ВАСИЛЬ КРАВЧУК
МАРІЯ ПІДРУЧНА
ГАЛИНА ЯНЧЕНКО

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів

ТМ

Тернопіль
Видавництво «Підручники і посібники»
2017

УДК 51(075.3)
К 77

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(*наказ МОН України від 20.03.2017 р. № 417*)

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Свєтлова Т. В., методист з математики відділу координації освітньої діяльності та професійного розвитку Сумського ОІППО;

Кульчицька Н. В., доцент кафедри статистики і вищої математики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», кандидат педагогічних наук;

Єфімова І. С., учитель математики Балаклійської загальноосвітньої школи І–ІІІ ступенів № 1 ім. О. А. Тризни Балаклійської районної ради Харківської області, учитель вищої категорії, старший учитель.

Кравчук В.

К 77 Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2017. — 264 с.

ISBN 978-966-07-3117-2

УДК 51(075.3)

ISBN 978-966-07-3117-2

ЮНІ ДРУЗІ!

Ви продовжуєте вивчення однієї з основних математичних дисциплін — алгебри. Сподіваємося, що підручник, який ви тримаєте в руках, допоможе не загубитися в лабіринтах цієї важливої науки.

Кілька слів про особливості підручника. Він складається з трьох параграфів, які поділено на окремі пункти.

Кожний пункт розпочинається викладом теоретичного матеріалу. Деякі з них містять додатковий матеріал під рубрикою «Для тих, хто хоче знати більше».

Для тих, хто хоче знати більше

Далі йде рубрика «Приклади розв’язання вправ».

Приклади розв'язання вправ

Це підказка. Вона допоможе вам ознайомитися з основними видами вправ, способами їх розв’язування та навчить правильно записувати розв’язання. Початок та закінчення розв’язання кожної вправи позначено кружечком «●».

У кожному пункті систему вправ поділено на три рівні складності.

Рівень А

Рівень Б

Рівень В

Спочатку варто розв’язувати усні вправи і простіші задачі (рівень А), а потім перейти до складніших (рівень Б). Задачі рівня В — для найкмітливіших, тих, хто хоче вміти та знати більше і мати найвищі бали.

Для самостійної роботи вдома рекомендовано задачі, номери яких виділено кольором (наприклад, **263**).

Рубрика «Вправи для повторення» призначена для періодичного повторення основних видів вправ та підготовки до вивчення нового теоретичного матеріалу.

Вправи для повторення

Наступна рубрика «Поміркуйте» пов'язана з особливим аспектом математичної підготовки.

Поміркуйте

Основним для розв'язання задач цієї рубрики є вміння виходити з нестандартних ситуацій. Розв'язування таких задач розвиває гнучкість міркувань, а це допоможе вам у майбутньому, незалежно від того, яку професію ви оберете.

Наприкінці кожного параграфа уміщено запитання та вправи для повторення, складніші з яких позначено символом «*», і завдання для самоперевірки чотирьох рівнів складності.

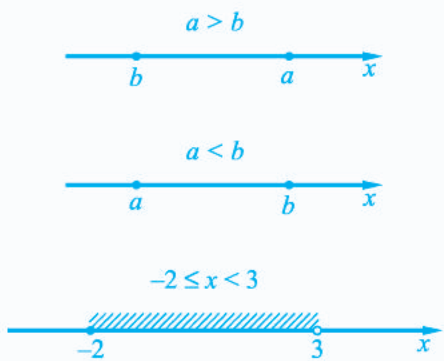
У кінці підручника подано задачі підвищеної складності, вправи для повторення матеріалу за увесь курс алгебри 7–9 класів і довідковий матеріал.

Щиро бажаємо успіху!

§ 1. НЕРІВНОСТІ

Є чимало задач, для розв'язання яких потрібно порівняти числа або величини, знайти значення змінної, які задовольняють деяку нерівність.

У цьому параграфі ми з'ясуємо властивості числових нерівностей, як застосовувати ці властивості для розв'язування задач; що таке нерівність зі змінною та система нерівностей зі змінною, як розв'язувати нерівності та їх системи.



1. Числові нерівності. Доведення нерівностей

1. Числові нерівності. Ви знаєте, що записи

$$25 > 17; \quad 0{,}2 < 0{,}32; \quad \frac{3}{7} > \frac{1}{7}; \quad -7 < -5$$

є прикладами *числових нерівностей*. Ви навчилися порівнювати числа за допомогою правил порівняння натуральних чисел, звичайних та десяткових дробів, дійсних чисел. Порівнювати числа можна й без цих правил. Існує загальний спосіб порівняння будь-яких двох чисел, який пов'язаний з такими міркуваннями.

Відомо, що 25 > 17. Знайдемо різницю лівої та правої частин цієї нерівності:

$$25 - 17 = 8 > 0 \text{ — різниця додатна.}$$

Знайдемо різницю лівої та правої частин нерівності 7 < 10:

$$7 - 10 = -3 < 0 \text{ — різниця від'ємна.}$$

Отже, існує залежність між співвідношеннями «>», «<» та значенням різниці лівої та правої частин відповідної нерівності. Цю залежність виражає означення.

Означення **Число *a більше* від числа *b*, якщо різниця *a* – *b* — додатне число;**
число *a менше* від числа *b*, якщо різниця *a* – *b* — від'ємне число.

$$\boldsymbol{a > b, \text{ якщо } a - b > 0;}$$
$$\boldsymbol{a < b, \text{ якщо } a - b < 0.}$$

Зрозуміло: якщо різниця $a - b$ дорівнює нулю, то число a дорівнює числу b.

Оскільки різниця чисел a і b може бути лише додатною, від'ємною або дорівнювати нулю, то для будь-яких чисел a і b виконується одне й тільки одне із трьох співвідношень: $a > b$, $a < b$ або $a = b$.

Користуючись даним означенням, порівняємо числа $\frac{3}{7}$ і $\frac{9}{22}$. Для цього знайдемо їх різницю:

$$\frac{3}{7} - \frac{9}{22} = \frac{3 \cdot 22 - 7 \cdot 9}{7 \cdot 22} = \frac{3}{7 \cdot 22}.$$

Різниця даних чисел — число додатне, тому $\frac{3}{7} > \frac{9}{22}$.

Для порівняння двох чисел a і b достатньо утворити різницю $a - b$ і з'ясувати, є вона додатним числом, від'ємним числом чи нулем. Якщо $a - b > 0$, то $a > b$; якщо $a - b < 0$, то $a < b$; якщо $a - b = 0$, то $a = b$.

На координатній прямій більше число зображують точкою, яка лежить праворуч від точки, що зображує менше число (див. рис. 1).

Рис. 1

У нерівностях, крім знаків «<» (менше), «>» (більше), використовують знаки «≤» — менше або дорівнює (не більше), «≥» — більше або дорівнює (не менше). З означення співвідношень «більше», «менше» випливає, що

$a \geq b$, якщо $a - b \geq 0$, тобто якщо $a - b > 0$ або $a - b = 0$;

$a \leq b$, якщо $a - b \leq 0$, тобто якщо $a - b < 0$ або $a - b = 0$.

Нерівності, складені за допомогою знаків «<» або «>», називають *строгими*, а нерівності, складені за допомогою знаків «≤» або «≥», — *нестрогими*.

Числові нерівності можуть бути *правильними* і *неправильними*. Наприклад, $5 < 8$; $1{,}2 \geq -1$ — правильні нерівності, $21 > 30$ — неправильна нерівність.

2. Доведення нерівностей. Розглянемо два вирази — $a(a - 4)$ та $(a - 2)^2$. Порівняємо значення цих виразів, узявши $a = -1$ та $a = 2$:

якщо $a = -1$, то $a(a - 4) = -1 \cdot (-1 - 4) = 5$; $(a - 2)^2 = (-1 - 2)^2 = 9$; $5 < 9$;

якщо $a = 2$, то $a(a - 4) = 2 \cdot (2 - 4) = -4$; $(a - 2)^2 = (2 - 2)^2 = 0$; $-4 < 0$.

Отже, якщо $a = -1$ або $a = 2$, то нерівність $a(a - 4) < (a - 2)^2$ є правильною. Виявляється, що ця нерівність є правильною для будь-якого значення a. Справді, утворивши різницю лівої та правої частин нерівності, матимемо:

$$a(a - 4) - (a - 2)^2 = a^2 - 4a - a^2 + 4a - 4 = -4.$$

Оскільки різниця $a(a-4)-(a-2)^2$ є від'ємною для будь-якого значення a, то нерівність $a(a-4)<(a-2)^2$ є правильною теж для будь-якого значення a.

Якщо потрібно показати, що певна нерівність зі змінними є правильною для всіх допустимих значень змінних або для всіх указаних значень змінних, то кажуть, що потрібно *довести нерівність*.

Приклад 1. Довести нерівність $a^2+b^2+2 \geq 2a+2b$.

● Утворимо різницю лівої та правої частин нерівності й перетворимо її:

$$a^2+b^2+2-(2a+2b)=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)=(a-1)^2+(b-1)^2.$$

Оскільки $(a-1)^2 \geq 0$, $(b-1)^2 \geq 0$ для будь-яких значень a і b, то $(a-1)^2+(b-1)^2 \geq 0$. Отже, різниця $a^2+b^2+2-(2a+2b)$ є невід'ємною для будь-яких значень a і b, тому нерівність $a^2+b^2+2 \geq 2a+2b$ є правильною теж для будь-яких значень a і b. ●

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Порівняти числа m і n, якщо:

а) $m-3=n-2$; **б)** $m=1{,}1n$ і $n<0$.

● **а)** Оскільки $m-3=n-2$, то: $m-n=3-2$; $m-n=1$. Різниця $m-n$ є додатною, тому $m>n$.

б) $m-n=1{,}1n-n=0{,}1n$. Оскільки $n<0$, то різниця $m-n$ є від'ємною, тому $m<n$. ●

Вправа 2. Довести, що сума будь-яких двох взаємно обернених додатних чисел не менша від 2.

● Нехай a — довільне додатне число. Тоді $\frac{1}{a}$ — обернене до нього число. Доведемо, що

$$a+\frac{1}{a} \geq 2.$$

Утворимо різницю лівої та правої частин нерівності й перетворимо її:

$$a+\frac{1}{a}-2=\frac{a^2+1-2a}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}.$$

Різницю ми подали у вигляді дробу, чисельник якого невід'ємний, бо є квадратом деякого числа, а знаменник — додатний. Тому цей дріб, а значить і різниця, набуває лише невід'ємних значень: $a+\frac{1}{a}-2\ge 0$. Отже, нерівність $a+\frac{1}{a}\ge 2$ є правильною для будь-якого додатного числа a. ●

Вправа 3. Довести нерівність $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$, де $a\ge 0$, $b\ge 0$.

● Утворимо різницю лівої та правої частин нерівності й перетворимо її:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\ge 0.$$

Отже, $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$. ●

Примітка. Для додатних чисел a і b число $\sqrt{ab}$ називають їх *середнім геометричним* (або *середнім пропорційним*). Доведена нерівність для додатних значень a і b є правильною, тому *середнє арифметичне двох додатних чисел не менше від їх середнього геометричного*.

Усно

1. Яке з чисел — a чи b — більше, якщо:

а) $a-b=4$; **б)** $a-b=-1$; **в)** $a-b=0{,}04$; **г)** $a-b=-\frac{1}{50}$?

2. Відомо, що $m<n$. Чи може різниця $m-n$ дорівнювати: –5; 0; 2; 0,01?

3. Відомо, що $c\ge d$. Чи може різниця $c-d$ дорівнювати: –2; 0; 7; 0,28?

4. Чи є правильною нерівність?

а) $1538<1558$; **б)** $-48\ge -45$; **в)** $0{,}08>0{,}1$; **г)** $-0{,}7\le -0{,}7$;

д) $\frac{9}{17}>\frac{6}{17}$; **е)** $\frac{3}{25}\le\frac{3}{28}$; **є)** $-\frac{1}{7}<-\frac{1}{6}$; **ж)** $1\frac{1}{4}\ge 1{,}25$.

5. Порівняйте числа a і b, b і c, a і c, які зображені точками на координатній прямій (рис. 2).

Рис. 2

Рівень А

6. Порівняйте числа c і d, якщо:

а) $c - d = 2{,}4$; **б)** $c - d = -2$; **в)** $d - c = 0{,}05$; **г)** $d - c = 0$.

7. Порівняйте числа m і n, якщо:

а) $m - n = -3$; **б)** $m - n = 3$; **в)** $n - m = 0$; **г)** $n - m = -0{,}3$.

8. Порівняйте з нулем різницю лівої та правої частин правильних нерівностей:

а) $m < n$; **б)** $p \geq q$; **в)** $8 > y$; **г)** $k \leq 5$.

Порівняйте числа:

9. **а)** $\frac{3}{5}$ і $\frac{5}{8}$; **б)** $4\frac{5}{6}$ і $4\frac{7}{9}$; **в)** $-\frac{11}{13}$ і $-\frac{3}{4}$; **г)** $\frac{1}{3}$ і $0{,}4$.

10. **а)** $\frac{1}{3}$ і $\frac{2}{7}$; **б)** $2\frac{3}{4}$ і $2\frac{5}{6}$; **в)** $-\frac{7}{11}$ і $-\frac{3}{5}$; **г)** $0{,}3$ і $\frac{1}{3}$.

11. Розташуйте в порядку зростання числа: $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{7}$.

12. Розташуйте в порядку спадання числа: $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{11}$; $\frac{2}{7}$.

13. Позначте на координатній прямій точки, які зображують числа p, q і r, якщо $p < r$, $r < q$.

14. Позначте на координатній прямій точки, які зображують числа a, b і c, якщо $c > b$, $b > a$.

15. Порівняйте значення виразів $5(a + 2) - 2a$ і $3a - 4$, якщо $a = -3$; $a = 2$. Доведіть, що для будь-якого значення a значення першого виразу більше від відповідного значення другого виразу.

16. Порівняйте значення виразів $6(b - 2) + 4b$ і $10b + 1$, якщо $b = -1$; $b = 3$. Доведіть, що для будь-якого значення b значення першого виразу менше від відповідного значення другого виразу.

Доведіть нерівність:

17. **а)** $2(a - 3) + 5a < 7a + 8$; **б)** $c(c + 1) > c^2 + c - 3$;
в) $(b - 5)^2 > b(b - 10)$; **г)** $a(a + 7) < (a + 3)(a + 4)$;
д) $a^2 + b^2 \geq 2ab$; **е)** $4 + b^2 \geq 4b$.

18. **а)** $12b + 8 > 4b + 8(b - 0{,}5)$; **б)** $a(a - 2) + 1 < a^2 - 2a + 2$;
в) $(b - 3)(b + 3) > b^2 - 14$; **г)** $(c - 1)(c + 3) < c(c + 2)$;
д) $a^2 + 9 \geq 6a$; **е)** $m(m + n) \geq mn$.

Рівень Б

19. Порівняйте числа p і q, якщо:

а) $p - 4{,}8 = q - 2{,}4$; **б)** $q + 0{,}08 = p + 0{,}079$;
в) $p = 1{,}5q$ і $q < 0$; **г)** $q = 0{,}9p$ і $p > 0$.

20. Порівняйте числа a і b, якщо:

а) $a + 1{,}6 = b + 2{,}8$; **б)** $b - 0{,}301 = a - 0{,}3$;
в) $a = 2b$ і $b > 0$; **г)** $b = 0{,}5a$ і $a < 0$.

21. Який знак має число x, якщо відомо, що:

а) $8x < 3x$; **б)** $7x > 4x$; **в)** $2x < -3x$; **г)** $-10x > -2x$?

22. Розташуйте в порядку спадання числа: $\frac{23}{36}$; $-\sqrt{10}$; $0{,}7$; $-1{,}2$; $\frac{3}{5}$; 0; $-1\frac{1}{3}$.

23. Розташуйте в порядку зростання числа: $-\frac{5}{6}$; $0{,}05$; 0; $\frac{1}{21}$; $-\frac{23}{28}$; $\sqrt{2}$.

Порівняйте значення числових виразів:

24. **а)** $\frac{3\sqrt{5}-4}{15}$ і $\frac{4\sqrt{5}-5}{20}$; **б)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ і $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

25. **а)** $\frac{6-3\sqrt{2}}{8}$ і $\frac{9-4\sqrt{2}}{12}$; **б)** $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ і $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

Доведіть нерівність:

26. **а)** $4bc \le 4b^2 + c^2$; **б)** $(2n + 1)^2 \ge 8n$;
в) $(5 - 3y)^2 \ge 3y(y - 2) + 1$; **г)** $b^2 + 10 > 6b$;
д) $\frac{(2b+3)^2}{12} \ge 2b$; **е)** $\frac{3c}{9c^2+1} \le \frac{1}{2}$.

27. **а)** $9x^2 - 3xy + y^2 \ge 3xy$; **б)** $a^2 + 2a \le 17a^2 + 10a + 1$;
в) $8b(3b - 10) < (5b - 8)^2$; **г)** $(a + 1)^2 > 4a - 1$;
д) $\frac{a^2+3}{2} \ge 3(a-1)$; **е)** $\frac{2x^2}{1+x^4} \le 1$.

28. Дано чотири послідовні натуральні числа. Що більше — добуток найменшого і найбільшого з цих чисел чи добуток середніх чисел?

29. Дано три послідовні натуральні числа. Що більше — подвоєний квадрат середнього з цих чисел чи сума квадратів двох інших?

30. Дано дріб $\frac{m}{n}$, де m, n — натуральні числа, до того ж $m < n$. Збільшиться чи зменшиться даний дріб, якщо його чисельник і знаменник збільшити на те саме натуральне число?

31. До чисельника і знаменника дробу $\frac{17}{11}$ додали те саме натуральне число. Доведіть, що одержали дріб, який менший від даного.

Рівень В

Доведіть нерівність:

32. **а)** $a^2 + 2b^2 + 1 \geq 2ab + 2b$; **б)** $a^2 + 2b^2 + 4c^2 \geq 2ab + 4bc$;
в) $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 11 > 0$; **г)** $5a^2 + 4a - 2ab + b^2 + 2 > 0$;
д) $a^2 + b^2 \geq ab$; **е)** $m^3n + mn^3 \leq m^4 + n^4$.

33. **а)** $ab + 1 \geq 2\sqrt{ab}$; **б)** $4\sqrt{ab} \leq \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$;
в) $\frac{b^2 + 5}{2} > \sqrt{b^2 + 4}$; **г)** $\frac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 2}} > 2$.

34. Для натуральних чисел m, n і k виконується нерівність $\frac{m}{n} > \frac{m+k}{n+k}$. Доведіть, що $m > n$.

35. Прямокутник і квадрат мають рівні периметри, сторони прямокутника дорівнюють a см і b см ($a \neq b$), а сторона квадрата — c см. Доведіть, що:
а) $c = \frac{a+b}{2}$; **б)** площа прямокутника менша від площі квадрата.

36. Літак має здійснити переліт за маршрутом Київ — Львів і назад. За якої погоди такий переліт займе менше часу: за безвітряної чи якщо вітер західний і дме з постійною швидкістю?

Вправи для повторення

37. Знайдіть найменше значення виразу та значення змінних, для яких вираз набуває найменшого значення:
а) $a^2 + b^2 + 2$; **б)** $(x - 3)^2 + (y + 3)^2$;
в) $(m - 1)^2 + (m + n)^2 - 4$; **г)** $a - b + 2\sqrt{a - b}$.

38. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x-5)(x+1)=3x-5$; **б)** $\frac{4x}{x^2-4}+\frac{x}{x-2}=3\frac{1}{3}$.

39. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{50}+\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$; **б)** $\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

40. У парку росте листяних дерев у 4 рази більше, ніж хвойних. Чи може загальна кількість цих дерев дорівнювати 264?

41. У січні підприємство виготовило 750 одиниць продукції, у лютому — 800 одиниць, у березні — 780 одиниць.

а) На скільки відсотків збільшилось виробництво продукції в лютому порівняно із січнем?

б) На скільки відсотків зменшилось виробництво продукції в березні порівняно з лютим?

Поміркуйте

42. На кожній клітинці дошки розміру 8 × 10 сидить жук. Чи можуть ці жуки перелетіти на дошку розміру 16 × 5 так, щоб у кожній клітинці було по жуку і щоб жуки, які були сусідами раніше, залишились сусідами на новій дошці? (Сусідами вважаємо жуків, які сидять у клітинках зі спільною стороною.)

2. Властивості числових нерівностей

Розглянемо властивості числових нерівностей, які далі використовуватимемо під час розв'язування задач.

Властивість 1 **Якщо $a<b$ і $b<c$, то $a<c$.**

Доведення. За умовою $a<b$ і $b<c$, тому $a-b$ і $b-c$ — від'ємні числа. Сума двох від'ємних чисел є від'ємним числом, тому $(a-b)+(b-c)=a-c<0$. Оскільки $a-c<0$, то $a<c$. ●

Геометрична ілюстрація властивості 1 подана на рисунку 3.

Рис. 3

Аналогічно можна довести твердження: **якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$.**

Властивість 2 **Якщо до обох частин правильної нерівності додати одне й те саме число, то одержимо правильну нерівність.**

Доведення. Нехай $a < b$ і c — будь-яке число. Доведемо, що $a + c < b + c$. Розглянемо різницю $(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$. Оскільки $a < b$, то $a - b < 0$, а тому й $(a + c) - (b + c) < 0$. Отже, $a + c < b + c$.

Аналогічно проводять доведення для випадку $a > b$ і будь-якого числа c. ●

Наслідок 1. *Якщо від обох частин правильної нерівності відняти одне й те саме число, то одержимо правильну нерівність.*

Це твердження випливає з того, що віднімання від обох частин нерівності деякого числа c можна замінити додаванням до обох її частин числа $-c$.

Наслідок 2. *Якщо деякий доданок перенести з однієї частини правильної нерівності в іншу, змінивши знак доданка на протилежний, то одержимо правильну нерівність.*

Доведення. Нехай $a < b + c$ — правильна нерівність. Додамо до обох її частин число $-c$, одержимо правильну нерівність $a + (-c) < b + c + (-c)$ або $a - c < b$. Отже, якщо перенести доданок c у ліву частину нерівності, змінивши його знак на протилежний, то одержимо правильну нерівність. ●

Властивість 3 **Якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то одержимо правильну нерівність.**

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо правильну нерівність.

Доведення. Нехай $a < b$. Доведемо, що $ac < bc$, якщо c — додатне число, й $ac > bc$, якщо c — від'ємне число. Для цього розглянемо різницю:

$$ac - bc = c(a - b).$$

За умовою $a < b$, тому $a - b < 0$.

Якщо $c > 0$, то в добутку $c(a - b)$ перший множник є додатним, а другий — від'ємним. Тому $c(a - b) < 0$. У даному випадку $ac - bc < 0$, звідки $ac < bc$.

Якщо $c < 0$, то в добутку $c(a - b)$ обидва множники є від'ємними, тому $c(a - b) > 0$. Тоді й $ac - bc > 0$, звідки $ac > bc$.

Аналогічно проводять доведення властивості для нерівності $a > b$.

Правильною є й та частина властивості, яка стосується ділення обох частин нерівності на додатне або від'ємне число, оскільки ділення можна замінити множенням на число, обернене дільнику. ●

Наслідок. *Якщо a і b — числа одного знака й a < b, то* $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Доведення. Оскільки a і b — числа одного знака (обидва додатні або обидва від'ємні), то $ab > 0$. Поділивши обидві частини нерівності $a < b$ на додатне число ab, матимемо:

$$\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}; \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a}, \text{ тобто } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}. \ \bullet$$

Цей наслідок можна використовувати для порівняння чисел, обернених до даних. Наприклад, оскільки $\sqrt{2} < 2$, то $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$.

Доведені властивості стосуються строгих нерівностей. Аналогічні властивості мають і нестрогі нерівності. Наприклад, якщо $a \geq b$ і c — будь-яке число, то $a + c \geq b + c$.

Властивості 2 і 3 можна поширити на подвійні нерівності, зваживши, що подвійну нерівність $a < b < c$ можна записати у вигляді двох нерівностей: $a < b$ і $b < c$. Якщо $a < b$ і $b < c$, то для будь-якого числа m правильними є нерівності: $a + m < b + m$ і $b + m < c + m$, звідки $a + m < b + m < c + m$. Отже, якщо до всіх частин правильної подвійної нерівності додати одне й те саме число, то одержимо правильну подвійну нерівність.

Аналогічно можна обґрунтувати твердження:

якщо $a < b < c$ і $m > 0$, то $am < bm < cm$;

якщо $a < b < c$ і $m < 0$, то $am > bm > cm$, або $cm < bm < am$.

Підсумок: властивості числових нерівностей

Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

Якщо $a < b$ і c — будь-яке число, то $a + c < b + c$.

Якщо $a < b$ і c — додатне число, то $ac < bc$.

Якщо $a < b$ і c — від'ємне число, то $ac > bc$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Відомо, що $a > -2$.

а) Порівняти з нулем значення виразу $a + 3$.

б) Довести, що $4 - 2a < 8$.

● **а)** Додамо до обох частин нерівності $a > -2$ число 3, матимемо: $a + 3 > -2 + 3$; $a + 3 > 1$. Отже, $a + 3 > 0$.

б) Помножимо обидві частини нерівності $a > -2$ на -2, одержимо: $-2a < 4$. Додамо до обох частин останньої нерівності число 4, одержимо: $4 - 2a < 8$. ●

Вправа 2. Відомо, що $-1 < x < 3$. Оцінити значення виразу:

а) $x - 3$; **б)** $-x$; **в)** $2x + 5$.

● **а)** Додамо до всіх частин нерівності $-1 < x < 3$ число -3, одержимо:

$$-4 < x - 3 < 0.$$

Ми показали, що значення виразу $x - 3$ більші від -4 і менші від 0, тим самим *оцінили* його значення.

б) Помножимо всі частини нерівності $-1 < x < 3$ на -1, одержимо:

$$1 > -x > -3, \text{ або } -3 < -x < 1.$$

в) Помножимо всі частини заданої нерівності на 2, одержимо:

$$-2 < 2x < 6.$$

Тепер додамо до всіх частин одержаної нерівності число 5, одержимо:

$$3 < 2x + 5 < 11. \text{ ●}$$

Усно

43. Порівняйте числа a і b, якщо $a < 3$ і $3 < b$.

44. Відомо, що $m < n$. Які з даних нерівностей є правильними:

а) $m + 7 < n + 7$; **б)** $m - 7 < n - 7$; **в)** $m + 3 > n + 3$;

г) $3m < 3n$; **д)** $-3m < -3n$; **е)** $\frac{m}{3} < \frac{n}{3}$?

Відповіді обґрунтуйте.

45. Назвіть правильну нерівність, яку одержимо, якщо:

а) до обох частин нерівності $2 < 4$ додамо число 2; число –2;

б) обидві частини нерівності $-1 < 2$ помножимо на 5; на –5;

в) обидві частини нерівності $9 > 3$ поділимо на 3; на –3.

46. **а)** Відомо, що $a < 3$. Поясніть, чому не можна стверджувати, що $\frac{1}{a} > \frac{1}{3}$.

б) Відомо, що $b < -3$. Поясніть, чому можна стверджувати, що $\frac{1}{b} > -\frac{1}{3}$.

Рівень А

47. Відомо, що $a < b$. Поставте замість «∗» знак «<» або «>» так, щоб була правильною нерівність:

а) $a + 5 * b + 5$; **б)** $a - 7 * b - 7$; **в)** $-2a * -2b$;

г) $0{,}5a * 0{,}5b$; **д)** $\frac{a}{6} * \frac{b}{6}$; **е)** $-\frac{a}{5} * -\frac{b}{5}$.

48. Замість «∗» поставте знак «>» або «<» так, щоб було правильним твердження:

а) якщо $a < -5$, то $-a * 5$; **б)** якщо $-2 > a$ й $a > b$, то $-2 * b$.

49. Відомо, що $a < b$. Використовуючи властивості числових нерівностей, запишіть правильну нерівність, яку одержимо, якщо:

а) до обох частин нерівності додамо число 2;

б) від обох частин нерівності віднімемо число –3;

в) обидві частини нерівності помножимо на –4;

г) обидві частини нерівності поділимо на 5.

50. Відомо, що $x > y$. Використовуючи властивості числових нерівностей, запишіть правильну нерівність, яку одержимо, якщо:

а) до обох частин нерівності додамо число 9;

б) обидві частини нерівності помножимо на 3;

в) обидві частини нерівності помножимо на –5;

г) обидві частини нерівності поділимо на –3.

51. Відомо, що $m \le 4$. Доведіть, що:

а) $2m + 1 \le 9$; **б)** $4m - 9 \le 7$; **в)** $-3m \ge -12$.

52. Відомо, що $b \ge 2$. Доведіть, що:

а) $3b + 2 \ge 8$; **б)** $2b - 4 \ge 0$; **в)** $-5b \le -10$.

53. Відомо, що $3{,}2 < a < 3{,}4$. Оцініть значення виразу:

а) $a + 4$; **б)** $2a$; **в)** $3a - 2$.

54. Відомо, що $1{,}4 < c < 1{,}6$. Оцініть значення виразу:

а) $c - 1$; **б)** $3c$; **в)** $2c + 3$.

Рівень Б

Доведіть твердження:

55. **а)** Якщо $ac > bc$ і $c > 0$, то $a > b$; **б)** якщо $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ і $c < 0$, то $a > b$.

56. **а)** Якщо $an > bn$ і $n < 0$, то $a < b$; **б)** якщо $\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$ і $n > 0$, то $a < b$.

57. Порівняйте числа a і d, якщо:

а) $a < b$ і $d > b$; **б)** $a > b$ і $b > d + 4$;

в) $2a - 1 < 2d - 1$; **г)** $-7a + 2 > -7d + 2$.

58. Порівняйте числа m і k, якщо:

а) $m > n$ і $k < n$; **б)** $m < n$ і $n < k - 1$;

в) $3m + 2 < 3k + 2$; **г)** $5 - 2m > 5 - 2k$.

59. Відомо, що $0 < b < a$ і $k < 0$. Порівняйте числа $\frac{k}{a}$ і $\frac{k}{b}$.

60. Відомо, що $0 < a < b$ і $c > 0$. Порівняйте числа $\frac{c}{a}$ і $\frac{c}{b}$.

61. Відомо, що $k \le -1{,}5$. Доведіть, що:

а) $-2k + 5 \ge 8$; **б)** $4k + 9 < 4$; **в)** $\frac{1}{k} \ge -\frac{2}{3}$.

62. Відомо, що $c \ge 2{,}5$. Доведіть, що:

а) $3c - 2 > 5$; **б)** $8 - 2c \le 3$; **в)** $\frac{1}{c} \le 0{,}4$.

63. Відомо, що $-2 \le x < 5$. Оцініть значення виразу:

а) $1{,}5x - 3$; **б)** $-x$; **в)** $1{,}5 - 3x$.

64. Відомо, що $0{,}5 < c < 2$. Оцініть значення виразу:

а) $\frac{1}{c}$; **б)** $\frac{3}{c}$; **в)** $-\frac{2}{c}$.

65. Відомо, що $2 < y \le 3$. Оцініть значення виразу:

а) $-y$; **б)** $-2y + 1$; **в)** $\frac{1}{y}$.

66. Сторона квадрата дорівнює b см, де $3{,}8 < b < 4{,}2$. Оцініть периметр квадрата.

67. Оцініть периметр рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює a см, якщо $1{,}7 < a < 1{,}9$.

Рівень В

68. Доведіть твердження:

а) якщо $a < b$ і $b \le c$, то $a < c$;

б) якщо $a < b$, $b < c$ і $c < d$, то $a < d$;

в) якщо $a \ge b$ і $c < 0$, то $ac \le bc$.

69. Відомо, що $k < -0{,}5$. Доведіть, що $\frac{5}{4-2k} < 1$.

70. Оцініть значення виразу $\frac{x^2+3x-18}{3-x}$, якщо $0 < x < 3$.

71. Знайдіть:

а) від'ємні корені рівняння $|x^2 + 15| - |7x - 3| = 0$;

б) корені рівняння $|9x - 2| - |5 - 5x| = |x^2 + x - 1|$, які більші від 1.

72. Доведіть нерівність:

а) $a^3 + 8 \ge 2a^2 + 4a$, де $a \ge -2$; **б)** $b^3 + 1 < b^2 + b$, де $b < -1$.

Вправи для повторення

73. Знайдіть значення виразу $a + b + c$, якщо $a + b = 1$, $b + c = 2$, $a + c = 3$.

74. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{7x-9}{10} = \frac{3x+1}{5}$; **б)** $\frac{14}{x^2-9} + \frac{2}{3x-9} = 2\frac{2}{3}$.

75. Розв’яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x + 2y = 5; \\ x - 2y = -9; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 0,5x + 0,2y = 2; \\ 2x - y = -1. \end{cases}$

76. Автомобіль долає шлях між двома містами за 2,2 год, рухаючись зі швидкістю 60 км/год. На скільки кілометрів за годину потрібно збільшити швидкість автомобіля, щоб він подолав цей шлях за 2 год?

77. Автоматичний станок виготовив партію деталей. Після удосконалення станка таку саму партію деталей він виготовив у 1,05 разу швидше, бо за годину виготовляв на 5 деталей більше, ніж раніше. Скільки деталей почав виготовляти станок за годину?

Поміркуйте

78. Четверо учнів зібрали разом 109 грибів, до того ж кожний зібрав не менше ніж 10 грибів. Перший учень зібрав грибів більше, ніж інші. Другий і третій учні зібрали разом 65 грибів. Скільки грибів зібрав перший учень?

3. Додавання і множення числових нерівностей. Оцінювання значень виразів

Розглянемо дії, які можна виконувати над правильними числовими нерівностями.

1. Додавання числових нерівностей. Нехай маємо правильні числові нерівності: $-3 < 4$ і $5 < 7$. В обох нерівностях наявний той самий знак нерівності (знак «<»), тому кажуть, що $-3 < 4$ і $5 < 7$ — нерівності однакового знака. Почленно додамо ці нерівності. Одержимо правильну нерівність того самого знака, а саме: $-3 + 5 < 4 + 7$, або $2 < 11$. У загальному випадку справджується така властивість.

Властивість 4 **Якщо почленно додати правильні нерівності однакового знака, залишивши їхній спільний знак, то одержимо правильну нерівність.**

Доведення. Нехай $a < b$ і $c < d$. Потрібно довести, що $a + c < b + d$. Щоб одержати суму $a + c$, додамо до обох частин першої нерівності число c, а щоб одержати суму $b + d$, додамо до обох частин другої нерівності число b. Одержимо правильні нерівності: $a + c < b + c$, $b + c < b + d$. За властивістю 1 з останніх двох нерівностей випливає, що $a + c < b + d$.

Аналогічно можна довести: якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$. ●

Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

Доведену властивість можна поширити на подвійні нерівності. Наприклад, якщо $a < x < b$ і $c < y < d$, то $a + c < x + y < b + d$. Додавання подвійних нерівностей можна записувати так:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{c} a < x < b \\ c < y < d \end{array} \\ \hline a + c < x + y < b + d. \end{array}$$

Властивість, аналогічну до властивості 4, мають і нестрогі нерівності. Наприклад, якщо $a \le b$ і $c \le d$, то $a + c \le b + d$.

2. Множення числових нерівностей. Нехай маємо правильні нерівності: $7 > 2$ і $5 > 3$. Почленно перемножимо ці нерівності, залишивши їхній спільний знак. Одержимо правильну нерівність $7 \cdot 5 > 2 \cdot 3$, або $35 > 6$.

Почленно перемножимо нерівності $-3 < 1$ і $-4 < 6$, залишивши їхній спільний знак. Одержимо неправильну нерівність $12 < 6$.

Звернемо увагу, що в першому випадку всі числа в нерівностях були додатними, у другому — додатними й від'ємними. Доведемо таку властивість.

Властивість 5 **Якщо почленно перемножити правильні нерівності однакового знака, ліві й праві частини яких — додатні числа, залишивши спільний знак нерівностей, то одержимо правильну нерівність.**

Доведення. Нехай $a < b$ і $c < d$, де a, b, c і d — додатні числа. Потрібно довести, що $ac < bd$. Помножимо обидві частини нерівності $a < b$ на додатне число c, а обидві частини нерівності $c < d$ — на додатне число b. Одержимо правильні нерівності: $ac < bc$, $bc < bd$. За властивістю 1 з останніх двох нерівностей випливає, що $ac < bd$.

Аналогічно можна довести: якщо $a > b$ і $c > d$, де a, b, c і d — додатні числа, то $ac > bd$. ●

Якщо $a < b$ і $c < d$, де a, b, c і d — додатні числа, то $ac < bd$.

Наслідок. *Якщо $a < b$, a і b — додатні числа, n — натуральне число, то $a^n < b^n$.*

Для доведення наслідку досить узяти n нерівностей $a < b$ і почленно їх перемножити.

Властивість 5 можна поширити на подвійні нерівності. Наприклад, якщо для додатних чисел виконуються нерівності $a < x < b$ і $c < y < d$, то $ac < xy < bd$. Множення подвійних нерівностей можна записувати так:

$$\times\begin{array}{c} a < x < b \\ \underline{\quad c < y < d \quad} \\ ac < xy < bd \end{array} \text{ (усі числа — додатні).}$$

Властивість, аналогічну до властивості 5, мають і нестрогі нерівності. Наприклад, якщо $a \le b$ і $c \le d$, де a, b, c і d — додатні числа, то $ac \le bd$.

3. Оцінювання значень виразів. Розглянемо приклад.

Приклад 1. Дано: $11 < x < 14$; $1 < y < 2$. Оцінити:

а) суму $x + y$; **б)** різницю $x - y$;

в) добуток xy; **г)** частку $\frac{x}{y}$.

● **а)** Оцінимо суму $x + y$:

$$+\begin{array}{c} 11 < x < 14 \\ \underline{\quad 1 < y < 2 \quad} \\ 12 < x + y < 16. \end{array}$$

б) Для оцінки різниці $x - y$ використаємо рівність $x - y = x + (-y)$.

Спочатку оцінимо значення виразу $-y$. Помножимо усі частини нерівності $1 < y < 2$ на -1, одержимо: $-1 > -y > -2$, або $-2 < -y < -1$. Тоді:

$$+\begin{array}{c} 11 < x < 14 \\ \underline{-2 < -y < -1} \\ 9 < x - y < 13. \end{array}$$

в) Оцінимо добуток xy. Оскільки $11 < x < 14$ й $1 < y < 2$, то x та y — додатні числа. Тому за властивістю про почленне множення нерівностей матимемо:

$$\times\begin{array}{r} 11 < x < 14 \\ 1 < y < 2 \\ \hline 11 < xy < 28. \end{array}$$

г) Для оцінки частки $\frac{x}{y}$ використаємо рівність $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$. Оскільки $1 < y < 2$, то $\frac{1}{1} > \frac{1}{y} > \frac{1}{2}$, або $\frac{1}{2} < \frac{1}{y} < 1$. Тому:

$$\times\begin{array}{r} 11 < x < 14 \\ \frac{1}{2} < \frac{1}{y} < 1 \\ \hline \frac{11}{2} < \frac{x}{y} < 14, \end{array}$$

тобто $5,5 < \frac{x}{y} < 14$. ●

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Відомо, що $2 < a < 3$. Оцінити значення виразу $a^2 - 3a$.

● **а)** Оцінимо спочатку значення виразів a^2 і $-3a$:

$$\times\begin{array}{r} 2 < a < 3 \\ 2 < a < 3 \\ \hline 4 < a^2 < 9; \end{array} \qquad -6 > -3a > -9, \text{ або } -9 < -3a < -6.$$

Тоді:

$$+\begin{array}{r} 4 < a^2 < 9 \\ -9 < -3a < -6 \\ \hline -5 < a^2 - 3a < 3. \end{array} \quad ●$$

Вправа 2. Довести нерівність $(m+n)(mn+1) \geq 4mn$, де $m \geq 0$, $n \geq 0$.

● Використаємо відому нерівність $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, де $a \geq 0$, $b \geq 0$. Запишемо цю нерівність для чисел m і n, а потім — для чисел mn і 1. Одержимо дві правильні нерівності:

$$\frac{m+n}{2} \geq \sqrt{mn}; \qquad \frac{mn+1}{2} \geq \sqrt{mn}.$$

Помножимо обидві частини кожної нерівності на 2:

$$m+n \geq 2\sqrt{mn}; \qquad mn+1 \geq 2\sqrt{mn}.$$

Почленно перемноживши останні нерівності, одержимо:

$$(m+n)(mn+1) \geq 4mn. \text{ ●}$$

Усно

79. Додайте почленно нерівності:

а) $5 > 3$ і $7 > 4$; **б)** $-5 < -3$ і $-1 < 4$.

80. Перемножте почленно нерівності:

а) $4 < 5$ і $3 < 6$; **б)** $8 \geq 4$ і $3 \geq 2$.

81. Піднесіть обидві частини нерівності $2 < 3$ до квадрата; до куба.

82. Чи одержимо правильну нерівність того самого знака, перемноживши почленно нерівності $4 > -2$ і $1 > -3$?

83. Чи одержимо правильну нерівність того самого знака після піднесення до квадрата обох частин нерівності $-5 < 2$?

Рівень А

Додайте почленно нерівності:

84. **а)** $7 > 5$ і $9 > 4$; **б)** $-7 < -3$ і $4 < 5$;

в) $1{,}3 < 2{,}5$ і $-3{,}4 < -1{,}3$; **г)** $-2{,}5 > -2{,}7$ і $-1{,}7 > -1{,}9$;

д) $1 < 2 < 5$ і $0{,}3 < 0{,}4 < 0{,}9$; **е)** $-1 < 0 < 2$ і $-3 < -1 < 1$.

85. **а)** $5 < 9$ і $3 < 7$; **б)** $-6 > -9$ і $3 > -2$;

в) $-0{,}1 > -0{,}3$ і $1{,}2 > 0{,}8$; **г)** $2 < 4 < 5$ і $-3 < 0 < 1$.

Перемножте почленно нерівності:

86. **а)** $8 < 12$ і $5 < 7$; **б)** $7{,}2 > 3{,}5$ і $0{,}5 > 0{,}4$.

87. **а)** $7 > 5$ і $11 > 8$; **б)** $0{,}3 < 0{,}5$ і $11 < 18$.

88. Оцініть квадрати обох частин нерівності:

а) $9 > 7$; **б)** $0{,}9 < 1{,}2$.

89. Відомо, що $2 < a < 4$ і $-5 < b < -2$. Оцініть значення виразу:

а) $a + b$; **б)** $a - b$.

90. Відомо, що $0{,}5 < x < 2$ і $2 < y < 3$. Оцініть значення виразу:

а) $x + y$; **б)** $x - y$; **в)** xy.

91. Відомо, що $1 < a < 3$ і $0{,}2 < b < 0{,}5$. Оцініть значення виразу:

а) $a + b$; **б)** $a - b$; **в)** ab.

Рівень Б

92. Відомо, що $3 < a < 5$ і $7 < b < 9$. Оцініть значення виразу:

а) $a - 2b$; **б)** $2ab$; **в)** $\dfrac{a}{b}$.

93. Відомо, що $4 < x < 5$ і $8 < y < 10$. Оцініть значення виразу:

а) $2x - y$; **б)** $0{,}5xy$; **в)** $\dfrac{y}{x}$.

94. Відомо, що $2 < c < 8$. Оцініть значення виразу:

а) $-0{,}5c^2$; **б)** $c^2 - 2c$; **в)** $2c^2 + c - 4$.

95. Відомо, що $1 < m < 5$. Оцініть значення виразу:

а) $-4m^2$; **б)** $m^2 + 2m$; **в)** $3m^2 + m - 10$.

96. Оцініть периметр трикутника, сторони якого дорівнюють a дм, b дм і c дм, якщо $2 < a < 2{,}1$; $1{,}6 < b < 1{,}7$; $0{,}9 < c < 1$.

97. Оцініть площу квадрата, сторона якого дорівнює b см, якщо $1{,}1 < b < 1{,}2$.

98. Оцініть периметр і площу прямокутника, сторони якого дорівнюють a см і b см, якщо $3{,}5 < a < 4$; $2 < b < 2{,}2$.

99. На упаковці рису його масу вказано так: 900 г ± 3%. Це означає, що маса рису в упаковці може бути меншою або більшою від 900 г щонайбільше на 3%. Оцініть масу рису у двох таких упаковках.

Рівень B

100. Відомо, що $2 < x < 3$ й $1 < y < 4$. Оцініть значення виразу:

а) $x^2 - y^2$; **б)** $x^3 + 0{,}5xy$; **в)** $\dfrac{y}{x+y}$.

101. Доведіть, що:

а) $\sqrt{28} + \sqrt{50} > 12$; **б)** $\sqrt{15} - \sqrt{5} < 2$; **в)** $2\sqrt{24} + 4\sqrt{3} < 18$.

Доведіть нерівність:

102. **а)** $(a + b)(ab + 4) \geq 8ab$, де $a \geq 0$, $b \geq 0$;

б) $(a^2 + 1)(a + 1) \geq 4a\sqrt{a}$, де $a \geq 0$;

в) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$, де $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$;

г) $(1 + a)(4 + b)(9 + c) \geq 48\sqrt{abc}$, де $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$;

д) $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_{10}) \geq 2^{10}$, де $a_1, a_2, ..., a_{10}$ — додатні числа, добуток яких дорівнює 1.

103. **а)** $a + b + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq 4$, де $a > 0$, $b > 0$;

б) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4\sqrt{abcd}$, де $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$.

Вправи для повторення

104. Дано множини $A = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$, $B = \{0; 1; 2; 3\}$.

а) Запишіть, належить чи не належить до кожної із цих множин число -2; число -1; число 2.

б) Запишіть множину C всіх тих елементів, які належать множині A, і не належать множині B.

в) Чи є множина C підмножиною множини A; множини B?

105. Запишіть усі цілі значення x, для яких є правильною нерівність:

а) $-2 \leq x < 4$; **б)** $-5{,}2 < x < 2{,}7$.

106. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{a+2}{a^2 - 2a + 1} : \dfrac{a^2 - 4}{a - 1} - \dfrac{1}{a - 2}$; **б)** $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 - \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 2\sqrt{y}\right)$.

107. До книгарні для продажу надійшли посібники з математики і фізики. Коли було продано 50% посібників з математики і 20% посібників з фізики, що разом становить 780 книжок, то посібників з математики залишилося утричі більше, ніж з фізики. Скільки посібників з математики надійшло у продаж?

Поміркуйте

108. Чи можна деякі вісім чисел, сума яких дорівнює 21, розставити у вершинах куба так, щоб сума чотирьох чисел у вершинах кожної грані була меншою від 10?

4. Числові проміжки. Об'єднання та переріз множин

1. Числові проміжки. Множина всіх дійсних чисел ***R*** має багато підмножин, зокрема її підмножинами є:

множина всіх натуральних чисел;

множина всіх раціональних чисел;

множина $M = \{-1; 0; \sqrt{2}\}$;

множина всіх дійсних чисел, які більші від 4;

множина всіх дійсних чисел, які більші від –2 і менші від 3.

Дві останні підмножини задані за допомогою співвідношень «>», «<». Зупинимося на таких підмножинах детальніше.

1) Множину всіх дійсних чисел, які більші від –2 і менші від 3, називають *числовим проміжком*, або просто *проміжком*, і позначають (–2; 3) (читають: «проміжок від –2 до 3»). Точки координатної прямої, які зображують числа цього проміжку, розташовані між точками, які зображують числа –2 і 3. Сам проміжок зображують одним із двох способів, показаних на рисунку 4.

а) б)

Рис. 4

Проміжок заштриховують або обводять дужкою, точки –2 і 3 зображують «порожніми» («виколотими»).

Проміжок (–2; 3) утворюють усі дійсні числа x, для яких виконується подвійна нерівність $-2 < x < 3$. Тому кажуть, що даний проміжок задає нерівність $-2 < x < 3$. Для числа $x = 2{,}2$ ця нерівність є правильною, а для числа $x = 4$ — ні. Тому $2{,}2 \in (-2; 3)$, а $4 \notin (-2; 3)$.

Рис. 5

Множину всіх дійсних чисел, які не менші від –2 і не більші від 3, тобто для яких виконується подвійна нерівність $-2 \le x \le 3$, позначають [–2; 3] (читають: «проміжок від –2 до 3, включаючи –2 і 3»). На координатній прямій цей проміжок зображують так:

Рис. 6

Звернемо увагу, що в позначеннях проміжку квадратна дужка біля числа вказує на те, що це число належить проміжку, а кругла — що не належить.

Так, [–2; 3) — проміжок від –2 до 3, включаючи –2, а (–2; 3] — проміжок від –2 до 3, включаючи 3. Ці проміжки задають відповідно нерівності $-2 \le x < 3$ і $-2 < x \le 3$, а зображують їх на координатній прямій так:

Рис. 7

Рис. 8

2) Розглянемо множину всіх дійсних чисел, які більші від 4. Точки координатної прямої, які зображують такі числа, розташовані праворуч від точки, яка зображує число 4. Тому дану множину зображують променем, що розміщений праворуч від точки, яка зображує число 4, без цієї точки (див. рис. 9). Таку множину називають проміжком від 4 до плюс нескінченності й позначають $(4; +\infty)$. Цей проміжок задає нерівність $x > 4$.

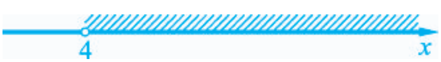


Рис. 9

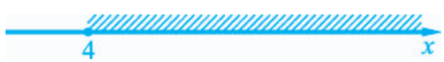


Рис. 10

На рисунках 10–12 зображено відповідно проміжки:

$[4; +\infty)$ — проміжок від 4 до плюс нескінченності, включаючи 4;

$(-\infty; 8)$ — проміжок від мінус нескінченності до 8;

(–∞; 8] — проміжок від мінус нескінченності до 8, включаючи 8.

Рис. 11

Рис. 12

Підсумок: числові проміжки

Нерівність, яка задає проміжок	*Позначення проміжку*	*Читання проміжку*	*Зображення*
$a < x < b$	$(a; b)$	Проміжок від a до b	
$a < x \leq b$	$(a; b]$	Проміжок від a до b, включаючи b	
$a \leq x < b$	$[a; b)$	Проміжок від a до b, включаючи a	
$a \leq x \leq b$	$[a; b]$	Проміжок від a до b, включаючи a і b	
$x > a$	$(a; +\infty)$	Проміжок від a до плюс нескінченності	
$x \geq a$	$[a; +\infty)$	Проміжок від a до плюс нескінченності, включаючи a	
$x < b$	$(-\infty; b)$	Проміжок від мінус нескінченності до b	
$x \leq b$	$(-\infty; b]$	Проміжок від мінус нескінченності до b, включаючи b	

Множину всіх дійсних чисел зображують усією координатною прямою і позначають так: (–∞; +∞).

2. Об'єднання та переріз множин. Розглянемо два проміжки [–1; 4) і (2; 7), зображені на рисунку 13.

Рис. 13

Усі числа, які належать проміжку $[-1; 4)$ або проміжку $(2; 7)$, утворюють проміжок $[-1; 7)$. Кажуть, що проміжок $[-1; 7)$ є *об'єднанням* проміжків $[-1; 4)$ і $(2; 7)$.

Означення ***Об'єднанням*** **множин *A* і *B* називають таку множину *S*, яка складається з усіх тих елементів, які належать множині *A* або множині *B*.**

У такому разі записують: $S = A \cup B$, де «$\cup$» — знак об'єднання. На рисунку 14 зображено множини A і B та заштриховано їх об'єднання. Можна сказати, що об'єднання множин A і B утворюють усі елементи множини A, усі елементи множини B і тільки вони.

Для проміжків $[-1; 4)$ і $(2; 7)$ маємо: $[-1; 4) \cup (2; 7) = [-1; 7)$.

Рис. 14

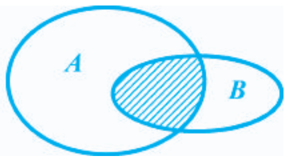


Рис. 15

Усі числа, які належать проміжку $[-1; 4)$ і проміжку $(2; 7)$ (спільні числа проміжків), утворюють проміжок $(2; 4)$. Кажуть, що проміжок $(2; 4)$ є *перерізом* проміжків $[-1; 4)$ і $(2; 7)$.

Означення ***Перерізом*** **множин *A* і *B* називають таку множину *P*, яка складається з усіх тих елементів, які належать одночасно множині *A* і множині *B*.**

Записують: $P = A \cap B$, де «$\cap$» — знак перерізу. На рисунку 15 зображено множини A і B та заштриховано їх переріз. Можна сказати, що перерізом множин A і B є множина всіх спільних елементів цих множин.

Для проміжків $[-1; 4)$ і $(2; 7)$ маємо: $[-1; 4) \cap (2; 7) = (2; 4)$.

Проміжки $[-1; 4)$ і $(5; +\infty)$ не мають спільних елементів. Множину, яка не містить жодного елемента, називають *порожньою множиною* і позначають символом $\varnothing$. Отже, $[-1; 4) \cap (5; +\infty) = \varnothing$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти об'єднання та переріз множин A і B, якщо:

а) $A = \{2; 3; 5\}$, $B = \{1; 3; 5; 7\}$; **б)** $A = (-2; 2]$, $B = (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

● **а)** $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 7\}$ — записали усі елементи, які належать множині A або множині B;

$A \cap B = \{3; 5\}$ — записали всі спільні елементи множин A і B.

б) Зобразимо дані множини на координатній прямій (над прямою заштриховані елементи множини A, під прямою — множини B).

$A \cup B = (-\infty; +\infty)$; $A \cap B = (-2; -1] \cup \{2\}$. ●

Вправа 2. Зобразити на координатній прямій множину всіх дійсних чисел, для яких виконується нерівність, і записати цю множину у вигляді проміжку або об'єднання проміжків:

а) $|x| \le 5$; **б)** $|x| \ge 5$.

● **а)** Модулем числа x є відстань від початку відліку до точки, що зображує число x на координатній прямій. Тому нерівність $|x| \le 5$ виконується для всіх тих чисел, яким відповідають точки координатної прямої, що розташовані від початку відліку на відстанях, які не перевищують 5.

Отже, дана множина є проміжком $[-5; 5]$.

б) Нерівність $|x| \ge 5$ виконується для всіх тих чисел, яким відповідають точки координатної прямої, що розташовані від початку відліку на відстанях, які не менші від 5.

Отже, даною множиною є об'єднання проміжків $(-\infty; -5]$ і $[5; +\infty)$, тобто $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$. ●

Вправа 3. Дано множини $A = \{2; 4; 5\}$, $B = \{4; 5; 6\}$, $C = \{5; 6; 7; 8\}$. Знайти:

а) $A \cup (B \cap C)$; **б)** $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

● Послідовно знаходимо:

а) $B \cap C = \{5; 6\}$; $A \cup (B \cap C) = \{2; 4; 5; 6\}$;

б) $A \cup B = \{2; 4; 5; 6\}$; $A \cup C = \{2; 4; 5; 6; 7; 8\}$;

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{2; 4; 5; 6\}$. ●

Усно

109. Назвіть проміжки, зображені на рисунку 16.

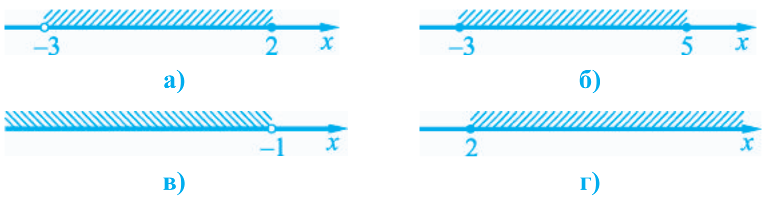


Рис. 16

110. Які з чисел –3; 0; 4 належать числовому проміжку:

а) [–2; 4]; **б)** (–3; 4); **в)** (–∞; 1); **г)** [–3; +∞)?

111. Укажіть найменше та найбільше цілі числа, які належать проміжку:

а) [–1; 8]; **б)** (5; 7]; **в)** (–3; 1); **г)** [–3,5; –1).

112. Укажіть об’єднання та переріз проміжків, зображених на рисунку 17.

Рис. 17

113. Знайдіть об’єднання та переріз множин A і B, якщо:

а) $A = \{-1; 2; 3\}$, $B = \{-1; 1; 3\}$; **б)** $A = [2; 5]$, $B = [0; 4]$.

Рівень А

Зобразіть на координатній прямій проміжок і запишіть нерівність, яка його задає:

114. **а)** [–2; 4); **б)** (–∞; 3]; **в)** (2; +∞); **г)** (3; 7].

115. **а)** [–1; 3]; **б)** (2; 6]; **в)** [3; +∞); **г)** (–∞; 1).

Зобразіть на координатній прямій множину всіх дійсних чисел, для яких виконується нерівність, і запишіть цю множину у вигляді проміжку:

116. **а)** $x \geq 3$; **б)** $x < 4$; **в)** $-1 \leq x < 3$; **г)** $1 < x \leq 5$.

117. **а)** $x \leq -1$; **б)** $x > 5$; **в)** $0 \leq x \leq 6$; **г)** $-1 < x < 4$.

118. Запишіть усі натуральні числа, які належать проміжку:

а) $(-7; 3)$; **б)** $(-\infty; 5)$; **в)** $(5; 10]$; **г)** $(-\infty; 7]$.

119. Запишіть усі цілі числа, які належать проміжку:

а) $(-1; 5)$; **б)** $[5; 12)$; **в)** $(-4; 2]$; **г)** $(0; 7)$.

Укажіть, якщо можливо, найменше та найбільше цілі числа, які належать проміжку:

120. **а)** $[5; 11)$; **б)** $(8; 20]$; **в)** $[-3; +\infty)$; **г)** $(-\infty; 2)$.

121. **а)** $(3; 8]$; **б)** $[-4; 5]$; **в)** $(-\infty; 3]$; **г)** $(0; +\infty)$.

122. Знайдіть об’єднання та переріз множин B і C, якщо:

а) $B = \{2; 5; 10; 12; 15\}$, $C = \{5; 10; 15; 20\}$;

б) $B = \{-2; -1; 0; 1\}$, $C = \{-3; 3; 6\}$;

в) $B = \{2; 3\}$, $C = \{3; 2\}$;

г) $B = \{\mathrm{a; d; f; g}\}$, $C = \{\mathrm{b; c; d; e; h}\}$.

123. Знайдіть об’єднання та переріз множин A і B, якщо:

а) $A = \{-3; -1; 1; 3\}$, $B = \{0; 1; 2; 3\}$;

б) $A = \{5; 8; 10; 15\}$, $B = \{4; 9; 12\}$;

в) $A = \{$а; б; в; г; д$\}$, $B = \{$в; о; д; а$\}$.

Зобразіть на координатній прямій проміжки і знайдіть їх об’єднання та переріз:

124. **а)** $[-1; 2]$ і $(1; 3)$; **б)** $[3; 4)$ і $[2; 4)$;

в) $(-\infty; 1)$ і $[0; 2]$; **г)** $(-\infty; -1]$ і $[-2; +\infty)$;

д) $(-\infty; 1)$ і $[2; +\infty)$; **е)** $(2; +\infty)$ і $[-2; +\infty)$.

125. **а)** $[-4; 0)$ і $[-2; 2)$; **б)** $(-1; 4)$ і $[0; 3]$;

в) $(-\infty; 3]$ і $[1; +\infty)$; **г)** $(-\infty; -1]$ і $(-\infty; 2)$.

Рівень Б

126. Відомо, що $a < b < c < d$. Знайдіть об’єднання та переріз проміжків:

а) $[a; c)$ і $(b; d)$; **б)** $(a; b]$ і $(b; d]$;

в) $(-\infty; c)$ і $(a; d]$; **г)** $(-\infty; b]$ і $(c; +\infty)$.

127. Відомо, що $m < n < k$. Знайдіть об'єднання та переріз проміжків:

а) $[m; n)$ і $[n; k)$; **б)** $(-\infty; n)$ і $(m; k]$.

128. Знайдіть об'єднання та переріз множин M і K, якщо:

а) $M = [-1{,}5; 2]$, $K = (-\infty; 0) \cup (1{,}5; +\infty)$;

б) $M = (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$, $K = (-3; 2]$;

в) $M = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$, $K = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

129. Знайдіть об'єднання та переріз множин A і B, якщо:

а) $A = [-4; 1)$, $B = (-\infty; -2{,}5) \cup [2; +\infty)$;

б) $A = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$, $B = (-\infty; -3] \cup [0; +\infty)$.

Зобразіть на координатній прямій множину всіх дійсних чисел, для яких виконується нерівність, і запишіть цю множину у вигляді проміжку або об'єднання проміжків:

130. **а)** $|x| < 3$; **б)** $|x| > 4$; **в)** $|x| \le 3{,}5$; **г)** $|x| \ge 1{,}5$.

131. **а)** $|x| \ge 1$; **б)** $|x| < 2{,}5$; **в)** $|x| \le 1{,}5$; **г)** $|x| > 0{,}5$.

132. Дано множини $A = \{1; 4; 7\}$, $B = \{4; 5; 7\}$, $C = \{4; 6; 7\}$. Доведіть, що для цих множин виконується рівність $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

133. Дано множини $A = \{3; 5\}$, $B = \{3; 5; 7\}$, $C = \{1; 3; 5; 7\}$. Доведіть, що для цих множин виконується рівність $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

134. Множини A, B та їх переріз складаються відповідно з 8, 7 та 3 елементів. Зі скількох елементів складається об'єднання множин A і B?

Рівень В

135. Зобразіть на координатній прямій множину всіх дійсних чисел, для яких виконується:

а) нерівність $|x| < 3$ і нерівність $|x| \ge 1$;

б) нерівність $|x| < 1$ або нерівність $|x| \ge 3$;

в) рівність $|x| = -x$ і нерівність $|x| > -1$;

г) рівність $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ або нерівність $|x| < 2$.

Запишіть кожну множину у вигляді проміжку або об'єднання проміжків.

136. Доведіть, що серед чисел, які належать проміжку $(0; 1)$, не існує найбільшого числа.

137. Відомо, що $A \subset B$. Знайдіть $A \cup B$ та $A \cap B$.

138. Відомо, що $A \cup B = A \cap B$. Чи обов'язково $A = B$?

139. На математичному турнірі, у якому взяли участь 24 учні, було запропоновано розв'язати 3 задачі. Першу задачу розв'язали 14 учнів, другу — 11, третю — 9, першу і другу — 6, першу і третю — 7, другу і третю — 5, першу, другу і третю — 4. Скільки учнів не розв'язали жодної задачі?

Вправи для повторення

140. Чи є число 5 коренем рівняння:

а) $3 + 2(x - 1) = 2 - 3(2 - x)$; **б)** $\sqrt{x^2 - 3x + 6} = 2x - 7$?

141. Розв'яжіть рівняння:

а) $7(2x - 1) - 5x = 11 + 3(3x - 2)$; **б)** $\dfrac{7x-2}{20} = \dfrac{4x+1}{5} - \dfrac{3x-6}{4}$.

142. Для яких значень a значення дробу дорівнює нулю?

а) $\dfrac{a^2 - 49}{a + 7}$; **б)** $\dfrac{|a| - 2}{a^2 - 3a + 2}$.

143. Вкладник вніс до банку певну суму грошей і через рік після нарахування 15% річних мав на рахунку 2875 грн. Яку суму вкладник вніс до банку?

144*. З пункту A в пункт B вийшов турист і рухався зі швидкістю 4 км/год. Через годину услід за ним вийшов другий турист і рухався зі швидкістю 5 км/год, а ще через годину з пункту A виїхав велосипедист, який, обігнавши другого туриста, через 10 хв після цього обігнав і першого. Знайдіть швидкість велосипедиста.

Поміркуйте

145. Є смужка розміру 1×99. Двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід потрібно закреслити одну довільну клітинку смужки або деякі дві послідовні клітинки. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто може забезпечити собі перемогу — той, хто починає гру, чи його суперник?

5. Нерівності з однією змінною. Розв'язування нерівностей

1. Поняття нерівності з однією змінною та її розв'язку. Розглянемо задачу.

Задача. Довжина ділянки прямокутної форми на 5 м більша від ширини. Якими можуть бути розміри ділянки, якщо для її обгородження вистачило 46 м сітки?

Нехай ширина ділянки дорівнює x м, тоді довжина дорівнює $(x + 5)$ м, а периметр — $2(x + x + 5) = (4x + 10)$ (м). За умовою периметр не перевищує 46 м, тобто $4x + 10 \leq 46$.

Ми одержали нерівність, яка містить змінну x. Якщо в нерівність замість x підставляти деякі числа, то одержуватимемо числові нерівності, які можуть бути правильними або неправильними. Наприклад:

якщо $x = 5$, то матимемо нерівність $4 \cdot 5 + 10 \leq 46$, яка є правильною;

якщо $x = 10$, то матимемо нерівність $4 \cdot 10 + 10 \leq 46$, яка є неправильною.

Кажуть, що число 5 є *розв'язком* даної нерівності, або *задовольняє* дану нерівність, а число 10 не є її розв'язком.

Означення **Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює її у правильну числову нерівність.**

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Нерівність з однією змінною переважно має безліч розв'язків. Так, розв'язками нерівності $x > 1$ є усі дійсні числа, які більші від 1. Тому множиною розв'язків цієї нерівності є проміжок $(1; +\infty)$.

2. Розв'язування нерівностей з однією змінною. Рівносильні нерівності. Розв'язуючи нерівність, її перетворюють, замінюючи простішими нерівностями з тими самими розв'язками.

Нерівності, які мають ті самі розв'язки, називають ***рівносильними****. Нерівності, які не мають розв'язків, теж називають рівносильними.*

Заміну нерівності рівносильними їй нерівностями виконують на основі таких властивостей:

1) якщо виконати тотожне перетворення деякої частини нерівності, яке не змінює допустимі значення змінної, то одержимо нерівність, рівносильну даній;

2) якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу частину доданок, змінивши його знак на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну даній;

3) якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на те саме додатне число, то одержимо нерівність, рівносильну даній;

4) якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на те саме від'ємне число і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

Користуючись цими властивостями, розв'яжемо одержану нами нерівність

$$4x + 10 \le 46.$$

Перенесемо доданок 10 з лівої частини нерівності у праву, змінивши його знак на протилежний, одержимо нерівність

$$4x \le 46 - 10,$$

яка рівносильна заданій нерівності.

