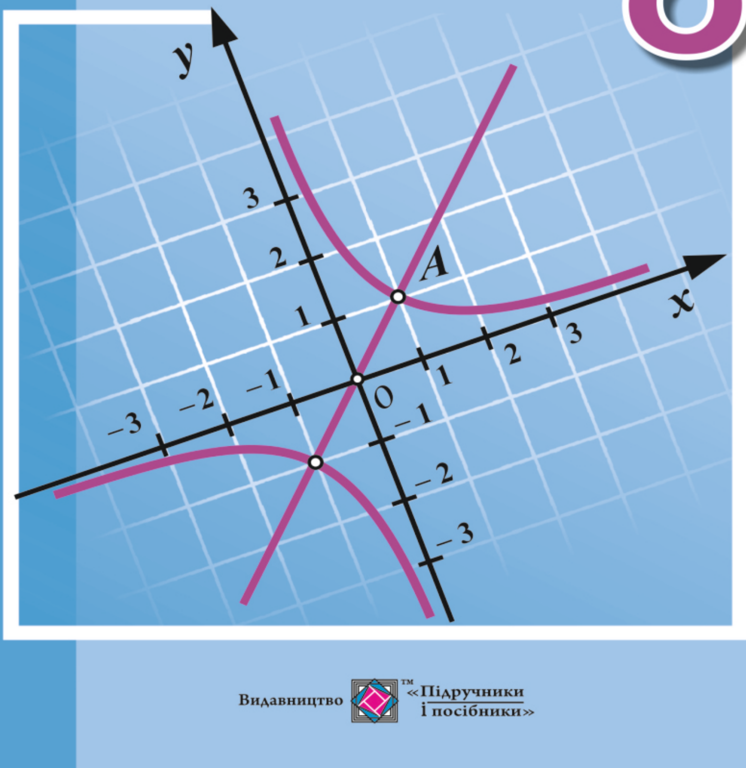
Василь Кравчук
Марія Підручна
Галина Янченко

АЛГЕБРА

клас

8



Видавництво «Підручники і посібники»

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я723
К 77

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для учнів 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Левицька І. М., методист відділу методичної роботи КУ «Баштанський районний сервісний центр по обслуговуванню закладів освіти» Баштанської районної ради Миколаївської області;

Погоріляк О. О., доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу ДВНЗ «Ужгородський національний університет», кандидат фізико-математичних наук;

Руденко В. О., учитель Мар'янівської загальноосвітньої школи I–III ступенів Маловисківської районної ради Кіровоградської області, учитель-методист, заслужений учитель України.

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(*наказ МОН України від 10.05.2016 р. № 491*)

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Кравчук В.

К 77 Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2016. — 256 с.

ISBN 978-966-07-3003-8

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я723

ISBN 978-966-07-3003-8

ЮНІ ДРУЗІ!

Кілька слів про особливості видання.

Матеріал підручника поділено на три параграфи, а параграфи — на пункти.

Кожний пункт розпочинається викладом теоретичного матеріалу. Деякі пункти містять додатковий матеріал під рубрикою «Для тих, хто хоче знати більше».

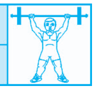
Для тих, хто хоче знати більше

Далі йде рубрика «Приклади розв’язання вправ». Це підказка. Вона допоможе вам ознайомитися з основними видами вправ, способами їх розв’язування та навчить правильно записувати розв’язання. Початок та закінчення розв’язання кожної вправи позначено кружечком «●».

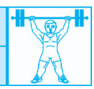
Приклади розв'язання вправ

У кожному пункті систему вправ поділено на три рівні складності.

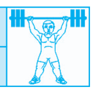
Рівень А



Рівень Б



Рівень В



Спочатку варто розв’язувати усні вправи і простіші задачі (рівень А), а потім перейти до складніших (рівень Б). Задачі рівня

В — для найкмітливіших, тих, хто хоче вміти та знати більше і мати найвищі оцінки. Для деяких задач цього рівня наведено розв'язання.

Для самостійної роботи вдома рекомендовано задачі, номери яких виділено кольором (наприклад, **255**).

Рубрика «Вправи для повторення» призначена для періодичного повторення основних видів вправ та підготовки до вивчення нового теоретичного матеріалу.

Вправи для повторення

Наступна рубрика «Поміркуйте» пов'язана з особливим аспектом математичної підготовки. Основним для розв'язання задач цієї рубрики є вміння виходити з нестандартних ситуацій. Розв'язування таких задач розвиває гнучкість і критичність мислення, а це допоможе вам у майбутньому, незалежно від того, яку професію ви оберете.

Поміркуйте

Наприкінці кожного параграфа уміщено запитання та вправи для повторення, завдання для самоперевірки чотирьох рівнів складності.

У кінці підручника подано вправи для повторення матеріалу за увесь курс алгебри 8 класу, задачі підвищеної складності, довідковий матеріал.

Щиро бажаємо успіху!

§ 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Описуючи реальні процеси мовою математики, часто отримують вирази, які містять дію ділення на вираз зі змінною. У цьому параграфі ми розглядатимемо саме такі вирази.

Ми з'ясуємо, що таке дробовий вираз, дріб, раціональний вираз; як здійснювати тотожні перетворення раціональних виразів; як розв'язувати рівняння з дробовими виразами.

$2a + b^2$ — цілий вираз

$\dfrac{a}{c^2 + b}$ — дріб

$\dfrac{a}{b} + \dfrac{d}{c}$ — дробовий вираз

раціональні вирази

1. Раціональні вирази. Раціональні дроби

1. Цілі, дробові та раціональні вирази. У сьомому класі ми вивчали цілі вирази. Прикладами таких виразів є:

$$a+b; \quad 3a^2; \quad 2x(x-y)^2; \quad \frac{c}{3}; \quad a:4; \quad b; \quad 3.$$

Пригадаймо: цілі вирази можуть містити дії додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня, а також дію ділення, але тільки на число, відмінне від нуля.

Кожний цілий вираз можна записати у вигляді многочлена. Наприклад,

$$2x(x-y)^2 = 2x(x^2-2xy+y^2) = 2x^3-4x^2y+2xy^2.$$

Розглянемо вирази

$$\frac{5y}{y+1}+1, \quad \frac{17ab}{a^2-b^2}, \quad 3a:b, \quad (x-y)^2-\frac{x}{x+y}.$$

Ці вирази відрізняються від цілих виразів тим, що містять дію ділення на вираз зі змінною. Такі вирази називають *дробовими раціональними виразами*.

Цілі й дробові раціональні вирази називають ***раціональними виразами***.

$4b+a^3$	$\frac{4}{b}+a^3$
Цілий вираз	*Дробовий вираз*

Раціональні вирази

Розглянемо раціональні вирази $\frac{ab}{a+b}$, $\frac{2,3}{x(y+2)}$, $\frac{5a}{7}$. Вони є частками двох виразів, до того ж, дію ділення записано за допомогою риски дробу. Такі вирази називають *дробами*.

Якщо маємо дріб $\frac{A}{B}$, де A і B — деякі числові вирази або вирази зі змінними, то вираз A називають *чисельником* дробу, а вираз B — *знаменником*.

Отже, $\frac{ab}{a+b}$ — дріб із чисельником ab і знаменником $a+b$.

Дріб $\frac{A}{B}$, у якому A і B — многочлени, називають ***раціональним дробом***.

Наприклад, $\frac{4}{x+3}$, $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$, $\frac{x}{a}$, $\frac{b}{3}$ — раціональні дроби.

2. Допустимі значення змінних. Розглянемо дробовий вираз $\frac{5}{a-2}$.

Якщо $a = 3$, то значення цього виразу дорівнює: $\frac{5}{3-2} = \frac{5}{1} = 5$;

якщо $a = -6$, то значення виразу дорівнює: $\frac{5}{-6-2} = -\frac{5}{8}$.

Значення виразу $\frac{5}{a-2}$ можна знайти для будь-якого значення a, крім $a = 2$. Якщо $a = 2$, то знаменник $a - 2$ дорівнює нулю, а на нуль ділити не можна. Кажуть: якщо $a \neq 2$, то вираз $\frac{5}{a-2}$ *має зміст*, а якщо $a = 2$, то вираз *не має змісту*. Значення змінних, для яких вираз має зміст, називають *допустимими значеннями* змінних.

Означення **Допустимими значеннями змінних виразу називають такі їх значення, для яких вираз має зміст.**

Так, для виразу $\frac{5}{a-2}$ допустимими значеннями змінної є всі значення a, крім $a = 2$.

Допустимими значеннями змінних будь-якого цілого виразу є всі значення змінних. Допустимими значеннями змінних дробового раціонального виразу є всі значення змінних, крім тих, для яких дорівнює нулю знаменник хоча б одного з дробів, що входять до даного виразу.

3. Тотожно рівні вирази. Тотожності. Розглянемо цілий вираз $x^2 + x(2 - x)$. Оскільки

$$x^2 + x(2 - x) = x^2 + 2x - x^2 = 2x,$$

то для будь-якого значення змінної x відповідні значення виразів $x^2 + x(2 - x)$ і $2x$ дорівнюють одне одному. Такі цілі вирази ми називали тотожно рівними.

А які два не цілі вирази вважають тотожно рівними?

Розглянемо дробові вирази $\frac{x^2+x(2-x)}{x-1}$ і $\frac{2x}{x-1}$. Допустимими значеннями змінної обох виразів є всі значення x, крім $x = 1$. Ці вирази мають однакові знаменники й тотожно рівні чисельники. Тому для кожного *допустимого* значення x відповідні значення виразів дорівнюють одне одному. Такі вирази називають *тотожно рівними*.

Означення **Два вирази називають тотожно рівними, якщо для будь-яких допустимих для них значень змінних відповідні значення виразів дорівнюють одне одному.**

Якщо два тотожно рівні вирази $\frac{x^2+x(2-x)}{x-1}$ та $\frac{2x}{x-1}$ сполучити знаком «=», то одержимо рівність $\frac{x^2+x(2-x)}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$, яка є правильною для всіх допустимих значень x. Таку рівність називають *тотожністю*.

Означення **Рівність, яка є правильною для всіх допустимих значень змінних, що входять до неї, називають тотожністю.**

Наприклад, $\frac{2ab \cdot a}{3a \cdot 3b} = \frac{2a^2b}{9ab}$, $\frac{xy}{x^2-y^2} = \frac{xy}{(x-y)(x+y)}$ — тотожності.

Заміну одного виразу тотожно рівним йому виразом називають ***тотожним перетворенням виразу***.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти значення виразу $x+\frac{28}{x+3}$, якщо $x=4$; $x=\frac{1}{3}$.

● Якщо $x=4$, то $x+\frac{28}{x+3} = 4+\frac{28}{4+3} = 4+\frac{28}{7} = 4+4=8$.

Якщо $x=\frac{1}{3}$, то $x+\frac{28}{x+3} = \frac{1}{3}+\frac{28}{\frac{1}{3}+3} = \frac{1}{3}+\frac{28}{\frac{10}{3}} = \frac{1}{3}+28\cdot\frac{3}{10} =$

$= \frac{1}{3}+\frac{42}{5} = \frac{1}{3}+8\frac{2}{5} = 8\frac{11}{15}$. ●

Вправа 2. Знайти значення виразу $\dfrac{(a-b)(a+b)+b^2}{a+b}$, якщо:

а) $a = 8$; $b = 32$; **б)** $a = 0{,}6$; $b = –0{,}6$.

● Спростимо даний вираз: $\dfrac{(a-b)(a+b)+b^2}{a+b} = \dfrac{a^2-b^2+b^2}{a+b} = \dfrac{a^2}{a+b}$.

а) Якщо $a = 8$; $b = 32$, то $\dfrac{a^2}{a+b} = \dfrac{8^2}{8+32} = \dfrac{64}{40} = 1{,}6$.

б) Якщо $a = 0{,}6$; $b = –0{,}6$, то $\dfrac{a^2}{a+b} = \dfrac{0{,}6^2}{0{,}6-0{,}6} = \dfrac{0{,}36}{0}$ — не має змісту. ●

Вправа 3. Вказати допустимі значення змінної у виразі:

а) $y+\dfrac{y+4}{y-3}$; **б)** $\dfrac{2a-1}{a^2+a}$; **в)** $\dfrac{x+4}{x^2+8}$.

● **а)** Допустимими є всі значення y, крім $y = 3$.

б) Знайдемо значення a, для яких знаменник дробу дорівнює нулю:

$a^2 + a = 0$; $a(a + 1) = 0$; $a = 0$ або $a + 1 = 0$; $a = 0$ або $a = –1$.

Допустимими є всі значення a, крім $a = 0$ і $a = –1$.

в) Для будь-якого значення x значення знаменника $x^2 + 8$ не менше ніж 8, а тому не дорівнює нулю. Отже, допустимими є всі значення x. ●

Усно

1. Які з виразів є цілими виразами? дробовими? Які з виразів є дробами? раціональними дробами?

а) $\dfrac{a+b}{a-b}$; **б)** $\dfrac{x}{3}+x^2$; **в)** $\dfrac{4}{x}-x^2$;

г) $\left(\dfrac{1}{2}+b^3\right)\cdot a$; **д)** $\dfrac{5}{x(y+1)}$; **е)** $\dfrac{xy+x}{5}$.

2. Для яких значень змінної вираз не має змісту? Назвіть допустимі значення змінної у виразі:

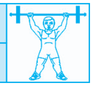
а) $\dfrac{8}{c}$; **б)** $\dfrac{9-x}{x-1}$; **в)** $\dfrac{b+4}{b(b-2)}$.

3. Знайдіть значення виразу $\frac{10}{a}$, якщо $a = 10$; $a = -1$; $a = 2$.

4. Які з рівностей є тотожностями?

а) $\frac{a+3a}{a-1} = \frac{4a}{a-1}$; **б)** $\frac{a \cdot 3a}{a-1} = \frac{3a}{a-1}$; **в)** $\frac{b}{a(a+b)} = \frac{b}{a^2+ab}$.

Рівень А



Знайдіть значення виразу:

5. **а)** $\frac{-x^2}{x+5}$, якщо $x = 0$; $x = 5$; $x = -3$;

б) $\frac{2ab}{a-b}$, якщо $a = 4$, $b = 2$; $a = -4$, $b = 6$.

6. **а)** $\frac{(-y)^2}{y-4}$, якщо $y = 0$; $y = 6$; $y = -1$; **б)** $\frac{2b+c}{2b-c}$, якщо $b = 3$, $c = 4$.

Заповніть таблицю:

7.

x	–2	–1	0	1	1,5	2
$\frac{x}{x+1}$						

8.

a	–4	–1	0	1	2	2,5
$\frac{3}{a-2}$						

Укажіть допустимі значення змінної у виразі:

9. **а)** $\frac{6x^2+1}{x-2}$; **б)** $\frac{6a+1}{a(a-3)}$; **в)** $\frac{b}{b+1}+\frac{1}{b}$; **г)** $\frac{11x}{x^2+2}$.

10. **а)** $\frac{1-y^3}{y+3}$; **б)** $\frac{5}{2x}-\frac{1}{x-2}$; **в)** $\frac{m}{(m-1)(m+1)}$; **г)** $\frac{a+1}{a^2+1}$.

11. Автомобіль проїхав 195 км за t год. Запишіть у вигляді виразу швидкість автомобіля. Знайдіть значення цього виразу, якщо $t = 3$.

12. Оператор набрав 45 сторінок тексту за k год. Запишіть у вигляді виразу кількість сторінок, які оператор набирав за 1 год. Знайдіть значення цього виразу, якщо $k = 9$.

Рівень Б

Для яких значень змінної вираз не має змісту?

13. **а)** $\dfrac{4x+1}{x^2-4}$; **б)** $\dfrac{8a}{a^2-5a}$; **в)** $\dfrac{y-5}{(y-6)^2}$.

14. **а)** $\dfrac{3x}{x^2-7x}$; **б)** $\dfrac{2z+7}{9-z^2}$; **в)** $\dfrac{1-2b}{b(b^2+2)}$.

Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

15. **а)** $\dfrac{7b}{4b^2-1}+b$; **б)** $\dfrac{3k}{4-(k+2)^2}$; **в)** $\dfrac{6m}{m^2+2m}+\dfrac{m}{m-1}$.

16. **а)** $\dfrac{5c}{4-9c^2}$; **б)** $\dfrac{3n-2}{(3+n)^2-9}$; **в)** $\dfrac{5a}{a^2-4}+\dfrac{a+1}{a}$.

Знайдіть значення виразу:

17. $\dfrac{2a-3}{3a+1}$, якщо $a = –0,2$; $a = \dfrac{2}{3}$; $a = 3\dfrac{1}{6}$.

18. $\dfrac{2-x}{5x-3}$, якщо $x = 0,7$; $x = \dfrac{3}{7}$; $x = 1\dfrac{1}{5}$.

19. Знайдіть значення виразу $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{y}$, якщо:

а) $x = 44$; $y = 4$; **б)** $x = 46$; $y = 46$; **в)** $x = 1,25$; $y = 0,25$.

20. Знайдіть значення виразу $\dfrac{m(1-n)+n(1+m)}{4n}$, якщо:

а) $m = 67$; $n = –67$; **б)** $m = 16,75$; $n = 0,25$.

21. До магазину завезли 15 л виноградного соку в малих упаковках і 25 л — у великих. Скільки всього упаковок соку завезли до магазину, якщо кожна мала упаковка містить a л соку, а кожна велика — b л?

22. Перший робітник виклав плиткою 48 м^2 доріжки за n год, а другий — 64 м^2 за m год. Скільки квадратних метрів доріжки викладали за 1 год обидва робітники разом?

23. Катер пройшов 25 км за течією річки і 20 км проти течії. Знайдіть час руху катера, якщо його швидкість у стоячій воді дорівнює v км/год, а швидкість течії річки — u км/год.

Рівень В

24. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

а) $\frac{11x-1}{|x|-3}$; **б)** $\frac{3y}{|y|-y}$; **в)** $\frac{m}{m^2-2|m|}$; **г)** $\frac{a+3}{|a-1|+1}$.

25. Доведіть, що вираз $\frac{x+y}{x^2+y^2-4x-4y+9}$ має зміст для будь-яких значень змінних.

26. Поїзд мав подолати шлях завдовжки 250 км, рухаючись зі швидкістю a км/год. Але через 2 год після початку руху його на певний час затримали. Щоб прибути до місця призначення вчасно, поїзд після затримки збільшив швидкість на 25 км/год. На який час затримали поїзд?

Вправи для повторення

27. Розкладіть на множники:

а) $ab^2 - ac^2$; **б)** $x^3 + 8$;

в) $xy + 8x + 9y + 72$; **г)** $a^2 - 4b^2 + a + 2b$.

28. Порівняйте дроби: $\frac{7}{9}$ і $\frac{20}{27}$; $\frac{11}{18}$ і $\frac{17}{24}$; $\frac{7}{15}$ і $\frac{9}{25}$.

29. Скоротіть дроби: $\frac{18}{48}$; $\frac{56}{98}$; $\frac{96}{123}$; $\frac{175}{325}$; $\frac{77}{121}$.

30. Школі потрібно закупити парти. Перша фірма пропонує купити парти по 975 грн за кожну і 4% вартості усіх куплених парт за доставку, а друга — по 1010 грн за кожну і безкоштовну доставку. У якій фірмі вигідніше купувати парти?

Поміркуйте

31. На чарівній яблуні ростуть 55 яблук. З неї дозволяють зривати 2, 3, 6 або 9 яблук. Замість них на яблуні відразу виростають відповідно 4, 5, 2 або 7 нових яблук. Чи можна з яблуні зірвати всі яблука, якщо після зривання останнього вони більше не виростають?

2. Основна властивість дробу

1. Основна властивість дробу. Пригадаймо основну властивість *звичайних дробів*: якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на те саме натуральне число, то отримаємо дріб, який дорівнює даному. Отже, якщо a, b і k — натуральні числа, то $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ і $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$.

Аналогічна властивість справедлива для будь-яких дробів. А саме:

Для будь-яких значень a, b і k, де $b \neq 0$ і $k \neq 0$, виконуються рівності

$$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}; \qquad \frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}.$$

Дані рівності є тотожностями і виражають *основну властивість дробу*, яку можна сформулювати так:

> **Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на вираз, не тотожно рівний нулю, то одержимо дріб, тотожно рівний даному.**

2. Скорочення дробів. За допомогою тотожності $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$ дріб $\frac{ak}{bk}$ можна замінити дробом $\frac{a}{b}$, тобто дріб $\frac{ak}{bk}$ можна *скоротити* на спільний множник k чисельника і знаменника. Наприклад,

$$\frac{4n^2}{2mn} = \frac{2n \cdot 2n}{m \cdot 2n} = \frac{2n}{m}; \qquad \frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab} = \frac{(a+b)(a-b)}{a(a-b)} = \frac{a+b}{a}.$$

Рівності $\frac{4n^2}{2mn} = \frac{2n}{m}$ і $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab} = \frac{a+b}{a}$ є тотожностями, тобто вони є правильними для всіх допустимих значень змінних (перша — для всіх значень m і n, де $m \neq 0$, $n \neq 0$; друга — для всіх значень a і b, де $a \neq 0$, $a \neq b$).

> Щоб скоротити дріб, потрібно:
>
> 1) виділити спільний множник чисельника і знаменника дробу;
>
> 2) виконати скорочення на спільний множник.

3. Зведення дробів до спільного знаменника. За допомогою тотожності $\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}$ дріб $\frac{a}{b}$ можна зводити до нового знаменника. Наприклад,

$$\frac{3x}{y}=\frac{3x\cdot 2x}{y\cdot 2x}=\frac{6x^2}{2xy}$$ — звели дріб $\frac{3x}{y}$ до знаменника $2xy$.

Будь-які дроби з різними знаменниками, як і звичайні дроби, можна звести до спільного знаменника. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Звести до спільного знаменника дроби $\frac{y}{3x^2}$ та $\frac{4}{y}$.

● Спільним знаменником даних дробів є добуток їхніх знаменників, тобто $3x^2y$. Додатковим множником для першого дробу є y, для другого — $3x^2$. Тоді:

$$\frac{y}{3x^2}=\frac{y\cdot y}{3x^2\cdot y}=\frac{y^2}{3x^2y};\qquad \frac{4}{y}=\frac{4\cdot 3x^2}{y\cdot 3x^2}=\frac{12x^2}{3x^2y}.$$ ●

Приклад 2. Звести до спільного знаменника дроби $\frac{5}{8a^3b}$ і $\frac{7}{12a^2c^2}$.

● Знаменники обох дробів є одночленами, тому спільний знаменник шукатимемо у вигляді одночлена, до того ж якомога меншого степеня. За коефіцієнт цього одночлена візьмемо найменше спільне кратне коефіцієнтів знаменників даних дробів, тобто 24, а кожну змінну візьмемо з найбільшим показником, з яким вона входить у знаменники дробів, тобто візьмемо a^3, b і c^2. Тоді спільним знаменником буде $24a^3bc^2$. Додатковим множником для першого дробу є $3c^2$, бо $24a^3bc^2 = 8a^3b\cdot 3c^2$; для другого — $2ab$, бо $24a^3bc^2 = 12a^2c^2\cdot 2ab$. Матимемо:

$$\frac{5}{8a^3b}=\frac{5\cdot 3c^2}{24a^3bc^2}=\frac{15c^2}{24a^3bc^2};\qquad \frac{7}{12a^2c^2}=\frac{7\cdot 2ab}{24a^3bc^2}=\frac{14ab}{24a^3bc^2}.$$ ●

Щоб звести до простішого спільного знаменника дроби, знаменниками яких є одночлени, потрібно:

1) знайти найменше спільне кратне (НСК) коефіцієнтів знаменників;

2) утворити спільний знаменник у вигляді добутку НСК і степенів змінних з найбільшим показником, з яким вони входять до знаменників;

3) помножити чисельник і знаменник кожного дробу на відповідний додатковий множник. (Щоб знайти додатковий множник для дробу, потрібно записати спільний знаменник у вигляді добутку двох одночленів, одним з яких є знаменник даного дробу. Тоді другий одночлен буде додатковим множником.)

Приклад 3. Звести до спільного знаменника дроби $\frac{3}{a^2-ab}$ і $\frac{2}{a^2+ab}$.

● Розкладемо на множники знаменник кожного дробу:

$$\frac{3}{a^2-ab}=\frac{3}{a(a-b)};\quad \frac{2}{a^2+ab}=\frac{2}{a(a+b)}.$$

Спільним знаменником дробів є добуток $a(a-b)(a+b)=a(a^2-b^2)$. Додатковим множником для першого дробу є вираз $a+b$, для другого — вираз $a-b$. Помноживши чисельник і знаменник кожного дробу на відповідний додатковий множник, одержимо:

$$\frac{3}{a^2-ab}=\frac{3(a+b)}{a(a^2-b^2)};\qquad \frac{2}{a^2+ab}=\frac{2(a-b)}{a(a^2-b^2)}.$$ ●

Щоб звести до простішого спільного знаменника дроби, знаменниками яких є многочлени, потрібно:

1) розкласти на множники знаменник кожного дробу;

2) утворити спільний знаменник у вигляді добутку одержаних множників з найбільшим показником, з яким вони входять до знаменників;

3) помножити чисельник і знаменник кожного дробу на відповідний додатковий множник.

4. Зміна знака чисельника або знаменника дробу. Розглянемо правильну числову рівність $\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$. Її можна прокоментувати так: якщо змінити знак у чисельнику дробу і знак перед дробом, то одержимо дріб, який дорівнює даному.

У такий же спосіб змінюють знак чисельника або знаменника будь-якого дробу, використовуючи тотожності:

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}, \qquad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}.$$

Якщо змінити знак у чисельнику або знаменнику дробу і знак перед дробом, то одержимо дріб, тотожно рівний даному.

Для тих, хто хоче знати більше

Доведемо основну властивість дробів. Покажемо, що рівність $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ є тотожністю, тобто що вона виконується для будь-яких значень a, b і k, де $b \neq 0$ і $k \neq 0$.

Нехай $\frac{a}{b} = m$. За означенням частки маємо: $a = bm$. Помноживши обидві частини одержаної рівності на k, матимемо правильну рівність $ak = (bm)k$ або $ak = (bk)m$. Оскільки $b \neq 0$ і $k \neq 0$, то $bk \neq 0$. У такому випадку з рівності $ak = (bk)m$ знову ж таки за означенням частки маємо: $m = \frac{ak}{bk}$. Отже, $\frac{a}{b} = m = \frac{ak}{bk}$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Виділити спільний множник чисельника та знаменника дробу й скоротити дріб:

а) $\frac{12a}{8ab}$; **б)** $\frac{-18xy^3}{-6x^2y^2}$.

● **а)** $\frac{12a}{8ab} = \frac{4a \cdot 3}{4a \cdot 2b} = \frac{3}{2b}$. **б)** $\frac{-18xy^3}{-6x^2y^2} = \frac{-6xy^2 \cdot 3y}{-6xy^2 \cdot x} = \frac{3y}{x}$. ●

Вправа 2. Скоротити дріб:

а) $\frac{10b-5a}{a^2-4b^2}$; **б)** $\frac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3}$.

● **а)** $\frac{10b-5a}{a^2-4b^2} = \frac{-5(a-2b)}{(a-2b)(a+2b)} = \frac{-5}{a+2b} = -\frac{5}{a+2b}$.

б) $\frac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3}=\frac{x^2+xy+y^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{1}{x-y}$. ●

Вправа 3. Звести дріб $\frac{3a}{7b}$ до знаменника $42a^2b$.

● Оскільки $42a^2b=7b\cdot 6a^2$, то, помноживши чисельник і знаменник даного дробу на $6a^2$, матимемо: $\frac{3a}{7b}=\frac{3a\cdot 6a^2}{7b\cdot 6a^2}=\frac{18a^3}{42a^2b}$. ●

Вправа 4. Звести до спільного знаменника дроби $\frac{3}{m^2-n^2}$ і $\frac{9}{n-m}$.

● $\frac{3}{m^2-n^2}=\frac{3}{(m-n)(m+n)}$; $\frac{9}{n-m}=-\frac{9}{m-n}$. Спільним знаменником дробів є добуток $(m-n)(m+n)$. Додатковим множником для першого дробу є 1, для другого — $m+n$. Тому перший дріб залишаємо без зміни, а для другого дробу матимемо: $\frac{9}{n-m}=-\frac{9(m+n)}{(m-n)(m+n)}=-\frac{9(m+n)}{m^2-n^2}$. ●

Усно

32. Скоротіть дріб:

а) $\frac{5x}{15y}$; б) $\frac{ab}{4b}$; в) $\frac{m(n-2)}{n(n-2)}$; г) $\frac{18a^2}{a^3}$.

33. Зведіть дріб:

а) $\frac{11}{b}$ до знаменника b^2; б) $\frac{3x}{2y}$ до знаменника $4xy$.

34. Зведіть до спільного знаменника дроби:

а) $\frac{a}{b}$ і $\frac{b}{3}$; б) $\frac{1}{mn}$ і $\frac{1}{n^2}$.

35. Змініть знак знаменника дробу:

а) $\frac{2}{-(x-y)}$; б) $\frac{2}{x-y}$.

Рівень А

36. Виділіть спільний множник чисельника та знаменника дробу й скоротіть дріб:

а) $\frac{3x}{5x}$; **б)** $\frac{4a}{6a}$; **в)** $\frac{9ab}{6b}$; **г)** $\frac{-10x^2y}{15xy^2}$.

Скоротіть дріб:

37. **а)** $\frac{28x^2y^2}{35x^2y^3}$; **б)** $\frac{24b^2c^2}{36bc}$; **в)** $\frac{-15mn^2}{40m^2n^2}$; **г)** $\frac{8k^2m^4}{-12k^4m^3}$.

38. **а)** $\frac{18c^2n^2}{12n^3}$; **б)** $\frac{36xy^2}{28xy}$; **в)** $\frac{40ab^2}{-24a^2b^3}$; **г)** $\frac{-14ac^3}{-42bc^3}$.

39. **а)** $\frac{a(m-n)}{m-n}$; **б)** $\frac{b(c+d)}{3b(c+d)}$; **в)** $\frac{5k}{15k+20}$; **г)** $\frac{m^2-mn}{mn}$.

40. **а)** $\frac{ab(a+b)}{c(a+b)}$; **б)** $\frac{m(x-2y)}{m(x-y)}$; **в)** $\frac{3x-9}{x-3}$; **г)** $\frac{7xy}{xy-5y}$.

41. Подайте частку у вигляді дробу й скоротіть дріб:
а) $10a^2b^2 : (5a^3b)$; **б)** $24m^2n : (-6mn)$; **в)** $(-28ab^3) : (-21b^4)$.

Знайдіть значення виразу:

42. **а)** $\frac{20a^3b}{4a^2b^2}$, якщо $a = 48$; $b = 16$; $a = -4{,}2$; $b = 2{,}1$.

б) $15x^2y^3 : (30xy^2)$, якщо $x = 300$; $y = 0{,}06$.

43. **а)** $\frac{18bc^3}{2b^2c^2}$, якщо $b = 3$; $c = 4{,}5$; $b = -1{,}4$, $c = 2{,}8$;

б) $64m^2n^4 : (16mn^2)$, якщо $m = 0{,}25$; $n = 25$.

Скоротіть дріб:

44. **а)** $\frac{6a-3b}{8a-4b}$; **б)** $\frac{12a^2-16a}{3a^2-4a}$; **в)** $\frac{xy+x^2y}{xy-xy^2}$; **г)** $\frac{a^2-b^2}{a-b}$;

д) $\frac{a^2-9}{7a+21}$; **е)** $\frac{10x-20}{7x^2-28}$; **є)** $\frac{4y-8}{y^2-4y+4}$; **ж)** $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$.

45. а) $\dfrac{9x-6y}{15x-10y}$; б) $\dfrac{c^2+2c}{c^2-2c}$; в) $\dfrac{10x-10y}{xy-y^2}$; г) $\dfrac{ab+a^2}{ab+b^2}$;

д) $\dfrac{m^2-n^2}{n+m}$; е) $\dfrac{5x+5y}{x^2-y^2}$; є) $\dfrac{m^2+2m+1}{3m+3}$; ж) $\dfrac{a^2-25}{a^2-10a+25}$.

46. Зведіть дріб:

а) $\dfrac{k}{4p}$ до знаменника: $12p$; $16p^2$; б) $\dfrac{5}{2a^2}$ до знаменника: $4a^4$; $10a^2b$.

47. Зведіть дріб $\dfrac{4}{3xy}$ до знаменника: $15xy$; $3xy^2$; $9x^3y$.

Зведіть до спільного знаменника дроби:

48. а) $\dfrac{x}{y}$ і $\dfrac{2}{x}$; б) $\dfrac{m}{ab}$ і $\dfrac{4}{b}$; в) $\dfrac{d}{a^2}$ і $\dfrac{1}{a^3}$;

г) $\dfrac{3}{2c}$ і $\dfrac{9}{c^2}$; д) $\dfrac{1}{3c}$ і $\dfrac{2}{5c}$; е) $\dfrac{3}{8a}$ і $\dfrac{1}{12a}$;

є) $\dfrac{x}{18a^2}$ і $\dfrac{y}{27a^4}$; ж) $\dfrac{5}{6ab}$ і $\dfrac{5}{4b}$; з) $\dfrac{p}{3a^2}$ і $\dfrac{q}{6ab}$.

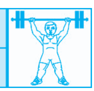
49. а) $\dfrac{3}{2a}$ і $\dfrac{2}{b}$; б) $\dfrac{7}{8a}$ і $\dfrac{5}{a}$; в) $\dfrac{k}{2b}$ і $\dfrac{n}{3b}$;

г) $\dfrac{8}{15ab}$ і $\dfrac{7}{20ab}$; д) $\dfrac{5}{6a^2}$ і $\dfrac{7}{18a}$; е) $\dfrac{3}{4y^3}$ і $\dfrac{7}{20y^2}$.

50. а) $\dfrac{5}{a+1}$ і $\dfrac{4}{a+2}$; б) $\dfrac{3}{2(a-1)}$ і $\dfrac{2}{3(a-1)}$; в) $\dfrac{1}{ab+b}$ і $\dfrac{1}{a+1}$.

51. а) $\dfrac{1}{c+3}$ і $\dfrac{2}{c-1}$; б) $\dfrac{3}{8(b+2)}$ і $\dfrac{1}{4(b+2)}$; в) $\dfrac{8}{xy-x}$ і $\dfrac{7}{y-1}$.

Рівень Б



Скоротіть дріб:

52. а) $\dfrac{6ab-9b^2}{4a^2-9b^2}$; б) $\dfrac{4c^2-25x^2}{4c^2+20cx+25x^2}$; в) $\dfrac{2x^3y-8xy^3}{2xy^2-x^2y}$;

г) $\dfrac{x^3+8}{x+2}$; д) $\dfrac{z^2+3z+9}{27-z^3}$; е) $\dfrac{y^6-1}{1-y^2}$;

є) $\dfrac{ax+cx-ay-cy}{cx-cy}$; ж) $\dfrac{b^2+2ab+a^2}{a^2+ab-ax-bx}$; з) $\dfrac{8a+4b}{2ab+b^2-2ad-bd}$.

53. а) $\dfrac{14b-63c}{4b^2-81c^2}$; б) $\dfrac{3kn-12n}{k^2-8k+16}$; в) $\dfrac{6mn+2m^2}{9mn^2-m^3}$;

г) $\dfrac{15-5c}{c^3-27}$; д) $\dfrac{x^2-y^2}{xy-x+y-y^2}$; е) $\dfrac{a^2+ac+bc+ab}{a^2b+abc}$.

Знайдіть значення виразу:

54. а) $\dfrac{3a^2+9a}{a^2-9}$, якщо $a=4$; $a=-\dfrac{1}{3}$;

б) $\dfrac{m^2-n^2-m+n}{(m-n)^2}$, якщо $m=9{,}51$; $n=-0{,}49$.

55. а) $\dfrac{x^2-4}{5x+10}$, якщо $x=-1$; $x=\dfrac{2}{9}$; б) $\dfrac{(a+b)^2}{a^2b+ab^2}$, якщо $a=2{,}5$; $b=4$.

Доведіть тотожність:

56. а) $\dfrac{a^2+12ab+36b^2}{a^2-36b^2}=\dfrac{a+6b}{a-6b}$; б) $\dfrac{m^4-8m}{m^2-2m}=m^2+2m+4$.

57. а) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{4x^2-4y^2}=\dfrac{x-y}{4(x+y)}$; б) $\dfrac{8x^3+1}{4x^2-2x+1}=2x+1$.

58. Зведіть дріб:

а) $\dfrac{7}{x+y}$ до знаменника x^2+xy; б) $\dfrac{2}{x+y}$ до знаменника $x^2+2xy+y^2$;

в) $\dfrac{c}{a-b}$ до знаменника a^2-b^2; г) $\dfrac{n}{m-n}$ до знаменника m^3-n^3.

59. Зведіть дріб:

а) $\dfrac{2a}{x+y}$ до знаменника x^2-y^2; б) $\dfrac{1}{a+c}$ до знаменника a^3+c^3.

Зведіть до спільного знаменника дроби:

60. а) $\dfrac{9}{14a^3b}$ і $\dfrac{5}{21ab^2}$; б) $\dfrac{1}{18x^3y^3}$ і $\dfrac{1}{27xy^4}$; в) $\dfrac{a}{9m^2n}$ і $\dfrac{b}{15m^5n^3}$.

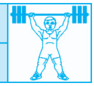
61. **а)** $\dfrac{8}{9x^3y^3}$ і $\dfrac{5}{24xy^5}$; **б)** $\dfrac{a}{16m^3n^2}$ і $\dfrac{b}{24m^4n}$; **в)** $\dfrac{c}{15x^4y^2}$ і $\dfrac{2}{25x^2y}$.

62. **а)** $\dfrac{3}{x^2+xy}$ і $\dfrac{2}{xy+y^2}$; **б)** $\dfrac{x}{x^2-y^2}$ і $\dfrac{y}{x+y}$; **в)** $\dfrac{m}{m^2+2mn+n^2}$ і $\dfrac{n}{m+n}$;

г) $\dfrac{c}{4c^2-1}$ і $\dfrac{c^2}{1-2c}$; **д)** $\dfrac{1}{1-x^3}$ і $\dfrac{2}{x-1}$; **е)** $\dfrac{y}{y^3-8}$ і $\dfrac{2}{y^2+2y+4}$.

63. **а)** $\dfrac{x}{x^2+x^2y}$ і $\dfrac{y}{y^2+y}$; **б)** $\dfrac{m}{m^2-4m+4}$ і $\dfrac{3}{2-m}$; **в)** $\dfrac{a}{4a^2-b^2}$ і $\dfrac{b}{b-2a}$.

Рівень В



64. Скоротіть дріб, де n — натуральне число:

а) $\dfrac{13824x^{n+2}}{15552x^n}$; **б)** $\dfrac{2045x^n}{1755x^{2n}}$;

в) $\dfrac{x^2+3xy+2y^2}{x^2-xy-2y^2}$; **г)** $\dfrac{y^3+2y^2-y-2}{y^2+y-2}$.

65. Побудуйте графік функції, заданої формулою:

а) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$; **б)** $y=\dfrac{|x|}{x}$.

66. Доведіть тотожність:

а) $\dfrac{ab+3a+5b+15}{ab+3a+3b+b^2}=\dfrac{a^2+10a+25}{a^2+ab+5a+5b}$;

б) $\dfrac{2xy+3y+2x+3}{2xz+3z+4x+6}=\dfrac{3xy+2y+3x+2}{3xz+2z+6x+4}$.

Вправи для повторення

67. Обчисліть:

а) $\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{9}$; **б)** $\dfrac{5}{7}-\dfrac{2}{7}$; **в)** $3\dfrac{1}{6}+2\dfrac{5}{6}$; **г)** $4\dfrac{1}{8}-1\dfrac{5}{8}$.

68. Розв’яжіть рівняння:

а) $\frac{5}{7}x-\frac{1}{9}=\frac{3}{7}x+\frac{5}{9}$; **б)** $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

69. Сьогодні в магазині 2 кг помідорів і 3 кг огірків коштують 28 грн. Тиждень тому, коли помідори й огірки були дорожчими на 25 %, 1 кг помідорів і 2 кг огірків коштували 20 грн. Скільки коштують сьогодні 1 кг помідорів і скільки 1 кг огірків?

70. Є два сплави міді й цинку. В один сплав мідь і цинк входять у відношенні 5 : 2, а в інший — у відношенні 3 : 4. Скільки потрібно взяти кілограмів кожного сплаву, щоб одержати 28 кг нового з однаковим умістом міді й цинку?

Поміркуйте

71. У сьомих і восьмих класах школи разом навчаються 180 учнів. Кожний восьмикласник дружить із 7 семикласниками, а кожний семикласник — із 8 восьмикласниками. Скільки всього восьмикласників є у школі?

3. Додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками

1. Додавання дробів з однаковими знаменниками. Дроби з однаковими знаменниками додають так само, як і звичайні дроби з однаковими знаменниками, тобто додають їхні чисельники, а знаменник залишають той самий:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}. \qquad (1)$$

Рівність (1) є тотожністю, тобто вона є правильною для будь-яких значень a, b і c, де $b \neq 0$.

З тотожності (1) випливає таке *правило додавання дробів з однаковими знаменниками*:

Щоб додати дроби з однаковими знаменниками, потрібно додати їхні чисельники, а знаменник залишити той самий.

2. Віднімання дробів з однаковими знаменниками. Віднімання дробів з однаковими знаменниками виконують на основі тотожності

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}}. \qquad (2)$$

З тотожності (2) випливає *правило віднімання дробів з однаковими знаменниками*:

> ***Щоб відняти дроби з однаковими знаменниками, потрібно від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити той самий.***

3. Запис дробу у вигляді суми або різниці дробів. У кожній з тотожностей (1) і (2) переставимо місцями ліву і праву частини:

$$\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}; \qquad \frac{a-c}{b}=\frac{a}{b}-\frac{c}{b}.$$

Одержані тотожності можна використовувати, якщо потрібно записати дріб у вигляді суми або різниці дробів.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Додати дроби:

а) $\frac{7}{a}+\frac{5}{a}$; **б)** $\frac{2a+1}{ab}+\frac{b-1}{ab}+\frac{3}{ab}$; **в)** $\frac{5x-2y}{2x-y}+\frac{x-y}{2x-y}$.

● **а)** $\frac{7}{a}+\frac{5}{a}=\frac{7+5}{a}=\frac{12}{a}$.

б) $\frac{2a+1}{ab}+\frac{b-1}{ab}+\frac{3}{ab}=\frac{2a+1+b-1+3}{ab}=\frac{2a+b+3}{ab}$.

в) $\frac{5x-2y}{2x-y}+\frac{x-y}{2x-y}=\frac{5x-2y+x-y}{2x-y}=\frac{6x-3y}{2x-y}=\frac{3(2x-y)}{2x-y}=3$. ●

Вправа 2. Відняти дроби:

а) $\frac{4n}{2n^2-3n}-\frac{2n+3}{2n^2-3n}$; **б)** $\frac{2a}{x-y}-\frac{3a}{y-x}$.

● **а)** $\frac{4n}{2n^2-3n}-\frac{2n+3}{2n^2-3n}=\frac{4n-(2n+3)}{2n^2-3n}=\frac{2n-3}{n(2n-3)}=\frac{1}{n}$.

б) Змінивши знак знаменника другого дробу, матимемо:

$$\frac{2a}{x-y}-\frac{3a}{y-x}=\frac{2a}{x-y}-\frac{3a}{-(x-y)}=\frac{2a}{x-y}+\frac{3a}{x-y}=\frac{2a+3a}{x-y}=\frac{5a}{x-y}. \; \bullet$$

Вправа 3. Записати дріб у вигляді суми або різниці цілого числа і дробу:

а) $\frac{3a+5}{a}$; **б)** $\frac{2a+2b+1}{a+b}$; **в)** $\frac{3n+1}{n+1}$.

● **а)** $\frac{3a+5}{a}=\frac{3a}{a}+\frac{5}{a}=3+\frac{5}{a}$.

б) $\frac{2a+2b+1}{a+b}=\frac{2(a+b)}{a+b}+\frac{1}{a+b}=2+\frac{1}{a+b}$.

в) $\frac{3n+1}{n+1}=\frac{3n+3-2}{n+1}=\frac{3(n+1)-2}{n+1}=\frac{3(n+1)}{n+1}-\frac{2}{n+1}=3-\frac{2}{n+1}$. ●

Усно

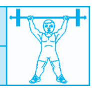
72. Знайдіть суму дробів:

а) $\frac{a}{4}+\frac{b}{4}$; **б)** $\frac{9b}{11}+\frac{3b}{11}$; **в)** $\frac{3a}{x}+\frac{a}{x}$; **г)** $\frac{x+a}{d}+\frac{a}{d}$.

73. Знайдіть різницю дробів:

а) $\frac{x}{7}-\frac{y}{7}$; **б)** $\frac{8n}{9}-\frac{3n}{9}$; **в)** $\frac{a+y}{x}-\frac{y}{x}$; **г)** $\frac{x+2y}{c}-\frac{x}{c}$.

Рівень А



Виконайте додавання (віднімання) дробів:

74. **а)** $\frac{2b}{a}+\frac{3b}{a}$; **б)** $\frac{5n+3}{3n+1}+\frac{7n-1}{3n+1}$; **в)** $\frac{2a-3}{xy}+\frac{4a}{xy}+\frac{3}{xy}$;

г) $\frac{6a}{5p}-\frac{3a}{5p}$; **д)** $\frac{3+a}{9a}-\frac{3-a}{9a}$; **е)** $\frac{9}{7-b}-\frac{b+2}{7-b}$.

75. **а)** $\frac{3n+5}{5n}+\frac{2n-7}{5n}$; **б)** $\frac{2x+1}{x-1}+\frac{1-2x}{x-1}$; **в)** $\frac{n+2}{2m}+\frac{n-2}{2m}+\frac{n}{2m}$;

г) $\frac{c+3}{b}-\frac{c}{b}$; **д)** $\frac{7b-3}{4b-1}-\frac{3b-2}{4b-1}$; **е)** $\frac{4a-1}{2a}+\frac{4+a}{2a}-\frac{5}{2a}$.

Спростіть вираз:

76. **а)** $\frac{7x-2}{4x+1}+\frac{5x+2}{4x+1}$; **б)** $\frac{a-3b}{a+b}-\frac{3a-b}{a+b}$;

в) $\frac{a-3}{3a-1}+\frac{5a+1}{3a-1}$; **г)** $\frac{6p}{p-2}-\frac{12}{p-2}$;

д) $\frac{5+a}{a-b}+\frac{5+b}{b-a}$; **е)** $\frac{x+4}{x-2y}-\frac{3x-4}{2y-x}$.

77. **а)** $\frac{6m-1}{m-1}-\frac{m+4}{m-1}$; **б)** $\frac{x+3y}{x+y}+\frac{7x+5y}{x+y}$;

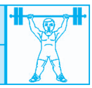
в) $\frac{8m}{m-n}+\frac{8n}{n-m}$; **г)** $\frac{c-9}{c-3}-\frac{c+9}{3-c}$.

Знайдіть значення виразу:

78. **а)** $\frac{b-3}{4b}+\frac{3b-1}{4b}$, якщо $b=-3$; **б)** $\frac{7a^2-1}{3a}-\frac{a^2-1}{3a}$, якщо $a=0{,}28$.

79. **а)** $\frac{a-3}{a^2}+\frac{3+a}{a^2}$, якщо $a=5$; **б)** $\frac{4c+5}{2c}-\frac{2c-1}{2c}$, якщо $c=0{,}4$.

Рівень Б



Спростіть вираз:

80. **а)** $\frac{c^2-2c}{c-1}-\frac{1}{1-c}$; **б)** $\frac{a^5}{a-1}-\frac{a^3}{a-1}$;

в) $\frac{b^2+9}{b^2-9}+\frac{6b}{b^2-9}$; **г)** $\frac{12a^4}{3a^2b-b^4}-\frac{4a^2b^3}{3a^2b-b^4}$;

д) $\frac{4x^2}{2x+1}+\frac{5x-1}{2x+1}-\frac{x-2}{2x+1}$; **е)** $\frac{xy-2x}{x^2-y^2}-\frac{xy-3y}{x^2-y^2}-\frac{y}{x^2-y^2}$.

81. **а)** $\frac{5y^2-14}{y-2}-\frac{y^2-10}{2-y}$; **б)** $\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3}-\frac{2xy}{(x-y)^3}$;

в) $\frac{a^2+1}{a^3-1}+\frac{a}{a^3-1}$; **г)** $\frac{18a^2}{3a-b^2}-\frac{2b^4}{3a-b^2}$;

д) $\frac{n^2}{n-3}-\frac{21-n^2}{n-3}+\frac{3}{n-3}$; **е)** $\frac{8a-b}{(5a+b)^2}-\frac{2a-3b}{(5a+b)^2}-\frac{a+b}{(5a+b)^2}$.

Доведіть тотожність:

82. **а)** $\frac{(a+b)^2}{ab}-\frac{(a-b)^2}{ab}=4$; **б)** $\frac{x^3}{(x-2)^2}-\frac{4x^2}{(x-2)^2}+\frac{4x}{(x-2)^2}=x$.

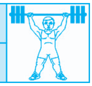
83. **а)** $\frac{(m+n)^2}{m^2+n^2}+\frac{(m-n)^2}{m^2+n^2}=2$; **б)** $\frac{4a^2}{4a^2-b^2}-\frac{2ab}{4a^2-b^2}=\frac{2a}{2a+b}$.

Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого числа і дробу:

84. **а)** $\frac{3+8x}{2x}$; **б)** $\frac{5m-5n+2}{m-n}$; **в)** $\frac{4y+5}{y+2}$; **г)** $\frac{2x-y}{x+y}$.

85. **а)** $\frac{14b+5}{7}$; **б)** $\frac{3b+3c-a}{b+c}$; **в)** $\frac{6c+1}{2c+1}$; **г)** $\frac{4x-3y}{x-y}$.

Рівень В



86. Спростіть вираз:

а) $\frac{x^2+1}{x^2+x+1}+\frac{x^4}{x^2+x+1}$; **б)** $\frac{a^4+x^4}{a^3+x^3}+\frac{a^2x^2}{a^3+x^3}$.

Вказівка. **а)** Многочлен x^4+x^2+1 можна розкласти на множники, записавши його у вигляді $(x^4+2x^2+1)-x^2$.

Вправи для повторення

87. Обчисліть:

а) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}$; **б)** $\frac{3}{14}-\frac{4}{21}$; **в)** $\frac{2}{9}-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$; **г)** $7\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{11}-4\frac{5}{6}$.

88. Подайте одночлен $24a^7b^8$ у вигляді добутку двох одночленів, одним з яких є:

а) $6a^4b^7$; **б)** $4a^2b^5$; **в)** $24a^7b$; **г)** $8ab^7$.

89. З Києва і Черкас, відстань між якими дорівнює 190 км, одночасно назустріч один одному виїхали автобус та легковий автомобіль і зустрілися через 1 год 15 хв. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона в $1\frac{1}{9}$ разу більша від швидкості автобуса.

90. Відповідно до норм агротехніки зерно потрібно засипати на тривале зберігання за вологості 14% (кондиційний стан). Зібране зерно, маса якого дорівнює 43 т, має вологість 24%. На скільки тонн зменшиться маса цього зерна при доведенні його до кондиційного стану?

Поміркуйте

91. На клітчастому папері сидять 100 павуків, по одному у клітинці. Павуки ворогують, якщо клітинки, у яких вони сидять, мають хоча б одну спільну вершину. Доведіть, що серед них завжди можна вибрати не менше ніж 25 павуків, будь-які два з яких не ворогують.

4. Додавання і віднімання дробів з різними знаменниками

Щоб додати або відняти звичайні дроби з різними знаменниками, потрібно звести дроби до спільного знаменника і додати або відняти одержані дроби з однаковими знаменниками.

У такий же спосіб додають і віднімають будь-які дроби з різними знаменниками.

Нехай потрібно додати дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$, які мають різні знаменники. Зведемо ці дроби до спільного знаменника bd. Для цього чисельник і знаменник першого дробу помножимо на d, а другого дробу — на b. Одержимо:

$$\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}; \qquad \frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}.$$

Знаючи, як додати дроби з однаковими знаменниками, матимемо:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Отже,

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}}.$$

Віднімають дроби з різними знаменниками аналогічно, а саме:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}}.$$

Щоб додати або відняти дроби з різними знаменниками, потрібно:
1) звести дроби до спільного знаменника;
2) додати або відняти одержані дроби з однаковими знаменниками.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Виконати додавання (віднімання) дробів:

а) $\frac{5b}{ac}+\frac{4c}{b}$; **б)** $\frac{4}{9x^2y^2}+\frac{7}{12xy^3}$; **в)** $\frac{2}{xy-y^2}-\frac{2}{x^2-xy}$.

• **а)** Спільним знаменником дробів є добуток їхніх знаменників. Тому додатковий множник для першого дробу — b, а для другого — ac.

$$\frac{\overset{b}{5b}}{ac}+\frac{\overset{ac}{4c}}{b}=\frac{5b^2+4ac^2}{abc}.$$

б) Спільним знаменником дробів є $36x^2y^3$. Додатковим множником для першого дробу є $4y$, для другого — $3x$.

$$\frac{\overset{4y}{4}}{9x^2y^2}+\frac{\overset{3x}{7}}{12xy^3}=\frac{16y+21x}{36x^2y^3}.$$

в) Розклавши на множники знаменники дробів, матимемо:

$$\frac{2}{xy-y^2}-\frac{2}{x^2-xy}=\frac{\overset{x}{2}}{y(x-y)}-\frac{\overset{y}{2}}{x(x-y)}=\frac{2x-2y}{xy(x-y)}=\frac{2(x-y)}{xy(x-y)}=\frac{2}{xy}. \bullet$$

Вправа 2. Подати у вигляді дробу вираз $m-3+\frac{2+m^2}{1-m}$.

• Вираз $m-3$ запишемо у вигляді дробу $\frac{m-3}{1}$. Тоді:

$$m-3+\frac{2+m^2}{1-m}=\frac{\overset{1-m}{m-3}}{1}+\frac{2+m^2}{1-m}=\frac{(m-3)(1-m)+2+m^2}{1-m}=$$

$$=\frac{m-m^2-3+3m+2+m^2}{1-m}=\frac{4m-1}{1-m}. \bullet$$

Вправа 3. Довести тотожність $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a}-1=\frac{b^2}{a(a+b)}$.

• Перетворимо ліву частину рівності:

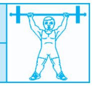
$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a}-1=\frac{a}{a+b}^{a}+\frac{b}{a}^{a+b}-\frac{1}{1}^{a(a+b)}=\frac{a^2+b(a+b)-a(a+b)}{a(a+b)}=$$

$$=\frac{a^2+ab+b^2-a^2-ab}{a(a+b)}=\frac{b^2}{a(a+b)}.$$

Шляхом тотожних перетворень ліву частину рівності звели до правої частини. Тому ця рівність є тотожністю. •

Примітка. *Нагадаємо, що для доведення тотожностей одну частину тотожності зводять до іншої частини або обидві частини зводять до того самого виразу, або утворюють різницю лівої та правої частин і доводять, що вона дорівнює нулю.*

Рівень А



Виконайте додавання (віднімання) дробів:

92. **а)** $\frac{a}{c}-\frac{m}{n}$; **б)** $\frac{a}{3}+\frac{b}{12}$; **в)** $\frac{5a}{4x}-\frac{3b}{5x}$;

г) $\frac{7c}{9y}-\frac{c}{6y}$; **д)** $\frac{5b}{12x}+\frac{7b}{18x}$; **е)** $\frac{4b}{15a}-\frac{6a}{25b}$.

93. **а)** $\frac{c}{6}+\frac{ad}{18}$; **б)** $\frac{3k}{5a}+\frac{2k}{3a}$; **в)** $\frac{n}{24x}-\frac{5n}{36x}$.

94. **а)** $\frac{a+2}{a}-\frac{3}{4}$; **б)** $\frac{7+3x}{x}+\frac{10-3y}{y}$; **в)** $\frac{a+2b}{b}-\frac{2a-b}{a}$;

г) $\frac{2}{z-1}+\frac{2}{z+1}$; **д)** $\frac{a}{a+c}-\frac{a}{c}$; **е)** $\frac{y-1}{y-2}-\frac{y+2}{y+1}$.

95. **а)** $\frac{2m-1}{m}+\frac{1}{3}$; **б)** $\frac{4-2a}{a}+\frac{3+2b}{b}$; **в)** $\frac{2x-y}{x}-\frac{2y-x}{y}$;

г) $\frac{2}{k}+\frac{1}{k+2}$; **д)** $\frac{2a}{2a+1}-\frac{3a}{3a+2}$; **е)** $\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}$.

Подайте у вигляді дробу:

96. **а)** $2+\frac{2}{2n-1}$; **б)** $3-\frac{3x-2y}{x}$; **в)** $\frac{y^2}{y-2}-y$.

97. **а)** $\frac{5-2y}{y+1}+2$; **б)** $1-\frac{2x}{2x+3}$; **в)** $\frac{2+3c^2}{c-1}-3c$.

Спростіть вираз:

98. **а)** $\frac{4x-1}{8x}+\frac{5-6x}{12x}$; **б)** $\frac{6-a}{6a}-\frac{a+18}{18a}$; **в)** $\frac{5a}{2(a+b)}-\frac{4a}{3(a+b)}$;

г) $\frac{a+2b}{a}+\frac{a-2b^2}{ab}$; **д)** $\frac{1}{c}-\frac{c-5}{c^2}$; **е)** $\frac{m+n}{m^2n}+\frac{m-n}{mn^2}$;

є) $\frac{1-y}{3xy}+\frac{2x+3}{6x^2}$; **ж)** $\frac{7}{x}-\frac{7y}{x(x+y)}$; **з)** $\frac{3}{a+b}+\frac{3a}{b(a+b)}$.

99. **а)** $\frac{3b-1}{6b}-\frac{2b-1}{4b}$; **б)** $\frac{b+4c}{5(b-c)}+\frac{b-4c}{3(b-c)}$; **в)** $\frac{3x+y}{3xy}+\frac{x-1}{3x}$;

г) $\frac{a+2}{a^2}-\frac{1}{a}$; **д)** $\frac{a+b}{ab^2}+\frac{a-2}{2ab}$; **е)** $\frac{2m+1}{m(m-1)}-\frac{2}{m-1}$.

100. **а)** $\frac{a-3b}{2a-2b}+\frac{a+3b}{4a-4b}$; **б)** $\frac{x-1}{3x-12}-\frac{x-3}{2x-8}$; **в)** $\frac{4}{c^2-2c}+\frac{2}{c}$;

г) $\frac{3}{b+3}-\frac{2b-3}{b^2+3b}$; **д)** $\frac{k}{k-2}-\frac{k^2}{k^2-4}$; **е)** $\frac{m-4n}{m^2+2mn+n^2}+\frac{4}{m+n}$.

101. **а)** $\frac{m+n}{m-n}+\frac{m-5n}{2m-2n}$; **б)** $\frac{2a}{3a+3}-\frac{3a}{5a+5}$; **в)** $\frac{1}{n-1}+\frac{n-2}{n^2-n}$;

г) $\frac{15}{a^2+5a}-\frac{3}{a}$; **д)** $\frac{16}{x^2-16}+\frac{4}{x+4}$; **е)** $\frac{x}{x^2-2xy+y^2}-\frac{1}{x-y}$.

Доведіть тотожність:

102. **а)** $\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m+n}=\frac{2m}{m^2-n^2}$; **б)** $\frac{b}{b^2-1}-\frac{1}{b+1}=\frac{1}{b^2-1}$.

103. **а)** $\frac{3}{a-3}-\frac{3}{a}=\frac{9}{a^2-3a}$; **б)** $\frac{a}{(a-b)^2}-\frac{1}{a-b}=\frac{b}{(a-b)^2}$.

Рівень Б

Перетворіть у дріб вираз:

104. а) $\dfrac{1+a}{a^2bc}+\dfrac{1-bc}{ab^2c^2}$; б) $\dfrac{4x+1}{12x^4y^2}-\dfrac{3y-1}{9x^3y^3}$;

в) $\dfrac{c+1}{cm+cn}-\dfrac{d+1}{dm+dn}$; г) $\dfrac{x}{12x-12y}+\dfrac{x}{18x+18y}$;

д) $\dfrac{a-b}{4a+4b}+\dfrac{a+b}{4b-4a}$; е) $\dfrac{1}{(b-a)^2}-\dfrac{1}{a^2-b^2}$.

105. а) $\dfrac{2a+1}{16a^3b^2}-\dfrac{3b+1}{24a^2b^3}$; б) $\dfrac{7}{ax-ay}-\dfrac{5}{by-bx}$;

в) $\dfrac{b}{a^2-b^2}-\dfrac{b}{a^2+ab}$; г) $\dfrac{x-y}{(x+y)^2}+\dfrac{1}{2x+2y}$.

Спростіть вираз:

106. а) $\dfrac{5c+3}{3c+1}-\dfrac{c^2-1}{6c^2+2c}$; б) $\dfrac{b^2}{by-y^2}+\dfrac{b}{y-b}$;

в) $\dfrac{n}{6n+9}+\dfrac{n}{4n^2-9}$; г) $\dfrac{5-2x}{x^2-25}-\dfrac{1}{10-2x}$;

д) $\dfrac{a-2}{a^2+2a}+\dfrac{8}{a^2-4}$; е) $\dfrac{2a+b}{8a^2-2ab}+\dfrac{8a+b}{b^2-4ab}$;

є) $\dfrac{5}{2m+12}-\dfrac{15}{m^2+12m+36}$; ж) $\dfrac{4x}{9x^2-24xa+16a^2}+\dfrac{x}{3xa-4a^2}$;

з) $\dfrac{9}{a^3+27}+\dfrac{a-3}{a^2-3a+9}$; и) $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{2x^2+4x}{x^3-8}$.

107. а) $\dfrac{a-1}{a}-\dfrac{a+10}{a^2-10a}$; б) $\dfrac{b+1}{ab-b^2}+\dfrac{a+1}{ab-a^2}$;

в) $\dfrac{9}{2x+6}-\dfrac{9x}{x^2-9}$; г) $\dfrac{5}{4b-32}+\dfrac{20}{64-b^2}$;

д) $\dfrac{5a}{a-9}+\dfrac{45a}{a^2-18a+81}$; е) $\dfrac{y}{4x^2+12xy+9y^2}-\dfrac{y}{4x^2+6xy}$;

є) $\dfrac{x}{x^3-1}-\dfrac{1}{x^2+x+1}$; ж) $\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{2a}{a^3+8}$.

Подайте у вигляді дробу:

108. а) $\frac{5a+6}{8a}+\frac{a-1}{4a}-\frac{a+1}{2a}$; б) $\frac{x-y}{xy}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$;

в) $\frac{a+b}{a^2}-\frac{a+b}{ab}-\frac{a-b}{b^2}$; г) $\frac{2m-n}{mn}-\frac{2}{n}+\frac{5}{m^2}$;

д) $\frac{3a+b}{2ab}-\frac{3}{2b}+\frac{b}{a^2}$; е) $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+1}+1$;

є) $x+y-\frac{x^2+y^2}{x+y}$; ж) $a^2-\frac{a^4+1}{a^2-1}+1$.

109. а) $\frac{a+3}{3a}+\frac{1}{a}-\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{a^2b}-\frac{1}{ab^2}-\frac{a+b}{a^2b^2}$;

в) $k-\frac{1}{k}-\frac{1-n^2}{kn^2}$; г) $\frac{x-1}{x^2}-\frac{x-3}{3xy}+\frac{1}{3y}$;

д) $m-\frac{(m-n)^2}{m+n}+n$; е) $\frac{2-x}{x-1}+1-\frac{1}{x+1}$.

Спростіть вираз:

110. а) $\frac{2}{5a-25}-\frac{4}{a^2-25}-\frac{1}{5a+25}$; б) $\frac{2}{x+2}-\frac{x+3}{4-x^2}+\frac{3x+1}{x^2-4x+4}$.

111. а) $\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{2b-a}-\frac{3a}{a^2-4b^2}$; б) $\frac{m-3}{m^2+6m+9}+\frac{1}{m-3}-\frac{2}{m+3}$.

Знайдіть значення виразу:

112. а) $\frac{2}{x+2}-\frac{x-2}{x^2+2x}+\frac{x-1}{x}$, якщо $x=-\frac{3}{11}$;

б) $\frac{2a}{a-b}-\frac{3a}{a+b}-\frac{a^2+3ab}{a^2-b^2}$, якщо $a=-1{,}5$; $b=11{,}5$.

113. а) $\frac{3a}{a-3}-\frac{2}{a}-\frac{3a^2}{a^2-3a}$, якщо $a=\frac{2}{17}$;

б) $\frac{x+2y}{3x-2y}-\frac{6xy+4y^2}{9x^2-4y^2}$, якщо $x=4{,}2$; $y=1{,}3$.

Доведіть тотожність:

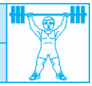
114. а) $\dfrac{x}{x^2+2x+1}=\dfrac{x+2}{x^2-1}-\dfrac{2(2x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$;

б) $\dfrac{3b-1}{b^2-1}+\dfrac{5}{2b^2+2b}-\dfrac{3}{b}=\dfrac{3b+1}{2b(b^2-1)}$.

115. а) $\dfrac{n}{n^2-2mn+m^2}=\dfrac{m+n}{n^2-mn}+\dfrac{m^2}{n(n-m)^2}$;

б) $\dfrac{1}{a+3}-\dfrac{3}{3-a}-\dfrac{4a-15}{a^2-9}=\dfrac{21}{a^2-9}$.

Рівень В



116. Знайдіть такі числа a і b, щоб рівність виконувалася для всіх допустимих значень x:

а) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$; б) $\dfrac{2x-1}{(x-3)(x+4)}=\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x+4}$.

117. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$;

б) $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{8}{1+x^8}$;

в) $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2x}{1+x^2}-\dfrac{4x^3}{1+x^4}-\dfrac{8x^7}{1+x^8}$;

г) $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}+\dfrac{1}{(a+3)(a+4)}$;

д) $\dfrac{b}{b^2-1}+\dfrac{b^2+b-1}{b^3-b^2+b-1}+\dfrac{b^2-b-1}{b^3+b^2+b+1}+\dfrac{2b^3}{1-b^4}$.

118. Доведіть тотожність:

а) $\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}=0$;

б) $\dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{2}{a-b}+\dfrac{2}{b-c}+\dfrac{2}{c-a}$.

Вправи для повторення

119. Обчисліть:

а) $\frac{9}{16}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{5}{27}$;

б) $\frac{4}{9}:\frac{2}{27}-\frac{16}{17}:\frac{8}{51}$;

в) $0,4+8\cdot\left(5-0,8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}$;

г) $\left(1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8,9-2,6:\frac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\frac{2}{5}$.

120. Розв’яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}2x+3y=12;\\2x-y=4;\end{cases}$

б) $\begin{cases}3x-5y=22;\\7x+2y=24.\end{cases}$

121. Протягом року вкладник зняв зі свого рахунку $\frac{3}{5}$ усіх грошей і не робив нових внесків. У кінці року банк нарахував 12% річних, і на рахунку вкладника стало 896 грн. Скільки грошей було на рахунку вкладника на початку року?

122. Комп’ютерний клуб планує працювати 9 год на день й обслуговувати кожного члена клубу щоденно за окремим комп’ютером протягом 1,5 год. Яку найменшу кількість комп’ютерів для цього потрібно, якщо кількість членів клубу дорівнює 50?

