5x = 16$.

23.34. Розкладіть на множники вираз:

1) $20z^2+3xy-15xz-4yz$; 2) $0{,}027a^{12}+b^9$.

23.35. Знайдіть таке найменше натуральне значення a, при якому вираз $x^2-4x+2a$ набуває додатних значень при будь-якому значенні x.

23.36. (*Задача з «Теоретичного й практичного курсу чистої математики» Ю. Войтяховського*[1].) Капітан на запитання, скільки має у своїй команді людей, відповів, що $\frac{2}{5}$ його команди — у караулі, $\frac{2}{7}$ — на роботі, $\frac{1}{4}$ — у лазареті та 27 осіб у наявності. Запитання: скільки людей було в його команді?

24. Способи задання функції

Приклади, розглянуті в попередньому пункті, показують, що функцію можна задавати різними способами.

Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення та правило, за допомогою якого можна за кожним значенням незалежної змінної знайти значення залежної змінної.

Вам не раз доводилося формулювати різні правила. Оскільки функція — це правило, то його можна виразити словами. Такий спосіб задання функції називають **заданням функції описом**.

Наведемо кілька прикладів.

ПРИКЛАД 1 Нехай незалежна змінна набуває будь-яких значень. Значення залежної змінної знаходимо за таким правилом: кожне значення незалежної змінної множимо на 2 і від отриманого добутку віднімаємо 1. Очевидно, що такий спосіб дає змогу однозначно знайти значення залежної змінної. Отже, ми задали деяку функцію f, областю визначення якої є множина всіх чисел. Наприклад, $f(2)=$ $=2\cdot2-1=3$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot2-1=0$; $f(-13{,}4)=(-13{,}4)\cdot2-1=-27{,}8$ і т. п.

ПРИКЛАД 2 Нехай незалежна змінна набуває будь-яких значень, крім 0. Відповідні значення залежної і незалежної змінних — взаємно обернені числа. Тут задано функцію f, область визначення

[1] Войтяховський Юхим (1750–1812) — російський математик-педагог. Його «Теоретичний і практичний курс чистої математики» (1787–1790) витримав багато видань і протягом 40 років був одним із найпоширеніших посібників для шкіл того часу.

якої — множина всіх чисел, крім 0. Наприклад, $f(1)=1$; $f(3)=\frac{1}{3}$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$ і т. п.

Розглянемо найпоширеніший спосіб задання функції: задання функції **за допомогою формули**.

Якщо в прикладі 1 незалежну змінну позначити буквою x, а залежну — буквою y, указати область визначення — множину всіх чисел, то формула $y=2x-1$ задає вищеописану функцію.

Зрозуміло, що функцію з прикладу 2 задає формула $y=\frac{1}{x}$, де x — будь-яке число, крім 0.

Якщо функцію задано формулою, права частина якої — цілий вираз, і при цьому не вказано область визначення, то вважатимемо, що областю визначення такої функції є множина всіх чисел. Наприклад, формули $y=x^2$, $y=\frac{x-3}{5}$, $y=x^2-x+2$ задають функції, областю визначення кожної з яких є множина всіх чисел.

Якщо, наприклад, функцію задано формулою $y=x^3$, то просто говорять, що задано функцію $y=x^3$.

Якщо хочуть наголосити, що формула, наприклад $y=5-\frac{x}{3}$, задає деяку функцію f, то пишуть: $f(x)=5-\frac{x}{3}$.

Якщо хочуть наголосити, що, наприклад, формула $s = 10t + 2$ задає функцію з аргументом t і залежною змінною s, то пишуть: $s(t) = 10t + 2$.

Розглянемо функцію $f(x)=x-2x^2$, областю визначення якої є множина $\left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 3\right\}$. Маємо:

$$f(-1)=-3;\ f(0)=0;\ f\left(\frac{1}{2}\right)=0;\ f(1)=-1;\ f(3)=-15.$$

Отримані результати занесемо до таблиці:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
$f(x)$	-3	0	0	-1	-15

Множина всіх чисел, записаних у першому рядку цієї таблиці, є областю визначення даної функції f. Таблиця дає змогу за вказаним значенням аргументу однозначно знайти відповідне значення функції. Отже, ця таблиця — ще один спосіб задання функції f. Його називають **табличним**.

Цей спосіб зручно використовувати в тих випадках, коли область визначення функції являє собою множину, що складається з кількох чисел.

ПРИКЛАД 3 Функцію задано формулою $y = 5x + 2$. Знайдіть значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 12.

Розв'язання. Підставивши у формулу $y = 5x + 2$ замість y число 12, отримуємо рівняння $5x + 2 = 12$, звідки $x = 2$.

Відповідь: 2.

ПРИКЛАД 4 Функцію f задано таким чином: $f(x) = x + 7$, якщо $x \leqslant -1$, і $f(x) = 2$, якщо $x > -1$. Знайдіть значення функції f, які відповідають аргументам: 1) -2; 2) -1; 3) 1.

Розв'язання. 1) Оскільки $-2 \leqslant -1$, то значення функції в точці $x = -2$ обчислюється за формулою $f(x) = x + 7$. Отже, $f(-2) = -2 + 7 = 5$.

2) Оскільки $-1 \leqslant -1$, то $f(-1) = -1 + 7 = 6$.

3) Оскільки $1 > -1$, то $f(1) = 2$.

Для задання даної функції використовують форму запису за допомогою фігурної дужки:

$$f(x) = \begin{cases} x + 7, & \text{якщо } x \leqslant -1, \\ 2, & \text{якщо } x > -1. \end{cases}$$

ПРИКЛАД 5 Функції задано формулами $y = 4x + 1$ і $y = 2x - 7$. При якому значенні аргументу ці функції набувають рівних значень?

Розв'язання. Щоб знайти шукане значення аргументу, розв'яжемо рівняння $4x + 1 = 2x - 7$. Маємо:

$$4x - 2x = -7 - 1;$$

$$x = -4.$$

Відповідь: при $x = -4$.

?

1. Що треба вказати, щоби функція вважалася заданою?
2. Які способи задання функції ви знаєте?

ВПРАВИ

24.1.° Прочитайте запис, укажіть аргумент функції та залежну змінну:

1) $s(t) = 70t$;
2) $y(x) = -2x + 4$;
3) $V(a) = a^3$;
4) $f(x) = x^2 - 4$.

24.2.° Функцію задано формулою $y = 10x + 1$. Знайдіть значення y, якщо:

1) $x = -1$; 2) $x = 3$; 3) $x = -\frac{1}{5}$; 4) $x = 7$.

24.3.° Функцію задано формулою $y = x^2 - 3$. Знайдіть значення y, якщо:

1) $x = 5$; 2) $x = -4$; 3) $x = 0{,}1$; 4) $x = 0$.

24.4.° Функцію задано формулою $y = -\frac{1}{6}x + 2$. Знайдіть:

1) значення функції для значень аргументу 12; 6; −6; 0; 1; 2; −4; −3;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 4; 3; 0; −1.

24.5.° Функцію задано формулою $f(x) = 3 - 4x$. Чи є правильною рівність:

1) $f(-2) = -5$; 2) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$; 3) $f(0) = -1$; 4) $f(-1) = 7$?

24.6.° Функцію задано формулою $f(x) = 2x - 1$.

1) Знайдіть $f(3)$; $f(-4)$; $f(0)$; $f(-0{,}5)$; $f(3{,}2)$.
2) Знайдіть значення x, при якому $f(x) = 7$; $f(x) = -9$; $f(x) = 0$; $f(x) = -2{,}4$.
3) Чи є правильною рівність: $f(5) = 9$; $f(0{,}3) = 0{,}4$; $f(-3) = -7$?

24.7.° Функцію задано формулою $y = x(x + 8)$. Заповніть таблицю:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

24.8.° Функцію задано формулою $y = -\frac{2}{3}x$. Заповніть таблицю:

x	−9	−6	−3	−2	−1	0	1	2	3	6
y										

24.9.° Кожному числу з множини натуральних чисел, які більші за 10 і менші від 20, поставили у відповідність остачу при діленні цього числа на 6.

1) Яким способом задано цю функцію?
2) Яка область значень цієї функції?
3) Задайте цю функцію табличним способом.

24.10.° Область визначення деякої функції — множина одноцифрових натуральних чисел, а значення функції у 2 рази більші за відповідні значення аргументу.

1) Яким способом задано цю функцію?
2) Задайте цю функцію формулою та табличним способом.

24.11.° Задайте формулою функцію, якщо значення функції:
1) протилежні відповідним значенням аргументу;
2) дорівнюють потроєним відповідним значенням аргументу;
3) на 4 більші за квадрати відповідних значень аргументу.

24.12.° Задайте формулою функцію, якщо значення функції:
1) на 3 менші від відповідних значень аргументу;
2) на 5 більші за подвоєні відповідні значення аргументу.

24.13.° Складіть із кроком 0,5 таблицю значень функції, заданої формулою $y = x^2 + 2x$, де $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

24.14.° Складіть із кроком 1 таблицю значень функції, заданої формулою $y = x^3 - 1$, де $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

24.15.° Функцію задано формулою $y = 0,2x - 5$. Заповніть таблицю відповідних значень x і y:

x	4		−1,5		−3
y		2		−1,4	

24.16.° Дано функцію $y = 8 - \frac{1}{7}x$. Заповніть таблицю:

x	14		−1,4	
y		0		9

24.17.° Дано функції $g(x) = \frac{20}{x} - 3$ і $h(x) = 8 - 3x$. Порівняйте:

1) $g(1)$ і $h(1)$; 2) $g(5)$ і $h(2)$; 3) $g(-2)$ і $h(6)$.

24.18.° Дано функцію $f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 3, \\ 6, & \text{якщо } x \geqslant 3. \end{cases}$

Знайдіть: 1) $f(-3)$; 2) $f(-2)$; 3) $f(2)$; 4) $f(3)$; 5) $f(2,9)$; 6) $f(8,1)$.

24.19.° Дано функцію $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } -3 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x - 1, & \text{якщо } 1 < x < 2, \\ x^2 - 2, & \text{якщо } 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

Складіть таблицю значень функції для цілих значень аргументу.

24.20.° Знайдіть значення функції $y = \begin{cases} -2x + 4, & \text{якщо } x > 0, \\ 0,1x - 5, & \text{якщо } x \leqslant 0, \end{cases}$ яке відповідає аргументу:

1) 3; 2) 0,001; 3) 0; 4) −8.

24.21.° Функцію задано за допомогою таблиці:

x	2	4	6	8
y	5	7	9	11

1) Які числа складають область визначення цієї функції?
2) Задайте цю функцію описом і формулою.

24.22.° Функцію задано за допомогою таблиці:

x	1	3	5	7	9
y	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5

1) Які числа складають область визначення цієї функції?
2) Задайте цю функцію описом і формулою.

24.23.° Від квадратного аркуша картону розміром 40 × 40 см відрізали смужку завширшки x см (рис. 24.1). Запишіть формулу, яка задає функціональну залежність площі S смуги картону, що залишилася, від x. Знайдіть область визначення цієї функції.

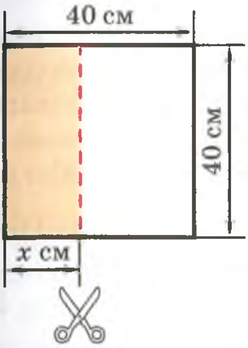


Рис. 24.1

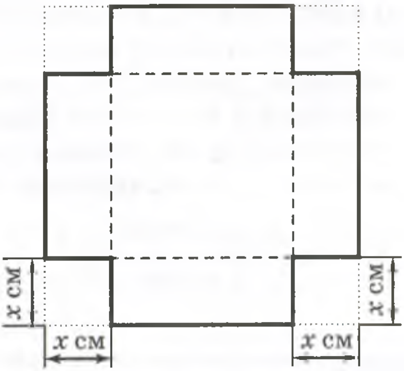


Рис. 24.2

24.24.° У кутах квадратного металевого листа розміром 1 × 1 м вирізали квадрати зі стороною x см (рис. 24.2) і з отриманої заготовки зігнули коробку у формі прямокутного паралелепіпеда. Запишіть формулу, яка задає функціональну залежність об'єму V коробки від x. Знайдіть область визначення цієї функції.

24.25.° Дано функцію $f(x) = x^3$. Задайте формулою функцію, усі значення якої при тих самих значеннях аргументу:
1) на 7 більші за значення функції f;
2) дорівнюють кубу значень функції f.

24.26.° Функції задано формулами $y = x^2 - 8x$ і $y = 4 - 8x$. При яких значеннях аргументу ці функції набувають рівних значень?

24.27.° Функцію задано формулою $f(x) = 3x + 5$. При якому значенні x значення функції дорівнює значенню аргументу?

24.28.° Функцію задано формулою $y = x^2 + 2x - 1$. При яких значеннях x значення функції дорівнює подвоєному значенню аргументу?

24.29.° Придумайте яку-небудь функцію f, областю визначення якої є множина натуральних чисел, а областю значень — множина $\{0, 1, 2, 3\}$. Знайдіть $f(9)$; $f(18)$; $f(39)$; $f(1000)$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

24.30. Яке з даних рівнянь: а) має один корінь; б) має два корені; в) має безліч коренів; г) не має жодного кореня:

1) $3{,}4(1 + 3x) - 1{,}2 = 2(1{,}1 + 5{,}1x)$;
2) $|2x - 1| = 17{,}3$;
3) $3(|x - 1| - 6) + 21 = 0$;
4) $0{,}2(7 - 2x) = 2{,}3 - 0{,}3(x - 6)$?

24.31. Дано три числа, з яких кожне наступне на 10 більше за попереднє. Знайдіть ці числа, якщо добуток найбільшого та середнього з них на 320 більший за добуток найбільшого та найменшого із цих чисел.

24.32. Доведіть, що коли $a + c = 2b$, то $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

24.33. Відомо, що $x + y = \frac{a^2}{4}$, $y + z = -a$, $x + z = 1$. Доведіть, що вираз $x + y + z$ набуває тільки невід'ємних значень.

25. Графік функції

Розглянемо функцію $y = x^2 - 4x$, де $-1 \leqslant x \leqslant 4$, тобто областю визначення цієї функції є множина всіх чисел від -1 до 4 включно. Складемо таблицю значень цієї функції при цілих значеннях аргументу:

x	-1	0	1	2	3	4
y	5	0	-3	-4	-3	0

Розглянемо пари чисел, записаних у кожному стовпці цієї таблиці, як координати (x; y) точок координатної площини. При цьому значення аргументу є абсцисою точки, а відповідне значення функції — її ординатою.

Ці точки зображено на рисунку 25.1.

Очевидно, що, надаючи аргументу інших значень (відмінних від цілих) з області визначення та знаходячи відповідні значення функції, можна позначити все більше й більше точок на координатній площині (рис. 25.2, 25,3).

