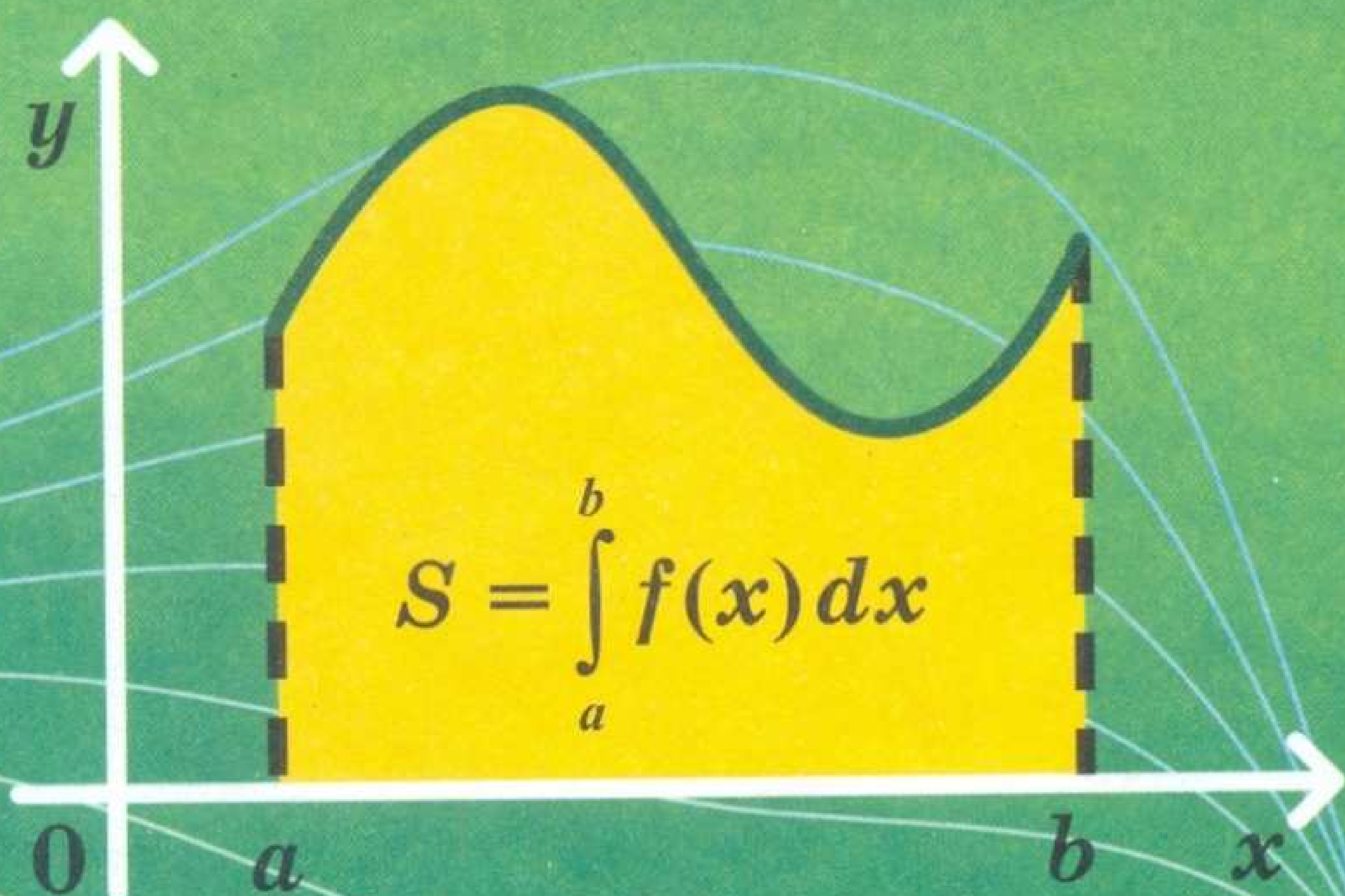
Є. П. Нелін
О. Є. Долгова

АЛГЕБРА

11

АКАДЕМІЧНИЙ РІВЕНЬ
ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ



ГІМНАЗІЯ

11
АЛГЕБРА
АКАДЕМІЧНИЙ РІВЕНЬ
ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ
Є. П. Нелін
О. Є. Долгова

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

РОЗКЛАД КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА НА МНОЖНИКИ

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right),$$

де x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена

ФОРМУЛИ ВІЄТА

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

КОРЕНІ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНІВ

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

$$\left(ab\right)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

КВАДРАТНІ КОРЕНІ

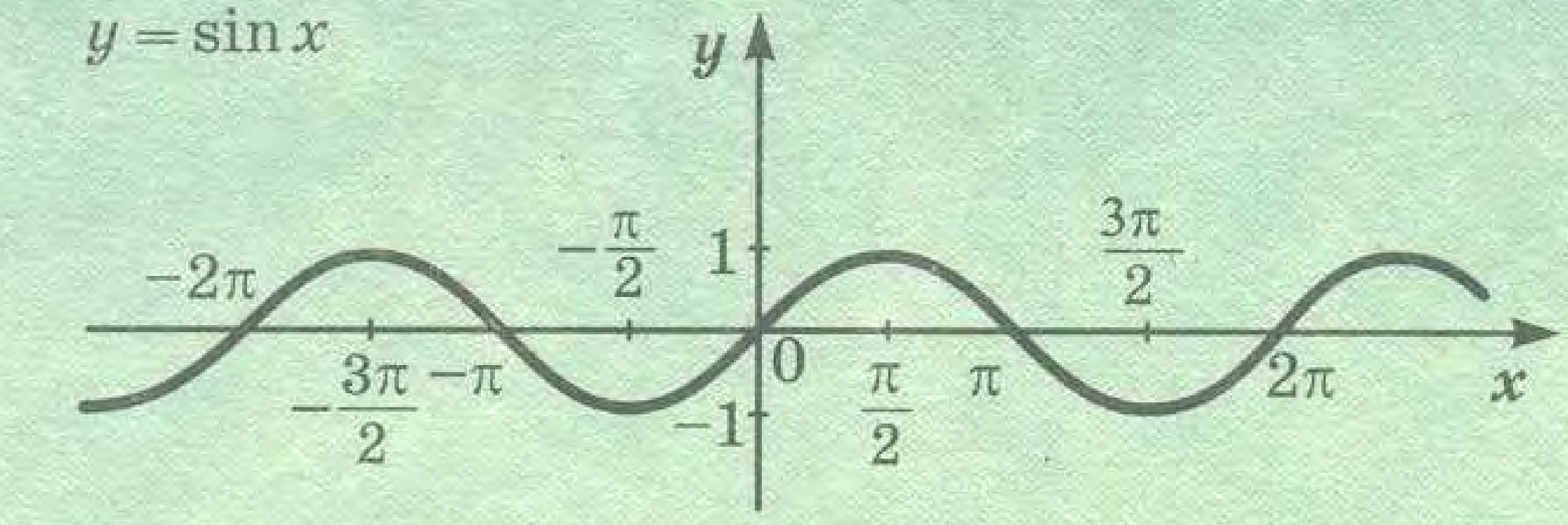
$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \text{ при } a \geqslant 0$$

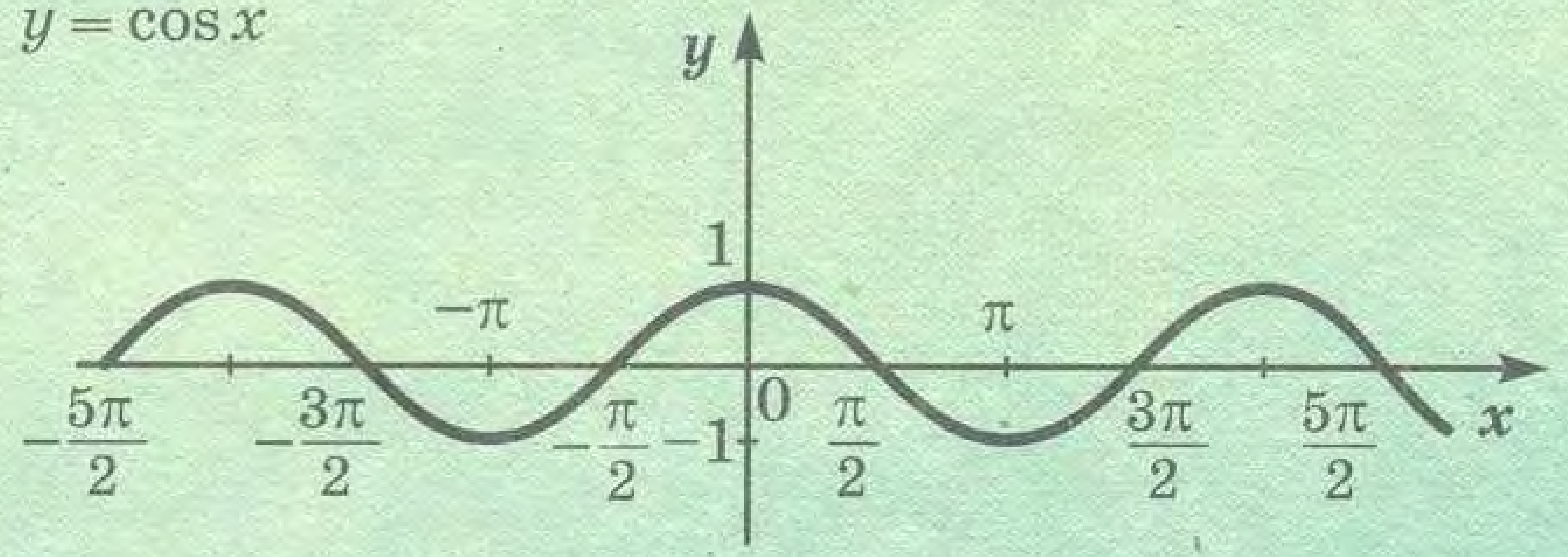
$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0 \\ -a \text{ при } a < 0 \end{cases}$$

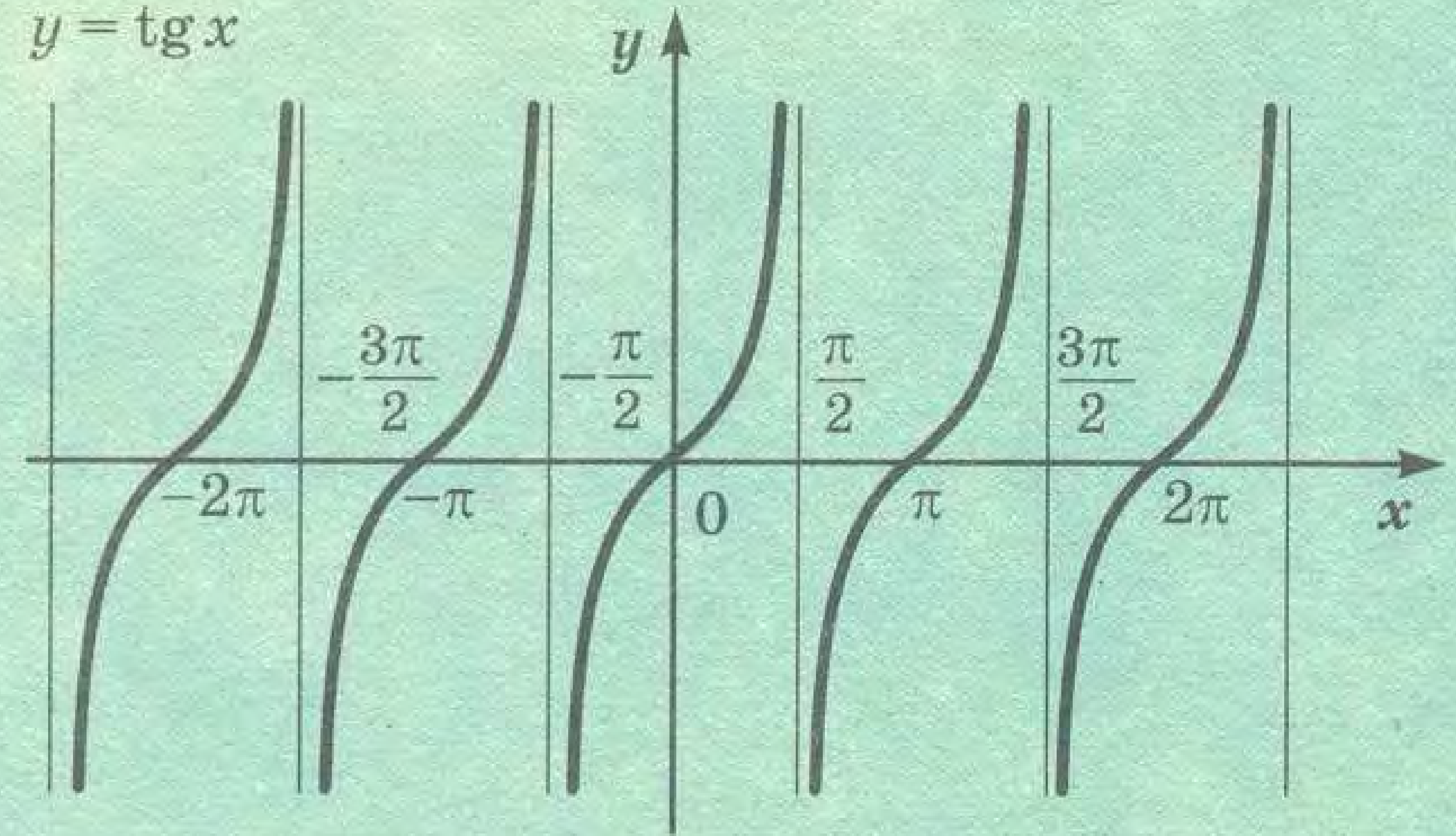
$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ при } a \geqslant 0,\, b \geqslant 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ при } a \geqslant 0,\, b > 0$$

ГРАФІКИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ







ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІВ

Якщо $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$, то

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \log_a x^n = n \log_a x$$

$$a^{\log_a x} = x \qquad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Є. П. Нелін
О. Є. Долгова

АЛГЕБРА

11 клас

Підручник
для загальноосвітніх навчальних закладів

Академічний рівень,
профільний рівень

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України*

Харків
«Гімназія»
2011

УДК 373:[512+517]
ББК 22.12я721+2.161я721
Н49

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
(наказ від 16.03.2011 № 235)

Наукову експертизу проводив
Інститут математики Національної академії наук України

Психолого-педагогічну експертизу проводив
Інститут педагогіки Національної академії педагогічних наук України

Умовні позначення

▶	початок розв'язання задачі
◁	закінчення розв'язання задачі
●	початок обґрунтування твердження
○	закінчення обґрунтування твердження

Нелін Є. П.
Н49 Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навч. закладів : академ. рівень, проф. рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Х. : Гімназія, 2011. — 448 с. : іл.
ISBN 978-966-474-144-3.

Підручник з алгебри і початків аналізу спрямований на реалізацію основних положень концепції профільного навчання та організацію особистісно-орієнтованого навчання математики в загальноосвітніх навчальних закладах. Матеріал відповідає чинній програмі з математики для класів академічного та профільного рівнів, а також може використовуватися в класах з поглибленим вивченням математики.

Підручник орієнтований на підготовку учнів до успішної здачі державної підсумкової атестації (ДПА) та зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) з математики.

УДК 373:[512+517]
ББК 22.12я721+2.161я721

ISBN 978-966-474-144-3

ПЕРЕДМОВА

Дорогі друзі!

Пропонований підручник для 11 класу є продовженням підручника «Алгебра і початки аналізу» для 10 класу. В 11 класі розглядається принципово нова частина курсу — початки аналізу. *Математичний аналіз* (або просто аналіз) — галузь математики, яка була сформована у XVIII ст. і відіграла значну роль у розвитку природознавства: з'явився потужний, досить універсальний метод дослідження функцій для розв'язування багатьох прикладних задач. В 11 класі буде розглянуто показникову та логарифмічну функції, елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і статистики, які широко застосовують у найрізноманітніших галузях знань.

Структура підручника для 11 класу аналогічна до структури підручника для 10 класу. Нагадаємо, як користуватися підручником.

Система навчального матеріалу з кожної теми представлена на двох рівнях. *Основний матеріал для* академічного і профільного рівнів наведено в параграфах, номери яких позначено синім кольором. *Додатковий матеріал* (номери параграфів позначено сірим кольором) призначений для оволодіння темою на глибшому рівні (наприклад, для виконання складніших завдань з алгебри і початків аналізу зовнішнього незалежного оцінювання з математики). Цей матеріал учні можуть опановувати самостійно чи під керівництвом учителя при вивченні математики в класах, які вивчають математику за програмою академічного рівня. Матеріал можна також використовувати для систематичного вивчення поглибленого курсу алгебри і початків аналізу в класах, школах, ліцеях та гімназіях фізико-математичного профілю або в класах з поглибленим вивченням математики.

На початку багатьох параграфів наведено *довідкові таблиці*, які містять основні означення, властивості та *орієнтири* для пошуку плану розв'язування задач з теми. Для ознайомлення з основними ідеями розв'язування наведено приклади, у яких, крім самого розв'язання, міститься *коментар*, що допоможе скласти план розв'язування аналогічного завдання.

Для закріплення, контролю і самоконтролю засвоєння навчального матеріалу після кожного параграфа запропоновано систему запитань і вправ. Відповіді на ці запитання і приклади розв'язування аналогічних вправ можна знайти в тексті параграфа. Систему вправ до основного матеріалу подано на трьох рівнях. *Задачі середнього рівня* позначено символом «°», дещо складніші *задачі достатнього рівня* подано без позначень, а *задачі високого рівня* складності позначено символом «*». Для багатьох задач поглибленого рівня також запропоновано спеціальні орієнтири, які дозволяють опанувати методи їх розв'язування. *Відповіді і вказівки* до переважної більшості вправ наведено у відповідному розділі. Про походження понять, термінів і символів ви зможете дізнатися, прочитавши «Відомості з історії». У додатку наведено матеріал з теми «Комплексні числа», що дозволить бажаючим розширити поняття числа й ознайомитися з комплексними числами, які широко використовують як у самій математиці, так і в різноманітних її застосуваннях.

Розділ 1
ГРАНИЦЯ Й НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

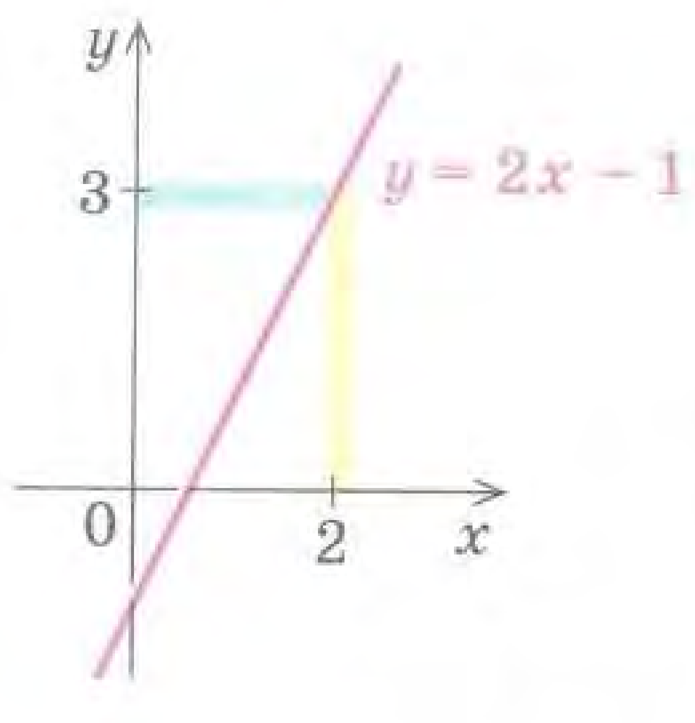
§ 1 ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ ТА НЕПЕРЕРВНОСТІ ФУНКЦІЇ

Таблиця 1

1. Поняття границі функції в точці

Нехай задано деяку функцію, наприклад $f(x) = 2x - 1$.

Розглянемо графік цієї функції та таблицю її значень у точках, які на числовій прямій розташовані достатньо близько від числа 2.

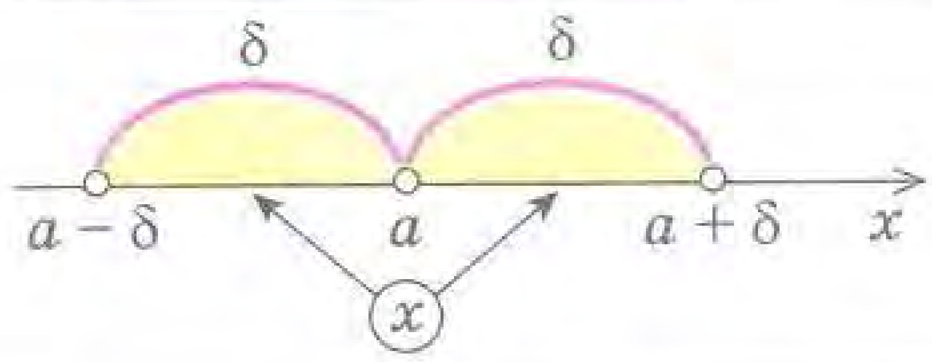
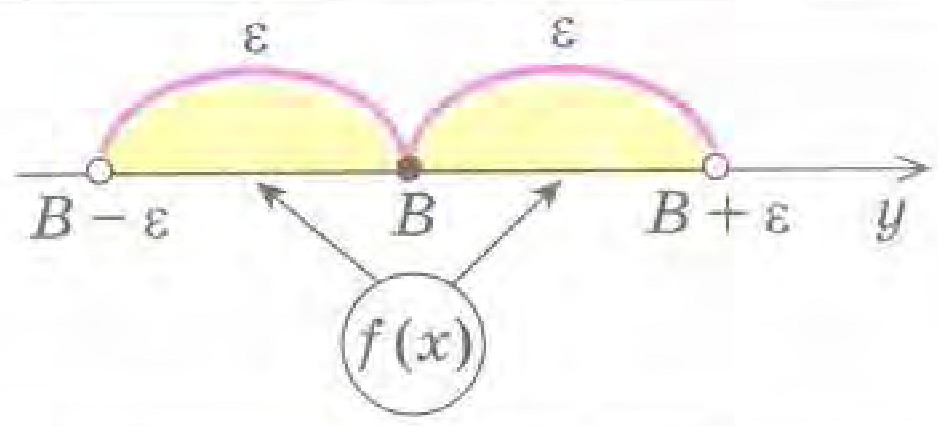


x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	2,8	2,98	2,998	3,002	3,02	3,2

З таблиці та графіка видно, що чим ближче аргумент x до числа 2 (це позначають $x \to 2$ і кажуть, що x *прямує до* 2), тим ближче значення функції $f(x) = 2x - 1$ до числа 3 (позначають $f(x) \to 3$ і кажуть, що $f(x)$ прямує до 3). Це записують також так: $\lim\limits_{x \to 2}(2x-1)=3$ (читають: «ліміт $2x - 1$ при x, що прямує до 2, дорівнює 3») і кажуть, що границя функції $2x - 1$ при x, що прямує до 2 (або *границя функції в точці* 2), дорівнює 3.

У загальному випадку запис $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$ означає, що **при $x \to a$ $f(x) \to B$,** тобто B — число, до якого прямує значення функції $f(x)$, коли x прямує до a.

Продовження табл. 1

2. Запис позначень $x \to a$ і $f(x) \to b$ за допомогою знака модуля		
Позначення і його зміст	Ілюстрація	Запис за допомогою знака модуля
$x \to a$ На числовій прямій точка x розташована від точки a на малій відстані (меншій від δ).		$\lvert x-a \rvert < \delta$*
$f(x) \to B$ Значення $f(x)$ на числовій прямій розташоване на малій відстані від B (меншій від ε).		$\lvert f(x)-B \rvert < \varepsilon$

3. Означення границі функції в точці**	
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$	*Число B називають границею функції $f(x)$ у точці a (при x, що прямує до a), якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке додатне число δ, що при всіх $x \neq a$, які задовольняють нерівність $\lvert x-a \rvert < \delta$, виконується нерівність $\lvert f(x)-B \rvert < \varepsilon$.*

4. Властивості границі функції	
Зміст правил граничного переходу	Запис і формулювання правил граничного переходу
Якщо $f(x) = c$, то при $x \to a$ $f(x) \to c$	$\lim\limits_{x \to a} c = c$ *Границя сталої функції дорівнює цій самій сталій.*
Якщо при $x \to a$ $f(x) \to A$ і $g(x) \to B$, то $f(x) \pm g(x) \to A \pm B$	$\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$ *Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) їх границь, якщо границі доданків існують.*

* Якщо значення x задовольняє нерівність $\lvert x-a \rvert < \delta$, то кажуть, що точка x розташована в δ-околі точки a.

** Означення є обов'язковим тільки для класів фізико-математичного профілю.

Продовження табл. 1

<table>
<tr><td>$f(x)g(x) \to A \cdot B$</td><td>$\lim\limits_{x \to a}(f(x)\,g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
Границя добутку двох функцій дорівнює добутку їх границь, якщо границі множників існують.</td></tr>
<tr><td>$c \cdot f(x) \to c \cdot A$</td><td>$\lim\limits_{x \to a}(c\,f(x)) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$
Сталий множник можна виносити за знак границі.</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{A}{B}$ (де $B \neq 0$)</td><td>$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ $\left(\text{де } \lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0\right)$
Границя частки двох функцій дорівнює частці їх границь, якщо границі чисельника й знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Неперервність функції в точці</td></tr>
<tr><td colspan="2">Означення. Функцію $f(x)$ називають неперервною в точці a, якщо при $x \to a$ $f(x) \to f(a)$, тобто $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">*Якщо функція $f(x)$ неперервна в кожній точці деякого проміжку I, то її називають* ***неперервною на проміжку I.***</td></tr>
<tr><td colspan="2">*Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці a, то* **сума, добуток і частка неперервних у точці *a* функцій неперервні в точці *a*** (*частка у випадку, коли дільник* $g(a) \neq 0$).</td></tr>
<tr><td colspan="2">**Графік функції, неперервної на проміжку, — нерозривна лінія на цьому проміжку.**</td></tr>
<tr><td colspan="2">*Усі елементарні функції* неперервні в кожній точці своєї області визначення, тому на кожному проміжку з області визначення їх графіки — нерозривні лінії.*</td></tr>
<tr><td colspan="2">**Якщо на інтервалі (a, b) функція $f(x)$ неперервна і не перетворюється на нуль, то на цьому інтервалі вона зберігає сталий знак.**</td></tr>
</table>

* Елементарними зазвичай називають такі функції: $y = c$ ($c = \text{const}$); $y = x^n$, $n \in N$; $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$; $y = a^x$ ($a > 0$); $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$); $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$; $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$ і всі функції, які одержують з перелічених вище за допомогою скінченної кількості дій додавання, віднімання, множення, ділення та утворення складеної функції (функції від функції).

Закінчення табл. 1

<table>
<tr><td colspan="2">6. Метод інтервалів (розв'язування нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$)</td></tr>
<tr><td>План</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>

1. **Знайти ОДЗ нерівності.**
2. **Знайти нулі функції:** $f(x) = 0$.
3. **Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які вони розбивають ОДЗ.**
4. **Записати відповідь, ураховуючи знак заданої нерівності.**

</td><td>

Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2-16}{\sqrt{x+3}-3} > 0.$

▶ Нехай $f(x) = \frac{x^2-16}{\sqrt{x+3}-3}$. Функція $f(x)$ неперервна на кожному з проміжків своєї області визначення як частка двох неперервних функцій. Тому для розв'язування можна використати метод інтервалів.

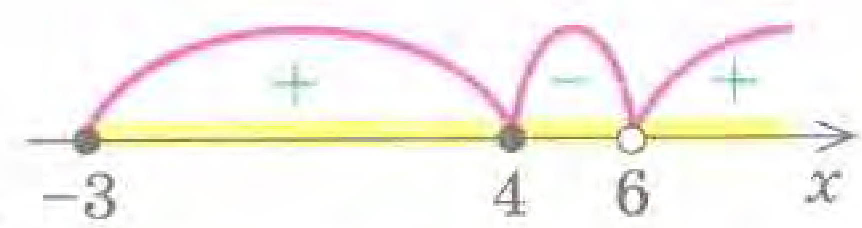
1. ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ \sqrt{x+3}-3 \neq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ \sqrt{x+3} \neq 3. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \neq 6. \end{cases}$

2. Нулі функції: $f(x) = 0$.

$$\frac{x^2-16}{\sqrt{x+3}-3} = 0, \; x^2 - 16 = 0,$$

$x_1 = 4$ (входить до ОДЗ),

$x_2 = -4$ (не входить до ОДЗ).

3. 

Відповідь: $[-3; 4) \cup (6; +\infty)$. ◁

</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття границі функції в точці. Найпростіше уявлення про границю функції можна одержати, розглянувши графік функції $y = 2x - 1$ (рис. 1.1). З цього графіка видно: чим ближче до числа 2 ми обираємо на осі Ox значення аргументу (це позначають $x \to 2$ і читають: «x прямує до 2»), тим ближче значення $f(x)$ на осі Oy буде до числа 3.

Це записують таким чином: $f(x) \to 3$ при $x \to 2$, або $\lim\limits_{x \to 2}(2x-1) = 3$.

Знак lim (читають: «ліміт») — скорочений запис латинського *limes* (лімес), що в перекладі означає «границя».

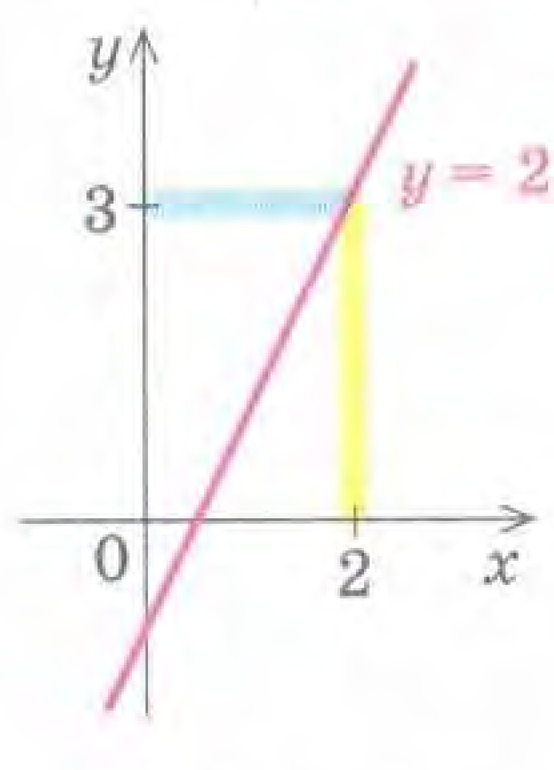


Рис. 1.1

У загальному випадку **запис $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$ означає, що при $x\to a$ значення $f(x)\to B$**, тобто B — число, до якого прямує значення функції $f(x)$, коли x прямує до a.

Щоб дати означення границі функції $f(x)$ у точці a, згадаємо, що відстань між точками x і a на координатній осі Ox — це модуль різниці $|x-a|$, а відстань між точками $f(x)$ і B на координатній осі Oy — це модуль різниці $|f(x)-B|$.

Тоді запис $x\to a$ означає, що на числовій прямій точка x розташована від точки a на малій відстані: наприклад, меншій від якогось додатного числа δ (рис. 1.2). Це можна записати так: $|x-a|<\delta$. Запис $x\to a$ означає, що x прямує до a, але не обов'язково досягає значення a. Через це в означенні границі функції в точці a розглядають значення $x\neq a$. У тому випадку, коли значення x задовольняє нерівність $|x-a|<\delta$, кажуть, що точка x розташована в *δ-околі точки a*.

Аналогічно запис $f(x)\to B$ означає, що на числовій прямій значення $f(x)$ розташоване на малій відстані від B, наприклад, меншій від якогось додатного числа ε (рис. 1.3). Це записують так: $|f(x)-B|<\varepsilon$.

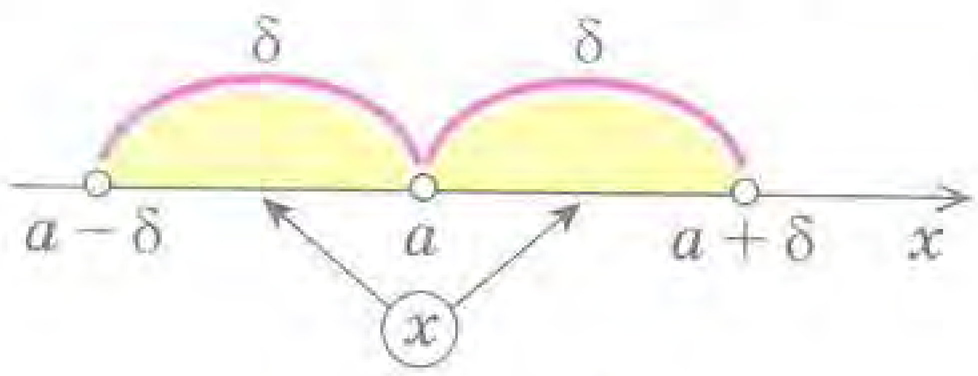


Рис. 1.2

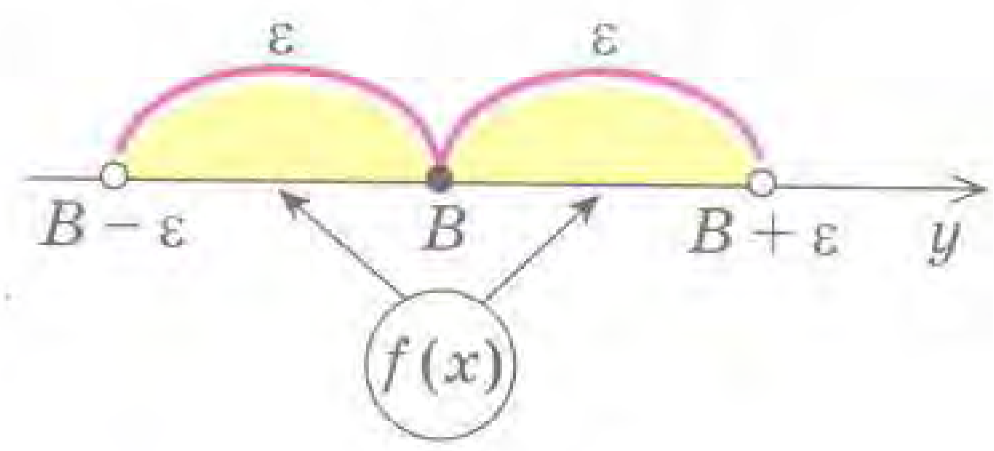


Рис. 1.3

Тоді можна дати таке означення границі функції в точці:
число B називають границею функції $f(x)$ у точці a (при x, що прямує до a), якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке додатне число δ, що при всіх $x\neq a$, які задовольняють нерівність $|x-a|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-B|<\varepsilon$.

Знаходження числа B за функцією f називають *граничним переходом*. Граничні переходи здійснюють за такими правилами*.

Якщо нам відомі границі функцій $f(x)$ і $g(x)$, то для виконання граничного переходу над сумою, добутком або часткою цих функцій достатньо виконати відповідні операції над границями цих функцій (для частки тільки в тому разі, коли границя знаменника не дорівнює нулю).

Інакше кажучи, якщо **при $x\to a$ $f(x)\to A$ і $g(x)\to B$**, то

$\boxed{f(x)+g(x)\to A+B}$ $\boxed{f(x)\,g(x)\to A\cdot B}$ $\boxed{\dfrac{f(x)}{g(x)}\to\dfrac{A}{B}}$ (де $B\neq 0$).

---

* Обґрунтування правил граничного переходу, а також приклади використання означення для доведення того, що число B є границею функції $f(x)$ при $x\to a$, наведено в § 6.

У випадку, коли функція $f(x)$ є постійною, тобто $f(x) = c$, то при всіх значеннях x значення $f(x)$ дорівнює c. Отже, і при $x \to a$ значення $f(x) \to c$, тобто *границя постійної дорівнює самій постійній*.

З означення випливає, що границю функції $f(x)$, коли x прямує до a, можна обчислювати і тоді, коли значення $x = a$ не входить до області визначення функції $f(x)$. Наприклад, областю визначення функції $f(x)=\frac{x}{x}$ є всі дійсні числа, крім числа 0. Для всіх $x \neq 0$ виконується рівність $\frac{x}{x}=1$. При $x \to 0$ значення $\frac{x}{x}\to 1$, або $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$.

2. Поняття неперервності функції. Якщо значення $x = a$ входить до області визначення функції $f(x)$, то при $x \to a$ для багатьох функцій значення $f(x) \to f(a)$, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. Такі функції називають *неперервними в точці** a. Якщо функція $f(x)$ неперервна в кожній точці деякого проміжку I, то її називають *неперервною на проміжку* I.

Графіки неперервних функцій зображають неперервними (нерозривними) кривими на кожному проміжку, що цілком входить до області визначення. На цьому ґрунтується спосіб побудови графіків таких функцій «за точками», яким ми постійно користувалися. Строго кажучи, для цього слід попередньо з'ясувати, чи дійсно розглядувана функція є неперервною. Усі відомі вам елементарні функції неперервні в кожній точці своєї області визначення (див. також § 7). Цією властивістю можна скористатися під час побудови їх графіків та обчисленні границь функцій.

Наприклад, оскільки многочлен є неперервною функцією, то

$$\lim_{x\to 2}(x^3-3x+1)=f(2)=2^3-3\cdot 2+1=3.$$

З правил граничного переходу випливає, що коли ***функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці a***, **сума, добуток і частка неперервних у точці a функцій неперервні в точці a** (частка $\frac{f(x)}{g(x)}$ у випадку, коли $g(a) \neq 0$).

Наприклад, функція $f(x)=x^2+\sqrt[3]{x}$ неперервна як сума двох неперервних функцій. Дійсно, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\left(x^2+\sqrt[3]{x}\right)=\lim\limits_{x\to a} x^2+\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{x}=$ $=a^2+\sqrt[3]{a}=f(a)$, а це й означає, що функція $f(x)$ — неперервна.

Розглянемо ще одну важливу властивість неперервних функцій, повне доведення якої наводять у курсах математичного аналізу.

Якщо на інтервалі (a, b) функція $f(x)$ неперервна і не перетворюється на нуль, то на цьому інтервалі вона зберігає сталий знак.

---

* Якщо в точці $x = a$ не виконується умова $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, то функцію $f(x)$ називають розривною в точці a (а точку a — точкою розриву функції $f(x)$).

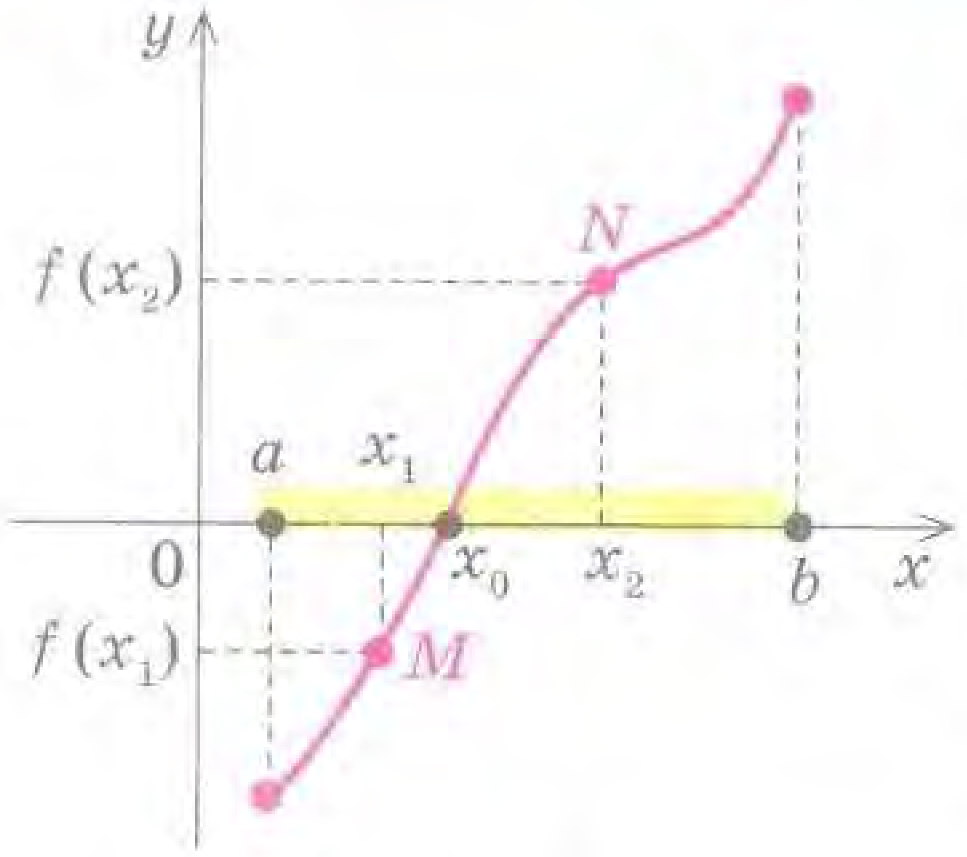


Рис. 1.4

Ця властивість має наочну ілюстрацію. Припустимо, що функція $f(x)$ на заданому інтервалі змінила свій знак (наприклад, з «−» на «+»). Це означає, що в якійсь точці x_1 значення функції від'ємне ($f(x_1) < 0$). Тоді відповідна точка M графіка функції розташована нижче осі Ox. У деякій точці x_2 значення функції додатне ($f(x_2) > 0$), і відповідна точка N графіка розташована вище осі Ox.

Але якщо графік функції (який є нерозривною лінією) переходить з нижньої півплощини відносно осі Ox у верхню, то на заданому інтервалі він обов'язково (хоча б один раз) перетинає вісь Ox, наприклад, у точці x_0 (рис. 1.4). Тоді $f(x_0) = 0$, що суперечить умові. Отже, наше припущення неправильне, і на заданому інтервалі функція не може змінити свій знак.

На останній властивості неперервних функцій ґрунтується *метод інтервалів*, яким ми розв'язували нерівності з однією змінною в 10 класі.

Дійсно, якщо функція f неперервна на інтервалі I і перетворюється на нуль у скінченному числі точок цього інтервалу, то за сформульованою вище властивістю неперервних функцій інтервал I розбивається цими точками на інтервали, у кожному з яких неперервна функція f зберігає сталий знак. Щоб визначити знак функції, достатньо обчислити її значення в будь-якій точці кожного інтервалу.

Схему розв'язування нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$ методом інтервалів наведено в підручнику для 10 класу та в п. 6 табл. 1.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Чи є функція неперервною в кожній точці даного проміжку:

1) $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2$, $(-\infty; +\infty)$;

2) $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{2x - 6}$, $[5; +\infty)$; 3) $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{2x - 6}$, $(0; +\infty)$?

Розв'язання	*Коментар*
► 1) Областю визначення функції $f(x)$ є множина всіх дійсних чисел. Многочлен є неперервною функцією в кожній точці своєї області визначення, тому в кожній точці проміжку $(-\infty; +\infty)$ функція $f(x)$ неперервна.	Многочлен $f(x)$ і дробово-раціональна функція $g(x)$ є неперервними в кожній точці їх області визначення (зокрема, функція $g(x)$ неперервна як частка двох многочленів — неперервних функцій, за умови, що знаменник дробу не дорівнює нулю).

2), 3) Область визначення функції $g(x)$: $x \neq 3$, тобто

$$D(g) = (-\infty;\ 3) \cup (3;\ +\infty).$$

Дробово-раціональна функція $g(x)$ є неперервною в кожній точці її області визначення.

Проміжок $[5;\ +\infty)$ повністю входить до області визначення цієї функції, тому в кожній точці проміжку $[5;\ +\infty)$ функція $g(x)$ неперервна.

Проміжок $(0;\ +\infty)$ містить точку 3, яка не входить до області визначення функції $g(x)$.

Отже, у цій точці функція $g(x)$ не може бути неперервною (оскільки не існує значення $g(3)$). Тому функція $g(x)$ не є неперервною в кожній точці проміжку $(0;\ +\infty)$. ◁

Тому в кожному із завдань потрібно знайти область визначення функції і порівняти її із заданим проміжком.

Якщо проміжок повністю входить до області визначення відповідної функції, то функція буде неперервною в кожній його точці.

І навпаки, функція не буде неперервною в тих точках, які не входять до її області визначення.

Приклад 2 З'ясуйте, до якого числа прямує функція $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 5}$ при $x \to 0$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Дробово-раціональна функція $f(x)$ є неперервною в кожній точці її області визначення ($x \neq 5$). Число 0 входить до області визначення цієї функції, тому при $x \to 0$ значення $f(x) \to f(0) = \frac{0^2 - 1}{0 - 5} = \frac{1}{5}$. *Відповідь:* $\frac{1}{5}$. ◁	Фактично в умові задачі йдеться про знаходження границі функції $f(x)$ при $x \to 0$. Дробово-раціональна функція $f(x)$ є неперервною в кожній точці її області визначення ($x \neq 5$) як частка двох неперервних функцій — многочленів. Ураховуючи це, одержуємо, що при $x \to 0$ значення $f(x) \to f(0)$, тобто $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Приклад 3* Знайдіть: 1) $\lim\limits_{x \to 3} (x^3 + 2x - 1)$; 2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 9}{x - 5}$;

3) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Розв'язання

1) Многочлен $f(x) = x^3 + 2x - 1$ є неперервною функцією в кожній точці числової прямої, тому

$$\lim_{x\to3}(x^3+2x-1)=f(3)=3^3+2\cdot3-1=32.$$

2) Дробово-раціональна функція $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-5}$ є неперервною в кожній точці її області визначення ($x\neq5$). Число 1 входить до області визначення цієї функції, тому

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-9}{x-5}=f(1)=\frac{1^2-9}{1-5}=2.$$

3) При $x\neq1$

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1=\varphi(x).$$

Тоді

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=$$
$$=\varphi(1)=1+1=2.$$

Коментар

Многочлени і дробово-раціональні функції є неперервними в кожній точці їх областей визначення. Це означає, що в тому випадку, коли число a (до якого прямує x) входить до області визначення функції $f(x)$ (завдання 1 і 2), одержуємо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Якщо ж число a не входить до області визначення функції $f(x)$ (завдання 3), то при $x\neq a$ слід виконати тотожні перетворення виразу $f(x)$, одержати функцію, означену при $x=a$, і використати її неперервність при $x=a$ (для завдання 3 це функція $\varphi(x)=x+1$ при $x=1$).

Нагадаємо, що з позначення $x\to a$ випливає тільки те, що x прямує до a (але не обов'язково набуває значення a). Тому при $x\to1$ значення $x+1\to1+1=2$.

Приклад 4* Розв'яжіть нерівність $\dfrac{x-4}{\sqrt{8+x}}\leqslant1$.

Розв'язання

Задана нерівність рівносильна нерівності $\dfrac{x-4}{\sqrt{8+x}}-1\leqslant0$. Оскільки функція $f(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{8+x}}-1$ неперервна в кожному з проміжків своєї області визначення, то можна скористатися методом інтервалів.

1. ОДЗ: $8+x>0$. Тоді $x>-8$.
2. Нулі $f(x)$: $\dfrac{x-4}{\sqrt{8+x}}-1=0$. З цього рівняння одержуємо рівняння-наслідки:

Коментар

Задану нерівність можна розв'язати за допомогою рівносильних перетворень або методом інтервалів. Якщо оберемо метод інтервалів, то спочатку зведемо її до виду $f(x)\gtrless0$.

Для того щоб розв'язати нерівність методом інтервалів, достатньо впевнитися, що функція $f(x)$ неперервна (ця вимога завжди виконується для всіх елементарних функцій $f(x)$), і використати відому схему розв'язування:

1) *знайти ОДЗ нерівності;*
2) *знайти нулі функції:* $f(x)=0$;

$$\frac{x-4}{\sqrt{8+x}}=1,\ \ x-4=\sqrt{8+x},$$

$$x^2 - 8x + 16 = 8 + x,$$

$$x^2 - 9x + 8 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 8.$$

Перевірка показує, що $x = 1$ — сторонній корінь, а $x = 8$ — корінь.

3. Позначаємо нуль функції на ОДЗ і знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ (рис. 1.5).

Рис. 1.5

Відповідь: $(-8; 8]$. ◁

3) *позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ;*

4) *записати відповідь, ураховуючи знак заданої нерівності.*

Шукаючи нулі функції, можна стежити за рівносильністю виконаних (на ОДЗ) перетворень одержаного рівняння або використовувати рівняння-наслідки, а в кінці виконати перевірку знайдених коренів.

Записуючи відповідь до нестрогої нерівності, слід ураховувати, що всі нулі функції мають увійти до відповіді (у даному випадку — число 8).

Щоб знайти знак функції $f(x)$ у кожному з одержаних проміжків, достатньо порівняти величину дробу $\frac{x-4}{\sqrt{8+x}}$ з одиницею в будь-якій точці вибраного проміжку.

Запитання для контролю

1. Поясніть, що означають записи $x \to a$ і $f(x) \to B$.
2. Поясніть, що означає запис $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$.
3. Якщо при $x \to a$ $f(x) \to A$ і $g(x) \to B$, то до яких чисел при $x \to a$ прямуватимуть функції:
$$f(x) \pm g(x);\ f(x) \cdot g(x);\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (\text{якщо } B \neq 0)?$$
4. Коли функцію $f(x)$ називають неперервною в точці a? Наведіть приклади.
5. Яку функцію називають неперервною на проміжку? Що можна сказати про графік такої функції на розглядуваному проміжку?
6. На якій властивості неперервної функції ґрунтується метод інтервалів, за допомогою якого розв'язують нерівності виду $f(x) \geqslant 0$? Поясніть, спираючись на графічну ілюстрацію, справедливість цієї властивості.
7. Охарактеризуйте план розв'язування нерівності виду $f(x) \geqslant 0$ методом інтервалів. Наведіть приклад розв'язування нерівності методом інтервалів.

Вправи

1°. Чи є неперервною в кожній з точок $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ функція, графік якої зображено на рис. 1.6?

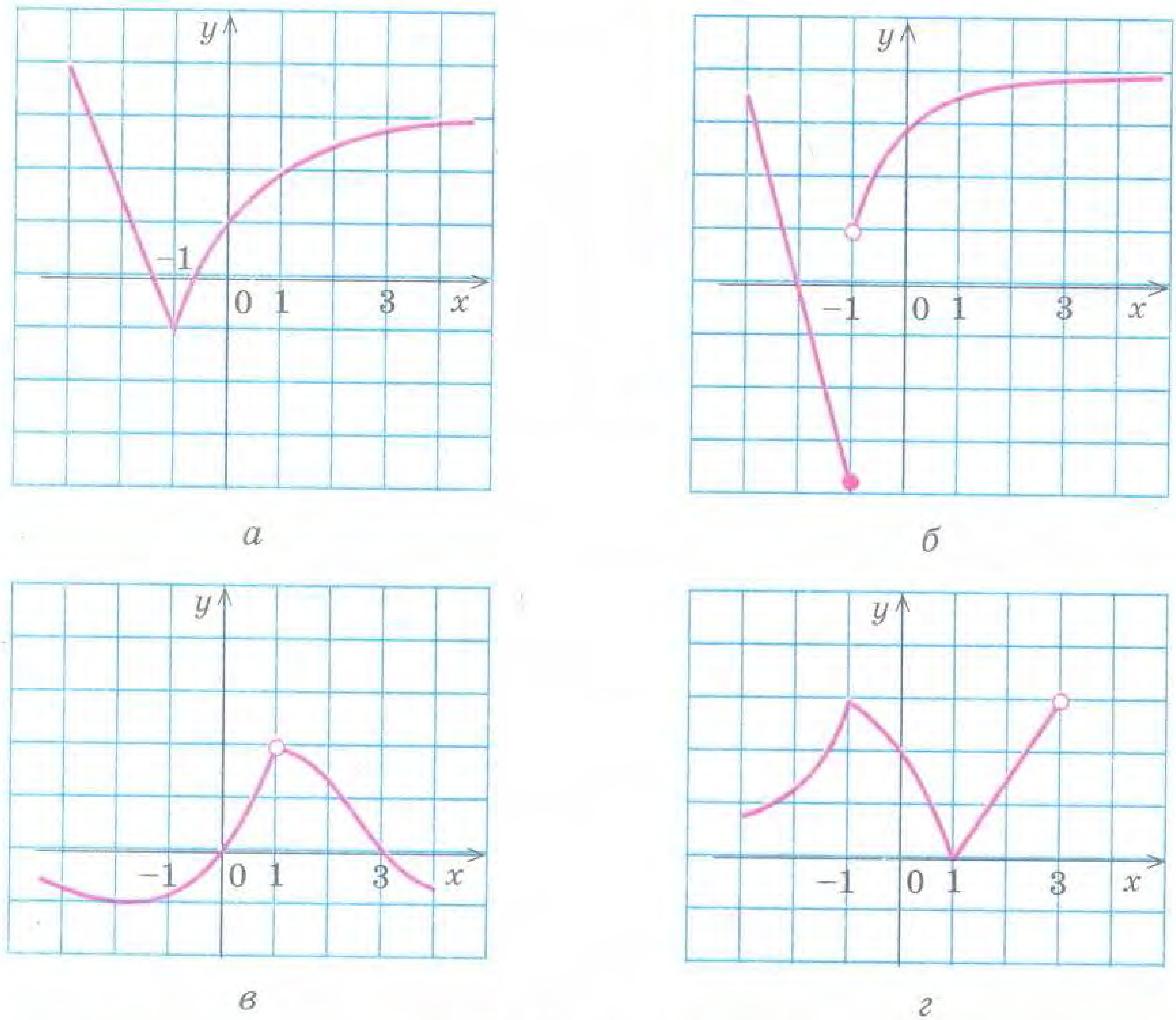


Рис. 1.6

2. Чи є функція неперервною в кожній точці даного проміжку:

1) $f(x) = x^2 - 3x$, $(-\infty; +\infty)$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$, $(0; +\infty)$;

3) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x - 1}$, $[2; +\infty)$?