Поміркуйте

123. У класі навчаються 29 учнів. Відомо, що серед будь-яких трьох з них є принаймні двоє друзів. Доведіть, що у класі знайдеться учень, який має не менше ніж 14 друзів.

Завдання для самоперевірки № 1

Рівень 1

1. Чому дорівнює значення виразу $\frac{2x-1}{x-5}$, якщо $x = -4$?

а) 1; **б)** –1; **в)** $\frac{7}{9}$; **г)** не існує.

2. Для яких значень змінної не має змісту вираз $\frac{8}{2x-5}+x$?

а) $x = 0$; **б)** $x = 2$; **в)** $x = 2{,}5$; **г)** $x = 5$.

3. Скоротіть дріб $\frac{18a^2}{3a^3}$.

а) $\frac{18}{a}$; **б)** $\frac{1}{6a^3}$; **в)** $\frac{6}{a}$; **г)** $\frac{6}{a^3}$.

4. Зведіть дріб $\frac{3}{b}$ до знаменника b^2.

а) $\frac{3}{b^2}$; **б)** $\frac{3b}{b^2}$; **в)** $\frac{3b^2}{b^2}$; **г)** $\frac{3b^2}{b}$.

5. Додайте дроби: $\frac{3y-1}{y^2}+\frac{5-8y}{y^2}$.

а) $\frac{4+11y}{y^2}$; **б)** $\frac{4-5y}{2y^2}$; **в)** $4-5y$; **г)** $\frac{4-5y}{y^2}$.

6. Спростіть вираз $\frac{a+b}{a}-\frac{a-b}{2a}$.

а) $\frac{a+b}{2a}$; **б)** $\frac{b}{a}$; **в)** $\frac{a+3b}{2a}$; **г)** $\frac{3a+b}{2a}$.

Рівень 2

7. Установіть відповідність між виразами (1–4) та значеннями змінної (А–Д), для яких вираз не має змісту.

1) $\frac{a-3}{2a-3}$; **А)** 0; –1;

2) $\frac{4c^3+5}{c^2}$; **Б)** 3;

3) $\frac{11x}{2x^2-10x}$; **В)** 1,5;

4) $\frac{2z-1}{z+1}-\frac{z+1}{2z}$. **Г)** 0; 5;

Д) 0.

8. Скоротіть дріб:

а) $\frac{27a^3b^2}{36a^4b}$; **б)** $\frac{5a-10b}{3a-6b}$.

9. Знайдіть значення виразу $\frac{2a^2-6a}{a-3}$, якщо $a = 1{,}7$.

10. Подайте у вигляді дробу:

а) $\frac{5x}{a^3b}-\frac{3y}{ab^2}$; **б)** $\frac{a}{4x+4y}+\frac{b}{7x+7y}$.

11. Спростіть вираз:

а) $2+\frac{x+2y}{x-y}$; **б)** $\frac{8}{m-n}-\frac{16n}{m^2-n^2}$.

Рівень 3

12. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі $\frac{14k}{(k-2)^2-4}$.

13. Скоротіть дріб:

а) $\frac{196x^2y^5}{35x^3y}$; **б)** $\frac{3a^3-a^2}{ab^2-9a^3b^2}$.

14. Подайте у вигляді дробу:

а) $\frac{a+1}{a^2-a}-\frac{a-1}{a^2+a}$; **б)** $\frac{mn}{(m+n)^2}+\frac{n}{m-n}+\frac{n}{m+n}$.

15. Знайдіть значення виразу $\frac{1}{m^2-mn}-\frac{1}{mn-n^2}$, якщо $m=0{,}7$; $n=\frac{1}{3}$.

16. Спростіть вираз:

а) $a+b-\frac{2ab}{a+b}$; **б)** $\frac{b}{a^2-2ab+b^2}-\frac{a+b}{b^2-ab}$.

Рівень 4

17. Для яких значень змінної не має змісту вираз?

а) $\frac{15}{a^2+2a-15}$; **б)** $\frac{3}{|x-7|+|x|}$.

18. Скоротіть дріб:

а) $\frac{x^3-10x^2-4x+40}{10-x}$; **б)** $\frac{x^2-16x-a^2+64}{x+a-8}$.

19. Подайте у вигляді дробу:

а) $\frac{5x-1}{5x^2+5x}-\frac{6x-1}{6x^2+12x+6}$; **б)** $\frac{2a}{2a-b}+\frac{b}{2a+b}-\frac{4a^2+b^2}{4a^2+4ab+b^2}$.

20. Спростіть вираз $\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a+2}-\frac{a}{a^2-4}+\frac{a^2+4}{8a-2a^3}$.

21. Доведіть тотожність $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}=\frac{8}{1-x^8}$.

5. Множення дробів. Піднесення дробу до степеня

1. Множення дробів. Коли множать звичайні дроби, то окремо множать їхні чисельники та знаменники і перший добуток записують чисельником дробу, а другий — знаменником. Наприклад, $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot5}{4\cdot7}=\frac{15}{28}$.

Так само множать будь-які дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}}. \qquad (1)$$

Рівність (1) є тотожністю, тобто вона є правильною для будь-яких значень a, b, c і d, де $b\neq0$ і $d\neq0$.

З тотожності (1) випливає *правило множення дробів*:

> ***Щоб помножити дріб на дріб, потрібно перемножити окремо їхні чисельники та знаменники і перший добуток записати чисельником, а другий — знаменником дробу.***

Це правило поширюється на випадок множення трьох і більше дробів.

2. Піднесення дробу до степеня. Використовуючи правило множення дробів, піднесемо дріб до n-го степеня:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ разів}}=\frac{\overbrace{aa\ldots a}^{n\text{ разів}}}{\underbrace{bb\ldots b}_{n\text{ разів}}}=\frac{a^n}{b^n}.$$

Отже,

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}. \qquad (2)$$

З тотожності (2) випливає *правило піднесення дробу до степеня*:

> ***Щоб піднести дріб до степеня, потрібно піднести до цього степеня чисельник та знаменник і перший результат записати чисельником, а другий — знаменником дробу.***

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Виконати множення:

а) $\dfrac{a^4b}{8c^2}\cdot\dfrac{6c^3}{a^3}$; **б)** $\dfrac{ab+b^2}{a^2}\cdot\dfrac{b}{a^2-b^2}$.

• **а)** $\dfrac{a^4b}{8c^2}\cdot\dfrac{6c^3}{a^3}=\dfrac{a^4b\cdot 6c^3}{8c^2\cdot a^3}=\dfrac{3abc}{4}$;

б) $\dfrac{ab+b^2}{a^2}\cdot\dfrac{b}{a^2-b^2}=\dfrac{b(a+b)\cdot b}{a^2\cdot(a-b)(a+b)}=\dfrac{b^2}{a^2(a-b)}$. •

Вправа 2. Помножити дріб $\dfrac{x+3}{x-3}$ на многочлен $x-3$.

• Записавши многочлен $x-3$ у вигляді дробу $\dfrac{x-3}{1}$, матимемо:

$$\frac{x+3}{x-3}\cdot(x-3)=\frac{x+3}{x-3}\cdot\frac{x-3}{1}=\frac{(x+3)\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot 1}=x+3.$$

Скорочений запис: $\dfrac{x+3}{x-3}\cdot(x-3)=\dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3$.•

Вправа 3. Піднести до квадрата дріб $-\dfrac{2a^3b}{5m^2n}$.

• $\left(-\dfrac{2a^3b}{5m^2n}\right)^2=\left(\dfrac{2a^3b}{5m^2n}\right)^2=\dfrac{(2a^3b)^2}{(5m^2n)^2}=\dfrac{2^2\cdot(a^3)^2\cdot b^2}{5^2\cdot(m^2)^2\cdot n^2}=\dfrac{4a^6b^2}{25m^4n^2}$.

Скорочений запис: $\left(-\dfrac{2a^3b}{5m^2n}\right)^2=\dfrac{4a^6b^2}{25m^4n^2}$. •

Усно

124. Виконайте множення:

а) $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{m}{n}$; **б)** $\dfrac{5}{3a}\cdot\dfrac{2b}{5}$; **в)** $\dfrac{2}{k}\cdot m$; **г)** $\dfrac{3x}{4}\cdot\dfrac{1}{x}$.

125. Піднесіть до степеня:

а) $\left(\frac{a}{c}\right)^2$; б) $\left(\frac{2a}{3c}\right)^2$; в) $\left(\frac{a^2}{c}\right)^4$; г) $\left(-\frac{3a^2}{c^3}\right)^3$.

Рівень А

Виконайте множення:

126. а) $\frac{4}{3a}\cdot\frac{5b}{16}$; б) $\frac{3k}{5}\cdot\frac{2}{9k}$; в) $\frac{8b^2}{11}\cdot\frac{1}{b}$; г) $\frac{y^4}{7}\cdot\left(-\frac{14}{y^2}\right)$;

д) $\frac{c}{5d^2}\cdot\frac{25d}{c^4}$; е) $\frac{12x^3}{5y}\cdot\frac{10y}{x^2}$; є) $4x\cdot\frac{3a}{2x^3}$; ж) $\left(-\frac{5m}{6n}\right)\cdot 3n^2m$.

127. а) $\frac{3}{4b^2}\cdot\frac{2b^4}{9}$; б) $\frac{6k}{7}\cdot\frac{21}{k^5}$; в) $\frac{6x^3}{a}\cdot\left(-\frac{a^2}{9x}\right)$; г) $\frac{5a}{4y^2}\cdot 2ay$.

Подайте у вигляді дробу:

128. а) $\frac{25a^2}{4b^3}\cdot\frac{10b^2}{15a^5}$; б) $-\frac{5a}{9b^4}\cdot 3ab^3$; в) $-17x^2y\cdot\left(-\frac{y}{34x^5}\right)$.

129. а) $\frac{2x^2}{9y^2}\cdot\frac{27y^2}{4x^3}$; б) $-\frac{2a}{5b^3}\cdot(-10ab^2)$; в) $12m^2\cdot\left(-\frac{3}{16mn^3}\right)$.

Виконайте множення:

130. а) $\frac{x-y}{a^2}\cdot\frac{a^3b}{(x-y)^2}$; б) $\frac{x^3}{m+n}\cdot\frac{(m+n)^3}{x}$; в) $\frac{3x+3y}{b^3}\cdot\frac{b^2}{x+y}$;

г) $\frac{2x-1}{x^2-7x}\cdot\frac{x-7}{2x-1}$; д) $\frac{m^2-9}{m+2}\cdot\frac{m+2}{m-3}$; е) $\frac{a^2-4a+4}{a+4}\cdot\frac{a+4}{a^2-4}$.

131. а) $\frac{a+b}{y^2}\cdot\frac{y^4}{a+b}$; б) $\frac{x+y}{a^3}\cdot\frac{a^4}{(x+y)^2}$; в) $\frac{ab+ac}{k^2}\cdot\frac{k}{b+c}$;

г) $\frac{b^2-2b+1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{b-1}$; д) $\frac{y^2-16}{ab}\cdot\frac{b^2}{y-4}$; е) $\frac{c^2+2c+1}{c^3}\cdot\frac{c^5}{c^2-1}$.

Піднесіть до степеня:

132. а) $\left(\frac{2x^2}{y}\right)^2$; б) $\left(-\frac{2a^3}{3b}\right)^4$; в) $\left(-\frac{n^2k^3}{5m}\right)^3$; г) $\left(\frac{3a^2b^4}{4c^3}\right)^3$.

133. а) $\left(\frac{3m}{n^2}\right)^2$; б) $\left(\frac{2x^2}{y^2z}\right)^3$; в) $\left(-\frac{3a^3b}{5c^2}\right)^3$; г) $\left(-\frac{9x^3y^4}{5a^3}\right)^2$.

Рівень Б

Виконайте множення:

134. а) $\frac{12a^3}{x^3}\cdot\frac{5x^2y}{18a^2}\cdot\frac{b}{a^2}$; б) $\frac{3m^2}{4n}\cdot\left(-\frac{2n}{3m^3}\right)\cdot\frac{4n}{3m^2}$; в) $\frac{5ab}{xy+y^2}\cdot\frac{bx+by}{10a^3}$;

г) $\frac{xy}{a^2+a^3}\cdot\frac{a+a^2}{x^2y^3}$; д) $\frac{18a^2}{2x-x^2}\cdot\frac{4-2x}{27ax}$; е) $\frac{3a+2b}{ab+b^2}\cdot\frac{ab+a^2}{9a+6b}$.

135. а) $\frac{ab^2}{3mn}\cdot\frac{m^3}{4a^3}\cdot\frac{6mn^2}{ab^2}$; б) $\frac{5x+5y}{x+x^2}\cdot\frac{x^2+x^3}{15x+15y}$; в) $\frac{16mn}{2y+y^2}\cdot\frac{6+3y}{20m^3n}$.

Спростіть вираз:

136. а) $\frac{3a-1}{a^2-1}\cdot\frac{a+1}{9a^2-1}$; б) $\frac{b^2-a^2}{9x-9y}\cdot\frac{x^2-xy}{a-b}$;

в) $\frac{4xy}{(x+y)^2}\cdot\frac{x^2+xy}{32x^2}$; г) $\left(\frac{5y}{a-y}\right)^2\cdot\frac{a^2-y^2}{10y}$;

д) $\frac{(2x+1)^2}{7b-7a}\cdot\frac{a^2-b^2}{4x+2}$; е) $\frac{4m-4n}{(m+n)^3}\cdot\frac{m^2+2mn+n^2}{2m^2-2n^2}$;

є) $\frac{m^3-n^3}{2y-2x}\cdot\frac{x^2-y^2}{m^2+mn+n^2}$; ж) $\frac{c^2-4a^2}{a^3+b^3}\cdot\frac{3a+3b}{2a+c}$.

137. а) $\frac{5a-5b}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{x-y}{a-b}$; б) $\frac{3a-3b}{5a+5b}\cdot\frac{(a+b)^2}{b^2-a^2}$;

в) $\frac{(4-x)^2}{xy+y^2}\cdot\frac{x^2-y^2}{12-3x}$; г) $\frac{1-y^2}{2a^3+2b^3}\cdot\frac{a^2-ab+b^2}{3-3y}$;

д) $\frac{15a}{2ab+2b^2}\cdot\left(\frac{a+b}{5a}\right)^2$; е) $\frac{a^2-1}{x^3-1}\cdot\frac{x^2+x+1}{a^2+2a+1}$.

Знайдіть значення виразу:

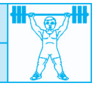
138. **а)** $\frac{2a^2}{7b}\cdot\left(-\frac{3b}{4a^3}\right)^2\cdot\frac{98a^5}{9}$, якщо $a=-1,25$; $b=8$;

б) $\frac{x^2+8x+16}{x^2-16}\cdot\frac{3x^3-12x^2}{x^2+4x}$, якщо $x=-1$; $x=0,8$; $x=4\frac{2}{3}$.

139. **а)** $\left(\frac{x}{2y^2}\right)^3\cdot\frac{16y^9}{3x^4}\cdot\left(-\frac{3}{y^2}\right)$, якщо $x=\frac{1}{7}$; $y=0,5$;

б) $\frac{a^3+27}{0,2a^3}\cdot\frac{4a^3}{a^2-3a+9}$, якщо $a=-4$; $a=5$; $a=-\frac{1}{4}$.

Рівень В



140. Спростіть вираз:

а) $\frac{x^2+xy+xz+yz}{x^2-xy+xz-yz}\cdot\frac{x^2-xy-2x+2y}{x^2+xy-2x-2y}$;

б) $\left(\frac{a^4-2a^2b+b^2}{a^2-2ab+b^2}\right)^3\cdot\left(\left(\frac{a-b}{a^2-b}\right)^3\right)^2$.

141. Знайдіть значення виразу $16^n\cdot\left(\frac{16^{n+1}+4\cdot16^n}{64^{n+1}-4\cdot64^n}\right)^2$, якщо $n=74$; $n=1000$.

142. Доведіть тотожність $\frac{x^2+(a+2)x+2a}{x^2-(a+2)x+2a}\cdot\frac{x-a}{x+a}=\frac{x+2}{x-2}$.

Вправи для повторення

143. Знайдіть числа, обернені до даних: $\frac{2}{7}$; 4; $1\frac{5}{6}$; 0,2; 1,6.

144. Обчисліть:

а) $\frac{18}{25}:\frac{4}{15}$; **б)** $4\frac{2}{3}:42-\frac{1}{6}$; **в)** $0,125:3\frac{1}{8}-1\frac{2}{5}:7$.

145. У першому резервуарі було 480 л води, а в другому — 282 л. З першого резервуара беруть щоденно 25 л води, а з другого — 16 л. Через скільки днів у першому резервуарі води буде удвічі більше, ніж у другому?

146*. Від пристані *A* до пристані *B* за течією річки одночасно відпливли катер і пліт. Коли через 1,5 год катер прибув до пристані *B*, плоту залишалося проплисти до цієї пристані ще 27 км. Не затримуючись на пристані *B*, катер вирушив у зворотний шлях. Через який час після відправки від пристані *B* катер зустріне пліт? Чому дорівнює швидкість катера у стоячій воді?

Поміркуйте

147. У тридев'ятому королівстві кожні два міста з'єднані дорогою з одностороннім рухом. Доведіть, що існує місто, з якого в будь-яке інше місто можна проїхати лише однією або двома дорогами.

6. Ділення дробів

Коли ділять звичайні дроби, то перший дріб множать на дріб, обернений до другого. Наприклад, $\frac{2}{7} : \frac{3}{5} = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{21}$.

У такий же спосіб ділять будь-які дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.}$$

Остання рівність є тотожністю, тобто вона є правильною для всіх значень a, b, c і d, де $b \neq 0$, $c \neq 0$ і $d \neq 0$. З цієї тотожності випливає *правило ділення дробів*:

Щоб поділити один дріб на другий, потрібно перший дріб помножити на дріб, обернений до другого.

Наприклад, $\frac{2a}{b^2} : \frac{a}{2b} = \frac{2a}{b^2} \cdot \frac{2b}{a} = \frac{2a \cdot 2b}{b^2 \cdot a} = \frac{4}{b}$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Виконати ділення:

а) $\frac{15a^2}{14c^3} : \frac{a^3}{7c}$;   б) $\frac{ab}{a^2-1} : \frac{3b}{a^2-a}$;   в) $\frac{4x^2-y^2}{2x} : (2x-y)$.

• а) $\frac{15a^2}{14c^3} : \frac{a^3}{7c} = \frac{15a^2}{14c^3} \cdot \frac{7c}{a^3} = \frac{15a^2 \cdot 7c}{14c^3 \cdot a^3} = \frac{15}{2c^2a}$.

б) $\frac{ab}{a^2-1} : \frac{3b}{a^2-a} = \frac{ab}{(a-1)(a+1)} \cdot \frac{a(a-1)}{3b} = \frac{ab \cdot a(a-1)}{(a-1)(a+1) \cdot 3b} = \frac{a^2}{3(a+1)}$.

в) $\frac{4x^2-y^2}{2x} : (2x-y) = \frac{(2x-y)(2x+y)}{2x} \cdot \frac{1}{2x-y} = \frac{(2x-y)(2x+y)}{2x(2x-y)} = \frac{2x+y}{2x}$. •

Усно

148. Виконайте ділення:

а) $\frac{x}{y} : \frac{m}{n}$;   б) $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$;   в) $\frac{a}{4} : 2$;   г) $3 : \frac{3}{x}$.

Рівень А

Виконайте ділення:

149. а) $\frac{a}{9} : \frac{2a}{3}$;   б) $\frac{6ab}{5c} : \frac{2b}{15}$;   в) $x^2 : \frac{1}{x}$;   г) $\frac{9}{d} : 3$;

д) $19n^3 : \frac{38n}{5p^2}$;   е) $\frac{33c^3}{12m} : (11c)$;   є) $\frac{c^3}{2a^5} : \frac{c}{4a^3}$;   ж) $\frac{12ab^2}{25x^3} : \frac{3b^3}{5x^4}$.

150. а) $\frac{3x}{10y^4} : \frac{1}{5y^3}$;   б) $27a^4 : \frac{18a^3}{7b^2}$;   в) $\frac{6x^2}{5y^2} : \frac{3x}{y^3}$;   г) $\frac{5mn^2}{7k^3} : (10n^2)$.

151. а) $\dfrac{18a^3}{-5b^4}:\dfrac{-6a^4}{15b}$; б) $-\dfrac{9b^3}{20n^2}:\dfrac{36b^4}{5n^3}$; в) $14xy^2:\left(-\dfrac{28x^2y^3}{5z}\right)$.

152. а) $\dfrac{-8x^2}{9y^2}:\dfrac{4x^2}{3y^3}$; б) $-\dfrac{15m^3}{2n^2}:\dfrac{9m^4}{8n}$; в) $-\dfrac{6xy^3}{5}:\left(-\dfrac{3x^2y^4}{10}\right)$.

Спростіть вираз:

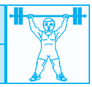
153. а) $\dfrac{6a+6b}{c^4}:\dfrac{a+b}{c^2}$; б) $\dfrac{mn-n^2}{a^3}:\dfrac{m-n}{a}$; в) $\dfrac{c^2-d^2}{k^2}:\dfrac{c+d}{k^3}$;

г) $\dfrac{x^6}{x^2-16}:\dfrac{x^4}{x-4}$; д) $\dfrac{b^3}{b^2-6b+9}:\dfrac{b}{b-3}$; е) $\dfrac{y^2-4y+4}{y+1}:\dfrac{y^2-4}{y+1}$.

154. а) $\dfrac{x^3}{ab+ac}:\dfrac{x}{b+c}$; б) $\dfrac{4-a^2}{c^4}:\dfrac{2-a}{c^3}$; в) $\dfrac{m^2n+mn}{y^5}:\dfrac{m+1}{y}$;

г) $\dfrac{k^2-25}{k}:\dfrac{k+5}{k^2}$; д) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{10}:\dfrac{x-y}{25}$; е) $\dfrac{a-2}{a^2+2a+1}:\dfrac{a-2}{a^2-1}$.

Рівень Б



Виконайте ділення:

155. а) $\dfrac{5x-x^3}{4a^3}:\dfrac{x^2}{8a^4}$; б) $\dfrac{1-b^2}{ac^3}:\dfrac{b+b^2}{a^2c^2}$; в) $\dfrac{5a^2-a}{(a-b)^2}:\dfrac{10a-2}{a-b}$;

г) $\dfrac{3x^2-3}{x^2+1}:(2x+2)$; д) $\dfrac{18ab^2}{1-x^2}:\dfrac{24a^2b}{(1-x)^2}$; е) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a-b}:\dfrac{a+b}{ac-bc}$.

156. а) $\dfrac{7c^3-c^2}{11ab^3}:\dfrac{c^2}{22a^3b}$; б) $\dfrac{4-x^2}{x+x^2}:\dfrac{2x-x^2}{x+1}$; в) $\dfrac{(m-n)^2}{m^2+m}:\dfrac{6m-6n}{m^2-1}$.

Спростіть вираз:

157. а) $\dfrac{36a^2x^6}{25b}:\left(-\dfrac{3ax^2}{5b^2}\right)^3$; б) $\left(-\dfrac{2m}{3n}\right)^4:\left(\dfrac{10m^2}{9n^3}\right)^2$;

в) $\left(\frac{5a^2b}{2c^2}\cdot\frac{a}{7b}\right):\frac{15a^2}{14bc}$; **г)** $\frac{9x^3}{5y^4}:\left(\frac{3x^4b}{5y}:\frac{3y^3}{4x}\right)$.

158. **а)** $\left(-\frac{mn^2}{2}\right)^5:\frac{5m^3n^7}{64}$; **б)** $\left(\frac{3a^2b}{2c}\right)^3:\left(\frac{9a^3}{4c}\right)^2$;

в) $\left(\frac{3xy}{5z^3}:\frac{5z}{6y}\right):\frac{6x^2y^2}{5z^4}$; **г)** $\frac{27a^3b^2}{4c^4}\cdot\left(\frac{2a^2c}{3b^2}:\frac{3b^2}{4ac^2}\right)$.

159. **а)** $\frac{3a+6b}{a^2-b^2}:\frac{7a+14b}{a^2-2ab+b^2}$; **б)** $\frac{4c^2+4c+1}{3x-3y}:\frac{1-4c^2}{x^2-y^2}$;

в) $\frac{mn^2}{m^3+n^3}:\frac{4m^2n}{m^2-mn+n^2}$; **г)** $\left(\frac{3a}{a-b}\right)^2:\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}$;

д) $\frac{2x-2y}{(x+y)^3}:\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}$; **е)** $\frac{a^3-27}{a-2a^2}:\frac{a^2+3a+9}{4a^2-1}$.

160. **а)** $\frac{(a-b)^2}{ab+b^2}:\frac{a^2-b^2}{ab^2+b^3}$; **б)** $\frac{x+2y}{3x-3y}:\frac{2(x+2y)^2}{x^2-y^2}$;

в) $\frac{2c+4d}{1+b+b^2}:\frac{ac+2ad}{1-b^3}$; **г)** $\frac{ab-ac}{4-2a+a^2}:\frac{c^2-b^2}{a^3+8}$.

Знайдіть значення виразу:

161. **а)** $\left(\frac{2a^2}{7b}\right)^4:\left(-\frac{a^3}{49b^3}\right)^2$, якщо $a=-0{,}25;\ b=4$;

б) $\frac{4m^2+4m+1}{4m^2-1}:\frac{2m^2+m}{10m-5}$, якщо $m=-5;\ m=0{,}5;\ m=\frac{1}{15}$.

162. $\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2:\frac{a^2-2ab}{a^2-4b^2}$, якщо $a=-3,\ b=4;\ a=78,\ b=11$.

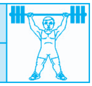
Доведіть тотожність:

163. **а)** $\frac{a^2-b^2}{4ab}:\frac{5a+5b}{8ab^2}=\frac{2b(a-b)}{5}$;

б) $\left(1-\frac{m}{m+n}-\frac{m}{m-n}\right):\frac{m-n}{m+n}=-\frac{m^2+n^2}{(m-n)^2}$.

164. **а)** $(3x-12y):\dfrac{x^2-16y^2}{2x}=\dfrac{6x}{x+4y}$; **б)** $a:\dfrac{a-1}{2}-\dfrac{a^3-1}{2a^2+2a}:\dfrac{a^2+1-2a}{4a}=\dfrac{2}{1-a^2}$.

Рівень В



165. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{x^2-0,25}{x^6-x^4-x^2+1}:\left(\dfrac{x-0,5}{x^2-1}\right)^2$; **б)** $\dfrac{a^2+6a+5}{a^2-ab+a-b}:\dfrac{a^2+4a-5}{a^2-ab-a+b}$.

166. Доведіть, що вираз $\dfrac{x+3y}{x^2+xy-2y^2}:\dfrac{x^2+2xy-3y^2}{x+2y}$ набуває лише додатних значень.

167. На причалі *А* стоять піднімальні крани № 1 і № 2, а на причалі *Б* — піднімальні крани № 3 і № 4. За допомогою крана № 1 можна розвантажити баржу на 3 год, 2 год і 1 год швидше, ніж за допомогою відповідно кранів № 2, № 3 і № 4. На якому причалі за допомогою обох його кранів можна швидше розвантажити баржу?

Вправи для повторення

168. Розв’яжіть рівняння:

а) $3(x + 4) = 4(x + 3)$; **б)** $2x(x - 1) + x(x - 2) = 3x^2 - 2$.

169. Функція задана формулою $y = 5x - 8$.

а) Знайдіть значення функції, якщо $x = -1$; $x = 3$.

б) Знайдіть значення аргументу, якщо $y = -3$; $y = 6$.

170. Футболка коштує *n* грн. Якщо купувати дві футболки, то магазин на другу футболку дає знижку 30%. Скільки гривень доведеться заплатити, якщо купувати дві футболки?

171. Є сталь двох сортів з умістом нікелю 10% і 40%. Скільки тонн сталі кожного сорту потрібно взяти, щоб після переплавки одержати 12 т сталі, яка містила б 30% нікелю?

Поміркуйте

172. У клітинках таблиці розміру 3 × 3 записано цілі числа так, що будь-які два числа, записані у сусідніх по стороні клітинках, відрізняються не більше ніж на 1. Доведіть, що існують дві клітинки, у яких записано те саме число.

7. Тотожні перетворення раціональних виразів

У курсі алгебри нам уже траплялося чимало завдань, для розв'язання яких потрібно було перетворювати той чи інший вираз. Зокрема, перетворення цілих раціональних виразів ми використовували для розв'язування рівнянь, доведення тотожностей, знаходження значень виразів. Розглянемо деякі задачі, пов'язані з тотожними перетвореннями дробових раціональних виразів.

Приклад 1. Спростити вираз $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$.

● Спочатку подамо вирази в кожній дужці у вигляді дробів, а потім знайдемо їх частку:

1) $\frac{a}{a+1}+1=\frac{a+a+1}{a+1}=\frac{2a+1}{a+1}$;

2) $1-\frac{3a^2}{1-a^2}=\frac{1-a^2-3a^2}{1-a^2}=\frac{1-4a^2}{1-a^2}$;

3) $\frac{2a+1}{a+1}:\frac{1-4a^2}{1-a^2}=\frac{2a+1}{a+1}\cdot\frac{1-a^2}{1-4a^2}=\frac{(2a+1)\cdot(1-a)(1+a)}{(a+1)\cdot(1-2a)(1+2a)}=\frac{1-a}{1-2a}$.

Проведені перетворення можна записувати в рядок:

$$\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)=\frac{a+a+1}{a+1}:\frac{1-a^2-3a^2}{1-a^2}=\frac{2a+1}{a+1}:\frac{1-4a^2}{1-a^2}=$$

$$=\frac{2a+1}{a+1}\cdot\frac{1-a^2}{1-4a^2}=\frac{(2a+1)\cdot(1-a)(1+a)}{(a+1)\cdot(1-2a)(1+2a)}=\frac{1-a}{1-2a}. \bullet$$

Раціональний вираз у прикладі 1 ми звели до раціонального дробу $\frac{1-a}{1-2a}$. Взагалі, будь-який раціональний вираз можна подати у вигляді раціонального дробу.

Приклад 2. Довести, що для всіх допустимих значень змінних вираз $\frac{xy-y^2}{x^2-y^2}:\frac{x+2y}{x+y}+\frac{2x+3y}{x+2y}$ набуває того самого значення.

● Спростимо даний вираз:

$$\frac{xy-y^2}{x^2-y^2}:\frac{x+2y}{x+y}+\frac{2x+3y}{x+2y}=\frac{y(x-y)}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{x+y}{x+2y}+\frac{2x+3y}{x+2y}=$$

$$=\frac{y}{x+2y}+\frac{2x+3y}{x+2y}=\frac{2x+4y}{x+2y}=\frac{2(x+2y)}{x+2y}=2.$$

Отже, для всіх допустимих значень змінних значення виразу дорівнює тому самому числу (числу 2). ●

Приклад 3. Довести тотожність $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\dfrac{b+a}{b-a}$.

● Спростимо ліву частину рівності:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{b+a}{ab}:\frac{b-a}{ab}=\frac{b+a}{ab}\cdot\frac{ab}{b-a}=\frac{b+a}{b-a}.$$

Шляхом тотожних перетворень ліву частину рівності звели до правої частини. Тому ця рівність є тотожністю. ●

Рівень А

Спростіть вираз:

173. а) $\left(1+\frac{1}{a}\right):\frac{a^2-1}{3}$; **б)** $\left(\frac{1}{a+5}-\frac{1}{a-5}\right):\frac{5}{a+5}$;

в) $\dfrac{a^2-49}{a^2}\cdot\dfrac{1}{a+7}-\dfrac{1}{a}$; **г)** $\left(\dfrac{2}{b-2}-\dfrac{1}{2b-1}\right):\dfrac{6b}{b-2}$;

д) $\dfrac{a^4}{a^2-8a+16}:\dfrac{a}{2a-8}-\dfrac{a^3}{a-4}$; **е)** $\left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{x}{x+y}\right)\cdot\dfrac{x+y}{xy}$.

174. **а)** $\left(1-\dfrac{1}{b}\right)\cdot\dfrac{4}{b^2-2b+1}$; **б)** $\dfrac{a-5}{a}-\dfrac{a^2-100}{a-5}\cdot\dfrac{1}{a-10}$;

в) $\dfrac{x^2+2x}{3}\cdot\dfrac{9}{x+2}-\dfrac{3x^2}{x-4}$; **г)** $\left(\dfrac{4}{c+2}-\dfrac{2}{c+1}\right):\dfrac{8c}{c+2}$.

175. Спростіть вираз $\dfrac{x^2+x}{2}\cdot\dfrac{12}{x+1}-\dfrac{6x^2}{x+3}$ і знайдіть його значення, якщо $x=6$.

176. Спростіть вираз $\left(\dfrac{c}{c-9}-\dfrac{c}{c+9}\right):\dfrac{9c}{c+9}$ і знайдіть його значення, якщо $c=11$.

Доведіть тотожність:

177. **а)** $\dfrac{a}{a^2+18a+81}:\dfrac{a}{9a+81}+\dfrac{a}{a+9}=1$;

б) $\dfrac{b^6}{b^2-2b+1}:\dfrac{b^4}{3b-3}-\dfrac{2b^2+1}{b-1}=b+1$.

178. **а)** $\dfrac{4x}{x+y}:\left(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}\right)=2x-2y$;

б) $\dfrac{5a+10}{a^2}\cdot\dfrac{a^2+3a}{a+2}-\dfrac{15}{a}=5$.

Рівень Б

Спростіть вираз:

179. **а)** $\dfrac{m}{n-m}-\dfrac{m^3-mn^2}{m^2+n^2}\cdot\left(\dfrac{m}{(m-n)^2}-\dfrac{n}{m^2-n^2}\right)$;

б) $\dfrac{a}{3-a}+\dfrac{a^2+3a}{2a+3}\cdot\left(\dfrac{a+3}{a^2-3a}-\dfrac{a}{a^2-9}\right)$;

в) $\left(\dfrac{2a}{2a+b}-\dfrac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\dfrac{2a}{4a^2-b^2}+\dfrac{1}{b-2a}\right)$;

г) $\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{a+b}\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right):\dfrac{(a+b)^2}{ab}$;

д) $\left(\dfrac{2x^2+x}{x^3-1}-\dfrac{x+1}{x^2+x+1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+5}{x+1}\right)$.

180. **а)** $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}-\dfrac{xy-y^2}{x^2-y^2}:\left(1-\dfrac{x}{x+y}\right)$;

б) $\left(\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{x+3}{x^2-4}+\dfrac{3x+1}{x^2-4x+4}\right):\dfrac{3x^2+2}{x^2-4}$;

в) $\left(\dfrac{x-2}{x^2-2x+4}-\dfrac{6x-13}{x^3+8}\right):\dfrac{15-5x}{2x^3+16}$;

г) $\left(\dfrac{49}{a^3+27}-\dfrac{a+3}{a^2-3a+9}\right)\cdot\dfrac{a^4+27a}{16-a^2}+\dfrac{40-a^2}{a+4}$.

181. **а)** $\dfrac{a+\dfrac{1}{b}}{1+\dfrac{1}{ab}}$; **б)** $\dfrac{x-6+\dfrac{9}{x}}{1-\dfrac{3}{x}}$;

в) $\dfrac{\dfrac{1}{m+n}+\dfrac{1}{m-n}}{\dfrac{1}{m+n}-\dfrac{1}{m-n}}$; **г)** $\dfrac{\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{a}{m}}{\dfrac{m}{a}+\dfrac{a}{m}-1}$.

182. **а)** $\dfrac{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}$; **б)** $\dfrac{\dfrac{1}{c-1}-\dfrac{1}{c+1}}{\dfrac{1}{c-1}+\dfrac{1}{c+1}}$.

183. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+b}{a-b}\cdot\dfrac{a}{b}$ дорівнює тому самому числу.

184. Доведіть, що значення виразу $\left(m^2n-\dfrac{m^2n^2}{m+n}\right):\left(mn^2-\dfrac{m^2n^2}{m+n}\right)$ є додатним числом для будь-яких допустимих значень змінних.

185. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}\right):\left(1-\frac{4a^2-b^2}{a^2-b^2}\right)$ не залежать від значень b.

Доведіть тотожність:

186. **а)** $\left(\frac{m^2-n^2}{mn}-\frac{1}{m+n}\cdot\left(\frac{m^2}{n}-\frac{n^2}{m}\right)\right):\frac{m-n}{m}=\frac{m}{m+n}$;

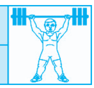
б) $\frac{a^2-2a+1}{a^2-3a}\cdot\left(\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\frac{3}{a^2-a}\right)=\frac{a-1}{a^2}$;

в) $\left(\frac{b}{a^2+ab}-\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right):\left(\frac{b}{a}-2+\frac{a}{b}\right)=\frac{1}{a+b}$.

187. **а)** $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{3}{a^3+1}+\frac{3}{a^2-a+1}\right)\cdot\left(a-\frac{2a-1}{a+1}\right)=1$;

б) $\left(\frac{a}{a+n}-\frac{a}{a^2+n^2+2an}\right):\left(\frac{a}{a-n}-\frac{a}{a^2-n^2}\right)=\frac{a-n}{a+n}$.

Рівень В



188. Спростіть вираз:

а) $\left(\frac{1}{a^2-9}:\frac{b-a}{3a^2+9a}-\frac{3a}{9-3b-3a+ab}\right):\frac{3a}{b^3-27}$;

б) $\left(1+2\cdot\frac{10y^2-3xy}{x^2-3xy}\right)\cdot\left(\frac{1}{x-5y}+\frac{2y}{(x-5y)^2}\right)$.

189. Знайдіть значення виразу:

а) $x^2+\frac{1}{x^2}$, якщо $x+\frac{1}{x}=2,5$;   **б)** $x^2+\frac{1}{4x^2}$, якщо $x-\frac{1}{2x}=-0,5$.

190. Доведіть тотожність:

а) $\left(\frac{x-3}{x+1}+\frac{4}{x^2+2x+1}\right)\cdot\left(\frac{x(x+3)}{1-3x+3x^2-x^3}+\frac{1}{x^2-2x+1}\right)=\frac{1}{1-x}$;

б) $\dfrac{a+2}{12-4a-3a^2+a^3}-\dfrac{1-a}{6-5a+a^2}=\dfrac{a^2-3a}{a-2}\cdot\left(1-\dfrac{a-2}{a-3}\right)^2.$

191. Подайте у вигляді раціонального дробу: $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}}.$

Вправи для повторення

192. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x-1)(x^2+x+1)-x^3-x^2=2x;$ **б)** $(x+2)^2-4=0;$

в) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x+4}{3}=1;$ **г)** $\dfrac{y-3}{5}+\dfrac{y+3}{4}=6.$

193. Для яких значень a рівняння $(a^2-3a)x=2a-6$ не має коренів? має один корінь?

194. З пункту A до пункту B, відстань між якими дорівнює 360 км, вийшов товарний поїзд і рухався зі швидкістю 50 км/год. Через 40 хв назустріч йому з пункту B вийшов пасажирський поїзд і рухався зі швидкістю 90 км/год. На якій відстані від пункту A поїзди зустрілися?

195*. По круговій доріжці велотреку їдуть два велосипедисти зі сталими швидкостями. Коли вони їдуть у протилежних напрямках, то зустрічаються через кожні 10 с; коли ж їдуть в одному напрямку, то один наздоганяє іншого через кожні 100 с. Яка швидкість кожного велосипедиста, якщо довжина доріжки дорівнює 200 м?

Поміркуйте

196. На дошці написані числа 1, 2, 3, …, 25. Дозволяється стерти будь-які два числа і написати їх добуток. Повторивши таку операцію 24 рази, одержимо одне число. Доведіть, що це число ділиться на 1 000 000.

8. Раціональні рівняння

1. Цілі та дробові раціональні рівняння. Розглянемо рівняння:

$$2(x-7)=3x-9; \qquad \frac{6x}{x-9}=4; \qquad \frac{5}{x-1}=\frac{3}{x-4}.$$

Ліва і права частини кожного з цих рівнянь є раціональними виразами. Такі рівняння називають *раціональними рівняннями*.

Означення **Рівняння, ліва і права частини яких є раціональними виразами, називають раціональними рівняннями.**

Раціональні рівняння поділяють на цілі й дробові. Якщо обидві частини раціонального рівняння є цілими виразами, то таке рівняння називають *цілим раціональним рівнянням*. Раціональне рівняння, у якого хоча б одна частина є дробовим виразом, називають *дробовим раціональним рівнянням*.

$2(x-7)=3x-9$ — ціле раціональне рівняння;

$\frac{3(y-2)}{5}=\frac{2(y+1)}{3}$ — ціле раціональне рівняння;

$\frac{6x}{x-9}=4$ — дробове раціональне рівняння;

$\frac{5}{x-1}=\frac{3}{x-4}$ — дробове раціональне рівняння.

2. Розв’язування дробових раціональних рівнянь на основі умови рівності дробу нулю. Пригадаймо: *дріб дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля.*

$$\frac{a}{b}=0 \text{ тоді й тільки тоді, коли } a=0 \text{ і } b\neq 0.$$

Дане твердження можна використовувати для розв’язування дробових раціональних рівнянь. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв’язати рівняння $\frac{x^2-2x}{x-2}=0.$

● Використаємо умову, за якої дріб дорівнює нулю. Прирівняємо чисельник дробу до нуля:

$$x^2-2x=0; \quad x(x-2)=0; \quad x=0 \text{ або } x=2.$$

Перевіримо, чи для знайдених значень x знаменник $x - 2$ відмінний від нуля.

Якщо $x = 0$, то $x - 2 = 0 - 2 = -2 \neq 0$. Тому $x = 0$ — корінь рівняння.

Якщо $x = 2$, то $x - 2 = 2 - 2 = 0$. Тому $x = 2$ — не є коренем рівняння.

Відповідь. 0. •

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\frac{6x}{x-9} = 4$.

• Зведемо дане рівняння до рівняння, ліва частина якого є дробом, а права — нулем:

$$\frac{6x}{x-9} = 4; \quad \frac{6x}{x-9} - 4 = 0; \quad \frac{6x - 4(x-9)}{x-9} = 0; \quad \frac{2x+36}{x-9} = 0.$$

Прирівняємо чисельник дробу $\frac{2x+36}{x-9}$ до нуля:

$$2x + 36 = 0; \quad 2x = -36; \quad x = -18.$$

Якщо $x = -18$, то знаменник $x - 9$ дробу відмінний від нуля. Справді:

$$x - 9 = -18 - 9 = -27 \neq 0.$$

Отже, $x = -18$ — корінь даного рівняння.

Відповідь. –18. •

Щоб розв'язати дробове раціональне рівняння на основі умови рівності дробу нулю, потрібно:

1) звести його до вигляду $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, де $f(x)$ і $g(x)$ — цілі раціональні вирази;
2) прирівняти до нуля чисельник дробу й розв'язати одержане ціле раціональне рівняння $f(x) = 0$;
3) виключити з його коренів ті, для яких знаменник дробу дорівнює нулю.

3. Рівносильність рівнянь. Розв'язуючи приклад 1, ми мали ланцюжок рівнянь

Рівняння	$\frac{x^2 - 2x}{x-2} = 0$	$x^2 - 2x = 0$	$x(x-2) = 0$
Корені	0	0; 2	0; 2

Перше з цих рівнянь має один корінь — число 0, друге та третє рівняння мають два ті самі корені — числа 0 і 2.

Означення **Два рівняння, які мають ті самі корені, називають рівносильними. Два рівняння, які не мають коренів, теж вважають рівносильними.**

Отже,
рівняння $x^2 - 2x = 0$ і $x(x - 2) = 0$ рівносильні;
рівняння $\dfrac{x^2-2x}{x-2} = 0$ і $x^2 - 2x = 0$ не рівносильні.

Рівняння $x + 6 = x$ і $0x = 1$ рівносильні, бо кожне з них не має коренів.

Оскільки розв’язування рівняння $\dfrac{x^2-2x}{x-2} = 0$ зводиться до розв’язування рівняння $x^2 - 2x = 0$ і перевірки умови $x - 2 \neq 0$, то кажуть, що рівняння $\dfrac{x^2-2x}{x-2} = 0$ рівносильне системі $\begin{cases} x^2-2x=0; \\ x-2\neq 0. \end{cases}$ Розв’язком цієї системи, як ми вже з’ясували, є число $x = 0$.

Рівняння $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ *рівносильне системі* $\begin{cases} f(x)=0; \\ g(x)\neq 0. \end{cases}$

У 7 класі ми розглядали перетворення рівнянь, виконуючи які, одержують рівняння з тими самими коренями. Отже, ці перетворення переводять рівняння в рівносильне йому рівняння. З ними пов’язані такі *основні властивості рівнянь:*

Властивість 1. *Якщо в деякій частині рівняння виконати тотожне перетворення, яке не змінює допустимі значення змінної, то одержимо рівняння, рівносильне даному.*

Властивість 2. *Якщо деякий доданок перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному.*

Властивість 3. *Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити те саме, відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.*

4. Множення обох частин рівняння на вираз зі змінною. Розглянемо приклад.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\frac{y+1}{y-3}-\frac{1}{y+3}=\frac{6}{y^2-9}$.

• Оскільки $y^2 - 9 = (y - 3)(y + 3)$, то спільним знаменником усіх дробів, які входять у рівняння, є $(y - 3)(y + 3)$. Помноживши обидві частини рівняння на спільний знаменник, за умови, що $(y - 3)(y + 3) \neq 0$, матимемо:

$$\frac{y+1}{y-3}-\frac{1}{y+3}=\frac{6}{y^2-9} \quad \Big| \cdot (y-3)(y+3);$$

$$(y + 3)(y + 1) - (y - 3) = 6;$$

$$y^2 + y + 3y + 3 - y + 3 - 6 = 0;$$

$$y^2 + 3y = 0; \quad y(y + 3) = 0; \quad y = 0 \text{ або } y = -3.$$

Якщо $y = 0$, то $(y - 3)(y + 3) = -3 \cdot 3 \neq 0$. Тому $y = 0$ — корінь рівняння.

Якщо $y = -3$, то $(y - 3)(y + 3) = -6 \cdot 0 = 0$. Тому $y = -3$ — не є коренем рівняння.

Відповідь. 0. •

Звернемо увагу, що рівняння $\frac{y+1}{y-3}-\frac{1}{y+3}=\frac{6}{y^2-9}$ має один корінь $y = 0$, а одержане у розв'язанні рівняння $(y + 3)(y + 1) - (y - 3) = 6$ — два корені $y = 0$ та $y = -3$. Отже, помноживши обидві частини дробового рівняння на спільний знаменник, ми не втратили його корінь, проте одержали *сторонній* щодо цього рівняння корінь $y = -3$.

Правильним є таке твердження:

Якщо обидві частини деякого рівняння помножити на цілий вираз зі змінною, то можна одержати рівняння, не рівносильне даному. Одержане рівняння має такі властивості: 1) його коренями є всі корені даного рівняння; 2) воно може мати сторонні корені щодо даного рівняння.

Сторонніми коренями можуть бути значення змінної, для яких цілий вираз, на який ми множимо обидві частини рівняння, набуває значення 0. Ці сторонні корені можна відкинути, зробивши перевірку.

Щоб розв'язати дробове раціональне рівняння, можна:
1) помножити обидві частини рівняння на спільний знаменник дробів, які входять до рівняння, і замінити його цілим раціональним рівнянням;
2) розв'язати одержане ціле раціональне рівняння;
3) виключити з його коренів ті, для яких спільний знаменник дробів дорівнює нулю.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати рівняння $\frac{2x^2-2}{x^2+2x}+\frac{1}{x}=\frac{x}{x+2}$.

• $\frac{2x^2-2}{x(x+2)}+\frac{1}{x}-\frac{x}{x+2}=0$; $\frac{2x^2-2+(x+2)-x^2}{x(x+2)}=0$; $\frac{x^2+x}{x(x+2)}=0$;

$$\begin{cases} x^2+x=0; \\ x(x+2)\neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+1)=0; \\ x(x+2)\neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \text{ або } x=-1; \\ x\neq 0; \\ x\neq -2; \end{cases} \qquad x=-1.$$

Відповідь. –1. •

Вправа 2. Розв'язати рівняння $\frac{2}{x-2}=\frac{2x+5}{x^2-4}$.

• Розглядатимемо рівність $\frac{2}{x-2}=\frac{2x+5}{x^2-4}$ як пропорцію. За основною властивістю пропорції маємо:

$$2(x^2-4)=(x-2)(2x+5), \text{ за умови, що } x-2\neq 0 \text{ і } x^2-4\neq 0.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$2x^2-8=2x^2+5x-4x-10; \quad -8=x-10; \quad x=2.$$

Якщо $x=2$, то $x-2=2-2=0$, тобто для $x=2$ умова $x-2\neq 0$ не виконується. Тому $x=2$ — не корінь рівняння.

Відповідь. Коренів немає. •

Вправа 3. З міста A до міста B, відстань між якими дорівнює 21 км, виїхав велосипедист, а через 20 хв услід за ним — мотоцикліст, швидкість якого утричі більша від швидкості велосипедиста. Знайти швидкість велосипедиста, якщо відомо, що мотоцикліст приїхав у місто B на 40 хв раніше, ніж велосипедист.

● Нехай швидкість велосипедиста дорівнює x км/год, тоді швидкість мотоцикліста — $3x$ км/год. Шлях завдовжки 21 км велосипедист подолав за $\frac{21}{x}$ год, а мотоцикліст — за $\frac{21}{3x}=\frac{7}{x}$ (год). Оскільки велосипедист був у дорозі на 20 хв + 40 хв = 60 хв = 1 год довше, ніж мотоцикліст, то маємо рівняння

$$\frac{21}{x}-\frac{7}{x}=1.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$\frac{21}{x}-\frac{7}{x}-1=0;\quad \frac{21-7-x}{x}=0;\quad \frac{14-x}{x}=0;\quad \begin{cases}14-x=0;\\ x\neq 0;\end{cases}\quad x=14.$$

Відповідь. 14 км/год. ●

Усно

197. Назвіть цілі раціональні рівняння; дробові раціональні рівняння:

а) $\frac{5}{x-7}=1$; **б)** $3(x-11)=0$; **в)** $\frac{1}{3}-x=3$; **г)** $\frac{2}{x^2}=0$.

198. Чи є число 1 коренем рівняння?

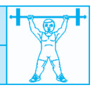
а) $\frac{x-1}{x-5}=0$; **б)** $\frac{x-1}{4x-4}=0$; **в)** $\frac{x^2-1}{x+1}=0$; **г)** $\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x+1}$.

199. Чи рівносильні рівняння?

а) $\frac{4x}{x-1}=8$ і $\frac{x}{x-1}=2$; **б)** $\frac{1}{2x}=\frac{3}{x+1}$ і $\frac{1}{2x}-\frac{3}{x+1}=0$;

в) $\frac{x^2(x+3)}{x}=0$ і $x(x+3)=0$; **г)** $\frac{2x}{x-2}=\frac{4}{x-2}$ і $2x=4$.

Рівень А



Розв'яжіть рівняння:

200. **а)** $\frac{x+8}{x-1}=0$; **б)** $\frac{x-1}{x+8}=0$; **в)** $\frac{2x-8}{x^2-16}=0$.

201. **а)** $\frac{2x}{x-3}+\frac{x-6}{x-3}=0$; **б)** $\frac{3x+1}{x+1}=\frac{2x-2}{x+1}$; **в)** $\frac{x-5}{x-6}=\frac{2x}{x-6}$.

202. **а)** $\frac{x+2}{x}+1=0$; **б)** $\frac{x}{x+1}=2$; **в)** $\frac{x-10}{x}=3$.

203. а) $\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{4x}=1;$ б) $\dfrac{1}{5x}+\dfrac{3}{4x}=2;$ в) $\dfrac{4}{3x}-\dfrac{1}{2x}=1.$

204. а) $\dfrac{2x+4}{4+x}=0;$ б) $\dfrac{2x-10}{25-x^2}=0;$ в) $\dfrac{4x}{x-2}=\dfrac{12}{x-2};$

г) $\dfrac{3x-4}{2x}=\dfrac{x-6}{2x};$ д) $\dfrac{x-1}{x+5}+2=0;$ е) $\dfrac{5x-10}{x}=4;$

є) $\dfrac{x-5}{2x-1}=-4;$ ж) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2x}=5;$ з) $\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{3x}=1.$

205. а) $\dfrac{2x^2-4x}{x-2}=0;$ б) $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x-2}=0;$ в) $\dfrac{x+3}{x-1}=\dfrac{2x}{2x+3}.$

206. а) $\dfrac{x^2-3x}{2x+1}=0;$ б) $\dfrac{x^2}{x+2}+x=0;$ в) $\dfrac{x-5}{x+2}=\dfrac{3x}{3x-1}.$

207. Яке число потрібно додати до знаменника дробу $\dfrac{19}{41}$, щоб одержати дріб, який дорівнює $\dfrac{1}{3}$?

208. Яке число потрібно відняти від знаменника дробу $\dfrac{3}{47}$, щоб одержати дріб, який дорівнює $\dfrac{1}{4}$?

209. Яке те саме число потрібно додати до чисельника дробу $\dfrac{1}{2}$ й помножити на нього знаменник цього дробу, щоб одержати дріб, який дорівнює $\dfrac{2}{3}$?

210. На яке те саме число потрібно помножити чисельник дробу $\dfrac{1}{5}$ й додати його до знаменника цього дробу, щоб одержати дріб, який дорівнює $\dfrac{1}{2}$?

Рівень Б

211. Чи рівносильні рівняння $\dfrac{x(2x-3)}{x}=0$ та $x(2x-3)=0$? Відповідь обґрунтуйте.

212. Доведіть, що рівняння $\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}$ та $x+2=3$ не рівносильні.

Розв'яжіть рівняння:

213. **а)** $\frac{x+1}{2x-2}+\frac{x+4}{2x+3}=1;$ **б)** $\frac{x+6}{x-1}+\frac{x-6}{x+1}=2;$

в) $\frac{x-10}{x^2-5x}+\frac{x}{x-5}=\frac{2}{x};$ **г)** $\frac{x+5}{x-2}-\frac{x+3}{x+2}=\frac{2}{x^2-4};$

д) $\frac{3y-1}{2y+5}+\frac{4-3y}{5-2y}=\frac{15}{25-4y^2};$ **е)** $\frac{2}{x^2-3x}+\frac{5}{x^2+3x}=\frac{8}{x^2-9};$

є) $\frac{7}{(x-2)^2}-\frac{3}{(x+2)^2}=\frac{4}{x^2-4};$ **ж)** $\frac{2x}{(2x+3)^2}-\frac{1}{2x-3}+\frac{4}{4x^2-9}=0.$

214. **а)** $\frac{5x+4}{x-2}-\frac{4x+1}{x+3}=1;$ **б)** $\frac{6x-5}{3x+1}-\frac{x-2}{x-3}=1;$

в) $\frac{2x-9}{1-x}+\frac{2x+1}{x+1}=\frac{1}{1-x^2};$ **г)** $\frac{2z+3}{2z-3}-\frac{2z-3}{2z+3}=\frac{3}{4z^2-9};$

д) $\frac{2x-3}{x^2+4x}-\frac{3}{x}=\frac{5}{x+4};$ **е)** $\frac{x-2}{x^2+x}+\frac{5-x}{x^2-x}=\frac{8}{x^2-1}.$

215. Відстань між містами A та B дорівнює 720 км. З міста A до міста B виїхав автомобіль й одночасно з ним вилетів літак. Автомобіль прибув до міста B на 10 год пізніше, ніж літак. Знайдіть швидкості літака та автомобіля, якщо швидкість літака в 6 разів більша, ніж швидкість автомобіля.

216. До басейну підведені дві труби. Через першу трубу басейн можна наповнити водою вдвічі швидше, ніж через другу. Якщо відкрити обидві труби одночасно, то басейн можна наповнити за 4 год. За який час можна наповнити басейн через кожну трубу окремо?

217. Батько й син скопали грядку за 15 хв. За який час може скопати грядку батько, працюючи сам, якщо він може це зробити удвічі швидше, ніж син?

218. Моторний човен проплив 18 км за течією річки і повернувся назад. На весь шлях він затратив 1 год 45 хв. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість човна у стоячій воді дорівнює 21 км/год.

219. Теплохід пройшов 12 км за течією річки і 10 км проти течії за 1 год. Знайдіть швидкість теплохода у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

Рівень В

220. Знайдіть значення a, для яких рівняння $\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-a}=0$ рівносильне рівнянню $(x-1)(x-2)=0$.

Розв'яжіть рівняння:

221. **а)** $\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+3x+2}=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+3x+4}$; **б)** $\dfrac{2}{x^2-2x-1}+\dfrac{2}{x^2-2x+2}=-1$.

222. **а)** $\dfrac{|x-4|-5}{x+1}=0$; **б)** $\dfrac{|2x+1|-3}{|x-2|-4}=0$;

в) $\dfrac{x^2-25}{|x-3|-2|x-6|}=0$; **г)** $\dfrac{|x-3|-4}{x^3-2x^2-2x+1}=0$.

223. Розв'яжіть рівняння з параметром a:

а) $\dfrac{x-2a}{x-4}=0$; **б)** $\dfrac{x-3}{x+3a}=0$;

в) $\dfrac{x-2a+4}{x-a}=0$; **г)** $\dfrac{x-a+1}{(x-3)(2x+3)}=0$.

Розв'язання. **а)** Прирівняємо чисельник дробу до нуля: $x-2a=0$; $x=2a$. Якщо $x=2a$, то знаменник дробу дорівнює: $x-4=2a-4$. Одержаний знаменник дорівнює нулю, якщо $a=2$. Отже, якщо $a=2$, то рівняння коренів не має. Якщо ж $a\neq 2$, то знаменник відмінний від нуля й число $x=2a$ є коренем рівняння.

Відповідь. Якщо $a\neq 2$, то $x=2a$; якщо $a=2$, то рівняння коренів не має.

224. Для яких значень a рівняння $\dfrac{x+2a-1}{(x-1)(x+3)}=0$ не має коренів?

225. Для яких значень a рівняння $\dfrac{(x-a)(x-2a-7)}{x-5}=0$ має один корінь?

Вправи для повторення

Обчисліть:

226. **а)** 2^7+5^3; **б)** $6\cdot(-3)^3$; **в)** $5\cdot(-0,3)^2$; **г)** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3$.

227. **а)** $2,5^7:2,5^5-3^3\cdot 0,3$; **б)** $16^3:(4^{12}:8^4)$;

в) $(0,5^{18}:0,5^6)\cdot(2^{16}:2^4)$; **г)** $(-1,7)^{30}:(-1,7)^{25}+1,7^5$.

Спростіть вираз:

228. **а)** $(a^2b^4)^3 \cdot (2a^2b)^2$; **б)** $3x^{17}y^{14} \cdot (4xy^3)^3$;

в) $(5a^2 - 3ab + b^3) \cdot b^3 - (b^4 - 3ab^2 - 5a^2) \cdot b^2$.

229. **а)** $\dfrac{4xy^2}{x^2 - y^2} \cdot \dfrac{x+y}{2xy}$; **б)** $\left(1 - \dfrac{2a}{a^2+1}\right) : \dfrac{a-1}{a^2+1} + 1$.

230. Чи можна покласти 120 яблук у три кошики так, щоб у першому кошику було на 5 яблук більше, ніж у другому, і на 8 яблук менше, ніж у третьому?

231. Вкладник вніс до банку 5000 грн під 20% річних (накопичувальний вклад). Скільки грошей буде на його рахунку через 2 роки?

232*. Розв'яжіть рівняння з параметром a:

а) $(a - 2)x = a^2 - 2a$; **б)** $a^2x - a = x + 1$.

Поміркуйте

233. На кожній клітинці дошки розміру 5×5 сидить жук. У деякий момент часу кожний жук переповзає на сусідню (по стороні) клітинку. Доведіть, що після цього: **а)** хоча б в одній клітинці буде не менше двох жуків; **б)** залишиться хоча б одна порожня клітинка.

Завдання для самоперевірки № 2

Рівень 1

1. Виконайте множення: $\dfrac{4m^2}{n} \cdot \dfrac{n}{m^3}$.

а) $\dfrac{4m^5}{n^2}$; **б)** $\dfrac{4}{m^2}$; **в)** $\dfrac{4}{m}$; **г)** $4m$.

2. Виконайте ділення: $\dfrac{b}{a} : \dfrac{b^2}{a^4}$.

а) $\dfrac{b^3}{a^5}$; **б)** $\dfrac{a^4}{b}$; **в)** $\dfrac{a^3}{b}$; **г)** a^3b.

3. Піднесіть до степеня: $\left(\dfrac{2x^3}{a^2b}\right)^3$.

а) $\dfrac{6x^6}{a^5b^4}$; **б)** $\dfrac{8x^9}{a^6b^3}$; **в)** $\dfrac{2x^9}{a^6b^3}$; **г)** $\dfrac{8x^6}{a^6b^3}$.

4. Знайдіть значення виразу $\frac{1+a}{a-2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2}{a-2}$, якщо $a = 3$.

а) –3; **б)** 1; **в)** 4; **г)** 3.

5. Розв'яжіть рівняння $\frac{x+3}{x-3} = 0$.

а) –3; 3; **б)** –3; **в)** 3; **г)** коренів немає.

6. Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{x^2+3x} = 0$.

а) –3; **б)** 3; **в)** 0; **г)** коренів немає.

Рівень 2

7. Доберіть до кожного виразу (1–4) тотожно рівний йому вираз (А–Д).

1) $\frac{a^3}{2b} \cdot \frac{16b^4}{a^3}$;

2) $\frac{a^3}{2b} : \frac{16b^4}{a^3}$;

3) $\left(\frac{2a^4}{b^3}\right)^3$;

4) $\left(-\frac{2a^4}{b^3}\right)^4$.

А) $-\frac{16a^{16}}{b^{12}}$;

Б) $\frac{16a^{16}}{b^{12}}$;

В) $8b^3$;

Г) $\frac{8a^{12}}{b^9}$;

Д) $\frac{a^6}{32b^5}$.

8. Спростіть вираз:

а) $\frac{27a^3b^2}{4c^4} \cdot \frac{8ac^3}{9b^4}$; **б)** $\frac{18xy^2}{25z^4} : \frac{24x^2y^2}{5z}$.

9. Спростіть вираз:

а) $\frac{x+3}{x^2+9} \cdot \left(\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3}\right)$; **б)** $\frac{a-3}{a-2} : \left(a - \frac{a}{a-2}\right)$.

10. Знайдіть значення виразу $\left(\frac{y}{y+1} + 1\right) \cdot \frac{3y+3}{2y-1}$, якщо $y = 5{,}5$.

11. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x^2+2x}{x-1} = 0$; **б)** $\frac{x}{x+3} = 3$.

Рівень 3

12. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{4ab^3}{9c^2}\cdot\left(\dfrac{3ac^2}{4b^2}\right)^3$; **б)** $\left(-\dfrac{6x^3y^2}{5z}\right)^2:\left(-\dfrac{9x^7y^2}{35z^3}\right)$.

13. Спростіть вираз:

а) $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right)$; **б)** $\dfrac{2}{a+b}\cdot\left(\dfrac{a+b}{3a}-a-b\right)$.

14. Знайдіть значення виразу $\dfrac{x+2}{x^2-2x+1}\cdot\dfrac{3x-3}{x^2-4}-\dfrac{3}{x-2}$, якщо $x = 1{,}5$.

15. Розв'яжіть рівняння:

а) $\dfrac{3}{4x}+\dfrac{1}{6x}=2$; **б)** $\dfrac{3x^2+10x-25}{x+5}=x-5$.

16. Перший екскаватор може вирити котлован в 1,5 разу швидше, ніж другий. За який час виритє котлован другий екскаватор, якщо разом з першим вони можуть його вирити за 4 год?

Рівень 4

17. Спростіть вираз:

а) $\left(\dfrac{49}{a^3+27}-\dfrac{a+3}{a^2-3a+9}\right)\cdot\dfrac{a^4+27a}{16-a^2}$;

б) $\left(\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{3}{a^3+1}+\dfrac{3}{a^2-a+1}\right):\dfrac{a+1}{a^2-a+1}$.

18. Доведіть тотожність $\left(\dfrac{x^2}{x+y}-\dfrac{x^3}{x^2+2xy+y^2}\right):\left(\dfrac{x^2}{x+y}-\dfrac{x^3}{x^2-y^2}\right)=\dfrac{y-x}{y+x}$.

19. Доведіть, що значення виразу $\left(\dfrac{x-2}{x^2-2x+4}-\dfrac{6x-13}{x^3+8}\right):\dfrac{(x-3)^2}{2x^3+16}$ не залежать від допустимих значень x.

20. Розв'яжіть рівняння:

а) $\dfrac{4-5y}{y+5}-\dfrac{1+5y}{5-y}=\dfrac{7}{y^2-25}$; **б)** $\dfrac{|2x-5|-1}{x-3}=0$.

21. Моторний човен проплив 36 км за течією річки і повернувся у початковий пункт. На шляху проти течії річки човен затратив часу на 1 год більше, ніж на шляху за течією. Знайдіть швидкість човна у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

9. Степінь з цілим показником

1. Степінь з натуральним показником. Степені з натуральним показником ми вивчали у 7 класі. Нагадаємо, що степенем числа a з натуральним показником n, де $n > 1$, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a. Наприклад,

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64.$$

У виразі 4^3 число 4 називають *основою степеня*, число 3 — *показником степеня*, а весь вираз — *степенем*. Степенем числа a з показником 1 називають саме число a: $a^1 = a$.

Степені з натуральними показниками часто використовують для запису великих чисел та великих значень величин у компактному вигляді. Наприклад,

$$13\ 841\ 287\ 201 = 7^{12}; \qquad 10\ 000\ 000 \text{ т} = 10^7 \text{ т}.$$

Якщо значення величини мале, то її задають за допомогою степенів, показники яких не є натуральними числами. Наприклад, з довідкової літератури можна дізнатися, що маса молекули води дорівнює $2{,}99 \cdot 10^{-23}$ г. Щоб зрозуміти подібні задання величин, розширимо дію піднесення до степеня. Розглянемо, що означає піднесення до степеня з нульовим і цілим від'ємним показником.

2. Степінь з нульовим та цілим від'ємним показником. Розглянемо степінь a^k з натуральним показником. Якщо $a \neq 0$, то цей степінь можна подати як частку $a^{k+1} : a$. Отже,

$$a^k = a^{k+1} : a, \text{ де } a \neq 0, k \text{ — натуральне число.} \qquad (1)$$

Якщо рівність (1) поширити для випадку $k = 0$, то отримаємо:

$$a^0 = a^1 : a = a : a = 1.$$

Са́ме число 1 вважають нульовим степенем будь-якого числа a, де $a \neq 0$.

Означення **Степінь числа a з нульовим показником, де $a \neq 0$, дорівнює 1.**

$$\mathbf{a^0 = 1 \quad (a \neq 0).}$$

Наприклад, $3^0 = 1$, $(-5)^0 = 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$. Степінь числа 0 з нульовим показником не визначений, тобто запис 0^0 не має змісту.

Поширимо рівність (1) для випадків $k = -1$ і $k = -2$:

$$a^{-1} = a^0 : a = 1 : a = \frac{1}{a};$$

$$a^{-2} = a^{-1} : a = \frac{1}{a} : a = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}.$$

Для наступних цілих від'ємних значень k мали б: $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$ і т. д. Отже, доцільно прийняти за означенням, що $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, де $a \neq 0$, n — натуральне число.

Означення **Якщо $a \neq 0$ і n — натуральне число, то степенем числа a з цілим від'ємним показником $-n$ називають число $\frac{1}{a^n}$, тобто**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0,\ n \text{ — натуральне число}).$$

Наприклад, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $6^{-1} = \frac{1}{6^1} = \frac{1}{6}$.