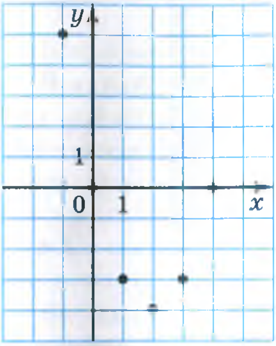


Рис. 25.1

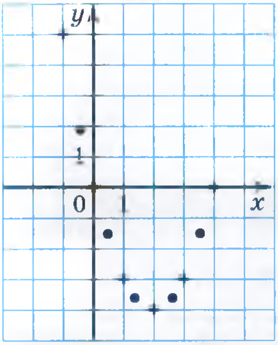


Рис. 25.2

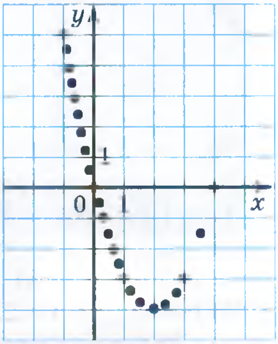


Рис. 25.3

Множина точок координатної площини, які можна позначити, діючи в такий спосіб, утворює **графік функції.**

Означення. Графіком функції f **називають геометричну фігуру, що складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції** f**.**

Очевидно, що реалізувати на практиці описаний метод побудови графіка функції $y = x^2 - 4x$ неможливо. Адже точок, які треба було б позначити, безліч. Проте, якщо позначити досить багато точок, а потім сполучити їх плавною лінією, то отримана крива (рис. 25.4) буде тим менше відрізнятися від шуканого графіка, чим більше точок ми позначимо.

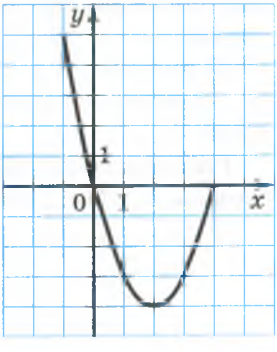


Рис. 25.4

Оскільки описаний метод побудови графіка функції передбачає значну технічну роботу, то істотну її частину може взяти на себе комп'ютер. Сьогодні існує багато програм, призначених для побудови графіків. Так, на екрані монітора (рис. 25.5) зображено графік функції $y = x^3$, де $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

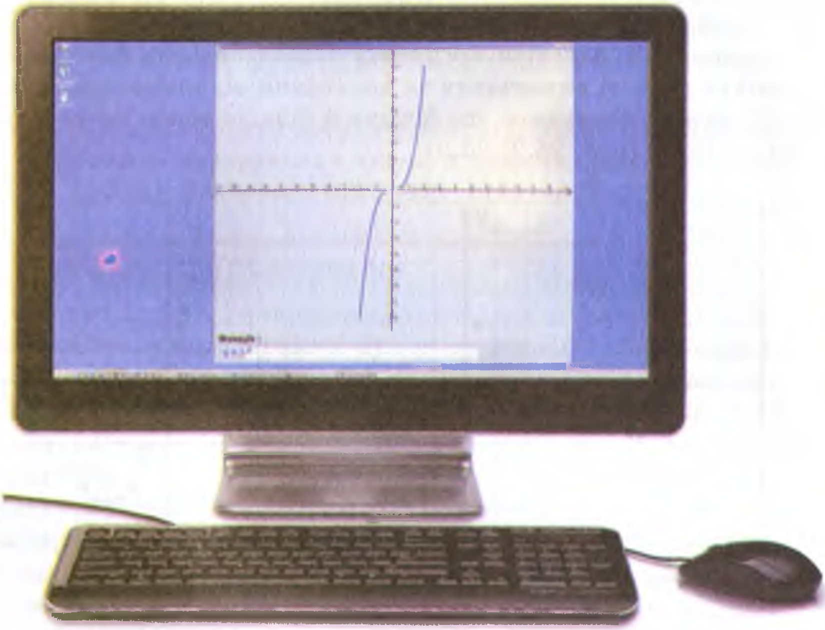


Рис. 25.5

Наголосимо, що *коли якась фігура є графіком функції f, то виконуються дві умови*:

1) *якщо x_0 — деяке значення аргументу, а $f(x_0)$ — відповідне значення функції, то точка з координатами $(x_0; f(x_0))$ обов'язково належить графіку*;

2) *якщо $(x_0; y_0)$ — координати довільної точки графіка, то x_0 і y_0 — відповідні значення незалежної і залежної змінних функції f, тобто $y_0 = f(x_0)$.*

Графіком функції не обов'язково є лінія. На рисунку 25.6 зображено графік функції, заданої таблицею:

x	1	−2
y	3	0

Він складається з двох точок.

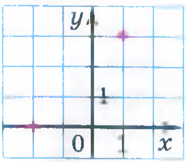


Рис. 25.6

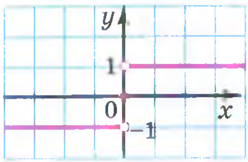


Рис. 25.7

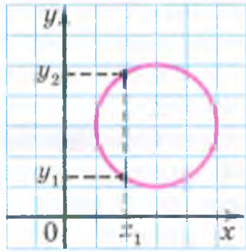


Рис. 25.8

Розглянемо приклад побудови графіка функції, заданої описом.

Нехай область визначення даної функції — множина всіх чисел. Для кожного додатного аргументу значення функції дорівнює 1; для кожного від'ємного аргументу значення функції дорівнює −1; якщо аргумент дорівнює нулю, то значення функції дорівнює нулю. Графік цієї функції зображено на рисунку 25.7. Він складається з трьох частин: точки O (0; 0) і двох променів, у кожного з яких «виколото» початок.

Не будь-яка фігура, зображена на координатній площині, може слугувати графіком функції. Наприклад, коло не може бути графіком функції, оскільки за заданим значенням змінної x не завжди однозначно знаходиться значення змінної y (рис. 25.8).

Фігура, зображена на координатній площині, може бути графіком функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має із цією фігурою не більше ніж одну спільну точку.

Нехай X — множина абсцис точок такої фігури. Можна говорити, що ця фігура задає функцію з областю визначення X. Такий спосіб задання функції називають **графічним**.

Абсциси й ординати всіх точок цієї фігури утворюють відповідно область визначення та область значень функції.

Якщо функцію f задано графічно, то значення функції за заданим значенням x_0 аргументу можна знайти за таким правилом: через точку (x_0; 0) провести пряму, перпендикулярну до осі абсцис, а потім знайти ординату точки перетину цієї прямої з графіком. Знайдена ордината дорівнює $f(x_0)$ (рис. 25.9).

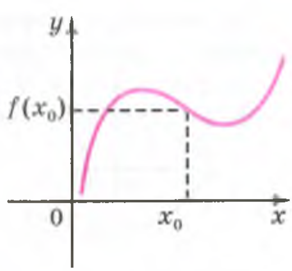


Рис. 25.9

Рисунок, схема, фотографія якогось об'єкта або процесу дають про нього наочне уявлення. Ту саму роль відіграє для функції її графік. Так, вивчаючи графік, зображений на рисунку 25.10, можна, наприклад, знайти:

1) область визначення функції: множина таких чисел x, що $-3 \leqslant x \leqslant 6$;

2) область значень функції: множина таких чисел y, що $-2 \leqslant y \leqslant 4$;

3) значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю: $x = -3$ або $x = 1$;

4) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень: множина таких чисел x, що $1 < x \leqslant 6$;

5) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень: множина таких чисел x, що $-3 < x < 1$.

Після вивчення матеріалу цього пункту стає зрозумілим, чому в техніці, медицині, економіці та багатьох інших сферах людської діяльності так широко використовують комп'ютерні програми, які дозволяють будувати графіки різноманітних функціональних залежностей.

ПРИКЛАД 1 Чи належить графіку функції, заданої формулою $y = x - 6$, точка: 1) A (8; 2); 2) B (2; 4)?

Розв'язання. Щоб установити, чи належить точка графіку функції, знайдемо значення функції, коли значення аргументу дорівнює абсцисі даної точки. Якщо значення функції дорівнюватиме ординаті даної точки, то точка належить графіку, а якщо ні, то не належить.

1) При $x = 8$ маємо: $y = 8 - 6 = 2$. Отже, точка A належить графіку даної функції.

2) При $x = 2$ маємо: $y = 2 - 6 = -4 \neq 4$. Отже, точка B не належить графіку функції $y = x - 6$. ●

ПРИКЛАД 2 Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = x^2 - 4$ з осями координат.

Розв'язання. Точка належить осі абсцис тоді й тільки тоді, коли її ордината дорівнює нулю. Тому для знаходження координат точки

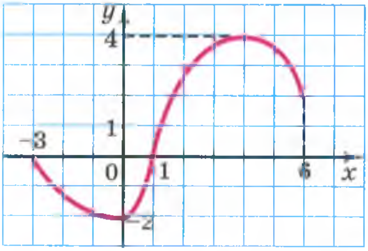


Рис. 25.10

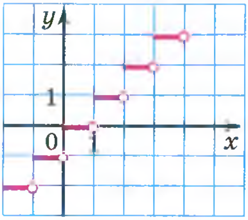


Рис. 25.11

перетину графіка даної функції з віссю абсцис треба розв'язати рівняння $x^2 - 4 = 0$. Маємо: $x = 2$ або $x = -2$. Отже, графік даної функції має з віссю абсцис дві спільні точки: $A\ (2;\ 0)$ і $B\ (-2;\ 0)$.

Точка належить осі ординат тоді й тільки тоді, коли її абсциса дорівнює нулю. Тому для знаходження координат точки перетину графіка функції з віссю ординат треба знайти значення даної функції при $x = 0$. Маємо: $y = -4$. Отже, графік функції перетинає вісь ординат у точці $C\ (0;\ -4)$. ●

ПРИКЛАД 3 Функція f, областю визначення якої є множина всіх чисел, має такі властивості:

1) $f\ (x)$ є цілим числом для будь-якого x;
2) $f\ (x) \leqslant x$ для будь-якого x;
3) $f\ (x) > x - 1$ для будь-якого x.

Знайдіть $f\ (3{,}2)$, $f\ (5)$, $f\ (-3{,}2)$. Знайдіть область значень функції f. Побудуйте її графік.

Розв'язання. Із властивостей 1–3 випливає, що функція f — це правило, за яким кожному числу x поставлено у відповідність найбільше ціле число, яке не перевищує x. Звідси, наприклад, $f\ (3{,}2) = 3$, $f\ (-3{,}2) = -4$. Зрозуміло, що $f\ (5) = 5$, $f\ (-2) = -2$, $f\ (0) = 0$. Узагалі, для будь-якого цілого числа c має місце рівність $f\ (c) = c$. Із цього випливає, що областю значень функції f є всі цілі числа.

Побудуємо графік функції f.

Нехай $0 \leqslant x < 1$, тоді $f\ (x) = 0$.

Нехай $1 \leqslant x < 2$, тоді $f\ (x) = 1$.

Нехай $2 \leqslant x < 3$, тоді $f\ (x) = 2$.

Нехай $-1 \leqslant x < 0$, тоді $f\ (x) = -1$.

Нехай $-2 \leqslant x < -1$, тоді $f\ (x) = -2$.

Узагалі, якщо $m \leqslant x < m + 1$, де m — ціле число, то $f\ (x) = m$.

Графік функції f зображено на рисунку 25.11.

Для цієї функції використовують позначення $f\ (x) = [x]$. Запис $[x]$ читають: «**ціла частина** числа x». ●

ПРИКЛАД 4 Відомо, що точка $A\ (x_0;\ y_0)$ належить графіку функції $y = f\ (x)$. Доведіть, що точка $B\ (x_0 - 5;\ y_0)$ належить графіку функції $y = f\ (x + 5)$.

Розв'язання. Оскільки точка $A\ (x_0;\ y_0)$ належить графіку функції $y = f\ (x)$, то значення цієї функції при $x = x_0$ дорівнює y_0, тобто $f\ (x_0) = y_0$.

Знайдемо значення функції $y = f\ (x + 5)$ при $x = x_0 - 5$. Маємо: $f\ (x_0 - 5 + 5) = f\ (x_0) = y_0$.

Звідси отримуємо, що точка $B\ (x_0 - 5;\ y_0)$ належить графіку функції $y = f\ (x + 5)$. ●

1. Що називають графіком функції?
2. Які дві умови мають виконуватися, щоб фігура була графіком функції f?
3. Чи може графік функції складатися з однієї точки?
4. Чи будь-яка фігура на координатній площині може слугувати графіком функції?
5. Наведіть приклад фігури, яка не може бути графіком функції.
6. Скільки спільних точок може мати з графіком функції будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис?

ВПРАВИ

25.1.° Користуючись графіком функції $y = f(x)$, зображеним на рисунку 25.12, заповніть таблицю:

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$									

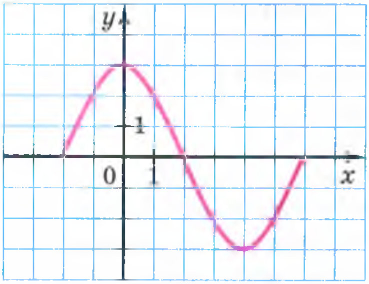


Рис. 25.12

25.2.° На рисунку 25.13 зображено графік деякої функції. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення y, якщо $x = -3{,}5;\ -1{,}5;\ 2;\ 4$;
2) значення x, яким відповідають значення $y = -3;\ -1{,}5;\ 2$;
3) значення аргументу, при яких значення функції дорівнюють нулю;
4) область визначення та область значень функції;
5) значення аргументу, при яких значення функції додатні;
6) значення аргументу, при яких значення функції від'ємні.

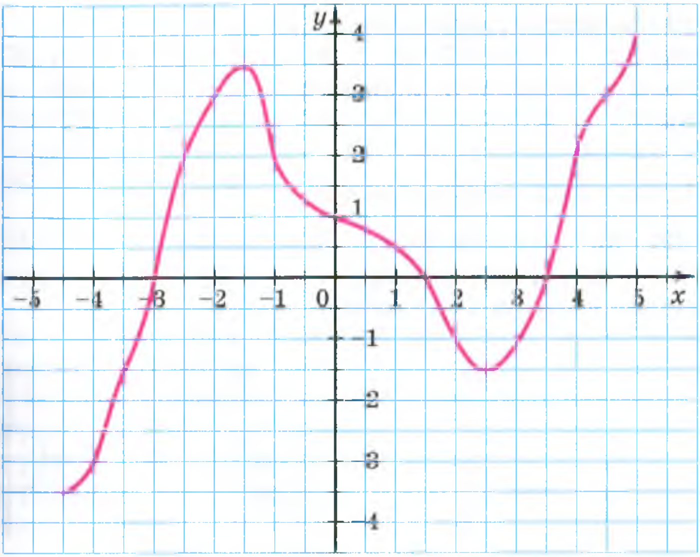


Рис. 25.13

25.3.° На рисунку 25.14 зображено графік функції $y = f(x)$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) $f(-4)$; $f(-2{,}5)$; $f(0{,}5)$; $f(2)$;
2) значення x, при яких $f(x) = 2{,}5$; $f(x) = 1$; $f(x) = 0$;
3) область визначення та область значень функції;
4) значення аргументу, при яких значення функції додатні;
5) значення аргументу, при яких значення функції від'ємні.

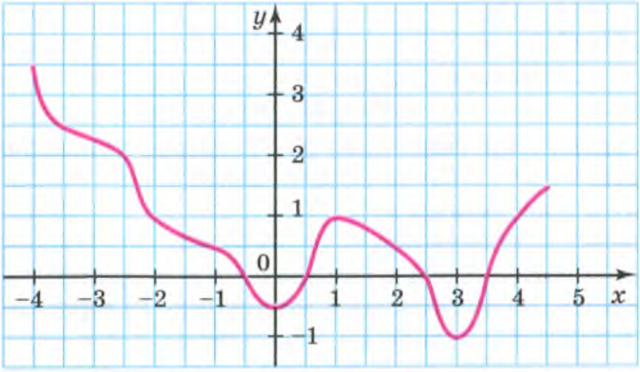


Рис. 25.14

25.4.° Чи належить графіку функції $y = x^2 + 2$ точка:

1) A (0; 2); 2) B (−1; 1); 3) C (−2; 6); 4) D (−3; −7)?