3. З'ясуйте, до якого числа прямує функція f, якщо:

1) $f(x) = x^2 - 5x + 1$ при $x \to 1$; 2) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x^3 - 7}$ при $x \to 2$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^3}$ при $x \to -1$; 4) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - x}$ при $x \to 3$.

4*. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + x + 5)$; 2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x}{4x + 1}$; 3) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$; 4) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$.

5. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:

1) $(x^2-9)\left(\sqrt{x-1}-1\right)\leqslant 0;$ 2) $\dfrac{2-\sqrt{2x+6}}{2x-1}>0;$

3) $\dfrac{3x^2-2x-1}{\sqrt{x-3}-1}<0;$ 4) $\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{x^2-16}\geqslant 0.$

6. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x-5}{2-\sqrt{x+2}}};$

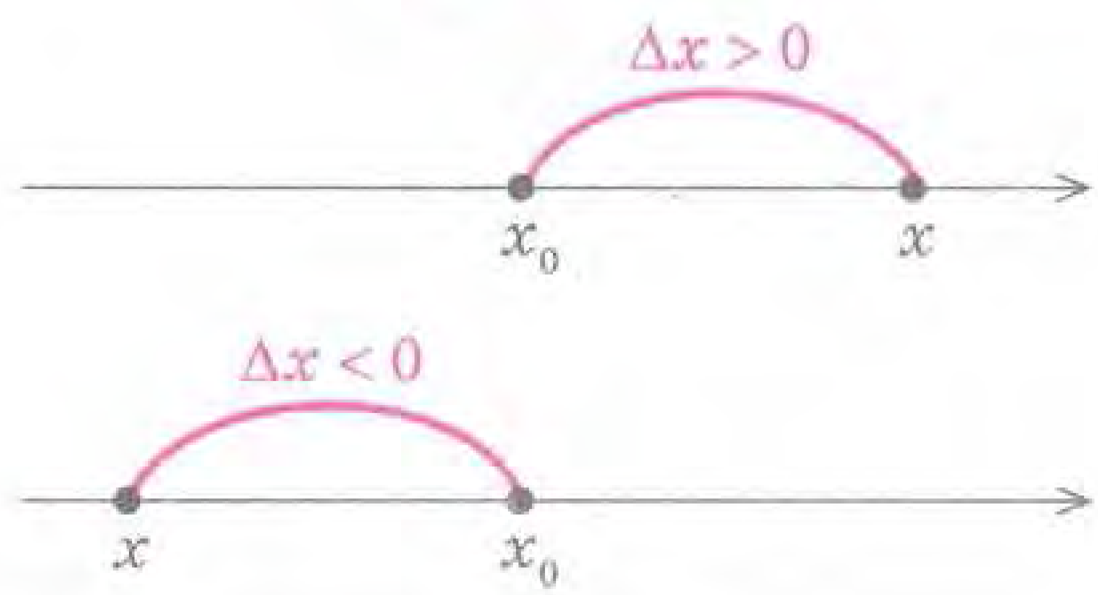
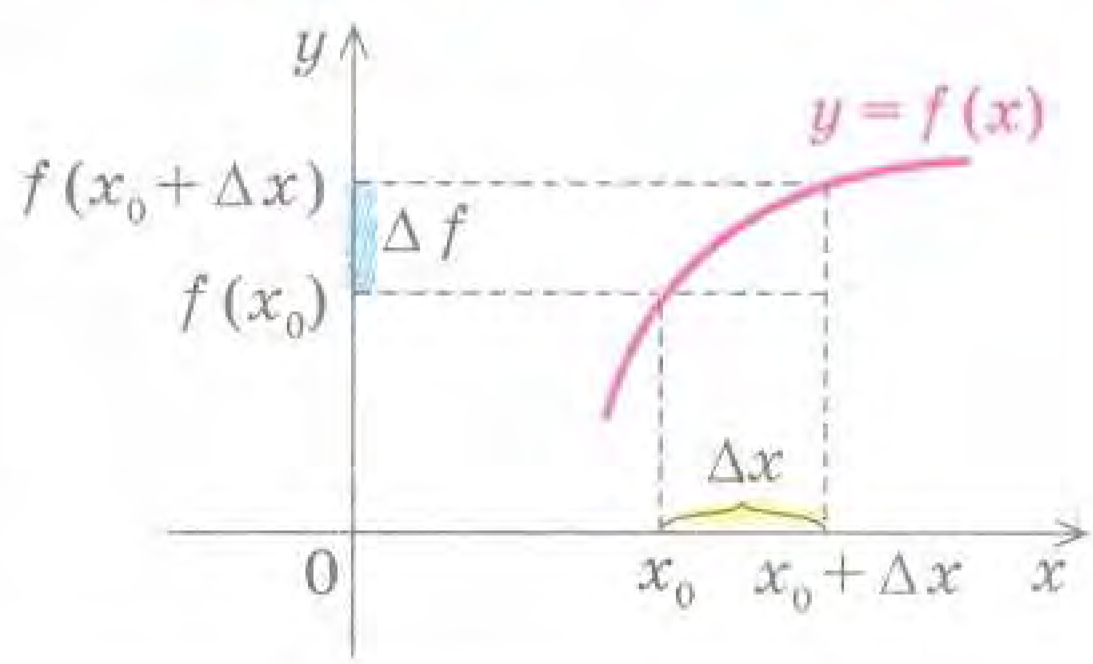
2) $y=\left(x-\sqrt{2x-1}\right)^{-\frac{1}{3}};$

3) $y=\sqrt{(x^4-4x^2+3)\left|2x-3\right|};$

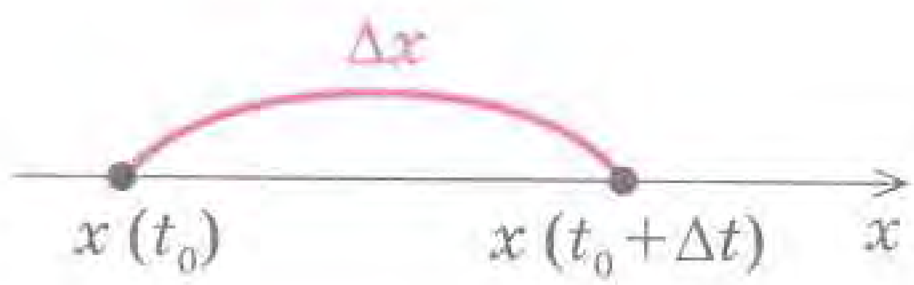
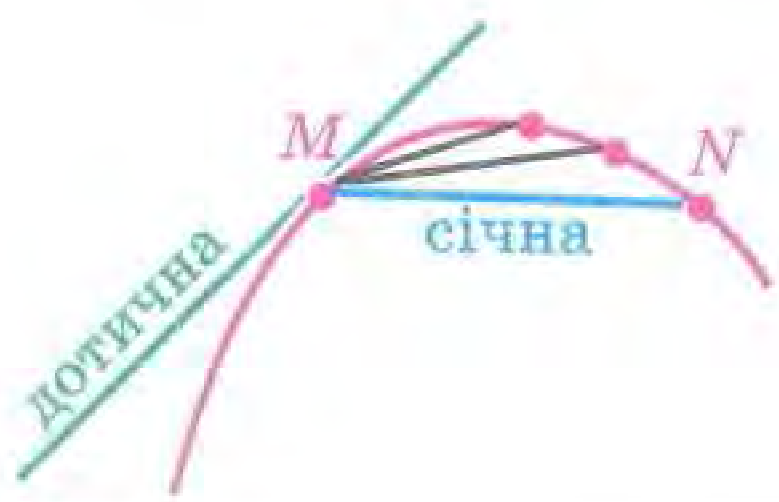
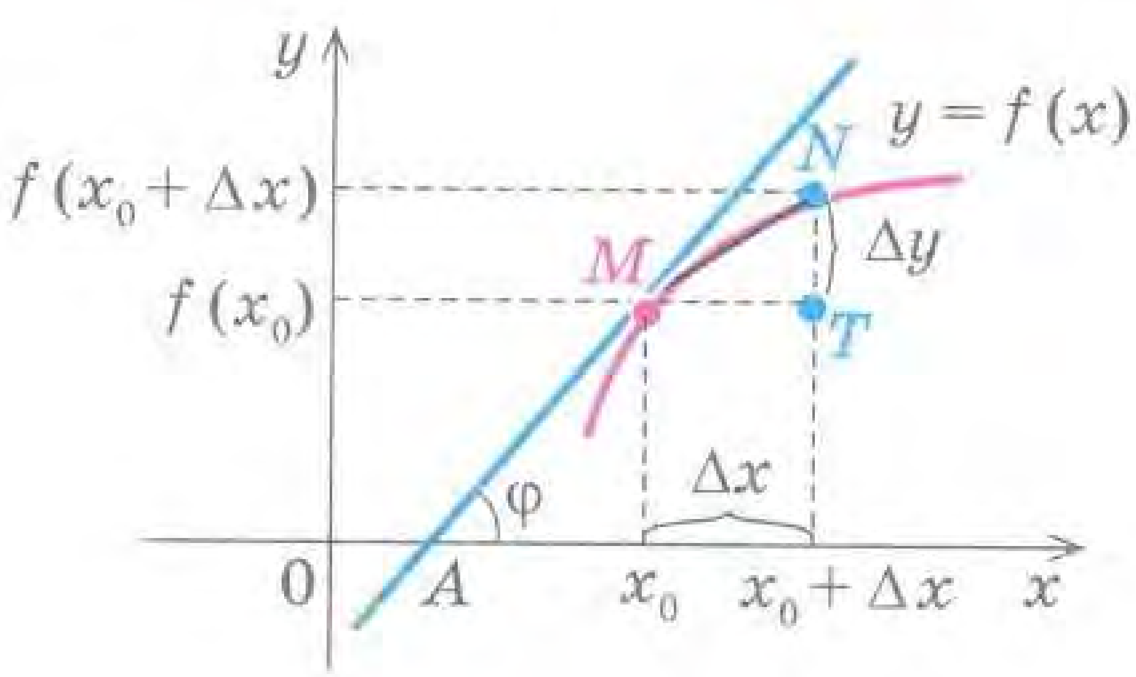
4) $y=\left(\dfrac{5-\sqrt{x-3}}{x-4}\right)^{\frac{1}{2}}.$

§ 2 ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ, ЇЇ МЕХАНІЧНИЙ І ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ

Таблиця 2

<table>
<tr><td colspan="2">1. Поняття приросту аргументу і приросту функції в точці x_0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Нехай x — довільна точка, що лежить у деякому околі фіксованої точки x_0 з області визначення функції $f(x)$.</td></tr>
<tr><td>Приріст аргументу</td><td>Приріст функції</td></tr>
<tr><td>$\Delta x = x - x_0$
</td><td>$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Запис неперервності функції через прирости аргументу і функції</td></tr>
<tr><td colspan="2">Функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли малій зміні аргументу в точці x_0 відповідають малі зміни значень функції, тобто
функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 $\Leftrightarrow$ при $\Delta x \to 0$ $\Delta f \to 0$.</td></tr>
</table>

Продовження табл. 2

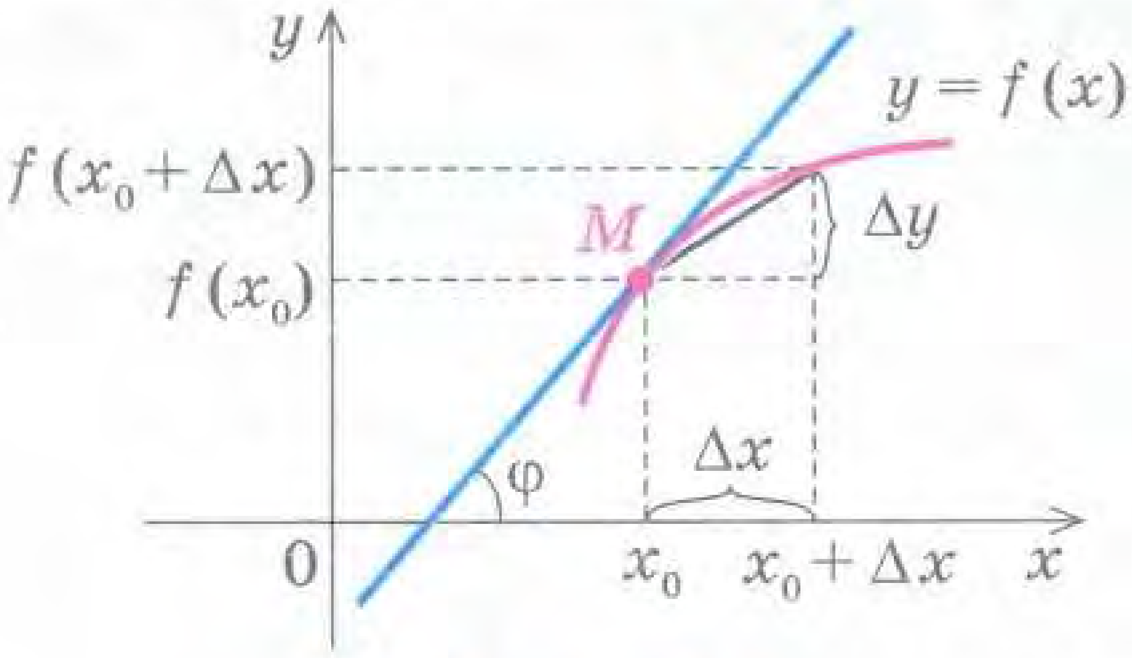
<table>
<tr><td colspan="2">3. Задачі, які приводять до поняття похідної</td></tr>
<tr><td colspan="2">I. Миттєва швидкість руху точки вздовж прямої</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$x(t)$ — координата x точки в момент часу t.
$$v_{\text{середня}} = \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t};$$
$$\boxed{v_{\text{миттєва}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">II. Дотична до графіка функції</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Дотичною до кривої в даній точці M називають граничне положення січної MN.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Якщо точка N наближається до точки M (рухаючись по графіку функції $y = f(x)$), то величина кута NMT наближається до величини кута φ нахилу дотичної MA до осі Ox.
Оскільки $\operatorname{tg} \angle NMT = \frac{NT}{MT} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то
$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Означення похідної</td></tr>
<tr><td>$y = f(x)$
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$</td><td>Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.
Операцію знаходження похідної називають диференціюванням.</td></tr>
</table>

Закінчення табл. 2

5. Похідні деяких елементарних функцій

$c' = 0$ (c — стала)	$(x)' = 1$	$(x^2)' = 2x$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

6. Геометричний зміст похідної та рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$$

k — кутовий коефіцієнт дотичної, $k = \operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — **рівняння дотичної** до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0

Значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 і кутовому коефіцієнту дотичної.
(*Кут відлічують від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки.*)

7. Механічний зміст похідної

Похідна характеризує швидкість зміни функції при зміні аргументу

$s = s(t)$ —	залежність пройденого шляху від часу
$v = s'(t)$ —	швидкість прямолінійного руху
$a = v'(t)$ —	прискорення прямолінійного руху

Зокрема, *похідна за часом є мірою швидкості зміни відповідної функції, яку можна застосовувати до найрізноманітніших фізичних величин.*
Наприклад, **миттєва швидкість v нерівномірного прямолінійного руху є похідною від функції, яка виражає залежність пройденого шляху s від часу t.**

8. Зв'язок між диференційовністю і неперервністю функції

Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.

Якщо функція $f(x)$ диференційовна на проміжку (тобто в кожній його точці), то вона неперервна на цьому проміжку.

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття приросту аргументу і приросту функції. Часто нас цікавить не значення якоїсь величини, а її приріст. Наприклад, сила пружності пружини пропорційна до видовження пружини; робота — це зміна енергії тощо.

Приріст аргументу чи функції традиційно позначають великою літерою грецького алфавіту Δ (дельта). Дамо означення приросту аргументу і приросту функції.

Нехай x — довільна точка, що лежить у деякому околі фіксованої точки x_0 з області визначення функції $f(x)$.

Різницю $x - x_0$ називають приростом незалежної змінної (або приростом аргументу) у точці x_0 і позначають Δx (читають: «дельта ікс»):

$$\Delta x = x - x_0.$$

З цієї рівності маємо

$$x = x_0 + \Delta x, \tag{1}$$

тобто початкове значення аргументу x_0 набуло приросту Δx. Зауважимо, що при $\Delta x > 0$ значення x більше за x_0, а при $\Delta x < 0$ — менше за x_0 (рис. 2.1).

Тоді, при переході аргументу від точки x_0 до точки x, значення функції змінилося на величину $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Ураховуючи рівність (1), одержуємо, що функція змінилася на величину

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \tag{2}$$

(рис. 2.2), яку **називають *приростом функції* f у точці x_0, що відповідає приросту аргументу Δx** (символ Δf читають: «дельта еф»).

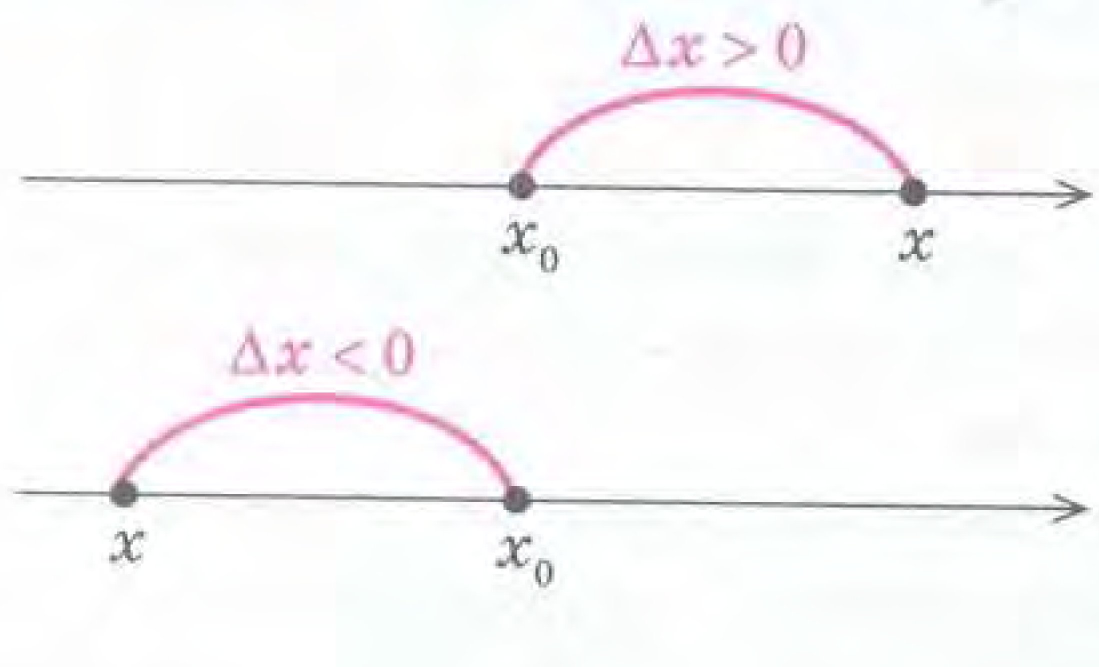


Рис. 2.1

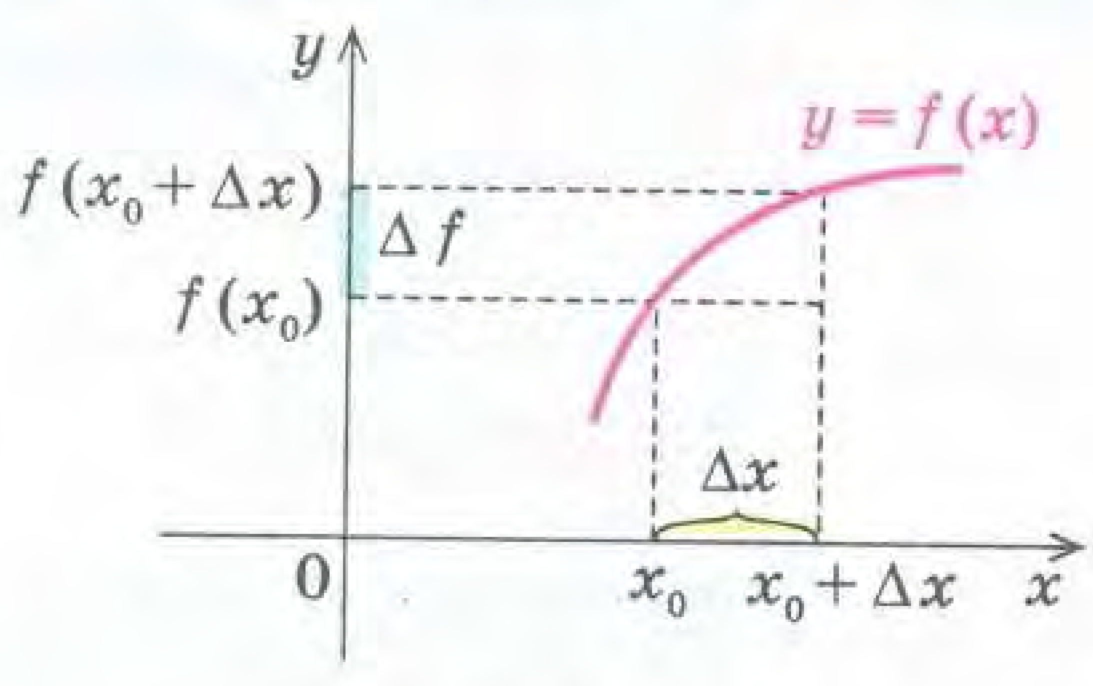


Рис. 2.2

З рівності (2) маємо $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$.

При фіксованому x_0 приріст Δf є функцією від приросту Δx.

Якщо функція задана формулою $y = f(x)$, то Δf називають також приростом залежної змінної y і позначають через Δy.

Наприклад, якщо $y = f(x) = x^2$, то приріст Δy, що відповідає приросту Δx, дорівнює:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2.$$

2. Запис неперервності функції через прирости аргументу і функції. Нагадаємо, що функція $f(x)$ є неперервною в точці x_0, якщо при $x \to x_0$ $f(x) \to f(x_0)$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Але якщо $x \to x_0$, то $x - x_0 \to 0$, тобто $\Delta x \to 0$ (і навпаки, якщо $\Delta x \to 0$, то $x - x_0 \to 0$, тобто $x \to x_0$), отже, умова $x \to x_0$ еквівалентна умові $\Delta x \to 0$. Аналогічно твердження $f(x) \to f(x_0)$ еквівалентне умові $f(x) - f(x_0) \to 0$, тобто $\Delta f \to 0$. Таким чином, *функція* $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли при $\Delta x \to 0$ $\Delta f \to 0$, тобто *малій зміні аргументу в точці* x_0 *відповідають малі зміни значень функції*. Саме через цю властивість графіки неперервних функцій зображають неперервними (нерозривними) кривими на кожному з проміжків, що цілком входить до області визначення.

3. Задачі, які приводять до поняття похідної

І. Миттєва швидкість руху точки вздовж прямої. Розглянемо задачу, відому з курсу фізики, — рух точки вздовж прямої. Нехай координата x точки в момент часу t дорівнює $x(t)$. Як і в курсі фізики, будемо вважати, що рух відбувається неперервно (як це ми спостерігаємо в реальному житті). Спробуємо за відомою залежністю $x(t)$ визначити швидкість, з якою рухається точка в момент часу t_0 (так звану миттєву швидкість). Розглянемо відрізок часу від t_0 до $t = t_0 + \Delta t$ (рис. 2.3). Визначимо середню швидкість на відрізку $[t_0; t_0 + \Delta t]$ як відношення пройденого шляху до тривалості руху:

$$v_{\text{середня}} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

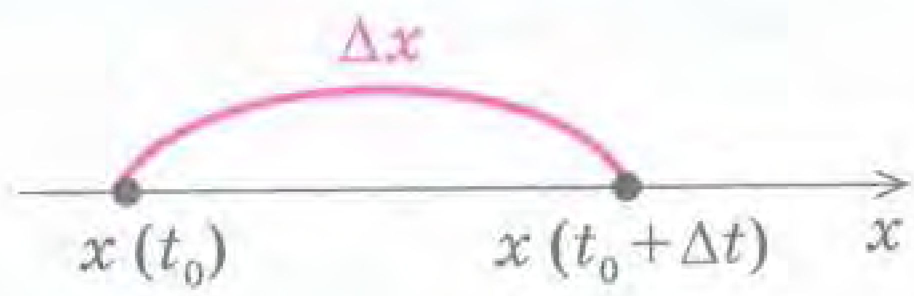


Рис. 2.3

Для того щоб визначити миттєву швидкість точки в момент часу t_0, візьмемо відрізок часу довжиною t, обчислимо середню швидкість на цьому відрізку та почнемо зменшувати відрізок Δt до нуля (тобто зменшувати відрізок $[t_0; t]$ і наближати t до t_0). Ми помітимо, що значення середньої швидкості при наближенні Δt до нуля буде наближатися до деякого числа, яке й уважають значенням швидкості в момент часу t_0. Іншими словами, *миттєвою швидкістю* в момент часу t_0 називають границю відношення $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, якщо $\Delta t \to 0$:

$$\boxed{v_{\text{миттєва}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}.$$

Розглянемо, наприклад, вільне падіння тіла. З курсу фізики відомо, що в цьому випадку залежність шляху від часу задають формулою

$$s(t) = \frac{gt^2}{2}.$$

1) Знайдемо спочатку Δs:

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)=\frac{g(t_0+\Delta t)^2}{2}-\frac{gt_0^2}{2}=\frac{g\left(t_0^2+2t_0\Delta t+(\Delta t)^2-t_0^2\right)}{2}=\frac{g(2t_0\Delta t+(\Delta t)^2)}{2};$$

2) Знайдемо середню швидкість:

$$v_{\text{середня}}(t_0)=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{g(2t_0\Delta t+(\Delta t)^2)}{2\Delta t}=gt_0+\frac{g\Delta t}{2}.$$

3) З'ясуємо, до якого числа прямує відношення $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ при $\Delta t\to 0$.

Якщо $\Delta t\to 0$, то $\frac{g\Delta t}{2}=\frac{g}{2}\cdot\Delta t\to 0$, а оскільки величина gt_0 стала, то $gt_0+\frac{g\Delta t}{2}\to gt_0$. Останнє число і є значенням миттєвої швидкості в точці t_0. Ми отримали відому з фізики формулу $v=gt$ (тоді $v(t_0)=gt_0$). Використовуючи поняття границі, це можна записати так:

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt_0.$$

II. Дотична до графіка функції. Наочне уявлення про дотичну до кривої можна отримати, виготовивши криву з цупкого матеріалу (наприклад, із дроту) і прикладаючи до кривої лінійку у вибраній точці (рис. 2.4). Якщо ми зобразимо криву на папері, а потім будемо вирізати фігуру, обмежену цією кривою, то ножиці теж будуть напрямлені по дотичній до кривої.

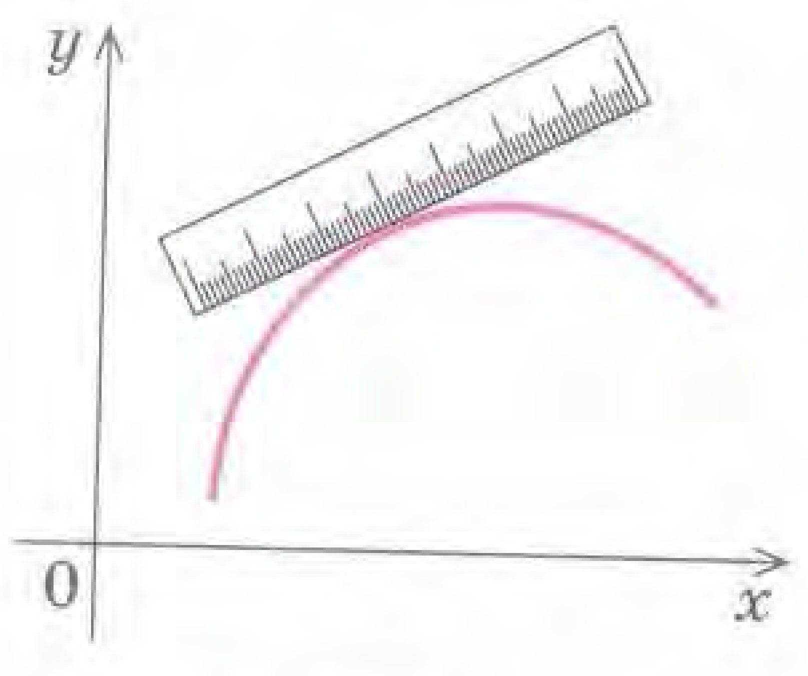


Рис. 2.4

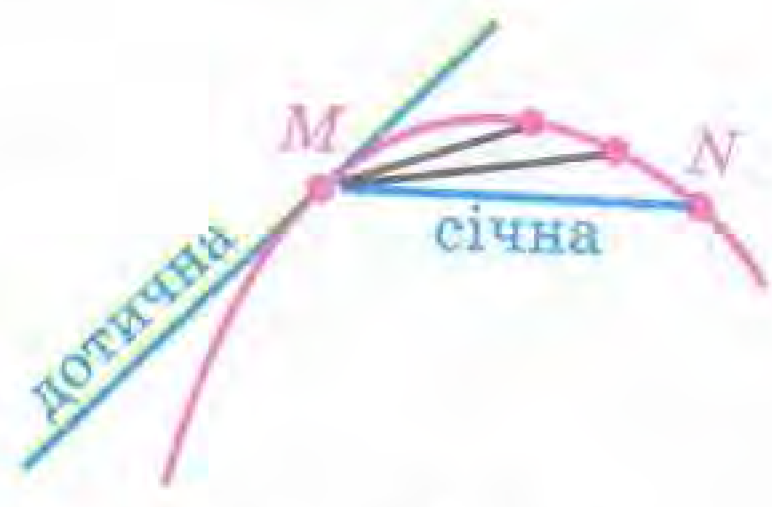


Рис. 2.5

Спробуємо наочне уявлення про дотичну виразити точніше.

Нехай задано деяку криву і точку M на ній (рис. 2.5). Візьмемо на цій кривій іншу точку N і проведемо пряму через точки M і N. Таку пряму зазвичай називають *січною*. Почнемо наближати точку N до точки M. Положення січної MN буде змінюватися, але при наближенні точки N до точки M почне стабілізуватися.

***Дотичною* до кривої в даній точці M називають граничне положення січної MN.**

Для того щоб записати це означення за допомогою формул, будемо вважати, що крива — це графік функції $y=f(x)$, а точка M на графіку задана координатами $(x_0; y_0) = (x_0; f(x_0))$. Дотичною є деяка пряма, яка проходить через точку M (рис. 2.6). Щоб побудувати цю пряму, достатньо знати кут φ нахилу дотичної* до осі Ox.

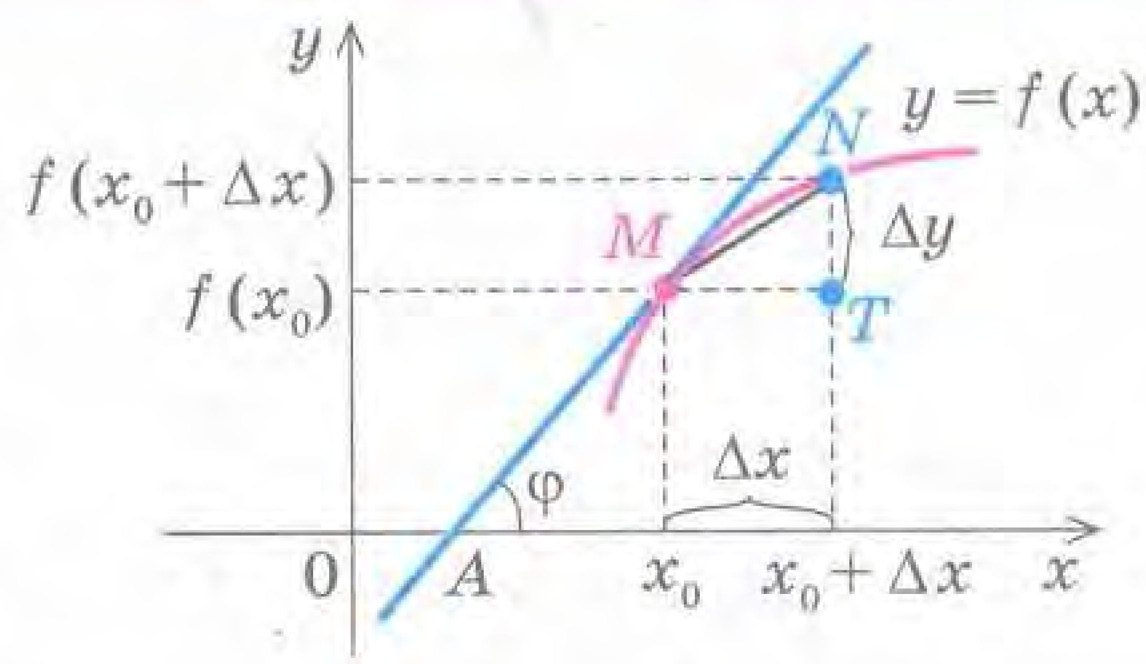


Рис. 2.6

Нехай точка N (через яку проходить січна MN) має абсцису $x_0 + \Delta x$. Якщо точка N, рухаючись по графіку функції $y = f(x)$, наближається до точки M (це буде при $\Delta x \to 0$), то величина кута NMT наближається до величини кута φ нахилу дотичної MA до осі Ox. Оскільки $\operatorname{tg} \angle NMT = \frac{NT}{MT} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то при $\Delta x \to 0$ значення $\operatorname{tg} \angle NMT$ наближається до $\operatorname{tg} \varphi$, тобто

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Фактично ми прийшли до задачі, яку розглядали при знаходженні миттєвої швидкості: тут потрібно знайти границю відношення виразу виду $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (де $y = f(x)$ — задана функція) при $\Delta x \to 0$. Одержане таким чином число називають *похідною* функції $y = f(x)$ у точці x_0.

4. Означення похідної

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну функції $y = f(x)$ у точці x_0 позначають $f'(x_0)$ (або $y'(x_0)$) і читають: «еф штрих у точці x_0».

Коротко означення похідної функції $y = f(x)$ можна записати так:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ураховуючи означення приросту функції $y = f(x)$ у точці x_0, що відповідає приросту Δx, означення похідної можна також записати:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функцію $f(x)$, що має похідну в точці x_0, називають *диференційовною* в цій точці. Якщо функція $f(x)$ має похідну в кожній точці деякого проміжку, то кажуть, що ця функція *диференційовна на цьому проміжку*. Операцію знаходження похідної називають *диференціюванням*.

* Будемо розглядати невертикальну дотичну ($\varphi \neq 90°$).

Для знаходження похідної функції $y = f(x)$ за означенням можна користуватися такою *схемою*:

1. *Знайти приріст функції* $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, *який відповідає приросту аргументу* Δx.
2. *Знайти відношення* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
3. *З'ясувати, до якої границі прямує відношення* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *при* $\Delta x \to 0$. *Це і буде похідна заданої функції.*

5. Похідні деяких елементарних функцій. Обґрунтуємо, користуючись запропонованою схемою знаходження похідної функції, формули, наведені в п. 5 табл. 2.

1. Обчислимо похідну функції $y = c$ (тобто $f(x) = c$), де c — стала.

1) Знайдемо приріст функції, який відповідає приросту аргументу Δx:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = c - c = 0.$$

2) Знайдемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.

3) Оскільки відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ постійне і дорівнює нулю, то і границя цього відношення при $\Delta x \to 0$ теж дорівнює нулю. Отже, $y' = 0$, тобто

$$c' = 0.$$

2. Обчислимо похідну функції $y = x$ (тобто $f(x) = x$).

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$.

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

3) Оскільки відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ постійне і дорівнює 1, то і границя цього відношення при $\Delta x \to 0$ теж дорівнює одиниці. Отже, $y' = 1$, тобто

$$x' = 1.$$

3. Обчислимо похідну функції $y = x^2$ (тобто $f(x) = x^2$).

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 =$

$$= 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2.$$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$.

3) При $\Delta x \to 0$ значення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \to 2x_0$. Це означає, що $y'(x_0) = 2x_0$. Тоді похідна функції $y = x^2$ у довільній точці x дорівнює $y'(x) = 2x$. Отже,

$$(x^2)' = 2x.$$

4. Обчислимо похідну функції $y = \dfrac{1}{x}$ $\left(\text{тобто } f(x) = \dfrac{1}{x}\right)$.

1) $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \dfrac{1}{x_0+\Delta x} - \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{x_0-(x_0+\Delta x)}{(x_0+\Delta x)x_0} = \dfrac{-\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0}$.

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0\Delta x} = \dfrac{-1}{(x_0+\Delta x)x_0}$.

3) При $\Delta x \to 0$ значення $x_0 + \Delta x \to x_0$. Тоді $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \dfrac{-1}{x_0 x_0} = -\dfrac{1}{x_0^2}$.

Це означає, що $y'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$. Тоді похідна функції $y = \dfrac{1}{x}$ у довільній точці x з її області визначення (при $x \neq 0$) $y'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Отже,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

5. Обчислимо похідну функції $y = \sqrt{x}$ (тобто $f(x) = \sqrt{x}$).

1) $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0}$. Помножимо і поділимо одержаний вираз на суму $\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}$ та запишемо Δy так:

$$\Delta y = \frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x_0+\Delta x - x_0}{\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}}.$$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\left(\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}\right)\Delta x} = \dfrac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}}$.

3) При $\Delta x \to 0$ значення $x_0 + \Delta x \to x_0$. Тоді $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \dfrac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Це означає, що $y'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ (звичайно, при $x_0 \neq 0$). Тоді похідна функції $y = \sqrt{x}$ у довільній точці x з її області визначення, крім $x = 0$ (тобто при $x > 0$), $y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Отже,

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

6. Геометричний зміст похідної та рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$. Ураховуючи означення похідної функції $y = f(x)$, запишемо результати, одержані при розгляді дотичної до графіка функції (с. 24).

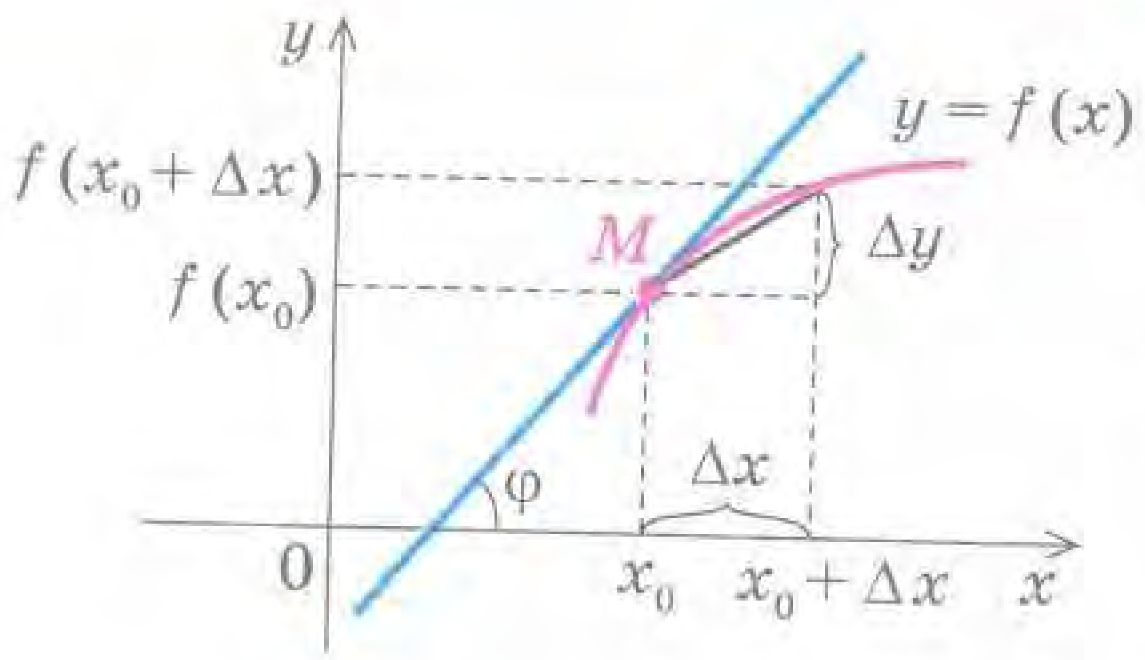


Рис. 2.7

Як було обґрунтовано вище, тангенс кута φ нахилу дотичної в точці M з абсцисою x_0 (рис. 2.7) обчислюють за формулою $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. З іншого боку, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тоді

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi.$$

Нагадаємо, що в рівнянні прямої $y = kx + b$ кутовий коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута φ нахилу прямої до осі Ox. Якщо k — кутовий коефіцієнт дотичної, то $k = \operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$. Отже,

значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 і дорівнює кутовому коефіцієнту цієї дотичної

(*кут відлічують від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки*).

Таким чином, якщо $y = kx + b$ — рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці M з координатами $(x_0; f(x_0))$ і $k = f'(x_0)$, то $y = f'(x_0)x + b$. Оскільки дотична проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$, то її координати задовольняють останнє рівняння, тобто $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$. Звідси знаходимо $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$, і рівняння дотичної матиме вигляд

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Його зручно записати у вигляді:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Це рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0.

Зауваження. Кут φ, який утворює невертикальна дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 з додатним напрямком осі Ox, може бути нульовим, гострим або тупим. Ураховуючи геометричний зміст похідної, одержуємо, що *у випадку, коли* $f'(x_0) > 0$ ($\operatorname{tg}\varphi > 0$), кут φ буде гострим, *а у випадку, коли* $f'(x_0) < 0$ ($\operatorname{tg}\varphi < 0$), кут φ буде тупим. *Якщо* $f'(x_0) = 0$ ($\operatorname{tg}\varphi = 0$), то $\varphi = 0$ (тобто *дотична паралельна осі Ox*). І навпаки, *якщо дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 утворює з додатним напрямком осі Ox гострий кут φ, то* $f'(x_0) > 0$, *якщо тупий кут* — то $f'(x_0) < 0$, *а якщо дотична паралельна осі Ox або збігається з нею* ($\varphi = 0$), то $f'(x_0) = 0$.

Якщо ж дотична утворює з віссю Ox прямий кут ($\varphi = 90°$), *то функція $f(x)$ похідної в точці x_0 не має* ($\operatorname{tg} 90°$ не існує).

7. Механічний зміст похідної. Записуючи означення похідної в точці t_0 для функції $x(t)$:

$$x'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

і співставляючи одержаний результат із поняттям миттєвої швидкості прямолінійного руху:

$$v_{\text{миттєва}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

можна зробити висновок, що *похідна характеризує швидкість зміни функції при зміні аргументу*.

Зокрема, *похідна за часом є мірою швидкості зміни відповідної функції, що може застосовуватися до найрізноманітніших фізичних величин*. Наприклад, миттєва швидкість v нерівномірного прямолінійного руху є похідною від функції, яка виражає залежність пройденого шляху s від часу t; а прискорення a — похідною від функції, яка виражає залежність швидкості v від часу t.

Якщо $s = s(t)$ — залежність пройденого шляху від часу, то
$v = s'(t)$ — *швидкість* прямолінійного руху ($v = v(t)$);
$a = v'(t)$ — *прискорення* прямолінійного руху.

8. Зв'язок між диференційовністю і неперервністю функції.

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то в цій точці існує її похідна $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, тобто при $\Delta x \to 0$ значення $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$.

Для обґрунтування неперервності функції $y = f(x)$ достатньо обґрунтувати, що при $\Delta x \to 0$ значення $\Delta y \to 0$.

Справді, при $\Delta x \to 0$ одержуємо: $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \to f'(x_0) \cdot 0 = 0$. А це й означає, що функція $y = f(x)$ — неперервна. Отже,

якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.

З цього твердження випливає:

якщо функція $f(x)$ диференційовна на проміжку (тобто в кожній його точці), то вона неперервна на цьому проміжку. ○

Зазначимо, що *обернене твердження неправильне*. Функція, яка неперервна на проміжку, може не мати похідної в деяких точках цього проміжку.

Наприклад, функція $y = |x|$ (рис. 2.8) неперервна при всіх значеннях x, але не має похідної в точці $x = 0$. Дійсно, якщо $x_0 = 0$ і $y = f(x) = |x|$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \text{якщо } \Delta x>0,\\ -1, & \text{якщо } \Delta x<0.\end{cases}$

Тому при $\Delta x \to 0$ відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не має границі, а отже, і функція $y=|x|$ не має похідної в точці 0.

Зауваження. Той факт, що неперервна функція $f(x)$ не має похідної в точці x_0, означає, що до графіка цієї функції в точці з абсцисою x_0 не можна провести дотичної (або відповідна дотична перпендикулярна до осі Ox). Графік у цій точці може мати злом (рис. 2.8), а може мати значно складніший вигляд*.

Наприклад, до графіка неперервної функції $y=\left|\sqrt{2x}-2\right|$ (рис. 2.9) у точці M з абсцисою $x=2$ не можна провести дотичну (а отже, ця функція не має похідної в точці 2). Дійсно, за означенням дотична — це граничне положення січної. Якщо точка N наближатиметься до точки M по лівій частині графіка, то січна MN набуде граничного положення MA. Якщо ж точка K буде наближатися до точки M по правій частині графіка, то січна MK займе граничне положення MB. Але це дві різні прямі, таким чином, у точці M дотичної до графіка даної функції не існує.

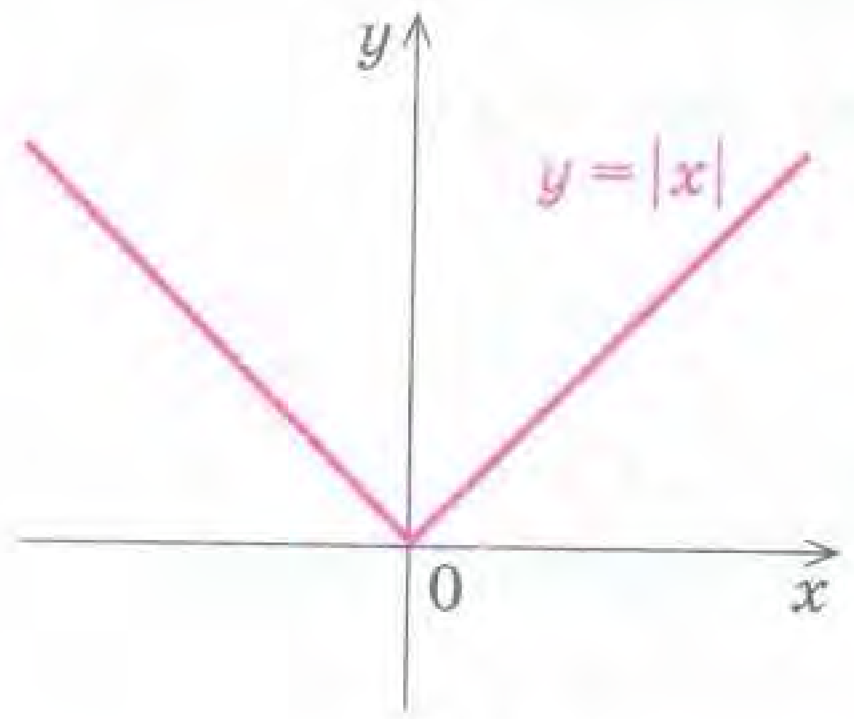


Рис. 2.8

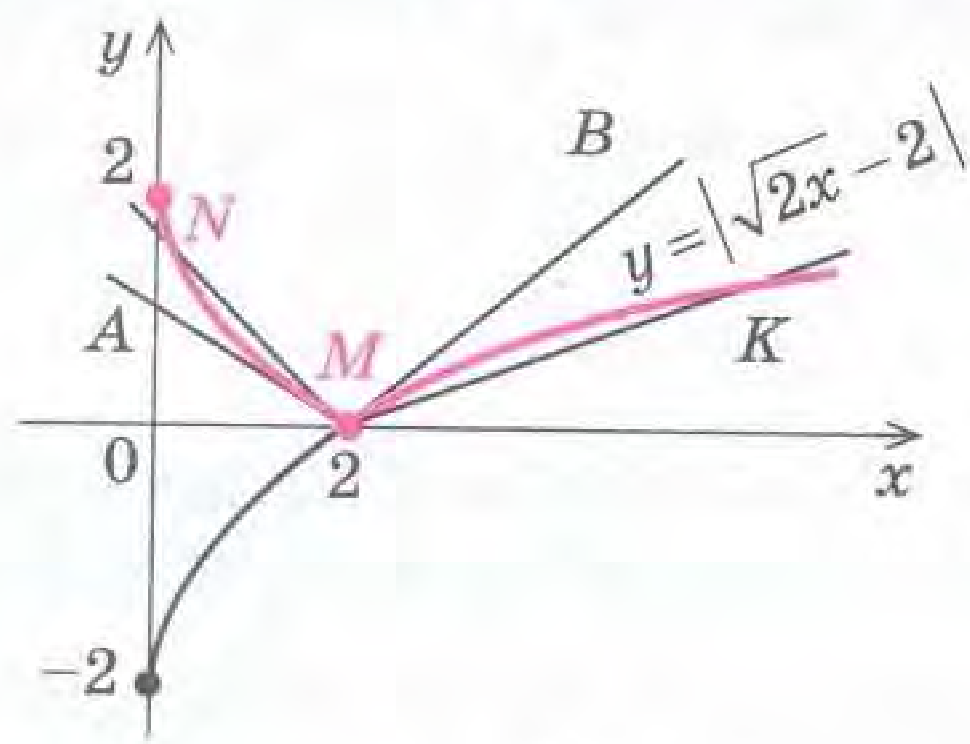


Рис. 2.9

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть тангенс кута φ нахилу дотичної, проведеної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0, до осі Ox, якщо:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=1$; 2) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=25$.

---

* У курсах математичного аналізу розглядають приклади функцій, які є неперервними, але в жодній точці не мають похідної.

Розв'язання	*Коментар*
1) ▶ За геометричним змістом похідної $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$. Ураховуючи, що $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, одержуємо: $f'(x_0)=f'(1)=-\frac{1}{1^2}=-1.$ Отже, $\operatorname{tg}\varphi = f'(1) = -1$. ◁ 2) ▶ Оскільки $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, то $f'(x_0)=f'(25)=\frac{1}{2\sqrt{25}}=\frac{1}{10}$. За геометричним змістом похідної $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$. Отже, $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}1$. ◁	За геометричним змістом похідної $f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi$, де φ — кут нахилу дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0, до осі Ox. Тому для знаходження $\operatorname{tg}\varphi$ достатньо знайти похідну функції $f(x)$, а потім значення похідної в точці x_0. Для знаходження похідних заданих функцій скористаємося формулами відповідних похідних, наведеними в п. 5 табл. 2 (та обґрунтованими на с. 22, 23). У подальшому під час розв'язування задач ми будемо використовувати ці формули як табличні значення.

Приклад 2 Використовуючи формулу $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y=\frac{1}{x}$ у точці з абсцисою $x_0=\frac{1}{2}$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Якщо $f(x)=\frac{1}{x}$, то $f(x_0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Тоді $f'(x_0)=f'\left(\frac{1}{2}\right)=-4$. Підставляючи ці значення в рівняння дотичної $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, одержуємо $y=2-4\left(x-\frac{1}{2}\right)$, тобто $y = -4x + 4$ — шукане рівняння дотичної. ◁	Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 у загальному вигляді записують так: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Щоб записати це рівняння для заданої функції, потрібно знайти значення $f(x_0)$, похідну $f'(x)$ і значення $f'(x_0)$. Для виконання обчислень зручно позначити задану функцію через $f(x)$ та використати табличне значення похідної: $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах і дайте означення приросту аргументу й приросту функції в точці x_0.
2. а) Охарактеризуйте поняття неперервності функції в точці, користуючись поняттями приросту аргументу і функції. б*) Обґрунтуйте запис неперервності функції в точці через прирости аргументу і функції.
3. Поясніть, як можна обчислити миттєву швидкість матеріальної точки під час руху вздовж прямої.
4. Поясніть, яку пряму вважають дотичною до графіка функції.
5. Як обчислити тангенс кута нахилу січної, що проходить через дві точки графіка деякої функції, до осі Ox?
6. Поясніть, як можна визначити тангенс кута φ нахилу дотичної до осі Ox.
7. а) Дайте означення похідної. Як позначають похідну функції f у точці x_0?
   б*) Опишіть схему знаходження похідної функції $y = f(x)$.
8. а) Запишіть, чому дорівнює похідна функції:

   1) c (де c — стала); 2) x; 3) x^2; 4) $y=\dfrac{1}{x}$; 5) $y=\sqrt{x}$.

   б*) Обґрунтуйте формули для знаходження похідних функцій, наведених у п. а).
9. Що таке похідна з геометричної точки зору?
10. Що таке похідна з механічної точки зору?
11. а) Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0.
    б*) Обґрунтуйте рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0.
12. а) Поясніть зв'язок між диференційовністю і неперервністю функції.
    б*) Обґрунтуйте зв'язок між диференційовністю і неперервністю функції.

Вправи

1°. Для функції $y = 2x$ знайдіть приріст Δy, який відповідає приросту аргументу Δx у точці x_0, якщо:
1) $x_0 = 2$ і $\Delta x = 3$; 2) $x_0 = 1,5$ і $\Delta x = 3,5$; 3) $x_0 = 0,5$ і $\Delta x = 2,5$.

