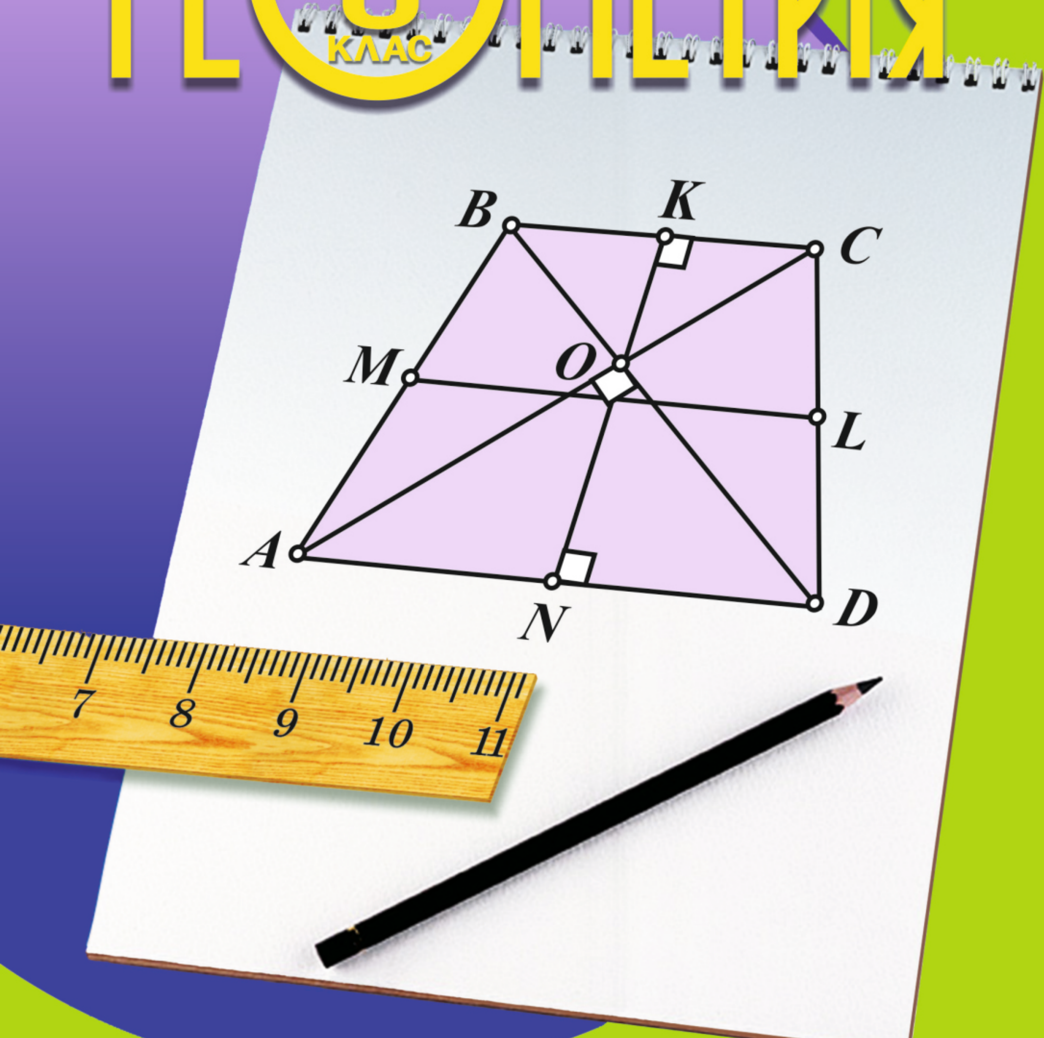
Олександр Роганін • Анатолій Капіносов • Лариса Кондратьєва

ГЕОМЕТРІЯ

8 КЛАС



Видавництво «Підручники і посібники»™

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я723
Р 59

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для учнів 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Варбанець С. В., учитель комунального закладу «Погребищенська загальноосвітня школа № 1 I–III ступенів Погребищенської районної ради Вінницької області», старший учитель;

Бурлака Л. А., методист інформаційно-аналітичного методичного центру департаменту освіти і науки, молоді та спорту Запорізької міської ради Запорізької області;

Кононович Т. О., доцент кафедри математичного аналізу та інформатики Полтавського національного педагогічного університету імені В. Г. Короленка, кандидат фізико-математичних наук.

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(*наказ МОН України від 10.05.2016 р. № 491*)

Роганін О.

Р 59 Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. Роганін, А. Капіносов, Л. Кондратьєва. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2016. — 256 с.

ISBN 978-966-07-3027-4

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я723

ISBN 978-966-07-3027-4

ЮНІ ДРУЗІ!

Ми продовжуємо вивчення однієї з основних математичних дисциплін — геометрії. У 8 класі ми поглибимо знання про вже відомі геометричні фігури — кути, трикутники, досліджуватимемо нові геометричні фігури — многокутники, зокрема, чотирикутники та їх види. Основним методом здобуття знань будуть міркування. Перед вами розкриватиметься цінність, вагомість і практична значимість геометричних знань.

Матеріал, який ми вивчатимемо, поділено на чотири розділи, тринадцять параграфів, а великі параграфи — на пункти.

Кожен параграф містить виклад теоретичного матеріалу: означення, теореми та їх доведення. Означенням і теоремам, як правило, передують конкретні приклади. Виклад теорії супроводжується рисунками, які відображають послідовність виконуваних побудов. Усе це призначене для того, щоб полегшити розуміння матеріалу. Доведення деяких теорем подано в рубриці «Для тих, хто хоче знати більше». Під цією рубрикою містяться відомості, які розширюють і поглиблюють основний зміст тем.

Після викладу теоретичної частини кожної теми в рубриці «Запитання та завдання» подано систему завдань. Її призначення — допомогти краще зрозуміти, осмислити, запам'ятати елементи теорії та набути найпростіших навичок оперування геометричними знаннями про фігури.

У кожному параграфі є рубрики «Запитання та завдання», «Основне в параграфі», «Для тих, хто хоче знати більше», «Розв'язуємо разом», «Застосуйте знання», «Задачі до параграфа», «Цікаво знати». У теоретичному матеріалі й рубриці «Розв'язуємо разом» значком «•» виділено початок і закінчення доведення теореми чи розв'язання задачі.

У рубриці «Задачі до параграфа» чорним позначено номери задач, які рекомендовано для класної роботи, а кольором — для домашньої, а задачі, які будуть корисними в подальшому вивченні геометрії (опорні), позначені значком, наприклад, **100.**. Задачі в цій рубриці подано за трьома рівнями: А — задачі початкового та середнього рівнів, Б — достатнього, В — високого.

Рубрики «Цікаво знати», «Застосуйте знання» призначено для індивідуальної роботи учнів.

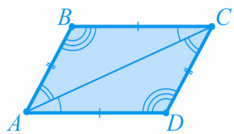
За допомогою завдань рубрик «Контроль навчальних досягнень» і «Задачі за курс геометрії 8 класу» ви зможете перевірити свої знання.

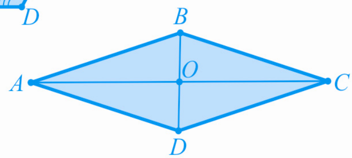
Щиро бажаємо успіху!

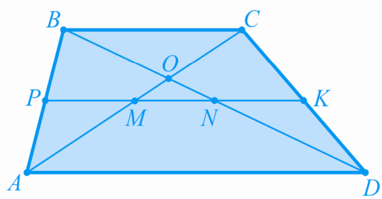
Розділ I. ЧОТИРИКУТНИКИ

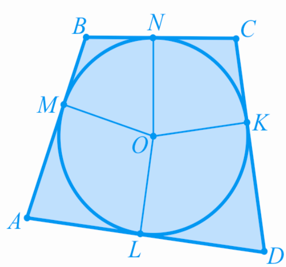
Опрацювавши цей розділ, ми з’ясуємо:

- які є види чотирикутників;
- властивості чотирикутників;
- що таке вписані й описані чотирикутники.





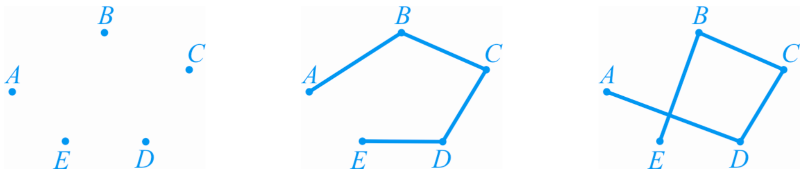




§ 1. ЧОТИРИКУТНИКИ

1.1. Проста замкнена ламана

1. Ламана.



а) б) в)

Рис. 1

Нехай дано скінченне число точок, наприклад, п’ять (рис. 1 а). Послідовно сполучимо дані точки відрізками у послідовності: $A \to B \to C \to D \to E$ (рис. 1 б). Отримали фігуру, яку називають *ламаною* *ABCDE*. На рис. 1 в) дані точки сполучили в іншій послідовності й отримали ламану *ADCBE*.

Означення

***Ламаною* називають фігуру, яка складається зі скінченного числа точок — *вершин* і відрізків, які їх послідовно сполучають, — *ланок* і при цьому жодні три послідовні вершини не лежать на одній прямій.**

Позначають ламані за вершинами у послідовності їх сполучення. Першу та останню вершини називають *кінцями ламаної*. Дві ланки, які мають спільну вершину, називають *сусідніми*. Наприклад, у ламаної *ABCDE* (рис. 1 б) *AB* та *BC* — сусідні ланки, *AB* та *CD* — несусідні.

2. Проста ламана.

У ламаної *ABCDE* (рис. 1 б) немає точок самоперетину: жодні дві її несусідні ланки не мають спільної точки. Таку ламану називають *простою*. Ламана *ADCBE* (рис. 1 в) має точку самоперетину: дві несусідні ланки *AD* та *BE* перетинаються. Ця ламана не є простою.

Означення

***Простою ламаною* називають ламану, у якої несусідні ланки не мають спільних точок.**

3. Замкнена ламана.

а) б)

Рис. 2

Якщо сполучити відрізком *AD* кінці ламаної *ABCD* (рис. 2 а), то отримаємо нову ламану з тими ж вершинами та доданою ланкою *AD* (рис. 2 б). Кінці в нової ламаної збігаються. Природно таку ламану назвати *замкненою*.

Означення | ***Замкненою ламаною* називають ламану, у якої кінці збігаються.**

Позначаючи замкнену ламану, кожну вершину записують один раз. У замкненої ламаної ланок стільки, скільки вершин. Наприклад, замкнена ламана *MOPKL* складається з п’яти вершин: *M*, *O*, *P*, *K* і *L* та п’яти ланок: *MO*, *OP*, *PK*, *KL* і *LM*.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Накресліть просту незамкнену ламану, яка складається з: **а)** двох ланок; **б)** чотирьох ланок.

2. Накресліть незамкнену ламану, яка складається з чотирьох ланок і не є простою.

3. Накресліть просту замкнену ламану, яка складається з: **а)** чотирьох ланок; **б)** шести ланок.

4. Скільки вершин і ланок має: **а)** проста ламана *MPKO*; **б)** проста замкнена ламана *ABML*? Назвіть їх.

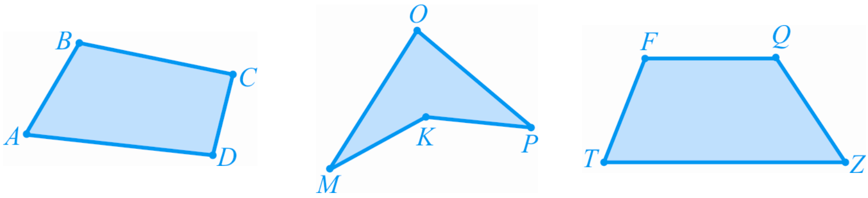
5. Якою — замкненою чи незамкненою — є проста ламана, якщо в неї: **а)** чотири вершини та чотири ланки; **б)** чотири вершини та три ланки; **в)** n вершин і n ланок?

6. Скільки найменше ланок може бути у простої ламаної, якщо вона: **а)** незамкнена; **б)** замкнена? Накресліть такі ламані.

7. Накресліть просту замкнену ламану, яка складається із трьох ланок. Яку фігуру вона утворює разом з областю, що обмежує?

1.2. Чотирикутники

1. Чотирикутник і його елементи.



а) б) в)

Рис. 3

На рис. 3 а) – в) зображено фігури, кожна з яких складається з чотирьох відрізків, що утворюють просту замкнену ламану, та частини площини, обмеженої цією ламаною. Такі фігури називають *чотирикутниками*.

Означення **_Чотирикутником_ називають фігуру, що складається з простої замкненої ламаної, утвореної чотирма ланками, та частини площини, яку обмежує ламана.**

Вершини та сторони.

Ланки ламаної, які утворюють чотирикутник, називають *сторонами чотирикутника*, а їхні кінці — його *вершинами*. З означення простої замкненої ламаної випливає, що жодні три вершини чотирикутника не лежать на одній прямій. Частину площини, обмежену сторонами чотирикутника, називають *внутрішньою областю чотирикутника*. Позначають чотирикутник за вершинами, як і відповідну ламану. Наприклад, на рисунку 3 а) зображено чотирикутник $ABCD$.

Дві вершини чотирикутника, які є кінцями однієї його сторони, називають *сусідніми*, а вершини, які не є кінцями однієї сторони, — *протилежними*. Сторони чотирикутника, які мають спільну вершину, називають *сусідніми*, а сторони, які не мають спільної вершини, — *протилежними*. У кожного чотирикутника дві пари протилежних вершин і дві пари протилежних сторін.

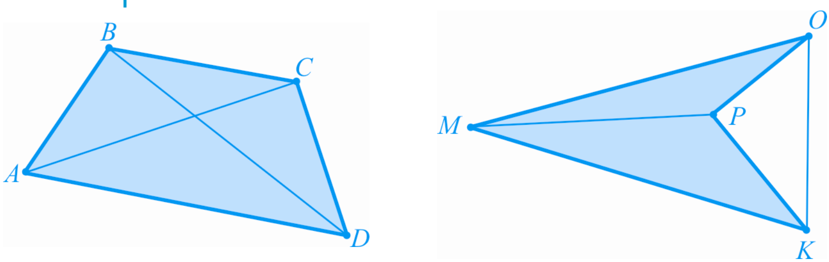
На рис. 3 а) зображено чотирикутник $ABCD$. Точки A, B, C і D — його вершини, відрізки AB, BC, CD і DA — сторони. Внутрішню область затушовано. A і C, B і D — пари протилежних вершин, AB і CD та AD і BC — пари протилежних сторін.

У будь-якому чотирикутнику кожна сторона менша від суми трьох інших сторін (див. приклади розв'язання задач на с. 15).

Периметром чотирикутника називають суму довжин усіх його сторін. Позначають його літерою P. $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$.

Діагоналі.

Означення **|** ***Діагоналлю чотирикутника*** **називають відрізок, який сполучає його протилежні вершини.**



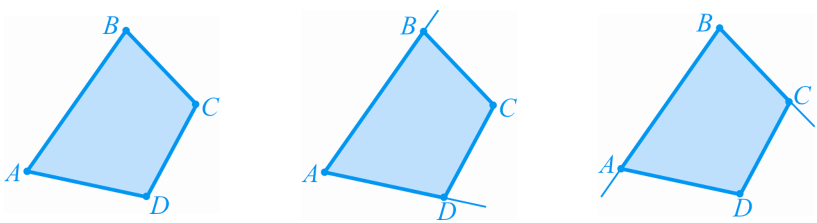
а) **б)**

Рис. 4

У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD, а в чотирикутнику $MOPK$ — діагоналі MP і OK (рис. 4).

Кути.

Нехай дано чотирикутник $ABCD$ (рис. 5 а). При вершині A побудуємо кут, сторонами якого є промені AB та AD, що містить внутрішні точки чотирикутника (рис. 5 б). Такий кут називають *кутом* чотирикутника $ABCD$ при вершині A. На рис. 5 в) зображено кут чотирикутника $ABCD$ при вершині B.



а) **б)** **в)**

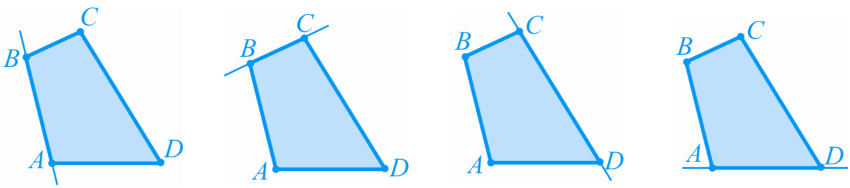
Рис. 5

У кожного чотирикутника є чотири кути. Кути при двох протилежних вершинах називають *протилежними*, а кути при сусідніх вершинах — *сусідніми*, або *прилеглими до однієї сторони*.

Кут, суміжний із кутом чотирикутника, називають *зовнішнім кутом чотирикутника*.

2. Опуклі та неопуклі чотирикутники.

Чотирикутники поділяють на опуклі й неопуклі (вгнуті).



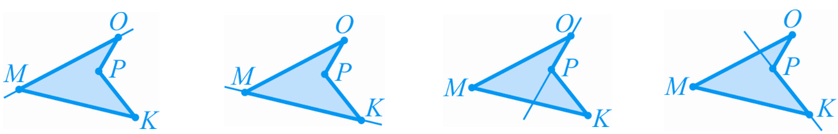
а) б) в) г)

Рис. 6

На рис. 6 а) – г) зображено чотирикутник *ABCD*. Він лежить в одній півплощині (з одного боку): відносно прямої *AB* (рис. 6 а), прямої *BC* (рис. 6 б), прямої *CD* (рис. 6 в) і прямої *AD* (рис. 6 г). Можна сказати інакше: жодна з прямих, яка містить сторони чотирикутника, не поділяє його на частини. Такий чотирикутник називають *опуклим*.

Означення

Опуклим чотирикутником **називають чотирикутник, який лежить в одній півплощині відносно кожної прямої, яка містить його сторону.**



а) б) в) г)

Рис. 7

Чотирикутник *MOPK*, зображений на рис. 7 а) – г), відносно прямих *MO* і *MK* лежить в одній півплощині (рис. 7 а) – б). Відносно ж прямих *OP* і *PK* чотирикутник *MOPK* лежить у різних півплощинах (рис. 7 в) – г), тобто прямі *OP* і *PK* поділяють його на дві частини.

Неопуклим (вгнутим) чотирикутником називають чотирикутник, для якого існує пряма, що містить його сторону і відносно якої він лежить у різних півплощинах.

Далі ми вивчатимемо лише опуклі чотирикутники.

3. Теорема про суму кутів чотирикутника.

Теорема **Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.**

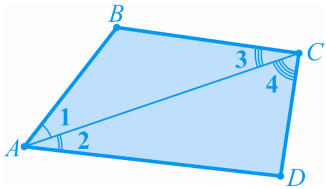


Рис. 8

● **Доведення.** Нехай *ABCD* — довільний опуклий чотирикутник (рис. 8). Доведемо, що $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.

Проведемо одну з його діагоналей, наприклад, *AC*. Вона поділить чотирикутник *ABCD* на два трикутники *ABC* і *ADC*. Кути, на які діагональ поділяє кути чотирикутника, позначимо як 1–4. За теоремою про суму кутів трикутника: $\angle 1 + \angle B + \angle 3 = 180°$ (для трикутника *ABC*), $\angle 2 + \angle D + \angle 4 = 180°$ (для трикутника *ADC*). Почастинно додамо отримані рівності:

$$\angle 1 + \angle B + \angle 3 + \angle 2 + \angle D + \angle 4 = 180° + 180°.$$

$$(\angle 1 + \angle 2) + \angle B + \angle D + (\angle 3 + \angle 4) = 360°; \ \angle A + \angle B + \angle D + \angle C = 360°.$$ ●

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

8. Зобразіть чотирикутник *MNKL*, затушуйте його внутрішню область і проведіть його діагоналі. **а)** Запишіть: пари протилежних вершин; пари протилежних сторін; діагоналі чотирикутника; **б)** накресліть сторони кута *M* чотирикутника; **в)** накресліть відрізок, який дорівнює периметру чотирикутника.

9. Накресліть опуклий чотирикутник *MPOL*. Проведіть прямі, які містять сторони чотирикутника. Поясніть, який чотирикутник називають опуклим.

10. Накресліть неопуклий чотирикутник *AODK* з кутом *A*, більшим від розгорнутого.

11. Чи існує чотирикутник, у якого сторони дорівнюють: **а)** 3 см, 5 см, 7 см і 12 см; **б)** 3 см, 5 см, 7 см і 16 см; **в)** 4 см, 6 см, 8 см і 18 см? Якщо існує, то обчисліть його периметр.

12. Сума трьох кутів чотирикутника дорівнює 220°. Знайдіть його четвертий кут.

13. Сума двох протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180°. Чому дорівнює сума двох інших його кутів?

14. У чотирикутнику всі кути рівні. Чому дорівнює градусна міра кожного кута?

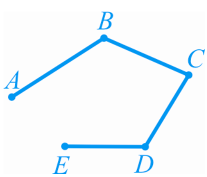
15. Знайдіть четвертий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють 100°; 110° і 120°.

16. Накресліть чотирикутник, у якого три кути гострі. Яким є четвертий кут чотирикутника? Поясніть, чому не існує чотирикутника із чотирма гострими кутами.

17. Накресліть чотирикутник, у якого три кути тупі. Яким є четвертий кут чотирикутника? Поясніть, чому не існує чотирикутника з чотирма тупими кутами.

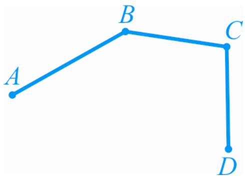
ОСНОВНЕ В § 1

ПРОСТА ЗАМКНЕНА ЛАМАНА

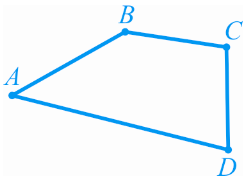


Ламаною називають фігуру, яка складається зі скінченного числа точок — ***вершин***, і відрізків, які їх послідовно сполучають, — ***ланок***.

При цьому жодні три послідовні вершини не лежать на одній прямій.

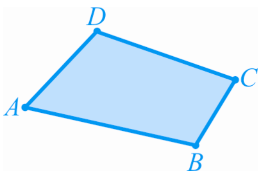


Простою ламаною називають ламану, у якої несусідні ланки не мають спільних точок.

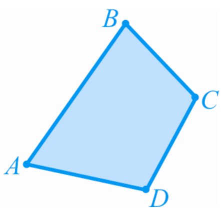


Замкненою ламаною називають ламану, у якої кінці збігаються.

ЧОТИРИКУТНИКИ

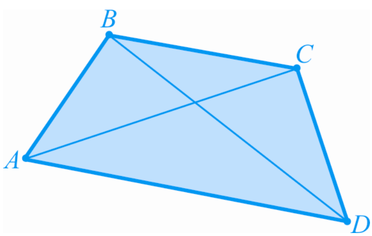


Чотирикутником називають фігуру, що складається з простої замкненої ламаної, утвореної чотирма ланками, та частини площини, яку обмежує ламана.

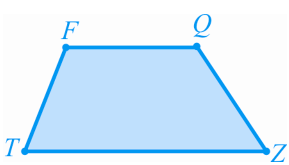


Периметром чотирикутника називають суму довжин усіх його сторін.

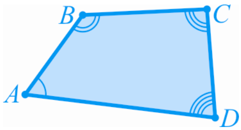
$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$$



Діагоналлю *чотирикутника* називають відрізок, який сполучає його протилежні вершини.



Опуклим чотирикутником називають чотирикутник, який лежить в одній півплощині відносно кожної прямої, яка містить його сторону.



Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$$

РОЗВ’ЯЗУЄМО РАЗОМ

Задача 1. Довести, що в будь-якому чотирикутнику кожна сторона менша від суми трьох інших сторін.

● **Доведення.** Нехай *ABCD* — опуклий чотирикутник (рис. 9). Доведемо, наприклад, що $AB < BC + CD + AD$.

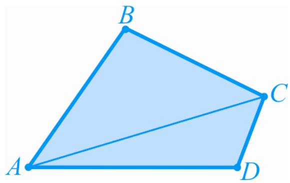


Рис. 9

Проведемо одну з діагоналей чотирикутника, наприклад, *AC*. З трикутника *ABC* за нерівністю трикутника маємо:

$$AB < BC + AC; \qquad (1)$$

з трикутника *ACD*:

$$AC < CD + AD. \qquad (2)$$

Якщо в нерівності (1) замінити довжину сторони *AC* більшою сумою довжин відрізків *CD* і *AD* (2), то $AB < BC + CD + AD$. ●

Задача 2. Знайти кути чотирикутника, якщо вони пропорційні до чисел 1, 2, 3 і 4.

Розв’язання

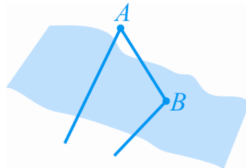
● Позначимо кути даного чотирикутника $x°$, $2x°$, $3x°$ і $4x°$. Оскільки сума кутів чотирикутника дорівнює 360°, то $x + 2x + 3x + 4x = 360$. Отримуємо: $10x = 360$; $x = 36$. Тоді $2x = 72$; $3x = 108$; $4x = 144$.

Відповідь: 36°; 72°; 108°; 144°. ●

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Наведіть приклади предметів з довкілля, які мають форму чотирикутника.

2. Як визначити суму кутів *A* і *B* (див. рис.), вершини яких недоступні?



ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

Властивість діагоналей опуклого чотирикутника.

В опуклому чотирикутнику *ABCD* (рис. 10) діагональ *AC* належить йому та поділяє його на два трикутники: *ABC* і *ACD*. Аналогічно діагональ *BD* належить йому та поділяє його на два трикутники: *ABD* і *CBD*. У неопуклому чотирикутнику *ABCD* (рис. 11) така властивість притаманна лише для однієї діагоналі — діагоналі *BD*; діагональ *AC* не поділяє чотирикутник на два трикутники.

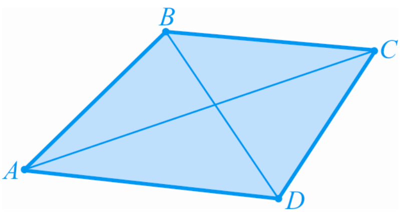


Рис. 10

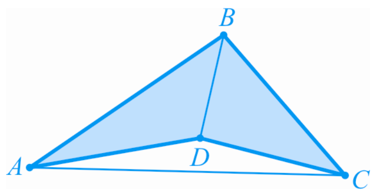


Рис. 11

Теорема **В опуклому чотирикутнику діагоналі перетинаються.**

● **Доведення.** Нехай *ABCD* — довільний опуклий чотирикутник (рис. 10). Кожна з діагоналей належить чотирикутнику і поділяє його на два трикутники. Доведемо, що діагоналі *AC* і *BD* перетинаються.

З того, що діагональ чотирикутника поділяє його на два трикутники, випливає, що протилежні вершини опуклого чотирикутника лежать з різних боків від прямої, що проходить через дві інші вершини. А це означає, що відрізок *AC* перетинає пряму *BD*, а відрізок *BD* перетинає пряму *AC*. Звідси випливає, що прямі *AC* і *BD* перетинаються, а їхня спільна точка належить кожному з відрізків *AC* і *BD*. Отже, діагоналі *AC* і *BD* перетинаються, що й потрібно було довести. ●

Зауваження. У неопуклому чотирикутнику (рис. 11) один з кутів більший від розгорнутого. Діагоналі неопуклого чотирикутника не перетинаються, одна з діагоналей належить чотирикутнику та поділяє його на два трикутники.

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 1

1. На прикладі поясніть, яку фігуру називають: **а)** ламаною; **б)** простою ламаною; **в)** замкненою ламаною.

2. Накресліть чотирикутник і поясніть, яку фігуру називають чотирикутником.

3. На прикладі поясніть, що в чотирикутнику називають: **а)** діагоналлю; **б)** кутом.

4. Накресліть опуклий і неопуклий чотирикутники. Який чотирикутник називають опуклим?

5. Чому дорівнює сума кутів чотирикутника?

6. Сформулюйте теорему про суму кутів чотирикутника.

7. Доведіть теорему про суму кутів чотирикутника.

ЗАДАЧІ ДО § 1

РІВЕНЬ А

18. На рис. 12 зображено чотирикутник з вершинами *A*, *B*, *C* і *D*.

а) Яке з позначень — *BCDA* чи *ACDB* — є правильним?

б) Назвіть вершини чотирикутника, які є сусідніми з вершиною *A*.

в) Назвіть сторони чотирикутника, сусідні зі стороною *BC*.

г) Назвіть сторону чотирикутника, протилежну до сторони *CD*.

д) Назвіть кут, протилежний куту *C*.

е) Назвіть діагоналі чотирикутника і відрізки, на які вони поділяються точкою перетину.

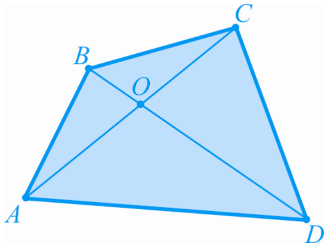


Рис. 12

19. Три сторони чотирикутника дорівнюють 3 см, 7 см і 9 см, а його периметр — 36 см. Знайдіть четверту сторону.

20. Знайдіть периметр чотирикутника, якщо одна його сторона дорівнює 25 см і вона менша від кожної іншої сторони відповідно на 2 см, 10 см, 13 см.

21. Периметр чотирикутника дорівнює 64 см. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо вони пропорційні до чисел 2, 3, 4 і 7.

22. Чи може в опуклого чотирикутника бути: **а)** два прямих кути; **б)** три гострих кути; **в)** три тупих кути?

23. Знайдіть кути опуклого чотирикутника, якщо вони пропорційні до чисел 2, 5, 8 і 9.

24. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle B = \angle C$, $\angle A = 100°$, $\angle D = 40°$. Знайдіть зовнішній кут при вершині C.

25. Обчисліть зовнішній кут опуклого чотирикутника при вершині D, якщо $\angle A = 40°$, $\angle B = 150°$, $\angle C = 100°$.

26. Побудуйте чотирикутник $ABCD$, у якого $AD = 6$ см, $\angle A = 110°$, $AB = 4$ см, $\angle B = 90°$ і $BC = 5$ см.

27. Побудуйте чотирикутник $ABCD$, у якого $AD = 6$ см, $AB = 3$ см, $\angle A = 90°$, $\angle D = 70°$ і $\angle B = 120°$.

РІВЕНЬ Б

28. Побудуйте чотирикутник $ABCD$, у якого $AD = 5$ см, $\angle A = 80°$, $\angle D = 70°$, $AB = 4$ см і $DC = 3$ см.

29. Знайдіть кути чотирикутника $ABCD$, якщо відомо, що один з кутів утричі менший від кожного з інших.

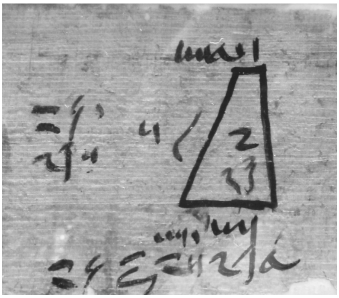
30. У чотирикутнику $MNKP$ сторони NK і MP паралельні. Визначте кути N і P, якщо $\angle M = 41°$, $\angle K = 125°$.
31. Периметр чотирикутника дорівнює 29 см. Знайдіть довжину діагоналі, яка поділяє його на два трикутники з периметрами 26 см і 27 см.
32. Знайдіть периметр чотирикутника, у якого діагональ завдовжки 15 см поділяє його на трикутники з периметрами 32 см і 33 см.
33. Доведіть, що найменший кут чотирикутника не може бути тупим.
34. Доведіть, що в чотирикутнику один з кутів не може дорівнювати сумі трьох інших кутів.
35. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагональ BD поділяє навпіл кут B, а сусідні сторони AB і BC рівні. Доведіть, що сусідні сторони AD і CD також рівні.
36. В опуклому чотирикутнику $MOKL$ усі сторони рівні. Доведіть, що кути O і L чотирикутника рівні.
37. Побудуйте чотирикутник $ABCD$ зі сторонами $AB = 2$ см; $AD = 4$ см; $CD = 3$ см, діагоналлю $AC = 5$ см і $\angle A = 120°$.
38. Побудуйте чотирикутник $ABCD$ зі сторонами $AB = 4$ см, $AD = 6$ см і $CD = 2$ см і діагоналями $AC = 7$ см, $BD = 2$ см.

РІВЕНЬ В

39. Знайдіть сторони чотирикутника, периметр якого дорівнює 82 см, якщо перша його сторона на 2 см більша від другої, удвічі менша від третьої й становить третю частину четвертої сторони.
40. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $AB = BC$ і $AD = CD$. Доведіть, що діагоналі чотирикутника перпендикулярні.
41. У чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC поділяє кути A і C навпіл. Периметр чотирикутника дорівнює 32 см, а сторона AB — 7 см. Знайдіть три інші сторони чотирикутника.
42. Побудуйте чотирикутник за трьома кутами та двома сторонами, який утворюють четвертий кут.
43. Побудуйте чотирикутник за чотирма сторонами та діагоналлю.
44. Побудуйте чотирикутник за чотирма сторонами та кутом.
45. Позначте точки M, O і P, які не лежать на одній прямій. Знайдіть усі можливі положення точки K, за яких чотирикутник $MOPK$ є неопуклим.

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Інформація про деякі властивості окремих видів чотирикутників містилася ще в давніх єгипетських і вавилонських рукописах. Зокрема, записи про чотирикутники містить папірус Ахмеса (бл. 2000 років до н. е.).
- Знання про окремі види чотирикутників викладені й у «Началах» Евкліда, а цілісна теорія чотирикутників і сучасна термінологія були розроблені вже наприкінці середніх віків.



Папірус Ахмеса (бл. 2000 р. до н. е.)

Латинський переклад «Начал» Евкліда (XIV ст.)

- Логічно послідовний виклад теорії чотирикутників містить «Підручник з елементарної геометрії» одного з найвидатніших математиків XIX століття, українського вченого Михайла Васильовича Остроградського. Він писав, що чотирикутники поділяють на опуклі й неопуклі. Чотирикутник буде опуклим, відзначав М. В. Остроградський, «коли весь лежить з одного боку від кожної зі своїх сторін, на скільки б остання не була продовжена».

М. В. ОСТРОГРАДСЬКИЙ (1801 – 1862)

- Термін *«діагональ»* походить від поєднання двох грецьких слів: *«діа»* — *«через, крізь»* і *«гоніа»* — *«кут»*, тобто означає *«той, що йде від кута до кута»*. Загальновживаним термін став лише у XVIII столітті. Евклід і більшість давньогрецьких учених користувалися іншим терміном для позначення відрізка, який сполучає протилежні вершини чотирикутника — *діаметр*.

§ 2. ПАРАЛЕЛОГРАМ

2.1. Паралелограм і його властивості

1. Означення паралелограма.

На рис. 13 пара паралельних прямих *a* та *b* перетинається іншою парою паралельних прямих *c* і *d*. У результаті перетину утворився чотирикутник *ABCD*. Такий чотирикутник називають *паралелограмом*.

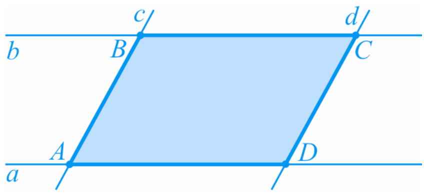


Рис. 13

Означення ***Паралелограмом*** **називають чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні.**

Паралелограм є опуклим чотирикутником, тому він має всі його властивості. Зокрема, кожна діагональ поділяє його на трикутники, діагоналі перетинаються, сума всіх його кутів дорівнює 360°. Установимо інші властивості паралелограма.

2. Властивості кутів і сторін паралелограма.

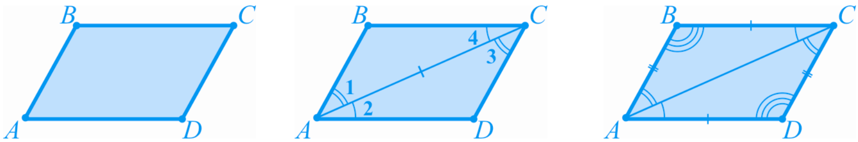
З означення паралелограма слідує таке твердження.

Наслідок **Сума кутів паралелограма, прилеглих до будь-якої його сторони, дорівнює 180°.**

Справді, кути, прилеглі до однієї сторони паралелограма, є внутрішніми односторонніми при перетині паралельних прямих січною, і за властивістю паралельних прямих їх сума дорівнює 180°. У паралелограмі *ABCD* (рис. 13): $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle B + \angle C = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$ і $\angle D + \angle A = 180°$.

Теорема **У паралелограма протилежні сторони та кути рівні.**

● **Доведення.** Нехай *ABCD* — довільний паралелограм (рис. 14 а). Доведемо, що $AB = CD$, $BC = AD$ і $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.



а) б) в)

Рис. 14

1. Проведемо одну з діагоналей паралелограма, наприклад, AC. Вона поділяє паралелограм на два трикутники: ΔABC і ΔCDA (рис. 14 б). Для зручності кути, на які діагональ AC поділяє кути A і C, позначимо як 1–4.

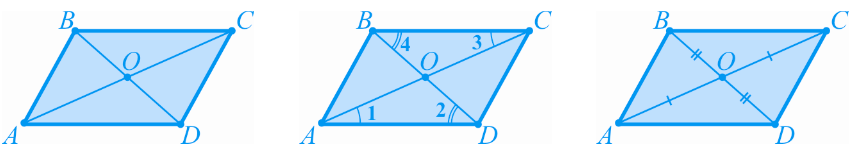
2. Розглянемо трикутники ABC і CDA. У них AC — спільна сторона, $\angle 1 = \angle 3$ як внутрішні різносторонні при $AB \| CD$ і січній AC, $\angle 2 = \angle 4$ як внутрішні різносторонні при $BC \| AD$ і січній AC. Отже, $\Delta ABC = \Delta CDA$ за стороною і двома прилеглими кутами (друга ознака рівності трикутників).

3. З рівності трикутників випливає, що $AB = CD$, $BC = AD$ та $\angle B = \angle D$ як відповідні елементи рівних трикутників (рис. 14 в).

4. Кути A і C рівні як суми рівних кутів: $\angle A = \angle 1 + \angle 2$, $\angle C = \angle 3 + \angle 4$.

Теорему доведено. ●

3. Властивість діагоналей паралелограма.



а) б) в)

Рис. 15

Теорема | **Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.**

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — довільний паралелограм. Проведемо його діагоналі AC і BD, які за властивістю паралелограма перетинаються (рис. 15). Позначимо точку їх перетину через O.

Доведемо, що $AO = OC$ і $BO = OD$.

1. Діагоналі паралелограма поділяють його на чотири трикутники. Розглянемо два з них, які містять протилежні сторони паралелограма, наприклад, $\Delta AOD = \Delta COB$. У них $AD = BC$ (доведена властивість) $\angle 1 = \angle 3$ як внутрішні різносторонні при $AD \| BC$ і січній AC, $\angle 2 = \angle 4$ як внутрішні різносторонні при $AD \| BC$ і січній BD. Отже, $\Delta AOD = \Delta COB$.

2. З рівності трикутників випливає, що $AO = OC$ і $BO = OD$.

Теорему доведено. ●

4. Висоти паралелограма.

На рис. 16 зображено паралелограм $ABCD$ та паралельні прямі a і b, яким належать протилежні сторони AD і BC паралелограма. MN, BP, ST і LO — спільні перпендикуляри до прямих a і b. Усі вони рівні й кожен з них називають *висотою паралелограма*.

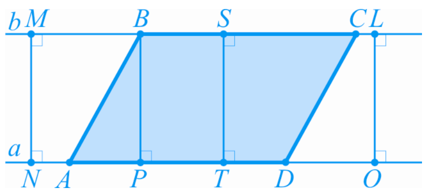
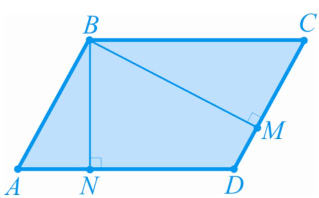


Рис. 16

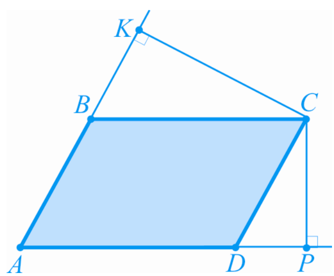
Означення

Висотою паралелограма **називають спільний перпендикуляр до прямих, які містять протилежні сторони паралелограма. Висотою паралелограма називають також і довжину перпендикуляра.**

Здебільшого висоти паралелограма проводять з його вершин. У паралелограма $ABCD$ на рис. 17 а) проведено висоти BN і BM з вершини B, а на рис. 17 б) — висоти CK і CP з вершини C.



а)



б)

Рис. 17

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

46. Накресліть паралелограм *ACDK*, проведіть його діагоналі. Запишіть властивості: **а)** протилежних сторін паралелограма за означенням і за теоремою; **б)** сусідніх кутів; **в)** протилежних кутів; **г)** діагоналей.

47. Яку з ознак рівності трикутників використовують для доведення властивостей: **а)** протилежних сторін; **б)** протилежних кутів; **в)** діагоналей паралелограма?

48. Дві сторони паралелограма дорівнюють 2 см і 5 см. Як називають ці сторони? Чому дорівнює: **а)** сума двох інших сторін; **б)** периметр паралелограма?

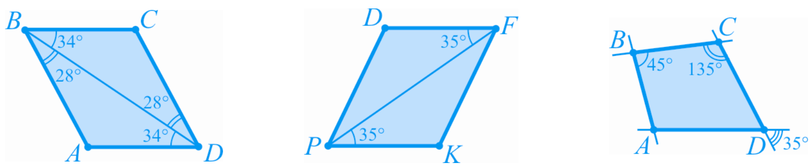
49. a і b — довжини двох сусідніх сторін паралелограма. За якою формулою обчислюють периметр P паралелограма?

50. У паралелограма $ABCD$ $\angle A = 50°$. Яка градусна міра решти його кутів?

51. Сума двох кутів паралелограма дорівнює 90°. Якими є ці кути? Яка градусна міра двох інших кутів паралелограма?

52. Накресліть паралелограм $ABCD$ з тупим кутом A. Проведіть його висоти з вершини: **а)** B; **б)** C.

53. Чи є паралелограмами чотирикутники, зображені на рис. 18?



а) **б)** **в)**

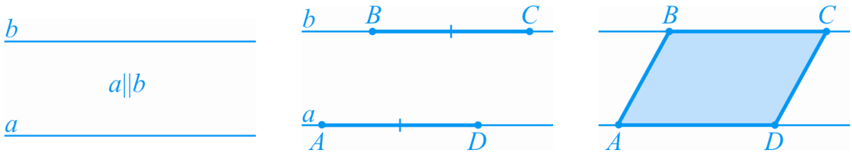
Рис. 18

2.2. Ознаки паралелограма

Означення паралелограма дає основну ознаку-умову, за якою можна встановити, чи є даний чотирикутник паралелограмом — паралельність протилежних сторін. Установимо інші ознаки паралелограма.

1. Ознака паралелограма за парою протилежних сторін.

Побудуємо паралельні прямі (рис. 19 а). Відкладемо на них рівні відрізки: $AD = BC$ (рис. 19 б). Проведемо відрізки AB і CD (рис. 19 в). Чи буде утворений чотирикутник $ABCD$, у якого дві сторони паралельні та рівні, паралелограмом? Відповідь на це запитання дає теорема.



а) б) в)

Рис. 19

Теорема **Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні й паралельні, то він є паралелограмом.**

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — довільний чотирикутник, у якого дві сторони рівні та паралельні, наприклад, $AB = CD$ і $AB \| CD$ (рис. 20). Доведемо, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

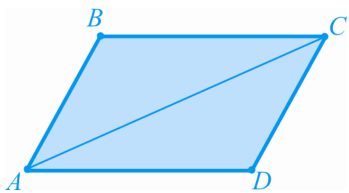


Рис. 20

1. Проведемо одну з діагоналей чотирикутника, наприклад, AC. За властивістю опуклого чотирикутника, вона поділить його на два трикутники: ABC й DCA.

2. $\Delta ABC = \Delta CDA$ — за двома сторонами і кутом між ними (друга ознака рівності трикутників). У цих трикутників AC — спільна сторона, $AB = CD$ — за умовою, $\angle BAC = \angle DCA$ як внутрішні різносторонні при $AB \| CD$ та січній AC.

3. З рівності трикутників ABC і CDA випливає, що $\angle BCA = \angle DAC$ як відповідні кути рівних трикутників.

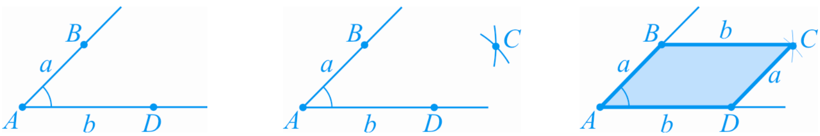
4. Оскільки кути *BCA* і *DAC* — внутрішні різносторонні при прямих *BC* й *AD* та січній *AC*, то з їх рівності випливає паралельність прямих *BC* і *AD*.

5. Отже, чотирикутник *ABCD* — паралелограм за означенням ($AB \| CD$ — за умовою, $BC \| AD$ — за доведеним). ●

2. Ознака паралелограма за рівністю протилежних сторін.

Побудуємо кут *A*, менший від розгорнутого, й відкладемо на його сторонах відрізки $AB = a$; $AD = b$ (рис. 21 а).

Опишемо коло з центром у точці *B*, радіус якого дорівнює *b*, і коло з центром у точці *D*, радіус якого дорівнює *a* (рис. 21 б). *C* — точка перетину кіл.



а) **б)** **в)**

Рис. 21

Сполучаємо точку *C* з точками *B* і *D* (рис. 21 в). Отримуємо чотирикутник, у якого протилежні сторони рівні. Чи буде чотирикутник, протилежні сторони якого рівні, паралелограмом? Відповідь на це запитання дає теорема.

Теорема **Якщо в чотирикутнику протилежні сторони рівні, то він є паралелограмом.**

● **Доведення.** Нехай *ABCD* — довільний чотирикутник, у якого протилежні сторони рівні: $AB = CD$ і $BC = AD$. Доведемо, що чотирикутник *ABCD* — паралелограм.

а) **б)**

Рис. 22

1. Проведемо одну з діагоналей чотирикутника, наприклад, *BD* (рис. 22 а). Вона поділяє його на два трикутники *BAD* і *DCB*, рівні за трьома сторонами.

2. Для зручності як 1–4 позначимо кути, на які діагональ *BD* поділяє кути *B* і *D* чотирикутника (рис. 22 б). З рівності трикутників випливає, що $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

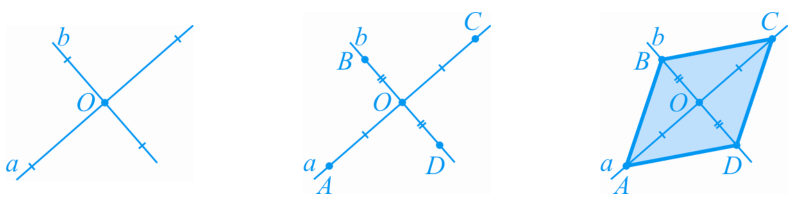
3. Оскільки кути 1 і 2 — внутрішні різносторонні при прямих *AD* і *BC* та січній *BD*, то з їх рівності випливає, що $AD \| BC$ (за ознакою паралельності прямих).

Оскільки кути 3 і 4 — внутрішні різносторонні при прямих *AB* і *CD* та січній *BD*, то з їх рівності випливає, що $AB \| CD$.

4. Отже, у чотирикутнику *ABCD* протилежні сторони паралельні, а отже, за означенням, він є паралелограмом. Теорему доведено. ●

3. Ознака паралелограма за діагоналями.

Проведемо прямі *a* і *b*, які перетинаються в точці *O* (рис. 23 а). Відкладемо на прямій *a* рівні відрізки *OA* й *OC*, а на прямій *b* — рівні відрізки *OB* й *OD* (рис. 23 б).



а) б) в)

Рис. 23

Послідовно сполучимо відрізками точки *A*, *B*, *C* і *D* (рис. 23 в).

Чи буде утворений чотирикутник *ABCD* паралелограмом? Відповідь на це запитання дає теорема.

Теорема **Якщо діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл, то він є паралелограмом.**

● **Доведення.** Нехай *ABCD* — довільний опуклий чотирикутник, у якого діагоналі перетинаються в точці *O* й кожну з них точка перетину ділить навпіл: *OA* = *OC*, *OB* = *OD* (рис. 24 а). Доведемо, що *ABCD* — паралелограм.

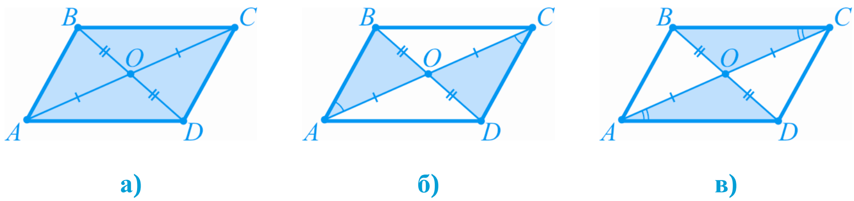


Рис. 24

1. Трикутники *AOB* і *COD* рівні за двома сторонами та кутом між ними (*AO* = *OC*, *BO* = *OD* — за умовою, $\angle AOB = \angle COD$ як вертикальні).

2. З рівності трикутників *AOB* і *COD* випливає рівність кутів *BAO* і *DCO* (рис. 24 б). Оскільки ці кути внутрішні різносторонні при прямих *AB* і *CD* та січній *AC*, то прямі *AB* й *CD* — паралельні.

3. Аналогічно з рівності трикутників *AOD* і *COB* випливає паралельність *AD* і *BC* (рис. 24 в).

4. Таким чином, у чотирикутнику *ABCD* протилежні сторони паралельні ($AB \parallel CD$ і $AD \parallel BC$). Отже, *ABCD* паралелограм (за означенням). ●

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

54. *Які* умови повинні виконуватися для чотирикутника, щоб він був паралелограмом: **а)** за означенням; **б)** за парою сторін; **в)** за рівними сторонами; **г)** за діагоналями?

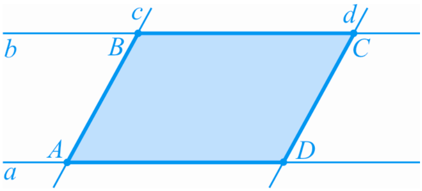
55. Використавши горизонтальні лінії зошита, накресліть такий чотирикутник, щоб у нього дві сторони були паралельні та дорівнювали по 3 см. Установіть вид чотирикутника. Відповідь обґрунтуйте.

56. Побудуйте такий чотирикутник, у якого дві протилежні сторони дорівнюють по 4 см, а дві інші — по 3 см. Установіть вид чотирикутника.

57. Позначте довільну точку *O*. Використавши ознаку паралелограма, побудуйте паралелограм, у якого діагоналі перетинаються в точці *O*.

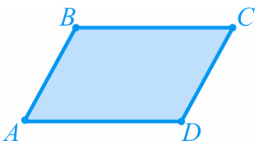
ОСНОВНЕ В § 2

ОЗНАЧЕННЯ ПАРАЛЕЛОГРАМА



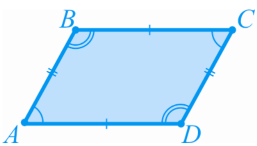
Паралелограмом називають чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні.

ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛОГРАМА



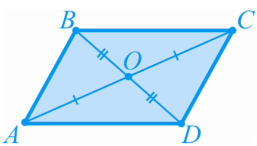
Сума кутів паралелограма, прилеглих до будь-якої його сторони, дорівнює 180°.

$$\angle A + \angle B = 180°, \angle B + \angle C = 180°,$$
$$\angle C + \angle D = 180°, \angle D + \angle A = 180°$$



У паралелограма протилежні сторони та кути ***рівні***.

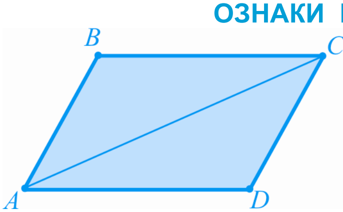
$$AB = CD, BC = AD,$$
$$\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$$



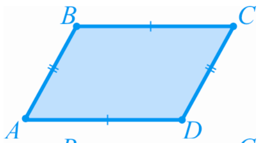
Діагоналі паралелограма точка перетину ділить навпіл.

$$AO = OC, BO = OD$$

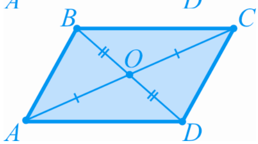
ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛОГРАМА



Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні й паралельні, то він є паралелограмом.

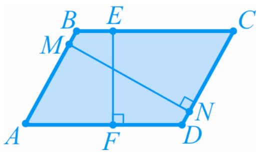


Якщо в чотирикутнику протилежні сторони рівні, то він є паралелограмом.



Якщо діагоналі чотирикутника в точці перетину діляться навпіл, то він є паралелограмом.

ВИСОТИ ПАРАЛЕЛОГРАМА



Висотою паралелограма називають спільний перпендикуляр до прямих, які містять протилежні сторони паралелограма.

Висотою паралелограма називають також і довжину перпендикуляра.

$MN \perp CD$, $EF \perp AD$

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Задача 1. Знайти кути паралелограма, якщо різниця двох з них дорівнює 120°.

Розв'язання

● Оскільки задані кути нерівні, то вони не можуть бути протилежними. Отже, ці кути прилеглі до однієї сторони, а тому їх сума дорівнює 180°.

Нехай x — градусна міра меншого кута, тоді $x + 120°$ — градусна міра більшого кута. Отримуємо рівняння: $x + x + 120 = 180$; $2x = 60$; $x = 30$; $x + 120 = 150$. Отже, 30° — менший кут; 150° — більший кут.

Оскільки протилежні кути паралелограма рівні, то кути даного паралелограма дорівнюють 30°; 150°; 30°; 150°.

Відповідь: 30°; 150°; 30°; 150°. ●

Задача 2. Знайти сторони паралелограма, якщо одна з них удвічі більша від іншої, а периметр паралелограма дорівнює 42 см.

Розв'язання

● Оскільки задані сторони нерівні, то вони не протилежні. Отже, дані сторони сусідні. Їх сума дорівнює півпериметру, тобто 42 : 2 = 21 (см).

Нехай x — менша сторона (у см), тоді $2x$ — більша сторона (у см). Отримуємо рівняння: $x + 2x = 21$; $3x = 21$; $x = 7$; $2x = 14$; $x = 7$.

Оскільки протилежні сторони паралелограма рівні, то сторони даного паралелограма дорівнюють 7 см; 14 см; 7 см; 14 см.

Відповідь: 7 см; 14 см; 7 см; 14 см. ●

Опорна задача 3 Довести, що бісектриса кута паралелограма відтинає від нього рівнобедрений трикутник.

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — паралелограм (рис. 25), у якого AM — бісектриса кута A, точка M лежить на стороні AC.

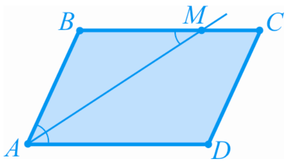


Рис. 25

1. $\angle BAM = \angle DAM$ — за означення бісектриси.

2. $\angle AMB = \angle DAM$ — як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній AM.

3. Оскільки кути AMB і BAM дорівнюють куту DAM, то вони рівні між собою.

4. Отже, трикутник ABM рівнобедрений (ознака за кутами). ●

Задача-теорема 4 Довести, що кут між висотами паралелограма, які проведені з вершини тупого (гострого) кута паралелограма, дорівнює гострому (тупому) куту паралелограма.

● **Доведення.** Розглянемо випадок, коли висоти проведені з вершини тупого кута. Нехай BM і BK — висоти, проведені з вершини тупого кута B паралелограма $ABCD$ (рис. 26).

Позначимо гострий кут паралелограма через α, тобто $\angle A = \angle C = \alpha$.

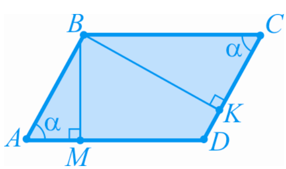


Рис. 26

Трикутники ABM і CBK прямокутні ($\angle M = \angle K = 90°$), отже, $\angle ABM = 90° - \alpha$ і $\angle CBK = 90° - \alpha$. Тоді $\angle MBK = \angle ABC - (\angle ABM + \angle CBK) =$

$= \angle ABC - (90° - \alpha + 90° - \alpha) = \angle ABC - (180° - 2\alpha)$. Оскільки сума сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180°, то одержуємо: $\angle ABC = 180° - \alpha$. Отже, $\angle MBK = 180° - \alpha - (180° - 2\alpha) = 180° - \alpha - 180° + 2\alpha = \alpha$, тобто $\angle MBK = \angle A$, що і потрібно було довести. Випадок, коли висоти проведені з вершини гострого кута, доводять аналогічно. ●

Задача-теорема 5 Якщо в чотирикутнику протилежні кути рівні, то він є паралелограмом.

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — чотирикутник, у якого $\angle A = \angle C = \alpha$ і $\angle B = \angle D = \beta$ (рис. 27).

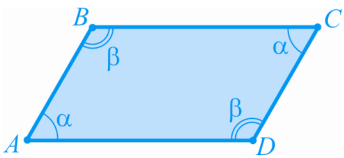


Рис. 27

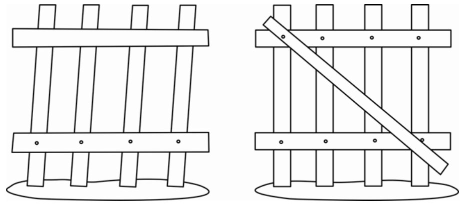
За теоремою про суму кутів чотирикутника маємо: $\alpha + \beta + \alpha + \beta = 360°$; $2(\alpha + \beta) = 360°$; $\alpha + \beta = 180°$. Отже, $\angle A + \angle B = 180°$ і $\angle A + \angle D = 180°$. Кути A і B — внутрішні односторонні при прямих AD і BC та січній AB. Оскільки $\angle A + \angle B = 180°$, то за ознакою паралельності, $AD \parallel BC$. Кути A й D — внутрішні односторонні при прямих AB і CD та січній AD. Оскільки $\angle A + \angle D = 180°$, то $AB \parallel CD$. Таким чином, у чотирикутника $ABCD$ $AB \parallel CD$ і $BC \parallel AD$. Отже, $ABCD$ — паралелограм. ●

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Паралелограм, на відміну від трикутника, не є жорсткою фігурою. Цю властивість паралелограма використовують на практиці. Розгляньте рисунки та з’ясуйте, з якою метою приймачі струму тролейбуса й трамвая виготовляють у формі паралелограма.