25.5.° Назвіть координати кількох точок, які належать графіку функції:

1) $y = 7x - 4$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = 4 - |x|$.

25.6.° Чи належить графіку функції $y = -\frac{x}{3}$ точка:

1) A (9; −3); 2) B (6; 2); 3) C (−1; 3); 4) D (−12; 4)?

25.7.° Які з фігур, зображених на рисунку 25.15, можуть бути графіками функцій з аргументом x?

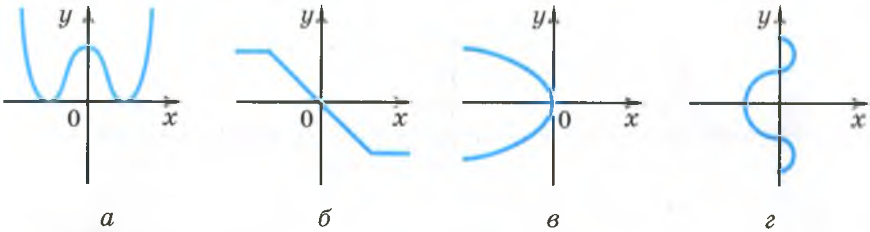


Рис. 25.15

25.8.° Які з фігур, зображених на рисунку 25.16, можуть бути графіками функцій з аргументом x?

Рис. 25.16

25.9.° На якому з рисунків (рис. 25.17) задано функціональну залежність:

1) змінної y від змінної x;
2) змінної x від змінної y;
3) змінної y від змінної x і змінної x від змінної y?

25.10.• Графіком деякої функції є ламана $ABCD$ з вершинами в точках A (−3; 6), B (−1; 2), C (3; −2), D (9; 0).

1) Побудуйте графік даної функції.
2) Знайдіть значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: −2; 0; 2; 6.

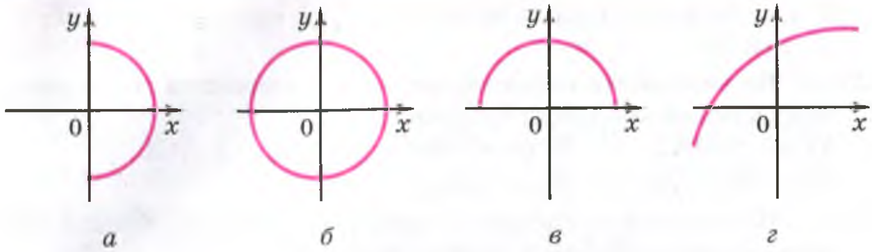


Рис. 25.17

3) Знайдіть значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 1; −1; 0.

25.11.• Чи може ламана ABC бути графіком деякої функції, якщо:

1) A (−4; −1), B (1; 2), C (2; 4);
2) A (−4; −1), B (1; 2), C (1; 3)?

25.12.• Графіком деякої функції є ламана MKE, де M (−4; 1), K (2; 4), E (5; −2).

1) Побудуйте графік даної функції.
2) Знайдіть значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: −2; 0; 3.
3) Знайдіть значення x, при якому y = −2; 0; 2.

25.13.• Функцію задано формулою $y = x^2 - 1$, де $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

1) Складіть таблицю значень функції з кроком 1.
2) Побудуйте графік функції, користуючись складеною таблицею.
3) Користуючись графіком, знайдіть, при яких значеннях аргументу значення функції менші від нуля, а при яких — більші за нуль.
4) Користуючись графіком функції, укажіть область значень функції.

25.14.• Функцію задано формулою $y = 4 - x^2$, де $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

1) Складіть таблицю значень функції з кроком 1.
2) Побудуйте графік функції, користуючись складеною таблицею.
3) Користуючись графіком, знайдіть, при яких значеннях аргументу значення функції менші від нуля, а при яких — більші за нуль.
4) Користуючись графіком функції, укажіть область значень функції.

25.15.• Значення функції $y = f(x)$ дорівнюють 0 при значеннях аргументу, що дорівнюють −5 і 4. Яке з наведених тверджень є правильним:

1) графік функції має з віссю ординат дві спільні точки (0; −5) і (0; 4);

2) графік функції має з віссю абсцис дві спільні точки (−5; 0) і (4; 0)?

25.16.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = x^2 - 16x$; 3) $y = x^3 - 9x$; 5) $y = |x| + 3$.

2) $y = |x| - 2$; 4) $y = 0{,}8x$;

25.17.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = 36 - 9x$; 2) $y = x^2 + x$; 3) $y = 49 - x^2$; 4) $y = |x| - 3$.

25.18.• Задано функцію $y = 1 - x$, областю визначення якої є множина всіх одноцифрових натуральних чисел. Побудуйте графік цієї функції.

25.19.• Побудуйте графік функції $f(x) = 1{,}5x + 1$, областю визначення якої є множина цілих чисел, які задовольняють нерівність $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

25.20.•• Кожній абсцисі точки графіка функції $f(x) = 3x + 1$ поставлено у відповідність суму координат цієї точки. Чи є це правило функцією? У разі ствердної відповіді задайте цю функцію формулою.

25.21.•• Кожній абсцисі точки графіка функції $f(x) = x^2 + 1$ поставлено у відповідність добуток координат цієї точки. Чи є це правило функцією? У разі ствердної відповіді задайте цю функцію формулою.

25.22.•• Відомо, що точка $A(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Доведіть, що точка $B(x_0; y_0 - 3)$ належить графіку функції $y = f(x) - 3$.

25.23.•• Відомо, що точка $A(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Доведіть, що точка $B(x_0; 2y_0)$ належить графіку функції $y = 2f(x)$.

25.24.•• Відомо, що точка $A(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Доведіть, що точка $B(2x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

25.25.•• Побудуйте графік функції, областю визначення якої є множина натуральних чисел і яка набуває значення 1 при парних значеннях аргументу та значення −1 при непарних значеннях аргументу.

25.26.•• Побудуйте графік функції, якщо відомо, що для всіх цілих значень аргументу значення функції дорівнює 1, а для нецілих дорівнює −1.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

25.27. Спростіть вираз:

1) $(c+2)(c-3)-(c+1)(c+3)$;
2) $(p+4)(p-11)+(p+6)^2$;
3) $3(x-5)^2-(8x^2-10x)$;
4) $7(2y-5)^2-2(7y-1)^2$.

25.28. Доведіть тотожність:

1) $(4a^2+3)^2+(7-4a^2)^2-2(4a^2+3)(4a^2-7)=100$;
2) $(a^2-6ab+9b^2)(a^2+6ab+9b^2)-(a^2-9b^2)^2=0$.

25.29. Доведіть, що при будь-якому непарному значенні n значення виразу $(4n+1)^2-(n+4)^2$ кратне 120.

25.30. Знайдіть які-небудь три натуральних значення змінної x таких, щоб вираз a^2-2x можна було розкласти на множники за формулою різниці квадратів. Отримані вирази розкладіть на множники.

25.31. (*Задача Бхаскари*[1].) Є кадамба-квітка; на одну пелюстку бджілок п'ята частина сіла. Поряд росла вся у цвіту симендга, і на ній третя частина розмістилася. Різницю їхню ти знайди, тричі її ти додай, на кумай цих бджіл посади. Лише бджілка одна не знайшла собі місця ніде, усе літала туди-сюди та скрізь пахощами квітів тішилася. Тепер скажи мені: скільки бджілок усього тут зібралося?

26. Лінійна функція, її графік і властивості

Розглянемо два приклади.

ПРИКЛАД 1 У басейні було 200 л води. Протягом t хв до басейну наливається щохвилини 80 л води. Тоді об'єм V води в басейні до його заповнення можна обчислити за формулою

$$V = 80t + 200, \text{ де } t \geqslant 0.$$

Ця формула задає функціональну залежність змінної V від змінної t.

ПРИКЛАД 2 Перша бригада зібрала 25 ящиків яблук; кожний робітник другої бригади зібрав по 2 ящики. Нехай у другій бригаді було x робітників. Позначимо кількість усіх ящиків, зібраних

[1] **Бхаскара II** (1114–1185) — індійський математик і астроном, автор трактату «Вінець системи» (близько 1150 р.), у якому викладено методи розв'язування ряду алгебраїчних задач.

двома бригадами, буквою y. Тоді залежність змінної y від змінної x виражається формулою

$$y = 2x + 25, \text{ де } x \text{ — натуральне число.}$$

У цих прикладах ми побудували функції, що описують дві різні реальні ситуації. Проте ці функції схожі в тому, що формули, які їх задають, мають вигляд $y = kx + b$.

Означення. **Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа, x — незалежна змінна, називають лінійною.**

Ось ще приклади лінійних функцій:

$$y = -2x + 1; \quad y = 1 - x; \quad y = 5x; \quad y = 2.$$

Зауважимо, що *областю визначення лінійної функції є множина всіх чисел*.

Побудуємо графік функції $y = -2x + 1$.

Складемо таблицю значень цієї функції для деяких значень аргументу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	5	3	1	-1	-3	-5

Точки $A(-3; 7)$, $B(-2; 5)$, $C(-1; 3)$, $D(0; 1)$, $E(1; -1)$, $F(2; -3)$, $G(3; -5)$ належать шуканому графіку (рис. 26.1). Усі ці точки лежать на одній прямій, яка є графіком функції $y = -2x + 1$ (рис. 26.2).

У курсі геометрії 9 класу ви доведете, що ***графіком лінійної функції є пряма***.

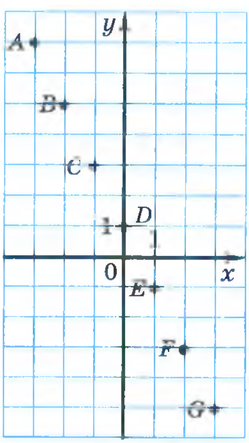


Рис. 26.1

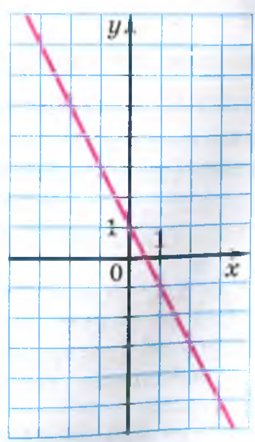


Рис. 26.2

Зазначимо, що ця пряма не може бути вертикальною, тобто прямою, перпендикулярною до осі абсцис. Справді, вертикальна пряма не може слугувати графіком функції (це було показано в п. 25).

Оскільки пряму можна однозначно задати будь-якими двома її точками, то для побудови графіка лінійної функції достатньо обрати два довільних значення аргументу й скласти таблицю значень функції, яка має лише два стовпці.

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік функції $y = -3x + 2$.

Розв'язання. Складемо таблицю значень даної функції для двох довільних значень аргументу:

x	0	1
y	2	-1

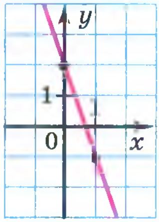


Рис. 26.3

Позначимо на координатній площині точки (0; 2) і (1; −1) та проведемо через них пряму (рис. 26.3). Ця пряма є графіком лінійної функції $y = -3x + 2$.

У формулі $y = kx + b$, яка задає лінійну функцію, припустимими є й випадки, коли $k = 0$ та/або $b = 0$.

Розглянемо випадок, коли $b = 0$ і $k \neq 0$. Тоді формула набуває вигляду $y = kx$. Звідси для всіх значень аргументу, відмінних від нуля, можна записати, що $\frac{y}{x} = k$. Ця формула показує, що для функції $y = kx$ при $x \neq 0$ відношення відповідних значень залежної та незалежної змінних залишається сталим і дорівнює k.

Нагадаємо, що в курсі математики 6 класу ви вже ознайомилися з подібними залежностями між величинами. Таку залежність називають прямою пропорційністю. Тому лінійну функцію, яку задають формулою $y = kx$, де $k \neq 0$, також називають **прямою пропорційністю.**

Функції $y = 2x$, $y = x$, $y = -x$, $y = -\frac{1}{3}x$ — приклади прямих пропорційностей.

Оскільки пряма пропорційність є окремим випадком лінійної функції (це ілюструє схема, зображена на рисунку 26.4), то її графік — пряма. Особливість цієї прямої полягає в тому, що вона при будь-якому k проходить через точку O (0; 0). Справді, якщо у формулі $y = kx$ покласти $x = 0$, то отримаємо $y = 0$. Тому для побудови графіка прямої пропорційності

Рис. 26.4

достатньо знайти яку-небудь точку графіка, відмінну від початку координат, і провести пряму через цю точку й точку O (0; 0).

На рисунку 26.5 зображено графіки прямих пропорційностей, які наводилися вище як приклади.

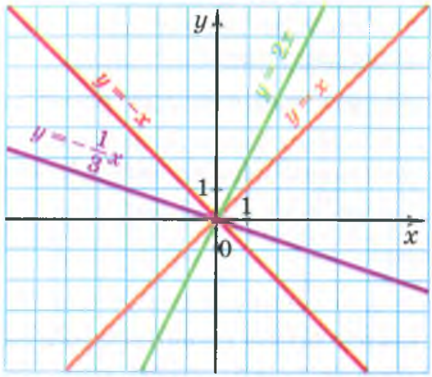


Рис. 26.5

Розглянемо ще один окремий випадок лінійної функції.

У формулі $y = kx + b$ покладемо $k = 0$. Отримаємо $y = b$. Зрозуміло, що в цьому разі значення функції залишатимуться незмінними при будь-яких змінах значень аргументу.

ПРИКЛАД 4 Побудуйте графік функції $y = 2$.

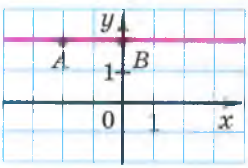


Рис. 26.6

Розв'язання. Як і для побудови графіка будь-якої лінійної функції, треба знати дві точки, які належать йому. Ці точки матимуть однакові ординати, які дорівнюють 2. Їхні абсциси виберемо довільно, наприклад −2 і 0. Залишається провести пряму через точки A (−2; 2) і B (0; 2) (рис. 26.6). Ця пряма паралельна осі абсцис.

Зауважимо, що графіком функції $y = 0$ є вісь абсцис. Графіком функції $y = b$, де $b \neq 0$, є пряма, паралельна осі абсцис.

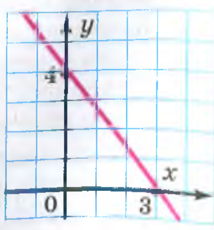


Рис. 26.7

ПРИКЛАД 5 Задайте формулою лінійну функцію, графік якої зображено на рисунку 26.7.

Розв'язання. Графік даної функції перетинає вісь ординат у точці (0; 4). Підставивши координати цієї точки у формулу $y = kx + b$, отримуємо $4 = k \cdot 0 + b$, звідки $b = 4$.

Оскільки даний графік перетинає вісь абсцис у точці (3; 0), то, підставивши її координати у формулу $y = kx + 4$, матимемо: $3k + 4 = 0$; $k = -\frac{4}{3}$.

Відповідь: $y = -\frac{4}{3}x + 4$.

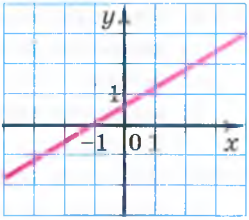


Рис. 26.8

ПРИКЛАД 5 На рисунку 26.8 зображено графік функції $f(x) = ax + b$. Знайдіть значення виразу $b - a$.

Розв'язання. Маємо: $f(-1) = a \cdot (-1) + b = b - a$. За графіком визначаємо, що $f(-1) = 0$. Отже, $b - a = 0$.

