А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник для 7 класу з поглибленим вивченням математики

ПРОПЕДЕВТИКА ПОГЛИБЛЕНОГО ВИВЧЕННЯ

Схвалено для використання у загальноосвітніх навчальних закладах

Харків
«Гімназія»
2015

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721
М52

*Схвалено для використання
у загальноосвітніх навчальних закладах
комісією з математики
Науково-методичної ради з питань освіти
Міністерства освіти і науки України*
(лист Інституту інноваційних технологій і змісту освіти
від 07.04.2015 № 14.1/12-Г-217)

Мерзляк А. Г.
М52 Геометрія. Пропедевтика поглибленого вивчення : навч. посіб. для 7 кл. з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2015. — 192 с. : іл.
ISBN 978-966-474-252-5.

Посібник містить матеріал підручника «Геометрія. 7 клас» (автори А. Г. Мерзляк, В. В. Полонський, М. С. Якір) і додатковий матеріал для поглибленого вивчення курсу геометрії 7 класу. Подано величезний дидактичний матеріал — від простих задач до задач високого рівня складності.

Матеріал посібника є пропедевтикою для засвоєння курсу поглибленого вивчення планіметрії у 8 і 9 класах. Учні та вчителі гімназій, ліцеїв, класів з поглибленим вивченням математики можуть використовувати посібник як повноцінний і самодостатній курс геометрії 7 класу.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721

ISBN 978-966-474-252-5

ВІД АВТОРІВ

УЧНЯМ

Любі семикласники!

Ви зробили серйозний крок у своєму житті: вирішили продовжувати освіту в класі з поглибленим вивченням математики. Вітаємо вас із цим вибором і сподіваємося, що ви не розчаруєтесь у своєму рішенні.

Навчатися в математичному класі не просто. Треба бути наполегливим і завзятим, уважним і акуратним, при цьому найголовніше — не бути байдужим до математики, а любити цю красиву науку.

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — **геометрію**. Зверніть увагу, що слова «геодезія» та «геометрія» мають однакову частину — «гео», що в перекладі з грецької означає «земля». Проте якщо на уроках географії в 6 класі ви дійсно займалися землеописом («графія» грецькою — «опис»), то на уроках геометрії вам не доведеться займатися землемірянням («метрео» грецькою — «міряти»).

Геометрія — одна з найдавніших наук. Її назву можна пояснити тим, що зародження та розвиток геометрії були тісно пов'язані з різноманітною практичною діяльністю людини: розмічанням меж земельних ділянок, будівництвом шляхів, зрошувальних каналів та інших споруд, тобто геометрія, як говорять у таких випадках, була *прикладною наукою*. Поступово, крок за кроком людство накопичувало знання, і геометрія перетворилася на красиву та досконалу, строгу та послідовну математичну теорію. Знайомитися із цією наукою та вчитися застосовувати набуті знання на практиці ви й будете на уроках геометрії.

а *б*

Рис. 1. Архітектурні споруди:
а — готель «Салют» (м. Київ);
б — адміністративна будівля (м. Лондон)

Рис. 2. Сирецька телевізійна вежа (м. Київ)

Знати геометрію надзвичайно важливо. Дійсно, подивіться навкруги — усюди геометрія, точніше, **геометричні фігури**: відрізки, трикутники, прямокутники, прямокутні паралелепіпеди, кулі тощо.

Без глибоких геометричних знань не могли з'явитися складні будівельні конструкції (рис. 1, 2), кораблі та літаки (рис. 3) і навіть деталі дитячого конструктора та узори вишиванок (рис. 4). Створення узорів потребує від майстрині мати уявлення про такі геометричні поняття, як симетрія та паралельне перенесення. Не знаючи геометрії, неможливо стати хорошим інженером-конструктором, токарем, столяром, ученим, архітектором, дизайнером, модельєром,

а *б*

Рис. 3. Машинобудівні конструкції:
а — корабель на стапелях Миколаївського суднобудівного заводу;
б — літак Ан-225 («Мрія»)

а *б*

Рис. 4. Геометрія в повсякденності:

а — дитячий конструктор; *б* — узор вишиванки

спеціалістом з комп'ютерної графіки тощо. Узагалі, знання з геометрії — важлива складова людської культури.

Геометрія — дуже цікавий предмет. Ми сподіваємося, що ви в цьому скоро переконаєтеся, чому сприятиме підручник, який ви тримаєте. Ознайомтеся з його структурою.

Підручник розділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Вивчаючи його, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено «зірочкою» (*)).

Крім того, у підручнику ви зможете прочитати цікаві оповідання з історії геометрії.

Дерзайте! Бажаємо успіху!

УЧИТЕЛЯМ

Шановні колеги!

Зрозуміло, що в межах загальноосвітньої школи неможливо реалізувати формально-логічний принцип побудови курсу геометрії: покласти в основу систему аксіом, а далі будувати викладення дедуктивно, тобто доводити теореми логічно строго, базуючись на аксіомах і раніше доведених фактах. Це можна пояснити тим, що кількість учнів (особливо семикласників), схильних до дедуктивного мислення, обмежена. Насправді більшості притаманний наочно-образний тип мислення. Тому для дитини апеляція до наочної очевидності є цілком природною та виправданою.

На підставі викладеного, в основу цього підручника покладено **наочно-дедуктивний принцип у поєднанні із частковою аксіоматизацією.**

Ми вважаємо, що мета вивчення геометрії в школі — це не тільки розвиток логічного мислення та вміння проводити доведення. Автори підручника ставлять ширшу мету: уточнити уявлення учнів про елементарні геометричні об'єкти (точка, пряма, промінь, відрізок, кут), ознайомити їх з найважливішими властивостями базових фігур елементарної геометрії (трикутник, коло, чотирикутник тощо), розвинути в них потребу в доведенні, тобто закласти основи дедуктивного й евристичного мислення, а головне — **навчити учнів застосовувати властивості геометричних фігур у процесі розв'язування практичних і теоретичних задач.** Ми сподіваємося, що ви оціните цей підручник як такий, що допоможе в реалізації зазначених цілей.

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте <u>за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби</u>. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Тож перетворімо разом шкільний курс геометрії в зрозумілий і привабливий предмет.

Бажаємо творчого натхнення та терпіння.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв'язування інших задач;

закінчення доведення теореми або розв'язання задачі;


рубрика «Коли зроблено уроки».

Зеленим кольором позначено номери задач, які рекомендовано для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які на розсуд учителя (з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу) можна розв'язувати усно.

Рівні відрізки на кресленнях позначено однаковою кількістю штрихів, рівні кути — однаковою кількістю дуг, за винятком відрізків і кутів, які треба знайти.

ВСТУП

Що вивчає геометрія?

Хоча геометрія — це новий для вас шкільний предмет, проте на уроках математики ви вже ознайомилися з азами цієї мудрої науки. Так, усі геометричні фігури, зображені на рисунку 5, вам добре відомі.

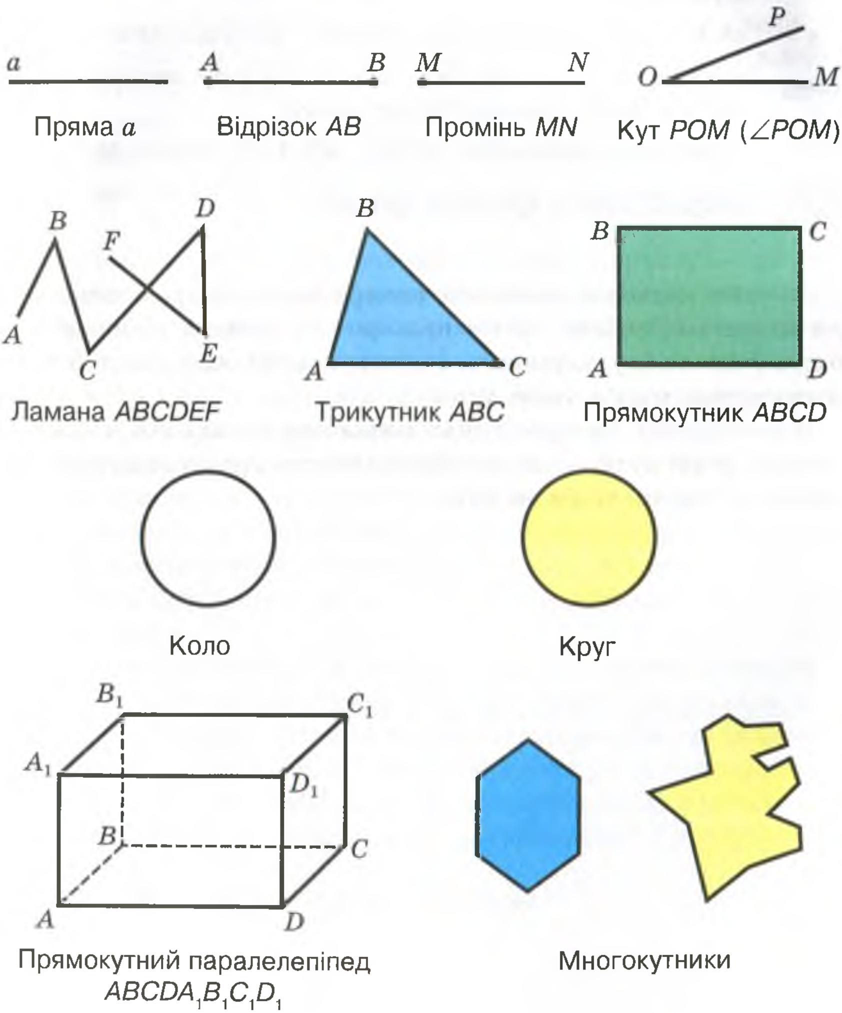


Рис. 5

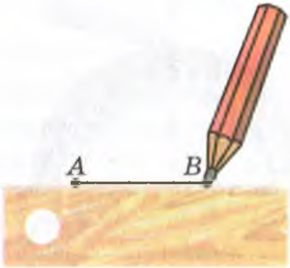


Рис. 6

Рис. 7

Ви вмієте за допомогою лінійки сполучати дві точки відрізком (рис. 6), за допомогою циркуля будувати коло (рис. 7), за допомогою лінійки й косинця будувати перпендикулярні та паралельні прямі (рис. 8), вимірювати довжину відрізка й будувати відрізок заданої довжини за допомогою лінійки з міліметровими поділками (рис. 9), знаходити величину кута й будувати кут заданої величини за допомогою транспортира (рис. 10), класифікувати трикутники (див. форзац).

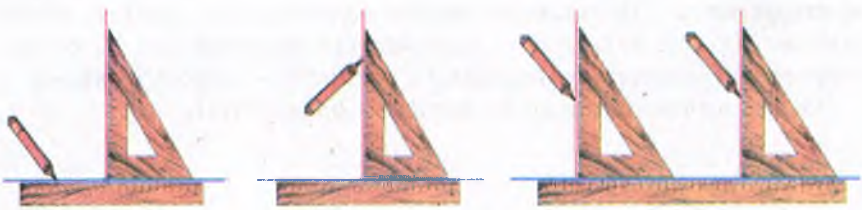


Рис. 8

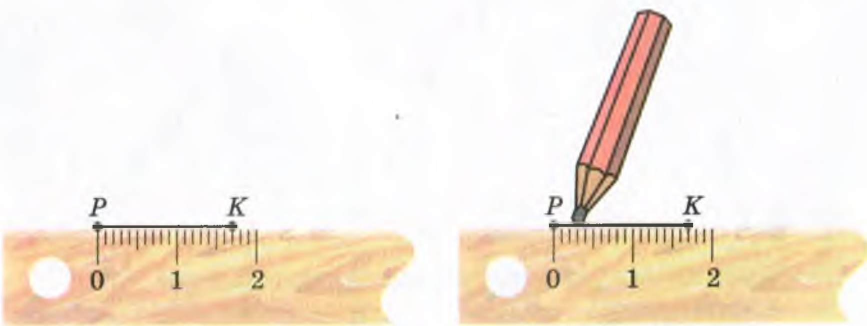


Рис. 9

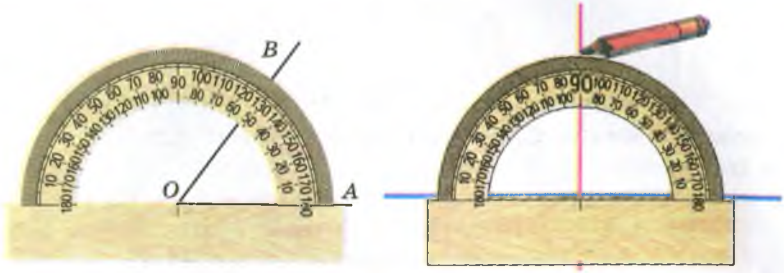


Рис. 10

Однак знати, який «вигляд» має фігура, або вміти виконувати прості побудови — це лише початкові знання *науки про властивості геометричних фігур*, тобто *геометрії*.

Під час вивчення *систематичного курсу* геометрії ви поступово, у певній послідовності вивчатимете властивості геометричних фігур, а отже, і самі фігури, як уже знайомі вам, так і нові. Це означає, що ви маєте навчитися за одними властивостями фігури встановлювати та, головне, **доводити** інші її властивості.

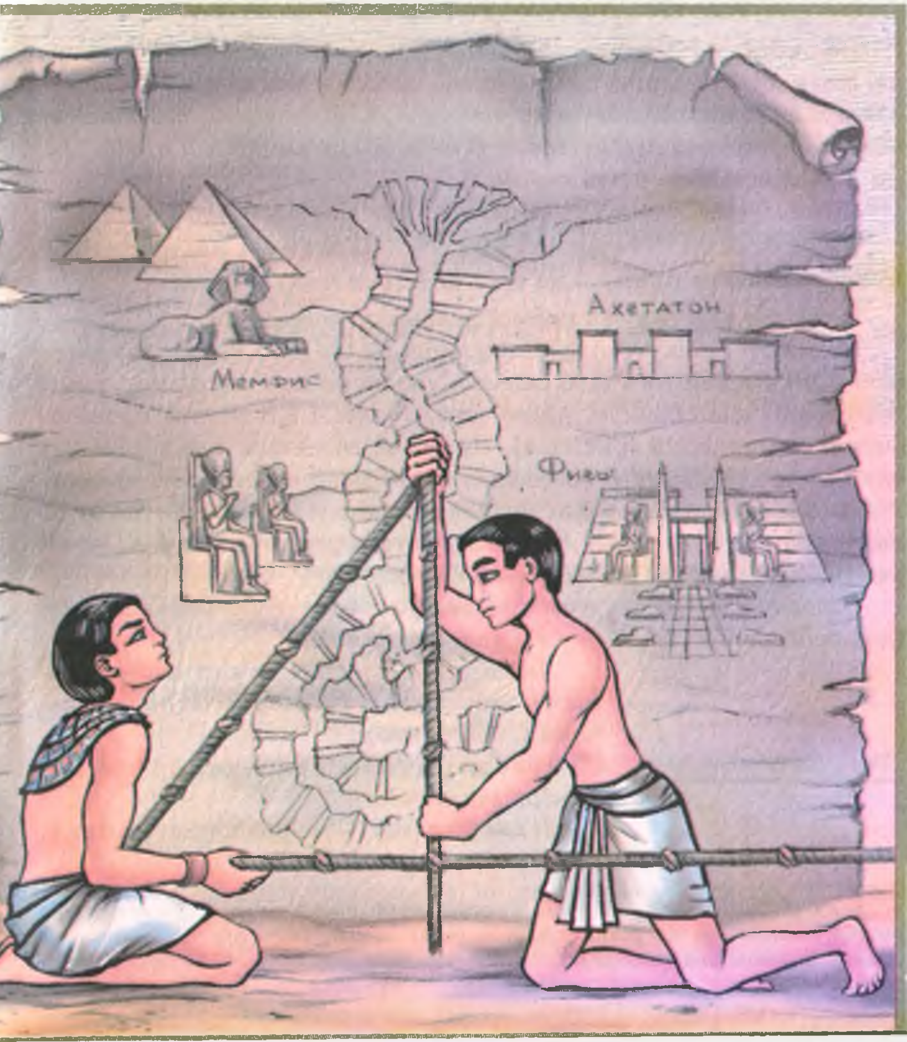
Шкільний курс геометрії традиційно поділяють на **планіметрію** та **стереометрію.** Планіметрія вивчає фігури на площині («планум» у перекладі з латинської — «площина»), стереометрія — фігури в просторі («стереос» у перекладі з грецької — «просторовий»).

Отже, ми приступаємо до вивчення планіметрії.

НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ §1

У цьому параграфі розглядаються знайомі вам з попередніх класів геометричні фігури, а саме: точки, прямі, відрізки, промені й кути.

Ви дізнаєтеся більше про властивості цих фігур. Деякі із цих властивостей навчитеся **доводити**. Слова **означення**, **теорема**, **аксіома** стануть для вас звичними, зрозумілими та часто вживаними.



1. Точки та прямі

Точка — найпростіша геометрична фігура. Це єдина фігура, яку неможливо розбити на частини. Наприклад, кожна з фігур, зображених на рисунку 1.1, розбита на частини. І навіть про фігуру, зображену на рисунку 1.2, яка складається з двох точок, можна сказати, що вона складається з двох частин: точки A й точки B.

Рис. 1.1

Рис. 1.2

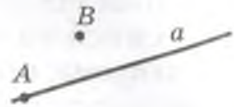


Рис. 1.3

На рисунку 1.3 зображено пряму a та дві точки A і B. Говорять, що *точка A належить прямій a*, або *точка A лежить на прямій a*, або *пряма a проходить через точку A*, і, відповідно, *точка B не належить прямій a*, або *точка B не лежить на прямій a*, або *пряма a не проходить через точку B*.

Пряма — це геометрична фігура, яка має певні властивості.

Основна властивість прямої. Через будь-які дві точки[1] можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Чому цю властивість прямої вважають основною?

Нехай про деяку лінію відомо лише те, що вона проходить через точки A і B. Для того щоб скласти уявлення про цю фігуру, такої інформації явно бракує. Адже через точки A і B можна провести багато різних ліній (рис. 1.4). Пряма ж задається цими точками однозначно. У цьому й полягає суть основної властивості прямої.

Ця властивість дозволяє позначати пряму, називаючи дві будь-які її точки. Так, пряму, що проходить через точки M і N, називають «пряма MN» (або «пряма NM»).

Основну властивість геометричної фігури ще називають аксіомою (докладніше про аксіоми ви дізнаєтеся в п. 6).

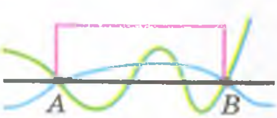


Рис. 1.4

Якщо треба пояснити зміст якогось поняття (терміна), то використовують **означення**. Наприклад:

1) **годинником** називають прилад для вимірювання часу;

2) **геометрія** — це розділ математики, який вивчає властивості фігур.

[1] Тут і далі, говорячи «дві точки», «три точки», «дві прямі» тощо, вважатимемо, що це різні точки й різні прямі. Випадок їх суміщення будемо обумовлювати окремо.

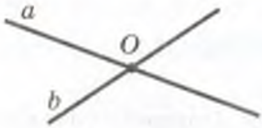


Рис. 1.5

Рис. 1.6

Означення використовують і в геометрії.

Означення. Дві прямі, які мають спільну точку, називають такими, що перетинаються.

На рисунку 1.5 зображено прямі a і b, які перетинаються в точці O.

Часто справедливість (істинність) якого-небудь факту встановлюють за допомогою *логічних міркувань*.

Розглянемо таку задачу. Відомо, що всі мешканці Геометричної вулиці — математики. Євген живе за адресою вул. Геометрична, 5. Чи є Євген математиком?

За умовою задачі Євген живе на Геометричній вулиці. А оскільки всі мешканці цієї вулиці математики, то Євген — математик.

Наведені логічні міркування називають **доведенням** того факту, що Євген — математик.

У математиці твердження, істинність якого встановлюють за допомогою доведення, називають **теоремою**.

Теорема 1.1. ***Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.***

Доведення. Нехай прямі a і b, що перетинаються, крім спільної точки A, мають ще одну спільну точку B (рис. 1.6). Тоді через дві точки A і B проходять дві прямі. А це суперечить основній властивості прямої. Отже, припущення про існування другої точки перетину прямих a і b неправильне. ◀

1. Яку фігуру не можна розбити на частини?
2. Сформулюйте основну властивість прямої.
3. Яка властивість прямої дозволяє позначати її, називаючи будь-які дві точки прямої?
4. Для чого використовують означення?
5. Які дві прямі називають такими, що перетинаються?
6. Як називають твердження, правильність якого встановлюють за допомогою доведення?
7. Сформулюйте теорему про дві прямі, що перетинаються.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1.1.° Проведіть пряму, позначте її буквою m. Позначте точки A і B, які лежать на цій прямій, і точки C, D, E, які не лежать на ній.

1.2.° Позначте точки M і K та проведіть через них пряму. Позначте на цій прямій точку E. Запишіть усі можливі позначення отриманої прямої.

1.3.° Проведіть прямі a і b так, щоб вони перетиналися. Позначте точку їхнього перетину буквою C. Чи належить точка C прямій a? прямій b?

1.4.° Позначте три точки так, щоб вони не лежали на одній прямій, і через кожну пару точок проведіть пряму. Скільки утворилося прямих?

1.5.° Позначте чотири точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій.

1.6.• Проведіть три прямі так, щоб кожні дві з них перетиналися. Позначте точки перетину цих прямих. Скільки можна отримати точок перетину?

1.7.• Позначте чотири точки так, щоби при проведенні прямої через кожні дві з них на рисунку: 1) утворилася одна пряма; 2) утворилися чотири прямі; 3) утворилися шість прямих. Проведіть ці прямі.

ВПРАВИ

1.8.° Користуючись рисунком 1.7:

1) укажіть усі позначені точки, які належать прямій a; прямій MK;
2) укажіть усі позначені точки, які не належать прямій a; прямій MK;
3) визначте, чи перетинаються прямі a і MK;
4) укажіть усі позначені точки, які належать прямій a, але не належать прямій MK.

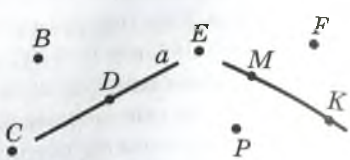


Рис. 1.7

1.9.° Користуючись рисунком 1.8, укажіть:
1) які з позначених точок належать прямій p, а які не належать їй;
2) яким прямим належить точка A; точка B; точка C; точка D; точка E;
3) які прямі проходять через точку C; точку B; точку A;
4) у якій точці перетинаються прямі k і p; прямі m і k;
5) у якій точці перетинаються три із чотирьох зображених на рисунку прямих.

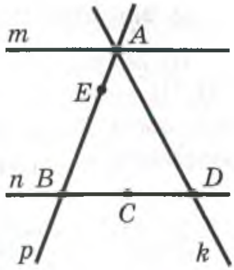


Рис. 1.8

1.10.• Точка C належить прямій AB. Чи є різними прямі AB і AC? Відповідь обґрунтуйте.

1.11.• Провели чотири прямі, кожні дві з яких перетинаються, причому через кожну точку перетину проходять тільки дві прямі. Скільки точок перетину при цьому утворилося?

1.12.•• Як треба розташувати шість точок, щоб вони визначали шість прямих?

1.13.•• Дану пряму перетинають чотири прямі. Скільки може утворитися точок перетину цих прямих з даною?

1.14.•• Провели чотири прямі, кожні дві з яких перетинаються. Скільки точок перетину може утворитися?

1.15.•• Провели п'ять прямих, кожні дві з яких перетинаються. Яка найменша можлива кількість точок перетину цих прямих? Яка найбільша кількість точок перетину може утворитися?

1.16.* Чи можна провести шість прямих і позначити на них 11 точок так, щоб на кожній прямій було позначено рівно чотири точки?

1.17.* На площині проведено три прямі. На першій прямій позначили п'ять точок, на другій — сім точок, а на третій — три точки. Яка найменша кількість точок може бути позначена?

1.18.* Чи можна позначити кілька точок і провести кілька прямих так, щоб на кожній прямій лежало рівно три позначені точки й через кожну точку проходило рівно три з проведених прямих?

1.19.* Дано n прямих. Відомо, що є п'ять точок, кожна з яких належить хоча б двом з даних прямих. Знайдіть найменше значення n.

1.20.* На площині позначено 10 точок. Відомо, що з будь-яких чотирьох точок можна вилучити одну так, що інші три точки лежать на одній прямій. Доведіть, що дев'ять з даних точок лежать на одній прямій.

2. Відрізок і його довжина

На рисунку 2.1 зображено пряму a, яка проходить через точки A і B. Ці точки обмежують частину прямої a, яку виділено червоним кольором. Таку частину прямої разом з точками A і B називають **відрізком**, а точки A і B — **кінцями** цього відрізка.

Рис. 2.1

Рис. 2.2

Рис. 2.3

Для будь-яких двох точок існує *єдиний* відрізок, для якого ці точки є кінцями, тобто *відрізок своїми кінцями задається однозначно*. Тому відрізок позначають, називаючи його кінці. Наприклад, відрізок, зображений на рисунку 2.2, позначають так: MN або NM (читають: «відрізок MN» або «відрізок NM»).

На рисунку 2.3 зображено відрізок AB і точку X, яка належить цьому відрізку, проте не збігається із жодним його кінцем. Точку X називають **внутрішньою точкою** відрізка AB. У такому випадку також говорять, що точка X **лежить між точками** A і B.

Таким чином, відрізок AB складається з точок A і B, а також усіх точок прямої AB, які лежать між точками A і B.

Означення. **Два відрізки називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.**

На рисунку 2.4 зображено рівні відрізки AB і CD. Пишуть: $AB = CD$.

Ви знаєте, що кожний відрізок має певну довжину й для її вимірювання треба вибрати **одиничний відрізок**. За одиничний можна взяти будь-який відрізок.

Наприклад, вважатимемо одиничним відрізок MN на рисунку 2.5. Цей факт записують так: $MN = 1$ од. Тоді вважають, що довжина відрізка AB дорівнює трьом **одиницям довжини**, і записують: $AB = 3$ од. Також уживають запис $AB = 3$, його читають: «відрізок AB дорівнює трьом». Для відрізка CD маємо: $CD = \frac{2}{3}$.

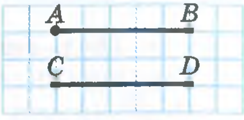


Рис. 2.4

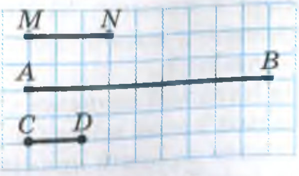


Рис. 2.5

На практиці найчастіше використовують такі одиничні відрізки: 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

Залежно від вибору одиниці довжини змінюється **числове значення довжини** відрізка. Наприклад, на рисунку 2.6 маємо: $AB = 17$ мм, або $AB = 1{,}7$ см, або $AB = 0{,}17$ дм тощо.

Рис. 2.6

У виробництві та в побуті використовують різноманітні прилади для вимірювання довжини відрізка (рис. 2.7): лінійку з поділками, рулетку, штангенциркуль, мікрометр, польовий циркуль.

Рис. 2.7

Рівні відрізки мають рівні довжини, і навпаки, *якщо довжини відрізків рівні, то рівні й самі відрізки.*

Якщо довжина відрізка AB більша за довжину відрізка MN, як, наприклад, на рисунку 2.5, то говорять, що відрізок AB більший за відрізок MN, і записують: $AB > MN$. Також можна сказати, що відрізок MN менший від відрізка AB, і записати: $MN < AB$.

Надалі, говорячи «сума відрізків», матимемо на увазі суму довжин цих відрізків.

Основна властивість довжини відрізка. Якщо точка C є внутрішньою точкою відрізка AB, то відрізок AB дорівнює сумі відрізків AC і CB, тобто

$$AB = AC + CB \text{ (рис. 2.8).}$$

Означення. Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB. Якщо точки A і B збігаються, то вважають, що відстань між ними дорівнює нулю.

$AB = AC + CB$

Рис. 2.8

Рис. 2.9

Означення. Серединою відрізка AB називають таку його точку C, що $AC = CB$.

На рисунку 2.9 точка C — середина відрізка AB.

Задача. Точки A, B і C належать одній прямій, $AB = 8$ см, відрізок AC на 2 см довший за відрізок BC. Знайдіть відрізки[1] AC і BC.

Розв'язання. В умові не вказано, яким є взаємне розміщення даних точок на прямій. Тому розглянемо три можливих випадки.

Рис. 2.10

Рис. 2.11

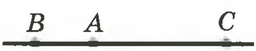


Рис. 2.12

1) Точка B — внутрішня точка відрізка AC (рис. 2.10). Тоді відрізок AC довший за відрізок BC на довжину відрізка AB, тобто на 8 см. Це суперечить умові. Отже, такий випадок неможливий.

2) Точка C — внутрішня точка відрізка AB (рис. 2.11). У цьому випадку $AC + CB = AB$. Нехай $CB = x$ см, тоді $AC = (x + 2)$ см. Маємо:

$$x + 2 + x = 8;$$
$$x = 3.$$

Отже, $BC = 3$ см, $AC = 5$ см.

3) Точка A — внутрішня точка відрізка BC (рис. 2.12). У цьому випадку $AB + AC = BC$ і тоді $AC < BC$. Це суперечить умові. Отже, такий випадок неможливий.

Відповідь: $AC = 5$ см, $BC = 3$ см. ◄

1. Скільки існує відрізків, кінцями яких є дві дані точки?
2. З яких точок складається відрізок AB?
3. Які два відрізки називають рівними?
4. Чи можна будь-який відрізок узяти за одиничний?
5. Що можна сказати про довжини рівних відрізків?
6. Що можна сказати про відрізки, які мають рівні довжини?
7. Сформулюйте основну властивість довжини відрізка.
8. Що називають відстанню між двома точками?
9. Чому дорівнює відстань між двома точками, що збігаються?
10. Яку точку називають серединою відрізка AB?

[1] Часто замість «Знайдіть довжину відрізка...» говорять: «Знайдіть відрізок...».

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

2.1.° Позначте дві точки A і B та проведіть через них пряму. Позначте точки C, D і E, які належать відрізку AB, і точки F, M і K, які не належать відрізку AB, але належать прямій AB.

2.2.° Проведіть пряму та позначте на ній три точки. Скільки утворилося відрізків?

2.3.° Позначте на прямій точки A, B, C і D так, щоб точка C лежала між точками A і B, а точка D — між точками B і C.

2.4.° Позначте на прямій точки A, B і C так, щоб виконувалася рівність $AC = AB + BC$.

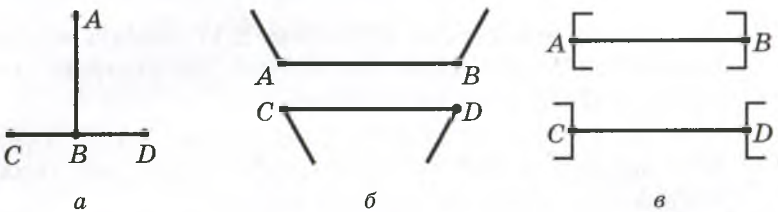


Рис. 2.13

2.5.° Порівняйте на око відрізки AB і CD (рис. 2.13). Перевірте свій висновок вимірюванням.

2.6.° Порівняйте на око відрізки AB і BC (рис. 2.14). Перевірте свій висновок вимірюванням.

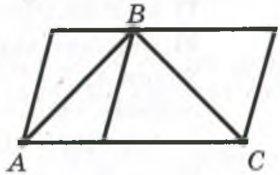


Рис. 2.14

ВПРАВИ

2.7.° Назвіть усі відрізки, які зображено на рисунку 2.15.

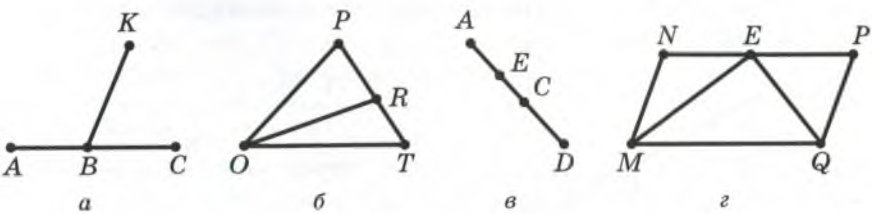


Рис. 2.15

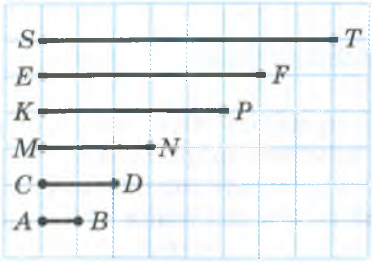


Рис. 2.16

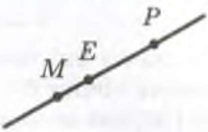


Рис. 2.17

2.8.° Знайдіть довжину кожного з відрізків, зображених на рисунку 2.16, якщо одиничний відрізок дорівнює відрізку: 1) AB; 2) MN.

2.9.° Яка з точок, позначених на рисунку 2.17, лежить між двома іншими? Запишіть відповідну рівність, що випливає з основної властивості довжини відрізка.

2.10.° Між якими точками лежить точка B (рис. 2.18)? Для кожного випадку запишіть відповідну рівність, яка випливає з основної властивості довжини відрізка.

2.11.° Точка D — внутрішня точка відрізка ME. Знайдіть:
1) відстань між точками M і E, якщо $MD = 1{,}8$ дм, $DE = 2{,}6$ дм;
2) довжину відрізка MD, якщо $ME = 42$ мм, $BE = 1{,}5$ см.

2.12.° Точки A, B і C лежать на одній прямій (рис. 2.19). Які з наведених тверджень правильні:
1) $AB + BC = AC$; 2) $AC + AB = BC$?

2.13.° Точка K є серединою відрізка MN. Чи можна сумістити накладанням: 1) відрізки MK і KN; 2) відрізки MK і MN?

2.14.° Точка K — середина відрізка MN, точка E — середина відрізка KN, $EN = 5$ см. Знайдіть відрізки MK, ME і MN.

2.15.° Точка C — внутрішня точка відрізка AB, довжина якого дорівнює 20 см. Знайдіть відрізки AC і BC, якщо:
1) відрізок AC на 5 см більший за відрізок BC;
2) відрізок AC у 4 рази менший від відрізка BC;
3) $AC : BC = 9 : 11$.

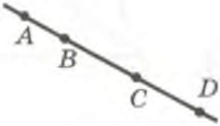


Рис. 2.18

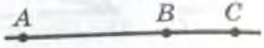


Рис. 2.19

Рис. 2.20

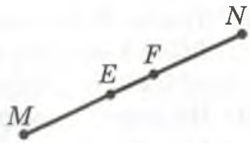


Рис. 2.21

Точка K належить відрізку CD, довжина якого дорівнює 28 см. Знайдіть відрізки CK і KD, якщо:
1) відрізок CK на 4 см менший від відрізка KD;
2) відрізок CK у 6 разів більший за відрізок KD;
3) $CK : KD = 3 : 4$.

Відрізки AB і CD рівні (рис. 2.20). Доведіть, що відрізки AC і BD теж рівні.

Відрізки ME і FN рівні (рис. 2.21). Доведіть, що $MF = EN$.

Точка C ділить відрізок AB, довжина якого дорівнює a, на два відрізки. Знайдіть відстань між серединами відрізків AC і BC.

Точки A, B і C лежать на одній прямій. Знайдіть відрізок BC, якщо $AB = 24$ см, $AC = 32$ см. Скільки розв'язків має задача?

На прямій позначено точки A, B і C так, що $AB = 15$ см, $AC = 9$ см. Знайдіть відстань між серединами відрізків AB і AC.

Відрізок EF дорівнює 12 см. Знайдіть на прямій EF усі точки, сума відстаней від кожної з яких до кінців відрізка EF дорівнює: 1) 12 см; 2) 15 см; 3) 10 см.

Через точки A і B проведено пряму. Де на цій прямій лежить точка C, відстань від якої до точки B у 2 рази більша, ніж відстань від неї до точки A?

Відрізок, довжина якого дорівнює 32 см, поділили на три нерівних відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 18 см. Знайдіть довжину середнього відрізка.

На прямій послідовно позначили точки A, B, C, D, E так, що $AB = 15$ см, $CE = 45$ см, $AC = BD$. Знайдіть відрізок DE.

На прямій позначено точки A, B, C, D так, що $AB = 8$ см, $BC = 30$ см, $CD = 12$ см, $DA = 10$ см. Знайдіть відрізок AC.

Чи можна на прямій позначити точки A, B, C, D, E так, щоб відстані між ними виявилися рівними: $AB = 4$ см, $BC = 7$ см, $CD = 9$ см, $DE = 6$ см, $AE = 8$ см?

Чи можна на прямій позначити точки A, B, C, D, E так, щоб відстані між ними виявилися рівними: $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $CD = 10$ см, $DE = 9$ см, $AE = 12$ см?

2.29.•• Точка B належить відрізку AC. Відомо, що $AB = 2$ см, $BC = 1$ см. На прямій AB укажіть усі точки M такі, що $AM + MB = MC$.

2.30.•• На прямій послідовно позначили точки A, B, C і D так, що відстань між будь-якими двома сусідніми точками дорівнює 1 см. На цій прямій знайдіть усі такі точки X, щоб сума $XA + XB + XC + XD$ набувала найменшого значення.

2.31.•• Яку найменшу кількість внутрішніх точок треба позначити на відрізках, зображених на рисунку 2.22, щоб на кожному з них було позначено по дві внутрішні точки?

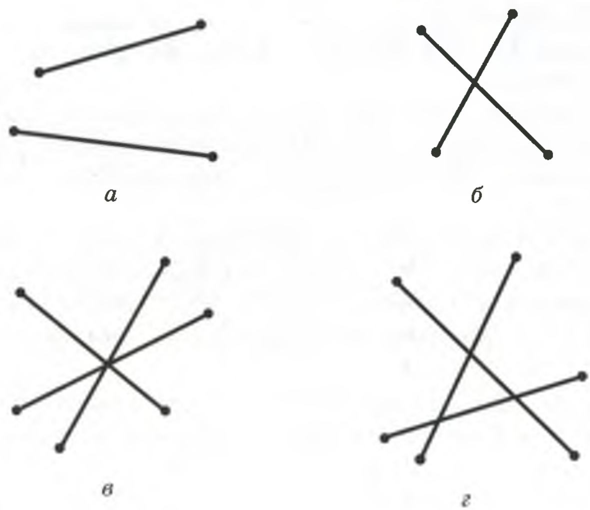


Рис. 2.22

2.32.•• Скільки точок треба позначити між точками A і B, щоб разом з відрізком AB утворилося шість відрізків?

2.33.•• На прямій послідовно позначили точки A, B і C так, що $AB = 3$ см, $BC = 5$ см. Користуючись тільки циркулем, поділіть відрізок AB на три рівних відрізки.

2.34.•• На шкалі лінійки нанесено тільки поділки 0 см, 5 см і 13 см (рис. 2.23). Як, користуючись цією лінійкою, можна побудувати відрізок завдовжки: 1) 3 см; 2) 2 см; 3) 1 см?

2.35.•• На шкалі лінійки нанесено тільки поділки 0 см, 7 см і 11 см. Як, користуючись цією лінійкою, можна побудувати відрізок завдовжки: 1) 8 см; 2) 5 см?

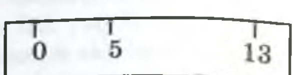


Рис. 2.23

3. Промінь. Кут. Вимірювання кутів

Проведемо пряму AB і позначимо на ній довільну точку O. Ця точка розбиває пряму на дві частини, які виділено на рисунку 3.1 різними кольорами. Кожну із цих частин разом з точкою O називають **променем** або **півпрямою.** Точку O називають **початком променя.**

Кожний із променів, які зображено на рисунку 3.1, складається з точки O та всіх точок прямої AB, що *лежать по один бік від точки* O.

Рис. 3.1

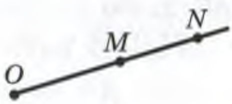


Рис. 3.2

Рис. 3.3

Це дає змогу позначати промінь, називаючи дві його точки: першою обов'язково вказують початок променя, другою — будь-яку іншу точку, яка належить променю. Так, промінь з початком у точці O (рис. 3.2) можна позначити OM або ON.

Промені OA та OB (рис. 3.1) доповнюють один одного до прямої. Також можна сказати, що об'єднанням цих променів є пряма.

Означення. **Два промені, які мають спільний початок і лежать на одній прямій, називають доповняльними.**

Наприклад, промені BC і BA — доповняльні (рис. 3.3). Їхнім об'єднанням є пряма AC. Зауважимо, що, об'єднавши промені CA та AC, ми також отримаємо пряму AC. Проте ці промені не є доповняльними: у них немає спільного початку.

На рисунку 3.4, *а* зображено фігуру, яка складається з двох променів OA та OB, що мають спільний початок. Ця фігура ділить площину на дві частини, які виділено різними кольорами. Кожну із цих частин разом із променями OA та OB називають **кутом.**

Промені OA та OB називають **сторонами кута,** а точку O — **вершиною кута.**

а *б*

Рис. 3.4

Як бачимо, кути на рисунку 3.4, *а* зовні суттєво відрізняються. Ця відмінність визначена такою властивістю. На променях *OA* та *OB* виберемо довільні точки *M* і *N* (рис. 3.4, *б*). Відрізок *MN* належить «**зеленому**» куту, а «**синьому**» куту належать лише кінці відрізка.

Надалі, говорячи «кут», матимемо на увазі лише той, який містить будь-який відрізок із кінцями на його сторонах. Ситуації, коли розглядатимуться кути, для яких ця умова не виконується, будуть спеціально обумовлені.

Існує кілька способів позначення кутів. Кут на рисунку 3.5 можна позначити так: $\angle MON$, або $\angle NOM$, або просто $\angle O$ (читають відповідно: «кут *MON*», «кут *NOM*», «кут *O*»).

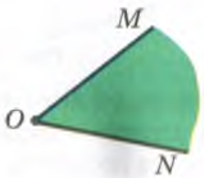


Рис. 3.5

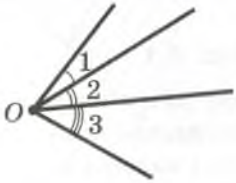


Рис. 3.6

На рисунку 3.6 зображено кілька кутів, які мають спільну вершину. Тут позначення кута однією буквою може призвести до плутанини. У таких випадках кути зручно позначати за допомогою цифр: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ (читають відповідно: «кут один», «кут два», «кут три»).

Означення. **Кут, сторонами якого є доповняльні промені, називають розгорнутим.**

На рисунку 3.7 промені *OA* та *OB* є доповняльними, тому кути, виділені зеленим і жовтим кольорами, є розгорнутими.

Будь-яка пряма ділить площину на дві **півплощини**, для яких ця пряма є **межею** (рис. 3.8). Вважають, що пряма належить кожній із двох півплощин, для яких вона є межею. Оскільки сторони розгорнутого кута утворюють пряму, то можна сказати, що розгорнутий кут — це півплощина, на межі якої позначено точку — вершину кута.

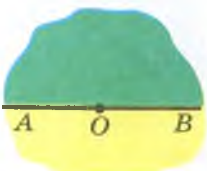


Рис. 3.7

Рис. 3.8

Означення. Два кути називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

На рисунку 3.9 зображено рівні кути ABC і MNK. Пишуть: $\angle ABC = \angle MNK$.

Зрозуміло, що всі розгорнуті кути рівні.

На рисунку 3.10 зображено кут AOB і промінь OC, який належить цьому куту, проте відмінний від його сторін. Говорять, що *промінь OC проходить між сторонами кута AOB* і ділить його на два кути AOC і COB.

Означення. Бісектрисою кута називають промінь з початком у вершині кута, який ділить цей кут на два рівних кути.

На рисунку 3.11 промінь OK — бісектриса кута AOB. Отже, $\angle AOK = \angle KOB$.

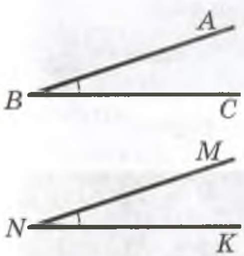


Рис. 3.9

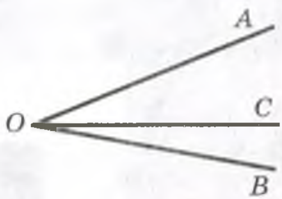


Рис. 3.10

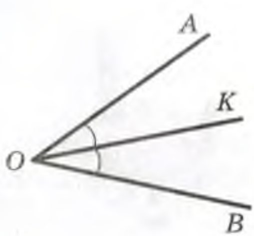


Рис. 3.11

Ви знаєте, що кожний кут має певну величину. Для її вимірювання треба вибрати одиницю виміру — **одиничний кут**. Вибрати його можна, наприклад, так. Розділимо розгорнутий кут на 180 рівних кутів (рис. 3.12). Кут, утворений двома сусідніми променями, беруть за одиничний. Його величину називають **градусом** і записують: 1°.

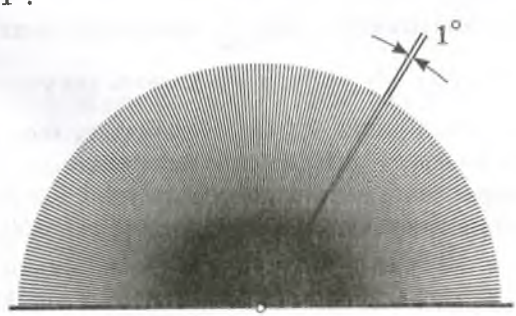


Рис. 3.12

Рис. 3.13

Наприклад, градусна міра (величина) кута AOB (рис. 3.13) дорівнює $20°$ (цей факт легко встановити за допомогою транспортира). У цьому випадку говорять: «кут AOB дорівнює $20°$» і записують: $\angle AOB = 20°$.

Із прийнятого означення градуса випливає, що *градусна міра розгорнутого кута дорівнює* $180°$.

Для вимірювання кутів на практиці, крім транспортира, використовують також інші прилади спеціального призначення (рис. 3.14): астролябію, теодоліт — для вимірювання на місцевості; бусоль — в артилерії; секстант — у морській справі.

Астролябія

Теодоліт

Бусоль

Секстант

Рис. 3.14

Для отримання більш точних результатів вимірювання кутів використовують частини градуса: $\frac{1}{60}$ градуса дорівнює одній мінуті ($1'$), тобто $1° = 60'$; $\frac{1}{60}$ мінути називають секундою ($1''$), тобто $1' = 60''$. Наприклад, запис $23°15'11''$ означає, що градусна міра кута становить 23 градуси 15 мінут 11 секунд.

Існують також інші одиниці виміру кутів: наприклад, у морській справі користуються одиницею 1 румб ($11°15'$).

Означення. Кут, градусна міра якого дорівнює $90°$, називають прямим. Кут, градусна міра якого менша від $90°$, називають гострим. Кут, градусна міра якого більша за $90°$, але менша від $180°$, називають тупим.

Рис. 3.15

На рисунку 3.15 зображено кути кожного з трьох видів.

Рівні кути мають рівні величини, і навпаки, *якщо величини кутів рівні, то рівні й самі кути*.

Якщо величина кута ABC більша за величину кута MNP, то говорять, що кут ABC більший за кут MNP, і записують: $\angle ABC > \angle MNP$. Також говорять, що кут MNP менший від кута ABC, і записують: $\angle MNP < \angle ABC$.

Надалі, говорячи «сума кутів», матимемо на увазі суму величин цих кутів.

Основна властивість величини кута. **Якщо промінь OC ділить кут AOB на два кути AOC і COB, то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ (рис. 3.16).**

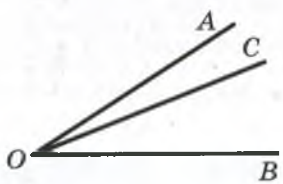


Рис. 3.16

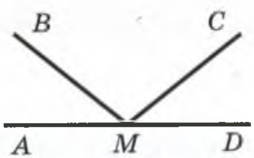


Рис. 3.17

Задача. На рисунку 3.17 $\angle AMC = \angle DMB$, $\angle BMC = 118°$. Знайдіть кут[1] AMB.

Розв'язання. Маємо: $\angle AMC = \angle AMB + \angle BMC$,

$$\angle DMB = \angle DMC + \angle BMC.$$

Оскільки $\angle AMC = \angle DMB$, то $\angle AMB = \angle DMC$.

Запишемо: $\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD = \angle AMD = 180°$.

Тоді $2\angle AMB + 118° = 180°$. Звідси $\angle AMB = 31°$.

Відповідь: 31°. ◀

[1] Часто замість «Знайдіть градусну міру кута...» говорять: «Знайдіть кут...».

1. Як називають фігуру, утворену точкою, що належить прямій, та однією із частин, на які ця точка ділить пряму? Як при цьому називають дану точку?
2. Як позначають промінь?
3. Які два промені називають доповняльними?
4. Як називають фігуру, утворену двома променями зі спільним початком та однією із частин, на які ці промені ділять площину? Як при цьому називають дані промені? їхній спільний початок?
5. Як позначають кут?
6. Який кут називають розгорнутим?
7. Як називають частини, на які пряма ділить площину?
8. Які два кути називають рівними?
9. Що називають бісектрисою кута?
10. У яких одиницях вимірюють кути?
11. Яка градусна міра розгорнутого кута?
12. Як називають кут, градусна міра якого дорівнює 90°?
13. Який кут називають гострим?
14. Який кут називають тупим?
15. Що можна сказати про величини рівних кутів?
16. Що можна сказати про кути, величини яких рівні?
17. Сформулюйте основну властивість величини кута.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

3.1.° Проведіть два промені AB і AC так, щоб вони не були доповняльними. Побудуйте до кожного із цих променів доповняльний промінь. Позначте й запишіть усі утворені промені.

3.2.° Проведіть відрізок AB і два промені AB і BA. Чи є ці промені доповняльними? Відповідь обґрунтуйте.

3.3.° Накресліть кут MNE і проведіть промені NA і NC між його сторонами. Запишіть усі кути, що утворилися.

3.4.° Проведіть промені OA, OB, OC і OD так, щоби промінь OC проходив між сторонами кута AOB, а промінь OD — між сторонами кута BOC.

3.5.• Накресліть два промені так, щоб їхня спільна частина (переріз) була: 1) точкою; 2) відрізком; 3) променем.

ВПРАВИ

3.6.° Пряма EF перетинає прямі AB і CD (рис. 3.18). Укажіть:
1) усі промені, що утворилися, з початком у точці M;
2) усі пари доповняльних променів з початком у точці K.

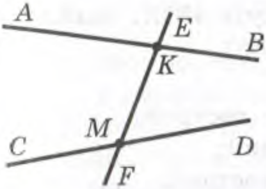


Рис. 3.18

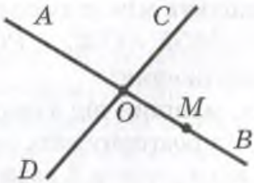


Рис. 3.19

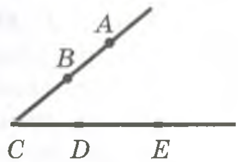


Рис. 3.20

3.7.° Запишіть усі промені, які зображено на рисунку 3.19. Укажіть, які з них є доповняльними променями з початком у точці O.