2. Рама велосипеда має форму паралелограма з діагоналлю. Навіщо протилежні вершини паралелограма з’єднані?

3. Петрик виготував дві моделі хвіртки для дачі. Яку модель хвіртки ви порекомендуєте Петрикові встановити? Чому?



САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 2

1. Яку фігуру називають паралелограмом?

2. Яку властивість мають:

а) протилежні сторони паралелограма;

б) протилежні кути паралелограма;

в) сусідні кути паралелограма;

г) діагоналі паралелограма?

3. Сформулюйте ознаку паралелограма:

а) за парою протилежних сторін;

б) за рівними сторонами;

в) за діагоналями.

4. Сформулюйте й доведіть теорему-властивість:

а) протилежних сторін і кутів паралелограма;

б) діагоналей паралелограма.

5. Сформулюйте й доведіть ознаку паралелограма:

а) за парою протилежних сторін;

б) за протилежними сторонами;

в) за діагоналями.

6. Сформулюйте й доведіть ознаку паралелограма за протилежними кутами.

ЗАДАЧІ ДО § 2

РІВЕНЬ А

58. Сума двох кутів паралелограма дорівнює 250°. Знайдіть гострий кут паралелограма.

59. Один з кутів паралелограма дорівнює 70°. Знайдіть кут, який утворює бісектриса тупого кута паралелограма зі стороною.

60. У паралелограмі $ABCD$ діагональ AC утворює зі сторонами паралелограма кути: $\angle BCA = 20°$, $\angle BAC = 30°$. Знайдіть кути паралелограма.

61. Сума трьох кутів паралелограма дорівнює 290°. Знайдіть кути паралелограма.

62. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них більший від іншого на 40°.

63. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них у 4 рази більший від іншого.

64. Знайдіть кути паралелограма, якщо: **а)** один з них дорівнює 62°; **б)** різниця двох з них дорівнює 20°; **в)** кути паралелограма відносяться як 4 : 11.

65. Одна сторона паралелограма дорівнює 12 см, а інша — на 3,5 см довша. Знайдіть периметр паралелограма.

66. Периметр паралелограма дорівнює 48 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо різниця двох його сторін дорівнює 6 см.

67. Дві сторони паралелограма відносяться як 3 : 4, а його периметр дорівнює 28 см. Знайдіть сторони паралелограма.

68. У паралелограмі $ABCD$ точка O — точка перетину діагоналей. Сторона CD, діагоналі AC і BD відповідно дорівнюють 16 см, 30 см і 40 см. Обчисліть периметр трикутника AOB.

69. Дві сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 8 см, а кут між ними дорівнює 30°. Знайдіть висоти паралелограма.

70. Висоти паралелограма дорівнюють 7 см і 9 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо один з його кутів дорівнює 150°.

71. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A + \angle B = 180°$ і $\angle A + \angle D = 180°$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом.

72. У чотирикутнику $MNOK$ $\angle KMO = \angle NOM$ і $\angle MOK = \angle NMO$. Доведіть, що чотирикутник $MNOK$ є паралелограмом.

73. У чотирикутнику $FSPT$ діагоналі перетинаються в точці Q й утворюють відрізки $SQ = 8$ см, $TQ = 0{,}8$ дм, $FQ = 120$ мм, $FP = 24$ см. Чи є цей чотирикутник паралелограмом?

74. У чотирикутнику $MNKP$ протилежні сторони MN і KP рівні. Діагональ MK утворює з цими сторонами рівні кути. Доведіть, що $MNKP$ — паралелограм.

75. У паралелограмі $ABCD$ на сторонах AB і CD відкладено рівні відрізки AM і CK. Доведіть, що $MBKD$ — паралелограм.

76. Накресліть дві паралельні прямі, відстань між якими дорівнює 3 см. Побудуйте паралелограм, у якого дві сторони є відрізками цих прямих і дорівнюють по 3 см, а один з кутів дорівнює 50°.

77. Побудуйте паралелограм, у якого дві сторони дорівнюють 3 см і 4 см, а один з кутів — 40°.

78. Побудуйте паралелограм, у якого діагоналі дорівнюють 6 см і 8 см, а кут між ними — 30°.

79. Побудуйте паралелограм, у якого сторони дорівнюють 4 см і 5 см, а одна з діагоналей — 6 см.

РІВЕНЬ Б

80. У чотирикутнику $MNKP$ $MN = KP$, $\angle MNP = \angle KPN$. Доведіть, що $MNKP$ — паралелограм.

81. Знайдіть кути паралелограма, у якого один з кутів становить 80% іншого.

82. Одна зі сторін паралелограма на 20% більша від іншої. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 88 см.

83. Два кути паралелограма відносяться як 1 : 5. Знайдіть висоти паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 16 см і 20 см.

84. Різниця двох кутів паралелограма дорівнює 120°, а його висоти дорівнюють 9 см і 12 см. Знайдіть сторони паралелограма.

85. Периметр одного з трикутників, на які діагональ поділяє паралелограм, дорівнює 29 см. Знайдіть діагональ паралелограма, якщо його периметр дорівнює 36 см.

86. Обчисліть кути та периметр паралелограма, зображеного на рисунку 28.

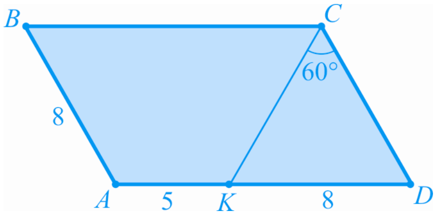


Рис. 28

87. Периметр паралелограма дорівнює 40 см. Знайдіть довжини його сторін, якщо сума двох з них дорівнює 18 см.

88. На стороні *BC* паралелограма *ABCD* відкладено відрізок *BM*, який дорівнює стороні *AB*. Доведіть, що *AM* — бісектриса кута *A* паралелограма.

89. Доведіть, що сума відстаней від будь-якої внутрішньої точки паралелограма до прямих, на яких лежать його сторони, є сталою для даного паралелограма. Чому вона дорівнює?

90. У паралелограмі *ABCD* на діагоналі *BD* відкладено рівні відрізки *BM* і *DK*, менші від половини діагоналі *BD*. Доведіть, що чотирикутник *AMCK* є паралелограмом.

91. У паралелограмі *ABCD* на сторонах *AB* й *CD* відповідно відкладені рівні відрізки *AF* і *CE*. Доведіть, що діагональ *BD* ділить відрізок *EF* навпіл.

92. У паралелограмі *ABCD* на сторонах *AB* й *CD* взято точки *F* і *P* так, що $\angle ADF = \angle CBP$ (рис. 29). Доведіть, що чотирикутник *FBPD* — паралелограм.

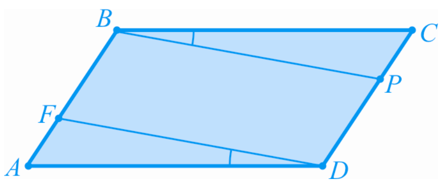


Рис. 29

93. *FBPD* — паралелограм (рис. 29), $\angle ADF = \angle CBP$. Довести, що чотирикутник *ABCD* — паралелограм.

94. На рисунку 30 $ABCD$ — паралелограм. Точка O ділить діагональ BD навпіл. Доведіть, що $KBMD$ — паралелограм, якщо M — довільна точка сторони BC, а K — точка перетину продовження відрізка MO і сторони AD.

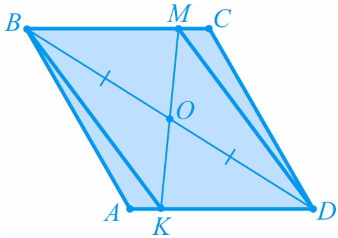


Рис. 30

95. Побудуйте паралелограм за стороною та двома діагоналями.

96. Побудуйте паралелограм за стороною, висотою, проведеною до неї, й діагоналлю.

97. Побудуйте паралелограм за стороною, висотою, проведеною до неї, і гострим кутом.

98. Побудуйте паралелограм за двома сторонами та висотою, проведеною до більшої з них.

РІВЕНЬ В

99. Різниця периметрів двох із чотирьох трикутників, на які діагоналі поділяють паралелограм, дорівнює 2 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 24 см.

100. Доведіть, що бісектриси сусідніх кутів паралелограма перпендикулярні.

101. У паралелограмі $ABCD$ з гострим кутом A, який дорівнює 60°, проведено висоту BM, яка відтинає на стороні AD відрізок AM завдовжки 10 см. Периметр паралелограма дорівнює 100 см. Знайдіть сторони паралелограма.

102. Доведіть, що бісектриси двох протилежних кутів паралелограма з нерівними сусідніми сторонами паралельні.

103. Доведіть, що будь-який відрізок з кінцями на сторонах паралелограма, який проходить через точку перетину діагоналей O, ділиться цією точкою навпіл.

104. Бісектриса гострого кута паралелограма поділяє протилежну сторону на відрізки 5 см і 4 см, починаючи від вершини тупого кута. Знайдіть периметр паралелограма.

105. Бісектриси двох сусідніх кутів паралелограма перетинаються в точці, яка лежить на більшій стороні. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 36 см.

106. У паралелограмі *ABCD AE* та *DK* — бісектриси двох сусідніх кутів *BAD* і *CDA* (див. рис. 31). Периметр паралелограма дорівнює 64 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо *EK* = 5 см.

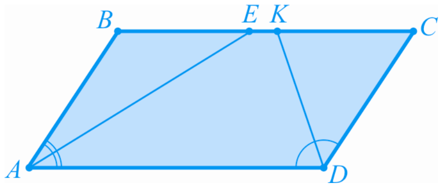


Рис. 31

107. Бісектриса одного з кутів паралелограма, периметр якого дорівнює 56 см, ділить його на дві фігури, різниця периметрів яких дорівнює 8 см. Знайдіть сторони паралелограма.

108. Сума деяких трьох сторін паралелограма дорівнює 16 см, а сума інших трьох його сторін дорівнює 17 см. Знайдіть сторони паралелограма.

109. З вершини *M* тупого кута паралелограма *MNKP* проведено висоти *MA* і *MB*. Знайдіть кути паралелограма, якщо $\angle AMB = 50°$.

110. Висоти паралелограма, опущені з вершини тупого кута, утворюють між собою кут 30° і дорівнюють 4 см і 7 см. Знайдіть периметр паралелограма.

111. Висоти паралелограма, опущені з його вершини гострого кута, утворюють кут 150° і дорівнюють 5 см і 8 см. Знайдіть сторони паралелограма.

112. Доведіть, що середини сторін паралелограма є вершинами нового паралелограма.

Вказівка. Використайте рівність трикутників.

113. З вершин тупих кутів *B* й *D* паралелограма *ABCD* на діагональ *AC* опущено перпендикуляри *BO* й *DK*. Доведіть, що чотирикутник *BKDO* є паралелограмом.

114. На сторонах *BC* й *AD* паралелограма *ABCD* відповідно позначено точки *M* і *K*, такі, що *BM* = *KD*. Доведіть, що діагональ *AC* ділить відрізок *MK* навпіл.

115. На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ взято точки M і P так, що $AM = CP$, а на діагоналі BD точки N і D так, що $BN = DQ$ (рис. 32). Доведіть, що $MNPQ$ — паралелограм.

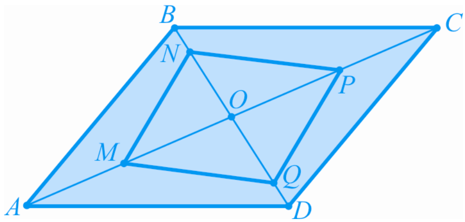


Рис. 32

116. У паралелограмі $ABCD$ — бісектриси кутів B й D перетинають діагональ AC у точках M і K. Доведіть, що точки B, M, D і K — вершини паралелограма.

117. Доведіть, що два трикутники рівні, якщо дві сторони та медіана, проведена до третьої сторони одного трикутника, відповідно дорівнюють двом сторонам і медіані, проведеній до третьої сторони іншого трикутника. *Вказівка*. Добудуйте трикутники до паралелограмів.

118. Побудуйте трикутник, якщо відомі дві його сторони a й b та медіана m_c, проведена до третьої сторони.

119. Доведіть: якщо через точку перетину діагоналей паралелограма провести дві прямі й з’єднати послідовно точки перетину цих прямих зі сторонами паралелограма, то одержаний чотирикутник буде паралелограмом.

120. Побудуйте паралелограм за гострим кутом і двома висотами.

121. Побудуйте паралелограм за двома діагоналями та висотою.

122. Побудуйте паралелограм за стороною та двома висотами.

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Термін *паралелограм* походить від поєднання грецьких слів *«паралелос»* — *«той, що йде поряд»*, і *«грамма»* — *«риска, лінія»*.
- Поняття паралелограма та деякі його властивості були відомі ще Піфагору та його учням (VI ст. до н. е.).

- Уважають, що термін *«паралелограм»* увів Евклід (III ст. до н. е.). У його «Началах» доведено теорему про поділ паралелограма діагоналлю на рівні трикутники та рівність його протилежних сторін і кутів. Однак він не згадує про властивість точки перетину діагоналей паралелограма.
- Повна теорія паралелограмів була розроблена наприкінці середніх віків і з'явилась у підручниках лише в XVII ст. Виклад властивостей паралелограма містить виданий у 1804 році підручник «Курс математики. Геометрія» професора математики Харківського університету Тимофія Федоровича Осиповського. У своєму підручнику він зазначає, що паралелограми та чотирикутники можна досліджувати шляхом розгляду властивостей тих трикутників, на які вони можуть бути поділені діагоналями.

Т. Ф. ОСИПОВСЬКИЙ (1765 – 1832)

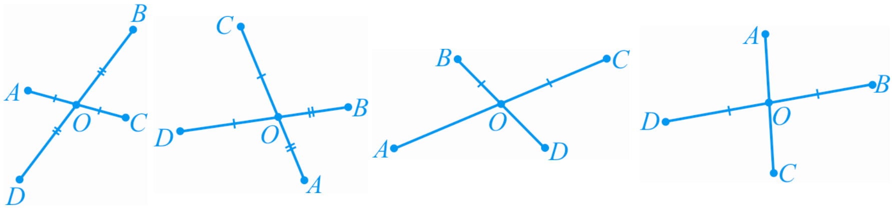
- Властивості й ознаки паралелограма описує в «Підручнику з елементарної геометрії» Михайло Васильович Остроградський. Наведемо його доведення ознаки паралелограма за кутами: «Якщо в чотирикутнику протилежні кути рівні, то чотирикутник є паралелограмом».

  «Так, позначимо буквами a і b кути, що прилягають до однієї зі сторін чотирикутника. Два інші кути, відповідно протилежні першим, будуть теж a й b. Отже, сума всіх чотирьох кутів — $2a + 2b$. А оскільки вона дорівнює $4d$ (d — прямий кут), то $a + b = 2d$, тобто сума кутів, що прилягають до довільно взятої сторони, дорівнює двом прямим. З цього випливає паралельність, а отже, і рівність протилежних сторін».

КОНТРОЛЬ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ ЗА МАТЕРІАЛОМ § 1 – § 2

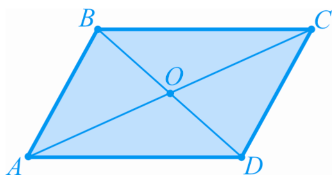
Початковий рівень

1. На якому з рисунків точки A, B, C і D є вершинами паралелограма $ABCD$?



А **Б** **В** **Г**

2. O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Який з відрізків дорівнює відрізку OA?



А OC; **Б** OD;
В OB; **Г** AC.

3. Якщо кут A паралелограма $ABCD$ дорівнює 35°, то кут B дорівнює...
А 55°; **Б** 35°; **В** 145°; **Г** 180°.

Середній рівень

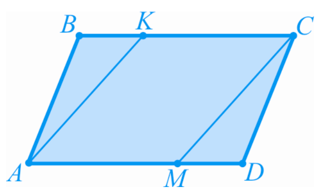
4. Знайдіть невідомі сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 18 см, а одна зі сторін — 6 см.

5. O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайдіть периметр трикутника COD, якщо $AB = 7$ см, $AC = 12$ см, $BD = 8$ см.

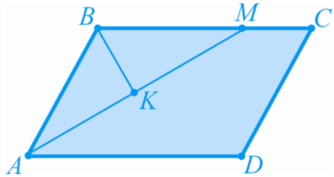
6. Знайдіть кути паралелограма, якщо сума двох з них дорівнює 72°.

Достатній рівень

7. $ABCD$ — паралелограм, у якому $AD = 15$ см, $AM = 10$ см, $BK = 5$ см. Доведіть, що $AKCM$ — паралелограм.



8. AM — бісектриса кута A паралелограма $ABCD$, точка K — середина відрізка AM. Доведіть, що $BK \perp AM$.

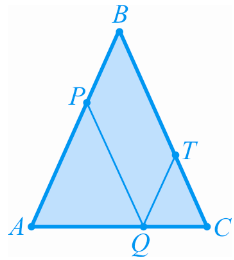


9. Діагональ BD паралелограма $ABCD$ утворює зі стороною AB кут 67°, а зі стороною AD — кут 53°. Знайдіть кути паралелограма.

Високий рівень

10. Бісектриса одного з кутів паралелограма ділить його сторону навпіл. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 48 см.

11. На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC вибрано відповідно точки P і T так, що $PBTQ$ — паралелограм. Знайдіть периметр цього паралелограма, якщо бічна сторона трикутника дорівнює 25 см.



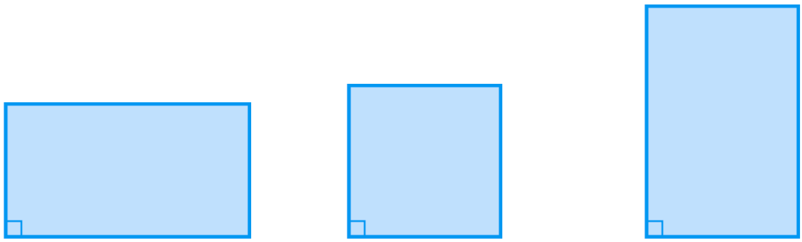
12. Дві висоти паралелограма перетинають його діагональ під кутами 72° і 38°. Знайдіть кути паралелограма.

§ 3. ПРЯМОКУТНИК. РОМБ. КВАДРАТ

3.1. Прямокутник

1. Означення і властивості прямокутника.

На рис. 33 зображено паралелограми, у яких один з кутів прямий. За властивостями паралелограма всі інші його кути теж прямі. Такі паралелограми називають *прямокутниками*.



а) б) в)

Рис. 33

Означення | ***Прямокутником*** **називають паралелограм, у якого всі кути прямі.**

Оскільки прямокутник є паралелограмом, то він має всі властивості паралелограма. Основна властивість прямокутника за означенням — усі його кути прямі, а, отже, рівні.

За рисунками прямокутників легко встановити характерну властивість їх діагоналей: вони теж рівні.

Теорема | **Діагоналі прямокутника рівні.**

● **Доведення.** Нехай *ABCD* — довільний прямокутник. Доведемо, що його діагоналі *AC* і *BD* — рівні.

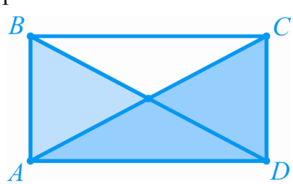


Рис. 34

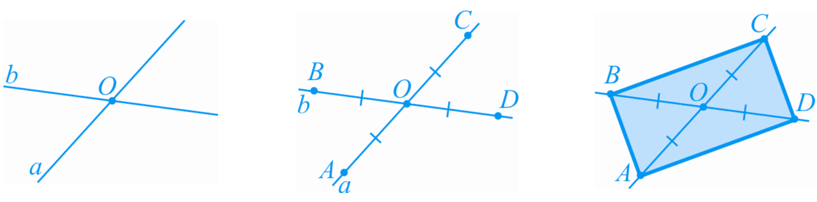
1. Розглянемо прямокутні трикутники ABD і DCA, гіпотенузами у яких є відповідно діагоналі прямокутника BD і CA (рис. 34). У цих трикутників катет AD — спільний, катети AB і CD рівні як протилежні сторони прямокутника. Отже, $\Delta ABD = \Delta DCA$ за двома катетами.

2. З рівності трикутників ABD і DCA випливає рівність їх гіпотенуз BD і CA. Отже, $BD = CA$. ●

Наслідок **Точка перетину діагоналей прямокутника рівновіддалена від усіх його вершин.**

2. Ознака прямокутника.

Означення прямокутника містить основну ознаку-умову, за якою паралелограм є прямокутником: кути паралелограма мають бути прямими. Встановимо ознаку прямокутника за діагоналями.



а) б) в)

Рис. 35

Позначимо точку O і проведемо через неї прямі a й b (рис. 35 а).

Відкладемо від точки O на цих прямих рівні відрізки OA, OB, OC й OD (рис. 35 б). Послідовно сполучимо точки A, B, C і D відрізками. Очевидно, що утворений чотирикутник є прямокутником. Доведемо це.

Теорема **Якщо в чотирикутнику діагоналі рівні й точка перетину ділить їх навпіл, то даний чотирикутник є прямокутником.**

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — довільний чотирикутник, у якому діагоналі AC і BD рівні, O — точка їх перетину і $AO = OC$, $BO = OD$ (рис. 35 в). Доведемо, що $ABCD$ — прямокутник.

1. З умови $AO = OC$ і $BO = OD$ випливає, що даний чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом (теорема-ознака паралелограма за діагоналями).

2. Доведемо, що кути A і D паралелограма $ABCD$ рівні, а, значить, і прямі. Розглянемо трикутники BAD і CDA, які містять ці кути. У трикутників BAD і CDA сторона AD — спільна, $AB = CD$ (як сторони паралелограма); $AC = BD$ — за умовою. Отже, $\Delta BAD = \Delta CDA$ за трьома сторонами.

3. З рівності трикутників BAD і CDA випливає, що $\angle BAD = \angle CDA$. Оскільки $\angle BAD + \angle CDA = 180°$ (властивість сусідніх кутів паралелограма), то $\angle BAD = \angle CDA = 90°$. Оскільки в паралелограмі протилежні кути рівні, то всі решта кутів паралелограма $ABCD$ теж є прямими. Отже, він є прямокутником. Теорему доведено. ●

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

123. Накресліть прямокутник $MOPK$ і провести його діагоналі. Запишіть властивості: **а)** кутів за означенням; **б)** діагоналей як паралелограма; **в)** діагоналей як прямокутника.

124. Накресліть прямокутник $MNPK$. Точку перетину діагоналей позначте через O. Укажіть рівні відрізки, кути, трикутники.

125. Знайдіть периметр прямокутника, у якого сторони дорівнюють 3 см і 4 см.

126. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 7 см, а його периметр дорівнює 34 см. Знайдіть: **а)** суму двох сусідніх сторін прямокутника; **б)** сторону сусідню з даною.

127. O — точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$. Знайдіть відстань від точки O до вершин прямокутника, якщо діагональ AC дорівнює 12 см.

128. Накресліть прямі a і b, які перетинаються в точці O. Побудуйте коло з центром у точці O, радіус якого дорівнює 4 см. Точки перетину кола з прямими a і b позначте відповідно M і N та P і K. Утворіть чотирикутник $MPNK$ та встановіть його вид. Відповідь обґрунтуйте.

129. Побудуйте довільний прямокутник, у якого відстані від точки перетину діагоналей до вершин дорівнюють 3 см.

3.2. Ромб. Квадрат

1. Означення і властивості ромба.

На рис. 36 зображено паралелограм $ABCD$, у якого сусідні сторони AB і AD рівні. За властивістю сторін паралелограма всі решта сторін паралелограма теж рівні. Такий паралелограм називають *ромбом*.

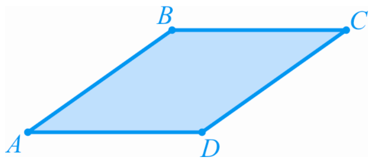


Рис. 36

Означення | ***Ромбом*** **називають паралелограм, у якого всі сторони рівні.**

Оскільки ромб є паралелограмом, то він має всі його властивості. Основна властивість ромба за означенням — рівність його сторін.

Установимо інші характерні властивості ромба, за якими він відрізняється від паралелограма, який не є ромбом.

Теорема (властивість діагоналей ромба) | **Діагоналі ромба перпендикулярні та ділять його кути навпіл.**

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — довільний ромб, O — точка перетину його діагоналей AC й BD (рис. 37). Доведемо, що AC перпендикулярна до BD, а кути, на які поділяє діагональ ромба його кут, рівні. Наприклад, $\angle ABD = \angle CBD$.

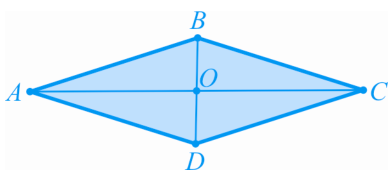


Рис. 37

1. Розглянемо трикутник ABC. За означенням ромба, $AB = BC$. Отже, ΔABC — рівнобедрений з основою AC.

2. За властивістю діагоналей паралелограма O — середина AC. Отже, BO — медіана рівнобедреного трикутника ABC.

3. За властивістю медіани рівнобедреного трикутника BO — висота та бісектриса трикутника ABC. Отже, $AC \perp BO$, а значить, $AC \perp BD$ і $\angle ABO = \angle CBO$. Теорему доведено. ●

2. Ознаки ромба.

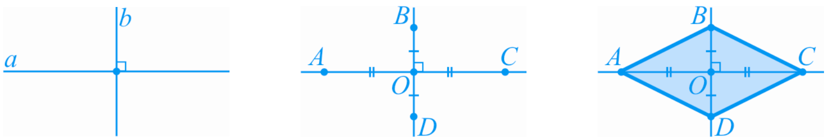
Означення ромба містить основну ознаку ромба — умову, за виконання якої паралелограм є ромбом — рівність усіх його сторін. Встановимо інші ознаки ромба.

Безпосередньо з ознаки паралелограма за рівністю протилежних сторін з означення ромба випливає ознака ромба.

Ознака **Якщо в чотирикутнику усі сторони рівні, то він є ромбом.**

Установимо ознаку ромба за діагоналями.

Проведемо дві перпендикулярні прямі a й b, які перетинаються в деякій точці O (рис. 38 а).



а) б) в)

Рис. 38

Відкладемо на прямій a рівні відрізки OA і OC, а на прямій b — OB й OD (рис. 38 б). Послідовно сполучаємо точки A, B, C і D відрізками. Маємо таку ознаку ромба:

Теорема **Якщо діагоналі чотирикутника перпендикулярні й у точці перетину діляться навпіл, то чотирикутник є ромбом.**

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — довільний чотирикутник, у якого діагоналі AC і BD перпендикулярні й у точці O — перетину діагоналей — діляться навпіл: $AO = OC$, $BO = OD$. Доведемо, що чотирикутник $ABCD$ (рис. 38 в) є ромбом.

1. Оскільки $AO = OC$ і $BO = OD$, то за ознакою паралелограма чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом.

2. $\Delta AOB = \Delta COB$ — за двома катетами. Отже, $AB = BC$.

3. Оскільки $ABCD$ є паралелограмом, то $AB = CD$ і $BC = AD$. Значить, усі сторони паралелограма $ABCD$ рівні. Отже, він є ромбом. ●

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

130. Накресліть ромб *MNPK* і його діагоналі. Точку перетину діагоналей позначте буквою *O*. Запишіть властивості ромба *MNPK* за: **а)** сторонами, використовуючи означення; **б)** діагоналями паралелограма; **в)** діагоналями ромба.

131. З яких чотирьох рівних трикутників можна скласти ромб?

132. Запишіть формулу для обчислення периметра ромба зі стороною *a*. Чому дорівнює периметр ромба, якщо його сторона дорівнює 3,5 см?

133. Діагональ ромба утворює з його стороною кут 30°. Знайдіть кути ромба.

134. Одна з діагоналей ромба утворює з його стороною кут, який дорівнює 25°. Знайдіть кут, який утворює інша діагональ з його стороною.

135. Накресліть перпендикулярні прямі *a* і *b*, які перетинаються в точці *O*. Відкладіть на прямій *a* відрізки *OA* = *OC* = 3 см, а на прямій *b* відрізки *OB* = *OD* = 4 см. Послідовно сполучіть відрізками точки *A*, *B*, *C* і *D*. Установіть вид утвореного чотирикутника. Відповідь обґрунтуйте.

3. Квадрат.

На рис. 39 зображено ромб *ABCD*, у якого кут *A* прямий, а значить й усі інші кути прямі. Такий ромб називають *квадратом*. Його можна розглядати і як прямокутник, у якого всі сторони рівні.

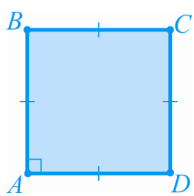


Рис. 39

Означення

***Квадратом* називають ромб, у якого всі кути прямі; або прямокутник, у якого всі сторони рівні.**

Оскільки квадрат є одночасно і паралелограмом, і прямокутником, і ромбом, то він має всі їхні властивості.

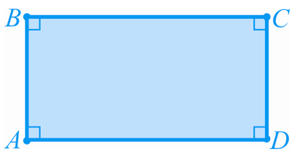
ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

136. Накресліть квадрат *MOPK*, проведіть його діагоналі і запишіть їхні властивості як: **а)** паралелограма; **б)** прямокутника; **в)** ромба.

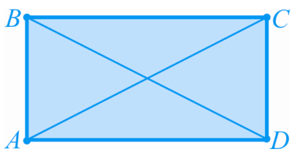
137. Запишіть формулу для обчислення периметра *P* квадрата за його стороною *a*. Знайдіть периметр квадрата, якщо його сторона дорівнює 3,5 см. Чому дорівнює у квадраті кут між: **а)** діагоналями; **б)** діагоналлю і сторонами?

ОСНОВНЕ В § 3

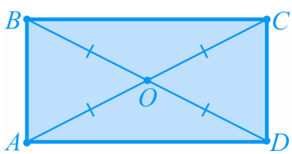
ПРЯМОКУТНИК



Прямокутником називають паралелограм, у якого всі кути прямі.



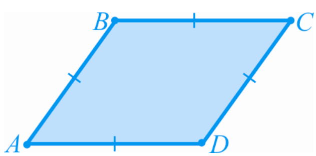
Властивість. Діагоналі прямокутника рівні.



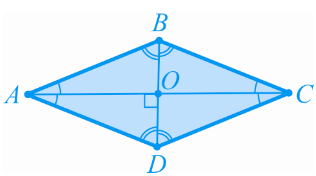
Властивість. Точка перетину діагоналей прямокутника рівновіддалена від усіх його вершин.

Ознака. Якщо в чотирикутнику діагоналі рівні й точка перетину ділить їх навпіл, то даний чотирикутник є прямокутником.

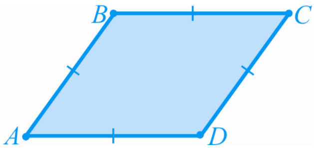
РОМБ



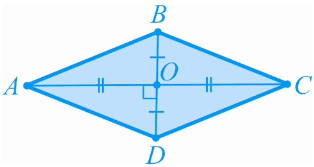
Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні.



Властивість. Діагоналі ромба перпендикулярні та ділять його кути навпіл.

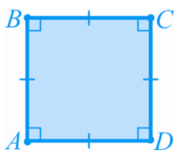


Ознака. Якщо в чотирикутнику усі сторони рівні, то він є ромбом.



Ознака. Якщо діагоналі чотирикутника перпендикулярні й у точці перетину діляться навпіл, то чотирикутник є ромбом.

КВАДРАТ

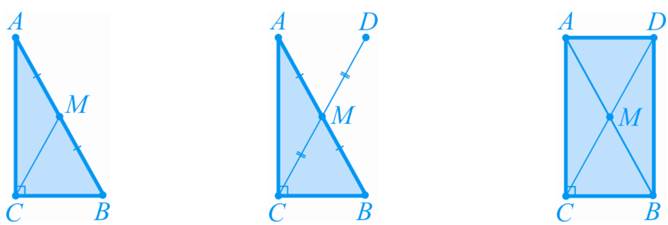


Квадратом називають ромб, у якого всі кути прямі; або прямокутник, у якого всі сторони рівні.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Задача-теорема 1 Довести, що в прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.

● **Доведення.** Нехай ABC — прямокутний трикутник із прямим кутом C, у якого CM — медіана, тобто $AM = MB$ (рис. 40 а). Проведемо промінь CM і відкладемо на ньому від точки M відрізок $MD = CM$ (рис. 40 б). Сполучимо точку D з точками A і B.



а) **б)** **в)**

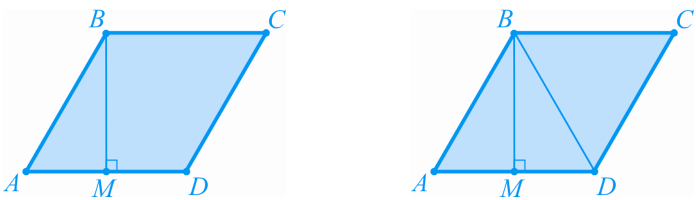
Рис. 40

Утворений чотирикутник $CADB$ — паралелограм (ознака за діагоналями) (рис. 40 в). За властивістю кутів паралелограма $\angle ADB = \angle ACB = 90°$, $\angle CAD = 180° - \angle ACB = 180° - 90° = 90°$; $\angle CBD = \angle CAD = 90°$. Отже, у паралелограмі $CADB$ усі кути прямі і він є прямокутником. За властивістю діагоналей прямокутника $AB = CD$. Отже, $\frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$, тобто $CM = \frac{1}{2}AB$. ●

Задача 2. Знайти кути ромба, у якого висота, опущена з вершини тупого кута, ділить протилежну сторону навпіл.

Розв'язання

● Нехай $ABCD$ — ромб, у якого точка M — середина AD і $BM \perp AD$, тобто BM — висота (рис. 41 а).



а) б)

Рис. 41

1. Проведемо діагональ BD (рис. 41 б). Маємо: $\Delta ABM = \Delta DBM$ — за двома катетами (BM — спільний, $AM = MD$ — за умовою). З рівності трикутників випливає, що $AB = BD$.

2. Оскільки $AB = AD$ (як сторони ромба), то у трикутника ABD всі сторони рівні, тобто він є рівностороннім. Тоді $\angle A = 60°$ як кут рівностороннього трикутника.

3. $\angle A = \angle C = 60°$ (як протилежні кути ромба). Кути B і D дорівнюють $180° - 60° = 120°$.

Відповідь: 60°; 120°; 60°; 120°. ●

Задача 3. Точка M належить прямій, яка містить діагональ паралелограма і не є точкою перетину діагоналей. Вона рівновіддалена від кінців іншої діагоналі. Довести, що паралелограм є ромбом.

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — паралелограм, O — точка перетину його діагоналей. Точка M, яка належить прямій AC, рівновіддалена від точок B і D, тобто $MB = MD$ (рис. 42). Доведемо, що $ABCD$ — ромб.

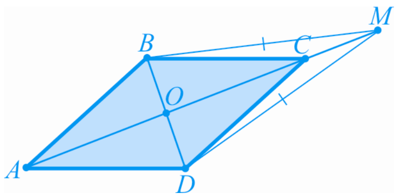


Рис. 42

1. Трикутник BMD — рівнобедрений ($MB = MD$ — за умовою).

2. За властивістю діагоналей паралелограма точка O — середина BD. Отже, відрізок MO є медіаною трикутника BMD, а значить, і його висотою (за властивістю медіани рівнобедреного трикутника). Звідси випливає, що $MA \perp BD$, або $CA \perp BD$.

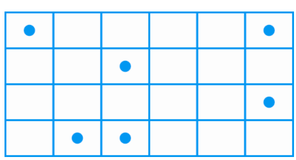
3. Таким чином, у паралелограмі $ABCD$ діагоналі CA і BD перпендикулярні. Отже, за ознакою ромба паралелограм $ABCD$ є ромбом. ●

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Шкільна майстерня виготовила партію пластин чотирикутної форми. Як перевірити, чи має пластина форму прямокутника, користуючись тільки лінійкою з поділками?

2. Учневі доручили виготовити щит, який повинен повністю закрити нішу прямокутної форми. Які виміри і скільки їх він повинен зробити, щоб виготовити цей щит?

3. Прямокутну заготовку з розміченими клітинками, шість з яких помічені, потрібно розрізати по сторонах клітинок на шість рівних частин так, щоб у кожній частині було по одній клітинці з міткою. Як це зробити?

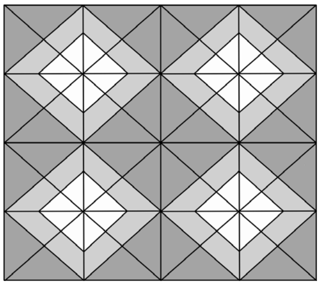


4. У прямокутній пластині потрібно просвердлити круглий отвір на однаковій відстані від її вершин. Як знайти центр цього отвору?

5. Як за допомогою двосторонньої лінійки розділити заданий кут навпіл? побудувати кут, удвічі більший за заданий?

6. З листа сталі вирізали чотирикутник з рівними сторонами. Як упевнитися, не вимірюючи кутів, чи є чотирикутник квадратом?

7. Майстер-паркетник, перевіряючи, чи має викладений чотирикутник форму квадрата, упевнюється, що діагоналі рівні й перетинаються під прямим кутом. Чи достатньо такої перевірки?



8. Кравчиня, яка хотіла перевірити, чи має клаптик тканини квадратну форму, перегнула його по діагоналі й, упевнившись, що краї клаптика збіглися, зробила висновок, що він квадратний. Чи достатньо такої перевірки?

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 3

1. Яку фігуру називають:

а) прямокутником; **б)** ромбом; **в)** квадратом?

2. Назвіть характерну властивість діагоналей:

а) прямокутника; **б)** ромба.

3. Сформулюйте властивості діагоналей квадрата.

4. Сформулюйте й доведіть теорему про властивості діагоналей:

а) прямокутника; **б)** ромба.

5. Сформулюйте й доведіть:

а) ознаку прямокутника за діагоналями;

б) ознаку ромба за діагоналями.

ЗАДАЧІ ДО § 3

РІВЕНЬ А

138. Одна зі сторін прямокутника на 6 см більша від іншої. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 32 см.

139. Сторони прямокутника відносяться як 2 : 3, а його периметр дорівнює 30 см. Знайдіть довжину меншої сторони прямокутника.

140. Менша сторона прямокутника дорівнює 14 см. Знайдіть довжини діагоналей, якщо вони перетинаються під кутом 60°.

141. Сторона AB прямокутника $ABCD$ дорівнює 10 см, а діагональ AC дорівнює 16 см. Знайдіть периметр трикутника ABO, де O — точка перетину діагоналей прямокутника.

142. Діагональ прямокутника ділить його кут на два кути, один з яких на 10° більший від іншого. Знайдіть менший з цих кутів.

143. Діагональ прямокутника утворює зі стороною кут 40°. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника.

144. Кут між діагоналями прямокутника дорівнює 70°. Знайдіть градусні міри кутів, які утворюють діагоналі зі сторонами.

145. Побудуйте прямокутник, у якого кут між діагоналями дорівнює 30°, а відстань від точки перетину діагоналей до однієї з вершин — 5 см.

146. Побудуйте прямокутник, у якого діагональ дорівнює 6 см, а кут між діагоналями — 40°.

147. Доведіть: якщо в паралелограма сусідні кути рівні, то він є прямокутником.

148. Доведіть: якщо в паралелограма сума протилежних кутів дорівнює 180°, то він є прямокутником.

149. Діагональ ромба утворює зі стороною кут 28°. Знайдіть кути ромба.

150. Сторона прямокутника утворює з однією з діагоналей кут 32°. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника.

151. Одна з діагоналей ромба дорівнює його стороні. Знайдіть кути ромба.

152. Сторона ромба утворює з діагоналями кути, які відносяться як 2 : 7. Знайдіть кути ромба.

153. Діагоналі ромба утворюють з його стороною кути, один з яких на 40° менший від іншого. Знайдіть кути ромба.

154. Побудуйте ромб зі стороною 4 см і кутом 40°.

155. Побудуйте ромб з діагоналями 6 см і 7 см.

156. Доведіть: якщо діагоналі ромба рівні, то він є квадратом.

РІВЕНЬ Б

157. Точка перетину діагоналей прямокутника віддалена від його сусідніх сторін на відстані 5 см і 2 см. Знайдіть периметр прямокутника.

158. Сторони прямокутника дорівнюють 16 см і 10 см. Знайдіть відстані від точки перетину діагоналей до сторін прямокутника.

159. Точка M є внутрішньою точкою прямокутника $ABCD$, периметр якого дорівнює 34 см. Знайдіть суму відстаней від точки M до всіх сторін прямокутника.

160. Сума відстаней від точки перетину діагоналей прямокутника до суміжних сторін дорівнює 36 см. Одна зі сторін прямокутника удвічі більша від іншої. Знайдіть ці сторони.

161. Доведіть, що перпендикуляр, опущений з точки перетину діагоналей прямокутника до його сторони, ділить цю сторону навпіл.

162. Діагональ прямокутника ділить його кут у відношенні 2 : 3. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника.

163. Кути, які утворюються при перетині діагоналей прямокутника, відносяться як 4 : 11. Знайдіть кути, які утворює діагональ зі сторонами даного прямокутника.

164. Побудуйте прямокутник за стороною і діагоналлю.

165. Побудуйте прямокутник за діагоналлю і кутом, який вона утворює зі стороною.

166. Перпендикуляр, опущений з вершини кута B прямокутника $ABCD$ на діагональ AC завдовжки 12 см, ділить її у відношенні 1 : 3, рахуючи від вершини A. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей прямокутника до точки перетину перпендикуляра й діагоналі.

167. Доведіть: якщо діагоналі прямокутника перпендикулярні, то він є квадратом.

168. Доведіть, що в ромба висоти, проведені з однієї вершини, рівні.

169. У ромбі проведено висоти з вершини тупого кута. Знайдіть кути ромба, якщо кут між його висотами дорівнює 45°.

170. Висота, проведена з вершини тупого кута ромба, удвічі менша від його сторони. Знайдіть кути ромба.

171. Один з кутів ромба дорівнює 120°, а діагональ, яка проведена з вершини цього кута, дорівнює 10 см. Знайдіть периметр ромба.

172. Висота, проведена з вершини тупого кута ромба, ділить сторону, до якої вона проведена, навпіл. Знайдіть периметр ромба, якщо менша діагональ дорівнює 15 см.

173. Доведіть, що точка перетину діагоналей ромба рівновіддалена від усіх його сторін.

174. Доведіть: якщо діагональ паралелограма ділить його кут навпіл, то такий паралелограм є ромбом.

175. Доведіть: якщо сторона ромба утворює з діагоналями рівні кути, то він є квадратом.

176. Доведіть: якщо діагоналі прямокутника перетинаються під прямим кутом, то він є квадратом.

177. Один з кутів, утворених при перетині діагоналей прямокутника, удвічі менший, ніж інший. Відстань від точки перетину діагоналей до більшої сторони прямокутника дорівнює 9 см. Знайдіть діагональ прямокутника.

178. Побудуйте ромб за стороною і діагоналлю.

179. Побудуйте ромб за висотою і гострим кутом.

180. Побудуйте квадрат за відрізком, який дорівнює його периметру.

РІВЕНЬ В

181. Доведіть, що бісектриси кутів паралелограма з нерівними сусідніми сторонами в результаті перетину утворюють прямокутник.

182. Доведіть: якщо діагоналі паралелограма утворюють зі стороною рівні кути, то він є прямокутником.

183. Перпендикуляр, опущений з вершини прямокутника на його діагональ, поділяє її у відношенні 1 : 3. Доведіть, що діагональ прямокутника удвічі більша від однієї з його сторін.

184. Доведіть, що кут між перпендикуляром, опущеним з вершини прямокутника на його діагональ, й іншою діагоналлю, дорівнює різниці кутів, на які діагональ поділяє кут прямокутника.

185. Доведіть: якщо в трикутнику медіана дорівнює половині сторони, до якої вона проведена, то цей трикутник є прямокутним.

186. Через середину гіпотенузи прямокутного трикутника проведено прямі, паралельні до його катетів. Визначте вид чотирикутника, який утворився, і знайдіть його периметр, якщо катети трикутника дорівнюють 18 см і 24 см.

187. Бісектриса одного з кутів прямокутника ділить його сторону навпіл. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його більша сторона дорівнює 24 см.

188. Бісектриси кутів A і D прямокутника $ABCD$ перетинають його сторону BC відповідно в точках M і K, до того ж точка M лежить між точками B і K. Обчисліть периметр прямокутника, якщо $BM = 5$ см і $MK = 2$ см.

189. Побудуйте прямокутник за діагоналлю та сумою двох сусідніх сторін.

190. Побудуйте прямокутник за діагоналлю та різницею двох сторін.

191. Поза квадратом $ABCD$ побудовано рівносторонній трикутник AMB. Знайдіть градусну міру кута CMD.

192. З вершини тупого кута B ромба $ABCD$ проведено висоти BK і BM, кут між якими дорівнює 60°. Відстань від вершин гострих кутів до точок перетину цих висот зі сторонами ромба дорівнює 5 см. Знайдіть периметр ромба.

193. З точки перетину діагоналей ромба опущені перпендикуляри на сторони ромба. Доведіть, що основи цих перпендикулярів є вершинами прямокутника.

194. Діагональ квадрата дорівнює 8 см. Його сторона є діагоналлю іншого квадрата. Знайдіть сторону утвореного квадрата.

195. У рівносторонній трикутник, периметр якого дорівнює 36 см, вписано ромб так, що один кут у них спільний, а всі вершини ромба лежать на сторонах трикутника. Обчисліть периметр ромба.

196. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат, який має спільний з трикутником кут. Катет трикутника дорівнює a. Знайдіть периметр квадрата.

197. **а)** Доведіть, що коли в чотирикутнику кожна діагональ є бісектрисою його кутів, то такий чотирикутник є ромбом;

б) Доведіть, що діагональ ромба ділить навпіл кут, утворений двома висотами, які виходять з цієї вершини.

198. У паралелограмі відстані від точки перетину діагоналей до його сторін рівні. Доведіть, що цей паралелограм є ромбом.

199. **а)** Побудуйте ромб за кутом і діагоналлю, яка виходить з вершини цього кута;

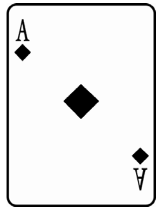
б) Побудуйте ромб за діагоналлю і протилежним до неї кутом.

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Прямокутники як паралелограми з рівними, прямими кутами, мають ще іншу назву — прямокутні паралелограми.
- Термін *«ромб»* походять від латинського слова «*rombus*» (*«ромбус»*), що в перекладі означає *«бубен»*. Ми звикли, що бубен має круглу форму, проте

раніше вони мали форму квадрата або ромба, про що свідчать зображення *«бубен»* на гральних картах.



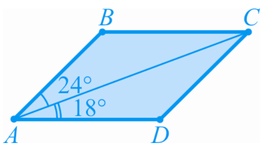


- У «Началах» Евкліда термін *ромб* трапляється лише раз в означеннях I книги, властивості ж ромба взагалі ніхто не досліджував.
- Михайло Васильович Остроградський у «Підручнику з елементарної геометрії» розглядає властивості прямокутника та ромба в нерозривній єдності з їхніми ознаками.
- Термін «квадрат» походить від латинського *«quadratus»* — *«чотирикутник»*. Це пояснюють тим, що квадрат був першим чотирикутником, який розглядали в геометрії.

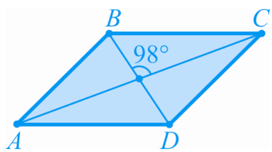
КОНТРОЛЬ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ ЗА МАТЕРІАЛОМ § 3

Початковий рівень

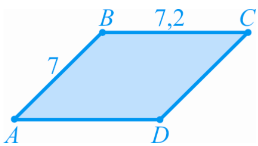
1. На якому з рисунків зображений паралелограм є ромбом?



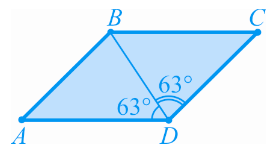
А



Б



В



Г

2. Якщо периметр квадрата дорівнює 18 см, то його сторона дорівнює...

А 9 см; **Б** 36 см; **В** 6 см; **Г** 4,5 см.

3. Якщо діагональ прямокутника утворює з однією з його сторін кут 25°, то з іншою стороною вона утворює кут...

А 50°; **Б** 90°; **В** 65°; **Г** 155°.

Середній рівень

4. Дано квадрат, сторона якого дорівнює 8 см, а його діагональ є стороною іншого квадрата. Знайдіть діагональ другого квадрата.

5. Сторона AB прямокутника $ABCD$ дорівнює 30 см, а діагональ AC дорівнює 50 см. Знайдіть периметр трикутника COD, де O — точка перетину діагоналей прямокутника.

6. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, один з яких учетверо більший від іншого.

Достатній рівень

7. Знайдіть кути ромба, якщо його висота дорівнює 12 см, а периметр — 96 см.

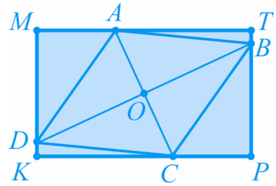
8. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано прямокутник, який має спільний кут з трикутником. Знайдіть довжину катета трикутника, якщо периметр прямокутника дорівнює 60 см.

9. У прямокутний трикутник ABC вписано коло з центром O. Радіус кола дорівнює 2 см. Це коло дотикається до катетів AC і BC в точках K і D, а гіпотенузу AB точкою дотику M розбиває на відрізки завдовжки 4 см і 6 см. З'ясуйте вид чотирикутника $DOKC$ і знайдіть катети даного трикутника.

Високий рівень

10. На стороні BC прямокутника $ABCD$ позначено точку N так, що $BN = NC$ і $NA \perp ND$. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 48 см.

11. У прямокутнику $KMTP$ через точку перетину діагоналей O проведено відрізки AC і BD, кінці яких лежать на сторонах прямокутника. Доведіть, що $ABCD$ — ромб, якщо $AC \perp BD$.



12. У ромбі $ACBD$ з гострим кутом A проведено бісектрису BM кута ABD так, що $AM = MD$. Знайдіть кути ромба.

§ 4. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА. СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА

4.1. Теорема Фалеса

1. Теорема Фалеса.

Розглянемо деякі теореми, засновані на властивостях паралелограма.

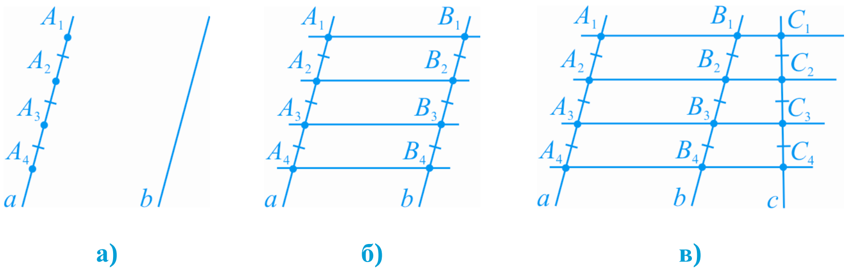


Рис. 43

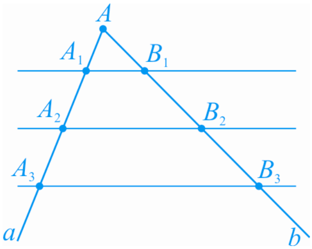
Дано паралельні прямі a і b. На прямій a послідовно відкладемо рівні відрізки, наприклад: $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ (рис. 43 а). Через кінці відрізків проведемо паралельні прямі, які перетинають пряму b у точках B_1, B_2, B_3 і B_4. Якими за довжиною є відрізки B_1B_2, B_2B_3 і B_3B_4 (рис. 43 б)? Відповісти на питання легко, опираючись на властивість паралелограма. Утворені чотирикутники $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$ і $A_3A_4B_4B_3$ за означенням є паралелограмами. За властивістю паралелограма їхні протилежні сторони рівні: $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3$ і $A_3A_4 = B_3B_4$, оскільки $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, то і $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$.

Проведемо пряму c, яка не паралельна прямій a (рис. 43 в). Чи будуть у такому випадку рівними відрізки C_1C_2, C_2C_3, C_3C_4 прямої c?

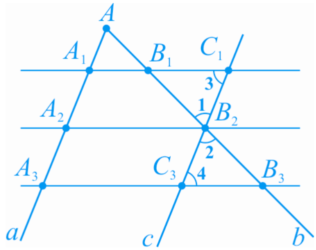
Відповідь на питання дає теорема.

Теорема Фалеса

Якщо на одній стороні кута відкласти рівні відрізки і через їхні кінці провести паралельні прямі, які перетинають іншу сторону кута, то на іншій стороні утворяться рівні між собою відрізки.



а)



б)

Рис. 44

Нехай на одній стороні довільного кута A відкладено рівні відрізки, наприклад, $A_1A_2 = A_2A_3$. Через кінці A_1, A_2, A_3 проведемо прямі, які перетинають другу сторону кута відповідно в точках B_1, B_2, B_3 (рис. 44 а) Доведемо, що $B_1B_2 = B_2B_3$.

● **Доведення.**

1. Проведемо через точку B_2 пряму c, паралельну до іншої сторони кута. C_1 і C_3 — точки перетину прямої c відповідно з прямими A_1B_1 і A_3B_3 (рис. 44 б).

2. $C_1B_2 = A_1A_2$ і $B_2C_3 = A_2A_3$ — як протилежні сторони паралелограмів $A_1A_2B_2C_1$ і $A_2A_3C_3B_2$. Оскільки $A_1A_2 = A_2A_3$, то $C_1B_2 = B_2C_3$.

3. $\Delta B_2C_1B_1 = \Delta B_2C_3B_3$ за стороною і двома прилеглими кутами: $C_1B_2 = B_2C_3$, $\angle 1 = \angle 2$ як вертикальні, $\angle 3 = \angle 4$ як внутрішні різносторонні при $A_1C_1 \| A_3C_3$ і січній c.

4. З рівності трикутників $B_2C_1B_1$ і $B_2C_3B_3$ випливає рівність відрізків $B_1B_2 = B_2B_3$. Теорему доведено. ●

2. Поділ відрізка на рівні частини.

На основі теореми Фалеса можна ділити відрізок на рівні частини.

Задача. Поділити даний відрізок AB на n рівних частин (рис. 45 а).

● Нехай $n = 5$.

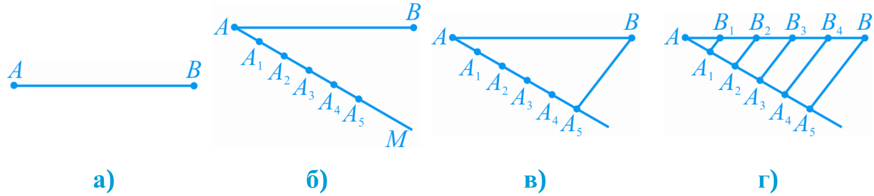


Рис. 45

Побудова

● **1.** Проводимо довільний промінь AM (рис. 45 б).

2. Відкладемо на промені AM рівні відрізки $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ (рис. 45 в).

3. Проводимо відрізок A_5B.

4. Через точки A_1, A_2, A_3 і A_4 проведемо прямі, паралельні до відрізка A_5B. B_1, B_2, B_3, B_4 — точки їх перетину з відрізком AB (рис. 45 г).

5. Маємо: $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$ (за теоремою Фалеса). Отже, відрізок AB поділено на 5 рівних частин. ●

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

200. Проілюструйте теорему Фалеса на прикладі перетину сторін кута чотирма прямими.

201. За допомогою властивостей яких фігур доводять теорему Фалеса?

202. Накресліть трикутник ABC. Позначте точку M — середину сторони AB і проведіть через неї пряму $m \parallel AC$. Точку перетину прямих m і BC позначте через K. Чим є точка K для відрізка BC? Відповідь обґрунтуйте. Знайдіть: **а)** BC, якщо $BK = 6$ см; **б)** BK, якщо $BC = 15$ см.

203. Накресліть відрізок AB і, застосувавши теорему Фалеса, поділіть його на 3 рівні частини.

4.2. Середня лінія трикутника

На рис. 46 а відрізок MK сполучає точки M і K — середини сторін AB і BC трикутника ABC. Такий відрізок називають *середньою лінією* трикутника.

а) б)

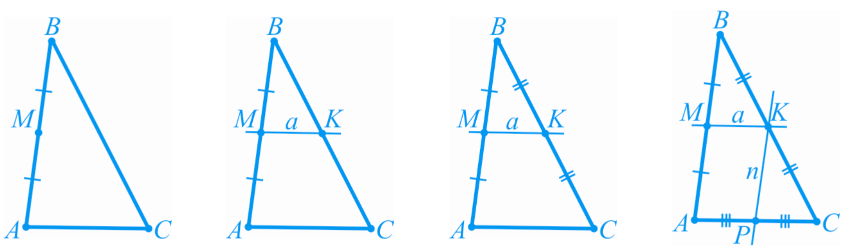
Рис. 46

Означення **|** ***Середньою лінією трикутника*** **називають відрізок, який сполучає середини двох його сторін.**

На рисунку 46 б проведені усі три середні лінії трикутника. Легко побачити, що кожна із середніх ліній паралельна одній зі сторін трикутника та дорівнює її половині. Доведемо це твердження на основі теореми Фалеса і властивостей паралелограма.

Теорема **|** **Середня лінія трикутника паралельна третій стороні трикутника і дорівнює її половині.**

● **Доведення.** Нехай ABC — довільний трикутник (рис. 47 а). Точка M — середина сторони AB. Проведемо через точку M пряму $a \| AC$ (рис. 47 б). Вона перетинає сторону BC у точці K.



а) б) в) г)

Рис. 47

За теоремою Фалеса, точка K — середина сторони BC. Отже, MK — середня лінія трикутника — є відрізком прямої a, паралельної до сторони AC, тобто $MK \| AC$. Доведемо, що $MK = \frac{1}{2} AC$.

1. Проведемо через точку K пряму $n \| AB$ (рис. 47 г). За теоремою Фалеса, вона перетне сторону AC в точці P, яка є серединою AC. Отже, $AP = \frac{1}{2} AC$.

2. У чотирикутнику $AMKP$ протилежні сторони паралельні, тобто він є паралелограмом. За властивістю сторін паралелограма $MK = AP$ (рис. 47 г).

3. Маємо: $MK = AP = \frac{1}{2} AC$. Отже, $MK = \frac{1}{2} AC$. Теорему доведено. ●

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

204. Накресліть трикутник ABC. Середини його сторін позначте буквами M, P й K. Проведіть середні лінії трикутника і для кожної з них запишіть її властивості. Порівняйте периметри трикутників MPK й ABC.