?

1. Яку функцію називають лінійною?
2. Що є графіком лінійної функції?
3. Яку функцію називають прямою пропорційністю?
4. Що є графіком прямої пропорційності?
5. Що є графіком функції $y = b$?
6. Графіком якої функції є вісь абсцис?
7. Чи існує функція, графіком якої є вісь ординат?

ВПРАВИ

26.1.° Чи є лінійною функція, задана формулою:

1) $y = 3x - 2$; 4) $y = \frac{3}{x} + 2$; 7) $y = \frac{x}{5}$;

2) $y = 8 - 7x$; 5) $y = 2x^2 + 4$; 8) $y = -4$;

3) $y = \frac{x}{3} + 2$; 6) $y = \frac{12x - 8}{4}$; 9) $y = 0$?

У разі ствердної відповіді вкажіть значення коефіцієнтів k і b.

26.2.° Чи є прямою пропорційністю функція, задана формулою:

1) $y = 4x$; 3) $y = \frac{x}{4}$; 5) $y = -4x$;

2) $y = \frac{4}{x}$; 4) $y = 0$; 6) $y = -\frac{x}{4}$.

У разі ствердної відповіді вкажіть значення коефіцієнта k.

26.3.° Лінійну функцію задано формулою $y = 6x - 5$. Заповніть таблицю:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

26.4.° Функцію задано формулою $y = -2x + 5$. Знайдіть:
1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -4; 3,5; 0;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 9; -5; 0.

26.5.° Функцію задано формулою $y = 0,3x - 2$. Знайдіть:
1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 5; -2; 0;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 1; -11; 0,8.

26.6.° Побудуйте графік функції:
1) $y = x - 5$; 2) $y = 3x + 1$; 3) $y = -\frac{1}{6}x - 2$; 4) $y = 0,4x + 3$.

26.7.° Побудуйте графік функції:
1) $y = 4 - x$; 2) $y = -4x + 5$; 3) $y = 0,2x - 3$.

26.8.° Функцію задано формулою $y = \frac{1}{3}x$. Знайдіть:
1) значення y, якщо $x = 6$; -3; $-3,2$;
2) значення x, при якому $y = -2$; $\frac{1}{3}$; 12.

26.9.° Функцію задано формулою $y = 1,2x$. Знайдіть:
1) значення y, якщо $x = 10$; 0,6; -5; -4;
2) значення x, при якому $y = 3,6$; $-2,4$; 6.

26.10.° Побудуйте графік прямої пропорційності:
1) $y = 3x$; 2) $y = -2x$; 3) $y = -0,6x$; 4) $y = \frac{1}{7}x$.

26.11.° Побудуйте графік функції:
1) $y = 5x$; 2) $y = 0,8x$; 3) $y = -\frac{1}{6}x$.

26.12.° Функціональна залежність змінної y від змінної x є прямою пропорційністю.
1) Заповніть таблицю:

x	8	6	2	1	$\frac{1}{2}$	0	-1	-2	-3	-4
y	4									

2) Задайте цю функцію формулою.
3) Побудуйте графік цієї функції.

26.13.° Побудуйте в одній системі координат графіки лінійних функцій: $y = 3$; $y = -5$; $y = 0$.

26.14.° Побудуйте графік функції $y = 2x - 3$. Користуючись графіком, знайдіть:
1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 4; -1; 0,5;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 1; -1; 0;

3) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень.

26.15.° Побудуйте графік функції $y = 2 - 4x$. Користуючись графіком, знайдіть:
1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 1; 0; –2;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: –4; –2; 2;
3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

26.16.° Побудуйте графік функції $y = 0{,}5x$. Користуючись графіком, знайдіть:
1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 4; –6; 3;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 2,5; –2; 1;
3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

26.17.° Побудуйте графік функції $y = -4x$. Користуючись графіком, знайдіть:
1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 2; –1; 0,5;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: –4; 2;
3) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень.

26.18.° Не виконуючи побудови графіка функції $y = 1{,}8x - 3$, визначте, через які з даних точок проходить цей графік: $A\ (-2;\ -6{,}6)$; $B\ (1;\ 1{,}2)$; $C\ (0;\ -3)$; $D\ (5;\ 7)$.

26.19.° Не виконуючи побудови, визначте, чи належить графіку функції $y = 8x - 14$ точка:
1) $A\ (-1;\ -6)$;
2) $B\ (2;\ 2)$.

26.20.• Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x - 1$ і $y = \frac{1}{4}x + 2$ та знайдіть координати точки їхнього перетину.

26.21.• Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 5x - 6$ і $y = -2x + 1$ та знайдіть координати точки їхнього перетину.

26.22.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:
1) $y = 2{,}5x + 10$;
2) $y = 6x - 4$.

26.23.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:
1) $y = \frac{2}{3}x - 4$;
2) $y = 7 - 3x$.

26.24.° Не виконуючи побудови графіка функції $y = 2x - 9$, знайдіть точку цього графіка, у якої:

1) абсциса дорівнює ординаті;
2) ордината на 6 більша за абсцису.

26.25.° Не виконуючи побудови графіка функції $y = -7x + 8$, знайдіть точку цього графіка, у якої абсциса та ордината — протилежні числа.

26.26.° Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

1) $y = 3{,}7x + 10$ і $y = 1{,}4x - 13$; 2) $y = 4 - \frac{2}{7}x$ і $y = \frac{9}{7}x + 26$.

26.27.° Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = 4x - 7$ і $y = -2x + 11$.

26.28.° При якому значенні змінної x функції $f(x) = 4x - 3$ і $g(x) = 3x - 2$ набувають рівних значень? Побудуйте на одній координатній площині графіки функцій f і g. Визначте, при яких значеннях x:

1) $f(x) > g(x)$; 2) $f(x) < g(x)$.

26.29.° При якому значенні незалежної змінної функції $f(x) = 5 - 2x$ і $g(x) = 2x - 3$ набувають рівних значень? Побудувавши на одній координатній площині графіки даних функцій, установіть, при яких значеннях x:

1) $f(x) < g(x)$; 2) $f(x) > g(x)$.

26.30.° Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку $M(2; -5)$.

26.31.° Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку $M(3; -2)$.

26.32.° Знайдіть значення b, при якому графік функції $y = -\frac{1}{9}x + b$ проходить через точку $A(-27; 4)$.

26.33.° При якому значенні k графік функції $y = kx - 15$ проходить через точку $B(3; -6)$?

26.34.° Графік функції $y = kx + b$ перетинає осі координат у точках $C(0; 4)$ і $D(-8; 0)$. Знайдіть значення k і b.

26.35.° Графік функції $y = kx + b$ перетинає осі координат у точках $M(3; 0)$ і $K(0; -1)$. Знайдіть значення k і b.

26.36.° Усі точки графіка функції $y = kx + b$ мають однакову ординату, яка дорівнює -6. Знайдіть значення k і b.

26.37.° Графік функції $y = kx + b$ паралельний осі абсцис і проходить через точку $A(-2; 3)$. Знайдіть значення k і b.

26.38.° Один із графіків, зображених на рисунку 26.9, відображає процес наповнення першого бака водою, а другий — витікання води з другого бака.

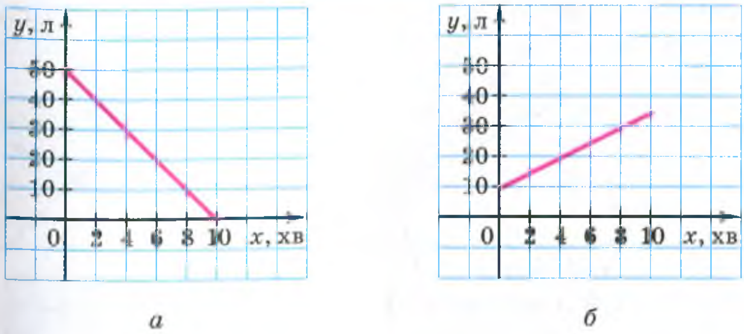


Рис. 26.9

1) Яким процесам відповідають графіки, наведені на рисунку 26.9?
2) Скільки води було спочатку в кожному баку?
3) Скільки води було в кожному баку через 2 хв після відкриття кранів? через 6 хв?
4) Через скільки хвилин після відкриття кранів у кожному баку було по 30 л води?
5) Скільки літрів води щохвилини наливається в перший бак і скільки виливається з другого?
6) Задайте формулою залежність кількості води в кожному баку від часу.

26.39.° Яка з прямих, зображених на рисунку 26.10, є графіком функції:

1) $y = x$; 2) $y = 4x$; 3) $y=\frac{1}{4}x$; 4) $y=-\frac{1}{4}x$?

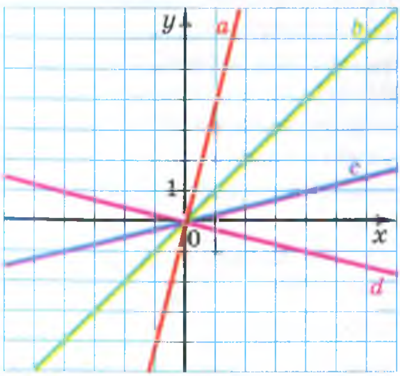


Рис. 26.10

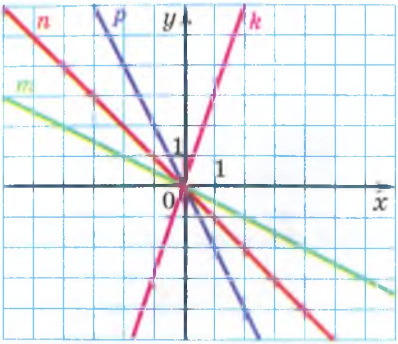


Рис. 26.11

26.40.° Яка з прямих, зображених на рисунку 26.11, є графіком функції:

1) $y = -x$; 2) $y = 3x$; 3) $y = -\frac{1}{2}x$; 4) $y = -2x$?

26.41.° Доведіть, що не існує такого значення a, при якому пряма $y = ax - 5$ проходить через початок координат.

26.42.° Задайте формулою які-небудь дві лінійні функції, графіки яких проходять через точку:

1) $A\ (0;\ 4)$; 2) $B\ (1;\ 3)$.

26.43.•• Графіки функцій $y = 0{,}5x - 3$, $y = -4x + 6$ і $y = kx$ перетинаються в одній точці. Знайдіть значення k. Побудуйте в одній системі координат графіки цих функцій.

26.44.•• При якому значенні b графіки функцій $y = 1{,}5x - 3$, $y = 2{,}5x + 1$ і $y = 5x + b$ перетинаються в одній точці?

26.45.•• Точка C належить відрізку AB, довжина якого дорівнює 8. Довжина відрізка AC дорівнює x, довжина відрізка BC — y. Побудуйте графік залежності y від x, якщо $0 < x < 8$. Позначте на цьому графіку точку, яка відповідає випадку, коли точка C — середина відрізка AB.

26.46.•• Периметр прямокутника $ABCD$ дорівнює 12, $AB = x$, $AD = y$, $0 < x < 6$. Побудуйте графік залежності y від x. Позначте на цьому графіку точку, яка відповідає випадку, коли прямокутник $ABCD$ є квадратом.

26.47.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} x - 4, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ -2x - 4, & \text{якщо } x < 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 3x - 2, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ 1, & \text{якщо } x > 1; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} 2, & \text{якщо } x \neq 2, \\ 3, & \text{якщо } x = 2; \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } x < -1, \\ 1, & \text{якщо } x = -1, \\ x + 3, & \text{якщо } x > -1. \end{cases}$

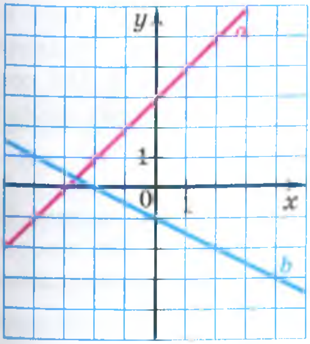


Рис. 26.12

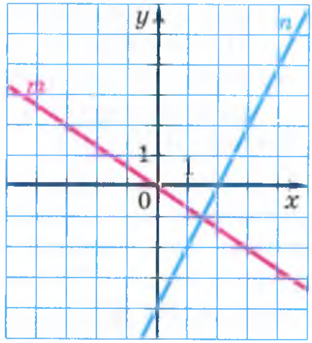


Рис. 26.13

26.48.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\begin{cases}-3x, & \text{якщо } x\leqslant -1,\\ 3, & \text{якщо } -1<x<1,\\ 2x+1, & \text{якщо } x\geqslant 1;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}5-x, & \text{якщо } x\leqslant 3,\\ x+1, & \text{якщо } x>3.\end{cases}$

26.49.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = |x|$; 2) $y = |x| + x$; 3) $y = 4x - |x| + 2$.

26.50.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = -|x|$; 2) $y = x - |x|$; 3) $y = 3x + 2|x|$.

26.51.•• Задайте формулою лінійну функцію, графіком якої є зображена на рисунку 26.12: 1) пряма a; 2) пряма b.

26.52.•• Задайте формулою лінійну функцію, графіком якої є зображена на рисунку 26.13: 1) пряма m; 2) пряма n.

26.53.* На рисунку 26.14 зображено графік функції $f(x) = ax + b$. Знайдіть значення виразу $a + b$.

26.54.* На рисунку 26.15 зображено графіки лінійних функцій. Чи можуть ці графіки бути графіками функцій $y = kx + b$ і $y = bx + k$?

26.55.* На рисунку 26.16 зображено графік функції $y = kx + b$. На тій самій координатній площині зобразіть графік функції $y = bx + k$.

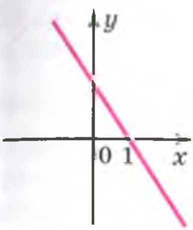


Рис. 26.14

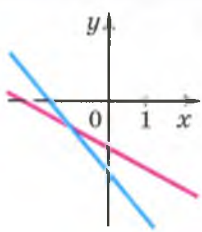


Рис. 26.15

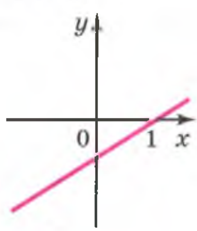


Рис. 26.16

26.56.* Графіки функцій $y = -(2k + 3)x - 1 - 2k$ і $y = kx + k + 2$, де $k > 0$, перетинають вісь ординат у точках A і B відповідно. Точку перетину цих графіків позначили буквою M. Осі координат і графіки стерли. Чи можна відновити систему координат за точками A, B і M?

26.57.* Графіки функцій $y = ax + b$ і $y = bx + a$, де $a > 0$ і $b > 0$, перетинають вісь ординат у точках A і B відповідно. Точку перетину цих графіків позначили буквою M. Осі координат і графіки стерли. Чи можна відновити систему координат за точками A, B і M?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

26.58. Знайдіть значення виразу:
1) $(2 + 3a)(5 - a) - (2 - 3a)(5 + a)$ при $a = -1{,}5$;
2) $(3a + b)^2 - (3a - b)^2$ при $a = -3\frac{1}{3}$, $b = 0{,}3$.

26.59. Розв'яжіть рівняння:
1) $(5x + 1)(2x - 3) = (10x - 9)(x + 2)$;
2) $(7x - 1)(x + 5) = (3 + 7x)(x + 3)$.

26.60. Доведіть, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться націло на 3.

26.61. У двох діжках було порівну води. Об'єм води в першій діжці спочатку збільшили на 10 %, а потім зменшили на 10 %. Об'єм води в другій діжці, навпаки, спочатку зменшили на 10 %, а потім збільшили на 10 %. У якій діжці води стало більше?