3.8.° Чи можна кут, який зображено на рисунку 3.20, позначити так:

1) $\angle ABC$;	3) $\angle ADC$;	5) $\angle ACE$;	7) $\angle BDE$;
2) $\angle ACD$;	4) $\angle DCA$;	6) $\angle BCD$;	8) $\angle ECD$?

3.9.° Запишіть усі кути, які зображено на рисунку 3.21.

3.10.° На рисунку 3.22 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF$.
1) Який промінь є бісектрисою кута AOC? кута DOF? кута BOF?
2) Бісектрисою яких кутів є промінь OC?

3.11.° Промінь OC — бісектриса кута AOB. Чи можна сумістити накладанням: 1) кути AOC і BOC; 2) кути AOC і AOB?

3.12.° Промінь BD ділить кут ABC на два кути. Знайдіть:
1) кут ABC, якщо $\angle ABD = 54°$, $\angle CBD = 72°$;
2) кут CBD, якщо $\angle ABC = 158°$, $\angle ABD = 93°$.

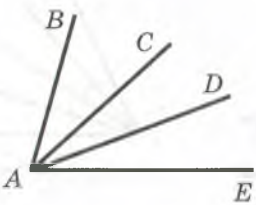


Рис. 3.21

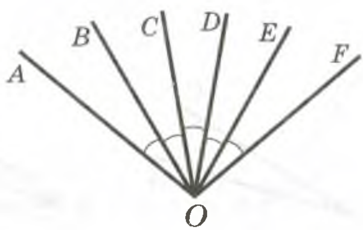


Рис. 3.22

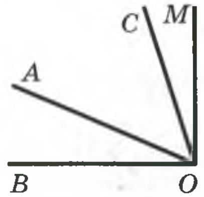


Рис. 3.23

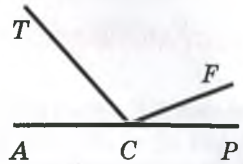


Рис. 3.24

3.13.° Промінь OP проходить між сторонами кута MOK. Знайдіть кут MOP, якщо $\angle MOK = 172°$, $\angle POK = 85°$.

3.14.° Чи правильне твердження:

1) будь-який кут, менший від тупого, — гострий;
2) кут, менший від розгорнутого, — тупий;
3) кут, менший від тупого у 2 рази, — гострий;
4) сума двох гострих кутів більша за прямий кут;
5) кут, менший від розгорнутого кута у 2 рази, є більшим за будь-який гострий кут;
6) кут, більший за прямий, — тупий?

3.15.° Із вершини прямого кута BOM (рис. 3.23) проведено два промені OA та OC так, що $\angle BOC = 74°$, $\angle AOM = 62°$. Знайдіть кут AOC.

3.16.° Із вершини розгорнутого кута ACP (рис. 3.24) проведено два промені CT і CF так, що $\angle ACF = 158°$, $\angle TCP = 134°$. Знайдіть кут TCF.

3.17.° Кут CEF дорівнює 152°, промінь EM проходить між його сторонами, кут CEM на 18° більший за кут FEM. Знайдіть кути CEM і FEM.

3.18.° Промінь AK належить куту BAD. Знайдіть кути BAK і DAK, якщо кут BAK у 7 разів менший від кута DAK і $\angle BAD = 72°$.

3.19.° На рисунку 3.25 рівні кути позначено дужками. Знайдіть кути ABC, MKE і STK, якщо за одиничний кут узято: 1) кут ABC; 2) кут MKE.

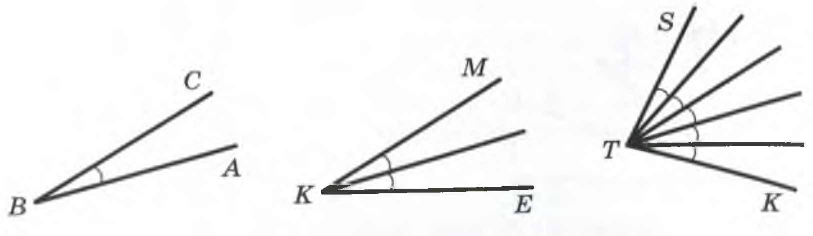


Рис. 3.25

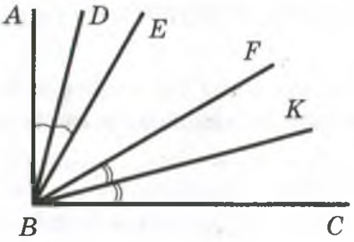


Рис. 3.26

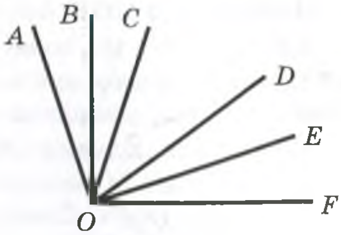


Рис. 3.27

3.20.° Промінь OA утворює зі сторонами кута BOC рівні кути. Чи можна стверджувати, що він є бісектрисою цього кута?

3.21.° Точки A, B і C розміщено на прямій так, що $AB = 3{,}2$ см, $AC = 4{,}8$ см, $BC = 8$ см. Чи є промені AB і AC доповняльними?

3.22.° На рисунку 3.26 кут ABC прямий, $\angle ABE = \angle EBF = \angle FBC$, промені BD і BK — бісектриси кутів ABE і FBC відповідно. Знайдіть кут DBK.

3.23.° На рисунку 3.27 $\angle AOC = \angle COD = \angle DOF$, промінь OB — бісектриса кута AOC, промінь OE — бісектриса кута DOF, $\angle BOE = 72°$. Знайдіть кут AOF.

3.24.° На рисунку 3.28 $\angle AOB = \angle DOC$. Чи є ще на цьому рисунку рівні кути? Відповідь обґрунтуйте.

3.25.° Кути FOK і MOE рівні (рис. 3.29). Чи рівні кути FOM і KOE?

3.26.° Промінь BK є бісектрисою кута CBD, $\angle ABK = 146°$ (рис. 3.30). Знайдіть кут CBD.

3.27.° Промінь BK є бісектрисою кута CBD, $\angle CBD = 54°$ (рис. 3.30). Знайдіть кут ABK.

3.28.° На скільки градусів повертається за 1 хв: 1) хвилинна стрілка; 2) годинна стрілка?

3.29.° Знайдіть кут між стрілками годинника, якщо вони показують: 1) 3 год; 2) 6 год; 3) 4 год; 4) 11 год; 5) 7 год.

3.30.° Кут ABC дорівнює 30°, кут CBD — 80°. Знайдіть кут ABD. Скільки розв'язків має задача?

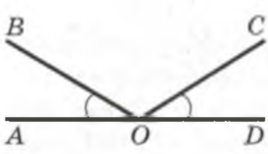


Рис. 3.28

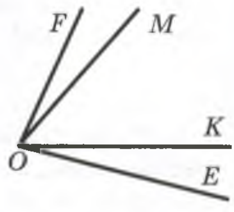


Рис. 3.29

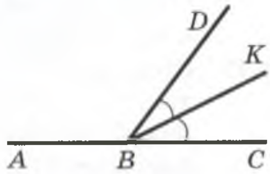


Рис. 3.30

3.31.° Знайдіть кут MOK, якщо $\angle MON = 120°$, $\angle KON = 43°$. Скільки розв'язків має задача?

3.32.•• Промінь, проведений з вершини прямого кута, ділить його на два кути. Доведіть, що кут між бісектрисами кутів, що утворилися, дорівнює 45°.

3.33.•• Точка M належить куту AOB, промінь OC — бісектриса цього кута. Доведіть, що кут MOC дорівнює піврізниці кутів AOM і BOM.

3.34.•• Точка M лежить поза кутом AOB, промінь OC — бісектриса цього кута. Доведіть, що кут MOC дорівнює півсумі кутів AOM і BOM.

3.35.•• Промені OC, OD і OE належать тупому куту AOB. Відомо, що кут AOC прямий, а промені OD і OE — відповідно бісектриси кутів AOB і BOC. Знайдіть кут DOE.

3.36.•• Промені OC, OD і OE належать куту AOB, градусна міра якого дорівнює 150°. Відомо, що $\angle AOC = 50°$, $\angle COD = 40°$, $\angle DOE = 15°$. Знайдіть кут BOE.

3.37.•• Промені OB, OD і OE належать куту AOC, градусна міра якого дорівнює 160°. Відомо, що $\angle AOB = 120°$, $\angle BOD = 30°$, $\angle DOE = 20°$. Знайдіть кут COE.

3.38.•• Як, маючи шаблон кута, що дорівнює 70°, побудувати кут, який дорівнює 40°?

3.39.•• Як, маючи шаблон кута, що дорівнює 40°, побудувати кут, який дорівнює 20°?

3.40.•• Як, маючи шаблон кута, що дорівнює 35°, побудувати кут, який дорівнює 5°?

3.41.•• Як, маючи шаблон кута, що дорівнює 13°, побудувати кут, який дорівнює 2°?

3.42.* Промені OA, OB, OC і OD такі, що $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$ і $\angle AOB = 3\angle AOD$. Знайдіть кут AOD.

3.43.* Як побудувати кут, який дорівнює 1°, використовуючи шаблон кута, що дорівнює: 1) 19°; 2) 7°?

3.44.* Проведіть шість прямих, що перетинаються в одній точці. Чи правильно, що серед кутів, які при цьому утворилися, є кут, менший від 31°?

3.45.* Промені OC і OD належать прямому куту AOB. Їх проведено так, що $\angle COD = 10°$. Із п'яти утворених гострих кутів вибрали найбільший і найменший. Виявилося, що їхня сума дорівнює 85°. Знайдіть кути, на які промені OC і OD поділили кут AOB.

4. Суміжні та вертикальні кути

Означення. Два кути називають суміжними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші є доповняльними променями.

На рисунку 4.1 кути MOE і EON суміжні.

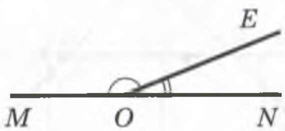


Рис. 4.1

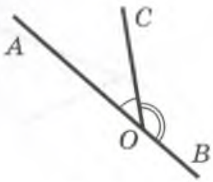


Рис. 4.2

Теорема 4.1. ***Сума суміжних кутів дорівнює*** $180°$.

Доведення. Нехай кути AOC і COB суміжні (рис. 4.2). Треба довести, що $\angle AOC + \angle COB = 180°$.

Оскільки кути AOC і COB суміжні, то промені OA та OB є доповняльними. Тоді кут AOB розгорнутий. Отже, $\angle AOB = 180°$. Промінь OC належить куту AOB. За основною властивістю величини кута маємо: $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB = 180°$. ◀

Означення. Два кути називають вертикальними, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого.

На рисунку 4.3 кути AOB і COD вертикальні.

На рисунку 4.4 сторони «жовтого» кута є доповняльними променями сторін «зеленого» кута. Тому ці розгорнуті кути є вертикальними.

Очевидно, що при перетині двох прямих утворюються дві пари вертикальних кутів, відмінних від розгорнутого. На рисунку 4.3 кути AOC і BOD також вертикальні.

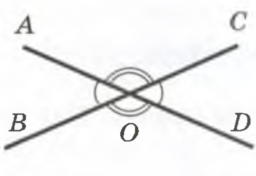


Рис. 4.3

Рис. 4.4

Теорема 4.2. ***Вертикальні кути рівні.***

Доведення. Якщо вертикальні кути є розгорнутими, то вони рівні.

На рисунку 4.5 кути 1 і 2 вертикальні та відмінні від розгорнутого. Треба довести, що $\angle 1 = \angle 2$.

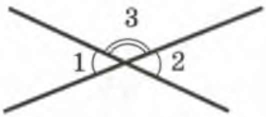


Рис. 4.5

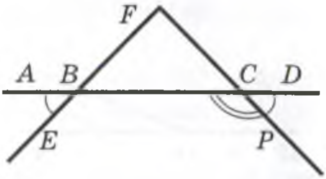


Рис. 4.6

Кожний із кутів 1 і 2 суміжний із кутом 3. Тоді $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ і $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Звідси $\angle 1 = 180° - \angle 3$ і $\angle 2 = 180° - \angle 3$. Отримуємо, що градусні міри кутів 1 і 2 рівні, а отже, рівні й самі кути. ◄

Задача. На рисунку 4.6 $\angle ABE = \angle DCP$. Доведіть, що $\angle FBC + \angle BCP = 180°$.

Розв'язання. $\angle DCP + \angle BCP = 180°$, оскільки кути DCP і BCP суміжні. Кути DCP і ABE рівні за умовою. Кути ABE і FBC рівні як вертикальні.

Отже, $\angle DCP = \angle FBC$. Тоді $\angle FBC + \angle BCP = 180°$. ◄

?

1. Які два кути називають суміжними?
2. Чому дорівнює сума суміжних кутів?
3. Які два кути називають вертикальними?
4. Сформулюйте теорему про властивість вертикальних кутів.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

4.1.° Накресліть три кути: гострий, прямий і тупий. Для кожного з них побудуйте суміжний кут.

4.2.° Накресліть два нерівних суміжних кути так, щоб їхня спільна сторона була вертикальною.

ВПРАВИ

4.3.° Укажіть пари суміжних кутів (рис. 4.7).

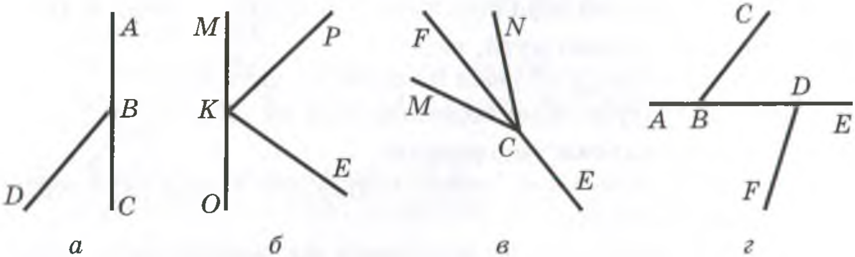


Рис. 4.7

4.4.° Чи є кути ABC і DBE вертикальними (рис. 4.8)?

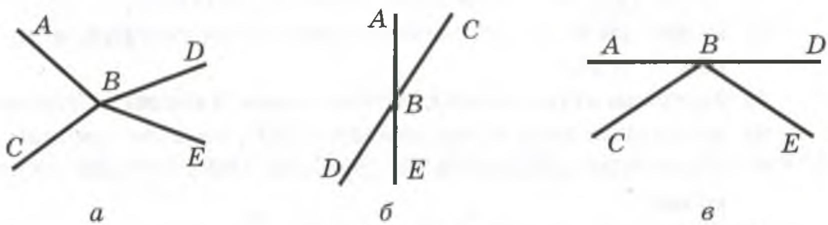


Рис. 4.8

4.5.° Скільки пар суміжних кутів зображено на рисунку 4.9? Назвіть їх. Укажіть пари вертикальних кутів.

4.6.° Чи можуть два суміжних кути дорівнювати: 1) 24° і 156°; 2) 63° і 107°? Відповідь обґрунтуйте.

4.7.° Знайдіть кут, суміжний із кутом: 1) 29°; 2) 84°; 3) 98°; 4) 135°.

4.8.° Чи може пара суміжних кутів складатися:
1) із двох гострих кутів;
2) із двох тупих кутів;
3) із прямого та тупого кутів;
4) із прямого та гострого кутів?

4.9.° Один із суміжних кутів — прямий. Яким є другий кут?

4.10.° Знайдіть кут, суміжний із кутом ABC, якщо: 1) $\angle ABC = 36°$; 2) $\angle ABC = 102°$.

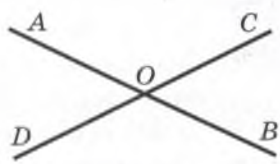


Рис. 4.9

4.11.° Знайдіть кути 2, 3 і 4 (рис. 4.10), якщо $\angle 1 = 42°$.

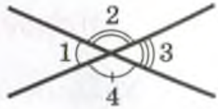


Рис. 4.10

4.12.° Знайдіть суміжні кути, якщо:
1) один із них на 70° більший за другий;
2) один із них у 8 разів менший від другого;
3) їхні градусні міри відносяться як 3 : 2.

4.13.° Знайдіть суміжні кути, якщо:
1) один із них у 17 разів більший за другий;
2) їхні градусні міри відносяться як 19 : 26.

4.14.° Чи є правильним твердження:
1) для кожного кута можна побудувати тільки один вертикальний кут;
2) для кожного кута, відмінного від розгорнутого, можна побудувати тільки один суміжний кут;
3) якщо кути рівні, то вони вертикальні;
4) якщо кути не рівні, то вони не вертикальні;
5) якщо кути не вертикальні, то вони не рівні;
6) якщо два кути суміжні, то один із них гострий, а другий — тупий;
7) якщо два кути суміжні, то один із них більший за другий;
8) якщо сума двох кутів дорівнює 180°, то вони суміжні;
9) якщо сума двох кутів не дорівнює 180°, то вони не суміжні;
10) якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути теж рівні;
11) якщо суміжні кути рівні, то вони прямі;
12) якщо рівні кути мають спільну вершину, то вони вертикальні;
13) якщо два кути мають спільну сторону, то вони суміжні?

4.15.• Сума двох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 140°. Доведіть, що ці кути вертикальні.

4.16.• Знайдіть кути, які утворилися при перетині двох прямих, якщо:
1) сума двох із них дорівнює 106°;
2) сума трьох із них дорівнює 305°.

4.17.• Знайдіть кути, які утворилися при перетині двох прямих, якщо різниця двох із них дорівнює 64°.

4.18.• Три прямі перетинаються в одній точці (рис. 4.11). Знайдіть $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

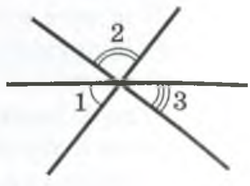


Рис. 4.11

4.19.° Прямі AB, CD і MK перетинаються в точці O (рис. 4.12), $\angle AOC = 70°$, $\angle MOB = 15°$. Знайдіть кути DOK, AOM і AOD.

4.20.° Знайдіть кут між бісектрисами суміжних кутів.

4.21.° Знайдіть кут між бісектрисами вертикальних кутів.

4.22.° Кути ABF і FBC суміжні, $\angle ABF = 80°$, промінь BD належить куту ABF, $\angle ABD = 30°$. Знайдіть кут між бісектрисами кутів DBF і FBC.

4.23.° Кути AOB і BOC суміжні, промінь OD — бісектриса кута AOB, кут BOD на $18°$ менший від кута BOC. Знайдіть кути AOB і BOC.

4.24.° Знайдіть суміжні кути MKE і PKE, якщо кут FKE на $24°$ більший за кут PKE, де промінь KF — бісектриса кута MKE.

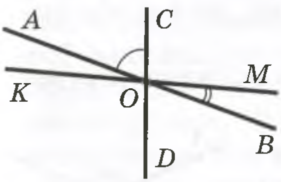


Рис. 4.12

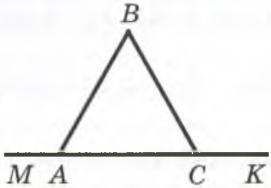


Рис. 4.13

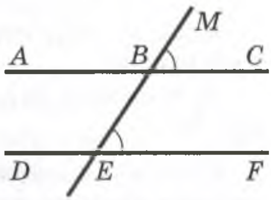


Рис. 4.14

4.25.° На рисунку 4.13 $\angle MAB + \angle ACB = 180°$. Доведіть, що $\angle MAB = \angle KCB$.

4.26.° На рисунку 4.14 $\angle MBC = \angle BEF$. Доведіть, що $\angle ABE + \angle BED = 180°$.

4.27.° Два кути мають спільну сторону, а їхня сума дорівнює $180°$. Чи можна стверджувати, що ці кути є суміжними?

4.28.° Чи є правильним твердження:

1) якщо два кути мають спільну вершину та їхні бісектриси є доповняльними променями, то ці кути вертикальні;
2) якщо бісектриси двох рівних кутів лежать на одній прямій, то ці кути вертикальні?

4.29.° На аркуші паперу зображено кут. У межах аркуша знаходяться його вершина і настільки малі частини сторін, що для його вимірювання неможливо скористатися транспортиром (рис. 4.15). Як знайти градусну міру цього кута?

Рис. 4.15

5. Перпендикулярні прямі

На рисунку 5.1 позначено чотири кути, утворені при перетині прямих a і b. Легко показати (зробіть це самостійно), що коли один із кутів прямий (наприклад, кут 1), то й кути 2, 3 і 4 теж прямі.

Означення. Дві прямі називають перпендикулярними, якщо при їхньому перетині утворився прямий кут.

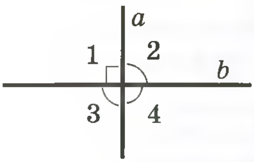


Рис. 5.1

На рисунку 5.1 прямі a і b перпендикулярні. Пишуть: $a \perp b$ або $b \perp a$.

На рисунку 5.2 прямі AD і BC не перпендикулярні. При їхньому перетині утворилися пара рівних гострих кутів і пара рівних тупих кутів. Величину гострого кута, що утворився, називають **кутом між прямими** AD і BC.

Якщо прямі перпендикулярні, то вважають, що кут між ними дорівнює 90°.

Зі сказаного випливає, що кут між двома прямими не перевищує 90°.

Означення. Два відрізки називають перпендикулярними, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

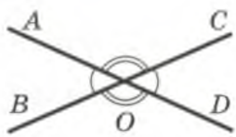


Рис. 5.2

На рисунку 5.3 відрізки AB і CD перпендикулярні. Пишуть: $AB \perp CD$.

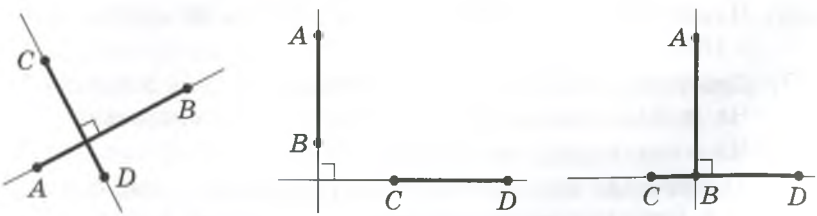


Рис. 5.3

Так само можна розглядати перпендикулярність двох променів, променя та відрізка, прямої та променя, відрізка та прямої. Наприклад, на рисунку 5.4 зображено перпендикулярні відрізок CD і промінь AB.

На рисунку 5.5 зображено пряму a та перпендикулярний до неї відрізок AB, кінець B якого належить прямій a. У такому випадку говорять, що з точки A на пряму a **опущено перпендикуляр** AB. Точку B називають **основою перпендикуляра** AB.

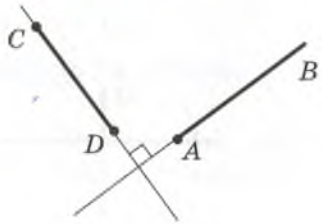


Рис. 5.4

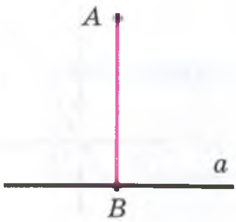


Рис. 5.5

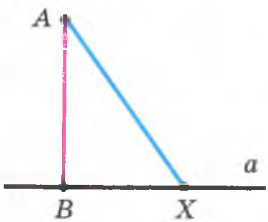


Рис. 5.6

Нехай X — довільна точка прямої a, відмінна від точки B (рис. 5.6). Відрізок AX називають **похилою**, проведеною з точки A до прямої a.

Часто в повсякденному житті нам доводиться шукати відстань від нашого місцезнаходження до деякого об'єкта (школи, дороги, річки тощо). Аналогом такої задачі в геометрії є пошук відстані від даної точки до даної фігури. Розв'язуючи цю задачу, намагаються вказати відрізок найменшої довжини, який сполучає дану точку з точкою фігури. Якщо такий відрізок вдається знайти, то його довжину називають **відстанню від точки до фігури**.

У п. 17 буде доведено, що коли з однієї точки до прямої проведено перпендикуляр і похилу, то перпендикуляр менший від похилої (рис. 5.6). Таким чином, перпендикуляр, опущений з даної точки на пряму, — це відрізок найменшої довжини, який сполучає дану точку з точкою прямої. Тому доцільно прийняти таке означення.

Означення. Відстанню від точки, яка не належить прямій, до цієї прямої називають довжину перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму.

Якщо точка належить прямій, то вважають, що відстань від цієї точки до прямої дорівнює нулю.

На рисунку 5.5 довжина відрізка AB — це відстань від точки A до прямої a.

На рисунку 5.7 зображено перпендикуляр OM, опущений з точки O на пряму AB. Точка M, його основа, належить відрізку AB (променю AB). Зрозуміло, що в цьому випадку перпендикуляр OM менший від будь-якого відрізка, який сполучає точку O з будь-якою іншою точкою відрізка AB (променя AB), відмінною від точки M. Тому відстань від точки O до відрізка AB (променя AB) — це довжина відрізка OM.

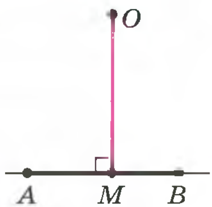


Рис. 5.7

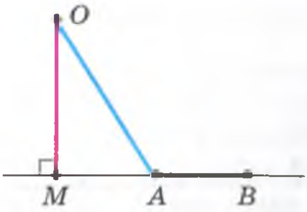


Рис. 5.8

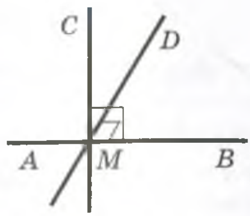


Рис. 5.9

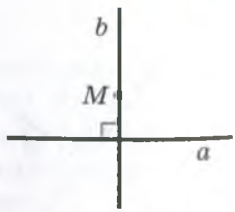


Рис. 5.10

На рисунку 5.8 зображено перпендикуляр OM, який опущено з точки O на пряму AB. Точка M, його основа, не належить відрізку AB (променю AB). У цьому разі відрізок OA менший від будь-якого відрізка, який сполучає точку O з будь-якою іншою точкою відрізка AB (променя AB). Цей факт буде доведено в п. 17. Тому відстань від точки O до відрізка AB (променя AB) — це довжина відрізка OA.

Теорема 5.1. ***Через кожну точку прямої проходить лише одна пряма, перпендикулярна до даної.***

Доведення. Позначимо на прямій AB довільну точку M і побудуємо прямий кут CMB (рис. 5.9). Тоді $CM \perp AB$.

Припустимо, що через точку M проходить ще одна пряма MD, відмінна від CM і перпендикулярна до прямої AB.

Розглянемо випадок, коли промінь MD належить куту CMB. Тоді за основною властивістю величини кута $\angle CMB = \angle CMD + \angle DMB$. Звідси $\angle CMB > \angle DMB$. Проте насправді $\angle CMB = \angle DMB = 90°$. Отже, наше припущення неправильне.

Аналогічно розглядають випадок, коли промінь MC належить куту DMB. ◀

Ви вмієте через довільну точку M, яка не належить прямій a, проводити пряму b, перпендикулярну до прямої a (рис. 5.10). Те, що така пряма b є єдиною, доведемо в п. 7.

?

1. Які дві прямі називають перпендикулярними?
2. Яким символом позначають перпендикулярні прямі?
3. Що називають кутом між двома прямими, які перетинаються?
4. Які два відрізки називають перпендикулярними?
5. Що називають відстанню від точки до прямої?
6. Скільки через кожну точку прямої можна провести прямих, перпендикулярних до даної?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

5.1.° Перерисуйте в зошит рисунок 5.11. Користуючись косинцем, проведіть через точку M пряму, перпендикулярну до прямої a.

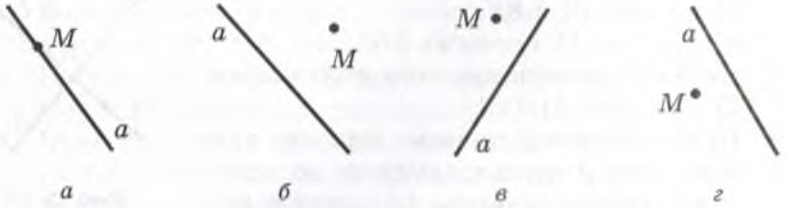


Рис. 5.11

5.2.° Проведіть пряму c і позначте на ній точку K. Користуючись косинцем, проведіть через точку K пряму, перпендикулярну до прямої c.

5.3.° Проведіть пряму d і позначте точку M, яка їй не належить. За допомогою косинця проведіть через точку M пряму, перпендикулярну до прямої d.

5.4.° Накресліть кут ABK, який дорівнює: 1) 73°; 2) 146°. Позначте на промені BK точку C і проведіть через неї прямі, перпендикулярні до прямих AB і BK.

5.5.° Накресліть два перпендикулярних відрізки так, щоб вони: 1) перетиналися та не мали спільного кінця; 2) не мали спільних точок; 3) мали спільний кінець.

5.6.° Накресліть два перпендикулярних промені так, щоб вони: 1) перетиналися; 2) не мали спільних точок.

5.7.° Перерисуйте в зошит рисунок 5.12. Побудуйте відрізок, довжина якого дорівнює відстані від точки A: 1) до прямої MN; 2) до відрізка MN; 3) до променя MN.

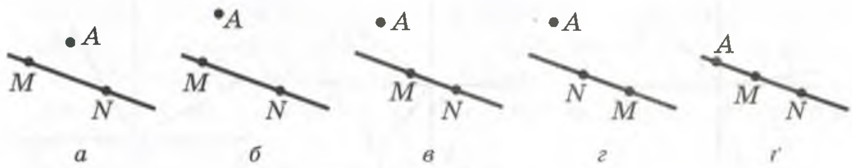


Рис. 5.12

ВПРАВИ

5.8.° На рисунку 5.13 прямі AC і DK перпендикулярні. Чи перпендикулярні:
1) відрізки AB і BK;
2) відрізки BC і DF;
3) промені BC і BK;
4) відрізок AB і промінь FD?

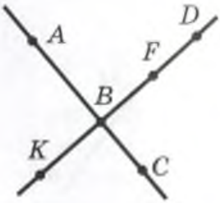


Рис. 5.13

5.9.° Чи може кут між прямими дорівнювати: 1) 1°; 2) 90°; 3) 92°?

5.10.° Пряма m проходить через вершину прямого кута й перпендикулярна до однієї з його сторін. Доведіть, що пряма m містить другу сторону кута.

5.11.• Доведіть, що коли бісектриси кутів AOB і BOC перпендикулярні, то точки A, O і C лежать на одній прямій.

5.12.• На рисунку 5.14 $AB \perp CD$, $\angle COK = 42°$, $\angle MOC + \angle BOK = 130°$. Знайдіть: 1) кут MOK; 2) кут MOD.

5.13.• На рисунку 5.15 $AC \perp DK$, $OB \perp BF$, $\angle DBO = 54°$. Знайдіть кут ABF.

5.14.• Кут ABC дорівнює 160°, промені BK і BM проходять між сторонами цього кута й перпендикулярні до них. Знайдіть кут MBK.

5.15.• На рисунку 5.16 $BF \perp AC$, $BD \perp BK$. Доведіть, що $\angle ABD = \angle FBK$.

5.16.• На рисунку 5.16 $\angle ABD = \angle FBK$, $\angle DBF = \angle KBC$. Доведіть, що $BF \perp AC$.

5.17.• Промені OC і OD належать розгорнутому куту AOB. Відомо, що кути AOC і BOD рівні. Як за допомогою косинця побудувати бісектрису кута COD?

5.18.•• Із вершини кута ABC, який дорівнює 70°, проведено промені BD і BF так, що $BD \perp BA$, $BF \perp BC$, промені BD і BC належать куту ABF. Знайдіть кути DBF і ABF.

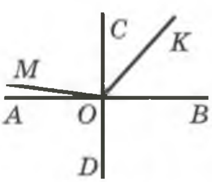


Рис. 5.14

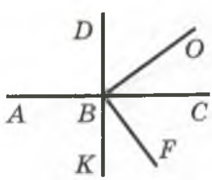


Рис. 5.15

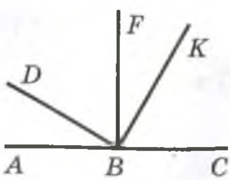


Рис. 5.16

5.19.•• Прямі m і n містять бісектриси кутів, утворених при перетині прямих a і b. У якому разі прямі a і b містять бісектриси кутів, утворених при перетині прямих m і n?

5.20.•• Чи існує точка, відстань від якої до даного відрізка AB більша за відстань до променя AB?

5.21.* Користуючись косинцем і шаблоном кута, який дорівнює 17°, побудуйте кут: 1) 5°; 2) 12°.

5.22.* Користуючись косинцем і шаблоном кута, який дорівнює 20°, побудуйте кут 10°.

5.23.* Чи можна за допомогою шаблона кута, який дорівнює 27°, побудувати перпендикулярні прямі?

5.24.* Кути AOB і MON розміщені так, що $OM \perp OA$ та $ON \perp OB$ (рис. 5.17). Доведіть, що кожна точка кута MON рівновіддалена від сторін кута AOB.

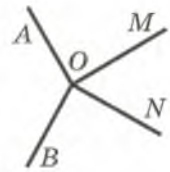


Рис. 5.17

6. Аксіоми

У попередніх пунктах було доведено чотири теореми. Щоразу, доводячи нову властивість фігури, ми спиралися на раніше відомі геометричні факти. Наприклад, під час доведення теореми про вертикальні кути була використана властивість суміжних кутів. Керуючись цим принципом, ми доведемо ще багато нових теорем. Проте вже зараз, на початковому етапі вивчення геометрії, виникає природне запитання: якщо властивості геометричних фігур вивчають за принципом «нове зі старого», то мають існувати найперші, початкові факти, і тоді на чому базується обґрунтування їхньої справжності? Адже до них ніяких істинних тверджень не було. Розв'язати цю проблему можна в єдиний спосіб: прийняти перші властивості без доведення. Так і роблять математики. Ці властивості називають **аксіомами**.

За аксіоми вибирають твердження, які є простими, очевидними та не викликають сумнівів. Адже недарма слово «аксіома», що походить від грецького «*аксіос*», означає «гідне визнання».

Деякі аксіоми були сформульовані в попередніх пунктах. Вони називалися **основними властивостями**.

Частину аксіом ми не виділяли якимось спеціальним чином, а просто формулювали як наочно очевидні твердження. Зокрема, у п. 2, 3 було сформульовано такі аксіоми:

для будь-яких двох точок існує єдиний відрізок, для якого ці точки є кінцями;

кожний відрізок має певну довжину;

кожний кут має певну величину.

Ми спиралися й на деякі інші істинні твердження, прийняті без доведення, тобто, по суті, на аксіоми, але сформульовані в неявному вигляді. Наприклад, у п. 1, описуючи рисунок 1.3, ми фактично використали таку аксіому:

якою б не була пряма, існують точки, які належать цій прямій, і точки, які не належать їй.

Будуючи відрізок, що дорівнює даному, і кут, що дорівнює даному, ми, по суті, спиралися на такі аксіоми:

на будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок, що дорівнює даному, і притому тільки один;

від будь-якого променя в дану півплощину можна відкласти кут, що дорівнює даному, і притому тільки один.

Аксіоми використовують не тільки в математиці. Нерідко в повсякденному житті будь-яке істинне твердження, що не потребує обґрунтування, називають аксіомою. Наприклад, говорять: «Після березня настане квітень. Це аксіома».

Аксіоми виникають не лише на основі практики або спостережень.

Для будь-якого громадянина України Конституція — це перелік аксіом. Тому аксіому можна розглядати як закон або правило. Проте закони (правила гри) приймають, тобто вони виникають у результаті домовленості людей між собою. Отже, аксіоми геометрії можна також розглядати як затверджені правила, на підставі яких геометри, як муляри, зводять будівлю науки (рис. 6.1).

Тоді у вас може виникнути запитання: «Невже геометрію можна сприймати як гру, наприклад таку, як шахи?» Певною мірою — так. Проте при цьому слід розуміти, що шахові правила, а отже, і сама гра виникли завдяки людській фантазії. Разом з тим геометричні правила (аксіоми) виникли з практики та спостережень. Тому геометрія, на відміну від шахів, застосовується дуже широко.

Рис. 6.1

Якщо ви оберете фах математика, то зможете ознайомитися із зовсім іншими геометріями, які відрізняються від тієї, яку ви вивчаєте в школі, тим, що вони побудовані на інших аксіомах.

З ІСТОРІЇ ГЕОМЕТРІЇ

Коли й де виникли перші геометричні відомості? Фахівці не відповідають на це запитання однозначно. Деякі вважають, що першовідкривачами були єгипетські та вавилонські землеміри, які жили за 4000 рр. до н. е., інші припускають, що геометрія зародилася в Стародавньому Єгипті 5000 років тому.


Стародавній папірус

Може здатися дивним, але питання, коли виникла **наука геометрія**, не викликає суперечок. Історики зійшлися на думці: у VI ст. до н. е. Така одностайність, на перший погляд, уражає, адже й до тих часів народи стародавнього світу накопичили величезний обсяг геометричних знань. Наприклад, цілком очевидно, що без геометричного досвіду єгиптяни не подарували б світові одне із «семи див світу» — піраміди. І все ж таки чому велика кількість накопичених геометричних фактів нерівносильна існуванню геометричної науки?


Єгипетські піраміди

Геометрія стала наукою лише тоді, коли її істини почали встановлювати шляхом доведення.

Поява «доказової геометрії» пов'язана з іменем першого із «семи мудреців» — Фалеса Мілетського[1] (близько 625–547 рр. до н. е.) — філософа, ученого, купця й державного діяча.


Фалес Мілетський

Задовго до Фалеса було відомо, що вертикальні кути рівні, що діаметр ділить круг на дві рівні частини. Ніхто в істинності цих фактів не сумнівався. А Фалес довів їх, тим самим прославивши себе.

У VI–III ст. до н. е. завдяки вченим Стародавньої Греції, таким як Піфагор, Евдокс, Архіт, Теєтет, Евклід,

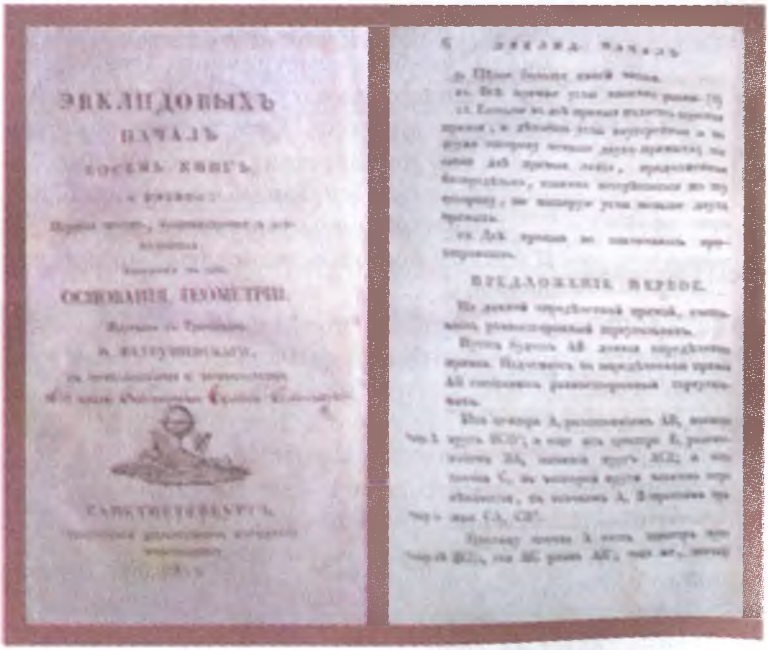
[1] Мілет — порт у Малій Азії на узбережжі Егейського моря.

Евклід

Архімед, геометрія з прикладної науки перетворилася на математичну теорію.

Книгу, за якою вивчали геометрію понад 2000 років, без перебільшення можна назвати визначною. Вона має назву «Начала», її автором є Евклід (близько 365–300 рр. до н. е.). На жаль, про самого Евкліда мало що відомо. У таких випадках постать обростає легендами, одна з яких дуже повчальна. Цар Птолемей I запитав Евкліда, чи існує простіший шлях пізнання геометрії, ніж той, що викладений у «Началах». Евклід відповів: «У геометрії немає царських шляхів».

А який же шлях у геометрію обрав Евклід у своїх «Началах»? Аксіоматичний. У фундаменті науки — перелік найпростіших фактів. Їх називають постулатами (від латинського *postulatum* — вимога) й аксіомами. Потім, базуючись на них, шляхом логічних міркувань доводять усі інші властивості — теореми.


ЭВКЛИДОВЫХЪ
НАЧАЛЪ
ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ

«Начала» Евкліда

Постулатів у Евкліда п'ять. Наведемо перші чотири.

I постулат. Потрібно, щоб від кожної точки до будь-якої іншої точки можна було провести пряму лінію.

II постулат. І щоб кожну пряму можна було необмежено продовжити.

III постулат. І щоб з будь-якого центра можна було описати коло будь-якого радіуса.

IV постулат. І щоб усі прямі кути були рівні.

Про п'ятий постулат ми розкажемо після п. 14.

Протягом багатьох століть за популярністю з «Началами» Евкліда могла зрівнятися хіба що Біблія. Так, ще наприкінці XIX ст. у ряді європейських країн геометрію викладали за спрощеними виданнями «Начал».

І зараз геометрія, яку вивчають у школі, багато в чому наслідує ідеї Евкліда.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Основна властивість прямої

Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Прямі, що перетинаються

Дві прямі, які мають спільну точку, називають такими, що перетинаються.

Теорема про дві прямі, що перетинаються

Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.

Рівні відрізки

Два відрізки називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

Рівні відрізки мають рівні довжини, і навпаки, якщо довжини відрізків рівні, то рівні й самі відрізки.

Основна властивість довжини відрізка

Якщо точка C є внутрішньою точкою відрізка AB, то відрізок AB дорівнює сумі відрізків AC і CB, тобто $AB = AC + CB$.

Відстань між точками

Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB.

Доповняльні промені

Два промені, які мають спільний початок і лежать на одній прямій, називають доповняльними.

Розгорнутий кут

Кут, сторонами якого є доповняльні промені, називають розгорнутим.

Рівні кути

Два кути називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

Рівні кути мають рівні величини, і навпаки, якщо величини кутів рівні, то рівні й самі кути.

Бісектриса кута

Бісектрисою кута називають промінь з початком у вершині кута, який ділить цей кут на два рівних кути.

Гострий, прямий, тупий кути

Кут, градусна міра якого дорівнює 90°, називають прямим.

Кут, градусна міра якого менша від 90°, називають гострим.

Кут, градусна міра якого більша за 90°, але менша від 180°, називають тупим.

Основна властивість величини кута

Якщо промінь OC ділить кут AOB на два кути AOC і COB, то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

Суміжні кути

Два кути називають суміжними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші є доповняльними променями.

Властивість суміжних кутів

Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Вертикальні кути

Два кути називають вертикальними, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого.

Властивість вертикальних кутів

Вертикальні кути рівні.

Перпендикулярні прямі

Дві прямі називають перпендикулярними, якщо при їхньому перетині утворився прямий кут.

Відстань від точки до прямої

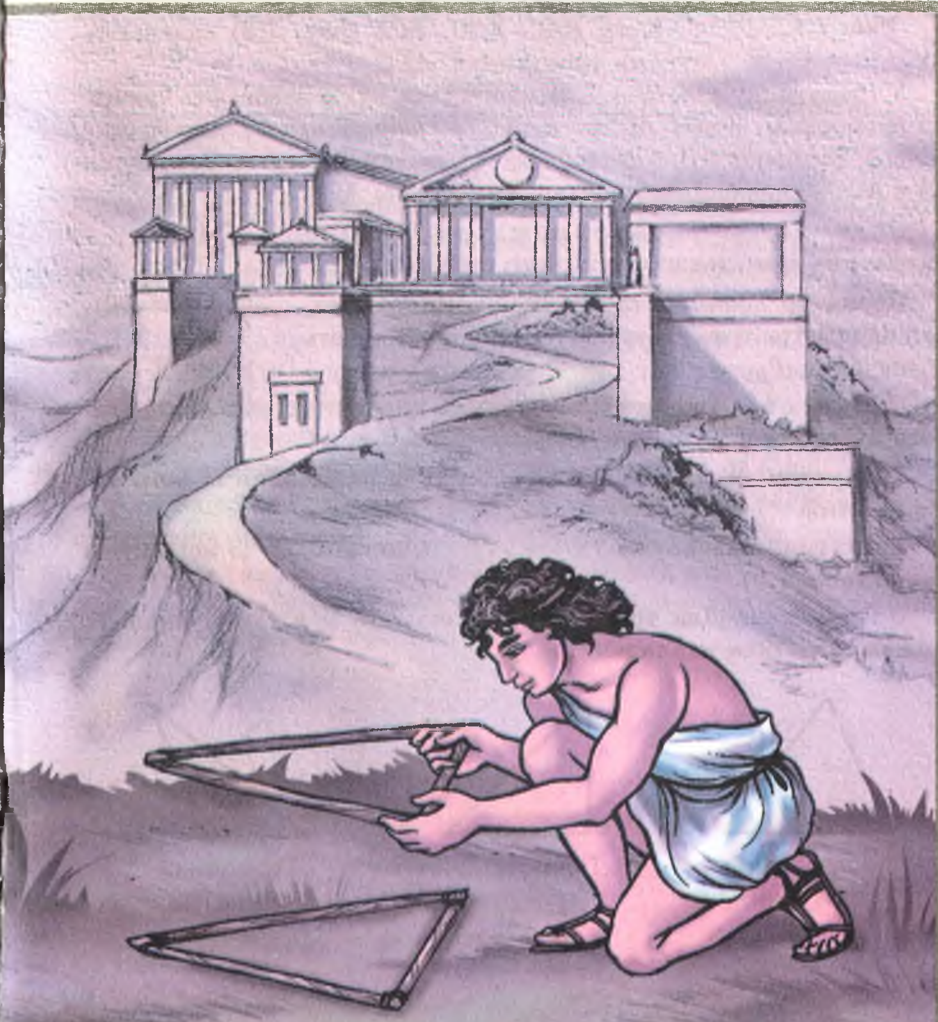
Відстанню від точки, яка не належить прямій, до цієї прямої називають довжину перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму. Якщо точка належить прямій, то вважають, що відстань від цієї точки до прямої дорівнює нулю.

Теорема про пряму, перпендикулярну до даної

Через кожну точку прямої проходить лише одна пряма, перпендикулярна до даної.

§2 ТРИКУТНИКИ

Як, не накладаючи один трикутник на другий, дізнатися, чи є вони рівними? Які властивості притаманні рівнобедреному й рівносторонньому трикутникам? Яку «будову» має теорема? На ці та багато інших запитань ви знайдете відповіді в цьому параграфі.



7. Рівні трикутники. Висота, медіана, бісектриса трикутника

Розглянемо три точки A, B, C, які не лежать на одній прямій. Сполучимо їх відрізками AB, BC, CA. Утворена фігура обмежує частину площини, виділену на рисунку 7.1 зеленим кольором. Цю частину площини разом з відрізками AB, BC і CA називають **трикутником.** Точки A, B, C називають **вершинами трикутника,** а відрізки AB, BC, CA — **сторонами трикутника.**

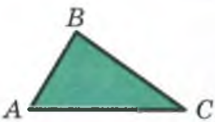


Рис. 7.1

Трикутник називають і позначають за його вершинами. Трикутник, зображений на рисунку 7.1, позначають так: ΔABC (читають: «трикутник ABC»), або ΔBCA (читають: «трикутник BCA»), або ΔACB і т. д.

Кути BAC, ABC, BCA (рис. 7.2) називають **кутами трикутника** ABC.

У трикутнику ABC (рис. 7.2), наприклад, кут B називають *кутом, протилежним стороні* AC, кути A і C — *кутами, прилеглими до сторони* AC, сторону AC — *стороною, протилежною куту* B, сторони AB і AC — *сторонами, прилеглими до кута* A.

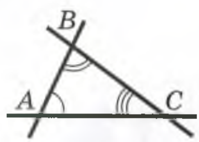


Рис. 7.2

Означення. Периметром трикутника називають суму довжин усіх його сторін.

Периметр позначають буквою P. Наприклад, для периметра трикутника MNK використовують позначення P_{MNK}.

Означення. Трикутник називають гострокутним, якщо всі його кути гострі.

Трикутник називають прямокутним, якщо один із його кутів прямий.

Трикутник називають тупокутним, якщо один із його кутів тупий (рис. 7.3).

Означення. Два трикутники називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

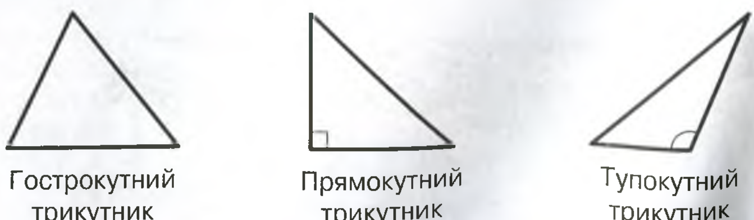


Рис. 7.3

На рисунку 7.4 зображено рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Записують: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Ці трикутники можна сумістити так, що вершини A і A_1, B і B_1, C і C_1 збігатимуться. Тоді можна записати: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$.

Ті сторони й ті кути, які суміщаються при накладанні рівних трикутників, називають **відповідними сторонами й відповідними кутами**. Так, на рисунку 7.4 сторони AC і A_1C_1, кути A та A_1 відповідні.

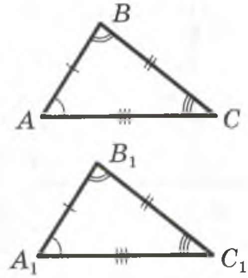


Рис. 7.4

Зазвичай на рисунках рівні сторони позначають однаковою кількістю рисочок, а рівні кути — однаковою кількістю дужок (рис. 7.4).

Зауважимо, що *в рівних трикутниках проти відповідних кутів лежать відповідні сторони*, і навпаки: *проти відповідних сторін лежать відповідні кути*.

Ви знаєте, що на будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок, рівний даному, і притому тільки один, і від будь-якого променя в дану півплощину можна відкласти кут, рівний даному, і притому тільки один. Схожа властивість притаманна трикутникам.

Основна властивість рівності трикутників. Для даного трикутника ABC і даного променя A_1M існує трикутник $A_1B_1C_1$, який дорівнює трикутнику ABC, такий, що $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ і сторона A_1B_1 належить променю A_1M, а вершина C_1 лежить у заданій півплощині відносно прямої A_1M (рис. 7.5).

Теорема 7.1. ***Через точку, яка не належить даній прямій, проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної.***

Доведення. Розглянемо пряму a і точку O, яка їй не належить. Припустимо, що через точку O проходять дві прямі OA та OB, перпендикулярні до прямої a (рис. 7.6).