У правій частині нерівності $4x \le 46 - 10$ зведемо подібні доданки:

$$4x \le 36.$$

Поділимо обидві частини останньої нерівності на 4, одержимо нерівність

$$x \le 9.$$

Отже, нерівність $4x + 10 \le 46$ рівносильна нерівності $x \le 9$ і її задовольняють усі числа, які не більші від 9 (див. рис. 18). Множиною розв'язків даної нерівності є проміжок $(-\infty; 9]$.

Рис. 18

Повернімося до задачі. Ширину ділянки ми позначили через x м. Оскільки ширина має виражатися додатним числом, то x може дорівнювати будь-якому числу з проміжку $(0; 9]$. Отже, щодо розмірів ділянки можна сказати, що її ширина не повинна перевищувати 9 м, довжина ж на 5 м більша від неї.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати нерівність $\frac{3x-1}{6} \le \frac{2x}{9} + 1$ і зобразити множину її розв'язків на координатній прямій.

● Помножимо обидві частини нерівності на найменший спільний знаменник дробів, які входять до нерівності, тобто на 18. Матимемо:

$$18 \cdot \frac{3x-1}{6} \le 18 \cdot \frac{2x}{9} + 18;$$

$$3(3x - 1) \le 2 \cdot 2x + 18;$$

$$9x - 3 \le 4x + 18;$$

$$9x - 4x \le 18 + 3;$$

$$5x \le 21;$$

$$x \le 4{,}2.$$

Відповідь. $x \le 4{,}2$, або по-іншому $(-\infty; 4{,}2]$. ●

Вправа 2. Розв'язати нерівність $-2 \le \frac{3x-1}{2} \le 7$.

● Помножимо всі частини нерівності на 2:

$$-4 \le 3x - 1 \le 14.$$

Додамо до всіх частин нерівності число 1:

$$-3 \le 3x \le 15.$$

Поділимо всі частини нерівності на 3:

$$-1 \le x \le 5.$$

Відповідь. $-1 \le x \le 5$, або по-іншому $[-1; 5]$. ●

Вправа 3. Розв'язати нерівність:

а) $|2x - 3| \le 5$; **б)** $|3x - 1| < -4$; **в)** $|2x - 1| > 5$.

● **а)** Розв'язками нерівності $|2x - 3| \le 5$ є числа, які задовольняють подвійну нерівність

$$-5 \le 2x - 3 \le 5.$$

Додавши до всіх частин нерівності число 3, матимемо:

$$-2 \le 2x \le 8;$$

$$-1 \le x \le 4.$$

Відповідь. $-1 \le x \le 4$, або по-іншому $[-1; 4]$.

б) Модуль числа — число невід'ємне, тому модуль числа не може бути меншим від –4. Отже, нерівність $|3x - 1| < -4$ розв'язків не має.

Відповідь. Розв'язків немає.

в) Вираз $2x - 1$, який стоїть під знаком модуля, повинен набувати значень, які менші від –5 або більші від 5. Отже, $2x - 1 < -5$ або $2x - 1 > 5$.

Якщо потрібно знайти усі значення x, які задовольняють нерівність $2x - 1 < -5$ або нерівність $2x - 1 > 5$, то кажуть, що потрібно розв'язати *сукупність* нерівностей, яку записують так: $\left[\begin{array}{l} 2x-1<-5; \\ 2x-1>5. \end{array}\right.$

Розв'язуючи кожну нерівність сукупності, матимемо:

$$\left[\begin{array}{l} 2x<-5+1; \\ 2x>5+1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2x<-4; \\ 2x>6; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x<-2; \\ x>3. \end{array}\right.$$

Розв'язками сукупності є значення x, які задовольняють нерівність $x < -2$ або нерівність $x > 3$.

Відповідь. $x < -2$ або $x > 3$. (Відповідь можна записати й у вигляді об'єднання проміжків: $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.) ●

Усно

146. Які з чисел –2; 0; 1; 5 є розв'язками нерівності $3x + 1 > 2$?

147. Чи рівносильні нерівності:

а) $2(x - 1) > 1$ і $2x - 2 > 1$; **б)** $5x + 1 > 0$ і $5x > 1$;

в) $3x < 0$ і $x < 0$; **г)** $-2x > 4$ і $x > -2$?

148. Поясніть кожний крок розв'язання нерівності:

а) $3(x-2) > x+2;$

$3x-6 > x+2;$

$3x-x > 6+2;$

$2x > 8;$

$x > 4;$

б) $\dfrac{x+1}{4} - x \le 4;$

$x+1-4x \le 16;$

$x-4x \le 16-1;$

$-3x \le 15;$

$x \ge -5.$

Рівень А

149. Чи є число –4 розв'язком нерівності:

а) $x+5>0;$ **б)** $x^2<10;$ **в)** $4x \le x;$ **г)** $-5x+1<-6x$?

150. Які з чисел –1; 0,5; 8; 10 є розв'язками нерівності $3(x-2) > 2x+1$?

Розв'яжіть нерівність, зобразіть множину її розв'язків на координатній прямій та запишіть цю множину у вигляді числового проміжку:

151. **а)** $x-5>0;$ **б)** $x+7<0;$ **в)** $x-3{,}2 \le 0;$ **г)** $x+5{,}3 \ge 0.$

152. **а)** $2x<5;$ **б)** $3x \ge -15;$ **в)** $-3x<-12;$ **г)** $-0{,}5x \le 0.$

153. **а)** $x-2<0;$ **б)** $x+3{,}5 \ge 0;$ **в)** $5x \ge 15;$ **г)** $-2x<4.$

154. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності $-8x > -4$.

155. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності $4x \ge 15$.

Розв'яжіть нерівність:

156. **а)** $5x+25 \le 0;$ **б)** $7-4x>15;$ **в)** $9+x \ge 3-x;$ **г)** $19+2x<5+9x.$

157. **а)** $8x-7>9;$ **б)** $12-3x \le 9;$ **в)** $2x-1>5-x;$ **г)** $3-x \ge 7+3x.$

158. **а)** $\dfrac{x}{4} \ge 0;$ **б)** $\dfrac{5x}{3} < 0;$ **в)** $\dfrac{3x}{8} \le 3;$ **г)** $\dfrac{2x}{5} \ge 4.$

159. **а)** $\dfrac{7x}{4} \ge 0;$ **б)** $\dfrac{2x}{3} < 0;$ **в)** $\dfrac{x}{8} > 1;$ **г)** $\dfrac{2x}{3} > 6.$

160. Розв'яжіть нерівність $9x-5>4x+3$. Запишіть три значення x, які є розв'язками цієї нерівності.

161. Розв'яжіть нерівність $11-2x \le 15-4x$. Чи є розв'язками цієї нерівності числа –3; 2?

Рівень Б

Розв’яжіть нерівність:

162. **а)** $250(x-3) > 500(x+1) + 750$; **б)** $0{,}01(x+2) - 0{,}09 \le 0{,}02(x-5)$;

в) $\frac{1}{70}(3x+1) + \frac{9}{70} < \frac{11}{70}x$; **г)** $\frac{2x+1}{4} - \frac{2x-3}{6} \le \frac{1}{12}$.

163. **а)** $90(x-12) + 180(x+6) < 270$; **б)** $\frac{1-x}{30} - \frac{1+x}{15} \ge \frac{7}{60}$.

Розв’яжіть подвійну нерівність:

164. **а)** $-1 \le 3x + 4 < 5$; **б)** $0 < 2 - 5x < 7$;

в) $2 < \frac{7+2y}{3} \le 6$; **г)** $-2 < \frac{8-x}{4} < 2$.

165. **а)** $-1 < 2y - 5 < 3$; **б)** $4 < 8 - 3x \le 10$;

в) $0 < \frac{3y+2}{6} \le 5$; **г)** $2 \le \frac{3-x}{8} < 3$.

Розв’яжіть нерівність:

166. **а)** $2|x| < 8$; **б)** $-3|x| \ge -6$;

в) $4|x| + 1 \le 3|x|$; **г)** $5(|x| - 2) > 10$.

167. **а)** $3|x| \le 9$; **б)** $-2|x| > -2$;

в) $6|x| + 3 \ge 5|x|$; **г)** $1 - (|x| - 4) < 0$.

168. Скільки цілих розв’язків має нерівність $-15 < -4x < 14$?

169. Скільки натуральних розв’язків має нерівність $-0{,}04|x| \ge -1$?

170. На рисунку 19 зображено графіки функцій $y = \sqrt{x}$ та $y = -x + 2$.

а) Для яких значень x графік функції $y = \sqrt{x}$ розташований нижче від графіка функції $y = -x + 2$?

б) Укажіть множину розв’язків нерівності $\sqrt{x} \ge -x + 2$.

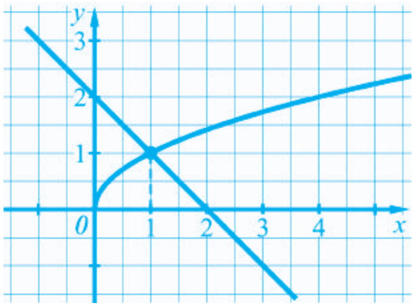


Рис. 19

Розв'яжіть графічно нерівність:

171. **а)** $x^2 \le x + 2$; **б)** $\frac{4}{x} < x$.

172. **а)** $x^2 > -x$; **б)** $-\frac{3}{x} \ge 1$.

173. Основа рівнобедреного трикутника на 7 см коротша від бічної сторони. Якою може бути довжина бічної сторони цього трикутника, якщо його периметр більший від 23 см і менший від 29 см?

174. Довжина прямокутника на 11 см більша від ширини. Якою може бути довжина прямокутника, якщо його периметр більший від 62 см і менший від 66 см?

Рівень В

175. Знайдіть усі значення параметра a, для яких одним з розв'язків нерівності $a(x - 2) \ge (a + 1)x$ є число 4.

176. Знайдіть усі значення параметра b, для яких множиною розв'язків нерівності $\frac{x - b}{2} < \frac{x - 2b}{3}$ є проміжок $(-\infty; 2)$.

177. Знайдіть усі значення a, для яких проміжок $[-2; 8]$ є підмножиною множини розв'язків нерівності $x - 1 > 2a$.

178. Розв'яжіть нерівність:

а) $|5x - 9| < 7$; **б)** $|11 - 2x| \ge 3$;

в) $|x + 1| > 0$; **г)** $|1 - 2(x + 6)| \ge 11$;

д) $5|x - 3| < 9 + 2|x - 3|$; **е)** $4 - |2x + 9| > 3(|2x + 9| - 4)$.

Вправи для повторення

179. Розв'яжіть рівняння:

а) $0 \cdot x = 5$; **б)** $0 \cdot x = 0$; **в)** $\left(\left(\sqrt{3}\right)^2 - 3\right)x = -1$.

180. Скоротіть дріб:

а) $\frac{2a+2b}{a^2-b^2}$; **б)** $\frac{a-49}{\sqrt{a}+7}$; **в)** $\frac{x-3}{x^2-x-6}$.

181. Доведіть, що значення виразу $\left(\frac{b+3}{b-3}+\frac{b-3}{b+3}\right):\frac{2b^2+18}{9-b^2}$ не залежать від допустимих значень b.

182. Станція київського метро «Арсенальна» — найглибша станція метрополітену в світі — розташована на глибині 105 м. Глибина станції «Хрещатик» дорівнює 70 м. На скільки відсотків глибина станції «Арсенальна» більша від глибини станції «Хрещатик»?

183. За течією річки катер пройшов за 7 год такий шлях, який він проходить за 8 год проти течії. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість катера у стоячій воді дорівнює 30 км/год.

Поміркуйте

184. Було 4 аркуші паперу. Деякі з них розрізали на 8 частин, потім деякі з цих частин розрізали знову на 8 частин і т. д. Коли підрахували загальну кількість частин, то їх виявилося 1000. Доведіть, що підрахунок був неправильним.

6. Лінійні нерівності з однією змінною

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $2(6x + 5) + 3x \leq 40$.

● $12x + 10 + 3x \leq 40$;

$$12x + 3x \leq 40 - 10;$$

$$15x \leq 30;$$

$$x \leq 2.$$

Множину розв'язків нерівності запишемо у вигляді числового проміжку $(-\infty; 2]$.

Відповідь. $(-\infty; 2]$. ●

Приклад 2. Розв'язати нерівність $4(3x + 7) - 9x > 20 + 3x$.

$$\bullet\ 12x + 28 - 9x > 20 + 3x;$$

$$12x - 9x - 3x > 20 - 28;$$

$$0 \cdot x > -8.$$

Для будь-якого значення x значення лівої частини нерівності $0 \cdot x > -8$ дорівнює нулю, а нуль більший від -8. Отже, множиною розв'язків даної нерівності є множина всіх дійсних чисел, тобто проміжок $(-\infty; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; +\infty)$. ●

Приклад 3. Розв'язати нерівність $14x + 17 < 8x + 6(x + 2)$.

$$\bullet\ 14x + 17 < 8x + 6x + 12;$$

$$14x - 8x - 6x < 12 - 17;$$

$$0 \cdot x < -5.$$

Нерівність $0 \cdot x < -5$ не має розв'язків, бо для будь-якого x значення її лівої частини дорівнює нулю, а нуль не менший від -5.

Відповідь. Розв'язків немає. ●

У результаті перетворень ми звели першу нерівність до нерівності $15x \le 30$, другу — до нерівності $0 \cdot x > -8$, третю — до нерівності $0 \cdot x < -5$. Нерівності такого виду називають *лінійними нерівностями з однією змінною*.

Означення

Нерівності виду $ax > b$, $ax \ge b$, $ax < b$, $ax \le b$, де a і b — деякі відомі числа, а x — змінна, називають *лінійними нерівностями з однією змінною*.

Якщо $a \ne 0$, то для розв'язання лінійної нерівності з однією змінною потрібно поділити обидві частини нерівності на a. Якщо $a = 0$, то або розв'язком нерівності є будь-яке число, або нерівність не має розв'язків.

Залежність множини розв'язків лінійної нерівності виду $ax > b$ від значень коефіцієнтів a і b подано в таблиці.

Нерівність	*Коефіцієнти*	*Розв'язки*
$ax > b$	$a > 0$	$x > \frac{b}{a}$, або $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$
	$a < 0$	$x < \frac{b}{a}$, або $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$
	$a = 0$ і $b \geq 0$	розв'язків немає, або $\varnothing$
	$a = 0$ і $b < 0$	розв'язком є будь-яке число, або $(-\infty; +\infty)$

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{8 - 2x}$.

● Область визначення функції утворюють усі ті значення x, для яких вираз $8 - 2x$ набуває невід'ємних значень. Отже, потрібно розв'язати нерівність $8 - 2x \geq 0$. Матимемо:

$$-2x \geq -8; \quad x \leq 4.$$

Областю визначення функції є проміжок $(-\infty; 4]$.

Відповідь. $(-\infty; 4]$. ●

Вправа 2. Розв'язати нерівність $(a + 3)x < 5$ з параметром a.

● Розглянемо три випадки: 1) $a + 3 < 0$; 2) $a + 3 = 0$; 3) $a + 3 > 0$.

1) Якщо $a + 3 < 0$, тобто $a < -3$, то, поділивши обидві частини нерівності на від'ємне число $a + 3$, одержимо: $x > \frac{5}{a+3}$.

2) Якщо $a + 3 = 0$, тобто $a = -3$, то матимемо нерівність $0 \cdot x < 5$, розв'язком якої є будь-яке число.

3) Якщо $a + 3 > 0$, тобто $a > -3$, то $x < \frac{5}{a+3}$.

Відповідь. Якщо $a < -3$, то $x > \frac{5}{a+3}$; якщо $a = -3$, то розв'язком нерівності є будь-яке число; якщо $a > -3$, то $x < \frac{5}{a+3}$. ●

Усно

185. Розв'яжіть нерівність:

а) $2x < 8$; **б)** $-3x \geq 6$; **в)** $0x > 11$;
г) $0x < -7$; **д)** $0x < 8$; **е)** $0x > -3$.

Рівень А

Розв'яжіть нерівність:

186. **а)** $9(x-1)+5x<17x-12$; **б)** $8x-5(x+2)\geq 3x$;
в) $y-7(y+1)\leq 5-6(y+2)$; **г)** $10y-4(y+3)>5+6y$;
д) $2y-6(3y-1)<11(1-y)$; **е)** $5(x+3)-3(1-x)>12-3x$.

187. **а)** $9y-4(1+2y)<y-7$; **б)** $7(2x-3)\geq 10+2(2x-1)$;
в) $7(1-2x)+5x\geq 4-9x$; **г)** $3(5+x)>11+8(x-2)$.

188. **а)** $x(x-2)-x^2<2$; **б)** $x(x+3)\geq x^2+3x+1$;
в) $(x-3)^2>x^2$; **г)** $(x-4)(x+4)<x^2-8x$.

189. **а)** $x(x+3)-x^2+2x\geq 0$; **б)** $x(x-4)<x^2+4$;
в) $(x+2)^2\leq x^2$; **г)** $(x+1)(x-1)>x^2-2x$.

190. **а)** $\frac{4y}{9}-y>5$; **б)** $x\leq \frac{5x}{6}+3$;
в) $\frac{3x}{2}+\frac{x}{6}<4$; **г)** $\frac{2z}{3}-\frac{3z}{4}>-1$.

191. **а)** $\frac{3x}{5}-4x<0$; **б)** $2y>\frac{3y}{4}+1$;
в) $\frac{x}{2}-\frac{x}{4}\leq -3$; **г)** $\frac{x}{2}+\frac{x}{5}\geq 7$.

192. Знайдіть усі значення y, для яких значення виразу $2-4y$ є:
а) додатними; **б)** меншими від -2.

193. Знайдіть усі значення z, для яких значення виразу $5z-2$ є:
а) від'ємними; **б)** більшими від 3.

194. Для яких значень x функція $y=3(15-2x)$ набуває:
а) від'ємних значень; **б)** значень, які не менші від 15?

195. Для яких значень x функція $y=2(2x-7)$ набуває:
а) невід'ємних значень; **б)** значень, які не більші від 4?

Знайдіть область визначення функції:

196. **а)** $y = \sqrt{x-3}$; **б)** $y = \sqrt{2x+6}$;

в) $y = \sqrt{5-x}$; **г)** $y = \sqrt{7-2x}$.

197. **а)** $y = \sqrt{3x-12}$; **б)** $y = \sqrt{4-8x}$.

198. На пошиття костюма витратили 3,2 м тканини. Яку найбільшу кількість таких костюмів можна пошити, маючи 60 м цієї самої тканини?

199. Маса бетонного блоку дорівнює 350 кг. Яку найбільшу кількість таких блоків може перевезти автомобіль, вантажність якого дорівнює 5 т?

Рівень Б

Розв'яжіть нерівність:

200. **а)** $4(x-3)+1 \geq 12-3(1-2x)$; **б)** $9-2(5+3x) < 4(1-2x)+2x$;

в) $0{,}4y-1{,}2(3y-1) < 1{,}6(1-y)$; **г)** $2{,}5(x+3)-(1{,}5-x) > 1-1{,}5x$.

201. **а)** $7(x-2)+20 < 4(x-3)-9$; **б)** $2(3-y)-3(2+y) \leq -5(y+4)$;

в) $0{,}1z+1 < 0{,}5(2z+7)+1{,}4(5-z)$; **г)** $5y-(y+0{,}3)+4(0{,}2-y) \leq 0{,}5$.

202. **а)** $(x+3)(x-8) < x(x-2)$; **б)** $(2x-3)^2 > 2x(2x-1)$;

в) $(4x-1)(4x+1) \leq 4+16x(x-1)$; **г)** $(x-3)(x^2+3x+9) > x^3+2x-1$.

203. **а)** $x(x+5) > (x-4)(x+1)$; **б)** $9x^2+3 < (3x+2)(3x-2)-5x$;

в) $(5x+1)^2 \geq 10x^2+15x(x+1)$; **г)** $(x+2)(x^2-2x+4) \leq x^3+16x$.

204. **а)** $\dfrac{4+3y}{3}-5y \geq 0$; **б)** $\dfrac{5y-13}{4}-y \leq \dfrac{y}{4}$;

в) $x-\dfrac{x+3}{2} \geq \dfrac{2x-1}{4}$; **г)** $\dfrac{3z-1}{2}-\dfrac{2z+5}{8}-z < 3$.

205. **а)** $\dfrac{5-3y}{3}-y \geq 17-2y$; **б)** $4-\dfrac{x}{3}+x < \dfrac{2x}{3}$;

в) $\dfrac{15x-8}{5} < 3x+12$; **г)** $\dfrac{y+1}{2}+\dfrac{2y-1}{6} < y$.

206. Для яких значень x значення дробу $\dfrac{1{,}5x-4}{5}$ менше від відповідного значення дробу $\dfrac{2{,}4x+3}{4}$?

207. Для яких значень y значення дробу $\frac{0,6y+5}{3}$ більше від відповідного значення дробу $\frac{4-1,2y}{4}$?

Знайдіть область визначення функції:

208. **а)** $y=\sqrt{\frac{2}{7}-\frac{1}{14}x}$; **б)** $y=\frac{2}{\sqrt{1+4x}}$.

209. **а)** $y=\sqrt{\frac{x-1}{3}-7}$; **б)** $y=\frac{1}{\sqrt{5x-2}}$.

210. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $x^2-8x+a+4=0$ має два різні корені.

211. Для яких значень a рівняння $x^2+6x+a-1=0$ не має коренів?

212. Довжина однієї сторони трикутника дорівнює 12 см. Якою може бути довжина висоти трикутника, проведеної до цієї сторони, якщо його площа менша, ніж 63 см^2?

213. Основою прямої призми є трикутник, довжини сторін якого дорівнюють 6 см, 7 см і 8 см. Якою може бути висота призми, якщо площа її бічної поверхні менша, ніж 189 см^2?

214. Катер пройшов певну відстань по озеру і таку саму відстань річкою, яка впадає в озеро. Якою може бути ця відстань, якщо швидкість катера у стоячій воді дорівнює 20 км/год, швидкість течії річки — 2 км/год, а час руху більший, ніж 1,9 год?

215. Туристи планують здійснити прогулянку річкою на моторному човні та повернутися на базу не пізніше як через 5 годин. На яку відстань вони можуть відплисти від бази за течією річки, якщо швидкість човна у стоячій воді дорівнює 15 км/год, а швидкість течії річки — 3 км/год?

Рівень В

216. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\sqrt{15-3x}-\frac{1}{x-2}$; **б)** $y=\frac{x-2}{x+4}+\frac{2x}{\sqrt{4x+18}}$.

Розв'яжіть нерівність з параметром а:

217. **а)** $2x-3a\le 4-7a$; **б)** $3(x+a)-2\ge 7x-a$.

218. **а)** $(a + 2)x > 1$; **б)** $(2a + 3)x \le 4a^2 - 9$.

219. Чи існують значення a, для яких нерівність $a(x + 1) \le (2a + 3)x$ не має розв'язків?

220. Чи існують значення a, для яких розв'язком нерівності $(a^2 + 2a - 3)x \ge$ $\ge a + 3$ є будь-яке число?

221. Знайдіть усі значення c, для яких нерівність $(2c - 1)x < 1$ виконується для всіх від'ємних значень x.

222. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $ax^2 - 2(a - 1)x + a + 2 = 0$ має:
а) два різні корені; **б)** не більше одного кореня.

Вправи для повторення

223. Розв'яжіть систему рівнянь:
а) $\begin{cases} 7x + 12y = 41; \\ 8x + 3y = 4; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3(x + y) - 11y = 6,5; \\ 10x - 4(x - y) = 17. \end{cases}$

224. Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $x + 4y = 2$ і $2x - 3y = 15$.

225. Чи існують значення a, для яких пара чисел $(1; -2)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} ax - y = 4; \\ 6x + ay = 2? \end{cases}$

226. До магазину завезли 5 ящиків слив і 7 ящиків винограду, загальна маса яких дорівнює 89 кг. Знайдіть масу одного ящика слив і масу одного ящика винограду, якщо 1 ящик слив легший від 2 ящиків винограду на 6 кг.

227. Змішали 30%-й і 40%-й розчини сульфатної кислоти й одержали 200 л 34%-го розчину. Скільки літрів кожного з розчинів використали?

Поміркуйте

228. Вісім футболістів забили разом 36 м'ячів, до того ж кожний футболіст забив хоча б один м'яч, а один з них забив щонайменше 9 м'ячів. Доведіть, що деякі два футболісти забили м'ячів порівну.

7. Системи нерівностей з однією змінною

1. Поняття системи нерівностей з однією змінною та її розв'язку. Розглянемо задачу.

Задача. Наталя купила 10 однакових зошитів і заплатила за них більше, ніж 45 грн, а Тарас — 5 таких самих зошитів і заплатив за них менше, ніж 30 грн. Якою може бути ціна зошитів, які купували Наталя і Тарас?

Нехай ціна зошитів дорівнює x грн. Тоді 10 зошитів коштують $10x$ грн, що за умовою задачі більше ніж 45 грн, тобто $10x > 45$.

П'ять зошитів коштують $5x$ грн, що, за умовою задачі, менше ніж 30 грн, тобто $5x < 30$.

Щоб розв'язати задачу, потрібно знайти ті значення x, для яких буде правильною як нерівність $10x > 45$, так і нерівність $5x < 30$.

Якщо потрібно знайти усі ті значення змінної, які задовольняють кілька нерівностей, то кажуть, що потрібно *розв'язати систему нерівностей*. Для нашої задачі систему нерівностей записують так:

$$\begin{cases} 10x > 45; \\ 5x < 30. \end{cases}$$

Значення $x = 5$ є розв'язком обох нерівностей цієї системи, бо кожна з числових нерівностей $10 \cdot 5 > 45$ і $5 \cdot 5 < 30$ є правильною. Таке значення x називають *розв'язком системи нерівностей*.

Означення **Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, для якого є правильною кожна з нерівностей системи.**

Розв'язати систему нерівностей означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

Щоб розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} 10x > 45; \\ 5x < 30, \end{cases}$ поділимо обидві частини першої нерівності системи на 10, а другої — на 5. Одержимо: $\begin{cases} x > 4,5; \\ x < 6. \end{cases}$ На рисунку 20 позначено множини розв'язків нерівностей системи — проміжки $(4{,}5; +\infty)$ і $(-\infty; 6)$.

Рис. 20

Значення змінної, для яких є правильною і перша, і друга нерівності системи, — це спільні числа даних проміжків. Тому множиною розв'язків системи нерівностей є проміжок $(4{,}5; 6)$ — переріз проміжків $(4{,}5; +\infty)$ і $(-\infty; 6)$.

Узагалі, *множиною розв'язків будь-якої системи нерівностей є переріз множин розв'язків нерівностей, які утворюють систему*.

Повернімося до задачі. Оскільки множиною розв'язків складеної нами системи нерівностей є проміжок $(4{,}5; 6)$, то можна сказати, що ціна зошитів більша, ніж 4 грн 50 к., але менша, ніж 6 грн.

Множиною розв'язків системи нерівностей є, як правило, деякий проміжок. Приклади інших можливих множин розв'язків систем нерівностей наведено в таблиці.

Система нерівностей	*Розв'язки*	*Множина розв'язків*	*Коментар*
$\begin{cases} x < 1; \\ x > 1 \end{cases}$	Розв'язків немає	$\varnothing$	Не існує значень x, для яких є правильними обидві нерівності системи.
$\begin{cases} x \leq 1; \\ x \geq 1 \end{cases}$	$x = 1$	$\{1\}$	Лише значення $x = 1$ задовольняє обидві нерівності системи.
$\begin{cases} \lvert x \rvert > -1; \\ x^2 \geq 0 \end{cases}$	Будь-яке число	$(-\infty; +\infty)$	Обидві нерівності системи є правильними для будь-якого числа.

2. Розв'язування систем нерівностей з однією змінною. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} 2x + 3 < 11; \\ x + 6 \leq 5. \end{cases}$

● Розв’язуватимемо кожну з нерівностей системи:

$$\begin{cases}2x+3<11;\\ x+6\le 5;\end{cases}\quad \begin{cases}2x<11-3;\\ x\le 5-6;\end{cases}\quad \begin{cases}2x<8;\\ x\le -1;\end{cases}\quad \begin{cases}x<4;\\ x\le -1.\end{cases}$$

Позначимо на координатній прямій множину тих чисел, які задовольняють першу нерівність останньої системи, і множину чисел, які задовольняють другу нерівність.

Спільними розв’язками нерівностей є значення x, які задовольняють нерівність $x\le -1$.

Відповідь. $x\le -1$. (Множину розв’язків системи можна записати у вигляді проміжку $(-\infty; -1]$.) ●

Приклад 2. Розв’язати систему нерівностей $\begin{cases}3x+4<6;\\ 2x+7\ge 4.\end{cases}$

● $\begin{cases}3x<6-4;\\ 2x\ge 4-7;\end{cases}\quad \begin{cases}3x<2;\\ 2x\ge -3;\end{cases}\quad \begin{cases}x<\dfrac{2}{3};\\ x\ge -1,5.\end{cases}$

На координатній прямій позначимо множину чисел, які задовольняють нерівність $x<\dfrac{2}{3}$, і множину чисел, які задовольняють нерівність $x\ge -1,5$.

Спільними розв’язками нерівностей є значення x, що задовольняють нерівність $-1,5\le x<\dfrac{2}{3}$.

Відповідь. $-1,5\le x<\dfrac{2}{3}$, або по-іншому $\left[-1,5; \dfrac{2}{3}\right)$. ●

Приклад 3. Розв’язати систему нерівностей $\begin{cases}4x+1>9;\\ 8-x>11.\end{cases}$

● $\begin{cases}4x>9-1;\\ -x>11-8;\end{cases}\quad \begin{cases}4x>8;\\ -x>3;\end{cases}\quad \begin{cases}x>2;\\ x<-3.\end{cases}$

На координатній прямій позначимо множину чисел, які задовольняють нерівність $x > 2$, і множину чисел, які задовольняють нерівність $x < -3$.

Спільних розв'язків нерівності не мають.

Відповідь. Розв'язків немає. ●

Систему нерівностей з однією змінною можна розв'язувати за такою схемою:

1) розв'язуємо кожну нерівність системи;

2) зображуємо множину розв'язків кожної нерівності на одній координатній прямій;

3) знаходимо спільні розв'язки нерівностей і записуємо множину розв'язків системи.

Для тих, хто хоче знати більше

Приклад 4. Розв'язати нерівність $|x + 1| + |x - 2| < 6$.

● Знайдемо значення x, для яких значення виразів, які стоять під знаком модуля, дорівнюють нулю:

$$x + 1 = 0,\ x = -1; \qquad x - 2 = 0,\ x = 2.$$

Значення $x = -1$ та $x = 2$ розбивають координатну пряму на три проміжки.

Розв'яжемо нерівність на кожному із цих проміжків.

1) $x < -1$, або $x \in (-\infty; -1)$. Для цих значень x вираз $x + 1$ набуває від'ємних значень, а тому $|x + 1| = -x - 1$; вираз $x - 2$ теж набуває від'ємних значень, тому $|x - 2| = -x + 2$. Тоді нерівність $|x + 1| + |x - 2| < 6$ набуде вигляду $-x - 1 - x + 2 < 6$. Розв'яжемо одержану нерівність:

$$-2x + 1 < 6; \quad -2x < 5; \quad x > -2{,}5.$$

Урахувавши, що значення x мають задовольняти нерівність $x < -1$, матимемо систему нерівностей $\begin{cases} x < -1; \\ x > -2{,}5, \end{cases}$ множиною розв'язків якої є проміжок $(-2{,}5; -1)$.

2) $-1 \le x < 2$, або $x \in [-1; 2)$. Значення виразу $x + 1$ для цих значень x є невід'ємними, а значення виразу $x - 2$ — від'ємними. Тому $|x + 1| = x + 1$, $|x - 2| = -x + 2$. Задана нерівність на проміжку $[-1; 2)$ без знака модуля матиме вигляд: $x + 1 - x + 2 < 6$, звідки $0 \cdot x < 3$. Розв'язком останньої нерівності є будь-яке число. Тому всі числа із проміжку $[-1; 2)$ є розв'язками заданої нерівності.

3) $x \ge 2$, або $x \in [2; +\infty)$. На цьому проміжку вирази $x + 1$ та $x - 2$ набувають невід'ємних значень, тому $|x + 1| = x + 1$, $|x - 2| = x - 2$. Задана нерівність на проміжку $[2; +\infty)$ без знака модуля матиме вигляд: $x + 1 + x - 2 < 6$, звідки: $2x < 7$; $x < 3{,}5$.

У даному випадку значення x повинні задовольняти дві нерівності: $x \ge 2$ й $x < 3{,}5$, тобто систему $\begin{cases} x \ge 2; \\ x < 3{,}5, \end{cases}$ множиною розв'язків якої є проміжок $[2; 3{,}5)$.

Отже, множиною розв'язків заданої нерівності є об'єднання проміжків $(-2{,}5; -1)$, $[-1; 2)$ і $[2; 3{,}5)$, тобто проміжок $(-2{,}5; 3{,}5)$.

Відповідь. $(-2{,}5; 3{,}5)$. ●

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Для яких значень x має зміст вираз $\sqrt{2x+9} + \sqrt{5+x}$?

● Даний вираз має зміст для тих значень x, для яких кожний з виразів $2x + 9$ і $5 + x$ набуває невід'ємних значень. Отже, шукані значення x повинні задовольняти систему нерівностей $\begin{cases} 2x+9 \ge 0; \\ 5+x \ge 0. \end{cases}$

Розв'яжемо одержану систему:

$$\begin{cases} 2x+9 \ge 0; \\ 5+x \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x \ge -9; \\ x \ge -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge -4{,}5; \\ x \ge -5. \end{cases}$$

Спільними розв'язками нерівностей є значення x, які задовольняють нерівність $x \ge -4{,}5$.

Відповідь. $x \ge -4{,}5$. ●

Вправа 2. Розв’язати нерівність $\dfrac{x-2}{x+1} > 0.$

● Дріб додатний лише тоді, коли його чисельник і знаменник додатні або коли вони обидва від’ємні. Тому розв’язками даної нерівності є значення x, для яких:

$$\begin{cases} x-2>0; \\ x+1>0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x-2<0; \\ x+1<0. \end{cases}$$

Розв’язками першої системи нерівностей є значення x, які задовольняють нерівність $x > 2$, а другої — нерівність $x < -1$.

Відповідь. $x < -1$ або $x > 2$. (Множину розв’язків можна записати у вигляді об’єднання проміжків: $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.) ●

Зауваження. Розв’язування нерівності $(x-2)(x+1) > 0$ також зводиться до розв’язування двох систем нерівностей, наведених у попередньому прикладі. Тому множиною розв’язків цієї нерівності теж є $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Вправа 3. Розв’язати подвійну нерівність $4 < 3 - 2x \le 9$.

● Дану подвійну нерівність можна записати у вигляді системи

$$\begin{cases} 3-2x>4; \\ 3-2x \le 9. \end{cases}$$

Розв’яжемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 3-2x>4; \\ 3-2x \le 9; \end{cases} \quad \begin{cases} -2x>4-3; \\ -2x \le 9-3; \end{cases} \quad \begin{cases} -2x>1; \\ -2x \le 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x<-0,5; \\ x \ge -3. \end{cases}$$

Відповідь. $-3 \le x < -0,5$, або по-іншому $[-3; -0,5)$. ●

Зауважимо, що подвійну нерівність у вправі 3 можна розв’язати й на основі властивостей рівносильності нерівностей (див. пункт 5, вправа 2).

Усно

229. Які з чисел –4; 0; 5 є розв’язками системи нерівностей $\begin{cases} 3x \le 0; \\ x+7>0? \end{cases}$

230. Чи правильно записана множина розв'язків кожної із систем нерівностей, поданих у таблиці?

Система нерівностей	*Зображення множин розв'язків нерівностей системи*	*Множина розв'язків*
$\begin{cases} x > 3; \\ x > 4 \end{cases}$		(4; +∞)
$\begin{cases} x \le 4; \\ x \le 6 \end{cases}$		(–∞; 6]
$\begin{cases} x \le 1; \\ x > -4 \end{cases}$		(–4; 1]
$\begin{cases} x \le 0; \\ x > 3 \end{cases}$		∅

231. Який із проміжків є множиною розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x < 1; \\ x < 4? \end{cases}$

а) (1; 4); **б)** (–∞; 4); **в)** (–∞; 1); **г)** (4; +∞).

Рівень А

232. Які з чисел –3; 0; 5; 10 є розв'язками системи нерівностей $\begin{cases} 4x - 11 > 1; \\ 7 - 3x \le 8? \end{cases}$

233. Чи є число –2 розв'язком системи нерівностей:

а) $\begin{cases} 3x - 1 < 0; \\ 5x + 9 > 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 4 - 3x \ge 0; \\ 6x - 11 < 3? \end{cases}$

Розв'яжіть систему нерівностей:

234. **а)** $\begin{cases} x \ge 3; \\ x > 5; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x < -2; \\ x < 3; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x < 4; \\ x \ge -1; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x > 4; \\ x < -3. \end{cases}$

235. **а)** $\begin{cases} x \le -4; \\ x < 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x \ge 5; \\ x < -1; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x \ge -2; \\ x \ge 3; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x < 3; \\ x \ge -1. \end{cases}$

236. **а)** $\begin{cases} x - 1 \ge 0; \\ 3x > 12; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} -2x < 8; \\ x - 2 > 0; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 4x \le 20; \\ 2x + 4 > 0; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} -4x \ge 10; \\ 3x - 15 > 0. \end{cases}$

237. а) $\begin{cases} x+7<0; \\ 5x\le 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-4\ge 0; \\ -x>2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x+6\le 0; \\ 5-2x>0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 9-4x<0; \\ 3x+3\ge 0. \end{cases}$

238. а) $\begin{cases} 4x+6\le 7x; \\ x-8>10-5x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3(y-1)>2y-7; \\ 2-y\ge 3y-10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 1{,}1x-4<0{,}6x-3; \\ 4-9x<1-2x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 7+2x\ge 21-5x; \\ 3x+7{,}7\le 1+4x. \end{cases}$

239. а) $\begin{cases} 14-6x>3x+5; \\ 11x-3\le 2x+15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x-5\le x; \\ 2(5x+7)\ge 2x+13; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3-7y>10y+3; \\ 5y+1{,}2\ge 6-3y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2{,}1x-2>1{,}6x; \\ 3(x+1)\le 4x+2. \end{cases}$

240. Розв'яжіть систему нерівностей і вкажіть найбільше ціле число, яке є її розв'язком:

а) $\begin{cases} 3-4y<19; \\ 6y\le 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5+4x>7; \\ 3<23-5x. \end{cases}$

241. Знайдіть натуральні розв'язки системи нерівностей:

а) $\begin{cases} 20-4x\ge -12; \\ 7x+9>30; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 15-x>12; \\ 5x+12\le 14. \end{cases}$

242. Маса 100 однакових зернин не перевищує 80 г, а маса 50 таких самих зернин не менша ніж 35 г. Якою може бути маса однієї зернини?

243. Автомобіль рухався з постійною швидкістю і за 1,5 год проїхав більше ніж 105 км, а за 2 год — менше ніж 150 км. Якою може бути швидкість автомобіля?

Рівень Б

Розв'яжіть систему нерівностей:

244. а) $\begin{cases} 5(3-x)+4(2x-6)>2x-7; \\ 11x-17(1+2x)<11-14x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x-9-3(4x-12)\le 2x+17; \\ 14(x-1)-19x+31>1-2x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3{,}5-(y-1{,}5)\le 15-4y; \\ 0{,}7(3y-2)+0{,}3(y+4)>7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 9(x+2)-7{,}2(2x+1)\ge 1{,}8+0{,}9x; \\ 10x-6{,}5(x-2)<1{,}5x+1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{2}{7}x + 11 < 3x - 8; \\ 12 + 2,5x > 3,3x + 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \frac{1}{3}(2 - 3x) + 0,5 > 3; \\ 1,6 - \frac{2}{3}(6x - 1) < 0,6. \end{cases}$

245. а) $\begin{cases} 11x - 5(2 + 3x) > x - 8; \\ 7(1 - 2x) + 10x < 1 - 4x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2(x - 3) - 3(2x - 1) \le 2x + 4; \\ 7 - 5(x + 1) + 9x > 4 - 3x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 11 - 3,2(x - 0,5) < 2,8x + 3; \\ 4,5x - 3(x - 1,5) < 8 + 0,8x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{2}{7} + 2\left(x - \frac{3}{7}\right) > 1\frac{3}{7}; \\ \frac{2}{3}x \le 3,6. \end{cases}$

246. а) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x}{6} < 5; \\ 3 - \frac{x}{4} \ge 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y - \frac{2y - 1}{3} < 4; \\ \frac{y - 1}{5} \le 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{4x - 1}{3} - x \le 4; \\ 2x - \frac{x}{3} \ge 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2y - \frac{y + 5}{3} < 6; \\ \frac{y}{2} - \frac{y}{8} \ge 2. \end{cases}$

247. а) $\begin{cases} \frac{x - 3}{3} - \frac{x - 2}{2} < 1; \\ 4 - \frac{x}{2} \ge 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5 - \frac{3y - 1}{4} \ge 1; \\ \frac{6y - 1}{8} < 1. \end{cases}$

248. а) $\begin{cases} (x - 1)^2 \ge x^2; \\ (x - 2)(x + 3) < x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (2y - 1)(2y + 1) \le 2y + 4y^2; \\ y(y - 2) - (y + 4)(y - 1) \ge 1. \end{cases}$

249. а) $\begin{cases} (x - 3)(x + 3) < x^2 - 3x; \\ (x - 1)(x - 2) < x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (2x + 1)^2 < 3 + 4x^2; \\ x(x - 2) \ge (x + 1)(x + 3). \end{cases}$

250. Знайдіть суму та добуток усіх цілих розв’язків системи нерівностей $\begin{cases} -0,36x \le 0,8; \\ 2x^2 - 5 < x(2x - 1). \end{cases}$

251. Скільки цілих розв’язків має система нерівностей $\begin{cases} \frac{1}{5}x \le -\frac{3}{25}; \\ x(x - 3) \le x^2 + 30? \end{cases}$

Розв'яжіть подвійну нерівність, перейшовши до системи нерівностей:

252. **а)** $-5 \le 3x - 2 < 10$; **б)** $1{,}2 \le 2 - 4x \le 2{,}8$.

253. **а)** $-2 < 5x + 3 \le 8$; **б)** $4{,}4 < 1 - 2x < 4{,}8$.

254. Для яких значень аргументу значення функції $y = \dfrac{2x+1}{5}$ належать проміжку $[-3; 1]$?

255. Для яких значень аргументу значення функції $y = \dfrac{1-4x}{3}$ більші від -3, але менші від 7?

Розв'яжіть нерівність:

256. **а)** $(x - 3)(x + 1) < 0$; **б)** $(x - 1)(2x + 5) \ge 0$;

в) $\dfrac{x+2}{x-3} > 0$; **г)** $\dfrac{1-2x}{4-2x} \le 0$.

257. **а)** $(x - 2)(2x - 5) < 0$; **б)** $\dfrac{x+3}{x-1} \ge 0$.

258. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt{2x+10} - \sqrt{9-3x}$; **б)** $y = \sqrt{4-x} + \dfrac{1}{\sqrt{5-4x}}$.

259. Для яких значень x має зміст вираз:

а) $\sqrt{3-5x} + \sqrt{x+9}$; **б)** $\dfrac{1}{\sqrt{x-8}} - \sqrt{3x-6}$?

Розв'яжіть систему нерівностей:

260. **а)** $\begin{cases} x \le 5; \\ x + 2 > 0; \\ 2x < 11; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x - 3 > 1; \\ -11x < 22; \\ 3x - 2 < 0. \end{cases}$

261. **а)** $\begin{cases} x > -3; \\ x - 1 \le 0; \\ -2x < 4; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x - 4 < 0; \\ 4x \le 10; \\ -3x > -3. \end{cases}$

262. Катер пройшов річкою шлях від пристані A до пристані B і повернувся назад. Його швидкість у стоячій воді дорівнює 18 км/год, а швидкість течії річки — 3 км/год. Відомо, що час руху катера більший ніж 1,5 год, але менший, ніж 2 год. Якою може бути відстань між пристанями?

263. Поїзд рухається з деякою швидкістю. Якщо він збільшить швидкість на 10 км/год, то за 4 год пройде менше, ніж 260 км. Якщо ж він зменшить швидкість на 5 км/год, то за 5 год пройде більше ніж 240 км. Якою може бути швидкість поїзда?

Рівень В

264. Знайдіть усі значення a, для яких система нерівностей $\begin{cases} x < 5; \\ x - 1 \geq 2a: \end{cases}$

а) не має розв'язків; **б)** має 4 цілі розв'язки.

265. Знайдіть усі значення a, для яких множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x > 3a - 1; \\ x > 3 \end{cases}$ є підмножиною проміжку $(5; +\infty)$.

266. Розв'яжіть систему нерівностей з параметром a:

а) $\begin{cases} x > -1; \\ x < a + 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x + a \leq 4; \\ x - 3 \leq 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + a < 5; \\ 3x < 3a; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 4x + a \geq 1; \\ 5x - a < 8. \end{cases}$

267. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $x^2 - 2(a - 1)x + a^2 - 2a = 0$ має корені, один з яких менший від 0, а інший — більший від 1.

268. Розв'яжіть нерівність:

а) $3x + |x - 1| \leq 7$; **б)** $|6 - 3x| - (3x - 5) > 1$;

в) $|x| + |4x - 1| < 3$; **г)** $|2x + 5| - |3x - 6| > 4$.

269. Змішали 2 кг 30%-го розчину сульфатної кислоти із 3 кг другого розчину цієї ж кислоти й одержали розчин, відсотковий уміст у якому сульфатної кислоти більший від 36%, але менший від 42%. Скільки відсотків сульфатної кислоти містив другий розчин?

Вправи для повторення

270. Знайдіть значення функції $y = 4 - 2x^2$, якщо $x = 0$; $x = -3$; $x = 3$. Чи проходить графік цієї функції через точку $A(4; -28)$?

271. Побудуйте графік функції:

а) $y = 2x - 2$; **б)** $y = -\dfrac{3}{x}$.

272. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = 7x - 12$ та $y = x^2$.

273. Для яких значень k графіки функцій $y = kx + 4$ й $y = 0{,}5x - 2$ перетинаються в точці, що лежить на осі абсцис?

274. Знайдіть три послідовні натуральні числа, якщо відомо, що сума квадратів найменшого і найбільшого чисел у 5 разів більша від середнього числа.

Поміркуйте

275. Чи можна в таблиці розміру 9 × 9 розставити знаки «+» так, щоб у кожному рядку їх кількість була парною, а в кожному стовпці — непарною?

Цікаво знати

Як відомо, виникнення чисел обумовлене потребами практичної діяльності людини. Застосування ж чисел вимагало вміння їх порівнювати. Робити це люди навчилися багато тисячоліть тому.

Ще в «Началах» Евкліда суто геометрично було обґрунтовано нерівність $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, де a і b розглядали як довжини відрізків.

Розглянемо геометричну ілюстрацію цієї нерівності (див. рис. 21).

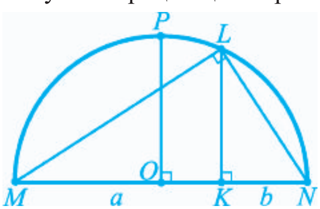


Рис. 21

На відрізку MN завдовжки $a + b$ як на діаметрі побудовано півколо; O — його центр; $MK = a$, $KN = b$; PO і LK — перпендикуляри до прямої MN, де P і L — точки півкола. Трикутник MLN — прямокутний ($\angle L = 90°$), LK — його висота, тому $LK = \sqrt{MK \cdot KN} = \sqrt{ab}$. Оскільки відрізок PO — радіус півкола, то $PO = \frac{1}{2}MN = \frac{a+b}{2}$. Урахувавши, що $PO \geq LK$, маємо: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Цю доволі відому нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним двох додатних чисел, яку можна поширити на випадок більшої кількості чисел, називають ще *нерівністю Коші*.

Огюстен Луї Коші — відомий французький математик. Він написав понад 800 праць з арифметики і теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, теоретичної та небесної механіки, математичної фізики. Були періоди, коли Коші щотижня подавав у Паризьку Академію Наук нову математичну працю. Швидкість, з якою Коші переходив від одного предмета до іншого, дозволила йому прокласти в математиці чимало нових шляхів. Багато теорем, означень, ознак носять його ім’я.

Огюстен Луї Коші
(1789 – 1857)

Наведемо ще дві відомі нерівності, які, як і нерівність Коші, використовують для доведення багатьох математичних тверджень, зокрема, для доведення інших нерівностей.

Нерівність Коші — Буняковського:

$$\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2,$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — довільні дійсні числа.

Віктор Якович Буняковський — відомий український математик. Народився в місті Бар на Вінниччині, навчався в Парижі, де в той час викладали такі видатні вчені, як Лаплас, Фур’є, Пуассон, Коші, Ампер та інші. Там же в 1824 році блискуче захистив докторську дисертацію й отримав ступінь доктора математичних наук Паризького університету. У 1826 році Віктор Буняковський переїхав до Петербурга, де майже 40 років викладав математику й механіку в цивільних і військових навчальних закладах, зокрема — у Петербурзькому університеті. Упродовж 25 років (1864 – 1889) був віце-президентом Петербурзької Академії Наук.

Віктор Якович Буняковський
(1804 – 1889)

Нерівність Коші — Буняковського не єдиний значний здобуток українського математика. Віктор Буняковський написав понад 100 наукових праць з різних розділів математики, зокрема з теорії чисел, математичного аналізу, теорії ймовірностей, статистики. Зважаючи на вагомий внесок у розвиток математики, він був обраний почесним членом усіх університетів царської Росії. Петербурзька Академія наук удостоювала премії імені Буняковського за найкращі праці з математики.

Нерівність Бернуллі:

$$(1+x)^n \geq 1+nx\,,$$

де $x \geq -1$, n — натуральне число.

Якоб Бернуллі — швейцарський математик, працював професором Базельського університету. Основні його праці стосуються математичного аналізу, та особливу увагу вчений приділяв теорії ймовірностей, чимало теорем якої названо його ім’ям. Бернуллі започаткував один з розділів прикладної математики — математичну статистику.

Якоб Бернуллі
(1654 – 1705)

Запитання і вправи для повторення § 1

1. У якому випадку число a більше від числа b; менше від числа b?
2. Як розташовані на координатній прямій точки, що відповідають числам a і b, якщо $a < b$; $a > b$?
3. Які нерівності називають строгими; нестрогими?
4. Сформулюйте властивості числових нерівностей. Доведіть їх.
5. Сформулюйте властивість додавання числових нерівностей. Доведіть її.
6. Сформулюйте властивість множення числових нерівностей. Доведіть її.
7. Сформулюйте наслідок із властивості множення числових нерівностей.
8. Наведіть приклади числових проміжків.
9. Що називають об’єднанням двох множин?

10. Що називають перерізом двох множин?
11. Наведіть приклади нерівностей з однією змінною.
12. Що називають розв'язком нерівності з однією змінною? Що означає розв'язати таку нерівність?
13. Які нерівності називають рівносильними?
14. Сформулюйте властивості рівносильності нерівностей.
15. У якому випадку нерівності зі змінною утворюють систему нерівностей?
16. Що називають розв'язком системи нерівностей з однією змінною?
17. Назвіть кроки розв'язування системи нерівностей з однією змінною.

276. Порівняйте числа a і c, якщо:
а) $a - c = 1{,}4$; **б)** $c - a = -2$; **в)** $a - 3 > c - 3$; **г)** $0{,}1a < 0{,}1c$.

277. Порівняйте числа:
а) $\frac{2}{7}$ і $\frac{1}{3}$; **б)** $2\frac{3}{4}$ і $2\frac{19}{25}$; **в)** $-\frac{3}{8}$ і $-\frac{4}{9}$; **г)** $\frac{5}{6}$ і $0{,}8$.

Доведіть нерівність:

278. **а)** $(4a+3)^2 \geq 48a$; **б)** $4(b+2) < (b+3)^2 - 2b$;
в) $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b+c)$; **г)** $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$;
д) $\frac{m^2+n^2}{2} \geq m+n-1$; **е)** $\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} \geq 2$.

279*. **а)** $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) \geq 4$, де $a > 0$, $b > 0$;
б) $\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) \geq 8$, де $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$;
в) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$; **г)** $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$.

280. Виділивши із тричлена квадрат двочлена, доведіть нерівність:
а) $x^2 + 4x + 5 > 0$; **б)** $a^2 - 10a + 30 > 0$;
в) $x^2 + 2xy + 2y^2 \geq 0$; **г)** $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.

281*. Два катери, що мають ту саму швидкість у стоячій воді, проходять двома різними річками однакову відстань за течією річки і повертаються у ті пункти, з яких вийшли. У якій з річок на цей рух потрібно більше часу: у річці зі швидкою течією чи в річці з повільною течією?

282. Відомо, що $m > 2$. Доведіть, що:

а) $3m + 4 > 10$; **б)** $1,5m - 1 > 0$; **в)** $5 - 3m < -1$.

283. Відомо, що $2 < c < 4$. Оцініть значення виразу:

а) $2c - 5$; **б)** $-2,5c + 1$; **в)** $\frac{4}{c}$.

284. Оцініть значення виразу:

а) $a - 2b$, якщо $-3 < a < -2,5$; $1,5 < b < 2$;

б) $ab + 10b^2$, якщо $1 < a < 2$; $0,3 < b < 0,4$.

285. Оцініть довжину l середньої лінії трапеції з основами a і b, якщо $7,4 < a < 7,5$ і $4,8 < b < 4,9$.

286. Зобразіть на координатній прямій проміжок:

а) $[-1,5; 2)$; **б)** $[3; +\infty)$; **в)** $(-\infty; -7]$; **г)** $(2; 7)$.

Назвіть, якщо можливо, найбільше і найменше числа, які належать заданому проміжку.

287. Знайдіть об'єднання та переріз проміжків:

а) $[-2; 1]$ і $(-1; 3)$; **б)** $[2; 4)$ і $[4; 5)$;

в) $(-\infty; 1,5)$ і $[-1; 0]$; **г)** $(-\infty; 1]$ і $(-3; +\infty)$.

288. Знайдіть об'єднання та переріз множин A і B, якщо:

а) $A = \{-2; 0; 2\}$, $B = \{0; 1; 2\}$;

б) $A = \{2; 3; 5; 7; 11\}$, $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.

289. Чи є число 1,999 розв'язком нерівності $x < 2$? Знайдіть яке-небудь число, більше від 1,999, що задовольняє дану нерівність.

Розв'яжіть нерівність:

290. **а)** $x - 3 < 0$; **б)** $4x \geq 30$; **в)** $-5x > 2$; **г)** $3 + 2x \leq 1$.

291. **а)** $11(x+7) - 14x < 37 + 13x$; **б)** $0,3x - 1,1(4 - 2x) \geq 7,5x + 1,6$;

в) $\frac{1}{3}(1 - 9x) - \frac{2}{5}(4 - 10x) < 4\frac{1}{3} + 2x$; **г)** $(y-5)(y+3) - y^2 > 3y + 17$.

292. **а)** $\frac{2y-1}{2} + \frac{5y}{6} - \frac{3y-1}{3} < 1$; **б)** $\frac{2x+9}{5} - \frac{9x}{10} > x$;

в) $\frac{11-3x}{3} + \frac{8+3x}{2} \geq 3$; **г)** $\frac{1+2y}{4} - 1 < \frac{4y-5}{8}$.

293. Знайдіть усі натуральні числа, які задовольняють нерівність:

а) $8 - 3(x+1) > -10$; **б)** $7 - 3y \geq 2y - 23$.

294. Для яких значень x значення дробу $\frac{12-5x}{3}$ більше від відповідного значення дробу $\frac{4x+5}{2}$?

295. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння має від'ємний корінь:

а) $5x - 2a = 0$; **б)** $x - 7 = 3a$;

в) $x + 9 = 4a + 3$; **г)** $1 - 2x = 3a + 5$.

296. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $x^2 - 4x + 2a = 0$:

а) має два різні корені; **б)** не має коренів.

Розв'яжіть нерівність:

297. **а)** $|x - 3| < 18$; **б)** $|2x + 7| \geq 9$;

в) $1 - |x + 2| < 2(|x + 2| + 5)$; **г)** $|1 - x| + |x| \leq -2$.

298*. **а)** $|x + 2| + |x - 2| < 6$; **б)** $|4x + 2| - |x - 6| > 1$.

299. З Києва до Рівного виїхав автобус і рухається зі швидкістю 70 км/год, а через годину вслід за ним виїхав автомобіль. З якою швидкістю повинен їхати автомобіль, щоб наздогнати автобус до його прибуття у Рівне, якщо відстань між цими містами дорівнює 320 км?

Розв'яжіть систему нерівностей:

300. **а)** $\begin{cases} 3x+4>x+2; \\ -4x<1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5-2x\leq 9; \\ 10-3x>7-x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2(1-x)+3>0; \\ 3x-2(x+7)<9x; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 3x^2+5>0; \\ 2,5x-0,15\leq 0,6x+0,8; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x+2,4<\dfrac{x-11}{5}; \\ 7x+1>\dfrac{2-21x}{2}; \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} \dfrac{x}{7}+1<\dfrac{2x}{3}+4; \\ 1,4+\dfrac{x}{5}\leq x; \end{cases}$

є) $\begin{cases} 5(x-3)(x+3)\geq 9x+5x^2; \\ 7(x+3)<6x+14; \end{cases}$ **ж)** $\begin{cases} (2x-1)^2+5>4x^2+3x; \\ 0,6(x-5)+1,4x<6x-1. \end{cases}$

301. **а)** $\begin{cases} 3x>9; \\ -2x<0; \\ x+5>0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x-8<0; \\ 5-x\geq 1; \\ 3x+5>2. \end{cases}$

302. Знайдіть найменше ціле число, яке є розв’язком системи нерівностей
$$\begin{cases} 3(2y-1) > y+9; \\ 2{,}9-(y+4) < 0. \end{cases}$$

303. Розв’яжіть подвійну нерівність:

а) $-3 \le 2x+5 < 1$;

б) $3 < 2-x < 9$;

в) $-1 < \frac{3+2y}{5} \le 3$;

г) $2 < \frac{1-x}{7} < 3$.

304. Розв’яжіть нерівність:

а) $(x-2)(2x-3) \le 0$;

б) $(3-x)(4-2x) > 0$;

в) $\frac{6+2y}{y} < 0$;

г) $\frac{1-x}{7-2x} \ge 0$.

305. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt{5x-3}$;

б) $y = \frac{1}{\sqrt{12-4x}} - \sqrt{2x+6}$.

306. Три ділянки прямокутної форми мають однакову довжину, яка дорівнює 12 м. Ширина першої ділянки на 1,5 м менша від ширини другої й на 0,5 м більша від ширини третьої. Якою може бути ширина першої ділянки, якщо площа другої ділянки більша від 90 м^2, а площа третьої — менша від 72 м^2?

Завдання для самоперевірки № 1

Початковий рівень

1. Відомо, що $a < b$. Якому з чисел може дорівнювати різниця $a - b$:

а) 6; **б)** 0,03; **в)** –1,2; **г)** 0?

2. Відомо, що $x > y$. Укажіть правильні нерівності:

а) $x - 2 > y - 2$; **б)** $-x > -y$; **в)** $5x < 5y$; **г)** $2x + 1 > 2y + 1$.

3. Розв'язком якої нерівності є число –3?

а) $5x + 1 > 0$; **б)** $-x + 7 \geq 0$; **в)** $-2x - 1 < 0$; **г)** $x + 8 \leq 0$.

4. Укажіть проміжок, зображений на рисунку 22.

Рис. 22

а) $(-\infty; 3)$; **б)** $(-3; +\infty)$; **в)** $[3; +\infty)$; **г)** $(-\infty; -3]$.

5. Множиною розв'язків нерівності $x + 2 < 0$ є ...

а) $(-\infty; -2]$; **б)** $(-\infty; -2)$; **в)** $(-2; +\infty)$; **г)** $[-2; +\infty)$.

6. Множиною розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x - 1 \leq 1; \\ 2x > -2 \end{cases}$ є ...

а) $(-\infty; -1)$; **б)** $[-1; 2]$; **в)** $(-1; 2]$; **г)** $[2; +\infty)$.

Середній рівень

7. Установіть відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1) $0{,}3x < 1{,}2$;
2) $-3x < -12$;
3) $3 - x \geq 0$;
4) $2x + 1 \leq 9$.

А) $(-\infty; 3]$;
Б) $[3; +\infty)$;
В) $(-\infty; 4]$;
Г) $(-\infty; 4)$;
Д) $(4; +\infty)$.

8. Порівняйте числа:

а) $\frac{3}{8}$ і $\frac{1}{3}$; **б)** $-\frac{1}{2}$ і $-\frac{5}{9}$.

9. Відомо, що $4 \le x \le 5$; $2 \le y \le 3$. Оцініть значення виразу:

а) $x + y$; **б)** $2x - y$.

10. Знайдіть об'єднання та переріз проміжків:

а) $(4; 7]$ і $[-1; 5)$; **б)** $(-\infty; 1]$ і $(0; +\infty)$.

11. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt{2x - 10}$; **б)** $y = \sqrt{2{,}5 - x}$.

12. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 6y > -24; \\ 2y + 3 < 8. \end{cases}$

Достатній рівень

13. Доведіть нерівність:

а) $(3m - 1)(3m + 1) > 9m^2 - 7$; **б)** $x^2 + 8x + 19 > 0$.

14. Вимірявши довжину a і ширину b прямокутника (у сантиметрах), знайшли, що $2{,}1 < a < 2{,}2$ і $1{,}7 < b < 1{,}8$. Оцініть:

а) периметр прямокутника; **б)** площу прямокутника.

15. Розв'яжіть нерівність:

а) $(2x + 1)^2 \ge (x - 1)(4x + 3)$; **б)** $\frac{11 - 3x}{2} + x < 0$.

16. Розв'яжіть подвійну нерівність $-1 < \frac{4x - 3}{2} \le 0$.

17. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} 3 + 3{,}2x \ge 7 - 1{,}8x; \\ 5 + 6x \ge 4{,}5 + 4x; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \frac{y}{2} \le 5; \\ 2y - \frac{y + 1}{3} > 3. \end{cases}$

18. Моторний човен пройшов деякий шлях за течією річки і повернувся в початковий пункт. Швидкість течії річки дорівнює 3 км/год, а швидкість човна у стоячій воді — 15 км/год. На яку відстань від початкового пункту відплив човен, якщо вся поїздка тривала більше ніж 3 год, але менше ніж 4 год?

Високий рівень

19. Доведіть нерівність:

а) $2a^4 + 1 > 2a^2$; **б)** $a^2 + 2b^2 + 3 \geq 2a + 4b$.

20. Знаючи, що $0{,}6 \leq a \leq 0{,}7$; $0{,}4 \leq b \leq 0{,}5$, оцініть значення виразу:

а) $a^2 - b^2$; **б)** $\dfrac{a}{b}$.

21. Розв’яжіть нерівність:

а) $|3x - 0{,}5| \leq 3{,}5$; **б)** $|2x + 1| > 1$.

22. Знайдіть цілі розв’язки системи нерівностей

$$\begin{cases} 0{,}2(5x-1)+\dfrac{1}{3}(3x+1) < x+5{,}8; \\ 8x-7-\dfrac{1}{6}(6x-2) > x. \end{cases}$$

23. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt{x+3} - \dfrac{x}{\sqrt{4-3x}}$; **б)** $y = \dfrac{\sqrt{3x+6}}{x-2}$.

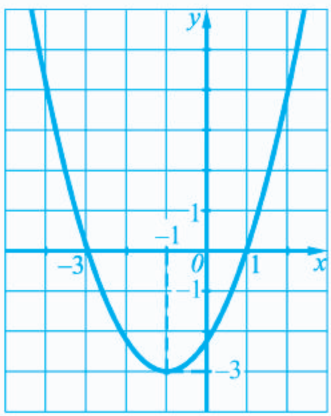
24. Два туристи пройшли шлях від пункту A до пункту B. Перший турист половину шляху йшов зі швидкістю 4 км/год, а другу половину — зі швидкістю 5 км/год. Другий же турист першу половину шляху йшов зі швидкістю 6 км/год, а другу половину — зі швидкістю 3 км/год. Хто з них швидше подолав шлях між пунктами?

§ 2.

КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

Моделюючи реальні процеси за допомогою функцій, доволі часто приходять до так званої квадратичної функції, частковим випадком якої є вже вивчена функція $y = x^2$.

У цьому параграфі ми з'ясуємо: що таке квадратична функція, які її властивості та графік; що таке квадратна нерівність, як розв'язувати квадратні нерівності, виходячи із властивостей квадратичної функції.



8. Функція. Область визначення та область значень функції

У сьомому класі ми почали вивчати одне з найважливіших понять математики — поняття функції. Нагадаємо й уточнимо основні відомості, які стосуються цього поняття.

1. Функції та способи їх задання. Графік функції. Нагадаємо, що залежність змінної y від змінної x називають функцією, якщо *кожному* значенню змінної x із деякої множини відповідає *одне* певне значення змінної y. За таких умов змінну x називають *незалежною змінною*, або *аргументом*, а змінну y — *залежною змінною*, або *функцією* (від аргументу x).

Якщо змінна y є функцією від аргументу x, то записують: $y = f(x)$ (читають: «y дорівнює f від x»). Значення функції для $x = x_0$ позначають через $f(x_0)$. Так, якщо функцію задано формулою $y = 2x - 3$, то можна записати: $f(x) = 2x - 3$. Тоді, наприклад, $f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, $f(2{,}5) = 2 \cdot 2{,}5 - 3 = 2$.

Щоб задати функцію, достатньо вказати, як для кожного значення аргументу знайти відповідне значення функції. Крім формул, ми задавали функції за допомогою таблиць, графіків.