Степінь числа 0 з цілим від'ємним показником не визначений. Так, запис 0^{-2} не має змісту.

3. Піднесення дробу до від'ємного степеня. Щоб піднести до від'ємного степеня дріб, можна використати рівність

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \text{ де } a \neq 0,\ b \neq 0,\ n \text{ — натуральне число.}$$

Ця рівність випливає з таких перетворень:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = 1 : \left(\frac{a}{b}\right)^n = 1 : \frac{a^n}{b^n} = 1 \cdot \frac{b^n}{a^n} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Наприклад: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} = 1,5$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 = 16$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Обчислити:

а) $100 \cdot 5^{-3}$; **б)** $\frac{1}{27}:3^{-5}$; **в)** $\left(\frac{2}{9}\right)^{-1}+0,2^{-2}$; **г)** $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2}+2^{0}$.

● **а)** $100 \cdot 5^{-3} = 100\cdot\frac{1}{5^3}=\frac{100}{125}=\frac{4}{5}=0,8$;

б) $\frac{1}{27}:3^{-5} = \frac{1}{27}:\frac{1}{3^5}=\frac{1}{27}\cdot\frac{3^5}{1}=\frac{3^5}{3^3}=3^2=9$;

в) $\left(\frac{2}{9}\right)^{-1}+0,2^{-2}=\left(\frac{9}{2}\right)^{1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=\frac{9}{2}+5^2=4,5+25=29,5$;

г) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2}+2^{0}=\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}+1=\left(\frac{3}{7}\right)^{2}+1=\frac{9}{49}+1=1\frac{9}{49}$. ●

Вправа 2. Використовуючи від'ємний показник, подати дріб $\frac{3}{ab^3}$ у вигляді добутку.

● $\frac{3}{ab^3}=3\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b^3}=3a^{-1}b^{-3}$. ●

Вправа 3. Спростити вираз $\left(x^{-1}+y^{-1}\right)\cdot\left(x+y\right)^{-1}$.

● $\left(x^{-1}+y^{-1}\right)\cdot\left(x+y\right)^{-1}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{x+y}=\frac{y+x}{xy}\cdot\frac{1}{x+y}=\frac{1}{xy}$. ●

Вправа 4. Подати у вигляді раціонального дробу вираз $\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}$.

● $$\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{b+a}{ab}:\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=$$

$$=\frac{b+a}{ab}\cdot\frac{a^2b^2}{(b-a)(b+a)}=\frac{ab}{b-a}.$$ ●

Усно

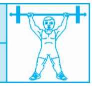
234. Обчисліть: 2^4; $(-3)^3$; $(-1)^6$; $(-15)^0$; $0{,}3^0$; $\left(\frac{1}{2}\right)^0$; 0^0.

235. Замініть степінь із цілим від'ємним показником на дріб: 5^{-2}; 4^{-1}; 3^{-3}; 2^{-4}.

236. Замініть дріб на степінь з цілим від'ємним показником: $\frac{1}{3^2}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{4^3}$; $\frac{1}{2^9}$.

237. Обчисліть: 5^{-1}; 3^{-2}; 4^{-3}; 2^{-4}; 1^{-6}.

Рівень А



238. Подайте числа 4, 8, 16, 32, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ у вигляді степенів з основою 2.

239. Подайте числа 1, 3, 9, 27, 81, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{81}$ у вигляді степенів з основою 3.

Обчисліть:

240. 9^{-2}; 15^{-1}; 3^{-3}; 5^{-4}; 12^0; $(-2)^{-4}$; $(-3)^{-3}$; $0{,}5^{-2}$.

241. 7^{-2}; 2^{-5}; 4^{-1}; $(-5)^{-2}$; $(-6)^{-1}$; $0{,}7^0$.

Знайдіть значення виразу:

242. **а)** $5 \cdot 10^{-2}$; **б)** $16 \cdot 2^{-5}$; **в)** $5^{-3} : 25^0$; **г)** $3 : 2^{-3}$;
д) $2^{-4} + 2^{-2}$; **е)** $2^{-3} - 2^{-4}$; **є)** $6^{-1} + 3 \cdot 3^{-2}$; **ж)** $4^{-1} - 3^{-2}$.

243. **а)** $14 \cdot 7^{-2}$; **б)** $4 : 2^{-4}$; **в)** $5^{-1} + 2 \cdot 6^{-1}$; **г)** $2^{-3} - 4^{-2}$.

Подайте у вигляді раціонального дробу вираз:

244. **а)** $4a^{-2}b^{-1}$; **б)** $7^{-1}ab^{-5}$; **в)** $x^{-2}y^{-3}$; **г)** $(a + b)^{-2}$.

245. **а)** $10x^{-1}y^{-4}$; **б)** $m^{-3}n^{-4}$; **в)** $4^{-1}a^{-3}b^3$; **г)** $5(x - 1)^{-1}$.

Використовуючи від'ємний показник, подайте у вигляді добутку дріб:

246. **а)** $\frac{a}{b^3}$; **б)** $\frac{4}{xy^2}$; **в)** $\frac{1}{2ab}$; **г)** $\frac{a+b}{(a-b)^2}$.

247. **а)** $\dfrac{2}{a^2}$; **б)** $\dfrac{m}{ab}$; **в)** $\dfrac{a^4}{2b^3}$; **г)** $\dfrac{x}{x+y}$.

248. Знайдіть значення виразів:

а) b^{-2}; $(-b)^{-2}$; $-b^{-2}$, якщо $b = 4$; **б)** a^{-3}; $(-a)^{-3}$; $-a^{-3}$, якщо $a = 5$.

249. Знайдіть значення виразу:

а) $8a^{-3} + 1$, якщо $a = -2$; $a = 2$; **б)** $(b + 1)^{-2}$, якщо $b = -2$; $b = 0$; $b = 2$.

Рівень Б

Знайдіть значення виразу:

250. **а)** $256 \cdot 2^{-8}$; **б)** $0{,}1^{-2} + (-1)^{-24}$;

в) $1{,}5^{-3} : 2{,}5^{-2}$; **г)** $3^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$;

д) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-9} : \left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3} - \left(\dfrac{1}{27}\right)^{-1}$; **е)** $\left(1\dfrac{1}{7}\right)^{-2} - \left(\dfrac{8}{9}\right)^{-2}$;

є) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-4} + \left(-3\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$; **ж)** $\left(2+2^{-1}\right)^{-2} - \left(2+2^{-2}\right)^{-1}$.

251. **а)** $243 \cdot 3^{-4}$; **б)** $0{,}2^{-3} - (-0{,}5)^{-2}$;

в) $(-1{,}6)^{-1} : 2{,}5^{-2}$; **г)** $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} - \left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-1}$;

д) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{-3} \cdot \left(-3\dfrac{3}{7}\right)^{-2}$; **е)** $\left(1-2^{-1}\right)^{-4} + (-1)^{-25}$.

252. **а)** Розташуйте в порядку спадання: 5^{-2}; 5^2; 5^{-1}; 5^0; 5^4.

б) Розташуйте в порядку зростання: $0{,}5^{-2}$; $0{,}5^2$; $0{,}5^{-1}$; $0{,}5^0$; $0{,}5^4$.

253. **а)** Розташуйте в порядку зростання: 3^2; 3^{-2}; 3^0; 3^{-3}; 3^{-1}.

б) Розташуйте в порядку спадання: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^0$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$.

Спростіть вираз:

254. **а)** $(a+5)^{-2}(3a+15)$; **б)** $\left(a^{-2} - b^{-2}\right) : (a+b)$;

в) $(b-4)^{-1} - (b+4)^{-1}$; **г)** $\left(x^{-3} - y^{-3}\right) : \left(x^2 + xy + y^2\right)$;

д) $\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{y-1}\right)(y-x)^{-1}$; **е)** $\left(1-\dfrac{x^{-2}}{x^{-2}+1}\right):\dfrac{1}{1-x^4}$.

255. **а)** $(a-b)^{-2}\left(a^2-b^2\right)$; **б)** $\left((a-7)^{-1}+(a+7)^{-1}\right):\dfrac{a}{a-7}$;

в) $\left(m^{-1}-n^{-1}\right):\dfrac{m^2-n^2}{m^3n^3}$; **г)** $\dfrac{1}{x^{-3}-y^{-3}}-\dfrac{1}{x^{-3}+y^{-3}}$.

Рівень В

256. Доведіть, що вираз $\left(2^m\cdot 11^{n-1}-2^{m-1}\cdot 11^n\right)\cdot 2^{-m}\cdot 11^{-n}$ для всіх натуральних значень m і n набуває того самого значення.

257. Чи може значення виразу $\dfrac{x^{-2}}{x^{-2}+1}$ дорівнювати 1?

258. Чи існують значення x, для яких виконується рівність $\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{-1}=0$?

259. Розв’яжіть рівняння:

а) $x+x^{-1}=2$; **б)** $\dfrac{x+1}{x-1}+\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{-1}=2$.

Вправи для повторення

260. Знайдіть значення виразу:

а) $5^3\cdot 2^3$; **б)** $4^4\cdot 1{,}25^4\cdot 2^4$; **в)** $4^9:(2^3)^3$; **г)** $2{,}5^5\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}4^5$.

261. Запишіть у вигляді одночлена стандартного вигляду:

а) $-5x^3y^2\cdot 2xy^3$; **б)** $(-3a^2b^4)^2$; **в)** $(-2xy^5)^3$; **г)** $(m^4n^3)^2\cdot(-mn)^3$.

262. Три програмісти розробили 45 комп’ютерних програм. Другий програміст розробив удвічі менше програм, ніж перший, і на 5 менше, ніж третій. Скільки програм розробив кожний програміст?

263. Маючи 250 г солі, потрібно приготувати її двадцятивідсотковий розчин. Скільки для цього потрібно взяти грамів води?

Поміркуйте

264. 25 карток Віктор пронумерував числами 1, 2, ..., 25, перетасував картки, розклав чистим боком догори і знову пронумерував числами 1, 2, ..., 25. Потім для кожної картки додав числа, які на ній написані, і перемножив 25 одержаних сум. Доведіть, що знайдений ним добуток є парним числом.

10. Властивості степеня з цілим показником

Степені з цілим показником мають усі властивості, установлені для степенів з натуральним показником, а саме:

для будь-якого числа $a \neq 0$ та будь-яких цілих чисел m і n справджуються рівності:

$$\boldsymbol{a^m a^n = a^{m+n}};$$

$$\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}};$$

$$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}};$$

для будь-яких чисел $a \neq 0$ та $b \neq 0$ і будь-якого цілого числа n справджуються рівності:

$$\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n};$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}.$$

Для доведення цих властивостей використовують означення степеня з цілим показником і властивості степеня з натуральним показником.

Покажемо, наприклад, що рівність $a^m a^n = a^{m+n}$ є правильною, якщо показники степенів є цілими від'ємними числами. Для даного випадку показники степенів можна записати у вигляді $m = -p$, $n = -q$, де p і q — натуральні числа. Залишається довести, що $a^{-p} \cdot a^{-q} = a^{-p-q}$ $(a \neq 0)$.

Справді, оскільки $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$, $a^{-q} = \dfrac{1}{a^q}$, то:

$$a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^p \cdot a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{-p-q}.$$

Так само можна довести, що рівність $a^m a^n = a^{m+n}$ є правильною, коли один з показників степеня m або n є від'ємним, а інший — додатним, коли один або обидва показники дорівнюють нулю.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Обчислити:

а) $3^{-5} \cdot 3^2 : 3^{-4}$; **б)** $(5^{-2})^3 \cdot 25^2$; **в)** $\dfrac{5^{-6} \cdot 4^{-4}}{10^{-6}}$.

● **а)** $3^{-5} \cdot 3^2 : 3^{-4} = 3^{-5+2-(-4)} = 3^1 = 3$;

б) $(5^{-2})^3 \cdot 25^2 = 5^{-6} \cdot (5^2)^2 = 5^{-6} \cdot 5^4 = 5^{-6+4} = 5^{-2} = \dfrac{1}{25}$;

в) $\dfrac{5^{-6} \cdot 4^{-4}}{10^{-6}} = \dfrac{5^{-6}}{10^{-6}} \cdot 4^{-4} = \left(\dfrac{5}{10}\right)^{-6} \cdot 4^{-4} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-6} \cdot (2^2)^{-4} = 2^6 \cdot 2^{-8} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$. ●

Вправа 2. Подати вираз у вигляді степеня з основою a:

а) $a^{-14} \cdot a^{12} : a^{-4}$; **б)** $(a^5)^{-2} : a^{-7}$.

● **а)** $a^{-14} \cdot a^{12} : a^{-4} = a^{-14+12-(-4)} = a^2$;

б) $(a^5)^{-2} : a^{-7} = a^{-10} : a^{-7} = a^{-10-(-7)} = a^{-3}$. ●

Вправа 3. Подати степінь у вигляді виразу, який не містить степеня з від'ємним показником:

а) $\left(x^{-2} y^{-3}\right)^{-2}$; **б)** $\left(\dfrac{2}{3} m^{-4} n^2\right)^{-3}$.

● **а)** $\left(x^{-2} y^{-3}\right)^{-2} = x^4 y^6$;

б) $\left(\dfrac{2}{3} m^{-4} n^2\right)^{-3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} m^{12} n^{-6} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 m^{12} n^{-6} = \dfrac{27 m^{12}}{8 n^6}$. ●

Вправа 4. Спростити вираз $(x^{-1} - 2x)^2 - (x^{-1} - 2x)(x^{-1} + 2x)$.

● $(x^{-1} - 2x)^2 - (x^{-1} - 2x)(x^{-1} + 2x) = (x^{-1})^2 - 2 \cdot x^{-1} \cdot 2x + 4x^2 - ((x^{-1})^2 - 4x^2) =$

$= x^{-2} - 4x^0 + 4x^2 - x^{-2} + 4x^2 = 8x^2 - 4$. ●

Усно

265. Обчисліть:

а) $2^{-3} \cdot 2^{2}$; **б)** $3^{-4} : 3^{-3}$; **в)** $5^{-8} \cdot 5^{8}$; **г)** $4^{3} : 4^{5}$;

д) $\left(8^{-1}\right)^{-1}$; **е)** $\left(7^{-1}\right)^{2}$; **є)** $2^{-2} \cdot 5^{-2}$; **ж)** $\dfrac{8^{-2}}{4^{-2}}$.

Рівень А

Обчисліть:

266. **а)** $2^{11} \cdot 2^{-7}$; **б)** $4^{15} : 4^{17}$; **в)** $\left(3^{-1}\right)^{-2} \cdot 3^{-4}$;

г) $5^{3} : \left(5^{-1}\right)^{-4}$; **д)** $10^{-6} : 10^{-7} \cdot 10^{2}$; **е)** $4^{-2} : 4^{-5} + \left(10^{-1}\right)^{-2}$.

267. **а)** $3^{-5} : 3^{-7}$; **б)** $2^{-7} \cdot 2^{5}$; **в)** $\left(5^{-1}\right)^{-3} \cdot 5^{-3}$;

г) $4^{-6} : 4^{-4} \cdot 4^{5}$; **д)** $\left(6^{-3}\right)^{2} : 6^{-5}$; **е)** $\left(11^{-2}\right)^{-1} - \left(9^{-1}\right)^{-2}$.

268. Подайте вираз у вигляді степеня з основою a:

а) $a^{3} : a^{-7} \cdot a^{5}$; **б)** $a^{-4} \cdot a^{6} : a^{9}$; **в)** $\left(a^{-2}\right)^{5} : a^{-3}$; **г)** $a^{17} \cdot \left(a^{8}\right)^{-2}$.

269. Подайте вираз у вигляді степеня з основою b:

а) $b^{8} : b^{-2} \cdot b^{10}$; **б)** $b^{4} \cdot b^{-12} : b^{3}$; **в)** $\left(b^{7}\right)^{-2} \cdot b^{10}$; **г)** $\left(b^{-9}\right)^{-2} : b^{14}$.

270. Подайте вираз $\left(x^{-8}\right)^{2} : x^{-14}$ у вигляді степеня з основою x та знайдіть його значення, якщо $x = 0{,}1$.

271. Подайте вираз $\left(y^{3}\right)^{-4} \cdot y^{15}$ у вигляді степеня з основою y та знайдіть його значення, якщо $y = 0{,}5$.

Спростіть вираз:

272. **а)** $7c^{-4} \cdot 5c^{-2}$; **б)** $3b^{-2} : (6b^{3})$; **в)** $\left(3m^{-5}n^{3}\right)^{-2}$;

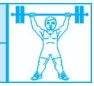
г) $5x^{2}y^{-1} \cdot 2x^{-2}y^{3}$; **д)** $0{,}3a^{-4}b^{-5} \cdot 15a^{5}b$; **е)** $\dfrac{2}{3}mn^{2} \cdot \left(-\dfrac{3}{5}m^{-2}n^{-3}\right)$;

є) $\dfrac{12km^{-2}}{3k^{-2}m^{3}}$; ж) $\dfrac{8x^{2}}{y^{-2}}\cdot\dfrac{x^{-4}}{4y^{3}}$; з) $-\dfrac{a^{-1}b^{3}}{5}:\left(\dfrac{a^{-3}b^{2}}{10}\right)$.

273. **а)** $3a^{-5}\cdot 6a^{12}$; **б)** $\left(2x^{2}y^{-3}\right)^{-3}$; **в)** $0,5b^{-3}c^{4}\cdot 1,2b^{-1}c^{-5}$;

г) $\dfrac{3}{5}x^{-3}y^{2}\cdot\left(\dfrac{5}{8}x^{2}y^{-3}\right)$; **д)** $-\dfrac{a^{-5}}{2b^{-4}}\cdot\dfrac{6a^{7}}{b^{3}}$; **е)** $\dfrac{3c^{-1}}{a^{3}}:\left(\dfrac{9c^{-3}}{a^{4}}\right)$.

Рівень Б



Обчисліть:

274. **а)** $16^{-1}\cdot 2^{5}\cdot 4^{-2}$; **б)** $5^{8}:\left(125:25^{-1}\right)$; **в)** $\left(9^{-3}:3^{-5}\right):27^{-2}$;

г) $4^{-5}\cdot 3^{3}\cdot 0,25^{-5}$; **д)** $2^{-8}\cdot 1,25^{-8}\cdot 0,4^{-8}$; **е)** $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3}\cdot\left(1\dfrac{1}{3}\right)^{-3}-2^{-2}$.

275. **а)** $\dfrac{\left(2^{-2}\right)^{-3}:16}{2^{2}}$; **б)** $\dfrac{9^{-4}\cdot 4^{-4}}{2^{-9}\cdot 3^{-9}}$; **в)** $\dfrac{5^{-4}\cdot 6^{-3}}{5^{-5}\cdot 3^{-3}}$.

276. **а)** $3^{-4}\cdot 9^{5}\cdot 27^{-1}$; **б)** $2^{6}:\left(2^{-5}:8^{-1}\right)^{-2}$; **в)** $2,5^{-5}\cdot 0,4^{-5}\cdot 7^{-1}$;

г) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-5}\cdot 3^{-5}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4}$; **д)** $6,25^{-3}\cdot 2,5^{8}-1,5^{2}$; **е)** $\dfrac{9^{-6}\cdot 0,5^{-8}}{3^{-6}\cdot 1,5^{-8}}$.

Перетворіть вираз так, щоб він не містив степенів з від'ємним показником:

277. **а)** $5xy^{-3}\cdot 0,4\left(x^{-2}\right)^{2}y$; **б)** $3\dfrac{1}{3}m^{5}n^{-17}\cdot 0,12m^{-1}n^{19}$;

в) $\left(0,04x^{-1}\right)^{-2}\cdot 5^{-2}x^{-5}$; **г)** $81^{2}a^{-2}b^{-3}\cdot\left(3a^{-1}b^{-2}\right)^{-4}$;

д) $\dfrac{\left(4a^{-3}b^{-4}\right)^{-1}}{0,2a^{-9}b^{6}}$; **е)** $\dfrac{0,5mn^{-2}}{\left(0,25m^{3}n^{-2}\right)^{-2}}$.

278. **а)** $\left(\dfrac{1}{8}a^{-2}b\right)^{-1}\cdot 2^{-4}a^{-1}b^{2}$; **б)** $0,12a^{-3}b^{-1}\cdot\left(\dfrac{1}{2}a^{-2}b\right)^{-2}$;

в) $\left(0,2xy^{3}\right)^{-1}\cdot 25x^{2}$; **г)** $\dfrac{27a^{-2}b^{-3}}{(3a^{-1}b)^{4}}$.

279. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\frac{2a^{-5}b^3}{3}\cdot\frac{9b^{-9}}{a^{-4}}\cdot\frac{a}{3b^{-6}}$ дорівнює тому самому числу.

280. Доведіть, що для будь-яких допустимих значень змінних значення виразу $\frac{5x^{-3}y^{-3}}{4z}\cdot\frac{12x^4z^{-3}}{y^2}\cdot\frac{y^5}{25z^{-6}}$ не залежить від значень y.

Подайте у вигляді добутку вираз:

281. **а)** $a^{-3}-a^{-4}$; **б)** $x^{-2}-y^2$; **в)** $9m^{-4}-n^{-2}$; **г)** $a^{-3}-b^{-3}$.

282. **а)** $2x^{-1}-x^{-3}$; **б)** a^2-b^{-2}; **в)** $9b^{-2}-4c^{-2}$; **г)** $m^{-3}+n^{-3}$.

Спростіть вираз:

283. **а)** $(a^{-1}-1)(a^{-1}+1)-a^{-2}$; **б)** $(b^{-3}-3)(b^{-3}+3)-b^{-3}(b^{-3}+2)$;

в) $(x^{-1}-y^{-2})^2-(x^{-1}+y^{-2})^2$; **г)** $(c^{-1}-c)^2-(c^{-1}-2c^2)(c^{-1}+2c^2)$;

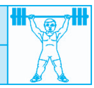
д) $(a^{-1}-b^{-1})(a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2})$; **е)** $\frac{a^{-8}+2a^{-4}b^{-4}+b^{-8}}{a^{-8}-b^{-8}}$.

284. **а)** $(x^{-1}-y^{-1})(x^{-1}+y^{-1})+2y^{-2}$; **б)** $(a^{-2}-a^2)^2+2-a^{-4}$;

в) $(a^{-1}-b^{-1})^2+(a^{-1}+b^{-1})^2$; **г)** $\frac{m^{-4}-n^{-4}}{m^{-4}-2m^{-2}n^{-2}+n^{-4}}$.

285. Доведіть, що значення виразу $\left(m^{-1}n-n\right)\left(m^{-1}n^{-1}-n^{-1}\right)$ є невід'ємним числом для будь-яких допустимих значень змінних.

Рівень В



286. Подайте вираз у вигляді степеня:

а) $\left(\frac{a}{b^2}\right)^{-m}\cdot\left(a^{2m}b^m\right)^2$; **б)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{-n+1}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-2n}\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^{n+1}$.

287. Обчисліть: $2^8\left(1+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}+2^{-5}+2^{-6}+2^{-7}+2^{-8}\right)$.

288. Доведіть, що вираз $4a^{-4}-4a^{-2}b^{-1}+b^{-2}$ набуває лише невід'ємних значень.

289. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{2x^{-10}+2y^{-10}}{x^{-20}-y^{-20}}:\dfrac{3x^{-10}+3y^{-10}}{x^{-20}-2x^{-10}y^{-10}+y^{-20}}$;

б) $\left(a^{-2}-1\right)\left(\dfrac{1}{a^{-1}-1}-\dfrac{1}{a^{-1}+1}-1\right)$;

в) $\left(\dfrac{2b^{-2}+b^{-1}}{b^{-3}-1}-\dfrac{b^{-1}+1}{b^{-2}+b^{-1}+1}\right)\left(1+\dfrac{b^{-1}+1}{b^{-1}}-\dfrac{b^{-2}+5b^{-1}}{b^{-2}+b^{-1}}\right)$.

Вправи для повторення

290. Обчисліть:

а) $1{,}7\cdot10^{4}$; **б)** $3{,}2\cdot10^{-2}$; **в)** $5{,}2:10^{3}$; **г)** $0{,}3:10^{-4}$.

291. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases}2x-y=3;\\3x+2y=1.\end{cases}$

292. Два станки-автомати за 1 год спільної роботи виготовляють 250 деталей. Перший станок за 4 год і другий за 2 год разом виготовляють 740 деталей. Скільки деталей виготовляє за годину кожний станок?

293. З пункту *A* до пункту *B* туристи йшли зі швидкістю 6 км/год, а назад поверталися зі швидкістю 5 км/год. Знайдіть відстань між пунктами, якщо на зворотний шлях туристи затратили часу на 1 год більше, ніж на шлях від *A* до *B*.

Поміркуйте

294. На березі річки лежить купа гравію, в якій є 1001 камінець. З купи викидають у річку один камінець, а потім купу ділять на дві. Далі з якої-небудь купи викидають у річку один камінець, а потім одну з куп ділять на дві і т. д. Чи можна добитися того, щоб на березі залишилися лише купи із трьох камінців?

11. Стандартний вигляд числа

У науці й техніці доводиться мати справу з величинами, значення яких дуже великі або дуже малі. Наприклад:

площа Світового океану дорівнює 361 000 000 000 000 м^2;

діаметр молекули води дорівнює 0,00000028 мм;

маса молекули води дорівнює 0,0000000000000000000000299 г.

Указані значення важко прочитати, а виконання над ними певних дій призводить до громіздких записів. Щоб ефективніше оперувати з великими та малими додатними числами, їх зручно записувати за допомогою степенів числа 10. Наприклад:

$$361\,000\,000\,000\,000 \text{ м}^2 = 3{,}61 \cdot 10^{14} \text{ м}^2;$$

$$0{,}00000028 \text{ мм} = 2{,}8 \cdot 10^{-7} \text{ мм};$$

$$0{,}0000000000000000000000299 \text{ г} = 2{,}99 \cdot 10^{-23} \text{ г}.$$

Про числа $3{,}61 \cdot 10^{14}$, $2{,}8 \cdot 10^{-7}$, $2{,}99 \cdot 10^{-23}$ кажуть, що вони записані в стандартному вигляді.

Означення **Стандартним виглядом додатного числа x називають його запис у вигляді $a \cdot 10^n$, де $1 \le a < 10$ і n — ціле число.**

Число n називають порядком числа x. Наприклад, порядок числа $3{,}61 \cdot 10^{14}$ дорівнює 14, а порядок числа $2{,}99 \cdot 10^{-23}$ дорівнює –23. Порядок числа дає уявлення про те, наскільки великим чи наскільки малим є це число.

Звернемо увагу на особливість числа a: оскільки $1 \le a < 10$, то в цілій частині десяткового запису числа a повинна бути лише одна цифра, до того ж відмінна від нуля.

У стандартному вигляді можна записати будь-яке додатне число.

Наприклад, запишемо число $x = 345{,}8$ у стандартному вигляді $a \cdot 10^n$. Щоб одержати число a, перенесемо в числі x кому на 2 цифри ліворуч: $a = 3{,}458$. Число a у $100 = 10^2$ разів менше від числа x, тому $x = a \cdot 10^2 = 3{,}458 \cdot 10^2$.

Інший приклад: $0{,}000235 = 2{,}35 \cdot 10^{-4}$. (У числі $x = 0{,}000235$ перенесли кому праворуч на 4 цифри, одержали число $a = 2{,}35$, яке у 10^4 разів більше від числа x. Тому $x = a : 10^4 = a \cdot \frac{1}{10^4} = a \cdot 10^{-4} = 2{,}35 \cdot 10^{-4}$.)

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Записати у стандартному вигляді число:

а) 0,56; **б)** 31,6; **в)** 2000.

● **а)** $0{,}56 = 5{,}6 \cdot 10^{-1}$; **б)** $31{,}6 = 3{,}16 \cdot 10$; **в)** $2000 = 2 \cdot 10^3$. ●

Вправа 2. Виконати дії і записати результат у стандартному вигляді:

а) $\left(8{,}4\cdot 10^3\right)\cdot\left(2{,}3\cdot 10^{-6}\right)$; **б)** $\left(4{,}2\cdot 10^5\right):\left(8{,}4\cdot 10^{-3}\right)$; **в)** $2{,}3 \cdot 10^7 + 5{,}6 \cdot 10^6$.

● **а)** $\left(8{,}4\cdot 10^3\right)\cdot\left(2{,}3\cdot 10^{-6}\right) = (8{,}4\cdot 2{,}3)\cdot\left(10^3\cdot 10^{-6}\right) = 19{,}32\cdot 10^{-3} =$

$= 1{,}932\cdot 10\cdot 10^{-3} = 1{,}932\cdot 10^{-2}$.

б) $\left(4{,}2\cdot 10^5\right):\left(8{,}4\cdot 10^{-3}\right) = \dfrac{4{,}2\cdot 10^5}{8{,}4\cdot 10^{-3}} = 0{,}5\cdot 10^8 = 0{,}5\cdot 10\cdot 10^7 = 5\cdot 10^7$.

в) Доданок, який містить більший степінь числа 10 (перший доданок), залишимо без змін, а в іншому виділимо множник 10^7:

$$5{,}6 \cdot 10^6 = 5{,}6 \cdot 10^{-1} \cdot 10^7 = 5{,}6 \cdot 0{,}1 \cdot 10^7 = 0{,}56 \cdot 10^7.$$

Тоді:

$$2{,}3 \cdot 10^7 + 5{,}6 \cdot 10^6 = 2{,}3 \cdot 10^7 + 0{,}56 \cdot 10^7 = (2{,}3 + 0{,}56) \cdot 10^7 = 2{,}86 \cdot 10^7.$$ ●

Усно

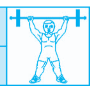
295. Яке з чисел записане у стандартному вигляді?

а) $0{,}3 \cdot 10^5$; **б)** $3{,}8 \cdot 10^{-5}$; **в)** $12 \cdot 10^{-1}$; **г)** $1{,}0001 \cdot 10^8$.

296. Назвіть порядок числа, записаного у стандартному вигляді:

а) $1{,}33 \cdot 10^4$; **б)** $4{,}5 \cdot 10^{-3}$; **в)** $8{,}5 \cdot 10^{23}$; **г)** $3{,}4 \cdot 10^{-9}$.

Рівень А



Запишіть у стандартному вигляді число:

297. **а)** 7500; **б)** 110000; **в)** 34,17; **г)** 456000000;
д) 0,035; **е)** 0,00015; **є)** 0,53954; **ж)** 0,0000002.

298. **а)** 15680; **б)** 70000; **в)** 5350000; **г)** 17,93;
д) 0,0000011; **е)** 0,0101; **є)** 0,0143; **ж)** 0,00004.

Запишіть у стандартному вигляді величину:

299. **а)** 149 600 000 км — відстань від Землі до Сонця;
б) 510 000 000 000 000 $м^2$ — площа поверхні земної кулі;
в) 1 989 100 000 000 000 000 000 000 000 т — маса Сонця;
г) 0,0000000000000000000000017 г — маса атома Гідрогену.

300. **а)** 2061 м — висота Говерли;
б) 300 000 000 м/с — швидкість світла;
в) 73 500 000 000 000 000 000 000 кг — маса Місяця;
г) 0,00000006 см — товщина плівки мильної бульбашки.

Запишіть у вигляді цілого числа або десяткового дробу число:

301. **а)** $1{,}2 \cdot 10^3$; **б)** $3{,}5 \cdot 10^5$; **в)** $4{,}2 \cdot 10^{-3}$; **г)** $5{,}7 \cdot 10^{-5}$.

302. **а)** $3{,}3 \cdot 10^2$; **б)** $8{,}1 \cdot 10^4$; **в)** $1{,}8 \cdot 10^{-2}$; **г)** $9{,}9 \cdot 10^{-4}$.

303. Округліть число до десятків й одержаний результат запишіть у стандартному вигляді:
а) 1427; **б)** 155,678; **в)** 54,23; **г)** 4911,2.

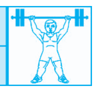
304. Округліть число до одиниць й одержаний результат запишіть у стандартному вигляді:
а) 157,415; **б)** 8901,5; **в)** 18,9; **г)** 315,5.

Виконайте дії і запишіть результат у стандартному вигляді:

305. **а)** $3 \cdot 10^{-5} + 5 \cdot 10^{-5}$; **б)** $5{,}6 \cdot 10^{12} + 7{,}5 \cdot 10^{12}$;
в) $8 \cdot 10^9 - 4 \cdot 10^9$; **г)** $28 \cdot 10^{15} \cdot 10^{-4}$.

306. **а)** $4{,}8 \cdot 10^{-7} - 2{,}5 \cdot 10^{-7}$; **б)** $7{,}1 \cdot 10^{15} + 4{,}5 \cdot 10^{15}$.

Рівень Б



Подайте:

307. **а)** $1{,}9 \cdot 10^{15}$ г у тоннах; **б)** $2{,}8 \cdot 10^{-1}$ т у кілограмах;
в) $5{,}2 \cdot 10^{-3}$ м у сантиметрах; **г)** $6{,}12 \cdot 10^2$ м у дециметрах.

308. **а)** $7{,}3 \cdot 10^{-1}$ м у дециметрах; **б)** $1{,}1 \cdot 10^2$ ц у кілограмах;
в) $9{,}3 \cdot 10^2$ кг у грамах; **г)** $8{,}6 \cdot 10^{-2}$ км у сантиметрах.

309. Відомо, що перша космічна швидкість для Землі дорівнює $7{,}9 \cdot 10^3$ м/с, друга — $1{,}12 \cdot 10^4$ м/с, третя — $1{,}667 \cdot 10^4$ м/с. Виразіть ці швидкості у кілометрах за секунду й запишіть одержані результати числами у стандартному вигляді.

Виконайте дії та запишіть результат у стандартному вигляді:

310. **а)** $(2,3 \cdot 10^4) \cdot (1,2 \cdot 10^{-7})$; **б)** $(5,1 \cdot 10^{-5}) \cdot (6,8 \cdot 10^{-7})$;

в) $(5,9 \cdot 10^{11}) \cdot (8,2 \cdot 10^{-11})$; **г)** $(9,9 \cdot 10^7) : (1,1 \cdot 10^{11})$;

д) $(1,3 \cdot 10^7) : (6,5 \cdot 10^{-3})$; **е)** $(8,1 \cdot 10^{-11}) : (1,8 \cdot 10^{-4})$.

311. **а)** $(4,2 \cdot 10^{-4}) \cdot (4,5 \cdot 10^8)$; **б)** $(1,25 \cdot 10^{-3}) \cdot (1,6 \cdot 10^{-5})$;

в) $(8,5 \cdot 10^{-3}) : (1,7 \cdot 10^5)$; **г)** $(3,4 \cdot 10^{-8}) : (6,8 \cdot 10^{-4})$.

Обчисліть, записавши компоненти дій у стандартному вигляді:

312. **а)** 64 000 000 · 250 000 000 000; **б)** 0,000008 · 52 000 000 000;

в) 300 000 : 0,000002; **г)** 0,00000045 : 0,0000000015.

313. **а)** 480 000 000 · 0,0000045; **б)** 0,0000064 : 80 000 000.

Виконайте дії та запишіть результат у стандартному вигляді:

314. **а)** $5,1 \cdot 10^8 + 1,4 \cdot 10^9$; **б)** $9,8 \cdot 10^{16} + 3,6 \cdot 10^{15}$;

в) $8,3 \cdot 10^7 - 5,3 \cdot 10^6$; **г)** $7,2 \cdot 10^{-5} - 5 \cdot 10^{-6}$.

315. **а)** $3,6 \cdot 10^9 + 4,8 \cdot 10^8$; **б)** $2,8 \cdot 10^{-3} - 8,7 \cdot 10^{-4}$.

316. У таблиці наведено маси атомів деяких хімічних елементів.

Елемент	*Маса атома, г*
Алюміній	$4,48 \cdot 10^{-23}$
Барій	$2,28 \cdot 10^{-22}$
Бор	$1,79 \cdot 10^{-23}$
Гелій	$6,64 \cdot 10^{-24}$
Плюмбум	$3,44 \cdot 10^{-22}$
Ферум	$9,28 \cdot 10^{-23}$

а) Який з даних елементів має найбільшу масу, а який — найменшу?
б) На скільки грамів маса атома Бору менша від маси атома Барію?
в) У скільки разів маса атома Алюмінію більша від маси атома Гелію?
г) На скільки порядків маса атома Гелію менша від маси атома Плюмбуму?

317. У таблиці наведено маси планет Сонячної системи.

Планета	*Маса, кг*
Меркурій	$3{,}31 \cdot 10^{23}$
Венера	$4{,}87 \cdot 10^{24}$
Земля	$5{,}98 \cdot 10^{24}$
Марс	$6{,}42 \cdot 10^{23}$
Юпітер	$1{,}90 \cdot 10^{27}$
Сатурн	$5{,}68 \cdot 10^{26}$
Уран	$8{,}68 \cdot 10^{25}$
Нептун	$1{,}02 \cdot 10^{26}$

а) Яка планета має найбільшу масу, а яка — найменшу?

б) На скільки тонн маса Землі більша від маси Венери?

в) У скільки разів та на скільки порядків маса Землі менша від маси Юпітера?

318. Густина срібла дорівнює $1{,}05 \cdot 10^4$ кг/м^3. Знайдіть масу срібного бруска, довжина якого дорівнює 20 см, ширина — 5 см, а висота — 1 см.

319. Полярна зірка розташована на відстані 433 світлових років від Сонця. Виразіть цю відстань у кілометрах, уважаючи, що 1 світловий рік дорівнює $9{,}46 \cdot 10^{12}$ км.

320. Площа Чорного моря дорівнює $4{,}22 \cdot 10^5$ км^2, Азовського — $3{,}9 \cdot 10^4$ км^2. У скільки разів площа Чорного моря більша від площі Азовського? Результат округліть до одиниць.

Вправи для повторення

321. Функцію задано формулою $y = -2x + 5$.

а) Знайдіть значення функції, які відповідають значенням аргументу: 0; 3.

б) Знайдіть значення аргументу, яким відповідають значення функції: –3; 1.

в) Побудуйте графік функції.

г) Використовуючи графік, укажіть нуль функції та координати точки перетину графіка з віссю ординат.

322. Розв'яжіть рівняння:

а) $(4x-1)(4x+1)-3=15x^2$; **б)** $(3x-2)^2-9x^2=7$;

в) $\frac{x+2}{x+3}=\frac{3}{5}$; **г)** $\frac{x-3}{3x}-\frac{x}{3x-1}=0$.

323. У першому зерносховищі було утричі більше зерна, ніж у другому. Після того як з першого зерносховища вивезли 120 т зерна, а до другого привезли 140 т, у першому зерносховищі зерна стало на 130 т більше, ніж у другому. Скільки тонн зерна було в кожному зерносховищі спочатку?

Поміркуйте

324. У кошику є n яблук. Оля, а за нею Іра по черзі беруть з кошика від 1 до 10 яблук. Перемагає той, хто візьме останнє яблуко. Для яких значень n забезпечити собі перемогу може Оля?

12. Функція $y = \frac{k}{x}$

У 7 класі ми розглядали пряму пропорційність — функцію $y = kx$, де $k \neq 0$. Ця функція є окремим, але важливим випадком лінійної функції і служить моделлю багатьох реальних процесів. Наприклад, якщо тіло рухається зі швидкістю 10 м/с, то шлях S м, пройдений ним за час t с, можна обчислити за формулою $S = 10t$. Звернемо увагу, що залежність шляху S від часу t є прямою пропорційністю, бо якщо збільшимо (зменшимо) час t у декілька разів, то у стільки ж разів збільшиться (зменшиться) шлях S.

Існують залежності між величинами, які мають інший, але дещо схожий характер. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Нехай тіло рухається рівномірно і прямолінійно. Якщо шлях 24 м тіло проходить за час t с, то швидкість його руху дорівнює $v = \frac{24}{t}$ м/с. Візьмемо значення $t = 2$ і $t = 4$ та відповідні їм значення $v = 12$ і

$v = 6$ — удвічі більшому часу відповідає вдвічі менша швидкість. Узагалі, якщо збільшимо (зменшимо) час t у кілька разів, то у стільки ж разів зменшиться (збільшиться) швидкість v.

Приклад 2. Нехай площа прямокутника дорівнює 12 см^2, а довжина однієї з його сторін — x см, тоді довжина іншої сторони прямокутника дорівнює $y = \frac{12}{x}$ см. Якщо збільшувати (зменшувати) значення x у кілька разів, то у стільки ж разів зменшиться (збільшиться) значення y.

В обох прикладах маємо залежності між величинами з такою особливістю: якщо збільшувати (зменшувати) одну величину в кілька разів, то у стільки ж разів зменшується (збільшується) друга величина. Кожну з таких залежностей називають *оберненою пропорційністю*.

У прикладі 1 швидкість v є функцією від часу t, а в прикладі 2 довжина y другої сторони прямокутника є функцією від довжини x першої сторони. Обидві функції можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$.

Означення

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$, де x — незалежна змінна, $k \neq 0$ — деяке число, називають оберненою пропорційністю.

Побудуємо графік функції $y = \frac{4}{x}$. Складемо таблицю для кількох значень x і відповідних значень y:

x	–8	–4	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	4	8
y	–0,5	–1	–2	–4	–8	8	4	2	1	0,5

Позначимо на координатній площині точки, координати яких подані в таблиці (рис. 1).

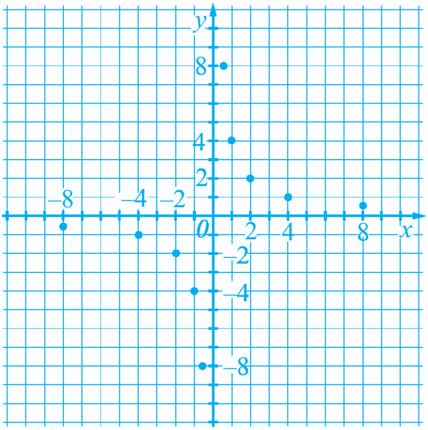


Рис. 1

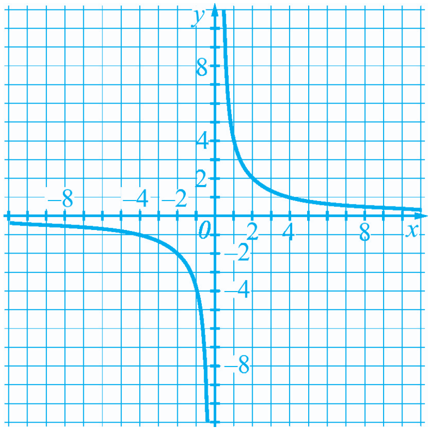


Рис. 2

Якби для кожного значення x, крім $x = 0$, обчислили відповідне значення y і позначили точки з такими координатами на координатній площині, то одержали б лінію, яку називають *гіперболою* (рис. 2). Вона складається із двох віток, розташованих у першій та третій координатних чвертях.

Узагалі, *графік будь-якої оберненої пропорційності називають* ***гіперболою***.

На рисунку 3 зображена гіпербола, яка є графіком функції $y = -\frac{4}{x}$. Вона складається із двох віток, розташованих у другій і четвертій координатних чвертях.

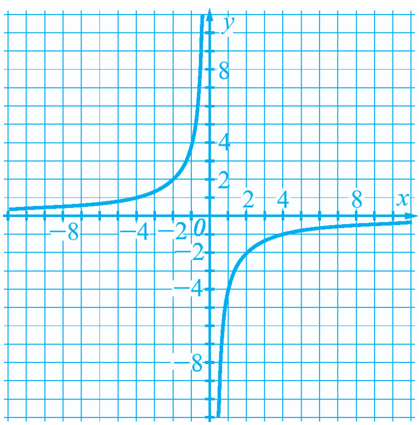


Рис. 3

Властивості функції $y=\dfrac{k}{x}$ (оберненої пропорційності).

1. *Область визначення функції утворюють усі числа, крім* $x = 0$.

2. *Область значень функції утворюють також усі числа, крім* $y = 0$.

3. *Графіком функції є гіпербола*, яка складається із двох віток.

4. *Графік функції розташований у I і III координатних чвертях, якщо* $k > 0$; *у II і IV координатних чвертях, якщо* $k < 0$.

5. *Графік функції симетричний відносно початку координат.*

Доведення властивості 5 подано в рубриці «Для тих, хто хоче знати більше».

Для тих, хто хоче знати більше

Доведемо, що графік оберненої пропорційності симетричний відносно початку координат (властивість 5).

Нехай $(a; b)$ — довільна точка, яка належить графіку функції $y=\dfrac{k}{x}$. Тоді справджується рівність $b=\dfrac{k}{a}$. Помноживши обидві частини цієї рівності на –1, одержимо правильну рівність $-b=\dfrac{k}{-a}$, з якої випливає, що графіку належить і точка $(-a; -b)$ — точка, симетрична точці $(a; b)$ відносно початку координат.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати графічно рівняння $\dfrac{6}{x}+2=2x+1$.

● Рівняння $\dfrac{6}{x}+2=2x+1$ рівносильне рівнянню $\dfrac{6}{x}=2x-1$. Будуємо в одній системі координат графіки функцій $y=\dfrac{6}{x}$ та $y = 2x - 1$ (рис. 4). Ці графіки перетинаються в точках з абсцисами $x = -1{,}5$ та $x = 2$.

Перевіркою встановлюємо, що $x = -1{,}5$ та $x = 2$ є коренями рівняння.

Відповідь. –1,5; 2. ●

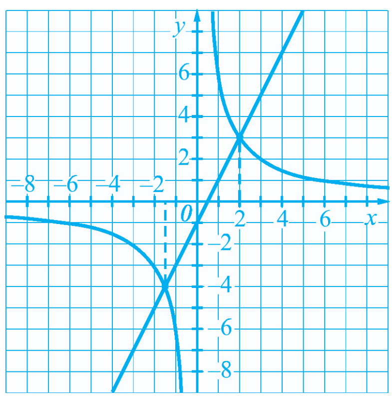


Рис. 4

Усно

325. Які із заданих функцій є оберненою пропорційністю?

а) $y = 16x$; **б)** $y = \frac{16}{x}$; **в)** $y = \frac{x}{16}$; **г)** $y = -\frac{16}{x}$.

326. Укажіть область визначення функції: $y = \frac{3}{x}$; $y = -\frac{10}{x}$. У яких чвертях розташований графік кожної функції?

327. Укажіть правильні твердження:

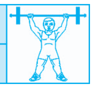
а) обернену пропорційність задають формулою $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$;

б) графіком оберненої пропорційності є гіпербола;

в) графік оберненої пропорційності проходить через початок координат;

г) графік оберненої пропорційності симетричний відносно початку координат.

Рівень А



328. Функцію задано формулою $y = -\frac{15}{x}$.

а) Знайдіть значення функції, якщо: $x = 3$; $x = 6$; $x = -5$.

б) Знайдіть значення x, для яких значення функції дорівнює: –5; –1; 15.

329. Функцію задано формулою $y = \frac{8}{x}$.

а) Знайдіть значення функції, якщо: $x = 2$; $x = -4$.

б) Знайдіть значення x, для яких значення функції дорівнює: 4; –1.

330. Функцію задано формулою $y = \frac{10}{x}$. Заповніть таблицю:

x	–5		1	10	
y		–5			0,5

331. Чи належить графіку функції $y = -\frac{8}{x}$ точка:

а) $A(-8; 1)$; **б)** $B(-4; -2)$; **в)** $C(-2; 4)$; **г)** $D(-0{,}5; 8)$?

332. Чи належить графіку функції $y = \frac{9}{x}$ точка:

а) $K(-1; 9)$; **б)** $L(3; 3)$; **в)** $M(-2; 4{,}5)$; **г)** $N(9; 1)$?

333. Точка з абсцисою 3 належить графіку функції $y = -\frac{24}{x}$. Знайдіть ординату цієї точки.

Побудуйте графік функції:

334. **а)** $y = \frac{8}{x}$; **б)** $y = -\frac{5}{x}$; **в)** $y = -\frac{4}{x}$, де $-4 \le x \le 4$ $(x \ne 0)$.

335. **а)** $y = -\frac{6}{x}$; **б)** $y = \frac{2}{x}$; **в)** $y = \frac{3}{x}$, де $-3 \le x \le 3$ $(x \ne 0)$.

336. Побудуйте графік функції $y = \frac{5}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть значення функції, які відповідають таким значенням аргументу: –2,5; 4.

337. Побудуйте графік функції $y = -\frac{8}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть значення аргументу, яким відповідають такі значення функції: –2; 4.

338. Борошно розфасували у 45 пакетів по 2 кг в кожному. Його можна було б розфасувати в більші пакети по a кг в кожному. Скільки для цього потрібно було б більших пакетів?

339. Автомобіль, рухаючись зі швидкістю 70 км/год, проїхав певний шлях за 2 год. За який час автомобіль проїде цей шлях, рухаючись зі швидкістю v км/год?

Рівень Б

340. Запишіть формулу оберненої пропорційності, якщо її графіку належить точка:

а) $A(-3; 12)$; **б)** $B(8; 4)$.

341. Обернена пропорційність задана формулою $y = \frac{a}{x}$. Знайдіть a, якщо для $x = 0{,}5$ значення функції дорівнює 2.

342. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

а) $y = -\frac{5}{x}$ та $y = x - 4{,}5$; **б)** $y = \frac{12}{x}$ та $y = -2x + 1$.

343. Знайдіть значення аргументу, для яких набувають однакових значень функції:

а) $y = \frac{3}{x}$ та $y = 3x$; **б)** $y = -\frac{4}{x}$ та $y = 5$.

Розв'яжіть графічно рівняння:

344. **а)** $x - 1 = \frac{2}{x}$; **б)** $\frac{5}{x} + 2x = 7$.

345. **а)** $\frac{3}{x} = x + 2$; **б)** $2x - 9 = -\frac{4}{x}$.

346. Зі шматка пластиліну, об'єм якого дорівнює 18 см^3, потрібно виготовити модель прямокутного паралелепіпеда. Нехай площа основи цього паралелепіпеда має дорівнювати S см^2, а довжина висоти — x см. Задайте формулою залежність площі S від довжини висоти x. Чи є ця залежність оберненою пропорційністю? Знайдіть S, якщо $x = 4{,}5$.

347. Автоцистерну, місткість якої дорівнює 12 м^3, потрібно заповнити бензином. Нехай на це потрібно t хв за умови, що за кожну хвилину в цистерну поступатиме v м^3 бензину. Задайте формулою залежність часу t від об'єму v. Знайдіть час наповнення цистерни, якщо $v = 1{,}6$.

Рівень В

348. Для яких значень аргументу графік функції $y = \frac{5}{x}$ розташований вище від графіка функції $y = 5x$?

349. Побудуйте графік функції:

а) $y = \frac{-40}{(x-5)^2 - (5+x)^2}$; **б)** $y = \frac{3x+9}{x^2+3x}$;

в) $y = \frac{2-7x}{x^2-2x} - \frac{6}{2-x}$; **г)** $y = \frac{4}{|x|}$;

д) $y = \begin{cases} -\frac{2}{|x|}, \text{ якщо } x < -2; \\ x+1, \text{ якщо } x \geq -2; \end{cases}$ **е)** $y = \begin{cases} -\frac{3}{x}, \text{ якщо } x \leq -1; \\ 3, \text{ якщо } -1 < x < 1; \\ \frac{3}{x}, \text{ якщо } x \geq 1. \end{cases}$

350. Розв’яжіть графічно рівняння $\frac{2}{|x|} = x+1$.

351. Знайдіть, використовуючи графіки функцій, кількість коренів рівняння $-\frac{3}{|x|} = x-4$.

Вправи для повторення

352. Спростіть вираз $\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right):\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right)$.

353. Розв’яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x+y=4; \\ \frac{2x-1}{2}=\frac{y}{6}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2-y^2=8; \\ x+y=2. \end{cases}$

354. Сума двох чисел дорівнює 105,8. Одне із них на 30 % більше від іншого. Знайдіть менше з цих чисел.

355. Відстань між морськими портами A і B дорівнює 150 км. Від порту A до порту B вийшов теплохід і йшов зі швидкістю 25 км/год. Через 30 хв від порту B назустріч йому вийшов другий теплохід, швидкість якого дорівнює 30 км/год. Яку відстань пройде перший теплохід до зустрічі?

Поміркуйте

356. Семеро піратів хочуть розділити скарб, який складається із 55 золотих злитків, маси яких дорівнюють 306 г, 307 г, … , 359 г, 360 г. Кожен з піратів буде задоволений, якщо йому дістанеться принаймні 2,5 кг золота (і ні на грам менше). Чи можуть пірати так розділити скарб, не розпилюючи злитки, щоб кожен був задоволений?

Цікаво знати

Хто поборе математичну символіку і вдумається в глибокі царини математичного світу, той відкриє в ній такий ідеальний світ і таку величаву поезію, і стільки естетики й краси, як в ніякій іншій науці.

В. Левицький

Звичайні дроби вміли додавати, віднімати, множити й ділити ще давні єгиптяни (2 тисячі років до н. е.). У часи **Архімеда** (287 – 212 рр. до н.е.) знаменник звичайного дробу писали над чисельником. Сучасне ж позначення дробу у вигляді $\frac{a}{b}$, де a — чисельник, b — знаменник, уперше можна побачити у працях італійського вченого **Леонарда Пізанського** (він же Фібоначчі) 1202 року. Широкого поширення такий запис набув у XVI ст. після введення буквеної символіки. Тоді ж поширилась і сучасна форма запису дій із дробами.

Ісаак Ньютон (1643 – 1727)

Англійський учений **Ісаак Ньютон** (1643 – 1727) уперше почав розглядати дріб як частку від ділення одного виразу на інший. У книжці «Загальна арифметика» він писав: «Запис однієї з двох величин під другою, нижче від якої між ними проведено риску, означає частку або величину, яка виникає від ділення верхньої величини на нижню».

Ньютон також поширив позначення a^n, уведене **Рене Декартом** (1596 – 1650) для степенів з натуральним показником, на випадок від'ємного показника.

Чому нульовим степенем будь-якого числа a ($a \neq 0$) повинна бути одиниця? Це питання тривалий час породжувало суперечки. Адже відомо, що натуральний показник степеня — це число, яке показує, скільки разів основу множать саму на себе. Але помножити основу саму на себе нуль разів не можна, тому вираз a^0 тривалий час залишався загадкою. Були навіть спроби довести, що для будь-якого відмінного від нуля числа a виконується рівність $a^0 = 1$. Лише у XVIII ст. стало зрозуміло, що потрібно не доводити, а просто домовитись, що $a^0 = 1$ (для $a \neq 0$). Ця домовленість є зараз загальноприйнятою.

Сучасні математичні терміни, символи, позначення, як бачимо, мають свою історію. В історії формування української математичної термінології вагому роль відводять професору Львівського університету **Володимирові Левицькому** (1872 – 1956).

«*Основоположник математичної культури нашого народу*» — ці слова академіка Михайла Кравчука стосуються саме Володимира Левицького.

Професор Левицький першим написав українською мовою фахову статтю з математики, був незмінним редактором першого українського наукового часопису з природничих наук.

Володимир Левицький написав понад 100 наукових праць, підручники з алгебри та фізики для середньої школи.

Володимир Йосипович Левицький
(1872 – 1956)

Значною заслугою Володимира Левицького є те, що він упорядкував і систематизував українську математичну термінологію, що стала основою математичних праць, які видавала Академія наук УРСР.

Запитання і вправи для повторення § 1

1. Наведіть приклади дробових раціональних виразів; дробів.

2. Сформулюйте основну властивість дробу.

3. За яким правилом додають дроби з однаковими знаменниками?

4. За яким правилом віднімають дроби з однаковими знаменниками?

5. Як додають та віднімають дроби з різними знаменниками?

6. Сформулюйте правило множення дробів.

7. Сформулюйте правило піднесення дробу до степеня.

8. Сформулюйте правило ділення дробів.

9. Яке рівняння називають раціональним рівнянням? цілим раціональним рівнянням? дробовим раціональним рівнянням?

10. Які рівняння називають рівносильними? Наведіть приклад двох рівносильних рівнянь.

11. Сформулюйте властивості рівнянь.

12. Чому дорівнює степінь числа з нульовим показником?

13. Чому дорівнює степінь a^{-n}, де $a \neq 0$ і n — натуральне число?

14. Які властивості степеня з цілим показником?

15. Який запис числа називають його записом у стандартному вигляді?

16. Яку функцію називають оберненою пропорційністю? Наведіть приклади оберненої пропорційності.

17. Які властивості має обернена пропорційність?

357. Для яких значень змінної не має змісту вираз?

а) $\dfrac{6}{x-3}$; **б)** $\dfrac{6a-1}{2a+1}$; **в)** $\dfrac{b+4}{b^2-4b}$; **г)** $\dfrac{11x}{x^2-16}$.

Скоротіть дріб:

358. **а)** $\dfrac{8xy^2}{4x^2y}$; **б)** $\dfrac{72ab^3}{48a^3}$; **в)** $\dfrac{128mn^4}{32m^2n^5}$; **г)** $\dfrac{75x^2y^4z}{175x^4z^3}$.

359. **а)** $\dfrac{3c-4d}{3c^2-4cd}$; **б)** $\dfrac{a^2-9}{3a+9}$; **в)** $\dfrac{c^2-16}{(c+4)^2}$; **г)** $\dfrac{b^2-6b+9}{b^2-9}$;

д) $\dfrac{x^3-8y^3}{x^2+2xy+4y^2}$; **е)** $\dfrac{5x^2-10xy+4y-2x}{x^2-4xy+4y^2}$.

360*. Побудуйте графік функції:

а) $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}+3$; **б)** $y=\dfrac{4x^2-4x+1}{2x-1}+1$.

361. Спростіть вираз:

а) $\frac{4x}{2x+1}+\frac{2}{2x+1}$; б) $\frac{y^2-3y}{y-5}+\frac{3y-25}{y-5}$; в) $\frac{(b+c)^2}{b+c-2}-\frac{4}{b+c-2}$.

362. Знайдіть значення виразу $\frac{6a^3-4}{5a}-\frac{a^3-4}{5a}$, якщо $a=25$; $a=-1{,}8$.

363. Подайте вираз у вигляді дробу:

а) $\frac{b}{a}+\frac{2}{3a}$; б) $\frac{6}{x}-\frac{2}{x^2}$; в) $\frac{1}{2ab}-\frac{3-b}{6b^2}$;

г) $x-y+\frac{2x-y}{5}$; д) $x-\frac{2x^2}{2x+y}$; е) $\frac{7bc-a^2}{7bc+a^2}-1$.

Спростіть вираз:

364. а) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$; б) $\frac{a+b}{b}-\frac{2a+b}{a+b}$; в) $\frac{x-b}{x^2-xy}+\frac{y-b}{y^2-xy}$.

365. а) $\frac{a}{b}+\frac{a+b}{a-b}-\frac{a^2+ab}{ab-b^2}$; б) $\frac{4}{a-4}-\frac{1}{a+4}+\frac{a-7}{a^2-16}$;

в) $\frac{3y}{4y-2}+\frac{y}{10y+5}+\frac{3y}{1-4y^2}$; г) $\frac{b-a}{a^2+ab+b^2}-\frac{5ab}{a^3-b^3}+\frac{3}{a-b}$.

366. Подайте вираз у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу:

а) $\frac{a+9}{a}$; б) $\frac{a^2+4a+1}{a}$; в) $\frac{(x+2)^2+3}{x+2}$.

367. Виконайте множення:

а) $\frac{2a}{b}\cdot\frac{2b}{5a}$; б) $\frac{12a^3}{25x^3}\cdot\frac{5x^2}{18a^2}$; в) $\frac{a^3b^2}{12c^4}\cdot\frac{18c^5}{8b^4}\cdot\frac{4b}{a^4}$;

г) $\frac{xy-x^2}{2x^3}\cdot\frac{2x^2}{x^2-y^2}$; д) $\frac{1-x^2}{2x-x^2}\cdot\frac{4-2x}{1+x}$; е) $\frac{x^3+y^3}{xy-y^2}\cdot\frac{xy-x^2}{x^2-xy+y^2}$.

368. Піднесіть до степеня:

а) $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3$; б) $\left(-\frac{x^3}{3y^2}\right)^4$; в) $\left(-\frac{m^2n^4}{2k^3}\right)^5$.

369. Виконайте ділення:

а) $\dfrac{5x^3}{4a^3}:\dfrac{15x^2}{8a^4}$; **б)** $\dfrac{4-b^2}{1-b}:\dfrac{2b+b^2}{1-b^2}$; **в)** $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{2x+2y}:\dfrac{2x-2y}{x^2+xy}$.

370. Знайдіть значення виразу $\dfrac{x^2-y^2}{2x^2y^2}:\dfrac{x-y}{20xy^2}$, якщо $x=\dfrac{1}{3}$; $y=2\dfrac{2}{3}$.

371. Спростіть вираз:

а) $\left(\dfrac{b}{a^2+ab}-\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{a}{b^2+ab}\right):\left(\dfrac{b}{a}-2+\dfrac{a}{b}\right)$;

б) $\left(a-\dfrac{2a-1}{a+1}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{3}{a^3+1}+\dfrac{3}{a^2-a+1}\right)$;

в) $\left(\dfrac{2a}{a+2}+\dfrac{2a}{6-3a}+\dfrac{8a}{a^2-4}\right):\dfrac{a-4}{a-2}$.

372. Доведіть тотожність:

а) $\left(x-\dfrac{4xy}{x+y}+y\right):\left(\dfrac{x}{y+x}-\dfrac{y}{y-x}-\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right)=x-y$;

б) $\left(\dfrac{1}{m-2n}+\dfrac{6m}{4n^2-m^2}+\dfrac{1}{m+2n}\right):\left(\dfrac{m^2+4n^2}{m^2-4n^2}+1\right)=-\dfrac{2}{m}$.

373. Спростіть вираз $\dfrac{a+1}{a^2+1-2a}-\dfrac{1-a(1-a)}{1-a}\cdot\dfrac{a+1}{a^3+1}$ і знайдіть його значення, якщо $a=2$.

374. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{xy-y^2}{x^4-y^4}:\left(1-\dfrac{x}{x+y}\right)$ дорівнює 0.

375. Доведіть, що вираз $\dfrac{1}{(x+y)^2+2(x^2-y^2)+(x-y)^2}\cdot 4x^2$ для всіх допустимих значень змінних набуває того самого значення.

376*. Подайте у вигляді раціонального дробу вираз:

а) $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{x}}}$;

б) $\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

Розв'яжіть рівняння:

377. а) $\dfrac{x+1}{x-2}=0$; б) $\dfrac{x^3+3x}{x+3}=0$;

в) $\dfrac{x+2}{x^2-4}=0$; г) $\dfrac{3x}{x-1}=2$.

378. а) $\dfrac{2x-3}{2x-1}=\dfrac{x+3}{x-1}$; б) $\dfrac{x-2}{2x+1}+\dfrac{x-4}{3x-2}=0$;

в) $\dfrac{x+7}{x}-\dfrac{x+5}{x+4}=\dfrac{2}{x^2+4x}$; г) $\dfrac{z-1}{z+5}+\dfrac{4-z}{5-z}=\dfrac{1-2z^2}{25-z^2}$.

379*. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{2x-a}{x+1}=3$ з параметром a.

380*. Для яких значень параметра a рівняння $\dfrac{x-a+1}{(x-2)(x-2a)}=0$ не має коренів?

381. Обчисліть:

а) $81\cdot 3^{-3}$; б) $0{,}01^{-1}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$; в) $(-2{,}5)^{-1}:1{,}5^{-2}$;

г) $3^{-4}\cdot 3^3+2^{-4}\cdot 2^5$; д) $(4^{-4})^{-4}:2^{30}$; е) $\left(-\dfrac{5}{8}\right)^{-4}\cdot\left(1\dfrac{3}{5}\right)^{-4}-\left(2\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$.

382. Перетворіть вираз так, щоб він не містив степенів з від'ємним показником:

а) $\dfrac{ab^{-2}}{c}$; б) $\dfrac{(a-b)^{-1}}{a^{-1}(a+b)}$; в) $\left(\dfrac{x^{-2}}{2y^3}\right)^{-1}$; г) $\dfrac{(c+c^{-1})^{-2}}{c^{-1}}$.

383. Спростіть вираз:

а) $\left(\dfrac{4x^{-2}y}{3}\right)^{-3}\cdot 64x^6y^{-7}$; б) $\left(3a^{-5}c^{-2}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{c^5}{9}\right)^{-1}$;

в) $(2x+3)^{-2}(4x+6)$; **г)** $\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}$;

д) $\left(\dfrac{1}{x^{-1}}-\dfrac{1}{y^{-1}}\right)(x-y)^{-1}$; **е)** $\dfrac{a^{-3}+b^{-3}}{a^{-1}+b^{-1}}$.

384. Подайте вираз у вигляді степеня з основою 2:

а) $32\cdot 2^{n-3}$; **б)** $2^{n+1}\cdot 64$; **в)** $16\cdot 2^{-n+3}$; **г)** $\dfrac{1}{32}\cdot 2^{n-3}$.

385. У виразі $x^{-7}+x^{-5}$ винесіть за дужки множник: x^{-3}; x^{-5}; x.

386*. Доведіть, що для всіх цілих значень змінних вираз набуває того самого значення:

а) $\dfrac{3^m\cdot 7^{-n-1}+3^{m-2}\cdot 7^{-n}}{3^m\cdot 7^{-n}}$; **б)** $\dfrac{5^{-n-1}\cdot 7^{-n}+5^{-n}\cdot 7^{-n-1}}{35^{-n+1}}$.

387. Запишіть у стандартному вигляді число:

а) 8900; **б)** 5 640 000 000; **в)** 0,0533; **г)** 0,0000012.

388. Виразіть час у секундах і запишіть одержане число у стандартному вигляді: 1 год; 1 доба; 30 діб.

389. Побудуйте графік функції:

а) $y=-\dfrac{3}{x}$; **б)** $y=\dfrac{3}{x}$, де $1\le x\le 6$.

390. Запишіть формулу оберненої пропорційності, якщо її графік проходить через точку $B\left(-6;\,-\dfrac{1}{3}\right)$.

391. Графік функції $y=\dfrac{k}{x}$ проходить через точку $A(1;\,8)$. Чи проходить графік цієї функції через точку $B(0{,}5;\,16)$? $C(-0{,}4;\,-20)$?

392. За допомогою графіків функцій встановіть, чи має корені рівняння $\dfrac{10}{x}=0{,}5x-1$.

393. Розв'яжіть графічно рівняння $\dfrac{4}{x}=x$.

394*. Побудуйте графік функції:

а) $y=-\dfrac{2x^2-18}{x^3-9x}$; **б)** $y=\dfrac{4x-4}{x|x|-|x|}$.

Завдання для самоперевірки № 3

Рівень 1

1. Укажіть правильні рівності:

а) $(-100)^0 = 1$; **б)** $4^{-2} = -16$; **в)** $(-3)^0 = -3$; **г)** $(-5)^{-2} = \frac{1}{25}$.

2. Обчисліть: $7^{-2} \cdot 14^0$.

а) 49; **б)** $\frac{2}{7}$; **в)** $\frac{1}{49}$; **г)** $\frac{1}{7}$.

3. Знайдіть значення виразу $2^4 \cdot 2^{-3} + 2^{-1}$.

а) 2; **б)** 130; **в)** $2\frac{1}{2}$; **г)** $2\frac{1}{4}$.

4. Запишіть у вигляді степеня вираз $b^6 : b^{-2}$.

а) b^8; **б)** b^{-12}; **в)** b^{-3}; **г)** b^4.

5. Запишіть у стандартному вигляді число 2570.