26.62. Відомо, що $x^2 + y^2 = a$, $xy = b$. Чому дорівнює значення виразу $x^4 + x^2y^2 + y^4$?

26.63. Доведіть, що при будь-якому значенні x значення виразу $|x| - x$ більше за відповідне значення виразу $2x - x^2 - 2$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

Рівні множини

Дві множини A і B називають рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B і, навпаки, кожний елемент множини B належить множині A.

Способи задання множин

- Множину задають указанням (переліком) усіх її елементів.
- Указують характеристичну властивість елементів множини, тобто властивість, яка притаманна всім елементам даної множини й тільки їм.

Порожня множина

Множину, яка не містить жодного елемента, називають порожньою множиною.

Функція

Функцією називають правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y.

Область визначення функції

Усі значення аргументу функції утворюють множину, яку називають областю визначення функції.

Область значень функції

Усі значення залежної змінної утворюють множину, яку називають областю значень функції.

Способи задання функції

За допомогою опису; за допомогою формули; табличний; графічний.

Графік функції

Графіком функції f називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f.

Лінійна функція

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа, x — незалежна змінна, називають лінійною.

Графік лінійної функції

Графіком лінійної функції є пряма.

Пряма пропорційність

Лінійну функцію, яку задають формулою $y = kx$, де $k \neq 0$, називають прямою пропорційністю.

§ 4 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з рівняннями з двома змінними та їхніми системами. Вивчите деякі методи їхнього розв'язування.
- Ви дізнаєтеся, що рівняння з двома змінними може слугувати математичною моделлю реальної ситуації.
- Оволодієте новим ефективним методом розв'язування текстових задач.

27. Рівняння з двома змінними

Розглянемо кілька прикладів реальних ситуацій.

ПРИКЛАД 1 Відстань між Києвом і Харковом дорівнює 450 км. З Києва до Харкова зі швидкістю x км/год виїхав автомобіль. Через 1 год назустріч йому з Харкова зі швидкістю y км/год виїхав другий автомобіль. Вони зустрілися через 2 год після виїзду другого автомобіля.

Побудуємо математичну модель цієї ситуації.

Шлях, пройдений другим автомобілем до зустрічі, дорівнює $2y$ км. Оскільки перший автомобіль перебував у дорозі на 1 год більше, ніж другий, тобто 3 год, то до зустрічі він проїхав $3x$ км. Разом автомобілі проїхали 450 км.

Звідси $3x + 2y = 450$.

Ця рівність із двома змінними є математичною моделлю описаної вище реальної ситуації. ●

Розглянемо ще кілька прикладів ситуацій, математичними моделями яких є рівності з двома змінними.

ПРИКЛАД 2 Площа квадрата, сторона якого — 10 см, дорівнює сумі площ двох інших квадратів.

Площа квадрата зі стороною 10 см дорівнює 100 см^2. Якщо довжини сторін двох інших квадратів позначити x см і y см, то отримаємо рівність

$$x^2 + y^2 = 100.$$ ●

ПРИКЛАД 3 Дано прямокутний трикутник.

Якщо градусні міри його гострих кутів позначити x і y, то можна записати:

$$x + y = 90.$$

ПРИКЛАД 4 Дано прямокутник, площа якого дорівнює 12 см². Позначимо довжини його сторін x см і y см. Тоді

$$xy = 12.$$

ПРИКЛАД 5 Купили 5 ручок і 7 зошитів. За всю покупку заплатили 19 грн.

Якщо одна ручка коштує x грн, а один зошит — y грн, то

$$5x + 7y = 19.$$

Як бачимо, кожна з отриманих у прикладах 1–5 рівностей

$$3x + 2y = 450,$$
$$x^2 + y^2 = 100,$$
$$x + y = 90,$$
$$xy = 12,$$
$$5x + 7y = 19$$

містить по дві змінні x і y. Такі рівності називають **рівняннями з двома змінними.**

Якщо, наприклад, у рівняння $xy = 12$ замість x і y підставити числа 2 і 6, то отримаємо правильну рівність $2 \cdot 6 = 12$. У такому разі говорять, що пара значень змінних $x = 2$, $y = 6$ **задовольняє** дане рівняння або що ця пара є **розв'язком** даного рівняння.

Означення. **Пару значень змінних, яка перетворює рівняння в правильну рівність, називають** **розв'язком рівняння з двома змінними.**

Так, для рівняння $x^2 + y^2 = 100$ кожна з пар чисел

$$x = 8, \ y = 6;$$
$$x = -6, \ y = 8;$$
$$x = 10, \ y = 0$$

є його розв'язком, а, наприклад, пара $x = 5$, $y = 9$ його розв'язком не є.

Звернемо увагу на те, що дане означення схоже на означення кореня рівняння з однією змінною. Через це виникає поширена помилка: кожне число пари або саму пару, що є розв'язком, називати коренем рівняння з двома змінними.

Той факт, що пара $x = a$, $y = b$ є розв'язком рівняння, прийнято записувати так: пара $(a; b)$ є розв'язком рівняння. Іноді запис $(a; b)$ називають упорядкованою парою чисел, тим самим наголошуючи, що порядок слідування букв a і b має значення. У дужках на першому місці[1] пишуть значення змінної x, а на другому — значення змінної y.

Використовуючи таке позначення, можна, наприклад, записати, що кожна з пар чисел (5; 85), (40; 50), (50; 40) є розв'язком рівняння $x + y = 90$.

Три вказані пари не вичерпують усі розв'язки цього рівняння. Якщо замість змінної y підставляти в рівняння $x + y = 90$ будь-які її значення, то матимемо лінійні рівняння з однією змінною, коренями яких будуть відповідні значення змінної x. Зрозуміло, що таким чином можна дістати безліч пар чисел, які є розв'язками рівняння $x + y = 90$.

Рівняння з двома змінними не обов'язково має безліч розв'язків. Наприклад, рівняння $|x|+|y|=0$ має тільки один розв'язок — пару чисел (0; 0). Справді, оскільки $|x|\geqslant 0$ і $|y|\geqslant 0$, то при $x\neq 0$ або $y\neq 0$ ліва частина рівняння набуває тільки додатних значень. Рівняння $x^2+y^2=-2$ взагалі не має розв'язків (доведіть це самостійно).

Зауважимо, що ми розв'язали рівняння $|x|+|y|=0$ і $x^2+y^2=-2$, але не розв'язали рівняння $x + y = 90$.

Означення. Розв'язати рівняння з двома змінними — це означає знайти всі його розв'язки або показати, що воно не має розв'язків.

Також можна сказати: **розв'язати рівняння з двома змінними — це означає знайти множину його розв'язків.**

Властивості рівнянь із двома змінними запам'ятати легко: вони аналогічні властивостям рівнянь з однією змінною, які ви вивчали в курсі математики 6 класу.

- *Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, яке має ту саму множину розв'язків, що й дане.*
- *Якщо будь-який доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, яке має ту саму множину розв'язків, що й дане.*
- *Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме, відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, яке має ту саму множину розв'язків, що й дане.*

[1] Якщо змінні в рівнянні позначено буквами, відмінними від x і y, то, записуючи розв'язок у вигляді пари, потрібно домовитися, значення якої змінної ставиться на перше місце в парі, а якої — на друге. Зазвичай беруть до уваги порядок букв латинського алфавіту.

Розглянемо рівняння $x^2+y^2+2=2x-2y$. Перетворимо його, використовуючи властивості рівнянь. Маємо:

$$x^2-2x+y^2+2y+2=0.$$

Далі запишемо: $x^2-2x+1+y^2+2y+1=0;$

$$(x-1)^2+(y+1)^2=0.$$

Оскільки $(x-1)^2 \geqslant 0$ і $(y+1)^2 \geqslant 0$, то ліва частина рівняння перетворюється в нуль тільки при *одночасному* виконанні умов: $x-1=0$ і $y+1=0$. Звідси випливає, що пара чисел $(1; -1)$ — єдиний розв'язок даного рівняння.

Вивчаючи якийсь об'єкт, ми прагнемо не тільки описати його властивості, а й скласти про нього наочне уявлення. Графік функції — характерний тому приклад. Оскільки розв'язком рівняння з двома змінними є пара чисел, наприклад $(a; b)$, то цілком природно зобразити цей розв'язок у вигляді точки $M(a; b)$ на координатній площині. Якщо зобразити всі розв'язки рівняння, то матимемо **графік рівняння**.

Означення. Графіком рівняння з двома змінними називають геометричну фігуру, що складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, координати яких (пари чисел) є розв'язками даного рівняння.

Наприклад, розглянуте вище рівняння $x^2+y^2+2=2x-2y$ має єдиний розв'язок $(1; -1)$. Тому його графіком є єдина точка $M(1; -1)$ (рис. 27.1).

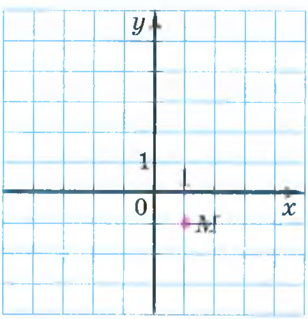


Рис. 27.1

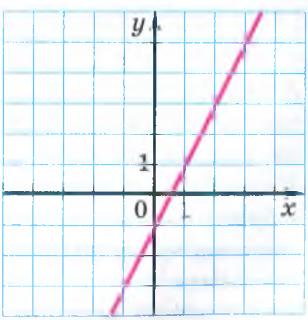


Рис. 27.2

На рисунку 27.2 зображено графік функції $y=2x-1$. Оскільки формула, яка задає лінійну функцію, є рівнянням із двома змінними, то також можна сказати, що на рисунку 27.2 зображено графік рівняння $y=2x-1$.

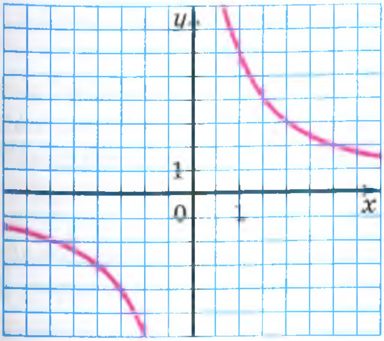


Рис. 27.3

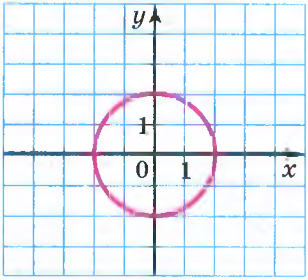


Рис. 27.4

Наголосимо, що *коли якась фігура є графіком рівняння, то виконуються дві умови:*

1) *усі розв'язки рівняння є координатами точок, які належать графіку;*
2) *координати будь-якої точки, що належить графіку, — це пара чисел, яка є розв'язком даного рівняння.*

Графіки рівнянь є дуже різноманітними. З багатьма з них ви ознайомитеся в курсі алгебри пізніше. Наприклад, із курсу алгебри 8 класу ви дізнаєтеся, що графіком розглянутого на початку пункту рівняння $xy = 12$ є фігура, зображена на рисунку 27.3. Її називають **гіперболою**. А в курсі геометрії 9 класу ви зможете довести, що графіком рівняння $x^2 + y^2 = 4$ є коло (рис. 27.4).

ПРИКЛАД 6 Побудуйте графік рівняння $xy + 3y = 0$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді $y\,(x + 3) = 0$. Звідси $y = 0$ або $x + 3 = 0$.

Отже, розв'язками даного рівняння є всі пари чисел виду $(x; 0)$, де x — довільне число, і всі пари чисел виду $(-3; y)$, де y — довільне число.

Множина точок, координати яких мають вигляд $(x; 0)$, де x — довільне число, утворює вісь абсцис.

Множина точок, координати яких мають вигляд $(-3; y)$, де y — довільне число, утворює пряму, яка проходить через точку $(-3; 0)$ паралельно осі ординат.

Отже, графіком даного рівняння є пара прямих, зображених на рисунку 27.5.

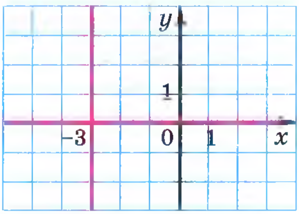


Рис. 27.5

ПРИКЛАД 1 Яка фігура є графіком рівняння:

1) $|x| + |y - 2| = 0$; 2) $x^2 + y = y + x^2$?

Розв'язання. 1) Оскільки $|x| \geqslant 0$ і $|y-2| \geqslant 0$, то ліва частина рівняння дорівнюватиме нулю тільки за одночасного виконання умов: $x = 0$ і $y - 2 = 0$. Звідси пара чисел $(0; 2)$ — єдиний розв'язок даного рівняння. Отже, шуканим графіком є точка з координатами $(0; 2)$.

2) Зрозуміло, що будь-яка пара чисел $(x; y)$ є розв'язком даного рівняння. Отже, його графіком є вся координатна площина.

1. Що називають розв'язком рівняння з двома змінними?
2. Що означає розв'язати рівняння з двома змінними?
3. Сформулюйте властивості рівнянь із двома змінними.
4. Що називають графіком рівняння з двома змінними?
5. Чи може графік рівняння з двома змінними складатися тільки з однієї точки?
6. Яка фігура є графіком рівняння $y = kx + b$?

ВПРАВИ

27.1.° Які з даних рівнянь є рівняннями з двома змінними:

1) $2x + y = 8$; 4) $a^2 - 3b = 8c$; 7) $x^3 - 8x = 100$;
2) $x + y + z = 0$; 5) $xy + 1 = 2$; 8) $x^3 - 8y = 100$;
3) $a^2 - 3b = 8$; 6) $5m - 3n = 6$; 9) $x^3 - 8xy = 100$?

27.2.° Чи є пара чисел $(-2; 3)$ розв'язком рівняння:

1) $4x + 3y = 1$; 2) $x^2 + 5 = y^2$; 3) $xy = 6$?

27.3.° Які з пар чисел $(0; 1)$; $(5; -4)$; $(0; 1{,}2)$; $(-1; 1)$; $(1; -1)$ є розв'язками рівняння:

1) $x^2 + 5y - 6 = 0$; 2) $xy + x = 0$?

27.4.° Чи належить графіку рівняння $2x^2 - y + 1 = 0$ точка:

1) $A\ (-3; -17)$; 3) $C\ (-2; 9)$;
2) $B\ (2; 9)$; 4) $D\ (-1; 4)$?

27.5.° Доведіть, що графік рівняння $xy - 12 = 0$ не проходить через точку:

1) $A\ (3; -4)$; 2) $B\ (-2; 6)$; 3) $C\ (7; 2)$.

27.6.° Чи проходить через початок координат графік рівняння:

1) $12x + 17y = 0$; 2) $x^2 - xy + 2 = 0$; 3) $x^3 - 4y = y^2 + 3x$?

27.7.° Укажіть які-небудь три розв'язки рівняння:
1) $x - y = 10$; 2) $x = 4y$; 3) $2x^2 + y = 20$.

27.8.° Укажіть які-небудь три розв'язки рівняння:
1) $x + y = 1$; 2) $5x - y = 2$.

27.9.• Графік рівняння $4x + 3y = 30$ проходить через точку $A\ (6;\ b)$. Чому дорівнює значення b?

27.10.• Графік рівняння $7x - 5y = 47$ проходить через точку $B\ (a;\ -1)$. Чому дорівнює значення a?

27.11.• При якому значенні a пара чисел $(-4;\ 3)$ є розв'язком рівняння:
1) $3x + 5y = a$; 2) $ax + 5y = 19$?