Якщо функцію $y = f(x)$ задано таблицею

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	6	9	9	6	3

то в першому рядку вказано значення аргументу, а в другому — відповідні значення функції. Тоді, наприклад, $f(1) = 3$, $f(4) = 9$.

Пригадаймо: *графіком* функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції. Точка $M(x_0; y_0)$ належатиме графіку функції $y = f(x)$ тоді й лише тоді, коли значення функції для $x = x_0$ дорівнює y_0: $f(x_0) = y_0$ (див. рис. 23).

Задати функцію *графічно* означає задати її графік.

Функцію можна задати й *словесним описом* способу знаходження її значень за відомими значеннями аргументу. Наприклад, кожному натуральному числу поставимо у відповідність квадрат цього числа. Цим ми словесно задали функцію f, для якої $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$ і т. д.

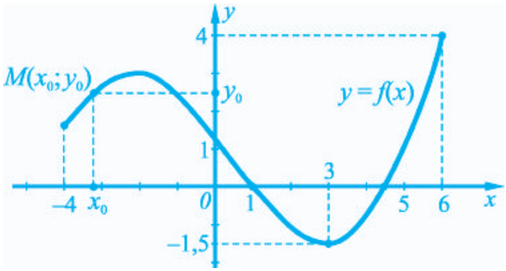


Рис. 23

2. Область визначення та область значень функції. Множину всіх значень, яких набуває незалежна змінна (аргумент), називають *областю визначення* функції; множину всіх значень, яких набуває залежна змінна (функція), називають *областю значень* функції.

Область визначення функції $y = f(x)$ позначають $D(f)$ або $D(y)$, а область значень — $E(f)$ або $E(y)$.

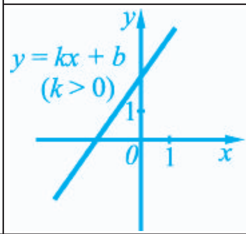
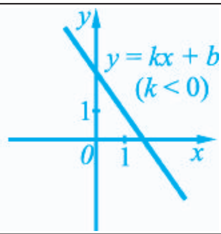
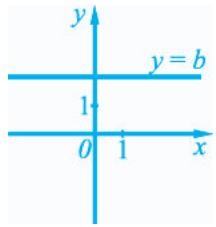
Так, областю визначення функції $y = f(x)$, графік якої зображено на рисунку 23, є проміжок $[-4; 6]$, тобто $D(f) = [-4; 6]$. Найменше значення цієї функції дорівнює $-1{,}5$, а найбільше — 4, до того ж, функція набуває усіх значень від $-1{,}5$ до 4 включно. Тому областю її значень є проміжок $[-1{,}5; 4]$, тобто $E(f) = [-1{,}5; 4]$.

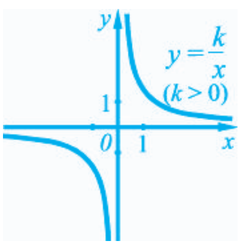
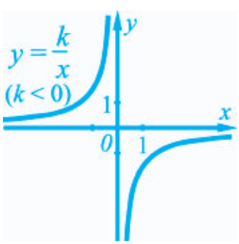
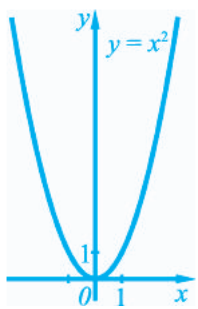
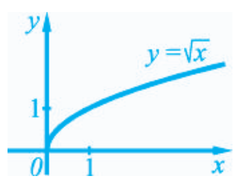
Для функції, яку ми задали таблицею, маємо: $D(y) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $E(y) = \{3; 6; 9\}$.

Нехай функцію задано формулою так: $y = 2x$, де $-1 \le x \le 3$. Уточнення $-1 \le x \le 3$ означає, що областю визначення функції є проміжок $[-1; 3]$, тобто $D(y) = [-1; 3]$.

Якщо функцію задано формулою $y = f(x)$ і не вказано, яких значень може набувати аргумент, то вважають, що областю визначення такої функції є множина всіх тих дійсних чисел, для яких вираз $f(x)$ має зміст. Розглянемо, наприклад, функцію $y = \dfrac{2}{x-3}$. Вираз $\dfrac{2}{x-3}$ має зміст для всіх значень x, крім $x = 3$. Тому областю визначення цієї функції є множина всіх дійсних чисел, крім $x = 3$, тобто $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Області визначення та області значень функцій, які ми вивчали у 7 і 8 класах, а також їхні графіки наведено в таблицях.

Функція	$y = kx + b$	
	$k \neq 0$	$k = 0$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Область значень	$(-\infty; +\infty)$	$\{b\}$
Графік	пряма	пряма
	 	

Функція	$y = \frac{k}{x},\ k \neq 0$	$y = x^2$	$y = \sqrt{x}$
Область визначення	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Область значень	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Графік	гіпербола	парабола	вітка параболи
	 		

3. Задання функції кількома формулами. Існують функції, які на окремих частинах області визначення задають різними формулами. Наприклад, якщо функцію $y = f(x)$ задано у вигляді

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \text{ якщо } x \le -1; \\ x^2, \quad \text{якщо } -1 < x \le 2; \\ 4, \quad \text{якщо } x > 2, \end{cases}$$

то це означає, що для $x \le -1$ значення функції потрібно знаходити за формулою $f(x) = 2x + 3$, для $-1 < x \le 2$ — за формулою $f(x) = x^2$, а для $x > 2$ — за формулою $f(x) = 4$.

Так, $f(-2) = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$; $f(1) = 1^2 = 1$; $f(5) = 4$.

Щоб побудувати графік такої функції, достатньо на проміжку $(-\infty; -1]$ побудувати графік функції $y = 2x + 3$, на проміжку $(-1; 2]$ — графік функції $y = x^2$ і на проміжку $(2; +\infty)$ — графік функції $y = 4$ (див. рис. 24).

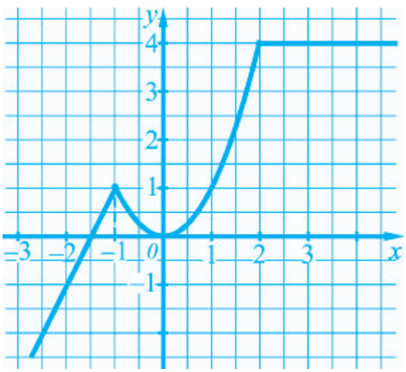


Рис. 24

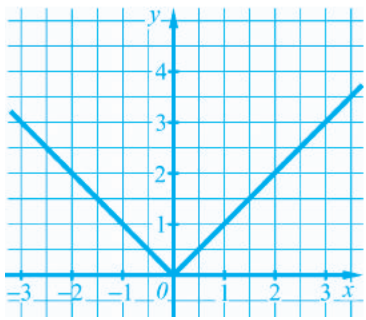


Рис. 25

Описаним способом можна задати і функцію $y = |x|$:

$$y = \begin{cases} x, \quad \text{якщо } x \ge 0; \\ -x, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$$

Графік функції $y = |x|$ зображено на рисунку 25.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{4-2x} + \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$.

● Область визначення функції утворюють ті значення x, для яких вираз $4 - 2x$ набуває невід'ємних значень, а вираз $2x$ — додатних значень. Отже, потрібно розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} 4-2x \ge 0; \\ 2x > 0. \end{cases}$ Матимемо:

$$\begin{cases} -2x \ge -4; \\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \le 2; \\ x > 0. \end{cases}$$

Областю визначення функції є проміжок (0; 2].

Відповідь. (0; 2]. ●

Вправа 2. Побудувати графік функції $y = |x-1| + |x+1|$.

● Знайдемо значення x, для яких значення виразів $x - 1$ та $x + 1$, які стоять під знаком модуля, дорівнюють нулю:

$$x - 1 = 0;\ x = 1; \qquad x + 1 = 0;\ x = -1.$$

Значення $x = -1$ та $x = 1$ розбивають координатну пряму на три проміжки (див. рис. 26).

Рис. 26

Враховуючи означення модуля числа, матимемо:

1) якщо $x < -1$, то $x - 1 < 0$, $x + 1 < 0$, тому $|x-1| = -(x-1)$, $|x+1| = -(x+1)$ та

$$y = -(x-1) - (x+1) = -2x;$$

2) якщо $-1 \le x < 1$, то $x - 1 < 0$, $x + 1 \ge 0$, тому

$$y = -(x-1) + (x+1) = 2;$$

3) якщо $x \ge 1$, то $x - 1 \ge 0$, $x + 1 > 0$, тому

$$y = (x-1) + (x+1) = 2x.$$

Щоб одержати графік заданої функції, будуємо на проміжку $(-\infty; -1)$ графік функції $y = -2x$, на проміжку $[-1; 1)$ — графік функції $y = 2$ і на проміжку $[1; +\infty)$ — графік функції $y = 2x$. Шуканий графік зображено на рисунку 27. ●

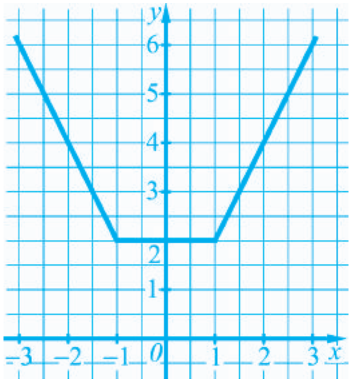


Рис. 27

Усно

307. Функцію задано формулою $f(x) = \dfrac{15}{x}$.

а) Знайдіть значення функції, якщо $x = 1$; $x = -3$; $x = 10$.

б) Укажіть область визначення функції.

308. На рисунку 28 зображено графік функції $y = f(x)$.

а) Знайдіть: $f(-3)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$.

б) Укажіть область визначення та область значень функції.

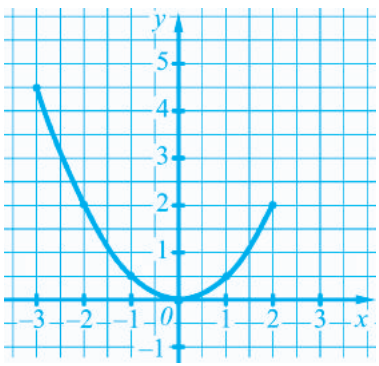


Рис. 28

309. Функцію $y = f(x)$ задано таблицею:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	-1	0	-1	-4

а) Знайдіть: $f(-1)$; $f(2)$.

б) Для яких значень аргументу значення функції дорівнює -1?

в) Укажіть область визначення та область значень функції.

310. Функція $y = f(x)$ кожному дійсному числу x ставить у відповідність протилежне йому число.

а) Знайдіть: $f(1)$; $f(0)$; $f(-5)$.

б) Укажіть область визначення функції та задайте функцію формулою.

311. Укажіть область визначення функції, заданої формулою:

а) $y = 2x^2 + 1$, де $0 \le x \le 1$; **б)** $y = -x + 5$;

в) $y = \dfrac{3}{x-1}$; **г)** $y = 2\sqrt{x}$.

Рівень А

312. Функцію задано формулою $f(x) = 2x^2 - 2$. Знайдіть: $f(0)$; $f(-3)$; $f(4)$.

313. Функцію задано формулою $f(x) = 5 - x^2$. Знайдіть: $f(-1)$; $f(1)$; $f(10)$.

314. Знайдіть значення функції $y = \dfrac{x+5}{x-3}$, якщо $x = -1$; $x = 5$.

315. Знайдіть значення аргументу, для яких значення функції $y = -2x + 6$ дорівнює: 4; -8.

316. Для яких значень аргументу значення функції $y = 3x - 2$ дорівнює: 7; -5?

317. Функцію задано формулою $f(x) = 6x - 1$. Знайдіть значення x, для яких:

а) $f(x) = 11$; **б)** $f(x) > -19$.

318. Функцію задано формулою $f(x) = 3x + 2$. Знайдіть значення x, для яких:

а) $f(x) = 17$; **б)** $f(x) < -4$.

Знайдіть область визначення функції:

319. **а)** $y = \dfrac{3}{2x-8}$; **б)** $y = \dfrac{4}{x^2-36}$; **в)** $y = \sqrt{x-8}$; **г)** $y = \sqrt{2-x}$.

320. **а)** $y = \dfrac{4}{9-3x}$; **б)** $y = \dfrac{5}{x^2-64}$; **в)** $y = \sqrt{4-x}$; **г)** $y = \sqrt{2x+8}$.

Чи проходить графік функції через дану точку?

321. **а)** $y = 4x - 5$; $A(3; 6)$; **б)** $y = x^2 - 3x$; $B(2; -2)$.

322. **а)** $y = 2x + 8$; $M(4; 16)$; **б)** $y = 4x - x^2$; $N(2; 2)$.

Побудуйте графік функції:

323. **а)** $y = -3x$; **б)** $y = 2x - 3$; **в)** $y = 0{,}5x + 2$; **г)** $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

324. **а)** $y = 2x$; **б)** $y = -x + 3$; **в)** $y = 2x + 1$; **г)** $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

Знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій, не будуючи самих графіків:

325. **а)** $y = 4x - 1$ та $y = -x + 9$; **б)** $y = 2 - x$ та $y = x^2$.

326. **а)** $y = 5x + 2$ та $y = 2x - 7$; **б)** $y = x^2$ та $y = 5x - 4$.

327. Знайдіть координати точки перетину графіка функції $y = -3x + 9$ з віссю абсцис; віссю ординат.

328. Знайдіть координати точки перетину графіка функції $y = 2x + 16$ з віссю абсцис; віссю ординат.

Рівень Б

Знайдіть область визначення функції:

329. **а)** $y = \frac{1}{2x-4} + \frac{x-2}{x+3}$; **б)** $y = \frac{4}{x^2 - 5x + 6}$;

в) $y = \sqrt{-2x+10} + \sqrt{5x+10}$; **г)** $y = \sqrt{1-4x} - \sqrt{2-2x}$;

д) $y = \frac{2}{\sqrt{x+3}}$; **е)** $y = \sqrt{x+4} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$;

є) $y = \sqrt{2x+3} - \frac{5}{x-1}$; **ж)** $y = \frac{x-2}{x-4} + \sqrt{7-2x}$.

330. **а)** $y = \frac{2x+1}{x^2 + 8x - 9}$; **б)** $y = \frac{1}{\sqrt{5x+1}}$;

в) $y = \sqrt{9-3x} - \sqrt{2x+5}$; **г)** $y = \sqrt{-x+2} + \frac{1}{\sqrt{6-2x}}$;

д) $y = \frac{1}{x} - \frac{5}{\sqrt{2x+4}}$; **е)** $y = \sqrt{4x+2} + \frac{x+1}{x+2}$.

331. Для яких значень аргументу значення функції $y = x^2 + 6x - 2$ дорівнює: **а)** 5; **б)** −11; **в)** −15?

332. Для яких значень аргументу значення функції $y = x^2 - 2x + 5$ дорівнює: **а)** 8; **б)** 4; **в)** −1?

333. Чи належить число 5 області значень функції $y = 3x^2 - 2x + 6$?

334. Пряма $y = kx + 2$ проходить через точку $M(-1; -2)$. Чи проходить вона через точку $N(2; 10)$?

335. Пряма $y = 2x + b$ проходить через точку $A(2; 3)$. Чи проходить вона через точку $B(-2; -3)$?

336. Побудуйте графіки функцій $y = -\dfrac{6}{x}$ та $y = 4 - 2x$. Знайдіть координати точок перетину цих графіків.

337. Побудуйте графіки функцій $y = \dfrac{4}{x}$ та $y = x - 3$. Знайдіть координати точок перетину цих графіків.

338. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 2x + 3, & \text{якщо } -3 \le x \le -1; \\ x^2, & \text{якщо } -1 < x \le 2. \end{cases}$ Укажіть область визначення та область значень функції.

339. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } -2 \le x \le 1; \\ 2x - 1, & \text{якщо } 1 < x \le 2. \end{cases}$ Укажіть область визначення та область значень функції.

340. Воду деякий час нагрівали. Залежність її температури t (у °C) від часу τ (у хвилинах) задано так: $t(\tau) = \begin{cases} 12\tau + 16, & \text{якщо } 0 \le \tau < 7; \\ 100, & \text{якщо } 7 \le \tau \le 10; \\ -2\tau + 120, & \text{якщо } 10 < \tau \le 16. \end{cases}$ Знайдіть: $t(5)$, $t(9)$, $t(10)$, $t(15)$, початкову та кінцеву температури води. Протягом скількох хвилин вода кипіла?

341. Тіло рухалося прямолінійно. Залежність пройденого ним шляху s (у метрах) від часу t (у секундах) задано так: $s(t) = \begin{cases} 2{,}5t, & \text{якщо } 0 \le t \le 2; \\ 5, & \text{якщо } 2 < t \le 4; \\ 3t - 7, & \text{якщо } 4 < t \le 6. \end{cases}$

Знайдіть: $s(1)$; $s(2)$; $s(3{,}5)$; $s(4)$; $s(6)$. З якою швидкістю рухалося тіло протягом перших двох секунд; між другою і четвертою секундами руху?

Рівень В

342. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{1-0{,}1x}}-\sqrt{3x+2}$; **б)** $y=\dfrac{x}{\sqrt{3x+2}}+\dfrac{1}{|x|-3}$.

343. Побудуйте графік функції й укажіть область її визначення та область значень:

а) $y=\dfrac{x-3}{x^2-3x}$; **б)** $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x-1}+\dfrac{x^2+x}{x+1}$;

в) $y=\sqrt{x^2}-3x$, де $x\ge 0$; **г)** $y=\sqrt{x^2}+3x$, де $x\le 0$.

Побудуйте графік функції:

344. а) $y=\begin{cases}x^2, & \text{якщо } x\ge -1;\\ -\dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x<-1;\end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, & \text{якщо } x\le -2 \text{ або } x\ge 2;\\ x, & \text{якщо } -2<x<2.\end{cases}$

345. а) $y=|x-3|-|x-2|$; **б)** $y=|x-1|+|3x+1|$.

346. Дано функцію $f(x)=\begin{cases}4x+12, & \text{якщо } x\le -2;\\ x^2, & \text{якщо } -2<x<1;\\ 1, & \text{якщо } x\ge 1.\end{cases}$

а) Побудуйте графік функції.

б) Розв’яжіть рівняння $f(x)=2$.

347. а) Побудуйте графік функції $y=|x-4|+|x+2|$.

б) Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $|x-4|+|x+2|=a$ має два корені; не має коренів. Чи існують значення a, для яких рівняння має лише один корінь?

Вправи для повторення

348. Розв’яжіть рівняння:

а) $x^2 - 9x + 18 = 0$; **б)** $\frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = 0$;

в) $\frac{4}{x + 3} + 2x = 0$; **г)** $\frac{3}{x + 3} - \frac{5x}{x - 1} + 1 = 0$.

349. Відомо, що $a > b$, до того ж a та b — додатні числа. Доведіть, що:

а) $3a - 1 > 3b - 1$; **б)** $a^2 + 2 > b^2 + 2$;

в) $\frac{4}{a} < \frac{4}{b}$; **г)** $-\frac{1}{a} > -\frac{1}{b}$.

350. За 300 г цукерок і 500 г печива заплатили 38 грн. Скільки коштує 1 кг цукерок і скільки 1 кг печива, якщо 3 кг цукерок дорожчі, ніж 5 кг печива на 40 грн?

351*. Один з коренів рівняння $x^3 + 2x^2 - 9x + a = 0$ дорівнює -2. Знайдіть решту коренів цього рівняння.

Поміркуйте

352. На дошці записано числа 1, 2, 3, 4, …, 999, 1000. Двоє гравців по черзі витирають по одному числу. Гра закінчується, коли на дошці залишаються два числа. Якщо їх сума ділиться на 3, то перемагає перший гравець, якщо ні — другий. Хто з гравців переможе за правильної гри?

9. Властивості функцій

1. Нулі функції. Проміжки знакосталості. Розглянемо функцію $y = f(x)$, графік якої зображено на рисунку 29. Якщо $x = -1$, $x = 4$ або $x = 6$, то значення функції дорівнює нулю. Такі значення аргументу x називають *нулями функції*.

Означення

Значення аргументу, для яких значення функції дорівнює нулю, називають нулями функції.

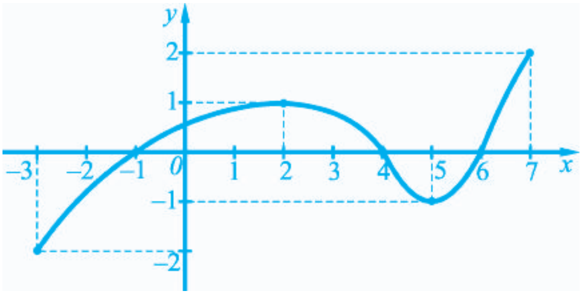


Рис. 29

Нулем функції $y = x - 2$ є лише одне значення x, а саме: $x = 2$, бо значення функції дорівнює нулю лише для $x = 2$.

Щоб знайти нулі функції, яку задано формулою $y = f(x)$, потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$.

Функція $y = f(x)$, графік якої зображено на рисунку 29, на проміжках $[-3; -1)$ і $(4; 6)$ набуває лише від'ємних значень, а на проміжках $(-1; 4)$ і $(6; 7]$ — лише додатних значень. Кожен із цих проміжків називають *проміжком знакосталості* функції $y = f(x)$.

Означення **Проміжок, на якому функція набуває значень однакового знака, називають проміжком знакосталості функції.**

Щоб знайти проміжки знакосталості функції, яку задано формулою $y = f(x)$, потрібно розв'язати нерівності $f(x) > 0$ та $f(x) < 0$.

Зауваження. Функція $y = f(x)$, графік якої зображено на рисунку 29, на проміжку $[0; 3)$ набуває лише додатних значень. Тому цей проміжок є проміжком знакосталості функції. Проте, указуючи проміжки знакосталості функції, прийнято вказувати такі проміжки найбільшої довжини. Для даної функції — це проміжки $[-3; -1)$, $(-1; 4)$, $(4; 6)$ і $(6; 7]$.

2. Зростання, спадання функції. Розглянемо графік функції $y = f(x)$ на рисунку 29. На проміжку $[-3; 2]$ графік «іде вгору»: якщо збільшувати значення x із цього проміжку, то відповідні значення функції збільшуватимуться. Наприклад, візьмемо значення аргументу $x_1 = -3$ і $x_2 = -1$, тоді $x_2 > x_1$. Оскільки $f(x_2) = f(-1) = 0$, а $f(x_1) = f(-3) = -2$, то $f(x_2) > f(x_1)$. Більшому значенню аргументу (x_2) відповідає більше значення функції ($f(x_2)$). Кажуть, що на проміжку [–3; 2] функція $y = f(x)$ *зростає* (або *є зростаючою*). Такою ж вона є й на проміжку [5; 7].

На проміжку [2; 5] графік функції $y = f(x)$ «іде вниз»: якщо збільшувати значення аргументу, то відповідні значення функції зменшуватимуться. Кажуть, що на цьому проміжку функція $y = f(x)$ *спадає* (або *є спадною*).

Означення

Функцію називають зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких двох значень аргументу з цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Функцію називають спадною на деякому проміжку, якщо для будь-яких двох значень аргументу з цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають *зростаючою функцією*; якщо ж функція спадає на всій області визначення, то її називають *спадною функцією*.

Наприклад, на рисунку 30 зображено графік функції, областю визначення якої є проміжок [–1; 5]. Ця функція є зростаючою, бо вона зростає на всій області визначення. Функція, графік якої зображено на рисунку 31, є спадною, бо вона спадає на всій області визначення — проміжку [–1; 5].

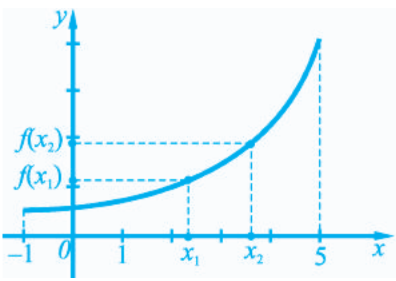


Рис. 30

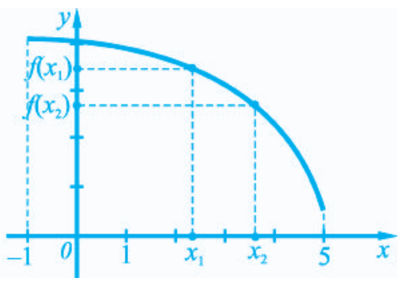


Рис. 31

Зростаючими є функції $y = 2x$, $y = \sqrt{x}$ (їхні графіки завжди «ідуть угору»), а спадними — функції $y = -2x$, $y = -x$ (їхні графіки завжди «ідуть униз»). Функція $y = f(x)$, графік якої зображено на рисунку 29, є ні зростаючою, ні спадною. Вона лише зростає або спадає на окремих проміжках.

Функція $y = \frac{k}{x}$, де $k > 0$, спадає на кожному із проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$, але не є спадною. Справді, вона не спадає на всій області визначення $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, оскільки для $x_2 > x_1$ (див. рис. 32) маємо: $y_2 > y_1$.

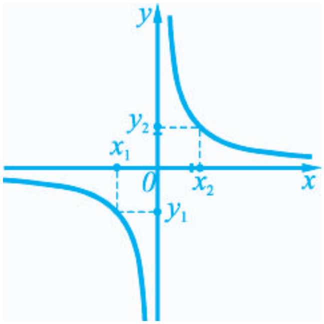


Рис. 32

Характер зростання, спадання функцій, які ми вивчили у 7 і 8 класах, наведено в таблиці.

Функція		*Зростання, спадання*
$y = kx + b$	$k > 0$	Зростаюча
	$k < 0$	Спадна
$y = \frac{k}{x}$	$k > 0$	Спадає на проміжках $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$
	$k < 0$	Зростає на проміжках $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$
$y = x^2$		Спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ і зростає на проміжку $[0; +\infty)$
$y = \sqrt{x}$		Зростаюча

Зауваження. Указуючи проміжки зростання чи спадання функції, прийнято вказувати такі проміжки найбільшої довжини. Так, для функції $y = x^2$ проміжком зростання є проміжок $[0; +\infty)$, хоча ця функція зростає й на будь-якому проміжку $[a; b]$, що є підмножиною проміжку $[0; +\infty)$.

Для тих, хто хоче знати більше

Приклад 1. Довести, що функція $y = x^2$ зростає на проміжку $[0; +\infty)$.

● Нехай x_1 та x_2 — два довільні значення аргументу із проміжку $[0; +\infty)$, до того ж, $x_2 > x_1$, а y_1 та y_2 — відповідні їм значення функції, тобто $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$. Покажемо, що $y_2 > y_1$. Для цього розглянемо різницю:

$$y_2 - y_1 = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Оскільки $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Значення x_1 та x_2 належать проміжку $[0; +\infty)$, тому $x_1 \geq 0$, $x_2 > 0$ (бо $x_2 > x_1$), звідки $x_1 + x_2 > 0$.

Тоді:

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0; \quad y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0; \quad y_2 > y_1.$$

Більшому значенню аргументу з проміжку $[0; +\infty)$ відповідає більше значення функції. Отже, функція $y = x^2$ на проміжку $[0; +\infty)$ зростає. ●

Приклад 2. Довести, що функція $y = kx + b$, де $k < 0$, є спадною.

● Покажемо, що дана функція спадає на всій області визначення — проміжку $(-\infty; +\infty)$. Нехай x_1 та x_2 — два довільні значення аргументу, до того ж, $x_2 > x_1$, а y_1 та y_2 — відповідні їм значення функції, тобто $y_1 = kx_1 + b$, $y_2 = kx_2 + b$. Щоб порівняти y_2 та y_1, розглянемо різницю:

$$y_2 - y_1 = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1).$$

Оскільки $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Урахувавши, що $k < 0$, матимемо:

$$k(x_2 - x_1) < 0; \quad y_2 - y_1 < 0; \quad y_2 < y_1.$$

Більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Отже, дана функція є спадною. ●

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти нулі функції $y = x^2 - 8x + 12$.

● Розв'яжемо рівняння $x^2 - 8x + 12 = 0$:

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 16; \quad x_1 = \frac{8-4}{2} = 2; \quad x_2 = \frac{8+4}{2} = 6.$$

Отже, функція має два нулі: $x = 2$ та $x = 6$.

Відповідь. 2; 6. ●

Вправа 2. Знайти проміжки знакосталості функції $y = 2x - 5$.

● Розв'яжемо нерівності $2x - 5 > 0$ і $2x - 5 < 0$:

$2x - 5 > 0$; $2x > 5$; $x > 2{,}5$; $2x - 5 < 0$; $2x < 5$; $x < 2{,}5$.

Отже, функція набуває лише додатних значень на проміжку $(2{,}5; +\infty)$, а лише від'ємних значень — на проміжку $(-\infty; 2{,}5)$.

Відповідь. $(-\infty; 2{,}5)$; $(2{,}5; +\infty)$. ●

Вправа 3. Порівняти значення виразів:

а) $\sqrt{12{,}64}$ і $\sqrt{12{,}52}$; **б)** $(-28{,}1)^2$ і $(-25{,}6)^2$.

● **а)** Функція $f(x) = \sqrt{x}$ є зростаючою. Оскільки $12{,}64 > 12{,}52$, то

$$f(12{,}64) > f(12{,}52), \text{ тобто } \sqrt{12{,}64} > \sqrt{12{,}52}.$$

● **б)** Числа $-28{,}1$ і $-25{,}6$ належать проміжку $(-\infty; 0]$, на якому функція $f(x) = x^2$ спадає. Оскільки $-28{,}1 < -25{,}6$, то $f(-28{,}1) > f(-25{,}6)$, тобто

$$(-28{,}1)^2 > (-25{,}6)^2. \bullet$$

Вправа 4. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \frac{5}{x}$ на проміжку $[2; 10]$.

● Проміжок $[2; 10]$ є підмножиною проміжку $(0; +\infty)$, на якому функція $y = \frac{5}{x}$ спадає. Тому дана функція спадає й на проміжку $[2; 10]$ і на ньому для $x = 2$ вона набуває найбільшого значення, а для $x = 10$ — найменшого. Отже, найбільше значення функції на проміжку $[2; 10]$ дорівнює $\frac{5}{2} = 2{,}5$, а найменше — $\frac{5}{10} = 0{,}5$.

Відповідь. 2,5; 0,5. ●

Усно

353. На рисунку 33 зображено графік функції $t = f(\tau)$, яка характеризує зміну температури тіла протягом 7 хвилин.

а) У які моменти часу температура тіла дорівнювала 0 °С? Укажіть нулі функції $t = f(\tau)$.

б) Протягом яких проміжків часу температура тіла була додатною; від'ємною? На яких проміжках функція $t = f(\tau)$ набуває додатних значень; від'ємних значень?

в) Протягом яких проміжків часу температура тіла зростала; спадала? На яких проміжках функція $t = f(\tau)$ зростає; спадає?

г) Укажіть найбільше та найменше значення температури тіла; найбільше та найменше значення функції $t = f(\tau)$?

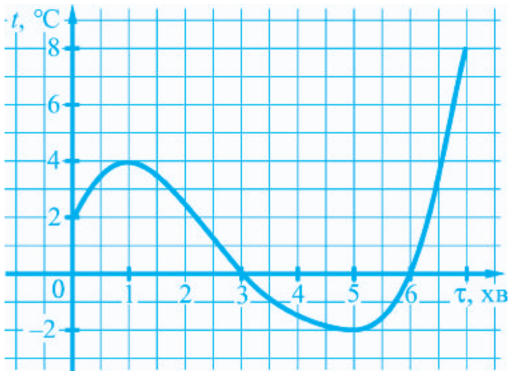


Рис. 33

Рівень А

354. На рисунку 34 зображено графік функції $y = f(x)$, де $-2{,}5 \le x \le 4$. Укажіть:

а) нулі функції;

б) проміжки, на яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень;

в) проміжки, на яких функція зростає; спадає;

г) найбільше та найменше значення функції.

355. На рисунку 35 зображено графік функції $y = f(x)$, де $-3 \le x \le 5$. Укажіть:

а) нулі функції;

б) проміжки, на яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень;

в) проміжки, на яких функція зростає; спадає.

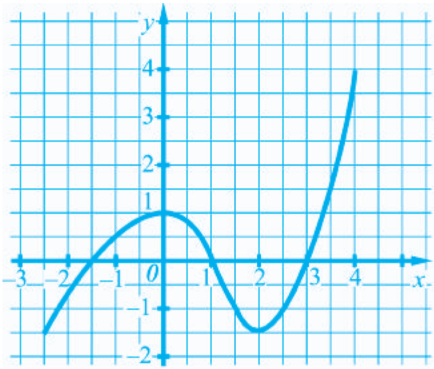


Рис. 34

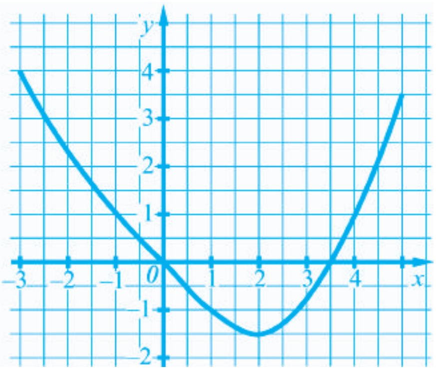


Рис. 35

Знайдіть нулі функції:

356. **а)** $y = 2x - 4$; **б)** $y = 3 - 2x$; **в)** $y = (x - 1)(x + 2)$;

г) $y = x^2 - 6x + 8$; **д)** $y = \dfrac{x-1}{x-3}$; **е)** $y = \dfrac{x-1}{x^2 - x}$.

357. **а)** $y = 6 - 2x$; **б)** $y = x^2 + 2x - 8$; **в)** $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

Знайдіть проміжки знакосталості функції:

358. **а)** $y = x + 2$; **б)** $y = 4x - 12$; **в)** $y = -3x - 9$.

359. **а)** $y = x - 4$; **б)** $y = 3x + 6$; **в)** $y = -2x + 4$.

Побудуйте графік функції. Знайдіть її нулі. Укажіть проміжки, на яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень. Чи є дана функція зростаючою; спадною?

360. **а)** $y = -2x$; **б)** $y = 3x - 3$; **в)** $y = -0{,}5x + 1$.

361. **а)** $y = 3x$; **б)** $y = 0{,}5x - 1$; **в)** $y = -2x - 2$.

Порівняйте значення виразів:

362. **а)** $15{,}6^2$ і $15{,}4^2$; **б)** $\sqrt{1{,}048}$ і $\sqrt{1{,}4}$; **в)** $\dfrac{3}{0{,}4}$ і $\dfrac{3}{0{,}5}$.

363. **а)** $0{,}36^2$ і $0{,}34^2$; **б)** $\sqrt{19{,}5}$ і $\sqrt{19{,}08}$; **в)** $\dfrac{2}{3{,}7}$ і $\dfrac{2}{3{,}5}$.

Рівень Б

364. Накресліть графік функції, областю визначення якої є проміжок [–2; 4], і щоб функція:

а) зростала на проміжку [–2; 0] і спадала на проміжку [0; 4];

б) спадала на проміжку [–2; 1], зростала на проміжку [1; 4] і мала два нулі: $x = 0$ та $x = 3$;

в) була зростаючою і мала один нуль — число 2.

365. Накресліть графік функції, областю визначення якої є проміжок [–1; 6], і щоб функція:

а) спадала на проміжку [–1; 4], зростала на проміжку [4; 6] і мала один нуль: $x = 1$;

б) була спадною і мала один нуль — число 3;

в) була зростаючою і не мала нулів.

Знайдіть нулі функції:

366. **а)** $y = 2x^2 - 2x - 1$; **б)** $y = \frac{x}{x+3} - \frac{1}{x-1}$; **в)** $y = \frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x-3}$.

367. **а)** $y = -x^2 + 4x - 1$; **б)** $y = \frac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}$; **в)** $y = \frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1}$.

368. Знайдіть проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень:

а) $y = \frac{2}{x+3}$; **б)** $y = (2x + 4)(x - 1)$.

369. Знайдіть проміжки, на яких функція набуває додатних значень:

а) $y = -\frac{4}{x-2}$; **б)** $y = (x - 3)(x - 2)$.

370. Знайдіть усі значення a, для яких функція $y = (4a - 3)x + 2$ є спадною.

371. Знайдіть усі значення b, для яких функція $y = (2b + 5)x - 3$ є зростаючою.

372. Знайдіть усі значення m, для яких функція $y = \frac{4-2m}{x}$ зростає на проміжку $(0; +\infty)$.

373. Знайдіть усі значення a, для яких функція $y = \frac{2a-1}{x}$ спадає на проміжку $(-\infty; 0)$.

Побудуйте графік функції. Користуючись графіком, укажіть: 1) проміжки, на яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень; 2) проміжки, на яких функція зростає; спадає.

374. **а)** $y = \begin{cases} 2x+1, & \text{якщо } -2 \le x < 1; \\ -3x+6, & \text{якщо } 1 \le x \le 3; \end{cases}$ **б)** $y = \begin{cases} x+2, & \text{якщо } x < -1; \\ x^2, & \text{якщо } -1 \le x \le 1; \\ 2-x, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

375. **а)** $y = \begin{cases} -2x+2, & \text{якщо } -1 \le x \le 3; \\ 2x-10, & \text{якщо } 3 < x \le 5; \end{cases}$ **б)** $y = \begin{cases} -x-2, & \text{якщо } x \le -1; \\ -1, & \text{якщо } -1 < x < 1; \\ x-2, & \text{якщо } x \ge 1. \end{cases}$

Знайдіть найменше і найбільше значення функції на вказаному проміжку:

376. **а)** $y = -8x + 15$; $[-4; 11]$; **б)** $y = \frac{1,5}{x}$; $[-10; -3]$;

в) $y = x^2$; $[0,2; 0,9]$; **г)** $y = \sqrt{x}$; $[9; 27]$.

377. **а)** $y = 5x - 11$; $[-8; 12]$; **б)** $y = -\frac{45}{x}$; $[15; 20]$;

в) $y = x^2$; $[-7; -0,5]$; **г)** $y = \sqrt{x}$; $[0,04; 2,25]$.

Рівень В

378. Знайдіть нулі функції:

а) $y = ||x-3|-2|-1$; **б)** $y = x|x| - 4x - 5$.

379. Скільки нулів має функція $y = x^2 - (2a + 1)x + 2a$ залежно від значень параметра a?

380. Доведіть, що функція $y = x^2$ спадає на проміжку $(-\infty; 0]$.

381. Доведіть, що функція $y = \frac{k}{x}$, де $k < 0$, зростає на проміжках $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

382. **а)** Функція $y = f(x)$ є зростаючою, а функція $y = g(x)$ — спадною. Доведіть, що рівняння $f(x) = g(x)$ має не більше одного кореня.

б) Розв'яжіть (усно) рівняння $\sqrt{x} = 10 - 9x$.

Вправи для повторення

383. Знайдіть значення виразу $3x_0 - 3y_0$, якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} 2x - 5y = 10; \\ -x + 4y = 16. \end{cases}$

384. Доведіть тотожність:

а) $\left(m - \dfrac{mn}{m+n}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{n}{m}\right) = m;$

б) $\left(\dfrac{1}{x - 4y} + \dfrac{1}{x + 4y}\right) : \left(\dfrac{x^2 + 16y^2}{x^2 - 16y^2} + 1\right) = \dfrac{1}{x}.$

385. Знайдіть значення виразу:

а) $2 + 4\sqrt{8} - 2\sqrt{32};$

б) $\left(\sqrt{17} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{17} + \sqrt{3}\right);$

в) $\left(2 + \sqrt{3}\right)\left(3 - \sqrt{3}\right) - \sqrt{3};$

г) $\sqrt{\left(5 - \sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(1 - \sqrt{3}\right)^2}.$

386. Відстань між пунктами A і B по шосе дорівнює 135 км, а залізницею — 120 км. Автомобіль виїхав з пункту A на 10 хв раніше, ніж поїзд, і прибув у пункт B на 8 хв пізніше. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона на 10 км/год менша від швидкості поїзда.

Поміркуйте

387. У вершинах правильного семикутника стоять по фішці білого або чорного кольору. Доведіть, що серед них є три фішки одного кольору, які розміщені у вершинах рівнобедреного трикутника.

10. Перетворення графіків функцій

1. Графік функції $y = f(x) + n$, де $n \neq 0$. На рисунку 36 зображено графік функції $y = x^2$ — параболу. З'ясуємо, як, маючи цей графік, побудувати графіки функцій $y = x^2 + 2$ та $y = x^2 - 3$.

Для будь-якого значення x значення функції $y = x^2 + 2$ на 2 більше, ніж відповідне значення функції $y = x^2$. Тому кожна точка графіка функції $y = x^2 + 2$ розташована на 2 одиниці вище, ніж точка графіка функції $y = x^2$ з тією самою абсцисою. Отже, графік функції $y = x^2 + 2$ можна одержати за допомогою паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ уздовж осі y на 2 одиниці вгору (рис. 37).

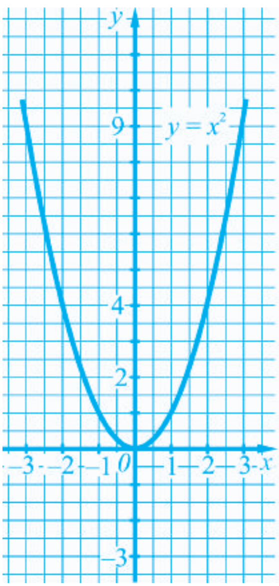


Рис. 36

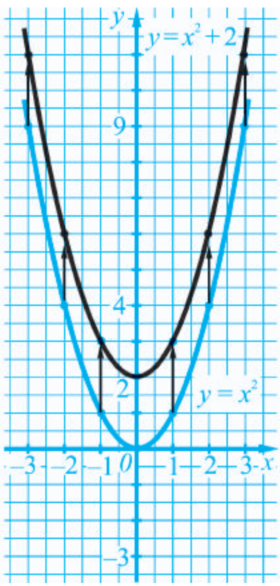


Рис. 37

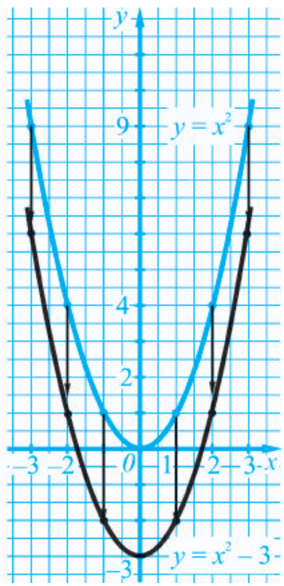


Рис. 38

Значення функції $y = x^2 - 3$ на 3 менше ніж відповідне значення функції $y = x^2$. Тому графік функції $y = x^2 - 3$ можна одержати за допомогою паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ уздовж осі y на 3 одиниці вниз (рис. 38).

Якщо функцію $y = x^2$ записати у вигляді $y = f(x)$, то функції $y = x^2 + 2$ та $y = x^2 - 3$ будуть функціями виду $y = f(x) + n$, де $n \neq 0$, а саме: $y = f(x) + 2$ та $y = f(x) - 3$.

Узагалі, *графік функції* $y = f(x) + n$, *де* $n \neq 0$, *можна одержати за допомогою паралельного перенесення графіка функції* $y = f(x)$ *уздовж осі* y *на* n *одиниць угору, якщо* $n > 0$, *або на* $-n$ *одиниць униз, якщо* $n < 0$.

2. Графік функції $y = f(x + m)$, де $m \neq 0$. Нехай маємо графік функції $y = x^2$, а потрібно побудувати графіки функцій $y = (x - 3)^2$ та $y = (x + 2)^2$.

Складемо таблицю значень функції $y = x^2$ для деяких значень аргументу:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Складемо також таблицю значень функції $y = (x - 3)^2$, узявши значення аргументу на 3 більші:

x	0	1	2	3	4	5	6
$y = (x - 3)^2$	9	4	1	0	1	4	9

З таблиць видно: якщо для функції $y = x^2$ візьмемо деяке значення аргументу, а для функції $y = (x - 3)^2$ — на 3 більше значення аргументу, то одержимо те саме значення функцій. Тому якщо абсцису деякої точки графіка функції $y = x^2$ збільшити на 3, а ординату залишити ту саму, то одержимо точку графіка функції $y = (x - 3)^2$. Отже, графік функції $y = (x - 3)^2$ можна одержати із графіка функції $y = x^2$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі x на 3 одиниці праворуч (рис. 39).

Графік функції $y = (x + 2)^2$ можна одержати із графіка функції $y = x^2$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі x на 2 одиниці ліворуч (рис. 40).

Якщо функцію $y = x^2$ записати у вигляді $y = f(x)$, то функції $y = (x - 3)^2$ та $y = (x + 2)^2$ будуть функціями виду $y = f(x + m)$, де $m \neq 0$, а саме: $y = f(x - 3)$ та $y = f(x + 2)$.

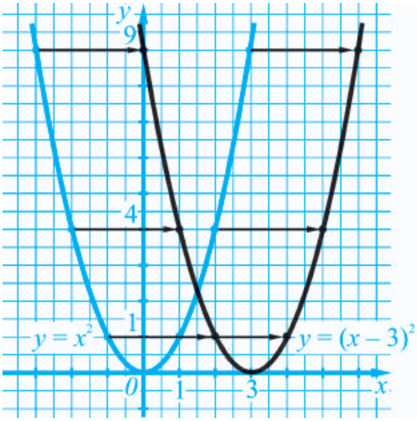


Рис. 39

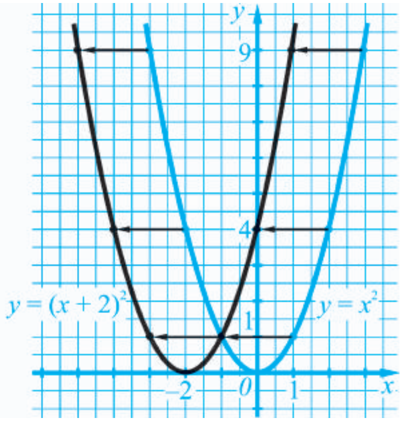


Рис. 40

Узагалі, *графік функції* $y = f(x + m)$, *де* $m \neq 0$, *можна одержати за допомогою паралельного перенесення графіка функції* $y = f(x)$ *уздовж осі x на m одиниць ліворуч, якщо* $m > 0$, *або на –m одиниць праворуч, якщо* $m < 0$.

3. Графік функції $y = f(x + m) + n$, де $m \neq 0$, $n \neq 0$. Розглянемо функцію $y = (x - 2)^2 - 1$. Її графік можна одержати, якщо графік функції $y = x^2$ паралельно перенести вздовж осі x на 2 одиниці праворуч, а потім уздовж осі y на 1 одиницю вниз (рис. 41).

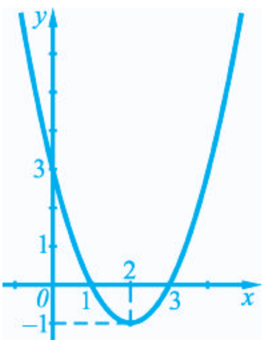


Рис. 41

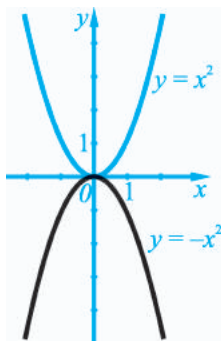


Рис. 42

4. Графік функції $y = -f(x)$. Нехай маємо графік функції $y = x^2$, а потрібно побудувати графік функції $y = -x^2$. Складемо таблицю значень цих функцій для деяких значень аргументу:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y = -x^2$	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9

Значення функції $y = -x^2$ протилежні відповідним значенням функції $y = x^2$. Тому кожна точка графіка функції $y = -x^2$ симетрична відповідній точці графіка функції $y = x^2$ відносно осі x. Наприклад, точка (2; –4) графіка функції $y = -x^2$ симетрична точці (2; 4) графіка функції $y = x^2$ відносно вказаної осі. Отже, графік функції $y = -x^2$ можна одержати із графіка функції $y = x^2$ за допомогою симетрії відносно осі x (рис. 42).

Якщо функцію $y = x^2$ записати у вигляді $y = f(x)$, то функція $y = -x^2$ буде функцією виду $y = -f(x)$.

Узагалі, *графік функції $y = -f(x)$ можна одержати із графіка функції $y = f(x)$ за допомогою симетрії відносно осі x.*

5. Графік функції $y = a\,f(x)$, де $a > 0$. Нехай маємо графік функції $y = x^2$, а потрібно побудувати графіки функцій $y = 2x^2$ та $y = \frac{1}{2}x^2$. Складемо таблицю значень цих функцій для деяких значень аргументу:

x	–2	–1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Для будь-якого значення x значення функції $y = 2x^2$ удвічі більше, ніж відповідне значення функції $y = x^2$, а значення функції $y = \frac{1}{2}x^2$ удвічі менше, ніж відповідне значення функції $y = x^2$. (З таблиці це легко побачити для вибраних значень x.)

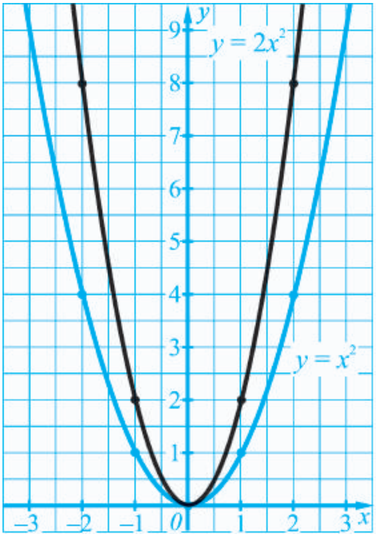


Рис. 43

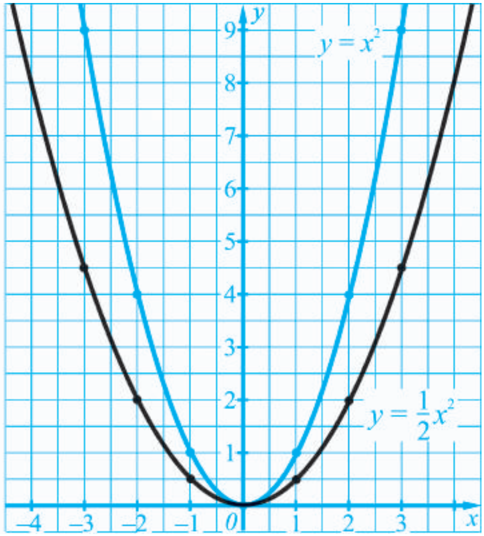


Рис. 44

Тому графік функції $y = 2x^2$ можна одержати із графіка функції $y = x^2$, розтягнувши останній від осі x удвічі, а графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$ можна одержати із графіка функції $y = x^2$, стиснувши останній до осі x удвічі (див. рис. 43, 44).

Якщо функцію $y = x^2$ записати у вигляді $y = f(x)$, то функції $y = 2x^2$ та $y = \frac{1}{2}x^2$ будуть функціями виду $y = a\,f(x)$, де $a > 0$, а саме: $y = 2f(x)$ та $y = \frac{1}{2}f(x)$.

Узагалі, *графік функції* $y = a\,f(x)$, *де* $a > 0$, *можна одержати із графіка функції* $y = f(x)$, *розтягнувши останній від осі* x *в* a *разів, якщо* $a > 1$, *і стиснувши його до осі* x *в* $\frac{1}{a}$ *разів, якщо* $0 < a < 1$.

Для тих, хто хоче знати більше

6. Графік функції $y = |f(x)|$. За означенням модуля числа маємо:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0; \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Отже, якщо $f(x) \geq 0$, то функції $y = |f(x)|$ та $y = f(x)$ мають ті самі відповідні значення, якщо $f(x) < 0$, то відповідні значення функцій є протилежними числами. Тому графік функції $y = |f(x)|$ можна одержати так: будуємо графік функції $y = f(x)$ і ту його частину, яка розташована нижче від осі x, симетрично відображаємо відносно цієї осі.

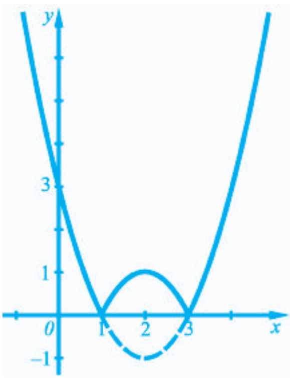


Рис. 45

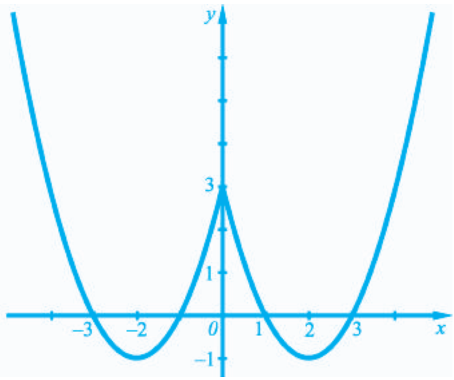


Рис. 46

На рисунку 45 зображено графік функції $y = |(x-2)^2 - 1|$. Порівняйте його із графіком функції $y = (x-2)^2 - 1$ (рис. 41).

7. Графік функції $y = f(|x|)$. Зазначимо дві властивості даної функції.

1) З тотожності $|-x| = |x|$ випливає, що для будь-якого значення x із області її визначення виконується рівність $f(|-x|) = f(|x|)$. Це означає, що графік функції симетричний відносно осі y.

2) Якщо $x \geq 0$, то $y = f(|x|) = f(x)$. Тому для $x \geq 0$ графік функції $y = f(|x|)$ збігається із графіком функції $y = f(x)$.

Таким чином, графік функції $y = f(|x|)$ можна побудувати так: будуємо частину графіка функції $y = f(x)$ для $x \geq 0$; виконавши симетрію побудованої частини відносно осі y, одержуємо другу частину графіка для $x \leq 0$.

На рисунку 46 зображено графік функції $y = (|x|-2)^2 - 1$. Порівняйте його із графіком функції $y = (x-2)^2 - 1$ (рис. 41).

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Побудувати графік функції $y = \sqrt{x+2} + 1$.

● Будуємо графік функції $y = \sqrt{x}$. Паралельно переносимо його вздовж осі x на 2 одиниці ліворуч, а потім уздовж осі y на 1 одиницю вгору. Одержуємо шуканий графік (рис. 47). ●

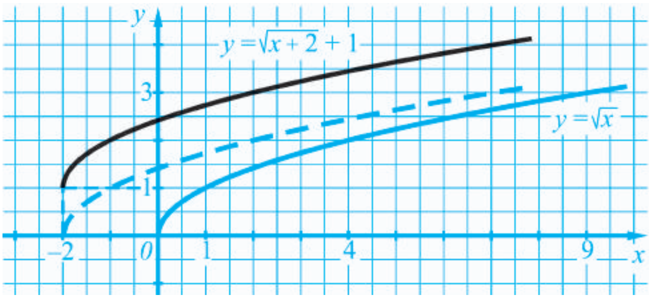


Рис. 47

Вправа 2. Побудувати графік функції $y = 2 - x^2$.

● Послідовно будуємо графіки таких функцій:

1) $y = x^2$; 2) $y = -x^2$; 3) $y = -x^2 + 2$, тобто $y = 2 - x^2$.

Графік функції $y = 2 - x^2$ зображено на рисунку 48. ●

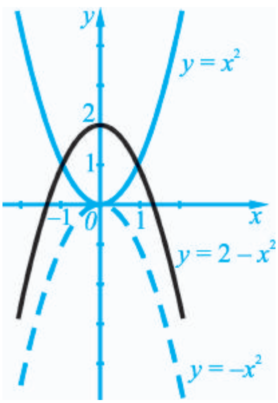


Рис. 48

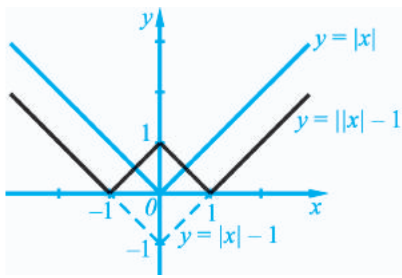


Рис. 49

Вправа 3. Побудувати графік функції $y = \left||x| - 1\right|$.

● Послідовно будуємо графіки таких функцій:

1) $y = |x|$; 2) $y = |x| - 1$; 3) $y = \left||x| - 1\right|$.

Графік функції $y = \left||x| - 1\right|$ зображено на рисунку 49. ●

Усно

388. Як, маючи графік функції $y = x^2$, побудувати графік функції:

а) $y = x^2 + 4$; **б)** $y = x^2 - 4$; **в)** $y = (x + 2)^2$; **г)** $y = (x - 2)^2$;

д) $y = (x - 3)^2 + 5$; **е)** $y = (x + 3)^2 - 5$; **є)** $y = 4x^2$; **ж)** $y = \frac{1}{4}x^2$?

389. Які координати має вершина параболи:

а) $y = x^2 + 1$; **б)** $y = (x - 4)^2$; **в)** $y = (x + 2)^2 - 1$; **г)** $y = 5x^2$?

390. Як, маючи графік функції $y = \sqrt{x}$, побудувати графік функції:

а) $y = \sqrt{x} - 1$; **б)** $y = \sqrt{x + 1}$; **в)** $y = -\sqrt{x}$; **г)** $y = 4\sqrt{x}$?

391. Як, маючи графік функції $y = \frac{2}{x}$, побудувати графік функції:

а) $y = \frac{2}{x} - 3$; **б)** $y = \frac{2}{x - 4}$; **в)** $y = \frac{2}{x + 1}$; **г)** $y = \frac{2}{x - 4} + 3$?

392. На рисунку 50 а) зображено графіки функцій $y = f(x)$, $y = f(x) + a$ та $y = f(x) + b$, а на рисунку 50 б) — графіки функцій $y = f(x)$, $y = f(x + a)$ та $y = f(x + b)$. Знайдіть a і b.

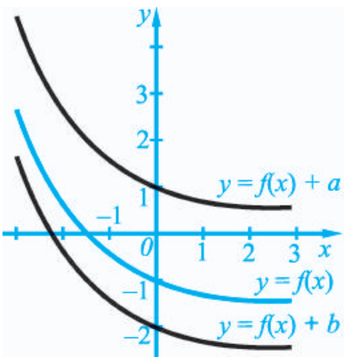


Рис. 50 а)

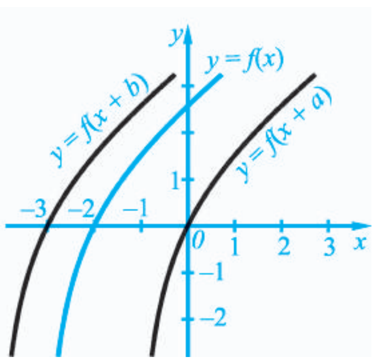


Рис. 50 б)

Рівень А

393. На рисунку 51 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

а) $y = f(x) + 2$; **б)** $y = f(x) - 3$; **в)** $y = f(x + 2)$; **г)** $y = f(x - 1)$.

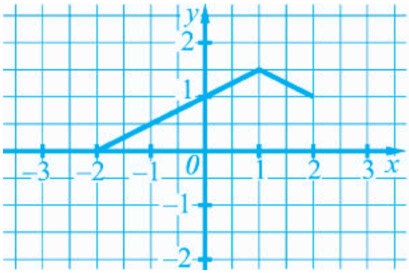


Рис. 51

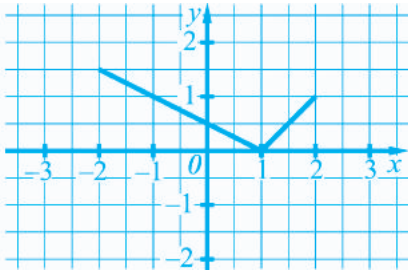


Рис. 52

394. На рисунку 52 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

а) $y = f(x) + 3$; **б)** $y = f(x) - 1$; **в)** $y = f(x - 2)$; **г)** $y = f(x + 1)$.

Побудуйте графік функції:

395. **а)** $y = x^2 + 1$; **б)** $y = x^2 - 5$; **в)** $y = (x + 3)^2$; **г)** $y = (x - 1)^2$.

396. **а)** $y = x^2 - 2$; **б)** $y = x^2 + 3$; **в)** $y = (x - 2)^2$; **г)** $y = (x + 1)^2$.

397. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x} - 2$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) область значень функції;

б) усі значення x, для яких функція набуває додатних значень.

398. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x} + 1$. Користуючись графіком, знайдіть область значень функції.

399. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = -\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x} + 4$ та $y = -\sqrt{x} - 1$.

400. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = -x^2$, $y = -x^2 + 3$ та $y = -x^2 - 1$.

401. Задайте формулою функцію, графік якої можна одержати, якщо графік функції $y = x^2$:

а) паралельно перенести вздовж осі y на 3 одиниці вниз;

б) паралельно перенести вздовж осі x на 2 одиниці праворуч;

в) стиснути до осі x у 4 рази.

402. Задайте формулою функцію, графік якої можна одержати, якщо графік функції $y = \sqrt{x}$:

а) паралельно перенести вздовж осі y на 2 одиниці вгору;

б) паралельно перенести вздовж осі x на 4 одиниці ліворуч;

в) розтягнути від осі x у 3 рази.

Рівень Б

403. На рисунку 53 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

а) $y = 3f(x)$; **б)** $y = \frac{1}{2}f(x)$; **в)** $y = -f(x)$; **г)** $y = -2f(x)$.

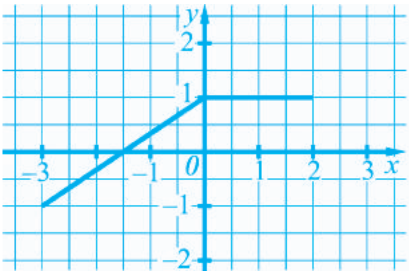


Рис. 53

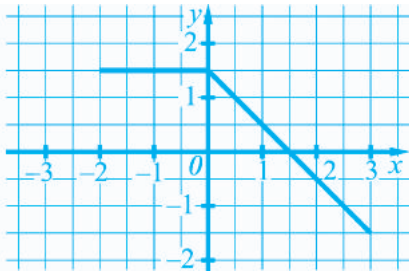


Рис. 54

404. На рисунку 54 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

а) $y = 2f(x)$; **б)** $y = \frac{1}{3}f(x)$; **в)** $y = -f(x)$; **г)** $y = -f(x) - 1$.

Побудуйте графік функції:

405. **а)** $y = (x-1)^2 + 2$; **б)** $y = (x+3)^2 - 3$;

в) $y = \frac{4}{x} + 2$; **г)** $y = \frac{4}{x-2}$;

д) $y = \sqrt{x-2}$; **е)** $y = \sqrt{x+4} - 1$.

406. **а)** $y = 4 - x^2$; **б)** $y = -(x-2)^2$;

в) $y = -(x+3)^2 + 4$; **г)** $y = -\sqrt{x-4} + 2$.

407. **а)** $y = (x+2)^2 - 3$; **б)** $y = \frac{1}{x} - 2$;

в) $y = \sqrt{x-1} + 2$; **г)** $y = -\sqrt{x} + 1$;

д) $y = -(x-3)^2$; **е)** $y = -(x-1)^2 + 5$.

408. **а)** $y = 2\sqrt{x}$; **б)** $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

409. **а)** $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$; **б)** $y = -2\sqrt{x}$.

410. Побудуйте графік функції $y = (x + 3)^2 - 1$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) область значень функції;

б) проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень;

в) проміжок, на якому функція спадає.

411. Побудуйте графік функції $y = (x - 2)^2 - 4$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) область значень функції;

б) проміжки, на яких функція набуває додатних значень;

в) проміжок, на якому функція зростає.

412. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \sqrt{x+1}$ та $y = -x^2 + 2{,}5$. Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x+1} = -x^2 + 2{,}5$?

Розв'яжіть графічно рівняння:

413. **а)** $(x-2)^2 = \sqrt{x-2}$; **б)** $\dfrac{4}{x+1} = x - 2$.

414. **а)** $-\dfrac{2}{x} = (x+1)^2$; **б)** $\sqrt{x+3} = 4 - 2x$.

Рівень В

415. Побудуйте графік функції, задавши її формулою виду $y = \dfrac{k}{x+m} + n$:

а) $y = \dfrac{x+1}{x-2}$; **б)** $y = \dfrac{3x-1}{x+1}$.

416. Побудуйте графік функції:

а) $y = |x^2 - 4|$; **б)** $y = |(x+1)^2 - 1|$;

в) $y = |\sqrt{x} - 1|$; **г)** $y = ||x| - 2|$;

д) $y = 3 - |x - 3|$; **е)** $y = |3 - |x - 3||$.

417. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $\dfrac{2x+4}{x} = \sqrt{x} + 1$; **б)** $|x-2| - 2 = \sqrt{x-4}$.

418. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $|1 - x^2| = a$ має лише три корені.

419. Скільки коренів має рівняння $1-\left|1-|x|\right|=a$ залежно від значень параметра a?

Вправи для повторення

420. Розкладіть на множники:

а) $2a-6+ab-3b$; **б)** $x^2+xy-2x-2y$.

421. Спростіть вираз:

а) $(b-4)^{-2}(3b-12)$; **б)** $\left(x^{-2}-y^{-2}\right):(x+y)$.

422. Нехай x_1 та x_2 — корені рівняння $2x^2-7x+2=0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $(x_1+x_2)^2-x_1x_2$.

423*. Не розв'язуючи рівняння $x^2+4x-7=0$, складіть зведене квадратне рівняння, корені якого на одиницю менші від коренів даного рівняння.

424. Дві вантажівки одночасно виїхали з фабрики до бази, розташованої на відстані 96 км від фабрики. Перша вантажівка прибула до бази на 10 хв раніше, ніж друга. Знайдіть швидкість першої вантажівки, якщо вона на 8 км/год більша від швидкості другої.

Поміркуйте

425. На кожній стороні правильного шестикутника записали деяке число, а в кожній вершині — суму двох чисел, що записані на сторонах, які виходять з неї. Після цього стерли всі числа на сторонах і в одній з вершин. Знайдіть число, яке стерли в цій вершині, якщо у двох її сусідніх вершинах записане число 2, а в трьох інших — число 1.

11. Функція $y=ax^2$

Розглянемо приклад. Нехай тіло вільно падає. Шлях S м, який тіло проходить за час t с, можна знайти за формулою $S=4{,}9t^2$.

