Видавничий дім Освіта

Г. П. Бевз
В. Г. Бевз

Алгебра

Algebra

9 клас

УДК 512(075.3)
Б36

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(*наказ Міністерства освіти і науки України від 20.03.2017 р. № 417*)

ВИДАНО ЗА РАХУНОК ДЕРЖАВНИХ КОШТІВ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника
під час проведення конкурсного відбору проектів підручників
для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів
і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа
«Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Сташенко М. О., завідувач кафедри менеджменту освіти Волинського ІППО, кандидат фізико-математичних наук, доцент;

Семено Л. Д., методист ММК управління освіти Полтавського міськвиконкому, вчитель-методист;

Мордик В. О., учитель КЗ «Гуляйпільський колегіум «Лідер» Гуляйпільської районної ради Запорізької області.

Рецензент

Вовк С. П., учитель математики Зміївського ліцею №1 імені З. К. Слюсаренка Харківської області, вчитель вищої категорії, вчитель-методист

Бевз Г. П.
Б36 Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. — 272 с.

ISBN 978-617-656-750-9.

УДК 512(075.3)

ISBN 978-617-656-750-9

ШАНОВНІ ДЕВ'ЯТИКЛАСНИКИ І ДЕВ'ЯТИКЛАСНИЦІ!

Настав новий навчальний рік і ви з новими силами продовжуєте підкоряти алгебру — цікаву і важливу складову математики. Опанування цією наукою є запорукою для подальшого успішного вивчення інших навчальних предметів, для повноцінного життя в сучасному суспільстві.

Значення алгебри для людини розкривали відомі математики:

- *Алгебра розширює та удосконалює людський розум (Л. Пуансо).*
- *Люди, які не знайомі з алгеброю, не можуть уявити тих дивовижних речей, яких можна досягти за допомогою вказаної науки (Г. Лейбніц).*

Разом із цим підручником ви завершуєте вивчення алгебри в основній школі. А щоб уявити, яке місце належить матеріалу 9 класу, розгляньте розміщений нижче перелік тем. Кольором виділено матеріал, який ви вивчатимете в цьому році.

АЛГЕБРА (7–9 класи)

Цілі вирази. Раціональні вирази
Функції ($y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$)
Лінійні рівняння та їх системи
Квадратні корені. Дійсні числа
Квадратні рівняння
Нерівності
Квадратичні функції
Числові послідовності
Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики

Математичні поняття «нерівність», «квадратична функція» та «числова послідовність» відображають відношення, які відіграють важливу роль у реальному світі. На основі цих понять та їх властивостей базується багато методів сучасної науки і здійснюється дослідження різноманітних явищ і процесів природи та людської життєдіяльності.

Алгебра сьогодні пронизує майже всі галузі знань і є мовою, якою «говорять, пишуть і думають» інші науки. Важко уявити сферу діяльності, де не використовують математику. За допомогою математичних моделей описують реальні процеси, математичними методами користуються соціологи й інженери, юристи й біологи, архітектори й музиканти. Аби стати фахівцем у майбутньому, здобути достойну освіту та бути успішними у дорослому житті, необхідно докласти багато зусиль. А вивчення алгебри — одна зі сходинок до успіху на вашому шляху. Черпайте алгебраїчні знання, розширюючи і доповнюючи досвід, отриманий у попередні роки.

Сподіваємося, що цей підручник стане вам добрим помічником в опануванні алгебри, у набутті нових знань, умінь і досвіду, у гармонійному розвитку вашої особистості.

Бажаємо успіхів у навчанні!

Автори

Як працювати з підручником

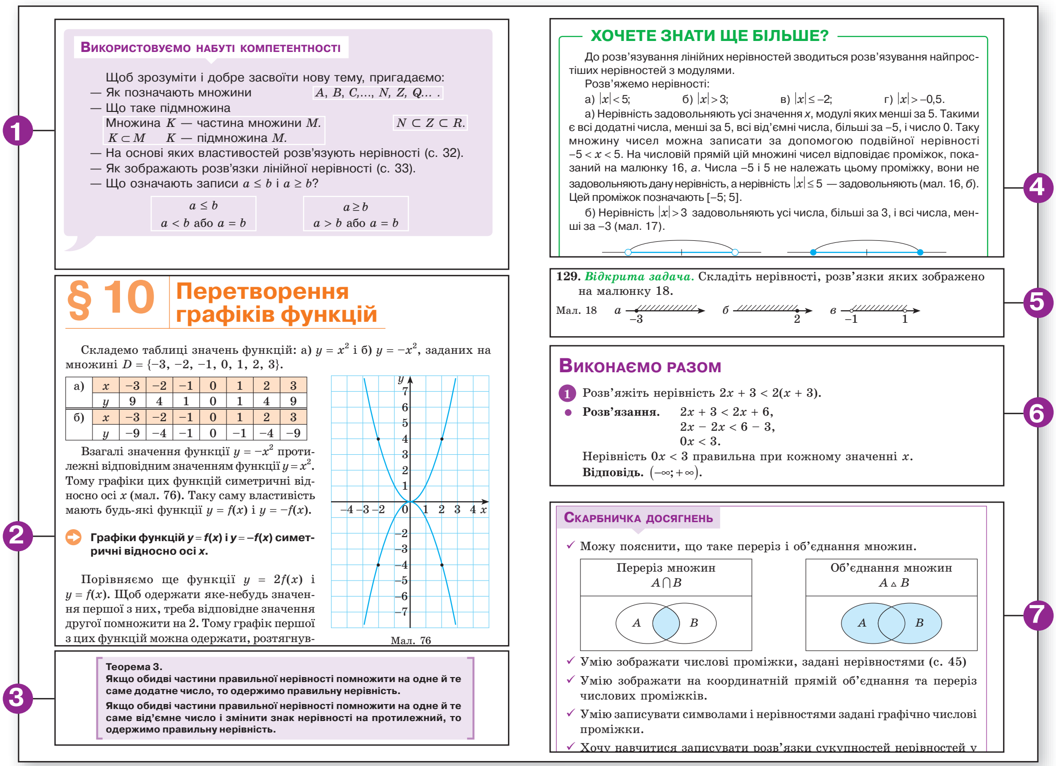
Дорогі дев'ятикласники і колеги!

Ви тримаєте в руках новий підручник алгебри. Автори сподіваються, що ця книжка стане для вас надійним помічником і порадником.

Вагомим мотивом і гарним стимулом для навчання мають стати відомості про видатних математиків і математичні премії, засновані на їх честь. Висловлювання математиків можуть стати для вас дороговказом не лише у навчанні, а й на життєвому шляху.

На початку кожного розділу подано короткий огляд його змісту українською та англійською мовами.

Кожен параграф починається рубрикою **«Використовуємо набуті компетентності».** Матеріал цієї рубрики зверне вашу увагу на ключові знання — означення, властивості, твердження, які ви маєте пригадати для ефективного сприймання і засвоєння нового матеріалу.



Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:
— Як позначають множини $A, B, C, \ldots, N, Z, Q\ldots$.
— Що таке підмножина
Множина K — частина множини M. $N \subset Z \subset R$.
$K \subset M$ K — підмножина M.
— На основі яких властивостей розв'язують нерівності (с. 32).
— Як зображають розв'язки лінійної нерівності (с. 33).
— Що означають записи $a \le b$ і $a \ge b$?

$a \le b$: $a < b$ або $a = b$ $a \ge b$: $a > b$ або $a = b$

§ 10 Перетворення графіків функцій

Складемо таблиці значень функцій: а) $y = x^2$ і б) $y = -x^2$, заданих на множині $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

а)	x	−3	−2	−1	0	1	2	3
	y	9	4	1	0	1	4	9
б)	x	−3	−2	−1	0	1	2	3
	y	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9

Взагалі значення функції $y = -x^2$ протилежні відповідним значенням функції $y = x^2$. Тому графіки цих функцій симетричні відносно осі x (мал. 76). Таку саму властивість мають будь-які функції $y = f(x)$ і $y = -f(x)$.

Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі x.

Порівняємо ще функції $y = 2f(x)$ і $y = f(x)$. Щоб одержати яке-небудь значення першої з них, треба відповідне значення другої помножити на 2. Тому графік першої з цих функцій можна одержати, розтягнув-

Мал. 76

Теорема 3.
Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме додатне число, то одержимо правильну нерівність.
Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме від'ємне число і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо правильну нерівність.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

До розв'язування лінійних нерівностей зводиться розв'язування найпростіших нерівностей з модулями.

Розв'яжемо нерівності:

а) $|x| < 5$; б) $|x| > 3$; в) $|x| \le -2$; г) $|x| > -0{,}5$.

а) Нерівність задовольняють усі значення x, модулі яких менші за 5. Такими є всі додатні числа, менші за 5, всі від'ємні числа, більші за −5, і число 0. Таку множину чисел можна записати за допомогою подвійної нерівності $-5 < x < 5$. На числовій прямій цій множині чисел відповідає проміжок, показаний на малюнку 16, *а*. Числа −5 і 5 не належать цьому проміжку, вони не задовольняють дану нерівність, а нерівність $|x| \le 5$ — задовольняють (мал. 16, *б*). Цей проміжок позначають [−5; 5].

б) Нерівність $|x| > 3$ задовольняють усі числа, більші за 3, і всі числа, менші за −3 (мал. 17).

129. ***Відкрита задача.*** Складіть нерівності, розв'язки яких зображено на малюнку 18.

Мал. 18 *а* −3 *б* 2 *в* −1 1

Виконаємо разом

1 Розв'яжіть нерівність $2x + 3 < 2(x + 3)$.

Розв'язання. $2x + 3 < 2x + 6$,
$2x - 2x < 6 - 3$,
$0x < 3$.

Нерівність $0x < 3$ правильна при кожному значенні x.

Відповідь. $(-\infty; +\infty)$.

Скарбничка досягнень

✓ Можу пояснити, що таке переріз і об'єднання множин.

Переріз множин $A \cap B$ Об'єднання множин $A \vartriangle B$

✓ Умію зображати числові проміжки, задані нерівностями (с. 45)
✓ Умію зображати на координатній прямій об'єднання та переріз числових проміжків.
✓ Умію записувати символами і нерівностями задані графічно числові проміжки.
✓ Хочу навчитися записувати розв'язки сукупностей нерівностей у

Вивчаючи теоретичний матеріал, звертайте увагу на слова, надруковані ***жирним курсивом***, — це нові алгебраїчні терміни. Ви повинні усвідомити, що вони означають, і запам'ятати їх.

Виділені **жирним** шрифтом речення, позначені стрілочкою, є основними означеннями.

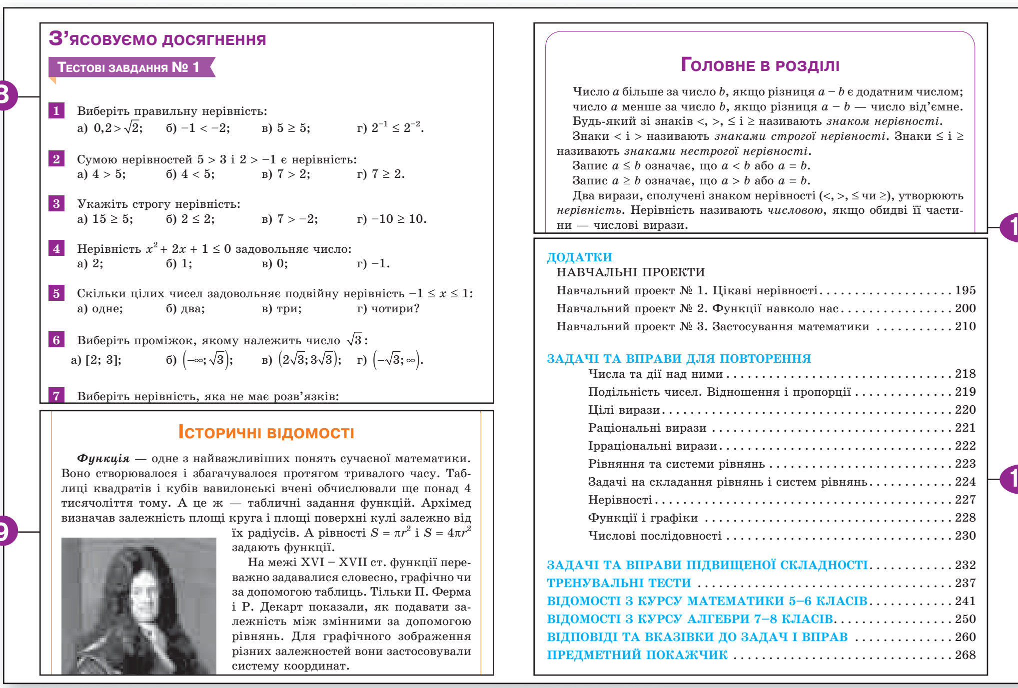
Жирний текст в квадратних дужках — це властивості, правила та інші важливі твердження. Слід навчитися їх формулювати (можна — своїми словами) та застосовувати до розв'язування пропонованих вправ і задач.

У кожному параграфі підручника є рубрика **«Хочете знати ще більше?»**. Вона містить додатковий матеріал, адресований зацікавленим учням.

Підручник містить вправи різних рівнів складності: для усного розв'язування та рівнів А і Б. Розв'язування **«Відкритих задач»** сприятиме розвитку логічного мислення, дослідницьких умінь і творчості.

У рубриці **«Виконаємо разом»** наведено зразки розв'язань важливих видів задач. Корисно ознайомитися з ними перед виконанням домашніх завдань, номери яких виділено блакитним кольором.

Використовуючи рубрику **«Скарбничка досягнень»**, що міститься наприкінці кожного параграфа, можна проаналізувати, усвідомити, повторити та покращити набуті знання та вміння.



Рубрику **«З'ясовуємо досягнення»** побудовано так, щоб ви мали змогу якнайкраще підготуватися до зовнішнього незалежного оцінювання.

У книжці є також рубрики **«Історичні відомості»** та **«Головне в розділі»**.

Зверніть увагу на **«ДОДАТКИ»** та їх наповнення. Сподіваємося, що ви отримаєте задоволення від розв'язування задач і роботи над навчальними проектами.

Бажаємо успіхів у вивченні алгебри!

Розділ 1

МИТРОПОЛЬСЬКИЙ
Юрій Олексійович
(1916–2008)
Український математик і механік, академік НАН України (1961), іноземний академік-кореспондент Академії наук у Болоньї (Італія, 1971), Герой України, заслужений діяч науки України, доктор технічних наук, дійсний член Наукового товариства ім. Т. Г. Шевченка у Львові.

«Математика — мов поезія. Ця схожість — не тільки в красі форм, у витонченій строгості математичних теорій, а й у могутності впливу математики на інші науки».

«Проходячи крізь сухі математичні формули, думка людини перетворюється на героїчну пісню творчої праці».

Ю. О. Митропольський

ПРЕМІЯ імені
Ю. О. МИТРОПОЛЬСЬКОГО

Присуджується по Відділенню математики НАН України за видатні наукові роботи в галузі математики та нелінійної механіки

Заснована Національною академією наук у 2008 році

ЛАУРЕАТИ ПРЕМІЇ

Самойленко А. М.
Бойчук О. А.
Єгорова І. Є.
Кошманенко В. Д.
Королюк В. С.

НЕРІВНОСТІ

Нерівності використовують так само часто, як і рівності.
Як і рівності, нерівності бувають числові та зі змінними.
Деякі з них доводять, інші — розв'язують.
За допомогою нерівностей зручно моделювати реальні ситуації та процеси довкілля, зокрема відношення більше — менше, коротше — довше та ін. Визначну роль нерівності відіграють у дослідженні функцій: встановлення найбільших і найменших значень функції на деякому проміжку, визначення проміжків зростання і спадання функції тощо.

У цьому розділі розглянемо такі теми:

§ 1 **Загальні відомості про нерівності**
General Information About Inequalitie

§ 2 **Властивості числових нерівностей**
Properties of Numerical Inequaliti

§ 3 **Подвійні нерівності**
Double Inequalities

§ 4 **Розв'язування нерівностей з однією змінною**
The Solution to Inequalities With One Variable

§ 5 **Об'єднання і переріз множин. Числові проміжки**
Combination and Section. Numeric Intervals

§ 6 **Системи нерівностей з однією змінною**
Systems of Inequalities With One Variable

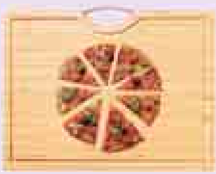
§ 7 **Доведення нерівностей**
Inequalities Proof

Навчальний проект № 1
«Цікаві нерівності»

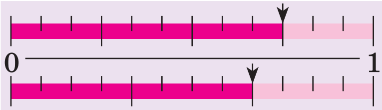
Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо, як порівнюють числа.

Ви вже знаєте, що, наприклад:



$\frac{1}{8} < \frac{3}{8}$

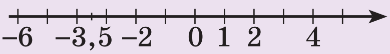


$\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, бо $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$

$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

Із двох чисел на координатній прямій більше те, яке розташоване правіше, а менше те, яке розташоване лівіше.



$-3{,}5 < -2, \quad -6 < 4$

§ 1 Загальні відомості про нерівності

Повсякчас ми щось порівнюємо: швидкості інтернету, вартості проїзду, діагоналі моніторів, висоти споруд, результати змагань, кількості балів ЗНО тощо. Математичною моделлю відношень «більше» і «менше» є нерівність. Наприклад, відстань від Києва до Харкова ($d_1 = 407$ км) більша, ніж відстань від Києва до Луцька ($d_2 = 368$ км). Це записують так:

$$407 > 368 \text{ або } d_1 > d_2.$$

Якщо число a менше або більше від числа b, то записують відповідно $a < b$ або $a > b$. Наприклад,

$$3 < 5, \ -7 > -13.$$

Зміст співвідношень «більше» і «менше» можна розкрити таким означенням.

Число a більше від b, якщо різниця $a - b$ — число додатне; число a менше від b, якщо різниця $a - b$ — число від'ємне.

Оскільки різниця $a - b$ може бути додатною, від'ємною або дорівнювати нулю, то для довільних дійсних чисел a і b виконується одне і тільки одне з трьох співвідношень:

$$a > b, \ a < b \text{ або } a = b.$$

Користуючись сформульованим вище означенням, можна порівнювати числа, тобто встановлювати, яке з них більше, а яке — менше. Наприклад, щоб порівняти дроби $\frac{4}{9}$ і $\frac{11}{25}$, знайдемо їх різницю:

$$\frac{4}{9}-\frac{11}{25}=\frac{4\cdot 25-11\cdot 9}{9\cdot 25}=\frac{1}{225}.$$

Різниця даних дробів — число додатне, тому $\frac{4}{9}>\frac{11}{25}$.

На координатній прямій меншому числу відповідає точка, що лежить ліворуч від точки, яка відповідає більшому числу.

Наприклад, малюнок 1 відповідає таким співвідношенням:

$$c < a,\ a < b,\ c < b.$$

Мал. 1

Нерівність — абстрактна математична модель відношень менше — більше, нижче — вище, коротше — довше, вужче — ширше, тонше — товстіше, дешевше — дорожче, молодше — старше та багатьох інших. Крім знаків < (менше) і > (більше) часто використовують також знаки: ≤ — менше або дорівнює (не більше), ≥ — більше або дорівнює (не менше).

Запис $a \le b$ означає, що $a < b$ або $a = b$
Запис $a \ge b$ означає, що $a > b$ або $a = b$

Наприклад, можна стверджувати, що $2 \le 5$, $4 \ge 4$, $-\frac{1}{2} \le -0{,}5$.

Знаки < і > називають ***знаками строгої нерівності***. Вони протилежні один одному: якщо $a < b$, то $b > a$, і навпаки. Знаки ≤ і ≥ також протилежні один одному, їх називають ***знаками нестрогої нерівності***. Будь-який із знаків <, >, ≤ і ≥ називають ***знаком нерівності***.

Два вирази, сполучені знаком нерівності, утворюють *нерівність*.

Приклади нерівностей: $3<\sqrt{10}$, $a^2 + b^2 \ge 2ab$, $3x - 5 > 0$.

Вираз, який стоїть ліворуч чи праворуч від знака нерівності, називають відповідно лівою чи правою частиною нерівності. Наприклад, лівою частиною нерівності $5x + 4 < 8$ є вираз $5x + 4$, а правою — число 8 (будь-яке число також вважається виразом).

Якщо обидві частини нерівності — числові вирази, її називають *числовою нерівністю*. Такі нерівності бувають правильні або неправильні. Наприклад, з нерівностей $2 < 3$, $\sqrt{2} \ge 1$, $-3 < -5$ дві перші правильні, а третя — неправильна, бо число -3 більше від -5.

Нерівність зі змінними при одних значеннях змінних може бути правильною, а при інших — неправильною. Наприклад, нерівність $2x + 3 > 5$ — правильна, якщо x дорівнює 2, 3, 4, 5, а якщо x дорівнює 1, 0, −1, −2, — неправильна. Говорять, що значення 2, 3, 4, 5 дану нерівність задовольняють, а 1, 0, −1, −2 — не задовольняють.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Крім наведених вище знаків нерівності (<, >, ≤, ≥), часто використовують ще знак ≠ (не дорівнює). Якщо, наприклад, співвідношення «не більше» ($a \le b$) означає, що $a < b$ або $a = b$, то співвідношення «не дорівнює» ($a \ne b$) означає $a < b$ або $a > b$.

Відношення «не дорівнює» принципово відрізняється від «не більше». Для всіх відношень рівності і нерівності, які позначають знаками =, <, >, ≤, ≥, справджується властивість *транзитивності*, тобто із $a \le b$ і $b \le c$ випливає, що $a \le c$. А для відношення «не дорівнює» така властивість може не справджуватись: із $a \ne b$ і $b \ne c$ не завжди випливає $a \ne c$.

Наприклад, $2 \ne 3$ і $3 \ne 2$, але відношення $2 \ne 2$ — хибне, неправильне.

Тому далі, говорячи про нерівності, матимемо на увазі два числа або вирази, сполучені будь-яким із знаків <, >, ≤, ≥, але не знаком ≠.

Перевірте себе

1. За якої умови число a більше за c?
2. Що таке нерівність?
3. Які бувають нерівності? Наведіть приклади.
4. Які нерівності називають строгими, які — нестрогими?
5. Що означають записи $a \le b$, $a \ge b$? Прочитайте їх.

Виконаємо разом

1 Яке з чисел a і b менше, якщо:
а) $a - b = (-1)^2$; б) $a = b - 3$; в) $a - 5 = b$?

● **Розв'язання.** а) $a - b = (-1)^2 = 1$ (число додатне), отже, $b < a$;
б) знайдемо різницю чисел a і b: $a - b = -3$ (число від'ємне), отже, $a < b$;
в) $a - b = 5$ (число додатне), отже, $b < a$.
Відповідь. а) $b < a$; б) $a < b$; в) $b < a$.

2 За якої умови вираз $4 - (2x + 3)^2$ має найбільше значення?

● **Розв'язання.** Даний вираз $4 - (2x + 3)^2$ має найбільше значення, якщо від'ємник найменший. А вираз $(2x + 3)^2$ має найменше значення, якщо $2x + 3 = 0$, тобто при $x = -1{,}5$.
Відповідь. Якщо $x = -1{,}5$.

3 Яка з різниць більша і у скільки разів:

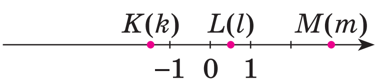
$$2017^{2018} - 2017^{2017} \text{ чи } 2017^{2017} - 2017^{2016}?$$

Розв'язання. $2017^{2018} - 2017^{2017} = 2017^{2017}(2017 - 1) = 2016 \cdot 2017^{2017}$;
$2017^{2017} - 2017^{2016} = 2017^{2016}(2017 - 1) = 2016 \cdot 2017^{2016}$;
$(2016 \cdot 2017^{2017}) : (2016 \cdot 2017^{2016}) = 2017$.
Відповідь. Перша різниця більша від другої в 2017 разів.

Виконайте усно

1. Яке з чисел x і y менше, якщо:
а) $x - y = 1$; б) $x - y = -1$; в) $y - x = 2$; г) $y - 5 = x$?

2. Точки K, L, M з координатами k, l, m розміщено на координатній прямій, як показано на малюнку 2. Порівняйте числа:



Мал. 2

а) k і m; в) m і l; ґ) k і l;
б) k і 1; г) 0 і l; д) m і -1.

3. Чи правильна нерівність:
а) $2 \geq 2$; б) $-3 < -5$; в) $3 \leq 2$; г) $-5 \leq -2$?

4. Порівняйте числа:
а) 1,28 і $\frac{5}{4}$; б) 0,02 і $1\frac{1}{50}$; в) $-\frac{1}{3}$ і $-0{,}33$; г) 1,6 і $\frac{5}{3}$.

5. Порівняйте дроби:
а) $\frac{5}{7}$ і $\frac{3}{7}$; б) $-\frac{4}{3}$ і $-\frac{4}{5}$; в) $\frac{5}{6}$ і $\frac{6}{7}$; г) $-\frac{7}{13}$ і $-\frac{13}{27}$.

6. Чи завжди менше за відповідне значення x значення виразу:
а) $\frac{1}{x}$; б) $\sqrt{x}$?

7. ***Відкрита задача.*** Як символ втрати частки ринку або інших фінансових та економічних проблем використовують кругові діаграми у вигляді зелених дерев з листям, що опадає (мал. 3). Складіть задачі за малюнками 3, *а* і 3, *б*.

а

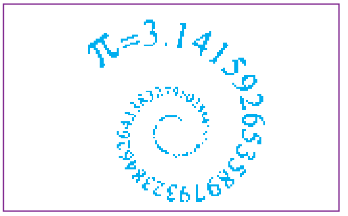
б

Мал. 3

Рівень А

8. Яке з чисел a і b більше, якщо:
а) $a - b = 0{,}01$; в) $a = 2{,}3 + b$; ґ) $a - b = 0$;
б) $a - b = -3{,}7$; г) $b - a = (-3)^2$; д) $b = a + 1$?

9. Порівняйте числа m і n, якщо:
а) $m - n = 0{,}5$; в) $m - 4 = n$;
б) $n - m = 5$; г) $m + 3 = n$.



10. Порівняйте числа x і y, якщо:
а) $y - x = -1$; в) $x = y - 3$;
б) $x - y = 7$; г) $y - x = 0$.

11. Які з нерівностей правильні:
а) $-7 > -5$; в) $\sqrt{5} \le \pi$; ґ) $\sqrt{2\frac{1}{4}} \ge 1{,}5$;
б) $4{,}3 \ge -3{,}4$; г) $\frac{1}{0{,}5} > 0{,}5$; д) $\pi \le 3{,}14$?

12. Точки з координатами a, b, c розміщені на координатній прямій, як показано на малюнку 4. Яке з чисел a, b, c найбільше, яке — найменше? Чи правильні нерівності:
а) $a < b$; в) $c < a$;
б) $b < c$; г) $b \ge c$?

Мал. 4

13. Порівняйте числа:
а) $\frac{10}{11}$ і $\frac{19}{20}$; в) $\frac{48}{49}$ і $0{,}98$; ґ) $\frac{2}{15}$ і $\frac{9}{17}$;
б) $\frac{28}{29}$ і $\frac{29}{30}$; г) $-\frac{7}{9}$ і $-\frac{9}{7}$; д) $-\frac{5}{7}$ і $-\frac{1}{3}$.

14. Розмістіть у порядку спадання числа:
$3{,}1$; π; $\sqrt{10}$; $2+\sqrt{2}$; $5-\sqrt{3}$.

15. Розмістіть у порядку зростання числа:
2; $\sqrt{5}$; -12; $2\frac{1}{2}$; 0; -3π.

16. Яке з чисел: $1{,}5$; $1\frac{29}{50}$; $\frac{\pi}{2}$; $\sqrt{10}:2$; $\sqrt{7}\cdot 0{,}5$ — найбільше?

17. Порівняйте значення виразів $2x + 3$ і $3x - 2$, якщо:
а) $x = -1$; б) $x = 0$; в) $x = 5$; г) $x = 7$.

18. Порівняйте значення функції $y = 2x - 1$, якщо:
а) $x = 1$ і $x = 2$; б) $x = -1$ і $x = -2$; в) $x = 0{,}1$ і $x = 0{,}2$.

19. Порівняйте значення функції $y = x^2$, якщо:
а) $x = -20$ і $x = 20$; б) $x = -2$ і $x = -1$; в) $x = -8$ і $x = 0$.

20. Доведіть, що $10^{11} - 10^{10} > 10^{10} + 10^9$.

21. Чи правильна нерівність $3x - 2 < 7$, якщо:
а) $x = 4$; б) $x = 3$; в) $x = 2$; г) $x = 0$?

22. Яка з нерівностей правильна за умови, що $x = 10$:
а) $0{,}5x + 1 > 3$; б) $-7x + 3 < x$; в) $3 - x \geq x - 17$?

23. Чи при всіх дійсних значеннях c правильна нерівність:
а) $c^2 + 3 > 0$; б) $(c + 2)^2 > 0$; в) $(c - 1)^2 \geq 0$?

24. Доведіть, що при кожному значенні n:
а) $n^4 + 1 > 0$; б) $(n - 5)^2 \geq 0$; в) $n^2 - 2n + 1 \geq 0$.

25. Доберіть кілька значень змінної x, які задовольняють нерівність:
а) $2x + 3 < 0$; б) $3 - x^2 > 0$; в) $x + \frac{1}{x} < 1$.

Рівень Б

26. Запишіть у порядку зростання числа:
$(-\pi)^2$; $\sqrt{2}$; -1^2; $1\frac{2}{3}$; $-\sqrt{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $(-2)^3$; $\sqrt{81}$; -5; $(-3)^0$.

27. Запишіть у порядку спадання числа:
-2π; $\sqrt{10}$; 297^0; $\left(-\frac{5}{2}\right)^2$; $\frac{1}{0{,}3}$; $\frac{\pi}{10}$; 0^{297}; $(-2)^5$; π; $-\frac{25}{4}$.

28. Порівняйте значення виразів $5m + 1$ і $19 - 3m$, якщо:
а) $m = 2$; б) $m = \sqrt{7}$; в) $m = 1 - \sqrt{2}$; г) $m = 1 + \sqrt{3}$.

29. Порівняйте значення функцій $y = 12 + 45x$ і $y = \frac{12}{x}$, якщо:
а) $x = \frac{3}{5}$; б) $x = -\frac{1}{2}$; в) $x = -\frac{2}{3}$; г) $x = \frac{2}{5}$.

30. Яка з різниць більша і у скільки разів:
$2019^{2020} - 2019^{2019}$ чи $2019^{2019} - 2019^{2018}$?

31. Доведіть, що при кожному a правильна нерівність:
а) $(a - 3)^2 + 2 > 0$; в) $4a^2 - 4a + 1 \geq 0$;
б) $(2a + 1)^2 + 0{,}5 > 0$; г) $9a^2 + 2 > 6a$.

32. Що більше: квадрат суми двох додатних чисел чи сума їх квадратів?

33. За якої умови вираз $1 + (2x - 3)^2$ має найменше значення?

34. За якої умови вираз $1 - (2x - 3)^2$ набуває найбільшого значення?

35. Як розміщені на координатній прямій точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ і $D(d)$, якщо:

а) $a > b$, $a + b = 2d$ і $b + d = 2c$;
б) $a < b$, $2a = b + c$ і $2d = a + b$?

36. Доберіть кілька значень змінної n, які задовольняють нерівність:

а) $3n - 2 > 2n - 3$; б) $5n + 8 \le 8n - 1$.

37. Сума двох взаємно обернених чисел дорівнює 2,5. Знайдіть більше з цих чисел.

38. Збільшиться чи зменшиться значення дробу $\frac{2}{5}$, якщо до його чисельника і знаменника додати одне й те саме натуральне число? Наведіть приклади.

39. Яке з чисел a і b більше, якщо:

а) $a + 7{,}8 = b + 3{,}5$; в) $8{,}5 - a = 7{,}3 - b$;
б) $a - 4{,}5 = b - 2{,}3$; г) $2a + 3{,}5 = b - 3{,}5$?

40. Яке з додатних чисел x і y більше, якщо:

а) $2{,}5x = 3{,}2y$; в) $x : 3{,}8 = y : 2{,}6$;
б) $5{,}3 : x = 7{,}1 : y$; г) $2x - 3y = 5{,}4$?

41. Сім зошитів коштують дорожче, ніж 9 олівців. Що дорожче: 12 зошитів чи 15 олівців?

42. Чотири подруги — Даринка Головко, Єва Кучер, Жанна Черкаська і Зоя Коваленко разом зі своїми братами прийшли на ковзанку. Кожний брат був вищий зростом за сестру. Вони розділилися на пари та й почали кататися. З'ясувалося, що в кожній парі «кавалер» вищий за «даму», і ніхто не катається зі своєю сестрою. Найвищим серед друзів виявився Андрій Головко, а найнижчою — Даринка. Відомо, що Жанна і Віктор Черкаські вищі за Юру Коваленка, але нижчі за Єву. З ким катався Борис Кучер?

43. Порівняйте значення виразів:

а) $a^2 + 36$ і $12a$; в) $b^2 + 2$ і $2b + 1$;
б) $4(x + 1)$ і $(x + 2)^2$; г) $(y - 3)^2$ і $(y - 2)(y - 4)$.

44. Порівняйте невід'ємні числа a і b, якщо:

а) $a^2 \ge b^2$; б) $b - a = a - b$; в) $a - b = a + b$.

Розгляньте всі можливі випадки.

Вправи для повторення

Обчисліть (45–47).

45. а) $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+12\frac{2}{15}\right):\frac{1}{15}$;
в) $\left(1-\frac{2}{3}\right):\frac{2}{3}+\left(\frac{4}{5}-1\right)\cdot 5$;
б) $\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{10}+\frac{1}{20}\right):1\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$;
г) $\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{2}\right):\frac{3}{4}-5:\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)$.

46. а) $2^{13}\cdot 0{,}5^{13}$;
б) $25^{7}\cdot 0{,}04^{7}$;
в) $0{,}5^{12}\cdot(-2)^{13}$;
г) $-5^{32}\cdot 0{,}2^{32}$;
ґ) $0{,}1^{-21}\cdot 10^{-20}$;
д) $0{,}2^{-41}\cdot(-0{,}5)^{-40}$.

47. а) $\sqrt{5^2-4^2}$;
б) $\sqrt{13^2-12^2}$;
в) $\sqrt{3^2+4^2}$;
г) $\sqrt{21{,}8^2-18{,}2^2}$;
ґ) $\sqrt{45{,}8^2-44{,}2^2}$;
д) $\sqrt{8{,}2^2-1{,}8^2}$.

Спростіть вираз **(48–50).**

48. а) $(c-5)(c+2)+3c+10$;
б) $(x^2+ax+a^2)(x-a)+a^3$;
в) $(a^2-a+1)(a+1)-a^3$;
г) $(x^2-y)(x-y^2)-y^3+xy$;
ґ) $(c^3-2c)(2c+c^3)+4c^2$;
д) $(x^2-6x+9)^2-(x-3)^4$.

49. а) $\frac{a^2-1}{a^3+1}\cdot\left(a+\frac{1}{a-1}\right)+\left(a+\frac{1}{a}+1\right)\cdot\left(a+\frac{1}{a}-1\right)$;

б) $\left(\frac{a}{ab-b^2}+\frac{b}{a^2-ab}\right)\cdot\frac{a^2b-ab^2}{a^2+b^2}-1$.

50. а) $\sqrt{a}+\sqrt{4a}+\sqrt{9a}$;
б) $7\sqrt{x}-\sqrt{9x}+\sqrt{25x}$;
в) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{60}$;
г) $\left(\sqrt{15}+2\right)^2-\sqrt{240}$;
ґ) $\sqrt{6+\sqrt{20}}-\sqrt{6-\sqrt{20}}$;
д) $\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{5-\sqrt{24}}$.

51. Розв'яжіть рівняння:
а) $x^2+8x+15=0$;
б) $x^2+10x+21=0$;
в) $y^2-7y-18=0$;
г) $z^2-9z+14=0$;
ґ) $\frac{3x-1}{3x+1}=2-\frac{x-3}{x+3}$;
д) $\frac{3c}{3c-2}+\frac{2c-9}{2c-5}=2$.

52. Розв'яжіть систему рівнянь:

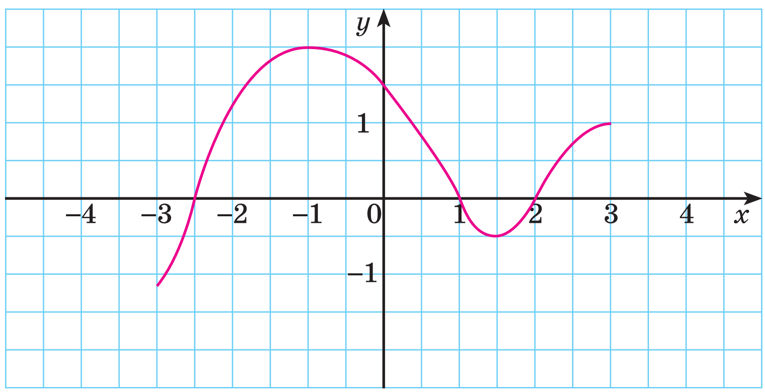
а) $\begin{cases}\frac{4}{x-2}-\frac{1}{y-6}=0,\\ \frac{3}{x+5}+\frac{2}{y-3}=2;\end{cases}$
б) $\begin{cases}\frac{3}{x+3}-\frac{2}{y}=0,\\ \frac{4}{x-1}-\frac{5}{y+1}=1.\end{cases}$

53. Побудуйте графік функції:

а) $y = 3 - x$; б) $y = \frac{6}{x}$; в) $y = x^2$; г) $y = -\sqrt{x}$.

Знайдіть область визначення та множину значень кожної функції.

54. Згадайте, які властивості функцій ви розглядали в попередніх класах. Дивлячись на графік функції (мал. 5), поясніть, на яких проміжках вона зростає, спадає, на яких — додатна, від'ємна. Укажіть найбільше значення функції.



Мал. 5

55. До розчину, який містить 40 г солі, долили 200 г води, після чого його концентрація зменшилась на 10 %. Яка концентрація розчину була спочатку?

Скарбничка досягнень

✓ Знаю, що:

$a > b$, якщо $a - b$ – число додатне
$a < b$, якщо $a - b$ – число від'ємне

✓ Знаю, що:

запис $a \le b$ означає, що $a < b$ або $a = b$
запис $a \ge b$ означає, що $a > b$ або $a = b$

✓ Умію розрізняти і наводити приклади таких нерівностей:

Строгих	Нестрогих	Числових	Зі змінними
$12 > 7$, $x < y$	$-3 \le 5$, $a \ge a$	$3 > 0$, $1{,}5 < 5{,}1$	$2x - 5 < 1$, $a \ge 7a$

✓ Хочу навчитися застосовувати відомості, що стосуються нерівностей для доведення нерівностей.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:
— Що таке числова нерівність (с. 9).
— За якої умови число a більше за b:

$a > b$, якщо $a - b$ — число додатне.

— За якої умови число a менше за b:

$a < b$, якщо $a - b$ — число від'ємне.

— Властивості функцій $y=\sqrt{x}$ і $y=\dfrac{k}{x}$.

§ 2 Властивості числових нерівностей

Розглянемо таку життєву ситуацію. Молода родина вирішила щомісяця відкладати певну суму грошей у банк під відсотки. Дружина дізналася, що відсоткова ставка за депозитом у банку A менша, ніж у банку B, а чоловік знав, що відсоткова ставка за депозитом у банку C менша, ніж у банку A. Який банк, на вашу думку, вибере ця родина для зберігання коштів, якщо всі інші умови депозитів у банках A, B і C — однакові?

Відповідь на це запитання можна обґрунтувати, використовуючи теорему 1.

Розглянемо властивості числових нерівностей і доведемо їх для нерівностей, що містять знак «<».

Теорема 1. Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

Доведення. Якщо $a < b$ і $b < c$, то числа $a - b$ і $b - c$ — від'ємні. Їх сума $(a - b) + (b - c) = a - c$ — також число від'ємне. А якщо $a - c$ — число від'ємне, то $a < c$. Це й треба було довести.

Теорема 1 виражає *властивість транзитивності* нерівностей з однаковими знаками.

Приклад. Оскільки $\sqrt{1{,}9}<\sqrt{2}$ і $\sqrt{2}<1{,}42$, то $\sqrt{1{,}9}<1{,}42$.

Теорема 2. Якщо до обох частин правильної нерівності додати одне й те саме число, то одержимо правильну нерівність.

Наприклад, якщо $a < b$ і c — довільне дійсне число, то $a + c < b + c$.

Доведення. Якщо $a < b$, то $a - b$ — число від'ємне. Оскільки $a - b = (a + c) - (b + c)$, то різниця $(a + c) - (b + c)$ — число також від'ємне. А це означає, що $a + c < b + c$.

Теорема 3.
Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме додатне число, то одержимо правильну нерівність.

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме від'ємне число і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо правильну нерівність.

Доведення. Нехай $a < b$ і c — будь-яке додатне число. У цьому випадку числа $a - b$, $(a - b)c$ — числа від'ємні. За цих умов від'ємною є і різниця $ac - bc$, тобто $ac < bc$.

Якщо $a < b$ і c — довільне від'ємне число, то добуток $(a - b)c$, а отже, і різниця $ac - bc$ — числа додатні. Тому $ac > bc$.

Приклади. а) $3 < 4$ і $5 > 0$, тому $3 \cdot 5 < 4 \cdot 5$ або $15 < 20$;

б) $3 < 4$ і $-2 < 0$, тому $3 \cdot (-2) > 4 \cdot (-2)$ або $-6 > -8$.

Оскільки ділення можна замінити множенням на число, обернене до дільника, то в теоремі 3 слово «помножити» можна замінити словом «поділити».

Якщо $a < b$ і $c > 0$, то $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$; якщо $a < b$ і $c < 0$, то $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Теорема 4. Нерівності з однаковими знаками можна почленно додавати.

Наприклад, якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

Доведення. Якщо $a < b$ і $c < d$, то за теоремою 2: $a + c < b + c$ і $b + c < b + d$, звідси за теоремою 1: $a + c < b + d$.

Приклад. $2 < 3$ і $5 < 7$, тому $2 + 5 < 3 + 7$ або $7 < 10$.

Теорема 5. Нерівності з однаковими знаками можна почленно перемножати, якщо їх ліві й праві частини — додатні числа.

Наприклад, якщо $a < b$, $c < d$ і числа a, b, c, d — додатні, то $ac < bd$.

Доведення. Нехай $a < b$ і $c < d$, а числа c і b — додатні. Згідно з теоремою 3 $ac < bc$ і $bc < bd$, звідси за теоремою 1 $ac < bd$.

Зауваження. Теореми 4 і 5 правильні також для трьох і довільної кількості нерівностей. Наприклад, якщо $a < b$, $c < d$ і $n < m$, то $a + c + n < b + d + m$.

Доведення теорем 1–5 для нерівностей зі знаком «<» майже дослівно можна повторити для аналогічних нерівностей зі знаком «>», «≥» або «≤».

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Чи можна обидві частини нерівності підносити до квадрата або до куба? Нехай a і b — числа додатні; перемножимо почленно нерівності $a < b$ і $a < b$, одержимо $a^2 < b^2$. Перемножимо почленно частини останньої нерівності та $a < b$, одержимо $a^3 < b^3$ і т. д. Отже, якщо числа a і b — додатні, а n — натуральне, то з нерівності $a < b$ випливає $a^n < b^n$.

Якщо хоч одне з чисел a і b від'ємне, то з нерівності $a < b$ не завжди випливає $a^n < b^n$. Наприклад, $-3 < 2$, але нерівності $(-3)^2 < 2^2$, $(-3)^4 < 2^4$ неправильні.

Вираз «якщо числа a і b додатні та $a < b$» можна записати коротше:

«якщо $0 < a < b$».

Дослідіть, чи завжди правильне твердження:

«якщо $0 < a < b$, то $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ».

Перевірте себе

1. Сформулюйте і обґрунтуйте теорему про транзитивність нерівностей.
2. Сформулюйте і обґрунтуйте теорему про додавання до обох частин нерівності одного й того самого числа.
3. Сформулюйте теорему про множення обох частин нерівності на одне й те саме число.
4. Сформулюйте теорему про почленне додавання нерівностей з однаковими знаками.
5. Сформулюйте теорему про почленне множення нерівностей з однаковими знаками.

Виконаємо разом

1 Відомо, що числа a і b додатні, а також $a < 3$, $b < 6$. Доведіть, що $ab < 20$.

● **Розв'язання.** Оскільки числа a і b додатні, то нерівності $a < 3$ і $b < 6$ можна перемножити: $a \cdot b < 3 \cdot 6$, або $ab < 18$. Якщо $ab < 18$, а $18 < 20$, то $ab < 20$.

2 Чи випливає з нерівностей $a < 3$ і $b < 6$ нерівність $ab < 20$, якщо принаймні одне з чисел a і b — від'ємне?

● **Розв'язання.** Якщо одне з чисел a і b від'ємне, а друге — додатне, то добуток ab від'ємний. У цьому випадку нерівність $ab < 20$ правильна. Якщо числа a і b обидва від'ємні, то нерівність $ab < 20$ може бути як правильною, так і неправильною. Наприклад, якщо $a = -1$, $b = -2$, то $(-1) \cdot (-2) < 20$, отже, нерівність правильна.
Якщо $a = -7$, $b = -10$, то нерівність $(-7) \cdot (-10) < 20$ неправильна.
Відповідь. Ні.

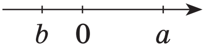
3 Відомо, що $m \geq -5$. Додатне чи від'ємне значення виразу $-3m - 20$?

● **Розв'язання.** Помножимо обидві частини нерівності $m \geq -5$ на -3, одержимо $-3m \leq 15$ (властивість 4). Додамо до обох частин цієї нерівності число -20: $-3m - 20 \leq 15 - 20$ (властивість 2), звідси $-3m - 20 \leq -5$, отже, $-3m - 20 < 0$.
Відповідь. Від'ємне.

Виконайте усно

56. Яке з чисел a і c більше, якщо: а) $a - c < 0$; б) $a - c > 2$?

57. Дивлячись на малюнок 6, скажіть, значення якого виразу більше: a чи $a + 2b$; b чи $b - 2a$?



Мал. 6

58. Порівняйте числа x і z, якщо:
а) $x < y$ і $y < z$; б) $x > y$ і $y > z$; в) $x \leq a$ і $a \leq z$.

59. Додатне чи від'ємне число n, якщо:
а) $3n < 3{,}5n$; б) $-1{,}5n > -n$; в) $0{,}2n < -n$?

60. Який із дробів $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{b}$ більший, якщо $b < a < 0$?

61. Який із двох від'ємних дробів $\frac{x}{y}$ і $\frac{y}{x}$ менший, якщо $|x| < |y|$?

62. Число a більше за 1. Яким є число: $3a$, $-a$, $1 - a$, $1 + 2a$?

63. Число x менше за -1. Яким є число: $5x$, $5 - x$, x^4, $2 + x^2$?

Рівень А

64. Порівняйте числа a і b, якщо різниці:
а) $a - c$ і $c - b$ — додатні числа;
б) $b - c$ і $c - a$ — від'ємні числа;
в) $a - n$ і $n - b$ — невід'ємні числа.

65. Порівняйте числа a і b, якщо:
а) $a - c > 0$ і $b - c < 0$; б) $a - x \leq 0$ і $x - b \leq 0$.

66. Покажіть, як розміщені на координатній прямій точки з координатами a, b, c і d, якщо $a < c$, $b > c$, $d > b$.

67. Запишіть правильну нерівність, утворену в результаті:
а) додавання до обох частин нерівності $12 < 18$ числа 5;
б) віднімання від обох частин нерівності $12 < 18$ числа 77;
в) множення обох частин нерівності $12 < 18$ на 3; на -5;
г) ділення обох частин нерівності $12 < 18$ на 3; на -6.

68. ***Відкрита задача.*** Складіть кілька задач, що ілюструють властивості числових нерівностей і стосуються життєдіяльності людини.

69. Відомо, що $a > b$. Поставте замість * знак нерівності:

а) $2a * 2b$; в) $-a * -b$; ґ) $-\frac{1}{2}a * -\frac{1}{2}b$;

б) $1{,}5a * 1{,}5b$; г) $-3a * -3b$; д) $2a^3 * 2b^3$.

70. Додатне чи від'ємне число a, якщо:

а) $2a < 3a$; б) $0{,}5a > a$; в) $-5a < -4a$?

71. Додайте почленно нерівності:

а) $5 < 12$ і $7 < 8$; в) $5 < 6$ і $x < z$;

б) $3 < 6$ і $-3 < -2$; г) $a < b$ і $x \le z$.

> *«Математика — наука, яка вимагає найбільше фантазії».*
> С. В. Ковалевська

72. Перемножте почленно нерівності:

а) $2 < 3$ і $5 < 8$; в) $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ і $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$;

б) $-4 < -1$ і $-5 < -4$; г) $5 < 7$ і $\frac{1}{7} < \frac{1}{5}$.

73. Порівняйте додатні числа $\frac{c}{a}$ і $\frac{c}{b}$, якщо $a < b$ і $c > 0$.

Рівень Б

74. Відомо, що $m < n$. Порівняйте числа:

а) $m + 7$ і $n + 7$; г) $1 - m$ і $1 - n$;

б) $-0{,}1m$ і $-0{,}1n$; ґ) $5m - 1$ і $5n - 1$;

в) $\sqrt{(-1)^2}m$ і $\sqrt{(-1)^2}n$; д) $-2n - 1$ і $-1 - 2m$.

75. Відомо, що $x > y > 0$. Поставте замість * знак нерівності:

а) $\sqrt{x} * \sqrt{y}$; в) $(1-\sqrt{2})x * (1-\sqrt{2})y$; ґ) $\frac{1}{x} * \frac{1}{y}$;

б) $x^2 * xy$; г) $\frac{y}{x} * 1$; д) $\frac{x^2y}{y-x} * \frac{xy^2}{y-x}$.

76*. Відомо, що $x < y < 0$. Поставте замість * знак нерівності:

а) $x^3 * y^2$; в) $\sqrt{-x} * \sqrt{-y}$; ґ) $\frac{x}{x-y} * \frac{y}{x-y}$;

б) $-x * 10y$; г) $\frac{1}{x^2} * \frac{1}{y}$; д) $\frac{x+1}{xy} * \frac{y+1}{xy}$.

77. Доведіть, якщо:

а) $x > y$ і $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$, то $x > 0$ і $y < 0$; б) $a < b$ і $ab < 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

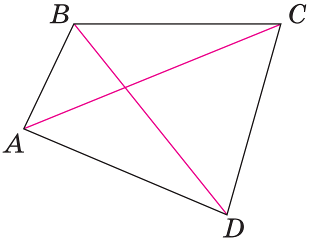
78. Розмістіть у порядку зростання числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, якщо всі вони додатні та $a < c$, $d < b$ і $d > c$.

79. Розмістіть у порядку зростання числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, якщо всі вони від'ємні та $a > c$, $d > b$ і $d < c$.

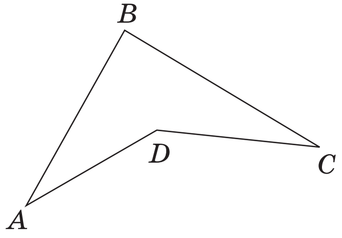
80. Доведіть, якщо:
а) $a \le b$ і $b \le c$, то $a \le c$;
б) $a \le b$ і $c > 0$, то $ac \le bc$;
в) $a \le b$ і $c < 0$, то $ac \ge bc$.

81. Чи правильно, що при додатних значеннях a і b:
а) з $a < b$ випливає $a^2 < b^2$;
б) з $a^2 < b^2$ випливає $a < b$;
в) з $a < b$ випливає $\sqrt{a} < \sqrt{b}$;
г) з $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ випливає $a < b$?

82. Практичне завдання. 1) Намалюйте трапецію і паралелограм. Виміряйте сторони і діагоналі кожного із цих чотирикутників. З'ясуйте, чи правильним є твердження: «Периметр чотирикутника більший від суми його діагоналей. 2) Доведіть, що: а) діагональ чотирикутника менша від його півпериметра: б) сума діагоналей чотирикутника менша від його периметра. Розгляньте два випадки (мал. 6 і 7).



Мал. 6



Мал. 7

83. Задано правильну нерівність $-18 < 15$. Установіть відповідність між діями (1–4), що виконуються з цією нерівністю, і правильними результатами цих дій (А–Д).

1. Додавання нерівності $-12 < -9$ до заданої нерівності	**А** $-12 < 10$
2. Ділення обох частин заданої нерівності на -3	**Б** $-13 < 7$
3. Віднімання нерівності $5 < 8$ від заданої нерівності	**В** $-30 < 6$
4. Множення обох частин заданої нерівності на $\frac{2}{3}$	**Г** $-26 < 10$
	Д $6 > -5$

84. Користуючись тотожністю $x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$, $x \ge 0$ і $y \ge 0$, доведіть, якщо $\sqrt{x} > \sqrt{y}$, то $x > y$.

85. Доведіть, якщо:

а) $m > n > 0$, то $\dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{n}$;

б) $m < n < 0$, то $\dfrac{1}{m} > \dfrac{1}{n}$.

86. Чи правильно, що для довільних значень a і b:

а) з $a > b$ випливає $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$;

б) з $a < b$ випливає $|a| > |b|$?

Вправи для повторення

87. Дано точки: $A(-3;\ 14)$, $B(3;\ 14)$, $C(-2;\ 20)$, $D(2;\ 20)$. Чи проходить графік функції $y = x^2 - 5x + 6$ через ці точки?

88. При якому значенні n графік функції $y = x^2 - 3x + n$ проходить через точку $M(3;\ 7)$? Через точку $K(-2;\ 3)$?

89. Розкладіть на множники тричлен:
а) $x^2 + 2x - 35$;
б) $6x^2 - x - 1$;
в) $6a^2 + a - 2$;
г) $c^2 + \sqrt{2}c - 4$.

90. ***Гра судоку***. Перенесіть таблицю в зошит (мал. 8). Заповніть порожні клітинки цифрами від 1 до 9 так, щоб до кожного рядка, кожного стовпця і кожного виділеного квадрата 3×3 кожна цифра входила тільки один раз.

2	4		3		7			
				5	4	3	2	
7		3				5	8	
9				6			3	
8	3	6		1	5		4	2
			9	3		7		
6	1			9				
				7	1	4	6	
3	7		8	4				5

Мал. 8

Скарбничка досягнень

✓ Знаю властивості числових нерівностей і умію їх обґрунтовувати.

Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$	Якщо $a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$
Якщо $a < b$ то $a + c < b + c$	Якщо $a < b$ і $c < 0$, то $ac > bc$

✓ Умію використовувати властивості числових нерівностей.

$12 > 7,\ 3 > 0$ $36 > 21$	$12 > 7,\ -2 < 0$ $-24 < -14$

✓ Хочу навчитися застосовувати властивості числових нерівностей для доведення нерівностей.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо властивості числових нерівностей. Якщо:

$a < b$ і $b < c$, то $a < c$;
$a < b$ і c — довільне число, то $a + c < b + c$;
$a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$;
$a < b$ і $c < 0$, то $ac > bc$;
$a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$;
$a < b$, $c < d$ і a, b, c, d — числа додатні, то $ac < bd$.

§ 3 Подвійні нерівності

Україна — космічна держава. Космічні швидкості — мінімальні швидкості космічного апарата, за яких він може:

— стати супутником Землі (перша космічна швидкість: $V_1 = 7{,}9$ км/с);

— подолати гравітаційне тяжіння Землі (друга космічна швидкість $V_2 = 11{,}2$ км/с);

— покинути Сонячну систему, у якій знаходиться Земля (третя космічна швидкість $V_3 > 16{,}67$ км/с).

Співвідношення між цими швидкостями можна записати так:

$$V_1 < V_2 < V_3.$$

Якщо нерівності $a < x$ і $x < b$ правильні, то їх можна записати у вигляді ***подвійної нерівності***: $a < x < b$. Подвійна нерівність має три частини: ліву, середню і праву та два знаки нерівності. Приклади подвійних нерівностей:

$3 < x < 4$ (x більше від 3 і менше від 4);

$2a + 3 < x + 3 \le 5c$ ($x + 3$ більше за $2a + 3$, але не більше за $5c$).

Теорема 6. Якщо до кожної частини правильної подвійної нерівності додати одне й те саме число, то одержимо правильну подвійну нерівність.

Доведення. Якщо $a < x < b$, то правильні нерівності $a < x$ і $x < b$. Тоді згідно з теоремою 2 для будь-якого дійсного числа c правильні нерівності $a + c < x + c$ і $x + c < b + c$. Отже, $a + c < x + c < b + c$.

Число c може бути як додатним, так і від'ємним. Наприклад:
якщо $2{,}5 < x - 3 < 2{,}6$ і $c = 3$, то $5{,}5 < x < 5{,}6$;
якщо $0{,}7 < x + 1 < 1{,}2$ і $c = -1$, то $-0{,}3 < x < 0{,}2$.

Подібним способом можна довести такі твердження:

- **якщо $a < x < b$ і $k > 0$, то $ka < kx < kb$;**
- **якщо $a < x < b$ і $k < 0$, то $kb < kx < ka$;**
- **якщо $a < x < b$ і $c < y < d$, то:**

$$a + c < x + y < b + d;$$
$$a - d < x - y < b - c;$$
$$ac < xy < bd \text{ (при } a > 0 \text{ і } c > 0);$$
$$\frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c} \text{ (при } a > 0 \text{ і } c > 0).$$

Наприклад, якщо $4 < x < 6$ і $2 < y < 3$, то

$$4 + 2 < x + y < 6 + 3, \text{ або } 6 < x + y < 9$$
$$4 \cdot 2 < x \cdot y < 6 \cdot 3, \text{ або } 8 < x \cdot y < 18$$
$$4 - 3 < x - y < 6 - 2, \text{ або } 1 < x - y < 4;$$
$$\frac{4}{3} < \frac{x}{y} < \frac{6}{2}, \text{ або } \frac{4}{3} < \frac{x}{y} < 3.$$

Зверніть увагу на віднімання і ділення подвійних нерівностей! Від меншого члена першої нерівності віднімають більший член другої, а від більшого — менший. Менший член першої нерівності ділять на більший член другої, а більший — на менший.

Розглянуті властивості дають можливість спрощувати подвійні нерівності. Наприклад, замість подвійної нерівності $16 < 3x - 2 < 19$ можна розглядати нерівність $18 < 3x < 21$ або ще простішу: $6 < x < 7$.

Особливо зручно використовувати подвійні нерівності для ***оцінювання значень*** величин чи виразів. Значення величин, таких як маса, відстань, час тощо, завжди наближені. Важко, зокрема, визначити висоту дерева з точністю до дециметра. Тому вказують, наприклад, що вона більша за 9,2 м, але менша за 9,4 м. Записують це у вигляді подвійної нерівності: $9{,}2 < h < 9{,}4$.

Зверніть увагу на фрагмент наклейки, що міститься на пляшці з олією (мал. 9).

маса нетто 800 ± 10 г.

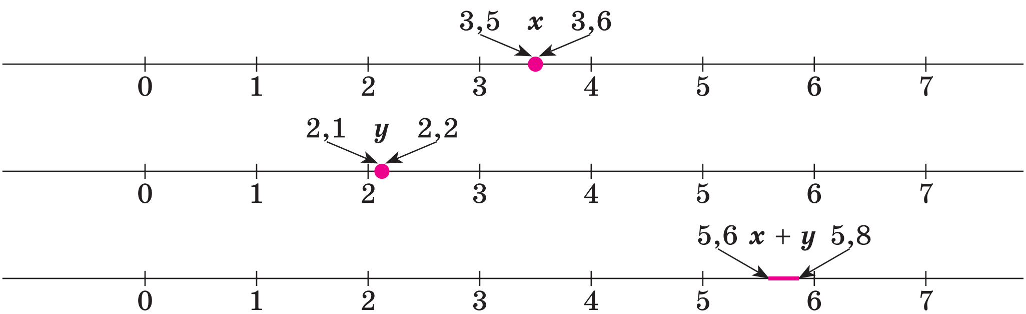
Мал. 9

Цей напис означає, що маса олії, яка міститься у пляшці, не може бути меншою за 790 г і більшою за 810 г. За допомогою подвійної нерівності масу олії (m) без пляшки можна записати так: $790 \text{ г} \le m \le 810 \text{ г}$.

Користуючись властивостями подвійних нерівностей, можна оцінити значення виразів $x + y$, $x - y$, xy, $\frac{x}{y}$.

Нехай, наприклад, $3,5 < x < 3,6$ і $2,1 < y < 2,2$.

Тоді $3,5 + 2,1 < x + y < 3,6 + 2,2$, або $5,6 < x + y < 5,8$ (мал. 10);



Мал. 10

$3,5 - 2,2 < x - y < 3,6 - 2,1$, або $1,3 < x - y < 1,5$;

$3,5 \cdot 2,1 < xy < 3,6 \cdot 2,2$, або $7,35 < xy < 7,92$;

$\frac{3,5}{2,2} < \frac{x}{y} < \frac{3,6}{2,1}$, або $1,59 < \frac{x}{y} < 1,72$.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

За допомогою подвійних нерівностей можна звільнитися від модуля в нерівностях виду $|x| < a$ і $|x| \le a$, де $a > 0$.

Наприклад, нерівність $|x| < 3$ задовольняють усі значення x, модулі яких менші за 3. Такими є додатні числа, менші за 3, від'ємні числа, більші за –3, і число 0. Цю множину чисел можна записати за допомогою подвійної нерівності так: $-3 < x < 3$.

Аналогічно можна записати нерівність $|x| \le 3$: $-3 \le x \le 3$.

Зверніть увагу! Будь-яку нерівність виду $|M| < a$, де $a > 0$ і M — деякий вираз, можна записати у вигляді подвійної нерівності: $-a < M < a$.

А, наприклад, нерівність $|x| > 3$ у вигляді подвійної нерівності записати не можна. Чому?

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Наведіть приклади подвійних нерівностей.
2. Що означає «оцінити значення величини»?
3. Як за допомогою подвійних нерівностей оцінити наближене значення суми чи добутку двох значень величини?
4. Як за допомогою подвійних нерівностей оцінити наближене значення різниці (частки) двох значень величини?

Виконаємо разом

1 Відомо, що $10 < x < 12$. Яких значень може набувати вираз: а) $3x - 5$; б) x^2?

● **Розв'язання.** а) Домножимо всі частини нерівності на 3:

$$3 \cdot 10 < 3 \cdot x < 3 \cdot 12, \text{ або } 30 < 3x < 36.$$

Віднімемо від усіх частин нерівності 5:

$$30 - 5 < 3x - 5 < 36 - 5, \text{ або } 25 < 3x - 5 < 31.$$

б) Оскільки всі частини даної нерівності додатні, то їх можна піднести до квадрата: $100 < x^2 < 144$.

Відповідь. а) $25 < 3x - 5 < 31$; б) $100 < x^2 < 144$.

2 Оцініть значення виразу $0,2a - b$, якщо $5 < a < 15$ і $2 < b < 7$.

● **Розв'язання.** Якщо $5 < a < 15$, то $1 < 0,2a < 3$.
Якщо $2 < b < 7$, то $-2 > -b > -7$, або $-7 < -b < -2$.
Додамо почленно утворені нерівності: $-6 < 0,2a - b < 1$.
Відповідь. $-6 < 0,2a - b < 1$.

Виконайте усно

91. Прочитайте подвійну нерівність:
а) $4 < a < 7$; б) $0 < 0,5 < 1$; в) $-3 < x < 3$.

92. Чи правильні подвійні нерівності:
а) $-7 < 0 < 7$; б) $0 < 5 < 10$; в) $-1 < -2 < -3$?

93. Чи задовольняють значення $x = 3$ і $x = -3$ умову:
а) $0 < x < 2x$; б) $-x < x^2 < 3x$; в) $-x < x^2 < -x^3$?

94. Які цілі значення a задовольняють подвійну нерівність:
а) $-1 < a < 1$; б) $-2 < a < 2$; в) $0,1 < a < 1$?

95. Чи існують значення x, які більші за $\frac{8}{9}$, але менші за $\frac{6}{7}$?

96. Оцініть периметр рівностороннього трикутника, якщо його сторона більша за 1,8 м і менша за 2,1 м. Чи може площа такого трикутника дорівнювати $\sqrt{3}$ м^2?

Рівень А

97. Запишіть у вигляді подвійної нерівності співвідношення:
а) $x < 12$ і $x > 3$; б) $x > -2$ і $x < 2$; в) $x < 30$ і $x > -0,3$.

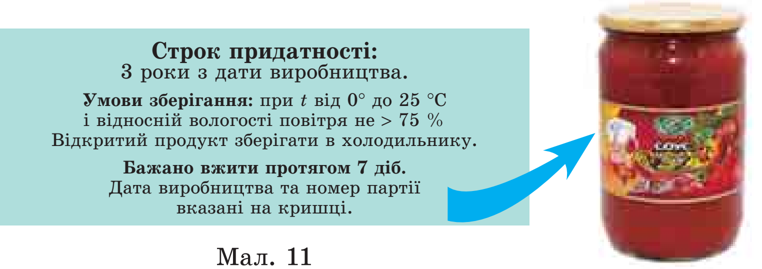
98. Чи існують значення c, які: а) менші за -3 і більші за $-\sqrt{10}$; б) більші за 10^{-2} і менші за 10^2? Якщо так, то запишіть відповідну подвійну нерівність.

99. Відомо, що $4 < n < 5$. Оцініть значення виразу:
а) $n + 3$; б) $n - 5$; в) $2n$; г) $-3n$; ґ) n^2.

100. Знаючи, що $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, оцініть значення виразу:
а) $2+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}-1$; в) $-\sqrt{3}$; г) $2\sqrt{3}$.

101. Сторона квадрата дорівнює a см, де $4{,}2 < a < 4{,}3$. Оцініть його периметр і площу.

102. ***Відкрита задача.*** Розгляньте наклейку на банці з томатним соусом (мал. 11). Спробуйте покращити подання числових характеристик на ній, використавши різні види нерівностей.



Мал. 11

103. Оцініть значення різниці $x - y$, якщо:
а) $12 < x < 13$ і $5 < y < 6$;
б) $0{,}32 < x < 0{,}33$ і $0{,}25 < y < 0{,}27$.

104. Оцініть значення добутку xy, якщо:
а) $3 < x \le 4$ і $5 \le y \le 7$;
б) $-2 < x < -1$ і $-3 < y < -1$.

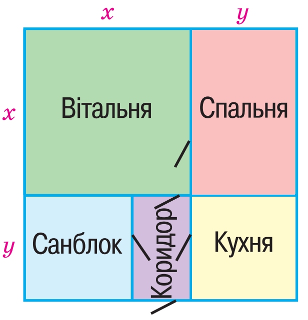
105. Оцініть значення частки $x : y$, якщо:
а) $12 < x < 15$ і $5 < y < 6$;
б) $6 < x < 8$ і $2 < y < 3$.

106. Відомо, що $-3 \le x \le 5$. Яких значень може набувати вираз:
а) $2x + 3$; б) $0{,}1x - 2$; в) $2 - x$; г) $10 - 0{,}1x$?

107. Вимірявши довжину a і ширину b прямокутника (у метрах), знайшли, що $1{,}3 < a < 1{,}4$, $0{,}6 < b < 0{,}8$. Оцініть периметр і площу цього прямокутника.

108. Довжина ребра куба — c мм, де $1{,}53 \cdot 10^2 < c < 1{,}54 \cdot 10^2$. Оцініть: а) суму довжин усіх ребер куба; б) площу поверхні куба; в) об'єм куба. Результат округліть до десятих.

109. 1) На малюнку 12 зображено план квартири. Відомо, що вся квартира, а також вітальня мають форму квадрата. Оцініть площу вітальні, спальні та всієї квартири, якщо $4{,}9$ м $< x < 5{,}1$ м, $2{,}9$ м $< y < 3{,}1$ м.
2) ***Відкрита задача.*** Зробіть потрібні виміри та оцініть площу S і периметр P: а) кімнати, у якій ви проживаєте; б) вікна у цій кімнаті.



Мал. 12

Рівень Б

110. Відомо, що $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ і $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$, оцініть:

а) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; б) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; в) $2 - \sqrt{2}$; г) $\sqrt{5} : \sqrt{2}$.

111. Нехай α і β — кути трикутника, $62° < \alpha < 63°$; $95° < \beta < 96°$. Оцініть міру третього кута.

112. Відомо, що $3{,}14 < \pi < 3{,}15$. Оцініть довжину кола і площу круга, якщо його радіус більший за 2,5 дм і менший за 2,6 дм.

113. Відомо, що $10 < x \leq 12$. Яких цілих значень може набувати вираз:

а) $2x$; б) $\dfrac{x^2}{5}$; в) $3x - 5$; г) $\dfrac{12}{x}$?

114. Відомо, що $3 < x < 4$ і $1{,}2 < y < 1{,}3$. Яких значень може набувати вираз:

а) $(x + y)^2$; б) $\sqrt{xy}$; в) $y^2 - x$; г) $\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$?

115. У яких межах лежать значення виразу $\dfrac{3x - 2}{x}$, якщо:

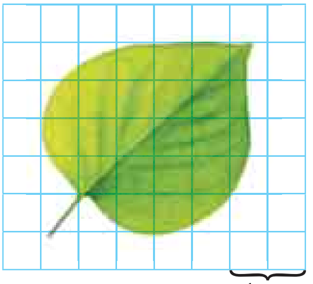
а) $1 < x < 4$; б) $-5 < x < 0$; в) $-10 \leq x \leq 10$?

116. Відомо, що $-\dfrac{3}{4} < m < \dfrac{5}{6}$ і $3 < n < 10$. Яких значень може набувати вираз:

а) $2m + 3n$; б) $4m - n$; в) $m + n^2$; г) $n^2 - m$?

117. Катети a і b прямокутного трикутника такі, що $8{,}4 < a < 8{,}5$, $6{,}5 < b < 6{,}6$. Оцініть площу цього трикутника і його периметр.

118. **Практичне завдання.** Запишіть у вигляді подвійної нерівності значення площі фігури, зображеної на малюнку 13.



Мал. 13

119. Доведіть твердження:

а) якщо $a < x < b$, то $-b < -x < -a$;

б) якщо $a < x < b$ і $a > 0$, то $\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$;

в) якщо $a < x < b$ і $a > 0$, то $a^2 < x^2 < b^2$.

120. Доведіть твердження:

а) якщо $a < b$, то $a < \frac{a+b}{2} < b$;

б) якщо $0 < a < b$, то $a < \sqrt{ab} < b$.

121*. Запишіть нерівність з модулем у вигляді подвійної нерівності:

а) $|x| < 3$; б) $|x| \le 5$; в) $2|x| < \pi$; г) $|x| - 7 \le -6$.

122*. Запишіть нерівність з модулем у вигляді подвійної нерівності та спростіть її:

а) $|2x - 1| < 3$; б) $|2 - 0{,}5x| \le 2{,}5$; в) $|\sqrt{x} - 5| < 1$.

Вправи для повторення

123. О 10 год з міста A до міста B виїхав мотоцикліст, а об 11 год так само з A до B — автомобіль. О котрій годині автомобіль наздогнав мотоцикліста, якщо він приїхав до B о 13 год, а мотоцикліст — о 14 год?

124. Запишіть у стандартному вигляді масу:

а) Місяця 73 500 000 000 000 000 000 т;

б) Сонця 1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 т.

125. Розв'яжіть систему рівнянь: а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ x + y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$

Скарбничка досягнень

- ✓ Можу навести приклади подвійних нерівностей.
- ✓ Розумію, як записувати і читати подвійні нерівності.
- ✓ Умію:
  - — виконувати дії з нерівностями;
  - — спрощувати подвійні нерівності;
  - — оцінювати значення величин;
  - — оцінювати значення виразів.

$$\begin{array}{r} 3 \le x + 1 < 7 \\ + \; -1 \le y < 1 \\ \hline 2 \le x + y + 1 < 8 \\ 1 \le x + y < 7 \end{array}$$

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:
— Зміст відношень «більше», «менше», «не більше», «не менше».
— Види нерівностей (строгі, нестрогі, числові, зі змінними).
— Властивості числових нерівностей (с. 17, 23).
— Як розв'язують лінійні рівняння (с. 260).
— Які рівняння називають рівносильними (с. 260).

§ 4 Розв'язування нерівностей з однією змінною

Як відомо з попередніх класів, рівності зі змінними бувають двох видів: тотожності й рівняння. Тотожності доводять, а рівняння розв'язують. Аналогічно розрізняють два види нерівностей зі змінними: ***тотожні нерівності*** й ***нерівності з невідомими***. Тотожні нерівності доводять (див. § 7), а нерівності з невідомими — розв'язують.

Розглянемо нерівність $5x - 2 > 8$ зі змінною x. Якщо замість x підставимо число 1, то дістанемо неправильну числову нерівність $5 - 2 > 8$. Говорять, що значення $x = 1$ дану нерівність не задовольняє. Якщо замість x підставимо число 3, то дістанемо правильну числову нерівність $5 \cdot 3 - 2 > 8$. Значення $x = 3$ дану нерівність задовольняє, число 3 — розв'язок нерівності $5x - 2 > 8$.

Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення цієї змінної, яке задовольняє дану нерівність.

Розв'язати нерівність — означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх немає.

Розв'язують нерівність, замінюючи її іншими нерівностями, простішими і рівносильними даній.

Дві нерівності називають _рівносильними_, якщо вони мають одні й ті самі розв'язки, тобто якщо кожний розв'язок першої нерівності задовольняє другу, а кожний розв'язок другої нерівності задовольняє першу. Нерівності, які не мають розв'язків, також вважають рівносильними.

Наприклад, нерівність $5x - 2 > 8$ рівносильна кожній з нерівностей: $5x > 2 + 8$, $5x > 10$, $x > 2$.

Нерівності зі змінними мають багато властивостей, аналогічних до властивостей рівнянь.

1. Якщо з однієї частини нерівності перенесемо в іншу доданок з протилежним знаком, то одержимо нерівність, рівносильну даній.
2. Якщо обидві частини нерівності помножимо або поділимо на одне й те саме додатне число, то одержимо нерівність, рівносильну даній.
3. Якщо обидві частини нерівності помножимо або поділимо на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

Ці властивості нерівностей зі змінними випливають з теорем, доведених у § 2. Користуючись цими властивостями, нерівності зі змінними можна розв'язувати подібно до рівнянь.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $5x < 2x + 15$.

Розв'язання. Перенесемо доданок $2x$ у ліву частину нерівності:

$$5x - 2x < 15.$$

Зведемо подібні члени:

$$3x < 15.$$

Поділимо обидві частини нерівності на 3:

$$x < 5.$$

Відповідь. Нерівність задовольняє кожне дійсне число, менше від 5.

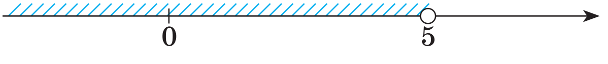
Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $7(2 - x) \le 3x + 44$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 14 - 7x &\le 3x + 44, \\ -7x - 3x &\le -14 + 44, \\ -10x &\le 30, \\ x &\ge -3. \end{aligned}$$

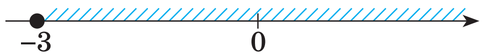
Відповідь. Нерівність задовольняє кожне число, не менше ніж -3.

Зауваження. Множини розв'язків нерівностей зручно записувати у вигляді ***проміжків***. Множину всіх дійсних чисел, менших від 5, називають проміжком від мінус нескінченності до 5 і позначають $(-\infty; 5)$. На малюнку 14 цей проміжок позначено штриховкою, значення 5, що не входить до множини розв'язків, — світлим кружком.



Мал. 14

Множину всіх дійсних чисел, не менших від -3, називають проміжком від -3 до нескінченності, включаючи -3. Позначають його $[-3; \infty)$, наочно зображають, як показано на малюнку 15; значення -3, що входить до множини розв'язків, позначено темним кружком.



Мал. 15

Отже, відповіді до розв'язаних нерівностей можна записати і за допомогою проміжків: $(-\infty; 5)$, $[-3; \infty)$.

Як ви вже знаєте, з усіх рівнянь найпростішими є лінійні рівняння виду $ax = b$. Найпростішими нерівностями з однією змінною також є лінійні.

Якщо a і b — дані числа, а x — невідома змінна, то кожна з нерівностей

$$ax < b, \qquad ax > b, \qquad ax \le b, \qquad ax \ge b \qquad (*)$$

називається *лінійною нерівністю* з однією змінною x.

Приклади лінійних нерівностей:

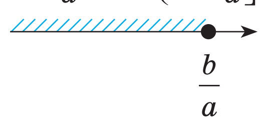
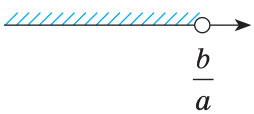
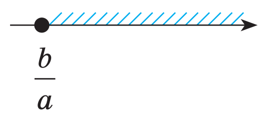
$$2x < 3,\ -7x > 14,\ 0{,}5x \le 1,\ 9x \ge 0.$$

Лінійні нерівності часто записують і так:

$$ax - b < 0,\ ax - b > 0,\ ax - b \le 0,\ ax - b \ge 0.$$

Якщо число a відмінне від нуля, то кожна з нерівностей (*) має множину розв'язків, якій відповідає нескінченний числовий промінь (або промінь без вершини).

Залежність розв'язків лінійної нерівності від значення коефіцієнтів при змінній і знака нерівності наведено в таблиці.

$ax > b$	$ax \le b$
Якщо $a > 0$, то $x > \frac{b}{a}$, $x \in \left(\frac{b}{a}; \infty\right)$ 	Якщо $a > 0$, то $x \le \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right]$ 
Якщо $a < 0$, то $x < \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$ 	Якщо $a < 0$, то $x \ge \frac{b}{a}$, $x \in \left[\frac{b}{a}; \infty\right)$ 

Якщо $a = 0$, то кожна з нерівностей (*) або не має розв'язків (наприклад, $0x > 5$), або множиною її розв'язків є множина всіх дійсних чисел (наприклад, $0x < 5$).

Зверніть увагу! Зображати числові проміжки можна й іншим способом — дугами — як зображено на малюнках 16–17.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

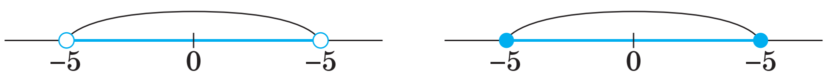
До розв'язування лінійних нерівностей зводиться розв'язування найпростіших нерівностей з модулями.

Розв'яжемо нерівності:

а) $|x| < 5$; б) $|x| > 3$; в) $|x| \le -2$; г) $|x| > -0{,}5$.

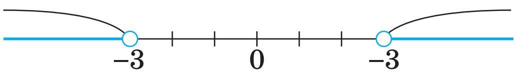
а) Нерівність задовольняють усі значення x, модулі яких менші за 5. Такими є всі додатні числа, менші за 5, всі від'ємні числа, більші за –5, і число 0. Таку множину чисел можна записати за допомогою подвійної нерівності $-5 < x < 5$. На числовій прямій цій множині чисел відповідає проміжок, показаний на малюнку 16, *а*. Числа –5 і 5 не належать цьому проміжку, вони не задовольняють дану нерівність, а нерівність $|x| \le 5$ — задовольняють (мал. 16, *б*). Цей проміжок позначають [–5; 5].

б) Нерівність $|x| > 3$ задовольняють усі числа, більші за 3, і всі числа, менші за –3 (мал. 17).



а *б*

Мал. 16



Мал. 17

в) Модуль кожного числа — число невід'ємне, воно не може бути менше, ніж від'ємне число –2, або дорівнювати –2. Тому дана нерівність розв'язків не має.

г) Кожне невід'ємне число більше за –0,5. Тому дану нерівність задовольняє кожне дійсне число.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Наведіть приклади нерівностей зі змінними.
2. Що називають розв'язком нерівності зі змінною?
3. Скільки розв'язків може мати нерівність з однією змінною?
4. Як записують множини розв'язків нерівності зі змінною?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1 Розв'яжіть нерівність $2x + 3 < 2(x + 3)$.

● **Розв'язання.** $2x + 3 < 2x + 6$,
$2x - 2x < 6 - 3$,
$0x < 3$.

Нерівність $0x < 3$ правильна при кожному значенні x.

Відповідь. $(-\infty; +\infty)$.

2 Розв'яжіть нерівність $6z + 7 \geq 2(3z + 4)$.

● **Розв'язання.** $6z + 7 \geq 6z + 8,$
$6z - 6z \geq 8 - 7,$
$0z \geq 1.$

Нерівність $0z \geq 1$ не задовольняє жодне значення z.
Відповідь. Розв'язків немає.

3 Розв'яжіть нерівність $\frac{x-5}{6}+\frac{x-8}{3}>\frac{5x}{2}-1$.

● **Розв'язання.** Помножимо обидві частини нерівності на 6 (найменше спільне кратне чисел 6, 3 і 2):
$x - 5 + 2(x - 8) > 3 \cdot 5x - 6,$
$x - 5 + 2x - 16 > 15x - 6,$
$x + 2x - 15x > -6 + 5 + 16,$
$-12x > 15,$
$x < -\frac{15}{12},$
$x < -1{,}25.$

Відповідь. $(-\infty; -1{,}25)$.