2. Знайдіть приріст Δy, який відповідає приросту аргументу Δx у точці x_0 для функції:

1) $y = 3x$; 2) $y = x^3$; 3) $y = x^2 - x$; 4) $y=x+\dfrac{1}{x}$.

3. Закон руху матеріальної точки по прямій задано формулою $x = x(t)$, де x — координата точки в момент часу t. Знайдіть:
а) середню швидкість руху точки на відрізку [2; 4];
б) миттєву швидкість руху точки при $t = 2$, якщо:

1) $x(t) = 3t + 4$; 2) $x(t) = -2t + 1$;
3) $x(t) = 5t - 7$; 4) $x(t) = -3t - 2$.

4. Користуючись схемою обчислення похідної, наведеною на с. 22, знайдіть похідну функції:

1) $y = 3x$; 2) $y = -5x$; 3*) $y = x^3$; 4*) $y = x^2 - 2x$.

5°. На рис. 2.10, *а–г* зображено графік функції $y = f(x)$ та дотичні до нього в точках з абсцисами x_1 і x_2. Користуючись геометричним змістом похідної, запишіть значення $f'(x_1)$ і $f'(x_2)$.

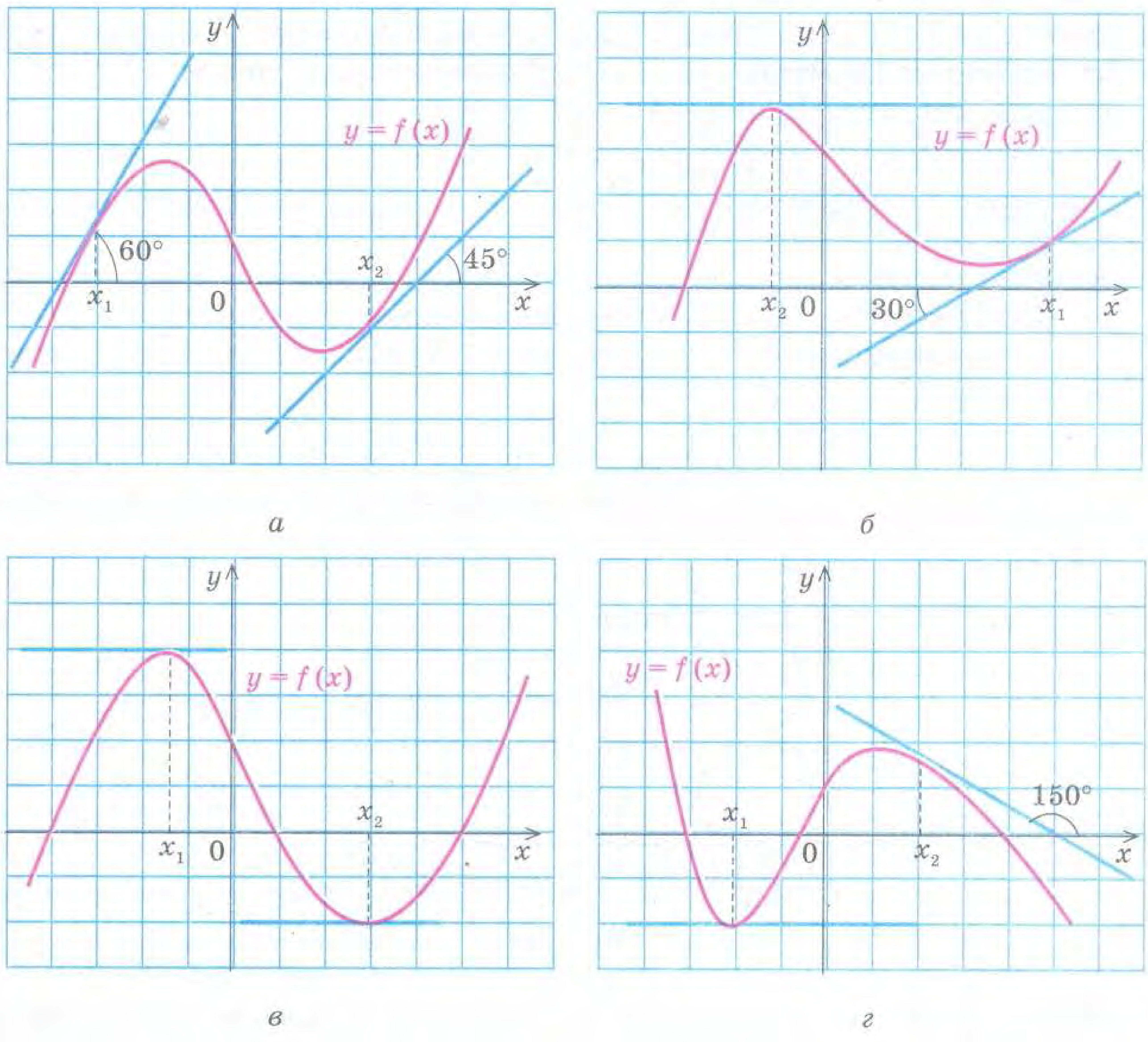


Рис. 2.10

6. Використовуючи формули, наведені в п. 5 табл. 2, та геометричний зміст похідної, запишіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 3$; 2) $f(x) = x$, $x_0 = 8$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$; 4) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = \frac{1}{4}$.

7. Використовуючи формулу $(x^2)' = 2x$, запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою x_0, якщо:
1) $x_0 = 1$; 2) $x_0 = 0$; 3) $x_0 = 0,5$; 4) $x_0 = -3$.
Зобразіть графік даної функції та відповідну дотичну.

8. Використовуючи формулу $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = \sqrt{x}$ у точці з абсцисою x_0, якщо:
1) $x_0 = 1$; 2) $x_0 = 0,25$; 3) $x_0 = 4$; 4) $x_0 = 9$.

9. Використовуючи механічний зміст похідної, знайдіть швидкість тіла, яке рухається за законом $s = s\,(t)$, у момент часу t, якщо:
1) $s\,(t) = t$, $t = 7$; 2) $s\,(t) = t^2$, $t = 6,5$;
3) $s\,(t) = t^3$, $t = 5$; 4) $s(t) = \sqrt{t}$, $t = 4$.

10. Закон руху матеріальної точки задано графіком залежності шляху s від часу t (рис. 2.11).
1) Знайдіть середню швидкість точки з моменту часу $t = 2$ до $t = 3$.
2) Порівняйте швидкості точки в моменти часу $t_1 = 2$ і $t_2 = 3$.
3) Чи змінювала точка напрям руху? Якщо змінювала, то в який момент часу?

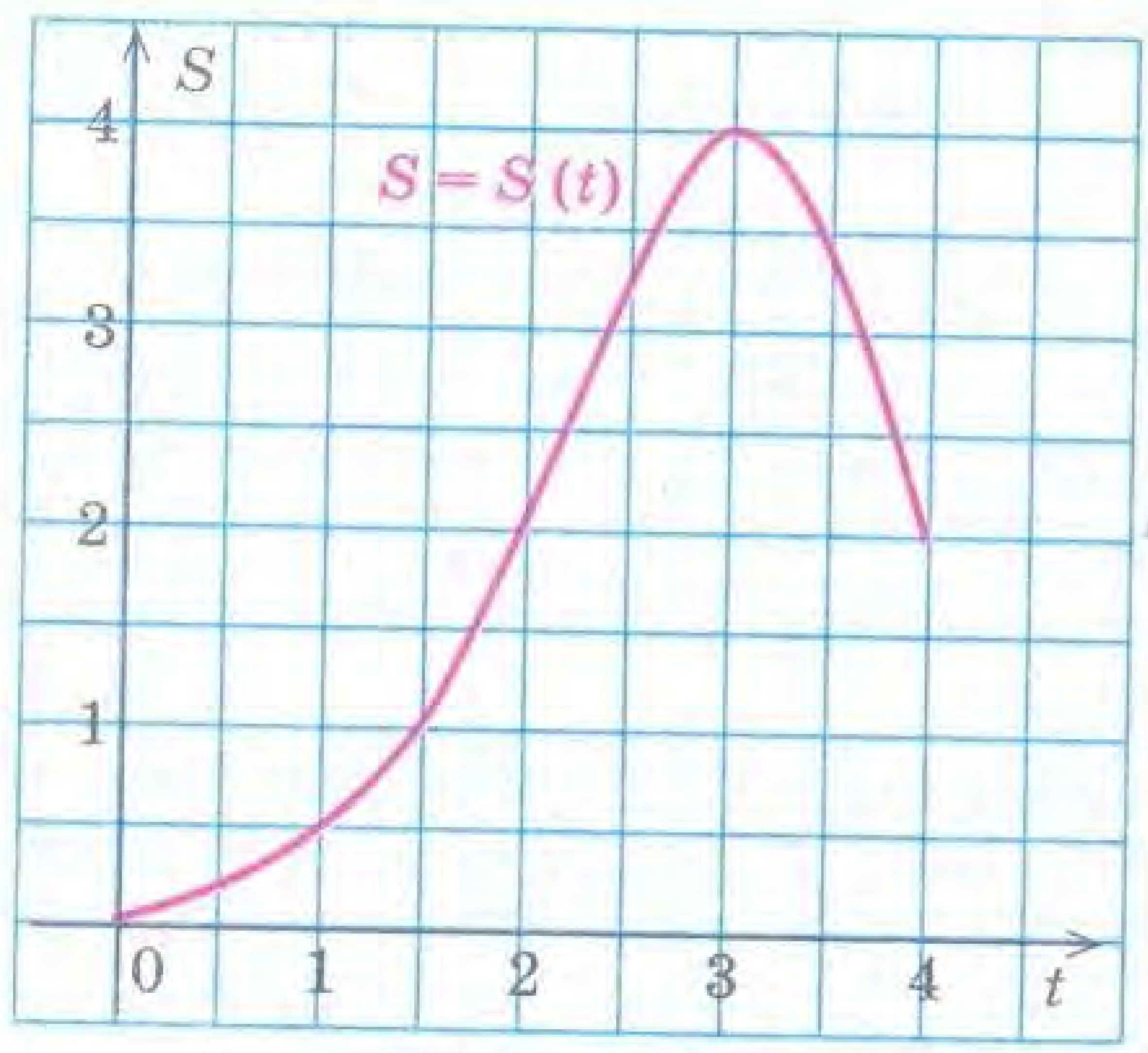


Рис. 2.11

11. На рис. 2.12 зображено графік функції $y = f\,(x)$ на проміжку $[-4; 7]$. Використовуючи геометричний зміст похідної, укажіть на проміжку $(-4; 7)$:
1) значення аргументу, у яких похідна $f'\,(x)$ дорівнює нулю;
2) значення аргументу, у яких похідна $f'\,(x)$ не існує. Чи існує в кожній точці із знайденими абсцисами дотична до графіка функції $y = f\,(x)$?
3*) проміжки, у яких похідна $f'\,(x)$ додатна. Охарактеризуйте поведінку функції на кожному з цих проміжків;

4*) проміжки, у яких похідна $f'(x)$ від'ємна. Охарактеризуйте поведінку функції на кожному з цих проміжків.

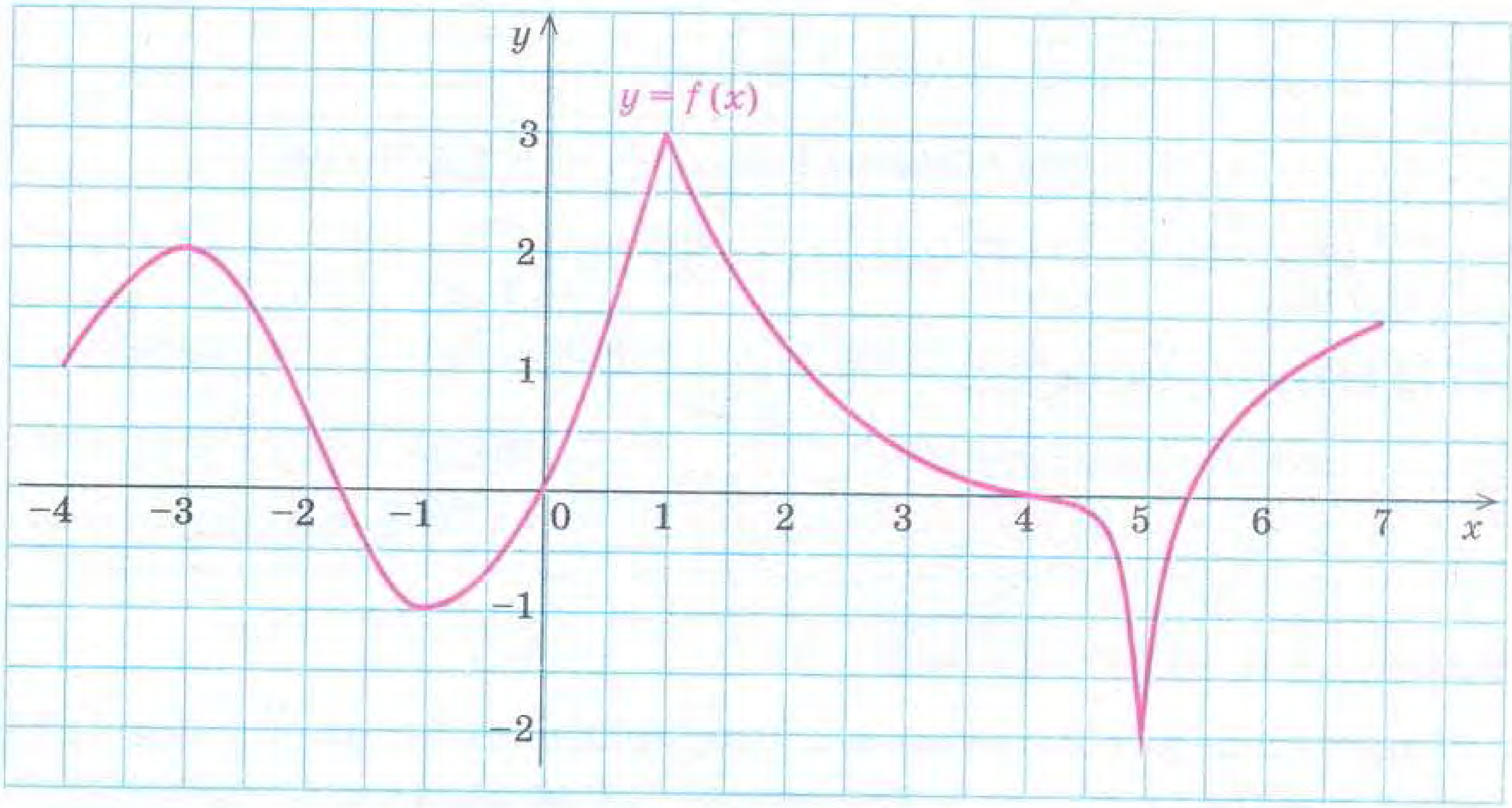


Рис. 2.12

§ 3 ПРАВИЛА ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ. ПОХІДНА СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ

Таблиця 3

1. Похідні деяких елементарних функцій				
$c' = 0$ (c — стала)	$(x)' = 1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$)	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$)

2. Правила диференціювання	
Правило	Приклад
$(cu)' = cu'$ *Сталий множник можна виносити за знак похідної*	$(5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3x^{3-1} = 15x^2$
$(u + v)' = u' + v'$ *Похідна суми диференційовних функцій дорівнює сумі їх похідних*	$\left(x+\sqrt{x}\right)' = (x)' + \left(\sqrt{x}\right)' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(uv)' = u'v + v'u$	$((x+2)\,x^2)' = (x+2)'\,x^2 + (x^2)'\,(x+2) = (x' + 2')\,x^2 + 2x\,(x+2) = (1+0)\,x^2 + 2x\,(x+2) = 3x^2 + 4x$

Закінчення табл. 3

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1'\cdot x - x'\cdot 1}{x^2} = \dfrac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2} = \dfrac{-1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$
3. Похідна складеної функції (функції від функції)	
Якщо $y = f\ (u)$ і $u = u\ (x)$, тобто $y = f\ (u\ (x))$, то $\left(f\left(u\left(x\right)\right)\right)' = f'_u\ (u)\cdot u'_x\ (x).$ Коротко це можна записати так*: $y'_x = f'_u \cdot u'_x$	$((3x-1)^5)' = 5\ (3x-1)^4\ (3x-1)' = 5\ (3x-1)^4\ ((3x)' - 1') = 5\ (3x-1)^4\ (3-0) = 15\ (3x-1)^4$. (Якщо $u = 3x - 1$, то $(u^5)'_x = 5u^4u'_x$.)

Пояснення й обґрунтування

1. Правила диференціювання. Використовуючи означення похідної, у п. 5 § 2 було знайдено похідні деяких елементарних функцій:

$\boxed{c' = 0}$ (c — стала), $\boxed{(x)' = 1}$, $\boxed{\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}}$, $\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$.

Для знаходження похідних у складніших випадках доцільно пам'ятати спеціальні правила (*правила диференціювання*), за якими знаходять похідні від суми, добутку та частки тих функцій, для яких ми вже знаємо значення похідних, та похідну від складеної функції (функції від функції).

Обґрунтуємо ці правила. Для скорочення записів використаємо такі позначення функцій та їх похідних у точці x_0: $u\ (x_0) = u$, $v\ (x_0) = v$, $u'\ (x_0) = u'$, $v'\ (x_0) = v'$.

Правило 1. *Якщо функції u і v диференційовні в точці x_0, то їх сума диференційовна в цій точці і*

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Коротко говорять:

похідна суми дорівнює сумі похідних.

Для доведення позначимо $y\ (x) = u\ (x) + v\ (x)$ і використаємо план знаходження y' за означенням похідної в точці x_0 (с. 22).

1) Приріст функції в точці x_0:

$$\Delta y = y\ (x_0 + \Delta x) - y\ (x_0) = u\ (x_0 + \Delta x) + v\ (x_0 + \Delta x) - (u\ (x_0) + v\ (x_0)) =$$
$$= (u\ (x_0 + \Delta x) - u\ (x_0)) + (v\ (x_0 + \Delta x) - v\ (x_0)) = \Delta u + \Delta v.$$

* У позначеннях y'_x, f'_u, u'_x нижній індекс указує, за яким аргументом беруть похідну.

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

3) З'ясуємо, до якої границі прямує відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Оскільки функції u і v диференційовні в точці x_0, то при $\Delta x \to 0$ $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\to u'(x_0)=u'$, а $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\to v'(x_0)=v'$, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u'$ і $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=v'$.

Ураховуючи, що границя суми дорівнює сумі границь доданків, одержуємо, що при $\Delta x \to 0$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\to u'+v'$.

А це й означає, що $y' = u' + v'$, тобто

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'+v'.$$

Отже, $(u + v)' = u' + v'$. ○

Правило 1 можна поширити на будь-яку скінченну кількість доданків* ($n \in N$):

$$\boxed{(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n)'=u_1'+u_2'+u_3'+\ldots+u_n'}\,.$$

Правило 2. *Якщо функції u і v диференційовні в точці x_0, то їх добуток диференційовний у цій точці і*

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

● 1) Позначимо $y(x) = u(x)\cdot v(x)$. Спочатку запишемо прирости функцій u і v у точці x_0: $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$, $\Delta v = v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)$. З цих рівностей одержуємо:

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \Delta u = u + \Delta u, \quad (1)$$

$$v(x_0 + \Delta x) = v(x_0) + \Delta v = v + \Delta v. \quad (2)$$

Ураховуючи рівності (1), (2), маємо

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = u(x_0 + \Delta x)\, v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)\, v(x_0) =$$
$$= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\cdot\Delta v - uv =$$
$$= v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v.$$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{v\,\Delta u+u\,\Delta v+\Delta u\,\Delta v}{\Delta x}=v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}+\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$.

3) Оскільки функції u і v диференційовні в точці x_0, то при $\Delta x \to 0$ $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\to u'(x_0)=u'$, а $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\to v'(x_0)=v'$, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u'$ і $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=v'$.

---

* Для обґрунтування того, що ця формула правильна для будь-якого натурального n, потрібно використати метод математичної індукції (див. підручник для 10 класу).

Оскільки функція v диференційовна в точці x_0, а отже, і неперервна в цій точці, то при $\Delta x \to 0$ значення $\Delta v \to 0$.

Ураховуючи, що границя суми дорівнює сумі границь доданків (і постійні множники u і v можна виносити за знак границі), одержуємо, що при $\Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v \to vu' + uv' + u'\cdot 0 = vu' + uv'.$$

А це й означає, що $y' = u'v + v'u$, тобто

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v = u'v + v'u.$$

Отже, $(uv)' = u'v + v'u$. ○

Наслідок (правило 3). *Якщо функція u диференційовна в точці x_0, а c — стала, то функція cu диференційовна в цій точці і*

$$(cu)' = cu'.$$

Коротко говорять:

сталий множник можна виносити за знак похідної.

● Для доведення використаємо правило 2 і відомий з § 2 факт, що $c' = 0$:

$$(cu)' = c'u + u'c = 0\cdot u + u'c = cu'.$$ ○

Правило 4. *Якщо функції u і v диференційовні в точці x_0 і функція v не дорівнює нулю в цій точці, то їх частка $\frac{u}{v}$ також диференційовна в точці x_0 і*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

● Цю формулу можна одержати аналогічно до похідної добутку. Але можна використати простіші міркування, якщо прийняти без доведення, що похідна заданої частки існує. Позначимо функцію $\frac{u}{v}$ через t. Тоді $\frac{u}{v} = t$, $u = vt$. Знайдемо похідну функції u за правилом диференціювання добутку:

$$u' = v't + t'v.$$

Виразимо з цієї рівності t', а замість t підставимо його значення $\frac{u}{v}$.

Одержимо: $t' = \dfrac{u' - v't}{v} = \dfrac{u' - v'\cdot\frac{u}{v}}{v} = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$. Отже, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$. ○

Використовуючи правило знаходження похідної добутку і формулу $x' = 1$, обґрунтуємо, що **похідну функції** $y = x^n$ при натуральному $n > 1$ обчислюють за формулою

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{3}$$

При $n = 2$ одержуємо: $(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x' \cdot x = 1 \cdot x + 1 \cdot x = 2x$. Той самий результат дає і застосування формули (3):

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x.$$

При $n = 3$ маємо: $(x^3)' = (x^2 \cdot x) = (x^2)' \cdot x + x' \cdot x^2 = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 3x^2$. Той самий результат дає і застосування формули (3):

$$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2.$$

Як бачимо, наведені міркування дозволяють, спираючись на попередній результат, обґрунтувати формулу для наступного значення n.

Припустимо, що формула (3) виконується для $n = k$ ($k > 1$), тобто

$$(x^k)' = kx^{k-1}.$$

Покажемо, що тоді формула (3) правильна і для наступного значення $n = k + 1$. Дійсно,

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x' \cdot x^k =$$
$$= kx^{k-1} \cdot x + 1 \cdot x^k = k\,x^k + x^k = (k+1)\,x^k.$$

Отже, якщо формула (3) виконується при $n = 2$, то вона справедлива і для наступного значення $n = 3$. Але тоді формула (3) виконується і для наступного значення $n = 4$, а отже, і для $n = 5$ і т. д., для будь-якого* натурального $n > 1$. ○

Можна обґрунтувати (див. § 18), що *формула* $(x^n)' = nx^{n-1}$ *буде правильною для будь-якого дійсного показника* n (але тільки при тих значеннях x, при яких визначена її права частина).

Наприклад, якщо $n = 1$ або $n = 0$, то при $x \neq 0$ ця формула теж правильна. Дійсно, якщо $x \neq 0$, то за формулою (3):

$$(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1,$$
$$(x^0)' = 0 \cdot x^{0-1} = 0,$$

що збігається зі значеннями похідних функцій x та 1, одержаних у п. 5 § 2.

Якщо n — ціле від'ємне число, то $n = -m$, де m — натуральне число. Тоді при $x \neq 0$

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{1' \cdot x^m - (x^m)' \cdot 1}{(x^m)^2} = \frac{0 \cdot x^m - mx^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} =$$
$$= -m \cdot \frac{1}{x^{m+1}} = -m\,x^{-m-1} = n\,x^{n-1}.$$

* У наведеному обґрунтуванні фактично неявно використано метод математичної індукції (див. підручник для 10 класу), який дозволяє аргументовано зробити висновок, що розглянуте твердження виконується для будь-якого натурального n (у даному випадку для $n > 1$).

Отже, формула (3) виконується і для будь-якого цілого показника степеня.

Якщо $n=\frac{1}{2}$, то при $x>0$ маємо $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$. Як відомо з § 2, $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (при $x>0$). Але за формулою (3):

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

тобто формула (3) правильна і при $n=\frac{1}{2}$. ○

2. Похідна складеної функції. Складеною функцією зазвичай називають функцію від функції. Якщо змінна y є функцією від u: $y=f(u)$, а u, у свою чергу, — функцією від x: $u=u(x)$, то y є *складеною функцією* від x, тобто $y=f(u(x))$.

У такому разі кажуть, що y є складеною функцією незалежного аргументу x, а u — її *проміжним аргументом*.

Наприклад, якщо $y=f(u)=\sqrt{u}$, $u=u(x)=x-2$, то $y(x)=f\left(u(x)\right)=$ $=\sqrt{x-2}$ — складена функція, визначена тільки при тих значеннях x, для яких $x-2\geqslant 0$, тобто при $x\geqslant 2$ (проміжний аргумент $u=x-2$).

Правило 5 (похідна складеної функції). *Якщо функція $u(x)$ має похідну в точці x_0, а функція $f(u)$ — похідну в точці $u_0=u(x_0)$, то складена функція $y=f(u(x))$ також має похідну в точці x_0,* причому

$$\left(f\left(u(x)\right)\right)'=f'_u(u)u'_x(x).$$

Оскільки за умовою функція $u(x)$ має похідну в точці x_0, то вона є неперервною в цій точці (с. 17), і тоді малій зміні аргументу в точці x_0 відповідають малі зміни значень функції, тобто при $\Delta x\to 0$ $\Delta u\to 0$ (с. 15).

З рівності $\Delta u=u(x_0+\Delta x)-u(x_0)$ маємо

$$u(x_0+\Delta x)=u(x_0)+\Delta u=u_0+\Delta u.$$

Тоді

$\Delta y=y(x_0+\Delta x)-y(x_0)=f(u(x_0+\Delta x))-f(u(x_0))=f(u_0+\Delta u)-f(u_0)=\Delta f.$

Подальше доведення проведемо тільки для таких функцій $u(x)$, у яких $\Delta u\neq 0$ в деякому околі точки x_0. При $\Delta u\neq 0$ подамо $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ так: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$. Ураховуючи, що при $\Delta x\to 0$ $\frac{\Delta u}{\Delta x}\to u'(x_0)=u'_x$, а при $\Delta u\to 0$ $\frac{\Delta f}{\Delta u}\to f'(u_0)=f'_u$, одержуємо, що при $\Delta x\to 0$ (і відповідно при $\Delta u\to 0$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\to f'_u\cdot u'_x.$$

А це й означає, що

$$\boxed{y'_x=f'_u\cdot u'_x},$$

тобто

$$\left(f\left(u\left(x\right)\right)\right)'=f'_u\left(u\right)\cdot u'_x\left(x\right).$$

Отже, *похідна складеної функції $y = f(u(x))$ дорівнює добутку похідної даної функції $y = f(u)$ по проміжному аргументу u* (позначено f'_u) *на похідну проміжного аргументу $u = u(x)$ по незалежному аргументу x* (позначено u'_x). ○

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^7 + x^3$; 2) $y = x^8(2x + x^4)$; 3) $y=\frac{x+2}{5-x}$.

Розв'язання	*Коментар*
1) ▶ $y' = (x^7 + x^3)' = (x^7)' + (x^3)' = 7x^6 + 3x^2$. ◁ 2) ▶ $y' = (x^8(2x + x^4))' = (x^8)'\cdot(2x + x^4) + (2x + x^4)'\cdot x^8$. Ураховуючи, що $(x^8)' = 8x^7$; $(2x + x^4)' = (2x)' + (x^4)' = 2\cdot x' + 4x^3 = 2 + 4x^3$, маємо $y' = 8x^7(2x + x^4) + (2 + 4x^3)x^8 = 16x^8 + 8x^{11} + 2x^8 + 4x^{11} = 18x^8 + 12x^{11}$. ◁ 3) ▶ $y'=\left(\frac{x+2}{5-x}\right)'=\frac{(x+2)'(5-x)-(5-x)'(x+2)}{(5-x)^2}$. Ураховуючи, що $(x + 2)' = x' + 2' = 1 + 0 = 1$, $(5 - x)' = 5' - x' = 0 - 1 = -1$, маємо $y'=\frac{1\cdot(5-x)-(-1)\cdot(x+2)}{(5-x)^2}=\frac{5-x+x+2}{(5-x)^2}=\frac{7}{(5-x)^2}$. ◁	Нагадаємо, що алгебраїчний вираз (чи формулу, яка задає функцію) називають за результатом останньої дії, яку потрібно виконати при знаходженні значення заданого виразу. Отже, у завданні 1 спочатку потрібно знайти похідну суми: $(u + v)' = u' + v'$, у завданні 2 — похідну добутку: $(uv)' = u'v + u'v$, а в завданні 3 — похідну частки: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$. У завданнях 1 і 2 слід використати також формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$, а в завданні 2 врахувати, що при обчисленні похідної від $2x$ постійний множник 2 можна винести за знак похідної. У завданні 2 краще спочатку розкрити дужки, а потім узяти похідну суми.

Приклад 2 Обчисліть значення похідної функції $f(x)=x^2-5\sqrt{x}$ у зазначених точках: $x = 4$, $x = 0{,}01$.

Розв'язання

▶ $f'(x)=\left(x^2-5\sqrt{x}\right)'=\left(x^2\right)'-5\left(\sqrt{x}\right)'=$

$=2x-5\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=2x-\dfrac{5}{2\sqrt{x}}.$

$f'(4)=2\cdot4-\dfrac{5}{2\sqrt{4}}=8-\dfrac{5}{4}=6\dfrac{3}{4}.$

$f'(0{,}01)=2\cdot0{,}01-\dfrac{5}{2\sqrt{0{,}01}}=0{,}02-\dfrac{5}{2\cdot0{,}1}=$

$=0{,}02-\dfrac{5}{0{,}2}=0{,}02-25=-24{,}98.$

Відповідь: $6\dfrac{3}{4}$; $-24{,}98$. ◁

Коментар

Для знаходження значення похідної в указаних точках достатньо знайти похідну даної функції і в одержаний вираз підставити задані значення аргументу.

При обчисленні похідної слід урахувати, що задану різницю можна розглядати як алгебраїчну суму виразів x^2 і $\left(-5\sqrt{x}\right)$, а при знаходженні похідної $\left(-5\sqrt{x}\right)$ за знак похідної можна винести постійний множник (-5). У результаті фактично ми отримаємо різницю похідних функцій x^2 і $5\sqrt{x}$.

Приклад 3 Знайдіть значення x, для яких похідна функції $f(x) = x^4 - 32x$ дорівнює нулю.

Розв'язання

▶ $f'(x) = (x^4 - 32x)' =$

$= (x^4)' - 32x' = 4x^3 - 32.$

$f'(x) = 0$. Тоді $4x^3 - 32 = 0$,

$x^3 = 8$, $x = 2$.

Відповідь: 2. ◁

Коментар

Щоб знайти відповідні значення x, достатньо знайти похідну заданої функції, прирівняти її до нуля і розв'язати одержане рівняння.

Приклад 4 Знайдіть похідну функції f:

1) $f(x) = (x^3 - 1)^{-7}$;

2) $f(x)=\sqrt{5x^2+x}$.

Розв'язання

1) ▶ $f'(x) = -7\,(x^3 - 1)^{-7-1}\,(x^3 - 1)'$.

Ураховуючи, що

$(x^3 - 1)' = (x^3)' - 1' = 3x^2 - 0 = 3x^2$,

одержуємо

$f'(x) = -7\,(x^3 - 1)^{-8}\cdot 3x^2 =$

$=-21x^2\left(x^3-1\right)^{-8}=-\dfrac{21x^2}{\left(x^3-1\right)^8}.$ ◁

Коментар

У завданнях 1 і 2 необхідно знайти відповідно похідну степеня і кореня, але в основі степеня і під знаком кореня стоїть не аргумент x, а вирази з цим аргументом (теж функції від x). Отже, потрібно знайти похідні від складених функцій.

2) ▶ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{5x^2 + x}} \cdot (5x^2 + x)'$.

Ураховуючи, що

$(5x^2 + x)' = 5\,(x^2)' + x' =$

$= 5 \cdot 2x + 1 = 10x + 1$, одержуємо

$$f'(x) = \frac{10x+1}{2\sqrt{5x^2 + x}}. \quad \triangleleft$$

Позначаючи (на чернетці або уявно) проміжний аргумент через u (для завдання 1: $u = x^3 - 1$, а для завдання 2: $u = 5x^2 + x$), за формулою $f'_x = f'_u \cdot u'_x$ записуємо похідні заданих функцій з урахуванням формул

$$(u^n)' = nu^{n-1} \text{ і } \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

Запитання для контролю

1. Запишіть правила знаходження похідної суми, добутку та частки двох функцій. Проілюструйте їх застосування на прикладах.
2. Запишіть формулу знаходження похідної степеневої функції x^n. Проілюструйте її застосування на прикладах.
3. Поясніть на прикладах правило знаходження похідної складеної функції.
4*. Обґрунтуйте правила знаходження похідної суми, добутку та частки двох функцій і правила знаходження похідної від складеної функції.
5*. Обґрунтуйте формулу знаходження похідної степеневої функції x^n для цілих значень n.

Вправи

Знайдіть похідну функції **(1–5)**.

1°. 1) $y = x^8$; 2) $y = x^{-5}$; 3) $y = x^{\frac{2}{3}}$;

4) $y = x^{20}$; 5) $y = x^{-20}$; 6) $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

2. 1°) $f(x) = x + 3$; 2°) $f(x) = x^5 - x$;

3) $f(x) = \frac{1}{x} - x^3$; 4) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.

3. 1) $f(x) = 2x^3 + 3x$; 2) $f(x) = x^2 + 5x + 2$;

3) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$; 4) $f(x) = 2\sqrt{x} + 4x^3 + 3$.

4. 1) $y = x^2\,(2x + x^4)$; 2) $y = (2x - 1)\,(1 - x^2)$;

3) $y = (3 + x^3)\,(2 - x)$; 4) $y = \sqrt{x}\,(3x^2 - x)$.

5. 1) $y = \frac{x^2}{x+3}$; 2) $y = \frac{2x+1}{3x-2}$; 3) $y = \frac{2-x}{5x+1}$; 4) $y = \frac{1-2x}{x^2}$.

6. Обчисліть значення похідної функції $f(x)$ у зазначених точках:

1°) $f(x) = x^2 + 2x$; $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$;

2°) $f(x) = x^4 - 4x$; $x = 2$, $x = -1$;

3) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-3}$; $x = 0$, $x = -3$;

4) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$; $x=-\sqrt{2}$, $x = 0{,}1$.

7. Знайдіть значення x, для яких похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю:
1°) $f(x) = 3x^2 - 6x$;

2°) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+5$;

3) $f(x)=12x+\dfrac{3}{x}$;

4) $f(x)=\sqrt{x}-2x^2$.

8. Розв'яжіть нерівність $f'(x) < 0$, якщо:
1°) $f(x) = 2x - x^2$; 2°) $f(x) = x^3 + 3x^2$;

3) $f(x)=2x+\dfrac{8}{x}$; 4) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

9. Задайте формулами елементарні функції $f(u)$ і $u(x)$, з яких складається складена функція $y = f(u(x))$:

1) $y=\sqrt{\sin x}$; 2) $y = (2x + x^2)^5$; 3) $y=\sqrt{x^3-x}$; 4) $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

10. Знайдіть область визначення функції:

1°) $y = (2x^3 - 4x)^5$; 2°) $y=\sqrt{2x+6}$; 3°) $y=\dfrac{1}{2x-8}$; 4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$;

5) $y=\sqrt{\sin x}$; 6) $y=\sqrt{\dfrac{1}{x}-2}$; 7*) $y=\sqrt{1-2\cos x}$.

11. Знайдіть похідну функції $f(x)$:

1) $f(x) = (x^2 - x)^3$; 2) $f(x) = (2x - 1)^{-5}$; 3) $f(x)=(x-\dfrac{1}{x})^4$;

4) $f(x)=\sqrt{5x-x^2}$; 5*) $f(x)=\sqrt{2+\sqrt{3x}}+\dfrac{1}{(2x-1)^2}$.

12. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = -3$;

3) $f(x)=\sqrt{2x-x^3}$, $x_0 = 1$;

4) $f(x)=2x^3-\dfrac{1}{x}$, $x_0 = -1$.

§ 4 ПОХІДНІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Таблиця 4

$c' = 0$ (c — стала)	$(x)' = 1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$)	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$)

$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Пояснення й обґрунтування

Формули $c' = 0$ (c — стала), $(x)' = 1$, $(x^n)' = nx^{n-1}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$) було обґрунтовано в § 2 і 3.

Для обґрунтування формули $(\sin x)' = \cos x$ використаємо те, що при малих значеннях α значення $\sin \alpha \approx \alpha$ (наприклад, $\sin 0{,}01 \approx 0{,}010$, $\sin 0{,}001 \approx 0{,}001$). Тоді при $\alpha \to 0$ відношення $\frac{\sin \alpha}{\alpha} \to 1$, тобто

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1^{*}. \qquad (1)$$

Якщо $y = f(x) = \sin x$, то, використовуючи формулу перетворення різниці синусів у добуток і схему знаходження похідної за означенням (с. 22), маємо:

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 =$
$$= 2\sin\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\cos\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

2) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

3) При $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta x}{2} \to 0$. Тоді $\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos(x_0)$, а враховуючи рівність (1), $\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$. При $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0$, тобто

* Справедливість цієї формули обґрунтовано на с. 109.

$f'(x_0) = \cos x_0$. Отже, похідна функції $y = \sin x$ у довільній точці x:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

- Ураховуючи, що за формулами зведення $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, і використовуючи правило знаходження похідної складеної функції, одержуємо:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x \cdot (0 - 1) = -\sin x.$$

Отже,

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

- Для знаходження похідних tg x і ctg x використаємо формули: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ і правило знаходження похідної частки.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отже,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Формулу $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ обґрунтуйте самостійно.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{\frac{x}{2}}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{\cos 3x}$.

Розв'язання	*Коментар*
1) $f'(x) = \left(\sin^2 x + \sqrt{\frac{x}{2}}\right)' =$ $= (\sin^2 x)' + \left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)' =$	Послідовно визначаємо, від якого виразу слід узяти похідну (орієнтуючись на результат останньої дії). У завданні 1 спочатку беруть похідну суми: $(u + v)' = u' + v'$. Потім для кожного з доданків використовують похідну складеної

$$=2\sin x\,(\sin x)'+\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{2}}}\left(\frac{x}{2}\right)'=$$

$$=2\sin x\cos x+\frac{1}{2\sqrt{2x}}=\sin 2x+\frac{1}{2\sqrt{2x}}.\ \triangleleft$$

2) ▶ $f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{\cos 3x}\right)'=$

$$=\frac{(x^2)'\cdot\cos 3x-(\cos 3x)'\cdot x^2}{(\cos 3x)^2}=$$

$$=\frac{2x\cdot\cos 3x-(-\sin 3x)(3x)'\cdot x^2}{\cos^2 3x}=$$

$$=\frac{2x\cos 3x+3x^2\cdot\sin 3x}{\cos^2 3x}.\ \triangleleft$$

функції: беруть похідну від u^2 і $\sqrt{u}$ і помножують на u'. Одержаний результат бажано спростити за формулою:

$$2\sin x\cos x=\sin 2x.$$

У завданні 2 спочатку беруть похідну частки: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$, а для похідної знаменника використовують похідну складеної функції (похідну $\cos u$ помножують на u').

Приклад 2 Знайдіть усі значення x, при яких значення похідної функції $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2}$:

1) дорівнює нулю, 2) додатне, 3) від'ємне.

Розв'язання

▶ Область визначення заданої функції: $\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\ x\neq 0,\end{cases}$

тобто $[-2;\,0)\cup(0;\,+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)'\cdot x^2-(x^2)'\cdot\sqrt{x+2}}{(x^2)^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}\cdot x^2-2x\sqrt{x+2}}{x^4}=\frac{-3x-8}{2x^3\sqrt{x+2}}.$$

Область визначення функції $f'(x)$: $(-2;\,0)\cup(0;\,+\infty)$, тобто похідна $f'(x)$ існує на всій області визначення функції $f(x)$, крім точки $x=-2$.

Коментар

Похідна функції може існувати тільки в тих точках, які входять до її області визначення. Тому спочатку доцільно знайти область визначення заданої функції.

Похідна функції сама є функцією від x, і тому для розв'язування нерівностей $f'(x)\gtrless 0$ можна використати метод інтервалів. Після знаходження ОДЗ цієї нерівності потрібно співставити її з областю визначення функції $f(x)$ і продовжувати розв'язання нерівності на їх спільній частині.

$$f'(x) = 0, \quad \frac{-3x-8}{2x^3\sqrt{x+2}} = 0, \quad x = -\frac{8}{3}$$

(не входить до області визначення $f'(x)$).

На області визначення $f'(x)$ розв'яжемо нерівності $f'(x) > 0$ та $f'(x) < 0$ методом інтервалів (рис. 4.1):

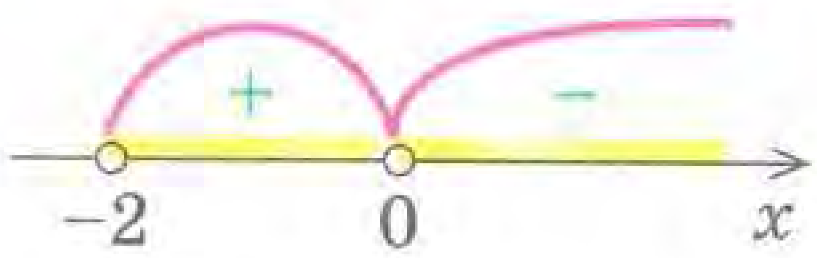


Рис. 4.1

Відповідь: 1) таких значень x, при яких $f'(x) = 0$, немає;
2) $f'(x) > 0$ при $x \in (-2; 0)$;
3) $f'(x) < 0$ при $x \in (0; +\infty)$. ◁

Отже, *нерівності $f'(x) \gtrless 0$ завжди розв'язуються на спільній частині областей визначення функцій* $f(x)$ і $f'(x)$. Для розв'язування відповідних нерівностей достатньо на спільній області визначення функцій $f(x)$ і $f'(x)$ відмітити нулі $f'(x)$ і знайти знак $f'(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ця спільна область визначення.

Приклад 3 Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 \cos(x - 1)$ у точці $x_0 = 1$.

Розв'язання

► Якщо $f(x) = x^2 \cos(x - 1)$, то $f(x_0) = f(1) = 1$.

$$f'(x) = (x^2)' \cos(x-1) + (\cos(x-1))' x^2 = 2x\cos(x-1) - x^2 \sin(x-1).$$

Тоді $f'(x_0) = f'(1) = 2$. Підставляючи ці значення в рівняння дотичної

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

одержуємо $y = 1 + 2(x - 1)$, тобто $y = 2x - 1$ — шукане рівняння дотичної. ◁

Коментар

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 у загальному вигляді записують так:

$$\boldsymbol{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).}$$

Щоб записати це рівняння для заданої функції, потрібно знайти $f(x_0)$, похідну $f'(x)$ і значення $f'(x_0)$. Для виконання відповідних обчислень зручно позначити задану функцію через $f(x)$, а для знаходження її похідної використати формулу похідної добутку:

$$\boldsymbol{(uv)' = u'v + v'u.}$$

Запитання для контролю

1. Запишіть формули знаходження похідних від тригонометричних функцій.
2*. Обґрунтуйте формули знаходження похідних від тригонометричних функцій.

Вправи

Знайдіть похідну функції **(1–7)**.

1°. 1) $y = \cos x + 1$; 2) $y = 2\sin x - 3x$;
3) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; 4) $y = x^3 - \operatorname{ctg} x$.

2. 1) $f(x) = x \operatorname{tg} x$; 2) $f(x) = x \operatorname{ctg} x$;
3) $f(x) = \sin x \operatorname{tg} x$; 4) $f(x) = \cos x \operatorname{ctg} x$.

3. 1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; 2) $f(x) = \dfrac{x}{\cos x}$; 3) $f(x) = \sin^2 x$; 4) $f(x) = \cos^2 x$.

4. 1) $y = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$; 2) $y = \cos^2 3x - \sin^2 3x$;
3) $y = \sin 4x \cos 2x - \cos 4x \sin 2x$; 4) $y = \sin 7x \sin 3x + \cos 7x \cos 3x$.

5*. 1) $y = \sqrt{1 + \sin x}$; 2) $y = \cos x^2$; 3) $y = \sin(\cos x)$; 4) $y = \sqrt{\operatorname{tg} 6x}$.

6. 1) $y = x^5 + \sin 4x$; 2) $y = x^3 \sin x$; 3) $y = (\sin x - \cos x)^2$; 4) $y = \operatorname{tg}^3 4x$.

7. 1) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2}$; 2) $y = 3\sin^2 x + \cos 2x$; 3) $y = \sqrt{x} \operatorname{tg} x$; 4) $y = \sqrt{x + \sin x}$.

Обчисліть значення похідної функції f у зазначеній точці **(8, 9)**.

8. 1°) $f(x) = \cos 2x$, $x = \dfrac{\pi}{2}$; 2°) $f(x) = x + \operatorname{tg} x$, $x = 0$;
3) $f(x) = \dfrac{1 + \cos x}{\sin x}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$; 4) $f(x) = \operatorname{tg}^2 2x$, $x = \dfrac{3\pi}{8}$.

9. 1) $f(x) = x^3 + \sin x$, $x = 0$; 2) $f(x) = x\sqrt{2x}$, $x = 2$;
3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$, $x = 1$; 4) $f(x) = (2x - x^3)^5$, $x = -1$.

Знайдіть значення x, для яких похідна функції f дорівнює нулю **(10, 11)**.

10. 1°) $f(x) = 2 - \cos x$; 2°) $f(x) = \sin x - \dfrac{1}{2}x$;
3) $f(x) = \sin^2 2x$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos 2x + \sin x$.

11. 1°) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 7$; 2°) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5$;
3) $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$; 4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 2}$.

12. Розв'яжіть нерівність $f'(x) > 0$, якщо:
1°) $f(x) = 12x - x^3 + 1$; 2°) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 5$;
3) $f(x) = \cos 2x + 3$; 4) $f(x) = 4\sqrt{x} - x$.

13. Знайдіть значення x, при яких значення похідної функції $f(x)$: а) дорівнює нулю, б) додатне, в) від'ємне.
1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$; 2) $f(x) = 2x^4 - 16x^3 + 2$;
3) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$; 4) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

14. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо:
1) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$;
3) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$, $x_0 = 0$; 4) $f(x) = \sqrt{2x + 2}$, $x_0 = 1$.

15. Знайдіть абсциси x_0 точок графіка функції $y = f(x)$, у яких дотична до нього утворює кут φ з додатним напрямком осі Ox:
1) $f(x) = \sin 2x$, $\varphi = 0°$;
2) $f(x) = x^3 - 11x$, $\varphi = 45°$;
3) $f(x) = \sin^2 x$, $\varphi = 135°$.

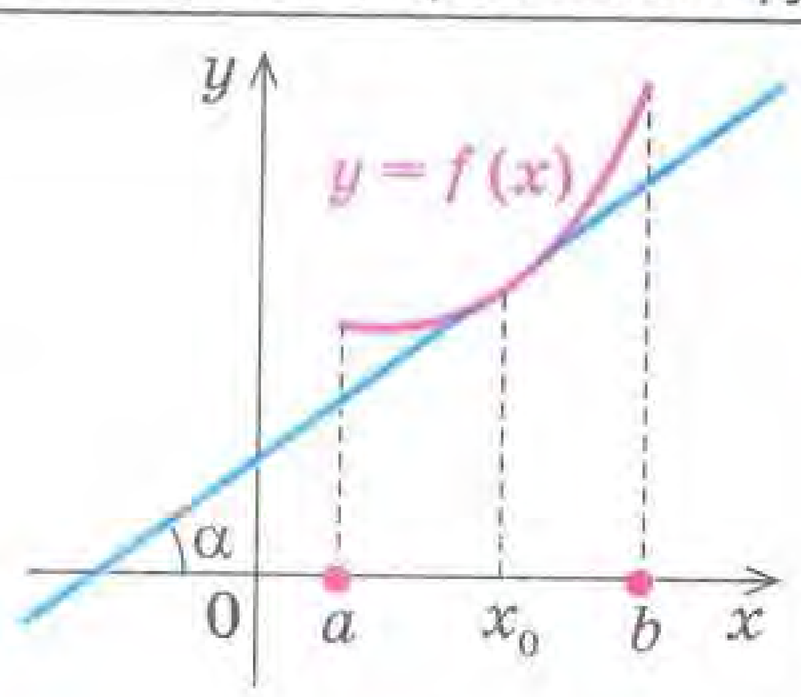
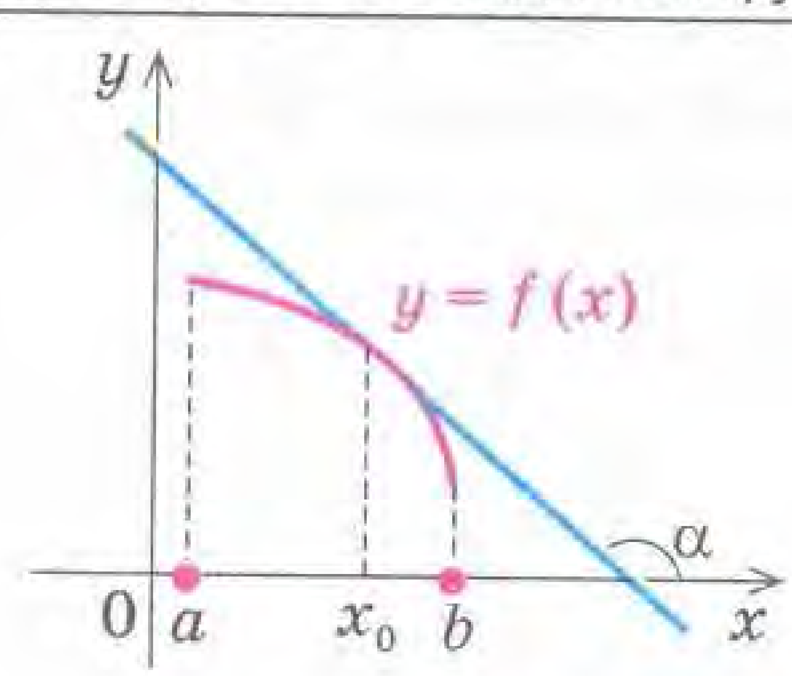
16*. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^3 - 3x + 5$, яка паралельна прямій $y = -3x + 7$.

17*. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^4 + x - 2$, яка паралельна прямій $y = 5x + 1$.

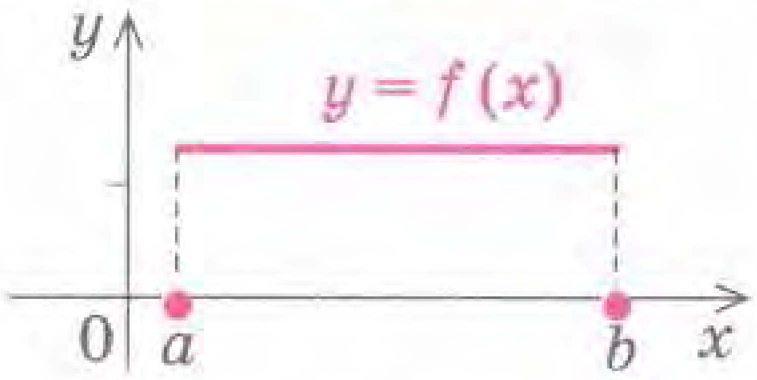
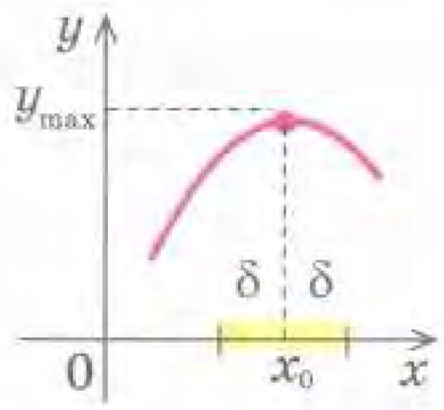
§ 5 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

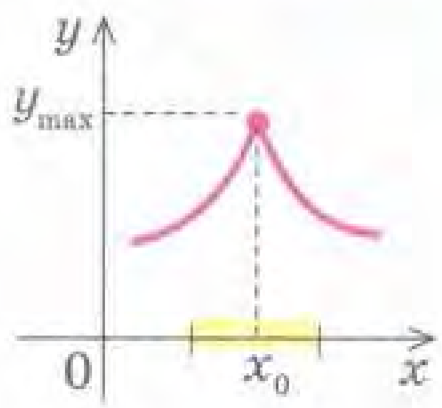
5.1. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ЗНАХОДЖЕННЯ ПРОМІЖКІВ ЗРОСТАННЯ І СПАДАННЯ ТА ЕКСТРЕМУМІВ ФУНКЦІЇ

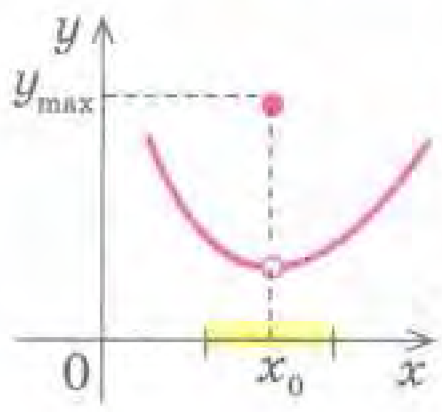
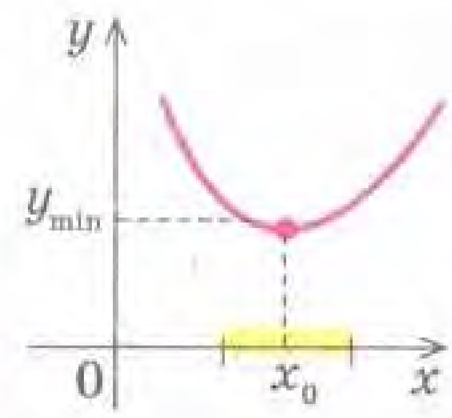
Таблиця 5

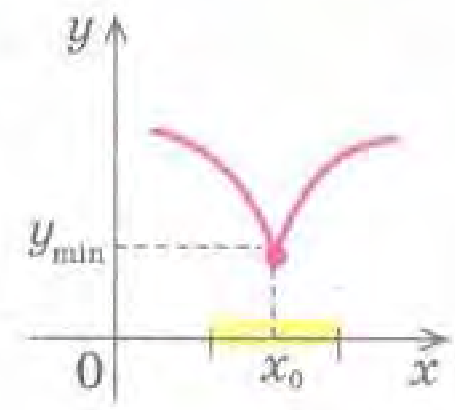
1. Монотонність і сталість функції	
Достатня умова зростання функції	Достатня умова спадання функції
	
$0° < \alpha < 90°$ $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha > 0$ Якщо в кожній точці інтервалу $(a; b)$ **$f'(x) > 0$, то функція $f(x)$ зростає** на цьому інтервалі.	$90° < \alpha < 180°$ $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha < 0$ Якщо в кожній точці інтервалу $(a; b)$ **$f'(x) < 0$, то функція $f(x)$ спадає** на цьому інтервалі.