а) $25{,}7 \cdot 10^2$; **б)** $2{,}57 \cdot 10^{-3}$; **в)** $0{,}257 \cdot 10^4$; **г)** $2{,}57 \cdot 10^3$.

6. Для якого значення аргументу значення функції $y = \frac{10}{x}$ дорівнює 4?

а) 40; **б)** 2,5; **в)** 5; **г)** 2,4.

Рівень 2

7. Установіть відповідність між виразами (1–4) і тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1) $2^0 a^2 b^{-1}$; **А)** $\frac{2b}{a^2}$;

2) $2^{-1} a^2 b^{-1}$; **Б)** $\frac{a^2}{2b}$;

3) $2^{-1} a^{-2} : b$; **В)** $\frac{2a^2}{b}$;

4) $2 : (a^2 b^{-1})$. **Г)** $\frac{a^2}{b}$;

Д) $\frac{1}{2a^2 b}$.

8. Знайдіть значення виразу:

а) $2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$; **б)** $(-3)^{-2}+12:\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

9. Спростіть вираз:

а) $\left(2a^{-1}b^{3}\right)\cdot\left(6a^{2}b^{-3}\right)$; **б)** $(b-3)^{-2}\cdot\left(b^{2}-3b\right)$.

10. Подайте у вигляді виразу, який не містить степеня з від’ємним показником:

а) $\left(3a^{-5}b^{2}\right)^{-2}$; **б)** $\left(\frac{1}{3}m^{4}n^{-2}\right)^{-3}$.

11. Побудуйте графік функції $y=-\frac{2}{x}$.

Рівень 3

12. Знайдіть значення виразу:

а) $8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}+(0,2)^{-2}$; **б)** $3^{-5}:\left(3^{-6}:9^{-2}\right)$.

13. Спростіть вираз:

а) $\frac{a^{2}b^{-1}}{2c^{-2}}\cdot\frac{8a^{-1}c}{b^{-4}}$; **б)** $\left(\frac{1}{3}m^{-3}n^{4}\right)^{2}:\left(m^{-4}n^{5}\right)$.

14. Спростіть вираз:

а) $(a+2)^{-3}\cdot(5a+10)^{2}$; **б)** $\left(a^{-2}-b^{-2}\right):\frac{a-b}{ab}$.

15. Обчисліть і запишіть результат числом у стандартному вигляді:

а) $\left(2,3\cdot10^{4}\right)\cdot\left(6,1\cdot10^{-3}\right)$; **б)** $\left(5,1\cdot10^{-2}\right):\left(1,7\cdot10^{3}\right)$.

16. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y=\frac{2}{x}$ і $y=-x+3$.

Рівень 4

17. Обчисліть:

а) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-9}$; **б)** $\frac{27^{-3}\cdot16^{-6}}{8^{-9}\cdot81^{-2}}$.

18. Спростіть вираз:

а) $\left(\dfrac{x^m}{y^k}\right)^{-2} \cdot x^{m-3} \cdot y^{-2k+1}$; **б)** $\left(\dfrac{2y}{b}\right)^{-n} : \left(\dfrac{2b^2}{y}\right)^{1-n}$.

19. Спростіть вираз:

а) $\left(x^{-2} + y^{-2}\right) \cdot \dfrac{(xy)^2}{x^4 - y^4}$; **б)** $(a^{-n} - a^n)^2 - a^{2n}(1 + a^{-4n})$.

20. Знайдіть число x, для якого є правильною рівність, та запишіть його у стандартному вигляді:

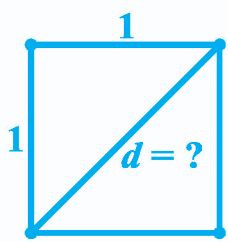
а) 120 км/хв = x м/с; **б)** 3,6 м/год = x м/с.

21. Розв'яжіть графічно рівняння $-\dfrac{2}{|x|} = -2x + 3$.

§ 2. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

У попередніх класах ми розглядали натуральні, цілі та раціональні числа. Виявляється, що для практичних і теоретичних потреб таких чисел замало. Серед них, наприклад, немає числа, яке виражало б довжину діагоналі квадрата зі стороною 1.

У даному параграфі ми розширимо поняття числа: розглядатимемо ірраціональні та дійсні числа. З'ясуємо також, що таке квадратний корінь, арифметичний квадратний корінь, які властивості має арифметичний квадратний корінь.



13. Функція $y = x^2$

Ви знаєте, що площу квадрата обчислюють за формулою $S = a^2$, де a — довжина сторони квадрата. Оскільки кожному значенню a відповідає єдине значення площі S, то S є функцією від a. Перейшовши до прийнятих позначень аргументу й функції, матимемо функцію $y = x^2$.

Надалі розглядатимемо функцію $y = x^2$, у якій змінній x можна надавати будь-яких значень.

Побудуємо графік функції $y = x^2$. Для цього спочатку складемо таблицю для кількох значень x та відповідних значень y:

x	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
y	9	$6\frac{1}{4}$	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	9

Позначимо на координатній площині точки (рис. 5), координати яких подані в таблиці. Якби для кожного значення x обчислили відповідне значення y й позначили б точки з такими координатами на координатній площині, то одержали б лінію, яка є графіком функції $y = x^2$ (рис. 6). Цю лінію називають *параболою*.

Функція $y = x^2$ має такі властивості:

1. *Область визначення функції утворюють усі числа.*

2. *Графіком функції є парабола.*

3. *Якщо* $x = 0$, *то* $y = 0$; *якщо* $x \neq 0$, *то* $y > 0$.

Із властивості 3 випливає, що графік функції проходить через точку (0; 0). Цю точку називають *вершиною* параболи. Друга частина властивості означає, що всі точки параболи, крім її вершини, розташовані вище від осі x.

4. *Область значень функції утворюють усі невід'ємні числа.*

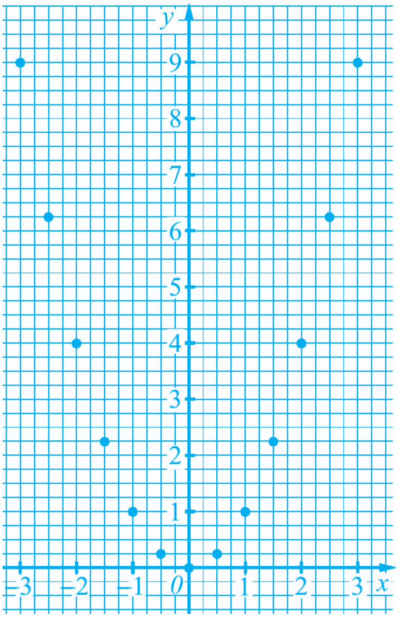


Рис. 5

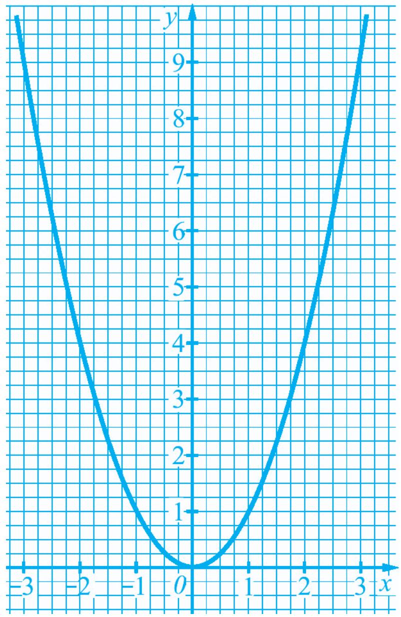


Рис. 6

5. *Графік функції симетричний відносно осі y.*

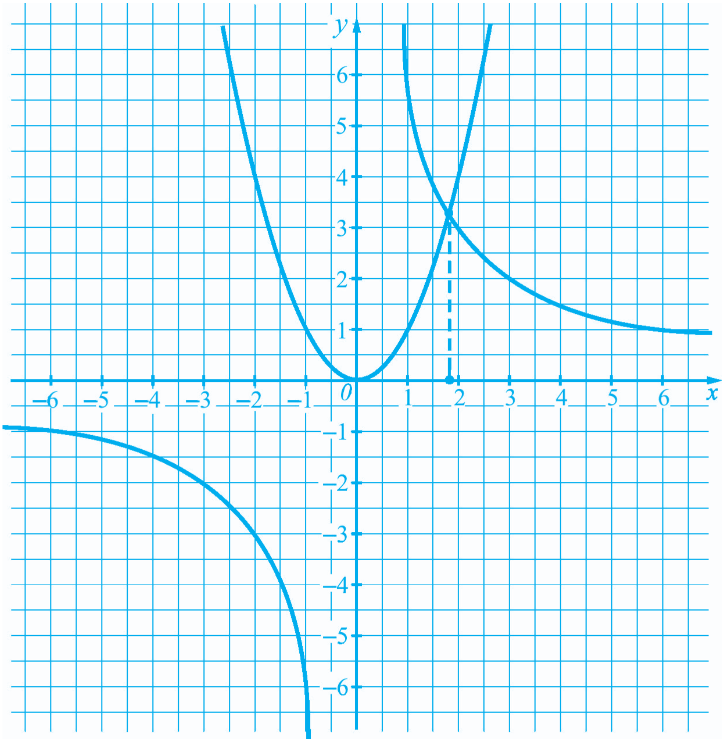
Справді, протилежним значенням аргументу відповідає те саме значення функції. Наприклад, протилежним значенням аргументу $x = –2$ та $x = 2$ відповідає те саме значення функції $y = 4$. Отже, якщо графіку належить точка $(a; b)$, то йому належить і точка $(–a; b)$. Це й означає, що *парабола симетрична відносно осі y.*

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Скільки коренів має рівняння $x^2 = \frac{6}{x}$?

● Будуємо в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ та $y = \frac{6}{x}$.

Ці графіки перетинаються в одній точці з абсцисою $x \approx 1{,}8$. Отже, дане рівняння має один корінь.



Відповідь. Один корінь. ●

Усно

395. Укажіть правильні твердження:

а) область значень функції $y = x^2$ утворюють усі числа;

б) функція $y = x^2$ може набувати від'ємних значень;

в) графіком функції $y = x^2$ є гіпербола;

г) точка (–1; 1) належить графіку функції $y = x^2$.

Рівень А

396. Функцію задано формулою $y = x^2$. Знайдіть:

а) значення y, яке відповідає таким значенням x: –4; –2,1; 0; 5;

б) значення x, яким відповідають такі значення y: 36; 49; 100; 121.

397. Для функції $y = x^2$ заповніть таблицю:

x	–5	–1,5			4
y			0	0,36	

398. Користуючись графіком функції $y = x^2$ (рис. 6), знайдіть значення аргументу, яким відповідають такі значення функції: 1,5; 3,5; 7,5.

399. Користуючись графіком функції $y = x^2$ (рис. 6), знайдіть значення функції, які відповідають таким значенням аргументу: –2,25; 0,75; 1,25.

400. Чи проходить графік функції $y = x^2$ через точку:

а) $A(15; 225)$; **б)** $B(–22; 464)$; **в)** $C(–0,3; 0,9)$; **г)** $D\left(-\frac{1}{5}; -\frac{1}{25}\right)$?

401. Чи проходить графік функції $y = x^2$ через точку:

а) $K(14; 186)$; **б)** $L(–12; 144)$; **в)** $M(0,8; 0,64)$; **г)** $N\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{9}\right)$?

402. Побудуйте графік функції $y = x^2$, де:

а) $–3 \le x \le 2$; **б)** $x \le 0$.

403. Побудуйте графік функції $y = x^2$, де:

а) $–2 \le x \le 3$; **б)** $x \ge 0$.

Рівень Б

404. Для яких значень аргументу функції $y = x^2$ та $y = 5x$ набувають того самого значення?

Побудуйте в одній системі координат графіки функцій і встановіть, скільки спільних точок мають ці графіки:

405. **а)** $y = x^2$ і $y = x – 5$; **б)** $y = x^2$ і $y = –4x – 4$.

406. $y = x^2$ і $y = 3x + 1$.

Розв'яжіть графічно рівняння:

407. **а)** $x^2 = -\frac{1}{x}$; **б)** $x^2 – 3 = –2x$.

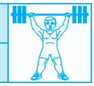
408. **а)** $x^2 = \frac{8}{x}$; **б)** $x^2 + x = 2$.

409. Скільки коренів має рівняння $x^2 - \frac{4}{x} = 0$?

410. Скільки коренів має рівняння $x^2 - 2x - 1 = 0$?

411. Укажіть значення x, для яких значення функції $y = x^2$ менші, ніж відповідні значення функції $y = 1$.

Рівень В



412. Знайдіть значення k, для яких графіки функцій $y = kx + 4$ та $y = x^2$ перетинаються в точці з абсцисою -1.

413. Для яких значень x точки параболи $y = x^2$ розміщені нижче від прямої $y = -x + 6$?

414. Побудуйте графік функції:

а) $y = \frac{x^3}{x}$; **б)** $y = -\frac{x^3}{|x|}$, де $x < 0$;

в) $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$; **г)** $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 1; \\ -x + 2, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$

415. Доведіть, що будь-яка пряма, паралельна осі y, перетинає параболу $y = x^2$.

Вправи для повторення

416. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 - 49 = 0$; **б)** $(3x - 2)^2 - 9 = 0$.

417. Спростіть вираз:

а) $\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right) : \left(a^2 + ab + b^2\right)$; **б)** $\frac{2mn}{m - n} \cdot \left(\frac{1}{mn - n} - \frac{1}{mn - m}\right)$.

418. Довжина обода заднього колеса трактора дорівнює 2 м, переднього — 1,5 м. Скільки метрів має проїхати трактор, щоб переднє колесо зробило на 10 обертів більше, ніж заднє?

419*. Температуру можна вимірювати за шкалами Цельсія і Фаренгейта. Відомо, що 0 градусам за Цельсієм відповідає 32 градуси за Фаренгейтом, а 100 градусам за Цельсієм відповідає 212 градусів за Фаренгейтом.

а) Яку температуру повітря показує термометр зі шкалою Фаренгейта, якщо термометр зі шкалою Цельсія показує 20 градусів?

б) Знайдіть температуру, яка і за шкалою Цельсія, і за шкалою Фаренгейта виражається тим самим числом.

Поміркуйте

420. П'ять футболістів розташовані на футбольному полі так, що попарні відстані між ними є різними. Кожен футболіст має м'яч. У певний момент кожен футболіст пасує м'яч найближчому до себе футболістові. Доведіть, що після перепасовки: **а)** знайдеться футболіст, який не має м'яча; **б)** знайдеться футболіст, який має принаймні 2 м'ячі.

14. Квадратний корінь. Арифметичний квадратний корінь

1. Квадратні корені. Розглянемо задачу: знайти сторону квадрата, площа якого дорівнює 9 см^2.

Нехай сторона квадрата дорівнює x см. Тоді його площа становитиме x^2 см^2, що за умовою задачі дорівнює 9 см^2. Отже, $x^2 = 9$.

Розв'яжемо одержане рівняння графічно. Парабола $y = x^2$ перетинає пряму $y = 9$ у двох точках з абсцисами 3 і –3 (див. рис. 7). Тому коренями рівняння $x^2 = 9$ є два числа $x = 3$ та $x = -3$.

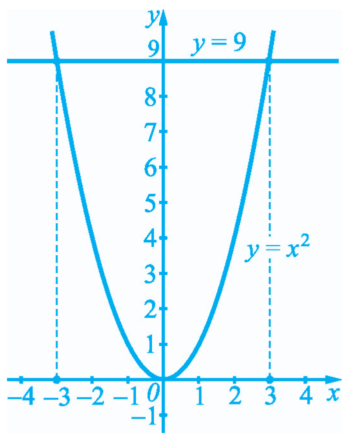


Рис. 7

Довжина сторони квадрата не може виражатися від'ємним числом. Отже, шукана сторона дорівнює 3 см.

Розв'язуючи задачу, ми знайшли числа 3 і –3, квадрати яких дорівнюють 9. Кожне з цих чисел називають *квадратним коренем* з числа 9.

Означення **Квадратним коренем з числа *a* називають таке число, квадрат якого дорівнює *a*.**

Квадратними коренями з числа 9, як ми вже показали, є два числа: 3 і –3.

Квадратними коренями з числа 6,25 є числа 2,5 і –2,5, бо $2{,}5^2 = 6{,}25$ і $(-2{,}5)^2 = 6{,}25$.

Квадратним коренем з числа 0 є тільки число 0, бо тільки квадрат нуля дорівнює нулю.

Квадратних коренів з числа –9 не існує, бо немає чисел, квадрати яких дорівнювали б від'ємному числу.

2. Арифметичний квадратний корінь. Ми встановили, що числа 3 і –3 є квадратними коренями з числа 9. Невід'ємний з цих коренів, тобто число 3, називають *арифметичним квадратним коренем* з числа 9.

Означення **Арифметичним квадратним коренем з числа *a* називають таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює *a*.**

Арифметичний квадратний корінь з числа *a* позначають $\sqrt{a}$ ($\sqrt{}$ — знак арифметичного квадратного кореня). Вираз $\sqrt{a}$ читають: квадратний корінь з *a* (правильно було б: арифметичний квадратний корінь з *a*, але під час читання слово «арифметичний» опускають).

Отже, $\sqrt{9} = 3$ (читають: квадратний корінь з дев'яти дорівнює три).

За означенням арифметичного квадратного кореня:

$\sqrt{121} = 11$, бо число 11 невід'ємне ($11 \geq 0$) і $11^2 = 121$;

$\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$, бо $0{,}6 \geq 0$ і $0{,}6^2 = 0{,}36$;

$\sqrt{0} = 0$, бо $0 \geq 0$ і $0^2 = 0$.

У загальному випадку ***рівність***

$$\boldsymbol{\sqrt{a} = b}$$

***є правильною, якщо виконуються дві умови*:**

$$\textbf{1) } b \geq 0; \quad \textbf{2) } b^2 = a.$$

Коренів із числа –1 не існує, тому не існує й арифметичного квадратного кореня з цього числа. Кажуть, що вираз $\sqrt{-1}$ не має змісту.

Узагалі, ***вираз*** $\boldsymbol{\sqrt{a}}$ ***має зміст, якщо*** $\boldsymbol{a \geq 0}$.

3. Тотожність $\boldsymbol{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,\ a \geq 0}$. Ця тотожність випливає з означення арифметичного квадратного кореня. Справді, оскільки $\sqrt{a}$ — це таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a, то:

$$\boldsymbol{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad (a \geq 0).}$$

Наприклад, $\left(\sqrt{4}\right)^2 = 4$, $\left(\sqrt{1,5}\right)^2 = 1,5$.

4. Добування квадратного кореня. Знаходження значення арифметичного квадратного кореня іноді називають добуванням квадратного кореня. Добувати квадратні корені з натуральних чисел, які є точними квадратами, можна за таблицею квадратів (див. форзац). Нехай потрібно знайти $\sqrt{5476}$. За таблицею квадратів знаходимо, що число 5476 є квадратом числа 74, тому $\sqrt{5476} = 74$. Зрозуміло, що за таблицею квадратів не можна знайти значення квадратного кореня з натурального числа, яке не є точним квадратом або квадрат якого не поміщено в таблицю.

Для добування квадратного кореня з числа можна використати калькулятор. Для цього потрібно ввести число в калькулятор, а потім натиснути клавішу $\boxed{\sqrt{\ }}$. На екрані з'явиться значення кореня.

Знайдемо $\sqrt{111,9}$. Уведемо в калькулятор число 111,9 і натиснемо клавішу $\boxed{\sqrt{\ }}$. На екрані з'явиться число 10,5782796 — наближене значення $\sqrt{111,9}$. Одержаний результат округлюють до потрібного числа знаків. Наприклад, округливши результат до тисячних, отримаємо: $\sqrt{111,9} \approx 10,578$.

Знайдемо $\sqrt{11943936}$. Уведемо в калькулятор число 11943936 і натиснемо клавішу $\boxed{\sqrt{\ }}$. На екрані з'явиться число 3456 — точне значення $\sqrt{11943936}$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Довести, що $\sqrt{0,04}=0,2$.

● Число 0,2 невід’ємне і його квадрат дорівнює 0,04 ($0,2^2=0,04$). Тому $\sqrt{0,04}=0,2$. ●

Вправа 2. Знайти значення виразу $\sqrt{49}\cdot\sqrt{0,25}-\sqrt{\frac{4}{25}}$.

● $\sqrt{49}\cdot\sqrt{0,25}-\sqrt{\frac{4}{25}}=7\cdot 0,5-\frac{2}{5}=3,5-0,4=3,1.$ ●

Усно

421. Знайдіть квадратні корені з числа; арифметичний квадратний корінь з числа:

а) 49; **б)** 1; **в)** 0; **г)** –16.

422. Доведіть, що:

а) $\sqrt{81}=9$; **б)** $\sqrt{0,49}=0,7$.

423. Чи є правильною рівність?

а) $\sqrt{36}=8$; **б)** $\sqrt{36}=-6$; **в)** $\sqrt{36}=6$.

424. Чи має зміст вираз?

а) $\sqrt{256}$; **б)** $\sqrt{-16}$; **в)** $\sqrt{-2\cdot(-8)}$.

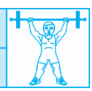
425. Для яких значень x має зміст вираз?

а) $\sqrt{x}$; **б)** $\sqrt{x^2}$; **в)** $\left(\sqrt{x}\right)^2$.

426. Знайдіть значення виразу:

а) $\left(\sqrt{3}\right)^2$; **б)** $\left(\sqrt{4,32}\right)^2$; **в)** $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$.

Рівень А



Обчисліть:

427. **а)** $\sqrt{25}$; **б)** $\sqrt{1}$; **в)** $\sqrt{144}$; **г)** $\sqrt{225}$;

д) $\sqrt{0,09}$; **е)** $\sqrt{0,64}$; **є)** $\sqrt{1,21}$; **ж)** $\sqrt{4,41}$.

428. **а)** $\sqrt{36}$; **б)** $\sqrt{81}$; **в)** $\sqrt{196}$; **г)** $\sqrt{400}$;

д) $\sqrt{0,01}$; **е)** $\sqrt{0,25}$; **є)** $\sqrt{2,25}$; **ж)** $\sqrt{3,24}$.

429. **а)** $\sqrt{\frac{1}{25}}$; **б)** $\sqrt{\frac{9}{49}}$; **в)** $\sqrt{\frac{36}{81}}$; **г)** $\sqrt{\frac{16}{225}}$.

430. **а)** $\sqrt{\frac{9}{64}}$; **б)** $\sqrt{\frac{1}{81}}$; **в)** $\sqrt{\frac{4}{121}}$; **г)** $\sqrt{\frac{100}{169}}$.

Доведіть, що:

431. **а)** $\sqrt{3,61} = 1,9$; **б)** $\sqrt{0,0121} = 0,11$.

432. **а)** $\sqrt{20,25} = 4,5$; **б)** $\sqrt{0,0081} = 0,09$.

Знайдіть значення виразу:

433. **а)** $\sqrt{36}+\sqrt{64}$; **б)** $\sqrt{196}\cdot\sqrt{0,25}$;

в) $3\sqrt{1,69}-\sqrt{4}$; **г)** $\sqrt{16}\cdot\sqrt{6,25}-1,5\sqrt{49}$;

д) $\sqrt{81}+\sqrt{225}-\sqrt{441}$; **е)** $\sqrt{1600}:\sqrt{6400}-5\sqrt{0,25}$;

є) $\sqrt{0,7\cdot 0,8-0,2}$; **ж)** $\sqrt{11,36+0,8\cdot 5,8}$.

434. **а)** $\sqrt{100}-\sqrt{49}$; **б)** $\sqrt{144}:\sqrt{36}$;

в) $\sqrt{1,96}+2\sqrt{1,44}$; **г)** $\sqrt{0,36}\cdot\sqrt{900}-17\sqrt{9}$;

д) $\sqrt{2,7\cdot 0,5+0,09}$; **е)** $\sqrt{1,09-0,4\cdot 2,7}$.

435. **а)** $\sqrt{2x+3}$, якщо $x=3$; $x=-1$; $x=0,12$;

б) $\sqrt{a-2b}$, якщо $a=8$, $b=2$; $a=-3$, $b=-14$.

436. $\sqrt{4a-3}$, якщо $a=1$; $a=7$; $a=31$; $a=0,76$.

437. **а)** $\left(-\sqrt{7}\right)^2$; **б)** $\left(2\sqrt{3}\right)^2$; **в)** $-3\left(\sqrt{1,5}\right)^2$.

438. **а)** $\left(5\sqrt{2}\right)^2$; **б)** $\left(-2\sqrt{6}\right)^2$; **в)** $10\left(\sqrt{3,2}\right)^2$.

Знайдіть за допомогою таблиці квадратів значення квадратного кореня:

439. **а)** $\sqrt{361}$; **б)** $\sqrt{1444}$; **в)** $\sqrt{4096}$; **г)** $\sqrt{8836}$.

440. **а)** $\sqrt{576}$; **б)** $\sqrt{2116}$; **в)** $\sqrt{5929}$; **г)** $\sqrt{9216}$.

Знайдіть за допомогою калькулятора значення квадратного кореня (результат округліть до сотих):

441. **а)** $\sqrt{6}$; **б)** $\sqrt{50}$; **в)** $\sqrt{1,6}$; **г)** $\sqrt{4,38}$.

442. **а)** $\sqrt{10}$; **б)** $\sqrt{28}$; **в)** $\sqrt{12,5}$; **г)** $\sqrt{0,15}$.

Рівень Б

443. Для яких значень x має зміст вираз?

а) $\sqrt{5x}$; **б)** $\sqrt{-5x}$; **в)** $\sqrt{5(-x)^2}$.

Чи має зміст вираз?

444. **а)** $\sqrt{15\cdot 17-16^2}$; **б)** $\sqrt{(-0,3)\cdot(-1,8)-0,5}$; **в)** $\sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^2-\frac{1}{3}}$.

445. **а)** $\sqrt{21^2-24\cdot 20}$; **б)** $\sqrt{-3,6-2:(-0,5)}$; **в)** $\sqrt{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9}-\frac{2}{25}}$.

Знайдіть значення виразу:

446. **а)** $10\sqrt{0,0049}+4\sqrt{0,49}$; **б)** $\sqrt{\frac{16}{81}}:\sqrt{\frac{64}{225}}+\sqrt{\frac{1}{9}}$;

в) $\frac{2}{9}\sqrt{81}+\left(\sqrt{1,5}\right)^2+2\sqrt{3,24}$; **г)** $\sqrt{0,09}\cdot\sqrt{2500}-0,7\sqrt{900}$;

д) $\frac{3}{7}\left(\sqrt{441}-\sqrt{196}\right)\left(\sqrt{1,69}-\sqrt{2,89}\right)$; **е)** $\left(\sqrt{0,0016}-\sqrt{16}\right):\left(\sqrt{18\frac{7}{9}}-\frac{1}{3}\right)$.

447. **а)** $3\sqrt{0,0009}+9\sqrt{\frac{1}{10000}}$; **б)** $\sqrt{2\frac{7}{9}}:\left(\sqrt{\frac{4}{81}}+\left(\sqrt{\frac{4}{9}}\right)^2\right)$;

в) $\sqrt{0,0144}+2\sqrt{0,0225}\cdot\sqrt{\frac{4}{9}}$; **г)** $\frac{5}{9}\left(\sqrt{40000}-\sqrt{22500}\right):\left(\sqrt{1}-\sqrt{\frac{16}{81}}\right)$.

Рівень В

448. Доведіть, що вираз має зміст для будь-якого значення x:

а) $\sqrt{(x-1)(x+1)(x^2+1)+1}$; **б)** $\sqrt{x^2-8x+17}$.

449. Для яких значень x є правильною рівність?

а) $\sqrt{x}=-x$; **б)** $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=0$.

450. Для яких значень a рівняння $(\sqrt{x}+1)(x-a)=0$ не має коренів?

Вправи для повторення

451. Знайдіть значення виразів a^2, $(-a)^2$, $|a|^2$, якщо $a=-1{,}2$.

452. Знайдіть найменше значення виразу:

а) x^2+2; **б)** x^2-1; **в)** $(2x)^2+(3x)^2$.

453. Два поїзди вийшли одночасно з пунктів A і B назустріч один одному і зустрілися в пункті C, який розташований на 20 км ближче до A, ніж до B. Швидкість поїзда, що вийшов з A, на 10 км/год менша від швидкості поїзда, що вийшов з B. Знайдіть швидкість кожного поїзда, якщо відстань між пунктами A і B дорівнює 340 км.

454*. Пшеницею засіяли 65% першого поля і 45% другого поля. Відомо, що на першому і другому полях разом засіяли 53% загальної площі обох полів. Яку частину загальної площі обох полів становить площа першого поля?

Поміркуйте

455. На крайній клітинці смужки розміру 1×100 стоїть фішка. Тарас, а за ним Олег по черзі пересувають фішку на одну або три клітинки у напрямі іншого краю смужки. Програє той, хто не зможе зробити черговий хід. Хто з хлопців може забезпечити собі перемогу (незалежно від ходів суперника)?

15. Рівняння $x^2 = a$

Розв'яжемо графічно рівняння $x^2 = a$. Для цього в одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = x^2$ та прямі $y = a$. На рисунку 8 зображена парабола $y = x^2$ та прямі $y = a$ для трьох випадків: $a > 0$, $a = 0$ та $a < 0$.

Якщо $a > 0$, то пряма $y = a$ перетинає параболу у двох точках з абсцисами $-\sqrt{a}$ та $\sqrt{a}$. Тому в даному випадку коренями рівняння $x^2 = a$ є числа: $x = -\sqrt{a}$ та $x = \sqrt{a}$.

Якщо $a = 0$, то матимемо пряму $y = 0$, яка має з параболою одну спільну точку (0; 0). Отже, рівняння $x^2 = 0$ має єдиний корінь $x = 0$.

Якщо $a < 0$, то пряма $y = a$ не перетинає параболу. В даному випадку рівняння $x^2 = a$ коренів не має.

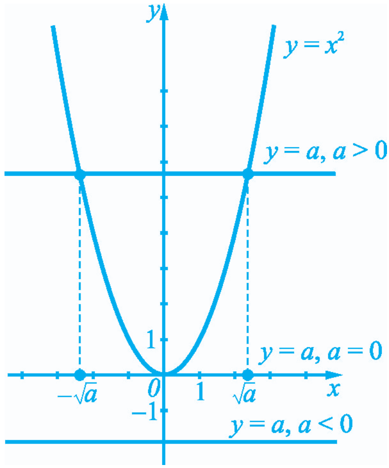


Рис. 8

Отже, рівняння $x^2 = a$:

1) має два корені $x = -\sqrt{a}$ та $x = \sqrt{a}$, якщо $a > 0$;

2) має єдиний корінь $x = 0$, якщо $a = 0$;

3) не має коренів, якщо $a < 0$.

Наприклад,

рівняння $x^2 = 4$ має два корені $x = -\sqrt{4} = -2$ і $x = \sqrt{4} = 2$;

рівняння $x^2 = 3$ має два корені $x = -\sqrt{3}$ і $x = \sqrt{3}$;

рівняння $x^2 = -3$ не має коренів.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати рівняння:

а) $2x^2 - 14 = 0$; **б)** $3 + 2x^2 = 0$; **в)** $(2x - 1)^2 = 9$.

● **а)** $2x^2 - 14 = 0$; $2x^2 = 14$; $x^2 = 7$; $x = -\sqrt{7}$ або $x = \sqrt{7}$.

Відповідь. $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$.

б) $3 + 2x^2 = 0$; $2x^2 = -3$; $x^2 = -1{,}5$ — рівняння коренів не має, бо $-1{,}5 < 0$.
Відповідь. Коренів немає.

в) $(2x - 1)^2 = 9$;

1) $2x - 1 = -\sqrt{9}$; $2x - 1 = -3$; $2x = -2$; $x = -1$;

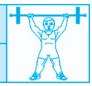
2) $2x - 1 = \sqrt{9}$; $2x - 1 = 3$; $2x = 4$; $x = 2$.

Відповідь. -1; 2. ●

Усно

456. Розв’яжіть рівняння:
а) $x^2 = 49$; **б)** $x^2 = 11$; **в)** $x^2 = 0$; **г)** $x^2 = -11$.

Рівень А



Розв’яжіть рівняння:

457. **а)** $x^2 = 121$; **б)** $x^2 = 0{,}16$; **в)** $x^2 = 5$; **г)** $x^2 = 0{,}3$;
д) $x^2 = \frac{1}{4}$; **е)** $x^2 = \frac{1}{3}$; **є)** $x^2 = -1$; **ж)** $x^2 = 1{,}44$.

458. **а)** $3x^2 = 48$; **б)** $x^2 + 8 = 57$; **в)** $44 - x^2 = 8$; **г)** $-2x^2 = 18$;
д) $-0{,}4x^2 = -8$; **е)** $\frac{1}{2}x^2 = 1$; **є)** $12 + 3x^2 = 6$; **ж)** $2(x^2 + 1) = 10$.

459. **а)** $x^2 = 144$; **б)** $x^2 = 15$; **в)** $x^2 = 1{,}21$; **г)** $x^2 = \frac{2}{5}$;
д) $5x^2 = 20$; **е)** $2 - x^2 = 4$; **є)** $4x^2 + 5 = 41$; **ж)** $3(x^2 + 4) = 9$.

460. Акваріум має форму прямокутного паралелепіпеда. Його довжина удвічі більша від ширини, висота дорівнює 4 дм, а об’єм — 72 дм^3. Знайдіть довжину й ширину акваріума.

461. Довжина ділянки прямокутної форми утричі більша від ширини. Знайдіть розміри ділянки, якщо її площа дорівнює 108 м^2.

Рівень Б

Розв'яжіть рівняння:

462. **а)** $2(x^2 - 3) + 3(2x^2 + 1) = 5$; **б)** $(2x - 5)^2 + (2x + 5)^2 = 62$;

в) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$; **г)** $(5x + 1)^2 - 2 = 10x$.

463. **а)** $3x^2 - 8 + 2(3 - x^2) = 1$; **б)** $(2x - 1)(2x + 1) = x^2 + 2$;

в) $(x - 3)^2 + (x + 3)^2 = 146$; **г)** $9 - (0,5x - 1)^2 = x$.

464. **а)** $(2x - 1)^2 = 16$; **б)** $(3 - x)^2 = 2,25$.

465. **а)** $(x + 2)^2 = 49$; **б)** $(1 - 2x)^2 = 121$.

466. Добуток двох протилежних чисел на 49 менший від їх суми. Знайдіть ці числа.

467. Добуток двох послідовних цілих чисел більший від меншого з цих чисел на 4. Знайдіть ці числа.

Рівень В

468. Розв'яжіть рівняння:

а) $((x^2 - 1)^2 - 2)^2 = 4$; **б)** $\left(\sqrt{x}\right)^2 \cdot x = 2x^2 - 1$.

469. Знайдіть найменший корінь рівняння $|x^2 - 8| + 4 = 21$.

470. Для яких значень a рівняння має один корінь?

а) $x^2 = a^2 - 2a$; **б)** $\frac{2x^2 - 10}{x - a} = 0$.

Вправи для повторення

471. Подайте у вигляді десяткових дробів раціональні числа: $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{9}$; $-3\frac{1}{25}$.

472. Порівняйте числа:

а) 6098 і 6980; **б)** –82 і –78; **в)** 2,14 і 2,143; **г)** –0,72 і –0,702.

473. Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $x + 2y = 5$ і $3x - y = -6$.

474. Партію деталей виготовили на трьох станках. На першому станку виготовили $\frac{2}{5}$ усіх деталей, на другому — 75% тієї кількості, що виготовили на першому, а на третьому — на 6 деталей менше, ніж на першому. Скільки всього деталей виготовили?

Поміркуйте

475. Шматок сиру має форму куба розміру $3 \times 3 \times 3$, з якого вирізаний центральний кубик. Миша починає гризти сир. Спочатку вона з'їдає деякий кубик сиру розміру $1 \times 1 \times 1$. Після того як миша з'їдає черговий кубик, вона починає їсти один із сусідніх по грані кубиків. Чи зможе миша з'їсти весь шматок сиру?

16. Числові множини. Ірраціональні та дійсні числа

1. Натуральні та цілі числа. Множини. З курсу математики нам відомо, що натуральні числа

$$1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ldots$$

використовують здебільшого для лічби.

Цілі числа

$$\ldots -6, \ -5, \ -4, \ -3, \ -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ldots$$

— це натуральні числа, протилежні їм числа й число 0.

Усі натуральні числа утворюють *множину натуральних чисел*, яку позначають буквою $\boldsymbol{N}$; а усі цілі числа — *множину цілих чисел*, яку позначають буквою $\boldsymbol{Z}$.

Термін «множина» використовують, коли йдеться про набір, сукупність будь-яких об'єктів, об'єднаних за певною ознакою. Наприклад, множина учнів школи, множина дерев у парку, множина букв алфавіту, множина планет Сонячної системи тощо. Поняття «множина» належить до основних понять математики, таких як «число», «точка», «пряма», тому його не означують.

Об'єкти, які утворюють множину, називають *елементами* множини. Так, число 5 — елемент множини натуральних чисел. Для позначення множин використовують великі букви латинського алфавіту (A, B, C, …, Z), а для позначення елементів множини — малі букви (a, b, c, …, z).

Якщо елемент a є елементом множини M, то записують: $a \in M$ (читають: *a належить M*). Запис $b \notin M$ означає, що *елемент b не належить множині M*. Наприклад:

нехай P — множина простих чисел; тоді $7 \in P$, $8 \notin P$;

нехай G — множина букв українського алфавіту, які позначають голосні звуки; тоді $е \in G$, $с \notin G$.

Той факт, що число 3 є цілим, а число 0,5 — ні, можна записати так: $3 \in \boldsymbol{Z}$, $0{,}5 \notin \boldsymbol{Z}$.

Записуючи множину, яка складається зі скінченної кількості елементів, ці елементи беруть у фігурні дужки. Наприклад, $M = \{1; 3; 5\}$ — множина, яка складається із трьох елементів — чисел 1, 3 і 5. Тоді $1 \in M$, $2 \notin M$.

Кожне натуральне число є цілим. Тому множина натуральних чисел є частиною (*підмножиною*) множини цілих чисел.

Узагалі, **якщо будь-який елемент множини *A* є елементом множини *B*, то множину *A* називають *підмножиною* множини *B*** і записують $A \subset B$ (читають: A є підмножиною B).

Наприклад, якщо $A = \{-1; 1\}$, $B = \{-1; 0; 1; 2\}$, то $A \subset B$, бо обидва елементи –1 і 1 множини A є елементами множини B. На рисунку 9 зображено схематично, що $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$.

Рис. 9

2. Раціональні числа. Раціональні числа, як ми знаємо, — це цілі та дробові числа. Прикладами раціональних чисел є 1,2; –3,65; $\frac{2}{5}$; $-3\frac{4}{7}$; 2; 0; –3 тощо. Множину всіх раціональних чисел позначають буквою $\boldsymbol{Q}$. Кожне натуральне і кожне ціле число є раціональним числом, тому $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Q}$ і $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$.

Будь-яке раціональне число можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне. Наприклад,

$$1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}; \quad -3{,}7 = \frac{-37}{10}; \quad 2 = \frac{2}{1}; \quad -3 = \frac{-3}{1}.$$

Тому кажуть, що *раціональні числа — це числа, які можна подати у вигляді дробу* $\frac{m}{n}$*, де* m *— ціле число, а* n *— натуральне.*

Раціональні числа, як ми знаємо, можна подавати також у вигляді десяткових дробів. Наприклад,

$$\frac{3}{8} = 0{,}375; \qquad \frac{18}{55} = 0{,}32727... = 0{,}3(27).$$

Раціональне число $\frac{3}{8}$ подане у вигляді скінченного десяткового дробу 0,375, а раціональне число $\frac{18}{55}$ — у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу 0,3(27) з періодом 27.

Скінченний десятковий дріб 0,375 можна записати у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу, дописуючи праворуч у вигляді десяткових знаків безліч нулів: $0{,}375 = 0{,}375000... = 0{,}375(0)$.

Отже, обидва раціональні числа $\frac{3}{8}$ і $\frac{18}{55}$ можна подати у вигляді нескінченних десяткових періодичних дробів:

$$\frac{3}{8} = 0{,}375000... = 0{,}375(0); \qquad \frac{18}{55} = 0{,}32727... = 0{,}3(27).$$

Узагалі, ***будь-яке раціональне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу.***

Правильно й навпаки: *будь-який нескінченний десятковий періодичний дріб є записом деякого раціонального числа*. Наприклад:

$$0{,}(6) = \frac{2}{3}; \qquad 1{,}(27) = 1\frac{3}{11}; \qquad -0{,}2(0) = -0{,}2 = -\frac{1}{5}.$$

Щоб переконатися, що дані рівності є правильними, досить раціональні числа $\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{11}$ і $-\frac{1}{5}$ подати у вигляді нескінченних десяткових дробів.

3. Ірраціональні числа. Розглянемо приклад.

Нехай маємо квадрат $ABCD$, сторона якого дорівнює одиничному відрізку (рис. 10). Позначимо довжину діагоналі AC через x. На цій діагоналі побудуємо квадрат $ACEF$, як показано на рисунку. Площа квадрата $ABCD$ дорівнює 1, площа трикутника ACD дорівнює $\frac{1}{2}$ — половині площі квадрата $ABCD$, а площа квадрата $ACEF$ — $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$. З іншого боку, площа квадрата $ACEF$ дорівнює квадрату сторони AC, тобто x^2. Тому $x^2 = 2$. Одержали, що довжина x діагоналі AC має бути додатним числом, квадрат якого дорівнює 2. Однак серед раціональних чисел немає числа, квадрат якого дорівнює 2 (доведення — в рубриці «Для тих, хто хоче знати більше»).

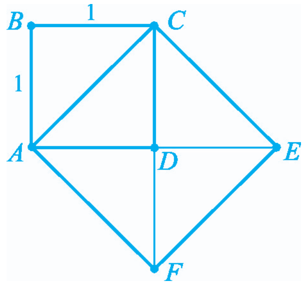


Рис. 10

Отже, число x, яке визначає довжину діагоналі квадрата зі стороною 1, не є раціональним числом.

Оскільки число x є додатним і його квадрат дорівнює 2, то $x = \sqrt{2}$. Таким чином, $\sqrt{2}$ — не раціональне число, тобто його не можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне.

Число, яке не можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне, називають ***ірраціональним числом****.*

Префікс «ір» означає заперечення: ірраціональне — не раціональне.

Отже, $\sqrt{2}$ — ірраціональне число. Якщо шукати значення $\sqrt{2}$ за допомогою калькулятора, то одержимо наближене значення

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356.$$

Точне ж значення

$$\sqrt{2} = 1,41421356...$$

подається у вигляді нескінченного десяткового *неперіодичного* дробу (цей дріб не може бути періодичним, бо $\sqrt{2}$ — не раціональне число).

Узагалі, ***будь-яке ірраціональне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового неперіодичного дробу.***

Прикладами ірраціональних чисел є: $\sqrt{3} = 1{,}732...$, $-\sqrt{10} = -3{,}162...$. Узагалі, якщо натуральне число n не є точним квадратом, то числа $\sqrt{n}$ і $-\sqrt{n}$ є ірраціональними.

Ірраціональними є також числа:

$\pi = 3{,}1415926...$, яке виражає відношення довжини кола до його діаметра;

0,505005000500005... (кількість нулів між п'ятірками послідовно збільшується на 1).

4. Дійсні числа. *Раціональні та ірраціональні числа утворюють множину дійсних чисел*, яку позначають буквою $\boldsymbol{R}$.

Кожне дійсне число a можна подати у вигляді нескінченного десяткового дробу. Якщо цей дріб періодичний, то дійсне число a є раціональним; якщо ж цей дріб неперіодичний, то дійсне число a є ірраціональним. Зрозуміло, що множини натуральних, цілих та раціональних чисел є підмножинами множини дійсних чисел (див. рис. 11).

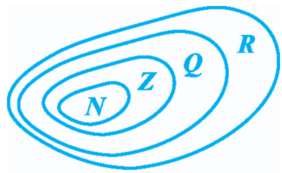


Рис. 11

Дійсні числа можна додавати, віднімати, множити, ділити (на відмінні від нуля числа), підносити до степеня, до того ж для цих дій виконуються властивості, установлені для дій над раціональними числами. Зокрема, для дій додавання і множення справджуються переставна, сполучна і розподільна властивості:

переставна властивість: $a + b = b + a$; $ab = ba$;

сполучна властивість: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(ab)c = a(bc)$;

розподільна властивість: $a(b + c) = ab + ac$,

де a, b і c — будь-які дійсні числа.

Наприклад: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$; $3 \cdot (\pi + \sqrt{5}) = 3 \cdot \pi + 3 \cdot \sqrt{5}$.

Будь-які два дійсні числа можна порівняти. Якщо числа записані у вигляді нескінченних десяткових дробів, то їх порівнюють за тими ж правилами, що й скінченні десяткові дроби. Наприклад,

$$5{,}1\mathbf{3}869\ldots < 5{,}1\mathbf{4}308\ldots\,,$$

бо дані числа мають однакові цілі частини, однакове число десятих, однак друге число має більше число сотих.

5. Етапи розвитку поняття числа. В історії розвитку поняття числа відправною точкою є натуральні числа, які виникли дуже давно й служили для підрахунку кількості предметів. Кожне наступне розширення й узагальнення поняття числа проходило під впливом потреб практики, а також під впливом потреб самої математики.

Так, необхідність точніше вимірювати розміри земельних ділянок, визначати час, вести торгові розрахунки тощо привели до введення поняття «дробове додатне число».

Ідея введення від'ємного числа більше пов'язана з потребами самої математики — від'ємні числа потрібні були для розв'язування рівнянь.

Уведення ірраціональних та дійсних чисел розв'язало проблему вимірювання довжини відрізка, адже за вибраної одиниці вимірювання дійсним числом виражається довжина будь-якого відрізка.

(Детальніше про історію розвитку поняття числа читайте в розділі «Цікаво знати» наприкінці параграфа.)

Для тих, хто хоче знати більше

Доведемо, що серед раціональних чисел немає числа, квадрат якого дорівнює 2.

Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що раціональне число x, квадрат якого дорівнює 2, існує. Подамо число x у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, n — натуральне. Тоді:

$$x^2 = 2; \qquad \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2; \qquad \frac{m^2}{n^2} = 2; \qquad m^2 = 2n^2.$$

З рівності $m^2 = 2n^2$ випливає, що m^2 — парне число. Тоді й число m має бути парним (якби число m було непарним, то й число m^2 було б непарним). Нехай $m = 2k$, де k — ціле число. Підставивши в рівність $m^2 = 2n^2$ замість m число $2k$, матимемо: $(2k)^2 = 2n^2$; $4k^2 = 2n^2$; $2k^2 = n^2$. З рівності $2k^2 = n^2$ випливає, що число n^2, а з ним і число n, — парне. Оскільки числа m і n парні, то дріб $\frac{m}{n}$ можна скоротити на 2. Однак це суперечить тому, що дріб $\frac{m}{n}$ нескоротний.

Отже, припущення, що існує раціональне число, квадрат якого дорівнює 2, неправильне. Тому правильним є твердження, яке потрібно було довести.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Порівняти числа:

а) $\sqrt{2}$ і 1,415; **б)** $-\sqrt{3}$ і –1,75; **в)** $-\sqrt{6}$ і 2,5.

● **а)** За допомогою калькулятора знаходимо: $\sqrt{2} = 1{,}41421...$. Оскільки $1{,}41\underline{4}21... < 1{,}41\underline{5}$, то $\sqrt{2} < 1{,}415$.

б) Пригадаймо: із двох від'ємних чисел більшим є те число, модуль якого менший. Оскільки $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3} = 1{,}7\underline{3}2...$, $|-1{,}75| = 1{,}7\underline{5}$, то $|-\sqrt{3}| < |-1{,}75|$, а тому $-\sqrt{3} > -1{,}75$.

в) Оскільки $-\sqrt{6} < 0$, а $2{,}5 > 0$, то $-\sqrt{6} < 2{,}5$. ●

Вправа 2. Знайти наближене значення виразу $a - b$, якщо $a = 3{,}10346...$, $b = 1{,}78052...$, округливши попередньо значення a і b:

а) до сотих; **б)** до тисячних.

● **а)** $a \approx 3{,}10$; $b \approx 1{,}78$; $a - b \approx 3{,}10 - 1{,}78 = 1{,}32$;

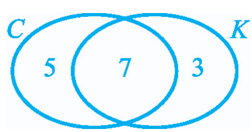
б) $a \approx 3{,}103$; $b \approx 1{,}781$; $a - b \approx 3{,}103 - 1{,}781 = 1{,}322$. ●

Вправа 3. Записати усі двохелементні підмножини множини $A = \{1; 2; 3; 4\}$.

● $\{1; 2\}$; $\{1; 3\}$; $\{1; 4\}$; $\{2; 3\}$; $\{2; 4\}$; $\{3; 4\}$. ●

Вправа 4. У класі 12 дівчат мають чорні брови, 10 дівчат — карі очі, 7 дівчат — чорні брови і карі очі. Скільки дівчат мають чорні брови або карі очі?

● Нехай C — множина тих дівчат, які мають чорні брови, а K — множина тих дівчат, які мають карі очі. Схематично зобразимо ці множини на рисунку.



За умовою чорні брови і карі очі мають 7 дівчат, тому множини C і K мають 7 спільних елементів. Оскільки 12 дівчат мають чорні брови, 7 дівчат — чорні брови і карі очі, то лише чорні брови мають 12 – 7 = 5 (дівчат). Лише карі очі мають 10 – 7 = 3 (дівчини). Отже, чорні брови або карі очі мають 5 + 7 + 3 = 15 (дівчат).

Відповідь. 15 дівчат. ●

Усно

476. Дано множину $M = \{1; -9; 7; 5; 3; 12\}$.

а) Зі скількох елементів складається множина M?

б) Чи належить множині M число 5; число 9?

в) Чи є множина M підмножиною множини $\boldsymbol{N}$; множини $\boldsymbol{Z}$; множини $\boldsymbol{Q}$?

477. Які з чисел 0; –2,5; $\sqrt{3}$; $\frac{3}{7}$; 0,2(3); $-\sqrt{2}$; π; 0,121122111222... (кількість одиниць і двійок послідовно збільшується на 1) є раціональними? ірраціональними? Наведіть інші приклади раціональних та ірраціональних чисел.

478. Укажіть правильні твердження:

а) будь-яке натуральне число є дійсним;

б) будь-яке ірраціональне число є дійсним;

в) будь-яке дійсне число є раціональним.

479. Чи правильно, що:

а) $2 \in \boldsymbol{N}$; **б)** $0,(6) \notin \boldsymbol{Z}$; **в)** $\sqrt{7} \in \boldsymbol{Q}$; **г)** $\sqrt{7} \notin \boldsymbol{R}$;

д) $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$; **е)** $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$; **є)** $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{R}$; **ж)** $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{Z}$?

Рівень А

Запишіть множину, перелічивши всі її елементи:

480. **а)** Множину перших шести натуральних чисел;

б) множину коренів рівняння $2 + 4x = 7$;

в) множину цілих чисел, які задовольняють нерівність $-3,2 < x \le 2$;

г) множину перших п’яти букв українського алфавіту;

д) множину днів тижня.

481. **а)** Множину дільників числа 6;

б) множину цілих чисел, модуль яких менший від 3;

в) множину пір року.

482. Дано множини $K = \{2; 4; 6; 8; 10\}$, $L = \{5; 6; 7; 8\}$.

а) Запишіть, належить чи не належить до кожної із цих множин число 4; число 8; число 9.

б) Запишіть множину M всіх тих елементів, які належать множині K, і не належать множині L.

в) Чи є множина M підмножиною множини K? множини L?

483. Дано множини $A = \{5; 8; 11; 14; 17\}$, $B = \{5; 9; 14; 20\}$.

а) Запишіть, належить чи не належить до кожної із цих множин число 9; число 14; число 19.

б) Запишіть множину C всіх тих елементів, які належать множині A і множині B.

в) Чи є множина C підмножиною множини A? множини B?

484. Запишіть усі трьохелементні підмножини множини $C = \{а; б; в; г\}$.

485. Запишіть усі двохелементні підмножини множини $A = \{2; 4; 5; 7; 8\}$.

Подайте у вигляді нескінченного десяткового дробу число:

486. **а)** 2,6; **б)** –1,48; **в)** 6; **г)** –40;

д) $\frac{3}{8}$; **е)** $3\frac{1}{9}$; **є)** $-4\frac{2}{11}$; **ж)** $3\frac{1}{12}$.

487. **а)** 1,5; **б)** –7,09; **в)** $2\frac{5}{16}$; **г)** $-1\frac{7}{30}$.

Порівняйте числа:

488. **а)** 8,998… і 9,113…; **б)** –0,382... і 5,117...;

в) –32,144... і –12,543...; **г)** –2,724... і –2,725... .

489. **а)** 7,351… і 7,452...; **б)** 0,836... і –2,938...;

в) –0,951... і –0,953...; **г)** –11,531... і –12,938... .

Яке з чисел більше?

490. **а)** 0,6 чи $\frac{3}{7}$; **б)** –0,327 чи $-\frac{1}{3}$;

в) 0,579... чи 0,58; **г)** 2,72 чи 2,(72);

д) 1,7 чи $\sqrt{3}$; **е)** 1,8 чи $\sqrt{3}$;

є) $\sqrt{6}$ чи –3; **ж)** $-\sqrt{5}$ чи –2.

491. **а)** 0,75 чи $\frac{5}{7}$; **б)** 5,338... чи 5,(33);

в) $-1\frac{2}{3}$ чи –1,68; **г)** –5,(31) чи –5,31;

д) 3,34 чи $\sqrt{10}$; **е)** 15 чи $\sqrt{226}$.

492. Запишіть у порядку зростання числа: 2,(7); 0,82; –1,95...; –0,03...; $\sqrt{5}$.

493. Запишіть у порядку спадання числа: 4,38...; –1,32; $-1\frac{1}{3}$; $\sqrt{17}$; 4,(89).

Рівень Б

Порівняйте числа:

494. **а)** 0,7129... і $\frac{5}{7}$; **б)** $2\frac{1}{3}$ і $\sqrt{5}$; **в)** $-\sqrt{2}$ і –1,4(3).

495. **а)** 1,5(4) і $1\frac{15}{29}$; **б)** –15 і $-\sqrt{224}$; **в)** 7,1(2) і $\sqrt{49{,}8}$.

496. Знайдіть наближене значення різниці $x - y$, округливши зменшуване та від'ємник до сотих, якщо:

а) $x = 0{,}3849\ldots$; $y = 1{,}1020\ldots$; **б)** $x = 102{,}3120\ldots$; $y = 23{,}1023\ldots$.

497. Знайдіть наближене значення суми $x + y$, округливши доданки до десятих, якщо:

а) $x = 18{,}4105\ldots$; $y = 9{,}9981\ldots$; **б)** $x = 0{,}9018\ldots$; $y = 0{,}0799\ldots$.

498. Множину M утворюють усі дійсні числа x, які задовольняють нерівність $1 \le x \le 7$. Які із множин є підмножинами множини M:

а) $A = \{1; 5; 7\}$; **б)** $B = \{2{,}5; 4\}$; **в)** $C = \{5; 7{,}5\}$; **г)** $D = \{7\}$?

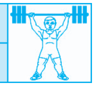
499. Нехай P — множина всіх прямокутників, R — ромбів, K — квадратів. Чи правильно, що:

а) $K \subset P$; **б)** $R \subset P$; **в)** $K \subset R$; **г)** $R \subset K$?

500. Серед 28 туристів 18 туристів володіють англійською мовою, 14 — французькою, 10 — англійською і французькою. Скільки туристів не володіють жодною з цих мов?

501. З червоних та білих троянд зробили 30 букетів. Виявилося, що червоні троянди є у 20 букетах, червоні та білі — у 8 букетах. У скількох букетах є білі троянди?

Рівень В



502. Доведіть, що:

а) сума, різниця, добуток і частка двох раціональних чисел є раціональним числом;

б) сума раціонального та ірраціонального чисел є ірраціональним числом.

503. Чи може сума, добуток двох ірраціональних чисел бути раціональним числом?

504. Доведіть, що задане число є ірраціональним:

а) $\sqrt{3}$; **б)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

505. У школі 33 восьмикласники відвідують три спортивні секції: футболом займаються 20 учнів, баскетболом — 11, волейболом — 14, футболом і баскетболом — 5, футболом і волейболом — 6, футболом, баскетболом і волейболом — 2. Скільки учнів займаються лише баскетболом і волейболом?

Вправи для повторення

506. Піднесіть до квадрата:

а) $(mn)^2$; **б)** $\left(\frac{m}{n}\right)^2$; **в)** $\left(m^3\right)^2$; **г)** $\left(-\frac{3m^5}{2n^2}\right)^2$.

507. Знайдіть значення виразу $|2a-3|$, якщо $a=5$; $a=1{,}4$; $a=1{,}6$.

508. Два велосипедисти одночасно вирушили з пункту A до пункту B, відстань між якими дорівнює 78 км. Швидкість другого велосипедиста на 2 км/год більша, ніж швидкість першого. Прибувши до пункту B, другий велосипедист одразу ж вирушив назад і, проїхавши 4 км, зустрів першого велосипедиста. Знайдіть швидкість другого велосипедиста.

509. Через першу трубу басейн можна наповнювати водою, а через другу — випускати воду з басейна. Час, за який наповнюють басейн через першу трубу, в 2,5 разу менший від часу, за який випускають воду з повного басейну через другу трубу. Якщо відкрити обидві труби одночасно, то басейн можна наповнити за 12 год. За який час можна наповнити басейн, відкривши лише першу трубу?

Поміркуйте

510. Руслана зафарбувала деякі клітинки смужки розміру 1×50: 14 клітинок — у зелений колір, 12 — у червоний і 10 — у синій. Виявилося, що жодні дві зафарбовані клітинки різного кольору не межують одна з одною. Доведіть, що деякі три зафарбовані клітинки, розміщені підряд, мають один колір.

17. Властивості арифметичного квадратнго кореня

Нагадаємо спочатку, як ми доводимо рівність $\sqrt{81} = 9$. Оскільки 1) права частина рівності є невід'ємним числом ($9 \geq 0$) і 2) квадрат правої частини дорівнює підкореневому виразу в лівій частині ($9^2 = 81$), то рівність $\sqrt{81} = 9$ є правильною. Такі міркування використовуватимемо для доведення властивостей арифметичного квадратного кореня, сформульованих у вигляді теорем.

1. Квадратний корінь з добутку.

Теорема **1. Квадратний корінь з добутку двох невід'ємних множників дорівнює добутку квадратних коренів із цих множників:**

$$\text{якщо } a \geq 0 \text{ і } b \geq 0, \text{ то } \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доведення. 1) Вирази $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ для $a \geq 0$ і $b \geq 0$ мають зміст. Оскільки $\sqrt{a} \geq 0$ і $\sqrt{b} \geq 0$, то $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$.

2) $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$.

Отже, вираз $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ набуває невід'ємних значень, і квадрат цього виразу дорівнює ab. Тому рівність $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ є правильною. ●

Наприклад, $\sqrt{25 \cdot 49} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{49} = 5 \cdot 7 = 35$.

Використовуючи теорему 1, можна знаходити квадратний корінь з добутку, який містить три і більше невід'ємні множники. Наприклад, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, то:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Узагалі, *квадратний корінь з добутку кількох невід'ємних множників дорівнює добутку квадратних коренів з цих множників.*

2. Квадратний корінь із дробу.

***Теорема* 2. Квадратний корінь із дробу, чисельник якого є невід'ємним, а знаменник — додатним, дорівнює квадратному кореню з чисельника, поділеному на квадратний корінь зі знаменника:**

якщо $a \geq 0$ і $b > 0$, то $$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доведення. 1) Вираз $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ для $a \geq 0$ і $b > 0$ має зміст. Оскільки $\sqrt{a} \geq 0$ і $\sqrt{b} > 0$, то $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0$. 2) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \dfrac{a}{b}$. Отже, рівність $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ є правильною. ●

Наприклад, $\sqrt{\dfrac{25}{49}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \dfrac{5}{7}$.

3. Квадратний корінь зі степеня.

***Теорема* 3. Квадратний корінь зі степеня a^{2n}, де $a \geq 0$ і n — натуральне число, дорівнює a^n:**

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n.$$

Доведення. 1) Оскільки $a \geq 0$, то $a^n \geq 0$. 2) $\left(a^n\right)^2 = a^{2n}$. Отже, рівність $\sqrt{a^{2n}} = a^n$ є правильною. ●

Наприклад, $\sqrt{5^4} = 5^2 = 25$.

4. Тотожність $\sqrt{a^2} = |a|$. Доведемо, що для будь-якого значення a виконується рівність:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Справді, вираз $|a|$ набуває невід'ємних значень, і квадрат цього виразу дорівнює a^2 (якщо $a \geq 0$, то $|a| = a$ і $(|a|)^2 = a^2$; якщо $a < 0$, то $|a| = -a$ і $(|a|)^2 = (-a)^2 = a^2$). Отже, рівність $\sqrt{a^2} = |a|$ є правильною.

Наприклад, $\sqrt{1,8^2} = |1,8| = 1,8$; $\sqrt{(-35)^2} = |-35| = 35$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти значення виразу:

а) $\sqrt{36 \cdot 0,16}$; **б)** $\sqrt{128 \cdot 18}$; **в)** $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$.

● **а)** $\sqrt{36 \cdot 0,16} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{0,16} = 6 \cdot 0,4 = 2,4$;

б) $\sqrt{128 \cdot 18} = \sqrt{(2 \cdot 64) \cdot (2 \cdot 9)} = \sqrt{4 \cdot 64 \cdot 9} = 2 \cdot 8 \cdot 3 = 48$;

в) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$. ●

Вправа 2. Знайти значення виразу $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}}$.

● $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}} = \sqrt{\dfrac{3}{75}} = \sqrt{\dfrac{1}{25}} = \dfrac{1}{5}$. ●

Вправа 3. Знайти значення виразу:

а) $\sqrt{1,5^4}$; **б)** $\sqrt{0,1^6}$; **в)** $\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{3^2}$.

● **а)** $\sqrt{1,5^4} = 1,5^2 = 2,25$;

б) $\sqrt{0{,}1^6} = 0{,}1^3 = 0{,}001$.

в) $\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{3^2} = |-5| + |3| = 5 + 3 = 8$. ●

Вправа 4. Спростити вираз $\sqrt{4a^2(-b)^2}$, де $a \le 0$, $b \ge 0$.

● $\sqrt{4a^2(-b)^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{(-b)^2} = 2|a| \cdot |-b| = 2|a| \cdot |b|$, бо $|-b| = |b|$.

Оскільки $a \le 0$, $b \ge 0$, то $|a| = -a$, $|b| = b$. Тому $2|a||b| = 2(-a)b = -2ab$. ●

Вправа 5. Знайти значення виразу $\sqrt{9a^2 + 6a + 1}$, якщо $a = -5$; $a = 0{,}7$.

● $\sqrt{9a^2 + 6a + 1} = \sqrt{(3a+1)^2} = |3a + 1|$.

Якщо $a = -5$, то $|3a + 1| = |3 \cdot (-5) + 1| = |-14| = 14$.

Якщо $a = 0{,}7$, то $|3a + 1| = |3 \cdot 0{,}7 + 1| = |3{,}1| = 3{,}1$. ●

Усно

Знайдіть значення виразу:

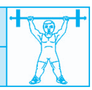
511. **а)** $\sqrt{16 \cdot 25}$; **б)** $\sqrt{81 \cdot 4}$; **в)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$; **г)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$.

512. **а)** $\sqrt{\frac{36}{49}}$; **б)** $\sqrt{\frac{64}{81}}$; **в)** $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$; **г)** $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$.

513. **а)** $\sqrt{2^2}$; **б)** $\sqrt{2^4}$; **в)** $\sqrt{2^6}$; **г)** $\sqrt{2^8}$.

514. **а)** $\sqrt{12^2}$; **б)** $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$; **в)** $\sqrt{(-3)^2}$; **г)** $\sqrt{(-1{,}1)^2}$.

Рівень А



Знайдіть значення виразу:

515. **а)** $\sqrt{16 \cdot 49}$; **б)** $\sqrt{121 \cdot 81}$; **в)** $\sqrt{0{,}04 \cdot 36}$;

г) $\sqrt{2{,}25 \cdot 0{,}16}$; **д)** $\sqrt{1{,}44 \cdot 0{,}25}$; **е)** $\sqrt{441 \cdot 0{,}01}$;

є) $\sqrt{9 \cdot 25 \cdot 64}$; **ж)** $\sqrt{4 \cdot 81 \cdot 625}$; **з)** $\sqrt{0{,}36 \cdot 225 \cdot 16}$.

516. а) $\sqrt{25\cdot 81}$; б) $\sqrt{36\cdot 144}$; в) $\sqrt{0{,}09\cdot 49}$;

г) $\sqrt{3{,}24\cdot 0{,}25}$; д) $\sqrt{9\cdot 16\cdot 25}$; е) $\sqrt{64\cdot 0{,}04\cdot 225}$.

517. а) $\sqrt{\frac{49}{81}}$; б) $\sqrt{\frac{196}{225}}$; в) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$.

518. а) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; б) $\sqrt{\frac{121}{289}}$; в) $\sqrt{4\frac{21}{25}}$.

Подайте вираз у вигляді добутку коренів:

519. а) $\sqrt{2\cdot 7}$; б) $\sqrt{21}$; в) $\sqrt{5a}$.

520. а) $\sqrt{8\cdot 3}$; б) $\sqrt{35}$; в) $\sqrt{8b}$.

Подайте вираз у вигляді частки коренів:

521. а) $\sqrt{\frac{3}{5}}$; б) $\sqrt{\frac{8}{17}}$; в) $\sqrt{\frac{2}{a}}$.

522. а) $\sqrt{\frac{6}{7}}$; б) $\sqrt{\frac{11}{17}}$; в) $\sqrt{\frac{b}{5}}$.

Знайдіть значення виразу:

523. а) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; в) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{0{,}5}$;

г) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{0{,}03}$; д) $\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{5}$; е) $\sqrt{\frac{5}{6}}\cdot\sqrt{\frac{2}{15}}$.

524. а) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{99}}$; в) $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{24}}{\sqrt{2}}$.

525. а) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$; б) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{72}$; в) $\sqrt{2{,}5}\cdot\sqrt{40}$;

г) $\sqrt{\frac{3}{8}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$; д) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; е) $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

526. а) $\sqrt{5^4}$; б) $\sqrt{3^6}$; в) $\sqrt{1{,}2^4}$.

527. а) $\sqrt{3^4}$; б) $\sqrt{2^8}$; в) $\sqrt{0{,}2^6}$.

528. **а)** $\sqrt{89^2}-48$; **б)** $\sqrt{107^2}+\sqrt{(-107)^2}$; **в)** $2\cdot\sqrt{3,8^2}-\sqrt{(-3,8)^2}$.

529. **а)** $100-\sqrt{99^2}$; **б)** $\sqrt{67^2}-\sqrt{(-67)^2}$; **в)** $\sqrt{1,9^2}+\sqrt{(-1,9)^2}$.

Рівень Б

Знайдіть значення виразу:

530. **а)** $\sqrt{18\cdot 32}$; **б)** $\sqrt{360\cdot 90}$; **в)** $\sqrt{27\cdot 75}$;

г) $\sqrt{250\cdot 0,036}$; **д)** $\sqrt{4,9\cdot 22,5}$; **е)** $\sqrt{15\cdot 21\cdot 35}$.

531. **а)** $\sqrt{250}\cdot\sqrt{160}$; **б)** $\sqrt{28}\cdot\sqrt{63}$; **в)** $\sqrt{0,08}\cdot\sqrt{0,72}$.