4 Розв'яжіть подвійну нерівність: $-2 \leq 10x - 3 \leq 5$.

● **Розв'язання.** $-2 + 3 \leq 10x - 3 + 3 \leq 5 + 3,$
$1 \leq 10x \leq 8,$
$0{,}1 \leq x \leq 0{,}8.$

Відповідь. $[0{,}1; 0{,}8]$.

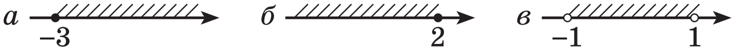
Виконайте усно

126. Які з чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5 задовольняють нерівність:
а) $2x - 5 > 0$; б) $4x + 1 \leq 13$; в) $3x + 4 \geq 5$?

127. Розв'яжіть нерівності:
а) $2x < 6$; в) $0{,}5z > 2$; ґ) $x + 3 < x$;
б) $-3x > 9$; г) $\frac{2}{3}y < 10$; д) $x - 3 \leq x$.

128. Скільки розв'язків має нерівність:
а) $x^2 + 1 < 0$; в) $|x| \leq 0$; ґ) $10x < 20$?
б) $|x| < 0$; г) $-\sqrt{2}x > 2$;

129. ***Відкрита задача.*** Складіть нерівності, розв'язки яких зображено на малюнку 18.

Мал. 18


Рівень А

130. Зобразіть на координатній прямій у вигляді проміжків множини чисел, що задовольняють нерівність:

а) $x < 4$; б) $x > -1$; в) $x \le 0{,}5$.

Розв'яжіть нерівність **(131–134)**.

131. а) $x + 2 > 5$; б) $x - 4 > 0$; в) $2 + x \ge 3$; г) $3x > 15$; ґ) $4y < 36$; д) $5z \ge 35$.

132. а) $3x > 15$; б) $x + 7 > 0$; в) $2x - 5 \ge 0$; г) $-4x \ge 20$; ґ) $x - 1{,}5 \le 0$; д) $10 + 5x < 0$.

133. а) $-x < 5$; б) $-z \ge -4$; в) $-x < 0$; г) $-5x \le 15$; ґ) $-3x > -3$; д) $5z \le -1$.

134. а) $3x + 2 < 5$; б) $7x - 4 \ge 8$; в) $9x + 5 > 5$; г) $5x - 4 < 3x$; ґ) $6z + 1 > 2z$; д) $y + 5 < 2y$.

135. Чи рівносильні нерівності:

а) $2x + 3 > x + 8$ і $x > 5$;

б) $2x - 3 \ge 2$ і $2x - 4 \ge 1$;

в) $3 - 5x < x$ і $6x > 3$;

г) $3x - 1 < 6 - 2x$ і $1 - 3x < 2x - 6$?

Розв'яжіть нерівність **(136–139)**.

136. а) $8x - 3 > 5x + 6$; б) $7y - 13 < 5y - 9$; в) $2x - 3 \le 3x - 8$; г) $x - 15 \ge 4x + 3$; ґ) $3 + x > 2x - 3$; д) $5 - 2y < y + 8$; е) $3 - 5x > 4 - 5x$; є) $8 + 6z \le 13 + 6z$.

137. а) $6x + 21 \le 5x + 8$; б) $3x + 7 < 7x + 3$; в) $7x - 5 > 3x + 7$; г) $2x - 9 \ge 9x + 5$; ґ) $x - 15 < 6x - 10$; д) $11x - 3 \le 8x - 15$; е) $18 - 7x \ge 5x + 30$; є) $17 - x > 10 - 6x$.

138. а) $3(x + 1) > x + 5$; б) $2(x - 1) + 4 < x + 7$; в) $4(x - 2) < x + 1$; г) $3(x + 2) - 4 > x + 2$; ґ) $2(x + 3) \ge 5x - 9$; д) $4(x + 3) - 3x \le x - 5$.

139. а) $-5(x - 1) < 3 - 7x$; б) $2(3 - x) - x < 7 + 3x$; в) $3(2 - x) > x - 6$; г) $-3(2 + x) + 5x \le 2x + 1$; ґ) $8 - 3(x - 2) > 4x$; д) $5y < 12 - 4(y + 5)$.

140. За якої умови набуває від'ємних значень вираз:

а) $7 + 5x$; б) $10 - 0{,}5x$; в) $\sqrt{2} - 2x$?

141. За якої умови набуває невід'ємних значень вираз:

а) $2{,}5 + 0{,}5x$; б) $3{,}9 + 1{,}5x$; в) $1{,}2 - 3x$?

142. За якої умови значення даного виразу більше за 10:
а) $3 + 7x$; б) $5{,}4 - 2{,}3x$; в) $12 - x\sqrt{2}$?

143. За якої умови значення виразу $3x - 7$ більше за відповідне значення виразу:
а) $2x + 1$; б) $5x - 2$; в) $3x - 5$?

Розв'яжіть нерівність **(144–147).**

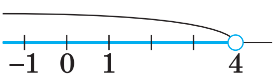
144. а) $\frac{5x}{7} \le 3$; в) $0 > \frac{5x}{11}$; ґ) $-\frac{x}{2} \le 1$; е) $\frac{2x+5}{7} > 3$;
б) $\frac{-3x}{4} < 5$; г) $\frac{2x}{5} > -3$; д) $\frac{3x-1}{4} \le 2$; є) $\frac{7x-3}{5} \ge x$.

145. а) $\frac{3x}{5} > 2$; в) $\frac{2x}{3} < -4$; ґ) $\frac{6x+1}{2} > 3$; е) $\frac{3}{5}(x-4) > 12$.
б) $\frac{4x}{7} < 4$; г) $0 \ge \frac{17x}{5}$; д) $\frac{4x-11}{5} \le 0$;

146. а) $(x + 2)^2 > 5x + x^2$; в) $4 - (x - 2)^2 > x - x^2$;
б) $(x + 3)^2 - 2x \ge 5x + x^2$; г) $(7 - x)^2 - x^2 \le x - 11$.

147. а) $(x - 3)^2 \le x^2 - x$; в) $1 - (x + 2)^2 < 5 - x^2$;
б) $(x - 2)^2 + 7x < x^2 - 3x$; г) $(x - 5)^2 - 7 > x^2 + 8$.

148. ***Відкрита задача.*** Напишіть три різні нерівності, множини розв'язків яких відповідали б проміжку, зображеному на малюнку 19. Складіть аналогічну задачу та розв'яжіть її.



Мал. 19

149. Яке найбільше натуральне значення n задовольняє нерівність:
а) $18 - 3(n - 15) > 11n$;
б) $0{,}3(n - 2) < 1{,}2 - 0{,}5(n + 2)$?

150. Яке найменше ціле значення m задовольняє нерівність:
а) $3m + 8(2m - 1) > 5m + 35$;
б) $m^2 + 4m \le (m + 3)^2$?

Рівень Б

151. Для яких значень x значення функції $y = \frac{2}{3}x - 7$:
а) додатні; б) невід'ємні;
в) більші від 5; г) не менші від $-\frac{1}{3}$?

152. Для яких значень x значення функції $y = 5{,}2 - 2{,}5x$:
а) від'ємні; б) додатні; в) не більші від 7,7?

153. При яких значеннях змінної x має зміст вираз:

а) $\sqrt{3x-6}$; в) $\sqrt{-(2-x)}$; ґ) $\sqrt{1-5(x+3)}$;

б) $\sqrt{4-x}$; г) $\sqrt{0,5-0,3x}$; д) $x+\sqrt{2-x}$?

Розв'яжіть нерівність **(154–161).**

154. а) $3(x + 4) + 2(3x - 2) > 5x - 3(2x + 4)$;

б) $2x - 6 - 5(2 - x) \le 12 - 5(1 - x)$;

в) $x + 2 < 5(2x + 8) + 13(4 - x) - 3(x - 2)$.

155. а) $y + 7 > 4(2 - y) - 12(4 - 2y) + 17(y - 1)$;

б) $0,2(x - 2) - 0,3(3 - x) \ge 0,4(2x - 1) - 0,5(x - 1)$;

в) $2,5(2 - z) - 3,5(z - 1) \le 2,5(z + 2) - 1,5(2 - z)$.

156. а) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}>6$; в) $x+\frac{x}{2}\ge 15$; ґ) $\frac{3-y}{4}-\frac{y+2}{5}\ge 2$.

б) $\frac{3x}{2}-\frac{x}{3}>2$; г) $\frac{2+x}{3}-\frac{3-x}{2}>0$;

157. а) $\frac{7(x-3)}{2}+5(6-2x)+14<\frac{x-3}{2}$;

б) $3(2x-4)+5(x-2)-3\le\frac{9}{2}(x-2)$.

«Геній — це один відсоток натхнення і дев'яносто дев'ять відсотків поту».
Т. А. Едісон

158. а) $\frac{3(2+c)}{2}-6<\frac{7c-2}{3}-\frac{12+4c}{5}$;

б) $\frac{5z-18}{10}-\frac{27-10z}{14}>\frac{3z-12}{5}-\frac{9-4z}{7}$.

159. а) $(x - 2)(x - 3) > x^2$; г) $(3x - 2)(3 + 2x) \ge 6x^2$;

б) $(x + 5)(x - 7) < x^2$; ґ) $(3x - 1)^2 \le 9x(x - 2)$;

в) $(2x - 1)(3x + 5) \le 6x^2$; д) $(3x - 2)^2 \ge (3x + 2)^2$.

160. а) $(z - 2)^2 < (z - 3)(z + 5)$; в) $\left(\frac{1}{x}+x\right)^2>\frac{1}{x^2}+x^2$;

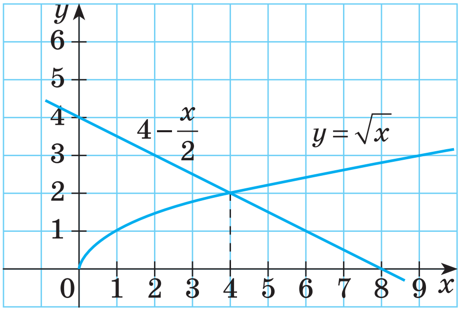
б) $(y + 3)^2 \ge y\,(y - 5)$; г) $\left(\frac{1}{x}-x\right)^2>\frac{1}{x^2}+x^2$.

161. а) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-3x>\sqrt{2}$; в) $\frac{2x-3}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}>0$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{x}{2}>\sqrt{2}-1$; г) $\frac{2-\sqrt{2}}{3x+2}<0$.

162. На малюнку 20 зображено графіки функцій $y=\sqrt{x}$ і $y=4-\frac{x}{2}$.

Дивлячись на них, укажіть множину розв'язків нерівності $\sqrt{x}<4-\frac{x}{2}$.



Мал. 20

163. Розв'яжіть графічно нерівність:

а) $\sqrt{x} > \frac{8}{x}$; б) $\sqrt{x} \geq x^2$; в) $\sqrt{x} < x-2$.

164. ***Відкрита задача.*** Напишіть нерівність зі змінною x:

а) яка не має жодного розв'язку;
б) яку задовольняє кожне дійсне число;
в) яку задовольняє тільки одне число 5;
г) яку задовольняють усі числа з проміжку $(-2; 3)$.

165. Туристи мають повернутися на базу не пізніше ніж через 3 год. На яку відстань вони можуть відплисти за течією річки на моторному човні, якщо його власна швидкість 18 км/год, а швидкість течії — 4 км/год?

166*. Розв'яжіть нерівність:

а) $(2x - 3)(5x + 2) - (3x - 1)(4x + 2) > 2(1 - x)(1 + x) - x$;
б) $(3x - 2)(3x + 2) - (2x - 3)^2 \leq 5x (x + 7) + 10$;
в) $(4x + 1)(3x - 5) + (2x + 3)(5x - 4) < 2x^2 + 5(2x - 1)^2$;
г) $(3x + 1)^2 - (2x - 3)(3 - 2x) \geq (2x + 1)^2 + (3x - 7)(3x + 7)$.

167. Розв'яжіть подвійну нерівність:

а) $-3 \leq 5x - 1 \leq 4$;
б) $1 < 3x + 4 < 7$;
в) $-5 \leq 3 - 2x < 1$;
г) $-\frac{2}{5} < \frac{4x-1}{3} < \frac{3}{5}$;
ґ) $0,7 < 3x + 1 < 1,3$;
д) $-3,4 \leq 5 - 2x \leq 1,8$;
е) $-8 < 7 - 5x < -3$;
є) $-\frac{2}{3} < \frac{2-0,5x}{5} \leq \frac{1}{3}$.

168. Розв'яжіть подвійну нерівність і вкажіть її найбільший цілий розв'язок:

а) $2 < 3x - 5 < 7$;
б) $-3 \leq 4 - 2x \leq 3$;
в) $-2 \leq 1 - 3x \leq 4$;
г) $-0,3 < 2,7 + 0,1x < 1,7$.

Розв'яжіть нерівність **(169–170).**

169*. а) $|x| < 5$; б) $|x-3| \leq 7$; в) $|2x-3| < 1$.

170*. а) $|3x| \leq 1$; б) $|x+7| < 3$; в) $|1-5x| \leq 2$.

171*. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність.

а) $ax > 5$;
б) $ax \le 0$;
в) $(2a - 1)x < 4a^2 - 4a + 1$;
г) $ax > a$;
ґ) $a^2x \le 0$;
д) $a^2 + a - 12 \le (9 - a^2)x$.

Вправи для повторення

172. 1) Юрій Олексійович Митропольський очолював Інститут математики НАН України 30 років з 1958 по 1988 рік. Його наступником став відомий український математик, учень Ю. О. Митропольського, прізвище якого ви дізнаєтеся, якщо правильно встановите відповідність між цифрами першої таблиці і буквами другої. У другому рядку першої таблиці містяться абсциси, а у першому рядку другої таблиці — відповідні ординати точок, що належать графіку функції.

$$y = \begin{cases} 3 - 2x - x^2, \ x \le 1, \\ x^2 - 6x + 5, \ x > 1. \end{cases}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–1	–2	4	3	–3	2,5	–4	1,5	6	–1,5

–5	–4	–3,75	–3	–1,75	0	3	3,75	4	5
Е	О	Л	М	Н	Й	А	О	С	К

2) Використовуючи отримані точки і формулу, побудуйте графік заданої функції.

3) Складіть аналогічну задачу про вчителя Ю. О. Митропольського.

173. Виконайте дії: а) $8 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5$; б) $5 \cdot 10^{-8} - 8 \cdot 10^{-7}$; в) $(4{,}2 \cdot 10^9)^2$; г) $(3{,}7 \cdot 10^5) \cdot 2{,}4 \cdot 10^8$.

174. Побудуйте графік рівняння: а) $xy + 6 = 0$; б) $y^2 - x = 0$.

175. Раніше 3 кг м'яса коштували стільки, скільки тепер коштують 2 кг. На скільки відсотків подорожчало м'ясо?

Скарбничка досягнень

✓ Можу навести приклади:
— нерівностей зі змінними $x^2 < 1$ $x + y > 0$;
— лінійних нерівностей з однією змінною $2x < 3$ $-x \ge 5$.

✓ Розрізняю тотожні нерівності і нерівності з невідомими.

✓ Розумію і вмію формулювати властивості нерівностей зі змінною.

✓ Умію: — розв'язувати лінійні нерівності з однією змінною;
— записувати розв'язки нерівностей.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

— Як позначають множини $A, B, C, \dots, N, Z, Q\dots$.

— Що таке підмножина

Множина K — частина множини M.
$K \subset M$ K — підмножина M.

$N \subset Z \subset R$.

— На основі яких властивостей розв’язують нерівності (с. 32).

— Як зображають розв’язки лінійної нерівності (с. 33).

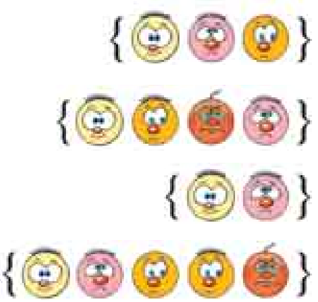
— Що означають записи $a \le b$ і $a \ge b$?

$a \le b$	$a \ge b$
$a < b$ або $a = b$	$a > b$ або $a = b$

§ 5 Об’єднання і переріз множин. Числові проміжки

Ви вже знаєте, що в математиці будь-які сукупності називають *множинами*. Розглядають множини, елементами яких є і певні математичні поняття: геометричні фігури (наприклад, множина чотирикутників), числа (наприклад, множина дійсних чисел), функції (наприклад, множина лінійних функцій), рівняння (наприклад, квадратні рівняння), розв’язки нерівностей (наприклад, порожня множина) тощо. Окрім них розглядають множини, елементами яких є довільні об’єкти: тварини, рослини, пори року, дні тижня, планети, обласні центри України, засоби зв’язку тощо. Трапляється, що деякі множини мають спільні елементи.

Розглянемо як приклад дві множини «смайликів»: множину A, що містить 3 елементи, і множину B, що містить 4 елементи (мал. 21, *а*).



а Множина A

Множина B

б Множина $A \cap B$

в Множина $A \triangle B$

Мал. 21

Зверніть увагу, кожна із цих множин містить смайлик, який посміхається, —  і сумний смайлик — . Якщо множина містить усі спільні елементи множин A і B і тільки їх, то цю множину називають *перерізом* множин A і B. У даному випадку перерізом множин A і B буде множина, що складається з двох елементів (зображена на малюнку 21, *б*).

Іншими словами:

Перерізом двох множин називають множину, яка містить елементи, що належать кожній із цих двох множин і тільки ці елементи.

Записують це так: $A \cap B$.

Розгляньте малюнок 21, *в*. Множина, зображена на ньому, містить п’ять різних смайликів, кожен з яких є елементом або множини A, або множини B. Таку множину називають *об’єднанням* множин A і B.

Об’єднанням двох множин називають множину, яка містить кожний елемент кожної з множин і тільки ці елементи.

Записують це так: $A \vartriangle B$.

Розглянемо ще один приклад. Знайдемо об’єднання і переріз множин A і B, якщо: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Числа 2, 4 і 6 є елементами кожної з множин, тому $A \cap B =\{ 2, 4, 6\}$.

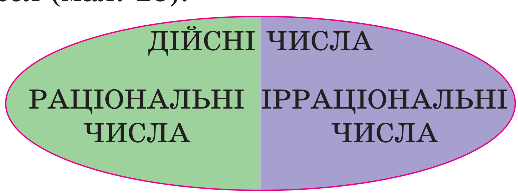
$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, бо ця множина містить кожен елемент множин A та B і тільки їх елементи.

Перерізи та об’єднання множин зручно ілюструвати діаграмами Ейлера (мал. 22 і мал. 23).

Наприклад, перерізом обсягів понять *прямокутники* і *ромби* є множина *квадратів* (мал. 22).

Мал. 22

Об’єднанням множини раціональних і ірраціональних чисел є множина дійсних чисел (мал. 23).



Мал. 23

Окремі види множин — числові проміжки, що є розв’язками нерівностей (див., наприклад, малюнки 14 і 15). Поняття числового проміжку часто використовують і в інших розділах математики. Тому бажано розрізняти різні види числових проміжків і навчитися знаходити їх перерізи та об’єднання.

Перерізом двох числових проміжків називають їх спільну частину.

Наприклад, перерізом проміжків $(-\infty; 4)$ і $(-3; \infty)$ є проміжок $(-3; 4)$.

Переріз двох множин позначають знаком $\cap$. Тому пишуть: $(-\infty;\ 4) \cap (-3;\ \infty) = (-3;\ 4)$.

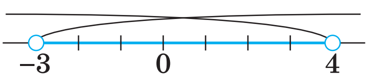
Наочно цю рівність ілюструє малюнок 24.

Інші приклади.

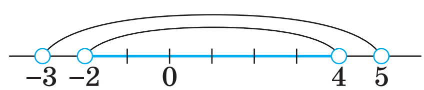
Малюнкам 25–27 відповідають рівності:

$$(-3; 5) \cap (-2; 4) = (-2; 4);$$
$$[-3; 5) \cap (-4; -3] = \{-3\};$$
$$(-3; 5) \cap (-5; -4) = \varnothing.$$

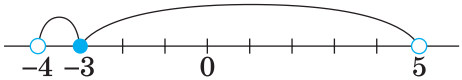
Переріз проміжків*



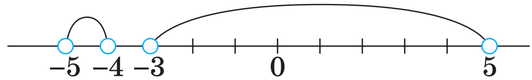
Мал. 24



Мал. 25



Мал. 26



Мал. 27

Друга рівність стверджує, що числові проміжки $[-3;\ 5)$ і $(-4;\ -3]$ мають тільки одне спільне число -3.

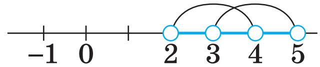
Знаком $\varnothing$ позначають *порожню множину*. Остання рівність стверджує, що числові проміжки $(-3;\ 5)$ і $(-5;\ -4)$ не мають спільних чисел.

Об’єднанням двох числових проміжків називають множину чисел, яка містить кожне число кожного проміжку і тільки такі числа.

Об’єднання двох множин позначають знаком $\vartriangle$. Тому пишуть:

$$(2; 4) \vartriangle (3; 5) = (2; 5).$$

Наочно цю рівність ілюструє малюнок 28.



Мал. 28

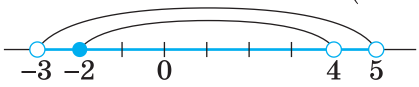
* Щоб скористатися QR-кодом, необхідно встановити спеціальне програмне забезпечення на смартфоні/планшеті. Наприклад, для пристроїв з операційною системою Android потрібно запустити застосунок Google Play Market та завантажити програму Powerful QR Code Scaner A+ або будь-яку аналогічну. Завантажити програми для зчитування QR-кодів для інших операційних систем допоможуть відповідні застосунки: Windows Mobile — Windows Store, iOS — Upp Store.

Малюнкам 29–31 відповідають рівності:

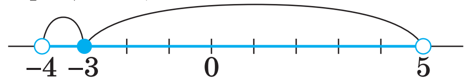
$$(-3; 5) \cup [-2; 4) = (-3; 5);$$

$$[-3; 5) \cup (-4; -3] = (-4; 5);$$

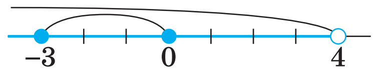
$$(-\infty; 4) \cup [-3; 0] = (-\infty; 4).$$



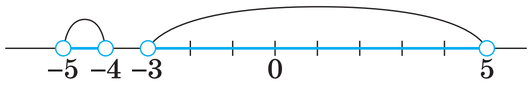
Мал. 29



Мал. 30



Мал. 31



Мал. 32

Об'єднання проміжків (−3; 5) і (−5; −4) складається з двох роз'єднаних проміжків (мал. 32); його позначають так:

$$(-5; -4) \cup (-3; 5).$$

Іноді доводиться розглядати переріз або об'єднання трьох чи більшої кількості числових проміжків.

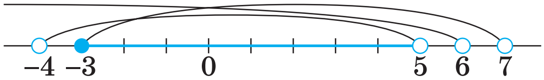
Перерізом трьох числових проміжків є множина чисел, яка містить числа, спільні для усіх трьох даних проміжків і тільки їх. Наприклад,

$$(-4; 5) \cap (-\infty; 6) \cap [-3; 7) = [-3; 5).$$

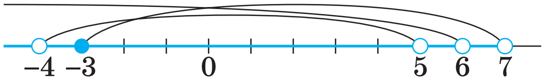
Об'єднанням трьох числових проміжків є множина чисел, яка містить кожне число кожного проміжку і тільки їх. Наприклад,

$$(-4; 5) \cup (-\infty; 6) \cup [-3; 7) = (-\infty; 7).$$

Цим рівностям відповідає малюнок 33, *а* і *б*.



а



б

Мал. 33

Оскільки існує багато видів числових проміжків, то їх бажано відповідно називати. Якщо a і b — довільні дійсні числа, то:

$(-\infty; a)$, $(b; \infty)$ — нескінченні числові проміжки;

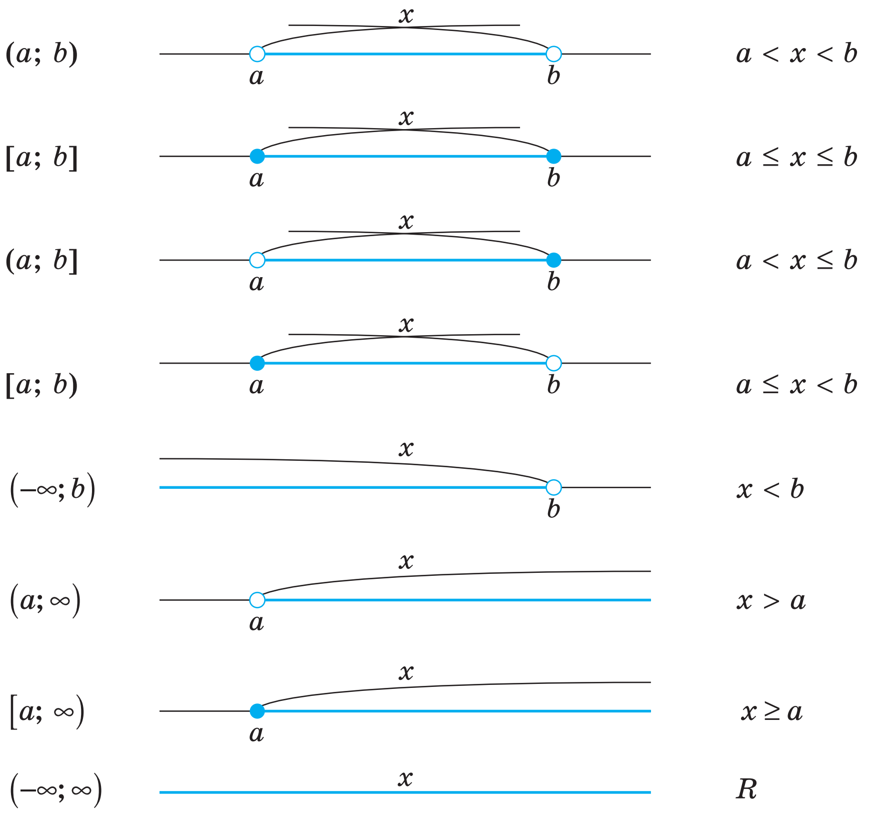
(a**;** b**)** — відкритий проміжок, або *інтервал*;

[a**;** b**]** — закритий проміжок, *відрізок*;

[a**;** b**)** — проміжок, відкритий справа;

(a**;** b**]** — проміжок, відкритий зліва.

На малюнку 34 показано числові проміжки, їх зображення на числовій прямій і відповідні нерівності.



Мал. 34

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Іноді виникає потреба знайти об'єднання розв'язків двох або більше нерівностей. У таких випадках говорять про *сукупність нерівностей*. Її записують за допомогою квадратної дужки:

$$\left[\begin{array}{l} 2x > 17, \\ x - 1 < 3; \end{array}\right. \text{ або } \left[\begin{array}{l} x > 8{,}5, \\ x < 4. \end{array}\right.$$

Розв'язком сукупності нерівностей називається значення змінної, яке задовольняє хоча б одну з даних нерівностей. Розв'язати сукупність нерівностей — означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх не існує. Множиною розв'язків даної сукупності нерівностей є два проміжки $(-\infty;\ 4) \cup (8{,}5;\ \infty)$.

Сукупності використовують для розв'язування деяких видів рівнянь і нерівностей, зокрема нерівностей з модулем. Будь-яку нерівність виду $|M| > a$, де M — деякий вираз, можна записати у вигляді сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} M > a, \\ M < -a. \end{array}\right.$$

Перевірте себе

1. Що таке переріз двох множин? Яким символом його позначають?
2. Що таке переріз двох числових проміжків?
3. Що таке об’єднання двох множин? Яким символом його позначають?
4. Що таке об’єднання двох числових проміжків?
5. Наведіть приклад інтервалу, відрізка.
6. Наведіть приклади нескінченних числових проміжків.

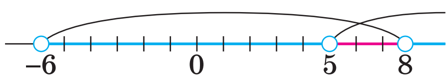
Виконаємо разом

1 Знайдіть переріз і об’єднання числових проміжків $(-6; 8)$ і $(5; \infty)$.

● **Розв’язання.** Зобразимо дані проміжки геометрично (мал. 35). Їх спільні числа складають проміжок $(5; 8)$. Отже, $(-6; 8) \cap (5; \infty) = (5; 8)$.

Об’єднання даних числових проміжків:

$$(-6; 8) \vartriangle (5; \infty) = (-6; \infty).$$

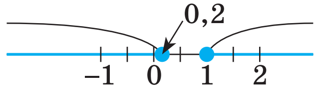


Мал. 35

2 Розв’яжіть нерівність $|5x - 3| \geq 2$.

● **Розв’язання.** а) Нерівність $|5x - 3| \geq 2$ рівносильна сукупності нерівностей $\left[\begin{array}{l} 5x - 3 \geq 2, \\ 5x - 3 \leq -2, \end{array}\right.$ або $\left[\begin{array}{l} 5x \geq 5, \\ 5x \leq 1, \end{array}\right.$ звідси $\left[\begin{array}{l} x \geq 1, \\ x \leq 0,2. \end{array}\right.$

На малюнку 36 зображено множину чисел, що відповідає цій сукупності і задовольняє задану нерівність.



Мал. 36

Відповідь. $(-\infty; 0,2] \vartriangle [1; \infty)$.

Виконайте усно

176. Знайдіть об’єднання та переріз множин A і B, якщо:

а) $A = \{8, 6, 4, 2, 0\}$ і $B = \{0, -2, -4, -6\}$;

б) $A = \{$Ш, К, О, Л, А$\}$ і $B = \{$Д, О, Ш, К, А$\}$;

в) $A = \{\circledast, \boxtimes, \oplus, ⊜, \boxplus\}$ і $B = \{\boxminus, \boxtimes, ⊜, \ominus, \boxdot\}$.

177. Знайдіть об'єднання числових проміжків:

а) (0; 1) і (0; 2);
б) (0; 1) і (0,5; 1);
в) (1; 2] і [2; 5);
г) $(-\infty; 0)$ і [0; 3).

178. Знайдіть переріз числових проміжків, указаних у попередньому завданні.

179. Які натуральні числа містяться в числовому проміжку (1; 8)? А в проміжку [1; 8]?

180. Які цілі числа містяться в проміжку:

а) [−3; 4]; б) (−3; 4); в) (−3; 4]; г) [−3; 4)?

181. Чому дорівнює переріз проміжків [a; b] і (a; b)? А їх об'єднання?

Рівень А

182. Зобразіть на координатній прямій числовий проміжок:

а) $(2; \infty)$; б) $(-\infty; 0)$; в) $[-3; \infty)$; г) $(-\infty; -4]$.

183. Запишіть символами числові проміжки, що відповідають проміжкам, зображеним на малюнку 37.

а *б* *в* *г*

Мал. 37

184. Зобразіть у вигляді проміжків і на координатній прямій множини чисел, що задовольняють нерівність:

а) $x < 3$; б) $x \geq -2$; в) $x \leq 0$; г) $x > 7$.

185. Яка лінійна нерівність має множину розв'язків:

а) $(3; \infty)$; б) $(-2; \infty)$; в) $(-\infty; 7]$; г) $[-3; \infty)$?

186. ***Відкрита задача.*** Складіть лінійну нерівність, яка має множину розв'язків, зображену на малюнку 37.

187. Зобразіть символами і графічно множину дійсних чисел, які задовольняють подвійну нерівність:

а) $-3 < x < 2$; б) $0 < x < 4$; в) $-5 < x < 0$.

188. Знайдіть об'єднання і переріз числових проміжків:

а) [2; 3] і [3; 5];
б) [−5; 0] і [−3; 0];
в) [−5; 7] і [−7; 5);
ґ) (1; 2) і (−2; 1);
г) (−2; −1) і [−3; −1];
д) $(-\infty; 2)$ і $[-2; \infty)$.

189. Перемалюйте таблицю в зошит і занесіть у неї об'єднання та перерізи зазначених числових проміжків.

№	Проміжки	Об'єднання	Переріз
1	(0; 3) і (0; 5)		
2	(−2; 0) і (−3; 0)		
3	$(-\infty; 1)$ і (0; 2)		
4	$(-2; \infty)$ і $(0; \infty)$		
5	$(-\infty; 1)$ і $(0; \infty)$		

190. Порівняйте числа a і c, якщо:

а) $(-\infty; a) \triangle (c; \infty) = R$;
в) $(y; a) \cap (c; y) = \varnothing$;
б) $(a; x) \cap (x; c) = \varnothing$;
г) $(a; \infty) \triangle (-\infty; c) = R$.

Розв'яжіть нерівність і запишіть відповідь у вигляді проміжку **(191–192).**

191. а) $5x - 3 > 12$; в) $0,5x + 2,6 > 3$; ґ) $5 - 3x < 2$;
б) $3x + 5 \geq 11$; г) $1 + 2x < 7$; д) $-1,3x - 9 \leq 4$.

192. а) $3x \leq 1 - 2x$; в) $5x > x - 2$; ґ) $2x \leq 7x + 3$;
б) $-7x < 3x + 5$; г) $-2x > 9 - 5x$; д) $1,1x \geq x - 5$.

Зобразіть на координатній прямій множину розв'язків нерівності **(193–195).**

193. а) $0,5x - 4(x - 3) > 3x$; в) $0 < y - 0,3(2 - y)$;
б) $6x < 0,2x - 2(x + 3)$; г) $4 \geq 5z - 0,2(1 - z)$.

194. а) $0,3 \leq 1,2 + 0,5(x - 2)$; в) $2,7(x + 3) < 7,2(x - 3)$;
б) $0 < 4,5 + 0,7(2y - 3)$; г) $3,4(2x + 3) < 6(x + 2)$.

195. а) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} < \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$; в) $x - \frac{2}{5}(x - 3) > 0,4$;
б) $\frac{2}{5}y - \frac{3}{4} > \frac{3}{4}y - \frac{2}{5}$; г) $2y - \frac{1}{2} < 0,2(y + 3)$.

Рівень Б

196. За якої умови:

а) $(a; b) \cap (m; n) = (a; b)$; б) $(a; b) \triangle (m; n) = (a; b)$?

197. Порівняйте числа x і a, y і c, якщо:

а) $(a; c) \cap (x; y) = (a; c)$; в) $(a; c) \triangle (x; y) = (a; c)$;
б) $(a; c) \cap (x; y) = (x; y)$; г) $(a; c) \triangle (x; y) = (a; y)$.

198. Запишіть у вигляді подвійної нерівності співвідношення між числами a, x і y, якщо:

а) $(a; \infty) \cap (x; y) = (a; y)$; в) $(-\infty; a) \triangle (x; y) = (-\infty; y)$;
б) $(a; \infty) \triangle (x; y) = (a; \infty)$; г) $(-\infty; a) \cap (x; y) = (x; a)$.

199. Які дробові числа зі знаменником 2 містяться у проміжку:
а) (1; 6); б) (2; 3); в) [–5; 0]; г) [–2; 3]?

200. При яких значеннях x значення виразу $1,3 - 0,3x$ належить проміжку:
а) (–0,2; 2,5); б) [1; 4); в) (–2,6; 0,2]; г) [–2; 0,1]?

201. При яких значеннях x значення виразу $3x + 2$ належить проміжку:
а) [–1; 5]; б) (1; 17); в) [0; 3); г) (–7; –1]?

202. Вишивальниця працює вдома і за одну годину роботи заробляє 10 грошових одиниць. Їй потрібно придбати певний товар, вартість якого у магазині становить 15 грошових одиниць за 1 пакунок без черги, а у гіпермаркеті цей самий товар вона може придбати за 11 грошових одиниць, але для цього вона має вистояти чергу протягом однієї години. З'ясуйте: а) за яких умов вигідною є покупка дорожчого товару; б) скільки товару слід придбати, щоб вигідно було стояти в черзі 1 годину.

Розв'яжіть нерівність і запишіть розв'язок у вигляді проміжку **(203–204)**.

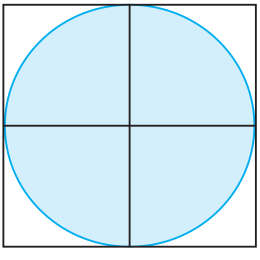
203. а) $5(x + 2) + 2(x - 3) < 3(x - 1) + 4(x + 3)$;
б) $3(2x - 1) + 3(x - 1) \geq 5(x + 2) + 2(2x + 3)$;
в) $2(x - 3) + 5(x - 2) > 3(2 - x) - 2(3 - x)$;
г) $9(x - 2) - 2(3x - 2) \leq 5(x - 2) - 2(x + 5)$.

204. а) $\frac{x-2}{2} - \frac{2x-3}{3} < \frac{x-4}{6} - \frac{x+1}{3}$;
б) $\frac{x-2}{2} + \frac{1-7x}{4} - \frac{x+11}{3} \geq \frac{5+2x}{4}$;
в) $\frac{3-2x}{2} - \frac{x-1}{3} > \frac{5-3x}{4} - \frac{4x+3}{6}$;
г) $\frac{6x-5}{3} - \frac{11+7x}{5} < \frac{4x+3}{5} - \frac{2x+3}{10}$.

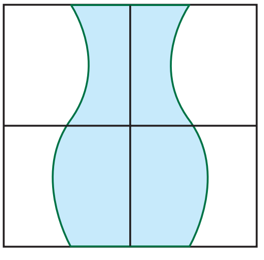
«Поле застосування математики не має меж, відмінних від меж самого знання».
С. Н. Бернштейн

205. Прийнявши площу меншого квадрата за 1, з'ясуйте, до якого числового проміжку належить площа зафарбованої фігури, зображеної на малюнку 38: а) [1; 2), б) [2; 3), в) [3; 4), г) [4; 5)?

а



б



Мал. 38

Знайдіть об'єднання і переріз множин, що є розв'язками нерівностей **(206–207).**

206. а) $\frac{5x-1}{4}+\frac{x+1}{2}<0$ і $\frac{x-3}{5}-\frac{2x-1}{10}\geq 4;$

б) $\frac{3+x}{2}+\frac{2-x}{3}\geq 0$ і $\frac{4x+3}{7}+\frac{x+1}{2}<2.$

207. а) $3x-\frac{2x-1}{4}>0$ і $\frac{x+1}{2}-\frac{x+3}{4}\geq 2;$

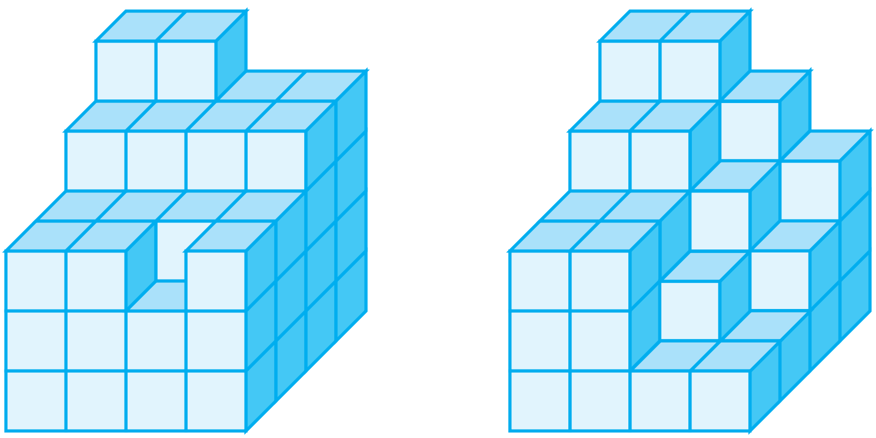
б) $\frac{3-x}{15}-\frac{x-3}{3}>0$ і $\frac{3x-2}{4}-\frac{5x+1}{3}>1.$

208. На малюнку 39, *а* зображено фігуру, складену з n кубиків, поставлених на квадрат 4 × 4.

1) До якого з проміжків — (57; 67), (50; 69) чи [45; 55] входить число n?

2) До якого з проміжків — $(13;\ 23]$, $(25;\ 35]$, $(10;\ 20]$ входить число m кубиків, якими слід доповнити задану фігуру, щоб отримати куб $4\times4\times5$?

3) ***Відкрита задача.*** Складіть і розв'яжіть аналогічні задачі, зобразивши фігуру, складену з n кубиків, поставлених на квадрат 5×5 (мал. 39,б).



а *б*

Мал. 39

Розв'яжіть нерівність **(209–210).**

209*. а) $|x|>1;$ в) $|3x+1|>5;$ г) $|x-1|>3;$

б) $|x+2|>5;$ г) $|5x|>2;$ д) $|5-2x|>3.$

210*. а) $|x+5|>-3;$ в) $|2x-1|>1;$ г) $|5x+3|\geq 0;$

б) $|1-3x|<-1;$ г) $|x-1|\leq 0;$ д) $|8-4x|<0.$

Вправи для повторення

211. Знайдіть значення добутку:

а) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{40}$; в) $\sqrt{42}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt{18}$;

б) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{48}\cdot\sqrt{50}$; г) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{72}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{45}$.

212. Знайдіть корені рівняння:

а) $5\sqrt{x}=0$; в) $6\sqrt{x}-48=0$; ґ) $4\sqrt{x}+9=11$;

б) $10\sqrt{x}=4$; г) $3\sqrt{x}+20=0$; д) $7-2\sqrt{x}=12$.

213. ***Задача ал-Кархі.*** Знайдіть площу прямокутника, основа якого вдвічі більша за висоту, а площа чисельно дорівнює периметру.

214. Об'єктом оподаткування транспортним податком є легкові автомобілі, з року випуску яких минуло не більше п'яти років (включно) та середньоринкова вартість яких становить 1,03 млн грн. Транспортний податок за 2016 рік за легкові автомобілі сплачують власники за ставкою 25 000 грн на рік за кожен автомобіль. Установіть, який відсоток вартості нового автомобіля заплатить його власник у вигляді транспортного податку за 5 років, якщо автомобіль коштує:

а) 1 055 835 грн; в) 2 051 281 грн;

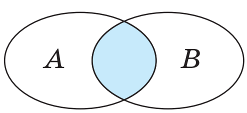
б) 1 187 844 грн; г) 2 450 448 грн.

Скарбничка досягнень

✓ Можу пояснити, що таке переріз і об'єднання множин.

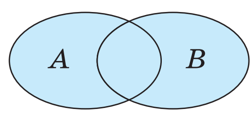
Переріз множин

$A\cap B$



Об'єднання множин

$A \vartriangle B$



✓ Умію зображати числові проміжки, задані нерівностями (с. 45)

✓ Умію зображати на координатній прямій об'єднання та переріз числових проміжків.

✓ Умію записувати символами і нерівностями задані графічно числові проміжки.

✓ Хочу навчитися записувати розв'язки сукупностей нерівностей у вигляді об'єднання відповідних проміжків.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

— Зміст відношень «більше», «менше», «не більше», «не менше».
— Види нерівностей (строгі, нестрогі, числові, зі змінними).
— Властивості числових нерівностей.
— Як розв'язують лінійні нерівності.
— Як записують розв'язки нерівностей.
— Що таке переріз та об'єднання множин.
— Як знайти переріз та об'єднання числових проміжків.

§ 6 Системи нерівностей з однією змінною

Іноді виникає потреба визначити спільні розв'язки кількох нерівностей. Знайдемо, наприклад, спільні розв'язки двох нерівностей

$$2x - 3 < 5 \text{ і } 2 - 3x < 11.$$

Тобто знайдемо такі значення x, які задовольняють як першу, так і другу нерівність.

У таких випадках говорять про ***систему нерівностей***.

Систему нерівностей, як і систему рівнянь, записують за допомогою фігурної дужки:

$$\begin{cases} 2x - 3 < 5, \\ 2 - 3x < 11. \end{cases}$$

Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, яке задовольняє кожну з нерівностей даної системи.

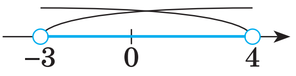
Розв'язати систему нерівностей **— означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх немає.**

Розв'яжемо наведену вище систему, поступово замінюючи кожну її нерівність простішою і рівносильною їй:

$$\begin{cases} 2x - 3 < 5, \\ 2 - 3x < 11; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x < 8, \\ -3x < 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4, \\ x > -3. \end{cases}$$

Множиною розв'язків системи нерівностей буде переріз множин розв'язків нерівностей, що входять до неї. Знайдемо переріз за допомогою координатної прямої.

Першу нерівність задовольняють усі числа, менші від 4, а другу — всі числа, більші від –3 (мал. 40).



Мал. 40

Обидві нерівності системи задовольняють такі значення x, що $-3 < x < 4$. Ця множина значень x — проміжок $(-3; 4)$. Числа –3 і 4 цьому проміжку не належать.

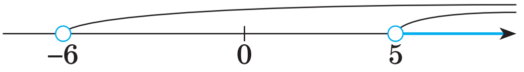
Розв'яжемо ще дві системи нерівностей:

а) $\begin{cases} 3x-1>14, \\ 2-x<8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-1>x+3, \\ 5x-1<6-2x. \end{cases}$

Розв'язання.

а) $\begin{cases} 3x-1>14, \\ 2-x<8; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x>15, \\ -x<6; \end{cases}$ $\begin{cases} x>5, \\ x>-6. \end{cases}$

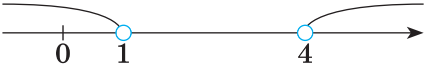
Обидві нерівності задовольняють значення x, більші від 5 (мал. 41).



Мал. 41

б) $\begin{cases} 2x>x+4, \\ 5x<7-2x; \end{cases}$ $\begin{cases} x>4, \\ 7x<7; \end{cases}$ $\begin{cases} x>4, \\ x<1. \end{cases}$

Немає числа, яке було б водночас меншим від 1 і більшим від 4 (мал. 42).



Мал. 42

Відповідь. а) $(5; \infty)$; б) розв'язків немає.

До розв'язування систем зводиться розв'язування і таких, наприклад, нерівностей:

а) $(x-2)(x+5)<0$; б) $\frac{x-2}{x+5}<0$.

Розв'язання. а) Добуток двох чисел від'ємний, якщо одне з цих чисел від'ємне, а інше — додатне. Тому розв'язком даної нерівності буде об'єднання розв'язків двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x+5<0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x-2<0, \\ x+5>0. \end{cases}$$

Перша з цих систем розв'язків не має, множина розв'язків другої системи — числовий проміжок $(-5; 2)$ — розв'язок даної нерівності.

б) Значення дробу від'ємне, якщо один з його членів від'ємний, а другий — додатний. Тому розв'язування нерівності б) таке саме, як і розв'язування нерівності а), і відповідь така сама.

Відповідь. а) $(-5;\ 2)$; б) $(-5;\ 2)$.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Розв'яжемо нерівності:

а) $|2x-3| \le 5$; б) $|x-1| > 2x-5$.

Розв'язання.

а) Нерівність $|2x-3| \le 5$ і подвійна нерівність $-5 \le 2x - 3 \le 5$ рівносильні системі нерівностей: $\begin{cases} 2x-3 \le 5, \\ 2x-3 \ge -5, \end{cases}$ або $\begin{cases} 2x \le 8, \\ 2x \ge -2. \end{cases}$

Її множина розв'язків $[-1; 4]$.

б) Нерівність $|x-1| > 2x-5$ рівносильна сукупності нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} x-1 > 2x-5, \\ x-1 < -(2x-5); \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x-1 > 2x-5, \\ x-1 < 5-2x; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x < 4, \\ 3x < 6; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x < 4, \\ x < 2. \end{array}\right.$$

Дану нерівність задовольняють усі числа з проміжків $(-\infty; 4)$ і $(-\infty; 2)$. Їх об'єднання $(-\infty; 4)$.

Відповідь. а) $[-1; 4]$; б) $(-\infty; 4)$.

Перевірте себе

1. Наведіть приклад системи нерівностей.
2. Що таке розв'язок системи нерівностей з однією змінною?
3. Що означає «розв'язати систему нерівностей»?
4. Як знайти розв'язок системи, якщо відомі розв'язки кожної нерівності, що входять до неї?

Виконаємо разом

1 Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} (z^2-2)\cdot 3 \ge 3z^2-5, \\ z^2+2z \le (z-1)(z+1). \end{cases}$$

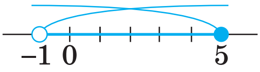
● **Розв'язання.** $\begin{cases} 3z^2-6 \ge 3z^2-5, \\ z^2+z \le z^2-1; \end{cases}$ $\begin{cases} -6 \ge -5, \\ z \le -0{,}5. \end{cases}$

Перша нерівність неправильна, тому система не має розв'язків.

Відповідь. Система розв'язків не має.

2 При яких значеннях x має зміст вираз $\frac{2}{\sqrt{x+1}}-\sqrt{5-x}$?

● **Розв'язання.** Вираз має зміст за умови, що:
$\begin{cases} x+1>0, \\ 5-x\ge 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} x>-1, \\ x\le 5. \end{cases}$
Обидві нерівності задовольняють такі значення x, що $1<x\le 5$ (мал. 43).



Мал. 43

Відповідь. (−1; 5].

Виконайте усно

215. Чи має розв'язки система нерівностей:

а) $\begin{cases} x>3, \\ x<2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x>0, \\ x<5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x>-3, \\ x<2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x\le 3, \\ x\le 2? \end{cases}$

216. Чи задовольняє систему нерівностей $\begin{cases} 2x\ge 0, \\ 3x<6 \end{cases}$ число:

а) 2; б) 3; в) 0; г) 6?

217. Яка з нерівностей: а) $|x|<3$; б) $|x|-1<0,5$; в) $|x|>5$; г) $7-|x|<0$ рівносильна системі відповідних нерівностей? А яка — сукупності?

Рівень А

218. Чи є число 2 розв'язком системи нерівностей:

а) $\begin{cases} x-3<5, \\ 4x+2>9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x\ge x+2, \\ 12<8x-5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0,5x\ge 2x-3, \\ 3x-1>4? \end{cases}$

219. Які з чисел − 1, 0, 1, 2, 3 задовольняють систему нерівностей:

а) $\begin{cases} 3-x\ge 0, \\ 7+x>0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+3>5, \\ 1-x<0? \end{cases}$

220. Розв'яжіть систему нерівностей і вкажіть два цілі числа, які її задовольняють:

а) $\begin{cases} 2x+7\ge 0, \\ 3x+6\ge 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-5<0, \\ 3x+9<0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x+1<0, \\ 2x+5>0. \end{cases}$

Розв'яжіть систему нерівностей **(221–224).**

221. а) $\begin{cases} 2x+3>x, \\ 4x-x<3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2-5x<7, \\ 3x+1<-8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 8\le 4x+8, \\ 0>3x+6. \end{cases}$

222. а) $\begin{cases} 5y-1<2y, \\ 3-2y<y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4-3y\geq -2y, \\ y-3\geq 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5y-7\leq 3y, \\ 2-4y<5. \end{cases}$

223. а) $\begin{cases} 0,5z-2<z, \\ 0,3-2z>3z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0,8x-3\geq 5, \\ 0,8x+1\geq 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 1-1,5x<x, \\ 1+1,5x<16. \end{cases}$

224. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-1>\dfrac{x}{3}, \\ x-1<7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6z+1<4z, \\ \dfrac{z}{2}-\dfrac{z}{5}>0,3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}<\dfrac{x-2}{3}, \\ 2x-3>0. \end{cases}$

225. Укажіть декілька таких значень a, щоб кожна з систем нерівностей а), б), в): 1) мала розв'язок; 2) не мала розв'язків:

а) $\begin{cases} x>a, \\ x<3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x<a, \\ x<-3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x\geq a, \\ -x\geq 2. \end{cases}$

Розв'яжіть систему нерівностей **(226–228).**

226. а) $\begin{cases} 15-3x<9x-12, \\ 8x-7>5x+4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2(x-3)\leq 5x+7, \\ 3+4x>3(x-5); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 12-z<8z-15, \\ 7z-6>6z+4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5(x+2)\geq 2x-4, \\ 3(x+3)<7-8x. \end{cases}$

227. а) $\begin{cases} 3-2(x-1)<0, \\ 5-3(x-4)>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x\leq 2-3(x+1), \\ 5x\geq 3+(x-4); \end{cases}$

б) $\begin{cases} -4(2x-1)<3, \\ -5(x-3)\geq 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 8(1+x)>3(2x-1), \\ 5<3x-2(8x-3). \end{cases}$

228. а) $\begin{cases} 2x-0,2(x-2)>4, \\ \dfrac{x}{2}-6\leq\dfrac{x}{8}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0,5x+3\leq 2,5-3x, \\ 5-0,2x\leq 0,2-5x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4-\dfrac{x-1}{3}\geq x, \\ 7x-1\geq 48; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0,4z+2\geq 3,5-2z, \\ 7-1,3z\geq 0,3-5z. \end{cases}$

229. Знайдіть цілі розв'язки системи нерівностей:

а) $\begin{cases} 2n+3<4(3n-5), \\ 8-4n<7-2(4n-13); \end{cases}$ б) $\begin{cases} n(n+1)>(n+2)(n-2), \\ (n-3)^2\geq 3-n(2-n). \end{cases}$

230. Розв'яжіть подвійну нерівність:

а) $-2 < 3x - 4 < 5$; г) $0,7 \leq 3 - 2x \leq 1,2$;

б) $3 < 2 - x < 5$; ґ) $-1\leq\dfrac{1}{3}(6-z)<1$;

в) $0{,}4 \le 2x + 1 \le 0{,}6$;

д) $-2{,}5 < \frac{1}{2}(1-3y) \le 1{,}5$.

Рівень Б

Розв'яжіть систему нерівностей **(231–234).**

231. а) $\begin{cases} c^2-3<(c+3)^2, \\ 2c+c^2>(c-2)^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (z^2-2)\cdot 3 \ge 3z^2, \\ z^2+2z \le (z-1)z; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5-(x+3)^2>(x-2)(1-x), \\ x(x+7)<(x+7)^2-7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x-1)^2+3x \ge (x-1)(x+1), \\ (x+3)(x-1) \ge (x+2)^2-1. \end{cases}$

232. а) $\begin{cases} (x+1)^2>x^2+4, \\ (x-1)^2>x^2-4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x-1)^2 \ge x^2+7, \\ (x-2)^2 \ge x^2-8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7+(x+3)^2<5x+(x-3)^2, \\ (x-1)(x+2)<(x+1)(x-2); \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x-(x+1)^2 \le 5-(1-x)^2, \\ (x-3)(x+3)>(x+7)(x-7). \end{cases}$

233. а) $\begin{cases} \frac{2y+15}{9}-\frac{1-y}{5} \ge \frac{y}{3}, \\ 2y>\frac{19-2y}{2}-\frac{11-2y}{4}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{4x+3}{3}-\frac{3x-1}{8}<1+\frac{8-x}{6}, \\ \frac{7x+3}{5}+\frac{3x+1}{2}>4+\frac{x-4}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4\frac{2}{3}x-1<3x+3\frac{1}{3}, \\ \frac{3x+12}{5}+3>\frac{8+x}{2}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{a}{3}+\frac{a}{2}<\frac{5}{3}, \\ 6-\frac{a+16}{3}<-2a. \end{cases}$

234. Розв'яжіть кожну із систем нерівностей.

а) $\begin{cases} y+0{,}25 \le \frac{14y+3}{12}, \\ y-\frac{1-3y}{4} \le \frac{y+8}{6}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{2x-1}{3}-x \le \frac{11-x}{6}-2, \\ 3(x-1)^2+8x+2 \le x(3x-2)+17. \end{cases}$

Зобразіть на координатній площині множину точок, ординати яких задовольняють першу систему, а абсциси — другу. Яка фігура утворилася? Знайдіть периметр і площу утвореної фігури.

235. При яких значеннях змінної x має зміст вираз:

а) $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}$;

в) $\sqrt{x+3}+\frac{1}{\sqrt{x-3}}$;

б) $\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+2}$;

г) $\frac{\sqrt{2x+3}}{5}+\frac{5}{\sqrt{3x+2}}$?

236. При яких значеннях x значення виразу $4x - 1{,}5$ належить проміжку:

а) $(1;\ 2)$; б) $[-2;\ 0]$; в) $(-\infty; 0)$; г) $[3;\ 7)$?

237. При яких c значення виразу $\dfrac{2-3c}{4}$ належить проміжку:

а) $(-\infty; 0)$; б) $[0; \infty)$; в) $(-1;\ 1)$; г) $[1;\ 8]$?

Розв'яжіть нерівність **(238–241).**

238. а) $(x + 2)(x - 7) < 0$; б) $(x - 3)(2x - 5) > 0$; в) $(3 - 2z)(1 + z) \geq 0$; г) $(2y + 8)(7 - 4y) \leq 0$; ґ) $0{,}5x(x + 3) < 0$; д) $(x^2 + 1)(5 - x) \leq 0$.

239. а) $(2x + 1)(10x - 7) \geq 0$; б) $(5 - 2x)(1 - 3x) \leq 0$; в) $(x^2 + 5)(x + 5) > 0$; г) $x^3 + 2x^2 + x < 0$; ґ) $5x^2 - 3x - 2 \leq 0$; д) $x^3 + 3x^2 > 0$.

240. а) $\dfrac{x+3}{x-7} > 0$; б) $\dfrac{5-2x}{2x-7} \geq 0$; в) $\dfrac{3-x}{2x-1} < 0$; г) $\dfrac{(x^2+3)x}{2x-3} \leq 0$; ґ) $\dfrac{3x+5}{x(x^2+1)} > 0$; д) $\dfrac{x^3}{x-3} \leq 0$.

241. а) $\dfrac{3x-1}{x+5} \leq 0$; б) $\dfrac{5-2x}{2+5x} > 0$; в) $\dfrac{-3x}{7x-14} \leq 0$; г) $\dfrac{3x-1}{2x+4} < 2$; ґ) $\dfrac{2x+3}{4-x} > 5$; д) $\dfrac{x-4}{3x+2} > 3$.

242. При яких значеннях n

а) різниця дробів $\dfrac{1}{n+1}$ і $\dfrac{1}{n-1}$ більша за їх добуток;

б) сума дробів $\dfrac{3}{n-4}$ і $\dfrac{3}{3-n}$ менша за їх добуток?

243. Уранці в понеділок у касу банку з Фонду страхування вкладів привезли 720 000 грн, які потрібно видавати до суботи включно. Яку суму може видавати каса банку щодня, якщо за один день видача готівки не має перевищувати 150 000 грн?

244. Розв'яжіть систему трьох нерівностей:

а) $\begin{cases} 2x-1>5, \\ 4x-3<37, \\ 3x-5>7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-2 \leq 5x-8, \\ 2x-1 \leq 4(2-x), \\ 2x-7 < 3(1-x). \end{cases}$

245. Розв'яжіть систему подвійних нерівностей:

а) $\begin{cases} 0<1-2x<1, \\ 3<3x+4<5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1<5-3x<3, \\ -3<3-2x<1. \end{cases}$

246. Розв'яжіть нерівність:
а) $x^2 \le 25$; б) $x^2 > 16$; в) $x^2 < 2$.

247. Чи правильно, якщо число a додатне, то нерівність:
а) $x^2 < a^2$ рівносильна нерівності $|x| < a$;
б) $x^2 > a^2$ рівносильна нерівності $|x| > a$?

248. Розв'яжіть нерівність двома способами:
а) $|x-1| < 2$; в) $(2x + 1)^2 < 9$; ґ) $(x - 2)^2 \ge 25$;
б) $(x - 1)^2 < 4$; г) $|x-8| > 1$; д) $(5x - 3)^2 > 49$.

Розв'яжіть нерівність **(249–251).**

249*. а) $|2x+3| < 5$; в) $|3x-1| \ge 2$;
б) $|x-3| + |x+1| \le 7$; г) $|x-2| + |x+1| \ge 3$.

250*. а) $|5-x| > 0{,}5$; в) $|4x-3| < x$;
б) $|x-1| + |1-x| > 1$; г) $|x-7| > |x-1|$.

251*. а) $(x-3)\sqrt{x-2} < 0$; в) $(5-2x)\sqrt{x^2+3} \ge 0$;
б) $(2x-1)\sqrt{3x-2} > 0$; г) $(4x-5) : \sqrt{3x-1} \le 0$.

Вправи для повторення

252. Розкладіть на множники квадратний тричлен:
а) $x^2 - 10x + 21$; в) $2x^2 + 5x - 3$; ґ) $9a^2 + 3a - 2$;
б) $a^2 + 2a - 15$; г) $c^2 - 11c - 26$; д) $4c^2 + 25c + 25$.

253. Доведіть, що значення виразу $17^{10} + 3 \cdot 7^{10} - 3 \cdot 7^9 + 17^9$ ділиться націло на 36.

254. Запишіть у стандартному вигляді число:
а) 47 000 000; г) 0,00000407; е) $3{,}7 \cdot 100^5$;
б) 308 000 000; ґ) $803 \cdot 10^9$; є) $0{,}42 \cdot 10^{-7}$;
в) 0,000000039; д) $0{,}067 \cdot 10^7$; ж) 2000^5.

255. Побудуйте графік рівняння:
а) $2x + 3y = 6$; б) $xy = 12$; в) $x^2 + y^2 = 4$; г) $y^2 - x^2 = 0$.

Скарбничка досягнень

- ✓ Можу навести приклад системи нерівностей з однією змінною.
- ✓ Розумію, що таке розв'язок системи нерівностей з однією змінною.
- ✓ Умію:
  — розв'язувати системи лінійних нерівностей з однією змінною;
  — записувати розв'язки системи нерівностей.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

Якщо різниця $a - b$ — число додатне, то число a більше від b.	Якщо різниця $a - b$ — число від'ємне, то число a менше від b.
Середнє арифметичне $\frac{a+b}{2}$	Середнє геометричне $\sqrt{ab}$

Значення виразів

$(a + b)^2 \geq 0$ для будь-яких a і b;	$(a + b)^2 + c > 0$ для $c > 0$ і будь-яких a і b

§ 7 Доведення нерівностей*

Іноді виникає потреба довести, що дана нерівність зі змінними правильна при всіх указаних значеннях змінних. Це можна робити на основі означення понять «більше» і «менше»:

$a > b$, якщо різниця $a - b$ — число додатне.

Приклад 1. Доведіть, що при кожному дійсному значенні a

$$a^2 + 2 > 2a.$$

Доведення. $a^2 + 2 - 2a = a^2 - 2a + 1 + 1 = (a - 1)^2 + 1$. При кожному дійсному значенні a значення виразу $(a - 1)^2$ невід'ємне, $(a - 1)^2 + 1$ — додатне. Отже, завжди $a^2 + 2 > 2a$.

Приклад 2. Доведіть, що при додатних a і b

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Доведення. $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$.

Утворений вираз $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$ при будь-яких додатних a і b невід'ємний. Отже, якщо $a > 0$ і $b > 0$, то

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Рівність тут має місце тільки тоді, коли $a = b$.

* Для тих, хто хоче знати більше

З а у в а ж е н н я. Вираз $\frac{a+b}{2}$ називають ***середнім арифметичним*** чисел a і b, а вираз $\sqrt{ab}$ — *їх* ***середнім геометричним.*** Тому доведену нерівність читають так:

середнє арифметичне двох додатних чисел не менше від їх середнього геометричного.

Приклад 3. Доведіть, що при додатних a, b і c

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Доведення. Оскільки середнє арифметичне двох додатних чисел не менше від їх середнього геометричного, то

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}; \quad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}; \quad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}.$$

Перемноживши почленно ці нерівності, маємо:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca},$$

або

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Довести твердження зі змінними — означає показати, що воно істинне при *всіх* допустимих значеннях змінних. *Спростувати твердження* — означає довести, що воно хибне.

Спростувати нерівність зі змінними — означає показати, що дана нерівність хибна хоч би при *одному* значенні змінної.

Приклад. Спростуйте нерівність $(n+1)^2 > n^2$.

С п р о с т у в а н н я. Якщо $n = -1$, то нерівність матиме вигляд $0^2 > 1^2$. Остання нерівність неправильна. Тому неправильна і дана нерівність.

Приклад, що спростовує яке-небудь твердження, називають *контрприкладом*.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Крім середнього арифметичного і середнього геометричного, науковці часто розглядають середнє квадратичне двох чи кількох чисел. *Середнім квадратичним* кількох чисел називають число, що дорівнює квадратному кореневі із середнього арифметичного їх квадратів.

Середнім квадратичним чисел a і b або x, y і z є відповідно:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \quad \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}.$$

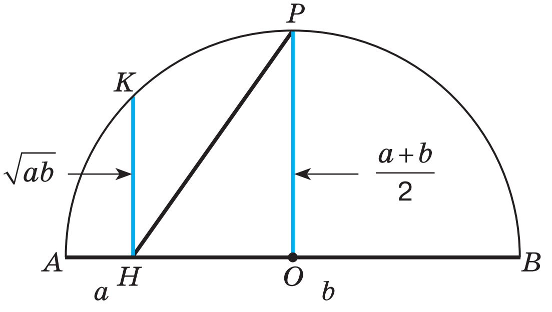
Середнє квадратичне двох чисел завжди більше за їх середнє арифметичне.

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3}$$

Спробуйте довести, що для будь-яких додатних чисел a і b завжди:

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Проілюструйте правильність такої подвійної нерівності, використовуючи малюнок 44.



Мал. 44

Перевірте себе

1. Що означає «довести твердження»? А спростувати?
2. Що означає «довести нерівність»?
3. Сформулюйте означення середнього арифметичного та середнього геометричного двох чисел.
4. Порівняйте середнє арифметичне і середнє геометричне двох додатних чисел.

Виконаємо разом

Доведіть, якщо $a < b$, то $a < \frac{a+b}{2} < b$. Сформулюйте це твердження.

● **Доведення.** Якщо $a < b$, то $2a < a + b$, звідси $a < \frac{a+b}{2}$.

Якщо $a < b$, то $a + b < 2b$, звідси $\frac{a+b}{2} < b$.

Об’єднавши обидва випадки, маємо:

якщо $a < b$, то $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Одержану подвійну нерівність можна сформулювати так: **середнє арифметичне двох нерівних дійсних чисел більше від меншого із даних чисел і менше від більшого з них.**

Виконайте усно

256. Знайдіть середнє арифметичне чисел:
а) 1,3 і 2,7; б) 38 і 0; в) 409 і –409; г) 10, 20 і 30.

257. Знайдіть середнє геометричне чисел:
а) 50 і 8; б) 1000 і 40; в) 0,2 і 0,8; г) 5^{11} і 5^{-7}.

Доведіть нерівність **(258–259).**

258. а) $(a-2)^2+3>0$; б) $(1-2a)^2+1>0$; в) $(a+2)^2>4a$.

259. а) $a^2+6a+10>0$; б) $9-12a+4a^2\ge 0$; в) $a^4+1\ge 2a^2$.

Рівень А

Доведіть нерівність **(260–263).**

260. а) $a^2+2a+2>0$; в) $2a^2+4a+5>0$;
б) $a^2-2a+5>0$; г) $2a^2+a+1>0$.

261. а) $a^2+3>2a$; в) $2a^2+1>2a$;
б) $a^2+5>4a$; г) $3a^2+1>2a$.

262. а) $(2a-1)(2a+1)<4a^2$; в) $a^2+65>16a$;
б) $(a-3)^2>a\,(a-6)$; г) $a^4+82>18a^2$.

263. а) $(a+1)^2\ge 4a$; в) $\dfrac{2a}{1+a^2}\le 1$;
б) $99+20a<(a+10)^2$; г) $\dfrac{a^2+4}{4}\ge a$.

264. Доведіть, що для кожного від'ємного значення x:
а) $(x-1)(x-2)>0$; в) $(x-3)(3-x)<0$;
б) $x^2+9>10x$; г) $(2-x)(x-3)<0$.

265. Доведіть, що для кожного додатного c:
а) $c+\dfrac{1}{c}\ge 2$; б) $9c+\dfrac{1}{c}\ge 6$; в) $(c+1)\left(\dfrac{1}{c}+1\right)\ge 4$.

Рівень Б

Доведіть нерівність **(266–267).**

266. а) $a^2-ab+b^2\ge 0$; б) $a^2+b^2+2\ge 2\,(a+b)$.

267. а) $a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc$; б) $a^2+b^2+c^2+3\ge 2\,(a+b+c)$.

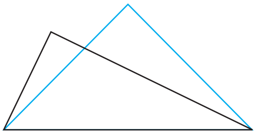
268. Доведіть, що сума квадратів двох будь-яких дійсних чисел не менша від їх подвоєного добутку.

269. Що більше: а) сума квадратів двох додатних чисел чи квадрат їх суми; б) сума квадратів двох від'ємних чисел чи квадрат їх суми?

270. Доведіть, що півсума квадратів двох дійсних чисел не менша від квадрата їх півсуми.

271. З усіх прямокутників, що мають рівні площі, найменший периметр має квадрат. Доведіть.

272. З усіх прямокутних трикутників з рівними гіпотенузами найбільшу площу має рівнобедрений трикутник (мал. 45). Доведіть.



Мал. 45

273. З усіх прямокутників, вписаних у дане коло, найбільшу площу має квадрат. Доведіть.

Доведіть для будь-яких дійсних значень змінних нерівність **(274–278)**.

274. а) $a^2 + b^2 + 1 \ge ab + a + b$; б) $(a + b + 1)^2 \le 3\,(a^2 + b^2 + 1)$.

275. а) $a^4 + b^4 + 2c^2 \ge 4abc$; б) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \ge 4abcd$.

276. а) $8a^2 + 14ab + 7b^2 + 1 > 0$; в) $(ax + by)^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$;

б) $2a^2 + 5c^2 + 2ac + 1 > 0$; г) $\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2}$.

277. а) $|a|+|b| \ge |a+b|$; б) $|a|-|b| \le |a-b|$.

Доведіть істинність числової нерівності **(278–280)**.

278. а) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} < 2$; б) $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} < 3$.

279. а) $\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3}}}} < 3$; б) $\sqrt{2-\sqrt{12-\sqrt{12}}} > 3$.

280. а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100} < 1$; б) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{100^2} < 1$.

Вправи для повторення

281. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{4}{x+3} = -2x$; б) $\frac{3}{x+3}+\frac{5x}{x-1} = 1$.

282. Один із коренів рівняння $x^3 + 2x^2 - 9x + a = 0$ дорівнює -2. Знайдіть решту коренів цього рівняння.

283. Руда містить 60 % заліза. З неї виплавляють чавун, який містить 98 % заліза. Із скількох тонн руди виплавляють 1000 т чавуну?

284. Задано функцію $f(x) = \frac{2x^2-6x+4}{2x^2-2x-4}$.

1) Обчисліть $f(9)$, $f(99)$, $f(999)$.

2) Знайдіть область визначення функції $f(x)$.

285. Установіть відповідність між формулами (1 – 4), що задають деякі функції, та відповідними їм графіками (А – Д).

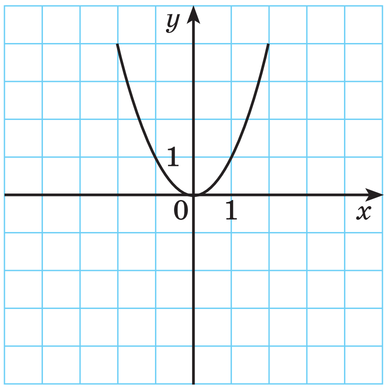
1 $y = 0{,}5x$

2 $y = \sqrt{x}$

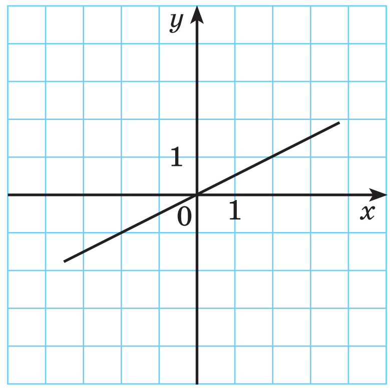
3 $y = x^2$

4 $y = 2 - x$

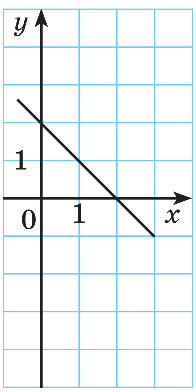
А



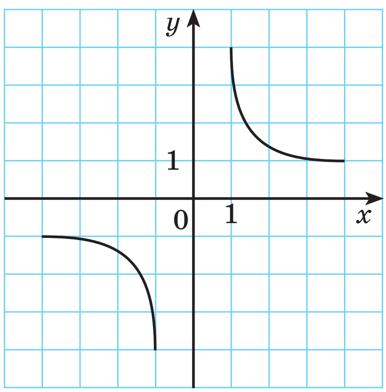
Б



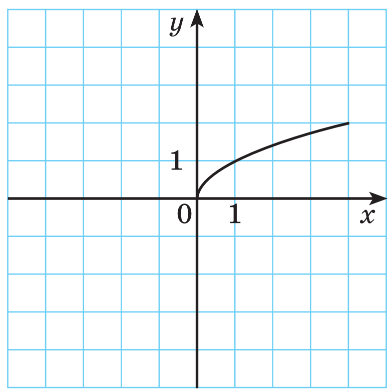
В



Г



Д



Скарбничка досягнень

- ✓ Знаю, що $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}.$
- ✓ Знаю, що спростувати нерівність зі змінною — означає показати, що дана нерівність хибна хоча би при одному значенні змінної.
- ✓ Умію використовувати означення понять «більше» і «менше» для доведення нерівностей зі змінними.

Завдання для самостійної роботи*

Варіант I

1°. Розв'яжіть нерівність $3x - 5 < 13$.

2. Розв'яжіть систему нерівностей:

а°) $\begin{cases} 2x+3>7, \\ x-5\le 1; \end{cases}$ б•) $\begin{cases} 3-\dfrac{x-2}{2}\le x, \\ 5(x-2)<8x+1. \end{cases}$

3•. Розв'яжіть подвійну нерівність $-1 \le 2x - 3 < 5$.

Варіант II

1°. Розв'яжіть нерівність $4x - 7 < 13$.

2. Розв'яжіть систему нерівностей:

а°) $\begin{cases} 3x-7<5, \\ 2x+1\ge 3; \end{cases}$ б•) $\begin{cases} 2-\dfrac{x-1}{3}\ge x, \\ 7(x-3)>5x-2. \end{cases}$

3•. Розв'яжіть подвійну нерівність $-3 < 2c + 1 \le 7$.

Варіант III

1°. Розв'яжіть нерівність $5x - 4 > 26$.

2. Розв'яжіть систему нерівностей:

а°) $\begin{cases} 5x-2\le 18, \\ 2x+3>5; \end{cases}$ б•) $\begin{cases} 4-\dfrac{2-x}{3}>x, \\ 2(x-4)\ge 5x-2. \end{cases}$

3•. Розв'яжіть подвійну нерівність $-2 \le 3n + 4 < 10$.

Варіант IV

1°. Розв'яжіть нерівність $7x + 3 > 38$.

2. Розв'яжіть систему нерівностей:

а°) $\begin{cases} 4x-3>5, \\ 5x+2\le 27; \end{cases}$ б•) $\begin{cases} 3-\dfrac{x-4}{2}<3x, \\ 5(x-1)\ge 3x-1. \end{cases}$

3•. Розв'яжіть подвійну нерівність $-5 < 2m - 1 \le 7$.

---

* Тут і далі: ° — початковий і середній рівні;
• — середній рівень;
•• — високий рівень.

Історичні відомості

Визначати, яке з двох чисел більше, а яке — менше, люди вміли ще до нашої ери. В «Основах» Евкліда (III ст. до н. е.) доведено нерівність, яку тепер прийнято записувати так:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Тільки під a і b тоді розуміли не довільні додатні числа, а довжини відрізків; доведення пропонувалось суто геометричне і без знаків нерівності.

Давньогрецький учений Архімед (III ст. до н. е.) довів подвійну нерівність, яку тепер записують так:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Знаки «<» і «>» вперше запровадив англійський математик Т. Гарріот у 1631 р. Хоча знаки нерівності запропоновано пізніше від знака рівності, використовуватися вони почали раніше, оскільки друкували їх, користуючись буквою V, а знака рівності «=» на той час у друкарні ще не було.

Знаки нестрогих нерівностей запровадив у 1670 р. англійський математик Дж. Валліс. Тільки риску він писав над знаком нерівності. Такі знаки використовувалися рідко. У звичайному для нас вигляді знаки «≤» і «≥» запропонував у 1734 р. французький математик П. Бугер.

У сучасній математиці та прикладних науках часто використовують нерівності між середніми, зокрема між середнім арифметичним і середнім квадратичним кількох дійсних чисел. Наприклад, якщо a_1, a_2, $a_3,\ldots$, an — довільні дійсні числа, $n \in N$, $n \geq 2$, то правильна нерівність:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Відомі нерівності, які мають власні назви.

Нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним n додатних чисел називають *нерівністю Коші*:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Нерівність Буняковського:

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

Огюстен Луї Коші — французький математик, член Паризької академії наук, Лондонського королівського товариства та багатьох інших академій наук. Працював у різних галузях математики (арифметика і теорія чисел, алгебра, математичний аналіз, диференціальні рівняння, геометрія, тригонометрія, теоретична і небесна механіка, математична фізика, астрономія). Роботи Коші відкрили нову епоху в розвитку математичних наук, заклали основи сучасної математики. Величезною була продуктивність праці Коші: були періоди, коли він щотижня подавав до Паризької АН новий мемуар. Швидкість, з якою Коші переходив від одного предмета до іншого, дала йому змогу прокласти в математиці багато нових шляхів. Загалом він написав і опублікував понад 800 робіт. Повне зібрання його творів, видане Паризькою АН, містить 27 томів.

Огюстен Луї Коші
(1789–1857)

З українських математиків XIX ст. проблеми, пов'язані з нерівностями, найбільше досліджував **Віктор Якович Буняковський**. Народився він у м. Бар (тепер – Вінницької області), навчався в Німеччині, Франції. Захистив дисертацію і одержав ступінь доктора математики в Парижі (1825). Доведену ним нерівність іноді приписують німецькому математику Г. Шварцу, але В. Я. Буняковський довів її на 16 років раніше. В. Я. Буняковський досліджував статистичні характеристики народонаселення, правдоподібності свідчень і показів у судочинстві, похибок у спостереженнях тощо.

В. Я. Буняковський
(1804 – 1889)

З 1858 р. був головним експертом уряду з питань статистики і страхування.

Існують й інші нерівності, що мають власні імена: *нерівність Гельдера, нерівність Мінковського, нерівність Юнга* та інші. Ці нерівності використовують у різних галузях вищої математики. З ними ви ознайомитеся з часом, якщо станете фахівцями в галузі математики.

Нерівності використовують і в геометрії. Наприклад, ABC існує тоді і тільки тоді, коли виконуються три нерівності:

$$AB < BC + CA,\ BC < CA + AB \text{ і } CA < AB + BC.$$

Головне в розділі

Число a більше за число b, якщо різниця $a - b$ є додатним числом; число a менше за число b, якщо різниця $a - b$ — число від'ємне.

Будь-який зі знаків $<$, $>$, $\le$ і $\ge$ називають *знаком нерівності*.

Знаки $<$ і $>$ називають *знаками строгої нерівності*. Знаки $\le$ і $\ge$ називають *знаками нестрогої нерівності*.

Запис $a \le b$ означає, що $a < b$ або $a = b$.

Запис $a \ge b$ означає, що $a > b$ або $a = b$.

Два вирази, сполучені знаком нерівності ($<$, $>$, $\le$ чи $\ge$), утворюють *нерівність*. Нерівність називають *числовою*, якщо обидві її частини — числові вирази.

Властивості числових нерівностей

Якщо: $a < b$ і $b < c$, то $a < c$;
$a < b$ і c — довільне число, то $a + c < b + c$;
$a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$;
$a < b$ і $c < 0$, то $ac > bc$;
$a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$;
$a < b$, $c < d$ і a, b, c, d — числа додатні, то $ac < bd$.

Нерівності виду $a < x < b$, $a \le x < b$, $a < x \le b$, $a \le x \le b$ називаються *подвійними нерівностями*. Їх зручно використовувати для оцінювання значень величин і наближених обчислень. Адже якщо $a < x < b$ і $c < y < d$, то

$a + c < x + y < b + d$, $\quad a - d < x - y < b - c$,
$ac < xy < bd$, $\quad a : d < x : y < b : c$.

Дві останні подвійні нерівності правильні за умови, якщо числа a і c — додатні.

$2x + 17 < 1$, $12 - 3x \ge 2$ — приклади нерівностей з однією змінною x.

Нерівності зі змінними подібні до рівнянь. Розв'язком нерівності зі змінною називається таке число, яке задовольняє дану нерівність, тобто перетворює її в правильну числову нерівність. *Розв'язати нерівність* — означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх немає.

Множини розв'язків найчастіше утворюють *проміжки*. Наприклад, множини розв'язків нерівностей $2x + 7 < 15$ і $8 + 3x \ge 2$ — це відповідно проміжки $(-\infty; 4)$ та $[2; \infty)$.

Декілька нерівностей з тією самою змінною утворюють *систему нерівностей*, якщо треба знайти їх спільні розв'язки. Розв'язати систему нерівностей означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх не існує.

З'ясовуємо досягнення

Тестові завдання № 1

1 Виберіть правильну нерівність:
а) $0{,}2 > \sqrt{2}$; б) $-1 < -2$; в) $5 \ge 5$; г) $2^{-1} \le 2^{-2}$.