Перейшовши до прийнятих позначень аргументу і функції, матимемо функцію, яку задають формулою виду $y=ax^2$, де $a\neq 0$.

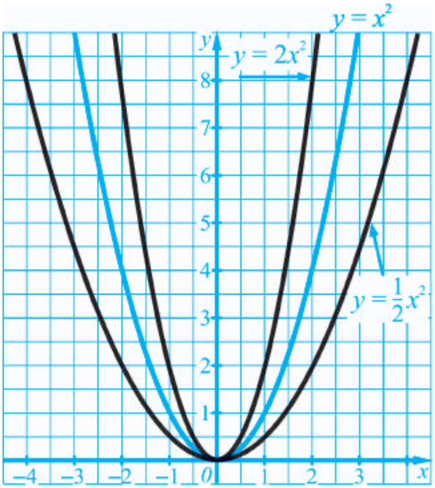


Рис. 55

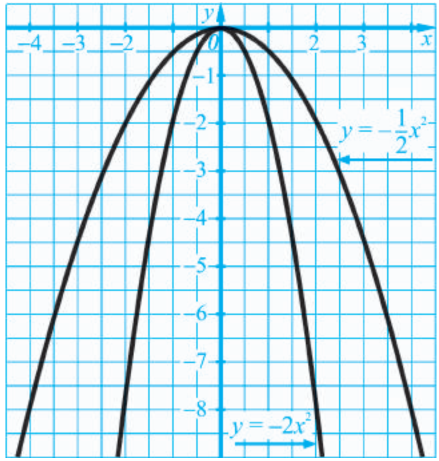


Рис. 56

На рисунках 55 і 56 зображено графіки функцій $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -2x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$, які є окремими випадками функції $y = ax^2$, якщо a дорівнює відповідно 1, 2, $\frac{1}{2}$, –2 і $-\frac{1}{2}$.

Графік функції $y = ax^2$, де $a \neq 0$, як і графік функції $y = x^2$, називають *параболою*.

Функція $y = ax^2$, де $a \neq 0$, має такі властивості:

1. *Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел.*

2. *Якщо* $a > 0$, *то областю значень функції є проміжок* $[0; +\infty)$; *якщо* $a < 0$ — *проміжок* $(-\infty; 0]$.

3. *Графік функції (парабола) симетричний відносно осі* y.

4. *Якщо* $x = 0$, *то* $y = 0$. Графік проходить через точку (0; 0). Цю точку називають *вершиною* параболи.

5. Якщо $a > 0$, то всі точки параболи, крім її вершини, розташовані вище від осі x; якщо $a < 0$, — нижче від цієї осі. Кажуть: *якщо* $a > 0$, *то вітки параболи напрямлені вгору*; *якщо* $a < 0$, — *вниз*.

6. *Якщо* $a > 0$, *то функція зростає на проміжку* $[0; +\infty)$ *і спадає на проміжку* $(-\infty; 0]$. *Якщо* $a < 0$, *то функція зростає на проміжку* $(-\infty; 0]$ *і спадає на проміжку* $[0; +\infty)$.

Доведення властивостей 3 і 6 подано в рубриці «Для тих, хто хоче знати більше».

Для тих, хто хоче знати більше

Доведення властивості 3.

● Нехай $(m; n)$ — довільна точка, яка належить графіку функції $y = ax^2$, де $a \neq 0$. Тоді виконується рівність $n = am^2$. Оскільки $m^2 = (-m)^2$, то правильною є й рівність $n = a(-m)^2$, з якої випливає, що графіку належить і точка $(-m; n)$ — точка, симетрична точці $(m; n)$ відносно осі y. Це означає, що графік функції симетричний відносно осі y. ●

Доведення властивості 6.

● Покажемо, що функція $y = ax^2$, де $a > 0$, спадає на проміжку $(-\infty; 0]$.

Нехай x_1 та x_2 — два довільні значення аргументу із проміжку $(-\infty; 0]$, до того ж, $x_2 > x_1$, а y_1 та y_2 — відповідні їм значення функції, тобто $y_1 = ax_1^2$, $y_2 = ax_2^2$. Покажемо, що $y_2 < y_1$. Для цього розглянемо різницю:

$$y_2 - y_1 = ax_2^2 - ax_1^2 = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Оскільки $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Значення x_1 та x_2 належать проміжку $(-\infty; 0]$, тому $x_2 \leq 0$, $x_1 < 0$ (бо $x_1 < x_2$), звідки $x_1 + x_2 < 0$. Урахувавши, що $a > 0$, матимемо:

$$a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0; \quad y_2 - y_1 < 0; \quad y_2 < y_1.$$

Більшому значенню аргументу з проміжку $(-\infty; 0]$ відповідає менше значення функції. Отже, якщо $a > 0$, то функція $y = ax^2$ на проміжку $(-\infty; 0]$ спадає.

Доведення властивості 6 для інших випадків проводять аналогічно. ●

Усно

426. Які властивості має функція:

а) $y = 2x^2$; **б)** $y = -2x^2$?

427. Які з тверджень **I–III** щодо функції $y = 5x^2$ є неправильними?

I. Областю значень функції є проміжок $(0; +\infty)$.

II. Функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$.

III. Графік функції проходить через точку $(5; 1)$.

а) Лише **I**; **б)** лише **II**; **в)** лише **III**; **г)** лише **I** і **III**.

Рівень А

428. Чи належить графіку функції $y = 8x^2$ точка: $A(2; 32)$; $B(3; 24)$; $C(-1; -8)$?

429. Дано функцію $f(x) = -4x^2$. Знайдіть значення виразу:

а) $f(-1) + f(3)$; **б)** $0{,}5f(2)$; **в)** $f(-1{,}5) - f(1{,}5)$.

430. Дано функцію $f(x) = 0{,}5x^2$. Знайдіть значення виразу:

а) $f(-2) + f(2)$; **б)** $4f(2)$; **в)** $f(-4) - f(4)$.

Побудуйте графік функції:

431. **а)** $y = 3x^2$; **б)** $y = \frac{1}{3}x^2$; **в)** $y = -1{,}5x^2$.

432. **а)** $y = 2{,}5x^2$; **б)** $y = \frac{1}{4}x^2$; **в)** $y = -3x^2$.

433. Побудуйте графік функції $y = -2{,}5x^2$. Укажіть проміжки, на яких функція зростає; спадає.

434. Побудуйте графік функції $y = 1{,}5x^2$ та вкажіть область її значень.

Рівень Б

435. Побудуйте графік функції $y = -2x^2$, де $-1 \le x \le 2$. Укажіть найменше та найбільше значення функції, область її значень.

436. Побудуйте графік функції $y = 1{,}5x^2$, де $-2 \le x \le 1$. Укажіть проміжки, на яких функція зростає; спадає.

437. Графік функції $y = ax^2$ проходить через точку $M(2; -2)$. Побудуйте графік цієї функції.

438. Графік функції $y = ax^2$ проходить через точку $N(0{,}5; 1)$. Чи проходить цей графік через точку $K(-4; 64)$?

439. Знайдіть координати спільних точок графіків функцій:

а) $y = 2x^2$ та $y = 5x - 3$; **б)** $y = -2x^2$ та $y = 8 - 8x$.

440. Доведіть, що пряма $y = -4x + 5$ і парабола $y = -x^2$ не мають спільних точок.

441. Знайдіть координати точок перетину параболи $y = 3x^2$ і прямої $y = 4x + 4$.

Розв'яжіть графічно рівняння:

442. **а)** $-\frac{1}{4}x^2 = \frac{2}{x}$; **б)** $\frac{1}{8}x^2 = \sqrt{x}$.

443. **а)** $2x^2 = 3x + 2$; **б)** $\frac{1}{2}x^2 = \frac{4}{x}$.

Рівень В

444. Побудуйте графік функції:

а) $y = x|x|$; **б)** $y = \frac{2x^4 - 2x^2}{x^2 - 1}$.

445. Розв’яжіть графічно нерівність:

а) $-2x^2 \geq x - 1$; **б)** $\frac{1}{2}x^2 > \frac{4}{x}$.

446. Знайдіть усі значення a, для яких парабола $y = ax^2$ перетинає пряму $y = 2x - 1$ у двох різних точках.

447. Доведіть, що функція $y = ax^2$, де $a < 0$, спадає на проміжку $[0; +\infty)$.

Вправи для повторення

448. Побудуйте графік функції:

а) $y = (x - 1{,}5)^2$; **б)** $y = (x + 1)^2 - 2$.

449. Доведіть нерівність:

а) $x^2 + 4x + 5 > 0$; **б)** $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$.

450. Спростіть вираз:

а) $\frac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}}$, де $a > 0$, $b > 0$; **б)** $\frac{x - \sqrt{xy} + y}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}$.

451. Від міста A до міста B автомобіль рухався деякий час зі швидкістю 60 км/год. Решту шляху він проїхав за такий самий час, але зі швидкістю 80 км/год. Знайдіть середню швидкість автомобіля.

452*. Першу половину шляху автомобіль їхав зі швидкістю 60 км/год, а другу — зі швидкістю 80 км/год. Знайдіть середню швидкість автомобіля.

Поміркуйте

453. 10 учнів обмінювалися за допомогою електронної пошти новорічними вітаннями. Виявилося, що кожний з них надіслав 5 вітань. Доведіть, що знайдуться двоє учнів, які привітали один одного.

Завдання для самоперевірки № 2

Початковий рівень

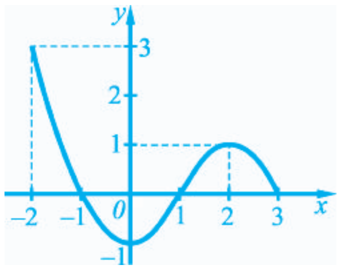
1. Чому дорівнює значення функції $f(x) = 2x^2 - 5$, якщо $x = 4$?

а) 11; **б)** 3; **в)** 27; **г)** –27.

2. Знайдіть нуль функції $y = 5x + 8$.

а) 1,6; **б)** –1,6; **в)** –16; **г)** –0,625.

3. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, де $-2 \le x \le 3$. Укажіть твердження, яке для цієї функції є правильним.



а) Найменше значення функції дорівнює –2.

б) Функція набуває додатних значень на проміжку (0; 3].

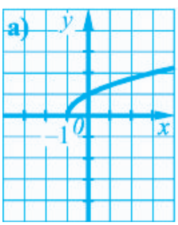
в) Областю значень функції є проміжок [–1; 3].

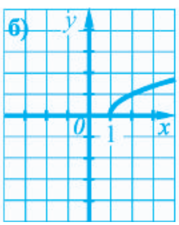
г) Функція спадає на проміжку [0; 2].

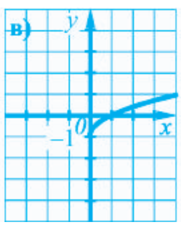
4. Знайдіть проміжок, на якому функція $y = 2x - 4$ набуває від'ємних значень.

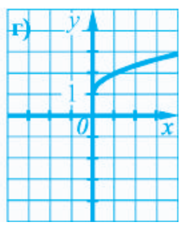
а) $(-\infty; 0)$; **б)** $(-\infty; 2)$; **в)** $(-\infty; 2]$; **г)** $(2; +\infty)$.

5. На одному з рисунків зображено графік функції $y = \sqrt{x} - 1$. Укажіть цей рисунок.









6. Укажіть твердження, які для функції $y = 3x^2$ є правильними.

I. Графіком функції є парабола, вітки якої напрямлені вниз.

II. Функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$.

III. Графік функції симетричний відносно осі y.

а) Лише **I**; **б)** лише **II**; **в)** лише **III**; **г)** лише **II** і **III**.

Середній рівень

7. Доберіть до кожного твердження (1–4) ту функцію (А–Д), для якої це твердження є правильним.

1) Функція спадає на проміжках $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.
2) Функція є зростаючою.
3) Областю значень функції є проміжок $[0; +\infty)$.
4) Найбільше значення функції дорівнює 0.

А) $y = 5x^2$;
Б) $y = -5x^2$;
В) $y = \frac{5}{x}$;
Г) $y = -\frac{5}{x}$;
Д) $y = 5x$.

8. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{5 - 2x}$.

9. Знайдіть нулі функції $y = x^2 + 6x - 16$.

10. Знайдіть координати точки перетину графіка функції $y = -4x + 8$ з віссю абсцис; віссю ординат.

11. Побудуйте графік функції $y = (x - 3)^2 - 1$. Користуючись графіком, знайдіть область її значень.

Достатній рівень

12. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{12 - 2x} + \sqrt{4x + 6}$.

13. Чи належить число 3 області значень функції $y = x^2 + 15x + 48$?

14. Знайдіть усі значення m, для яких функція $y = (2m - 8)x + 3$ є спадною.

15. Побудуйте графік функції $y = -2(x + 1)^2 + 2$. Користуючись графіком, знайдіть: **а)** область значень функції; **б)** проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень; **в)** проміжок, на якому функція спадає.

16. Розв'яжіть графічно рівняння $-x^2 = \frac{1}{x}$.

Високий рівень

17. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{9 - x} + \frac{\sqrt{x}}{3x^2 - 19x + 6}$.

18. Доведіть, що функція $y = \frac{3}{x}$ спадає на проміжку $(0; +\infty)$.

19. Знайдіть усі значення a, для яких функція $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a + 4$ має хоча б один нуль.

20. Побудуйте графік функції $y = |2x - 4| - 4$. Користуючись графіком, знайдіть: **а)** область значень функції; **б)** проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень.

21. За допомогою графіків функцій установіть, чи має корені рівняння $-\frac{1}{2}(x-2)^2 + 1 = \sqrt{x+1}$.

12. Квадратична функція

1. Поняття квадратичної функції. Функція $y = ax^2$, де $a \neq 0$, яку ми розглядали в попередньому пункті, є окремим випадком *квадратичної функції*.

Означення **Функцію, яку можна задати формулою $y = ax^2 + bx + c$, де x — незалежна змінна, a, b і c — деякі числа, до того ж, $a \neq 0$, називають *квадратичною функцією*.**

Так, $y = 3x^2 - 2x - 1$, $y = x^2 + 3x$, $y = -2x^2 + 1$, $y = x^2$, $y = -1{,}2x^2$ — квадратичні функції.

2. Графік квадратичної функції. З'ясуємо спочатку, що є графіком квадратичної функції $y = 2x^2 - 8x + 7$. Для цього перетворимо квадратний тричлен $2x^2 - 8x + 7$ так:

$$2x^2 - 8x + 7 = 2\left(x^2 - 4x + \frac{7}{2}\right) = 2\left(x^2 - 2\cdot 2\cdot x + 2^2 - 2^2 + \frac{7}{2}\right) =$$

$$= 2\left((x-2)^2 - \frac{1}{2}\right) = 2(x-2)^2 - 1.$$

Записавши квадратний тричлен $2x^2 - 8x + 7$ у вигляді $2(x - 2)^2 - 1$, кажуть, що з даного квадратного тричлена виділили квадрат двочлена $x - 2$.

Узагалі, *виділити із квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ квадрат двочлена означає записати його у вигляді $a(x - m)^2 + n$, де m і n — деякі числа*.

Отже, квадратичну функцію $y = 2x^2 - 8x + 7$ можна задати формулою $y = 2(x - 2)^2 - 1$. Тому її графіком є парабола, яку можна одержати, якщо параболу $y = 2x^2$ паралельно перенести вздовж осі x на 2 одиниці праворуч, а потім уздовж осі y на 1 одиницю вниз (рис. 57).

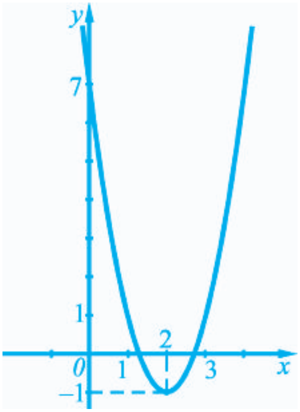


Рис. 57

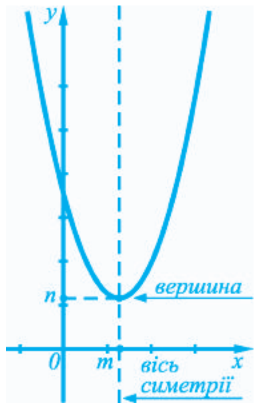


Рис. 58

Розглянемо загальний випадок. Нехай маємо квадратичну функцію $y = ax^2 + bx + c$. Виділимо із квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ квадрат двочлена:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Позначимо: $\frac{b}{2a}=-m$, $\frac{b^2-4ac}{4a}=-n$. Тоді

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n,}$$

де $m=-\frac{b}{2a}$, $n=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Отже, графік функції $y = ax^2 + bx + c$ можна одержати із графіка функції $y = ax^2$ за допомогою двох паралельних перенесень уздовж осей координат (див. рис. 58).

Графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола.

Точку $(m; n)$, де $m=-\frac{b}{2a}$, $n=-\frac{b^2-4ac}{4a}$, називають *вершиною* цієї параболи. Її *віссю симетрії* є пряма $x = m$. *Якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору*; *якщо $a < 0$, — вниз.*

Координати вершини параболи можна шукати за формулами

$$m = -\frac{b}{2a}, \quad n = -\frac{D}{4a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac,$$

або за формулами

$$m = -\frac{b}{2a}, \quad n = am^2 + bm + c$$

(ордината n вершини параболи є значенням квадратичної функції для $x = m$).

3. Побудова графіка квадратичної функції. Розглянемо квадратичну функцію

$$y = x^2 + 4x + 3.$$

Оскільки $x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 4 + 3 = (x + 2)^2 - 1$, то графік цієї функції можна одержати із графіка функції $y = x^2$ за допомогою двох паралельних перенесень: уздовж осі x на 2 одиниці ліворуч й уздовж осі y на 1 одиницю вниз (див. рис. 59).

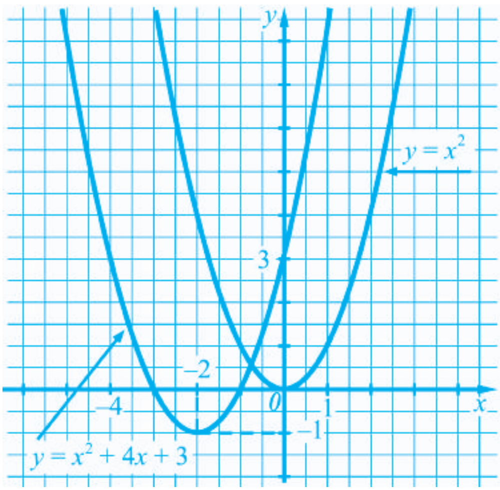


Рис. 59

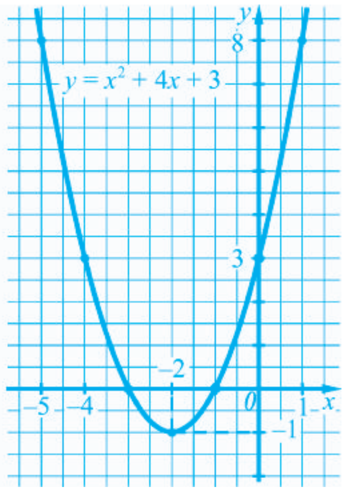


Рис. 60

Параболу, яка є графіком функції $y = x^2 + 4x + 3$, можна побудувати й так:

1) знаходимо координати вершини параболи:

$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$ — абсциса вершини;

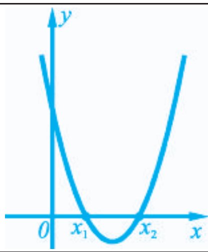
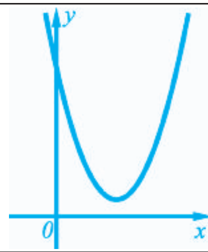
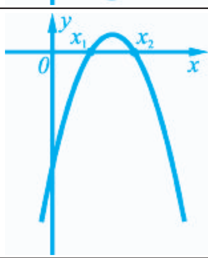
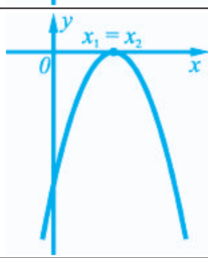
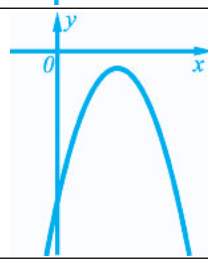
$n = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 3 = -1$ — ордината вершини.

2) знаходимо значення функції для кількох цілих значень x, близьких до абсциси вершини:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1
y	8	3	0	–1	0	3	8

3) позначаємо знайдені точки на координатній площині, й сполучаємо їх плавною лінією. Одержуємо шукану параболу (рис. 60).

4. Положення графіка квадратичної функції. У таблиці показано положення графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ залежно від знаків коефіцієнта a та дискримінанта D квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$.

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Якщо $D > 0$, то парабола перетинає вісь x у двох точках; якщо $D = 0$, — дотикається до цієї осі; якщо $D < 0$, — не має з віссю x спільних точок.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Побудувати графік функції $y = –2x^2 + 8x – 9$. Користуючись графіком, знайти:

а) область значень функції;

б) проміжок, на якому функція зростає; спадає.

● Знайдемо координати вершини параболи:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2\cdot(-2)} = 2; \qquad n = -2\cdot 2^2 + 8\cdot 2 - 9 = -1.$$

Складемо таблицю значень функції для кількох значень x:

x	0	1	2	3	4
y	–9	–3	–1	–3	–9

Позначивши на координатній площині точки, координати яких подано в таблиці й сполучивши їх плавною лінією, одержуємо шуканий графік (рис. 61).

Із графіка маємо: **а)** областю значень функції є проміжок $(-\infty; -1]$; **б)** функція зростає на проміжку $(-\infty; 2]$ і спадає на проміжку $[2; +\infty)$. ●

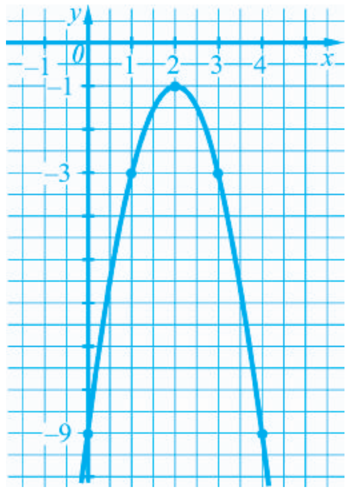


Рис. 61

Вправа 2. Довести, що функція $y = 0{,}5x^2 - 3x + 5$ набуває лише додатних значень, і знайти найменше значення функції.

● Знаходимо координати вершини параболи $y = 0{,}5x^2 - 3x + 5$:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\cdot 0{,}5} = 3$$ — абсциса вершини;

$n = 0{,}5\cdot 3^2 - 3\cdot 3 + 5 = 0{,}5$ — ордината вершини.

Оскільки вітки параболи напрямлені вгору, то значення квадратичної функції для $x = m = 3$ є найменшим. Це найменше значення дорівнює $n = 0{,}5$. Найменше значення функції є додатним, тому вона набуває лише додатних значень. ●

Усно

454. Які з даних функцій є квадратичними?

а) $y = 2x^2 - 6x - 3$; **б)** $y = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$;

в) $y = 4 - 2x^2 + x$; **г)** $y = -3x^2 + 2x$;

д) $y = 2x + 3$; **е)** $y = 5 - x^2$.

455. На рисунку 62 зображено параболу, яка є графіком деякої квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Укажіть:

а) знак коефіцієнта a;

б) координати вершини параболи;

в) вісь симетрії параболи;

г) нулі квадратичної функції;

д) проміжки, на яких квадратична функція набуває додатних значень; від'ємних значень;

е) проміжок, на якому квадратична функція зростає; спадає;

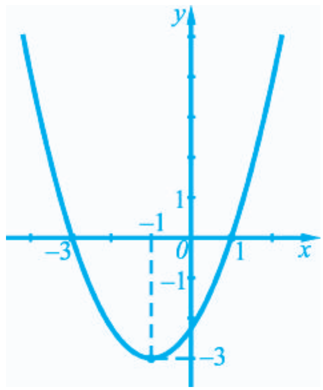


Рис. 62

є) найменше значення квадратичної функції й значення x, для якого функція набуває найменшого значення;

ж) знак коефіцієнта c.

456. Угору чи вниз напрямлені вітки параболи, яка є графіком функції:

а) $y = 2x^2 - 5x + 4$; **б)** $y = -5x^2 + 2x + 3$; **в)** $y = -x^2 + x$?

Рівень А

457. Дано функцію $f(x) = x^2 + 3x - 8$.

а) Знайдіть значення функції, якщо $x = 2$; $x = -4$.

б) Знайдіть значення аргументу, для яких $f(x) = -4$.

458. Дано функцію $f(x) = x^2 - x - 2$.

а) Знайдіть $f(x)$, якщо $x = 5$; $x = -2$.

б) Знайдіть значення x, для яких $f(x) = 10$.

Знайдіть координати вершини параболи:

459. **а)** $y = x^2 - 6x + 3$; **б)** $y = -2x^2 - 4x + 1$.

460. **а)** $y = 2x^2 + 8x - 1$; **б)** $y = -x^2 + 2x + 3$.

461. Знайдіть нулі функції $y = x^2 - 2x - 8$. Чи перетинає графік цієї функції вісь абсцис?

Побудуйте графік функції:

462. **а)** $y = x^2 + 2x - 3$; **б)** $y = x^2 - 4x + 5$;
в) $y = -x^2 + 4x$; **г)** $y = 2x^2 - 8x + 8$.

463. **а)** $y = x^2 - 2x + 2$; **б)** $y = x^2 + 6x + 8$;
в) $y = -x^2 - 4x - 3$; **г)** $y = 2x^2 + 4x + 2$.

464. Побудуйте графік функції $y = -x^2 + 2x$. Користуючись графіком, знайдіть:
а) область значень функції;
б) проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень;
в) проміжок, на якому функція спадає.

465. Побудуйте графік функції $y = x^2 + 2x$. Користуючись графіком, знайдіть:
а) область значень функції;
б) проміжки, на яких функція набуває додатних значень;
в) проміжок, на якому функція зростає.

Рівень Б

Побудуйте графік функції:

466. **а)** $y = 3x^2 + 6x - 3$; **б)** $y = -2x^2 + 8x - 5$;
в) $y = x^2 - x - 0{,}75$; **г)** $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

467. **а)** $y = 2x^2 - 8x + 7$; **б)** $y = -3x^2 - 6x$;
в) $y = 2x^2 - 2x - 1{,}5$; **г)** $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2$.

468. Побудуйте графік функції $y = -x^2 - 6x - 5$. Користуючись графіком, знайдіть:
а) найбільше значення функції;
б) область значень функції;
в) проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень; додатних значень;
г) проміжок, на якому функція зростає; спадає.

469. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 8x + 12$. Користуючись графіком, знайдіть:
а) найменше значення функції;
б) область значень функції;

в) проміжок, на якому функція набуває від'ємних значень;

г) проміжок, на якому функція спадає.

Знайдіть координати точок перетину прямої і параболи:

470. **а)** $3x - y = 4;\ y = 2x^2 - 6;$ **б)** $2x + y = -7;\ y = -3x^2 - 9x + 3.$

471. $3x + y = -2;\ y = 4x^2 + 5x + 1.$

Розв'яжіть графічно рівняння:

472. **а)** $x^2 - 2x + 2 = \frac{1}{x};$ **б)** $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x = \sqrt{x}.$

473. **а)** $x^2 - 4x + 1 = \frac{4}{x};$ **б)** $-x^2 + 3x + 6 = \sqrt{x}.$

Знайдіть область значень функції та проміжки, на яких вона зростає; спадає:

474. **а)** $y = 2x^2 - 3x + 4;$ **б)** $y = -3x^2 - 3x + 1.$

475. **а)** $y = 4x^2 + 4x - 3;$ **б)** $y = -2x^2 + 5x - 2.$

476. Доведіть, що функція $y = x^2 + 5x + 7$ набуває лише додатних значень. Знайдіть найменше значення цієї функції.

477. Для якого значення x тричлен $-3x^2 + 6x + 2$ набуває найбільшого значення? Знайдіть це найбільше значення.

478. Знайдіть найменше значення функції $y = 2x^2 - 6x - 2.$

479. Доведіть, що тричлен $-2x^2 + 7x - 7$ набуває лише від'ємних значень. Знайдіть найбільше значення цього тричлена.

480. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y = 2x^2 + 2x - 1$ на проміжку:

а) $[1; 2];$ **б)** $[-2; 1].$

481. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y = x^2 - 4x - 2$ на проміжку:

а) $[3; 5];$ **б)** $[0; 4].$

482. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 0{,}5x + 1, & \text{якщо } x \le -2; \\ -x^2 - 2x, & \text{якщо } -2 < x < 1; \\ 2x - 5, & \text{якщо } x \ge 1. \end{cases}$ Користуючись графіком, знайдіть:

а) область значень функції;

б) проміжки, на яких функція зростає;

в) найбільше значення функції на проміжку $[-3; 3].$

483. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 2x+3, & \text{якщо } x<0; \\ x^2-4x+3, & \text{якщо } 0 \le x < 3; \\ 3-x, & \text{якщо } x \ge 3. \end{cases}$ Користуючись графіком, знайдіть:

а) найбільше значення функції;

б) область значень функції;

в) проміжки, на яких функція спадає.

Рівень В

484. Для яких значень b і c вершиною параболи $y = x^2 + bx + c$ є точка $A(-4;\ 2)$?

485. Побудуйте графік функції:

а) $y = \dfrac{x^3-4x^2+x}{x}$; **б)** $y = \dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2-4}$;

в) $y = \dfrac{x^3+8}{x+2} - 5$; **г)** $y = x^2 - 4|x| + 3$;

д) $y = |2x^2 - 8x + 6|$; **е)** $y = |-2x^2 + 8|x| - 6|$.

486. Побудуйте графік функції $y = 2x^2 + 4x - 1$ та вкажіть кількість коренів рівняння $2x^2 + 4x - 1 = a$ залежно від значень a.

487. Знайдіть усі значення a, для яких функція $y = 1{,}5x^2 + 6x + 2a$ набуває лише додатних значень.

488. Знайдіть усі значення b, для яких функція $y = x^2 - 3x + b$ на проміжку $(0;\ 3)$ набуває лише від’ємних значень.

489. Для яких значень c найбільше значення функції $y = -2x^2 - 8x + c - 7$ дорівнює 5?

490. **а)** Знайдіть найбільше значення виразу $\dfrac{4}{4x^2-8x+5}$.

б) Розв’яжіть рівняння $\dfrac{4}{4x^2-8x+5} = 4 + \sqrt{x-1}$.

491. Під кутом до горизонту кинуто камінь, який, рухаючись по параболі, упав через 4 с на відстані 24 м від початкового положення. На якій висоті був камінь через 1 с після кидка, якщо найбільша висота, на яку він піднявся, дорівнювала 6 м?

492. Щоб залишати на ніч корів на пасовищі, пастухи вирішили обгородити на ньому ділянку прямокутної форми сіткою завдовжки 200 м. Якими мають бути сторони ділянки, щоб її площа була найбільшою?

Вправи для повторення

493. Спростіть вираз:

а) $\frac{(2a^3b)^2 \cdot 4ab^2}{(2ab)^5}$; **б)** $\frac{2x^3y^2 \cdot (-3xy^2)^3}{18x^5y^{10}}$.

494. Розв'яжіть нерівність:

а) $4x - 9 > 2x + 7$; **б)** $\frac{x-3}{6} \le x - 4$;

в) $x^2 + x - 1 > x(x + 5) + 15$; **г)** $(2x - 4)(x + 5) < 0$.

495. Розв'яжіть рівняння:

а) $3x^2 + 2x - 1 = (x - 3)^2 - 18$; **б)** $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$;

в)* $x^2 - 3|x| - 4 = 0$; **г)*** $x|x| - 4x + 3 = 0$.

496. Яких значень може набувати вираз $x - \frac{1}{x}$, якщо $x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$?

497*. Доведіть, що рівняння $ax^2 + (a + b)x + (b - a) = 0$ має хоча б один корінь для будь-яких значень a і b.

498. Два будівельники, працюючи разом, вимурували стіни будинку за 20 днів. За скільки днів вимурував би стіни кожний з них, працюючи окремо, якщо відомо, що перший може це зробити на 9 днів швидше, ніж другий?

Поміркуйте

499. За круглим столом сидять 6 учнів — 3 дівчини та 3 хлопці. Доведіть, що у когось з учнів обидва сусіди — дівчата.

13. Квадратні нерівності

Розглянемо нерівності $2x^2 - 3x + 1 > 0$, $-x^2 + 4x + 5 \le 0$. Лівою частиною кожної з цих нерівностей є квадратний тричлен зі змінною x, а правою — число 0. Такі нерівності називають *квадратними*.

Означення

Нерівності виду

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c > 0,}$$
$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c < 0,}$$
$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c \ge 0,}$$
$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c \le 0,}$$

де x — змінна, a, b, c — деякі числа, до того ж, $a \ne 0$, називають *квадратними нерівностями*.

Розв'язування квадратних нерівностей можна звести до знаходження проміжків, на яких квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ набуває додатних, недодатних, від'ємних або невід'ємних значень. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $2x^2 + x - 1 > 0$.

● Розглянемо квадратичну функцію $y = 2x^2 + x - 1$. Її графіком є парабола, вітки якої напрямлені вгору. З'ясуємо, чи має функція нулі. Для цього розв'яжемо рівняння $2x^2 + x - 1 = 0$. Його коренями є $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Отже, парабола перетинає вісь x у двох точках з абсцисами -1 та $\frac{1}{2}$.

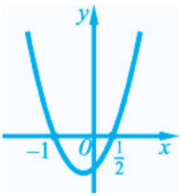


Рис. 63

Схематично зображуємо параболу на координатній площині (рис. 63). З побудованого графіка бачимо, що функція набуває додатних значень, якщо значення x належить проміжку $(-\infty; -1)$ або проміжку $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ (на цих проміжках точки параболи розташовані над віссю x). Отже, множиною розв'язків нерівності $2x^2 + x - 1 > 0$ є $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Відповідь. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. ●

Використовуючи схематичне зображення параболи $y = 2x^2 + x - 1$ (див. рис. 63), можна записати й множини розв'язків таких нерівностей:

Нерівність	*Множина розв'язків*	*Коментар*. У множину розв'язків включено всі значення x, для яких функція $y = 2x^2 + x - 1$ набуває:
$2x^2 + x - 1 \geq 0$	$(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$	невід'ємних значень
$2x^2 + x - 1 < 0$	$\left(-1; \frac{1}{2}\right)$	від'ємних значень
$2x^2 + x - 1 \leq 0$	$\left[-1; \frac{1}{2}\right]$	недодатних значень

Приклад 2. Розв'язати нерівність $-3x^2 + 14x - 8 \geq 0$.

● Графіком функції $y = -3x^2 + 14x - 8$ є парабола, вітки якої напрямлені вниз. Розв'язавши рівняння $-3x^2 + 14x - 8 = 0$, одержимо: $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = 4$. Отже, парабола перетинає вісь x у точках з абсцисами $\frac{2}{3}$ та 4. Схематично зображуємо дану параболу (рис. 64). Функція $y = -3x^2 + 14x - 8$ набуває невід'ємних значень на проміжку $\left[\frac{2}{3};\ 4\right]$. Цей проміжок і є множиною розв'язків нерівності.

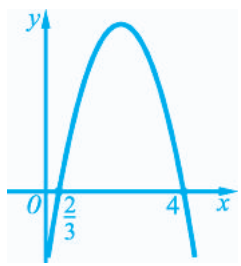


Рис. 64

Відповідь. $\left[\frac{2}{3};\ 4\right]$. ●

Приклад 3. Розв'язати нерівність:

а) $x^2 - 2x + 3 > 0$; **б)** $x^2 - 2x + 3 < 0$.

● Графіком функції $y = x^2 - 2x + 3$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Рівняння $x^2 - 2x + 3 = 0$ не має коренів, бо $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$. Отже, парабола не перетинає осі x. Схематично зображуємо цю параболу (рис. 65). Функція $y = x^2 - 2x + 3$ для всіх значеннях x набуває додатних значень.

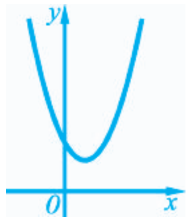


Рис. 65

Тому множиною розв'язків нерівності $x^2 - 2x + 3 > 0$ є множина всіх дійсних чисел, тобто проміжок $(-\infty; +\infty)$, а нерівність $x^2 - 2x + 3 < 0$ розв'язків не має.

Відповідь. **а)** $(-\infty; +\infty)$; **б)** розв'язків немає. ●

Приклад 4. Розв'язати нерівність:

а) $-4x^2 + 4x - 1 < 0$; **б)** $-4x^2 + 4x - 1 \ge 0$.

● Графіком функції $y = -4x^2 + 4x - 1$ є парабола, вітки якої напрямлені вниз. Для рівняння $-4x^2 + 4x - 1 = 0$ маємо: $D = 4^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 1 = 0$; $x_{1,2} = 0,5$. Отже, парабола дотикається до осі x. Схематично зображуємо цю параболу (рис. 66). Функція $y = -4x^2 + 4x - 1$ набуває від'ємних значень на проміжках $(-\infty; 0,5)$ і $(0,5; +\infty)$, невід'ємних значень — лише для $x = 0,5$.

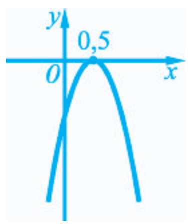


Рис. 66

Тому множиною розв'язків нерівності **а)** є об'єднання проміжків $(-\infty; 0,5)$ і $(0,5; +\infty)$, а нерівність **б)** має лише один розв'язок — $x = 0,5$.

Відповідь. **а)** $(-\infty; 0,5) \cup (0,5; +\infty)$; **б)** 0,5. ●

Підсумок. *Щоб розв'язати квадратну нерівність*

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \ge 0 \text{ або } ax^2 + bx + c \le 0,$$

можна розглянути квадратичну функцію $y = ax^2 + bx + c$ і:

1) знайти нулі функції;

2) якщо квадратична функція має два нулі, то позначити їх точками на осі x і через ці точки схематично провести параболу $y = ax^2 + bx + c$, вітки якої напрямлені вгору, якщо $a > 0$, і вниз — якщо $a < 0$;

якщо квадратична функція має один нуль, то позначити його точкою на осі x і схематично провести параболу, яка дотикається до осі x у цій точці; вітки параболи напрямлені вгору, якщо $a > 0$, і вниз — якщо $a < 0$;

якщо квадратична функція не має нулів, то схематично провести параболу, розташовану у верхній півплощині вітками вгору, якщо $a > 0$, у нижній півплощині вітками вниз — якщо $a < 0$;

3) знайти на осі x проміжки, на яких значення функції $y = ax^2 + bx + c$ задовольняють відповідну нерівність.

Для тих, хто хоче знати більше

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\frac{x^2-4x-5}{|x-2|} \le 0$.

● Дріб у лівій частині нерівності має зміст, якщо $x \ne 2$. Оскільки для $x \ne 2$ знаменник дробу додатний, то дана нерівність виконуватиметься, якщо $x^2 - 4x - 5 \le 0$. Множиною розв'язків квадратної нерівності є проміжок $[-1; 5]$. Виключивши з нього число 2, одержимо множину розв'язків даної нерівності: $[-1; 2) \cup (2; 5]$.

Відповідь. $[-1; 2) \cup (2; 5]$. ●

Приклад 6. Розв'язати нерівність $\sqrt{x-1}\left(x^2+2x-8\right) \ge 0$.

● Вираз $\sqrt{x-1}$ має зміст, якщо: $x - 1 \ge 0$; $x \ge 1$. Тому розв'язки даної нерівності повинні належати проміжку $[1; +\infty)$.

Множник $\sqrt{x-1}$ набуває лише невід'ємних значень, а саме: $\sqrt{x-1} = 0$, якщо $x = 1$; $\sqrt{x-1} > 0$, якщо $x > 1$. Тому розглянемо два випадки:

1) $x = 1$. Тоді матимемо правильну нерівність $0 \ge 0$. Отже, $x = 1$ — розв'язок нерівності.

2) $x > 1$. Тоді $\sqrt{x-1} > 0$, і дана нерівність виконуватиметься для тих значень x, для яких вираз $x^2 + 2x - 8$ набуватиме невід'ємних значень. Маємо систему нерівностей: $\begin{cases} x > 1; \\ x^2 + 2x - 8 \ge 0. \end{cases}$ Розв'язавши цю систему, знайдемо розв'язки: $x \ge 2$.

Відповідь. $x = 1$, $x \ge 2$, або по-іншому $\{1\} \cup [2; +\infty)$. ●

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати нерівність $3x(2 - x) > x^2 + 6x - 8$.

● Перенесемо доданки із правої частини нерівності в ліву, змінивши їхні знаки на протилежні, і спростимо одержаний у лівій частині вираз:

$$6x - 3x^2 - x^2 - 6x + 8 > 0;\ \ -4x^2 + 8 > 0.$$

Поділимо обидві частини останньої нерівності на –4, одержимо нерівність

$$x^2 - 2 < 0.$$

Графіком квадратичної функції $y = x^2 - 2$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Рівняння $x^2 - 2 = 0$ має корені $x_1 = -\sqrt{2}$ та $x_2 = \sqrt{2}$. Отже, парабола перетинає вісь x у точках з абсцисами $-\sqrt{2}$ і $\sqrt{2}$. Зображуємо схематично цю параболу (рис. 67). Множиною розв'язків нерівності $x^2 - 2 < 0$, а, отже, і заданої в умові нерівності, є проміжок $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$.

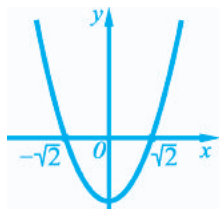


Рис. 67

Відповідь. $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$. ●

Вправа 2. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{4x - 2x^2}$.

● Область визначення функції утворюють ті значення x, для яких підкореневий вираз $4x - 2x^2$ набуває невід'ємних значень.

Розв'яжемо нерівність $4x - 2x^2 \geq 0$. Графіком функції $y = 4x - 2x^2$ є парабола, вітки якої напрямлені вниз. Рівняння $4x - 2x^2 = 0$ має корені: $x_1 = 0$ та $x_2 = 2$. Отже, парабола перетинає вісь x у точках з абсцисами 0 і 2. Зображуємо схематично параболу (рис. 68). Нерівність $4x - 2x^2 \geq 0$ виконується, якщо x належить проміжку [0; 2]. Він і є шуканою областю визначення.

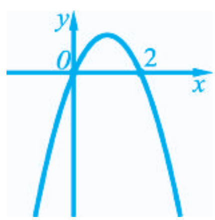


Рис. 68

Відповідь. [0; 2]. ●

Вправа 3. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4} + \dfrac{x+1}{\sqrt{4-x}}$.

● Область визначення функції утворюють усі значення x, які є розв'язками системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4 \geq 0; \\ 4 - x > 0. \end{cases}$$

Коренями рівняння $x^2 + 3x - 4 = 0$ є числа –4 й 1. Оскільки вітки параболи $y = x^2 + 3x - 4$ напрямлені вгору, то множиною розв'язків першої нерівності системи є множина $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$.

Розв'яжемо другу нерівність системи: $4 - x > 0$; $-x > -4$; $x < 4$. $(-\infty; 4)$ — множина розв'язків другої нерівності.

Зобразимо на координатній прямій множини розв'язків обох нерівностей системи.

Спільні розв'язки нерівностей утворюють множину $(-\infty; -4] \cup [1; 4)$.

Відповідь. $(-\infty; -4] \cup [1; 4)$. ●

Усно

500. На рисунку 69 зображено графік функції $y = x^2 - x - 2$. Назвіть множини розв'язків нерівностей:

а) $x^2 - x - 2 > 0$; **б)** $x^2 - x - 2 \geq 0$;
в) $x^2 - x - 2 < 0$; **г)** $x^2 - x - 2 \leq 0$.

501. На рисунку 70 зображено графік функції $y = x^2 + 2x + 1$. Назвіть множини розв'язків нерівностей:

а) $x^2 + 2x + 1 > 0$; **б)** $x^2 + 2x + 1 \geq 0$;
в) $x^2 + 2x + 1 < 0$; **г)** $x^2 + 2x + 1 \leq 0$.

502. На рисунку 71 зображено графік функції $y = x^2 - 4x + 5$. Назвіть множини розв'язків нерівностей:

а) $x^2 - 4x + 5 > 0$; **б)** $x^2 - 4x + 5 \geq 0$;
в) $x^2 - 4x + 5 < 0$; **г)** $x^2 - 4x + 5 \leq 0$.

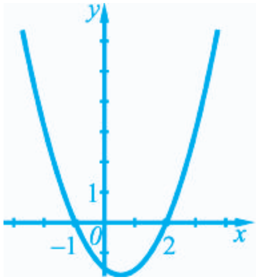


Рис. 69

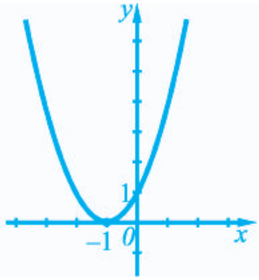


Рис. 70

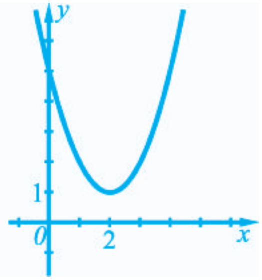


Рис. 71

Рівень А

Знайдіть множину розв'язків нерівності:

503. **а)** $x^2 > 0$; **б)** $x^2 \geq 0$; **в)** $x^2 < 0$; **г)** $x^2 \leq 0$.

Розв'яжіть нерівність:

504. **а)** $x^2 + 3x - 4 > 0$; **б)** $x^2 + 3x - 4 \geq 0$;
в) $x^2 + 3x - 4 < 0$; **г)** $x^2 + 3x - 4 \leq 0$.

505. **а)** $-x^2 + 3x - 3 > 0$; **б)** $-x^2 + 3x - 3 \geq 0$;
в) $-x^2 + 3x - 3 < 0$; **г)** $-x^2 + 3x - 3 \leq 0$.

506. **а)** $2x^2 - 8x + 8 > 0$; **б)** $2x^2 - 8x + 8 \geq 0$;
в) $2x^2 - 8x + 8 < 0$; **г)** $2x^2 - 8x + 8 \leq 0$.

Розв'яжіть нерівність:

507. **а)** $x^2 + 6x + 8 \geq 0$; **б)** $x^2 + 5x - 14 < 0$;
в) $2x^2 - 3x \leq 0$; **г)** $3x^2 - 12 > 0$;
д) $2x^2 + 3x - 5 < 0$; **е)** $3x^2 - 10x + 3 > 0$;
є) $-x^2 - 2x + 3 > 0$; **ж)** $-2x^2 + 5x - 3 < 0$.

508. **а)** $x^2 + x - 6 < 0$; **б)** $x^2 - 3x + 2 \geq 0$;
в) $x^2 + 4x \leq 0$; **г)** $2x^2 - 18 > 0$;
д) $3x^2 - 3x - 6 \geq 0$; **е)** $2x^2 + 3x - 9 < 0$;
є) $-x^2 + 4x - 3 \leq 0$; **ж)** $-x^2 + 6x - 9 > 0$.

509. **а)** $2x^2 > 2$; **б)** $4 - x^2 \geq 0$; **в)** $x^2 < 2x + 8$; **г)** $-2x^2 \leq 3x$.

510. **а)** $x^2 < 9$; **б)** $x^2 > 4x$; **в)** $2 - 2x^2 \geq 0$; **г)** $x^2 \leq 5x + 6$.

Знайдіть область визначення функції:

511. а) $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$; б) $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$;

в) $y = \sqrt{x^2 - 16}$; г) $y = \sqrt{4x - x^2}$.

512. а) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$; б) $y = \sqrt{9 - x^2}$.

Розв'яжіть нерівність:

513. а) $(x + 3)(x - 1) < 0$; б) $(2x - 1)(x + 4) \geq 0$.

514. а) $(x - 2)(x - 4) > 0$; б) $(x + 1)(2x + 5) \leq 0$.

Рівень Б

Розв'яжіть нерівність:

515. а) $x^2 - 0{,}4x - 0{,}96 \leq 0$; б) $x^2 + x - 1 > 0$;

в) $-50x^2 + 250x - 300 \geq 0$; г) $6x^2 - 5x + 1 < 0$;

д) $-0{,}5x^2 + 3x - 4 \leq 0$; е) $-\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3 \geq 0$.

516. а) $x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 > 0$; б) $x^2 - 4x + 2 < 0$;

в) $-8x^2 + 40x - 56 < 0$; г) $12x^2 + 7x + 1 \geq 0$;

д) $0{,}2x^2 - 0{,}1x - 1 \leq 0$; е) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 > 0$.

517. а) $(2x + 3)^2 < x^2 + 4x + 12$; б) $(x - 3)(2x + 5) < x(x + 1)$;

в) $(2x - 1)(2x + 1) > 2(x + 0{,}5)^2$; г) $(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x - 6)^2 \geq 0$.

518. а) $x(2x + 3) \leq (2x + 3)(2x - 1)$; б) $(3x - 1)^2 - (x - 1)^2 > 4(x + 4)$;

в) $(4x + 1)(4x - 1) < 8(x + 1)^2 - 1$; г) $(2x - 1)(3x + 2) - (3x - 1)(x + 4) \leq -1$.

519. а) $\frac{x^2 - 3x}{6} - \frac{x + 1}{9} > \frac{x - 14}{18}$; б) $\frac{2x - 3}{12} - \frac{1 - 3x^2}{16} < \frac{x}{24} - \frac{7}{48}$.

520. а) $\frac{x^2 - 1}{4} - \frac{x + 3}{6} \leq -\frac{2}{3}$; б) $\frac{x^2 - 3x + 2}{6} + \frac{3 - x}{9} < \frac{8x + 9}{36} - \frac{1}{4}$.

521. Для яких значень x квадратний тричлен $-x^2 + x - 0{,}21$ набуває від'ємних значень?

522. Для яких значень x квадратний тричлен $x^2 + 2x + 0{,}75$ набуває невід'ємних значень?

Знайдіть область визначення функції:

523. **а)** $y=\sqrt{(1-5x)(1-x)}$; **б)** $y=\sqrt{3x^2+4x+1}$;

в) $y=\sqrt{x^2-5x+75}$; **г)** $y=\sqrt{1+x-20x^2}$.

524. **а)** $y=\sqrt{3x^2-7x-6}$; **б)** $y=\sqrt{24-10x-x^2}$.

525. Знайдіть усі значення x, для яких точки параболи $y=2x^2+x-2$ розташовані вище від відповідних точок прямої $y=3x+22$.

526. Знайдіть усі значення x, для яких точки параболи $y=x^2-2x-4$ розташовані нижче від відповідних точок прямої $y=-4x+20$.

527. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $x^2-(a+1)x+a^2=0$ має два різні корені; не має коренів.

528. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $x^2+(2a+1)x-2a-1=0$ не має коренів.

Рівень В

529. Розв'яжіть нерівність:

а) $(x^2+1)^2(x^2-10x+9)\geq 0$; **б)** $|x|(x^2-x-30)>0$;

в) $\sqrt{x}\,(x^2-9x-90)\leq 0$; **г)** $\sqrt{(x-2)(2x+3)}\geq 0$;

д) $\sqrt{20x^2-41x+20}\leq 0$; **е)** $\dfrac{1}{\sqrt{18+3x-x^2}}\geq 0$;

є) $(2x-9)\sqrt{x^2-6x+5}>0$; **ж)** $(x+3)\sqrt{x^2+x-12}\geq 0$;

з) $\dfrac{x^2+3x-4}{|x+1|}\leq 0$; **и)** $\dfrac{x^2-2x-15}{(x-6)^2}>0$.

530. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} x^2-2x-24>0; \\ 14-2x\geq 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2-2x-15\leq 0; \\ x^2-9<0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+3\leq x^2; \\ x^2<2x+8; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x^2+x\leq 6; \\ 4x-x^2\geq 0. \end{cases}$

531. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{15-2x-x^2}}+2\sqrt{6-3x}$; **б)** $y=\dfrac{1+\sqrt{x^2-x-12}}{\sqrt{12-x-x^2}}$;

в) $y=\sqrt{2x^4-8x^2}-\sqrt{x-1}$; **г)** $y=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-11x+5}}-\dfrac{1}{|x|-4}$.

532. Знайдіть усі значення a, для яких система нерівностей $\begin{cases} x^2-4x-5\le 0; \\ x<a \end{cases}$ не має розв'язків.

533. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння:

а) $(a+1)x^2-(a-3)x-4=0$ має два різні корені;

б) $ax^2+(1-a)x+a+1=0$ має хоча б один корінь.

534. Знайдіть усі значення b, для яких нерівність не має розв'язків:

а) $x^2+3x+1-2b<0$; **б)** $bx^2-4x+b>0$.

535. Знайдіть усі значення a, для яких нерівність $(2a-1)x^2+2ax+a+3\le 0$ виконується для всіх дійсних значень x.

Вправи для повторення

536. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{a^2-4c^2}{2a+4c}$; **б)** $\dfrac{m^4-n^2}{3m^3-3mn}$.

537. Доведіть тотожність $\left(x+y-\dfrac{4xy}{x+y}\right):\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x+y}=1$.

538. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} 2x+y=3; \\ 2x-3y=-1. \end{cases}$

539. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x+2y=3; \\ 3x-y=2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x-4y=10; \\ 4x-3y=10. \end{cases}$

540. Шлях між двома містами автобус подолав за 3 год, а легковий автомобіль — за 2 год. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона на 30 км/год більша від швидкості автобуса.

541. Змішавши 20-відсотковий і 60-відсотковий розчини кислоти, отримали 800 г розчину, що містить 30% кислоти. Скільки грамів кожного розчину змішали?

Поміркуйте

542. У деякому місті кожний десятий математик — музикант, а кожний одинадцятий музикант — математик. Кого в місті більше — музикантів чи математиків?

14. Системи рівнянь із двома змінними

1. Рівняння із двома змінними. Нехай відомо, що гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 5 см. Якщо довжину одного з катетів позначити через x см, а другого — через y см, то матимемо рівність

$$x^2 + y^2 = 5^2,$$

яка містить дві змінні — x та y. Таку рівність, як відомо, називають *рівнянням із двома змінними* (або рівнянням із двома невідомими).

У 7 класі ми розглядали лінійні рівняння із двома змінними — рівняння виду $ax + by = c$. Так, $2x - 5y = 1$ — лінійне рівняння. Рівняння $x^2 - y = 2x$, $x^2y = 1$, $x + y = 3x^2y^2$ теж є рівняннями із двома змінними, однак не є лінійними.

Лівою та правою частинами рівняння $x^2 - y = 2x$ є многочлени відповідно другого та першого степеня. Більший степінь дорівнює 2, тому кажуть, що $x^2 - y = 2x$ — це рівняння другого степеня із двома змінними.

Рівняння $2x - 5y = 1$, $x^2y = 1$ і $x + y = 3x^2y^2$ — це відповідно рівняння першого, третього і четвертого степенів.

Нагадаємо, що *розв'язком* рівняння із двома змінними називають пару значень змінних, для яких рівняння перетворюється у правильну числову рівність. Так, рівняння $x^2 + y^2 = 25$ для $x = 3$, $y = 4$ перетворюється у правильну числову рівність $3^2 + 4^2 = 25$. Тому пара значень змінних $x = 3$, $y = 4$ є розв'язком цього рівняння. Даний розв'язок записують ще й так: (3; 4). Розв'язками рівняння $x^2 + y^2 = 25$ є також пари (–3; 4), (4; 3), (0; 5), (–5; 0) тощо.

Якщо на координатній площині позначити всі точки, координати яких є розв'язками деякого рівняння із двома змінними, то одержимо *графік* цього рівняння.

Графіком лінійного рівняння $ax + by = c$, де $a \neq 0$ або $b \neq 0$, як ми знаємо, є пряма. З курсу геометрії відомо, що графіком рівняння

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

де $R > 0$, є коло із центром у точці $(a; b)$, радіус якого дорівнює R. Так, графіком рівняння $x^2 + y^2 = 25$ є коло із центром у початку координат, радіус якого дорівнює 5 (рис. 72).

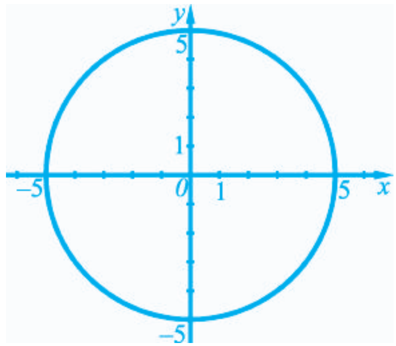


Рис. 72

Рівняння $x^2 - y = 0$ та $xy = 1$ рівносильні рівнянням $y = x^2$ та $y = \frac{1}{x}$. Тому їхніми графіками є відповідно парабола та гіпербола.

2. Графічний спосіб розв'язування систем рівнянь. У 7 класі ми розглядали різні способи розв'язування систем лінійних рівнянь: графічний спосіб, способи підстановки, додавання. Нехай потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ y = 5 - x^2, \end{cases}$$

обидва рівняння якої є рівняннями другого степеня.

Будуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь системи (рис. 73). Графіком рівняння $x^2 + y^2 = 25$ є коло, а графіком рівняння $y = 5 - x^2$ — парабола. Ці графіки мають 3 спільні точки: $A(0; 5)$, $B(-3; -4)$ і $C(3; -4)$. Легко перевірити, що координати кожної з цих точок є розв'язком як першого, так і другого рівнянь системи. Отже, система рівнянь має 3 розв'язки: $(0; 5)$, $(-3; -4)$ і $(3; -4)$.

Зауваження. Щоб переконатися, що, використовуючи рисунок, ми правильно вказали спільну точку графіків рівнянь системи, потрібно перевірити, чи координати цієї точки справді є розв'язками кожного з її рівнянь.

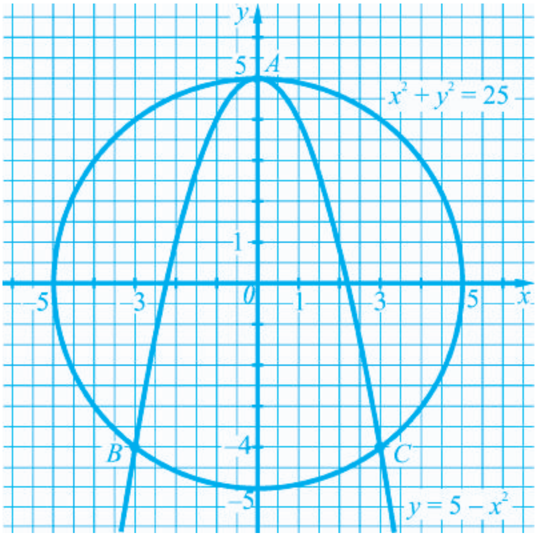


Рис. 73

Щоб розв'язати систему рівнянь із двома змінними графічним способом, потрібно:

1) побудувати графіки рівнянь системи в одній системі координат;
2) знайти координати спільних точок цих графіків.

3. Розв'язування систем рівнянь. Якщо в системі рівнянь із двома змінними одне з рівнянь є рівнянням першого степеня, то таку систему можна розв'язати *способом підстановки*.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x - y = 2; \\ 3x^2 + y^2 = 28. \end{cases}$

● Виразимо з першого рівняння змінну y через змінну x:

$$-y = -3x + 2; \qquad y = 3x - 2.$$

Підставимо у друге рівняння замість y вираз $3x - 2$ і розв'яжемо одержане рівняння з однією змінною x:

$3x^2 + (3x - 2)^2 = 28; \quad 3x^2 + 9x^2 - 12x + 4 - 28 = 0;$

$12x^2 - 12x - 24 = 0; \quad x^2 - x - 2 = 0; \; x_1 = -1; x_2 = 2.$

За формулою $y = 3x - 2$ знаходимо:

$y_1 = 3x_1 - 2 = 3 \cdot (-1) - 2 = -5; \qquad y_2 = 3x_2 - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4.$

Отже, система рівнянь має два розв'язки: $x_1 = -1$, $y_1 = -5$; $x_2 = 2$, $y_2 = 4$.

Відповідь. (–1; –5), (2; 4). ●

Щоб розв'язати систему рівнянь способом підстановки, потрібно:

1) виразити з деякого рівняння системи одну змінну через іншу;
2) підставити одержаний вираз в інше рівняння замість відповідної змінної;
3) розв'язати одержане рівняння з однією змінною;
4) знайти відповідне значення іншої змінної.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10; \\ xy = 3. \end{cases}$

● Помножимо друге рівняння системи на 2 і додамо до першого рівняння, одержимо:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 16.$$

Звідси: $(x + y)^2 = 16$; $x + y = 4$ або $x + y = -4$.

Отже, можливі два випадки.

1) $\begin{cases} x + y = 4; \\ xy = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4 - x; \\ x(4 - x) = 3; \end{cases}$ $4x - x^2 - 3 = 0$; $x^2 - 4x + 3 = 0$;

$x_1 = 1$; $x_2 = 3$. $y_1 = 4 - 1 = 3$; $y_2 = 4 - 3 = 1$.

(1; 3), (3; 1) — розв'язки системи.

2) $\begin{cases} x + y = -4; \\ xy = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -4 - x; \\ x(-4 - x) = 3; \end{cases}$ $-4x - x^2 - 3 = 0$; $x^2 + 4x + 3 = 0$;

$x_3 = -1$; $x_4 = -3$. $y_3 = -4 - (-1) = -3$; $y_4 = -4 - (-3) = -1$.

(–1; –3), (–3; –1) — розв'язки системи.

Відповідь. (1; 3), (3; 1), (–1; –3), (–3; –1). ●

Зауваження. Систему рівнянь із прикладу 2 можна було б розв'язати способом підстановки, виразивши із другого рівняння змінну y через змінну x: $y = \dfrac{3}{x}$.

Для тих, хто хоче знати більше

Розв'язуючи систему рівнянь виду $\begin{cases} x+y=a; \\ xy=b, \end{cases}$ де a і b — деякі відомі числа, можна використовувати теорему, обернену до теореми Вієта. Так, розв'язуючи приклад 2, ми мали систему рівнянь $\begin{cases} x+y=4; \\ xy=3. \end{cases}$ На основі згаданої теореми числа x та y є коренями квадратного рівняння $t^2-4t+3=0$. Розв'язавши рівняння, знайдемо: $t_1=1$; $t_2=3$. Тоді пари чисел (1; 3) і (3; 1) — розв'язки даної системи.

Для розв'язування ряду систем рівнянь зручно використовувати *метод заміни змінних*. Розглянемо приклад.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=3; \\ 3xy+\dfrac{2x}{y}=14. \end{cases}$

● Зробимо заміну: $xy=u$, $\dfrac{x}{y}=v$. Одержимо систему лінійних рівнянь $\begin{cases} u-v=3; \\ 3u+2v=14, \end{cases}$ розв'язком якої є $u=4$, $v=1$. Повернувшись до заміни, матимемо:

$$\begin{cases} xy=4; \\ \dfrac{x}{y}=1; \end{cases} \quad \begin{cases} xy=4; \\ x=y; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2=4; \\ x=y; \end{cases} \quad x_1=2,\, y_1=2; \quad x_2=-2,\, y_2=-2.$$

Відповідь. (2; 2), (–2; –2). ●

Розглянемо ще один приклад.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} xy-x=35; \\ xy^3-xy^2=560. \end{cases}$

● Перепишемо дану систему так: $\begin{cases} xy-x=35; \\ y^2(xy-x)=560. \end{cases}$ Оскільки $xy-x=35$, то із другого рівняння системи матимемо: $y^2\cdot 35=560$; $y^2=16$; $y_1=-4$, $y_2=4$.

Підставимо ці значення y в перше рівняння системи:

$$-4x-x=35,\ x_1=-7; \quad 4x-x=35,\ x_2=11\frac{2}{3}.$$

Відповідь. (–7; –4); $\left(11\frac{2}{3}; 4\right)$. ●

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Побудувати графік рівняння $y = \sqrt{4 - x^2}$.

● Оскільки для допустимих значень x вираз $\sqrt{4 - x^2}$ набуває невід'ємних значень, то $y \geq 0$. Тому дане рівняння рівносильне таким двом умовам: $y \geq 0$ та $y^2 = 4 - x^2$, які можна записати так: $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$. Отже, графіком рівняння є півколо із центром у початку координат, радіус якого дорівнює 2, і яке розташоване у верхній півплощині (рис. 74). ●

Вправа 2. Побудувати графік рівняння $|2x - y| = 2$.

● Якщо модуль числа дорівнює 2, то цим числом є 2 або –2. Отже, $2x - y = 2$ або $2x - y = -2$. Тому графіком рівняння є дві прямі, задані рівняннями $2x - y = 2$ і $2x - y = -2$ (рис. 75). ●

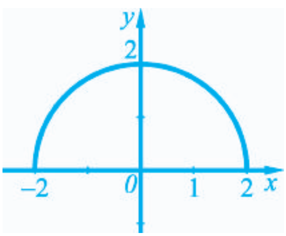


Рис. 74

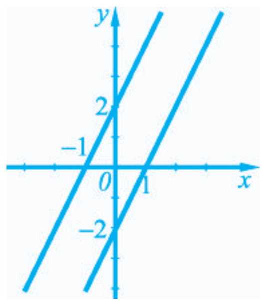


Рис. 75

Вправа 3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + 2xy = 5; \\ 3y - 2xy = 2. \end{cases}$

● Додамо до першого рівняння системи друге рівняння, одержимо: $x + 3y = 7$, звідки $x = 7 - 3y$. Підставивши замість x вираз $7 - 3y$ в друге рівняння системи, матимемо:

$$3y - 2y(7 - 3y) = 2; \quad 3y - 14y + 6y^2 - 2 = 0; \quad 6y^2 - 11y - 2 = 0;$$

$$y_1 = -\frac{1}{6}; \; y_2 = 2. \quad x_1 = 7 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = 7\frac{1}{2}; \quad x_2 = 7 - 3 \cdot 2 = 1.$$

Відповідь. $\left(7\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right)$, $(1; 2)$. ●

Усно

543. Чи є розв'язком рівняння $x^2 + y = 10$ пара чисел:

а) $x = 3;\ y = 1;$ **б)** $(-2;\ 6)$?

544. Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17; \\ xy = 4 \end{cases}$ пара чисел:

а) $x = -1;\ y = 4;$ **б)** $(1;\ 4)$?

Рівень А

Побудуйте графік рівняння:

545. **а)** $2x - 3y = 6;$ **б)** $x^2 + y^2 = 9;$ **в)** $2x^2 - y = 0.$

546. **а)** $x - 2y = 2;$ **б)** $x^2 + y^2 = 4.$

Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

547. **а)** $\begin{cases} x + y = 2; \\ y = x^2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x - y = 2; \\ x^2 + y^2 = 4; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ y = x^2 + 1. \end{cases}$

548. **а)** $\begin{cases} 2x - y = 0; \\ y = x^2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9; \\ x + y = 3. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь:

549. **а)** $\begin{cases} y = 3x - 2; \\ y = x^2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x = 2y + 1; \\ xy + y = 4; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 7; \\ y = 2x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = 2; \\ xy = 1; \end{cases}$ **д)** $\begin{cases} x - y = 11; \\ xy = -28; \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} xy + y^2 = 4; \\ x + y = 2. \end{cases}$

550. **а)** $\begin{cases} y = x + 1; \\ xy = x^2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x + y^2 = 9; \\ x + 2y = 9; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 2x - y = 2; \\ xy + 2y = 0. \end{cases}$

Рівень Б

Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

551. а) $\begin{cases} y - x^2 - 2x = 0; \\ x - y = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y + 1 = 0; \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - y = 0; \\ \sqrt{x} - y = 0. \end{cases}$

552. а) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1; \\ y - x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = \sqrt{x}; \\ x^2 + y^2 = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + 2y = 7; \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

553. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4; \\ y = x^2 - 2x + 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = -1; \\ y = 4 - x^2. \end{cases}$

554. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9; \\ xy = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2 + 4x; \\ \sqrt{x+1} = y. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь:

555. а) $\begin{cases} x + y + 1 = 0; \\ 3x^2 + 2xy + y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = 4; \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 5y = 14; \\ 2x + 3y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - y = 1; \\ (x-1)(y+2) + x^2 + 3 = 2xy; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + y = 4; \\ \dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{y} = 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x + y = 5; \\ \dfrac{4x}{x+y} + \dfrac{1}{x} = 2. \end{cases}$

556. а) $\begin{cases} x + y = 6; \\ x^2 - xy = 2y^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 4 = 3y; \\ (2x+1)(y-1) = 6xy; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - 2y = 4; \\ x^2 - xy = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = 1; \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 4. \end{cases}$

557. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + xy = 10; \\ x + 2y - xy = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy + 2x = 5; \\ xy - 3y = -6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + 2x - y = 5; \\ x^2 + x - 2y = 6. \end{cases}$

558. а) $\begin{cases} x^2 + xy = 10; \\ x^2 - xy = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y^2 = 5; \\ 2x - y - y^2 = -4. \end{cases}$

559. а) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} = 1; \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{8}{x-y} - \dfrac{8}{x+y} = 1; \\ \dfrac{2}{x-y} + \dfrac{4}{x+y} = 1. \end{cases}$

560. а) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{7}{y} = 3; \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x+y} = 7; \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x+y} = 1. \end{cases}$

561. а) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 1; \\ 2x - 3y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26; \\ xy = 5. \end{cases}$

562. а) $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 4; \\ 4x + 3y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ xy = 12. \end{cases}$

Рівень В

563. Побудуйте графік рівняння:

а) $y + \sqrt{4 - x^2} = 0;$ б) $|x - y| = 2;$

в) $|y| - x^2 = 0;$ г) $\dfrac{y - x^2}{(x-2)^2 + (y-4)^2} = 0.$

564. Розв’яжіть графічно систему рівнянь:

а) $\begin{cases} xy = 2; \\ (x+1)^2 + y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 1; \\ (x-2)^2 + y^2 = 25; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x| - y = 0; \\ x^2 + y = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 9; \\ (x-3)^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

565. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} xy^2 - x = 2y; \\ xy^2 - y = 3x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 6xy + 9y^2 = 225; \\ y^2 + 3xy = -35; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10; \\ x^2y^2 = 9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y - 2xy = 3; \\ xy(x + y) = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} xy - \dfrac{y}{x} = 1; \\ 2xy - \dfrac{3y}{x} = 6; \end{cases}$

е) $\begin{cases} (2x + y)^2 - 2(2x + y) = 15; \\ 2x + 2xy + y = 11; \end{cases}$

є) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{2y}{x} = 3; \\ x^2 + 3xy - 5y^2 = 20; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dfrac{x - 2y}{x + 2y} + \dfrac{x + 2y}{x - 2y} = \dfrac{10}{3}; \\ 3x - 5y = 17; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8; \\ x^4 - x^2y^2 = 72; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 56; \\ x^2 + xy + y^2 = 28. \end{cases}$

566. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} y + 2x = 3; \\ 3x^2 - xy = a \end{cases}$ залежно від значень a?

567. Знайдіть усі значення b, для яких система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ x + y = b: \end{cases}$

а) не має розв'язків; **б)** має лише один розв'язок.

568. Знайдіть усі значення a, для яких система рівнянь має задану кількість розв'язків:

а) $\begin{cases} y - |x| = 0; \\ x^2 + y = a; \end{cases}$ 2 розв'язки;

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a; \\ xy = 1; \end{cases}$ 4 розв'язки.

Вправи для повторення

569. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{3ab + 6b^2}{a^2 - 4b^2}$;

б) $\dfrac{x^2 - 5}{x - \sqrt{5}}$;

в) $\dfrac{6}{a} + \dfrac{a + 3}{a - 3} : \dfrac{a^2 + 3a}{3a - 9}$;

г) $\dfrac{9}{3a + c} - \dfrac{3a - c}{2a - c} \cdot \left(\dfrac{18a - 9c}{9a^2 - c^2} - 2a + c \right)$.

570. Відомо, що $1{,}5 < m < 1{,}7$. Оцініть значення виразу:

а) $2m - 4{,}8$; **б)** $4{,}5 - 2m$.

571. Корені x_1 та x_2 рівняння $x^2 + px + 12 = 0$ задовольняють умову $x_1 - x_2 = 1$. Знайдіть p, якщо $p > 0$.

572. За 3 год за течією річки і 2 год проти течії теплохід проходить 123 км, а за 2 год за течією і 1 год проти течії — 75 км. Знайдіть швидкість теплохода у стоячій воді і швидкість течії річки.

573. За 1 кг помідорів і 3 кг огірків господиня заплатила 25 грн. Тиждень тому, коли помідори були дешевшими на 10%, а огірки дорожчими на 20%, за 3 кг помідорів і 2 кг огірків вона заплатила 39 грн. Скільки гривень коштує 1 кг помідорів і скільки 1 кг огірків зараз?

574*. Басейн, до якого підведені дві труби, через першу трубу наповнюється водою на 5 год швидше, ніж через другу. Якщо спочатку відкрити другу трубу, а через 8 год відкрити й першу, то басейн буде наповнений за 18 год. Знайдіть місткість басейну, якщо за 5 год через першу трубу і за 4 год через другу трубу разом проходить 20 м^3 води.

Поміркуйте

575. Із чисел 1, 2, 3, ..., 99, 100 вибрали 51 число. Чи обов'язково серед них знайдуться два числа, різниця яких дорівнює 1?

15. Розв'язування задач за допомогою систем рівнянь

Ви вже розв'язували задачі за допомогою лінійних та квадратних рівнянь, систем лінійних рівнянь із двома змінними. Розглянемо задачі, математичними моделями яких є системи рівнянь, у яких хоча б одне з рівнянь не є лінійним.

Задача 1. Із двох пунктів, відстань між якими дорівнює 18 км, вийшли одночасно назустріч одна одній дві групи туристів і зустрілися через 2 год. Знайти швидкість руху кожної групи, якщо першій для проходження усього шляху між пунктами потрібно часу на 0,9 год більше, ніж другій.

● Нехай швидкість першої групи туристів дорівнює x км/год, а другої — y км/год. Групи зустрілися через 2 год, тому до зустрічі перша група пройшла $2x$ км, а друга — $2y$ км. Разом вони пройшли 18 км, тому $2x + 2y = 18$.

Щоб пройти увесь шлях завдовжки 18 км, першій групі потрібно $\frac{18}{x}$ год, а другій — $\frac{18}{y}$ год. Оскільки першій групі на це потрібно часу на 0,9 год більше, ніж другій, то: $\frac{18}{x} - \frac{18}{y} = 0,9.$ Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 18; \\ \frac{18}{x} - \frac{18}{y} = 0,9. \end{cases}$$

За змістом задачі значення x та y повинні бути додатними: $x > 0$ й $y > 0$. За таких умов $xy \neq 0$. Тому, помноживши обидві частини другого рівняння на xy, матимемо:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 18; \\ 18y - 18x = 0,9xy; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 9; \\ 20y - 20x = xy. \end{cases}$$

Розв’яжемо одержану систему рівнянь способом підстановки: $y = 9 - x$;

$20(9 - x) - 20x = x(9 - x)$; $x^2 - 49x + 180 = 0$; $x_1 = 4$; $x_2 = 45$.

Якщо $x = 4$, то $y = 9 - 4 = 5$.

Якщо $x = 45$, то $y = 9 - 45 = -36$ — не задовольняє нерівність $y > 0$.

Відповідь. 4 км/год; 5 км/год. ●

Задача 2. Сад і город мають прямокутні форми. Довжина саду на 30 м менша від довжини городу, проте його ширина на 10 м більша від ширини городу. Знайти розміри саду, якщо його площа дорівнює 900 м^2, а площа городу — 1200 м^2.

● За умовою задачі складаємо таблицю.

	Довжина	*Ширина*	*Площа*
Сад	x м	y м	$xy = 900$
Город	$(x + 30)$ м	$(y - 10)$ м	$(x + 30)(y - 10) = 1200$

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 900; \\ (x+30)(y-10) = 1200. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему:

$$\begin{cases} xy = 900; \\ xy - 10x + 30y - 300 = 1200; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 900; \\ 900 - 10x + 30y - 300 = 1200; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 900; \\ -10x + 30y = 600; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 900; \\ x - 3y = -60; \end{cases} \quad \begin{cases} y(3y-60) = 900; \\ x = 3y - 60; \end{cases}$$

$3y^2 - 60y - 900 = 0$; $y^2 - 20y - 300 = 0$; $y_1 = -10$; $y_2 = 30$.

Значення y_1 не задовольняє умову задачі (ширина саду не може виражатися від'ємним числом). Тому: $y = 30$; $x = 3y - 60 = 3 \cdot 30 - 60 = 30$.

Відповідь. 30 м; 30 м. ●

Задача 3. Два робітники мають викласти доріжку. Після того як перший робітник пропрацював 1 день сам, а потім 2 дні разом із другим, виявилось, що вони виклали $\frac{2}{3}$ усієї доріжки. За скільки днів може викласти доріжку кожний робітник, працюючи окремо, якщо, працюючи разом, вони можуть її викласти за 4 дні?

● Нехай перший робітник може викласти доріжку за x днів, а другий — за y днів. Тоді за 1 день перший робітник викладає $\frac{1}{x}$ частину доріжки, другий — $\frac{1}{y}$ частину, а разом — $\frac{1}{4}$ частину. Тому $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$.

Коли перший робітник пропрацював 3 дні, а другий — 2 дні, то вони виклали $\frac{2}{3}$ усієї доріжки, тому $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{2}{3}$.

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4}; \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знаходимо: $x = 6$, $y = 12$.

Отже, перший робітник може викласти доріжку за 6 днів, а другий — за 12 днів.

Відповідь. 6 днів; 12 днів. ●

Задача 4. Двоцифрове число в 4 рази більше від суми його цифр і на 16 більше від добутку цифр. Знайти це число.

● Нехай шукане число має x десятків та y одиниць. Тоді воно дорівнює $10x + y$. Це число: в 4 рази більше від суми його цифр, тому $10x + y = 4(x + y)$; на 16 більше від добутку цифр, тому $(10x + y) - xy = 16$.

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 10x + y = 4(x + y); \\ (10x + y) - xy = 16. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знаходимо: $x_1 = 2$, $y_1 = 4$; $x_2 = 4$, $y_2 = 8$.

Отже, шуканим числом є 24 або 48.

Відповідь. 24 або 48. ●

Рівень А

576. Периметр ділянки прямокутної форми дорівнює 30 м, а площа — 56 м^2. Знайдіть довжину та ширину ділянки.

577. Знайдіть розміри майданчика прямокутної форми, якщо його довжина на 2 м менша від подвоєної ширини, а площа дорівнює 180 м^2.

578. Добуток двох чисел дорівнює 64. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 12 більше від іншого.

579. Сума двох чисел дорівнює 11, а їх добуток — 28. Знайдіть ці числа.

580. Сума двох чисел дорівнює 2, а різниця їх квадратів — 16. Знайдіть ці числа.

581. Різниця двох чисел дорівнює 10, а сума їх квадратів — 82. Знайдіть ці числа.

582. Сума двох натуральних чисел дорівнює 20, а потроєний добуток дорівнює квадрату більшого із цих чисел. Знайдіть ці числа.

583. Різниця двох натуральних чисел дорівнює 8, а їх добуток утричі більший від суми. Знайдіть ці числа.

584. Двоцифрове число більше від подвоєної суми його цифр на 8, а від добутку цифр — на 12. Знайдіть це число.

585. Знайдіть двоцифрове число, яке в 7 разів більше від суми його цифр і на 34 більше від добутку цифр.

586. Знайдіть сторони прямокутника, периметр якого дорівнює 28 дм, а діагональ — 10 дм.

587. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 13 см. Знайдіть катети цього трикутника, якщо їх сума дорівнює 17 см.

588. Периметр прямокутника дорівнює 26 см, а сума площ квадратів, побудованих на двох його суміжних сторонах, дорівнює 89 см^2. Знайдіть сторони прямокутника.

Рівень Б

589. З міста *A* в місто *B*, відстань між якими дорівнює 210 км, одночасно виїхали два автомобілі. Швидкість одного з них на 10 км/год більша від швидкості іншого, завдяки чому він приїхав у місто *B* на 30 хв швидше. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

590. З бази відпочинку одночасно у протилежних напрямах вирушили дві групи туристів. Через 3 год відстань між ними дорівнювала 21 км. Знайдіть швидкість кожної групи, коли відомо, що шлях завдовжки 6 км одна з них проходить на 30 хв швидше від іншої.

591. Відстань між містами *A* та *B* дорівнює 480 км. З цих міст одночасно назустріч один одному вийшли два поїзди. Через 3 год руху їм до зустрічі залишалося пройти ще 60 км. Знайдіть швидкість кожного поїзда, якщо шлях між містами *A* та *B* один з них проходить на 2 год швидше, ніж інший.

592. Два велосипедисти виїхали одночасно з пунктів *A* і *B* назустріч один одному. Через годину вони зустрілися і, не зупиняючись, продовжили рухатися з попередніми швидкостями. Один з них прибув у пункт *A* на 27 хв раніше, ніж інший — у пункт *B*. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста, якщо відстань між пунктами дорівнює 36 км.

593. З міста *A* в місто *B*, відстань між якими дорівнює 120 км, виїхав мотоцикліст, а через 40 хв назустріч йому з міста *B* — автомобіль. Мотоцикліст у місто *B* й автомобіль у місто *A* прибули одночасно. Знайдіть швидкості мотоцикліста та автомобіля, якщо мотоцикліст за 3 год проїжджає на 90 км більше, ніж автомобіль за 1 год і швидкість автомобіля не перевищує 120 км/год.

594. Два екскаватори, працюючи разом, вирили котлован за 7 год 30 хв. За який час може вирити котлован кожен екскаватор, працюючи окремо, якщо одному з них потрібно на це часу на 8 год більше, ніж іншому?

595. Два трактори, працюючи разом, зорали поле за 2 дні. За скільки днів може зорати все поле кожен трактор, працюючи окремо, якщо один з них може зробити це на 3 дні швидше, ніж інший?

596. Резервуар, місткість якого дорівнює 25 м^3, можна наповнити водою через два крани за 2 год. Якщо перші 10 м^3 води пропустити через перший кран, а решту — через другий, то резервуар буде наповнено за 4 год. Який об'єм води проходить через кожний кран за 1 год?

597. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати замовлення за 10 год. Якщо спочатку перший робітник виконає половину замовлення, а потім другий — решту, то замовлення буде виконано за 22 год 30 хв. За який час кожний робітник, працюючи окремо, може виконати все замовлення?

598. Батько і син можуть пофарбувати паркан, працюючи разом, за 4 год. За скільки годин може пофарбувати паркан кожний з них, працюючи окремо, якщо батькові для того, щоб пофарбувати $\frac{2}{3}$ паркану, потрібно часу на 1 год більше, ніж синові, щоб пофарбувати $\frac{1}{4}$ паркану?

599. Кожний із двох принтерів друкує текстовий файл, обсяг якого дорівнює 180 сторінок. Перший принтер надрукував 6 сторінок за той самий час, за який другий надрукував 5 сторінок. Скільки сторінок друкує кожний принтер за хвилину, якщо перший закінчив друк на 1,5 хв швидше від другого?

600. З першої ділянки зібрали 12 т полуниці, а з другої — 10 т. Знайдіть площу кожної ділянки, коли відомо, що загальна площа обох ділянок дорівнює 2 га і врожайність полуниці на першій ділянці на 2,5 т з гектара менша, ніж на другій.

601. Двоцифрове число більше від добутку його цифр на 16. Знайдіть це число, якщо воно на 18 менше від числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку.

602. Знайдіть двоцифрове число, яке задовольняє такі умови: якщо число зменшити на 18, то одержимо добуток його цифр; якщо число збільшити на 27, то одержимо число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку.

603. Площа прямокутника дорівнює 108 дм^2, а діагональ — 15 дм. Знайдіть сторони цього прямокутника.

604. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а площа — 24 см^2. Знайдіть катети цього трикутника.

605. Шлях від Києва до Харкова легковий автомобіль подолав на 2 год швидше, ніж вантажний, бо його швидкість була на 20 км/год більшою, ніж швидкість вантажівки. Знайдіть швидкість вантажівки, якщо відомо, що довжина траси, якою їхали автомобілі, дорівнює 480 км.

606. Кілька учнів поділили порівну між собою 90 яблук. Якби учнів було на 3 менше, то кожний з них одержав би на 1 яблуко більше. Скільки було учнів?

Рівень В

607. Басейн можна наповнювати водою за допомогою двох насосів. Якщо перший насос увімкнути на 5 год, а потім другий — на 7 год, то буде наповнено $\frac{11}{20}$ басейну. Після цього, щоб наповнити басейн, потрібно ще 5 год спільної роботи обох насосів. За скільки годин може наповнити басейн кожний насос, працюючи окремо?

608. Двом працівникам доручили виготовити партію однакових деталей. Після того як перший пропрацював 7 год, а другий — 4 год, виявилось, що вони виготовили $\frac{5}{9}$ усіх деталей. Пропрацювавши разом ще 4 год, вони встановили, що їм залишилося виготовити $\frac{1}{18}$ усіх деталей. За скільки годин перший робітник, працюючи окремо, може виготовити партію деталей?

609. Катер за 42 хв пройшов 5 км озером і 11 км річкою, що впадає в це озеро. Знайдіть швидкість катера у стоячій воді, якщо він за 2 год проходить за течією річки на 10 км менше, ніж за 3 год проти течії.

610. Відстань між пристанями *A* і *B*, що розташовані на річці, дорівнює 33 км. Моторний човен шлях від *A* до *B* і назад проходить за 3 год 20 хв. Знайдіть швидкість течії річки, коли відомо, що 20 км, з яких 11 км — за течією річки і 9 км — проти течії, човен проходить за 1 год.

611. Кілька самоскидів перевезли щебінь, виділений для будівництва дороги, за 14 днів. Усі самоскиди виконували щодня однакову кількість рейсів, перевозячи за кожен по 5 т щебеню. Якби самоскидів було на 4 більше і кожний робив щодня на 1 рейс більше, то щебінь було б перевезено за 10 днів. Якби ж самоскидів було на 10 більше і кожний робив щодня на 2 рейси більше, то щебінь було б перевезено за 7 днів. Скільки було самоскидів, скільки рейсів виконував кожен з них за один день і скільки тонн щебеню було перевезено?

612. Із двох пунктів *A* і *B*, відстань між якими дорівнює 24 км, одночасно виїхали два автомобілі назустріч один одному. Після зустрічі автомобіль, що виїхав з пункту *A*, прибув у пункт *B* через 16 хв, а другий автомобіль — у пункт *A* через 4 хв. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

Вправи для повторення

613. Обчисліть:

а) $(5^3)^4 : 5^{10}$; **б)** $(4^{-5})^5 \cdot 4^{23}$; **в)** $4^{-4} \cdot (2^{-3})^{-3}$; **г)** $1{,}25^{-8} \cdot 0{,}8^{-8}$.

614. Розкладіть на множники:

а) $(a-b)^2 + \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b$; **б)** $a^2m + b^2 - abm - ab$.

615. Доведіть, що значення виразу $\frac{8a}{2a+5b} - \frac{100b^2}{4a^2-25b^2} : \left(1 - \frac{2a}{2a-5b}\right)$ дорівнює 4 для всіх допустимих значень *a* і *b*.

616. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{3x-5}{8} + \frac{3x+5}{6} = \frac{1}{2}$; **б)** $\frac{3}{x^2+4x+4} + \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}$.

617. Доведіть нерівність:

а) $a^2 + 25b^2 \geq 10ab$; **б)** $a^2 - 4a + b^2 - 2b + 6 > 0$.

618. У класі кількість дівчат відноситься до кількості хлопців як 6 : 5. Чи може кількість учнів цього класу дорівнювати 28?

Поміркуйте

619. В оранжереї виростили певну кількість тюльпанів. Якщо з них скласти букети по 3 тюльпани в кожному, по 5 у кожному або по 7 у кожному, то залишиться один тюльпан. Якщо ж скласти букети по 11 тюльпанів у кожному, то зайвих тюльпанів не буде. Яку найменшу кількість тюльпанів могли виростити в оранжереї?

Цікаво знати

Парабола має низку цікавих властивостей. Уявімо собі, що парабола може відбивати світлові промені. Якщо на параболу падатиме пучок променів паралельно її осі симетрії, то після відбивання вони пройдуть через одну точку, яку називають фокусом параболи (на рисунку 76 — це точка F). Навпаки, якщо у фокусі параболи помістити джерело світла, то промені, відбившись від параболи, підуть паралельно її осі симетрії.

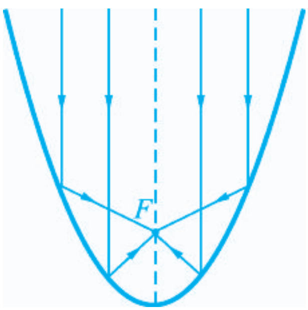


Рис. 76

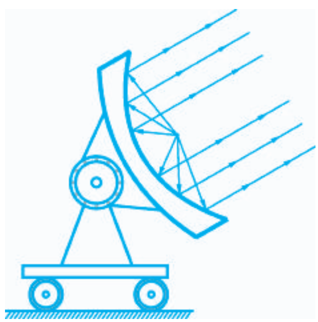


Рис. 77

На цій властивості параболи ґрунтується будова параболічних дзеркал (рис. 77). Поверхня такого дзеркала утворюється внаслідок обертання параболи навколо своєї осі. Параболічні дзеркала використовують для створення прожекторів, автомобільних фар тощо.

За певних умов камінь, кинутий під кутом до горизонту, рухається «по параболі». Те ж саме можна сказати і про гарматний снаряд.

Запитання і вправи для повторення § 2

1. Що називають функцією? Які є способи задання функції?
2. Що називають областю визначення і областю значень функції?
3. Що називають графіком функції?
4. Що називають нулями функції? Знайдіть нулі функції $y = x^2 - 4$.
5. Яку функцію називають зростаючою на проміжку; спадною на проміжку? Яку функцію називають зростаючою; спадною? Наведіть приклади.
6. Як, використовуючи графік функції $y = x^2$, побудувати графіки функцій: $y = x^2 + 3$; $y = (x - 1)^2$; $y = (x - 1)^2 + 3$; $y = -x^2$?
7. Які властивості має функція $y = ax^2$?
8. Яку функцію називають квадратичною? Що є графіком квадратичної функції? Як його побудувати?
9. Як розв'язують квадратні нерівності? Поясніть це на прикладі нерівності $x^2 + 2x - 3 < 0$.
10. Як розв'язати систему рівнянь із двома змінними графічним способом?
11. Як розв'язати систему рівнянь із двома змінними способом підстановки?

620. На рисунку 78 зображено графік функції $y = f(x)$.

а) Укажіть область визначення функції.

б) Знайдіть: $f(0)$; $f(3)$.

в) Продовжте речення. *Точка* $M(2; 4)$ *належить графіку функції, тому* $f(2) = \dots$.

г) Укажіть найменше та найбільше значення функції, а також її область значень.

д) Укажіть проміжки, на яких функція зростає; спадає.

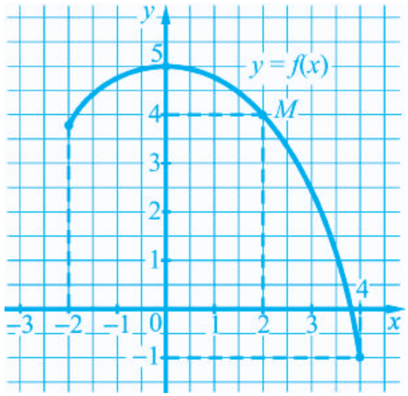


Рис. 78

621. Функцію задано формулою $f(x) = 2x^2 - 2$.

а) Знайдіть: $f(-2)$; $f(0)$; $f(2)$.

б) Знайдіть значення аргументу, яким відповідає значення функції: –2; 6.

622. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \dfrac{x+1}{2x-3}$; **б)** $y = \dfrac{1}{x^2-4x-12}$; **в)** $y = \sqrt{3-5x}$;

г) $y = x + \sqrt{3x+12}$; **д)** $y = \sqrt{x-7} - \sqrt{4-0{,}5x}$; **е)** $y = \sqrt{9-3x} + \dfrac{1}{\sqrt{2x+6}}$.

623. Знайдіть нулі функції:

а) $y = 4x + 12$; **б)** $y = x^2 - 5x - 14$; **в)** $y = 3x^2 + 7x + 5$;

г) $y = \dfrac{3x-2}{x-2}$; **д)** $y = \dfrac{x^2+3x-28}{x+7}$; **е)** $y = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{x-3}$.

624. Чи належить число 12 області значень функції:

а) $y = -x + 3$; **б)** $y = -x^2 + 10$; **в)** $y = x^2 - 12x + 44$?

625. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 4$, де $-2 \le x \le 3$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) область значень функції;

б) проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень; додатних значень;

в) проміжки, на яких функція зростає; спадає.

626. Побудуйте графік функції:

а) $y = 2x - 1$; **б)** $y = 3x^2$; **в)** $y = -2x^2$.

Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

627. **а)** $y = x^2$; **б)** $y = x^2 - 3$; **в)** $y = (x - 1{,}5)^2$.

628. **а)** $y = -\frac{4}{x}$; **б)** $y = -\frac{4}{x} + 2$; **в)** $y = -\frac{4}{x-2}$.

629. **а)** $y = \sqrt{x}$; **б)** $y = \sqrt{x} - 3$; **в)** $y = \sqrt{x+2}$.

Побудуйте графік функції:

630. **а)** $y = (x + 2)^2 - 2$; **б)** $y = \frac{1}{x-1} + 2$; **в)** $y = -\sqrt{x-3} + 2$.

631. **а)** $y = x^2 - 6x + 5$; **б)** $y = 3x^2 + 9x + 6$; **в)** $y = -2x^2 + 2x - 1$.

632. Графік функції $y = ax^2$ проходить через точку $A(-2; -2)$. Знайдіть a та побудуйте графік функції. Чи проходить цей графік через точку $B(4; -8)$?

633. Графік функції $y = \frac{k}{x-2}$ проходить через точку $M(1; 2)$. Знайдіть k та побудуйте графік функції. Чи проходить цей графік через точку $N(4; 1)$?

634. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 4x + 3$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) область значень функції;

б) проміжки, на яких функція набуває від’ємних значень;

в) проміжок, на якому функція спадає.

635. Побудуйте графік функції $y = -x^2 - 2x + 3$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) область значень функції;

б) проміжки, на яких функція набуває від’ємних значень;

в) проміжок, на якому функція зростає; спадає.

Побудуйте графік функції:

636. **а)** $y = \begin{cases} 2x - 3, \text{ якщо } x \le 1; \\ x^2 - 2, \text{ якщо } x > 1; \end{cases}$ **б)** $y = \begin{cases} x + 1, \quad \text{якщо } x < 0; \\ 1 - \sqrt{x}, \text{ якщо } x \ge 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} -4, \quad \text{якщо } x \le -2; \\ -x^2, \text{ якщо } -2 < x < 1; \\ x - 2, \text{ якщо } x \ge 1; \end{cases}$ **г)** $y = \begin{cases} -x - 1, \quad \text{якщо } x < -1; \\ \sqrt{1 - x^2}, \text{ якщо } -1 \le x \le 1; \\ x - 1, \quad \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

637*. **а)** $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} + x^2$; **б)** $y = x^2 + 2|x - 1|$;

в) $y = \left|x^2 + 4x\right|$; **г)** $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$;

д) $y = \dfrac{|2x|}{x}$; **е)** $y = x^2 - \dfrac{x-1}{|x-1|}$.

638. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

а) $y = 3x^2 - 3x + 1$ та $y = -x + 2$; **б)** $y = x^2 - 2x - 5$ та $y = -x^2 + 4x + 3$.

639. За допомогою графіків функцій установіть, чи має корені рівняння:

а) $-x - 3 = \sqrt{x+4}$; **б)** $x^2 + 2x = \sqrt{x-1}$; **в)** $\dfrac{4}{x-2} = 4 - 2x$.

640. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $(x-1)^2 = \sqrt{x-1}$; **б)** $2 - x^2 = \sqrt{x}$; **в)** $\dfrac{6}{x-1} = x^2 - 2x + 6$.

641*. Укажіть кількість коренів рівняння $\left|2|x| - 1\right| = x - a$ залежно від значень параметра a.

Розв'яжіть нерівність:

642. **а)** $x^2 \le 25$; **б)** $x^2 > 25$;

в) $-x^2 + 100 \ge 0$; **г)** $x^2 - 7x < 0$;

д) $x^2 - 2x - 8 > 0$; **е)** $3x^2 + 4x - 7 < 0$;

є) $-x^2 - 4x + 5 \le 0$; **ж)** $-\dfrac{1}{3}x^2 + x + 6 \ge 0$.

643. **а)** $(x-2)(x+4) < 0$; **б)** $(3x-1)(2x-4) \ge 0$;

в) $(x-3)(x+3) > 2(x+3)$; **г)** $(x-2)(4x+1) < (x+1)^2 + 3$.

644. **а)** $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x}{6} > \dfrac{x^2+2x}{24}$; **б)** $\dfrac{1}{12}\left(x^2-4\right) - \dfrac{1}{16}(x-4) < -\dfrac{1}{24} - \dfrac{x}{48}$.

645*. **а)** $(x+6)\sqrt{x^2 - x - 20} > 0$; **б)** $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2 + x - 12}} \ge 0$.

646. Знайдіть усі значення аргументу, для яких функція $y = 2x^2 - 11x + 5$ набуває додатних значень; від'ємних значень.

647. Знайдіть усі значення параметра a, для кожного з яких рівняння $x^2 + 4ax + 8a + 12 = 0$:

а) не має коренів; **б)** має два різні корені.

648*. Знайдіть усі значення параметра, для кожного з яких нерівність виконується для будь-якого значення x:

а) $x^2 + 2x + a > 0$; **б)** $mx^2 + (m - 1)x + m - 1 < 0$.

649*. Знайдіть усі значення a, для кожного з яких сума квадратів коренів рівняння $x^2 - ax + a - 1 = 0$ є найменшою.

650. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} x^2 - 7x - 8 > 0; \\ 45 - 3x \ge 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2 - 2x \ge 3; \\ x^2 - 2x - 8 < 0. \end{cases}$

651. Побудуйте графік рівняння:

а) $y + x^2 - 4 = 0$; **б)** $x^2 + (y + 2)^2 = 4$.

652. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0; \\ x + y = 2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} y = 2x^2 - 1; \\ y - \sqrt{x} = 0. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь:

653. **а)** $\begin{cases} 2x - y = 0; \\ x^2 + y = 3; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x + 3y = 1; \\ x^2 + 4xy + y^2 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 4; \\ 4x + 3y = 2; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x - 2y = 3; \\ (x - 2)(y + 2) = x^2 + 2xy; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x + y = 6; \\ \dfrac{1}{2x} + \dfrac{3}{2y} = 1; \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} x + y = 3; \\ \dfrac{4}{x + 2} - \dfrac{1}{y - 2} = 1. \end{cases}$

654*. **а)** $\begin{cases} x^2 + xy = 10; \\ y^2 + xy = 15; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5; \\ xy - x - y + 1 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35; \\ xy(x + y) = 30; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} (x + y)^2 - 5(x + y) + 4 = 0; \\ (x - y)^2 - (x - y) - 2 = 0. \end{cases}$

655*. Знайдіть усі значення m, для яких рівняння $2x^2 - (3m + 2)x + 12 = 0$ і $4x^2 - (9m - 2)x + 36 = 0$ мають спільний корінь.

656*. Знайдіть усі значення параметра a, для кожного з яких система рівнянь $\begin{cases} 4x^2 - 3y^2 = 24; \\ y - 2x + a = 0 \end{cases}$ має лише один розв’язок.

657. Периметр прямокутника дорівнює 28 см, а площа на 12 см^2 більша від площі квадрата, сторона якого дорівнює меншій стороні прямокутника. Знайдіть сторони прямокутника.

658. Добуток двох додатних чисел у 16 разів більший від їх суми. Знайдіть ці числа, якщо перше число на 20 більше від потроєного другого числа.

659. Двоцифрове число більше від подвоєного добутку його цифр на 5, а від подвоєної суми цифр — на 3. Знайдіть це число.

660. У залі було 160 місць, розміщених однаковими рядами. Після того як число місць у кожному ряду збільшили на 2 і додали ще один ряд, стало 210 місць. Скільки рядів стало в залі, якщо їх кількість більша від кількості місць в одному ряду?

661. З пунктів A та B, відстань між якими дорівнює 150 км, назустріч один одному виїхали одночасно мотоцикліст і велосипедист. Через дві години вони зустрілися і, не зупиняючись, продовжили рух. Мотоцикліст прибув у пункт B на три години раніше, ніж велосипедист у пункт A. Знайдіть швидкість велосипедиста.

662*. Із двох міст одночасно виїхали назустріч один одному два автомобілі й зустрілися через 2 год. За який час подолає шлях між містами кожний автомобіль, якщо перший автомобіль за 1,5 год і другий за 1 год загалом долають $\frac{2}{3}$ цього шляху?

663*. Майстер і учень, працюючи разом, виконують завдання на 1 год швидше, ніж майстер, працюючи сам, але на 0,5 год довше, ніж майстер і два учні. За який час виконає дане завдання один учень, працюючи сам?

Завдання для самоперевірки № 3

Початковий рівень

1. Укажіть координати вершини параболи $y = x^2 - 4x + 6$.

а) (–4; 6); **б)** (4; 6); **в)** (2; 2); **г)** (–2; 18).

2. Яке з даних чисел є розв'язком нерівності $x^2 - 5 < 0$?

а) 3; **б)** 2,5; **в)** –3; **г)** –2.

3. Використовуючи схематичне зображення параболи $y = -x^2 + 2x$ на рисунку 79, укажіть множину розв'язків нерівності $-x^2 + 2x > 0$.

а) $(0; +\infty)$; **б)** $[0; 2]$; **в)** $(0; 2)$; **г)** $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

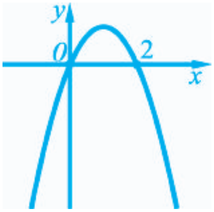


Рис. 79

4. Яка з даних пар чисел є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10; \\ y - 2x = 5? \end{cases}$

а) (3; 1); **б)** (3; –1); **в)** (–3; 1); **г)** (–3; –1).

5. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y = 0; \\ y = x \end{cases}$ та вкажіть правильну відповідь.

а) (0; 0); (1; 1); **б)** (0; 0); (–1; –1);
в) (0; 0); (–1; 1); **г)** (0; 0); (1; –1).

6. Довжина ділянки прямокутної форми на 20 м більша від ширини, а площа дорівнює 125 м^2. Знайдіть довжину та ширину ділянки.

Нехай довжина ділянки дорівнює x м, а ширина — y м. Яка система рівнянь відповідає умові задачі?

а) $\begin{cases} y - x = 20; \\ xy = 125; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x - y = 20; \\ xy = 125; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x - y = 20; \\ x + y = 125; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x + y = 20; \\ xy = 125. \end{cases}$

Середній рівень

7. Установіть відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв’язків (А–Д).

1) $x^2 - 3x - 4 > 0$;
2) $x^2 - 3x - 4 < 0$;
3) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$;
4) $x^2 - 3x - 4 \leq 0$.

А) $(-1; 4)$;
Б) $(-4; 1)$;
В) $[-1; 4]$;
Г) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$;
Д) $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

8. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 2x$. Користуючись графіком, знайдіть проміжок, на якому функція зростає; спадає.

9. Розв’яжіть нерівність $-x^2 \leq 3x$.

10. Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + 2y = 5; \\ y - x = 1. \end{cases}$

11. Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 12, а добуток — 35.

Достатній рівень

12. Побудуйте графік функції $y = -2x^2 + 4x + 6$. Користуючись графіком, знайдіть: **а)** область значень функції; **б)** проміжки, на яких функція набуває від’ємних значень; **в)** проміжок, на якому функція спадає.

13. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{-4x^2 - 7x + 2}$.

14. Розв’яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8; \\ x^2 - y = 2. \end{cases}$

15. Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + 4y = 1; \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{6}{5y} = -1. \end{cases}$

16. Майстер і учень, працюючи разом, виготовили партію однакових деталей за 12 год. Якби майстер виготовив половину всіх деталей, а після нього учень — решту деталей, то на це витратили б 25 год. За який час може виготовити всі деталі майстер, працюючи сам, якщо відомо, що він це може зробити швидше, ніж учень?

Високий рівень

17. Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt{6x^2+5x-4}-\frac{2}{\sqrt{3-2x}}$.

18. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $x^2-(a-2)x-3a+6=0$ не має коренів.

19. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2+9y^2=13; \\ xy=2. \end{cases}$

20. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x^2+(y-2)^2=9; \\ y+|x|=a, \end{cases}$ якщо $a=0$; $a=5$?

21. З пункту A в пункт B виїхав мотоцикліст і рухався зі швидкістю 40 км/год. У той же час назустріч йому з пункту B виїхав велосипедист і, проїхавши 4 км, зустрів мотоцикліста. Коли мотоцикліст прибув у пункт B, велосипедист перебував на відстані 15 км від пункту A. Знайдіть відстань між пунктами та швидкість велосипедиста.

§ 3.

ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Термін «послідовність» використовують, коли кажуть про розташування учнів у шерензі, черговість днів тижня, розміщення команд у турнірній таблиці тощо.

У цьому параграфі ми з'ясуємо, що таке числова послідовність, зокрема, що таке арифметична та геометрична прогресії, які їхні властивості, навчимося використовувати властивості зазначених прогресій для розв'язування прикладних задач.

1; 1; 2; 3; 5; 8; ... — послідовність

2; 5; 8; 11; 14; ... — арифметична прогресія (кожне число, починаючи із другого, на 3 більше від попереднього)

2; 6; 18; 54; 162; ... — геометрична прогресія (кожне число, починаючи із другого, утричі більше від попереднього)

16. Числові послідовності. Способи задання послідовностей

1. Числові послідовності. Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Один соняшник за літо «випиває» у середньому 250 л води. Скільки води «вип'ють» за літо 1, 2, 3, 4, 5 соняшників?

Одержимо:

Кількість соняшників	1	2	3	4	5
Об'єм води у літрах	250	500	750	1000	1250

У другому рядку таблиці маємо кілька чисел, записаних у певному порядку, кажуть, маємо *послідовність* чисел: 250; 500; 750; 1000; 1250, у якій на першому місці стоїть число 250, на другому — 500, на п'ятому — 1250.

У цьому прикладі кожному натуральному числу від 1 до 5 включно відповідає єдине число з указаної послідовності. Отже, маємо функцію, областю визначення якої є множина перших п'яти натуральних чисел: $\{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Приклад 2. Записати у порядку зростання натуральні числа, запис яких закінчується цифрою 2.

Одержимо *послідовність* чисел 2; 12; 22; 32; 42; ..., у якій на першому місці стоїть число 2, на другому — 12, на третьому — 22 і т. д.

Місце	1	2	3	4	5	...
Число	2	12	22	32	42	...

У цьому прикладі кожному натуральному числу n відповідає єдине число з указаної послідовності. Так, натуральному числу 6 відповідає число 52, числу 7 — число 62 і т. д. Отже, маємо функцію, областю визначення якої є множина всіх натуральних чисел.

Означення **Послідовністю називають функцію, яку задано на множині всіх натуральних чисел або перших n натуральних чисел.**

Числа, які утворюють послідовність, називають *членами послідовності*. Якщо послідовність має скінченне число членів, тоді її називають *скінченною послідовністю* (приклад 1). Якщо послідовність має нескінченне число членів, то її називають *нескінченною послідовністю* (приклад 2), а в запису це показують трьома крапками після останнього записаного члена послідовності.

Наведемо ще приклади послідовностей:

4; 8; 12; 16; ... — послідовність натуральних чисел, кратних 4;

–1; –2; –3; –4; ... — послідовність від'ємних цілих чисел;

$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; ... — послідовність правильних дробів з чисельником 1;

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 — послідовність одноцифрових натуральних чисел;

7; 7; 7; 7; ... — послідовність, усі члени якої дорівнюють 7.

Четверта послідовність є скінченною, решта — нескінченними.

У загальному випадку члени послідовності, як правило, позначають малими буквами з індексами. Кожний індекс указує порядковий номер члена послідовності. Наприклад, перший член послідовності позначають a_1, читають «a перше», другий — a_2, читають «a друге», член послідовності з номером n позначають a_n і читають «a енне». Саму послідовність позначають (a_n) і записують: a_1; a_2; a_3; a_4; … . Член a_4 називають наступним за a_3, а член a_3 — попереднім до члена a_4.

Розглянемо, наприклад, послідовність (a_n): 1; 3; 5; ... — послідовність непарних натуральних чисел. У ній $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$; … . Член послідовності $a_2 = 3$ є попереднім до члена $a_3 = 5$ і наступним за членом $a_1 = 1$.

2. Способи задання послідовностей. Щоб задати послідовність, потрібно вказати спосіб, за допомогою якого можна знайти будь-який її член. Існують різні способи задання послідовностей.

1. Послідовність можна задати *описом* знаходження її членів. Наприклад, нехай задано послідовність, членами якої є дільники числа 15, записані у порядку зростання. Цю послідовність, яка описана словами, можна записати: 1; 3; 5; 15.

2. Скінченну послідовність можна задати *переліком* її *членів*. Наприклад, (b_n): 54; 1; 33; 27.

3. Послідовність можна задати *таблицею*, у якій навпроти кожного члена послідовності вказують його порядковий номер. Наприклад:

n	1	2	3	4	5
a_n	–2	1	–4	1	–6

4. Послідовність можна задати *формулою*, за якою можна знайти будь-який член послідовності, знаючи його номер. Наприклад, послідовність натуральних чисел, кратних 3, можна задати формулою $a_n = 3n$; послідовність

чисел, обернених до натуральних, — формулою $b_n = \frac{1}{n}$. Такі формули називають ще формулами n-го члена послідовності.

Нехай послідовність (c_n) задано формулою $c_n = 3n - n^2$. Підставляючи замість n натуральні числа 1, 2, 3, ... , одержимо:

$$c_1 = 3 \cdot 1 - 1^2 = 2; \quad c_2 = 3 \cdot 2 - 2^2 = 2; \quad c_3 = 3 \cdot 3 - 3^2 = 0; \ \ldots .$$

Отже, (c_n): 2; 2; 0; ... .

5. Послідовність можна задати так: спочатку вказати перший або кілька перших членів послідовності, а потім — умову, за якою можна визначити будь-який член послідовності за попередніми. Такий спосіб задання послідовності називають *рекурентним*.

Наприклад, знайдемо кілька членів послідовності (a_n), у якій перший член дорівнює –1, другий — –3, а кожний наступний, починаючи із третього, дорівнює добутку двох попередніх. Одержимо: $a_1 = -1$; $a_2 = -3$;

$a_3 = a_1 \cdot a_2 = (-1) \cdot (-3) = 3$;

$a_4 = a_2 \cdot a_3 = (-3) \cdot 3 = -9$;

$a_5 = a_3 \cdot a_4 = 3 \cdot (-9) = -27$; і т. д.

Умови, що задають цю послідовність, можна записати так:

$$a_1 = -1; \ a_2 = -3; \ a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1}.$$

Формулу $a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1}$, за допомогою якої будь-який член послідовності можна знайти через попередні, називають *рекурентною формулою*.

Розглянуті вище послідовності є *числовими послідовностями*, оскільки їхніми елементами є числа. Існують й інші послідовності. Наприклад, послідовність передач на каналі телебачення, послідовність футбольних команд у турнірній таблиці тощо. Надалі розглядатимемо лише числові послідовності.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Записати шість перших членів послідовності натуральних чисел, які при діленні на 3 дають в остачі 2.

● Першим натуральним числом, яке при діленні на 3 дає в остачі 2, є саме число 2. Наступним є число 5 — воно на 3 більше від 2, далі 8 — на 3 більше від 5 і т. д. Тому одержимо: 2; 5; 8; 11; 14; 17.

Відповідь. 2; 5; 8; 11; 14; 17. ●

Вправа 2. Послідовність задано формулою $a_n = 3n^2 - 7n$. Чи є членом цієї послідовності число 6?

● Число 6 буде членом цієї послідовності, якщо знайдеться такий номер n, що $a_n = 6$, тобто $3n^2 - 7n = 6$. Маємо рівняння $3n^2 - 7n - 6 = 0$, звідки $n_1 = 3$; $n_2 = -\frac{2}{3}$. Число $-\frac{2}{3}$ не є натуральним, а тому не може бути номером члена послідовності. Отже, число 6 є третім членом заданої послідовності.

Відповідь. Так. ●

Вправа 3. Послідовність задано формулою $x_n = 128 - 3n$.

а) Для яких значень n члени послідовності менші від 55?

б) Скільки додатних членів має ця послідовність?

● **а)** Знайдемо значення n, для яких $x_n < 55$:

$$128 - 3n < 55;\ \ -3n < 55 - 128;\ \ -3n < -73;\ \ n > -73 : (-3);\ \ n > 24\frac{1}{3}.$$

Оскільки число n має бути натуральним, то $n \geq 25$. Отже, члени послідовності менші від 55, якщо $n \geq 25$.

б) Знайдемо значення n, для яких $x_n > 0$:

$$128 - 3n > 0;\ \ -3n > -128;\ \ n < 42\frac{2}{3}.$$

Число n має бути натуральним, тому $n \leq 42$. Отже, послідовність має 42 додатні члени.

Відповідь. **а)** $n \geq 25$; **б)** 42 члени. ●

Вправа 4. Записати три перші члени послідовності (a_n), якщо $a_1 = 2$; $a_{n+1} = 3a_n - 2$.

● У формулі $a_{n+1} = 3a_n - 2$ візьмемо $n = 1$, одержимо: $a_2 = 3a_1 - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$. Узявши $n = 2$, матимемо: $a_3 = 3a_2 - 2 = 3 \cdot 4 - 2 = 10$.

Відповідь. 2; 4; 10. ●

Усно

664. Дано послідовність: 2; 3; 5; 7; 11.

а) Скільки членів має ця послідовність?

б) Назвіть третій член послідовності.

в) Який номер має член послідовності, що дорівнює 7?

г) Який член послідовності є наступним за числом 5; попереднім до числа 5?

665. Дано послідовність натуральних чисел, кратних 10:

$$10;\ 20;\ 30;\ 40;\ 50;\ \ldots .$$

а) Назвіть перший, четвертий і восьмий члени цієї послідовності.

б) Який номер має член послідовності, що дорівнює 70?

в) Які члени послідовності розташовані між числами 30 і 90?

г) Якою формулою можна задати цю послідовність?

666. Послідовність задано формулою $x_n = n + 5$. Знайдіть три перші члени послідовності.

667. Назвіть кілька перших членів послідовності квадратів натуральних чисел.

Рівень А

668. Запишіть п’ять перших членів послідовності:

а) натуральних чисел, кратних 5;

б) натуральних чисел, які при діленні на 5 дають в остачі 1;

в) кубів натуральних чисел;

г) степенів числа 3 з натуральним показником.

669. Запишіть чотири перші члени послідовності:

а) натуральних чисел, кратних 7;

б) натуральних чисел, які при діленні на 4 дають в остачі 3;

в) степенів числа 5 з натуральним показником.

670. Запишіть чотири перші члени послідовності натуральних чисел, кратних 4. Задайте цю послідовність формулою та знайдіть сотий член послідовності.

671. Запишіть п’ять перших членів послідовності квадратів натуральних чисел. Задайте цю послідовність формулою та знайдіть 15-й член послідовності.

672. Дано послідовність (c_n). Запишіть:

а) член послідовності, наступний за c_{15}; c_k;

б) член послідовності, попередній до c_8; c_k;

в) члени послідовності, які розташовані між c_3 і c_7; c_k і c_{k+3}.

673. Знайдіть п’ять перших членів послідовності, заданої формулою:

а) $a_n = 3n + 5$; **б)** $x_n = 2n^2$; **в)** $c_n = (-1)^n$; **г)** $b_n = \dfrac{30}{n}$.

674. Знайдіть чотири перші члени послідовності, заданої формулою:

а) $a_n = -2n$; **б)** $b_n = n^2 - 1$; **в)** $c_n = 2^n$; **г)** $y_n = \dfrac{6}{n}$.

675. Послідовність задано формулою $a_n = 5n^2 - n$. Знайдіть:

а) a_1; **б)** a_3; **в)** a_4; **г)** a_{10}.

676. Послідовність задано формулою $c_n = n^2 + 2n$. Знайдіть: c_2; c_5; c_{10}.

677. Запишіть усі члени скінченної послідовності, заданої формулою:

а) $c_n = -5n$; $1 \le n \le 5$; **б)** $a_n = n^3 - 2n$; $1 \le n \le 3$.

678. Запишіть усі члени скінченної послідовності, заданої формулою:

а) $x_n = 10n$; $1 \le n \le 4$; **б)** $y_n = n^4$; $1 \le n \le 3$.

679. Послідовність задано формулою $b_n = 3n + 5$. Знайдіть номер члена послідовності, який дорівнює 20.

680. Послідовність задана формулою $c_n = 2n - 7$. Який номер має член послідовності, що дорівнює 193?

Рівень Б

681. Знайдіть п’ять перших членів послідовності, заданої формулою:

а) $a_n = (-1)^n + n$; **б)** $x_n = 2^{1-n}$.

682. Знайдіть чотири перші члени послідовності, заданої формулою:

а) $c_n = (-1)^n(n + 1)$; **б)** $y_n = \dfrac{n \cdot 2^n}{n+1}$.

683. Послідовність задано формулою $x_n = 5 + 3n^2$. Знайдіть номер члена послідовності, який дорівнює: 305; 680.

684. Послідовність задано формулою $a_n = 2n^2 - 5n - 1$. Чи є членом цієї послідовності число 1; число 11?

685. Послідовність задано формулою $c_n = n^2 - 7n + 1$. Чи є членом цієї послідовності число -11; число 3?

686. Послідовність задано формулою $x_n = -5n + 72$. Для яких значень n члени послідовності:

а) менші від 20; **б)** більші від -25?

687. Послідовність задано формулою $x_n = 4n - 5$. Для яких значень n члени послідовності:

а) менші від 70; **б)** більші від 28?

688. Послідовність задано формулою $a_n = 3n - 51$. Скільки членів цієї послідовності більші від 0, але менші від 100?

689. Скільки додатних членів має послідовність, задана формулою:

а) $x_n = 75 - 7n$; **б)** $x_n = 12 - 0{,}3n$?

690. Скільки від'ємних членів має послідовність, задана формулою:

а) $y_n = 6n - 94$; **б)** $y_n = 0{,}2n - 10$?

691. Знайдіть перший від'ємний член послідовності, заданої формулою $c_n = -0{,}5n + 27$.

692. Послідовність задано формулою $a_n = 1{,}5n - 21$. Знайдіть перший додатний член цієї послідовності.

Запишіть п'ять перших членів послідовності, якщо:

693. **а)** $a_1 = -3;\ a_{n+1} = 2a_n + 1$; **б)** $c_1 = 2;\ c_2 = -\frac{1}{2};\ c_{n+2} = c_n \cdot c_{n+1} - 5$.

694. **а)** $b_1 = 5;\ b_{n+1} = -2b_n$; **б)** $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_{n+2} = x_n + x_{n+1} + 1$.

695. Запишіть рекурентну формулу і знайдіть чотири перші члени послідовності (a_n), перший член якої дорівнює –2, другий — 3, а кожний наступний, починаючи із третього, дорівнює квадрату суми двох попередніх.

696. Запишіть рекурентну формулу і знайдіть чотири перші члени послідовності (b_n), перший член якої дорівнює 3, а кожний наступний член, починаючи із другого, дорівнює квадрату попереднього члена, зменшеному на одиницю.

697. Нескінченну послідовність 1, 1, 2, 3, 5, 8, … називають рядом Фібоначчі (Фібоначчі, або по-іншому Леонардо Пізанський (близько 1170 – 1228) — італійський математик-просвітник). Ряд Фібоначчі можна задати рекурентною формулою: $a_1 = 1;\ a_2 = 1;\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Знайдіть перші десять членів цього ряду.

Рівень В

698. Ряд Фібоначчі (див. задачу № 697) можна задати формулою:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Знайдіть за цією формулою три перші члени ряду.

699. Послідовність (c_n) задано формулою $c_n = 2^n - 1$. Доведіть, що цю послідовність можна задати рекурентною формулою $c_{n+1} = 2c_n + 1$; $c_1 = 1$.

700. Послідовність задано формулою $x_n = \frac{n+1}{n}$. Доведіть, що:

а) $x_{n+1} + \frac{1}{x_n} = 2$; **б)** $x_n x_{n+1} x_{n+2} = 3x_n - 2$.

701. Послідовність задано формулою $a_n = 50 + 20n - n^2$. Скільки додатних членів має ця послідовність?

702. Послідовність задано формулою $b_n = 2n^2 - 13n + 1$. Знайдіть номери тих членів послідовності, які не перевищують 8.

Вправи для повторення

703. Розкладіть на множники:

а) $9x^2 - 10x + 1$; **б)** $x^4 - 5x^2 - 36$.

704. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt{\frac{1}{18-6x}}$; **б)** $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$.

705. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x + 4y - (x + 2y) = -4; \\ (x + y)(x + 3y) = -3; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x + 2y = -3; \\ x^2 - y^2 = -8. \end{cases}$

706. Перший екскаватор почав рити траншею. Через 2 год до нього приєднався другий екскаватор, і через 8 год спільної роботи було вирито 80% траншеї. За скільки годин міг би вирити траншею кожний екскаватор, працюючи окремо, коли відомо, що першому на це потрібно часу на 5 год більше, ніж другому?

707. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 3x + a = 0$, де a — абсциса вершини параболи $y = (x+10)^2 - 1$.

Поміркуйте

708. На крайній ліворуч клітинці смужки розміру 1 × 203 стоїть біла фішка, а на крайній праворуч — чорна. Білою фішкою грає Андрій, а чорною —

Сергій. Кожний з них пересуває свою фішку або на одну, або на дві, або на три клітинки праворуч чи ліворуч. Заборонено пропускати свій хід або переставляти свою фішку через фішку суперника. Програє той, хто не зможе зробити черговий хід. Хто переможе за правильної гри: Андрій, який починає гру, чи Сергій?

17. Арифметична прогресія та її властивості

1. Поняття арифметичної прогресії. Розглянемо послідовності:

1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22; ...;

0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; ...;

10; 8; 6; 4; 2; 0; –2; –4; –6 ... .

Простежте: кожний член першої послідовності, починаючи із другого, можна одержати, якщо до попереднього члена додати число 3. Друга і третя послідовності мають таку саму особливість: кожний наступний член послідовності, починаючи із другого, дорівнює попередньому, до якого додають одне й те саме число: у другій послідовності — число 0,5, у третій — число –2. Кожна з розглянутих послідовностей є прикладом *арифметичної прогресії*.

Означення **Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи із другого, дорівнює попередньому члену, до якого додають одне й те саме число.**

Це число називають *різницею арифметичної прогресії* та позначають буквою d (d — початкова буква латинського слова «*differentia*» — різниця).

Отже, якщо маємо арифметичну прогресію a_1; a_2; a_3; …, то $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_2 + d$; …, тобто для будь-якого натурального n виконується рівність

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

З означення арифметичної прогресії випливає, що різниця між будь-яким її членом, починаючи із другого, і попереднім членом дорівнює одному й тому самому числу — різниці d, тобто $a_2 - a_1 = d$, $a_3 - a_2 = d$, ... Отже,

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Правильно і навпаки: якщо в деякій числовій послідовності різниця між будь-яким її членом, починаючи із другого, і попереднім членом дорівнює одному й тому самому числу, то така послідовність є арифметичною прогресією.

Щоб задати арифметичну прогресію, достатньо вказати її перший член і різницю. Тоді кожний наступний член можна обчислити через попередній за *рекурентною формулою*

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

У таблиці наведено приклади арифметичних прогресій для деяких значень a_1 і d.

a_1	d	Арифметична прогресія
1	2	1; 3; 5; 7; 9; ...
0	–2	0; –2; –4; –6; –8; ...
5	0	5; 5; 5; 5; 5; ...
1,1	–0,5	1,1; 0,6; 0,1; –0,4; –0,9.

Перші три з наведених арифметичних прогресій є нескінченними, четверта — скінченною.

2. Формула *n*-го члена арифметичної прогресії. Знайдемо кілька перших членів арифметичної прогресії, у якій $a_1 = 4$, $d = 3$.

Одержимо:

$$a_2 = a_1 + d = 4 + 3 = 7;$$

$$a_3 = a_2 + d = 7 + 3 = 10.$$

Далі можна знайти a_4, a_5 і т. д.

Щоб знайти член цієї прогресії з великим порядковим номером, наприклад, a_{50}, потрібно виконати багато обчислень. Тому відшукання членів арифметичної прогресії за формулою $a_{n+1} = a_n + d$ часто буває незручним.

Знайдемо інший шлях знаходження n-го члена арифметичної прогресії (a_n).

За означенням арифметичної прогресії маємо:

$$a_2 = a_1 + d;$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d;$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d.$$

Зауважуємо, що в цих формулах коефіцієнт біля d на 1 менший від порядкового номера члена прогресії, який шукаємо. Так, $a_5 = a_1 + 4d$, $a_{20} = a_1 + 19d$. Отже, можемо записати:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1)d.}$$

Одержану формулу називають *формулою n-го члена арифметичної прогресії*.

3. Властивості арифметичної прогресії. В арифметичній прогресії 1; 3; 5; 7; 9; ... кожний член, починаючи із другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів:

$$3 = \frac{1+5}{2}; \quad 5 = \frac{3+7}{2}; \quad 7 = \frac{5+9}{2}; \ \ldots .$$

Таку властивість має будь-яка арифметична прогресія.

Властивість 1 **Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи із другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів.**

Доведення. Нехай маємо арифметичну прогресію (a_n) з різницею d. Тоді для натуральних значень $n > 1$ виконуються рівності: $a_n - a_{n-1} = d$, $a_{n+1} - a_n = d$. Звідси: $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$; $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$;

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}. \ \bullet$$

Із властивістю 1 арифметичної прогресії і пов'язана її назва.

Розглянемо скінченну арифметичну прогресію (x_n), яка має 7 членів: 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15. Знайдемо суму крайніх членів прогресії і суми членів, рівновіддалених від крайніх:

$$x_1 + x_7 = 3 + 15 = 18;$$
$$x_2 + x_6 = 5 + 13 = 18;$$
$$x_3 + x_5 = 7 + 11 = 18;$$
$$x_4 + x_4 = 9 + 9 = 18.$$

Сума будь-яких двох членів арифметичної прогресії, які рівновіддалені від її крайніх членів, дорівнює сумі крайніх членів. Таку властивість має будь-яка скінченна арифметична прогресія.

Властивість 2	**Сума будь-яких двох членів скінченної арифметичної прогресії, які рівновіддалені від її крайніх членів, дорівнює сумі крайніх членів прогресії.**

Доведення властивості 2 подано в рубриці «Для тих, хто хоче знати більше».

Для тих, хто хоче знати більше

Доведемо властивість 2. Нехай маємо скінченну арифметичну прогресію a_1; a_2; a_3; ...; a_{n-2}; a_{n-1}; a_n з різницею d. Зауважимо, що сума індексів двох членів прогресії, які рівновіддалені від крайніх членів, дорівнює $n + 1$. Нехай a_{k+1} та a_{n-k} — два довільні члени даної прогресії, рівновіддалені від крайніх членів. Оскільки

$$a_{k+1} = a_1 + kd, \qquad a_{n-k} = a_1 + (n-k-1)d = (a_1 + (n-1)d) - kd = a_n - kd,$$

то

$$a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + kd + a_n - kd = a_1 + a_n. \bullet$$

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти дев’ятий член арифметичної прогресії (a_n): 5; 4,2; 3,4; ... .

● Маємо: $a_1 = 5$. Знайдемо різницю прогресії: $d = 4{,}2 - 5 = -0{,}8$. Тоді $a_9 = a_1 + 8d = 5 + 8 \cdot (-0{,}8) = -1{,}4$.

Відповідь. –1,4. ●

Вправа 2. Знайти перший член арифметичної прогресії (a_n), у якій $d = -2$, $a_8 = 93$.

● Використаємо формулу n-го члена арифметичної прогресії для $n = 8$:

$$a_8 = a_1 + 7d; \quad 93 = a_1 + 7 \cdot (-2); \quad a_1 = 93 + 14 = 107.$$

Відповідь. 107. ●

Вправа 3. Чи є число 181 членом арифметичної прогресії (a_n), у якій $a_1 = 3$, $d = 4$?

● Число 181 буде членом даної прогресії, якщо існує таке натуральне число n — порядковий номер члена прогресії, що $a_n = 181$. Оскільки $a_n = a_1 + (n-1)d$, то $181 = 3 + (n-1) \cdot 4$. Розв’яжемо одержане рівняння:

$$181 = 3 + 4n - 4; \quad 182 = 4n; \quad n = 45{,}5.$$

Число 45,5 не є натуральним, тому число 181 не є членом даної арифметичної прогресії.

Відповідь. Ні. ●

Вправа 4. Знайти перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо сума другого і п'ятого її членів дорівнює 20, а різниця дев'ятого і третього членів дорівнює 18.

● За умовою маємо: $a_2 + a_5 = 20$, $a_9 - a_3 = 18$. Записавши члени a_2, a_5, a_9 і a_3 за формулою n-го члена арифметичної прогресії, одержимо систему рівнянь:

$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 4d = 20; \\ a_1 + 8d - a_1 - 2d = 18. \end{cases}$ Звідки: $\begin{cases} 2a_1 + 5d = 20; \\ 6d = 18; \end{cases}$ $\begin{cases} 2a_1 + 15 = 20; \\ d = 3; \end{cases}$ $a_1 = 2{,}5;\ d = 3.$

Відповідь. 2,5; 3. ●

Вправа 5. Між числами 7 і 15 вставити таке число, щоб усі три числа утворили арифметичну прогресію.

● Нехай x — шукане число, тоді послідовність 7; x; 15 — арифметична прогресія. Другий член арифметичної прогресії є середнім арифметичним першого й третього членів: $x = \dfrac{7+15}{2} = 11.$

Відповідь. 7; 11; 15. ●

Усно

709. Чи є арифметичною прогресією послідовність:

а) 3; 5; 7; 9; **б)** 3; 10; 17; 23;

в) 1; 2; 3; 4; 5; … — послідовність натуральних чисел;

г) 2; 4; 6; 8; 10; … — послідовність парних натуральних чисел;

д) 1; 4; 9; 16; 25; … — послідовність квадратів натуральних чисел;

е) –1; –2; –3; –4; –5; … — послідовність від'ємних цілих чисел?

710. Укажіть перший член і різницю арифметичної прогресії:

а) 2; 7; 12; …; **б)** 0,7; 1; 1,3; …;

в) 6; 4; 2; …; **г)** –9; –7; –5; … .

711. Знайдіть чотири перші члени арифметичної прогресії (a_n), у якій:

а) $a_1 = 5$; $d = 2$; **б)** $a_1 = 7$; $d = -2$.

712. Знайдіть четвертий член арифметичної прогресії:

а) 7; 11; 15; ...; **б)** 13; 10; 7; ... .

Рівень А

713. Запишіть у порядку зростання натуральні числа, кратні 6. Чи є послідовність цих чисел арифметичною прогресією?

Знайдіть чотири перші члени арифметичної прогресії (a_n), *якщо*:

714. **а)** $a_1 = 6$; $d = 4$; **б)** $a_1 = 6$; $d = -4$.

715. **а)** $a_1 = 10$; $d = 5$; **б)** $a_1 = 10$; $d = -5$.

Знайдіть різницю і третій член арифметичної прогресії (a_n), *якщо*:

716. **а)** $a_1 = 5$; $a_2 = 8$; **б)** $a_1 = -2$; $a_2 = -5$;
в) $a_1 = 0{,}7$; $a_2 = 0{,}7$; **г)** $a_1 = -1{,}5$; $a_2 = 1$.

717. **а)** $a_1 = 1$; $a_2 = 9$; **б)** $a_1 = 3$; $a_2 = -2$.