27.12.• При якому значенні a графік рівняння $11x - 13y = a + 6$ проходить через початок координат?

27.13.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:
1) $x + y = 2$; 3) $x^2 + y^2 = 9$;
2) $x^3 - y = 1$; 4) $|x| - y = 5$.

27.14.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:
1) $2x - 3y = 6$; 2) $x^2 + y = 4$; 3) $|x| + |y| = 7$.

27.15.• Складіть яке-небудь рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел:
1) $x = 1,\ y = 2$; 2) $x = -3,\ y = 5$; 3) $x = 10,\ y = 0$.

27.16.• Складіть яке-небудь рівняння з двома змінними, графік якого проходить через точку:
1) $A\ (-2;\ 2)$; 2) $B\ (4;\ -1)$; 3) $C\ (0;\ 0)$.

27.17.• Придумайте три рівняння, графіки яких проходять через точку $M\ (6;\ -3)$.

27.18.• Придумайте три рівняння, графіки яких проходять через точку $K\ (0;\ 4)$.

27.19.• Чи належать графіку рівняння $x^4 - y = -2$ точки, що мають від'ємну ординату?

27.20.• Чи проходить графік рівняння $x + y^2 = -4$ через точки, що мають додатну абсцису?

27.21.• Чи має розв'язки рівняння:
1) $y^2 = x^2$; 4) $x^2 + y^2 = 25$; 7) $|x| + |y| = 1$;
2) $y^2 = -x^2$; 5) $x^2 + y^2 = -25$; 8) $|x| + |y| = 0$;
3) $xy = 0$; 6) $x^2 - y^2 = -9$; 9) $|x| + |y| = -1$?

У разі ствердної відповіді вкажіть які-небудь розв'язки.

27.22.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2+y^2=0$; 2) $(x+2)^2+(y-3)^2=0$; 3) $x^4+y^6=-4$.

27.23.• Скільки розв'язків має рівняння:

1) $x^2+(y-2)^2=0$;
2) $(x+3)^2+(y-1)^2=0$;
3) $9x^2+16y^2=0$;
4) $(x^2+y^2)y=0$;
5) $xy=2$;
6) $|x+1|+|y|=0$;
7) $x^2+|y|=-100$;
8) $x+y=2$?

27.24.• Наведіть приклад рівняння зі змінними x і y:

1) яке має один розв'язок;
2) яке не має розв'язків;
3) яке має безліч розв'язків;
4) розв'язком якого є будь-яка пара чисел.

27.25.•• Що являє собою графік рівняння:

1) $(x-1)^2+(y+5)^2=0$;
2) $|x+9|+|y-8|=0$;
3) $4x+y=y+4x$;
4) $(x-1)(y+5)=0$?

27.26.•• Побудуйте графік рівняння:

1) $(x+2)^2+y^2=0$;
2) $|x|+(y-3)^2=0$;
3) $xy=0$;
4) $(x+1)(y-1)=0$;
5) $xy-2y=0$.

27.27.•• Побудуйте графік рівняння:

1) $|x-4|+|y-4|=0$; 2) $(x-4)(y-4)=0$; 3) $xy+x=0$.

27.28.•• Знайдіть розв'язок рівняння $5x+3y=24$, який є парою рівних чисел.

27.29.•• Знайдіть розв'язок рівняння $-12x+13y=-100$, який є парою протилежних чисел.

27.30.•• Знайдіть усі пари $(x; y)$ натуральних чисел, які є розв'язками рівняння:

1) $2x+3y=5$; 2) $x+5y=16$.

27.31.•• Знайдіть усі пари $(x; y)$ цілих чисел, які є розв'язками рівняння $|x|+|y|=2$.

27.32.•• Знайдіть усі пари $(x; y)$ цілих чисел, які є розв'язками рівняння $x^2+y^2=5$.

27.33.•• Катерині треба заплатити за математичний довідник 29 грн. У неї є купюри тільки по 2 грн і по 5 грн. Скількома способами вона може розрахуватися за покупку без здачі?

27.34.•• Учням 7 класу на конкурсі з математики було запропоновано задачі з алгебри та з геометрії. За кожну правильно розв'язану задачу з алгебри нараховувалося 2 бали, а за задачу з геометрії — 3 бали. Максимальна кількість набраних балів могла скласти 24. Скільки було запропоновано задач окремо з алгебри та з геометрії, якщо з кожного із цих предметів була хоча б одна задача? Знайдіть усі можливі відповіді.

27.35.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + y^2 + 4 = 4y$;
2) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$;
3) $x^2 + y^2 + x + y + 0{,}5 = 0$;
4) $9x^2 + y^2 + 2 = 6x$.

27.36.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 10y + 30 = 10x - y^2 - 20$;
2) $4x^2 + y^2 + 4x = 2y - 3$.

27.37.•• Графіком рівняння $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$ є крива, яку називають *кардіоїдою* (рис. 27.6). Знайдіть координати точок її перетину з осями координат.

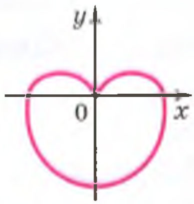


Рис. 27.6

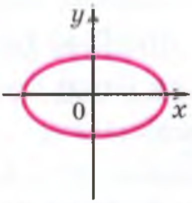


Рис. 27.7

27.38.•• Графіком рівняння $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ є крива, яку називають *еліпсом* (рис. 27.7). Знайдіть координати точок її перетину з осями координат.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

27.39. У посудину, яка містить 150 мл 8 %-го розчину кислоти, додали 90 мл води. Чому дорівнює концентрація кислоти в одержаному розчині?

27.40. У мішку 7 червоних, 10 зелених і 12 жовтих яблук. Яку найменшу кількість яблук треба вийняти, не заглядаючи в мішок, щоб із ймовірністю, яка дорівнює 1, серед вийнятих яблук хоча б одне було зеленим?

27.41. Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{4x+1}{5} - \frac{2x-3}{3} = x - 4$;
2) $\frac{3x-5}{4} - \frac{5x-2}{3} = x + 9$.

27.42. З міста A до міста B одночасно виїхали легковий і вантажний автомобілі. Через 3,5 год після виїзду легковий автомобіль прибув у місто B, а вантажному залишилося ще проїхати 77 км. Знайдіть відстань між містами, якщо швидкість вантажного автомобіля в 1,4 раза менша від швидкості легкового.

27.43. Чи можна стверджувати, що при будь-якому натуральному парному значенні n значення виразу $(5n+10)^2-(2n+4)^2$ ділиться націло на 84?

27.44. Відомо, що при деяких значеннях m, n і k значення виразу $3m^2n$ дорівнює 2, а значення виразу n^2k^4 дорівнює 3. Знайдіть при тих самих значеннях m, n і k значення виразу:

1) $(3m^2n^2k^2)^2$;
2) $(-2m^2nk^2)^3\cdot(0{,}5n^2k)^2$.

28. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік

Означення. Лінійним рівнянням із двома змінними називають рівняння виду $ax + by = c$, де x і y — змінні, a, b, c — деякі числа.

Рівняння $3x+2y=450$, $x+y=90$, які ми розглядали в попередньому пункті, є лінійними. Ось ще приклади лінійних рівнянь: $x+y=3$; $0x+5y=-1$; $-3x+0y=5$; $0x+0y=0$; $0x+0y=2$.

З'ясуємо, яка фігура є графіком лінійного рівняння. Для цього розглянемо три випадки.

Випадок 1. Нехай задано лінійне рівняння $ax+by=c$, у якому $b\neq 0$. Це рівняння можна перетворити так:

$$by=-ax+c.$$

Оскільки $b\neq 0$, то, поділивши обидві частини останнього рівняння на b, отримаємо:

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}.$$

Введемо позначення: $-\frac{a}{b}=k$, $\frac{c}{b}=p$. Тепер можна записати:

$$y=kx+p.$$

Ми отримали формулу, яка задає лінійну функцію. Графіком лінійної функції є невертикальна пряма. Отже, графіком рівняння $ax+by=c$, де $b\neq 0$, є невертикальна пряма.

ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік рівняння $x-3y=-2$.

Розв'язання. Ми вже знаємо, що графіком цього рівняння є пряма. Тому для побудови достатньо визначити координати двох будь-яких її точок. Маємо: якщо $x=1$, то $y=1$; якщо $x=-2$, то $y=0$. Тепер через точки $M(1;1)$ і $N(-2;0)$ проведемо пряму (рис. 28.1). Ця пряма є шуканим графіком. ●

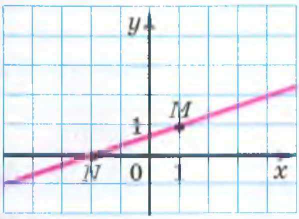


Рис. 28.1

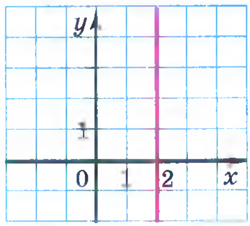


Рис. 28.2

Випадок 2. Нехай задано лінійне рівняння $ax+by=c$, де $a\neq 0$, $b=0$. Отримуємо $ax+0y=c$. Побудову графіка рівняння такого виду розглянемо в прикладі 2.

ПРИКЛАД 2 Побудуйте графік рівняння $3x+0y=6$.

Розв'язання. Легко знайти кілька розв'язків цього рівняння. Ось, наприклад, чотири його розв'язки: $(2;\ -1)$; $(2;\ 0)$; $\left(2;\ \frac{1}{3}\right)$; $(2;\ -100)$. Зрозуміло, що будь-яка пара виду $(2;\ t)$, де t — довільне число, є розв'язком рівняння $3x+0y=6$. Отже, шуканий графік містить усі точки, у яких абсциса дорівнює 2, а ордината — будь-яке число. Усі ці точки належать прямій, яка перпендикулярна до осі абсцис і проходить через точку $(2;\ 0)$ (рис. 28.2). При цьому координати будь-якої точки цієї прямої — пара чисел, що є розв'язком даного рівняння. Отже, зазначена вертикальна пряма є шуканим графіком. ●

Міркуючи аналогічно, можна показати, що графіком рівняння $ax+0y=c$, де $a\neq 0$, є вертикальна пряма.

Тепер можна зробити такий висновок: ***у кожному з двох випадків:*** **1)** $b\neq 0$; **2)** $b=0$ ***і*** $a\neq 0$ ***— графіком рівняння*** $ax+by=c$ ***є пряма.***

Часто, наприклад, замість речення «дано рівняння $y=2x$» говорять: «дано пряму $y=2x$».

Випадок 3. Нехай задано лінійне рівняння $ax + by = c$, у якому $a = b = 0$. Маємо: $0x + 0y = c$.

Якщо $c \neq 0$, то це рівняння не має розв'язків, а отже, на координатній площині не існує точок, які могли б слугувати графіком рівняння.

Якщо $c = 0$, то рівняння набуває вигляду

$$0x + 0y = 0.$$

Будь-яка пара чисел є його розв'язком. Отже, у цьому випадку графіком рівняння є вся координатна площина.

У таблиці підсумовано матеріал, розглянутий у цьому пункті.

Рівняння	Значення a, b, c	Графік
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a і c — будь-які	Невертикальна пряма
$ax + by = c$	$b = 0$, $a \neq 0$, c — будь-яке	Вертикальна пряма
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	Уся координатна площина
$ax + by = c$	$a = b = 0$, $c \neq 0$	—

ПРИКЛАД 3 Виразіть із рівняння $3x - 2y = 6$ змінну x через змінну y та знайдіть будь-які два розв'язки цього рівняння.

Розв'язання. Маємо: $3x = 2y + 6$;

$$x = \frac{2y+6}{3};$$

$$x = \frac{2}{3}y + 2.$$

Надаючи змінній y довільних значень і обчислюючи за отриманою формулою $x = \frac{2}{3}y + 2$ відповідні значення змінної x, можемо знайти безліч розв'язків даного рівняння $3x - 2y = 6$.

Наприклад,

якщо $y = 6$, то $x = \frac{2}{3} \cdot 6 + 2 = 6$;

якщо $y = -2$, то $x = \frac{2}{3} \cdot (-2) + 2 = \frac{2}{3}$.

Пари чисел (6; 6) і $\left(\frac{2}{3}; -2\right)$ є розв'язками даного рівняння. ●

ПРИКЛАД 4 Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графіком якого є пряма, що проходить через початок координат і точку A (3; −12). Побудуйте графік цього рівняння.

Розв'язання. Оскільки графік шуканого рівняння проходить через точки O (0; 0) та A (3; −12), що мають різні абсциси, то він є невертикальною прямою. Тоді рівняння цієї прямої можна записати у вигляді $y = kx + b$, де k і b — деякі числа.

З того, що графік проходить через початок координат, випливає, що $b = 0$. Оскільки графік проходить через точку A (3; −12), то $-12 = k \cdot 3$, звідки $k = -4$.

Отже, шукане рівняння має вигляд $y = -4x$ або $4x + y = 0$. Графік цього рівняння зображено на рисунку 28.3.

Відповідь: $4x + y = 0$.

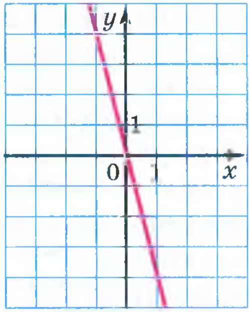


Рис. 28.3

?

1. Яке рівняння називають лінійним рівнянням із двома змінними?
2. Що є графіком рівняння $ax + by = c$, коли $b \neq 0$ або коли $b = 0$ і $a \neq 0$?
3. Що є графіком рівняння $ax + by = c$ при $a = b = c = 0$?
4. При яких значеннях a, b і c рівняння $ax + by = c$ не має розв'язків?

ВПРАВИ

28.1.° Чи є лінійним рівняння з двома змінними:
1) $7x + 11y = 36$;
2) $x^2 + 4y = 6$;
3) $12x - 17y = 0$;
4) $-3x + xy = 10$?

28.2.° Які з пар чисел (7; 1), (0; −2), (8; 2), (−7; −5), (10; 3) є розв'язками рівняння $3x - 7y = 14$?

28.3.° Розв'язком якого з рівнянь є пара чисел (3; −2):
1) $4x + 5y = 2$;
2) $3x - 2y = 5$;
3) $0{,}2x - 0{,}5y = 1{,}6$?

28.4.°° Відомо, що пара чисел (−5; y) є розв'язком рівняння $2x + 9y = 17$. Знайдіть значення y.

28.5.° Відомо, що пара чисел (x; 6) є розв'язком рівняння $8x - 3y = 22$. Знайдіть значення x.

28.6.° Графіку якого з рівнянь належить точка M (1; 4):
1) $4y - 2x = -4$;
2) $6x + 11y = 50$?

28.7.° Чи проходить графік рівняння $3x + y = -1$ через точку:
1) M (−3; 10);
2) N (4; −13);
3) K (0; −1)?

28.8.° Виразіть із даного рівняння змінну x через змінну y і знайдіть які-небудь три розв'язки цього рівняння:
1) $x + y = 12$;
2) $x - 7y = 5$;
3) $2x + 8y = 16$;
4) $-6x + 5y = 18$.

28.9.° Виразіть із даного рівняння змінну y через змінну x і знайдіть які-небудь два розв'язки цього рівняння:

1) $4x - y = 7$;
2) $-2x + y = 11$;
3) $5x - 3y = 15$.

28.10.° Знайдіть які-небудь три розв'язки рівняння:

1) $x - y = 10$;
2) $2y - 5x = 11$.