2 Сумою нерівностей $5 > 3$ і $2 > -1$ є нерівність:
а) $4 > 5$; б) $4 < 5$; в) $7 > 2$; г) $7 \ge 2$.

3 Укажіть строгу нерівність:
а) $15 \ge 5$; б) $2 \le 2$; в) $7 > -2$; г) $-10 \ge 10$.

4 Нерівність $x^2 + 2x + 1 \le 0$ задовольняє число:
а) 2; б) 1; в) 0; г) -1.

5 Скільки цілих чисел задовольняє подвійну нерівність $-1 \le x \le 1$:
а) одне; б) два; в) три; г) чотири?

6 Виберіть проміжок, якому належить число $\sqrt{3}$:
а) [2; 3]; б) $\left(-\infty; \sqrt{3}\right)$; в) $\left(2\sqrt{3}; 3\sqrt{3}\right)$; г) $\left(-\sqrt{3}; \infty\right)$.

7 Виберіть нерівність, яка не має розв'язків:
а) $|x| \ge -3$; б) $x < -3$; в) $7 - |x| < 0$; г) $x^2 < 0$.

8 Система нерівностей $\begin{cases} 2x \le 3, \\ x + 1 \le 2 \end{cases}$ має множину розв'язків:
а) $(-\infty; 1]$; б) $[1{,}5; \infty)$; в) $(-\infty; 1{,}5]$; г) [2; 3].

9 Яке найбільше число є розв'язком нерівності $x^2 - 2x \ge x^2 + 2$:
а) 2; б) 1; в) -1; г) -2?

10 Знайдіть область визначення функції $y = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$:
а) $(-\infty; 0]$; б) $(-\infty; 0)$; в) $[0; \infty)$; г) $(0; \infty)$.

Типові завдання до контрольної роботи № 1

1 Порівняйте дроби:

а°) $\frac{5}{7}$ і $\frac{3}{7}$; б°) $-\frac{4}{3}$ і $-\frac{4}{3}$; в•) $\frac{5}{6}$ і $\frac{6}{7}$; г•) $-\frac{7}{13}$ і $-\frac{13}{27}$.

2 Відомо, що $x < y$. Порівняйте:

а°) $x - 3$ і $y - 3$; в•) $-2x$ і $-2y$;
б°) $1,3x$ і $1,3y$; г•) $5 - x$ і $5 - y$.

3 Дано $7 < b < 12$, $2 < c < 5$. Оцініть значення виразу:

а°) $3b$; б°) bc; в•) $3b + 2c$; г•) $\frac{3b+2c}{bc}$.

4 Розв'яжіть нерівність:

а°) $2x - 5 < 7$; в•) $4 - (x - 2)^2 > x - x^2$;
б°) $3x + 7 < 7x + 3$; г•) $\frac{x-3}{5} - \frac{2x-1}{10} \geq 4$.

5• Знайдіть об'єднання і переріз множин A і C, якщо:

а) $A = (2; 5)$, $C = (1; 3)$;
б) $A = (-3; \infty)$, $C = (-\infty; 3]$;
в) $A = (-\infty; \pi)$, $C = [\sqrt{10}; \sqrt{11}]$.

6 Розв'яжіть систему нерівностей:

а°) $\begin{cases} 6x - 7 \geq 4x - 3, \\ 3x + 16 \geq 8x - 4; \end{cases}$ б•) $\begin{cases} x(x+7) \geq (x-7)^2, \\ (3-x)(x+3) \geq 0,5x - x^2. \end{cases}$

7• Знайдіть область визначення функції:

$$y = \sqrt{2x+3} - \frac{9}{\sqrt{9-2x}}.$$

8• Розв'яжіть нерівність:

а) $|5x - 3| \leq 1$; б) $|3x - 15| > 9$.

9•• Розв'яжіть рівняння:

$$|x+1| + |x-2| = 3.$$

10•• Доведіть нерівність, якщо $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$:

$$(a+2c)(c+2b)(b+2a) > 16\sqrt{2}abc.$$

Розділ 2

БОГОЛЮБОВ
Микола Миколайович
(1909–1992)
Всесвітньо відомий український математик і фізик-теоретик, засновник наукових шкіл нелінійної механіки (Київ), статистичної фізики та квантової теорії поля. Академік НАН України та багатьох іноземних академій наук. Лауреат міжнародної Премії Денні Хайнемана в галузі математичної фізики.

«А чи не існує кілька Боголюбових, кожнен із яких — найбільший спеціаліст у своїй галузі?»

Н. Вінер

Дитячі і юнацькі роки М. М. Боголюбова — це зразок того, як молода людина, наперекір обставинам, завдяки наполегливості й працелюбству може досягти значних успіхів й отримати всесвітнє визнання.

ПРЕМІЯ імені
М. М. БОГОЛЮБОВА

Присуджується по Відділенню математики НАН України за видатні наукові роботи в галузі математики і теоретичної фізики

Заснована Національною академією наук України у 1992 році

ЛАУРЕАТИ ПРЕМІЇ

Бар’яхтар В. Г.
Митропольський Ю. О.
Ситенко О. Г.
Шарковський О. М.
Ахієзер О. І.
Королюк В. С.
Ширков Д. В.
Парасюк О. С.
Березанський Ю. М.
Самойленко А. М.
Скрипник І. В.
та інші

Квадратична функція

Функція — зручна математична модель для дослідження багатьох процесів. Вивчення різноманітних явищ і процесів за допомогою функцій — один з основних методів сучасної науки. Функція, яку можна задати формулою $y = ax^2 + bx + c$, — *квадратична*. Її графік — *парабола*. Такі функції часто використовують в різних галузях науки. Вони пов'язані з квадратними рівняннями і нерівностями.

У цьому розділі розглянемо такі теми:

§ 8 **Функції**
Functions

§ 9 **Властивості функцій**
Functions Properties

§ 10 **Перетворення графіків функцій**
Functions Graphs Transformations

§ 11 **Квадратична функція**
Quadratic Function

§ 12 **Квадратні нерівності**
Quadratic Inequalities

§ 13 **Системи рівнянь другого степеня**
Second Degree Equations Systems

§ 14 **Розв'язування задач складанням систем рівнянь**
Compilation of Systems of Equations Task Solving

Навчальний проект № 2
«ФУНКЦІЇ НАВКОЛО НАС»

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

— Що таке функція, область визначення і область значень функції.

— Способи задання функції:

формулою	графіком	таблицею	словесно тощо

— Що таке графік функції і як його будують.

— Види функцій:

лінійна	обернена пропорційність	квадратична	інші
$y = kx + b$	$y = \frac{k}{x}$	$y = x^2$	$y = \sqrt{x}$

§ 8 Функції

Функція — одне з найважливіших понять математики і практики. Якщо добре поміркувати, то можна зрозуміти, що всі ми живемо у світі функцій — змін, залежностей і відповідностей. З плином часу день змінює ніч, весна — зиму. Під цей ритм підлаштовується все живе, зокрема і світ людини. Найбільш поширений графік роботи, розклад занять, робота розважальних центрів і навіть програма радіо і телебачення складається залежно від часу доби і пори року.

Можна навести чимало прикладів залежностей і відповідностей між змінними у різних галузях знань:

- *геометрія* — формула $S = 4\pi R^2$ виражає залежність площі поверхні кулі (S) від її радіуса (R);
- *фізика* — формула $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ встановлює відповідність між довжиною маятника (l) і його періодом коливання (T). Отже, T — функція від l (тут $\pi \approx 3{,}14$, g $9{,}8$ м/с^2 — константи);
- *економіка* — формула $T_R = p \cdot Q$ задає залежність загального доходу (T_R), який отримує підприємство, від ціни (p) проданого товару і обсягу продажу (Q).

Нагадаємо основні відомості про функції.

Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини D відповідає єдине значення змінної y, то таку відповідність називають ***функцією***.

При цьому x називають ***незалежною змінною***, або ***аргументом***, y — ***залежною змінною***, або функцією, а множину D — ***областю визначення*** даної функції. Множину всіх значень y, яких може набувати функція, називають її ***областю значень*** і позначають буквою E.

Графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

Задають функції найчастіше у вигляді формул, таблиць або графіків. Наприклад, формула $y = x^2$ задає функцію, яка виражає відповідність між числами та їх квадратами. Якщо область визначення цієї функції — множина цілих чисел з проміжку [−3; 3], то її можна задати у вигляді таблиці:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

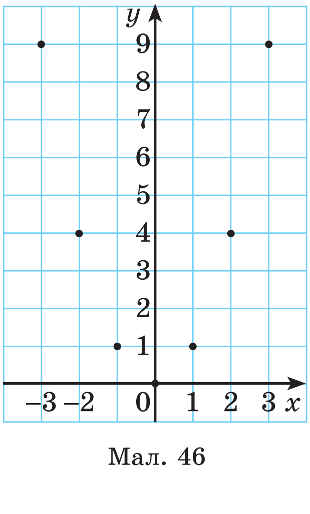
Графік цієї функції — сім точок (мал. 46). Її область визначення — множина $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, а область значень — множина $E = \{0, 1, 4, 9\}$.

Якщо область визначення функції $y = x^2$ — проміжок [−2; 2], то її графіком є частина параболи, зображена на малюнку 47, а областю значень — проміжок [0; 4].

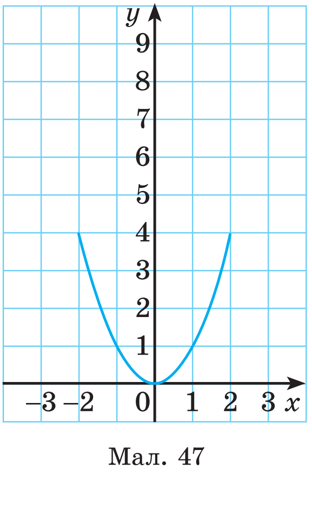
Графіком функції $y = x^2$, заданої на множині всіх дійсних чисел $\boldsymbol{R}$, є вся парабола (мал. 48). Область визначення цієї функції — множина дійсних чисел $\boldsymbol{R}$, а область значень — проміжок $[0; \infty)$.

Нагадаємо ще кілька прикладів функцій.

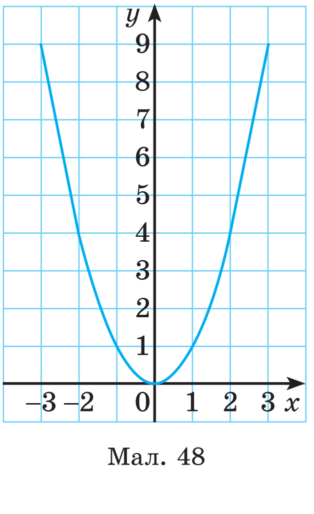
***y* = *kx* — пряма пропорційність (*k* ≠ 0).** Її графік — пряма, що проходить через початок координат. Область визначення цієї функції — множина $\boldsymbol{R}$, область значень — теж множина $\boldsymbol{R}$.



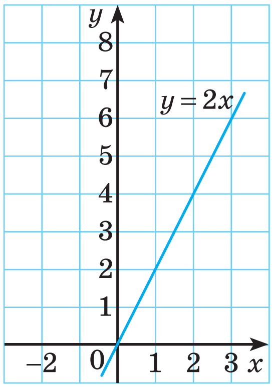
Мал. 46



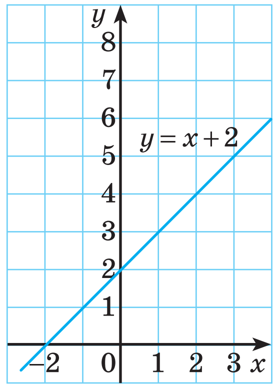
Мал. 47



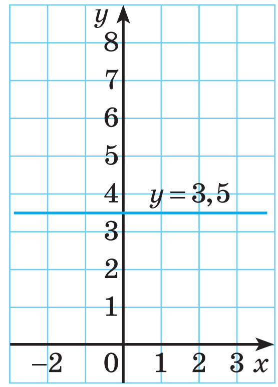
Мал. 48



Мал. 49



Мал. 50



Мал. 51

Наприклад, графік функції $y = 2x$ зображено на малюнку 49.

$\boldsymbol{y = kx + b}$ **— *лінійна функція*.** Її графік — пряма, не паралельна осі y. Область визначення — множина $\boldsymbol{R}$, область значень — $\boldsymbol{R}$, якщо $k \neq 0$. Якщо $k = 0$, то область значень — одне число b.

Приклади: $y = x + 2$ (мал. 50), $y = 3{,}5$ (мал. 51).

$y = \dfrac{k}{x}$ **— *обернена пропорційність* ($\boldsymbol{k \neq 0}$).** Її графік — гіпербола. Якщо $k > 0$, то вітки цієї гіперболи розміщені в I і III чвертях координатної площини, якщо $k < 0$, — у II і IV чвертях. Область визначення функції $y = \dfrac{k}{x}$ — множина $\boldsymbol{R}$ без числа 0, область значень — ця сама множина $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

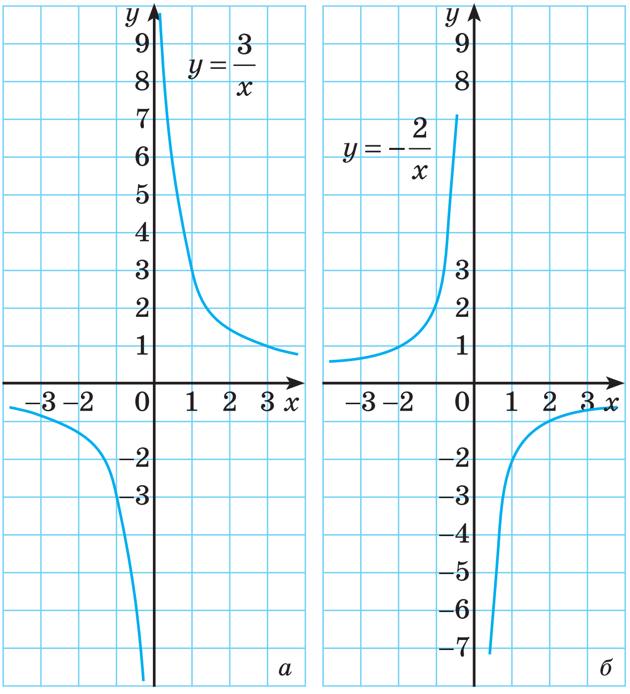
Приклади: $y = \dfrac{3}{x}$ (мал. 52, *а*), $y = -\dfrac{2}{x}$ (мал. 52, *б*).

Графік функції $\boldsymbol{y = x^3}$ зображено на малюнку 53. Її область визначення і множина значень — множина $\boldsymbol{R}$.

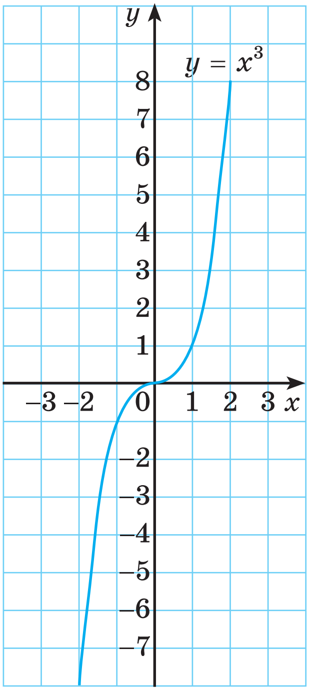
Графік функції $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ — одна вітка параболи (мал. 54). Її область визначення $[0; \infty)$ і область значень — $[0; \infty)$.

Якщо змінна y залежить від x, то записують $y = f(x)$ (читають: ігрек дорівнює еф від ікс). Символом $f(a)$ позначають значення функції $y = f(x)$, якщо $x = a$. Нехай, наприклад, функцію задано формулою $y = 3x^2 - 5$. Можна записати і так: $f(x) = 3x^2 - 5$. У цьому випадку $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 5 = -5$; $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 5 = 7$.

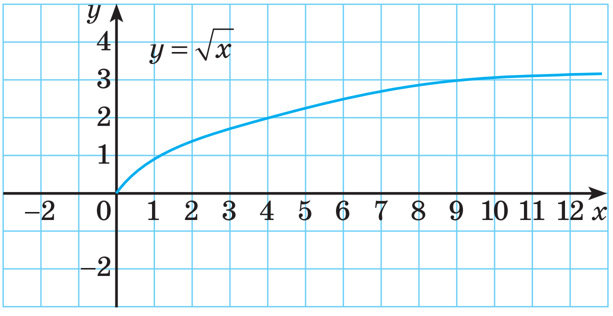
Зауваження. Якщо $y = f(x)$, то часто кажуть, що y — функція від x, тобто функцією називають змінну y. Однак здебільшого під функцією розуміють не одну залежну змінну, а відповідність між значеннями двох змінних. До того ж — не будь-яку відповідність, а однозначну, при якій кожному значенню змінної x відповідає *єдине* значення змінної y.



Мал. 52



Мал. 53



Мал. 54

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

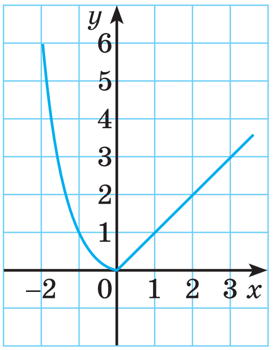
Деякі функції на окремих частинах області визначення задаються різними формулами. Такою є, наприклад, функція

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ якщо } x < 0, \\ x, \text{ якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

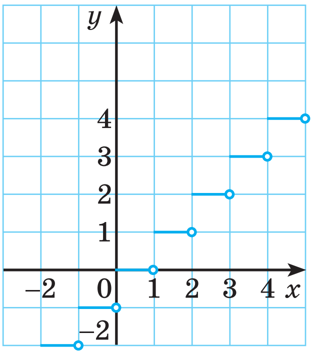
Значення цієї функції при від'ємних значеннях аргументу знаходять, користуючись формулою $f(x) = x^2$, а при інших — за формулою $f(x) = x$. Її графік — на малюнку 55.

Існують також інші функції, які позначають новими для вас символами.

Цілою частиною дійсного числа *x* називають таке найбільше ціле число $[x]$, яке не більше від x. Графік функції $y = [x]$ — на малюнку 56.

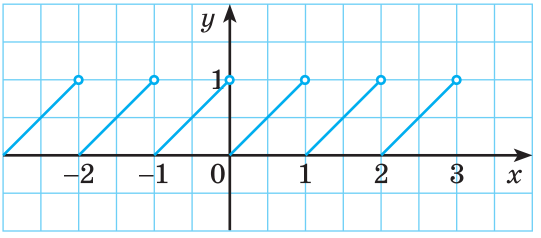


Мал. 55



Мал. 56

Дробовою частиною дійсного числа *x* називають різницю між даним числом і його цілою частиною: $\{x\} = x - [x]$. Графік функції $y = \{x\}$ — на малюнку 57.



Мал. 57

Перевірте себе

1. Сформулюйте означення функції.
2. Що таке аргумент функції? Наведіть приклад.
3. Як можна задати функцію?
4. Що таке область визначення і область значень функції?
5. Які функції називають лінійними? Які їх властивості?
6. Назвіть властивості оберненої пропорційності.
7. Що таке графік функції?

Виконаємо разом

1 Функцію задано формулою $f(x) = x^3 + 1$. Знайдіть: $f(-3)$, $f(0)$, $f\left(\sqrt{2}\right)$.

● **Розв'язання.** $f(-3) = (-3)^3 + 1 = -27 + 1 = -26$, $f(0) = 0^3 + 1 = 0 + 1 = 1$, $f\left(\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^3 + 1 = 2\sqrt{2} + 1$.

Відповідь. $f(-3) = -26$, $f(0) = 1$, $f\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} + 1$.

2 У яких точках графік функції $y = x^2 - 3x + 2$ перетинає:
а) вісь y; б) вісь x?

Розв'язання. а) Якщо графік перетинає вісь y у деякій точці, то абсциса цієї точки дорівнює нулю, а координати точки задовольняють рівняння, що задає функцію.
Маємо: $x = 0$; $y = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$.
Отже, графік функції перетинає вісь y у точці з координатами $(0; 2)$.
б) Якщо графік перетинає вісь x у деякій точці, то ордината цієї точки дорівнює нулю, а координати точки задовольняють рівняння, що задає функцію.
Маємо: $y = 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.
Отже, графік функції перетинає вісь x у точках з координатами $(1; 0)$ і $(2; 0)$.
Відповідь. а) $(0; 2)$; б) $(1; 0)$ і $(2; 0)$.

Виконайте усно

286. Провідміняйте слово: а) *функція*; б) *аргумент*; в) *графік*.

287. Задайте формулою функцію, яка виражає відповідність між числами та:
а) їхніми кубами;
б) протилежними до них числами;
в) оберненими до них числами;
г) їхніми модулями.

288. Яким є графік функції, заданої формулою:
а) $y = 3x + 1$; в) $y = 3$; ґ) $y = \dfrac{x}{3}$;
б) $y = x^2$; г) $y = \dfrac{3}{x}$; д) $y = \sqrt{x}$?

289. Чи правильно, що:
а) графік функції $y = \dfrac{2}{3}x - 5$ є також графіком рівняння $2x - 3y = 15$;
б) графік функції $y = \sqrt{x}$ є також графіком рівняння $y^2 = x$? Чому?

290. Графік якої з функцій проходить через початок координат:
а) $y = 2(x - 3)$; б) $y = 2x^2$; в) $y = x(x - 2)$?

291. Знайдіть область визначення функції:
а) $y = 3x - 2$; в) $y = -2{,}5$; ґ) $y = \sqrt{2x - 4}$;
б) $y = 4 - x^2$; г) $y = \dfrac{5}{x(x-3)}$; д) $y = \dfrac{1}{x}\sqrt{5 - 2x}$.

Рівень А

292. Функцію задано формулою $y = \frac{1}{2}x^2$ на області визначення $D = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Задайте її таблично і графічно.

293. Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$ на проміжку $[-4; 4]$. Знайдіть її область значень.

294. Функцію $y = \frac{1}{2}x^2$ задано на множині $\boldsymbol{R}$. Знайдіть її область значень. Чи належить графіку цієї функції точка A $(-100; 5000)$?

295. Функцію задано у вигляді таблиці:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	10	15	20	25	30	35	40

Задайте її формулою. Вкажіть її область визначення і область значень.

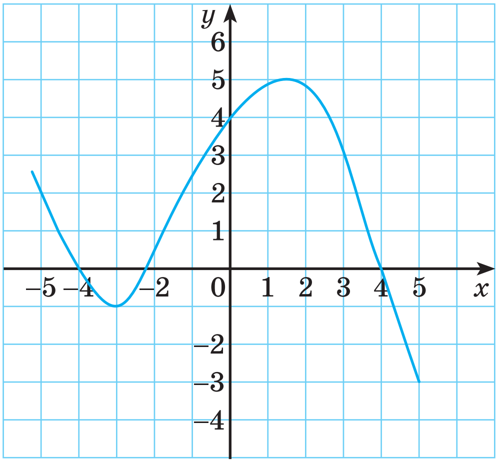
296. Функцію задано формулою $f(x) = x^2 + 10$. Обчисліть: $f(2)$, $3f(2)$, $2f(3)$, $0{,}5f(10)$.

297. Функцію задано формулою $f(x) = x^3 - 5$. Знайдіть: $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(7)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$.

298. Функцію задано формулою $f(x) = x^2 - x$. Обчисліть:
а) $f(-2) + f(-1)$; б) $f(0) + f(1)$; в) $f(2) - f(30)$.

299. $f(x) = x^2 - x + 1$. Знайдіть:
а) $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$; б) $f(10) - f(-9) + f(8) - f(-7)$.

300. На малюнку 55 зображено графік функції $y = f(x)$.
Знайдіть:
а) область визначення і область значень даної функції;
б) $f(-5)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(5)$;
в) для яких значень аргументу $f(x) = 4$, $f(x) = 3$;
г) координати точок, у яких графік функції перетинає осі координат;
ґ) для яких x значення $f(x)$ найбільше, найменше.



Мал. 58

Знайдіть область визначення функції **(301–302)**.

301. а) $y = 3x - 2$; в) $y=\sqrt{x+5}$; ґ) $y=\sqrt{x^2+1}$;

б) $y=\dfrac{3}{x-2}$; г) $y=\dfrac{1}{(x-3)(x-4)}$; д) $y=\dfrac{10}{x^2+1}$.

302. а) $y = 5x - 1$; в) $y=\sqrt{4-x}$; ґ) $y=\sqrt{x+1}$;

б) $y=\dfrac{3}{(x-4)(x+1)}$; г) $y=\dfrac{2x}{5-x}$; д) $y=\dfrac{x-1}{1+x}$.

303. Побудуйте графік функції:

а) $y = 3x - 2$; в) $y = -3x$; ґ) $y = 5$;

б) $y = 0{,}5x - 1$; г) $y = 7 - 2x$; д) $y = 3 - x$.

304. Побудуйте графік функції, заданої формулою:

а) $f(x) = 2 - 3x$; в) $f(x) = 3 - 2x$;

б) $f(x) = -1$; г) $f(x) = 0{,}5x$.

305. Знайдіть область значень функції:

а) $f(x) = 7$; б) $f(x) = 2x$; в) $y = x^2$.

306. Чи належить графіку функції $y=\sqrt{25-x^2}$ точка A (3; 4)? Точка B (−4; 3)?

307. Чи проходить графік функції $y = x(x - 3)$ через точки $A(2; -2)$; $B(-1; 4)$; $C(1{,}5; -2{,}25)$?

308. Яка з точок $A(-2; -6)$; $B(1{,}5; 8)$; $C(-3; 4)$; $D(2; 6)$; $E(3; 4)$ належить графіку функції:

а) $y = -10x - 26$; б) $y=\dfrac{12}{x}$; в) $y=\sqrt{x^2+7}$?

309. У яких точках перетинає вісь x і вісь y графік функції:

а) $y = 2{,}5x$; б) $y = 3 - 2x$; в) $y = 2(x - 1)$?

310. Температуру за шкалою Цельсія, Фаренгейта і Кельвіна позначимо відповідно t_C, t_F, t_K. Формули перерахунку мають вигляд: $t_F=\dfrac{9}{5}(t_C+32)$, $t_K = t_C + 273$. Для довільних 10 значень температури за Цельсієм знайдіть відповідні значення температури за Фаренгейтом і Кельвіном. Дані занесіть до таблиці. Зобразіть графічно одержані залежності.

Рівень Б

311. Функцію задано формулою $f(x)=x^2$. Чи правильно, що для кожного числа a виконується рівність $f(-a) = f(a)$?

312. Функцію задано формулою $f(x) = x^3$. Чи для кожного значення її аргументу x правильна рівність $f(-x) = -f(x)$?

313. Знайдіть $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$, якщо функцію задано формулою:

а) $f(x) = 2x^2 + 3$;
б) $f(x) = 3x^3 - 2$;
в) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$;
г) $f(x)=\sqrt{x^2+8x+15}$.

314. Функцію задано формулою $y=\dfrac{6x}{1+x}$ на множині натуральних чисел першого десятка. Задайте її у вигляді таблиці.

315. Функцію задано формулою $y=2\sqrt{x+5}$ на області визначення $D=\{-4;\ -2{,}75;\ -1;\ 1{,}25;\ 4;\ 11\}$. Задайте її у вигляді таблиці і графіка.

316. Не будуючи графіка рівняння $9x - 2y = 14$, знайдіть його точку, ордината якої дорівнює абсцисі.

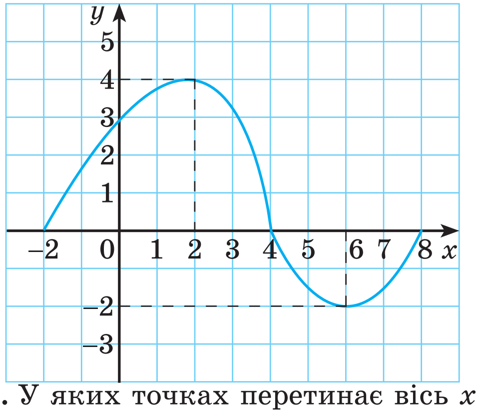
317. Не будуючи графіка функції $y = x^2 - 2$, знайдіть його точку, абсциса та ордината якої — протилежні числа.

318. Кожному натуральному числу відповідає протилежне йому число. Чи є така відповідність функцією? Якщо так, то задайте її формулою та графіком.

319. Кожному цілому числу відповідає рівне йому число. Чи є така відповідність функцією? Якщо так, то що є її графіком?

320. Функцію $y = f(x)$ задано графіком (мал. 59). Для яких значень аргументу:

а) $f(x) = 0$, $f(x) \le 0$;
б) $f(x) = -2$, $f(x) > -2$, $f(x) \le -2$;
в) $f(x) = 3$, $f(x) \ge 3$, $f(x) < 3$;
г) $0 \le f(x) \le 3$;
ґ) $-2 < f(x) < 4$?



Мал. 59

321. У яких точках перетинає вісь x і вісь y графік функції:

а) $y=\dfrac{1}{2}x+3$;
б) $y=x-\dfrac{4}{7}$;
в) $y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{5}{2}$;
г) $y = x^2 - 4$;
ґ) $y = x^2 - 2x$;
д) $y = 6 - 5x - x^2$?

Побудуйте в одній системі координат графіки функцій **(322–324)**.

322. $y = x^2$, $y = x^2 + 3$ і $y = x^2 - 2$.

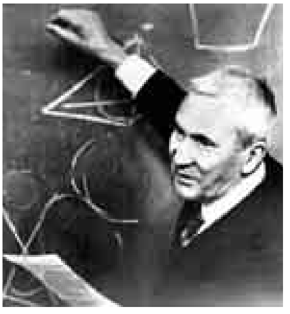
323. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 2$ і $y = \sqrt{x} - 3$.

324. $y = |x|$, $y = |x| + 11$ і $y = |x| - 2$.

325. При якому значенні m графік функції $y = \sqrt{x + m}$ проходить через точку P (5; 5)? Чи проходить цей самий графік через точку $Q(-4; 4)$?

326. Відомо, що точка A (3; 1) належить графіку кожної функції $y = f(x)$. Установіть відповідність між функціями $f(x)$ (1–4) і точками (А–Д), через які проходять графіки цих функцій.

1 $f(x) = x^2 + m$ — **А** (4; 8)
2 $f(x) = m - 2x$ — **Б** (12; 4)
3 $f(x) = \dfrac{m}{x+1}$ — **В** (12; –7)
4 $f(x) = \sqrt{3x} + m$ — **Г** (1; 2)
Д (1; 5)


А. М. Колмогоров

327. Побудуйте графік функції:

а) $y = \dfrac{4}{x}$; в) $y = \dfrac{12}{x}$; ґ) $y = 0,5x^2$;

б) $y = -\dfrac{3}{x}$; г) $y = 2x^2$; д) $y = x^2 - 1$.

328*. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5}}$; г) $y = \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x}$;

б) $y = \dfrac{-\sqrt{x^3 + 5x}}{4}$; ґ) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$;

в) $y = \dfrac{1}{x^3 + 5x^2}$; д) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{16 - x^2}$.

«Математика — це те, за допомогою чого люди керують природою і собою».
А. М. Колмогоров

329*. ***Задача А. М. Колмогорова.*** Яку додаткову умову потрібно накласти на значення x у формулі $f(x) = 1$, щоб одержати визначення функції $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2$?

330*. Побудуйте графік функції:

а) $y = \begin{cases} 4, \text{ якщо } x < -2, \\ x^2, \text{ якщо } -2 \le x \le 1, \\ 2 - x, \text{ якщо } x > 1; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} x + 1, \text{ якщо } x \le 1, \\ 3 - x, \text{ якщо } 1 - < x < 4, \\ -1, \text{ якщо } x \ge 4; \end{cases}$

б) $y = \dfrac{10 - 5x}{x^2 - 2x}$; г) $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$.

331*. Побудуйте графік функції:

а) $y=|2x-3|$; в) $y=|x+1|-|x|$; ґ) $y=\dfrac{6}{|x|}$;

б) $y=2|x|-3$; г) $y=\dfrac{|x|}{x}$; д) $y=\sqrt{x^2+10x+25}$.

332*. Функція попиту на товар: $Q_D = 9 - p$. Функція пропозиції товару: $Q_S = 2p - 6$. Тут Q_D — обсяг попиту і Q_S — обсяг пропозиції (мільйон штук за рік), p — ціна (грошові одиниці). Визначте рівноважну ціну (попит дорівнює пропозиції) і обсяг продажу. Як вплине на значення рівноважної ціни товару зменшення попиту на 20 %?

Вправи для повторення

333. Порівняйте значення виразів:

а) $3\sqrt{2}$ і $\sqrt{20}$; в) $\sqrt{13}$ і $2\sqrt{3}$; ґ) $4\sqrt{5}$ і 9;

б) $3\sqrt{5}$ і $\sqrt{44}$; г) $3\sqrt{7}$ і 8; д) $5\sqrt{2}$ і 7.

334. За один місяць роботи службовцю Н нараховують зарплату в розмірі 5430 грн. Із усіх нарахувань утримують податок на доходи фізичних осіб, який становить 18 %, та інші відрахування у розмірі 2,5 %. Скільки грошей службовець Н отримує за місяць? Яку суму складають його відрахування за рік?

335. Розв'яжіть нерівність:

а) $\dfrac{2x+3}{3x+1}>0$; б) $\dfrac{x-6}{1-x}>-1$; в) $\dfrac{9-2x}{x}\ge 1$.

Скарбничка досягнень

- ✓ Знаю, як позначають функції.
- ✓ Можу навести приклади вивчених функцій:

  лінійної $y = 2x + 3$;
  прямої пропорційності $y = -0,5\,x$;
  оберненої пропорційності $y=\dfrac{k}{x}$;
  інші $y = x^2$.

- ✓ Умію обчислювати значення функції в точці.
- ✓ Умію будувати графіки функцій і знаю назву графіків:

$y = kx$	$y = kx + b$	$y=\dfrac{k}{x}$	$y = x^2$
пряма	пряма	гіпербола	парабола

- ✓ Хочу навчитися детальніше характеризувати функцію за її графіком.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

— Які характеристики функції можна визначати за її графіком:

область визначення, область значень, додатні значення, від'ємні значення тощо.

— Види функцій, їх графіки та основні характеристики:

лінійна	обернена пропорційність	квадратична
$y = kx + b$	$y = \frac{k}{x}$	$y = x^2$

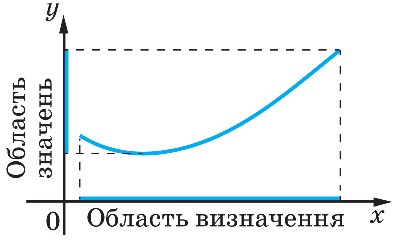
§ 9 Властивості функцій

Для того щоб досліджувати процеси і явища навколишнього світу, слід спочатку навчитися встановлювати характерні особливості відповідних математичних моделей. Передусім це стосується функцій.

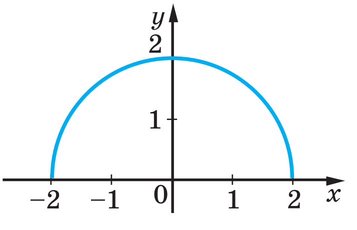
Описуючи властивості функції, зазвичай починають з її області визначення — вказують усі значення, яких може набувати аргумент.

Якщо функцію задано формулою, а про її область визначення нічого не сказано, то розуміють, що вона така сама, як і область допустимих значень змінної, яка входить до цієї формули.

Якщо функцію задано графічно, то область визначення функції — проекція її графіка на вісь x; область значень функції — проекція її графіка на вісь y (мал. 60). Наприклад, область визначення функції $y = x^2$ — множина всіх дійсних чисел $\boldsymbol{R}$, область її значень — проміжок $[0; \infty)$. Область визначення і область значень функції $y = \sqrt{4 - x^2}$ — проміжки $[-2; 2]$ і $[0; 2]$ (мал. 61).

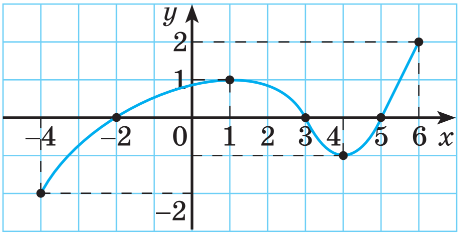


Мал. 60



Мал. 61

Розглянемо функцію $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 62. При $x = -2$, $x = 3$ і $x = 5$ значення функції дорівнюють нулю.



Мал. 62

Значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю, називають *нулями функції*.

Нулем функції $y = x - 6$ є лише одне значення x: тільки при $x = 6$ значення цієї функції дорівнює нулю.

Щоб знайти нулі функції $y = f(x)$, потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$. Корені цього рівняння є нулями функції.

Функція $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 62, має додатні, нульові й від'ємні значення. На проміжку $(-2; 3)$ її значення додатні. Це проміжок сталого знака: усі значення функції на цьому проміжку мають сталий знак «+». І проміжок $(5; 6)$ є також проміжком сталого знака «плюс». Проміжки $(-4; -2)$ і $(3; 5)$ теж є проміжками сталого знака: усі значення розглядуваної функції $y = f(x)$ на цих проміжках від'ємні.

Проміжки області визначення функції, на яких функція не змінює знака (тобто має тільки додатні або тільки від'ємні значення), називають *проміжками знакосталості*. На проміжку знакосталості графік функції не перетинає вісь абсцис.

Зверніть увагу на графік функції на мал. 62. На проміжку $[-4; 1]$ графік «йде вгору»: при збільшенні значень x із цього проміжку відповідні значення функції збільшуються.

Якщо $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$.

Кажуть, що на проміжку $[-4; 1]$ функція $y = f(x)$ *зростає* (або є *зростаючою*). Такою вона є й на проміжку $[4; 6]$.

На проміжку $[1; 4]$ графік функції $y = f(x)$ «йде вниз»: при збільшенні значень аргументу відповідні значення функції зменшуються, якщо $x_1 < x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$. Кажуть, що на цьому проміжку функція $y = f(x)$ *спадає* (або є *спадною*).

Функцію називають *зростаючою* на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає більше значення функції.

Функцію називають *спадною* на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає менше значення функції.

Існують функції, які зростають (або спадають) на всій області визначення. Наприклад, функції $y = 2x$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ — зростаючі, а функції $y = -2x$, $y = -\sqrt{x}$ — спадні.

Характеризуючи властивості функції, часто відмічають, у яких точках вона має найбільше значення, у яких — найменше. Функція, графік якої зображено на малюнку 62, найбільше значення має в точці $x = 6$; воно дорівнює 2. Найменшого значення -2 ця функція досягає в точці $x = -4$.

Якщо пропонують *дослідити функцію*, це означає виявити її найважливіші властивості:

1) вказати область визначення;
2) вказати область значень;
3) знайти точку перетину графіка функції з віссю y;
4) знайти нулі функції та проміжки знакосталості;
5) визначити проміжки зростання чи спадання;
6) указати найбільше та найменше значення функції;
7) побудувати графік функції.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Важливий крок у дослідженні функції полягає в тому, щоб з'ясувати, чи не є дана функція парною або непарною.

Функція $y = f(x)$ називається *парною*, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $f(-x) = f(x)$.

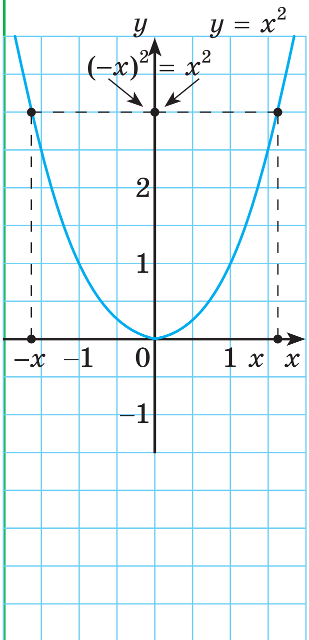
Функція $y = f(x)$ називається *непарною*, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $f(-x) = -f(x)$.

Існують функції ні парні, ні непарні. Це такі функції, у яких або область визначення несиметрична відносно нуля (наприклад, $y = \sqrt{x}$), або для яких не виконується жодна з умов $f(-x) = \pm f(x)$ (наприклад, $y = 2x + 3$).

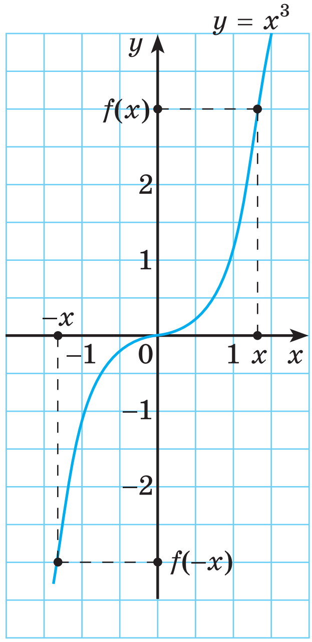
Якщо функцію задано графічно, то дослідити її на парність або непарність досить просто, оскільки **графік парної функції симетричний відносно осі y, а непарної — відносно початку координат.**

Приклади. Функції: $y = x^2$ з областю визначення R і $y = x^2$ з областю визначення $[-5; 5]$ — парні (мал. 63). Функції: $y = x^3$ з областю визначення R і $y = x^3$ з областю визначення $[-27; 27]$ — непарні (мал. 64).

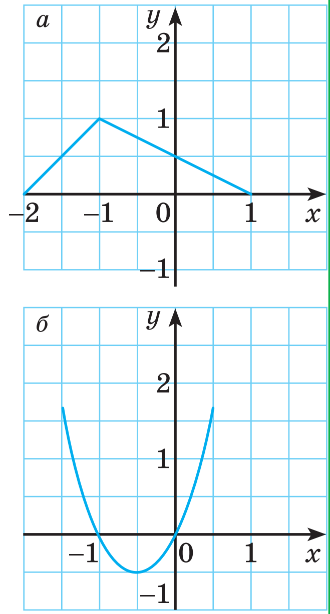
А, наприклад, кожна функція з областю визначення [–2; 1] і кожна функція $y = x^2 + x$ з будь-якою областю визначення — ні парна, ні непарна (мал. 65, *а*, *б*).



Мал. 63



Мал. 64



Мал. 65

Перевірте себе

1. Що таке область визначення і область значень функції? Як їх знайти за допомогою графіка?
2. Що називають проміжками знакосталості?
3. Що називають нулями функції?
4. Які функції називають зростаючими? спадними?
5. Що таке найбільше та найменше значення функції?

Виконаємо разом

1 Знайдіть нулі функції $y = x^2 - x - 6$.

● **Розв'язання.** Розв'яжемо рівняння $x^2 - x - 6 = 0$.
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 == 25;$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{25}}{2} = -2; \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3.$$

Відповідь. Нулями даної функції є числа –2 і 3.

2 Доведіть, що функція $y = x^2 + 3$ на проміжку $(-\infty; 0)$ спадає.

● **Розв'язання.** Нехай x_1 і x_2 — два довільних значення аргументу x даної функції з проміжку $(-\infty; 0)$, причому $x_1 < x_2$.

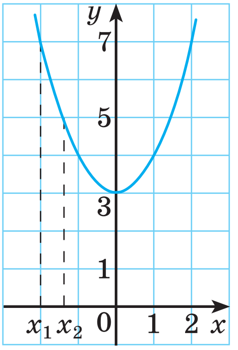
Відповідні їм значення функції:

$y_1 = x_1^2 + 3, \quad y_2 = x_2^2 + 3.$

$y_2 - y_1 = (x_2^2 + 3) - (x_1^2 + 3) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$

Значення x_1 і x_2 з проміжку $(-\infty; 0)$ від'ємні.

Оскільки $x_1 < x_2$, то $x_2 - x_1$ — число додатне, $x_2 + x_1$ — число від'ємне, їх добуток також від'ємний. Тому різниця $y_2 - y_1$ від'ємна, $y_2 < y_1$.
Отже, більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції; дана функція на цьому проміжку спадна (мал. 66).



Мал. 66

3 Парною чи непарною є функція:
а) $y = x^2 - 7$; б) $y = 5x - 1$?

● **Розв'язання.** а) Область визначення $D(y)$ функції $y = x^2 - 7$ — множина всіх дійсних чисел $\boldsymbol{R}$ — є симетричною відносно 0. Знайдемо $f(-x)$: $f(-x) = (-x)^2 - 7 = x^2 - 7 = f(x)$. Отже, функція $y = x^2 - 7$ парна.
б) $D(y) = \boldsymbol{R}$ — симетрична відносно 0.
$f(-x) = 5(-x) - 1 = -5x - 1 = -(5x + 1)$. Ця функція не дорівнює ні $f(x)$, ні $-f(-x)$. Отже, функція $y = 5x - 1$ ні парна, ні непарна.
Відповідь. а) парна; б) ні парна, ні непарна.

Виконайте усно

336. Знайдіть область визначення і область значень функції:

а) $y = 2x^2$; в) $y = x^3$; ґ) $y = x - 2$; е) $y = \sqrt{x}$;

б) $y = \dfrac{2}{x}$; г) $y = \dfrac{2x}{x}$; д) $y = \dfrac{2x}{3} + 5$; є) $y = \dfrac{2}{x^2}$.

337. Області значень функцій $y = x^2$ і $y = |x|$ однакові. Наведіть приклади інших функцій з такими самими областями значень.

338. Чи однакові області значень функцій:
а) $y = |x + 3|$ і $y = |x| + 3$; б) $y = x^2 + 3$ і $y = (x + 3)^2$?

339. Які з функцій, розглянутих у задачі 336, зростаючі на всій області визначення? Наведіть приклади функцій, спадних на всій області визначення.

340. Чи має нулі функція:
а) $y = x^2 + 1$; б) $y = x^4 - 4$; в) $y = -x^4 - 9$; г) $y = |x|$?

341. Графік функції перетинає вісь абсцис n разів. Скільки нулів має ця функція?

342. Графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь абсцис в одній точці $A(12; 0)$. Скільки нулів має ця функція? Скільки коренів має рівняння $f(x) = 0$?

343. Укажіть найбільше і найменше значення функції, графік якої подано на малюнку 61.

344. Назвіть проміжки знакосталості для функцій, графіки яких подано на малюнках 63–65.

Рівень А

345. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = -7x + 3$; в) $y = \sqrt{x+4}$; ґ) $y = \dfrac{-1}{x^2+4}$;

б) $y = x^2 - 4$; г) $y = \dfrac{3}{x+9}$; д) $y = \dfrac{x}{1-x}$.

346. Знайдіть область значень функції:

а) $y = 0{,}01x$; в) $y = \sqrt{1-x^2}$; ґ) $y = 2x^{-1}$;

б) $y = x^2$; г) $y = x^3$; д) $y = \sqrt{1+x^2}$.

347. Знайдіть область визначення і область значень функції:

а) $y = x^2 - 1$; в) $y = \dfrac{1}{x} + 2$; ґ) $y = |x|$;

б) $y = \dfrac{2-x}{3}$; г) $y = 1 - \sqrt{x}$; д) $y = |x| + 2$.

348. ***Відкрита задача.*** Накресліть графік будь-якої функції $y = f(x)$, для якої: а) $D = [-6; 2]$, $E = [-2; 2]$; б) $D = [-1; 3) \vartriangle (3; 5)$, $E = [-3; 1) \vartriangle (1; 3]$.

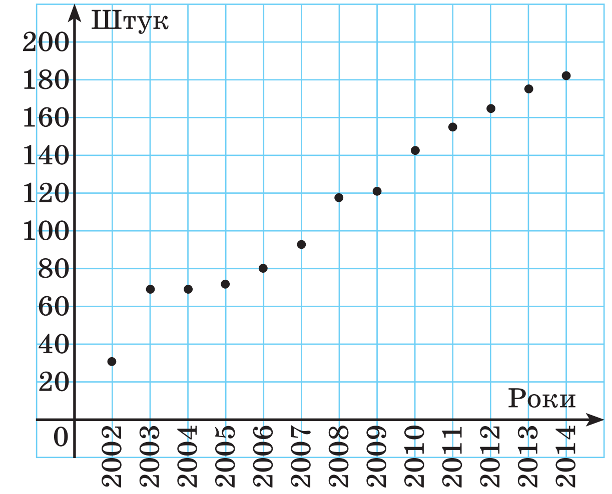
349. Функцію $y = 1{,}5x - 2$ задано на проміжку $[-2; 5]$. Знайдіть її область визначення і область значень.

350. Побудуйте графік функції $y = 0{,}5x^2$, заданої на проміжку $[1; 4]$, і спроектуйте його на осі координат. Яка область значень даної функції?

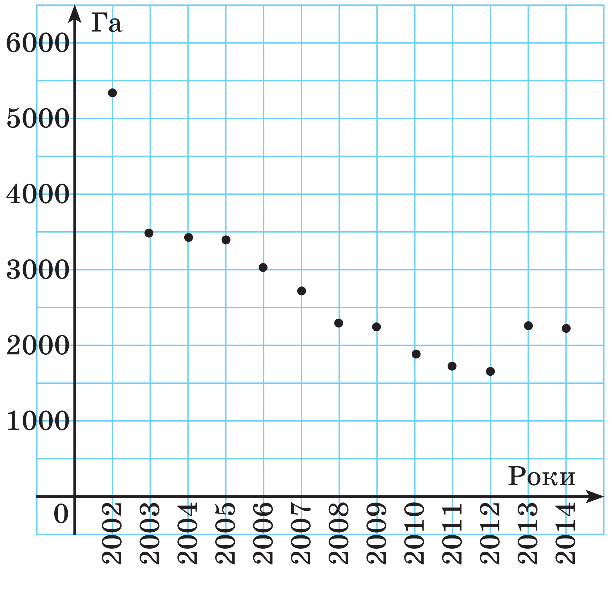
351. Щоб установити залежність між ціною (p) на рибу та обсягом попиту (К) на неї, ціну на рибу та обсяг попиту фіксували протягом 6 місяців. Результати спостережень занесли в таблицю. Побудуйте графік цієї функції. Знайдіть її область визначення і область значень. Чи має ця функція найменше значення? А найбільше? Зростаючою чи спадною є функція?

p **(грн за кг)**	35	40	50	60	65	70
К (тонн за місяць)	16	15	12	9	6	2

352. У середині 70-х років в Полтавській області було започатковане органічне землеробство в Україні. Один із піонерів органічного землеробства в Україні, Семен Антонець, очолює з того часу підприємство «Агроекологія», яке веде свою діяльність на засадах органічного виробництва. На малюнку 67 подано зміну кількості сертифікованих органічних господарств протягом 2002–2014 років, а на малюнку 68 — розвиток середнього розміру органічних підприємств у цей період. Проаналізуйте графіки цих функцій. Зробіть висновки щодо основних властивостей функцій, поданих на графіках. Як змінилася кількість і розміри органічних господарств за останні роки? Чому? Дізнайтеся більше про органічне землеробство в Україні.



Мал. 67



Мал. 68

353. Чи має нулі функція:

а) $y = x^4 + 3$; в) $y = 1 : x^2$; ґ) $y = \sqrt{x}$;

б) $y = x^2 + x$; г) $y = x^2 + x^4$; д) $y = 0{,}5$?

Якщо так, то знайдіть її нулі та проміжки знакосталості.

354. Знайдіть нулі та проміжки знакосталості функції:

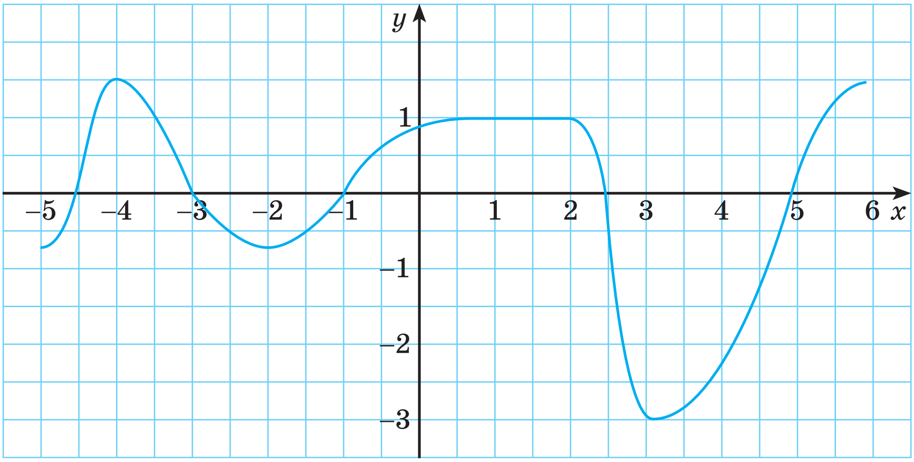
а) $y = 2x$; в) $y = x^3 + x$; ґ) $y = x^2 + 5x + 6$;

б) $y = -x^2 + 1$; г) $y = 2x + 3$; д) $y = \sqrt{x} - 2$.

355. Покажіть, що функція $f(x) = x^4 + 3$ набуває лише додатних значень. Яка область визначення цієї функції? Чи має ця функція найменше значення? А найбільше?

356. Покажіть, що функція $f(x) = -x^2 - x^4$ набуває лише від'ємних значень. Яка область визначення цієї функції? Чи має ця функція найменше значення? А найбільше?

357. 1) На мал. 69 зображено графік функції $y = f(x)$.



Мал. 69

Знайдіть: а) область визначення і область значень функції; б) нулі функції; в) проміжки знакосталості; г) найбільше і найменше значення функції; ґ) проміжки, на яких функція зростає; д) проміжки, на яких функція спадає.

2) ***Відкрита задача.*** Виконайте це завдання для графіка функції, побудованого самостійно.

358. Установіть проміжки знакосталості та нулі функції:

а) $y = x + x^3$; в) $y = 1 - |x|$; ґ) $y = x + 3$; е) $y = 3\sqrt{x}$.

б) $y = 6$; г) $y = -7x$; д) $y = x^2 - 4$;

359. Які з функцій зростаючі, а які — спадні:

а) $y = 2x$; б) $y = -x - 2$; в) $y = x^3$; г) $y = \sqrt{x}$?

360. Зростаючою чи спадною є функція:

а) $y=\frac{2x}{5}$; б) $y=\frac{5x}{2}$; в) $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}$; г) $y=\frac{-x}{5x}$?

361. Побудуйте графік функції та запишіть її властивості:

а) $y = 0{,}5x - 1$; б) $y = 2x^2$; в) $y=\sqrt{x+1}$; г) $y = x^{-1}$.

Рівень Б

362. Знайдіть область значень функції $y = 4 - x^2$, заданої на проміжку:

а) $[-3; 3]$; б) $[1; 7)$; в) $[0;\infty)$.

363. Знайдіть область визначення і область значень функції:

а) $y = 4 + x^2$; б) $y=3+\sqrt{x+2}$; в) $y = 1 : (1 + x^2)$.

364. Знайдіть область визначення функції $y = x^3 - 8$, якщо її область значень $[-35; 0]$.

365. Не будуючи графіка функції, встановіть, при яких значеннях x вона набуває додатних значень, якщо:

а) $y = -2x + 5$; в) $y = 0{,}5x - 3$; ґ) $y = 3x - x^2 - 2$;

б) $y=\sqrt{x+4}$; г) $y=3-\frac{1}{x}$; д) $y=\frac{x}{x+1}$.

366. Не будуючи графіка функції, встановіть, при яких значеннях x вона набуває недодатних значень, якщо:

а) $y = 5x - 1$; в) $y = (x + 1)(1 - x)$; ґ) $y = (x + 2)^3$;

б) $y=\sqrt{x}-4$; г) $y=\frac{6}{x}+2$; д) $y=\frac{1}{x-1}-1$.

367. Доведіть, що функція:

а) $y = 3x + 5$ зростає на $\boldsymbol{R}$; в) $y = -x^3$ спадає на $\boldsymbol{R}$;

б) $y=1-\sqrt{x}$ спадає на $[0;\infty)$; г) $y = 2x^2$ зростає на $[0;\infty)$.

368. Зростаючою чи спадною є функція:

а) $y = x - 5$; в) $y=\sqrt{3+x}$; ґ) $y = 8 - x^3$;

б) $y = 2x^3$; г) $y=13-\sqrt{x}$; д) $y = x^3 + x$?

369. Укажіть проміжки спадання функції:

а) $y = x^4 + 3$; б) $y=|x-3|$; в) $y=|x|-x$.

370. На яких проміжках дана функція зростає:

а) $y=x\cdot|x|$; б) $y=\sqrt{4+x^2}$; в) $y=\sqrt{4-x^2}$?

371. Покажіть, що функція $f(x) = x^4 + 3$ парна, а $f(x) = x^3 + x$ — непарна. Покажіть, що функція $f(x) = x^2 + x$ ні парна, ні непарна.

372. Чи один і той самий зміст мають речення «функція $y = f(x)$ не є парною» і «функція $y = f(x)$ — непарна»?

373. Знайдіть область визначення функції. Доведіть, що функція $y = f(x)$ парна, якщо: а) $f(x) = x^4 + 3x^2$; б) $f(x) = 3x(x^3 - 2x)$; в) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 4}$; г) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

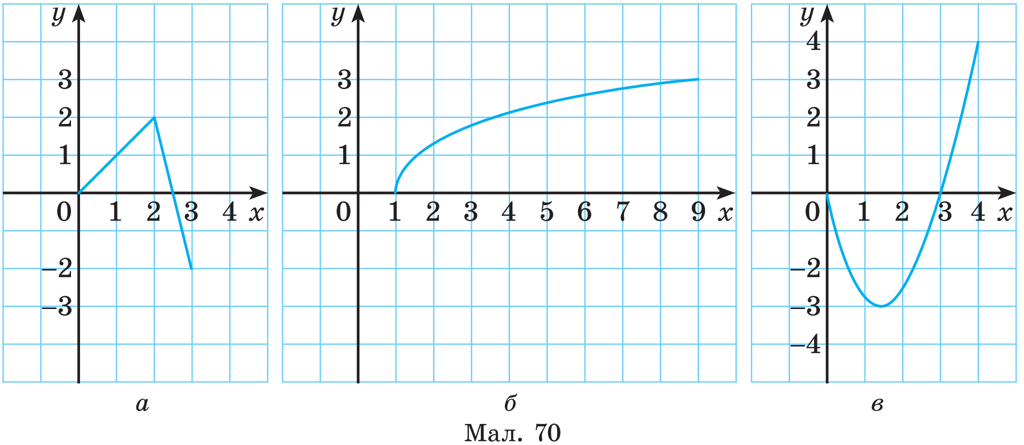
374. Знайдіть область визначення функції. Доведіть, що функція $y = f(x)$ непарна, якщо:

а) $y = x(1 - x^2)$; б) $y = 7x^3 + x$; в) $y = \dfrac{3}{x} + \dfrac{x}{3}$.

375. Які з даних функцій парні, які — непарні:

а) $y = x^4$; б) $y = x^5$; в) $y = -x^2 + 3$; г) $y = \dfrac{5}{x^2}$; ґ) $y = \dfrac{3x^2 + 1}{x}$; д) $y = \sqrt{1 - x^2}$?

376*. Перемалюйте графіки з мал. 70 у зошит. Кожний з графіків добудуйте так, щоб одержана функція була: 1) парною; 2) непарною; 3) ні парною, ні непарною.
Для кожного з виконаних пунктів 1)–3) установіть нулі функції, її проміжки знакосталості, зростання і спадання. Які висновки можна зробити?



Мал. 70

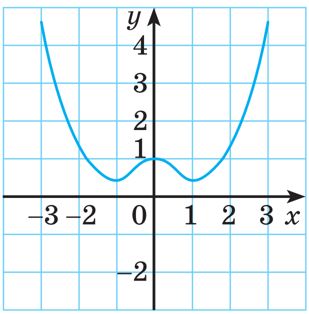
377*. Функція $y = f(x)$ парна. На проміжку $(-\infty; -2)$ вона зростає, а на проміжку $(-2; 0)$ — спадає. Якою вона є на решті області визначення?

378*. Функція $y = f(x)$ непарна. На проміжку $(-\infty; -3)$ вона спадає, а на проміжку $(-3; 0)$ зростає. Якою вона є на решті області визначення?

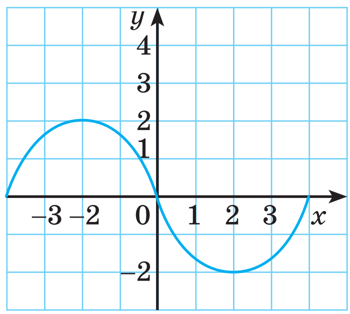
379*. ***Відкрита задача.*** Намалюйте схематично графік парної функції $y = g(x)$, яка на проміжку $[-4; -2]$ зростає від 1 до 5, а на проміжку $[-2; 0]$ спадає від 5 до -1. Для функції $y = g(x)$ встановіть: а) область визначення та область значень; б) нулі та проміжки знакосталості; в) найбільше і найменше значення.

380*. ***Відкрита задача.*** Намалюйте схематично графік непарної функції $y = f(x)$, яка на проміжку $[-4; -1]$ спадає від 3 до -3, а на проміжку $[-1; 0]$ зростає від -3 до 0. Для функції $y = f(x)$ встановіть: а) область визначення та область значень; б) нулі та проміжки знакосталості; в) найбільше і найменше значення.

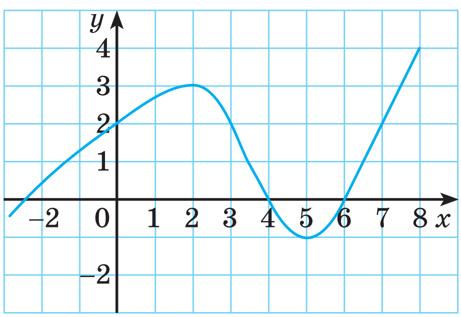
381. Опишіть властивості функцій, графіки яких зображено на малюнках 71–73.



Мал. 71



Мал. 72



Мал. 73

Побудуйте графік функції та опишіть її властивості **(382–384).**

382. а) $y = |x|$; б) $y = |x - 3|$; в) $y = |x| - 3$.

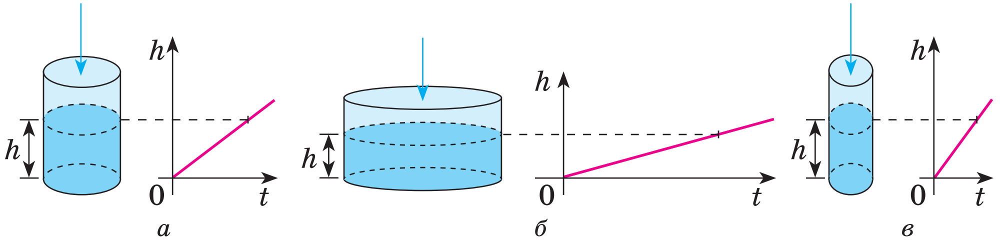
383. а) $y = \sqrt{x^2}$; б) $y = \sqrt{(x-2)^2}$; в) $y = \sqrt{(4-x)^2}$.

384. а) $y = 6x^{-1}$; б) $y = \dfrac{x-2}{x^2 - 2x}$; в) $y = \dfrac{x^2}{x}$; г) $y = x^{-2}$.

385. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

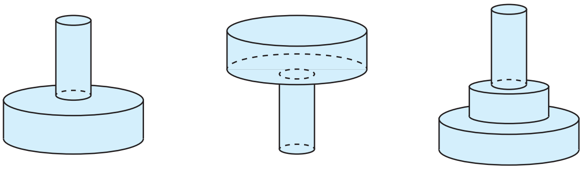
а) $y = x^2 - 6$; б) $y = -x^3$; в) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 4x}$; г) $y = -\sqrt{9 - x^2}$.

386. Практичне завдання. Якщо додавати воду в резервуар з постійною швидкістю, то висота води в ньому буде функцією від часу $y = f(t)$ (мал. 74). **1.** Розгляньте малюнки і встановіть: а) чи залежить швидкість зростання такої функції від площі основи резервуара (воду в усі резервуари подають з однаковою швидкістю); б) у якому випадку (*а*–*в*) швидкість зростання функції $y = f(t)$ буде найбільшою, а в якому — найменшою?



Мал. 74

2. Зобразіть схематично графік залежності висоти води від часу наповнення резервуара, зображеного на малюнку 75.



Мал. 75

Вправи для повторення

387. Встановлено, що зайва маса людини є результатом споживання більшої кількості калорій, ніж використання. Оскільки надмірна маса негативно впливає на стан здоров’я та стиль життєдіяльності людини, то необхідно спалювати калорій не менше, ніж споживати. Склянка напою Coca-Cola містить 26,5 г цукру на 250 мл, що дорівнює чотирьом або п’яти чайним ложкам цукру або 108 кал. За скільки хвилин ви зможете відпрацювати калорії, отримані від склянки цього напою, за допомогою:

а) прасування білизни стоячи, якщо в цей час за 1 год на 1 кг маси вашого тіла спалюється 3,6 кал;

б) прополки городу руками, якщо в цей час за 1 год на 1 кг маси вашого тіла спалюється 5 кал;
в) чистки килимів пилососом, якщо в цей час за 1 год на 1 кг маси вашого тіла спалюється 2,9 кал?

Розв'яжіть рівняння **(388–389)**.

388. а) $2x^2 + 3x = 9$;
б) $9x^2 - 12x + 4 = 0$;
в) $5x^2 + 4x = 1$.

389. а) $(x+3)\sqrt{x+5} = 0$; б) $(x+5)\sqrt{x+3} = 0$.

390. Запишіть у стандартному вигляді число:
а) 7800; в) 84,17; ґ) 0,085; е) 0,58954;
б) 140000; г) 486000000; д) 0,00045; є) 0,0000008.

Скарбничка досягнень

✓ Можу характеризувати функцію за її графіком:
1) вказати область визначення;
2) вказати область значень;
3) знайти точку перетину графіка функції з віссю y;
4) знайти нулі функції та проміжки знакосталості;
5) визначити проміжки зростання чи спадання;
6) указати найбільше та найменше значення функції;
7) побудувати графік функції.

✓ Умію знаходити за допомогою графіка:

область визначення функції як проекцію її графіка на вісь x;
область значень функції як проекцію її графіка на вісь y

✓ Знаю, що таке:

• нулі функції $y = f(x)$:
$$f(x) = 0$$
• проміжки знакосталості функції $y = f(x)$:
$$f(x) > 0 \quad \text{або} \quad f(x) < 0$$

✓ Знаю, які функції називають

зростаючими ↗
$$x_1 < x_2$$
$$f(x_1) < f(x_2)$$

спадними ↘
$$x_1 < x_2$$
$$f(x_1) > f(x_2)$$

✓ Можу визначити за графіком найбільше і найменше значення функції.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

— Як обчислити в точці x_0 значення функції $f(x)$: $\boxed{f(x_0)}$.

— Як складати таблиці значень функцій за формулами.

— Що таке графік функції і як його будують.

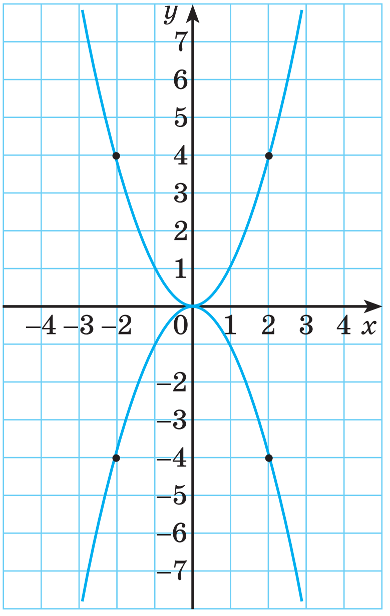
— Види функцій та їх графіки:

лінійна функція	$y = kx + b$	пряма лінія
обернена пропорційність	$y = \dfrac{k}{x}$	гіпербола
квадратична функція	$y = x^2$	парабола

§ 10 Перетворення графіків функцій

Складемо таблиці значень функцій: а) $y = x^2$ і б) $y = -x^2$, заданих на множині $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

а)	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	9	4	1	0	1	4	9
б)	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9



Мал. 76

Взагалі значення функції $y = -x^2$ протилежні відповідним значенням функції $y = x^2$. Тому графіки цих функцій симетричні відносно осі x (мал. 76). Таку саму властивість мають будь-які функції $y = f(x)$ і $y = -f(x)$.

Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі x.

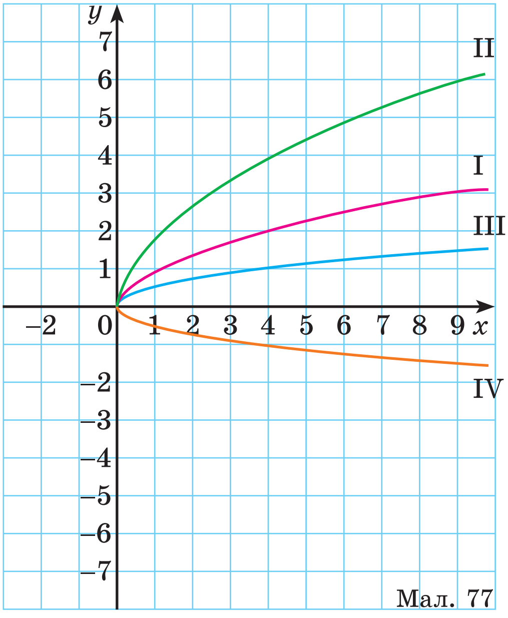
Порівняємо ще функції $y = 2f(x)$ і $y = f(x)$. Щоб одержати яке-небудь значення першої з них, треба відповідне значення другої помножити на 2. Тому графік першої з цих функцій можна одержати, розтягнувши вдвічі від осі x графік другої функції. А щоб побудувати графік функції $y = \frac{1}{3} f(x)$, слід втричі стиснути до осі x графік функції $y = f(x)$.

Щоб побудувати графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, треба графік функції $y = f(x)$ розтягнути від осі x у k разів, якщо $k > 1$, або стиснути його в $\frac{1}{k}$ разів до осі x, якщо $0 < k < 1$.

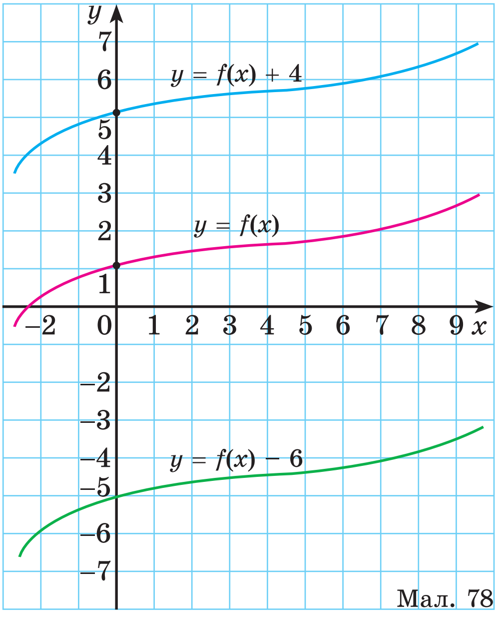
Приклад. Побудуйте графіки функцій: $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0{,}5\sqrt{x}$, $y = -0{,}5\sqrt{x}$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = \sqrt{x}$. На малюнку 77 його зображає крива I. Збільшивши вдвічі ординату кожної точки цього графіка, одержимо множину точок, розміщених на кривій II. Це графік функції $y = 2\sqrt{x}$. Якщо ординату кожної точки графіка I зменшити вдвічі й нанести відповідні точки на координатну площину, то одержимо криву III — графік функції $y = 0{,}5\sqrt{x}$. Крива IV симетрична відносно осі x кривій III, — графік функції $y = -0{,}5\sqrt{x}$.

Кожне значення функції $y = f(x) + 4$ на 4 більше, ніж відповідне значення функції $y = f(x)$. Тому графік функції $y = f(x) + 4$ можна одержати, перенісши графік функції $y = f(x)$ на 4 одиниці в напрямку осі y (мал. 78). Щоб одержати графік функції $y = f(x) - 6$, треба графік функції $y = f(x)$ перенести на 6 одиниць у протилежному напрямку.



Мал. 77



Мал. 78

Щоб одержати графік функції $y = f(x) + n$, треба графік функції $y = f(x)$ перенести на n одиниць вгору (у напрямку осі y), якщо $n > 0$, або на $-n$ одиниць вниз (у протилежному напрямку), якщо $n < 0$.

А як слід перетворити графік функції $y = f(x)$, щоб одержати графік функції $y = f(x - m)$? Обчислимо для тих самих значень x значення функцій: а) $y = x^2$ і б) $y = (x - 2)^2$.

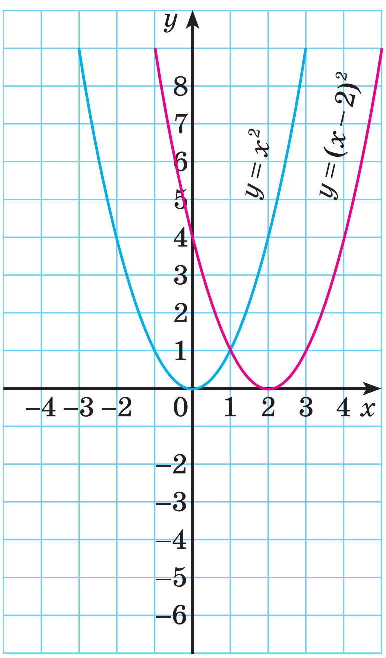
а)	x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
	y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

б)	x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
	y	36	25	16	9	4	1	0	1	4

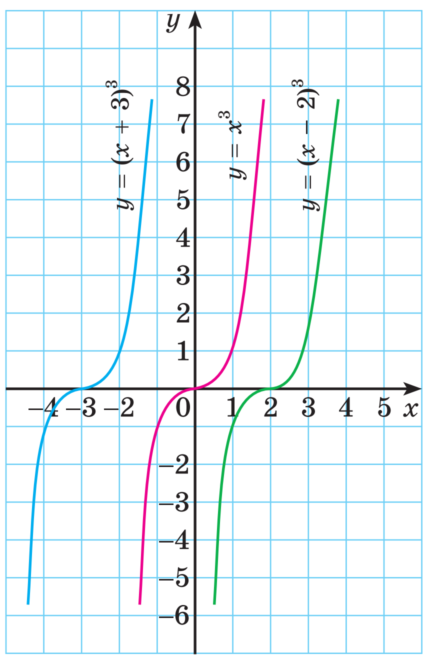
Як бачимо, при кожному значенні $x = c$ значення функції $y = (x - 2)^2$ таке, як значення функції $y = x^2$, коли $x = c - 2$. Тому графік функції $y = (x - 2)^2$ можна одержати, перенісши графік функції $y = x^2$ на 2 одиниці в напрямку осі x (мал. 79). Графік функції $y = (x + 3)^2$ можна одержати перенесенням графіка функції $y = x^2$ на 3 одиниці в напрямку, протилежному напрямку осі x.

Щоб одержати графік функції $y = f(x - m)$, досить графік функції $y = f(x)$ перенести на m одиниць праворуч (у напрямку осі x), якщо $m > 0$, або на $-m$ одиниць ліворуч (у протилежному напрямку), якщо $m < 0$.

На малюнку 80 показано, як, наприклад, з графіка функції $y = x^3$ можна одержати графіки функцій $y = (x - 2)^3$ і $y = (x + 3)^3$.



Мал. 79



Мал. 80

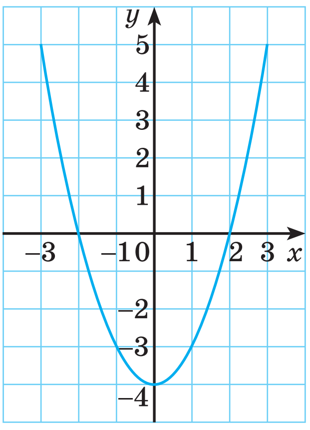
ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Як, маючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік функції $y = |f(x)|$?

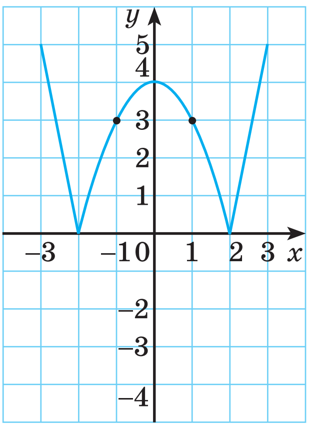
За означенням модуля,

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ якщо } f(x) \ge 0, \\ -f(x), \text{ якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Тому значення функції $y = |f(x)|$ і $y = f(x)$ однакові за умови, що $f(x) \ge 0$ і протилежні, якщо $f(x) < 0$. Отже, щоб побудувати графік функції $y = |f(x)|$, досить ті частини графіка функції $y = f(x)$, які лежать нижче від осі x, замінити симетричними їм відносно цієї осі, а все інше залишити без змін. Наприклад, маючи графік функції $y = x^2 - 4$ (мал. 81), можна одразу побудувати графік функції $y = |x^2 - 4|$ (мал. 82).



Мал. 81



Мал. 82

Дослідіть, як одержати графік функції $y = f(|x|)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$.

Перевірте себе

1. Що таке графік функції?
2. Як, маючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік функції:

   а) $y = -f(x)$; в) $y = k \cdot f(x)$; ґ*) $y = |f(x)|$;

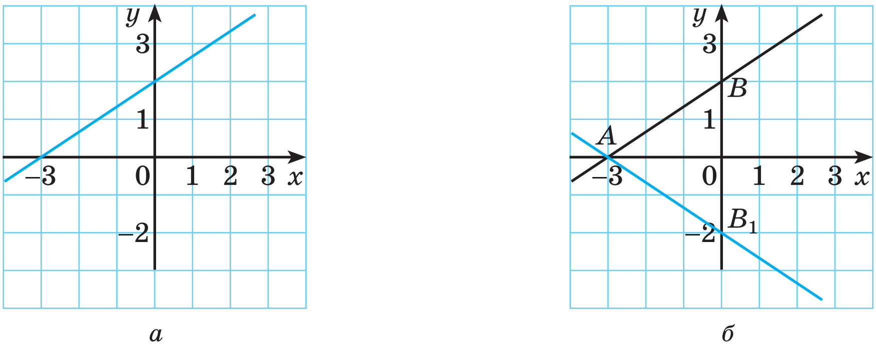
   б) $y = f(x) + n$; г*) $y = f(x - m)$; д*) $y = f(|x|)$?
3. У якій чверті лежить графік функції $y = -f(x)$, якщо графік функції $y = f(x)$ розташований у: а) III чверті; б) I та II чверті?
4. Укажіть найбільше значення функції $y = -f(x)$, якщо 5 — найбільше значення функції:

   а) $y = f(x) + 5$; б) $y = f(x - 5)$; в) $y = 5f(x)$.

Виконаємо разом

1 На малюнку 83, *а* зображено графік лінійної функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції $y = -f(x)$.

- **Розв'язання.** Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі абсцис. Точка $A(-3;\ 0)$ — спільна для обох графіків, а симетричною точці $B(0;\ 2)$ відносно осі x є точка B_1 $(0;\ -2)$. Пряма AB_1 — графік функції $y = -f(x)$.



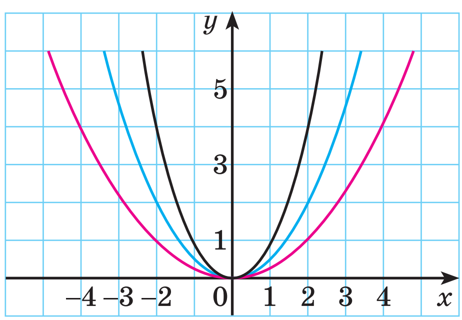
Мал. 83

2 Побудуйте графік функції: а) $y = x^2$; б) $y=\dfrac{1}{2}x^2$; в) $y=\left(\dfrac{1}{2}x\right)^2$.

- **Розв'язання.** а) Графік функції $y = x^2$ — звичайна парабола (мал. 84).

б) Щоб одержати графік функції $y=\dfrac{1}{2}x^2$, треба ординату кожної точки першого графіка зменшити вдвічі; на малюнку ця парабола синього кольору.

в) $y=\left(\dfrac{1}{2}x\right)^2=\dfrac{1}{4}x^2$. Зменшивши ординату кожної точки звичайної параболи у 4 рази, одержимо потрібний графік — лінію червоного кольору.



Мал. 84

Виконайте усно

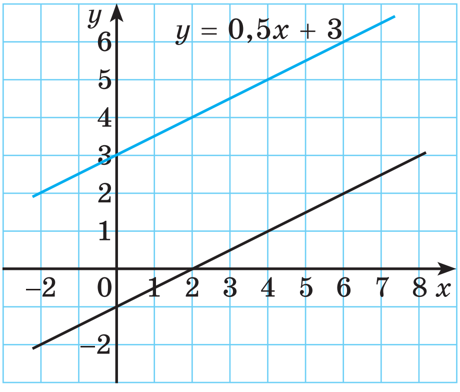
391. Чим різняться графіки функцій:
а) $y = x^2$, $y = (-x)^2$ і $y = -x^2$;
б) $y = 4x^2$, $y = -(2x)^2$ і $y = (-2x)^2$;
в) $y = \sqrt{x^2}$, $y = \sqrt{(-x)^2}$ і $y = |x|$?

392. Як взаємно розташовані графіки функцій:
а) $y = 2x$ і $y = -2x$;
б) $y = x^3$ і $y = -x^3$;
в) $y = \frac{1}{3}x$ і $y = -\frac{1}{3}x$;
г) $y = \frac{1}{x}$ і $y = -\frac{1}{x}$?