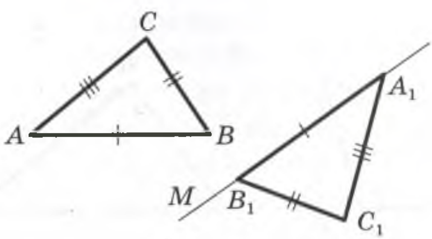


Рис. 7.5

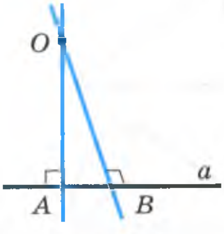


Рис. 7.6

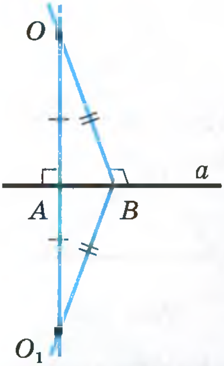


Рис. 7.7

За основною властивістю рівності трикутників існує трикутник O_1AB, який дорівнює трикутнику OAB, такий, що $AO = AO_1$ і $BO = BO_1$ (рис. 7.7). Тоді $\angle OAB = \angle O_1AB$. Отже, $\angle O_1AB = 90°$. Звідси $\angle OAO_1 = 180°$, а тому точки O, A, O_1 лежать на одній прямій.

Аналогічно доводять, що точки O, B, O_1 також лежать на одній прямій. Але тоді прямі OA та OB мають дві точки перетину: O та O_1. А це суперечить теоремі 1.1. Отже, наше припущення неправильне. Таким чином, через точку O проходить одна пряма, перпендикулярна до прямої a. ◀

Можливо, ви помітили, що означення рівних відрізків, рівних кутів і рівних трикутників дуже схожі. Тому доцільно прийняти таке означення рівних фігур.

Означення. **Дві фігури називають *рівними*, якщо їх можна сумістити накладанням.**

На рисунку 7.8 зображено рівні фігури Φ_1 і Φ_2. Пишуть: $\Phi_1 = \Phi_2$. Будь-які дві прямі (два промені, дві точки) рівні.

Означення. **Перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на пряму, яка містить протилежну сторону, називають *висотою трикутника*.**

На рисунку 7.9 відрізки BB_1 і CC_1 — висоти трикутника ABC.

Означення. **Відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони, називають *медіаною трикутника*.**

На рисунку 7.10 відрізок AM — медіана трикутника ABC.

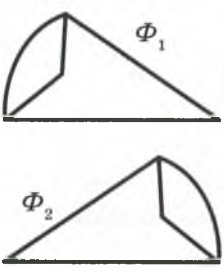


Рис. 7.8

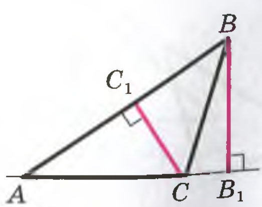


Рис. 7.9

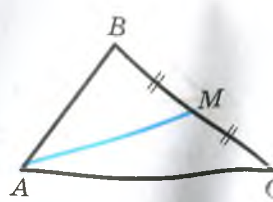


Рис. 7.10

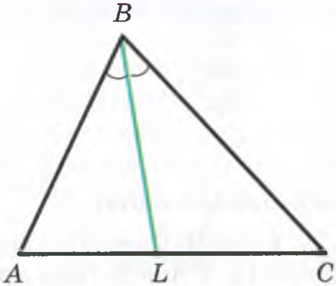


Рис. 7.11

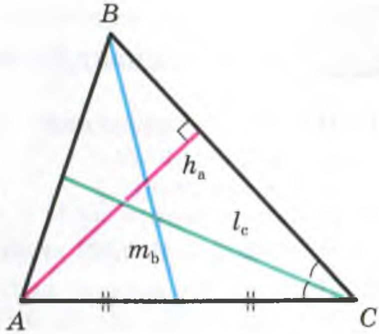


Рис. 7.12

Означення. **Відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони, називають *бісектрисою трикутника*.**

На рисунку 7.11 відрізок BL — бісектриса трикутника ABC.

Кожний трикутник має три висоти, три медіани й три бісектриси.

Часто довжини сторін трикутника, протилежних кутам A, B, C, позначають відповідно a, b, c. Довжини висот позначають h_a, h_b, h_c, медіан — m_a, m_b, m_c, бісектрис — l_a, l_b, l_c. Індекс показує, до якої сторони проведено відрізок (рис. 7.12).

?

1. Як називають і позначають трикутник?
2. Що називають периметром трикутника?
3. Які існують види трикутників залежно від виду їхніх кутів?
4. Який трикутник називають прямокутним? тупокутним? гострокутним?
5. Які два трикутники називають рівними?
6. Як називають ті пари сторін і пари кутів рівних трикутників, які суміщаються при накладанні?
7. Які дві фігури називають рівними?
8. Що називають висотою трикутника?
9. Що називають медіаною трикутника?
10. Що називають бісектрисою трикутника?
11. Скільки кожний трикутник має висот? медіан? бісектрис?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

7.1.° Накресліть трикутник:
1) гострокутний;
2) прямокутний;
3) тупокутний.

Проведіть із кожної вершини трикутника висоту.

7.2.° Перерисуйте в зошит рисунок 7.13, проведіть висоту, спільну для всіх трьох зображених трикутників. У якого з них ця висота розміщена поза трикутником?

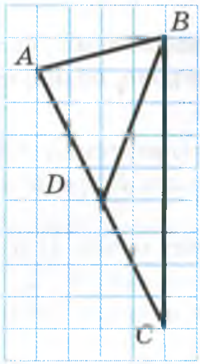


Рис. 7.13

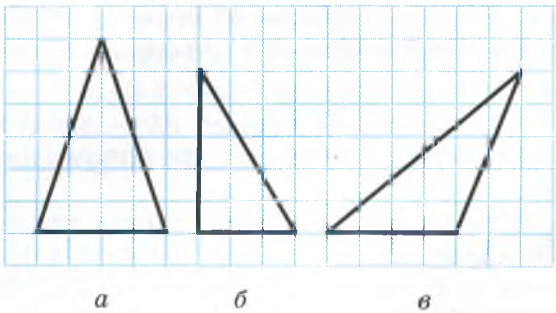


Рис. 7.14

7.3.° Перерисуйте в зошит трикутники, зображені на рисунку 7.14, проведіть у кожному з них усі висоти.

7.4.° Накресліть довільний трикутник і проведіть усі його медіани.

7.5.° Накресліть довільний трикутник і проведіть усі його бісектриси.

ВПРАВИ

7.6.° Накресліть довільний трикутник, позначте його вершини буквами M, K і E. Укажіть:
1) сторону, протилежну куту M;
2) кут, протилежний стороні MK;
3) сторони, прилеглі до кута K;
4) кути, прилеглі до сторони KE.

7.7.° Запишіть сторони, вершини, кути трикутника CEF (рис. 7.15). Укажіть:
1) кут, протилежний стороні CF;
2) кути, прилеглі до сторони CE;
3) сторону, протилежну куту E;
4) сторони, прилеглі до кута F.

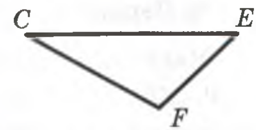


Рис. 7.15

7.8.° Одна зі сторін трикутника в 5 разів менша від другої та на 25 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 74 см.

7.9.° Сторони трикутника відносяться як 5 : 7 : 11, а сума найбільшої і найменшої сторін дорівнює 80 см. Обчисліть периметр трикутника.

7.10.° Периметр трикутника дорівнює 48 см, а його сторони відносяться як 7 : 9 : 8. Знайдіть сторони трикутника.

7.11.° Трикутники APK і MCE рівні, кути A і C відповідні, $PK = 10$ см. Знайдіть сторону ME.

7.12.° Трикутники ABC і DEF рівні, сторони AB і DE, BC і DF відповідні, $\angle B = 32°$. Знайдіть кут D.

7.13.° Трикутники ABC і KTM рівні, кути A і M, B і K відповідні, $\angle C = 40°$, $MK = 5$ см. Знайдіть кут T і сторону AB.

7.14.° Чи є правильним твердження:
1) якщо трикутники рівні, то їхні периметри теж рівні;
2) якщо периметри двох трикутників рівні, то й самі трикутники рівні?

7.15.° Які з елементів трикутника — бісектриса, медіана, висота — завжди належать трикутнику?

7.16.° Який з елементів трикутника — бісектриса, медіана, висота — може збігатися з його стороною? Укажіть вид трикутника, для якого це можливо.

7.17.° 1) Чи може одна висота трикутника належати йому, а дві інші — ні?
2) Чи може тільки одна висота трикутника збігатися з його стороною?
3) У якому трикутнику три висоти перетинаються в його вершині?

7.18.• Медіана BD трикутника ABC розбиває його на два трикутники, периметри яких дорівнюють 32 см і 36 см. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $BD = 10$ см.

7.19.• Медіана трикутника, периметр якого дорівнює 60 см, розбиває його на два трикутники, периметри яких дорівнюють 36 см і 50 см. Чому дорівнює довжина цієї медіани?

8. Перша та друга ознаки рівності трикутників

Якщо для трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ виконуються шість умов: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, то очевидно, що ці трикутники сумістяться при накладанні. Отже, вони рівні.

Спробуємо зменшити кількість умов. Наприклад, залишимо лише дві рівності: $AB = A_1B_1$ і $BC = B_1C_1$. У цьому разі трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ можуть виявитися нерівними (рис. 8.1).

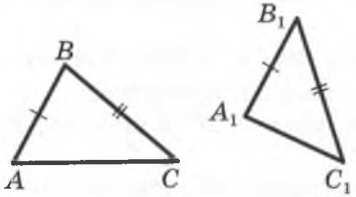


Рис. 8.1

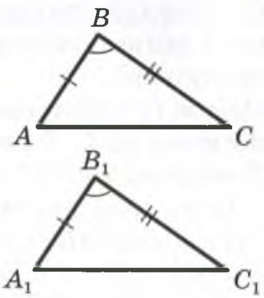


Рис. 8.2

Як же скоротити список вимог до мінімуму, зберігаючи при цьому рівність трикутників? На це запитання відповідають теореми, які називають **ознаками рівності трикутників**.

Теорема 8.1 (перша ознака рівності трикутників: за двома сторонами та кутом між ними). ***Якщо дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам та куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 8.2). Доведемо, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Накладемо трикутник ABC на трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоби промінь BA сумістився з променем B_1A_1, а промінь BC сумістився з променем B_1C_1. Це можна зробити, тому що за умовою $\angle B = \angle B_1$. Оскільки за умовою $BA = B_1A_1$ і $BC = B_1C_1$, то при такому накладанні сторона BA суміститься зі стороною B_1A_1, а сторона BC — зі стороною B_1C_1. Отже, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ повністю сумістяться, тобто вони рівні. ◄

Означення. **Пряму, яка перпендикулярна до відрізка та проходить через його середину, називають серединним перпендикуляром відрізка.**

На рисунку 8.3 пряма a є серединним перпендикуляром відрізка AB. Зауважимо, що точки A і B рівновіддалені від прямої a.

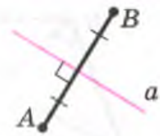


Рис. 8.3

Теорема 8.2. ***Кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.***

Доведення. Нехай X — довільна точка серединного перпендикуляра a відрізка AB. Треба довести, що $XA = XB$.

Нехай точка M — середина відрізка AB. Якщо точка X збігається з точкою M (а це можливо, оскільки X — довільна точка прямої a), то $XA = XB$.

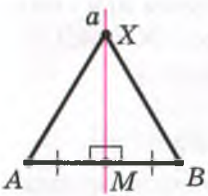


Рис. 8.4

Якщо точки X і M не збігаються, то розглянемо трикутники AXM і BXM (рис. 8.4). У цих трикутниках $AM = MB$, оскільки точка M — середина відрізка AB, сторона XM — спільна, $\angle AMX = \angle BMX = 90°$. Отже, трикутники AXM і BXM рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників. Тоді відрізки XA і XB рівні як відповідні сторони рівних трикутників. ◀

Теорема 8.3 (друга ознака рівності трикутників: за стороною та двома прилеглими до неї кутами). ***Якщо сторона та два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 8.5). Доведемо, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Накладемо трикутник ABC на трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоб точка A сумістилася з точкою A_1, відрізок AC — з відрізком A_1C_1 (це можливо, тому що $AC = A_1C_1$) і точки B і B_1 лежали в одній півплощині відносно прямої A_1C_1. Оскільки $\angle A = \angle A_1$ і $\angle C = \angle C_1$, то промінь AB сміститься з променем A_1B_1, а промінь CB — із променем C_1B_1. Тоді точка B — спільна точка променів AB і CB — сміститься з точкою B_1 — спільною точкою променів A_1B_1 і C_1B_1. Отже, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ повністю сумістяться, а тому вони рівні. ◀

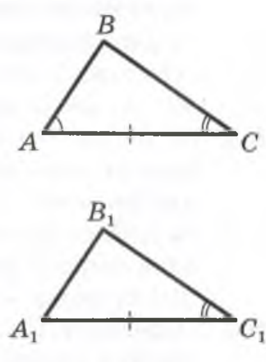


Рис. 8.5

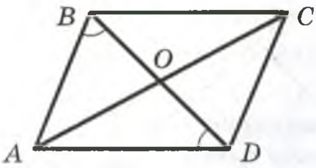


Рис. 8.6

Задача. На рисунку 8.6 точка O — середина відрізка BD, $\angle ABO = \angle CDO$. Доведіть, що $BC = AD$.

Розв'язання. Розглянемо трикутники AOB і COD. Оскільки точка O — середина відрізка BD, то $BO = OD$. За умовою $\angle ABO = \angle CDO$. Кути AOB і COD рівні як вертикальні. Отже, $\Delta AOB = \Delta COD$ за стороною та двома прилеглими кутами, тобто за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $AB = CD$ як відповідні сторони рівних трикутників. Зауважимо, що BD — спільна сторона трикутників ABD і CDB. Також за умовою $\angle ABD = \angle CDB$. Отже, трикутники ABD і CDB рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників. Тоді $BC = AD$. ◄

1. Сформулюйте першу ознаку рівності трикутників.
2. Яку пряму називають серединним перпендикуляром відрізка?
3. Яку властивість мають точки серединного перпендикуляра відрізка?
4. Сформулюйте другу ознаку рівності трикутників.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

8.1.° За допомогою лінійки та транспортира побудуйте трикутник, дві сторони якого дорівнюють 3 см і 6 см, а кут між ними — 40°.

8.2.° За допомогою лінійки та транспортира побудуйте трикутник, дві сторони якого дорівнюють 3 см і 4 см, а кут між ними — 90°. Укажіть вид цього трикутника.

8.3.° За допомогою лінійки та транспортира побудуйте трикутник, одна сторона якого дорівнює 3 см, а кути, що прилягають до цієї сторони, — 100° і 20°. Укажіть вид цього трикутника.

8.4.° За допомогою лінійки та транспортира побудуйте трикутник, одна сторона якого дорівнює 6 см, а кути, що прилягають до цієї сторони, — 90° і 45°.

8.5.° Перерисуйте в зошит рисунок 8.7. За допомогою косинця та лінійки знайдіть на прямій l точку, рівновіддалену від кінців відрізка AB.

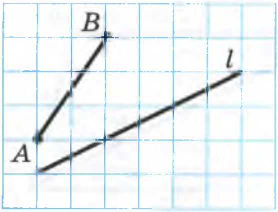


Рис. 8.7

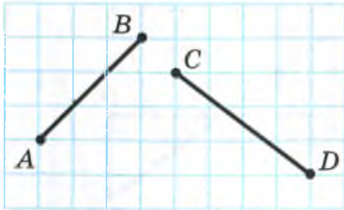


Рис. 8.8

8.6.° Перерисуйте в зошит рисунок 8.8. За допомогою косинця та лінійки знайдіть точку, яка рівновіддалена від точок A і B та водночас рівновіддалена від точок C і D.

ВПРАВИ

8.7.° На рисунку 8.9 $AC = DC$, $BC = EC$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DEC$.

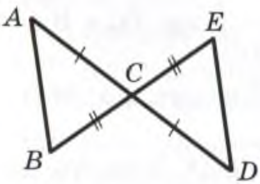


Рис. 8.9

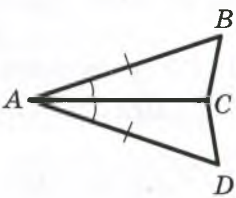


Рис. 8.10

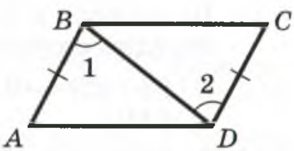


Рис. 8.11

8.8.° На рисунку 8.10 $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle ADC$.

8.9.° На рисунку 8.11 $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$, $AD = 7$ см, $\angle C = 34°$. Знайдіть відрізок BC і кут A.

8.10.° На рисунку 8.12 $AO = OD$, $BO = OC$. Знайдіть сторону CD і кут OCD трикутника OCD, якщо $AB = 8$ см, $\angle OBA = 43°$.

8.11.° Дано: $OA = OC$, $OB = OD$ (рис. 8.13). Доведіть, що $\angle OAD = \angle OCB$.

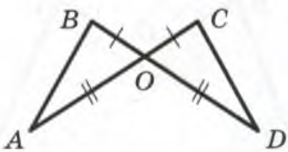


Рис. 8.12

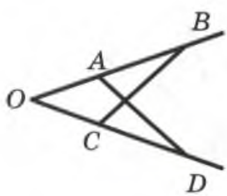


Рис. 8.13

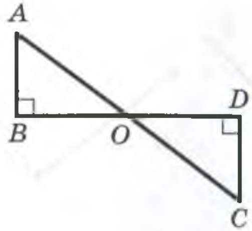


Рис. 8.14

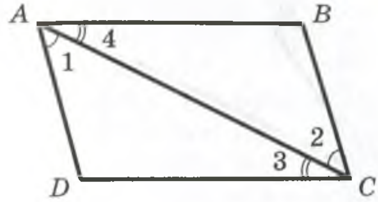


Рис. 8.15

8.12.° Із точок A і B, які лежать в одній півплощині відносно прямої a на однаковій відстані від неї, опущено на цю пряму перпендикуляри AC і BD. Знайдіть кут ACB, якщо $\angle ADC = 25°$.

8.13.° Відрізки AD і BC перетинаються в точці O та діляться цією точкою навпіл. Знайдіть кут ACD, якщо $\angle ABC = 64°$, $\angle ACO = 56°$.

8.14.° На рисунку 8.14 $AB \perp BD$, $CD \perp BD$, точка O — середина відрізка BD. Доведіть, що $\triangle ABO = \triangle CDO$.

8.15.° На рисунку 8.15 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AB = 8$ см, $BC = 6$ см. Знайдіть сторони AD і CD трикутника ADC.

8.16.° На рисунку 8.16 $\angle ABC = \angle DEF$, $BO = OE$. Доведіть, що $\triangle BCO = \triangle EFO$.

8.17.° На рисунку 8.17 $\angle BAO = \angle DCO$, $\angle BAC = \angle DCA$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle CDA$.

8.18.° На сторонах кута з вершиною в точці B позначено точки A і C, а на його бісектрисі — точку D таку, що $\angle ADB = \angle CDB$. Доведіть, що $AB = BC$.

8.19.° Через точку M, яка належить бісектрисі кута з вершиною в точці O, проведено пряму, яка перпендикулярна до цієї бісектриси. Ця пряма перетинає сторони даного кута в точках A і B. Доведіть, що $AM = MB$.

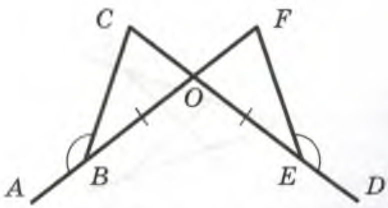


Рис. 8.16

Рис. 8.17

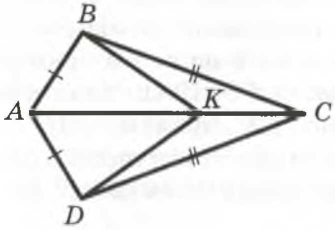


Рис. 8.18

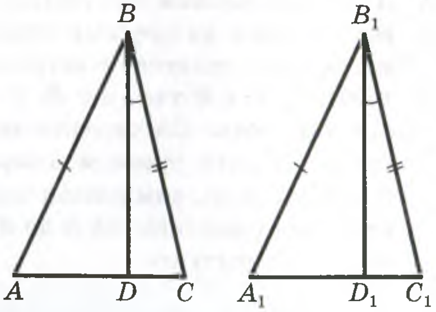


Рис. 8.19

8.20.° На рисунку 8.18 $\Delta ABC = \Delta ADC$. Доведіть, що $\Delta ABK = \Delta ADK$.

8.21.• На рисунку 8.19 $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, $\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$. Доведіть, що $\Delta DBC = \Delta D_1B_1C_1$.

8.22.• На рисунку 8.20 $\Delta MKO = \Delta MPO$. Доведіть, що $\Delta KOE = \Delta POE$.

8.23.• На рисунку 8.21 $BM \perp AD$, $CK \perp AD$, $BM = CK$, $AM = KD$. Доведіть, що $\Delta ABD = \Delta CDA$.

8.24.• Доведіть, що бісектриси рівних трикутників, проведені з вершин відповідних кутів, рівні.

8.25.• Доведіть, що в рівних трикутниках медіани, проведені до відповідних сторін, рівні.

8.26.• На продовженні медіани AM трикутника ABC за точку M відкладено відрізок MK, який дорівнює AM. Знайдіть відстань від точки K до вершини C, якщо $AB = 6$ см.

8.27.• Відрізки AB і CD перетинаються в точці O та діляться точкою перетину навпіл. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta BAD$.

8.28.• На рисунку 8.22 прямі m і n — серединні перпендикуляри сторін AB і AC трикутника ABC. Доведіть, що точка O рівновіддалена від усіх вершин даного трикутника.

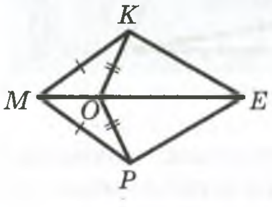


Рис. 8.20

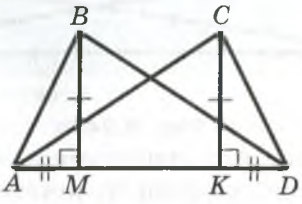


Рис. 8.21

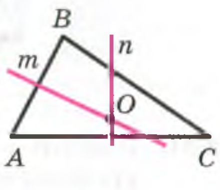


Рис. 8.22

8.29.° Для знаходження відстані від точки B до дзвіниці A, яка розташована на другому березі річки (рис. 8.23), за допомогою віх, рулетки й астролябії позначили на місцевості точки C, D і E так, що B, C і D лежать на одній прямій, причому точка C є серединою відрізка BD. Потім намітили пряму AE, яка проходить через точку C, причому $\angle ABC =$ $= \angle CDE$. Далі, вимірявши одну зі сторін трикутника CDE, визначили відстань від B до A. Яку сторону виміряли? Відповідь обґрунтуйте.

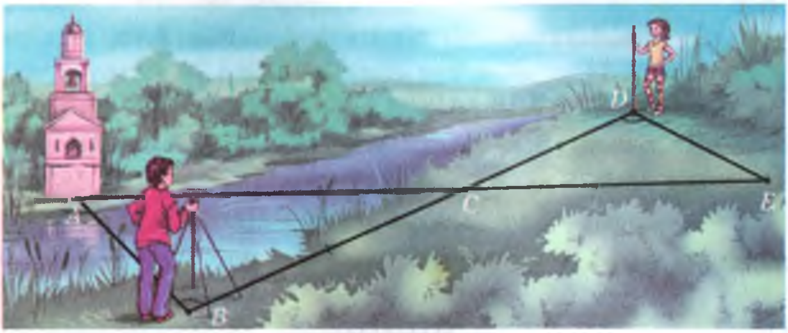


Рис. 8.23

8.30.° Для визначення ширини озера (рис. 8.24) на його березі позначили точки A і B, а потім ще точки C, D і O так, щоб точка O була спільною серединою відрізків AC і BD. Як можна визначити ширину озера? Відповідь обґрунтуйте.

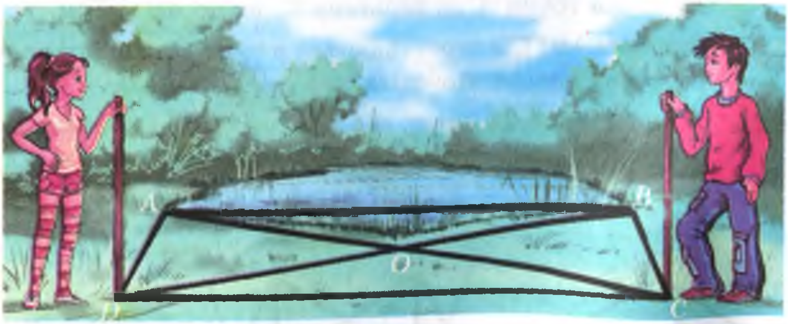


Рис. 8.24

8.31.° Доведіть рівність двох трикутників за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, та кутом між цією стороною та медіаною.

8.32.$^{\bullet}$ Доведіть рівність двох трикутників за стороною, прилеглим до неї кутом і бісектрисою трикутника, проведеною з вершини цього кута.

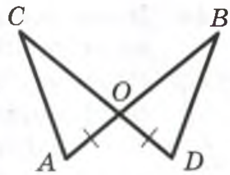


Рис. 8.25

8.33.$^{\bullet}$ Доведіть рівність двох трикутників за бісектрисою, кутом, з вершини якого проведено цю бісектрису, і кутом, що утворює бісектриса зі стороною, до якої її проведено.

8.34.$^{\bullet}$ Серединний перпендикуляр сторони BC трикутника ABC перетинає сторону AB у точці D. Знайдіть відрізок AD, якщо $CD = 4$ см, $AB = 7$ см.

8.35.$^{\bullet}$ Серединний перпендикуляр сторони AB трикутника ABC перетинає сторону BC у точці M. Знайдіть сторону AC трикутника ABC, якщо $BC = 16$ см, а периметр трикутника AMC дорівнює 26 см.

8.36.$^{\bullet\bullet}$ На рисунку 8.25 $OA = OD$. Додайте ще одну умову таку, щоб трикутники AOC і DOB виявилися рівними:
1) за першою ознакою рівності трикутників;
2) за другою ознакою рівності трикутників.

8.37.$^{\bullet\bullet}$ Відрізки AB і CD перетинаються в точці O та діляться цією точкою навпіл. На відрізку AC позначено точку M, а на відрізку BD — точку K так, що $AM = BK$. Доведіть, що: 1) $OM = OK$; 2) точки M, O і K лежать на одній прямій.

8.38.$^{\bullet\bullet}$ Рівні відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $OA = OC$. Прямі AD і BC перетинаються в точці M. Доведіть, що $MD = MB$.

8.39.$^{\bullet\bullet}$ На одній стороні кута з вершиною в точці O (рис. 8.26) позначено точки A і B, а на другій — точки C і D так, що $OA = OC$, $AB = CD$. Доведіть, що промінь OM є бісектрисою кута BOD, де M — точка перетину відрізків AD і BC.

8.40.$^{\bullet\bullet}$ На сторонах гострого кута A позначено точки B і C так, що $AB = BC$. Як за допомогою косинця побудувати бісектрису кута A?

8.41.* Доведіть рівність двох трикутників за медіаною та кутами, на які ця медіана ділить кут трикутника.

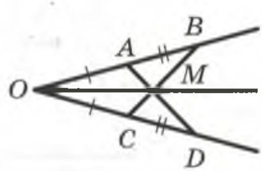


Рис. 8.26

8.42.* Чи можна стверджувати, що трикутники рівні за двома сторонами та кутом?

8.43.* Чи можна стверджувати, що трикутники рівні за двома сторонами та висотою, проведеною до третьої сторони?

8.44.* Доведіть, що на рисунку 8.27 кут BAC прямий.

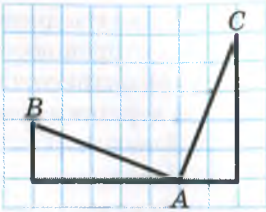


Рис. 8.27

8.45.* На стороні AC трикутника ABC позначили точки M і N так, що $AM = MN$, $BC = 2BM$ і BN — бісектриса кута MBC. Доведіть, що $AB = NC$.

8.46.* На медіані CM трикутника ABC позначили точки K і E так, що $\angle AKM = 90°$ і $CE = 2MK$. Доведіть, що $BE = AC$.

8.47.* На медіані AM трикутника ABC позначили точки K і L так, що $AK = 2LM$, $\angle ALC = 90°$. Доведіть, що $\angle BKM = \angle CAM$.

8.48.* У трикутнику ABC точка D лежить на стороні AC. Бісектриса CE трикутника ABC перетинає відрізок BD у точці O. Відомо, що $OD = OE$, $\angle DOE = 120°$. Доведіть, що BD — бісектриса трикутника ABC.

9. Рівнобедрений трикутник та його властивості

Означення. Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають рівнобедреним.

На рисунку 9.1 зображено рівнобедрений трикутник ABC, у якого $AB = BC$.

Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають **бічними сторонами**, а третю сторону — **основою** рівнобедреного трикутника.

Вершиною рівнобедреного трикутника називають спільну точку його бічних сторін (точка B на рисунку 9.1). При цьому кут B називають **кутом при вершині**, а кути A і C — **кутами при основі** рівнобедреного трикутника.

Означення. Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають рівностороннім.

На рисунку 9.2 зображено рівносторонній трикутник ABC. Рівносторонній трикутник — окремий вид рівнобедреного трикутника.

Рис. 9.1

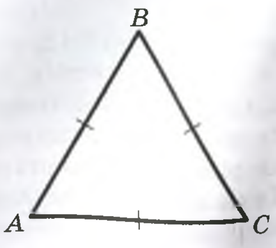


Рис. 9.2

Теорема 9.1 (властивості рівнобедреного трикутника). ***У рівнобедреному трикутнику: 1) кути при основі рівні; 2) бісектриса трикутника, проведена до його основи, є медіаною та висотою трикутника.***

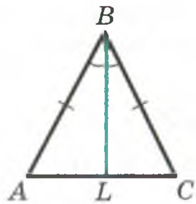


Рис. 9.3

Доведення. Розглянемо рівнобедрений трикутник ABC, у якому $AB = BC$, відрізок BL — його бісектриса (рис. 9.3). Треба довести, що $\angle A = \angle C$, $AL = LC$, $BL \perp AC$.

У трикутниках ABL і CBL сторона BL — спільна, $\angle ABL = \angle CBL$, оскільки за умовою BL — бісектриса кута ABC, сторони AB і BC рівні як бічні сторони рівнобедреного трикутника. Отже, $\Delta ABL = \Delta CBL$ за першою ознакою рівності трикутників. Звідси можна зробити такі висновки: 1) $\angle A = \angle C$; 2) $AL = LC$; 3) $\angle ALB = \angle CLB$.

Оскільки відрізки AL і LC рівні, то відрізок BL — медіана трикутника ABC.

Кути ALB і CLB суміжні, отже, $\angle ALB + \angle CLB = 180°$. Ураховуючи, що $\angle ALB = \angle CLB$, отримуємо: $\angle ALB = \angle CLB = 90°$. Отже, відрізок BL — висота трикутника ABC. ◄

Із теореми 9.1 випливає, що:

1) ***у трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути;***

2) ***у рівнобедреному трикутнику бісектриса, висота й медіана, проведені до його основи, збігаються;***

3) ***у рівносторонньому трикутнику всі кути рівні;***

4) ***у рівносторонньому трикутнику бісектриса, висота й медіана, проведені з однієї вершини, збігаються.***

Означення. **Якщо в трикутнику довжини всіх сторін різні, то такий трикутник називають різностороннім.**

Задача. Відрізок AD — медіана рівнобедреного трикутника ABC, яка проведена до основи. На сторонах AB і AC позначено відповідно точки M і K так, що $BM = CK$. Доведіть рівність трикутників AMD і AKD.

Розв'язання. Точка M належить відрізку AB, а точка K — відрізку AC, отже, $AB = AM + BM$, $AC = AK + CK$ (рис. 9.4).

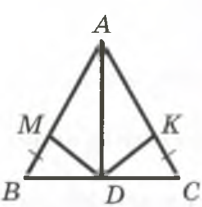


Рис. 9.4

Оскільки $AB = AC$ і $BM = CK$, то $AM = AK$.

Кути BAD і CAD рівні, оскільки медіана рівнобедреного трикутника, яка проведена до основи, є його бісектрисою.

Зауважимо, що AD — спільна сторона трикутників AMD і AKD.

Отже, трикутники AMD і AKD рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників. ◄

1. Які існують види трикутників залежно від кількості рівних сторін?
2. Який трикутник називають рівнобедреним? рівностороннім? різностороннім?
3. Які сторони рівнобедреного трикутника називають бічними?
4. Яку сторону рівнобедреного трикутника називають основою?
5. Сформулюйте властивість кутів рівнобедреного трикутника.
6. Сформулюйте властивість бісектриси рівнобедреного трикутника, проведеної до основи.
7. Яку властивість мають кути трикутника, що лежать проти його рівних сторін?
8. Сформулюйте властивість кутів рівностороннього трикутника.
9. Яку властивість мають бісектриса, висота й медіана рівностороннього трикутника, проведені з однієї вершини?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

9.1.° Накресліть:
1) різносторонній гострокутний трикутник;
2) рівнобедрений прямокутний трикутник;
3) рівнобедрений тупокутний трикутник.

9.2.° Накресліть:
1) різносторонній прямокутний трикутник;
2) різносторонній тупокутний трикутник.

9.3.° Накресліть рівнобедрений трикутник з бічною стороною завдовжки 3 см так, щоб його кут при вершині був: 1) гострим; 2) прямим; 3) тупим. У побудованих трикутниках проведіть висоти до бічних сторін.

ВПРАВИ

9.4.° 1) Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 13 см, а бічна сторона — 8 см.
2) Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 39 см, а основа — 15 см. Знайдіть бічні сторони трикутника.

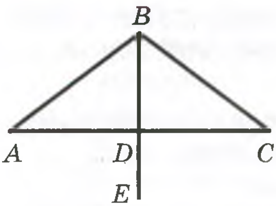


Рис. 9.5

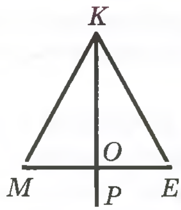


Рис. 9.6

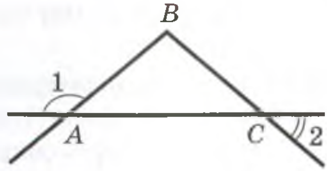


Рис. 9.7

9.5.° Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 28 см, а бічна сторона — 10 см. Знайдіть основу трикутника.

9.6.° Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, периметр якого дорівнює 32 см, а основа на 5 см більша за бічну сторону.

9.7.° Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, периметр якого дорівнює 54 см, а основа в 4 рази менша від бічної сторони.

9.8.° У рівнобедреному трикутнику ABC сторона AC — основа, $\angle BCA = 40°$, $\angle ABC = 100°$, BD — медіана. Знайдіть кути трикутника ABD.

9.9.° На рисунку 9.5 $AB = BC$, BD — медіана трикутника ABC, $\angle ABD = 53°$. Знайдіть кути ABC і ADE.

9.10.° На рисунку 9.6 $MK = KE$, $OE = 6$ см, $\angle MKE = 48°$, $\angle POE = 90°$. Знайдіть сторону ME і кут MKO.

9.11.° На рисунку 9.7 $AB = BC$, $\angle 1 = 140°$. Знайдіть кут 2.

9.12.° Кут, вертикальний до кута при вершині рівнобедреного трикутника, дорівнює 68°. Знайдіть кут між бічною стороною трикутника та медіаною, проведеною до основи.

9.13.° Кут, суміжний із кутом при вершині рівнобедреного трикутника, дорівнює 76°. Знайдіть кут між бічною стороною трикутника та висотою, опущеною на основу.

9.14.° На рисунку 9.8 $AB = BC$, $DC = DE$. Доведіть, що $\angle A = \angle E$.

9.15.° Пряма перетинає сторони кута A в точках B і C так, що $AB = AC$ (рис. 9.9). Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.

9.16.° На рисунку 9.10 $AO = CO$, $\angle AOB = \angle COB$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

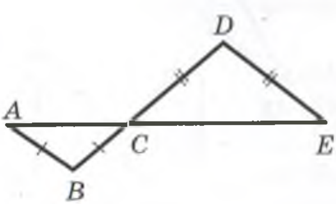


Рис. 9.8

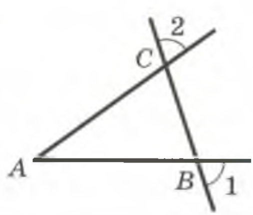


Рис. 9.9

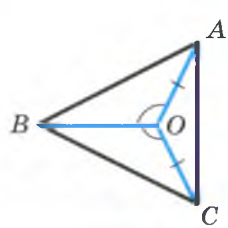


Рис. 9.10

9.17.° Трикутник ABC — рівнобедрений з основою AC, BD — його бісектриса, DM — бісектриса трикутника BDC. Знайдіть кут ADM.

9.18.° Один учень стверджує, що деякий трикутник рівнобедрений, а другий учень — що цей трикутник рівносторонній.
1) Чи можуть обидва учні бути правими?
2) У якому випадку правий тільки один учень і який саме?

9.19.° Використовуючи ознаки рівності трикутників, доведіть ознаку рівності рівнобедрених трикутників за бічною стороною та кутом при вершині.

9.20.° Відомо, що трикутники ABC і ADC рівнобедрені й прямокутні. Чи випливає звідси, що $\angle ABC = \angle ADC$?

9.21.° Використовуючи ознаки рівності трикутників, доведіть ознаку рівності рівнобедрених трикутників за основою та прилеглим до неї кутом.

9.22.• На основі AC рівнобедреного трикутника ABC позначено точки M і K так, що точка M лежить між точками A і K, причому $AM = CK$. Доведіть, що трикутник MBK рівнобедрений.

9.23.• У трикутнику MKE відомо, що $MK = ME$. На стороні KE позначено точки F і N так, що точка N лежить між точками F і E, причому $\angle KMF = \angle EMN$. Доведіть, що $\angle MFN = \angle MNF$.

9.24.• На бічних сторонах CA і CB рівнобедреного трикутника ABC відкладено відповідно рівні відрізки CK і CM. Доведіть, що: 1) $\Delta AMC = \Delta BKC$; 2) $\Delta AMB = \Delta BKA$.

9.25.• У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC на медіані BD позначили довільну точку M. Доведіть, що: 1) $\Delta AMB = \Delta CMB$; 2) $\Delta AMD = \Delta CMD$.

9.26.• Усі ланки ламаної $ABCDE$ рівні, причому $\angle ABC = \angle CDE$ (рис. 9.11). Доведіть, що середина відрізка BD рівновіддалена від точок A та E.

9.27.• Доведіть, що бісектриси рівнобедреного трикутника, проведені з вершин кутів при основі, рівні.

9.28.• Доведіть, що медіани рівнобедреного трикутника, проведені до бічних сторін, рівні.

9.29.• Доведіть, що середини сторін рівнобедреного трикутника є вершинами рівнобедреного трикутника.

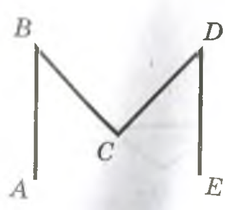


Рис. 9.11

9.30.° Знайдіть третю сторону рівнобедреного трикутника, якщо дві інші його сторони дорівнюють 7 см і 4 см. Скільки розв'язків має задача?

9.31.° Одна зі сторін рівнобедреного трикутника дорівнює 4 см. Знайдіть дві інші сторони, якщо периметр трикутника дорівнює 14 см.

9.32.° Чи є правильним твердження:
1) бісектриса рівнобедреного трикутника є його висотою та медіаною;
2) бісектриса рівностороннього трикутника є його висотою та медіаною;
3) якщо периметр трикутника в 3 рази більший за одну з його сторін, то цей трикутник рівносторонній?

9.33.° Точки A, B, C і D лежать на одній прямій, причому відрізки AB і CD мають спільну середину. Точка E така, що трикутник AEB рівнобедрений з основою AB. Доведіть, що трикутник CED рівнобедрений з основою CD.

9.34.° Точки A, B, C і D лежать на одній прямій. Точка E така, що трикутники AEB і CED рівнобедрені з основами AB і CD відповідно. Доведіть, що відрізки AB і CD мають спільну середину.

9.35.° На сторонах рівностороннього трикутника ABC (рис. 9.12) позначили точки M, K і D так, що $AD = BM = CK$. Доведіть, що трикутник MKD рівносторонній.

9.36.°° На продовженнях сторін AB, BC, AC рівностороннього трикутника ABC (рис. 9.13) за точки A, B і C відповідно відклали рівні відрізки AD, BK і CE. Доведіть, що трикутник DEK рівносторонній.

9.37.°° Трикутник DKE рівносторонній, і $\angle KDB = \angle DEA = \angle EKC$ (рис. 9.13). Доведіть, що трикутник ABC рівносторонній.

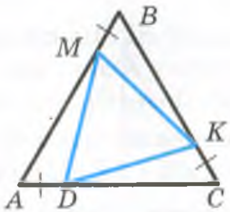


Рис. 9.12

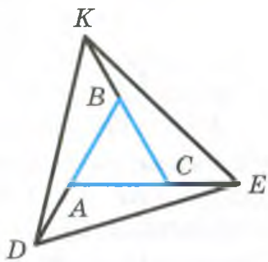


Рис. 9.13

9.38.•• Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а його медіана ділить даний трикутник на два трикутники так, що периметр одного з них на 6 см менший від периметра другого. Знайдіть бічну сторону даного трикутника. Скільки розв'язків має задача?

9.39.•• Точка D — середина основи AC рівнобедреного трикутника ABC. На сторонах AB і BC відповідно позначили точки M і N так, що $\angle MDA = \angle NDC$. Доведіть, що $AN = CM$.

9.40.•• На стороні AC трикутника ABC позначили точки M і N так, що $AB = AM$ і $CB = CN$ (рис. 9.14). Доведіть, що коли $BM = BN$, то трикутник ABC рівнобедрений.

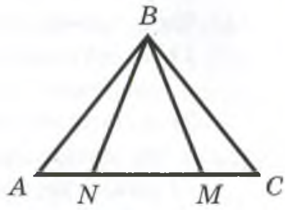


Рис. 9.14

9.41.•• На основі AC рівнобедреного трикутника ABC позначили точки M і N так, що $AB = AM$ і $CB = CN$ (рис. 9.14). Доведіть, що $BM = BN$.

9.42.•• У рівнобедрених трикутниках ABM і ABN відрізок AB є основою. Відомо, що $\angle ANB = 100°$. Знайдіть кут ANM.

9.43.•• У рівнобедрених трикутниках ABE і ABK відрізок AB є основою. Медіани цих трикутників, проведені з вершин E і K відповідно, дорівнюють 10 см і 6 см. Знайдіть відрізок EK.

9.44.* У трикутнику ABC $(\angle B = 90°)$ бісектриса AE дорівнює відрізку EC. Доведіть, що $AC = 2AB$.

9.45.* У трикутнику ABC бісектриса AE дорівнює відрізку EC. Відомо, що $AC = 2AB$. Знайдіть кут ABC.

9.46.* На сторонах AB і BC трикутника ABC позначили відповідно точки K і D. Відрізки AD і CK перетинаються в точці M. Відомо, що $CM = 2KM$, $AM = MD = DC$. Доведіть, що відрізок CK — висота трикутника ABC.

9.47.* У трикутнику ABC проведено бісектрису BL. На продовженні відрізка BL за точку L позначили точку K так, що $\angle BAK + \angle BAL = 180°$. Відомо, що $BL = AB$. Доведіть, що $BK = BC$.

9.48.* На медіані BD трикутника ABC позначили точки E і K так, що $BE = EK = KD$. Відомо, що $AD = AK$ і $AB = 10$ см. Знайдіть відрізок CE.

9.49.* У трикутнику ABC медіана BM удвічі менша від сторони AB. Доведіть, що $\angle MBC = \angle BCA + \angle CAB$.

9.50.* У трикутнику ABC сторона AB більша за сторону BC і бісектриса AL дорівнює стороні AC. На бісектрисі AL позначили точку K так, що $CK = BL$. Доведіть, що $\angle CKL = \angle ABC$.

10. Ознаки рівнобедреного трикутника

У попередньому пункті ми розглянули властивості рівнобедреного трикутника. А як серед трикутників «розпізнавати» рівнобедрені? На це запитання відповідають такі теореми-ознаки.

Теорема 10.1. ***Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.***

Доведення. Розглянемо трикутник ABC, у якому відрізок BM — медіана й висота. Треба довести, що $AB = BC$ (рис. 10.1).

З умови теореми випливає, що пряма BM — серединний перпендикуляр відрізка AC.

Тоді за властивістю серединного перпендикуляра $AB = BC$. ◀

Теорема 10.2. ***Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.***

Доведення. Розглянемо трикутник ABC, у якому відрізок BL — бісектриса й висота. Треба довести, що $AB = BC$ (рис. 10.2).

У трикутниках ABL і CBL сторона BL — спільна; $\angle ABL = \angle CBL$ (оскільки за умовою BL — бісектриса кута ABC), $\angle ALB = \angle CLB = 90°$ (оскільки за умовою відрізок BL — висота). Отже, трикутники ABL і CBL рівні за другою ознакою рівності трикутників. Тоді сторони AB і BC рівні як відповідні сторони рівних трикутників. ◀

Теорема 10.3. ***Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений.***

Доведення. Розглянемо трикутник ABC, у якому $\angle A = \angle C$. Треба довести, що $AB = BC$.

Проведемо серединний перпендикуляр a сторони AC. Доведемо, що пряма a проходить через вершину B.

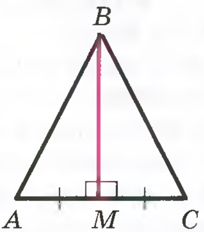


Рис. 10.1

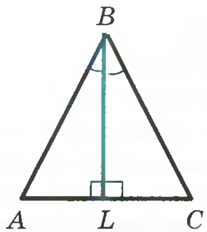


Рис. 10.2

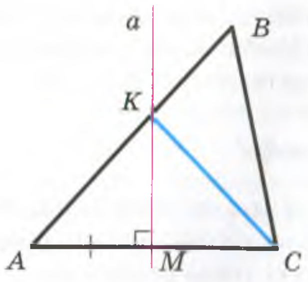


Рис. 10.3

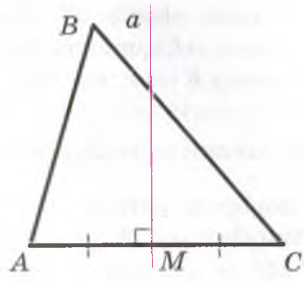


Рис. 10.4

Припустимо, що це не так. Тоді пряма a перетинає у внутрішній точці або сторону AB (рис. 10.3), або сторону BC (рис. 10.4).

Розглянемо перший із цих випадків. Нехай K — точка перетину прямої a зі стороною AB. Тоді за властивістю серединного перпендикуляра (теорема 8.2) $AK = CK$. Отже, трикутник AKC рівнобедрений, звідси $\angle A = \angle ACK$. Проте за умовою $\angle A = \angle ACB$. Тоді маємо: $\angle ACB = \angle ACK$, що суперечить основній властивості величини кута (п. 3).

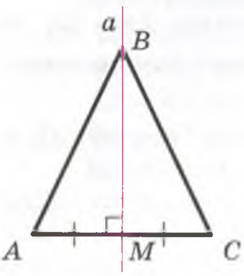


Рис. 10.5

Аналогічно отримуємо суперечність і для другого випадку (рис. 10.4).

Отже, наше припущення неправильне. Пряма a проходить через точку B (рис. 10.5). Тоді за властивістю серединного перпендикуляра $BA = BC$. ◀

Із цієї теореми випливає, що:

1) ***у трикутнику проти рівних кутів лежать рівні сторони;***

2) ***якщо в трикутнику всі кути рівні, то цей трикутник рівносторонній.***

Теорема 10.4. ***Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений.***

Доведення. Розглянемо трикутник ABC, у якому відрізок BM — медіана й бісектриса. Треба довести, що $AB = BC$.

На промені BM відкладемо відрізок MD, який дорівнює відрізку BM (рис. 10.6).

У трикутниках AMD і CMB маємо: $AM = MC$ (оскільки за умовою BM — медіана); $BM = MD$ за побудовою; кути AMD і CMB рівні як вертикальні. Отже, трикутники AMD і CMB рівні за першою ознакою рівності трикутників. Тоді сторони AD і BC, кути ADM і CBM рівні як відповідні елементи рівних трикутників.

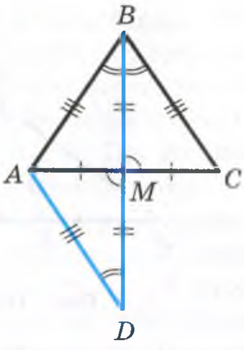


Рис. 10.6

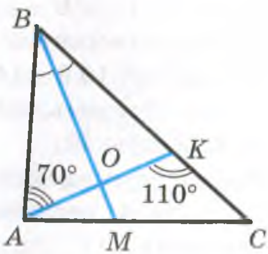


Рис. 10.7

Оскільки BD — бісектриса кута ABC, то $\angle ABM = \angle CBM$. Оскільки $\angle CBM = \angle ADM$, то отримуємо, що $\angle ABM = \angle ADM$. Тоді за ознакою рівнобедреного трикутника (теорема 10.3) отримуємо, що трикутник DAB рівнобедрений, звідки $AD = AB$. І вже доведено, що $AD = BC$. Отже, $AB = BC$. ◄

Задача. У трикутнику ABC проведено бісектрису BM (рис. 10.7), $\angle BAK = 70°$, $\angle AKC = 110°$. Доведіть, що $BM \perp AK$.

Розв'язання. Оскільки кути BKA і AKC суміжні, то $\angle BKA = 180° - \angle AKC$. Тоді $\angle BKA = 180° - 110° = 70°$.

Отже, у трикутнику ABK отримуємо, що $\angle BAK = \angle BKA = 70°$. Тому трикутник ABK рівнобедрений з основою AK, і його бісектриса BO (O — точка перетину AK і BM) є також висотою, тобто $BM \perp AK$. ◄

1. Сформулюйте ознаки рівнобедреного трикутника.
2. Який зв'язок між рівними кутами та рівними сторонами трикутника?
3. Що можна сказати про трикутник, якщо всі його кути рівні?

ВПРАВИ

10.1.° У трикутнику ABC медіана BK перпендикулярна до сторони AC. Знайдіть кут ABC, якщо $\angle ABK = 25°$.

10.2.° Серединний перпендикуляр сторони AC трикутника ABC проходить через вершину B. Знайдіть кут C, якщо $\angle A = 17°$.

10.3.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle ACB = 90°$, $\angle A = \angle B = 45°$, CK — висота. Знайдіть сторону AB, якщо $CK = 7$ см.

10.4.° На рисунку 10.8 $\angle AMK = \angle ACB$, $AK = MK$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

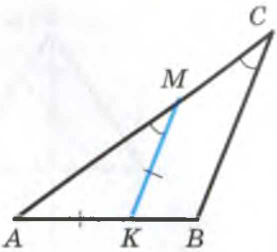


Рис. 10.8

10.5.° Пряма, перпендикулярна до бісектриси кута A, перетинає його сторони в точках B і C. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

10.6.° Бісектриси AM і CK кутів при основі AC рівнобедреного трикутника ABC перетинаються в точці O. Доведіть, що трикутник AOC рівнобедрений.