28.11.° Знайдіть які-небудь три розв'язки рівняння:

1) $6x + y = 7$;
2) $2x - 3y = -4$.

28.12.° Побудуйте графік рівняння:

1) $x - y = 4$;
2) $4x + y = 3$;
3) $x - 5y = 5$;
4) $3x + 2y = 6$.

28.13.° Побудуйте графік рівняння:

1) $x + y = -3$;
2) $6x + y = 0$;
3) $2x - 3y = 9$.

28.14.° Які пари чисел є розв'язками рівняння:

1) $0x + 4y = 20$;
2) $-3x + 0y = 27$?

28.15.° Побудуйте графік рівняння:

1) $4y = -8$;
2) $1{,}2x = 3{,}6$.

28.16.° Побудуйте графік рівняння:

1) $-0{,}2x = 1$;
2) $0{,}5y = 2$.

28.17.° У якій точці пряма $7y - 3x = 21$ перетинає: 1) вісь x; 2) вісь y?

28.18.° Знайдіть координати точок перетину прямої $0{,}3x + 0{,}2y = 6$ з осями координат.

28.19.° Складіть яке-небудь лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел $(-2; 1)$.

28.20.° Складіть яке-небудь лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел $(3; 5)$.

28.21.• Знайдіть розв'язок рівняння $7x + 8y = 30$, який складається з двох рівних чисел.

28.22.• Знайдіть розв'язок рівняння $-12x + 17y = -87$, який складається з двох протилежних чисел.

28.23.• При якому значенні a пара чисел $(a; 2a)$ є розв'язком рівняння $2x + 7y = 16$?

28.24.• При якому значенні a пара чисел $(-4; 2)$ є розв'язком рівняння:

1) $3x + 5y = a$;
2) $ax + 5y = 18$?

28.25.• При якому значенні a графік рівняння $11x - 13y = a + 4$ проходить через початок координат?

28.26.° При якому значенні a через точку A (5; −3) проходить графік рівняння:

1) $4x - 9y = a$; 2) $6x - ay = 15$?

27.27.° При якому значенні a графік рівняння $ax + 4y = 0$ проходить через точку:

1) A (12; −4); 2) B (0; 2); 3) O (0; 0)?

28.28.° При якому значенні b графік рівняння $5x + by = 0$ проходить через точку:

1) M (−4; −10); 2) N (0; 1); 3) K (−2; 0)?

28.29.° Графіком яких рівнянь є та сама пряма, що й графік рівняння $2x - 5y = 3$:

1) $4x - 10y = 6$;
2) $4x - 10y = 3$;
3) $2x - 5y = 6$;
4) $5y - 2x = -3$;
5) $x - 2{,}5y = 1{,}5$;
6) $-0{,}4x - y = 0{,}6$?

28.30.° Складіть рівняння з двома змінними за такою умовою:

1) довжина прямокутника дорівнює x м, ширина — y м, периметр — 18 м;
2) автобус їхав 4 год зі швидкістю x км/год і 3 год — зі швидкістю y км/год, проїхавши всього 250 км;
3) зошит коштує x грн, а ручка — y грн, 2 ручки дорожчі за 5 зошитів на 1,2 грн;
4) кусок сплаву масою x кг, який містив 12 % міді, та кусок сплаву масою y кг, який містив 20 % міді, сплавили разом і отримали новий сплав, що містить 9 кг міді;
5) в одному ящику було x кг цукерок, а в другому — y кг; після того як із першого ящика переклали в другий 8 кг цукерок, в обох ящиках цукерок стало порівну.

28.31.° Складіть рівняння з двома змінними за такою умовою:

1) бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює a см, основа — b см, периметр — 32 см;
2) один автомобіль проїхав зі швидкістю x км/год за 6 год на 32 км менше, ніж другий автомобіль зі швидкістю y км/год за 7 год;
3) в одному магазині було x ц яблук, а в другому — y ц; за день у першому магазині продали 14 % яблук, а в другому — 18 % яблук, причому в другому магазині продали на 1,2 ц яблук менше, ніж у першому.

28.32.° Доведіть, що прямі $5y - x = 6$ і $3x - 7y = 6$ перетинаються в точці A (9; 3).

28.33.° Доведіть, що прямі $4x - 3y = 12$ і $3x + 4y = -66$ перетинаються в точці B (−6; −12).

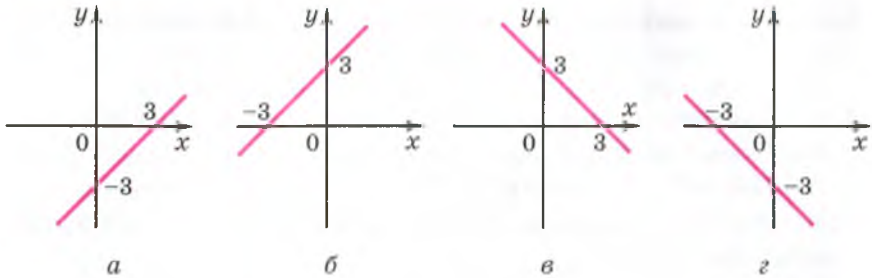


Рис. 28.4

28.34.° Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графіком якого є пряма, що проходить через початок координат і точку:
1) A (2; 8); 2) B (−6; 15).

28.35.° Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графіком якого є пряма, що проходить через початок координат і точку C (8; −12).

28.36.° Доведіть, що не існує такого значення a, при якому пряма $ax - 3y = 12$ проходить через початок координат.

28.37.° При якому значенні a точка перетину прямих $2x - 3y = -6$ і $4x + y = a$ належить осі абсцис?

28.38.° При якому значенні b точка перетину прямих $9x + 7y = 35$ і $x + by = -20$ належить осі ординат?

28.39.° При яких значеннях a і b пряма $ax + by = 24$ перетинає осі координат у точках A (−6; 0) і B (0; 12)?

28.40.° При яких значеннях a і b пряма $ax + by = 21$ перетинає осі координат у точках A (3; 0) і B (0; −7)?

28.41.° На якому з рисунків 28.4, *а–г* зображено графік рівняння $x + y = 3$?

28.42.° На якому з рисунків 28.5, *а–г* зображено графік рівняння $x - y = -5$?

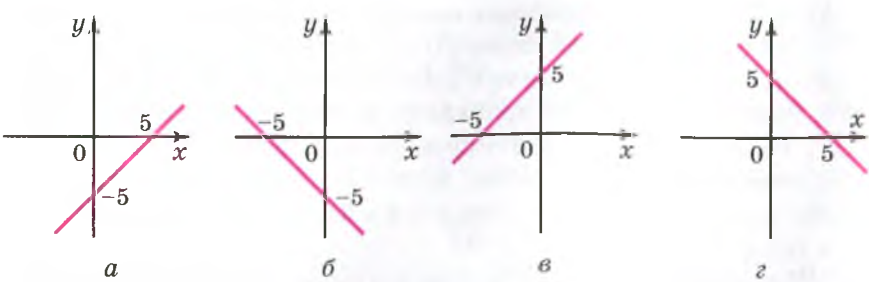


Рис. 28.5

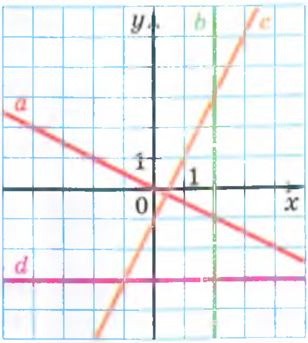


Рис. 28.6

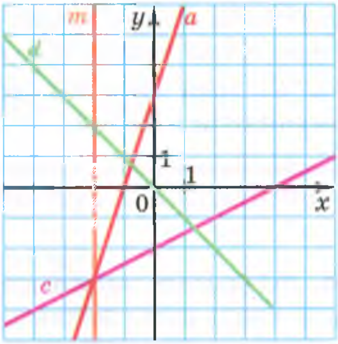


Рис. 28.7

28.43.° Яка з прямих, зображених на рисунку 28.6, є графіком рівняння:

1) $0x + y = -3$;
2) $2x - y = 1$;
3) $3x + 0y = 6$;
4) $x + 2y = 0$?

28.44.° Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графік якого перетинає осі координат у точках:

1) $A(-4; 0)$ і $B(0; 2)$;
2) $C(0; -3)$ і $D(5; 0)$.

28.45.° Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графік якого проходить через точки $M(6; 0)$ і $K(0; 6)$.

28.46.° Складіть рівняння, графіки яких зображено на рисунку 28.7.

28.47.•• Складіть рівняння, графіки яких зображено на рисунку 28.8.

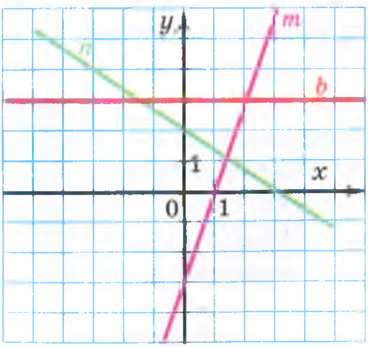


Рис. 28.8

28.48.•• Чи належить графіку рівняння $13x + 17y = -40$ хоча б одна точка, у якої обидві координати — додатні числа?

28.49.•• Чи належить графіку рівняння $4x - 8y = 7$ хоча б одна точка, у якої обидві координати — цілі числа?

28.50.•• Скільки існує пар простих чисел $(x; y)$, які є розв'язками рівняння $5x - 6y = 3$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

28.51. Дві бригади виготовили 840 деталей, причому одна бригада виготовила на 80 % більше деталей, ніж друга. Скільки деталей виготовила кожна бригада?

28.52. Відомо, що 4 однакових екскаватори виривають котлован за 12 год. За який час 6 таких самих екскаваторів вириють 3 таких котловани?

28.53. Доведіть, що значення виразу $2^{36} + 4^{100} - 2^{32} - 4^{98}$ кратне числу: 1) 15; 2) 240.

28.54. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-8)^2 - (x-4)(x+4) = 0$;

2) $(4x-5)(4x+5) - (4x-1)^2 = 9 - 2x$.

28.55. Розкладіть на множники:

1) $6x^3 - 8x^2 + 3xy - 4y$;

2) $x^4 - 6x^2y + 9y^2 - 16$;

3) $\frac{125x^3}{27} - \frac{m^6n^9}{64}$;

4) $c^2 - 2c - b^2 - 4b - 3$.

Як будували міст між геометрією та алгеброю

Ідея координат зародилася дуже давно. Адже ще в давнину люди вивчали Землю, спостерігали зорі, а за результатами своїх досліджень складали карти, схеми.

У II ст. до н. е. давньогрецький учений Гіппарх уперше використав ідею координат для визначення місця розташування об'єктів на поверхні Землі.

Лише в XIV ст. французький учений Ніколя Орем (близько 1323–1392) уперше застосував у математиці ідею Гіппарха: він розбив площину на клітинки (подібно до того, як на клітинки поділено аркуш вашого зошита) і став задавати положення точок широтою та довготою.

Однак величезні можливості застосування цієї ідеї розкрили лише в XVII ст. видатні французькі математики П'єр Ферма і Рене Декарт. У своїх працях ці вчені показали, як завдяки системі координат можна переходити від точок до чисел, від ліній — до рівнянь, від геометрії — до алгебри.

Французький математик, за фахом юрист. Один із засновників теорії чисел. Автор низки видатних праць у різних галузях математики, які зробили значний вплив на подальший розвиток математики.

П'єр Ферма́
(1601–1665)

Незважаючи на те що П. Ферма опублікував свою працю на рік раніше, ніж Р. Декарт, ту систему координат, якою дотепер користуються математики, назвали **декартовою**. Це пов'язано з тим, що Р. Декарт у праці «Міркування про метод» винайшов нову зручну буквену символіку, яку з невеликими змінами ми використовуємо й сьогодні. Слідом за ним ми позначаємо змінні останніми буквами латинського алфавіту x, y, z, а коефіцієнти — першими: a, b, c, ... Звичні нам позначення степенів x^2, x^3, y^5 і т. д. також увів Р. Декарт.

Французький математик, філософ, фізик, фундатор аналітичної геометрії та сучасної математичної символіки. Автор низки наукових відкриттів у механіці та оптиці.

Рене Декарт
(1596–1650)

29. Системи рівнянь із двома змінними. Графічний метод розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними

Легко перевірити, що пара чисел (−2; 0) є розв'язком як рівняння $x^2+y^2=4$, так і рівняння $y=x^2-4$. У таких випадках говорять, що пара чисел (−2; 0) — **спільний розв'язок** зазначених рівнянь.

На рисунку 29.1 зображено графіки рівнянь $-6x+5y=9$ і $4x+3y=13$. Вони перетинаються в точці M (1; 3). Ця точка належить кожному з графіків. Отже, пара чисел (1; 3) є спільним розв'язком даних рівнянь.

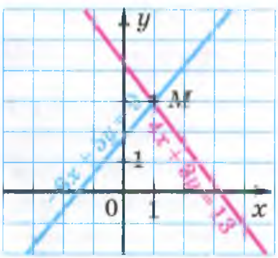


Рис. 29.1

Якщо поставлено завдання знайти сторони прямокутника, площа якого дорівнює 12 см², а периметр — 14 см, то треба знайти спільний розв'язок рівнянь $xy=12$ і $2x+2y=14$, де x см і y см — довжини сусідніх сторін прямокутника.

Якщо треба знайти всі спільні розв'язки кількох рівнянь, то говорять, що треба розв'язати **систему рівнянь.**

Систему рівнянь записують за допомогою фігурної дужки.

Так, запис

$$\begin{cases} xy=12, \\ 2x+2y=14 \end{cases}$$

є математичною моделлю задачі про знаходження сторін прямокутника, площа якого дорівнює 12 см², а периметр — 14 см.

Система

$$\begin{cases} -6x+5y=9, \\ 4x+3y=13 \end{cases}$$

є математичною моделлю задачі про знаходження координат спільних точок двох прямих (рис. 29.1).

Обидва рівняння цієї системи є лінійними. Тому цю систему називають **системою двох лінійних рівнянь із двома змінними.**

Означення. Розв'язком системи рівнянь із двома змінними називають пару значень змінних, яка перетворює кожне рівняння в правильну рівність.

Із прикладу, наведеного на початку пункту, випливає, що пара чисел $(-2; 0)$ є розв'язком системи

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$$

Проте це зовсім не означає, що дану систему розв'язано.

Означення. Розв'язати систему рівнянь — це означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Також можна сказати: **розв'язати систему рівнянь — це означає знайти множину її розв'язків.**

Пара чисел $(-2; 0)$ не вичерпує всіх розв'язків останньої системи. Наприклад, пара чисел $(2; 0)$ — також її розв'язок. Цю систему, як і систему, отриману в задачі про прямокутник, ви навчитеся розв'язувати в курсі алгебри 9 класу.

А от систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = -4, \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

ми можемо розв'язати вже зараз. Очевидно, що перше рівняння цієї системи розв'язків не має, а отже, не існує і спільних розв'язків рівнянь, що входять до системи. Звідси можна зробити висновок: дана система розв'язків не має.

Так само можна вважати розв'язаною систему

$$\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13. \end{cases}$$

Справді, графіки рівнянь системи перетинаються в точці M $(1; 3)$ (рис. 29.1). Її координати є розв'язком кожного рівняння системи, а отже, і самої системи. Інших спільних точок графіки рівнянь не мають, таким чином, не має інших розв'язків і сама система. Висновок: пара чисел $(1; 3)$ — єдиний розв'язок даної системи.