205. На основі якої теореми доводять паралельність середньої лінії та сторони трикутника? За допомогою властивості якої фігури встановлюють довжину середньої лінії порівняно зі стороною трикутника?

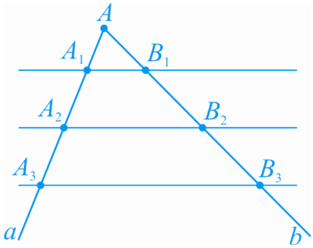
206. Сторони трикутника дорівнюють 5 см, 12 см і 14 см. Знайдіть довжини його середніх ліній.

207. Знайдіть сторони трикутника, у якого середні лінії дорівнюють 5 см, 7 см і 10 см.

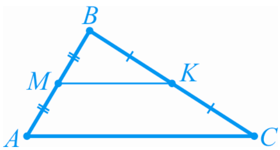
208. Знайдіть середні лінії: **а)** рівнобедреного трикутника з основою 6 см і бічною стороною 8 см; **б)** рівностороннього трикутника зі стороною 8,4 см.

209. Відстань між серединами катетів прямокутного трикутника дорівнює 6 см. Яку сторону трикутника можна визначити? Чому вона дорівнює?

ОСНОВНЕ В § 4



Теорема Фалеса. Якщо на одній стороні кута відкласти рівні відрізки і через їхні кінці провести паралельні прямі, які перетинають іншу сторону кута, то на іншій стороні утворяться рівні між собою відрізки.



Середньою лінією трикутника називають відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

Теорема. Середня лінія трикутника паралельна третій стороні трикутника і дорівнює її половині.

РОЗВ’ЯЗУЄМО РАЗОМ

Задача 1. У трикутнику ABC через точку M — середину сторони AB, й точку P — середину відрізка MB, проведено прямі, паралельні до сторони AC, які перетинають сторону BC відповідно в точках K й O (рис. 48). Знайти довжину сторони AC, якщо $PO = 12$ см.

Розв’язання

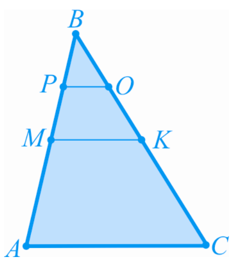


Рис. 48

• За теоремою Фалеса, точка K — середина відрізка BC, а точка O — середина відрізка BK. Отже, MK — середня лінія трикутника ABC, а PO — середня лінія трикутника MBK. За властивістю середньої лінії

$MK = 2PO = 2 \cdot 12 = 24$ (см). $AC = 2MK = 2 \cdot 24 = 48$ (см).

Відповідь: $AC = 48$ см. ●

Задача 2. У трикутнику ABC проведено медіани BB_1 і CC_1, які перетинаються в точці O (рис. 49). Точка M — середина відрізка OB, а точка K — середина відрізка OC. Довести, що чотирикутник C_1MKB_1 є паралелограмом.

Розв’язання

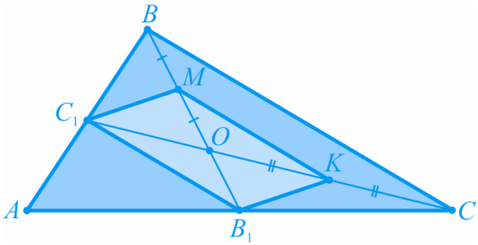


Рис. 49

● **1.** Відрізок C_1B_1 є середньою лінією трикутника ABC. Отже, $C_1B_1 \| BC$ і $C_1B_1 = \frac{1}{2}BC$.

2. Відрізок MK є середньою лінією трикутника OBC. Отже, $MK \| BC$ і $MK = \frac{1}{2}BC$.

3. З умов $C_1B_1 \| BC$ і $MK \| BC$ випливає, що $C_1B_1 \| MK$.

4. З рівностей $C_1B_1 = \frac{1}{2}BC$ і $MK = \frac{1}{2}BC$ випливає, що $C_1B_1 = MK$. Таким чином, за ознакою паралелограма чотирикутник C_1MKB_1 є паралелограмом. ●

Задача-теорема 3 | Довести, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма.

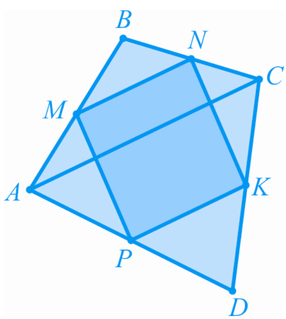


Рис. 50

● **Доведення. 1.** Відрізок MN є середньою лінією трикутника ABC (рис. 50). Отже, $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2}AC$.

2. Відрізок PK є середньою лінією трикутника ADC. Отже, $PK \parallel AC$ і $PK = \frac{1}{2}AC$.

3. З умов $MN \parallel AC$ і $PK \parallel AC$ випливає, що $MN \parallel PK$.

4. З рівностей $MN = \frac{1}{2}AC$ і $PK = \frac{1}{2}AC$ випливає, що $MN = PK$. Таким чином, за ознакою паралелограма чотирикутник $MNKP$ є паралелограмом. ●

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Як, використовуючи властивості середньої лінії трикутника, знайти відстань між точками A та B, до кожної з яких можна підійти, але з однієї іншу побачити неможливо?

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 4

1. На прикладі поясніть зміст теореми Фалеса.
2. Що називають середньою лінією трикутника?
3. Сформулюйте властивість середньої лінії трикутника.
4. Сформулюйте й доведіть теорему Фалеса.
5. Сформулюйте й доведіть теорему про середню лінію трикутника.

ЗАДАЧІ ДО § 4

РІВЕНЬ А

210. Кут K перетнуто прямими AC і BD так, що $\angle KAC = \angle KBD$, $KC = CD = 5$ см, $AB = 7$ см, до того ж точки A та B належать одній стороні кута, а точки C і D — іншій. Знайдіть KB.

211. Поділіть відрізок на 5 рівних частин, використовуючи лінійку без поділок і косинець.

212. Накресліть довільний відрізок і за допомогою циркуля, лінійки без поділок і косинця побудуйте відрізок, який дорівнює $\frac{2}{3}$ даного відрізка.

213. У трикутнику MNK відмічені точки A та B, які є серединами сторін MN і NK відповідно. $AM = 6$ см, $MK = 10$ см, $NK = 8$ см. Знайдіть периметр трикутника ANB.

214. Сторони трикутника дорівнюють 6 см, 9 см і 12 см. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є середини сторін даного трикутника.

215. У трикутнику ABC на сторонах AB і BC відзначені точки D й E так, що $\angle BDE = \angle DAC$, $BE = EC$. Периметр трикутника DBE дорівнює 20 см. Знайдіть периметр трикутника ABC.

216. У трикутнику ABC сторона BC поділена на 4 рівні частини, і через точки поділу проведені прямі, паралельні стороні AB. Найменший з відрізків цих прямих з кінцями на сторонах трикутника дорівнює 6 см. Знайдіть довжину сторони AB.

217. Сума діагоналей прямокутника дорівнює 24 см. Знайдіть довжину відрізка, який сполучає середини двох його сусідніх сторін.

218. Відстані між серединами сусідніх сторін паралелограма дорівнюють 5 см і 8 см. Знайдіть довжини діагоналей паралелограма.

219. Відстань між серединами бічних сторін рівнобедреного трикутника дорівнює 6 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 32 см.

220. Відстань між серединами бічної сторони й основи рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 42 см.

221. Точки E, F, K і M — середини відповідних сторін чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що $EM \parallel FK$.

РІВЕНЬ Б

222. Доведіть, що середні лінії трикутника поділяють його на чотири рівних трикутники.

223. У рівнобедреному трикутнику ABC основа $AC = 16$ см. Середня лінія MN паралельна основі. Периметр трикутника MBN дорівнює 28 см. Знайдіть бічну сторону трикутника ABC.

224. Довжини діагоналей чотирикутника дорівнюють a та b. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника.

225. Точки M і K — відповідно середини сторін BC і AD паралелограма $ABCD$. Доведіть, що відрізки MD і BK поділяють діагональ AC на три рівні частини.

226. Доведіть, що середня лінія трикутника поділяє навпіл одну з його медіан.

227. Через середину висоти гострокутного трикутника проведено пряму, перпендикулярну до неї. Доведіть, що відрізок цієї прямої з кінцями на сторонах трикутника є його середньою лінією.

228. Дано рівнобедрений трикутник, у якого основа більша від бічної сторони. Знайдіть периметр трикутника, якщо дві його середні лінії дорівнюють 12 см і 8 см.

229. Сторони трикутника відносяться як $3 : 4 : 5$. Знайдіть ці сторони, якщо периметр трикутника, вершинами якого є середини сторін даного трикутника дорівнює 30 см.

230. Периметр трикутника дорівнює 80 см. Сторони трикутника, утвореного середніми лініями даного трикутника, відносяться як $4 : 7 : 9$. Знайдіть сторони заданого трикутника.

РІВЕНЬ В

231. Довести, що середини сторін прямокутника є вершинами ромба.

232. Діагональ прямокутника дорівнює a. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін прямокутника.

233. У трикутнику ABC $\angle B = 63°$, $\angle A = 27°$. Через точку K — середину сторони AB — проведено перпендикуляр KM до сторони BC. Периметр трикутника BMK дорівнює 30 см. Знайдіть периметр трикутника ABC.

234. Доведіть, що середини сторін ромба є вершинами прямокутника.

235. Послідовно сполучили середини сторін квадрата, діагональ якого дорівнює b. Визначте вид утвореного чотирикутника й обчисліть його периметр.

236. У трикутнику проведено середні лінії. Периметри паралелограмів, що утворилися при цьому, дорівнюють 52 см, 38 см і 54 см. Знайдіть периметр трикутника, утворений середніми лініями.

237. Позначте точки M, N і K, що не лежать на одній прямій. Побудуйте трикутник, у якого ці точки були б серединами його сторін.

238. Накресліть довільний гострий кут. Позначте точку M, що лежить усередині кута. Побудуйте відрізок з кінцями на сторонах кута, який у точці M ділиться навпіл.

239. У паралелограмі $ABCD$ через вершину B й точку M — середину сторони AD — проведено пряму, яка перетинає діагональ AC в точці P. Доведіть, що $PO = \frac{1}{6}AC$, де O — точка перетину діагоналей.

240. Бісектриси кутів A й D паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці E так, що сторона BC ділить відрізок AE навпіл. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 40 см.

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Фалес Мілетський був визначним давньогрецьким ученим. Його зараховано до групи так званих «семи мудреців» Стародавнього світу. Розрізнені практичні знання з геометрії, набуті в Стародавньому Єгипті та Вавилоні, Фалес частково звів у систему й обґрунтував їх. Історики вважають, що він першим довів ряд геометричних теорем, зокрема теорему про вертикальні кути, ознаку рівності трикутників за стороною і двома прилеглими кутами, теорему про рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника тощо.

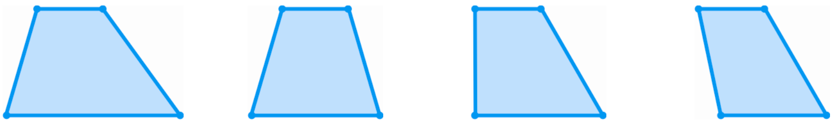
ФАЛЕС МІЛЕТСЬКИЙ (624 – 546 до н. е.)

§ 5. ТРАПЕЦІЯ

5.1. Трапеція. Середня лінія трапеції

1. Означення трапеції та її властивості.

На рис. 51 зображено чотирикутники, у яких дві сторони паралельні, а дві інші — непаралельні. Такі чотирикутники називають *трапеціями*.



а) б) в) г)

Рис. 51

Означення ***Трапецією*** **називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші — непаралельні.**

Паралельні сторони трапеції називають *основами*, а непаралельні — *бічними сторонами*.

1. У будь-якої трапеції основи нерівні: якби основи були рівні, то чотирикутник був би паралелограмом і бічні сторони були б паралельні, що неможливо за означенням.

2. У будь-якій трапеції при більшій основі один або обидва кути гострі. Доведення цього твердження наведено у «Прикладах розв'язання задач».

Трапецію, у якої один з кутів при основі прямий, називають *прямокутною трапецією*.

3. У будь-якої трапеції сума кутів, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°. Сума кутів, прилеглих до основи не дорівнює 180° (якби ця сума дорівнювала 180°, то бічні сторони були б паралельними).

2. Середня лінія трапеції.

На рис. 52 $ABCD$ — трапеція з основами AD і BC. Точки M і N — середини відповідно бічних сторін AB і CD. Відрізок MN називають *середньою лінією трапеції*.

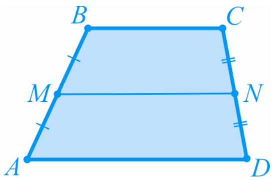


Рис. 52

Означення **_Середньою лінією трапеції_ називають відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.**

На основі теореми Фалеса та теореми про середню лінію трикутника доведемо властивість середньої лінії трапеції.

Теорема **Середня лінія трапеції паралельна до її основ і дорівнює їх півсумі.**

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — довільна трапеція з основами AD і BC, MN — її середня лінія (рис. 53). Доведемо, що: **а)** $MN \parallel AD$ ($MN \parallel BC$); **б)** $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

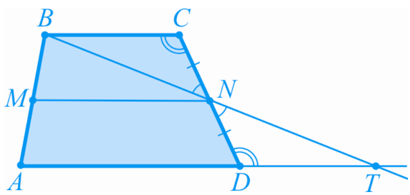


Рис. 53

1. Проведемо через вершину B і точку N пряму. Оскільки $BC \parallel AD$, то пряма BN перетинає пряму AD. Нехай T — точка перетину прямих BN і AD.

2. Розглянемо трикутники NCB і NDT. У них $CN = ND$ за умовою, $\angle CNB = \angle DNT$ (як вертикальні), $\angle NCB = \angle NDT$ (як внутрішні різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній CD). Отже, $\Delta NCB = \Delta NDT$ за стороною і двома прилеглими кутами.

3. З рівності трикутників NCB і NDT випливає, що $BC = DT$ і $BN = NT$.

4. У трикутнику ABT точка M — середина AB, а точка N — середина BT, тому MN — середня лінія трикутника ABT. За теоремою про середню лінію трикутника:

1) $MN \parallel AT$, а, отже, $MN \parallel AD$ і $MN \parallel BC$ (бо $AD \parallel BC$).

2) $MN = \frac{1}{2}AT = \frac{1}{2}(AD + DT)$. Оскільки $DT = BC$, то одержуємо: $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Теорему доведено. ●

3. Висота трапеції.

На рис. 54 ST, BK, FL, CM і OP — спільні перпендикуляри до паралельних прямих a і b, яким належать основи трапеції $ABCD$. Кожний із перпендикулярів називають *висотою трапеції*.

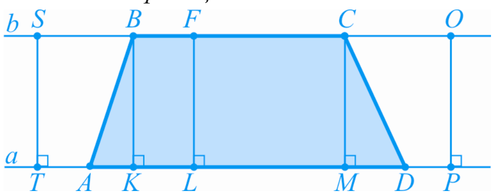


Рис. 54

Означення

***Висотою трапеції* називають спільний перпендикуляр до паралельних прямих, яким належать основи трапеції. Висотою називають також і довжину цього перпендикуляра.**

Проводять висоти трапеції переважно з вершин при меншій основі.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

241. Користуючись горизонтальними лініями зошита, накресліть трапецію, висота якої дорівнює 4 см, а основи — 5 см і 3 см. Проведіть середню лінію трапеції й обчисліть її довжину.

242. Знайдіть середню лінію трапеції, у якої основи дорівнюють: **а)** 8 см і 22 см; **б)** m і n.

243. Середня лінія трапеції дорівнює 24 см, а основа — 30 см. Знайдіть: **а)** суму основ; **б)** іншу основу.

244. Знайдіть кути при меншій основі трапеції, якщо кути при більшій її основі дорівнюють: **а)** 35° і 65°; **б)** 90° і 40°; **в)** 35° і 100°.

245. Яку додаткову побудову виконують при доведенні теореми про середню лінію трапеції? Перелічіть і сформулюйте теореми, які використовують при доведенні цієї теореми.

246. Бічні сторони прямокутної трапеції дорівнюють 3 см і 5 см. Чому дорівнює висота цієї трапеції?

5.2. Рівнобічна трапеція

На рис. 55 зображено трапецію *ABCD*, у якої бічні сторони *AB* і *CD* рівні. Таку трапецію називають *рівнобічною*, або *рівнобедреною*.

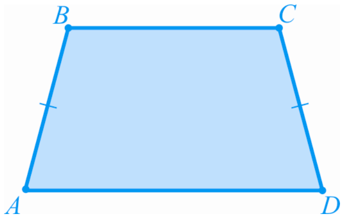


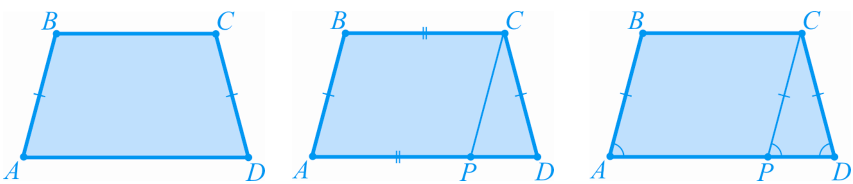
Рис. 55

Означення ***Рівнобічною трапецією*** **називають трапецію, у якої бічні сторони рівні.**

Можна зробити припущення, що кути при основі трапеції рівні. Доведемо цей факт.

Теорема **У рівнобічній трапеції кути при основі рівні.**

● **Доведення.** Нехай *ABCD* — довільна рівнобічна трапеція з більшою основою *AD* (рис. 56 а). Доведемо, що: **а)** $\angle A = \angle D$; **б)** $\angle B = \angle C$.



а) **б)** **в)**

Рис. 56

1. Відкладемо на більшій основі *AD* відрізок *AP*, який дорівнює меншій основі *BC*.

2. Утворений чотирикутник *ABCP* є паралелограмом (ознака за парою протилежних сторін) (рис. 56 б). Отже, $AB \parallel CP$ і за властивістю сторін паралелограма $AB = CP$.

3. З рівностей $AB = CP$ і $AB = CD$ (за умовою) випливає, що $CP = CD$. Отже, ΔPCD — рівнобедрений з основою PD (рис. 56 в).

4. $\angle CPD = \angle D$ як кути при основі рівнобедреного трикутника PCD. $\angle CPD = \angle A$ як відповідні кути при паралельних прямих AB і CP та січній AP. Отже, $\angle A = \angle D$, тобто кути при більшій основі рівні.

5. Оскільки $\angle B = 180° - \angle A$ і $\angle C = 180° - \angle D$ і $\angle A = \angle D$, то $\angle B = \angle C$, тобто кути трапеції при меншій основі теж рівні. Теорему доведено. ●

Теорема | **Діагоналі рівнобічної трапеції рівні.**

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція з більшою основою AD. Доведемо, що діагоналі AC і BD рівні (рис. 57).

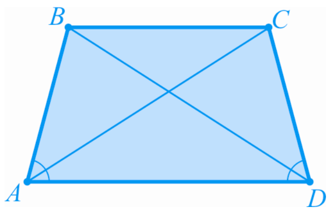


Рис. 57

1. Розглянемо трикутники ABD і DCA, сторонами яких є діагоналі BD й AC. $\Delta ABD = \Delta DCA$ за двома сторонами і кутом між ними: AD — спільна; $AB = CD$ (за означенням рівнобічної трапеції); $\angle BAD = \angle CDA$ (доведена властивість кутів).

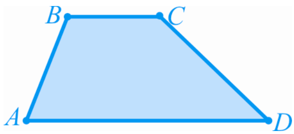
2. З рівності трикутників ABD і DCA випливає, що $BD = AC$ (як відповідні сторони трикутників). Теорему доведено. ●

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

247. Знайдіть периметр рівнобічної трапеції, у якої: **а)** сума основ дорівнює 20 см, а бічна сторона — 6 см; **б)** основи дорівнюють 5 см і 7 см, а бічна сторона — 6 см; **в)** середня лінія дорівнює 15 см, а бічна сторона — 6 см.

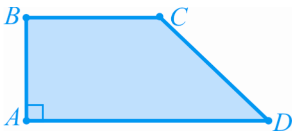
248. Накресліть рівнобічну трапецію. Запишіть властивості її бічних сторін, кутів і діагоналей.

ОСНОВНЕ В § 5

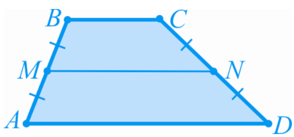


Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші — непаралельні. Паралельні сторони трапеції називають ***основами***, а непаралельні — ***бічними сторонами***.

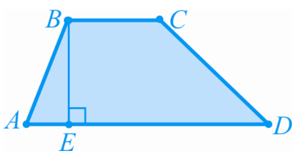
Властивість. У трапеції сума кутів, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°.



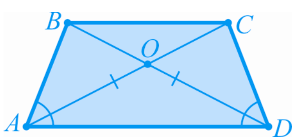
Трапецію, у якої один з кутів при основі прямий, називають ***прямокутною трапецією***.



Середньою лінією трапеції називають відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.
Теорема. Середня лінія трапеції паралельна до її основ і дорівнює їх півсумі.



Висотою трапеції називають спільний перпендикуляр до паралельних прямих, яким належать основи трапеції.
Висотою називають також і довжину цього перпендикуляра.



Рівнобічною трапецією називають трапецію, у якої бічні сторони рівні.
Теорема 1. У рівнобічній трапеції кути при основі рівні.
Теорема 2. Діагоналі рівнобічної трапеції рівні.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Задача 1. Довести, що в будь-якій трапеції хоча б один кут при більшій основі гострий.

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — довільна трапеція (рис. 58). Відкладемо на більшій основі AD відрізок AM, рівний меншій основі BC.

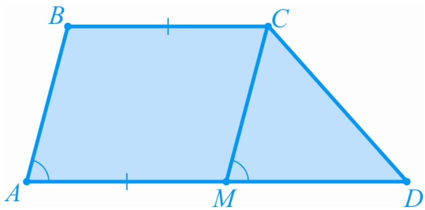


Рис. 58

1. Утворимо чотирикутник $ABCM$, який є паралелограмом (ознака за парою протилежних сторін: $AM = BC$ — за побудовою, $AD \| BC$ — як основи трапеції). Отже, $AB \| CM$.

2. $\angle CMD = \angle A$ — як відповідні кути при $AB \| CM$ і січній AD.

3. Оскільки в будь-якому трикутнику принаймні два кути гострі, то серед кутів трикутника CMD хоча б один з кутів M чи D гострий.

4. Оскільки $\angle CMD = \angle A$, то і серед кутів A і D хоча б один кут гострий. ●

Задача-теорема 2 Довести, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції паралельний до основ і дорівнює їх піврізниці.

● **Доведення. 1.** Нехай $ABCD$ — довільна трапеція з основами $AD = a$ і $BC = b$ (рис. 59). Проведемо її середню лінію PK.

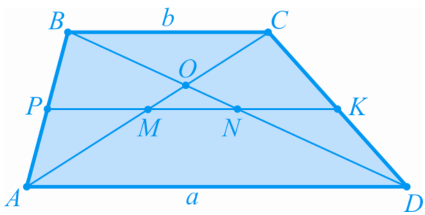


Рис. 59

Оскільки PK паралельна до основ трапеції AD і BC, то вона перетне діагональ AC в точці M — середині AC (за теоремою Фалеса для кута BAC), а діагональ BD в точці N — середині BD (за теоремою Фалеса для кута ABD). Таким чином, відрізок MN, який сполучає середини діагоналей, належить середній лінії трапеції, а отже, паралельний до її основ.

2. Оскільки $PK = PM + MN + NK$, то $MN = PK - (PM + NK)$.

3. Відрізок PM є середньою лінією трикутника ABC, тому $PM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}b$. Відрізок NK є середньою лінією трикутника BCD, тому $NK = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}b$. $PK = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(a + b)$ — як середня лінія трапеції $ABCD$. Маємо: $MN = \frac{1}{2}(a+b) - \left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b\right) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(a-b)$. $MN = \frac{1}{2}(a - b)$. ●

Задача 3. Знайти периметр рівнобічної трапеції, у якої висота та середня лінія відповідно дорівнюють 12 см і 23 см, а кут при основі — 30°.

Розв'язання

● Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція, у якої $\angle A = 30°$, середня лінія $MN = 23$ см, а висота $BK = 12$ см (рис. 60).

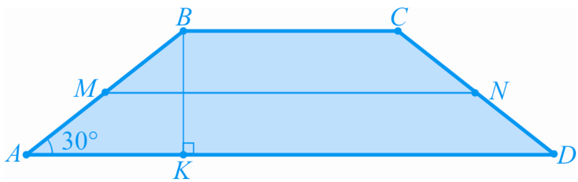


Рис. 60

$P_{ABCD} = AD + BC + 2AB$. За властивістю середньої лінії $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Отже, $AD + BC = 2MN = 2 \cdot 23 = 46$ (см). Із трикутника ABK: $BK = \frac{1}{2}AB$ (властивість катета, що лежить проти кута 30°); $AB = 2BK = 2 \cdot 12 = 24$ (см). Маємо: $P_{ABCD} = 46 + 2 \cdot 24 = 94$ (см).

Відповідь: 94 см. ●

Опорна задача 4

Довести, що точка перетину діагоналей рівнобічної трапеції рівновіддалена від кінців більшої основи (меншої основи).

● **Доведення.** Нехай у рівнобічній трапеції $ABCD$ ($AB = CD$) діагоналі AC і BD перетинаються у точці O. Проведемо $BK \perp AD$ і $CM \perp AD$ (рис. 61).

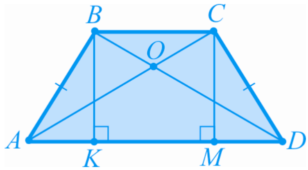


Рис. 61

Оскільки $\Delta BKD = \Delta CMA$ (за гіпотенузою $AC = BD$ і катетом $BK = CM$), то $\angle BDK = \angle CAM$. Отже, трикутник AOD рівнобедрений, тому $AO = DO$. З рівності діагоналей $AC = BD$ і їх частин $AO = DO$ випливає, що $BO = CO$. Тоді точка O є рівновіддаленою від кінців більшої основи і рівновіддалена від кінців меншої основи, що й потрібно було довести. ●

Задача-теорема 5

Довести, що в рівнобічній трапеції перпендикуляр, опущений з вершини меншої основи на більшу, ділить її на частини, більша з яких дорівнює середній лінії трапеції.

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція ($AD \parallel BC$) і $AB = CD$. Проведемо $BE \perp AD$ і $CK \perp AD$. MN — середня лінія трапеції (рис. 62).

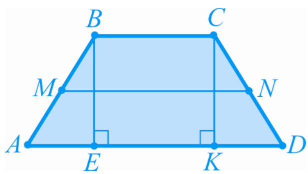


Рис. 62

Оскільки прямокутні трикутники ABE і DCK рівні (за гіпотенузою $AB = CD$ і гострим кутом $\angle A = \angle D$), то $AE = DK$. Чотирикутник $BCKE$ є прямокутником, тому $EK = BC$. Тоді

$$MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{AE + EK + KD + BC}{2} = \frac{2AE + 2EK}{2} = AE + EK = AK,$$

що й потрібно було довести. ●

Задача-теорема 6	Довести: якщо діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні, то середня лінія трапеції дорівнює її висоті.

● **Доведення.** Нехай у рівнобічній трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AB = DC$) діагоналі AC і BD перетинаються в точці O під кутом 90°, KL — середня лінія (рис. 63).

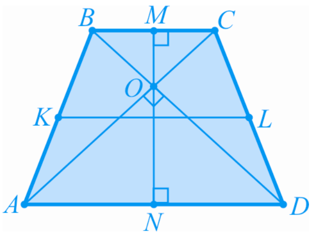


Рис. 63

Утворені трикутники AOD й BOC прямокутні та рівнобедрені (див. задачу 2). Оскільки у трикутнику AOD $AO = OD$, то $\angle OAD = 45°$. Аналогічно, з трикутника BOC $\angle OBM = 45°$. Проведемо через точку O висоту трапеції MN. Утворилися прямокутні трикутники з гострим кутом 45°, тобто трикутники AON і BOM рівнобедрені: $AN = ON$, $BM = OM$. Одержуємо: $MN = MO + ON = BM + AN = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2} = \frac{BC + AD}{2} = KL$, що й потрібно було довести. ●

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Між двома телеграфними стовпами на одній з ними прямій і на однаковій відстані від них розташовано третій стовп. На якій відстані від прямолінійної дороги розміщений цей стовп, якщо два крайні стовпи віддалені від неї на 40 м і 60 м?

2. Земельну ділянку, яка має форму трапеції, відвели під спортивний майданчик. Які виміри повинен виконати землемір, щоб накреслити план цієї ділянки?

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 5

1. Який чотирикутник називають трапецію?

2. Що називають середньою лінією трапеції? Яка її властивість?

3. Яку фігуру називають рівнобічною трапецією? У рівнобічній трапеції укажіть властивість: **а)** кутів при основі; **б)** діагоналей.

4. Сформулюйте й доведіть теорему про середню лінію трапеції.

5. Сформулюйте й доведіть теорему про кути рівнобічної трапеції.

6. Сформулюйте й доведіть властивість діагоналей рівнобічної трапеції.

7. Сформулюйте й доведіть властивість кутів при більшій основі трапеції.

ЗАДАЧІ ДО § 5

РІВЕНЬ А

249. Кути при більшій основі трапеції дорівнюють 35° і 60°. Знайдіть кути при меншій її основі.

250. Гострий кут прямокутної трапеції дорівнює 25°. Знайдіть тупий кут трапеції.

251. Середня лінія трапеції дорівнює 8 см, а основа — 12 см. Знайдіть іншу основу трапеції.

252. Обчисліть периметр трапеції з бічними сторонами 5 см і 7 см та середньою лінією 8 см.

253. Знайдіть меншу основу трапеції, якщо різниця основ дорівнює 10 см, а середня лінія — 24 см.

254. Знайдіть основи трапеції, якщо одна з них у 4 рази більша від іншої, а середня лінія дорівнює 8 см.

255. Знайдіть основи трапеції, якщо вони відносяться як 3 : 4, а середня лінія дорівнює 35 см.

256. Одна з основ трапеції у 5 разів більша від іншої. У скільки разів середня лінія трапеції більша від меншої основи?

257. Основи трапеції дорівнюють 10 см і 22 см. Знайдіть відрізки, на які діагональ ділить середню лінію трапеції.

258. Діагональ трапеції ділить її середню лінію на відрізки завдовжки 5 см і 8 см. Знайдіть різницю основ трапеції.

259. Побудуйте трапецію $ABCD$ з основами $AD = 6$ см, $BC = 3$ см, бічною стороною $AB = 4$ см і $\angle A = 40°$.

260. Обчисліть периметр рівнобічної трапеції, у якої основи дорівнюють 10 см і 4 см, а бічна сторона — 5 см.

261. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 5 см і 7 см, а її периметр — 20 см. Знайдіть довжину бічної сторони трапеції.

262. Знайдіть периметр рівнобічної трапеції, у якої бічна сторона дорівнює 6 см, а середня лінія — 7 см.

263. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 30 см, а її середня лінія — 9 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

264. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо сума двох її кутів дорівнює: **а)** 70°; **б)** 250°.

265. Доведіть, що в рівнобічній трапеції сума протилежних кутів дорівнює 180°.

266. Визначте кути рівнобічної трапеції, якщо її протилежні кути відносяться як 1 : 4.

267. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 8 см. Знайдіть довжини відрізків, на які поділяють більшу основу висоти, проведені з меншої основи.

268. Знайдіть середню лінію рівнобічної трапеції, якщо висота, проведена з вершини тупого кута, поділяє основу на відрізки 5 см і 11 см.

269. Висота, проведена з кінця меншої основи рівнобічної трапеції, поділяє більшу основу на відрізки 3 см і 9 см. Знайдіть основи трапеції.

270. Побудуйте рівнобічну трапецію з більшою основою 4 см, прилеглим до неї кутом 40° і бічною стороною 3 см.

271. Побудуйте рівнобічну трапецію з більшою основою 6 см, висотою 3 см і бічною стороною 4 см.

РІВЕНЬ Б

272. Побудуйте трапецію з більшою основою $AD = 7$ см, бічними сторонами $AB = 5$ см і $CD = 4$ см та $\angle A = 30°$.

273. Доведіть, що середня лінія трапеції поділяє кожну з її діагоналей навпіл.

274. Доведіть, що бісектриси кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, перетинаються під прямим кутом.

275. Діагональ трапеції є бісектрисою її кута при більшій основі. Доведіть, що одна з бічних сторін дорівнює меншій основі трапеції.

276. Одна з бічних сторін трапеції дорівнює більшій основі трапеції. Доведіть, що одна з діагоналей трапеції є бісектрисою кута при меншій основі.

277. Середина відрізка, який лежить з одного боку від даної прямої, розміщена на відстані 14 см від цієї прямої, а один з кінців відрізка цієї прямої — на відстані 12 см. На якій відстані від цієї прямої розміщений інший кінець відрізка?

278. Середня лінія трапеції поділена її діагоналями на три відрізки, два з яких дорівнюють 10 см і 7 см. Знайдіть основи трапеції.

279. Менша основа трапеції дорівнює 8 см, а довжина більшого з відрізків, на які поділяє діагональ середню лінію, дорівнює 6 см. Знайдіть довжину середньої лінії трапеції.

280. Діагоналі трапеції ділять її середню лінію на три рівні частини. Доведіть, що одна її основа удвічі більша від іншої.

281. Бічну сторону трапеції поділено на три рівні частини і через точку поділу проведено прямі, паралельні до основ. Знайдіть основи трапеції, якщо її бічні сторони відтинають від проведених паралельних прямих відрізки, довжини яких дорівнюють 8 см і 13 см.

282. Бічну сторону трапеції поділено на чотири рівні частини, і через точки поділу проведено прямі, паралельні до основ. Знайдіть основи трапеції, якщо її бічні сторони відтинають від проведених паралельних прямих відрізки, найбільший і найменший з яких відповідно дорівнюють 20 см і 10 см.

283. Побудуйте трапецію $ABCD$ з основами $AD = 6$ см, $BC = 4$ см, бічною стороною $CD = 3$ см і діагоналлю $AC = 5$ см.

284. Побудуйте трапецію $ABCD$ з основою $AD = 7$ см, бічними сторонами $AB = 5$ см і $CD = 3$ см і діагоналлю $BD = 5$ см.

285. Побудуйте трапецію за основами, висотою і бічною стороною.

286. Побудуйте трапецію за більшою основою, висотою і діагоналями.

287. Менша основа рівнобедреної трапеції дорівнює бічній стороні, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть кути трапеції.

288. Діагональ трапеції утворює з бічною стороною кут 63°. Знайдіть кути трапеції, якщо три сторони трапеції мають рівні довжини.

289. Знайдіть середню лінію та периметр рівнобічної трапеції, у якої менша основа 8 см, бічна сторона 6 см, а один з кутів120°.

290. У рівнобічній трапеції гострий кут дорівнює 60°, основи дорівнюють 15 см і 39 см. Знайдіть периметр трапеції.

291. Доведіть, що в рівнобічній трапеції діагоналі утворюють рівні кути: **а)** з більшою основою; **б)** з меншою основою.

292. Доведіть: якщо в трапеції кути при основі рівні, то вона є рівнобічною.

293. Доведіть, що в рівнобічній трапеції відрізок, який сполучає середини основ, перпендикулярний до кожної з них.

294. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 18 см і 40 см, а кут при більшій основі — 45°. Знайдіть висоту трапеції.

295. Знайдіть середню лінію рівнобічної трапеції, у якої менша основа та висота дорівнюють 12 см, а один з кутів трапеції — 135°.

296. Побудуйте рівнобічну трапецію за більшою основою, бічною стороною і діагоналлю.

297. Побудуйте рівнобічну трапецію за більшою основою, висотою та діагоналлю.

РІВЕНЬ В

298. Через вершину B трапеції $ABCD$ проведено пряму, паралельну до бічної сторони CD, що перетинає більшу основу AD в точці M. Периметр трикутника ABM дорівнює 8 см. Знайдіть периметр трапеції, якщо відрізок MD дорівнює 5 см.

299. Через вершину тупого кута трапеції проведено пряму, паралельну до бічної сторони. Обчисліть периметр утвореного трикутника, якщо периметр трапеції дорівнює 50 см, а її менша основа дорівнює 11 см.

300. У прямокутній трапеції більша бічна сторона дорівнює 20 см, а гострий кут дорівнює 60°. Висота, проведена з вершини тупого кута, ділить середню лінію на відрізки, різниця довжин яких дорівнює 3 см. Знайдіть основи трапеції. Скільки розв’язків має задача?

301. Менша діагональ прямокутної трапеції дорівнює її бічній стороні. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її більша основа дорівнює 28 см.

302. Доведіть, що в будь-якій трапеції протилежні кути нерівні.

303. Доведіть, що діагональ трапеції не може бути бісектрисою двох її протилежних кутів.

304. Бічну сторону трапеції поділено на три рівні частини і через точки поділу проведено до другої сторони відрізки, паралельні до основ. Знайдіть: **а)** довжини проведених відрізків, якщо основи трапеції дорівнюють 3 см і 24 см; **б)** довжини проведених відрізків, якщо їх відношення дорівнює 2 : 3, а менша основа трапеції — 5 см.

305. Знайдіть основи трапеції, у якої середня лінія дорівнює 14 см, а відстань між серединами діагоналей — 6 см.

306. Знайдіть більшу основу трапеції, якщо менша основа дорівнює 2 см, а відстань між серединами діагоналей — 7 см.

307. Знайдіть кути трапеції, у якої діагональ перпендикулярна до основ. Ця діагональ дорівнює меншій з основ і удвічі менша за більшу бічну сторону.

308. Побудуйте трапецію за основами та бічними сторонами.

309. Побудуйте трапецію за основами та діагоналями.

310. Доведіть, що відрізок, який з'єднує середини основ трапеції:
а) ділиться середньою лінією навпіл;
б) ділить середню лінію навпіл.

311. Доведіть: якщо діагоналі трапеції рівні, то вона є рівнобічною.

312. Доведіть: якщо діагоналі трапеції утворюють з основою рівні кути, то трапеція є рівнобічною.

313. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута, одна з основ на 18 см більша від іншої. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її периметр дорівнює 78 см.

314. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 50 см, а її діагоналі взаємно перпендикулярні. Знайдіть висоту трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 13 см.

315. У трапеції відрізок, який сполучає середини основ, перпендикулярний до них. Доведіть, що трапеція рівнобічна.

316. У рівнобічній трапеції діагональ поділяє навпіл кут при меншій основі. Доведіть, що периметр трапеції $P = 3a + b$, де a — більша основа, b — менша основа.

317. Доведіть, що середини сторін рівнобічної трапеції є вершинами ромба.

318. Діагональ рівнобічної трапеції дорівнює 24 см, середини сторін трапеції послідовно з'єднані. Визначте вид одержаного чотирикутника і знайдіть його периметр.

319. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 162 см, різниця її основ — 18 см, висота трапеції — 40 см, а її діагоналі взаємно перпендикулярні. Знайдіть сторони трапеції.

КОНТРОЛЬ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ ЗА МАТЕРІАЛОМ § 4 – § 5

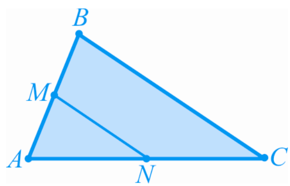
Початковий рівень

1. MN — середня лінія трикутника ABC (див. рис.) Яке з тверджень є завжди правильним?

А $AM = AN$; **Б** $MB = NC$; **В** $AN = MB$; **Г** $AN = NC$.

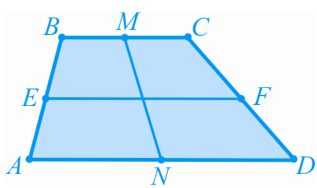
2. MN — середня лінія трикутника ABC, $MN = 4$ см. Довжина відрізка BC дорівнює...

А 2 см; **Б** 8 см;
В 16 см; **Г** 6 см.



3. На рисунку точки E, M, F і N — середини сторін трапеції $ABCD$ (AD і BC — основи). Яке із тверджень є правильним?

А MN — середня лінія трапеції;
Б EF — середня лінія трапеції;
В EF і MN — середні лінії трапеції;
Г $EF = 2(BC + AD)$.



Середній рівень

4. У рівнобедреному трикутнику ABC сполучено середину основи — точку M — із серединою бічної сторони BC — точкою K. Знайдіть довжину відрізка MK, якщо $BK = 7$ см.

5. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 26 см, а її основи — 4 см і 12 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

6. Знайдіть кути трапеції, якщо два її кути дорівнюють 42° і 155°.

Достатній рівень

7. Висота BM рівнобічної трапеції $ABCD$ точкою M поділяє більшу її основу AD на відрізки $AM = 4$ см і $MD = 10$ см та утворює з бічною стороною кут 30°. Знайдіть периметр трапеції.

8. Точки K, L, M і N — середини сторін чотирикутника $ABCD$ з діагоналями $AC = 15$ см і $BD = 23$ см. Знайдіть периметр чотирикутника $KLMN$.

9. Менша бічна сторона й менша основа прямокутної трапеції відповідно дорівнюють 20 см і 15 см, а один із її кутів — 45°. Знайдіть середню лінію трапеції.

Високий рівень

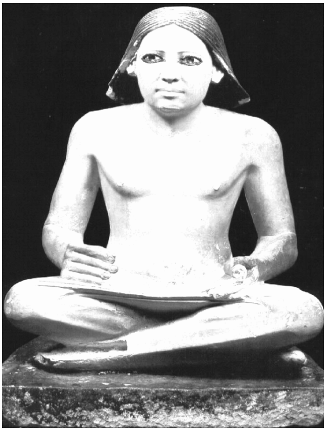
10. Діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, її бічна сторона дорівнює 13 см, а висота — 12 см. Знайдіть периметр трапеції.

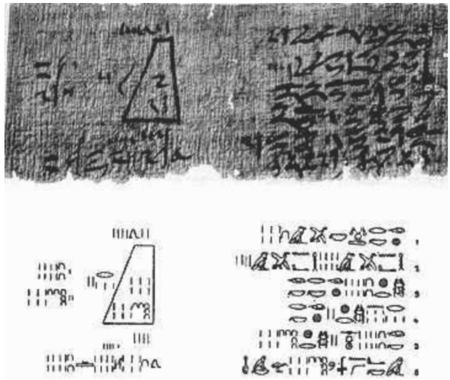
11. Середня лінія прямокутної трапеції дорівнює 25,5 см, її діагональ є бісектрисою тупого кута й утворює з її меншою основою кут 60°. Знайдіть основи трапеції і більшу бічну сторону трапеції.

12. У трикутнику ABC на медіані BM позначено її середину — точку E. Пряма AE перетинає сторону BC у точці K. Знайдіть KC, якщо $BC = 18$ см.

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Слово *«трапеція»* походить від латинського слова *«trapezium»* (*«трапезіум»*), що в перекладі означає *«столик»*. Від цього ж кореня походить і слово *«трапеза»*, що в перекладі з грецької мови означає *«стіл»*. У геометрії цей термін спочатку застосовували в розумінні будь-якого чотирикутника, який не є паралелограмом. Сучасного змісту термін набув лише у XVIII ст.





- Твердження про те, що середня лінія трапеції дорівнює півсумі її основ, було відомо ще стародавнім єгиптянам і вавилонянам. Воно міститься у папірусі Ахмеса (близько 2000 років до н. е.).
- Доведення цього факту як теореми є у працях Герона Олександрійського (I ст. до н. е.).
- Форму, близьку до трапеції, мають поперечні перерізи різних деталей і споруд, зокрема, каналів, гребель тощо.

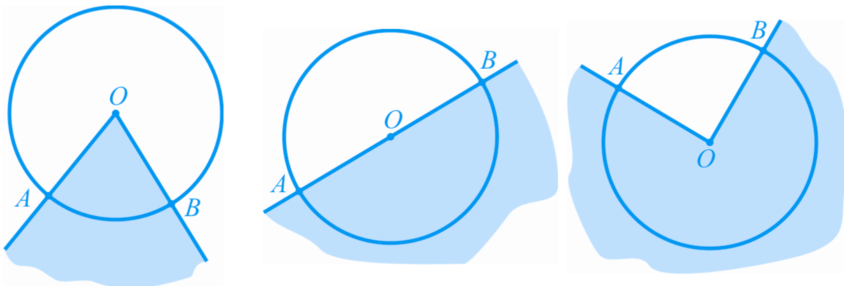
ГЕРОН ОЛЕКСАНДРІЙСЬКИЙ (I ст. н. е.)

§ 6. КУТИ, ПОВ’ЯЗАНІ З КОЛОМ. ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ

6.1. Центральні кути. Вписані кути

1. Центральні кути. Дуги та їх кутова міра.

На рис. 64 зображено кути, вершинами яких є центр кола. Відповідно й називають такі кути *центральними*.



а) б) в)

Рис. 64

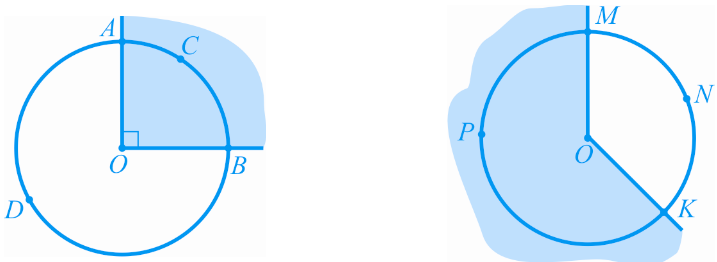
Означення **_Центральним кутом_ називають кут, вершиною якого є центр даного кола.**

Центральний кут може бути меншим від розгорнутого (рис. 64 а), розгорнутим (рис. 64 б) і більшим від розгорнутого (рис. 64 в).

Сторони центрального кута перетинають коло у двох точках, які поділяють коло на частини — дуги. Одна з дуг належить центральному куту, а інша — не належить. Щоб відрізняти дві дуги з однаковими кінцями, на одній з них чи на обох указують деяку проміжну точку. Позначають дуги за кінцями або за кінцями і проміжною точкою, використовуючи знак «∪». На рис. 65 а) центральному куту належить дуга *ACB* (∪*ACB*) і не належить дуга *ADB* (∪*ADB*). Про дугу, яка належить центральному куту, кажуть, що вона відповідає центральному куту, чи, навпаки, центральний кут відповідає дузі.

Означення **Кожна дуга на колі має кутову (градусну) міру. *Кутовою мірою дуги* є градусна міра відповідного центрального кута.**

На рис. 65 а) $\angle AOB = 90°$, отже, $\cup ACB = 90°$. На рис. 65 б) $\angle MOK = 225°$, отже, $\cup MPK = 225°$.



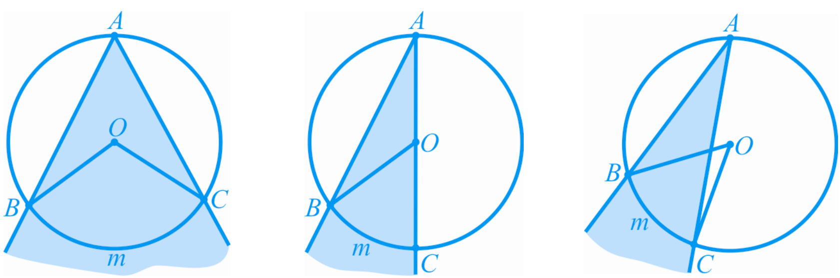
а) **б)**

Рис. 65

Кутова (градусна) міра кола дорівнює 360°, півкола — 180°, чверті кола — 90°. Сума мір двох дуг, які доповнюють одна одну до кола, дорівнює 360°. На рис. 65 а) $\cup ADB = 360° - 90° = 270°$, на рис. 65 б) $\cup MNK = 360° - 225° = 135°$.

2. Вписаний кут.

На рис. 66 а) зображено кут BAC, вершиною якого є точка кола, а його сторони AB й AC перетинають це коло. Кут BAC називають *вписаним у коло*.



а) **б)** **в)**

Рис. 66

Означення **Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають це коло, називають *кутом, вписаним у коло*.**

Центр кола може лежати всередині вписаного кута (рис. 66 а), на його стороні (рис. 66 б) або поза кутом (рис. 66 в).

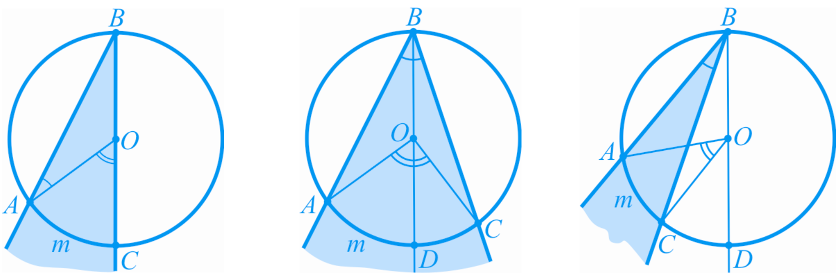
Сторони та вершина вписаного кута поділяють коло на три дуги. Одна з них належить куту, а дві інші — не належать. У випадку, коли дуга належить вписаному куту, кажуть, що кут спирається на цю дугу. На рис. 66 а) вписаний кут BAC спирається на дугу BmC, якій відповідає центральний кут BOC. Кажуть, що вписаному куту BAC відповідає центральний кут BOC.

Теорема **Вписаний кут дорівнює половині дуги, на яку він спирається, тобто дорівнює половині центрального кута, який йому відповідає .**

● **Доведення.** Нехай дано довільне коло з центром O. $\angle ABC$ — вписаний кут, тоді відповідний йому центральний кут $\angle AOC$.

Доведемо, що $\angle ABC = \dfrac{1}{2}\angle AOC = \dfrac{1}{2}\smile AmC$.

Розглядаємо три випадки розміщення центра кола відносно кута ABC.



а) б) в)

Рис. 67

1 випадок. Центр кола O належить одній зі сторін кута ABC, наприклад, стороні BC (рис. 67 а).

1. ΔABO — рівнобедрений з основою AB ($OA = OB$ як радіуси).

2. $\angle AOC$ — зовнішній кут трикутника ABO: $\angle AOC = \angle BAO + \angle ABO = 2\angle ABC$.

Отже, $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cup AmC$.

2 випадок. Центр кола O лежить усередині кута ABC (рис. 67 б).

Проведемо промінь BO, який перетинає дугу AC в точці D. Промінь BD поділяє кут ABC на вписані кути ABD і CBD, сторона BD яких проходить через центр кола. Тому згідно з результатами, одержаними у випадку 1, одержуємо:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = \frac{1}{2}\angle AOD + \frac{1}{2}\angle COD = \frac{1}{2}(\angle AOD + \angle COD) =$$
$$= \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cup AmC.$$

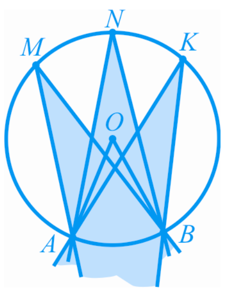
3 випадок. Центр кола O лежить поза кутом ABC (рис. 67 в).

Через центр кола O проведемо промінь BD. Отримуємо, що промінь BC належить куту ABD й поділяє його на два кути. Тому згідно з результатами, одержаними у випадку 1, одержуємо: $\angle ABC = \angle ABD - \angle\ CBD = \frac{1}{2}\angle AOD -$

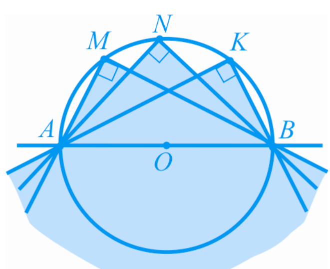
$- \frac{1}{2}\angle COD = \frac{1}{2}(\angle AOD - \angle COD) = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cup AmC$. Теорему доведено. ●

Наслідки

1. **Вписані кути, які спираються на ту саму дугу, рівні (рис. 68 а).**
2. **Вписаний кут, який спирається на півколо (діаметр), є прямим (рис. 68 б).**



а)



б)

Рис. 68

На рис. 68 а) кути AMB, ANB, AKB вписані й спираються на дугу AB. Отже, $\angle AMB = \angle ANB = \angle AKB = \frac{1}{2}\angle AOB$.

На рис. 68 б) AB — діаметр кола. Вписані кути AMB, ANB і AKB спираються на діаметр AB. Отже, $\angle AKB = \angle ANB = \angle AMB = \frac{1}{2}\angle AOB =$ $= \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

320. Накресліть коло з центром у точці O. Позначте на колі точку M і побудуйте вписаний кут з вершиною у цій точці та відповідний йому центральний кут. Заштрихуйте дугу, на яку спираються ці кути.

321. Укажіть кутову міру: **а)** кола; **б)** півкола; **в)** четверті кола.

322. Кутова міра однієї з дуг, на які поділяють коло дві точки, дорівнює 50°. Укажіть кутову міру іншої дуги.

323. Чому дорівнює вписаний кут, якщо: **а)** відповідний йому центральний кут дорівнює 70°; **б)** дуга, на яку він спирається, дорівнює 250°?

324. Вписаний кут дорівнює 70°. Укажіть градусну міру: **а)** відповідного йому центрального кута; **б)** дуги, на яку він спирається.

325. Кути ABC й ADC спираються на ту саму хорду AC. $\angle ABC = 70°$. Яка градусна міра кута ADC, якщо точки B і D лежать: **а)** з одного боку від хорди AC, **б)** з різних боків від неї?

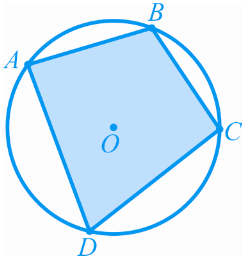
326. Чому дорівнює сума градусних мір двох вписаних кутів, які спираються на ту саму хорду, а вершини лежать з різних боків від неї?

327. Яка градусна міра вписаного кута MPK, якщо MK — діаметр кола?

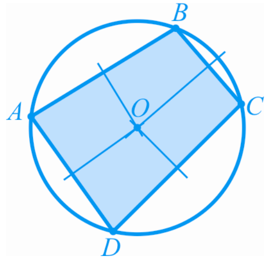
6.2. Вписаний чотирикутник

1. Вписаний чотирикутник і його властивість.

На рис. 69 а) дано коло з центром O, усі вершини чотирикутника $ABCD$ лежать на колі.



а)



б)

Рис. 69

Такий чотирикутник називають *вписаним у коло*, або *вписаним чотирикутником*.

Означення **Чотирикутник, усі вершини якого лежать на колі, називають *вписаним чотирикутником*.**

Якщо чотирикутник вписаний у коло, то центр кола рівновіддалений від вершин чотирикутника і є точкою перетину серединних перпендикулярів, проведених до його сторін (рис. 69 б).

Теорема **Якщо чотирикутник вписаний у коло, то сума його протилежних кутів дорівнює 180°.**

● **Доведення.** Нехай дано коло з центром O і довільний чотирикутник $ABCD$, вписаний у це коло (рис. 70). Доведемо, що $\angle A + \angle C = 180°$ і $\angle B + \angle D = 180°$.

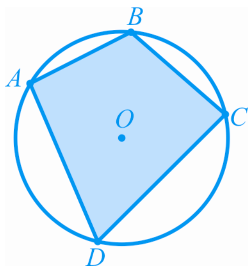


Рис. 70

Протилежні кути будь-якого вписаного чотирикутника спираються на дуги, які доповнюють одна одну до кола. Наприклад, кут A спирається на дугу BCD, а кут C — на дугу BAD. Сумою дуг BCD і BAD є коло. За теоремою про міру вписаного кута одержуємо:

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}\cup BCD + \frac{1}{2}\cup BAD = \frac{1}{2}(\cup BCD + \cup BAD) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°.$$

Аналогічно

$$\angle B + \angle D = \frac{1}{2}\cup ADC + \frac{1}{2}\cup ABC = \frac{1}{2}(\cup ADC + \cup ABC) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°.$$

Теорему доведено. ●

З теореми випливає: якщо сума протилежних кутів чотирикутника не дорівнює 180°, то навколо нього не можна описати кола. Наприклад, не можна описати кола навколо паралелограма з гострим кутом, зокрема, навколо ромба.

2. Ознака вписаного чотирикутника.

Має місце й теорема, обернена до доведеної. Вона встановлює, за якої умови навколо чотирикутника можна описати коло.

Теорема	**Якщо в опуклому чотирикутнику сума двох протилежних кутів дорівнює 180°, то навколо чотирикутника можна описати коло.**
Наслідки	**1. Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло.** **2. Навколо кожної рівнобічної трапеції можна описати коло.**

Доведення теореми подано в рубриці «Для тих, хто хоче знати більше».

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

328. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 5 см, центр — точка O, і впишіть у нього довільний чотирикутник $MNKL$. Запишіть властивість кутів чотирикутника.

329. У коло вписано чотирикутник $ABCD$, у якого $\angle A = 70°$ і $\angle B = 105°$. Знайдіть кути C і D чотирикутника.

330. $MOPK$ — чотирикутник, вписаний у коло. Знайдіть кути M і P, якщо вони рівні.

331. На яких властивостях фігур базується доведення теореми про властивість вписаних чотирикутників?

332. Поясніть, чому не можна описати коло навколо паралелограма, ромба, які мають гострий кут.

333. Чи можна описати коло навколо чотирикутника, у якого два протилежні кути: **а)** 30° і 150°; **б)** 20° і 170°; **в)** гострі; **г)** тупі; **д)** прямі.

334. Навколо яких видів чотирикутників можна описати коло?

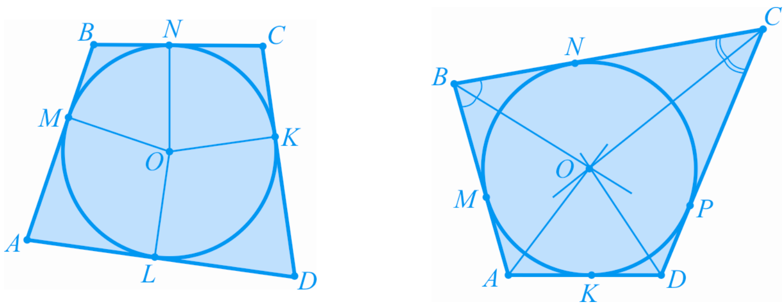
335. Накресліть чотирикутник $ABCD$, у якого $\angle A = 50°$, $\angle B = 40°$ і $\angle C = 130°$. Знайдіть центр кола, описаного навколо чотирикутника, провівши серединні перпендикуляри до двох сусідніх сторін, і опишіть навколо чотирикутника коло.