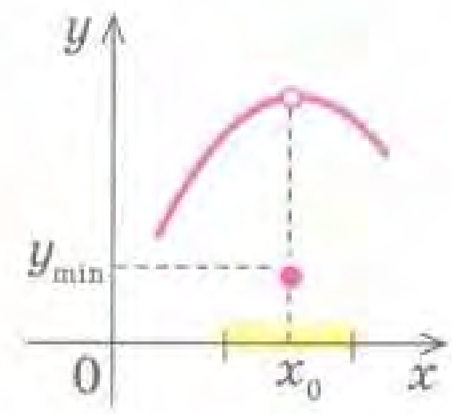
Продовження табл. 5

<table>
<tr><td colspan="2">Необхідна і достатня умова сталості функції</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Функція $f(x)$ є сталою на інтервалі $(a; b)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x) = 0$ в усіх точках цього інтервалу.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Екстремуми (максимуми і мінімуми) функції</td></tr>
<tr><td>Точки максимуму</td><td>Точки мінімуму</td></tr>
<tr><td>Точку x_0 з області визначення функції $f(x)$ називають точкою максимуму цієї функції, якщо знайдеться δ-окіл $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0, такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність
$$f(x) < f(x_0).$$
$x_{\max} = x_0$ — точка максимуму





</td><td>Точку x_0 з області визначення функції $f(x)$ називають точкою мінімуму цієї функції, якщо знайдеться δ-окіл $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0, такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність
$$f(x) > f(x_0).$$
$x_{\max} = x_0$ — точка мінімуму




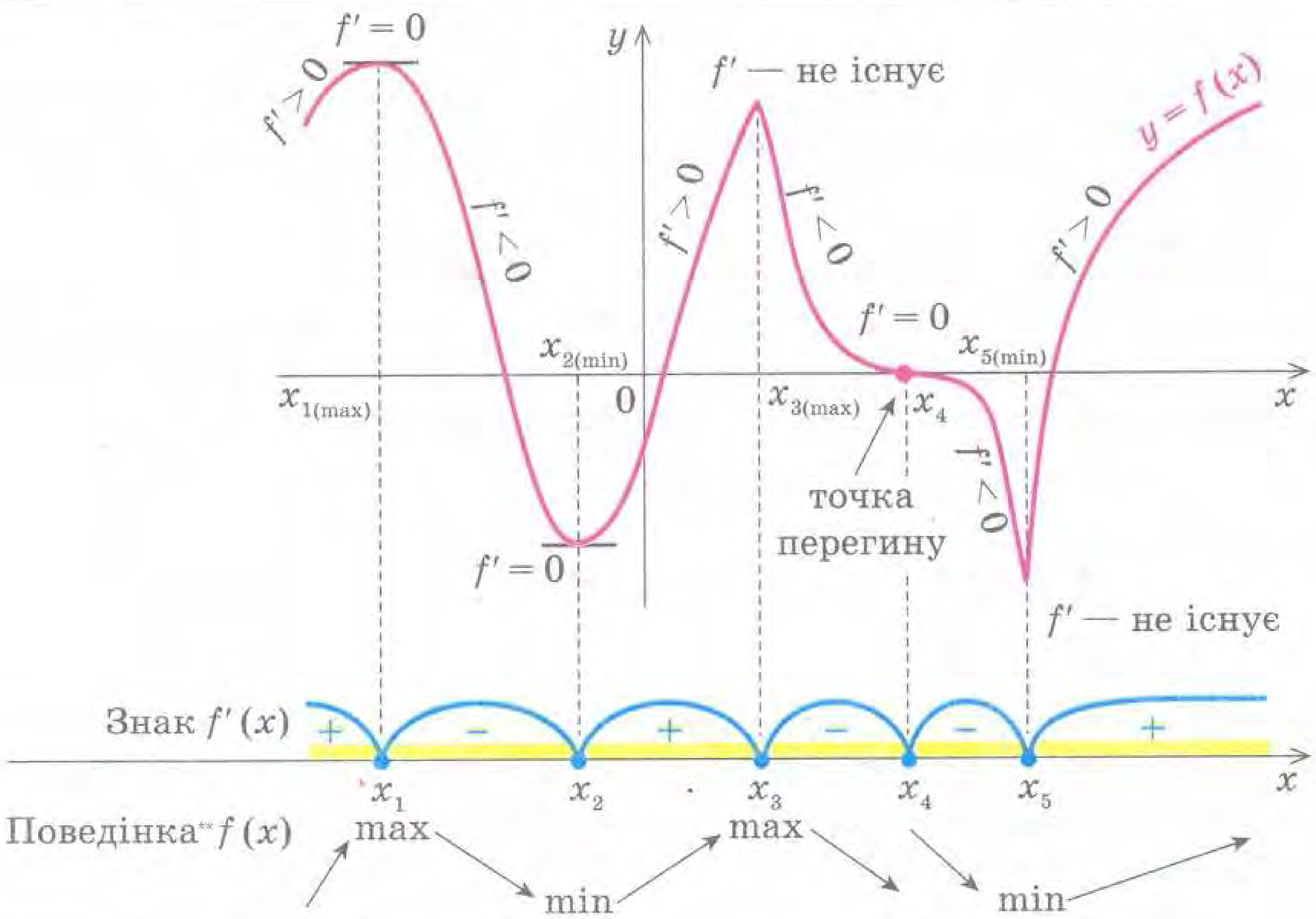

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Точки максимуму і мінімуму називають точками екстремуму.
Значення функції в точках максимуму і мінімуму називають екстремумами функції (максимумом і мінімумом функції).</td></tr>
<tr><td>$y_{\max} = f(x_{\max}) = f(x_0)$ — максимум</td><td>$y_{\min} = f(x_{\min}) = f(x_0)$ — мінімум</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Критичні точки</td></tr>
<tr><td>Означення</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>Критичними точками функції називають внутрішні точки її області визначення, у яких похідна функції дорівнює нулю* або не існує.</td><td>$f(x) = x^3 - 12x \qquad (D(f) = \mathbf{R})$.
$f'(x) = 3x^2 - 12$ — існує на всій області визначення.
$f'(x) = 0$ при $3x^2 - 12 = 0$, $x^2 = 4$,
$x = \pm 2$ — критичні точки.</td></tr>
</table>

* Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю, називають також стаціонарними точками.

Продовження табл. 5

4. Необхідна і достатня умови екстремуму	
Необхідна умова екстремуму	Достатня умова екстремуму
У точках екстремуму похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю або не існує. **x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$** $\Downarrow$ **$f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0)$ — не існує** (але не в кожній точці x_0, де $f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0)$ не існує, буде екстремум)	*Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і похідна $f'(x)$ змінює знак при переході* через точку x_0, то x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$.* **У точці x_0 знак $f'(x)$ змінюється з «+» на «−»** $\Rightarrow$ **x_0 — точка максимуму** **У точці x_0 знак $f'(x)$ змінюється з «−» на «+»** $\Rightarrow$ **x_0 — точка мінімуму**

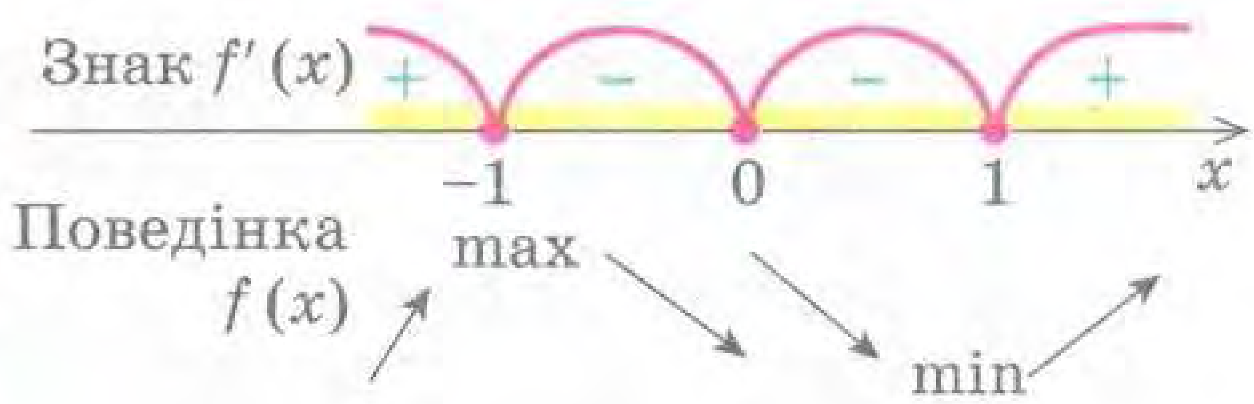
5. Приклад графіка функції $y = f(x)$, що має екстремуми
(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — критичні точки)



* Мається на увазі перехід через точку x_0 при русі зліва направо.

** Знаком «↗» позначено зростання функції, а знаком «↘» — її спадання на відповідному проміжку.

Закінчення табл. 5

6. Дослідження функції $y = f(x)$ на монотонність і екстремуми	
Схема	Приклад: $y = f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$
1. Знайти область визначення функції.	Область визначення: $D(f) = \boldsymbol{R}$.
2. Знайти похідну $f'(x)$.	$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) =$ $= 15x^2(x - 1)(x + 1)$.
3. Знайти критичні точки, тобто *внутрішні точки області визначення, у яких $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує.*	$f'(x)$ існує на всій області визначення. $f'(x) = 0$ при $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.
4. Позначити критичні точки на області визначення, знайти знак похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.	
5. Відносно кожної критичної точки визначити, чи є вона точкою максимуму або мінімуму, чи не є точкою екстремуму.	
6. Записати результат дослідження (*проміжки монотонності і екстремуми*).	$f(x)$ зростає на кожному з проміжків: $(-\infty; -1]$ і $[1; +\infty)$*; $f(x)$ спадає на проміжку $[-1; 1]$. Точки екстремуму: $x_{max} = -1$; $x_{min} = 1$. Екстремуми: $y_{max} = f(-1) = 3$; $y_{min} = f(1) = -1$.

Пояснення й обґрунтування

1. Монотонність і сталість функції. Критичні точки функції. Похідна є важливим інструментом дослідження функції, зокрема, на монотонність (тобто на зростання та спадання).

* Як зазначається на с. 54, оскільки функція $f(x)$ неперервна (наприклад, через те, що вона диференційовна на всій області визначення), то точки –1 і 1 можна включити до проміжків зростання і спадання функції.

Нагадаємо, що *функцію* $f(x)$ *називають зростаючою на множині* P, *якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає більше значення функції*, тобто для будь-яких x_1 і x_2 з цієї множини з умови $x_2 > x_1$ випливає, що $f(x_2) > f(x_1)$.

Функцію $f(x)$ *називають спадною на множині* P, *якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає менше значення функції*, тобто для будь-яких x_1 і x_2 з цієї множини з умови $x_2 > x_1$ випливає, що $f(x_2) < f(x_1)$.

Як видно з рис. 5.1, *а*, у кожній точці графіка зростаючої функції дотична утворює з додатним напрямком осі Ox або гострий кут α (тоді $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha > 0$), або кут, що дорівнює нулю ($f'(x_1) = \operatorname{tg} 0 = 0$). У кожній точці графіка спадної функції (рис. 5.1, *б*) дотична утворює з додатним напрямком осі Ox або тупий кут α ($f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha < 0$), або кут, що дорівнює нулю ($f'(x_1) = \operatorname{tg} 0 = 0$).

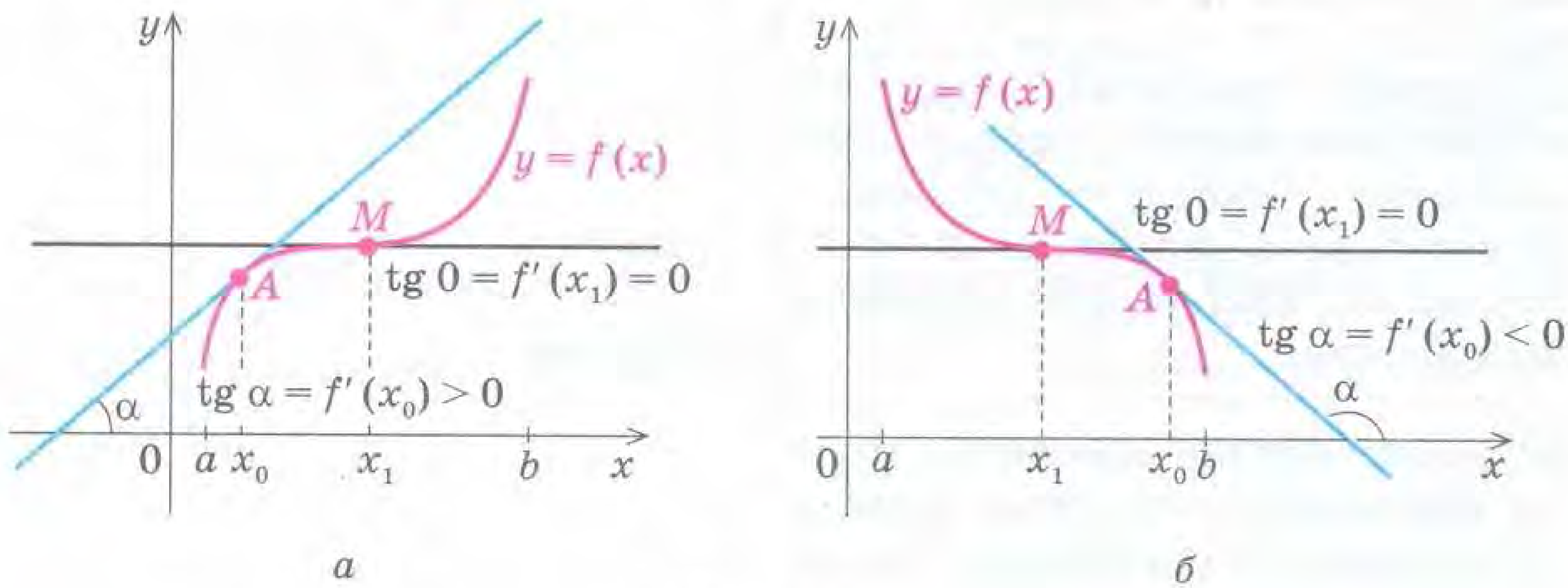


Рис. 5.1

Отже, *якщо на якомусь інтервалі функція* $f(x)$ *диференційовна і зростає, то* $f'(x) \geqslant 0$ *на цьому інтервалі; якщо на якомусь інтервалі функція* $f(x)$ *диференційовна і спадає, то* $f'(x) \leqslant 0$ *на цьому інтервалі.*

Але для розв'язування задач на дослідження властивостей функцій важливими є обернені твердження, які дозволяють за знаком похідної з'ясувати характер монотонності функції.

Для обґрунтування відповідних тверджень скористаємося так званою формулою Лагранжа. Її строге доведення наводиться в курсах математичного аналізу, а ми обмежимося тільки її геометричною ілюстрацією та формулюванням.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна в усіх точках інтервалу $(a; b)$. Тоді на цьому інтервалі знайдеться така точка c, що дотична l до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою c буде паралельна січній AB, яка проходить через точки $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ (рис. 5.2).

Дійсно, розглянемо всі можливі прямі, що паралельні січній AB і мають з графіком функції $f(x)$ на інтервалі $(a; b)$ хоча б одну спільну точку. Пряма, яка лежить на найбільшій відстані від січної AB, і буде дотичною до графіка функції $f(x)$ (це граничне положення січної, паралельної AB). Якщо позначити абсцису точки дотику через c, то, ураховуючи геометричний зміст похідної, одержуємо $f'(c) = \operatorname{tg} \alpha$, де α — кут між прямою l і додатним напрямком осі Ox. Але $l \parallel AB$, тому кут α дорівнює куту нахилу січної AB до осі Ox. Цей кут, у свою чергу, дорівнює куту A прямокутного трикутника ABD з катетами: $AD = b - a$, $BD = f(b) - f(a)$). Тоді $f'(c) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Таким чином, можна зробити висновок:

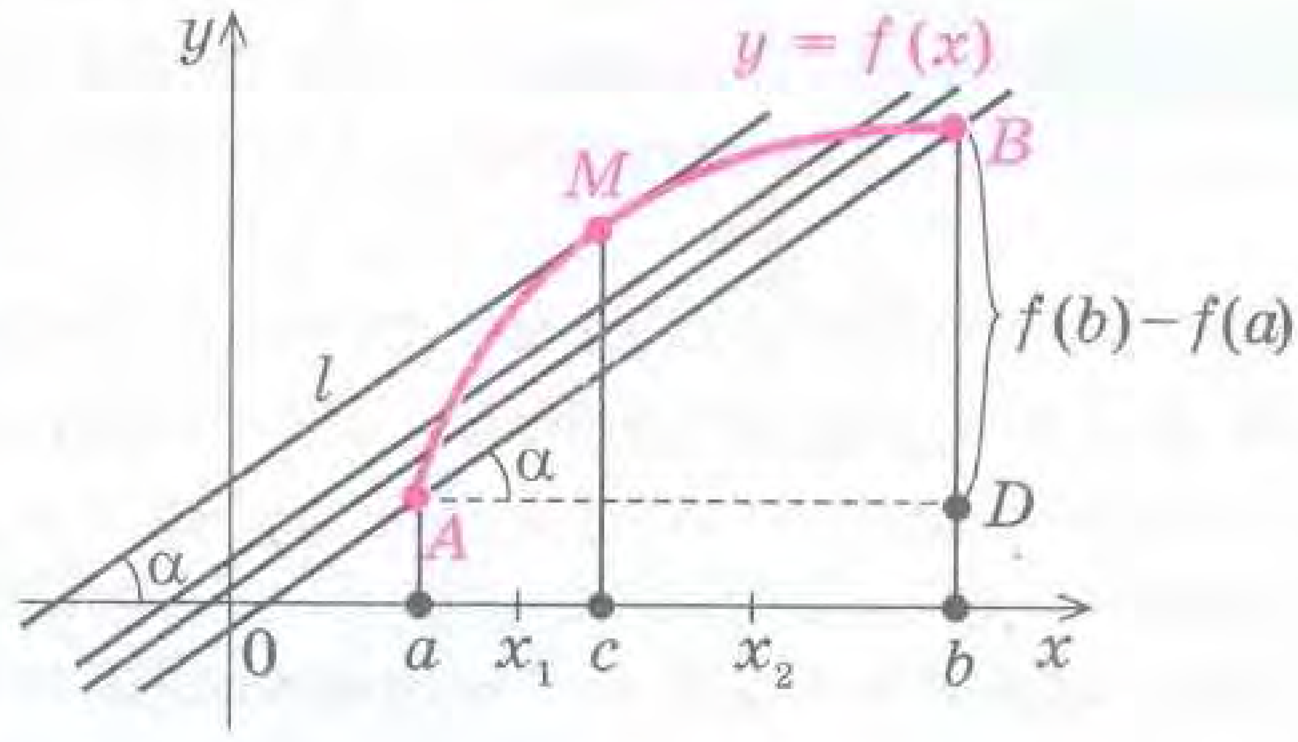


Рис. 5.2

якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна в усіх точках інтервалу $(a; b)$, то на інтервалі $(a; b)$ знайдеться така точка $c \in (a; b)$, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Цю формулу називають *формулою Лагранжа*. Застосуємо її для обґрунтування достатніх умов зростання і спадання функції.

1. *Якщо $f'(x) > 0$ у кожній точці інтервалу $(a; b)$, то функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі.*

2. *Якщо $f'(x) < 0$ у кожній точці інтервалу $(a; b)$, то функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.*

Візьмемо дві довільні точки x_1 і x_2 із заданого інтервалу. За формулою Лагранжа існує число $c \in (x_1; x_2)$, таке, що

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c). \qquad (1)$$

Число c належить заданому інтервалу, оскільки йому належать числа x_1 і x_2. Нехай $x_2 > x_1$. Тоді $x_2 - x_1 > 0$.

Якщо $f'(x) > 0$ в кожній точці заданого інтервалу, то $f'(c) > 0$, і з рівності (1) одержуємо, що $f(x_2) - f(x_1) > 0$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$. Це означає, що функція $f(x)$ зростає на заданому інтервалі.

Якщо $f'(x) < 0$ у кожній точці заданого інтервалу, то $f'(c) < 0$, і з рівності (1) маємо, що $f(x_2) - f(x_1) < 0$, тобто $f(x_2) < f(x_1)$. А це означає, що функція $f(x)$ спадає на заданому інтервалі.

Приклад 1 Функція $f(x) = x^3 + x$ означена на всій множині дійсних чисел ($x \in \boldsymbol{R}$) і має похідну $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ при всіх значеннях x. Отже, ця функція зростає на всій області визначення.

Приклад 2 Функція $g(x) = \sin x - 3x$ означена на всій множині дійсних чисел ($x \in \boldsymbol{R}$) і має похідну $g'(x) = \cos x - 3$. Оскільки $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, то $\cos x - 3 < 0$ при всіх значеннях x. Отже, ця функція спадає на всій області визначення.

Розглядаючи степеневу функцію в курсі 10 класу, ми без доведення відзначили, що при $x > 0$ функція $y = x^\alpha$, де α — неціле число, зростає при $\alpha > 0$ і спадає при $\alpha < 0$. Обґрунтуємо це. Дійсно, $y' = (x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$. Тоді при $x > 0$ і $\alpha > 0$ значення $y' > 0$, отже, функція $y = x^\alpha$ зростає. При $x > 0$ і $\alpha < 0$ значення $y' < 0$, тобто функція $y = x^\alpha$ спадає.

Достатні ознаки зростання і спадання функції мають наочну фізичну ілюстрацію. Нехай по осі ординат рухається матеріальна точка, яка в момент часу t має ординату $y = f(t)$. Ураховуючи фізичний зміст похідної, одержуємо, що швидкість цієї точки в момент часу t дорівнює $f'(t)$. Якщо $f'(t) > 0$, то точка рухається в додатному напрямку осі ординат, зі збільшенням часу ордината точки збільшується, тобто функція зростає. Якщо ж $f'(t) < 0$, то точка рухається у від'ємному напрямку осі ординат, і зі збільшенням часу ордината точки зменшується: функція спадає.

У тому випадку, коли $f'(t) = 0$, швидкість точки дорівнює нулю, тобто точка не рухається, і тому її ордината залишається сталою. Одержуємо *умову сталості функції*.

Функція $f(x)$ є сталою на інтервалі $(a; b)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x) = 0$ в усіх точках цього інтервалу.

Дійсно, якщо $f(x) = k$ (де k — стала), то $f'(x) = 0$.

Навпаки, якщо $f'(x) = 0$ в усіх точках інтервалу $(a; b)$, то зафіксуємо деяке число x_0 з цього інтервалу і знайдемо значення функції в точці x_0 (нехай $f(x_0) = k$). Для будь-якого числа x із заданого інтервалу за формулою Лагранжа можна знайти число c, яке міститься між x і x_0, таке, що

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c).$$

Тоді $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$.

Оскільки $c \in (a; b)$, то за умовою $f'(c) = 0$. Отже, $f(x) - f(x_0) = 0$. Таким чином, для всіх x із заданого інтервалу $f(x) = f(x_0) = k$, тобто функція $f(x)$ є сталою.

У випадку, *коли функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a; b]$ *і* $f'(x) = 0$ *в усіх точках інтервалу* $(a; b)$, то при наближенні значення x до точки a справа значення $f(x) \to f(a)$. Але $f(x) = k$, тоді і $f(a) = k$ (аналогічно, наближаючи значення x до точки b зліва, обґрунтовують, що $f(b) = k$). Отже, *функція* $f(x)$ *є постійною на відрізку* $[a; b]$. ○

Для знаходження проміжків зростання і спадання функції потрібно розв'язати нерівності $f'(x) > 0$ і $f'(x) < 0$ на області визначення функції $f(x)$. Оскільки $f'(x)$ є функцією від змінної x, то для розв'язування цих нерівностей можна використати метод інтервалів, точніше, його узагальнення, що спирається на твердження, яке в курсах математичного аналізу називають теоремою Дарбу*:

точки, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, розбивають область визначення функції $f(x)$ на проміжки, у кожному з яких $f'(x)$ зберігає сталий знак.

Внутрішні точки області визначення функції, у яких її похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними точками* цієї функції.**

Виходячи з плану розв'язування нерівностей методом інтервалів (с. 7), одержуємо, що проміжки зростання і спадання функції $f(x)$ можна знаходити за схемою:

1. *Знайти область визначення функції $f(x)$.*
2. *Знайти похідну $f'(x)$.*
3. *З'ясувати, у яких внутрішніх точках області визначення функції похідна $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує (*тобто *знайти критичні точки цієї функції).*
4. *Позначити знайдені точки на області визначення функції $f(x)$ і знайти знак $f'(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається область визначення функції (знак можна визначити, обчисливши значення $f'(x)$ у будь-якій точці проміжку).*

Приклад 3 Дослідіть функцію $f(x) = x^3 - 3x$ на зростання і спадання.

Розв'язання

1. Область визначення заданої функції — усі дійсні числа ($D(f) = \mathbf{R}$).
2. Похідна $f'(x) = 3x^2 - 3$.
3. Похідна існує на всій області визначення функції, і $f'(x) = 0$, якщо $3x^2 - 3 = 0$, тобто при $x = 1$ або $x = -1$.
4. Розв'язуємо нерівності $f'(x) > 0$ і $f'(x) < 0$ на області визначення функції $f(x)$ методом інтервалів. Для цього відмічаємо точки 1 і (−1) на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знак $f'(x)$ у кожному з одержаних проміжків (рис. 5.3).

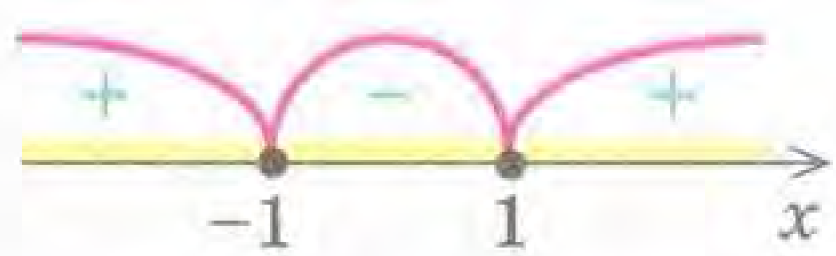


Рис. 5.3

Ураховуючи достатні умови зростання і спадання функції, одержуємо, що в тих інтервалах, де похідна додатна, функція $f(x)$ зростає, а в тих

* Жан Гастон Дарбу (1842–1917) — французький математик, який зробив значний внесок у розвиток диференціальної геометрії, інтегрального числення та механіки.

** Внутрішньою точкою множини називають таку точку, яка належить цій множині разом із деяким своїм околом.

інтервалах, де похідна від'ємна, — спадає. Отже, функція $f(x)$ зростає на кожному з інтервалів $(-\infty; -1)$ та $(1; +\infty)$ і спадає на інтервалі $(-1; 1)$. ◁

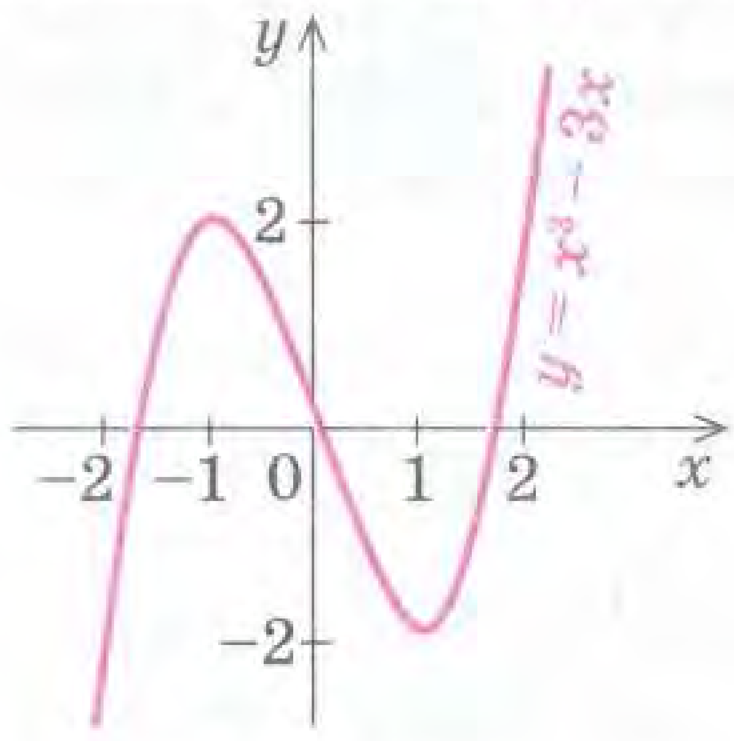


Рис. 5.4

Графік функції $y = x^3 - 3x$ зображено на рис. 5.4. При побудові графіка враховано, що $f(-1) = 2$ і $f(1) = -2$. З графіка видно, що функція $f(x) = x^3 - 3x$ зростає не тільки на інтервалах $(-\infty; -1)$ та $(1; +\infty)$, а й на проміжках $(-\infty; -1]$ та $[1; +\infty)$ і спадає не тільки на інтервалі $(-1; 1)$, а й на відрізку $[-1; 1]$.

Виявляється, що завжди, *коли функція $f(x)$ неперервна в будь-якому з кінців проміжку зростання (спадання), то його можна приєднати до цього проміжку* (як точки -1 і 1 у попередньому прикладі).

Приймемо це твердження без доведення.

2. Екстремуми (максимуми і мінімуми) функції. На рис. 5.4 зображено графік функції $y = x^3 - 3x$. Розглянемо окіл точки $x = -1$, тобто довільний інтервал, що містить точку -1 (наприклад, δ-окіл цієї точки). Як видно з рисунка, існує такий окіл точки $x = -1$, що найбільшого значення для точок із цього околу функція $f(x) = x^3 - 3x$ набуває в точці $x = -1$. Наприклад, на інтервалі $(-2; 0)$ найбільшого значення, яке дорівнює 2, функція набуває в точці $x = -1$. Точку $x = -1$ називають *точкою максимуму* цієї функції і позначають x_{max}, а значення функції в цій точці $f(-1) = 2$ називають *максимумом* функції (від латинського *maximum* — максимум, що означає «найбільше»).

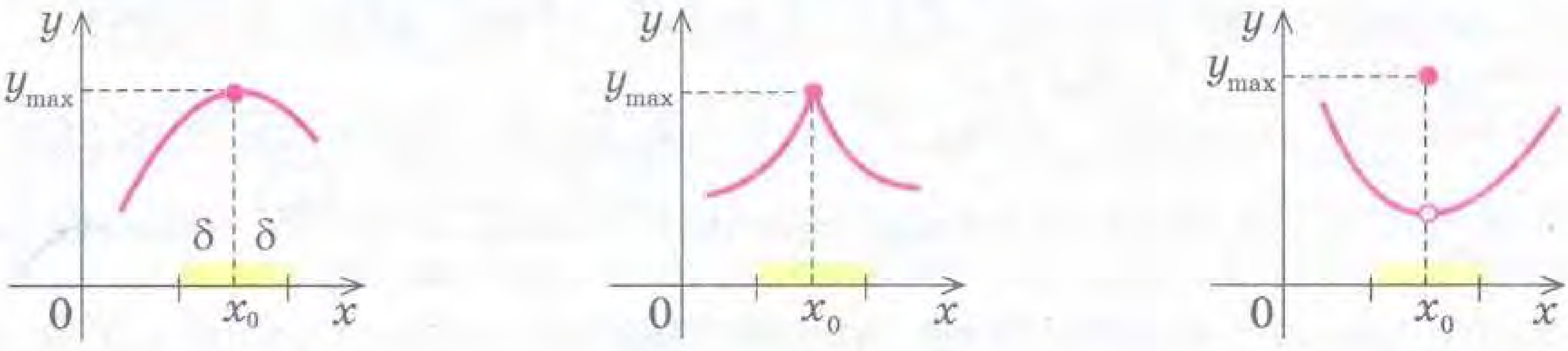
Аналогічно точку $x = 1$ називають *точкою мінімуму* функції $f(x) = x^3 - 3x$, оскільки значення функції в цій точці менше за її значення в будь-якій точці деякого околу точки 1, наприклад околу $(0{,}5; 1{,}5)$. Позначають точку мінімуму x_{min}, а значення функції в цій точці $f(1) = -2$ називають *мінімумом* функції (*minimum* — мінімум — у перекладі з латинської означає «найменше».)

Точки максимуму і мінімуму функції ще називають точками екстремуму, а значення функції в цих точках називають *екстремумами* функції (від латинського слова *extremum* — екстремум, що означає «крайній»). Наведемо означення точок максимуму і мінімуму.

Точку x_0 з області визначення функції $f(x)$ називають *точкою максимуму* цієї функції, якщо знайдеться δ-окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$.

Точку x_0 з області визначення функції $f(x)$ називають *точкою мінімуму* цієї функції, якщо знайдеться δ-окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$.

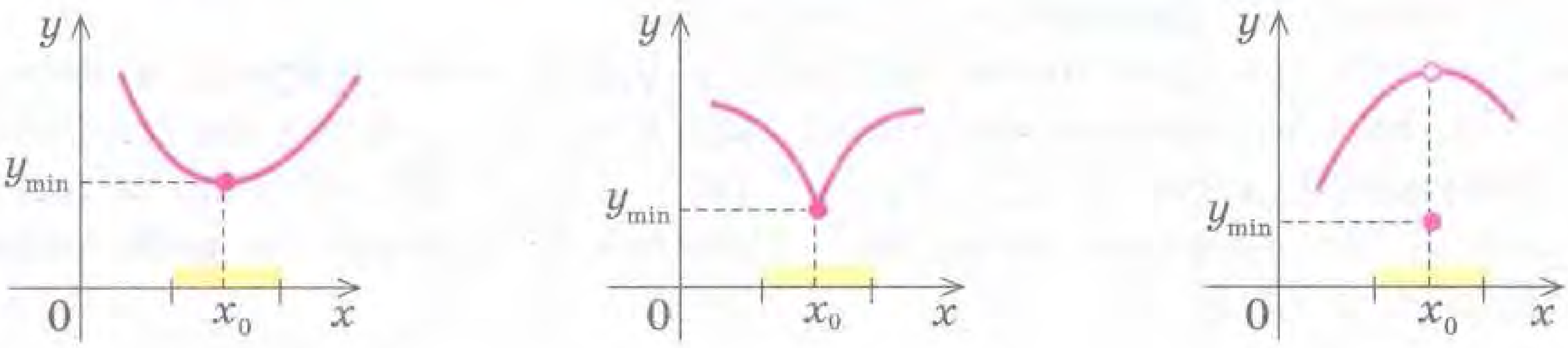
За означенням у точці максимуму x_0 значення функції $f(x)$ є найбільшим серед значень функції з деякого околу цієї точки. Через це графік функції $f(x)$ в околі x_0 найчастіше має вигляд гладенького «горба» (рис. 5.5, *а*), але може мати вигляд загостреного «піка» (рис. 5.5, *б*) або навіть ізольованої точки (зрозуміло, що в цьому випадку функція не буде неперервною в точці x_0) (рис. 5.5, *в*).



а *б* *в*

Рис. 5.5

Аналогічно значення функції $f(x)$ у точці мінімуму x_0 є найменшим серед значень функції з деякого околу цієї точки. Графік функції $f(x)$ в околі x_0 найчастіше має вигляд «западини», теж гладенької (рис. 5.6, *а*) або загостреної (рис. 5.6, *б*), або навіть ізольованої точки (рис. 5.6, *в*).



а *б* *в*

Рис. 5.6

Зауваження. За означенням точки екстремуму — це такі точки, в яких функція набуває найбільшого чи найменшого значення, порівняно із значеннями цієї функції в точках деякого околу екстремальної точки. Такий екстремум зазвичай називають *локальним екстремумом* (від латинського *lokalis*, що означає «місцевий»). Наприклад, на рис. 5.4 зображено графік функції $y = x^3 - 3x$, яка має локальний максимум у точці $x_{max} = -1$ ($y_{max} = 2$) і локальний мінімум у точці $x_{min} = 1$ ($y_{min} = -2$), а на всій області визначення не має ні найбільшого, ні найменшого значення.

3. Необхідна і достатня умови екстремуму. При дослідженні функції і побудові її графіка важливе значення має знаходження точок екстремумів функції. Покажемо, що *точками екстремуму можуть бути тіль-*

ки критичні точки функції, тобто внутрішні точки області визначення функції, у яких її похідна дорівнює нулю або не існує.

Теорема Ферма (необхідна умова екстремуму). ***Якщо x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна $f'(x_0)$, то вона дорівнює нулю: $f'(x_0) = 0$.***

Доведемо це твердження методом від супротивного. Нехай x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна $f'(x_0)$. Припустимо, що $f'(x_0) \neq 0$.

Розглянемо випадок, коли $f'(x_0) > 0$. За означенням похідної при $x \to x_0$ (тобто при $\Delta x \to 0$) відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ прямує до додатного числа $f'(x_0)$, а отже, і саме буде додатним при всіх x, достатньо близьких до x_0. Для таких x

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0.$$

Тоді при $x > x_0$ одержуємо, що $f(x) > f(x_0)$, і точка x_0 не може бути точкою максимуму.

При $x < x_0$ $f(x) < f(x_0)$, і точка x_0 не може бути точкою мінімуму, тобто точкою екстремуму, що суперечить умові.

Аналогічно розглядається і випадок, коли $f'(x_0) < 0$. Отже, наше припущення неправильне, і $f'(x_0) = 0$. ○

Теорема Ферма дає лише необхідну умову екстремуму: з того, що $f'(x_0) = 0$, не обов'язково випливає, що в точці x_0 функція має екстремум. Наприклад, якщо $f(x) = x^3$, то $f'(x) = 3x^2$ і $f'(0) = 0$. Але точка $x = 0$ не є точкою екстремуму, оскільки функція x^3 зростає на всій числовій прямій (рис. 5.7).

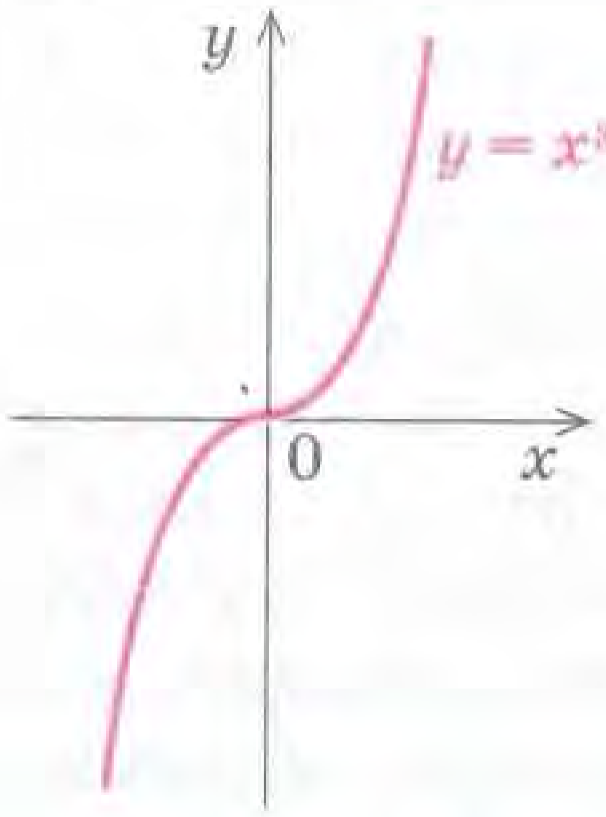


Рис. 5.7

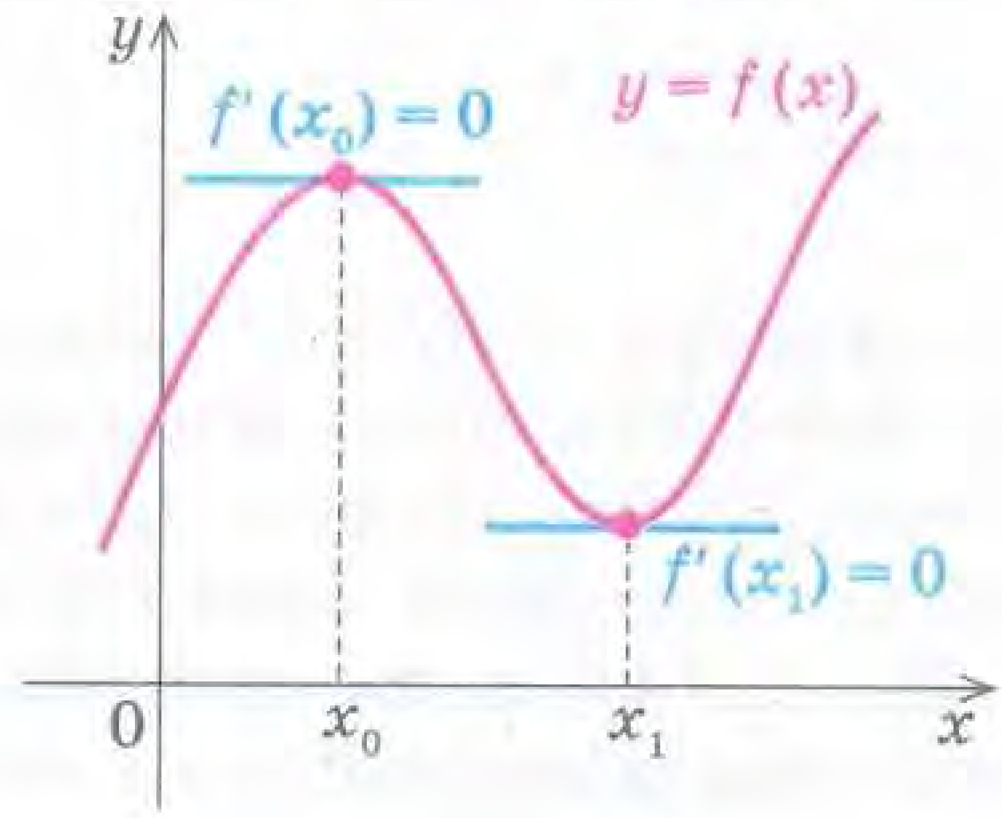


Рис. 5.8

Теорема Ферма має наочний геометричний зміст: дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 (де x_0 — точка екстремуму функції) паралельна осі абсцис (або збігається з нею) і тому її кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$ дорівнює нулю (рис. 5.8).

У точці з абсцисою $x_0 = 0$ до графіка функції $y = x^3$ теж можна провести дотичну: оскільки $f'(0) = 0$, то цією дотичною є вісь Ox. Але графіки функцій, наведених на рис. 5.7 і 5.8, по-різному розміщаються відносно дотичних. На рис. 5.8, де x_0 і x_1 — точки екстремуму, можна вказати околи цих точок, для яких відповідні точки графіка розміщуються по один бік від дотичної, а на рис. 5.7 *графік функції $y = x^3$ при переході аргументу через точку $x_0 = 0$* (у якій похідна дорівнює нулю, але точка не є точкою екстремуму) *переходить з одного боку дотичної до іншого.* У цьому випадку точку x_0 називають *точкою перегину* функції.*

Функція може мати екстремум і в тій критичній точці, у якій не існує похідна заданої функції. Наприклад, як було показано на с. 26, функція $y = |x|$ не має похідної в точці $x = 0$, але, як видно з її графіка (рис. 5.9), саме в цій точці функція має мінімум.

Проте не кожна критична точка, у якій не існує похідна заданої функції, буде точкою екстремуму цієї функції. Наприклад, розглядаючи функцію $f(x) = 3x + |x|$, помічаємо, що вона не має похідної в точці $x = 0$: графік має злом при $x = 0$ (рис. 5.10). Дійсно, якщо припустити, що функція $f(x) = 3x + |x|$ має похідну в точці 0, то функція $f(x) - 3x$ теж повинна мати похідну в точці 0. Але $f(x) - 3x = |x|$, а функція $|x|$ не має похідної в точці 0, тобто ми прийшли до суперечності. Отже, функція $f(x)$ у точці 0 похідної не має. Однак, як видно з рис. 5.10, функція $f(x)$ зростає на всій числовій прямій і екстремуму не має.

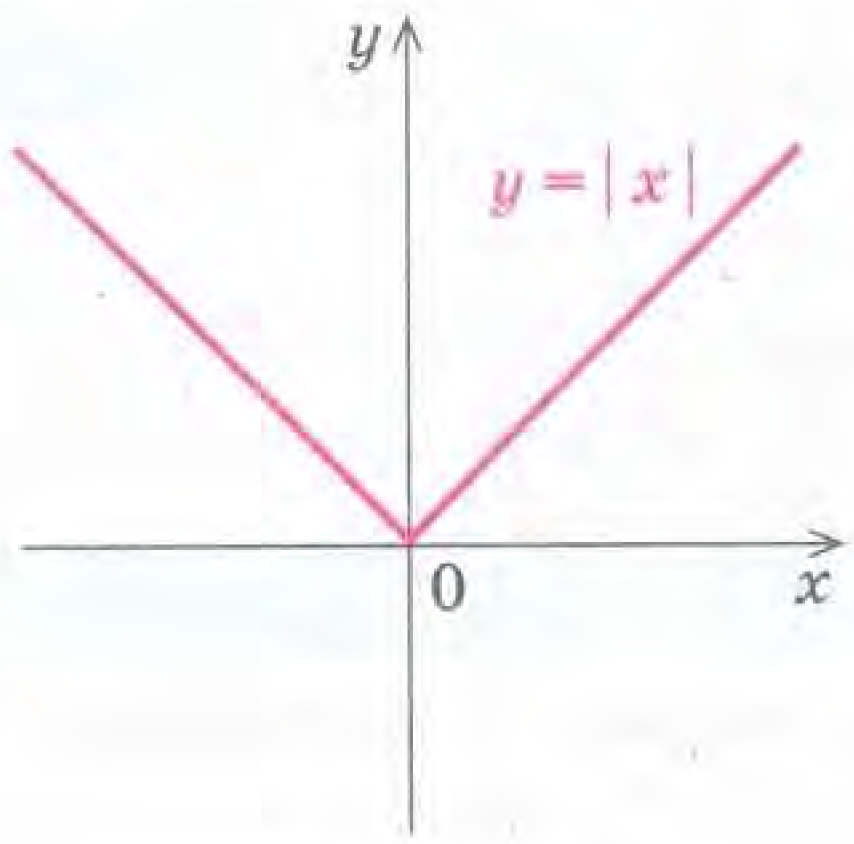


Рис. 5.9

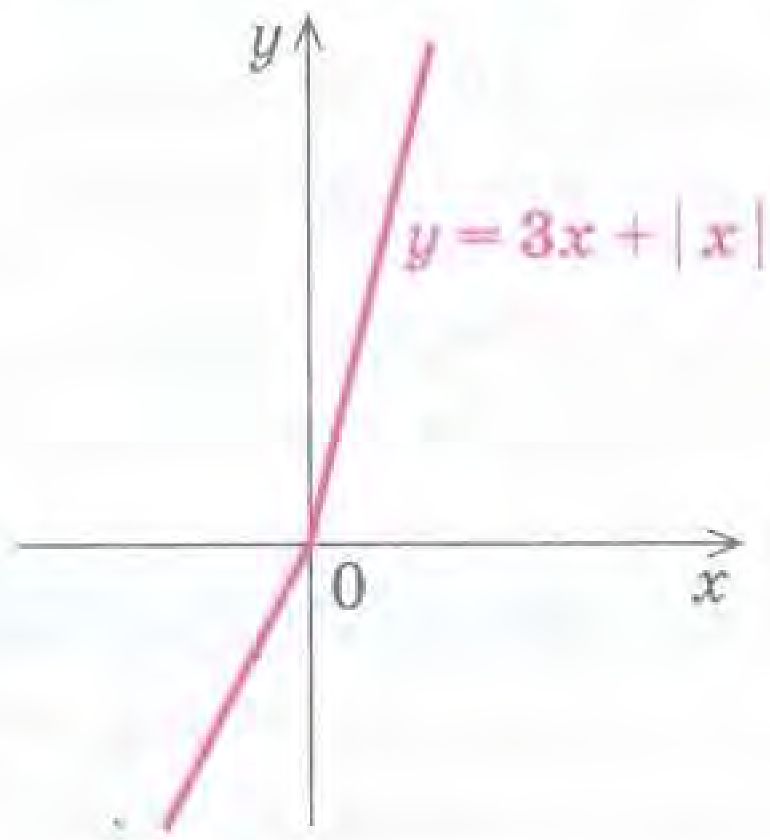


Рис. 5.10

Наведені міркування і приклади показують, що для знаходження точок екстремуму функції потрібно насамперед знайти її критичні точки. Але щоб з'ясувати, чи є відповідна критична точка точкою екстремуму, необхідно провести додаткове дослідження. Цьому часто допомагають достатні умови існування екстремуму в точці.

* У точках перегину похідна може набувати різних значень — головне, що в цій точці крива переходить з одного боку дотичної на другий. Детальніше про точки перегину див. на с. 133.

Теорема 1 (ознака максимуму функції). ***Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і при переході через точку x_0 її похідна змінює знак з «плюса» на «мінус» (тобто в деякому δ-околі точки x_0 при $x < x_0$ значення $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ значення $f'(x) < 0$), то точка x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$.***

Розглянемо заданий δ-окіл точки x_0, тобто інтервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$. За умовою похідна $f'(x) > 0$ на інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ (при $x < x_0$). Отже, функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі, а через те що $f(x)$ неперервна в точці x_0, то вона зростає і на проміжку $(x_0 - \delta;\ x_0]$. Тоді для всіх x з інтервалу $(x_0 - \delta;\ x_0)$ маємо $x < x_0$, таким чином, $f(x) < f(x_0)$. Аналогічно за умовою похідна $f'(x) < 0$ на інтервалі $(x_0;\ x_0 + \delta)$ (при $x > x_0$). Звідси випливає, що функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі, а оскільки $f(x)$ неперервна в точці x_0, то вона спадає і на проміжку $[x_0;\ x_0 + \delta)$. Тоді для всіх x з інтервалу $(x_0;\ x_0 + \delta)$ маємо $x > x_0$, отже, $f(x) < f(x_0)$. Таким чином, $f(x) < f(x_0)$ для всіх $x \neq x_0$ з деякого δ-околу точки x_0, а це й означає, що точка x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$. ○

Теорема 2 (ознака мінімуму функції). ***Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і при переході через точку x_0 її похідна змінює знак з «мінуса» на «плюс» (тобто в деякому δ-околі точки x_0 при $x < x_0$ значення $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ значення $f'(x) > 0$), то точка x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.***

Доведення цієї теореми повністю аналогічне до доведення теореми 1 (пропонуємо провести його самостійно).

Теореми 1 і 2 дають можливість зробити такий висновок: *якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і похідна $f'(x)$ змінює знак при переході через точку x_0, то x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$.*

Якщо ж функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, а її похідна $f'(x)$ не змінює знак при переході через точку x_0, то точка x_0 не може бути точкою екстремуму функції.

Дійсно, якщо, наприклад, $f'(x) > 0$ на інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ і на інтервалі $(x_0;\ x_0 + \delta)$, то функція зростає на кожному з цих інтервалів. Ураховуючи її неперервність у точці x_0 (див. доведення теореми 1), одержуємо, що для всіх $x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$, а для всіх $x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$ — нерівність $f(x_0) < f(x)$. Це означає, що на всьому проміжку $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ функція $f(x)$ зростає і точка x_0 не є точкою екстремуму. Аналогічно розглядається і випадок, коли $f'(x) < 0$ на розглянутих інтервалах. ○

Зауваження. Наведене обґрунтування дозволяє уточнити умови зростання і спадання функції.