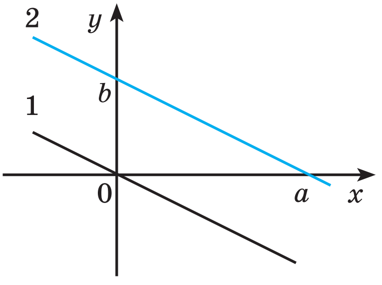
393. Функція $y = f(x)$ зростає на всій області визначення. Зростаючою чи спадною є функція:
а) $y = 2f(x)$; б) $y = 0{,}5f(x)$; в) $y = -f(x)$?

394. Чи правильно, що графіки функцій $y = 0{,}3x$, $y = 0{,}3x + 2$ і $y = 0{,}3x - 5$ — паралельні прямі?

395. На малюнку 85 зображено дві паралельні прямі — графіки двох функцій. Одна з цих функцій $y = 0{,}5x + 3$. Назвіть формулу другої функції.



Мал. 85



Мал. 86

396. На малюнку 86 пряма 1 — графік функції $y = f(x)$, а паралельна їй пряма 2 перетинає осі координат у точках a і b. Один учень вважає, що пряма 2 — графік функції $y = f(x - a)$, другий — що вона є графіком функції $y = f(b + x)$, а третій — графіком функції $y = f(x) + b$. Хто з них має рацію?

397. Чим різняться графіки функцій:
а) $y = x^2 + 2$ і $y = x^2 - 2$;
б) $y = x^2 - 2$ і $y = (x - 2)^2$;
в) $y = x^3 + 1$ і $y = (x + 1)^3$;
г) $y = (x - 2)^3$ і $y = (x + 2)^3$?

398. Область визначення функції $y = f(x)$ — проміжок $(a;\ b)$. Якою є область визначення функції:

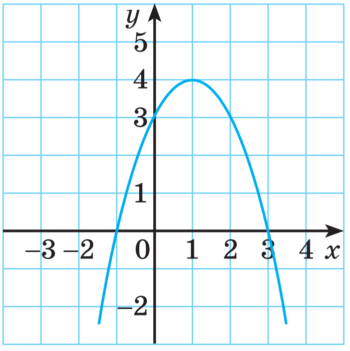
а) $y = -f(x)$; б) $y = f(x) + n$; в) $y = |f(x)|$; г) $y = k \cdot f(x)$?

399. Область значень функції $y = f(x)$ — проміжок $(c; \infty)$. Якою є область значень функції:

а) $y = -f(x)$; б) $y = f(x) + n$; в) $y = f(x) - m$; г) $y = k \cdot f(x)$?

Рівень А

400. На малюнку 87 зображено графік функції $y = f(x)$. Накресліть його в зошит і побудуйте в тій самій системі координат графіки функцій $y = -f(x)$ і $y = 3 \cdot f(x)$.



Мал. 87

Побудуйте графік функції **(401–403)**.

401. а) $y = -x^2$; б) $y = -x^3$; в) $y = -|x|$.

402. а) $y = 2\sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{9x}$; в) $y = \sqrt{16x}$.

403. а) $y = 3x^2$; б) $y = -3x^2$; в) $y = -0{,}5x^2$.

404. Як треба перетворити графік функції $y = \sqrt{x}$, щоб одержати графік функції $y = -\sqrt{x}$? Чи правильно, що об'єднання графіків функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = -\sqrt{x}$ є графіком рівняння $y^2 = x$?

405. Як перетворити графік функції $y = 3x - 4$, щоб одержати графік функції $y = 4 - 3x$? Виконайте побудову.

406. Побудуйте графіки функцій $y = x^2$ і $y = x^2 - 4$. Знайдіть їх області значень. При яких значеннях x значення функцій додатні, а при яких — від'ємні? Знайдіть координати перетину графіків з осями координат.

407. Графіки яких функцій зображено на мал. 88, *а*, *б*?

Побудуйте в одній системі координат графіки функцій **(408–409)**.

408. а) $y = 2x$, $y = 2x + 1$ і $y = 2x - 3$;

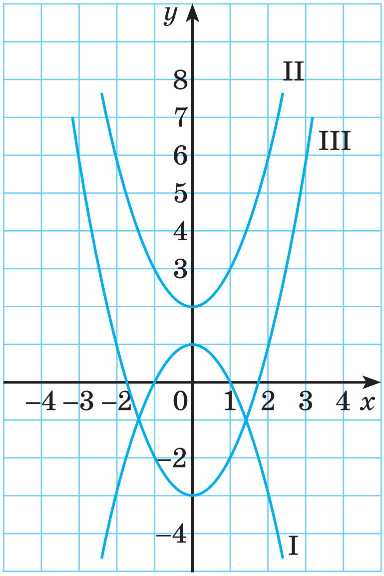
б) $y = -x^2$, $y = -x^2 + 2$ і $y = -x^2 - 1$.

409. а) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x-1}$ і $y = \sqrt{x} + 2$;

б) $y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 1$ і $y = 2x^2 - 1$.

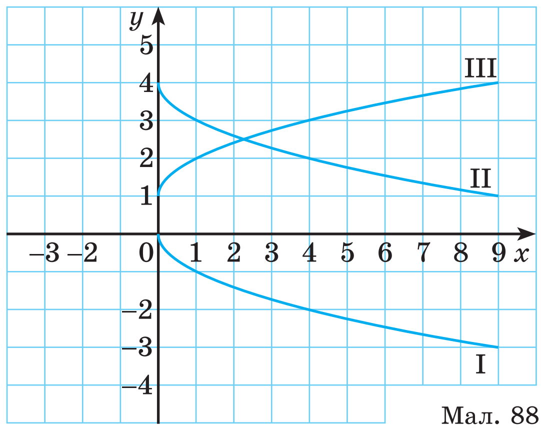
410. Як треба перетворити графік функції $y = x^2$, щоб одержати графік функції:

а) $y = (x + 3)^2$; б) $y = (x - 3)^2$; в) $y = -(x + 3)^2$?



а

б



Мал. 88

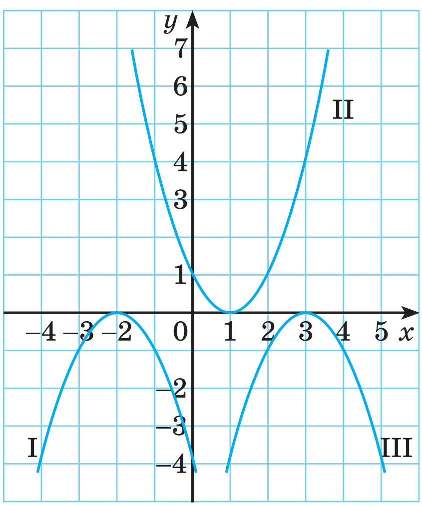
Побудуйте в одній системі координат графіки функцій **(411–412)**.

411. а) $y_1 = 2x$, $y_2 = 2(x - 1)$ і $y_3 = 2(x + 3)$;

б) $y_1 = -x^2$, $y_2 = -(x + 2)^2$ і $y_3 = -(x - 3)^2$.

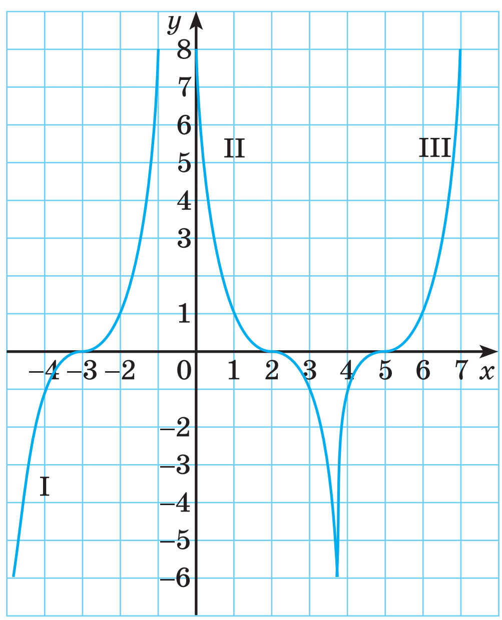
412. а) $y_1 = \dfrac{4}{x}$, $y_2 = \dfrac{4}{x-3}$ і $y_3 = \dfrac{4}{x+1}$; б) $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = \sqrt{x-1}$ і $y_3 = \sqrt{x+2}$.

413. Графіки яких функцій зображено на мал. 89, *а*, *б*?



Мал. 89

а



б

414. 1) Дано параболу $y = x^2$. Напишіть рівняння параболи, яку можна одержати з даної перенесенням:

а) на 2 одиниці праворуч і 3 одиниці вгору;

б) на 4 одиниці ліворуч і 2 одиниці вниз.

2) ***Відкрита задача.*** Дано гіперболу $\boxed{}$. Напишіть рівняння гіперболи, яку можна одержати з даної перенесенням на $\boxed{}$.

415. Побудуйте графік функції:

а) $y=(x-2)^2+1$ і $y=(x-2)^2-1$; б) $y=(x+1)^2+3$ і $y=(x+1)^2-3$.

Рівень Б

416. Графік функції $y = f(x)$ симетричний відносно осі y. Чи симетричний відносно цієї осі графік функції:

а) $y = 2f(x)$; б) $y = -f(x)$; в) $y = -2f(x)$?

Побудуйте відповідні графіки.

417. Функція $y=f(x)$ на проміжку $(-\infty; a)$ спадає, а на проміжку $(a; \infty)$ — зростає. Якою є на цих проміжках функція:

а) $y = 2f(x)$; б) $y = 0{,}5f(x)$;

в) $y = -f(x)$?

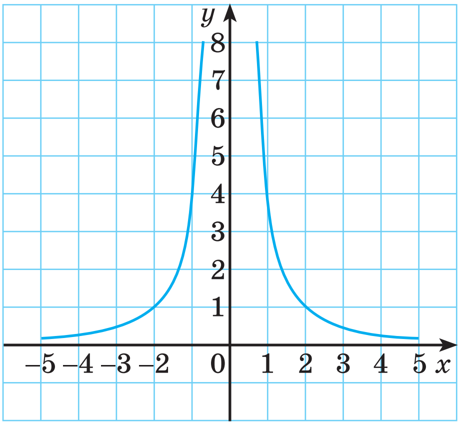
Побудуйте відповідні графіки.

418. На мал. 90 зображено графік функції $y = 4x^{-2}$. Перемалюйте його в зошит і побудуйте в тій самій системі координат графіки функцій:

а) $y=\dfrac{4}{x^2}+2$;

б) $y=\dfrac{4}{x^2}-3$;

в) $y=1-\dfrac{4}{x^2}$.



Мал. 90

419. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

а) $y=-\dfrac{12}{x}$; $y=-\dfrac{12}{x}+3$; $y=-\dfrac{12}{x}-1$.

б) $y=2\sqrt{x}$; $y=2\sqrt{x}-3$; $y=2\sqrt{x}+2$.

420. Побудуйте графік функції:

а) $y = -x^2 + 3$; в) $y = x^3 + 1$; г) $y = 2x^3 - 1$;

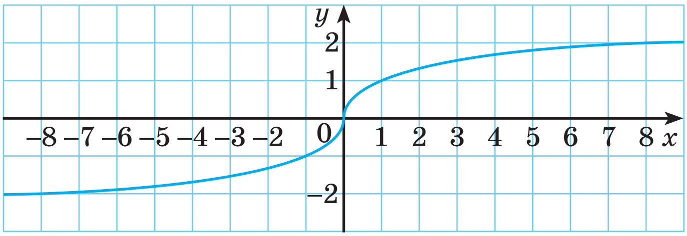
б) $y=\dfrac{4}{x}-3$; г) $y=-\sqrt{x}+1$; д) $y = 0{,}5x^2 - 2$.

421. Заповніть порожні клітинки таблиці. Якою формулою можна задати функцію $y = f(x)$?

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	6	5	6	9	14
$-f(x)$						
$3f(x)$						

422. На мал. 91 зображено графік функції $y=\sqrt[3]{x}$. Перемалюйте його в зошит і побудуйте в тій самій системі координат графіки функцій:

а) $y=\sqrt[3]{x-2}$; б) $y=\sqrt[3]{x+1}$; в) $y=3-\sqrt[3]{x}$.



Мал. 91

423. Побудуйте графік функції:

а) $y = 0{,}5(x - 1)^3$; в) $y = 2(x - 2)^2$; ґ) $y=3\sqrt{x+3}$;

б) $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$; г) $y=\frac{1}{x-3}$; д) $y=\frac{-3}{x+3}$.

424. Побудуйте графік і дослідіть властивості функції:

а) $y=\frac{12}{x-3}+4$; б) $y=\frac{6}{x+2}-3$; в) $y=\frac{x+2}{x+1}$.

Побудуйте графік функції **(425–428)**.

425. а) $y = (x + 2)^2 + 3$; в) $y = -2(x + 1)^2 + 3$;

б) $y=\frac{1}{x-1}+2$; г) $y=5-\frac{6}{x+1}$.

426. а) $y=2\sqrt{x-3}+1$; в) $y = -(x + 1)^3 + 2$;

б) $y=2-\sqrt{x+3}$. г) $y = 0{,}5(x - 3)^3 - 3$.

427*. а) $y=2|x|-3$; в) $y=\sqrt{|x|}$; ґ) $y=(|x|-1)^2$;

б) $y=\left|1-|x|\right|$; г) $y=-|x|+2$; д) $y=|x|^3+1$.

428*. а) $y=|3x+1|$; в) $y=\left|1-\sqrt{x}\right|$; ґ) $y=\left|6x^{-1}-3\right|$;

б) $y=\left|-x^2+4\right|$; г) $y=|0{,}2x-1|$; д) $y=\left|x^2-2\right|$.

Вправи для повторення

429. Обчисліть:

а) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+1\frac{2}{15}\right):2\frac{7}{15}$; б) $\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{20}\right)\cdot 1\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$; в) $\frac{7}{8}-\frac{1}{2}:\frac{3}{4}+5:\frac{1}{3}-\frac{1}{8}$.

430. У таблиці подано назви, місця розташування та площі 5 найбільших і найкрасивіших дендропарків України. Складіть задачу за цими даними. Скористайтеся також відомостями про інші дендропарки України, зокрема найближчий до вас.

Назва	Розташування	Площа (га)
Тростянець	село Тростянець Чернігівської області	350 га
Олександрія	місто Біла Церква Київської області	290 га
Софіївка	місто Умань Черкаської області	179,2 га
Полтавський	місто Полтава	124,5 га
Веселі Боковеньки	Молинський район Кіровоградської області	109 га

431. Знайдіть корені квадратного тричлена:

а) $2x^2 + 7x - 30$; в) $4x^2 - 5x + 3$; ґ) $x^2 - 6x - 55$;
б) $x^2 - 5x + 6$; г) $7x^2 - 5x - 2$; д) $x^2 + 10x + 25$.

432. Виділіть з поданого тричлена квадрат двочлена:

а) $x^2 - 6x + 15$; в) $x^2 + 5x + 6$; ґ) $5x^2 - 10x + 8$;
б) $x^2 + 8x + 8$; г) $x^2 - x - 1$; д) $9 + 2x - 3x^2$.

Скарбничка досягнень

✓ Розумію, у чому полягає перетворення графіка функції $f(x)$:

$f(x) \to f(x - m)$
перенесення графіка
$m > 0$ — праворуч
$m < 0$ — ліворуч

$f(x) \to f(x) + n$
перенесення графіка
$n > 0$ — вгору
$n < 0$ — вниз

$f(x) \to kf(x)$, $k > 0$
$k > 1$ — розтягування графіка від осі x в k разів,
$k < 1$ — стискання графіка до осі x в $\frac{1}{k}$ разів.

✓ Розумію, що графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі x.

✓ Можу побудувати графік функції, використовуючи правила перетворення.

✓ Хочу навчитися будувати графіки функцій, що містять модулі.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

— Що таке квадратний тричлен і його корені.

— Як знайти корені квадратного тричлена

$$ax^2 + bx + c \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac$$

— Розклад квадратного тричлена на множники, якщо x_1 і x_2 його корені: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

— Як виділити з тричлена повний квадрат:

$x^2 + 6x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 1 = (x + 3)^2 - 9 + 1 = (x + 3)^2 - 8$

— Правила перетворення графіка функції:

$f(x) \to f(x) + n \qquad f(x) \to f(x - m) \qquad f(x) \to kf(x)$

§ 11 Квадратична функція

Функцію, яку можна задати формулою $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, b, c — довільні числа, а x — аргумент, називають *квадратичною* (або *квадратною*) *функцією*.

Приклади квадратичної функції: $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = x^2 + 3$, $y = (x + 4)^2$. Їх графіки — однакові параболи, але по-різному розміщені на координатній площині. Графік функції $y = ax^2$ теж парабола; її вершина лежить у початку координат, а вітки напрямлені вгору, якщо $a > 0$, або вниз, якщо $a < 0$.

Графіки функцій $y = ax^2 + bx + c$ і $y = ax^2$ — *однакові параболи*, які можна сумістити паралельним перенесенням.

Покажемо це:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Оскільки $a \neq 0$, b, c — числа, то і $\frac{b}{2a}$, і $\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ — числа.

Позначивши їх буквами $m = -\dfrac{b}{2a}$ і $n = -\dfrac{b^2+4ac}{4a}$, матимемо тотожність:

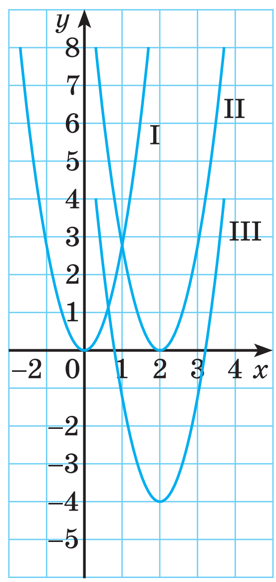
$$ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n.$$

Отже, функцію $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, завжди можна подати у вигляді $y = a(x - m)^2 + n$. Наприклад, функцію $y = 3x^2 - 12x + 8$ можна записати так: $y = 3(x - 2)^2 - 4$.

З § 10 відомо, що графік функції $y = a(x - m)^2$ можна одержати за допомогою паралельного перенесення на $|m|$ одиниць вздовж осі x графіка функції $y = ax^2$.

Якщо графік функції $y = a(x - m)^2$ перенесемо на $|n|$ одиниць уздовж осі y, то одержимо графік функції $y = a(x - m)^2 + n$. Отже, за допомогою двох паралельних перенесень графіка функції $y = ax^2$ утвориться графік функції $y = a(x - m)^2 + n$, а звідси і даної функції $y = ax^2 + bx + c$.

Наприклад, щоб побудувати графік функції $y = 3x^2 - 12x + 8$, або $y = 3(x - 2)^2 - 4$, потрібно графік функції $y = 3x^2$ перенести в напрямку осі x на 2 одиниці (мал. 92), після чого криву II зсунути на 4 одиниці вниз. Утворена крива III — графік даної функції.



Мал. 92

Із наведених міркувань випливає, що графік функції $y = ax^2 + bx + c$ — парабола $y = a(x - m)^2 + n$. Координати її вершини m і n, тобто $-\dfrac{b}{2a}$ і $-\dfrac{b^2+4ac}{4a}$.

Щоб побудувати графік функції $y = ax^2 + bx + c$, треба знайти координати вершини параболи, точки її перетину з осями координат і ще кількох її точок, позначити їх на координатній площині й провести через них плавну лінію. Можна скористатись іншим способом: спочатку побудувати графік функції $y = ax^2 + bx$, а потім підняти або опустити його на $|c|$ одиниць. Графік функції $y = ax^2 + bx$, або $y = x(ax + b)$, будувати неважко, оскільки він перетинає вісь абсцис у точках $x = 0$ і $x = -\dfrac{b}{a}$.

Побудова графіка функції $y = 3(x - 2)^2 - 4$

Приклад. Побудуйте графік функції $y = 2x^2 + 4x + 3$.

Розв'язання. Графік функції $y = 2x^2 + 4x$, або $y = x(2x + 4)$, перетинає вісь x у точках $x = 0$ і $x = -2$. Позначимо їх (мал. 93). Ці точки симетричні відносно осі параболи, яку маємо побудувати, тому абсциса її вершини $x = -1$. Ордината дорівнює $2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = -2$. Позначаємо точку з координатами (–1; –2). Через позначені три точки проходить графік I функції $y = 2x^2 + 4x$.

Переносимо його на 3 одиниці вгору і маємо графік II даної функції $y = 2x^2 + 4x + 3$.

Проаналізуємо, які властивості має квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$.

Графік даної функції — парабола. Нехай її вершина — точка $M(m; n)$, тобто

$$m = -\frac{b}{2a}, \quad n = -\frac{D}{4a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac.$$

Якщо $a > 0$, то вітки параболи спрямовані вгору. Тоді:

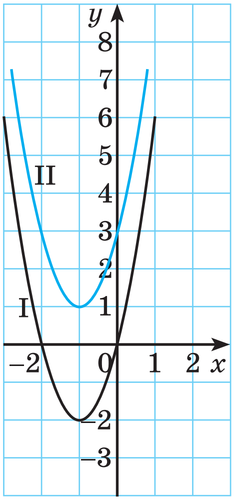
1) область визначення функції — уся множина $\boldsymbol{R}$;

2) область значень — промінь $[n; \infty)$;

3) якщо $x < m$, то функція спадає, при $x > m$ — зростає;

4) якщо $D > 0$, то функція має два нулі: x_1 і x_2;

5) на проміжку $(x_1; x_2)$ значення функції від'ємні, на проміжках $(-\infty; x_1)$ і $(x_2; \infty)$ — додатні.



Мал. 93

Якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз і властивості 2), 3), 5) слід формулювати інакше. Спробуйте зробити це самостійно.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Графік кожної квадратичної функції — парабола. Розглянемо деякі властивості цієї кривої.

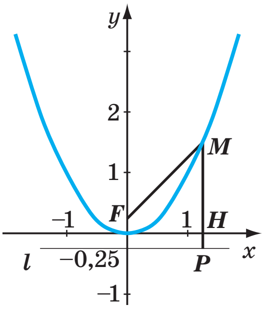
Парабола — геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки і даної прямої. Проілюструємо це твердження на прикладі функції $y = x^2$. Розглянемо точку $F(0; 0{,}25)$, пряму l, рівняння якої $y = -0{,}25$, і довільну точку $M(x; x^2)$ на даній параболі (мал. 94). Нехай перпендикуляр MP до прямої l перетинає вісь абсцис у точці H. Покажемо, що $FM = MP$.

Обчислимо *FM* за формулою відстані між двома точками:

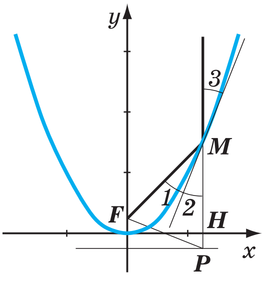
$$FM = \sqrt{x^2 + \left(x^2 - 0{,}25\right)^2} = \sqrt{\left(x^2 + 0{,}25\right)^2} = x^2 + 0{,}25.$$

Оскільки $MP = MH + HP = x^2 + 0{,}25$, то при кожному значенні x $MF = MP$.

Точку F і пряму l, які мають такі властивості, називають *фокусом* і *директрисою* даної параболи. Кожна парабола має один фокус і одну директрису.



Мал. 94



Мал. 95

Цікавою і дуже важливою є ще одна властивість параболи. Оскільки трикутник FMP рівнобедрений, то $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ (мал. 95). Тому промінь, який виходить з фокуса F, падає на ділянку параболи поблизу точки M так, що кут падіння $(\angle 1)$ дорівнює куту відбивання $(\angle 3)$. Отже, відбитий промінь паралельний осі Oy. Якщо осьовий переріз увігнутого дзеркала має форму параболи, то всі промені, відбившись від такого дзеркала, не розсіюються, а йдуть паралельним пучком. Цю властивість параболи використовують у прожекторах, які мають освітлювати далекі предмети. І навпаки: якщо на таке дзеркало падають промені, паралельні його осі Oy, то, відбиваючись, усі вони проходять через фокус F. У результаті фізичне тіло, що розташоване біля фокуса F, може сильно нагріватися.

Перевірте себе

1. Які функції називають квадратичними?
2. Як називають лінію, що є графіком квадратичної функції?
3. Укажіть властивості функції $y = ax^2 + bx + c$.
4. Які координати має вершина параболи графіка функції $y = ax^2 + bx + c$?
5. За якої умови графік функції $y = ax^2 + bx + c$ перетинає вісь x?
6. Укажіть нулі функції $y = ax^2 + bx$.
7. Як побудувати графік функції $y = ax^2 + bx + c$?
8. Чим різняться графіки функцій $y = ax^2 + bx + c$ і $y = ax^2$?
9. За якої умови графік функції $y = ax^2 + bx + c$:
   а) напрямлений вітками вгору;
   б) напрямлений вітками вниз;
   в) дотикається до осі абсцис;
   г) перетинає вісь абсцис?

Виконаємо разом

1 Чи перетинає графік функції $y = 5x^2 + x + 3$ вісь абсцис?

● **Розв'язання.** Якщо графік функції перетинає вісь абсцис у якійсь точці, то значення функції в цій точці дорівнює 0. Задача зводиться до іншої: чи має розв'язки рівняння $5x^2 + x + 3 = 0$? Його дискримінант $D = 1 - 60 < 0$, тому рівняння не має розв'язків.
Відповідь. Не перетинає.

2 Графік функції $y = 2x^2 - 7x + p$ перетинає вісь ординат у точці $y = 5$. У яких точках він перетинає вісь абсцис?

Розв'язання. Точка з координатами 0 і 5 належить графіку. Тому має виконуватися рівність $5 = 0 - 0 + p$, звідси $p = 5$. Отже, йдеться про функцію $y = 2x^2 - 7x + 5$. Знайдемо її нулі: $2x^2 - 7x + 5 = 0$, $D = 49 - 40 = 9$, $x_1 = -1$, $x_2 = -2{,}5$.

Відповідь. У точках $A(-2{,}5;\ 0)$ і $B(-1;\ 0)$.

3 Побудуйте графік функції $y = 2x^2 - 4x - 3$.

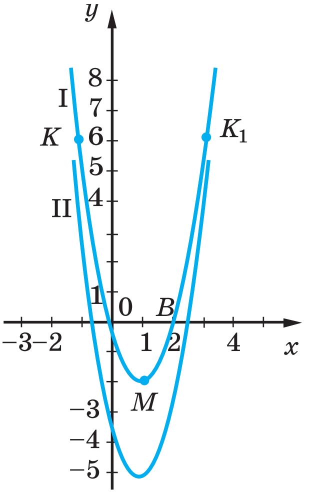
Розв'язання. Побудуємо спочатку графік простішої функції $y = 2x^2 - 4x = 2x(x - 2)$.

Він перетинає вісь x у точках $O(0;\ 0)$ і $B(2;\ 0)$ (мал. 96). Вони симетричні відносно осі параболи, яка проходить через середину відрізка OB. Тому вершиною параболи є точка з абсцисою $x = 1$ і ординатою $y(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = -2$. Позначимо цю точку $M(1;\ -2)$ і проведемо через неї вісь.

Позначимо контрольну точку $K(-1;\ 6)$ та симетричну їй відносно осі параболи точку $K_1(3;\ 6)$.

Сполучимо плавною лінією відмічені точки й одержимо графік функції $y = 2x^2 - 4x$ (крива I).

Потім перенесемо графік функції $y = 2x^2 - 4x$ на 3 одиниці вниз і матимемо графік функції $y = 2x^2 - 4x - 3$ (крива II).



Мал. 96

Виконайте усно

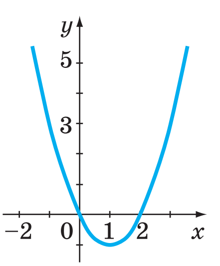
433. Укажіть найважливіші властивості функції $y = 2x^2$.

434. Укажіть нулі функції:

а) $y = 2x^2$; б) $y = x^2 - 7x$; в) $y = x^2 - 9$.

435. На малюнку 97 зображено графік функції $y = ax^2 + bx + c$. Укажіть:

а) область визначення функції;
б) знак коефіцієнта a;
в) абсцису й ординату вершини параболи;
г) область значень функції;
ґ) нулі функції;
д) проміжки, на яких функція зростає, на яких — спадає;
е) проміжки, на яких значення функції додатні, від'ємні;
є) найменше значення функції.

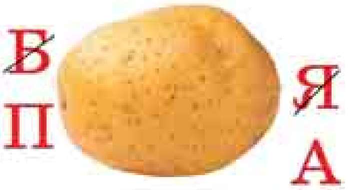


Мал. 97

436. Знайдіть координати вершини параболи:

а) $y = (x - 3)^2$; г) $y = 2(5 - x)^2 - 3$;
б) $y = 2(3 - x)^2$; ґ) $y = 2(x + 1)^2 + 1$;
в) $y = (x - 5)^2 + 2$; д) $y = -2(x - 1)^2 - 3$.

437. Відгадайте ребус (мал. 98).



Мал. 98

Рівень А

Побудуйте графік функції **(438–439).**

438. а) $y = 2x^2$, $y = 0,5x^2$, $y = 2x^2 + 1$;
б) $y = -2x^2$, $y = -0,5x^2$, $y = -0,5x^2 - 2$.

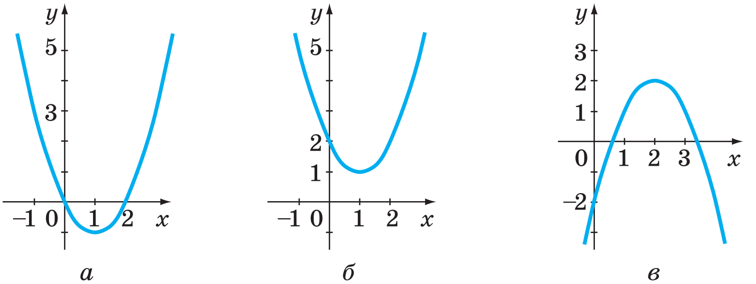
439. а) $y = (x - 1)^2$; в) $y = x^2 - 6x + 9$;
б) $y = x^2 - 2x + 1$; г) $y = x^2 + 4x + 4$.

440. У яких точках вісь x перетинається з графіком функції:

а) $y = x\,(x - 2)$; г) $y = 3x^2 + 5x$;
б) $y = -x(3x + 5)$; ґ) $y = 2x^2 - 6x$;
в) $y = x^2 - 2x$; д) $y = -3x^2 + 4x$?

441. На мал. 99, *а*, *б*, *в* дано графіки квадратичних функцій. Знайдіть для кожної з них за графіком:

а) знак дискримінанта;
б) знак першого коефіцієнта;
в) координати вершини параболи;
г) нулі функції;
ґ) проміжки, на яких функція зростає, спадає.



Мал. 99

442. Знайдіть координати вершини параболи — графіка функції:

а) $y = x^2 + 4$; в) $y = x(x - 4)$; ґ) $y = x^2 + 4x$;
б) $y = 2x^2 - 6$; г) $y = x(2x + 6)$; д) $y = -8x - 3x^2$.

443. Побудуйте графік функції:

а) $y = (x - 1)^2 + 2$; в) $y = (x + 4)^2 + 2$;
б) $y = (x + 2)^2 + 1$; г) $y = (x - 4)^2 - 3$.

444. Побудуйте параболу, виділивши квадрат двочлена:

а) $y = x^2 + 4x + 5$;
б) $y = x^2 - 6x + 5$;
в) $y = x^2 - 2x - 1$;
г) $y = 1 + 4x - x^2$;
ґ) $y = 4x^2 - 4x + 5$;
д) $y = 5x^2 + 10x + 4$.

Побудуйте графік функції **(445–446)**.

445. а) $y = x^2 - 2x + 5$;
б) $y = x^2 + 2x - 3$;
в) $y = x^2 + 2x + 4$;
г) $y = x^2 - 2x - 3$.

446. а) $y = x^2 - 2x - 8$;
б) $y = x^2 - 4x - 5$;
в) $y = x^2 + 2x + 6$;
г) $y = x^2 - 4x + 3$.

447. Точка $M(3; 5)$ є вершиною параболи $y = x^2 + mx + n$. Знайдіть: а) m і n; б) у яких точках графік перетинає вісь y.

448. Знайдіть p і q, якщо графік функції $y = x^2 + px + q$ проходить через точки $P(1; 4)$; $Q(-1; 10)$.

449. Графік функції $y = x^2 - 5x + c$ перетинає вісь y в точці $A(0; 4)$. У яких точках він перетинає вісь x?

450. Графік функції $y = x^2 - 3x + c$ перетинає вісь y в точці $A(0; 3)$. Чи перетинає він вісь x?

451. Побудуйте графік функції, вкажіть проміжки, на яких функція зростає (спадає):

а) $y = x(x - 2)$;
б) $y = x(5 - x)$;
в) $y = x^2 - 6x$;
г) $y = 2x - x^2$;
ґ) $y = 3x^2 + 12x$;
д) $y = x - 2x^2$.

452. При яких значеннях аргументу дана функція має найменше значення:

а) $y = x(x - 6)$; б) $y = (x - 3)^2 + 1$; в) $y = x^2 + 2x$?

Рівень Б

Не будуючи графіка функції, виконайте завдання **(453–454)**.

453. При якому значенні c графік функції $y = x^2 - 5x + c$:

а) проходить через початок координат;
б) дотикається до осі x;
в) перетинає вісь x у точці $A(3; 0)$;
г) перетинає вісь y в точці $B(0; -5)$?

454. При якому значенні b графік функції $y = x^2 + bx + 4$:

а) дотикається до осі x;
б) не має спільних точок з віссю x;
в) перетинає вісь x у точці $A(4; 0)$;
г) перетинає вісь x у точках, відстань між якими дорівнює 3?

Побудуйте графік квадратичної функції **(455–461).**

455. а) $y = x^2 + x + 1$; в) $y = x^2 - x + 1$;
б) $y = x^2 - (x + 2)$; г) $y = x(x + 1) - 3$.

456. а) $y = -x^2 + 3x + 1$; в) $y = -x^2 - 2x + 3$;
б) $y = 1 - 2x - x^2$; г) $y = 4x - (x^2 - 1)$.

457. а) $y = 1 + x - x^2$; в) $y = 4 - x - x^2$;
б) $y = 2 + x(1 - x)$; г) $y = 3 - x(x - 2)$.

458. а) $y = (x - 1)(x + 2)$; в) $y = (x + 2)(x - 3)$;
б) $y = (x - 2)(x + 3)$; г) $y = 2(3 + x)(x - 1)$.

459. а) $y = (2x - 1)^2 + 3$; в) $y = (0{,}5x + 2)^2 - 3$;
б) $y = 1 - (x + 3)^2$; г) $y = 4(0{,}5x + 1)^2 - 1$.

460. а) $y = 3x^2 + 3x - 1$; в) $y = -3x^2 + 6x - 1$;
б) $y = 2x^2 - 4x + 5$; г) $y = -x^2 + x - 3$.

461. а) $y = 0{,}5x^2 - x + 2$; в) $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$;
б) $y = 0{,}3x^2 - 0{,}6x + 1$; г) $y = \frac{1}{3}x^2 + x + \frac{2}{3}$.

462. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:
а) $y = x^2 + 2x$; в) $y = x^2 - 4x + 3$; ґ) $y = (1 - x)^2$;
б) $y = 1 - x^2$; г) $y = x(x + 4)$; д) $y = x^2 + x + 1$.

463. При яких значеннях x дана функція має найменше значення:
а) $y = x^2 - 6x + 9$; в) $y = 4x^2 - 12x - 3$;
б) $y = x^2 + 4x + 7$; г) $y = 4x^2 - 4x + 1$?

464. Знайдіть найбільше значення функції:
а) $y = 3 - (x - 2)^2$; в) $y = 6x - x^2 - 10$;
б) $y = -0{,}25(x + 5)^2$; г) $y = -5x^2 + 4x + 1$.

465. а) Найменше значення функції $y = x^2 - 6x + c$ дорівнює -5. Побудуйте її графік.
б) Найбільше значення функції $y = c + 4x - 4x^2$ дорівнює 4. Побудуйте її графік.

466. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:
а) $y = x^2$ і $y = (x - 4)^2$;
б) $y = 2x^2$ і $y = -x^2 + 3$;
в) $y = 3x^2 + 7$ і $y = 3x^2 + 2x + 1$.

467. Знайдіть відстань між вершинами парабол, що є графіками функцій:
а) $y = (x - 3)^2$ і $y = (x - 3)^2 + 7$;
б) $y = x^2$ і $y = (x + 5)^2$;
в) $y = x^2 - 2x + 5$ і $y = x^2 - 2x - 4$;
г) $y = x^2 + 4x + 5$ і $y = -x^2 - 4x - 5$.

468. Параболу задано рівнянням $y = x^2 - 6x + 13$. Знайдіть відстані від її вершини до осей x, y і початку координат.

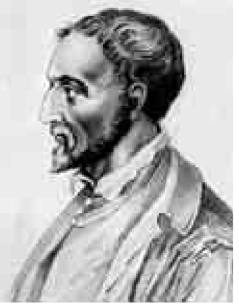
469. Знайдіть значення b, якщо графік функції $y = x^2 + bx$ симетричний відносно прямої $x = 3$.

470*. Побудуйте графік функції:

а) $y = |x^2 - 4x + 3|$; в) $y = |x^2 + 4x| + 3$;

б) $y = |x^2 + x - 6|$; г) $y = |6x| - x^2 - 5$.

471*. ***Задача Дж. Кардано.*** Знайдіть геометричною побудовою додатний корінь рівняння $x^2 + 6x = 91$.



Дж. Кардано

Вправи для повторення

472. Замініть букви цифрами, щоб виконувалася рівність:

$$ПАРА + ПАРА = БОЛА.$$

Скільки різних розв'язків має задача?

Розв'яжіть нерівність **(473–474)**.

473. а) $2(x + 7) + 3(1 - 2x) \geq 1$; в) $2(x + 1) \geq 3 - (1 - 2x)$;
б) $3(3x - 2) - 4(x + 1) < 2x$; г) $3x - 0{,}5(1 - 3x) \leq 2{,}5(x - 3)$.

474. а) $(x - 1)(2 - x) > 0$; в) $(3 - x)(5 + x) \leq 0$;
б) $(3 + x)(x + 7) < 0$; г) $(5 - x)(1 - x) \geq 0$.

475. Скільки коренів має рівняння:

а) $|x - 1| + |x + 2| = 5$; в) $|x - 1| + |x + 2| = 2$;

б) $|x - 1| + |x + 2| = 3$; г) $|x - 1| + |x + 2| = 0$?

Скарбничка досягнень

- ✓ Знаю, яку функцію називають квадратичною:
$$y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$
- ✓ Знаю, що графік квадратичної функції — *парабола*.
- ✓ Можу навести приклади квадратичної функції:

$y = 3x^2$; $y = x^2 + x$; $y = -x^2 + 5$; $y = 2x^2 - 3x + 2$

- ✓ Можу пояснити алгоритм побудови квадратичної функції.
- ✓ Можу характеризувати функцію за її графіком.
- ✓ Вмію розв'язувати вправи, що передбачають побудову графіка квадратичної функції.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:
— Як побудувати графік квадратичної функції:
— Графік функції $y = ax^2 + bx + c$:

напрямлений вітками вгору $a > 0$	напрямлений вітками вниз $a < 0$
дотикається до осі абсцис $D = b^2 - 4ac = 0$	перетинає вісь абсцис $D = b^2 - 4ac > 0$

— Види нерівностей: строгі, нестрогі.
— Властивості числових нерівностей (с. 69).
— Як записують розв'язки нерівностей (с. 45).

§ 12 Квадратні нерівності

Якщо лівою частиною нерівності є вираз $ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, b, c — дані числа, а правою — нуль, то її називають *квадратною нерівністю*.

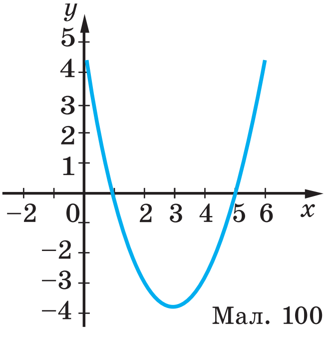
Приклади квадратних нерівностей:
$x^2 - 5x + 3 < 0$, $2x^2 + 4 \le 0$, $-3x^2 + 2x \ge 0$, $-x^2 + 3x + 7 > 0$.

Такі нерівності зручно розв'язувати за допомогою графіків квадратичних функцій.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $x^2 - 6x + 5 < 0$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = x^2 - 6x + 5$ (мал. 100). Її нулі — числа 1; 5. Від'ємні значення ця функція має тільки в тому разі, якщо змінна x належить проміжку (1; 5). Це і є множина розв'язків даної нерівності.

Відповідь. (1; 5).

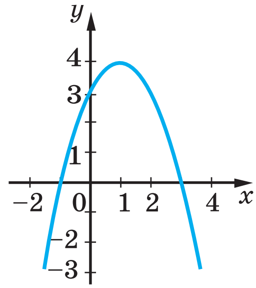


Мал. 100

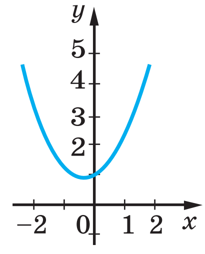
Зрозуміло, що для розв'язування таких нерівностей будувати точно графіки квадратичних функцій не обов'язково. Досить визначити напрям віток параболи і точки перетину графіка з віссю x (якщо вони існують).

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $-x^2 + 2x + 3 \le 0$.

Розв'язання. Графік функції $y = -x^2 + 2x + 3$ перетинає вісь x у точках з абсцисами -1 і 3; вітки параболи напрямлені вниз. Тому схематично графік функції можна зобразити, як показано на малюнку 101. Значення функції недодатні за умови, що x належить проміжку $(-\infty; -1]$ або $[3; \infty)$. Отже, множина розв'язків даної нерівності — об'єднання цих проміжків. Оскільки об'єднання множин прийнято позначати символом $\triangle$, то **відповідь** можна записати так: $(-\infty; -1] \triangle [3; \infty)$.



Мал. 101



Мал. 102

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність $x^2 + x + 1 < 0$.

Розв'язання. Дискримінант рівняння $x^2 + x + 1 = 0$ від'ємний, тому графік функції $y = x^2 + x + 1$ з віссю x не має спільних точок. Вітки графіка напрямлені вгору (мал. 102). Отже, при кожному значенні x значення функції $y = x^2 + x + 1$ додатне.

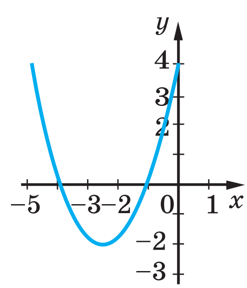
Відповідь. Нерівність розв'язків не має.

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність $(x + 4)(x + 1) > 0$.

Розв'язання. Вираз $(x + 4)(x + 1)$ тотожно дорівнює деякому квадратному тричлену з додатним коефіцієнтом при x^2. Отже, графік функції $y = (x + 4)(x + 1)$ — парабола, вітки якої напрямлені вгору і яка перетинає вісь x у точках з абсцисами -4 і -1 (мал. 103). Значення функції додатні, якщо $x < -4$ або $x > -1$.

Відповідь. $(-\infty; -4) \triangle (-1; \infty)$.

Оскільки нерівність $\dfrac{x+4}{x+1} > 0$ рівносильна нерівності $(x + 4)(x + 1) > 0$, то таким способом (графічно) можна розв'язувати і найпростіші дробово-раціональні нерівності.



Мал. 103

Щоб розв'язати квадратну нерівність за допомогою графіка, потрібно:
а) визначити напрям віток параболи за знаком першого коефіцієнта;
б) знайти корені відповідного квадратного рівняння, якщо вони є;
в) побудувати ескіз графіка квадратної функції;
г) за графіком визначити проміжки для *x*, на яких нерівність правильна.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Спосіб, яким розв'язують квадратні нерівності, можна поширити на багато інших видів нерівностей.

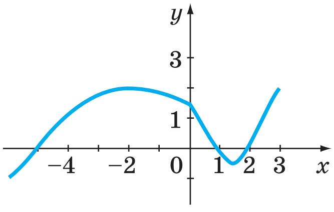
Приклад. Нехай треба розв'язати нерівність $(x-1)(x-2)(x+5)<0$.

Ця вправа рівносильна такій. При яких значеннях x від'ємними є значення функції $y=(x-1)(x-2)(x+5)$?

Щоб відповісти на поставлене запитання, знайдемо спочатку нулі функції: 1, 2 і –5. Вони розбивають область визначення функції на чотири проміжки: $(-\infty;-5)$, $(-5;1)$, $(1;2)$ і $(2;\infty)$. На кожному з цих проміжків кожний із множників добутку $(x-1)(x-2)(x+5)$ має певний знак. Подамо їх і знак усього добутку в такій таблиці.

Множник	$(-\infty;-5)$	$(-5;1)$	$(1;2)$	$(2;\infty)$
$x-1$	—	—	+	+
$x-2$	—	—	—	+
$x+5$	−	+	+	+
y	—	+	—	+

Схематично графік функції y зображено на малюнку 104.



Мал. 104

Отже, функція набуває від'ємних значень на проміжках $(-\infty;-5)$ і $(1;2)$.

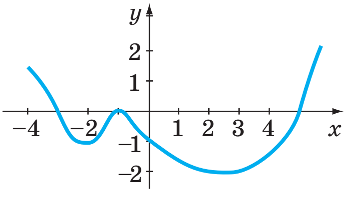
Відповідь. Множина розв'язків нерівності: $(-\infty;\ -5)\cup(1;2)$.

У розглянутому прикладі проміжки, на яких значення функції додатні, чергуються з тими, на яких значення функції від'ємні. Однак це не завжди так. Розв'яжемо нерівність $(x+1)^2(x+3)(x-5)\geq 0$.

Ліва частина нерівності дорівнює нулю, якщо значення x дорівнює –3, –1 або 5. Склавши відповідну таблицю, переконуємося, що значення лівої частини нерівності від'ємні на сусідніх проміжках $(-3;-1)$ і $(-1;5)$. Отже, множина розв'язків даної нерівності $(-\infty;-3]\cup[5;\infty)\cup\{-1\}$.

Схематично графік функції $y=(x+1)^2(x+3)(x-5)$ показано на малюнку 105.

Розглянутий спосіб розв'язування нерівностей — це окремий випадок загального *методу інтервалів*. Докладніше з ним ви ознайомитесь у старших класах.



Мал. 105

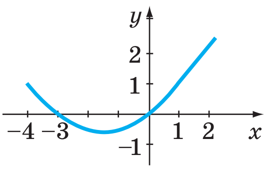
Перевірте себе

1. Сформулюйте означення квадратної нерівності.
2. Наведіть приклади квадратних нерівностей.
3. Яким символом позначають об'єднання двох множин?
4. Скільки розв'язків може мати квадратна нерівність?
5. Наведіть приклади квадратних нерівностей, які:
   а) не мають жодного розв'язку;
   б) мають тільки один розв'язок;
   в) задовольняють усі дійсні числа.

Виконаємо разом

Розв'яжіть нерівність:
а) $x^2 + 3x < 0$; б) $z^2 - 3z - 2 \le 0$; в) $t^2 + t + 1 > 0$.

Розв'язання. а) Графік функції $y = x^2 + 3x$ перетинає вісь абсцис у точках $x = 0$ і $x = -3$, вітки параболи напрямлені вгору. Зобразимо графік схематично (мал. 106); множина розв'язків нерівності — проміжок $(-3; 0)$.



Мал. 106

б) Знайдемо корені рівняння $z^2 - 3z - 2 = 0$.

$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 17$; $z_1 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$, $z_2 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.

Вітки параболи напрямлені вгору, тому шукана множина розв'язків нерівності $\left[\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$.

в) Знайдемо дискримінант рівняння $t^2 + t + 1 = 0$: $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$. Коефіцієнт при t^2 додатний, тому вітки параболи напрямлені вгору. Уся вона розміщена у верхній півплощині. Отже, множина розв'язків нерівності — уся множина ***R***.

Відповідь. а) $(-3; 0)$; б) $\left[\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$; в) ***R***.

Виконайте усно

476. Назвіть квадратні нерівності:
а) $x^2 - 5x + 6 < 0$;
б) $3x^2 + 6 \le 0$;
в) $-2x^2 - 5x + 7 \le 0$;
г) $x^3 - 2x + 6 \ge 0$;
ґ) $x^2 + \dfrac{1}{x} + 3 \ge 0$;
д) $\dfrac{x^2}{3} + 4x + \sqrt{2} < 0$.

477. Визначте напрям віток графіка функції:
а) $y = 4x^2 - 16x + 5$; г) $y = 6x^2 + 5x$; е) $y = 3x(x - 4)$;
б) $y = -x^2 + 4x + 3$; ґ) $y = 7 - 4x - x^2$; є) $y = -x(x + 3)$;
в) $y = 3x^2 - 7$; д) $y = 5 + 7x - 5x^2$; ж) $y = (x - 1)(2 - x)$.

478. Чи перетинає вісь абсцис графік функції:
а) $y = x^2 - 2x + 3$; в) $y = 3x^2 - x$; ґ) $y = 5x^2 + 3x - 1$;
б) $y = -x^2 + 7x - 5$; г) $y = 3x^2 - x + 3$; д) $y = x(7x - 1)$?

479. Чому не має розв'язків нерівність:
а) $3x^2 < -3$; в) $3x^2 - x + 1 < 0$; ґ) $-(1 - x)^2 > 0$;
б) $(x - 2)^2 + 1 \le 0$; г) $-x^2 \ge 2$; д) $2x^2 < x - 1$?

Рівень А

480. Зобразіть на координатній прямій об'єднання проміжків:
а) $(-\infty; 2]$ і $[3; \infty)$; в) $[2; 4]$ і $(5; 7)$; ґ) $[-4; 2]$ і $[2; 3)$;
б) $(-4; 3)$ і $(4; 7]$; г) $(-\infty; 3]$ і $(3; 7)$; д) $(-\infty; 1)$ і $(1; 4)$.

Розв'яжіть нерівність **(481–487)**.

481. а) $x^2 - 4x < 0$; в) $z^2 + 6z - 7 \le 0$; ґ) $2x^2 + 7x \ge 0$;
б) $x^2 + 6x \le 0$; г) $6x^2 - x > 0$; д) $y^2 - 4y - 5 < 0$.

482. а) $x^2 - 6x + 9 > 0$; г) $z^2 + z + 0{,}25 \le 0$;
б) $y^2 - 8y + 16 < 0$; ґ) $x^2 > 2x - 1$;
в) $x^2 + 4x + 4 \le 0$; д) $y^2 \ge 4y - 4$.

483. а) $x^2 \le 3x - 2$; г) $x^2 + 10x + 25 \ge 0$;
б) $t^2 + 9 < 6t$; ґ) $9x^2 + 6x + 1 \le 0$;
в) $x^2 - 4x + 3 > 0$; д) $x^2 - 2x + 9 < 0$.

484. а) $2x^2 - 3x + 1 \ge 0$; г) $y^2 - 4y < 12$;
б) $x^2 + 8 < 6x$; ґ) $-x^2 + 3x - 2 > 0$;
в) $0{,}5x^2 - x - 2 > 0$; д) $11z \ge z^2 + 18$.

485. а) $2 - 3y \le y^2$; г) $4x(x + 1) < 15$;
б) $12x - 36 < x^2$; ґ) $-2x^2 > 2x + 3$;
в) $3z^2 \le 5z + 12$; д) $6(t^2 + 1) < 13t$.

486. а) $x(x - 3) < -2$; г) $8 - (5 - y)^2 > 3y$;
б) $2(z^2 + 5) > 9z$; ґ) $(x - 3)(x + 5) > 0$;
в) $x(2 - x) \ge 4$; д) $(x + 2)(x + 7) < 0$.

487. а) $(x + 7)(x - 1) \ge 0$; г) $(a + 2)(a - 5) \le 0$;
б) $(x - 3)(x - 5) \le 0$; ґ) $(t + 3)(t + 4) \ge 0$;
в) $(x - 2)(x + 3) < 0$; д) $(2 - c)(3 - c) \ge 0$.

488. При яких значеннях x значення функції $y = x^2 + 3x$ від'ємні, а при яких — додатні?

489. При яких значеннях x значення функції $y = f(x)$ додатні, а при яких — від'ємні, якщо:

а) $f(x) = x^2 - 4$;
в) $f(x) = x^2 + 6x - 7$;
б) $f(x) = 9 - x^2$;
г) $f(x) = 3 + 2x - x^2$?

490. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt{x^2 - 4}$;
в) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$;
ґ) $y = \sqrt{2x^2 + 1}$;
б) $y = \sqrt{1 - x^2}$;
г) $y = \sqrt{x^2 - 4x}$;
д) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

491. Знайдіть цілі розв'язки нерівності:

а) $x^2 + 5x - 6 < 0$;
в) $x^2 - x - 6 < 0$;
ґ) $x^2 + 2x - 8 < 0$;
б) $x^2 - 5x - 6 \le 0$;
г) $6 - x^2 \ge x$;
д) $x^2 - 4x + 4 \le 0$.

Рівень Б

Розв'яжіть нерівність **(492–496)**.

492. а) $(2 - x)(3 - x) \le 2$;
г) $(x + 2)(x + 3) \ge 10x$;
б) $(x + 4)(x - 5) < 10$;
ґ) $(3 - 2x)(x + 1) \le 2$;
в) $(1 - z)(2 + z) > 2$;
д) $3(x^2 + 1) \le 5x + 1$.

493. а) $2(x - 3)(1 - 2x) > 6$;
г) $1 - x > 2(x^2 + 1)$;
б) $4(x^2 - 9) > x + 3$;
ґ) $-x(2 - x) \le 5 - 4x^2$;
в) $x(x - 2) > 2 - 3x^2$;
д) $3 - x < 3(x^2 + 3)$.

494. а) $\frac{x-3}{x+2} < 0$;
в) $\frac{4-x}{2x+5} > 0$;
ґ) $\frac{3x-2}{5-2x} < 0$;
б) $\frac{x+2}{x-7} > 0$;
г) $\frac{2x-1}{3-x} < 0$;
д) $\frac{4z-1}{3-2z} > 0$.

495. а) $\frac{x-1}{x+3} < 1$;
в) $\frac{3x-1}{2x+5} > 3$;
ґ) $\frac{x^2}{2-x} \le 3-x$;
б) $\frac{x+4}{x-1} > 5$;
г) $\frac{7x+4}{3-2x} \ge 2$;
д) $\frac{2}{2-x} \ge \frac{x-8}{10-x}$.

496. а) $\frac{x+5}{x+7} \ge 0$;
в) $\frac{x}{1-x} \le 0$;
ґ) $\frac{x+3}{1+3x} \le 1$;
б) $\frac{2-x}{3-x} \le 0$;
г) $\frac{2x+1}{x-7} < 1$;
д) $\frac{5x-1}{1-x} \ge 1$.

497. Розв'яжіть нерівність:

а) $(3x - 1)(x + 3) > x(1 + 5x)$;
б) $(x - 2)(x + 2) + x(x + 7) \le 0$;
в) $(x + 4)(2x - 3) - (5x - 6)(x - 3) \ge 10$;
г) $(x - 4)(3x + 1) < (2x - 6)(x - 2) + 4$.

Розв'яжіть нерівність методом інтервалів **(498–502)**.

498*. а) $(x^2 - 3x + 2)(x + 7) \geq 0$;
б) $(x^2 - 16)(x^2 - 25) < 0$;
в) $(x^4 + x^2 + 1)(x - 1)(x + 3) < 0$.

499*. а) $(x - 3)(x + 2)(x^2 + 4x + 5) \leq 0$;
б) $(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6) \leq 0$;
в) $(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 2x - 15) > 0$.

500*. а) $(x^2 - 1)(3x - 2x^2 + 5) \geq 0$;
б) $(x^2 + 3x - 10)(4 - x^2) < 0$;
в) $(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 9) > 0$.

«*Дорогі не ті знання, які відкладаються у мозку як жир; дорогі ті, які перетворюються у розумові м'язи*».
Г. Спенсер

501*. а) $\dfrac{3x^2+5x-8}{x^2+2x-3} \leq 0$; б) $\dfrac{2x^2-3}{4x-1} \geq \dfrac{x}{2}$; в) $1 > \dfrac{8-3x}{3x^2-2x-16}$.

502*. а) $\dfrac{5x^2-9x-2}{11x-2-5x^2} > 0$; б) $4 > \dfrac{4-3x}{3x^2-x-4}$; в) $\dfrac{x+1}{1-x} < 2x$.

503. При яких значеннях x значення функції $y = 2x + 2$ більше за відповідне значення функції:
а) $y = x^2 - 3x - 4$; б) $y = 4x^2 + 9x - 13$?

504. Знайдіть область визначення функції:
а) $y = \sqrt{8+7x-x^2}$;
б) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x^2-3x-4}$;
в) $y = \sqrt{x^3-x^2-25x+25} - \sqrt{\dfrac{5}{x^2+6x+9}}$;
г) $y = \sqrt{3-5x-2x^2}$;
ґ) $y = \dfrac{x^2-4}{\sqrt{4+x-5x^2}}$.

505. При яких значеннях b не має розв'язків нерівність:
а) $x^2 + 2bx + 1 < 0$;
б) $bx^2 + 6x + 1 < 0$;
в) $(b - 1)x^2 + 3b > 2bx$;
г) $b(x^2 + 1) \leq bx + 9$?

506. При яких значеннях m кожне дійсне число задовольняє нерівність:
а) $x^2 - mx + 4 > 0$;
б) $x^2 - 6x + m \geq 0$;
в) $mx^2 + m + 3 < 4x$;
г) $mx^2 + 4x + 2m < 1$?

Розв'яжіть систему нерівностей **(507–508)**.

507. а) $\begin{cases} x^2 - 4x < 0, \\ x^2 - x - 6 \geq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x^2 - 1 > 0, \\ 2x^2 - 5x + 3 < 0. \end{cases}$

508. а) $\begin{cases} x^2 - 3 > 2x, \\ x^2 + 28 \geq 11x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2 + 1 > 4x, \\ 3x^2 + 2 \leq 5x. \end{cases}$

509. Розв'яжіть подвійну нерівність:

а) $0 < x^2 - 5x < 6$; в) $x < 2x + 3 < x^2$;

б) $1 < x^2 + 2 < 3x$; г) $3 < x^2 - 2x + 3 < x^2$.

510. Розв'яжіть графічно нерівність:

а) $x^2 < x + 2$; в) $2x^2 < 1 + \sqrt{x}$;

б) $(x-2)^2 \geq |x|$; г) $x^2 - 3{,}5x \geq \sqrt{x}$.

Вправи для повторення

511. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x - 2y = -2, \\ 2x + y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x + y = -4, \\ 3x - y = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 4y = -16, \\ 3x + 5y = 9. \end{cases}$

512. Друзі придбали спільний подарунок на суму 260 грн. Якби їх було на 3 особи більше, то внесок кожного був би на 6 грн меншим. Скільки осіб купували подарунок?

Спростіть вираз **(513–514).**

513. а) $9x^2y \cdot (-0{,}5x^2y)$; б) $(-0{,}5ab^3) \cdot (-24a^2b^3)$.

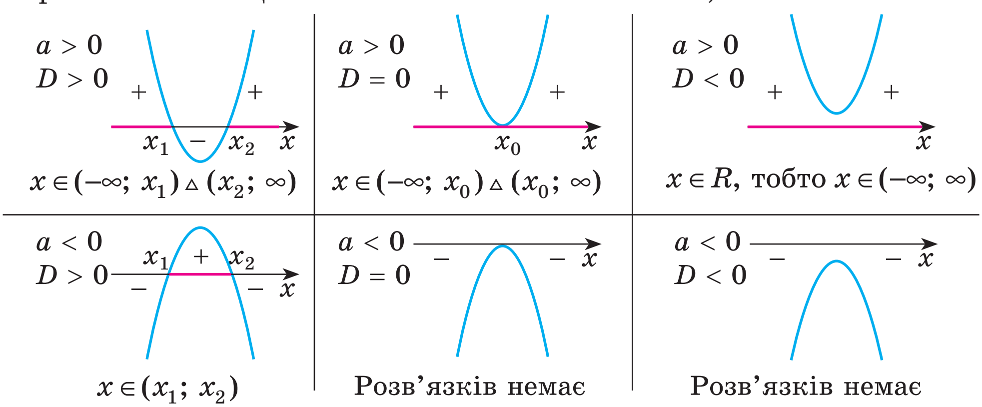
514. а) $\dfrac{a^2 - 4b^2}{ab} : \dfrac{a^2 - 2ab}{3b}$; б) $\dfrac{x + x^3}{y^2 - 9} : \dfrac{9 - x^2}{2y - 6}$.

Скарбничка досягнень

✓ Можу навести приклад квадратичної нерівності з однією змінною

$2x^2 + 3x + 1 > 0$ $x^2 + 1 > 0$ $x^2 - 3x < 0$ $-0{,}5x^2 - x + 2 \leq 0$

✓ Умію розв'язувати квадратичні нерівності та записувати їх розв'язки. Якщо $ax^2 + bx + c > 0$ і $D = b^2 - 4ac$, то:



✓ Хочу навчитися розв'язувати нерівності методом інтервалів

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:
— Що таке система лінійних рівнянь (с. 261).
— Що таке розв'язок системи рівнянь з двома змінними (с. 261).
— Що означає «розв'язати систему двох рівнянь».
— Як розв'язати систему рівнянь графічним способом.
— Яка фігура є графіком рівняння:

$y = x^2$ і $y = ax^2 + bx + c$ — парабола	
$y = \frac{k}{x}$ — гіпербола,	$y = \sqrt{x}$ — вітка параболи
$x^2 + y^2 = r^2$ і $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ — коло	

— Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь з двома змінними.

§ 13 Системи рівнянь другого степеня

З поняттям «система рівнянь» ви ознайомилися в 7 класі. Тоді розглядалися системи двох лінійних рівнянь з двома змінними та способи їх розв'язування. На практиці часто доводиться розглядати системи, що містять рівняння другого степеня.

Приклади рівнянь другого степеня з двома змінними:

$$x^2 + 5y^2 = 9, \qquad 8z - t^2 = 12, \qquad 0,5xy + y = 0.$$

Кожне з таких рівнянь має дві змінні та принаймні один член другого степеня відносно цих змінних. Тобто або одну змінну в квадраті, або добуток двох змінних.

Приклади рівнянь першого, третього і четвертого степенів:

$$x - 2y = 0,\ 5x^2y + 10 = 0,\ x^2z^2 - x^2 + z = 0$$

Якщо одне з рівнянь системи — другого степеня з двома змінними, а друге — рівняння з тими самими змінними другого або першого степеня, то таку систему називають *системою двох рівнянь другого степеня з двома змінними*.

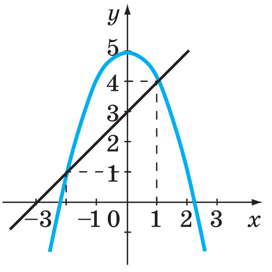
Пригадаємо. *Розв'язком рівняння* з двома змінними називається кожна пара чисел, яка перетворює це рівняння в правильну рівність.

Розв'язком системи рівнянь називають спільний розв'язок усіх її рівнянь.

Розв'язати систему рівнянь — означає знайти множину всіх її розв'язків.

Наприклад, для рівнянь $x^2 + y - 5 = 0$ і $x - y + 3 = 0$ спільними розв'язками є пари чисел (−2; 1) і (1; 4). Перевірте усно. Інших спільних розв'язків ці рівняння не мають (мал. 107).

Отже, система $\begin{cases} x^2 + y - 5 = 0, \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$ має два розв'язки, її задовольняють дві пари чисел: (−2; 1) і (1; 4).



Мал. 107

Існують різні способи розв'язування систем рівнянь. Основними серед них є:

- спосіб підстановки;
- спосіб алгебраїчного додавання;
- графічний спосіб.

Покажемо на конкретних прикладах, як ці способи використовують під час розв'язування систем рівнянь другого степеня.

Приклад. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x^2 - y = 17, \\ x^2 + y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 2, \\ x^2 - y = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

Розв'язання. а) *Спосіб додавання.* Додаємо рівняння системи, маємо $3x^2 = 27$, звідси $x^2 = 9$, $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Оскільки $x^2 = 9$, то з другого рівняння знаходимо: $y_1 = y_2 = 1$.

Отже, система має два розв'язки: (3; 1) і (−3; 1).

б) *Спосіб підстановки*. Виразимо з другого рівняння x^2 через y і підставимо його в перше рівняння:

$2(y + 5) - y^2 = 2$, або $y^2 - 2y - 8 = 0$.

Знаходимо корені рівняння: $y_1 = 4$, $y_2 = -2$.

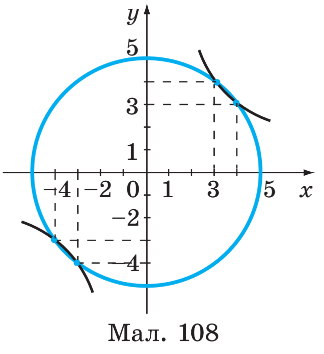
Якщо $y = 4$, то $x^2 = 9$, звідси $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Якщо $y = -2$, то $x^2 = 3$, звідси $x_3 = \sqrt{3}$, , $x_4 = -\sqrt{3}$.

Отже, дана система рівнянь має 4 розв'язки: (3; 4), (−3; 4), $(\sqrt{3}; -2)$, $(-\sqrt{3}; -2)$.

в) *Графічний спосіб*. Графіком першого рівняння є коло з центром у початку координат і радіусом 5 одиниць.

Графіком другого рівняння є гіпербола $y = \dfrac{12}{x}$.



Мал. 108

Побудуємо графіки цих рівнянь в одній системі координат (мал. 108) і визначимо координати точок їх перетину.

З графіка бачимо, що дана система рівнянь має чотири розв'язки: (−4; −3), (−3; −4), (3; 4), (4; 3). Безпосередньою підстановкою переконуємося, що це точні розв'язки даної системи.

Відповідь. а) (3; 1) і (−3; 1); б) (3; 4), (−3; 4), $(\sqrt{3};-2)$, $(-\sqrt{3};-2)$; в) (−4; −3), (−3; −4), (3; 4), (4; 3).

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Для розв'язування деяких видів систем використовують *спосіб заміни змінних*. Розв'яжемо цим способом такі системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2y+xy^2=30, \\ x+xy+y=11. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-4x+(x-2y)^2=1, \\ (x-2)^2+2y-x=3. \end{cases}$

Розв'язання. а) $\begin{cases} xy(x+y)=30, \\ x+y=11-xy, \end{cases}$ звідси $xy(11-xy)=30$.

Замінивши $xy=a$, матимемо з останнього рівняння $a^2-11a+30=0$. Коренями цього квадратного рівняння є 5 і 6.

Якщо $xy=5$, то $x+y=6$; якщо $xy=6$, то $x+y=5$.

Маємо дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} x+y=6, \\ xy=5 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases}$$

Розв'язавши обидві системи, одержимо розв'язки заданої системи:

а) (5; 1), (1; 5); (3; 2), (2; 3).

б) Сформуємо повний квадрат двочлена в першому рівнянні системи:

$$\begin{cases} (x-2)^2-4+(x-2y)^2=1, \\ (x-2)^2+2y-x=3 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} (x-2)^2+(x-2y)^2=5, \\ (x-2)^2-(x-2y)=3. \end{cases}$$

Уведемо нові змінні: $a=x-2$, $b=x-2y$. Тоді задана система матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} a^2+b^2=5, \\ a^2-b=3. \end{cases} \qquad (*)$$

Якщо від першого рівняння відняти друге, то одержимо квадратне рівняння з однією змінною $b^2+b=2$, яке має корені $b_1=-2$ і $b_2=1$.

Підставимо ці значення b у систему (*) і знайдемо відповідні значення змінної a.

Якщо $b_1=-2$, то $a^2+2=3$, звідси $a_1=-1$ або $a_2=1$.

Якщо $b_2=1$, то $a^2-1=3$, звідси $a_1=-2$ або $a_2=2$.

Отже, розв'язками системи рівнянь (*) є такі пари чисел:

(−1; −2), (1; −2), (−2; 1), (2; 1).

Щоб знайти розв'язки заданої системи, потрібно перейти до змінних x і y та розв'язати (можна усно) відповідні системи:

$$\begin{cases} x-2=-1, \\ x-2y=-2; \end{cases} \begin{cases} x-2=1, \\ x-2y=-2; \end{cases} \begin{cases} x-2=-2, \\ x-2y=1; \end{cases} \begin{cases} x-2=2, \\ x-2y=1. \end{cases}$$

Одержимо: (1; 1,5), (3; 2,5), (0; –0,5), (4; 1,5).

Відповідь. а) (5; 1), (1; 5); (3; 2), (2; 3); б) (1; 1,5), (3; 2,5); (0; –0,5), (4; 1,5).

Перевірте себе

1. Наведіть приклад рівняння другого степеня з двома змінними.
2. Що є розв'язком рівняння з двома змінними?
3. Скільки розв'язків може мати рівняння з двома змінними?
4. Яка фігура є графіком рівняння:
   а) $y = x^2$;   в) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$;
   б) $x^2 + y^2 = 4$;   г) $y^2 = x$?
5. Що таке система двох рівнянь другого степеня з двома змінними?
6. Скільки розв'язків може мати система двох рівнянь другого степеня з двома змінними?
7. Назвіть основні способи розв'язування системи рівнянь другого степеня з двома змінними.

Виконаємо разом

1 Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=61, \\ x^2-y^2=11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy-x^2=2, \\ y^2-xy=3. \end{cases}$

- **Розв'язання.** а) Додамо почленно дані рівняння системи, маємо рівняння $2x^2 = 72$, корені якого –6 і 6. Підставивши будь-яке з цих значень у друге рівняння даної системи, матимемо $36 - y^2 = 11$. Корені цього рівняння –5 і 5. Отже, система має чотири розв'язки: (6; 5), (–6; –5), (–6; 5) і (6; –5).

б) Віднімемо почленно перше рівняння від другого:

$$y^2 - 2xy + x^2 = 1, \text{ або } (y - x)^2 = 1.$$

Звідси $y - x = 1$, або $y - x = -1$.

Якщо $y - x = 1$, то $y = x + 1$. Підставимо в перше рівняння $xy - x^2 = 2$ замість y вираз $x + 1$:

$x(x + 1) - x^2 = 2$, $x^2 + x - x^2 = 2$, $x = 2$, тоді $y = 2 + 1 = 3$.

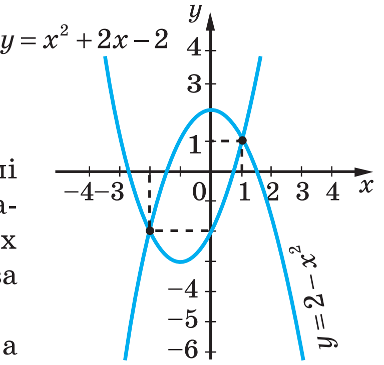
Якщо $y - x = -1$, то $y = x - 1$, і з першого рівняння $xy - x^2 = 2$ маємо: $x(x - 1) - x^2 = 2$, $x^2 - x - x^2 = 2$, $x = -2$, тоді $y = -2 - 1 = -3$.

Отже, система має два розв'язки: (2; 3), (–2; –3).

Відповідь. а) (6; 5), (–6; –5), (–6; 5), (6; –5); б) (2; 3), (–2; –3).

2 Чи має розв'язки система рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2, \\ y = 2 - x^2 ? \end{cases}$$



Мал. 109

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь. Це параболи, які перетинаються у двох точках (мал. 109). Отже, система рівнянь має два розв'язки.

Відповідь. Система рівнянь має два розв'язки.

Виконайте усно

515. Чи є розв'язком рівняння $x^2 - 3x = y$ пара чисел:

а) (0; 0); в) (0; 3); ґ) (0; – 3);

б) (3; 0); г) (–3; 0); д) (3; 3)?

516. Чому не має розв'язків рівняння:

а) $x^2 + y^2 + 4 = 0$; б) $x^2 + y^2 = 2xy - 3$?

517. Чи є пара чисел (0; 2); (1; 1); (–1; 1); (–2; 0); (3; 3) розв'язком системи рівнянь:

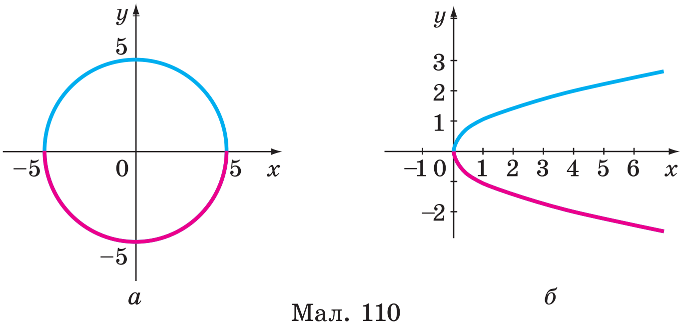
а) $\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ 2xy + y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ xy + 2y = 4? \end{cases}$

518. 1) Чому не має розв'язків система рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 7 = 0, \\ 3xy - y^2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 - y^2 = 4? \end{cases}$

2) ***Відкрита задача.*** Складіть систему рівнянь другого степеня, яка не має розв'язків.

519. Яке рівняння відповідає графіку (мал. 110): а) синього кольору; б) червоного кольору; в) синього і червоного кольорів разом?



Мал. 110

Рівень А

520. Побудуйте графік рівняння:

а) $x + 2y = 0$; в) $x^2 + y^2 = 9$; ґ) $y + \sqrt{x} = 1$;

б) $xy = 12$; г) $x^2 - y = 2$; д) $y + 1 = (x + 1)^3$.

Чи можна побудовані графіки вважати графіками функцій?

Розв'яжіть графічно систему рівнянь **(521–524)**.

521. а) $\begin{cases} y + x = 1, \\ y + x^2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8y = x^2, \\ y - \sqrt{x} = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy = 6, \\ y + 2 = 0. \end{cases}$

522. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18, \\ x - y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy = 16, \\ x - y = 0. \end{cases}$

523. а) $\begin{cases} y^2 = x, \\ y = x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y^2 = 0, \\ y - 2 = x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy - 8 = 0, \\ x^2 - y = 0. \end{cases}$

524. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 - y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18, \\ xy = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y - 2 = x. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки **(525–527)**.

525. а) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy - 2y = 4, \\ y = x - 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 4y = 8, \\ xy = 1. \end{cases}$

526. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x - 6 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy + 2 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + 1 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y = 2. \end{cases}$

527. а) $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ x - 2y^2 = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y = 6, \\ x - y = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 2x^2 - y^2 = 32; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 2. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь способом алгебраїчного додавання **(528–529)**.

528. а) $\begin{cases} x + y - xy = -23, \\ x - y + xy = 49; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ (x - y)(x + y) = 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$

529. а) $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ xy=20; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2-2=xy, \\ y^2+1=xy; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+z^2=34, \\ xz=15; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=5xy, \\ x-y=xy. \end{cases}$

Діофант
Александрійський

Розв'яжіть системи рівнянь **(530–532).**

530. ***Задачі Діофанта.***

а) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2+y^2=68; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=20, \\ x^2-y^2=80. \end{cases}$

531. ***Задачі Іоанна Палермського.***

а) $\begin{cases} xy-y=42, \\ x-y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy-x=40, \\ x-y=2. \end{cases}$

532. ***Задачі Леонардо Фібоначчі.***

а) $\begin{cases} x+y=10, \\ x(x-y)=24y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2=32y. \end{cases}$

Складіть системи, аналогічні задачам 530–532, та розв'яжіть їх.

Рівень Б

533. Побудуйте графік рівняння:

а) $y^2 - x = 1$;
б) $x^2 + y^2 = 9$;
в) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 1$;
г) $x^2 + y^2 - 2x = 3$;
ґ) $x^2 - y^2 = 0$;
д) $x^2 + 1 + y^2 - 2y = 0$.

Чи можна побудовані графіки вважати графіками функцій?

Розв'яжіть графічно систему рівнянь зокрема і *відкриту* (в) **(534–536).**

534. а) $\begin{cases} y=6x-x^2-7, \\ y=|x|-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=x^2-2x-1, \\ y=\dfrac{3}{x}+1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y=x^2+\quad+\square, \\ y=\square. \end{cases}$

535. а) $\begin{cases} y=\sqrt{x-4}, \\ 3y-x+2=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \quad=36, \\ xy=\square. \end{cases}$

536. а) $\begin{cases} x^2+y^2=32, \\ |x|-y=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-y=0, \\ |x|-y=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \quad-y=0, \\ y-\square=0. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь **(537–540).**

537. а) $\begin{cases} x^2-xy=3{,}36, \\ 3x+y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-y^2=2, \\ 3x+y=-4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ (x-8)(x-3)=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-y^2=50, \\ x(y+1)=0. \end{cases}$

538. а) $\begin{cases} x+y=8, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y=0, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-2y=0, \\ 5xy+y^2=44; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x-y=13, \\ 2x^2-xy=21. \end{cases}$

539. а) $\begin{cases} xy-x-y=7, \\ xy+x-y=13; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{34}{15}, \\ x^2+y^2=34; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-y+xy=5, \\ x+y-xy=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=5,2, \\ x^2-y^2=24. \end{cases}$

540. а) $\begin{cases} x^2+2y^2=3, \\ x+y^2=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2-xy=0, \\ x^2y-4y=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+3y^2=13, \\ 2x^2+y^2=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6. \end{cases}$

« *Любов до науки спонукала мене скласти коротку книгу про обчислення алгебри й алмукабали, бо це необхідно людям при поділі спадщин, складанні заповітів, поділі майна і в судових справах, у торгівлі й усіляких угодах, а також, коли міряють землю, прокладають канали...* ».

Аль-Хорезмі

Розв'яжіть системи рівнянь з праць відомих авторів **(541–542).**

541. ***З «Книги абака» (1202 р.) Леонардо Фібоначчі:***

а) $\begin{cases} x+y=12, \\ \dfrac{xy}{x-y}=4\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=10, \\ \left(\dfrac{x}{y}+10\right)\left(\dfrac{y}{x}+10\right)=122\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

542. ***З «Алгебри» аль-Хорезмі*** (IX ст.):

а) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2=4xy; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=10, \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=2\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

Аль-Хорезмі

Розв'яжіть систему рівнянь **(543–545).**

543. а) $\begin{cases} x^2-y^2=24, \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{26}{5}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y^2+x^2-3xy=4, \\ y^2-x^2+4x=4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y^2-4x^2-4x=1, \\ 4x^2+y^2+3xy=1. \end{cases}$

544. а) $\begin{cases} x^2+y=2, \\ y^2+x=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+2y^2=6, \\ y^2+4x=9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ xy=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{xy}=6. \end{cases}$

545. а) $\begin{cases} x^2+y^2=90, \\ x(x-3y)=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2y^2+xy=72, \\ x+y=6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x+y)(x-y)=0, \\ x^2+y^2=64; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x+y)^2-4(x+y)=45, \\ (x-y)^2-2(x+y)=7. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь способом заміни змінних **(546–548).**

546*. а) $\begin{cases} 5(x+y)+2xy=-19, \\ x+y+3xy=-35; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^3+y^3=28, \\ x+y=4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy+x+y=11, \\ x^2y+y^2x=30; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3y^3=-8, \\ x^3+y^3=7. \end{cases}$

«Використання замін змінних для зведення складних об'єктів до простіших є надзвичайно плідною математичною ідеєю».
А. М. Самойленко

547*. а) $\begin{cases} 2xy-3\dfrac{x}{y}=15, \\ xy+\dfrac{x}{y}=15; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{4}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4}; \\ x^2+y^2=17; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}; \\ x^2+y^2=160. \end{cases}$

548*. а) $\begin{cases} x^2+y^2-xy=12, \\ x^3+y^3=72; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x\left(1+\dfrac{x}{y}\right)=1{,}5, \\ y\left(1+\dfrac{y}{x}\right)=6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=109, \\ x^3-y^3=218; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=26, \\ xy-\dfrac{y}{x}=26. \end{cases}$

549. Знайдіть числа a і b, якщо:

а) $3a+4b=8ab=8$; г) $a^2+b^2-6b=2a+b=0$;

б) $a^2-0{,}5b=a-b=1$; ґ) $a^2+b-2a=a+b=-1$;

в) $a^2+ab-5=b^2+ab=10$; д) $3(a-2)(b+1)=a-b=3$.

550. Знайдіть відстань між точками перетину:

а) прямої і кола, рівняння яких $x-y=7$ і $x^2+y^2=169$;

б) кіл, рівняння яких $x^2+y^2=25$ і $(x-4)^2+(y-4)^2=1$.

Побудуйте відповідні графіки і перевірте безпосереднім вимірюванням або візуально, чи правильно виконане завдання? Складіть і розв'яжіть аналогічну задачу про гіперболу.

Вправи для повторення

551. Установіть відповідність між парами функцій $f(x)$ і $g(x)$ (1–4) та відстанню між точками (А–Д), у яких перетинаються графіки цих функцій.