336. Накресліть рівнобічну трапецію з кутом 45° при основі й опишіть навколо неї коло.

6.3. Описаний чотирикутник

1. Описаний чотирикутник і його властивість.

Нехай коло з центром O дотикається до всіх сторін чотирикутника $ABCD$.



а) б)

Рис. 71

Такий чотирикутник називають *описаним навколо кола*, або *описаним чотирикутником*.

Означення | ***Описаним чотирикутником*** **називають чотирикутник, усі сторони якого дотикаються до кола.**

Такий чотирикутник зображено на рис. 71 а). Якщо чотирикутник описаний навколо кола, то центр кола, рівновіддалений від усіх сторін чотирикутника і є точкою перетину бісектрис кутів чотирикутника (рис. 71 б).

Теорема **Якщо чотирикутник описаний, то суми його протилежних сторін рівні.**

● **Доведення.** Нехай *ABCD* — описаний чотирикутник (рис. 71 б). Доведемо, що $AB + CD = AD + BC$.

Позначимо точки дотику сторін чотирикутника до кола через *M*, *N*, *P* і *K*. Відомо, що відрізки дотичних, проведені з однієї точки до кола, рівні. Маємо: $AM = AK$, $MB = BN$, $DP = KD$, $PC = NC$.

Додамо почастинно ці рівності: $AM + MB + DP + PC = AK + BN + KD + NC$; $AB + DC = AK + KD + BN + NC$; $AB + DC = AD + BC$. ●

2. Ознака описаного чотирикутника.

Справедлива й обернена теорема, яка виражає ознаку описаного чотирикутника.

Теорема **Якщо суми протилежних сторін опуклого чотирикутника рівні, то в такий чотирикутника можна вписати коло.**

Наслідок **Коло можна вписати в будь-який ромб.**

Центром кола вписаного в ромб, є точка перетину діагоналей, а його діаметр дорівнює висоті ромба.

Доведення теореми подано в рубриці «Для тих, хто хоче знати більше».

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

337. Накресліть коло радіус якого дорівнює 5 см, центр — точка *O*. Позначте на ньому чотири точки *A*, *B*, *C* і *D* та проведіть через кожну з них дотичну до кола. Чотирикутник, що утвориться в результаті перетину дотичних, позначте *MNKL*. Запишіть його властивість як описаного чотирикутника.

338. Яку властивість дотичних використовують при доведенні властивостей описаного чотирикутника?

339. Три послідовні сторони описаного чотирикутника дорівнюють 5 см, 7 см і 9 см. Чому дорівнює сума другої та четвертої сторони? Знайдіть четверту сторону чотирикутника.

340. Поясніть, чому не можна вписати коло в паралелограм; прямокутник з нерівними сусідніми сторонами.

341. Сума двох протилежних сторін описаного чотирикутника дорівнює 15 см. Чи можна визначити периметр чотирикутника? Якщо можна визначити, то чому він дорівнює?

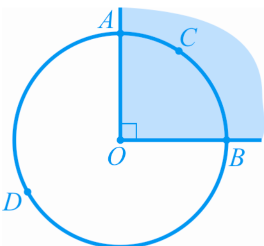
342. У трапецію, сума основ якої дорівнює 13 см, вписано коло. Чи можна знайти периметр трапеції? Якщо можна, то чому він дорівнює?

343. Чи можна вписати коло в чотирикутник, чотири послідовні сторони якого дорівнюють: **а)** 5 см, 7 см, 8 см і 6 см; **б)** 9 см, 9 см, 11 см і 12 см; **в)** 10 см, 13 см, 16 см і 13 см?

344. У які види чотирикутників можна вписати коло?

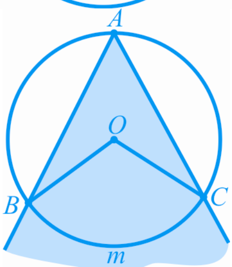
345. Накресліть ромб зі стороною 5 см і висотою 3 см і впишіть у нього коло.

ОСНОВНЕ В § 6



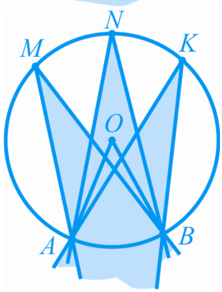
Центральним кутом називають кут, вершиною якого є центр даного кола.

Кожна дуга на колі має кутову (градусну) міру. ***Кутовою мірою дуги*** є градусна міра відповідного центрального кута.

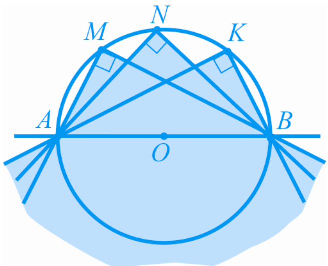


Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають це коло, називають ***кутом, вписаним у коло.***

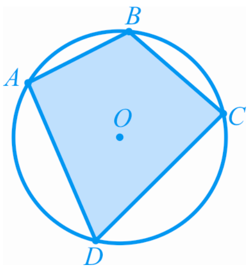
Теорема. Вписаний кут дорівнює половині дуги, на яку він спирається, тобто дорівнює половині центрального кута, який йому відповідає.



Наслідок 1. Вписані кути, які спираються на ту саму дугу, рівні.



***Наслідок* 2.** Вписаний кут, який спирається на півколо (діаметр), є прямим.

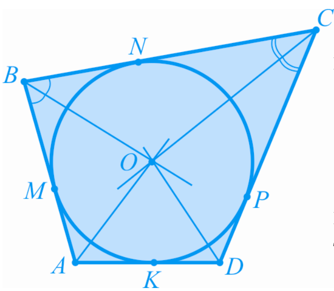


Чотирикутник, усі вершини якого лежать на колі, називають ***вписаним чотирикутником***.

Теорема 1. Якщо чотирикутник вписаний у коло, то сума його протилежних кутів дорівнює 180°.

Теорема 2. Якщо в опуклому чотирикутнику сума двох протилежних кутів дорівнює 180°, то навколо чотирикутника можна описати коло.

$$\angle A + \angle C = 180°; \ \angle B + \angle D = 180°$$



Описаним чотирикутником називають чотирикутник, усі сторони якого дотикаються до кола.

Теорема 1. Якщо чотирикутник описаний, то суми його протилежних сторін рівні.

Теорема 2. Якщо суми протилежних сторін опуклого чотирикутника рівні, то в такий чотирикутника можна вписати коло.

$$AB + CD = AD + BC$$

РОЗВ’ЯЗУЄМО РАЗОМ

Задача-теорема 1

Довести, що кут, вершина якого лежить зовні круга, а сторони перетинають коло, вимірюється піврізницею дуг, які лежать між його сторонами.

- **Доведення.** Нехай S — точка, яка лежить поза даним кругом (рис. 72).

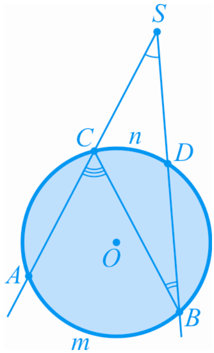


Рис. 72

Проведемо з точки S два промені, які перетинають коло в точках A і C та B і D. Доведемо, що $\angle ASB = \frac{1}{2}(\cup AmB - \cup CnD)$.

Проведемо хорду CB (або AD). Маємо: $\angle ACB = \angle ASB + \angle CBS$ (як зовнішній кут трикутника CBS). Звідси $\angle ASB = \angle ACB - \angle CBS$. Оскільки $\angle ACB = \frac{1}{2}\cup AmB$, $\angle CBS = \frac{1}{2}\cup CnD$ (за властивістю вписаних кутів), то $\angle ACB = \frac{1}{2}\cup AmB - \frac{1}{2}\cup CnD = \frac{1}{2}(\cup AmB - \cup CnD)$, що й потрібно було довести. ●

Задача-теорема 2 | Довести, що рівні хорди стягують рівні дуги.

● **Доведення.** Нехай у колі з центром O проведено рівні хорди AB і CD (рис. 73).

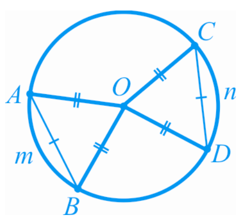


Рис. 73

З'єднаємо кінці хорд з центром кола. Трикутники AOB й DOC рівні за трьома сторонами ($AB = CD$, $OA = OB = OC = OD$ як радіуси кола). З рівності трикутників випливає рівність кутів AOB і COD. Ці кути є центральними. Отже, дуги AmB і CnD мають однакову градусну міру. ●

Опорна задача 3

Довести, що кут, вершина якого лежить всередині круга, вимірюється півсумою дуг, одна з яких лежить між сторонами кута, а інша — між їх продовженнями.

● **Доведення.** Нехай дано коло з центром у точці O і точку M, яка лежить усередині відповідного круга (рис. 74).

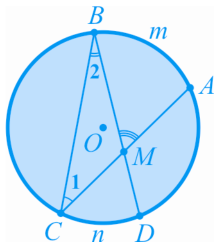


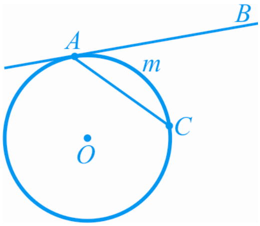
Рис. 74

Точка M є вершиною кута AMB. Накреслимо промені, доповняльні до сторін цього кута, до їх перетину з колом. Одержимо точки C і D. Проведемо хорду BC. Оскільки кут AMB — зовнішній кут трикутника BMC, то $\angle AMB = \angle 1 + \angle 2$. За властивістю вписаного кута маємо: $\angle 1 = \frac{1}{2} \cup AmB$, $\angle 2 = \frac{1}{2} \cup CnD$. Отже, $\angle AMB = \frac{1}{2} \cup AmB + \frac{1}{2} \cup CnD = \frac{1}{2}(\cup AmB + \cup CnD)$. ●

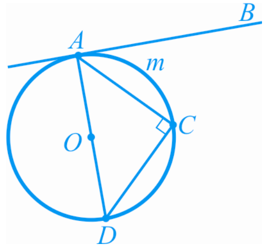
Опорна задача 4

Довести, що кут між дотичною та хордою, які мають спільну точку на колі, дорівнює половині кутової міри дуги, яка лежать усередині цього кута.

● **Доведення.** Нехай до кола з центром у точці O проведено дотичну BA (A — точка дотику) і через точку A проведено хорду AC (рис. 75 а). Доведемо, що $\angle BAC = \frac{1}{2} \cup AmC$.



а)



б)

Рис. 75

Проведемо через точку A діаметр AD, який утворює з дотичною AB прямий кут (властивість дотичної до кола) (рис. 75 б). З’єднаємо точки D і C. $\angle ACD = 90°$, оскільки він спирається на діаметр кола. З трикутника ACD: $\angle DAC + \angle CDA = 90°$. $\angle BAD = \angle DAC + \angle CAB = 90°$. Звідси $\angle CDA = \angle CAB$. Оскільки кут CDA вписаний у коло, то $\angle CDA = \frac{1}{2} \cup AmB$. Тоді $\angle CAB = \frac{1}{2} \cup AmC$, що й потрібно було довести. ●

Задача-теорема 5 Довести, що будь-яка трапеція, вписана в коло, є рівнобічною.

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — вписана трапеція (рис. 76).

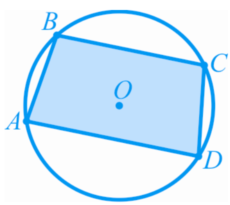


Рис. 76

За властивістю вписаного чотирикутника $\angle A + \angle C = 180°$, тобто $\angle C = 180° - \angle A$ (1). За властивістю кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, $\angle A + \angle B = 180°$, тобто $\angle B = 180° - \angle A$ (2). З рівностей (1) і (2) випливає, що $\angle B = \angle C$, а отже, і $\angle A = \angle D$. Оскільки кути при основі трапеції рівні, то вона є рівнобічною (ознака рівнобічної трапеції за кутами при основі). ●

Задача 6. В описаному чотирикутнику $ABCD$ $AB : BC : CD = 3 : 5 : 7$. Знайти сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 30 см.

Розв’язання

● Позначимо сторони AB, BC і CD через $3k$ см, $5k$ см і $7k$ см. За властивістю описаного чотирикутника $AB + CD = BC + DA$. Отже, $3k + 7k = 5k + DA$. Звідки $DA = 3k + 7k – 5k = 5k$. Отримуємо рівняння $3k + 5k + 7k + 5k = 30$; $20k = 30$; $k = 30 : 20 = 1,5$. Таким чином, $AB = 3 \cdot 1,5 = 4,5$ (см), $BC = 5 \cdot 1,5 = 7,5$ (см), $CD = 7 \cdot 1,5 = 10,5$ (см). $AD = 5 \cdot 1,5 = 7,5$ (см).

Відповідь: 4,5 см; 7,5 см; 10,5 см; 7,5 см. ●

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Скільки спиць у колесі, якщо кожний з кутів, розташований між двома сусідніми спицями, дорівнює 18°?

2. Скільки градусів містить дуга, яка описується точкою колеса за 1 секунду, якщо колесо робить 45 об/хв?

3. Знайдіть у градусах центральні кути, що відповідають кроку зубчатого колеса, яке має 20, 30, 45, 80 і 120 зубців.

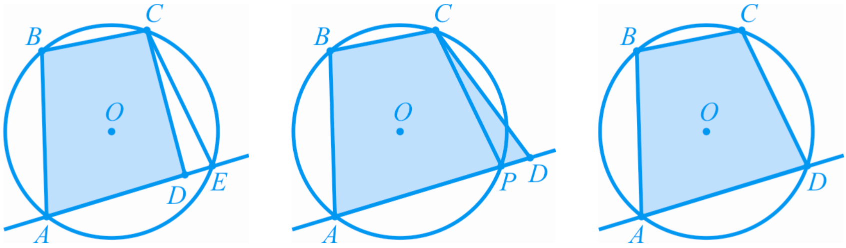
4. На який кут повернеться Земля навколо своєї осі за 8 годин? На який кут за цей же час повернеться годинникова стрілка?

ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

Теорема **Якщо в опуклому чотирикутнику сума двох протилежних кутів дорівнює 180°, то навколо чотирикутника можна описати коло.**

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — довільний чотирикутник, у якого одна із сум протилежних кутів дорівнює 180°. Наприклад, $\angle A + \angle C = 180°$. Тоді за теоремою про суму кутів чотирикутника $\angle B + \angle D = 360° – 180° = 180°$. Доведемо, що навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло.

Через будь-які три вершини чотирикутника, які можуть бути вершинами трикутника, завжди можна провести коло. Нехай коло проведене, наприклад, через вершини A, B і C. Можливі три випадки розміщення четвертої вершини D відносно кола. Точка D лежить: **а)** усередині круга (рис. 77 а); **б)** поза кругом (рис. 77 б); **в)** на колі (рис. 77 в).



а) б) в)

Рис. 77

а) Припустимо, що точка D лежить усередині круга. Продовжимо відрізок AD по прямій до перетину з колом. E — точка перетину прямої AD і кола. Сполучимо точки C й E. Утвориться вписаний чотирикутник $ABCE$. Маємо: $\angle B + \angle E = 180°$ (за доведеною властивістю вписаного чотирикутника), $\angle B + \angle D = 180°$ (за умовою). Звідси $\angle E = \angle D$, що неможливо, оскільки кут D — зовнішній кут трикутника DCE, а отже, $\angle D > \angle E$. Таким чином, точка D не може лежати всередині круга.

б) Припустимо, що точка D лежить поза кругом. Позначимо літерою P точку перетину відрізка AD з колом і сполучимо її відрізком з точкою C. Утворився вписаний чотирикутник $ABCP$. Маємо: $\angle B + \angle P = 180°$ (за властивістю вписаного чотирикутника), $\angle B + \angle D = 180°$ (за умовою). Звідси $\angle P = \angle D$, що неможливо, оскільки кут P — зовнішній кут трикутника PCD, а значить, $\angle P > \angle D$. Таким чином, точка D не може лежати поза кругом.

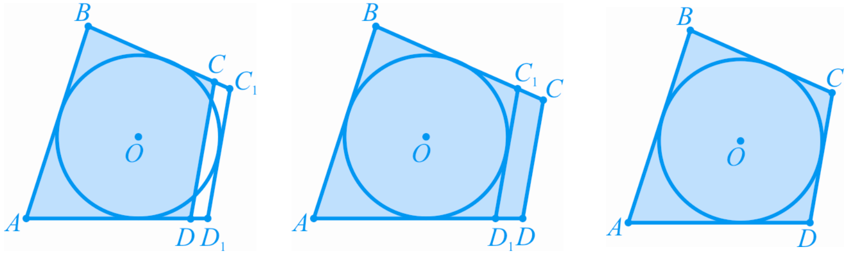
З **а)** і **б)** випливає, що точка D лежить на колі. Отже, існує коло, яке проходить через усі вершини чотирикутника $ABCD$. ●

Теорема | **Якщо суми протилежних сторін опуклого чотирикутника рівні, то в такий чотирикутника можна вписати коло.**

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — довільний чотирикутник, у якого $AB + CD = BC + AD$. Доведемо, що в чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло.

Проведемо в чотирикутнику бісектриси двох сусідніх кутів, наприклад, A і B. Тоді точка O перетину бісектрис рівновіддалена від трьох сторін AD, AB і BC чотирикутника і тому можна провести коло з центром O, яке дотикається до цих трьох сторін. Для четвертої сторони CD можливі три випадки розміщення відносно даного кола.

Сторона CD: **а)** перетинає коло (рис. 78 а), **б)** лежить поза кругом (рис. 78 б), **в)** є дотичною до кола (рис. 78 в).



а) б) в)

Рис. 78

а) Припустимо, що CD є січною до кола. Проведемо пряму C_1D_1, яка паралельна CD і дотикається до кола. Тоді маємо: $AB + CD = BC + AD$ (за умовою), $AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1$ (за властивістю описаного чотирикутника). Виконавши почастинне віднімання рівностей, отримуємо: $C_1D_1 - CD = BC_1 - BC + AD_1 - AD = BC + CC_1 - BC + AD + DD_1 - AD = CC_1 + DD_1$. Отже, $C_1D_1 - CD = CC_1 + DD_1$ або $C_1D_1 = CD + CC_1 + DD_1$.

Маємо в чотирикутнику CC_1D_1D, що сторона C_1D_1 дорівнює сумі трьох інших його сторін, що неможливо. Отже, CK не може бути січною для кола.

б) Аналогічними міркуваннями встановлюється неможливість другого випадку: сторона CD поза кругом. Отже, коло, яке дотикається до трьох сторін чотирикутника, дотикається і до четвертої його сторони. Теорему доведено. ●

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 6

1. Який кут називають: **а)** центральним; **б)** вписаним?
2. Що є кутовою мірою дуги?
3. Назвіть властивість вписаного кута.
4. Який чотирикутник називають: **а)** вписаним в коло; **б)** описаним навколо кола?
5. Назвіть властивість чотирикутника: **а)** вписаного в коло; **б)** описаного навколо кола.
6. Назвіть ознаку чотирикутника: **а)** вписаного в коло; **б)** описаного навколо кола.
7. Які види чотирикутників можна: **а)** вписати в коло; **б)** описати навколо кола?

8. Сформулюйте й доведіть властивість вписаного кута.

9. Сформулюйте й доведіть властивість: **а)** чотирикутника, вписаного в коло; **б)** чотирикутника, описаного навколо кола.

10. Сформулюйте й доведіть ознаку: **а)** чотирикутника, вписаного в коло; **б)** чотирикутника, описаного навколо кола.

ЗАДАЧІ ДО § 6

РІВЕНЬ А

346. Коло поділено точками на дві дуги. Яка кутова міра кожної з дуг, якщо: **а)** одна з них на 50° більшої від іншої; **б)** вони відносяться як 2 : 3.

347. Визначте кутову міру дуги, яка описує кінець годинникової стрілки за: **а)** 4 год; **б)** 2 год 30 хв.

348. Більша з дуг, на які поділяють коло дві точки, дорівнює 220°. Знайдіть градусну міру вписаного кута, який спирається на меншу з цих дуг.

349. Хорда перетинає коло в точках, що ділять коло на дві дуги, градусні міри яких пропорційні до чисел 5 і 7. Під яким кутом видно цю хорду з центра кола?

350. Хорда перетинає коло в точках, які ділять його на дві дуги. Під якими кутами видно цю хорду з точки кола, якщо кутові міри дуг відносяться як 2 : 7?

351. З точки кола проведено дві хорди BA й BC, кут між якими дорівнює 100°. Знайдіть кут між радіусами цього кола, проведеними в точки A й C.

352. Вершинами трикутника коло ділиться на дуги, градусні міри яких відносяться як 8 : 13 : 9. Знайдіть кути цього трикутника.

353. Усі вершини трикутника лежать на колі. Знайдіть кутові міри трьох дуг, на які поділяють коло вершини трикутника, якщо два кути трикутника дорівнюють 50° і 110°.

354. Два кути вписаного чотирикутника дорівнюють 85° і 55°. Знайдіть два інші кути.

355. Трапеція вписана в коло. Знайдіть кути трапеції, якщо різниця двох її кутів дорівнює 30°.

356. Трапеція, один з кутів якої дорівнює 74°, вписана в коло. Знайдіть три інші кути трапеції.

357. У вписаному чотирикутнику два протилежних кути відносяться як 3 : 5, а два інші кути відносяться як 4 : 5. Знайдіть кути чотирикутника.

358. Накресліть чотирикутник $ABCD$, у якого $\angle A = 100°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 80°$. Поясніть, чому навколо чотирикутника можна описати коло, та побудуйте це коло.

359. Побудуйте рівнобічну трапецію з більшою основою 8 см, бічною стороною 3 см, гострим кутом 30° і опишіть навколо неї коло.

360. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 5 см, і впишіть у нього трапецію з більшою основою 8 см і кутом 40°.

361. Дві протилежні сторони описаного чотирикутника дорівнюють 5 см і 7 см. Знайдіть периметр чотирикутника.

362. Три послідовні сторони описаного чотирикутника дорівнюють 3 см, 7 см і 10 см. Знайдіть четверту сторону чотирикутника.

363. В описаному чотирикутнику сума двох протилежних сторін дорівнює 45 см. Знайдіть довжину двох інших сторін, якщо вони відносяться як 2 : 3.

364. В описаному чотирикутнику дві протилежні сторони дорівнюють 4 см і 7 см. Знайдіть дві інші сторони, якщо їх різниця дорівнює 5 см.

365. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб зі стороною 12 см і кутом 30°.

366. Радіус кола, вписаного в ромб, дорівнює 6 см, а один з його кутів дорівнює 150°. Знайдіть периметр ромба.

367. Бічні сторони описаної трапеції дорівнюють 5 см і 7 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

368. Основи описаної трапеції дорівнюють 4 см і 12 см, а одна з бічних сторін — 7 см. Знайдіть іншу бічну сторону.

369. Побудуйте ромб зі стороною 5 см і гострим кутом 40° та впишіть у нього коло.

РІВЕНЬ Б

370. Усі вершини рівнобедреного трикутника лежать на колі. Кут між бічними сторонами трикутника дорівнює 28°. Знайдіть кутові міри дуг, на які вершини трикутника поділяють коло.

371. З точки кола проведено дві рівні хорди завдовжки 20 см, які утворюють кут 120°. Знайдіть діаметр кола.

372. Коло розділене точками на чотири дуги, кутові міри яких відносяться як 3 : 7 : 5 : 3. Знайдіть кути чотирикутника, утвореного послідовним сполученням цих точок.

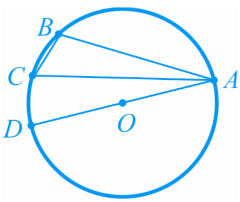
373. Точки *A*, *B* і *C* лежать на колі з центром *O*. Кут між хордами *AB* й *BC* дорівнює 40°, а градусні міри дуг *AB* і *BC* пропорційні до чисел 5 і 9. Знайдіть кут *AOC* та градусні міри дуг, на які коло розбивається цими точками.

374. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 56°. Півколо, побудоване на бічній стороні трикутника як на діаметрі, ділиться іншими його сторонами на три дуги. Знайдіть градусні міри цих дуг.

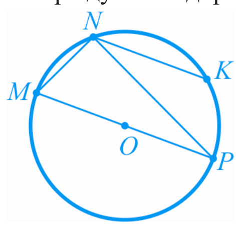
375. Точки *M* і *K* розбивають коло на дві дуги, градусна міра меншої з яких дорівнює 120°, а більша точкою *D* ділиться у відношенні 3 : 5, рахуючи від точки *M*. Знайдіть кути трикутника *MDK*.

376. З точки *A* кола проведено три хорди *AB*, *AC* і *AD* (рис. 79 а) так, що $\angle BAC = 18°$, $\angle ACB = 51°$. Знайдіть кут *CAD*.

377. Знайдіть кут *MNK* (рис. 79 б), якщо градусна міра дуги *KP* дорівнює 50°.



а)



б)

Рис. 79

378. Доведіть, що рівні дуги стягуються рівними хордами.

379. Доведіть, що центром кола, описаного навколо прямокутника, є точка перетину його діагоналей.

380. Менша сторона прямокутника дорівнює 8 см, а кут між його діагоналями — 120°. Знайдіть радіус описаного навколо нього кола.

381. У вписаному чотирикутнику два сусідні гострі кути рівні, а третій кут на 30° більший від їх суми. Знайдіть кути чотирикутника.

382. У вписаному чотирикутнику *ABCD* кут *B* на 20° більший від кута *A*, а кут *C* на 50° більший від кута *B*. Знайдіть кути чотирикутника.

383. Три послідовні кути вписаного чотирикутника відносяться як 5 : 6 : 7. Знайдіть усі кути чотирикутника.

384. Побудуйте рівнобічну трапецію за меншою основою, бічною стороною та висотою, й опишіть навколо неї коло.

385. Побудуйте рівнобічну трапецію за більшою основою, бічною стороною та діагоналлю, й опишіть навколо неї коло.

386. Периметр описаної трапеції дорівнює 24 см. Знайдіть основи трапеції, якщо одна з них на 2 см більша від іншої.

387. Периметр описаної трапеції дорівнює 36 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

388. Периметр описаної рівнобічної трапеції дорівнює 44 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

389. Периметр описаної прямокутної трапеції дорівнює 72 см, а більша бічна сторона — 19 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в трапецію.

390. Периметр ромба дорівнює 120 см, а його кути відносяться як 1 : 5. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб.

391. Побудуйте ромб за стороною і радіусом вписаного кола.

392. Побудуйте прямокутну трапецію за основами і радіусом вписаного кола.

РІВЕНЬ В

393. Доведіть, що дуги одного кола, які розміщені між паралельними хордами, рівні, і навпаки.

394. Доведіть, що кут між двома дотичними, проведеними з однієї точки, дорівнює піврізниці дуг, на які точки дотику поділяють коло.

395. У кут ABC вписано коло. Точки дотику ділять коло на дуги, кутові міри яких відносяться як 2 : 7. Знайдіть величину кута ABC.

396. Два кола зовнішньо дотикаються у точці A. Точки B і C — точки дотику спільної зовнішньої дотичної. Доведіть, що кут BAC — прямий.

397. Хорда стягує дугу у 80°. Знайдіть гострий кут, утворений цією хордою та дотичною до кола, проведеною у кінець хорди.

398. Хорда AB ділить коло у відношенні 7 : 11. Через точку A проведено дотичну до кола. Знайдіть кут, який вона утворює з даною хордою.

399. У вписаному чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC перпендикулярна до діагоналі BD і ділить її навпіл. $\angle BAD = 74°$. Визначте кути чотирикутника.

400. Діагональ AC чотирикутника $ABCD$ утворює зі сторонами чотирикутника кути $\angle BAC = 31°$, $\angle BCA = 32°$, $\angle DAC = 54°$, $\angle DCA = 63°$. Які кути утворює інша діагональ зі сторонами чотирикутника?

401. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle ABC = 110°$, $\angle ADC = 70°$, $\angle BDC = 25°$. Знайдіть кут ACB.

402. Трапецію вписано в коло так, що центр кола лежить на одній з основ. Кут між діагоналями трапеції дорівнює 50°. Знайдіть кути трапеції.

403. Менша основа рівнобедреної трапеції завдовжки 7 см дорівнює бічній стороні, а один з кутів трапеції дорівнює 60°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цієї трапеції.

404. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює її меншій основі. За якої умови центр кола, описаного навколо трапеції, лежить: **а)** усередині трапеції; **б)** на основі трапеції; **в)** поза трапецією?

405. Побудуйте рівнобічну трапецію за основою, бічною стороною та радіусом описаного кола.

406. Побудуйте рівнобічну трапецію за основою, висотою та радіусом описаного кола.

407. У чотирикутник, периметр якого дорівнює 42 см, вписано коло. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо три сторони, взяті в послідовному порядку, відносяться як 2 : 7 : 12.

408. Рівнобічна трапеція, бічна сторона якої дорівнює 20 см, а кут при основі — 60°, описана навколо кола. Знайдіть основи трапеції.

409. Трапеція з основами 5 см і 13 см і бічними сторонами 4 см і 8 см прямою, перпендикулярною до основ, поділена на дві трапеції, у які можна вписати коло. Знайдіть висоту даної трапеції.

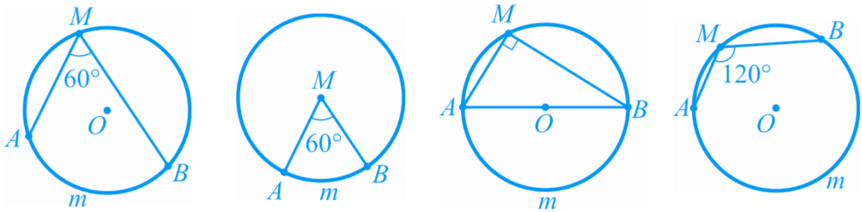
410. Паралелограм зі сторонами 2 см і 3 см прямою, перпендикулярною до більшої сторони, поділений на дві трапеції, у які можна вписати коло. Знайдіть гострий кут паралелограма.

411. У рівнобічну трапецію з гострим кутом 30° вписано коло. Знайдіть периметр трапеції, якщо довжина відрізка, який з'єднує точки дотику кола з бічними сторонами, дорівнює 10 см.

КОНТРОЛЬ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ ЗА МАТЕРІАЛОМ § 6

Початковий рівень

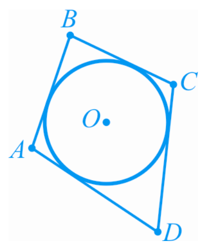
1. У якому з випадків градусна міра дуги AmB дорівнює 120°?



А Б В Г

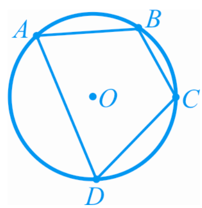
2. Коло вписано в чотирикутник $ABCD$. AB = 4 см, BC = 5 см, CD = 8 см, AD = ...

А 6 см; **Б** 7 см;
В 8 см; **Г** 5 см.



3. Коло описано навколо чотирикутника $ABCD$. $\angle B$ = 115°, $\angle D$ = ...

А 90°; **Б** 65°;
В 115°; **Г** 45°.

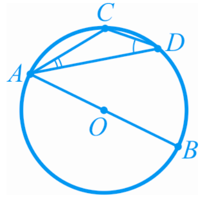


Середній рівень

4. Діагональ прямокутника ділить його кут у відношенні 1 : 2, а його менша сторона дорівнює 11 см. Знайдіть радіус описаного навколо прямокутника кола.

5. У рівнобічну трапецію з бічною стороною 22 см вписано коло. Знайдіть середню лінію трапеції.

6. Дано коло з центром у точці O і точки A, B, C і D, що належать колу. $\angle CAD = 20°$, $\angle CDA = 30°$. Знайдіть величину кута DAB.



Достатній рівень

7. Вершини чотирикутника $ABCD$ знаходяться на колі і ділять його у відношенні 2 : 3 : 4 : 6. Знайдіть внутрішні кути чотирикутника і кути, які утворює діагональ, проведена з вершини більшого кута цього чотирикутника, з його сторонами.

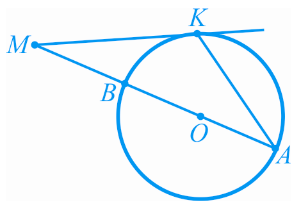
8. Коло, радіус якого дорівнює 8 см, вписано в ромб. Знайдіть кути ромба та його більшу діагональ, якщо висота ромба удвічі менша від його більшої діагоналі.

9. Більша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 20 см, а висота, опущена з вершини тупого кута, ділить основу на відрізки завдовжки 16 см і 8 см, рахуючи від вершини гострого кута. Знайдіть радіус вписаного в трапецію кола.

Високий рівень

10. У вписаному в коло чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC перпендикулярна діагоналі BD і ділить її навпіл. Визначте кути цього чотирикутника, якщо $\angle BAD = 50°$.

11. На продовженні діаметра AB кола вибрано точку M і через неї проведено дотичну MK до цього кола. Знайдіть кут BAK, якщо $\angle AKM = 128°$.



12. З’ясуйте, чи можна в рівнобедрену трапецію, у якій діагоналі взаємно перпендикулярні, вписати коло. Відповідь обґрунтуйте.

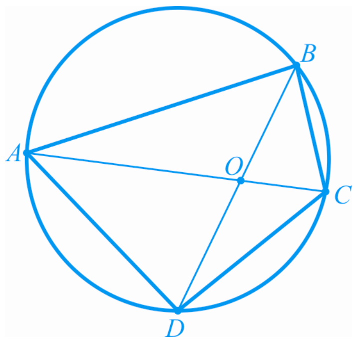
ЦІКАВО ЗНАТИ

- Подане в підручнику доведення теореми «Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається» містить ще «Начала» Евкліда.
- Те, що вписаний кут, який спирається на діаметр, — прямий, знали вавилоняни ще 4000 років тому. Перше доведення цього твердження приписують давньогрецькому вченому Фалесу Мілетському.
- Цікаву залежність між сторонами та діагоналями вписаного чотирикутника встановлює теорема Птолемея (давньогрецький учений).

  Якщо в коло вписано чотирикутник, то добуток його діагоналей дорівнює сумі добутків його протилежних сторін:

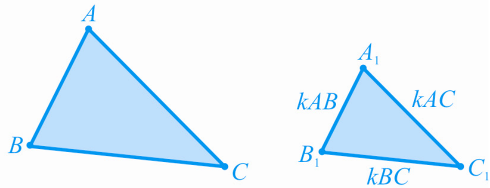
$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

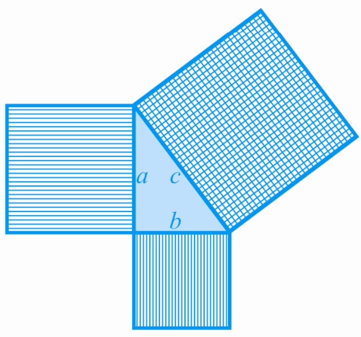
ПТОЛЕМЕЙ
(бл. 90 – бл. 168 рр.)



Розділ II. ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

Опрацювавши цей розділ, ми розглянемо:
- що таке пропорційні відрізки;
- які трикутники є подібними;
- ознаки подібних трикутників;
- які відрізки є середніми пропорційними;
- теорему Піфагора.





$$c^2 = a^2 + b^2$$

§ 7. ПРОПОРЦІЙНІ ВІДРІЗКИ

1. Відношення двох відрізків.

Означення | ***Відношенням двох відрізків*** **називають число, яке дорівнює відношенню довжин цих відрізків.**

Оскільки довжини відрізків є додатними числами, то їх відношення є додатним числом.

Відношення відрізків AB і CD позначають у вигляді дробу $\frac{AB}{CD}$ або частки $AB : CD$. Якщо $\frac{AB}{CD} = k$, то $AB = k \cdot CD$.

Приклад. Нехай $AB = 4$ см, $CD = 6$ см. Маємо $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ або $AB = \frac{2}{3}CD$; $\frac{CD}{AB} = \frac{6}{4} = 1,5$ або $CD = 1,5AB$.

Порівняння відрізків за їх відношенням.

Якщо відоме відношення двох відрізків, то можна порівняти їх довжини.

Нехай $\frac{AB}{CD} = k$. Якщо $k > 1$, то відрізок AB більший, ніж відрізок CD (у k разів). Наприклад, $\frac{AB}{CD} = 4,5$. Тоді $AB = 4,5CD$, тобто відрізок AB у 4,5 разу більший, ніж відрізок CD. Якщо $k = 1$, то відрізки AB і CD рівні. Якщо $k < 1$, то відрізок AB менший, ніж відрізок CD. Наприклад, $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$. Тоді $AB = \frac{2}{3}CD$, тобто довжина відрізка AB становить $\frac{2}{3}$ довжини відрізка CD.

2. Пропорційні відрізки.

Дано чотири відрізки $AB = 3$ см, $CD = 5$ см, $MN = 6$ см і $PK = 10$ см (рис. 80).

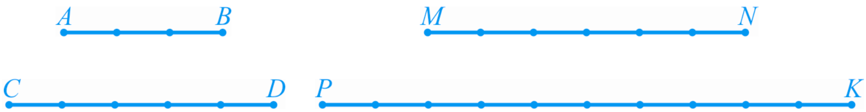


Рис. 80

Маємо $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$ і $\frac{MN}{PK} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, тобто відношення відрізків AB і CD та відрізків MN і PK рівні. У такому випадку кажуть, що відрізки AB і CD пропорційні до відрізків MN і PK.

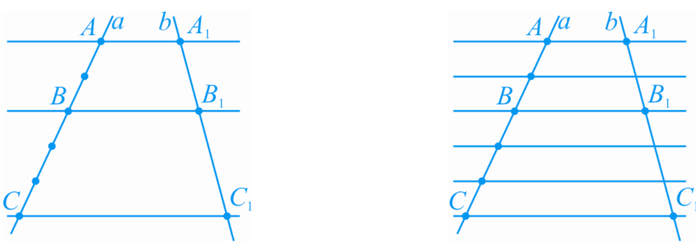
Означення | ***Два відрізки*** **називають** ***пропорційними до двох інших відрізків,*** **якщо відношення першої пари відрізків дорівнює відношенню відрізків другої пари, або, по-іншому, їх відношення рівні.**

За означенням, відрізки AB і CD пропорційні до відрізків A_1B_1 і C_1D_1, якщо їх довжини утворюють правильну числову пропорцію $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$.

Оскільки у пропорції можна міняти місцями середні або крайні члени, то пропорційність відрізків AB і CD до відрізків A_1B_1 і C_1D_1, можна записати і у вигляді пропорції $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$.

3. Теорема про пропорційні відрізки (узагальнена теорема Фалеса).

На рис. 81 через точки A, B і C прямої a проведено паралельні прямі, які перетинають пряму b відповідно в точках A_1, B_1 і C_1.



а) **б)**

Рис. 81

Чи будуть відрізки прямої a пропорційними до відповідних відрізків прямої b, наприклад, відрізки AB і BC до відрізків A_1B_1 і B_1C_1? Відповідь на питання дає така теорема.

Теорема **Якщо дві прямі перетнути паралельними прямими, то будь-які два утворені відрізки однієї прямої пропорційні відповідним відрізкам іншої прямої.**

Теорема справедлива як у випадках, коли відношення відрізків є часткою цілих чисел, так і у випадках, коли відношення не є часткою цілих чисел.

Обмежимося доведенням теореми, коли відношення є часткою цілих чисел.

● **Доведення.** Нехай дано дві прямі a та b. Через довільні точки прямої a, наприклад A, B і C, проведемо паралельні прямі, які перетинають пряму b відповідно в точках A_1, B_1 і C_1. Доведемо, що, наприклад, відрізки AB і BC пропорційні до відрізків A_1B_1 і B_1C_1, тобто $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

Нехай $\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$ (m і n — цілі числа). Поділимо відрізок BC на n рівних частин, тоді відрізок AB поділиться на m таких частин (рис. 82). Відрізок AC буде поділено на $(m + n)$ рівних частин-відрізків. Через точки поділу проведемо прямі, паралельні прямій CC_1. За теоремою Фалеса відрізок A_1B_1 буде поділено на m рівних частин, а відрізок B_1C_1 — на n рівних частин. Відрізок A_1C_1 буде поділений на $(m + n)$ рівних частин (відрізків). Позначимо довжину одного з цих відрізків через l. Тоді $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{ml}{nl} = \frac{m}{n}$. Отже, $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$, тобто відрізки AB і BC пропорційні до відрізків A_1B_1 і B_1C_1. ●

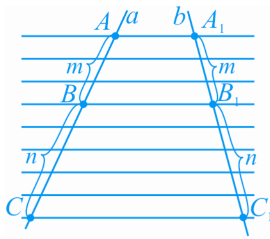


Рис. 82

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

412. Дано: $AB = 4$ см, $CD = 12$ см. Знайдіть: **а)** $\frac{AB}{CD}$; **б)** $\frac{CD}{AB}$.

413. Дано: $MN = 30$ см, $PK = 5$ м. Знайдіть: **а)** $\frac{MN}{PK}$; **б)** $\frac{PK}{MN}$.

414. Точка C поділяє відрізок AB на відрізки $AC = 3$ см і $CB = 7$ см. Знайдіть: **а)** $\frac{AC}{CB}$; **б)** $\frac{AC}{AB}$; **в)** $\frac{CB}{AB}$; **г)** $\frac{AB}{AC}$.

415. Знайдіть відношення $\frac{AB}{CD}$, якщо: **а)** відрізок CD 4 рази вкладається у відрізок AB; **б)** відрізок AB тричі вкладається у відрізок CD; **в)** $\frac{1}{5}$ відрізка CD 4 рази вкладається у відрізок AB.

416. Відрізки AB і CD пропорційні до відрізків MO і PK: $\frac{AB}{CD} = \frac{MO}{PK}$. Виразіть через довжини трьох інших відрізків довжину відрізка: **а)** AB; **б)** CD; **в)** MO.

417. На рисунку 83 $MN \parallel EF \parallel PK$. Назвіть на стороні AK кута A відрізки, пропорційні до відрізків: **а)** AM і PE; **б)** ME і EP; **в)** AE і MP; **г)** MN і EF; **д)** PK і EF; **е)** MN і PK.

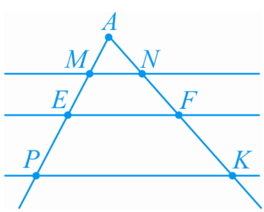
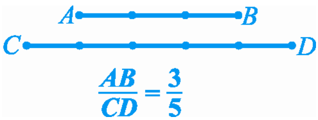
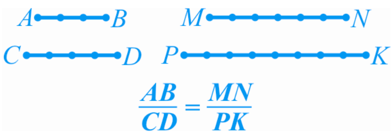


Рис. 83

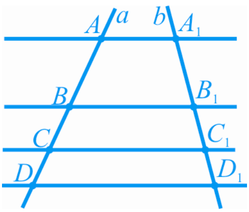
ОСНОВНЕ В § 7



Відношенням двох відрізків називають число, яке дорівнює частці довжин цих відрізків.



Два відрізки називають ***пропорційними до двох інших відрізків***, якщо відношення першої пари відрізків дорівнює відношенню відрізків другої пари, або, по-іншому, їх відношення рівні.

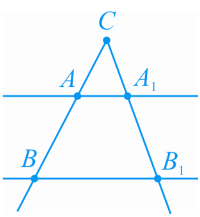


Теорема. Якщо дві прямі перетнути паралельними прямими, то будь-які два утворені відрізки однієї прямої пропорційні відповідним відрізкам іншої прямої.

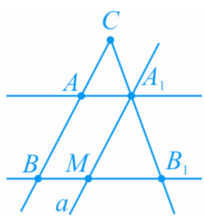
ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

Теорема про відрізки паралельних прямих.

На рис. 84 а) сторони кута C перетнуті паралельними прямими. Чи є на сторонах кута відрізки, пропорційні до відрізків AA_1 і BB_1 паралельних прямих?



а)



б)

Рис. 84

Відповідь на питання дає теорема.

Теорема

Якщо сторони кута перетнути паралельними прямими, то відрізки цих паралельних прямих з кінцями на сторонах кута пропорційні до відрізків, які лежать на сторонах кута, починаючи від вершини до відповідних паралельних прямих.

● **Доведення.** Нехай дано кут C і паралельні прямі AA_1 й BB_1, у яких точки A і B лежать на одній стороні кута, а точки A_1 і B_1 — на іншій його стороні.

Доведемо, що $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{CA}{CB}$, $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{CA_1}{CB_1}$.

Проведемо через точку A_1 пряму $a \| BC$. Маємо прямі CB_1 і BB_1, перетнуті паралельними прямими A_1M і BC. За узагальненою теоремою Фалеса: $\frac{BM}{BB_1} = \frac{CA_1}{CB_1}$. Оскільки чотирикутник AA_1MB — паралелограм, то $BM = AA_1$. Отже, $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{CA_1}{CB_1}$. Оскільки за узагальненою теоремою Фалеса $\frac{CA_1}{CB_1} = \frac{CA}{CB}$, то і $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{CA}{CB}$. Теорему доведено. ●

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Задача 1. Основи трапеції дорівнюють 14 см і 21 см. Бічні сторони, що дорівнюють 5 см і 12 см, продовжені до перетину. Обчислити периметр трикутника, утвореного меншою основою та продовженням бічних сторін трапеції.

Розв'язання

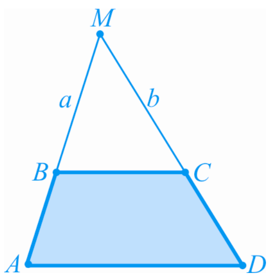


Рис. 85

● Нехай $ABCD$ — дана за умовою трапеція, у якої продовження бічних сторін перетинаються в точці M (рис. 85). За теоремою про відрізки паралельних прямих $\frac{MB}{MA}=\frac{BC}{AD}$ і $\frac{MC}{MD}=\frac{BC}{AD}$. Нехай $MB = a$ см і $MC = b$ см. Маємо:

1) $\frac{a}{a+5}=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$; $3a = 2(a + 5)$; $3a = 2a + 10$; $a = 10$ (см);

2) $\frac{b}{b+12}=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$; $3b = 2(b + 12)$; $3b = 2b + 24$; $b = 24$ (см).

Таким чином, $P_{\Delta MBC} = MB + MC + BC = 10 + 24 + 14 = 48$ (см).

Відповідь: 48 см. ●

Задача 2. Дано відрізки a, b і c (рис. 86 а). Побудувати відрізок x такий, що $a : b = c : x$.

Розв'язання

● Дано: a, b, c — задані відрізки.

Побудувати: відрізок x такий, що $a : b = c : x$.

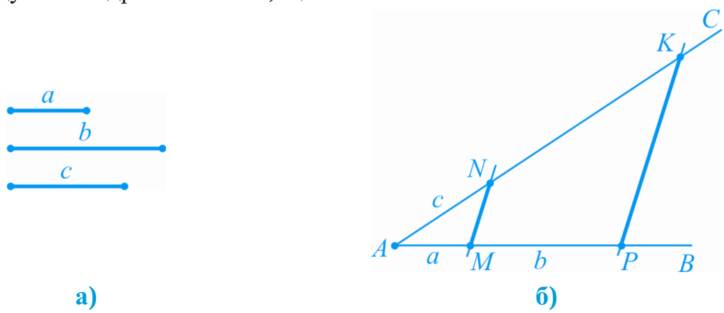


Рис. 86

1. Будуємо довільний кут BAC (рис. 86 б). На стороні AB послідовно відкладаємо відрізки $AM = a$ і $MP = b$, а на стороні AC — відрізок $AN = c$.

2. Проведемо пряму MN, а через точку P — пряму PK таку, що $PK \| MN$ (K — точка перетину прямих AC і PK). За узагальненою теоремою Фалеса $\frac{AM}{MP}=\frac{AN}{NK}$, тобто $\frac{a}{b}=\frac{c}{NK}$.

Таким чином, NK — шуканий відрізок x. ●

Задача-теорема 3

(Теорема про бісектрису трикутника). Довести, що бісектриса кута трикутника поділяє його сторону на частини, пропорційні двом іншим сторонам.

● **Доведення.** Нехай BD — бісектриса трикутника ABC ($\angle 1 = \angle 2$) (рис. 87). Доведемо, що $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

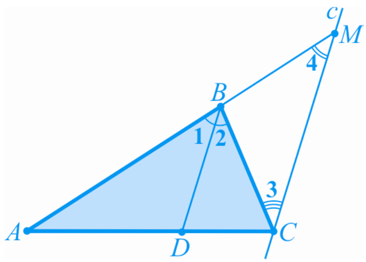


Рис. 87

1. Через вершину C проведемо пряму c, паралельну прямій BD. Точка M — точка перетину прямих c й AB. В утвореному трикутнику BMC кути, прилеглі до сторони CM, позначимо як 3 і 4.

2. Маємо: $\angle 3 = \angle 2$ як внутрішні різносторонні при $BD \parallel CM$ і січній BC, $\angle 4 = \angle 1$ як відповідні кути при $BD \parallel CM$ і січній AM. Оскільки $\angle 1 = \angle 2$, то і $\angle 3 = \angle 4$. Отже, трикутник BCM — рівнобедрений (ознака за кутами). Отже, $BC = BM$.

3. Оскільки $BD \parallel CM$, то за узагальненою теоремою Фалеса $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BM}$. Замінивши в отриманій пропорції відрізок BM рівним йому відрізком BC, маємо: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Теорему доведено. ●

Задача-теорема 4

Довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну медіану у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника.

● **Доведення.** Нехай O — точка перетину двох медіан (AD й BE) трикутника ABC (рис. 88).

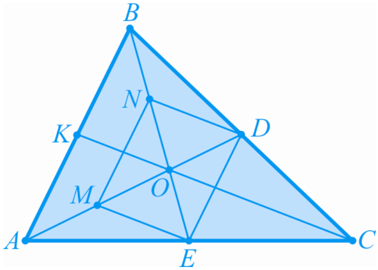


Рис. 88

Побудуємо чотирикутник $MNDE$, де M і N — середини відрізків AO і BO. Оскільки відрізок MN є середньою лінією трикутника AOB, то $MN \| AB$ $MN = \frac{1}{2}AB$. Відрізок DE є середньою лінією трикутника ABC, тому $DE \| AB$ і $DE = \frac{1}{2}AB$.

Звідси випливає, що $MN \| DE$ і $MN = DE$, тобто чотирикутник $MNDE$ — паралелограм з діагоналями MD і NE. Отже, $MO = OD$, і оскільки $MO = AM$, то $AM = MO = OD$. Таким чином, точка O ділить медіану AD у відношенні $AO : OD = 2 : 1$. У такому ж відношенні ця точка ділить і медіану BE.

Третя медіана з аналогічних міркувань точкою її перетину як із першою, так і з другою медіанами теж має ділитися у відношенні 2 : 1. При цьому третя медіана не може перетинати медіани AD і BE у точках, відмінних від O, оскільки тоді на ній було б дві різні точки, які ділили б її у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини, що неможливо. ●

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Відстань між двома пунктами на карті дорівнює 6 см. Яка відстань між цими пунктами на місцевості, якщо масштаб карти 1 : 10000?
2. Визначте масштаб карти, якщо відрізку 5 см на ній відповідає відстань 300 км на місцевості.

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 7

1. Що називають відношенням двох відрізків?

2. У якому випадку два відрізки називають пропорційними до двох інших відрізків?

3. Назвіть властивість відрізків, які утворюються на сторонах кута при перетині його паралельними прямими?

4. Сформулюйте й проілюструйте рисунком:

а) теорему Фалеса;

б) теорему про відрізки паралельних прямих;

в) теорему про бісектрису трикутника;

г) теорему про властивість медіан трикутника.

5. Доведіть:

а) теорему Фалеса (для раціональних чисел);

б) теорему про відрізки паралельних прямих;

в) теорему про бісектрису трикутника;

г) теорему про властивість медіан трикутника.

ЗАДАЧІ ДО § 7

РІВЕНЬ А

418. Визначте, чи є пропорційними пари відрізків a і b та c і d, якщо:

а) a = 1,5 см, b = 0,7 см, c = 6 см, d = 2,8 см;

б) a = 40 мм, b = 2,5 см, c = 48 см, d = 3 дм;

в) a = 8 дм, b = 30 см, c = 3,6 см, d = 12 мм.

419. Серед відрізків a, b, c, d і m виберіть пари пропорційних відрізків, якщо a = 2 дм, b = 16 дм, c = 17,5 дм, d = 4 дм, m = 35 дм.

420. Відрізок завдовжки 60 см поділили на два відрізки у відношенні 5 : 7. Знайдіть довжини цих відрізків.

421. Точка C поділяє відрізок AB у відношенні $AC : CB$ = 5 : 3. Знайдіть довжини відрізків AB і CB, якщо AC = 15 см.

422. Відрізки AB і CD пропорційні до відрізків MN і PK. Знайдіть: **а)** AB, якщо CD = 21 см, MN = 10 см і PK = 15 см; **б)** MN, якщо AB = 24 см, CD = 36 см і PK = 9 см.

423. Накресліть довільний відрізок і поділіть його у відношенні: **а)** 2 : 3; **б)** 3 : 5.

424. За допомогою відрізків 5 см, 3 см і 2 см побудуйте відрізок, довжина x якого задовольняє пропорцію: **а)** $\frac{5}{3} = \frac{2}{x}$; **б)** $\frac{3}{x} = \frac{2}{5}$.

425. BD — бісектриса кута B у трикутнику ABC. Знайдіть: **а)** AD і DC, якщо $AB = 8$ дм, $BC = 12$ дм, $AC = 15$ дм; **б)** BC, якщо $CD : AD = 4 : 3$ і $AB = 36$ см.

426. У трикутнику зі сторонами 5 дм і 8 дм проведено бісектрису кута між даними сторонами. Вона ділить третю сторону на відрізки, менший з яких дорівнює 3 дм. Знайдіть периметр трикутника.

РІВЕНЬ Б

427. Сторони кута A перетнуті паралельними прямими BC й DE (точки B і D розміщені на одній стороні кута, а точки C і E — на іншій стороні). Знайдіть: **а)** AC, якщо $AB = 8$ дм, $AD = 12$ дм і $AE = 10$ дм; **б)** AD, якщо $AC : AE = 15 : 33$ і $BD = 12$ см.

428. Відрізок AB поділено на дві частини у відношенні 5 : 13, до того ж різниця довжин частин дорівнює 4 см. Знайдіть довжину відрізка AB.

429. У рівнобедреному трикутнику ABC медіана BD проведена до основи (рис. 89). Через точки C і D проведено паралельні прямі CM і DK, які перетинають сторону AB в точках M і K, а пряма CM перетинає медіану BD в точці F, до того ж $BF : FD = 7 : 5$. Знайдіть $BM : MA$.

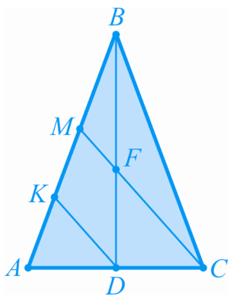


Рис. 89

430. Дано відрізок AB завдовжки 6 см. Точка C відрізка розміщена від точки A на відстані 3,6 см. На продовженні відрізка AB по прямій за точкою B

взято точку D таку, що її відстань до точки A відноситься до її відстані до точки B як $AC : CB$. Знайдіть відстань між точками B і D.

431. Сторони кута A перетнуті паралельними прямими BM і CK (точки B і C розміщені на одній стороні кута, а точки M і K — на іншій стороні). Знайдіть: **а)** AC, якщо $BM = 2$ дм, $CK = 5$ дм і $BC = 9$ дм; **б)** AM, якщо $MK = 16$ см, $BM = 3$ см і $CK = 7$ см.

432. Знайдіть дві сторони трикутника, якщо їх сума дорівнює 68 см, а бісектриса кута між ними ділить третю сторону у відношенні 7 : 10.

433. У трикутник ABC вписано ромб $ADMK$ так, що вершини D, M і K лежать відповідно на сторонах AB, BC і AC. Знайдіть BM і MC, якщо $AB = 28$ см, $AC = 20$ см, $BC = 24$ см.

434. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 55 см. Бісектриса кута при основі ділить медіану, проведену до основи, на відрізки у відношенні 5 : 3, рахуючи від вершини трикутника. Обчисліть, на які відрізки ділить ця бісектриса бічну сторону.

РІВЕНЬ В

435. Основи трапеції дорівнюють 5 см і 8 см. Бічні сторони, які дорівнюють 3,6 см і 3,9 см, продовжені до перетину. Обчисліть, на скільки продовжено бічні сторони трапеції.

436. Основи трапеції дорівнюють 24 см і 18 см, а її бічні сторони — 15 см і 12 см. Обчисліть периметр трикутника, утвореного продовженням бічних сторін трапеції та її меншою основою.

437. На стороні CD кута CDM, величина якого дорівнює 45°, від вершини відклали п’ять рівних відрізків і через їхні кінці провели перпендикуляри до прямої CD. Знайдіть довжини цих перпендикулярів, якщо довжина найбільшого з них дорівнює 60 см.

438. Одна сторона трикутника поділена на 4 рівні частини і через точки поділу проведені прямі, паралельні до сторони, яка дорівнює 36 см. Знайдіть відрізки цих прямих, які лежать усередині трикутника.

439. У рівнобедреному трикутнику ABC медіана, проведена з вершини кута B, дорівнює 12 см й утворює з основою BC кут 30°. Знайдіть висоту, опущену на основу трикутника.

440. Відстань від точки перетину медіан рівнобедреного трикутника до його основи дорівнює 6 см. Знайдіть бічну сторону трикутника, якщо кут при вершині дорівнює 120°.

441. Дано відрізки *a*, *b* і *c*. Побудуйте відрізок: **а)** $x = \frac{ab}{c}$; **б)** $x = \frac{bc}{a}$.

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Поняття відношення та пропорції виникли давно. Про це насамперед свідчать будівлі стародавнього світу, які вражають пропорційністю форм. У Вавилоні для запису відношень застосовували навіть спеціальний знак.
- Відношення величин як число вперше використав Ісаак Ньютон.
- Відношення відрізків як число вперше строго означив французький математик Андрієн-Марі Лежандр у своїй праці «Елементи геометрії» (1794 р.).

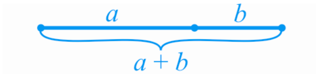
ІСААК НЬЮТОН (1642 – 1727)

АНДРІЄН-МАРІ ЛЕЖАНДР (1752 – 1833)

- Термін *«пропорційний»* (*«пропорціональний»*) походить від латинського слова *«proportionalis»*, яке означає *«такий, що має правильне співвідношення між частинами та цілим»*, *«такий, що перебуває в певному відношенні до деякої величини»*.
- Поняття пропорційності має широке застосування в мистецтві, архітектурі тощо. У живописі, музиці, архітектурі, скульптурі вона означає

додержання певних співвідношень між окремими частинами споруди, картини, твору.