10.7.° У трикутнику ABC бісектриса BK є його висотою. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо периметр трикутника ABK дорівнює 16 см і $BK = 5$ см.

10.8.• Чи є правильним твердження:

1) якщо медіана й висота трикутника, проведені з однієї вершини, не збігаються, то цей трикутник не є рівнобедреним;
2) якщо бісектриса трикутника ділить протилежну сторону навпіл, то цей трикутник рівнобедрений?

10.9.• Медіани AE і CF, проведені до бічних сторін BC і AB рівнобедреного трикутника ABC, перетинаються в точці M. Доведіть, що трикутник AMC рівнобедрений.

10.10.• Точки M і K належать відповідно бічним сторонам AB і BC рівнобедреного трикутника ABC, $AM = CK$. Відрізки AK і CM перетинаються в точці O. Доведіть, що трикутник AOC рівнобедрений.

10.11.• На сторонах AC і BC трикутника ABC позначили відповідно точки D і E так, що $BE = DE$. Відомо, що $AE \perp BD$. Доведіть, що $AB = AD$.

10.12.•• На сторонах AB і BC трикутника ABC позначили відповідно точки D і E так, що $\angle EAC = \angle DCA$. Відрізки AE і CD перетинаються в точці F, $DF = EF$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

10.13.•• Через середину D сторони AB трикутника ABC проведено прямі, перпендикулярні до бісектрис кутів ABC і BAC. Ці прямі перетинають сторони AC і BC у точках M і K відповідно. Доведіть, що $AM = BK$.

10.14.•• У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) точка перетину серединного перпендикуляра сторони BC і бісектриси кута C належить медіані BM. Доведіть, що трикутник ABC рівносторонній.

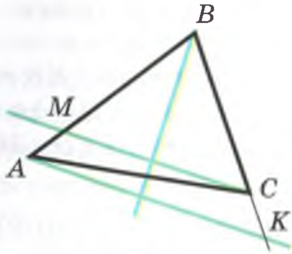


Рис. 10.9

10.15.•• У гострокутному трикутнику ABC медіана AM дорівнює висоті BK і $\angle MAB = \angle KBA$. Доведіть, що трикутник ABC рівносторонній.

10.16.•• Медіана AD, висота BE і бісектриса CF трикутника ABC перетинаються в точці O. Відомо, що $BO = CO$. Доведіть, що трикутник ABC рівносторонній.

10.17.•• На стороні AC трикутника ABC позначили точки K і E так, що $AK = KE = EC$. Чи можуть при цьому виконуватися рівності $\angle ABK = \angle KBE = \angle CBE$?

10.18.•• Медіана AM трикутника ABC перпендикулярна до його бісектриси BK. Знайдіть сторону AB, якщо $BC = 16$ см.

10.19.•• Через вершини A та C трикутника ABC проведено прямі, перпендикулярні до бісектриси кута ABC. Ці прямі перетинають прямі BC і BA в точках K і M відповідно (рис. 10.9). Відомо, що $BM = 8$ см, $KC = 1$ см. Знайдіть сторону AB.

10.20.•• У трикутнику ABC відомо, що $AB = 3$ см, $AC = 6$ см. На стороні BC позначено точку M таку, що $CM = 1$ см. Пряма, яка проходить через точку M перпендикулярно до бісектриси кута ACB, перетинає відрізок AC у точці K, а пряма, яка проходить через точку K перпендикулярно до бісектриси кута BAC, перетинає пряму AB у точці D. Знайдіть відрізок BD.

10.21.•• Пряма, яка проходить через вершину A трикутника ABC перпендикулярно до його медіани BD, ділить цю медіану навпіл. Знайдіть відношення довжин сторін AB і AC трикутника ABC.

10.22.•• У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $\angle A = 67{,}5°$, $\angle B = 22{,}5°$, CK — бісектриса трикутника ABC, CM — бісектриса трикутника BCK (рис. 10.10). Доведіть, що точка M — середина відрізка AB.

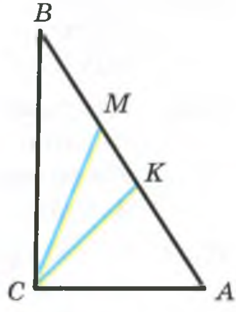


Рис. 10.10

10.23.•• У трикутнику ABC на стороні AB позначили точку K та провели бісектрису KE трикутника AKC і висоту KH трикутника BKC. Відомо, що $\angle EKH = 90°$ і $HC = 5$ см. Знайдіть сторону BC.

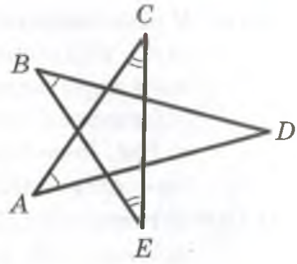


Рис. 10.11

10.24.•• У «зірці» $ACEBD$ (рис. 10.11) є рівними кути при вершинах A і B, кути при вершинах E і C, а також є рівними відрізки AC і BE. Доведіть, що $AD = BD$.

10.25.* Довжини сторін трикутника, виражені в сантиметрах, дорівнюють трьом послідовним натуральним числам. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо одна з його медіан перпендикулярна до однієї з його бісектрис.

10.26.* Із точки B на бісектриси кутів A і C трикутника ABC опустили перпендикуляри BM і BK. Відомо, що $BM = BK$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

10.27.* На стороні BC трикутника ABC позначили точку F. Відрізок AF перетинає медіану BD у точці E. Відомо, що $AE = BC$. Доведіть, що $FB = FE$.

10.28.* На стороні AB трикутника ABC позначили точку K. Відрізок CK перетинає медіану AM у точці F. Відомо, що $KF = KA$. Доведіть, що $CF = AB$.

10.29.* У трикутнику ABC провели медіану BM. Відомо, що $\angle MBC = \angle BAC + \angle BCA$. Доведіть, що $AB = 2BM$.

10.30.* Точка D — середина медіани AF трикутника ABC. Пряма CD перетинає сторону AB у точці E. Відомо, що $BD = BF$. Доведіть, що $AE = DE$.

10.31.* На сторонах AB і BC трикутника ABC позначили відповідно точки E і M так, що відрізок CE перетинає відрізок AM у його середині — точці O. Відомо, що $AB = CO$ і $EA = EO$. Доведіть, що відрізок AM — медіана трикутника ABC.

10.32.* У трикутнику ABC медіана AF дорівнює стороні AB. На промені AB позначили точку D так, що $AB = BD$. Пряма DF перетинає сторону AC у точці E. Доведіть, що $EF = EC$.

11. Третя ознака рівності трикутників

Теорема 11.1 (третя ознака рівності трикутників: за трьома сторонами). ***Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 11.1), у яких $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ (ці рівності вказують, які сторони трикутників відповідають одна одній). Доведемо, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

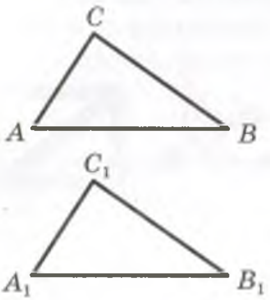


Рис. 11.1

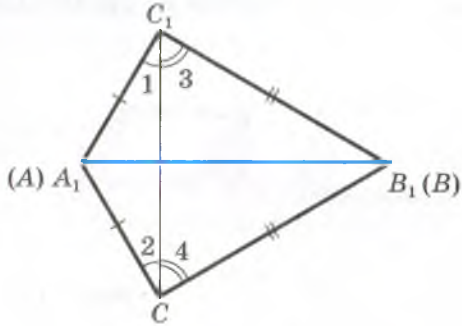


Рис. 11.2

Розмістимо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, вершина B — з вершиною B_1, а вершини C і C_1 лежали в різних півплощинах відносно прямої AB (рис. 11.2). Проведемо відрізок CC_1. Оскільки $AC = A_1C_1$, то трикутник C_1A_1C рівнобедрений, а отже, $\angle 1 = \angle 2$. Аналогічно можна довести, що $\angle 3 = \angle 4$. Отже, $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$. Тоді трикутники $A_1C_1B_1$ і A_1CB_1 рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників.

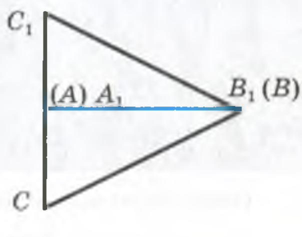


Рис. 11.3

Здавалося б, доведення завершено. Проте ми розглянули лише випадок, коли відрізок CC_1 перетинає відрізок A_1B_1 у внутрішній точці. Насправді відрізок CC_1 може проходити через один із кінців відрізка A_1B_1, наприклад через точку A_1 (рис. 11.3), або не мати спільних точок

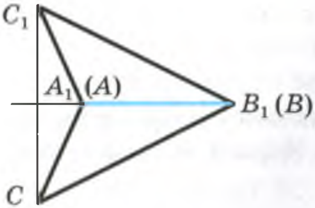


Рис. 11.4

з відрізком A_1B_1 (рис. 11.4). У кожному із цих випадків доведення будуть аналогічними наведеному. Проведіть їх самостійно. ◀

Із третьої ознаки рівності трикутників випливає, що *трикутник — жорстка фігура*. Справді, якщо чотири рейки з'єднати так, як показано на рисунку 11.5, *а*, то така конструкція не буде жорсткою (рис. 11.5, *б*, *в*). Якщо ж додати ще одну рейку, утворивши два трикутники (рис. 11.5, *г*), то одержана конструкція стане жорсткою. Цей факт широко використовують на практиці (рис. 11.6).

а *б* *в* *г*

Рис. 11.5

Опори ліній електропередачі

Телевізійна вежа (м. Київ)

Рис. 11.6. Жорсткі конструкції

Теорема 11.2. ***Якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона належить серединному перпендикуляру цього відрізка.***

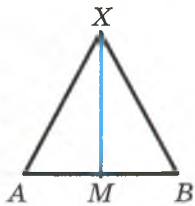


Рис. 11.7

Доведення. Нехай точка X рівновіддалена від кінців відрізка AB, тобто $XA = XB$ (рис. 11.7). Розглянемо трикутники AXM і BXM, де точка M — середина відрізка AB. Тоді $\Delta AXM = \Delta BXM$ за трьома сторонами, тобто за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle AMX = \angle BMX$. Сума цих кутів дорівнює $180°$, тому кожний із них дорівнює $90°$. Отже, пряма XM — серединний перпендикуляр відрізка AB.

Зауважимо, що ми розглянули випадок, коли точка X не належить прямій AB. Якщо точка X належить прямій AB, то вона збігається із серединою відрізка AB, а отже, належить його серединному перпендикуляру. ◀

1. Сформулюйте третю ознаку рівності трикутників.
2. Де знаходяться точки, які рівновіддалені від кінців відрізка?

ВПРАВИ

11.1.° На рисунку 11.8 $AB = CD$, $BC = AD$. Доведіть, що $\angle B = \angle D$.

11.2.° На рисунку 11.9 $AC = AD$, $BC = BD$. Знайдіть кут BAC, якщо $\angle BAD = 25°$.

11.3.° Доведіть, що два рівнобедрених трикутники рівні, якщо бічна сторона та основа одного трикутника відповідно дорівнюють бічній стороні та основі другого трикутника.

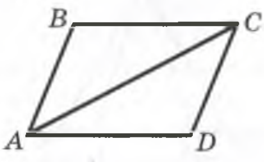


Рис. 11.8

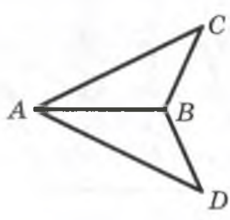


Рис. 11.9

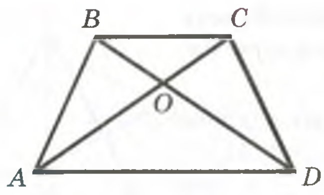


Рис. 11.10

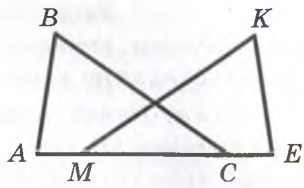


Рис. 11.11

11.4.° Доведіть, що два рівносторонніх трикутники рівні, якщо сторона одного трикутника дорівнює стороні другого трикутника.

11.5.° На рисунку 11.10 $\Delta ABC = \Delta DCB$, причому $AB = CD$. Доведіть, що $\Delta ABD = \Delta DCA$.

11.6.° На рисунку 11.10 $AB = CD$, $AC = BD$. Доведіть, що трикутник BOC рівнобедрений.

11.7.° Кожна з точок M і N рівновіддалена від кінців відрізка AB. Доведіть, що пряма MN — серединний перпендикуляр відрізка AB.

11.8.• На рисунку 11.11 $AB = KE$, $BC = KM$, $AM = EC$. Доведіть, що $\angle AMK = \angle BCE$.

11.9.• На рисунку 11.12 $AB = CD$, $BC = AD$, BM — бісектриса кута ABC, DK — бісектриса кута ADC. Доведіть, що $\Delta ABM = \Delta CDK$.

11.10.• Рівні відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = OD$. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta DCB$.

11.11.• Відрізки BD і B_1D_1 — бісектриси трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ відповідно, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

11.12.•• Микола стверджує, що йому вдалося зробити рисунок, на якому $AB = AC$ і $AM = AN$ (рис. 11.13). Чи має Микола рацію?

11.13.•• Чи можна стверджувати, що два трикутники є рівними, якщо кожній стороні одного трикутника дорівнює деяка сторона другого трикутника?

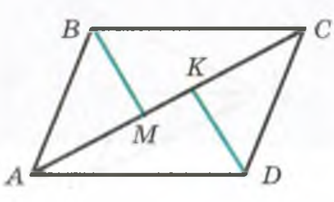


Рис. 11.12

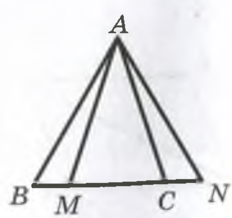


Рис. 11.13

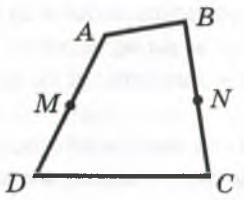


Рис. 11.14

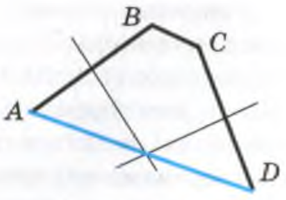


Рис. 11.15

11.14.•• Точка M — середина сторони AC трикутника ABC. На сторонах AB і BC відповідно знайшлися такі точки E і K, що $AK = CE$ і $ME = MK$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

11.15.•• На рисунку 11.14 точки M і N — середини рівних відрізків AD і BC. Серединні перпендикуляри відрізків AB і CD перетинаються в точці P. Доведіть, що серединний перпендикуляр відрізка MN проходить через точку P.

11.16.•• На рисунку 11.15 серединні перпендикуляри рівних відрізків AB і CD перетинають відрізок AD у його середині. Доведіть, що $AC = BD$.

11.17.* Доведіть рівність двох трикутників за двома сторонами та медіаною, яка проведена до третьої сторони.

12. Теореми

Ви бачите, що в підручнику з'являється все більше й більше теорем. І це не дивно: адже геометрія складається переважно з теорем та їхніх доведень.

Формулювання всіх теорем, які ми довели, складаються з двох частин. Першу частину теореми (те, що дано) називають **умовою** теореми, другу частину теореми (те, що потрібно довести) — **висновком** теореми.

Наприклад, у теоремі 8.1 (перша ознака рівності трикутників) умовою є те, що ***дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють двом сторонам та куту між ними другого трикутника***, а висновком є ***рівність трикутників***.

Усі відомі вам теореми можна умовно поділити на **теореми-властивості й теореми-ознаки**. Наприклад, теорема 1.1 установлює властивість прямих, що перетинаються, теорема 9.1 — властивість рівнобедреного трикутника.

Теореми-ознаки вказують на ознаки, за якими можна розпізнати фігуру, тобто віднести її до того чи іншого виду (класу).

Так, у теоремах-ознаках рівності трикутників зазначено вимоги, за якими два трикутники можна віднести до класу рівних. Наприклад, у теоремах 10.1–10.4 сформульовано властивості, за якими розпізнають рівнобедрений трикутник.

Теореми, які випливають *безпосередньо* з аксіом або теорем, називають **теоремами-наслідками**, або коротко — **наслідками**.

Наприклад, властивість кутів, протилежних рівним сторонам трикутника, є наслідком з теореми 9.1.

Якщо в теоремі 8.2 про властивість серединного перпендикуляра поміняти місцями умову й висновок, то отримаємо теорему 11.2. Дві теореми, кожну з яких можна отримати з іншої, помінявши місцями умову й висновок, називають **взаємно оберненими**. Якщо яку-небудь із цих теорем назвати **прямою**, то друга теорема буде називатися **оберненою**.

Міняючи місцями умову й висновок теореми, треба бути дуже уважними: не завжди можна отримати істинне твердження. Наприклад, твердження, обернене до теореми 4.1 про суму суміжних кутів, хибне. Справді, якщо сума якихось двох кутів дорівнює 180°, то зовсім не обов'язково, щоб ці кути були суміжними.

Ви знаєте, що справедливість теореми встановлюють шляхом логічних міркувань, тобто доведенням.

Теорему 1.1 було доведено методом **від супротивного**. Назва цього методу фактично відображає його суть. Ми припустили, що висновок теореми 1.1 неправильний. На підставі цього припущення за допомогою логічних міркувань ми отримали факт, який суперечить основній властивості прямої.

Методом від супротивного було доведено також і ряд інших теорем, наприклад теореми 5.1, 10.3.

Дуже важливо, щоб доведення теореми було повним, тобто були розглянуті всі можливі випадки. Так, повне доведення теореми 11.1 (третя ознака рівності трикутників) потребувало розгляду трьох можливих випадків.

Уміння бачити всі тонкощі доведення — найважливіша якість, що формує математичну культуру. Якби, наприклад, під час доведення теореми 8.2 про властивість серединного перпендикуляра відрізка ми не розглянули б окремо випадок, коли точка X є серединою відрізка AB, то для цього випадку звернення до трикутників AXM і BXM було б неможливим.

Під час доведення теореми 10.4 (ознака рівнобедреного трикутника) ми використовували **прийом додаткової побудови:** рисунок доповнили елементами, про які не йшлося в умові теореми. Цей метод є ключем до розв'язування багатьох задач і доведення ряду теорем. Тому дуже важливо навчитися бачити «вигідну» додаткову побудову — таку, яка допоможе отримати потрібний результат.

А як набути такого «геометричного зору»? Запитання непросте, і на нього не відповіси, даючи конкретні рекомендації. Але все ж таки радимо: по-перше, не бути байдужим до геометрії, а полюбити цей красивий предмет; по-друге, розв'язувати більше задач, щоб розвинути інтуїцію та набути потрібного досвіду.

?

1. З яких двох частин складається формулювання теореми?
2. Як називають теорему, у якій перелічено властивості, за якими можна віднести фігуру до певного виду (класу)?
3. Як називають теорему, яка безпосередньо випливає з аксіоми чи іншої теореми?
4. Як називають пару теорем, у яких умову й висновок поміняно місцями?
5. У чому полягає метод доведення від супротивного?
6. Які з теорем 1.1, 4.2, 5.1, 8.3 доведено методом від супротивного?
7. У чому полягає прийом додаткової побудови?

ВПРАВИ

12.1.° У теоремах 4.1, 8.2, 9.1, 10.3, 11.2 укажіть умову й висновок теореми.

12.2.° Із теорем 4.1, 8.2, 9.1, 10.3, 11.2 виберіть: 1) теореми-властивості; 2) теореми-ознаки.

12.3.° Сформулюйте твердження, яке є оберненим до даного:
1) якщо трикутник рівносторонній, то його кути рівні;
2) якщо два кути вертикальні, то їхні бісектриси є доповняльними променями;
3) якщо кут між бісектрисами двох кутів прямий, то ці кути суміжні;
4) якщо сторона та протилежний їй кут одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та протилежному їй куту другого трикутника, то ці трикутники рівні.

Для яких із даних тверджень:
1) пряме й обернене твердження є правильними;
2) пряме твердження є правильним, а обернене — хибним;
3) пряме твердження є хибним, а обернене — правильним?

12.4.° Сформулюйте твердження, яке є оберненим до даного:
1) якщо точка B лежить між точками A і C, то $AB + BC = AC$;
2) якщо два трикутники не рівні, то їхні периметри теж не рівні;
3) якщо градусна міра кута більша за 90°, то він є тупим.

Для яких із даних тверджень:
1) пряме й обернене твердження є правильними;
2) пряме твердження є правильним, а обернене — хибним;
3) пряме твердження є хибним, а обернене — правильним?

12.5.° Сформулюйте твердження, що заперечує дане:
1) відрізок AB перетинає пряму m;
2) градусна міра кута ABC більша за 40°;
3) із двох суміжних кутів хоча б один не більший за 90°;
4) промені OA та OB не є доповняльними;
5) відрізок має тільки одну середину.

12.6.° Сформулюйте твердження, що заперечує дане:
1) кут ABC не є прямим;
2) трикутник MKE є рівнобедреним;
3) через точку на прямій можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до даної;
4) промінь AC ділить кут BAK навпіл.

12.7.• Доведіть, використовуючи метод від супротивного, що коли жодна з висот трикутника не збігається з бісектрисою, проведеною з тієї самої вершини, то трикутник не є рівнобедреним.

12.8.• Доведіть, використовуючи метод від супротивного, що коли сторони AB і BC трикутника ABC не рівні, то його медіана BD не є його висотою.

12.9.• Доведіть методом від супротивного, що коли різниця двох кутів дорівнює 1°, то вони не можуть бути вертикальними.

12.10.• Доведіть методом від супротивного, що з двох суміжних кутів хоча б один не менший від 90°.

12.11.• Сформулюйте й доведіть ознаку рівності рівнобедрених трикутників за бічною стороною та медіаною, проведеною до бічної сторони.

12.12.• Сформулюйте й доведіть ознаку рівності трикутників за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, і кутом між медіаною та цією стороною.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Рівні фігури

Дві фігури називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

Основна властивість рівності трикутників

Для даного трикутника ABC і даного променя A_1M існує трикутник $A_1B_1C_1$, який дорівнює трикутнику ABC, такий, що $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ і сторона A_1B_1 належить променю A_1M, а вершина C_1 лежить у заданій півплощині відносно прямої A_1M.

Теорема про пряму, перпендикулярну до даної

Через точку, яка не належить даній прямій, проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної.

Висота трикутника

Перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на пряму, яка містить протилежну сторону, називають висотою трикутника.

Медіана трикутника

Відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони, називають медіаною трикутника.

Бісектриса трикутника

Відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони, називають бісектрисою трикутника.

**Перша ознака рівності трикутників:
за двома сторонами та кутом між ними**

Якщо дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам та куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

**Друга ознака рівності трикутників:
за стороною та двома прилеглими до неї кутами**

Якщо сторона та два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Третя ознака рівності трикутників: за трьома сторонами

Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Серединний перпендикуляр відрізка

Пряму, яка перпендикулярна до відрізка та проходить через його середину, називають серединним перпендикуляром відрізка.

Рівнобедрений трикутник

Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають рівнобедреним.

Рівносторонній трикутник

Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають рівностороннім.

Властивості рівнобедреного трикутника

У рівнобедреному трикутнику: 1) кути при основі рівні; 2) бісектриса, висота й медіана, проведені до його основи, збігаються.

Ознаки рівнобедреного трикутника

- Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.
- Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.
- Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений.
- Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений.

Властивості трикутників, які випливають із властивостей та ознак рівнобедреного трикутника

- У трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути.
- У трикутнику проти рівних кутів лежать рівні сторони.
- У рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.
- У рівносторонньому трикутнику бісектриса, висота й медіана, проведені з однієї вершини, збігаються.
- Якщо в трикутнику всі кути рівні, то цей трикутник рівносторонній.

§ 3 ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ. СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА

Як установити паралельність двох прямих? Які властивості мають паралельні прямі? Чому дорівнює сума кутів будь-якого трикутника? Які властивості має прямокутний трикутник? Опанувавши матеріал цього параграфа, ви отримаєте відповіді на поставлені запитання.

13. Паралельні прямі

Означення. **Дві прямі називають паралельними, якщо вони не перетинаються.**

На рисунку 13.1 зображено паралельні прямі a і b. Пишуть: $a \parallel b$ (читають: «прямі a і b паралельні» або «пряма a паралельна прямій b»).

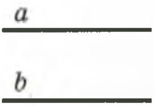


Рис. 13.1

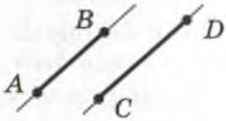


Рис. 13.2

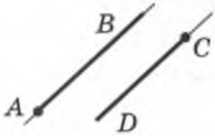


Рис. 13.3

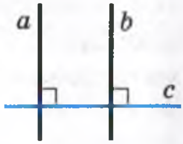


Рис. 13.4

Якщо два відрізки лежать на паралельних прямих, то їх називають паралельними. На рисунку 13.2 відрізки AB і CD паралельні. Пишуть: $AB \parallel CD$.

Також можна говорити про паралельність двох променів, променя та відрізка, прямої та променя, відрізка та прямої. Наприклад, на рисунку 13.3 зображено паралельні промені AB і CD.

Теорема 13.1 (ознака паралельності прямих). ***Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.***

Доведення. На рисунку 13.4 $a \perp c$ і $b \perp c$. Треба довести, що $a \parallel b$.

Припустимо, що прямі a і b перетинаються в деякій точці M (рис. 13.5). Тоді через точку M, яка не належить прямій c, проходять дві прямі a і b, перпендикулярні до прямої c. Це суперечить тому, що через точку можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до даної (теорема 7.1). Таким чином, наше припущення є неправильним; отже, $a \parallel b$. ◀

Доведена теорема пояснює, чому за допомогою лінійки та косинця можна будувати паралельні прямі так, як показано на рисунку 13.6.

Наслідок. ***Через дану точку M, яка не належить прямій a, можна провести пряму b, паралельну прямій a.***

Доведення. Нехай точка M не належить прямій a (рис. 13.7).

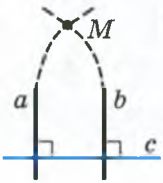


Рис. 13.5

Рис. 13.6

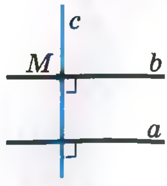


Рис. 13.7

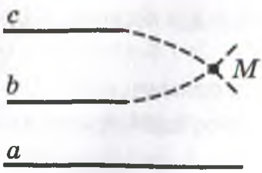


Рис. 13.8

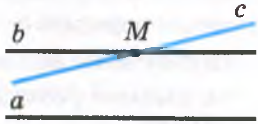


Рис. 13.9

Проведемо (наприклад, за допомогою косинця) через точку M пряму c, перпендикулярну до прямої a. Тепер через точку M проведемо пряму b, перпендикулярну до прямої c. За ознакою паралельності прямих (теорема 13.1) отримуємо, що $a \parallel b$. ◄

Чи можна через точку M (рис. 13.7) провести ще одну пряму, паралельну прямій a? Відповідь на це запитання дає основна властивість паралельних прямих.

Основна властивість паралельних прямих (аксіома паралельності прямих). **Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.**

Теорема 13.2. ***Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.***

Доведення. Нехай $b \parallel a$ і $c \parallel a$. Доведемо, що $b \parallel c$.

Припустимо, що прямі b і c не паралельні, а перетинаються в деякій точці M (рис. 13.8). Тоді маємо, що через точку M проходять дві прямі, паралельні прямій a, а це суперечить аксіомі паралельності прямих. Таким чином, наше припущення є неправильним; отже, $b \parallel c$. ◄

Задача. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу.

Розв'язання. Нехай прямі a і b паралельні, пряма c перетинає пряму b у точці M (рис. 13.9). Припустимо, що пряма c не перетинає пряму a, тоді $c \parallel a$. Але в цьому випадку через точку M проходять дві прямі b і c, які паралельні прямій a, що суперечить аксіомі паралельності прямих. Таким чином, наше припущення неправильне, отже, пряма c перетинає пряму a. ◄

?

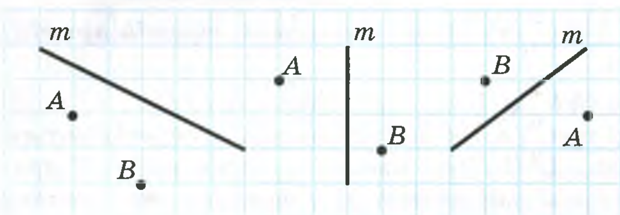
1. Які дві прямі називають паралельними?
2. Яким символом позначають паралельність прямих?
3. Як читають запис $m \parallel n$?
4. Які відрізки називають паралельними?

5. Яке взаємне розміщення двох прямих, що перпендикулярні до третьої прямої?
6. Сформулюйте аксіому паралельності прямих.
7. Яке взаємне розміщення двох прямих, що паралельні третій прямій?
8. Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то як ця пряма розміщена відносно другої?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

13.1.° Перерисуйте в зошит рисунок 13.10. Проведіть через кожну з точок A і B пряму, паралельну прямій m.

13.2.° Накресліть трикутник і проведіть через кожну його вершину пряму, паралельну протилежній стороні.



а б в

Рис. 13.10

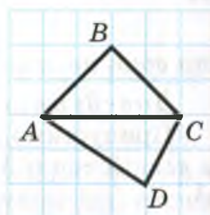


Рис. 13.11

13.3.° Перерисуйте в зошит рисунок 13.11. Проведіть через точку B пряму m, паралельну прямій AC, а через точку D — пряму n, паралельну прямій AC. Яке взаємне розміщення прямих m і n?

ВПРАВИ

13.4.° Чи можна провести пряму, яка була б паралельною кожній із прямих a і b, що перетинаються?

13.5.° Пряма a паралельна стороні AB трикутника ABC. Чи може пряма a бути паралельною стороні AC? стороні BC?

13.6.° Прямі a і b перетинаються. Чи можна провести таку пряму c, яка була б паралельною прямій a та перетинала пряму b?

13.7.° Чи можна стверджувати, що два відрізки є паралельними, якщо вони не мають спільних точок?

13.8.° Дано пряму й точку, яка лежить поза нею. Чи можна стверджувати, що існує тільки один промінь, паралельний даній прямій, початком якого є дана точка?

13.9.• Скільки можна провести відрізків, які паралельні даній прямій, через точку, що не належить цій прямій?

13.10.• Прямі a і b перпендикулярні до прямої c, пряма d перетинає пряму a. Чи перетинає пряма d пряму b?

13.11.•• Доведіть, що коли будь-яка пряма, яка перетинає пряму a, перетинає і пряму b, то прямі a і b паралельні.

13.12.•• Доведіть, що коли прямі a і b паралельні й $a \perp c$, то $b \perp c$.

13.13.•• Прямі m і n перпендикулярні відповідно до сторін OA та OB кута AOB, відмінного від розгорнутого. Доведіть, що прямі m і n перетинаються.

13.14.•• На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC позначили відповідно точки M і N так, що $BM = BN$. Доведіть, що $MN \parallel AC$.

13.15.•• У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено медіани AN і CM. Доведіть, що $MN \parallel AC$.

13.16.•• У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено бісектриси AN і CM. Доведіть, що $MN \parallel AC$.

13.17.•• На рисунку 13.12 $AB = CD$ і $\angle A = \angle D$. Доведіть, що $AD \parallel BC$.

Рис. 13.12

14. Ознаки паралельності двох прямих

Якщо дві прямі a і b перетнути третьою прямою c, то утвориться вісім кутів (рис. 14.1). Пряму c називають **січною** прямих a і b.

Кути 3 і 6, 4 і 5 називають **односторонніми**.

Кути 3 і 5, 4 і 6 називають **різносторонніми**.

Кути 6 і 2, 5 і 1, 3 і 7, 4 і 8 називають **відповідними**.

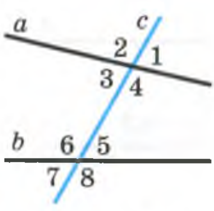


Рис. 14.1

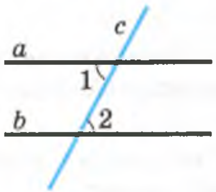


Рис. 14.2

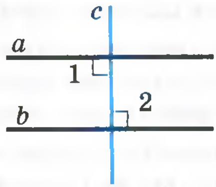


Рис. 14.3

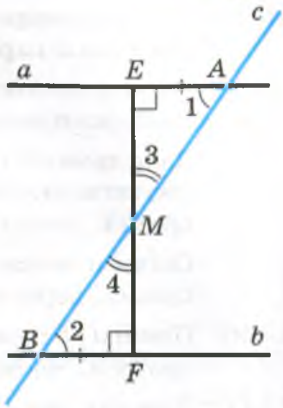


Рис. 14.4

Теорема 14.1. ***Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.***

Доведення. На рисунку 14.2 пряма c є січною прямих a і b, $\angle 1 = \angle 2$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Якщо $\angle 1 = \angle 2 = 90°$ (рис. 14.3), то паралельність прямих a і b випливає з ознаки паралельності прямих (теорема 13.1).

Нехай тепер пряма c не перпендикулярна до жодної з прямих a і b. Позначимо A і B — точки перетину прямої c із прямими a і b відповідно. Позначимо точку M — середину відрізка AB (рис. 14.4). Через точку M проведемо перпендикуляр ME до прямої a. Нехай пряма ME перетинає пряму b у точці F. Маємо: кути 1 і 2 рівні за умовою; кути 3 і 4 рівні як вертикальні. Отже, трикутники AME і BMF рівні за стороною та двома прилеглими до неї кутами, тобто за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle AEM = \angle MFB = 90°$. Ми показали, що прямі a і b перпендикулярні до прямої EF; отже, вони паралельні.

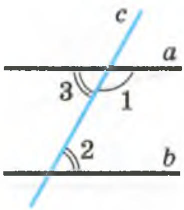


Рис. 14.5

Теорема 14.2. ***Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює*** **180°**, ***то прямі паралельні.***

Доведення. На рисунку 14.5 пряма c є січною прямих a і b, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Кути 1 і 3 суміжні, отже, $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Оскільки $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, то $\angle 2 = \angle 3$. А кути 2 і 3 є різносторонніми, тому за теоремою 14.1 $a \parallel b$.

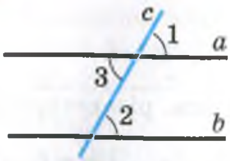


Рис. 14.6

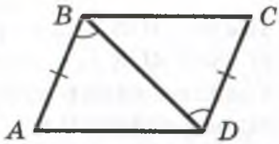


Рис. 14.7

Теорема 14.3. ***Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.***

Доведення. На рисунку 14.6 пряма c є січною прямих a і b, $\angle 1 = \angle 2$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Кути 1 і 3 рівні як вертикальні. Оскільки $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 1 = \angle 3$, то $\angle 2 = \angle 3$. Але кути 2 і 3 є різносторонніми. Тому за ознакою паралельності двох прямих (теорема 14.1) $a \parallel b$. ◀

Задача. На рисунку 14.7 $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$. Доведіть, що $BC \parallel AD$.

Розв'язання. Для трикутників ABD і CDB маємо: $AB = CD$ і $\angle ABD = \angle CDB$ за умовою, BD — спільна сторона. Отже, трикутники ABD і CDB рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників.

Тоді $\angle BDA = \angle DBC$. Оскільки кути BDA і DBC — різносторонні при прямих BC і AD та січній BD і ці кути рівні, то $BC \parallel AD$. ◀

1. Якими мають бути різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, щоб дані прямі були паралельними?
2. Якими мають бути односторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, щоб дані прямі були паралельними?
3. Якими мають бути відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, щоб дані прямі були паралельними?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

14.1.° Проведіть дві прямі AB і CD. Проведіть пряму MK, яка перетинає кожну з прямих AB і CD. Позначте точку перетину прямих AB і MK буквою O, а прямих CD і MK — буквою E. Заповніть прогалини в тексті:

1) кути AOM і ... — відповідні;
2) кути AOE і ... — відповідні;

3) кути AOE і ... — різносторонні;
4) кути AOE і ... — односторонні.
Укажіть, якими кутами (відповідними, різносторонніми чи односторонніми) є:
1) $\angle BOM$ і $\angle DEM$; 2) $\angle BOE$ і $\angle DEM$; 3) $\angle BOE$ і $\angle OEC$.

14.2.° Накресліть дві прямі та проведіть їхню січну. Пронумеруйте кути, утворені при перетині даних прямих січною. Укажіть серед цих кутів усі пари:
1) відповідних кутів;
2) односторонніх кутів;
3) різносторонніх кутів.

ВПРАВИ

14.3.° На рисунку 14.8 укажіть усі пари різносторонніх, односторонніх і відповідних кутів.

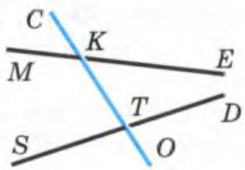


Рис. 14.8

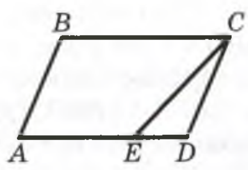
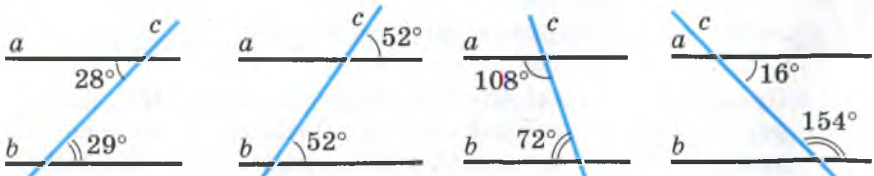


Рис. 14.9

14.4.° Запишіть, які кути на рисунку 14.9 є:
1) односторонніми при прямих BC і AD та січній AB;
2) односторонніми при прямих CE і CD та січній AD;
3) різносторонніми при прямих BC і AD та січній CE;
4) відповідними при прямих CE і CD та січній AD;
5) односторонніми при прямих BC і AD та січній CE.

14.5.° На яких із рисунків 14.10, *а–г* прямі a і b паралельні?



а *б* *в* *г*

Рис. 14.10

14.6.° Чи паралельні зображені на рисунку 14.11 прямі a і b, якщо:

1) $\angle 3 = \angle 6$;
2) $\angle 2 = \angle 6$;
3) $\angle 4 = 125°$, $\angle 6 = 55°$;
4) $\angle 2 = 35°$, $\angle 5 = 146°$;
5) $\angle 1 = 98°$, $\angle 6 = 82°$;
6) $\angle 1 = 143°$, $\angle 7 = 37°$?

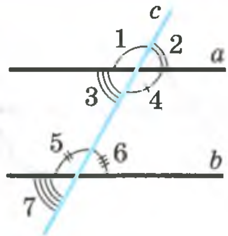


Рис. 14.11

14.7.° На яких із рисунків 14.12, *а–г* прямі m і n паралельні?

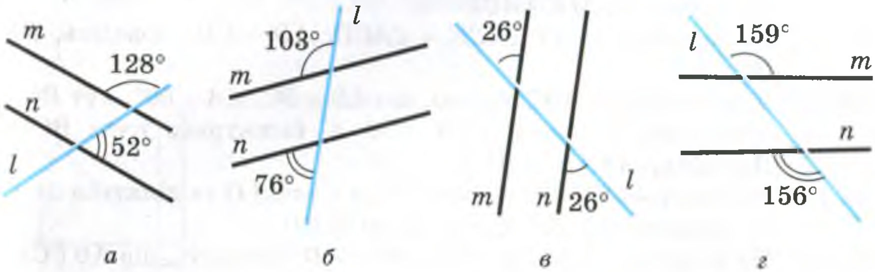


Рис. 14.12

14.8.° На рисунку 14.13 укажіть усі пари паралельних прямих.

14.9.° Запишіть, які прямі на рисунку 14.14 є паралельними, якщо $\angle 1 = 53°$, $\angle 2 = 128°$, $\angle 3 = 127°$.

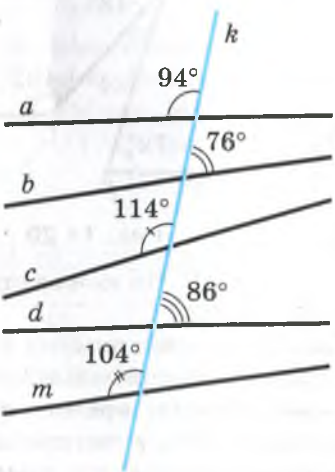


Рис. 14.13

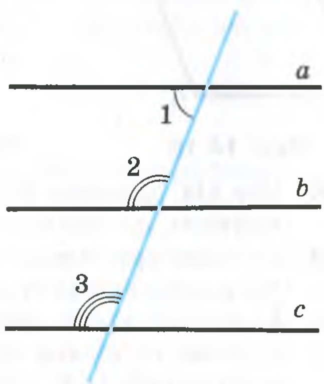


Рис. 14.14

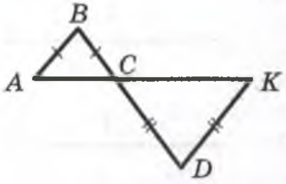


Рис. 14.15

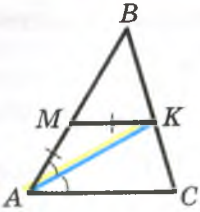


Рис. 14.16

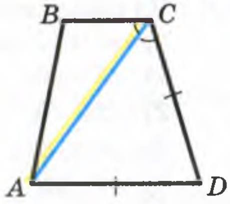


Рис. 14.17

14.10.° На рисунку 14.15 $AB = BC$, $CD = DK$. Доведіть, що $AB \parallel DK$.

14.11.• На рисунку 14.16 AK — бісектриса кута BAC, $AM = MK$. Доведіть, що $MK \parallel AC$.

14.12.• На рисунку 14.17 $\angle ACB = \angle ACD$, $AD = CD$. Доведіть, що $BC \parallel AD$.

14.13.• У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, $\angle A = 60°$, кут BCD суміжний із кутом ACB, CM — бісектриса кута BCD. Доведіть, що $AB \parallel CM$.

14.14.• Відрізки AB і CD перетинаються в точці O та діляться цією точкою навпіл. Доведіть, що $AC \parallel BD$.

14.15.• На рисунку 14.18 $AB = CD$, $BC = AD$. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

14.16.• На рисунку 14.19 зображено прямі a, b і k. Відомо, що деяка пряма m перетинає пряму a. Чи перетинає пряма m пряму b?

14.17.• Яке взаємне розміщення прямих CD і EF на рисунку 14.20?

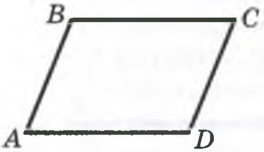


Рис. 14.18

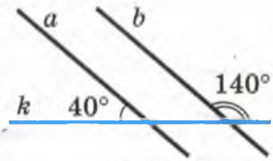


Рис. 14.19

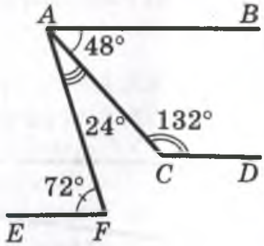


Рис. 14.20

14.18.• Кут ABC дорівнює 60°, а кут BCD — 120°. Чи можна стверджувати, що прямі AB і CD паралельні?

14.19.• Кут між прямими a і c дорівнює куту між прямими b і c. Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?

14.20.• Із восьми кутів, утворених при перетині прямих a і b прямою c, чотири кути дорівнюють 40°, а чотири кути дорівнюють 140°. Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?

14.21.•• Пряма перетинає бісектрису BM трикутника ABC у точці O, яка є серединою відрізка BM, а сторону BC — у точці K. Доведіть, що коли $OK \perp BM$, то $MK \parallel AB$.

14.22.•• Відрізки AM і CK — медіани трикутника ABC. На продовженні відрізка AM за точку M відкладено відрізок MF, а на продовженні відрізка CK за точку K — відрізок KD так, що $MF = AM$, $KD = CK$. Доведіть, що точки B, D і F лежать на одній прямій.

14.23.•• На рисунку 14.21 $\angle BAD = \angle BCD$. Бісектриса кута B перетинає відрізок AD у точці P. На відрізку BC узяли таку точку Q, що $AQ \perp BP$. Доведіть, що $PQ \parallel DC$.

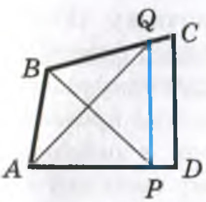


Рис. 14.21

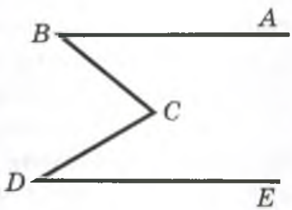


Рис. 14.22

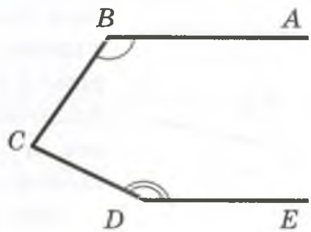


Рис. 14.23

14.24.•• На рисунку 14.22 $\angle ABC = 30°$, $\angle BCD = 70°$ і $\angle CDE = 40°$. Доведіть, що $AB \parallel DE$.

14.25.•• На рисунку 14.23 $\angle ABC = 120°$, $\angle BCD = 80°$ і $\angle CDE = 160°$. Доведіть, що $AB \parallel DE$.

14.26.•• Бісектриси кутів A і C трикутника ABC перетинаються в точці O. На сторонах AB і BC позначили відповідно точки M і N так, що $MA = MO$ і $NO = NC$. Доведіть, що точки M, O і N лежать на одній прямій.

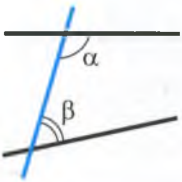
П'ЯТИЙ ПОСТУЛАТ ЕВКЛІДА

У п. 6 ви дізналися, що за аксіоми приймають очевидні твердження. Тоді чому б, наприклад, теореми 1.1 і 5.1 не включити до списку аксіом, адже вони також очевидні? Відповідь на це запитання цілком природна: якщо якесь твердження можна довести за допомогою аксіом або вже доведених теорем, то це твердження — теорема, а не аксіома.

Із цих позицій дуже повчальною є історія, пов'язана з п'ятим постулатом Евкліда (нагадаємо, що в оповіданні «З історії геометрії» ми сформулювали чотири перших постулати).

V постулат. І щоб кожного разу, коли пряма при перетині з двома іншими прямими утворює з ними односторонні кути, сума яких менша від двох прямих кутів, ці прямі перетиналися по той бік від січної, по який ця сума менша від двох прямих кутів (рис. 14.24).

Можна показати, що п'ятий постулат і сформульована нами в п. 13 аксіома паралельності прямих рівносильні, тобто з постулату випливає аксіома, і навпаки: з аксіоми випливає постулат.



$\alpha + \beta < 180°$

Рис. 14.24

Понад двадцять століть багато вчених намагалися довести п'ятий постулат, тобто вивести його з інших аксіом Евкліда. Лише на початку XIX ст. кілька математиків незалежно один від одного дійшли висновку: твердження, що *через дану точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній*, є аксіомою.

Вам може здаватися, що в цьому висновку нічого особливого немає: приєднуємо аксіому паралельності до вже існуючого списку аксіом-правил, а далі доводимо теореми.

Однак якщо у футболі додати хоча б одне правило, наприклад дозволити польовим гравцям грати й руками, то ми отримаємо зовсім іншу гру.

Якщо п'ятий постулат — це правило, яке ми приймаємо, а не теорема, то його можна замінити іншим правилом — твердженням, протилежним йому.

Так і зробив видатний російський математик, професор Казанського університету Микола Іванович Лобачевський (1792–1856). Він замінив лише одне правило — аксіому паралельності прямих — іншим: *через точку, яка не лежить на даній прямій, проходять щонайменше дві прямі, які не перетинають дану*. Нова аксіома дозволила побудувати нову геометрію — неевклідову.

М. І. Лобачевський

Подібну ідею трохи пізніше запропонував угорський математик Янош Бойяї (1802–1860).

15. Властивості паралельних прямих

Теорема 15.1 (обернена до теореми 14.1). ***Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то кути, які утворюють пару різносторонніх кутів, рівні.***

Доведення. На рисунку 15.1 прямі a і b паралельні, пряма c — січна. Доведемо, що $\angle 1 = \angle 2$.

Нехай $\angle 1 \neq \angle 2$. Тоді через точку K проведемо пряму a_1 так, щоб $\angle 3 = \angle 2$ (рис. 15.1). Кути 3 і 2 є різносторонніми при прямих a_1 і b та січній c. Тоді за ознакою паралельності двох прямих (теорема 14.1) $a_1 \parallel b$. Отримали, що через точку K проходять дві прямі, паралельні прямій b. Це суперечить аксіомі паралельності прямих. Таким чином, наше припущення є неправильним; отже, $\angle 1 = \angle 2$. ◀

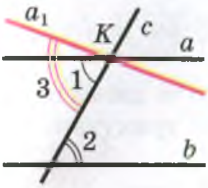


Рис. 15.1

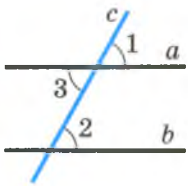


Рис. 15.2

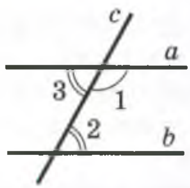


Рис. 15.3

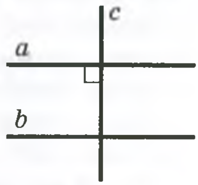


Рис. 15.4

Теорема 15.2 (обернена до теореми 14.3). ***Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то кути, які утворюють пару відповідних кутів, рівні.***

Доведення. На рисунку 15.2 прямі a і b паралельні, пряма c — січна. Доведемо, що $\angle 1 = \angle 2$.

За властивістю паралельних прямих (теорема 15.1) кути 3 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих a і b та січній c. Але кути 3 й 1 рівні як вертикальні. Отже, $\angle 1 = \angle 2$. ◀

Теорема 15.3 (обернена до теореми 14.2). ***Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то сума кутів, які утворюють пару односторонніх кутів, дорівнює*** $180°$.

Доведення. На рисунку 15.3 прямі a і b паралельні, пряма c — січна. Доведемо, що $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

За властивістю паралельних прямих (теорема 15.1) кути 3 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих a і b та січній c. Але кути 3 й 1 суміжні, тому $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Отже, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. ◀

Наслідок. ***Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої*** (рис. 15.4).

Доведіть цей наслідок самостійно.

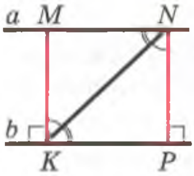


Рис. 15.5

Зауважимо, що з доведенням цього твердження, яке не використовує теорему 15.3, ви ознайомилися, розв'язуючи задачу 13.12.

Задача 1. Доведіть, що всі точки однієї з двох паралельних прямих рівновіддалені від другої прямої.

Розв'язання. Нехай прямі a і b паралельні (рис. 15.5), M і N — дві довільні точки прямої a. Опустимо з них перпендикуляри MK і NP на пряму b. Доведемо, що $MK = NP$.