532. **а)** $\sqrt{45\cdot 125}$; **б)** $\sqrt{48\cdot 27}$; **в)** $\sqrt{0,4\cdot 490}$;

г) $\sqrt{640}\cdot\sqrt{810}$; **д)** $\sqrt{32}\cdot\sqrt{0,08}$; **е)** $\sqrt{22\cdot 14\cdot 77}$.

533. **а)** $\sqrt{29^2-20^2}$; **б)** $\sqrt{65^2-16^2}$; **в)** $\sqrt{20,5^2-4,5^2}$.

534. **а)** $\sqrt{20^2-16^2}$; **б)** $\sqrt{52^2-48^2}$; **в)** $\sqrt{6,5^2-2,5^2}$.

535. **а)** $\sqrt{28^4}-\sqrt{22^4}$; **б)** $\sqrt{2^{10}}+\sqrt{(-2,5)^2}$; **в)** $\sqrt{1,8^4}-\sqrt{(-1,8)^2}$;

г) $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{(-6)^2}}$; **д)** $\sqrt{(-8,4)^2}\cdot\sqrt{(-0,5)^2}-\left(\sqrt{4,5}\right)^2$.

536. **а)** $\sqrt{4^8}-\sqrt{1,6^4}$; **б)** $\sqrt{(-6,4)^2}\cdot\sqrt{(-5)^2}-\left(\sqrt{32}\right)^2$;

в) $\sqrt{\sqrt{(-7)^2}-\left(\sqrt{3}\right)^2}$; **г)** $\left(\sqrt{90}\right)^2+\sqrt{(-135)^2}\cdot\left(\sqrt{0,6}\right)^2$.

537. **а)** $\sqrt{16^3}$; **б)** $\sqrt{9^5}$; **в)** $\sqrt{8^2\cdot 4^3}$.

538. **а)** $\sqrt{4^5}$; **б)** $\sqrt{25^3}$; **в)** $\sqrt{9^3\cdot 3^2}$.

Спростіть вираз:

539. **а)** $\sqrt{a^2b^2}$, де $a \ge 0$, $b \ge 0$; **б)** $\sqrt{a^2b^2}$, де $a \ge 0$, $b \le 0$;

в) $\sqrt{4x^4y^6}$, де $y < 0$; **г)** $\sqrt{\dfrac{25m^2}{n^8}}$, де $m \ge 0$;

д) $\sqrt{(-a)^2b^4}$, де $a < 0$; **е)** $\sqrt{0,04(-x)^2(-y)^2}$, де $x > 0$, $y < 0$.

540. **а)** $\sqrt{a^4b^2}$, де $b < 0$: **б)** $\sqrt{36a^{10}b^6}$, де $a < 0$, $b \ge 0$;

в) $\sqrt{\dfrac{x^2}{y^8}}$, де $x \ge 0$; **г)** $\sqrt{49(-x)^2y^2}$, де $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Знайдіть значення виразу:

541. **а)** $\sqrt{(2b-3)^2}$, якщо $b = -6$; $b = 1,6$; **б)** $\sqrt{a^2-2a+1}$, якщо $a = -8$; $a = 2,7$;

в) $\sqrt{\left(\sqrt{10}-3\right)^2}-\sqrt{10}$; **г)** $\sqrt{21}+\sqrt{\left(\sqrt{21}-5\right)^2}$.

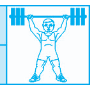
542. **а)** $\sqrt{(b-7)^2}$, якщо $b = -1$; $b = 9,2$; **б)** $\sqrt{x^2-4x+4}$, якщо $x = -3$; $x = 1,4$;

в) $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{5}$; **г)** $\sqrt{\left(4-\sqrt{15}\right)^2}+\sqrt{15}$.

543. **а)** $\sqrt{1\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{4\frac{4}{7}}-\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{7}}$; **б)** $\sqrt{\dfrac{8\cdot 98}{125\cdot 45}}-\sqrt{\dfrac{9\cdot 225}{425^2-200^2}}$.

544. **а)** $\sqrt{1,8}\cdot\sqrt{\frac{7}{9}}\cdot\sqrt{5\frac{3}{5}}$; **б)** $\sqrt{1\frac{3}{8}}\cdot\sqrt{5\frac{1}{2}}-\sqrt{\dfrac{12,5^2-3,5^2}{2\cdot 128}}$.

Рівень В



545. Знайдіть значення кореня, не користуючись калькулятором:

а) $\sqrt{139876}$; **б)** $\sqrt{331776}$.

Вказівка. Розкладіть число, з якого потрібно добути корінь, на множники. Наприклад, $\sqrt{28224}=\sqrt{4\cdot 4\cdot 4\cdot 9\cdot 49}=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7=168$.

546. Для яких значень x є правильною рівність:

а) $\sqrt{x^6}=x^3$; **б)** $\sqrt{x^6}=-x^3$;

в) $\sqrt{x^8}=x^4$; **г)** $\sqrt{x^2}=\left(\sqrt{x}\right)^2$;

д) $x\sqrt{2}=\sqrt{2x^2}$; **е)** $x\sqrt{2}=-\sqrt{2x^2}$?

547. Доведіть тотожність:

а) $\sqrt{a^4+2a^2+1}=a^2+1;$ **б)** $\sqrt{x^2+2|x|+1}=|x|+1.$

548. Спростіть вираз $\sqrt{4x^4+4x^2+1}-\sqrt{x^4+6x^2+9}.$

549. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x^2}=4-|x|;$ **б)** $\sqrt{x^2}=2\left(\sqrt{x}\right)^2-1.$

550. Побудуйте графік функції:

а) $y=\sqrt{x^2}-1;$ **б)** $y=\sqrt{x^2}+x.$

Вправи для повторення

551. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x+1)(x-2)+3x=x^2;$ **б)** $3x(1-2x)+x(6x+1)=1;$

в) $\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}=0;$ **г)** $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{4}{x+2}=1.$

552. Спростіть вираз:

а) $3(2a-1)-2(a+5);$ **б)** $(3x+5)^2+(2-3x)(2+3x);$

в) $\dfrac{2xz-2yz}{3xy-3y^2};$ **г)** $\dfrac{a^2-2ab+a-2b}{a^2+2a+1}.$

553. Знайдіть значення виразу $|x|+|y|$, якщо:

а) $x=-3;\ y=-8;$ **б)** $x=2;\ y=-1{,}8.$

554. Чи можна 85 туристів поділити на три групи так, щоб у другій групі було вдвічі більше туристів, ніж у першій, а в третій — удвічі більше, ніж у другій?

555. З міста A до міста B, відстань між якими дорівнює 42 км, виїхав вантажний автомобіль, а через 6 хв — легковий. До міста B автомобілі прибули одночасно. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо швидкість легкового в 1,2 разу більша від швидкості вантажного.

Поміркуйте

556. У кожній вершині шестикутника стоїть фішка. За один хід будь-яку фішку можна перемістити в сусідню вершину. Чи можна зібрати всі фішки в одній вершині рівно за 28 ходів?

18. Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені

1. Найпростіші перетворення. Розглянемо перетворення, пов'язані з додаванням, відніманням, множенням, діленням і піднесенням до степеня виразів, які містять квадратні корені:

$$3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=7\sqrt{2};\qquad \sqrt{a}+2\sqrt{a}=3\sqrt{a};$$

$$5\sqrt{3}-3\sqrt{3}=2\sqrt{3};\qquad 2\sqrt{b}-4\sqrt{b}=-2\sqrt{b};$$

$$4\sqrt{2}\cdot5\sqrt{3}=20\sqrt{6};\qquad 4\sqrt{a}\cdot(-2\sqrt{b})=-8\sqrt{ab};$$

$$15\sqrt{6}:\left(3\sqrt{2}\right)=\frac{15\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}=5\sqrt{3};\qquad 10\sqrt{x}:\left(5\sqrt{x}\right)=\frac{10\sqrt{x}}{5\sqrt{x}}=2;$$

$$\left(4\sqrt{2}\right)^2=4^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2=16\cdot2=32;\qquad \left(2\sqrt{a}\right)^2=2^2\cdot\left(\sqrt{a}\right)^2=4a.$$

2. Винесення множника з-під знака кореня. Розглянемо перетворення:

$$\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}.$$

Виконане перетворення називають *винесенням множника з-під знака кореня*. У даному випадку винесено з-під знака кореня множник 3.

Винесемо множник з-під знака кореня у виразах $\sqrt{3b^2}$, де $b>0$, та $\sqrt{24a^2}$, де $a<0$:

$$\sqrt{3b^2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{b^2}=\sqrt{3}\cdot|b|=b\sqrt{3}\text{ (якщо } b>0\text{, то } |b|=b\text{);}$$

$$\sqrt{24a^2}=\sqrt{4\cdot a^2\cdot6}=2\cdot|a|\cdot\sqrt{6}=-2a\sqrt{6}\text{ (якщо } a<0\text{, то } |a|=-a\text{).}$$

3. Внесення множника під знак кореня. Розглянемо перетворення:

$$3\sqrt{2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{9\cdot2}=\sqrt{18}.$$

Таке перетворення називають *внесенням множника під знак кореня*. Замінивши вираз $3\sqrt{2}$ на вираз $\sqrt{18}$, ми внесли під знак кореня множник 3.

Внесемо множник під знак кореня у виразі $a\sqrt{3}$, де $a>0$. Оскільки $a>0$, то $a=|a|=\sqrt{a^2}$. Тому $a\sqrt{3}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3a^2}$.

Внесемо множник під знак кореня у виразі $c\sqrt{2}$, де $c<0$. Оскільки $c<0$, то $|c|=-c$, звідки $c=-|c|=-\sqrt{c^2}$. Тому $c\sqrt{2}=-\sqrt{c^2}\cdot\sqrt{2}=-\sqrt{2c^2}$.

4. Звільнення від ірраціональності у знаменнику або чисельнику дробу. Розглянемо перетворення, які дозволяють позбутися коренів у знаменниках або чисельниках дробів:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5};\qquad \frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{6\cdot\sqrt{3}}=\frac{3}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}-2}=\frac{\sqrt{6}+2}{\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)}=\frac{\sqrt{6}+2}{\left(\sqrt{6}\right)^2-2^2}=\frac{\sqrt{6}+2}{6-4}=\frac{\sqrt{6}+2}{2}.$$

Виконані перетворення називають *звільненням від ірраціональності у знаменнику або чисельнику дробу*. Кожне таке перетворення зводиться до множення чисельника і знаменника дробу на певний вираз.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Спростити вираз:

а) $\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{50}$; **б)** $\left(2\sqrt{3}-3\right)\left(2\sqrt{3}+3\right)$; **в)** $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{6}$.

● **а)** $\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{50}=\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{25\cdot 2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-5\sqrt{2}=0$;

б) $\left(2\sqrt{3}-3\right)\left(2\sqrt{3}+3\right)=\left(2\sqrt{3}\right)^2-3^2=4\cdot 3-9=3$;

в) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{6}=$

$=3-2\sqrt{6}+2+2\sqrt{6}=5$. ●

Вправа 2. Розкласти на множники:

а) $\sqrt{18}-\sqrt{6}$; **б)** $m+\sqrt{m}$; **в)** $a-b$, де $a>0$; $b>0$.

● **а)** $\sqrt{18}-\sqrt{6}=\sqrt{6\cdot 3}-\sqrt{6}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{6}=\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)$.

б) Вираз $m+\sqrt{m}$ має зміст, якщо $m \geq 0$. Для таких значень m справджується рівність $m=\left(\sqrt{m}\right)^2$, тому:

$$m+\sqrt{m}=\left(\sqrt{m}\right)^2+\sqrt{m}=\sqrt{m}\left(\sqrt{m}+1\right).$$

в) Урахувавши, що $a > 0$, $b > 0$, матимемо:

$$a-b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right). \text{ ●}$$

Вправа 3. Спростити вираз:

а) $\left(\sqrt{a}-4\right)\left(\sqrt{a}+4\right)-\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)$; **б)** $\dfrac{b^2-3}{2b+2\sqrt{3}}$.

● **а)** $\left(\sqrt{a}-4\right)\left(\sqrt{a}+4\right)-\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-16-\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}=\sqrt{a}-16$.

б) Розклавши чисельник і знаменник дробу на множники, матимемо:

$$\frac{b^2-3}{2b+2\sqrt{3}}=\frac{b^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{2\left(b+\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(b-\sqrt{3}\right)\left(b+\sqrt{3}\right)}{2\left(b+\sqrt{3}\right)}=\frac{b-\sqrt{3}}{2}. \text{ ●}$$

Вправа 4. Спростити вираз $\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$.

● Звільнившись від ірраціональності у знаменниках дробів, матимемо:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-2}+\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}+\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+2}{3-4}+\frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1}=-\sqrt{3}-2+\sqrt{3}-1=-3. \text{ ●}$$

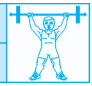
Усно

557. Спростіть вираз:

а) $3\sqrt{7}+2\sqrt{7}$; **б)** $9\sqrt{3}-4\sqrt{3}$; **в)** $\sqrt{5}-2\sqrt{5}$;

г) $2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{5}$; **д)** $\left(2\sqrt{2}\right)^2$; **е)** $3\sqrt{2}:\sqrt{2}$.

Рівень А



Винесіть множник з-під знака кореня:

558. **а)** $\sqrt{50}$; **б)** $\sqrt{48}$; **в)** $\sqrt{160}$; **г)** $\sqrt{300}$;
д) $\sqrt{108}$; **е)** $\sqrt{363}$; **є)** $\sqrt{375}$; **ж)** $\sqrt{147}$.

559. **а)** $\sqrt{8}$; **б)** $\sqrt{45}$; **в)** $\sqrt{250}$; **г)** $\sqrt{192}$.

Внесіть множник під знак кореня:

560. **а)** $3\sqrt{2}$; **б)** $4\sqrt{3}$; **в)** $2\sqrt{11}$; **г)** $9\sqrt{10}$;
д) $4\sqrt{0{,}1}$; **е)** $0{,}1\sqrt{3}$; **є)** $2\sqrt{\frac{1}{2}}$; **ж)** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

561. **а)** $4\sqrt{5}$; **б)** $3\sqrt{7}$; **в)** $0{,}2\sqrt{10}$; **г)** $3\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Спростіть вираз:

562. **а)** $12\sqrt{3}+4\sqrt{3}$; **б)** $\sqrt{2}-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$; **в)** $4\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{2}$;
г) $\left(3\sqrt{3}\right)^2$; **д)** $4\sqrt{2}:\left(2\sqrt{2}\right)$; **е)** $18\sqrt{15}:\left(6\sqrt{5}\right)$.

563. **а)** $2\sqrt{5}+7\sqrt{5}-\sqrt{5}$; **б)** $3\sqrt{8}\cdot 5\sqrt{2}-\left(4\sqrt{2}\right)^2$; **в)** $10\sqrt{10}:\left(2\sqrt{5}\right)$.

564. **а)** $2\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{2}-3\sqrt{6}$; **б)** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}-3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}$;
в) $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)$; **г)** $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{18}\right)\cdot\sqrt{2}$;
д) $2\sqrt{3}+\sqrt{75}$; **е)** $3\sqrt{6}-\sqrt{24}$;
є) $\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-1\right)$; **ж)** $\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)$;
з) $\left(\sqrt{3}-1\right)^2+2\sqrt{3}$; **и)** $\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2$.

565. а) $2\sqrt{8}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{12}$; б) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{20}\right)\cdot\sqrt{5}$;

в) $\sqrt{32}-2\sqrt{2}$; г) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+5\right)$;

д) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)$; е) $\left(\sqrt{5}+2\right)^2-4\sqrt{5}$.

566. а) $2\sqrt{a}+3\sqrt{a}-\sqrt{a}$; б) $4\sqrt{x}-\sqrt{y}-3\sqrt{x}+2\sqrt{y}$;

в) $\sqrt{4c}-\sqrt{9c}+\sqrt{49c}$; г) $3\sqrt{2a}-\sqrt{18a}$.

567. а) $4\sqrt{b}-\sqrt{9b}$; б) $\sqrt{25x}+\sqrt{16x}-\sqrt{64x}$.

Звільніться від ірраціональності у знаменнику (чисельнику) дробу:

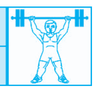
568. а) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$; б) $\dfrac{7}{\sqrt{7}}$; в) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$;

д) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$; е) $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$; є) $\dfrac{\sqrt{a}}{2}$; ж) $\dfrac{a^2}{2\sqrt{a}}$.

569. а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$; в) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; г) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$;

д) $\dfrac{2}{\sqrt{a}}$; е) $\dfrac{3b}{\sqrt{c}}$; є) $\dfrac{\sqrt{b}}{c}$; ж) $\dfrac{2b^2}{\sqrt{b}}$.

Рівень Б



Спростіть вираз:

570. а) $\left(1+2\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)+\sqrt{18}$; б) $\left(\sqrt{6}-1\right)^2+2\sqrt{12}:\sqrt{2}$;

в) $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$; г) $\sqrt{(-5)^2}-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$;

д) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+1$; е) $6\sqrt{2}:\sqrt{8}-\sqrt{32}:\left(2\sqrt{2}\right)$.

571. а) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)+\sqrt{27}$; б) $\left(\sqrt{6}-3\right)^2+\sqrt{6^3}$;

в) $\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)$; **г)** $8\sqrt{50}:4\sqrt{2}-\left(\sqrt{7}\right)^2$.

572. **а)** $\sqrt{a}\left(2\sqrt{a}-3\right)+3\sqrt{a}$; **б)** $\left(\sqrt{x}+2\right)^2-\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)$;

в) $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{ab}$; **г)** $\left(a+\sqrt{a}\right)\left(a-\sqrt{a}\right)+\left(\sqrt{a}\right)^2$.

573. **а)** $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{ab}+1\right)^2$; **б)** $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)+n$.

Винесіть множник з-під знака кореня:

574. **а)** $\sqrt{48a^2b}$, де $a>0$; **б)** $\sqrt{0,09xy^2}$, де $y<0$;

в) $\sqrt{2a^4b^2}$, де $b>0$; **г)** $\sqrt{0,64b^3}$;

д) $\sqrt{8x^3z^6}$, де $z<0$; **е)** $\sqrt{32ab^3c^6}$, де $b>0$, $c>0$.

575. **а)** $\sqrt{49ab^2}$, де $b<0$; **б)** $\sqrt{1,44a^2b^3}$, де $a>0$;

в) $\sqrt{18x^4y^2}$, де $y<0$; **г)** $\sqrt{0,04x^3y^3}$, де $x>0$, $y>0$.

Внесіть множник під знак кореня:

576. **а)** $2a\sqrt{3}$, де $a>0$; **б)** $b\sqrt{\frac{1}{b}}$; **в)** $3x^2\sqrt{x}$;

г) $a\sqrt{ab}$, де $a>0$; **д)** $(c+1)\sqrt{c+1}$; **е)** $a\sqrt{a+b}$, де $a>0$.

577. **а)** $c\sqrt{5}$, де $c>0$; **б)** $n^2\sqrt{\frac{1}{n}}$; **в)** $b\sqrt{2b}$;

г) $ab\sqrt{a}$, де $b>0$; **д)** $x\sqrt{x+1}$, де $x>0$; **е)** $(n+k)\sqrt{n+k}$.

Звільніться від ірраціональності у знаменнику (чисельнику) дробу:

578. **а)** $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; **в)** $\frac{14}{3-2\sqrt{2}}$; **г)** $\frac{2\sqrt{3}-1}{11}$;

д) $\frac{1}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$; **е)** $\frac{a}{\sqrt{a}-3}$; **є)** $\frac{1}{x+\sqrt{x}}$; **ж)** $\frac{2}{2\sqrt{b}+3}$.

579. а) $\frac{2}{\sqrt{5}+1}$; б) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}$; в) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$; г) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$;

д) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; е) $\frac{c}{1-\sqrt{c}}$; є) $\frac{2}{\sqrt{a}-a}$; ж) $\frac{\sqrt{b}-3}{c}$.

Розкладіть на множники:

580. а) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$; б) $5+\sqrt{5}$; в) $\sqrt{15}-\sqrt{35}$;

г) $\sqrt{2a}-\sqrt{a}$; д) $\sqrt{b}+b$; е) $2x-6\sqrt{x}$;

є) x^2-3; ж) $5-4a^2$; з) $x-6$, де $x \geq 0$.

581. а) $\sqrt{12}+\sqrt{3}$; б) $6-\sqrt{6}$; в) $\sqrt{21}-\sqrt{15}$;

г) $\sqrt{3x}-\sqrt{2x}$; д) $c-\sqrt{c}$; е) $4\sqrt{b}+2b$;

є) a^2-5; ж) $2-9n^2$; з) $7-b$, де $b \geq 0$.

Скоротіть дріб:

582. а) $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-1}$; б) $\frac{\sqrt{24}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$; в) $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{21}+\sqrt{7}}$;

г) $\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$; д) $\frac{a+\sqrt{5}}{a^2-5}$; е) $\frac{2\sqrt{b}+2\sqrt{3}}{3-b}$.

583. а) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2+2\sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}}$; в) $\frac{2-3\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$;

г) $\frac{a+\sqrt{7}}{a^2-7}$; д) $\frac{x^2-2}{\sqrt{2}-x}$; е) $\frac{m-5}{\sqrt{m}+\sqrt{5}}$.

Доведіть, що:

584. а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$; б) $\sqrt{11+4\sqrt{6}}=\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

585. а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{3}+2$; б) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

Спростіть вираз:

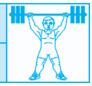
586. а) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; б) $\frac{1}{3\sqrt{3}-2}-\frac{1}{3\sqrt{3}+2}$;

в) $\dfrac{\sqrt{ab}-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; **г)** $\dfrac{x-y}{(x-\sqrt{xy})(y+\sqrt{xy})}$ $(x>0;\ y>0)$.

587. **а)** $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$; **б)** $\dfrac{3\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}+1}-\sqrt{2}$;

в) $\dfrac{2\sqrt{m}-m}{\sqrt{m}-2}$; **г)** $\dfrac{x+\sqrt{xy}}{y+\sqrt{xy}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

Рівень В



588. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$; **б)** $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$;

г) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{2b}{a-b}$;

д) $\left(\sqrt{xy}-\dfrac{xy}{x+\sqrt{xy}}\right):\dfrac{\sqrt{xy}-y}{x-y}$ $(x>0;\ y>0)$.

589. Доведіть тотожність

$$\frac{m+n}{\sqrt{mn}}+\frac{n}{m-\sqrt{mn}}-\frac{m}{n+\sqrt{mn}}=\frac{m+n}{m-n}\quad (m>0;\ n>0).$$

590. Доведіть, що значення виразу є натуральним числом:

а) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}}$; **б)** $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

591. Внесіть множник під знак кореня:

а) $\dfrac{1}{3}a\sqrt{3}$, де $a<0$; **б)** $ab\sqrt{-\dfrac{1}{ab}}$, де $a>0$, $b<0$.

592. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу:

а) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; **б)** $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}$.

Вправи для повторення

593. Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 = -2x + 3$.

594. Знайдіть координати точок перетину параболи $y = x^2$ і прямої, яка проходить через точки (0; 3) і (–1,5; 0).

595. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{5ab}{9c^2} : \left(\dfrac{4ac}{3b} : \dfrac{2c^2}{3ab^2}\right)$; **б)** $\left(-\dfrac{2m^2n^4}{5k}\right)^2 : \left(-\dfrac{8m^4n^6}{15k}\right)$.

596. Чи може значення виразу $\left(\dfrac{x}{x+4} - \dfrac{x}{x-4}\right) : \dfrac{4x}{x^2-16}$ дорівнювати 1?

597. Відстань між двома мостами плавець може пропливти за течією річки на 16 хв швидше, ніж проти течії. Знайдіть цю відстань, якщо швидкість плавця у стоячій воді дорівнює 60 м/хв, а швидкість течії річки — 40 м/хв.

598*. Сплав міді й цинку, загальна маса якого дорівнює 1,5 кг, містить 40% міді. Скільки грамів олова потрібно додати до цього сплаву, щоб одержати новий сплав, який містив би 30% міді?

Поміркуйте

599. На дошці записано 99 натуральних чисел. Доведіть, що можна витерти одне з них так, що сума чисел, які залишаться, буде парною.

19. Функція $y = \sqrt{x}$

Якщо відома площа S квадрата, то для знаходження його сторони a можна скористатись формулою $a = \sqrt{S}$. Оскільки кожному значенню площі S відповідає єдине значення сторони a, то a є функцією від S. Перейшовши до прийнятих позначень функції й аргументу, матимемо функцію $y = \sqrt{x}$.

Вираз $\sqrt{x}$ має зміст, якщо $x \geq 0$. Тому областю визначення функції $y = \sqrt{x}$ є множина всіх невід'ємних дійсних чисел.

Побудуємо графік функції $y = \sqrt{x}$, склавши таблицю для кількох значень x та відповідних значень y:

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Позначимо на координатній площині точки, координати яких подані в таблиці (див. рис. 12). Якби для кожного невід'ємного значення x обчислили відповідне значення y й позначили б точки з такими координатами на координатній площині, то одержали б лінію, яка є графіком функції $y = \sqrt{x}$ (рис. 13).

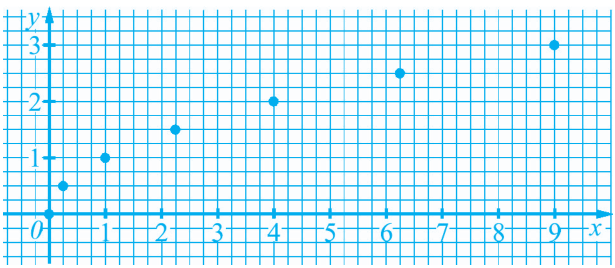


Рис. 12

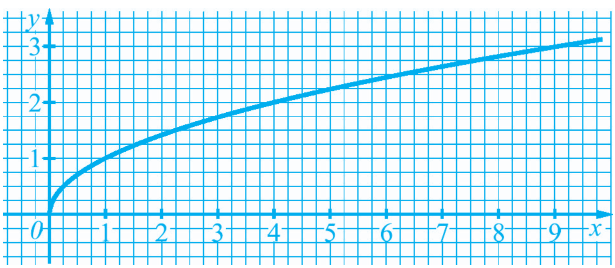


Рис. 13

Графік функції $y = x^2$, де $x \geq 0$, називають правою віткою параболи. Графік функції $y = \sqrt{x}$ можна одержати, якщо цю вітку симетрично відобразити відносно прямої $y = x$ (рис. 14). Тому й графік функції $y = \sqrt{x}$ називають *віткою параболи*.

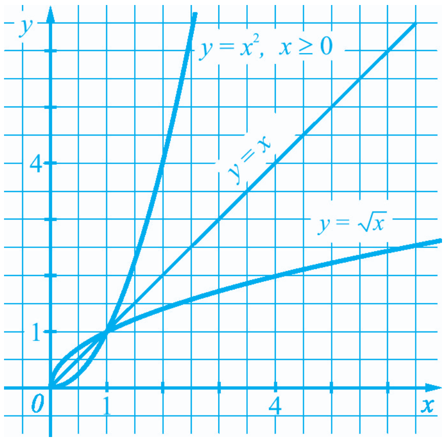


Рис. 14

Функція $y = \sqrt{x}$ має такі властивості:

1. *Областю визначення функції є множина всіх невід'ємних дійсних чисел.*

2. *Областю значень функції теж є множина всіх невід'ємних дійсних чисел*. Справді, значення функції $y = \sqrt{x}$ не можуть бути від'ємними. У той же час будь-яке невід'ємне число є значенням функції. Наприклад, число 10 є значенням функції $y = \sqrt{x}$ для значення аргументу $x = 100$.

3. *Графіком функції є вітка параболи*.

4. *Якщо* $x = 0$, *то* $y = 0$, тобто *графік проходить через початок координат*. Графік розташований у першій чверті координатної площини.

Для тих, хто хоче знати більше

Рівняння $\boldsymbol{\sqrt{x} = a}$**.** Розглянемо рівняння $\sqrt{x} = a$, де a — деяке число.

Якщо $a \geq 0$, то, за означенням арифметичного квадратного кореня, рівність $\sqrt{x} = a$ буде правильною лише за умови, що $x = a^2$. У даному випадку рівняння має єдиний корінь $x = a^2$.

Якщо $a < 0$, то рівняння коренів не має, бо арифметичний квадратний корінь не може дорівнювати від’ємному числу.

Отже, рівняння $\sqrt{x} = a$:

1) має єдиний корінь $x = a^2$, якщо $a \geq 0$;

2) не має коренів, якщо $a < 0$.

Наприклад, рівняння $\sqrt{x} = 5$ має єдиний корінь $x = 5^2 = 25$; рівняння $\sqrt{x} = -2$ не має коренів.

Рівняння $\sqrt{x} = a$ є прикладом ірраціонального рівняння (так називають усяке рівняння, в якому невідоме міститься під знаком кореня). Якщо $a \geq 0$, то його можна розв’язати шляхом піднесення обох частин рівняння до квадрата: $\left(\sqrt{x}\right)^2 = a^2$; $x = a^2$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв’язати рівняння:

а) $3\sqrt{x} - 12 = 0$; **б)** $2\sqrt{x} + 4 = 0$; **в)** $\sqrt{3x+2} = 1$.

● **а)** $3\sqrt{x} - 12 = 0$; $3\sqrt{x} = 12$; $\sqrt{x} = 4$; $x = 16$.

Відповідь. 16.

б) $2\sqrt{x} + 4 = 0$; $2\sqrt{x} = -4$; $\sqrt{x} = -2$ — рівняння коренів не має.

Відповідь. Коренів немає.

в) $\sqrt{3x+2} = 1$; $3x + 2 = 1$; $3x = -1$; $x = -\frac{1}{3}$.

Відповідь. $-\frac{1}{3}$. ●

Усно

600. Укажіть правильні твердження:

а) областю значень функції $y = \sqrt{x}$ є множина всіх додатних чисел;

б) функція $y = \sqrt{x}$ набуває лише невід’ємних значень;

в) графіком функції $y = \sqrt{x}$ є вітка параболи;

г) точка (16; 4) належить графіку функції $y = \sqrt{x}$.

601. Чи перетинає графік функції $y=\sqrt{x}$ прямі: $y = 3$; $y = –5$?

602. На рисунку 15 зображено графіки функцій $y = –x + 2$ та $y=\sqrt{x}$.

а) Для якого значення x функції набувають того самого значення? Чому дорівнює це значення?

б) Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x} = –x + 2$? Укажіть ці корені.

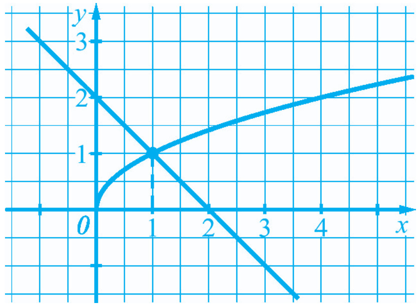


Рис. 15

Рівень А

603. Користуючись графіком функції $y=\sqrt{x}$ (рис. 13), знайдіть значення функції, які відповідають таким значенням аргументу: 3; 2,5; 0,75; 5.

604. Функція задана формулою $y=\sqrt{x}$. Знайдіть x, якщо $y = 1$; $y = 2$; $y = 2,5$.

605. Функція задана формулою $y=\sqrt{x}$. Знайдіть y, якщо $x = 1$; $x = 4$; $x = 9$.

606. Користуючись графіком функції $y=\sqrt{x}$ (рис. 13), знайдіть значення аргументу, яким відповідають такі значення функції: 1,5; 0,5; 2,25.

607. Чи належить графіку функції $y=\sqrt{x}$ точка: $A(50; 5)$; $B(36; 6)$; $C(6,25; –2,5)$; $D(3; 9)$?

608. Чи проходить графік функції $y=\sqrt{x}$ через точку: $A(225; 15)$; $B(4; –2)$; $C(12,25; 3,5)$?

609. Побудуйте графік функції $y=\sqrt{x}$, де $1 \le x \le 9$.

610. Побудуйте графік функції $y=\sqrt{x}$, де $0 \le x \le 4$.

Рівень Б

611. Користуючись графіком функції $y=\sqrt{x}$, порівняйте числа:

а) $\sqrt{3,5}$ і $\sqrt{5}$; **б)** $\sqrt{5}$ і 2,5.

612. Графік функції $y = \sqrt{x}$ проходить через точку з абсцисою 25. Знайдіть ординату цієї точки.

613. Укажіть усі цілі значення x, для яких значення функції $y = \sqrt{x}$ менші від 6.

Розв'яжіть графічно рівняння:

614. **а)** $\sqrt{x} - 0,5x = 0$; **б)** $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$.

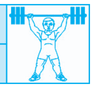
615. **а)** $3 + \sqrt{x} = x + 1$; **б)** $\sqrt{x} = x^2$.

Розв'яжіть рівняння:

616. **а)** $\sqrt{x} = 1$; **б)** $\sqrt{x} = 8$; **в)** $\sqrt{x} = -4$;
г) $\sqrt{x-1} = 2$; **д)** $\sqrt{3x+2} = 4$; **е)** $\sqrt{x} + 9 = 7$;
є) $\sqrt{x-0,09} = 0,9$; **ж)** $\sqrt{x^2-1} = 1$; **з)** $\sqrt{x^2+5} = 2$.

617. **а)** $\sqrt{x} = 10$; **б)** $\sqrt{x} = -2$; **в)** $\sqrt{x+3} = 2$;
г) $\sqrt{2x-5} = 0,2$; **д)** $\sqrt{x^2+2} = 1$; **е)** $\sqrt{x^2+3} = 2$.

Рівень В



618. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:
а) $y = \sqrt{x}$ та $y = x - 12$; **б)** $y = \sqrt{x}$ та $y = 2x - 6$.

619. Побудуйте графік функції:
а) $y = \sqrt{x^2}$; **б)** $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$; **в)** $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$.

620. Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x} = x|x|$.

621. Для яких значень a рівняння $\sqrt{x^2+1} = a$ має один корінь?

622. Доведіть, що рівняння не має коренів:
а) $\sqrt{x} = 2x - x^2 - 2$; **б)** $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = 1$.

623. Розв'яжіть рівняння:
а) $(x-2)\sqrt{x+2} = 0$; **б)** $(x+1)\sqrt{x-2} = 0$;
в) $\sqrt{x} + \sqrt{x^2+2x} = 0$; **г)** $\sqrt{x^2-2x} + \sqrt{x^4-16} = 0$.

Вправи для повторення

624. Спростіть вираз:

а) $\left(a - \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{a^2 - a}{a+1}$; **б)** $\left(\frac{b-3}{b+2} - \frac{b-2}{b+3}\right) : \frac{5}{b+3}$.

625. Розв’яжіть рівняння:

а) $(x - 5)(x + 5) + 3x = -x^2 - 25$; **б)** $(2x - 3)(x + 2) = x^2 + x$.

626. Зі 100 кг соняшникового насіння отримують a кг олії. Скільки олії отримають з 450 кг такого насіння?

627. У січні підприємство виготовило 750 одиниць продукції, у лютому — 780 одиниць. На скільки відсотків збільшилося виробництво продукції в лютому порівняно із січнем?

Поміркуйте

628. Три цілі числа a, b, c записали у рядок. Під цими числами записали нову трійку чисел $a - b$, $b - c$, $c - a$. Числа третього рядка утворюють з чисел другого рядка за тим самим правилом і т. д. Доведіть, що незалежно від вихідної трійки чисел першого рядка, серед чисел рядків, що розташовані нижче третього, не може трапитись ані число 1000, ані число 1001.

Цікаво знати

Число є одним з найзагальніших понять математики. Спочатку це поняття пов’язувалось тільки з процесами підрахунку або вимірювання. Саме на цій основі виникли і використовувались натуральні й дробові числа, до того ж дробові числа розглядались тільки як відношення натуральних.

Натуральні числа найбільше цікавили піфагорійців — учнів і послідовників легендарного давньогрецького математика і філософа **Піфагора**, який жив на межі VI–V ст. до н. е. Піфагорійці вважали, що все на світі підпорядковане законам, які можна описати натуральними числами та їхніми відношеннями. Звідси відразу ж випливало, що для пізнання світу потрібно вивчати натуральні числа. Проте згодом піфагорійці з'ясували, що відомі їм числа не такі вже й всесильні, бо за допомогою них не можна виразити, наприклад, довжину діагоналі квадрата зі стороною 1. Те інтуїтивне уявлення про число (натуральне і дробове), яке в людини сформувалося на основі віковічної практики, вимагало уточнення й узагальнення.

У подальшому розв'язання практичних і математичних проблем привело до двох найсуттєвіших узагальнень поняття числа. Спочатку китайці у II ст. до н. е. ввели поняття від'ємного числа. Другий напрям узагальнення поняття числа привів до дійсних чисел і тим самим розв'язав проблему вимірювання довжини відрізка.

Якщо основи теорії натуральних чисел піфагорійці заклали ще у V ст. до н. е., то строгі теорії дійсних чисел були запропоновані лише у другій половині XIX ст.

Теорію дійсних чисел на основі десяткових дробів розробив німецький математик **К. Вейєрштрасс** (1815 – 1897). Свої теорії з іншими підходами до введення дійсних чисел запропонували німецькі математики **Р. Дедекінд** (1831 – 1916) і **Г. Кантор** (1845 – 1918).

Зазначимо, що з ірраціональними числами математики стикалися задовго до створення строгих теорій. Якою має бути сторона квадрата, щоб його площа дорівнювала заданому числу m? Таку задачу ставили й уміли розв'язувати ще 2 тис. років до н. е. вавилонські вчені. Щоб відповісти на запитання задачі, потрібно добути арифметичний квадратний корінь з числа m. Якщо число m було натуральним, але не було квадратом іншого натурального числа, то вавилоняни шукали наближене значення $\sqrt{m}$. Для цього вони записували m у вигляді суми $a^2 + b$, де b доволі мале порівняно з a^2, а потім використовували таке правило:

$$\sqrt{m} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

Наприклад, якщо $m = 105$, то $\sqrt{105} = \sqrt{10^2 + 5} \approx 10 + \frac{5}{2 \cdot 10} = 10,25$. Перевіримо: $10,25^2 = 105,0625$. Це правило знаходження наближеного значення квадратного кореня використовували й у Давній Греції, його детальний опис дав давньогрецький учений **Герон** (I ст. н. е.).

До поняття ірраціонального числа близько підійшов український учений **Феофан Прокопович**. Добуваючи квадратні корені з чисел 2, 3, 5, 6 і т. д., які не є квадратами натуральних чисел, він характеризує їх так: «Деякі числа є настільки глухими, що вони взагалі позбавлені точного кореня». Як ви вже знаєте, квадратний корінь з таких чисел записують у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу, тому добування кореня із цих чисел є нескінченним процесом.

Феофан Прокопович
(1681 – 1736)

Феофан Прокопович — один з найвідоміших мислителів кінця XVII – початку XVIII ст., професор та ректор Києво-Могилянської академії, державний та церковний діяч. Філософ і математик, поет і публіцист, він залишив значну кількість творів. Найзначнішою математичною роботою Феофана Прокоповича є курс лекцій з математики «Арифметика і геометрія, два перші й найбільш плодовиті початки математичних наук, пояснені у Києво-Могилянській академії…». Теоретичні відомості, поміщені в цьому курсі, були на той час найповнішими в царській Росії.

Основи теорії множин заклав у другій половині XIX століття уже згаданий німецький математик **Георг Кантор**.

Ге́орг Ка́нтор
(1845 – 1918)

Оскільки поняття «множина» належить до основних понять математики, то його не означають через інші більш прості поняття, а пояснюють зміст на прикладах, апелюючи до нашої уяви та інтуїції. Так, Г. Кантору належить така характеристика поняття «множина»: це об’єднання певних, різних об’єктів, званих елементами множини, у єдине ціле.

Теорія множин здійснила неабиякий вплив на подальший розвиток усієї математичної науки. На її основі було дано строге означення дійсного числа, обґрунтовані основні положення теорії функцій дійсної змінної.

У будь-якій математичній дисципліні об'єкти, які вона вивчає, утворюють певні множини. Тому багато авторитетних математиків убачали в канторовій теорії множин ту основу, на якій можна було б викласти з єдиних позицій зміст нібито далеких один від одного розділів математики.

Запитання і вправи для повторення § 2

1. Які властивості має функція $y = x^2$?

2. Як називають графік функції $y = x^2$?

3. Що називають квадратним коренем з числа a?

4. Що називають арифметичним квадратним коренем з числа a? Для яких значень a має зміст вираз $\sqrt{a}$? Яких значень може набувати вираз $\sqrt{a}$?

5. Для яких значень a рівняння $x^2 = a$ має корені? Скільки коренів має це рівняння, якщо $a > 0$; $a = 0$; $a < 0$?

6. Наведіть приклад множини та деякої її підмножини.

7. У вигляді яких дробів можна подати раціональні числа?

8. У вигляді яких дробів можна подати ірраціональні числа?

9. Які числа утворюють множину дійсних чисел?

10. Чому дорівнює квадратний корінь з добутку невід'ємних множників? Доведіть відповідну теорему.

11. Чому дорівнює квадратний корінь із дробу $\frac{a}{b}$, де $a \geq 0$, $b > 0$? Доведіть відповідну теорему.

12. Чому дорівнює квадратний корінь зі степеня a^{2n}, де $a \geq 0$? Доведіть відповідну теорему.

13. Чому дорівнює $\sqrt{a^2}$?

14. На прикладі виразу $2\sqrt{b}$ покажіть, як внести множник під знак кореня.

15. На прикладі виразу $\sqrt{16b}$ покажіть, як винести множник з-під знака кореня.

16. На прикладі виразів $\frac{1}{\sqrt{3}}$ і $\frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{2}}$ покажіть, як звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу.

17. Які властивості має функція $y=\sqrt{x}$?

629. Дано числа: –25; 3,8; 8; 0; –2,1; $\sqrt{5}$; $\frac{2}{9}$; 0,(6); $-\sqrt{3}$; 1; $-2\frac{1}{3}$; π; 0,10110111011110... (кількість одиниць послідовно збільшується на 1). Із даних чисел випишіть: **а)** усі натуральні числа; **б)** усі цілі числа; **в)** усі раціональні числа; **г)** усі ірраціональні числа.

630. Дано множину $M=\{-2;\ 1{,}5;\ 6{,}(25);\ \sqrt{7};\ 10;\ -\sqrt{3};\ 25\}$.

а) Чи правильно, що: $1{,}5\in M$; $6\in M$; $7\notin M$; $25\notin M$?

б) Запишіть підмножину множини M, якій належать усі цілі числа множини M; усі ірраціональні числа.

в) Чи є множина M підмножиною множини $\boldsymbol{Q}$; множини $\boldsymbol{R}$?

631. Порівняйте числа:

а) 1,138 і 1,183; **б)** –3,4 і –3,5; **в)** $\frac{5}{24}$ і $\frac{2}{9}$; **г)** –0,3 і $-\frac{1}{3}$;

д) $\sqrt{5}$ і 2,5; **е)** $-\sqrt{10}$ і –π; **є)** 1,13745... і 1,1375... .

632. Знайдіть наближене значення виразу, округливши значення коренів до сотих:

а) $2{,}7-\sqrt{5}$; **б)** $5\sqrt{3{,}6}$; **в)** $\sqrt{10}-\sqrt{3}$; **г)** $\sqrt{4{,}5}+\sqrt{5{,}5}$.

633. Для яких значень x має зміст вираз?

а) $\sqrt{x}$; **б)** $-\sqrt{x}$; **в)** $\sqrt{-x}$; **г)** $\sqrt{x^2}$.

Знайдіть значення виразу:

634. **а)** $\sqrt{16}+\sqrt{625}$; **б)** $\sqrt{64}\cdot\sqrt{2{,}25}-10\sqrt{1{,}21}$;

в) $\frac{2}{3}\sqrt{81}+2\sqrt{\frac{9}{16}}$; **г)** $\sqrt{0{,}01}\cdot\sqrt{4900}-0{,}1\sqrt{90000}$;

д) $\left(\sqrt{361}-\sqrt{289}\right)\left(\sqrt{2{,}25}-\sqrt{6{,}25}\right)$; **е)** $\left(\sqrt{10000}-99\right):\left(\sqrt{1\frac{7}{9}}-1\right)$.

635. **а)** $\sqrt{9\cdot 36}$; **б)** $\sqrt{160\cdot 40}$; **в)** $\sqrt{15\cdot 24\cdot 40}$;

г) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{500}$; **д)** $\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}$; **е)** $\sqrt{0,02}\cdot\sqrt{0,32}$.

636. **а)** $\sqrt{\frac{25}{36}}-\sqrt{\frac{16}{81}}$; **б)** $\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}}$; **в)** $\sqrt{4\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{25}}-\sqrt{\frac{8\cdot 72}{21\cdot 84}}$.

637. **а)** $\sqrt{2^{10}}-\sqrt{2^{8}}$; **б)** $\sqrt{41^2}+\sqrt{(-41)^2}$; **в)** $\sqrt{(-15)^2}\cdot\sqrt{(-1,2)^2}$.

Спростіть вираз:

638. **а)** $5\sqrt{6}-7\sqrt{6}+4\sqrt{6}$; **б)** $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)+3\sqrt{3}$;

в) $\left(\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)^2-3-4\sqrt{10}$; **г)** $\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)+\left(3\sqrt{3}\right)^2$.

639. **а)** $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+3\right)-a$; **б)** $\left(4\sqrt{b}-3\right)\left(\sqrt{b}+1\right)-\sqrt{b}$;

в) $\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)+1$; **г)** $\left(2\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)^2-4\sqrt{a^2}-9b$.

Винесіть множник з-під знака кореня:

640. **а)** $\sqrt{28}$; **б)** $\sqrt{200}$; **в)** $\sqrt{243}$.

641. **а)** $\sqrt{3x^4}$; **б)** $\sqrt{8a^2}$, де $a>0$; **в)** $\sqrt{98ab^2}$, де $b<0$.

Внесіть множник під знак кореня:

642. **а)** $3\sqrt{2}$; **б)** $5\sqrt{10}$; **в)** $0,4\sqrt{30}$.

643. **а)** $c\sqrt{c}$; **б)** $m\sqrt{7}$, де $m>0$; **в)** $n\sqrt{19m}$, де $n<0$.

644. Розкладіть на множники:

а) $\sqrt{15}-\sqrt{10}$; **б)** $10+\sqrt{10}$; **в)** $\sqrt{7a}-\sqrt{3a}$;

г) $c-4$, де $c>0$; **д)** m^2-6; **е)** $n+\sqrt{2n}$.

645. Скоротіть дріб:

а) $\frac{\sqrt{21}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}-1}$; **б)** $\frac{\sqrt{b}-\sqrt{3}}{b-3}$; **в)** $\frac{a-5}{\sqrt{a}+\sqrt{5}}$;

г) $\frac{c^2-10}{c-\sqrt{10}}$; **д)** $\frac{\sqrt{2}-x}{x^2-2}$; **е)** $\frac{b+\sqrt{ab}}{a-b}$ $(b>0)$.

646. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу:

а) $\frac{1}{\sqrt{8}}$; **б)** $\frac{5}{2\sqrt{10}}$; **в)** $\frac{2}{\sqrt{5}-2}$; **г)** $\frac{1}{3\sqrt{m}-2\sqrt{n}}$.

647. Доведіть, що $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$.

Спростіть вираз:

648. **а)** $\frac{1}{2\sqrt{2}-3}-\frac{1}{2\sqrt{2}+3}$; **б)** $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$.

649. **а)** $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; **б)** $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{xy}}{x-y}$.

650*. Доведіть, що значення виразу є натуральним числом:

а) $\sqrt{6\sqrt{5}+14}-\sqrt{5}$; **б)** $\sqrt{11+2\sqrt{10}}-\sqrt{11-2\sqrt{10}}$.

651. Доведіть тотожність: $\sqrt{a^8+4a^4+4}=a^4+2$.

Розв'яжіть рівняння:

652. **а)** $x^2 = 25$; **б)** $x^2 = 0{,}09$; **в)** $3x^2 = 21$; **г)** $2x^2 = -0{,}2$.

653. **а)** $(2x-1)^2+(2x+1)^2=42$; **б)** $(5x-4)^2=9-40x$.

654. **а)** $(4x-3)^2=49$; **б)** $(x^2-4)^2=144$.

655*. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $(2x+a)^2+a^2=1$ має єдиний корінь.

Розв'яжіть рівняння:

656. **а)** $\sqrt{x}=4$; **б)** $\sqrt{x}=0$; **в)** $\sqrt{x}=-2$;

г) $\sqrt{x-1}=0{,}5$; **д)** $\sqrt{x^2+2}=1$; **е)** $\sqrt{x^2+8}=3$.

657*. **а)** $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)=\sqrt{x}$; **б)** $\sqrt{x}+\sqrt{2+x}=-1$; **в)** $\sqrt{x^2}+\sqrt{x}=0$.

658. Графік функції $y = x^2$ проходить через точку (–5; 25). Знайдіть координати точки, симетричної даній відносно осі y. Чи належить знайдена точка графіку заданої функції?

659. Побудуйте графіки функцій та знайдіть координати точок їх перетину:

а) $y=x^2$ та $y=1{,}5-0{,}5x$; **б)** $y=2x-1$ та $y=\sqrt{x}$.

660. Розв’яжіть графічно рівняння:

а) $x^2 = 1{,}5x + 1$; **б)** $x^2 + 2 = -3x$;

в) $\sqrt{x} = -4x + 5$; **г)** $\frac{1}{x} = \sqrt{x}$.

661. За допомогою графіків функцій установіть, чи має корені рівняння $x^2 = \frac{1}{5}x - 2$.

662*. За допомогою графіків функцій установіть, скільки коренів має рівняння $\sqrt{x} = -x - a$, якщо $a = -1$; $a = 0$; $a = 1$.

663*. Побудуйте графік функції:

а) $y = \frac{x^2 + x|x|}{2}$; **б)** $y = |x|\sqrt{x^2}$;

в) $y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x < 0; \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 0; \end{cases}$ **г)** $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$.

664*. Знайдіть значення a, для якого графіки функцій $y = 2x + a$ та $y = x^2$ перетинаються в точці (3; 9). Знайдіть координати іншої точки перетину цих графіків.

665*. Доведіть, що рівняння $\sqrt{x} = -x - 0{,}1$ не має коренів.

Завдання для самоперевірки № 4

Рівень 1

1. Укажіть неправильне твердження:

а) 5 — раціональне число; **б)** $\frac{2}{3}$ — дійсне число;

в) $\sqrt{3}$ — ірраціональне число; **г)** $\sqrt{5}$ — раціональне число.

2. Яка з рівностей є правильною?

а) $\sqrt{36} = 4$; **б)** $\sqrt{49} = -7$; **в)** $\sqrt{0,16} = 0,4$; **г)** $\sqrt{0,4} = 0,2$.

3. Знайдіть значення виразу $\sqrt{36 \cdot 64} + \sqrt{\frac{9}{16}}$.

а) $24\frac{3}{4}$; **б)** $47\frac{1}{4}$; **в)** $48\frac{3}{4}$; **г)** 60.

4. Спростіть вираз $4\left(\sqrt{2}-2\right)-\left(2\sqrt{2}-4\right)$.

а) $6\sqrt{2}-12$; **б)** $2\sqrt{2}-12$; **в)** $6\sqrt{2}-4$; **г)** $2\sqrt{2}-4$.

5. Знайдіть значення виразу $3\sqrt{2}-\sqrt{3}$, округливши значення коренів до десятих.

а) 5,9; **б)** 2,5; **в)** 2,4; **г)** 2,8.

6. Яка з точок належить графіку функції $y = x^2$?

а) $A(16; 4)$; **б)** $B(4; 8)$; **в)** $C(4; 16)$; **г)** $D(-4; 8)$.

Рівень 2

7. Доберіть до кожного числового виразу (1–4) його значення (А–Д).

1) $\sqrt{25 \cdot 0,49}$; **А)** 9;

2) $\sqrt{\frac{9}{0,04}}$; **Б)** –9;

3) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$; **В)** 3,5;

4) $\sqrt{(-9)^2}$. **Г)** 3;

Д) 15.

8. Спростіть вираз:

а) $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(2\sqrt{3}-5\right)-16$; **б)** $\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)-a$.

9. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}$; **б)** $\dfrac{4-\sqrt{80}}{1-\sqrt{5}}$.

10. Розв’яжіть рівняння:

а) $2(x^2-3)=12$; **б)** $(x-2)(x+2)=-1$.

11. Чи проходить графік функції, заданої формулою $y=\sqrt{x}$, через точку (1,69; 1,3)?

Рівень 3

12. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt{2{,}8\cdot 6{,}3}$; **б)** $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}-\sqrt{6\dfrac{1}{4}}$; **в)** $\left(2\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2+4\sqrt{14}$.

13. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{3}-2\sqrt{12}+\sqrt{48}$; **б)** $\dfrac{11}{2\sqrt{5}-3}-\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3}$.

14. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу:

а) $\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$; **б)** $\dfrac{x}{2\sqrt{x}+1}$.

15. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{a-3}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}$; **б)** $\dfrac{a-b}{a+\sqrt{ab}}$, де $a>0$, $b\geq 0$.

16. Розв’яжіть графічно рівняння $x^2=-0{,}5x+1{,}5$.

Рівень 4

17. Для яких значень x є правильною рівність?

а) $\sqrt{x^6}=x^3$; **б)** $x\sqrt{x^2}=-\sqrt{x^4}$; **в)** $\sqrt{x}=\sqrt{-x}$.

18. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}:\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; **б)** $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$.

19. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x^2-2}=2$; **б)** $(x-1)(x+2)\sqrt{2x+1}=0$.

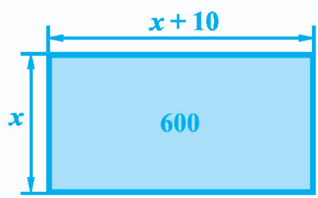
20. Доведіть, що значення виразу $\sqrt{19+8\sqrt{3}}\cdot x-\left(4+\sqrt{3}\right)x$ не залежать від значень x.

21. За допомогою графіків функцій установіть, чи має корені рівняння $\sqrt{x}+x=0,5$.

§ 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

Є чимало задач, розв'язуючи які, одержують рівняння, що містять квадрат змінної.

У даному параграфі ми з'ясуємо, що таке квадратне рівняння, скільки коренів може мати квадратне рівняння та як їх знаходити. Ознайомимося також з рівняннями, які зводяться до квадратних, та задачами, які розв'язують за допомогою квадратних рівнянь і рівнянь, що зводяться до квадратних.



$x(x + 10) = 600;$

$x^2 + 10x - 600 = 0$ — квадратне рівняння

20. Квадратні рівняння. Неповні квадратні рівняння

1. Квадратні рівняння. У 7 класі ми розглядали лінійні рівняння з однією змінною, тобто рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа (коефіцієнти рівняння). Рівняння $ax = b$ містить змінну x лише в першому степені, і якщо $a \neq 0$, то саме рівняння називають ще рівнянням першого степеня з однією змінною.

Розглянемо задачу, яка приводить до рівняння, що містить змінну в другому степені (у квадраті).

Задача. Площа ділянки прямокутної форми дорівнює 600 м^2. Довжина ділянки на 10 м більша від ширини. Знайти ширину ділянки.

Нехай ширина ділянки дорівнює x м. Тоді довжина ділянки дорівнює $(x + 10)$ м, а площа — $x(x + 10)$ м^2. За умовою задачі ця площа дорівнює 600 м^2, тому маємо рівняння $x(x + 10) = 600$, звідки

$$\mathbf{x^2 + 10x - 600 = 0.}$$

Одержане рівняння називають *квадратним*.

Означення **Квадратним рівнянням називають рівняння виду**

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0,}$$

де x — змінна, a, b і c — деякі числа, до того ж $a \neq 0$.

Числа a, b й c називають *коефіцієнтами квадратного рівняння*:

a — перший коефіцієнт; b — другий коефіцієнт; c — вільний член.

Наприклад, $7x^2 - 3x + 5 = 0$ — квадратне рівняння, у якому перший коефіцієнт $a = 7$, другий коефіцієнт $b = -3$, вільний член $c = 5$.

Якщо у квадратному рівнянні перший коефіцієнт дорівнює 1, то таке рівняння називають ***зведеним квадратним рівнянням***. Так, $x^2 + 10x - 600 = 0$ — зведене квадратне рівняння.

Будь-яке квадратне рівняння, яке не є зведеним, можна перетворити у рівносильне йому зведене квадратне рівняння. Наприклад, квадратне рівняння $7x^2 - 3x + 5 = 0$ не є зведеним. Поділивши обидві його частини на перший коефіцієнт, одержимо зведене квадратне рівняння $x^2 - \frac{3}{7}x + \frac{5}{7} = 0$.

2. Неповні квадратні рівняння. Якщо в квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один з коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то таке рівняння називають ***неповним квадратним рівнянням***.

Наприклад, рівняння

$x^2 + 9x = 0,$ $\quad 5x^2 - 125 = 0,$ $\quad 4x^2 = 0$

є неповними квадратними рівняннями. У першому рівнянні $c = 0$, у другому — $b = 0$, у третьому — $b = 0$ і $c = 0$.

Отже, є три види неповних квадратних рівнянь:

1) $ax^2 + bx = 0$ $(b \neq 0)$; 2) $ax^2 + c = 0$ $(c \neq 0)$; 3) $ax^2 = 0$.

Розв'язування неповних квадратних рівнянь

№	Вид рівняння	Приклад рівняння і його розв'язання
1.	$ax^2 + bx = 0$	$3x^2 - 6x = 0$. $3x(x - 2) = 0$. Звідси $x = 0$ або $x - 2 = 0$; $x = 2$.
2.	$ax^2 + c = 0$	1) $2x^2 - 8 = 0$. $2x^2 = 8$; $x^2 = 4$. Звідси $x = -2$ або $x = 2$. 2) $2x^2 + 8 = 0$. $2x^2 = -8$; $x^2 = -4$. Рівняння не має коренів.
3.	$ax^2 = 0$	$7x^2 = 0$. $x^2 = 0$. Звідси $x = 0$.

Зауваження. Рівняння $x^2 = 0$ можна записати у вигляді $x \cdot x = 0$. Перший множник дорівнює нулю, якщо $x = 0$, другий — теж, якщо $x = 0$. Тому інколи кажуть, що рівняння $x^2 = 0$ має два рівних корені $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати рівняння $2x^2 + 11x = 0$.

● $x(2x + 11) = 0$. Звідси $x = 0$ або: $2x + 11 = 0$; $x = -5{,}5$.

Відповідь. $-5{,}5$; 0. ●

Вправа 2. Розв'язати рівняння $2{,}5x(x - 2) - 7{,}5 = -5x$.

● $2{,}5x^2 - 5x - 7{,}5 = -5x$; $2{,}5x^2 - 7{,}5 = 0$; $x^2 = 3$; $x_1 = -\sqrt{3}$; $x_2 = \sqrt{3}$.

Відповідь. $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. ●

Усно

666. Яке з рівнянь є квадратним рівнянням?

а) $4x + 5^2 = 0$; **б)** $7x^2 - x - 3 = 0$; **в)** $\frac{1}{x^2} + 2x - 3 = 0$;

г) $9x^2 = 0$; **д)** $-x^2 + 2 = 0$; **е)** $-6y^2 - 24y = 0$.

667. Яке з рівнянь є неповним квадратним рівнянням? зведеним квадратним рівнянням?

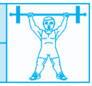
а) $x^2 + 5x - 2 = 0$; **б)** $7x^2 + 1{,}8 = 0$; **в)** $-x^2 - 2x = 0$;

г) $x^2 + \sqrt{3}\,x = 0$; **д)** $3x^2 + 7x + 1 = 0$; **е)** $x^2 = 0$.

668. Розв'яжіть неповне квадратне рівняння:

а) $x^2 - 4 = 0$; **б)** $y^2 - 2y = 0$; **в)** $5x^2 = 0$.

Рівень А



669. Заповніть таблицю:

Квадратне рівняння	Коефіцієнти рівняння		
$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c
	4	1	3
$-2x^2 - 3x + 1 = 0$			
	1	0	–24
	3	–5	0
$5x^2 - 8 = 0$			
	7	0	0

670. Запишіть квадратне рівняння, коефіцієнти якого дорівнюють:

а) $a = 2$; $b = -3$; $c = 1$; **б)** $a = 3$; $b = 0$; $c = -7$;

в) $a = -1$; $b = 4$; $c = 5$; **г)** $a = 2$; $b = 0$; $c = 0$.

Розв'яжіть рівняння:

671. **а)** $x^2 - 36 = 0$; **б)** $2x^2 - 4 = 0$; **в)** $x^2 + 49 = 0$.

672. **а)** $x^2 - 64 = 0$; **б)** $-6x^2 + 18 = 0$; **в)** $2x^2 + 8 = 0$.

673. **а)** $x^2 - 3x = 0$; **б)** $-5x^2 + 20x = 0$; **в)** $x^2 + 3{,}5x = 0$.

674. **а)** $4x^2 + 8x = 0$; **б)** $3x^2 - 81x = 0$; **в)** $2{,}2x^2 - 8{,}8x = 0$.

675. **а)** $7 - 2x^2 = 7 + 0{,}5x^2$; **б)** $2x^2 - 3x = 2x$; **в)** $2x(x - 3) = x^2$.

676. **а)** $5x^2 - 3 = x^2 - 3$; **б)** $x^2 + 15x = 8x$; **в)** $x(x - 2) = -x^2$.

Зведіть рівняння до вигляду $ax^2 + bx + c = 0$:

677. **а)** $x(3x - 2) + 4 = 0$; **б)** $5x(x + 3) = 2x^2 + 1$; **в)** $x(x - 9) = 4x(x + 7)$.

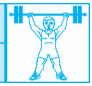
678. **а)** $7x^2 - 2 = 4x + 5$; **б)** $(x + 1)x = 5$; **в)** $x^2 = 6x^2 - 3(x - 4)$.

Запишіть зведене квадратне рівняння, рівносильне рівнянню:

679. **а)** $2x^2 + 2x - 6 = 0$; **б)** $-3x^2 - 10x + 8 = 0$.

680. **а)** $5x^2 - 9x + 2 = 0$; **б)** $-x^2 + 12x + 6 = 0$.

Рівень Б



Розв'яжіть рівняння:

681. **а)** $5x^2 - 7x + 3 = 3x^2 + 2x + 3$; **б)** $x^2 - 13x + 8 = 3x^2 - 13x$;

в) $2x^2 - (5x - 1) = 17 - 5x$; **г)** $(x + 2)^2 + (x - 2)^2 = 3x^2 - 9$;

д) $6x^2 + 9x - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$; **е)** $4\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) = x(1 - x) - 8$;

є) $0{,}2x^2 - x(0{,}5x - 1) = x - 9$; **ж)** $0{,}3x(x - 4) + 1{,}2x - 2{,}7 = 2{,}7$.

682. **а)** $2x^2 - 3x + 7 = 7x^2 + x + 7$; **б)** $3 - 2x = x(x - 2)$;

в) $(3x - 5)(3x + 5) = 6x^2 - 25 + 15x$; **г)** $\left(2x-\sqrt{5}\right)\left(2x+\sqrt{5}\right) = (x - 1)^2 - 6$;

д) $(x + 0{,}4)^2 + (x - 0{,}4)^2 = 0{,}64$; **е)** $3x(2x + 0{,}6) - 2x^2 - 0{,}64 = 1{,}8x$.

683. **а)** $(2x-3)^2 = \dfrac{3(x+15)}{5}$; **б)** $\dfrac{(x+1)(x+2)}{3} = \dfrac{(x+3)(x+4)}{7}$.

684. **а)** $(x+1)(2x-5) = \dfrac{15-6x}{2}$; **б)** $\dfrac{(x-2)(x+2)}{4} = \dfrac{(x-1)(x+3)}{3}$.

685. Знайдіть найменший корінь рівняння $(x^2 + 5x)(x^2 - 36) = 0$.

686. Знайдіть найбільший корінь рівняння $(x^2 - 49)(x^2 - 8x) = 0$.

687. Знайдіть значення x, для яких значення виразу $(2\sqrt{3}x-1)(2\sqrt{3}x+1)$ дорівнює 17.

688. Для яких значень x значення виразу $(2x - 7)(x + 4)$ дорівнює -28?

689. Для яких значень x значення виразу $x^2 - 5x + 7$ на 4 більше, ніж відповідне значення виразу $2x^2 + 4x + 3$?

690. Знайдіть усі числа, які у 17 разів менші від своїх квадратів.

Рівень В

691. Для яких значень a число 2 є коренем рівняння?

а) $a^2x^2 - 7x + 2a + 14 = 0$; **б)** $3x^2 + (a^2 - 1)x - 18 = 0$.

692. Для яких значень a рівняння має один корінь?

а) $2x^2 - (a^2 - 3a)x = 0$; **б)** $ax^2 + a^2 - 2 = 0$.

693. Розв'яжіть рівняння з параметром a:

а) $ax^2 + 1 = 0$; **б)** $x^2 - 2ax = 0$; **в)** $ax^2 - a^3 = 0$.

Вправи для повторення

694. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

а) $4m^2 - 4m + 1$; **б)** $4x^2 + 12x + 9$; **в)** $49x^2 - 28xy + 4y^2$.

695. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

а) $\dfrac{x^2 - 10x + 25}{x - 5}$, якщо $x = 12{,}5$; **б)** $\dfrac{2\sqrt{y} + 6}{y + 6\sqrt{y} + 9}$, якщо $y = 1{,}21$.

696. З пунктів A і B, відстань між якими дорівнює 240 км, вирушають одночасно два автомобілі. Якщо автомобілі рухатимуться назустріч один одному, то зустрінуться через 2 год. Якщо ж вони їхатимуть в одному напрямку, то автомобіль, що виїхав з пункту B, наздожене автомобіль, який виїхав з пункту A, через 12 год. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

697. У фермерському господарстві пшениці зібрали на 40% більше, ніж ячменю. 20% зібраної пшениці й 30% зібраного ячменю продали, що разом становило 29 т. Скільки тонн пшениці й скільки тонн ячменю зібрали в господарстві?

Поміркуйте

698. У школі відбулися три олімпіади. З'ясувалося, що в кожній з них брали участь по 50 учнів, до того ж 60 учнів приходили тільки на одну олімпіаду, а 30 учнів — рівно на дві. Скільки учнів брали участь в усіх трьох олімпіадах?

21. Формула коренів квадратного рівняння

Виведемо формули, які дозволяють шукати корені будь-якого квадратного рівняння, знаючи його коефіцієнти. Для цього розв'яжемо в загальному вигляді квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Помножимо обидві частини рівняння на $4a$ (оскільки $a \neq 0$, то $4a \neq 0$). Одержимо рівносильне йому рівняння

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

У лівій частині рівняння виділимо квадрат двочлена:

$$(2ax)^2 + 2\cdot 2ax\cdot b + b^2 - b^2 + 4ac = 0;$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \qquad (2)$$

Вираз $b^2 - 4ac$ називають ***дискримінантом*** квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ і позначають буквою D, тобто $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$.

Враховуючи дане позначення, рівняння (2) можна записати так:

$$(2ax + b)^2 = D. \qquad (3)$$

Наявність коренів рівняння та їх кількість залежать від знака числа D. Розглянемо три можливі випадки: $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$.

1) Якщо $D > 0$, то з рівняння (3) матимемо:

$$2ax + b = -\sqrt{D} \quad \text{або} \quad 2ax + b = \sqrt{D};$$

$$2ax = -b - \sqrt{D} \quad \text{або} \quad 2ax = -b + \sqrt{D};$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{або} \quad x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Отже, якщо $D > 0$, то квадратне рівняння (1) має два різні корені

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Ці дві формули для коренів можна об'єднати в одну:

$$\boxed{\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}, \quad \textbf{де } \boldsymbol{D = b^2 - 4ac}.}$$

Одержану формулу називають *формулою коренів квадратного рівняння*.