Якщо $f'(x) \geqslant 0$ в кожній точці інтервалу $(a; b)$ (причому рівняння $f'(x) = 0$ має лише скінченну або зчисленну множину коренів), то функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі.*

Якщо $f'(x) \leqslant 0$ в кожній точці інтервалу $(a; b)$ (причому рівняння $f'(x) = 0$ має лише скінченну або зчисленну множину коренів), то функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.

Для практичного *дослідження функції на екстремуми* можна використовувати уточнений варіант схеми, наведеної на с. 53, а саме:

1. *Знайти область визначення функції.*
2. *Знайти похідну $f'(x)$.*
3. *Знайти критичні точки* (внутрішні точки області визначення, у яких $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує).
4. *Позначити критичні точки на області визначення, знайти знак похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.*
5. *Відносно кожної критичної точки визначити, чи є вона точкою максимуму або мінімуму, чи не є точкою екстремуму.*

Використання цієї схеми для дослідження функції на екстремум наведено в табл. 5 (с. 49) та прикладі 2, розглянутому далі.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Функція $y = f(x)$ означена на проміжку $(-7; 8)$. На рис. 5.11 зображено графік її похідної.

1) Укажіть проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.
2) Знайдіть критичні точки функції. Визначте, які з них є точками максимуму, які — точками мінімуму, а які не є точками екстремуму.

Розв'язання	*Коментар*
1) ▶За графіком маємо, що $f'(x) > 0$ на проміжках $(-4; 2)$ та $(6; 8)$, отже, $f(x)$ зростає на цих проміжках. Аналогічно $f'(x) < 0$ на проміжках $(-7; -4)$ та $(2; 6)$, отже, $f(x)$ спадає на цих проміжках. Оскільки в точках -4, 2 і 6 існує похідна $f'(x)$, то функція $f(x)$ неперервна в цих	1) Як відомо, *на тих проміжках, де похідна функції додатна, функція зростає, а на тих, де похідна від'ємна, — спадає*. Тому за графіком похідної з'ясовуємо проміжки, у яких похідна додатна і в яких — від'ємна. Це і будуть проміжки зростання і спадання функції.

* Зчисленність множини означає, що ми можемо встановити взаємно однозначну відповідність між елементами заданої множини і натуральними числами, тобто можемо вказати, як занумерувати всі елементи множини.

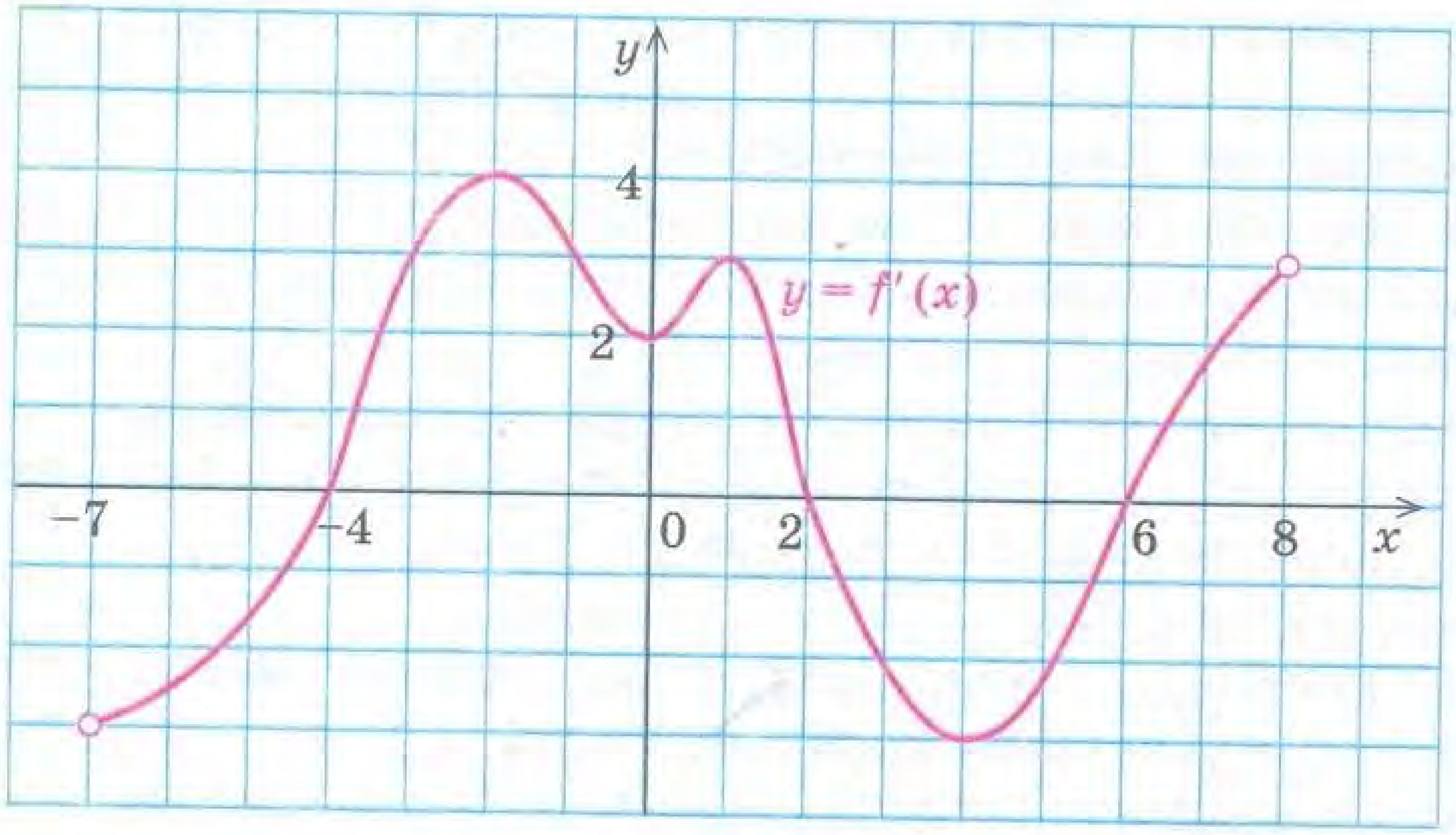


Рис. 5.11

точках, і тому їх можна включити до проміжків зростання та спадання функції.

Відповідь: $f(x)$ зростає на проміжках $[-4; 2]$ та $[6; 8)$ і спадає на проміжках $(-7; -4]$ та $[2; 6]$. ◁

2) ▶ Похідна $f'(x)$ існує на всій області визначення функції $f(x)$ і дорівнює нулю в точках -4, 2 і 6. Це внутрішні точки області визначення, отже, критичними точками будуть тільки точки -4, 2 і 6.

Оскільки похідна існує на всій області визначення функції, то функція неперервна в кожній точці області визначення.

У точках -4 і 6 похідна змінює знак з «−» на «+», отже, це точки мінімуму.

У точці 2 похідна змінює знак з «+» на «−», отже, це точка максимуму.

Відповідь: $x_{1\ min} = -4$, $x_{2\ min} = 6$, $x_{max} = 2$. ◁

2) *Критичні точки — це внутрішні точки області визначення, у яких похідна дорівнює нулю або не існує.* За графіком бачимо, що похідна $f'(x)$ існує на всій заданій області визначення. Отже, критичними точками будуть тільки ті значення x, при яких похідна дорівнює нулю.

Для визначення того, чи є критична точка точкою екстремуму, використовуємо достатні умови екстремуму: *якщо в критичній точці функція неперервна і її похідна змінює знак з «+» на «−», то ця критична точка є точкою максимуму, а якщо з «−» на «+», то точкою мінімуму.*

Приклад 2 Для функції $f(x)=x+\dfrac{25}{x}$ знайдіть проміжки монотонності, точки екстремуму та значення функції в точках екстремуму.

Розв'язання

1. Область визначення $D(f)$: $x \neq 0$, тобто $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. $f'(x)=x'+25\left(\dfrac{1}{x}\right)'=1-\dfrac{25}{x^2}$.
3. Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$.

   $f'(x) = 0$. Тоді $1-\dfrac{25}{x^2}=0$, отже, $x^2 = 25$, тобто $x = 5$ та $x = -5$ — критичні точки.
4. Відмічаємо критичні точки на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знак $f'(x)$ у кожному з одержаних проміжків (рис. 5.12).

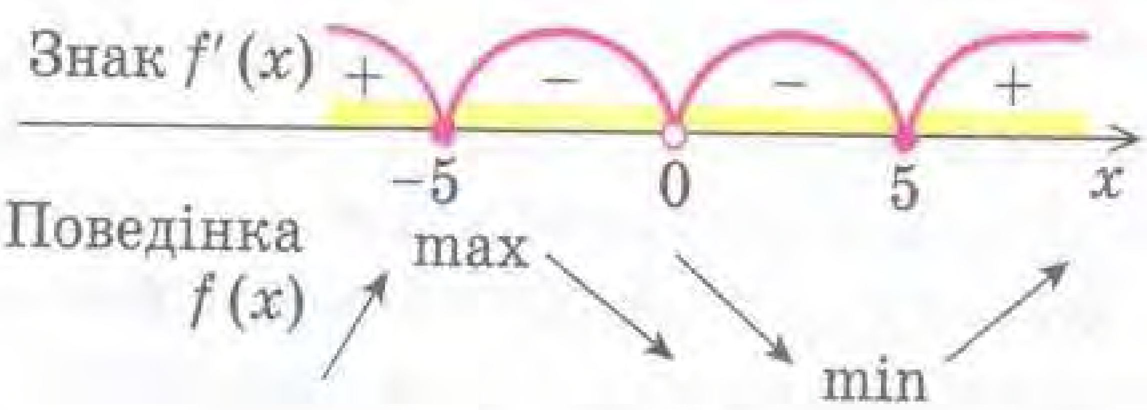


Рис. 5.12

Одержуємо, що функція $f(x)$ зростає на проміжках $(-\infty; -5]$ та $[5; +\infty)$ і спадає на проміжках $[-5; 0)$ і $(0; 5]$.

У точці -5 похідна змінює знак з плюса на мінус, отже, це точка максимуму; у точці 5 похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже, це точка мінімуму:

$$x_{\max} = -5,\ x_{\min} = 5.$$

Тоді $y_{\max} = f(-5) = -10$,

$$y_{\min} = f(5) = 10.$$

Коментар

Досліджувати функцію на монотонність та екстремум можна за схемою:

1. *Знайти область визначення функції.*
2. *Знайти похідну* $f'(x)$.
3. *Знайти критичні точки* (тобто внутрішні точки області визначення, у яких $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує).
4. *Позначити критичні точки на області визначення, знайти знак похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.*
5. *Відносно кожної критичної точки визначити, чи вона є точкою максимуму або мінімуму, чи не є точкою екстремуму.*

Функція неперервна в кожній точці області визначення (вона диференційовна в кожній точці області визначення) і тому, записуючи проміжки зростання і спадання функції, критичні точки можна включити до цих проміжків. Для з'ясування того, чи є критична точка точкою екстремуму, використовуємо достатні умови екстремуму.

Зауваження. Результати дослідження функції на монотонність і екстремуми зручно фіксувати не тільки у вигляді схеми, зображеної на рис. 5.12, а й у вигляді спеціальної таблиці:

x	$(-\infty; -5)$	-5	$(-5; 0)$	$(0; 5)$	5	$(5; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	–	0	+
$f(x)$	↗	−10	↘	↘	10	↗
		max			min	

Приклад 3* Знайдіть проміжки монотонності, точки екстремуму та екстремуми функції:

1) $f(x) = x^3 - 12\,|x + 1|$; 2) $\varphi(x) = 4\cos x - \cos 2x$.

Коментар

Дослідження заданих функцій проведемо за схемою, наведеною на с. 59.

У завданні 1 використаємо означення модуля і знайдемо похідну при $x < -1$ і при $x > -1$. Щоб з'ясувати, чи існує похідна $f'(x)$ при $x = -1$, спробуємо знайти значення $f'(-1)$ за обома формулами (див. розв'язання) і порівняти їх*. Щоб знайти точки, у яких $f'(x) = 0$, прирівняємо до нуля значення похідної $f'(x)$ при $x < -1$ і при $x > -1$ і врахуємо відповідні обмеження для x.

У завданні 2 врахуємо, що рівняння $\varphi'(x) = 0$ — це тригонометричне рівняння, яке має нескінченну множину коренів, тобто функція $\varphi(x)$ має нескінченну кількість критичних точок. Через це позначити всі критичні точки на області визначення функції (як це пропонується в схемі дослідження функції) ми не в змозі. У такому разі можна використати достатні ознаки зростання і спадання функції (розв'язати нерівності $\varphi'(x) > 0$ та $\varphi'(x) < 0$) або якщо функція $\varphi'(x)$ є періодичною, провести дослідження поведінки $\varphi'(x)$ на одному періоді, а потім повторити результат через період. У випадку, коли $\varphi'(x)$ означена на всьому періоді і ми знаємо проміжки, де справедлива нерівність $\varphi'(x) > 0$, та точки, де виконується рівність $\varphi'(x) = 0$, для всіх точок періоду, що залишилися, обов'язково буде справджуватися нерівність $\varphi'(x) < 0$.

Розв'язання

1) ▶ Область визначення: $D(f) = \boldsymbol{R}$. Запишемо задану функцію так:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x - 12 \text{ при } x \geqslant -1, \\ x^3 + 12x + 12 \text{ при } x < -1. \end{cases}$$

* Фактично ми будемо порівнювати значення так званих односторонніх похідних функції $f(x)$ у точці (-1). Ці похідні означають аналогічно до односторонніх границь функції (див. с. 102).

Тоді

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-12 \text{ при } x>-1, & (1)\\ 3x^2+12 \text{ при } x<-1. & (2)\end{cases}$$

Похідна $f'(x)$ не існує в точці $x=-1$, оскільки значення $f'(-1)$, обчислені за формулами (1) і (2), різні ($-9 \neq 15$), отже, $x=-1$ — критична точка функції $f(x)$. Значення $f'(x)$, обчислене за формулою (2), не може дорівнювати нулю ($3x^2+12 \neq 0$). Для формули (1) маємо $3x^2-12=0$, тобто $x=2$ та $x=-2$, але, ураховуючи умову $x>-1$, одержуємо, що тільки $x=2$ є критичною точкою. Отже, функція $f(x)$ має дві критичні точки: 2 і -1.

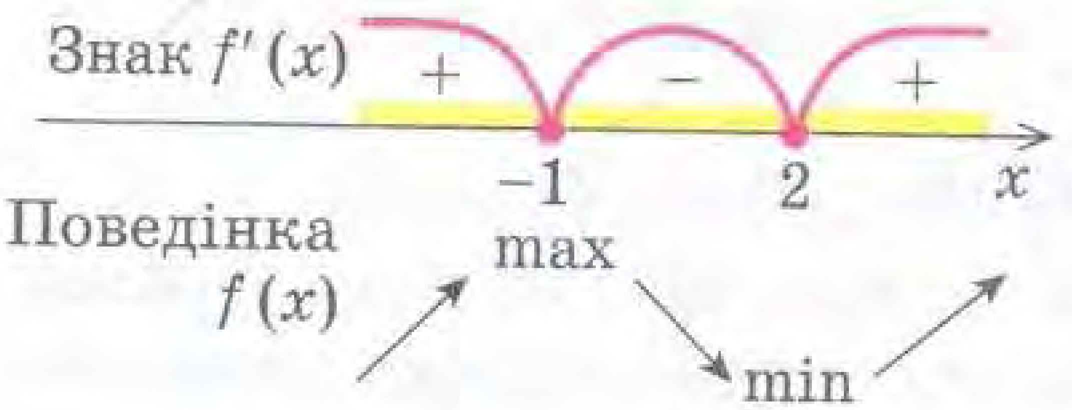


Рис. 5.13

Відмічаємо критичні точки на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знак $f'(x)$ у кожному з проміжків (рис. 5.13). Одержуємо, що функція $f(x)$ зростає на проміжках $(-\infty; -1]$ та $[2; +\infty)$ і спадає на проміжку $[-1; 2]$.

У точці (-1) похідна змінює знак з плюса на мінус, отже, це точка максимуму. У точці 2 похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже, це точка мінімуму. Тоді $x_{max}=-1$, $y_{max}=f(-1)=-1$, $x_{min}=2$, $y_{min}=f(2)=-28$. ◁

2) ▶ Область визначення: $D(\varphi)=\boldsymbol{R}$. Похідна: $\varphi'(x)=(4\cos x-\cos 2x)'=$ $=-4\sin x+2\sin 2x=-4\sin x+4\sin x\cos x=4\sin x(\cos x-1)$.

Критичні точки: похідна $\varphi'(x)$ існує на всій області визначення функції $\varphi(x)$, отже, критичними точками будуть всі значення x, для яких $\varphi'(x)=0$. $4\sin x(\cos x-1)=0$. Тоді $\sin x=0$ або $\cos x=1$. Отже, $x=\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$, або $x=2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. (Значення $2\pi k$ дає також формула πn (при $n=2k$), тому всі критичні точки можна задати формулою πn, $n\in\boldsymbol{Z}$.)

Функція $\varphi(x)$ зростає в тих точках її області визначення, де $\varphi'(x)>0$. Маємо:

$$4\sin x(\cos x-1)>0, \text{ тоді } \begin{cases}\sin x>0,\\ \cos x>1,\end{cases} \text{ або } \begin{cases}\sin x<0,\\ \cos x<1.\end{cases}$$

Перша з цих систем не має розв'язків ($\cos x$ не може бути більшим за 1), друга — має розв'язки (рис. 5.14): $\pi+2\pi k<x<2\pi+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Похідна $\varphi'(x)=4\sin x(\cos x-1)$ є періодичною функцією (відносно змінної x) з періодом 2π (це спільний період для функцій $\sin x$ і $\cos x$). На періоді $[0; 2\pi]$ нерівність $\varphi'(x)>0$ виконується на проміжку $(\pi; 2\pi)$, а рівність $\varphi'(x)=0$ в точках πn, тобто в точках 0, π і 2π. Тоді нерівність $\varphi'(x)<0$ виконується на проміжку $(0; \pi)$, а через те що похідна $\varphi'(x)$ періодична, то

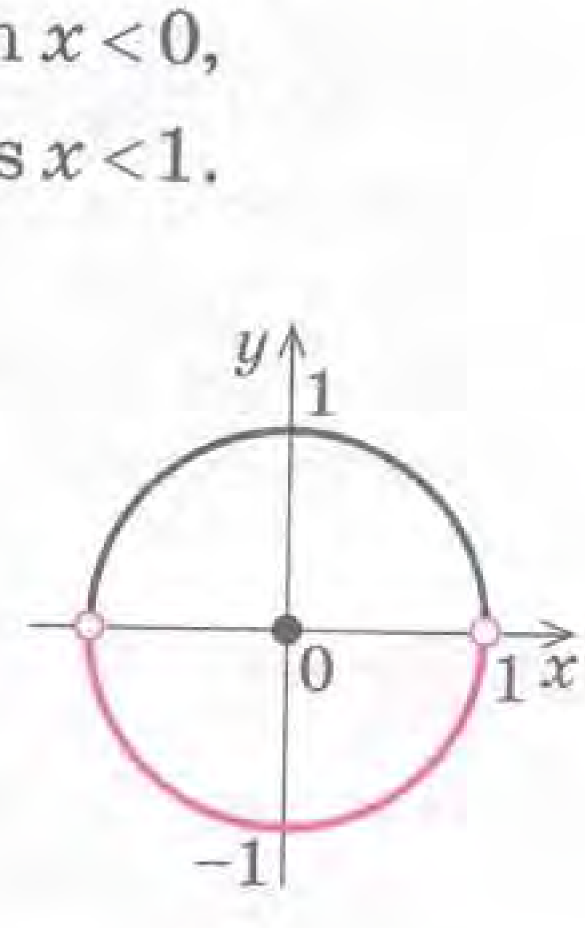


Рис. 5.14

і на всіх проміжках $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Ураховуючи умови зростання і спадання функції $\varphi(x)$ і те, що вона неперервна на всій числовій прямій (диференційовна в усіх точках), одержуємо, що функція $\varphi(x)$ зростає на кожному з проміжків $[\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, і спадає на кожному з проміжків $[2\pi k;\ \pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Оскільки похідна $\varphi'(x)$ є періодичною функцією з періодом 2π, то через проміжок довжиною 2π знаки похідної $\varphi'(x)$ повторюються (рис. 5.15).

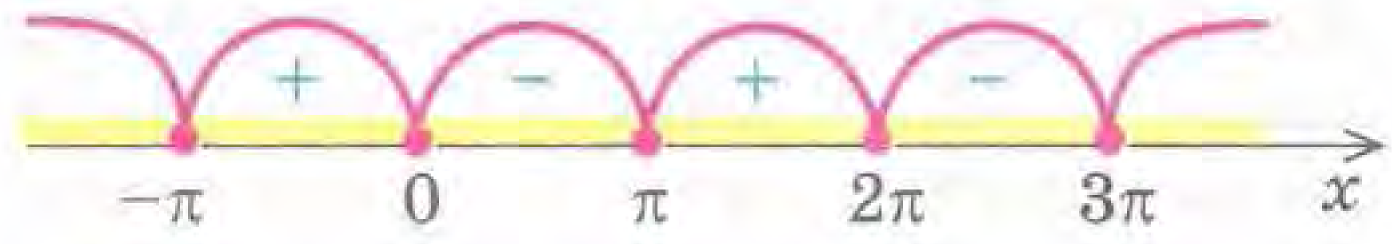


Рис. 5.15

У точці 0 похідна $\varphi'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, отже, $x = 0$ — точка максимуму. Ураховуючи, що поведінка $\varphi'(x)$ повторюється через 2π, маємо $x_{max} = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Тоді $y_{max} = \varphi(2\pi k) = 4\cos(2\pi k) - \cos(4\pi k) = 3$.

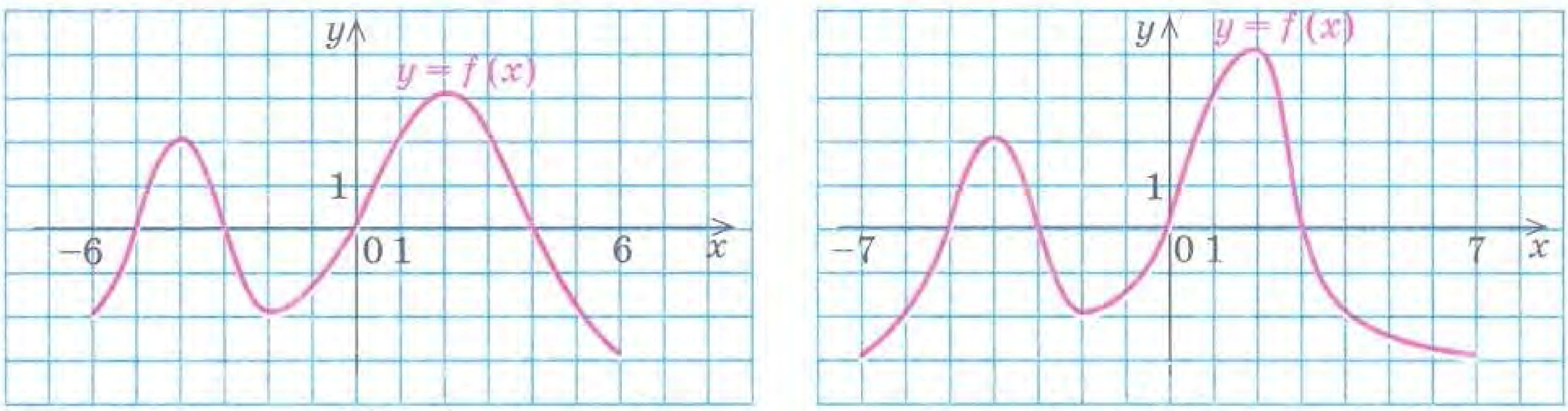
У точці π похідна $\varphi'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, отже, $x = \pi$ — точка мінімуму, а враховуючи, що поведінка $\varphi'(x)$ повторюється через 2π, маємо $x_{min} = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Тоді $y_{min} = \varphi(\pi + 2\pi k) = 4\cos(\pi + 2\pi k) - \cos(2\pi + 4\pi k) = -5$. ◁

Запитання для контролю

1. Дайте означення зростаючої та спадної на множині функції. Наведіть приклади таких функцій та їх графіків.
2. а) Сформулюйте достатні умови зростання та спадання функції. Наведіть приклади їх застосування.
   б*) Обґрунтуйте достатні умови зростання та спадання функції.
3*. Сформулюйте і обґрунтуйте умову сталості функції на інтервалі.
4. Зобразіть графік функції, що має екстремуми. Дайте означення точок екстремуму функції та її екстремумів.
5. Які точки називають критичними?
6. а) Сформулюйте необхідну умову екстремуму функції.
   б*) Обґрунтуйте необхідну умову екстремуму функції.
7. а) Сформулюйте достатню умову існування екстремуму в точці.
   б*) Обґрунтуйте достатню умову існування екстремуму в точці.
8. За якою схемою можна досліджувати функцію на монотонність та екстремуми? Наведіть приклад такого дослідження.

Вправи

1°. На рис. 5.16 зображено графік функції $y = f(x)$ (на рис. 5.16, *а*, функція задана на проміжку $[-6; 6]$, а на рис. 5.16, *б* — на проміжку $[-7; 7]$). Укажіть проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.



а *б*

Рис. 5.16

2°. Відомо, що похідна деякої функції $y = f(x)$, заданої на множині всіх дійсних чисел, має такі знаки, як показано на рис. 5.17. Укажіть проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.

3. Функція $y = f(x)$ означена на проміжку $(-6; 3)$. На рис. 5.18 зображено графік її похідної. Укажіть проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.

Рис. 5.17

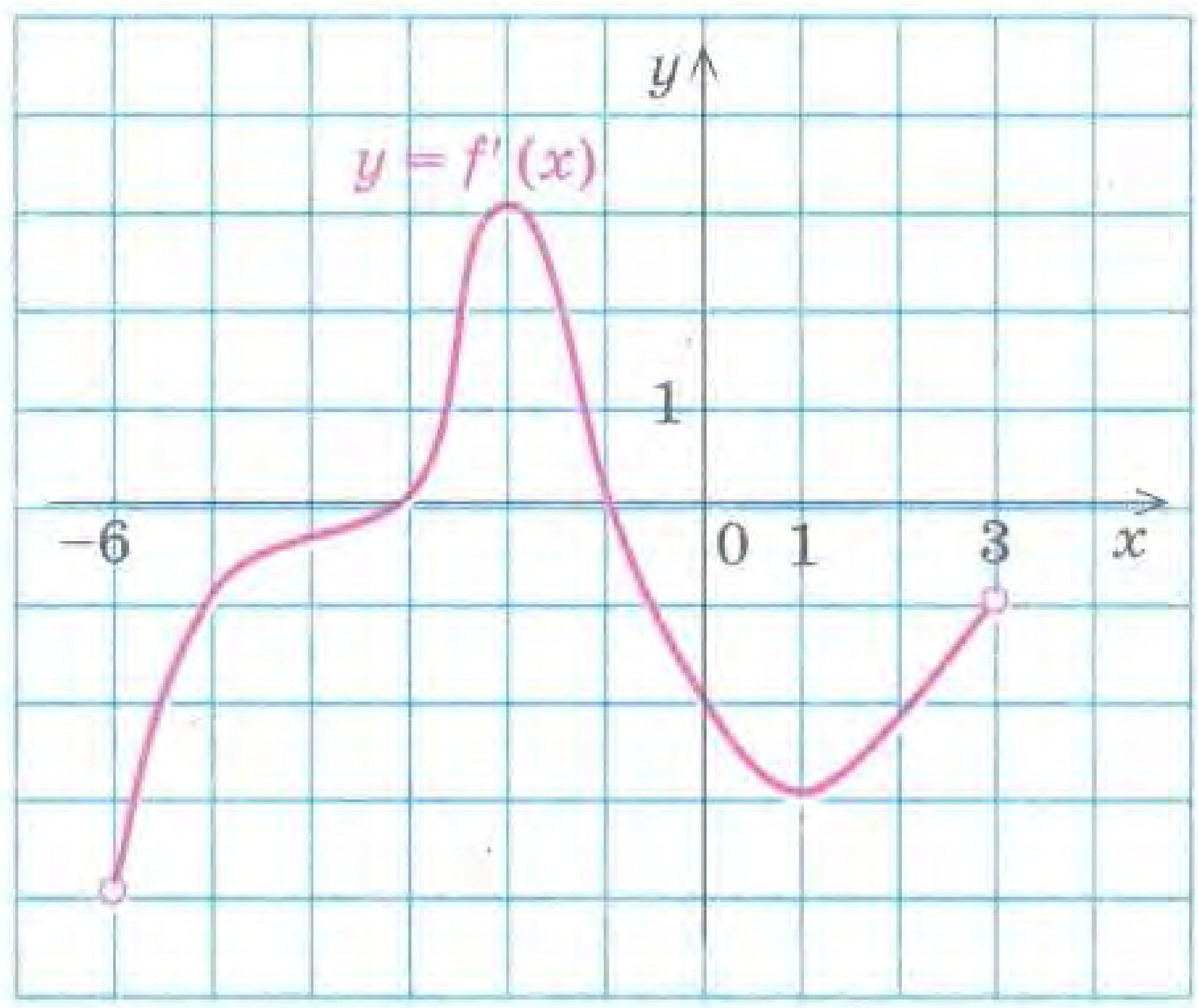


Рис. 5.18

4. Доведіть, що задана функція зростає на всій області визначення:
1°) $f(x) = x^3 + 5x$; 2) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 7$;
3) $f(x) = 2x + \cos x$; 4) $f(x) = \sin x + 3x + 2$.

5. Доведіть, що задана функція спадає на всій області визначення:
1°) $y = -x^3 - 3x$; 2) $f(x) = -x^7 + x^4 - x + 2$;
3) $f(x) = \cos x - 6x$; 4) $f(x) = \sin x - 2x + 1$.

Знайдіть проміжки зростання і спадання функцій **(6, 7)**.

6. 1°) $f(x) = x^2 - 2x$; 2) $f(x) = x^3 - 24x + 2$; 3) $f(x) = x^4 - 2x^2$;
4) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; 5) $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$; 6*) $f(x) = \sqrt[7]{x^3}$.

7. 1) $y = x^3 - 27x + 1$; 2) $y = x - x^5$;
3*) $y = x + 2\cos x$; 4*) $y = x - \sin 2x$.

8*. Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція зростає на всій числовій прямій:

1) $f(x) = x^3 - 3ax$; 2) $f(x) = ax + \cos x$; 3) $f(x) = x^3 + ax^2 + 3ax - 5$.

9*. Доведіть, що рівняння має єдиний корінь, і знайдіть цей корінь.

1) $2x^3 + 3x - 5 = 0$; 2) $x^3 - x^2 + x = 6$;

3) $5x - \cos 3x - 5\pi = 1$; 4) $x^3 - x^5 - x = 1$.

10°. За графіком функції $y = f(x)$, зображеним на рис. 5.16, знайдіть точки максимуму і мінімуму функції $f(x)$. Чи існує похідна в кожній із цих точок? Якщо існує, то чому дорівнює її значення?

11°. Відомо, що похідна деякої функції $y = f(x)$, заданої на множині всіх дійсних чисел, має такі знаки, як показано на рис. 5.17, і $f'(-5) = f'(5) = 0$. Укажіть критичні точки, точку максимуму і точку мінімуму цієї функції.

12°. Користуючись даними про похідну $f'(x)$, наведеними в таблиці

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; 5)$	5	$(5; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+	0	+

укажіть:

1) проміжки зростання і спадання функції $f(x)$;

2) точки максимуму і точки мінімуму функції $f(x)$.

(Область визначення функції $D(f) = \boldsymbol{R}$).

13. Функція $y = f(x)$ означена на проміжку $(-6; 3)$. На рис. 5.18 зображено графік її похідної. Знайдіть критичні точки функції. Визначте, які з них є точками максимуму, які — точками мінімуму, а які не є точками екстремуму.

Дослідіть задані функції на екстремуми **(14, 15)**.

14°. 1) $f(x) = 1 + 12x - x^3$; 2) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$;

3) $f(x) = x^4 - 8x^3$; 4) $f(x) = 5x - x^5$.

15. 1) $y = \sqrt{1 - x^2}$; 2) $y = x - \sqrt{x}$; 3) $y = x + \dfrac{1}{x}$; 4) $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$.

Визначте проміжки монотонності, точки екстремуму функції та значення функції в точках екстремуму **(16, 17)**.

16. 1°) $f(x) = x^2 - 6x + 5$; 2°) $f(x) = x^4 - 2x^2$;

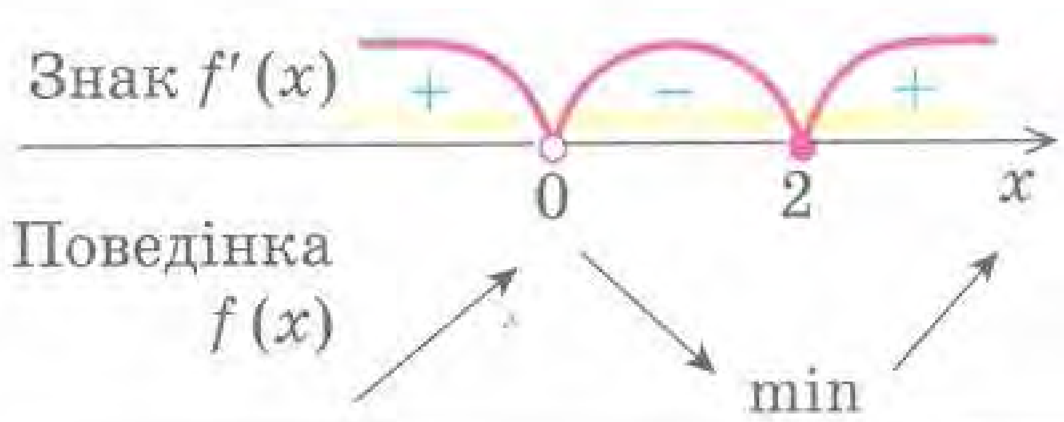
3) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$; 4) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.

17*. 1) $y = \dfrac{x}{x^2 + 4}$; 2) $y = x^2 - |x| - 1$;

3) $y = 6x^3 - 2|x - 1|$; 4) $y = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

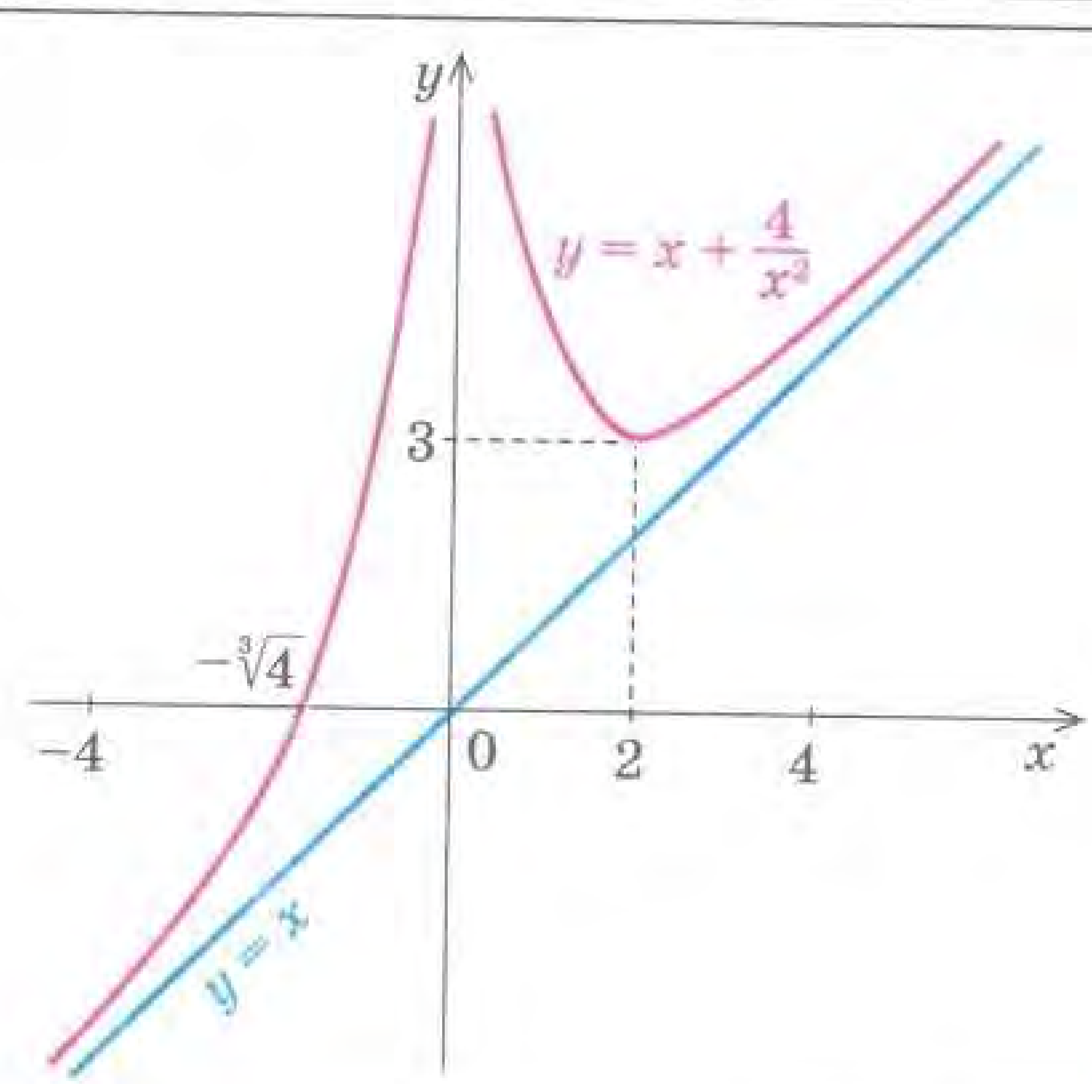
5.2. ЗАГАЛЬНА СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ДЛЯ ПОБУДОВИ ЇЇ ГРАФІКА

Таблиця 6

Схема дослідження функції	Приклад
1. Знайти область визначення функції.	Побудуйте графік функції $$f(x)=x+\frac{4}{x^2}.$$ ▶ 1. Область визначення: $x \neq 0$ $(D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty))$.
2. З'ясувати, чи є функція парною або непарною (чи періодичною*).	2. Функція $f(x)$ ні парна, ні непарна, оскільки $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$.
3. Точки перетину графіка з осями координат (якщо можна знайти).	3. Графік не перетинає вісь Oy $(x \neq 0)$. На осі Ox $y = 0$: $x+\frac{4}{x^2}=0$, $x^3 = -4$, $x=-\sqrt[3]{4}$ $(\approx -1{,}6)$ — абсциса точки перетину графіка з віссю Ox.
4. Похідна і критичні точки функції.	4. $f'(x)=x'+\left(\frac{4}{x^2}\right)'=1-\frac{8}{x^3}$. Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$ (отже, функція $f(x)$ неперервна в кожній точці своєї області визначення). $f'(x) = 0$; $1-\frac{8}{x^3}=0$. При $x \neq 0$ маємо: $x^3 = 8$; $x = 2$ — критична точка.
5. Проміжки зростання і спадання функції та точки екстремуму (і значення функції в цих точках).	5. Позначимо критичні точки на області визначення і знайдемо знак похідної та характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення. 

* Найчастіше періодичність доводиться встановлювати для тригонометричних функцій.

Закінчення табл. 6

<table>
<tr><td></td><td>Отже, функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty;\ 0)$ та $[2;\ +\infty)$ і спадає на проміжку $(0;\ 2]$. Оскільки в критичній точці 2 похідна змінює знак з «–» на «+», то $x = 2$ — точка мінімуму: $x_{\min} = 2$. Тоді $y_{\min} = f(2) = 3$.</td></tr>
<tr><td>6. Поведінка функції на кінцях проміжків області визначення (цей етап не входить до мінімальної схеми дослідження функції).</td><td>6. $-\infty$ … 0 … $+\infty$, x
При $x \to 0$ справа (і при $x \to 0$ зліва)
$$f(x) = x + \frac{4}{x^2} \to \left(\frac{4}{+0}\right) \to +\infty^{*}.$$
При $x \to -\infty$ (і при $x \to +\infty$) значення $\frac{4}{x^2} \to 0$, тоді $f(x) \to x^{**}$ (тобто при
$x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$
і при $x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$).</td></tr>
<tr><td>7. Якщо необхідно, знайти координати додаткових точок, щоб уточнити поведінку графіка функції.</td><td>7.
<table><tr><td>x</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>4</td><td>–4</td></tr><tr><td>y</td><td>$16\frac{1}{2}$</td><td>$15\frac{1}{2}$</td><td>$4\frac{1}{4}$</td><td>$-3\frac{3}{4}$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>8. На підставі проведеного дослідження побудувати графік функції.</td><td>8.

</td></tr>
</table>

* У цьому випадку говорять, що $x = 0$ — вертикальна асимптота графіка функції $f(x)$ (див. с. 117).

** У цьому випадку говорять, що $y = x$ — похила асимптота графіка функції $f(x)$.

Пояснення й обґрунтування

Для побудови графіка функції (особливо якщо йдеться про побудову графіків невідомих функцій) доцільно використовувати схему дослідження тих властивостей функції, які допомагають скласти певне уявлення про вигляд її графіка. Якщо таке уявлення складене, то можна будувати графік функції за знайденими характерними точками. Фактично ми будемо користуватися схемою дослідження функції, наведеною в підручнику для 10 класу, тільки для дослідження функції на зростання та спадання й екстремуми використаємо похідну.

Отже, для побудови графіка функції її можна досліджувати за схемою:

1) *знайти область визначення функції*;
2) *дослідити функцію на парність (або непарність) та періодичність*;
3) *знайти точки перетину графіка з осями координат*;
4) *знайти похідну і критичні точки функції*;
5) *знайти проміжки зростання, спадання та точки екстремуму (і значення функції в цих точках)*;
6) *дослідити поведінку функції на кінцях проміжків області визначення*;
7) *якщо необхідно, знайти координати додаткових точок*;
8) *на підставі проведеного дослідження побудувати графік функції*.

Ця схема є орієнтовною, тому не завжди її потрібно виконувати повністю. Наприклад, не завжди можна точно знайти точки перетину графіка з віссю Ox, навіть якщо ми знаємо, що такі точки існують. Також буває складно дослідити поведінку функції на кінцях проміжків області визначення. У такому випадку поведінку графіка функції можна уточнити, знайшовши координати точок, абсциси яких обирають так, щоб вони наближалися до кінців проміжків області визначення.

Охарактеризуємо особливості виконання кожного з указаних етапів дослідження функції й особливості врахування одержаних результатів під час побудови графіка функції.

1) Перш за все потрібно з'ясувати і записати *область визначення* функції. Якщо немає спеціальних обмежень, то функцію вважають заданою при всіх значеннях аргументу, при яких існують усі вирази, що входять до запису функції. Обмеження, які потрібно враховувати при знаходженні області визначення функції, наведено в табл. 7.

Після знаходження області визначення функції часто буває корисним відмітити її на осі абсцис. Якщо область визначення — уся числова пряма, то ніяких відміток можна не виконувати. Якщо ця область — проміжок числової прямої, то корисно провести вертикальні прямі через його кінці. Ці прямі обмежать смугу, у якій буде розташований графік функції. Якщо окремі точки не входять до області визначення функції, то доцільно відмітити їх на осі абсцис і провести через них вертикальні прямі (які не будуть перетинати графік функції).

Таблиця 7

	Вид функції	Обмеження, які враховують при знаходженні області визначення функції*	
1	$y=\frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x)\neq 0$	Знаменник дробу не дорівнює нулю
2	$y=\sqrt[2k]{f(x)}$ $(k\in N)$	$f(x)\geqslant 0$	*Під знаком кореня парного степеня може стояти лише невід'ємний вираз*
3	$y=\operatorname{tg}(f(x))$	$f(x)\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in Z)$	*Під знаком тангенса може стояти лише вираз, що не дорівнює* $\frac{\pi}{2}+\pi k$ *(k — ціле)*
4	$y=\operatorname{ctg}(f(x))$	$f(x)\neq\pi k$ $k\in Z$	*Під знаком котангенса може стояти лише вираз, що не дорівнює* πk *(k — ціле)*
5	$y=\arcsin(f(x))$	$\lvert f(x)\rvert\leqslant 1$, тобто $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$	*Під знаками арксинуса і арккосинуса може стояти лише вираз, модуль якого менше або дорівнює одиниці*
6	$y=\arccos(f(x))$		
7	$y=x^{\alpha}$		
	а) α — *натуральне*	x — будь-яке число	
	б) α — *ціле від'ємне або нуль*	$x\neq 0$	
	в) α — *додатне неціле число*	$x\geqslant 0$	
	г) α — *від'ємне неціле число*	$x>0$	

2) Якщо з'ясується, що задана *функція є парною (або непарною)*, то можна дослідити її властивості та побудувати графік тільки при $x\geqslant 0$, а потім відобразити його симетрично відносно осі Oy (для непарної функції — симетрично відносно початку координат). Якщо ж функція періодична, то достатньо побудувати її графік на одному відрізку завдовжки T, а потім повторити його на кожному з проміжків довжиною T (тобто паралельно перенести графік уздовж осі Ox на Tk, де k — ціле число).

* Записуючи ці обмеження, уважаємо, що функції $f(x)$ і $g(x)$ означені на розглядуваній множині.

Для обґрунтування парності функції достатньо перевірити, що для всіх x з її області визначення $f(-x) = f(x)$; для непарності — перевірити виконання рівності $f(-x) = -f(x)$, а для періодичності — рівності $f(x + T) = f(x)$, де $T \neq 0$.

3) Щоб знайти точки перетину графіка з осями координат, ураховуємо, що на осі Oy значення $x = 0$ (тоді $y = f(0)$, звичайно, якщо це значення існує). На осі Ox значення $y = 0$, і тому, щоб знайти відповідні значення x, прирівнюємо задану функцію до нуля і знаходимо корені одержаного рівняння (якщо це рівняння вдається розв'язати).
4) Далі корисно знайти похідну і критичні точки функції — внутрішні точки її області визначення, у яких похідна дорівнює нулю або не існує. На всіх проміжках, де існує похідна заданої функції, ця функція є неперервною, і її графік на кожному з проміжків буде нерозривною лінією.
5) Використовуючи похідну і критичні точки функції, знаходимо проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції (і значення функції в цих точках). Для цього доцільно відмітити критичні точки функції на її області визначення і знайти знаки похідної в кожному з проміжків, на які розбивається область визначення. Висновок про зростання або спадання функції на проміжку між критичними точками часто можна зробити, порівнявши значення функції на кінцях цього проміжка (замість знаходження знака похідної).

   Результати цього етапу дослідження можна оформити у вигляді спеціальної таблиці:

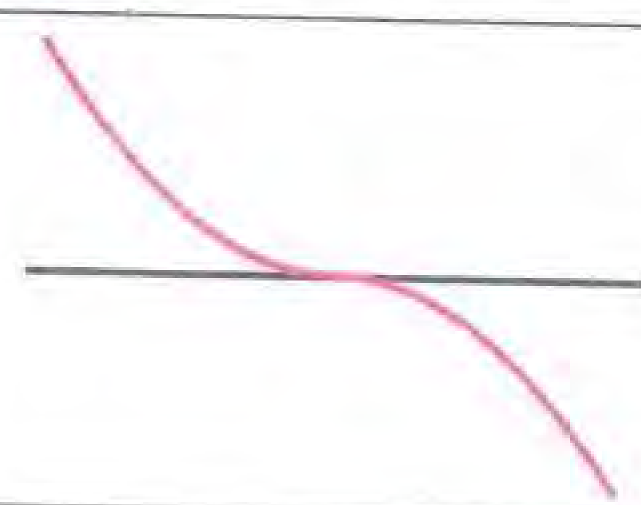
Значення x
Знаки і значення $f'(x)$
Поведінка і значення $f(x)$

Після знаходження значення функції в кожній критичній точці x_0 будуємо відповідні точки на координатній площині, ураховуючи поведінку графіка функції в околі точки x_0 (табл. 8).

Таблиця 8

<table>
<tr><th>Критична точка x_0</th><th>Поведінка $f'(x)$</th><th>Орієнтовний вид графіка функції $f(x)$ в околі точки x_0</th></tr>
<tr><td rowspan="2">x_0 — точка максимуму</td><td>$f'(x_0) = 0$,
$f'(x)$ змінює знак у точці x_0 з плюса на мінус</td><td></td></tr>
<tr><td>$f'(x_0)$ не існує,
$f'(x)$ змінює знак у точці x_0 з плюса на мінус</td><td></td></tr>
</table>

Закінчення табл. 8

Критична точка x_0	Поведінка $f'(x)$	Орієнтовний вид графіка функції $f(x)$ в околі точки x_0
x_0 — точка мінімуму	**$f'(x_0) = 0$,** *$f'(x)$ змінює знак у точці x_0 з мінуса на плюс*	
	$f'(x_0)$ не існує, *$f'(x)$ змінює знак у точці x_0 з мінуса на плюс*	
x_0 — критична точка, у якій похідна дорівнює нулю і яка не є точкою екстремуму	**$f'(x_0) = 0$,** *$f'(x)$ зліва і справа від точки x_0 додатна*	
	$f'(x_0) = 0$, *$f'(x)$ зліва і справа від точки x_0 від'ємна*	

При зображенні графіка функції в околі точки x_0 враховано геометричний зміст похідної: якщо $f'(x_0) = 0$, то в точці з абсцисою x_0 до графіка функції $y = f(x)$ можна провести дотичну, паралельну осі Ox. Якщо ж значення $f'(x_0)$ не існує, то в точці з абсцисою x_0 графік матиме злом (або дотичну до графіка функції в цій точці не можна провести, або дотична перпендикулярна до осі Ox).

6) Для того щоб скласти краще уявлення про вигляд графіка функції, доцільно дослідити *поведінку функції на кінцях області визначення.* При цьому слід розглянути декілька випадків.

а) Біля точки $x = a$, яка обмежує проміжок області визначення, значення функції прямує до нескінченності. Наприклад, у функції $y = \frac{1}{x}$ область визначення — $x \neq 0$, тобто $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, і якщо значення x прямує до нуля, то значення y прямує до нескінченності (рис. 5.19).

Як було зазначено в п. 1, через точку $x = a$ вже проведено вертикальну пряму. Біля точки $x = a$ графік функції прямуватиме вгору або вниз, наближаючись до цієї прямої. Її називають *вертикальною асимптотою*[*] графіка функції. Щоб з'ясувати, угору чи вниз прямуватиме графік функції, достатньо визначити знаки функції зліва і справа від точки a. Характерні випадки зображено на рис. 5.20, 5.21.

б) Якщо *гранична точка $x = a$ входить до області визначення функції*, то потрібно знайти значення функції в точці a і побудувати одержану точку. Типовий приклад — точка $x = 0$ для функції $y=\sqrt{x}$ (рис. 5.22).