- У математиці та мистецтві дві величини утворюють золотий перетин (лат. *«sectio aurea»*, англ. *«golden ratio»*), якщо відношення їх суми і більшої величини дорівнює відношенню більшої та меншої. Це відношення прийнято позначати грецькою буквою φ.



$$\varphi = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) : \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} \approx 1{,}618$$

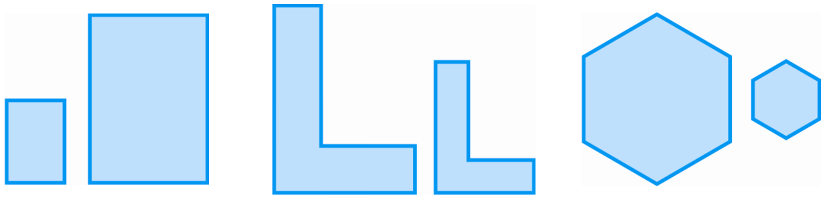
- Сучасний запис пропорції у вигляді $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ або $a : b = c : d$ увів на початку XVIII ст. німецький математик Готфрід Лейбніц.
- Ще вавилонські вчені знали, що паралельні прямі, перетинаючи будь-які прямі, поділяють їх на пропорційні відрізки. Вважають, що Фалесу Мілетському належить одне з перших доведень цього геометричного факту.

ГОТФРІД ВІЛЬГЕЛЬМ ЛЕЙБНІЦ (1646 – 1716)

§ 8. ПОДІБНІ ТРИКУТНИКИ

1. Означення подібних трикутників.

На рисунку 90 а) – в) зображено пари фігур, одна з яких утворена розтягом або стисканням іншої без зміни форми і пропорцій.



а) б) в)

Рис. 90

Про такі фігури кажуть, що вони однакової форми й різні за розмірами, і називають їх *подібними*.

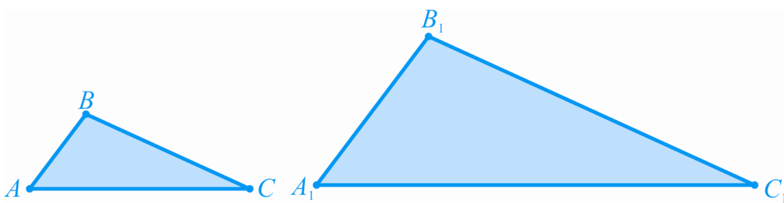


Рис. 91

Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, зображені на рис. 91, теж можна назвати подібними. Подвоївши сторони трикутника ABC, не змінюючи його форми (кутів), можна отримати трикутник $A_1B_1C_1$. У цих трикутників попарно рівні кути ($\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ і $\angle C = \angle C_1$), а сторони, які лежать проти рівних кутів, попарно пропорційні: $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$.

Означення | **Два трикутники називають *подібними*, якщо їхні кути попарно рівні, а відповідні сторони пропорційні**.

Якщо трикутник $A_1B_1C_1$ подібний до трикутника ABC, то записують: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$. Це означає, що виконуються рівності: $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$ і $\angle C_1 = \angle C$ та $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{A_1C_1}{AC} = k$.

Коефіцієнт пропорційності сторін називають *коефіцієнтом подібності трикутників*. На рис. 91 трикутник $A_1B_1C_1$ подібний до трикутника ABC з коефіцієнтом $k = 2$ $\left(\dfrac{A_1B_1}{AB} = 2\right)$. Це можна записати так: $\Delta A_1B_1C_1 \overset{2}{\sim} \Delta ABC$. Трикутник ABC подібний до трикутника $A_1B_1C_1$ з коефіцієнтом подібності $\dfrac{1}{2}$ $\left(\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{1}{2}\right)$.

2. Основна теорема про подібні трикутники.

Чи завжди існують трикутники подібні до даного? Як побудувати трикутник, подібний до даного? Відповіді на ці питання дає теорема *про подібність трикутників*.

Теорема **Пряма, яка перетинає дві сторони трикутника і паралельна до третьої сторони, відтинає від нього трикутник, подібний до даного.**

● **Доведення.** Нехай ABC — довільний трикутник. Пряма a перетинає його сторони AB і BC відповідно в точках M і K. $a||AC$. Доведемо, що $\Delta BMK \sim \Delta BAC$.

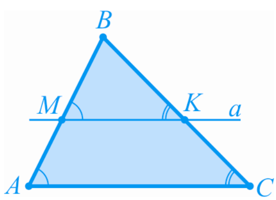


Рис. 92

1. Розглянемо трикутники BMK і BAC (рис. 92). У них $\angle B$ — спільний, $\angle M = \angle A$ як відповідні кути при $MK \| AC$ і січній AB. $\angle K = \angle C$ як відповідні кути при $MK \| AC$ і січній BC.

2. За доведеною властивістю відрізків паралельних прямих: $\frac{MK}{AC} = \frac{BM}{BA} = \frac{BK}{BC}$. Отже, $\Delta BMK \sim \Delta BAC$ за означенням. ●

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

442. $\Delta ABC \sim \Delta MOK$. Запишіть рівності, які виконуються для кутів і сторін трикутників.

443. $\Delta ACD \sim \Delta OPK$. $\angle A = 30°$, $\angle D = 100°$. Знайдіть кути трикутника OPK.

444. Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 8 см і 10 см. Знайдіть сторону подібного йому трикутника з коефіцієнтом подібності: **а)** 4; **б)** $\frac{1}{2}$; **в)** 0,4.

445. Трикутник ABC подібний до трикутника MOK з коефіцієнтом подібності 4. Виразіть: **а)** сторони трикутника ABC через сторони трикутника MOK; **б)** сторони трикутника MOK через відповідні сторони трикутника ABC.

446. Периметр трикутника дорівнює 21 см. Знайдіть периметр подібного до нього трикутника з коефіцієнтом подібності: **а)** 4; **б)** $\frac{1}{3}$.

447. $\Delta ABC \overset{3}{\sim} \Delta MPK$ і $\Delta MPK = \Delta STO$. Якими є трикутники ABC і STO? Виразіть сторони трикутника STO через відповідні сторони трикутника ABC.

448. Накресліть довільний трикутник ABC. Побудуйте подібний до нього:
а) трикутник AOP зі спільним кутом A й коефіцієнтом подібності 3;
б) трикутник BMK зі спільним кутом B й коефіцієнтом подібності $\frac{1}{2}$.

3. Ознаки подібності трикутників.

Для встановлення подібності трикутників необов'язково перевіряти рівність усіх кутів та пропорційність усіх сторін. Достатньо перевірити тільки деякі з них. Умови, достатні для подібності трикутників, називають *ознаками подібності трикутників*.

Перша ознака подібності трикутників.

Теорема	**Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам іншого трикутника, то такі трикутники подібні.**

● **Доведення.** Нехай у трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$ (рис. 93). Доведемо, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

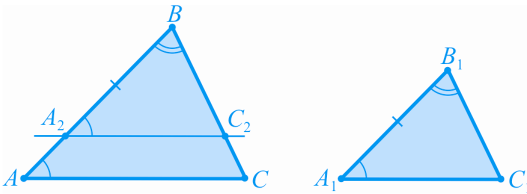


Рис. 93

1. На стороні BA трикутника ABC (або на її продовженні) відкладаємо відрізок $BA_2 = B_1A_1$ і проведемо через точку A_2 пряму, паралельну до прямої AC, яка перетинає сторону BC у точці C_2.

2. Отримуємо: $\Delta A_2BC_2 \sim \Delta ABC$ — за теоремою про подібність трикутників.

3. $\Delta A_2BC_2 = \Delta A_1B_1C_1$ — за стороною і двома прилеглими кутами. У них: $A_2B = A_1B_1$ — за побудовою, $\angle B = \angle B_1$ за умовою, $\angle A_2 = \angle A_1$ як кути, які дорівнюють куту A.

4. Маємо: $\Delta ABC \sim \Delta A_2BC_2$ і $\Delta A_2BC_2 = \Delta A_1B_1C_1$. Отже, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Теорему доведено. ●

Наслідок	**Якщо у прямокутних трикутників є по рівному гострому куту, то такі трикутники подібні.**

Друга ознака подібності трикутників.

Теорема	**Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого трикутника, а кути між ними рівні, то такі трикутники подібні.**

● **Доведення.** Нехай у трикутниках $A_1B_1C_1$ і ABC $\angle A_1 = \angle A$ і $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$. Тоді $A_1B_1 = kAB$ і $A_1C_1 = kAC$ (рис. 94). Доведемо, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

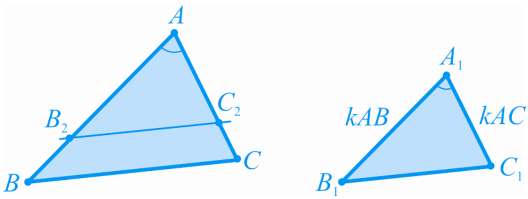


Рис. 94

1. Аналогічно до доведення першої ознаки, будуємо $\Delta AB_2C_2 \sim \Delta ABC$. Для цього на стороні AB трикутника ABC відкладаємо $AB_2 = A_1B_1$ і проводимо $B_2C_2 \| BC$. Маємо: $\frac{AC_2}{AC} = \frac{AB_2}{AB} = \frac{B_2C_2}{BC} = k.$. Звідси $AC_2 = kAC$.

2. $\Delta AB_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ — за двома сторонами та кутом між ними. У них: $\angle A = \angle A_1$ — за умовою, $AB_2 = A_1B_1$ — за побудовою, $AC_2 = A_1C_1$, бо $AC_2 = kAC$ і $A_1C_1 = kAC$.

3. Маємо: $\Delta ABC \sim \Delta AB_2C_2$. $\Delta AB_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$. Отже, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Теорема доведена. ●

Третя ознака подібності трикутників.

Теорема	**Якщо три сторони одного трикутника пропорційні до трьох сторін іншого трикутника, то трикутники подібні.**

● **Доведення.** Нехай у трикутниках $A_1B_1C_1$ і ABC $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$, тобто $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$ і $A_1C_1 = kAC$ (1) (рис. 95). Доведемо, що $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

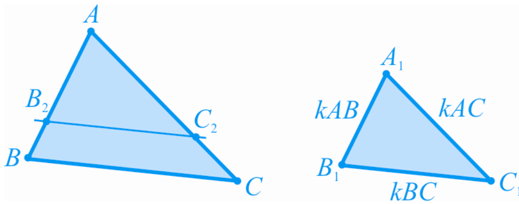


Рис. 95

1. Як і для доведення перших двох ознак, будуємо допоміжний трикутник AB_2C_2, подібний до трикутника ABC, і доводимо, що він рівний трикутникові $A_1B_1C_1$. Відкладаємо на стороні AB трикутника ABC відрізок $AB_2 = A_1B_1$ і проводимо $B_2C_2 \| BC$.

За теоремою про подібність: $\Delta AB_2C_2 \sim \Delta ABC$.

Маємо: $k = \frac{AB_2}{AB} = \frac{B_2C_2}{BC} = \frac{AC_2}{AC}$. Звідси $AB_2 = kAB$; $B_2C_2 = kBC$ і $AC_2 = kAC$ (2).

2. З рівностей (1) і (2) випливає, що $A_1B_1 = AB_2$, $B_1C_1 = B_2B_2$ і $A_1C_1 = AC_2$. Отже, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta AB_2C_2$.

3. Маємо: $\Delta ABC \sim \Delta AB_2C_2$ і $\Delta AB_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$. Отже, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Теорему доведено. ●

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

449. Запишіть умови, за яких трикутник ABC буде подібним до трикутника ODF: **а)** за першою ознакою; **б)** за другою ознакою; **в)** за третьою ознакою.

450. Дано трикутники ABC й AMK, у яких кут A — спільний. Яка умова повинна виконуватись, щоб трикутник ABC був подібний до трикутника AMK: **а)** за першою ознакою; **б)** за другою ознакою?

451. Дано трикутники ABC й POD. Відомо, що $\frac{AB}{PO} = \frac{AC}{PD}$. Яка умова повинна виконуватись, щоб трикутник ABC був подібним до трикутника POD:

а) за другою ознакою; **б)** за третьою ознакою?

452. Дано трикутники ABC і MOK такі, що $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle O$. Відомо, що $\frac{AB}{MO} = 3$ (рис. 96). Знайдіть: **а)** $\frac{BC}{OK}$; **б)** $\frac{MK}{AC}$; **в)** BC, якщо $OK = 15$ см; **г)** MK, якщо $AC = 10$ см.

453. Дано трикутники ACD і MPK такі, що $\angle C = \angle P$, $AC = 4MP$ і $CD = 4PK$ (рис. 97). Порівняйте кути A і M; D і K. Відповідь обґрунтуйте. Знайдіть: **а)** AD, якщо $MK = 8$ см; **б)** MK, якщо $AD = 12$ см.

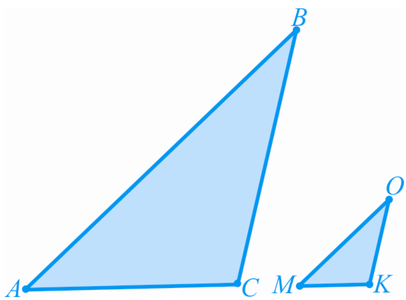


Рис. 96

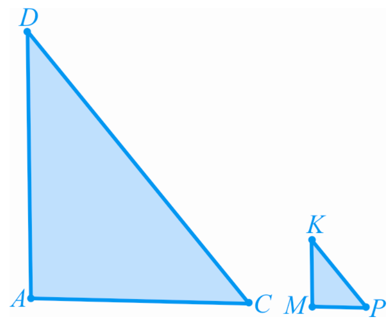


Рис. 97

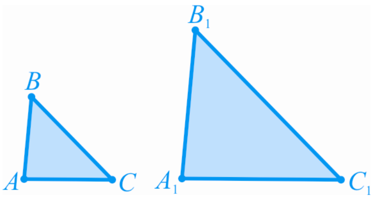
454. Дано трикутники ACD і POK, такі, що $AC = 2PO$, $AD = 2PK$ і $CD = 2OK$. Знайдіть кути трикутника POK, якщо $\angle A = 30°$ і $\angle D = 70°$.

455. Чи подібні трикутники, якщо два кути одного з них дорівнюють 30° і 70°, а іншого: **а)** 30° і 80°; **б)** 30° і 50°; **в)** 70° і 80°? Відповідь обґрунтуйте.

456. Чи подібні два прямокутні трикутники, якщо в одного з них є кут 40°, а в іншого: **а)** 30°; **б)** 50°? Відповідь обґрунтуйте.

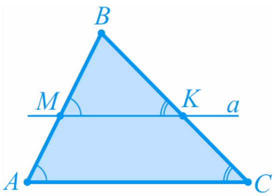
457. Чи подібні два прямокутні трикутники, якщо катети одного з них дорівнюють 4 см і 12 см, а іншого: **а)** 8 см і 24 см; **б)** 15 см і 5 см; **в)** 10 см і 40 см?

ОСНОВНЕ В § 8



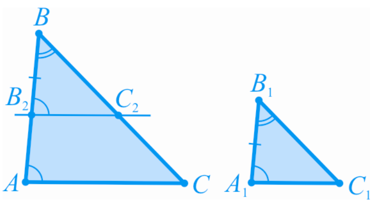
Два трикутники називають ***подібними***, якщо їх кути попарно рівні, а відповідні сторони пропорційні.

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1$$
$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$$



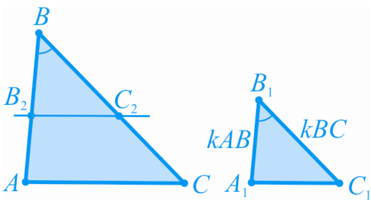
Основна теорема про подібні трикутники. Пряма, яка перетинає дві сторони трикутника і паралельна до третьої сторони, відтинає від нього трикутник, подібний до даного.

$$\Delta BMK \sim \Delta BAC$$

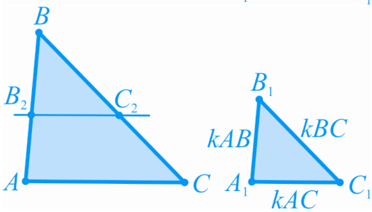


Перша ознака подібності трикутників. Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам іншого трикутника, то такі трикутники подібні.

Наслідок. Якщо у прямокутних трикутників є по рівному гострому куту, то такі трикутники подібні.



Друга ознака подібності трикутників. Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого трикутника, а кути між ними рівні, то такі трикутники подібні.



Третя ознака подібності трикутників. Якщо три сторони одного трикутника пропорційні до трьох сторін іншого трикутника, то трикутники подібні.

РОЗВ’ЯЗУЄМО РАЗОМ

Задача 1. Точка перетину діагоналей трапеції поділяє одну з діагоналей на відрізки, які відносяться як 2 : 3. Знайти основи трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 15 см.

Розв’язання

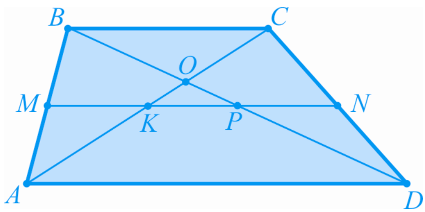


Рис. 98

● Нехай $ABCD$ — трапеція, у якої O — точка перетину діагоналей. $OC : OA = 2 : 3$ (рис. 98), MN — середня лінія, $MN = 15$ см.

1. $\Delta AOD \sim \Delta COB$ за двома кутами: $\angle BOC = \angle DOA$ як вертикальні; $\angle OCB = \angle OAD$ як внутрішні різносторонні при $AD \| BC$ і січній AC.

2. З подібності трикутників випливає, що $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{2}{3}$.

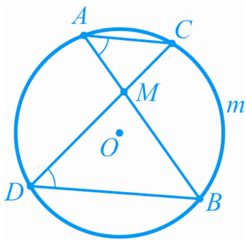
3. За властивістю середньої лінії трапеції $MN = \dfrac{1}{2}(AD + BC)$; тоді $AD + BC = 2MN = 2 \cdot 15 = 30$ (см).

4. Нехай BC дорівнює x см, тоді AD дорівнює $(30 - x)$ см. Складаємо пропорцію: $\dfrac{x}{30-x} = \dfrac{2}{3}$. Маємо: $3x = 2(30 - x)$; $3x + 2x = 60$; $5x = 60$, $x = 12$. Отже, $BC = 12$ см, тоді $AC = 30 - 12 = 18$ (см).

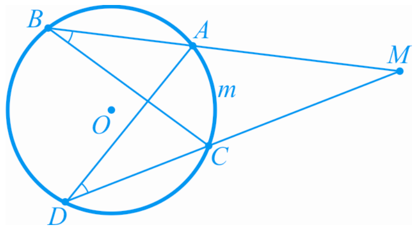
Відповідь: 12 см; 18 см. ●

Задача-теорема 2 Якщо дві січні кола перетинаються у деякій точці, яка не належить колу, то добуток відстаней від цієї точки до точок перетину кожної січної з колом є величина стала.

● **Доведення.** Нехай до кола з центром в точці O проведено дві січних AB і CD, які перетинаються в точці M. Доведемо, що $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. Розглянемо два випадки розміщення точки M: 1) точка M міститься в крузі (рис. 99 а); 2) точка M міститься поза кругом (рис. 99 б).



а)



б)

Рис. 99

1 випадок. Нехай у колі з центром O хорди AB і CD перетинаються в точці M.

1. У трикутниках MAC і MDB кути при вершині M рівні як вертикальні ($\angle AMC = \angle DMB$). $\angle A = \angle D$, оскільки кожен з них спирається на ту саму дугу BmC. Отже, $\Delta MAC \sim \Delta MDB$ за першою ознакою подібності.

2. З подібності трикутників маємо: $\frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MD}$, або $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

2 випадок. Нехай точка M міститься поза колом.

1. У трикутнику MBC $\angle B = \frac{1}{2} \cup AmC$. У трикутнику MDA $\angle D = \frac{1}{2} \cup AmC$. $\angle M$ — спільний для цих трикутників. Отже, $\Delta MBC \sim \Delta MDA$ за двома кутами.

2. З подібності трикутників маємо: $\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$, або $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. ●

Задача-теорема 3 Якщо з точки, узятої зовні кола, проведені до нього січна й дотична, то добуток січної та її зовнішньої частини дорівнює квадрату дотичної.

● **Доведення.** Нехай до кола з центром у точці O проведено дотичну KA (A — точка дотику) і січну KB, яка перетинає коло в точках C і B (рис. 100). Доведемо, що $KC \cdot KB = KA^2$.

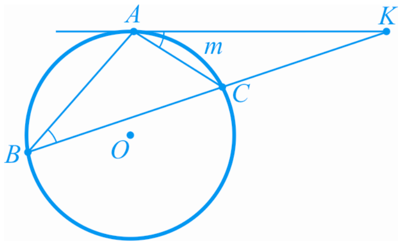


Рис. 100

1. Кут KAC утворений дотичною KA і хордою AC. Тоді $\angle KAC = \frac{1}{2} \cup AmC$.

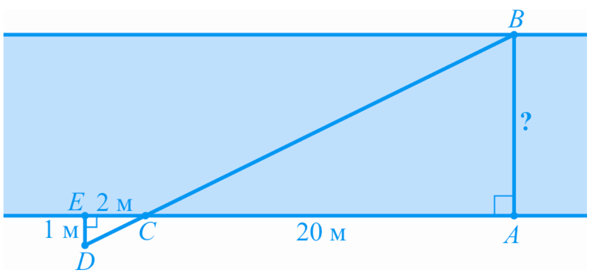
2. Кут ABC — вписаний. Тоді $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AmC$. Отже, $\angle KAC = \angle ABC$.

3. У трикутниках KAC і KBA $\angle K$ — спільний і $\angle KAC = \angle KAB$. Отже, $\Delta KAC \sim \Delta KBA$ за двома кутами.

4. З подібності трикутників маємо: $\frac{KC}{KA} = \frac{KA}{KB}$, звідки $KC \cdot KB = KA^2$, що й потрібно було довести. ●

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Використовуючи дані, наведені на рисунку, знайдіть ширину AB річки.



2. Використовуючи дані, наведені на рисунку, знайдіть довжину AB озера.

3. Людина, зріст якої 1,7 м, стоїть на відстані 8 кроків від стовпа, на якому висить ліхтар. Тінь людини дорівнює чотирьом крокам. На якій висоті розміщено ліхтар?

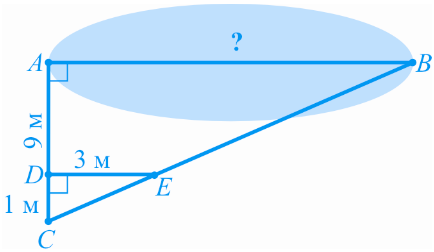


Рис. до задачі 2

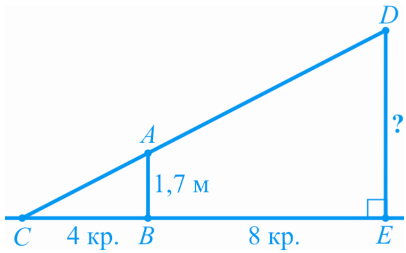
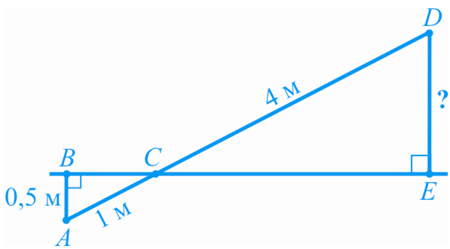


Рис. до задачі 3

4. Коротке плече шлагбаума має довжину 1 м, а довге плече — 4 м. На яку висоту підніметься кінець довгого плеча, коли кінець короткого плеча опуститься на 0,5 м?



5. Тенісний м'яч був поданий з висоти 2 м 10 см і пролетів над самою сіткою, висота якої 90 см. На якій відстані від сітки м'яч удариться об землю, якщо він летить по прямій і поданий від лінії на відстані 1 м від сітки?

6. Стовп заввишки 15 м закривається монетою діаметра 2 см, розміщеною на відстані 70 см від ока. Знайдіть відстань від стовпа до спостерігача.

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 8

1. Які два трикутники називають подібними?

2. Який трикутник відтинає пряма, паралельна одній зі сторін трикутника?

3. За яких умов два трикутники подібні за: **а)** першою ознакою; **б)** другою ознакою; **в)** третьою ознакою?

4. Сформулюйте й доведіть теорему про трикутник, який відтинається прямою, паралельною до сторони трикутника.

5. Сформулюйте й доведіть: **а)** першу ознаку; **б)** другу ознаку; **в)** третю ознаку подібності трикутників.

ЗАДАЧІ ДО § 8

РІВЕНЬ А

458. Сторони трикутника відносяться як 4 : 5 : 7. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, якщо в нього: **а)** периметр дорівнює 32 см; **б)** найменша сторона дорівнює 28 см; **в)** найбільша сторона на 27 см більша від найменшої.

459. Сторони трикутника відносяться як 3: 4 : 5. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якого сума найбільшої та найменшої сторін дорівнює 48 см.

460. Чи подібні прямокутні трикутники, якщо гострий кут одного з них дорівнює 37°, а іншого — 53°?

461. Чи подібні трикутники, якщо два кути одного з них дорівнюють 73° і 81°, а іншого — 26° і 73°?

462. Пряма, паралельна до сторони AB трикутника ABC, перетинає сторону AC в точці D, а сторону BC — в точці K. Знайдіть довжину відрізка DK, якщо: **а)** $AB = 76$ см, $DC = 33$ см, $AC = 44$ см; **б)** $AB = 36$ см, $AC = 30$ см, $AD = 20$ см.

463. У трикутників ABC і MOK $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle O$, $AB = 6$ см і $BC = 8$ см. Знайдіть сторону OM, якщо $OK = 2$ см.

464. Дано трикутники ACD й POK. Відомо, що $AC = 15$ см, $CD = 7$ см, $AD = 10$ см, $OP = 45$ см і $OK = 21$ см. Знайдіть PK, якщо $\angle C = \angle O$.

465. Прямі AB й CD перетинаються в точці O, а прямі AC й BD паралельні. Доведіть, що $\Delta AOC \sim \Delta BOD$. Знайдіть AC, якщо $AO = 2$ см, $OB = 8$ см і $BD = 12$ см.

466. У трикутнику ABC проведено пряму MK, яка перетинає сторони AB й BC в точках M і K відповідно. $\angle A = 35°$, $\angle AMK = 145°$, $AB = 7{,}2$ дм, $MK = 6$ дм, $AM = 2{,}7$ дм. Доведіть, що $\Delta MBK \sim \Delta ABC$. Знайдіть довжину сторони AC.

467. O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ з основами AD і BC. Доведіть, що $\Delta BOC \sim \Delta DOA$. Знайдіть OD, якщо $AD = 15$ см, $BC = 5$ см і $BO = 4$ см.

468. У прямокутному трикутнику ABC на катеті AC та гіпотенузі AB взято відповідно точки M і K такі, що $AM = \frac{1}{4}AC$ і $AK = \frac{1}{4}AB$. Доведіть, що ΔAMK — прямокутний. Знайдіть MK, якщо $BC = 12$ см.

469. На сторонах AB й AC трикутника ABC відповідно позначені точки M і K такі, що $AK = \frac{1}{5}AC$ і $AM = \frac{1}{5}AB$. Доведіть, що $\angle AKM = \angle C$.

470. У колі з центром у точці O діаметр AB перетинає хорду MK у точці C і перпендикулярний до цієї хорди. Знайдіть радіус цього кола, якщо довжина хорди дорівнює 12 см, а $AC = 18$ см.

471. З точки A, яка лежить поза колом, проведено до нього дотичну AB (B — точка дотику) і січну AC, яка перетинає коло в точках D і C. Відношення відрізків AC і AD дорівнює 2,25. Знайдіть довжину січної, якщо $AB = 12$ см.

РІВЕНЬ Б

472. O й O_1 — точки перетину бісектрис подібних трикутників ABC й $A_1B_1C_1$. Доведіть, що $\Delta AOC \sim \Delta A_1O_1C_1$.

473. Доведіть, що відношення периметрів подібних трикутників дорівнює відношенню їх відповідних сторін.

474. O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$, у якої основи AD й BC відповідно дорівнюють 12 см і 3 см, а діагональ AC — 10 см. Знайдіть довжини відрізків AO і OC.

475. У трапеції $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Основи трапеції BC й AD відповідно дорівнюють 26 см і 39 см, а діагональ BD дорівнює 35 см. Доведіть, що $\Delta BOC \sim \Delta DOA$. Знайдіть довжину сторони BO.

476. У трикутнику ABC на стороні AC позначено точку D таку, що $\angle ABD = \angle C$. Доведіть, що $AB^2 = AD \cdot AC$.

477. У трапеції $ABCD$ з більшою основою AD $\angle BAC = \angle ADC$. Доведіть, що $AC^2 = AD \cdot BC$.

478. На продовженні сторони AC трикутника ABC за точку C взято точку D таку, що $\angle BDC = \angle ABC$. Знайдіть AC, якщо $AB = 3$ см і $DC = 8$ см.

479. У трикутнику ABC $AC = 12$ см, $BC = 18$ см. З вершини A проведено промінь AE, який перетинає сторону BC в точці E так, що $\angle AEC = \angle BAC$. Доведіть, що $\Delta ABC \sim \Delta EAC$. Знайдіть довжину сторони EC.

480. У трикутнику ABC $AB = 20$ см, $BC = 12$ см і $AC = 18$ см. Знайдіть відрізки, на які бісектриса кута C поділяє сторону AB.

481. Бісектриса трикутника поділяє сторону на відрізки, різниця яких дорівнює 3 см. Знайдіть цю сторону трикутника, якщо дві інші сторони дорівнюють 8 см і 16 см.

РІВЕНЬ В

482. Доведіть, що відношення медіан подібних трикутників дорівнює відношенню відповідних сторін.

483. Доведіть: якщо сполучити основи двох висот гострокутного трикутника, то утвориться трикутник, подібний до даного.

484. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо бісектриса кута при основі відтинає від нього трикутник, подібний до даного.

485. Бісектриса кута трикутника поділяє його сторону на відрізки, які дорівнюють 4,5 см і 13,5 см. Знайдіть дві інші сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 42 см.

486. Основи трапеції дорівнюють 18 см і 32 см. Діагональ ділить трапецію на два подібних трикутники. Знайдіть довжину цієї діагоналі.

487. У трапеції $ABCD$ з основами AD й BC та діагоналлю BD кути ABD і BCD рівні. Знайдіть AB і AD, якщо $BC = 10$ см, $DC = 15$ см, $BD = 20$ см.

488. Діаметр AB перетинає хорду MK у точці D. Знайдіть відстань від центра кола до точки D і відрізки, на які точка D ділить діаметр AB, якщо $MD = 9$ см, $DK = 4$ см, а радіус кола дорівнює 10 см.

489. Хорда CD перетинає діаметр AB кола з центром у точці O в точці K. Знайдіть хорду CD, якщо $CK = 22$ см, $AK = 6$ см, $OB = 25$ см.

490. Точка A ділить хорду KP на відрізки 14 см і 12 см. Відстань від центра кола до точки A дорівнює 11 см. Знайдіть радіус кола.

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Подібні фігури, тобто фігури, які мають однакову форму, але різну величину, трапляються у вавилонських і єгипетських пам'ятках. У VI ст. до н. е. на острові Самос (в Егейському морі) було побудовано тунель у товщі гори Кастро завдовжки 1 км і канал для підведення води. Під час проектування та будівництва тунелю було розв'язано задачу точного прокладання підземної траси, де була використана подібність трикутників.
- Учення про подібність фігур, зокрема, трикутників, розроблено в Стародавній Греції у V – IV ст. до н. е. у працях Гіппократа, Архита, Евдокса й інших учених. У «Началах» Евкліда виклад цього твердження розпочинається таким означенням: «Подібні прямолінійні фігури суть є ті, які мають відповідно рівні кути та пропорційні сторони».
- Символ, який позначає подібність фігур, є не чим іншим, як повернутою на 90° латинською буквою S — першою літерою слова *«similis»*, що в перекладі означає *«подібність»*. Уперше знак «~» увів 1679 року німецький учений Готфрід Лейбніц.
- Використовуючи подібність трикутників, стародавні вчені визначали висоту предметів за їхньою тінню (рис. 101). Висоту будь-якого предмета можна визначити за його тінню, користуючись жердиною — висота предмета в стільки ж разів менша (більша) від його тіні, у скільки разів жердина коротша (довша) від її тіні.

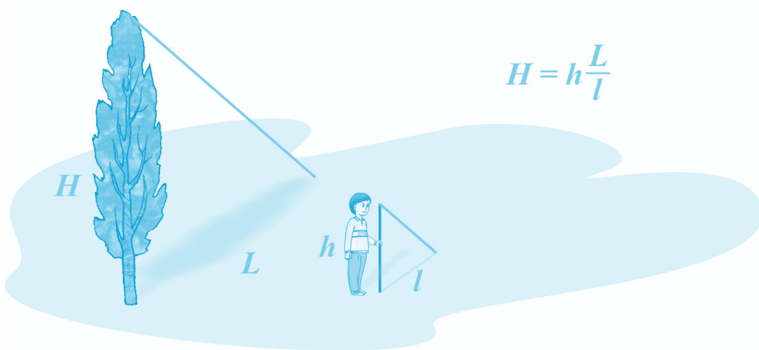


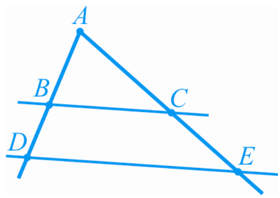
Рис. 101

КОНТРОЛЬ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ ЗА МАТЕРІАЛОМ § 7 – § 8

Початковий рівень

1. На рисунку $BC \parallel DE$, $AB = 4$ см, $BD = 6$ см, $AC = 5$ см. Довжина відрізка CE дорівнює...

А 7 см; **Б** 8 см;
В 7,5 см; **Г** 10 см.



2. Сторони одного трикутника відносяться як 5 : 6 : 8. Якому з трикутників він подібний, якщо сторони іншого трикутника дорівнюють...

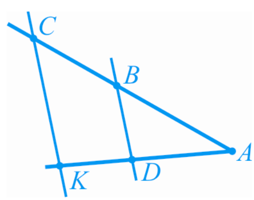
А 20 см, 24 см, 36 см; **Б** 10 см, 12 см, 18 см;
В 60 см, 80 см, 100 см; **Г** 35 см, 42 см, 56 см.

3. Два кути трикутника дорівнюють 30° і 70°. Які кути має трикутник, подібний даному?

А 30°, 60°, 90°; **Б** 70°, 60°, 50°; **В** 130°, 35°, 15°; **Г** 80°, 70°, 30°.

Середній рівень

4. На рисунку $BD \parallel CK$, $AD = 6$ см, $DK = 4$ см, $AB + AC = 24$ см. Знайдіть довжину відрізка AC.



5. У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD завдовжки відповідно 65 см і 91 см перетинаються у точці O, до того ж $BO = 35$ см, $AO = 40$ см. Доведіть, що цей чотирикутник — трапеція.

6. Два рівнобедрені трикутники мають рівні кути між бічними сторонами. Периметр одного трикутника дорівнює 34 см, а його бічна сторона — 10 см. Знайдіть периметр іншого трикутника, якщо його основа дорівнює 42 см.

Достатній рівень

7. Точка K поділяє хорду MP на два відрізки так, що $PK = 7$ см, $KM = 8$ см. Радіус кола дорівнює 9 см. Знайдіть відстань від точки K до центра кола.

8. Діагональ ромба $ABCD$ ділить його висоту BM, проведену з вершини тупого кута на відрізки завдовжки 10 см і 6 см, починаючи від точки B. Знайдіть сторону ромба, якщо периметр трикутника ABM дорівнює 48 см.

9. Сторони одного трикутника дорівнюють 42 см 54 см і 24 см. Сторони іншого трикутника відносяться як 7 : 9 : 4, а його більша сторона дорівнює 18 см. Знайдіть відношення периметрів цих трикутників.

Високий рівень

10. Периметр паралелограма дорівнює 42 см, а його висоти — 3 см і 4 см. Знайдіть сторони паралелограма.

11. Діагональ рівнобічної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 12 см. Бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі, а периметр трапеції дорівнює 252 см. Знайдіть сторони трапеції.

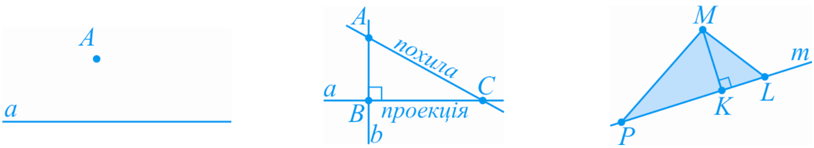
12. У трикутнику ABC проведено медіани AD і BM, які перетинаються в точці O. Через точку M паралельно до медіани AD проведено пряму m, яка перетинає сторону BC у точці K. Знайдіть довжини відрізків BC і MK, якщо $AO = 16$ см, $KC = 6$ см.

§ 9. СЕРЕДНІ ПРОПОРЦІЙНІ У ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ. ТЕОРЕМА ПІФАГОРА

9.1. Середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику

1. Перпендикуляр, похила і проекція.

Встановимо ряд теорем, які виражають співвідношення між елементами прямокутного трикутника. Розглянемо спочатку поняття, через які розкривається суть цих теорем.



а) б) в)

Рис. 102

Нехай дана пряма a й точка A, яка їй не належить (рис. 102 а). Проведемо через точку A пряму b, перпендикулярну до прямої a. Нехай B — точка перетину прямих a і b. Тоді, як відомо, відрізок AB називають *перпендикуляром*, опущеним з точки A на пряму a, точку B — *основою цього перпендикуляра*. Відрізок AC, що сполучає точку A й точку C прямої і не є перпендикуляром до прямої a, називають *похилою* до прямої a. Точку C похилої, яка належить прямій a, називають *основою похилої*. Відрізок BC, який сполучає основу перпендикуляра й основу похилої, називають *проекцією похилої на пряму* (рис. 102 б). На рис. 102 в) MK — перпендикуляр, опущений з точки M до прямої m. MP і ML — похилі до прямої m. PK і LK — їх проекції.

Означення

Похилою до прямої, **проведеною з даної точки, називають відрізок, який сполучає дану точку з точкою прямої і який не є перпендикуляром до цієї прямої. Кінець, який належить даній прямій, називають *основою похилої*.**
Якщо з однієї точки до прямої проведено перпендикуляр і похилу, то *проекцією похилої* називають відрізок, який сполучає основу похилої та основу перпендикуляра.

1. З будь-якої точки, яка не лежить на даній прямій, можна провести один і тільки один перпендикуляр до цієї прямої (оскільки через дану точку можна провести одну й тільки одну пряму, перпендикулярну до даної прямої).

2. Перпендикуляр до прямої та проекція похилої менші за будь-яку похилу, проведену з тієї ж точки, що й перпендикуляр (похила лежить у прямокутному трикутнику проти більшого кута — прямого кута, а перпендикуляр і проекція лежать проти гострих кутів).

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

491. Накресліть пряму m і точку M поза нею. Побудуйте перпендикуляр MK і похилу MN. Назвіть проекцію похилої MN.

492. Накресліть прямокутний трикутник ACD з прямим кутом C. Проведіть висоту CK. Назвіть відрізок, який є проекцією: **а)** катета AC на гіпотенузу; **б)** катета CD на гіпотенузу.

493. MK — перпендикуляр, а MN — похила до прямої m, $MN = 20$ см. Знайдіть: **а)** проекцію похилої, якщо $\angle MNK = 60°$; **б)** перпендикуляр MK, якщо $\angle NMK = 60°$.

2. Теореми про середні пропорційні у прямокутному трикутнику.

Середнє пропорційне двох чисел (величин).

Нехай є два відмінні від нуля числа a і b. Число c, за якого є правильною пропорція $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ або $\frac{c}{a} = \frac{b}{c}$, називають *середнім пропорційним* (*геометричним*) до чисел a і b. За основною властивістю пропорції маємо: $c^2 = a \cdot b$ або $c = \sqrt{ab}$.

Означення | ***Середнім пропорційним (геометричним) двох чисел*** **називають число, квадрат якого дорівнює добутку цих чисел.**

Наприклад, для чисел 4 і 9 середнім пропорційним є число 6, бо $4 \cdot 9 = 36 = 6^2$ або $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$.

Середнє пропорційне (геометричне) двох чисел дорівнює арифметичному квадратному кореню з добутку цих чисел.

Установимо елементи прямокутного трикутника, які є середніми пропорційними між іншими елементами.

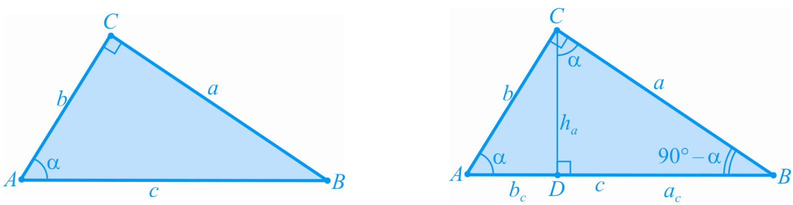
Теорема

У прямокутному трикутнику:

1) висота, опущена на гіпотенузу, є середнім пропорційним між відрізками, на які вона поділяє гіпотенузу;

2) катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу.

● **Доведення.** Нехай *ABC* — довільний прямокутний трикутник із прямим кутом *C* і гострим кутом *A*, рівним α. Позначимо літерою *a* катет, який лежить проти кута *A*, буквою *b* — катет, який лежить проти кута *B*, *c* — гіпотенузу (рис. 103 а).



а) **б)**

Рис. 103

Проведемо *CD* — висоту трикутника, позначимо її через h_a (рис. 103 б).

Оскільки *CD* є перпендикуляром до прямої *AB*, а *CB* і *AC* — похилі до неї, то відрізки *BD* і *AD* є їх проекціями. Позначимо *BD* як a_c (проекція катета *a* на гіпотенузу *c*), *AD* — як b_c (проекція катета *b* на гіпотенузу *c*).

Доведемо, що:

1) $h_c^2 = a_c \cdot b_c \quad \left(h_c = \sqrt{a_c b_c}\right)$;

2) $a^2 = c \cdot a_c \quad \left(a = \sqrt{ca_c}\right)$; $b^2 = c \cdot b_c \quad \left(b = \sqrt{cb_c}\right)$.

Висота *CD* поділяє прямокутний трикутник *ABC* з гострим кутом α на два прямокутні трикутники: *ADC* і *CDB*, у яких $\angle A = \alpha$, $\angle B = 90° - \alpha$, $\angle DCB = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. Тобто в кожному з трикутників один з гострих кутів дорівнює α. Тому за наслідком з першої ознаки подібності трикутників $\Delta ADC \sim \Delta CDB$ і кожний з цих трикутників подібний до трикутника *ACB*.

1. Розглядаємо подібні трикутники: *ADC* й *CDB*. За означенням подібних трикутників катети *CD* і *AD* трикутника *ADC* пропорційні до катетів *DB* й *CD* трикутника *CDB* (як протилежні до рівних кутів).

Маємо: $\frac{CD}{AD} = \frac{DB}{CD}$ або $\frac{h_c}{b_c} = \frac{a_c}{h_c}$. Отримуємо: $h_c^2 = a_c \cdot b_c$ або $h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}$.

2. а) Розглядаємо подібні трикутники *ACB* і *CDB*. За означенням подібних трикутників катет *CB* і гіпотенуза *AB* трикутника *ACB* пропорційні катету *DB* й гіпотенузі *CB* трикутника *CDB*. Маємо: $\frac{CB}{AB} = \frac{DB}{CB}$ або $\frac{a}{c} = \frac{a_c}{a}$. Отримуємо: $a^2 = c \cdot a_c$ або $a = \sqrt{c \cdot a_c}$;

б) розглядаємо подібні трикутники *ADC* й *ACB*. За означенням подібних трикутників катет *AD* й гіпотенуза *AC* трикутника *ADC* пропорційні катету *AC* й гіпотенузі *AB* трикутника *ACB*. Маємо: $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$ або $\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}$. Отримуємо: $b^2 = c \cdot b_c$ або $b = \sqrt{c \cdot b_c}$. Теорему доведено. ●

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

494. Яка пропорція виконується для чисел *c*, *d* та *x*, якщо *x* — середнє пропорційне (геометричне) між числами *c* і *d*?

495. Знайдіть середнє пропорційне чисел *a* і *b*, якщо: **а)** $a = 16$; $b = 49$; **б)** $a = 2$; $b = 32$.

496. Накресліть прямокутний трикутник *MNK* із прямим кутом *N* і проведіть його висоту *NO*. Назвіть відрізок, який є середнім пропорційним для відрізків: **а)** *MO* і *OK*; **б)** *MO* і *MK*; **в)** *OK* і *MK*. Запишіть відповідні рівності, використовуючи знак квадратного кореня.

497. Висота, проведена з вершини прямого кута прямокутного трикутника, поділяє гіпотенузу на відрізки 16 см і 25 см. Знайдіть: **а)** висоту; **б)** гіпотенузу; **в)** катети трикутника.

9.2. Теорема Піфагора

Наслідком теореми про середні пропорційні у прямокутному трикутнику є теорема, яка встановлює залежність між гіпотенузою та катетами довільного прямокутного трикутника. Названа ця теорема на честь видатного грецького математика *Піфагора*.

Теорема Піфагора

У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

де c — гіпотенуза, a і b — катети.

● **Доведення.** Нехай ABC — довільний прямокутний трикутник із прямим кутом C, CD — висота трикутника (рис. 104). Позначимо $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AD = b_c$, $BD = a_c$. Доведемо, що $AB^2 = BC^2 + AC^2$, тобто $c^2 = a^2 + b^2$.

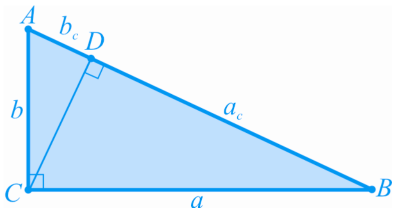


Рис. 104

За теоремою про середнє пропорційне в прямокутному трикутнику одержуємо: $a^2 = c \cdot a_c$, $b^2 = c \cdot b_c$. Додамо почастинно рівності: $a^2 + b^2 = c \cdot a_c + c \cdot b_c$; $a^2 + b^2 = c \cdot (a_c + b_c)$. Оскільки a_c і b_c — відрізки гіпотенузи і їх сума дорівнює гіпотенузі c, то $a^2 + b^2 = c \cdot c = c^2$. Отже, $c^2 = a^2 + b^2$. Теорему доведено. ●

Наслідки

Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює квадратному кореню із суми квадратів катетів:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Катет прямокутного трикутника дорівнює квадратному кореню з різниці квадратів його гіпотенузи й іншого катета:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

498. На основі якої теореми доведено теорему Піфагора?

499. Накресліть прямокутний трикутник MNK з прямим кутом K. Виразіть через дві інші сторони: **а)** MN; **б)** MK; **в)** NK.

500. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: **а)** 9 см і 12 см; **б)** 6 см і 0,8 дм; **в)** $\sqrt{3}$ см і $\sqrt{13}$ см.

501. Прийнявши довжину однієї клітинки за одиницю, знайдіть гіпотенузи прямокутних трикутників, зображених на рисунку 105.

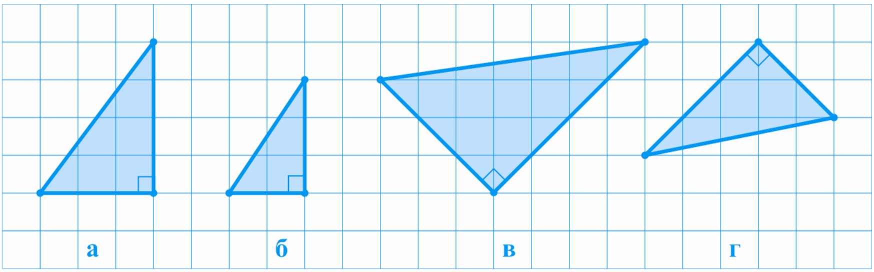


Рис. 105

502. Знайдіть діагональ прямокутника, якщо його сторони дорівнюють: **а)** 3 см і 4 см; **б)** 5 см і 1,2 дм; **в)** 2 см і 3 см.

503. Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, у якого основа і висота, проведена до неї, відповідно дорівнюють:

а) 16 см і 15 см; **б)** $2\sqrt{3}$ см і $\sqrt{13}$ см; **в)** $\frac{6}{7}$ м і $\frac{4}{7}$ м.

504. Чому дорівнює сторона ромба, діагоналі якого дорівнюють:

а) 6 см і 8 см; **б)** 10 см і 12 дм; **в)** $2\sqrt{2}$ см і $2\sqrt{3}$ см?

505. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза й інший катет відповідно дорівнюють:

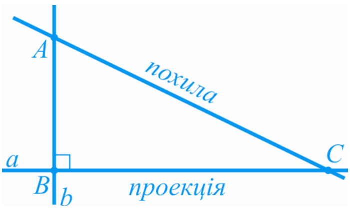
а) 5 дм і 3 дм; **б)** 41 см і 40 см; **в)** $\sqrt{17}$ см і $2\sqrt{2}$ см.

506. Знайдіть сторону прямокутника, якщо діагональ та інша сторона відповідно дорівнюють: **а)** 20 см і 16 см; **б)** 6,5 см і 2,5 см; **в)** $\sqrt{5}$ см і 2 см.

507. Знайдіть основу рівнобедреного трикутника, якщо його бічна сторона та висота, проведена до основи, відповідно дорівнюють 41 см і 40 см.

ОСНОВНЕ В § 9

Похилою до прямої, проведеної з даної точки, називають відрізок, який сполучає дану точку з точкою прямої і не є перпендикуляром до цієї прямої. Кінець, який належить даній прямій, називають ***основою похилої***.

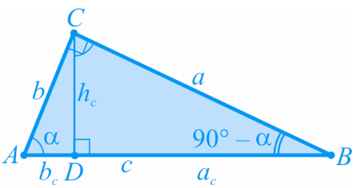


Якщо з однієї точки до прямої проведено перпендикуляр і похилу, то ***проекцією похилої*** називають відрізок, який сполучає основу похилої та основу перпендикуляра.

1. З будь-якої точки, яка не лежить на даній прямій, можна провести один і тільки один перпендикуляр до цієї прямої.

2. Перпендикуляр до прямої та проекція похилої менші від будь-якої похилої, проведеної з тієї ж точки, що й перпендикуляр.

Середнім пропорційним (геометричним) двох чисел називають число, квадрат якого дорівнює добутку цих чисел.

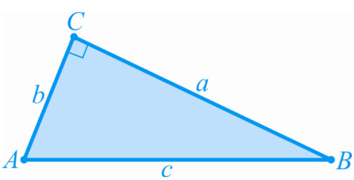


Теорема. У прямокутному трикутнику:

1) висота, опущена на гіпотенузу, є середнім пропорційним між відрізками, на які вона поділяє гіпотенузу;

2) катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу.

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c; \; a^2 = c \cdot a_c; \; b^2 = c \cdot b_c$$



Теорема Піфагора. У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів: $c^2 = a^2 + b^2$, де c — гіпотенуза, a і b — катети.

Наслідок 1. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Наслідок 2. $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Задача 1. Знайти катет прямокутного трикутника, якщо його проекція на гіпотенузу дорівнює 8 см, а інший катет — $2\sqrt{5}$ см.

Розв'язання

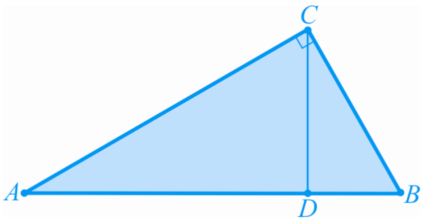


Рис. 106

● Нехай у прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом C відрізок CD — висота (рис. 106), AD = 8 см і $CB = 2\sqrt{5}$ см. Знайдемо AC.

1. Позначимо довжину DB через x см, тоді $AB = (x + 8)$ см. За теоремою про катет $CB^2 = BD \cdot AB$; $(2\sqrt{5})^2 = x \cdot (x + 8)$; $x^2 + 8x = 20$; $x^2 + 8x + 16 = 36$; $(x + 4)^2 = 36$. Оскільки $x + 4 > 0$, то $x + 4 = 6$; $x = 2$. Отже, BD = 2 см і $AB = 2 + 8 = 10$ (см).

2. За теоремою про катет $AC^2 = AD \cdot AB$; $AC^2 = 8 \cdot 10 = 80$ (см). $AC = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$ (см).

Відповідь: $4\sqrt{5}$ см. ●

Задача 2. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 15 см, бічна сторона — 5 см, а висота — 3 см. Знайти меншу основу трапеції.

Розв'язання

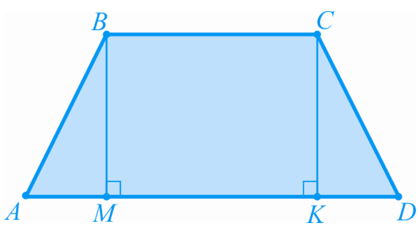


Рис. 107

● Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція (рис. 107), у якої $AD = 15$ см, $AB = CD = 5$ см. BM і CK — висоти, $BM = CK = 3$ см.

1. Висоти BM і CK поділяють трапецію $ABCD$ на два рівні прямокутні трикутники ABM і DCK (за гіпотенузою і катетом) і прямокутник $MBCK$. Отже, $AM = KD$ і $MK = BC$. Звідси випливає, що $BC = AD - 2AM$.

2. Із прямокутного трикутника ABM за теоремою Піфагора знаходимо $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см). Таким чином, $BC = 15 - 2 \cdot 4 = 7$ (см).

Відповідь: 7 см. ●

Задача 3. Основи трапеції дорівнюють 4 см і 17 см, а діагоналі — 13 см і 20 см. Знайти висоту трапеції.

Розв'язання

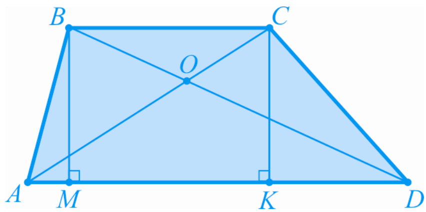


Рис. 108

Нехай $ABCD$ — трапеція (рис. 108) з основами $AD = 17$ см і $BC = 4$ см, діагоналями $AC = 13$ см і $BD = 20$ см та висотами BM і CK ($BM = CK$).

Висоту трапеції, наприклад, CK, можна визначити на основі теореми Піфагора з трикутника ACK, але для цього потрібно знайти довжину відрізка AK. Знайдемо її за допомогою рівняння.

Оскільки $MBCK$ — прямокутник, то $MK = BC = 4$ см. Нехай $AM = x$ см, тоді $AK = (x + 4)$ см, $MD = (17 - x)$ см. Із трикутника ACK: $CK^2 = AC^2 - AK^2$; $CK^2 = 13^2 - (x + 4)^2$.

Із трикутника DBM: $BM^2 = BD^2 - MD^2$; $BM^2 = 20^2 - (17 - x)^2$. Оскільки $BM^2 = CK^2$, то маємо рівняння: $20^2 - (17 - x)^2 = 13^2 - (x + 4)^2$;
$400 - 289 + 34x - x^2 = 169 - x^2 - 8x - 16$; $42x = 42$; $x = 1$. Отже, $AM = 1$ см, тоді $AK = 5$ см і $CK = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см). $CK = BM = 12$ см.

Відповідь: 12 см. ●

Задача 4. Дано відрізки a і b (рис. 109). Побудувати відрізок x такий, що $a : x = x : b$.

Розв'язання

● Дано: a і b — відрізки.

Побудувати: відрізок x такий, що $a : x = x : b$.

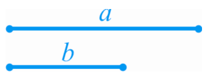


Рис. 109

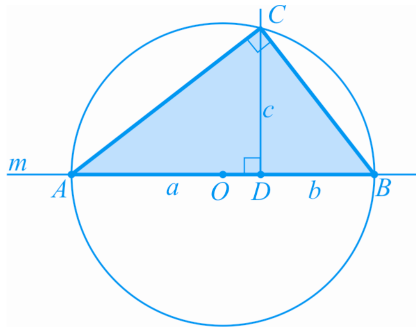


Рис. 110

Відрізок x є середнім пропорційним між відрізками a і b. Будуємо його як висоту прямокутного трикутника, що поділяє гіпотенузу на відрізки a і b.

1. На довільній прямій m послідовно відкладаємо $AD = a$ і $DB = b$. Отримуємо відрізок $AB = a + b$ (рис. 110).

2. Знаходимо точку O — середину відрізка AB — й описуємо коло з центром O, радіус якого дорівнює OA.

3. Через точку D проводимо пряму c перпендикулярну до AB; позначаємо точку C — точку перетину прямої c і кола. Відрізок CD — шуканий. Оскільки вписаний кут ACB спирається на діаметр, то він є прямим. Отже, CD — висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, та $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{ab}$. ●

Задача-теорема 5

(Теорема, обернена до теореми Піфагора). Якщо квадрат однієї сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін, то трикутник прямокутний.

● **Доведення.** Нехай ABC — даний трикутник, у якого $CB = a$, $AC = b$ і $AB = c$, до того ж $c^2 = a^2 + b^2$, тобто $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (рис. 111).

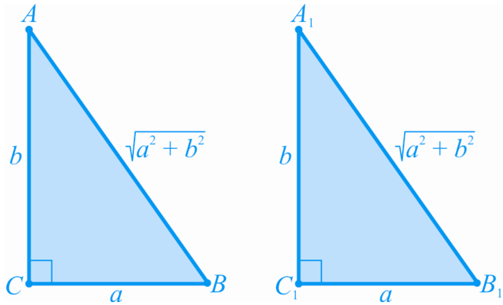


Рис. 111

Побудуємо прямокутний трикутник $A_1B_1C_1$ з прямим кутом C_1 і катетами $C_1B_1 = a$ і $A_1C_1 = b$. За теоремою Піфагора його гіпотенуза $A_1B_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$. Оскільки $\sqrt{a^2 + b^2} = c$, то $A_1B_1 = c$. Таким чином, даний трикутник ABC і побудований $A_1B_1C_1$ рівні за трьома сторонами. З рівності трикутників випливає, що $\angle C = \angle C_1$. Оскільки кут C_1 — прямий, то і кут C — прямий.