Описаний метод розв'язування системи рівнянь називають **графічним**. Його суть полягає в такому:

- *побудувати на одній координатній площині графіки рівнянь, що входять до системи;*
- *знайти координати всіх точок перетину побудованих графіків;*
- *отримані пари чисел і будуть шуканими розв'язками.*

Не будь-яку систему рівнянь доцільно розв'язувати графічно. Наприклад, якщо пара чисел $\left(\frac{1}{17}; -\frac{36}{85}\right)$ є розв'язком якоїсь системи, то зрозуміло, що графічно встановити цей факт украй складно. А тому графічний метод зазвичай застосовують тоді, коли розв'язок достатньо знайти наближено. Те, що пара чисел (1; 3) є розв'язком системи $\begin{cases} -6x+5y=9, \\ 4x+3y=13, \end{cases}$ підтверджує безпосередня підстановка цієї пари в кожне з рівнянь системи, тобто перевірка.

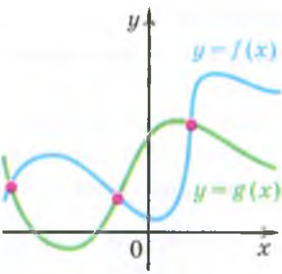


Рис. 29.2

Графічний метод є ефективним і тоді, коли треба визначити кількість розв'язків системи. Наприклад, на рисунку 29.2 зображено графіки деяких функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$. Ці графіки мають три спільні точки. Це дозволяє нам стверджувати, що система $\begin{cases} y=f(x), \\ y=g(x) \end{cases}$ має три розв'язки.

З'ясуємо, скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь із двома змінними.

Якщо одне з рівнянь системи не має розв'язків, то очевидно, що вся система розв'язків не має.

Розглянемо випадок, коли кожне з рівнянь системи має розв'язки.

Якщо графіком одного з рівнянь системи є площина, то очевидно, що система має безліч розв'язків. Справді, площина та проведена на ній пряма мають безліч спільних точок.

Наприклад, система $\begin{cases} 0x+0y=0, \\ 2x-3y=15 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

Якщо графіками рівнянь, що входять до системи лінійних рівнянь, є прямі, то кількість розв'язків цієї системи залежить від взаємного розміщення двох прямих на площині:

1) *якщо прямі перетинаються, то система має єдиний розв'язок;*
2) *якщо прямі збігаються, то система має безліч розв'язків;*
3) *якщо прямі паралельні, то система розв'язків не має.*

Приклад, який відповідає випадку, коли система має єдиний розв'язок, ми вже розглянули вище. Це система $\begin{cases} -6x+5y=9, \\ 4x+3y=13. \end{cases}$

Тепер звернемося до прикладів, що ілюструють випадки 2 і 3.

Так, якщо в системі

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - y = 1, \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

обидві частини першого рівняння помножити на 2, то розв'язки цього рівняння, а отже, і всієї системи не зміняться.

Маємо:

$$\begin{cases} x - 2y = 2, \\ x - 2y = 2. \end{cases}$$

Очевидно, що розв'язки цієї системи збігаються з розв'язками рівняння $x - 2y = 2$. Проте це рівняння має безліч розв'язків, отже, і розглядувана система також має безліч розв'язків.

Наведемо приклад системи, яка не має розв'язків:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 2, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Справді, помножимо обидві частини першого рівняння системи на 3. Отримаємо:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Зрозуміло, що не існує такої пари значень x і y, при яких вираз $2x + 3y$ одночасно набуває значення і 6, і 7.

На закінчення зазначимо, що саме графічний метод нам підказав, що не існує системи лінійних рівнянь, яка мала б, наприклад, рівно два, або рівно три, або рівно 100 й т. п. розв'язків.

?

1. У якому випадку говорять, що треба розв'язати систему рівнянь?

2. Що є розв'язком системи рівнянь із двома змінними?

3. Що означає розв'язати систему рівнянь?

4. У чому суть графічного методу розв'язування систем рівнянь із двома змінними?

5. Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь із двома змінними?

6. Яким є взаємне розміщення прямих, що є графіками двох лінійних рівнянь із двома змінними, які складають систему рівнянь, якщо:

1) система має єдиний розв'язок;
2) система не має розв'язків;
3) система має безліч розв'язків?

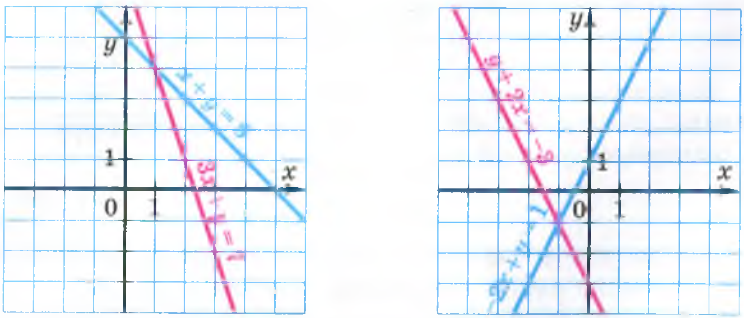
ВПРАВИ

29.1.° Яка з пар чисел (−2; 1), (2; −1), (6; 4), (8; −4) є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 3x - 8y = -14, \\ 4x + y = 28? \end{cases}$

29.2.° Розв'язком яких систем є пара чисел (−5; 2):

1) $\begin{cases} 7x + 2y = 31, \\ 4x - 5y = -30; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y - 2x = 16, \\ 6x + 7y = -16; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = -9, \\ 10y - x = 15? \end{cases}$

29.3.° Визначте координати точки перетину прямих, зображених на рисунку 29.3. Запишіть відповідну систему рівнянь, перевірте знайдений розв'язок системи, підставивши координати точки перетину прямих у рівняння системи.



а *б*

Рис. 29.3

29.4.° Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + 2y = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = -5, \\ 4x - y = -5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 2x - y = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 3x - y = 9; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7x - 3y = -26, \\ y - 2x = 8. \end{cases}$

29.5.° Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 5x + y = -18; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ y - x = -2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 5y = 10, \\ 4x - y = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x - y = -1. \end{cases}$

29.6.• Складіть яку-небудь систему двох лінійних рівнянь із двома змінними, розв'язком якої є пара значень змінних:

1) $x = 3$, $y = 2$; 2) $x = -4$, $y = 1$; 3) $x = 5$, $y = 0$.

29.7.˙ Складіть яку-небудь систему двох лінійних рівнянь із двома змінними, розв'язком якої є пара чисел (2; −2).

29.8.˙ Пара чисел (6; 4) є розв'язком системи рівнянь:

1) $\begin{cases} ax+2y=26, \\ 4x+by=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+by=6, \\ ax+by=0. \end{cases}$

Знайдіть значення a і b.

29.9.˙ При яких значеннях a і b пара чисел (−2; 3) є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} ax-3y=-13, \\ 7x+by=1? \end{cases}$

29.10.˙ Чи має розв'язок система рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x-7y=6, \\ 8x-28y=24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=-2, \\ 6x+3y=9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y=0{,}5, \\ 2x+4y=2? \end{cases}$

29.11.˙ Чи має розв'язок система рівнянь:

1) $\begin{cases} x-y=4, \\ 3x-3y=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-1{,}5y=-4, \\ 3y-2x=8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 9x+9y=18, \\ x+y=2? \end{cases}$

29.12.˙˙ До рівняння $2x - 3y = 6$ підберіть друге лінійне рівняння таке, щоб отримати систему рівнянь, яка:

1) має єдиний розв'язок;
2) має безліч розв'язків;
3) не має розв'язків.

29.13.˙˙ До рівняння $x - y = 2$ підберіть друге лінійне рівняння таке, щоб отримати систему рівнянь, яка:

1) має єдиний розв'язок;
2) має безліч розв'язків;
3) не має розв'язків.

29.14.˙˙ При яких значеннях a не має розв'язків система рівнянь $\begin{cases} 8x+9y=7, \\ 8x+9y=a? \end{cases}$

29.15.˙˙ При якому значенні a має безліч розв'язків система рівнянь:

1) $\begin{cases} x+5y=4, \\ 4x+20y=a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+ay=12, \\ 9x-15y=36? \end{cases}$

29.16.˙˙ При яких значеннях a система рівнянь:

1) $\begin{cases} 7x-12y=14, \\ 7x-12y=a \end{cases}$ не має розв'язків;

2) $\begin{cases} 6x+ay=4, \\ 3x-5y=2 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

29.17.•• Підберіть такі значення a і b, при яких система рівнянь $\begin{cases} x-2y=3, \\ ax+4y=b: \end{cases}$

1) має безліч розв'язків;
2) має єдиний розв'язок;
3) не має розв'язків.

29.18.•• Підберіть такі значення m і n, при яких система рівнянь $\begin{cases} x+y=5, \\ 3x-my=n: \end{cases}$

1) має безліч розв'язків;
2) має єдиний розв'язок;
3) не має розв'язків.

29.19.•• Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} |x|-y=0, \\ x-y=-4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} |x|-y=0, \\ x+3y=4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y+|x|=0, \\ x+y=2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-|y|=0, \\ 2x-y=3. \end{cases}$

29.20.•• Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ x+2y=3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} |y-2x|=3, \\ x-2y=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=4, \\ |x+y|=2. \end{cases}$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

29.21. Зливок сплаву міді й олова масою 5,5 кг містить міді на 20 % більше, ніж олова. Знайдіть масу міді в цьому зливку.

29.22. З Києва до Лубен, відстань між якими дорівнює 200 км, виїхав автобус. Через 32 хв після виїзду автобуса назустріч йому з Лубен виїхав автомобіль зі швидкістю, на 20 км/год більшою за швидкість автобуса. З якою швидкістю рухався автобус, якщо вони зустрілися через 1,2 год після виїзду автомобіля?

29.23. Знайдіть чотири послідовних непарних натуральних числа, сума квадратів яких дорівнює 164.

29.24. Доведіть, що коли $x + y = a - 1$, то $ax + x + ay + y + 1 = a^2$.

29.25. Остача при діленні числа a на 5 дорівнює 4, а остача при діленні на 5 числа b дорівнює 3. Доведіть, що значення виразу $a^2 + b^2$ кратне 5.

30. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом підстановки

Якщо математикам трапляється нова задача, то зазвичай вони намагаються звести її розв'язування до розв'язування вже знайомої задачі.

Покажемо, як розв'язування системи лінійних рівнянь із двома змінними можна звести до розв'язування лінійного рівняння з однією змінною. А з останньою задачею ви вже знайомі.

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases} \qquad (1)$$

З першого рівняння виразимо змінну y через змінну x:

$$y = 2x - 8.$$

Підставимо в друге рівняння системи замість змінної y вираз $2x - 8$. Отримаємо систему

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2(2x - 8) = 5. \end{cases} \qquad (2)$$

Ця система та вихідна мають одні й ті самі розв'язки, тобто множини їхніх розв'язків збігаються. Доведемо це.

Нехай пара чисел $(x_0; y_0)$ є розв'язком системи (1). Тоді є правильними числові рівності $2x_0 - y_0 = 8$ і $3x_0 + 2y_0 = 5$. Із першої рівності отримуємо, що $y_0 = 2x_0 - 8$. Замінимо в другій рівності число y_0 на рівне йому число $2x_0 - 8$. Отримаємо: $3x_0 + 2(2x_0 - 8) = 5$. Отже, виконуються дві рівності: $2x_0 - y_0 = 8$ і $3x_0 + 2(2x_0 - 8) = 5$. Це означає, що пара чисел $(x_0; y_0)$ є розв'язком системи (2).

Нехай пара чисел $(x_1; y_1)$ є розв'язком системи (2). Тоді є правильними числові рівності $2x_1 - y_1 = 8$ і $3x_1 + 2(2x_1 - 8) = 5$. Із першої рівності отримуємо, що $y_1 = 2x_1 - 8$. Замінимо в другій рівності число $2x_1 - 8$ на рівне йому число y_1. Отримаємо: $3x_1 + 2y_1 = 5$. Отже, виконуються дві рівності: $2x_1 - y_1 = 8$ і $3x_1 + 2y_1 = 5$. Це означає, що пара чисел $(x_1; y_1)$ є розв'язком системи (1).

Ми показали, що кожний розв'язок системи (1) є розв'язком системи (2) і, навпаки, кожний розв'язок системи (2) є розв'язком системи (1). Отже, множини розв'язків систем (1) і (2) збігаються.

Таким чином, щоб розв'язати систему (1), достатньо розв'язати систему (2).

Друге рівняння системи (2) є рівнянням з однією змінною. Розв'яжемо його:

$$3x + 2(2x - 8) = 5;$$
$$3x + 4x - 16 = 5;$$
$$7x = 21;$$
$$x = 3.$$

Підставимо знайдене значення змінної x у рівняння $y = 2x - 8$. Отримаємо:

$$y = 2 \cdot 3 - 8;$$
$$y = -2.$$

Пара чисел (3; −2) — шуканий розв'язок.

Описаний тут спосіб розв'язування системи називають **методом підстановки.**

Отже, *щоб розв'язати систему лінійних рівнянь методом підстановки, треба:*

1) *виразити з будь-якого рівняння системи одну змінну через другу;*
2) *підставити в інше рівняння системи замість цієї змінної вираз, отриманий на першому кроці;*
3) *розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;*
4) *підставити знайдене значення змінної у вираз, отриманий на першому кроці;*
5) *обчислити значення другої змінної.*

Цю послідовність дій можна назвати **алгоритмом** розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними методом підстановки.

ВПРАВИ

30.1.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ 2x + y = 9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2y - 8, \\ x - 4y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 6y, \\ x + 5y = 88; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + y = 10, \\ 4x - 7y = 2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5y - x = 8, \\ 5x - 4y = 23; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x - 5y = 46; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 15 - x = 2y, \\ 4x - 3y = 27; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5x - y = 6{,}2, \\ 0{,}8x + 3y = 13. \end{cases}$

30.2.° Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 4x + y = 12, \\ 7x + 2y = 20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 8y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4y - x = 11, \\ 5x - 2y = 17; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x - y = -1, \\ 2x - 3y = -11; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 9y - 2x = -25; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x - 3y = 0, \\ 15x + 2y = 55. \end{cases}$

30.3.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4x - 3y = 15, \\ 3x - 4y = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 5x + 2y = 24; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5y - 6x = 4, \\ 7x - 4y = -1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x + 5y = 1, \\ 8x - 2y = 38; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5a - 4b = 3, \\ 2a - 3b = 11; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 8m - 2n = 11, \\ 9m + 4n = 8. \end{cases}$

30.4.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 5x + 2y = 15, \\ 8x + 3y = 20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x + 4y = 5, \\ 3x + 2y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 8p - 5q = -11, \\ 5p - 4q = -6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6u - 5v = -38, \\ 2u + 7v = 22. \end{cases}$

30.5.• Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 6 - 5(x - y) = 7x + 4y, \\ 3(x + 1) - (6x + 8y) = 69 + 3y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 2, \\ 5x - y = 34; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6y - 5x = 1, \\ \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{3y-x}{4} = -4\dfrac{3}{4}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{1,5x-3}{3} + \dfrac{7-3y}{8} = 3, \\ \dfrac{2,5x-2}{3} - \dfrac{2y+1}{6} = x - 0,5. \end{cases}$

30.6.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 6x + 3 = 5x - 4(5y + 4), \\ 3(2x - 3y) - 6x = 8 - y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} - \dfrac{y-4}{7} = 1, \\ 6y - x = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{8} + \dfrac{x-y}{6} = 4, \\ \dfrac{3x+y}{4} - \dfrac{2x-5y}{3} = 5. \end{cases}$