Знайдіть різницю та четвертий член арифметичної прогресії:

718. **а)** 1,4; 1,7; 2; ...; **б)** –30; –28; –26; … .

719. **а)** 10,5; 13; 15,5; …; **б)** 6; 2; –2; … .

Послідовність (a_n) — *арифметична прогресія. Знайдіть*:

720. **а)** a_9, якщо $a_1 = 11$; $d = 5$; **б)** a_{11}, якщо $a_1 = -3$; $d = -4$.

721. **а)** a_7, якщо $a_1 = 4$; $d = 6$; **б)** a_{15}, якщо $a_1 = 9$; $d = -2$.

722. Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії (a_n) та знайдіть a_{21}, якщо:
а) (a_n): 1; 1,3; 1,6; ...; **б)** (a_n): 3; 1; –1; ... .

723. Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії (a_n) та знайдіть a_{16}, якщо:
а) (a_n): 0,8; 1; 1,2; …; **б)** (a_n): –6; –10; –14; … .

Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n), *якщо*:

724. **а)** $d = 5$; $a_6 = 51$; **б)** $d = 0{,}2$; $a_{11} = -2$.

725. **а)** $d = 2$; $a_9 = 24$; **б)** $d = 0{,}5$; $a_{15} = -1$.

Знайдіть порядковий номер члена a_n *арифметичної прогресії, якщо:*

726. **а)** $a_1 = 3$; $d = -5$; $a_n = -37$; **б)** $a_1 = -7$; $d = 2$; $a_n = 81$.

727. **а)** $a_1 = 1$; $d = 7$; $a_n = 71$; **б)** $a_1 = -20$; $d = 3$; $a_n = -2$.

728. Послідовність (a_n) — арифметична прогресія. Знайдіть:
а) a_3, якщо $a_2 = 10$; $a_4 = 2$; **б)** a_8, якщо $a_7 = -1{,}2$; $a_9 = 2$.

729. Знайдіть другий член арифметичної прогресії:
а) 2; a_2; 12; …; **б)** –0,5; a_2; –1,3; … .

Рівень Б

Чи є арифметичною прогресією послідовність:

730. **а)** $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$; **б)** $7+\sqrt{5}$; $9+2\sqrt{5}$; $10+3\sqrt{5}$?

731. **а)** $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; **б)** $4-\sqrt{3}$; 5; $6+\sqrt{3}$?

732. Чи є членом арифметичної прогресії –2; –5; –8; ... число –84; число –152?

733. Чи є число 130 членом арифметичної прогресії:
а) 4; 7; 10; ...; **б)** 23; 34; 45; …?

734. Щоб вийти на перший поверх дев'ятиповерхового будинку, потрібно пройти 6 східців, а щоб вийти на кожний наступний поверх — на 18 східців більше, ніж на попередній. Скільки потрібно пройти східців, щоб вийти на п'ятий поверх будинку; на останній поверх?

735. Протягом семи днів перед математичною олімпіадою учень розв'язував задачі. У перший день він розв'язав 7 задач, а кожного наступного дня — на 2 задачі більше, ніж попереднього. Скільки задач розв'язав учень сьомого дня?

736. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії, якщо її четвертий і дев'ятий члени відповідно дорівнюють 16 і 41.

737. Знайдіть перший член арифметичної прогресії, якщо її четвертий і сімнадцятий члени відповідно дорівнюють 9 і –17.

Послідовність (a_n) — *арифметична прогресія. Знайдіть*:

738. **а)** a_1 і d, якщо $a_6 = 1$; $a_{11} = 0$; **б)** a_{15}, якщо $a_7 = 33$; $a_3 + a_9 = 56$;
в) a_7, якщо $a_5 = 4$; $a_{12} - a_4 = 16$; **г)** a_3, якщо $a_2 + a_6 = 2$; $a_5 + a_{10} = -19$.

739. **а)** a_1 і d, якщо $a_5 = 5$; $a_{15} = 10$; **б)** a_6, якщо $a_3 = 1$; $a_5 - a_9 = 12$;
в) a_4, якщо $a_{10} = 10$; $a_1 + a_8 = -2$; **г)** a_1, якщо $a_2 + a_8 = 10$; $a_3 + a_{14} = 31$.

740. Третій член арифметичної прогресії дорівнює 9, а шістнадцятий член на 36 більший від восьмого. Знайдіть суму четвертого і шостого членів прогресії.

741. Перший член арифметичної прогресії дорівнює 0,5, а сума п'ятого і дев'ятого членів — 25. Знайдіть різницю п'ятого і восьмого членів прогресії.

742. Між числами –5 і –11 вставте таке число, щоб усі три числа утворили арифметичну прогресію.

743. Для яких значень m трьома послідовними членами арифметичної прогресії є числа:

а) 2, $2m - 30$ і $m - 8$; **б)** 3, $2m$ і m^2?

744. Для яких значень x числа 8, $x + 6$ і $4x - 6$ є трьома послідовними членами арифметичної прогресії?

745. На вал насаджено п’ять шківів, числові значення діаметрів яких утворюють арифметичну прогресію. Діаметр найменшого шківа дорівнює 34 см, а найбільшого — 46 см. Знайдіть діаметри решти трьох шківів.

746. Між числами 2 і –6 вставте три числа так, щоб вони разом з даними числами утворили арифметичну прогресію.

747. Перший і четвертий члени арифметичної прогресії відповідно дорівнюють 3,8 і 7,5. Знайдіть суму чотирьох перших членів цієї прогресії.

748. Олег, Петро, Сергій та Андрій ловили рибу. Кількості рибин, які вони зловили, утворюють арифметичну прогресію. Найменше рибин — 9 — зловив Петро, а найбільше — 18 — Олег. Скільки рибин зловили Сергій та Андрій разом? Скільки всього рибин зловили хлопці?

Рівень В

749. Скільки додатних членів має арифметична прогресія 28; 27,7; ...?

750. Знайдіть перший від’ємний член арифметичної прогресії 72; 70,5; ... .

751. Знайдіть перший додатний член арифметичної прогресії –90; –85,6; ... .

752. Числа, які визначають градусні міри кутів трикутника, утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть середній за величиною кут трикутника.

753. П’ятий член арифметичної прогресії дорівнює 2,5. Знайдіть суму дев’яти перших членів цієї прогресії.

754. Між числами 8 і 63 вставте чотири числа так, щоб вони разом з даними числами утворили арифметичну прогресію.

755. Послідовності (x_n) та (y_n) — арифметичні прогресії. Доведіть, що послідовність $x_1 + y_1$; $x_2 + y_2$; … також є арифметичною прогресією.

756. Додатні числа a, b, ab є послідовними членами арифметичної прогресії. Доведіть, що тоді й числа 1, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ теж є послідовними членами арифметичної прогресії.

Вправи для повторення

757. Порівняйте значення виразів:

а) $2\sqrt{3}$ і $\sqrt{10}$; **б)** $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$ і $\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

758. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 + 6x - 7 = 0$; **б)** $x + 6\sqrt{x} - 7 = 0$.

759. Чи належить число –2 області значень функції $y = x^2 + 5x + 4$?

760. Розв'яжіть нерівність:

а) $3n^2 - 10n + 7 > 0$; **б)** $(21 - x)(2x + 3) \geq 0$.

761. Доведіть, що значення виразу $\sqrt{x^2 + 5xy + y^2}$ є цілим числом, якщо $(x; y)$ — розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x - 2y = -5; \\ 3x + y = 6. \end{cases}$

762. У саду господаря ростуть 36 дерев: яблуні, груші та сливи. Кількість груш удвічі більша від кількості слив і утричі менша від кількості яблунь. **а)** Скільки відсотків становить кількість слив від кількості інших дерев у саду? **б)** Скільки груш росте в саду?

Поміркуйте

763. У кожній вершині куба записано число 1 або –1, а на кожній грані — добуток чисел, які стоять у вершинах цієї грані. Чи може добуток усіх 14 записаних чисел дорівнювати –1?

18. Формула суми перших n членів арифметичної прогресії

Розглянемо приклад.

Приклад. Знайти суму натуральних чисел від 1 до 100 включно.

● Запишемо суму S даних чисел двома способами: у порядку зростання доданків і в порядку спадання, та почленно додамо одержані рівності:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{l} S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 \\ S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 1 \end{array} \\ \hline 2S = 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 \end{array}$$

Суми пар чисел, розміщених одне під одним у правих частинах цих рівностей, дорівнюють 101; таких пар є 100. Тому

$$2S = 101 \cdot 100.$$

Звідси $S = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050.$

Отже, сума всіх натуральних чисел від 1 до 100 включно дорівнює 5050. ●

Зазначимо, що послідовність натуральних чисел 1; 2; ...; 99; 100 є арифметичною прогресією (a_n), у якій $a_1 = 1$; $d = 1$; $n = 100$.

Використаємо проведені міркування для виведення формули суми S_n перших n членів довільної арифметичної прогресії a_1; a_2; …; a_n; ... .

Запишемо:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n;$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1.$$

Додамо почленно ці рівності, одержимо:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_n + a_1).$$

За властивістю 2 арифметичної прогресії сума кожних двох членів, узятих у дужки, дорівнює $a_1 + a_n$. Таких сум є n, тому:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n.$$

Звідси

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.} \qquad (1)$$

Якщо в одержаній формулі замість a_n підставити вираз $a_1 + (n - 1)d$, то матимемо:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Отже,

$$\boldsymbol{S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.} \tag{2}$$

Формули (1) і (2) називають *формулами суми перших n членів арифметичної прогресії*.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти суму перших дев'яти членів арифметичної прогресії (a_n): 3; 7; 11; ... .

● *1-й спосіб.* Маємо: $a_1 = 3$; $d = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$.

Знайдемо a_9: $a_9 = 3 + 8 \cdot 4 = 35$. За формулою (1) знаходимо:

$$S_9 = \frac{3+35}{2} \cdot 9 = 171.$$

2-й спосіб. Знаючи, що $a_1 = 3$, $d = 4$, за формулою (2) знаходимо:

$$S_9 = \frac{2 \cdot 3 + 8 \cdot 4}{2} \cdot 9 = 171.$$

Відповідь. 171. ●

Вправа 2. Знайти суму непарних натуральних чисел, які не перевищують 71.

● Непарні натуральні числа утворюють арифметичну прогресію 1; 3; 5; ..., у якій $a_1 = 1$, $d = 2$, $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1$. Знайдемо, який порядковий номер має член 71 цієї прогресії: $71 = 2n - 1$; $n = 36$. Отже, потрібно шукати суму перших тридцяти шести членів прогресії. Знаходимо:

$$S_{36} = \frac{1+71}{2} \cdot 36 = 1296.$$

Відповідь. 1296. ●

Вправа 3. Знайти суму натуральних чисел, які не більші від 105 і при діленні на 9 дають в остачі 1.

● Натуральні числа, які при діленні на 9 дають в остачі 1, утворюють арифметичну прогресію (a_n): 1; 10; 19; ..., у якій $a_1 = 1$, $d = 9$, $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 9 = 9n - 8$. Знайдемо, скільки членів цієї прогресії не перевищують 105. Для цього розв'яжемо нерівність $a_n \le 105$:

$$9n - 8 \le 105;\ \ 9n \le 113;\ \ n \le 12\frac{5}{9}.$$

Отже, потрібно шукати суму дванадцяти перших членів прогресії. Знаходимо: $a_{12} = 1 + 11 \cdot 9 = 100$; $S_{12} = \frac{1+100}{2} \cdot 12 = 606$.

Відповідь. 606. ●

Вправа 4. Знайти перший член арифметичної прогресії (a_n), якщо сума другого і дванадцятого її членів дорівнює 20,4, а сума одинадцяти перших — 121.

● За умовою маємо: $a_2 + a_{12} = 20{,}4$; $S_{11} = 121$. Використавши формули n-го члена та суми перших n членів арифметичної прогресії, одержимо систему рівнянь $\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 11d = 20{,}4; \\ \frac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = 121. \end{cases}$ Звідси:

$$\begin{cases} 2a_1 + 12d = 20{,}4; \\ (a_1 + 5d) \cdot 11 = 121; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 6d = 10{,}2; \\ a_1 + 5d = 11; \end{cases} \quad \begin{cases} d = -0{,}8; \\ a_1 + 5d = 11; \end{cases} \quad a_1 = 15.$$

Відповідь. 15. ●

Вправа 5. Скільки потрібно взяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), у якій $a_1 = 2$, $d = 1$, щоб їх сума дорівнювала 90?

● Використавши формулу $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$, матимемо:

$$90 = \frac{2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 1}{2} \cdot n;\quad 180 = (n + 3) \cdot n;\ \ n^2 + 3n - 180 = 0;\ \ n_1 = -15,\ n_2 = 12.$$

Корінь $n_1 = -15$ не задовольняє умову задачі. Отже, $n = 12$.

Відповідь. 12. ●

Рівень А

764. Знайдіть суму десяти перших членів арифметичної прогресії, якщо:

а) $a_1 = 3$; $a_{10} = 21$; **б)** $a_1 = 22$; $a_{10} = -2$;

в) $a_1 = -4$; $a_{10} = -40$; **г)** $a_1 = 0{,}4$; $a_{10} = 5{,}8$.

765. Знайдіть суму семи перших членів арифметичної прогресії, якщо:

а) $a_1 = 15$; $a_7 = 5$; **б)** $a_1 = -1{,}2$; $a_7 = 7{,}2$.

Знайдіть суму перших n членів арифметичної прогресії, якщо:

766. **а)** $a_1 = 8$; $d = 4$; $n = 5$; **б)** $a_1 = 2$; $d = -3$; $n = 6$;

в) $a_1 = -18$; $d = 2$; $n = 11$; **г)** $a_1 = -0{,}2$; $d = -0{,}1$; $n = 21$.

767. **а)** $a_1 = 1{,}5$; $d = 2$; $n = 8$; **б)** $a_1 = 5$; $d = -3$; $n = 6$.

768. Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії:

а) 3; 9; 15; ...; **б)** –8; –5; –2; ...;

в) 20; 19; 18; ...; **г)** –2,3; –2,5; –2,7; ... .

769. Знайдіть суму дев’яти перших членів арифметичної прогресії:

а) 1; 5; 9; ...; **б)** –1; –2; –3; ...;

в) –11; –6; –1; ...; **г)** 0,3; 0,5; 0,7; ... .

770. Знайдіть суму:

а) п’ятдесяти перших натуральних чисел;

б) натуральних чисел від 11 до 20 включно;

в) цілих чисел від –20 до –1 включно.

771. Знайдіть суму:

а) сорока перших натуральних чисел;

б) натуральних чисел від 51 до 60 включно.

772. Довжини сторін п’ятикутника утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть периметр п’ятикутника, якщо довжина його найкоротшої сторони дорівнює 4 см, а найдовшої — 12 см.

773. Сума п’яти перших членів арифметичної прогресії (a_n) дорівнює 25. Знайдіть п’ятий член прогресії, якщо $a_1 = -5$.

774. Сума дев’яти перших членів арифметичної прогресії дорівнює 126, а дев’ятий член дорівнює 54. Знайдіть перший член прогресії.

Рівень Б

775. Знайдіть суму:

а) непарних натуральних чисел, не більших від 100;

б) парних натуральних чисел, не більших від 56;

в) парних натуральних чисел від 24 до 120 включно;

г) двоцифрових натуральних чисел;

д) натуральних чисел, кратних 7 і не більших від 145;

е) цілих чисел, які належать проміжку [–18; 6).

776. Знайдіть суму:

а) парних натуральних чисел, не більших від 100;

б) непарних натуральних чисел, не більших від 51;

в) непарних натуральних чисел від 17 до 45 включно;

г) натуральних чисел, кратних 5 і не більших від 500;

д) цілих чисел, які належать проміжку (–21; 31).

777. Скільки потрібно взяти перших членів арифметичної прогресії 16; 14; ..., щоб їх сума дорівнювала –434?

778. Перший член арифметичної прогресії дорівнює 3, а різниця — 4. Скільки потрібно взяти перших членів цієї прогресії, щоб їх сума дорівнювала 210?

779. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_{10} = 33$; $S_8 = 88$.

780. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_6 = 0$; $S_{12} = -18$.

781. Шостий член арифметичної прогресії на 20 більший від другого члена, а сума дванадцяти перших членів дорівнює 450. Знайдіть перший член і різницю прогресії.

782. П’ятий член арифметичної прогресії дорівнює 5, а сума десяти перших — 60. Знайдіть перший член і різницю прогресії.

783. Знайдіть третій член арифметичної прогресії, якщо сума дев’яти перших її членів дорівнює 18, а сума п’ятнадцяти перших членів — 165.

784. Знайдіть різницю арифметичної прогресії, якщо сума п’яти перших її членів дорівнює –50, а сума десяти перших членів — 25.

785. Знайдіть суму десяти перших членів арифметичної прогресії, п’ятий і восьмий члени якої відповідно дорівнюють 12 і 27.

786. Дев’ятий член арифметичної прогресії більший від четвертого утричі, а їх сума дорівнює 20. Знайдіть суму восьми перших членів прогресії.

787. Ламана складається із дванадцяти відрізків. Довжина першого відрізка дорівнює 25 см, а кожного наступного — на 2 см менша, ніж попереднього. Знайдіть довжину ламаної.

788. Екскаватор вирив траншею завдовжки 375 м, до того ж за перший день він вирив 50 м, а за кожний наступний — на 5 м більше, ніж за попередній. За скільки днів екскаватор вирив траншею?

789. Книжка має 280 сторінок. За перший день учень прочитав 25 сторінок книжки, а за кожний наступний — на 5 сторінок більше, ніж за попередній. За скільки днів учень прочитав усю книжку ?

Рівень В

790. Знайдіть суму двадцяти перших натуральних двоцифрових чисел, які при діленні на 3 дають в остачі 1.

791. Знайдіть суму натуральних трицифрових чисел, кратних 4.

792. Знайдіть суму всіх додатних членів арифметичної прогресії 24; 23,2; ... .

793. Знайдіть суму членів арифметичної прогресії з дев’ятого до двадцятого включно, якщо перший член прогресії дорівнює 5, а різниця — –2.

794. Знайдіть суму перших n:

а) парних натуральних чисел; **б)** непарних натуральних чисел.

795. Знайдіть натуральне число, яке у 5 разів менше від суми усіх натуральних чисел, які йому передують.

796. Розв’яжіть рівняння:

а) $6 + 11 + ... + (1 + 5n) = 111$ (n — натуральне число);

б) $(x - 1) + (x - 3) + \ldots + (x - 27) = 350$.

797. Для поливання 10 дерев, розміщених у ряд на відстані 3 м одне від одного, садівник приносить відро води для кожного дерева окремо із криниці, розташованої у тому ж ряду за 10 м від першого дерева. Скільки всього метрів пройде садівник, щоб полити всі дерева і повернутися до криниці?

Вправи для повторення

798. Обчисліть:

а) $\dfrac{2^{-7}\cdot 2^{5}}{2^{-3}}$; **б)** $\dfrac{3^{20}-5\cdot 3^{19}}{9^{9}}$.

799. Побудуйте графік функції $y=-2x^2+8x$ та вкажіть:

а) область значень функції;

б) проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень;

в) проміжок, на якому функція зростає.

800. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2-2y^2=7; \\ x+y=2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x-2y=1; \\ x^2+2=y^2+2xy. \end{cases}$

801. Фірма купила автомобіль за ціною, яка на 25% нижча від початкової вартості, а продала за ціною, яка на 15% нижча від початкової вартості. Скільки відсотків становить прибуток від витрачених коштів?

802. Скільки кілограмів 9%-го і 12%-го сплавів срібла потрібно взяти, щоб одержати 50 кг сплаву, що містить 10,8% срібла?

Поміркуйте

803. Чи можна множину перших 100 натуральних чисел розбити на 25 груп так, щоб у кожній групі було по 4 числа, одне з яких дорівнювало б середньому арифметичному трьох інших чисел?

19. Геометрична прогресія та її властивості

1. Поняття геометричної прогресії. Розглянемо послідовності:

$$2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ 64;\ \dots;$$

$$2;\ -4;\ 8;\ -16;\ 32;\ -64;\ \dots;$$

$$9;\ 3;\ 1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{27};\ \dots\ .$$

Кожний член першої послідовності, починаючи із другого, можна одержати, якщо попередній член помножити на 2. Друга і третя послідовності мають таку саму особливість: кожний наступний член послідовності, починаючи із другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число: у другій послідовності — на число –2, у третій — на число $\frac{1}{3}$.

Кожна з розглянутих послідовностей є прикладом *геометричної прогресії*.

Означення **Геометричною прогресією називають послідовність відмінних від нуля чисел, кожний член якої, починаючи із другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число.**

Це число називають *знаменником геометричної прогресії* та позначають буквою q (початкова буква французького слова «*qwoti*» — частка). Знаменник геометричної прогресії може дорівнювати будь-якому числу, крім 0.

Отже, якщо маємо геометричну прогресію b_1; b_2; b_3; ..., то $b_2 = b_1 \cdot q$; $b_3 = b_2 \cdot q$; ..., тобто для будь-якого натурального n виконується рівність

$$b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

З означення геометричної прогресії випливає, що частка від ділення будь-якого її члена, починаючи із другого, на попередній член дорівнює одному й тому самому числу — знаменнику q, тобто: $\frac{b_2}{b_1} = q$; $\frac{b_3}{b_2} = q$; … . Отже,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q.$$

Правильно й навпаки: якщо у деякій послідовності частка від ділення будь-якого її члена, починаючи із другого, на попередній член дорівнює одному й тому самому числу, то така послідовність є геометричною прогресією.

Геометричні прогресії, як і арифметичні, можуть бути скінченними і нескінченними.

Щоб задати геометричну прогресію, достатньо вказати її перший член і знаменник. Тоді кожний наступний член через попередній можна обчислити за *рекурентною формулою*

$$b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

У таблиці наведено приклади геометричних прогресій для деяких значень b_1 і q.

b_1	q	*Геометрична прогресія*
1	3	1; 3; 9; 27; 81; ...
1	–2	1; –2; 4; –8; 16; ...
2	$\frac{1}{2}$	2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; ...
–7	1	–7; –7; –7; –7; –7; ...

2. Формула *n*-го члена геометричної прогресії. Знайдемо кілька перших членів геометричної прогресії, у якій $b_1 = 5$, $q = 2$:

$$b_2 = 5 \cdot 2 = 10;$$
$$b_3 = 10 \cdot 2 = 20;$$
$$b_4 = 20 \cdot 2 = 40.$$

Далі можна знайти b_5, b_6 і т. д.

Щоб знайти член цієї прогресії з великим порядковим номером, наприклад, b_{50}, потрібно виконати багато обчислень. Тому відшукання членів геометричної прогресії за формулою $b_{n+1} = b_n \cdot q$ часто є незручним.

Знайдемо зручніший спосіб відшукання *n*-го члена геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q.

За означенням геометричної прогресії маємо:

$$b_2 = b_1 q;$$
$$b_3 = b_2 q = b_1 q \cdot q = b_1 q^2;$$
$$b_4 = b_3 q = b_1 q^2 \cdot q = b_1 q^3.$$

Зауважуємо, що в цих формулах показник степеня числа q на одиницю менший від порядкового номера члена прогресії, який шукаємо. Отже, можемо записати:

$$\boldsymbol{b_n = b_1 q^{n-1}}.$$

Одержану формулу називають *формулою n-го члена геометричної прогресії*.

3. Властивості геометричної прогресії. У геометричній прогресії 1; 3; 9; 27; 81; ... квадрат кожного члена, починаючи із другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів:

$$3^2 = 1 \cdot 9; \quad 9^2 = 3 \cdot 27; \quad 27^2 = 9 \cdot 81; \ldots .$$

Таку властивість має будь-яка геометрична прогресія.

Властивість 1 **Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи із другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів.**

Доведення. Нехай маємо геометричну прогресію (b_n) зі знаменником q. Тоді для $n > 1$ виконуються рівності: $\frac{b_n}{b_{n-1}} = q$, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. Звідси: $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$;

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}. \; \bullet$$

Якщо всі члени геометричної прогресії є додатними числами, то з рівності $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ випливає, що $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. Отже, кожний член такої прогресії, починаючи із другого, є середнім геометричним двох сусідніх з ним членів. З цією властивістю геометричної прогресії і пов'язана її назва.

Розглянемо скінченну геометричну прогресію (b_n), яка має шість членів: 1; 2; 4; 8; 16; 32. Знайдемо добуток крайніх членів цієї прогресії та добутки членів, рівновіддалених від крайніх:

$$b_1 \cdot b_6 = 1 \cdot 32 = 32;$$

$$b_2 \cdot b_5 = 2 \cdot 16 = 32;$$

$$b_3 \cdot b_4 = 4 \cdot 8 = 32.$$

Бачимо, що добутки членів прогресії, рівновіддалених від її крайніх членів, дорівнюють добутку крайніх членів. Таку властивість має будь-яка скінченна геометрична прогресія.

Властивість 2 **Добуток будь-яких двох членів скінченної геометричної прогресії, рівновіддалених від її крайніх членів, дорівнює добутку крайніх членів.**

Доведення властивості 2 подано в рубриці «Для тих, хто хоче знати більше».

Для тих, хто хоче знати більше

Доведемо властивість 2. Нехай маємо скінченну геометричну прогресію b_1; b_2; b_3; …; b_{n-2}; b_{n-1}; b_n зі знаменником q. Зауважимо, що сума індексів двох членів прогресії, які рівновіддалені від крайніх членів, дорівнює $n + 1$. Нехай b_{k+1} та b_{n-k} — два довільні члени даної прогресії, рівновіддалені від крайніх членів. Оскільки

$$b_{k+1} = b_1q^k, \qquad b_{n-k} = b_1q^{n-k-1},$$

то

$$b_{k+1} \cdot b_{n-k} = b_1q^k \cdot b_1q^{n-k-1} = b_1 \cdot b_1q^{n-1} = b_1 \cdot b_n. \ \bullet$$

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти знаменник і третій член геометричної прогресії (b_n):

1; 1,5; … .

● У цій прогресії $b_1 = 1$, $b_2 = 1,5$. Тому:

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1,5}{1} = 1,5; \qquad b_3 = b_2q = 1,5 \cdot 1,5 = 2,25.$$

Відповідь. 1,5; 2,25. ●

Вправа 2. Знайти шостий член геометричної прогресії (b_n): 2; 10; 50; ... .

● Маємо: $b_1 = 2$; $q = 10 : 2 = 5$. Тоді $b_6 = b_1 \cdot q^5 = 2 \cdot 5^5 = 6250$.

Відповідь. 6250. ●

Вправа 3. Знайти перший член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_7 = 32$, $q = –2$.

● Використавши формулу $b_n = b_1q^{n-1}$ для $n = 7$, матимемо:

$$32 = b_1 \cdot (–2)^6; \quad 32 = b_1 \cdot 64; \quad b_1 = 0,5.$$

Відповідь. 0,5. ●

Вправа 4. Знайти знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо $b_7 = –12$; $b_9 = –108$.

● Використавши формулу n-го члена геометричної прогресії, одержимо: $b_9 = b_1q^8 = -108$, $b_7 = b_1q^6 = -12$. Звідси:

$$\frac{b_1q^8}{b_1q^6} = \frac{-108}{-12}; \quad q^2 = 9; \quad q = –3 \text{ або } q = 3.$$

Відповідь. –3 або 3. ●

Вправа 5. Знайти другий член геометричної прогресії: -4; b_2; -25; ... .

● За властивістю 1 геометричної прогресії $b_2^2 = b_1 b_3 = (-4)\cdot(-25) = 100$. Звідси $b_2 = -10$ або $b_2 = 10$.

Відповідь. -10 або 10. ●

Усно

804. Чи є геометричною прогресією послідовність:

а) 5; 25; 125; 625; … — послідовність натуральних степенів числа 5;

б) –3; 9; –27; 81; … — послідовність натуральних степенів числа –3;

в) 1; 8; 27; 64; … — послідовність кубів натуральних чисел?

805. Укажіть перший член і знаменник геометричної прогресії:

а) 1; –5; 25; ...; **б)** 9; 3; 1; …;

в) –6; –6; –6; …; **г)** $7;\ \frac{7}{2};\ \frac{7}{4};\ \ldots$.

806. Знайдіть три перші члени геометричної прогресії (b_n), у якій:

а) $b_1 = 3$; $q = 2$; **б)** $b_1 = 5$; $q = -2$.

807. Знайдіть четвертий член геометричної прогресії:

а) 2; 6; 18; …; **б)** –9; –3; –1; … .

808. Знайдіть знаменник і перший член геометричної прогресії:

а) b_1; 4; 16; …; **б)** b_1; 6; 3; … .

Рівень А

Запишіть чотири перші члени геометричної прогресії (b_n), у якій:

809. **а)** $b_1 = 2$; $q = 4$; **б)** $b_1 = 5$; $q = -3$;

в) $b_1 = -16$; $q = 0,5$; **г)** $b_1 = 81$; $q = -\frac{1}{3}$.

810. **а)** $b_1 = 4$; $q = -2$; **б)** $b_1 = -3$; $q = 0,2$.

811. Знайдіть знаменник, третій і четвертий члени геометричної прогресії (b_n), якщо:

а) $b_1 = 5$; $b_2 = 10$; **б)** $b_1 = 4$; $b_2 = 2$;

в) $b_1 = 5$; $b_2 = -5$; **г)** $b_1 = 3$; $b_2 = 0,3$.

812. Знайдіть знаменник і третій член геометричної прогресії (b_n), якщо:

а) $b_1 = 2$; $b_2 = 8$; **б)** $b_1 = –6$; $b_2 = 3$.

Знайдіть знаменник і четвертий член геометричної прогресії:

813. **а)** 3; 9; 27; ...; **б)** –64; 16; –4; ... .

814. **а)** 2; –6; 18; ...; **б)** 4; 2; 1; ... .

Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть:

815. **а)** b_3, якщо $b_1 = 4$; $q = 5$; **б)** b_6, якщо $b_1 = 2$; $q = –2$;

в) b_5, якщо $b_1 = –8$; $q = \frac{1}{2}$; **г)** b_4, якщо $b_1 = \frac{1}{3}$; $q = –3$.

816. **а)** b_4, якщо $b_1 = 10$; $q = 3$; **б)** b_5, якщо $b_1 = 1$; $q = –2$;

в) b_5, якщо $b_1 = 2$; $q = \frac{1}{2}$; **г)** b_3, якщо $b_1 = 36$; $q = \frac{1}{3}$.

817. Знайдіть шостий член геометричної прогресії:

а) –32; 16; –8; ...; **б)** $\frac{1}{2}$; 1; 2; ... .

818. Знайдіть п’ятий член геометричної прогресії:

а) 1; 3; 9; ...; **б)** 2; –4; 8; ... .

Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n), якщо:

819. **а)** $b_6 = 243$; $q = 3$; **б)** $b_5 = 1$; $q = -\frac{1}{5}$.

820. **а)** $b_7 = 128$; $q = 2$; **б)** $b_5 = –2$; $q = \frac{1}{2}$.

Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо:

821. **а)** $b_1 = 8$; $b_3 = 32$; **б)** $b_1 = 10$; $b_3 = 0{,}1$.

822. **а)** $b_1 = 5$; $b_3 = 80$; **б)** $b_1 = –27$; $b_3 = –243$.

823. Заповніть таблицю, якщо (b_n) — геометрична прогресія.

b_1	q	n	b_n
3	3	3	
0,6		3	5,4
	–2	9	256

824. Знайдіть п’ятий член геометричної прогресії (b_n), якщо:

а) $b_4 = 3$; $b_6 = 75$; **б)** $b_4 = –8$; $b_6 = –18$.

825. Знайдіть другий член геометричної прогресії:

а) $9;\ b_2;\ 36;\ \ldots;$ **б)** $0{,}7;\ b_2;\ 70;\ \ldots\ .$

826. Чому дорівнює добуток шостого та восьмого членів геометричної прогресії, якщо її сьомий член дорівнює: –8; 1,8?

Рівень Б

Чи є геометричною прогресією послідовність:

827. **а)** $2^{-5};\ 2^{-10};\ 2^{-15};$ **б)** $\dfrac{\sqrt{5}}{2};\ 2;\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$?

828. **а)** $3^{12};\ 3^{14};\ 3^{16};$ **б)** $\sqrt{7};\ -14;\ 28\sqrt{7}$?

829. Чи є послідовними членами геометричної прогресії значення $\mathrm{tg}\alpha$ для кутів $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$; $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$; $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$?

830. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n), якщо:

а) $b_4 = 9;\ b_6 = 81;$ **б)** $b_5 = -0{,}8;\ b_7 = -0{,}2.$

831. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо:

а) $b_3 = -2;\ b_5 = -50;$ **б)** $b_7 = 8;\ b_9 = 0{,}5.$

832. Знайдіть п’ятий член геометричної прогресії з від’ємним знаменником, якщо її другий і четвертий члени відповідно дорівнюють –2 і –18.

833. Знайдіть сьомий член геометричної прогресії з додатним знаменником, якщо її третій і п’ятий члени відповідно дорівнюють –32 і –8.

834. Третій член геометричної прогресії з додатним знаменником дорівнює 16, а сума перших двох членів дорівнює 12. Знайдіть п’ятий член прогресії.

835. Знайдіть шостий член геометричної прогресії, якщо її другий член дорівнює –4, а сума першого і третього членів дорівнює 10.

836. У квадрат, сторона якого дорівнює 8 см, вписано інший квадрат, вершинами якого є середини сторін даного квадрата. У другий квадрат у такий же спосіб вписано третій квадрат і т. д. Доведіть, що числові значення площ цих квадратів утворюють геометричну прогресію і знайдіть площу п’ятого квадрата.

837. У рівносторонній трикутник, сторона якого дорівнює 24 см, вписано інший трикутник, вершинами якого є середини сторін даного трикутника. У другий трикутник у такий же спосіб вписано третій трикутник і т. д. Доведіть, що числові значення периметрів цих трикутників утворюють геометричну прогресію і знайдіть периметр п’ятого трикутника.

838. Знайдіть невідомі члени скінченної геометричної прогресії:

а) 1; b_2; 49; b_4; **б)** b_1; $\frac{3}{2}$; b_3; $\frac{3}{8}$; b_5.

839. Знайдіть невідомі члени геометричної прогресії: 8; x; 2; y; 0,5.

840. Між числами 1 і 3 вставте таке число, щоб усі три числа утворили геометричну прогресію.

841. Виміри прямокутного паралелепіпеда утворюють геометричну прогресію. Знайдіть об’єм паралелепіпеда, якщо його найменше ребро дорівнює 2,5 см, а найбільше — 10 см.

842. Вік батька, старшого та молодшого синів утворюють геометричну прогресію. Скільки років старшому синові, якщо батькові 32 роки, а молодшому синові — 2 роки?

Рівень В

843. Додатні числа a, b, c є послідовними членами геометричної прогресії. Чи є послідовними членами геометричної прогресії числа:

а) a^2, b^2, c^2; **б)** $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$?

844. Знайдіть чотири числа, що утворюють геометричну прогресію, у якій різниця першого і другого членів дорівнює 28, а різниця четвертого і третього членів дорівнює –252.

845. Три числа утворюють геометричну прогресію. Сума другого і третього чисел дорівнює 4. Якщо перше число помножити на $\frac{5}{9}$, а друге і третє числа залишити без змін, то нова трійка чисел утворюватиме арифметичну прогресію. Знайдіть члени геометричної прогресії.

846. Чотири числа утворюють геометричну прогресію. Якщо до перших двох чисел додати по 1, а до третього і четвертого — відповідно 4 і 13, то нова четвірка чисел утворюватиме арифметичну прогресію. Знайдіть числа, які утворюють геометричну прогресію.

847. Для яких значень x числа 2, $x + 1$ і $4x - 2$ є трьома послідовними членами геометричної прогресії?

848. Числа 1, x, y є одночасно послідовними членами арифметичної й геометричної прогресій. Знайдіть x та y.

849. Третій член геометричної прогресії дорівнює 2. Знайдіть добуток п'яти перших членів цієї прогресії.

Вправи для повторення

850. Спростіть вираз:

а) $\frac{x^3y^2c}{2y}\cdot\frac{4c^3}{yx^7}$; **б)** $\frac{a^3+b^3}{m^2-n^2}:\frac{a^2-ab+b^2}{(m+n)^2}$.

851. Розв'яжіть нерівність:

а) $1 - 2(x - 1) < 6 - 5x$; **б)** $(x+3)^2-64<0$.

852. Побудуйте графік функції:

а) $y=x^2-5$; **б)** $y=x^2+6x+10$.

853. Довжина однієї сторони прямокутника утричі більша, а другої на 4 см менша від довжини сторони квадрата. Знайдіть площу квадрата, якщо вона на 10 см^2 більша від площі прямокутника.

854. Знайдіть усі значення a, для кожного з яких нерівність $x^2 - 2ax + 4a > 0$ виконується для всіх значень x.

Поміркуйте

855. Леся пронумерувала сторінки реферату, записавши помилково на двох сторінках той самий номер. Який номер вона записала двічі, якщо сума номерів усіх сторінок дорівнює 125?

20. Формула суми перших n членів геометричної прогресії

Нехай b_1; b_2; b_3; … — геометрична прогресія, знаменник якої дорівнює q. Позначимо через S_n суму перших n членів цієї прогресії, тобто

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{n-1} + b_n. \quad (1)$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на q, одержимо:

$$S_nq = b_1q + b_2q + ... + b_{n-1}q + b_nq.$$

За означенням геометричної прогресії: $b_1q = b_2$; $b_2q = b_3$; ...; $b_{n-1}q = b_n$. Тоді:

$$S_nq = b_2 + b_3 + ... + b_n + b_nq. \quad (2)$$

Віднімемо почленно від рівності (1) рівність (2), одержимо:

$$S_n - S_nq = b_1 + \underbrace{b_2 + b_3 + ... + b_n}_{} - \left(\underbrace{b_2 + b_3 + ... + b_n}_{} + b_nq\right) = b_1 - b_nq;$$

$$S_n(1-q) = b_1 - b_nq.$$

Якщо $q \neq 1$, то $S_n = \dfrac{b_1 - b_nq}{1-q}$. Урахувавши, що $b_n = b_1q^{n-1}$, одержимо: $S_n = \dfrac{b_1 - b_1q^n}{1-q}$. Отже,

$$\boldsymbol{S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}} \text{ або } \boldsymbol{S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}}. \quad (3)$$

Формули (3) називають *формулами суми перших n членів геометричної прогресії*. Другою з цих формул зручно користуватися, якщо $q > 1$.

Якщо $q = 1$, то кожний член геометричної прогресії дорівнює b_1, тому $S_n = n \cdot b_1$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти суму восьми перших членів геометричної прогресії (b_n): 3; –6; 12; ... .

● Маємо: $b_1 = 3$; $q = \frac{-6}{3} = -2$. Тоді за формулою $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ знаходимо: $S_8 = \frac{3\cdot\left(1-(-2)^8\right)}{1+2} = \frac{3\cdot(1-256)}{3} = -255$.

Відповідь. –255. ●

Вправа 2. Знайти перший член геометричної прогресії (b_n), якщо четвертий її член утричі більший від третього, а сума п’яти перших членів дорівнює –12,1.

● Оскільки $b_4 = 3b_3$, то $q = 3$. За умовою $S_5 = -12{,}1$, тому:

$$-12{,}1 = \frac{b_1(3^5-1)}{3-1}; \quad -12{,}1 = 121b_1; \quad b_1 = -0{,}1.$$

Відповідь. –0,1. ●

Рівень А

856. Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії (b_n), у якій:

а) $b_1 = 1$; $q = 2$; **б)** $b_1 = -0{,}5$; $q = -2$.

Знайдіть суму перших n членів геометричної прогресії (b_n), *якщо:*

857. **а)** $b_1 = 6$; $q = -5$; $n = 4$; **б)** $b_1 = -6$; $q = 3$; $n = 5$;

в) $b_1 = 18$; $q = \frac{1}{3}$; $n = 3$; **г)** $b_1 = -64$; $q = 0{,}5$; $n = 4$.

858. **а)** $b_1 = -4$; $q = 3$; $n = 4$; **б)** $b_1 = 1$; $q = -2$; $n = 6$;

в) $b_1 = -1$; $q = 0{,}5$; $n = 3$; **г)** $b_1 = 4$; $q = -\frac{1}{2}$; $n = 4$.

859. Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії:

а) 3; 6; 12; ...; **б)** –2; –4; –8; ...;

в) –5; 10; –20; ...; **г)** 2; –1; $\frac{1}{2}$; ... .

860. Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії:
а) 3; –6; 12; ...; **б)** 0,2; 0,6; 1,8; ... .

Рівень Б

861. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n), якщо:
а) $q = 2$; $S_5 = 217$; **б)** $q = -\frac{1}{2}$; $S_8 = 1\frac{21}{64}$.

862. Знайдіть перший член геометричної прогресії, знаменник якої дорівнює $\frac{1}{2}$, а сума семи перших членів — 254.

863. Знаменник геометричної прогресії дорівнює –3, а сума чотирьох перших членів — 40. Знайдіть шостий член цієї прогресії.

864. Знаменник геометричної прогресії дорівнює 4, а сума п'яти перших членів — 341. Знайдіть п'ятий член цієї прогресії.

865. Знайдіть суму членів геометричної прогресії (b_n) від четвертого до восьмого включно, якщо:
а) $b_1 = 5$; $q = 2$; **б)** $b_1 = -24$; $q = -0,5$.

866. Знайдіть суму членів геометричної прогресії (b_n) від третього до восьмого включно, якщо:
а) $b_1 = 2$; $q = -2$; **б)** $b_1 = -16$; $q = 0,5$.

867. Доведіть, що послідовність, яку задано формулою $x_n = 5 \cdot 2^{-n}$, є геометричною прогресією, і знайдіть суму п'яти перших її членів.

868. Доведіть, що послідовність, яку задано формулою $x_n = 2 \cdot 3^n$, є геометричною прогресією, і знайдіть суму шести перших її членів.

Рівень В

869. Різниця п'ятого і третього членів геометричної прогресії дорівнює 36, а різниця третього і першого — 9. Знайдіть суму восьми перших членів цієї прогресії.

870. Три числа, сума яких дорівнює 21, утворюють арифметичну прогресію. Якщо перше число залишити без зміни, від другого відняти 1, а до третього додати 1, то нова трійка чисел утворить геометричну прогресію. Знайдіть числа, які утворюють геометричну прогресію.

871. Знайдіть восьмий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 3$ і для деякого натурального n виконуються рівності: $b_n = 96$; $S_n = 189$.

872. Сума трьох перших членів геометричної прогресії з додатним знаменником дорівнює 14, а сума членів із третього до п'ятого включно — 3,5. Знайдіть суму п'яти перших членів прогресії.

Вправи для повторення

873. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-2} - \dfrac{1}{\sqrt{6}+2}$; **б)** $\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}$.

874. Розв'яжіть нерівність $5x + m \geq 0$, де m — сума п'яти перших членів арифметичної прогресії 1; –2; –5; ... .

875. Для яких значень m один з коренів рівняння $8x^2 - 6x + m = 0$ удвічі більший від іншого?

876. На заводі для виготовлення одного електродвигуна типу A використовують 2 кг міді й 1 кг свинцю, а для виготовлення одного електродвигуна типу B — 3 кг міді й 2 кг свинцю. Скільки електродвигунів кожного типу було виготовлено на заводі, коли відомо, що всього використали 130 кг міді й 80 кг свинцю?

Поміркуйте

877. Підручник складається із трьох розділів. Номери останніх сторінок усіх розділів є парними трицифровими числами, у запису яких використано дев'ять різних цифр, окрім нуля. Скільки щонайбільше сторінок може мати другий розділ підручника?

21. Розв'язування задач, пов'язаних з арифметичною та геометричною прогресіями

1. Обчислення сум. Вивчаючи арифметичну та геометричну прогресії, ми знаходили суми перших n їхніх членів. Проте є задачі, розв'язуючи які, доводиться шукати суми чисел, що не утворюють ні арифметичної, ні геометричної прогресії. Такі суми деколи можна знайти, перетворивши певним чином їхні доданки.

Приклад 1. Знайти суму $1\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+5\frac{1}{8}+...+13\frac{1}{128}$, у якій цілі частини доданків утворюють арифметичну прогресію, а дробові частини — геометричну.

● Позначимо цю суму через S і запишемо її так:

$$S=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(3+\frac{1}{4}\right)+\left(5+\frac{1}{8}\right)+...+\left(13+\frac{1}{128}\right)=$$

$$=\left(1+3+5+...+13\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{128}\right).$$

У перших дужках записано суму членів арифметичної прогресії (a_n), у якій $a_1=1$, $d=2$. Знайдемо, яким за номером членом цієї прогресії є число 13:

$$13=a_1+(n-1)d;\quad 13=1+(n-1)\cdot 2;\quad n=7.$$

Отже, в перших дужках записано суму семи перших членів арифметичної прогресії.

У других дужках записано суму семи перших членів геометричної прогресії (b_n), у якій $b_1=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$. Використавши формули суми перших n членів арифметичної та геометричної прогресій, знаходимо:

$$S=\frac{1+13}{2}\cdot 7+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right)}{1-\frac{1}{2}}=49+\frac{127}{128}=49\frac{127}{128}.$$

Відповідь. $49\frac{127}{128}$. ●

2. Розв'язування рівнянь. Розглянемо приклад.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$4x+7x+...+25x=290,$$

у якому коефіцієнти 4, 7, … , 25 утворюють арифметичну прогресію.

● Запишемо рівняння так:

$$(4+7+...+25)\cdot x=290.$$

У дужках записано суму перших членів арифметичної прогресії, у якій $a_1=4$, $d=3$. Знайдемо кількість членів цієї прогресії. Нехай число 25 є її n-м членом. За формулою n-го члена $25 = 4 + (n - 1) \cdot 3$, звідки:

$$21=3(n-1);\quad 7=n-1;\quad n=8.$$

Отже, у дужках записано суму восьми перших членів арифметичної прогресії. Тоді матимемо:

$$\frac{4+25}{2}\cdot 8\cdot x=290;\quad 29\cdot 4x=290;\quad x=2{,}5.$$

Відповідь. 2,5. ●

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти суму $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1)$, де n — натуральне число.

● Числа 1; 3; 5; …; $2n+1$ утворюють арифметичну прогресію (a_n), у якій $a_1 = 1$, $d = 2$. Ця прогресія має $n + 1$ член (якщо $n = 1$, то маємо прогресію 1; 3, яка має 2 члени; якщо $n = 2$, то маємо прогресію 1; 3; 5, яка має 3 члени, і т. д.). Використавши формулу суми перших членів арифметичної прогресії, знаходимо:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = \frac{1+(2n+1)}{2}\cdot(n+1)=(n+1)^2.$$

Відповідь. $(n + 1)^2$. ●

Вправа 2. Довести, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}$ менше від 2.

● Числа 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; …; $\frac{1}{2^{n-1}}$ утворюють геометричну прогресію (b_n), у якій $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$. Ця прогресія має n членів (якщо взяти, наприклад, $n = 2$, то матимемо прогресію 1; $\frac{1}{2}$, яка має 2 члени). Використовуючи формулу суми перших n членів геометричної прогресії, знаходимо:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}=2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Оскільки $2-\frac{1}{2^{n-1}}<2$ для будь-якого натурального значення n, то й значення заданого виразу теж менше від 2 для будь-якого натурального значення n. ●

Вправа 3. Розв'язати рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, якщо відомо, що його коефіцієнти 1, a, b, c в указаному порядку утворюють геометричну прогресію, знаменник якої дорівнює 2.

● Оскільки 1, a, b, c — геометрична прогресія, перший член якої дорівнює 1, а знаменник — 2, то цією прогресією є: 1, 2, 4, 8, звідки $a = 2$, $b = 4$, $c = 8$. Отже, маємо рівняння $x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$. Розв'яжемо це рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

$$x^2(x + 2) + 4(x + 2) = 0;$$

$$(x + 2)(x^2 + 4) = 0;$$

$x + 2 = 0$; $x = -2$; $x^2 + 4 = 0$ — коренів немає.

Відповідь. –2. ●

Вправа 4. Знайти суму $9+99+999+\ldots+\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ разів}}$.

● Позначимо дану суму через S. Записавши доданки у вигляді $9 = 10 - 1$, $99 = 10^2 - 1$, $999 = 10^3 - 1$ і т. д., матимемо:

$$S=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\ldots+(10^n-1)=(10+10^2+10^3+\ldots+10^n)-n.$$

У дужках записана сума перших n членів геометричної прогресії (b_n), у якій $b_1 = 10$, $q = 10$. Тому:

$$S = \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}.$$

Відповідь. $\frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}$. ●

Рівень Б

Знайдіть суму (n — натуральне число):

878. **а)** $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{8} + \ldots + 1\frac{1}{512}$ (дробові частини доданків утворюють геометричну прогресію);

б) $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n + 1)$; **в)** $1 + 3 + 9 + \ldots + 3^n$.

879. **а)** $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} + 8\frac{1}{2} + \ldots + 128\frac{1}{2}$ (цілі частини доданків утворюють геометричну прогресію);

б) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$; **в)** $2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n$.

880. Знайдіть суму перших n натуральних чисел, кратних 5.

881. Знайдіть суму перших n натуральних чисел.

Розв'яжіть рівняння, де x — натуральне число:

882. **а)** $(2x - 100) + (4x - 100) + \ldots + (18x - 100) = x^2 - 100$;

б) $3 + 6 + \ldots + 3x = 165$.

883. **а)** $x + 3x + 5x + \ldots + 21x = x^2 + 120$;

б) $2 + 4 + \ldots + 2x = 90$.

884. Куля котиться похилим жолобом. За першу секунду вона пройшла 0,2 м, а за кожну наступну — на 0,1 м більше, ніж за попередню. Який шлях пройшла куля за дев'яту секунду?

885. За вільного падіння тіло за першу секунду пройшло 4,9 м, а за кожну наступну — на 9,8 м більше, ніж за попередню. Який шлях пройшло тіло за шосту секунду?

886. Після реконструкції станків у цеху за перший день виготовили 40 деталей, а далі протягом місяця почали виготовляти щодня на 3 деталі більше, ніж за попередній день. За який день роботи буде виготовлено 100 деталей? За скільки днів у цеху буде виготовлено 178 деталей?

887. Гальмуючи, автомобіль за першу секунду проїхав 15 м, а за кожну наступну — на 3 м менше, ніж за попередню. Знайдіть гальмівний шлях автомобіля.

888. У трикутнику ABC провели середню лінію A_1C_1 паралельно стороні AC й одержали другий трикутник A_1BC_1. У трикутнику A_1BC_1 знову провели середню лінією A_2C_2 паралельно A_1C_1 й одержали третій трикутник і т. д. Знайдіть висоту шостого трикутника, проведену з вершини B, якщо висота BH трикутника ABC дорівнює 16 см.

Рівень В

889. Доведіть, що корені рівняння $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, записані в порядку зростання, утворюють арифметичну прогресію.

890. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{n}$ більше від n.

891. Знайдіть суму, де n — натуральне число:

а) $\dfrac{2}{1\cdot 3}+\dfrac{2}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}$;

б) $1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^n$;

в) $1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ разів}}$.

Вказівки. **а)** Запишіть доданки у вигляді різниці двох дробів. Наприклад, $\dfrac{2}{3\cdot 5}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}$. **б)** Позначте суму через S. Знайдіть $2S$, а потім різницю $2S - S$.

892. Розв’яжіть рівняння, де x — натуральне число:

$$\left(1+3+\ldots+(2x-1)\right)+\left(3{,}5+5+\ldots+\frac{3x+4}{2}\right)=105.$$

893. Доведіть нерівність, де n — натуральне число:

а) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}<1;$

б) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}<\frac{\sqrt{2n+1}}{2}.$

894. Два тіла рухаються назустріч одне одному із двох точок, відстань між якими дорівнює 127 м. Перше тіло рухається рівномірно зі швидкістю 5 м/с. Друге тіло, яке почало рухатися на 3 с пізніше від першого, за першу секунду пройшло 5 м, а за кожну наступну — на 2 м більше, ніж за попередню. Скільки часу рухатиметься друге тіло до зустрічі?

895. Атмосферний тиск зменшується на 10% зі збільшенням висоти на 700 м. Знайдіть атмосферний тиск на висоті 2,8 км, якщо на висоті 5,6 км він дорівнює 50 кПа.

Вправи для повторення

896. Спростіть вираз $\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}\cdot\frac{a^3b^3}{a+b}$ і знайдіть його значення, якщо $a=2^{-1}$, $b=3^{-1}$.

897. Доведіть нерівність:

а) $(2a-1)^2>a^2-1;$ **б)** $a^4+16b\geq 8a^2\sqrt{b}.$

898. Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt{x+m}$, де m — найбільший корінь рівняння $x^2-4x-12=0$.

899. Для яких значень a рівняння $x-6=3(x-a)$ має від'ємний корінь?

900. Вкладник вніс до банку певну суму під 15% річних і через 2 роки мав на рахунку 2645 грн. Яку суму вніс вкладник до банку?

Поміркуйте

901. Надруковано мільйон квитків з номерами від 000 000 до 999 999. Квиток з номером $\overline{abcdef}$ вважають «щасливим», якщо $af+be+cd=100$. Доведіть, що сума номерів усіх «щасливих» квитків ділиться на 1001.

Цікаво знати

Слово «*прогресія*» походить від латинського слова «*progressio*» й означає «*рух уперед*» (як і слово «прогрес»). Уперше цей термін як математичний ужив у своїх працях римський учений Боецій (V–VI ст.).

Прогресії як часткові види числових послідовностей трапляються у папірусах II тисячоліття до н. е. Перші із задач на прогресії, що дійшли до нас, пов'язані з господарською діяльністю, а саме — з розподілом продуктів, поділом спадку тощо.

Найдавнішою задачею на прогресії вважають задачу з єгипетського папірусу Ахмеса Райнда про поділ 100 мір хліба між п'ятьма людьми так, щоб другий одержав на стільки більше від першого, на скільки третій одержав більше від другого і т. д. У цій задачі йдеться про арифметичну прогресію, сума п'яти перших членів якої дорівнює 100.

В одній із задач цього папірусу подано формулу першого члена арифметичної прогресії, яку в сучасній символіці записують так:

$$a_1 = \frac{S_n}{n} - (n-1)\frac{d}{2}.$$

Переконайтеся, що ця формула є правильною.

Зі знаходженням суми членів арифметичної прогресії пов'язана одна цікава історія. Відомий німецький математик Карл Гаус (1777–1875) ще у школі виявив блискучі математичні здібності. Якось учитель запропонував учням знайти суму ста перших натуральних чисел. Ледь учитель устиг прочитати умову задачі, як малий Гаус підніс руку: «Уже». Увесь клас був захоплений швидкістю, з якою він вирахував. Поміркуйте, як рахував Гаус.

Давно неабиякою популярністю користується задача-легенда, яка датується початком нашої ери. Індійський цар Шерам покликав до себе винахідника гри в шахи, свого підданого Сету, щоб нагородити його за кмітливу вигадку. Коли винахідникові запропонували самому вибрати винагороду, він попросив за першу клітинку шахової дошки дати йому 1 зернину пшениці, за другу — 2 зернини, за третю — 4 і т. д. Виявилося, що цар не зміг виконати прохання Сети. За останню 64-ту клітинку шахової дошки довелося б віддати 2^{63} зернин пшениці, а за всі клітинки — таку кількість зернин, яка дорівнює сумі членів геометричної прогресії: 1; 2; 2^2; 2^3; ...; 2^{63}. Ця сума дорівнює $2^{64} - 1 = 18446744073709551615$. Таку кількість зернин пшениці можна зібрати із площі, яка приблизно у 2000 разів більша від площі усієї поверхні Землі.

Запитання і вправи для повторення § 3

1. Наведіть приклади послідовностей.
2. Які є способи задання послідовностей? Наведіть приклади.
3. Що називають арифметичною прогресією? Наведіть приклади арифметичних прогресій.
4. Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії.
5. Сформулюйте властивості арифметичної прогресії.
6. За якими формулами шукають суму перших n членів арифметичної прогресії?
7. Що називають геометричною прогресією? Наведіть приклади геометричних прогресій.
8. Запишіть формулу n-го члена геометричної прогресії.
9. Сформулюйте властивості геометричної прогресії.
10. За якими формулами шукають суму перших n членів геометричної прогресії?

902. Знайдіть члени послідовності (a_n) із третього до шостого включно, якщо:

а) $a_n = 4 - 3n^2$; **б)** $a_n = 3 \cdot (-2)^n$.

903. Запишіть чотири перші члени послідовності (a_n), якщо:

а) $a_1 = -5$; $a_{n+1} = 2a_n + 3$; **б)** $a_1 = 3$; $a_2 = 5$; $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 2a_n$.

904. Послідовність задано формулою $x_n = n^2 - 6$. Чи є членом цієї послідовності число 138; число 150?

905. Послідовність задано формулою $a_n = n^2 - 5n$. Знайдіть порядкові номери членів послідовності, для яких виконується нерівність $a_n + 6 \le 0$.

906. Чи є послідовними членами арифметичної прогресії числа:

а) 5; 14; 23; **б)** –12; –11; –9?

907. Знайдіть різницю та четвертий член арифметичної прогресії:

а) 15; 19; 23; ...; **б)** 1,2; –1,3; –3,8... .

908. Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії (a_n):

а) 13; 1; –11; ...; **б)** –4; –3,5; –3; ... .

909. Знайдіть n-й член арифметичної прогресії (a_n), якщо:

а) $a_1 = 2$; $d = 10$; $n = 9$; **б)** $a_1 = 0,5$; $d = -1$; $n = 7$;

в) $a_1 = -5$; $a_2 = 2$; $n = 5$; **г)** $a_1 = -1,6$; $a_2 = -1,2$; $n = 6$.

910. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо:

а) $a_3 = 16$; $a_7 = 4$; **б)** $a_4 = 10$; $a_{21} = -24$.

911. В арифметичній прогресії (a_n): $a_2 = -8$; $a_9 = 27$. Знайдіть a_5.

912. Знайдіть периметр п’ятикутника, коли відомо, що довжина однієї його сторони дорівнює 7 см, а кожної наступної — на 2 см більша від попередньої.

913. Знайдіть суму десяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:

а) $a_1 = -6$; $a_{10} = 14$; **б)** $a_1 = 10$; $d = -4$;

в) $a_1 = 1$; $a_6 = 26$; **г)** $a_3 = 6$; $a_8 = 26$.

914. Знайдіть суму всіх:

а) натуральних чисел від 11 до 101 включно;

б) двоцифрових чисел, які не більші від 75;

в) натуральних чисел, кратних 3, які не більші від 121;

г) непарних натуральних чисел, які не більші від 125;

д) парних натуральних чисел від 70 до 170 включно;

е) двоцифрових чисел, які при діленні на 7 дають в остачі 1.

915. Різниця арифметичної прогресії дорівнює 2,1, а сума п’яти її перших членів дорівнює 0,5. Знайдіть:

а) перший член прогресії; **б)** п’ятий член прогресії.

916. Заповніть таблицю, якщо (a_n) — арифметична прогресія.

a_1	d	a_n	n	S_n
0,1	0,2			22,5
	–0,6	9,5	17	
		–2,5	11	0

917. Скільки потрібно взяти членів арифметичної прогресії –100; –80; …, щоб їх сума дорівнювала 600?

918. Знайдіть суму членів арифметичної прогресії 7; 21; 35; ... з дев'ятого до двадцять першого включно.

919. Знайдіть суму шести перших членів арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює x, а різниця — y, якщо $(x; y)$ — розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} 2x+5y=-6; \\ x+3y=-4. \end{cases}$

920. Автомобіль після старту за першу секунду проїхав 1,75 м, а далі збільшував свою швидкість, долаючи за кожну наступну секунду на 3,5 м більше, ніж за попередню. Який шлях проїхав автомобіль за 5 с?

921. Чи є послідовними членами геометричної прогресії числа 2; 0,8; 0,32?

922. Знайдіть знаменник і четвертий член геометричної прогресії:

а) 5; 20; 80; ...; **б)** 1,6; 0,4; 0,1; ... .

923. Знайдіть п'ятий член геометричної прогресії:

а) 1; –3; …; **б)** 4; 1; … .

924. Знайдіть n-й член геометричної прогресії (b_n), якщо:

а) $b_1 = 3$; $q = 4$; $n = 4$; **б)** $b_1 = 5$; $q = -2$; $n = 7$.

925. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо $b_3 = \frac{9}{25}$; $b_5 = \frac{81}{625}$.

926. Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

а) $b_1 = 10$; $q = 2$; **б)** $b_1 = -24$; $q = -\frac{1}{2}$.

927. Знайдіть суму членів геометричної прогресії (b_n) від третього до сьомого включно, якщо $b_1 = 16$, $q = 0,5$.

928. Знаменник геометричної прогресії дорівнює 3, а сума п'яти перших членів — 121. Знайдіть шостий член цієї прогресії.

929*. Чотири числа утворюють геометричну прогресію, сума крайніх членів якої дорівнює –126, а сума середніх — –30. Знайдіть ці числа.

930*. Дано рівнобедрений прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють по 1 см. Гіпотенуза цього трикутника є катетом другого рівнобедреного прямокутного трикутника і т. д. Знайдіть довжину гіпотенузи десятого такого трикутника.

931*. Сума трьох чисел, які утворюють арифметичну прогресію з додатною різницею, дорівнює 51. Якщо від цих чисел відняти відповідно числа 1, 7 і 8, то отримаємо три числа, які утворюють геометричну прогресію. Знайдіть числа, які утворюють арифметичну прогресію.

932*. Три числа, з яких перше більше від третього на 9, є послідовними членами геометричної прогресії. Якщо перше число залишити без змін, від другого відняти 7, а до третього додати 13, то нова трійка чисел утворить арифметичну прогресію. Знайдіть числа, які утворюють геометричну прогресію.

933. Розгляньте рисунок 80. На бісектрисі *OK* кута *xOy* позначено точку *M*(8; 8). З точки *M* на осі координат опущено перпендикуляри *MA* і *MB*, у результаті чого утворився перший квадрат *OBMA*. З точки M_1, яка є серединою діагоналі *OM*, знову опущено перпендикуляри на осі координат і утворився другий квадрат, і т. д. Знайдіть:

а) площу шостого квадрата;

б) суму площ шести таких квадратів;

в) суму периметрів шести таких квадратів.

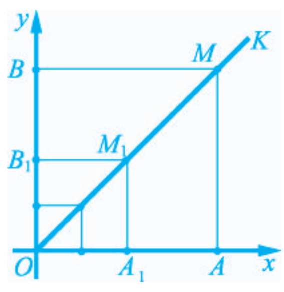


Рис. 80

934. Розв'яжіть нерівність $x^2 - 3x + m > 0$, де m — перший член геометричної прогресії (b_n), у якій $b_3 = -16$, $q = 2$.

935*. Для яких натуральних значень n значення суми $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ є:

а) меншим від 1000;

б) трицифровим числом, яке можна записати за допомогою лише однієї цифри?

936. Знайдіть суму, де n — натуральне число:

а) $1+5+9+\ldots+(4n+1)$; **б)** $\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}$.

937. Розв'яжіть рівняння $1+4+7+\ldots+(3x-2)=145$, де x — натуральне число.

Завдання для самоперевірки № 4

Початковий рівень

1. Знайдіть сьомий член послідовності, яку задано формулою $a_n = n^2 - 2n$.

а) 7; **б)** 35; **в)** 63; **г)** 24.

2. Яка із заданих послідовностей є арифметичною прогресією?

а) 1; 2; 4; 8; **б)** 2; 5; 8; 10; **в)** 16; 8; 4; 2; **г)** 1; 6; 11; 16.

3. Знайдіть п'ятий член арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = -5$; $d = 3$.

а) 10; **б)** 7; **в)** –17; **г)** 17.

4. Знайдіть суму дев'яти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 2$; $a_9 = -6$.

а) 4; **б)** 18; **в)** –18; **г)** –4.

5. Знайдіть четвертий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 4$; $q = 3$.

а) 192; **б)** 108; **в)** 314; **г)** 27.

6. Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії (b_n), у якій $b_1 = -5$; $q = 2$.

а) 160; **б)** 155; **в)** –160; **г)** –155.

Середній рівень

7. Установіть відповідність між початком речення (1–4) та його закінченням (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

1) Різниця арифметичної прогресії 9; 6; 3; … дорівнює	**А)** 2.
2) Перший член арифметичної прогресії a_1; –2; 1; … дорівнює	**Б)** 3.
3) Знаменник геометричної прогресії 0,5; –2; 8; … дорівнює	**В)** –3.
4) Перший член геометричної прогресії b_1; 6; 18; … дорівнює	**Г)** –4.
	Д) –5.

8. Знайдіть десятий член арифметичної прогресії:
а) 1,2; 3,2; …; **б)** –5; –2; … .

9. Знайдіть суму семи перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 2$; $d = –3$.

10. Знайдіть п'ятий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 0,5$; $q = –3$.

11. Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії –4; –8; ... .

Достатній рівень

12. Чи є число –32 членом арифметичної прогресії (a_n), у якій $a_1 = –8$; $d = –2,4$?

13. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 + a_6 = –12,6$; $a_5 – a_2 = –9$.

14. Знайдіть суму всіх двоцифрових чисел, які при діленні на 3 дають в остачі 2.

15. Четвертий і шостий члени геометричної прогресії відповідно дорівнюють –2 і –8. Знайдіть другий член прогресії.

16. Знайдіть перший член і суму семи перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_7 = 192$; $q = 2$.

Високий рівень

17. Знайдіть кількість додатних членів арифметичної прогресії 91; 89,5; … .

18. Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії, якщо її п'ятий член дорівнює 1, а сума шести перших членів — –1,2.

19. Розв'яжіть рівняння $105-(7+12+...+(2+5x))=20$, де x — натуральне число.

20. Сума трьох перших членів геометричної прогресії дорівнює 13, а третій її член більший від першого на 8. Знайдіть знаменник цієї прогресії.

21. Три числа, з яких третє дорівнює –8, утворюють геометричну прогресію. Якщо перші два числа залишити без змін, а замість третього взяти –6, то нова трійка чисел утворить арифметичну прогресію. Знайдіть числа, які утворюють геометричну прогресію.