Теорему доведено. ●

Опорна задача 6

Сторона рівностороннього трикутника дорівнює a. Знайти радіус описаного навколо цього трикутника кола і радіус кола, вписаного в трикутник.

Розв'язання

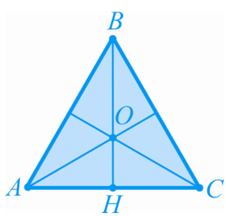


Рис. 112

● Нехай ABC — рівносторонній трикутник зі стороною a. Проведемо висоту BH (рис. 112). У рівносторонньому трикутнику висота є одночасно й медіаною, тобто $AH = \frac{a}{2}$. Із прямокутного трикутника ABH:

$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2}$; $BH = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Позначимо радіус описаного кола через R, а радіус вписаного — через r. Оскільки в рівносторонньому трикутнику центр описаного кола збігається з центром вписаного кола і є точкою перетину його медіан, то $R = BO = \frac{2}{3}BH$ (за властивістю медіан трикутника), $R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. $r = OH = \frac{1}{3}BH$, $r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Відповідь. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. ●

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Хлопчик пройшов від дому в напрямі на схід 800 метрів. Потім повернув на північ і пройшов 600 метрів. На якій відстані від дому опинився хлопчик?

2. Драбина завдовжки 12,5 м приставлена до стіни так, що відстань від її нижнього кінця до стіни дорівнює 3,5 м. На якій відстані від землі розміщений верхній кінець драбини?

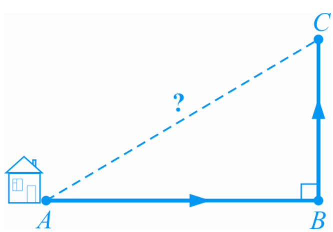


Рис. до задачі 1

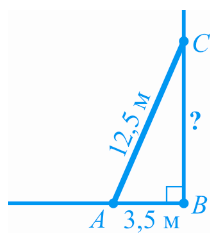


Рис. до задачі 2

3. На верхівках двох ялинок сидять дві галки. Висота ялинок дорівнює 4 м і 6 м, а відстань між ними — $BD = 10$ м. На якій відстані BE потрібно покласти для галок шматок сиру, щоб відстань від них до сиру була однакова?

4. Хлопчик і дівчинка, попрощавшись на перехресті, пішли по взаємно перпендикулярних дорогах, хлопчик зі швидкістю 4 км/год, а дівчинка — 3 км/год. Яка відстань буде між ними через 30 хвилин?

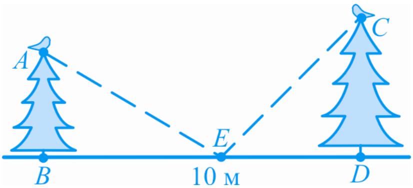


Рис. до задачі 3

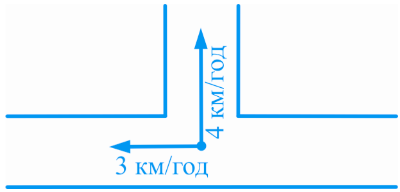


Рис. до задачі 4

5. Два теплоходи вийшли з порту, рухаючись один на північ, інший — на захід. Їх швидкості дорівнюють відповідно 15 км/год і 20 км/год. Яка відстань буде між теплоходами через 2 години?

6. Із круглої колоди потрібно вирізати брус із поперечним перерізом 5 см ×12 см. Який найменший діаметр повинна мати колода?

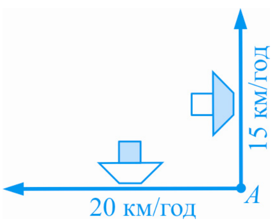


Рис. до задачі 5

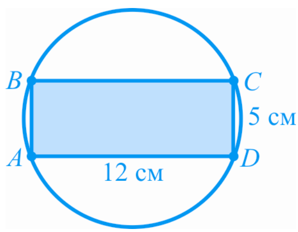


Рис. до задачі 6

7. На відстані 60 метрів одна від одної ростуть дві сосни. Висота однієї з них становить 31 метр, а іншої — 6 метрів. Знайдіть відстань між їхніми верхівками.

8. Відношення висоти до ширини екрана телевізора дорівнює 0,75, а його діагональ — 60 см. Зайдіть ширину екрана.

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 8

1. На прикладі поясніть, що називають перпендикуляром, похилою, проекцією похилої.

2. Який відрізок називають середнім пропорційним між двома іншими?

3. Для яких відрізків середнім пропорційним є: **а)** висота, проведена у прямокутному трикутнику до гіпотенузи; **б)** катет прямокутного трикутника? Запищіть відповідні рівності, використовуючи: **а)** пропорцію; **б)** квадрат числа; **в)** квадратний корінь.

4. Яка існує залежність між гіпотенузою і катетами (за теоремою Піфагора) прямокутного трикутника?

5. Сформулюйте й доведіть теореми про: **а)** висоту прямокутного трикутника; **б)** катет прямокутного трикутника як середнє пропорційне.

6. Сформулюйте й доведіть теорему Піфагора.

7. Сформулюйте й доведіть теорему, обернену до теореми Піфагора.

ЗАДАЧІ ДО § 9

РІВЕНЬ А

508. Висота прямокутного трикутника поділяє гіпотенузу на два відрізки, один з яких дорівнює 2 см. Знайдіть інший з цих відрізків, якщо висота дорівнює 12 см.

509. Висота прямокутного трикутника поділяє гіпотенузу на два відрізки завдовжки 1,8 дм і 3,2 дм. Знайдіть цю висоту.

510. Катет прямокутного трикутника і його проекція на гіпотенузу відповідно дорівнюють $4\sqrt{13}$ см і 8 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

511. Катет прямокутного трикутника і його проекція на гіпотенузу відповідно дорівнюють 20 см і 16 см. Знайдіть висоту трикутника, опущену на гіпотенузу.

512. Висота прямокутного трикутника поділяє гіпотенузу на відрізки завдовжки 16 см і 9 см. Знайдіть катети трикутника.

513. Знайдіть периметр прямокутного трикутника, у якого катет дорівнює 60 см, а його проекція на гіпотенузу — 36 см.

514. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 10 см і 24 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

515. Знайдіть периметр прямокутного трикутника, катет якого дорівнює 8 см, а гіпотенуза — 17 см.

516. Сторони прямокутника дорівнюють 15 см і 20 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутника.

517. Діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 16 см. Знайдіть його периметр.

518. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника з бічною стороною 25 см і висотою, проведеною до основи, — 24 см.

519. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 64 см, а основа — 30 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до основи.

520. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 10 см і 13 см, а висота — 4 см. Знайдіть більшу бічну сторону.

521. Менша основа прямокутної трапеції дорівнює 4 см, а її бічні сторони — 15 см і 17 см. Знайдіть більшу основу трапеції.

522. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 15 см і 25 см, а висота — 12 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

523. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 53 см, а висота — 45 см. Знайдіть більшу основу трапеції, якщо менша основа дорівнює 20 см.

524. Знайдіть катети рівнобедреного прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює $6\sqrt{2}$ см.

525. Знайдіть сторону квадрата, діагональ якого дорівнює $\sqrt{18}$ см.

РІВЕНЬ Б

526. Висота прямокутного трикутника дорівнює 6 см і ділить гіпотенузу на відрізки, різниця яких дорівнює 5 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

527. Висота прямокутного трикутника дорівнює 36 см і ділить гіпотенузу на відрізки, які відносяться як 4 : 9. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

528. Менший катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см. Знайдіть проекцію цього катета на гіпотенузу, якщо різниця проекцій катетів на гіпотенузу дорівнює 1 см.

529. Доведіть, що відношення квадратів катетів дорівнює відношенню їх проекцій на гіпотенузу.

530. Перпендикуляр, опущений з точки кола на діаметр, ділить його на відрізки, різниця яких дорівнює 14 см. Обчисліть довжину діаметра, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 50 см.

531. Перпендикуляр, опущений з точки кола на діаметр, ділить його на відрізки у відношенні 9 : 16. Знайдіть довжину цього перпендикуляра, якщо радіус кола дорівнює 75 см.

532. Катети прямокутного трикутника відносяться як 3 : 4, а гіпотенуза дорівнює 20 см. Знайдіть катети трикутника.

533. Бічна сторона рівнобедреного трикутника більша від основи на 1 см, а висота, проведена до основи, дорівнює 15 см. Знайдіть периметр трикутника.

534. Периметр прямокутника дорівнює 28 см, а його діагональ — 10 см. Знайдіть сторони прямокутника.

535. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 36 см, а його медіана, проведена до основи, — 12 см. Знайдіть основу та бічну сторону трикутника.

536. Діагоналі ромба відносяться як 3 : 4, а сторона ромба дорівнює 50 см. Знайдіть діагоналі та висоту ромба.

537. Сторона ромба дорівнює 50 см, а висота — 48 см. Знайдіть меншу діагональ ромба.

538. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 20 см, а висота — 5 см. Знайдіть діагональ трапеції.

539. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а діагональ трапеції — 17 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

540. CK — висота трикутника ABC, точка K лежить на стороні AB. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $AC = 10$ см, $CB = 17$ см, $AK = 6$ см.

541. BD — висота трикутника ABC, точка D лежить на продовженні сторони AC. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $AB = 17$ см, $BC = 39$ см і $BD = 15$ см.

РІВЕНЬ В

542. Один катет прямокутного трикутника дорівнює $\sqrt{3}$ см, а проекція іншого катета на гіпотенузу дорівнює 2 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

543. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 4 см, а проекція іншого катета на гіпотенузу дорівнює 1,8 см. Знайдіть відстань від вершини прямого кута до середини гіпотенузи.

544. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 18 см, а проекція іншого катета на гіпотенузу — 19,2 см. Знайдіть периметр трикутника.

545. Діагоналі прямокутної трапеції взаємно перпендикулярні, більшу з них точка перетину ділить на відрізки 2 см і 8 см. Знайдіть основи трапеції.

546. Діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні до бічних сторін, а основи дорівнюють 20 см і 16 см. Знайдіть висоту та бічну сторону цієї трапеції.

547. Знайдіть периметр рівнобічної трапеції, висота якої дорівнює 24 см, проекція бічної сторони на більшу основу дорівнює 18 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

548. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, ділить сторону на відрізки, різниця між якими дорівнює 7 см. Знайдіть діагоналі ромба, якщо його висота дорівнює 24 см.

549. З вершин протилежних кутів прямокутника до діагоналі проведено перпендикуляри завдовжки 6 см, відстань між основами яких дорівнює 16 см. Обчисліть периметр прямокутника.

550. h — висота, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника з катетами a і b. Доведіть, що $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

551. Доведіть, що коли в трикутнику його висота є середнім пропорційним до відрізків, на які вона поділяє сторони, то такий трикутник є прямокутним.

552. Доведіть: якщо в трикутнику одна зі сторін є середнім пропорційним між її проекцією на сторону і самою стороною, то такий трикутник є прямокутним.

553. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки завдовжки 1 см і 12 см, починаючи від основи. Знайдіть основу трикутника.

554. Одна з діагоналей ромба дорівнює $12\sqrt{3}$ см і утворює зі стороною кут 60°. Знайдіть довжину іншої діагоналі.

555. Медіана та висота, проведені з вершини прямого кута прямокутного трикутника, відповідно дорівнюють 25 см і 24 см. Знайдіть периметр трикутника.

556. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 50 см. Відстань між основами медіани та висоти, проведеними з вершини прямого кута, дорівнює 7 см. Знайдіть катети трикутника.

557. Основи трапеції дорівнюють 20 см і 41 см, а бічні сторони — 10 см і 17 см. Знайдіть висоту трапеції.

558. Основи трапеції дорівнюють 2 см і 19 см, а діагоналі — 13 см і 20 см. Знайдіть бічні сторони трапеції.

559. Катет прямокутного трикутника дорівнює 18 см, а точка, яка належить цьому катету, віддалена від гіпотенузи й іншого катета на 8 см. Обчисліть периметр трикутника.

560. Катет прямокутного трикутника дорівнює 28 см, а точка, яка належить гіпотенузі, віддалена від кожного катета на 12 см. Обчисліть периметр трикутника.

561. Навколо кола, радіус якого дорівнює 24 дм, описана рівнобічна трапеція з бічною стороною 50 дм. Знайдіть основи цієї трапеції.

562. Навколо кола, радіус якого дорівнює 3 см, описана рівнобічна трапеція, основи якої відносяться як 4 : 9. Знайдіть усі сторони цієї трапеції.

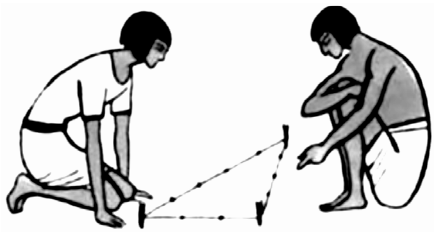
563. Доведіть: якщо CK — висота гострокутного трикутника ABC, то $AC^2 - CB^2 = AK^2 - BK^2$.

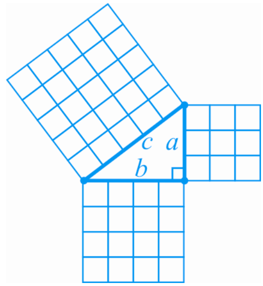
564. Доведіть: якщо діагоналі чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні, то $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Стародавні єгиптяни, вавилоняни й інші народи Стародавнього Сходу ще за 2000 років до н. е. знали, що трикутник зі сторонами 3, 4 і 5 (який називають єгипетським) є прямокутним. Єгиптяни будували прямі кути на місцевості, користуючись шнурком, на якому були відкладені 5, 4 і 3 одиниці довжини.
- Теорема, яку ми називаємо теоремою Піфагора, є у вавилонських текстах, які було написано за 1200 років до Піфагора. Знали її й у Стародавній Індії. Піфагор лише першим довів цей факт.

- Доведення теореми Піфагора містять і «Начала» Евкліда. Формулювання і доведення теореми Евклід дає суто в геометричній формі. На гіпотенузі та катетах прямокутного трикутника він будує квадрати та доводить, що площа квадрата, побудованого на гіпотенузі, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах.
- На сьогодні відомо понад 150 різних доведень теореми Піфагора.



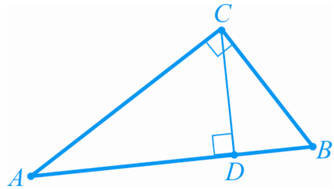


КОНТРОЛЬ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ ЗА МАТЕРІАЛОМ § 9

Початковий рівень

1. На рисунку зображено прямокутний трикутник ABC із прямим кутом C, і його висота CD. Проекцією катета BC на гіпотенузу є відрізок...

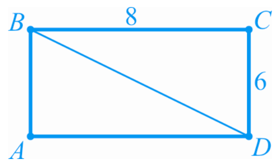
А AD; **Б** CD;
В DB; **Г** AC.



2. Діагональ BD прямокутника $ABCD$, зображеного на рисунку, дорівнює значенню виразу...

А $\sqrt{8^2-6^2}$; **Б** $\sqrt{8^2+6^2}$;

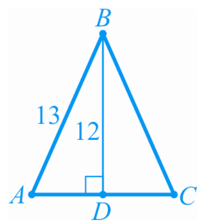
В 8^2+6^2; **Г** $\sqrt{8\cdot 6}$.



3. Основа AC рівнобедреного трикутника ABC, зображеного на рисунку, дорівнює значенню виразу...

А $\sqrt{13^2-12^2}$; **Б** $\sqrt{13^2+12^2}$;

В $2\sqrt{13^2+12^2}$; **Г** $2\sqrt{13^2-12^2}$.



Середній рівень

4. Периметр ромба дорівнює 68 см, а одна з його діагоналей — 16 см. Знайдіть довжину іншої діагоналі ромба.

5. У прямокутному трикутнику, гіпотенуза якого дорівнює 50 см, проекція одного з катетів на гіпотенузу дорівнює 18 см. Знайдіть довжину іншого катета трикутника.

6. З точки до даної прямої проведено дві похилі. Довжина першої похилої дорівнює 20 см, а довжина її проекції — 16 см. Довжина другої похилої становить 13 см. Знайдіть довжину її проекції.

Достатній рівень

7. Точка дотику кола, вписаного в ромб, периметр якого дорівнює 100 см, ділить сторону ромба на відрізки, один з яких дорівнює 9 см. Знайдіть діагоналі ромба.

8. У рівнобічній трапеції бічна сторона та висота дорівнюють 15 см і 12 см, середня лінія — 22 см. Знайдіть основи трапеції.

9. Висота, проведена до бічної сторони рівнобедреного трикутника, ділить цю сторону на відрізки завдовжки 12 см і 18 см, починаючи від кута при основі. Знайдіть периметр трикутника.

Високий рівень

10. У трикутнику висота й медіана, які проведені до сторони трикутника завдовжки 18 см, відповідно дорівнюють 8 см і 10 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

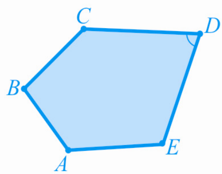
11. Радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, дорівнює 3 см. Центр кола віддалений від вершини кута між бічними сторонами на 5 см. Знайдіть сторони трикутника.

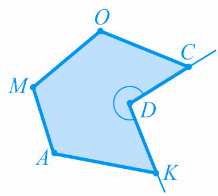
12. Навколо кола описано прямокутну трапецію. Відстані від центра кола до кінців бічної сторони дорівнюють 15 см і 20 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в цю трапецію.

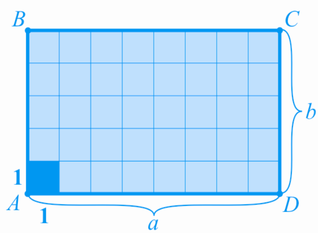
Розділ III. МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ

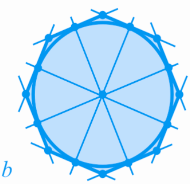
Опрацьовуючи цей розділ, ми розглянемо:

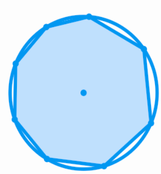
- многокутники;
- опуклі й неопуклі многокутники;
- вписані й описані многокутники;
- площі прямокутника, квадрата, паралелограма, трикутника, ромба й трапеції.











§ 10. МНОГОКУТНИКИ

1. Многокутник і його елементи.

На рис. 113 зображено фігури, кожна з яких складається з простої замкненої ламаної та частини площини, обмеженої цією ламаною.

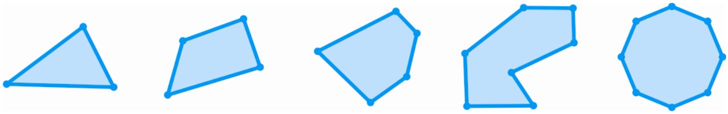


Рис. 113

Усі ці фігури мають спільну назву — *многокутники*. Два види многокутників — трикутники та чотирикутники — ми вивчали раніше.

Означення ***Многокутником*** **називають фігуру, яка складається із простої замкненої ламаної та частини площини, яку вона обмежує.**

Відрізки, які утворюють ламану, називають *сторонами* многокутника, а їхні кінці — його *вершинами*. Частину площини, обмежену ламаною, називають *внутрішньою областю многокутника*. Позначають многокутник за вершинами, як і відповідну ламану.

Дві вершини многокутника, які є кінцями однієї сторони, називають *сусідніми*. Сторони многокутника, які мають спільну вершину, називають *сусідніми*, або *суміжними*. Жодні три послідовні вершини многокутника не лежать на одній прямій.

Периметром многокутника називають суму довжин усіх його сторін. Позначають периметр літерою P.

Кут многокутника.

На рис. 114 зображено кут D п’ятикутника і шестикутника.

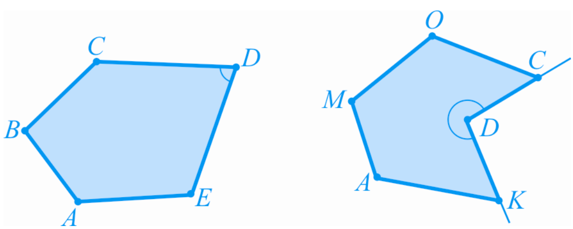


Рис. 114

Означення | ***Кутом многокутника*** **при даній його вершині називають кут, утворений двома променями, які виходять з цієї вершини і містять сторони многокутника.**

У кожного многокутника однакова кількість вершин, сторін і кутів.

Якщо число сторін многокутника відоме, то замість слова «много» вживають відповідне число. Так отримуємо трикутник, п'ятикутник, двадцятикутник тощо. Якщо число сторін n, то кажуть n-кутник. При цьому n — деяке натуральне число, рівне або більше 3. Трикутник є многокутником з найменшою кількістю сторін. Отже, у n-кутника: n сторін, n вершин і n кутів. Кожна сторона многокутника менша від суми всіх інших його сторін (див. приклади розв'язання задач).

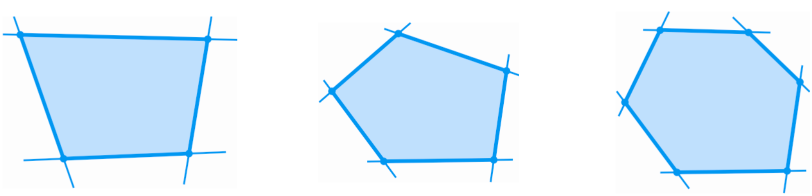
Діагональ многокутника.

Означення | ***Діагоналлю многокутника*** **називають відрізок, який сполучає дві його несусідні вершини.**

У трикутника немає діагоналей (будь-які дві його вершини сусідні); у чотирикутника найменше діагоналей — дві.

2. Опуклі й неопуклі многокутники та їх властивості.

На рис. 115 а) зображено чотирикутник, який лежить в одній півплощині відносно кожної з прямих, яка містить його сторону, тобто кожна з цих прямих не поділяє його на частини.



а) б) в)

Рис. 115

Як відомо, такий чотирикутник називають *опуклим*. Так само розміщені відносно прямих, які містять їх сторони, і многокутники на рис. 115 б) – в). Природно, що їх теж називають опуклими.

Означення

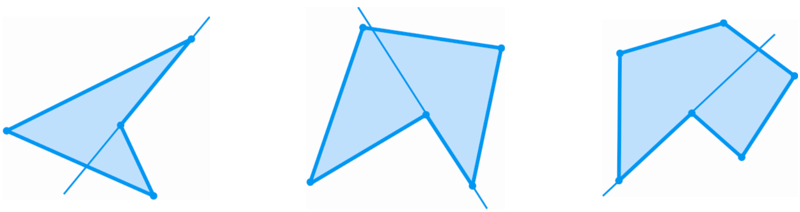
Опуклим многокутником **називають многокутник, який лежить в одній півплощині відносно кожної прямої, що містить його сторону.**

Для опуклих многокутників, як і для опуклих чотирикутників, справедливі такі властивості.

Властивості

Кожний з кутів менший від розгорнутого.
Кожна з діагоналей належить многокутникові й поділяє його на частини (многокутники).

На рис. 116 а) зображений чотирикутник, у якого є пряма, що містить його сторону і відносно якої він лежить у різних півплощинах (поділяється на частини).



а) б) в)

Рис. 116

Такий чотирикутник, як відомо, називають *неопуклим*. У многокутниках, зображених на рис. 116 б) – в), також є прямі, які містять сторони і поділяють многокутники на частини. Тому їх теж називають неопуклими.

Означення

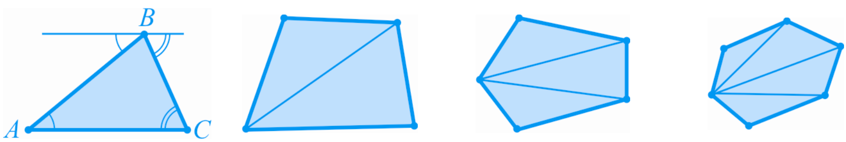
Неопуклим многокутником **називають многокутник, у якого є пряма, що містить його сторону, відносно якої він лежить у різних півплощинах (поділяється на частини).**

Властивості

У неопуклому многокутнику існує кут, більший від розгорнутого.
У неопуклому многокутнику існує діагональ, яка йому не належить і не поділяє його на частини.

3. Теорема про суму кутів опуклого многокутника.

Як відомо, сума кутів трикутника дорівнює 180° (рис. 117 а), а чотирикутника — 360° (рис. 117 б) (оскільки є сумою кутів двох трикутників, на які він поділяється діагоналлю: 180° · 2 = 360°).



а) б) в) г)

Рис. 117

За рис. 117 в) легко побачити, що сума кутів опуклого п’ятикутника дорівнює 540° (оскільки є сумою кутів трьох трикутників: 180° · 3 = 540°).

Аналогічно отримуємо, що сума кутів опуклого восьмикутника (рис. 117 г) дорівнює 180° · 6 = 1080°.

Узагальненням отриманих геометричних фактів є така теорема.

Теорема **Сума кутів будь-якого опуклого *n*-кутника дорівнює 180°· (*n* – 2).**

● **Доведення.**

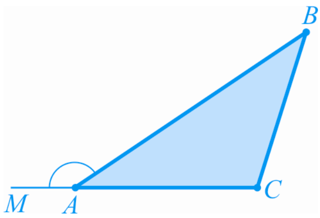
1. Якщо $n = 3$, то n-кутник є трикутником. Сума його кутів дорівнює 180° · (4 – 2) = 180°, що доведено раніше.

2. Доведемо: якщо $n > 3$, то теорема справедлива для будь-якого опуклого n-кутника. Якщо $n > 3$, то будь-який n-кутник поділяється на $n – 2$ трикутники. Сума всіх кутів цих трикутників дорівнює сумі кутів n-кутника. Отже, сума кутів n-кутника дорівнює 180° · (n – 2). Теорему доведено. ●

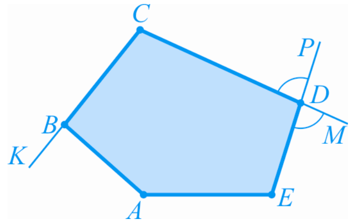
Наприклад, сума кутів опуклого шестикутника ($n = 6$) дорівнює 180° · (6 – 2) = 720°.

Зовнішній кут многокутника.

Як відомо, *зовнішнім кутом* трикутника називають кут, суміжний з кутом трикутника. На рис. 118 а) ∠*MAB* — зовнішній кут трикутника *ABC*.



а)



б)

Рис. 118

Аналогічно означують і зовнішній кут будь-якого многокутника (рис. 118 б).

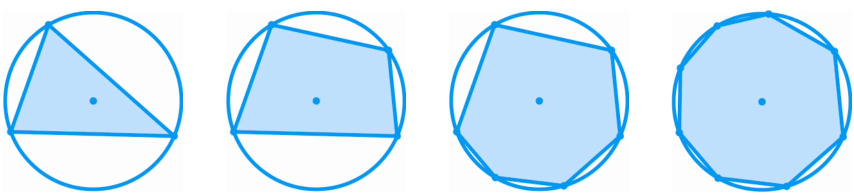
Означення | ***Зовнішнім кутом*** **опуклого многокутника при даній його вершині називають кут, суміжний з кутом многокутника при цій вершині.**

На рис. 118 б) кут KBA — зовнішній кут при вершині B п'ятикутника $ABCDE$, а кути CDP і MDE — два його зовнішні кути при вершині D. При кожній вершині многокутника можна побудувати два зовнішні кути.

3. Вписані й описані многокутники.

Вписаний многокутник.

На рис. 119 зображено трикутник, чотирикутник, шестикутник і восьмикутник, вершини кожного з них лежать на колі.



а) б) в) г)

Рис. 119

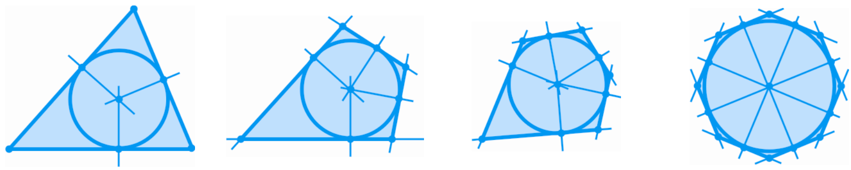
Такі многокутники називають *вписаними в коло*, а про коло кажуть, що воно *описане навколо многокутника*.

Означення	***Вписаним многокутником*** **називають многокутник, усі вершини якого лежать на колі.**

Центром кола, описаного навколо многокутника, є точка, рівновіддалена від усіх його вершин, тобто точка *перетину серединних перпендикулярів* до всіх його сторін. Вписаним може бути тільки той многокутник, у якого всі серединні перпендикуляри до сторін перетинаються в одній точці.

Описаний многокутник.

На рис. 120 зображено трикутник, чотирикутник, п’ятикутник і восьмикутник, у яких кожна зі сторін дотикається до деякої точки кола.



а) б) в) г)

Рис. 120

Такі многокутники називають *описаними навколо кола*, а про коло кажуть, що воно *вписане в многокутник*.

Означення	***Описаним многокутником*** **називають многокутник, усі сторони якого дотикаються до кола.**

Центром кола, вписаного в многокутник, є точка, рівновіддалена від усіх сторін многокутника. Такою є точка перетину бісектрис кутів многокутника. Многокутник є описаним тоді й лише тоді, коли бісектриси його кутів перетинаються в одній точці.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

565. Накресліть довільний п’ятикутник *ABCDE*. З чого він складається за означенням?

566. Що називають діагоналлю многокутника? Який многокутник не має діагоналей?

567. Скільки діагоналей можна провести з однієї вершини: **а)** п’ятикутника; **б)** десятикутника; **в)** n-кутника, якщо $n > 3$?

568. Скільки всього діагоналей має: **а)** п’ятикутник; **б)** десятикутник; **в)** n-кутник?

569. Накресліть довільний опуклий п’ятикутник. Яка його властивість за означенням?

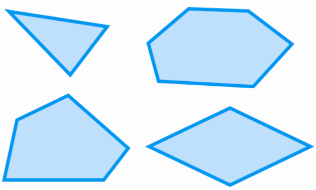
570. Сформулюйте властивість у довільному опуклому многокутнику: **а)** кутів; **б)** діагоналей.

571. Накресліть довільний неопуклий п’ятикутник. Укажіть його властивість за означенням. Проілюструйте її на рисунку.

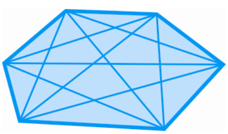
572. Сформулюйте властивість у неопуклому многокутнику: **а)** кутів; **б)** діагоналей. Проілюструйте їх на прикладі неопуклого шестикутника.

573. На скільки трикутників поділяють опуклий многокутник усі його діагоналі, проведені з однієї вершини, якщо він є: **а)** п’ятикутником; **б)** десятикут-ником; **в)** n-кутником?

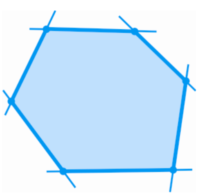
ОСНОВНЕ В § 10



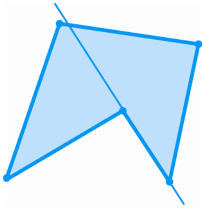
Многокутником називають фігуру, яка складається із простої замкненої ламаної та частини площини, яку вона обмежує.



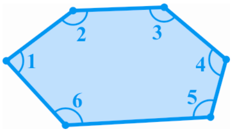
Діагоналлю многокутника називають відрізок, який сполучає дві його несусідні вершини.



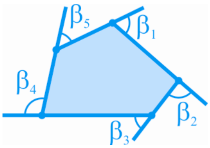
Опуклим многокутником називають многокутник, який лежить в одній півплощині відносно кожної прямої, що містить його сторону.



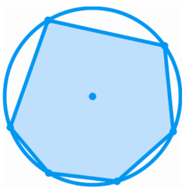
Неопуклим многокутником називають многокутник, у якого є пряма, що містить його сторону, відносно якої він лежить у різних півплощинах (поділяється на частини).



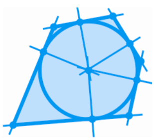
Сума кутів будь-якого опуклого n-кутника дорівнює $180° \cdot (n - 2)$.



Зовнішнім кутом опуклого многокутника при даній його вершині називають кут, суміжний з кутом многокутника при цій вершині.



Вписаним многокутником називають многокутник, усі вершини якого лежать на колі.



Описаним многокутником називають многокутник, усі сторони якого дотикаються до кола.

ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

Задача 1. Скільки діагоналей має довільний n-кутник?

Розв’язання

● З будь-якої вершини многокутника можна провести $(n - 3)$ діагоналі (відкидаємо саму вершину і дві сусідні з нею). Тоді з усіх n вершин можна провести $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ діагоналей, бо в добутку $n(n - 3)$ кожна діагональ порахована двічі.

Отже, n-кутник ($n > 3$) має $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ діагоналей. Так, у чотирикутника: $\frac{4 \cdot (4-3)}{2} = 2$ діагоналі; у п'ятикутника $\frac{5 \cdot (5-3)}{2} = 5$ діагоналей; у двадцятикутника $\frac{20 \cdot (20-3)}{2} = 170$ діагоналей. ●

Теорема **Сума зовнішніх кутів опуклого многокутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.**

● **Доведення.** Сума кута многокутника та зовнішнього з ним кута при одній вершині дорівнює 180°, а при n вершинах дорівнюватиме $180° \cdot n$. Оскільки сума всіх кутів опуклого n-кутника дорівнює $180° \cdot (n-2)$, то сума зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює: $180° \cdot n - 180°(n-2) = 180°n - 180°n + 360° = 360°$. Теорему доведено. ●

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Задача 1. Знайти двома способами кут 15-кутника, у якого всі кути рівні.

Розв'язання

● *1 спосіб.*

Сума кутів 15-кутника дорівнює $180° \cdot (15-2) = 180° \cdot 13 = 2340°$. Оскільки всі кути рівні, то один кут 15-кутника дорівнює $2340° : 15 = 156°$.

2 спосіб.

Оскільки кути 15-кутника рівні, то рівними є і його зовнішні кути. Один зовнішній кут дорівнює $360° : 15 = 24°$. Один кут многокутника дорівнює $180° - 24° = 156°$.

Відповідь: 156°. ●

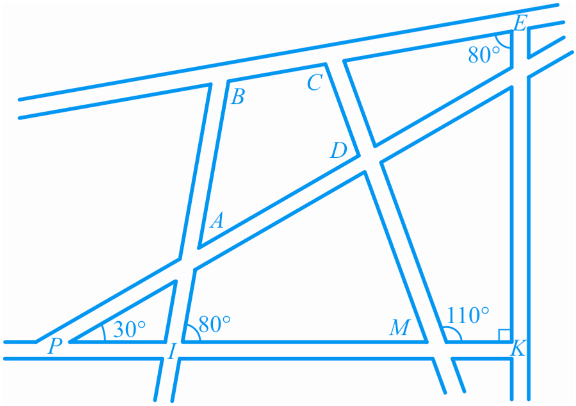
Задача 2. Знайти число сторін опуклого многокутника, якщо в нього 35 діагоналей.

Розв'язання

● Нехай число сторін многокутника дорівнює n, тоді число його діагоналей дорівнює $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$. Отримуємо рівняння $\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 35$. $n(n-3) = 70$; $n^2 - 3n - 70 = 0$; $n_1 = -7$ (не задовольняє умову $n \geq 3$), $n_2 = 10$. ●

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Знайдіть кути, які утворюють вулиці кварталу *ABCD*, що має форму чотирикутника, використовуючи дані, вказані на плані.



2. Чи можна суцільно покрити підлогу плитками у формі п’ятикутників, які мають усі рівні сторони і всі рівні кути?

3. Чи можна суцільно покрити підлогу плитками у формі шестикутників, які мають усі рівні сторони і всі рівні кути, і рівносторонніми трикутниками, сторона яких дорівнює стороні шестикутика?

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 10

1. Яку фігуру називають многокутником?

2. Що називають: **а)** діагоналями многокутника; **б)** кутом многокутника; **в)** зовнішнім кутом многокутника?

3. Який многокутник називають: **а)** опуклим; **б)** неопуклим? Відповідь проілюструйте на прикладі шестикутника.

4. Сформулюйте властивість кутів і діагоналей опуклого многокутника.

5. Чому дорівнює сума кутів опуклого n-кутника?

6. Який многокутник називають: **а)** вписаним; **б)** описаним?

7. Сформулюйте й доведіть теорему про суму кутів опуклого n-кутника.

8. Сформулюйте й доведіть теорему про суму зовнішніх кутів опуклого многокутника.

ЗАДАЧІ ДО § 10

РІВЕНЬ А

574. Обчисліть суму кутів: **а)** шестикутника; **б)** 22-кутника.

575. На скільки сума кутів опуклого восьмикутника більша від суми кутів опуклого чотирикутника?

576. Знайдіть число сторін многокутника, сума кутів якого дорівнює: **а)** 540°; **б)** 900°.

577. Чи існує многокутник, у якого сума кутів дорівнює: **а)** 1000°; **б)** 2700°? Відповідь обґрунтуйте.

578. Скільки кутів має многокутник, якщо їх сума дорівнює 1620°? Чи може ця сума дорівнювати 1540°?

579. Сума зовнішніх кутів многокутника на 360° менша від суми його внутрішніх кутів. Скільки сторін має цей многокутник?

580. Сума внутрішніх кутів многокутника удвічі більша від суми його зовнішніх кутів. Скільки сторін має цей многокутник?

581. Знайдіть кут дванадцятикутника, в якого всі кути рівні.

582. Знайдіть кількість діагоналей опуклого 23-кутника.

583. Чи існує многокутник, кожен кут якого дорівнює 165°?

РІВЕНЬ Б

584. Скільки сторін має многокутник з рівними кутами, якщо його зовнішній кут дорівнює 45°?

585. Знайдіть двома способами кут 24-кутника, в якого всі кути рівні.

586. Знайдіть кути п’ятикутника, якщо їх градусні міри відносяться як 2 : 4 : 5 : 6 : 7.

587. Чи може найменший кут дев’ятикутника дорівнювати 145°?

588. Чи може найбільший кут семикутника дорівнювати 126°?

589. Знайдіть число кутів многокутника, в якого 54 діагоналі.

590. У многокутнику 77 діагоналей. Знайдіть кількість його сторін і суму кутів.

РІВЕНЬ В

591. Доведіть, що многокутник, у якого всі зовнішні кути тупі, є трикутником.

592. Доведіть, що многокутник, у якого всі зовнішні кути прямі, є чотирикутником.

593. Два кути многокутника дорівнюють по 120°, а решта — по 150°. Скільки вершин має цей многокутник?

ЦІКАВО ЗНАТИ

- У математичній літературі многокутники по-іншому називають прямолінійними фігурами, а також полігонами (від грецьких слів *«полі»* — «*багато*», *«гонон»* — «*кут*»). Наведемо означення многокутника за «Підручником з елементарної геометрії» М. В. Остроградського: «Прямолінійною фігурою, або многокутником, називають частину площини, обмежену з усіх боків ламаною лінією, тобто сукупністю прямих ліній. Ламану лінію, яка слугує межею прямолінійної фігури, інколи також називають многокутником, але звичайно її називають периметром або обводом цієї фігури».
- «Начала» Евкліда містять доведення теореми про суму кутів трикутника, доведення ж теореми про суму кутів довільного многокутника не подано.
- Уперше формулу для обчислення суми кутів n-кутника запропонував німецький математик Регіомонтан (XV ст.).

РЕГІОМОНТАН
(1436 – 1476)

§ 11. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ

11.1. Поняття про площу. Площа прямокутника

1. Що таке площа? Основні властивості площі.

Вимірювання площ, як і будь-яких величин, здійснюють за допомогою вибраної одиниці вимірювання. За одиницю вимірювання площ приймають площу квадрата, сторона якого дорівнює одиниці довжини. Такими одиницями довжини можуть бути міліметр, сантиметр, дециметр, метр, кілометр, а також будь-який відрізок, прийнятий за одиничний. Квадрат, сторона якого дорівнює якій-небудь лінійній одиниці, називають *одиничним*, а його площу називають *квадратною одиницею*: квадратним міліметром, квадратним сантиметром, квадратним метром тощо.

Виміряти площу якої-небудь плоскої фігури (зокрема многокутника) означає знайти число, яке показує, скільки квадратних одиниць міститься у фігурі, площу якої вимірюють, по-іншому — скільки разів одиниця виміру і її частини вкладаються у цій фігурі.

Основними властивостями вимірювання площ фігур є такі твердження.

Властивості

1. Площа квадрата зі стороною, яка дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці:

$$S_E = 1,$$

де S — площа, E — одиничний квадрат.

2. Плоска фігура з вибраною одиницею вимірювання має єдину площу, яка є додатним числом.

$$S_F > 0,$$

де S — площа, F — геометрична фігура.

3. Рівні фігури мають рівні площі.

Якщо $F_1 = F_2$, то $S_1 = S_2$.

4. Якщо фігура поділена на частини, то її площа дорівнює сумі площ частин.

$$S_F = S_1 + S_2 + S_3.$$

Означення | ***Рівновеликикими*** **називають фігури, які мають однакові площі.**

В окремих випадках площу фігури можна встановити безпосереднім підрахунком одиничних квадратів, які поміщаються в ній. У більшості ж випадків число, яке є площею фігури, визначають за допомогою формул. Опираючись на основні властивості площ, виводять формули, які дозволяють за довжинами деяких елементів обчислювати площі фігур основних видів (трикутників, паралелограмів, ромбів, трапецій, кругів тощо). Площі інших фігур знаходять поділом на фігури або доповненням до фігур, для яких способи відшукання площ відомі.

2. Площа прямокутника.

Теорема | **Площа прямокутника дорівнює добутку двох його сусідніх сторін:**

$$\boldsymbol{S = a \cdot b.}$$

Теорема про площу прямокутника справедлива як у випадках, коли довжини сторін є раціональними числами (цілими або дробовими), так і тоді, коли довжини є ірраціональними числами. Обмежимося доведенням теореми для випадків, коли довжини сторін є натуральними числами.

● **Доведення.**

Нехай $ABCD$ — довільний прямокутник, у якого $AD = a$ й $AB = b$ (на рис. 121 $a = 8$, $b = 5$).

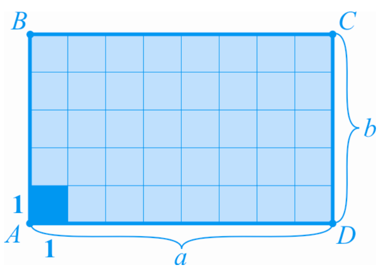


Рис. 121

Поділимо сторону AD на a рівних частин, а сторону AB — на b рівних частин. Через точки поділу проведемо прямі, паралельні сторонам прямокутника. Отримуємо b прямокутних смуг, кожна з яких складається з a одиничних квадратів. Отже, всього утвориться ab одиничних квадратів. Таким чином, $S_{ABCD} = a \cdot b$. ●

Наслідок

Площа квадрата дорівнює квадрату його сторони:

$$S = a^2.$$

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

594. Прийнявши площу однієї клітинки за квадратну одиницю (рис. 122), знайдіть площу кожної фігури.

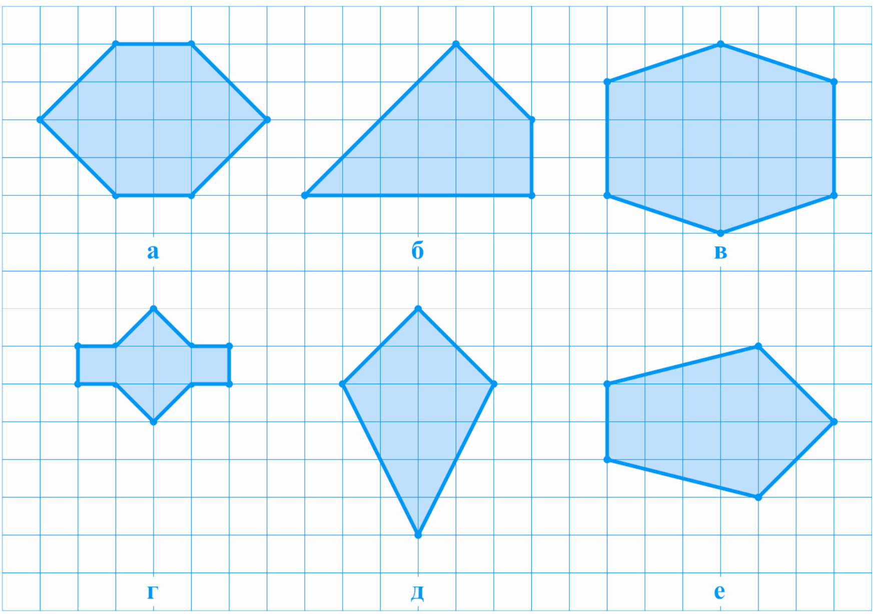


Рис. 122

595. Перетворіть:

а) 5 м^2 у дм^2; см^2;
б) 4,8 дм^2 у мм^2; см^2;
в) 720000 мм^2 у см^2; дм^2;
г) 0,4 га у м^2; ар;
д) 5200000 м^2 у ар; га.

596. Знайдіть площу прямокутника, якщо його сторони дорівнюють:

а) 3 м і 0,4 м; **б)** 80 дм і 5 м;

в) $\sqrt{2}$ см і $\sqrt{8}$ см; **г)** $4\frac{1}{3}$ м і $\frac{3}{26}$ м.

597. Знайдіть площу квадрата, якщо його сторона дорівнює:

а) 4 дм; **б)** $\frac{2}{7}$ м; **в)** $\sqrt{3}$ см.

598. Знайдіть сторону квадрата, який рівновеликий прямокутнику зі сторонами:

а) 4 см і 25 см; **б)** 2 см і 0,8 дм; **в)** $\sqrt{2}$ дм і $\sqrt{8}$ дм.

599. Як зміниться площа квадрата, якщо всі його сторони:

а) збільшити утричі; **б)** збільшити в n разів;

в) зменшити у 4 рази; **г)** зменшити в k разів?

600. Площа квадрата дорівнює 80 см^2. Якою стане площа, якщо всі сторони квадрата:

а) збільшити у 4 рази; **б)** зменшити у 4 рази?

601. Накресліть фігуру, яка показує, що 1 дм^2 = 100 см^2.

11.2. Площа трикутника

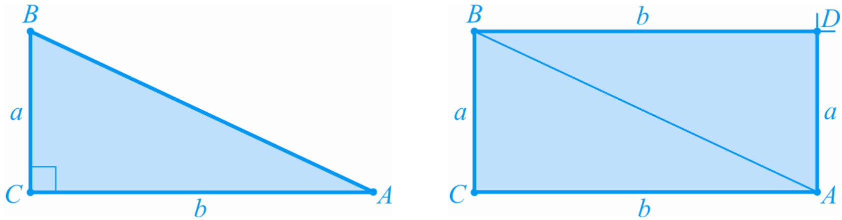
1. Площа прямокутного трикутника

Теорема

Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів:

$$\boldsymbol{S_{\text{прям. трик.}} = \frac{1}{2}a \cdot b.}$$

● **Доведення.** Нехай ABC — довільний прямокутний трикутник із прямим кутом C, катети якого BC й AC відповідно дорівнюють a і b (рис. 123 а). Доведемо, що $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot b$.



а) б)

Рис. 123

Через вершини гострих кутів проведемо прямі, перпендикулярні до катетів, точка D — точка їх перетину (рис. 123 б). Утвориться прямокутник $CBDA$ зі сторонами a і b, площа якого дорівнює ab.

Маємо: $S_{CBDA} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta BAD}$. Оскільки $\Delta ABC = \Delta BAD$, то $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BAD}$ (за аксіомою 2). Отже, $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC}$. Звідси $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}S_{CBDA} = \frac{1}{2}a \cdot b$. Теорема доведена. ●

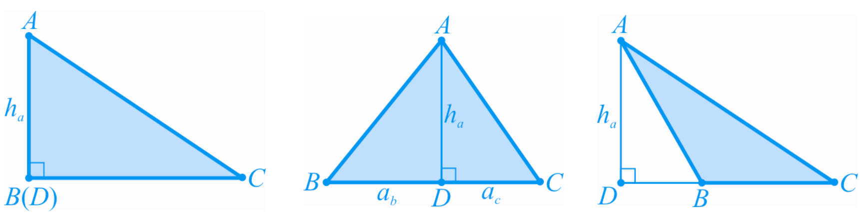
2. Площа довільного трикутника.

Теорема

Площа трикутника дорівнює півдобутку сторони та висоти, проведеної до неї:

$$S_{трик.} = \frac{1}{2}a \cdot h_a.$$

● **Доведення.** Нехай ABC — довільний трикутник, у якого $BC = a$, AD — висота, проведена до BC, $AD = h_a$. Доведемо, що $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2}a \cdot h_a$.



а) б) в)

Рис. 124

Можливі три випадки розміщення точки D — основи висоти AD відносно сторони BC (рис. 124 а) – в).

1 випадок. Точка D — основа висоти збігається з одним з кінців сторони BC, наприклад, з точкою B (рис. 124 а). Тоді BC і AD є катетами. Отже, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2}\, a \cdot h_a$.

2 випадок. Точка D лежить усередині сторони BC (D — внутрішня точка відрізка BC) (рис. 124 б). Тоді висота AD поділяє трикутник ABC на два прямокутні трикутники: ΔABD і ΔADC. Маємо: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ADC} =$
$= \frac{1}{2}BD \cdot AD + \frac{1}{2}DC \cdot AD = \frac{1}{2}AD \cdot (BD + DC) = \frac{1}{2}AD \cdot BC = \frac{1}{2}BC \cdot AD =$
$= \frac{1}{2}\, a \cdot h_a$. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a$.

3 випадок. Точка D лежить на продовженні сторони BC (рис. 124 в). Тоді площа трикутника ABC є різницею площ двох прямокутних трикутників: ΔADC і ΔADB. Маємо: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADC} - S_{\Delta ADB} = \frac{1}{2}DC \cdot AD - \frac{1}{2}DB \cdot AD =$
$= \frac{1}{2}AD \cdot (DC - DB) = \frac{1}{2}AD \cdot BC = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2}a \cdot h_a$. Отже, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a$.

Таким чином, у всіх трьох можливих випадках формула $S_{\Delta} = \frac{1}{2}a \cdot h_a$ виконується. Теорему доведено. ●

3. Площа рівностороннього трикутника.

Теорема

Площа рівностороннього трикутника дорівнює:

$$\boldsymbol{S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},}$$

де *a* — сторона.

● **Доведення.** Нехай ABC — рівносторонній трикутник, у якого $AB = a$ (рис. 125). Проведемо висоту BK, тоді $AK = \frac{a}{2}$.

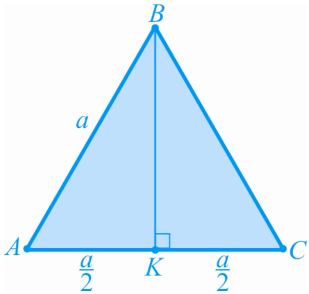


Рис. 125

З ΔABK за теоремою Піфагора знаходимо висоту BK:

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, $S = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. ●

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

602. Накресліть довільний гострокутний трикутник MOK. Проведіть його висоту OP і виразіть площу трикутника MOK за допомогою висоти OP.

603. Накресліть тупокутний трикутник ACD з тупим кутом D. Проведіть висоту CK і виразіть площу трикутника ACD за допомогою висоти CK.

604. На основі якої формули і яким способом доведено формулу площі: **а)** прямокутного трикутника; **б)** довільного трикутника?

605. Знайдіть площу прямокутного трикутника, в якого катети дорівнюють: **а)** 3 см і 5 см; **б)** 13 см і 0,3 дм; **в)** $\sqrt{2}$ см і $\sqrt{8}$ см.

606. Знайдіть площу трикутника, в якого одна зі сторін і висота, проведена до неї, відповідно дорівнюють: **а)** 3 см і 8 см; **б)** 18 см і 0,2 дм; **в)** $2\sqrt{3}$ см і $\sqrt{3}$ см.

607. Знайдіть площу рівностороннього трикутника зі стороною 4 см.

608. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, в якого основа та висота, проведена до неї, відповідно дорівнюють 10 см і 15 см.

609. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, у якого бічна сторона та висота, проведена до неї, відповідно дорівнюють 12 см і 8 см.

610. Прийнявши довжину однієї клітинки за одиничний відрізок, знайдіть площу кожного трикутника, зображеного на рисунку 126, використавши формулу площі трикутника.

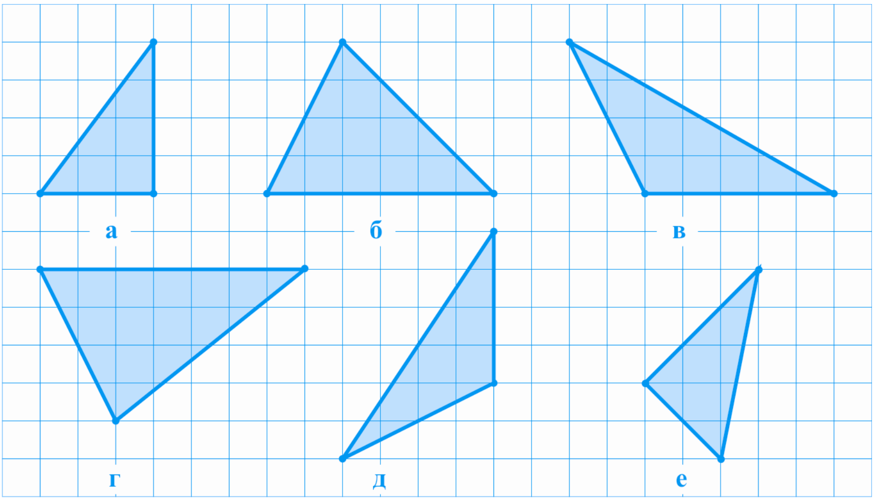


Рис. 126

11.3. Площа паралелограма, ромба, трапеції

1. Площа паралелограма.

Теорема

Площа паралелограма дорівнює добутку сторони та висоти, проведеної до неї:

$$S_{\text{пар.}} = a \cdot h_a.$$

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — довільний паралелограм, у якого одна зі сторін, наприклад, $AD = a$, BK — висота, проведена до неї, $BK = h_a$ (рис. 127). Доведемо, що $S_{\text{пар.}} = AD \cdot BK$ або $S_{\text{пар.}} = a \cdot h_a$.

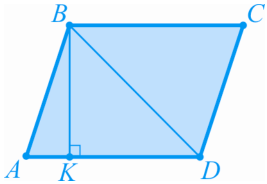


Рис. 127

Для доведення проведемо одну з діагоналей паралелограма, наприклад, BD. Вона поділить паралелограм $ABCD$ на два рівні трикутники: ΔABD і ΔCDB.

У трикутнику ABD a є стороною, h_a — висотою, проведеною до неї. Маємо:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} AD \cdot BK = 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_a = a \cdot h_a.$$

$$S_{ABCD} = a \cdot h_a.$$

Теорему доведено. ●

Площа ромба.

Оскільки ромб є окремим видом паралелограма, то доведена формула площі паралелограма справедлива й для ромба. Але оскільки в ромба всі сторони рівні, а також рівні й висоти, то встановлену формулу для ромба можна сформулювати простіше.

Площа ромба дорівнює добутку сторони та висоти:

$$S_{\text{ромба}} = a \cdot h.$$

Встановимо формулу для обчислення площі ромба за його діагоналями.

Теорема

Площа ромба дорівнює півдобутку його діагоналей:

$$\mathbf{S_{\text{ромба}} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2,}$$

де d_1 і d_2 — діагоналі.

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — довільний ромб, у якого діагоналі $AC = d_1$ і $BD = d_2$ (рис. 128). O — точка перетину діагоналей. Доведемо, що $S_{\text{ромба}} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.

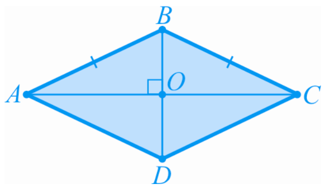


Рис. 128

Кожна з діагоналей ромба поділяє його на два рівні між собою рівнобедрені трикутники, наприклад, діагональ AC поділяє його на трикутники ABC і ADC. У цих трикутниках висотою, проведеною до сторони AC, є половина діагоналі BD. Таким чином, маємо: $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BO =$ $= 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$. $S_{\text{ромба}} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$. ●

Площа трапеції.

Теорема

Площа трапеції дорівнює добутку півсуми основ та висоти:

$$\boldsymbol{S_{\text{тр.}} = \frac{a+b}{2} \cdot h}\,.$$

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — довільна трапеція з більшою основою AD, BK — висота трапеції, проведена з вершини (рис. 129). Позначимо: $AD = a$, $BC = b$, $BK = h$.

Доведемо, що $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BK$, або $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

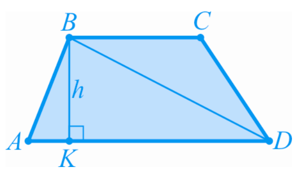


Рис. 129

Для доведення проводимо одну з діагоналей, наприклад, BD. Вона поділяє трапецію на два трикутники: ABD і BCD. Маємо:

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}AD \cdot BK + \frac{1}{2}BC \cdot BK =$$

$$= \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BK = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot h .$$

$$S_{\text{трапеції}} = \frac{a+b}{2} \cdot h .$$

Теорему доведено. ●

Оскільки середня лінія трапеції дорівнює півсумі основ, то отримуємо наслідок.

Наслідок **Площа трапеції дорівнює добутку середньої лінії та висоти.**

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

611. Накресліть паралелограм $MOPK$ з гострим кутом M. Проведіть перпендикуляр: **а)** MA з основою на прямій OP; **б)** OS з основою на прямій PK. Запишіть площу паралелограма, використавши MA; OS.

612. Накресліть трапецію $KLMN$ з більшою основою KN. Проведіть висоту NA. Запишіть площу трапеції, використавши NA.

613. Знайдіть площу паралелограма, в якого сторона та висота, проведена до неї, відповідно дорівнюють: **а)** 12 см і 15 см; **б)** $4\sqrt{2}$ см і $3\sqrt{2}$ см.

614. Знайдіть площу ромба зі стороною 12 см і висотою 8 см.

615. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють: **а)** 10 см і 24 см; **б)** $4\sqrt{2}$ см і $3\sqrt{8}$ см.

616. Знайдіть площу трапеції: **а)** з основами 7 см і 13 см і висотою 5 см; **б)** із середньою лінією 8 см і висотою 5 см.

617. На основі якої формули і яким способом доведено теорему про площу: **а)** паралелограма; **б)** трапеції; **в)** ромба за діагоналями?

618. Прийнявши довжину однієї клітинки за одиничний відрізок, знайдіть площу кожного чотирикутника, зображеного на рисунку 130, використавши відповідну формулу.