Розглянемо трикутники MKN і PNK. Відрізок KN — їхня спільна сторона. Оскільки $MK \perp b$ і $NP \perp b$, то $MK \parallel NP$, а кути MKN і PNK рівні як різносторонні при паралельних прямих MK і NP та січній KN.

Аналогічно кути MNK і PKN рівні як різносторонні при паралельних прямих MN і KP та січній KN.

Отже, трикутники MKN і PNK рівні за стороною та двома прилеглими кутами, тобто за другою ознакою рівності трикутників. Тоді $MK = NP$. ◄

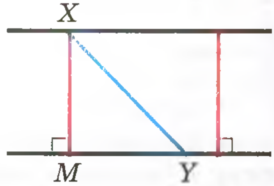


Рис. 15.6

У п. 5 ви ознайомилися з поняттям відстані від точки до фігури. Аналогічно вводять поняття відстані між двома довільними фігурами: шукають відрізок найменшої довжини, який сполучає точки даних фігур. Якщо такий відрізок вдається знайти, то його довжину називають **відстанню між двома даними фігурами**.

У п. 17 буде доведено, що коли з однієї точки до прямої проведено перпендикуляр і похилу, то перпендикуляр менший від похилої. Звідси у свою чергу випливає, що перпендикуляр, опущений з будь-якої точки однієї з паралельних прямих на другу, не більший за будь-який відрізок, кінці якого лежать на даних паралельних прямих (рис. 15.6). Тому доцільно прийняти таке означення.

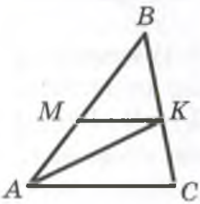


Рис. 15.7

Означення. Відстанню між двома паралельними прямими називають відстань від будь-якої точки однієї з прямих до другої прямої.

Наприклад, на рисунку 15.5 довжина відрізка MK — це відстань між паралельними прямими a і b.

Задача 2. На рисунку 15.7 відрізок AK — бісектриса трикутника ABC, $MK \parallel AC$. Доведіть, що трикутник AMK рівнобедрений.

Розв'язання. Оскільки AK — бісектриса трикутника ABC, то $\angle MAK = \angle KAC$.

Кути KAC і MKA рівні як різносторонні при паралельних прямих MK і AC та січній AK. Отже, $\angle MAK = \angle MKA$.

Тоді трикутник AMK рівнобедрений. ◄

1. Яку властивість мають різносторонні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною?
2. Яку властивість мають відповідні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною?
3. Яку властивість мають односторонні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною?
4. Відомо, що пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих. Чи обов'язково вона перпендикулярна до другої прямої?
5. Що називають відстанню між двома паралельними прямими?

ВПРАВИ

15.1.° На рисунку 15.8 знайдіть кут 1.

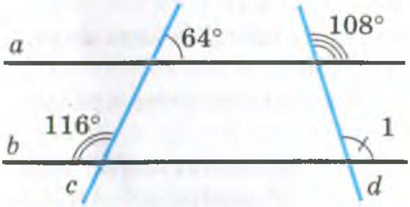


Рис. 15.8

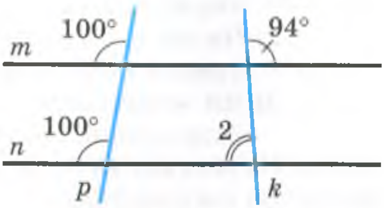


Рис. 15.9

15.2.° На рисунку 15.9 знайдіть кут 2.

15.3.° Різниця односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 50°. Знайдіть ці кути.

15.4.° Один з односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, у 4 рази більший за другий. Знайдіть ці кути.

15.5.° Знайдіть усі кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:

1) один із цих кутів дорівнює 48°;

2) відношення градусних мір двох із цих кутів дорівнює 2 : 7.

15.6.° Знайдіть усі кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один із них на $24°$ менший від іншого.

15.7.° На рисунку 15.10 $m \parallel n$, $p \parallel k$, $\angle 1 = 50°$. Знайдіть кути 2, 3 і 4.

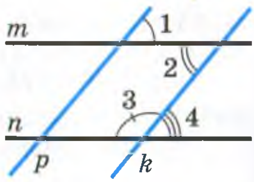


Рис. 15.10

15.8.° Пряма, паралельна основі AC рівнобедреного трикутника ABC, перетинає його бічні сторони AB і BC у точках D і F відповідно. Доведіть, що трикутник DBF рівнобедрений.

15.9.° Пряма, паралельна стороні AC рівностороннього трикутника ABC, перетинає його сторони AB і BC у точках D і F відповідно. Доведіть, що трикутник DBF рівносторонній.

15.10.° На продовженнях сторін AC і BC рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) за точки A і B позначили відповідно точки P і K так, що $PK \parallel AB$. Доведіть, що трикутник KPC рівнобедрений.

15.11.° Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, $AO = BO$, $AC \parallel BD$. Доведіть, що $CO = DO$.

15.12.° Відрізки MK і DE перетинаються в точці F, $DK \parallel ME$, $DK = ME$. Доведіть, що $\Delta MEF = \Delta KDF$.

15.13.° Дайте відповідь на запитання.

1) Чи можуть обидва односторонніх кути при двох паралельних прямих і січній бути тупими?
2) Чи може сума різносторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній дорівнювати $180°$?
3) Чи можуть бути рівними односторонні кути при двох паралельних прямих і січній?

15.14.• На рисунку 15.11 $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Доведіть, що $BC = AD$.

15.15.• На рисунку 15.11 $BC = AD$, $BC \parallel AD$. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

15.16.• На рисунку 15.12 $MK \parallel EF$, $ME = EF$, $\angle KMF = 70°$. Знайдіть кут MEF.

15.17.• Через вершину B трикутника ABC (рис. 15.13) провели пряму MK, паралельну прямій AC, $\angle MBA = 42°$, $\angle CBK = 56°$. Знайдіть кути трикутника ABC.

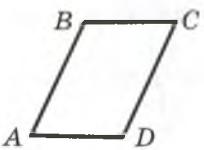


Рис. 15.11

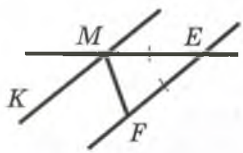


Рис. 15.12

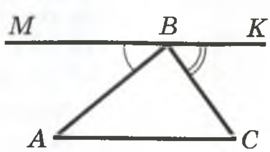


Рис. 15.13

15.18.• Із вершини B рівнобедреного трикутника ABC провели промінь BK паралельно основі AC. Доведіть, що цей промінь є бісектрисою кута, суміжного з кутом ABC.

15.19.• Пряма, проведена через вершину A трикутника ABC паралельно його протилежній стороні, утворює зі стороною AC кут, який дорівнює куту BAC. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

15.20.• На рисунку 15.14 $\angle MAB = 50°$, $\angle ABK = 130°$, $\angle ACB = 40°$, CE — бісектриса кута ACD. Знайдіть кути трикутника ACE.

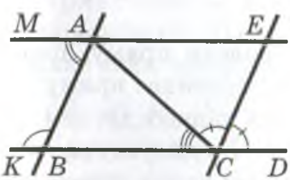


Рис. 15.14

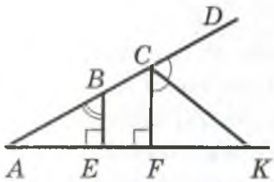


Рис. 15.15

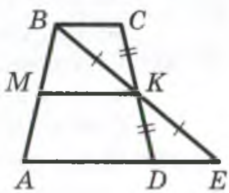


Рис. 15.16

15.21.• На рисунку 15.15 $BE \perp AK$, $CF \perp AK$, CK — бісектриса кута FCD, $\angle ABE = 62°$. Знайдіть кут ACK.

15.22.• На рисунку 15.16 $BC \parallel MK$, $BK = KE$, $CK = KD$. Доведіть, що $AD \parallel MK$.

15.23.• На рисунку 15.17 $AB = AC$, $AF = FE$, $AB \parallel EF$. Доведіть, що $AE \perp BC$.

15.24.• На сторонах AB і BC трикутника ABC позначили відповідно точки M і D так, що $MD \parallel AC$ і $\angle MDA = \angle MDB$. Відомо, що $AD = 6$ см. Знайдіть DC.

15.25.• Трикутник ABC — рівнобедрений з основою AC. Через довільну точку M його бісектриси BD проведено прямі, які паралельні його сторонам AB і BC та перетинають відрізок AC у точках E та F відповідно. Доведіть, що $DE = DF$.

15.26.• У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено бісектриси AM і CN. Доведіть, що кут BMN удвічі більший за кут AMN.

15.27.• На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC позначили відповідно точки N і M так, що $AN = CM$. Відомо, що кут BMN удвічі більший за кут AMN. Доведіть, що відрізки AM і CN — бісектриси трикутника ABC.

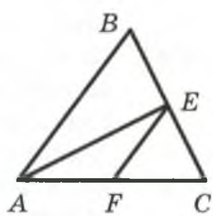


Рис. 15.17

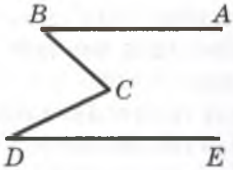


Рис. 15.18

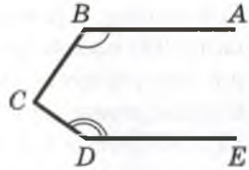


Рис. 15.19

15.28.•• На рисунку 15.18 $AB \parallel DE$. Доведіть, що $\angle BCD = \angle ABC + \angle CDE$.

15.29.•• На рисунку 15.19 $AB \parallel DE$, $\angle ABC = 120°$, $\angle CDE = 150°$. Доведіть, що $BC \perp CD$.

15.30.•• Через вершину B трикутника ABC провели пряму, паралельну його бісектрисі AM. Ця пряма перетинає пряму AC у точці K. Доведіть, що трикутник BAK рівнобедрений.

15.31.•• Через точку O перетину бісектрис AE і CF трикутника ABC провели пряму, паралельну прямій AC. Ця пряма перетинає сторону AB у точці M, а сторону BC — у точці K. Доведіть, що $MK = AM + CK$.

15.32.•• Бісектриси кутів BAC і BCA трикутника ABC перетинаються в точці O. Через цю точку проведено прямі, які паралельні прямим AB і BC та перетинають сторону AC у точках M і K відповідно. Доведіть, що периметр трикутника MOK дорівнює довжині сторони AC.

15.33.* У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) провели бісектрису AD. Відомо, що $BD = AC$. Доведіть, що $AD = AC$.

15.34.* На сторонах AB, BC і AC рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) позначили відповідно точки M, D і K так, що $AM = 2DC$ і $\angle AMD = \angle KDC$. Доведіть, що $MD = KD$.

15.35.* На стороні AC рівностороннього трикутника ABC узяли точку M, а на продовженні сторони BC за вершину C узяли точку N так, що $AM = CN$. Доведіть, що $BM = MN$.

15.36.* На стороні AC рівностороннього трикутника ABC узяли точку M, а на продовженні сторони BC за вершину C узяли точку N так, що $BM = MN$. Доведіть, що $AM = CN$.

15.37.* На продовженні сторони AC рівностороннього трикутника ABC за точку C узяли точку D, а на продовженні сторони BC за вершину C узяли точку E так, що $AD = CE$. Доведіть, що $BD = DE$.

15.38.* На сторонах AB, BC і AC рівностороннього трикутника ABC позначили відповідно точки M, N і K так, що $BN = 2NC$, $CK = 2AK$ і $MK \perp NK$. Доведіть, що $MN = 2AM$.

15.39.* Точка D — середина сторони AC трикутника ABC. На стороні BC позначили точку E так, що $\angle BEA = \angle CED$. Відомо, що $DE = 5$ см. Знайдіть відрізок AE.

15.40.* У трикутнику ABC проведено медіану BM. На продовженні сторони AB за точку B позначили точку K. Відомо, що $AB = 2BM$. Доведіть, що промінь BC є бісектрисою кута MBK.

16. Сума кутів трикутника

Трикутник — ключова фігура планіметрії. Світ трикутників різноманітний. Проте всім їм притаманна властивість, яку розкриває така теорема.

Теорема 16.1. ***Сума кутів трикутника дорівнює* 180°.**

Доведення. Розглянемо довільний трикутник ABC. Треба довести, що $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Через вершину B проведемо пряму a, паралельну прямій AC (рис. 16.1). Маємо: $\angle A$ і $\angle 1$ рівні як різносторонні при паралельних прямих a і AC та січній AB. Аналогічно доводимо, що $\angle C = \angle 3$. Але кути 1, 2, 3 складають розгорнутий кут з вершиною B. Отже, $\angle A + \angle ABC + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$. ◄

Наслідок. ***Серед кутів трикутника принаймні два кути гострі.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

Із цього наслідку випливає, що кут при основі рівнобедреного трикутника завжди є гострим.

Означення. Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний із кутом цього трикутника.

На рисунку 16.2 кути 1, 2, 3 є зовнішніми кутами трикутника ABC.

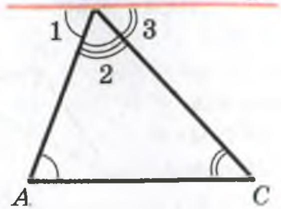


Рис. 16.1

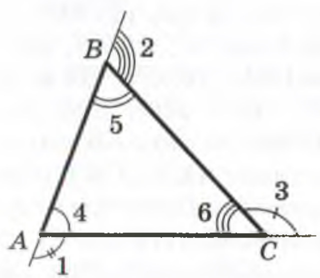


Рис. 16.2

Теорема 16.2. ***Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.***

Доведення. На рисунку 16.2 кути 1, 2 і 3 — зовнішні кути трикутника ABC. Треба довести, що $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$, $\angle 2 = \angle 4 + \angle 6$, $\angle 3 = \angle 4 + \angle 5$.

Доведемо, наприклад, першу із цих трьох рівностей (решту рівностей доводять аналогічно).

За властивістю суміжних кутів $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. За теоремою про суму кутів трикутника $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$. Тоді $\angle 1 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$, звідки $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$. ◄

Наслідок. ***Зовнішній кут трикутника більший за кожний із кутів трикутника, не суміжних з ним.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

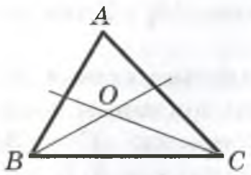


Рис. 16.3

Задача 1. У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = \alpha$. Бісектриси кутів B і C перетинаються в точці O. Доведіть, що $\angle BOC = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Розв'язання. Для трикутника ABC маємо: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Тоді $\angle B + \angle C = 180° - \alpha$. Оскільки промені BO і CO — бісектриси відповідно кутів ABC і ACB (рис. 16.3), то $\angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Для трикутника BOC маємо: $\angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180°$. Тоді $\angle BOC = 180° - (\angle OBC + \angle OCB) = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 90° + \frac{\alpha}{2}$. ◄

Задача 2. Відрізок BM — медіана трикутника ABC. Відомо, що $\angle ABM = 40°$ і $AB = 2BM$. Знайдіть кут ABC.

Розв'язання. На продовженні відрізка BM за точку M позначимо точку K так, що $BM = MK$. З'єднаємо точки A і K (рис. 16.4).

Оскільки $BK = 2BM$, то $AB = BK$. Отже, трикутник ABK рівнобедрений і $\angle BAK = \angle BKA$. Маємо: $\angle BAK + \angle BKA = 180° - \angle ABK = 180° - 40° = 140°$. Тоді $\angle BAK = \angle BKA = 70°$.

Легко показати (зробіть це самостійно), що трикутники AMK і CMB рівні за першою ознакою рівності трикутників. Отже, $\angle AKM = \angle CBM$ як відповідні кути рівних трикутників. Отримуємо: $\angle CBM = 70°$. Тоді $\angle ABC = 110°$.

Відповідь: 110°. ◄

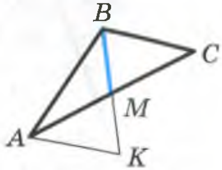


Рис. 16.4

1. Чому дорівнює сума кутів трикутника?
2. Яку найменшу кількість гострих кутів має будь-який трикутник?
3. Який кут називають зовнішнім кутом трикутника?
4. Який зв'язок між зовнішнім кутом трикутника та двома кутами трикутника, не суміжними з ним?
5. Порівняйте зовнішній кут трикутника з кутом трикутника, який не суміжний з ним.

ВПРАВИ

16.1.° Знайдіть кут трикутника, якщо два інших його кути дорівнюють 35° і 96°.

16.2.° Один із кутів трикутника в 3 рази менший від другого кута та на 35° менший від третього. Знайдіть кути трикутника.

16.3.° Знайдіть кути трикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як 2 : 3 : 7.

16.4.° Знайдіть кути рівностороннього трикутника.

16.5.° Знайдіть кути рівнобедреного прямокутного трикутника.

16.6.° Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 63°. Знайдіть кут при вершині цього трикутника.

16.7.° Знайдіть кути при основі рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині дорівнює 104°.

16.8.° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині в 4 рази більший за кут при основі.

16.9.° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі на 48° менший від кута при вершині.

16.10.° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один із них дорівнює: 1) 110°; 2) 50°. Скільки розв'язків має задача?

16.11.° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один із них дорівнює: 1) 42°; 2) 94°. Скільки розв'язків має задача?

16.12.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, AK — бісектриса, $\angle BAK = 18°$. Знайдіть кути AKC і ABC.

16.13.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, CK — бісектриса, $\angle A = 66°$. Знайдіть кут AKC.

16.14.° Бісектриси AK і CM трикутника ABC перетинаються в точці O, $\angle BAC = 116°$, $\angle BCA = 34°$. Знайдіть кут AOC.

16.15.° У рівнобедреному трикутнику ABC з кутом при вершині B, який дорівнює 36°, провели бісектрису AD. Доведіть, що трикутники ADB і CAD рівнобедрені.

16.16.° У трикутнику ABC провели бісектрису BF. Знайдіть кут C, якщо $\angle A = 39°$, $\angle AFB = 78°$.

16.17.° Доведіть, що коли один із кутів трикутника дорівнює сумі двох інших кутів, то цей трикутник прямокутний.

16.18.° На рисунку 16.5 укажіть зовнішні кути:
1) при вершинах E та F трикутника MEF;
2) при вершині E трикутника MKE.

16.19.° На рисунку 16.6 укажіть трикутники, для яких зовнішнім кутом є: 1) кут AMB; 2) кут BMD.

16.20.° Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 75°. Знайдіть:
1) кут трикутника при цій вершині;
2) суму двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

16.21.° Чи може зовнішній кут трикутника бути меншим від суміжного з ним кута трикутника? У разі ствердної відповіді вкажіть вид трикутника.

16.22.° Визначте вид трикутника, якщо один із його зовнішніх кутів дорівнює куту трикутника, суміжному з ним.

16.23.° Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 136°, а один із кутів трикутника — 61°. Знайдіть другий кут трикутника, не суміжний з даним зовнішнім.

16.24.° Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 154°. Знайдіть кути трикутника, не суміжні з ним, якщо один із цих кутів на 28° більший за другий.

16.25.° Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 98°. Знайдіть кути трикутника, не суміжні з ним, якщо один із цих кутів у 6 разів менший від другого.

16.26.° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо зовнішній кут при його вершині дорівнює 38°.

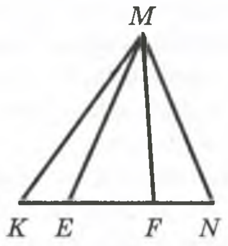


Рис. 16.5

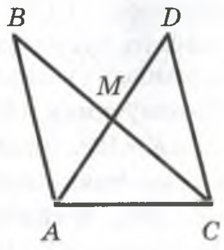


Рис. 16.6

16.27.° Доведіть, що коли два кути одного трикутника дорівнюють відповідно двом кутам другого трикутника, то й треті кути цих трикутників рівні.

16.28.° У трикутнику ABC бісектриси кутів A і C перетинаються в точці O. Знайдіть кут AOC, якщо $\angle B = 100°$.

16.29.• Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один із його зовнішніх кутів дорівнює: 1) 54°; 2) 112°. Скільки розв'язків має задача?

16.30.• Зовнішній кут рівнобедреного трикутника дорівнює 130°. Знайдіть кути трикутника. Скільки розв'язків має задача?

16.31.• Бісектриси кутів при основі AC рівнобедреного трикутника ABC перетинаються в точці O. Доведіть, що кут AOC дорівнює зовнішньому куту трикутника ABC при вершині A.

16.32.• На рисунку 16.7 $BC \parallel AD$, $\angle A = 25°$, $\angle B = 55°$. Знайдіть кут CMD.

16.33.• Відрізок BK — бісектриса рівнобедреного трикутника ABC з основою BC, $\angle AKB = 105°$. Знайдіть кути трикутника ABC.

16.34.• На стороні AB трикутника ABC позначили точку D так, що $BD = BC$, $\angle ACD = 15°$, $\angle DCB = 40°$. Знайдіть кути трикутника ABC.

16.35.• На сторонах трикутника ABC (рис. 16.8) позначили точки E та F так, що $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $\angle 3 = \angle 4$.

16.36.• На рисунку 16.9 $BC \parallel AD$, $\angle B = 100°$, $\angle ACD = 95°$, $\angle D = 45°$. Доведіть, що $AB = BC$.

16.37.• Через вершину C трикутника ABC проведено пряму, яка паралельна бісектрисі AM трикутника й перетинає пряму AB у точці K. Знайдіть кути трикутника AKC, якщо $\angle BAC = 70°$.

16.38.• Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника паралельна його основі.

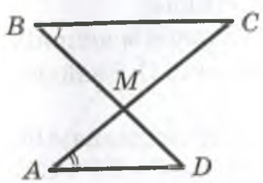


Рис. 16.7

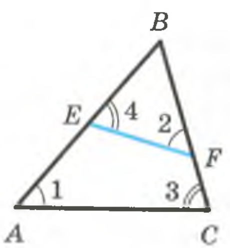


Рис. 16.8

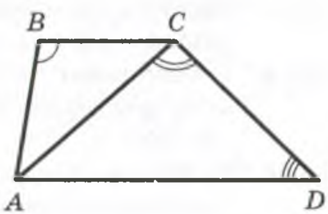


Рис. 16.9

16.39.• Доведіть, що коли бісектриса зовнішнього кута трикутника паралельна його стороні, то цей трикутник рівнобедрений.

16.40.• Кут при основі AC рівнобедреного трикутника ABC у 2 рази більший за кут при вершині, AM — бісектриса трикутника. Доведіть, що $BM = AC$.

16.41.• Трикутник ABC рівнобедрений з основою AC. На стороні BC позначено точку M так, що $BM = AM = AC$. Знайдіть кути трикутника ABC.

16.42.• Доведіть, що в будь-якому трикутнику є кут: 1) не менший від 60°; 2) не більший за 60°.

16.43.• Визначте вид трикутника, якщо:
1) один із його кутів більший за суму двох інших;
2) будь-який із його кутів менший від суми двох інших.

16.44.• Визначте вид трикутника, якщо сума будь-яких двох його кутів більша за 90°.

16.45.• Чи існує трикутник, дві бісектриси якого перпендикулярні?

16.46.• Чи існує трикутник, у якому одна бісектриса ділить навпіл другу бісектрису?

16.47.• Висота CH і бісектриса AK прямокутного трикутника ABC $(\angle C = 90°)$ перетинаються в точці M. Доведіть, що трикутник CMK рівнобедрений.

16.48.• Висота CD і бісектриса BM трикутника ABC перетинаються в точці M. Відомо, що $CM = CN$. Знайдіть кут ACB.

16.49.• На продовженнях сторони AC трикутника ABC за точки A і C позначили відповідно точки M і N так, що $AB = AM$ і $CB = CN$. Відомо, що $\angle ABC = 80°$. Знайдіть кут MBN.

16.50.• На стороні AC трикутника ABC знайшлися такі точки M і N, що $AB = AM$ і $CB = CN$ (точка N належить відрізку AM). Відомо, що $\angle ABC = 80°$. Знайдіть кут MBN.

16.51.• У трикутнику ABC відомо, що $AB = 2AC$ і $\angle A = 60°$. Знайдіть кут C.

16.52.• У трикутнику ABC відомо, що $AB = 2AC$ і $\angle B = 30°$. Знайдіть кут C.

16.53.•• Знайдіть кути трикутника ABC, якщо бісектриса кута B розбиває його на два рівнобедрених трикутники.

16.54.•• У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = \alpha$, бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C перетинаються в точці O. Знайдіть кут BOC.

16.55.•• На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC позначили відповідно точки E та F так, що $AC = AF = EF = BE$. Знайдіть кути трикутника ABC.

16.56.•• Петро Забудько запропонував таке доведення теореми про суму кутів трикутника: «Нехай S — сума кутів трикутника ABC. Проведемо в трикутнику ABC відрізок BD (рис. 16.10). Тоді $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = S$, $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = S$. Додамо ці дві рівності: $2S = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$. Маємо: $\angle 3 + \angle 4 = 180°$ як суміжні кути. Звідси $2S = \angle 1 + \angle 2 + 180° + \angle 5 + \angle 6$. Але $\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6$ — це сума кутів трикутника ABC, тобто ця сума дорівнює S. Звідси: $2S = S + 180°$, $S = 180°$». Чи згодні ви з доведенням Петра?

16.57.•• Знайдіть суму кутів, позначених на рисунку 16.11.

16.58.•• У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) провели висоту CH. На сторонах AB і AC позначили відповідно точки M і N так, що $BM = BC$ і $CN = CH$. Доведіть, що $MN \perp AC$.

16.59.•• У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) провели висоту CD. Доведіть, що бісектриси кутів ABC і ACD перпендикулярні.

16.60.•• На сторонах AC і AB прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) позначили відповідно точки D і E так, що $BD = AD$ і $CB = CE$. Доведіть, що $BD \perp CE$.

16.61.•• Точки M і N лежать на стороні AB, точка P — на стороні BC, точка Q — на стороні CA рівностороннього трикутника ABC. Знайдіть кут між прямими MP і NQ, якщо відомо, що $MA + AQ = NB + BP = AB$.

16.62.•• У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) $\angle ABC = 70°$. На стороні AC позначили точки E та F, а на сторонах AB і BC відповідно — точки P і Q так, що $AP + AE = CQ + CF = AC$. Знайдіть кут між прямими PF і EQ.

16.63.•• У трикутнику ABC проведено медіану BM. Відомо, що $\angle ABM = 80°$ і $\angle CBM = 50°$. Доведіть, що $AB = 2BM$.

16.64.•• У рівнобедреному трикутнику ABC відомо, що $\angle BAC = 120°$. На продовженні сторони AC за точку A позначили точку D так, що $AD = 2AB$. Доведіть, що трикутник BDC рівнобедрений.

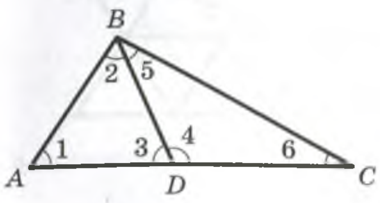


Рис. 16.10

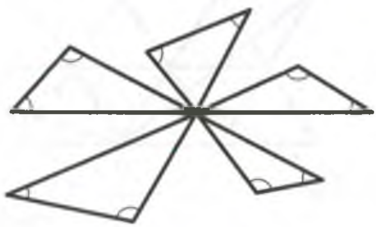


Рис. 16.11

16.65.* Кут BAC трикутника ABC дорівнює $120°$. На бісектрисі цього кута позначили точку D так, що $AD = AB + AC$. Доведіть, що трикутник BDC рівносторонній.

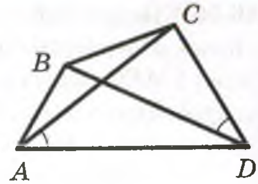


Рис. 16.12

16.66.* Кут C трикутника ABC дорівнює $60°$. На продовженні сторони BC за точку C позначили точку D так, що $DC + CA = BC$. Доведіть, що трикутник ABD рівнобедрений.

16.67.* На рисунку 16.12 $\angle BAD = \angle CDA = 60°$ і $\angle CAD = \angle CDB$. Доведіть, що $AB + CD = AD$.

16.68.* У трикутнику ABC проведено висоту CD. Відомо, що $\angle ACB = 135°$ і $BD - AD = AC$. Знайдіть кут CBA.

16.69.* У трикутнику ABC відомо, що $\angle B = 20°$, $\angle C = 40°$ і довжина бісектриси AM дорівнює 2 см. Знайдіть різницю $BC - AB$.

16.70.* У трикутнику ABC провели висоту BD. Відомо, що $\angle ACB = 80°$ і $AC - BC = 2DC$. Знайдіть кут ABC.

16.71.* У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ відомо, що $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ і $AC + AB = A_1B_1 + A_1C_1$. Доведіть, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні.

16.72.* Доведіть рівність трикутників за двома кутами і периметром.

16.73.* У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ відомо, що $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ і $AC - AB = A_1C_1 - A_1B_1$. Доведіть, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні.

16.74.* На координатній площині позначено точки $H\ (-1;\ 2)$ і $M\ (3;\ -1)$. Знайдіть кут HOM, де O — початок координат.

16.75.* Площину розкреслено на рівносторонні трикутники, як показано на рисунку 16.13. Знайдіть величину кута ABC.

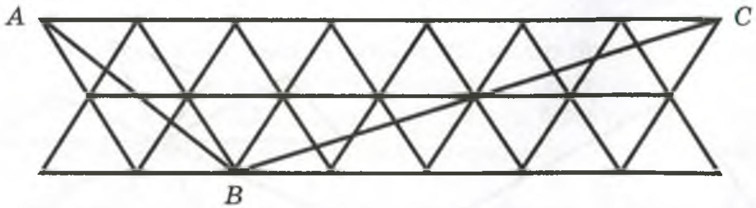


Рис. 16.13

16.76.* На аркуші паперу накреслили рівносторонній трикутник і повністю накрили його двома іншими рівносторонніми трикутниками різних розмірів. Доведіть, що для покриття вистачило б одного із цих трикутників.

16.77.* У рівнобедреному трикутнику ABC кут B, протилежний основі, дорівнює $20°$. На стороні AB позначили точку D так, що $BD = AC$. Знайдіть кут ACD.

17. Нерівність трикутника

Теорема 17.1 (нерівність трикутника). ***Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.***

Доведення. Розглянемо трикутник ABC (рис. 17.1). Треба довести, що: 1) $AB < AC + CB$; 2) $AC < AB + BC$; 3) $BC < BA + AC$.

Доведемо першу із цих нерівностей (дві інші доводять аналогічно).

Нехай нерівність, яку треба довести, є неправильною. Тоді $AB > AC + CB$ або $AB = AC + CB$.

1) Нехай $AB > AC + CB$. Тоді на стороні AB можна позначити точки C_1 і C_2 такі, що $AC = AC_1$ і $BC = BC_2$ (рис. 17.1). Оскільки ми припустили, що $AB > AC + CB$, то $AB > AC_1 + BC_2$. Отже, відрізки AC_1 і BC_2 не мають спільних точок.

Кути AC_1C і BC_2C є гострими як кути при основі рівнобедрених трикутників AC_1C і BC_2C відповідно. Тоді кути 1 і 2 є тупими як кути, суміжні з гострими. Отримали суперечність: у трикутнику C_1CC_2 два тупих кути.

2) Нехай $AB = AC + CB$. На стороні AB позначимо точку D так, що $AC = AD$ (рис. 17.2). Тоді $BD = BC$. Кути ADC і BDC є гострими як кути при основі рівнобедрених трикутників ADC і BDC. Тоді їхня сума менша від $180°$. Разом з тим ці кути суміжні. Отримали суперечність. ◄

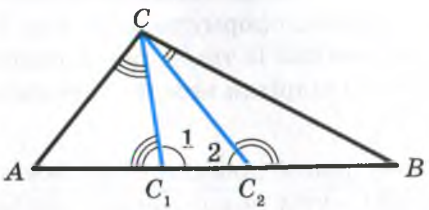


Рис. 17.1

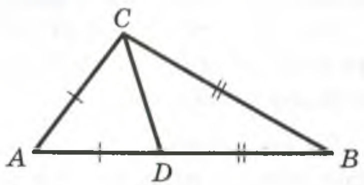


Рис. 17.2

Наслідок.

1) ***Якщо довжина одного з трьох даних відрізків не менша від суми довжин двох інших відрізків, то ці відрізки не можуть слугувати сторонами трикутника*** (рис. 17.3);
2) ***кожна сторона трикутника більша за різницю двох інших його сторін***;
3) ***якщо для трьох точок A, B і C виконується рівність $AB = AC + CB$, то точка C є внутрішньою точкою відрізка AB*** (рис. 17.4);
4) ***для будь-яких трьох точок A, B і C виконуються нерівності:***

$$AB \leqslant AC + CB;$$
$$AC \leqslant AB + BC;$$
$$BC \leqslant BA + AC.$$

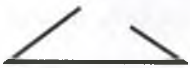


Рис. 17.3

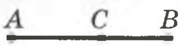


Рис. 17.4

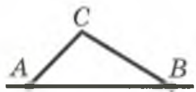


Рис. 17.5

Рис. 17.6

Доведемо властивість «3)» (властивості «1)», «2)» і «4)» доведіть самостійно).

Оскільки йдеться про три точки, то точка C не може збігатися ні з точкою A, ні з точкою B. Припустимо, що точка C не є внутрішньою точкою відрізка AB. Тоді точка C або не належить прямій AB, або належить прямій AB, але не належить відрізку AB.

Якщо точка C не належить прямій AB (рис. 17.5), то в силу нерівності трикутника можна записати: $AB < AC + CB$. Проте за умовою $AB = AC + CB$. Отримали суперечність.

Якщо точка C належить прямій AB, але не належить відрізку AB (рис. 17.6), то вона розміщена або на промені AM, або на промені BN. Для кожного із цих випадків легко переконатися (зробіть це самостійно), що рівність, указана в умові, не виконується.

Зазначимо, що доведена властивість є твердженням, оберненим до основної властивості довжини відрізка, сформульованої в п. 2.

У п. 25 буде показано, що коли кожний із трьох даних відрізків менший від суми двох інших, то ці відрізки можуть слугувати сторонами трикутника.

Ви вже знаєте, що в трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути, і навпаки: проти рівних кутів лежать рівні сторони (п. 9, 10). Ці властивості доповнює така теорема.

Теорема 17.2. ***У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки, проти більшого кута лежить більша сторона.***

Доведення. 1) Розглянемо трикутник ABC, у якому $AB > BC$. Треба довести, що $\angle ACB > \angle A$ (рис. 17.7).

Оскільки $AB > BC$, то на стороні AB знайдеться така точка M, що $BM = BC$. Отримали рівнобедрений трикутник MBC, у якому $\angle BMC = \angle BCM$.

Оскільки кут BMC — зовнішній кут трикутника AMC, то $\angle BMC > \angle A$. Наведений нижче «ланцюжок» нерівностей доводить першу частину теореми:

$$\angle ACB > \angle MCB = \angle BMC > \angle A.$$

2) Розглянемо трикутник ABC, у якому $\angle C > \angle A$. Треба довести, що $AB > BC$.

Оскільки $\angle ACB > \angle A$, то кут ACB можна поділити на два кути ACM і MCB так, що $\angle ACM = \angle A$ (рис. 17.8). Тоді трикутник AMC рівнобедрений з рівними сторонами MA і MC.

Для сторони BC запишемо нерівність трикутника: $MC + MB > BC$. Маємо: $AB = AM + MB = MC + MB > BC$. ◀

Зауважимо, що другу частину теореми 17.2 можна довести методом від супротивного: припустити, що $BC \geqslant AB$, а далі скористатися вже доведеною першою частиною теореми. Проведіть це доведення самостійно.

У п. 5, розглядаючи поняття відстані від точки до фігури, ми користувалися цілою низкою фактів, не доводячи їх. Тепер за допомогою теореми 17.2 ми можемо довести ці факти.

Наслідок. ***Якщо з однієї точки, яка не лежить на прямій, до цієї прямої проведені перпендикуляр і похила, то перпендикуляр менший від похилої.***

Доведення. На рисунку 17.9 відрізок AB — перпендикуляр, відрізок AX — похила. У трикутнику ABX кут ABX прямий, а кут AXB гострий. Отже, $\angle ABX > \angle AXB$. Тоді в силу теореми 17.2 отримуємо, що $AB < AX$. ◀

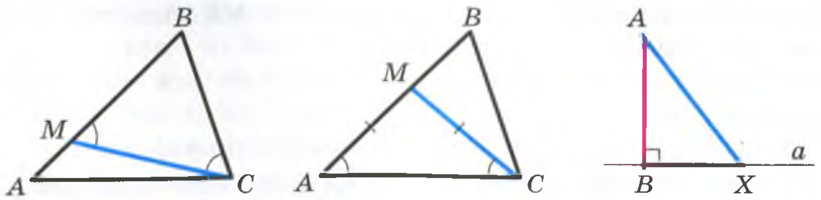


Рис. 17.7 Рис. 17.8 Рис. 17.9

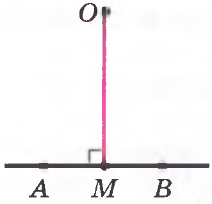


Рис. 17.10

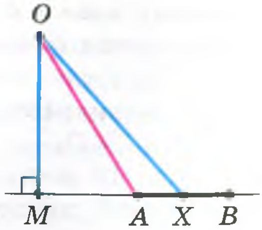


Рис. 17.11

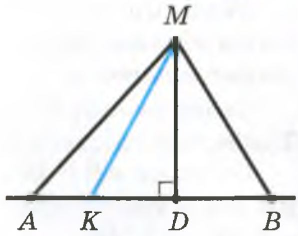


Рис. 17.12

Нехай точка O не належить прямій AB і основа перпендикуляра OM, опущеного з точки O на пряму AB (рис. 17.10), належить відрізку AB (променю AB). Із сформульованого вище наслідку отримуємо, що відрізок OM менший від будь-якого іншого відрізка, який сполучає точку O з точкою прямої AB (відрізка AB, променя AB). Отже, довжина відрізка OM — це відстань від точки M до прямої AB (відрізка AB, променя AB).

Нехай тепер основа перпендикуляра OM (рис. 17.11) не належить відрізку AB (променю AB). Кут OAM є гострим кутом прямокутного трикутника OAM. Тоді суміжний з ним кут OAX є тупим. Отже, у будь-якому трикутнику OAX, де X — довільна точка відрізка AB (променя AB), кут OAX є найбільшим. Із теореми 17.2 випливає, що $OA < OX$. Таким чином, при описаному взаємному розміщенні точки O та відрізка AB (променя AB) (див. рис. 17.11) довжина відрізка OA є відстанню від точки O до відрізка AB (променя AB).

Задача. Із точки M, яка не належить прямій a, проведено дві похилі MA та MB і перпендикуляр MD (точка D належить відрізку AB). Доведіть, що коли $DA > DB$, то $MA > MB$.

Розв'язання. За умовою $DA > DB$ (рис. 17.12). На відрізку DA позначимо точку K так, що $DK = DB$. У трикутнику KMB відрізок MD є медіаною та висотою. Отже, цей трикутник рівнобедрений. Тоді кут MKD є гострим, а суміжний з ним кут AKM — тупим. Із теореми 17.2 випливає, що в тупокутному трикутнику проти тупого кута лежить найбільша сторона. Звідси $MA > MK$. Але $MK = MB$. Отже, $MA > MB$.

?

1. Сформулюйте теорему про нерівність трикутника.
2. Сформулюйте теорему про співвідношення між сторонами та кутами трикутника.

ВПРАВИ

17.1.° Периметр трикутника дорівнює 30 см. Чи може одна з його сторін дорівнювати: 1) 20 см; 2) 15 см?

17.2.° Довжини двох сторін трикутника дорівнюють 7 см і 9 см. Чи може периметр цього трикутника дорівнювати: 1) 20 см; 2) 32 см; 3) 18 см?

17.3.° Чи існує трикутник, одна зі сторін якого на 2 см менша від другої та на 6 см менша від третьої, а периметр дорівнює 20 см?

17.4.° Порівняйте кути трикутника ABC, якщо:
1) $AB > AC > BC$; 2) $AB = BC$, $BC > AC$.

17.5.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = \angle 34°$, $\angle B = \angle 28°$. Порівняйте сторони AB, BC і AC.

17.6.° Порівняйте сторони трикутника ABC, якщо:
1) $\angle C > \angle A > \angle B$; 2) $\angle B > \angle C$, $\angle A = \angle B$.

17.7.° Чи лежать точки P, R і T на одній прямій, якщо:
1) $PR = 1{,}8$ см, $PT = 3{,}4$ см, $RT = 1{,}6$ см;
2) $PR = 2{,}4$ см, $PT = 5{,}6$ см, $RT = 7{,}2$ см?
У разі ствердної відповіді вкажіть, яка точка лежить між двома іншими. Відповідь обґрунтуйте.

17.8.° Чи може точка E лежати між точками C і D, якщо $CE = 6{,}3$ см, $ED = 2{,}7$ см, $CD = 8{,}9$ см? Відповідь обґрунтуйте.

17.9.° Точки A, B і C розміщені так, що $AB = 3{,}2$ см, $AC = 4{,}8$ см, $BC = 8$ см. Чи є промені AB і AC доповняльними?

17.10.• У трикутнику ABC кут B тупий. На продовженні сторони AB за точку A позначили довільну точку D. Доведіть, що $CD > AC$.

17.11.• У трикутнику ABC відомо, що $\angle C > 90°$. На стороні BC позначили довільну точку D. Доведіть, що $AD > AC$.

17.12.• Доведіть, що відрізок, який сполучає вершину рівнобедреного трикутника з точкою, яка лежить на його основі, не більший за бічну сторону трикутника.

17.13.• Доведіть, що відрізок, який сполучає вершину трикутника з точкою, яка лежить на протилежній стороні, не більший хоча б за одну з двох інших сторін.

17.14.• Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 9 см і 20 см. Знайдіть третю сторону трикутника.

17.15.• Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 8 см і 16 см. Знайдіть довжину основи цього трикутника.

17.16.• Основа D висоти AD трикутника ABC є внутрішньою точкою відрізка BC. Відомо, що $\angle BAD > \angle CAD$. Порівняйте довжини сторін AB і AC.

17.17.• Основа D висоти AD трикутника ABC є внутрішньою точкою відрізка BC. Відомо, що $AB > AC$. Порівняйте величини кутів BAD і CAD.

17.18.• Доведіть, що в трикутнику будь-яка сторона менша від половини периметра.

17.19.• У трикутнику ABC провели бісектрису BD. Доведіть, що $AB > AD$ і $BC > CD$.

17.20.• На стороні AC трикутника ABC позначили точку D. Відомо, що $AD > BD$. Доведіть, що $AC > BC$.

17.21.•• На прямій m (рис. 17.13) знайдіть таку точку C, щоб сума відстаней від неї до точок A і B була найменшою. Відповідь обґрунтуйте.

Рис. 17.13

17.22.•• Одна сторона трикутника дорівнює 2,8 см, а друга — 0,6 см. Знайдіть третю сторону цього трикутника, якщо її довжина, виражена в сантиметрах, дорівнює цілому числу.

17.23.•• Одна сторона трикутника дорівнює 5,6 см, а друга — 0,5 см. Знайдіть третю сторону цього трикутника, якщо її довжина, виражена в сантиметрах, дорівнює цілому числу.

17.24.•• На рисунку 17.14 вказано довжини відрізків, виражені в сантиметрах. Знайдіть довжину невідомого відрізка, якщо x — натуральне число.

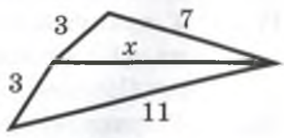


Рис. 17.14

17.25.•• Якого найменшого значення може набувати периметр різностороннього трикутника, довжини сторін якого в сантиметрах виражено натуральними числами?

17.26.•• У трикутнику ABC проведено бісектрису CK. Відомо, що $AC > BC$. Доведіть, що кут AKC тупий.

17.27.•• У трикутнику ABC проведено бісектрису CK. Відомо, що кут BKC гострий. Доведіть, що $AC > BC$.

17.28.•• На стороні BC рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) позначили точку M. Відрізок AM перетинає висоту BD у точці K. Доведіть, що $BM > KM$.

17.29.•• У трикутнику ABC відомо, що $\angle B = 60°$ і $BC > BA$. Доведіть, що BC — найбільша сторона трикутника ABC.

17.30.•• У трикутнику ABC відомо, що $\angle A > \angle B$. Доведіть, що $AB < 2BC$.

17.31.•• На сторонах AB і BC трикутника ABC позначили відповідно точки K і E так, що $\angle KEB = 25°$. Відомо, що $\angle C = 50°$. Доведіть, що $AC + CE > AK$.

17.32.•• Із вершини A трикутника ABC опустили перпендикуляр AK на бісектрису зовнішнього кута при вершині B. Доведіть, що периметр трикутника AKC більший за периметр трикутника ABC.

17.33.•• У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) провели бісектрису AK. Доведіть, що $AK < 2CK$.

17.34.* Відрізок AM — медіана трикутника ABC. Відомо, що $\angle CAM > \angle BAM$. Доведіть, що $AB > AC$.

17.35.* Доведіть, що сума довжин двох сторін трикутника більша за подвоєну довжину медіани, проведеної до третьої сторони.

17.36.* Відрізок AM — медіана трикутника ABC. Відомо, що $AB > AC$. Доведіть, що $\angle CAM > \angle BAM$.

17.37.* На рисунку 17.15 $BC = 1$ см, $AD = 3$ см, $\angle A = \angle B$. Доведіть, що $CD > 2$ см.

17.38.* У трикутнику ABC кут A в три рази більший за кут C. Доведіть, що $4AB > BC$.

17.39.* На рисунку 17.16 $AC = BC$, $AD > DC$, $\angle ADC = 60°$. Доведіть, що $AD + DC > BD$.

17.40.* У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) відомо, що $\angle B = 20°$. Доведіть, що $AB < 3AC$.

17.41.* На основі AC рівнобедреного трикутника ABC позначили точку D, а на її продовженні за точку C — точку E. Відомо, що $AD = CE$. Доведіть, що $BD + BE > 2BC$.

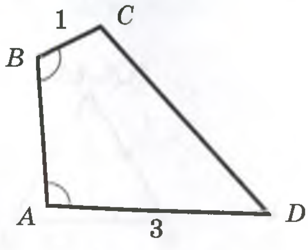


Рис. 17.15

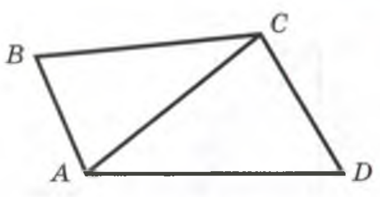


Рис. 17.16

18. Прямокутний трикутник

На рисунку 18.1 зображено прямокутний трикутник ABC, у якому $\angle C = 90°$.

Сторону прямокутного трикутника, протилежну прямому куту, називають **гіпотенузою**, а сторони, прилеглі до прямого кута, — **катетами** (рис. 18.1).

Для доведення рівності двох трикутників знаходять їхні рівні елементи. У будь-яких двох прямокутних трикутників такі елементи є завжди — це прямі кути. Тому для прямокутних трикутників можна сформулювати «персональні» ознаки рівності.

Теорема 18.1 (ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та катетом). ***Якщо гіпотенуза та катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та катету другого, то такі трикутники рівні.***

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 18.2). Треба довести, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Розмістимо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, вершина C — з вершиною C_1, а точки B і B_1 лежали в різних півплощинах відносно прямої A_1C_1 (рис. 18.3).

Маємо: $\angle A_1C_1B + \angle A_1C_1B_1 = 90° + 90° = 180°$. Отже, кут BC_1B_1 розгорнутий, і тому точки B, C_1, B_1 лежать на одній прямій. Отримали рівнобедрений трикутник BA_1B_1 з бічними сторонами A_1B і A_1B_1 та висотою A_1C_1 (рис. 18.3). Тоді A_1C_1 — медіана цього трикутника, тобто $C_1B = C_1B_1$. Отже, трикутники A_1BC_1 і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників. ◀

Під час розв'язування задач зручно користуватися й іншими ознаками рівності прямокутних трикутників, які безпосередньо випливають з ознак рівності трикутників.

Ознака рівності прямокутних трикутників за двома катетами. ***Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні.***

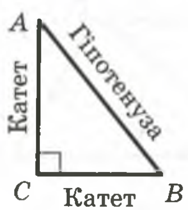


Рис. 18.1

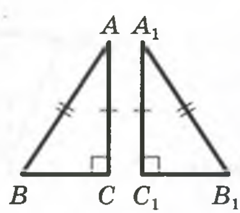


Рис. 18.2

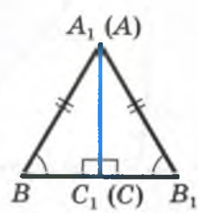


Рис. 18.3

Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і прилеглим гострим кутом. ***Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й прилеглому до нього гострому куту другого, то такі трикутники рівні.***

Очевидно, що коли гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то рівні й два інших гострих кути. Скориставшись цим твердженням, перелік ознак рівності прямокутних трикутників можна доповнити ще двома.

Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і протилежним гострим кутом. ***Якщо катет і протилежний йому гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й протилежному йому гострому куту другого, то такі трикутники рівні.***

Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та гострим кутом. ***Якщо гіпотенуза та гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та гострому куту другого, то такі трикутники рівні.***

Теорема 18.2. ***Кожна точка бісектриси кута рівновіддалена від його сторін.***

Доведення. Очевидно, що вершина кута має властивість, яку треба довести.

Кожна точка X бісектриси розгорнутого кута рівновіддалена від його сторін. Справді, відстані від точки X до сторін BA і BC розгорнутого кута ABC дорівнюють відстані від точки X до прямої AB (рис. 18.4).

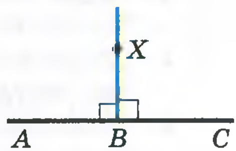


Рис. 18.4

Розглянемо кут ABC, відмінний від розгорнутого, і довільну точку X, яка не збігається з вершиною цього кута й належить його бісектрисі. Опустимо перпендикуляри XM і XN відповідно на сторони BA і BC (рис. 18.5). Треба довести, що $XM = XN$.

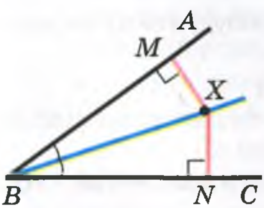


Рис. 18.5

У прямокутних трикутниках BXM і BXN гіпотенуза BX — спільна, $\angle MBX = \angle NBX$, оскільки BX — бісектриса кута ABC. Отже, трикутники BXM і BXN рівні за гіпотенузою та гострим кутом. Звідси $XM = XN$. ◄

Задача. Доведіть рівність прямокутних трикутників за гострим кутом і бісектрисою, проведеною з вершини цього кута.

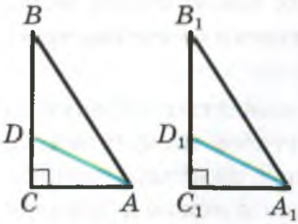


Рис. 18.6

Розв'язання. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 18.6) $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, відрізки AD і A_1D_1 — бісектриси, $AD = A_1D_1$.