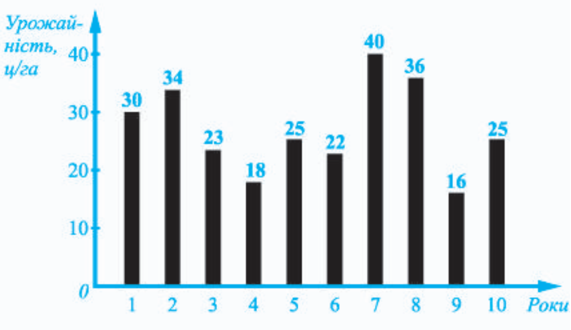
§ 4.

ОСНОВИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І СТАТИСТИКИ

Жодної достовірності немає в науках там, де не можна застосувати жодну з математичних наук, і в тому, що не має зв'язку з математикою.

Леонардо да Вінчі

У цьому параграфі ми з'ясуємо, що вивчає комбінаторика та які її основні правила, що таке випадкова подія, ймовірність випадкової події, що вивчає математична статистика.



22. Основні правила комбінаторики

1. Що вивчає комбінаторика. Існує чимало практичних задач, у яких потрібно встановити, скількома способами можна утворити певну сукупність предметів, скількома способами можна здійснити певну дію.

Наприклад, розробляючи для транспортних засобів номерні знаки, які складаються з певної кількості цифр і букв, потрібно знати заздалегідь, скільки всього можна одержати таких знаків — їх має вистачити на всі транспортні засоби.

Аналіз різних можливих варіантів необхідний для розв'язування багатьох задач виробничої діяльності, наприклад, для проектування комунікацій, розподілу сільськогосподарських культур на кількох полях, складання розкладу руху транспорту, графіків використання ресурсів, розкладів занять у навчальних закладах тощо.

Пошуком відповідей на запитання «Скільки всього є варіантів у тому чи іншому випадку?» займається окремий розділ математики, який називають *комбінаторикою*.

Деякі комбінаторні задачі можна розв'язати шляхом перебору всіх можливих варіантів. Розглянемо приклад.

Приклад. Скільки різних за добором кольорів букетів із трьох троянд можна скласти, маючи троянди білого та червоного кольорів?

● Троянду білого кольору позначимо буквою *б*, а червоного — буквою *ч*. Можливі букети: *ббб*, *ббч*, *бчч*, *ччч* — 4 варіанти букетів. ●

2. Комбінаторні правила суми та добутку. Розглянемо два правила, за допомогою яких можна розв'язати більшість комбінаторних задач — правила суми та добутку.

Нехай на полиці стоять 12 підручників і 8 посібників. Якщо потрібно вибрати будь-яку книжку з полиці, то вибрати підручник можна 12 способами, а посібник — 8 способами. Вибрати книжку (підручник або посібник) можна 12 + 8 = 20 способами. Даний приклад ілюструє так зване *комбінаторне правило суми*.

> ***Правило суми.*** **Якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами, а об'єкт B — n способами, то вибрати один з об'єктів A або B можна $m + n$ способами.**

До другого правила ми прийдемо, розв’язуючи таку задачу:

З міста M до міста N ведуть чотири дороги, а з міста N до міста K — три. Скільки можна підібрати різних маршрутів, щоб дістатися з міста M до міста K через місто N?

Кількість різних маршрутів можна безпосередньо порахувати, використовуючи рисунок 81. Їх є 12:

$$1a;\ 1b;\ 1c;\quad 2a;\ 2b;\ 2c;\quad 3a;\ 3b;\ 3c;\quad 4a;\ 4b;\ 4c.$$

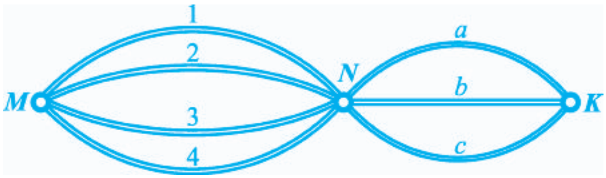


Рис. 81

Можна міркувати й так. Дорогу від міста M до міста N можна вибрати 4 способами. Після кожного вибору дороги від M до N вибрати дорогу від N до K можна 3 способами. Тому кількість різних маршрутів дорівнює $4 \cdot 3 = 12$.

Узагальнюючи розв’язання цієї задачі, маємо:

Правило добутку. **Якщо об’єкт A можна вибрати m способами, а об’єкт B — n способами (незалежно від того, як вибрали об’єкт A), то пару об’єктів A і B можна вибрати $m \cdot n$ способами.**

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Учень повинен вибрати тему реферату зі списку, в якому є 15 тем з алгебри та 12 тем з геометрії. Скількома способами він може зробити вибір?

● Учень може вибрати тему з алгебри 15-ма способами, тему з геометрії — 12-ма способами. За правилом суми тему з алгебри або з геометрії він може вибрати $15 + 12 = 27$ (способами).

Відповідь. 27 способами. ●

Вправа 2. Скільки є чотирицифрових чисел, які можна записати:

а) тільки непарними цифрами;

б) тільки парними цифрами;

в) цифрами, серед яких є цифри різної парності?

● **а)** У задачі йдеться лише про числа виду 3715, 9171, 3373, 1111 тощо. Оскільки непарних цифр є п’ять (1, 3, 5, 7 і 9), то першу цифру числа можна вибрати п’ятьма способами. Це саме можна сказати й про інші цифри. Тому за правилом добутку шуканих чотирицифрових чисел є $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

б) Оскільки перша цифра не може бути нулем, то її можна вибрати лише серед цифр 2, 4, 6 і 8. Кожну з інших цифр можна вибрати п’ятьма способами серед чисел 0, 2, 4, 6, 8. Тому чотирицифрових чисел, які можна записати тільки парними цифрами, є $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$.

в) Усіх чотирицифрових чисел є 9000 (від 1000 до 9999). Якщо відкинути ті з них, які можна записати тільки непарними або тільки парними цифрами (відповідно 625 і 500 чисел), то одержимо чотирицифрові числа, у запису яких є і парні, і непарні цифри. Отже, шуканих чисел є $9000 - (625 + 500) = 7875$.

Відповідь. **а)** 625; **б)** 500; **в)** 7875. ●

Усно

938. В урні є 5 білих, 5 синіх і 10 рожевих кульок. Скількома способами з урни можна взяти:

а) 1 кульку;

б) 2 кульки, одна з яких має білий колір, а інша — синій;

в) 2 кульки, одна з яких має синій колір, а інша — рожевий;

г) 3 кульки різних кольорів?

Рівень А

939. Із 5 дівчат і 4 хлопців потрібно сформувати дует, до якого входила б одна дівчина та один хлопець. Скількома способами це можна зробити?

940. У новорічному подарунку лежать 8 різних шоколадних цукерок і 6 різних льодяників. Скількома способами можна взяти із подарунка дві цукерки: одну шоколадну цукерку та один льодяник?

941. З міста A до міста B ведуть три дороги. Скільки можна дібрати різних маршрутів, щоб дістатися з міста A до міста B і повернутися назад?

942. На вершину гори веде 6 стежин. Скількома способами турист може зійти на вершину гори однією стежиною, а спуститися — іншою?

943. Скільки різних трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 3, 5, 7, 8, використовуючи в запису числа кожну цифру не більше одного разу?

944. Скільки різних чотирицифрових чисел можна одержати, записуючи замість зірочок пропущені цифри у запису 2**7?

945. Скільки є двоцифрових чисел, у запису яких цифри різні?

946. У математичному гуртку займаються 10 учнів. Скількома способами серед членів гуртка можна обрати старосту, заступника та відповідального за чергування?

947. Із 28 учнів класу потрібно обрати старосту та його заступника. Скількома способами це можна зробити?

948. Скількома способами можна скласти денний розклад із 6 різних уроків для класу, в якому вивчають 10 навчальних предметів?

949. У кіоску продають 6 видів календариків. Скількома способами можна вибрати для купівлі 3 різні календарики?

950. Скількома способами можна вишикувати 5 спортсменів в одну шеренгу?

951. Скількома способами можна розставити на полиці 4 різні книжки?

Рівень Б

952. Номерний знак автомобіля містить дві букви, за ними чотири цифри і знову дві букви. Скільки різних номерних знаків такого виду можна скласти, використавши 12 букв і 10 цифр?

953. Із 15 спринтерів вибирають 4 учасники естафети 4 × 100 м. Скількома способами можна розставити спринтерів на етапи естафети?

954. Скільки різних чотирицифрових чисел можна записати, використовуючи цифри 0, 1, 2, 3, 4, 5 і 6, якщо в запису числа кожну цифру можна використовувати не більше одного разу?

955. Скільки різних п’ятицифрових чисел можна записати, використовуючи цифри 0, 2, 4 і 6, якщо в запису числа цифри можуть повторюватись?

956. У корзині є 10 яблук сорту «Антонівка», 5 яблук сорту «Ренет» і 15 яблук сорту «Білий налив». Скількома способами з корзини можна взяти 2 яблука різного сорту?

957. У ящику є 4 білі, 10 жовтих і 5 червоних м’ячів. Скількома способами з ящика можна взяти 2 м’ячі різного кольору?

958. Перед початком футбольного матчу кожен з 11 гравців однієї команди обмінявся рукостисканням з кожним із 11 гравців команди-суперника. Скільки було усього рукостискань?

959. Чотирьох тенісистів потрібно розділити на дві команди, по 2 тенісисти в кожній. Скількома способами це можна зробити?

960. На колі задано 5 точок. Скільки можна провести хорд з кінцями в цих точках?

961. У класі є два ряди двомісних парт, по 7 парт у кожному ряді. Скількома способами можна розмістити за партами 4 учнів цього класу?

962. Три пасажири підходять до поїзда метро, у якому є 9 вагонів. Скількома способами пасажири можуть розміститися по вагонах?

963. Скількома способами можна вишикувати в одну шеренгу двох дівчат і двох хлопців так, щоб дівчата не стояли поруч?

964. На площині задано 4 точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Скільки можна побудувати трикутників з вершинами в цих точках?

Рівень В

965. Перед початком футбольного турніру 16 команд-учасниць розбивають на 4 групи A, B, C і D по 4 команди в кожній. Скількома способами це можна зробити, якщо 4 найсильніші за рейтингом команди повинні потрапити в різні групи, 4 наступні за рейтингом команди — теж у різні групи і т. д.?

966. У класі навчаються 15 дівчат і 15 хлопців. Для участі в концерті необхідно утворити танцювальний дует та дует співаків, кожен з яких має складатися з дівчини і хлопця. Скількома способами це можна зробити, уважаючи, що всі учні вміють танцювати та співати?

967. Скільки всіх дільників має число 6^9?

968. Скільки різних трицифрових чисел, кратних 5, можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 і 6, якщо в запису числа цифри можуть повторюватись?

969. Скільки різних шестицифрових чисел можна записати, використовуючи цифри 1, 2 і 3, якщо в запису кожного числа цифра 1 повинна повторюватися 2 рази, цифра 2 — 3 рази, цифра 3 — 1 раз?

970. Скількома способами можна розподілити 6 різних книжок між 3 учнями, щоб у кожного було по 2 книжки?

Вправи для повторення

971. Розв’яжіть нерівність:
а) $(2{,}5x + 1)(4x - 3) - 10x^2 > 4$; **б)** $(3 - 4x)^2 < 1$.

972. Відомо, що $5 < x < 6$ і $9 < y < 10$. Оцініть значення виразу:
а) $2x$; **б)** $x - y$; **в)** $2xy$; **г)** $x^2 + y$.

973. Для яких значень k графік функції $y = x^2 - 8x + 5 + k$ не має з віссю x спільних точок?

974. Скільки мілілітрів 50%-го розчину сульфатної кислоти потрібно змішати з 10%-м розчином цієї ж кислоти, щоб одержати 200 мілілітрів 25%-го розчину?

Поміркуйте

975. На кожному з 10 дерев, що розміщені по колу, сидять по одному голубу. Час від часу якісь два голуби перелітають на сусіднє дерево — один за годинниковою стрілкою, а інший — проти. Чи можуть усі голуби зібратися на одному дереві?

23. Випадкові події. Імовірність випадкової події

1. Випадкові події. У житті доволі часто доводиться мати справу з явищами, результати яких передбачити неможливо. Наприклад, ми підкидаємо монету; завчасно не можна сказати, як вона впаде: догори гербом чи цифрою. Виймаючи навмання кульку з лототрону, завчасно не можна сказати, яке число буде на ній написано. Підійшовши до зупинки тролейбуса, заздалегідь не можна передбачити, скільки хвилин доведеться чекати потрібного тролейбуса. Наведені у прикладах явища називають *випадковими*.

Є випадкові явища, усі можливі результати яких можна передбачити. Так, після підкидання монети обов'язково відбудеться одна із двох можливих подій: «випаде герб», «випаде число». Заздалегідь невідомо, яка з цих подій відбудеться, тому їх називають *випадковими подіями*.

Будь-яка подія відбувається внаслідок випробування (або спостереження). Якщо з партії деталей вибирають навмання 5 деталей для контролю якості, то вибір деталей — випробування, встановлення факту, що вибрана деталь є бракованою (небракованою) — подія.

Події позначатимемо великими буквами латинського алфавіту A, B, C і т. д. Розрізнятимемо елементарні та складні події. Розглянемо приклад.

Підкидають гральний кубик. На його верхній грані може випасти число 1, 2, 3, 4, 5 або 6. Отже, може відбутися одна із шести подій:

A_1: випаде число 1; A_2: випаде число 2; A_3: випаде число 3;
A_4: випаде число 4; A_5: випаде число 5; A_6: випаде число 6.

Ці події мають такі властивості:

1) унаслідок кожного випробовування одна з цих подій обов'язково відбудеться;

2) жодні дві з них не можуть відбутися разом;

3) події є рівноможливими (серед них жодна не має переваг у появі перед іншими).

Події, які мають такі три властивості, називають *елементарними подіями*, або *випадками*.

Можна говорити про наслідки підкидання грального кубика, які не є елементарними подіями. Наприклад, поява парного числа, поява числа, меншого від 4, поява одного із чисел 1, 2 або 3 тощо. Такі події називають *складними*. Кожну складну подію можна розкласти на елементарні. Нехай A — згадана вище складна подія «випаде парне число». Подію A можна розкласти на елементарні події A_2, A_4, A_6 («випаде число 2», «випаде число 4», «випаде число 6»). Кажуть, що події A *сприяють* 3 елементарні події A_2, A_4, A_6 або 3 випадки A_2, A_4, A_6.

Вірогідною називають подію, яка внаслідок випробування обов'язково має відбутися, а *неможливою* — подію, яка не може відбутися.

Наприклад, після підкидання грального кубика хоча б одне з чисел 1, 2, 3, 4, 5 або 6 обов'язково випаде, а число 7 випасти не може. Тому подія «випаде одне із чисел 1, 2, 3, 4, 5 або 6» є вірогідною, а подія «випаде число 7» — неможливою.

2. Імовірність випадкової події. Нехай у кошику є 40 яблук, з них 25 червоних і 15 зелених. Навмання беруть з кошика одне яблуко. Позначимо буквою A подію «вийняте яблуко — червоне», а буквою B подію «вийняте яблуко — зелене». Червоних яблук більше, ніж зелених. Тому має більше можливостей («шансів») відбутися подія A. Можливості здійснення подій A і B характеризують певними числами, які визначають так.

У кошику є 40 яблук, тому всіх випадків узяти одне яблуко є 40. Події A сприяють 25 випадків — якщо вийняли одне із 25 червоних яблук, а події B — 15 випадків. Можливість настання події A характеризують числом $\frac{25}{40}=\frac{5}{8}$, а події B — числом $\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$. Ці числа називають *імовірностями* подій A і B. Пишуть: $P(A)=\frac{5}{8}$, $P(B)=\frac{3}{8}$ (P — перша буква латинського слова *probabilities*, що означає ймовірність).

Означення **Імовірністю події A називають відношення числа рівноможливих випадків, які сприяють події A, до числа всіх можливих випадків.**

Отже,

$$\boldsymbol{P(A)=\frac{m}{n}},$$

де n — загальна кількість рівноможливих випадків, m — число випадків, які сприяють події A.

Якщо подія A є вірогідною, то їй сприяють усі n можливих випадків. Для такої події $m = n$ і $P(A)=\frac{n}{n}=1$.

Якщо подія A є неможливою, то $m = 0$ і $P(A)=\frac{0}{n}=0$.

Якщо подія A випадкова, тобто така, яка може або відбутися, або не відбутися, то її ймовірність задовольняє нерівність $0 < P(A) < 1$.

3. Частота випадкової події. Ми знаємо, що після підкидання монети обов’язково відбудеться одна із двох подій: «випаде герб», «випаде число». Тому ймовірність кожної з цих подій дорівнює $\frac{1}{2}=0,5$.

Багато дослідників проводили серії випробувань з підкиданням монети. Виявилося, що за багаторазового підкидання монети відношення кількості випадань герба до кількості всіх підкидань наближено дорівнює ймовірності події «випаде герб» — числу 0,5. Для кожної серії випробувань указане відношення називають *частотою події* «випаде герб».

Узагалі, ***частотою випадкової події*** **називають відношення кількості появ цієї події до кількості випробувань (спостережень).**

Наприклад, якщо в місті серед 1000 новонароджених за рік виявилося 514 хлопчиків, то частота події «народився хлопчик» дорівнює $\frac{514}{1000} = 0{,}514$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Яка ймовірність того, що після підкидання грального кубика випаде число, кратне 2?

● Нехай подія A — випаде число, кратне 2. Після підкидання грального кубика може випасти будь-яке із шести чисел 1, 2, 3, 4, 5 або 6, тому $n = 6$. Події A сприяють 3 випадки — якщо випаде число 2, 4 або 6, тому $m = 3$. Отже, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Відповідь. $\frac{1}{2}$. ●

Вправа 2. У партії з 1000 деталей є 600 деталей першого сорту, 370 — другого і 30 бракованих деталей. Яка ймовірність того, що навмання вибрана деталь буде не бракованою?

● Нехай подія A — вибрана деталь не бракована. У партії є 1000 деталей, тому $n = 1000$. Не бракованих деталей є $600 + 370 = 970$, тому $m = 970$. Отже, $P(A) = \frac{970}{1000} = 0{,}97$.

Відповідь. 0,97. ●

Вправа 3. У шухляді лежать 5 зошитів, з них 3 — у клітинку і 2 — в лінійку. Учень бере навмання два зошити. Яка ймовірність того, що серед них буде хоча б один зошит у лінійку?

● Нехай подія A — серед вибраних зошитів буде хоча б один зошит у лінійку. Позначимо зошити в клітинку: $к_1$, $к_2$, $к_3$; зошити у лінійку: $л_1$, $л_2$. Після виймання двох зошитів можливі такі випадки:

$к_1, к_2$; $к_1, к_3$; $к_1, л_1$; $к_1, л_2$;

$к_2, к_3$; $к_2, л_1$; $к_2, л_2$;

$к_3, л_1$; $к_3, л_2$;

$л_1, л_2$.

Усіх пар зошитів, а, значить, усіх можливих випадків, є 10, тому $n = 10$. Події A сприяють 7 випадків ($к_1, л_1$; $к_1, л_2$; $к_2, л_1$; $к_2, л_2$; $к_3, л_1$; $к_3, л_2$; $л_1, л_2$), тому $m = 7$. Отже, $P(A) = \frac{7}{10} = 0{,}7$.

Відповідь. 0,7. ●

Усно

976. Біатлоніст робить 5 пострілів по 5 мішенях. За кожного пострілу він може влучити в мішень, а може й не влучити. Яка з поданих подій є випадковою; неможливою:

а) буде влучено в 4 мішені;

б) не буде влучено в жодну мішень;

в) буде влучено в 6 мішеней?

977. В урні є 5 білих і 5 чорних куль. Білі кулі мають номери від 1 до 5, а чорні — від 6 до 10. З урни навмання виймають одну кулю. Розглянемо події:

а) вийнята куля матиме номер 3;

б) вийнята куля матиме номер 7;

в) вийнята куля буде білою;

г) номер вийнятої кулі буде кратний 4.

Які з даних подій є елементарними; складними? Укажіть усі елементарні події цього випробування. Які елементарні події (випадки) сприяють кожній з даних складних подій?

978. Із п’яти чисел 2, 3, 5, 10, 15 навмання вибирають одне число. Яка ймовірність того, що вибране число виявиться:

а) числом 3; **б)** числом 15;

в) парним; **г)** непарним;

д) одноцифровим; **е)** двоцифровим?

Рівень А

979. Для лотереї випущено 1000 білетів, з яких 400 є виграшними. Яка ймовірність того, що перший придбаний білет виявиться виграшним?

980. З урни, у якій є 5 білих і 10 червоних куль, навмання виймають одну кулю. Знайдіть імовірність того, що вийнята куля виявиться білою.

981. У кошику лежать 3 білі гриби, 7 сироїжок і 8 маслюків. Яка ймовірність того, що навмання вийнятий з кошика гриб буде сироїжкою?

982. Яка ймовірність того, що після підкидання грального кубика випаде:
а) число 4; **б)** число 8; **в)** число, відмінне від 4.

983. У гаманці є 6 монет по 5 к. і 2 монети по 50 к. Знайдіть імовірність того, що навмання вийнята монета матиме вартість:
а) 50 к.; **б)** 5 к.; **в)** 10 к.

984. У ящику лежать 50 лампочок, з них 2 браковані. Забрали 20 не бракованих лампочок. Яка ймовірність того, що після цього навмання взята лампочка буде бракованою?

985. У вазі лежать 12 шоколадних цукерок і 15 льодяників. З неї навмання взяли 2 цукерки, які виявилися шоколадними. Після цього з вази беруть навмання ще одну цукерку. Яка ймовірність того, що ця цукерка буде шоколадною?

986. Партія із 60 виробів має 5% браку. Знайдіть імовірність того, що навмання взятий виріб виявиться бракованим? Якою буде відповідь, якщо кількість усіх деталей дорівнюватиме 80? Зробіть висновок.

987. У парку росте 360 дерев, з них $\frac{2}{9}$ — хвойні. Знайдіть імовірність того, що навмання вказане дерево буде хвойним. Якою буде відповідь, якщо кількість усіх дерев дорівнюватиме 450? Зробіть висновок.

988. Досліджуючи схожість насіння огірків, установили, що із 250 посаджених насінин проросло 225. Знайдіть частоту події «насіння проросло».

989. Серед перевірених 150 деталей виявилось 6 бракованих. Знайдіть частоту події «перевірена деталь є бракованою».

990. Біатлоніст зробив серію пострілів по мішені. Скільки було зроблено пострілів, якщо частота влучень дорівнює 0,9, а кількість влучень — 27?

991. Знайдіть частоту події «випаде герб», провівши випробування, що складається із 20 підкидань монети; зі 100 підкидань.

Рівень Б

992. В урні є 25 однакових кульок, пронумерованих числами від 1 до 25. З урни навмання беруть одну кульку. Яка ймовірність того, що номер кульки виявиться:

а) меншим від 10; **б)** кратним 3;
в) кратним 2 і 3; **г)** кратним 2 або 3?

993. Знайдіть імовірність того, що навмання взяте двоцифрове число виявиться:

а) більшим від 90; **б)** кратним 10;
в) кратним 25; **г)** меншим від 10.

994. На складі є вироби двох сортів, до того ж виробів другого сорту в 1,5 разу більше, ніж першого. Знайдіть імовірність того, що навмання взятий виріб виявиться виробом першого сорту.

995. Якість деталей перевіряють два контролери. Перший контролер перевірив 55% усіх деталей, а другий — 45%. Навмання беруть одну деталь. Яка ймовірність того, що її перевіряв другий контролер?

996. У першій коробці лежать 3 картки з номерами 1, 2, 3, а в другій — 3 картки з номерами 4, 5, 6. З кожної коробки беруть навмання по одній картці. Яка ймовірність того, що сума номерів вибраних карток дорівнюватиме 7?

997. Із чотирьох чисел 2, 3, 5, 6 навмання вибирають два числа, використовуючи які записують правильний дріб. Яка ймовірність того, що цей дріб виявиться скоротним?

998. На трьох картках написано по одній букві: *М*, *О*, *С*. Картки перемішують і розкладають у ряд. Яка ймовірність того, що утвориться слово *СОМ*?

999. Троє друзів придбали квитки на літак в одному ряді крісел із трьох місць і випадковим чином зайняли ці місця. Знайдіть імовірність того, що кожний із друзів зайняв своє місце.

1000. Для збирання телевізорів надійшло 900 мікросхем від двох постачальників. Імовірність того, що навмання взята мікросхема надійшла від першого постачальника, дорівнює 0,6 Скільки мікросхем надійшло від кожного постачальника?

1001. У класі навчається 28 учнів. Імовірність того, що навмання вказаний учень виявиться дівчиною, дорівнює $\frac{3}{7}$. Скільки у класі є дівчат і скільки хлопців?

Рівень В

1002. Учень забув три останні цифри номера потрібного телефону. Пам'ятаючи, що ці цифри різні, він набирає їх навмання. Знайдіть імовірність того, що один раз набрані цифри будуть правильними.

1003. Про деякий трицифровий код відомо, що: він не містить цифри 0, 1, 2, 3 і 4; цифри коду можуть повторюватися. Яка ймовірність того, що навмання названий код із такими властивостями збіжиться з даним?

1004. На п'яти картках написано по одній букві: *Д*, *Е*, *С*, *Н*, *А*. Навмання одна за одною вибирають три картки і розташовують в ряд у порядку появи. Яка ймовірність того, що утвориться слово *САД*?

1005. Використовуючи цифри 1, 2, 3, 4, 5 не більше одного разу, навмання пишуть деяке трицифрове число. Знайдіть імовірність того, що це число виявиться парним.

1006. Знайдіть імовірність того, що навмання взяте трицифрове число буде кратне 2 або 5.

1007. Партію деталей виготовили на двох станках: на першому станку — 300 деталей, а на другому — 200. Частота виготовлення бракованої деталі на першому станку дорівнює 0,02, а на другому — 0,025. Серед усіх деталей навмання вибирають одну. Яка ймовірність того, що вибрана деталь виявиться бракованою?

1008. У класі навчається 29 учнів. На екскурсію в музей ходили 24 учні, в музей і зоопарк — 16 учнів, а 2 учні не ходили ні в музей, ні в зоопарк. Яка ймовірність того, що навмання вказаний учень класу ходив на екскурсію в зоопарк?

1009. Одночасно підкидають два гральні кубики. Яка ймовірність того, що випадуть числа, сума яких не менша від 7?

1010. Монету підкидають чотири рази. Яка ймовірність того, що «герб» випаде: **а)** двічі; **б)** хоча б двічі?

Вправи для повторення

1011. Побудуйте графік функції $y = 2x^2 - 3x$. Користуючись графіком, знайдіть: **а)** область значень функції; **б)** проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень; **в)** проміжок, на якому функція спадає.

1012. П'ятий член арифметичної прогресії дорівнює 10, а сума семи її перших членів дорівнює 42. Знайдіть перший член і різницю прогресії.

1013. Доведіть, що вираз $\frac{c}{b}+\frac{b-c}{b+c}-\frac{c^2-bc}{b^2+bc}$ набуває того самого значення для всіх допустимих значень змінних.

1014. У двох мішках було по 60 кг цукру. Цукор одного мішка розфасували у малі упаковки, а іншого — у великі. Кожна мала упаковка містить цукру на 2 кг менше, ніж кожна велика, тому малих упаковок знадобилося на 8 більше, ніж великих. Скільки кілограмів цукру містить мала упаковка?

Поміркуйте

1015. Для додатних чисел a і b виконується рівність $a^2 - 4b^2 = 3ab$. Доведіть, що для цих чисел виконується також рівність $4a^2 + 4b^2 = 17ab$.

24. Статистичні дані

1. Статистичні спостереження. Ви, очевидно, не раз чули дані стану погоди, курсу валют, результатів виборів, різних соціальних опитувань тощо. Це *статистичні дані*. Такі дані дозволяють не тільки охопити картину певного питання на даний час, а й планувати необхідні дії на майбутнє. Так, статистичні дані про зайнятість населення дозволяють визначити, яку кількість фахівців і якої кваліфікації слід готувати, у якому регіоні варто споруджувати те чи інше підприємство тощо.

Методи збирання, обробки, інтерпретації різноманітних даних вивчає окремий розділ математики — *математична статистика*.

Нехай потрібно дослідити сім'ї певного міста за деякою ознакою (наприклад, розподілити сім'ї за кількістю дітей, величиною місячного матеріального доходу на одного члена сім'ї тощо). Для цього можна провести *суцільне* спостереження — відвідати кожну сім'ю і з'ясувати усе, що нас цікавить. Можна провести вибіркове спостереження — дослідити лише частину сімей і за результатами дослідження зробити висновок про всі сім'ї міста. У такому випадку сукупність сімей, відібраних для спостереження, називають *вибірковою сукупністю*, або просто *вибіркою*.

У загальному випадку *вибірка* — це сукупність об'єктів, відібраних для спостереження. Для того, щоб за даними вибірки можна було судити про властивості всіх об'єктів, необхідно, щоб вибірка правильно відображала ці властивості. Це забезпечується перш за все випадковістю відбору, коли всі об'єкти мають однакову ймовірність потрапити до вибірки.

2. Обробка статистичних даних та способи їх подання. Розглянемо приклади.

Приклад 1. У відділі жіночого взуття протягом трьох днів було проведено обстеження для вивчення попиту на певні розміри взуття. За ці дні було продано 22 пари взуття таких розмірів:

38; 36; 38; 37; 40; 38; 36; 35; 35; 39; 37; 40; 41; 37; 39; 36; 38; 37; 37; 38; 39; 37.

Розташуємо ці дані в порядку не спадання розмірів:

<u>35; 35;</u> <u>36; 36; 36;</u> <u>37; 37; 37; 37; 37; 37;</u> <u>38; 38; 38; 38; 38;</u> <u>39; 39; 39;</u> <u>40; 40;</u> <u>41</u>.

Одержали так званий *ранжований ряд* даних спостереження. Він містить 7 груп розмірів взуття. Значення кожної групи (розміру взуття) називають *варіантою*, а число, яке показує, скільки разів трапляється варіанта, — *частотою* відповідної варіанти. У прикладі маємо такі 7 варіант:

35; 36; 37; 38; 39; 40; 41.

Варіанта 35 має частоту 2 (35-й розмір трапляється двічі); варіанта 38 — частоту 5; варіанта 41 — частоту 1.

Результати спостереження зручно подавати у вигляді такої таблиці:

Розмір (варіанта)	35	36	37	38	39	40	41
Частота	2	3	6	5	3	2	1

Щоб візуально охопити дані спостереження, побудуємо на координатній площині точки, абсциси яких дорівнюють розмірам взуття (варіантам), а ординати — відповідній частоті розміру, та сполучимо сусідні точки відрізками (рис. 82). Одержану ламану називають *полігоном частот*.

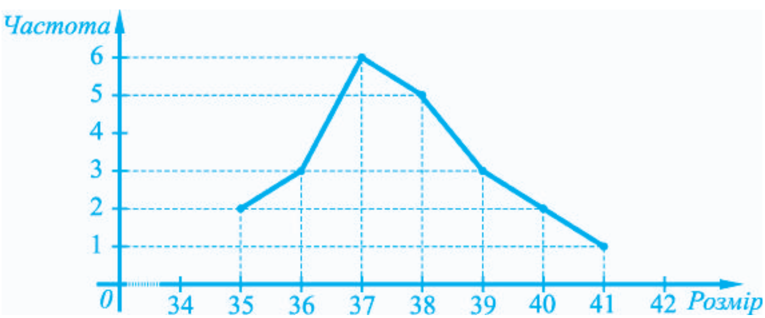


Рис. 82

Для наочного зображення даних спостереження можна використати й діаграму (рис. 83).

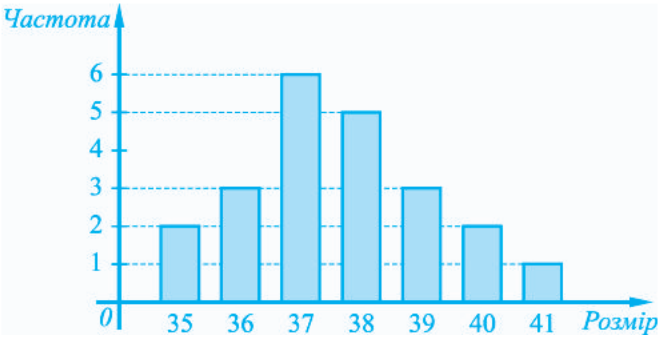


Рис. 83

Графічні зображення дозволяють візуально охопити всю сукупність даних і скласти картину дослідження в цілому. Так, з рисунків 82 і 83 видно, що більшим попитом користується жіноче взуття 37 і 38 розмірів.

Приклад 2. Розглянемо таблицю, в якій указано, за якою ціною та скільки було продано кілограмів яблук на ринку за один день.

Ціна за 1 кг, грн	9–10	10–11	11–12	12–13	13–14
Маса проданих яблук, кг	80	100	75	55	30

З таблиці видно, що яблук, ціна яких лежить в інтервалі від 9 грн до 10 грн, було продано 80 кг. Кажуть, що в першому рядку таблиці задано *інтервали* ціни[1], а в другому — *частоти* цих інтервалів (маси яблук, проданих за ціною відповідних інтервалів).

Для графічного зображення даних такого спостереження використовують *гістограму*, яку будують так: на осі абсцис відмічають задані інтервали й на кожному з них, як на основі, будують прямокутник, висота якого дорівнює частоті відповідного інтервалу (рис. 84).

[1] Інтервали ціни можна задавати так: [9; 10); [10; 11); [11; 12); [12; 13); [13; 14]. За такого задання зрозуміло, куди слід відносити значення величини, яке відповідає одному з кінців інтервалу.

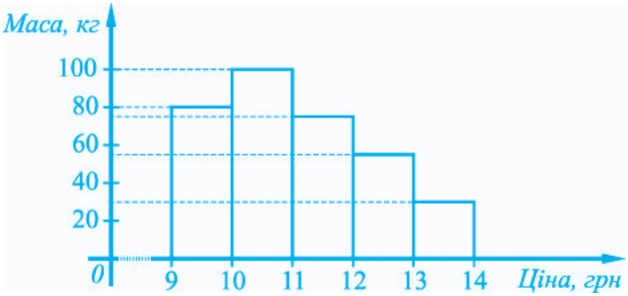


Рис. 84

Розглянемо інший графічний спосіб зображення даних цього спостереження. На осі абсцис знову відмітимо задані інтервали. До середин цих інтервалів проведемо перпендикуляри, довжина кожного з яких дорівнює частоті відповідного інтервалу. З'єднавши кінці сусідніх перпендикулярів відрізками, одержимо ламану (рис. 85), яку називають *полігоном частот* інтервального розподілу даних.

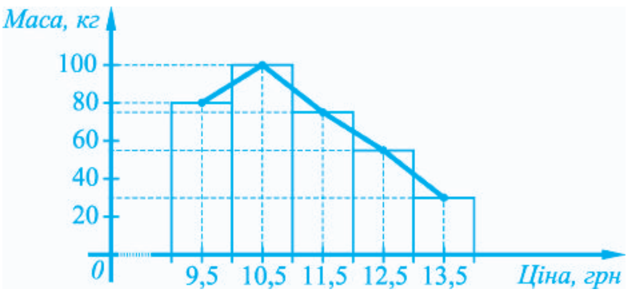


Рис. 85

Для графічного зображення даних, крім уже розглянутих стовпчастих діаграм, гістограм, полігонів, можна використовувати інші види діаграм (кругові, лінійчаті), графіки.

3. Середні значення. Розглянемо приклад.

Приклад 3. Протягом травня через день, проводячи спостереження за температурою повітря опівночі, одержали такі дані:

3 °C; 4 °C; 4 °C; 3 °C; 3 °C; 5 °C; 8 °C; 8 °C; 6 °C; 8 °C; 10 °C; 11 °C; 12 °C; 11 °C; 12 °C; 12 °C.

Знайдемо середнє значення температури. Для цього суму 16 значень температури поділимо на 16:

$$t_c = \frac{3+4+4+3+3+5+8+8+6+8+10+11+12+11+12+12}{16} = \frac{120}{16} = 7{,}5\ (°C).$$

Отже, можна сказати, що середня температура повітря опівночі у травні дорівнювала 7,5 °C.

Середнім значенням n **даних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вибірки (або середнім арифметичним даних вибірки) називають число**

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Подамо результати спостереження температури повітря у вигляді таблиці:

t, °C	3	4	5	6	8	10	11	12
Частота	3	2	1	1	3	1	2	3

Ураховуючи, що значення 3 °C має частоту 3 (повторюється тричі), значення 4 °C — частоту 2 і т. д., середню температуру можна було знайти й так:

$$t_c = \frac{3\cdot 3+4\cdot 2+5\cdot 1+6\cdot 1+8\cdot 3+10\cdot 1+11\cdot 2+12\cdot 3}{16} = \frac{120}{16} = 7{,}5\ (°C).$$

Якщо у вибірці з n об'єктів варіанта x_1 трапляється n_1 разів, варіанта x_2 — n_2 разів, …, варіанта x_k — n_k разів, то середнє значення вибірки знаходять за формулою

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n},$$

де $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Усно

1016. У таблиці подано результати опитування 258 сімей щодо розміру місячного матеріального доходу на одну особу:

Місячний дохід сім'ї на одну особу, грн	*Кількість сімей*	*Відсоток сімей*
До 1000	34	13,2
1000 – 2000	52	20,2
2000 – 3000	72	27,9
3000 – 4000	70	27,1
4000 і більше	30	11,6
Разом	258	100

а) Скільки сімей мають дохід 1000 – 2000 гривень?

б) Скільки відсотків сімей мають дохід 2000 – 3000 гривень?

в) Який дохід мають найбільше сімей?

1017. На діаграмі (рис. 86) показана врожайність ячменю на дослідній станції протягом останніх 10 років. На який рік припадає найбільша врожайність; найменша?

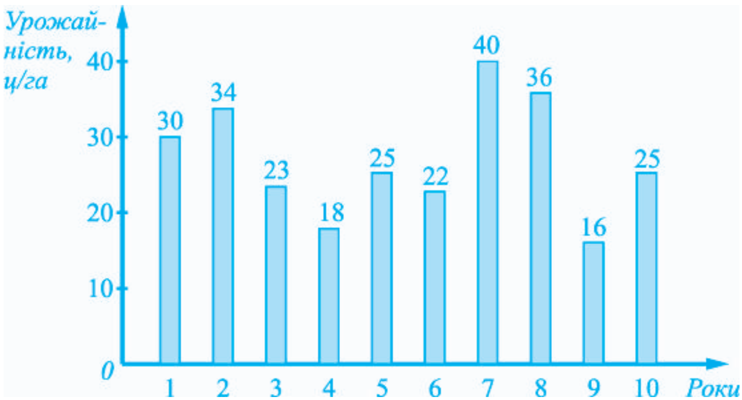


Рис. 86

1018. У магазині за тиждень були продані костюми таких розмірів: 48, 46, 52, 44, 48, 50, 54, 46, 44, 48, 50, 52, 52, 50, 48, 50, 48, 46, 48, 54, 50, 48, 54, 50, 48, 46, 48, 52. Запишіть ранжований ряд даних розмірів. Скільки утворилося варіант? Знайдіть частоту кожної варіанти. Складіть таблицю варіант і частот. Побудуйте полігон частот.

1019. У 20 фермерських господарствах району врожайність пшениці (у ц з га) була такою: 35, 28, 30, 41, 30, 34, 36, 30, 38, 36, 28, 29, 32, 30, 38, 36, 41, 42, 38, 30. Запишіть ранжований ряд даних. Скільки утворилося варіант? Знайдіть частоту кожної варіанти. Складіть таблицю варіант і частот. Побудуйте полігон частот.

1020. Для розв'язання задачі 6 учнів витратили часу: 12 хв; 7 хв; 9 хв; 8 хв; 10 хв; 11 хв. Скільки часу в середньому витрачав один учень для розв'язання задачі?

1021. Ті самі деталі виготовляють на двох станках, продуктивність яких однакова. Кількості бракованих деталей, виготовлених на кожному станку за дні робочого тижня, подано в таблиці.

Дні тижня	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.
1-й станок	5	8	7	4	8
2-й станок	6	6	5	7	9

Скільки бракованих деталей за день у середньому виготовляли на кожному станку? Який станок працює якісніше?

1022. Щоб знайти середню масу головки капусти, навмання взяли 20 головок, маси яких виявилися:
2,8 кг; 2,8 кг; 2,9 кг; 3,1 кг; 3,2 кг; 3,1 кг; 3,3 кг; 3,2 кг; 3,2 кг; 2,8 кг;
3,5 кг; 3,4 кг; 3,4 кг; 3,2 кг; 2,8 кг; 3,3 кг; 3,6 кг; 3,7 кг; 3,1 кг; 3,6 кг.
Знайдіть середню масу головки капусти.

1023. Для 8 гусей були зафіксовані такі прирости маси за сім днів: 410 г; 370 г; 420 г; 400 г; 380 г; 370 г; 390 г; 400 г. Знайдіть середній приріст маси однієї птиці за ці дні.

Рівень Б

1024. Вибіркова перевірка малих підприємств міста щодо прибутків за рік дала такі результати:

Річний прибуток, тис. грн	90	100	110	120	130	140	150
Кількість підприємств	3	6	2	5	6	2	1

Побудуйте полігон частот одержаних даних. Знайдіть середній річний прибуток одного підприємства.

1025. Учитель фіксує кількість помилок, допущених учнями на контрольній роботі. Були одержані такі результати:

Кількість помилок	0	1	2	3	4	5
Кількість учнів	3	11	6	5	3	2

Побудуйте полігон частот одержаних даних. Скільки помилок у середньому припадає на одного учня?

1026. Продавець на ринку, закупивши оптом лимони, продає їх поштучно за такою ціною:

50 г – 60 г — 3 грн 50 к.;

60 г – 70 г — 4 грн;

70 г – 80 г — 4 грн 50 к.;

80 г – 90 г — 5 грн;

90 г – 100 г — 5 грн 50 к.;

100 г – 120 г — 6 грн.

Складіть таблицю даних та побудуйте полігон частот.

1027. Розподіл корів одного фермерського господарства за річним надоєм молока задано таблицею:

Річний надій, тонн	1–2	2–3	3–4	4–5
Кількість корів	20	8	8	4

Побудуйте гістограму та полігон частот даного розподілу.

1028. Віковий склад працівників підприємства задано таблицею:

Вік працівника, років	18–28	28–38	38–48	48–58
Кількість працівників	12	20	10	8

Побудуйте полігон частот даного розподілу.

1029. За результатами контрольної роботи учні класу отримали такі оцінки: 2 бали — 1 учень; 3 бали — 1 учень; 4 бали — 2 учні; 5 балів — 3 учні; 6 балів — 2 учні; 7 балів — 4 учні; 8 балів — 5 учнів; 9 балів — 2 учні; 10 балів — 5 учнів; 11 балів — 2 учні; 12 балів — 1 учень. Знайдіть середню оцінку за контрольну роботу.

1030. Спортсмен зробив 40 пострілів по мішені і вибив 10 очок 18 разів, 9 очок — 10 разів, 8 очок — 6 разів і 7 очок — 6 разів. Скільки очок у середньому вибивав спортсмен за один постріл?

1031. Знайдіть середній зріст учнів вашого класу, а також середній зріст учнів, які у списку класного журналу мають номери 1, 5, 9, … (кожний наступний на 4 більший від попереднього). Порівняйте знайдені середні значення.

1032. За січень, лютий і березень підприємство виготовило відповідно 750, 810 і 891 одиниць продукції. Знайдіть середній місячний приріст виготовлення продукції у відсотках.

Вправи для повторення

1033. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{a^2b^{-1}}{3c^{-2}} \cdot \dfrac{9a^{-1}c}{b^{-3}}$; **б)** $\dfrac{2+\sqrt{2a}}{a+\sqrt{2a}}$.

1034. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} y = 2x; \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3xy + 2y = -4; \\ -xy + 3y = 16. \end{cases}$

1035. Для яких значень a числа a^2, $2a - 1$ і 1 є трьома послідовними членами геометричної прогресії?

1036*. Ескалатор метро піднімає пасажира, який нерухомо стоїть на ньому, за 1 хв. Ідучи нерухомим ескалатором, пасажир піднімається за 3 хв. За який час пасажир підніметься, ідучи вгору рухомим ескалатором?

Поміркуйте

1037. У багатоцифровому числі переставили деякі цифри й одержали число, яке у 3 рази менше від початкового. Доведіть, що початкове число ділиться на 27.

Цікаво знати

Теорія ймовірностей. Випадковий характер явищ, процесів відзначали ще в давні часи. Давньогрецький філософ Епікур (341 – 270 рр. до н. е.) вважав, що випадок притаманний самій природі явищ, і, отже, випадковість об'єктивна. Були спроби виробити математичний підхід до вивчення випадкових явищ, проте перші математичні розрахунки ймовірностей з'явилися в письмових документах лише у середині XVII ст.

У 1654 році вся наукова (і не тільки) громадськість Парижа говорила про виникнення нової науки — теорії ймовірностей. Основи цієї теорії були закладені не в науковій роботі, а в листуванні між двома відомими французькими математиками Б. Паскалем (1623 – 1662) і П. Ферма (1601 – 1665) з приводу задачі, яка стосувалася гри в кості. Узагалі, до перших задач теорії ймовірностей належать задачі, пов'язані з азартними іграми, дуже популярними в середньовічній Європі. З результатами Паскаля і Ферма ознайомився нідерландський фізик і математик Х. Гюйгенс (1629 – 1695). Його роботу «Про розрахунки в азартній грі» вважають першою науковою працею з теорії ймовірностей.

Розв'язання задач, пов'язаних з популярними азартними іграми, лише спонукало виникненню теорії ймовірностей, як у свій час вимірювання площ земельних ділянок спонукало до виникнення геометрії.

Сьогодні теорія ймовірностей знаходить застосування в багатьох сферах людської діяльності. Її широко використовують в економіці, транспорті, виробництві, статистиці, військовій справі. Сучасне природознавство широко використовує теорію ймовірностей як інструмент для обробки результатів спостережень.

Математична статистика. «Статистика знає все» — такими словами починається друга частина роману І. Ільфа й Є. Петрова «Дванадцять стільців». Щоб підкреслити значення статистики в повсякденному житті, наводять приклад прогнозування результатів президентських виборів у США 1936 року. Тоді кандидатами на виборах були Ф. Рузвельт і А. Ландон. Редакція одного вельми поважного журналу вирішила провести опитування виборців за телефонними довідниками. По всій країні були розіслані понад 10 мільйонів листівок із проханням назвати прізвище майбутнього президента. Згодом журнал поінформував, що на майбутніх виборах президентом США з великою перевагою буде обрано А. Ландона.

Паралельне опитування здійснили соціологи Дж. Геллап та Е. Роупер, опираючись на вибірку, яка нараховувала лише 4 тисячі респондентів. Незважаючи на те, що редакція журналу опитала 10 мільйонів виборців, витратила величезні кошти на розповсюдження листівок, збирання та обробку даних, їхній прогноз виявився хибним, бо опирався на думку лише тих виборців, які мали телефони. Прогноз же соціологів майже повністю збігся з результатами виборів.

Перші статистичні дослідження були проведені в Англії та Німеччині. У середині XVII ст. в Англії виник науковий напрям, який отримав назву «політична арифметика». Його започаткували У. Петті (1623 – 1687) та Дж. Граунт (1620 – 1674), які на основі вивчення інформації про масові суспільні явища намагалися відкрити закономірності суспільного життя. Поряд зі школою «політичної арифметики» в Англії, розвивалась школа описової статистики або «державознавства» в Німеччині. Розвиток «політичної арифметики» і «державознавства» сприяв появі науки статистики. Термін «статистика» походить від латинського слова *status*, яке в перекладі означає «стан» (речей, явищ).

Сучасну математичну статистику характеризують як *науку про прийняття рішень в умовах невизначеності*. Одним з її завдань є створення методів збору й обробки статистичних даних для отримання наукових і практичних висновків.

Запитання і вправи для повторення § 4

1. Сформулюйте комбінаторне правило суми.

2. Сформулюйте комбінаторне правило добутку.

3. Наведіть приклади випадкових подій.

4. Яку подію називають вірогідною? неможливою?

5. Що називають частотою випадкової події?

6. Що називають імовірністю випадкової події?

7. Наведіть приклади статистичних спостережень.

8. Які є способи подання статистичних даних?

9. Як будують полігон частот? Наведіть приклад.

10. Як знайти середнє значення вибірки?

1038. У першій коробці лежать 20 деталей, а в другій — 15 деталей. Скількома способами з цих коробок можна взяти 1 деталь? Скількома способами можна взяти 2 деталі, які лежать у різних коробках?

1039. У кафе пропонують 4 перші страви, 8 других страв і 5 третіх страв. Скількома способами можна вибрати:

а) 3 страви різного виду; **б)** 2 страви різного виду?

1040. Скільки є чотирицифрових чисел, у запису яких немає цифри 5?

1041. Скільки різних трицифрових непарних чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 8, 9?

1042. П’ять пасажирів заходять в автобус, у якому є 10 вільних місць. Скількома способами пасажири можуть розміститися на цих місцях?

1043. Є 7 претендентів на 2 різні вакантні місця. Скількома способами можна заповнити ці місця?

1044. Скільки різних буквосполучень можна одержати, переставляючи букви у слові *зошит*?

1045. Серед перевірених 100 електроприладів виявилось 3 бракованих. Знайдіть частоту події «перевірений електроприлад не є бракованим».

1046. Із 10000 білетів лотереї 1250 білетів є виграшними. Яка ймовірність того, що перший придбаний білет виявиться виграшним?

1047. Є 10 карток, пронумерованих числами від 1 до 10. Навмання беруть одну картку. Яка ймовірність того, що номер картки виявиться:

а) більшим від 5; **б)** меншим від 15;

в) кратним 3; **г)** кратним 2 і 3?

1048. У ящику лежать лампочки, з них $\frac{2}{9}$ мають потужність 6 Вт, $\frac{4}{9}$ — потужність 10 Вт, решту — потужність 15 Вт. Яка ймовірність того, що навмання взята лампочка матиме потужність 15 Вт?

1049. На полиці лежать зошити у клітинку і в лінійку, до того ж зошитів у клітинку в 1,2 разу більше, ніж зошитів у лінійку. Знайдіть імовірність того, що навмання взятий зошит виявиться зошитом у лінійку.

1050. Тест містить 10 завдань. До кожного завдання подано чотири варіанти відповіді, один з яких є правильним. Учень знає правильні відповіді до 9 завдань і не знає — до одного завдання, тому навмання вибирає для нього варіант відповіді. Знайдіть імовірність того, що учень дасть правильні відповіді на всі завдання тесту.

1051. У першій урні є 4 кулі з номерами 1, 2, 3, 4, а в другій — 4 кулі з номерами 5, 6, 7, 8. З кожної урни навмання виймають по одній кулі. Яка ймовірність того, що сума номерів вийнятих куль дорівнюватиме 9?

1052. Олег написав на аркуші паперу деяке трицифрове число і повідомив, що сума цифр числа дорівнює 9, цифри є непарними і можуть повторюватися. Яка ймовірність того, що навмання назване число з такими властивостями збігатиметься з числом, записаним Олегом?

1053. Одночасно підкидають три монети. Яка ймовірність того, що випаде: **а)** три «герби»; **б)** два «герби» та «число»?

1054. На олімпіаді з математики правильне розв'язання кожної задачі оцінюють 7 балами. Кількості балів, одержаних учнями за розв'язання першої задачі, такі:

3, 0, 7, 2, 1, 0, 3, 7, 7, 5, 7, 2, 3, 4, 1, 2, 6, 7, 7, 0, 4, 5, 7, 7, 4, 2, 0, 0, 1, 3.

а) Запишіть ранжований ряд даних. Скільки утворилося варіант? Знайдіть частоту кожної варіанти.

б) Складіть таблицю варіант і частот.

в) Побудуйте полігон частот.

г) Знайдіть середню кількість балів, яка припадає на одного учня.

1055. Дані дослідження тривалості роботи електричних лампочок наведені в таблиці:

Тривалість роботи, тис. год	2–2,1	2,1–2,2	2,2–2,3	2,3–2,4	2,4–2,5
Кількість лампочок	2	8	8	5	2

Побудуйте полігон частот даного розподілу.

1056. Протягом семи днів березня проводили спостереження за температурою повітря опівдні. Були одержані такі дані: –4 °C; –4 °C; –2 °C; 0 °C; 0 °C; 1 °C; 2 °C. Знайдіть середнє значення температури повітря опівдні за ці дні.

1057. На уроці фізкультури вчитель фіксував кількість підтягувань учнів на перекладині. Були одержані такі результати:

Кількість підтягувань	4	6	7	8	9	12	14
Кількість учнів	1	2	4	4	2	1	1

Скільки підтягувань у середньому припадає на одного учня?

Завдання для самоперевірки № 5

Початковий рівень

1. У вазі стоять 7 червоних троянд і 4 білі. Скількома способами з вази можна взяти одну троянду?

а) 28 способами; **б)** 11 способами; **в)** 7 способами; **г)** 4 способами.

2. У ящику є 20 яблук і 5 груш. Скількома способами з ящика можна взяти 1 яблуко та 1 грушу?

а) 20 способами; **б)** 5 способами; **в)** 100 способами; **г)** 25 способами.

3. Скільки різних трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 3, 6, 9, використовуючи в запису числа кожну цифру не більше одного разу?

а) 64 числа; **б)** 48 чисел; **в)** 24 числа; **г)** 6 чисел.

4. Серед 53 деталей є 3 браковані. Яка ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться бракованою?

а) $\frac{3}{53}$; **б)** $\frac{3}{56}$; **в)** $\frac{50}{53}$; **г)** $\frac{53}{56}$.

5. З коробки, у якій є 15 пачок чаю першого ґатунку і 19 пачок чаю другого ґатунку, навмання виймають одну пачку. Яка ймовірність того, що нею виявиться пачка чаю першого ґатунку?

а) $\frac{15}{19}$; **б)** $\frac{15}{34}$; **в)** $\frac{19}{34}$; **г)** $\frac{34}{15}$.

6. Спортсмен пробіг доріжкою стадіону 4 кола по 400 м. На кожне коло він витратив відповідно 62 с, 64 с, 64 с, 58 с. Скільки часу в середньому витрачав спортсмен на подолання одного кола?

а) 64 с; **б)** 63 с; **в)** 62 с; **г)** 58 с.

Середній рівень

7. На столі лежать 20 карток, пронумерованих числами від 1 до 20. Зі столу навмання беруть одну картку. Установіть відповідність між подіями (1–4) та їх імовірностями (А–Д).

1) номер узятої картки дорівнює 4;	**А)** 0;
2) номер узятої картки є парним числом;	**Б)** 0,05;
3) номер узятої картки кратний 3;	**В)** 0,3;
4) номер узятої картки дорівнює 25.	**Г)** 0,5;
	Д) 1.

8. Із 20 футболістів потрібно вибрати капітана команди та його заступника. Скількома способами це можна зробити?

9. Скільки різних парних чотирицифрових чисел можна записати, використовуючи цифри 1, 2, 3, 5, якщо в запису числа цифри можуть повторюватись?

10. У контейнері лежать кавоварки, з яких 30 мають білий колір, 10 — блакитний і 10 — червоний. Яка ймовірність того, що навмання вийнята з контейнера кавоварка буде червоного кольору?

11. Після зважування маси 10 овець виявилися такими: 35 кг, 37 кг, 34 кг, 35 кг, 40 кг, 38 кг, 37 кг, 35 кг, 36 кг, 36 кг. Запишіть ранжований ряд даних. Складіть таблицю варіант і частот.

Достатній рівень

12. Скількома способами можна розподілити 5 різних книжок між 5 учнями, давши по одній книжці кожному?

13. Скільки є чотирицифрових чисел, у запису яких перші дві цифри є парними, а дві останні — непарними?

14. У класі навчається 16 хлопців. Імовірність того, що навмання вибраний учень виявиться дівчиною, дорівнює $\frac{3}{7}$. Скільки дівчат навчається в цьому класі?

15. Партію деталей виготовили три робітники, до того ж перший робітник виготовив $\frac{2}{5}$ усіх деталей, другий — $\frac{3}{10}$, третій — решту. Яка ймовірність того, що навмання взяту деталь виготовив третій робітник?

16. Урожайність пшениці у господарствах району була такою:

Урожайність, ц/га	25–30	30–35	35–40	40–45
Кількість господарств	5	8	7	4

Побудуйте полігон частот даного розподілу.

Високий рівень

17. Художник серед 10 картин має вибрати 2 картини для виставки. Скількома способами він може це зробити?

18. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна записати, використовуючи в запису числа хоча б одну цифру 0?

19. П'ять футболістів з номерами від 1 до 5 навмання шикують в одну шеренгу. Знайдіть імовірність того, що футболісти з номерами 1, 2, 3 стоятимуть поруч у порядку зростання номерів.

20. Одночасно підкидають два гральні кубики. Яка ймовірність того, що випадуть числа, добуток яких менший від 15?

21. На змаганні богатирів фіксували кількість піднімань штанги масою 150 кг. Були одержані такі результати:

Кількість піднімань	4	5	6	7	8
Кількість богатирів	3	2	4	4	2

Побудуйте полігон частот даного розподілу. Скільки піднімань у середньому припадає на одного богатиря?

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Пам'ятайте: хочете навчитися плавати, — сміливіше входьте у воду. Хочете навчитися математики, — беріться за задачі. Кожен розв'язок є своєрідним мистецтвом пошуку.

М. Кравчук

До § 1. Нерівності

1058. Доведіть нерівність:

а) $(a+b)^4 \le 8(a^4+b^4)$; **б)** $a+b \le \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$, де $a>0$, $b>0$;

в) $(a^2-b^2)(a^4-b^4) \le (a^3-b^3)^2$; **г)** $(a^2+b^2)(a^4+b^4) \ge (a^3+b^3)^2$.

1059. Доведіть: якщо $a+b=1$, то $a^4+b^4 \ge \frac{1}{8}$.

1060. Доведіть нерівність $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} > \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, де $a>0$, $b>0$, $a \ne b$.

1061. Доведіть, що для будь-яких додатних чисел a, b і c, добуток яких дорівнює 1, виконується нерівність $ab+bc+ca+a+b+c \ge 6$.

1062. Доведіть, що $(1+a_1)(1+a_2)\ ...\ (1+a_n) \ge 2^n$, де $a_1, a_2, ..., a_n$ — додатні числа й $a_1a_2\ ...\ a_n = 1$.

1063. Яке із двох чисел більше: $\frac{10^{1000}+1}{10^{1001}+1}$ чи $\frac{10^{1001}+1}{10^{1002}+1}$?

1064. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n виконується нерівність:

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)} < 1$;

б) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} > \sqrt{n}-1$;

в) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n} \ge \frac{1}{2}$; **г)** $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} < 2$.

1065. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n виконується нерівність:

а) $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n}$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$.

1066. Для додатних чисел a та b і від'ємного числа c ($c \neq -a$) правильними є нерівності $a \leq b$ і $ac \leq bc$. Доведіть, що для цих чисел виконується рівність $\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=0$.

1067. Доведіть, що для будь-яких значень x та y вираз $(x^3+y^3)(x+y)$ набуває невід'ємних значень.

1068. Розв'яжіть рівняння із двома невідомими: $\frac{x+1}{\sqrt{x}}+\frac{y+1}{\sqrt{y}}=4$.

1069. Числа 1, 2, ..., 9 розбили на три групи, по три числа в кожній. Нехай M — найбільший із добутків чисел однієї групи. Доведіть, що $M \geq 72$.

1070. Чотири рибалки — A, B, C і D — ловили рибу. Рибалки B і D зловили разом таку саму кількість рибин, як A із C. Рибалка A зловив більше рибин, ніж рибалка C, але A із D зловили менше рибин, ніж B із C. Скільки рибин зловив кожний рибалка, якщо рибалка B зловив 3 рибини?

1071. Кілька хлопців збирали гриби. Один із них знайшов 6 грибів, а інші — по 13 грибів. Наступного разу кількість хлопців була іншою, і один з них знайшов 5 грибів, а інші — по 10 грибів. Скільки хлопців збирали гриби першого разу і скільки другого разу, якщо кількість зібраних грибів в обох випадках була однаковою? Відомо, що ця кількість більша від 100 і менша від 200.

1072. Швидкість течії річки більша від швидкості течії притоки. З пункту A, що розташований у місці впадання притоки в річку, одночасно відходять два катери: перший угору — річкою, а другий — притокою. Пройшовши по 10 км, катери відразу вирушають у зворотний шлях. Який з катерів першим повернеться у пункт A: той, що пливе річкою, чи той, що пливе притокою, якщо швидкість катерів у стоячій воді однакова?

1073. Розв'яжіть нерівність $(b^2-b-6)x \leq (b^2+3b+2)$ з параметром b.

1074. Розв’яжіть нерівність:

а) $|x-2|+|x-3|\geq|x-4|$; **б)** $\left|\frac{2x-1}{x}\right|<1$.

1075. Для яких значень a система нерівностей $\begin{cases}x(x-1)\leq x^2-2a;\\ a-x\geq 2\end{cases}$ має єдиний розв’язок?

1076. Доведіть, що система нерівностей $\begin{cases}x-2\leq a^2;\\ x>2a\end{cases}$ має розв’язок для будь-якого значення a.

До § 2. Квадратична функція

1077. Побудуйте графік функції:

а) $y=2\sqrt{x^2}-x^2-1$; **б)** $y=|x^2-1|-\frac{|x-1|}{x-1}$;

в) $y=\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3x\right|$; **г)** $y=\sqrt{x+2\sqrt{x+1}+2}$.

1078. Знайдіть усі значення параметра a, для яких сума квадратів коренів рівняння $x^2-ax+a^2-3a-2=0$ є найбільшою.

1079. Знайдіть значеннях x, для якого вираз $(x-1)^2+(x-2)^2+...+(x-10)^2$ набуває найменшого значення.

1080. Знайдіть найбільше значення функції $y=\frac{1}{x^2-2x+4}-|x-1|$.

1081. Розв’яжіть нерівність $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3\geq 0$.

1082. Для яких значень a нерівність $(x-a)(x-a-2)>0$ виконується для всіх значень x, що задовольняють нерівність $x^2-4x+3<0$?

1083. Параболи $y=x^2-(2a+1)x+1$ та $x=y^2-(2b+1)y-1$ перетинаються в чотирьох точках. Доведіть, що ці точки лежать на одному колі.

1084. Побудуйте графік функції $y=x^2-3|x|+2$. Для яких значень x виконується нерівність $x^2-3|x|+2>1$?

1085. Знайдіть усі значення параметра a, для кожного з яких рівняння $x^2 - 2\sqrt{2}(a-3)x + a^2 - 3a - 2 = 0$ має хоча б один корінь.

1086. Знайдіть усі значення a, для яких нерівність $x^2 - 2(a-1)x + 4a < 0$ виконується для всіх значень x із проміжку $(0; 1)$.

1087. Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x+1} = |x| + a$ залежно від значень a?

1088. Для яких значень a рівняння $-x^2 + 2x - a = |1 - |x||$ не має коренів?

1089. **а)** Знайдіть найменше значення функції $y = \sqrt{4x-2} + 2x^2 - 2x$.

б) Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4x-2} + 2x^2 - 2x = -0{,}5 - \sqrt{2x^2 - x}$.

1090. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x(x+y) = 80; \\ x(2x-3y) = 80; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x - 3y + 9; \\ 2x^2 + 2y^2 = 5x - 7y + 19; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 4; \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19; \\ (xy+8)(x+y) = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 1 = 2y; \\ |x| = 1 - y^2; \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14; \\ x^2 + y^2 + xy = 84; \end{cases}$

є) $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2y^2 = 0; \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1; \end{cases}$ **ж)** $\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 160; \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8. \end{cases}$

1091. Знайдіть усі значення a, для яких система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ ax - y = 3a - 4 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

1092. Знайдіть усі значення параметра a, для кожного з яких система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4ax - 2y = 3 - 4a^2; \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2y = -a^2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

1093. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8; \\ (y - ax)(y - a\sqrt{2}) = 0 \end{cases}$ залежно від значень a?

1094. Знайдіть усі значення параметра a, для кожного з яких система рівнянь $\begin{cases} y = |2x-1| + |5-2x|; \\ y = a \end{cases}$ має безліч розв'язків.

1095. До басейну підведено три труби. Якщо відкрити одночасно першу і другу труби, то басейн наповниться водою за 2,4 год, якщо першу і третю, — за 3 год, якщо другу і третю, — за 4 год. За який час наповниться басейн, якщо одночасно відкрити усі три труби?

1096. Резервуар, місткість якого дорівнює 1000 л, наповнюють водою через дві труби. Перші 800 л наповнюють через обидві труби, потім 120 л — лише через першу трубу, а останні 80 л — лише через другу. За таких умов час наповнювання на 2 год більший від часу наповнювання через обидві відкриті труби і на 13 год менший від часу наповнювання лише через другу трубу. Скільки літрів води протікає через першу трубу за годину?

1097. Два пішоходи ідуть назустріч один одному з пунктів A та B. Перший вийшов з A на 1 год пізніше, ніж другий з B, і під час зустрічі виявилося, що він пройшов на 6 км менше, ніж другий. Не зупиняючись, пішоходи продовжили свій рух, і перший прибув у пункт B через 2,5 год, а другий — в A через 0,8 год після зустрічі. Знайдіть швидкість кожного пішохода.

1098. Є два натуральні двоцифрові числа. Якщо до першого числа дописати праворуч друге число, а потім ще цифру 0, то одержимо п'ятицифрове число, яке при діленні на квадрат другого числа дає неповну частку 39 і остачу 575. Якщо до першого числа дописати праворуч друге число, то одержимо чотирицифрове число, що на 1287 більше від чотирицифрового числа, яке одержимо, коли до другого числа допишемо праворуч перше число. Знайдіть ці двоцифрові числа.