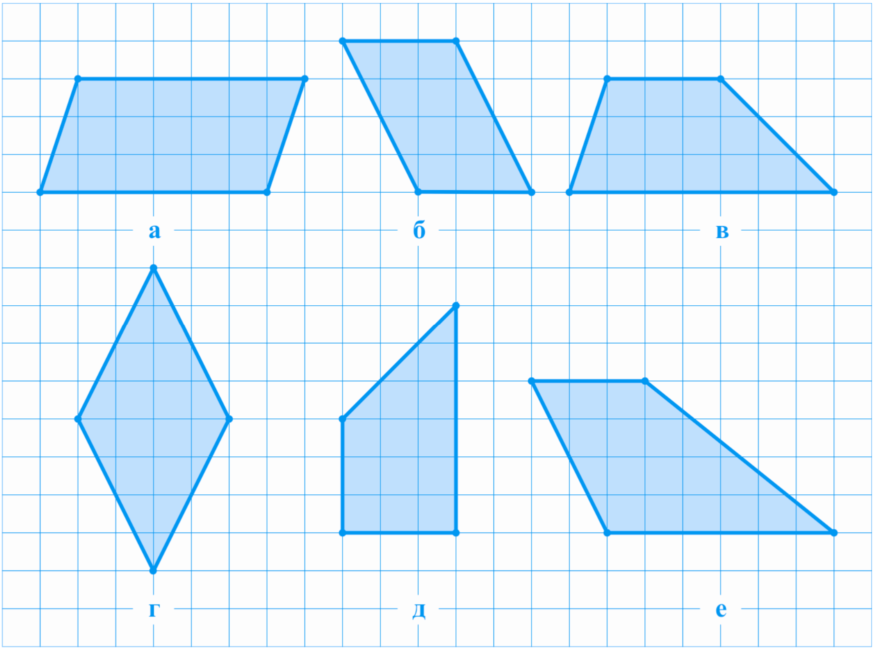
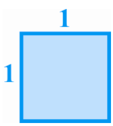
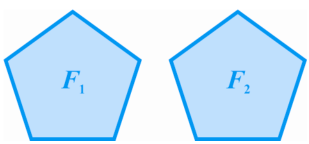


Рис. 130

ОСНОВНЕ В § 11

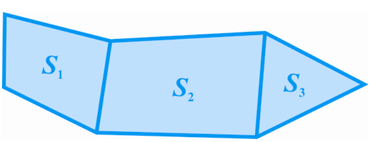


Площа квадрата зі стороною, яка дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці: $S_E = 1$, де S — площа, E — одиничний квадрат.



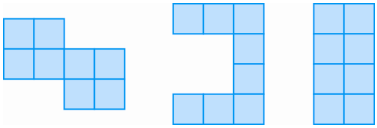
Геометрична фігура з вибраною одиницею вимірювання має єдину площу, яка є додатним числом. $S_F > 0$, де S — площа, F — геометрична фігура.

Рівні фігури мають рівні площі.
Якщо $F_1 = F_2$, то $S_1 = S_2$.

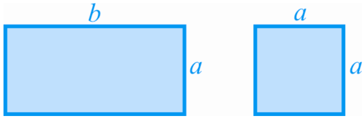


Якщо фігура поділена на частини, то її площа дорівнює сумі площ частин:

$$S(F) = S_1 + S_2 + S_3.$$

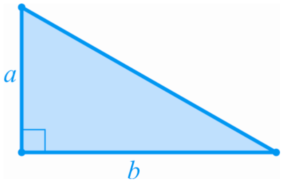


Рівновеликими називають фігури, які мають однакові площі.



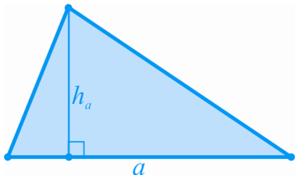
Площа прямокутника дорівнює добутку двох його сусідніх сторін: $S = a \cdot b$.

Площа квадрата дорівнює квадрату його сторони: $S = a^2$.



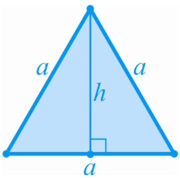
Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів:

$$S_{\text{пр. тр.}} = \frac{1}{2} a \cdot b.$$

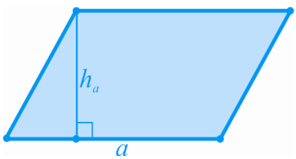


Площа трикутника дорівнює півдобутку сторони та висоти, проведеної до неї:

$$S_{\text{тр.}} = \frac{1}{2} a \cdot h_a.$$

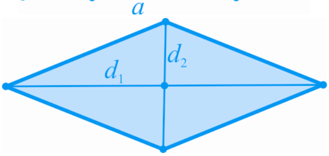


Площа рівностороннього трикутника дорівнює $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, де a — сторона.



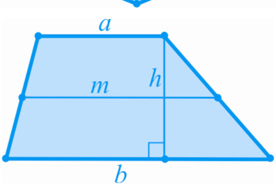
Площа паралелограма дорівнює добутку сторони та висоти, проведеної до неї:

$$S = a \cdot h_a.$$



Площа ромба дорівнює півдобутку його діагоналей:

$$S_{\text{ромба}} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2,$$ де d_1 і d_2 — діагоналі.



Площа трапеції дорівнює добутку півсуми основ та висоти: $S_{\text{тр.}} = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$.

Площа трапеції дорівнює добутку середньої лінії та висоти: $S_{\text{тр.}} = mh$.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Задача 1. Різниця сторін прямокутника дорівнює 4 см, а діагональ — 20 см. Знайти площу прямокутника.

Розв'язання

● Нехай менша сторона прямокутника дорівнює x см, тоді більша сторона дорівнює $(x + 4)$ см. Оскільки дві сусідні сторони прямокутника й одна з його діагоналей утворюють прямокутний трикутник, у якого діагональ є гіпотенузою, то за теоремою Піфагора $x^2 + (x + 4)^2 = 20^2$. Маємо: $x^2 + x^2 + 8x + 16 = 400$; $2x^2 + 8x - 384 = 0$; $x^2 + 4x - 192 = 0$. $x_1 = -16$ (не задовольняє умову задачі), $x_2 = 12$. Отже, менша сторона прямокутника дорівнює 12 см, а більша сторона — 16 см. Таким чином, площа прямокутника дорівнює $12 \cdot 16 = 192$ (см^2).

Відповідь: 192 см^2. ●

Задача 2. Знайти площу квадрата за його діагоналлю d.

Розв'язання

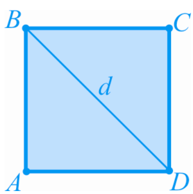


Рис. 131

● Нехай у квадраті $ABCD$ діагональ $BD = d$ (рис. 131). Позначимо сторону квадрата через x. У трикутнику ABD ($\angle A = 90°$) за теоремою Піфагора:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2; \quad d^2 = x^2 + x^2; \quad 2x^2 = d^2; \quad x = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}}; \quad S = x^2 = \left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{d^2}{2} = \frac{1}{2}d^2.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}d^2$. ●

Задача 3. Дві сторони трикутника дорівнюють 8 см і 12 см. Висота, проведена до сторони 12 см, дорівнює 6 см. Знайти висоту трикутника, проведену до сторони 8 см.

Розв'язання

● Позначимо довжину шуканої висоти через x см. Оскільки площа трикутника дорівнює півдобутку будь-якої сторони і висоти, що проведена до неї, то маємо рівняння: $\frac{1}{2}\cdot 8\cdot x=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 6$; $4x = 6 \cdot 6$; $x = 9$. Довжина шуканої висоти дорівнює 9 см.

Відповідь: 9 см. ●

Задача-теорема 4 Довести, що площа трикутника дорівнює півдобутку його периметра та радіуса вписаного кола.

● **Доведення.** Нехай у трикутнику ABC (рис. 132) $BC = a$, $AC = b$ і $AB = c$, OM, ON і OK — радіуси вписаного кола, проведені в точку дотику, і $OM = ON = OK = r$. Доведемо, що $S=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$ або $S=\frac{1}{2}Pr$, де P — периметр.

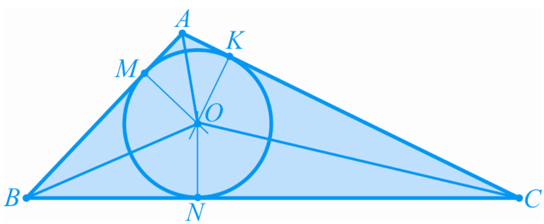


Рис. 132

Проведемо відрізки OA, OB і OC. Вони поділяють даний трикутник ABC на три трикутники: BOA, COA і COB, висотами яких є відповідно радіуси OM, OK і ON.

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta COB} + S_{\Delta BOA} + S_{\Delta COA} = \frac{1}{2}CB \cdot ON + \frac{1}{2}AB \cdot OM + \frac{1}{2}AC \cdot OK =$$

$$= \left(\frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r\right) = \frac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{1}{2}P \cdot r = \frac{P \cdot r}{2}.$$

Отже. $S = \dfrac{Pr}{2}$. ●

Опорна задача 5

У трикутнику висоти, проведені до сторін a та b, позначені h_a і h_b. Довести, що $\dfrac{a}{b} = \dfrac{h_b}{h_a}$.

● **Доведення.** Нехай у трикутнику дано сторони $BC = a$, $AC = b$ і висоти $BB_1 = h_b$, $AA_1 = h_a$ (рис. 133).

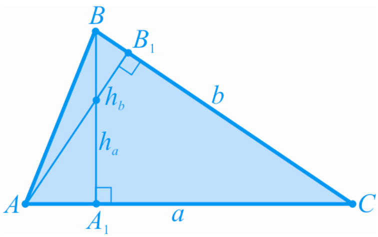


Рис. 133

Тоді площа трикутника ABC: $S_{ABC} = \dfrac{a \cdot h_a}{2}$ або $S_{ABC} = \dfrac{b \cdot h_b}{2}$. Оскільки це різні представлення площі того самого трикутника, то $\dfrac{a \cdot h_a}{2} = \dfrac{b \cdot h_b}{2}$; $a \cdot h_a = b \cdot h_b$. Звідси: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{h_b}{h_a}$, що й потрібно було довести.

Зауваження. Сторони a, b і c трикутника обернено пропорційні до його висот, тобто $a : b : c = \dfrac{1}{h_a} : \dfrac{1}{h_b} : \dfrac{1}{h_c}$. Справедливим є також твердження, що більшій стороні трикутника відповідає менша висота. ●

Задача 6. Довести, що висоти паралелограма обернено пропорційні сторонам, до яких вони проведені, тобто $h_a : h_b = b : a$.

● **Доведення.** Нехай a та b — суміжні сторони паралелограма (рис. 134).

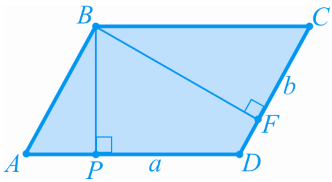


Рис. 134

Проведемо висоти: h_a — до сторони a, h_b — висота до сторони b. Площа паралелограма дорівнює $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$. Тоді: $h_a : h_b = b : a$, що й потрібно було довести. ●

Задача 7. Дві сторони паралелограма дорівнюють 24 см і 36 см, а різниця двох його висот дорівнює 5 см. Знайти площу паралелограма.

Розв'язання

● У будь-якому паралелограмі висоти обернено пропорційні до сторін.

Звідси $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$. Це означає, що в паралелограмі більшою є та висота, яка проведена до меншої сторони.

Нехай x см — менша висота даного паралелограма, тоді більша його висота — $(x + 5)$ см. На основі формули площі паралелограма отримуємо рівняння: $36 \cdot x = 24(x + 5)$. Маємо: $36x = 24x + 120$; $12x = 120$; $x = 10$. Отже, $S_{\text{пар.}} = 36 \cdot 10 = 360$ (см^2).

Відповідь: 360 см^2. ●

Задача 8. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 50 см і 14 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Знайти площу трапеції.

Розв'язання

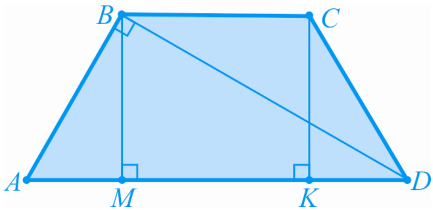


Рис. 135

● Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція (рис. 135), у якої $AD = 50$ см, $BC = 14$ см і $BD \perp AB$. Проведемо BM і CK — висоти трапеції. Оскільки $\Delta ABM = \Delta DCK$ і $MBCK$ — прямокутник, то $AM = KD$ і $MK = BC$. Звідси $AM = \frac{AD - MK}{2} = \frac{AD - BC}{2} = \frac{50 - 14}{2} = 18$ (см). $MD = AD - AM = 50 - 18 = 32$ (см). Відрізок BM є висотою прямокутного трикутника ABD, проведеною до гіпотенузи AD. За теоремою про перпендикуляр до гіпотенузи як середнє пропорційне маємо: $BM = \sqrt{AM \cdot MD} = \sqrt{18 \cdot 32} = \sqrt{36 \cdot 16} = 6 \cdot 4 = 24$ (см). За формулою площі трапеції $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BM = \frac{50 + 14}{2} \cdot 24 = 768$ (см^2).

Відповідь: 768 см^2. ●

Задача-теорема 9 Довести, що площа S рівнобічної трапеції, діагоналі якої взаємно перпендикулярні, дорівнює квадрату її висоти, тобто $S = h^2$.

● **Доведення.** Нехай $ABCD$ — дана рівнобічна трапеція ($BC \| AD$), діагоналі якої — AC й BD — перетинаються в точці O і $AC \perp BD$ (рис. 136).

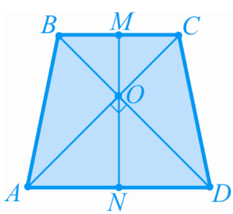


Рис. 136

Проведемо через точку O перпендикуляр MN до її основи. $\Delta ABD = \Delta DCA$ за трьома сторонами. Тоді $\angle CAD = \angle BDA$. Отже, прямокутний трикутник AOD є рівнобедреним (за рівністю кутів при основі) і $AN = ND$. Оскільки $\angle AOD = 90°$, то $AD = 2ON$ і $BC = 2OM$ (за властивістю медіани, проведеної до гіпотенузи прямокутного трикутника).

Отже, $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot MN = \frac{2ON + 2OM}{2} \cdot MN = (ON + OM) \cdot MN =$ $= MN^2 = h^2$; $S_{ABCD} = h^2$, що й потрібно було довести. ●

Задача-теорема 10 Діагоналі трапеції ділять її на чотири трикутники. Довести, що трикутники, прилеглі до бічних сторін, рівновеликі.

● **Доведення.** Нехай у трапеції $ABCD$ точка O — точка перетину діагоналей (рис. 137).

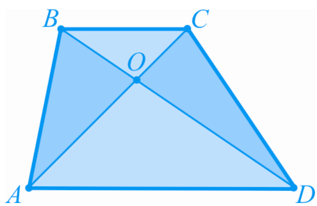


Рис. 137

Трикутники ADC і ABD — рівновеликі. У них сторона AD — спільна, а висоти, опущені з вершин B і C, рівні. Розглянемо трикутники ABO й DCO. Маємо: $S_{\Delta ABO} = S_{\Delta ABD} - S_{\Delta AOD}$, $S_{\Delta DCO} = S_{\Delta DCA} - S_{\Delta AOD}$, тобто від рівних площ віднімаємо площу трикутника AOD й одержуємо рівні площі трикутників ABO й CDO. ●

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. На поштукатуреній стіні завдовжки 8,25 м і заввишки 4,32 м є три вікна розміром 2,2 м × 1,2 м кожне. Знайдіть площу стіни, яка покрита штукатуркою.
2. Знайдіть площу стіни заводської будівлі, зображеної на рисунку.
3. Знайдіть площу земельної ділянки, зображеної на рисунку.

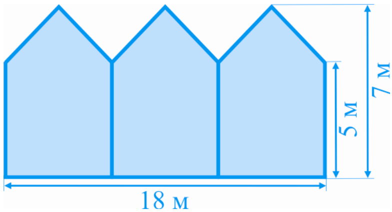


Рис. до задачі 2

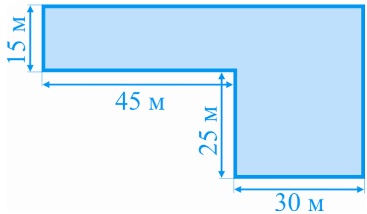


Рис. до задачі 3

4. Сад має форму прямокутника зі сторонами 580 м і 376 м. Скільки в ньому росте яблунь, якщо на кожну яблуню відведено в середньому по 16 м^2 площі?

5. Із прямокутного листа металу завдовжки 40 см і завширшки 35 см вирізали деталь для лійки, яка має форму трапеції з основами 40 см і 12 см та висотою 20 см. Знайдіть площу частини заготовки, яка залишилася.

6. Земельна ділянка *ABCD*, яка має форму прямокутної трапеції, поділена висотою *MN* на дві рівновеликі частини. Знайдіть відстань *AN*, якщо *AB* = 100 м, *DC* = 60 м.

7. Заготовку з листа металу потрібно пофарбувати з двох боків. Скільки потрібно фарби, якщо на 6,5 см^2 витрачається 1,5 г фарби (усі необхідні розміри на рисунку подано в сантиметрах)?

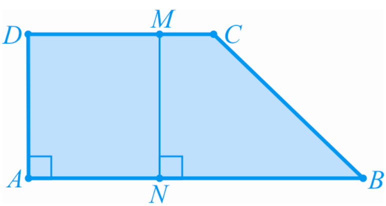


Рис. до задачі 6

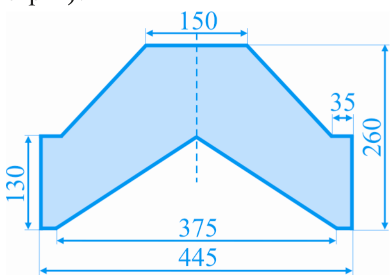


Рис. до задачі 7

8. Довжина залізниці становить 4000 км, а ширина відведеної ділянки землі для неї — 7,2 м. Знайдіть у гектарах площу виділеної землі для залізниці, вважаючи напрям ділянки землі прямолінійним.

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 11

1. Що приймають за одиницю площі? Назвіть одиниці вимірювання площі.

2. Перелічіть основні властивості вимірювання площ. Запишіть їх символічно.

3. Чому дорівнює площа:

а) прямокутника; **б)** квадрата; **в)** трикутника;
г) паралелограма; **д)** ромба; **е)** трапеції?

Запишіть відповіді формули.

4. Доведіть теорему про площу:

а) трикутника; **б)** ромба; **в)** трапеції; **г)** паралелограма.

5. Сформулюйте й доведіть теорему про площу описаного трикутника.

ЗАДАЧІ ДО § 11

РІВЕНЬ А

619. Знайдіть площу прямокутника, якщо одна його сторона дорівнює 15 см і вона на 3 см більша від іншої.

620. Площа прямокутника дорівнює 270 см^2, а одна з його сторін — 15 см. Знайдіть сусідню з нею сторону.

621. Знайдіть периметр прямокутника, площа якого дорівнює 45 см^2, а одна зі сторін — 5 см.

622. Знайдіть площу прямокутника, одна сторона якого дорівнює 7 м, а периметр — 34 м.

623. Знайдіть периметр квадрата, площа якого дорівнює 25 м^2.

624. Квадрат і прямокутник мають рівні площі. Сторона квадрата дорівнює 6 см, а одна зі сторін прямокутника — 9 см. Знайдіть іншу сторону прямокутника.

625. Знайдіть площу прямокутника, одна сторона якого дорівнює 6 дм, а діагональ — 10 дм.

626. Знайдіть діагональ прямокутника, площа якого дорівнює 60 см^2, а одна зі сторін — 12 см.

627. Знайдіть периметр прямокутника, площа якого дорівнює 144 м^2, а сусідні сторони відносяться як 1 : 2.

628. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 6 см. Знайдіть інший катет, якщо площа трикутника дорівнює 24 см^2.

629. Площа прямокутного трикутника дорівнює 30 см^2, а його гіпотенуза — 12 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.

630. Знайдіть площу прямокутного трикутника, в якого один з катетів дорівнює 12 см, а гіпотенуза — 13 см.

631. Знайдіть основу рівнобедреного трикутника, площа якого дорівнює 40 см^2, якщо медіана, проведена до основи, дорівнює 8 см.

632. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, в якого основа дорівнює 20 см, а бічна сторона — 26 см.

633. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, в якого бічна сторона дорівнює 20 см, а проведена до основи висота — 16 см.

634. Катети прямокутного трикутника відносяться як 3 : 4. Знайдіть гіпотенузу трикутника, якщо його площа дорівнює 96 см^2.

635. Знайдіть основу рівнобедреного трикутника, якщо вона відноситься до висоти, проведеної до неї, як 3 : 2, а площа трикутника — 108 см^2.

636. Сторона паралелограма дорівнює 12 дм. Знайдіть висоту паралелограма, проведену до цієї сторони, якщо площа паралелограма дорівнює 96 дм^2.

637. Знайдіть периметр ромба, у якого площа дорівнює 40 см^2, а висота — 5 см.

638. Одна з діагоналей ромба дорівнює 10 см. Знайдіть іншу діагональ ромба, якщо його площа дорівнює 120 см^2.

639. Знайдіть висоту трапеції, в якої середня лінія дорівнює 10 см, а її площа — 50 см^2.

640. Менша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 4 см. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її площа дорівнює 36 см^2.

641. Знайдіть площу паралелограма $ABCD$, в якого $AB = 6$ см, $AD = 8$ см і $\angle A = 30°$.

642. Знайдіть площу ромба, у якого сторона дорівнює 6 см, а тупий кут — 150°.

643. Знайдіть площу ромба, у якого сторона дорівнює 10 см, а одна з діагоналей — 12 см.

644. Знайдіть площу ромба, якщо його висота дорівнює 10 см, а гострий кут — 30°.

645. Одна зі сторін паралелограма дорівнює 8 см, а висота, проведена до неї, — 6 см. Висота паралелограма, опущена на іншу сторону, дорівнює 4 см. Обчисліть довжину цієї сторони паралелограма.

646. Площа паралелограма дорівнює 72 см^2, а дві його сторони — 18 см і 12 см. Знайдіть меншу висоту паралелограма.

647. У прямокутній трапеції *ABCD* з прямим кутом *A* висота *CK* = 4 см поділяє більшу основу *AD* на відрізки *AK* = 6 см і *KD* = 3 см. Знайдіть площу трапеції.

648. Площа паралелограма дорівнює 120 см^2, а його висоти дорівнюють 10 см і 8 см. Знайдіть периметр паралелограма.

РІВЕНЬ Б

649. Знайдіть площу прямокутника, одна сторона якого більша від іншої на 3 см, а периметр дорівнює 46 см.

650. Дано квадрат, периметр якого дорівнює 24 см. Знайдіть периметр прямокутника, який рівновеликий цьому квадратові, а відношення сторін прямокутника дорівнює 1 : 2.

651. Периметр прямокутника дорівнює 78 см, а його сторони відносяться як 4 : 9. Знайдіть площу прямокутника й сторону квадрата, рівновеликого прямокутникові.

652. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 26 см, а площа — 40 см^2.

653. Знайдіть площу прямокутника, якщо його периметр дорівнює 34 см, а діагональ — 13 см.

654. У прямокутнику точка перетину діагоналей розміщена від меншої сторони на 6 см далі, ніж від більшої. Периметр прямокутника дорівнює 96 см. Знайдіть площу прямокутника.

655. Знайдіть площу квадрата, діагональ якого дорівнює 10 см.

656. Знайдіть площу квадрата, якщо радіус описаного навколо квадрата кола дорівнює 4 см.

657. Складіть формулу для обчислення площі фігури, зображеної: **а)** на рис. 138 а); **б)** на рис. 138 б).

а) б)

Рис. 138

658. Дві сторони трикутника дорівнюють 9 см і 6 см. Висота трикутника, проведена до сторони 9 см, дорівнює 4 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до сторони 6 см.

659. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.

660. Доведіть, що медіана поділяє трикутник на два рівновеликі трикутники.

661. Площа рівностороннього трикутника дорівнює S. Знайдіть сторону трикутника.

662. Доведіть, що висоту h_c прямокутного трикутника з катетами a та b, проведену до гіпотенузи c, обчислюють за формулою $h = \frac{ab}{c}$.

663. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а висота, проведена до неї, — 3 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до бічної сторони.

664. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки 3 см і 2 см, починаючи від вершини кута між бічними сторонами. Знайдіть площу трикутника.

665. Висота, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, поділяє її на відрізки 4 см і 9 см. Знайдіть площу трикутника.

666. Знайдіть висоту рівностороннього трикутника, якщо його площа дорівнює $9\sqrt{3}$ см^2.

667. Діагоналі ромба дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть довжину його висоти.

668. Знайдіть площу ромба, якщо його периметр дорівнює 40 см, а діагоналі відносяться як 3 : 4.

669. Сторона й одна з діагоналей ромба відповідно дорівнюють 10 см і 12 см. Знайдіть висоту ромба.

670. Обчисліть площу прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 19 см і 10 см, а більша бічна сторона — 15 см.

671. Знайдіть площу прямокутної трапеції, бічні сторони якої дорівнюють 12 см і 13 см, а основи відносяться як 4 : 9.

672. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 20 см, бічна сторона — 13 см, висота — 12 см. Знайдіть площу трапеції.

РІВЕНЬ В

673. Бісектриса *AK* прямокутника *ABCD* поділяє сторону *BC* на відрізки *BK* і *KC* такі, що *BK* = 6 см і *KC* = 4 см. Знайдіть площу прямокутника.

674. Бісектриса кута *A* прямокутника *ABCD* поділяє його сторону *BC* навпіл. Знайдіть площу прямокутника, якщо його периметр дорівнює 48 см.

675. Перпендикуляр, опущений з однієї з вершин прямокутника на діагональ, ділить її на відрізки 16 см і 9 см. Знайдіть площу прямокутника.

676. З вершини кута прямокутника на діагональ опущено перпендикуляр завдовжки 24 см, що ділить її на відрізки, різниця довжин яких дорівнює 14 см. Обчисліть площу прямокутника.

677. З однієї з вершин прямокутника проведено бісектрису, яка ділить його діагональ на відрізки 30 см і 40 см. Знайдіть площу прямокутника.

678. Послідовно сполучили середини сторін ромба, діагоналі якого дорівнюють 10 см і 24 см. Знайдіть площу утвореного чотирикутника.

679. Послідовно сполучили середини сторін квадрата зі стороною 10 см. Знайдіть площу утвореного чотирикутника.

680. Установіть, у скільки разів площа квадрата, описаного навколо кола, більша від площі квадрата, вписаного в це коло.

681. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить його гіпотенузу на відрізки 2 см і 6 см. Знайдіть площу трикутника.

682. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить його катет на відрізки 26 см і 10 см. Знайдіть площу трикутника.

683. Знайдіть площу прямокутного трикутника, у якого катет дорівнює $2\sqrt{13}$ см, а його проекція на гіпотенузу — 4 см.

684. Коло, вписане в прямокутний трикутник, поділяє гіпотенузу точкою дотику на відрізки 12 см і 8 см. Знайдіть площу трикутника.

685. Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить один з його катетів на відрізки 4 см і 8 см, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть площу трикутника.

686. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 112 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 25 см. Визначте площу трикутника.

687. Складіть формулу для обчислення площі: **а)** рівностороннього трикутника за його висотою; **б)** прямокутного рівнобедреного трикутника за гіпотенузою c.

688. Доведіть, що медіани будь-якого трикутника поділяють його на шість рівновеликих трикутників.

689. Доведіть, що площа чотирикутника з перпендикулярними діагоналями дорівнює півдобутку діагоналей.

690. Дві висоти паралелограма дорівнюють 18 см і 24 см. Знайдіть площу паралелограма, якщо різниця двох його сторін дорівнює 12 см.

691. У паралелограмі $ABCD$ кут A дорівнює 30°, а його бісектриса поділяє сторону BC на відрізки BK = 5 см і KC = 7 см. Обчисліть площу паралелограма.

692. Висоти паралелограма дорівнюють 12 см і 16 см, а кут між ними — 30°. Знайдіть площу паралелограма.

693. Через вершину паралелограма проведіть три прямі, які поділяють його на чотири рівновеликі частини.

694. Основи трапеції дорівнюють 2 см і 19 см, а діагоналі — 13 см і 20 см. Знайдіть площу трапеції.

695. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 4 см і 20 см, а діагональ — 13 см. Знайдіть площу трапеції.

696. Діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні, а висота трапеції дорівнює 10 см. Знайдіть площу трапеції.

697. У рівнобічній трапеції середня лінія дорівнює m, а діагоналі перетинаються під прямим кутом. Знайдіть площу трапеції.

698. Більша основа трапеції дорівнює 24 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 5 см і 6 см. Знайдіть площу трапеції.

699. Площа рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 162 см^2. Знайдіть довжину бічної сторони трапеції, якщо гострий кут при основі дорівнює 30°.

ЦІКАВО ЗНАТИ

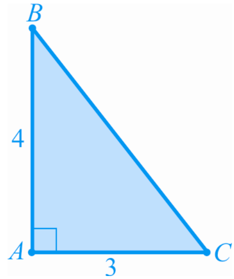
- З давніх часів обчислення площ було одним з найважливіших застосувань геометрії. Про це свідчить і сама назва геометрії, що означає *«землемірство»*. Михайло Васильович Остроградський у «Підручнику з елементарної геометрії» зазначає, що саме задачі про вимірювання площ заклали основи геометрії. Він пише: «Вимірювання, як засіб межування, призвело до окремих правил для керівництва при розподілі полів, — правил, зазвичай, найпростіших і суто практичних, але з них пізніше виникла геометрія».
- Уже стародавні єгиптяни вміли вимірювати площі прямокутника, трикутника та трапеції за відомими сьогодні правилами.
- Здавна за одиницю вимірювання площ брали квадрат завдяки його властивостям: рівні сторони; рівні та прямі кути; його легко будувати; ним можна щільно заповнити площину. З усіх прямокутників однакового периметру він має найбільшу площу, а звідси випливає, що серед прямокутників з однаковою площею він має найменший периметр.
- Обчислення площі фігури називають ще *«квадратурою»* (від латинського *«quadratura»* — *«надання квадратної форми»*). У стародавніх єгиптян квадратура якоїсь фігури зводилась до побудови квадрата, рівновеликого фігурі.
- У «Началах» Евклід не виражав результат вимірювання площ числом, а порівнював площі рівних між собою фігур. Наприклад, він доводив таке твердження про паралелограми: «Паралелограми, що розміщені на рівних основах і між тими ж паралельними прямими, рівні між собою, тобто рівновеликі». Не доводив Евклід і теорему про те, що площа трикутника дорівнює половині добутку його основи та висоти. Натомість є теорема про те, що трикутник рівновеликий половині паралелограма з тією самою основою і тією ж висотою. Евклід займався питанням перетворення одних фігур в інші, їм рівновеликі. Так, у «Началах» розв’язано задачу про побудову квадрата, рівновеликого будь-якому даному многокутнику.
- Знак S площі фігури є першою літерою латинського слова *«superficies»* — «поверхня». Знак H або h висоти походить від латинського слова «hipsos», що означає *«висота»*.

КОНТРОЛЬ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ ЗА МАТЕРІАЛОМ § 10 – § 11

Початковий рівень

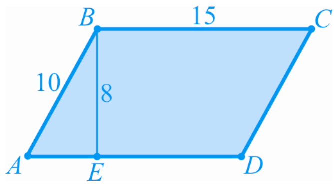
1. Площа прямокутного трикутника з катетами 3 см і 4 см дорівнює...

А 7 см^2; **Б** 12 см^2;
В 6 см^2; **Г** 24 см^2.



2. На рисунку зображено паралелограм зі сторонами 10 см і 15 см та висотою 8 см. Площа цього паралелограма дорівнює...

А 80 см^2; **Б** 120 см^2;
В 150 см^2; **Г** 1200 см^2.



3. Скільки сторін в опуклому *n*-кутнику, якщо сума його кутів дорівнює 1080°?

А 6; **Б** 7; **В** 8; **Г** 9.

Середній рівень

4. Скільки сторін має многокутник з рівними кутами, якщо його внутрішній кут дорівнює 150°?

5. Обчисліть площу рівнобедреного трикутника, у якого бічна сторона дорівнює 17 см, а бісектриса, проведена до основи, — 15 см.

6. Знайдіть висоти паралелограма $ABCD$, якщо $AB = 24$ см, $\angle B = 150°$ і його площа дорівнює 240 см^2.

Достатній рівень

7. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до сторони, ділить її на відрізки завдовжки 8 см і 18 см. Знайдіть площу ромба.

8. Знайдіть площу трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$), якщо $AB = 12$ см, $\angle A = 45°$, а її середня лінія — 19,5 см.

9. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки завдовжки 10 см і 6 см. Обчисліть площу даного трикутника.

Високий рівень

10. Висота ромба дорівнює 12 см, а одна з діагоналей — 20 см. Знайдіть площу ромба.

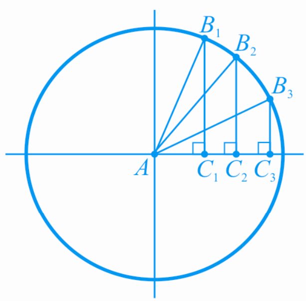
11. У рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола ділить медіану, проведену до основи, на відрізки завдовжки 17 см і 15 см. Знайдіть площу трикутника.

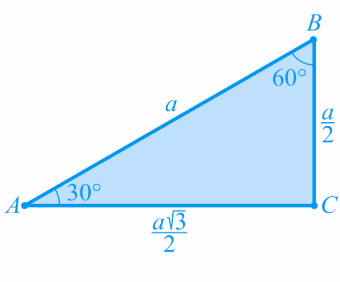
12. Одна із взаємно перпендикулярних діагоналей трапеції дорівнює 70 см, її середня лінія — 37 см. Знайдіть площу трапеції.

Розділ IV. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

Опрацьовуючи цей розділ, ми розглянемо:

- синус, косинус і тангенс гострого кута;
- розв'язування прямокутних трикутників.

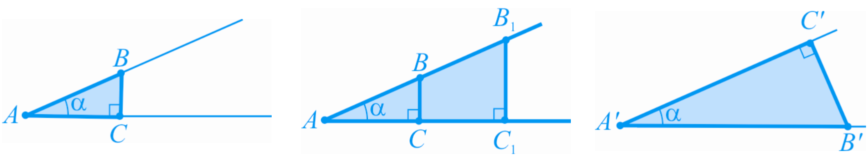




§ 12. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ВІДНОШЕННЯ У ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ

1. Відношення сторін прямокутних трикутників з рівним кутом.

Нехай дано прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C і гострим кутом A, який дорівнює α (рис. 139 а). Побудуємо два довільні прямокутні трикутники з гострим кутом A і двома іншими вершинами на його сторонах, наприклад, ΔABC і AB_1C_1 (рис. 139 б).



а) б) в)

Рис. 139

Оскільки утворені прямокутні трикутники мають спільний гострий кут, то вони подібні між собою, і кожний з них подібний з даним трикутником ABC. Подібним трикутнику ABC буде і будь-який інший трикутник з гострим кутом A', який дорівнює куту A (рис. 139 в). За означенням подібних трикутників, в усіх прямокутних трикутників з гострим кутом α відповідні сторони будуть пропорційними, а отже відношення будь-яких двох сторін трикутника ABC дорівнюватимуть відношенню відповідних сторін усіх інших прямокутних трикутників з кутом α.

Отримали таку властивість.

Властивість **У прямокутних трикутників з гострим кутом α відношення відповідних сторін рівні.**

У прямокутному трикутнику ABC з гострим кутом α можна скласти шість відношень пар його сторін. Три з них вважають основними:

1. Відношення катета, протилежного до кута α, і гіпотенузи:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B'C'}{A'B'}.$$

2. Відношення катета, прилеглого до кута α, і гіпотенузи:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{A'C'}{A'B'}.$$

3. Відношення катета, протилежного до кута α, і катета, прилеглого до кута α:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B'C'}{A'C'}.$$

Три інші відношення є оберненими до основних:

4. Відношення гіпотенузи до катета, протилежного до кута α $\left(\frac{AB}{BC}\right)$.

5. Відношення гіпотенузи до катета, прилеглого до кута α $\left(\frac{AB}{AC}\right)$.

6. Відношення катета, прилеглого до кута α, до катета, протилежного до кута α $\left(\frac{AC}{BC}\right)$.

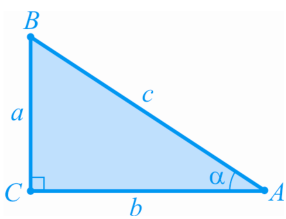
Усі відношення називають *тригонометричними*, і кожне з них має спеціальну назву.

2. Синус гострого кута та його властивості.

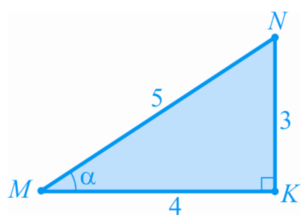
Означення

Синусом **гострого кута прямокутного трикутника називають відношення катета, протилежного до кута, до гіпотенузи (рис. 140 а):**

$$\sin A = \frac{a}{c}, \ \sin B = \frac{b}{c}.$$



а)



б)

Рис. 140

На рис. 140 б) $\sin M = \frac{3}{5} = 0{,}6$, $\sin N = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

Властивості синуса гострого кута

1. Синус кута не залежить від розмірів сторін і положення прямокутного трикутника.

Властивість випливає з подібності усіх прямокутних трикутників з рівним гострим кутом.

2. Синус гострого кута є додатним числом, меншим від 1.

Властивість випливає з того, що в будь-якому трикутнику катет менший від гіпотенузи. Отже, синус кута показує, яку частину становить катет, протилежний до кута, від гіпотенузи.

3. При збільшенні кута синус збільшується.

Якщо $\alpha > \beta$, то $\sin\alpha > \sin\beta$, і навпаки, якщо $\sin\alpha > \sin\beta$, то $\alpha > \beta$.

Наприклад. $\sin 20° > \sin 5°$; $\sin 85° < \sin 88°$.

Властивість проілюстрована на рисунку 141.

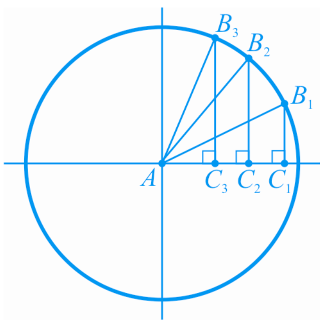


Рис. 141

У прямокутних трикутниках AB_1C_1, AB_2C_2 і AB_3C_3 (рис. 141) з рівними гіпотенузами B_1A, B_2A і B_3A при збільшенні гострих кутів протилежні до них катети B_1C_1, B_2C_2 і B_3C_3 збільшуються, а значить і відношення протилежних катетів до гіпотенуз збільшується: $\frac{B_3C_3}{B_3A} > \frac{B_2C_2}{B_2A} > \frac{B_1C_1}{B_1A}$. Отже, якщо $\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$, то $\sin\alpha_3 > \sin\alpha_2 > \sin\alpha_1$.

При наближенні кута α до 90° синус α наближається до 1, а при наближенні до 0° синус наближується до 0. Отже, $\sin\alpha$ зростає від 0 до 1. Виходячи з цього, домовились вважати, що $\sin 0° = 0$, $\sin 90° = 1$.

З властивостей 1–3 випливає, що кожному гострому куту відповідає одне і тільки одне значення синуса — додатне число, менше від 1. Нижче наведено таблицю наближених значень синусів для кутів, кратних 10°, а таблицю для всіх цілих значень градусних мір подано в додатку.

α	$\sin\alpha$	α	$\sin\alpha$	α	$\sin\alpha$
10°	0,1736	40°	0,6428	70°	0,9397
20°	0,3420	50°	0,7660	80°	0,9848

З означення синуса $\sin A = \dfrac{a}{c}$ випливає, що $a = c\sin A$ і $c = \dfrac{a}{\sin A}$.

Правила

Катет, протилежний до кута **α, дорівнює добутку гіпотенузи та синуса кута α.**

Гіпотенуза **дорівнює частці катета та синуса протилежного до нього кута.**

Приклад. Нехай у прямокутному трикутнику ABC ($\angle C$ — прямий) $\angle A = 40°$, $AB = 10$ см. Тоді $BC = a = c\sin A = 10 \cdot \sin 40° \approx 10 \cdot 0{,}6428 \approx 6{,}428$ (см).

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

700. Накресліть прямокутний трикутник MPK із прямим кутом K. Яке відношення є: **а)** $\sin M$; **б)** $\sin P$.

701. Знайдіть синус гострого кута прямокутного трикутника, якщо катет, протилежний до кута, і гіпотенуза відповідно дорівнюють:

а) 6 см і 10 см; **б)** 5 см і 13 см; **в)** 1 см і $\sqrt{2}$ см.

702. Знайдіть синуси обох гострих кутів прямокутних трикутників, зображених на рисунку 142.

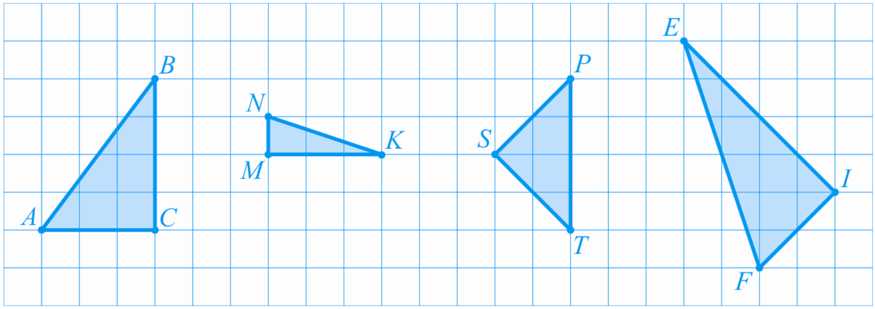


Рис. 142

703. Знайдіть синус гострого кута прямокутного трикутника, якщо катет, протилежний до кута, й інший катет (прилеглий до кута) відповідно дорівнюють 5 см і 12 см.

704. Порівняйте: **а)** sin15° і sin10°; **б)** sin17° і sin40°; **в)** sin88° і sin89°.

705. Користуючись таблицею, знайдіть значення: **а)** sin18°; **б)** sin35°; **в)** sin64°; **г)** sin82°.

706. Користуючись таблицею, знайдіть кут, синус якого дорівнює:
а) 0,5878; **б)** 0,7660; **в)** 0,9659; **г)** 0,8829.

707. Накресліть прямокутний трикутник *MOP* із прямим кутом *P*. Виразіть:
а) *MP* через sin*O* та іншу сторону трикутника;
б) *OP* через sin*M* та іншу сторону трикутника;
в) *OM* через sin*O* та іншу сторону трикутника;
г) *OM* через sin*M* та іншу сторону трикутника.

708. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см. Користуючись таблицею синусів, знайдіть катет, якщо протилежний до нього кут дорівнює: **а)** 15°; **б)** 28°; **в)** 72°.

709. Катет прямокутного трикутника дорівнює 7,2 см. Округливши табличне значення синуса кута до десятих, обчисліть гіпотенузу, якщо кут, протилежний до катета, дорівнює: **а)** 14°; **б)** 54°; **в)** 70°.

3. Косинус гострого кута та його властивості.

Означення

Косинусом **гострого кута прямокутного трикутника називають відношення катета, прилеглого до цього кута, до гіпотенузи (рис. 143 а):**

$$\cos A = \frac{b}{c}, \ \cos B = \frac{a}{c}.$$

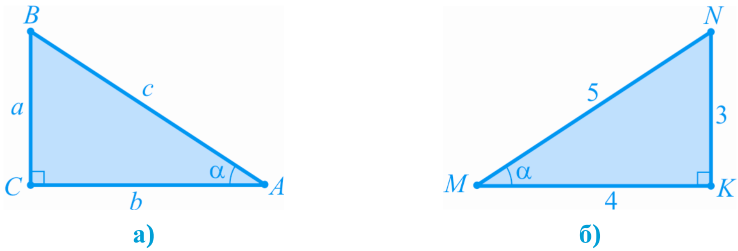


Рис. 143

На рис. 143 б) $\cos M = \frac{4}{5} = 0{,}8$, $\cos N = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Властивості косинуса гострого кута

1. Косинус кута не залежить від розмірів сторін і положення прямокутного трикутника.

2. Косинус гострого кута є додатним числом, меншим від 1.

Косинус кута показує, яку частину становить катет, прилеглий до кута, від гіпотенузи. Обґрунтування властивостей 1–2 аналогічні обґрунтуванням відповідних властивостей синуса.

3. При збільшенні кута косинус зменшується.

Якщо $\alpha > \beta$, то $\cos\alpha < \cos\beta$, і навпаки, якщо $\cos\alpha > \cos\beta$, то $\alpha < \beta$.

Властивість проілюстрована на рисунку 144.

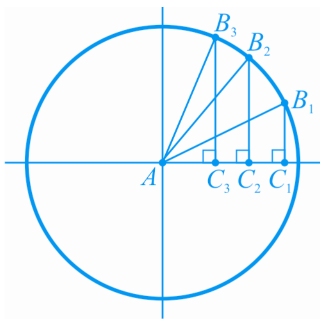


Рис. 144

У прямокутних трикутниках AB_1C_1, AB_2C_2 і AB_3C_3 (рис. 144) з рівними гіпотенузами B_1A, B_2A і B_3A при збільшенні гострих кутів прилеглі до них катети зменшуються: $AC_3 < AC_2 < AC_1$, а отже й відношення прилеглих катетів до гіпотенуз зменшуються: $\frac{AC_3}{B_3A} < \frac{AC_2}{B_2A} < \frac{AC_1}{B_1A}$. Отже, якщо $\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$, то $\cos\alpha_3 < \cos\alpha_2 < \cos\alpha_1$.

При наближенні кута α до 0° косинус α наближається до 1, а при наближенні кута α до 90° косинус α наближується до 0. Отже, косинус α спадає від 1 до 0. Виходячи з цього, домовились вважати, що cos0° = 1, cos90° = 0.

Кожному гострому куту відповідає одне і тільки одне значення косинуса. Нижче наведено таблицю наближених значень косинусів для кутів кратних 10°, а таблицю для всіх цілих значень градусних мір подано в додатку.

α	cosα	α	cosα	α	cosα
10°	0,9848	40°	0,7660	70°	0,3420
20°	0,9397	50°	0,6428	80°	0,1736
30°	0,8660	60°	0,5000	90°	0

4. cosα = sin(90° – α); sinα = cos(90° – α).

Нехай у прямокутному трикутнику *ABC* з прямим кутом *C* кут *A* дорівнює α (рис. 145).

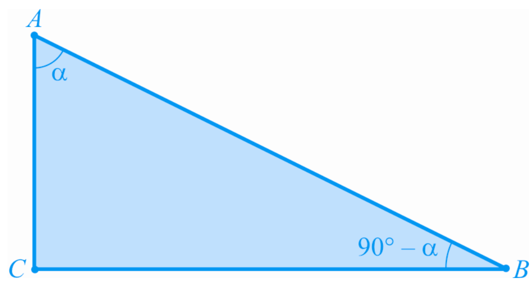


Рис. 145

Тоді ∠*B* = 90° – α. Відношення $\frac{AC}{AB}$ для кута *A* є косинусом, а для кута *B* — синусом. Отже, cos*A* = sin*B*, тобто cosα = sin(90° – α).

Аналогічно, $\frac{BC}{AC}$ = sin*A* = cos*B*. Отже, sinα = cos(90° – α).

Наприклад, **а)** cos38° = sin(90° – 38°) = sin52°; **б)** sin54°= cos36°.

З означення косинуса $\cos A = \frac{b}{c}$ випливає, що $b = c \cdot \cos A$ і $c = \frac{b}{\cos A}$.

Правила

Катет, прилеглий до кута **α, дорівнює добутку гіпотенузи та косинуса кута α.**

Гіпотенуза **дорівнює частці катета та косинуса прилеглого до нього кута.**

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

710. Накресліть прямокутний трикутник MSP із прямим кутом P. Яке відношення є: **а)** $\cos M$; **б)** $\cos S$?

711. Знайдіть косинус гострого кута прямокутного трикутника, якщо катет, прилеглий до кута, і гіпотенуза відповідно дорівнюють:
а) 3 см і 4 см; **б)** 8 см і 17 см; **в)** 1 см і $\sqrt{3}$ см.

712. Знайдіть косинус гострого кута прямокутного трикутника, якщо катет, прилеглий до кута, і гіпотенуза відповідно дорівнюють:
а) 3 см і 5 см; **б)** 5 см і 13 см; **в)** 1 см і $\sqrt{10}$ см.

713. Порівняйте: **а)** cos15° і cos10°; **б)** cos17° і cos40°; **в)** cos88° і cos89°.

714. Користуючись таблицею, знайдіть значення: **а)** cos28°; **б)** cos43°; **в)** cos52°; **г)** cos70°.

715. Користуючись таблицею, знайдіть кут, косинус якого дорівнює:
а) 0,9816; **б)** 0,8387; **в)** 0,6018; **г)** 0,3256.

716. Накресліть прямокутний трикутник MOP із прямим кутом P. Виразіть:
а) OP через $\cos O$ та іншу сторону трикутника;
б) MP через $\cos M$ та іншу сторону трикутника;
в) OM через $\cos M$ та іншу сторону трикутника;
г) OM через $\cos O$ та іншу сторону трикутника.

717. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см. Користуючись таблицею косинусів, знайдіть катет, якщо прилеглий до нього кут дорівнює: **а)** 10°; **б)** 35°; **в)** 80°.

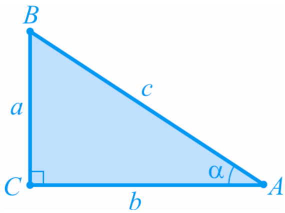
718. Катет прямокутного трикутника дорівнює 7,2 см. Округливши табличне значення косинуса кута до десятих, обчисліть гіпотенузу, якщо кут, прилеглий до катета, дорівнює: **а)** 20°; **б)** 40°.

4. Тангенс гострого кута і його властивості.

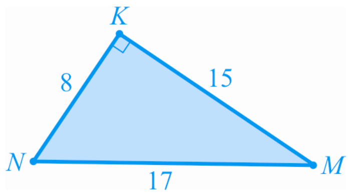
Означення

Тангенсом **гострого кута прямокутного трикутника називають відношення катета, протилежного до кута, до катета, прилеглого до нього (рис. 146 а):**

$$\mathbf{tg}A = \frac{a}{b},\ \mathbf{tg}B = \frac{b}{a}.$$



а)



б)

Рис. 146

На рис. 146 б) $\mathrm{tg}M = \frac{8}{15}$, $\mathrm{tg}N = \frac{15}{8}$.

Властивості тангенса гострого кута

1. Тангенс кута не залежить від розмірів сторін прямокутного трикутника.

2. Тангенс кута дорівнює частці синуса цього кута та його косинуса.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Так, $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, а $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, тому $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \mathrm{tg}\alpha$.

Маємо $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$.

3. При збільшенні кута тангенс збільшується.

Оскільки при збільшенні кута $\sin\alpha$ збільшується, а $\cos\alpha$ зменшується, то дріб $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ збільшується, а отже, $\mathrm{tg}\alpha$ збільшується.

Нижче наведено таблицю наближених значень тангенсів для кутів, кратних 10°, а таблицю для цілих значень градусних мір подано в додатку.

α	tgα	α	tgα	α	tgα
10°	0,1763	40°	0,8391	70°	2,747
20°	0,3640	50°	1,192	80°	5,671
30°	0,5774	60°	1,732	90°	не існує

З означення тангенса $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$, випливає, що $a = b\,\mathrm{tg}\alpha$.

Правило

Катет, протилежний до кута **α, дорівнює добутку іншого катета та тангенса кута α.**

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

719. Накресліть прямокутний трикутник ACD з прямим кутом A. Яке відношення є: **а)** tg$C$; **б)** tg$D$?

720. Знайдіть тангенс гострого кута прямокутного трикутника, якщо катет, протилежний до кута, і катет, прилеглий до кута, відповідно дорівнюють: **а)** 3 см і 2 см; **б)** 3 см і 7 см; **в)** $\sqrt{3}$ см і 1 см.

721. Знайдіть тангенси обох гострих кутів прямокутних трикутників, зображених на рисунку 147.

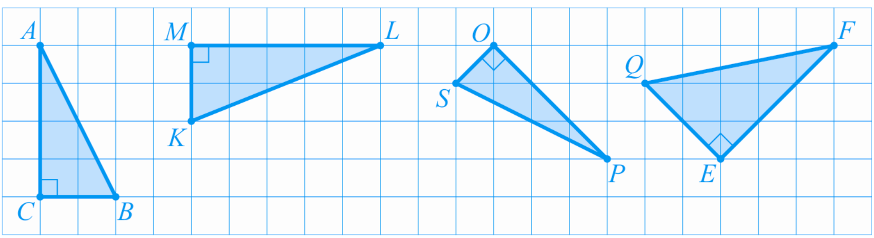


Рис. 147

722. Знайдіть тангенс гострого кута прямокутного трикутника, якщо протилежний і прилеглий до кута катети відповідно дорівнюють:

а) 5 см і 13 см; **б)** 8 см і 17 см; **в)** 1 см і $\sqrt{10}$ см.

723. Порівняйте: **а)** tg15° і tg10°; **б)** tg17° і tg40°; **в)** tg88° і tg89°.

724. Порівняйте з 1: **а)** tg12°; **б)** tg52°; **в)** tg89°.

725. Користуючись таблицею, знайдіть значення: **а)** tg22°; **б)** tg44°; **в)** tg56°; **г)** tg70°.

726. Користуючись таблицею, знайдіть кут, тангенс якого дорівнює:
а) 0,2309; **б)** 0,8098; **в)** 1,428; **г)** 11,430.

727. Накресліть прямокутний трикутник *AMK* із прямим кутом *K*. Виразіть через тангенс кута та іншу сторону трикутника: **а)** *MK*; **б)** *AK*.

728. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 10 см. Користуючись таблицею тангенсів, знайдіть інший катет, якщо протилежний до нього кут дорівнює: **а)** 20°; **б)** 50°; **в)** 75°.

5. Значення синуса, косинуса та тангенса кутів 30°, 60° і 45°.

Кути 30° і 60°.

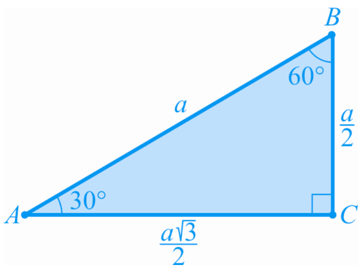


Рис. 148

Розглянемо прямокутний трикутник *ABC* з прямим кутом *C* (рис. 148), у якого $\angle A = 30°$, а, отже, $\angle B = 60°$.

Нехай гіпотенуза $AB = a$. Тоді за властивістю катета, який лежить проти кута 30°, $BC = \frac{a}{2}$. За теоремою Піфагора отримуємо:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\ AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Маємо: $\sin A = \sin 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{2} : a = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$.

$$\cos A = \cos 30° = \frac{AC}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\mathrm{tg} A = \mathrm{tg} 30° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot 2}{2 \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\sin B = \sin 60° = \frac{AC}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos B = \cos 60° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{tg} B = \mathrm{tg} 60° = \frac{AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{2a} = \sqrt{3}.$$

Кут 45°.

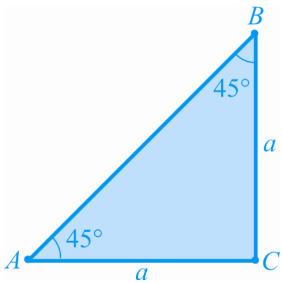


Рис. 149

Розглянемо прямокутний трикутник ABC, в якого $\angle A = 45°$, а, отже, і $\angle B = 45°$ (рис. 149). Нехай катет $AC = a$, тоді й катет $BC = a$. За теоремою Піфагора: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

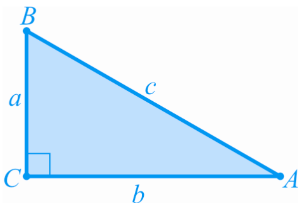
Маємо: $\sin A = \sin 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\cos A = \cos 45° = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\mathrm{tg} A = \mathrm{tg} 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1.$$

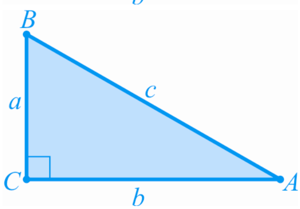
α	sinα	cosα	tgα
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

ОСНОВНЕ В § 12



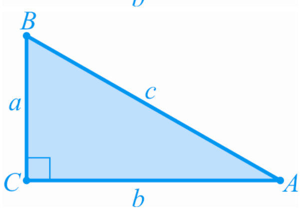
Синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення катета, протилежного до кута, до гіпотенузи:

$$\sin A = \frac{a}{c},\ \sin B = \frac{b}{c}.$$



Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення катета, прилеглого до цього кута, до гіпотенузи:

$$\cos A = \frac{b}{c},\ \cos B = \frac{a}{c}.$$



Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення катета, протилежного до кута, до катета, прилеглого до нього:

$$\mathrm{tg} A = \frac{a}{b},\ \mathrm{tg} B = \frac{b}{a}.$$

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Задача 1. Сторони прямокутника дорівнюють 12 см і 16 см. Знайти кут між діагоналями.

Розв'язання

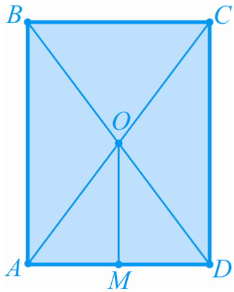


Рис. 150

● Нехай $ABCD$ — прямокутник (рис. 150), у якого $AB = 16$ см і $AD = 12$ см. Кутом між діагоналями є гострий кут AOD. Він лежить проти меншої сторони прямокутника. Проведемо OM — перпендикуляр з точки O до сторони AD. Оскільки трикутник AOD рівнобедрений, то висота OM є його медіаною і бісектрисою.

$$\text{tg}\angle AOM = \frac{AM}{OM} = \frac{\frac{1}{2}AD}{\frac{1}{2}AB} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 12}{\frac{1}{2}\cdot 16} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75. \quad \text{tg}\angle AOM = 0,75.$$

За таблицею тангенсів знаходимо: $\angle AOM \approx 37°$.

Таким чином, $\angle AOD = 2\angle AOM \approx 74°$.

Відповідь: ≈74°. ●

Задача 2. Побудувати гострий кут α, в якого $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

Розв'язання

● Щоб побудувати шуканий кут, достатньо побудувати прямокутний трикутник, у якого відношення протилежного до нього катета до гіпотенузи дорівнює $\frac{2}{3}$.