2) Якщо $D = 0$, то з рівняння (3) матимемо:

$$(2ax + b)^2 = 0; \quad 2ax + b = 0; \quad x = -\frac{b}{2a}.$$

Одержаний корінь можна знайти і за формулою коренів квадратного рівняння. Справді, якщо $D = 0$, то $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$. Тому іноді кажуть: якщо $D = 0$, то рівняння має два рівні корені, кожний з яких дорівнює $-\frac{b}{2a}$.

Отже, якщо $D = 0$, то квадратне рівняння (1) має один корінь $x = -\frac{b}{2a}$ (*або два рівні корені, кожний з яких дорівнює* $-\frac{b}{2a}$).

3) Якщо $D < 0$, то рівняння (3) не має коренів, бо його ліва частина набуває невід'ємних значень, а права частина є від'ємним числом.

Отже, якщо $D < 0$, то квадратне рівняння (1) не має коренів.

Підсумок: корені квадратного рівняння

Квадратне рівняння	Дискримінант $D = b^2 - 4ac$	Корені рівняння
$ax^2 + bx + c = 0$	$D > 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
	$D = 0$	$x = -\frac{b}{2a}$
	$D < 0$	Коренів немає

Розв'язувати квадратне рівняння доцільно так:

1. Обчислити дискримінант $D = b^2 - 4ac$ і порівняти його з нулем.
2. Якщо дискримінант додатний або дорівнює нулеві ($D \geq 0$), то скористатися формулою коренів квадратного рівняння: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

   Якщо дискримінант від'ємний, то записати, що рівняння не має коренів.

Для тих, хто хоче знати більше

Формула коренів зведеного квадратного рівняння. Розглянемо зведене квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$. Для цього рівняння $D = p^2 - 4q = 4\left(\dfrac{p^2}{4} - q\right)$. Якщо $D \geq 0$, то

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm 2\sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Отже, для зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ маємо таку формулу коренів:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Використовуючи цю формулу, знайдемо корені рівняння $x^2 + 16x - 36 = 0$:

$$x_{1,2} = -8 \pm \sqrt{64 + 36} = -8 \pm 10; \quad x_1 = -18; \; x_2 = 2.$$

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати рівняння $x^2 + 3x - 10 = 0$.

● $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49.$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}; \quad x_1 = \frac{-3 - 7}{2} = -5; \;\; x_2 = \frac{-3 + 7}{2} = 2.$$

Відповідь. –5; 2. ●

Вправа 2. Розв'язати рівняння $5x^2 - 3x + 7 = 0$.

● $D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 7 = 9 - 140 = -131.$

Оскільки $D < 0$, то дане рівняння не має коренів.

Відповідь. Коренів немає. ●

Вправа 3. Розв'язати рівняння $6x^2 + 9 = 4x + 10x(2 - x)$.

● $6x^2 + 9 - 4x - 10x(2 - x) = 0$; $6x^2 + 9 - 4x - 20x + 10x^2 = 0$;

$16x^2 - 24x + 9 = 0$.

$D = (-24)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 9 = 576 - 576 = 0$.

Дане рівняння має один корінь $x = \dfrac{24 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 16} = \dfrac{3}{4}$.

Відповідь. $\dfrac{3}{4}$. ●

Вправа 4. Чи існують значення m, для яких рівняння $5x^2 - mx + m - 5 = 0$ не має коренів?

● Знайдемо дискримінант рівняння:

$$D = (-m)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (m - 5) = m^2 - 20m + 100 = (m - 10)^2.$$

Оскільки $D \geq 0$ для будь-якого значення m, то дане рівняння для будь-якого значення m має корені.

Відповідь. Не існують. ●

Усно

699. Чи правильно записаний дискримінант $D = b^2 - 4ac$ квадратного рівняння?

а) $2x^2 + 5x - 3 = 0$; $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3$;

б) $x^2 - 3x - 4 = 0$; $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)$;

в) $3x^2 - x + 2 = 0$; $D = (-1)^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2$;

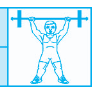
г) $-2x^2 + 5x + 7 = 0$; $D = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 7$.

700. Скільки коренів має рівняння?

а) $7x^2 - x + 1 = 0$; $D = -27$; **б)** $x^2 + 4x - 3 = 0$; $D = 28$;

в) $x^2 - 6x + 9 = 0$; $D = 0$.

Рівень А



Знайдіть дискримінант квадратного рівняння і вкажіть кількість коренів рівняння:

701. **а)** $2x^2 - 3x + 1 = 0$; **б)** $4x^2 + 4x + 1 = 0$; **в)** $-3x^2 + 6x - 4 = 0$.

702. **а)** $x^2 + 2x - 3 = 0$; **б)** $2x^2 - 5x + 4 = 0$; **в)** $-x^2 + 8x - 16 = 0$.

Розв'яжіть рівняння:

703. **а)** $x^2 - 6x + 5 = 0$; **б)** $x^2 + 4x - 12 = 0$; **в)** $x^2 + 7x + 10 = 0$;
г) $x^2 - 3x + 4 = 0$; **д)** $x^2 - 10x + 25 = 0$; **е)** $x^2 - 4x - 21 = 0$.

704. **а)** $2x^2 - 5x + 3 = 0$; **б)** $2x^2 + x - 1 = 0$; **в)** $3x^2 + 5x - 2 = 0$;
г) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; **д)** $2x^2 - 3x + 2 = 0$; **е)** $7x^2 - 6x - 1 = 0$.

705. **а)** $x^2 + 4x - 5 = 0$; **б)** $x^2 + 5x + 4 = 0$; **в)** $x^2 - 5x + 6 = 0$;
г) $x^2 - 2x + 6 = 0$; **д)** $x^2 - 8x + 16 = 0$; **е)** $x^2 - 10x + 21 = 0$;
є) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; **ж)** $6x^2 - 5x + 1 = 0$; **з)** $2x^2 + x - 3 = 0$.

706. **а)** $x^2 = 5x - 4$; **б)** $2x^2 + 7x = 4$; **в)** $x^2 - 4x = 2 - 3x$.

707. **а)** $x^2 - 2x = 3$; **б)** $x^2 - 4x = 4x - 7$; **в)** $4x^2 + 3x = 1$.

Рівень Б

708. Не розв'язуючи рівняння, укажіть ті з них, які мають один корінь:
а) $9x^2 + 6x + 1 = 0$; **б)** $3x^2 - x - 4 = 0$; **в)** $2x^2 - 16x + 32 = 0$.

709. Яке з рівнянь не має коренів?
а) $x^2 + 2x - 7 = 0$; **б)** $2x^2 - 3x + 8 = 0$; **в)** $3x^2 + 5x + 4 = 0$.

710. Не розв'язуючи рівняння, укажіть ті з них, які мають один корінь або не мають жодного кореня:
а) $3x^2 + x + 1 = 0$; **б)** $25x^2 + 20x + 4 = 0$; **в)** $x^2 - 16x + 60 = 0$.

Розв'яжіть рівняння:

711. **а)** $x^2 - 2x - 1 = 0$; **б)** $7x^2 - 18x + 8 = 0$; **в)** $3x^2 + 22x - 16 = 0$;
г) $x^2 + 21x + 90 = 0$; **д)** $3x^2 + 53x - 18 = 0$; **е)** $-25x^2 + 50x + 75 = 0$;
є) $x^2 + 0{,}5x - 1{,}5 = 0$; **ж)** $2x^2 - x + \frac{1}{9} = 0$; **з)** $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{9} = 0$.

712. **а)** $x^2 - 6x + 6 = 0$; **б)** $3x^2 + 20x + 12 = 0$; **в)** $4x^2 - 16x + 7 = 0$;
г) $x^2 - 16x - 161 = 0$; **д)** $4x^2 + 73x + 18 = 0$; **е)** $-12x^2 - 36x + 48 = 0$;
є) $x^2 + 1{,}2x + 0{,}2 = 0$; **ж)** $3x^2 - x - \frac{2}{3} = 0$; **з)** $5x^2 - \frac{1}{3}x - 2 = 0$.

713. Для яких значень a значення виразу $24a^2 - 90a - 24$ дорівнює 0?

714. Для яких значень b значення виразу $3b^2 - b + 2$ дорівнює 12?

Розв'яжіть рівняння:

715. **а)** $t^2 + 3t = -4t - 6 - t^2$; **б)** $5(y^2 + 3) = -24y + 20$;
в) $4x(x - 2) + x^2 = 6x + 3$; **г)** $6x^2 + 3x = 5(2x + 1)$;
д) $(x - 1)^2 + 4x^2 = 4$; **е)** $(3x - 2)(3x + 2) = 6x + 3$;
є) $5x^2 - \frac{1}{5}x = 0{,}1 - \frac{1}{2}x + 4x^2$; **ж)** $(\sqrt{3}x + 2)(\sqrt{3}x - 2) + 7x = x^2 + 11$.

716. **а)** $2(12x^2 + x - 10) = -5$; **б)** $5(x^2 - 2) = x(1 - x) + 10x$;
в) $(2x + 3)^2 + 2x^2 = -12x - (x - 2)^2$; **г)** $6x^2 + 20x = (2x - 5)(2x + 5)$;
д) $2\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right) + 1\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2}x + x^2$.

Знайдіть корені рівняння:

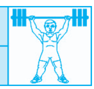
717. **а)** $\frac{t^2 + 3t}{2} = \frac{t + 7}{4}$; **б)** $\frac{y^2 + y}{4} = \frac{3 - 7y}{20} + 0{,}3$.

718. **а)** $\frac{x^2 - x}{3} = \frac{x^2 - 1}{4}$; **б)** $\frac{y^2 - 3}{9} - \frac{y - 3}{6} = 3\frac{1}{6}$.

719. Для яких значень x значення різниці многочленів $3x^2 + 24x + 48$ і $10x + 30$ дорівнює 2?

720. Для яких значень x значення суми многочленів $3x^2 - 6x$ і $5x^2 - x + 2$ дорівнює 3?

Рівень В



721. Знайдіть значення b, для яких один з коренів рівняння дорівнює -3:
а) $20x^2 + bx - b^2 = 0$; **б)** $\frac{b^2x^2}{49} - \frac{5}{7}bx - 14 = 0$.

722. Для яких значень a рівняння має один корінь?
а) $x^2 - 16x + 4a = 0$; **б)** $ax^2 + (a + 1)x + 1 = 0$.

723. Розв'яжіть рівняння:
а) $|x^2 - 4x + 3| = 8$; **б)** $|x^2 - 3x - 4| = 6$.

724. Розв'яжіть рівняння з параметром b:
а) $x^2 - 4bx + 3b^2 = 0$; **б)** $x^2 + 2x - b^2 + 2b = 0$.

725. Знайдіть два значення m, для яких рівняння $x^2 + 7x + 3m - 7 = 0$:

а) має два різні корені; **б)** не має коренів.

726. Доведіть, що для будь-якого значення b:

а) рівняння $x^2 + bx - 3 = 0$ має два корені;

б) рівняння $x^2 - bx + b^2 + 1 = 0$ не має коренів.

Вправи для повторення

727. Доберіть два числа, сума яких дорівнює 8, а добуток — 12. Перевірте, чи є ці числа коренями рівняння $x^2 - 8x + 12 = 0$.

728. Знайдіть суму і добуток двох виразів:

а) $3+\sqrt{2}$ і $3-\sqrt{2}$; **б)** $x-\sqrt{x}$ і $x+\sqrt{x}$.

729. Побудуйте графік рівняння:

а) $2x - 3y = 1$; **б)*** $|x - y| = 1$.

730*. На гуртівні два підприємці закупили разом 300 кг товару за ціною 25 грн за 1 кг. Перший підприємець перевозить товар на відстань 20 км від гуртівні, а другий — на відстань 30 км. Перевезення 100 кг товару на відстань 1 км коштує 5 грн. Скільки кілограмів товару закупив перший підприємець, якщо відомо, що він витратив на закупівлю і перевезення товару на 2700 грн менше, ніж другий?

Поміркуйте

731. Дано три числа: 2, $1-\sqrt{2}$ і $1+\sqrt{2}$. За один крок дозволяється написати нові три числа, замінивши кожне з попередніх чисел півсумою двох інших. Чи можна за кілька таких кроків одержати набір чисел: 1, $2-\sqrt{2}$ і $2+\sqrt{2}$?

22. Теорема Вієта

1. Теорема Вієта. Розглянемо зведені квадратні рівняння:

$x^2 + 2x - 3 = 0$; $x^2 - 7x + 10 = 0$; $x^2 + 5x + 4 = 0$.

Знайдемо корені кожного із цих рівнянь, а також суму коренів та їх добуток. Результати занесемо в таблицю:

Рівняння	Корені рівняння: x_1; x_2	Сума коренів: $x_1 + x_2$	Добуток коренів: $x_1 \cdot x_2$
$x^2 + 2x - 3 = 0$	-3; 1	-2	-3
$x^2 - 7x + 10 = 0$	2; 5	7	10
$x^2 + 5x + 4 = 0$	-4; -1	-5	4

З таблиці видно, що сума коренів кожного з рівнянь дорівнює другому коефіцієнту рівняння, узятому із протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену. Це правильно для будь-якого зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, яке має корені.

Теорема (Вієта). **Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому із протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену.**

Доведення. Розглянемо зведене квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$ і нехай x_1 та x_2 — його корені. Тоді

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}, \quad \text{де } D = p^2 - 4q.$$

(Оскільки рівняння має корені, то $D \ge 0$.)

Знайдемо суму і добуток коренів:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} + \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4} = \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Отже, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. Теорему доведено. ●

Якщо x_1, x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то:
$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Доведену теорему називають «теоремою Вієта» за прізвищем французького математика Франсуа Вієта (1540–1603), який першим помітив залежність між коренями та коефіцієнтами квадратного рівняння.

Франсуа Вієт (1540–1603), французький математик

На основі теореми Вієта можна, не шукаючи коренів квадратного рівняння, знаходити їх суму та добуток. *Використовувати теорему Вієта можна лише для квадратних рівнянь, які мають корені.*

Розглянемо, наприклад, рівняння $x^2 - 5x + 3 = 0$. Воно має корені, бо $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 13 > 0$. Якщо x_1 та x_2 — корені рівняння, то, за теоремою Вієта:
$$x_1 + x_2 = -(-5) = 5; \quad x_1 \cdot x_2 = 3.$$

Зауваження 1. Нехай деяке зведене квадратне рівняння має корені. З рівності $x_1 \cdot x_2 = q$ випливає: якщо $q > 0$, то ці корені обидва додатні або обидва від'ємні; якщо $q < 0$, то корені мають різні знаки.

Зауваження 2. Якщо коефіцієнти рівняння $x^2 + px + q = 0$ є цілими числами, то з рівності $x_1 \cdot x_2 = q$ випливає, що *цілими коренями* такого рівняння можуть бути лише числа, на які ділиться (націло) вільний член q.

Наприклад, цілими коренями рівняння $x^2 + px + 5 = 0$ можуть бути лише числа 1, 5, –1 або –5.

2. Сума та добуток коренів довільного квадратного рівняння. Ми довели теорему Вієта для зведеного квадратного рівняння. Розглянемо тепер довільне квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, яке має корені x_1 та x_2. Дане рівняння рівносильне рівнянню $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$

Одержане квадратне рівняння вже є зведеним, а тому для нього виконується теорема Вієта: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$

Якщо x_1, x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Для тих, хто хоче знати більше

3. Теорема, обернена до теореми Вієта.

***Теорема*. Якщо сума двох чисел дорівнює $-p$, а їх добуток дорівнює q, то ці числа є коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$.**

Доведення. Нехай числа m і n такі, що $m + n = -p$, а $m \cdot n = q$, тоді $p = -(m + n)$, $q = mn$. Підставимо значення p і q в рівняння

$$x^2 + px + q = 0, \tag{1}$$

одержимо рівносильне йому рівняння

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0.$$

Розв'яжемо одержане рівняння так:

$$x^2 - mx - nx + mn = 0;$$

$$x(x - m) - n(x - m) = 0;$$

$$(x - m)(x - n) = 0, \tag{2}$$

звідки $x = m$ або $x = n$. Числа m і n є коренями рівняння (2), а тому й коренями рівняння (1). Теорему доведено. ●

На основі теореми, оберненої до теореми Вієта, можна:

1) перевірити, чи є деякі два числа коренями заданого квадратного рівняння;

2) розв'язати квадратне рівняння шляхом добору його коренів;

3) скласти зведене квадратне рівняння, коренями якого є деякі задані два числа.

Розглянемо відповідні приклади.

Приклад 1. Чи є числа –3 і 5 коренями рівняння $x^2 - 2x - 15 = 0$?

● Знайдемо суму чисел –3 і 5 та їх добуток: $-3 + 5 = 2$; $(-3) \cdot 5 = -15$. Сума чисел дорівнює другому коефіцієнту рівняння, узятому із протилежним знаком, а добуток — вільному члену. Тому за теоремою, оберненою до теореми Вієта, числа –3 і 5 є коренями даного рівняння. ●

Приклад 2. Розв'язати рівняння $x^2 + 2x - 8 = 0$ шляхом добору його коренів.

● Нехай x_1 та x_2 — корені рівняння. Тоді

$$x_1 + x_2 = -2, \quad x_1 \cdot x_2 = -8.$$

Перевіримо, чи можуть коренями рівняння бути цілі числа. Рівність $x_1 \cdot x_2 = -8$ є правильною для таких пар цілих чисел: –1 і 8; –2 і 4; –4 і 2; –8 і 1. Із цих пар лише сума чисел третьої пари дорівнює –2. Тому за теоремою, оберненою до теореми Вієта, числа –4 і 2 є коренями даного квадратного рівняння. Отже, $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

Відповідь. –4; 2. ●

Приклад 3. Скласти зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа –11 і 4.

● Шукане рівняння повинно мати вигляд $x^2 + px + q = 0$, де

$$p = -(x_1 + x_2) = -(-11 + 4) = 7; \quad q = x_1 \cdot x_2 = -11 \cdot 4 = -44.$$

Отже, маємо рівняння $x^2 + 7x - 44 = 0$.

Відповідь. $x^2 + 7x - 44 = 0$. ●

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Не розв’язуючи рівняння $3x^2 - 6x + 1 = 0$, знайти суму та добуток його коренів.

● Знайдемо дискримінант рівняння: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 36 - 12 = 24$. Оскільки $D > 0$, то дане рівняння має корені. Якщо x_1 та x_2 — корені рівняння, то за формулами $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ знаходимо:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-6}{3} = 2; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}. \ ●$$

Відповідь. 2; $\frac{1}{3}$. ●

Вправа 2. Знайти коефіцієнти зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, якщо його коренями є числа –3 і 6.

● Нехай $x_1 = -3$ та $x_2 = 6$ — корені рівняння. За теоремою Вієта

$$p = -(x_1 + x_2) = -(-3 + 6) = -3, \quad q = x_1x_2 = (-3) \cdot 6 = -18.$$

Відповідь. $p = -3$; $q = -18$. ●

Вправа 3. Знайти значення виразу $5\sqrt{x_1x_2} - (x_1 + x_2)^2$, де x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2 - 9x + 16 = 0$.

● За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = 9$, $x_1x_2 = 16$. Тоді:

$$5\sqrt{x_1x_2} - (x_1 + x_2)^2 = 5\sqrt{16} - 9^2 = 20 - 81 = -61.$$

Відповідь. –61. ●

Вправа 4. Корені x_1 та x_2 рівняння $x^2 + 10x + a = 0$ задовольняють умову $3x_1 - x_2 = -6$. Знайти ці корені та коефіцієнт a.

● За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -10$. Урахувавши умову $3x_1 - x_2 = -6$, матимемо систему рівнянь $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -6; \\ x_1 + x_2 = -10, \end{cases}$ звідки: $\begin{cases} 4x_1 = -16; \\ x_1 + x_2 = -10; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -4; \\ x_2 = -6. \end{cases}$

Отже, $x_1 = -4$, $x_2 = -6$ — корені рівняння. Тоді $a = x_1 \cdot x_2 = -4 \cdot (-6) = 24$.

Відповідь. –4; –6 — корені рівняння; $a = 24$. ●

Усно

732. Кожне з наступних рівнянь має корені. Знайдіть суму і добуток цих коренів:

а) $x^2 - 6x + 5 = 0$; **б)** $x^2 + 6x - 27 = 0$; **в)** $3x^2 - 16x + 5 = 0$.

733. Один з коренів рівняння дорівнює 3. Знайдіть інший корінь рівняння:

а) $x^2 - 10x + 21 = 0$; **б)** $x^2 - 2x - 3 = 0$; **в)** $x^2 - 6x + 9 = 0$.

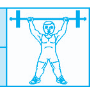
734. Кожне з наступних рівнянь має корені. Які з цих рівнянь мають додатні корені? від'ємні корені? корені різних знаків?

а) $x^2 - 15x + 18 = 0$; **б)** $x^2 + 15x + 18 = 0$; **в)** $x^2 - 15x - 18 = 0$.

735. Використовуючи теорему Вієта, поясніть, чому дані числа не є коренями рівняння.

Рівняння	Числа
а) $x^2 - 11x + 10 = 0$	5 і 6
б) $x^2 + 9x + 14 = 0$	2 і 7
в) $x^2 + 4x - 21 = 0$	–3 і 7

Рівень А



Кожне з наступних рівнянь має корені. Знайдіть суму і добуток цих коренів:

736. **а)** $x^2 + 14x + 36 = 0$; **б)** $x^2 + 8x - 15 = 0$;

в) $3x^2 - 4x + 1 = 0$; **г)** $10x^2 - x - 3 = 0$.

737. **а)** $x^2 - 9x + 18 = 0$; **б)** $x^2 + 20x + 25 = 0$;
в) $3x^2 - 16x + 5 = 0$; **г)** $6x^2 - x - 1 = 0$.

738. Знайдіть вільний член q зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, якщо його коренями є числа: 5 і –3; –2 і –6.

739. Знайдіть коефіцієнт p зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, якщо його коренями є числа: 1 і 4; –1 і 2.

Числа x_1 та x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$. Знайдіть коефіцієнти p і q, якщо:

740. **а)** $x_1 + x_2 = 4$; $x_1 \cdot x_2 = 3$; **б)** $x_1 + x_2 = -7$; $x_1 \cdot x_2 = 10$.

741. **а)** $x_1 + x_2 = 1$; $x_1 \cdot x_2 = -6$; **б)** $x_1 + x_2 = -3$; $x_1 \cdot x_2 = 2$.

Знайдіть коефіцієнти p і q зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, якщо його коренями є числа:

742. **а)** 5 і 3; **б)** –2 і 6.

743. **а)** 3 і 4; **б)** 7 і –1.

Рівень Б

Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму та добуток його коренів:

744. **а)** $3{,}2x^2 - 4x + 0{,}8 = 0$; **б)** $\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - 3 = 0$.

745. **а)** $0{,}4x^2 + 1{,}6x + 0{,}3 = 0$; **б)** $\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x - 2 = 0$.

Знайдіть коефіцієнти p і q зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, якщо його коренями є числа:

746. **а)** $\frac{2}{3}$ і $-\frac{3}{4}$; **б)** $\frac{2-\sqrt{5}}{2}$ і $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$.

747. **а)** $\frac{1}{5}$ і $\frac{2}{15}$; **б)** $1-\sqrt{3}$ і $1+\sqrt{3}$.

748. Число –9 є коренем рівняння $x^2 + 10x + q = 0$. Знайдіть інший корінь рівняння і коефіцієнт q.

749. Число –2 є коренем рівняння $x^2 + px - 6 = 0$. Знайдіть інший корінь рівняння і коефіцієнт p.

750. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2$, якщо x_1 та x_2 — корені рівняння:

а) $x^2 - 7x + 9 = 0$; **б)** $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

751. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $7x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2$, якщо x_1 та x_2 — корені рівняння:

а) $x^2 - x - 4 = 0$; **б)** $2x^2 + 11x + 5 = 0$.

752. Знайдіть значення виразу $\sqrt{(x_1 + x_2)^2}$, якщо x_1 та x_2 — корені рівняння:

а) $x^2 - 5x - 14 = 0$; **б)** $2x^2 - x - 1 = 0$.

753. Для яких значень m добуток коренів рівняння $x^2 + 8x + 4m + 7 = 0$ дорівнює: **а)** 15; **б)** 19?

754. Для яких значень a добуток коренів рівняння $x^2 + 3x + a^2 - 14 = 0$ дорівнює 2?

Запишіть усі цілі числа, які можуть бути коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$, якщо:

755. **а)** $q = 7$; **б)** $q = -9$; **в)** $q = 12$.

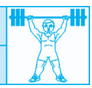
756. **а)** $q = -5$; **б)** $q = 4$; **в)** $q = 8$.

Знайдіть корені рівняння за теоремою, оберненою до теореми Вієта:

757. **а)** $x^2 + 4x + 3 = 0$; **б)** $x^2 - 5x + 4 = 0$; **в)** $x^2 + 7x + 12 = 0$;
г) $x^2 - 2x - 3 = 0$; **д)** $x^2 - 10x + 21 = 0$; **е)** $x^2 - 8x - 9 = 0$;
є) $x^2 + 5x + 4 = 0$; **ж)** $x^2 - 2x - 8 = 0$; **з)** $x^2 + 2x - 15 = 0$.

758. **а)** $x^2 - 9x + 14 = 0$; **б)** $x^2 + x - 6 = 0$; **в)** $x^2 - 8x + 15 = 0$;
г) $x^2 - 4x - 21 = 0$; **д)** $x^2 + 7x - 18 = 0$; **е)** $x^2 + 10x + 16 = 0$.

Рівень В



759. Запишіть квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, коренями якого є числа:

а) $2\frac{2}{3}$ і $-0,125$; **б)** $\frac{3-2\sqrt{5}}{4}$ і $\frac{3+2\sqrt{5}}{4}$.

760. Рівняння $x^2 + px + 8 = 0$ має додатні корені, один з яких у 4 рази більший від іншого. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт p.

761. Один з коренів рівняння $x^2 + px - 33 = 0$ більший від іншого на 14. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт p.

762. Корені x_1 та x_2 рівняння $x^2 - 10x + b = 0$ задовольняють умову $x_1 - 3x_2 = 2$. Знайдіть ці корені та коефіцієнт b.

763. Доведіть, що рівняння $5x^2 - 3x - a^2 - 2 = 0$ для будь-якого значення a має корені різних знаків.

764. Знайдіть усі значення b, для яких рівняння $x^2 - bx + 3 = 0$ має лише цілі корені.

765. Рівняння $x^2 - 2x - 5 = 0$ має корені x_1 та x_2. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; **б)** $x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3$; **в)** $(x_1 - x_2)^2$; **г)** $(x_1 + 2)(x_2 + 2)$.

766. Не розв'язуючи рівняння $10x^2 + 3x - 4 = 0$, знайдіть:

а) суму квадратів його коренів; **б)** суму кубів його коренів.

Вправи для повторення

767. Розкладіть на множники:

а) $8x^2y^3 - 12x^3y$; **б)** $3a + 6b - ca - 2cb$;

в) $(a - b)^2 - 2(a^2 - b^2)$; **г)** $m^2 - 8m + 7$.

768. Спростіть вираз:

а) $\frac{m+4}{m^2-2m} - \frac{m+10}{m^2-4}$; **б)** $\frac{5a-a^2}{a^2-10a+25} - \frac{a+1}{5-a}$.

769. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x - 3y = 10; \\ 3x + 8y = -4; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x + y = 3; \\ 2x - y = x^2 + 2xy + y^2. \end{cases}$

770. Із двох полів було зібрано 1900 ц пшениці, до того ж з першого поля зібрали по 45 ц з гектара, а з другого — по 40 ц з гектара. Торік у зв'язку з посухою урожайність першого поля була меншою на 20%, другого — на 15%, а весь зібраний урожай становив 1570 ц. Знайдіть площу кожного поля.

Поміркуйте

771. У першій купі є 30 горіхів, у другій — 7. Тарас, а за ним Ігор по черзі роблять ходи. За один хід з однієї купи потрібно взяти будь-яку кількість горіхів, яка кратна кількості горіхів іншої купи. Перемагає той, хто візьме останній горіх в одній з куп. Хто з хлопців переможе за правильної гри?

23. Квадратний тричлен

1. Квадратний тричлен та його корені. Розглянемо вирази $2x^2 - 3x + 1$, $x^2 + 4x + 5$, $-x^2 + x + 1$. Кожний з них є многочленом другого степеня і містить три члени. Такі вирази називають *квадратними тричленами*.

Означення **Квадратним тричленом називають многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a, b і c — деякі відомі числа, до того ж $a \neq 0$.**

Значення квадратного тричлена $2x^2 - 3x + 1$ для $x = 1$ дорівнює нулю. Кажуть, що число 1 є *коренем* цього тричлена.

Означення **Коренем квадратного тричлена називають значення змінної, для якого значення тричлена дорівнює нулю.**

Щоб знайти всі корені квадратного тричлена $2x^2 - 3x + 1$, потрібно розв'язати рівняння $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Матимемо:

$$D = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 1; \quad x_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}; \ \ x_2 = \frac{3+1}{4} = 1.$$

Отже, даний квадратний тричлен має два корені: $\frac{1}{2}$ та 1.

Дискримінант $D = b^2 - 4ac$ квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ називають і *дискримінантом квадратного тричлена* $ax^2 + bx + c$. Зрозуміло: якщо $D > 0$, то квадратний тричлен має два корені, якщо $D = 0$, — один корінь, якщо $D < 0$, то квадратний тричлен коренів не має.

2. Розкладання квадратного тричлена на множники. Знаючи корені квадратного тричлена, його можна розкласти на множники на основі такої теореми:

***Теорема*. Якщо x_1 та x_2 — корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то**

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).}$$

Доведення. Корені x_1 та x_2 даного тричлена є коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Тому за теоремою Вієта

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

звідки

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2), \qquad \frac{c}{a} = x_1 x_2.$$

Урахувавши ці рівності, матимемо:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2\right) =$$

$$= a\left(x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2\right) = a\left(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right) = a(x - x_1)(x - x_2). \bullet$$

Оскільки коренями квадратного тричлена $2x^2 - 3x + 1$ є числа $\frac{1}{2}$ й 1, то

$$2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1) = (2x - 1)(x - 1).$$

Ми розклали квадратний тричлен $2x^2 - 3x + 1$ на два множники, кожний з яких є многочленом першого степеня. Якщо квадратний тричлен не має коренів, то його не можна розкласти на множники, які є многочленами першого степеня.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розкласти на множники квадратний тричлен:

а) $-6x^2 - 7x + 3$; **б)** $2x^2 - 2x + 0{,}5$.

● **а)** Розв'яжемо рівняння $-6x^2 - 7x + 3 = 0$:

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 3 = 121; \quad x_1 = \frac{7 - 11}{-12} = \frac{1}{3}; \quad x_2 = \frac{7 + 11}{-12} = -\frac{3}{2}.$$

Отже,

$$-6x^2 - 7x + 3 = -6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = -3\left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot 2\left(x + \frac{3}{2}\right) = -(3x - 1)(2x + 3).$$

Відповідь. $-(3x - 1)(2x + 3)$ або $-6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$.

б) Розв'яжемо рівняння $2x^2 - 2x + 0{,}5 = 0$:

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm 0}{4} = 0{,}5.$$

Рівняння має два рівні корені, тому

$$2x^2 - 2x + 0{,}5 = 2(x - 0{,}5)(x - 0{,}5) = 2(x - 0{,}5)^2.$$

Відповідь. $2(x - 0{,}5)^2$. ●

Вправа 2. Скоротити дріб $\dfrac{4x+2}{2x^2-5x-3}$.

● Розкладемо квадратний тричлен $2x^2 - 5x - 3$ на множники:

$$2x^2 - 5x - 3 = 0; \; D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49; \quad x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}; \; x_2 = \frac{5+7}{4} = 3.$$

Тому $2x^2 - 5x - 3 = 2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)(x-3) = (2x+1)(x-3)$.

Отже, $\dfrac{4x+2}{2x^2-5x-3} = \dfrac{2(2x+1)}{(2x+1)(x-3)} = \dfrac{2}{x-3}$.

Відповідь. $\dfrac{2}{x-3}$. ●

Усно

772. Які з даних многочленів є квадратними тричленами?

а) $2x^2 + x - 1$; **б)** $-x^2 - 3x$; **в)** $3^2 + 2x + 7$;

г) $3x^2 - 3x - 4x^3$; **д)** $2y^2 + 4$; **е)** $-8z^2$.

773. Які з чисел 1, 3, –2 є коренями квадратного тричлена $x^2 - 2x - 3$?

774. Коренями квадратного тричлена $2x^2 + 4x - 6$ є числа 1 і –3. Який з виразів є розкладом цього тричлена на множники?

а) $2(x + 1)(x - 3)$; **б)** $(x - 1)(x + 3)$; **в)** $2(x - 1)(x + 3)$.

Рівень А

Знайдіть корені квадратного тричлена:

775. **а)** $x^2 - 8x - 9$; **б)** $4x^2 - 8x + 3$; **в)** $3x^2 + 2x + 3$.

776. **а)** $x^2 + 3x - 4$; **б)** $3x^2 - 8x - 3$; **в)** $x^2 - 8x + 16$.

777. Знайдіть кількість коренів квадратного тричлена:

а) $2x^2 - 4x + 2$; **б)** $5x^2 + 2x + 2$; **в)** $3x^2 + 8x + 4$.

Розкладіть на множники квадратний тричлен:

778. **а)** $x^2 - 6x + 8$; **б)** $x^2 + 2x - 8$; **в)** $x^2 + 8x + 15$;

г) $2x^2 - 5x + 2$; **д)** $3x^2 - x - 2$; **е)** $3x^2 - 6x + 3$.

779. **а)** $x^2 - 4x + 3$; **б)** $x^2 + x - 12$; **в)** $2x^2 + 3x - 5$.

Рівень Б

Розкладіть на множники квадратний тричлен:

780. **а)** $4x^2 - 6x + 2$; **б)** $-x^2 - 2x + 8$;

в) $-0{,}3x^2 + 3$; **г)** $1{,}2y^2 - 0{,}5y - 0{,}7$;

д) $\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{2}{3}$; **е)** $-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4$.

781. **а)** $9x^2 - 12x + 4$; **б)** $-5x^2 - 2x + 3$;

в) $0{,}6m^2 - 1{,}3m + 0{,}6$; **г)** $\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 1$.

782. Чи можна розкласти квадратний тричлен на множники, які є многочленами першого степеня?

а) $3x^2 - 2\sqrt{10}\,x + 3$; **б)** $-2x^2 + 0{,}5x - 0{,}04$.

Скоротіть дріб:

783. **а)** $\frac{2a^2 + a - 6}{4a + 8}$; **б)** $\frac{6x^2 - 5x + 1}{4x^2 - 1}$;

в) $\frac{b^2 - 7b + 10}{b^2 - 10b + 25}$; **г)** $\frac{k^2 + k - 2}{2k^2 + 3k - 2}$.

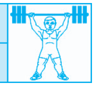
784. **а)** $\frac{3a - 3}{a^2 + 3a - 4}$; **б)** $\frac{4x^2 + 4x - 3}{4x^2 - 8x + 3}$.

Спростіть вираз:

785. **а)** $\frac{2m^2 + 3m - 2}{m^2 + m - 2} : \frac{2m - 1}{m - 1}$; **б)** $\frac{c^2 + 6c}{c^2 + 7c + 6} - \frac{2}{c + 1}$.

786. **а)** $\frac{b^2 - 1}{b^2 + 5b - 6} \cdot \frac{2b + 12}{b + 1}$; **б)** $2y + 5 - \frac{y^2 + 4y - 5}{y - 1}$.

Рівень В



787. Спростіть вираз:

а) $\left(\dfrac{a+1}{a-1}-\dfrac{2a+1}{2a-1}\right):\dfrac{a}{2a^2-3a+1}$;

б) $\left(\dfrac{2}{b^2+4b-12}-\dfrac{1}{b+6}-\dfrac{1}{b-2}\right)\cdot\dfrac{b^2-36}{b+1}$.

788. Побудуйте графік функції:

а) $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{2x-1}$; б) $y=\dfrac{(x^2+4x+3)(x-1)}{x^2+2x-3}$.

789. Розкладіть на множники:

а) $x^2 - ax - 2a^2$; б) $2x^2 + 5ax + 2a^2$.

Вказівка. **а)** Розгляньте вираз $x^2 - ax - 2a^2$ як квадратний тричлен з коефіцієнтами 1, $-a$ та $-2a^2$ і розкладіть цей тричлен на множники.

790. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{2a^2+3ab+b^2}{2a^2-ab-b^2}+1$; б) $\dfrac{x}{x^2-3xy+2y^2}+\dfrac{3y}{x^2+xy-2y^2}$.

Вправи для повторення

791. Розв'яжіть рівняння:

а) $\dfrac{2x-5}{3x+1}=0$; б) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=1$.

792. Від міста A до міста B автомобіль рухався деякий час зі швидкістю 60 км/год. Решту шляху він проїхав за такий же час, але зі швидкістю 80 км/год. Знайдіть середню швидкість автомобіля.

793. Першу половину шляху автомобіль їхав зі швидкістю 60 км/год, а другу — зі швидкістю 80 км/год. Знайдіть середню швидкість автомобіля.

794*. Яких значень може набувати вираз $x-\dfrac{1}{x}$, якщо $x^2+\dfrac{1}{x^2}=6$?

Поміркуйте

795. У деякій компанії є 6 дівчат і 5 хлопців. Чи може статися так, що всі дівчата знайомі з різною кількістю хлопців, а всі хлопці — з однаковою кількістю дівчат?

24. Рівняння, які зводяться до квадратних

1. Дробові раціональні рівняння. Розв'язування деяких дробових раціональних рівнянь зводиться до розв'язування квадратних рівнянь. Розглянемо приклад.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{x+1}{x-1}=\frac{12}{x+2}$.

● Перенесемо дріб $\frac{12}{x+2}$ у ліву частину рівняння і запишемо одержану різницю одним дробом:

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{12}{x+2}=0; \qquad \frac{(x+1)(x+2)-12(x-1)}{(x-1)(x+2)}=0;$$

$$\frac{x^2+2x+x+2-12x+12}{(x-1)(x+2)}=0; \qquad \frac{x^2-9x+14}{(x-1)(x+2)}=0.$$

Знайдемо значення x, для яких чисельник дробу дорівнює нулю:

$$x^2-9x+14=0; \quad D=(-9)^2-4\cdot 1\cdot 14=25; \quad \sqrt{D}=5;$$

$$x_1=\frac{9-5}{2}=2; \quad x_2=\frac{9+5}{2}=7.$$

Якщо $x=2$ або $x=7$, то знаменник $(x-1)(x+2)$ не дорівнює нулю. Отже, $x_1=2$, $x_2=7$ — корені рівняння.

Відповідь. 2; 7. ●

2. Біквадратні рівняння.

Означення **Рівняння виду $ax^4+bx^2+c=0$, де $a\neq 0$, називають біквадратним рівнянням.**

За допомогою заміни $x^2=y$ (тоді $x^4=y^2$) біквадратне рівняння можна звести до квадратного рівняння $ay^2+by+c=0$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $2x^4 - 11x^2 + 12 = 0$.

● Зробимо заміну: $x^2 = y$. Одержимо квадратне рівняння:

$$2y^2 - 11y + 12 = 0.$$

Для цього рівняння:

$$D = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 121 - 96 = 25; \quad \sqrt{D} = 5;$$

$$y_1 = \frac{11-5}{4} = 1{,}5; \qquad y_2 = \frac{11+5}{4} = 4.$$

Повертаючись до заміни $x^2 = y$, матимемо:

1) $x^2 = 1{,}5$; звідки $x_1 = -\sqrt{1{,}5}$; $x_2 = \sqrt{1{,}5}$;

2) $x^2 = 4$; звідки $x_3 = -2$; $x_4 = 2$.

Відповідь. -2; $-\sqrt{1{,}5}$; $\sqrt{1{,}5}$; 2. ●

Для тих, хто хоче знати більше

Шляхом заміни $x^2 = y$ розв'язування біквадратного рівняння зводиться до розв'язування квадратного рівняння. Використовуючи подібні заміни, аналогічним способом можна розв'язувати й деякі інші рівняння. Розглянемо приклади.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(x^2 - 3x)^2 + x^2 - 3x - 20 = 0$.

● Нехай $x^2 - 3x = y$. Відносно змінної y маємо квадратне рівняння $y^2 + y - 20 = 0$. Його коренями є числа $y_1 = -5$, $y_2 = 4$.

Урахувавши заміну, матимемо:

1) $x^2 - 3x = -5$; $x^2 - 3x + 5 = 0$; $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0$.

Оскільки дискримінант від'ємний, то рівняння коренів не має.

2) $x^2 - 3x = 4$; $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 4$.

Відповідь. -1; 4. ●

Приклад 4. Розв'язати рівняння $x - 2\sqrt{x} - 8 = 0$.

● Нехай $\sqrt{x} = y$, тоді $x = y^2$. Маємо рівняння $y^2 - 2y - 8 = 0$, коренями якого є числа $y_1 = -2$, $y_2 = 4$.

Урахувавши заміну, матимемо:

1) $\sqrt{x} = -2$ — рівняння коренів не має; 2) $\sqrt{x} = 4$; $x = 16$.

Відповідь. 16. ●

Рівень А

Розв'яжіть рівняння:

796. **а)** $\frac{x^2 - x}{x+4} = 0;$ **б)** $\frac{x^2 - 5x + 4}{x-5} = 0;$ **в)** $\frac{3y^2 - 5y - 2}{4-y} = 0;$

г) $\frac{x^2 - 3x}{x-3} = 0;$ **д)** $\frac{x^2 + x - 6}{x-2} = 0;$ **е)** $\frac{4y^2 + 11y - 3}{y+3} = 0.$

797. **а)** $\frac{x^2 - 49}{x+3} = 0;$ **б)** $\frac{x^2 - 8x + 7}{x-7} = 0;$ **в)** $\frac{2x^2 + 9x - 11}{x-1} = 0.$

798. **а)** $\frac{x^2}{3x-4} - \frac{100}{3x-4} = 0;$ **б)** $\frac{5z^2}{z-4} = \frac{20z}{z-4};$ **в)** $\frac{y^2}{y+3} = \frac{y+12}{y+3}.$

799. **а)** $\frac{6t}{t+6} + \frac{t^2}{t+6} = 0;$ **б)** $\frac{x^2 + 7x}{4+x} = \frac{2x-6}{4+x};$ **в)** $\frac{x^2 - 12}{x-6} - \frac{4x}{x-6} = 0.$

800. **а)** $\frac{x^2 - 5x}{x^2 + 3} = 2;$ **б)** $\frac{2+3x}{x+2} = x;$ **в)** $-\frac{32}{y} = y - 12;$

г) $\frac{18 - 4x^2}{x - x^2} = 3;$ **д)** $\frac{x^2 - 7}{x-4} = 2x;$ **е)** $y - 1 = \frac{20}{y}.$

801. **а)** $\frac{x^2 + 9x}{x+1} = 14;$ **б)** $\frac{2x-15}{x-6} = x;$ **в)** $y + 6 = \frac{7}{y}.$

802. **а)** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0;$ **б)** $x^4 - 7x^2 - 18 = 0;$ **в)** $x^4 + x^2 - 6 = 0.$

803. **а)** $x^4 - 3x^2 - 4 = 0;$ **б)** $x^4 - 10x^2 + 9 = 0;$ **в)** $x^4 - 7x^2 + 12 = 0.$

Рівень Б

Розв'яжіть рівняння:

804. **а)** $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 16} = 0;$ **б)** $\frac{3x^2 + 8x - 3}{x^2 - \frac{1}{9}} = 0;$

в) $\frac{2x^2+9x-5}{x^2+6x+5}=0$; г) $\frac{2x^2-5x+2}{(2x-1)(x-2)}=0$.

805. а) $\frac{2x^2-11x+5}{4x^2-1}=0$; б) $\frac{4x^2-4x-3}{4x^2+8x+3}=0$.

806. а) $\frac{8x-5}{x}=\frac{9x}{x+2}$; б) $\frac{5+23x}{2x+1}=\frac{12x-6}{x}$;

в) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}=1$; г) $\frac{x}{x-3}-\frac{x-10}{x+2}=5$.

807. а) $\frac{22(x-1)}{x}=\frac{21x-9}{x+1}$; б) $\frac{27x+17}{28}=x+\frac{x+1}{x}$;

в) $\frac{x+3}{2x-6}+\frac{29}{x+4}=3$.

808. а) $\frac{22}{1-4x^2}-\frac{4}{2x-1}+\frac{28}{1+2x}=-2$; б) $\frac{7}{x-4}+\frac{27}{x+4}-\frac{18}{x^2-16}=8$;

в) $\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x^2-9}+\frac{2}{x^2-3x}=0$; г) $\frac{18}{6x+x^2}-\frac{9}{x-6}+\frac{27}{x^2-36}=0$.

809. а) $\frac{12}{x+1}+\frac{8}{1-x^2}+\frac{x-9}{x-1}=-1$; б) $\frac{3}{x-9}+\frac{5}{x^2+9x}-\frac{10}{81-x^2}=0$.

810. а) $x^3-5x=0$; б) $4x^3-3x^2-x=0$.

811. а) $2x^3+4x=0$; б) $x^3-11x^2+30x=0$.

812. а) $2x^4-9x^2+4=0$; б) $36x^4-7x^2-4=0$;

в) $(x-4)^4-3(x-4)^2-4=0$; г) $(2x+3)^4-20(2x+3)^2+64=0$.

813. а) $4x^4-17x^2+4=0$; б) $9x^4+8x^2-1=0$;

в) $(x+2)^4-8(x+2)^2+7=0$; г) $(3x-1)^4+6(3x-1)^2+8=0$.

814. Знайдіть найменший корінь рівняння $(x+5)^4-2(x+5)^2-3=0$.

815. Знайдіть найбільший корінь рівняння $2x^4+5x^2-3=0$.

Рівень В

816. Розв'яжіть рівняння:

а) $\dfrac{x+4}{4x^2+4x+1}-\dfrac{10}{1-2x}=\dfrac{15}{2x+1}$; **б)** $\dfrac{2}{x-5}+\dfrac{7x}{x+3}+\dfrac{14}{x^2-2x-15}=0$;

в) $\dfrac{6+x}{x^2-3x-10}-\dfrac{8+x}{x+2}+\dfrac{1}{x-5}=2$; **г)** $\dfrac{y-3}{2}+\dfrac{y^2+2}{y^2}=\dfrac{1-y-y^2}{y}+\dfrac{2}{y^2}$;

д) $\dfrac{3y-y^2}{y-2}+\dfrac{y-2}{3y-y^2}=-2,5$; **е)** $\dfrac{x^2+4x+9}{x-3}+\dfrac{x-3}{x^2+4x+9}=-2$.

817. Розв'яжіть рівняння з параметром a:

а) $\dfrac{x^2-2x-3}{x+a}=0$; **б)** $\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x-2}=0$.

818. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x^2-1)^2-11(x^2-1)+24=0$; **б)** $(x^2-x)^2+2(x^2-x)-8=0$;

в) $\left(x^2+5x\right)\left(x^2+5x-2\right)=24$; **г)** $\left(2x^2+x+1\right)\left(2x^2+x+3\right)=8$;

д) $\left(x^2-5x+7\right)^2-(x-2)(x-3)=1$; **е)** $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=120$;

є) $(x-1)x(x+1)(x+2)=24$; **ж)** $(x+3)^2(x+2)(x+4)=12$.

819. Розкладіть на множники:

а) a^4-10a^2+9; **б)** $(b^2+2b)^2-2(b^2+2b)-3$.

Розв'яжіть рівняння:

820. **а)** $\sqrt{x^2-3x+5}=3$; **б)** $\sqrt{3x^2-14x+9}=1$.

821. **а)** $x-6\sqrt{x}+5=0$; **б)** $x+\sqrt{x}-6=0$;

в) $\sqrt{x-1}+2x=12$; **г)** $x+\sqrt{x+20}=22$;

д) $x^2-3x-7=-\sqrt{x^2-3x+5}$; **е)** $(x+1)(x+4)=3\sqrt{x^2+5x+2}+6$.

Вправи для повторення

822. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{24a^2c^6}{32a^3c^4}$; **б)** $\dfrac{4x^4-y^2}{2x^2y+y^2}$.

823. Доведіть тотожність $\left(a-\dfrac{4ab}{a+b}+b\right):\dfrac{a-b}{a+b}=a-b$.

824. Спростіть вираз:

а) $5\sqrt{8}+3\sqrt{16}-6\sqrt{32}-6\sqrt{64}$; **б)** $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{12}-\sqrt{8}\right)$.

825. Морська вода містить 5% солі (за масою). Скільки кілограмів прісної води потрібно додати до 30 кг морської, щоб одержати розчин, у якому відсотковий уміст солі дорівнював би 1,5%?

826. Із двох сіл назустріч один одному одночасно вирушили пішохід і велосипедист. Пройшовши 2 км, пішохід зустрів велосипедиста, який на цей час проїхав 6 км. Знайдіть швидкість пішохода, якщо вона на 8 км/год менша від швидкості велосипедиста.

Поміркуйте

827. Кожну точку прямої пофарбовано в синій або червоний кольори. Доведіть, що на цій прямій знайдуться три різні точки *A*, *B*, *C*, які пофарбовані одним кольором і такі, що точка *C* — середина відрізка *AB*.

25. Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь та рівнянь, які зводяться до квадратних

Ви вже розв'язували задачі за допомогою лінійних рівнянь з однією змінною та систем лінійних рівнянь із двома змінними. Розглянемо задачі, розв'язування яких приводить до квадратних рівнянь.

Задача 1. Довжина класної дошки на 1,3 м більша від ширини. Знайти розміри дошки, якщо її площа дорівнює 3 м^2.

● Нехай ширина дошки дорівнює x м. Тоді довжина дошки дорівнює $(x + 1{,}3)$ м, а площа — $x(x + 1{,}3)$ м^2. За умовою задачі площа дошки дорівнює 3 м^2. Маємо рівняння: $x(x + 1{,}3) = 3$, звідки $x^2 + 1{,}3x - 3 = 0$. Коренями одержаного рівняння є числа $x_1 = -2{,}5$ та $x_2 = 1{,}2$. Перший корінь не задовольняє умову задачі. Отже, ширина дошки дорівнює 1,2 м, а довжина — $1{,}2 + 1{,}3 = 2{,}5$ (м).

Відповідь. 1,2 м; 2,5 м. ●

Задача 2. Моторний човен за 2 год пройшов 15 км за течією річки і 14 км проти течії. Знайти швидкість човна у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

● Нехай швидкість човна у стоячій воді дорівнює x км/год, тоді швидкість човна за течією річки дорівнює $(x + 3)$ км/год, а проти течії — $(x - 3)$ км/год.

Шлях 15 км за течією річки човен пройшов за $\dfrac{15}{x+3}$ год, а шлях 14 км проти течії — за $\dfrac{14}{x-3}$ год. На весь шлях човен затратив $\left(\dfrac{15}{x+3}+\dfrac{14}{x-3}\right)$ год, що за умовою задачі дорівнює 2 год. Маємо рівняння:

$$\frac{15}{x+3}+\frac{14}{x-3}=2.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$\frac{15}{x+3}+\frac{14}{x-3}-2=0; \quad \frac{15(x-3)+14(x+3)-2(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=0;$$

$$\frac{-2x^2+29x+15}{(x+3)(x-3)}=0; \quad \begin{cases} -2x^2+29x+15=0; \\ (x+3)(x-3)\neq 0; \end{cases} \quad x_1=-0{,}5;\; x_2=15.$$

Число $-0{,}5$ не задовольняє умову задачі. Отже, швидкість човна у стоячій воді дорівнює 15 км/год.

Відповідь. 15 км/год. ●

Задача 3. Дві автоматичні лінії, працюючи разом, виготовили замовлену партію упаковок за 4 дні. За скільки днів може виконати замовлення кожна лінія, працюючи окремо, якщо перша може це зробити на 6 днів швидше, ніж друга?

● За умовою задачі складаємо таблицю:

Автоматичні лінії	*Кількість днів*	*Частина замовлення, яку виконують за один день*
I	x	$\frac{1}{x}$
II	$x+6$	$\frac{1}{x+6}$
I і II	4	$\frac{1}{4}$ або $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}$

Маємо рівняння: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}$.

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{4}=0; \quad \frac{4(x+6)+4x-x(x+6)}{4x(x+6)}=0; \quad \frac{-x^2+2x+24}{4x(x+6)}=0;$$

$$\begin{cases} -x^2+2x+24=0; \\ x(x+6)\neq 0; \end{cases} \qquad x_1=-4;\ x_2=6.$$

Число –4 не задовольняє умову задачі. Отже, перша лінія може виконати замовлення за 6 днів, а друга — за 6 + 6 = 12 (днів).

Відповідь. 6 днів; 12 днів. ●

Задача 4. Поїзд був затриманий у дорозі на 20 хв. Для того щоб прибути на станцію призначення вчасно, він за 160 км від цієї станції збільшив свою швидкість на 16 км/год. Знайти початкову швидкість поїзда.

● За умовою задачі складаємо таблицю:

Умова руху	*Шлях*, км	*Швидкість*, км/год	*Час*, год	
Без запізнення	160	x	$\frac{160}{x}$	**більше на 20 хв**
Ліквідовуючи запізнення на 20 хв	160	$x+16$	$\frac{160}{x+16}$	

20 хв = $\frac{1}{3}$ год.

Маємо рівняння: $\dfrac{160}{x} - \dfrac{160}{x+16} = \dfrac{1}{3}$.

Розв'яжемо рівняння, помноживши обидві його частини на $3x(x + 16)$:

$480(x + 16) - 480x = x(x + 16)$; $\quad 480x + 7680 - 480x = x^2 + 16x$;

$x^2 + 16x - 7680 = 0$; $\quad x_1 = -96$; $x_2 = 80$.

Якщо $x = -96$ або $x = 80$, то $3x(x + 16) \neq 0$, тому дані числа є коренями рівняння.

Число –96 не задовольняє умову задачі. Отже, початкова швидкість поїзда дорівнювала 80 км/год.

Відповідь. 80 км/год. ●

Рівень А

828. Від керамічної плитки квадратної форми відрізали смугу завширшки 10 см. Знайдіть початкові розміри плитки, якщо площа її частини, утвореної після відрізання смуги, дорівнює 1200 см^2.

829. Площа ділянки прямокутної форми дорівнює 32 м^2. Довжина ділянки на 4 м більша від її ширини. Знайдіть розміри ділянки.

830. Знайдіть сторони прямокутника, периметр якого дорівнює 30 см, а площа — 56 см^2.

831. Добуток двох чисел дорівнює 135. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 6 більше від іншого.

832. Одне число менше від іншого на 20, а їх добуток дорівнює –91. Знайдіть ці числа.

833. Різниця двох додатних чисел дорівнює 23, а їх добуток — 420. Знайдіть ці числа.

834. Відстань між двома містами дорівнює 180 км. Пасажирський поїзд пройшов шлях між цими містами на 1 год швидше, ніж товарний, бо його швидкість була на 30 км/год більша від швидкості товарного. Знайдіть швидкості поїздів.

835. Щоб потрапити з міста до села, потрібно проїхати 40 км по шосе, а потім ще 8 км по ґрунтовій дорозі. На шлях від міста до села мотоцикліст затратив 1 год. Знайдіть швидкість мотоцикліста на шосе, якщо вона на 10 км/год більша від швидкості на ґрунтовій дорозі.

836. Токар за певний час мав виготовити 96 деталей. Виготовляючи щогодини на 2 деталі більше, ніж планувалося, він виконав завдання на 4 год швидше. Скільки деталей токар планував виготовляти щогодини?

837. Андрій набрав на комп'ютері 20 сторінок тексту за певний час. Якби він набирав щогодини на 1 сторінку більше, то завершив би набір на 1 год швидше. Скільки сторінок набирав Андрій за 1 год?

838. Катер за 1 год пройшов 12 км за течією річки і 9 км проти течії. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість катера у стоячій воді дорівнює 21 км/год.

839. Моторний човен за 2 год пройшов 24 км за течією річки і 6 км проти течії. Знайдіть швидкість човна у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

Рівень Б

840. Навколо спортивного майданчика, який має форму прямокутника, зроблена доріжка завширшки 3 м. Знайдіть розміри майданчика, якщо його довжина на 12 м більша від ширини, а загальна площа майданчика та доріжки дорівнює 1260 м^2.

841. Із прямокутного листа жерсті, розміри якого дорівнюють 30 см × 48 см, потрібно виготовити відкриту коробку. Для цього по кутах прямокутника вирізують квадрати, а потім загинають краї листа (рис. 16). Знайдіть, якою завдовжки має бути сторона вирізаного квадрата, щоб площа дна коробки дорівнювала 1008 см^2?

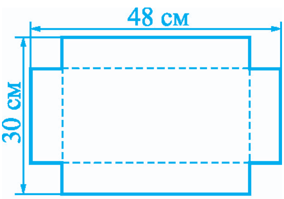


Рис. 16

842. Одне число більше від іншого на 3. Якщо від квадрата більшого числа відняти менше число, помножене на 10, то одержимо 69. Знайдіть ці числа.

843. Знайдіть два послідовні натуральні числа, квадрат суми яких більший від суми їхніх квадратів на 180.

844. Знаменник звичайного дробу на 2 більший від чисельника. Якщо від чисельника дробу відняти 1, а до знаменника додати 3, то одержимо дріб, який на $\frac{7}{20}$ менший від даного. Знайдіть даний дріб.

845. Чисельник звичайного дробу більший від знаменника на 5. Якщо до чисельника дробу додати 3, а від знаменника відняти 1, то одержимо дріб, який на 6,5 більший від даного. Знайдіть даний дріб.

846. Школі виділили 72 тис. грн на придбання певної кількості однакових комп'ютерів. На час придбання комп'ютерів ціна кожного з них зменшилась на 300 грн, тому купили на один комп'ютер більше. Скільки купили комп'ютерів?

847. На автоматичному станку виготовили 300 деталей. Після удосконалення станка таку саму кількість деталей він виготовив на 2,5 год швидше, бо за годину виготовляв на 4 деталі більше, ніж раніше. Скільки деталей за годину почав виготовляти станок?

848. Два екскаватори, працюючи разом, вирили канаву за 3 год 45 хв. Перший екскаватор, працюючи сам, може вирити канаву на 4 год швидше, ніж другий. За який час може вирити канаву кожний екскаватор, працюючи окремо?

849. Два робітники, працюючи разом, виготовили партію деталей за 6 год. Перший робітник, працюючи сам, може виготовити цю партію деталей на 5 год швидше, ніж другий. За який час кожний робітник може виготовити партію деталей, працюючи окремо?

850. Два трактори, працюючи разом, зорали за 1 день половину поля. За скільки днів може зорати все поле кожний трактор окремо, якщо один з них може це зробити на 3 дні швидше, ніж інший?

851. Перша бригада може прокласти дорогу на 3 дні швидше, ніж друга. Якщо перша бригада пропрацює 6 днів, а потім друга 4 дні, то вони прокладуть усю дорогу. За скільки днів може прокласти дорогу одна перша бригада?

852. За 4 дні спільної роботи два майстри виконали $\frac{3}{5}$ усього завдання. Перший майстер може виконати все завдання на 3 дні швидше, ніж другий. За який час може виконати завдання кожний майстер, працюючи окремо?

853. З першої ділянки зібрали 2880 ц пшениці, а з другої, площа якої на 12 га менша, — 2160 ц. Знайдіть площу кожної ділянки, коли відомо, що з кожного гектара першої ділянки зібрали пшениці на 4 ц більше, ніж з кожного гектара другої.

854. Моторний човен проплив 15 км по озеру і 30 км по річці, яка впадає в озеро. На шлях по озеру він затратив часу на 1 год 10 хв менше, ніж на шлях по річці. Знайдіть швидкість човна у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

855. Катер проплив 9 км за течією річки і 14 км проти течії, затративши на весь шлях стільки часу, скільки йому потрібно для подолання 24 км у стоячій воді. Знайдіть швидкість катера у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

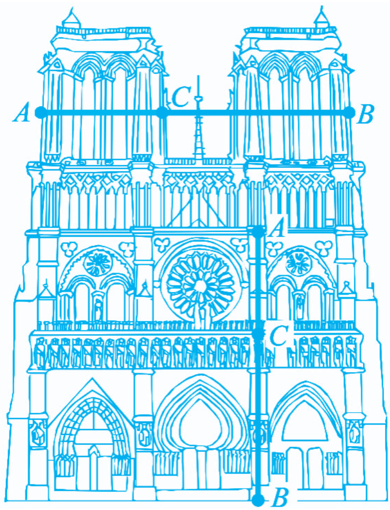
856. З одного села в інше, відстань між якими дорівнює 24 км, виїхав мотоцикліст, а через 12 хв услід за ним виїхав автомобіль. У друге село мотоцикліст та автомобіль прибули одночасно. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона на 20 км/год більша від швидкості мотоцикліста.

857. Поїзд був затриманий на станції на 6 хв. Збільшивши швидкість на 10 км/год, він на перегоні завдовжки 90 км ліквідував відставання від графіка. Знайдіть швидкість поїзда за розкладом.

Рівень В

858. Кожна дівчина 8 класу подарувала свою фотографію кожній іншій дівчині класу. Скільки всього дівчат у класі, якщо загалом вони обмінялися 210 фотографіями?

859. Точка C ділить відрізок AB на дві частини так, що $AC : CB = CB : AB$. (Такий поділ відрізка називають «золотим поділом», або «золотим перерізом».) Знайдіть відношення $AC : CB$.



Собор Паризької Богоматері (Нотр-Дам де Парі)

860. Для визначення глибини підземної порожнини спелеолог кинув на дно порожнини камінь і через 4 с почув звук від його падіння. Знайдіть глибину порожнини з точністю до 1 м, вважаючи, що швидкість звуку дорівнює 340 м/с, а камінь, падаючи, за перші t с пролітає $5t^2$ м.

861. Вкладник вніс до банку 5000 грн під певні відсотки річних, і через 2 роки на його рахунку було 6498 грн. Скільки відсотків річних нараховував банк?

862. Щоб зібрати пшеницю з поля, першому комбайну потрібно на 9 год менше часу, ніж другому, і на 3 год більше, ніж обом за спільної роботи. За який час кожний комбайн, працюючи окремо, може зібрати всю пшеницю?

863. Автомобіль за певний час мав подолати шлях 250 км, рухаючись зі сталою швидкістю. Але через 2 год після початку руху він був затриманий на 5 хв і, щоб прибути до місця призначення вчасно, збільшив швидкість на 5 км/год. Знайдіть швидкість автомобіля протягом перших двох годин руху.

864. Бригада із 5 токарів й одного учня за певний час мала виготовити 700 деталей. Коли бригада пропрацювала 5 днів, учневі, який виготовляв за день на 2 деталі менше, ніж кожний з токарів, доручили іншу роботу, тому за визначений термін було виготовлено лише 650 деталей. Скільки деталей виготовляв за 1 день учень?

Вправи для повторення

865. Обчисліть:

а) $\sqrt{2,25}\cdot\sqrt{\dfrac{4}{9}}+\sqrt{0,04}\cdot\sqrt{3600}$; **б)** $\sqrt{18}\cdot\sqrt{50}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{75}}$.

866. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{\sqrt{70}-\sqrt{30}}{\sqrt{35}-\sqrt{15}}$; **б)** $\left(\sqrt{5-\sqrt{21}}+\sqrt{5+\sqrt{21}}\right)^2$.

867. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

а) $\dfrac{b+1}{b-1}+\dfrac{4}{1-b}\cdot\dfrac{b}{1+b}$, якщо $b=2$;

б) $\left(m+1-\dfrac{1}{1-m}\right):\left(m-\dfrac{m^2}{m-1}\right)$, якщо $m=0,8$.

868. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b^2}{a^2-b^2}:\left(1-\dfrac{a}{a+b}\right)$ дорівнює 1.

869. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^4-12x^2+27=0$; **б)** $x-15\sqrt{x}-16=0$.

Поміркуйте

870. У кожній вершині куба записано число, як показано на рисунку 17. За один крок до двох чисел будь-якого ребра можна додати по 1. Чи можна за кілька таких кроків добитися того, щоб усі числа у вершинах куба дорівнювали тому самому числу?

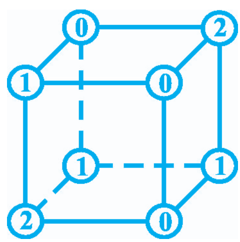


Рис. 17

Цікаво знати

Квадратні рівняння окремих видів вміли розв'язувати вавилонські вчені ще близько 2 тис. років до н. е. Пізніше давньогрецькі та індійські математики розв'язували деякі види квадратних рівнянь геометрично (з використанням побудов). У IX ст. арабський математик **Мухаммед бен Муса ал-Хорезмі** зібрав і систематизував способи розв'язування квадратних рівнянь. У трактаті «Кітаб ал-джебр ал-мукабала» він пояснив прийоми розв'язування рівнянь виду $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, де a, b, c — додатні числа. Поділ квадратних рівнянь на такі види обумовлений тим, що на той час не визнавали від'ємних чисел, тому коефіцієнти в рівнянні мали бути додатними. Зрозуміло, що й від'ємних коренів тоді не знаходили.

Математики середньовічного Сходу шукали також способи розв'язування кубічних рівнянь — рівнянь виду $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, де $a \neq 0$. Проте вивести загальну формулу для коренів таких рівнянь їм не вдалося.

Розв'язали цю проблему в Європі. Отримана в XVI ст. формула для коренів кубічного рівняння стала першим великим відкриттям європейської математики.

У XVI ст. в Італії були поширені математичні турніри, на яких переможцем визнавали того, хто розв'яже більше задач, запропонованих суперником. Учасник турніру міг пропонувати лише ті задачі, які сам міг розв'язати. Тому коли математик знаходив метод розв'язування задач певного типу, він не поспішав розкривати свій секрет. Володіючи таємницею, він міг викликати на математичні турніри інших математиків і, перемагаючи їх, здобути славу неперевершеного математика. Коли одному з італійських математиків став відомий спосіб розв'язування рівнянь виду $x^3 + px = q$, де p і q — додатні числа, він викликав на математичний турнір математика-самоучку **Нікколо Тарталью** (1499 – 1557). За кілька днів до турніру Тарталья знайшов загальний метод розв'язування кубічних рівнянь і переміг, швидко розв'язавши всі 30 задач, запропонованих йому суперником.

Джероламо Кардано
(1501 – 1576) —
італійський математик,
філософ, лікар

Нільс Генріх Абель
(1802 – 1829),
норвезький математик

Знайдену Тартальєю формулу для коренів кубічного рівняння опублікував італійський учений **Джероламо Кардано** (1501 – 1576), який дізнався її від Тартальї. Зараз ця формула відома як формула Кардано[1]. Згодом **Луїджі Феррарі** (1522 – 1565), учень Кардано, знайшов спосіб розв'язування рівнянь 4-го степеня.

Формули для коренів рівнянь від 1-го до 4-го степенів виражають ці корені через коефіцієнти рівняння. Якщо всі корені рівняння можна виразити через його коефіцієнти за допомогою скінченного числа дій додавання, віднімання, множення, ділення і добування кореня, то кажуть, що це рівняння можна *розв'язати алгебраїчно*, або *розв'язати в радикалах*.