Маємо: $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1 = \angle C_1A_1D_1$. Оскільки $AD = A_1D_1$, то прямокутні трикутники ACD і $A_1C_1D_1$ рівні за гіпотенузою та гострим кутом. Звідси $AC = A_1C_1$, і оскільки $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за катетом і прилеглим гострим кутом. ◄

1. Який трикутник називають прямокутним?
2. Яку сторону прямокутного трикутника називають гіпотенузою?
3. Яку сторону прямокутного трикутника називають катетом?
4. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та катетом.
5. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за двома катетами.
6. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за катетом і прилеглим гострим кутом.
7. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за катетом і протилежним гострим кутом.
8. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та гострим кутом.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

18.1.° За допомогою транспортира та лінійки побудуйте прямокутний трикутник:

1) катети якого дорівнюють 3 см і 4 см;
2) один із катетів якого дорівнює 2,5 см, а прилеглий до нього кут — 40°;
3) гіпотенуза якого дорівнює 6 см, а один із гострих кутів — 70°.

Позначте побудовані трикутники, укажіть у кожному з них катети та гіпотенузу.

18.2.° За допомогою транспортира та лінійки побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник:
1) з катетом, що дорівнює 5 см;
2) з гіпотенузою, що дорівнює 4 см.

ВПРАВИ

18.3.° На рисунку 18.7 зображено трикутник MKE з прямим кутом при вершині K. Укажіть:
1) катети та гіпотенузу трикутника;
2) катет, прилеглий до кута E;
3) катет, протилежний куту M.

18.4.° На рисунку 18.8 AD — висота трикутника ABC. Знайдіть на цьому рисунку прямокутні трикутники, укажіть у кожному з них катети та гіпотенузу.

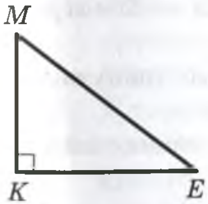


Рис. 18.7

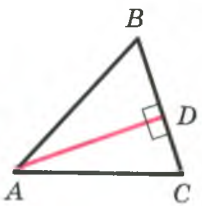


Рис. 18.8

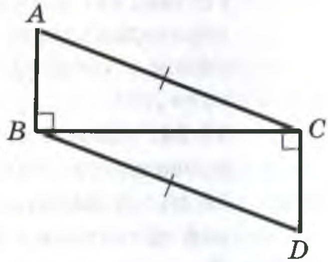


Рис. 18.9

18.5.° Один із гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 43°. Знайдіть другий гострий кут.

18.6.° У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено висоту AH. Знайдіть кут CAH, якщо $\angle B = 76°$.

18.7.° Кут між основою рівнобедреного трикутника та висотою, проведеною до бічної сторони, дорівнює 19°. Знайдіть кути даного трикутника.

18.8.° На рисунку 18.9 $AB \perp BC$, $CD \perp BC$, $AC = BD$. Доведіть, що $AB = CD$.

18.9.° На рисунку 18.10 $MO = FO$, $\angle MEO = \angle FKO = 90°$. Доведіть, що $\Delta MEO = \Delta FKO$.

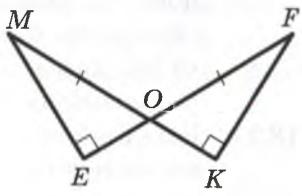


Рис. 18.10

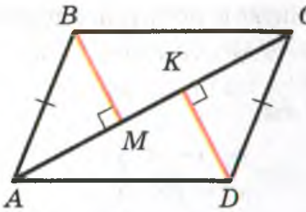


Рис. 18.11

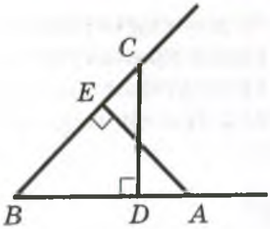


Рис. 18.12

18.10.° Із точок A і B, які лежать в одній півплощині відносно прямої a, опущено перпендикуляри AM і BK на цю пряму, $AM = BK$. Доведіть, що $AK = BM$.

18.11.° На рисунку 18.11 $AB = CD$, $AB \parallel CD$, $BM \perp AC$, $DK \perp AC$. Доведіть, що $BM = DK$.

18.12.° На рисунку 18.12 $AB = BC$, $CD \perp AB$, $AE \perp BC$. Доведіть, що $BE = BD$.

18.13.° На сторонах кута з вершиною в точці B позначили точки A і C так, що $AB = BC$. Через точки A і C провели прямі, які перпендикулярні до сторін BA і BC відповідно та перетинаються в точці O. Доведіть, що промінь BO — бісектриса кута ABC.

18.14.• Доведіть, що висоти рівнобедреного трикутника, проведені до його бічних сторін, є рівними.

18.15.• Доведіть, що коли дві висоти трикутника рівні, то цей трикутник є рівнобедреним.

18.16.• Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і бісектрисою, проведеною з вершини прямого кута.

18.17.• Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і висотою, проведеною з вершини прямого кута.

18.18.• Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і бісектрисою, проведеною з вершини прилеглого до цього катета гострого кута.

18.19.• Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і медіаною, проведеною до другого катета.

18.20.• Доведіть, що в рівних трикутниках висоти, опущені на відповідні сторони, є рівними.

18.21.• Доведіть рівність гострокутних трикутників за стороною та двома висотами, проведеними з кінців цієї сторони.

18.22.• Доведіть рівність трикутників за стороною та проведеними до неї медіаною та висотою.

18.23.• Пряма перетинає сторони AB і BC трикутника ABC відповідно в точках M і K, які є серединами цих сторін. Доведіть, що вершини даного трикутника рівновіддалені від прямої MK.

18.24.• Пряма перетинає сторони AB і BC трикутника ABC у точках M і K відповідно. Вершини даного трикутника рівновіддалені від прямої MK. Доведіть, що точки M і K є серединами сторін AB і BC відповідно.

18.25.•• Висоти AM і CK трикутника ABC перетинаються в точці H, $HK = HM$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

18.26.•• Висоти ME і NF трикутника MKN перетинаються в точці O, $OM = ON$, $MF = KE$. Доведіть, що трикутник MKN рівносторонній.

18.27.•• Висоти AK і BD гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Відомо, що $AH = BC$. Знайдіть кут BAC.

18.28.•• Висоти AK і BD гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Відомо, що $\angle BAC = 45°$. Доведіть, що $AH = BC$.

18.29.•• Відрізки AM і BN — бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника ABC. Із точок M і N на гіпотенузу AB опустили перпендикуляри MP і NQ. Знайдіть кут QCP.

18.30.•• У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) на стороні BC позначено точку M так, що відрізок MC дорівнює висоті трикутника, проведеній до бічної сторони. На стороні AB позначено точку K так, що $KM \perp BC$. Знайдіть кут ACK.

18.31.•• Чи є правильним твердження: коли дві сторони й висота, проведена до третьої сторони, одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і висоті, проведеній до третьої сторони, другого трикутника, то ці трикутники рівні?

18.32.•• Доведіть рівність трикутників за двома кутами й висотою, проведеною з вершини третього кута.

18.33.* На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначили точки D і E так, що $BC = BD$ і $AC = AE$. Із точок D і E опустили перпендикуляри DM і EF відповідно на катети AC і BC. Доведіть, що $DE = EF + DM$.

18.34.* На катетах AC і BC прямокутного трикутника ABC побудували рівнобедрені прямокутні трикутники ACE і BCF такі, що $\angle EAC = \angle FBC = 90°$. Із точок E і F на пряму AB опустили перпендикуляри EM і FN. Доведіть, що $AB = EM + FN$.

18.35.* Рівнобедрені прямокутні трикутники ABC і MNK ($\angle C = \angle N = 90°$) розміщені так, що вершини M, N і K належать відповідно сторонам AB, BC і CA. Доведіть, що $AK = 2CN$.

18.36.* Доведіть рівність прямокутних трикутників за гострим кутом і сумою гіпотенузи та катета, прилеглого до цього кута.

18.37.* Доведіть рівність прямокутних трикутників за гострим кутом і сумою катетів.

19. Властивості прямокутного трикутника

Задача 1. Доведіть, що катет, який лежить проти кута, величина якого становить 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Розв'язання. Розглянемо трикутник ABC, у якому $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 30°$. Треба довести, що $BC = \frac{1}{2}AB$.

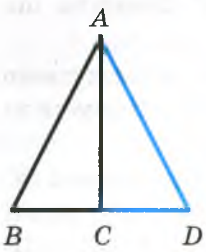


Рис. 19.1

На промені BC відкладемо відрізок CD, який дорівнює відрізку BC (рис. 19.1). Проведемо відрізок AD. Тоді в трикутниках ABC і ADC маємо: $\angle ACB = \angle ACD = 90°$, сторони BC і CD рівні за побудовою, AC — спільна сторона цих трикутників. Отже, ці трикутники рівні за двома катетами. Тоді $\angle DAC = 30°$, звідси $\angle BAD = 2\angle DAC = 60°$. Маємо: $\angle ABD = 90° - 30° = 60°$. Отже, $\angle ADB = 60°$ і трикутник ABD рівносторонній. Тоді $BC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB$. ◀

Задача 2. Доведіть, що коли катет дорівнює половині гіпотенузи, то кут, який лежить проти цього катета, дорівнює 30°.

Розв'язання. Розглянемо трикутник ABC, у якому $\angle ACB = 90°$, $BC = \frac{1}{2}AB$. Треба довести, що $\angle BAC = 30°$.

На промені BC відкладемо відрізок CD, який дорівнює відрізку BC (рис. 19.1). Тоді $AB = BD$. Крім того, відрізок AC є медіаною та висотою трикутника BAD, отже, за ознакою рівнобедреного трикутника $AB = AD$. Отримуємо, що $AB = BD = AD$, тому трикутник BAD рівносторонній, отже, $\angle BAD = 60°$.

Оскільки відрізок AC — бісектриса трикутника BAD, то $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BAD = 30°$. ◀

Задача 3. Доведіть, що медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.

Розв'язання. На рисунку 19.2 зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$), у якому проведено медіану CM. Доведемо, що $CM = \frac{1}{2}AB$.

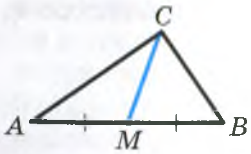


Рис. 19.2

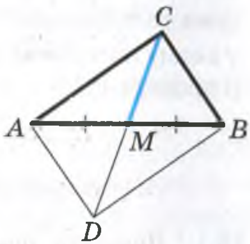


Рис. 19.3

На продовженні відрізка CM за точку M позначимо точку D так, що $CM = MD$. Проведемо відрізок AD (рис. 19.3). Маємо: $AM = MB$ за умовою, $CM = MD$ за побудовою, кути AMD і CMB дорівнюють як вертикальні. Отже, трикутники AMD і CMB рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $AD = CB$ і $\angle ADM = \angle BCM$.

Маємо: $\angle ACM + \angle BCM = 90°$. Але $\angle ADM = \angle BCM$. Тоді $\angle ACM + \angle ADM = 90°$. Звідси отримуємо, що $\angle DAC = 90°$. Отже, трикутники DAC і BCA рівні за двома катетами ($AD = CB$ і катет AC — спільний). Звідси $CD = AB$. Отже, $CM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$. ◀

Задача 4. Медіана CM трикутника ABC дорівнює половині сторони AB. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

Розв'язання. На рисунку 19.4 зображено трикутник ABC, у якому медіана CM дорівнює половині сторони AB. Доведемо, що $\angle C = 90°$.

За умовою $AM = CM$. Тоді в трикутнику AMC кути A та ACM рівні.

За умовою $BM = CM$, тоді в трикутнику BMC кути B і BCM рівні.

У трикутнику ACB маємо: $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180°$. Ураховуючи, що $\angle A = \angle ACM$ і $\angle B = \angle BCM$, отримуємо: $\angle ACM + \angle BCM + \angle ACB = 180°$. Оскільки $\angle ACM + \angle BCM = \angle ACB$, то $2\angle ACB = 180°$. Тоді $\angle ACB = 90°$.

Отже, трикутник ABC прямокутний. ◀

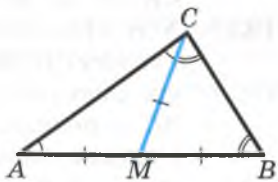


Рис. 19.4

1. Яку властивість має катет, який лежить проти кута, що дорівнює 30°?
2. Яку градусну міру має кут, який лежить проти катета, що дорівнює половині гіпотенузи?
3. Яку властивість має медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи?
4. У якому трикутнику медіана дорівнює половині сторони, до якої її проведено?

ВПРАВИ

19.1.° Доведіть, що в прямокутному трикутнику катет менший від гіпотенузи.

19.2.° Сторони прямокутного трикутника дорівнюють 24 см, 10 см і 26 см. Чому дорівнює найбільший катет даного трикутника?

19.3.° У прямокутному трикутнику DEF гіпотенуза DE дорівнює 18 см, $\angle D = 30°$. Знайдіть катет FE.

19.4.° У прямокутному трикутнику MKC відомо, що $\angle M = 90°$, $\angle C = 60°$, $CM = 7$ см. Знайдіть гіпотенузу CK.

19.5.° У рівносторонньому трикутнику ABC точка D — середина сторони AB. Із цієї точки опущено перпендикуляр DE на сторону AC. Знайдіть відрізки, на які точка E розбиває відрізок AC, якщо сторона даного трикутника дорівнює 16 см.

19.6.° Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 30°, а різниця гіпотенузи й меншого катета — 5 см. Знайдіть ці сторони трикутника.

19.7.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$, CK — висота, $AC = 10$ см. Знайдіть відрізок BK.

19.8.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, CD — висота, $BD = 7$ см. Знайдіть гіпотенузу AB.

19.9.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, CK — висота, $CK = 7$ см, $AC = 14$ см. Знайдіть кут B.

19.10.° У гострокутному трикутнику ABC проведено медіану BM і висоту CH. Знайдіть AC, якщо $MH = 10$ см.

19.11.• На рисунку 19.5 AB — перпендикуляр, AC — похила, $AC = 2$ см. Знайдіть кут ACB і довжину перпендикуляра AB, якщо ця довжина, виражена в сантиметрах, дорівнює цілому числу.

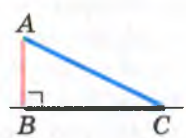


Рис. 19.5

19.12. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 18 см, а один із кутів — 120°. Знайдіть висоту трикутника, проведену з вершини кута при його основі.

19.13. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою BC проведено висоту BM завдовжки 7,5 см, $\angle MBC = 15°$. Знайдіть бічну сторону трикутника.

19.14. Чи існує рівнобедрений трикутник, у якого кожна висота вдвічі менша від однієї з його сторін?

19.15. Чи існує прямокутний трикутник, який можна розрізати на три рівних трикутники?

19.16. Один із кутів трикутника на 120° більший за другий. Доведіть, що бісектриса трикутника, проведена з вершини третього кута, у два рази більша за висоту, проведену з тієї самої вершини.

19.17. Бісектриси AM і BK рівностороннього трикутника ABC перетинаються в точці O. Доведіть, що $AO : OM = 2 : 1$.

19.18.** У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$. Серединний перпендикуляр відрізка AB перетинає його в точці M, а відрізок BC — у точці K. Доведіть, що $MK = \frac{1}{3}BC$.

19.19.** Серединний перпендикуляр гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC перетинає катет AC у точці M. Відомо, що $AM = 2MC$. Знайдіть гострі кути трикутника ABC.

19.20.** У трикутнику MKE відомо, що $\angle K = 90°$, $\angle E = 30°$, $KE = 12$ см. Знайдіть бісектрису MC трикутника.

19.21.** У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $\angle BAC = 60°$, відрізок AD — бісектриса, відрізок CD на 3 см менший від відрізка BD. Знайдіть бісектрису AD.

19.22.** Доведіть, що будь-який трикутник можна розрізати на кілька рівнобедрених трикутників.

19.23.** У гострокутному трикутнику ABC проведено висоту AA_1, бісектрису BB_1 і медіану CC_1. Трикутник $A_1B_1C_1$ рівносторонній. Доведіть, що трикутник ABC теж рівносторонній.

19.24.** На стороні BC трикутника ABC позначили точку K так, що $\angle BAK = 20°$. На відрізку AK позначили точку M так, що $\angle ABM = 90°$. Виявилося, що $AM = 2BK$. Знайдіть кут ABC.

19.25.** У трикутнику ABC відомо, що $AB = 2$ см, $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$. На стороні AC позначили точку D так, що $AD = 1$ см. Знайдіть кути трикутника BDC.

19.26.•• У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено бісектрису кута C, яка перетинає бічну сторону AB у точці D. Точка E лежить на основі AC так, що $DE \perp DC$. Знайдіть AD, якщо $CE = 2$ см.

19.27.•• У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено бісектрису CD кута C. На прямій AC позначено точку E так, що $\angle EDC = 90°$. Знайдіть EC, якщо $AD = 1$ см.

19.28.•• Висоти AE і BF гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Точки M і N — середини відрізків AB і CH відповідно. Доведіть, що $MN \perp FE$.

19.29.•• У трикутниках ABC і ABD відомо, що $\angle ACB = \angle ADB = 90°$ і $\angle ABC = \angle BAD = 30°$. Знайдіть CD, якщо $AB = 6$ см.

19.30.•• У прямокутному трикутнику один із кутів дорівнює 15°. Доведіть, що висота, проведена до гіпотенузи, у чотири рази менша від гіпотенузи.

19.31.•• У прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, у чотири рази менша від гіпотенузи. Доведіть, що один із гострих кутів даного прямокутного трикутника дорівнює 15°.

19.32.* У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 15°$ і $\angle B = 30°$. На стороні AB позначили таку точку E, що $\angle ACE = 90°$. Знайдіть AE, якщо $BC = 2$ см.

19.33.* На рисунку 19.6 $\angle ABC = \angle ADC = 90°$ і $\angle BCD = 30°$. Відомо, що $BD = 5$ см. Знайдіть AC.

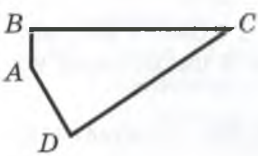


Рис. 19.6

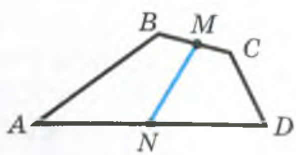


Рис. 19.7

Рис. 19.8

19.34.* На рисунку 19.7 $\angle A + \angle D = 90°$, $AD = 10$ см, $BC = 4$ см. Точки M і N — середини відрізків BC і AD відповідно. Доведіть, що $MN \geqslant 3$ см.

19.35.* У трикутнику ABC сторона AC найбільша. На продовженні сторони AC за точку C позначили точку D так, що $CD = CB$. Доведіть, що кут ABD не є гострим.

19.36.* На рисунку 19.8 $\angle A = 90°$. Доведіть, що периметр трикутника BCD більший за $2AC$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

Паралельні прямі

Дві прямі називають паралельними, якщо вони не перетинаються.

Основна властивість паралельних прямих (аксіома паралельності прямих)

Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Ознаки паралельності двох прямих

- Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.
- Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.
- Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.
- Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 180°, то прямі паралельні.
- Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

Властивості паралельних прямих

Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то:

- кути, які утворюють пару різносторонніх кутів, рівні;
- кути, які утворюють пару відповідних кутів, рівні;
- сума кутів, які утворюють пару односторонніх кутів, дорівнює 180°.

Відстань між паралельними прямими

Відстанню між двома паралельними прямими називають відстань від будь-якої точки однієї з прямих до другої прямої.

Сума кутів трикутника

Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

Зовнішній кут трикутника

Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний із кутом цього трикутника.

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

Зовнішній кут трикутника більший за кожний із кутів трикутника, не суміжних з ним.

Нерівність трикутника

Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.

Наслідки з нерівності трикутника

1) Якщо довжина одного з трьох даних відрізків не менша від суми довжин двох інших відрізків, то ці відрізки не можуть слугувати сторонами трикутника;

2) кожна сторона трикутника більша за різницю двох інших його сторін;
3) якщо для трьох точок A, B і C виконується рівність $AB = AC + CB$, то точка C є внутрішньою точкою відрізка AB;
4) для будь-яких трьох точок A, B і C виконуються нерівності:

$$AB \leqslant AC + CB;$$
$$AC \leqslant AB + BC;$$
$$BC \leqslant BA + AC.$$

Порівняння сторін і кутів трикутника

У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки, проти більшого кута лежить більша сторона.

Гіпотенуза та катет

Сторону прямокутного трикутника, протилежну прямому куту, називають гіпотенузою, а сторони, прилеглі до прямого кута, — катетами.

Ознаки рівності прямокутних трикутників

- *За гіпотенузою та катетом*: якщо гіпотенуза та катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та катету другого, то такі трикутники рівні.
- *За двома катетами*: якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні.
- *За катетом і прилеглим гострим кутом*: якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й прилеглому до нього гострому куту другого, то такі трикутники рівні.
- *За катетом і протилежним гострим кутом*: якщо катет і протилежний йому гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й протилежному йому гострому куту другого, то такі трикутники рівні.
- *За гіпотенузою та гострим кутом*: якщо гіпотенуза та гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

Властивості прямокутного трикутника

- Гіпотенуза більша за катет.
- Катет, що лежить проти кута величиною в 30°, дорівнює половині гіпотенузи.
- Якщо катет дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.
- Медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.

§4 КОЛО ТА КРУГ. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ

У цьому параграфі ви ознайомитеся з властивостями кола. Ви дізнаєтесь, як, відмовившись від звичних інструментів — косинця та транспортира, використовуючи лише циркуль і лінійку без поділок, виконати багато побудов.

20. Геометричне місце точок. Коло та круг

Будь-яка множина точок — це геометрична фігура. Зобразити довільну фігуру легко: усе, що намалюєте, — це геометрична фігура (рис. 20.1). Однак вивчати фігури, які складаються з хаотично розміщених точок, навряд чи доцільно. Тому розумно виокремити той клас фігур, усі точки яких мають певну характерну властивість. Кожну з таких фігур називають **геометричним місцем точок.**

Рис. 20.1

Означення. Геометричним місцем точок (ГМТ) називають множину всіх точок, які мають певну властивість.

Рис. 20.2

Образно ГМТ можна подати так: задають певну властивість, а потім на білій площині *всі точки*, які мають цю властивість, фарбують у червоний колір. Та «червона фігура», яку при цьому отримують, і є ГМТ.

Наприклад, позначимо дві точки A і B. Для всіх точок задамо властивість: одночасно належати променям AB і BA. Зрозуміло, що цю властивість мають усі точки відрізка AB і тільки вони (рис. 20.2). Тому відрізок AB є ГМТ, які мають указану властивість.

Розглянемо перпендикулярні прямі a і b. Для всіх точок задамо властивість: належати прямій b і знаходитися на відстані 1 см від прямої a. Очевидно, що точки A і B (рис. 20.3) задовольняють ці вимоги. Також зрозуміло, що жодна точка, відмінна від A і B, цієї властивості не має. Отже, шукане ГМТ є фігурою, яка складається з двох точок A і B (рис. 20.3).

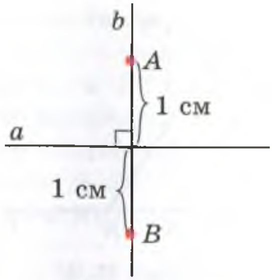


Рис. 20.3

Щоб якусь множину точок можна було називати ГМТ, які мають певну властивість, треба довести дві взаємно обернені теореми:

1) **пряма теорема:** *кожна точка даної множини має задану властивість*;

2) **обернена теорема:** *якщо точка має задану властивість, то вона належить даній множині.*

Теорема 20.1. ***Серединний перпендикуляр відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.***

Пряма теорема. ***Кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від його кінців.***

Доведення. Згідно з теоремою 8.2 кожна точка серединного перпендикуляра має цю властивість.

Обернена теорема. ***Якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона належить серединному перпендикуляру цього відрізка.***

Доведення. Згідно з теоремою 11.2, якщо точка має цю властивість, то вона належить серединному перпендикуляру. ◀

Теорема 20.2. ***Бісектриса кута є геометричним місцем точок, які належать куту й рівновіддалені від його сторін.***

Пряма теорема. ***Кожна точка бісектриси кута рівновіддалена від його сторін.***

Цю теорему було доведено в п. 19 (теорема 19.2).

Обернена теорема. ***Якщо точка, що належить куту, рівновіддалена від його сторін, то вона лежить на бісектрисі цього кута.***

Доведення. Очевидно, що вершина кута має цю властивість. Розглянемо довільну точку X, яка належить куту ABC, не збігається з його вершиною та рівновіддалена від його сторін. Опустимо перпендикуляри XM і XN відповідно на прямі BA і BC.

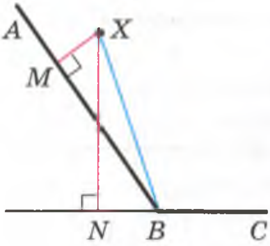


Рис. 20.4

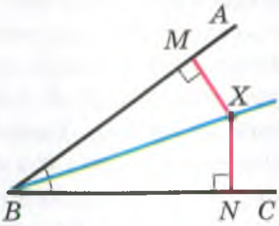


Рис. 20.5

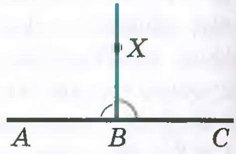


Рис. 20.6

Якщо одна з точок M або N належить продовженню сторони кута, наприклад точка N (рис. 20.4), то відстань від точки X до сторони BA кута ABC дорівнює довжині відрізка XM, а відстань від точки X до сторони BC — довжині відрізка XB. Але в прямокутному трикутнику XMB виконується нерівність $XB > XM$, що суперечить умові рівновіддаленості точки X від сторін кута. Отже, якщо точка, яка належить куту, рівновіддалена від його сторін, то основи перпендикулярів, опущених із цієї точки на прямі, що містять сторони кута, належать його сторонам (рис. 20.5).

Якщо даний кут ABC є розгорнутим, то точка X цього кута, рівновіддалена від його сторін, належить променю, який проходить через вершину кута й перпендикулярний до його сторін, тобто належить бісектрисі розгорнутого кута (рис. 20.6).

Розглянемо довільну точку X, яка належить нерозгорнутому куту ABC, не збігається з його вершиною та є рівновіддаленою від його сторін (рис. 20.5).

У прямокутних трикутниках BXM і BXN гіпотенуза BX — спільна, відрізки XM і XN рівні за умовою. Отже, трикутники BXM і BXN рівні за гіпотенузою та катетом. Звідси $\angle MBX = \angle NBX$, тобто точка X належить бісектрисі кута ABC. ◀

Задача. Знайдіть ГМТ, рівновіддалених від сторін даного нерозгорнутого кута.

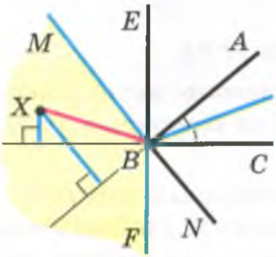


Рис. 20.7

Розв'язання. Розглянемо даний кут ABC. Шукатимемо ГМТ як серед точок кута ABC, так і поза ним. Із теореми 20.2 випливає, що бісектриса цього кута належить шуканому ГМТ.

Тепер знайдемо ГМТ, рівновіддалених від сторін кута ABC, які не належать цьому куту. Проведемо через точку B прямі MN і EF перпендикулярно до променів BA і BC відповідно (рис. 20.7).

Якщо точка X належить куту MBF, то основи перпендикулярів, опущених із цієї точки на прямі BA і BC, не належать сторонам кута (рис. 20.7). Отже, відстані від точки X до променів BA і BC дорівнюють довжині відрізка XB, тобто точка X рівновіддалена від сторін кута ABC. Отже, усі точки кута MBF належать шуканому ГМТ.

Зрозуміло, що жодна точка кута MBA або кута FBC, яка не належить сторонам цих кутів, не може бути рівновіддаленою від променів BA і BC.

Отже, шуканим ГМТ є об'єднання кута MBF і бісектриси кута ABC. ◀

Зауважимо, що ГМТ, рівновіддалених від сторін розгорнутого кута, є пряма, яка проходить через вершину кута перпендикулярно до його сторін (рис. 20.8).

Означення. Колом називають геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки.

Задану точку називають **центром** кола. На рисунку 20.9 точка O — центр кола.

Будь-який відрізок, який сполучає точку кола з її центром, називають **радіусом** кола. Довжину цього відрізка також прийнято називати радіусом. На рисунку 20.9 відрізок OX — радіус. З означення випливає, що всі радіуси одного кола рівні.

Відрізок, який сполучає дві точки кола, називають **хордою** кола. На рисунку 20.9 відрізки AB і BD — хорди. Хорду, яка проходить через центр кола, називають **діаметром**. На рисунку 20.9 відрізок BD — діаметр кола. Очевидно, що $BD = 2OX$, тобто діаметр кола вдвічі більший за його радіус.

З курсу математики 6 класу ви знаєте, що фігуру, обмежену колом, називають кругом (рис. 20.10). Тепер означення круга можна сформулювати за допомогою поняття ГМТ.

Означення. Кругом називають геометричне місце точок, відстань від яких до заданої точки не більша за дане додатне число.

Задану точку називають **центром круга**. Радіус кола, яке обмежує круг, називають **радіусом круга**.

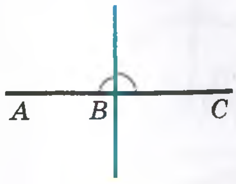


Рис. 20.8

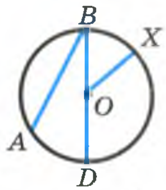


Рис. 20.9

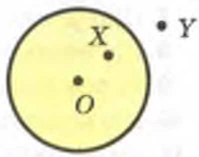


Рис. 20.10

Якщо X — довільна точка круга із центром O та радіусом R, то $OX \leqslant R$ (рис. 20.10). Якщо $OX < R$, то говорять, що точка X лежить усередині кола, яке обмежує даний круг. Точка Y не належить кругу (рис. 20.10). У цьому разі говорять, що точка Y лежить поза колом, яке обмежує круг.

З означення круга випливає, що коло, яке обмежує круг, йому належить.

Хорда й діаметр круга — це хорда й діаметр кола, яке обмежує круг.

Задача. На продовженні хорди CD кола із центром O за точку D позначено точку E таку, що відрізок DE дорівнює радіусу кола. Пряма OE перетинає дане коло в точках A і B (рис. 20.11). Доведіть, що $\angle AOC = 3\angle CEO$.

Розв'язання. Нехай $\angle CEO = \alpha$.

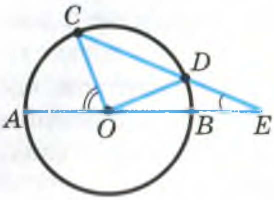


Рис. 20.11

Оскільки трикутник ODE рівнобедрений, то $\angle DOE = \angle CEO = \alpha$.

Кут ODC — зовнішній кут трикутника ODE. Тоді $\angle ODC = \angle DOE + \angle CEO = 2\alpha$.

Оскільки трикутник COD рівнобедрений, то маємо: $\angle OCD = \angle ODC = 2\alpha$.

Кут AOC — зовнішній кут трикутника COE. Тоді $\angle AOC = \angle OCD + \angle CEO = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$, тобто $\angle AOC = 3\angle CEO$. ◄

?

1. Яку множину точок називають геометричним місцем точок?
2. Які дві теореми треба довести, щоб деяку множину точок можна було назвати ГМТ, які мають певну властивість?
3. Яка фігура є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка?
4. Яка фігура є геометричним місцем точок, що належать куту й рівновіддалені від його сторін?
5. Що називають колом?
6. Що називають радіусом кола?
7. Що називають хордою кола?
8. Що називають діаметром кола?
9. Як пов'язані між собою діаметр і радіус кола?
10. Що називають кругом?
11. Чи належить колу його центр?
12. Чи належить кругу його центр?

13. Яка нерівність виконується для будь-якої точки *A*, що належить кругу із центром *O* та радіусом *R*?

14. Яка нерівність виконується для будь-якої точки *B*, що не належить кругу із центром *O* та радіусом *R*?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

20.1.° Накресліть коло із центром *O* та радіусом 3,5 см. Позначте на цьому рисунку які-небудь:
1) точки *A* і *B* такі, що $OA < 3{,}5$ см, $OB < 3{,}5$ см;
2) точки *C* і *D* такі, що $OC = 3{,}5$ см, $OD = 3{,}5$ см;
3) точки *E* і *F* такі, що $OE > 3{,}5$ см, $OF > 3{,}5$ см.

20.2.° Накресліть відрізок *AB* завдовжки 3 см. Знайдіть точку, віддалену від кожного з кінців відрізка *AB* на 2 см. Скільки існує таких точок?

20.3.° Накресліть відрізок *CD* завдовжки 4 см. Знайдіть точку, віддалену від точки *C* на 2,5 см, а від точки *D* — на 3,5 см. Скільки існує таких точок?

20.4.• Накресліть коло, діаметр якого дорівнює 7 см. Позначте на колі точку *A*. Знайдіть на колі точки, віддалені від точки *A* на 4 см.

ВПРАВИ

20.5.° На рисунку 20.12 зображено коло із центром *B*. Укажіть радіус, хорду й діаметр кола. Скільки зображено на рисунку радіусів? хорд?

20.6.° Хорди *AB* і *CD* кола із центром *O* рівні. Доведіть, що $\angle AOB = \angle COD$.

20.7.° На рисунку 20.13 точка *O* — центр кола, $\angle COD = \angle MOK$. Доведіть, що хорди *CD* і *MK* рівні.

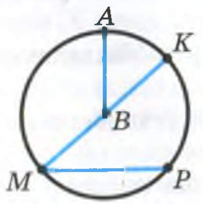


Рис. 20.12

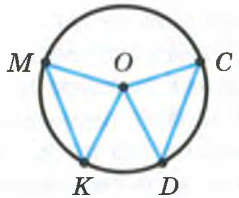


Рис. 20.13

20.8.° Відрізки AB і CD — діаметри кола. Доведіть, що $\angle BAC = \angle CDB$.

20.9.° Відрізки MK і EF — діаметри кола із центром O, $MK = 12$ см, $ME = 10$ см. Знайдіть периметр трикутника FOK.

20.10.° Відрізки AC і AB — відповідно діаметр і хорда кола із центром O, $\angle BAC = 26°$ (рис. 20.14). Знайдіть кут BOC.

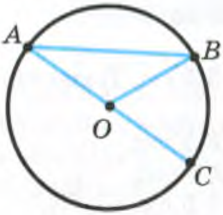


Рис. 20.14

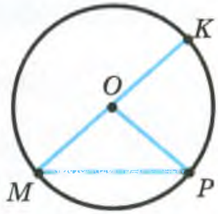


Рис. 20.15

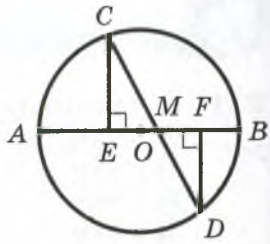


Рис. 20.16

20.11.° Відрізки MP і MK — відповідно хорда й діаметр кола із центром O, $\angle POK = 84°$ (рис. 20.15). Знайдіть кут MPO.

20.12.° Відрізки AB і AC — відповідно діаметр і хорда кола, хорда AC дорівнює радіусу цього кола. Знайдіть кут BAC.

20.13.° Відрізок CD — діаметр кола із центром O. На колі позначено точку E так, що $\angle COE = 90°$. Доведіть, що $CE = DE$.

20.14.° Чому дорівнює діаметр кола, якщо відомо, що він на 4 см більший за радіус даного кола?

20.15.° Відрізки AB і CD — діаметри кола. Доведіть, що $AC \parallel BD$.

20.16.• Хорда перетинає діаметр кола під кутом 30° і ділить його на відрізки завдовжки 4 см і 10 см. Знайдіть відстань від центра кола до цієї хорди.

20.17.• Хорда CD перетинає діаметр AB у точці M, $CE \perp AB$, $DF \perp AB$, $\angle AMC = 60°$, $ME = 18$ см, $MF = 12$ см (рис. 20.16). Знайдіть хорду CD.

20.18.• Знайдіть геометричне місце центрів кіл даного радіуса, які проходять через дану точку.

20.19.• Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які проходять через дві дані точки.

20.20.• Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних прямих, які перетинаються.

20.21.• Знайдіть геометричне місце вершин рівнобедрених трикутників, які мають спільну основу.

20.22.• Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох паралельних прямих.

20.23.° Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від даної прямої на задану відстань.

20.24.° Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що точки A, B і X є вершинами рівнобедреного прямокутного трикутника.

20.25.° Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що точки A, B і X є вершинами рівностороннього трикутника.

20.26.° Відрізок AB — діаметр кола, M — довільна точка кола, відмінна від точок A і B. Доведіть, що $\angle AMB = 90°$.

20.27.•• Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $AX > BX$.

20.28.•• Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $AX > AB$.

20.29.•• Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від даного відрізка на задану відстань.

20.30.•• Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від даного променя на задану відстань.

20.31.•• Дано трикутник ABC. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що пряма CX перетинає відрізок AB.

20.32.•• Дано трикутник ABC. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що: 1) промінь CX перетинає відрізок AB; 2) відрізок CX перетинає відрізок AB.

20.33.•• Дано прямий кут COD. Розглядаються всі прямокутні трикутники AOB з гіпотенузою AB завдовжки d, вершини A і B яких належать променям OC і OD відповідно. Знайдіть ГМТ середин гіпотенуз цих трикутників.

20.34.* Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що точки A, B і X є вершинами рівнобедреного трикутника.

20.35.* Радіус кола дорівнює 1 см. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від даного кола на 1 см.

20.36.* Дано точки A, B і C, які не лежать на одній прямій. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що найближчою до точки X серед точок A, B і C є точка A.

20.37.* Дано кут ABC, що дорівнює 60°. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від сторін даного кута на відстань 3 см.

20.38.* Дано квадрат $ABCD$. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що сума висот трикутників AXB і CXD, проведених відповідно до сторін AB і CD, дорівнює сумі висот трикутників BXC і AXD, проведених відповідно до сторін BC і AD.

21. Властивості кола. Дотична до кола

Теорема 21.1. ***Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл.***

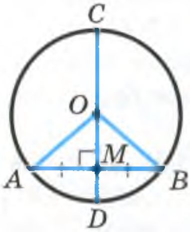


Рис. 21.1

Доведення. Якщо хорда є діаметром, то висновок теореми є очевидним.

На рисунку 21.1 зображено коло із центром O, M — точка перетину діаметра CD і хорди AB, відмінної від діаметра кола, $CD \perp AB$. Доведемо, що $AM = MB$.

Проведемо радіуси OA й OB. У рівнобедреному трикутнику AOB $(OA = OB)$ відрізок OM — висота, а отже, і медіана, тобто $AM = MB$. ◀

Теорема 21.2. ***Діаметр кола, який ділить хорду, відмінну від діаметра, навпіл, перпендикулярний до цієї хорди.***

Доведіть цю теорему самостійно. Подумайте, чи буде правильним це твердження, якщо хорда є діаметром кола.

На рисунку 21.2 зображено всі можливі випадки розміщення прямої та кола. На рисунку 21.2, *а* вони не мають спільних точок, на рисунку 21.2, *б* — мають дві спільні точки, на рисунку 21.2, *в* — одну.

Рис. 21.2

Означення. **Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку, називають дотичною до кола.**

На рисунку 21.2, *в* пряма a — дотична до кола із центром у точці O, A — **точка дотику.**

Дотична до кола має тільки одну спільну точку з кругом, обмеженим цим колом. Також говорять, що ця пряма є **дотичною до круга**, обмеженого даним колом. Так, на рисунку 21.3 пряма a — дотична до круга із центром у точці O.

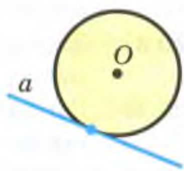


Рис. 21.3

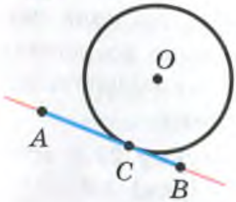


Рис. 21.4

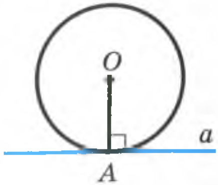


Рис. 21.5

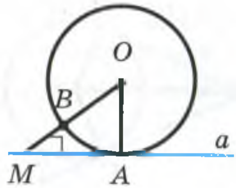


Рис. 21.6

Якщо відрізок (промінь) належить дотичній до кола та має із цим колом спільну точку, то говорять, що відрізок (промінь) *дотикається* до кола. Наприклад, на рисунку 21.4 зображено відрізок AB, який дотикається до кола в точці C.

Теорема 21.3 (властивість дотичної). ***Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.***

Доведення. На рисунку 21.5 зображено коло із центром O, A — точка дотику прямої a та кола. Треба довести, що $OA \perp a$.

Припустимо, що це не так, тобто відрізок OA — похила до прямої a. Тоді з точки O опустимо перпендикуляр OM на пряму a (рис. 21.6). Оскільки точка A — єдина спільна точка прямої a та круга із центром O, обмеженого цим колом, то точка M не належить цьому кругу. Звідси $OM = MB + OB$, де B — точка перетину кола і перпендикуляра OM. Відрізки OA й OB рівні як радіуси кола. Таким чином, $OM > OA$. Отримали суперечність: перпендикуляр OM більший за похилу OA. Отже, $OA \perp a$. ◀

Теорема 21.4 (ознака дотичної до кола). ***Якщо пряма, яка проходить через точку кола, перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то ця пряма є дотичною до даного кола.***

Доведення. На рисунку 21.5 зображено коло із центром у точці O, відрізок OA — його радіус, точка A належить прямій a, $OA \perp a$. Доведемо, що пряма a — дотична до кола.

Нехай пряма a не є дотичною, а має ще одну спільну точку B з колом (рис. 21.7). Тоді відрізки OA й OB рівні як радіуси, отже, трикутник AOB рівнобедрений. Зауважимо, що $\angle OAB = 90°$. Тоді $\angle OBA = \angle OAB = 90°$. Отримуємо суперечність: у трикутнику AOB є два прямих кути. Отже, пряма a є дотичною до кола. ◀

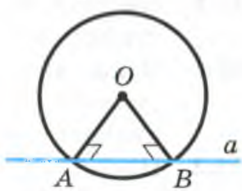


Рис. 21.7

Наслідок. ***Якщо відстань від центра кола до деякої прямої дорівнює радіусу кола, то ця пряма є дотичною до даного кола.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

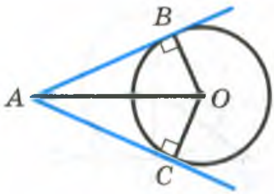


Рис. 21.8

Задача. Доведіть, що коли через дану точку до кола проведено дві дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.

Розв'язання. На рисунку 21.8 зображено коло із центром O. Прямі AB і AC — дотичні, B і C — точки дотику. Треба довести, що $AB = AC$.

Проведемо радіуси OB і OC у точки дотику. За властивістю дотичної (теорема 21.3) $OB \perp AB$ і $OC \perp AC$. У прямокутних трикутниках AOB і AOC катети OB і OC рівні як радіуси одного кола, AO — спільна гіпотенуза. Отже, трикутники AOB і AOC рівні за гіпотенузою та катетом. Звідси $AB = AC$. ◄

1. Як ділить хорду діаметр, що перпендикулярний до неї?
2. Чому дорівнює кут між хордою, відмінною від діаметра, і діаметром, який ділить цю хорду навпіл?
3. Опишіть усі можливі випадки взаємного розміщення прямої та кола.
4. Яку пряму називають дотичною до кола?
5. Яку властивість має радіус, проведений у точку дотику прямої та кола?
6. Сформулюйте ознаку дотичної до кола.
7. Яку властивість мають дотичні, проведені до кола через одну точку?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

21.1.° Накресліть коло із центром O, проведіть хорду AB. Користуючись косинцем, поділіть цю хорду навпіл.

21.2.° Накресліть коло із центром O, проведіть хорду CD. Користуючись лінійкою зі шкалою, проведіть діаметр, перпендикулярний до хорди CD.

21.3.° Накресліть коло, позначте на ньому точки A і B. Користуючись лінійкою та косинцем, проведіть прямі, які дотикаються до кола в точках A і B.

21.4.° Проведіть пряму a та позначте на ній точку M. Користуючись косинцем, лінійкою та циркулем, побудуйте коло радіуса 3 см, яке дотикається до прямої a в точці M. Скільки таких кіл можна побудувати?

ВПРАВИ

21.5.° На рисунку 21.9 точка O — центр кола, діаметр CD перпендикулярний до хорди AB. Доведіть, що $\angle AOD = \angle BOD$.

21.6.° Доведіть, що рівні хорди кола рівновіддалені від його центра.

21.7.° Доведіть, що коли хорди кола рівновіддалені від його центра, то вони рівні.

21.8.° Чи можна стверджувати, що пряма, перпендикулярна до радіуса кола, дотикається до цього кола?

21.9.° Пряма CD дотикається до кола із центром O в точці A, відрізок AB — хорда кола, $\angle BAD = 35°$ (рис. 21.10). Знайдіть кут AOB.

21.10.° Пряма CD дотикається до кола із центром O в точці A, відрізок AB — хорда кола, $\angle AOB = 80°$ (рис. 21.10). Знайдіть кут BAC.

21.11.° Дано коло, діаметр якого дорівнює 6 см. Пряма a віддалена від його центра: 1) на 2 см; 2) на 3 см; 3) на 6 см. У якому випадку пряма a є дотичною до кола?

21.12.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$. Доведіть, що:
1) пряма BC є дотичною до кола із центром A, яке проходить через точку C;
2) пряма AB не є дотичною до кола із центром C, яке проходить через точку A.

21.13.• Доведіть, що діаметр кола більший за будь-яку хорду, відмінну від діаметра.

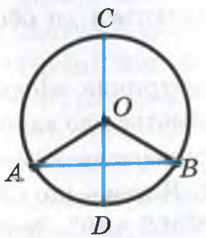


Рис. 21.9

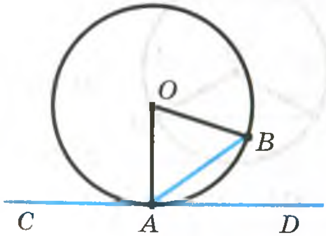


Рис. 21.10

21.14.• У колі із центром O через середину радіуса проведено хорду AB, перпендикулярну до нього. Доведіть, що $\angle AOB = 120°$.

21.15.• Знайдіть кут між радіусами OA й OB кола, якщо відстань від центра O кола до хорди AB у 2 рази менша: 1) від довжини хорди AB; 2) від радіуса кола.

21.16.• У колі проведено діаметр AB та хорди AC і CD так, що $AC = 12$ см, $\angle BAC = 30°$, $AB \perp CD$. Знайдіть хорду CD.

21.17.• Два кола мають спільний центр. Пряма перетинає більше коло в точках A і B, а менше — у точках C і D. Доведіть, що $AC = BD$.

21.18.• Через точку M до кола із центром O проведено дотичні MA і MB, A і B — точки дотику, $\angle OAB = 20°$. Знайдіть кут AMB.

21.19.• Через кінці хорди AB, яка дорівнює радіусу кола, проведено дві дотичні, що перетинаються в точці C. Знайдіть кут ACB.

21.20.• Через точку C кола із центром O проведено дотичну до цього кола, AB — діаметр кола. Із точки A на дотичну опущено перпендикуляр AD. Доведіть, що промінь AC — бісектриса кута BAD.

21.21.• Пряма AC дотикається до кола із центром O в точці A (рис. 21.11). Доведіть, що кут BAC у 2 рази менший від кута AOB.

21.22.• Відрізки AB і BC — відповідно хорда й діаметр кола, $\angle ABC = 30°$. Через точку A проведено дотичну до кола, яка перетинає пряму BC у точці D. Доведіть, що трикутник ABD рівнобедрений.

21.23.• Відомо, що діаметр AB ділить хорду CD навпіл, але не перпендикулярний до неї. Доведіть, що CD теж діаметр.

21.24.• Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до даної прямої в даній точці.

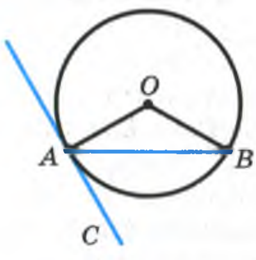


Рис. 21.11

21.25.• Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до обох сторін даного кута.

21.26.• Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до даної прямої.

21.27.• Хорда CD кола перетинає його діаметр AB у точці M. Відомо, що $CM = 5$ см, $MD = 3$ см, $\angle CMB = 45°$. Знайдіть відстань від центра кола до хорди.

21.28.° Хорда CD кола перетинає його діаметр AB у точці M. Відомо, що $CM = 8$ см, $MD = 5$ см, $AM = 4$ см, $MB = 10$ см. Знайдіть кут CMB.

21.29.•• Вершина M рівностороннього трикутника CMD належить колу із центром O, а вершини C і D — хорді AB цього кола. Відомо, що $AC = CD = DB$. Знайдіть кут AOB.

21.30.•• Через точку P, яка лежить поза колом, проведено дві прямі, одна з яких перетинає коло в точках A і B, а друга — у точках C і D. Точка A лежить між точками P і B, точка C — між точками P і D. Відомо, що $AB = CD$. Доведіть, що $PA = PC$.

21.31.•• Через точку P, яка лежить поза колом, проведено дві прямі, одна з яких перетинає коло в точках A і B, а друга — у точках C і D. Точка A лежить між точками P і B, точка C — між точками P і D. Відомо, що $PB = PD$. Доведіть, що $AB = CD$.

21.32.•• На стороні CA прямого кута ACB позначили точки M і N так, що $CM = 4$ см і $CN = 6$ см. Знайдіть радіус кола, яке проходить через точки M і N та дотикається до променя CB.

21.33.•• На стороні CA прямого кута ACB позначили точки M і N так, що $CM = 3$ см і $CN = 9$ см. Коло радіуса 6 см проходить через точки M і N. Доведіть, що це коло дотикається до прямої CB.

21.34.•• Через точку M, яка лежить поза колом із центром O, проведено дотичні MA і MB до кола (A і B — точки дотику). Відомо, що коло ділить відрізок MO навпіл. У якому відношенні пряма AB ділить відрізок MO?

21.35.•• Через точку M, яка лежить поза колом із центром O, проведено дотичні MA і MB до кола (A і B — точки дотику). Відрізок OM перетинає коло в точці K. Відомо, що пряма AB ділить відрізок OK навпіл. У якому відношенні точка K ділить відрізок MO?

21.36.•• Прямі, які дотикаються до кола із центром O в точках A і B, перетинаються в точці K, $\angle AKB = 120°$. Доведіть, що $AK + BK = OK$.

21.37.* Точки M, N і K — середини відповідно сторін AB, BC і CA рівностороннього трикутника ABC. Коло проходить через точки M, B і N. Доведіть, що пряма KN є дотичною до цього кола.