1 $f(x) = 5 - x$ і $g(x) = 4/x$	**А** $2\sqrt{17}$
2 $f(x) = \sqrt{x}$ і $g(x) = 0{,}25(x + 3)$	**Б** $\sqrt{2}$
3 $f(x) = x^2$ і $g(x) = \sqrt[3]{x}$	**В** $3\sqrt{2}$
4 $f(x) = x^2 - 2x$ і $g(x) = -x^2 + 6x - 6$	**Г** $5\sqrt{3}$
	Д $2\sqrt{5}$

552. 1) Швидкість світла дорівнює $3 \cdot 10^5$ км/с. Яку відстань світло проходить за: а) 5 с; б) 1 год; в) 1 рік?

2) Швидкість звуку в повітрі наближено дорівнює 343 м/с. Яку відстань звук проходить за: а) 5 с; б) 15 с; в) 0,5 хв?

3) Ви побачили спалах блискавки, а через 10 с почули гуркіт грому. Як знайти відстань до блискавки? Чи на безпечній відстані від блискавки ви перебуваєте за цих умов?

Зверніть увагу! Блискавка дуже швидко рухається і здатна уражати людей, що перебувають від неї на відстані 15 км.

553. Знайдіть суму і різницю дробів:

а) $\dfrac{1}{2x^2+5x-3}$ і $\dfrac{1}{2x^2-7x+3}$; б) $\dfrac{2}{6a^2-13a+6}$ і $\dfrac{1}{3a^2-11a+6}$.

554. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{2a^2-5a+2}{3a^2-3{,}5a+1}$; б) $\dfrac{x^2-3}{x^2-2\sqrt{3}x+3}$; в) $\dfrac{c^2+\sqrt{5}c-10}{c^2-3\sqrt{5}c+10}$.

Скарбничка досягнень

✓ Розумію, що таке система двох рівнянь другого степеня з двома змінними і що є її розв'язком. Можу навести приклад.

Система $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ xy=1 \end{cases}$ має розв'язки (1; 1) і (−1; −1).

✓ Знаю основні способи розв'язування системи рівнянь другого степеня з двома змінними:

Підстановка | Алгебраїчне додавання | Графічний

✓ Знаю, скільки розв'язків може мати система двох рівнянь другого степеня з двома змінними.

✓ Умію знаходити розв'язки систем двох рівнянь другого степеня з двома змінними.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:
— Що таке прикладна задача.
— Що таке математична модель.
— Основні етапи розв'язування задач складанням рівнянь:
1) вибрати невідоме і позначити його буквою;
2) за допомогою цієї букви виразити всі інші невідомі й залежності;
3) скласти рівняння;
4) розв'язати рівняння;
5) перевірити, як одержаний розв'язок рівняння відповідає умові задачі.

§ 14 Розв'язування задач складанням систем рівнянь

Задача — це вимога виконати що-небудь або запитання, рівнозначне такій вимозі. В алгебраїчних задачах найчастіше вимагається що-небудь обчислити, довести, перетворити, дослідити. Якщо, розв'язуючи задачу, як моделі використовують алгебраїчні вирази, рівняння, нерівності, системи рівнянь, то говорять про алгебраїчні методи.

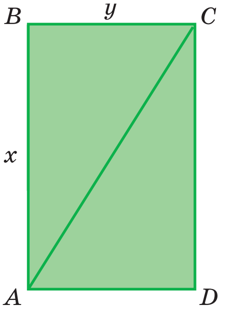
Як розв'язувати задачі складанням систем лінійних рівнянь, ви знаєте з 7 класу. Подібним способом розв'язують і задачі, які зводяться до систем рівнянь другого степеня з двома невідомими.

Задача 1. Знайдіть сторони прямокутника, діагональ якого дорівнює 10 см, а периметр на 18 см більший.

Розв'язання. Позначимо довжини шуканих сторін прямокутника x см і y см (мал. 111). Тоді квадрат його діагоналі дорівнює $x^2 + y^2$, а півпериметр становить $x + y$. Оскільки діагональ дорівнює 10 см, а периметр — 28 см, то маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x + y = 14. \end{cases}$$

Розв'яжемо її. З другого рівняння знайдемо y і підставимо його значення в перше рівняння. Маємо:



Мал. 111

$y = 14 - x$ і $x^2 + (14 - x)^2 = 100$,
$x^2 + 196 - 28x + x^2 = 100$, або $2x^2 - 28x + 96 = 0$, звідси
$x^2 - 14x + 48 = 0$.

Корені останнього рівняння: $x_1 = 8$, $x_2 = 6$. Якщо $x = 8$, то $y = 6$; якщо $x = 6$, то $y = 8$.

Відповідь. 8 см і 6 см.

Задача 2. Один велосипедист їде зі швидкістю на 2 км/год більшою, ніж другий, тому відстань 28 км він долає на 20 хв швидше, ніж другий. Знайдіть швидкості обох велосипедистів.

Розв'язання. Нехай швидкості велосипедистів (у кілометрах за годину) дорівнюють u і v. Швидкість першого більша на 2, тому маємо рівняння: $u - v = 2$.

Оскільки відстань 28 км перший велосипедист долав за $\frac{28}{u}$, а другий — за $\frac{28}{v}$ год, і час першого на 20 хв, або на $\frac{1}{3}$ год, менший, то маємо друге рівняння:

$$\frac{28}{v} - \frac{28}{u} = \frac{1}{3}, \text{ або } 84(u - v) = uv.$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} u - v = 2, \\ 84(u - v) = uv, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} u - v = 2, \\ 168 = uv, \end{cases}$$

звідси $u(u - 2) = 168$, $u^2 - 2u - 168 = 0$.

Корені одержаного квадратного рівняння: $u_1 = 14$, $u_2 = -12$. Значення -12 умову задачі не задовольняє. Отже, $u = 14$, а $v = 14 - 2 = 12$.

Відповідь. 14 км/год і 12 км/год.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

При розв'язуванні задач з параметрами відповіді одержують у вигляді виразів зі змінними. Повне розв'язання такої задачі вимагає дослідження: треба вказати, за яких значень параметрів задача має розв'язки і скільки.

Задача. З порту одночасно вийшли два теплоходи: один на південь, другий — на захід. Через 2 год відстань між ними дорівнювала 60 км. Знайдіть швидкості теплоходів, якщо швидкість першого на a км/год більша за швидкість другого.

Розв'язання. Нехай швидкості теплоходів дорівнюють відповідно x км/год і y км/год. За 2 год вони пройшли (у напрямах, перпендикулярних один до одного) відповідно $2x$ і $2y$ км (мал. 112). За теоремою Піфагора, $4x^2 + 4y^2 = 60^2$, або $x^2 + y^2 = 900$. Крім того, $x - y = a$. Маємо систему рівнянь:

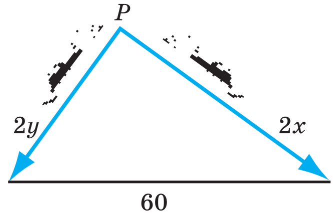
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 900, \\ x - y = a. \end{cases}$$

Розв'яжемо її. З другого рівняння системи знайдемо $x = y + a$. Підставивши це значення в перше рівняння, матимемо:

$(y+a)^2 + y^2 = 900$, $2y^2 + 2ay + a^2 - 900 = 0$.

Розв'яжемо останнє квадратне рівняння відносно y:

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 2a^2 + 1800}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{1800 - a^2}}{2}.$$



Мал. 112

За умовою задачі, a і y мають бути додатними, тому можливий лише один випадок:

$$y = \frac{\sqrt{1800 - a^2} - a}{2}.$$

При цьому мають виконуватися умови:

$$\begin{cases} a > 0, \\ 1800 - a^2 \ge 0, \\ \sqrt{1800 - a^2} > a, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a > 0, \\ -30\sqrt{2} \le a \le 30\sqrt{2}, \\ -30 < a < 30. \end{cases}$$

Отже, задачу задовольняє тільки одне значення змінної y:

$y = 0{,}5\left(\sqrt{1800 - a^2} - a\right)$, якщо $0 < a < 30$.

Тоді $x = y + a = 0{,}5\left(\sqrt{1800 - a^2} + a\right)$.

Відповідь. Якщо $0 < a < 30$, то задача має єдиний розв'язок: $x = 0{,}5\left(\sqrt{1800 - a^2} + a\right)$ км/год і $y = 0{,}5\left(\sqrt{1800 - a^2} - a\right)$ км/год.

Якщо $a \le 0$ або $a \ge 30$, то задача розв'язків не має.

Перевірте себе

1. Що таке задача?
2. Які бувають задачі?
3. Складіть кілька різних моделей для задачі: «Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 15, а добуток — 56».

Виконаємо разом

1 Знайдіть двоцифрове число, яке в 4 рази більше за суму його цифр і в 3 рази — за їх добуток.

- **Розв'язання.** Позначимо цифри десятків і одиниць буквами x і y. Тоді шукане число дорівнює $10x + y$. Оскільки воно в 4 рази більше за суму цифр, то $10x + y = 4(x + y)$, звідси $6x = 3y$, або $2x = y$.

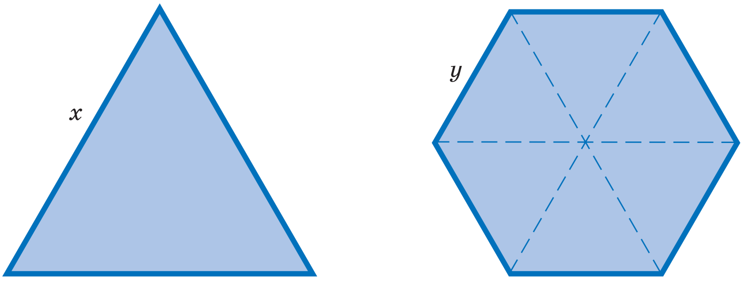
Число $10x + y$ втричі більше за добуток цифр, тому $10x + y = 3xy$. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x = y, \\ 10x + y = 3xy. \end{cases}$$

Підставимо значення y в друге рівняння:
$10x + 2x = 3x \cdot 2x$, $12x = 6x^2$, звідси $x = 0$, або $x = 2$.
Перша цифра двоцифрового числа — не 0. Тому $x = 2$, а $y = 2x = 4$.
Перевірка. $24 = 4(2 + 4)$ і $24 = 3 \cdot 2 \cdot 4$.
Примітка. Оскільки тут x і y — натуральні числа, то з'ясувавши, що $y = 2x$, далі можна не розв'язувати систему, а випробувати числа 12, 24, 36 і 48. З них задачу задовольняє тільки число 24.
Відповідь. Число 24.

2 Периметри правильного трикутника і правильного шестикутника рівні, а сума їх площ дорівнює $10\sqrt{3}$ м^2. Знайдіть сторони цих многокутників.

Розв'язання. Нехай шукані сторони трикутника і шестикутника дорівнюють x і y (мал. 113). Оскільки периметри фігур рівні, то $3x = 6y$, звідси $x = 2y$.



Мал. 113

Площа правильного трикутника зі стороною x дорівнює $\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$.
Правильний шестикутник складається з шести правильних трикутників зі стороною y, тому його площа дорівнює $6 \cdot \dfrac{y^2\sqrt{3}}{4}$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{y^2 \cdot 6\sqrt{3}}{4} = 10\sqrt{3}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = 2y, \\ x^2 + 6y^2 = 40. \end{cases}$$

Підставимо в друге її рівняння значення $x = 2y$. Маємо рівняння $10y^2 = 40$, звідси $y^2 = 4$, а $y = 2$. Тоді $x = 4$.
Відповідь. 4 м і 2 м.

Виконайте усно

555. ***Відкрита задача.*** Складіть задачу, математичною моделлю якої була б система рівнянь:

а) $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=40; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=7, \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$

Рівень А

556. Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 21, а добуток становить 90.

557. Знайдіть два числа, різниця яких дорівнює 1,1, а добуток — 0,6.

558. Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 31, а сума їх квадратів — 625.

559. Середнє геометричне двох чисел дорівнює 3. Знайдіть ці числа, якщо одне з них більше від другого на 9,1.

560. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 90 см, а гіпотенуза — 41 см. Знайдіть катети трикутника.

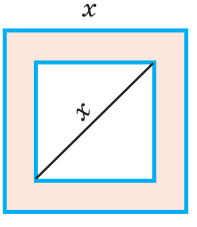
561. Знайдіть два числа, якщо:
а) їх різниця дорівнює 2, а різниця квадратів — 88;
б) їх півсума дорівнює 9,5, а сума квадратів — 185;
в) їх сума дорівнює 20, а добуток — 84.

562. Знайдіть катети прямокутного трикутника, у якого:
а) гіпотенуза дорівнює 13 дм, а площа — 30 дм^2;
б) периметр дорівнює 30 см, а сума катетів — 17 см;
в) гіпотенуза дорівнює 17 см, а периметр — 40 см.

563. Знайдіть сторони прямокутника, діагональ якого дорівнює 10 м, а площа — 48 м^2.

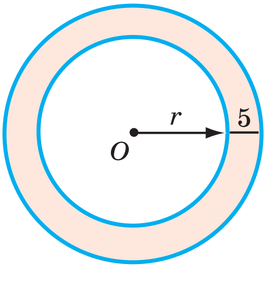
564. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо один з них менший від гіпотенузи на 2 см, а другий — на 25 см.

565. Внутрішній і зовнішній контури рамки — квадрати. Сторона одного контуру дорівнює діагоналі другого (мал. 114). Знайдіть сторони цих квадратів, якщо площа рамки дорівнює 32 см^2.



Мал. 114

566. Знайдіть внутрішній і зовнішній радіуси кільця, якщо їх різниця дорівнює 5 см, а площа кільця — 125π см^2 (мал. 115).



Мал. 115

567. Знайдіть довжини ребер прямокутного паралелепіпеда, якщо довжина одного з них, площа поверхні й об'єм паралелепіпеда дорівнюють відповідно 8 см, 158 см^2 і 120 см^3.

568. Один комбайнер може зібрати врожай пшениці з ділянки на 24 год швидше, ніж другий. Якщо комбайнери працюватимуть разом, то можуть завершити роботу за 35 год. За який час кожний комбайнер може зібрати весь урожай?

569. ***Задача Луки Пачіоло.*** Сума квадратів двох чисел дорівнює 20, а добуток — 8. Знайдіть ці числа.

570. Чисельник звичайного нескоротного дробу на 3 менший від знаменника, а якщо до обох його членів додати по 10, то значення дробу збільшиться вдвічі. Який це дріб?

Рівень Б

571. Автомат виготовляє однакові деталі. Якби він щохвилини виготовляв на одну деталь більше, то 720 деталей виготовив би на 1 год швидше. Скільки деталей виготовляє автомат за одну годину?

572. Замовлення на випуск 150 машин завод мав би виконати за кілька днів. Але вже за два дні до строку, випускаючи щодня 2 машини понад план, він не тільки виконав замовлення повністю, а й випустив ще 6 машин додатково. За скільки днів завод мав би виконати замовлення?

573. Завод мав би виготовити партію верстатів за кілька днів. Перевиконуючи денне завдання на 9 верстатів, він уже за 3 дні до строку виготовив 588 верстатів, що становило 98 % замовлення. Скільки верстатів виготовляв завод щодня?

574. Бригада лісорубів повинна була заготовити протягом кількох днів 216 м^3 дров. Перші три дні вона працювала, як передбачалось, а потім щодня заготовляла на 8 м^3 більше, тому вже за день до строку заготовила 232 м^3 дров. Скільки кубометрів дров заготовляла бригада щодня?

575*. Одна труба може наповнити басейн водою на 36 хв швидше, ніж друга. Якщо спочатку половину басейну наповнить одна труба, а потім половину басейну — друга, то він наповнюватиметься на півгодини довше, ніж одночасно обома трубами. За скільки хвилин може наповнити басейн водою кожна труба?

576. З ***«Курсу математики»*** (1813 р.) ***для французьких військових шкіл.*** Сума трьох сторін прямокутного трикутника дорівнює 156 м, площа — 1014 м^2. Знайдіть його сторони.

577. Поїзд мав би проїхати шлях від станції A до станції B за 4 год. Однак на відстані 150 км від A його було затримано на 20 хв. Щоб прибути до B за розкладом, він пройшов решту шляху зі швидкістю, більшою від початкової на 15 км/год. Знайдіть відстань від A до B.

578. Мотоцикліст проїхав відстань від села до міста за 5 год. Повертаючись у село, він перші 36 км їхав з тією самою швидкістю, а решту (більшу частину шляху) — зі швидкістю, на 3 км/год більшою. Тому на зворотний шлях він затратив на 15 хв менше. З якою швидкістю мотоцикліст їхав до міста?

579. Шлях між селами A і B складається з підйому і спуску. Велосипедист, рухаючись на спуску зі швидкістю на 6 км/год більшою, ніж на підйомі, шлях від A до B долає за 2 год 40 хв, а від B до A — на 20 хв швидше. Знайдіть швидкості велосипедиста на підйомі й спуску та довжину підйому від A до B, якщо відстань від A до B дорівнює 36 км.

580. Теплохід пройшов за 9 год 100 км за течією річки і 64 км — проти течії. Іншим разом за такий самий час він пройшов 80 км за течією і 80 км — проти течії. Знайдіть власну швидкість теплохода і швидкість течії річки.

581. Швидкість одного літака на 100 км/год більша за швидкість другого. Тому перший долає відстань 980 км на 0,4 год довше, ніж другий — відстань 600 км. Знайдіть швидкості літаків.

582. Від пристані A за течією річки відійшов пліт. Через 3 год від пристані B, віддаленої від A на 60 км, відійшов теплохід, який прибув до A через 1 год після зустрічі з плотом. Визначте швидкість течії, якщо швидкість теплохода в стоячій воді дорівнює 24 км/год.

583. Із села в місто, відстань між якими 20 км, виїхав велосипедист, а через 15 хв слідом за ним другий. Наздогнавши першого, другий велосипедист повернувся назад і прибув до села за 45 хв до прибуття першого велосипедиста в місто. Знайдіть швидкість першого велосипедиста, якщо другий їхав зі швидкістю 15 км/год.

584. З пункту A одночасно і в одному напрямку виїхали два велосипедисти зі швидкостями 18 км/год і 24 км/год. Через 1 год слідом за ними виїхав автомобіль, який наздогнав спочатку одного велосипедиста, а через 10 хв — і другого. Знайдіть швидкість автомобіля.

585. З пункту A до пункту B, відстань між якими 90 км, виїхав велосипедист зі швидкістю 12 км/год. Через півгодини з A до B виїхав другий велосипедист зі швидкістю 15 км/год. Водночас з B у напрямку до A виїхав мотоцикліст, який спочатку зустрів першого велосипедиста, а через 2 хв — другого. Знайдіть швидкість мотоцикліста.

Вправи для повторення

586. На столі в одному ряду лежать чотири фігури: трикутник, круг, шестикутник і ромб. Вони пофарбовані в різні кольори: червоний, синій, жовтий і зелений. Відомо, що праворуч від жовтої фігури лежить ромб; круг розташований праворуч від трикутника і ромба; червона фігура лежить між синьою і зеленою; трикутник лежить не на краю столу; синя і жовта фігури не лежать поруч. Визначте, у якій послідовності розташовано фігури і якого вони кольору.

587. Побудуйте графік функції $y=\dfrac{12}{x-3}$. Знайдіть координати точок перетину цього графіка з графіками рівнянь $3y - x + 3 = 0$, $y - 3x + 9 = 0$ і $x^2 - 6x + y^2 = 16$.

588. Використовуючи результати задачі № 587, установіть відповідність між абсцисами знайдених точок і відповідними їх ординатами, які подані в таблиці разом із буквами. Розташуйте абсциси (разом з відповідними буквами) за порядком спадання, і ви дізнаєтеся назву міста, де розташований університет, у якому працював Микола Миколайович Боголюбов і на фасаді якого встановлено присвячену йому меморіальну дошку (мал. 116)

−6	6	−4	4	−3	3	−2	2
І	Н	В	Р	Ц	Е	І	Ч

Доведіть тотожність **(589–590).**

589. $4a^4 + 1 = (2a^2 - 2a + 1)(2a^2 + 2a + 1)$.

590. $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$.

591. Спростіть вираз.

а) $\dfrac{1}{(a+c)^2}+\dfrac{1}{a^2-c^2}-\dfrac{1}{(a-c)^2}$;

б) $\dfrac{a+2c}{3a-3c}-\dfrac{3c-a}{2a-2c}+\dfrac{a^2-c^2}{(a-c)^2}$.

592. Знайдіть значення функції $y = 1 - x^2$ для перших 5 натуральних чисел.

Мал. 116

Скарбничка досягнень

- ✓ Розумію, що система двох рівнянь другого степеня з двома змінними може бути математичною моделлю прикладних задач.
- ✓ Умію розв’язувати задачі складанням систем рівнянь.

Завдання для самостійної роботи

Варіант I

1°. Побудуйте графік функції: а) $y = -x^2$; б) $y = 2 + \sqrt{x}$.

2°. Розв'яжіть нерівність $x^2 - 2x < 0$.

3•. Площа прямокутника дорівнює 180 см^2, а його периметр становить 54 см. Знайдіть сторони прямокутника.

4•. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 2x - 3$, дослідіть її.

Варіант II

1°. Побудуйте графік функції: а) $y = -\sqrt{x}$; б) $y = x^2 - 4$.

2°. Розв'яжіть нерівність $2x - x^2 > 0$.

3•. Довжина гіпотенузи прямокутного трикутника дорівнює 61 см. Знайдіть довжини катетів цього трикутника, якщо його площа — 330 см^2.

4•. Побудуйте графік функції $y = x^2 + 2x - 3$, дослідіть її.

Варіант III

1°. Побудуйте графік функції: а) $y = x^{-1}$; б) $y = x^2 + 2$.

2°. Розв'яжіть нерівність $x^2 + 3x \le 0$.

3•. Сума площ двох квадратів дорівнює 65 м^2, а сума їх периметрів — 44 м. Знайдіть сторони цих квадратів.

4•. Побудуйте графік функції $y = 4x - x^2$ і дослідіть її.

Варіант IV

1°. Побудуйте графік функції: а) $y = -x^3$; б) $y = 4 - x^2$.

2°. Розв'яжіть нерівність $x^2 - 4x \ge 0$.

3•. Площа прямокутника дорівнює 120 см^2, а його периметр — 46 см. Знайдіть сторони та діагональ прямокутника.

4•. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 5x + 4$, дослідіть її.

Історичні відомості

Функція — одне з найважливіших понять сучасної математики. Воно створювалося і збагачувалося протягом тривалого часу. Таблиці квадратів і кубів вавилонські вчені обчислювали ще понад 4 тисячоліття тому. А це ж — табличні задання функцій. Архімед визначав залежність площі круга і площі поверхні кулі залежно від їх радіусів. А рівності $S = \pi r^2$ і $S = 4\pi r^2$ задають функції.

Готфрід Лейбніц
(1646 – 1716)

На межі XVI – XVII ст. функції переважно задавалися словесно, графічно чи за допомогою таблиць. Тільки П. Ферма і Р. Декарт показали, як подавати залежність між змінними за допомогою рівнянь. Для графічного зображення різних залежностей вони застосовували систему координат.

Термін «функція» вперше ввів німецький математик **Готфрід Лейбніц** (з 1673 — у рукописах, а з 1692 — у публікаціях). Символи для загального позначення функцій $f(x)$ і $y = f(x)$ запровадив у 1734 р. швейцарський математик **Леонард Ейлер.**

Леонард Ейлер
(1707 – 1783)

Навіть після введення слова «функція» відповідне йому поняття з часом змінювалося. Г. Лейбніц функціями називав довжини відрізків, які змінювалися залежно від зміни довжин інших відрізків. Л. Ейлер називав функцією вираз, складений зі змінної і чисел. Наприклад, вираз $3x + 5$ — функція від змінної x, бо значення даного виразу залежить від значень x. Чеський математик Б. Больцано (1781 – 1848) ще більше розширив поняття функції, він під функцією розумів будь-яку залежність однієї величини від іншої.

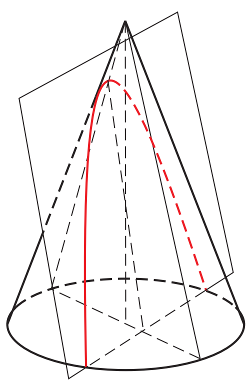
Згодом більшість математиків під функцією розуміли залежну змінну величину, інші — відповідність між множинами чисел або й відношення (співвідношення) між елементами довільних множин.

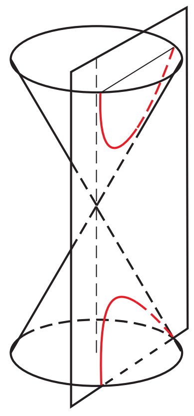
Найзагальніше сучасне означення функції запропонувала в XX ст. група математиків, що виступала під псевдонімом Н. Бурбакі: «Функція — це відношення, при якому кожному елементу області відправлення відповідає рівно один елемент області прибуття». Під областю відправлення (областю визначення функції) і областю прибуття (областю її значень) розуміють будь-які множини, а не тільки числові.

Як бачимо, словом «функція» в різні часи називали то довжину відрізка, то вираз зі змінною, то змінну величину, то залежність між величинами, відповідність між значеннями величин, відношення між елементами двох множин.

В основній школі розглядають тільки найважливіші й найпростіші приклади функцій. Згодом ви ознайомитеся з іншими класами функцій: степеневими, показниковими, логарифмічними, тригонометричними тощо. Науковці розглядають також функції від двох, трьох і більшої кількості змінних.

Назви «парабола», «гіпербола» ввів давньогрецький математик Аполлоній (III ст. до н. е.). Ці криві він розглядав як лінії перетину конічної поверхні з площиною.





У сучасній математиці розглядають багато різних видів функцій. Докладно їх вивчають в окремих математичних дисциплінах: математичному аналізі і теорії функцій. У цих галузях успішно працювали й українські математики М. В. Остроградський, М. П. Кравчук, С. Н. Бернштейн, Є. Я. Ремез, С. Банах, Г. М. Фіхтенгольц, М. Г. Крейн, М. І. Шкіль та інші.

Головне в розділі

Функція — відповідність, при якій кожному значенню змінної x з деякої множини D відповідає єдине значення змінної y. Множину D називають *областю визначення*, а множину всіх відповідних значень змінної y — *областю значень* даної функції. Якщо y — функція від x, то пишуть $y = f(x)$.

$y = ax^2 + bx + c$ — квадратична функція ($a = 0$, b, c — довільні числа, а x — аргумент).

Графіки функцій $y = ax^2 + bx + c$, $y = ax^2 + bx$ і $y = ax^2$ — однакові параболи, які можна сумістити паралельним перенесенням.

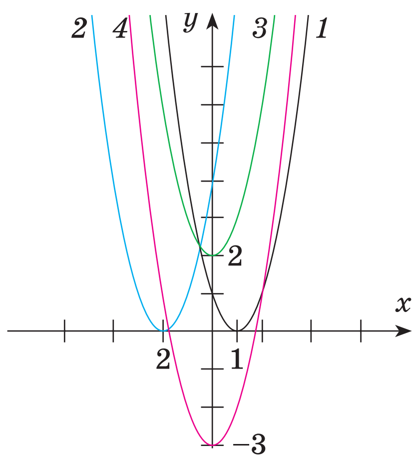
Нулі функції — це значення її аргументу, при яких значення функції дорівнюють нулю. Проміжки області визначення функції, на яких функція не змінює знака (тобто має тільки додатні або тільки від'ємні значення), називають *проміжками знакосталості*.

Функцію називають *зростаючою* (або *спадною*) на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає більше (менше) значення функції.

Функція $y = f(x)$ називається *парною*, якщо область її визначення симетрична відносно нуля і для всіх значень аргументу $f(-x) = f(x)$. Функція $y = f(x)$ називається *непарною*, якщо область її визначення симетрична відносно нуля і для всіх значень аргументу $f(-x) = -f(x)$. Існують функції, які є ні парними, ні непарними.

Якщо відомо графік функції $y = f(x)$, то за допомогою геометричних перетворень можна одержати графіки функцій $y = -f(x)$, $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$.

Наприклад, на малюнку показано, як за допомогою геометричних перетворень і графіка функції $y = x^2$ можна отримати графік функції $y = (x - 1)^2$, $y = (x + 2)^2$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 3$.



1 — $y = (x - 1)^2$
2 — $y = (x + 2)^2$
3 — $y = x^2 + 2$
4 — $y = x^2 - 3$

Квадратною нерівністю називається кожна нерівність виду $ax^2 + bx + c * 0$, де a, b, c — дані числа, x — змінна, а * — будь-який зі знаків нерівності: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$. Розв'язуючи таку нерівність, зручно уявляти, як розташований відносно осі x графік функції $y = ax^2 + bx + c$.

З'ясовуємо досягнення

Тестові завдання № 2

1 $\boldsymbol{R}$ — це область визначення функції:

а) $y=\sqrt{x+1}$; б) $y = 2x^{-1}$; в) $y = -x^2$; г) $y=x^{\frac{1}{2}}$.

2 Областю значень функції $y = x^2 - 2x - 1$ є проміжок:

а) $(-\infty;-2)$; б) $(1;\infty)$; в) $[1; 2)$; г) $[-2;\infty)$.

3 На проміжку $(0;\infty)$ зростаючою є функція:

а) $y = -5x$; б) $y = 2 - x^2$; в) $y = 3x^{-1}$; г) $y=\sqrt{x}-1$.

4 Скільки нулів має функція $y = x(x^2 + 2)(x + 4)$:

а) один; б) два; в) три; г) чотири?

5 Парабола — це графік функції:

а) $y = x^{-2}$; б) $y = x - 3x^2$; в) $y = 2x$; г) $y=\sqrt{x}$.

6 Розв'язком нерівності $x^2 + 2x + 3 > 2$ є проміжок:

а) $(-\infty;-3)$; б) $(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$; в) $(1; 2)$; г) R.

7 Симетричним відносно точки $(0; 0)$ є графік функції:

а) $y = x^{-2}$; б) $y = 3x^2$; в) $y = 2x$; г) $y=\sqrt{x}$.

8 Розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} y=x^2+4, \\ 4x+y=0 \end{cases}$ є точка:

а) $(-8; -2)$; б) $(8; 2)$; в) $(4; 2)$; г) $(-2; 8)$.

9 Парною є функція:

а) $y=\sqrt{x}$; б) $y = 2x$; в) $y = 3x^2$; г) $(x - 2)^2$.

10 Функція $y = 2x - x^2$ набуває найбільшого значення, якщо:

а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) $x = 2$; г) $x = -2$.

Типові завдання до контрольної роботи № 2

1° Побудуйте графік функції $y = 2x + 3$. Знайдіть її область визначення та область значень. Установіть нулі функції та проміжки знакосталості.

2° Функцію задано формулою $f(x) = (2x + 3)^2$. Знайдіть:
а) $f(0)$; б) $f(-4)$; в) $f(3{,}5)$.

3 Побудуйте графік та дослідіть властивості функції:
а°) $y = -x^2 + 1$; б•) $y = (x + 1)^2 - 4$.

4 Розв'яжіть нерівність:
а°) $(x + 5)(x - 3) > 0$; б•) $-5x^2 + 3x + 2 \le 0$.

5• Побудуйте графік функції:
а) $y = x^2 + 4x + 3$; б) $y = |6x - x^2 - 5|$.

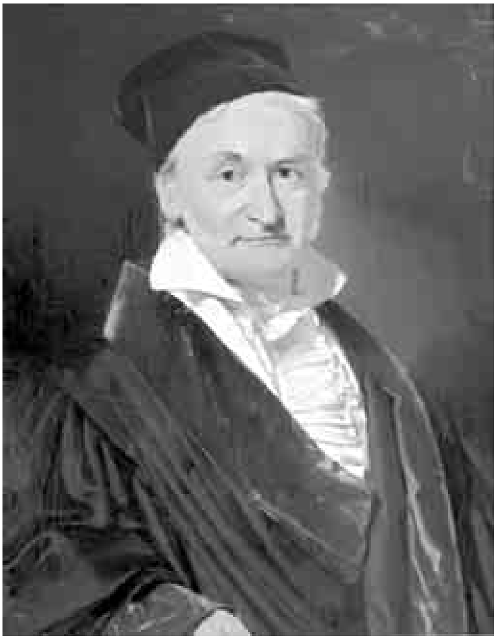
6 Розв'яжіть графічно систему рівнянь:
а°) $\begin{cases} x^2 + y = 1, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$ б•) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0, \\ x^2 - y + 2 = 0. \end{cases}$

7• Розв'яжіть систему рівнянь:
а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ 3x - y + 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - xy - 3 = 0, \\ x^2 - xy + 2 = 0. \end{cases}$

8• Якщо деяке двоцифрове число поділити на суму цифр, то в частці одержимо 8, в остачі буде 5, а якщо поділити його на добуток цифр, то в частці одержимо 10, а в остачі буде 1. Знайдіть це число.

9•• Розв'яжіть нерівність:
а) $(x + 5)^2(x - 3)(1 + x) > 0$; б) $\dfrac{x^3 - 16x}{x^3 - 5x^2 + 4x} \le 0$.

10•• Знайдіть, при яких значеннях c рівняння $(c + 1)x^2 + (3c - 2)x - c = 0$ має два різних дійсних корені.



Розділ 3

ҐАУСС
Йоганн Карл Фрідріх
(1777—1855)
Німецький математик, астроном, фізик і геодезист.
Один із найвеличніших і найвпливовіших математиків усіх часів. Його називають Королем математики.
Характерними рисами досліджень Ґаусса є надзвичайна їх різнобічність і органічний зв'язок між теоретичною і прикладною математикою.
Лауреат медалі Коплі (вища щорічна нагорода Королівського товариства Великобританії) (1838).

«Нічого не зроблено, якщо щось залишилося недоробленим».

«Математики стоять на плечах один одного».

«Астрономія і чиста математика є магнітними полюсами, до яких завжди повертається компас мого розуму».

«Математика — цариця наук і арифметика — цариця математики».

К. Ф. Ґаусс

ПРЕМІЯ ҐАУССА (або приз Ґаусса)

Присуджується спільно Міжнародним математичним союзом і Німецьким математичним товариством раз на 4 роки на Міжнародному конгресі математиків за видатні досягнення в галузі прикладної математики

Мета премії — заохочення математиків, які сприяють прогресу в нематематичних галузях, включаючи технології, бізнес і повсякденне життя. Заснована 30 квітня 2002 року у день 225-ї річниці від дня народження Ґаусса

ЛАУРЕАТИ ПРЕМІЇ

Кійосі Іто
Ів Мейєр
Стенлі Ошер

Числові послідовності

Послідовність — це множина будь-яких об'єктів, розташованих у певному порядку. Якщо членами послідовності є числа, її називають *числовою послідовністю*. Найпростіші й найважливіші приклади числових послідовностей: арифметична і геометрична прогресії.

Вивчивши цей розділ, ви зможете побачити красу математичних співвідношень у різних видах послідовностей і способах їх задання, у несподіваних залежностях і закономірностях, у незвичних фігурах і способах їх побудови тощо.

У цьому розділі розглянемо такі теми:

§ 15 **Послідовність**
Succession

§ 16 **Арифметична прогресія**
Arithmetic Progression

§ 17 **Геометрична прогресія**
Geometric Progression

§ 18 **Задачі на обчислення сум**
Sums Calculation Tasks

Навчальний проект № 3
«ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ»

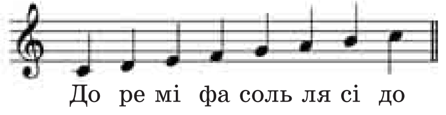
Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:
— Що таке функція та її область визначення.
— Які функції називають зростаючими, а які – спадними.
— Як знайти значення функції в точці.
— Що таке натуральні числа.

Перші десять натуральних чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Найменше натуральне число 1	
Парні числа (діляться на 2 без остачі) 2, 4, 6, 8, 10, …	Непарні числа 1, 3, 5, 7, 9, 11, …

§ 15 Послідовність

Певна послідовність подій чи явищ, порядок розташування предметів, звуків, кольорів тощо — це послідовність. Згадайте, як розташовані фігури на шахівниці (мал. 117, *а*) і ноти на нотному стані (мал. 117, *б*). Можна говорити і про послідовності місяців у році, днів у тижні, букв у слові, прізвищ у списку, вагонів у поїзді, станцій на залізниці та ін.

а

б

Мал. 117

Пальці руки людини також розташовані у певній послідовності: великий, вказівний, середній, підмізинний, мізинний. І штрихи на штрих-коді, що є на обкладинці цього підручника, нанесено у певній послідовності. Що вони означають? Навіщо вони?

Розширити відомості про послідовності в математиці та ознайомитися з їх властивостями вам допоможе цей параграф.

Уявімо, що підряд виписано всі парні натуральні числа:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, … .

Це ***послідовність*** парних натуральних чисел. Число 2 — її перший член, 4 — другий, 6 — третій, 20 — десятий і т. д.

Наведемо ще кілька прикладів числових послідовностей:

1, 2, 3, 4, 5, ... — послідовність натуральних чисел;

1, 3, 5, 7, 9, ... — послідовність непарних натуральних чисел;

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ — послідовність чисел, обернених до натуральних.

Послідовності бувають ***скінченні*** та ***нескінченні***. Скінченною, наприклад, є послідовність одноцифрових натуральних чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Послідовність усіх натуральних чисел нескінченна. Записуючи нескінченну послідовність, після кількох її перших членів ставлять три крапки.

Перший, другий, третій члени послідовності парних натуральних чисел дорівнюють відповідно 2, 4, 6. Пишуть: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$. А чому дорівнює її n-й член a_n? Оскільки кожний член послідовності парних натуральних чисел удвоє більший від свого порядкового номера, то її n-й член дорівнює $2n$, тобто

$$a_n = 2n.$$

Це формула n-го члена послідовності парних натуральних чисел.

Формула n-го члена послідовності непарних натуральних чисел:

$$a_n = 2n - 1.$$

Ця формула схожа на формулу $y = 2x - 1$, яка задає лінійну функцію. Тільки останній аргумент x може бути будь-яким дійсним числом, а у формулі $a_n = 2n - 1$ змінна n може набувати тільки натуральних значень.

Кожний член послідовності відповідає деякому натуральному числу — порядковому номеру члена послідовності. Тому **числова послідовність — функція, задана на множині всіх натуральних чисел або на множині перших n натуральних чисел.** Якщо функцію задано на множині всіх натуральних чисел, то маємо нескінченну числову послідовність; якщо функцію задано на множині перших n натуральних чисел, то вона є скінченною послідовністю, кількість членів якої дорівнює n.

Якщо відома формула n-го члена послідовності, то нескладно обчислити будь-який її член. Напишемо кілька перших членів послідовності, n-й член якої $a_n = n^2 + 2$. Надаючи змінній n значення 1, 2, 3, 4, 5, ... , одержимо перші члени послідовності:

$$3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, \ldots.$$

Тисячний член цієї послідовності:

$$a_{1000} = 1000^2 + 2 = 1\,000\,002.$$

Набагато важче розв'язувати обернену задачу — для даної послідовності знайти її n-й член. Наприклад, формула n-го члена послідовності простих чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... невідома й досі, хоча математики шукали її понад 2000 років.

Кілька перших членів послідовності не задають її однозначно. Наприклад, є безліч різних послідовностей, перші члени яких 2, 4, 6, 8.

Зокрема, такі перші члени мають послідовності, n-ні члени яких

$$a_n = 2n \text{ і } c_n = 2n + (n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4).$$

Із двох сусідніх членів a_i і a_{i+1} послідовності член a_{i+1} називають ***наступним*** за a_i, а a_i — ***попереднім*** відносно a_{i+1}.

Послідовність називають *зростаючою*, якщо кожний її член, починаючи з другого, більший за попередній. Послідовність називають *спадною*, якщо кожний її член, починаючи з другого, менший від попереднього.

Зауваження. Іноді розглядають послідовності, членами яких є різні вирази, функції, фігури тощо. Далі говоритимемо тільки про *числові послідовності*, хоч і називатимемо їх коротко *послідовностями*.

Числові послідовності часто задають *рекурентними* формулами (від латинського слова *recurrentis* — той, що повертається). Формулу називають рекурентною, якщо вона показує, як виражається будь-який член послідовності через кілька попередніх її членів.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Наприклад, рекурентною є формула $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, яка засвідчує, що кожний член послідовності (починаючи з третього) дорівнює сумі двох членів, що йому передують. Одна така формула послідовності не визначає, бо невідомі її два перших члени. Якщо, крім формули, вказати і два перших члени, то послідовність можна вважати цілком заданою.

Задамо рекурентною формулою послідовність, перший і другий члени якої — одиниці, а кожний наступний дорівнює сумі двох попередніх. Цю послідовність можна задати такими рівностями:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$$

Користуючись такою формулою, можна визначити послідовно третій, четвертий та інші члени послідовності:

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2,$$
$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3,$$
$$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5,\ \ldots\ .$$

Маємо послідовність: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Її називають *послідовністю Фібоначчі*, оскільки вперше розглянув та описав її властивості в трактаті «Книга про абак» (1202 р.) Леонардо Пізанський (Фібоначчі).

Формулу n-го члена як функцію від n для цієї послідовності знайдено Ж. Біне тільки у XIX ст. (див. задачу 617).

Перевірте себе

1. Наведіть приклади числових послідовностей.
2. Сформулюйте означення числової послідовності.

3. Якими бувають числові послідовності?
4. Які послідовності називають скінченними?
5. Які послідовності називають зростаючими? А які — спадними?

Виконаємо разом

1 Продовжіть послідовність квадратів натуральних чисел:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25, \ldots .$$

- **Розв'язання.** Кожний член указаної послідовності дорівнює квадрату його номера: перший — квадрату числа 1, другий — квадрату числа 2 і т. д. Тому шостий член дорівнює 6^2, сьомий — 7^2, восьмий — 8^2 і т. д. Отже, маємо послідовність:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ \ldots .$$

2 Знайдіть сороковий член послідовності, заданої формулою:
а) $a_n = 3n - 2$; б) $a_n = (-1)^n$; в) $a_n = n - (-1)^{n-3}$.

- **Розв'язання.** а) $a_{40} = 3 \cdot 40 - 2 = 120 - 2 = 118$;
б) $a_{40} = (-1)^{40} = 1$;
в) $a_{40} = 40 - (-1)^{37} = 40 + 1 = 41$.

Відповідь. а) 118; б) 1; в) 41.

3 Починаючи з якого номера всі члени послідовності, заданої формулою $c_n = n^2 + n$, більші за 100?

- **Розв'язання.** Якщо $n^2 + n > 100$, то $n^2 + n - 100 > 0$.
Розв'яжемо цю квадратну нерівність.
$D = 1 + 400$. Оскільки йдеться тільки про натуральні (отже — додатні) значення n, а додатний корінь $n = \dfrac{-1+\sqrt{401}}{2} \approx 9{,}5$, то номер, що задовольняє умову, має бути більшим від 9.

Відповідь. Починаючи з десятого номера.

4 Установіть, зростаючою чи спадною є послідовність, яка задається формулою: $a_n = 1 - 2n^2$.

- **Розв'язання.** Візьмемо два довільних послідовних члени цієї послідовності, знайдемо їх різницю та визначимо її знак:

$$a_p = 1 - 2p^2;\ a_{p+1} = 1 - 2(p+1)^2;$$
$$a_{p+1} - a_p = 1 - 2(p+1)^2 - (1 - 2p^2) =$$
$$= 1 - 2p^2 - 4p - 2 - 1 + 2p^2 = -(4p + 2).$$

Для натуральних p вираз $4p + 2$ набуває лише додатних значень. Тому $a_{p+1} - a_p < 0$ для всіх натуральних p. Отже, для будь-якого номера p виконується умова $a_{p+1} < a_p$. Дана послідовність спадна, бо в ній кожний наступний член менший від попереднього.

Відповідь. Послідовність спадна.

Виконайте усно

593. Назвіть 5 перших членів послідовності чисел, обернених до натуральних.

594. Назвіть 5 перших членів послідовності простих чисел.

595. Продовжіть послідовність натуральних чисел:
а) які діляться на 3: 3, 6, 9, 12, ... ;
б) які діляться на 5: 5, 10, 15, ... ;
в) які не діляться на 3: 1, 2, 4, 5, 7, ... ;
г) кожне з яких на 3 більше за попереднє: 1, 4, 7, ...

596. Розгляньте послідовності:
а) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, ... ;
б) 1, –1, 1, –1, 1, –1, 1, –1, ... ;
в) 5, 55, 555, 5555, 55555, 555555, ...
Для кожної послідовності вкажіть такі члени: 1) другий, п'ятий і сьомий; 2) наступний за третім; 3) попередній сьомому; 4) які містяться між другим і шостим.

597. Який член послідовності x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n, ... :
а) наступний за x_3, x_7, x_{39}, x_{121}, x_{n+1}, x_{3n};
б) попередній відносно x_5, x_{71}, x_{99}, x_{123}, x_{n+1}, x_{3n}?

Рівень А

598. Скінченною чи нескінченною є послідовність:
а) простих чисел;
б) чисел, протилежних натуральним;
в) правильних дробів зі знаменником 10;
г) неправильних дробів зі знаменником 10;
ґ) правильних дробів із чисельником 10;
д) неправильних дробів із чисельником 10;
е) цифр у десятковому записі числа π?
Випишіть п'ять перших членів кожної послідовності.

599. Напишіть п'ять перших членів послідовності, n-й член якої задається формулою:
а) $a_n = 2(n - 1)$; в) $y_n = 3n + (-1)^n$; ґ) $c_n = 2n^2$;
б) $x_n = 12$; г) $b_n = 1 - n^2$; д) $z_n = 1 + (-1)^n$.

600. Послідовність задано формулою $a_n = 2n + 3$. Знайдіть:
а) a_3; б) a_6; в) a_{15}; г) a_{100}.

601. Напишіть сім перших членів послідовності, заданої формулою:
а) $a_n = 3n - 2$; б) $a_n = n^2 + 1$; в) $a_n = 2 - 5n$; г) $a_n = n^2 - n$.

602. Напишіть кілька перших членів послідовності квадратів натуральних чисел. Який її n-й член?

603. Напишіть кілька перших членів і n-й член послідовності кубів натуральних чисел.

604. Напишіть кілька перших членів послідовності натуральних чисел, кратних 3. Обчисліть її сороковий член.

605. Напишіть кілька перших членів послідовності, n-й член якої $a_n = n^2 - 1$. Знайдіть a_{10}, a_{20}, a_{100}.

606. Напишіть скінченну послідовність, задану формулою:

а) $a_n = 4n - 3$, де $1 \le n \le 8$;
б) $b_n = \dfrac{n}{n+1}$, де $1 \le n \le 10$;
в) $c_n = n^2 + 2n$, де $1 \le n \le 8$;
г) $y_n = 2n + 1$, де $1 \le n \le 7$.

607. Знайдіть тридцятий член послідовності, заданої формулою:

а) $a_n = 2n + 7$;
б) $b_n = 2n^2 - n$;
в) $c_n = (-1)^n + 3$;
г) $x_n = 0{,}5n(n + 1)$.

608. Дано послідовність, n-й член якої $a_n = 5n + 8$. На скільки її двадцятий член більший від дев'ятнадцятого?

609. Дано послідовність, n-й член якої $a_n = n \cdot 3^n$. У скільки разів її двадцятий член більший від вісімнадцятого?

610. Знайдіть шостий, восьмий і десятий члени послідовності, n-й член якої $b_n = 2^n$.

611. Чи правильно, що $a_n = 5n - 3$ — формула n-го члена послідовності натуральних чисел, які при діленні на 5 дають остачу 2?

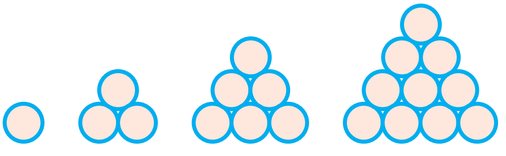
612. Напишіть формулу n-го члена послідовності натуральних чисел, які при діленні на 7 дають остачу 3.

613. Перший член послідовності дорівнює 7, а кожний наступний на 2 більший від попереднього. Напишіть кілька її перших членів.

614. Перший член послідовності дорівнює 5, а кожний наступний на 3 менший від попереднього. Напишіть кілька її перших членів. Зростаюча чи спадна ця послідовність?

615. а) Послідовність 1, 3, 6, 10, 15, ... називають послідовністю *трикутних чисел* (мал. 118). Напишіть і зобразіть 4 наступних члени цієї послідовності.

б) ***Відкрита задача.*** Дізнайтеся, яку послідовність називають послідовністю квадратних чисел. Складіть і розв'яжіть задачу про цю послідовність.



Мал. 118

Рівень Б

616. Напишіть п'ять перших членів послідовності, яка задається рекурентною формулою:

а) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = -2a_n$;

б) $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$;

в) $a_1 = 15$, $a_{n+1} = a_n - 5$;

г) $c_1 = -2$, $c_2 = 3$, $c_{n+2} = 2c_n + c_{n+1}$.

617. Послідовність чисел Фібоначчі можна задати рекурентною формулою: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ або формулою n-го члена:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Знайдіть п'ять перших членів цієї послідовності двома способами і порівняйте їх. Детальніше про творців цих формул дізнайтеся самостійно з інформаційних джерел.

618. Послідовність $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ така, що $a_1 = -5$ і $a_{i+1} - a_i = 3$ для кожного натурального числа i. Знайдіть a_2, a_5, a_{10}.

619. Починаючи з якого номера всі члени послідовності:

а) $a_n = 3n + 1$ більші за 50;

б) $c_n = n^2 - 5$ більші за 220;

в) $x_n = 200 - 3n$ менші за 12;

г) $b_n = n^2 - n$ не менші за 110.

620. Для яких номерів члени послідовності:

а) $a_n = 3n - 5$ більші за 40, але менші за 150;

б) $b_n = 200 - 2n$ більші за 50, але менші за 170;

в) $c_n = 2^n + 1$ більші за 8, але менші за 30;

г) $x_n = 4 - 7n$ більші за -40, але менші за -10;

ґ) $y_n = \sqrt{n+2}$ більші за $\sqrt{10}$, але менші за 10?

621. Скільки додатних членів містить послідовність, задана формулою:

а) $a_n = -3n + 374$;

б) $a_n = -n^2 + 70n + 800$?

622. Послідовність задано формулою $a_n = n^2 - 15n$. Скільки в ній від'ємних членів?

623. Чи є серед членів послідовності $a_n = 7n - 2$ такі, що:

а) закінчуються цифрою 0;

б) діляться на 13;

в) діляться на 2 і не діляться на 3;

г) при діленні на 27 дають остачу 1?

624. Дано дві послідовності: $a_n = 7n - 1$ і $c_n = 8n + 3$. Знайдіть найменші значення k і p, для яких $a_k = c_p$.

625. Дано скінченну послідовність: 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9. Задайте її формулою.

Доберіть одну з можливих формул n-го члена послідовності **(626–627)**. Задайте кожну послідовність у вигляді таблиці і графіка.

626. а) 2, 5, 8, ...; б) 2, 4, 8, ...; в) 1, –1, 1, ...; г) 1, 0, 1, ...; ґ) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, ...$; д) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, ...$

627. а) 3, 6, 12, 24, 48,...; б) 1, 7, 31, 127, 511,...; в) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ...$; г) –1, 2, –3, 4, –5,...; ґ) 0, –2, –4, –6,...; д) $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, ...$

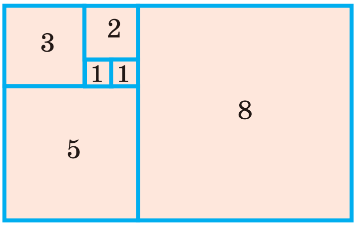
628*. Напишіть два різних n-их члени послідовностей, першими членами яких є: 1, 3, 5, 7.

629. Доведіть, що n-й член послідовності трикутних чисел (див. задачу 615) дорівнює сумі перших n натуральних чисел.

630. Нескінченна послідовність 0, 2, 0, 2, 0,... така, що сума кожних двох її сусідніх членів дорівнює 2. Чи правильно, що її n-й член $a_n = 1 + (-1)^n$?

631. Послідовність задано формулою $a^n = (-1)^n$. Знайдіть суму її перших членів: а) ста; б) тисячі; в) тисячі одного.

632. Перемалюйте в зошит малюнок 119 і доповніть його двома квадратами так, щоб їх сторони дорівнювали наступним членам послідовності Фібоначчі. Наведіть приклади форм чи процесів у природі, моделлю до яких можуть стати числа Фібоначчі чи їх геометрична інтерпретація.



Мал. 119

633. Зростаючими чи спадними є послідовності, задані такими формулами:

а) $a_n = 9n - 10$; б) $b_n = 10 - 9n$; в) $c_n = 5 - n^2$; г) $x_n = \frac{1}{n^2+1}$; ґ) $z_n = n^2 + 2n - 3$; д) $y_n = \frac{3n+4}{n+2}$?

634. Доведіть, що послідовність $a_n = 8n - 7$ — зростаюча.

635. Доведіть, що послідовність $a_n = \frac{n+1}{n}$ — спадна.

636. Знайдіть найбільший член послідовності:

а) $a_n = 6n - n^2 - 5$; б) $a_n = -n^2 + 2n + 3$.

637. Знайдіть найбільший від'ємний член послідовності, заданої формулою n-го члена:

а) $a_n = n^2 - 35$; б) $a_n = 0{,}25n^2 - 10{,}75$.

638. Які з чисел −20, −10, −5, 4, 9 є членом послідовності, n-й член якої $a_n = 2n^2 - 7n$?

639. Членом якої послідовності є число −12:

а) $a_n = 7n^2 - 11$; б) $a_n = 3 - 5n$; в) $a_n = 2n - n^2 + 3$; г) $a_n = \frac{n+1}{n}$; ґ) $a_n = n - n^2$; д) $a_n = \frac{5n^2+4}{1-2n}$?

Вправи для повторення

640. Торговельна організація купила за 2500 грн два предмети і після їх продажу одержала 40 % прибутку. Скільки заплатила організація за кожний предмет, якщо перший приніс прибутку 25 %, а другий — 50 %?

641. Побудуйте графік функції:

а) $y = x^2 + 3$; б) $y = x^2 - 2$; в) $y = (x - 4)^2$; г) $y = (x + 3)^2$.

642. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x+y=5, \\ x^2+y^2-2x=15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy+12=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ (x-4)^2+y^2=9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x^2+y^2-6x=7. \end{cases}$

Скарбничка досягнень

- ✓ Знаю, як позначають послідовності та її члени.
- ✓ Можу навести приклади послідовностей:

  зростаючих | спадних
  нескінченних | скінченних

- ✓ Знаю, якими формулами задають послідовності:

  n-го члена | рекурентними

- ✓ Умію обчислювати члени послідовності.
- ✓ Умію задавати послідовності за даними їх членами та співвідношеннями між ними.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:
— що таке послідовність.
— Що таке наступний і попередній член послідовності:

a_n і a_{n+1}

a_n — попередній, a_{n+1} — наступний

— Що таке формула n-го члена і рекурентна формула.
— Які послідовності називають зростаючими, а які – спадними.
— Як обчислювати члени послідовності

§ 16 Арифметична прогресія

Нехай дано послідовність, перший член якої 5, а кожний інший член на 3 більший від попереднього:

$$5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, \ldots .$$

Це арифметична прогресія з першим членом 5 і різницею 3.

***Арифметичною прогресією* називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додають одне й те саме число. Це стале для даної послідовності число *d* називають *різницею арифметичної прогресії*.**

Іншими словами, арифметична прогресія — це послідовність, яку можна задати такою рекурентною формулою:

$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$, де $n \in N$, a і d — задані числа.

Перший член і різниця арифметичної прогресії можуть бути якими завгодно числами. Арифметична прогресія зростаюча, якщо її різниця додатна, або спадна — якщо її різниця від'ємна. Приклад спадної арифметичної прогресії:

$$11, 9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, \ldots .$$

Щоб одержати будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, треба до попереднього члена додати різницю d. Тому якщо перший член і різниця арифметичної прогресії дорівнюють відповідно a_1 і d, то її перші члени становлять:

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d,\ a_1 + 4d,\ \ldots ,$$

тобто $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$, $a_5 = a_1 + 4d$, ...

Зверніть увагу: коефіцієнт при d на 1 менший від порядкового номера члена прогресії. Так само знаходимо $a_6 = a_1 + 5d$, $a_7 = a_1 + 6d$ і взагалі:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1)d}.$$

Це формула n-го члена арифметичної прогресії.

Приклад 1. В арифметичній прогресії $a_1 = 4$, $d = 3$. Знайдіть a_{20}.
Розв'язання. $a_{20} = a_1 + 19d = 4 + 19 \cdot 3 = 61$.
Відповідь. 61.

Приклад 2. В арифметичній прогресії $a_{19} = 8$, $d = -1$. Знайдіть a_1.
Розв'язання. $a_{19} = a_1 + 18d$. Отже, $8 = a_1 - 18$. Тоді, $a_1 = 26$.
Відповідь. 26.

Розглянемо кілька властивостей арифметичної прогресії.

Теорема 6. Будь-який член арифметичної прогресії, крім першого, дорівнює півсумі двох сусідніх з ним членів: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$**.**

Доведення. За означенням, $d = a_{n+1} - a_n$, $d = a_n - a_{n-1}$.

Отже, $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$, звідси $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Правильне й обернене твердження. Доведіть його самостійно.

Теорема 7. Сума двох членів скінченної арифметичної прогресії, рівновіддалених від її кінців, дорівнює сумі крайніх членів:

$$\boldsymbol{a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n}.$$

Нехай дано n членів скінченної арифметичної прогресії:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_{n-3},\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n.$$

Додамо перший і останній її члени, потім — другий і передостанній, потім — третій член від початку і третій від кінця і т. д. Результати маємо однакові. Справді, якщо $a_1 + a_n = m$, то:

$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n = m$;
$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = m$;
$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = m$
і т. д. Отже, $a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$.

Теорема 8. Сума n-перших членів скінченної арифметичної прогресії дорівнює півсумі крайніх її членів, помноженій на число членів:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Доведення. Нехай S_n — сума n-перших членів арифметичної прогресії

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_{n-3},\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n.$$

Якщо $a_1 + a_n = m$, то $a_2 + a_{n-1} = m$, $a_3 + a_{n-2} = m$ і т. д.
Враховуючи це, додамо почленно дві рівності:

$$+\begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \\ \hline \end{array}$$

$$2S_n = m + m + m + \ldots + m + m + m$$

$$2S_n = mn;\ 2S_n = (a_1 + a_n)n,\ \text{звідси}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

За цією формулою знаходять суму перших n членів будь-якої арифметичної прогресії.

Приклад 3. Знайдіть суму перших двадцяти членів арифметичної прогресії 5, 7, 9, ...

Розв'язання. Тут $a_1 = 5$, $d = 2$. Тому $a_{20} = 5 + 19 \cdot 2 = 43$.

$$S_{20} = \frac{5 + 43}{2} \cdot 20 = 480.$$

Відповідь. 480.

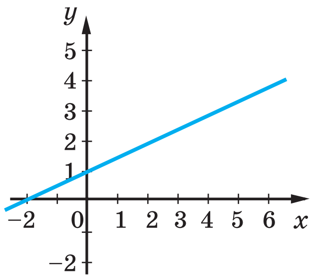
Суму n перших членів арифметичної прогресії можна також знаходити за формулою $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$. Доведіть її самостійно.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

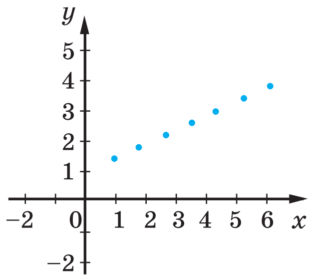
Уявіть лінійну функцію, задану формулою $y = 0{,}5x + 1$. Її графік зображено на малюнку 120. Якщо аргументу x надавати тільки натуральних значень, тобто 1, 2, 3, ... , то значення функції дорівнюватимуть відповідно:

1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; ... .

Маємо арифметичну прогресію з першим членом 1,5 і різницею 0,5. Цій прогресії відповідає малюнок 121. Взагалі кожна функція $y = ax + b$, визначена на множині натуральних чисел, є арифметичною прогресією з першим членом $a + b$ і різницею a. Тому вважають, що **арифметична прогресія — це лінійна функція, задана на множині натуральних чисел.**



Мал. 120



Мал. 121

Якщо така функція визначена на множині всіх натуральних чисел, то маємо нескінченну арифметичну прогресію. Якщо вона визначена на множині перших n натуральних чисел, то маємо скінченну арифметичну прогресію, яка містить n членів.

Перевірте себе

1. Сформулюйте означення арифметичної прогресії.
2. Що таке різниця арифметичної прогресії?
3. Як виражається n-й член арифметичної прогресії через її перший член і різницю?
4. Чому дорівнює сума двох членів скінченної арифметичної прогресії, рівновіддалених від її кінців?
5. Чому дорівнює сума n перших членів арифметичної прогресії?

Виконаємо разом

1 Знайдіть суму всіх двоцифрових натуральних чисел.

- **Розв'язання.** Знайдемо суму чисел 10, 11, 12, ... , 99. Це скінченна арифметична прогресія. Вона містить 90 членів, і тому її сума дорівнює:

$$S = \frac{1}{2}(10 + 99) \cdot 90 = 4905.$$

Відповідь. 4905.

2 Чи є числа 1000 і 200 членами арифметичної прогресії з першим членом 5 і різницею 3?

- **Розв'язання.** Якщо 1000 є i-м членом даної прогресії, то $1000 = 5 + (i - 1) \cdot 3$ або $3 \cdot (i - 1) = 995$. Оскільки 995 не ділиться на 3, то i не є натуральним числом.
Якщо $200 = 5 + (i - 1) \cdot 3$, то $3 \cdot (i - 1) = 195$, звідси $i = 65$.
Відповідь. 1000 — не є членом даної арифметичної прогресії, а 200 — її 65-й член.

3 В арифметичній прогресії відомі $a_7 = 43$ і $a_{15} = 3$. Знайдіть a_{10}.

- **Розв'язання.** Підставимо дані задачі у формулу $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$. Маємо:

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + 6d, \\ a_{15} = a_1 + 14d; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 43 = a_1 + 6d, \\ 3 = a_1 + 14d; \end{cases}$$

$$40 = -8d, \text{ звідки } d = -5, \; a_1 = 73.$$

Оскільки $a_{10} = a_1 + 9d$, то $a_{10} = 73 + 9 \cdot (-5) = 28$.
Відповідь. 28.

Виконайте усно

643. Знайдіть різницю арифметичної прогресії:
а) 3, 5, 7, ... ; б) 12, 10, 8, ... ; в) −2, 1, 4, ... ; г) −7, −9, −11, ...

644. Різниця арифметичної прогресії дорівнює 2. Знайдіть її перший член, якщо:
а) $a_2 = 5$; б) $a_2 = -3$; в) $a_2 = 0{,}3$; г) $a_2 = \sqrt{2}$.

645. Чи є арифметичною прогресією послідовність:
а) 1, 3, 5, 8, 11, 14, ... ; б) 0, −1, −3, −5, −8, ... ?

646. Які з послідовностей можуть бути арифметичними прогресіями? Укажіть для них перший член і різницю.
а) 0, 3, 6, 9, 12, ... ;
б) −2, −4, −6, −8, −10, ... ;
в) 3, 3, 3, 3, 3, 3, ... ;
ґ) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$;
г) 5, 10, 20, 40, 80, ... ;
д) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{6}, \ldots$.

Рівень А

647. Напишіть п'ять перших членів арифметичної прогресії, якщо:
а) $a_1 = 7$, $d = 2$;
б) $a_1 = 0{,}5$, $d = -10$;
в) $a_1 = -\frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{4}$;
г) $a_1 = 9$, $d = 0$.

648. Напишіть сім перших членів арифметичної прогресії, якщо:
а) $a_1 = 2$, $d = 5$;
б) $a_1 = -3$, $d = 4$;
в) $a_1 = 0$, $d = 7$;
г) $a_1 = 4$, $d = -1$.

649. В арифметичній прогресії:
а) $a_1 = 5$, $d = -4$. Знайдіть a_7, a_{20};
б) $a_1 = 9$, $d = 4$. Знайдіть a_{15}, a_{32}.

650. В арифметичній прогресії $a_2 = 14$, $a_3 = 25$. Знайдіть d, a_{10}, a_{20}.

651. Знайдіть різницю і десятий член арифметичної прогресії:
а) 2, 7, 12, ... ; б) 3, 1, −1, ... ; в) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \ldots$.

652. Знайдіть різницю арифметичної прогресії, якщо:
а) $a_1 = 5$, $a_7 = 95$;
б) $a_1 = 2{,}3$, $a_5 = 1{,}5$;
в) $a_1 = -15$, $a_{10} = -24$;
г) $a_1 = -17$, $a_7 = 97$.

653. Знайдіть перший член арифметичної прогресії, якщо:

а) $a_{11} = 25$, $d = 2$;
б) $a_{36} = 5$, $d = -1$;
в) $a_8 = 9$, $d = 0{,}3$;
г) $a_{21} = -50$, $d = 3$.

654. В арифметичній прогресії $a_{17} = 53$, $d = 3$. Знайдіть a_1, a_5, a_{11}, a_{21}.

655. В арифметичній прогресії $a_{10} = 5$, $a_{11} = -4$. Знайдіть a_1, d, a_5, a_{21}.

656. В арифметичній прогресії $a_{25} = 5$, $a_{27} = 4$. Знайдіть a_7, a_{20}.

657. В арифметичній прогресії $a_4 = 2$, $a_6 = 3$. Знайдіть a_{40}, a_{41}.

658. Знайдіть n-й член арифметичної прогресії:

а) 2, 5, 8, ...;
б) 7, 6, 5, ...; в) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1, ...

659. Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії;

а) 7, 12, ...;
б) −25, −19, ...;
в) −2,5, 0,5, ...;
г) −4,5, −3,7, ...

660. Знайдіть суму перших десяти членів арифметичної прогресії:

а) $a_1 = -35$, $a_{10} = 10$;
б) $a_1 = 66$, $a_{10} = -6$;
в) $a_1 = -2{,}5$, $a_{10} = 2$;
г) $a_1 = 20$, $a_{10} = 21{,}8$.

661. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії, якщо:

а) $a_{10} = 95$, $S_{10} = 500$;
б) $a_{15} = 47$, $S_{15} = 1500$.

662. Знайдіть суму перших ста членів арифметичної прогресії:

а) 50, 49, 48, ...;
б) −50, −49, −48, ... ;
в) 2, 7, 12, 17, ...;
г) 16, 13, 10, 7, ...

663. Знайдіть суму перших сорока членів арифметичної прогресії, якщо:

а) $a_1 = 2$, $d = 3$;
б) $a_1 = -18$, $d = 5$;
в) $a_1 = 3$, $d = -0{,}2$;
г) $a_1 = 7$, $a_{50} = 252$.

664. В арифметичній прогресії відомі перший член a_1 і різниця d. Знайдіть суму її перших n членів S_n, якщо:

а) $a_1 = 3$, $d = 2$, $n = 32$;
б) $a_1 = -4$, $d = 4$, $n = 25$;
в) $a_1 = 15$, $d = -2$, $n = 40$;
г) $a_1 = -5$, $d = -7$, $n = 12$;
ґ) $a_1 = 0$, $d = 7$, $n = 35$;
д) $a_1 = 8$, $d = 0$, $n = 50$.

665. ***Стародавня арабська задача.*** Знайдіть 20-й член і суму двадцяти членів арифметичної прогресії 3, 7, 11, 15, ...

666. ***Стародавня єврейська задача.*** Знайдіть суму шістдесяти перших натуральних чисел.

667. Учитель запропонував знайти суму всіх натуральних чисел від 1 до 40; вважав, що школярі довго додаватимуть сорок чисел. А малий Карл Ґаусс (згодом відомий німецький математик) завдання виконав за хвилину. Як він міркував? Спробуйте завдання виконати усно.

668. Знайдіть суму перших ста натуральних чисел.

669. Знайдіть суму перших ста непарних натуральних чисел.

670. Ресора складається з десяти сталевих смуг (мал. 122). Довжина верхньої смуги 105 см, а кожна інша на 9 см коротша від попередньої. Знайдіть суму довжин усіх смуг ресори.

Мал. 122

671. ***Стародавня задача.*** Людям, які копають криницю, обіцяно за перший метр заплатити 30 крб, а за кожний наступний — на 20 крб більше, ніж за попередній метр. Скільки вони одержать карбованців за копання 12-метрової криниці?

Рівень Б

672. В арифметичній прогресії $a_1 = 0{,}1$, $d = 2$. Знайдіть a_9, a_n, a_{3p}.

673. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — арифметична прогресія. Знайдіть a_{30}, якщо:

а) $a_3 = 3$, $a_4 = 4$;
б) $a_5 = 9$, $a_7 = 13$,
в) $a_1 = 8$, $a_5 - a_3 = 6$;
г) $a_2 = 5$, $a_5 - a_1 = 12$.

674. $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ — арифметична прогресія. Знайдіть a_1, d, a_{21}, a_{100}, якщо:

а) $a_4 = 10$, $a_7 = 19$;
б) $a_5 = 5{,}2$, $a_9 = 6{,}8$;
в) $a_5 = 8{,}2$, $a_{10} = 4{,}7$;
г) $a_8 = 11{,}2$, $a_{15} = 19{,}6$.

675. Чи є число 253 членом арифметичної прогресії 15, 23, 31,...?

676. Чи є число 212 членом арифметичної прогресії:

а) 3, 14, 25, 36, ...;
б) 275, 269, 263, 257, ...?

677. Які з чисел −23, −14, −3, 1, 3, 14, 23 є членами арифметичної прогресії, n-й член якої:

а) $a_n = 5n - 19$; б) $b_n = 0{,}1n + 11$; в) $c_n = 97 - 2n$?

678. Скільки від'ємних членів має арифметична прогресія:

а) −10,3; −8,6; ...;
б) −37,5; −35,7; ...?

679. Скільки додатних членів містить арифметична прогресія:

а) 2,5; 2,3; 2,1, ...;
б) 176; 151; 126; ...?

680. Скільки від'ємних членів має арифметична прогресія:

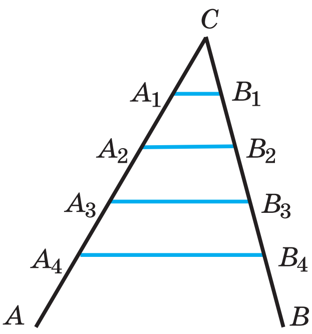
а) −32, −30, −28, ...;
б) $-8\frac{1}{2}$, -8, $-7\frac{1}{2}$, ...?

681. Скільки членів арифметичної прогресії 10, 16, 22, ... міститься між числами 110 і 345?

682. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії, заданої формулою n-го члена:

а) $c_n = 5n - 3$; б) $a_n = 2n + 10$; в) $a_n = -3 - 0{,}5n$.

683. Чи є арифметичною прогресією послідовність, n-й член якої:
а) $a_n = 3n + 1$;
б) $b_n = 5 - 4n$;
в) $c_n = 2^n + 1$?



Мал. 123

684. На стороні CA кута ACB від його вершини відкладено рівні відрізки і через їх кінці проведено паралельні прямі (мал. 123). Знайдіть довжини відрізків A_3B_3, A_7B_7, A_nB_n, якщо $A_1B_1 = 2{,}5$ см.

685. $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ — арифметична прогресія, c — довільне число. Доведіть, що послідовність $ca_1, ca_2, ca_3, ca_4, \ldots$ — так само арифметична прогресія.

686. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ і $x_1, x_2, x_3, \ldots$ — арифметичні прогресії. Доведіть, що арифметичною прогресією є і послідовність

$$a_1 + x_1,\ a_2 + x_2,\ a_3 + x_3,\ \ldots .$$

687. Числа a^2, b^2, c^2 не рівні й утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що арифметичну прогресію утворюють і числа:

$$\frac{1}{b+c},\ \frac{1}{c+a},\ \frac{1}{a+b}.$$

688. Дано арифметичну прогресію, n-й член якої a_n. Доведіть, що:
а) $a_2 + a_{23} = a_{13} + a_{12}$; б) $a_{20} - a_{16} = a_{10} - a_6$.

689. ***Задача Феофана Прокоповича***. Якась людина має багато коней, і всім їм різна ціна. Найгірший кінь коштує 4 золотих, а найкращий — 55 золотих, і ціна від одного до іншого коня весь час зростає на 3 золотих. Питаємо: скільки ж усього було коней?

690. Знайдіть суму перших n членів арифметичної прогресії, якщо:
а) $a_1 = 1$, $a_5 = 3$, $n = 40$; в) $a_2 = 5$, $a_4 = 6$, $n = 100$;
б) $a_1 = -3$, $a_3 = 1$, $n = 50$; г) $a_1 = a_{100}$, $a_3 = 3$, $n = 100$.

691. Знайдіть суму всіх парних натуральних чисел, менших за 200.

692. Знайдіть суму всіх непарних натуральних чисел, менших за 200.

693. Знайдіть суму натуральних чисел, менших від 1000, які кратні:
а) 3; б) 5; в) 12.

694. Знайдіть суму всіх цілих чисел, що належать проміжку:
а) $[-30; 70]$; б) $[-70; -30]$; в) $(-70; 70)$.

695. В арифметичній прогресії 10 членів. Сума членів з непарними номерами дорівнює 10, а з парними — 25. Знайдіть її сьомий член.

696. а) Тринадцятий член арифметичної прогресії дорівнює 3. Знайдіть суму її перших 25 членів.

б) ***Відкрита задача.*** Знайдіть суму перших … членів арифметичної прогресії, якщо її … член дорівнює 100.

697. Сума перших п'ятнадцяти членів арифметичної прогресії дорівнює 20, а сума перших її дванадцяти членів на 6 менша. Знайдіть суму перших 27 членів.

698. Знайдіть суму перших 20 членів арифметичної прогресії, заданої формулою n-го члена:

а) $a_n = 2 + 5n$; б) $a_n = 2n - 1$; в) $a_n = -3 + n$.

699. Знайдіть п'ятий член арифметичної прогресії, якщо суму n перших її членів можна знайти за формулою:

а) $S_n = n^2 - 6n$; б) $S_n = 3n^2 - n$; в) $S = 4n^2 - 2n$.

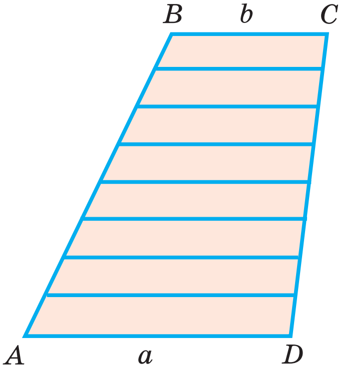
700. Сума четвертого і шостого членів арифметичної прогресії дорівнює 14. Знайдіть суму перших дев'яти членів прогресії.

701. ***Задача Франкера.*** Скільки разів проб'є годинник упродовж 12 год, якщо він відбиває щопівгодини?

702. При вільному падінні фізичне тіло проходить за першу секунду 4,9 м, а кожну наступну — на 9,8 м більше. Знайдіть: а) глибину шахти, якщо камінець досяг її дна через 8 с після початку падіння; б) скільки секунд падала б гайка з висоти 490 м.

703. а) Міри кутів п'ятикутника утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що міра одного з цих кутів дорівнює 108°. б) Складіть подібні задачі для трикутника і семикутника.

704. Кінці відрізків, паралельних основам трапеції, лежать на її бічних сторонах і ділять кожну з них на 8 рівних частин. Знайдіть довжини цих відрізків та їх суму, якщо основи трапеції a і b (мал. 124).



Мал. 124

Вправи для повторення

705. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{3x-9}{2x^2-5x-3}$; б) $\dfrac{a^2-9}{2a^2+7a+3}$; в) $\dfrac{c^2-8c-20}{c^2-11c+10}$.

706. Розв'яжіть нерівність:

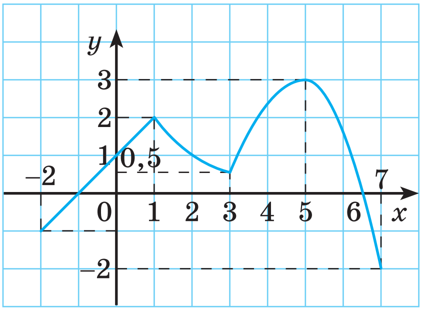
а) $x^2 - 8x < 0$; в) $x^2 - 16 < 0$;

б) $x^2 + 7x < 0$; г) $x^2 - 3 \le 0$.

707. На малюнку 125 зображено графік функції $y = f(x)$. Установіть відповідність між абсцисами точок (1–4), що є аргументами функції $y = f(x)$, і проміжками (А–Д), до яких належать значення цієї функції у заданих точках.

1 $x = -1$
2 $x = 1$
3 $x = 3$
4 $x = 5$

А $(1,5;\ 2]$
Б $(0;\ 1)$
В $[-1;\ 0,5)$
Г $(2;\ 3]$
Д $[-2;\ -1]$



Мал. 125

Скарбничка досягнень

Розумію, що таке арифметична прогресія.

- ✓ Можу сформулювати означення арифметичної прогресії.
- ✓ Можу навести приклади арифметичних прогресій і встановити, чи є задана послідовність арифметичною прогресією.
- ✓ Знаю, що таке різниця арифметичної прогресії $d = a_{n+1} - a_n$.
- ✓ Знаю, якими формулами задають арифметичну прогресію

рекурентна	n-го члена
$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d$	$a_n = a_1 + (n - 1)d$

- ✓ Можу пояснити і сформулювати властивості арифметичної прогресії

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \qquad a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$$

- ✓ Знаю та вмію використовувати формулу суми перших n членів арифметичної прогресії

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

- ✓ Умію задавати арифметичну прогресію за даними її членами чи співвідношеннями між ними.
- ✓ Умію знаходити невідомі члени арифметичної прогресії.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:
— Що таке арифметична прогресія.
— Що таке наступний і попередній члени послідовності.
— Що таке формула n-го члена і рекурентна формула.
— Якими формулами можна задати арифметичну прогресію:

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ $\quad$ $a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d$

— Які властивості має арифметична прогресія:

$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ $\quad$ $a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$

Як обчислюють суму перших n членів арифметичної прогресії:

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $\quad$ $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

§ 17 Геометрична прогресія

Розглянемо задачу з **індійського фольклору**. Цар дуже любив шахи і обіцяв винахідникові гри велику нагороду. Винахідник запросив за першу клітину шахівниці одну пшеничну зернину, за другу — дві, за третю — чотири і далі за кожну клітину вдвічі більше, ніж за попередню. Цар здивувався, що винахідник так мало просить. Але обіцянку не зміг виконати. Чому? Про це ви дізнаєтеся, вивчивши властивості геометричної прогресії.

***Геометричною прогресією* називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме число. Це стале для даної послідовності число q називають *знаменником геометричної прогресії*.**

Перший член b_1 і знаменник q геометричної прогресії можуть бути будь-якими числами, відмінними від нуля.

Іншими словами, геометрична прогресія — це послідовність, яку можна задати такою рекурентною формулою:

$b_1 = b,\ b_{n+1} = b_n \cdot q$, де $n \in N$, $b \neq 0$ і $q \neq 0$ — задані числа.

Приклади геометричних прогресій:

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ \ldots\ (b_1 = 3,\ q = 2);$$

$$1,\ -3,\ 9,\ -27,\ 81,\ -243,\ \ldots\ (b_1 = 1,\ q = -3);$$

$$-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ -\frac{1}{16},\ \ldots\ \left(b_1 = -1, q = \frac{1}{2}\right);$$

$$7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ \ldots\ (b_1 = 7,\ q = 1).$$

Зауваження. Кожну арифметичну прогресію з різницею 0 можна вважати також геометричною прогресією зі знаменником 1.

Геометрична прогресія з першим членом b_1 і знаменником q має такі перші члени: b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, b_1q^4, ...

Її другий член $b_2 = b_1q$, третій — $b_3 = b_1q^2$, а n-й член —

$$\boldsymbol{b_n = b_1q^{n-1}}.$$

Це формула n-го члена геометричної прогресії.

Приклад 1. У геометричній прогресії $b_1 = 5$, $q = 2$. Знайдіть b_{10}.

Розв'язання. $b_{10} = b_1q^{10-1}$, $b_{10} = 5 \cdot 2^9 = 2560$.

Відповідь. 2560.

Приклад 2. Перший і сьомий члени геометричної прогресії дорівнюють відповідно 81 і $\frac{64}{9}$. Знайдіть її знаменник q.

Розв'язання. За формулою n-го члена геометричної прогресії:

$$b_7 = b_1q^6,\ \frac{64}{9} = 81 \cdot q^6,\ \ q^6 = \frac{64}{9 \cdot 81},\ \ q^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

А якщо $q^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$, то $q = \frac{2}{3}$ або $q = -\frac{2}{3}$.

Відповідь. $\frac{2}{3}$ або $-\frac{2}{3}$.

Розглянемо властивості геометричної прогресії.

Теорема 9. Квадрат кожного члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх його членів: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Доведення. За означенням, $b_{n-1} = \frac{b_n}{q}$, а $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

Отже, $b_{n+1} \cdot b_{n-1} = b_n \cdot q \cdot \frac{b_n}{q} = b_n^2$.

Правильне й обернене твердження. Доведіть його самостійно.