Чи можна розв'язати в радикалах рівняння п'ятого і вищих степенів? Протягом майже трьох століть спроби математиків відповісти на це питання були невдалими. Лише на початку XIX століття норвезький математик **Нільс Генріх Абель** (1802 – 1829) довів, що такі рівняння в загальному випадку розв'язати в радикалах неможливо.

Проте це не означає, що коренів рівнянь вище четвертого степеня не можна знайти. Не існує лише загальних формул, які виражали б корені через коефіцієнти рівняння.

[1] Кардано відомий також як великий винахідник: до його доробку належать добре відомі водіям та механікам карданний вал, карданна муфта, карданна передача.

Запитання і вправи для повторення § 3

1. Яке рівняння називають квадратним?
2. Як називають коефіцієнти квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$?
3. Укажіть типи неповних квадратних рівнянь.
4. Як розв'язати квадратне рівняння виду $ax^2 + bx = 0$?
5. Як розв'язати квадратне рівняння виду $ax^2 + c = 0$?
6. Укажіть корінь квадратного рівняння $ax^2 = 0$.
7. Яке рівняння називають зведеним квадратним рівнянням?
8. За якою формулою обчислюють дискримінант квадратного рівняння?
9. Скільки коренів має квадратне рівняння, якщо $D > 0$? $D < 0$? $D = 0$?
10. За якою формулою знаходять корені квадратного рівняння? Виведіть цю формулу.
11. Сформулюйте теорему Вієта для зведеного квадратного рівняння. Доведіть цю теорему.
12. Чому дорівнює сума та добуток коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$?
13. Який многочлен називають квадратним тричленом?
14. Як розкласти квадратний тричлен на множники? Наведіть приклад.

Розв'яжіть рівняння:

871. **а)** $0{,}3x^2 - 4{,}8 = 0$; **б)** $20{,}5 - 4{,}1x^2 = 0$;

в) $5\frac{1}{3}x^2 - 2 = 10$; **г)** $2{,}4x^2 - \frac{3}{8} = 4{,}425$;

д) $6x^2 - 3{,}6x = 0$; **е)** $5{,}3x^2 - 1{,}06x = 0$.

872. **а)** $x^2 - 5x - 14 = 0$; **б)** $x^2 + 4x - 60 = 0$;

в) $2x^2 - x - 1 = 0$; **г)** $4x^2 - 11x - 3 = 0$;

д) $5x^2 - 21x + 4 = 0$; **е)** $3x^2 + 5x + 2 = 0$.

873. Чи може значення виразу $x^2 - 5x + 15$ дорівнювати 5?

874. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x-4)^2-36=0$; **б)** $(2x+3)^2-25=0$;

в) $(x+4)(x-1)-5x=2x^2-4$; **г)** $(x-3)^2-(3x-5)^2=0$;

д) $(7x-1)^2-(x+9)^2=0$; **е)** $(x-5)^2-(3x+2)^2=(4x-1)(x-4)$.

875. Знайдіть суму та добуток коренів рівняння:

а) $x^2-7x-4=0$; **б)** $5x^2+24x+6=0$.

876. Знайдіть вільний член q зведеного квадратного рівняння $x^2+px+q=0$, якщо його коренями є числа 15 і –2.

877. Знайдіть коефіцієнт p зведеного квадратного рівняння $x^2+px+q=0$, якщо його коренями є числа $2-\sqrt{3}$ і $2+\sqrt{3}$.

878. Числа x_1 та x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2+px+q=0$. Знайдіть коефіцієнти p і q, якщо:

а) $x_1+x_2=4$; $x_1\cdot x_2=-5$; **б)** $x_1+x_2=-2{,}7$; $x_1\cdot x_2=0{,}5$.

879. Рівняння $x^2+3x-6=0$ має корені x_1 та x_2. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

а) $(x_1+x_2)^3-3x_1x_2$; **б)** $\dfrac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$.

880*. Не розв'язуючи рівняння $x^2-4x-7=0$, знайдіть значення виразу $x_1^{-2}+x_2^{-2}$, де x_1 та x_2 — корені рівняння.

881. Знайдіть корені рівняння (усно):

а) $x^2+3x-4=0$; **б)** $x^2+7x+10=0$.

Розкладіть на множники:

882. **а)** $x^2-10x+21$; **б)** $2x^2+3x-5$; **в)** $x^2-8x+16$.

883*. **а)** x^4-7x^2+12; **б)** $x^2-4ax+3a^2$; **в)** $2m^2-mn-10n^2$.

884. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{x^2+3x-18}{3-x}$; **б)** $\dfrac{4x^2+3x-1}{x^2+6x+5}$; **в)** $\dfrac{a^2+2ab-15b^2}{2a^2-9ab+9b^2}$.

885. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{2a^2-5a-3}{a^2+a-12}\cdot\dfrac{2a+8}{2a+1}$; **б)** $\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-3x-4}+\dfrac{2}{x+1}$.

886. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінної значення виразу $\frac{4m^2-4m-3}{4m^2+4m-15}:\frac{4m+2}{2m+5}$ дорівнює тому самому числу.

Розв'яжіть рівняння:

887. **а)** $x^3-3x=0$; **б)** $x^3-0{,}64x=0$.

888. **а)** $x^4-3x^2+2=0$; **б)** $x^4-8x^2-9=0$;

в) $(x+7)^4-2(x+7)^2-8=0$; **г)** $(5x-2)^4-7(5x-2)^2+12=0$.

889*. **а)** $\left(x^2-x\right)^2+x^2-x=6$; **б)** $\left(3x^2+2x\right)^2-4\left(3x^2+2x\right)-5=0$;

в) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+2\right)=12$; **г)** $(x^2-4x+1)(x^2-4x-3)-12=0$.

890*. **а)** $x+3\sqrt{x}-4=0$; **б)** $\sqrt{x^2-7x+7}=5$.

891. **а)** $\frac{z^2+5z-24}{3-z}=0$; **б)** $\frac{x^2-5}{x+2}+\frac{5x+11}{x+2}=0$;

в) $\frac{x+7}{2x-3}=\frac{13-x}{x}$; **г)** $\frac{x}{x+5}=\frac{1+2x}{3-x}$;

д) $\frac{x-1}{x-3}-\frac{x+3}{x+1}=\frac{x^2+x-4}{(x-3)(x+1)}$; **е)** $\frac{2x+3}{x-4}-\frac{x}{x^2-16}+\frac{5(x+2)}{x+4}=0$;

є) $\frac{2x-1}{x+2}-\frac{x+2}{x-5}=\frac{12-5x}{x^2-3x-10}$; **ж)** $\frac{2x^2-1}{3x+2}-\frac{3x+2}{2x^2-1}=1{,}5$.

892. Знайдіть найбільший корінь рівняння $x^4-17x^3+72x^2=0$.

893. Знайдіть суму коренів рівняння $(x^2-5x-24)(2x^2-5x+3)=0$.

894. Знайдіть добуток коренів рівняння $\frac{11x-3}{2x-1}-3=\frac{x+3}{x-1}$.

895*. Корені рівняння $x^2-16x+m=0$ відносяться як $1:7$. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт m.

896*. Для яких значень a сума коренів рівняння $x^2+(2-a-a^2)x-a^2=0$ дорівнює нулю?

897*. Знайдіть значення k, для яких рівняння $(k-3)x^2+(k^2-4k+3)x+1=0$ має корені, що є протилежними числами.

898*. Для яких натуральних значень k рівняння $kx^2-2(k-3)x+k-4=0$ має корені?

899. Одна сторона прямокутника на 3 см довша від іншої, а його площа дорівнює 130 см^2. Знайдіть периметр прямокутника.

900. Знайдіть натуральне число, яке менше від свого квадрата на 12.

901. Добуток двох послідовних натуральних чисел більший від їх суми на 5. Знайдіть ці числа.

902. Знайдіть такі три послідовні непарні числа, щоб сума квадратів перших двох чисел була більшою від квадрата третього числа на 9.

903. Один катет прямокутного трикутника на 1 см коротший від гіпотенузи і на 1 см довший від іншого катета. Знайдіть сторони трикутника.

904. Ширина кімнати менша від довжини на 1 м і від діагоналі — на 2 м. Знайдіть площу кімнати.

905. Знаменник звичайного дробу на 7 більший від чисельника. Якщо до чисельника і знаменника дробу додати 2, то одержимо дріб, більший від даного на $\frac{1}{12}$. Знайдіть даний дріб.

906. Сума чисельника і знаменника звичайного дробу дорівнює 13. Якщо до чисельника дробу додати 7, а від знаменника відняти 9, то одержимо дріб, який у добутку з даним дробом дає 3. Знайдіть даний дріб.

907. Катер проплив 18 км за течією річки і 16 км проти течії. На шлях за течією річки він затратив часу на 15 хв менше, ніж на шлях проти течії. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість катера у стоячій воді дорівнює 20 км/год.

908. Від пристані відплив пліт, а через 9 год — моторний човен, який наздогнав пліт на відстані 21 км від пристані. Знайдіть швидкість плоту, якщо вона на 12 км/год менша від швидкості човна за течією річки.

909. Відстань між залізничними станціями A і B дорівнює 230 км. Зі станції A до станції B вирушив товарний поїзд, а через 1 год назустріч йому зі станції B — пасажирський. Поїзди зустрілися на відстані 140 км від станції A. Знайдіть швидкість пасажирського поїзда, якщо вона на 20 км/год більша від швидкості товарного.

910. Автомобіль подолав шлях між містами A і B завдовжки 132 км. Повертаючись назад, він зменшив швидкість на 6 км/год, тому затратив на зворотний шлях на 10 хв більше, ніж на шлях від *A* до *B*. Знайдіть швидкість автомобіля під час руху від міста *A* до міста *B*.

911. Вантажний автомобіль перевіз вантаж з пункту *A* в пункт *B*, відстань між якими дорівнює 48 км. Повертаючись назад, автомобіль проїхав $\frac{1}{4}$ шляху з тією ж швидкістю, з якою їхав від *A* до *B*, а потім збільшив швидкість на 12 км/год. Знайдіть швидкість автомобіля під час руху від *A* до *B*, якщо на шлях від *A* до *B* і на зворотний шлях він затратив 1 год 30 хв.

912. Два екскаватори різної потужності можуть вирити котлован за 4 дні. Третину котловану перший екскаватор може вирити на 2 дні швидше, ніж другий. За скільки днів може вирити котлован кожний екскаватор, працюючи окремо?

913. Два робітники можуть виконати $\frac{3}{5}$ завдання за 4 дні. За скільки днів зможе виконати завдання кожний робітник, працюючи окремо, якщо половину завдання один з них виконує на 5 днів швидше, ніж інший?

914. Вантаж, загальна маса якого дорівнює 60 т, мали перевезти на автомобілях, завантажуючи їх порівну. В останній момент для перевезення вантажу виділили на 2 автомобілі менше, а тому навантажили на кожний автомобіль на 1 т вантажу більше, ніж планували раніше. Скільки автомобілів виділили для перевезення вантажу?

915*. У першому кварталі підприємство виготовило 2000 одиниць продукції, а у другому збільшило випуск на x%. У третьому ж кварталі підприємство виготовило 3000 одиниць продукції, що на $(x + 5)$% більше, ніж у другому. Знайдіть x.

Завдання для самоперевірки № 5

Рівень 1

1. Знайдіть корені рівняння $x^2 - 2x = 0$.

а) 1; –2; **б)** 0; –2; **в)** 0; 2; **г)** –1; 2.

2. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 64 = 0$.

а) –64; 64; **б)** 0; 64; **в)** –2; 2; **г)** –8; 8.

3. Дискримінант квадратного рівняння $3x^2 + 2x - 1 = 0$ дорівнює:

а) $2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)$; **б)** $2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1$;

в) $3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)$; **г)** $1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2$.

4. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 7x - 8 = 0$.

а) 1; 8; **б)** 7; 8; **в)** –8; 1; **г)** –1; 8.

5. Сума і добуток коренів рівняння $x^2 + 11x + 30 = 0$ відповідно дорівнюють:

а) 11; 30; **б)** –11; 30; **в)** 11; –30; **г)** –11; –30.

6. Коренями квадратного тричлена $x^2 - x - 6$ є числа –2 і 3. Який з виразів є розкладом цього тричлена на множники?

а) $(x - 2)(x + 3)$; **б)** $(x - 1)(x + 6)$; **в)** $(x + 2)(x - 3)$; **г)** $(x - 2)(x - 3)$.

Рівень 2

7. Установіть відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1) $x^2 - 4 = 0$;

2) $x^2 - 4x = 0$;

3) $x^2 - 4x - 12 = 0$;

4) $\dfrac{x^2 - 4x - 12}{x - 6} = 0$.

А) –2, 6;

Б) 0, 2;

В) –2, 2;

Г) 0, 4;

Д) –2.

8. Розкладіть на множники:

а) $x^2 + 6x + 8$; **б)** $2x^2 - 5x + 3$.

9. Знайдіть суму та добуток коренів рівняння $x^2 - 10x + 24 = 0$.

10. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x + 3)(2x - 1) = x^2 + 5x - 7$; **б)** $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} + 3 = 0$.

11. Добуток двох чисел дорівнює –24. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 11 більше від іншого.

Рівень 3

12. Розв'яжіть рівняння:

а) $6x^2 - 3x + \frac{1}{3} = 0$; **б)** $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$.

13. Знайдіть значення виразу $3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_2$, якщо x_1 та x_2 — корені рівняння $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

14. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x}{x-1} - \frac{3}{x+2} = \frac{5}{4}$; **б)** $\frac{8x}{x+3} - \frac{x+3}{x^2-9} = -\frac{5}{x-3}$.

15. Знайдіть значення b, для яких один з коренів рівняння $2x^2 - 4x + b = 0$ утричі більший від іншого.

16. З міста A до міста B виїхав мотоцикліст. Через 18 хв услід за ним виїхав автомобіль, який, проїхавши 40 км, наздогнав мотоцикліста. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона на 30 км/год більша від швидкості мотоцикліста.

Рівень 4

17. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x - 2) = 2$; **б)** $x - 7\sqrt{x} - 8 = 0$.

18. Для яких значень a рівняння $x^2 - (a+2)x + a + 5 = 0$ має один корінь?

19. Знайдіть усі значення b, для яких корені рівняння $3x^2 - bx - 2 = 0$ задовольняють умову $x_1 + 6x_2 = 0$, де x_1 — менший корінь, а x_2 — більший корінь.

20. Розв'яжіть рівняння $\frac{y+1}{y+3} + \frac{y-14}{y-7} = \frac{20y+47}{21+4y-y^2}$.

21. Два трактори готують землю під озимину. Протягом 3 год вони працювали разом, після чого ще 1 год працював лише другий трактор. За весь цей час трактори підготували половину поля. За який час може підготувати все поле кожний трактор, працюючи окремо, якщо перший може це зробити на 4 год швидше, ніж другий?

ЗАДАЧІ ЗА КУРС АЛГЕБРИ 8 КЛАСУ

916. Які з даних виразів є цілими виразами? дробовими виразами? раціональними дробами?

а) $2{,}5 + \frac{1}{a}$; **б)** $\frac{8x}{5y}$; **в)** $\frac{a-2b}{4}$; **г)** $\frac{c}{1+c}$.

917. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

а) $\frac{3b}{5b+1}$; **б)** $\frac{x+2}{x^2+3x}$; **в)** $\frac{-5}{a^2-4}$; **г)** $\frac{4}{x^2+12}$.

918. Знайдіть значення виразу $\frac{2a^2+1}{a-4}$, якщо:

а) $a=5$; **б)** $a=-6$; **в)** $a=4{,}5$; **г)** $a=\frac{1}{3}$.

919. Знайдіть значення виразу $\frac{x^2+2xy+y^2}{2x}$, якщо:

а) $x=4$; $y=6$; **б)** $x=-4$; $y=4$; **в)** $x=2{,}5$; $y=0{,}5$; **г)** $x=\frac{1}{4}$; $y=1\frac{3}{4}$.

920. Два автомобілі одночасно виїхали з міста M до міста N, відстань між якими дорівнює S км. Перший автомобіль рухається зі швидкістю a км/год, а другий — зі швидкістю b км/год, де $a > b$.

а) Через скільки годин до міста N приїде перший автомобіль; другий автомобіль?

б) На якій відстані від міста N перебуватиме другий автомобіль у момент прибуття до цього міста першого автомобіля?

Запишіть результати у вигляді виразів.

921. З міст A і B, відстань між якими дорівнює S км, одночасно назустріч один одному виїхали мотоцикліст та автомобіль. Мотоцикліст рухається зі швидкістю 60 км/год, а автомобіль — зі швидкістю b км/год.

а) Через скільки годин мотоцикліст та автомобіль зустрінуться?

б) Який шлях проїде мотоцикліст на момент його зустрічі з автомобілем?

Запишіть результати у вигляді виразів.

922. Скоротіть дріб:

а) $\frac{42x^2y^5}{36x^4y^3}$; б) $\frac{6xy+6y^2}{x^2-y^2}$; в) $\frac{a^2-6a+9}{(a-2)^2-1}$;

г) $\frac{a^2-2a+1}{a^2+ab-a-b}$; д) $\frac{x^{15}-1}{x^{10}+x^5+1}$; е) $\frac{x^{10}-5}{x^5-\sqrt{5}}$.

Спростіть вираз:

923. а) $\frac{5a-2}{2a+1}+\frac{a+2}{2a+1}$; б) $\frac{3m}{m-2}-\frac{6}{m-2}$;

в) $\frac{1-b}{a-b}+\frac{1-a}{b-a}$; г) $\frac{m+k}{m-2n}-\frac{m-k}{2n-m}$;

д) $\frac{c^2+4}{c^2-4}+\frac{4c}{c^2-4}$; е) $\frac{4a^2-3b^4}{2a-b^2}-\frac{2b^4}{b^2-2a}$.

924. а) $\frac{1+a}{a^2b}+\frac{1-b^2}{ab^3}$; б) $\frac{5y-1}{15x^3y^4}-\frac{3x-1}{9x^4y^3}$;

в) $\frac{x-y}{y}+\frac{y}{x+y}$; г) $b-\frac{(b-2)^2}{b+2}+2$;

д) $\frac{5}{3z+9}+\frac{10}{z^2-9}$; е) $\frac{2a}{a-2b}-\frac{2a^2-5ab}{a^2-4ab+4b^2}$;

є) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}+\frac{x-6}{x^2-4}$; ж) $\frac{2}{y-2}+\frac{2}{y+2}+\frac{4y-34}{4-y^2}$.

925. Виконайте множення:

а) $\frac{24(a+1)^3}{5b^3}\cdot\frac{25b^2a}{18(a+1)^2}$; б) $\frac{27x}{xy+y^2}\cdot\frac{x^2-y^2}{36xy}$;

в) $\frac{a^2-49}{3a+9}\cdot\frac{a^2+3a}{a^2+14a+49}$; г) $\frac{b^3-27}{3b^2-27}\cdot\frac{b+3}{2b^2+6b+18}$.

926. Подайте у вигляді дробу вираз:

а) $\left(\frac{2a^3b^4}{5c^2}\right)^4$; б) $\left(-\frac{4xy^3z^2}{3t}\right)^3$;

в) $\left(\frac{12abc^3}{n^2}\cdot\frac{an^4}{6bc^5}\right)^2$; г) $\left(-\frac{m^3n^2}{7k^4}\right)^4\cdot\left(\frac{3,5k^3}{mn^2}\right)^4$.

927. Виконайте ділення:

а) $\dfrac{x^3}{12yz^2}:\dfrac{yx^4}{16z^3}$; б) $\dfrac{1,8a^3b^5}{c^2}:(6a^4b^2c)$;

в) $\dfrac{m^2+2mn}{4m-n}:\dfrac{3m+6n}{16m^2-n^2}$; г) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{ab+b^2}:\dfrac{a^2-b^2}{3b^2}$.

928. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{xb}{2y^2}\cdot\dfrac{6y}{x}+\dfrac{b}{y}$; б) $\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a+b}{a-b}:\dfrac{a^2+ab}{ab-b^2}$;

в) $\left(\dfrac{c}{c+2}+1\right):\left(1-\dfrac{3c^2}{4-c^2}\right)$; г) $\left(\dfrac{x-2y}{x^2-xy}-\dfrac{x-3y}{x^2-y^2}\right)\cdot\dfrac{3x+3y}{2y}$;

д) $\dfrac{3}{a+b}-\dfrac{3a-3b}{2a-3b}\cdot\left(\dfrac{2a-3b}{a^2-b^2}-2a+3b\right)$;

е) $\left(m+\dfrac{m-n}{m+n}-n\right):\left(\dfrac{2m+1}{m^2-n^2}+1\right)-m+n$.

929. Спростіть вираз і знайдіть його значення для даного значення змінної:

а) $\dfrac{a+1}{a^2+2a+1}-\dfrac{1}{a-1}$; $a=15$; б) $\dfrac{(b-2)^2}{b^2-4}-1$; $b=-1,9$.

930. Доведіть, що вираз $\dfrac{a^2+ax+ab+bx}{a^2-ax-ab+bx}\cdot\dfrac{a^2-ax-bx+ab}{a^2+ax-bx-ab}$ набуває лише невід'ємних значень.

931. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{x-y}{xy}-\frac{3x+y}{xy-y^2}+\frac{3y+x}{xy-x^2}\right):\frac{2x+2y}{xy}-\frac{2x}{y-x}$$

не залежать від допустимих значень змінних.

932. Доведіть тотожність:

а) $\left(x-\dfrac{xy}{x+y}\right):\left(y-\dfrac{y^2}{x+y}\right)=\dfrac{x}{y}$;

б) $\left(\dfrac{1}{a-2b}+\dfrac{1}{a+2b}\right):\left(\dfrac{4(a^2+b^2)}{a^2-4b^2}+1\right)=\dfrac{2}{5a}$;

в) $\dfrac{1}{a-2b}+\dfrac{6b}{4b^2-a^2}-\dfrac{2}{a+2b}=-\dfrac{1}{2a}\cdot\left(\dfrac{a^2+4b^2}{a^2-4b^2}+1\right)$.

933. Обчисліть:

а) $2^{-2}+32\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}+(0,5)^{-2}$; б) $3^7\cdot\left(3^{-3}\right)^2-5^{-7}:5^{-9}$;

в) $4^{-5}:\left(4^{-6}:4^{-2}\right)$; г) $\frac{2^{-3}\cdot 2^{-8}}{2^{-10}}$;

д) $\frac{5^{-3}\cdot 25^4}{125^2}$; е) $\frac{6^{-5}}{2^{-6}\cdot 3^{-5}}$.

934. Спростіть вираз:

а) $\left(2a^{-3}b^4\right)\cdot\left(1,5a^2b^{-2}\right)$; б) $(3x^{-1}y^3)^{-2}:\left(x^3y^{-9}\right)$;

в) $\frac{a^3b^{-5}}{4c^{-3}}\cdot\frac{12a^{-1}c^{-2}}{b^{-3}}$; г) $\left(\frac{x^4}{5y^{-3}}\right)^{-2}\cdot x^{12}\cdot y^{-9}$;

д) $\left(a^{-2}-a^{-1}+1\right):\left(a^{-2}+a\right)$; е) $\left(\frac{x^{-2}}{x^{-2}+1}+1\right):\left(1-\frac{3x^{-4}}{1-x^{-4}}\right)$.

935. Яких значень може набувати вираз $a^{12}\cdot a^3+a^{30}:a^{15}-2a^{18}\cdot a^{-3}+a^0$?

936. Доведіть, що для всіх цілих значень m і n вираз $\frac{2^m\cdot 3^{n-1}-2^{m-1}\cdot 3^n}{2^m\cdot 3^n}$ набуває того самого значення.

937*. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\frac{a^{-1}+(b+c)^{-1}}{a^{-1}-(b+c)^{-1}}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)(a+b+c)^{-2}$ не залежать від значень a.

938. Запишіть у стандартному вигляді число:

а) 2800; б) 645 000 000; в) 0,025; г) 0,000005.

939. Обчисліть і запишіть результат числом у стандартному вигляді:

а) $\left(4,5\cdot 10^{12}\right)\cdot\left(6,4\cdot 10^{-15}\right)$; б) $\left(5,4\cdot 10^{-3}\right):\left(3\cdot 10^7\right)$;

в) $1,2\cdot 10^{12}+9,5\cdot 10^{12}$; г) $2,7\cdot 10^{-8}-2,5\cdot 10^{-9}$.

940. Подайте у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу число:

а) $\frac{7}{16}$; б) $-\frac{7}{36}$; в) $\frac{5}{27}$; г) $\frac{13}{40}$.

941. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

а) $\sqrt{x^2+1}$; б) $\sqrt{|x|}$; в) $\frac{1}{\sqrt{x}+3}$; г) $\frac{5}{\sqrt{x}-4}$.

942. Обчисліть:

а) $3\sqrt{625}-12\sqrt{\frac{25}{36}}$; **б)** $10\sqrt{0,81}-3\sqrt{2\frac{7}{9}}$;

в) $\sqrt{625\cdot 0,49}+\sqrt{90\cdot 0,016}$; **г)** $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}+\frac{\sqrt{112}}{\sqrt{7}}$;

д) $\sqrt{1,12^2}-\sqrt{(-1,12)^2}$; **е)** $\left(\sqrt{28}\right)^2-3\sqrt{\sqrt{(-8)^2}-4}$.

943. Доведіть, що $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Спростіть вираз:

944. **а)** $2\sqrt{18}+3\sqrt{8}-3\sqrt{32}$; **б)** $4\left(\sqrt{12}+\frac{1}{2}\sqrt{18}-\sqrt{3}\right):\sqrt{3}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{3}+4\sqrt{12}\right)\cdot 2\sqrt{3}$; **г)** $\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$;

д) $\left(2+\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)$; **е)** $\left(2\sqrt{2}-\sqrt{18}\right)^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)^2$;

є) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)^2}+\sqrt{2}$; **ж)** $\sqrt{\left(2\sqrt{2}-1\right)^2}+\sqrt{\left(2\sqrt{2}-10\right)^2}$.

945. **а)** $\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}\sqrt{36x^3}-\frac{2x}{3}\sqrt{9x}$; **б)** $\left(\sqrt{a}-3\right)\left(\sqrt{a}+3\right)-a+2$;

в) $\left(\sqrt{a}+4\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)-3\sqrt{ab}$; **г)** $\left(5\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)^2-4\sqrt{y^2}+20\sqrt{xy}$.

946. Внесіть множник під знак кореня:

а) $2\sqrt{5}$; **б)** $0,7\sqrt{10}$; **в)** $a\sqrt{7}$, де $a>0$; **г)** $n\sqrt{m}$, де $n<0$.

947. Скоротіть дріб:

а) $\frac{15-\sqrt{15}}{\sqrt{15}}$; **б)** $\frac{\sqrt{20}-4}{\sqrt{5}-2}$; **в)** $\frac{c-3}{\sqrt{c}+\sqrt{3}}$; **г)** $\frac{x-\sqrt{3}}{x^2-3}$.

948. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу:

а) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{2}+3}$; **в)** $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; **г)** $\frac{1}{\sqrt{2a}-\sqrt{a}}$.

949. Спростіть вираз:

а) $\frac{1}{\sqrt{8}-3}-\frac{1}{\sqrt{8}+3}$; **б)** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; **г)** $\dfrac{2x-2y}{x+y+2\sqrt{xy}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$.

950*. Знайдіть значення виразу:

а) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$; **б)** $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{3}$;

в) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$; **г)** $\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{2}}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{2}}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$.

951*. Спростіть вираз

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+1}{a-\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}\cdot\left(\frac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}}\right).$$

952*. Доведіть тотожність:

$$\frac{(a-b)^3\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-3}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}-\frac{3\left(\sqrt{ab}-b\right)}{a-b}=3\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Розв'яжіть рівняння:

953. **а)** $x^2 = 8$; **б)** $x^2 = -8$; **в)** $4x^2 = 1$; **г)** $12 - 3x^2 = 0$;

д) $x^2 - 5x = 0$; **е)** $2x^2 = -3x$; **є)** $x^3 + 2x^2 = 0$; **ж)** $9x^3 - x = 0$.

954. **а)** $x^2 - 2x - 15 = 0$; **б)** $2x^2 - 5x - 7 = 0$;

в) $15x^2 + 75x - 90 = 0$; **г)** $3x^2 - 4x - 8 = 0$.

955. **а)** $(x-2)^2=(7-2x)^2$; **б)** $(2x-1)^2+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$;

в) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$; **г)** $(x-1)x+x\left(x^2-5\right)=0$.

956. **а)** $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$; **б)** $4x^4 - 65x^2 + 16 = 0$;

в) $(x + 4)^4 - 15(x + 4)^2 - 16 = 0$; **г)** $3(2x - 5)^4 - 30(2x - 5)^2 + 27 = 0$.

957*. **а)** $\left(x^2-3x\right)^2+3\left(x^2-3x\right)-28=0$; **б)** $\left(x^2-2x-4\right)\left(x^2-2x-3\right)=2$;

в) $\left(x^2+2x+1\right)^2+\left(x^2+2x+2\right)^2-\left(x^2+2x+3\right)^2=60$.

958. Знайдіть найбільший корінь рівняння $x^4-10x^2+9=0$.

959. Знайдіть найменший корінь рівняння $(3x^2-4x-4)(4x^2-4x-3)=0$.

960. Знайдіть суму та добуток коренів рівняння:

а) $x^2 - 4x - 7 = 0$; **б)** $3x^2 + 6x + 1 = 0$.

961. Один з коренів рівняння $12x^2 + x + c = 0$ дорівнює 0,25. Знайдіть число c та інший корінь рівняння.

962. Частка коренів рівняння $3x^2 + bx + 2 = 0$ дорівнює 6. Знайдіть ці корені та число b.

963. Знайдіть значення виразу $2(x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2$, якщо x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2 - 11x + 2 = 0$.

964*. Знайдіть значення виразу $5x_1^3 + 5x_2^3$, якщо x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2 + 7x + 3 = 0$.

965*. Чому дорівнює сума квадратів коренів рівняння $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$?

966*. Для яких значень a рівняння має один корінь?

а) $ax^2 - (2a - 1)x - 2 = 0$; **б)** $a^2x^2 + (a - 1)x + 1 = 0$.

967*. Для яких значень a рівняння $(a - 3)x^2 - (a^2 - 9)x + 7 = 0$ має корені, що є протилежними числами?

968*. Доведіть, що рівняння $x^2 - 3mx - m^2 - 1 = 0$ для будь-якого значення m не має двох додатних коренів.

Розв'яжіть рівняння:

969. **а)** $\dfrac{2x-1}{4x^2-2x+1} = 0$; **б)** $\dfrac{x^2+12x+35}{x+7} = 0$.

970. **а)** $x - \dfrac{3x}{x+3} = \dfrac{9}{x+3}$; **б)** $\dfrac{x+5}{x+2} - 1 = \dfrac{2}{3-x}$;

в) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x+3} = 1$; **г)** $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x} = 2{,}5$;

д) $\dfrac{3}{1+5x} - \dfrac{12}{1-5x} - \dfrac{6}{1-25x^2} = 3$; **е)** $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{35}{2x-x^2} - \dfrac{7}{x^2-4} = 0$;

є) $\dfrac{2x+6}{1+3x} - \dfrac{4x+8}{3x-1} - \dfrac{3x^2+30x-1}{1-9x^2} = 0$.

971*. Для яких значень a рівняння $\dfrac{(a+1)x^2-x-a}{x^2+1} = 0$ має один корінь?

972*. Розв'яжіть рівняння з параметром a:

а) $\dfrac{x-2a+1}{x-3} = 0$; **б)** $\dfrac{x-2a}{x^2-ax-8} = 0$.

Розв'яжіть рівняння:

973. **а)** $\left|x^2 - 2x\right| = 3$; **б)** $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| = 1$.

974. **а)** $\sqrt{x} = 0{,}3$; **б)** $\sqrt{x} = -8$; **в)** $2(\sqrt{x} - 1) = 4 - \sqrt{x}$.

975*. **а)** $\sqrt{x-5}=1$; **б)** $\sqrt{x^2-2x+1}=2$;

в) $x-3\sqrt{x}-10=0$; **г)** $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}-6=0$.

976. Побудуйте графіки функцій і знайдіть значення аргументу, для яких функції набувають того самого значення:

а) $y=x^2$ та $y=6x-5$; **б)** $y=-\dfrac{2}{x}$ та $y=-8x$.

977. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

а) $y=-2x+35$ та $y=x^2$; **б)** $y=2x$ та $y=\sqrt{x}$.

978. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $x^2=1{,}5x+1$; **б)** $\dfrac{4}{x}=x-3$; **в)** $\sqrt{x}=-0{,}5x+4$.

979. Графік оберненої пропорційності проходить через точку $A(-3; 2)$. Чи проходить цей графік через точку $B(-4; 1{,}5)$?

980*. Побудуйте графік функції:

а) $y=-\dfrac{2x}{|x|}$; **б)** $y=\dfrac{12}{|x|}$; **в)** $y=-\dfrac{6}{\sqrt{x^2}}$;

г) $y=\sqrt{x^2}+2$; **д)** $y=\dfrac{4x-8}{x^2-2x}$; **е)** $y=\dfrac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x-1}$.

981*. Побудуйте графік функції $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x<0;\\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x\ge 0\end{cases}$ та знайдіть значення x, для яких значення функції дорівнює 1.

982. Добуток двох послідовних цілих чисел більший від їх суми на 11. Знайдіть ці числа.

983. Знайдіть п'ять послідовних цілих чисел, якщо відомо, що сума квадратів трьох перших чисел дорівнює сумі квадратів двох останніх.

984. Гіпотенуза прямокутного трикутника на 4 см довша від одного катета і на 2 см — від іншого. Знайдіть периметр трикутника.

985. Ширина прямокутника на 2 см менша від довжини і на 4 см менша від його діагоналі. Знайдіть площу прямокутника.

986. Знаменник звичайного дробу на 4 більший від чисельника. Якщо до чисельника дробу додати 1, а від знаменника відняти 1, то одержимо дріб, який на $\dfrac{3}{10}$ більший від даного. Знайдіть даний дріб.

987. Токар повинен виготовити за певний час 70 деталей. Щодня він виготовляв на 2 деталі більше, ніж планував, і виконав завдання на 4 дні раніше строку. Скільки деталей за день виготовляв токар?

988. Дві бригади, працюючи разом, можуть виконати завдання за 12 год. Перша бригада, працюючи сама, може виконати це завдання на 10 год швидше, ніж друга. Скільки годин потрібно першій бригаді, щоб виконати завдання?

989. Два насоси, працюючи разом, можуть наповнити водою $\frac{7}{8}$ басейну за 3 год. За який час може наповнити басейн кожний насос, працюючи окремо, якщо один з них зможе це зробити на 2 год швидше, ніж інший?

990. Щоб виконати замовлення, два майстри пропрацювали разом 2 год, після чого перший з них пропрацював ще 1 год. За який час може виконати замовлення кожний майстер, працюючи окремо, якщо другий може це зробити на 2 год швидше, ніж перший?

991. В озеро впадають дві річки. Катер відплив від пристані *A*, яка розміщена на першій річці, проплив 12 км до озера, потім 7 км озером і 10 км другою річкою до пристані *B*. На весь шлях катер затратив 1 год 20 хв. Знайдіть швидкість течії кожної річки, якщо швидкість течії першої на 2 км/год більша від швидкості течії другої, а швидкість катера у стоячій воді дорівнює 21 км/год.

992. З пункту *A* до пункту *B*, відстань між якими дорівнює 30 км, виїхав мотоцикліст, а через 6 хв услід за ним виїхав автобус, швидкість якого на 15 км/год більша від швидкості мотоцикліста. Знайдіть швидкість автобуса, якщо в пункт *B* він прибув на 4 хв раніше, ніж мотоцикліст.

993*. На змаганнях з волейболу було зіграно 28 ігор. Скільки команд брало участь у змаганнях, якщо кожна команда зіграла по одному разу з усіма іншими?

994*. Дві точки рівномірно обертаються по двох колах. Перша точка здійснює повний оберт на 5 с швидше, ніж друга, і тому встигає виконати за хвилину на 2 оберти більше, ніж друга. Скільки обертів за хвилину здійснює друга точка?

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Пам'ятайте: хочете навчитися плавати, — сміливіше входьте в воду. Хочете навчитися математики, — беріться за задачі. Кожен розв'язок є своєрідним мистецтвом пошуку.

М. Кравчук

До § 1. Раціональні вирази

995. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{(x^2+x)^2-(x^2+x)-2}{x^2+x+1}$; **б)** $\dfrac{x^4+x^2a^2+a^4}{x^3+a^3}$.

996. Доведіть, що дріб є нескоротним для будь-якого натурального значення n:

а) $\dfrac{n+2}{n+1}$; **б)** $\dfrac{2n+5}{n+2}$; **в)** $\dfrac{2n+3}{5n+7}$.

Розв'язання. **б)** Припустимо, що існує натуральне значення n, для якого дріб $\dfrac{2n+5}{n+2}$ є скоротним. Нехай дріб можна скоротити на натуральне число d, де $d \geq 2$. Виділимо в чисельнику дробу вираз, який стоїть у знаменнику:

$$\frac{2n+5}{n+2}=\frac{2n+4+1}{n+2}=\frac{2(n+2)+1}{n+2}.$$

Оскільки знаменник $n + 2$ і чисельник $2(n + 2) + 1$ діляться на d, то 1 має ділитися на d. Одержали суперечність, бо 1 не ділиться (націло) на натуральне число d, де $d \geq 2$. Отже, не існує натурального значення n, для якого дріб $\dfrac{2n+5}{n+2}$ був би скоротним.

997. Спростіть вираз

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}.$$

998. Доведіть тотожність:

$$(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)(x^{16}-x^8+1)=\frac{x^{32}+x^{16}+1}{x^2+x+1}.$$

999. Знайдіть значення виразу $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$, якщо $n = 100$.

1000. Для яких натуральних значень n значення дробу $\frac{n^3-n+2}{n-1}$ є цілим числом?

1001. Доведіть: якщо $xyz = 1$, то $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1$.

1002. Про числа x, y, z відомо, що $\frac{x}{y+z-x}=\frac{y}{x+z-y}=\frac{z}{x+y-z}$. Яких значень може набувати дріб $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$?

1003. Для деякого не цілого значення a число $a+\frac{1}{a}$ є цілим. Доведіть, що для того ж значення a цілим є число $a^3+\frac{1}{a^3}$.

1004. Значення якого виразу є більшим і на скільки більшим:

$$\left(4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3n-4}\right)\cdot\left(16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1-3n}\right) \text{ чи } \left(9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5m-5}\right)\cdot\left(27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{4-5m}\right),$$

де n і m — цілі числа?

1005. Побудуйте графік функції:

а) $y = x-\frac{|x|}{x}$; **б)** $y=\frac{x^3-1}{|x^2+x+1|}$.

1006. Розв’яжіть рівняння $\frac{x}{x-a}+\frac{1}{x-2}=1$ з параметром a.

До § 2. Квадратні корені. Дійсні числа

1007. Доведіть, що число 0,123456789101112... (після коми записано поспіль усі натуральні числа) є ірраціональним.

1008. Відомо, що a, b, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ — раціональні числа. Доведіть, що числа $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ теж є раціональними.

1009. Доведіть, що значення виразу $\sqrt{6666^{15}+2}$ не є натуральним числом.

1010. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}$; **б)** $\sqrt{a+2\sqrt{a+1}+2}$.

1011. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}+1}$.

1012. Доведіть, що значення виразу є натуральним числом:

а) $\dfrac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\dfrac{2}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$;

б) $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}}$.

1013. Доведіть тотожність:

$$\sqrt{x^2+2+2\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+2-2\sqrt{x^2+1}}=2.$$

1014. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+1=0$; **б)** $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}=3$;

в) $\sqrt{x+1+2\sqrt{x}}=3$; **г)** $\sqrt{x+4-4\sqrt{x+2}}=\sqrt{2}$.

1015. Знайдіть усі числа x та y, для яких виконується рівність

$$x^2-8x+y-4\sqrt{y}+20=0.$$

1016. а) Доведіть: якщо $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=a$, то $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{a}$.

б) Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=2$.

1017. Побудуйте графік функції $y=\sqrt{x^2}-x+1$.

1018. Доведіть, що графіки функцій $y=\sqrt{x+9}$ та $y=2-\sqrt{x}$ не перетинаються.

1019. Скільки коренів має рівняння $\dfrac{\sqrt{x}-a}{x-2a+1}=0$ залежно від значень a?

1020. Для яких значень a рівняння $x=a-\sqrt{x^2}$ не має коренів?

1021. Доведіть, що для $a \geq 1$ система рівнянь $\begin{cases} \sqrt{y} = \sqrt{x-1}; \\ |x| + |y| = a \end{cases}$ має розв'язок.

До § 3. Квадратні рівняння

1022. Дискримінант квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ дорівнює нулю і $a > 0$. Доведіть, що ліва частина рівняння є повним квадратом.

1023. Доведіть, що для будь-яких дійсних значень a, b і c рівняння $x^2 - (a + b)x + ab - c^2 = 0$ має корені.

1024. Доведіть, що для раціональних значень a, b і c, де $a + b + c \neq 0$, рівняння $(a + b + c)x^2 + 2(a + b)x + a + b - c = 0$ має корені й ці корені є раціональними числами.

1025. Для яких значень a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + ax + a - 1 = 0$ є найменшою?

1026. Для яких значень c рівняння $x^2 - 8x + 5c = 0$ і $2x^2 + 6x - c = 0$ мають спільний корінь?

1027. Рівняння $x^2 + px + q = 0$ має корені x_1 та x_2. Запишіть квадратне рівняння, коренями якого є числа $x_1^2 + x_2^2$ та $x_1^3 + x_2^3$.

1028. Корені a і b квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ є додатними числами. Виразіть $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ через p і q.

1029. Розв'яжіть рівняння:

а) $\left(2x^2 + 3x + 4\right)^2 = \left(x^2 + x + 7\right)^2$; **б)** $(2x - 1)^2 + \left(2x^2 + 5x - 3\right)^2 = 0$;

в) $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x+5}{x-5} = \dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{x+4}{x-4}$; **г)** $\dfrac{x^2+1}{3x^2+2} = \dfrac{4x^2-5}{x^2+6}$;

д) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 2$; **е)** $\dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{x^2+1}{2x} = 2$.

1030. Знайдіть суму квадратів коренів рівняння $(x^2 + 2x)^2 - 5(x^2 + 2x) + 3 = 0$.

1031. Знайдіть найбільший корінь рівняння

$$(x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 3)(x^4 + 4x^2 - 5) = 0.$$

1032. Скільки коренів має рівняння $x + 1 = x|x|$?

1033. Розв'яжіть рівняння з параметром a:

а) $x^4 + 3ax^2 - 4a^2 = 0$; **б)** $\frac{1}{ax+2a} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{2(a+3)}{x^3-4x}$.

1034. Для яких значень a графіки функцій $y = x^3 + ax + 1$ й $y = x^4 + ax^2 + 1$ мають три спільні точки?

1035. Знайдіть усі цілі числа a, для яких вираз $(x - a)(x - 10) + 1$ розкладається в добуток $(x - b)(x - c)$ із цілими числами b і c.

1036. Корені рівняння $x^2 + mx + n + 1 = 0$ є натуральними числами. Доведіть, що число $m^2 + n^2$ є складеним.

1037. Знайдіть чотири послідовні натуральні числа, добуток яких дорівнює 1680.

1038. Ідучи вздовж трамвайної колії одного маршруту, учень помітив, що через кожних 12 хв його наздоганяє трамвай, а через кожні 4 хв він зустрічає трамвай. Трамваї рухаються з однаковою швидкістю. Через скільки хвилин один після іншого вони залишають кінцеві зупинки?

1039. З міста A до міста B, відстань між якими дорівнює 100 км, на мотоциклі виїхав кур'єр. Через 24 хв услід за ним на автомобілі виїхав другий кур'єр, який наздогнав першого, передав йому додаткові документи й одразу ж вирушив назад. Другий кур'єр повернувся до міста A в той момент, коли перший прибув до міста B. З якою швидкістю їхав перший кур'єр, якщо другий їхав зі швидкістю 75 км/год?

1040. Пасажир метро сходить униз нерухомим ескалатором за 42 с. Якщо пасажир ітиме з тією самою швидкістю ескалатором, що рухається, то він зійде за 24 с. За який час опиниться унизу пасажир, стоячи на ескалаторі, який рухається?

1041. Колона автобусів завдовжки 93 м рухається зі швидкістю 60 км/год. З початку колони в її кінець вирушив легковий автомобіль, який супроводжує колону. Згодом він повернувся на початок колони. Швидкість автомобіля, коли він рухався в кінець колони, а потім на її початок, була однаковою. Знайдіть цю швидкість, якщо час руху автомобіля вздовж колони (в обох напрямках разом) дорівнює 1,44 хв.

1042. З пункту A до пункту B вийшла група туристів і рухалася зі швидкістю 4 км/год. Через деякий час з пункту A вийшла друга група туристів, а ще через такий самий проміжок часу — третя. Третя група наздогнала другу на півшляху від A до B, і далі вони пішли разом зі швидкістю, що дорівнює середньому арифметичному їхніх попередніх швидкостей. Усі три групи одночасно прибули в пункт B. Знайдіть початкову швидкість другої групи туристів, якщо початкова швидкість третьої групи дорівнює 6 км/год.

1043. З бака, наповненого спиртом, відлили частину спирту і долили доверху водою. Потім з бака відлили стільки ж літрів розчину, після чого в ньому залишилося 49 л спирту. Скільки літрів спирту відлили першого разу, якщо місткість бака дорівнює 64 л? (Уважайте: якщо змішати 1 л спирту й 1 л води, то утвориться 2 л розчину.)

1044. У двох посудинах, місткість яких дорівнює по 30 л, було разом 30 л сиропу. Першу посудину долили доверху водою й одержаним розчином доповнили другу посудину, потім із другої посудини відлили в першу 12 л розчину. Скільки сиропу було в першій посудині спочатку, якщо у другій посудині після усіх переливань сиропу стало на 2 л менше, ніж у першій?

ВІДОМОСТІ З КУРСУ АЛГЕБРИ 7 ТА 8 КЛАСІВ

Множини

1. *Множина* — набір, сукупність будь-яких об'єктів, об'єднаних за певною ознакою. Об'єкти, які утворюють множину, називають *елементами* множини.

Записи $a \in M$, $b \notin M$ означають, що елемент a належить множині M, а елемент b — не належить.

2. Множину A називають *підмножиною* множини B, якщо будь-який елемент множини A є елементом множини B. Записують: $A \subset B$.

Числа

3. *Натуральні* числа: 1, 2, 3, 4, ... Множину натуральних чисел позначають буквою $\boldsymbol{N}$.

4. Натуральні числа, протилежні їм числа та число 0 (нуль) утворюють множину *цілих* чисел: ..., –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, … . Множину цілих чисел позначають буквою $\boldsymbol{Z}$.

5. Цілі й дробові числа утворюють множину *раціональних* чисел. Позначають цю множину буквою $\boldsymbol{Q}$.

Будь-яке раціональне число можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, n — натуральне. Раціональні числа можна подати також у вигляді нескінченних періодичних десяткових дробів.

Наприклад:

$$5=\frac{5}{1}=5{,}00...=5{,}(0); \quad \frac{1}{4}=0{,}2500...=0{,}25(0); \quad -\frac{2}{3}=-0{,}66...=-0{,}(6).$$

6. Раціональні та ірраціональні числа утворюють множину *дійсних* чисел. Позначають цю множину буквою $\boldsymbol{R}$.

Ірраціональні числа можна подати у вигляді нескінченних неперіодичних десяткових дробів.

Наприклад: $\sqrt{2}=1{,}41421...$; $\pi=3{,}14159...$; 2,010010001... .

Степені

7. Степенем числа a з натуральним показником n, більшим від 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a.
Степенем числа a з показником 1 називають саме число a.

$$a^n = \underbrace{aa...a}_{n}, \text{ якщо } n \in \boldsymbol{N},\ n > 1; \quad a^1 = a.$$

8. Степінь числа a, де $a \neq 0$, з нульовим показником дорівнює 1.

$$a^0 = 1\ (a \neq 0).$$

9. Якщо $a \neq 0$ і n — натуральне число, то

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Наприклад: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $5^{-1} = \frac{1}{5}$. Запис 0^{-2} не має змісту.

10. *Властивості степеня з цілим показником*:
для будь-якого числа a, де $a \neq 0$, і будь-яких цілих чисел m і n виконуються рівності:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

для будь-яких чисел a, b, де $a \neq 0$, $b \neq 0$, і будь-якого цілого числа n виконуються рівності:

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Квадратні корені

11. *Квадратним коренем* з числа a називають таке число, квадрат якого дорівнює a.

12. *Арифметичним квадратним коренем* з числа a (позначають $\sqrt{a}$) називають таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a.
Наприклад, $\sqrt{0,36} = 0,6$, бо число 0,6 невід'ємне і $0,6^2 = 0,36$.

Рівність $\sqrt{a} = b$ є правильною, якщо виконуються дві умови:

1) $b \geq 0$; 2) $b^2 = a$.

13. Властивості арифметичного квадратного кореня:

1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $(a \geq 0,\ b \geq 0)$; **2)** $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(a \geq 0,\ b > 0)$;

3) $\sqrt{a^{2n}} = a^n$ $(a \geq 0,\ n \in \mathbf{N})$; **4)** $\sqrt{a^2} = |a|$.

Вирази. Тотожні перетворення виразів

14. Вирази, складені з чисел, знаків дій і дужок, називають *числовими виразами*.

Вирази, складені з чисел, змінних, знаків дій і дужок, називають *виразами зі змінними*.

Наприклад: 1,5; $7 + 3^2$; $(32 - 2{,}7) \cdot 0{,}32$ — числові вирази; a; ab^2; $-18c^3$; $3a + 10$ — вирази зі змінними.

15.

$4b + a^3$ *Цілий вираз*	$\dfrac{4}{b} + a^3$ *Дробовий вираз*
Раціональні вирази	

Цілий раціональний вираз не містить дії ділення на вираз зі змінною.

16.

$7ab^2$ — *одночлен*	$7ab^2 + c + 1$ — *многочлен*
Цілі вирази	

17. Два вирази називають *тотожно рівними*, якщо для будь-яких допустимих для них значень змінних їхні відповідні значення дорівнюють одне одному.

Рівність, яка є правильною для всіх допустимих значень змінних, що входять до неї, називають *тотожністю*.

Заміну одного виразу тотожно рівним йому виразом називають *тотожним перетворенням виразу*.

18. Перемножимо одночлени $-3a^2b$ і $4ab^3$:

$$-3a^2b \cdot 4ab^3 = (-3 \cdot 4) \cdot (a^2a) \cdot (bb^3) = -12a^3b^4.$$

Піднесемо одночлен $-5a^2b$ до куба:

$$(-5a^2b)^3 = (-5)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot b^3 = -125a^6b^3.$$

19. Додамо многочлени $4a^2 - 6a + 5$ і $-2a^2 + 3a + 2$:

$$(4a^2 - 6a + 5) + (-2a^2 + 3a + 2) = 4a^2 - 6a + 5 - 2a^2 + 3a + 2 = 2a^2 - 3a + 7.$$

Віднімемо від многочлена $4x^2 - 4x + 7$ многочлен $2x^2 - 3x + 5$:

$$(4x^2 - 4x + 7) - (2x^2 - 3x + 5) = 4x^2 - 4x + 7 - 2x^2 + 3x - 5 = 2x^2 - x + 2.$$

20. Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно одночлен помножити на кожний член многочлена й одержані добутки додати.

Наприклад: $2a(a^2 - 3a + 4) = 2a \cdot a^2 + 2a \cdot (-3a) + 2a \cdot 4 = 2a^3 - 6a^2 + 8a$.

21. Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожний член одного многочлена помножити на кожний член іншого многочлена й одержані добутки додати.

Наприклад: $(2a^2 + b^2)(2a - b) = 2a^2 \cdot 2a + 2a^2 \cdot (-b) + b^2 \cdot 2a + b^2 \cdot (-b) =$

$$= 4a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3.$$

22. Формули скороченого множення:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2;$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

23. *Способи розкладання многочленів на множники*:

а) винесення спільного множника за дужки:

$$2a^2b - 8ab^2 = 2ab \cdot a - 2ab \cdot 4b = 2ab(a - 4b);$$

б) групування:

$$b^2n + y^2 - bny - by = (b^2n - bny) + (y^2 - by) =$$
$$= bn(b - y) - y(b - y) = (b - y)(bn - y);$$

в) за формулами:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$; $\quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$; $\quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

24. *Основна властивість дробу*. Для будь-яких чисел a, b і k, де $b \neq 0$ і $k \neq 0$, виконується рівність $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$.

25. Додавання дробів з однаковими знаменниками:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

Віднімання дробів з однаковими знаменниками:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

Додавання і віднімання дробів з різними знаменниками:

$$\frac{a^{\backslash d}}{b} \pm \frac{c^{\backslash b}}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

26. Множення дробів:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Ділення дробів:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Рівняння та їх системи

27. Рівність з невідомим значенням змінної називають *рівнянням з однією змінною* (або *рівнянням з одним невідомим*).
Значення змінної, для якого рівняння перетворюється у правильну числову рівність, називають *коренем*, або *розв'язком рівняння*.
Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

28. Два рівняння називають *рівносильними*, якщо вони мають ті самі корені. Два рівняння, які не мають коренів, теж вважають рівносильними.

Основні властивості рівнянь

1) Якщо в деякій частині рівняння виконати тотожне перетворення, яке не змінює допустимі значення змінної, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

2) Якщо деякий доданок перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

3) Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на те саме, відмінне від нуля, число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

29. Рівняння виду $ax = b$, у якому a і b — деякі відомі числа, а x — змінна, називають *лінійним рівнянням* з однією змінною.

<table>
<tr><td rowspan="4">$ax = b$ — лінійне рівняння</td><td>*Коефіцієнти*</td><td>*Корені*</td></tr>
<tr><td>$a \neq 0$</td><td>$\frac{b}{a}$ — єдиний корінь</td></tr>
<tr><td>$a = 0$ і $b \neq 0$</td><td>коренів немає</td></tr>
<tr><td>$a = 0$ і $b = 0$</td><td>коренем є будь-яке число (рівняння має безліч коренів)</td></tr>
</table>

30. Рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b, c — деякі відомі числа, до того ж $a \neq 0$, називають *квадратним рівнянням*.

Неповні квадратні рівняння:

а) $ax^2 + bx = 0$, де $b \neq 0$; $x(ax + b) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{b}{a}$;

б) $ax^2 + c = 0$, де $c \neq 0$; $x^2 = -\frac{c}{a}$; якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$; якщо $-\frac{c}{a} < 0$, то коренів немає;

в) $ax^2 = 0$; $x = 0$ (або $x_1 = 0$; $x_2 = 0$).

31. Формула коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac.$$

Формула коренів зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

32. *Теорема Вієта*. Якщо x_1, x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Якщо x_1, x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

33. Якщо x_1, x_2 — корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

34. Рівняння виду $ax + by = c$, де a, b і c — деякі відомі числа (коефіцієнти рівняння), x та y — змінні, називають *лінійним рівнянням із двома змінними*.

Розв'язком лінійного рівняння із двома змінними називають пару значень змінних, для яких рівняння перетворюється у правильну числову рівність.

35. Якщо потрібно знайти спільні розв'язки двох рівнянь, то кажуть, що потрібно розв'язати *систему рівнянь*.

$$\begin{cases} ax + by = c; \\ mx + ny = k \end{cases}$$ — система лінійних рівнянь.

Розв'язком системи лінійних рівнянь із двома змінними називають пару значень змінних, для яких кожне рівняння системи перетворюється у правильну числову рівність.

Якщо $\frac{a}{m} \neq \frac{b}{n}$, то система рівнянь має один розв'язок;

якщо $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} \neq \frac{c}{k}$, то система рівнянь не має розв'язків;

якщо $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{k}$, то система рівнянь має безліч розв'язків.

36. Способи розв'язування систем двох лінійних рівнянь із двома змінними.

а) *Спосіб підстановки.*

Наприклад: $\begin{cases} 2x + y = 3; \\ 3x - 2y = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3 - 2x; \\ 3x - 2(3 - 2x) = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3 - 2x; \\ 7x = 14; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2; \\ y = -1. \end{cases}$

б) *Спосіб додавання.*

Наприклад: $\begin{cases} 3x+4y=12; \\ 2x-3y=-26; \end{cases} \begin{vmatrix} \times 2 \\ \times(-3) \end{vmatrix}$ $\begin{cases} 6x+8y=24; \\ -6x+9y=78; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+4y=12; \\ 17y=102; \end{cases}$

$\begin{cases} 3x+4\cdot 6=12; \\ y=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-4; \\ y=6. \end{cases}$

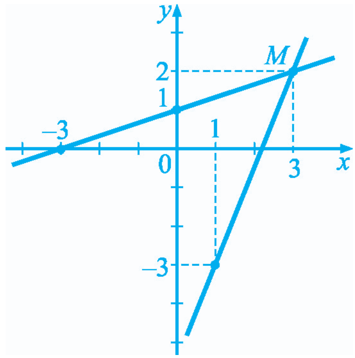
в) *Графічний спосіб.*

Наприклад: $\begin{cases} 5x-2y=11; \\ x-3y=-3. \end{cases}$

Будуємо графіки обох рівнянь системи.

$5x - 2y = 11$		
x	1	3
y	–3	2

$x - 3y = -3$		
x	0	–3
y	1	0



$M(3;\,2)$ — точка перетину графіків.

Розв’язок системи — (3; 2).

Функції

37. Залежність мінної y від змінної x називають функцією, якщо *кожному* значенню змінної x відповідає *одне* певне значення змінної y.

Змінну x називають *незалежною змінною*, або *аргументом*, а змінну y — *залежною змінною*, або *функцією*.

38. *Лінійна функція.* Так називають функцію, яку можна задати формулою $y = kx + b$, де x — незалежна змінна, k і b — деякі відомі числа.

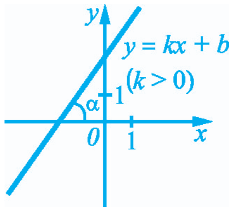
Властивості лінійної функції:

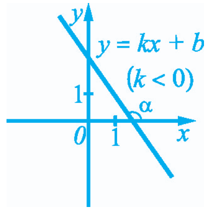
1) Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел.

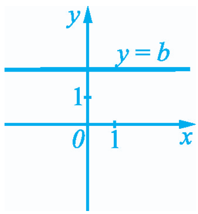
2) Якщо $k \neq 0$, то областю значень функції є множина всіх дійсних чисел; якщо $k = 0$, то функція набуває лише одного значення $y = b$.

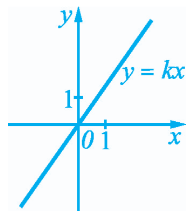
3) Графіком функції є *пряма*. Число k називають *кутовим коефіцієнтом* цієї прямої.

4) Графік функції утворює з додатним напрямом осі x гострий кут, якщо $k > 0$, тупий кут, — якщо $k < 0$. Якщо $k = 0$, то графік паралельний осі x, зокрема, якщо $k = 0$ і $b = 0$, то він збігається з віссю x.









Лінійну функцію, яку можна задати формулою $y = kx$, де $k \neq 0$, називають ще *прямою пропорційністю*.

39. *Функція* $y = \dfrac{k}{x}$, де $k \neq 0$. Таку функцію називають *оберненою пропорційністю*.

Властивості оберненої пропорційності:

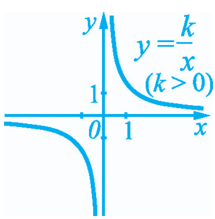
1) Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, окрім числа 0.

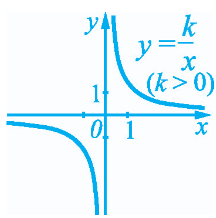
2) Областю значень функції є також множина всіх дійсних чисел, окрім числа 0.

3) Графіком функції є *гіпербола*, яка складається із двох віток.

4) Графік функції розташований у I і III координатних чвертях, якщо $k > 0$; у II і IV координатних чвертях, — якщо $k < 0$.

5) Графік функції симетричний відносно початку координат.



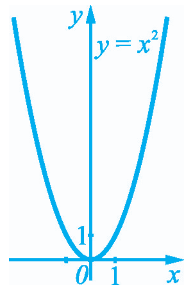


40. *Функція* $y = x^2$. Дана функція має такі *властивості*:

1) Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел.

2) Областю значень функції є множина всіх невід’ємних дійсних чисел.

3) Графіком функції є *парабола*. Вона симетрична відносно осі y і проходить через точку (0; 0), яку називають *вершиною* параболи.

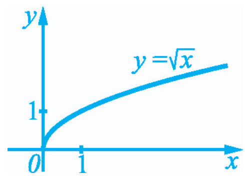


41. *Функція* $y = \sqrt{x}$. Дана функція має такі *властивості*:

1) Областю визначення функції є множина всіх невід’ємних дійсних чисел.

2) Областю значень функції теж є множина всіх невід’ємних дійсних чисел.

3) Графіком функції є *вітка параболи*. Графік розташований у першій чверті координатної площини.



ВІДПОВІДІ

§ 1

15. б) Усі числа, крім –4 і 0; **в)** усі числа, крім –2, 0 і 1. **16. б)** Усі числа, крім –6 і 0; **в)** усі числа, крім –2, 0 і 2. **19. а)** 400; **б)** 0; **в)** 4. **20. а)** 0; **б)** 17. **21.** $\left(\frac{15}{a}+\frac{25}{b}\right)$ упаковок. **22.** $\left(\frac{48}{n}+\frac{64}{m}\right)$ м^2. **23.** $\left(\frac{25}{v+u}+\frac{20}{v-u}\right)$ год. **24. а)** Усі числа, крім –3 і 3; **б)** усі від'ємні числа; **в)** усі числа, крім –2, 0 і 2; **г)** усі числа. **26.** $\frac{250}{a}-\left(2+\frac{250-2a}{a+25}\right)$ годин. **27. в)** $(y+8)(x+9)$; **г)** $(a+2b)(a-2b+1)$. **30.** У другій фірмі. **31.** Можна. **37. а)** $\frac{4}{5y}$; **б)** $\frac{2bc}{3}$; **в)** $-\frac{3}{8m}$; **г)** $-\frac{2m}{3k^2}$. **38. а)** $\frac{3c^2}{2n}$; **б)** $\frac{9y}{7}$; **в)** $-\frac{5}{3ab}$; **г)** $\frac{a}{3b}$. **39. а)** a; **б)** $\frac{1}{3}$; **в)** $\frac{k}{3k+4}$; **г)** $\frac{m-n}{n}$. **40. а)** $\frac{ab}{c}$; **б)** $\frac{x-2y}{x-y}$; **в)** 3; **г)** $\frac{7x}{x-5}$. **44. а)** $\frac{3}{4}$; **б)** 4; **в)** $\frac{1+x}{1-y}$; **г)** $a+b$; **д)** $\frac{a-3}{7}$; **е)** $\frac{10}{7(x+2)}$; **є)** $\frac{4}{y-2}$; **ж)** $\frac{x+3}{x-3}$. **45. а)** $\frac{3}{5}$; **б)** $\frac{c+2}{c-2}$; **в)** $\frac{10}{y}$; **г)** $\frac{a}{b}$; **д)** $m-n$; **е)** $\frac{5}{x-y}$; **є)** $\frac{m+1}{3}$; **ж)** $\frac{a+5}{a-5}$. **52. а)** $\frac{3b}{2a+3b}$; **б)** $\frac{2c-5x}{2c+5x}$; **в)** $-2(x+2y)$; **г)** x^2-2x+4; **д)** $\frac{1}{3-z}$; **е)** $-(y^4+y^2+1)$; **є)** $\frac{a+c}{c}$; **ж)** $\frac{a+b}{a-x}$; **з)** $\frac{4}{b-d}$. **53. а)** $\frac{7}{2b+9c}$; **б)** $\frac{3n}{k-4}$; **в)** $\frac{2}{3n-m}$; **г)** $-\frac{5}{c^2+3c+9}$; **д)** $\frac{x+y}{y-1}$; **е)** $\frac{a+b}{ab}$. **58. а)** $\frac{7x}{x^2+xy}$; **б)** $\frac{2(x+y)}{x^2+2xy+y^2}$; **в)** $\frac{c(a+b)}{a^2-b^2}$; **г)** $\frac{n(m^2+mn+n^2)}{m^3-n^3}$. **59. а)** $\frac{2a(x-y)}{x^2-y^2}$; **б)** $\frac{a^2-ac+c^2}{a^3+c^3}$. **64. а)** $\frac{8x^2}{9}$; **б)** $\frac{409}{351x^n}$; **в)** $\frac{x+2y}{x-2y}$; **г)** $y+1$. **68. а)** $2\frac{1}{3}$; **б)** 1. **69.** 8 грн.; 4 грн. **70.** 7 кг; 21 кг. **71.** 96 восьмикласників. *Вказівка*. Нехай у школі навчаються x семикласників та y восьмикласників. Оскільки кожний восьмикласник дружить із 7 семикласниками, то кількість «дружб» між восьмикласниками і семикласниками дорівнює $7y$. Урахуйте, що з іншого боку кількість таких «дружб» дорівнює $8x$. **76. а)** $\frac{12x}{4x+1}$; **б)** –2; **в)** 2; **г)** 6; **д)** 1; **е)** $\frac{4x}{x-2y}$. **77. а)** 5; **б)** 8; **в)** 8; **г)** $\frac{2c}{c-3}$. **78. а)** $1\frac{1}{3}$; **б)** 0,56. **79. а)** 0,4; **б)** 8,5. **80. а)** $c-1$; **б)** $a^3(a+1)$; **в)** $\frac{b+3}{b-3}$; **г)** $\frac{4a^2}{b}$; **д)** $2x+1$; **е)** $-\frac{3}{x+y}$. **81. а)** $6(y+2)$; **б)** $\frac{1}{x-y}$; **в)** $\frac{1}{a-1}$; **г)** $2(3a+b^2)$; **д)** $2(n+3)$; **е)** $\frac{1}{5a+b}$. **86. а)** x^2-x+1; **б)** $\frac{a^2+x^2+ax}{a+x}$. **89.** 80 км/год. **90.** 5 т. **91.** *Вказівка.* Зафарбуйте кожну клітинку в один із чотирьох кольорів так: у кожній смузі через одну клітинки зафарбуйте почергово у кольори 1, 2, а в інших смугах — почергово у кольори 3, 4. Тоді жодні дві клітинки одного кольору не матимуть спільної вершини. Врахуйте, що не менше, ніж 25 павуків сидять на клітинках одного кольору. **94. а)** $\frac{a+8}{4a}$; **б)** $\frac{7y+10x}{xy}$; **в)** $\frac{a^2+b^2}{ab}$; **г)** $\frac{4z}{z^2-1}$; **д)** $-\frac{a^2}{c(a+c)}$; **е)** $\frac{3}{(y-2)(y+1)}$. **95. а)** $\frac{7m-3}{3m}$; **б)** $\frac{4b+3a}{ab}$; **в)** $\frac{x^2-y^2}{xy}$; **г)** $\frac{3k+4}{k(k+2)}$; **д)** $\frac{a}{(2a+1)(3a+2)}$; **е)** $-\frac{1}{x(x-1)}$. **96. а)** $\frac{4n}{2n-1}$; **б)** $\frac{2y}{x}$; **в)** $\frac{2y}{y-2}$. **97. а)** $\frac{7}{y+1}$; **б)** $\frac{3}{2x+3}$; **в)** $\frac{3c+2}{c-1}$. **98. а)** $\frac{7}{24x}$; **б)** $-\frac{2}{9}$; **в)** $\frac{7a}{6(a+b)}$; **г)** $\frac{b+1}{b}$; **д)** $\frac{5}{c^2}$; **е)** $\frac{m^2+n^2}{m^2n^2}$; **є)** $\frac{2x+3y}{6x^2y}$; **ж)** $\frac{7}{x+y}$; **з)** $\frac{3}{b}$. **99. а)** $\frac{1}{12b}$; **б)** $\frac{8}{15}$; **в)** $\frac{y+3}{3y}$; **г)** $\frac{2}{a^2}$; **д)** $\frac{b+2}{2b^2}$; **е)** $\frac{1}{m(m-1)}$. **100. а)** $\frac{3}{4}$; **б)** $\frac{7-x}{6(x-4)}$; **в)** $\frac{2}{c-2}$; **г)** $\frac{1}{b}$; **д)** $\frac{2k}{k^2-4}$; **е)** $\frac{5m}{(m+n)^2}$. **101. а)** $\frac{3}{2}$; **б)** $\frac{a}{15(a+1)}$; **в)** $\frac{2}{n}$; **г)** $-\frac{3}{a+5}$; **д)** $\frac{4x}{x^2-16}$; **е)** $\frac{y}{(x-y)^2}$. **104. а)** $\frac{a+bc}{a^2b^2c^2}$; **б)** $\frac{3y+4x}{36x^4y^3}$; **в)** $\frac{d-c}{cd(m+n)}$; **г)** $\frac{5x^2+xy}{36(x^2-y^2)}$; **д)** $\frac{ab}{b^2-a^2}$; **е)** $\frac{2b}{(a^2-b^2)(a-b)}$. **105. а)** $\frac{3b-2a}{48a^3b^3}$; **б)** $\frac{7b+5a}{ab(x-y)}$; **в)** $\frac{b^2}{a(a^2-b^2)}$; **г)** $\frac{3x-y}{2(x+y)^2}$. **106. а)** $\frac{3c+1}{2c}$; **б)** $\frac{b}{y}$; **в)** $\frac{2n^2}{3(4n^2-9)}$;

г) $-\dfrac{3}{2(x+5)}$; **д)** $\dfrac{a+2}{a(a-2)}$; **е)** $-\dfrac{4a+b}{2ab}$; **є)** $\dfrac{5m}{2(m+6)^2}$; **ж)** $\dfrac{3x^2}{a(3x-4a)^2}$; **з)** $\dfrac{a^2}{a^3+27}$; **и)** $\dfrac{8}{x^3-8}$. **107. а)** $\dfrac{a-12}{a-10}$; **б)** $\dfrac{1}{ab}$; **в)** $\dfrac{9}{2(3-x)}$; **г)** $\dfrac{5}{4(b+8)}$; **д)** $\dfrac{5a^2}{(a-9)^2}$; **е)** $-\dfrac{3y^2}{2x(2x+3y)^2}$; **є)** $\dfrac{1}{x^3-1}$; **ж)** $\dfrac{a^2+4}{a^3+8}$. **108. а)** $\dfrac{3}{8}$; **б)** $-\dfrac{2}{x}$; **в)** $\dfrac{b^3-a^3}{a^2b^2}$; **г)** $\dfrac{5-m}{m^2}$; **д)** $\dfrac{a+2b}{2a^2}$; **е)** $\dfrac{x^2+3x+5}{(x+1)(x+2)}$; **є)** $\dfrac{2xy}{x+y}$; **ж)** $\dfrac{2}{1-a^2}$. **109. а)** $\dfrac{2}{a}$; **б)** $-\dfrac{2}{ab^2}$; **в)** $\dfrac{k^2n^2-1}{kn^2}$; **г)** $\dfrac{xy+x-y}{x^2y}$; **д)** $\dfrac{4mn}{m+n}$; **е)** $\dfrac{2}{x^2-1}$. **110. а)** $\dfrac{1}{5(a+5)}$; **б)** $\dfrac{6x^2+4}{(x-2)^2(x+2)}$. **111. а)** $\dfrac{a}{4b^2-a^2}$; **б)** $\dfrac{36}{(m+3)^2(m-3)}$. **112. а)** 1; **б)** 0,3. **113. а)** –17; **б)** 0,42. **116. а)** $a=1$; $b=-1$; **б)** $a=\dfrac{5}{7}$; $b=1\dfrac{2}{7}$. **117. а)** 0; **б)** $\dfrac{16}{1-x^{16}}$; **в)** $\dfrac{16x^{15}}{1-x^{16}}$; **г)** $\dfrac{4}{a(a+4)}$; **д)** $\dfrac{b}{b^2-1}$. **120. а)** (3; 2); **б)** (4; –2). **121.** 2000 грн. **122.** 9 комп'ютерів. **123.** *Вказівка.* Розгляньте два випадки: 1) усі учні класу є друзями; 2) існують учні, які не є друзями. У другому випадку розгляньте двох учнів A і B, які не дружать один з одним. Урахуйте: оскільки серед будь-яких трьох учнів є двоє друзів, то решту 27 учнів дружать або з учнем A, або з учнем B.