22. Описане та вписане кола трикутника

Означення. **Коло називають описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.**

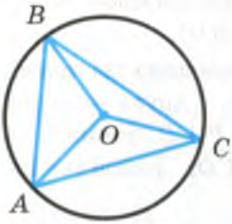


Рис. 22.1

На рисунку 22.1 зображено коло, описане навколо трикутника. У цьому разі також говорять, що **трикутник вписаний у коло.**

На рисунку 22.1 точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Відрізки OA, OB і OC — радіуси цього кола, тому $OA = OB = OC$. Отже, *центр описаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його вершин.*

Теорема 22.1. ***Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.***

Доведення. Для доведення достатньо показати, що для будь-якого трикутника ABC існує точка O, рівновіддалена від усіх його вершин. Тоді точка O буде центром описаного кола, а відрізки OA, OB і OC — його радіусами.

На рисунку 22.2 зображено довільний трикутник ABC. Проведемо серединні перпендикуляри k і l сторін AB і AC відповідно. Нехай O — точка перетину цих прямих. Оскільки точка O належить серединному перпендикуляру k, то $OA = OB$. Оскільки точка O належить серединному перпендикуляру l, то $OA = OC$. Отже, $OA = OB = OC$, тобто точка O рівновіддалена від усіх вершин трикутника. ◀

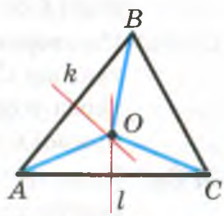


Рис. 22.2

Зауважимо, що навколо трикутника можна описати тільки одне коло. Це випливає з того, що серединні перпендикуляри k і l (рис. 22.2) мають тільки одну точку перетину. Отже, існує тільки одна точка, рівновіддалена від усіх вершин трикутника.

Наслідок 1. ***Три серединних перпендикуляри сторін трикутника перетинаються в одній точці.***

Наслідок 2. ***Центр кола, описаного навколо трикутника, — це точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника.***

Означення. **Коло називають вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.**

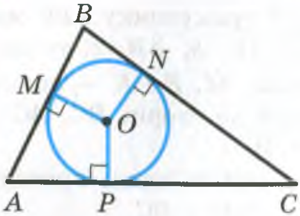


Рис. 22.3

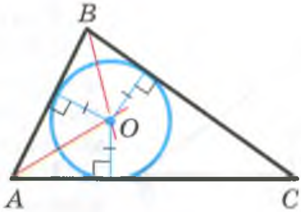


Рис. 22.4

На рисунку 22.3 зображено коло, вписане в трикутник. У цьому разі також говорять, що **трикутник описаний навколо кола.**

На рисунку 22.3 точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC, відрізки OM, ON, OP — радіуси, проведені в точки дотику, $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp AC$. Оскільки $OM = ON = OP$, то *центр вписаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його сторін.*

Теорема 22.2. ***У будь-який трикутник можна вписати коло.***

Доведення. Щоб довести цю теорему, достатньо показати, що для будь-якого трикутника ABC існує точка O, яка віддалена від кожної його сторони на одну й ту саму відстань r. Тоді за наслідком з ознаки дотичної до кола (наслідок з теореми 21.4) точка O буде центром кола радіуса r, яке дотикається до сторін AB, BC і AC.

На рисунку 22.4 зображено довільний трикутник ABC. Проведемо бісектриси кутів A і B, позначимо точку O їхнього перетину. Оскільки точка O належить бісектрисі кута A, то за теоремою про бісектрису кута (теорема 20.2) ця точка рівновіддалена від сторін AB і AC. Аналогічно, оскільки точка O належить бісектрисі кута B, то вона рівновіддалена від сторін BA і BC. Отже, точка O рівновіддалена від усіх сторін трикутника. ◀

Зауважимо, що в трикутник можна вписати тільки одне коло. Це випливає з того, що бісектриси кутів A і B (рис. 22.4) перетинаються тільки в одній точці. Отже, існує тільки одна точка, рівновіддалена від сторін трикутника.

Наслідок 1. ***Бісектриси кутів трикутника перетинаються в одній точці.***

Наслідок 2. ***Центр кола, вписаного в трикутник, — це точка перетину бісектрис трикутника.***

Задача. Доведіть, що радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, визначають за формулою $r = \frac{a+b-c}{2}$, де r — радіус вписаного кола, a і b — катети, c — гіпотенуза.

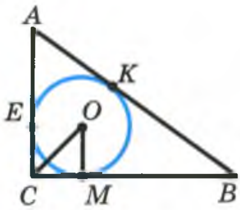


Рис. 22.5

Розв'язання. У трикутнику ABC маємо: $\angle ACB = 90°$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, точка O — центр вписаного кола, M, E і K — точки дотику вписаного кола до сторін BC, AC і AB відповідно (рис. 22.5).

Відрізок OM — радіус кола, проведений у точку дотику. Тоді $OM \perp BC$.

Оскільки точка O — центр вписаного кола, то промінь CO — бісектриса кута ACB, отже, $\angle OCM = 45°$. Тоді трикутник CMO — рівнобедрений прямокутний. Звідси $CM = OM = r$.

Використовуючи властивість відрізків дотичних, проведених до кола через одну точку, отримуємо: $CE = CM$. Оскільки $CM = r$, то $CE = r$. Тоді $AK = AE = b - r$; $BK = BM = a - r$.

Оскільки $AK + BK = AB$, то $b - r + a - r = c$. Звідси $2r = a + b - c$; $r = \frac{a+b-c}{2}$. ◄

1. Яке коло називають описаним навколо трикутника?
2. Який трикутник називають вписаним у коло?
3. Навколо якого трикутника можна описати коло?
4. Яка точка є центром кола, описаного навколо трикутника?
5. Яке коло називають вписаним у трикутник?
6. Який трикутник називають описаним навколо кола?
7. У який трикутник можна вписати коло?
8. Яка точка є центром кола, вписаного в трикутник?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

22.1.° Накресліть різносторонній гострокутний трикутник.

1) Користуючись лінійкою зі шкалою та косинцем, знайдіть центр кола, описаного навколо даного трикутника.
2) Опишіть навколо трикутника коло.

Виконайте завдання 1 і 2 для різносторонніх прямокутного й тупокутного трикутників.

22.2.° Накресліть:

1) рівнобедрений гострокутний трикутник;
2) рівнобедрений тупокутний трикутник.

Виконайте завдання 1 і 2 із вправи 22.1.

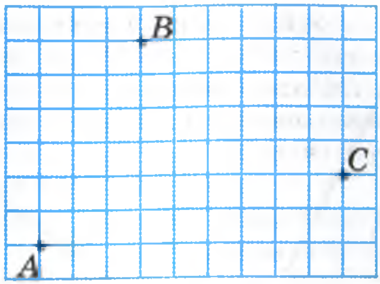


Рис. 22.6

22.3.° Перерисуйте в зошит рисунок 22.6. Проведіть через точки A, B, C коло, користуючись лінійкою зі шкалою, косинцем і циркулем.

22.4.° Накресліть різносторонній трикутник.

1) Користуючись лінійкою та транспортиром, знайдіть центр кола, вписаного в даний трикутник.
2) Користуючись косинцем, знайдіть точки дотику вписаного кола до сторін трикутника.
3) Впишіть у даний трикутник коло.

22.5.° Накресліть рівнобедрений трикутник. Виконайте завдання 1, 2 і 3 із вправи 22.4.

ВПРАВИ

22.6.° Доведіть, що центр описаного кола рівнобедреного трикутника належить прямій, яка містить медіану, проведену до його основи.

22.7.° Доведіть, що центр вписаного кола рівнобедреного трикутника належить висоті, проведеній до його основи.

22.8.° Доведіть, що коли центр вписаного кола трикутника належить його висоті, то цей трикутник рівнобедрений.

22.9.° Доведіть, що центр описаного кола рівностороннього трикутника є точкою перетину його бісектрис.

22.10.° На рисунку 22.7 у трикутники ABD і CBD вписано кола із центрами O_1 і O_2 відповідно. Доведіть, що кут O_1DO_2 прямий.

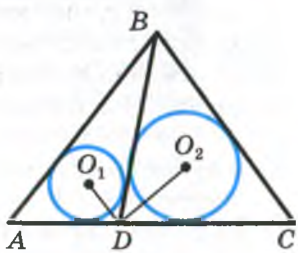


Рис. 22.7

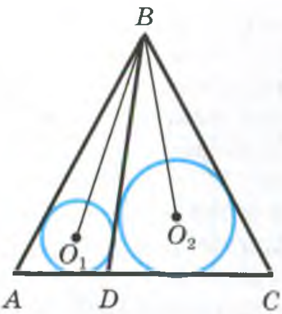


Рис. 22.8

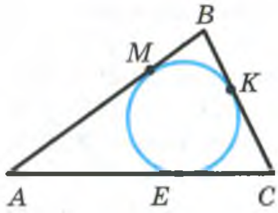


Рис. 22.9

22.11.° На рисунку 22.8 у трикутники ABD і CBD вписано кола із центрами O_1 і O_2 відповідно, $\angle ABC = 50°$. Знайдіть кут O_1BO_2.

22.12.° Через центр O кола, описаного навколо трикутника ABC, проведено пряму, яка перпендикулярна до сторони AC і перетинає сторону AB у точці M. Доведіть, що $AM = MC$.

22.13.° Коло, вписане в трикутник ABC (рис. 22.9), дотикається до його сторін у точках M, K і E, $BK = 2$ см, $KC = 4$ см, $AM = 8$ см. Знайдіть периметр трикутника ABC.

22.14.• Доведіть, що коли центр кола, описаного навколо трикутника, належить його висоті, то цей трикутник рівнобедрений.

22.15.• Доведіть, що коли центр кола, вписаного в трикутник, належить його медіані, то цей трикутник рівнобедрений.

22.16.• Доведіть, що коли центри вписаного й описаного кіл трикутника збігаються, то цей трикутник рівносторонній.

22.17.• У двох рівнобедрених трикутниках рівні основи та радіуси описаних кіл. Чи можна стверджувати, що ці трикутники рівні?

22.18.• У двох рівнобедрених трикутниках рівні основи та радіуси вписаних кіл. Чи можна стверджувати, що ці трикутники рівні?

22.19.• Точка дотику вписаного кола рівнобедреного трикутника ділить його бічну сторону у відношенні 7 : 5, рахуючи від вершини трикутника. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 68 см.

22.20.• Периметр трикутника ABC, описаного навколо кола, дорівнює 52 см. Точка дотику кола до сторони AB ділить цю сторону у відношенні 2 : 3, рахуючи від вершини A. Точка дотику до сторони BC віддалена від вершини C на 6 см. Знайдіть сторони трикутника.

22.21.• У трикутник з кутами 30°, 70° і 80° вписано коло. Знайдіть кути трикутника, вершини якого є точками дотику вписаного кола до сторін даного трикутника.

22.22.° Коло, вписане в прямокутний трикутник ABC, дотикається до катетів AC і BC у точках M і N відповідно та до гіпотенузи AB у точці K. Знайдіть кут MKN.

22.23.° Коло, вписане в рівнобедрений трикутник ABC, дотикається до його бічних сторін AB і BC у точках M і N відповідно. Доведіть, що $MN \parallel AC$.

22.24.° Доведіть, що коли центр кола, описаного навколо трикутника, належить його стороні, то цей трикутник прямокутний.

22.25.° Доведіть, що центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є серединою гіпотенузи.

22.26.•• Доведіть, що коли центр кола, описаного навколо трикутника, лежить усередині трикутника, то цей трикутник гострокутний.

22.27.•• Доведіть, що коли центр кола, описаного навколо трикутника, лежить поза трикутником, то цей трикутник тупокутний.

22.28.•• Доведіть, що коли трикутник гострокутний, то центр його описаного кола лежить усередині трикутника, а коли трикутник тупокутний — поза трикутником.

22.29.•• У прямокутному трикутнику ABC відрізок CD — висота, проведена до гіпотенузи AB. Радіуси кіл, вписаних у трикутники ACD, BCD і ABC, дорівнюють відповідно r_1, r_2 і r. Доведіть, що $r_1 + r_2 + r = CD$.

22.30.•• Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, дорівнює піврізниці катетів. Знайдіть гострі кути трикутника.

22.31.•• Сума радіусів вписаного й описаного кіл прямокутного трикутника дорівнює одному з катетів. Знайдіть гострі кути трикутника.

22.32.•• На бічній стороні BC рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) позначили точку M так, що $CM = CA$. Доведіть, що центр кола, вписаного в трикутник ABC, збігається із центром кола, описаного навколо трикутника AMC.

22.33.•• У трикутнику ABC проведено бісектрису AK. Центр кола, вписаного в трикутник AKB, збігається із центром кола, описаного навколо трикутника ABC. Знайдіть кути трикутника ABC.

22.34.•• Коло, вписане в трикутник ABC, дотикається до його сторін AB і AC відповідно в точках M і N. Доведіть, що $BN > MN$.

22.35.•• У трикутник ABC вписано коло, яке дотикається до сторони AB у точці M, $BC = a$. Доведіть, що $AM = p - a$, де p — півпериметр трикутника ABC.

22.36.•• Через центр кола, вписаного в трикутник ABC, провели пряму MN паралельно стороні AB (точки M і N належать відповідно сторонам BC і AC). Знайдіть периметр чотирикутника $ABMN$, якщо відомо, що $AB = 5$ см, $MN = 3$ см.

22.37.•• Пряма, паралельна стороні AB трикутника ABC, перетинає сторони BC і AC у точках M і N відповідно. Відомо, що $MN = BM + AN$. Доведіть, що центр кола, вписаного в трикутник ABC, належить відрізку MN.

22.38.•• У трикутнику ABC відрізок BD — медіана, $AB = 7$ см, $BC = 8$ см. У трикутники ABD і BDC вписали кола. Знайдіть відстань між точками дотику цих кіл до відрізка BD.

22.39.•• У трикутнику ABC відомо, що $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $CA = 4$ см. На стороні BC позначили точку D так, що кола, вписані в трикутники ABD і ADC, дотикаються до відрізка AD в одній точці. Знайдіть відрізок BD.

22.40.•• Кожний із кутів BAC і ACB трикутника ABC поділено на три рівні частини (рис. 22.10). Доведіть, що $\angle AMN = \angle CMN$.

22.41.•• Точки F і O — центри вписаного й описаного кіл рівнобедреного трикутника ABC відповідно (рис. 22.11). Вони розташовані на однаковій відстані від його основи AC. Знайдіть кути трикутника ABC.

22.42.* У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) проведено висоту CH і медіану CM. Коло, вписане в трикутник HCM, дотикається до сторін CM і CH у точках E і F відповідно. Пряма EF перетинає катети CA та CB у точках P і Q відповідно. Доведіть, що $CP = CQ$.

22.43.* На гіпотенузу AB прямокутного трикутника ABC опущено висоту CD. Відрізки CK і CM — бісектриси трикутників ACD і DCB відповідно. Доведіть, що центр кола, описаного навколо трикутника KCM, є центром кола, вписаного в трикутник ABC.

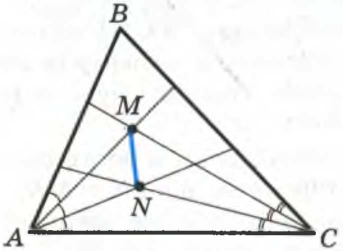


Рис. 22.10

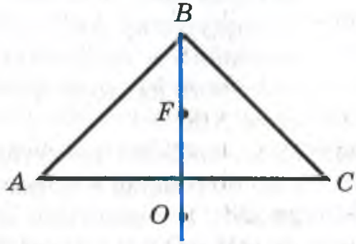


Рис. 22.11

22.44.* Нехай вершина кута B недоступна (рис. 22.12). За допомогою транспортира та лінійки без поділок побудуйте пряму, яка містить бісектрису кута B.

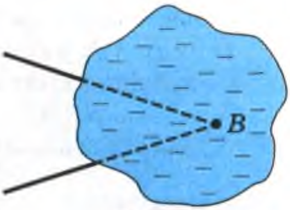


Рис. 22.12

22.45.* Бісектриси BB_1 і CC_1 трикутника ABC перетинаються в точці O. Відомо, що $AO \perp B_1C_1$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

22.46.* Коло, вписане в прямокутний трикутник ABC, дотикається до катетів AC і BC у точках M і N відповідно та до гіпотенузи AB у точці K. Бісектриса кута A перетинає відрізок NK у точці E. Знайдіть кут MEK.

22.47.* У трикутник ABC вписано коло із центром O. На прямій BC позначили точки A_1 і A_2, на прямій AC — точки B_1 і B_2, на прямій AB — точки C_1 і C_2 так, що $OA_1 = OA_2 = OA$, $OB_1 = OB_2 = OB$ і $OC_1 = OC_2 = OC$. Доведіть, що $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = AB + BC + AC$.

22.48.* Дві вершини трикутника розміщені в точках A та B, а третя вершина X переміщується так, що різниця $XA - XB$ дорівнює d, де d — задане число. Доведіть, що центри кіл, вписаних у трикутники AXB, належать одній прямій.

23. Зовнівписане коло трикутника

Проведемо бісектриси двох зовнішніх кутів із вершинами A та C трикутника ABC (рис. 23.1). Нехай O — точка перетину цих бісектрис. Ця точка рівновіддалена від прямих AB, BC і AC.

Проведемо три перпендикуляри: $OM \perp AB$, $OK \perp AC$, $ON \perp BC$. Довжини цих перпендикулярів — це відстані від точки O до прямих AB, BC і AC. Тому $OM = OK = ON$. Отже, існує коло із центром у точці O, яке дотикається до сторони трикутника та продовжень двох інших його сторін. Таке коло називають **зовнівписаним колом** трикутника ABC (рис. 23.1).

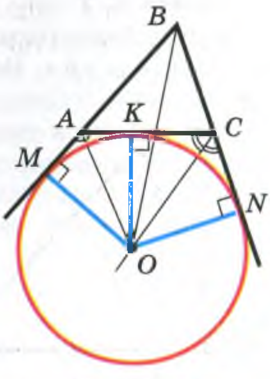


Рис. 23.1

Оскільки $OM = ON$, то точка O належить бісектрисі кута ABC.

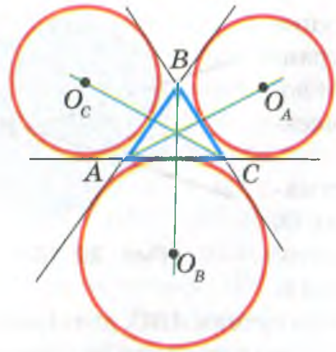


Рис. 23.2

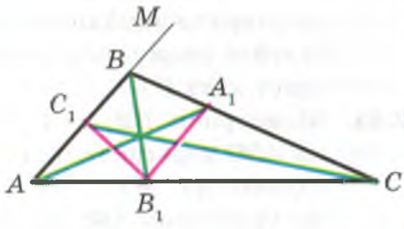


Рис. 23.3

Тепер можна зробити такий висновок: *бісектриси двох зовнішніх кутів трикутника та кута трикутника, не суміжного з даними зовнішніми кутами, перетинаються в одній точці.*

Очевидно, що будь-який трикутник має три зовнівписаних кола (рис. 23.2) із центрами O_A, O_B, O_C, які дотикаються до сторін BC, AC і AB відповідно. Радіуси цих кіл позначимо відповідно r_A, r_B, r_C.

Задача 1. Зовнівписане коло трикутника ABC дотикається до продовження сторони AB за точку A в точці M. Доведіть, що $BM = p$, де p — півпериметр трикутника ABC.

Розв'язання. Нехай дане зовнівписане коло із центром O дотикається до сторони AC у точці K, а продовження сторони BC — у точці N (рис. 23.1). За властивістю дотичних, проведених до кола через одну точку, маємо: $CK = CN$, $AK = AM$. Тоді $AC = CN + AM$. Отже, периметр трикутника ABC дорівнює сумі $BM + BN$. Але $BM = BN$. Тоді $BM = BN = p$, де p — півпериметр трикутника ABC. ◄

Задача 2. У трикутнику ABC з кутом B, який дорівнює $120°$, проведено бісектриси AA_1, BB_1 і CC_1. Знайдіть кут $A_1B_1C_1$.

Розв'язання. Нехай $\angle MBC$ — зовнішній кут трикутника ABC при вершині B (рис. 23.3). Очевидно, що $\angle MBC = 60°$. Тоді промінь BA_1 — бісектриса кута MBB_1. Отже, точка A_1 — центр зовнівписаного кола трикутника ABB_1. Тоді промінь B_1A_1 — бісектриса кута BB_1C. Аналогічно промінь B_1C_1 — бісектриса кута AB_1B.

Отже, $\angle A_1B_1C_1$ дорівнює половині розгорнутого кута, тобто $\angle A_1B_1C_1 = 90°$. ◄

?

1. Яке коло називають зовнівписаним колом трикутника?
2. Скільки зовнівписаних кіл має трикутник?

ВПРАВИ

23.1.° Трикутник ABC рівнобедрений ($AB = BC$). Доведіть, що пряма BO_B ділить відрізок AC навпіл.

23.2.° Доведіть, що коли центр зовнівписаного кола трикутника належить прямій, яка містить його висоту, то цей трикутник рівнобедрений.

23.3.° Кут A трикутника ABC дорівнює $40°$. Знайдіть кут BO_AC.

23.4.° Центр вписаного кола, центр зовнівписаного кола та одну з вершин трикутника сполучили відрізками й отримали деякий трикутник. Доведіть, що отриманий трикутник прямокутний.

23.5.° Доведіть, що вершини трикутника ABC належать сторонам трикутника $O_AO_BO_C$.

23.6.° Доведіть, що висоти трикутника $O_AO_BO_C$ містять бісектриси трикутника ABC.

23.7.• Зовнівписане коло трикутника ABC дотикається до сторони AC у точці K. Доведіть, що $KC = p - a$ і $KA = p - c$, де p — півпериметр трикутника ABC.

23.8.• У трикутнику ABC відомо, що K і L — точки дотику сторони AB до вписаного і зовнівписаного кіл відповідно. Доведіть, що $AL = BK$.

23.9.• У трикутнику ABC радіус зовнівписаного кола, яке дотикається до сторони AC, дорівнює півпериметру даного трикутника. Доведіть, що кут ABC прямий.

23.10.• У прямокутному трикутнику ABC відомо, що $AB = c$, $AC = b$ і $BC = a$. Знайдіть радіус зовнівписаного кола, яке дотикається до гіпотенузи AC.

23.11.• Через точку C проведено дотичні AC і BC до кола, A і B — точки дотику (рис. 23.4). На колі взяли довільну точку M, яка лежить в одній півплощині з точкою C відносно прямої AB. Через точку M провели дотичну до кола, яка перетинає прямі AC і BC у точках D і E відповідно. Доведіть, що периметр трикутника DEC не залежить від вибору точки M.

23.12.• До кола, вписаного в рівносторонній трикутник зі стороною a, провели дотичну, яка перетинає дві сторони трикутника. Знайдіть периметр трикутника, який ця дотична відтинає від даного.

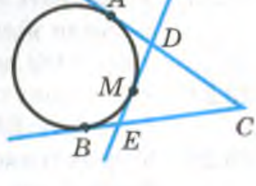


Рис. 23.4

23.13.[•] У рівнобедрений трикутник с основою 12 см вписано коло, а до нього проведено три дотичні так, що вони відтинають від даного трикутника три трикутники по одному біля кожної вершини. Сума периметрів трьох утворених трикутників дорівнює 48 см. Знайдіть бічну сторону даного трикутника.

23.14.[•] У трикутник зі сторонами 6 см, 10 см, 12 см вписано коло. До кола проведено дотичну так, що вона перетинає дві більші сторони трикутника. Знайдіть периметр трикутника, який дотична відтинає від даного трикутника.

23.15.[•] Нехай зовнівписані кола трикутника, які дотикаються до сторін AC і BC, дотикаються до прямої AB у точках P і Q відповідно. Доведіть, що середина сторони AB збігається із серединою відрізка PQ.

23.16.[•] Виразіть кути трикутника $O_AO_BO_C$ через кути трикутника ABC.

23.17.[••] Доведіть, що коло, яке дотикається до бічних сторін AB і BC рівнобедреного трикутника ABC у точках A і C відповідно, проходить через центр зовнівписаного кола трикутника ABC.

23.18.[••] У трикутнику ABC проведено бісектриси AK і BL. Знайдіть кут A, якщо промінь KL — бісектриса кута AKC.

23.19.[••] У трикутнику ABC провели бісектрису AE. На стороні AC позначили точку D так, що $\angle BAC + \angle BCA = \angle DBC$. Доведіть, що промінь DE — бісектриса кута BDC.

23.20.[*] На сторонах AD і CD квадрата $ABCD$ вибрано точки Q і P відповідно так, що $\angle ABQ = 15°$, $\angle PQD = 30°$. Знайдіть кут QBP.

23.21.[*] На сторонах BC і CD квадрата $ABCD$ позначили відповідно точки M і N так, що $\angle MNC = 2\angle NAD$. Знайдіть кут MAN.

23.22.[*] На сторонах BA і BC рівностороннього трикутника ABC позначили відповідно точки M і N так, що $\angle NMA = 2\angle NAC$. Через точку B провели пряму, яка паралельна стороні AC і перетинає пряму MN у точці K. Знайдіть кут NAK.

23.23.[*] У квадраті $ABCD$ зі стороною 1 см на сторонах AB і BC позначили відповідно точки P і Q так, що периметр трикутника PBQ дорівнює 2 см. Знайдіть кут PDQ.

23.24.[*] У гострокутному трикутнику ABC провели бісектрису AE та висоту BD. Доведіть, що $\angle CDE > 45°$.

23.25.[*] У трикутнику ABC провели бісектрису AE та медіану BM. Відомо, що $\angle BAC = 20°$ і $AB = 2BM$. Знайдіть кут BEM.

23.26.* У трикутнику ABC відомо, що $\angle B = 100°$, відрізок CE — бісектриса трикутника. На стороні AC позначили точку D так, що $\angle DBC = 20°$. Знайдіть кут CED.

23.27.* У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 135°$, відрізок BE — бісектриса трикутника. На стороні BC позначили точку D так, що $\angle BAD = 90°$. Знайдіть кут BED.

23.28.* У трикутнику ABC провели висоту BD (точка D належить стороні AC) і бісектрису AE. Відомо, що $\angle AEB = 45°$. Доведіть, що $\angle EDC = 45°$.

23.29.* У трикутнику ABC провели медіану CD. Відомо, що $\angle A = 30°$ і $\angle B = 15°$. Знайдіть кут ADC.

24. Задачі на побудову

За допомогою лінійки з поділками, циркуля, косинця, транспортира, лекал (рис. 24.1) вам неодноразово доводилося виконувати різні геометричні побудови.

А чи можна задовольнитися меншою кількістю креслярських інструментів? Виявляється, що в багатьох випадках достатньо використовувати тільки *циркуль і лінійку без поділок*. Наприклад, щоби провести бісектрису кута, зовсім не обов'язково мати транспортир, а поділити відрізок навпіл можна й тоді, коли на лінійку не нанесено шкалу.

А чи варто в наш час, коли створено найточніші прилади й досконалі комп'ютерні програми, які дають можливість виконувати найскладніші вимірювання та побудови, задовольнятися такими мізерними засобами, як циркуль і лінійка? На практиці, звісно, ні. Тому, наприклад, конструктори, будівельники, архітектори, дизайнери не обмежують себе у виборі інструментів.

Однак при побудові фігур у геометрії домовилися дотримуватися таких правил:

1) *усі побудови виконують тільки за допомогою циркуля та лінійки без поділок*;

2) *за допомогою лінійки можна через задану точку провести пряму, а також через задані дві точки A і B провести пряму AB*;

3) *за допомогою циркуля можна побудувати коло з даним центром і радіусом, що дорівнює заданому відрізку.*

Отже, домовимося, що коли в задачі потрібно побудувати якусь фігуру, то побудову виконують за описаними вище правилами.

Рис. 24.1

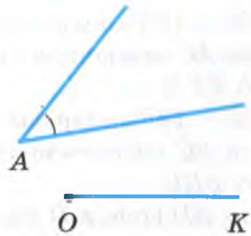


Рис. 24.2

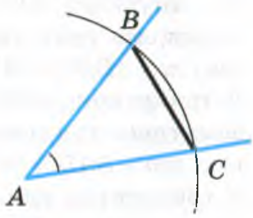


Рис. 24.3

Розв'язати задачу на побудову — це означає скласти план (*алгоритм*) побудови фігури; реалізувати план, виконавши побудову; довести, що отримана фігура є шуканою.

Розглянемо основні задачі на побудову.

Задача 1. Побудуйте кут, що дорівнює даному, одна зі сторін якого є даним променем.

Розв'язання. На рисунку 24.2 зображено кут A та промінь OK. Треба побудувати кут, що дорівнює куту A, однією зі сторін якого є промінь OK.

Проведемо коло довільного радіуса r із центром у точці A. Точки перетину цього кола зі сторонами кута A позначимо B і C (рис. 24.3). Тоді $AB = AC = r$.

Проведемо коло радіуса r із центром у точці O. Нехай воно перетинає промінь OK у точці M (рис. 24.4, *а*). Потім проведемо коло радіуса BC із центром у точці M. Нехай кола із центрами O і M перетинаються в точках E і F (рис. 24.4, *б*). Проведемо промені OE та OF (рис. 24.4, *в*).

Покажемо, що кожний із кутів EOM і FOM — шуканий. Доведемо, наприклад, що $\angle EOM = \angle BAC$.

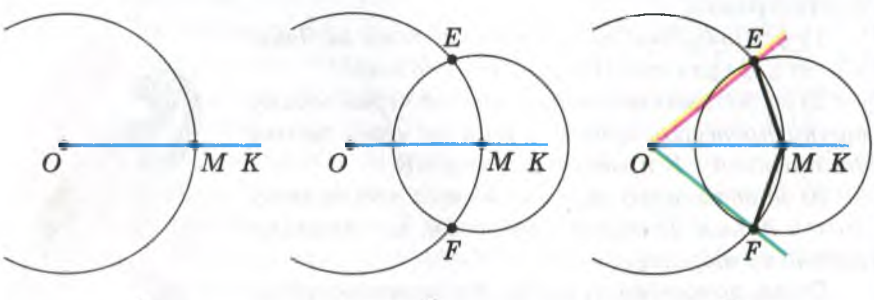


Рис. 24.4

Розглянемо трикутники ABC (рис. 24.3) і OEM (рис. 24.4, *в*). Маємо: $AB = OE = r = AC = OM$. Крім того, за побудовою $EM = BC$. Отже, трикутники ABC і OEM рівні за трьома сторонами, тобто за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle EOM = \angle BAC$. Аналогічно можна показати, що $\angle BAC = \angle FOM$. ◀

Рис. 24.5

Ми побудували два кути EOM і FOM, які задовольняють умову задачі. Ці кути рівні. У таких випадках вважають, що задача на побудову має один розв'язок.

Задача 2. Побудуйте серединний перпендикуляр даного відрізка.

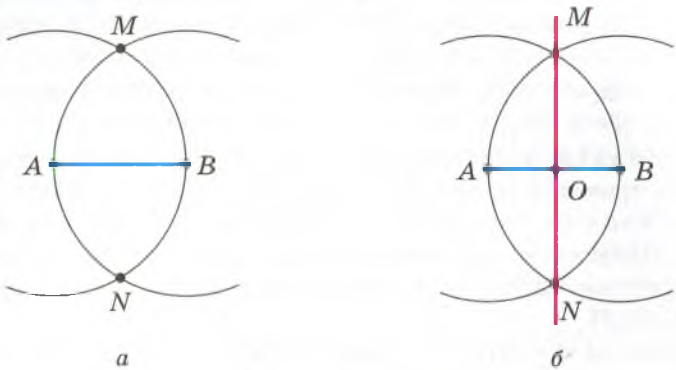


Рис. 24.6

Розв'язання. Нехай AB — даний відрізок (рис. 24.5). Проведемо два кола із центрами A і B та радіусом AB. Точки перетину цих кіл позначимо M і N (рис. 24.6, *а*). Проведемо пряму MN (рис. 24.6, *б*). Доведемо, що пряма MN є шуканою.

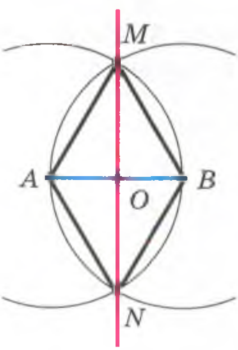


Рис. 24.7

З побудови випливає, що $MA = MB = AB$ і $NA = NB = AB$ (рис. 24.7). Отже, точки M і N належать серединному перпендикуляру відрізка AB. Тоді пряма MN є серединним перпендикуляром відрізка AB. ◀

Оскільки пряма MN перетинає відрізок AB у його середині, у точці O, то тим самим розв'язана така задача.

Задача 3. Поділіть даний відрізок навпіл.

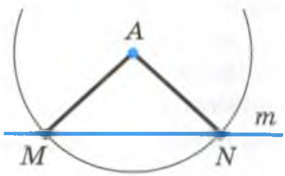


Рис. 24.8

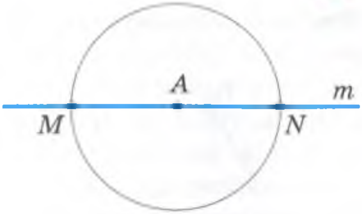


Рис. 24.9

Задача 4. Дано пряму та точку, яка їй не належить. Через цю точку проведіть пряму, перпендикулярну до даної.

Розв'язання. Нехай m — дана пряма, A — точка, яка їй не належить. Проведемо коло із центром у точці A так, щоб воно перетинало пряму m у двох точках. Позначимо ці точки M і N (рис. 24.8).

Оскільки $AM = AN$, то точка A належить серединному перпендикуляру відрізка MN. Побудувавши цей серединний перпендикуляр (див. задачу 2), ми тим самим розв'яжемо задачу. ◄

Задача 5. Дано пряму та точку, яка їй належить. Через цю точку проведіть пряму, перпендикулярну до даної.

Розв'язання. Нехай m — дана пряма, A — точка, яка їй належить. Проведемо коло довільного радіуса із центром у точці A. Воно перетинає пряму m у двох точках. Позначимо ці точки M і N (рис. 24.9).

Оскільки $AM = AN$, то ми звели задачу до побудови серединного перпендикуляра відрізка MN. ◄

Задача 6. Побудуйте бісектрису даного кута.

Розв'язання. Нехай A — даний кут. Проведемо коло довільного радіуса із центром у точці A. Це коло перетинає сторони кута у двох точках. Позначимо ці точки M і N (рис. 24.10, *а*). Тим самим радіусом проведемо два кола із центрами M і N. Нехай ці кола перетинаються в точках A і K (рис. 24.10, *б*). Проведемо промінь AK (рис. 24.10, *в*).

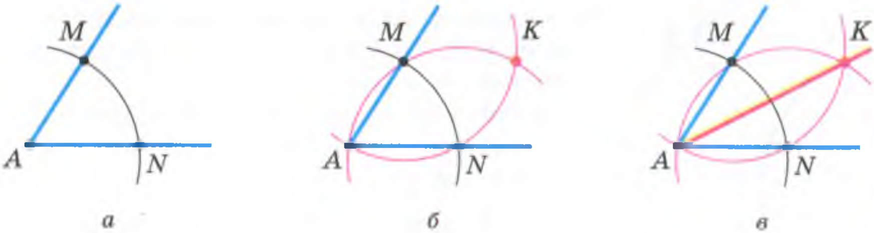


Рис. 24.10

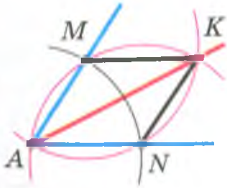


Рис. 24.11

Доведемо, що промінь AK — шукана бісектриса.

Дійсно, трикутники AMK і ANK (рис. 24.11) рівні за трьома сторонами, тобто за третьою ознакою рівності трикутників. Отже, $\angle MAK = \angle NAK$. ◀

Задача 7. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою та катетом.

Розв'язання. Нехай дано два відрізки завдовжки c і b, причому $b < c$ (рис. 24.12). Оскільки гіпотенуза більша за катет, то гіпотенуза шуканого трикутника дорівнює більшому з даних відрізків, а катет — меншому. Отже, треба побудувати прямокутний трикутник ABC, у якому $\angle C = 90°$, $AB = c$, $AC = b$.

Проведемо дві перпендикулярні прямі m і n. Нехай C — точка їхнього перетину. На прямій m відкладемо відрізок CA, який дорівнює даному катету b (рис. 24.13, *а*). Проведемо коло із центром у точці A радіусом, який дорівнює даній гіпотенузі c. Нехай це коло перетне пряму n у двох точках B_1 і B_2 (рис. 24.13, *б*). Кожний із трикутників ACB_1 і ACB_2 — шуканий.

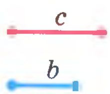


Рис. 24.12

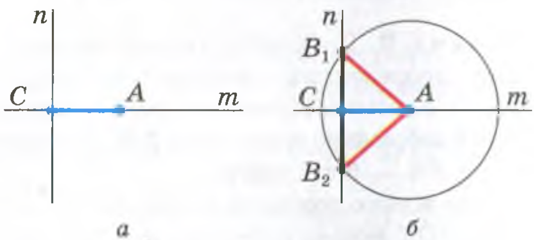


Рис. 24.13

Оскільки трикутники ACB_1 і ACB_2 рівні, то задача має єдиний розв'язок. ◀

Задача 8. Побудуйте трикутник за стороною та висотами, проведеними до двох інших сторін.

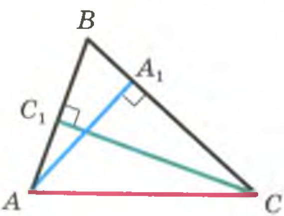
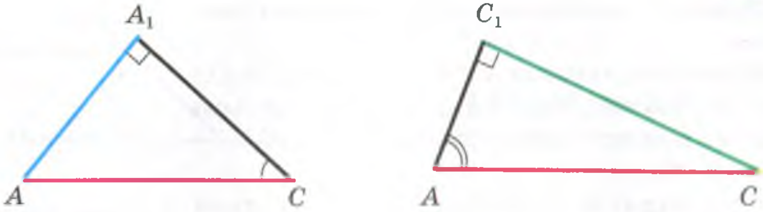


Рис. 24.14

Розв'язання. На рисунку 24.14 зображено трикутник ABC, відрізки AA_1 і CC_1 — його висоти. Якщо відомо відрізки AC, AA_1 і CC_1, то можна побудувати прямокутні трикутники AA_1C і CC_1A за гіпотенузою та катетом (див. задачу 7).

Наведені міркування називають **аналізом задачі на побудову**. Він підказує план побудови.



а *б*

Рис. 24.15

Побудуємо прямокутний трикутник AA_1C, у якому гіпотенуза AC дорівнює даній стороні, а катет AA_1 — одній із даних висот (рис. 24.15, *а*). У побудованому трикутнику кут ACA_1 дорівнює одному з кутів, прилеглих до даної сторони шуканого трикутника. За допомогою аналогічної побудови можна отримати другий прилеглий до даної сторони кут. На рисунку 24.15, *б* це кут C_1AC.

Тепер залишилося побудувати трикутник ABC за стороною AC та двома прилеглими до неї кутами. Виконайте цю побудову самостійно. ◀

Задача 9. Побудуйте трикутник за кутом, висотою та бісектрисою, проведеними з вершини цього кута.

Розв'язання. Проведемо аналіз задачі на побудову. На рисунку 24.16 зображено трикутник ABC, у якому відрізок BD — висота, відрізок BK — бісектриса.

Якщо відомо довжини відрізків BD і BK, то прямокутний трикутник BDK можна побудувати за гіпотенузою та катетом. Також зауважимо, що коли відомо кут ABC, то можна побудувати кути ABK і KBC, кожний з яких дорівнює $\frac{1}{2}\angle ABC$. Звідси отримуємо план побудови.

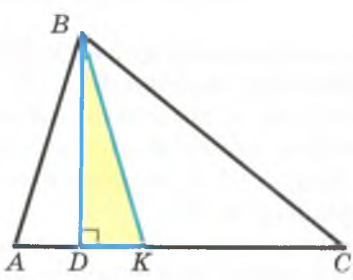


Рис. 24.16

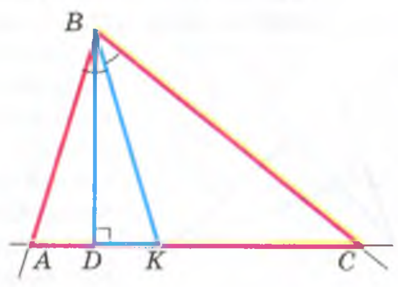


Рис. 24.17

Будуємо прямокутний трикутник BDK, у якому гіпотенуза BK дорівнює даній бісектрисі, а катет BD — даній висоті (рис. 24.17). Будуємо два кути, кожний з яких дорівнює половині даного, так, щоби промінь BK був їхньою спільною стороною. На рисунку 24.17 це кути ABK і KBC. Трикутник ABC — шуканий. ◄

1. За допомогою яких інструментів виконують геометричні побудови? Які побудови можна ними виконувати?
2. Що означає розв'язати задачу на побудову?

ВПРАВИ

24.1.° Накресліть: 1) гострий кут; 2) тупий кут. Побудуйте кут, що дорівнює накресленому.

24.2.° Накресліть гострий кут ABC і проведіть промінь DK. Побудуйте кут MDK такий, що $\angle MDK = 2\angle ABC$.

24.3.° Поділіть даний відрізок на чотири рівні частини.

24.4.° Накресліть довільний кут. Поділіть його на чотири рівні частини.

24.5.° Побудуйте кут, який дорівнює: 1) 45°; 2) 60°; 3) 75°; 4) 120°.

24.6.° Побудуйте кут, який дорівнює: 1) 30°; 2) 22°30′; 3) 15°.

24.7.° Накресліть: 1) гострокутний трикутник; 2) тупокутний трикутник. Побудуйте всі висоти цього трикутника.

24.8.° Накресліть трикутник ABC. Побудуйте його: 1) висоту AM; 2) медіану BD; 3) бісектрису CK.

24.9.° Через дану точку, яка не належить даній прямій, проведіть пряму, паралельну даній.

24.10.° Побудуйте трикутник:
1) за двома сторонами та кутом між ними;
2) за стороною та двома прилеглими кутами.

24.11.° Побудуйте коло даного радіуса, яке дотикається до даної прямої в даній точці.

24.12.° Через дану точку, що належить куту, проведіть пряму, яка відтинає на сторонах кута рівні відрізки.

24.13.° Побудуйте дотичну до кола, яка проходить через дану точку кола.

24.14.° Побудуйте коло, яке дотикається до сторін даного кута.

24.15.° Дано кут, який дорівнює 30°. Побудуйте коло заданого радіуса так, щоби центр кола належав одній із сторін даного кута й коло дотикалося до другої сторони кута.

24.16.° Побудуйте коло, яке дотикається до сторін даного кута, причому до однієї з них — у даній точці.

24.17.° Побудуйте прямокутний трикутник:
1) за двома катетами;
2) за гіпотенузою та гострим кутом;
3) за катетом і прилеглим гострим кутом.

24.18.° Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і протилежним гострим кутом.

24.19.° Побудуйте рівнобедрений трикутник:
1) за бічною стороною та кутом при вершині;
2) за висотою, опущеною на основу, та кутом при вершині;
3) за основою та медіаною, проведеною до основи;
4) за основою та висотою, проведеною до бічної сторони.

24.20.° Побудуйте рівнобедрений трикутник:
1) за основою та кутом при основі;
2) за бічною стороною та кутом при основі;
3) за бічною стороною та висотою, проведеною до основи.

24.21.° Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник:
1) за катетом;
2) за гіпотенузою.

24.22.• Побудуйте коло, центром якого є дана точка на стороні даного гострого кута та яке відтинає на другій стороні кута відрізок даної довжини.

24.23.• Як поділити навпіл відрізок, довжина якого в кілька разів більша за найбільший розхил циркуля?

24.24.• Побудуйте прямокутний трикутник:
1) за гострим кутом і бісектрисою цього кута;
2) за катетом і висотою, проведеною до гіпотенузи.

24.25.• Побудуйте прямокутний трикутник:
1) за катетом і медіаною, проведеною до другого катета;
2) за гострим кутом і висотою, проведеною з вершини прямого кута.

24.26.• Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою та радіусом вписаного кола.

24.27.• Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і бісектрисою трикутника, проведеною з вершини цього кута.

24.28.• Побудуйте трикутник за стороною, медіаною, проведеною до однієї з двох інших сторін, і кутом між даною стороною та медіаною.

24.29.• Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї гострим кутом і висотою, проведеною до даної сторони.

24.30.• Побудуйте трикутник за двома сторонами та висотою, проведеною до однієї із цих сторін. Скільки розв'язків може мати задача?

24.31.• Побудуйте трикутник за стороною та медіаною та висотою, проведеними з одного й того самого кінця даної сторони. Скільки розв'язків може мати задача?

24.32.• Побудуйте трикутник за стороною та проведеними до цієї сторони висотою та медіаною.

24.33.• Побудуйте трикутник за висотою та двома кутами, які ця висота утворює зі сторонами трикутника, що мають з висотою спільну вершину. Скільки розв'язків може мати задача?

24.34.• Побудуйте трикутник за двома сторонами та висотою, проведеною до третьої сторони. Скільки розв'язків може мати задача?

24.35.• Побудуйте трикутник за двома сторонами та кутом, протилежним до однієї із цих сторін. Скільки розв'язків може мати задача?

24.36.• Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим кутом і медіаною, проведеною до даної сторони. Скільки розв'язків може мати задача?

24.37.•• Побудуйте трикутник за кутом і висотами, проведеними з вершин двох інших кутів.

24.38.•• Побудуйте трикутник за двома висотами та кутом, з вершини якого проведено одну з даних висот. Скільки розв'язків може мати задача?

24.39.•• Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і радіусом вписаного кола.

24.40.•• Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і радіусом вписаного кола.

24.41.•• Побудуйте трикутник за радіусом вписаного кола та відрізками, на які точка дотику вписаного кола ділить одну зі сторін.

24.42.•• Побудуйте трикутник, якщо дано три точки, у яких вписане коло дотикається до його сторін.

24.43.•• За точками O_A, O_B, O_C, які є центрами зовнівписаних кіл трикутника ABC, відновіть трикутник ABC.

24.44.•• За точками O_A, O_B, O, де точка O — центр вписаного кола трикутника ABC, відновіть трикутник ABC.

25. Метод геометричних місць точок у задачах на побудову

Відомо, що коли змішати синій та жовтий кольори, то отримаємо зелений.

Нехай на площині треба знайти точки, що мають якісь дві властивості одночасно. Якщо точки, які мають першу властивість, зафарбувати синім кольором, а точки, які мають другу властивість, — жовтим, то зрозуміло, що зелені точки матимуть одразу дві властивості. У цьому й полягає ідея методу ГМТ. Розв'яжемо за допомогою цього методу кілька задач.

Задача 1. Побудуйте трикутник за трьома даними його сторонами.

Розв'язання. Нехай дано три відрізки, довжини яких дорівнюють a, b, c (рис. 25.1). Треба побудувати трикутник ABC, у якому $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Проведемо довільну пряму. За допомогою циркуля відкладемо на ній відрізок BC, який дорівнює a (рис. 25.2). Задача звелася до побудови третьої вершини трикутника, точки A.

Скористаємося тим, що точка A має одразу дві властивості:

1) належить геометричному місцю точок, віддалених від точки B на відстань c, тобто колу радіуса c із центром у точці B (на рисунку 25.2 це «жовте коло»);

2) належить геометричному місцю точок, віддалених від точки C на відстань b, тобто колу радіуса b із центром у точці C (на рисунку 25.2 це «синє коло»).

За точку A можна взяти будь-яку з двох «зелених точок», що утворилися.

Отриманий трикутник ABC є шуканим, оскільки в ньому $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. ◄

З описаної побудови випливає, що *коли кожний із трьох даних відрізків менший від суми двох інших, то ці відрізки можуть слугувати сторонами трикутника.*

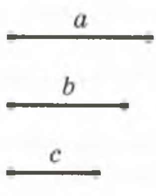


Рис. 25.1

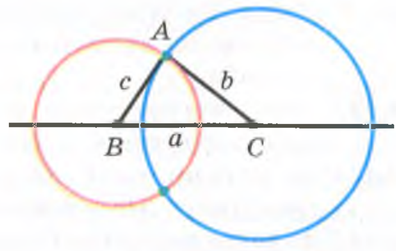


Рис. 25.2

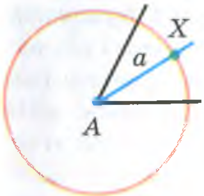


Рис. 25.3

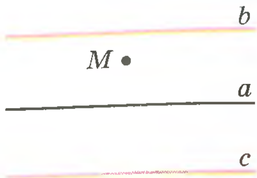


Рис. 25.4

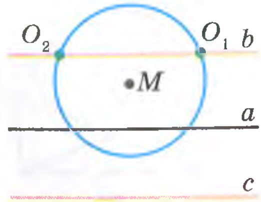


Рис. 25.5

Задача 2. Побудуйте фігуру, усі точки якої належать даному куту, рівновіддалені від його сторін і знаходяться на заданій відстані a від його вершини.

Розв'язання. Шукані точки належать одразу двом геометричним місцям точок: бісектрисі даного кута та колу із центром у вершині кута й радіусом, який дорівнює a.

Побудуємо бісектрису кута й указане коло (рис. 25.3). Їхнім перетином є шукана точка X. ◀

Задача 3. Побудуйте центр кола даного радіуса R, яке проходить через дану точку M і дотикається до даної прямої a.

Розв'язання. Оскільки коло дотикається до прямої a, то його центр знаходиться на відстані R від цієї прямої. Геометричним місцем точок, віддалених від даної прямої на дану відстань, є дві паралельні прямі (див. задачу 20.23). Отже, центр кола розміщений на прямій b або на прямій c (рис. 25.4).

Геометричним місцем точок, які є центрами кіл радіуса R, що проходять через точку M, є коло радіуса R із центром у точці M. Тому за центр шуканого кола можна взяти будь-яку з точок перетину кола з однією із прямих b або c залежно від того, у якій півплощині лежить точка M відносно прямої a (на рисунку 25.5 це точки O_1 і O_2).

Побудову для випадку, коли дана точка належить даній прямій, розгляньте самостійно. ◀

У задачі 3 ми розглянули ситуацію, коли задача має два розв'язки. Подумайте, скільки розв'язків може мати задача залежно від взаємного розміщення точки M і прямої a, а також значення величини R.

Задача 4. Побудуйте трикутник за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, і радіусом описаного кола.

Розв'язання. Побудуємо коло даного радіуса й проведемо хорду AB, яка дорівнює стороні шуканого трикутника. Тоді кінці хорди є двома вершинами шуканого трикутника. Зрозуміло,

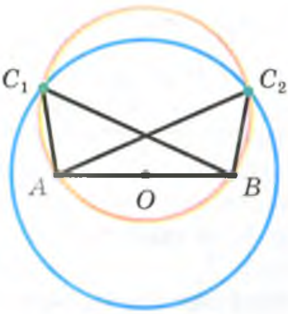


Рис. 25.6

що третя вершина належить одночасно побудованому колу («жовте коло») та колу із центром у точці O, яка є серединою хорди AB, і радіусом, який дорівнює даній медіані («синє коло»). Кожний із трикутників ABC_1 і ABC_2 (рис. 25.6) є шуканим. ◄

Побудова трикутника за трьома сторонами (задача 1), а також умови, за яких три даних відрізки можуть слугувати сторонами трикутника, допомагають дослідити можливості взаємного розміщення двох кіл.