Теорема 10. Сума *n* перших членів геометричної прогресії за умови, що $q \neq 1$, **виражається формулою:** $S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$.

Доведення.

Нехай $S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \cdot... + b_1q^{n-2} + b_1 q^{n-1}$. Помножимо обидві частини рівності на q:

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \cdot... + b_1q^{n-1} + b_1q^n.$$

Віднімемо почленно від цієї рівності попередню, однакові доданки b_1q, b_1q^2, b_1q^3, ..., b_1q^{n-1} взаємно знищаться. У результаті матимемо:

$$S_nq - S_n = b_1q^n - b_1, \text{ або } S_n(q-1) = b_1(q^n - 1),$$

звідси

$$S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}.$$

Це формула суми n перших членів геометричної прогресії з першим членом b_1 і знаменником $q \neq 1$.

Якщо $q = 1$, то цією формулою користуватись не можна (ділити на 0 не можна). У цьому випадку кожний член геометричної прогресії дорівнює b_1, тому $S_n = nb_1$.

Приклад 3. Знайдіть суму перших двадцяти членів геометричної прогресії 2, 6, 18, 54, ...

Розв’язання. Тут $b_1 = 2$, $q = 3$, тому $S_{20} = \frac{2\left(3^{20} - 1\right)}{3 - 1} = 3^{20} - 1$.

Відповідь. $3^{20} - 1$.

Суму n-перших членів геометричної прогресії можна також знаходити за формулою $S_n = \frac{b_nq - b_1}{q - 1}$.

Доведіть її самостійно.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Сума n членів геометричної прогресії зі збільшенням числа n зростає дуже швидко. Розв’яжемо задачу з індійського фольклору, яку ми розглянули на с. 171.

Розв’язання. Звичайна шахівниця має 64 клітини. Тому цар мав би дати винахіднику всього зернин $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{63} = \frac{2^{63} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$.

Спробуйте обчислити цю суму. Ми оцінимо тільки 2^{64}:

$$2^5 = 32,\ 2^{10} = 32^2 = 1024 > 10^3.$$

$2^{64} = 2^4 \cdot (2^{10})^6 > 16 \cdot (10^3)^6 = 16 \cdot 10^{18} = 16\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000.$

Якщо приймемо, що маса 400 зернин становить 1 кг, то маса 2^{64} зернин більша за

$$16 \cdot 10^{18} : (4 \cdot 10^3) = 4 \cdot 10^{15} \text{ (кг), або } 4 \cdot 10^{12} \text{ т.}$$

І це наближене значення. Такої кількості зерна не зможуть зібрати всі країни світу впродовж сотень років.

Геометрична прогресія 2, 4, 8, 16, 32... — послідовні значення функції $y = 2^x$, визначеної на множині натуральних чисел.

Перевірте себе

1. Наведіть приклад геометричної прогресії.
2. Сформулюйте означення геометричної прогресії.
3. Що таке знаменник геометричної прогресії?
4. Як виражається n-й член геометричної прогресії через її перший член і знаменник?
5. Сформулюйте властивість геометричної прогресії.
6. Чому дорівнює сума n перших членів геометричної прогресії?

Виконаємо разом

1 У геометричній прогресії $b_4 = 2$, $b_7 = -54$. Знайдіть b_1 і q.

● **Розв'язання.** За формулою n-го члена $b_4 = b_1 \cdot q^3$ і $b_7 = b_1 \cdot q^6$. Підставимо в ці рівності значення $b_4 = 2$, $b_7 = -54$ і розв'яжемо систему

$$\begin{cases} 2 = b_1 \cdot q^3, \\ -54 = b_1 \cdot q^6. \end{cases}$$

Поділимо почленно друге рівняння на перше:

$\dfrac{-54}{2} = \dfrac{b_1 \cdot q^6}{b_1 \cdot q^3}$. Маємо: $q^3 = -27$ і $q = -3$.

З першого рівняння системи знайдемо b_1:

$$2 = b_1 \cdot (-3)^3;\ b_1 = 2 : (-27) = -\frac{2}{27}.$$

Відповідь. $b_1 = -\dfrac{2}{27}$, $q = -3$.

2 Знайдіть суму п'яти членів геометричної прогресії, у якій $b_1 = 8$, $q = \dfrac{1}{2}$.

● **Розв'язання.** *Перший спосіб.* Суму n перших членів геометричної прогресії можна знайти за формулою $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$. Якщо $n = 5$,

то $S_5 = \dfrac{b_1 \cdot \left(q^5 - 1\right)}{q - 1} = \dfrac{8 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \dfrac{8 \cdot \left(\frac{1}{32} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{-8 \cdot \frac{31}{32}}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{31}{2} = 15\dfrac{1}{2}$.

Другий спосіб. Випишемо 5 членів даної прогресії: 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$.

Їх суму знайдемо простим додаванням: $15\frac{1}{2}$.

Зверніть увагу на цей спосіб!

Відповідь. $S_5 = 15\frac{1}{2}$.

Виконайте усно

708. Укажіть три наступних члени геометричної прогресії:

а) 3, 6, 12, ...; в) −1, −2, −4, ...;

б) 16, 8, 4, ...; г) −2, 4, −8, ...

709. Чи є геометричною прогресією послідовність:

а) 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001;

б) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$?

Якщо так, то вкажіть її знаменник.

710. Чи є геометричною прогресією послідовність:

а) 2, 4, 6, 8, ...; в) 3, 6, 12, 14, ...;

б) 1, −3, 9, 27, −81, ...; г) 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, ...?

711. Чи є геометричною прогресією послідовність 7^n, 7^{n+1}, 7^{n+2}, 7^{n+3}, де n — довільне натуральне число?

А послідовність 7^n, -7^{n+1}, 7^{n+2}, -7^{n+3}?

Рівень А

712. Напишіть сім перших членів геометричної прогресії, у якій:

а) $b_1 = 1$, $q = 3$; в) $b_1 = -5$, $q = 2$;

б) $b_1 = 10$, $q = \frac{1}{2}$; г) $b_1 = 1$, $q = -2$.

713. Напишіть п'ять перших членів геометричної прогресії, у якій:

а) $b_1 = 18$, $q = -1$; в) $b_1 = -8$, $q = \frac{1}{2}$;

б) $b_1 = 5$, $q = 2$; г) $b_1 = \frac{5}{27}$, $q = 3$.

714. Знайдіть знаменник і п'ятий член геометричної прогресії:

а) −1, 3, ...; в) 625, 125, ...;

б) 0,1, 0,01, ...; г) 4, −2, ...

715. У геометричній прогресії $b_1 = -3$, $q = 2$. Знайдіть b_4, b_7, b_n.

716. Знайдіть перший член геометричної прогресії, у якій:
а) $b_8 = 384$, $q = 2$; б) $b_5 = 31{,}25$, $q = -2{,}5$.

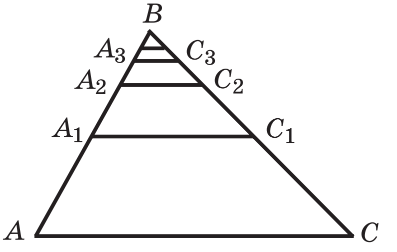
717. $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ — геометрична прогресія. Знайдіть b_{12}, якщо:
а) $b_1 = 1$, $b_2 = 6$; в) $b_3 = 1$, $b_4 = 0{,}5$;
б) $b_1 = 25$, $b_2 = -50$; г) $b_2 = 2$, $b_4 = 4$.

718. Знайдіть сьомий член геометричної прогресії, якщо:
а) $b_3 = 3$, $b_4 = 6$; в) $b_5 = 80$, $b_6 = -160$;
б) $b_3 = -1{,}5$, $b_5 = -6$; г) $b_6 = 18$, $b_4 = 72$.

719. Напишіть формулу n-го члена геометричної прогресії:
а) 2, 6, 18,...; в) $1, \sqrt{2}, 2, \ldots$;
б) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, \ldots$; г) 64, –32, 16,....

720. Знайдіть номер n-го члена геометричної прогресії, у якій:
а) $b_1 = 4$, $q = 3$, $b_n = 324$; б) $b_1 = -8$, $q = 2$, $b_n = -256$.

721. A_1C_1 — середня лінія ABC, A_2C_2 — середня лінія A_1BC_1, A_3C_3 — середня лінія A_2BC_2 і т. д. (мал. 126). Чи правильно, що довжини відрізків AC, A_1C_1, A_2C_2, ... утворюють геометричну прогресію?



Мал. 126

722. У геометричній прогресії перший член b_1, знаменник q. Знайдіть суму її перших членів, якщо:
а) $b_1 = -3$, $q = 3$, $n = 6$; в) $b_1 = 4$, $q = -2$, $n = 10$;
б) $b_1 = 2{,}5$, $q = 0{,}4$, $n = 4$; г) $b_1 = \frac{5}{27}$, $n = 6$.

723. Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії, якщо:
а) $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 9$; в) $b_1 = -2$, $q = 2$, $n = 12$;
б) $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 10$; г) $b_1 = 81$, $q = \frac{1}{3}$, $n = 8$.

724. Знайдіть суму перших шести членів геометричної прогресії:
а) –2, 10, ...; г) 3, 3, 3, 3, 3, 3, ...;
б) 5, 10, ...; ґ) 5, 10, 20, 40, 80, ...
в) 32, –16, ...;

725. Знайдіть суму п’ятнадцяти перших членів геометричної прогресії:
а) 1, 2, 4, 8, ...; в) 1, –2, 4, –8, ...;
б) 1024, 512, 256, ...; г) 1024, –512, 256, ...

726. ***Старовинна задача.*** Одного разу розумний бідняк попросив у скупого багатія притулку на два тижні за таких умов: «За це я тобі першого дня заплачу 1 крб, другого — 2, третього — 3 і т. д., збільшуючи щоденну плату на 1 крб. Ти ж будеш подавати милостиню: першого дня 1 копійку, другого — 2, третього — 4 і т. д., збільшуючи щодня милостиню вдвічі». Багатій з радістю на це згодився, вважаючи умови вигідними. Скільки грошей одержав багатій?

727. ***Задача Ейлера.*** Чоловік, продаючи коня, запропонував покупцеві заплатити лише за цвяхи, якими прибито підкови до копит того коня. За перший цвях — 1 пфеніг, за другий — 2, за третій — 4 і т. д. — за кожний удвічі більше, ніж за попередній. За скільки він продавав коня, якщо цвяхів було 32?

Рівень Б

728. $b_1, b_2, b_3, \ldots$ — геометрична прогресія. Знайдіть b_1 і q, якщо:

а) $b_3 = 625,\ b_7 = 81$;   в) $b_4 = \dfrac{9}{32},\ b_8 = \dfrac{1}{18}$;

б) $b_5 = 3,\ b_{10} = -27\sqrt{3}$;   г) $b_4 = -6,\ b_8 = -1\dfrac{115}{128}$.

729. Запишіть формулу n-го члена геометричної прогресії:

а) $3, -6, \ldots$;   б) $-0{,}1, -1, \ldots$; в) $12, 8, \ldots$;   г) $\dfrac{2}{5}, 4, \ldots$.

730. Чи є число 384 членом геометричної прогресії:

а) $3, 6, \ldots$;   б) $\dfrac{4}{81}, \dfrac{8}{27}, \ldots$?

731. Яке з чисел $-27, -9, 18, 20, 27$ є членом послідовності, n-й член якої:

а) $b_n = 5 \cdot 2^n$;   в) $y_n = -36 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$;

б) $x_n = (-3)^{n+1}$;   г) $c_n = -12 \cdot \left(\dfrac{-3}{2}\right)^n$?

732. Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії, у якій:
а) $b_1 + b_3 = 10,\ b_2 + b_4 = 30$;   б) $b_5 - b_1 = 15,\ b_4 - b_2 = 6$.

733. Чи є послідовність, задана формулою $c_n = (-3)^{n+2}$, геометричною прогресією? Якщо так, то знайдіть її перший член і знаменник.

734. Доведіть, що задана послідовність (x_n) є геометричною прогресією:
а) $x_n = 3 \cdot 7^n$;   б) $x_n = 5 \cdot 2^{n+1}$;   в) $x_n = 0{,}4^{1+n}$.

735. Доведіть, якщо a, b, c — геометрична прогресія, то:
$$(a^2 + b^2)c = (b^2 + c^2)a.$$

736. Дано геометричну прогресію b_1, b_2, b_3, b_4, ... Доведіть, що геометричними прогресіями є також послідовності:
а) b_1b_2, b_2b_3, b_3b_4, ...;
б) $b_1 + b_2$, $b_2 + b_3$, $b_3 + b_4$, ...;
в) $b_1 - b_2$, $b_2 - b_3$, $b_3 - b_4$, ...

737. П'ятий член геометричної прогресії дорівнює 1. Чому дорівнює добуток дев'яти її перших членів?

738. Шостий член геометричної прогресії дорівнює –2. Чому дорівнює добуток одинадцяти її перших членів?

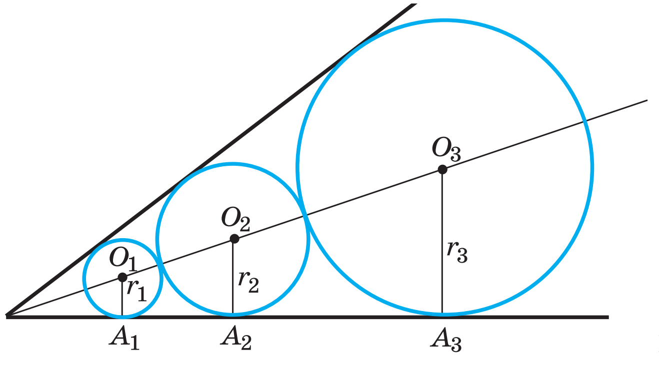
739. Знайдіть три числа, які становлять геометричну прогресію, знаючи, що їх сума дорівнює 21, а добуток — 216.

740. Числа геометричної прогресії 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 розмістіть у дев'яти клітинках квадрата так, щоб їх добутки в кожному рядку, в кожному стовпчику і в кожній діагоналі дорівнювали один одному.

741. Після кожного руху поршня розріджувального насоса з посудини забирається 5 % наявного в ній повітря. Визначте тиск повітря всередині посудини після десяти рухів поршня, якщо початковий тиск дорівнював 760 мм рт. ст.

742. Чи можуть довжини сторін прямокутного трикутника утворювати геометричну прогресію?

743. У гострий кут вписано n кіл, які дотикаються одне до одного (мал. 127). Доведіть, що довжини їх радіусів утворюють геометричну прогресію. Від чого залежить її знаменник?



Мал. 127

744. Напишіть кілька перших членів послідовності з такими властивостями: $b_1 = 1$, $b_n = 3b_{n-1}$. Напишіть формулу її n-го члена. Знайдіть b_1 і S_{10}.

745. Між числами $40\frac{1}{2}$ і $5\frac{1}{3}$ вставте такі чотири числа, які разом з даними числами утворюють геометричну прогресію. Знайдіть її суму двома способами.

746*. Знайдіть кількість членів геометричної прогресії, у якій:
а) $b_1 = 3$, $b_n = 96$, $S_n = 189$;
б) $b_1 = 1$, $b_n = -512$, $S_n = -341$;
в) $q = -\frac{1}{3}$, $b_n = \frac{1}{3}$, $S_n = 20\frac{1}{3}$;
г) $q = \sqrt{3}$, $b_n = 18\sqrt{3}$, $S_n = 26\sqrt{3} + 24$.

747. Знайдіть чотири числа, з яких три перших є послідовними членами геометричної прогресії, а три останніх — членами арифметичної прогресії, якщо сума крайніх чисел дорівнює 21, а сума середніх — 18.

748. Знайдіть такі числа x, y, z, t, щоб послідовність x, y, -2, z, -8, t була геометричною прогресією.

749. Починаючи з якого номера члена геометричної прогресії:
а) 729, 243,... усі її члени будуть меншими за 0,01;
б) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ... усі її члени будуть більшими за 5?

750. Виведіть формулу для обчислення добутку n перших членів геометричної прогресії.

751. ***Старовинна задача.*** Було це майже сто років тому. Селянин продавав 20 овець за 200 крб. Коли один з покупців почав надто довго торгуватись, селянин запропонував: «Дай за першу вівцю 1 к., за другу — 2 к., за третю — 4 к. і далі за кожну вівцю вдвічі більше копійок, ніж за попередню». Покупець погодився. Скільки він заплатив за тих 20 овець?

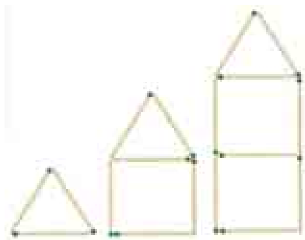
752. Бактерія, потрапивши в організм, до кінця 20-ї хвилини ділиться на дві, кожна з них до кінця 20-ї хвилини знов ділиться на дві і т. д. Скільки бактерій в організмі буде за добу?

753. Уявімо, що на початку нашої ери жінка M народила дві дочки, кожна з них до 30 років так само народила дві дочки і т. д. Чи можливо це? Скільки б за таких умов нащадків M жило в наш час?

Вправи для повторення

754. Знайдіть область значень функції $y = x^2$, заданої на проміжку:
а) (0; 3); б) (–5; –3); в) [–2; 3); г) [–4; 4).

755. На малюнку 128 зображено кілька фігур, складених із сірників (F_1, F_2, F_3). Уявіть, що послідовність таких фігур продовжено. Скільки треба сірників, щоб скласти фігуру F_9?



Мал. 128

756. Маса одного куска металу 440 г, а другого — 429 г. Знайдіть густину кожного з цих металів, якщо густина першого на 1 г/см^3 більша, а об'єм на 5 см^3 менший, ніж другого.

757. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

а) $\begin{cases} xy - 6 = 0, \\ x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy + 6 = 0, \\ 2x + y = 4. \end{cases}$

Скарбничка досягнень

- ✓ Розумію, що таке геометрична прогресія.
- ✓ Можу сформулювати означення геометричної прогресії.
- ✓ Можу навести приклади геометричних прогресій і встановити, чи є задана послідовність геометричною прогресією.
- ✓ Знаю, що таке знаменник геометричної прогресії $q = b_{n+1} : b_n$.
- ✓ Знаю, якими формулами задають геометричну прогресію

рекурентна	n-го члена
$b_1 = b,\ b_{n+1} = b_n \cdot q$	$b_n = b_1 q^{n-1}$

- ✓ Можу пояснити і сформулювати властивість геометричної прогресії

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

- ✓ Знаю та вмію використовувати формулу суми перших n членів геометричної прогресії

$$\text{Якщо } q \neq 1, \text{ то } S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$$

$$\text{Якщо } q = 1, \text{ то } S_n = n \cdot b_1$$

- ✓ Умію задавати геометричну прогресію за даними її членами чи співвідношеннями між ними та знаходити невідомі члени геометричної прогресії.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:
— Що таке нескінченна послідовність.
— Які послідовності називають зростаючими, а які — спадними.
— Що таке геометрична прогресія.
— Що таке наступний і попередній члени послідовності.
— Якою формулою задають геометричну прогресію: $\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$
— Як обчислюють суму перших n членів геометричної прогресії:

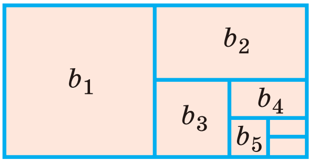
$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1},\ q \neq 1 \qquad S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1},\ q \neq 1$$

— Що таке періодичний десятковий дріб і як його записують:
0,666666 = 0,(6)
— Що таке модуль числа.

§ 18 Задачі на обчислення сум

Досі ми не обчислювали сум нескінченного числа доданків, однак іноді є сенс розглядати і такі суми. Чому, наприклад, дорівнює сума усіх членів нескінченної геометричної прогресії $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$?

Нехай площа зображеного на малюнку 129 квадрата b_1 дорівнює 1, а площі прямокутників $b_2, b_3, b_4, \ldots$ — відповідно $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$. Якщо кількість цих прямокутників збільшувати до нескінченності, то сума їх площ як завгодно близько наближатиметься до числа 2. Тому вважають, що $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$.



Мал. 129

Узагальнимо розглянутий приклад. Нехай дано нескінченну геометричну прогресію $b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, \ldots$, знаменник якої $|q| < 1$. За відомою формулою,

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, \text{ або } S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1q^n}{1-q}.$$

Тут число $\dfrac{b_1}{1-q}$ стале, а n — змінне. Якщо $|q|<1$, то при необмеженому збільшенні n степінь q^n прямує до 0 (пишуть: якщо $n\to\infty$, то $q^n \to 0$). При цьому і дріб $\dfrac{b_1q^n}{1-q}$ прямує до 0.

Отже, якщо $n\to\infty$, то $S_n\to\dfrac{b_1}{1-q}$. Тому домовились сумою нескінченної геометричної прогресії з першим членом b_1 і знаменником $|q|<1$ вважати число $\dfrac{b_1}{1-q}$.

Іншими словами, якщо $|q|<1$ і $b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots = S$, то

$$S=\frac{b_1}{1-q}.$$

Приклад 1. Знайдіть суму геометричної прогресії 4, $-\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{4}{9}$, $-\dfrac{4}{27}$, ...

Розв'язання. Тут $b_1 = 4$, $q=-\dfrac{1}{3}$, тому шукана сума $S=\dfrac{4}{1+\frac{1}{3}}=3$.

Відповідь. $S = 3$.

За допомогою формули $S=\dfrac{b_1}{1-q}$ *нескінченні періодичні десяткові дроби* можна записувати у вигляді звичайних дробів.

Приклад 2. Запишіть у вигляді звичайного дробу нескінченний періодичний десятковий дріб:

а) 0,(2); б) 1,(6); в) 0,(23).

Розв'язання.

а) $0,(2)=0,2222\ldots=\dfrac{2}{10}+\dfrac{2}{100}+\dfrac{2}{1000}+\ldots=\dfrac{0,2}{1-0,1}=\dfrac{2}{9}$;

б) $0,(6)=0,6666\ldots=\dfrac{6}{10}+\dfrac{6}{100}+\dfrac{6}{1000}+\ldots=\dfrac{0,6}{1-0,1}=\dfrac{2}{3}$.

Отже, $1,(6)=1+0,(6)=1\dfrac{2}{3}$;

в) $0,(23)=0,2323\ldots=\dfrac{23}{100}+\dfrac{23}{10\,000}+\ldots=\dfrac{0,23}{1-0,01}=\dfrac{23}{99}$.

Відповідь. а) $\dfrac{2}{9}$; б) $1\dfrac{2}{3}$; в) $\dfrac{23}{99}$.

Зверніть увагу! Нескінченний десятковий періодичний дріб, ціла частина якого дорівнює нулю, а період стоїть одразу після коми, дорівнює звичайному дробу, чисельником якого є число, що стоїть у періоді, а знаменник містить стільки дев'яток, скільки цифр у періоді.

Подумайте, як записати у вигляді звичайного дробу, наприклад, число 1,5(6).

Досі ми знаходили суми членів найпростіших послідовностей: арифметичної та геометричної прогресій. Нерідко виникає потреба обчислювати суми членів інших послідовностей. Розглянемо приклади.

Приклад 3. Знайдіть суму S перших ста членів послідовності

$$\frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{2\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 4}, \ldots,\ \frac{1}{n(n+1)}, \ldots.$$

Розв'язання. Кожний член даної послідовності можна подати у вигляді різниці:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \ldots,\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}, \ldots .$$

Отже,

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{100\cdot 101}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}.$$

Відповідь. $S=\frac{100}{101}$.

Приклад 4. Знайдіть суму квадратів n перших натуральних чисел.

Розв'язання. За формулою «куб двочлена», $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, звідси $3a^2 = (a + 1)^3 - a^3 - 3a - 1$. Надаючи змінній a послідовно значення 1, 2, 3, ... , n, одержимо n правильних числових рівностей:

$3 \cdot 1^2 = 2^3 - 1^3 - 3 \cdot 1 - 1,$

$3 \cdot 2^2 = 3^3 - 2^3 - 3 \cdot 2 - 1,$

$3 \cdot 3^2 = 4^3 - 3^3 - 3 \cdot 3 - 1,$

$3 \cdot 4^2 = 5^3 - 4^3 - 3 \cdot 4 - 1,$

....

$3 \cdot n^2 = (n + 1)^3 - n^3 - 3 \cdot n - 1.$

Додавши почленно всі ці рівності (числа 2^3, 3^3, 4^3,..., n^3 взаємно знищаться), одержимо тотожність:

$3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 +\cdot\ldots + n^2) = (n + 1)^3 - 3(1 + 2 + 3 +\ldots + n) - n - 1,$ звідси

$$3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)=(n+1)^3-\frac{3}{2}n\cdot(n+1)-(n+1)=\frac{n}{2}\cdot(n+1)(2n+1).$$

Отже, $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n}{6}\cdot(n+1)(2n+1)$.

Відповідь. $\frac{n}{6}\cdot(n+1)(2n+1)$.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Зверніть увагу на вираз $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$. Це сума перших п'яти членів геометричної прогресії з першим членом a^4 і знаменником $\frac{b}{a}$.

За формулою суми членів геометричної прогресії,

$$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = \frac{a^4\left(\frac{b^5}{a^5} - 1\right)}{\frac{b}{a} - 1} = \frac{a^5 - b^5}{a - b}.$$

Отже, $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.

Так само можна довести тотожності:

$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$.

$a^7 - b^7 = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$.

І взагалі: $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

Формули «різниця квадратів» і «різниця кубів» — окремі випадки цієї загальної формули.

Перевірте себе

1. Як знайти суму n-перших натуральних чисел?
2. Чому дорівнює сума всіх цілих чисел від –100 до 100?
3. Чи існує сума членів нескінченної геометричної прогресії, знаменник якої більший за 1?
4. Чому дорівнює сума членів нескінченної геометричної прогресії, модуль знаменника якої менший за 1?
5. Чому дорівнює сума нескінченної кількості доданків:

   $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$?

Виконаємо разом

1 Знайдіть суму $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$, доданки якої — члени геометричної прогресії.

● **Розв'язання.** Перший член прогресії — число 3, а знаменник $\frac{1}{3}$, тому шукана сума $S = \frac{3}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3 \cdot 3}{3 - 1} = 4,5$.

Відповідь. 4,5.

2 Спростіть вираз: $\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$.

● **Розв'язання.** Помножимо і поділимо задану суму на 4. Одержимо:

$$\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 11}+\frac{4}{11\cdot 15}+\ldots+\frac{4}{(4n-1)(4n+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)}-\frac{1}{(4n+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{(4n+3)}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4n+3-3}{3\cdot(4n+3)}=\frac{n}{3\cdot(4n+3)}.$$

Відповідь. $\frac{n}{3\cdot(4n+3)}$.

3 Подайте періодичний дріб 0,2(35) у вигляді звичайного:

$$0,2(35)=\frac{2}{10}+\left(\frac{35}{1000}+\frac{35}{100\,000}+\ldots\right)=\frac{2}{10}+\frac{0,035}{1-0,01}=\frac{2}{10}+\frac{35}{990}=\frac{233}{990}.$$

Відповідь. $\frac{233}{990}$.

Виконайте усно

758. Знайдіть суму членів послідовності:

$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

759. Знайдіть суму ста членів арифметичної прогресії, у якої $a_1 = 3$, $d = 0$.

760. Чому дорівнює сума: $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$?

Рівень А

761. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

а) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$;

б) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$;

в) $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$;

г) $-8, 4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \ldots$.

762. Знайдіть суму, доданками якої є послідовні члени геометричної прогресії:

а) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$;

б) $2-\frac{2}{5}+\frac{2}{25}-\frac{2}{125}+\ldots$;

в) $16 - 8 + 4 - 2 + \ldots$;

г) $-1-\frac{3}{4}-\frac{9}{16}\ldots$.

763. ***Задача Архімеда.*** Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots.$$

764. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

а) $3+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\ \ldots;$ б) $6+\frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+\ \ldots.$

765. Подайте у вигляді звичайного дробу нескінченні періодичні десяткові дроби:

а) 0,3333...; б) 0,6666...; в) 0,111111... .

766. Запишіть нескінченний періодичний дріб у вигляді звичайного дробу:

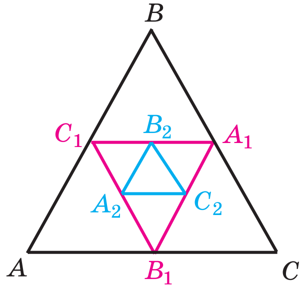
а) 0,(4); б) 0,(5); в) 0,(12); г) 0,(25).

767. Дано рівносторонній трикутник зі стороною 1 см. Середини його сторін — вершини другого трикутника, середини сторін другого — вершини третього трикутника і т. д. (мал. 130). Знайдіть суму периметрів усіх цих трикутників.

768. ***Відкрита задача.*** Сформулюйте і розв'яжіть задачу про квадрати, подібну до задачі **767**.

769. ***Задача Орема.*** Доведіть, що:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\ldots=\frac{7}{4}.$$



Мал. 130

Рівень Б

770. Знайдіть суму членів нескінченної геометричної прогресії:

а) $1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2},\ \ldots;$ в) $1,\ \pi-3,\ (\pi-3)^2,\ \ldots;$

б) $5,\ \sqrt{5},\ 1,\ \ldots;$ г) $\frac{1}{2-\sqrt{2}},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}},\ \ldots.$

771. У коло радіуса r вписано правильний трикутник, у трикутник вписано друге коло, у яке знову вписано правильний трикутник, і т. д. Знайдіть суму периметрів усіх трикутників і суму довжин усіх кіл.

772. Запишіть у вигляді звичайного дробу нескінченний періодичний десятковий дріб: а) 10,(4); б) 3,0(6); в) 0,(24); г) 1,4(7).

773. Запишіть у вигляді звичайного дробу число:

а) 3,(5); б) 21,(21); в) 1,1(6); г) 10,00(52).

774. У 1833 Ґаусс разом із молодим талановитим фізиком винайшов перший у Німеччині електромагнітний телеграф і побудував його модель, за допомогою якої з'єднали фізичний кабінет Геттінгенського університету з обсерваторією. Установіть відповідність між числовими виразами (1–5) та їх значеннями (А–Д) і ви дізнаєтеся ім'я цього відомого фізика і зрозумієте, чию іншу постать поруч із К. Ф. Ґауссом відображає скульптурна композиція біля Геттінгенського університету.

1 0,(6) + 0,(7)	**А** $1\frac{5}{9}$	*Р*
2 0,(12) + 1,(5)	**Б** $1\frac{67}{99}$	*Е*
3 2,(36) − 1,(12)	**В** $1\frac{8}{11}$	*Б*
4 2,1(6) − 0,(45)	**Г** $1\frac{4}{9}$	*В*
5 0,(3) + 1,(2)	**Д** $1\frac{47}{66}$	*Е*

775. Відомо, що $|a|<1$, $|x|<1$. Спростіть нескінченні суми:
а) $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$; б) $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$.

776. Знайдіть суму нескінченного числа доданків:
$$\left(8+4\sqrt{2}\right)+\left(4+2\sqrt{2}\right)+\left(2+\sqrt{2}\right)+\ldots,$$
кожний з яких удвічі менший від попереднього.

777. Запишіть таку нескінченно спадну геометричну прогресію, перший член якої дорівнює 3, а сума членів становить 4.

778. Перший член нескінченно спадної геометричної прогресії на 8 більший, ніж другий, а її сума дорівнює 18. Знайдіть четвертий член цієї прогресії.

779. Сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 1,5, а сума їх квадратів — 1,125. Знайдіть перший член і знаменник цієї прогресії.

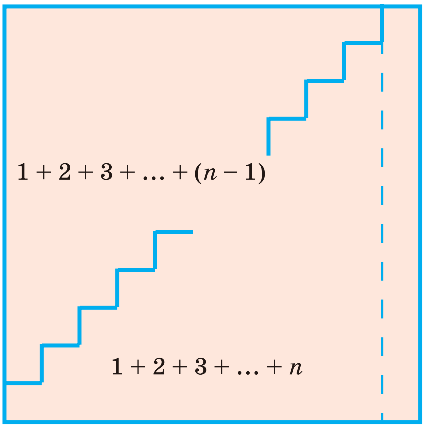
780. Знайдіть суму ста перших доданків:
а) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdot\ldots + n(-1)^{n+1} + \cdot\ldots$;
б) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdot\ldots + n^2(-1)^{n+1} + \cdot\ldots$.

781. Знайдіть суму перших сорока членів послідовності:

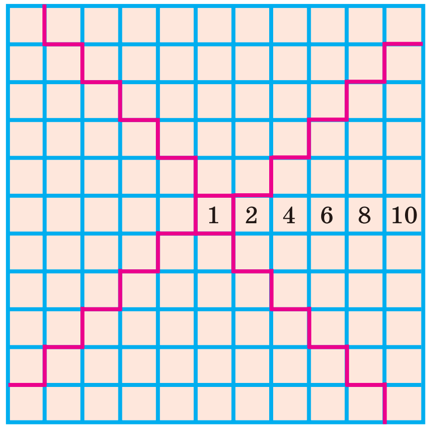
а) $\frac{41}{1\cdot2}, \frac{41}{2\cdot3}, \frac{41}{3\cdot4}, \frac{41}{4\cdot5}, \ldots, \frac{41}{n(n+1)}, \ldots;$

б) $\frac{3}{1\cdot4}, \frac{3}{4\cdot7}, \frac{3}{7\cdot10}, \frac{3}{10\cdot13}, \ldots, \frac{3}{(3n-2)(3n+1)}, \ldots.$

782. Доведіть тотожність:
$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n + (n - 1) + \ldots + 3 + 2 + 1 = n^2.$
З'ясуйте її геометричний зміст за малюнком 131.



Мал. 131



Мал. 132

783. Доведіть тотожність: $8 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n) + 1 = (2n + 1)^2.$
З'ясуйте її геометричний зміст за малюнком 132.

Розв'яжіть рівняння, у лівій частині якого — сума членів геометричної прогресії **(784–785)**.

784. $\frac{1}{x} + x + x^2 + \ldots + x^4 + \ldots = \frac{7}{2}$, якщо $|x| < 1$.

785. $1 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots = \frac{13}{6}$, якщо $|x| < 1$.

Доведіть тотожність **(786–788)**.

786. а) $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3;$

б) $3(2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + \ldots + (2n - 2) \cdot 2n + 2n \cdot (2n + 2)) = 4n(n + 1)(n + 2).$

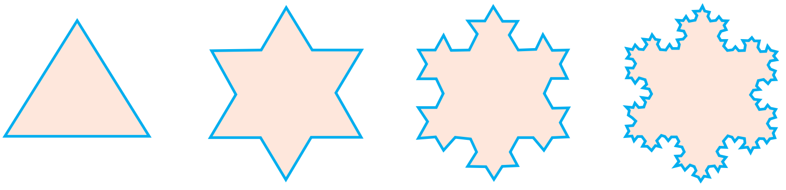
787. а) $4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) = n^2(n + 1)^2;$

б) $3(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots) + n(n + 1) = n(n + 1)(n + 2).$

788. Спростіть вираз:

а) $\frac{2}{1\cdot3} + \frac{2}{3\cdot5} + \frac{2}{5\cdot7} + \ldots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$; б) $\frac{1}{2\cdot5} + \frac{1}{5\cdot8} + \frac{1}{8\cdot11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}.$

789. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює $3a$ (мал. 133, *а*). Поділивши його сторону на три рівні відрізки, кожний середній з них замінимо ламаною, складеною з двох таких самих відрізків і кутом $60°$ між ними, як показано на малюнку 133, *б*. Кожну сторону утвореного зірчастого многокутника поділимо на три рівні відрізки і знову кожний середній із них замінимо подібною ламаною і т. д. Утворену в такий спосіб замкнену лінію називають *сніжинкою Коха*. Вважаючи рівносторонній трикутник першим членом послідовності сніжинок Коха, запишіть послідовність: а) кількостей сторін сніжинок; б) довжин їх сторін; в) їх периметрів. Які з цих послідовностей є арифметичними або геометричними прогресіями?



а *б* *в* *г*

Мал. 133

790. Знайдіть довжину сторони, периметр і площу третьої сніжинки Коха (мал. 133, *в*), утвореної з рівностороннього трикутника зі стороною 3 см. Чи існує сніжинка Коха, периметр якої удвічі (утричі) більший від правильного трикутника, з якого її утворено?

Скарбничка досягнень

Розумію, що таке нескінченна геометрична прогресія.

- ✓ Можу навести приклади нескінченної геометричної прогресії.
- ✓ Розумію, що таке сума нескінченної геометричної прогресії ($|q|<1$).
- ✓ Знаю та вмію використовувати формулу суми нескінченної геометричної прогресії: $S_n = \dfrac{b_1}{1-q}$, якщо $|q|<1$
- ✓ Умію записувати періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу: $0,(13) = \dfrac{0,13}{1-0,01} = \dfrac{13}{99}$
- ✓ Хочу навчитися знаходити суми членів деяких числових послідовностей.

Завдання для самостійної роботи

Варіант I

1°. Послідовність 3, 7, 11, 15, ... — арифметична прогресія. Визначте її n-й, 50-й члени і суму перших п’ятдесяти членів.

2°. Послідовність 2, −6, 18, −54, ... — геометрична прогресія. Визначте її n-й член і суму перших семи членів.

3•. Знайдіть знаменник зростаючої геометричної прогресії, якщо її перший, другий і четвертий члени утворюють арифметичну прогресію.

Варіант II

1°. Послідовність 2, 7, 12, 17, ... — арифметична прогресія. Визначте її n-й, 40-й члени і суму перших сорока членів.

2°. Послідовність 2, −4, 8, −16, ... — геометрична прогресія. Визначте її n-й член і суму перших десяти членів.

3•. Знайдіть знаменник зростаючої геометричної прогресії, якщо другий, третій і п’ятий її члени утворюють арифметичну прогресію.

Варіант III

1°. Послідовність 5, 9,13, 17, ... — арифметична прогресія. Визначте її n-й, 50-й члени і суму перших п’ятдесяти членів.

2°. Послідовність 3, −6, 12, −24, ... — геометрична прогресія. Визначте її n-й член і суму перших десяти членів.

3•. Знайдіть знаменник зростаючої геометричної прогресії, якщо її третій, четвертий і шостий члени утворюють арифметичну прогресію.

Варіант IV

1°. Послідовність 4, 7,10,13, ... — арифметична прогресія. Визначте її n-й, 60-й члени і суму перших шістдесяти членів.

2°. Послідовність 3, −9, 27, −81, ... — геометрична прогресія. Визначте її n-й член і суму перших восьми членів.

3•. Знайдіть знаменник зростаючої геометричної прогресії, якщо її четвертий, п’ятий і сьомий члени утворюють арифметичну прогресію.

Історичні відомості

У єгипетському папірусі Ахмеса (II тис. до н. е.) є така задача. «Нехай тобі сказано: поділи 10 мір ячменю між десятьма людьми так, щоб кожен дістав на $\frac{1}{8}$ міри більше, ніж сусід». Ідеться про знаходження десяти членів арифметичної прогресії, сума яких дорівнює 10, а саме: a, $a+\frac{1}{8}$, $a+\frac{2}{8}$, ..., $a+\frac{9}{8}$.

Стародавні вавилоняни обчислювали, зокрема, суму членів геометричної прогресії $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^9$.

Давньогрецькі математики ще в V ст. до н. е. знали, що

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$$

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1),$$

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n + 1) = n^2.$$

Правила для знаходження суми членів геометричної прогресії є в «Основах» Евкліда.

Архімед вивів правила для знаходження суми квадратів перших n натуральних чисел, умів він також обчислювати суми членів нескінченних спадних геометричних прогресій. Співвідношення

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2,$$

яке дає можливість обчислювати суму кубів перших n натуральних чисел, відкрив у XI ст. багдадський математик Абу Бекрі.

Термін прогресія походить від латинського *progredior* — «іду вперед»; *progression* — «рух уперед», «успіх», «поступове підсилення».

У XVII ст. для позначення відповідно геометричної та арифметичної прогресії почали використовувати знаки $\div\!\div$ (увів В. Отред, 1631) і $\div$ (поширив Т. Ланьї, 1692).

Формулу суми нескінченної геометричної прогресії вивів Е. Торрічеллі, а А. Таке опублікував цей результат у роботі «Арифметична теорія і практика, ретельно обґрунтована» (1656).

Оригінальний метод знаходження сум n членів багатьох числових послідовностей, таких як

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + ... + n(n + 1)(n + 2),$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + ... + \frac{1}{2}n(n + 1),$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$$

розробив український математик В. Я. Буняковський (див. с. 68).

Головне в розділі

Числова послідовність — це функція, задана на множині всіх або перших n натуральних чисел.

Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додають одне й те саме стале для цієї послідовності число. Це число називають *різницею* даної арифметичної послідовності й позначають буквою d.

Перші послідовні члени арифметичної прогресії позначають буквами a_1, a_2, $a_3, \ldots$, a_n, ...

Її n-й член: $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Сума членів скінченної арифметичної прогресії дорівнює півсумі крайніх її членів, помноженій на число членів:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ або } S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Геометричною прогресією називають числову послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме стале для даної послідовності число. Це число називають *знаменником* прогресії й позначають буквою q. Вважають, що $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$.

Якщо перші члени геометричної прогресії b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ..., то її n-й член: $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Сума n перших членів геометричної прогресії за умови, що $q \neq 1$, виражається формулою:

$$S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1} \text{ або } S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1},\ q \neq 1.$$

Якщо $q = 1$, то $S_n = nb_1$.

Якщо модуль знаменника нескінченної геометричної прогресії менший від 1, то можна визначити суму всіх її членів за формулою:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

За допомогою останньої формули нескінченні періодичні десяткові дроби можна записувати у вигляді звичайних дробів:

$$0,(5) = 0,555\ldots = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \ldots = \frac{0,5}{1-0,1} = \frac{5}{9}.$$

З'ясовуємо досягнення

Тестові завдання № 3

1 Знайдіть сьомий член арифметичної прогресії, якщо $a_6 + a_8 = 20$.
а) 5; б) 20; в) 10; г) 15.

2 Обчисліть перший член геометричної прогресії, якщо $b_3 = 4$, а $b_4 = 2$.
а) 2; б) 4; в) 8; г) 16.

3 Знайдіть п'ятий член послідовності, заданої формулою $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3 \cdot a_n$.
а) 162; б) 54; в) 18; г) 93.

4 Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:
$2,\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{9},\ -\frac{2}{27},\ldots.$
а) $\frac{3}{2}$; б) $1\frac{1}{2}$; в) $-\frac{3}{2}$; г) 1.

5 Знайдіть суму всіх парних двоцифрових чисел.
а) 2408; б) 2450; в) 2440; г) 2430.

6 Знайдіть добуток членів геометричної прогресії $b_3 \cdot b_4 \cdot b_5$, якщо $b_4 = 2$.
а) 4; б) 14; в) 8; г) 60.

7 Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії 2, 6,… .
а) $a_n = n^2 + n$; б) $a_n = 4n - 2$; в) $a_n = 4n + 2$; г) $a_n = n - n^2$.

8 Знайдіть суму перших шести членів геометричної прогресії, якщо $b_1 = 3$, $q = 2$.
а) 197; б) 90; в) 189; г) 93.

9 Які два числа слід вставити між числами 2 і 31,25, щоб разом вони утворили геометричну прогресію?
а) 1 і 7; б) 3 і 4,5; в) 2,5 і 8; г) 3,5 і 4.

10 Під яким номером у геометричній прогресії 3, 6,… міститься число 384?
а) 7; б) 9; в) 8; г) 10.

Типові завдання до контрольної роботи № 3

1° В арифметичній прогресії $a_1 = 4$, $a_2 = 14$.
Знайдіть: а) d; б) a_5; в) S_{10}.

2° У геометричній прогресії $b_1 = 16$, $b_2 = 8$.
Знайдіть: а) q; б) b_6; в) S_5.

3° Знайдіть восьмий член арифметичної прогресії, якщо $a_2 + a_{14} = 20$.

4° Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:
$16, -4, 1, -\frac{1}{4}, \ldots$.

5• Подайте у вигляді звичайного дробу:
а) 0,(2); б) 0,(25); в) 0,3(8).

6• Знайдіть кількість n членів геометричної прогресії, у якій $b_1 = \frac{3}{2}$, $b_n = 768$, $S_n = 1534{,}5$.

7• Починаючи з якого номера члени арифметичної прогресії −3,6; −3,3; −3, ... стануть додатними?

8• Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які менші за 100 і діляться на 6.

9•• У саду перша дитина зірвала один персик, друга — два, а кожна наступна — на один персик більше. Потім усі, хто рвав персики, розділили їх між собою порівну і кожен одержав по 6 персиків. Скільки дітей рвали персики?

10•• Суму n перших членів геометричної прогресії можна знайти за формулою $S_n = 2(5^n - 1)$.
Знайдіть: а) S_4; б) a_5.

Розділ 4

Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики

На практиці люди постійно мають справу з різними випадковими подіями або їх очікуванням. Щоразу виникає запитання, чи відбудеться та чи інша подія і за яких умов. У сучасному інформаційному суспільстві важливо вміти швидко отримувати потрібні відомості з різних джерел і правильно їх аналізувати. Під час розв'язування багатьох практичних задач виникає проблема вибору деякої сукупності об'єктів із заданих за певними їх властивостями, підрахування можливих комбінацій тощо. Ці та інші питання розглядаються в окремих математичних галузях — теорії ймовірностей, статистиці та комбінаториці.

Вивчаючи цей розділ, ви маєте можливість ознайомитися з основними поняттями комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики.

У цьому розділі розглянемо такі теми:

§ 19 **Основні правила комбінаторики**

Basic Rules for Combinatorics

§ 20 **Частота та ймовірність випадкової події**

The Frequency and Probability of a Random Event

§ 21 **Відомості про статистику**

Information on Statistics

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:
— Що таке множина і підмножина.
— Що таке цифра і число.
— Що таке сума чисел a і c. $a + c$
— Що таке добуток чисел a і c. $a \cdot c$

§ 19 Основні правила комбінаторики

Комбінаторика — розділ математики, присвячений розв'язуванню задач вибору та розташування елементів деякої скінченної множини відповідно до заданих правил.

Розглянемо два основних правила, за допомогою яких розв'язується багато задач із комбінаторики.

Приклад 1. У місті N є два університети — політехнічний і економічний. Абітурієнту подобаються три факультети в політехнічному університеті і два — в економічному. Скільки можливостей має абітурієнт для вступу в університет?

Розв'язання. Позначимо буквою A множину факультетів, які обрав абітурієнт в політехнічному університеті, а буквою B — в економічному. Тоді $A = \{m, n, k\}$, $B = \{p, s\}$. Оскільки ці множини не мають спільних елементів, то загалом абітурієнт має $3 + 2 = 5$ можливостей вступати до університету.

Описану ситуацію можна узагальнити у вигляді твердження, яке називається *правилом суми.*

Якщо елемент деякої множини A можна вибрати m способами, а елемент множини B — n способами, то елемент із множини A або ж із множини B можна вибрати $m + n$ способами.

Правило суми поширюється і на більшу кількість множин.

Приклад 2. Плануючи літній відпочинок, родина визначилася з місцями його проведення: в Одесі — 1, в Скадовську — 3, в Яремчі — 2, у Затоці — 2. Скільки можливостей вибору літнього відпочинку має родина?

Розв'язання. Оскільки всі бази відпочинку різні, то для розв'язання задачі досить знайти суму елементів усіх множин, про які йдеться: $1 + 3 + 2 + 2 = 8$. Отже, родина може обирати відпочинок з 8 можливих.

Розглянемо задачі, що стосуються іншого правила.

Приклад 3. Від пункту A до пункту B ведуть три стежки, а від B до C — дві. Скількома маршрутами можна пройти від пункту A до пункту C?

Розв'язання. Щоб пройти від пункту A до пункту B, треба вибрати одну з трьох стежок: 1, 2 або 3 (*мал. 134*). Після того слід вибрати одну з двох інших стежок: 4 чи 5.

Мал. 134

Усього від пункту A до пункту C ведуть 6 маршрутів, бо $3 \cdot 2 = 6$. Усі ці маршрути можна позначити за допомогою пар: (1; 4), (1; 5), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5).

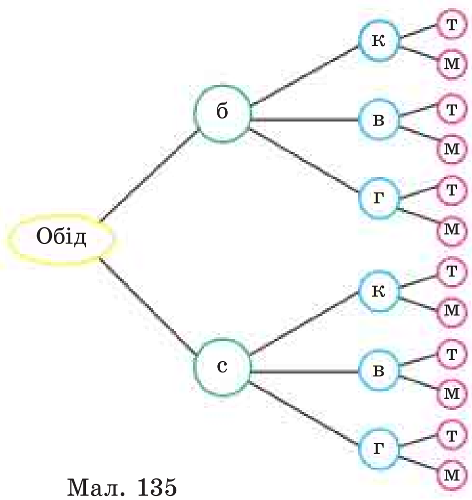
Узагальнимо описану ситуацію.

Якщо перший компонент пари можна вибрати m способами, а другий — n способами, то таку пару можна вибрати mn способами.

Це — *правило добутку*, його часто називають основним правилом комбінаторики. Зверніть увагу: ідеться про впорядковані пари, складені з різних компонентів.

Правило добутку поширюється і на впорядковані трійки, четвірки та будь-які інші впорядковані скінченні множини. Зокрема, *якщо перший компонент упорядкованої трійки можна вибрати m способами, другий — n способами, третій — k способами, то таку впорядковану трійку можна вибрати $m \cdot n \cdot k$ способами.* Наприклад, якщо їдальня на обід приготувала 2 перші страви — борщ (б) і суп (с), 3 другі — котлети (к), вареники (в), голубці (г) і 2 десертні — тістечка (т) і морозиво (м), то всього із трьох страв їдальня може запропонувати 12 різних наборів, оскільки $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

Описаній ситуації відповідає діаграма, зображена на малюнку 135. Такі діаграми називають *деревами*.



Мал. 135

Приклад 4. Скільки різних поїздів можна скласти з 6 вагонів, якщо кожний з вагонів можна поставити на будь-якому місці?

Розв'язання. Першим можна поставити будь-який із 6 вагонів. Маємо 6 виборів. Другий вагон можна вибрати з решти 5 вагонів. Тому за правилом множення два перших вагони можна вибрати $6 \cdot 5$ способами. Третій вагон можна вибрати з 4 вагонів, що залишились. Тому три перших вагони можна вибрати $6 \cdot 5 \cdot 4$ способами. Продовжуючи подібні міркування, приходимо до відповіді: усього можна скласти $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ різних поїздів.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Зверніть увагу на розв'язання останньої задачі. Воно звелося до обчислення добутку всіх натуральних чисел від 1 до 6. У комбінаториці подібні добутки обчислюють часто.

Добуток усіх натуральних чисел від 1 до n називають *n-факторіалом* і позначають n!

Наприклад:

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

Домовились вважати, що $1! = 1$ і $0! = 1$.

Перевірте себе

1. Які задачі називають комбінаторними?
2. Що таке комбінаторика?
3. Сформулюйте правило суми.
4. Сформулюйте основне правило комбінаторики.
5. Наведіть приклад діаграми-дерева.
6. Що таке факторіал? Як його позначають?

Виконаємо разом

1 У розіграші на першість міста з баскетболу беруть участь команди з 12 шкіл. Скількома способами можуть бути розподілені перше і друге місця?

- **Розв'язання.** Перше місце може одержати одна з 12 команд. Після того, як визначено володаря першого місця, друге місце може отримати одна з 11 команд. Отже, загальна кількість способів, якими можна розподілити перше і друге місця, дорівнює $12 \cdot 11 = 132$.
  Відповідь. 132.

2 Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо жодна цифра не повторюється?

- **Розв'язання.** Першою цифрою числа може бути одна з 5 цифр: 1, 2, 3, 4, 5. Якщо перша цифра обрана, то друга може бути обрана

5-ма способами, третя — 4-ма, четверта — 3-ма. Згідно з правилом множення загальне число способів дорівнює: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.
Відповідь. 300.

Виконайте усно

791. Є дві цифри: 1 і 9. Скількома способами з цих цифр можна скласти: а) одноцифрове число; б) двоцифрове число, щоб цифри у числі не повторювались; в) двоцифрове число, якщо цифри у числі можуть повторюватися?

792. У класі 11 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна делегувати одного учня в шкільний комітет самоврядування?

793. У класі 11 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна делегувати двох учнів у шкільний комітет самоврядування?

794. У класі 11 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна делегувати одну дівчину і одного хлопця в шкільний комітет самоврядування?

Рівень А

795. У магазині є три види печива і десять видів цукерок. Сергій хоче купити сестрі печиво чи цукерки. Скількома способами він може це зробити?

796. Для завершення формування експедиції в Антарктиду додатково розглядалися заяви 10 претендентів на посаду лікаря, 5 претендентів на посаду повара і 3 претенденти на посаду техніка. Жоден кандидат не претендував одночасно на дві чи більше посад. Скількома способами можна заповнити одне вільне місце в експедиції?

797. Скількома способами можна посадити чотирьох дітей на лавці?

798. На вершину гори ведуть 4 стежки. Скількома маршрутами турист може піднятись на гору і спуститися з неї, обираючи для спуску і підйому різні стежки?

799. Оленка має 2 спіднички і 3 вишиті блузки. Скільки різних наборів вбрання можна вибрати для виступу в хорі.

800. Їдальня приготувала на сніданок 3 другі страви (A, B, C) і два напої (M, K). Скільки різних наборів із таких страв і напоїв можна вибрати на сніданок? Складіть відповідну діаграму-дерево.

801. Скількома способами 5 осіб можуть утворити чергу до каси?

802. Скільки різних речень можна скласти зі слів «ми», «любимо», «читати»? А зі слів «ми», «дуже», «любимо», «читати»?

Рівень Б

803. Скількома способами дівчинка може нанизати на нитку 8 різних намистин?

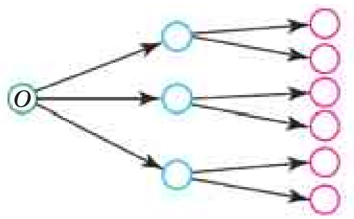
804. Скільки трицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

805. ***Відкрита задача.*** Складіть задачу за малюнком 136 і розв'яжіть її.

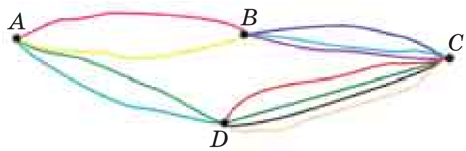
806. Вісім друзів вирішили провести турнір з шашок так, щоб кожний зіграв з кожним одну партію. Скільки партій буде зіграно?

807. Їдальня приготувала на обід 3 перші страви (A, B, C), 3 другі (*а*, *б*, *с*) і 3 треті (x, p, y). Скільки різних наборів із трьох страв можна вибрати на обід? Складіть відповідну діаграму-дерево.

808. Створюють емблему школи, елементом якої має бути многокутник певного кольору. Скільки таких емблем можна створити, якщо розглядати три фігури (трикутник, квадрат, шестикутник) і 4 кольори (синій, зелений, жовтий, червоний)?



Мал. 136



Мал. 137

809. Скільки різних «кортежів» може створити хлопчик з чотирьох іграшкових автомобілів: білого, жовтого, синього і червоного? Складіть відповідну діаграму-дерево.

810. ***Відкрита задача.*** Складіть задачу за малюнком 137 і розв'яжіть її.

811. До моря веде 7 доріг. Скількома способами відпочиваючий може дістатися моря і повернутися назад? Розгляньте випадки, коли рух до моря і від моря відбувається:
а) однією дорогою; б) різними шляхами;
в) одним із двох попередніх способів.

812. На пошті є три види конвертів, два види марок до них і чотири види поздоровчих листівок, що вкладаються в ці конверти. Скільки існує різних способів оформлення одного привітання?

813. У середу за розкладом в 11-А класі є 6 різних уроків, серед яких — алгебра і геометрія. Скількома способами можна скласти розклад так, щоб алгебра і геометрія стояли поруч?

814. У вівторок за розкладом в 11-Б класі є 7 різних уроків, серед яких — фізика і астрономія. Скількома способами можна скласти розклад так, щоб:
а) фізика і астрономія стояли поруч;
б) фізика і астрономія не стояли поруч?

815. Скільки:
а) парних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри не можуть повторюватися.
б) непарних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри не можуть повторюватися?

816. У піцерії готують велику і маленьку піцу з товстою і тонкою основою. Скільки різних видів піци можна замовити в цій піцерії, якщо для тонкої піци використовують три види наповнення, а для товстої — чотири?

817. Обчисліть:
а) $10! : 5!$; б) $13! : 10!$; в) $20! : 25!$; г) $100! : 97!$.

818. Спростіть вираз:
а) $n! : (n-1)$; б) $(n-1)! : n!$; в) $(n+1)! : (n-1)!$.

Вправи для повторення

819. Виручка книжкового магазину становила в I кварталі 700,46 тис. грн. Відомо, що у січні виручка була на 49,8 тис. грн. більше, ніж у лютому, а у березні — на 178,92 тис. грн. менше, ніж у лютому. Який дохід був у магазина в березні?

820. Розв'яжіть рівняння:
а) $x^2 = 5$; б) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

821. Спростіть вираз:
1) $2a^3b\left(-\frac{1}{2}ab\right)a^2b$;
3) $\left(-\frac{2}{3}a^2b\right)b^2a\cdot\frac{9}{4}\left(a^2b^2\right)^3$;
2) $3ak^2\left(-2kx^3\right)k^3$;
4) $-2\frac{1}{3}a^3c^2\cdot\frac{1}{7}ac^2\cdot 6abc$.

Скарбничка досягнень

- ✓ Знаю основні правила комбінаторики.
- ✓ Розрізняю правило суми і правило добутку.
- ✓ Умію використовувати комбінаторне правило суми.
- ✓ Умію використовувати комбінаторне правило добутку.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

— що таке відношення чисел m і n $\boxed{m : n \text{ або } \frac{m}{n}}$

— властивість правильного дробу $\frac{m}{n}$, $m \in N$, $n \in N$:

$\boxed{\text{якщо } m < n, \text{ то } \frac{m}{n} < 1, \text{ якщо } m = n, \text{ то } \frac{m}{n} = 1.}$

§ 20 Частота та ймовірність випадкової події

Одним із розділів сучасної математики є теорія ймовірностей. Її найважливіші поняття — ймовірнісний експеримент (випробування, спостереження), *подія* (наслідок випробування) і *ймовірність події*. Наведемо приклади випробувань та їх окремих наслідків — деяких подій.

Випробування	Подія
Підкидання монети	Монета упала догори гербом
Написання контрольної роботи	Ви отримали 12 балів
Очікування ранку	Ранок настав
Підкидання грального кубика	Випало 7 очок

Остання подія неможлива, бо на гранях грального кубика немає сімки. Подія 3 достовірна (вірогідна), бо після ночі завжди наступає ранок. Події 1 і 2 випадкові.

Взагалі, подія називається *неможливою*, якщо вона ніколи не може відбутися, достовірною — якщо вона завжди відбувається. Якщо подія може відбутися або не відбутися, її називають *випадковою*.

Події позначають великими латинськими буквами A, B, C,... або однією латинською буквою з індексом: A_1, A_2, A_3,..., An. Зміст події подають у фігурних дужках. Наприклад, третю подію з таблиці можна записати так:

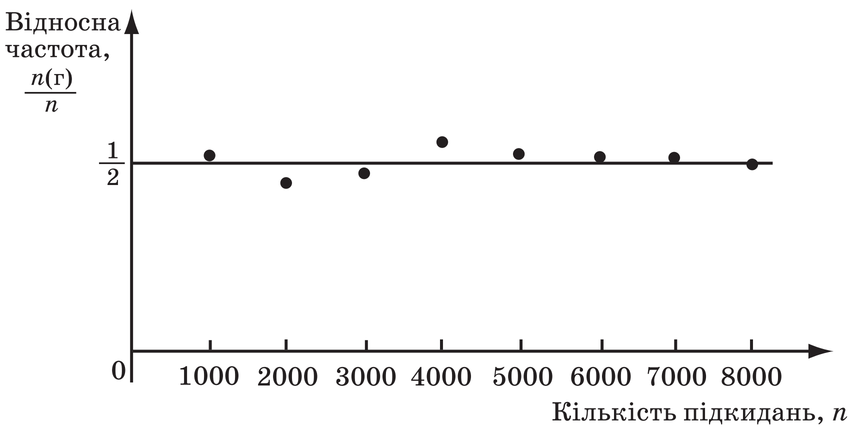
$$A_3 = \{\text{настав ранок}\}.$$

Сказати наперед про випадкову подію, що вона відбудеться чи не відбудеться, не можна. Якщо ж ця подія масова, виконується багато разів і за однакових умов, то ймовірність її наставання можна характеризувати деяким числом.

Розглянемо експеримент, який полягає в підкиданні симетричної однорідної монети і фіксації того боку, яким монета упала догори. Його можна проводити в одних і тих самих умовах яку завгодно кількість разів. У таблиці подаються результати восьми серій таких випробувань.

Номер серії	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Кількість підкидань, n	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000
Кількість гербів, n(г)	501	986	1495	2036	2516	3004	3504	3997
Відносна частота появи герба, $\frac{n(г)}{n}$	0,501	0,493	0,498	0,509	0,503	0,501	0,501	0,500

Число в останньому рядку таблиці для кожної серії визначається як відношення кількості випадання герба до загальної кількості підкидань монети в цій серії випробувань. Воно називається *відносною частотою появи події*. Якщо дані таблиці зобразити графічно (мал. 138), то можна побачити, що відносна частота появи герба коливається навколо числа 0,5 і мало відрізняється від нього.



Мал. 138

Якщо в n випробуваннях подія X відбувається m разів, то дріб $\frac{m}{n}$ визначає відносну частоту появи події X. Число, біля якого коливається відносна частота події, виражає ймовірність цієї події; її позначають буквою P (від англійського слова *probability* — ймовірність).

Цей термін увів Б. Паскаль. У листі до П. Ферма від 28 жовтня 1654 р. він писав: «Більшість людей вважають, що коли вони про щонебудь не мають повного знання (а ми ніколи не маємо повного знання), то вони взагалі нічого про це не знають. Я переконаний, що такі думки глибоко помилкові. Часткове знання теж є знанням, і неповне переконання все ж має деяке значення, особливо коли мені відомий ступінь цієї впевненості. Хтось може запитати: «А чи можна виміряти міру впевненості числом?». «Звичайно, — відповім я, — люди, які грають в азартні ігри, обґрунтовують свою впевненість саме так. Коли гравець кидає гральний кубик, він наперед не знає, яке саме число очок випаде. Але дещо він все-таки знає. Наприклад, те, що всі шість чисел — 1, 2, 3, 4, 5, 6 — мають однакові шанси на успіх. Якщо ми домовимося вважати можливість появи достовірного за одиницю, то можливість випадання шістки, як і кожного з інших п'яти чисел, виразиться дробом $\frac{1}{6}$». Зазначу відразу, що міру можливості (впевненості) події я назвав імовірністю. Я багато розмірковував над вибором відповідного слова і, нарешті, саме його вважаю найвиразнішим».

Б. Паскаль визначав імовірності деяких подій без проведення випробувань. Це можна зробити тоді, коли наслідки випробувань утворюють скінченну множину і є рівноможливими, тобто в умовах проведеного випробування немає підстав уважати появу одного з наслідків більш чи менш можливим порівняно з іншими.

Розглянемо приклад. Кидають один раз правильний однорідний гральний кубик (мал. 139) і фіксують суму очок на грані, що випала догори. Результатом такого випробування можуть стати 6 різних подій:

E_1 = {випаде одне очко};
E_2 = {випаде два очки};
E_3 = {випаде три очки};
E_4 = {випаде чотири очки};
E_5 = {випаде п'ять очок};
E_6 = {випаде шість очок}.

Мал. 139

Ці шість подій охоплюють і вичерпують усі можливі наслідки експерименту. Вони *попарно несумісні*, бо кожного разу випадає тільки одна кількість очок. Усі шість подій *однаково можливі*, бо йдеться про однорідний кубик правильної форми і спритність гравця виключається. У такому разі говорять, що для здійснення кожної з цих подій існує один шанс із шести.

Кожну з подій E_1—E_6 для наведеного вище випробування називають елементарною, а всю їх множину — простором елементарних подій.

Елементарною подією називають кожний можливий наслідок імовірнісного експерименту. Множину всіх можливих наслідків експерименту називають *простором елементарних подій* і позначають грецькою буквою W (омега).

Якщо простір елементарних подій для деякого випробування складається з n рівноможливих несумісних подій, то ймовірність кожної з них дорівнює $\frac{1}{n}$.

Наприклад, ймовірність того, що на підкинутому гральному кубику випаде 5 очок, дорівнює $\frac{1}{6}$. А ймовірність того, що підкинута монета впаде догори гербом, дорівнює $\frac{1}{2}$.

Ймовірність події A позначають символом $P(A)$. Якщо першу з цих подій позначити буквою A, а другу — B, то $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{1}{2}$.

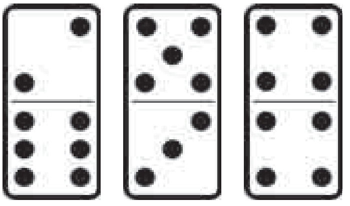
Існують події неелементарні. Розглянемо, наприклад, таку подію: C = {поява пластинки доміно з 8 очками}.

Оскільки пластинок доміно усього 28, то випробування, пов'язане з вибором однієї пластинки, вичерпується 28 рівноможливими і незалежними наслідками. Отже, простір елементарних подій для даного випробування складається з 28 елементарних подій Ei, де $i = 1, 2, \ldots, 28$. Подія C може відбутися, якщо відбудеться одна з трьох елементарних подій (мал. 140):

1) $E_1 = \left\{\text{поява пластинки } \frac{2}{6}\right\}$;

2) $E_2 = \left\{\text{поява пластинки } \frac{3}{5}\right\}$;

3) $E_3 = \left\{\text{поява пластинки } \frac{4}{4}\right\}$.



Мал. 140

Кажуть, що події C сприяють три елементарні події (E_1, E_2, E_3) з можливих 28, тому $P(C)=\frac{3}{28}$.

Розглянемо загальний випадок. Нехай випробування має скінченну кількість (n) рівноможливих і несумісних наслідків і A — деяка випадкова подія, пов'язана з даним випробуванням. Будемо називати елементарну подію En *сприятливою для випадкової події A*, якщо настання події En в результаті випробування приводить до настання події A. Якщо кількість елементарних подій, сприятливих події A, позначити через $n(A)$, то ймовірність випадкової події A визначається за формулою:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n}.$$

Приклад. З перевернутих 28 кісточок доміно навмання беруть одну. Яка ймовірність того, що на ній виявиться всього:

а) 2 очки (подія A); б) 4 очки (подія B); в) 11 очок (подія D)?

Розв'язання. Існує 2 кісточки доміно з двома очками $\left(\frac{0}{2}; \frac{1}{1}\right)$, 3 кісточки з чотирма очками $\left(\frac{0}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{2}\right)$, 1 кісточка з 11 очками $\frac{5}{6}$. Усього можливостей вибору 28, бо взяти можна будь-яку з 28 кісточок. Отже,

$$P(A) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}, \quad P(B) = \frac{3}{28}, \quad P(D) = \frac{1}{28}.$$

Назвемо властивості ймовірності випадкової події.

1. Якщо C — подія неможлива, то $P(C) = 0$.
2. Якщо B — подія достовірна, то $P(B) = 1$.
3. Якщо X — подія випадкова, то $0 \le P(X) \le 1$.
4 Якщо $E_1, E_2, E_3, ..., E_n$ — елементарні події, що вичерпують деяке випробування, то

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + ... + P(E_n) = 1.$$

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Подібно до геометрії теорію ймовірностей можна будувати на основі *системи аксіом*. При цьому вводяться основні поняття теорії ймовірностей та відношення між ними і формулюються аксіоми. Усі інші поняття і твердження базуються на побудованій системі аксіом з нехтуванням інтуїції та досвіду. Аксіоматизувати теорію ймовірностей можна різними способами. Це в різні часи робили Г. Больман (1908), С. Н. Бернштейн (1917), Р. Мізес (1919, 1928), А. Ломницький (1923). Найкращою з таких вважається система аксіом, запропонована в 1929 р. А. М. Колмогоровим. З нею ви ознайомитеся у старшій школі та вищих навчальних закладах.

Аксіоматичний підхід дає змогу широко використовувати теорію ймовірностей до розв'язування різних теоретичних і практичних завдань, а також визначати межі її застосування.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які події називають випадковими?
2. Наведіть приклади випадкових подій.
3. Які події називають неможливими, достовірними?
4. Наведіть приклад простору елементарних подій.
5. Які події називають елементарними? Наведіть приклади.
6. Чому дорівнює ймовірність випадкової події?
7. Чому дорівнює ймовірність достовірної події? А неможливої?
8. Що таке відносна частота випадкової події?

Виконаємо разом

1 Маємо два кубики, у яких по 2 грані відповідно червоного, жовтого і зеленого кольору. Підкидають їх разом і фіксують кольори граней, на які впадуть обидва кубики. Запишіть простір елементарних подій для такого випробування.

- **Розв'язання.** Якщо обидва кубики впали на жовті грані, то цю подію позначатимемо символом *жж*. Якщо один впаде на жовту, інший — на червону, то таку подію позначатимемо *жч*. Тоді простір елементарних подій для заданого випробування буде W = {*жж*, *зз*, *чч*, *жз*, *жч*, *зч*}.

2 Набираючи номер телефону, абонент забув останню цифру і набрав її навмання. Яка ймовірність того, що він правильно набрав цей номер?

- **Розв'язання.** Число всіх можливих випадків $n = 10$, а число сприятливих випадків $m = 1$. Тому шукана ймовірність $P = \frac{1}{10}$.

3 Кидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що на них випадуть очки, сума яких дорівнює: а) 4; б) 5; в) 8?

- **Розв'язання.** Кожній розглядуваній події поставимо у відповідність двоцифрове число, цифри якого відповідають очкам, що випали при падінні першого і другого кубиків. Можливі такі випадки:

11,	12,	13,	14,	15,	16,
21,	22,	23,	24,	25,	26,
31,	32,	33,	34,	35,	36,
...	...	...	...	...	...
61,	62,	63,	64,	65,	66.

Як бачимо, для даного випробування простір елементарних подій W містить 36 елементів.

а) Суму очок, що дорівнює 4, дають три числа: 13, 22 і 31. Маємо 3 сприятливі елементарні події із 36. Тому шукана ймовірність:

$$P(4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

б) Суму очок 5 дають 4 пари кубиків: 14, 23, 32 і 41, тому

$$P(5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

в) Суму очок 8 дають 5 пар: 26, 35, 44, 53, 62, тому

$$P(8) = \frac{5}{36}.$$

Виконайте усно

822. Якою з погляду теорії ймовірностей є подія: а) при падінні грального кубика випадуть п'ять очок; б) дитина народиться 30 лютого; в) перестановкою букв у слові «зебра» одержати слово «береза»; г) вибране навмання двоцифрове число виявиться меншим за 100; ґ) побудований графік непарної функції виявиться симетричним відносно початку координат.

823. Яка ймовірність того, що при падінні грального кубика випаде: а) два очки; б) парна кількість очок; в) кількість очок, кратна 3?

824. Беруть навмання пластинку доміно. Яка ймовірність того, що вона: а) є дублем; б) не є дублем?

825. Опишіть простір елементарних подій для даного експерименту: а) встановлення дня народження довільно обраного учня; б) визначення кількості коренів квадратного рівняння; в) установлення кількості спільних точок кола і гіперболи, побудованих в одній системі координат.

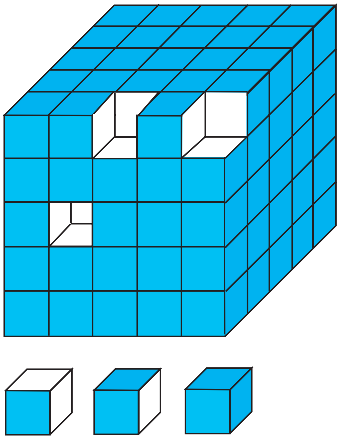
Рівень А

826. Знайдіть імовірність того, що ваш товариш народився: а) у середу; б) навесні; в) у вересні; г) 1 січня.

827. У 9-А класі навчаються 20 учнів, 25 % з яких — відмінники. Доводити теорему синусів навмання викликають одного учня. Яка ймовірність того, що це буде відмінник?

828. Набираючи номер телефону, абонент забув першу цифру і набрав її навмання. Яка ймовірність того, що потрібний номер він набрав правильно?

829. Пофарбований з усіх боків дерев'яний кубик розпиляли на 125 рівних кубиків і помістили їх у торбину. Яка ймовірність того, що беручи з торбини кубик навмання, візьмете такий, у якого пофарбовано: а) три грані; б) тільки дві грані; в) тільки одну грань (мал. 141)?



Мал. 141

830. Із букв, написаних на окремих картках, склали слово ТОТОЖНІСТЬ. Потім ці картки перевернули, перетасували і взяли навмання одну з них. Яка ймовірність того, що на ній виявиться: а) буква Т; б) буква О; в) буква Н?

831. У торбині 5 білих і 7 чорних куль. Яка ймовірність того що, беручи навмання, виймуть з неї: а) білу кулю; б) чорну кулю?

823. У мішечку 10 згорнутих папірців. На двох із них написано «ні», а на решті — «так». Яка ймовірність того, що на взятому навмання папірці виявиться слово «так»?

833. В ящику 10 червоних і 5 жовтих куль. З нього вийняли одну кулю червоного кольору і відклали вбік. Після цього з ящика беруть ще одну кулю навмання. Яка ймовірність того, що вона виявиться жовтою?

834. У змаганнях беруть участь 25 учнів першої школи, 15 — другої і 10 — третьої. Яка ймовірність того, що першим виступатиме учень з першої школи?

835. Пасажир чекає трамвай № 1 або № 3 на зупинці, де зупиняються трамваї № 1, 3, 4 і 9. Вважаючи, що всі трамваї підходять однаково часто, знайдіть імовірність того, що першим прийде до зупинки трамвай, якого чекає пасажир.

Рівень Б

836. На 1000 білетів лотереї припадає 1 виграш 1000 грн, 10 виграшів по 200 грн, 50 — по 100 грн, 100 — по 50 грн. Решта білетів невиграшні. Знайдіть імовірність виграшу на один білет, не меншого від 100 грн.

837. У партії зі 100 деталей 75 деталей першого сорту, 15 — другого, 8 — третього і 2 деталі браковані. Яка ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться першого або другого сорту?

838. Із 10 карток, пронумерованих числами від 1 до 10, виймають одну. Яка ймовірність того, що її номер виявиться меншим за 7 і більшим за 3?

839. В урні є 30 жетонів з номерами від 1 до 30. Яка ймовірність того, що перший витягнутий з урни навмання жетон не міститиме цифри 6?

840. З 15 карток, пронумерованих числами від 1 до 15, виймають одну. Яка ймовірність того, що номер вийнятої картки виявиться: а) кратним 3; б) кратним 4?

841. Зі 100 науковців установи англійською володіють 90, німецькою — 85, 80 осіб — обома цими мовами. Знайдіть імовірність того, що вибраний навмання науковець з цієї установи: а) володіє англійською або німецькою; б) не знає ні англійської, ні німецької.

842. Підкидають два гральних кубики. Яка ймовірність появи хоча б однієї шістки?

843. Беруть навмання пластинку доміно. Яка ймовірність того, що на ній є: а) усього 9 очок; б) більш ніж 9 очок; в) менш ніж 9 очок?

844. Пофарбований дерев'яний кубик розпиляли на 1000 рівних кубиків і помістили їх у торбину. Яка ймовірність того, що беручи з торбини навмання один кубик, ви візьмете такий, який має: а) принаймні одну пофарбовану грань; б) тільки дві пофарбовані грані?

845. Знайдіть імовірність того, що вибране навмання двоцифрове число кратне 5.

846. Одночасно підкидають дві однакові монети. Знайдіть імовірність події: а) A = {випав один герб і одна решка}; б) B = {випало не менше одного герба}.

847. Перевірили 500 довільно вибраних деталей і виявили, що 5 із них — браковані. Скільки бракованих деталей можна очікувати в партії з 3500 штук?

848*. Дослідіть розподіл хлопчиків і дівчаток у родинах, які мають троє дітей різного віку. Вважайте, що ймовірність народження хлопчика і дівчинки однакова.

Вправи для повторення

849. Функцію задано формулою $f(x) = -5x + 3$. Знайдіть $f(0{,}1)$; $f(-2{,}5)$; $f(-10)$; $f(0{,}3)$; $f(-1{,}2)$.

850. Розв'яжіть нерівність:

а) $(3x - 1)(x + 3) > x(1 + 5x)$; б) $x^2 + 8x + 8 < 3x^2$.

851. Побудуйте графік функції:

а) $y = |x^2 - x|$; б) $y = x^2 - |x|$.

Скарбничка досягнень

✓ Можу навести приклади подій:
— неможливих;
— достовірних;
— випадкових.

✓ Можу пояснити, що таке:
— частота випадкової події;
— ймовірність випадкової події.

✓ Умію розв'язувати задачі, що передбачають:
— знаходження ймовірності випадкової події;
— обчислення частоти випадкової події.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

— Що таке середнє арифметичне

двох чисел a і b або n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\boxed{\frac{a+b}{2}} \qquad \boxed{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}}$$

— Як будують стовбчасті та секторні діаграми.

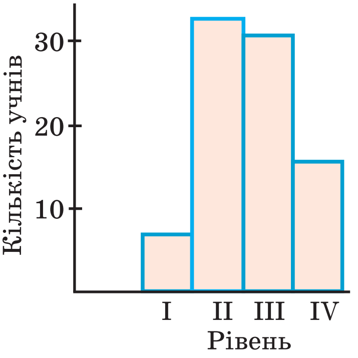
§ 21 Відомості про статистику

Науку, в якій досліджуються кількісні характеристики масових явищ, називають *математичною статистикою* (від латинського слова *status* — стан, становище).

Приклад 1. Із 87 дев'ятикласників однієї школи 7 мають оцінки, що відповідають I рівню навчальних досягнень, 33 — II, 31 — III і 16 — IV рівню. Це кількісні характеристики проведеної контрольної роботи. Їх можна подати у вигляді таблиці.

Рівень навчальних досягнень	I	II	III	IV
Кількість учнів	7	33	31	16

Наочно зобразити ці дані можна за допомогою стовпчастої діаграми (мал. 142).



Мал. 142

Стовпчасті діаграми у статистиці називають *гістограмами* (від грецьких слів *histós* — стовп, *gramma* — написання).

У розглянутому прикладі йдеться про 87 учнів. Справа значно ускладнюється, якщо досліджують *масові явища*, що охоплюють тисячі або й мільйони досліджуваних об'єктів. Наприклад, взуттєвикам треба знати, скільки взуття слід випускати того чи іншого розміру. Як це з'ясувати? Опитати всіх, тобто десятки мільйонів чоловіків і жінок, — надто дорого і довго. Тому роблять *вибірку* — формують скінченну сукупність незалежних результатів спостережень. У даному випадку опитують вибірково лише кілька десятків чи сотень людей.

Приклад 2. Припустимо, що, опитавши 60 жінок, розміри їхнього взуття записали в таблицю.

23,5	24	23,5	23	24,5	23	22,5	24,5	22,5	23,5	23,5	23,5
25,5	21	24	25	23,5	22	23	24,5	23	24,5	23	24,5
25	24	21,5	23,5	24,5	22,5	22	23,5	26,5	25,5	25	26
24	23	24	24,5	22	24	23,5	21,5	23,5	25	24	22,5
25,5	21,5	24,5	26	25	23,5	22,5	24	23	22,5	24	25

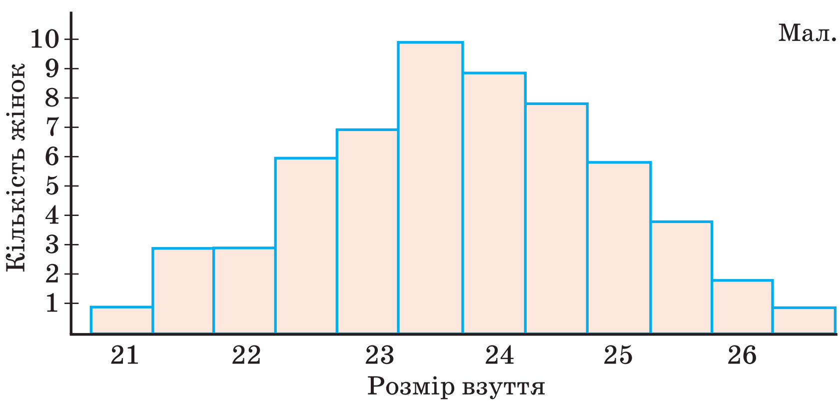
Це вибірка із 60 значень (даних). Для зручності їх групують у класи (за розмірами взуття) і відмічають, скільки значень вибірки містить кожний клас.

Розмір взуття	21	21,5	22	22,5	23	23,5	24	24,5	25	25,5	26	26,5
Кількість жінок	1	3	3	6	7	10	9	8	6	4	2	1

Такі таблиці називають *частотними*. У них числа другого рядка — частоти; вони показують, як часто трапляються у вибірці ті чи інші її значення. *Відносною частотою* значення вибірки називають відношення частоти значення до кількості усіх значень вибірки, виражене у відсотках. У розглянутому прикладі частота розміру взуття 24 дорівнює 9, а відносна частота — 15 %, бо 9 : 60 = 0,15 = 15 %.