1099. У річку впадає притока. Катер відходить від пункту A, що розташований на притоці, йде за течією 80 км до впадання притоки в річку у пункті B, а потім іде вгору по річці до пункту C. На шлях від A до C він затратив 18 год, на зворотний шлях — 15 год. Знайдіть відстань від B до C, коли відомо, що швидкість катера у стоячій воді дорівнює 18 км/год, а швидкість течії річки — 3 км/год.

До § 3. Числові послідовності

1100. Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які при діленні на 5 дають в остачі 1.

1101. Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які не діляться ні на 2, ні на 3.

1102. Чи правильно, що сума всіх трицифрових чисел, які не діляться ні на 2, ні на 3, дорівнює сумі всіх трицифрових чисел, які діляться на 6?

1103. Знайдіть суму п'ятнадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_7 + a_8 + a_9 = 12$.

1104. Чи можуть числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ і $\sqrt{5}$ бути членами однієї арифметичної прогресії?

1105. Додатні числа a, b, c утворюють арифметичну прогресію. Чи правильно, що числа $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ теж утворюють арифметичну прогресію?

1106. Сума перших n членів арифметичної прогресії дорівнює: $S_n = 4n^2 - 3n$. Знайдіть третій член прогресії.

1107. Сума перших n членів деякої послідовності дорівнює: $S_n = 3n^2$. Доведіть, що ця послідовність є арифметичною прогресією та знайдіть її різницю.

1108. Сума чотирьох перших членів скінченної арифметичної прогресії дорівнює 56, а сума чотирьох останніх — 112. Знайдіть число членів прогресії, якщо перший її член дорівнює 11.

1109. Знайдіть число членів скінченної арифметичної прогресії, у якій відношення суми семи перших членів до суми семи останніх членів дорівнює $\frac{2}{5}$, а відношення другого члена до першого дорівнює 2.

1110. Є три арифметичні прогресії, перші члени яких дорівнюють нулю, а різниці — відповідно 931, 63 і 1083. Знайдіть номер найменшого, відмінного від нуля, члена першої прогресії, який трапляється у двох інших прогресіях.

1111. Є три арифметичні прогресії, перші члени яких дорівнюють нулю, а різниці — відповідно 400, 9604 і 30625. Четверта арифметична прогресія побудована з послідовних спільних членів перших трьох прогресій. Знайдіть різницю четвертої прогресії.

1112. Знайдіть чотири цілі числа, які утворюють арифметичну прогресію, якщо найбільше з них дорівнює сумі квадратів усіх інших.

1113. Для яких значень a рівняння $1+2+\ldots+x=\frac{a+2x}{2}$ має натуральний корінь?

1114. Розв'яжіть рівняння $x^3+x^2-a=0$, коли відомо, що його корені є трьома послідовними членами арифметичної прогресії.

1115. Знайдіть усі значення p і r, для яких рівняння $x^3+px^2-x+r=0$ має три корені, які утворюють арифметичну прогресію з різницею 1.

1116. Три додатні числа утворюють геометричну прогресію. Сума цих чисел дорівнює 21, а сума обернених до них чисел — $\frac{7}{12}$. Знайдіть ці числа.

1117. Знайдіть суму всіх різних знаменників геометричних прогресій, у яких кожний член, починаючи із третього, дорівнює сумі двох попередніх.

1118. Три додатні числа утворюють арифметичну прогресію. Третє число більше від першого на 14. Якщо перші два числа залишити без змін, а третє замінити його сумою з першим, то одержимо геометричну прогресію. Знайдіть суму чисел арифметичної прогресії.

1119. Три числа утворюють геометричну прогресію. Якщо перші два числа залишити без змін, а третє зменшити на 64, то одержимо числа, які утворюють арифметичну прогресію. Якщо ж потім перше і третє числа нової прогресії залишити без змін, а друге зменшити на 8, то одержимо геометричну прогресію. Знайдіть ці числа.

До § 4. Основи комбінаторики, теорії ймовірностей і статистики

1120. Інспектор повинен протягом трьох днів відвідати 10 підприємств. Скількома способами він може розподілити за днями число своїх візитів, відвідуючи не менше одного підприємства в день?

1121. Скількома способами можна поставити на шахову дошку білу та чорну тури так, щоб вони не били одна одну?

1122. Скільки є натуральних чисел, менших від 100, які:

а) діляться на 2 і на 3; **б)** діляться на 2 або на 3;

в) діляться на 2, але не діляться на 3;

г) не діляться ні на 2, ні на 3?

1123. Скільки є натуральних чисел, які не перевищують 1000 і не діляться ні на 5, ні на 6, ні на 7?

1124. Знайдіть суму всіх п'ятицифрових чисел, які можна записати за допомогою цифр 1, 4, 6, 7, 8, використовуючи кожну цифру лише один раз.

1125. У квадратній таблиці розміру 8×8 навмання зафарбовують 8 клітинок так, щоб у кожному рядку і в кожному стовпці була одна зафарбована клітинка. Знайдіть імовірність того, що зафарбовані клітинки лежать на одній з діагоналей таблиці.

1126. У класі є два ряди двомісних парт, по 8 парт у кожному ряді. Два учні довільно займають місця за партами. Знайдіть імовірність того, що вони сядуть за одну парту.

1127. На першій горизонталі шахової дошки довільно розставляють білі фігури: 2 тури, 2 коні, 2 слони, ферзя і короля. Знайдіть імовірність того, що їх розміщення відповідатиме початковому розміщенню цих фігур у грі в шахи.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

§ 1

19. а) $p > q$; **б)** $p > q$; **в)** $p < q$; **г)** $p > q$. **20. а)** $a > b$; **б)** $a < b$; **в)** $a > b$; **г)** $a < b$. **24. а)** $\frac{3\sqrt{5}-4}{15} < \frac{4\sqrt{5}-5}{20}$; **б)** $\sqrt{3}-\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. **25. а)** $\frac{6-3\sqrt{2}}{8} < \frac{9-4\sqrt{2}}{12}$; **б)** $\sqrt{5}-\sqrt{3} > \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$. **28.** Добуток середніх чисел більший. **29.** Сума квадратів більша. **30.** Збільшиться. **33. в)** *Вказівка.* Щоб встановити знак різниці лівої та правої частин, скористайтеся тотожністю $b^2+5=\left(\sqrt{b^2+4}\right)^2+1$. **36.** У безвітряну. **37. а)** 2, якщо $a = 0$, $b = 0$; **б)** 0, якщо $x = 3$, $y = –3$; **в)** –4, якщо $m = 1$, $n = –1$; **г)** 0, якщо $a = b$. **38. а)** 0; 7; **б)** $-1\frac{3}{7}$; 4. **39. а)** 37; **б)** 0. **41. а)** $6\frac{2}{3}$%; **б)** 2,5%. **42.** Не можуть. *Вказівка.* Врахуйте, що трьох сусідів мають жуки, які сидять на крайніх клітинках, крім кутових. Порівняйте кількість таких клітинок на обох дошках. **70.** Від –9 до –6. **71. а)** –4; –3; **б)** 4. **73.** 3. **74. а)** 11; **б)** –3,75; 4. **75. а)** (–1; 4); **б)** (2; 5). **76.** На 6 км/год. **77.** 105 деталей. **78.** 34 гриби. *Вказівка.* Врахуйте, що другий або третій учень зібрав щонайменше 33 гриби, тому перший — щонайменше 34 гриби. Перший і четвертий учні зібрали разом 109 – 65 = 44 гриби. Оскільки четвертий учень зібрав не менше ніж 10 грибів, то перший зібрав не більше ніж 44 – 10 = 34 гриби. Зробіть висновок. **106. а)** $\frac{1}{1-a}$; **б)** y. **107.** 1440 посібників. **108.** Не можна. *Вказівка.* Врахуйте, що сума чисел у вершинах двох протилежних граней дорівнює сумі всіх восьми чисел. **134.** Із 12 елементів. **139.** 4 учні. **141. а)** Коренів немає; **б)** 6. **142. а)** 7; **б)** –2. **143.** 2500 грн. **144.** 20 км/год або 7 км/год. **145.** Переможе перший учень. *Вказівка.* Першим ходом перший учень закреслює центральну клітинку, а далі робить симетричні ходи-відповіді відносно цієї клітинки. **154.** 0. **155.** 4. **158. а)** $x \ge 0$; **б)** $x < 0$; **в)** $x \le 8$; **г)** $x \ge 10$. **159. а)** $x \ge 0$; **б)** $x < 0$; **в)** $x > 8$; **г)** $x > 9$. **162. а)** $x < –8$; **б)** $x \ge 3$; **в)** $x > 1,25$; **г)** $x \le –4$. **163. а)** $x < 1$; **б)** $x \le –1,5$. **164. а)** $\left[-1\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$; **б)** $(-1; 0,4)$; **в)** (–0,5; 5,5]; **г)** (0; 16). **165. а)** (2; 4); **б)** $\left[-\frac{2}{3}; 1\frac{1}{3}\right)$; **в)** $\left(-\frac{2}{3}; 9\frac{1}{3}\right]$; **г)** (–21; –13]. **166. а)** (–4; 4); **б)** [–2; 2]; **в)** розв'язків немає; **г)** $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$. **167. а)** [–3; 3]; **б)** (–1; 1); **в)** $(-\infty; +\infty)$; **г)** $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$. **168.** 7 розв'язків. **169.** 25 розв'язків. **170. а)** $0 \le x < 1$; **б)** $[1; +\infty)$. **171. а)** [–1; 2]; **б)** $(-2; 0) \cup (2; +\infty)$. **172. а)** $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$; **б)** [–3; 0). **173.** Більша, ніж 10 см і менша, ніж 12 см. **174.** Більша, ніж 21 см і менша, ніж 22 см. **175.** $a \le –2$.

176. $b = -2$. **177.** $a < -1,5$. **178. а)** $(0,4; 3,2)$; **б)** $(-\infty; 4] \cup [7; +\infty)$; **в)** $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; **г)** $(-\infty; -11] \cup [0; +\infty)$; **д)** $(0; 6)$; **е)** $(-6,5; -2,5)$. **180. а)** $\frac{2}{a-b}$; **б)** $\sqrt{a} - 7$; **в)** $\frac{1}{x+2}$.
182. На 50%. **183.** 2 км/год. **184.** *Вказівка*. Якщо одну частину розрізати на 8 частин, то кількість частин збільшиться на 7. Тому загальна кількість частин має дорівнювати числу виду $4 + 7k$, де $k \in N$. **186. а)** $x > 1$; **б)** розв'язків немає; **в)** будь-яке число; **г)** розв'язків немає; **д)** $y > -1$; **е)** $x > 0$. **187. а)** Розв'язків немає; **б)** $x \geq 2,9$; **в)** будь-яке число; **г)** $x < 4$. **188. а)** $x > -1$; **б)** розв'язків немає; **в)** $x < 1,5$; **г)** $x < 2$. **189. а)** $x \geq 0$; **б)** $x > -1$; **в)** $x \leq -1$; **г)** $x > 0,5$. **190. а)** $y < -9$; **б)** $x \leq 18$; **в)** $x < 2,4$; **г)** $z < 12$. **191. а)** $x > 0$; **б)** $y > 0,8$; **в)** $x \leq -12$; **г)** $x \geq 10$. **192. а)** $y < 0,5$; **б)** $y > 1$. **193. а)** $z < 0,4$; **б)** $z > 1$. **194. а)** $x > 7,5$; **б)** $x \leq 5$. **195. а)** $x \geq 3,5$; **б)** $x \leq 4,5$. **196. б)** $[-3; +\infty)$; **в)** $(-\infty; 5]$; **г)** $(-\infty; 3,5]$. **197. а)** $[4; +\infty)$; **б)** $(-\infty; 0,5]$. **198.** 18 костюмів. **199.** 14 блоків. **200. а)** $x \leq -10$; **б)** будь-яке число; **в)** $y > -\frac{1}{4}$; **г)** $x > -1$. **201. а)** $x < -9$; **б)** розв'язків немає; **в)** $z < 19$; **г)** будь-яке число. **202. а)** $x > -8$; **б)** $x < 0,9$; **в)** $x \leq \frac{5}{16}$; **г)** $x < -13$. **203. а)** $x > -0,5$; **б)** $x < -1,4$; **в)** $x \leq 0,2$; **г)** $x \geq 0,5$. **204. а)** $y \leq \frac{1}{3}$; **б)** будь-яке число; **в)** розв'язків немає; **г)** $z < 16,5$. **205. а)** Розв'язків немає; **б)** розв'язків немає; **в)** будь-яке число; **г)** $y > 2$.
206. $x > -5\frac{1}{6}$. **207.** $y > -1\frac{1}{3}$. **208. а)** $(-\infty; 4]$; **б)** $(-0,25; +\infty)$. **209. а)** $[22; +\infty)$; **б)** $(0,4; +\infty)$. **210.** $a < 12$. **211.** $a > 10$. **212.** Менша, ніж 10,5 см. **213.** Менша, ніж 9 см. **214.** Більша, ніж 18 км. **215.** Не більше як на 36 км. **216. а)** $(-\infty; 2) \cup (2; 5]$; **б)** $(-4,5; -4) \cup (-4; +\infty)$. **217. а)** $x \leq 2 - 2a$; **б)** $x \leq a - 0,5$. **218. а)** Якщо $a < -2$, то $x < \frac{1}{a+2}$; якщо $a = -2$, то розв'язків немає; якщо $a > -2$, то $x > \frac{1}{a+2}$; **б)** якщо $a < -1,5$, то $x \geq 2a - 3$; якщо $a = -1,5$, то x — будь-яке число; якщо $a > -1,5$, то $x \leq 2a - 3$. **219.** Не існують. **220.** Так, $a = -3$. **221.** $c \geq 0,5$. **222. а)** $a < 0$ або $0 < a < 0,25$; **б)** $a = 0$ або $a \geq 0,25$. **223. а)** $(-1; 4)$; **б)** $(2,7; 0,2)$. **224.** $(6; -1)$. **225.** Так, $a = 2$. **226.** 8 кг; 7 кг. **227.** 120 л; 80 л. **228.** *Вказівка*. Припустіть, що немає футболістів, які забили м'ячів порівну. Підрахуйте для такого випадку найменшу можливу кількість забитих м'ячів. **237. а)** $(-\infty; -7)$; **б)** розв'язків немає; **в)** $(-\infty; -2]$; **г)** $(2,25; +\infty)$. **238. а)** $(3; +\infty)$; **б)** $(-4; 3]$; **в)** $\left(\frac{3}{7}; 2\right)$; **г)** $[6,7; +\infty)$. **239. а)** $(-\infty; 1)$; **б)** $\left[-\frac{1}{8}; 1\right]$; **в)** розв'язків немає; **г)** $(4; +\infty)$.
240. а) $-4 < y \leq 1,5$; 1; **б)** $0,5 < x < 4$; 3. **241. а)** 4; 5; 6; 7; 8; **б)** натуральних розв'язків немає. **242.** Від 0,7 г до 0,8 г. **243.** Від 70 км/год до 75 км/год. **244. а)** $(2; +\infty)$;

б) $\left[1\frac{2}{3}; 5\frac{1}{3}\right)$; **в)** $\left(3; 3\frac{1}{3}\right]$; **г)** $(-\infty; -6)$; **д)** $(7; 12{,}5)$; **е)** розв'язків немає. **245. а)** Розв'язків немає; **б)** $\left(\frac{2}{7}; +\infty\right)$; **в)** $(1{,}6; 5)$; **г)** $(1; 5{,}4]$. **246. а)** $(-\infty; 8]$; **б)** $(-\infty; 11)$; **в)** $[0{,}6; 13]$; **г)** розв'язків немає. **247. а)** $(-6; 8]$; **б)** $(-\infty; 1{,}5)$. **248. а)** $(-\infty; 0{,}5]$; **б)** $[-0{,}5; 0{,}6]$. **249. а)** $\left(\frac{2}{3}; 3\right)$; **б)** $(-\infty; -0{,}5]$. **250.** 7; 0. **251.** 10 цілих розв'язків. **252. а)** $[-1; 4)$; **б)** $[-0{,}2; 0{,}2]$. **253. а)** $(-1; 1]$; **б)** $(-1{,}9; -1{,}7)$. **254.** $-8 \le x \le 2$. **255.** $-5 < x < 2{,}5$. **256. а)** $(-1; 3)$; **б)** $(-\infty; -2{,}5] \cup [1; +\infty)$; **в)** $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$; **г)** $[0{,}5; 2)$. **257. а)** $(2; 2{,}5)$; **б)** $(-\infty; -3] \cup (1; +\infty)$. **258. а)** $[-5; 3]$; **б)** $(-\infty; 1{,}25)$. **259. а)** $-9 \le x \le 0{,}6$; **б)** $x > 8$. **260. а)** $(-2; 5]$; **б)** розв'язків немає. **261. а)** $(-2; 1]$; **б)** $(-\infty; 1)$. **262.** Від 13,125 км до 17,5 км. **263.** Від 53 км/год до 55 км/год. **264. а)** $a \ge 2$; **б)** $-0{,}5 < a \le 0$. **265.** $a \ge 2$. **266. а)** Якщо $a \le -2$, то розв'язків немає; якщо $a > -2$, то $-1 < x < a + 1$; **б)** якщо $a \le 1$, то $x \le 3$; якщо $a > 1$, то $x \le 4 - a$; **в)** якщо $a \le 2{,}5$, то $x < a$; якщо $a > 2{,}5$, то $x < 5 - a$; **г)** якщо $a \le -3$, то розв'язків немає; якщо $a > -3$, то $\frac{1-a}{4} \le x < \frac{8+a}{5}$. **267.** $1 < a < 2$. **268. а)** $(-\infty; 2]$; **б)** $\left(-\infty; 1\frac{2}{3}\right)$; **в)** $\left(-\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right)$; **г)** $(1; 7)$. **269.** Від 40% до 50%. **272.** $(3; 9)$; $(4; 16)$. **273.** $k = -1$. **274.** 1; 2; 3. **275.** Не можна. *Вказівка*. Припустіть, що розставити знаки «+» вказаним чином можна. У такому випадку кількість усіх знаків має бути: а) парною, бо в кожному рядку їх є парна кількість; б) непарною, бо в кожному стовпці їх є непарна кількість. Зробіть висновок. **281.** У річці зі швидкою течією. **284. а)** $-7 < a - 2b < -5{,}5$; **б)** $1{,}2 < ab + 10b^2 < 2{,}4$. **285.** $6{,}1 < l < 6{,}2$. **291. а)** $x > 2{,}5$; **б)** $x \le -1{,}2$; **в)** $x > -5{,}6$; **г)** $y < -6{,}4$. **292. а)** $y < 1{,}4$; **б)** $x < 1{,}2$; **в)** $x \ge -9\frac{1}{3}$; **г)** будь-яке число. **293. а)** 1; 2; 3; 4; **б)** 1; 2; 3; 4; 5; 6. **294.** $x < \frac{9}{22}$. **295. а)** $a < 0$; **б)** $a < -2\frac{1}{3}$; **в)** $a < 1{,}5$; **г)** $a > -1\frac{1}{3}$. **296. а)** $a < 2$; **б)** $a > 2$. **297. а)** $(-15; 21)$; **б)** $(-\infty; -8] \cup [1; +\infty)$; **в)** $(-\infty; +\infty)$; **г)** розв'язків немає. **298. а)** $(-3; 3)$; **б)** $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. **299.** Більшою від 89,6 км/год. **300. а)** $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$; **б)** $[-2; 1{,}5)$; **в)** $(-1{,}75; 2{,}5)$; **г)** $(-\infty; 0{,}5]$; **д)** розв'язків немає; **е)** $[1{,}75; +\infty)$; **є)** $(-\infty; -7)$; **ж)** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{6}{7}\right)$. **301. а)** $(3; +\infty)$; **б)** $(-1; 4)$. **302.** 3. **303. а)** $[-4; -2)$; **б)** $(-7; -1)$; **в)** $(-4; 6]$; **г)** $(-20; -13)$. **304. а)** $[1{,}5; 2]$; **б)** $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$; **в)** $(-3; 0)$; **г)** $(-\infty; 1] \cup (3{,}5; +\infty)$. **305. а)** $[0{,}6; +\infty)$; **б)** $[-3; 3)$. **306.** Від 6 м до 6,5 м.

Завдання для самоперевірки № 1

1. в). **2.** а), г). **3.** б). **4.** г). **5.** б). **6.** в). **7.** 1) — Г); 2) — Д); 3) — А); 4) — В). **8. а)** $\frac{3}{8} > \frac{1}{3}$; **б)** $-\frac{1}{2} > -\frac{5}{9}$. **9. а)** $6 \le x + y \le 8$; **б)** $5 \le 2x - y \le 8$. **10. а)** $[-1; 7]$; $(4; 5)$; **б)** $(-\infty; +\infty)$; $(0; 1]$. **11. а)** $[5; +\infty)$; **б)** $(-\infty; 2{,}5]$. **12.** $(-4; 2{,}5)$. **14.** $7{,}6 < P < 8{,}0$; $3{,}57 < S < 3{,}96$. **15. а)** $x \ge -0{,}8$; **б)** $x > 11$. **16.** $0{,}25 < x \le 0{,}75$. **17. а)** $x \ge 0{,}8$; **б)** $2 < y \le 10$. **18.** 21,6 км $< S <$ 28,8 км. **20. а)** $0{,}11 \le a^2 - b^2 \le 0{,}33$; **б)** $1{,}2 \le \frac{a}{b} \le 1{,}75$. **21. а)** $\left[-1; 1\frac{1}{3}\right]$; **б)** $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. **22.** 2; 3; 4; 5. **23. а)** $\left[-3; 1\frac{1}{3}\right)$; **б)** $[-2; 2) \cup (2; +\infty)$. **24.** Перший турист.

§ 2

319. в) $[8; +\infty)$; **г)** $(-\infty; 2]$. **320. в)** $(-\infty; 4]$; **г)** $[-4; +\infty)$. **325. а)** 2; **б)** -2; 1. **326. а)** -3; **б)** 1; 4. **327.** $(3; 0)$; $(0; 9)$. **328.** $(-8; 0)$; $(0; 16)$. **329. а)** $(-\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; +\infty)$; **б)** $(-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$; **в)** $[-2; 5]$; **г)** $(-\infty; 0{,}25]$; **д)** $(-3; +\infty)$; **е)** $(1; +\infty)$; **є)** $[-1{,}5; 1) \cup (1; +\infty)$; **ж)** $(-\infty; 3{,}5]$. **330. а)** $(-\infty; -9) \cup (-9; 1) \cup (1; +\infty)$; **б)** $(-0{,}2; +\infty)$; **в)** $[-2{,}5; 3]$; **г)** $(-\infty; 2]$; **д)** $(-2; 0) \cup (0; +\infty)$; **е)** $[-0{,}5; +\infty)$. **331. а)** -7; 1; **б)** -3; **в)** таких значень x не існує. **332. а)** -1; 3; **б)** 1; **в)** таких значень x не існує. **333.** Ні. **334.** Так. **335.** Ні. **336.** $(-1; 6)$; $(3; -2)$. **337.** $(-1; -4)$; $(4; 1)$. **342. а)** $\left[-\frac{2}{3}; 10\right)$; **б)** $\left(-\frac{2}{3}; 3\right) \cup$ $\cup (3; +\infty)$. **346. б)** $-2{,}5$; $-\sqrt{2}$. **347. б)** Якщо $a > 6$, — два корені; якщо $a < 6$, — коренів немає; рівняння не може мати лише один корінь. **348. а)** 3; 6; **б)** 2; **в)** -2; -1; **г)** $-1{,}5$; -1. **350.** 70 грн; 34 грн. **351.** -3; 3. **352.** Другий гравець. *Вказівка.* Розбийте числа на пари (1; 1000), (2; 999), …, (500; 501). Обґрунтуйте виграшну стратегію другого гравця: якщо перший гравець витирає число деякої пари, то другий витирає число тієї самої пари. **356. е)** Нулів немає. **357. б)** -4; 2; **в)** $-0{,}5$. **366. б)** -1; 3; **в)** 1. **367. б)** $-0{,}5$; **в)** -2. **368. а)** $(-\infty; -3)$; **б)** $(-2; 1)$. **369. а)** $(-\infty; 2)$; **б)** $(-\infty; 2)$, $(3; +\infty)$. **370.** $a < 0{,}75$. **371.** $b > -2{,}5$. **372.** $m > 2$. **373.** $a > 0{,}5$. **378. а)** 0; 2; 4; 6; **б)** 5. **379.** Якщо $a \ne 0{,}5$ — два нулі; якщо $a = 0{,}5$ — один нуль. **382. б)** 1. **383.** 78. **385. а)** 2; **б)** 14; **в)** 3; **г)** 4. **386.** 90 км/год. **387.** *Вказівка.* Урахуйте, що принаймні чотири фішки мають той самий колір і принаймні дві з них стоять поруч. **397. а)** $[-2; +\infty)$; **б)** $x > 4$. **398.** $[1; +\infty)$. **410. а)** $[-1; +\infty)$; **б)** $(-4; -2)$; **в)** $(-\infty; -3]$. **411. а)** $[-4; +\infty)$; **б)** $(-\infty; 0)$, $(4; +\infty)$; **в)** $[2; +\infty)$. **413. а)** 2; 3; **б)** -2; 3. **414. а)** -2; **б)** 1. **417. а)** 4; **б)** 4; 5. **418.** $a = 1$. **419.** Якщо $a < 0$ або $a = 1$ — два корені; якщо $a = 0$ — три корені; якщо $0 < a < 1$ — чотири корені; якщо $a > 1$ — коренів немає. **420. а)** $(a - 3)(b + 2)$; **б)** $(x + y)(x - 2)$. **421. а)** $\frac{3}{b-4}$; **б)** $\frac{y-x}{x^2y^2}$.

422. 11,25. **423.** $x^2 + 6x - 2 = 0$. **424.** 72 км/год. **425.** 3. *Вказівка.* Нехай на сторонах шестикутника записано числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, тоді у вершинах — числа $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$, $x_3 + x_4$, $x_4 + x_5$, $x_5 + x_6$, $x_6 + x_1$. Уважатимемо, що число, яке стерли у вершині, дорівнює $x_6 + x_1$. Тоді $x_1 + x_2 = 2$, $x_2 + x_3 = 1$, $x_3 + x_4 = 1$, $x_4 + x_5 = 1$, $x_5 + x_6 = 2$. З одержаних рівностей знайдіть $x_6 + x_1$. **438.** Так. **439. а)** (1; 2); (1,5; 4,5); **б)** (2; –8). **441.** $\left(-\frac{2}{3}; 1\frac{1}{3}\right)$; (2; 12). **442. а)** –2; **б)** 0; 4. **443. а)** –0,5; 2; **б)** 2. **445. а)** [–1; 0,5]; **б)** $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. **446.** $a < 0$, $0 < a < 1$. **450. а)** $\sqrt{\frac{a}{b}}$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. **451.** 70 км/год. **452.** $68\frac{4}{7}$ км/год. **453.** *Вказівка.* Припустіть, що двох учнів, які привітали один одного, немає. Нехай *A* — той з учнів, хто отримав найбільше вітань. Обґрунтуйте, що він отримав 5 або більше вітань. Учнів, які його привітали, він, за припущенням, не привітав, а тому міг надіслати щонайбільше 4 вітання.

Завдання для самоперевірки № 2

1. в). **2.** б). **3.** в). **4.** б). **5.** в) **6.** г). **7.** 1) — В); 2) — Д); 3) — А); 4) — Б). **8.** $(-\infty; 2{,}5]$. **9.** –8; 2. **10.** (2; 0); (0; 8). **11.** $[-1; +\infty)$ — область значень. **12.** [–1,5; 6]. **13.** Так. **14.** $m < 4$. **15. а)** $(-\infty; 2]$; **б)** $(-\infty; -2)$, $(0; +\infty)$; **в)** $[-1; +\infty)$. **16.** –1. **17.** $\left[0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 6\right) \cup (6; 9]$. **19.** $a \le -2$. **20. а)** $[-4; +\infty)$; **б)** (0; 4). **21.** Не має.

464. а) $(-\infty; 1]$; **б)** $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$; **в)** $[1; +\infty)$. **465. а)** $[-1; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -2)$, $(0; +\infty)$; **в)** $[-1; +\infty)$. **468. а)** 4; **б)** $(-\infty; 4]$. **469. а)** –4; **б)** $[-4; +\infty)$; **в)** (2; 6); **г)** $(-\infty; 4]$. **470. а)** (2; 2); (–0,5; –5,5); **б)** (1; –9); $\left(-3\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **471.** (–0,5; –0,5); (–1,5; 2,5). **472. а)** 1; **б)** 0; 4. **473. а)** 4; **б)** 4. **477.** $x = 1$; 5 — найбільше значення. **478.** –6,5. **479.** –0,875. **480. а)** 11; 3; **б)** 3; –1,5. **481. а)** 3; –5; **б)** –2; –6. **482. а)** $(-\infty; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -1]$, $[1; +\infty)$; **в)** 1. **483. а)** 3; **б)** $(-\infty; 3]$; **в)** [0; 2], $[3; +\infty)$. **484.** $b = 8$; $c = 18$. **486.** Якщо $a > -3$, — два корені; якщо $a = -3$, — один корінь; якщо $a < -3$, — коренів немає. **487.** $a > 3$. **488.** $b \le 0$. **489.** $c = 4$. **490. а)** 4; **б)** 1. **491.** 4,5 м. **492.** 50 м; 50 м. **493. а)** $\frac{a^2}{2b}$; **б)** $-\frac{3x}{y^2}$. **494. а)** $x > 8$; **б)** $x \ge 4{,}2$; **в)** $x < -4$; **г)** $-5 < x < 2$. **495. а)** –2; **б)** $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; **в)** –4; 4; **г)** 1; 3; $-2-\sqrt{7}$. **496.** –2; 2. **498.** 36 і 45 днів. **499.** *Вказівка.* Скористайтеся методом від супротивного. **504. а)** $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$; **в)** (–4; 1); **г)** [–4; 1]. **505. а)** Розв'язків немає; **б)** розв'язків немає; **в)** $(-\infty; +\infty)$; **г)** $(-\infty; +\infty)$. **506. а)** $(-\infty; 2) \cup$ $\cup (2; +\infty)$; **б)** $(-\infty; +\infty)$; **в)** розв'язків немає; **г)** 2. **507. а)** $(-\infty; -4] \cup [-2; +\infty)$; **б)** (–7; 2);

в) $[0;\ 1{,}5]$; **г)** $(-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$; **д)** $(-2{,}5;\ 1)$; **е)** $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right) \cup (3;\ +\infty)$; **є)** $(-3;\ 1)$; **ж)** $(-\infty;\ 1) \cup$ $\cup\ (1{,}5;\ +\infty)$. **508. а)** $(-3;\ 2)$; **б)** $(-\infty;\ 1] \cup [2;\ +\infty)$; **в)** $[-4;\ 0]$; **г)** $(-\infty;\ -3) \cup (3;\ +\infty)$; **д)** $(-\infty;\ -1] \cup [2;\ +\infty)$; **е)** $(-3;\ 1{,}5)$; **є)** $(-\infty;\ 1] \cup [3;\ +\infty)$; **ж)** розв'язків немає. **509. а)** $(-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$; **б)** $[-2;\ 2]$; **в)** $(-2;\ 4)$; **г)** $(-\infty;\ -1{,}5] \cup [0;\ +\infty)$. **510. а)** $(-3;\ 3)$; **б)** $(-\infty;\ 0) \cup (4;\ +\infty)$; **в)** $[-1;\ 1]$; **г)** $[-1;\ 6]$. **511. а)** $(-\infty;\ -2] \cup [-1;\ +\infty)$; **б)** $[1;\ 3]$; **в)** $(-\infty;\ -4] \cup [4;\ +\infty)$; **г)** $[0;\ 4]$. **512. а)** $(-\infty;\ 2] \cup [3;\ +\infty)$; **б)** $[-3;\ 3]$. **513. а)** $(-3;\ 1)$; **б)** $(-\infty;\ -4] \cup [0{,}5;\ +\infty)$. **514. а)** $(-\infty;\ 2) \cup (4;\ +\infty)$; **б)** $[-2{,}5;\ -1]$. **515. а)** $[-0{,}8;\ 1{,}2]$; **б)** $\left(-\infty;\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right)$; **в)** $[2;\ 3]$; **г)** $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$; **д)** $(-\infty;\ 2] \cup [4;\ +\infty)$; **е)** 3.

516. а) $(-\infty;\ -1) \cup (1{,}2;\ +\infty)$; **б)** $\left(2-\sqrt{2};\ 2+\sqrt{2}\right)$; **в)** $(-\infty;\ +\infty)$; **г)** $\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{4};\ +\infty\right)$; **д)** $[-2;\ 2{,}5]$; **е)** $(-1;\ 2)$. **517. а)** $\left(-3;\ \frac{1}{3}\right)$; **б)** $(-3;\ 5)$; **в)** $(-\infty;\ -0{,}5) \cup (1{,}5;\ +\infty)$; **г)** $(-\infty;\ -1] \cup$ $\cup\ [3;\ +\infty)$. **518. а)** $(-\infty;\ -1{,}5] \cup [1;\ +\infty)$; **б)** $(-\infty;\ -1) \cup (2;\ +\infty)$; **в)** $\left(1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}\right)$; **г)** $\left[\frac{1}{3};\ 3\right]$. **519. а)** $(-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$; **б)** $\left(-1\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$. **520. а)** $\left[-\frac{1}{3};\ 1\right]$; **б)** $(1;\ 4)$. **521.** $x < 0{,}3$ або $x > 0{,}7$. **522.** $x \le -1{,}5$ або $x \ge -0{,}5$. **523. а)** $(-\infty;\ 0{,}2] \cup [1;\ +\infty)$; **б)** $(-\infty;\ -1] \cup \left[-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; **в)** $(-\infty;\ +\infty)$; **г)** $[-0{,}2;\ 0{,}25]$. **524. а)** $\left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right] \cup [3;\ +\infty)$; **б)** $[-12;\ 2]$. **525.** $x < -3$ або $x > 4$.

526. $-6 < x < 4$. **527.** Рівняння має два різні корені, якщо $-\frac{1}{3} < a < 1$; не має коренів, якщо $a < -\frac{1}{3}$ або $a > 1$. **528.** $-2{,}5 < a < -0{,}5$. **529. а)** $(-\infty;\ 1] \cup [9;\ +\infty)$; **б)** $(-\infty;\ -5) \cup$ $\cup\ (6;\ +\infty)$; **в)** $[0;\ 15]$; **г)** $(-\infty;\ -1{,}5] \cup [2;\ +\infty)$; **д)** 0,8; 1,25; **е)** $(-3;\ 6)$; **є)** $(5;\ +\infty)$; **ж)** $\{-4\} \cup [3;\ +\infty)$; **з)** $[-4;\ -1) \cup (-1;\ 1]$; **и)** $(-\infty;\ -3) \cup (5;\ 6) \cup (6;\ +\infty)$. **530. а)** $(-\infty;\ -4) \cup$ $\cup\ (6;\ 7]$; **б)** $(-3;\ 3)$; **в)** $(-2;\ -1] \cup [3;\ 4)$; **г)** $[0;\ 2]$. **531. а)** $(-5;\ 2]$; **б)** $(-4;\ -3]$; **в)** $[2;\ +\infty)$; **г)** $(-\infty;\ -4) \cup (-4;\ 0{,}5) \cup (5;\ +\infty)$. **532.** $a \le -1$. **533. а)** $a < -5$, $-5 < a < -1$ або $a > -1$; **б)** $\frac{-3-2\sqrt{3}}{3} \le a \le \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$. **534. а)** $b \le -\frac{5}{8}$; **б)** $b \le -2$. **535.** $a \le \frac{-5-\sqrt{37}}{2}$. **536. а)** $\frac{a-2c}{2}$; **б)** $\frac{m^2+n}{3m}$. **538.** $(1;\ 1)$. **539. а)** $(1;\ 1)$; **б)** $(1;\ -2)$. **540.** 90 км/год. **541.** 600 г; 200 г. **542.** Музикантів. **548. а)** $(0;\ 0)$; $(2;\ 4)$; **б)** $(0;\ 3)$; $(3;\ 0)$. **549. а)** $(1;\ 1)$; $(2;\ 4)$; **б)** $(3;\ 1)$; $(-3;\ -2)$; **в)** $(1;\ 2)$; $(-1;\ -2)$; **г)** $(1;\ 1)$; **д)** $(4;\ -7)$; $(7;\ -4)$; **е)** $(0;\ 2)$. **550. а)** $(0;\ 1)$; **б)** $(9;\ 0)$; $(5;\ 2)$; **в)** $(1;\ 0)$; $(-2;\ -6)$. **551. а)** $(1;\ 3)$; $(-2;\ 0)$; **б)** $(-1;\ 2)$; $(1;\ 2)$; **в)** $(0;\ 0)$; $(1;\ 1)$. **552. а)** $(0;\ 1)$; $(3;\ 4)$; **б)** $(1;\ 1)$; **в)** $(-3;\ -1)$; $(3;\ -1)$; $(-1;\ 3)$; $(1;\ 3)$. **553. а)** Два; **б)** три.

554. а) Чотири; **б)** один. **555. а)** (–2; 1); (5; –6); **б)** (8; 2); (2; –1); **в)** (3; –1); $\left(-6\frac{1}{3}; 5\frac{2}{9}\right)$; **г)** (–1; –3); (2; 3); **д)** (2; 2); (10; –6); **е)** (1; 3); $\left(\frac{5}{6}; 3\frac{1}{3}\right)$. **556. а)** (4; 2); **б)** (1; –1); (1,75; –0,75); **в)** (2; 1); **г)** (2; 1); (0,25; –0,75). **557. а)** (–4; –3); (4; –3); (–4; 3); (4; 3); **б)** (4; 1); (2; 2); **в)** (1; 3); $\left(7\frac{1}{2}; -1\frac{1}{3}\right)$; **г)** (–4; 3); (1; –2). **558. а)** (–2; –3); (2; 3); **б)** $\left(-\frac{4}{9}; -2\frac{1}{3}\right)$; (1; 2). **559. а)** (1; 1); **б)** (6; 2). **560. а)** (3; 3); **б)** (1; –2). **561. а)** (1; 0); (–0,2; –0,8); **б)** (1; 5); (5; 1); (–1; –5); (–5; –1). **562. а)** (1; –1); $\left(-\frac{5}{7}; 1\frac{2}{7}\right)$; **б)** (3; 4); (4; 3); (–3; –4); (–4; –3). **564. а)** (–2; –1); **б)** (–2; –3); (5; 4); **в)** (–1; 1); (1; 1); **г)** (0; 0); (3; 3). **565. а)** (0; 0); $\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}; -\sqrt{5}\right)$; **б)** (12; –1); (–12; 1); (4,5; –3,5); (–4,5; 3,5); **в)** (3; 1); (3; –1); (–3; 1); (–3; –1); (1; 3); (1; –3); (–1; 3); (–1; –3); **г)** (1; –2); (–2; 1); $(2-\sqrt{3,5}; 2+\sqrt{3,5})$; $(2+\sqrt{3,5}; 2-\sqrt{3,5})$; **д)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -2\sqrt{3}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 2\sqrt{3}\right)$; **е)** (1; 3); (1,5; 2); **є)** (4; 2); (–4; –2); **ж)** (4; –1); $\left(9\frac{5}{7}; 2\frac{3}{7}\right)$; **з)** (3; 1); (3; –1); (–3; 1); (–3; –1); **и)** (4; 2); (–2; –4). **566.** Якщо $a > -0,45$, — два розв’язки; якщо $a = -0,45$, — один розв’язок; якщо $a < -0,45$, — розв’язків немає. **567. а)** $b < -\sqrt{2}$ або $b > \sqrt{2}$; **б)** $b = -\sqrt{2}$ або $b = \sqrt{2}$. **568. а)** $a > 0$; **б)** $a > 2$. **569. а)** $\frac{3b}{a-2b}$; **б)** $x+\sqrt{5}$; **в)** $\frac{9}{a}$; **г)** $3a-c$. **571.** 7. **572.** 24 км/год; 3 км/год. **573.** 10 грн; 5 грн. **574.** 60 м^3. **575.** Так. *Вказівка.* Розбийте числа на пари (1; 2), (3; 4), …, (99; 100). Обґрунтуйте, що серед 51 вибраних чисел є два числа однієї пари. **576.** 8 м; 7 м. **577.** 18 м; 10 м. **578.** 16 і 4 або –4 і –16. **579.** 4; 7. **580.** 5 і –3. **581.** 9 і –1 або 1 і –9. **582.** 15 і 5. **583.** 12 і 4. **584.** 28. **585.** 42. **586.** 8 дм; 6 дм. **587.** 12 см; 5 см. **588.** 8 см; 5 см. **589.** 70 км/год; 60 км/год. **590.** 4 км/год; 3 км/год. **591.** 80 км/год; 60 км/год. **592.** 20 км/год; 16 км/год. **593.** 60 км/год; 90 км/год. **594.** 20 год; 12 год. **595.** 3 дні; 6 днів. **596.** 5 м^3 і 7,5 м^3 або 6,25 м^3 і 6,25 м^3. **597.** 15 год; 30 год. **598.** 6 год; 12 год. **599.** 24 с./хв; 20 с./хв. **600.** 1,2 га; 0,8 га. **601.** 24 або 79. **602.** 36 або 58. **603.** 12 дм; 9 дм. **604.** 8 см; 6 см. **605.** 60 км/год. **606.** 18 учнів. **607.** 25 год; 20 год. **608.** 18 год. **609.** 25 км/год. **610.** 2 км/год. **611.** 20 самоскидів; 6 рейсів; 8400 т. **612.** 60 км/год; 120 км/год. **614. б)** $(a-b)(am-b)$. **616. а)** $\frac{1}{3}$; **б)** 1. **618.** Ні. **619.** 946 тюльпанів. *Вказівка.* Нехай в оранжереї виростили n тюльпанів. Урахуйте, що число $n-1$ має ділитися на 3, на 5 і на 7, а число n — на 11. **622. д)** [7; 8]; **е)** (–3; 3].

623. д) 4; **е)** 7. **638. а)** (1; 1); $\left(-\frac{1}{3}; 2\frac{1}{3}\right)$; **б)** (–1; –2); (4; 3). **640. а)** 1; 2; **б)** 1; **в)** 2.

641. Якщо $a < -1$ або $-0{,}5 < a < 0{,}5$ — два корені; якщо $a = -1$ або $a = -0{,}5$ — три корені; якщо $-1 < a < -0{,}5$ — чотири корені; якщо $a = 0{,}5$ — один корінь; якщо $a > 0{,}5$ — коренів немає. **642. а)** [–5; 5]; **б)** $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$; **в)** [–10; 10]; **г)** (0; 7); **д)** $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$; **е)** $\left(-2\frac{1}{3}; 1\right)$; **є)** $(-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$; **ж)** [–3; 6]. **643. а)** (–4; 2); **б)** $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [2; +\infty)$; **в)** $(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$; **г)** $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$. **644. а)** (–2; 4); **б)** (–0,5; 1). **645. а)** $(-6; -4) \cup (5; +\infty)$; **б)** $(3; +\infty)$. **647. а)** $-1 < a < 3$; **б)** $a < -1$ або $a > 3$. **648. а)** $a > 1$; **б)** $m < -\frac{1}{3}$. **649.** $a = 1$. **650. а)** $(-\infty; -1) \cup (8; 15]$; **б)** $(-2; -1] \cup [3; 4)$.

653. а) (–3; –6); (1; 2); **б)** (1; 0); (4; –1); **в)** (2; –2); (4,4; –5,2); **г)** (1; –1); $\left(\frac{2}{3}; -1\frac{1}{6}\right)$; **д)** (2; 2); (0,75; 4,5); **е)** (0; 3); (4; –1). **654. а)** (–2; –3); (2; 3); **б)** (1; 2); (2; 1); (1; –2); (–2; 1); **в)** (2; 3); (3; 2); **г)** (0; 1); (3; 1); (1,5; 2,5); (1,5; –0,5). **655.** $m = 3$. **656.** $a = 4$; $a = -4$. **657.** 6 см, 8 см або 1 см, 13 см. **658.** 80; 20. **659.** 15. **660.** 21 ряд. **661.** 25 км/год. **662.** 3 год; 6 год. **663.** 6 год.

Завдання для самоперевірки № 3

1. в). **2.** г). **3.** в). **4.** г). **5.** б). **6.** б). **7.** 1) — Г); 2) — А); 3) — Д); 4) — В). **8.** Зростає на проміжку $[1; +\infty)$; спадає на проміжку $(-\infty; 1]$. **9.** $(-\infty; -3] \cup [0; +\infty)$. **10.** (–3; –2); (1; 2). **11.** 5; 7. **12. а)** $(-\infty; 8]$; **б)** $(-\infty; -1)$, $(3; +\infty)$; **в)** $[1; +\infty)$. **13.** [–2; 0,25]. **14.** (2; 2); (–2; 2). **15.** (5; –1); (–0,2; 0,3). **16.** 20 год. **17.** $\left(-\infty; -1\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}\right)$. **18.** $-10 < a < 2$. **19.** (2; 1); (–2; –1); $\left(3; \frac{2}{3}\right)$; $\left(-3; -\frac{2}{3}\right)$. **20.** 2 розв’язки, якщо $a = 0$; 3 розв’язки, якщо $a = 5$. **21.** 20 км; 10 км/год.

§ 3

669. б) 3; 7; 11; 15. **679.** 5. **680.** 100. **683.** 10; 15. **684.** Ні; так. **685.** Так; ні. **686. а)** $n \geq 11$; **б)** $n \leq 19$. **687. а)** $n \leq 18$; **б)** $n \geq 9$. **688.** 33. **689. а)** 10; **б)** 39. **690. а)** 15; **б)** 49. **691.** –0,5. **692.** 1,5. **693. а)** –3; –5; –9; –17; –33; **б)** 2; $-\frac{1}{2}$; –6; –2; 7. **694. а)** 5; –10; 20; –40; 80; **б)** 1; 2; 4; 7; 12. **696.** $b_1 = 3$; $b_{n+1} = b_n^2 - 1$; 3; 8; 63; 3968. **701.** 22. **702.** 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. **703. а)** $(9x - 1)(x - 1)$; **б)** $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 4)$. **704. а)** $(-\infty; 3)$; **б)** $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$. **705. а)** (3; –2); (5; –2); **б)** (1; –3), (–4,6; 5,4). **706.** 25 год; 20 год. **707.** –5; 2. **708.** Переможе Андрій. *Вказівка.* Врахуйте, що: кожен із хлопців може доповнювати ходи суперника до 4 клітинок; між фішками є 201 клітинка, а $201 = 50 \cdot 4 + 1$. Андрій першим ходом пересуває свою фішку на одну клітинку. Наступні ходи: якщо Сергій пересуває фішку на одну або на дві, або на три клітинки ліворуч, то Андрій доповнює ходи суперника до 4 клітинок, рухаючи свою фішку праворуч; якщо Сергій переміщує фішку на одну або на дві, або на три клітинки праворуч, то Андрій робить такий самий хід. **717. а)** $d = 8$; $a_3 = 17$; **б)** $d = -5$; $a_3 = -7$. **719. а)** 2,5; 18; **б)** –4; –6. **721. а)** 40; **б)** –19. **723. а)** $a_n = 0{,}8 + 0{,}2(n-1)$; 3,8; **б)** $a_n = -6 - 4(n-1)$; –66. **724. а)** 26; **б)** –4. **725. а)** 8; **б)** –8. **726. а)** 9; **б)** 45. **727. а)** 11; **б)** 7. **728. а)** 6; **б)** 0,4. **729. а)** 7; **б)** –0,9. **730. а)** Так; **б)** ні. **731. а)** Так; **б)** так. **732.** Ні; так. **733. а)** Так; **б)** ні. **734.** 78 східців; 150 східців. **735.** 19 задач. **736.** 1; 5. **737.** 15. **738. а)** 2; –0,2; **б)** 73; **в)** 8; **г)** 4. **739. а)** 3; 0,5; **б)** –8; **в)** –2; **г)** –7. **740.** 36. **741.** –6. **743. а)** 18; **б)** 1; 3. **744.** 5. **745.** 37 см, 40 см, 43 см. **746.** 0; –2; –4. **747.** 22,6. **748.** 27 рибин; 54 рибини. **749.** 94. **750.** –1,5. **751.** 2,4. **752.** 60°. **753.** 22,5. **754.** 19; 30; 41; 52. **758. а)** –7; 1; **б)** 1. **760. а)** $(-\infty; 1) \cup \left(2\frac{1}{3}; +\infty\right)$; **б)** [–1,5; 21]. **762. а)** 12,5%; **б)** 8 груш. **763.** Не може. *Вказівка.* Обґрунтуйте, що добуток усіх 14 чисел дорівнює добутку четвертих степенів 8 чисел, записаних у вершинах куба. **767. а)** 68; **б)** –15. **769. а)** 153; **б)** –45; **в)** 81; **г)** 9,9. **770. а)** 1275; **б)** 155; **в)** –210. **771. а)** 820; **б)** 555. **772.** 40 см. **773.** 15. **774.** –26. **775. а)** 2500; **б)** 812; **в)** 3528; **г)** 4905; **д)** 1470; **е)** –156. **776. а)** 2550; **б)** 676; **в)** 465; **г)** 25250; **д)** 255. **777.** 31. **778.** 10. **779.** –3; 4. **780.** –3. **781.** 10; 5. **782.** –3; 2. **783.** –4. **784.** 5. **785.** 145. **786.** 48. **787.** 168 см. **788.** 6 днів. **789.** 7 днів. **790.** 770. **791.** 123300. **792.** 372. **793.** –264. **794. а)** $n(n+1)$; **б)** n^2. **795.** 11. **796. а)** 6; **б)** 39. **797.** 470 м. **798. а)** 2; **б)** –6. **799. а)** $(-\infty; 8]$; **б)** $(-\infty; 0)$; $(4; +\infty)$; **в)** $(-\infty; 2]$. **800. а)** (3; –1); (5; –3); **б)** (–1; –1); (7; 3). **801.** $13\frac{1}{3}$ %. **802.** 20 кг; 30 кг. **803.** Не можна. *Вказівка.* Припустіть, що вказане розбиття існує. Обґрунтуйте, що тоді сума 4 чисел кожної групи кратна 4 і сума всіх чисел кратна 4. Знайдіть суму всіх чисел і перевірте, чи вона насправді кратна 4. **814. а)** –3; –54; **б)** 0,5; 0,5. **818. а)** 81; **б)** 32. **819. а)** 1; **б)** 625. **820. а)** 2; **б)** –32. **821. а)** –2 або 2; **б)** –0,1 або 0,1. **822. а)** –4 або 4; **б)** –3 або 3. **824. а)** –15 або 15; **б)** –12 або 12. **825. а)** –18 або 18; **б)** –7 або 7. **826.** 64; 3,24. **827. а)** Так; **б)** ні. **828. а)** Так; **б)** так. **829.** Так. **830. а)** $-\frac{1}{3}$ або $\frac{1}{3}$; **б)** –12,8. **831. а)** –5 або 5; **б)** –0,25 або 0,25. **832.** 54. **833.** –2. **834.** 64. **835.** –64 або –0,25. **836.** 4 см^2. **837.** 4,5 см. **838. а)** $b_2 = 7$; $b_4 = 343$ або $b_2 = -7$; $b_4 = -343$; **б)** $b_1 = 3$; $b_3 = \frac{3}{4}$; $b_5 = \frac{3}{16}$ або $b_1 = -3$; $b_3 = -\frac{3}{4}$; $b_5 = -\frac{3}{16}$. **839.** $x = 4$; $y = 1$ або $x = -4$; $y = -1$. **840.** $-\sqrt{3}$ або $\sqrt{3}$. **841.** 125 см^3. **842.** 8 років. **843. а)** Так; **б)** так. **844.** 7; –21; 63; –189 або –14; –42; –126; –378. **845.** 0,9; 1,5; 2,5 або 9; 3; 1. **846.** –3; –6; –12; –24. **847.** 1; 5. **848.** $x = 1$; $y = 1$. **849.** 32. **850. а)** $\frac{2c^4}{x^4}$; **б)** $\frac{(a+b)(m+n)}{m-n}$. **851. а)** $(-\infty; 1)$; **б)** (–11; 5). **853.** 25 см^2.

854. $0 < a < 4$. **855.** 5. *Вказівка*. Нехай для нумерації сторінок Леся використала числа 1, 2, …, n. Знайдіть найбільше значення суми $1 + 2 + \ldots + n$, яке не перевищує 125, і зробіть висновок. **858. а)** –160; **б)** –21; **в)** –1,75; **г)** 2,5. **860. а)** 33; **б)** 24,2. **861. а)** 7; **б)** 2. **862.** 128. **863.** 486. **864.** 256. **865. а)** 1240; **б)** 2,0625. **866. а)** –168; **б)** –7,875. **867.** $4\frac{27}{32}$. **868.** 2184. **869.** 765 або –255. **870.** 12; 6; 3 або 3; 6; 12. **871.** 384. **872.** 15,5. **873. а)** 2; **б)** 1. **874.** $[5; +\infty)$. **875.** $m = 1$. **876.** 20 і 30 електродвигунів. **877.** 744 сторінки. *Вказівка.* Другий розділ матиме найбільше сторінок, якщо номер останньої сторінки першого розділу починається з цифри 1, другого — з цифри 8, а третього — з цифри 9. Парні цифри 2, 4 і 6 мають бути останніми в номерах указаних сторінок, а цифри 3, 5 і 7 — середніми. **878. а)** $9\frac{511}{512}$; **б)** $\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$; **в)** $\frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right)$. **879. а)** 259; **б)** n^2; **в)** $2\left(2^n-1\right)$. **880.** $\frac{5n(n+1)}{2}$. **881.** $\frac{n(n+1)}{2}$. **882. а)** 10; 80; **б)** 10. **883. а)** 1; 120; **б)** 9. **884.** 1 м. **885.** 53,9 м. **886.** За 21-й день; 4 дні. **887.** 45 м. **888.** 0,5 см. **891. а)** $\frac{2n}{2n+1}$; **б)** $2^{n+1}(n-1)+2$; **в)** $\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$. **892.** 7. **894.** 7 с. **895.** ≈76,2 кПа. **896.** $\frac{1}{36}$. **898.** $\left[-6; +\infty\right)$. **899.** $a < 2$. **900.** 2000 грн. **901.** *Вказівка.* Обґрунтуйте: 1) якщо квиток з номером $\overline{abcdef}$ є «щасливим», то й квиток з номером $\overline{fedcba}$ є «щасливим»; 2) якщо номери цих двох «щасливих» квитків є різними, то їх сума ділиться на 1001; 3) якщо номери однакові, то номер ділиться на 1001. **902. а)** –23; –44; –71; –104; **б)** –24; 48; –96; 192. **903. а)** –5; –7; –11; –19; **б)** 3; 5; 19; 85. **904.** Так; ні. **905.** 2; 3. **907. а)** 4; 27; **б)** –2,5; –6,3. **908. а)** $a_n = 13-12(n-1)$; **б)** $a_n = -4+0{,}5(n-1)$. **910. а)** –3; **б)** –2. **911.** 7. **912.** 55 см. **913. а)** 40; **б)** –80; **в)** 235; **г)** 160. **914. а)** 5096; **б)** 2805; **в)** 2460; **г)** 3969; **д)** 6120; **е)** 741. **915. а)** –4,1; **б)** 4,3. **917.** 15. **918.** 2639. **919.** –18. **920.** 43,75 м. **922. а)** 4; 320; **б)** $\frac{1}{4}$; 0,025. **923. а)** 81; **б)** $\frac{1}{64}$. **925.** $-\frac{3}{5}$ або $\frac{3}{5}$. **926. а)** 630; **б)** –15,75. **927.** 7,75. **928.** 243. **929.** –1; –5; –25; –125 або –125; –25; –5; –1. **930.** 32 см. **931.** 6; 17; 28. **932.** –3; 6; –12. **933. а)** $\frac{1}{16}$; **б)** $85\frac{5}{16}$; **в)** 63. **934.** $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$. **935. а)** $n \le 44$; **б)** $n = 36$. **936. а)** $(n+1)(2n+1)$; **б)** $1-\frac{1}{2^n}$. **937.** 10.

Завдання для самоперевірки № 4

1. б). **2.** г). **3.** б). **4.** в). **5.** б). **6.** г). **7.** 1) — В); 2) — Д); 3) — Г); 4) — А). **8. а)** 19,2; **б)** 22. **9.** –49. **10.** 40,5. **11.** –252. **12.** Так. **13.** 1,2; –3. **14.** 1635. **15.** –0,5. **16.** 3; 381. **17.** 61. **18.** 108. **19.** 5. **20.** –1,4 або 3. **21.** –18; –12; –8 або –2; –4; –8.

§ 4

939. 20 способами. **940.** 48 способами. **941.** 9 маршрутів. **942.** 30 способами. **943.** 60 чисел. **944.** 100 чисел. **945.** 81 число. **946.** 720 способами. **947.** 756 способами. **948.** 151 200 способами. **949.** 120 способами. **950.** 120 способами. **951.** 24 способами. **952.** 207 360 000 знаків. **953.** 32 760 способами. **954.** 720 чисел. **955.** 768 чисел. **956.** 275 способами. **957.** 110 способами. **958.** 121 рукостискання. **959.** 3 способами. **960.** 10 хорд. **961.** 491 400 способами. **962.** 729 способами. **963.** 12 способами. **964.** 4 трикутники. **965.** 331 776 способами. **966.** 44 100 способами. **967.** 100 дільників. **968.** 84 числа. **969.** 60 чисел. **970.** 90 способами. **971. а)** $(-\infty; -2)$; **б)** $(0,5; 1)$. **973.** $k > 11$. **974.** 75 мл. **975.** Не можуть. *Вказівка.* Пронумеруйте дерева по колу з 1-го по 10-е. Урахуйте, що сума номерів дерев, на яких сидять голуби, за їхнього перелітання або не змінюється, або змінюється на 10, тому остача від ділення цієї суми на 10 не змінюється. Порівняйте початкову остачу та остачу, якби всі голуби сіли на одне дерево.

982. б) 0; **в)** $\frac{5}{6}$. **983. а)** $\frac{1}{4}$; **б)** $\frac{3}{4}$; **в)** 0. **984.** $\frac{1}{15}$. **985.** $\frac{2}{5}$. **986.** $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{20}$. **987.** $\frac{2}{9}$; $\frac{2}{9}$. **988.** 0,9. **989.** 0,04. **990.** 30 пострілів. **992. а)** $\frac{9}{25}$; **б)** $\frac{8}{25}$; **в)** $\frac{4}{25}$; **г)** $\frac{16}{25}$. **993. а)** $\frac{1}{10}$; **б)** $\frac{1}{10}$; **в)** $\frac{1}{30}$; **г)** 0. **994.** $\frac{2}{5}$. **995.** $\frac{9}{20}$. **996.** $\frac{1}{3}$. **997.** $\frac{1}{3}$. **998.** $\frac{1}{6}$. **999.** $\frac{1}{6}$. **1000.** 540 і 360 мікросхем. **1001.** 12 дівчат і 16 хлопців. **1002.** $\frac{1}{720}$. **1003.** $\frac{1}{125}$. **1004.** $\frac{1}{60}$. **1005.** $\frac{2}{5}$. **1006.** $\frac{3}{5}$. **1007.** $\frac{11}{500}$. **1008.** $\frac{19}{29}$. **1009.** $\frac{7}{12}$. **1010. а)** $\frac{3}{8}$; **б)** $\frac{11}{16}$. **1012.** -6; 4. **1014.** 3 кг. **1022.** 3,2 кг. **1023.** 392,5 г. **1024.** 116 тис. грн. **1025.** 2 помилки. **1029.** 7,5 балів. **1030.** 9 очок. **1032.** 9%. **1033. а)** $3ab^2c^3$; **б)** $\sqrt{\frac{2}{a}}$. **1034. а)** $(-2; -4)$; $(2; 4)$; **б)** $(-1; 4)$. **1035.** $a = \frac{1}{3}$; $a = 1$. **1036.** 45 с. **1037.** *Вказівка.* Урахуйте, що від перестановки цифр числа подільність на 3 і на 9 не змінюється. **1038.** 35 способами; 300 способами. **1039. а)** 160 способами; **б)** 92 способами. **1040.** 5832 чисел. **1041.** 40 чисел. **1042.** 30 240 способами. **1043.** 42 способами. **1044.** 120 буквосполучень. **1045.** 0,97. **1047. а)** $\frac{1}{2}$; **б)** 1; **в)** $\frac{3}{10}$; **г)** $\frac{1}{10}$. **1048.** $\frac{1}{3}$. **1049.** $\frac{5}{11}$. **1050.** $\frac{1}{4}$. **1051.** $\frac{1}{4}$. **1052.** $\frac{1}{10}$. **1053. а)** $\frac{1}{8}$; **б)** $\frac{3}{8}$. **1056.** $-1°$ C. **1057.** 8 підтягувань.

Завдання для самоперевірки № 5

1. б). **2.** в). **3.** в). **4.** а). **5.** б). **6.** в). **7.** 1) — Б); 2) — Г); 3) — В); 4) — А). **8.** 380 способами. **9.** 64 числа. **10.** $\frac{1}{5}$. **12.** 120 способами. **13.** 500 чисел. **14.** 12 дівчат. **15.** $\frac{3}{10}$. **17.** 45 способами. **18.** 30 951 число. **19.** $\frac{1}{20}$. **20.** $\frac{23}{36}$. **21.** 6 піднімань.

Задачі підвищеної складності

1064. в) *Вказівка*. Урахуйте, що $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}$, ..., $\frac{1}{n+n} > \frac{1}{2n}$, де $n > 1$. **г)** *Вказівка*. $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, де $n > 1$. **1068.** $x = 1$; $y = 1$. *Вказівка*. Доведіть, що $\frac{x+1}{\sqrt{x}} \geq 2$ для $x > 0$, до того ж $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = 2$ лише для $x = 1$. **1070.** 2, 3, 1 і 0 рибин. **1071.** 14 і 18 хлопців. **1072.** Катер, який пливе притокою. **1073.** Якщо $b < -2$ або $b > 3$, то $x \leq \frac{b+1}{b-3}$; якщо $b = -2$ або $b = 3$, то x — будь-яке число; якщо $-2 < b < 3$, то $x \geq \frac{b+1}{b-3}$. **1074. а)** $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$; **б)** $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. **1075.** $a = -2$. **1078.** $a = 3$. **1079.** $x = 5{,}5$. **1080.** $\frac{1}{3}$. **1081.** $(-\infty; -3] \cup \{-1\} \cup [1; +\infty)$. **1082.** $a \leq -1$; $a \geq 3$. **1084.** $x < -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $-\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ або $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **1085.** $a \leq 4$; $a \geq 5$. **1086.** $a \leq -1{,}5$. **1087.** Якщо $a < -1$ або $a = 1$ — один корінь; якщо $-1 \leq a < 1$ — два корені; якщо $a > 1$ — коренів немає. **1088.** $a > 1$. **1089. а)** $-0{,}5$; **б)** $0{,}5$. **1090. а)** (8; 2); (–8; –2); **б)** (1; 2); (–2,5; –1,5); **в)** (1; 3); (3; 1); **г)** (–2; 3); (3; –2); **д)** (0; 1); **е)** (2; 8); (8; 2); **є)** (2; 3); (–2; –3); **ж)** (8; 2); (–8; –2); (5; –8,5); (–5; 8,5). **1091.** $a = -0{,}75$. **1092.** $a = -3$; $a = -1$; $a = 1$; $a = 3$. **1093.** Якщо $|a| > 2$ або $a = 0$, — 2 розв'язки; якщо $|a| = 2$ або $|a| = \sqrt{3}$, — 3 розв'язки; для решти значень a — 4 розв'язки. **1094.** $a = 4$. **1095.** 2 год. **1096.** 60 л. **1097.** 4 км/год; 5 км/год. **1098.** 48; 35. **1099.** 210 км. **1102.** Ні. **1103.** 60. **1104.** Не можуть. **1105.** Так. **1106.** 17. **1107.** 6. **1108.** 11. **1109.** 13. **1110.** 172. **1111.** 24 010 000. **1112.** –1; 0; 1; 2. **1113.** $a = k(k-1)$, де k — натуральне число. **1114.** $-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ (якщо $a = \frac{2}{27}$). **1115.** $p = 0$, $r = 0$. **1116.** 3, 6, 12 або 12, 6, 3. **1117.** 1. **1118.** 42. **1119.** $\frac{4}{9}$, $\frac{52}{9}$, $\frac{676}{9}$ або 4, 20, 100. **1120.** 36 способами. **1121.** 3136 способами. **1122. а)** 16 чисел; **б)** 66 чисел; **в)** 33 числа; **г)** 33 числа. **1123.** 572 числа. **1124.** 6 933 264. **1125.** $\frac{1}{20160}$. **1126.** $\frac{1}{31}$. **1127.** $\frac{1}{5040}$.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

§ 1. НЕРІВНОСТІ

§ 2. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

§ 3. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Навчальне видання

Кравчук Василь Ростиславович
Підручна Марія Василівна
Янченко Галина Михайлівна

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Редактори: *Ярослав Гап'юк, Ярослав Гринчишин, Сергій Мартинюк*
Літературне редагування *Людмили Олійник*
Обкладинка *Світлани Демчак*
Відповідальний за випуск *Сергій Мартинюк*

Виготовлено згідно із СОУ 22.2-02477019-07:2012

Формат 60×84/16. 15,39 ум. др. арк., 14,83 обл.-вид. арк. Тираж 14909.
Видавець Редакція газети «Підручники і посібники».
46000, м. Тернопіль, вул. Поліська, 6а. Тел.: (0352) 43-15-15; 43-10-21.
Збут: zbut@pp-books.com.ua Редакція: red@pp-books.com.ua
Виробництво: print@pp-books.com.ua
www.pp-books.com.ua
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 4678 від 21.01.2014 р.
Книга-поштою: а/с 376, Тернопіль, 46011.
Тел.: (0352) 42-43-76; 097-50-35-376
post@pp-books.com.ua

Віддруковано у Державному видавництві «Преса України»
03047, м. Київ, просп. Перемоги, 50
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру ДК № 310 від 11.01.2001 р.
Замовлення № 0217174