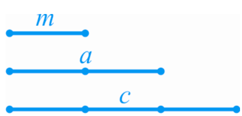


Рис. 151

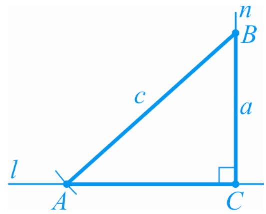


Рис. 152

Побудова

1. Креслимо довільний відрізок m і такі два відрізки a і c, що $a = 2m$ і $c = 3m$ (рис. 151).

2. Проведемо довільну пряму l (рис. 152), позначаємо на ній точку C; проводимо через точку C пряму n, перпендикулярну до прямої l, і відкладаємо на ній відрізок $BC = a$.

3. Описуємо коло з центром у точці B, радіус якого дорівнює c; точку перетину кола та прямої l позначаємо через A. Проводимо відрізок BA. Кут BAC шуканий: $\sin \angle BAC = \frac{a}{c} = \frac{2m}{3m} = \frac{2}{3}$. ●

Задача 3. Побудувати гострий кут α, в якого $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Розв'язання

● Щоб побудувати шуканий кут, достатньо побудувати прямокутний трикутник, у якому один з катетів дорівнює $\sqrt{10}$, а інший катет дорівнює 3 одиницям довжини.

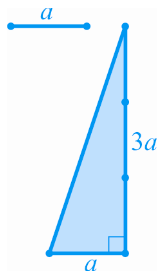


Рис. 153

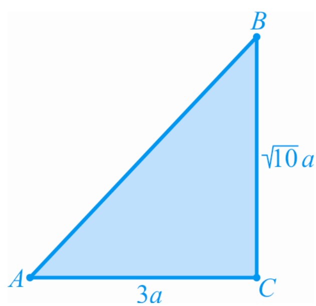


Рис. 154

Побудова

1. Будуємо прямокутний трикутник з катетами, які дорівнюють *a* й 3*a*, де *a* — довільний відрізок (рис. 153). Тоді за теоремою Піфагора гіпотенуза побудованого трикутника дорівнює $\sqrt{a^2+(3a)^2}=\sqrt{a^2+9a^2}=\sqrt{10a^2}=\sqrt{10}a$.

2. Будуємо прямокутний трикутник *ABC* з прямим кутом *C*, у якого $BC=\sqrt{10}a$ і $AC=3a$ (рис. 154). Кут *A* — шуканий кут: $\text{tg}A=\dfrac{\sqrt{10}a}{3a}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$. ●

Задача 4. Діагоналі ромба дорівнюють *a* й $a\sqrt{3}$. Знайти кути ромба.

Розв'язання

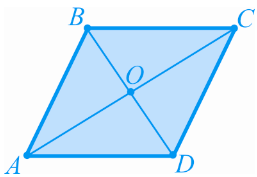


Рис. 155

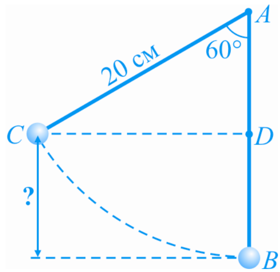
● Нехай *ABCD* — ромб, *O* — точка перетину діагоналей, $AC=a\sqrt{3}$, $BD=a$ (рис. 155). За властивістю діагоналей ромба $AO=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $OD=\dfrac{BD}{2}=\dfrac{a}{2}$. $\angle AOD=90°$. Із трикутника *AOD*: $\text{tg}\angle OAD=\dfrac{OD}{OA}=$ $=\dfrac{a}{2}:\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2a}{2\sqrt{3}a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, звідки $\angle OAD=30°$. Тоді $\angle BAD=60°$. $\angle ABC=180°-60°=120°$.

Відповідь: 60°, 120°. ●

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Телеграфний стовп заввишки 14 м розміщений на березі річки. Верхній кінець стовпа видно з іншого берега (від найближчого місця до стовпа) під кутом в 30° до горизонту. Знайдіть ширину річки.

2. Маятник у вигляді металевої кульки, підвішеної на нитці, відхилили від положення рівноваги на 60°. Довжина AC маятника дорівнює 20 см. На скільки змінилася висота кульки порівняно з положенням рівноваги?



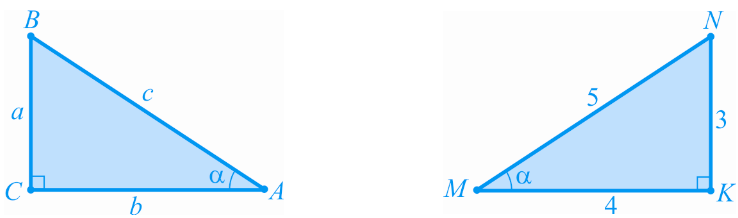
ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

Котангенс кута.

Означення

Котангенсом **гострого кута прямокутного трикутника називають відношення катета, прилеглого до цього кута, і катета, протилежного до нього (рис. 156 а):**

$$\mathrm{ctg}A = \frac{b}{a},\ \mathrm{ctg}B = \frac{a}{b}.$$



а) б)

Рис. 156

На рис. 156 б) $\mathrm{ctg}M = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, $\mathrm{ctg}N = \frac{3}{4} = 0{,}75$. Легко довести, що $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$.

Так, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, а $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$. Звідки $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Отже, $\mathrm{tg}\alpha$ і $\mathrm{ctg}\alpha$ взаємно обернені числа: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$ і $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$.

ЗАДАЧІ ДО § 12

РІВЕНЬ А

729. Знайдіть наближено гострі кути прямокутного трикутника, у якого один з катетів дорівнює 5 см, а гіпотенуза — 13 см.

730. Знайдіть наближено гострі кути прямокутного трикутника, в якого один з катетів дорівнює 41 см, а висота, проведена до гіпотенузи, — 40 см.

731. Знайдіть наближено кути рівнобедреного трикутника, в якого основа дорівнює 8 см, а бічна сторона — 7 см.

732. Основа рівнобедреного трикутника та висота, проведена до неї, відносяться як 6 : 5. Знайдіть кути трикутника.

733. Знайдіть бічні сторони трапеції, якщо її висота дорівнює 4 см, а кути при основі дорівнюють 30° і 45°.

734. Побудуйте гострий кут, тангенс якого дорівнює $\frac{1}{3}$.

735. Побудуйте гострий кут, синус якого дорівнює $\frac{2}{7}$.

736. Побудуйте гострий кут, косинус якого дорівнює $\frac{3}{5}$.

737. Побудуйте гострий кут, тангенс якого дорівнює 2,5.

РІВЕНЬ Б

738. Сторона квадрата дорівнює a. Знайдіть діагональ квадрата.

739. Сторона рівностороннього трикутника дорівнює a. Знайдіть висоту трикутника.

740. Знайдіть наближено кути прямокутного трикутника, в якого дві більші сторони дорівнюють 24 см і 25 см.

741. Знайдіть наближено кути рівнобедреного трикутника, в якого основа та висота, проведена до неї, рівні.

742. Знайдіть наближено кути ромба, в якого діагоналі дорівнюють 10 см і 24 см.

743. Діагональ прямокутника дорівнює 8 см, а одна з його сторін — $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть гострий кут між діагоналями прямокутника.

744. Знайдіть наближено синус, косинус і тангенс гострого кута рівнобедреної трапеції, різниця основ якої дорівнює 16 см, а бічна сторона — 10 см.

745. Знайдіть синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутної трапеції, менша бічна сторона якої дорівнює 8 см, а різниця основ — 15 см.

746. Знайдіть наближено кути рівнобічної трапеції, в якої основи дорівнюють 15 см і 29 см, а бічна сторона — 25 см.

747. Знайдіть наближено кути гострокутного трикутника, в якого дві сторони дорівнюють 5 см і 4 см, а висота, проведена до третьої сторони, — 3 см.

748. Катет прямокутного трикутника дорівнює 36 см, а синус протилежного кута дорівнює $\frac{12}{37}$. Знайдіть інші сторони цього трикутника.

749. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо висота, опущена на гіпотенузу, дорівнює $7\sqrt{3}$ см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу — 21 см.

750. Побудуйте кут, тангенс якого дорівнює $\sqrt{2}$.

751. Побудуйте кут, синус якого дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

752. Побудуйте гострий кут, косинус якого дорівнює $\frac{4}{\sqrt{17}}$.

РІВЕНЬ В

753. Знайдіть наближено гострі кути прямокутного трикутника, у якого проекції катетів дорівнюють 1 см і 4 см.

754. У рівнобічній трапеції діагональ перпендикулярна до бічної сторони, а висота ділить більшу основу на відрізки у відношенні 1 : 3. Знайдіть кути трапеції, якщо менша основа дорівнює 6 см.

755. Знайдіть наближено кути трапеції, в якої основи дорівнюють 20 см і 42 см, а бічні сторони — 10 см і 17 см.

756. Знайдіть наближено кути трапеції, у якої основи дорівнюють 2 см і 19 см, а діагоналі — 13 см і 20 см.

757. У прямокутному трикутнику *ABC* з прямим кутом *C* синус гострого кута дорівнює $\frac{3}{5}$, а прилеглий до цього кута катет дорівнює 20 см. Знайдіть гіпотенузу.

758. У прямокутному трикутнику косинус одного з кутів дорівнює $\frac{5}{13}$, а протилежний до нього катет дорівнює 60 см. Знайдіть периметр трикутника.

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Вважають, що термін *«синус»* є скороченням латинського *«semirecta inscripta»* — *«півхорда»*. Позначення **sin** почали застосовувати в першій половині XVII ст.
- Термін *«косинус»* походить від латинського *«compklementi»* — *«доповнення»* і *«sinus»*, а разом — *«синус доповнення»* (90° – *x*). Поняття *«косинус»* виникло давно. Вірогідно, що ним користувалися єгиптяни ще в часи побудови пірамід. Позначення **cos** було уведено в XVII ст.
- Термін *«тангенс»* походить від латинського *«tanqens»* — *«той, що дотикається»* (відрізок дотичної). Його було уведено в XVI ст. Таблиця тангенсів уперше з'явилася у трактаті середньоазіатського математика Мухаммеда аль Хорезмі (IX ст.).
- Термін *«котангенс»* походить від латинського *«complementi tanqens»*, що в перекладі означає *«тангенс доповнення»*. Уперше поняття *«котангенс»* застосував аль Хорезмі. Термін *«котангенс»* у сучасному трактуванні було уведено в XVII ст.

МУХАММЕД аль ХОРЕЗМІ
(бл. 783 – бл. 850)

§ 13. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ. ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ

1. Розв'язування прямокутних трикутників.

Розв'язати прямокутний трикутник означає знайти всі його невідомі сторони та кути за іншими відомими елементами (сторонами, кутами). Один елемент прямокутних трикутників завжди відомий — це прямий кут. Щоб розв'язати прямокутний трикутник, потрібно знати ще два елементи, серед яких повинен бути хоча б один лінійний елемент (відрізок). Є 4 типи задач на розв'язування прямокутних трикутників: **1)** за двома катетами; **2)** за катетом і гіпотенузою; **3)** за гіпотенузою і гострим кутом; **4)** за катетом і гострим кутом (прилеглим або протилежним).

Домовимося, що надалі в цьому параграфі, розглядаючи прямокутні трикутники, ми вживатимемо такі позначення: a і b — катети, $\angle A$ і $\angle B$ — відповідні гострі кути, які лежать проти цих катетів, c — гіпотенуза.

Задача 1. Розв'язати прямокутний трикутник за двома катетами.

Дано: a; b.

Знайти: c; $\angle A$; $\angle B$.

Розв'язання

● **1.** За теоремою Піфагора знаходимо гіпотенузу c: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Обчислюємо tg$A$: tg$A = \dfrac{a}{b}$. За таблицею тангенсів визначаємо кут A.

3. Знаходимо кут B: $\angle B = 90° - \angle A$.

Трикутник розв'язано. ●

Приклад. Дано $a = 6$, $b = 8$. Знайти: c; $\angle A$; $\angle B$.

Розв'язання

● **1.** $c = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$. $c = 10$.

2. tg$A = \dfrac{a}{b} = \dfrac{6}{8} = 0,75$. За таблицею знаходимо: $\angle A \approx 37°$.

3. $\angle B = 90 - \angle A \approx 53°$.

Відповідь: $c = 10$, $\angle A \approx 37°$, $\angle B \approx 53°$. ●

Задача 2. Розв'язати трикутник за гіпотенузою і катетом.
Дано: a і c.

Знайти: b; $\angle A$; $\angle B$.

Розв'язання

● **1.** $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

2. Обчислюємо: $\sin A = \dfrac{a}{c}$. За таблицею синусів визначаємо кут A.

3. Знаходимо кут B: $\angle B = 90° - \angle A$. ●

Приклад. Дано: $a = 5$, $c = 13$. Знайти: b; $\angle A$; $\angle B$.

Розв'язання

● **1.** $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

2. Обчислюємо: $\sin A = \dfrac{5}{13} \approx 0{,}3846$. $\angle A \approx 23°$.

3. $\angle B \approx 90° - 23° = 67°$.

Відповідь: $c = 12$; $\angle A \approx 23°$; $\angle B \approx 67°$. ●

Задача 3. Розв'язати трикутник за гіпотенузою і гострим кутом.
Дано: c, $\angle A$.

Знайти: $\angle B$; a; b.

Розв'язання

● **1.** Знаходимо кут B: $\angle B = 90° - \angle A$.

2. Знаходимо за таблицею $\sin A$ й обчислюємо a: $a = c \cdot \sin A$.

3. Знаходимо за таблицею $\cos A$ й обчислюємо b: $b = c \cdot \cos A$. ●

Приклад. Дано: $c = 10$, $\angle A = 20°$. Знайти: $\angle B$; a; b.

Розв'язання

● **1.** $\angle B = 90° - 20° = 70°$.

2. $a = c\sin A = 10\sin 20° \approx 10 \cdot 0{,}342 \approx 3{,}42 \approx 3{,}4$.

3. $b = c\cos A = 10\cos 20° \approx 10 \cdot 0{,}9397 \approx 9{,}397 \approx 9{,}4$.

Відповідь: $\angle B = 70°$; $a \approx 3{,}4$; $b \approx 9{,}4$. ●

Задача 4. Розв'язати трикутник за катетом і гострим кутом.

Дано: a, $\angle A$.

Знайти: $\angle B$; c; b.

Розв'язання

● **1.** Знаходимо кут B: $\angle B = 90° - \angle A$.

2. За таблицею знаходимо $\sin A$ й обчислюємо c: $c = \dfrac{a}{\sin A}$.

3. За таблицею знаходимо $\mathrm{tg} B$ й обчислюємо b: $b = a\,\mathrm{tg} B$. ●

Приклад. Дано: $a = 12$, $\angle A = 37°$. Знайти: $\angle B$; c; b.

Розв'язання

● **1.** $\angle B = 90° - 37° = 53°$.

2. $c = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{12}{\sin 37°} \approx \dfrac{12}{0,6018} \approx \dfrac{12}{0,6} = 20$, $c \approx 20$.

3. $b = a\,\mathrm{tg} B = 12\,\mathrm{tg} 53° \approx 12 \cdot 1,327 \approx 15,924 \approx 16$.

Відповідь: $\angle B = 53°$; $c \approx 20$; $b \approx 16$. ●

2. Прикладні задачі.

Прикладними називають задачі, у яких йдеться про застосування геометричних фактів до негеометричних об'єктів.

Розглянемо кілька прикладних задач, розв'язання яких зводиться до знаходження елементів прямокутних трикутників.

Задача 1. Пройшовши 200 м угору, пішохід піднявся на 7 м. Знайти кут нахилу дороги.

Розв'язання

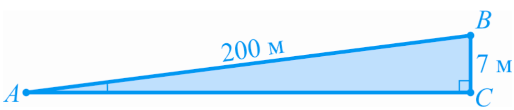


Рис. 157

● На рис. 157 відрізок AB зображає дорогу, а відрізок BC — підйом. Кут A — шуканий кут. Відношення $\dfrac{BC}{AB}$ є синусом кута A. $\sin A = \dfrac{7}{200} = 0,035$. У таблиці синусів до числа 0,035 найближчим є значення синуса 0,0349, яке відповідає куту 2°. Отже, $\angle A \approx 2°$. ●

Задача 2. Якою повинна бути мінімальна довжина драбини, щоб нею можна було піднятись на дах будинку заввишки 8 м, якщо ставити її можна під кутом не більше ніж 65°?

Розв'язання

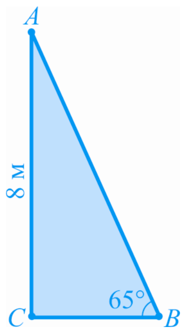


Рис. 158

● На рис. 158 відрізок AB зображує драбину, відрізок AC — будинок. Шуканий відрізок AB є гіпотенузою прямокутного трикутника ABC. Маємо:

$$AB = \frac{AC}{\sin 65°} \approx \frac{8}{0,9063} \approx \frac{8}{0,91} \approx 8,8 \text{ (м)}.$$ $AB \approx 8,8$ м. ●

Задача 3. Визначити відстань від точки C до недоступної точки A (рис. 159).

Розв'язання

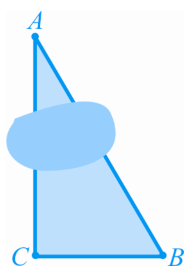


Рис. 159

● На місцевості під прямим кутом до шуканого відрізка AC відкладають відрізок CB довільної довжини, наприклад, 100 м. За допомогою кутовимірного інструменту (астролябії, теодоліта) вимірюють кут CBA. Нехай $\angle CBA \approx 62°$. Знаходимо AC: $AC = BC \cdot \mathrm{tg}B \approx 100 \cdot 1{,}881 = 188{,}1$ (м).

$AC \approx 188{,}1$ м. ●

Задача 4. Біля річки розміщена вежа заввишки 33 м. Ближній берег річки видно з цієї вежі під кутом 65° до горизонту, а дальній — під кутом 29° (див. рис. 160). Обчислити ширину річки.

Розв'язання

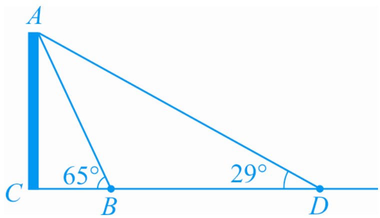


Рис. 160

● На рисунку 160 шукана ширина річки зображена відрізком BD, який є різницею відрізків CD і CB. З трикутника ACD знаходимо CD: $CD = AC\,\mathrm{tg}\angle CAD = AC\,\mathrm{tg}(90° - 29°) = 33\,\mathrm{tg}61°$. Із трикутника ACB знаходимо CB: $CB = AC\,\mathrm{tg}\angle CAB = AC\,\mathrm{tg}(90° - 65°) = 33\,\mathrm{tg}25°$. Маємо: $BD = CD - CB = 33(\mathrm{tg}61° - \mathrm{tg}25°) \approx 33 \cdot (1{,}804 - 0{,}4663) \approx 33 \cdot 1{,}3377 \approx 44{,}14$ (м). $BD \approx 44{,}14$ м. ●

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Маятник AB завдовжки 50 см відхилили від положення рівноваги на відстань $CD = 12$ см. Використовуючи таблицю тригонометричних функцій, знайдіть кут, який утворює нове положення AC маятника з положенням рівноваги AB.

2. Гірська дорога піднімається на 1 м на кожні 30 м шляху. Використовуючи таблицю значень тригонометричних функцій, знайдіть кут підйому в градусах. Укажіть наближене значення кута, яке виражається цілим числом градусів.

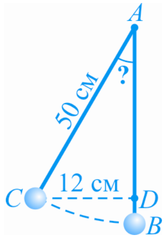


Рис. до задачі 1

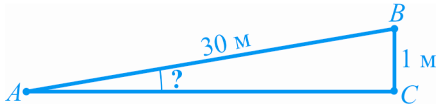


Рис. до задачі 2

3. З деякої точки вершину гори видно під кутом 30°. Якщо наблизитися до гори на 1000 м, вершину стане видно під кутом 45°. Знайдіть приблизну висоту гори. Укажіть наближене значення кута, яке виражається цілим числом градусів.

4. З вікна, яке розміщене на висоті 15 м над поверхнею землі, нижній край будинку, який розміщений прямо з іншого боку вулиці, видно під кутом 32°. Знайдіть ширину BC вулиці.

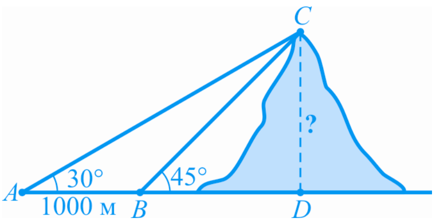


Рис. до задачі 3

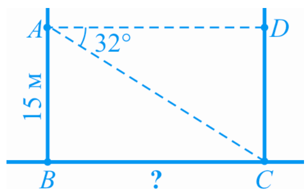
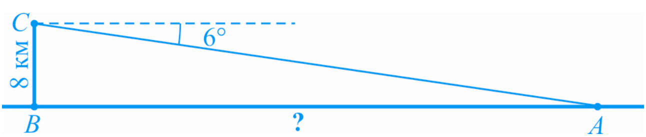


Рис. до задачі 4

5. Літак наближається до початку летовища A на висоті 8 км. Пілот одержав завдання знижуватися для посадки під постійним кутом 6°. Використовуючи таблицю тригонометричних функцій, знайдіть відстань AB від посадкової смуги до місця, над яким літак повинен почати зниження.



6. За 800 м від місця злету літака ростуть дерева заввишки до 20 м. Під яким кутом має підійматися літак, щоб їх не зачепити?

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 12 – § 13

1. Що називають:
а) синусом; **б)** косинусом; **в)** тангенсом гострого кута α?
Відповідь проілюструйте рисунком.

2. Як знайти за допомогою синуса кута α та однією з його сторін:
а) катет, протилежний до кута α; **б)** гіпотенузу?

3. Як знайти за допомогою косинуса кута α та однією з його сторін:
а) катет, прилеглий до кута α; **б)** гіпотенузу?

4. Як знайти за допомогою тангенса кута α та однією з його сторін катет, протилежний до кута α?

5. Викладіть план розв’язування прямокутного трикутника:
а) за двома катетами;
б) за гіпотенузою і катетом;
в) за гіпотенузою і гострим кутом;
г) за катетом і прилеглим гострим кутом.

6. Сформулюйте властивості: **а)** $\sin\alpha$; **б)** $\cos\alpha$; **в)** $\mathrm{tg}\alpha$.

5. Обчисліть значення синуса, косинуса та тангенса кута: **а)** 30°; **б)** 60°; **в)** 45°.

6. Сформулюйте й обґрунтуйте властивості:
а) синуса; **б)** косинуса; **в)** тангенса гострого кута.

7. Доведіть, що $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

ЗАДАЧІ ДО § 13

РІВЕНЬ А

759. У прямокутному трикутнику катет a дорівнює 7 см, а гіпотенуза c — 25 см. Знайдіть катет b і гострі кути A та B цього трикутника.

760. У прямокутному трикутнику катет a дорівнює 15 см, а катет b — 20 см. Знайдіть гіпотенузу c і гострі кути A і B цього трикутника.

761. Розв’яжіть прямокутний трикутник, якщо його гіпотенуза c дорівнює 10 см, а гострий кут A — 40°.

762. Розв’яжіть прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$), у якого катет b дорівнює 20 см, а кут B — 50°.

763. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює α, а бісектриса, проведена з вершини цього кута, дорівнює l. Визначте катет, прилеглий до цього кута.

764. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює α, а бічна сторона — b. Визначте основу трикутника та висоту, проведену до неї.

765. Під яким кутом падає на землю промінь сонця, якщо вертикальна жердина завдовжки 2,4 м відкидає на землю тінь завдовжки 1,4 м?

766. На яку висоту піднявся пішохід, який пройшов угору прямою дорогою 2 км, якщо кут нахилу дороги до горизонту становить 8°?

РІВЕНЬ Б

767. Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника дорівнює β, а його основа — a. Визначте бічну сторону трикутника та висоту, проведену до його основи.

768. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, а кут між його бічними сторонами — β. Визначте висоту трикутника, проведену до бічної сторони.

769. Гострий кут ромба дорівнює α, а його менша діагональ — d. Визначте сторону та більшу діагональ ромба.

770. Діагональ прямокутника дорівнює d й утворює з однією зі сторін кут α. Визначте довжину перпендикуляра, проведеного з вершини прямокутника до його діагоналі.

771. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює c, а один з його гострих кутів — α. Визначте висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.

772. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює α, а висота, проведена до основи, — h. Визначте висоту трикутника, проведену до бічної сторони.

773. У гострокутному трикутнику ABC $\angle A = \alpha$ і $\angle B = \beta$. Визначте сторону AB, якщо висота, проведена до неї, дорівнює h.

774. У тупокутному трикутнику ABC з тупим кутом A зовнішній кут при вершині A дорівнює α. Визначте сторону BA, якщо висота BK дорівнює h.

РІВЕНЬ В

775. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює α, а основа — a. Визначте радіус кола, вписаного в трикутник.

776. Один з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює α, а радіус кола, вписаного в трикутник, — r. Визначте периметр трикутника.

777. У гострокутному трикутнику ABC $AB = c$, $\angle A = \alpha$ і $\angle B = \beta$. Визначте довжину проекцій сторін AC і BC на сторону AB.

778. У гострокутному трикутнику ABC $AC = b$, $\angle A = \alpha$ і $\angle C = \gamma$. Доведіть, що $h_b = \dfrac{b\,\mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\gamma}$, де h_b — висота трикутника, проведена до сторони AC.

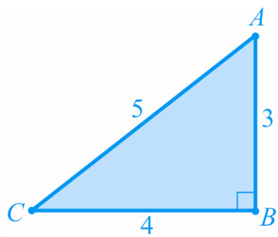
779. У гострокутному трикутнику ABC $AB = c$, $\angle A = \alpha$ і $\angle B = \beta$. Визначте сторони AC й BC.

780. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює a, а прилеглий до нього кут — α. Визначте радіус кола, вписаного в трикутник.

КОНТРОЛЬ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ ЗА МАТЕРІАЛОМ § 12 – § 13

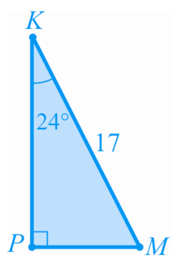
Початковий рівень

1. Відношення $\dfrac{3}{5}$ у прямокутному трикутнику, зображеному на рисунку, дорівнює...



А $\cos\angle C$; **Б** $\mathrm{tg}\angle C$;
В $\sin\angle A$; **Г** $\sin\angle C$.

2. Катет KP прямокутного трикутника KPM, зображеного на рисунку, дорівнює...



А $17\cos 24°$;
Б $17\,\mathrm{tg}\,24°$;
В $\dfrac{17}{\sin 24°}$;
Г $17\sin 24°$.

3. Якщо $\sin\alpha = m$, $\cos\alpha = n$, то $\operatorname{tg}\alpha = ...$

А $m \cdot n$; **Б** $\frac{m}{n}$; **В** $\frac{n}{m}$; **Г** $m + n$.

Середній рівень

4. У прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом C катет AC дорівнює 9 см і $\cos\angle A = \frac{3}{5}$. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

5. Дано ромб, сторона якого дорівнює 15 см, а тупий кут — 120°. Знайдіть діагоналі ромба.

6. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 14 см, а висота, проведена до основи, — $7\sqrt{3}$ см. Знайдіть кути трикутника.

Достатній рівень

7. У рівнобічній трапеції гострий кут дорівнює 60°, бічна сторона — 12 см, менша основа — 4 см. Знайдіть площу трапеції.

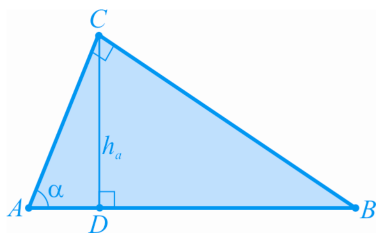
8. Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо один з його катетів дорівнює 18 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, — $6\sqrt{3}$ см.

9. Гострий кут ромба дорівнює β, а більша діагональ — d. Обчисліть сторону ромба.

Високий рівень

10. Бічні сторони прямокутної трапеції відносяться як $2:\sqrt{3}$. Знайдіть кути трапеції.

11. У прямокутному трикутнику ABC висота, проведена до гіпотенузи AB, дорівнює h, а гострий кут A дорівнює α. Знайдіть сторони трикутника ABC.



12. Навколо кола, радіус якого дорівнює R, описано рівнобічну трапецію з гострим кутом при основі α. Знайдіть периметр і площу трапеції.

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника розглядаються у розділі математики, який називають тригонометрією. Термін *«тригонометрія»* походить від грецьких слів *«трігонон»* — *«трикутник»* і *«метрео»* — *«міряю, вимірюю»*. Виникнення тригонометрії пов’язане з розвитком астрономії — науки про рух небесних тіл, про будову та розвиток Всесвіту. Початки тригонометричних знань виявлені в документах Стародавнього Вавилону.
- Уперше задачу розв’язування прямокутних трикутників, тобто знаходження кутів за сторонами або сторін за відомою стороною і кутом, розглядали вчені Давньої Греції. Перші тригонометричні таблиці склав грецький математик Гіппарх (II ст. до н. е.). Поліпшені таблиці склав Птолемей. Вони вміщені у праці «Альмагест». Ці таблиці дозволяли за довжиною хорд, які відповідають різним центральним кутам кола постійного радіуса, знаходити відповідні кути.
- Подальший розвиток тригонометричних функцій пов’язаний з дослідженнями вчених Індії та Середньої Азії.
- Чіткий виклад тригонометрії як науки у XV ст. здійснив німецький учений Регіомонтан. Він склав доволі точні таблиці синусів і тангенсів. Завершив розвиток тригонометрії визначний учений-математик Леонард Ейлер (1707 – 1783). У його працях тригонометрія набула сучасного вигляду.

ГІППАРХ
(бл. 190 до н. е. – бл. 125 до н. е.)

ЛЕОНАРД ЕЙЛЕР
(1707 – 1783)

ЗАДАЧІ ЗА КУРС ГЕОМЕТРІЇ 8 КЛАСУ

РІВЕНЬ А

781. Знайдіть четвертий кут чотирикутника, якщо три його кути відповідно дорівнюють 30°, 70° і 150°.

782. Яким — опуклим чи неопуклим — є чотирикутник, у якого три кути відповідно дорівнюють 30°, 40° і 50°?

783. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ MB і DK — перпендикуляри до діагоналі AC. Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$, якщо $AC = 12$ см, $BM = 6$ см і $DK = 4$ см.

784. У паралелограмі $ABCD$ $\angle A = 40°$. Знайдіть три інші кути паралелограма.

785. Різниця двох сторін паралелограма дорівнює 5 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 42 см.

786. O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайдіть периметр трикутника BOC, якщо $AD = 8$ см, $AC = 10$ см і $BD = 14$ см.

787. Площа паралелограма $ABCD$ дорівнює 60 см^2. Сума довжин сторін AB і CD дорівнює 24 см. Знайдіть відстань між прямими AB і CD.

788. У паралелограмі $ABCD$ $\angle A = 30°$, $AB = 6$ см і $AD = 8$ см. Знайдіть площу паралелограма $ABCD$.

789. У паралелограмі $ABCD$ на стороні BC відкладено відрізок BM, а на стороні AD — відрізок $DK = BM$. Доведіть, що $BK \parallel MD$ і $BK = MD$.
Вказівка. Використайте ознаку паралелограма.

790. Побудуйте паралелограм, у якого дві сторони дорівнюють 5 см і 3 см, а один з кутів — 60°.

791. Побудуйте паралелограм, у якого діагоналі дорівнюють 6 см і 4 см, а кут між ними дорівнює 40°.

792. Побудуйте паралелограм, у якого сторони дорівнюють 4 см і 3 см, а висота, проведена до більшої сторони, дорівнює 2,5 см.

793. Діагональ прямокутника утворює зі стороною кут 35°. Знайдіть гострий кут між діагоналями прямокутника.

794. Сторони прямокутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей до однієї з вершин.

795. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 9 см, а його периметр — 30 см. Знайдіть площу прямокутника.

796. Діагональ прямокутника дорівнює 15 см, а одна зі сторін — 12 см. Знайдіть площу прямокутника.

797. Побудуйте прямокутник зі стороною 4 см і діагоналлю 5 см.

798. Побудуйте прямокутник за діагоналлю, довжина якої дорівнює 4 см, і кутом між діагоналями, який дорівнює 40°.

799. Знайдіть кути ромба, у якого одна з діагоналей утворює зі стороною кут 35°.

800. O — точка перетину діагоналей ромба $ABCD$. Кут A ромба дорівнює 160°. Знайдіть кути трикутника AOB.

801. Діагоналі ромба дорівнюють 10 см і 24 см. Знайдіть периметр ромба.

802. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона дорівнює 20 см, а один з кутів дорівнює 30°.

803. Сторона ромба дорівнює 5 см, а його площа — 60 см^2. Знайдіть відстань між паралельними прямими, яким належать протилежні сторони ромба.

804. Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює 10 см, а одна з діагоналей — 12 см.

805. Знайдіть діагональ квадрата, сторона якого дорівнює 4 см.

806. Знайдіть площу квадрата, діагональ якого дорівнює 6 см.

807. Побудуйте ромб, діагоналі якого дорівнюють 4 см і 6 см.

808. Побудуйте ромб зі стороною 3 см і кутом 40°.

809. У трапеції $ABCD$ з основою AD $\angle A = 75°$ і $\angle C = 130°$. Знайдіть два інші кути трапеції.

810. Знайдіть середню лінію трапеції, периметр якої дорівнює 30 см, а бічні сторони — 8 см і 6 см.

811. Знайдіть площу трапеції, середня лінія якої дорівнює 18 см, а висота — 6 см.

812. Знайдіть бічну сторону рівнобічної трапеції, різниця основ якої дорівнює 10 см, а висота — 13 см.

813. Знайдіть висоту прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 7 см і 13 см, а більша бічна сторона — 10 см.

814. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 26 см, а бічна сторона — 17 см.

815. Побудуйте рівнобічну трапецію з більшою основою 5 см, кутом при основі 40° і бічною стороною 3 см.

816. Побудуйте рівнобічну трапецію з більшою основою 6 см, бічною стороною 4 см і висотою 3 см.

817. Два кути вписаного чотирикутника дорівнюють 35° і 195°. Знайдіть два інші його кути.

818. У вписаній трапеції $ABCD$ $\angle A = 65°$. Знайдіть інші кути трапеції.

819. Навколо прямокутника зі сторонами 6 см і 8 см описано коло. Знайдіть радіус цього кола.

820. В описаному чотирикутнику $ABCD$ $AB = 5$ см і $CD = 8$ см. Знайдіть периметр чотирикутника.

821. Бічні сторони описаної трапеції дорівнюють 8 см і 14 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

822. У ромб вписано коло. Знайдіть радіус кола, якщо площа ромба дорівнює 80 м^2, а одна з його сторін — 10 м.

823. Знайдіть суму кутів семикутника.

824. Знайдіть кут восьмикутника, всі кути якого рівні.

825. Скільки сторін має многокутник, якщо сума його кутів дорівнює 1620°?

826. Скільки діагоналей у дев'ятикутника?

827. $ABCD$ — трапеція з основами BC й AD, O — точка перетину діагоналей.
а) Доведіть, що $\Delta ADO \sim \Delta CBO$;
б) знайдіть основу BC, якщо $AD = 15$ см, $BO = 4$ см, $DO = 5$ см.

828. З точки D, яка лежить на гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC, проведено перпендикуляр DE на сторону BC.
а) Доведіть, що $\Delta ABC \sim \Delta DBE$;
б) знайдіть AC, якщо $BC = 12$ см, $BE = 8$ см і $DE = 6$ см.

829. На сторонах AB й AC трикутника ABC позначено відповідно точки M і K такі, що $AM = 4$ см і $AK = 6$ см. Відомо, що $AB = 10$ см і $AC = 15$ см. Доведіть, що $\angle AMK = \angle ABC$.

830. Висота, проведена з вершини прямого кута прямокутного трикутника, поділяє гіпотенузу на відрізки 16 см і 49 см. Знайдіть площу трикутника.

831. Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а його проекція на гіпотенузу — 4 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

832. Одна зі сторін трикутника та висота, проведена до неї, відповідно дорівнюють 8 см і 6 см. Знайдіть площу трикутника, подібного до нього з коефіцієнтом подібності: **а)** 2; **б)** $\frac{1}{4}$.

833. У прямокутному трикутнику ABC гіпотенуза AB дорівнює 30 см, $\angle A = 50°$. Знайдіть: **а)** катет BC; **б)** катет AC.

834. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, в якого один з катетів дорівнює 10 см, а прилеглий до нього кут дорівнює 35°.

835. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а прилеглий до нього кут — 30°. Знайдіть інший катет трикутника.

836. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює $4\sqrt{3}$ см, а кут при основі — 30°. Знайдіть площу трикутника.

РІВЕНЬ Б

837. Доведіть, що найбільший кут опуклого чотирикутника не може бути гострим.

838. Доведіть: якщо діагоналі опуклого чотирикутника перпендикулярні, то його площа дорівнює півдобутку діагоналей.

839. У чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC поділяє діагональ BD навпіл. Доведіть, що трикутники ABC й CAD — рівновеликі.

840. У паралелограмі $ABCD$ бісектриса AM відтинає трикутник ABM. Знайдіть усі кути паралелограма, якщо $\angle BAM = 26°$.

841. З вершини тупого кута паралелограма проведено бісектрису та висоту, кут між якими дорівнює 40°. Знайдіть кути паралелограма.

842. Знайдіть кути паралелограма, якщо кут між його висотами, опущеними з вершини тупого кута, дорівнює 35°.

843. Знайдіть тупий кут паралелограма, якщо кут між його висотами, опущеними з вершини гострого кута, дорівнює 148°.

844. У паралелограмі $ABCD$ перпендикуляр, опущений з вершини B на сторону AD, ділить її навпіл. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 7,6 м, а периметр трикутника ABD — 6 м.

845. Довжини сторін паралелограма дорівнюють 4 см і 7 см. На які відрізки поділяє більшу сторону паралелограма бісектриса його гострого кута?

846. Сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 8 см. Одна з його висот дорівнює 10 см. Знайдіть іншу висоту. Скільки розв’язків має задача?

847. Побудуйте паралелограм, площа якого дорівнює 10 см^2, а сторони — 5 см і 3 см.

848. Площа паралелограма дорівнює 24 см^2. Точка перетину діагоналей віддалена від прямих, на яких лежать його сторони, на 2 см і 3 см. Знайдіть периметр даного паралелограма.

849. Побудуйте паралелограм за двома сторонами завдовжки 3 см і 5 см та висотою завдовжки 4 см.

850. На скільки відсотків збільшиться площа прямокутника, якщо кожну його сторону збільшити на 10%?

851. На скільки відсотків зменшиться площа прямокутника, якщо кожну його сторону зменшити на 10%?

852. Через точку перетину діагоналей ромба проведено перпендикуляри до його сторін. Доведіть, що точки перетину цих перпендикулярів зі сторонами ромба є вершинами прямокутника.

853. У паралелограмі $ABCD$ ($AD > AB$) бісектриси кутів A та B перетинають сторони паралелограма BC й AD в точках K і L. Доведіть, що $ABKL$ — ромб.

854. Точка дотику описаного ромба ділить його сторону на відрізки завдовжки 4 см і 9 см. Знайдіть площу ромба.

855. Доведіть, що середини сторін рівнобічної трапеції є вершинами ромба.

856. O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ з основою AD. Доведіть, що трикутники ABO й CDO — рівновеликі.

857. У рівнобічній трапеції діагональ ділить гострий кут навпіл. Периметр трапеції дорівнює 132 см, а основи відносяться як 2 : 5. Знайдіть довжину середньої лінії трапеції.

858. Доведіть, що кут A вписаного чотирикутника $ABCD$ дорівнює зовнішньому куту при вершині C.

859. Доведіть, що бічну сторону трапеції, описаної навколо кола з центром O, видно з точки O під кутом 90°.

860. Навколо кола, радіус якого дорівнює 2 см, описана рівнобічна трапеція, площа якої дорівнює 20 см^2. Знайдіть периметр трапеції.

861. Бічні сторони прямокутної трапеції, описаної навколо кола, дорівнюють 2 см і 8 см. Знайдіть площу трапеції.

862. Установіть, чи існує многокутник, кількість усіх діагоналей якого удвічі більша від кількості сторін.

863. Доведіть, що не існує многокутника, який має: **а)** більше, ніж чотири прямих зовнішніх кутів; **б)** більше, ніж три тупих зовнішніх кутів.

864. Доведіть: якщо через точку, взяту всередині круга, проведено дві хорди, то добуток довжин відрізків однієї з них дорівнює добутку довжин відрізків іншої.

865. Доведіть: якщо з якої-небудь точки поза кругом провести до нього дотичну та січну, то відрізок дотичної є середнім пропорційним між довжинами усією січної та її зовнішньої частини.

866. Використовуючи ознаки подібності трикутників, доведіть, що дві медіани трикутника поділяються точкою перетину у відношенні 2 : 1.

867. Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника дорівнює β, а бічна сторона дорівнює b. Визначте основу трикутника та висоту, проведену до неї.

868. Тупий кут ромба дорівнює β, а його більша діагональ — d. Визначте сторону та меншу діагональ ромба.

869. Побудуйте паралелограм, якщо задано точку перетину його діагоналей і дві сусідні вершини.

РІВЕНЬ В

870. Доведіть: якщо діагоналі опуклого чотирикутника рівні, то його площа дорівнює півдобутку довжин середніх ліній чотирикутника (відрізків, які сполучають середини протилежних сторін).

871. O — точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$, $S_{\Delta ABO} = 2$ см^2, $S_{\Delta BCO} = 1$ см^2 і $S_{\Delta CDO} = 3$ см^2. Знайдіть $S_{\Delta AOD}$.

872. Накресліть довільний чотирикутник і побудуйте трикутник, рівновеликий цьому чотирикутникові.

873. Доведіть, що в чотирикутнику бісектриси двох кутів, прилеглих до однієї зі сторін, утворюють кут, який дорівнює півсумі двох інших кутів чотирикутника.

874. Доведіть, що точки перетину бісектрис паралелограма є вершинами іншого паралелограма.

875. Скільки паралелограмів утвориться при перетині: **а)** трьох паралельних прямих трьома іншими паралельними прямими; **б)** n паралельних прямих іншими n паралельними прямими?

876. Дано три точки, які не лежать на одній прямій. Скільки існує паралелограмів, для яких ці точки є вершинами?

877. Побудуйте паралелограм за тупим кутом і двома висотами.

878. Побудуйте квадрат, рівновеликий даному прямокутнику.

879. Побудуйте ромб, якщо задано точку перетину його діагоналей і середини двох суміжних сторін.

880. Побудуйте квадрат, площа якого удвічі більша від площі даного квадрата.

881. Через вершину ромба проведіть дві прямі, які розбиватимуть ромб на три рівновеликі частини.

882. Доведіть: якщо в рівнобічну трапецію вписано коло, то висота трапеції є середнім геометричним її основ.

883. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 26 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.

884. У рівнобічній трапеції середня лінія дорівнює 9 см, діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть основи трапеції, якщо її площа дорівнює 54 см^2.

885. Діагоналі прямокутної трапеції взаємно перпендикулярні і більша з них точкою перетину ділиться на відрізки завдовжки 9 см і 16 см. Знайдіть основи трапеції.

886. Доведіть, що бісектриси кутів, прилеглих до бічної сторони, перетинаються в точці, яка розміщена на середній лінії трапеції.

887. Доведіть, що площа трапеції дорівнює добутку однієї з бічних сторін на перпендикуляр, опущений на неї із середини іншої бічної сторони.

888. Діагоналі трапеції поділяють її на чотири трикутники. Площі трикутників, прилеглих до основ трапеції, дорівнюють 4 см^2 і 9 см^2. Знайдіть площу трапеції.

889. Діагоналі трапеції дорівнюють 6 см і 8 см, а відрізок, що сполучає середини основ, дорівнює 5 см. Знайдіть площу трапеції.

890. Доведіть, що бісектриси опуклого чотирикутника утворюють чотирикутник, навколо якого можна описати коло.

891. Доведіть, що площа прямокутної трапеції, в яку вписано коло, дорівнює добутку її основ.

892. Доведіть, що в рівнобічній трапеції, описаній навколо кола, квадрат висоти дорівнює добутку її основ.

893. Прямокутна трапеція описана навколо кола. Знайдіть радіус кола, якщо довжини основ трапеції дорівнюють 6 см і 2 см.

894. У прямокутну трапецію вписано коло, радіус якого дорівнює 4 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 6 см.

895. Скільки сторін має многокутник, якщо сума всіх його внутрішніх кутів разом з одним із зовнішніх кутів дорівнює 2250°?

896. Установіть кількість сторін многокутника, в якого всі внутрішні кути рівні, якщо сума його зовнішніх кутів разом з одним із внутрішніх кутів дорівнює 468°.

897. У прямокутному трикутнику, катети якого дорівнюють 6 см і 8 см, опущено висоту на гіпотенузу. Знайдіть площі двох утворених трикутників.

898. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо бісектриса кута при основі цього трикутника відтинає від нього трикутник, подібний даному.

899. Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника дорівнює β, а радіус кола, вписаного в трикутник, — r. Визначте основу трикутника.

900. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює b, а кут, прилеглий до нього, — β. Визначте радіус кола, вписаного в трикутник.

ДОДАТКИ

ЗНАЧЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ГОСТРИХ КУТІВ

Градуси	sin	cos	tg	ctg	
0	0,0000	1,0000	0,0000	—	**90**
1	0,0175	0,9998	0,0175	57,290	**89**
2	0,0349	0,9994	0,0349	28,636	**88**
3	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	**87**
4	0,0698	0,9976	0,0699	14,301	**86**
5	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	**85**
6	0,1045	0,9945	0,1051	9,514	**84**
7	0,1219	0,9925	0,1228	8,144	**83**
8	0,1392	0,9903	0,1405	7,115	**82**
9	0,1564	0,9877	0,1584	6,314	**81**
10	0,1736	0,9848	0,1763	5,671	**80**
11	0,1908	0,9816	0,1944	5,145	**79**
12	0,2079	0,9781	0,2126	4,705	**78**
13	0,2250	0,9744	0,2309	4,331	**77**
14	0,2419	0,9703	0,2493	4,011	**76**
15	0,2588	0,9659	0,2679	3,732	**75**
16	0,2756	0,9613	0,2867	3,487	**74**
17	0,2924	0,9563	0,3057	3,271	**73**
18	0,3090	0,9511	0,3249	3,078	**72**
19	0,3256	0,9455	0,3443	2,904	**71**
20	0,3420	0,9397	0,3640	2,747	**70**
21	0,3584	0,9336	0,3839	2,605	**69**
22	0,3746	0,9272	0,4040	2,475	**68**
23	0,3907	0,9205	0,4245	2,356	**67**
24	0,4067	0,9135	0,4452	2,246	**66**
25	0,4226	0,9063	0,4663	2,145	**65**
26	0,4384	0,8988	0,4877	2,050	**64**
27	0,4540	0,8910	0,5095	1,963	**63**
28	0,4695	0,8829	0,5317	1,881	**62**
29	0,4848	0,8746	0,5543	1,804	**61**
30	0,5000	0,8660	0,5774	1,732	**60**
	cos	**sin**	**ctg**	**tg**	**Градуси**

Градуси	**sin**	**cos**	**tg**	**ctg**	
31	0,5150	0,8572	0,6009	1,664	**59**
32	0,5299	0,8480	0,6249	1,600	**58**
33	0,5446	0,8387	0,6494	1,540	**57**
34	0,5592	0,8290	0,6745	1,483	**56**
35	0,5736	0,8192	0,7002	1,428	**55**
36	0,5878	0,8090	0,7265	1,376	**54**
37	0,6018	0,7986	0,7536	1,327	**53**
38	0,6157	0,7880	0,7813	1,280	**52**
39	0,6293	0,7771	0,8098	1,235	**51**
40	0,6428	0,7660	0,8391	1,192	**50**
41	0,6561	0,7547	0,8693	1,150	**49**
42	0,6691	0,7431	0,9004	1,111	**48**
43	0,6820	0,7314	0,9325	1,072	**47**
44	0,6947	0,7193	0,9657	1,036	**46**
45	0,7071	0,7071	1,0000	1,000	**45**
	cos	**sin**	**ctg**	**tg**	**Градуси**

Значення кутів, менших від 45°, розміщені у *лівому* стовпці «градуси», відповідні їм значення тригонометричних функцій знаходять, використовуючи *верхні* назви стовпців. Значення кутів, більших від 45°, розміщені у *правому* стовпці, відповідні їм значення тригонометричних функцій знаходять, використовуючи *нижні* назви стовпців.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ВІДПОВІДІ

§ 1

20. 125 см. **25.** 110°. **30.** 139°, 55°. **32.** 35 см. **39.** 12 см, 10 см, 24 см, 36 см. **41.** 9 см, 7 см, 9 см.

§ 2

61. 70°, 110°, 70°, 110°. **64. а)** 62°, 118°, 62°, 118°; **б)** 100°, 80°, 100°, 80°; **в)** 48°, 132°, 48°, 132°. **67.** 6 см, 8 см, 6 см, 8 см. **70.** 14 см, 18 см, 14 см, 18 см. **82.** 20 см, 24 см, 20 см, 24 см. **84.** 18 см, 24 см, 18 см, 24 см. **87.** 9 см, 11 см, 9 см, 11 см. **99.** 5 см, 7 см, 5 см, 7 см. **101.** 20 см, 30 см, 20 см, 30 см. **104.** 28 см. **105.** 6 см, 12 см, 6 см, 12 см. **106.** 9 см, 23 см, 9 см, 23 см. **107.** 12 см, 16 см, 12 см, 16 см. **108.** 5 см, 6 см, 5 см, 6 см. **109.** 50°, 130°, 50°, 130°. **110.** 44 см. **111.** 10 см, 16 см, 10 см, 16 см.

§ 3

141. 26 см. **144.** 55°, 35°. **151.** 60°, 120°, 60°, 120°. **153.** 50°, 130°, 50°, 130°. **166.** 3 см. **169.** 45°, 135°, 45°, 135°. **172.** 60 см. **186.** Прямокутник; 42 см. **187.** 72 см. **188.** 34 см. **191.** 30°. **192.** 40 см. **194.** 4 см. **195.** 24 см. **196.** $2a$.

§ 4

210. 14 см. **213.** 15 см. **215.** 40 см. **218.** 10 см, 16 см. **220.** 16 см, 16 см, 10 см. **224.** $a + b$. **228.** 56 см. **230.** 16 см, 28 см, 36 см. **232.** $2a$. **233.** 60 см. **235.** Квадрат, $2b$. **236.** 36 см. **240.** 4 см, 16 см.

§ 5

250. 155°. **253.** 19 см. **256.** У 3 рази. **258.** 6 см. **261.** 4 см. **266.** 36°, 144°. **269.** 6 см, 12 см. **279.** 10 см. **282.** 5 см, 25 см. **290.** 102 см. **295.** 24 см. **298.** 18 см. **299.** 28 см. **300.** 8 см і 18 см; 2 см і 12 см. **301.** 21 см. **304. а)** 10 см; 17 см; **б)** 10 см; 15 см. **305.** 8 см, 20 см. **306.** 16 см. **307.** 30°, 150°, 45°, 135°. **313.** 24 см. **314.** 12 см. **318.** Ромб, периметр якого дорівнює 48 см. **319.** 41 см, 31 см, 41 см, 49 см.

§ 6

347. а) 120°; **б)** 75°. **350.** 40°, 140°. **353.** 100°, 220°, 40°. **356.** 74°, 106°, 106°. **362.** 6 см. **364.** 3 см, 8 см. **366.** 96 см. **371.** 40 см. **375.** 45°, 60°, 75°. **377.** 115°. **380.** 8 см. **388.** 11 см. **395.** 100°. **397.** 40°. **398.** 70°. **399.** 74°, 90°, 106°, 90°. **400.** $\angle ABD = 63°$, $\angle CBD = 54°$, $\angle ADB = 32°$, $\angle CDB = 31°$. **401.** 45°. **402.** 65°, 115°, 65°, 115°. **403.** 7 см. **407.** 3 см, 10,5 см, 18 см, 10,5 см. **408.** 10 см, 30 см. **409.** 3 см. **410.** 30°. **411.** 160 см.

§ 7

419. *a* і *d*, *c* і *m*. **421.** 24 см, 9 см. **425. а)** 6 см, 9 см; **б)** 48 см. **426.** 20,8 см. **429.** 7 : 10. **432.** 28 см, 40 см. **434.** 25 см, 30 см. **435.** На 6 см і на 6,5 см. **436.** 99 см. **437.** 12 см, 24 см, 36 см, 48 см. **438.** 9 см, 18 см, 27 см. **439.** 12 см. **440.** 36 см.

§ 8

459. 18 см, 24 см, 30 см. **461.** Так. **464.** 30 см. **466.** 9,6 дм. **475.** 14 см. **479.** 8 см. **481.** 9 см. **484.** 36°, 72°, 72°. **485.** 6 см, 18 см. **486.** 24 см. **487.** 30 см, 40 см. **488.** 8 см, 2 см, 18 см. **489.** 34 см. **490.** 17 см.

§ 9

509. 2,4 дм. **511.** 12 см. **513.** 240 см. **515.** 40 см. **517.** 40 см. **519.** 8 см. **521.** 12 см. **523.** 76 см. **525.** 3 см. **528.** 4 см. **531.** 72 см. **534.** 6 см, 8 см. **542.** 3 см. **543.** 2,5 см. **544.** 72 см. **545.** $\sqrt{5}$ см, $4\sqrt{5}$ см. **546.** 6 см, $2\sqrt{10}$ см. **547.** 124 см. **548.** 30 см, 40 см. **549.** $16\sqrt{10}$ см. **553.** $\sqrt{26}$ см. **554.** 36 см. **555.** 120 см. **556.** 30 см, 40 см. **557.** 8 см. **558.** $3\sqrt{17}$ см, $2\sqrt{85}$ см. **559.** 72 см. **560.** 84 см. **561.** 36 дм, 64 дм. **562.** 4 см, 6,5 см, 9 см, 6,5 см.

§ 10

575. На 720°. **578.** 11; ні. **580.** 6. **585.** 165°. **590.** 14; 2160°. **593.** 10.

§ 11

621. 28 см. **624.** 4 см. **626.** 13 см. **629.** 5 см. **632.** 240 см^2. **635.** 18 см. **637.** 32 см. **640.** 9 см. **642.** 18 см^2. **644.** 200 см^2. **646.** 4 см. **648.** 54 см. **651.** 324 см^2, 18 см. **653.** 60 см^2. **656.** 32 см^2. **659.** 4,8 см. **664.** 10 см^2. **666.** $3\sqrt{3}$ см. **668.** 96 см^2. **671.** 78 см^2. **673.** 60 см^2. **674.** 128 см^2. **675.** 300 см^2. **676.** 1200 см^2. **677.** 2352 см^2. **678.** 60 см^2. **679.** 50 см^2. **680.** Удвічі. **681.** 9,6 см^2. **682.** 270 см^2. **683.** 39 см^2. **684.** 96 см^2. **685.** 96 см^2. **686.** 336 см^2. **687. а)** $\frac{h^2\sqrt{3}}{3}$; **б)** $\frac{c^2}{4}$. **691.** 30 см^2. **692.** 384 см^2. **694.** 126 см^2. **695.** 60 см^2. **696.** 100 см^2. **697.** m^2. **698.** 242 см^2. **699.** 18 см.

§ 12

731. 55°, 55°, 70°. **733.** $4\sqrt{2}$ см, 8 см. **739.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **742.** 64°, 64°, 52°. **743.** 60°. **745.** $\dfrac{8}{17}$, $\dfrac{15}{17}$, $\dfrac{8}{15}$. **749.** 30°, 60°. **754.** 60°, 120°. **757.** 25 см. **758.** 150 см.

§ 13

760. 25 см, ≈37°, ≈53°. **762.** $\angle A = 40°$, $c = \dfrac{20}{\sin 50°} \approx 26{,}1$ см, $a = \dfrac{20}{\mathrm{tg} 50°} \approx 16{,}8$ см. **764.** $2b\cos\alpha$, $b\sin\alpha$. **766.** ≈278 м. **768.** $a\cos\dfrac{\beta}{2}$. **770.** $d\sin\alpha\cos\alpha$. **772.** $2h\cos\alpha$. **774.** $\dfrac{h}{\cos\alpha}$. **775.** $\dfrac{a}{2}\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. **776.** $2r\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{tg}(\alpha/2)}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}(45°-\alpha/2)}\right)$. **777.** $\dfrac{c\,\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}$; $\dfrac{c\,\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}$. **779.** $\dfrac{c\,\mathrm{tg}\beta}{\cos\alpha(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)}$; $\dfrac{c\,\mathrm{tg}\alpha}{\cos\beta(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)}$. **780.** $\dfrac{a\mathrm{tg}(\alpha/2)}{1+\mathrm{tg}(\alpha/2)}$.

ЗМІСТ

РОЗДІЛ І. ЧОТИРИКУТНИКИ

РОЗДІЛ ІІ. ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

РОЗДІЛ ІІІ. МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ

РОЗДІЛ IV. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

Навчальне видання

Роганін Олександр Миколайович
Капіносов Анатолій Миколайович
Кондратьєва Лариса Іванівна

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 8 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Редактори: *Ярослав Гап'юк* — кандидат педагогічних наук;
Ярослав Гринчишин — кандидат фізико-математичних наук;
Сергій Мартинюк — кандидат фізико-математичних наук
Літературне редагування *Людмили Олійник*
Художнє оформлення *Світлани Демчак, Іванни Садової*
Відповідальний за випуск *Сергій Мартинюк*

Виготовлено згідно із СОУ 22.2-02477019-07:2-12

Формат 60×84/16. 14,88 ум. др. арк., 13,25 обл.-вид. арк.
Тираж 1000. Замовлення № 16-671.
Видавець і виготовлювач Редакція газети «Підручники і посібники».
46000, м. Тернопіль, вул. Поліська, 6а. Тел.: (0352) 43-15-15; 43-10-21.
Збут: zbut@pp-books.com.ua Редакція: red@pp-books.com.ua
Виробництво: print@pp-books.com.ua
www.pp-books.com.ua
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 4678 від 21.01.2014 р.

Книга-поштою: а/с 376, Тернопіль, 46011.
Тел.: (0352) 42-43-76; 097-50-35-376
post@pp-books.com.ua