За частотною таблицею можна побудувати гістограму (мал. 143). Вона наочно показує, яку частину взуття бажано випускати того чи іншого розміру. Зрозуміло, що одержані в такий спосіб висновки тільки ймовірні, наближені. Але для практичних потреб цього буває досить.

Деякі статистичні дані зручно подавати за допомогою графіків, як, наприклад на с. 91.



Мал. 143

Вибірки характеризують *центральними тенденціями*: модою, медіаною, середнім значенням.

Мода вибірки — це те її значення, яке трапляється найчастіше.

Медіана вибірки — це число, яке «поділяє» навпіл упорядковану сукупність усіх значень вибірки.

Середнім значенням вибірки називають середнє арифметичне усіх її значень.

Нехай дано вибірку: 1, 3, 2, 4, 5, 2, 3, 4, 1, 6, 4. (*)

Упорядкуємо її: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6.

Мода даної вибірки дорівнює 4, оскільки 4 трапляється найчастіше (тричі).

Медіана даної вибірки дорівнює 3, бо число 3 «поділяє» впорядковану вибірку навпіл: перед нею і після неї — однакові кількості членів упорядкованої вибірки.

Якщо впорядкована вибірка має парне число значень, то її медіана дорівнює півсумі двох її серединних значень. Наприклад, для вибірки 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6 медіана $m = \frac{3+4}{2} = 3{,}5.$

Середнє значення вибірки (*): $\frac{1+1+2+2+3+3+4+4+4+5+6}{11} = \frac{35}{11}.$

Вибірка може не мати моди, наприклад: 4, 5, 6, 7, 8;

мати дві моди: 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8.

Перевірте себе

1. Що досліджує математична статистика?
2. Що таке гістограма?
3. Які явища називають масовими?
4. Що таке вибірка? Частота вибірки?
5. Назвіть центральні тенденції вибірки.
6. Що таке середнє значення вибірки? А медіана, мода?

Виконаємо разом

1 Перевірка інспекцією якості 20 твердих сирів сорту «Український» (за вмістом жиру) дала такі результати.

Вміст жиру, %	44	45	46	47	48
Кількість випробувань	1	4	5	7	3

Знайдіть центральні тенденції вибірки.

● **Розв'язання.** Мода даної вибірки дорівнює 47, бо це значення трапляється найчастіше (7 разів).

Вибірка має парне число значень, тому її медіана дорівнює півсумі двох її серединних значень — під десятим і одинадцятим номерами, бо всього членів вибірки 20. Цим номерам у вибірці (44; 45; 45; 45; 45; 46; 46; 46; 46; 46; 47...) відповідають значення 46 і 47. Отже, (46 + 47) : 2 = 46,5 — медіана вибірки.

Знайдемо середнє значення вибірки:

$$\frac{44\cdot1+45\cdot4+46\cdot5+47\cdot7+48\cdot3}{20}=\frac{927}{20}=46{,}35.$$

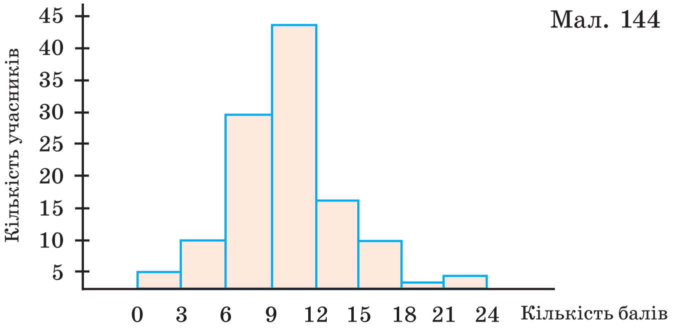
Відповідь. Мода — 47; медіана — 46,5; середнє значення — 46,35.

2 За розв'язування задач п'ять учасників олімпіади одержали від 0 до 3 балів, десять — від 4 до 6, тридцять — від 7 до 9, сорок чотири — від 10 до 12, шістнадцять — від 13 до 15, десять — від 16 до 18, два — від 19 до 21, три — від 22 до 24 балів. Складіть частотну таблицю і побудуйте відповідну гістограму.

Розв'язання. Частотна таблиця має такий вигляд

Кількість балів	0–3	4–6	7–9	10–12	13–15	16–18	19–21	22–24
Кількість учасників	5	10	30	44	16	10	2	3

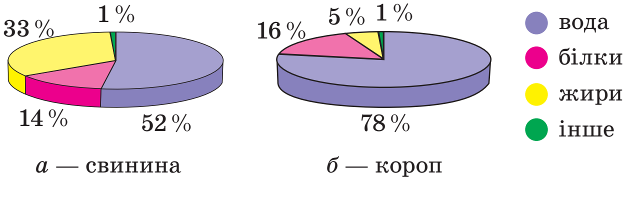
Відповідну гістограму наведено на малюнку 144.



Мал. 144

Виконайте усно

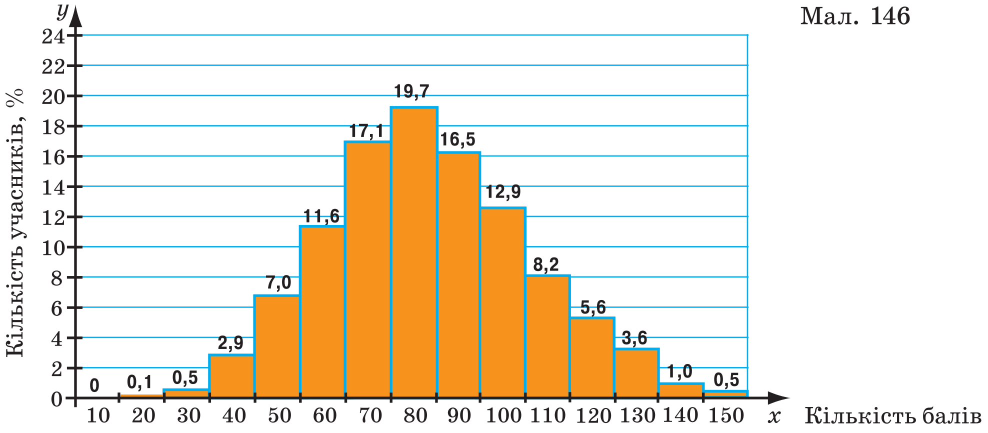
852. Проаналізуйте діаграму, яка демонструє хімічний склад харчових продуктів (мал. 145). Зробіть висновки.



Мал. 145

853. Знайдіть моду, медіану і середнє значення вибірки:
а) 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11;
б) 9, 10, 10, 11, 12, 12, 12, 13, 15, 15, 16, 17.

854. У конкурсі «Кенгуру» брали участь 2000 осіб рівня «Кадет». На мал. 146 зображено відповідність між кількістю учасників (%) і кількістю балів, яку вони набрали. Яку інформацію про результати конкурсу можна одержати за допомогою даної гістограми?



Мал. 146

Рівень А

855. Укажіть центральні тенденції вибірки і відносну частоту кожного її значення, якщо вибірку подано у формі такої частотної таблиці.

-30°	-20°	-10°	0°	10°	20°	30°
1	3	6	17	13	8	2

856. Дано 100 чисел; з них число 2 трапляється 15 разів, число 4 — 40, число 8 — 20, число 9 — 20, число 10 — 5 разів. Знайдіть їхнє середнє арифметичне.

857. Вимірявши зріст 40 учнів у сантиметрах, одержали таку частотну таблицю.

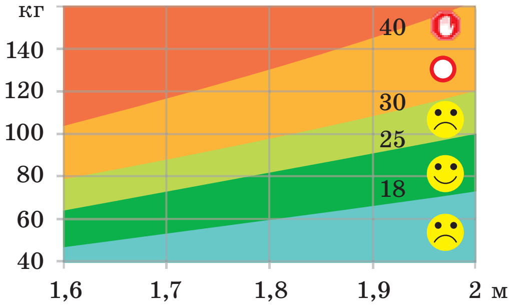
Зріст, см	162	163	164	165	166	167	168	169	170
Кількість учнів	3	5	4	2	6	10	6	3	1

Побудуйте відповідну гістограму. Визначте відносну частоту кожного значення.

858. У таблиці подано відсотки, що характеризують кількість учнів 10-х класів у США, які щодня курять. За допомогою комп'ютера побудуйте відповідну гістограму та графік. Які висновки можна зробити за цими даними?

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
12,2	10,1	8,9	8,3	7,5	7,6	7,2	5,9	6,3	6,6	5,5	5,0	4,4	3,2

859. На малюнку 147 задано середні норми індексу маси людини, незалежно від віку, статі та інших індивідуальних характеристик. Дізнайтеся, за якою формулою визначається індекс маси людини. Обчисліть його для себе і перевірте за графіками, що відповідають вашому віку, статі тощо.



Мал. 147

860. Складіть таблицю про споживання електроенергії за минулий рік у вашій родині. Обчисліть, скільки в середньому споживає ваша родина електроенергії: а) за місяць; б) за кожний квартал; в) за кожну пору року.

861. Знайдіть моду, медіану і середнє значення вибірки:
а) 2, 3, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7, 8;
б) 12, 17, 11, 13, 14, 15, 15, 16, 13, 13.

862. Учні класу написали контрольну роботу з алгебри. З них 4 одержали оцінки четвертого рівня навчальних досягнень, 16 — третього, 12 — другого, 13 — першого рівня. Зведіть ці дані в таблицю і побудуйте за нею кругову і стовпчасту діаграми.

863. Проведіть опитування 30 хлопців вашої школи про розмір їхнього взуття. Результати запишіть у таблицю, аналогічну попередній задачі. Складіть частотну таблицю і побудуйте відповідну гістограму.

864. Визначаючи розміри верхнього одягу 50 жінок, результати записали в таблицю.

50	44	50	48	54	46	52	48	54	52
48	48	52	50	46	50	54	48	56	50
52	48	42	56	50	48	50	46	54	48
46	46	48	48	52	48	56	50	52	46
52	48	50	54	50	50	54	44	58	46

Складіть частотну таблицю і побудуйте відповідну гістограму.

Рівень Б

865. Щоб з'ясувати, скільки і яких кашкетів слід пошити, виміряли в сантиметрах обводи голів 35 вибраних курсантів. Результати виявились такими.

Розмір	53	54	55	56	57	58	59
Кількість курсантів	1	7	10	12	3	1	1

Побудуйте відповідну гістограму та обчисліть центральні тенденції вибірки. Знайдіть відносну частоту кожного значення даної вибірки.

866. Проведіть опитування учнів вашого класу і з'ясуйте, скільки енергозберігаючих лампочок використовується в оселі кожного з ваших однокласників. За отриманими даними складіть частотну таблицю і побудуйте відповідну гістограму. Визначте відносну частоту кожного значення вибірки.

867. На уроці фізкультури 11 дівчат-дев'ятикласниць у стрибках у висоту показали такі результати: 90 см, 125 см, 125 см, 130 см, 130 см, 135 см, 135 см, 135 см, 135 см, 140 см, 140 см. Знайдіть моду, медіану і середнє значення вибірки. Який результат найкраще характеризує спортивну підготовку дівчат цього класу?

868. Шість учасників математичної олімпіади за розв'язування задач набрали менше 3 балів, десять — від 3 до 6, тридцять два — від 7 до 9, сорок п'ять — від 10 до 12, сімнадцять — від 13 до 15, вісім — від 16 до 18, п'ять — понад 18 балів. Складіть за цими результатами частотну таблицю і побудуйте відповідну гістограму.

869. Пекарня випікає кілограмові калачі. Під час перевірки виявилось, що маса трьох зі ста калачів менша від 1 кг на 31–40 г, п'ятнадцяти — на 21–30 г, двадцяти — на 11–20 г, тридцяти — на 1–10 г; маса сімнадцяти калачів більша від 1 кг на 1–9 г, а двох — на 10–19 г. Складіть частотну діаграму і побудуйте відповідну гістограму.

870. Розміри денної виручки (у тисячах гривень) у 30 випадково вибраних магазинах такі:

42	24	49	76	45	27	39	21	58	40
28	78	44	66	20	62	70	81	7	68
99	76	63	87	65	104	46	20	72	93

Складіть частотну таблицю на 5 інтервалів і побудуйте відповідну гістограму.

Скарбничка досягнень

- ✓ Можу знаходити, відбирати і впорядковувати інформацію з доступних джерел.
- ✓ Знаю способи подання даних та їх обробки.
- ✓ Можу подавати статистичні дані у вигляді таблиць, діаграм, графіків.
- ✓ Умію розв'язувати задачі, що передбачають подання даних та їх обробку.

Історичні відомості

Деякі властивості випадкових подій виявили італійські математики Л. Пачолі (1445 – 1514) і Д. Кардано (1501 – 1576) у зв'язку з дослідженнями азартних ігор.

Теорію ймовірностей як галузь математики започаткували французькі вчені П. Ферма (1601–1665) і Б. Паскаль (1623–1662).

Збирати й аналізувати статистичні дані люди почали давно. У Китаї переписи населення робилися ще понад 4 тис. років тому. У Київській Русі переписи здійснювалися з 1245 р.

Великий внесок у розвиток математичної статистики зробили У. Петті, А. Муавр, Л. Ейлер, Я. Бернуллі, П. Лаплас, С. Пуассон та ін.

У Російській імперії в XIX ст. проблеми статистики досліджували, зокрема, українські математики В. Я. Буняковський і М. В. Остроградський.

М. В. Остроградський народився в селі Пашенна на Полтавщині, навчався в Полтавській гімназії, Харківському університеті, у Парижі; був академіком Російської, Туринської, Римської, Американської академій наук, членом-кореспондентом Паризької академії.

М. В. Остроградський (1801–1862)

М. В. Остроградський одержав основоположні результати в галузі математичного аналізу, теоретичної механіки, теорії ймовірностей, математичної фізики, балістики, теорії теплоти, написав «Курс небесної механіки». Багато уваги приділяв наближеним обчисленням, відсоткам. Розробив статистичні методи бракування товарів.

Пам'ятник М. В. Остроградському споруджено в м. Полтава.

Багато працював у галузі прикладної математики і український математик **М. П. Кравчук**.

М. П. Кравчук (1892–1942)

Народився він у селі Човниця на Волині, закінчив Луцьку гімназію, Київський університет. Із 1925 р. — професор, з 1929 р. — академік Всеукраїнської академії наук, її вчений секретар, очолював Комісію математичної статистики. 1938 р. його було безпідставно репресовано. Загинув на Колимі.

Пам'ятник М. П. Кравчуку споруджено в м. Київ.

Головне в розділі

Комбінаторика — розділ математики, присвячений розв'язуванню задач вибору та розташування елементів деякої скінченної множини відповідно до заданих правил.

Розглянемо два основних правила, за допомогою яких розв'язується багато задач із комбінаторики.

Комбінаторне правило суми

Якщо елемент деякої множини A можна вибрати m способами, а елемент множини B — n способами, то елемент з множини A або ж із множини B можна вибрати m + n способами.

Комбінаторне правило добутку

Якщо перший компонент пари можна вибрати m способами, а другий — n способами, то таку пару можна вибрати mn способами.

Випадкові події — такі, які можуть відбутися або не відбутися.

Якщо в n випробуваннях подія X відбувається m разів, то дріб $\frac{m}{n}$ визначає відносну частоту появи події X. Число, біля якого коливається відносна частота події, виражає *ймовірність* цієї події, її позначають буквою P (від англійського слова *probability* — ймовірність).

Властивості ймовірності випадкової події.

1. Якщо C — подія неможлива, то $P(C) = 0$.
2. Якщо B — подія достовірна, то $P(B) = 1$.
3. Якщо X — подія випадкова, то $0 \le P(X) \le 1$.
4. Якщо $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ — елементарні події, що вичерпують деяке випробування, то

$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots + P(E_n) = 1$.

Математична статистика — розділ прикладної математики, в якому досліджуються кількісні характеристики масових явищ. Статистичні дані визначають здебільшого за допомогою *вибірки* — скінченної сукупності незалежних результатів спостережень. Вибірку впорядковують, складають частотну таблицю, на її основі будують відповідну діаграму або гістограму.

Центральні тенденції вибірки:

а) *середнє значення вибірки* — середнє арифметичне усіх її значень;

б) *мода вибірки* — це те її значення, яке трапляється найчастіше;

в) *медіана вибірки* — серединне значення, яке «поділяє» навпіл упорядковану сукупність усіх значень вибірки.

Для характеристики результатів статистичної обробки масових даних застосовують таблиці, графіки, діаграми, гістограми.

З'ясовуємо досягнення

Тестові завдання № 4

1 Скільки двоцифрових чисел можна скласти з цифр 5 і 6, якщо цифри у числі можуть повторюватися:
а) одне; б) два; в) три; г) чотири?

2 З цілих чисел від 1 до 20 називають одне. Яка ймовірність того, що воно виявиться дільником числа 20?
а) 0,3; б) 0,4; в) 0,5; г) 0,6.

3 Середнє арифметичне усіх цілих чисел проміжка $-10 < x < 40$, дорівнює:
а) 10; б) 15; в) 20; г) 30.

4 Протягом перших десяти днів жовтня о 7 год ранку температура була такою: 6°, 8°, 8°, 7°, 5°, 8°, 6°, 7°, 8°, 8°. Знайдіть моду вибірки.
а) 7°; б) 6°; в) 8°; г) 5°.

5 Знайдіть медіану вибірки 1, 7, 5, 7, 3, 7, 1, 8, 3.
а) 1; б) 7; в) 5; г) 3.

6 На таці лежать різні за формою пиріжки. Серед них 5 пиріжків із сиром і 3 з вишнями. Скільки можливостей має дитина, щоб взяти один пиріжок?
а) одну; б) дві; в) три; г) чотири.

7 У якому випадку подію X називають неможливою?
а) $P(X) = 1$; б) $P(X) = -1$; в) $0 < P(X) < 1$; г) $P(X) = 0$.

8 Вісім друзів вирішили обмінятися візитівками. Скільки візитівок усього буде роздано:
а) 64; б) 72; в) 32; г) 56?

9 Із букв, написаних на окремих квадратних картках, складено слово МАТЕМАТИКА. Потім ці картки перевернуто, перемішано і навмання взято одну. Яка ймовірність того, що на ній написано букву «А»:
а) 0,1; б) 0,2; в) 0,3; г) 0,4?

10 Андрій загубив одну шахову фігуру. Яка ймовірність того, що вона — тура?
а) 0,5; б) 0,025; в) 0,0625; г) 0,125.

Типові завдання до контрольної роботи № 4

1° В коробці 20 цукерок у синіх обгортках і 80 — у червоних. Яка ймовірність того, що взята навмання цукерка виявиться в синій обгортці?

2° Скільки існує трицифрових чисел, які діляться на 5?

3° Беруть навмання пластинку доміно. Яка ймовірність того, що на ній більше ніж 10 очок.

4° За червень, липень і серпень родина витратила відповідно 88, 70 і 72 кВт · год. електроенергії. Якими в середньому були витрат електроенергії цією родиною за один місяць влітку.

5• Знайдіть моду, медіану і середнє значення вибірки: 7, 5, 3, 7, 6, 7, 4, 6, 8, 5.

6• На 100 000 білетів лотереї припадають 662 виграші. З них: 2 по 5000 грн, 10 по 1000 грн, 50 по 200 грн, 100 по 50 грн, 500 по 10 грн. Решта білетів невиграшні. Знайдіть імовірність виграшу понад 200 грн. на один білет.

7• Аналізуючи кількість проданих авіаквитків у квітні, отримали дані:

57	55	60	46	55	54	57	54	49	52
51	65	60	56	45	59	53	61	47	42
47	58	56	53	59	64	49	58	59	63

Складіть частотну таблицю і побудуйте відповідну гістограму. Обчисліть центральні тенденції вибірки.

8• Нехай рік має 365 днів. Якай імовірність того, що на випадково вирваному листку календаря число: а) кратне 10; б) дорівнює 29?

9•• Учень має 4 книжки з української літератури і 3 книжки з математики. Скількома способами він може розставити ці книжки на полиці так, щоб: а) книжки з одного предмета стояли поруч; б) книжки з одного предмета не стояли поруч?

10•• Стрілець у незмінних умовах робить 5 серій пострілів по мішені. У кожній серії — 100 пострілів. Результати стрільби занесено в таблицю. Знайдіть відносну частоту влучення в мішень: а) у кожній серії; б) у перших 300 пострілах; в) в останніх 300 пострілах; г) у всіх 500 пострілах. Сформулюйте гіпотезу про ймовірність влучення в мішень.

Номер серії	1	2	3	4	5
Кількість влучень у мішень	69	64	72	78	65

Навчальний проект № 1

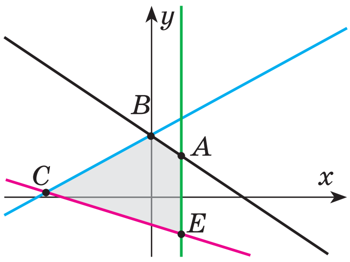
Нерівності в алгебрі

Нерівності з двома змінними

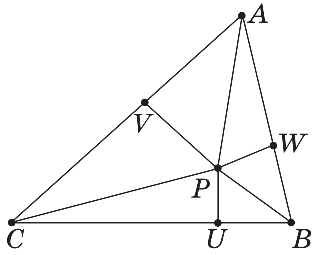
Нерівності в геометрії

Нерівність Барроу

$PA + PB + PC \geq 2(PU + PV + PW)$



Цікаві нерівності



Клас поділяється на три групи: «історики», «математики», «практики». Кожен учень може взяти участь у роботі однієї або двох проектних груп. Учні формують групи, працюють індивідуально чи в парах над однією із запропонованих нижче тем.

Теми для проектної діяльності повідомляються наприкінці першої чверті. Учням рекомендується самостійно ознайомитися з теоретичним матеріалом, що міститься в § 7 підручника.

Результати роботи над проектом бажано оформити у вигляді групового портфоліо з комп'ютерною презентацією.

Захист проектів доцільно провести на позакласному заході, запросивши учнів інших класів, учителів і батьків.

Історики вивчають виникнення та використання нерівностей на різних етапах розвитку математики. На захист готують коротке повідомлення і презентацію з конкретними прикладами.

Математикам пропонується розширити відомості про нерівності, розглянувши нерівності в алгебрі та геометрії.

Тематика для індивідуальних досліджень (чи досліджень у малих групах) може бути такою:

— розв'язування нерівностей з двома змінними;
— розв'язування нерівностей, що містять модулі;
— розв'язування нерівностей, що містять параметри;
— різні методи доведення нерівностей;
— іменні нерівності;
— геометричні нерівності.

Розглянемо детальніше нерівність, яка стосується й алгебри, й геометрії. Це *нерівність трьох квадратів*, яка правильна для будь-яких дійсних чисел a, b і c:

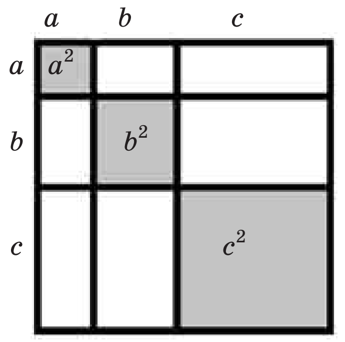
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Доведемо її. Знайдемо різницю лівої і правої частини нерівності та виділимо повні квадрати. Маємо:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0{,}5((a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2) \geq 0, \text{ тобто}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0, \text{ або } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Що і треба було довести.



Цікавою є геометрична модель нерівності трьох квадратів. Спробуйте довести це твердження геометрично.

У математиці нерівність трьох квадратів можна використовувати для:

а) доведення інших нерівностей;

б) визначення найбільших чи найменших значень багатьох виразів із трьома змінними;

в) розв'язування цікавих рівнянь, нерівностей і їх систем.

Аналогічно можна довести і *нерівність n квадратів:*

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 \geq \frac{2}{n-1}\,(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n).$$

Практики з'ясовують, що за допомогою нерівностей та їх властивостей моделюються відношення «менше» і «більше» із навколишнього світу. Цій групі учнів рекомендується розглянути:

— прикладні задачі, що зводяться до розв'язування нерівностей;

— нерівності та наближені обчислення;

— використання ІКТ для розв'язування нерівностей.

Розглянемо детальніше питання, що стосується нерівностей і наближених обчислень.

Наближені обчислення. Чи можна виміряти довжину рейки абсолютно точно? Ні. Навіть якщо почуєте, що довжина якоїсь рейки дорівнює, наприклад, 9,42783 м, не вірте цьому. Адже довжину такої рейки з точністю до сотої частки міліметра не можна виміряти. Результат кожного вимірювання — наближене значення величини.

• З'ясуйте, які з наведених у прикладах чисел можна віднести до точних, а які — до наближених:

а) у школі навчаються 900 учнів;

б) маса Місяця — $7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг;

в) площа басейну — 600 м^2;

г) товарний поїзд складається з 60 вагонів;

ґ) прискорення вільного падіння дорівнює 9,8 м/с^2;

д) клавіатура комп'ютера містить 113 клавіш, а клавіатура фортепіано — 87;

е) потомство однієї інфузорії туфельки на рік становить $75 \cdot 10^{108}$ особин;

є) африканська антилопа імпала може стрибнути в довжину на 7,5 м, а кенгуру — на 12 м;

ж) рецепт овочевої запіканки має 9 компонентів.

Якщо, вимірюючи довжину x деякої рейки, виявили, що вона більша за 6,427 м і менша від 6,429 м, то записують:

$$6{,}427 \text{ м} \leq x \leq 6{,}429 \text{ м} \quad \text{або} \quad x = 6{,}428 \pm 0{,}001 \text{ м}.$$

Говорять, що значення довжини рейки знайдено з точністю до 0,001 м (одного міліметра), або абсолютна похибка наближеного значення 6,428 не перевищує 0,001.

Абсолютною похибкою **наближеного значення називають модуль різниці між наближеним і точним значеннями.**

Якщо точне значення величини не відоме, то не відома й абсолютна похибка її наближеного значення. У такому випадку вказують ***межу абсолютної похибки*** — число, яке не перевищує абсолютна похибка.

У розглянутому вище прикладі межа абсолютної похибки наближеного значення 6,428 дорівнює 0,001. Тут цифри 6, 4 і 2 точні, а 8 — сумнівна, від точної цифри вона відрізняється не більш ніж на одиницю.

Якщо $x = 3{,}274 \pm 0{,}002$, тобто $3{,}272 \le x \le 3{,}276$, то межа абсолютної похибки наближеного значення 3,274 дорівнює 0,002.

• Перетворивши звичайний дріб $\frac{2}{3}$ у десятковий, одержали 0,6667. Знайдіть абсолютну похибку цього наближення. Знайдіть наближене значення числа $\frac{2}{3}$ з точністю до тисячних і його абсолютну похибку.

• Гепард розвинув швидкість 34,5 м/с. Виразіть цю швидкість у кілометрах за годину, округліть до цілих і знайдіть абсолютну похибку наближення.

• Швидкість світла у вакуумі (у метрах за секунду) — 299 792 458 ± 2, а швидкість звуку в повітрі — 331,6 ± 0,1 м/с. Назвіть наближене значення швидкості світла і швидкості звуку та відповідні межі абсолютних похибок.

Наближені значення можна записувати і без меж похибок. При цьому домовилися записувати їх так, щоб усі цифри, крім останньої, були правильні, а останні (сумнівні) відрізнялися від правильних не більш ніж на одиницю. Наприклад, якщо пишуть $x = 6{,}428$ м, то розуміють, що

$$6{,}427 \le x \le 6{,}429, \text{ або } x = 6{,}428 \pm 0{,}001 \text{ м.}$$

Якщо $y = 3{,}247 \pm 0{,}002$ кг, то писати $y = 3{,}247$ кг не прийнято. Такий результат бажано округлити: $y = 3{,}25$ кг.

Уявіть, що виміряли (у сантиметрах) товщину h книжки і довжину l шибки:

$h = 1{,}6$ — з точністю до 0,1, $l = 71{,}5$ — з точністю до 0,1.

Межі абсолютних похибок обох значень однакові: 0,1. Але в одному випадку ця похибка припадає на невелике число 1,6, а в іншому — на значно більше число 71,5. Щоб оцінити якість вимірювань, обчислюють відносні похибки.

Відносною похибкою наближеного значення називають відношення абсолютної похибки до модуля наближеного значення.

Наприклад, відносні похибки наближень h і l дорівнюють відповідно:

$0{,}1 : 1{,}6 = 0{,}0625 = 6{,}3\ \%$; $0{,}1 : 71{,}5 = 0{,}0014 = 0{,}14\ \%$.

Значення l визначено якісніше, з меншою відносною похибкою.

• Порівняйте точність вимірювань товщини d людської волосини і діаметра D Сонця, якщо $d = 0{,}15 \pm 0{,}005$ мм, а $D = 1\,392\,000 \pm 1000$ км.

• Маса Землі дорівнює $(5{,}98 \pm 0{,}01) \cdot 10^{27}$ г, а маса дитячого м'яча — $(2{,}5 \pm 0{,}1) \cdot 10^{2}$ г. Яке вимірювання точніше?

Дії над наближеними значеннями можна виконувати з точним урахуванням похибок і без точного врахування похибок. Точно враховувати похибки можна на основі властивостей подвійних нерівностей. Нехай, наприклад, маса болта в грамах $x = 325 \pm 2$, а маса гайки $y = 117 \pm 1$, тобто $323 \le x \le 327$ і $116 \le y \le 118$.

Додавши почленно ці подвійні нерівності, одержимо:

$$439 \le x + y \le 445, \text{ або } x + y = 442 \pm 3.$$

Аналогічно можна виконувати й інші дії над наближеними значеннями. Роблять так у найвідповідальніших обчисленнях.

• Чи можна увімкнути в коло прилад з опором 44 ± 0,5 Ом, щоб при напрузі 215 ± 15 В сила струму не перевищувала 6 А?

• Необхідно перевезти 1000 ± 20 м^3 бетону. Скільки рейсів має зробити самоскид, щоб виконати цю роботу, якщо кузов містить 2,25 ± 0,02 м^3?

У менш відповідальних випадках користуються ***правилами підрахунку цифр***.

Нагадаємо, що ***десятковими знаками*** **числа називають усі його цифри, що стоять праворуч від десяткової коми.**

Значущими цифрами **числа називають усі його цифри, крім нулів ліворуч, які стоять перед першою цифрою, відмінною від нуля, і нулів праворуч, що стоять на місцях цифр, замінених при округленні.**

Наприклад, у наближеному значенні 0,03074 п'ять десяткових знаків і чотири значущі цифри: 3, 0, 7, 4. А в наближеному значенні діаметра Землі d = 12 700 км десяткових знаків немає, а значущих цифр три: 1, 2 і 7.

Нехай дано наближені значення x = 3,24 і y = 1,4. Позначимо перші відкинуті при округленні їх цифри знаками запитання: x = 3,24?, y = 1,4?. Знайдемо суму і різницю цих наближених значень:

$$\begin{array}{r} 3{,}24? \\ +\;1{,}4? \\ \hline 4{,}6?? \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 3{,}24? \\ -\;1{,}4? \\ \hline 1{,}8?? \end{array}$$

Взагалі, **при додаванні і відніманні наближених значень у результаті слід зберігати стільки десяткових знаків, скільки їх має компонент дії з найменшою кількістю десяткових знаків.**

При множенні наближених значень у результаті слід зберігати стільки значущих цифр, скільки їх має множник з найменшою кількістю значущих цифр.

Подібним правилом користуються і при діленні наближених значень.

Виділені жирним шрифтом правила називають ***правилами підрахунку цифр***. Вони не забезпечують високої точності наближених обчислень, але цілком достатні для більшості прикладних задач.

• Знаючи, що діаметр стовбура липи дорівнює 57 см, учень обчислив площу поперечного перерізу стовбура: 2550,5 см^2. Чи правильна ця відповідь? Якщо неправильна — виправте.

• Знайдіть площу трапеції, основи якої a 1,7; b 0,43 і висота h 0,841.

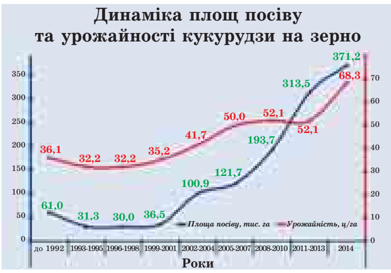
Люди бояться наближень, хоча в повсякденній практиці мають справу виключно з наближеними числами.

А. Б. Емпахер

Обчислення має проводитися з тим ступенем точності, яка необхідна для практики, причому будь-яка неправильна цифра становить помилку, а кожна зайва цифра — половину помилки.

О. М. Крилов

Навчальний проект № 2



Функції навколо нас

Цей навчальний проект складається із двох частин.

Першу частину присвячено розгляду загальних теоретичних питань, що стосуються функцій. Учні обирають напрям дослідження і в такий спосіб поділяються на групи: «дизайнери», «історики», «журналісти», «фахівці з IT-технологій», «математики» тощо. Кожен учень може взяти участь у роботі однієї або двох проектних груп.

Дизайнери з'ясовують, де і як використовують елементи графіків функцій у художньо-технічному проектуванні окремих виробів та їхніх комплексів у різних галузях знань — в архітектурі, оздобленні одягу тощо. Наводять приклади таких функцій.

Історики вивчають виникнення та використання поняття «функція». На захист готують коротке повідомлення і презентацію з конкретними означеннями та відомостями про їх авторів. Наприклад.

➢ У другій половині XIX ст. (після створення теорії множин) в означення функції, крім ідеї відповідності, включено ще й ідею множини: «Якщо кожному елементу x множини A поставлено у відповідність деякий певний елемент y множини B, то кажуть, що на множині A задано функцію $y = f(x)$, або, що множина A відображається на множину B». Таке означення функції можна застосовувати не лише до величин і чисел, а й до інших математичних об'єктів, наприклад, до геометричних фігур.

Журналісти шукають художні твори чи окремі цитати, у яких згадується про ті чи інші функції та їх властивості. Наприклад.

> *— Немає жодної галузі людського знання, куди не входили б поняття про функції та їх графічне зображення.*
>
> *К. Ф. Лебединцев*

Фахівці з IT-технологій демонструють, як за допомогою інформаційних технологій можна будувати графіки складних функцій, вивчати їх властивості та розв'язувати рівняння, нерівності та їх системи. Наприклад, будують графіки функцій у Excel, GRAN чи GeoGebra.

Математики — вивчають функції, що не розглядають в основній школі. Наприклад, функції цілої і дробової частини числа, показникові, тригонометричні функції тощо.

Друга частина проекту присвячена моделюванню різних процесів під час розв'язування прикладних задач. Передбачається, що функції, геометричні фігури, вирази, рівняння та їх системи, діаграми тощо будуть використовуватися як математичні моделі. Учні мають ознайомитися з поданим нижче теоретичним матеріалом «Математичне моделювання» і розв'язати визначені вчителем задачі.

Учням рекомендується самостійно опрацювати поданий нижче теоретичний матеріал.

Математичне моделювання

Математичними методами розв'язують не тільки абстрактні математичні задачі про числа, фігури, рівняння, функції тощо, а й багато інших. *Прикладними задачами* в математиці називають такі, умови яких містять нематематичні поняття. Розв'язуючи прикладну задачу математичними методами, спочатку створюють її математичну модель.

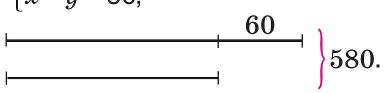
Задача 1. У двох магазинах — 580 кг яблук. Скільки яблук у кожному магазині, якщо в першому на 60 кг більше, ніж у другому. Складіть різні математичні моделі цієї задачі.

Розв'язання. Нехай у першому магазині — x кг яблук, тоді в другому їх — $(x - 60)$ кг, а разом — $(x + x - 60)$ кг. Маємо рівняння $x + x - 60 = 580$. Звідси: $2x = 640$, $x = 320$, $x - 60 = 320 - 60 = 260$.

Відповідь. 320 кг і 260 кг.

Рівняння $x + x - 60 = 580$ — одна з математичних моделей розглянутої задачі. Можна створити й інші її моделі, зокрема у вигляді:

- рівняння $y + y + 60 = 580;$
- системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 580, \\ x - y = 60; \end{cases}$
- схеми



***Моделлю* називають спеціально створений об'єкт, який відображає властивості досліджуваного об'єкта** (від французького слова *modèle* — копія, зразок). Зменшені моделі літака, греблі, автомобіля — приклади фізичних моделей.

Математична модель — це система математичних співвідношень, яка наближено в абстрактній формі описує досліджуваний об'єкт, процес або явище.

Математичні моделі створюють з математичних понять і відношень: геометричних фігур, чисел, виразів тощо. Математичними моделями здебільшого бувають функції, рівняння, нерівності, їх системи.

Процес побудови математичної моделі та подальше її застосування для розв'язування конкретних задач називається ***математичним моделюванням***.

Розв'язування прикладної задачі математичними методами здійснюється в три етапи:

1) створення математичної моделі даної задачі;
2) розв'язування відповідної математичної задачі;
3) аналіз відповіді.

Задача 2. Чи достатньо одного мільйона літрів води для проведення змагань з плавання в басейні з горизонтальним дном прямокутної форми довжиною 100 м і шириною 25 м?

Розв'язання. І. Створення математичної моделі задачі. Вода в басейні з горизонтальним дном набуває форми прямокутного паралелепіпеда, який і є для даної задачі математичною моделлю реального об'єкта. У цьому паралелепіпеді одне з ребер відповідає висоті води (a — шукане значення), інші ребра — це довжина (b) і ширина (c) басейну.

ІІ. Розв'язування математичної задачі. $V = a \cdot b \cdot c$ — об'єм прямокутного паралелепіпеда з вимірами a, b і c. За умовою задачі:

$b = 100$ м, $c = 25$ м; $V = 1\,000\,000$ л $= 1\,000\,000$ дм^3 $= 1000$ м^3.

Маємо: $1000 = a \cdot 100 \cdot 25$, звідси $a = \dfrac{1000}{2500} = 0{,}4$ (м).

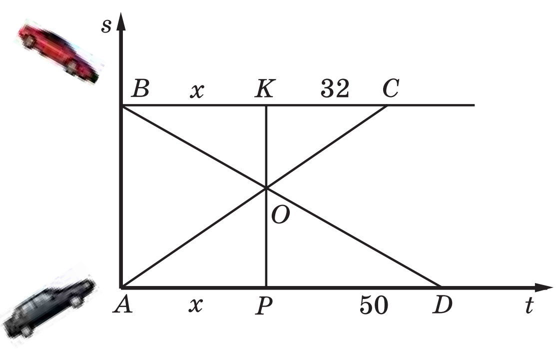
ІІІ. Аналіз відповіді. Для змагань з плавання глибина 0,4 м — надто мала. Отже, 1 000 000 л води в даному басейні недостатньо для проведення змагань з плавання.

Відповідь. Недостатньо.

Для багатьох задач на рух найзручнішими математичними моделями є графіки, побудовані в декартовій системі координат. На осі абсцис t відмічають час руху, а по осі ординат s — пройдену відстань. Зі зміною часу відстань між містами не змінюється, цьому факту відповідають паралельні прямі. Розглянемо задачу.

Задача 3. З міст A і B виїхали одночасно назустріч один одному два автомобілі. Перший приїхав до B через 32 хв після зустрічі, а другий до A — через 50 хв після зустрічі. Скільки хвилин вони їхали до зустрічі?

Розв'язання. Нехай AC і BD — графіки руху першого і другого автомобілів. Якщо кожен із них їхав до зустрічі x хв, тобто $AP = BK = x$, то $KC = 32$, $PD = 50$.



$$\Delta AOP \sim \Delta COK \text{ і } \Delta POD \sim \Delta KOB, \text{ тому}$$

$$\frac{AP}{KC} = \frac{OP}{OK} = \frac{PD}{BK}.$$

$$\text{Отже, } \frac{x}{32} = \frac{50}{x}, \text{ звідси } x = 40.$$

Відповідь. 40 хв.

Математичними моделями даної задачі є система графіків, зображена на малюнку, та рівняння $x : 32 = 50 : x$. Спробуйте створити інші її математичні моделі.

Наприклад, візьміть до уваги, що $AD \parallel BC$, а тангенси кутів нахилу AC і BD до цих прямих — швидкості рухів відповідних об'єктів.

1. Наведіть приклади відношень між фізичними величинами, які можна змоделювати рівністю: $y = mx$, $y = \frac{m}{x}$.

2. Сформулюйте прикладну задачу, математичною моделлю якої є формула:

а) $l = 2\pi r$; б) $S = \pi r^2$; в) $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Виконаємо разом!

1 Два фермери, працюючи на комбайнах, можуть разом зібрати врожай пшениці за 12 год. За скільки годин кожен з них, працюючи окремо, міг би зібрати цей урожай, якщо відомо, що продуктивність праці першого в 1,5 раза вища від продуктивності праці другого?

Розв'язання. Нехай перший фермер може зібрати всю пшеницю за x год, тоді другий — за $1{,}5x$ год. За 1 год перший може зібрати $\frac{1}{x}$ частину поля, а другий — $\frac{1}{1{,}5x}$ частину. Разом за 1 год вони можуть зібрати врожай з $\frac{1}{12}$ частини поля. Отже,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1{,}5x} = \frac{1}{12},\ \text{звідси}\ \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{1{,}5}\right) = \frac{1}{12},\ \ x = \frac{2{,}5}{1{,}5} \cdot 12,\ \ x = 20;\ 1{,}5 \cdot 20 = 30.$$

Відповідь. 20 год; 30 год.

2 На проведення кожного тиражу лотереї витрачають 55 000 грн. Один білет лотереї коштує 1 грн. Третина виручки від продажу білетів іде у виграшний фонд, чверть — на сплату податків, а решта — прибуток організаторів лотереї. Яким був прибуток, якщо продали 180 000 білетів? Скільки білетів треба продати, щоб мати прибуток понад 30 000 грн? За якої умови організатори не одержать прибутку?

Розв'язання.

I. Нехай S — виручка за продаж білетів, а P — прибуток. Тоді $S = \frac{S}{3} + \frac{S}{4} + P + 55\,000$, а $P = \frac{5S}{12} - 55\,000$.

II . 1. Якщо $S = 180\,000$ грн, то $P = \frac{5 \cdot 180\,000}{12} - 55\,000 = 20\,000$ (грн).

2. Якщо $P > 30\,000$, то $\frac{5S}{12} - 55\,000 > 30\,000$, а $S > 204\,000$ (грн).

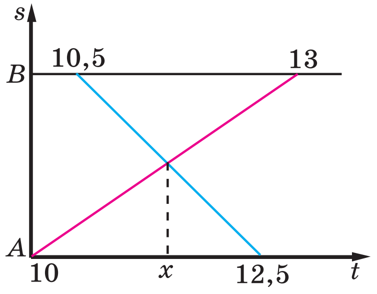
3. Якщо $P \le 0$, то $\frac{5S}{12} - 55\,000 \le 0$, а $S \le 132\,000$.

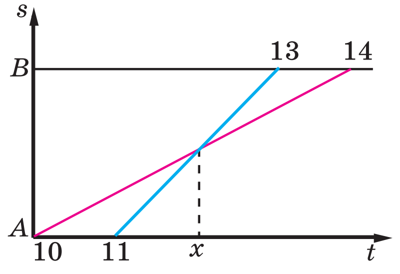
III. Оскільки один білет лотереї коштує 1 грн, то кількість проданих білетів (K) чисельно дорівнює виручці. Отже, якщо $K > 204\,000$ штук, то прибуток перевищить 30 000 грн, а якщо $K \le 132\,000$ штук, то організатори прибутку не матимуть.

Відповідь. 20 000 грн; понад 204 000 штук; якщо кількість проданих білетів не перевищить 132 000 штук.

Подані нижче дві задачі розв’яжіть усно, дивлячись на їх графічні моделі.

3 О 10 год з міста *A* до міста *B* виїхав мотоцикліст, а через 30 хв йому назустріч з *B* виїхав автомобіль. О котрій годині вони зустрілись, якщо автомобіль до *A* приїхав о 12 год 30 хв, а мотоцикліст до *B* — о 13 год (малюнок ліворуч)?





4 О 10 год з міста *A* до міста *B* виїхав мотоцикліст, об 11 год так само з *A* до *B* — автомобіль. О котрій годині автомобіль наздогнав мотоцикліста, якщо він приїхав до *B* о 13 год, а мотоцикліст — о 14 год (малюнок праворуч)?

Створіть математичні моделі до задач і розв’яжіть їх.

1. Корова прив’язана на галявині до кілка мотузкою завдовжки 8 м. Яку площу вона випасає?

2. Щоб підняти відро з криниці, треба зробити 12 обертів коловорота. Знайдіть глибину криниці, якщо діаметр вала коловорота становить 24 см.

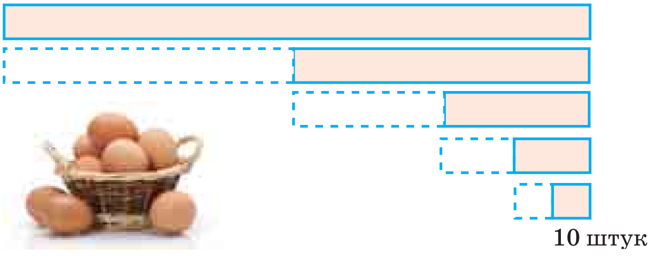
3. Батько старший за сина в 4 рази, а через 5 років він буде старший за сина тільки в 3 рази. Скільки років синові тепер?

4. ***Задача Безу.*** Робітнику сказали, що він одержуватиме по 24 су за кожний відпрацьований день, але при цьому відраховуватимуть по 6 су за кожний прогул. Через 30 днів з’ясувалося, що йому нічого одержувати. Скільки днів він працював?

5. На одному складі вугілля в 2 рази більше, ніж на другому. Якщо на перший склад привезти ще 80 т, а на другий — 145 т, то на обох складах вугілля буде порівну. Скільки тонн вугілля є на кожному складі?

6. В одному мішку було 60 кг цукру, а в другому — 80 кг. З другого мішка взяли цукру в три рази більше, ніж з першого, і тоді в першому мішку залишилось цукру вдвоє більше, ніж у другому. По скільки кілограмів цукру взяли з кожного мішка?

7. З кошика взяли половину всіх яєць, потім — половину остачі, потім — половину нової остачі, нарешті — половину нової остачі. Після цього в кошику залишилося 10 яєць. Скільки яєць було в кошику спочатку?



*Для задач **8–9** створіть моделі, аналогічні тій, що використовується в задачі **7**. Дайте відповіді на поставлені запитання.*

8. Оля спекла пиріжки і два відразу з’їла сама. Половину пиріжків, що залишилися, вона віддала батькам, а половину остачі — подругам. Три пиріжки, що після цього залишилися, вона віддала молодшому брату. Скільки пиріжків спекла Оля?

9. У понеділок учні взяли половину всіх нових підручників, у вівторок — половину остачі, у середу — половину нової остачі. Після цього в бібліотеці залишилося 25 нових підручників. Скільки нових підручників було в бібліотеці?

Розв’яжіть задачі **10** і **11** та зіставте їх математичні моделі.

10. Два ковалі, працюючи разом, виконують певну роботу за 8 днів. За скільки днів виконав би цю роботу другий коваль, якщо перший може виконати її за 12 днів?

11. а) Одна бригада може виконати роботу за 3 год, друга — за 5 год. За скільки годин виконали б цю роботу обидві бригади разом?

б) Однією з двох труб басейн можна наповнити за 3 год, а другою — за 5 год. За скільки годин наповниться басейн, якщо відкрити обидві труби?

в) Від станції A до станції B і від B до A одночасно виїхали два автомобілі. Через скільки годин вони зустрінуться, якщо відомо, що перший автомобіль відстань AB долає за 3 год, а другий — за 5 год?

12. Які розміри мають золотий і срібний злитки у формі куба, якщо маса кожного дорівнює 3 кг? Густина золота — 19,3 г/см^3, а густина срібла — 10,5 г/см^3.

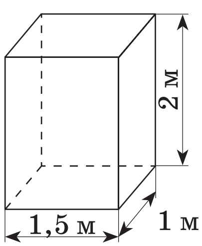
13. ***Задача Маклорена.*** Кілька людей обідали разом і мали заплатити за обід 175 шилінгів. З’ясувалося, що у двох не було з собою грошей, тому інші заплатили на 10 шилінгів більше, ніж їм належало. Скільки людей обідало?

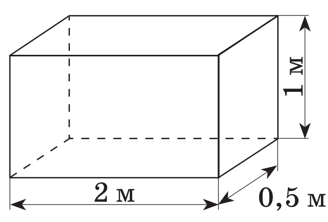
14. На малюнку зображено два резервуари, що мають форму прямокутного паралелепіпеда, і подано їх розміри. Перший резервуар наповнено водою на $\frac{3}{5}$ об’єму, а другий — на $\frac{3}{4}$ об’єму. З першого резервуара щодня беруть 112 літрів води, а з другого — 31 л.

а) Запишіть дріб, який показує, у скільки разів через x днів у першому резервуарі залишиться води більше, ніж у другому.

б) Обчисліть, у скільки разів у першому резервуарі залишиться води більше, ніж у другому через 9 днів.

в) Що означає рівність $\frac{1800-112x}{750-31x}=3$? Розв’яжіть це рівняння і зробіть висновок.





15. ***Відкрита задача.*** Складіть задачу, аналогічну попередній.

16. Заводу було замовлено виготовити 105 двигунів. Завод щодня виготовляв на 6 двигунів більше, ніж передбачалось, тому виконав замовлення на 2 дні раніше. Скільки двигунів завод виготовляв щодня?

17. У розіграші першості з футболу було зіграно 55 матчів, кожна команда грала з кожною іншою по одному разу. Скільки команд брало участь у розіграші?

18. ***Задача Фібоначчі.*** Дві вежі, одна заввишки 40, а друга — 30 футів, розташовані на відстані 50 футів одна від одної. До розміщеної між ними криниці злітаються одночасно з обох веж два птахи. Якщо птахи летять з однаковою швидкістю, то вони водночас долітають до криниці. Знайдіть відстань від криниці до веж.

19. Дві бригади мулярів, працюючи разом, можуть виконати роботу за 4 дні. За скільки днів кожна бригада окремо могла б виконати цю роботу, якщо перша зробить це на 6 днів раніше, ніж друга?

20. Двома екскаваторами різної потужності, що працювали разом, вирили котлован за 6 год. Якби одним з них вирили б половину котловану, а потім другим — решту, то всю роботу було б закінчено за 12,5 год. За скільки годин кожним екскаватором окремо можна виконати всю роботу?

21. Двома насосами, що працювали разом, наповнили танкер нафтою за 5 год. Якби потужність I насоса була удвічі меншою, а потужність II — удвічі більшою за початкову, то танкер наповнили б за 4 год. За скільки годин кожним насосом, що працював би окремо з початковою потужністю, можна наповнити танкер нафтою?

22. Маємо 10-відсотковий і 15-відсотковий розчини солі. Скільки треба взяти кожного розчину, щоб мати 100 г 12-відсоткового розчину?

23. Маємо два розчини солі. Концентрація солі в першому — 0,25, а в другому — 0,4. На скільки кілограмів більше треба взяти одного розчину, ніж другого, щоб одержати розчин масою 100 кг, концентрація солі в якому 0,37?

24. Ціна меблів після двох послідовних знижок на p % зменшилася з 12 500 грн до 8000 грн. На скільки відсотків зменшувалася ціна щоразу?

25. У дитячому кафе фруктовий салат «Екзотика», що складається на $\frac{3}{4}$ із персиків, коштує 24 грн. Якою буде ціна салату, якщо персики замінити: а) сливами, що вдвічі дешевші за персики; б) плодами, що в k разів дорожчі за персики? Врахуйте, що вартість компонентів салату становить 50 % його загальної вартості.

26. Попит і пропозиція певного товару описуються рівняннями:

$$Q_D = 750 - 23p,\ Q_S = 150 + 97p,$$

де Q_D — обсяг попиту (млн штук за рік), Q_S — обсяг пропозиції (млн штук за рік), p — ціна, грн. Знайдіть рівноважну ціну та обсяг продажу. Як зміняться попит і пропозиція, якщо ціна товару становитиме 6 грн?

27. Для виробництва продукції фірма закупила устаткування, вартість якого — 200 000 грн. Передбачається, що термін експлуатації устаткування — 10 років, після чого, у зв’язку із закінченням терміну експлуатації, воно може бути продано тільки на брухт за ціною 19 700 грн. Установіть, якою буде поточна вартість устаткування через 2 і через 5 років його експлуатації, якщо щороку амортизаційні відрахування залишаються сталими.

28. Фермер має 600 м металевої сітки, якою він хоче обгородити загін для телят. Яку форму загону слід обрати, щоб він мав найбільшу площу?

Енерго-ефективність і енерго-збереження

Навчальний проект № 3

Фінансові розрахунки

Застосування математики

Мета даного проекту полягає в тому, щоб учні в процесі самостійної навчально-пізнавальної діяльності розкрили значення математики в повсякденному житті, зокрема використання відсоткових розрахунків і статистичних відомостей. Передбачається, що проектна діяльність буде супроводжуватися складанням і розв’язуванням різних задач на відсотки, а також аналізом і побудовою діаграм.

Учні класу формуються у малі групи по 2 – 3 особи. За бажанням учнів можна здійснювати індивідуальну проектну діяльність. Кожна група обирає для проектної діяльності одну із запропонованих нижче тем:

1) Математика в професії моїх батьків.
2) Математика на транспорті.
3) Математика у сільському господарстві.
4) Математика на кухні.
5) Як я використовую вільний час.
6) Яким книжкам я віддаю перевагу.
7) Що читають у моїй родині.
8) Спорт у моїй родині.
9) Індекс маси та збалансоване харчування моєї родини.
10) Соціальні мережі.
11) Інтернет у моїй родині — ефективність використання.
12) У який банк покласти гроші на зберігання.
13) Податки, які сплачує моя родина.
14) Як заощаджувати електроенергію.
15) Скільки можна заощадити при раціональному використанні телефонних апаратів.
16) Вода, яку ми використовуємо даремно.
17) Використання води в різних країнах світу.
18) Переваги і недоліки різних джерел світла.
19) Переваги і недоліки різних джерел енергії.
20) Енергоефективність нашої оселі.
21) Енергоефективність нашої школи.
22) Ефективне використання земельної присадибної ділянки.

Теми для проектної діяльності повідомляються учням наприкінці третьої чверті. Після вибору теми дослідження кожен учень має опрацювати обов'язковий матеріал («Відсоткові розрахунки»), що міститься нижче, і дібрати додаткові відомості, що стосуються обраної теми.

Результати роботи над проектом бажано оформити у вигляді індивідуальних портфоліо з груповою комп'ютерною презентацією. За результатами дослідження можна створити плакати, газети, збірник задач (електронний чи паперовий).

Захист проектів доцільно провести на кількох тематичних позакласних заходах, запросивши учнів інших класів, учителів і батьків.

Учням рекомендується самостійно повторити й опрацювати поданий нижче теоретичний матеріал.

Відсоткові розрахунки

Відсоток (або *процент*) — це одна сота:

1 % = 0,01; 50 % = 0,5; 100 % = 1.

Із найпростішими задачами на відсотки ви ознайомилися раніше. Пригадаймо ці види задач і способи їх розв'язування.

Існує три основні види задач на відсотки:

1) знаходження відсотків від числа:
   - p відсотків від числа a — $a \cdot 0{,}01p$;
2) знаходження числа за відсотками:
   - число, p відсотків якого дорівнюють b, — $b : (0{,}01p)$;
3) знаходження відсоткового відношення:
   - відсоткове відношення a і b — $(a : b) \cdot 100$ %.

Розглянемо приклади таких задач.

Приклад 1. Потрібно зорати поле, площа якого дорівнює 300 га. За перший день трактористи виконали 40 % завдання. Скільки гектарів вони зорали за перший день?

Приклад 2. За перший день трактористи зорали 120 га, що становить 40 % поля. Знайдіть площу всього поля.

Приклад 3. Потрібно зорати поле, площа якого дорівнює 300 га. За перший день трактористи зорали 120 га. Скільки відсотків усього поля вони зорали за перший день?

Спробуйте розв'язати кожну з цих задач кількома способами, замінивши 40 % дробом 0,4 або $\frac{2}{5}$.

Такі задачі також зручно розв'язувати *способом пропорції.* Оформлювати розв'язання сформульованих задач можна так:

(1) 300 га — 100 %, $\frac{300}{x} = \frac{100}{40}$, $x = \frac{300 \cdot 40}{100} = 120$ (га).

x га — 40 %.

(2) 120 га — 40 %, $\frac{120}{x} = \frac{40}{100}$, $x = \frac{120 \cdot 100}{40} = 300$ (га).

x га — 100 %.

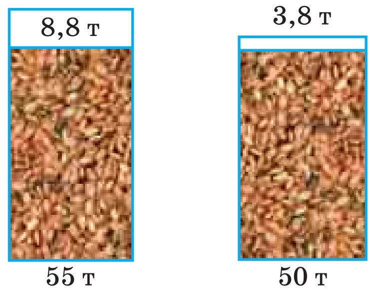
(3) 300 га — 100 %, $\frac{300}{120} = \frac{100}{x}$, $x = \frac{120 \cdot 100}{300} = 40$ (%).

120 га — x %.

У складніших прикладних задачах на відсотки часто йдеться про збільшення або зменшення величини на кілька відсотків. У таких випадках треба добре розуміти, від чого беруться відсотки. Наприклад, коли говорять, що заробітна плата підвищилась на 10 %, то розуміють, що вона збільшилась на 10 % від попередньої заробітної плати. При цьому, якщо значення x більше від y на p %, то значення y менше від x не на p %. Збільшенню в 2 рази відповідає збільшення на 100 %, а зменшенню в 2 рази — зменшення на 50 %. Ціна товару теоретично може збільшуватись на будь-яке число відсотків, а зменшитись, наприклад, на 120 % не може.

Розглянемо одну із задач на відсотки.

Приклад 4. Просушили 55 т зерна 16-відсоткової вологості, після чого його стало 50 т. Знайдіть відсоток вологості просушеного зерна.



Розв'язання. Зерно спочатку містило вологи $0,16 \cdot 55 = 8,8$ (т).

Випарувалося вологи 5 т ($55 - 50 = 5$).

Залишилось у зерні вологи $8,8 - 5 = 3,8$ (т).

Отже, відсоток вологості просушеного зерна дорівнює:

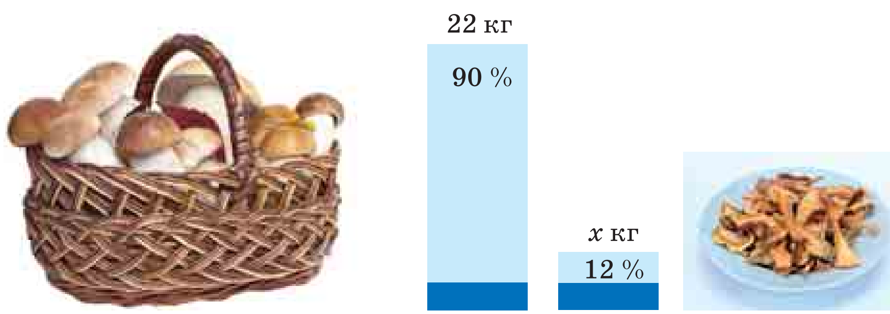
$3,8 : 50 = 0,076 = 7,6$ %.

Відповідь. 7,6 %.

Можна розв'язати задачу й інакше, наприклад, склавши рівняння:

$0,16 \cdot 55 - 0,01x \cdot 50 = 5.$

Приклад 5. Свіжі гриби містять 90 % води, а сушені — 12 %. Скільки сушених грибів вийде з 22 кг свіжих?



Розв'язання. Нехай сушених грибів буде x кг. У них безводної маси 88 %, тобто $0,88x$. У 22 кг свіжих грибів безводної маси 10 %, тобто 2,2 кг. Безводні маси свіжих і сушених грибів рівні, звідси маємо рівняння:

$$0,88x = 2,2;\ x = 2,5.$$

Відповідь. 2,5 кг.

Приклад 6. Із двох розчинів солі — 10-відсоткового і 15-відсоткового — треба утворити 40 г 12-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину потрібно взяти?

Розв'язання. Побудуємо і заповнимо таблицю, позначивши загальні маси першого та другого розчинів через x г і y г.

Розчин	Загальна маса, г	Вміст солі, %	Маса солі, г
I	x	10	$0,10x$
II	y	15	$0,15y$
III (утворений)	40	12	4,8

За значеннями у стовпцях «Загальна маса» та «Маса солі» складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 40, \\ 0,10x + 0,15y = 4,8, \end{cases} \text{ звідси } x = 24,\ y = 16.$$

Відповідь. Потрібно взяти першого розчину 24 г, другого — 16 г.

Найчастіше доводиться розв'язувати задачі на відсотки бухгалтерам і працівникам банків. Розглянемо приклади, пов'язані з нарахуванням інвесторам (вкладникам) відсоткових грошей.

Говорять про **прості відсотки**, якщо нараховують відсотки лише на початково *інвестовану суму*.

Наприклад, на початку року вкладник розміщує на рахунку в банку суму P під відсоток r річних. За рік він одержить суму P_1, яка дорівнює початковому вкладу P плюс нараховані відсотки $\left(\frac{Pr}{100}\right)$, або $P_1 = P + \frac{Pr}{100} = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)$.

Через два і три роки сума на рахунку становитиме:

$$P_2 = P + \frac{Pr}{100} + \frac{Pr}{100} = P\left(1 + 2\frac{r}{100}\right) \text{ і } P_3 = P\left(1 + 3\frac{r}{100}\right).$$

Аналогічно можна представити суму P_n, яку вкладник одержить через n років:

$$P_n = P\left(1 + \frac{r}{100}n\right), \qquad (1)$$

де P — сума початкового вкладу; P_n — сума вкладу через n років.

Нарахування за схемою простих відсотків застосовується, як правило, у короткострокових фінансових операціях, коли після кожного інтервалу нарахування вкладнику виплачуються відсотки.

У довгострокових фінансово-кредитних угодах частіше використовують **складні відсотки**. Їх нараховують не тільки на основну суму, а й на нараховані раніше відсотки. У цьому випадку кажуть, що відбувається ***капіталізація відсотків***.

Припустимо, що вкладник поклав до банку під 9 % річних 1000 грн. Це ***початковий капітал***. Через рік банк нарахує вкладнику за це 90 грн ***відсоткових грошей*** (9 % від 1000 грн.). Після цього на рахунку вкладника стане 1090 грн, бо $1000(1 + 0,09) = 1090$. За другий рік відсоткових грошей йому нарахують уже 9 % від 1090 грн; ***нарощений капітал*** вкладника після двох років дорівнюватиме $1000(1 + 0,09)^2$ грн. Зрозуміло, що через n років цей капітал становитиме $1000(1 + 0,09)^n$ грн.

Отже, вкладений в банк початковий капітал P під r % річних через n років перетвориться в нарощений капітал:

$$P_n = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n.$$

Це формула складних відсотків. Вона є однією з базових у фінансових розрахунках.

Приклад 7. Вкладник поклав до банку 200 000 грн під складні 7 % річних. Які відсоткові гроші він матиме через 5 років?

Розв'язання. Скористаємося формулою складних відсотків $P_n = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$.

У даному разі $r = 7$, $n = 5$.

Отже, $P_5 = P(1,07)^5$. При $P = 200\,000$ маємо:

$P_5 = 200\,000 \cdot (1,07)^5 = 280\,510$.

Порівняно з початковим вкладом:

280 510 – 200 000 = 80 510 (грн).

Відповідь. 80 510 грн.

Множник $\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$, який забезпечує нарощення грошової суми, називають ***мультиплікованим множником***. Його значення обчислюють для різних значень r і n та заносять у спеціальні таблиці.

Оберіть задачі, які стосуються теми вашого дослідження й розв'яжіть їх. Складіть власні задачі з тематики обраного проекту.

1. Посадовий оклад службовця — 4000 грн. З нового року його обіцяють підвищити на 20 %. Яким стане посадовий оклад службовця?

2. При виготовленні розсолу для соління огірків треба 0,76 кг солі на відро води (12 кг). Виразіть у відсотках міцність розчину.

3. Із 1050 зернин пшениці 1000 зернин зійшло. Який відсоток схожості має насіння?

4. Банк обслуговує 50 000 клієнтів: 21 000 — юридичні особи, а решта — фізичні. Скільки відсотків становлять: а) юридичні особи; б) фізичні особи?

5. Площа поверхні Землі становить 510,1 млн км^2, з них 149,2 млн км^2 — суходіл. Скільки відсотків поверхні Землі покрито водою?

6. Тракторист мав зорати 25 га, а зорав — 27 га. На скільки відсотків він виконав завдання? На скільки відсотків перевиконав завдання?

7. З молока одержують 10 % сиру. Скільки потрібно молока для 20 кг сиру?

8. З цукрових буряків одержують 12 % цукру. Скільки буряків треба, щоб одержати 1 т цукру?

9. В одній книжці на 20 % сторінок менше, ніж у другій. На скільки відсотків у другій книжці сторінок більше, ніж у першій?

10. Яка була ціна товару до переоцінки, якщо після підвищення її на 20 % цей товар коштує 450 грн?

11. Ціна краму спочатку знизилась на 10 %, а потім ще раз на 10 %. На скільки відсотків вона змінилась після двох переоцінок?

12. Ціна на автомобіль спочатку підвищилась на 20 %, а потім знизилась на 20 %. Як змінилась ціна на автомобіль після цих двох переоцінок?

13. У двох баках міститься 140 л бензину. Якщо з першого бака 12,5 % бензину перелити в другий, то в обох баках бензину стане порівну. Скільки літрів бензину в кожному баці?

14. Завод збільшив випуск продукції за перший рік на 20 %, а за другий — на 25 %. Як зріс випуск продукції на заводі за ці два роки?

15. Обсяг робіт на будівництві збільшився на 50 %, а продуктивність праці — на 20 %. Як змінилась кількість робітників?

16. До 18 кг 10-відсоткового розчину кислоти долили 2 кг води. Визначте відсоткову концентрацію нового розчину.

17. Скільки треба змішати 10-відсоткового і 20-відсоткового розчинів солі, щоб мати 1 кг 12-відсоткового розчину?

18. Скільки кілограмів 7-відсоткового розчину слід долити до 5 кг 5-відсоткового розчину, щоб він став 6-відсотковим?

19. Скільки прісної води треба долити до 100 кг морської, яка містить 5 % солі, щоб концентрація солі в ній дорівнювала 1,5 %?

20. Латунь — сплав 60 % міді і 40 % цинку. Скільки міді й цинку треба сплавити, щоб одержати 500 т латуні?

21. Бронза — сплав міді й олова. Скільки відсотків міді в бронзовому злитку, який містить 17 кг міді та 3 кг олова?

22. Скільки води треба долити до 10 кг розчину солі, концентрація якого 5 ‰, щоб одержати розчин концентрацією 3 ‰?

23. Скільки треба змішати розчину солі концентрацією 2 ‰ і розчину солі концентрацією 10 ‰, щоб одержати 800 г розчину, концентрація якого 7 ‰?

24. Скільки золота 375-ї проби треба сплавити із 30 г золота 750-ї проби, щоб одержати сплав золота 500-ї проби?

25. Із молока жирністю 5 % виготовляють сир жирністю 15,5 %, при цьому залишається сироватка жирністю 0,5 %. Скільки сиру одержують із 100 кг молока?

26. На першому полі 65 % площі засіяно житом. На другому полі під жито відвели 45 % площі. Відомо, що на обох полях житом засіяно 53 % загальної площі. Яку частину всієї засіяної площі становить перше поле?

27. З молока одержують 20 % вершків, а з вершків — 25 % масла. Скільки треба молока, щоб одержати 10 кг масла?

28. Руда містить 60 % заліза. З неї виплавляють чавун, який містить 98 % заліза. Із скількох тонн руди виплавляють 1000 т чавуну?

29. Свіжі гриби містять 90 % води, а сухі — 12 %. Скільки треба висушити свіжих грибів, щоб одержати 10 кг сухих?

30. Вологість свіжих грибів дорівнювала 99 %. Коли гриби підсушили, їх вологість зменшилась до 98 %. Як змінилась маса грибів?

31. Фірма взяла в банку кредит 250 000 грн на 5 років під простих 3 %. Визначте: а) скільки гривень фірма поверне банку через 5 років; б) який прибуток одержить банк?

32. Підприємець вніс до банку 15 000 грн під складні 5 % річних. Якою буде сума його вкладу через 4 роки?

33. Підприємству надано 50 000 грн у кредит на шість місяців за ставкою 8 % річних. Яку суму підприємство має повернути банку через півроку?

34. На вклад у розмірі 90 000 грн строком на 5 років банк нараховує 18 % річних. Яка сума буде на рахунку в кінці строку, якщо нарахування відсотків здійснюється за схемою складних відсотків: а) щопівроку; б) щоквартально?

У задачах **35–36** розгляньте різні умови нарахування відсотків.

35. Вкладник поклав до банку 200 000 грн під 17 % річних. Які відсоткові гроші він матиме через два роки?

36. За якої умови покладений до банку капітал через два роки збільшиться на 44 %?

Задачі та вправи для повторення

Числа та дії над ними

Виконайте дії **(871–872)**.

871. а) 40 784 + 846 − (13 843 + 787);
б) (52 − 36 + 320 − 96) : 4.

872. а) 12,54 : (44,8 − 38,2) + 5,4 · 1,5;
б) 507,24 : 36 + 0,8(21,7 − 15,8).

Знайдіть значення виразу **(873–874)**.

873. а) $\left(2\frac{3}{4}-2\frac{3}{8}-0,3\right):6$; б) $\left(5\frac{9}{25}-2,36\right):\left(3\frac{4}{5}+0,2\right)$.

874. а) $\frac{2}{3}(0,3-0,5:4):1,75-\frac{1}{6}$; б) $2\frac{1}{6}:13+\left(3,25+2\frac{1}{6}\right):2\frac{3}{5}$.

Обчисліть **(875–876)**.

875. а) $\frac{47^2-41^2}{28^2-16^2}$; б) $\frac{57^2-42^2}{29^2-26^2}$; в) $\frac{51^2-12^2}{90^2-9^2}$; г) $\frac{61^2-11^2}{36^2-24^2}$.

876. а) $6^{32}\cdot 4^{32}-(24^{16}-5)(24^{16}+5)$;
б) $(56^{10}-7)(56^{10}+7)-7^{20}\cdot 8^{20}$.

Обчисліть значення виразу **(877–881)**.

877. а) $\sqrt{64\cdot 900}$; б) $\sqrt{25\cdot 196}$; в) $\sqrt{49\cdot 676}$.

878. а) $\sqrt{0,01\cdot 121}$; б) $\sqrt{0,04\cdot 169}$; в) $\sqrt{0,09\cdot 441}$.

879. а) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$; б) $\sqrt{10\frac{6}{25}}$; в) $\sqrt{31\frac{93}{121}}$.

880. а) $\sqrt{6\cdot 10\cdot 15}$; б) $\sqrt{15\cdot 21\cdot 35}$; в) $\sqrt{20\cdot 28\cdot 35}$.

881. а) $\sqrt{\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{10}{49}}$; б) $\sqrt{\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{36}\cdot\frac{35}{27}}$; в) $\sqrt{1\frac{1}{5}\cdot 2\frac{7}{10}}$.

Обчисліть добуток **(882–883)**.

882. а) $\sqrt{44,1}\cdot\sqrt{12,1}$; б) $\sqrt{28,9}\cdot\sqrt{32,4}$.

883. а) $\sqrt{\frac{12}{25}}\cdot\sqrt{\frac{80}{135}}$; б) $\sqrt{8\frac{1}{9}}\cdot\sqrt{1\frac{8}{73}}$.

Подільність чисел. Відношення і пропорції

884. Випишіть усі прості числа, більші за 15 і менші за 35.

885. Випишіть такі складені числа x, які задовольняють умову $21 < x < 31$.

886. Припишіть до числа 278 зліва таку цифру, щоб утворилося чотирицифрове число, кратне 9.

887. Розкладіть на прості множники число: а) 240; б) 350.

888. Знайдіть найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел: а) 18 і 32; б) 42 і 105; в) 60, 80 і 140.

889. У скільки разів НСД чисел 36 і 48 менший за їхній НСК?

890. Розклавши на прості множники числа 140, 175, 210, знайдіть:
а) НСД (140, 175), НСД (140, 210), НСД (140, 175, 210);
б) НСК (140, 175), НСК (175, 210), НСК (140, 175, 210);
в) суму всіх простих дільників числа 210;
г) суму всіх дільників числа 175.

891. Використовуючи цифри 1, 2, 3, напишіть усі трицифрові числа, у яких кожна цифра зустрічається лише один раз. Скільки з цих чисел парних, непарних, кратних 3, 6, 9?

892. Знайдіть суму чисел, менших за 20 і взаємно простих з числом 20.

893. Які з чисел, що менші за 40, взаємно прості з числом 60?

894. Знайдіть п’ять парних натуральних чисел, кратних 7.

895. Чи може сума чотирьох послідовних натуральних чисел бути простим числом?

896. Спростіть відношення:

а) $20 : 60$; б) $0{,}4 : 1{,}2$; в) $1 : 0{,}125$; г) $\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$; д) $1\frac{4}{5} : 2\frac{1}{2}$.

897. Запишіть кілька пропорцій, складених із чисел 2, 4, 3 і 1,5.

898. Знайдіть невідомий член пропорції:

а) $x : 3 = 7 : 6$; в) $11 : 1001 = 0{,}3 : x$; ґ) $\frac{18}{x} = \frac{1{,}2}{5}$;

б) $1{,}2 : 5 = x : 15$; г) $\frac{x}{7} = \frac{2}{3{,}5}$; д) $9 = \frac{16{,}2}{x}$.

Цілі вирази

Подайте вираз у вигляді многочлена **(899–900)**.

899. а) $(0{,}4a^2 - 5ab)^2$; в) $(x^2y^2 - 1)^2$;
б) $(6{,}5xy + 8y^2)^2$; г) $(2 + a^6b^4)^2$.

900. а) $(-x + y^2)^2$; в) $(-2a^2 + 3y^3)^2$; ґ) $(-0{,}1xy + 5)^2$;

б) $\left(-\frac{1}{3}-3x^5\right)^2$; г) $\left(-\frac{1}{2}m^3-0{,}2n\right)^2$; д) $(-6x^2y - 0{,}5y)^2$.

901. Спростіть вираз:

а) $(3x - 5y)^2 - 3x(3x - 10y)$; в) $(4x + y)(3x + 4y) - (2y + 3x)^2$;

б) $8a(b - 2a) + (4a + b)^2$; г) $(3a + 6b)^2 - (2a + 9b)(3a + 4b)$.

Розкладіть на множники многочлен **(902–903)**.

902. а) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy$; в) $6a^2b - 18a^2 - 3ab + 9a$;

б) $a^3c^2 - a^2c^2 + a^3 - a^2$; г) $xyz - 4xz - 5xy + 20x$.

903. а) $a^2 - b^2 - a + b$; в) $4a^2 - 9 - 2a - 3$;

б) $x + y + x^2 - y^2$; г) $5 - 3x + 25 - 9x^2$.

904. Подайте у вигляді добутку:

а) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$; в) $x^2 - y^2 + 8y - 16$;

б) $a^2 + 2a + 1 - b^2$; г) $a^2 - b^2 - 14b - 49$.

905. Подайте у вигляді добутку трьох множників:

а) $ab^2 - 4a - b^3 + 4b$; в) $x^2a + 3a^2 - a^3 - 3x^2$;

б) $x^3 + x^2y - 9x - 9y$; г) $x^3 - 5b^2 + 5x^2 - xb^2$.

Раціональні вирази

906. Які значення змінної допустимі для дробу?

а) $\frac{a+2}{a(3-a)}$; б) $\frac{x+1}{(x-2)(x+3)}$; в) $\frac{x+7}{(x^2-4)(x^2-9)}$.

Скоротіть дріб.

907. а) $\frac{(a+x)^2}{(a+x)^3}$; б) $\frac{x^2y(2-x)^7}{(xy^2(2-x))^6}$; в) $\frac{(3+c)^5}{(c^2+6c+9)^4}$; г) $\frac{(a^2-1)^3}{(a-1)^5}$.

Спростіть вираз **(908–911)**.

908. $\frac{2x^2+7xy-9y^2}{x^2-y^2}+\frac{9x^2-7xy-2y^2}{x^2-y^2}$.

909. $\frac{x+2y}{2x-y}+\frac{2x-2y}{2x-y}+\frac{6x-3y}{2x-y}+\frac{x-2y}{2x-y}$.

910. а) $\frac{1}{m}-\frac{5}{4m}$; б) $\frac{a}{2x}-\frac{4a}{x}$; в) $\frac{1}{0{,}5c}-\frac{2}{c}$.

911. а) $\frac{1}{3ax^2}+\frac{2}{5az^2}$; б) $\frac{4m}{3p^2x}-\frac{1}{5m^2x}$; в) $\frac{4}{a}-\frac{3}{2ac^2x}$.

Виконайте ділення і множення дробів **(912–915)**.

912. а) $\frac{2ax}{3c^2}:\frac{4ax^2}{9c^3}$; б) $\frac{a^3c^2}{5xy}:\frac{2a^2c^3}{3x^2y}$; в) $\frac{12mn^3}{5ac^2}:\frac{3mn^2}{10a^2}$.

913. а) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{3a+3b}{4a-4b}$; б) $\frac{5-5a}{(1+a)^2}:\frac{10-10a^2}{3+3a}$.

914. а) $\left(\frac{a}{4b}-\frac{b}{4a}\right)\cdot\left(\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}-1\right)$; б) $\left(\frac{a^2b^{-3}}{6c}\right)^{-3}:\left(\frac{a^3b^{-5}}{9c}\right)^{-2}$.

915. $\frac{m^3-mn^2}{m^2+n^2}\cdot\left(\frac{n}{m^3-m^2n+mn^2}+\frac{m-2n}{m^3+n^3}\right)$.

Ірраціональні вирази

Спростіть вираз **(916–922)**.

916. а) $2\sqrt{20x}-\sqrt{5x}-\sqrt{45x}$; в) $\sqrt{27x}+2\sqrt{12x}-5\sqrt{3x}$;
б) $\sqrt{18p}-\sqrt{8p}+\sqrt{81}$; г) $\sqrt{18a}-\sqrt{50a}+\sqrt{8a}$.

917. а) $(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)$; в) $(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)$;
б) $(\sqrt{x}+2)(3+\sqrt{x})$; г) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$.

918. а) $\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)+2\sqrt{a}$; б) $(3-2\sqrt{x})\sqrt{x}-3\sqrt{x}$.

919. а) $\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{x})+\sqrt{ax}$; б) $\sqrt{xy}-\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

920. а) $\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$; б) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{x-z}$; в) $\frac{a+\sqrt{2}}{a^2-2}$.

921. а) $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+a}$; б) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{a\sqrt{x}+x\sqrt{a}}$; в) $\frac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1}$.

922. а) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{(b-a)^2}{\sqrt{ab}}$; б) $\left(\frac{1}{x+x\sqrt{y}}+\frac{1}{x-x\sqrt{y}}\right):\frac{2}{y-1}$.

Рівняння та системи рівнянь

Розв'яжіть рівняння **(923–929)**.

923. а) $7x-39=2(x+3)+6-2x+5$;
б) $3(x-5)=5(x-3)-4(2-3x)$.

924. а) $5(x-3)+7(3x+6)=2(x-2)+103$;
б) $8(y-2)+5(3y-2)=3(y-5)+69$.

925. а) $7(6x - 1) + 3(2x + 1) - 5(12x - 7) = 23$;
б) $5(8z - 1) + 8(7 - 4z) - 7(4z + 1) = 19$.

926. а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; в) $3y^2 - 2y - 8 = 0$;
б) $x^2 - 8x - 20 = 0$; г) $0{,}25x^2 - 2x + 3 = 0$.

927. а) $\frac{x-1}{x+5}+\frac{x-1}{x-5}=2$; в) $\frac{x-1}{x+4}-2=\frac{1-x}{x-4}$;
б) $\frac{2x-1}{x+2}=\frac{1-2x}{x-2}+4$; г) $\frac{2x-1}{2x+4}=\frac{1-2x}{2x-4}+2$.

928. а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; б) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

929. а) $3x^4 - 2x^2 - 40 = 0$; б) $5y^4 + 7y^2 - 12 = 0$.

Розв'яжіть системи рівнянь (**930–932**).