Розглянемо кола із центрами O_1 і O_2 та радіусами R і r ($R > r$) відповідно. Нехай відстань між центрами цих кіл, тобто довжина відрізка O_1O_2, дорівнює d.

1) Якщо $d > R + r$, то відрізки, довжини яких дорівнюють d, R і r, не можуть слугувати сторонами трикутника. Тому дані кола не мають спільних точок і розміщені так, як показано на рисунку 25.7.

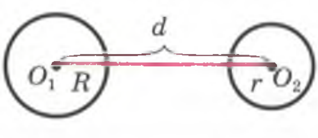
2) Якщо $d = R + r$, то на відрізку O_1O_2 існує така точка M, що $O_1M = R$ і $MO_2 = r$. Тоді дані кола мають тільки одну спільну точку M (рис. 25.8). У цьому разі говорять, що **кола мають зовнішній дотик.**

3) Якщо $R - r < d < R + r$, то можна побудувати трикутник, сторони якого дорівнюють d, R і r. Це означає, що дані кола мають дві спільні точки (рис. 25.9).

4) Якщо $d = R - r$, то $R = d + r$. У цьому випадку на продовженні відрізка O_1O_2 за точку O_2 існує така точка M, що $O_1O_2 = d$ і $O_2M = r$. Тоді дані кола мають тільки одну спільну точку M (рис. 25.10). У цьому разі говорять, що **кола мають внутрішній дотик.**

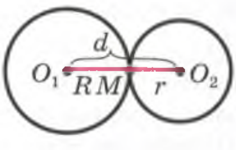
5) Якщо $d < R - r$, то $R > d + r$. У цьому випадку на продовженні відрізка O_1O_2 за точку O_2 існує така точка M, що $O_1M = R$ і $O_2M > r$. Тоді дані кола не мають спільних точок і коло меншого радіуса розміщене всередині кола більшого радіуса (рис. 25.11).

6) Якщо $d = 0$, то центри кіл збігаються (рис. 25.12). Такі кола називають **концентричними.**



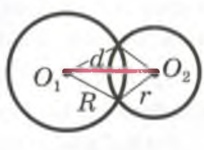
$d > R + r$

Рис. 25.7



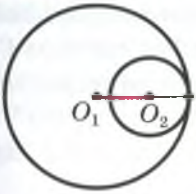
$d = R + r$

Рис. 25.8



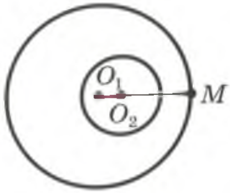
$R - r < d < R + r$

Рис. 25.9



$d = R - r$

Рис. 25.10



$d < R - r$

Рис. 25.11

$d = 0$

Рис. 25.12

ВПРАВИ

25.1.° Дано пряму m і точки A та B поза нею (рис. 25.13). Побудуйте на прямій m точку, рівновіддалену від точок A і B.

25.2.° Точки A і B належать прямій m. Побудуйте точку, віддалену від прямої m на відстань a та рівновіддалену від точок A і B. Скільки розв'язків може мати задача?

25.3.° Точки B і C належать різним сторонам кута A, причому $AB \neq AC$. Побудуйте точку M, яка належить куту, рівновіддалена від його сторін і така, що $MB = MC$.

25.4.° Точки B і C належать різним сторонам кута A. Побудуйте точку D, яка належить куту, рівновіддалена від його сторін і така, що $DC = BC$. Скільки розв'язків може мати задача?

25.5.° Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою та бічною стороною.

25.6.• Для даного кола побудуйте точку, яка є його центром.

25.7.• Побудуйте коло даного радіуса, центр якого належить даній прямій, так, щоб це коло проходило через дану точку.

25.8.• Побудуйте коло даного радіуса, яке проходить через дві дані точки.

25.9.• Знайдіть усі точки, які належать даному колу та рівновіддалені від кінців даного відрізка. Скільки розв'язків може мати задача?

25.10.• Дано дві прямі m і n, які перетинаються, і відрізок AB. Побудуйте на прямій m точку, яка віддалена від прямої n на відстань AB. Скільки розв'язків має задача?

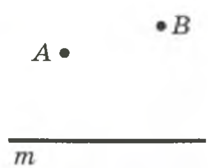


Рис. 25.13

25.11.• У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$. На катеті AC побудуйте точку D, яка віддалена від прямої AB на відстань CD.

25.12.• Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою та радіусом описаного кола. Скільки розв'язків може мати задача?

25.13.• Побудуйте трикутник за двома сторонами та медіаною, проведеною до однієї з даних сторін.

25.14.• Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною та медіаною, проведеною до бічної сторони.

25.15.•• На даному колі побудуйте точку, яка знаходиться на даній відстані від даної прямої. Скільки розв'язків може мати задача?

25.16.•• На даному колі побудуйте точку, яка рівновіддалена від двох даних прямих, що перетинаються. Скільки розв'язків може мати задача?

25.17.•• Між двома паралельними прямими дано точку. Побудуйте коло, яке проходить через цю точку й дотикається до даних прямих. Скільки розв'язків має задача?

25.18.•• Побудуйте коло, яке проходить через дану точку A та дотикається до даної прямої m у даній точці B.

25.19.•• Дано дві паралельні прямі та січну. Побудуйте коло, яке дотикається до цих трьох прямих.

25.20.•• Побудуйте трикутник за двома сторонами та радіусом описаного кола. Скільки розв'язків може мати задача?

25.21.•• Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, і радіусом описаного кола. Скільки розв'язків може мати задача?

25.22.•• Побудуйте рівносторонній трикутник за радіусом описаного кола.

25.23.* Три прямі попарно перетинаються та не проходять через одну точку. Побудуйте точку, рівновіддалену від усіх трьох прямих. Скільки розв'язків має задача?

25.24.* Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і сумою гіпотенузи та другого катета.

25.25.* Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою та сумою катетів.

25.26.* Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою та різницею катетів.

25.27.* Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і різницею гіпотенузи та другого катета.

25.28.* Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою та різницею бічної сторони та висоти, опущеної на основу.

25.29.* Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і сумою двох інших сторін.

25.30.* Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і різницею двох інших сторін.

25.31.* Побудуйте трикутник за стороною, протилежним до неї кутом і різницею двох інших сторін.

25.32.* Побудуйте трикутник за стороною, протилежним до неї кутом і сумою двох інших сторін.

25.33.* Побудуйте трикутник за стороною, різницею кутів, прилеглих до цієї сторони, і сумою двох інших сторін.

25.34.* Побудуйте трикутник за периметром і двома кутами.

25.35.* Побудуйте гострокутний трикутник за периметром, одним із кутів і висотою, проведеною з вершини іншого кута.

25.36.* Побудуйте трикутник за висотою та медіаною, проведеними з однієї вершини, та радіусом описаного кола.

25.37.* Побудуйте трикутник за двома сторонами та медіаною, проведеною до третьої сторони.

25.38.* Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, і медіаною, проведеною до однієї з двох інших сторін.

З ІСТОРІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПОБУДОВ

Уміння досягати результату, використовуючи мінімальні засоби, завжди вважалося ознакою найвищої майстерності. Мабуть, тому в Стародавній Греції значною мірою було розвинене мистецтво виконувати геометричні побудови за допомогою лише двох інструментів: дощечки з рівним краєм (лінійки) і двох загострених паличок, зв'язаних на одному кінці (циркуля). Таке обмеження у виборі інструментів історики пов'язують з давньогрецькою традицією, за якою пряму та коло вважали найгармонічнішими фігурами. Так, у своїй книзі «Начала» видатний учений Евклід описував побудови геометричних фігур, які було виконано лише циркулем і лінійкою.

Існує багато задач на побудову. З деякими з них ви вже ознайомилися. Проте є три задачі на побудову, які відіграли особливу роль у розвитку математики. Ці задачі стали знаменитими.

Задача про квадратуру круга. Побудувати квадрат, площа якого дорівнює площі даного круга.

Задача про трисекцію кута (від латинських *tria* — «три» і *section* — «розрізання»). Поділити кут на три рівні частини.

Задача про подвоєння куба. Побудувати куб, об'єм якого у 2 рази більший за об'єм даного куба.

Ці задачі непокоїли людей протягом тисячоліть. Їх намагалися розв'язати й такі видатні вчені стародавніх часів, як Гіппократ Хіоський, Евдокс Кнідський, Евклід, Ератосфен, Аполлоній Пергський, Герон, Папп, Платон, Архімед, і генії Нового часу — Рене Декарт, Франсуа Вієт, Ісак Ньютон. І лише в середині XIX ст. було доведено, що їх розв'язати неможливо, тобто неможливо виконати зазначені побудови з використанням лише циркуля та лінійки. Цей результат був отриманий засобами не геометрії, а алгебри, завдяки перекладу цих задач мовою рівнянь.

Коли ви розв'язували задачі на побудову, особливо ті, що позначені зірочкою, ви, мабуть, зазнали ускладнень, пов'язаних з обмеженістю арсеналу інструментів. Тому пропозиція ще більше звузити можливості застосовуваних приладів може здатися щонайменше несподіваною. Проте ще в X ст. перський математик Мохаммед Абу-ль-Вефа описав розв'язання низки задач на побудову за допомогою лінійки та циркуля, розхил якого не можна змінювати. Зовсім дивовижною є теорема, опублікована в 1797 р. італійським математиком Лоренцо Маскероні (1750–1800): *будь-яку побудову, що виконується циркулем і лінійкою, можна виконати одним лише циркулем.* При цьому Маскероні обумовив таке: оскільки самим лише циркулем провести пряму неможливо, то пряму вважають побудованою, якщо побудовано які-небудь дві її точки.

У XX ст. було знайдено книгу датського вченого Георга Мора (1640–1697), у якій він також описував побудови одним лише циркулем. Тому сформульовану вище теорему називають теоремою Мора—Маскероні.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 4

Геометричне місце точок (ГМТ)

Геометричним місцем точок (ГМТ) називають множину всіх точок, які мають певну властивість.

Серединний перпендикуляр відрізка як ГМТ

Серединний перпендикуляр відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

Бісектриса кута як ГМТ

Бісектриса кута є геометричним місцем точок, які належать куту й рівновіддалені від його сторін.

Коло

Колом називають геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки.

Круг

Кругом називають геометричне місце точок, відстань від яких до заданої точки не більша за дане додатне число.

Хорда кола

Відрізок, який сполучає дві точки кола, називають хордою кола.

Діаметр кола

Хорду, яка проходить через центр кола, називають діаметром.

Властивості кола

Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл.

Діаметр кола, який ділить хорду, відмінну від діаметра, навпіл, перпендикулярний до цієї хорди.

Дотична до кола

Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку, називають дотичною до кола.

Властивість дотичної

Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

Ознака дотичної до кола

Якщо пряма, яка проходить через точку кола, перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то ця пряма є дотичною до даного кола.

Якщо відстань від центра кола до деякої прямої дорівнює радіусу кола, то ця пряма є дотичною до даного кола.

Властивість дотичних, проведених до кола через одну точку

Коли через дану точку до кола проведено дві дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.

Коло, описане навколо трикутника

Коло називають описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.

Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

Центр кола, описаного навколо трикутника

Центр кола, описаного навколо трикутника, — це точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника.

Коло, вписане в трикутник

Коло називають вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

У будь-який трикутник можна вписати коло.

Центр кола, вписаного в трикутник

Центр кола, вписаного в трикутник, — це точка перетину бісектрис трикутника.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

1.14. 1 точка, або 4 точки, або 6 точок. **1.15.** Найменша можлива кількість точок перетину — 1, найбільша — 10. **1.16.** Див. рис. **1.17.** 12 точок. **1.18.** Див. рис.

Рис. до задачі 1.16

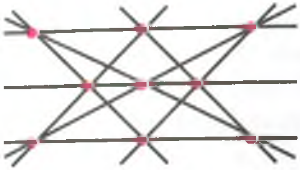


Рис. до задачі 1.18

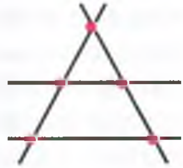


Рис. до задачі 1.19

1.19. 4. *Вказівка.* На рисунку проведено 4 прямі та позначено 5 точок, що відповідають умові задачі. Покажіть, що $n = 3$ не задовольняє умову задачі. **2.20.** 8 см або 56 см. **2.22.** 1) Усі точки відрізка EF; 2) точки A і B (див. рис.); 3) таких точок не існує. **2.23.** Таких точок дві. Одна з них є такою внутрішньою точкою C відрізка AB, що $AC : BC = 1 : 2$, а друга — така, що точка A — середина відрізка BC. **2.24.** 4 см. **2.25.** 30 см. **2.26.** 22 см. **2.27.** Так. **2.28.** Так. **2.29.** Дві точки прямої AB, віддалені від точки A на 1 см. **2.30.** Усі точки відрізка BC. **2.31.** а) 4 точки; б) 3 точки; в) 4 точки; г) 3 точки. **2.34.** *Вказівка.* Скористайтеся рівністю: 1) $13-2\cdot5=3$; 2) $3\cdot5-13=2$; 3) $2\cdot13-5\cdot5=1$. **2.35.** *Вказівка.* Скористайтеся рівністю: 1) $2\cdot11-2\cdot7=8$; 2) $3\cdot11-4\cdot7=5$. **3.22.** 60°. **3.23.** 108°. **3.26.** 68°. **3.27.** 153°. **3.28.** 1) 6°; 2) 0,5°. **3.30.** 50° або 110°. **3.31.** 77° або 163°. **3.35.** 45°. *Вказівка.* Скористайтеся ключовою задачею 3.33. **3.36.** 45°, або 75°, або 125°. **3.37.** 30°, або 50°, або 90°. **3.41.** *Вказівка.* Відкладіть від довільного променя даний кут послідовно 14 разів. Скористайтеся тим, що утворений таким чином кут на 2° більший за розгорнутий кут. **3.42.** 36° або 45°. *Вказівка.* Розгляньте два випадки: коли сума кутів AOB, BOC і COD менша від 360° і більша за 360°. **3.43.** 1) *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $19°\cdot19=361°$. **3.44.** Так. *Вказівка.* Припустіть, що такого кута немає, та отримайте суперечність. **3.45.** 65°, 10°, 15°. *Вказівка.* Доведіть, що наменший кут не може мати спільну сторону

Рис. до задачі 2.22

з прямим кутом. **4.20.** 90°. **4.21.** 180°. **4.22.** 75°. **4.23.** 108°, 72°. **4.24.** 136°, 44°. **4.28.** 1) Ні; 2) ні. **5.12.** 1) 124°; 2) 98°. **5.13.** 126°. **5.18.** 70°, 160°. **5.19.** Якщо прямі a і b перпендикулярні. **5.20.** Існує. **5.21.** 1) *Вказівка.* $90° = 17° \cdot 5 + 5°$. **5.23.** Так. *Вказівка.* $90° = 270° - 180°$. **5.24.** *Вказівка.* Основи перпендикулярів, опущених з довільної точки X кута MON на прямі OA та OB, належать променям, доповняльним до променів OA та OB. **7.18.** 48 см. **7.19.** 13 см. **8.34.** 3 см. **8.35.** 10 см. **8.37.** 2) *Вказівка.* Доведіть, що $\angle AOM = \angle BOK$. Кут AOB розгорнутий. Тоді $\angle AOM + \angle MOB = 180°$. Звідси $\angle MOB + \angle BOK = 180°$. **8.41.** *Вказівка.* Продовжте медіану за точку, яка належить стороні трикутника, на відрізок, що дорівнює медіані. **8.42.** Ні. *Вказівка.* Розглянемо гострий кут M. На одній зі сторін кута позначимо точки B і C та проведемо серединний перпендикуляр відрізка BC. Нехай A — точка перетину цього перпендикуляра з другою стороною кута. Розгляньте трикутники AMC і AMB. **8.43.** Ні. **8.44.** *Вказівка.* Позначте точку M так, як показано на рисунку. **8.45.** *Вказівка.* На промені BM позначте точку D так, щоби $BM = MD$. Доведіть, що трикутники BCN і DBC рівні. **8.46.** *Вказівка.* На промені KM позначте таку точку N, що $KM = MN$. Доведіть рівність трикутників BNE і AKC. **8.48.** *Вказівка.* Проведіть бісектрису кута BOC. **9.20.** Не випливає. **9.30.** 4 см або 7 см. **9.31.** 4 см і 6 см або 5 см і 5 см. **9.33.** *Вказівка.* Нехай точка O — середина відрізків AB і CD. Тоді пряма EO — серединний перпендикуляр відрізка CD. **9.38.** 26 см або 14 см. **9.40.** *Вказівка.* Доведіть, що трикутники ABM і CBN рівні. **9.42.** 50° або 130°. *Вказівка.* Розгляньте три випадки: точки M і N лежать у різних півплощинах відносно прямої AB; точка N належить трикутнику AMB; точка M належить трикутнику ANB. **9.43.** 16 см або 4 см. **9.44.** *Вказівка.* Позначте на стороні AC точку M так, щоб $AB = AM$. **9.46.** *Вказівка.* Нехай точка E — середина відрізка MC. Доведіть рівність трикутників AKM і DEM. **9.47.** *Вказівка.* Доведіть, що трикутники BAK і BLC рівні. **9.48.** 10 см. *Вказівка.* Доведіть, що трикутники ABK і CED рівні. **9.49.** *Вказівка.* На промені BM відкладіть відрізок MK, який дорівнює відрізку BM. Скористайтеся тим, що $\angle MBC = \angle MKA$ і $\angle MCB = \angle MAK$. **9.50.** *Вказівка.* На стороні AB позначте точку E так, що $AK = AE$.

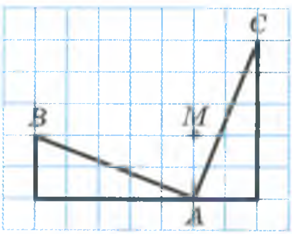


Рис. до задачі 8.44

Доведіть, що трикутники ACK і ALE рівні. **10.13.** *Вказівка.* Скориставшися тим, що коли бісектриса трикутника є його висотою, то трикутник рівнобедрений, доведіть, що трикутники MAD і KBD рівнобедрені. **10.15.** *Вказівка.* Доведіть, що трикутники ABK і BAM рівні. **10.17.** Не можуть. **10.18.** 8 см. **10.19.** 9 см. **10.20.** 2 см. *Вказівка.* Доведіть, що трикутники KMC і KDA рівнобедрені. **10.21.** $AB : AC = 1 : 2$. **10.23.** 10 см. *Вказівка.* Доведіть, що відрізок KH — бісектриса трикутника BKC. **10.24.** *Вказівка.* Трикутники ACG і BEF (див. рис.) є рівними за стороною та двома прилеглими кутами. Отже, $\angle AGC = \angle BFE$ і $AG = BF$. **10.25.** 2 см, 3 см, 4 см. *Вказівка.* Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC (див. рис.), відрізок CE — його медіана, $BD \perp CE$. Доведіть, що трикутник CBE рівнобедрений ($BC = BE$). Тоді $AB = 2BC$ і можуть мати місце такі випадки: $AB - BC = 1$ см або $AB - BC = 2$ см, тобто $BC = 1$ см або $BC = 2$ см.

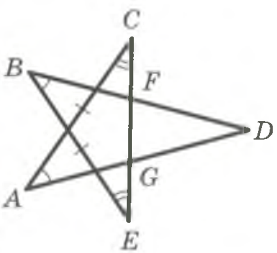


Рис. до задачі 10.24

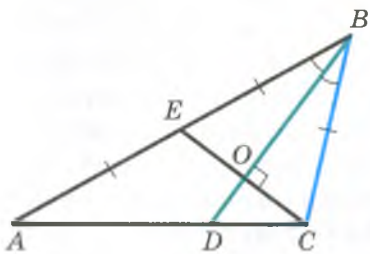


Рис. до задачі 10.25

10.26. *Вказівка.* Нехай D і E — точки перетину прямих BK і BM з прямою AC відповідно. Доведіть, що трикутники DCB і EAB рівні. **10.27.** *Вказівка.* На промені BD позначте точку M так, щоби $BD = DM$. Доведіть, що трикутник MAE рівнобедрений. **10.29.** *Вказівка.* На промені BM позначте точку D так, щоби $BM = MD$. Скористайтеся тим, що $\angle MBC = \angle MDA$ і $\angle MCB = \angle MAD$. **10.30.** *Вказівка.* Доведіть, що трикутники ADB і DFC рівні. **10.31.** *Вказівка.* Доведіть, що трикутники AOB і OMC рівні. Далі доведіть, що трикутник OBM рівнобедрений. **10.32.** *Вказівка.* Доведіть, що трикутники AFC і DBF рівні. **11.13.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте трикутники, зображені на рисунку. **11.15.** *Вказівка.* Доведіть рівність трикутників APD

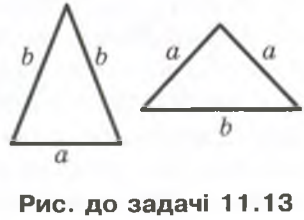


Рис. до задачі 11.13

і BPC. Далі скористайтеся ключовою задачею 8.25. **11.17.** *Вказівка.* Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — дані трикутники, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, відрізки AM і A_1M_1 — медіани трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ відповідно. На продовженнях відрізків AM і A_1M_1 за точки M і M_1 відкладіть відповідно відрізки MD і M_1D_1 такі, що $MD = AM$ і $M_1D_1 = A_1M_1$. Доведіть, що $AC = BD$ і $A_1C_1 = B_1D_1$. Далі доведіть рівність трикутників ABD і $A_1B_1D_1$, MBD і $M_1B_1D_1$ і, нарешті, ABC і $A_1B_1C_1$. **13.9.** Безліч. **13.11.** *Вказівка.* Припустимо, що прямі a і b перетинаються. Виберемо довільну точку, яка належить прямій a, відмінну від точки перетину a і b. Через вибрану точку можна провести пряму, яка перетинає пряму a і паралельна прямій b, що суперечить умові. **13.12.** *Вказівка.* Нехай пряма b не перпендикулярна до прямої c. Тоді через довільну точку M прямої b проведемо пряму b_1 перпендикулярно до прямої c. За теоремою 13.1 маємо, що $a \parallel b_1$. Отримали, що через точку M проходять дві прямі, паралельні прямій a. **13.13.** *Вказівка.* Скористайтеся результатом задачі 13.12. **13.14.** *Вказівка.* Проведіть бісектрису кута B. **13.17.** *Вказівка.* Продовжте відрізки AB і CD до перетину. **14.18.** Ні. **14.21.** *Вказівка.* Доведіть, що трикутник BKM рівнобедрений. **14.22.** *Вказівка.* Доведіть, що $BF \parallel AC$ і $BD \parallel AC$, та скористайтеся аксіомою паралельності прямих. **14.23.** *Вказівка.* Доведіть, що $\angle BAP = \angle BQP$. **14.24.** *Вказівка.* Проведіть промінь CM так, що $\angle BCM = 30°$ і $\angle MCD = 40°$. **14.26.** *Вказівка.* Доведіть, що $MO \parallel AC$ і $ON \parallel AC$. **15.16.** 40°. **15.20.** 40°, 70°, 70°. **15.21.** 121°. **15.28.** *Вказівка.* Проведіть через точку C пряму, яка паралельна AB. **15.31.** *Вказівка.* Доведіть, що трикутники AMO і CKO рівнобедрені. **15.33.** *Вказівка.* На стороні AB позначте точку K так, що $KD \parallel AC$. Доведіть, що трикутники KBD і DAC рівні. **15.34.** *Вказівка.* На стороні AB позначте точку N так, що $ND \parallel AC$. Доведіть, що трикутники NDM і CKD рівні. **15.35.** *Вказівка.* На стороні AB позначте точку K так, щоб $MK \parallel BC$. Доведіть, що трикутники BMK і MNC рівні. **15.37.** *Вказівка.* На відрізку CE позначте точку F так, що $DF \parallel AB$. Доведіть, що трикутники DBC і DEF рівні. **15.38.** *Вказівка.* На відрізку AC позначте точку F так, що $NF \parallel AB$. Нехай D — точка перетину прямих AB і NK. Доведіть, що $NF = AD = AM$. Далі доведіть, що трикутник DMN рівнобедрений. **15.39.** 10 см. *Вказівка.* На промені ED позначте точку F так, що $ED = DF$. Доведіть, що трикутник AEF рівнобедрений. **16.28.** 140°. **16.34.** 25°,

55°, 100°. **16.37.** 35°, 35°, 110°. **16.40.** *Вказівка.* Знайдіть кути трикутника ABC і доведіть, що трикутники AMB і MAC рівнобедрені. **16.41.** 36°, 72°, 72°. **16.42.** *Вказівка.* Застосуйте метод доведення від супротивного. **16.44.** Гострокутний. *Вказівка.* Розгляньте по черзі кожний кут трикутника. Оскільки сума двох інших кутів більша за 90°, то розглядуваний кут менший від 90°. Оскільки всі кути виявляться меншими від 90°, то трикутник гострокутний. **16.45.** Ні. **16.48.** 90°. **16.49.** 130°. **16.50.** 50°. **16.51.** 90°. **16.52.** 90°. **16.53.** 36°, 72°, 72° або 90°, 45°, 45°. **16.54.** $90°-\frac{\alpha}{2}$.
16.55. $\left(\frac{540}{7}\right)^\circ$, $\left(\frac{540}{7}\right)^\circ$, $\left(\frac{180}{7}\right)^\circ$. **16.57.** 720°. **16.61.** 60°. *Вказівка.* Доведіть, що трикутники ANQ і BPM рівні, і покажіть, що $\angle PMB + \angle QNA = 120°$. **16.62.** 55°. *Вказівка.* Доведіть, що трикутники PAF і ECQ рівні. **16.65.** *Вказівка.* На промені AD позначте точки M і N так, що $AM = AB$ і $AN = AC$. Доведіть, що трикутники BMD, DNC і ABC рівні. **16.66.** *Вказівка.* На стороні BC позначте точку K так, що $BK = CD$. **16.68.** 15°. *Вказівка.* На продовженні сторони AB за точку A позначте точку K так, щоб $AK = AC$. Скористайтеся тим, що трикутники AKC і KCB є рівнобедреними. **16.70.** 60°. *Вказівка.* На продовженні відрізка CD за точку D позначте точку K таку, що $DK = DC$. **16.71.** *Вказівка.* На продовженнях сторін AC і A_1C_1 за точки A і A_1 позначте відповідно точки K і K_1 так, що $AK = AB$ і $A_1K_1 = A_1B_1$. Скористайтеся рівністю трикутників KBC і $K_1B_1C_1$. **16.74.** 135°. *Вказівка.* Позначимо точку $A(1; -2)$ (див. рис.). Трикутники OBA та ADM рівні за першою ознакою рівності трикутників. Тоді $\angle AOB + \angle DAM = 90°$. Доведіть, що трикутник OAM рівнобедрений і прямокутний. **16.75.** 120°. *Вказівка.* Трикутники AKB і BMP (див. рис.) рівні за першою ознакою рівності трикутників.

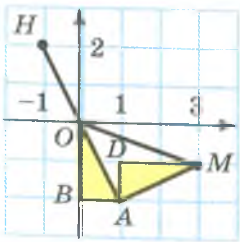


Рис. до задачі 16.74

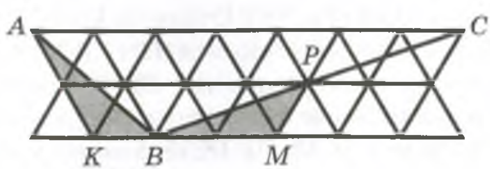


Рис. до задачі 16.75

16.76. *Вказівка.* Будь-який відрізок, який міститься в рівносторонньому трикутнику, менший від його сторони. Дві вершини першого трикутника належать одному з двох трикутників, які його покривають. А отже, сторона цього трикутника більша або дорівнює стороні першого. Таким чином, цього трикутника буде достатньо для покриття першого трикутника. **16.77.** 70°. *Вказівка.* Побудуйте рівносторонній трикутник AMC так, щоб точка M належала трикутнику ABC, і доведіть, що $\Delta AMB = \Delta CDB$. **17.10.** *Вказівка.* У трикутнику DAC кут DAC тупий. Отже, $DC > AC$. **17.14.** 20 см. **17.15.** 8 см. **17.16.** $AB > AC$. **17.17.** $\angle BAD > \angle CAD$. **17.21.** *Вказівка.* Візьміть на прямій m довільну точку X і порівняйте суму $AX + BX$ із довжиною відрізка AB. **17.22.** 3 см. **17.23.** 6 см. **17.24.** 9 см. **17.25.** 9 см. **17.28.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\angle KAD < \angle BCD$. **17.29.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що в даному трикутнику проти кута, величина якого дорівнює 60°, не може лежати найбільша сторона. **17.30.** *Вказівка.* Проведіть медіану CM трикутника ABC. **17.31.** *Вказівка.* Продовжте відрізок KE до перетину з прямою AC. **17.32.** *Вказівка.* Нехай пряма AK перетинає пряму CB в точці M. Скористайтеся тим, що $CK + KM > CM$. **17.33.** *Вказівка.* На стороні AB позначте точку M таку, що $KM \parallel AC$. Скористайтеся тим, що $KM = MA = KC$. **17.34.** *Вказівка.* На продовженні медіани AM за точку M відкладіть відрізок MD, який дорівнює цій медіані, та розгляньте трикутник ABD. **17.37.** *Вказівка.* Доведіть, що $BD > AD$. **17.38.** *Вказівка.* На стороні BC позначте точку M так, що $\angle MAC = \angle MCA$. **17.39.** *Вказівка.* Доведіть, що $AD > AC$. Тоді $AD + DC > AC + CD$. **17.40.** *Вказівка.* Побудуйте трикутники ABM і CBN, які дорівнюють трикутнику ABC. Скористайтеся тим, що трикутник MBN рівносторонній. **17.41.** *Вказівка.* На основі AC позначте точку K так, що $CK = CE$. На промені BC позначте точку T так, що $BC = CT$. Скористайтеся тим, що $BE + ET > BT$. **18.25.** *Вказівка.* Доведіть рівність трикутників AKH і CMH. **18.26.** *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta MEN = \Delta NFM$. Звідси випливає, що $MK = NK$. Крім того, $KE = FM = NE$. Отже, $MK = MN$. **18.27.** 45°. *Вказівка.* Доведіть, що трикутники AHD і BCD рівні. **18.29.** 45°. *Вказівка.* Доведіть, що трикутники CMP і CNQ рівнобедрені. **18.30.** 45°. *Вказівка.* Проведіть висоту CD. Доведіть, що трикутники CMK і CDK рівні. **18.31.** Ні. **18.33.** *Вказівка.* Проведіть висоту CH трикутника ABC. Доведіть, що промені CD і CE — бісектриси відповідно кутів MCH і HCF, а далі скористайтеся теоремою 18.2. **18.34.** *Вказівка.* Проведіть висоту CH трикутника ABC. **18.35.** *Вказівка.*

Із точки M опустіть перпендикуляр MD на катет BC. Доведіть, що трикутники NMD і KNC рівні. **18.36.** *Вказівка.* Розглянемо прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ ($\angle C = \angle C_1 = 90°$), у яких $\angle B = \angle B_1$ і $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$. На променях CB і C_1B_1 відповідно позначимо точки D і D_1 так, що $BD = AB$ і $B_1D_1 = A_1B_1$. Доведіть, що трикутники ACD і $A_1C_1D_1$ рівні. **19.11.** 30°, 1 см. **19.12.** 9 см. **19.13.** 15 см. **19.14.** Існує. **19.15.** Існує. **19.19.** 60°, 30°. **19.20.** 8 см. **19.21.** 6 см. *Вказівка.* Доведіть, що трикутник ADB рівнобедрений. **19.22.** *Вказівка.* Проведіть висоту трикутника, яка йому належить. Далі скористайтеся ключовою задачею 3 п. 19. **19.23.** *Вказівка.* Трикутник AA_1B_1 прямокутний, тому в силу ключової задачі 3 п. 19 отримуємо, що $A_1C_1 = \frac{1}{2}AB$. Тоді $B_1C_1 = \frac{1}{2}AB$. Тоді в силу ключової задачі 4 п. 19 отримуємо, що $\angle AA_1B = 90°$. Таким чином, бісектриса BB_1 є висотою, а отже, і медіаною трикутника ABC. **19.24.** 120°. *Вказівка.* Проведіть медіану BE трикутника ABM. **19.25.** 90°, 40°, 50°. *Вказівка.* Розгляньте трикутник DAK, де точка K — середина AB. **19.26.** 1 см. *Вказівка.* Проведіть медіану DM трикутника ADC. Доведіть, що $DM \parallel BC$. **19.28.** *Вказівка.* Розгляньте відрізки FM і EM, а також відрізки FN і EN як медіани відповідних прямокутних трикутників. **19.29.** 3 см або 6 см. *Вказівка.* Позначте точку M — середину відрізка AB. Розгляньте два випадки: точки C і D лежать в одній півплощині відносно прямої AB і в різних півплощинах. **19.30.** *Вказівка.* Проведіть з вершини прямого кута медіану даного прямокутного трикутника. **19.32.** 4 см. *Вказівка.* Проведіть висоту CD трикутника ABC. **19.33.** 10 см. *Вказівка.* Нехай точка M — середина відрізка AC. Доведіть, що трикутник BMD рівносторонній. **19.34.** *Вказівка.* Нехай прямі AB і DC перетинаються в точці E. Тоді $\angle AED = 90°$. Скористайтеся тим, що $MN \geqslant EN - EM$. **19.35.** *Вказівка.* На стороні CA позначте точку K так, що $CK = CB$. Тоді $\angle KBD = 90°$. **19.36.** *Вказівка.* Нехай M — середина відрізка BD. Тоді $BC + CD > 2CM$ (див. задачу 17.35) і $BD = 2AM$. **20.16.** 1,5 см. **20.17.** 60 см. **20.18.** Коло даного радіуса із центром у даній точці. **20.19.** Серединний перпендикуляр відрізка, який сполучає дані точки. **20.20.** Дві прямі, які складаються з бісектрис чотирьох кутів, утворених при перетині даних прямих. **20.21.** Усі точки серединного перпендикуляра даної основи, крім точки перетину цього перпендикуляра з основою. **20.22.** Пряма, що є серединним перпендикуляром відрізка, який є перпендикулярним до даних прямих і кінці якого належать даним прямим.

20.23. Пара паралельних прямих, кожна з яких віддалена від даної прямої на дану відстань. **20.24.** *Вказівка.* Шукане ГМТ складається із шести точок. **20.26.** *Вказівка.* Скористайтеся ключовою задачею 4 п. 19. **20.27.** Усі точки півплощини, якій належить точка B і межею якої є серединний перпендикуляр відрізка AB, за винятком межі цієї півплощини. **20.28.** Усі точки площини, що не належать кругу із центром A і радіусом AB. **20.29.** Шукане ГМТ виділено на рисунку червоним кольором, d — задана відстань.

Рис. до задачі 20.29

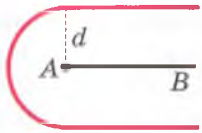


Рис. до задачі 20.30

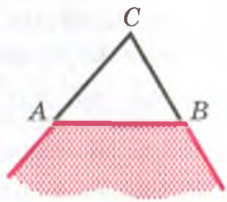


Рис. до задачі 20.32 (2)

20.30. Шукане ГМТ виділено на рисунку червоним кольором, d — задана відстань. **20.31.** Два вертикальних кути, одним з яких є кут ACB, за винятком точки C. **20.32.** 1) Кут ACB, за винятком точки C; 2) кут ACB, за винятком точок трикутника ABC, які не належать стороні AB (див. рис.). **20.33.** Дуга кола радіуса $\frac{d}{2}$ із центром у точці O, яка належить куту COD, без точок, що лежать на променях OC і OD (див. рис.). *Вказівка.* Скористайтеся ключовою задачею 3 п. 19.

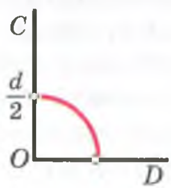


Рис. до задачі 20.33

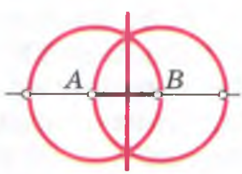


Рис. до задачі 20.34

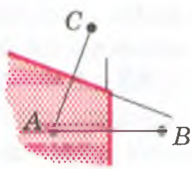


Рис. до задачі 20.36

20.34. Шукане ГМТ — це об'єднання таких фігур: серединного перпендикуляра відрізка AB і кіл із центрами A і B та радіусами завдовжки AB, за винятком точок, що належать прямій AB (див. рис.). **20.35.** Шукане ГМТ — це об'єднання центра даного кола і кола радіуса 2 см, центр якого збігається із центром даного кола.

20.36. Кут, утворений серединними перпендикулярами відрізків AB і AC, який містить точку A (див. рис.). **20.37.** Шукане ГМТ — це об'єднання точки, яка належить бісектрисі кута ABC і віддалена від його вершини на 6 см, і дуги кола радіуса 3 см із центром у точці B, яка міститься в куті MBF, де промінь BM перпендикулярний до променя BA і промінь BF перпендикулярний до променя BC (див. рис.). **20.38.** Шукане ГМТ — це об'єднання прямих AC і BD і точок квадрата, за винятком його сторін (див. рис.).

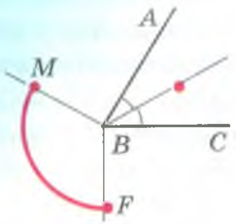


Рис. до задачі 20.37

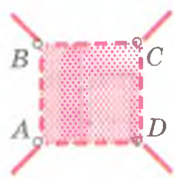


Рис. до задачі 20.38

21.15. 1) 90°; 2) 120°. **21.16.** 12 см. **21.18.** 40°. **21.19.** 120°. **21.24.** Усі точки прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даної прямої, крім даної точки. **21.25.** Усі точки бісектриси кута, за винятком вершини кута. **21.26.** Усі точки площини, за винятком даної прямої. **21.27.** 1 см. **21.28.** 60°. *Вказівка.* Опустіть перпендикуляр із центра кола на хорду CD. **21.29.** 120°. **21.30.** *Вказівка.* Опустіть із центра кола перпендикуляри на хорди AB і CD. **21.31.** *Вказівка.* Розгляньте трикутники POB і POD, де точка O — центр кола. **21.32.** 5 см. *Вказівка.* Доведіть, що центр кола і середина відрізка MN знаходяться на однаковій відстані від прямої CB. **21.34.** 3 : 1, рахуючи від точки M. *Вказівка.* Доведіть, що $\angle AOM = 60°$. **21.36.** *Вказівка.* Розглянувши трикутник OAK, доведіть, що $OK = 2AK$. **21.37.** *Вказівка.* Нехай точка F — середина хорди MB. Доведіть, що пряма NF містить діаметр кола. Далі обчисліть кут KNF. **22.19.** 24 см, 24 см, 20 см. **22.20.** 20 см, 14 см, 18 см. **22.21.** 50°, 55°, 75°. **22.22.** 45°. **22.26.** *Вказівка.* Нехай O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC (див. рис.). Тоді $\angle BAO = \angle 1$ і $\angle BCO = \angle 2$. Маємо: $\angle 1 < \angle BAC$ і $\angle 2 < \angle BCA$. Звідси $2\angle 1 + 2\angle 2 < 180°$. Тоді $\angle ABC < 90°$. Аналогічно доводимо, що два інших кути

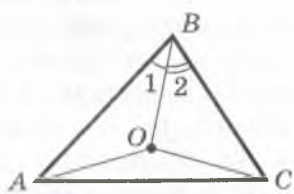


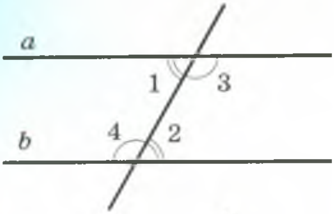
Рис. до задачі 22.26

трикутника теж гострі. **22.28.** *Вказівка.* Скористайтеся методом доведення від супротивного і за допомогою ключових задач 22.26, 22.27 отримайте суперечність. **22.29.** *Вказівка.* Скористайтеся ключовою задачею п. 22. **22.32.** *Вказівка.* Проведіть серединні перпендикуляри відрізків AC і AM. **22.33.** 72°, 72°, 36°. **22.35.** *Вказівка.* Скористайтеся властивістю дотичних, проведених до кола через одну точку. **22.36.** 11 см. *Вказівка.* Доведіть, що $MN = BM + AN$. **22.37.** *Вказівка.* Проведіть бісектрису кута A трикутника ABC. **22.38.** 0,5 см. *Вказівка.* Нехай M_1 і M_2 — точки дотику кіл, вписаних відповідно в трикутники ABD і DBC. Для відрізків DM_1 і DM_2 скористайтеся результатом задачі 22.35. **22.39.** 4 см. **22.40.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що бісектриси трикутника, зокрема трикутника AMC, перетинаються в одній точці. **22.41.** 36°, 36°, 108°. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що трикутники FAO і BOA рівнобедрені. **22.42.** *Вказівка.* Доведіть, що трикутники PCF і QCE рівні. **22.43.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що трикутники ACM і BCK рівнобедрені. **22.44.** *Вказівка.* Позначте на різних сторонах кута точки M і N. Проведіть бісектриси кутів BMN і BNM. Далі позначте на різних сторонах кута точки E та F. Проведіть бісектриси кутів BEF і BFE. **22.45.** *Вказівка.* Доведіть, що пряма AO є серединним перпендикуляром відрізка C_1B_1. **22.46.** 90°. *Вказівка.* Скористайтеся результатом задачі 22.22. **22.47.** *Вказівка.* Нехай M, N і K — точки дотику вписаного кола до сторін AB, BC і CA відповідно. Доведіть, що $A_1A_2 = AM + AK$, $B_1B_2 = BM + BN$, $C_1C_2 = CK + CN$. **22.48.** *Вказівка.* Нехай коло, вписане в трикутник AXB, дотикається до відрізка AB у точці K. У силу ключової задачі 22.35 $AK = \frac{AB + d}{2}$. Це означає, що центр вписаного кола належить прямій, яка перпендикулярна до відрізка AB і проходить через точку K. **23.3.** 70°. **23.10.** $\frac{a+b+c}{2}$. **23.12.** a. **23.13.** 18 см. **23.14.** 16 см. **23.17.** *Вказівка.* Нехай бісектриса кута B перетинає дане коло із центром O в точці M. Маємо: $OM = OC$ і $\angle OCB = 90°$. Доведіть, що промінь CM — бісектриса зовнішнього кута при вершині C трикутника ABC. **23.18.** 120°. **23.19.** *Вказівка.* Доведіть, що промінь BC — бісектриса зовнішнього кута трикутника ABD. **23.20.** 45°. *Вказівка.* Доведіть, що точка B — центр зовнівписаного кола трикутника QPD. **23.21.** 45°. *Вказівка.* Доведіть, що точка A — центр зовнівписаного кола трикутника MNC. **23.22.** 30°.

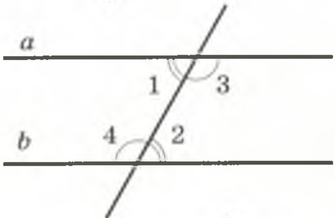
Вказівка. Доведіть, що точка A — центр зовнівписаного кола трикутника KBN. **23.23.** 45°. *Вказівка.* Проведіть коло із центром у точці D і радіусом 1 см. Це коло дотикається до прямих AB і CD. Припустимо, що воно не дотикається до PQ. Тоді проведемо дотичну до цього кола паралельно прямій PQ. Нехай P_1 і Q_1 — точки перетину цієї прямої відповідно зі сторонами AB і BC квадрата. У силу ключової задачі п. 23 периметр трикутника P_1BQ_1 дорівнює 2 см. Отримали суперечність. Отже, побудоване коло є зовнівписаним для трикутника PBQ. **23.24.** *Вказівка.* Проведіть бісектрису зовнішнього кута при вершині B трикутника ABC. Доведіть, що центр зовнівписаного кола трикутника ABD лежить на продовженні відрізка AE за точку E. **23.25.** 80°. *Вказівка.* На продовженні відрізка BM за точку M позначте точку K так, щоби $BM = MK$. Доведіть, що $BE \parallel AK$. Далі скористайтеся результатом задачі 15.18. **23.26.** 10°. *Вказівка.* Продовжте сторону CB за точку B. Доведіть, що точка E — центр зовнівписаного кола трикутника BDC. **23.27.** 45°. *Вказівка.* Доведіть, що точка E — центр зовнівписаного кола трикутника ABD. **23.28.** *Вказівка.* Нехай $\angle BAD = 2\alpha$. Покажіть, що $\angle DBE = \alpha + 45°$. Покажіть, що зовнішній кут трикутника ABC при вершині B також дорівнює $\alpha + 45°$. **23.29.** 45°. *Вказівка.* Нехай E — точка перетину серединного перпендикуляра сторони AB трикутника ABC із променем AC. Доведіть, що точка C — центр зовнівписаного кола трикутника AEB. **24.22.** *Вказівка.* Проведіть через дану точку, що лежить на стороні кута, перпендикуляр до другої сторони кута. **24.24.** 1) *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник, у якому гіпотенуза дорівнює даній бісектрисі, а гострий кут дорівнює половині даного кута. **24.26.** *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник, у якому один із катетів дорівнює половині даної основи, а другий — радіусу кола. **24.29.** *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник за катетом, який дорівнює даній висоті, і протилежним гострим кутом, що дорівнює даному. **24.31.** *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник, у якому гіпотенуза дорівнює даній стороні, а катет — даній висоті. **24.39.** *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник, один із катетів якого дорівнює різниці катета й радіуса, а другий — радіусу. Тоді кут, протилежний другому катету, дорівнює половині гострого кута шуканого трикутника. **24.42.** *Вказівка.* Побудуйте коло, що проходить через три задані точки. **24.43.** *Вказівка.* Скористайтеся результатом задачі 23.6. **25.10.** *Вказівка.* Шукана точка належить ГМТ, віддалених на відстань AB від прямої n. Указане ГМТ — пара прямих, паралельних прямій n. Кожна з точок перетину цих прямих із прямою m задовольняє умову. Задача має два розв'язки. **25.17.** *Вказівка.* Проведіть відрізок, перпендикулярний до двох даних паралельних прямих, кінці A і B якого належать цим прямим. Тоді центр шуканого кола належить двом ГМТ: першому — рівновіддалених від точок A і B і другому — віддалених від даної в умові точки на відстань $\frac{1}{2}AB$. **25.18.** *Вказівка.* Геометричним місцем центрів кіл, що дотикаються до даної прямої в даній точці B, є пряма, перпендикулярна до даної і така, що проходить через цю точку (дана точка B не належить ГМТ). Геометричним місцем центрів кіл, що проходять через точки A і B, є серединний перпендикуляр відрізка AB. **25.24.** *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник BCD, у якому катет BC дорівнює даному катету, а катет DC — сумі гіпотенузи та другого катета. Тоді вершина A шуканого трикутника ABC належить серединному перпендикуляру відрізка BD. **25.25.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ADB, у якому $\angle D = 45°$, сторона DB дорівнює сумі даних катетів, сторона AB — даній гіпотенузі. **25.26.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ADB, у якому $\angle D = 135°$, сторона DB дорівнює різниці даних катетів, сторона AB — даній гіпотенузі. **25.27.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник DBC, у якому $\angle C = 90°$, катет CB дорівнює даному катету, катет CD — різниці гіпотенузи й другого катета. Тоді шукана вершина A лежить на серединному перпендикулярі відрізка DB. **25.29.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ADC, у якому сторона AC дорівнює даній, сторона DC — сумі двох інших сторін, кут DCA — даному куту. **25.30.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ADC за даною стороною AC, даним кутом C і стороною DC, що дорівнює даній різниці сторін. Вершина B шуканого трикутника ABC лежить на серединному перпендикулярі відрізка AD. Описана побудова застосовна до випадку, коли заданий кут C прилягає до більшої з двох невідомих сторін. **25.31.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ADC, у якому $\angle D = 90° + \frac{\beta}{2}$, де β — даний кут, сторона AC дорівнює даній стороні, сторона AD — даній різниці сторін. Тоді шукана вершина B лежить на серединному перпендикулярі відрізка DC. **25.32.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ADC, у якому $\angle D = \frac{\beta}{2}$, де β — даний кут, сторона AC дорівнює даній стороні, сторона AD — даній сумі сторін. Тоді шукана вершина B лежить на серединному перпендикулярі відрізка DC. **25.33.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ADC, у якому AC — дана сторона, відрізок DC дорівнює сумі невідомих сторін, $\angle DAC = 90^\circ + \alpha$, де α — половина різниці кутів, про яку йдеться в умові. **25.35.** *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник за катетом, який дорівнює висоті, і протилежним кутом, який дорівнює даному. Гіпотенуза цього трикутника — одна зі сторін шуканого. Тепер задачу зведено до задачі 25.29. **25.36.** *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник BDM, у якому гіпотенуза BM дорівнює даній медіані, катет BD — даній висоті. Тоді центр описаного кола шуканого трикутника лежить на прямій, перпендикулярній до відрізка DM, яка проходить через точку M. **25.37.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ABD, у якому сторони AB і AD дорівнюють двом даним сторонам, а сторона BD у 2 рази більша за дану медіану. **25.38.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ADC, у якому AC — дана сторона, сторона AD у 2 рази більша за дану медіану, а висота, проведена з вершини D, дорівнює даній висоті. Покажіть, що сторона DC дорівнює одній з невідомих сторін шуканого трикутника.

ЗМІСТ

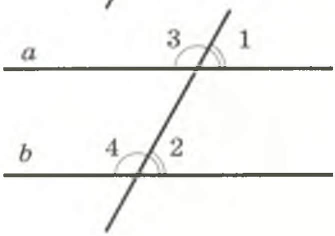
ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ



Якщо $\angle 1 = \angle 2$ ($\angle 3 = \angle 4$), то $a \parallel b$

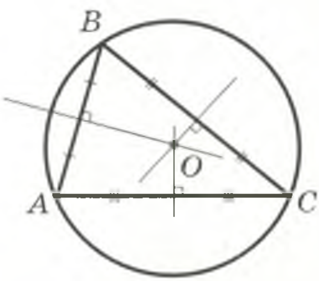


Якщо $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ ($\angle 2 + \angle 3 = 180°$), то $a \parallel b$



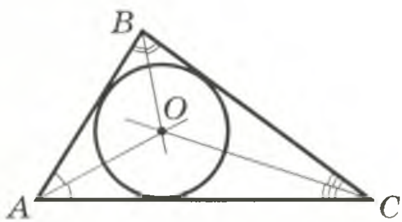
Якщо $\angle 1 = \angle 2$ ($\angle 3 = \angle 4$), то $a \parallel b$

КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА



Центр O кола — точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника

КОЛО, ВПИСАНЕ В ТРИКУТНИК



Центр O кола — точка перетину бісектрис кутів трикутника