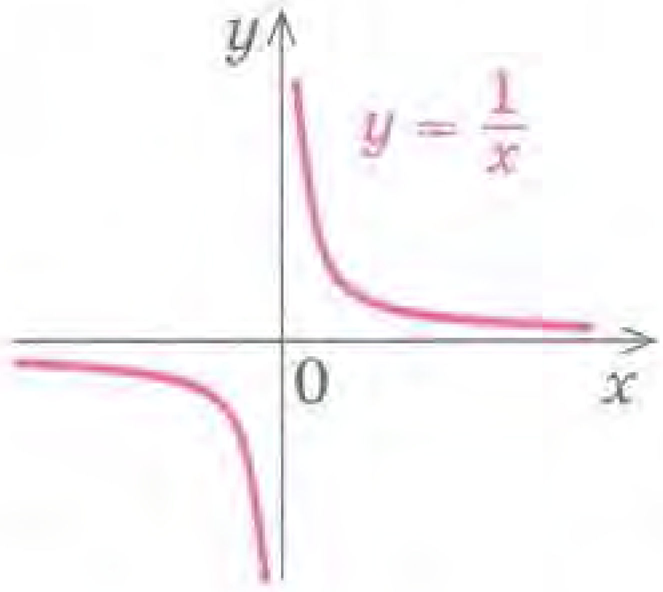


Рис. 5.19

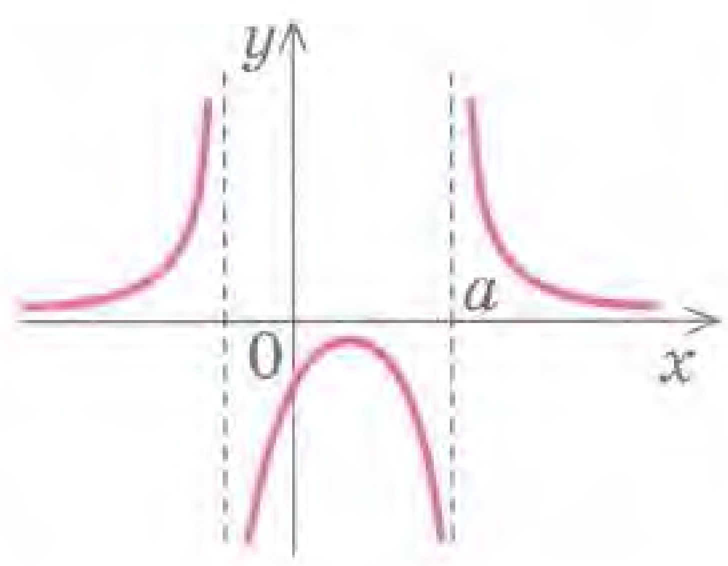


Рис. 5.20

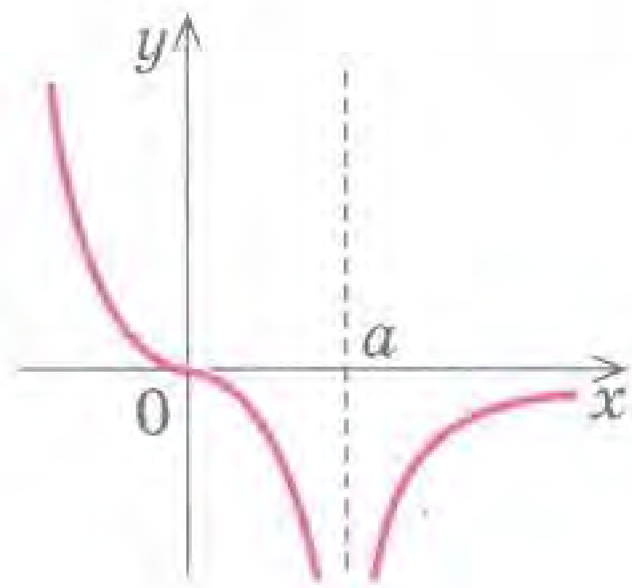


Рис. 5.21

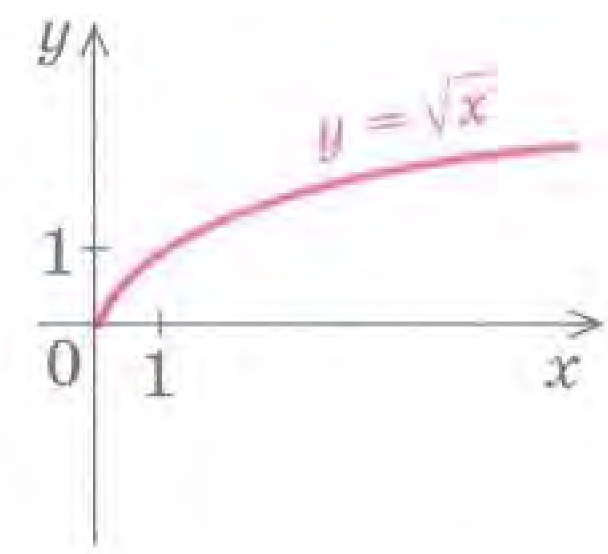


Рис. 5.22

в) До області визначення функції входить нескінченний проміжок (або вся числова пряма, або проміжки $(-\infty;\ a)$ чи $(a;\ +\infty)$). У цьому випадку корисно уявити собі поведінку графіка функції при $x \to -\infty$ або при $x \to +\infty$. Наприклад, для функції $y=\frac{1}{x}$ маємо: при $x \to +\infty$ значення $y \to 0$, залишаючись додатним (це можна записати так: $y \to +0$), при $x \to -\infty$ значення $y \to 0$, залишаючись від'ємним (це можна записати так: $y \to -0$). У цьому випадку говорять, що пряма $y = 0$ — *горизонтальна асимптота* графіка функції (див. рис. 5.19).

Інколи при $x \to +\infty$ чи при $x \to -\infty$ можна виділити похилу пряму, до якої необмежено наближається графік функції, — так звану *похилу асимптоту*, яка теж дозволяє краще уявити поведінку графіка функції (див. приклад у табл. 6).

7) Якщо після вказаного дослідження ще потрібно уточнити поведінку графіка функції (наприклад, у тому випадку, коли на якомусь нескінченному проміжку області визначення функція зростає від $-\infty$ до $+\infty$), то слід знайти координати додаткових точок графіка, узявши довільні значення аргументу з потрібного проміжку.

---

[*] Пряму, до якої необмежено наближається крива при віддаленні її в нескінченність, називають асимптотою цієї кривої (докладніше див. на с. 116).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Побудуйте графік функції $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

Розв'язання

1. Область визначення: $D(f) = \boldsymbol{R}$.
2. Функція не є ні парною, ні непарною, оскільки $f(-x) = -x^3 + 3x - 3 \neq f(x)$ (і $f(-x) \neq -f(x)$).
3. Точка перетину графіка з віссю Oy:

$$x = 0,\ y = f(0) = -3.$$

4. Похідна і критичні точки.
$f'(x) = 3x^2 - 3$. Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$.
$f'(x) = 0$. Тоді $3x^2 - 3 = 0$, отже, $x^2 = 1$, тобто $x = 1$ та $x = -1$ — критичні точки.
5. Відмічаємо критичні точки на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знак $f'(x)$ у кожному з одержаних проміжків (рис. 5.23).

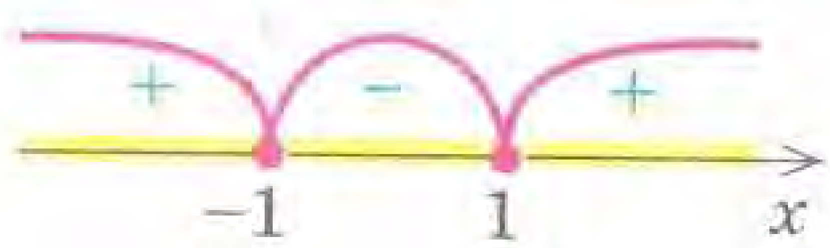


Рис. 5.23

Складаємо таблицю, у якій відмічаємо проміжки зростання і спадання та екстремуми функції:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	-1	↘	-5	↗
		max		min	

6. Знаходимо значення функції в декількох точках:

Коментар

Використаємо загальну схему дослідження функції (с. 69). При знаходженні області визначення враховуємо, що жодних обмежень, зафіксованих у табл. 7, функція не має, отже, областю визначення є множина всіх дійсних чисел (можна також використати відоме твердження, що *областю визначення многочлена є всі дійсні числа*).

Щоб знайти точку перетину графіка з віссю Ox, потрібно прирівняти функцію до нуля і розв'язати рівняння $x^3 - 3x - 3 = 0$. Але ми не в змозі знайти корені цього рівняння, тому в розв'язання включено тільки знаходження точки перетину графіка з віссю Oy.

Після знаходження похідної заданої функції, її критичних точок і знаків похідної в кожному з проміжків, на які критичні точки розбивають область визначення функції, знаходження проміжків зростання і спадання та екстремумів функції зручно виконувати, заповнюючи спеціальну таблицю.

Зауважимо, що функція неперервна на всій числовій прямій, оскільки вона диференційовна в кожній точці її області визначення, отже, її графік — нерозривна лінія.

Щоб уточнити вигляд графіка, доцільно знайти координати декількох додаткових точок.

x	-2	2	3
$f(x)$	-5	-1	15

7. Використовуючи результати дослідження, будуємо графік функції $y = x^3 - 3x - 3$ (рис. 5.24).

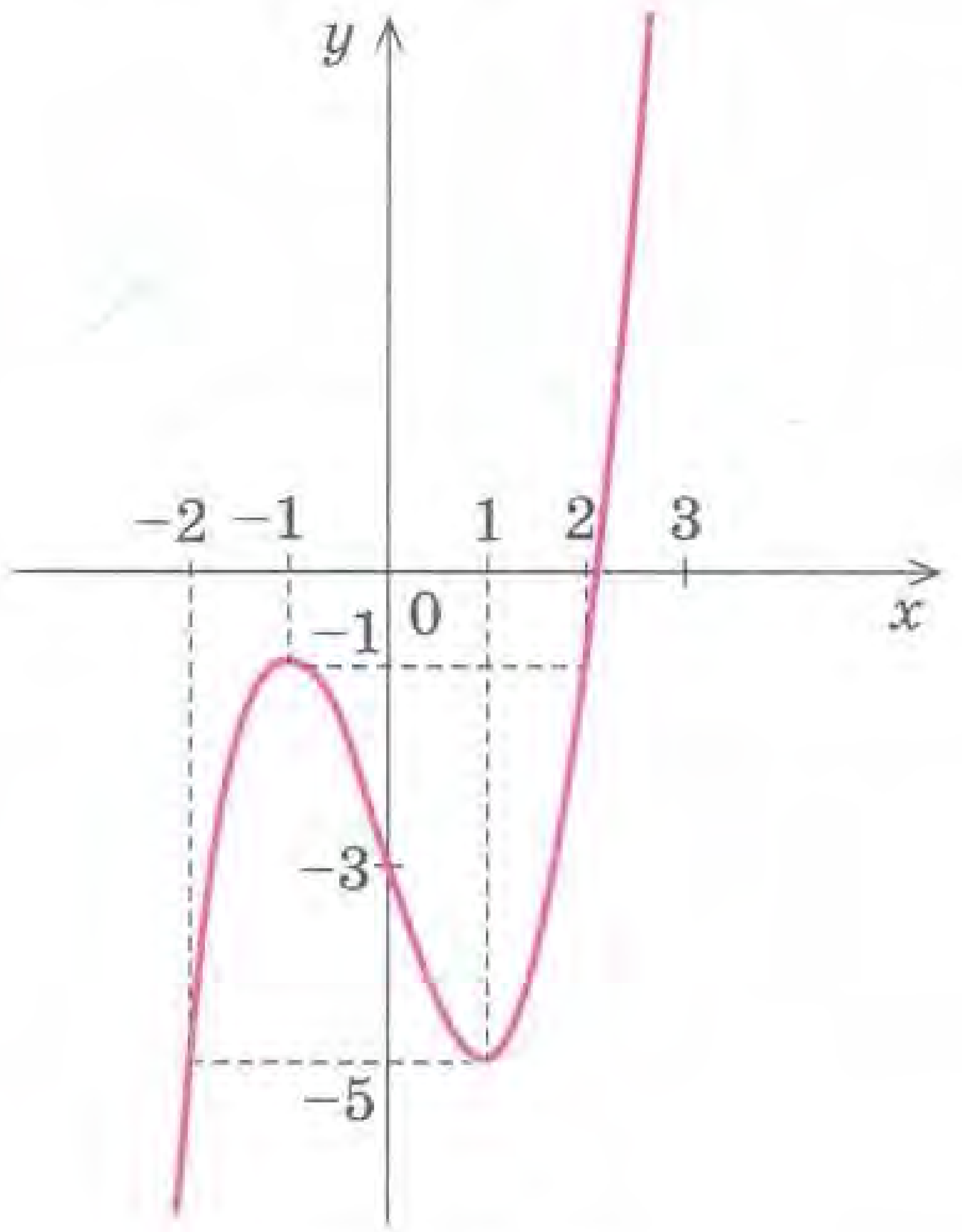


Рис. 5.24

◁

Після побудови графіка функції можна зробити висновок, що графік має єдину точку перетину з віссю Ox. Ця точка розташована між точками $x = 2$ і $x = 3$, оскільки функція $f(x)$ неперервна, на проміжку $[1; +\infty)$ зростає і в точці $x = 2$ набуває від'ємного значення, а в точці $x = 3$ — додатного.

Інших точок перетину з віссю Ox бути не може, бо на проміжку $(-\infty; -1]$ функція $f(x)$ зростає від $-\infty$ до -1, а на проміжку $[-1; 1]$ — спадає від -1 до -5, тобто значення функції на цих проміжках від'ємні.

Зауваження. Ми побудували графік функції, не виконуючи дослідження її поведінки на кінцях проміжків області визначення. Розглянемо, як це можна зробити. Область визначення заданої функції — проміжок $(-\infty; +\infty)$. Щоб дослідити поведінку функції на кінцях проміжків області визначення, потрібно з'ясувати, куди прямуватиме функція при $x \to \infty$. Для цього у многочлені достатньо винести за дужки найвищий степінь змінної (це завжди можна зробити, через те що, коли значення x велике за модулем, то $x \neq 0$). Тоді при $x \neq 0$ маємо $f(x) = x^3 - 3x - 3 = x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$. Оскільки при $x \to \infty$ значення $\frac{3}{x^2} \to 0$ і $\frac{3}{x^3} \to 0$, то $1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3} \to 1$. Отже, $f(x)$ буде прямувати до того самого значення, що і x^3. Але при $x \to -\infty$ значення $x^3 \to -\infty$, тоді і $f(x) \to -\infty$, а при $x \to +\infty$ значення $x^3 \to +\infty$, тоді і $f(x) \to +\infty$. Ураховуючи неперервність функції $f(x)$, одержуємо, що вона набуває всіх значень із проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Наведені міркування можна застосувати для будь-якої функції — многочлена непарного степеня. Тоді, будуючи графіки многочленів непарного степеня, корисно пам'ятати, що *многочлен непарного степеня набуває всіх значень із проміжку* $(-\infty; +\infty)$ і *при великих за модулем значеннях аргументу поведінка многочлена аналогічна поведінці степеневої функції — його старшого члена.*

Приклад 2 1) Побудуйте графік функції $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$;

2*) Скільки коренів має рівняння $x^4 - 8x^2 - 9 - a = 0$ залежно від значення параметра a?

Коментар

Для того щоб розв'язати завдання 1, досліджуємо функцію $f(x)$ за загальною схемою і за результатами дослідження будуємо її графік. Для знаходження точки перетину графіка з віссю Ox прирівнюємо функцію до нуля і розв'язуємо одержане біквадратне рівняння. При побудові графіка також ураховуємо, що при $x \to \infty$ значення

$$f(x) = x^4 - 8x^2 - 9 = x^4\left(1 - \frac{8}{x^2} - \frac{9}{x^4}\right) \to +\infty.$$

Як бачимо, *при великих за модулем значеннях аргументу поведінка многочлена парного степеня також буде аналогічною поведінці степеневої функції — його старшого члена.*

Під час розв'язування завдання 2 можна користуватися таким орієнтиром: *якщо в завданні з параметрами йдеться про кількість розв'язків рівняння (нерівності або системи), то для аналізу заданої ситуації зручно використовувати графічну ілюстрацію розв'язування.*

Особливо простим відповідне дослідження є в тому випадку, коли задане рівняння можна подати у вигляді $f(x) = a$, оскільки графік функції $y = a$ — це пряма, паралельна осі Ox (яка перетинає вісь Oy у точці a), а графік функції $y = f(x)$ легко побудувати, дослідивши функцію $f(x)$ за допомогою похідної. (Зазначимо, що, замінюючи задане рівняння на рівняння $f(x) = a$, потрібно слідкувати за рівносильністю виконаних перетворень, щоб одержане рівняння мало ті самі корені, що й задане, тоді і кількість коренів у них буде однакова.)

Для того щоб визначити, скільки коренів має рівняння $f(x) = a$, достатньо знайти, скільки точок перетину має графік функції $y = f(x)$ з прямою $y = a$ при різних значеннях параметра a. (Для цього на відповідному рисунку доцільно зобразити всі характерні положення прямої.)

Розв'язання

1) ► Дослідимо функцію $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$.

1. Область визначення: $D(f) = \boldsymbol{R}$.
2. Функція парна, оскільки для всіх значень x з її області визначення
$$f(-x) = (-x)^4 - 8(-x)^2 - 9 = x^4 - 8x^2 - 9 = f(x).$$
Отже, графік функції симетричний відносно осі Oy.
3. Точка перетину графіка з віссю Oy: $x = 0$, $y = f(0) = -9$.
Точки перетину графіка з віссю Ox: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Заміна $x^2 = t$ дає:

$t^2 - 8t - 9 = 0$; $t_1 = -1$, $t_2 = 9$. Тоді $x^2 = -1$ (коренів немає) або $x^2 = 9$. Звідси $x = 3$ та $x = -3$ — абсциси точок перетину графіка з віссю Ox.

4. Похідна і критичні точки. $f'(x) = 4x^3 - 16x$. Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$ (отже, функція неперервна на всій числовій прямій).
   $f'(x) = 0$. Тоді $4x^3 - 16x = 0$, $4x(x^2 - 4) = 0$, $4x(x - 2)(x + 2) = 0$, отже, $x = 0$, $x = 2$ та $x = -2$ — критичні точки.
5. Відмічаємо критичні точки на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знак $f'(x)$ у кожному з одержаних проміжків (рис. 5.25). Складаємо таблицю, у якій відмічаємо проміжки зростання і спадання та екстремуми функції:

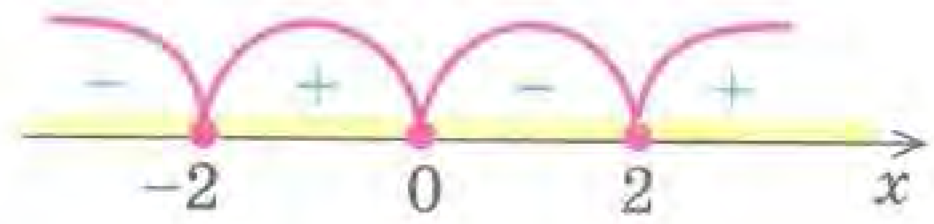


Рис. 5.25

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-25	↗	-9	↘	-25	↗
		min		max		min	

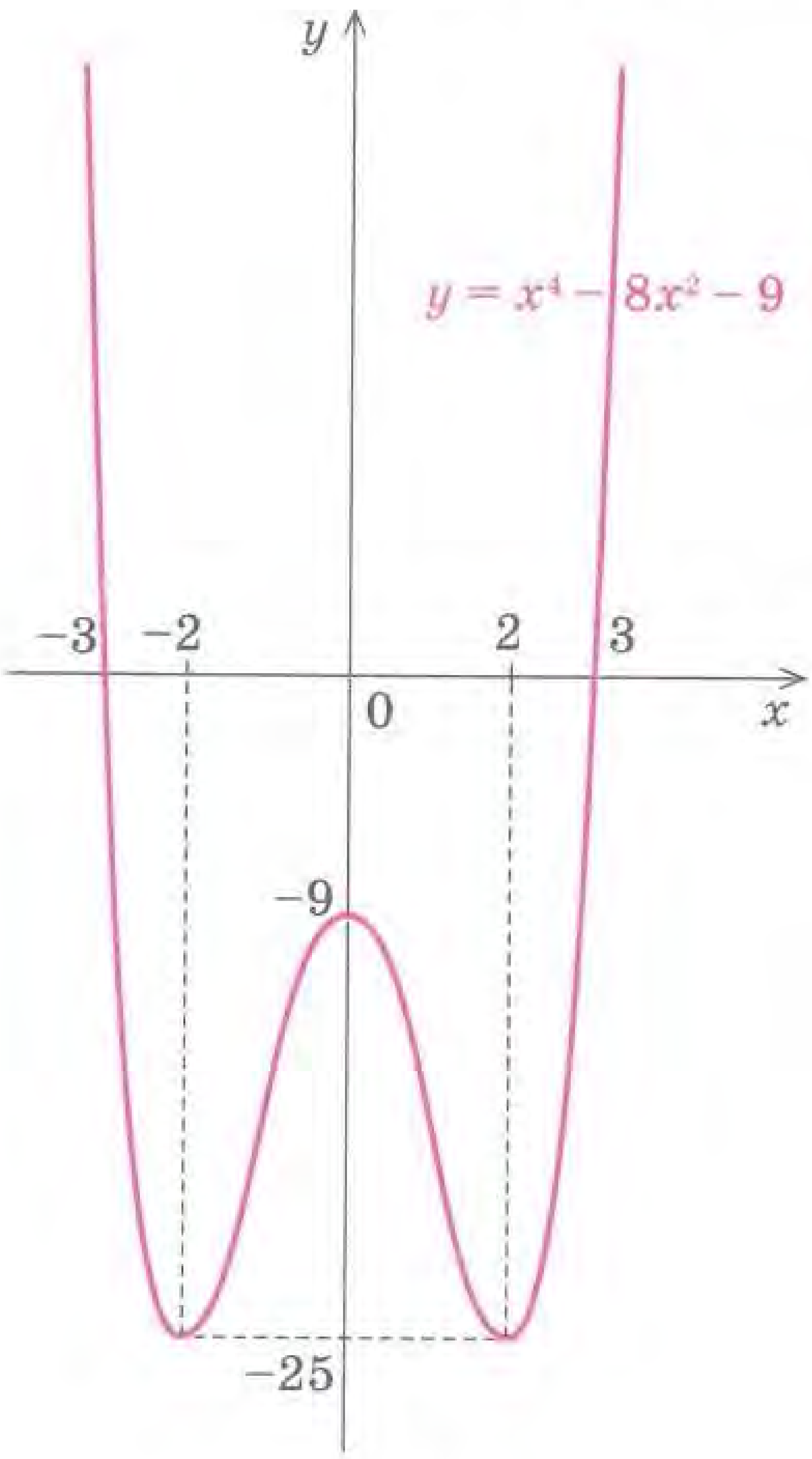


Рис. 5.26

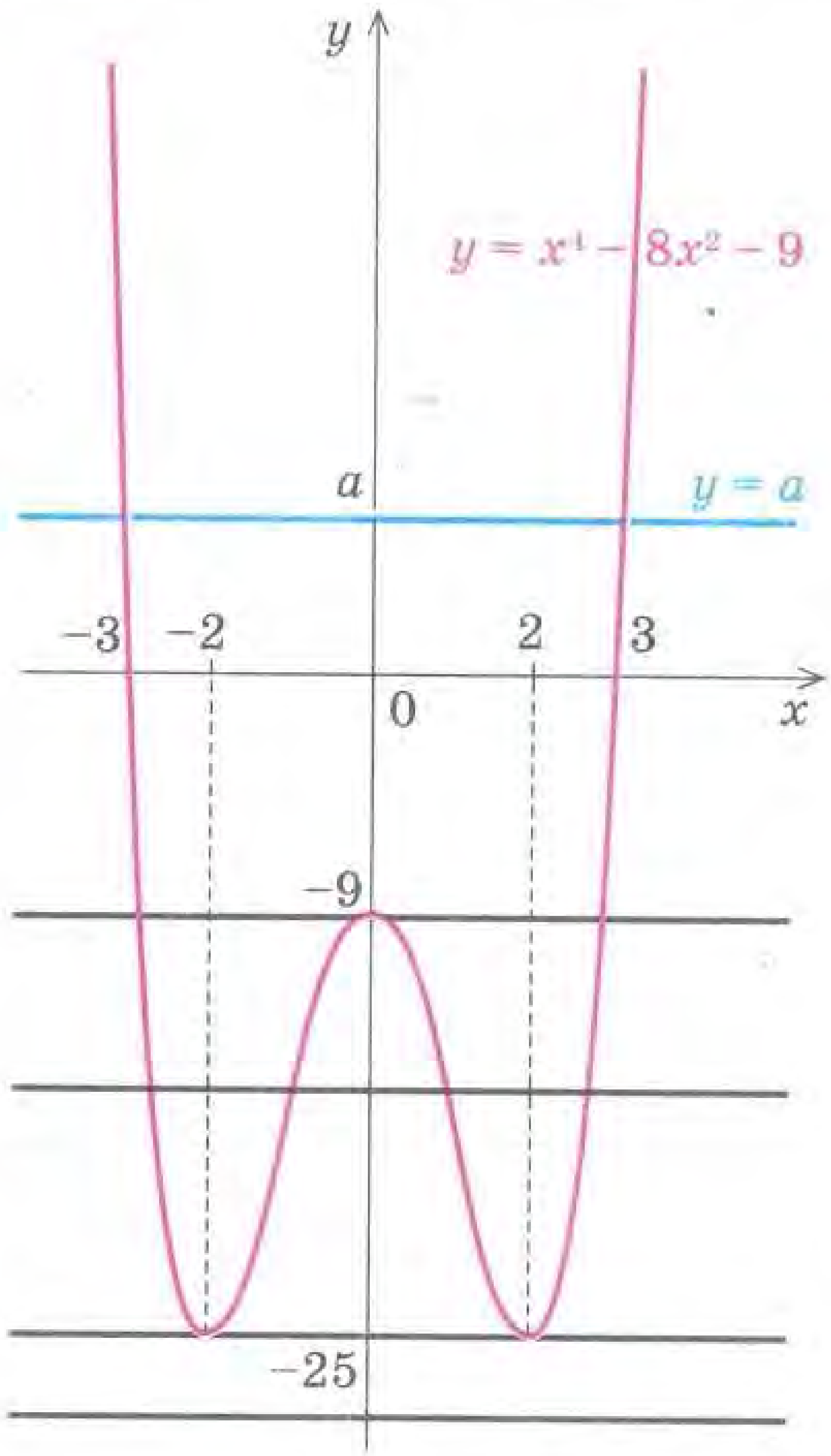


Рис. 5.27

6. Використовуючи результати дослідження, будуємо графік* функції $y = x^4 - 8x^2 - 9$ (рис. 5.26). ◁

2) ▶ Відзначимо, що задане рівняння $x^4 - 8x^2 - 9 - a = 0$ рівносильне рівнянню $x^4 - 8x^2 - 9 = a$. Розв'яжемо останнє рівняння графічно. Для цього побудуємо графік функції $y = x^4 - 8x^2 - 9$ (див. завдання 1) та графік функції $y = a$ (рис. 5.27).
Як бачимо, при $a < -25$ рівняння не має коренів (немає точок перетину графіків); при $a = -25$ та при $a > -9$ рівняння має два корені (графіки мають дві спільні точки); при $a = -9$ рівняння має три корені (графіки мають три спільні точки) і при $-25 < a < -9$ рівняння має чотири корені (графіки мають чотири спільні точки). ◁

Запитання для контролю

1. За якою схемою можна досліджувати властивості функції для побудови її графіка?
2*. Охарактеризуйте особливості виконання основних етапів дослідження функції та відображення результатів дослідження на графіку функції. Наведіть приклади.

Вправи

1°. Побудуйте схематичний графік функції, визначеної і неперервної на множині всіх дійсних чисел, користуючись її властивостями, указаними в таблиці.

1)

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	2	↗
		max		min	

2)

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗	1	↘	-3	↗
		min		max		min	

Дослідіть функцію і побудуйте її графік (**2, 3**).

2°. 1) $f(x) = x^3 - 3x^2$; 2) $f(x) = 3x - x^3 + 1$;
3) $f(x) = x^4 - 2x^2$; 4) $f(x) = 5x^4 - 4x^5$.

3. 1) $f(x) = (x^2 - 2)^2$; 2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;
3) $f(x) = \frac{4}{x} - x$; 4) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.

---

* Масштаб по осях Ox і Oy різний.

4. а) Дослідіть функцію $f(x)$ і побудуйте її графік.
б) Знайдіть область значень функції $f(x)$.
в*) Скільки коренів має рівняння $f(x) = a$ залежно від значення параметра a?

1) $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$; 2) $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$;

3) $y=x-\sqrt{x}$; 4) $y=\dfrac{x+4}{\sqrt{x}}$.

5. Скільки коренів має рівняння:

1) $x^4 - 4x^3 + 1 = 0$; 2) $8x^3 - 3x^4 + 2 = 0$;

3) $x^2-\dfrac{1}{3}x^3-3=0$; 4) $x^3 - 3x^2 - 9x - 7 = 0$?

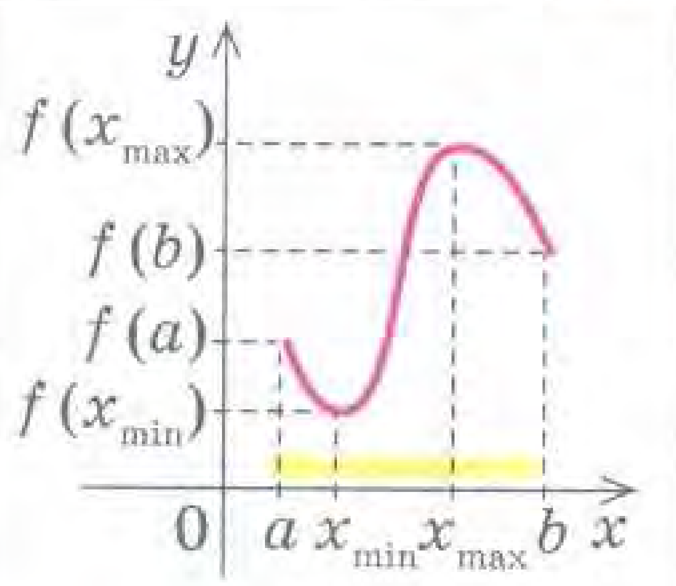
6*. Дослідіть функцію і побудуйте її графік:

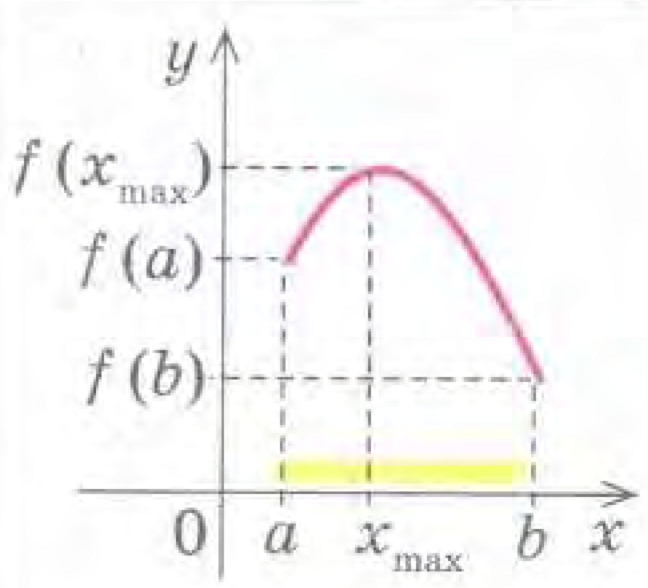
1) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$; 2) $y=2x-5\sqrt[5]{x^2}$;

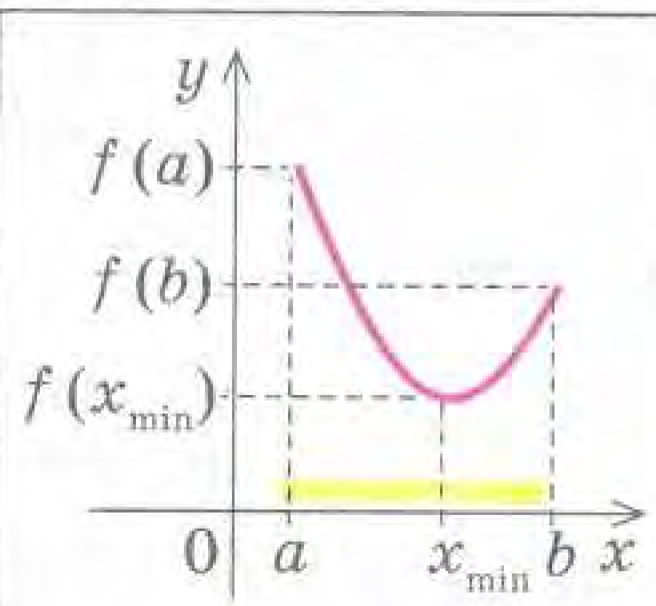
3) $y = 2\sin x - \cos 2x$; 4) $y = \cos^2 x - \cos x$.

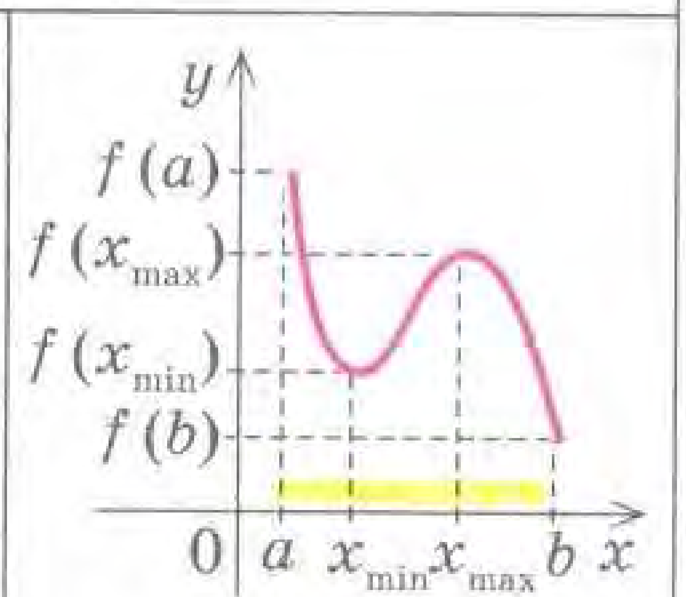
5.3. НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

Таблиця 9

<table>
<tr><td colspan="4">1. Найбільше і найменше значення функції, неперервної на відрізку</td></tr>
<tr><td colspan="4">Властивість</td></tr>
<tr><td colspan="4">Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку і має на ньому скінченне число критичних точок, то вона набуває найбільшого і найменшого значень на цьому відрізку або в критичних точках, які належать цьому відрізку, або на кінцях відрізка.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Приклади</td></tr>
<tr>
<td>

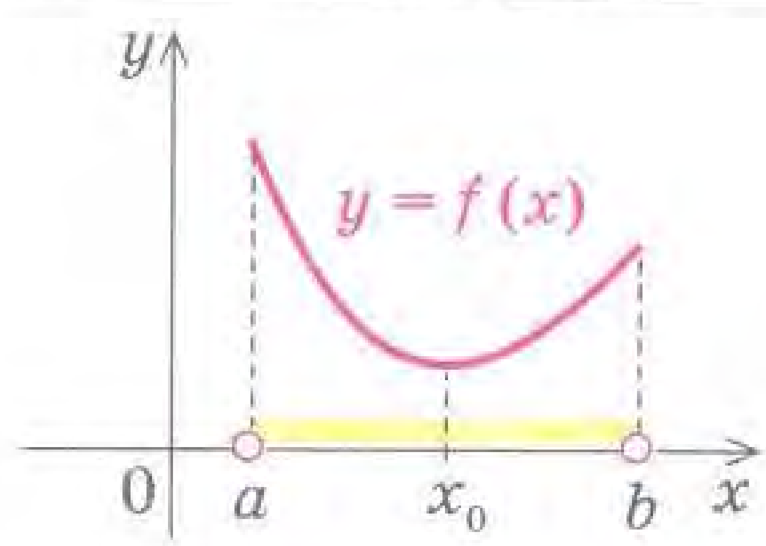
$\max\limits_{[a;\,b]} f(x)=f(x_{\max})$
$\min\limits_{[a;\,b]} f(x)=f(x_{\min})$</td>
<td>

$\max\limits_{[a;\,b]} f(x)=f(x_{\max})$
$\min\limits_{[a;\,b]} f(x)=f(b)$</td>
<td>

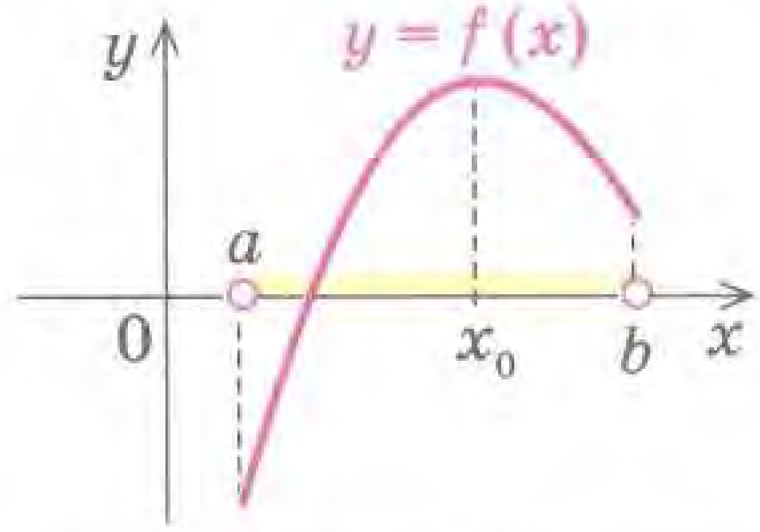
$\max\limits_{[a;\,b]} f(x)=f(a)$
$\min\limits_{[a;\,b]} f(x)=f(x_{\min})$</td>
<td>

$\max\limits_{[a;\,b]} f(x)=f(a)$
$\min\limits_{[a;\,b]} f(x)=f(b)$</td>
</tr>
</table>

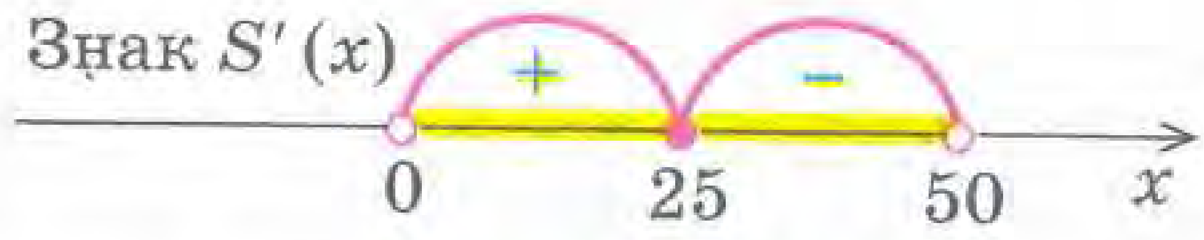
Продовження табл. 9

2. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на відрізку	
Схема	Приклад Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 - 12x + 12$ на відрізку [1; 3].
1. Упевнитися, що заданий відрізок входить до області визначення функції $f(x)$.	▶ Область визначення заданої функції — всі дійсні числа ($D(f) = \boldsymbol{R}$), отже, заданий відрізок входить до області визначення функції $f(x)$.
2. Знайти похідну $f'(x)$.	$f'(x) = 3x^2 - 12.$
3. Знайти критичні точки: $f'(x) = 0$ або не існує.	$f'(x)$ існує на всій області визначення функції $f(x)$ (отже, функція $f(x)$ неперервна на заданому відрізку). $f'(x) = 0$; $3x^2 - 12 = 0$ при $x = 2$ або $x = -2$.
4. Вибрати критичні точки, які належать заданому відрізку.	Заданому відрізку [1; 3] належить лише критична точка $x = 2$.
5. Обчислити значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка.	$f(1) = 1$; $f(2) = -4$; $f(3) = 3$.
6. Порівняти одержані значення функції та вибрати з них найменше і найбільше.	$\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = f(3) = 3,$ $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = f(2) = -4.$ ◁
3. Знаходження найбільшого або найменшого значення функції, неперервної на інтервалі	
Властивість	Ілюстрація
Якщо неперервна функція $f(x)$ має на заданому інтервалі тільки одну точку екстремуму x_0 і це точка мінімуму, то на заданому інтервалі функція набуває свого найменшого значення в точці x_0.	

Продовження табл. 9

Якщо неперервна функція $f(x)$ має на заданому інтервалі тільки одну точку екстремуму x_0 і це точка максимуму, то на заданому інтервалі функція набуває свого найбільшого значення в точці x_0.	
4. Задачі на знаходження найбільшого та найменшого значень функції	
Схема	Приклад Є дріт довжиною 100 м. Потрібно огородити ним прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайдіть розміри ділянки.
1. **Одну з величин, яку потрібно знайти** (або величину, за допомогою якої можна дати відповідь на запитання задачі), **позначити через x** (і за змістом задачі накласти обмеження на x).	▶ Нехай ділянка має форму прямокутника $ABCD$ (див. рисунок) зі стороною $AB = x$ (м).  Ураховуючи, що дріт буде натягнуто по периметру прямокутника, одержуємо: $2AB + 2BC = 100$, або $2x + 2BC = 100$, звідси $BC = 50 - x$ (м). Оскільки довжина кожної сторони прямокутника — додатне число, то $0 < x < 50$.
2. **Величину, про яку йдеться, що вона найбільша або найменша, виразити як функцію від x.**	Площа прямокутника: $S(x) = AB \cdot BC = x(50 - x) =$ $= 50x - x^2$.
3. **Дослідити одержану функцію на найбільше або найменше значення** (найчастіше за допомогою похідної).	Дослідимо функцію $S(x)$ за допомогою похідної. Похідна $S'(x) = 50 - 2x$ існує при всіх дійсних значеннях x (отже, $S(x)$ — неперервна функція на заданому проміжку). $S'(x) = 0$, $50 - 2x = 0$,

Закінчення табл. 9

	$x = 25$ — критична точка.  У точці $x = 25$ $S'(x) = 50 - 2x$ змінює знак з плюса на мінус (див. рисунок), отже, $x = 25$ — точка максимуму. Ураховуємо, що неперервна функція $S(x)$ має на заданому інтервалі (0; 50) тільки одну точку екстремуму $x = 25$ і це точка максимуму. Тоді на заданому інтервалі функція набуває свого найбільшого значення в точці $x = 25$*.
4. Упевнитися, що одержаний результат має зміст для початкової задачі.	Отже, площа огородженої ділянки буде найбільшою, якщо сторони прямокутника будуть завдовжки: $AB = x = 25$ (м), $BC = 50 - x = 25$ (м), тобто коли ділянка матиме форму квадрата зі стороною 25 м. ◁

Пояснення й обґрунтування

Найбільше і найменше значення функції, неперервної на відрізку. Людині в житті часто доводиться шукати найкращий, або, як часто кажуть, оптимальний розв'язок поставленої задачі. Частину таких задач вдається розв'язати за допомогою методів математичного аналізу — це задачі, які можна звести до знаходження найбільшого або найменшого значення функції.

У курсах аналізу доводиться теорема Вейєрштрасса:

неперервна на відрізку [a; b] функція f (x) має на цьому відрізку найбільше і найменше значення, тобто існують точки відрізка [a; b], у яких $f(x)$ набуває найбільшого та найменшого на [a; b] значень.

---

* У розглянутій задачі можна дослідити функцію $S(x)$ і без застосування похідної. $S(x) = 50x - x^2$ є квадратичною функцією, її графік — парабола, вітки якої напрямлені вниз. Тоді найбільшого значення ця функція набуває у вершині параболи, тобто при $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{-2} = 25$. Це значення належить заданому інтервалу (0; 50), отже, на цьому проміжку функція набуває найбільшого значення при $x = 25$.

Розглянемо випадок, коли неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $f(x)$ має на цьому відрізку лише скінченне число критичних точок. Тоді має місце властивість:

якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку і має на ньому скінченне число критичних точок, то вона набуває свого найбільшого і найменшого значень на цьому відрізку або в критичних точках, які належать цьому відрізку, або на кінцях відрізка.

Геометрична ілюстрація цієї властивості наведена в п. 1 табл. 9.

● 1) Спочатку розглянемо випадок, коли неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $f(x)$ не має на цьому відрізку критичних точок. Тоді на відрізку $[a; b]$ похідна $f'(x)$ зберігає постійний знак (див. с. 53), отже, функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ зростає (рис. 5.28, *а*) або спадає (рис. 5.28, *б*). Тому найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ — це значення на кінцях a і b.

2) Нехай тепер функція $f(x)$ має на відрізку $[a; b]$ скінченне число критичних точок. Ці точки розбивають відрізок $[a; b]$ на скінченне число відрізків, усередині яких критичних точок немає. Тоді, згідно з п. 1, найбільшого і найменшого значень функція $f(x)$ набуває на кінцях таких відрізків, тобто в критичних точках функції, або в точках a і b. ○

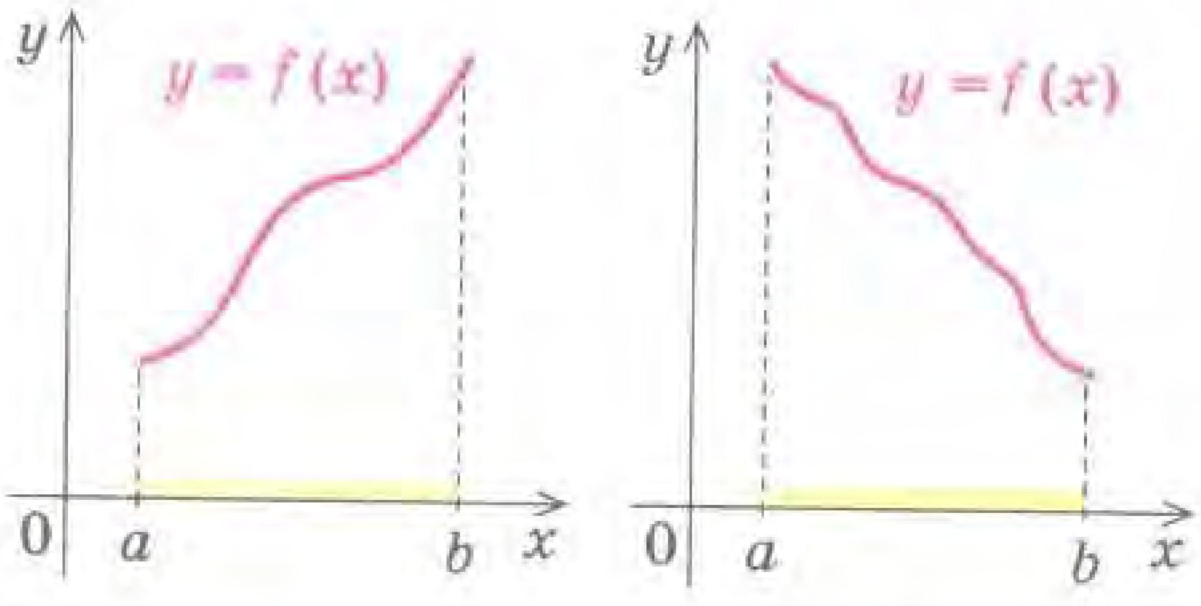
Таким чином, *щоб знайти найбільше і найменше значення неперервної на відрізку функції, яка має на цьому відрізку скінченне число критичних точок, достатньо обчислити значення функції в усіх критичних точках і на кінцях відрізка та з одержаних чисел вибрати найбільше і найменше.*

Для використання цього орієнтиру потрібно впевнитися, що заданий відрізок входить до області визначення даної функції і що функція неперервна на цьому відрізку (останнє випливає, наприклад, з того, що функція диференційовна на заданому відрізку). Для знаходження критичних точок функції потрібно знайти її похідну і з'ясувати, де похідна дорівнює нулю або не існує. Уточнену схему знаходження найбільшого та найменшого значень функції, неперервної на відрізку, і приклад використання наведено в табл. 9 (п. 2, с. 80). Інші приклади знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на відрізку, наведено далі у прикладах на с. 85–89.

Твердження, що найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ досягається в точці x_0, можна позначати так: $\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(x_0)$; а твердження, що найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ досягається в точці x_0, так:

$$\min_{[a;\, b]} f(x) = f(x_0).$$

Під час розв'язування деяких задач доводиться знаходити ***найбільше*** і ***найменше значення неперервної функції*** не на відрізку, а ***на інтервалі***. Найчастіше в таких задачах функція має на заданому інтервалі тільки одну критичну точку: або точку максимуму, або точку мінімуму. У цих випадках у точці максимуму функція $f(x)$ набуває найбільшого значення на даному інтервалі (рис. 5.29), а в точці мінімуму — найменшого значення на даному інтервалі (рис. 5.30) (див. повне формулювання відповідних властивостей у п. 3 табл. 9 на с. 80, 81).



а б

Рис. 5.28

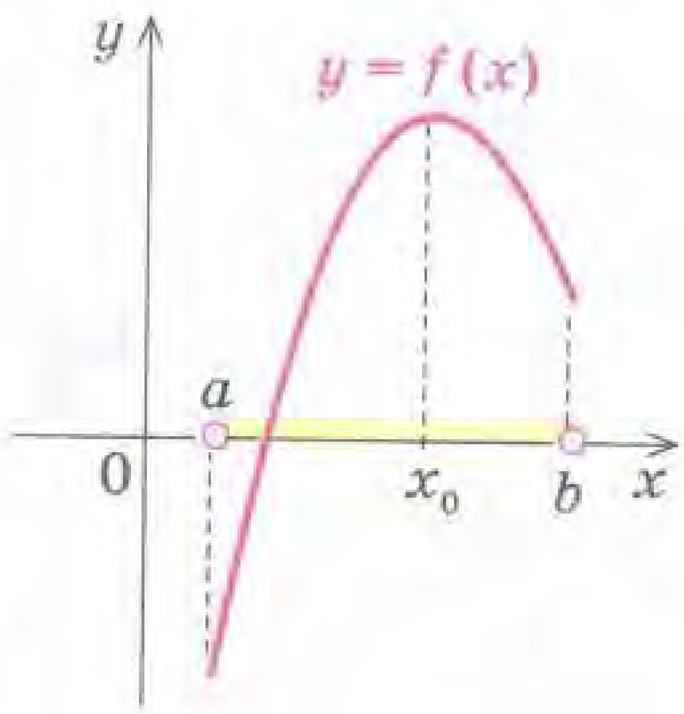


Рис. 5.29

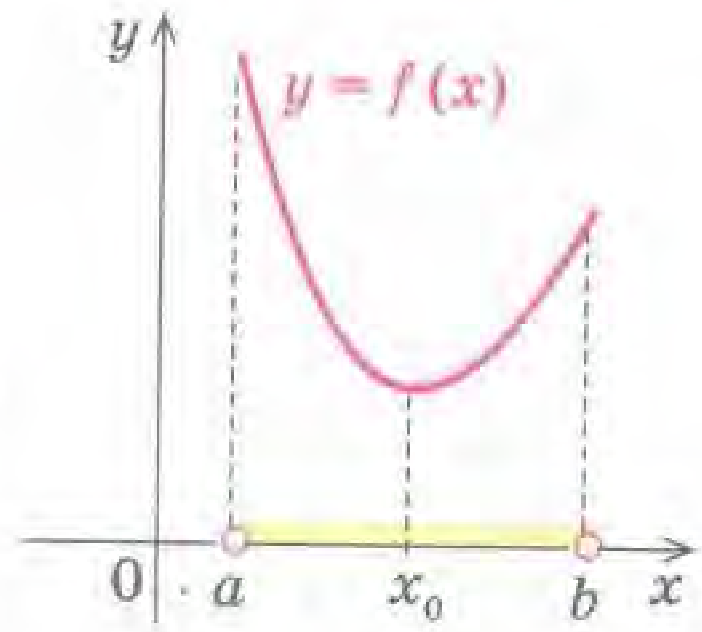


Рис. 5.30

Дійсно, якщо, наприклад, неперервна функція $f(x)$ має на заданому інтервалі $(a; b)$ тільки одну точку екстремуму x_0 і це точка мінімуму, то в цій точці похідна $f'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, тобто якщо $x < x_0$, то $f'(x) < 0$. Оскільки функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, то вона спадає при $x \leqslant x_0$, і тоді при $x < x_0$ маємо $f(x) > f(x_0)$.

Також якщо $x > x_0$, то $f'(x) > 0$. Оскільки функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, то вона зростає при $x \geqslant x_0$, і тоді при $x > x_0$ маємо $f(x) > f(x_0)$. Це й означає, що значення $f(x_0)$ — найменше значення функції на інтервалі $(a; b)$.

Аналогічно обґрунтовують і випадок, коли x_0 — точка максимуму (проведіть обґрунтування самостійно). ○

Розглянуті способи знаходження найбільшого і найменшого значень функції використовують для ***розв'язування*** різноманітних ***прикладних задач***. Розв'язування практичних задач методами математики, як правило, містить три основних етапи: 1) *формалізацію*, тобто створення математичної моделі задачі (переклад умови задачі на мову математики); 2) *розв'язування* складеної математичної задачі; 3) *інтерпретацію* знайденого розв'язку (аналіз одержаного результату, тобто переклад його з мови математики в терміни початкової задачі)[*].

Для задач на знаходження найбільшого та найменшого значень реалізацію цих етапів можна проводити за схемою:

* Розв'язування практичних задач методами математики (його називають *методом математичного моделювання*) ви фактично вже застосовували: за описаною схемою розв'язували текстові задачі в курсі алгебри.

1) одну з величин, яку потрібно знайти (або величину, за допомогою якої можна дати відповідь на запитання задачі), позначити через x (і за змістом задачі накласти обмеження на x);
2) величину, про яку йдеться, що вона найбільша або найменша, виразити як функцію від x;
3) дослідити одержану функцію на найбільше або найменше значення;
4) упевнитися, що одержаний результат має зміст для початкової задачі.

Приклади використання цієї схеми наведено в п. 4 табл. 9 (с. 81, 82) та у прикладах, розглянутих на с. 86–89.

При розв'язуванні деяких задач на знаходження найбільшого та найменшого значень функції доцільно використовувати таке твердження:

якщо значення функції $f(x)$ невід'ємні на деякому проміжку, то ця функція і функція $(f(x))^n$, де n — натуральне число, набувають найбільшого (найменшого) значення в одній і тій самій точці.

Дійсно, при $u \geqslant 0$ функція $y = u^n$, де n — натуральне число, є зростаючою ($y' = nu^{n-1} \geqslant 0$ при $u \geqslant 0$ і $y' = 0$ тільки при $u = 0$)*. Тоді складена функція $y = (f(x))^n$ (тобто функція $y = u^n$, де $u = f(x)$) буде зростати там, де зростає функція $f(x)$, і спадати там, де спадає функція $f(x)$, а отже, і набувати найбільшого (або найменшого) значення в тій самій точці, що й функція $f(x)$.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ на відрізку $[0; \pi]$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ 1) $D(f) = \mathbf{R}$, отже, відрізок $[0; \pi]$ входить до області визначення функції $f(x)$. 2) $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x$. 3) $f'(x)$ існує на всій області визначення функції $f(x)$ (отже, функція $f(x)$ є неперервною на заданому відрізку); $f'(x) = 0$, $2\cos x - 2\sin 2x = 0$, $\cos x - 2\sin x \cos x = 0$, $\cos x\,(1 - 2\sin x) = 0$, $\cos x = 0$ або $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$,	Використаємо схему знаходження найбільшого і найменшого значень неперервної на відрізку функції $f(x)$: 1) *упевнитися, що заданий відрізок входить до області визначення функції*; 2) *знайти похідну*; 3) *знайти критичні точки* ($f'(x) = 0$ або не існує); 4) *вибрати критичні точки, які належать заданому відрізку*; 5) *обчислити значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка*; 6) *порівняти одержані значення і вибрати з них найбільше і найменше.*

* Звичайно, при $n \geqslant 2$; при $n = 1$ значення $y' = (u)' = 1 > 0$.