930. а) $\begin{cases}2x-3(x-y)=7,\\5y-2(x-2y)=23;\end{cases}$ б) $\begin{cases}4y-5(y-x)=8,\\2(3x-y)+7y=-14.\end{cases}$

931. а) $\begin{cases}\frac{4}{5}x-y=7,\\\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}y=11;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{3}{7}x-z=15,\\\frac{2}{5}x+\frac{3}{7}z=14.\end{cases}$

932. а) $\begin{cases}\frac{5+y}{3}-\frac{3x+4y}{4}=3x+1,\\\frac{7x+2}{3}+\frac{4x-3}{2}+\frac{11}{6}=1-3x;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{7+x}{5}-\frac{2x-y}{4}-3y=-5,\\\frac{5y-7}{2}-\frac{3-4x}{6}-18=-5x.\end{cases}$

933. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

а) $\begin{cases}x-y=3,\\x^2+y^2=9;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-y=3,\\xy=4.\end{cases}$

934. Розв'яжіть систему рівнянь способом алгебраїчного додавання:

а) $\begin{cases}x+y-xy=-23,\\x-y+xy=49;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+xy=15,\\y^2+xy=10.\end{cases}$

935. Розв'яжіть систему рівнянь способом заміни змінних:

а) $\begin{cases}5(x+y)+2xy=-19,\\x+y+3xy=-35;\end{cases}$ б) $\begin{cases}xy+x+y=-11,\\x^2y+y^2x=30.\end{cases}$

Задачі на складання рівнянь і систем рівнянь

936. На двох токах разом є 990 т пшениці. Скільки центнерів пшениці на кожному з них, якщо на першому на 20 % більше, ніж на другому?

937. У магазин привезли крупи двох сортів, усього 1800 кг. Після того як продали 60 % 1-го сорту і 70 % 2-го сорту, у магазині залишилось 640 кг крупи. Скільки крупи 1-го і 2-го сорту окремо привезли в магазин?

938. На вступному іспиті з математики 15 % абітурієнтів не розв'язали жодної задачі, 144 абітурієнти розв'язали задачі з помилками, а число тих, хто розв'язав усі задачі правильно, відноситься до числа тих, хто не розв'язав жодної, як 5 : 3. Скільки абітурієнтів складали іспит з математики?

939. Відстань 400 км швидкий поїзд проїхав на годину швидше, ніж товарний. Яка швидкість кожного поїзда, якщо швидкість товарного на 20 км/год менша, ніж швидкого?

940. Турист, проїхавши 1200 км, підрахував, що коли б він був у дорозі на 6 днів більше, то проїжджав би щодня на 10 км менше. Яку відстань проїжджав турист щодня?

941. Дві ткалі, працюючи разом, можуть виконати замовлення за 12 днів. За скільки днів виконала б цю саму роботу кожна ткаля окремо, якщо відомо, що продуктивність однієї з них у 1,5 раза вища від продуктивності другої?

942. Поїзд за певний час мав пройти відстань 250 км. Але через 2 год після початку руху він затримався на 20 хв і, щоб прибути вчасно до місця призначення, йому довелося збільшити швидкість на 25 км/год. Якою була швидкість поїзда за розкладом?

943. У яблуках «Антонівка» цукор становить 10,7 % маси. Скільки цукру містить 50 кг таких яблук?

944. Банк обслужив 45 клієнтів, що становить 15 % від усіх клієнтів. Скільки клієнтів має банк?

945. Ціну на товар знизили спочатку на 10 %, а потім ще на 5 %, і в результаті він став коштувати 34,2 грн. Якою була початкова ціна товару?

946. На скільки відсотків збільшиться площа прямокутника, якщо його довжину збільшити на 20 %, а ширину — на 10 %?

947. Ціну на товар було знижено на 20 %. На скільки відсотків її потрібно підвищити, щоб одержати попередню ціну?

948. Витрати на виготовлення виробу становлять 1250 грн, а його ціна — 1750 грн. Обчисліть націнку на товар у відсотках.

Нерівності

Розв'яжіть нерівність і зобразіть множину її розв'язків на координатній прямій **(949–950)**.

949. а) $3x - 5 < x + 7$; в) $0,3y + 1 > 3 - 0,2y$;
б) $x + 15 \geq 5x + 3$; г) $1,5z - 2 < z + 8$.

950. а) $5 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (3x - 2) > 3x - 4 \cdot (2x - 7)$;
б) $4 \cdot (3 - 2y) - 3 \cdot (4y + 5) < 5y + 3 \cdot (y - 4)$.

951. При яких значеннях змінної має зміст вираз:
а) $\sqrt{5x-7}$; б) $\sqrt{1-2x}$; в) $\frac{1}{x}+\sqrt{3x-1}$?

952. Знайдіть область визначення функції:
а) $y=\sqrt{-2x}$; б) $y=\sqrt{3-7x}$; в) $y=\sqrt{x^2+3}$;
г) $y=\sqrt{-x^2-1}$; ґ) $y=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$; д) $y=\frac{2}{x}-\sqrt{1-x}$.

Розв'яжіть систему нерівностей **(953–954)**.

953. а) $\begin{cases} 5x+1>6x-18, \\ 3x-7<5x-13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7y+3>8y-17, \\ 3y-2<6y-12. \end{cases}$

954. а) $\begin{cases} 1+2x>\frac{9x-2}{4}, \\ 7+2x>3x-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2-6x}{5}\geq 3x+13, \\ 5x-8\leq\frac{3x+2}{4}. \end{cases}$

955. Розв'яжіть подвійну нерівність.
а) $9 < 2x + 3 < 17$; в) $0 \leq 2 - x \leq 2$;
б) $-8 < 3x - 2 < 25$; г) $-8 \leq 3 - 11x < 58$.

Функції і графіки

956. Знайдіть $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$, якщо функцію задано формулою:
а) $f(x) = 2x^2 + 3$; б) $f(x) = 3x^3 - 2$; в) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

957. Функцію задано формулою $y=\frac{6x}{1+x}$ на множині натуральних чисел першого десятка. Задайте її у вигляді таблиці.

958. Функцію задано формулою $y=2\sqrt{x+5}$ на області визначення $D = \{-4;\ -2,75;\ -1;\ 1,25;\ 4;\ 11\}$. Задайте її у вигляді таблиці і графіка.

959. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 4$, якщо $D = \{-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$. Знайдіть її область значень.

960. Знайдіть область визначення функції:
а) $y = 5x - 1$; б) $y=\sqrt{x+1}$; в) $y=\sqrt{4-x}$.

961. При яких значеннях x дана функція має найменше значення:

а) $y = x^2 - 6x + 9$;
в) $y = 4x^2 - 12x - 3$;
б) $y = x^2 + 4x + 7$;
г) $y = 4x^2 - 4x + 1$?

962. Знайдіть найбільше значення функції:

а) $y = 3 - (x - 2)^2$;
в) $y = 6x - x^2 - 10$;
б) $y = -0{,}25(x + 5)^2$;
г) $y = -5x^2 + 4x + 1$.

963. Знайдіть точки перетину графіка функції з віссю x:

а) $y = x^2 + 10x - 11$;
в) $y = -2x^2 + 7x - 3$;
б) $y = 2x^2 + 3x - 9$;
г) $y = -2x(x + 3)$.

964. Способом виділення квадрата двочлена побудуйте параболу:

а) $y = x^2 + 4x + 5$;
в) $y = 1 + 4x - x^2$;
б) $y = x^2 - 6x + 5$;
г) $y = 4x^2 - 4x + 5$.

Побудуйте графік функції **(965–966).**

965. а) $y = (x + 2)^2 - 3$;
в) $y = 2(x + 1)^2 - 1$;
б) $y = (x - 1)^2 + 3$;
г) $y = 0{,}5(x - 2)^2 - 2$.

966. а) $y = 3x^2 + 3x - 1$;
в) $y = -x^2 + x - 3$;
б) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
г) $y = -2x^2 + 3x + 2$.

Розв'яжіть квадратну нерівність **(967–973).**

967. а) $x^2 + 2x > 0$; б) $x^2 - x \geq 0$.

968. а) $x^2 - 3x + 2 > 0$; б) $x^2 + 5x + 6 < 0$.

969. а) $3x^2 - x - 4 \geq 0$; б) $5x^2 - 2x - 3 > 0$.

970. а) $-x^2 + 2x - 1 < 0$; б) $-x^2 - 2x - 5 > 0$.

971. а) $(x - 3)(x + 5) > 0$; б) $(x + 2)(x + 7) < 0$.

972. а) $(2x + 1)(x + 1) > 0$; б) $(3x - 2)(2x + 3) \geq 0$.

973. а) $(x - 1)(2 - x) > 0$; б) $(3 + x)(x + 7) < 0$.

974. Розв'яжіть нерівність:

а) $\dfrac{x+3}{x-7} > 0$; б) $\dfrac{x}{x+2} > 0$; в) $\dfrac{2+x}{x+3} < 0$; г) $\dfrac{3-x}{x} < 0$.

Числові послідовності

975. Напишіть п'ять перших членів послідовності, n-й член якої задається формулою:

а) $a_n = 2(n + 1)$;
в) $y_n = n^3 + 3_n - (-1)^n$;
ґ) $c_n = 2n - n^2$;
б) $x_n = 6 : n$;
г) $b_n = 1 + n^2$;
д) $z_n = 1 + (-1)^n$.

976. Послідовність задано формулою $a_n = 2n^2 + 3$. Знайдіть:

а) a_3; б) a_6; в) a_{15}; г) a_{100}.

977. Знайдіть сьомий, десятий і двадцять п'ятий члени послідовності, n-й член якої задається формулою:

а) $c_n = (1 - n)^2$; б) $c_n = 350 + n$; в) $c_n = 2n - (-1)^n$.

978. Напишіть п'ять перших членів арифметичної прогресії, у якої:

а) $a_1 = 17$, $d = 2$; в) $a_1 = -\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$;

б) $a_1 = 0{,}5$, $d = 10$; г) $a_1 = 6$, $d = 0$.

979. В арифметичній прогресії перший член a_1 і різниця d. Знайдіть суму S_n її перших n членів, якщо:

а) $a_1 = 5$, $d = 3$, $n = 31$; в) $a_1 = -\frac{3}{2}$, $d = \frac{1}{2}$, $n = 35$;

б) $a_1 = 14{,}5$, $d = 0{,}7$, $n = 26$; г) $a_1 = 111$, $d = -\frac{2}{5}$, $n = 56$.

980. Сума чотирьох перших членів арифметичної прогресії дорівнює 56, а сума чотирьох останніх — 112. Знайдіть кількість членів прогресії, якщо перший її член дорівнює 11.

981. Сума першого і п'ятого членів зростаючої арифметичної прогресії дорівнює 14, добуток другого її члена на четвертий дорівнює 45. Скільки членів прогресії потрібно взяти, щоб у сумі одержати 24?

982. Дано дві арифметичні прогресії. Перший і п'ятий члени першої прогресії дорівнюють відповідно 7 і −5. У другій прогресії перший член дорівнює 0, а останній — 3,5. Знайдіть суму членів другої прогресії, якщо відомо, що треті члени обох прогресій рівні між собою.

983. У геометричній прогресії $b_7 = 80$, $b_8 = -160$. Знайдіть b_1, q, b_5.

984. У геометричній прогресії $b_6 = 18$, $b_4 = 72$. Знайдіть b_1, q.

985. Запишіть геометричну прогресію, яка складається з шести членів, якщо сума трьох перших її членів дорівнює 168, а сума трьох останніх — 21.

986. У зростаючій геометричній прогресії сума першого і останнього членів дорівнює 66, добуток другого і передостаннього членів — 128, а сума всіх членів становить 126. Скільки членів у прогресії?

987. ***Задача Джемшіда аль-Каші.*** У саду перший зірвав один гранат, другий — два, а кожен наступний — на один гранат більше. Потім усі, хто збирав гранати, розділили їх між собою порівну і кожен одержав по 6 гранатів. Скільки людей збирало гранати?

988. ***Стародавня індійська задача.*** Подорожній у перший день проходить дві одиниці шляху, а кожного наступного дня на три одиниці більше, ніж у попередній. Інший подорожній проходить у перший день три одиниці шляху, а в кожний наступний — на дві одиниці більше. Коли перший наздожене другого, якщо вони вийшли одночасно з одного місця і в одному напрямку?

989. Послідовність b_1, b_2, b_3, b_4 — геометрична прогресія. Чи буде геометричною прогресією послідовність:

а) $5b_1,\ 5b_2,\ 5b_3,\ 5b_4, \ldots$;

б) $b_1 + 5,\ b_2 + 5,\ b_3 + 5,\ b_4 + 5, \ldots$;

в) $b_1^5,\ b_2^5,\ b_3^5,\ b_4^5, \ldots$;

г) $\frac{5}{b_1},\ \frac{5}{b_2},\ \frac{5}{b_3},\ \frac{5}{b_4}, \ldots$?

Задачі та вправи підвищеної складності

990. Що більше: $\sqrt{14}+\sqrt{6}$ чи $2\sqrt{3}+\sqrt{7}$?

991. Доведіть нерівність $4<\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}<5$.

992. Доведіть, що при будь-яких значеннях a, b, c:

а) $2a^2 + b^2 + c^2 > 2a(b + c)$;

б) $a^2 + b^2 + c^2 > 2\ (a + 2b + 3c - 7)$.

993. Доведіть, що при будь-яких значеннях x, y:

а) $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$;

б) $2x^2 + 5y^2 - 4xy - 2x - 4xy + 5 > 0$.

994. Доведіть, що при будь-якому значенні a:

а) $a^4 - 2a^3 - a^2 + 2a + 1 \geq 0$;

б) $a^4 - 3a^2 - 2a + 5 > 0$.

995. Доведіть, що при будь-яких значеннях a, b, c, d:

а) $(a^2 + b^2)(c^2 + a^2) \geq 4abcd$;

б) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a + b)(c + d)$.

996. Доведіть, що:

а) $x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}$, якщо $x + y = 1$;

б) $x^2+y^2 \geq \frac{1}{5}$, якщо $x + 2y = 1$.

Розв'яжіть нерівність **(997–999)**.

997. а) $\frac{x^2+4}{x-4}<x$; б) $\frac{x^2+x+1}{3x^2+4x-4}<1$.

998. а) $\frac{4x}{3-x}<x-1$; б) $\frac{x+4}{x+1}>2-x$.

999. а) $(x + 3)^3(x + 5)(x - 2) < 0$; б) $(8 - x)^5(x + 8)^2(x + 4) \leq 0$.

1000. Покажіть, що нерівності $\sqrt{x-6}+\sqrt{x-1}>1$ і $\sqrt{x-6}+\sqrt{x-1}>2$ мають однакові множини розв'язків.

Побудуйте графік функції **(1001–1002)**.

1001. а) $y = 3 - |x|$; б) $y = \dfrac{1}{|x|}$; в) $y = x^2 + 2|x| - 3$.

1002. а) $y = \dfrac{x}{|x|}$; б) $y = x|x|$; в) $y = \dfrac{|x|}{|x| - 3}$.

1003. Побудуйте графік рівняння:

а) $x^2 + xy = 0$; в) $(xy - 6)(y - 3) = 0$;
б) $(x + 1)(y - 3) = 0$; г) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) = 0$.

1004. Запишіть простішою формулою функцію:

$$y = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}.$$

Побудуйте її графік.

Побудуйте графік функції **(1005–1007)**.

1005. а) $y = |2x - 3|$; б) $y = 2|x| - 3$.

1006. а) $y = 2|x^2 - 3|$; б) $y = |x^2 - 6x + 5|$.

1007. а) $y = |2x^2 - 6|x| + 5|$; б) $y = |x^2 - 6x| + 5$.

1008. Скільки розв’язків має рівняння $|x^2 - 6x + 5| = a$, якщо a дорівнює: -2, 0, 2, 4, 6?

1009. Розв’яжіть нерівність:

а) $|x - 1| + |x - 5| \geq 0$; б) $|x - 1| + |x - 5| < 3$.

1010. ***Давньогрецька задача.*** Доведіть, що в арифметичній прогресії з парним числом членів сума членів однієї половини більша від суми решти членів на число, кратне квадрату половини числа членів.

1011. ***Стародавня задача.*** Служивому воїну дано винагороду: за першу рану 1 к., за другу — 2 к., за третю — 4 к. і т. д., а всього — 655 крб 35 к. Скільки ран мав той воїн?

1012. ***Стародавня китайська задача.*** Рисак і шкапа біжать від Чаньаня до князівства Ці, що за 3000 лі від Чаньаня. За перший день рисак пробігає 193 лі, а кожного наступного дня на 13 лі більше від попереднього. Шкапа за перший день пробігає 97 лі, а за кожний інший на половину лі менше, ніж за попередній. Рисак, добігши до Ці, повернув назад. Через скільки днів він зустрів шкапу?

1013. Довжини сторін прямокутного трикутника — послідовні члени арифметичної прогресії. Знайдіть відношення катетів цього трикутника.

1014. Знайдіть числа x, y і z такі, щоб послідовність 2, x, y, z, 9 була арифметичною прогресією.

1015. Знайдіть суму натуральних чисел, менших від 1000, які:
а) діляться на 7;
б) взаємно прості з числом 7;
в) діляться на 3 і не діляться на 6.

1016. a_1, a_2, a_3,..., a_n — перші n членів геометричної прогресії зі знаменником q. Знайдіть суму:
$a_1^n + a_2^n + a_3^n + \ldots + a_n^n$.

1017. q, q^2, q^3, q^4,... — нескінченна геометрична прогресія. Знайдіть суму $q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \ldots$.

1018. Знайдіть нескінченну геометричну прогресію, якщо сума її членів дорівнює 4, а сума кубів її членів становить 192.

1019. Другий, перший і третій члени арифметичної прогресії є послідовними членами геометричної прогресії. Знайдіть її знаменник.

1020. a, b, c — послідовні члени арифметичної прогресії. Доведіть, що числа $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ також є послідовними членами арифметичної прогресії.

1021. Підберіть формулу n-го члена для послідовності:
а) 1, 2, 1, 2, 1, 2,...; б) −1, 2, −3, 4, −5,....

1022. Знайдіть суму:
а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1)$;
б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \ldots + n\{3n - 1)$.

1023. Знайдіть натуральне число, яке дорівнює сумі всіх попередніх натуральних чисел.

1024. У якій арифметичній прогресії сума перших n членів дорівнює $2n^2 + n$?

1025. ***Задача Ньютона.*** Один комерсант щорічно збільшував на третину свій капітал, зменшений на 100 фунтів, які щороку він витрачав на сім'ю. Через три роки його капітал подвоївся. Скільки грошей він мав спочатку?

1026. Між числами 7 і 35 помістіть 6 таких чисел, щоб усі 8 чисел утворювали арифметичну прогресію.

1027. Напишіть n-й член послідовності 3, 6, 11, 18,..., послідовні різниці між сусідніми членами якої становлять арифметичну прогресію.

1028. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x+2}{x}+\ldots+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}=3,$$

у якому доданки лівої частини утворюють арифметичну прогресію.

1029. Знайдіть спільні члени арифметичних прогресій

1, 4, 7,... і 6, 11, 16....

Чи правильно, що послідовність їх спільних членів — арифметична прогресія?

1030. Доведіть, що для кожного натурального n виконується рівність:

а) $2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3 = 2n^2(n + 1)^2$;

б) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$.

1031. ***Задача аль-Каші.*** Доведіть, що для будь-якого натурального значення n має місце рівність:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30}\left(6n^5 + 15^4 + 10^2 - n\right).$$

1032. ***Задача Ферма.*** Доведіть, що

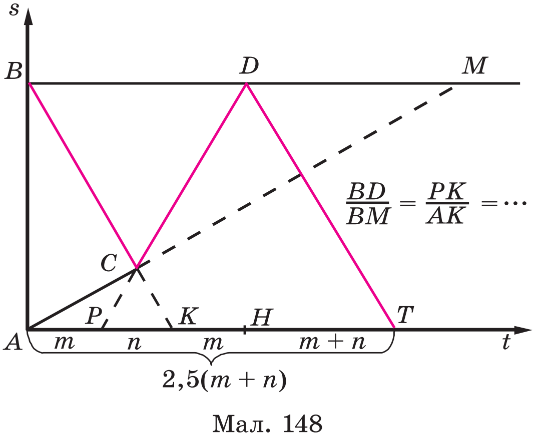
$$5\cdot\left(1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4\right) = (n+2)\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right).$$

1033. Знайдіть суму:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}};$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \ldots + \frac{2}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}.$$

1034. З міста A до села B вирушив пішохід, одночасно з ним з B до A виїхав мотоцикліст. Зустрівши пішохода, мотоцикліст забрав його і повернув до B, а довізши пішохода в село, відразу поїхав до міста. У результаті мотоцикліст затратив на дорогу в 2,5 раза більше часу, ніж планував. У скільки разів менше часу затратив на дорогу до села пішохід завдяки допомозі мотоцикліста (мал. 148)?



Мал. 148

Тренувальні тести

Варіант 1

Оберіть ОДНУ відповідь, яка, на вашу думку, є правильною, і внесіть відповідну букву в табличку відповідей.

1. Яке з чисел не є дільником числа 231?

А	Б	В	Г
11	7	13	3

2. Який із дробів є правильним?

А	Б	В	Г
$\frac{121}{112}$	$\frac{21}{12}$	$\frac{12}{12}$	$\frac{11}{12}$

3. Подайте у вигляді многочлена вираз $(2x+1)(2x+1)$.

А	Б	В	Г
$(2x+1)^2$	$4x^2+1$	$4x^2+4x+1$	$4x^2+2x+1$

4. Обчисліть $\left|\sqrt{25}-2^5\right|$.

А	Б	В	Г
–5	5	27	–27

5. Графік функції $y = x^{-1} - 1$ перетинає вісь абсцис у точці...

А	Б	В	Г
(0; 1)	(0; –1)	(1; 0)	(–1; 0)

6. Знайдіть п'ятий член послідовності, заданої формулою $a_n = 3n - 1$.

А	Б	В	Г
–14	12	14	–12

7. Якому з проміжків належить корінь рівняння $0{,}4x = 9$?

А	Б	В	Г
[–0,4; 0,4]	(4; 9]	(9; 40]	(40; 90)

8. Знайдіть невідомий член пропорції $2{,}5 : 3 = x : 1{,}2$.

А	Б	В	Г
1	6	10	12,5

9. Знайдіть число, якщо 15 % від нього становлять 150.

А	Б	В	Г
100	225	1000	150

10. Обчисліть $\sqrt{(-4)^2} + \sqrt{0{,}16}$.

А	Б	В	Г
–3,6	4,4	–4,4	4,04

Розв'яжіть завдання і подайте до кожного відповідь.

11. Національний дендрологічний парк «Софіївка», що розташований в Україні на околиці міста Умань, було засновано у 1796 р. графом Потоцьким. У 1802 р. будівництво парку було остаточно завершено і граф подарував його своїй дружині Софії. Скільки років створювали парк?

12. Знайдіть область визначення функції $y = \dfrac{5x}{x^2 - 4}$.

13. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - 3y = 1, \\ 3x + y = 13. \end{cases}$

14. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 4x$.

Розв'язання завдань 15–16 слід подати з повним обґрунтуванням.

15. Спростіть вираз $\left(\dfrac{3}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x}\right) : \left(\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right)$.

16. Розв'яжіть нерівність $\dfrac{8 - 3x}{3x^2 - 2x - 16} \le 1$.

Варіант 2

Оберіть ОДНУ відповідь, яка, на вашу думку, є правильною, і внесіть відповідну букву в табличку відповідей.

1. Обчисліть значення виразу 5 − 3   7.

А	Б	В	Г
14	16	−16	−14

2. Знайдіть 20 % від числа 144.

А	Б	В	Г
7,2	72	2,88	28,8

3. Округліть до сотих число 1234,9876.

А	Б	В	Г
12	1234,98	1234,987	1234,99

4. Сума коренів рівняння $2x^2 - 7x + 3 = 0$ **дорівнює...**

А	Б	В	Г
−7	−3,5	3,5	7

5. Графік функції $y = -2x + 6$ перетинає вісь абсцис у точці...

А	(0; 6)	Б	(3; 0)	В	(–3; 0)	Г	(6; 0)

6. Знайдіть куб одночлена $-2x^2y$.

А	$-8x^6y$	Б	$-8x^6y^3$	В	$8x^6y$	Г	$-8x^5y^3$

7. Скільки цілих розв'язків має нерівність $x^2 < 4$?

А	5	Б	4	В	3	Г	2

8. Число $\sqrt{3}$ належить проміжку...

А	[2; 3]	Б	[3; ∞)	В	$\left(-\infty; \sqrt{3}\right)$	Г	(–3; ∞)

9. Розкладіть на множники вираз $x^2 - 18x + 81$.

А	$(x - 18)x$	В	$(x - 9)(x - 9)$
Б	$(x - 9)(x + 9)$	Г	$(x + 9)^2$

10. Обчисліть з точністю до сотих 25 : 15.

А	1,6	Б	1,7	В	1,67	Г	1,66

Розв'яжіть завдання і подайте до кожного відповідь.

11. Яка з функцій $g(x) = x^4 + 1$ і $f(x) = x^5 + 2$ є парною?

12. Розкладіть на множники многочлен $x^3 + 2x^2 + x$.

13. Розв'яжіть рівняння $(x - 5)(2x + 1) - 2x(x - 7) = 1 - x^2$.

14. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x - 2}$.

Розв'язання завдань 15–16 слід подати з повним обґрунтуванням.

15. Спростіть вираз $\dfrac{1}{2(1+\sqrt{a})} + \dfrac{1}{2(1-\sqrt{a})} - \dfrac{a^2+2}{1-a^3}$.

16. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 2x^2 - 9x + 10 \ge 0, \\ (3 - x)(1 - 2x) \le 3. \end{cases}$

Відомості з попередніх класів

НАТУРАЛЬНІ ЧИСЛА ТА ЇХ ПОДІЛЬНІСТЬ

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., які використовують для лічби, називають *натуральними*. Найменше натуральне число 1, найбільшого натурального числа не існує.

Цифри 0, 2, 4, 6, 8 називають *парними*, а всі інші — *непарними*.

На 2 діляться ті і тільки ті числа, які закінчуються парними цифрами. Числа, які діляться на 2, називають *парними*, інші — *непарними*.

На 5 діляться ті і тільки ті числа, які закінчуються цифрою 5 або 0.

На 10 діляться ті і тільки ті числа, які закінчуються цифрою 0.

На 3 діляться ті і тільки ті числа, сума цифр яких ділиться на 3.

На 9 діляться ті і тільки ті числа, сума цифр яких ділиться на 9.

Примітка. Говорячи «сума цифр», мають на увазі суму одноцифрових чисел, записаних відповідними цифрами.

Якщо число a ділиться на m без остачі, то число a називають *кратним числа* m, а m — *дільником числа* a. Наприклад, 5 — дільник числа 35, а 35 — кратне числа 5.

Число 35 має чотири дільники: 1, 5, 7 і 35.

Число 5 має безліч кратних: 5, 10, 15, 20, 25, ...

Число, яке має тільки два дільники — одиницю і саме себе, називають *простим*. Найменше просте число — 2, найбільшого — не існує. Послідовність простих чисел:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... нескінченна.

Натуральне число, яке має більше двох дільників, називається *складеним*. Складених чисел безліч: 4, 6, 8, 9, 10, 12, ... Число 1 — ні просте, ні складене.

Кожне складене число можна розкласти на прості множники. Наприклад:

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3,\ 81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3,\ 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

Числа 18 і 81 мають три спільні дільники: 1, 3 і 9. Числа 81 і 1001 мають тільки один спільний дільник: 1.

Найбільшим спільним дільником (НСД) кількох чисел називають таке найбільше число, на яке ділиться кожне з даних чисел. Щоб знайти НСД кількох чисел, треба кожне з них розкласти на прості множники і перемножити ті з простих множників, які входять до кожного розкладу. При цьому множники брати з найменшим показником, з яким вони входять до даних чисел.

Найменшим спільним кратним (НСК) кількох чисел називають найменше число, яке ділиться на кожне з даних чисел. Щоб знайти НСК кількох чисел, треба розкласти їх на прості множники і до розкладу одного з них дописати ті множники, яких у ньому не вистачає. При цьому множники брати з найбільшим показником, з яким вони входять до даних чисел. Знайдемо, наприклад, НСД і НСК чисел 20, 60 і 90.

20	2		60	2		90	2
10	2		30	2		45	3
5	5		15	3		15	3
1			5	5		5	5
			1			1	

НСД (20; 60; 90) $= 2 \cdot 5 = 10$,
НСК (20; 60; 90) $= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 180$.

Якщо НСД двох або кількох чисел дорівнює 1, то ці числа називають *взаємно простими.* Взаємно простими є, наприклад, числа 8 і 9 або 4, 7 і 25.

РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА

Числа, які відрізняються тільки знаками, називають *протилежними.* Наприклад, число -7 протилежне числу 7, і навпаки. Числа, протилежні натуральним, називають *цілими від'ємними.* Числа натуральні, цілі від'ємні та нуль разом називають *цілими числами.* Натуральні числа називають також *цілими додатними* числами. Від'ємними бувають не тільки цілі числа, а й дробові, наприклад:

$$-2{,}5,\ -\frac{7}{8},\ -3\frac{2}{5}.$$

Частку від ділення натуральних чисел a і b можна записати у вигляді звичайного дробу $\frac{a}{b}$, дробова риска замінює знак ділення. *Чисельник a* і *знаменник b* разом називають *членами дробу.*

Дріб називають *правильним,* якщо його чисельник менший від знаменника. Якщо чисельник дробу більший за знаменник або дорівнює знаменнику, то його називають *неправильним.* Значення неправильного дробу не менше від 1, а правильного — менше від 1.

Основна властивість дробу. Значення дробу не зміниться, якщо його чисельник і знаменник помножити або поділити на те саме натуральне число.

Користуючись цією властивістю, дроби можна скорочувати.

Цілі та дробові числа (додатні і від'ємні) разом називають *раціональними числами.* Співвідношення між найважливішими видами чисел показано на схемі.

Множина натуральних чисел є частиною (підмножиною) множини цілих чисел, а множина цілих чисел — частиною (підмножиною) множини раціональних чисел. На координатній прямій кожному раціональному числу відповідає єдина точка.

Додатні числа (цілі і дробові) та нуль разом називають *невід'ємними числами*.

Модуль невід'ємного числа дорівнює самому числу; модуль від'ємного числа дорівнює протилежному числу. Наприклад:

$$|3{,}7| = 3{,}7; \quad |-12| = 12; \quad |0| = 0; \quad \left|-\frac{2}{15}\right| = \frac{2}{15}.$$

Із двох раціональних чисел *меншим* вважають те, якому на координатній прямій відповідає точка, розміщена лівіше. Тому кожне від'ємне число менше від кожного невід'ємного. Із двох від'ємних чисел меншим вважають те, модуль якого більший. Наприклад:

$$-12 < 0; \qquad -12 < 7; \qquad -12 < -9.$$

ВІДНОШЕННЯ І ПРОПОРЦІЇ

Частку від ділення двох чисел називають також їх *відношенням*. Приклади відношень: 3 : 7; 0,5 : 0,3.

Основна властивість відношення. Значення відношення не зміниться, якщо обидва його члени помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля. Тому, наприклад, значення відношень 300 : 200 і 3 : 2 рівні.

Відношення дробових чисел завжди можна замінити відношенням цілих чисел. Для цього досить обидва члени відношення помножити на спільне кратне їх знаменників. Наприклад:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2.$$

Кожний звичайний дріб є відношенням його чисельника до знаменника:

$$\frac{a}{b} = a : b.$$

Рівність двох відношень — *пропорція*. Приклади пропорцій:

$$45 : 15 = 21 : 7; \quad \frac{2}{3} = \frac{10}{15}; \quad x : 3 = 20 : 30.$$

Числа, які складають пропорцію, називають її *членами* (середніми і крайніми):

крайні члени

$$a : b = c : d.$$

середні члени

Основна властивість пропорції. Якщо пропорція правильна, то добуток її крайніх членів дорівнює добутку середніх. Тобто якщо

$$a : b = c : d, \text{ то } ad = bc.$$

ДІЙСНІ ЧИСЛА

Числа цілі й дробові, додатні, від'ємні і нуль разом становлять множину *раціональних чисел*. Кожне раціональне число можна записати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — число ціле, а n — натуральне.

Кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. І кожний нескінченний періодичний десятковий дріб зображає деяке раціональне число.

Приклади. $\frac{2}{3} = 0,6666\ldots$; $-\frac{13}{11} = -1,181818\ldots$.

Числа, які зображаються нескінченними неперіодичними десятковими дробами, називають *ірраціональними*.

Приклади ірраціональних чисел: $\sqrt{2} = 1,4142136\ldots$, $\pi = 3,1415926\ldots$.

Ірраціональні числа разом з раціональними утворюють множину *дійсних чисел*. Множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел позначають відповідно буквами ***N***, ***Z***, ***Q***, ***R***.

Дійсні числа можна додавати, віднімати, множити, підносити до степеня і ділити (на числа, відмінні від 0). Для додавання і множення довільних дійсних чисел правильні переставний, сполучний і розподільний закони: $a + b = b + a$, $ab = ba$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (bc) = (ab) \cdot c$, $(a + b)c = ac + bc$.

Розв'язуючи прикладні задачі, ірраціональні числа звичайно округлюють, відкидаючи їх нескінченні «хвости» десяткових знаків. При цьому додержуються *правила округлення*. Якщо перша з відкинутих цифр 0, 1, 2, 3 або 4, то останню цифру, що залишається, не змінюють. Якщо перша з відкинутих цифр 5, 6, 7, 8 або 9, то останню цифру, що залишається, збільшують на 1.

ВИРАЗИ

Числа, змінні, а також різні записи, складені з чисел чи змінних та знаків дій, разом називають *виразами*. Вирази бувають *числові* (наприклад, $3 - 0,5 : 6$) і *зі змінними* (наприклад, $3x$, $2ab$, $c^2 - 3$). Якщо вираз не містить ніяких інших дій, крім додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня з цілим показником і ділення, то його називають *раціональним виразом*. Раціональний вираз, який не містить дії ділення на вираз зі змінною, називають *цілим виразом*.

Приклади цілих виразів: $32,5$; a; $\frac{2}{5}x + y$; $0,3(x - z^2)$.

Два цілих вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких значеннях змінних, називають *тотожно рівними*, або *тотожними*. Два тотожно рівних вирази, сполучені знаком рівності, утворюють *тотожність*. Заміну одного виразу іншим, тотожним йому, називають *тотожним перетворенням* даного виразу.

Найпростіші вирази — числа, змінні, їх степені або добутки, їх називають *одночленами*.

Приклади одночленів: $4x,\ 2{,}5,\ -3x^2,\ -3\frac{1}{2}am^3,\ 2ax\cdot 3ax^2$.

Якщо одночлен містить тільки один числовий множник, до того ж поставлений на перше місце, і якщо кожна змінна входить тільки до одного множника, то такий одночлен називають *одночленом стандартного вигляду*. Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають *коефіцієнтом* цього одночлена.

Суму кількох одночленів називають *многочленом*. Для зручності кожний одночлен також вважають многочленом.

Подібними членами многочлена називають такі, які різняться тільки коефіцієнтами або й зовсім не відрізняються один від одного. Многочлен записано в стандартному вигляді, якщо всі його члени — одночлени стандартного вигляду, і серед них немає подібних.

Розкласти многочлен на множники — означає замінити його добутком кількох многочленів, тотожним даному многочлену. Найпростіші способи розкладання многочленів на множники: винесення спільного множника за дужки, спосіб групування, використання формул скороченого множення.

Приклади.

$$6a^3x - 9abx = 3ax(2a^2 - 3b);$$
$$ax + bx - ay - by = x(a + b) - y(a + b) = (a + b)(x - y);$$
$$9m^2 - 4 = (3m - 2)(3m + 2).$$

Частку від ділення виразу A на вираз B можна записати у вигляді *дробу* $\frac{A}{B}$. Дріб має значення тільки тоді, коли його знаменник не дорівнює нулю. При будь-яких значеннях a, b і $c \neq 0$ $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ (*основна властивість дробу*). На основі цієї властивості дроби можна скорочувати або зводити до спільного знаменника. Наприклад:

$$\frac{3a-6x}{a^2-4x^2}=\frac{3(a-2x)}{(a-2x)(a+2x)}=\frac{3}{a+2x}.$$

Дії над будь-якими дробами можна виконувати подібно до того, як їх виконують над звичайними дробами. Якщо знаменники не дорівнюють 0, то завжди

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},\quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c},\quad \frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd},\quad \frac{a}{c}:\frac{b}{d}=\frac{ad}{cb}.$$

Дробовий вираз $\frac{1}{a^n}$ записують також у вигляді a^{-n}.

Квадратним коренем з числа a називають число, квадрат якого дорівнює a. Наприклад, з числа 16 існує два квадратних корені: 4 і -4. Невід'ємне значення квадратного кореня з числа a називають *арифметичним значенням кореня* і позначають символом $\sqrt{a}$.

РІВНЯННЯ

Рівняння — це рівність, яка містить невідомі числа, позначені буквами. Числа, які задовольняють рівняння, — його *розв'язки* (або *корені*). *Розв'язати рівняння* — означає знайти всі його розв'язки або показати, що їх не існує.

Два рівняння називають *рівносильними*, якщо кожне з них має ті самі розв'язки, що й друге. Рівняння, які не мають розв'язків, також вважають рівносильними одне одному.

Рівняння виду $ax = b$, де a і b — довільні числа, називається *лінійним рівнянням* зі змінною x. Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ називають *рівнянням першого степеня* з однією змінною. Кожне рівняння першого степеня $ax = b$ має один корінь $x = \frac{b}{a}$. Лінійне рівняння може мати один корінь, безліч або не мати жодного кореня.

Наприклад, рівняння $12x = 6$ — має один корінь; $0x = 0$ — має безліч коренів; $0x = 5$ — не має жодного кореня.

Квадратним називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b, c — дані числа, причому $a \neq 0$. Вираз $D = b^2 - 4ac$ — дискримінант квадратного рівняння. Якщо $D > 0$, то дане рівняння має два корені:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Якщо $D = 0$, то ці корені рівні. При $D < 0$ квадратне рівняння не має дійсних коренів.

Теорема Вієта. Якщо зведене квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$ має два корені, то їх сума дорівнює $-p$, а добуток дорівнює q.

Теорема, обернена до теореми Вієта. Якщо сума і добуток чисел m і n дорівнюють відповідно $-p$ і q, то m і n — корені рівняння $x^2 + px + q = 0$.

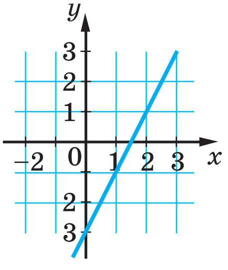
Дробові рівняння можна розв'язувати, користуючись тим, що дріб дорівнює нулю, якщо його чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля. А можна спочатку помножити обидві частини рівняння на спільний знаменник усіх його дробів, розв'язати утворене рівняння й виключити з його коренів ті, які перетворюють на нуль спільний знаменник.

СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Рівняння виду $ax + by = c$, де a, b, c — дані числа, називають *лінійним рівнянням з двома змінними* x і y. Якщо $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то його називають *рівнянням першого степеня з двома змінними.*

Кожну пару чисел, яка задовольняє рівняння з двома змінними, називають *розв'язком* цього рівняння. Наприклад, пара чисел (3; −2) — розв'язок рівняння $5x + 3y = 9$. Кожне рівняння першого степеня з двома змінними має безліч розв'язків. У декартовій системі координат кожному рівнянню першого степеня з двома змінними відповідає пряма — графік цього рівняння. На малюнку 149 зображено графік рівняння $2x - y = 3$. Координати кожної точки цього графіка задовольняють дане рівняння. Координати будь-якої іншої точки його не задовольняють.

Якщо треба знайти спільні розв'язки двох чи кількох рівнянь, то говорять, що ці рівняння утворюють *систему рівнянь*. *Розв'язком системи рівнянь* називають спільний розв'язок усіх рівнянь.



Мал. 149

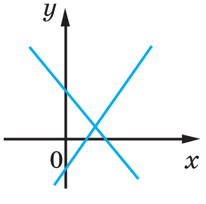
Кожній системі двох рівнянь першого степеня з двома невідомими в декартовій системі координат відповідає пара прямих. Оскільки дві прямі на площині можуть перетинатися, збігатися або бути паралельними, то й відповідна їм система рівнянь може мати один розв'язок, безліч розв'язків або не мати жодного розв'язку.

Розв'язувати системи рівнянь з двома змінними можна: способами підстановки, додавання або графічним.

Система лінійних рівнянь

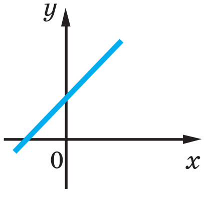
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$



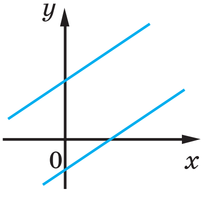
Має
один розв'язок

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



Має
безліч розв'язків

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$



Не має
жодного розв'язку

Відповіді та вказівки до задач і вправ

9. а) $m > n$. **10.** а) $y < x$. **17.** а) $2x + 3 > 3x - 2$. **19.** в) $y(-8) > y(0)$. **23.** а) Так; б) ні. **28.** а) $5m + 1 < 19 - 3m$. **30.** Перша; у 2019 разів. **33.** $x = 1{,}5$. **34.** $x = 1{,}5$. **37.** 2. **39.** а) $b > a$. **40.** а) $x > y$. **44.** б) $a = b$. **45.** а) 186,5; в) − 0,5. **46.** а) 1; в) −2; ґ) 10. **47.** б) 5; г) 12. **48.** а) c^2; в) 1; д) 0. **49.** б) 0. **50.** а) $6\sqrt{a}$ в) 8; ґ) 2. **51.** а) − 5 і − 3; б) − 2 і 9; д) −0,25. **52.** а) (−2; 5). **55.** 20 %. **59.** а) Додатне. **65.** а) $a > b$. **69.** б) $1{,}5a > 1{,}5b$. **70.** б) Від'ємне. **71.** в) $5 + x < 6 + z$. **72.** а) $10 < 24$. **74.** б) $-0{,}1\,m > -0{,}1\,n$; г) $1 - m > 1 - n$; ґ) $5m - 1 < 5n - 1$. **75.** б) $x^2 > xy$. **76.** в) $\sqrt{-x} > \sqrt{-y}$. **78.** $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{a}$. **81.** а) Так. **83.** 1 – В, 2 – Д, 3 – Г, 4 – А. **86.** а) Ні. **89.** б) $(3x + 1)(2x - 1)$; г) $(c + 2\sqrt{2})(c - \sqrt{2})$. **94.** а) 0. **97.** а) $3 < x < 12$. **99.** а) $7 < n < 8$.

103. а) $6 < x - y < 8$. **104.** а) $15 < xy < 28$. **105.** а) $2 < \frac{x}{y} < 3$. **106.** а) $-3 < 2x + 3 < 13$; в) $-3 < 2 - x < 5$. **108.** в) $3{,}58 \cdot 10^6 < V < 3{,}66 \cdot 10^6$. **113.** г) 1. **122.** а) $-1 < x < 2$. **123.** О 12 год. **125.** а) (4; 2). **127.** б) $x < -3$; д) R. **128.** а) Жодного; д) безліч. **131.** а) $x > 3$; ґ) $y < 9$. **132.** а) $x > 5$; г) $x \le -5$. **133.** в) $x > 0$; ґ) $x < 1$. **134.** а) $x < \cdot 1$; в) $x > 0$; ґ) $z > 0{,}25$. **135.** б) Так; г) ні. **136.** а) $x > 3$; б) $y < 2$; в) $x \ge 5$; г) $x < -6$. **137.** а) $x \le -13$; б) $x > 1$; в) $x > 3$; г) $x \le -2$. **138.** а) $x > 1$; б) $x < 5$; в) $x < 3$; г) $x > 0$; д) розв'язків немає. **140.** б) $x > 20$. **141.** а) $x \ge -5$; б) $x \ge -2{,}6$. **142.** а) $x > 1$. **143.** а) $x > 8$; б) $x < -2{,}5$. **144.** а) $x \le 4{,}2$; в) $x < 0$; г) $x > -7{,}5$; ґ) $x \ge -2$; е) $x > 8$. **145.** б) $x < 7$; в) $x < -6$; г) $x \le 0$; е) $x > 24$. **146.** а) $x < 4$; б) $x \le 9$; в) $x > 0$. **147.** а) $x > 1{,}8$; в) $x > -2$. **149.** а) 4. **150.** б) −4. **153.** в) $x \ge 2$; д) $x \le 2$. **154.** а) $x > -2$; б) $x \le 11{,}5$. **155.** б) $x \ge 7$; в) $z \ge 0{,}65$. **157.** а) $x > 5$. **158** а) $c > 2$; б) $z \ge 1$. **159** а) $x < 1{,}2$; б) $x < 17{,}5$; д) $x \le 0$. **160** в) R; г) Розв'язків немає. **161** б) $x < 0$; в) $x > 1{,}5$. **162.** [0;4). **163.** а) $x > 4$; б) [0; 1]; в) $x \ge 4$. **165.** Не більш ніж $25\frac{2}{3}$ км. **166.** а) $x < -0{,}5$; б) $x \ge -1$; в) R; г) $x \le 5{,}8$. **167.** а) $-0{,}4 \le x \le 1$; б) $-1 < x < 1$; в) $1 < x \le 4$; г) $-0{,}05 < x < 0{,}7$; ґ) $-0{,}1 < x < 0{,}1$; д) $-1{,}6 \le x \le 4{,}2$; е) $2 < x < 3$. **168.** а) 3; б) 3; в)1; г) −10. **169.** а) $-5 < x < 5$; б) $-4 \le x \le 10$; в) $1 < x < 2$. 170. б) $-10 < x < -4$; в) $-0{,}2 \le x \le 0{,}6$. **170.** б) $-10 < x < -4$. **171.** б) Якщо $a < 0$, то $x \ge 0$; якщо $a = 0$, то $x \in$. R; якщо $a > 0$, то $x \le 0$; в) Якщо $a < 0{,}5$, то $x > 2a - 1$; якщо $a = 0{,}5$, то розв'язків немає; якщо $a > 0{,}5$, то $x < 2a - 1$; г) якщо $a < 0$, то $x < 1$; якщо $a = 0$, то розв'язків немає; якщо $a > 0$, то $x > 1$. ґ) якщо $a = 0$, то $x \in R$; якщо $a \ne 0$, то $x \le 0$. **173.** а) $1{,}2 \cdot 10^6$; б) $-7{,}5 \cdot 10^{-7}$; в) $1{,}764 \cdot 10^{19}$; г) $8{,}88 \cdot 10^{13}$. **175.** На 50 %. **177.** а) (0;2); б))(0;1); в) (1;5); г) $(-\infty;3)$. **178.** а) (0;1); б))(0,5;1); в) {2}; г) $\varnothing$.

188. а) [2; 5] і {3}; б) [−5; 0] і [−3; 0]; в) [−7; 7] і [−5; 5]; ґ) (−2; 2) і $\varnothing$; г) [−3; −1] і (−2; −1); д) (−∞; ∞) і [−2; 2). **190.** а) $a > c$; б) $a < c$; в) $a > c$; г) $a < c$. **191.** а) $x > 3$; б) $x \geq 3$; в) $x > 0{,}8$; г) $x < 3$; ґ) $x > 1$; д) $x \geq 10$. **192.** а) $x \leq 0{,}2$; б) $x > -0{,}5$; в) $x > -0{,}5$; г) $x > 3$; ґ) $x \geq -0{,}6$; д) $x \geq -50$. **194.** а) $x \geq 0{,}2$; в) $x > 6{,}6$; г) $x < 2{,}25$. **195.** а) $x > 1$; б) $y < -1$. **196.** а) $m<a$, $b<n$. **197.** а) $x<a$, $y>c$; б) $x>a$, $y<c$; в) $x>a$, $y<c$; г) $x>a$, $y>c$. **198.** а) $x<a<y$; б) $a<x<y$; в) $x<a<y$. **200.** а) $-4 < x < 5$; б) $-9 < x \leq 1$.

201. а) $-1 < x < 1$; г) $-3 < x \leq -1$. **203.** а) $(-\infty;\infty)$. **204.** б) $x \geq 4$. **206.** б) R; [−13; 1). **209.** д) $(-\infty;1)\triangle(4;\infty)$. **210.** а) R. **219.** б) 2 і 3. **221.** а) (−3; 1). **222.** а) Розв'язків немає. **224.** а) (6; 8). **226.** б) $(10;\infty)$. **227.** в) −0.25. **228.** а) (2; 16]. **229.** а) {3, 4, 5, 6}. **230.** б) (−3; −1). **232.** а) (1,5; 2,5). **234.** б) $(-\infty;-0{,}4)$. **235.** а) [3;5]. **236.** а) $0{,}625 < x < 0{,}875$. **238.** а) (−2;7). **239.** в) $(-5;\infty)$. **240.** а) $(-\infty;-3)\triangle(7;\infty)$. **241.** г) $(-\infty;-9)\triangle(-2;\infty)$. **242.** (−1; 1). **244.** а) (4; 10). **247.** а) Так; б) так. **248.** а) (−1; 3). **249.** а) (−4; 1); б) [−2,5; 4,5]. **250.** а) $(-\infty;4{,}5)\triangle(5{,}5;\infty)$. **251.** а) (2; 3). **256.** б) 19. **257.** б) 200. **262.** в) $a^2 + 65 - 16a = (a - 8)^2 + 1 > 0$. **263.** а) $(a + 1)^2 - 4a = (a - 1)^2 \geq 0$. **264.** а) При кожному від'ємному x числа $x - 1$ і $x - 2$ від'ємні, а їх добуток додатний; б) при від'ємному x число $x^2 + 9$ додатне, а $10x$ від'ємне. **267.** а) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0{,}5(2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc) = 0{,}5((a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2) \geq 0$. **269.** б) Квадрат суми двох від'ємних чисел більший, ніж сума їхніх квадратів. **281.** а) −2 і −1; б) −4 і 0. **282.** −3 і 3. **283.** 1633,4 т. **284.** а) 0,8. **285.** 1 –Б, 2 – Д, 3 – А , 4 –В.

288. а) Пряма; г) гіпербола. **291.** а) R; ґ) $x \geq 2$. **296.** $f(2) = 14$. **297.** $f(-3) = 22$. **298.** а) 8. **299.** а) 12.

301. а) R; г) $x \neq 3$ і $x \neq 4$. **302.** б) $x \neq -1$ і $x \neq 4$; в) $x \leq 4$. **305.** а) {7}; б) R. **306.** Точка A належить. **307.** Через точку A проходить. **308.** а) Належать точки A і C. **309.** а) (0; 0); б) (1,5; 0) і (0; 3). **311.** Так. **312.** Так. **313.** а) $f(-2) = 11$, $f(-1) = 5$, $f(0) = 3$, $f(2) = 11$, $f(1) = 5$. **316.** (2; 2). **321.** а) (−6; 0) і (0; 3); г) (−2; 0), (2; 0) і (0; 4). **325.** $m = 20$; так. **326.** 1 – А, 2 – Д, 3 – Г, 4 –Б. **328.** а) $(-\infty;-\sqrt{5})\triangle(\sqrt{5};\infty)$.; б) $[0;\infty)$; г) [−5; 5]. **329.** $0 \leq x \leq 1$. **332.** $p = 5$ гр. од.; $QS = QD = 4$ млн штук у рік; зменшиться на 8 %. **335.** б) $x > 1$. **338.** а) Ні. **345.** а) R; в) $x \geq -4$; ґ) R. **346.** а) R; ґ) (−∞; 0) $\triangle$ (0; ∞); д) R. **347.** а) R і [−1; ∞); г) $[0;\infty)$ і $(-\infty;1]$; д) R і [2; ∞). **349.** [−2; 5] і [−5; 5,5]. **353.** а) Ні; б) так: −1 і 0. **359.** а) Зростаюча; б) спадна. **363.** а) R і [4; ∞]. **365.** а) $x < 2{,}5$; б) $x > -4$. **366.** б) $0 \leq x \leq 16$; в) $-3 \leq x \leq 0$; ґ) $x \leq -2$. **369.** а) (−∞; 0]; б) (−∞; 3]. **370.** а) R. **372.** Ні. **375.** г) Парна; ґ) непарна. **388.** а) −3 і 1,5. **389.** а) −5 і −3. **390.** а) $7{,}8 \cdot 10^3$; д) $4{,}5 \cdot 10^{-4}$. **393.** а) Зростаючою. **398.** а) $(a; b)$. **399.** а) $(-\infty;-c)$.

410. б) перенести на 3 одиниці у напрямку осі *x*. **414.** а) $y = (x - 2)^2 + 3$. **429.** а) 0,5. **431.** а) −6 і 2,5. **432.** а) $(x - 3)^2 + 6$; г) $(x - 0{,}5)^2 - 1{,}25$. **436.** а) (3; 0); в) (5; 2). **440.** а) (0; 0) і (2; 0). **442.** а) (0;4); в) (2; −4). **447.** а) *m* = − 6, *n* = 14. **450.** Ні. **452.** а) *x* = 3. **453.** а) *c* = 0; в) *c* = 6. **454.** а) −4 і 4. **463.** а) *x* =· 3; б) *x* = − 2. **464.** а) *y* = 3; б) *y* = − 1. **466.** б) (− 1; 2) і (1; 2). **467.** а) 7. **469.** *b* = − 6. **471.** *Вказівка*. Побудуйте квадрат зі стороною *x* і до його двох суміжних сторін добудуйте прямокутники зі сторонами *x* і 3. **473.** б) $x \le 4$. **474.** б) $-7 \le x \le -3$. **475.** а) Два. **481.** а) (0; 4); б) [−6; 0]; в) [−7; 1]; ґ) (−∞; − 3,5] ▵ [0; ∞). **482.** а) $(-\infty; 3) \vartriangle (3; \infty)$.; б) розв'язків немає; в){−2}; г) {−0,5}; д) *R*. **483.** а) [1; 2]; б) розв'язків немає; в) (−∞; 1] ▵ [3; ∞). **484.** а) $(-\infty; 0{,}5] \vartriangle [1; \infty)$; б) (2; 4); г) (−2; 6); д) (−∞; 2] ▵ [9; ∞). **485.** б) $(-\infty; 6) \vartriangle (6; \infty)$; г) (−2,5; 1,5). **486.** а) (1; 2); б) (−∞; 2) ▵ (2,5; ∞); в) розв'язків немає; д) (−7; 2). **487.** а) (−∞; −7] ▵ [1; ∞); б) [3; 5]; в) (− 3; 2); д) (−∞; 2] ▵ [3; ∞). **490.** а) $(-\infty; -2] \vartriangle [2; \infty)$. **491.** а) −5; −4; −3; −2; −1; 0; в) −1; 0; 1; 2; г) −3; −2; −1; 0; 1; 2; д) {2}. **492.** а) [1; 4]; б) (− 5; 6); в) (− 1; 0); г) (−∞; 2] ▵ [3; ∞). **493.** а) (1,5; 2); в) (−∞; − 0,5) ▵ ▵ (1; ∞); г) розв'язків немає. **494.** а) (−2; 3); б) (−∞; − 2) ▵ (7; ∞); д) (0,25; 1,5). **495.** а) $(-3; \infty)$; б) (1; 9); д) (−∞; 2) ▵ (10; ∞) ▵ {6}. **496.** а) (−∞; −7) ▵ [−5; ∞); б) (2; 3); в) (−∞; − 0) ▵ (1; ∞); г) (−8; 7). **497.** а) (0,5; 3); б) [−4; 0,5]; г) (−4; 5). **498.** а) $[-7; 1] \vartriangle [2; \infty)$; б) (−5; −4) ▵ (4; 5); в) (−3; 1). **499.** а) [−2; 3]; б) [−1; 1) ▵ [2; 3]; в) (−∞; − 3) ▵ (−1; 4) ▵ (5; ∞).

500. а) $\{-1\} \vartriangle [1; 2{,}5]$; б) (−∞; −5) ▵ (−2; 2) ▵ (2; ∞); в) (−∞; −3) ▵ ▵ (3; ∞). **501.** б) $(-\infty; 0{,}25) \vartriangle [6; \infty)$. **502.** а) (−0,2;2) ▵ (2; 0,2); в) (1; ∞). **503.** а) (−1;6). **504.** а) [−1; 8]; в) [−5; −3) ▵ (−3; 1] ▵ [5; ∞); г) [−3; 0,5]. **505.** а) $b \in [-1; 1]$; б) $b \in$ [9; ∞]; в) $b \in$ (−∞; 0]. **506.** а) $m \in (-4; 4)$; б) $m \in$ [9; ∞); в) $m \in$ (−∞; −4]. **507.** а) [3; 4). **508.** а) $(-\infty; -1) \vartriangle (3; 4] \vartriangle [7; \infty)$. **509.** а) $(-1; 0) \vartriangle (5; 6)$. **511.** Три. **512.** 10. **513.** а) $-\ 4{,}5x^4y^2$. **521.** а) (0; 1), (1;0); б) (0; 0), (4; 2); в) (−3; 2). **522.** а) (3; 3), (−3; −3); б) (0; 1), (1; 0); в) (4; 4), (−4; −4). **523.** а) (0; 0), (1; 1); б) система розв'язків не має; в) (2; 4). **524.** а) (0; −5), (3; 4), (−3; 4); б) (3; 3), (−3; −3); в) (0; 2), (−2; 0). **525.** а) (3; 0), (0; −3); б) (−1; −4), (4; 1); в) (0; −2), (4; 2). **526.** а) (6; 8), (8; −6); б) $(-1;\ \sqrt{3})$, $(-1;\ -\sqrt{3})$; в) (1; −2), (2; −1); г) (5; 3). **527.** б) (12; 16), (4; 0); в) (−3; −3), (2; 2); г) (2; 0), (0; 2). **528.** а) (13; 3); б) (3; 2), (−3; −2); в) (3; 1), (3; −1), (−3; 1), (−3; −1); г) $(\sqrt{15};\ \sqrt{10})$, $(\sqrt{15};\ -\sqrt{10})$, $(-\sqrt{15};\ \sqrt{10})$, $(-\sqrt{15};\ -\sqrt{10})$. **529.** а) (4; 5), (5; 4), (−4; −5), (−5; −4); б) (5; 3), (3; 5), (−5; −3), (−3; −5); в) (2; 1), (−2; −1); г) (0; 0). **530.** а) (2; 8), (8; 2); б) (12; 8). **531.** а) (8; 6), (−5; −7); б) (−5; −7), (8; 6). **532.** а) (8; 2), (−15; 25); б) (8; 2), (−40; 50). **534.** а) (2; 1), (3; 2); б) (3; 2). **535.** а) (5; 1), (8; 2); б) (3; 4), (4; 3),

$(-3;\ -4)$, $(-4;\ -3)$. **536**. а) $(4;\ 4)$, $(-4;\ 4)$; б) $(-1;\ 1)$, $(0;\ 0)$, $(1;\ 1)$. **537**. а) $(1{,}2;\ -1{,}6)$, $(-0{,}7;\ 4{,}1)$; б) $\left(-\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; в) $(3;\ 4)$, $(3;\ -4)$; г) $\left(\sqrt{51};\ -1\right)$, $\left(-\sqrt{51};\ -1\right)$. **538**. а) $(4-\sqrt{10};\ 4+\sqrt{10})$, $(4+\sqrt{10};\ 4-\sqrt{10})$; б) $(3;\ 6)$; в) $(4;\ 2)$, $(4;\ -2)$; г) $(3;\ -1)$, $(3{,}5;\ 1)$. **539**. а) $(3;\ 5)$; в) $(5;\ 3)$, $(3;\ 5)$, $(-5;\ -3)$, $(-3;\ -5)$; г) $(5;\ 1)$, $(-5;\ -1)$. **540**. $(1;\ 1)$, $(1;\ -1)$; б) $(1;\ 2)$, $(-1;\ 2)$, $(1;\ -2)$, $(-1;\ -2)$; в) $(2;\ 2)$, $(-2;\ -2)$; г) $(3;\ 2)$, $(2;\ 3)$, $(-3;\ -2)$, $(-2;\ -3)$. **541**. а) $(0;\ 10)$, $(8;\ 2)$; б) $(4;\ 6)$, $(6;\ 4)$. **542**. а) $(-6;\ 18)$, $(9;\ 3)$; б) $(6;\ 4)$, $(4;\ 6)$. **543**. а) $(-5;\ -1)$, $(5;\ 1)$; б) $(3;\ 2)$, $(-3;\ -2)$, $(-2;\ 3)$, $(2;\ -3)$; в) $(0;\ -2)$, $(0;\ 2)$, $(2;\ 0)$; г) $(0;\ 1)$, $(0;\ -1)$, $(-\frac{1}{2};\ 0)$. **544**. а) $(1;\ 1)$, $(-2;\ -2)$; б) $(2;\ 1)$, $(2;-1)$; в) $(4;\ 1)$, $(1;\ 4)$; г) $(9;\ 4)$, $(4;\ 9)$. **545**. а) $(9;\ 3)$, $(-9;\ -3)$, $(0;\ 3\sqrt{10})$, $(0;\ -3\sqrt{10})$; б) $(-4\sqrt{2};\ 4\sqrt{2})$, $(4\sqrt{2};\ -4\sqrt{2})$, $(4\sqrt{2};\ 4\sqrt{2})$, $(-4\sqrt{2};\ -4\sqrt{2})$; в) $(4;\ 2)$, $(2;\ 4)$, $(3-3\sqrt{2};\ 3+3\sqrt{2})$, $(3+3\sqrt{2};\ 3-3\sqrt{2})$; г) $(7;\ 2)$, $(2;\ 7)$. **546**. а) $(4;\ -3)$, $(-3;\ 4)$; б) $(5;\ 1)$, $(1;\ 5)$, $(2;\ 3)$, $(3;\ 2)$; в) $(1;\ 3)$, $(3;\ 1)$; г) $(-1;\ 2)$, $(2;\ -1)$. **547**. а) $(6;\ 2)$, $(-6;\ -2)$; б) $(1;\ 4)$, $(4;\ 1)$; в) $(1;\ 2)$, $(2;\ 1)$; г) $(4;\ 12)$, $(12;\ 4)$. **548**. а) $(2;\ 4)$, $(4;\ 2)$; б) $(7;\ 5)$, $(-5;\ -7)$; в) $(1;\ 2)$, $(3;\ -6)$; г) $(3\sqrt{3};\ 3\sqrt{3})$, $(-3\sqrt{3};\ -3\sqrt{3})$. **549**. б) $a = 1$ і $b = 0$ або $a = -\frac{1}{2}$ і $b = -\frac{3}{2}$; в) $a = 3$ і $b = 2$ або $a = -3$ і $b = -2$; д) $a = 3$ і $b = 0$; $a = 1$ і $b = -2$. **550**. а) $17\sqrt{2}$ лін. од.; б) $\sqrt{2}$ лін. од. **551**. 1 – В, 2 – А, 3 – Б, 4 – Д. **552**. 1) а) $1{,}5\cdot10^6$ км; б) $10{,}8\cdot10^8$ км; 2) а) 1 км 715 м; б) 5 км 145 м. **553** а) $\dfrac{x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-9\right)}$; $\dfrac{-3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-9\right)}$. **554**. б) $\dfrac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$; в) $\dfrac{c+2\sqrt{5}}{c-2\sqrt{5}}$.

559. -10 і $-0{,}9$ або $0{,}9$ і 10. **561.** а) 23 і 21. **562.** а) 12 дм і 5 дм. **563.** 6 м і 8 м. **564.** 35 см і 12 см. **565.** 8 см і $4\sqrt{2}$ см. **566.** 15 см і 10 см. **567.** 3, 5 і 8 см. **568.** 84 год і 60 год. **571.** 180 деталей. **572.** 15 днів. **573.** 49 верстатів. **574.** 32 $м^3$. **575.** 36 хв і 72 хв. **576.** 39 м, 52 м і 65 м. **577.** 300 км або 360 км. **578.** 48 км/год. **579.** 12 км/год, 18 км/год, 24 км. **580.** 18 км/год, 2 км/год. **583.** 10 км/год. **584.** 72 км/год. **585.** 60 км/год або 93 км/год. **598.** а) Нескінченна; в) скінченна.

600. а) 9; б) 15. **606**. а) 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29. **607**. а) 67; в) 4. **608**. На 5. **609**. У 10 раз. **610.** $b_6 = 64$; $b_8 = 256$; $b_{10} = 1024$. **611.** Ні. **612.** $an = 7n - 4$. **613.** 7, 9, 11, 13, 15,.... **616.** а) 2, -4, 8, -16, 32; в) 15, 10, 5, 0, -5. **618.** $a_2 = -2$; $a_5 = 7$; $a_{10} = 22$. **619.** а) $n = 17$; б) $n = 16$. **620.** а) $16 \le n \le 51$; в) $3 \le n \le 4$; ґ) $9 \le n \le 97$. **621.** а) 124; б) 79. **622.** 14. **624.** $k = 4$, $p = 3$. **625.** $a_n = (4 - n)^2$. **626.** а) $an = 3n - 1$; б) $2n$. **633.** а) Зростаюча; в) спадна. **636.** а) $a_3 = 4$. **637.** а) $a_5 = -10$. **640.** 1000 грн, 1500 грн. **642.** а) $(5;\ 0)$, $(1;\ 4)$; б) $(-3;\ 4)$, $(3;-\ 4)$, $(-4;\ 3)$, $(4;\ -3)$. **647.** а) 7, 9, 11, 13, 15. **649.** а) $a_7 = -19$, $a_{20} = -71$; б) $a_{15} = 65$, $a_{32} = 133$. **650.** $d = 11$, $a_{10} = 102$,

a_{20}= 212. **651.** d = 5, a_{10} = 47. **652.** а) d = 15; б) d = −0,2. **653.** а) a_1 = 5; б) a_1 = 40; г) 19. **654.** a_1 = 5, a_5 = 17, a_{11} = 35, a_{21} = 65. **655.** d = −9, a_1 = 86, a_5 = 50, a_{21} = −94. **656.** a_7 = 14, a_{20} = 7,5. **657.** a_{40} = 20, a_{41} = 20,5. **658.** а) a_n = 3n − 1. **659.** а) a_n = 5n +2; в) an = 3n − 5,5. **660.** а) −125; в) −2,5. **884.** а) a_1 = 5, d = 10; б) d = −7, a_1 = 153. **662.** а) 50; б) − 50; г) 13250. **663.** а) 2420; б) 3180; г) 4180. **664.** а) 1088; б) 1100; г) −522; д) 400. **665.** a_{20} = 79; S_{20} = 820. **666.** 1830. **668.** 5050. **669.** 10000. **670.** 645 см. **671.** 1680 грн. **672.** a_9 = 16,1, a_n = 2n − 1,9, a_3p = 6p − 1,9. **673.** в) 95. **674.** а) a_1= 1, d = 3, a_{21} = 61, a_{100} = 298; г) a_1 = 2,8, d = 1,2, a_{21} = 26,8, a_{100} = 121,6. **678.** а) 7. **679.** а) 13. **680.** б) 16. **681.** 39. **682.** а) c_1 = 2, d = 5. **684.** A_3B_3 = 7,5 см, A_nB_n = 2,5n см. **689.** 18 коней. **690.** а) 430; г) 300. **691.** 9900. **693.** а) 166833. **694.** а) 2020. **695.** a_7 = 8. **696.** S_{25} =75. **697.** S_{27} = 54. **698.** а) S_{20} = 1090. **699.** а) a_5 = 3.

700. S_9 = 63. **701.** 90 разів. **702.** а) 314 м. **703.** Розгляньте прогресію a − 2d, a − d, a + d, a + 2d, сума членів якої 180(5 − 2). **704.** 3,5(a + b). **705.** а) $\frac{3}{2x+1}$; в) $\frac{c+2}{c-1}$. **706.** а) (0; 8). **707.** 1 − В, 2 − А, 3 − Б, 4 −Г. **714.** б) q = 0,1, b_5 = 0,00001. **715.** b_4 = −24, b_7 = −192, bn = −3 · 2n $^{-1}$. **716.** а) b_1 = 3. **717.** г) b_{12} = 64. **718.** а) b_7 = 48; б) b_7 = −24. **719.** а) b_n = 2 · 3n $^{-1}$. **720.** а) n = 5. **721.** Так. **722.** а) S_6 = −1092. **723.** а) 511. **724.** а) S_6 = 5208; в) S_6 = 21. **725.** а) S_{15}= 32 767. **727.** 4294967295 або (2^{32} − 1) пфенігів. **728.** а) $b_1 = 1736\frac{1}{9}$, $q = \pm\frac{3}{5}$. **731.** а) 20. **732.** а) b_1 = 1, q = 3. **737.** 1. **738.** −2048. **739.** 3, 6, 12. **741.** 455 мм рт. ст. **742.** Так. **745.** 27, 18, 12, 8. **746.** а) n = 6; б) n = 10. **747.** 3, 6, 12, 18 або 18,75, 11,25, 6,75, 4,05. **748.** −0,5, −1, −4, −16 або −0,5, 1, 4, 16. **749.** а) b_{12}. **750.** $P_n = b_1^n q^{0,5n(n-1)}$. **751.** Понад 10 000 крб. **752.** 2^{72} бактерій. **753.** 2^{65}, а це набагато більше, ніж усіх людей на Землі. **754.** а) (0; 9). **756.** 8,8 і 7,8 г/см^3. **761.** а) 3; г) $-\frac{16}{3}$. **762.** а) 1,5. **763.** $\frac{4}{3}$. **764.** а) $\frac{10}{3}$. **765.** б) $\frac{2}{3}$. **766.** а) $\frac{4}{9}$. **767.** 6 см. **770.** а) $2+\sqrt{2}$; в) $\frac{1}{4-\pi}$. **771.** $6\sqrt{3}r$, $4\pi r$. **772.** в) $\frac{24}{99}$. **773.** в) $\frac{7}{6}$. **775.** б) $\frac{1}{1+x}$. **776.** $16+8\sqrt{2}$. **777.** 3, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{16}$, …. **778.** $b_4 = \frac{4}{9}$. **779.** 1 і $\frac{1}{3}$. **780.** а) −50; б) −5050. **781.** а) 40. **784.** а) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. **789.** а) 3, 12, 48…. **871.** а) 27 000. **873.** а) $\frac{1}{80}$. **874.** а) $-\frac{1}{15}$. **875.** а) 1.

876. а) 25. **879.** а) $3\frac{1}{4}$. **881.** а) $\frac{2}{21}$. **883.** а) $\frac{8}{15}$. **884.** 17, 19, 23, 29, 31. **885.** 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30. **888.** а) НСД (18, 32) = 2; НСК (18, 32) = 288. **892.** 80. **893.** Таких чисел 10. **895.** Ні. **898.** б) 3,6; д) 1,8.

901. а) $25y^2$. **902.** а) $x(x+y)(x+2)$. **904.** $(x-y-z)(x-y+z)$. **905.** а) $(a-b)(b-2)(b+2)$. **906.** а) $a \neq 0$ і $a \neq 3$. **907.** б) $\frac{2-x}{x^4y^{11}}$; г) $\frac{(a+1)^3}{(a-1)^2}$. **908.** 11. **909.** 5. **911.** а) $\frac{5z^2+6x^2}{15ax^2z^2}$. **912.** а) $\frac{3c}{2x}$. **914.** а) $\frac{a+b}{a-b}$. **917.** а) $a+\sqrt{a}-2$. **919.** а) a. **922.** а) $2(a-b)$. **923.** а) 8. **924.** а) 3. **927.** а) 25. **929.** а) -2 і 2. **930.** а) (2; 3). **931.** а) (15; 5). **932.** а) (0; 1). **933.** а) (3; 0) і (0; -3). **935.** а) (-3; 4) і (4; -3). **937.** 1000 кг і 800 кг. **938.** 240. **939.** 100 км/год, 80 км/год. **940.** 50 км. **941.** 30 і 20 днів. **942.** 75 км/год. **944.** 300. **945.** 40 грн. **946.** 32%. **947.** 25%. **948.** 40%. **950.** а) $x > 7{,}25$. **954.** а) $x < 6$. **955.** а) $3 < x < 7$. **960.** а) R; в) $x \leq 4$. **961.** а) $x = 3$. **962.** а) $y = 3$; г) $y = 1{,}8$. **963.** а) (0; -11) і (1; 0). **967.** а) $(-\infty; -2) \triangle (0; \infty)$; б) $(-\infty; 0] \triangle [1; \infty)$. **968.** а) $(-\infty; 1) \triangle (2; \infty)$; б) $(-3; -2)$. **969.** а) $(-\infty; -1] \triangle [1\frac{1}{3}; \infty)$; **970.** а) $(-\infty; 1) \triangle (1; \infty)$; б) розв'язків немає. **971.** а) $(-\infty; -5) \triangle (3; +\infty)$; б) $(-7; -2)$. **972.** а) $(-\infty; -1) \triangle (-0{,}5; \infty)$; б) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \triangle \left[\frac{2}{3}; \infty\right)$. **973.** а) (1; 2); б) (-7; -3). **974.** а) $(-\infty; -3) \triangle (7; \infty)$. **980.** 11. **981.** 4. **982.** 14. **985.** 96, 48, 24, 12, 6, 3. **986.** 6. **989.** а) Так; б) ні.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

990. Піднесіть дані вирази до квадрата. **991.** Покажіть, що $\sqrt{9\pm4\sqrt{5}}=\sqrt{5}\pm2$. **992.** а) $2a^2+b^2+c^2-2ab-2ac=(a-b)^2+(a-c)^2$. **993.** а) $x^4+y^4-x^3y-xy^3=(x-y)(x^3-y^3)$, а числа $x-y$ і x^3-y^3 однакових знаків; б) $(x-1)^2+(x-2y)^2+(y-2)^2+1>0$. **996.** $x^2+(1-x)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2x-1)^2$. **997.** б) $\left(-\infty; 2\frac{1}{2}\right) \triangle \left(-2; \frac{2}{3}\right) \triangle (1; \infty)$. **999.** $(-\infty; -4) \triangle (8; \infty)$. **1000.** Найменше значення x, при якому вираз $\sqrt{x-6}$ має значення, дорівнює 6. Множина розв'язків кожної нерівності $(6;\infty)$. **1004.** $y=|x+\sqrt{2}|+|x-\sqrt{2}|$. **1008.** 0, 2, 4, 3, 2; побудуйте графік функції $y=|x^2-6x+5|$. **1009.** а) $(-\infty;0]\triangle[6;\infty)$; б) розв'язків немає. **1012.** 16 днів. **1013.** 3 : 4. **1014.** $x=3\frac{3}{4}$; $y=5\frac{1}{2}$; $z=7\frac{1}{4}$. **1015.** а) 71071; б) 428429. **1016.** $a_1^n\left(q^{n^2}-1\right):\left(q^n-1\right)$. **1017.** $q:(1-q)^2$. **1018.** 6, -3, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{4}$, ... **1019.** 1 або -2. **1020.** Покажіть, що при $a+c=2b$ різниця між третім і другим тричленами дорівнює різниці між другим і першим. **1021.** а) $a_n=1{,}5+(-1)^n\cdot0{,}5$; б) $a_n=(-1)^n n$. **1022.** а) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$; б) $n^2(n+1)$. **1024.** 3, 7,11,.... **1025.** 1480 фунтів. **1026.** 7, 11, 15,19, 23, 27, 31, 35. **1027.** $a_n=n^2+2$. **1028.** $x=7$. **1029.** Так, це арифметична прогресія 16, 31, 46,..., $15n+1$,.... **1034.** У 2 рази.

Предметний покажчик

Аргумент функції 75

Вибірка 211
Вирази 258
— зі змінними 258
— раціональні 258
— цілі 258
Відсотки 234
— прості 236
— складні 236
Відсоткові гроші 236
Властивості
— функцій 85
— числових нерівностей 17

Гістограма 211
Графік рівняння 261
— функції 75

Дискримінант 260
Доведення нерівностей 60

Знаки десяткові 225
— нерівності 9
— — строгої 8
— — нестрогої 8
Знаменник геометричної прогресії 171
Значення функції 75, 85
— найбільше 87
— найменше 87
Значущі цифри 225

Імовірність 202
— події 202
— — випадкової 202
— — достовірної 202
— — неможливої 202

Квадратний корінь 260
Коефіцієнт 259
Комбінаторика 196
Комбінаторне правило
— добутку 197
— суми 196
Корені квадратного рівняння 260

Масові явища 211
Математичне моделювання 227
Многочлен 259
Множина 41
— дійсних чисел 258
— порожня 43
Медіана вибірки 213
Мода вибірки 213
Модель 227

Наближені значення 223
— обчислення 223
Нерівності 8
— зі змінними 9
— з невідомими 31
— квадратні 118
— лінійні 33
— нестрогі 8
— подвійні 24
— рівносильні 31
— строгі 8
— тотожні 31
— числові 8
Нулі функції 86

Область визначення функції 75
— значень функції 75
Обчислення сум 181
Об’єднання множин 42
— числових проміжків 43
Одночлен 259

Основна властивість дробу 256
— пропорції 257
Оцінювання значень 25

Парабола 111
Переріз множин 42
— числових проміжків 43
Перетворення виразів
— графіків 98
Події 204
— елементарні 204
— однаково можливі 204
— попарно несумісні 204
Послідовність 152
— зростаюча 154
— нескінченна 153
— спадна 154
— скінченна 153
Похибка абсолютна 223
— відносна 224
Правила округлення чисел 258
— підрахунку цифр 225
Прикладні задачі 227
Прогресія арифметична 161
— геометрична 171
Проміжки 32
— числові 43
— знакосталості функції 86
— спадання функції 87
— зростання функції 87
Пропорційність обернена 76
— пряма 75
Простір елементарних подій 205

Рівняння 260
— квадратні 260
— лінійні 260
— рівносильні 260
Розв'язок нерівності 31
— рівняння 260
— системи нерівностей 52
— системи рівнянь 127

Середнє арифметичне 61
— геометричне 61
Середнє значення вибірки 213
Система нерівностей 52
— рівнянь 126
Статистика 211
Сукупність нерівностей 45
Сума нескінченної геометричної прогресії 182
— членів арифметичної прогресії 162
— — геометричної прогресії 172

Теорема Вієта 260
Тотожні вирази 258
Тотожність 259

Факторіал 198
Формула коренів квадратного рівняння 260
— складних відсотків 236
Функція 74
— зростаюча 86
— квадратична 109
— лінійна 76
— непарна 87
— парна 87
— спадна 87

Центральні тенденції 212

Частота 212
— випадкової події 202
— відносна 212
Частотні таблиці 212
Числа дійсні 258
— ірраціональні 258
— раціональні 256
Числові проміжки 43

Зміст

Шановні дев'ятикласники і дев'ятикласниці! . . . 3

Як працювати з підручником . . . 4

Розділ 1. НЕРІВНОСТІ

§ 1. Загальні відомості про нерівності . . . 8
§ 2. Властивості числових нерівностей . . . 17
§ 3. Подвійні нерівності . . . 24
§ 4. Розв'язування нерівностей з однією змінною . . . 31
§ 5. Об'єднання і переріз множин. Числові проміжки . . . 41
§ 6. Системи нерівностей з однією змінною . . . 52
§ 7. Доведення нерівностей . . . 60
Завдання для самостійної роботи . . . 66
Історичні відомості . . . 67
Головне в розділі . . . 69
З'ясовуємо досягнення
Тестові завдання № 1 . . . 70
Типові завдання до контрольної роботи № 1 . . . 71

Розділ 2. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

§ 8. Функції . . . 74
§ 9. Властивості функцій . . . 85
§ 10. Перетворення графіків функцій . . . 98
§ 11. Квадратична функція . . . 109
§ 12. Квадратні нерівності . . . 118
§ 13. Системи рівнянь другого степеня . . . 126
§ 14. Розв'язування задач складанням систем рівнянь . . . 136
Завдання для самостійної роботи . . . 144
Історичні відомості . . . 145
Головне в розділі . . . 147
З'ясовуємо досягнення
Тестові завдання № 2 . . . 148
Типові завдання до контрольної роботи № 2 . . . 149

Розділ 3. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

§ 15. Послідовність . . . 152
§ 16. Арифметична прогресія . . . 161
§ 17. Геометрична прогресія . . . 171
§ 18. Задачі на обчислення сум . . . 181

Завдання для самостійної роботи 190
Історичні відомості 191
Головне в розділі 192
З'ясовуємо досягнення
Тестові завдання № 3 193
Типові завдання до контрольної роботи № 3 194

Розділ 4. ОСНОВИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА СТАТИСТИКИ

§ 19. Основні правила комбінаторики 196
§ 20. Частота та ймовірність випадкової події 202
§ 21. Відомості про статистику 211
Історичні відомості 218
Головне в розділі 219
З'ясовуємо досягнення
Тестові завдання № 4 220
Типові завдання до контрольної роботи № 4 221

ДОДАТКИ

НАВЧАЛЬНІ ПРОЕКТИ

Навчальний проект № 1. Цікаві нерівності 222
Навчальний проект № 2. Функції навколо нас 226
Навчальний проект № 3. Застосування математики 233

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Числа та дії над ними 239
Подільність чисел. Відношення і пропорції 240
Цілі вирази 240
Раціональні вирази 241
Ірраціональні вирази 242
Рівняння та системи рівнянь 242
Задачі на складання рівнянь і систем рівнянь 244
Нерівності 245
Функції і графіки 245
Числові послідовності 246

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ 248
ТРЕНУВАЛЬНІ ТЕСТИ 252
ВІДОМОСТІ З ПОПЕРЕДНІХ КЛАСІВ 255
ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ЗАДАЧ І ВПРАВ 262
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК 268