Завдання для самоперевірки № 1

1. а). **2.** в). **3.** в). **4.** б). **5.** г). **6.** в). **7.** 1) — В); 2) — Д); 3) — Г); 4) — А). **8. а)** $\dfrac{3b}{4a}$; **б)** $\dfrac{5}{3}$. **9.** 3,4. **10. а)** $\dfrac{5bx-3a^2y}{a^3b^2}$; **б)** $\dfrac{7a+4b}{28(x+y)}$. **11. а)** $\dfrac{3x}{x-y}$; **б)** $\dfrac{8}{m+n}$. **12.** Усі значення, крім $k=0$ і $k=4$. **13. а)** $\dfrac{28y^4}{5x}$; **б)** $-\dfrac{a}{b^2(1+3a)}$. **14. а)** $\dfrac{4}{a^2-1}$; **б)** $\dfrac{3m^2n+mn^2}{(m+n)^2(m-n)}$. **15.** $-4\dfrac{2}{7}$. **16. а)** $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$; **б)** $\dfrac{a^2}{b(a-b)^2}$. **17. а)** $a=-5$ і $a=3$; **б)** вираз має зміст для всіх значень x. **18. а)** $4-x^2$; **б)** $x-a-8$. **19. а)** $\dfrac{29x-6}{30x(x+1)^2}$; **б)** $\dfrac{16a^2b}{(2a-b)(2a+b)^2}$. **20.** $\dfrac{1}{2a}$.

128. а) $\frac{25}{6a^3b}$; **б)** $-\frac{5a^2}{3b}$; **в)** $\frac{y^2}{2x^3}$. **129. а)** $\frac{3}{2x}$; **б)** $\frac{4a^2}{b}$; **в)** $-\frac{9m}{4n^3}$. **130. в)** $\frac{3}{b}$; **г)** $\frac{1}{x}$; **д)** $m+3$; **е)** $\frac{a-2}{a+2}$. **131. в)** $\frac{a}{k}$; **г)** $b-1$; **д)** $\frac{b(y+4)}{a}$; **е)** $\frac{c^2(c+1)}{c-1}$. **134. а)** $\frac{10by}{3ax}$; **б)** $-\frac{2n}{3m^3}$; **в)** $\frac{b^2}{2a^2y}$; **г)** $\frac{1}{axy^2}$; **д)** $\frac{4a}{3x^2}$; **е)** $\frac{a}{3b}$. **135. а)** $\frac{m^3n}{2a^3}$; **б)** $\frac{x}{3}$; **в)** $\frac{12}{5m^2y}$. **136. а)** $\frac{1}{(a-1)(3a+1)}$; **б)** $-\frac{x(a+b)}{9}$; **в)** $\frac{y}{8(x+y)}$; **г)** $\frac{5y(a+y)}{2(a-y)}$; **д)** $-\frac{(2x+1)(a+b)}{14}$; **е)** $\frac{2}{(m+n)^2}$; **є)** $\frac{(n-m)(x+y)}{2}$; **ж)** $\frac{3(c-2a)}{a^2-ab+b^2}$. **137. а)** $\frac{5}{x-y}$; **б)** $-\frac{3}{5}$; **в)** $\frac{(4-x)(x-y)}{3y}$; **г)** $\frac{y+1}{6(a+b)}$; **д)** $\frac{3(a+b)}{10ab}$; **е)** $\frac{a-1}{(x-1)(a+1)}$. **138. а)** $-17{,}5$; **б)** -3; 2,4; 14. **139. а)** -7; **б)** -20; 160; 55. **140. а)** 1; **б)** 1. **141.** $\frac{1}{9}$. **145.** 12 днів. **146.** 1,5 год; 18 км/год.

147. *Вказівка*. Серед міст королівства існує місто, з якого виходить *найбільша* кількість доріг. Позначимо це місто через N і нехай з нього виходить n доріг. Припустіть, що існує місто A, в яке не можна проїхати з міста N однією або двома дорогами. Обґрунтуйте, що тоді з міста A обов'язково виходить щонайменше $n+1$ дорога. Це суперечить тому, що з міста N виходить найбільша кількість доріг. **149. а)** $\frac{1}{6}$; **б)** $\frac{9a}{c}$; **в)** x^3; **г)** $\frac{3}{d}$; **д)** $\frac{5p^2n^2}{2}$; **е)** $\frac{c^2}{4m}$; **є)** $\frac{2c^2}{a^2}$; **ж)** $\frac{4ax}{5b}$. **150. а)** $\frac{3x}{2y}$; **б)** $\frac{21ab^2}{2}$; **в)** $\frac{2xy}{5}$; **г)** $\frac{m}{14k^3}$. **151. а)** $\frac{9}{ab^3}$; **б)** $-\frac{n}{16b}$; **в)** $-\frac{5z}{2xy}$. **152. а)** $-\frac{2y}{3}$; **б)** $-\frac{20}{3mn}$; **в)** $\frac{4}{xy}$. **153. а)** $\frac{6}{c^2}$; **б)** $\frac{n}{a^2}$; **в)** $k(c-d)$; **г)** $\frac{x^2}{x+4}$; **д)** $\frac{b^2}{b-3}$; **е)** $\frac{y-2}{y+2}$. **154. а)** $\frac{x^2}{a}$; **б)** $\frac{2+a}{c}$; **в)** $\frac{mn}{y^4}$; **г)** $k(k-5)$; **д)** $\frac{5(x-y)}{2}$; **е)** $\frac{a-1}{a+1}$. **155. а)** $\frac{2a(5-x^2)}{x}$; **б)** $\frac{a(1-b)}{bc}$; **в)** $\frac{a}{2(a-b)}$; **г)** $\frac{3(x-1)}{2(x^2+1)}$; **д)** $\frac{3b(1-x)}{4a(1+x)}$; **е)** $c(a+b)$. **156. а)** $\frac{2a^2(7c-1)}{b^2}$; **б)** $\frac{x+2}{x^2}$; **в)** $\frac{(m-n)(m-1)}{6m}$.

157. а) $-\frac{20b^5}{3a}$; **б)** $0{,}16n^2$; **в)** $\frac{ab}{3c}$; **г)** $\frac{9}{4bx^2}$. **158. а)** $-0{,}4m^2n^3$; **б)** $\frac{2b^3}{3c}$; **в)** $\frac{3}{5x}$; **г)** $\frac{6a^6}{b^2c}$.

159. а) $\frac{3(a-b)}{7(a+b)}$; **б)** $\frac{(2c+1)(x+y)}{3(1-2c)}$; **в)** $\frac{n}{4m(m+n)}$; **г)** $\frac{9a}{a-b}$; **д)** $\frac{2}{x^2-y^2}$; **е)** $\frac{(3-a)(1+2a)}{a}$. **160. а)** $\frac{b(a-b)}{a+b}$; **б)** $\frac{x+y}{6(x+2y)}$; **в)** $\frac{2(1-b)}{a}$; **г)** $-\frac{a(a+2)}{c+b}$. **161. а)** 16; **б)** –1; 10; 75. **162.** –0,6; 0,78. **165. а)** $\frac{x+0,5}{(x^2+1)(x-0,5)}$; **б)** 1. **167.** На причалі *A*. **168. а)** 0; **б)** 0,5. **170.** 1,7*n* грн. **171.** 4 т; 8 т. **172.** *Вказівка.* Якщо у центральній клітинці записано число *m*, то будь-яке інше число може дорівнювати *m*, *m* + 1, *m* – 1, *m* + 2 або *m* – 2. Тому записано не більше, ніж 5 різних чисел. **173. а)** $\frac{3}{a(a-1)}$; **б)** $-\frac{2}{a-5}$; **в)** $-\frac{7}{a^2}$; **г)** $\frac{1}{2(2b-1)}$; **д)** $\frac{a^3}{a-4}$; **е)** $\frac{2}{x-y}$. **174. а)** $\frac{4}{b(b-1)}$; **б)** $\frac{25-20a}{a(a-5)}$; **в)** $-\frac{12x}{x-4}$; **г)** $\frac{1}{4(c+1)}$. **175.** $\frac{18x}{x+3}$; 12. **176.** $\frac{2}{c-9}$; 1. **179. а)** $\frac{2m}{n-m}$; **б)** –1; **в)** $\frac{2a(b-2a)}{b+2a}$; **г)** $\frac{1}{ab}$; **д)** $\frac{x-1}{x(x+1)}$. **180. а)** $\frac{-y^2}{x^2+y^2}$; **б)** $\frac{2}{x-2}$; **в)** $\frac{2(3-x)}{5}$; **г)** 10. **181. а)** *a*; **б)** *x* – 3; **в)** $-\frac{m}{n}$; **г)** $\frac{m+a}{a}$. **182. а)** –*a* – *b*; **б)** $\frac{1}{c}$. **188. а)** $\frac{b^2+3b+9}{b-a}$; **б)** $\frac{x-4y}{x(x-5y)}$. **189. а)** 4,25; **б)** 1,25; **191.** $\frac{x}{2x-1}$. **192. а)** –1; **б)** –4; 0; **в)** 14; **г)** 13. **193.** Рівняння не має коренів, якщо $a = 0$; має один корінь, якщо $a \neq 0$ і $a \neq 3$. **194.** 150 км. **195.** 11 м/с; 9 м/с. **196.** *Вказівка.* Врахуйте, що після кожної вказаної операції добуток усіх чисел, записаних на дошці, дорівнює $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 25$. **202. а)** –1; **б)** –2; **в)** –5. **203. а)** $\frac{7}{12}$; **б)** $\frac{19}{40}$; **в)** $\frac{5}{6}$. **204. а)** –2; **б)** коренів немає; **в)** 3; **г)** –1; **д)** –3; **е)** 10; **є)** 1; **ж)** $\frac{1}{2}$; **з)** $\frac{1}{6}$. **205. а)** 0; **б)** –10; **в)** $-\frac{9}{11}$. **206. а)** 0; 3; **б)** –1; 0; **в)** $\frac{5}{22}$. **209.** 3. **210.** 5. **213. а)** $-\frac{1}{9}$; **б)** коренів немає; **в)** 1; **г)** $-2\frac{1}{3}$; **д)** 0; $\frac{5}{6}$; **е)** –9; **є)** –0,8; **ж)** 0,3. **214. а)** –0,8; **б)** 2; **в)** –1,5; **г)** 0,125; **д)** –2,5; **е)** коренів немає. **215.** 360 км/год; 60 км/год. **216.** 6 год; 12 год. **217.** 22,5 хв. **218.** 3 км/год. **219.** 22 км/год. **220.** Усі значення *a*, крім $a = 1$ і $a = 2$. **221. а)** –3; 0; **б)** 0; 2. *Вказівки.* **а)** Позначте вираз $x^2 + 3x$ через *y*, запишіть рівняння з невідомим *y* та розв'яжіть його.

б) Позначте вираз x^2-2x через y. **222. а)** 9; **б)** 1; **в)** –5; **г)** 7. **223. б)** Якщо $a\neq -1$, то $x=3$; якщо $a=-1$, то коренів немає; **в)** якщо $a\neq 4$, то $x=2a-4$; якщо $a=4$, то коренів немає; **г)** якщо $a\neq -0{,}5$ і $a\neq 4$, то $x=a-1$; якщо $a=-0{,}5$ або $a=4$, то коренів немає. **224.** $a=0$ і $a=2$. **225.** $a=-7$, $a=-1$ і $a=5$. **227. а)** –1,85; **б)** 1; **в)** 1; **г)** 0. **229. б)** a. **230.** Так. **231.** 7200 грн. **232. а)** Якщо $a\neq 2$, то $x=a$; якщо $a=2$, то коренем є будь-яке число; **б)** якщо $a\neq -1$ і $a\neq 1$, то $x=\frac{1}{a-1}$; якщо $a=-1$, то коренем є будь-яке число; якщо $a=1$, то коренів немає. **233.** *Вказівка.* Розгляньте шахове розфарбування дошки. Врахуйте, що з чорної клітинки жук може переповзти лише на білу, а з білої — лише на чорну.

Завдання для самоперевірки № 2

1. в). **2.** в). **3.** б). **4.** б). **5.** б). **6.** г). **7.** 1) — В); 2) — Д); 3) — Г); 4) — Б). **8. а)** $\frac{6a^4}{b^2c}$; **б)** $\frac{3}{20xz^3}$. **9. а)** $\frac{2}{x-3}$; **б)** $\frac{1}{a}$. **10.** 3,6. **11. а)** –2; 0; **б)** –4,5. **12. а)** $\frac{3a^4c^4}{16b^3}$; **б)** $-\frac{28y^2z}{5x}$. **13. а)** $\frac{a-1}{2a-1}$; **б)** $\frac{2-6a}{3a}$. **14.** –6. **15. а)** $\frac{11}{24}$; **б)** 0. **16.** 10 год. **17. а)** $\frac{a(a+10)}{a+4}$; **б)** 1. **20. а)** 0,4; **б)** 2. **21.** 15 км/год.

250. а) 1; **б)** 101; **в)** $1\frac{23}{27}$; **г)** 18; **д)** 0; **е)** $-\frac{1}{2}$; **є)** $4\frac{3}{4}$; **ж)** $-\frac{64}{225}$. **251. а)** 3; **б)** 121; **в)** $-3\frac{29}{32}$; **г)** $1\frac{1}{3}$; **д)** 0,147; **е)** 15. **254. а)** $\frac{3}{a+5}$; **б)** $\frac{b-a}{a^2b^2}$; **в)** $\frac{8}{b^2-16}$; **г)** $\frac{y-x}{x^3y^3}$; **д)** $\frac{1}{(x-1)(y-1)}$; **е)** $x^2(1-x^2)$. **255. а)** $\frac{a+b}{a-b}$; **б)** $\frac{2}{a+7}$; **в)** $-\frac{m^2n^2}{m+n}$; **г)** $\frac{2x^6y^3}{y^6-x^6}$. **257.** Не може. **258.** Не існують. **259. а)** 1; **б)** коренів немає. **262.** 20, 10 і 15 програм. **263.** 1000 г. **264.** *Вказівка.* Врахуйте, що серед заданих чисел є 12 парних і 13 непарних, тому принаймні на одній з карток будуть написані два непарні числа. **273. в)** $0{,}6b^{-4}c^{-1}$; **г)** $\frac{3}{8}x^{-1}y^{-1}$; **д)** $-3a^2b$; **е)** $\frac{1}{3}ac^2$. **274. а)** $\frac{1}{8}$; **б)** 125; **в)** 243; **г)** 27; **д)** 1;

е) $\frac{3}{4}$. **275. а)** 1; **б)** 6; **в)** $\frac{5}{8}$. **276. а)** 27; **б)** 4; **в)** $\frac{1}{7}$; **г)** $\frac{1}{512}$; **д)** 4; **е)** 9. **277. а)** $\frac{2}{x^3y^2}$; **б)** $0{,}4m^4n^2$; **в)** $\frac{25}{x^3}$; **г)** $81a^2b^5$; **д)** $\frac{5a^{12}}{4b^2}$; **е)** $\frac{m^7}{32n^6}$. **278. а)** $0{,}5ab$; **б)** $\frac{12a}{25b^3}$; **в)** $\frac{125x}{y^3}$; **г)** $\frac{a^2}{3b^7}$. **281. в)** $(3m^{-2}-n^{-1})(3m^{-2}+n^{-1})$. **282. в)** $(3b^{-1}-2c^{-1})(3b^{-1}+2c^{-1})$. **283. а)** -1; **б)** $-\frac{9b^3+2}{b^3}$; **в)** $-\frac{4}{xy^2}$; **г)** $4c^4+c^2-2$; **д)** $\frac{b^3-a^3}{a^3b^3}$; **е)** $\frac{b^4+a^4}{b^4-a^4}$. **284. а)** $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$; **б)** a^4; **в)** $\frac{2(a^2+b^2)}{a^2b^2}$; **г)** $\frac{n^2+m^2}{n^2-m^2}$. **286. а)** $(a^3b^4)^m$; **б)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{3n+3}$. **287.** 511. **289. а)** $\frac{2(y^{10}-x^{10})}{3(y^{10}+x^{10})}$; **б)** $\frac{3a^2-1}{a^2}$; **в)** $\frac{b-b^2}{1+b}$. **291.** (1; –1). **292.** 120 і 130 деталей. **293.** 30 км. **294.** Не можна. *Вказівка.* Припустіть, що купи лише із трьох камінців одержати можна і для цього потрібно n кроків. Тоді на березі буде $n+1$ купа із трьох камінців, а всіх камінців буде $1001-n$. Залишається показати, що рівняння $3(n+1)=1001-n$ не має натурального кореня. **307. а)** $1{,}9\cdot10^9$ т; **б)** $2{,}8\cdot10^2$ кг; **в)** $5{,}2\cdot10^{-1}$ см; **г)** $6{,}12\cdot10^3$ дм. **308. а)** 7,3 дм; **б)** $1{,}1\cdot10^4$ кг; **в)** $9{,}3\cdot10^5$ г; **г)** $8{,}6\cdot10^3$ см. **309.** 7,9 км/с; $1{,}12\cdot10$ км/с; $1{,}667\cdot10$ км/с. **310. а)** $2{,}76\cdot10^{-3}$; **б)** $3{,}468\cdot10^{-11}$; **в)** $4{,}838\cdot10$; **г)** $9\cdot10^{-4}$; **д)** $2\cdot10^9$; **е)** $4{,}5\cdot10^{-7}$. **311. а)** $1{,}89\cdot10^5$; **б)** $2\cdot10^{-8}$; **в)** $5\cdot10^{-8}$; **г)** $5\cdot10^{-5}$. **314. а)** $1{,}91\cdot10^9$; **б)** $1{,}016\cdot10^{17}$; **в)** $7{,}77\cdot10^7$; **г)** $6{,}7\cdot10^{-5}$. **315. а)** $4{,}08\cdot10^9$; **б)** $1{,}93\cdot10^{-3}$. **318.** 1,05 кг. **322. а)** –2; 2; **б)** –0,25; **в)** –0,5; **г)** 0,3. **323.** 585 т; 195 т. **324.** Оля може забезпечити собі перемогу, якщо число яблук не кратне 11. **338.** $\frac{90}{a}$ пакетів. **339.** $\frac{140}{v}$ год. **340. а)** $y=-\frac{36}{x}$; **б)** $y=\frac{32}{x}$. **341.** $a=1$. **342. а)** (2; –2,5) і (2,5; –2); **б)** графіки не перетинаються. **343. а)** –1; 1; **б)** –0,8. **344. а)** –1; 2; **б)** 1; 2,5. **345. а)** –3; 1; **б)** 0,5; 4. **346.** $S=\frac{18}{x}$; якщо $x=4{,}5$, то $S=4$. **347.** $t=\frac{12}{v}$; якщо $v=1{,}6$, то $t=7{,}5$. **348.** $x<-1$; $0<x<1$. **350.** 1. **351.** Три корені. **352.** $-m$. **353. а)** (1; 3); **б)** (3; –1). **354.** 46. **355.** 75 км. **356.** Не можуть. *Вказівка.* Хтось із піратів обов’язково одержить не більше семи злитків. Знайдіть масу семи найважчих злитків. **359. а)** $\frac{1}{c}$; **б)** $\frac{a-3}{3}$; **в)** $\frac{c-4}{c+4}$; **г)** $\frac{b-3}{b+3}$; **д)** $x-2y$; **е)** $\frac{5x-2}{x-2y}$. **362.** 625; 3,24. **364. а)** $\frac{2x}{x^2-1}$; **б)** $\frac{a^2}{b(a+b)}$; **в)** $\frac{b}{xy}$. **365. а)** -1; **б)** $\frac{4a+13}{a^2-16}$; **в)** $\frac{17y}{10(2y+1)}$; **г)** $\frac{2(a^2+b^2)}{a^3-b^3}$. **366. а)** $1+\frac{9}{a}$; **б)** $a+4+\frac{1}{a}$; **в)** $x+2+\frac{3}{x+2}$. **367. б)** $\frac{2a}{15x}$; **в)** $\frac{3c}{4ab}$; **г)** $-\frac{1}{x+y}$; **д)** $\frac{2(1-x)}{x}$; **е)** $-\frac{x(x+y)}{y}$. **369. а)** $\frac{2ax}{3}$; **б)** $\frac{(2-b)(1+b)}{b}$; **в)** $\frac{x(x-y)}{4}$. **370.** 90. **371. а)** $\frac{1}{a+b}$; **б)** 1; **в)** $\frac{4a}{3(a-4)}$. **373.** $\frac{2a}{(a-1)^2}$; 4. **376. а)** $\frac{x+1}{3x+1}$; **б)** $\frac{x+1}{x+2}$. **377. а)** -1; **б)** 0; **в)** коренів немає; **г)** –2. **378. а)** 0,6; **б)** 0; 3; **в)** $-4\frac{1}{3}$; **г)** –2,8. **379.** Якщо $a \neq -2$, то $x=-a-3$; якщо $a=-2$, то коренів немає. **380.** $a=-1$; $a=3$. **381. б)** 127; **в)** –0,9; **г)** $2\frac{1}{3}$; **д)** 4; **е)** $\frac{4}{7}$. **382. а)** $\frac{a}{b^2c}$; **б)** $\frac{a}{a^2-b^2}$; **в)** $2x^2y^3$; **г)** $\frac{c^3}{(c^2+1)^2}$. **383. а)** $\frac{27x^{12}}{y^{10}}$; **б)** $\frac{a^{15}c}{3}$; **в)** $\frac{2}{2x+3}$; **г)** $\frac{a+b}{ab}$; **д)** 1; **е)** $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2b^2}$. **384. а)** 2^{n+2}; **б)** 2^{n+7}; **в)** 2^{7-n}; **г)** 2^{n-8}. **385.** $x^{-3}(x^{-4}+x^{-2})$; $x^{-5}(x^{-2}+1)$; $x(x^{-8}+x^{-6})$. **388.** $3{,}6 \cdot 10^3$ с; $8{,}64 \cdot 10^4$ с; $2{,}592 \cdot 10^6$ с. **390.** $y=\frac{2}{x}$. **393.** –2; 2.

Завдання для самоперевірки № 3

1. а); г). **2.** в). **3.** в). **4.** а). **5.** г). **6.** б). **7.** 1)–Г); 2)–Б); 3)–Д); 4)–А). **8. а)** 250; **б)** $3\frac{1}{9}$. **9. а)** $12a$; **б)** $\frac{b}{b-3}$. **10. а)** $\frac{a^{10}}{9b^4}$; **б)** $\frac{27n^6}{m^{12}}$. **12. а)** 65,5; **б)** $\frac{1}{27}$. **13. а)** $4ab^3c^3$; **б)** $\frac{n^3}{9m^2}$. **14. а)** $\frac{25}{a+2}$; **б)** $-\frac{a+b}{ab}$. **15. а)** $1{,}403 \cdot 10^2$; **б)** $3 \cdot 10^{-5}$. **16.** (1; 2); (2; 1). **17. а)** 1,5; **б)** $2\frac{2}{3}$. **18. а)** $\frac{y}{x^{m+3}}$; **б)** $\frac{b^{3n-2}}{2y^{2n-1}}$. **19. а)** $\frac{1}{x^2-y^2}$; **б)** –2. **20. а)** $x = 2\cdot10^3$; **б)** $x = 10^{-3}$. **21.** 2.

§ 2

404. $x=0$; $x=5$. **412.** $k=3$. **413.** $-3<x<2$. **416. б)** $-\frac{1}{3}$; $1\frac{2}{3}$. **417. а)** $\frac{b-a}{a^3b^3}$; **б)** $-\frac{2}{(m-1)(n-1)}$.

418. 60 м. **419. а)** 68°; **б)** –40°. **420.** *Вказівка.* Два футболісти, відстань між якими є найменшою, пасують м’ячі один одному. Далі розгляньте випадки: 1) інші 3 футболісти розпасовують м’ячі між собою; 2) хоча б один з цих 3 футболістів відпасував м’яч одному з перших двох. **446. а)** 3,5; **б)** $1\frac{1}{6}$; **в)** 7,1; **г)** –6; **д)** –1,2; **е)** –0,99. **447. а)** 0,18; **б)** 2,5; **в)** 0,32; **г)** 50. **449. а)** $x=0$; **б)** $x=0$. **450.** $a<0$. **452. а)** 2; **б)** –1; **в)** 0. **453.** 80 км/год; 90 км/год. **454.** $\frac{2}{5}$. **455.** Тарас. *Вказівка.* Врахуйте, що фішкою потрібно пройти 99 клітинок, і що Тарас може доповнювати ходи Олега до 4 клітинок. **460.** 6 дм; 3 дм. **461.** 18 м; 6 м. **462. а)** –1; 1; **б)** $-\sqrt{1,5}$; $\sqrt{1,5}$; **в)** $-\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$; **г)** $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}$. **463. а)** $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; **б)** –1; 1; **в)** –8; 8; **г)** $-\sqrt{32}$; $\sqrt{32}$. **464. а)** –1,5; 2,5; **б)** 1,5; 4,5. **465. а)** –9; 5; **б)** –5; 6. **466.** –7; 7. **467.** –2 і –1; 2 і 3. **468. а)** $-\sqrt{3}$; –1; 1; $\sqrt{3}$; **б)** 1. **469.** –5. **470. а)** $a=0$; $a=2$; **б)** $a=-\sqrt{5}$; $a=\sqrt{5}$. **473.** (–1; 3). **474.** 60 деталей. **475.** Не зможе. *Вказівка.* Зафарбуйте кубики даного куба в шаховому порядку. Врахуйте, що: центральний кубик вирізали, тому кількості кубиків чорного та білого кольору відрізняються на 2; після кожного чорного кубика сиру миша може з’їсти лише білий кубик, а після кожного білого — чорний. **500.** 6 туристів. **501.** У 18 букетах. **502. б)** *Вказівка.* Скористайтеся методом від супротивного. **503.** Так. Наприклад, $-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$; $\left(-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}=-2$. **505.** 1 учень. **508.** 20,5 км/год. **509.** 7,2 год. **510.** *Вказівка.* Припустіть, що вказаних трьох клітинок немає. Тоді один колір можуть мати щонайбільше дві клітинки, які розміщені підряд. Урахуйте, що смужка має 14 незафарбованих клітинок, які можуть розділяти щонайбільше 15 пар клітинок одного кольору. **530. а)** 24; **б)** 180; **в)** 45; **г)** 3; **д)** 10,5; **е)** 105. **531. а)** 200; **б)** 42; **в)** 0,24. **532. а)** 75; **б)** 36; **в)** 14; **г)** 720; **д)** 1,6; **е)** 154. **533. а)** 21; **б)** 63; **в)** 20. **534. а)** 12; **б)** 20; **в)** 6. **535. а)** 300; **б)** 34,5; **в)** 1,44; **г)** 3; **д)** –0,3. **536. а)** 253,44; **б)** 0; **в)** 2; **г)** 171.

537. а) 64; **б)** 243; **в)** 64. **538. а)** 32; **б)** 125; **в)** 81. **539. а)** ab; **б)** $-ab$; **в)** $-2x^2y^3$; **г)** $\frac{5m}{n^4}$; **д)** $-ab^2$; **е)** $-0{,}2xy$. **540. а)** $-a^2b$; **б)** $-6a^5b^3$; **в)** $\frac{x}{y^4}$; **г)** $7xy$. **543. а)** 2; **б)** $\frac{19}{75}$. **544. а)** 2,8; **б)** 2. **545. а)** 374; **б)** 576. **546. а)** $x \geq 0$; **б)** $x \leq 0$; **в)** для всіх значень x; **г)** $x \geq 0$; **д)** $x \geq 0$; **е)** $x \leq 0$. **548.** $x^2 - 2$. **549. а)** -2; 2; **б)** 1. **551. а)** 1; **б)** 0,25; **в)** коренів немає; **г)** 0; 4. **552. в)** $\frac{2z}{3y}$; **г)** $\frac{a-2b}{a+1}$. **554.** Не можна. **555.** 84 км/год; 70 км/год. **556.** Не можна. *Вказівка*. Обґрунтуйте: щоб зібрати всі фішки в одній вершині потрібна непарна кількість ходів. **564. а)** $5\sqrt{6}$; **б)** -26; **в)** 9; **г)** 0; **д)** $7\sqrt{3}$; **е)** $\sqrt{6}$; **є)** $3+\sqrt{5}$; **ж)** 9; **з)** 4; **и)** $7-2\sqrt{10}$. **565. а)** $2\sqrt{6}$; **б)** 15; **в)** $2\sqrt{2}$; **г)** $4\sqrt{3}-2$; **д)** 5; **е)** 9. **570. а)** $6\sqrt{2}-2$; **б)** 7; **в)** 6; **г)** $-2\sqrt{6}$; **д)** 0; **е)** 1. **571. а)** $5+2\sqrt{3}$; **б)** 15; **в)** -19; **г)** 3. **572. а)** $2a$; **б)** $4\sqrt{x}+8$; **в)** a; **г)** a^2. **573. а)** $a+b+ab+1$; **б)** m. **574. а)** $4a\sqrt{3b}$; **б)** $-0{,}3y\sqrt{x}$; **в)** $a^2b\sqrt{2}$; **г)** $0{,}8b\sqrt{b}$; **д)** $-2xz^3\sqrt{2x}$; **е)** $4bc^3\sqrt{2ab}$. **575. а)** $-7b\sqrt{a}$; **б)** $1{,}2ab\sqrt{b}$; **в)** $-3x^2y\sqrt{2}$; **г)** $0{,}2xy\sqrt{xy}$. **576. а)** $\sqrt{12a^2}$; **б)** $\sqrt{b}$; **в)** $\sqrt{9x^5}$; **г)** $\sqrt{a^3b}$; **д)** $\sqrt{(c+1)^3}$; **е)** $\sqrt{a^3+a^2b}$. **577. а)** $\sqrt{5c^2}$; **б)** $\sqrt{n^3}$; **в)** $\sqrt{2b^3}$; **г)** $\sqrt{a^3b^2}$; **д)** $\sqrt{x^3+x^2}$; **е)** $\sqrt{(n+k)^3}$. **578. а)** $\sqrt{3}+1$; **б)** $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$; **в)** $14(3+2\sqrt{2})$; **г)** $\frac{1}{2\sqrt{3}+1}$; **д)** $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{m-n}$; **е)** $\frac{a(\sqrt{a}+3)}{a-9}$; **є)** $\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; **ж)** $\frac{4\sqrt{b}-6}{4b-9}$. **579. а)** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$; **в)** $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}$; **г)** $4\left(3\sqrt{2}-4\right)$; **д)** $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$; **е)** $\frac{c(1+\sqrt{c})}{1-c}$; **є)** $\frac{2(\sqrt{a}+a)}{a-a^2}$; **ж)** $\frac{b-9}{c\left(\sqrt{b}+3\right)}$. **580. в)** $\sqrt{5}(\sqrt{3}-\sqrt{7})$; **е)** $2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)$. **581. в)** $\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$; **е)** $2\sqrt{b}(2+\sqrt{b})$. **582. а)** $\sqrt{2}$; **б)** $\frac{\sqrt{8}-1}{2}$; **в)** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; **г)** $x+\sqrt{2}$; **д)** $\frac{1}{a-\sqrt{5}}$; **е)** $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{b}}$. **583. а)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **б)** $1-\sqrt{5}$; **в)** $-\sqrt{2}$; **г)** $\frac{1}{a-\sqrt{7}}$; **д)** $-x-\sqrt{2}$; **е)** $\sqrt{m}-\sqrt{5}$. **586. а)** $2\sqrt{2}$;

б) $\frac{4}{23}$; **в)** $\sqrt{b}$; **г)** $\frac{1}{\sqrt{xy}}$. **587. а)** 4; **б)** 2; **в)** $-\sqrt{m}$; **г)** 0. **588. а)** $2+\sqrt{5}$; **б)** $\sqrt{3}-1$; **в)** 9; **г)** 1; **д)** x. **591. а)** $-\sqrt{\frac{a^2}{3}}$; **б)** $-\sqrt{-ab}$. **592. а)** $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; **б)** $\frac{\sqrt{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}}{3}$. **593.** –3; 1. **594.** (–1; 1); (3; 9). **596.** Ні. **597.** 400 м. **598.** 500 г. **599.** *Вказівка*. Розгляньте два випадки: сума записаних чисел є 1) парною; 2) непарною. **614. а)** 0; 4; **б)** 4. **615. а)** 4; **б)** 0; 1. **616. г)** 5; **д)** $4\frac{2}{3}$; **е)** коренів немає; **є)** 0,9; **ж)** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; **з)** коренів немає. **617. в)** 1; **г)** 2,52; **д)** коренів немає; **е)** –1; 1. **618. а)** (16; 4); **б)** (4; 2). **620.** 0; 1. **621** $a = 1$. **623. а)** –2; 2; **б)** 2; **в)** 0. *Вказівка*. Вирази $\sqrt{x}$ і $\sqrt{x^2+2x}$ набувають лише невід'ємних значень. Тому їх сума $\sqrt{x}+\sqrt{x^2+2x}$ може дорівнювати нулю лише тоді, коли одночасно виконуються рівності $\sqrt{x}=0$ і $\sqrt{x^2+2x}=0$, тобто $x=0$ і $x^2+2x=0$. **г)** 2. **624. а)** $(a-1)^2$; **б)** $-\frac{1}{b+2}$. **627.** 4%. **628.** *Вказівка*. Обґрунтуйте, що всі числа вказаних рядків діляться на 3. **634. б)** 1; **в)** 7,5; **г)** –23; **д)** –2; **е)** 3. **636. а)** $\frac{7}{18}$; **б)** 6; **в)** $\frac{1}{35}$. **637. а)** 16; **б)** 82; **в)** 18. **638. в)** 10; **г)** 30. **639. б)** $4b-3$; **г)** $-12\sqrt{ab}$. **641. б)** $2a\sqrt{2}$; **в)** $-7b\sqrt{2a}$. **643. б)** $\sqrt{7m^2}$; **в)** $-\sqrt{19mn^2}$. **644. б)** $\sqrt{10}(\sqrt{10}+1)$; **г)** $(\sqrt{c}-2)(\sqrt{c}+2)$; **д)** $(m-\sqrt{6})(m+\sqrt{6})$. **645. а)** $\sqrt{7}$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{3}}$; **в)** $\sqrt{a}-\sqrt{5}$; **г)** $c+\sqrt{10}$; **д)** $-\frac{1}{x+\sqrt{2}}$; **е)** $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. **646. а)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$; **б)** $\frac{\sqrt{10}}{4}$; **в)** $2(\sqrt{5}+2)$; **г)** $\frac{3\sqrt{m}+2\sqrt{n}}{9m-4n}$. **648. а)** –6; **б)** $\frac{3+3\sqrt{3}}{2}$. **649. а)** $\frac{2\sqrt{b}}{a-b}$; **б)** $\frac{x}{x-y}$. **653. а)** $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; **б)** коренів немає. **655.** $a=-1$; $a=1$. **656. г)** 1,25; **д)** коренів немає; **е)** –1; 1. **657. а)** 0; **б)** коренів немає; **в)** 0. **659. а)** (1; 1); (–1,5; 2,25); **б)** (1; 1). **661.** Не має. **662.** Якщо $a=-1$ або $a=0$, то рівняння має 1 корінь; якщо $a=1$, то рівняння коренів не має. **664.** $a = 3$; (–1; 1).

Завдання для самоперевірки № 4

1. г). **2.** в). **3.** в). **4.** г). **5.** б). **6.** в). **7.** 1)–В); 2)–Д); 3)–Г); 4)–А). **8. а)** $-9\sqrt{3}$; **б)** –1. **9. а)** $\sqrt{2}$; **б)** 4. **10. а)** –3; 3; **б)** $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **11.** Так. **12. а)** 4,2; **б)** 1,5; **в)** 30. **13. а)** $\sqrt{3}$; **б)** 6. **14. а)** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; **б)** $\frac{x\left(2\sqrt{x}-1\right)}{4x-1}$. **15. а)** $\sqrt{a}-\sqrt{3}$; **б)** $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. **16.** –1,5; 1. **17. а)** $x \ge 0$; **б)** $x \le 0$; **в)** $x = 0$. **18. а)** 1; **б)** 6. **19. а)** $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; **б)** –0,5; 1. **20.** *Вказівка.* $19+8\sqrt{3}=\left(4+\sqrt{3}\right)^2$. **21.** Має.

§ 3

681. а) 0; 4,5; **б)** –2; 2; **в)** $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; **г)** $-\sqrt{17}$; $\sqrt{17}$; **д)** –4,5; 0; **е)** 0; 0,2; **є)** $-\sqrt{30}$; $\sqrt{30}$; **ж)** $-3\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$. **682. а)** –0,8; 0; **б)** $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; **в)** 0; 5; **г)** $-\frac{2}{3}$; 0; **д)** –0,4; 0,4; **е)** –0,4; 0,4. **683. а)** 0; 3,15; **б)** $-\sqrt{5{,}5}$; $\sqrt{5{,}5}$. **684. а)** –2,5; 2,5; **б)** –8; 0. **685.** –6. **686.** 8. **687.** $-\sqrt{1{,}5}$; $\sqrt{1{,}5}$. **688.** –0,5; 0. **689.** –9; 0. **690.** 0; 17. **691. а)** –0,5; 0; **б)** –2; 2. **692. а)** 0; 3; **б)** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **693. а)** Якщо $a < 0$, то $x_1 = -\sqrt{-\frac{1}{a}}$; $x_2 = \sqrt{-\frac{1}{a}}$; якщо $a \ge 0$, то коренів немає; **б)** $x_1 = 0$; $x_2 = 2a$ для будь-якого a; **в)** якщо $a = 0$, то коренем є будь-яке число; якщо $a \ne 0$, то $x_1 = -a$; $x_2 = a$. **696.** 70 км/год; 50 км/год. **697.** 70 т; 50 т. **698.** 10 учнів. *Вказівка*. Нехай в усіх трьох олімпіадах брали участь x учнів. Тоді за умовою задачі $60 + 2 \cdot 30 + 3x = 150$. **703. а)** 1; 5; **б)** –6; 2; **в)** –5; –2; **г)** коренів немає; **д)** 5; **е)** –3; 7. **704. а)** 1; 1,5; **б)** –1; 0,5; **в)** –2; $\frac{1}{3}$; **г)** 0,5; **д)** коренів немає; **е)** $-\frac{1}{7}$; 1. **705. а)** –5; 1; **б)** –1; –4; **в)** 2; 3; **г)** коренів немає; **д)** 4; **е)** 3; 7; **є)** –1; –0,5; **ж)** $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; **з)** –1,5; 1. **706. а)** 1; 4; **б)** –4; 0,5; **в)** –1; 2. **707. а)** –1; 3; **б)** 1; 7; **в)** –1; 0,25. **711. а)** $1-\sqrt{2}$; $1+\sqrt{2}$; **б)** $\frac{4}{7}$; 2; **в)** –8; $\frac{2}{3}$; **г)** –15; –6; **д)** –18; $\frac{1}{3}$; **е)** –1; 3; **є)** –1,5; 1; **ж)** $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; **з)** $-\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{3}$. **712. а)** $3-\sqrt{3}$; $3+\sqrt{3}$; **б)** –6; $-\frac{2}{3}$; **в)** 0,5; 3,5; **г)** –7; 23; **д)** –18; –0,25; **е)** –4; 1;

є) $-1; -0{,}2;$ **ж)** $-\frac{1}{3}; \frac{2}{3};$ **з)** $-\frac{3}{5}; \frac{2}{3}.$ **713.** $-0{,}25; 4.$ **714.** $-1\frac{2}{3}; 2.$ **715. а)** $-2; -1{,}5;$ **б)** $-5; 0{,}2;$ **в)** $-0{,}2; 3;$ **г)** $-\frac{1}{2}; 1\frac{2}{3};$ **д)** $-0{,}6; 1;$ **е)** $\frac{1-2\sqrt{2}}{3}; \frac{1+2\sqrt{2}}{3};$ **є)** $-0{,}5; 0{,}2;$ **ж)** $-5; 1{,}5.$ **716. а)** $-\frac{5}{6}; \frac{3}{4};$ **б)** $-\frac{2}{3}; 2{,}5;$ **в)** $-1\frac{6}{7}; -1;$ **г)** $\frac{-10-5\sqrt{2}}{2}; \frac{-10+5\sqrt{2}}{2};$ **д)** $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}.$ **717. а)** $-3{,}5; 1;$ **б)** $-3; 0{,}6.$ **718. а)** $1; 3;$ **б)** $-4{,}5; 6.$ **719.** $-2\frac{2}{3}; -2.$ **720.** $-\frac{1}{8}; 1.$ **721. а)** $-15; 12;$ **б)** $-16\frac{1}{3}; 4\frac{2}{3}.$ **722. а)** $16;$ **б)** $0; 1.$ **723. а)** $-1; 5;$ **б)** $-2; 1; 2; 5.$ **724. а)** $x_1 = b$; $x_2 = 3b$; **б)** $x_1 = -b$; $x_2 = b - 2$. **730.** 100 кг. **731.** Не можна. *Вказівка*. Якщо маємо набір чисел a, b, c, то за один крок одержимо набір $\frac{b+c}{2}$, $\frac{a+c}{2}$, $\frac{a+b}{2}$. Сума чисел обох наборів дорівнює $a + b + c$. Отже, за вказаних кроків сума чисел не змінюється. Порівняйте суми заданих трійок чисел. **748.** -1 — інший корінь рівняння; $q = 9$. **749.** 3 — інший корінь рівняння; $p = -1$. **750. а)** 22; **б)** $3\frac{4}{9}$. **751. а)** -29; **б)** $-12\frac{3}{4}$. **752. а)** 5; **б)** 0,5. **753. а)** $m = 2$; **б)** таких значень m не існує. **760.** $\sqrt{2}$ і $4\sqrt{2}$ — корені рівняння; $p = -5\sqrt{2}$. **761.** -11 і 3 — корені рівняння, $p = 8$ або -3 і 11 — корені рівняння, $p = -8$. **762.** 8 і 2 — корені рівняння; $b = 16$. **764.** $b = -4$; $b = 4$. **765. а)** $-0{,}4$; **б)** 50; **в)** 24; **г)** 3. **766. а)** 0,89; **б)** $-0{,}387$. **767. б)** $(a + 2b)(3 - c)$; **в)** $-(a - b)(a + 3b)$; **г)** $(m - 1)(m - 7)$. **768. а)** $-\frac{4}{m(m+2)}$; **б)** $\frac{1}{a-5}$. **769. а)** $(4; -2)$; **б)** $(4; -1)$. **770.** 20 га; 25 га. **771.** Переможе Тарас. *Вказівка*. Наявність у першій та другій купах відповідно m та n горіхів позначатимемо парою (m, n). Ходи хлопців: $(30, 7) \to (9, 7) \to (2, 7) \to (2, 3) \to (2, 1) \to (0, 1)$. (Ходи Ігоря є вимушеними.) **776. а)** $-4; 1;$ **б)** $-\frac{1}{3}; 3;$ **в)** 4. **778. г)** $(2x - 1)(x - 2)$; **д)** $(3x + 2)(x - 1)$; **е)** $3(x - 1)^2$. **779. а)** $(x - 1)(x - 3)$; **б)** $(x + 4)(x - 3)$; **в)** $(2x + 5)(x - 1)$. **780. а)** $(2x - 1)(2x - 2)$; **б)** $-(x + 4)(x - 2)$; **в)** $-0{,}3(x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10})$; **г)** $(y - 1)(1{,}2y + 0{,}7)$; **д)** $\frac{1}{3}(x+1)(x+2)$; **е)** $-\frac{1}{4}(x-4)^2$.

781. а) $(3x-2)^2$; **б)** $-(x+1)(5x-3)$; **в)** $0{,}1(3m-2)(2m-3)$; **г)** $\frac{1}{8}(x-2)(x-4)$.

783. а) $\frac{2a-3}{4}$; **б)** $\frac{3x-1}{2x+1}$; **в)** $\frac{b-2}{b-5}$; **г)** $\frac{k-1}{2k-1}$. **784. а)** $\frac{3}{a+4}$; **б)** $\frac{2x+3}{2x-3}$. **785. а)** 1; **б)** $\frac{c-2}{c+1}$. **786. а)** 2; **б)** y. **787. а)** 2; **б)** $\frac{12-2b}{b-2}$. **789. а)** $(x+a)(x-2a)$; **б)** $(2x+a)(x+2a)$.

790. а) $\frac{2a}{a-b}$; **б)** $\frac{x+6y}{x^2-4y^2}$. **791. б)** 0. **792.** 70 км/год. **793.** $68\frac{4}{7}$ км/год. **794.** –2; 2.

795. Так. **796. а)** 0; 1; **б)** 1; 4; **в)** $-\frac{1}{3}$; 2; **г)** 0; **д)** –3; **е)** 0,25. **797. а)** –7; 7; **б)** 1; **в)** –5,5.

798. а) –10; 10; **б)** 0; **в)** 4. **799. а)** 0; **б)** –3; –2; **в)** –2. **800. а)** –3; –2; **б)** –1; 2; **в)** 4; 8; **г)** –6; 3; **д)** 1; 7; **е)** –4; 5. **801. а)** –2; 7; **б)** 3; 5; **в)** –7; 1. **802. а)** –2; –1; 1; 2; **б)** –3; 3; **в)** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **803. а)** –2; 2; **б)** –3; –1; 1; 3; **в)** –2; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 2. **804. а)** 3; **б)** –3; **в)** 0,5; **г)** коренів немає. **805. а)** 5; **б)** 1,5. **806. а)** 1; 10; **б)** –1; 6; **в)** –2; 1; **г)** 0; 4. **807. а)** –11; 2; **б)** –7; –4; **в)** 1,8; 10. **808. а)** –7; 1; **б)** –0,75; 5; **в)** 1,5; 2; **г)** коренів немає. **809. а)** –5; 3; **б)** –15; 1. **810. а)** $-\sqrt{5}$; 0; $\sqrt{5}$; **б)** –0,25; 0; 1. **811. а)** 0; **б)** 0; 5; 6. **812. а)** –2; $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2; **б)** $-\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$; **в)** 2; 6; **г)** –3,5; –2,5; –0,5; 0,5. **813. а)** –2; –0,5; 0,5; 2; **б)** $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; **в)** $-2-\sqrt{7}$; $-2+\sqrt{7}$; –3; –1; **г)** коренів немає. **814.** $-5-\sqrt{3}$. **815.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

816. а) $-\frac{7}{18}$; 3; **б)** $\frac{5}{7}$; 4; **в)** –4; $5\frac{2}{3}$; **г)** –1; $\frac{2}{3}$; **д)** 1; $\frac{7-\sqrt{33}}{4}$; $\frac{7+\sqrt{33}}{4}$; 4; **е)** –3; –2.

817. а) Якщо $a=-3$, то $x=-1$; якщо $a=1$, то $x=3$; якщо $a\neq-3$ і $a\neq1$, то $x_1=-1$; $x_2=3$; **б)** якщо $a=1$ або $a=2$, то $x=1$; якщо $a\neq1$ і $a\neq2$, то $x_1=1$; $x_2=a$. **818. а)** –3; –2; 2; 3; **б)** –1; 2; **в)** –6; –4; –1; 1; **г)** –1; 0,5; **д)** 2; 3; **е)** –1; 6; **є)** –3; 2; **ж)** –5; –1.

819. а) $(a-3)(a-1)(a+1)(a+3)$; **б)** $(b+3)(b-1)(b+1)^2$. **820. а)** –1; 4; **б)** $\frac{2}{3}$; 4. **821. а)** 1; 25; **б)** 4; **в)** 5; **г)** 16; **д)** –1; 4; **е)** –7; 2. **822. а)** $\frac{3c^2}{4a}$; **б)** $\frac{2x^2-y}{y}$. **824. а)** $-36-14\sqrt{2}$; **б)** 2.

825. 70 кг. **826.** 4 км/год. **827.** *Вказівка.* Припустіть, що таких точок не існує. Розгляньте дві точки M, N одного кольору і такі точки A, B, C, що B — середина відрізка MN, *M* — середина відрізка *AN*, *N* — середина відрізка *MC*. **828.** 40 см. **829.** 4 м; 8 м. **830.** 7 см; 8 см. **831.** –15 і –9; 9 і 15. **832.** –13 і 7; –7 і 13. **833.** 12; 35. **834.** 60 км/год; 90 км/год. **835.** 50 км/год. **836.** 6 деталей. **837.** 4 сторінки. **838.** 3 км/год. **839.** 14 км/год. **840.** 24 м; 36 м. **841.** 3 см. **842.** –6 і –3; 10 і 13. **843.** 9; 10. **844.** $\frac{3}{5}$. **845.** $\frac{7}{2}$. **846.** 16 комп'ютерів. **847.** 24 деталі. **848.** 6 год; 10 год. **849.** 10 год; 15 год. **850.** 3 дні; 6 днів. **851.** 9 днів. **852.** 12 днів; 15 днів. **853.** 120 га і 108 га або 72 га і 60 га. **854.** 18 км/год. **855.** 16 км/год. **856.** 60 км/год. **857.** 90 км/год. **858.** 15 дівчат. **859.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **860.** ≈72 м. **861.** 14 %. **862.** 9 год; 18 год. **863.** 75 км/год. **864.** 10 деталей. **866. б)** 14. **867. а)** $\frac{b-1}{b+1}$; $\frac{1}{3}$; **б)** $-m$; –0,8. **869. а)** –3; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 3; **б)** 256. **870.** Не можна. *Вказівка*. Врахуйте, що за вказаних кроків сума восьми чисел у вершинах куба завжди буде непарною. **871. а)** –4; 4; **б)** $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; **в)** –1,5; 1,5; **г)** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; **д)** 0; 0,6; **е)** 0; 0,2. **872. а)** –2; 7; **б)** –10; 6; **в)** –0,5; 1; **г)** –0,25; 3; **д)** 0,2; 4; **е)** –1; $-\frac{2}{3}$. **874. а)** –2; 10; **б)** –4; 1; **в)** –2; 0; **г)** 1; 2; **д)** –1; $1\frac{2}{3}$; **е)** $-1\frac{5}{12}$; 1. **879. а)** –9; **б)** 4. **880.** $\frac{30}{49}$. **882. а)** $(x-3)(x-7)$; **б)** $(2x+5)(x-1)$; **в)** $(x-4)^2$. **883. а)** $(x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x+2)$; **б)** $(x-a)(x-3a)$; **в)** $(m+2n)(2m-5n)$. **884. а)** $-x-6$; **б)** $\frac{4x-1}{x+5}$; **в)** $\frac{a+5b}{2a-3b}$. **885. а)** 2; **б)** $\frac{x}{x+1}$. **887. а)** $-\sqrt{3}$; 0; $\sqrt{3}$; **б)** –0,8; 0; 0,8. **888. а)** $-\sqrt{2}$; –1; 1; $\sqrt{2}$; **б)** –3; 3; **в)** –9; –5; **г)** 0; 0,8; $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$; $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$. **889. а)** –1; 2; **б)** $-1\frac{2}{3}$; 1; **в)** –2; 1; **г)** –1; 1; 3; 5. **890. а)** 1; **б)** –2; 9. **891. а)** –8; **б)** –3; **в)** 3; $4\frac{1}{3}$; **г)** $-1\frac{2}{3}$; –1; **д)** –4; **е)** –2; 2; **є)** –1; 11; **ж)** $-\frac{3}{4}$; $\frac{3-\sqrt{19}}{2}$; 0; $\frac{3+\sqrt{19}}{2}$. **892.** 9. **893.** 7,5. **894.** 1. **895.** 2, 14 — корені рівняння; $m=28$. **896.** –2; 1. **897.** 1. **898.** 1; 2; 3; 4. **899.** 46 см. **900.** 4. **901.** 3; 4. **902.** 7; 9; 11. **903.** 3 см; 4 см; 5 см. **904.** 12 м^2. **905.** $\frac{5}{12}$. **906.** $\frac{3}{10}$. **907.** 4 км/год. **908.** 2 км/год. **909.** 90 км/год.

910. 72 км/год. **911.** 60 км/год. **912.** 6 днів; 12 днів. **913.** 10 днів; 20 днів. **914.** 10 автомобілів. **915.** 20.

Завдання для самоперевірки № 5

1. в). **2.** г). **3.** а). **4.** в). **5.** б). **6.** в). **7.** 1)–В); 2)–Г); 3)–А); 4)–Д). **8. а)** $(x+2)(x+4)$; **б)** $(x-1)(2x-3)$. **9.** $x_1+x_2=10$; $x_1x_2=24$. **10. а)** Коренів немає; **б)** –6. **11.** –3 і 8; –8 і 3. **12. а)** $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; **б)** –1; 1. **13.** $3\frac{1}{3}$. **14. а)** –11; 2; **б)** 1; 1,5. **15.** $b=1{,}5$. **16.** 80 км/год. **17. а)** –3; –2; 0; 1; **б)** 64. **18.** $a=-4$; $a=4$. **19.** $b=-5$. **20.** –2; 0,5. **21.** 12 год; 16 год.

Задачі за курс алгебри 8 класу

919. а) 12,5; **б)** 0; **в)** 1,8; **г)** 8. **920. б)** $\left(S-b\cdot\frac{S}{a}\right)$ км. **921. а)** $\frac{S}{b+60}$ год; **б)** $60\cdot\frac{S}{b+60}$ км.

922. а) $\frac{7y^2}{6x^2}$; **б)** $\frac{6y}{x-y}$; **в)** $\frac{a-3}{a-1}$; **г)** $\frac{a-1}{a+b}$; **д)** x^5-1; **е)** $x^5+\sqrt{5}$. **923. а)** $\frac{6a}{2a+1}$; **б)** 3; **в)** 1; **г)** $\frac{2m}{m-2n}$; **д)** $\frac{c+2}{c-2}$; **е)** $2a+b^2$. **924. а)** $\frac{a+b^2}{a^2b^3}$; **б)** $\frac{5y-3x}{45x^4y^4}$; **в)** $\frac{x^2}{y(x+y)}$; **г)** $\frac{8b}{b+2}$; **д)** $\frac{5}{3(z-3)}$; **е)** $\frac{ab}{(a-2b)^2}$; **є)** $\frac{1}{x+2}$; **ж)** $\frac{34}{y^2-4}$. **925. а)** $\frac{20a(a+1)}{3b}$; **б)** $\frac{3(x-y)}{4y^2}$; **в)** $\frac{a(a-7)}{3(a+7)}$; **г)** $\frac{1}{6}$. **926. в)** $\frac{4a^4n^4}{c^4}$; **г)** $\frac{m^8}{16k^4}$. **927. а)** $\frac{4z}{3xy^2}$; **б)** $\frac{0{,}3b^3}{ac^3}$; **в)** $\frac{m(4m+n)}{3}$; **г)** $\frac{3b}{a-b}$. **928. а)** $\frac{4b}{y}$; **б)** $\frac{3b}{a}$; **в)** $\frac{c-2}{2c-2}$; **г)** $\frac{3}{x}$; **д)** $3(a-b)$; **е)** $\frac{n-m}{m-n+1}$.

929. а) $\frac{2}{1-a^2}$; $-\frac{1}{112}$; **б)** $-\frac{4}{b+2}$; –40. **933. г)** $\frac{1}{2}$; **д)** $\frac{1}{5}$; **е)** 2. **934. в)** $3a^2b^{-2}c$; **г)** $25x^4y^{-15}$; **д)** $\frac{1}{a+1}$; **е)** $\frac{x^2-1}{x^2-2}$. **935.** 1. **941. в)** $x\ge 0$; **г)** $x\ge 0$; $x\ne 16$. **942. а)** 65; **б)** 4; **в)** 18,7; **г)** 13; **д)** 0; **е)** 22. **944. а)** 0; **б)** $4+2\sqrt{6}$; **в)** $46+4\sqrt{6}$; **г)** 17; **д)** $4\sqrt{3}$; **е)** –16; **є)** $\sqrt{10}$; **ж)** 9. **945. а)** $2x\sqrt{x}$; **б)** –7; **в)** $a-4b$; **г)** $25x$. **947. а)** $\sqrt{15}-1$; **б)** 2; **в)** $\sqrt{c}-\sqrt{3}$; **г)** $\frac{1}{x+\sqrt{3}}$. **949. а)** –6; **б)** 5; **в)** $\frac{a}{\sqrt{ab}+b}$; **г)** $\sqrt{x}-\sqrt{y}$. **950. а)** 10; **б)** 5; **в)** 4; **г)** $2\frac{8}{9}$.

951. $\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{ab}}$. **954. а)** –3; 5; **б)** –1; 3,5; **в)** –6; 1; **г)** $\frac{2-2\sqrt{7}}{3}$; $\frac{2+2\sqrt{7}}{3}$. **955. а)** 3; 5; **б)** 0,5; **в)** 0; 2; 3; **г)** –3; 0; 2. **956. а)** –3; 3; **б)** –4; –0,5; 0,5; 4; **в)** –8; 0; **г)** 1; 2; 3; 4. **957. а)** –1; 4; **б)** $1-\sqrt{6}$; $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$; $1+\sqrt{6}$; **в)** –4; 2. **958.** 3. **959.** $-\frac{2}{3}$. **961.** $c=-1$; $-\frac{1}{3}$ — другий корінь. **962.** 2 і $\frac{1}{3}$ — корені, $b=-7$ або –2 і $-\frac{1}{3}$ — корені, $b=7$. **963.** 232. **964.** –1400. **965.** 6. **966. а)** $a=-0{,}5$; $a=0$; **б)** $a=-1$; $a=0$; $a=\frac{1}{3}$. **967.** $a=-3$. **970. а)** 3; **б)** 1; **в)** –4; 1; **г)** –2; 1; **д)** 1,2; **е)** –7; –5; **є)** 1; 5. **971.** $a=-1$; $a=-0{,}5$. **972. а)** Якщо $a\neq 2$, то $x=2a-1$; якщо $a=2$, то коренів немає; **б)** якщо $a\neq -2$ і $a\neq 2$, то $x=2a$; якщо $a=-2$ або $a=2$, то коренів немає. **973. а)** –1; 3; **б)** 0. **974. в)** 4. **975. а)** 6; **б)** –1; 3; **в)** 25; **г)** –4; 1. **977. а)** (–7; 49); (5; 25); **б)** (0; 0); (0,25; 0,5). **978. а)** –0,5; 2; **б)** –1; 4; **в)** 4. **979.** Так. **982.** –3 і –2 або 4 і 5. **983.** –2, –1, 0, 1, 2 або 10, 11, 12, 13, 14. **984.** 24 см. **985.** 48 см^2. **986.** $\frac{1}{5}$. **987.** 7 деталей. **988.** 20 год. **989.** 6 год; 8 год. **990.** 6 год; 4 год. **991.** 3 км/год; 1 км/год. **992.** 60 км/год. **993.** 8 команд. **994.** 4 оберти.

Задачі підвищеної складності

995. а) x^2+x-2; **б)** $\frac{x^2+ax+a^2}{x+a}$. **997.** $\frac{32}{1-x^{32}}$. **999.** $\frac{100}{101}$. **1000.** $n=2$; $n=3$. **1001.** *Вказівка*. Помножте чисельник і знаменник першого дробу на z, а другого — на xz. Тоді на основі умови $xyz=1$ усі три дроби матимуть однакові знаменники. **1002.** –1; 8. **1006.** Якщо $a\neq -1$, $a\neq 0$ і $a\neq 2$, то $x=\frac{3a}{a+1}$; якщо $a=-1$, $a=0$ або $a=2$, то коренів немає. **1009.** *Вказівка*. Врахуйте, що запис квадрата натурального числа не може закінчуватися цифрою 8. **1010. а)** $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$; **б)** $\sqrt{a+1}+1$. **1011.** $\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{7}+1)(2\sqrt{5}+1)}{19}$. **1014. а)** Коренів немає; **б)** 0; **в)** 4; **г)** –2; 14. **1015.** $x=4$; $y=4$. **1016. б)** $\frac{9}{16}$. **1019.** Якщо $a<0$ або $a=1$, то коренів немає; якщо $a\geq 0$ і $a\neq 1$ — 1 корінь. **1020.** $a<0$. **1025.** $a=1$. **1026.** $c=0$; $c=-4$. **1027.** $x^2+(p^3-p^2-3pq+2q)x-p(p^2-2q)(p^2-3q)=0$.

1028. $\sqrt{2\sqrt{q}-p}$. **1029. а)** –3, 1; **б)** 0,5; **в)** 0; $7-2\sqrt{3}$; $7+2\sqrt{3}$; **г)** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; **д)** 1; **е)** 1.

1030. 18. **1031.** 1. **1032.** Один корінь. **1033. а)** Якщо $a>0$, то $x_1=-\sqrt{a}$, $x_2=\sqrt{a}$; якщо $a=0$, то $x=0$; якщо $a<0$, то $x_1=-2\sqrt{-a}$, $x_2=2\sqrt{-a}$; **б)** якщо $a\neq-4$, $a\neq-2$, $a\neq-1$, $a\neq0$ і $a\neq1$, то $x_1=-2a$, $x_2=a+2$; якщо $a=-4$, то $x=8$; якщо $a=-2$, то $x=4$; якщо $a=-1$, то $x=1$; якщо $a=0$, то коренів немає; якщо $a=1$, то $x=3$. **1034.** $a=-1$. **1035.** $a=8$; $a=12$. **1037.** 5; 6; 7; 8. **1038.** 6 хв. **1039.** 50 км/год. **1040.** 56 с. **1041.** 64 км/год. **1042.** $3\sqrt{2}$ км/год. **1043.** 8 л. **1044.** 10 л або 20 л.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Навчальне видання

Кравчук Василь Ростиславович
Підручна Марія Василівна
Янченко Галина Михайлівна

АЛГЕБРА

Підручник для 8 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Редактори: *Ярослав Гап'юк, Ярослав Гринчишин, Сергій Мартинюк*
Літературне редагування *Людмили Олійник*
Обкладинка *Світлани Демчак*

Відповідальний за випуск *Сергій Мартинюк*

Виготовлено згідно із СОУ 22.2-02477019-07:2012

Формат 60×84/16. 14,88 ум. др. арк., 12,25 обл.-вид. арк. Тираж 17 768. Замовлення № 20-16
Видавець і виготовлювач Редакція газети «Підручники і посібники».
46000, м. Тернопіль, вул. Поліська, 6а. Тел.: (0352) 43-15-15; 43-10-21.
Збут: zbut@pp-books.com.ua   Редакція: red@pp-books.com.ua
Виробництво: print@pp-books.com.ua
www.pp-books.com.ua
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 4678 від 21.01.2014 р.
Книга-поштою: а/с 376, Тернопіль, 46011.
Тел.: (0352) 42-43-76; 097-50-35-376
post@pp-books.com.u

Надруковано з готових файлів на ПрАТ «Львівська книжкова фабрика «Атлас»
79005, м. Львів, вул. Зелена, 20
тел. (032) 276-45-79, 276-45-80
atlas_book_2@ukr.net
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 1110 від 08.11.2002 р.