$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z,$ — критичні точки.

4) У заданий відрізок попадають тільки критичні точки: $\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{6}.$

5) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}+\cos\pi=1,$

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$

$f(0)=1,\ f(\pi)=1.$

6) $\min\limits_{[0;\,\pi]}f(x)=f(0)=f(\pi)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$

$\max\limits_{[0;\,\pi]}f(x)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$ ◁

Щоб упевнитися в неперервності заданої функції, достатньо після знаходження її похідної з'ясувати, що похідна існує в кожній точці області визначення функції, або відзначити, що задана функція неперервна як сума двох неперервних функцій $\sin x$ і $\cos 2x$.

Визначити, які критичні точки належать заданому відрізку, можна на відповідному рисунку, відмічаючи критичні точки на числовій прямій (рис. 5.31):

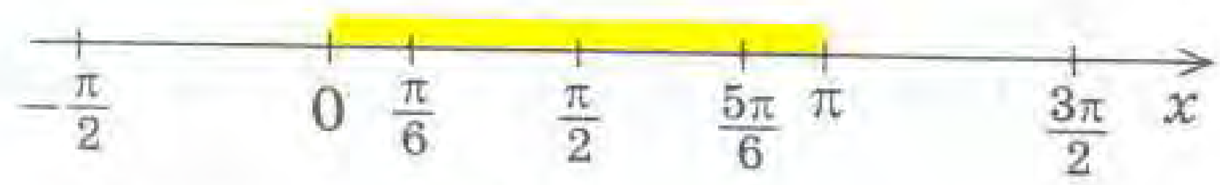


Рис. 5.31

Приклад 2 Із круглої колоди вирізають брус із прямокутним перерізом найбільшої площі. Знайдіть розміри перерізу брусу, якщо радіус перерізу колоди дорівнює 25 см.

Розв'язання

▶ 1) Нехай із круга вирізають прямокутник $ABCD$ (рис. 5.32) зі стороною $AB = x$ (см). Ураховуючи, що AC — діаметр круга, маємо $AC = 50$ (см). Оскільки x — довжина відрізка, то $x > 0$. Крім того, $AB < AC$ (катет прямокутного трикутника ABC менший за його гіпотенузу), отже, $0 < x < 50$.

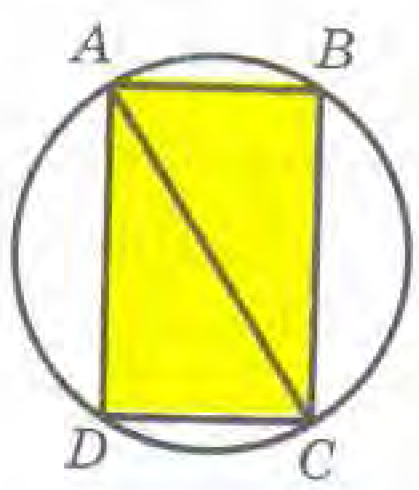


Рис. 5.32

Коментар

Використаємо загальну схему розв'язування задач на найбільше та найменше значення: 1) *одну з величин, яку потрібно знайти (або за допомогою якої можна дати відповідь на запитання задачі) позначити через* x (і за змістом задачі накласти обмеження на x); 2) *величину, про яку йдеться, що вона найбільша або найменша, виразити як функцію від* x; 3) *дослідити одержану функцію на найбільше або найменше значення*; 4) *упевнитися, що одержаний результат має зміст для початкової задачі.*

Одержану функцію

$$S(x)=x\sqrt{2500-x^2}$$

2) З прямокутного трикутника ABC $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{2500-x^2}$ (см). Тоді площа перерізу $ABCD$ дорівнює: $S(x)=AB\cdot BC=x\sqrt{2500-x^2}$.

Оскільки при $0 < x < 50$ значення $S(x) > 0$, то розглянемо функцію $f(x)=(S(x))^2=x^2(2500-x^2)=$ $=2500x^2-x^4$, яка набуває найбільшого значення на проміжку $0 < x <$ < 50 в тій самій точці, що і $S(x)$.

3) Похідна $f'(x)=5000x-4x^3$ існує в усіх точках заданого проміжку (отже, функція $f(x)$ неперервна на заданому проміжку).

$f'(x)=0$, $5000x-4x^3=0$, $4x(1250-$ $-x^2)=0$, $x=0$ або $x=\pm 25\sqrt{2}$.

У проміжок (0; 50) попадає тільки одна критична точка $x=25\sqrt{2}$, яка є точкою максимуму: у цій точці похідна змінює знак з плюса на мінус (рис. 5.33).

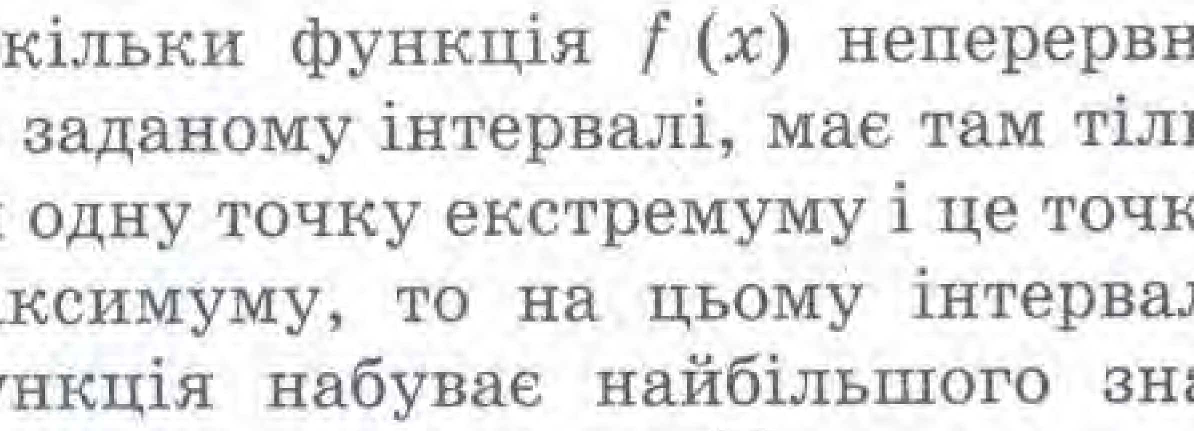


Рис. 5.33

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на заданому інтервалі, має там тільки одну точку екстремуму і це точка максимуму, то на цьому інтервалі функція набуває найбільшого значення в точці $x=25\sqrt{2}$.

4) Тоді $AB=x=25\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{2500-x^2}=25\sqrt{2}$. Отже, площа перерізу бруса буде найбільшою в тому випадку, коли шуканий прямокутник буде квадратом зі стороною $25\sqrt{2}$ (≈ 35 см). ◁

на проміжку $0 < x < 50$ можна досліджувати безпосередньо. Але краще врахувати, що на цьому проміжку $S(x) > 0$, і досліджувати функцію $f(x)=(S(x))^2$, запис якої не містить знака кореня і яка набуває найбільшого значення в тій самій точці, що і $S(x)$.

Висновок про те, що в знайденій точці функція $f(x)$ набуває найбільшого значення, можна обґрунтувати одним із трьох способів:

1) використати властивість неперервної на інтервалі функції, що має на цьому інтервалі тільки одну точку екстремуму (п. 3 табл. 9 — саме так зроблено в розв'язанні);

2) спираючись на поведінку неперервної функції $f(x)$ (досліджену за допомогою похідної — див. рис. 5.33), обґрунтувати, що на проміжку $(0;\ x_0)$ (де $x_0=25\sqrt{2}$) $f(x) < f(x_0)$, а на проміжку $(x_0;\ 50)$ $f(x) < f(x_0)$, отже, у точці x_0 функція $f(x)$ набуває найбільшого значення;

3) для знаходження найбільшого значення функції $f(x)$ на інтервалі (0; 50) можна використати те, що функція $f(x)$ неперервна на всій числовій прямій, тому можна знайти її найбільше значення на відрізку [0; 50], а потім зробити висновок для даної задачі:

$$f(0)=f(50)=0,$$
$$f\left(25\sqrt{2}\right)=1250.$$

Отже, найбільшого значення на відрізку [0; 50] функція $f(x)$ набуває в точці x_0 (яка лежить усередині цього відрізка). Тоді й на інтервалі (0; 50) ця функція набуває найбільшого значення в точці x_0.

Приклад 3* Точка A лежить на графіку функції $y = f(x)$, точка B — на осі Ox, і її абсциса в чотири рази більша за ординату точки A. Знайдіть найбільше значення площі трикутника OAB, де точка O — початок координат, а

$$f(x) = \sqrt{7 + 3\sin x - (3x+1)\cos x} \text{ і } \frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{8}.$$

Коментар

Для функції $f(x)$ непросто знайти область визначення. Проте, оцінивши значення підкореневого виразу на заданому проміжку, можна впевнитися, що він повністю входить до області визначення цієї функції. Ураховуємо, що на одиничному колі заданий проміжок розташований у другій і третій чвертях (рис. 5.34), де $\cos x < 0$, і $7 + 3\sin x > 0$ при всіх значеннях x.

За означенням графіка функції точка A має координати $(x; y) = (x; f(x))$. Щоб стверджувати, що висота трикутника OAB дорівнює ординаті точки A (рис. 5.35), потрібно обґрунтувати, що на заданому проміжку графік функції $y = f(x)$ лежить у першій чверті.

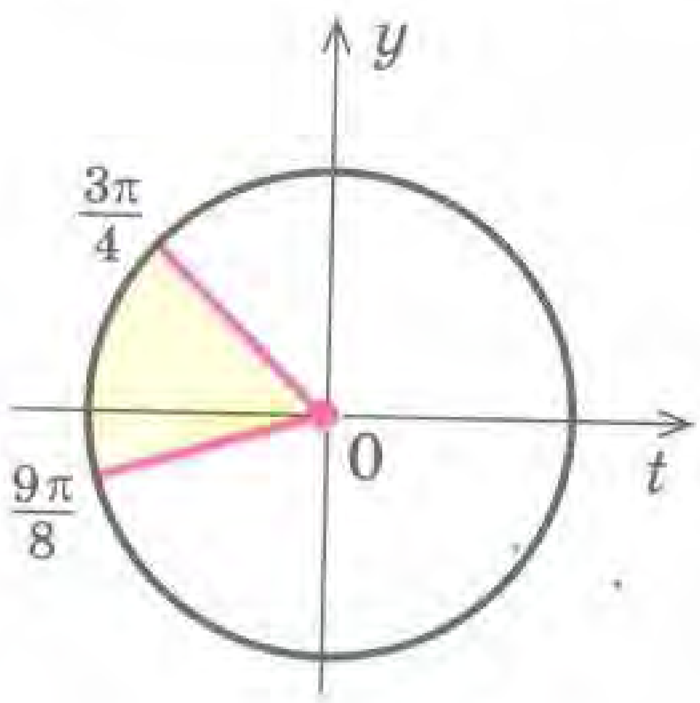


Рис. 5.34

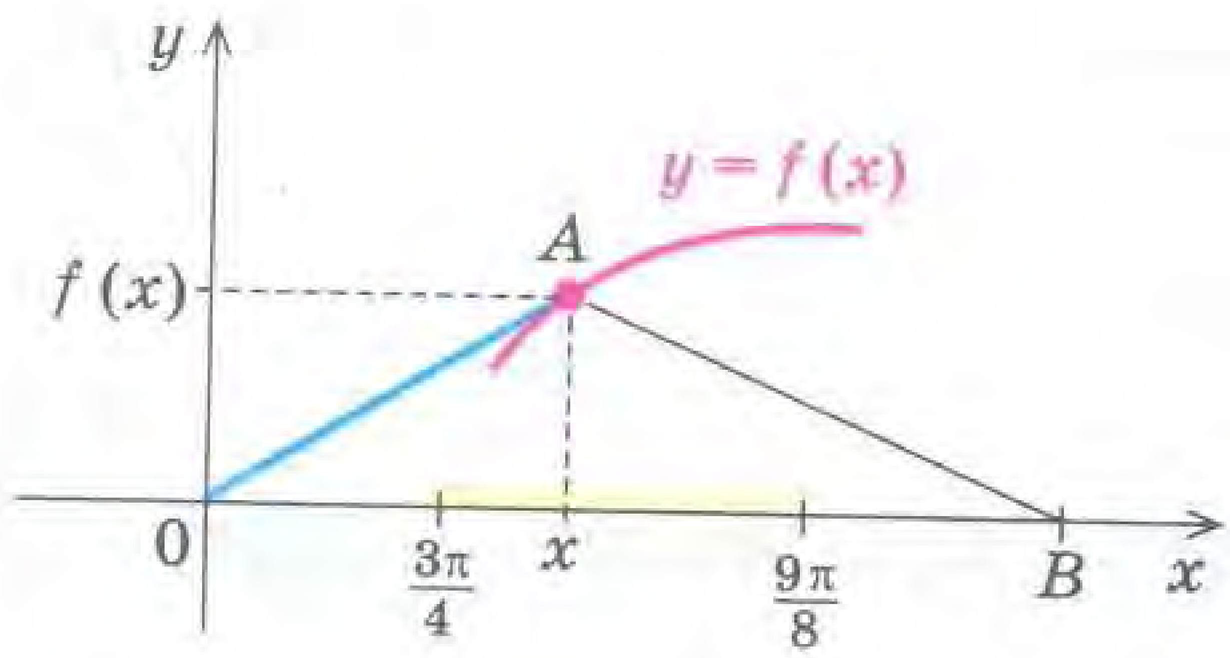


Рис. 5.35

Після запису площі трикутника OAB як функції $S(x)$ для знаходження її найбільшого значення звертаємо увагу на те, що достатньо складно знайти $S\left(\frac{9\pi}{8}\right)$. Тому зручніше виконати дослідження цієї функції за допомогою похідної і обґрунтувати, що в точці екстремуму із заданого проміжку функція набуває найбільшого значення на заданому проміжку (а не користуватися схемою знаходження найбільшого значення неперервної функції на відрізку).

Розв'язання

▶ При $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{8}$ $3x + 1 > 0$ і $\cos x < 0$. Тоді $-(3x + 1)\cos x > 0$ на заданому проміжку. При всіх значеннях x маємо $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Звідси $-3 \leqslant 3\sin x \leqslant 3$, отже, $7 + 3\sin x > 0$. Таким чином, на заданому проміжку

$$7 + 3\sin x - (3x + 1)\cos x > 0,$$

отже, заданий проміжок повністю входить до області визначення функції $f(x)$. У цьому випадку значення функції $f(x)$ будуть додатні, тобто на заданому проміжку графік функції $y = f(x)$ лежить у першій чверті.

Оскільки точка A лежить на графіку функції $y = f(x)$, то коли її абсциса дорівнює x, ордината дорівнює $f(x)$ (див. рис. 5.35). За умовою $x_B = 4y_A = 4f(x)$. Точка A лежить у першій чверті, отже, $y_A > 0$ і $x_B > 0$. Тоді $OB = x_B = 4f(x)$, а висота трикутника OAB дорівнює ординаті точки A: $h = y_A = f(x)$. Отже,

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4f(x) \cdot f(x) = 2f^2(x) = 2(7 + 3\sin x - (3x+1)\cos x).$$

Далі потрібно знайти найбільше значення функції

$S(x) = 14 + 6\sin x - (6x + 2)\cos x$ при $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{8}$.

Тоді $S'(x) = 6\cos x - (6\cos x - (6x + 2)\sin x) = (6x + 2)\sin x$.

Похідна $S'(x)$ існує в усіх точках заданого відрізка. Отже, функція $S(x)$ неперервна на цьому відрізку. Визначимо, де $S'(x) = 0$:

$$(6x + 2)\sin x = 0; \quad x = -\frac{1}{3} \text{ або } x = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Із знайдених точок у заданий відрізок входить тільки критична точка $x = \pi$.

Позначимо критичні точки на області визначення і знайдемо знак похідної та характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення (рис. 5.36).

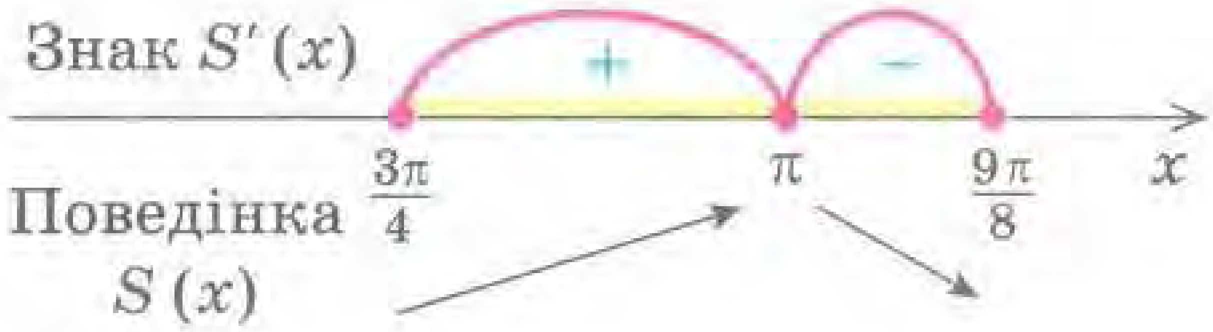


Рис. 5.36

Ураховуючи неперервність функції $S(x)$ на заданому проміжку, одержуємо, що ця функція зростає на проміжку $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$ (тоді при $\frac{3\pi}{4} \leqslant x < \pi$ значення $S(x) < S(\pi)$) і спадає на проміжку $\left[\pi; \frac{9\pi}{8}\right]$ (при $\pi < x \leqslant \frac{9\pi}{8}$ значення $S(x) < S(\pi)$). Отже, на відрізку $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{8}\right]$ функція $S(x)$ набуває найбільшого значення при $x = \pi$. Тоді

$$S(\pi) = 14 + 6\sin \pi - (6\pi + 2)\cos \pi = 16 + 6\pi \text{ (квадратних одиниць).}$$

Відповідь: найбільше значення площі трикутника дорівнює $16 + 6\pi$ кв. од. ◁

Запитання для контролю

1. а) Поясніть, у яких точках неперервна на відрізку функція може набувати свого найбільшого та найменшого значень на цьому відрізку. Проілюструйте відповідну властивість на графіках функцій.
   б*) Обґрунтуйте відповідну властивість для випадку, коли неперервна на відрізку функція має на цьому відрізку лише скінченне число критичних точок.
2. Опишіть схему знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на відрізку. Наведіть приклад.
3. а) Сформулюйте властивості неперервної на інтервалі функції, яка має на цьому інтервалі тільки одну точку екстремуму.
   б*) Обґрунтуйте відповідні властивості.
4. Опишіть схему розв'язування задач на найбільше та найменше значення за допомогою дослідження відповідних функцій. Наведіть приклад.

Вправи

Знайдіть найбільше і найменше значення функції на заданому відрізку **(1–4)**.

1°. 1) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5$, $[0; 3]$; 2) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, $[-1; 2]$;
3) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, $[-1; 1]$; 4) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$, $[-2; 1]$.

2. 1) $f(x) = 3\cos x + \cos 3x$, $[0; \pi]$; 2) $f(x) = 5\sin x + \cos 2x$, $[0; \pi]$;
3) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$, $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$; 4) $f(x) = \operatorname{ctg} x + x$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

3. 1) $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$, $[1; 6]$; 2) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$, $[0; 9]$;
3) $f(x) = x - 4x^{-2}$, $[-3; -1]$; 4) $f(x) = |x-1| - \sqrt{x}$, $[0; 4]$.

4*. 1) $f(x) = -x^3 + 3x|x-3|$, $[0; 4]$; 2) $f(x) = 2\sqrt{x} - |x-3|$, $[1; 4]$;
3) $f(x) = \frac{1}{x} + |x-2|$, $[1; 4]$; 4) $f(x) = |x^2 - x - 6| - x^3$, $[-4; 4]$.

5°. Число 10 подайте у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб сума квадратів цих чисел була найменшою.

6°. Число 4 розбийте на два доданки так, щоб сума першого доданка з квадратом другого була найменшою.

7. Різниця двох чисел дорівнює 8. Які мають бути ці числа, щоб добуток куба більшого числа на друге число був найменшим?

8. З усіх прямокутників, площа яких дорівнює 25 см^2, знайдіть прямокутник із найменшим периметром.

9. З квадратного листа картону зі стороною a треба виготовити відкриту зверху коробку, вирізавши по кутах квадратики (рис. 5.37) і загнувши утворені краї. Якою має бути висота коробки, щоб її об'єм був найбільшим?

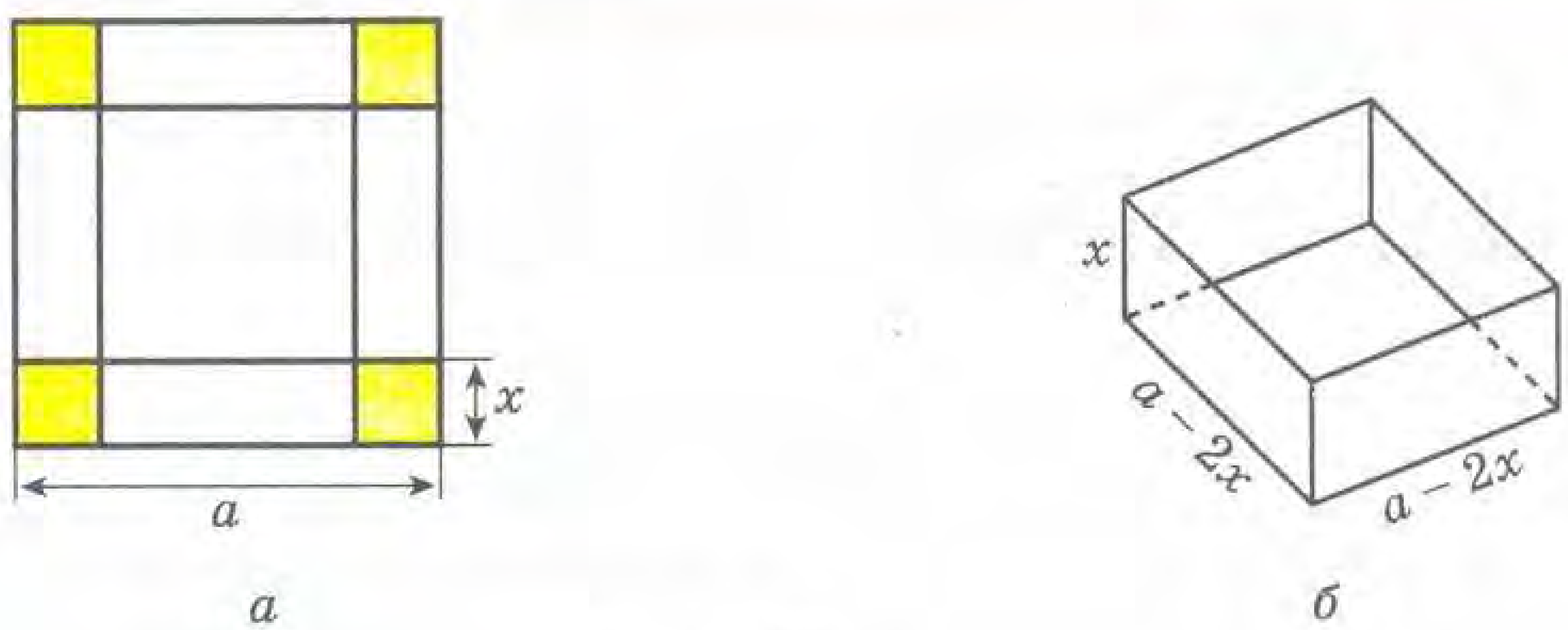


Рис. 5.37

10. Доведіть, що з усіх рівнобедрених трикутників, вписаних у коло радіуса R, найбільшу площу має рівносторонній трикутник.

11. На сторінці текст займає 384 см^2. Верхнє і нижнє поля мають бути по 2 см, праве і ліве — по 3 см. Якими мають бути розміри сторінки з точки зору економії паперу?

12*. У прямокутний трикутник з гіпотенузою 8 см і кутом 60° вписано прямокутник найбільшої площі так, що одна з його сторін лежить на гіпотенузі, а дві вершини — на катетах. Визначте більшу із сторін прямокутника.

13*. З трикутників, що мають даний кут α між сторонами, сума довжин яких постійна і дорівнює a, знайдіть такий, який має найменший периметр.

14*. У кулю радіуса R вписано циліндр, що має найбільшу бічну поверхню. Знайдіть об'єм цього циліндра.

15*. Точка A лежить на графіку функції $y = f(x)$, точка B — на осі Ox, і її абсциса дорівнює ординаті точки A. Знайдіть найменше значення площі трикутника OAB, де точка O — початок координат, а

$$f(x)=\sqrt{4x-2\sin 2x-9\cos x+12} \text{ і } \frac{5\pi}{3}\leqslant x\leqslant \frac{12\pi}{5}.$$

16*. Точка A лежить на графіку функції $y = f(x)$, точка B — на осі Ox, і її абсциса у 2 рази більша за ординату точки A. Знайдіть найбільше значення площі трикутника OAB, де точка O — початок координат, а

$$f(x)=\sqrt{7+2\sin x-(2x+7)\cos x} \text{ і } \frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant \frac{7\pi}{5}.$$

17. Човен перебуває на відстані 3 км від найближчої точки берега A. Пасажир човна хоче дістатися села B, яке розташоване на березі на відстані 5 км від A (ділянку AB берега вважаємо прямолінійною). Човен рухається зі швидкістю 4 км/год; пасажир, вийшовши із човна, може пройти за годину 5 км. До якого пункту на березі має пристати човен, щоб пасажир прибув у село B за найкоротший час?

§ 6 ПОНЯТТЯ Й ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ ТА ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ

6.1. ДОВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ТЕОРЕМ ПРО ГРАНИЦІ

Таблиця 10

1. Означення границі функції в точці	
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$	**Число B називають границею функції $f(x)$ у точці a (при x, що прямує до a), якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке додатне число δ, що при всіх $x \neq a$, які задовольняють нерівність $\lvert x - a \rvert < \delta$, виконується нерівність $\lvert f(x) - B \rvert < \varepsilon$.**
2. Основні теореми про границі функції	
$\lim\limits_{x \to a} c = c$	*Границя сталої функції дорівнює цій самій сталій.*
$\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$	*Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) їх границь, якщо границі доданків існують.*
$\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$	*Границя добутку двох функцій дорівнює добутку їх границь, якщо границі множників існують.*
$\lim\limits_{x \to a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$	*Сталий множник можна виносити за знак границі.*
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ $\left(\text{де } \lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0\right)$	*Границя частки двох функцій дорівнює частці їх границь, якщо границі чисельника й знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю.*
3. Поняття нескінченно малої функції при $x \to a$	
Функцію $f(x)$, визначену в деякому околі точки a, називають нескінченно малою функцією при x, що прямує до a, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.	
4. Властивості нескінченно малих функцій	
1. *Якщо функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі при $x \to a$, то їх сума $\alpha(x) + \beta(x)$ і добутки $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ та $c \cdot \alpha(x)$ (де $c = const$) теж є нескінченно малими функціями при $x \to a$.*	

Закінчення табл. 10

2. *Якщо функція* $\beta(x)$ *нескінченно мала при* $x \to a$ *і для всіх* x, *які задовольняють умову* $\lvert x - a \rvert < \delta$ *(крім, можливо,* $x = a$*), виконується нерівність* $\lvert \alpha(x) \rvert \leqslant \lvert \beta(x) \rvert$, *то функція* $\alpha(x)$ *— теж нескінченно мала при* $x \to a$.
5. Зв'язок означення границі функції в точці з нескінченно малими функціями
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція при $x \to a$

Пояснення й обґрунтування

1. Означення границі функції в точці. Сформулюємо *означення границі функції в точці* (яке вже було розглянуто на с. 5), використовуючи поняття δ-околу точки. Зазвичай δ-околом точки a називають проміжок $(a - \delta;\ a + \delta)$, тобто всі значення x, які задовольняють нерівність $\lvert x - a \rvert < \delta$.

Нехай задано функцію $f(x) = 2x + 3$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$, значення якої знайдені при деяких x із так званого δ-околу точки $x = 2$ (з інтервалу $(2 - \delta,\ 2 + \delta)$, де $\delta > 0$).

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	6,8	6,98	6,998	7,002	7,02	7,2

З наведеної таблиці видно, що чим ближче x до числа 2, тим ближче до числа 7 значення $f(x)$, яке відповідає цьому x. Причому, обираючи все менший δ-окіл точки 2, можна необмежено наближати значення $f(x)$ до числа 7. Іншими словами, можна обрати такий δ-окіл точки 2, щоб відстань від точок $f(x)$ до точки 7 на числовій прямій, тобто $\lvert f(x) - 7 \rvert$, стала меншою від будь-якого додатного числа ε. У цьому разі говорять, що число 7 є границею функції $f(x)$ у точці $x = 2$ (або при x, що прямує до 2) і записують: $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3) = 7$.

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки a, крім, можливо, самої точки a. **Число B називають границею функції $f(x)$ у точці a (або при x, що прямує до a), якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що для всіх $x \neq a$ з δ-околу точки a (при $x \neq a$ і $\lvert x - a \rvert < \delta$) виконується нерівність $\lvert f(x) - B \rvert < \varepsilon$.**

Проілюструємо застосування цього означення до обґрунтування того, що границя функції $f(x)$ при x, що прямує до a, дорівнює B. У найпростіших випадках таке обґрунтування проводять за схемою:

1) *для довільного додатного числа* ε *розглядають нерівність*

$$\lvert f(x) - B \rvert < \varepsilon;$$

2) *при всіх значеннях $x \neq a$ з деякого околу точки a з цієї нерівності одержують нерівність* $|x-a|<\delta$;
3) *пояснюють* (спираючись на рівносильність виконаних перетворень нерівності або на властивості нерівностей), *що при одержаному значенні* δ (яке записують через ε) *з нерівності* $|x-a|<\delta$ (при $x \neq a$) *випливає нерівність* $|f(x)-B|<\varepsilon$;
4) *використовуючи означення границі функції в точці a, роблять висновок:* $\lim\limits_{x \to a} f(x)=B$.

Приклад 1 Використовуючи означення границі функції, перевірте, що $\lim\limits_{x \to 2}(2x+3)=7$.

Розв'язання

Нехай $f(x)=2x+3$ і ε — деяке додатне число ($\varepsilon>0$). Розглянемо нерівність

$$|f(x)-7|<\varepsilon \tag{1}$$

і знайдемо таке число $\delta>0$, щоб за умови $|x-2|<\delta$ виконувалася нерівність (1).

Оскільки $|f(x)-7|=|(2x+3)-7|=|2x-4|=|2(x-2)|=2|x-2|$, то нерівність $|f(x)-7|<\varepsilon$ рівносильна нерівності $2|x-2|<\varepsilon$, яка, у свою чергу, рівносильна нерівності $|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$. Тому якщо обрати $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, то за умови $|x-2|<\delta$ буде виконуватися нерівність $|(2x+3)-7|<\varepsilon$, а це й означає, що $\lim\limits_{x \to 2}(2x+3)=7$. ◁

Зауваження. Як бачимо, вибір δ залежить від заданого значення ε. Щоб підкреслити цей факт, іноді записують $\delta=\delta(\varepsilon)$.

Зазначимо, що точка a, у якій розглядають границю, може належати області визначення функції $f(x)$ (як у прикладі 1), а може і не належати їй.

Приклад 2 Доведіть, що $\lim\limits_{x \to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$.

Розв'язання

Нехай $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ і $\varepsilon>0$. Тоді на області визначення функції $f(x)$ (при $x \neq 3$) маємо $|f(x)-6|=\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=|(x+3)-6|=|x-3|$.

Якщо обрати $\delta=\varepsilon$, то одержимо, що $|f(x)-6|=|x-3|<\varepsilon$, як тільки $|x-3|<\delta$. Тому згідно з означенням границі $\lim\limits_{x \to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$. ◁

Приклад 3 Доведіть, що границя постійної функції дорівнює тій самій постійній.

Розв'язання

▶ Нехай $f(x) = c$ для всіх x із деякого околу точки a. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$: $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ для всіх x з обраного околу точки a. Тому $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} c = c$. ◁

Приклад 4 Доведіть, що $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

Розв'язання

▶ Нехай $f(x) = x$ і вибране деяке додатне число ε. Якщо взяти $\delta = \varepsilon > 0$, одержимо, що $|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$, як тільки $|x - a| < \delta$. Отже, за означенням границі $\lim\limits_{x \to a} x = a$. ◁

Приклад 5 Доведіть, що $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.

Розв'язання

▶ Нехай $f(x) = x^2$ і обрано деяке додатне число ε. Якщо взяти $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$, одержимо, що $|f(x) - 0| = |x^2| < \varepsilon$, як тільки $|x - 0| = |x| < \delta$. Тому за означенням границі $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$. ◁

2. Основні теореми про границі функції. Поняття нескінченно малої функції при $x \to a$. За допомогою означення границі функції можна довести також **теорему про границю суми двох функцій.**

Границя суми двох функцій дорівнює сумі їх границь, якщо границі доданків існують:

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

● Задамо $\varepsilon > 0$. Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то знайдеться таке число $\delta_1 > 0$, що при $|x - a| < \delta_1$ (крім, можливо, $x = a$) виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Аналогічно, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$, то знайдеться таке число $\delta_2 > 0$, що при $|x - a| < \delta_2$ (крім, можливо, $x = a$) виконується нерівність

$$|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Якщо вибрати як число δ найменше з чисел δ_1 і δ_2 (це можна позначити так: $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$), то ми виберемо спільну частину обох околів точки a, і при $|x - a| < \delta$ (крім, можливо, $x = a$) будуть виконуватися обидві нерівності (1) і (2). Тоді, ураховуючи означення границі функції та обґрунтовану в 10 класі нерівність $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ (модуль суми не перевищує суми модулів доданків), одержуємо

$$|(f(x)+g(x))-(A+B)|=|(f(x)-A)+(g(x)-B)|\leqslant|f(x)-A|+|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

А це й означає, що $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=A+B$, тобто

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x).$$ ○

Для доведення властивостей границі добутку і частки функцій зручно ввести поняття *нескінченно малої функції*.

Функцію $f(x)$, визначену в деякому околі точки a, називають нескінченно малою функцією при x, що прямує до a, якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

Ураховуючи означення границі функції в точці, це означення можна сформулювати так.

Функцію $f(x)$, визначену в деякому околі точки a, називають нескінченно малою функцією при x, що прямує до a ($x \to a$), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють умову $|x - a| < \delta$ (крім, можливо, $x = a$), *виконується нерівність $|f(x)| < \varepsilon$.*

Наприклад,

1) $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ (див. приклад 4), отже, $f(x) = x$ — нескінченно мала функція при $x \to 0$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ (див. приклад 5), отже, $f(x) = x^2$ — нескінченно мала функція при $x \to 0$.

Зауваження. **Якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, то це еквівалентно тому, що $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція при $x \to a$.**

● Дійсно, якщо розглянути функцію

$$\alpha(x) = f(x) - A, \tag{3}$$

то $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}(f(x)-A)=\lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}A=A-A=0$. А це й означає, що функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою при $x \to a$. Але тоді з рівності (3) одержуємо, що $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція при $x \to a$. ○

Властивості нескінченно малих функцій

1. *Якщо функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі при $x \to a$, то їх сума $\alpha(x) + \beta(x)$ і добутки $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ і $c\cdot\alpha(x)$ (де $c = const$) теж є нескінченно малими функціями при $x \to a$.*
2. *Якщо функція $\beta(x)$ нескінченно мала при $x \to a$ і для всіх x, які задовольняють умову $|x - a| < \delta$ (крім, можливо, $x = a$), виконується нерівність $|\alpha(x)| \leqslant |\beta(x)|$, то функція $\alpha(x)$ теж нескінченно мала при $x \to a$.*

Доведемо ці властивості.

1. За умовою функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ — нескінченно малі при $x \to a$. Це означає, що $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a} \beta(x)=0$. Тоді, використовуючи формулу границі суми, маємо

$$\lim_{x\to a} (\alpha(x)+\beta(x)) = \lim_{x\to a} \alpha(x) + \lim_{x\to a} \beta(x) = 0+0=0.$$

А це й означає, що сума $\alpha(x)+\beta(x)$ є нескінченно малою функцією. З іншого боку, якщо функція $\alpha(x)$ — нескінченно мала при $x \to a$, то для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta_1 > 0$, що для всіх x, які задовольняють умову $|x-a| < \delta_1$ (крім, можливо, $x = a$), виконується нерівність

$$|\alpha(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Аналогічно, якщо функція $\beta(x)$ — нескінченно мала при $x \to a$, то це означає, що, наприклад, для $\varepsilon = 1$ можна вказати таке $\delta_2 > 0$, що для всіх x, які задовольняють умову $|x-a| < \delta_2$ (крім, можливо, $x = a$), виконується нерівність

$$|\beta(x)| < 1. \tag{5}$$

Якщо вибрати як число δ найменше з чисел δ_1 і δ_2 ($\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$), то це буде спільна частина обох околів точки a, і при $|x-a| < \delta$ (крім, можливо, $x = a$) будуть виконуватися обидві нерівності (4) і (5). Тоді $|\alpha(x)\cdot\beta(x)| = |\alpha(x)|\cdot|\beta(x)| < \varepsilon\cdot 1 = \varepsilon$. А це й означає, що $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ є нескінченно малою функцією при $x \to a$.

Для обґрунтування того, що функція $c\cdot\alpha(x)$ (де c — стала) є нескінченно малою, достатньо помітити, що при $c = 0$ це твердження виконується $\left(\lim\limits_{x\to a}(0\cdot\alpha(x)) = \lim\limits_{x\to a} 0 = 0\right)$, а при $c \neq 0$ для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють умову $|x-a| < \delta$ (крім, можливо, $x = a$), виконується нерівність $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{|c|}$.

Тоді $|c\cdot\alpha(x)| = |c|\cdot|\alpha(x)| < |c|\cdot\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$, а це й означає, що функція $c\cdot\alpha(x)$ (де c — стала) є нескінченно малою при $x \to a$.

2. За умовою функція $\beta(x)$ — нескінченно мала при $x \to a$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta_1 > 0$, що для всіх x, які задовольняють умову $|x-a| < \delta_1$ (крім, можливо, $x = a$), виконується нерівність

$$|\beta(x)| < \varepsilon. \tag{6}$$

Крім того, за умовою для всіх x, які задовольняють умову $|x-a| < \delta$ (крім, можливо, $x = a$), виконується нерівність

$$|\alpha(x)| \leqslant |\beta(x)|. \tag{7}$$

Якщо обрати як число δ_2 найменше з чисел δ_1 і δ ($\delta_2 = \min\{\delta_1; \delta\}$), то це буде спільна частина обох околів точки a, і при $|x - a| < \delta_2$ (крім, можливо, $x = a$) будуть виконуватися обидві нерівності (6) і (7). Тоді $|\alpha(x)| \leqslant |\beta(x)| < \varepsilon$, а це й означає, що функція $\alpha(x)$ теж є нескінченно малою при $x \to a$. ○

Доведемо **теорему про границю добутку**.

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то це еквівалентно тому, що $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція при $x \to a$.

Аналогічно, якщо $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то це еквівалентно тому, що $g(x) = B + \beta(x)$, де $\beta(x)$ — нескінченно мала функція при $x \to a$.

Тоді $f(x)g(x) = (A + \alpha(x))(B + \beta(x)) = A \cdot B + A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$.

Ураховуючи властивості нескінченно малих функцій, одержуємо, що функція $\varphi(x) = A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$ — нескінченно мала. Отже, $f(x) \cdot g(x) = AB + \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ — нескінченно мала функція, а це й означає, що $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = A \cdot B$, тобто

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$ ○

Границя добутку двох функцій дорівнює добутку їх границь, якщо границі множників існують.

Використовуючи метод математичної індукції, правила обчислення границі суми і добутку можна узагальнити для довільної кількості доданків або множників.

За правилом обчислення границі добутку одержуємо:

$$\lim_{x\to a}(cf(x)) = \lim_{x\to a} c \cdot \lim_{x\to a} f(x) = c\lim_{x\to a} f(x).$$

Отже,

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x)) = c\cdot\lim_{x\to a} f(x),$$

тобто *сталий множник можна виносити за знак границі.*

Для доведення **теореми про границю частки** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ спочатку розглянемо випадок, коли $f(x) = 1$, тобто доведемо твердження:

$$\boxed{\text{якщо } \lim_{x\to a} g(x) = B \text{ (де } B \neq 0\text{), то } \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}}.$$

За умовою $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ (де $B \neq 0$). Це еквівалентно тому, що $g(x) = B + \beta(x)$, де $\beta(x)$ — нескінченно мала функція при $x \to a$. Тоді для

$\varepsilon = \frac{|B|}{2} > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють умову $|x - a| < \delta$ (крім, можливо, $x = a$), виконується нерівність

$$|\beta(x)| < \frac{|B|}{2}. \qquad (8)$$

Використовуючи нерівність $|a + b| \geqslant |a| - |b|$ і нерівність (8), одержуємо:

$$|g(x)| = |B + \beta(x)| \geqslant |B| - |\beta(x)| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}.$$

Отже, для вибраних значень x

$$|g(x)| > \frac{|B|}{2}. \qquad (9)$$

Розглянемо для вибраних значень x вираз $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right|$ і врахуємо нерівність (9):

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|B - g(x)|}{|g(x)||B|} = \frac{|g(x) - B|}{|g(x)||B|} = \frac{|\beta(x)|}{|g(x)||B|} < \frac{2}{|B|^2}\,|\beta(x)| = \left|\frac{2}{B^2} \cdot \beta(x)\right|.$$

Оскільки функція $\beta(x)$ нескінченно мала (при $x \to a$), то функція $\frac{2}{B^2} \cdot \beta(x)$ теж нескінченно мала $\left(\frac{2}{B^2} \text{ — стала}\right)$. Тоді за властивістю 2 нескінченно малих функцій (див. с. 96) одержуємо, що функція $\gamma(x) = \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}$ є нескінченно малою при $x \to a$, а це й означає, що $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$.

Тоді якщо $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$ і $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$ (де $B \neq 0$), то, використовуючи формулу границі добутку й одержану формулу, маємо:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a}\left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}.$$

Отже,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \quad \left(\text{де } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0.\right)$$

Границя частки двох функцій дорівнює частці їх границь, якщо границі чисельника й знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю.

Приклад 6 Знайдіть $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-5x+6)$.

Розв'язання

Застосовуючи теореми про границі суми, різниці та добутку, одержуємо:

$$\lim_{x\to 1}(3x^2-5x+6)=\lim_{x\to 1}(3x^2)-\lim_{x\to 1}(5x)+\lim_{x\to 1}6=3\lim_{x\to 1}x^2-5\lim_{x\to 1}x+6=$$
$$=3(\lim_{x\to 1}x)(\lim_{x\to 1}x)-5\cdot 1+6=3\cdot 1\cdot 1-5+6=4.$$

Відповідь: 4. ◁

Приклад 7 Знайдіть $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$.

Розв'язання

Тут границя знаменника дорівнює нулю, тому скористатися теоремою про границю частки не можна.
Розкладемо чисельник на множники: $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$.
Оскільки при знаходженні границі в точці 3 розглядаються тільки значення $x\neq 3$, то дріб можна скоротити на $x-3\neq 0$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-2)=3-2=1.$$

Відповідь: 1. ◁

Теорема про єдиність границі. ***Якщо функція $f(x)$ у точці має границю, то ця границя єдина.***

Доведення (методом від супротивного). Нехай у точці $x=a$ функція $f(x)$ має дві різні границі A і B. За означенням границі для будь-якого $\varepsilon>0$ існують $\delta_1(\varepsilon)>0$ і $\delta_2(\varepsilon)>0$, такі, що для всіх x, які задовольняють умову $|x-a|<\delta_1$ $(x\neq a)$, виконується нерівність

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \qquad (10)$$

а для всіх x, які задовольняють умову $|x-a|<\delta_2$ $(x\neq a)$, виконується нерівність

$$|f(x)-B|<\varepsilon. \qquad (11)$$

Із чисел δ_1 і δ_2 можна вибрати найменше. Позначимо його буквою δ $(\delta=\min\{\delta_1;\delta_2\})$. Якщо взяти деяке $x\neq a$, яке задовольняє нерівність $|x-a|<\delta$, то для нього виконуються обидві нерівності (10) і (11). Через те що модуль суми двох доданків не перевищує суми модулів цих доданків, маємо:

$$|A-B|=|A-f(x)+f(x)-B|\leqslant|A-f(x)|+|f(x)-B|=$$
$$=|f(x)-A|+|f(x)-B|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

Оскільки ε — довільне додатне число, то візьмемо $\varepsilon = \frac{|A-B|}{4}$. Тоді одержимо $|A-B| < \frac{1}{2}|A-B|$, тобто $|A-B| < 0$. Але ця нерівність не може виконуватися. Отже, наше припущення про існування двох границь неправильне, і тому $A = B$. ○

Під час вивчення границь іноді нам доведеться виконувати граничний перехід у нерівностях, який можна здійснювати за допомогою такої теореми.

Теорема. ***Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = B$, причому в деякому околі точки a (крім, можливо, самої точки a) справедлива нерівність $f(x) \leqslant \varphi(x)$, то $A \leqslant B$.***

● Доведення (від супротивного). Припустимо протилежне, тобто що $A > B$. Виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб два ε-околи точок A і B: $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ і $(B - \varepsilon; B + \varepsilon)$ не перетиналися, тобто

$$A - \varepsilon > B + \varepsilon. \tag{12}$$

Оскільки $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то знайдеться δ_1-окіл точки a, у якому $|f(x) - A| < \varepsilon$, тобто

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon. \tag{13}$$

Також існує δ_2-окіл точки a, у якому $|\varphi(x) - B| < \varepsilon$, тобто

$$B - \varepsilon < \varphi(x) < B + \varepsilon. \tag{14}$$

З чисел δ_1 і δ_2 виберемо найменше і позначимо його через δ. Тоді в δ-околі точки a маємо (ураховуючи нерівності (12), (13), (14)):

$$\varphi(x) < B + \varepsilon < A - \varepsilon < f(x),$$

і тому $f(x) > \varphi(x)$, але це суперечить умові. Отже, $A \leqslant B$. ○

Наслідок (границя проміжної функції). ***Якщо $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = B$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$ і в деякому околі точки a (крім, можливо, самої точки a) справедлива нерівність***

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x), \tag{15}$$

то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$.

● Доведення. Оскільки всі умови останньої теореми виконуються, то здійснимо граничний перехід у нерівностях (15). Одержуємо $B \leqslant \lim\limits_{x \to a} f(x) \leqslant B$. Але ці нерівності можуть виконуватися тільки в тому випадку, коли $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$, що й треба було довести. ○

6.2. ОДНОСТОРОННІ ГРАНИЦІ

В означенні границі функції в точці, наведеному в п. 6.1, аргумент x набуває всіх значень із δ-околу точки a (крім, можливо, $x = a$) як ліворуч, так і праворуч від a.

Якщо при знаходженні границі розглядати значення x тільки ліворуч від точки a, то таку границю називають ***лівою***, або ***лівосторонньою***, і позначають $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ або $f(a-0)$. Якщо розглядати значення x тільки праворуч від точки a, то таку границю називають ***правою***, або ***правосторонньою***, і позначають $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ або $f(a+0)$.

Лівосторонні та правосторонні границі називають ***односторонніми***. Коли розглядають односторонні границі в точці $x = 0$ (при $x \to 0$), запис спрощують і записують для лівосторонньої границі $\lim\limits_{x \to -0} f(x)$ або $f(-0)$, а для правосторонньої границі — $\lim\limits_{x \to +0} f(x)$ або $f(+0)$.

Означення. **Число B_+ називають правосторонньою границею функції $f(x)$ у точці a, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що для всіх x з області визначення функції, які задовольняють умову $a < x < a + \delta$, виконується нерівність**

$$|f(x) - B_+| < \varepsilon. \tag{1}$$

Аналогічно дають означення числа $B_- = f(a-0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ як лівосторонньої границі функції $f(x)$ у точці a. Тут нерівність

$$|f(x) - B_-| < \varepsilon \tag{2}$$

має виконуватися для всіх x із лівої частини δ-околу точки a, тобто при $a - \delta < x < a$.

Відзначимо зв'язок між односторонніми границями та границею функції в деякій точці a.

Якщо число B є границею функції $f(x)$ при $x \to a$, то нерівність

$$|f(x) - B| < \varepsilon \tag{3}$$

справедлива для всіх значень x із δ-околу точки a ($x \neq a$). Тоді ця нерівність справедлива для всіх значень x із лівої половини вказаного δ-околу і для всіх x з її правої половини, тобто існують лівостороння і правостороння границі в точці a, і ці границі дорівнюють B. Тому якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, тобто $B_- = B_+ = B$.

Справедливе й обернене твердження: якщо виконується рівність $B_- = B_+ = B$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$.

Дійсно, якщо $B_- = B_+ = B$, то нерівність (1), яка визначає існування правосторонньої границі функції, виконується і зліва від точки a (згідно з нерівністю (2)). Але тоді нерівність (1) фактично перетворюється на нерівність (3), і тому $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$.

У зв'язку з цим можна сформулювати такий критерій.

Критерій існування границі. **Для того щоб у точці $x = a$ існувала границя B функції $f(x)$, необхідно і достатньо, щоб у цій точці існувала лівостороння границя функції $f(x)$, тобто $B_- = f(a - 0)$, і правостороння границя функції $f(x)$, тобто $B_+ = f(a + 0)$, і щоб вони дорівнювали одна одній: $B_- = B_+ = B$, при цьому**

$$\lim_{x \to a} f(x) = B.$$

Приклад 1 З'ясуйте існування границі функції $f(x) = |x|$ у точці 0.

Розв'язання

Функція $f(x) = |x|$ визначена на всій числовій прямій. Оскільки $f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ при } x \geqslant 0, \\ -x \text{ при } x < 0 \end{cases}$ (див. рис. 2.8), то при $x < 0$ $f(x) = -x$, тому $f(-0) = \lim\limits_{x \to -0} f(x) = \lim\limits_{x \to -0} (-x) = 0.$ Аналогічно $f(+0) = \lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{x \to +0} x = 0.$

Таким чином, $f(-0) = f(+0) = 0$. Оскільки односторонні границі в точці 0 збігаються, то границя функції $f(x)$ існує і дорівнює їх спільному значенню, тобто $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0.$ ◁

Приклад 2 З'ясуйте існування границі в точці 2 для функції $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 \text{ при } x \leqslant 2, \\ 4 \text{ при } x > 2. \end{cases}$

Розв'язання

Задана функція визначена на всій числовій прямій. Знайдемо односторонні границі цієї функції в точці $x = 2$.

$f(2-0) = \lim\limits_{x \to 2-0} (2x+3) = 7$ (див. приклад 1 з п. 6.1, с. 94);

$f(2+0) = \lim\limits_{x \to 2+0} 4 = 4$ (див. приклад 3 з п. 6.1, с. 95).

Отже, $f(2 - 0) \neq f(2 + 0)$, і тому задана функція не має границі в точці $x = 2$ і не є неперервною в цій точці. (Графік функції зображено на рис. 6.1.) ◁

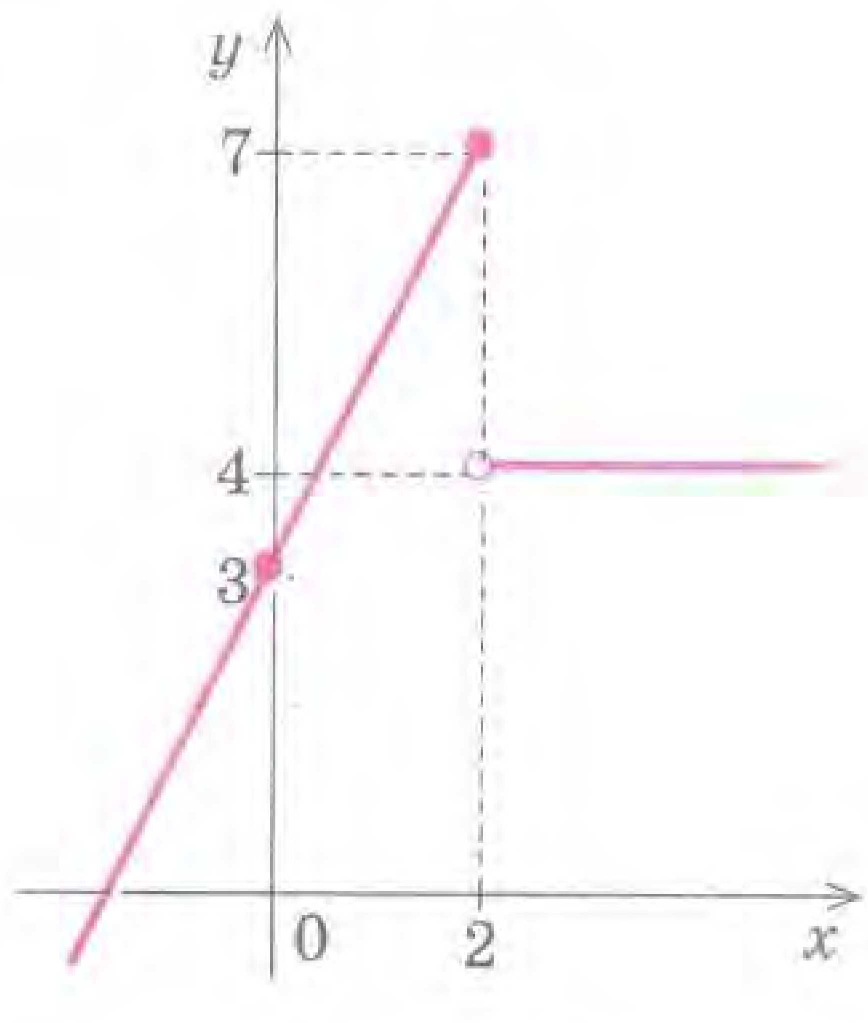


Рис. 6.1

6.3. НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ

Нагадаємо, що функцію $f(x)$ називають неперервною в точці a, якщо

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Доведені властивості границі функції дозволяють обґрунтувати **властивості неперервних функцій**, які наведено в табл. 1 (с. 6):

якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці a, то **сума, добуток і частка неперервних**

у точці a функцій неперервні в точці a (частка у випадку, коли дільник $g(a) \neq 0$).

Дійсно, якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці a, то

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ і } \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Тоді $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a)$, а це й означає, що функція $f(x) + g(x)$ неперервна в точці a. Аналогічно обґрунтовують неперервність добутку і частки двох неперервних функцій. ○

Згідно з означенням, *неперервність функції $f(x)$ у точці x_0 означає виконання таких умов:*

1) *функція $f(x)$ має бути визначена в точці x_0;*
2) *у функції $f(x)$ має існувати границя в точці x_0;*
3) *границя функції в точці x_0 збігається зі значенням функції в цій точці.*

Наприклад, функція $f(x) = x^2$ визначена на всій числовій прямій і $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$. Оскільки $f(1) = 1$, то значення $f(x) = x^2$ у точці 1 збігається з границею цієї функції при $x \to 1$, тому за означенням функція $f(x) = x^2$ неперервна в точці $x = 1$.

Якщо використати означення лівосторонньої та правосторонньої границь, то можна означити лівосторонню та правосторонню неперервність функції так: функцію називають ***неперервною зліва*** в точці a, якщо $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$, і ***неперервною справа*** у точці a, якщо $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$.

Наприклад, функція $f(x) = \{x\}$, де $\{x\}$ — дробова частина числа x, неперервна в будь-якій точці, крім цілочислових значень аргументу x, у яких вона неперервна справа (рис. 6.2).

Функцію називають *неперервною на інтервалі* $(a; b)$, якщо вона неперервна в кожній його точці. Функцію називають *неперервною на відрізку* $[a; b]$, якщо вона неперервна на інтервалі $(a; b)$, неперервна справа в точці a і неперервна зліва в точці b.

Якщо в точці a рівність $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ не виконується, то функцію $f(x)$ називають ***розривною*** в точці a, а точку a — ***точкою розриву*** функції $f(x)$).

Наприклад, функція з прикладу 2 є розривною в точці 2.

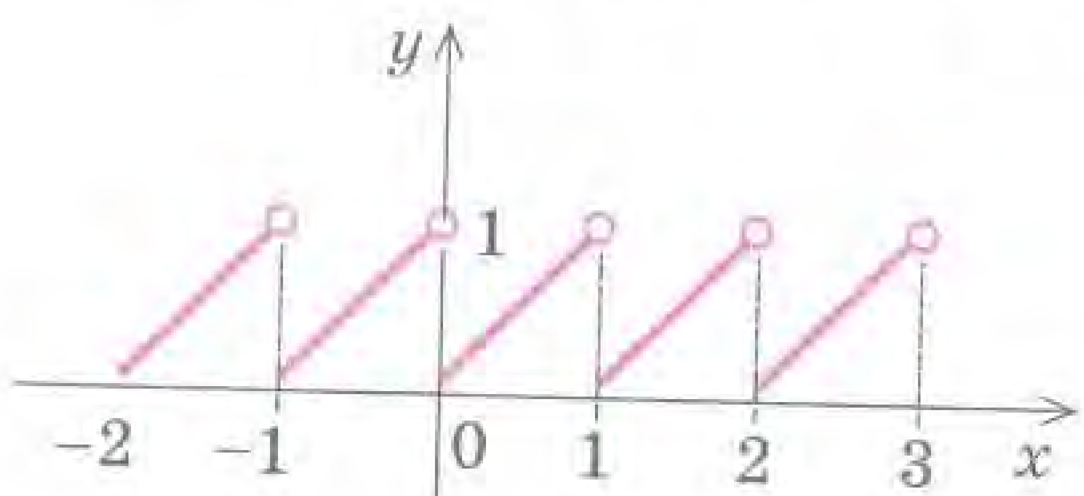


Рис. 6.2

Якщо розглянути функцію $y = [x]$ ($[x]$ — ***ціла частина x***, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує x), то ця функція є розривною в кожній цілочисловій точці (рис. 6.3).

Аналогічно для функції $y = \{x\}$ ($\{x\}$ — ***дробова частина x***, тобто різниця $x - [x]$) точками розриву є всі цілочислові значення аргументу x (див. рис. 6.2).

Поняття неперервності функції можна пов'язати з поняттями приросту функції та приросту аргументу.

Нехай задана функція $f(x)$ з областю визначення $D(f) = (a; b)$ і x_0 — деяке значення аргументу з інтервалу $(a; b)$. Якщо $x \in (a; b)$ — інше фіксоване значення аргументу, то різницю $x - x_0$ називають ***приростом аргументу*** і позначають Δx, тобто $\Delta x = x - x_0$. Тоді $x = x_0 + \Delta x$.

Різницю $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ називають ***приростом функції f*** у точці x_0 і позначають Δf.

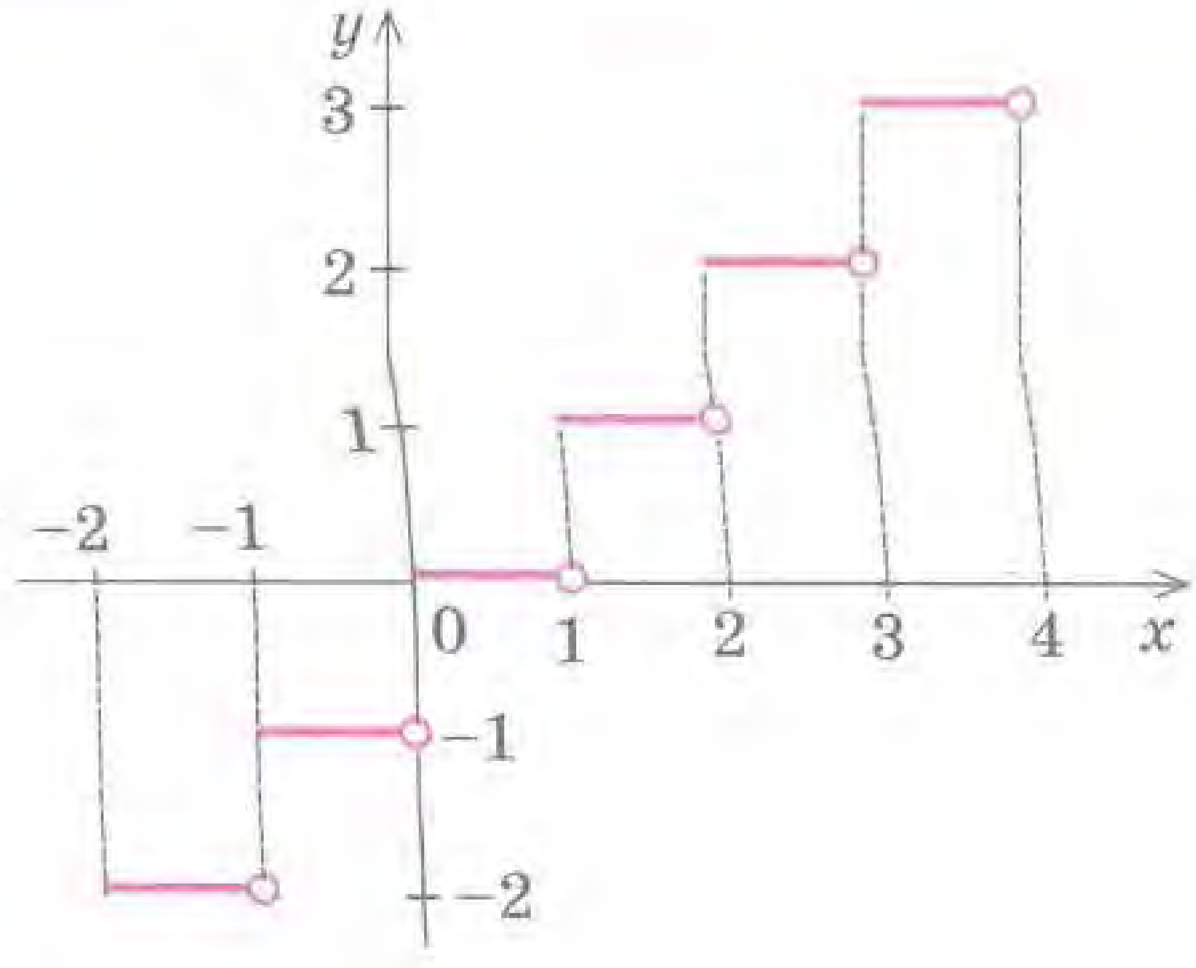


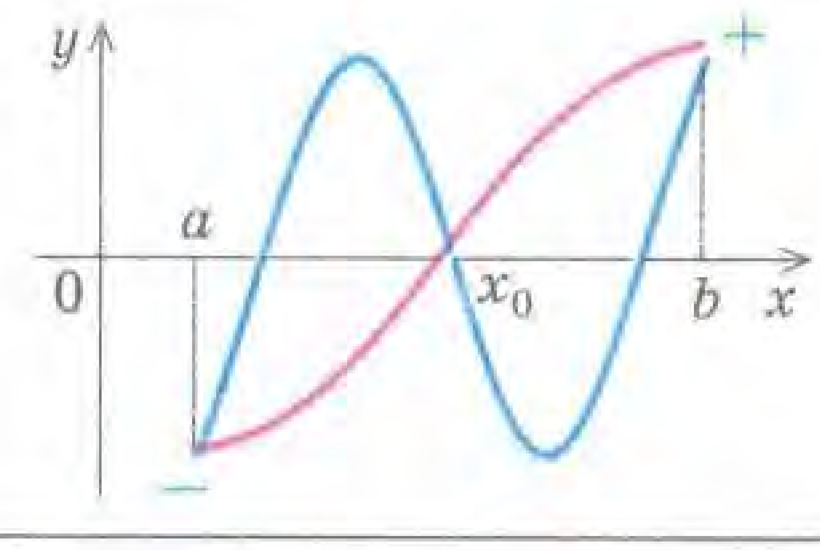
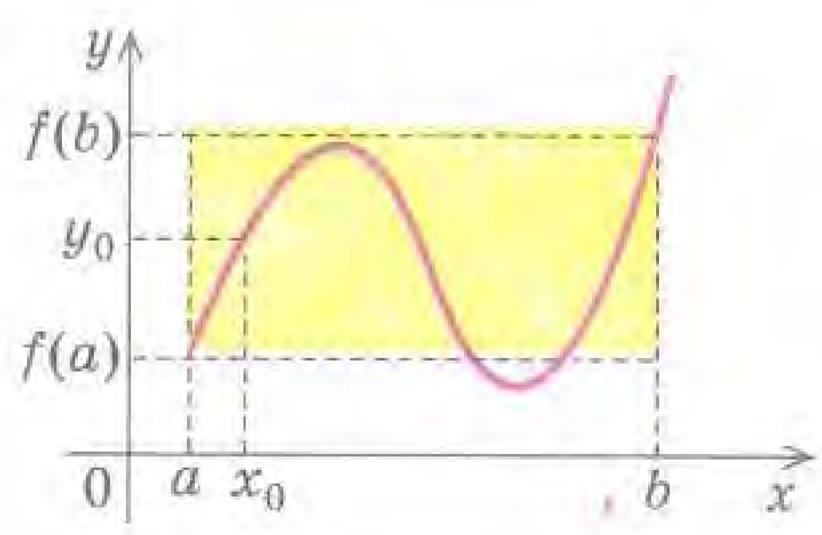
Рис. 6.3

Очевидно, що коли x прямує до x_0, приріст аргументу прямує до нуля: $\Delta x \to 0$. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, то за означенням $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, і тому $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, а це означає, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$.

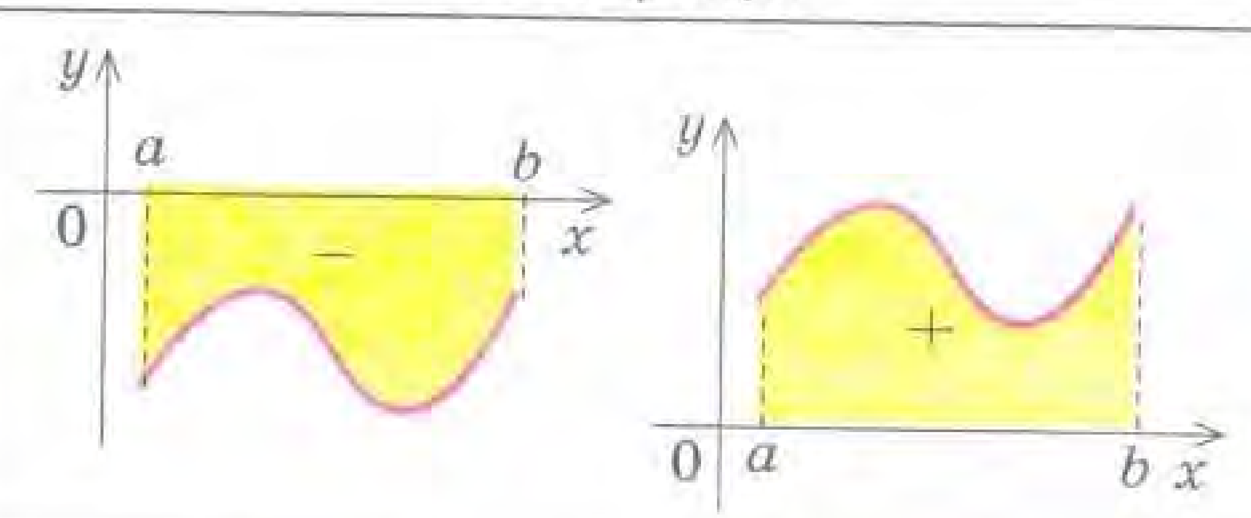
З останнього співвідношення випливає: якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, то малому приросту аргументу відповідає малий приріст функції. Ураховуючи цю властивість, будуємо графік неперервної функції у вигляді суцільної лінії.

Уявлення про неперервну функцію як функцію, графік якої можна намалювати, не відриваючи олівця від паперу, підтверджується ***властивостями неперервних функцій***, які доводять у курсах математичного аналізу. Наведемо приклади таких властивостей (табл. 11).

Таблиця 11

Властивості неперервних функцій	Ілюстрація
1. Якщо неперервна на відрізку $[a; b]$ функція набуває на кінцях відрізка значень різних знаків, то в деякій точці цього відрізка вона набуває значення, що дорівнює нулю.	
2. Функція $f(x)$, неперервна на відрізку $[a; b]$, набуває всіх проміжних значень між значеннями $f(a)$ і $f(b)$ на кінцях відрізка.	

Закінчення табл. 11

Властивості неперервних функцій	Ілюстрація
3. Якщо на інтервалі $(a;\ b)$ функція $f\ (x)$ неперервна і не перетворюється на нуль, то на цьому інтервалі вона зберігає постійний знак.	

Відомі вам елементарні функції неперервні в будь-якій точці своєї області визначення. Графіки таких функцій зображуються суцільними кривими на будь-якому інтервалі, який цілком входить до області визначення (саме на цій властивості і ґрунтується спосіб побудови графіка функції «по точках»). Наприклад, функція $f\,(x)=\frac{1}{x}$ неперервна на будь-якому інтервалі, який не містить точку 0 (див. рис. 5.19).

Властивості неперервних функцій дозволяють коректно обґрунтувати метод інтервалів для розв'язування нерівностей, наведений у підручнику для 10 класу, і тому цей метод можна використовувати при розв'язуванні будь-яких нерівностей виду $f\ (x) \gtrless 0$, де $f\ (x)$ — неперервна в будь-якій точці своєї області визначення функція (див. також с. 7–10).

6.4. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ. НЕСКІНЧЕННА ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ

Під час вивчення функцій часто виникає потреба знайти границю функції на нескінченності, тобто таке число B (якщо воно існує), до якого прямує функція $f\ (x)$ при необмеженому зростанні аргументу x або коли x, збільшуючись за абсолютною величиною, залишається від'ємним.

Розглянемо функцію $f\,(x)=2+\frac{1}{x^2+1}$. Очевидно, що зі збільшенням x знаменник дробу збільшується, і тому значення дробу стає як завгодно малим за абсолютною величиною. Таким чином, значення функції $f\ (x)$ при дуже великих значеннях аргументу x мало відрізняється від числа 2. У цьому випадку говорять, що функція $f\ (x)$ має своєю границею число 2 при $x \to \infty$, і пишуть: $\lim\limits_{x\to\infty} f\,(x)=2$.

Означення. **Нехай функція $f\ (x)$ визначена на всій числовій прямій (або при всіх досить великих за модулем значеннях x). Число B називають границею $f\ (x)$ при $x \to \infty$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $M > 0$, що для всіх x, які задовольняють умову $|\ x\ | > M$, виконується нерівність $|\ f\ (x) - B\ | < \varepsilon$.**

У цьому випадку пишуть: $\lim\limits_{x\to\infty} f\,(x)=B$.

Поведінка функції $f(x)$ може бути різною при $x \to -\infty$ та при $x \to +\infty$. Тому при дослідженні властивостей функції іноді розглядають окремо $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Ці границі означають аналогічно до означення $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, тільки умову $|x| > M$ замінюють відповідно на $x < -M$ і $x > M$.

Крім розглянутих скінченних границь функції $f(x)$ при $x \to a$ (або при $x \to \infty$), використовують також поняття нескінченної границі. Наприклад, функція $f(x)=\frac{1}{x^2}$, яка визначена для всіх $x \neq 0$ (рис. 6.4), набуває яких завгодно великих значень при $x \to 0$. Тоді говорять, що функція в точці $x = 0$ має нескінченну границю і пишуть: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}=\infty$.

Означення. ***Будемо вважати, що $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, якщо для довільного числа $M > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють умову $|x - a| < \delta$ $(x \neq a)$, виконується нерівність $|f(x)| > M$.***

Записи $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ та $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ означають аналогічно до означення $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, тільки умову $|f(x)| > M$ замінюють відповідно на нерівності $f(x) > M$ і $f(x) < -M$.

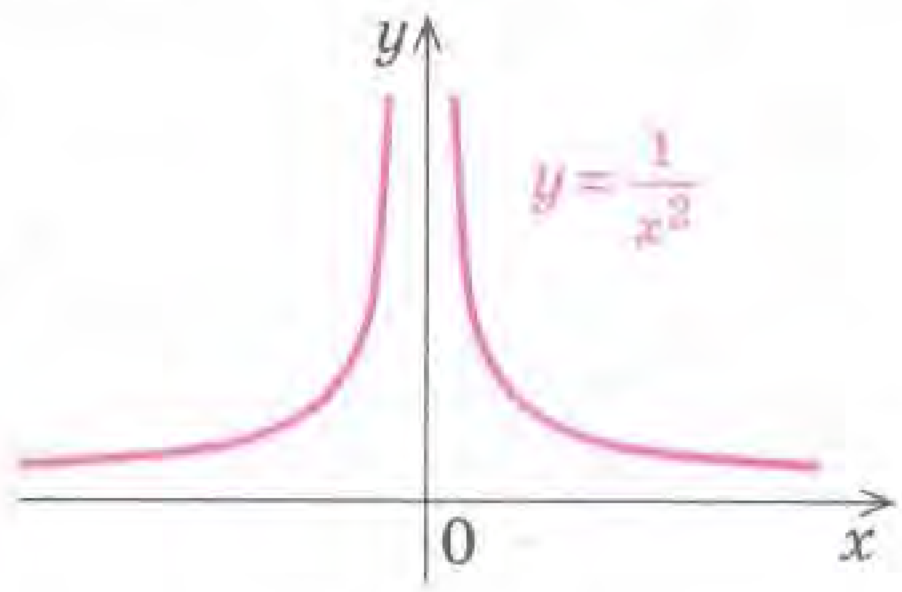


Рис. 6.4

У математиці використовують також поняття нескінченної границі при $x \to \infty$, тобто границі типу $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, яку означають так:

якщо для довільного числа $M > 0$ існує таке число $M_0 > 0$, що для всіх x, які задовольняють умову $|x| > M_0$, виконується умова $|f(x)| > M$, то говорять, що функція $f(x)$ має ***нескінченну границю на нескінченності.***

Аналогічні означення мають записи $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ та $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Наприклад, запис $\lim\limits_{x\to\infty} x^2=+\infty$ виражає відому властивість функції $f(x) = x^2$, яка необмежено зростає зі збільшенням значень $|x|$.

Приклад 1 Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-3x+1}{5+x^2-x^3}$.

Розв'язання

Винесемо за дужки в чисельнику й знаменнику найвищий степінь змінної та скоротимо чисельник і знаменник на x^3. Тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{5+x^2-x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x}-1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x}-1}=\frac{2}{-1}=-2.$$

Відповідь: -2. ◁

Приклад 2 Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$.

Розв'язання

▶ Помножимо і розділимо різницю, яка стоїть під знаком границі, на суму $\sqrt{x^2+5}+x$. Одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\left(\sqrt{x^2+5}+x\right)}{\sqrt{x^2+5}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{x^2+5}+x}=0.$$

Відповідь: 0. ◁

Нагадаємо, що у випадку, коли $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, функцію називають нескінченно малою при $x\to a$, якщо ж $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, то *нескінченно великою при* $x\to a$. Аналогічні означення мають ***нескінченно малі й нескінченно великі функції*** при $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$.

Коли функція $f(x)$ є нескінченно малою при $x\to a$ та $f(x)\neq 0$ для $x\neq a$ з деякого околу точки a, то функція $\frac{1}{f(x)}$ буде нескінченно великою при $x\to a$. І навпаки, якщо функція $f(x)$ нескінченно велика при $x\to a$, то функція $\frac{1}{f(x)}$ є нескінченно малою при $x\to a$.

Наприклад, функція $f(x)=x$ є нескінченно малою при $x\to 0$ і нескінченно великою при $x\to\infty$ (а також при $x\to-\infty$ і $x\to+\infty$). Тоді функція $f(x)=\frac{1}{x}$ є нескінченно малою при $x\to\infty$ (при $x\to-\infty$ і $x\to+\infty$) і нескінченно великою при $x\to 0$ (аналогічно при $x\to-0$ і $x\to+0$).

Границя послідовності

Досить поширеними в курсі математики є нескінченні *послідовності*, тобто *функції* $y=f(n)$, *задані на множині натуральних чисел* N. Щоб підкреслити, що аргумент такої функції набуває значень тільки з множини натуральних чисел, його позначають не x, а n. Для послідовності $f(n)$ часто виникає необхідність знайти її границю при необмеженому зростанні аргументу n ($n \to +\infty$). Означення цієї границі в основному аналогічне означенню границі функції на нескінченності.

Означення. **Число B називають границею послідовності $f(n)$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M > 0$, що для всіх $n > M$ виконується нерівність $|f(n) - B| < \varepsilon$.**

Для границь послідовності виконуються всі відомі вам теореми про границі (тільки в їх формулюваннях слово «функція» замінюється на слово «послідовність»).

Приклад 3 Знайдіть границю послідовності $f(n) = \frac{\sqrt{9n^2+1}}{3n-2}$.

Розв'язання

Як і в прикладі 1, винесемо в чисельнику і в знаменнику за дужки найвищий степінь змінної, скоротимо чисельник і знаменник на n, а потім використаємо теореми про границі. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+1}}{3n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}{n\left(3-\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{9}}{3} = 1.$$

Відповідь: 1. ◁

6.5. ГРАНИЦЯ ВІДНОШЕННЯ $\frac{\sin x}{x}$ ПРИ $x \to 0$

Цю границю зазвичай називають *першою чудовою границею*, її часто доводиться використовувати при знаходженні границь тригонометричних функцій.

Теорема. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

Доведення. Можна вважати, що x набуває тільки додатних значень. Це випливає з того, що функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ є парною функцією, оскільки

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x).$$

Оскільки $x \to 0$, то, починаючи з деякого значення, x потрапляє в першу чверть. Тому можна вважати, що $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$. На рис. 6.5 зображено одиничне коло, на якому відкладено кут в x радіан і проведено лінію тангенсів CD. Ураховуючи означення синуса і тан-

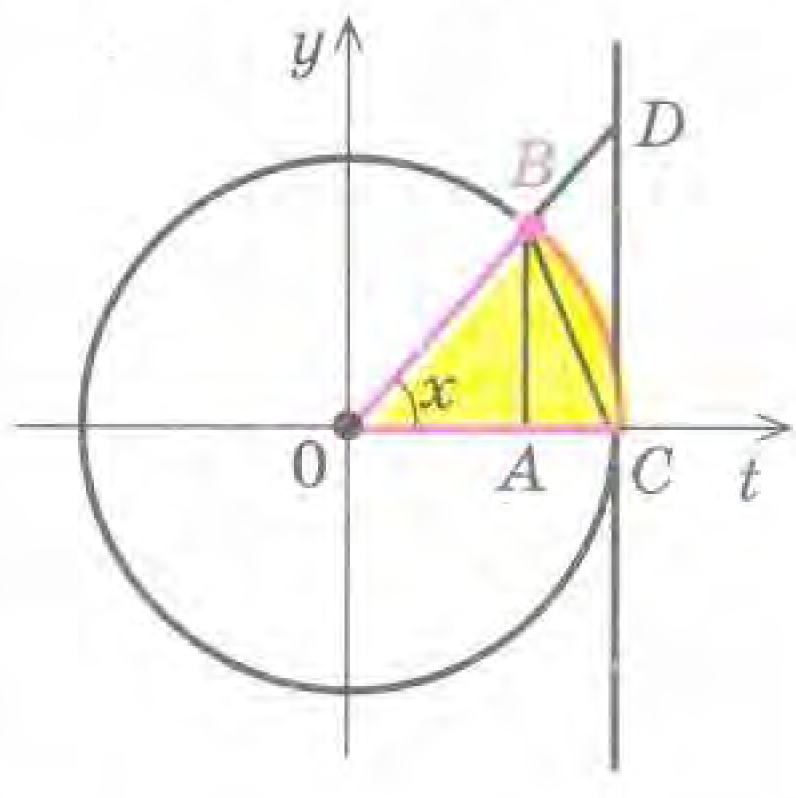


Рис. 6.5

генса через одиничне коло, одержуємо $AB = \sin x$, $CD = \operatorname{tg} x$. Порівняємо площі трикутників OBC, ODC і сектора OBC. Ці площі задовольняють нерівність

$$S_{\Delta\, OBC} \leqslant S_{\text{сект. } OBC} \leqslant S_{\Delta\, ODC}. \qquad (1)$$

Оскільки $S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} OC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2}$,

$$S_{\Delta ODC} = \frac{1}{2} OC \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$

а площа кругового сектора OBC: $S_{\text{сект. } OBC} = \frac{x}{2}$, то, підставляючи ці значення в нерівність (1), одержуємо

$$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x. \qquad (2)$$

Оскільки $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\sin x > 0$ (і $\cos x > 0$). Тому, поділивши нерівність (2) на $\sin x$, одержимо: $1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x}$. Звідси $\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$ (ураховуючи парність функцій $\cos x$ та $\frac{\sin x}{x}$, одержуємо, що ця нерівність виконується і при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$). Але $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$ (функція $\cos x$ — неперервна). Тоді за теоремою про границю проміжної функції маємо $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ○

Крім границі $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, часто використовують деякі її варіації.

Приклад 4 Доведіть, що $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

Розв'язання. ▶ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{(\cos x) x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$. ◁

Приклад 5 Доведіть, що $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.

Розв'язання. ▶ Очевидно, що $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$. Дійсно,

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\alpha}} = \frac{1}{\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha}} = 1.$$

Оскільки $\alpha \to 0$, то, починаючи з деякого значення, α потрапляє у відрізок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $(\alpha \neq 0)$. Позначимо $\sin\alpha = x$, тоді $\alpha = \arcsin x$. Якщо $\alpha \to 0$, то $x = \sin\alpha \to 0$. У цих позначеннях границя $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$ перетворюється на границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$. ◁

Приклад 6 Доведіть, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

Розв'язання. ▶ Спочатку розглянемо границю

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\alpha}} = \frac{\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Оскільки $\alpha \to 0$, то, починаючи з деякого значення, α потрапляє в інтервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ $(\alpha \neq 0)$. Позначимо $\operatorname{tg}\alpha = x$, тоді $\alpha = \operatorname{arctg} x$. Якщо $\alpha \to 0$, то $x = \operatorname{tg}\alpha \to 0$. У цих позначеннях із границі $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = 1$ одержуємо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$. ◁

6.6. ПРАКТИЧНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ

Під час обчислення границі функції зазвичай застосовують не означення границі, а теореми про границі та прийоми, які ми використовували при знаходженні границь у наведених вище прикладах. Узагальнимо ці прийоми (табл. 12).

Таблиця 12

Обчислення границі функції $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	
Основні етапи	Приклад
1. Користуючись неперервністю функції $f(x)$, пробуємо підставити значення $x = a$ до функції $f(x)$.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{9-x^2}{x-1} = \frac{9-2^2}{2-1} = 5.$
2. Якщо потрібно обчислити границю при $x \to \infty$, то пробуємо в чисельнику і знаменнику винести за дужки найвищий степінь змінної.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt{9x^4+2x}}{x^2-3x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\sqrt{9+\frac{2}{x^3}}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} =$

Продовження табл. 12

	$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\sqrt{9+\dfrac{2}{x^3}}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{0-\sqrt{9+0}}{1-0+0}=-3.$
3. Якщо в результаті підстановки $x=a$ одержали вираз типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, то:	
а) пробуємо чисельник і знаменник розкласти на множники;	$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=$ $=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{3+3}{3-2}=6.$
б) якщо до чисельника або знаменника входять вирази з квадратним або кубічним коренями, то множимо чисельник і знаменник на відповідні вирази, щоб позбавитися коренів (іноді вводять заміну: вираз із коренем позначають новою змінною);	1 спосіб $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x^2-16)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=$ $=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4}=$ $=\lim\limits_{x\to4}(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)=(4+4)\left(\sqrt{4}+2\right)=32.$ 2 спосіб. Позначимо $\sqrt{x}=t$. Тоді $x=t^2$. При $x\to4$ значення $t\to2$, тому $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{t\to2}\dfrac{t^4-16}{t-2}=\lim\limits_{t\to2}\dfrac{(t^2-4)(t^2+4)}{t-2}=$ $=\lim\limits_{t\to2}\dfrac{(t-2)(t+2)(t^2+4)}{t-2}=$ $=\lim\limits_{t\to2}(t+2)(t^2+4)=(2+2)(2^2+4)=32.$
в) якщо під знаком границі стоять тригонометричні або обернені тригонометричні функції, то такі границі зводять до першої чудової границі або до її варіацій: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1;\quad \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1;$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1;\quad \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x\cos 2x\operatorname{arctg} 3x}{\operatorname{tg} 7x\arcsin 4x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$ $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\right)5x\cos 2x\left(\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{3x}\right)3x}{\left(\dfrac{\operatorname{tg} 7x}{7x}\right)7x\left(\dfrac{\arcsin 4x}{4x}\right)4x}.$ Скорочуємо чисельник і знаменник на змінні, які стоять за дужками. Ураховуючи, що $\lim\limits_{x\to0}\cos 2x=1$, і скори-

Закінчення табл. 12

	ставшись першою чудовою границею та її варіаціями, одержуємо, що шукана границя дорівнює: $\frac{1\cdot 5\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 7\cdot 1\cdot 4}=\frac{15}{28}$.

Запитання для контролю

1. Дайте означення границі функції в точці. Сформулюйте і доведіть основні теореми про границю.
2. Дайте означення нескінченно малої функції при $x \to a$. Сформулюйте і доведіть властивості нескінченно малих функцій.
3. Сформулюйте і доведіть теорему про єдиність границі функції.
4. Сформулюйте і доведіть властивість границі проміжної функції.
5. Дайте означення правосторонньої і лівосторонньої границь функції $f(x)$ у точці a.
6. Сформулюйте й обґрунтуйте критерій існування границі.
7. Сформулюйте означення неперервної функції. Сформулюйте й обґрунтуйте властивості суми, добутку і частки неперервних у точці a функцій.
8. Сформулюйте і проілюструйте на прикладах інші властивості неперервних функцій.
9. У якому випадку точку a називають точкою розриву функції $f(x)$? Проілюструйте це поняття на графіках функцій.
10. Дайте означення границі функції на нескінченності та означення нескінченної границі функції. Наведіть приклади.
11. Дайте означення границі послідовності. Наведіть приклади.
12. Доведіть, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.
13. Користуючись табл. 12, запропонуйте план обчислення таких границь:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+x}{x^3+2}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^3+x}{x^3+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$; ґ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

Обчисліть ці границі.

Вправи

1. Користуючись означенням границі функції, доведіть справедливість рівності:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}(8-2x)=0$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=-1$.

2. Користуючись означенням границі послідовності, доведіть справедливість рівності:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n+7}{2n}=4$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n-5}{3n}=3$.

3. Користуючись теоремами про границі, доведіть, що:
1) многочлен $P(x)$ є неперервною функцією при всіх значеннях x;
2) раціональна функція неперервна при всіх значеннях x, для яких її знаменник не дорівнює нулю.

4. У яких точках має розрив функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$; 2) $g(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$;

3) $\varphi(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$; 4) $\psi(x)=\dfrac{x+2}{x^2+2x-3}$?

5. Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to3}(x^2-5x+3)$; 2) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2+2x+1}{x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+7x-1}{x^3+4x^2-2x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^3-7x^2+5x-2}{4x^2+6x-8}$;

5) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x}$; 8) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$;

9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; 10) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$;

11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$; 12) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+7}}$;

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$; 14) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}\sin 4x}{2x^2}$;

15) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x\cos x}{\operatorname{arctg} 4x}$; 16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} 7x\arcsin 2x}{\sin 3x\cos 5x}$; 17) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^3-3x^2+4x-6}{7x^4-3x^3-5x+1}$.

6. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:

1) $\dfrac{x^2-2x+1}{(2-x)x}\leqslant0$; 2) $\dfrac{x^3+2x^2-3x}{(x-1)(x-2)}\leqslant0$; 3) $\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{12+x-x^2}}\geqslant0$;

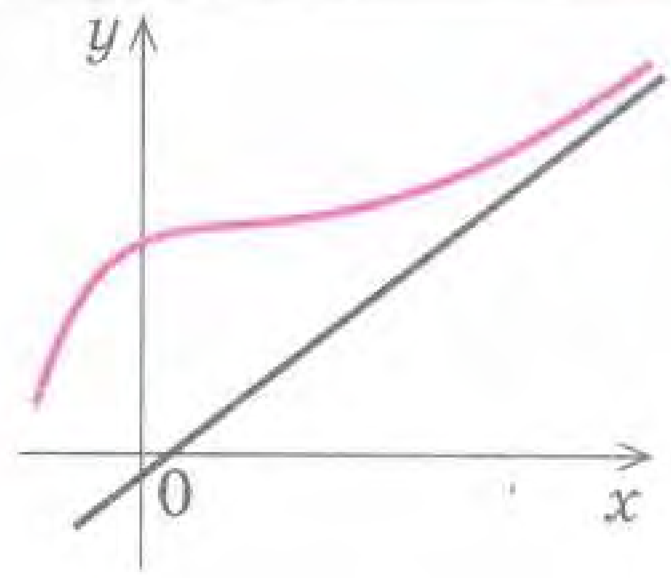
4) $\sqrt{x^2-5x+4}>x-3$; 5) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}>1$; 6) $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}<3$.

§ 7 АСИМПТОТИ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

Таблиця 13

1. Означення й ілюстрація

Асимптота кривої — це пряма, до якої необмежено наближається крива при її віддаленні на нескінченність.



2. Вертикальні асимптоти ($x = a$) графіка функції $y = f(x)$

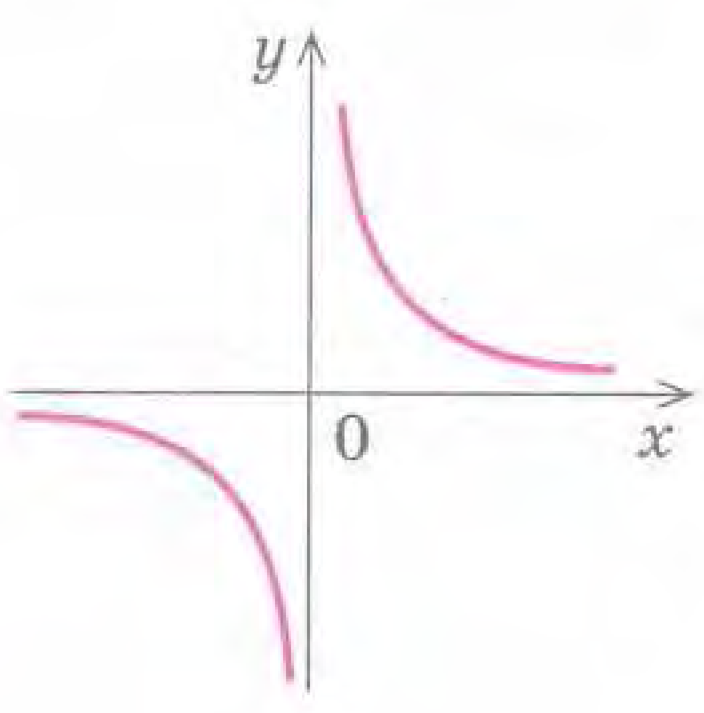
$x = a$ — вертикальна асимптота, якщо при $x \to a$ $f(x) \to \infty$

Вертикальна асимптота $x = a$ може бути в точці a, якщо точка a обмежує відкриті (або напіввідкриті) проміжки області визначення даної функції і біля точки a функція прямує до нескінченності.

Приклади вертикальних асимптот графіків функцій

$y = \frac{1}{x}$

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
При $x \to +0$ $y \to +\infty$;
при $x \to -0$ $y \to -\infty$.
$x = 0$ — вертикальна асимптота
($y = 0$ — також *асимптота*, але *горизонтальна*)



$y = \text{tg}\, x$

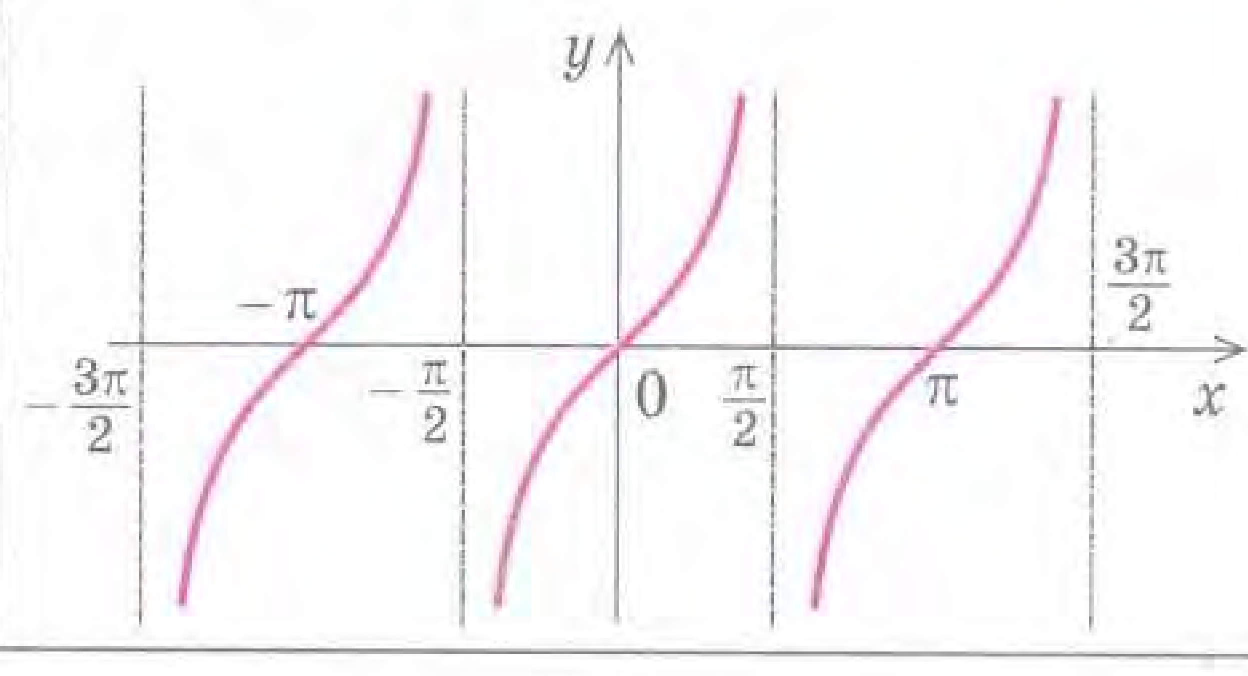
$D(y)$: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

При $x \to \frac{\pi}{2} - 0$ $y \to +\infty$;

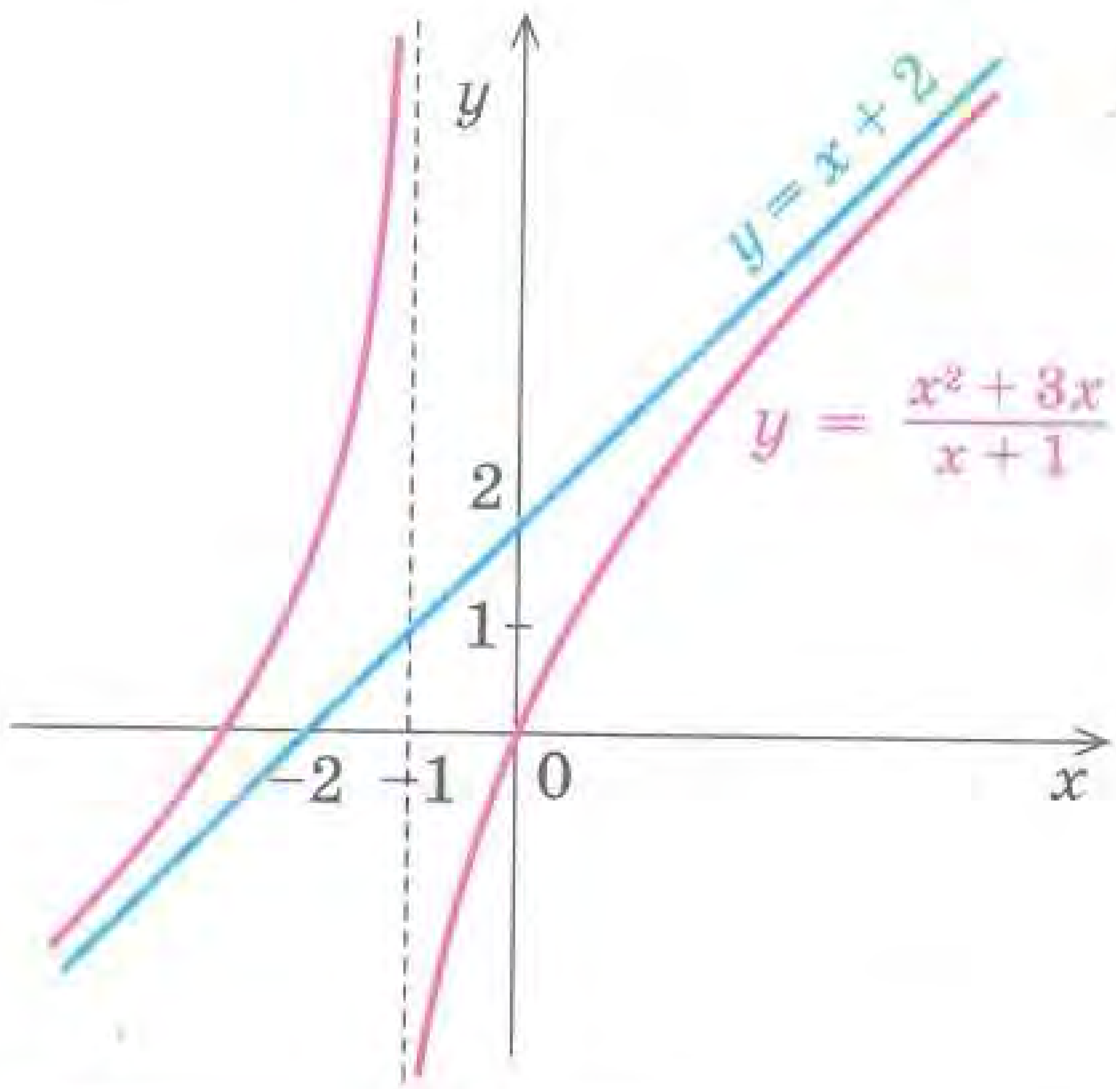
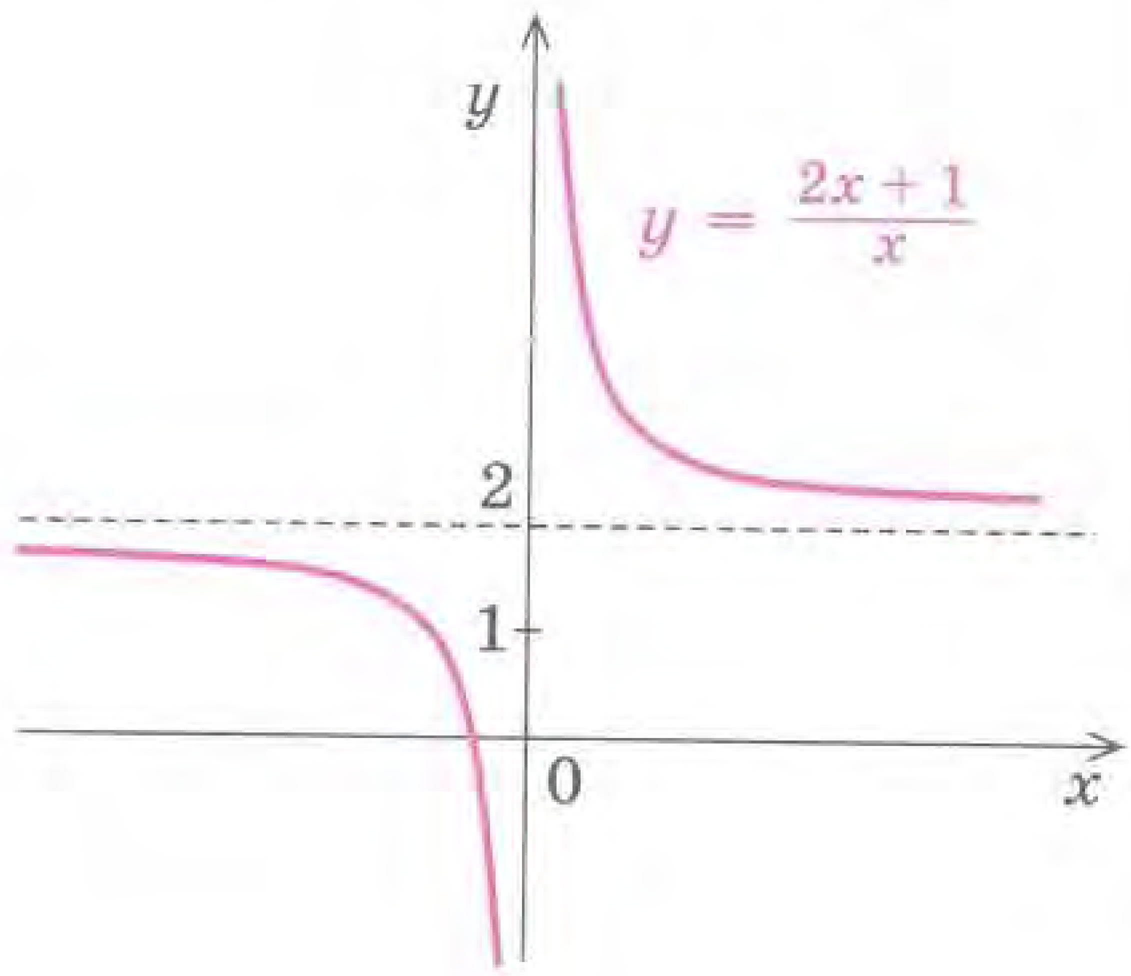
при $x \to \frac{\pi}{2} + 0$ $y \to -\infty$.

$x = \frac{\pi}{2}$ **— вертикальна асимптота**

$\left(x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z} \right)$



Закінчення табл. 13

3. Похилі та горизонтальні асимптоти ($y = kx + b$)	
I. *Якщо $f(x)$ — дробово-раціональна функція, у якої степінь чисельника на одиницю більший від степеня знаменника (або дорівнює йому), то виділяємо цілу частину дробу і використовуємо означення асимптоти.*	
Приклади	
$f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+1}=x+2-\dfrac{2}{x+1}.$ 	$f(x)=\dfrac{2x+1}{x}=2+\dfrac{1}{x}.$ 
При $x \to \infty$ $\dfrac{2}{x+1} \to 0$, тоді $f(x) \to x+2$. Отже, $y = x + 2$ — похила асимптота ($x = -1$ — також асимптота, але вертикальна).	При $x \to \infty$ $\dfrac{1}{x} \to 0$, тоді $f(x) \to 2$. Отже, $y = 2$ — горизонтальна асимптота ($x = 0$ — також асимптота, але вертикальна).
II. **У загальному випадку рівняння похилих і горизонтальних асимптот $y = kx + b$ можна одержати, використовуючи формули:** $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$.	

Пояснення й обґрунтування

1. Означення асимптоти. Якщо крива $y = f(x)$ має нескінченну вітку й існує пряма, до якої ця вітка необмежено наближається, то цю пряму називають асимптотою кривої, тобто

асимптота кривої — це пряма, до якої необмежено наближається крива при її віддаленні на нескінченність.

Асимптоти можуть бути вертикальними, горизонтальними або похилими.

Наприклад, для графіка функції $y=\dfrac{1}{x}$ (рис. 7.1) асимптотами будуть осі координат, оскільки при $x\to-\infty$ і $x\to+\infty$ графік функції наближається до прямої $y = 0$: вісь Ox — це *горизонтальна асимптота*. Коли функція прямує до $+\infty$ (або до $-\infty$), то крива наближається до прямої $x = 0$: вісь Oy — це *вертикальна асимптота*.

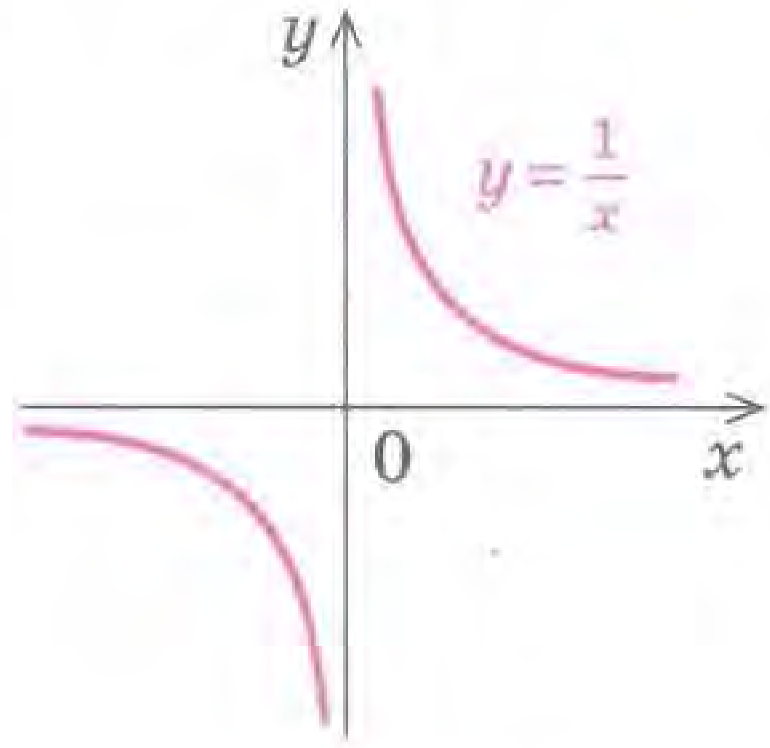


Рис. 7.1

Якщо розглянути функцію $y=x+\dfrac{1}{x}$, то при $x\to\infty$ вираз $\dfrac{1}{x}\to 0$. Через це графік функції $y=x+\dfrac{1}{x}$ при $x\to\infty$ наближається до прямої $y = x$. Ця пряма є *похилою асимптотою* графіка функції $y=x+\dfrac{1}{x}$ (рис. 7.2). Графік цієї функції має також вертикальну асимптоту $x = 0$.

2. Вертикальні асимптоти. Якщо пряма $x = a$ — вертикальна асимптота, то за означенням біля точки a крива повинна мати нескінченну вітку, тобто границя заданої функції при $x\to a$ (зліва або справа) має дорівнювати нескінченності (∞). Зважаючи на неперервність елементарних функцій, які розглядають у шкільному курсі математики, такими точками можуть бути тільки точки, що обмежують відкриті (або напіввідкриті) проміжки області визначення заданої функції.

Наприклад, у функції $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ область визначення ($x\neq 1$) має розрив у точці $x = 1$ (область визначення: $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$ і точка 1 обмежує відкриті проміжки області визначення). Тому пряма $x = 1$ може бути вертикальною асимптотою. Щоб переконатися в цьому, необхідно перевірити, чи прямуватиме функція до нескінченності біля точки 1 (зліва або справа). Для цього розглянемо $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{x^2}{x-1}=\left(\dfrac{1}{+0}\right)=+\infty$, аналогічно $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=\left(\dfrac{1}{-0}\right)=-\infty$.

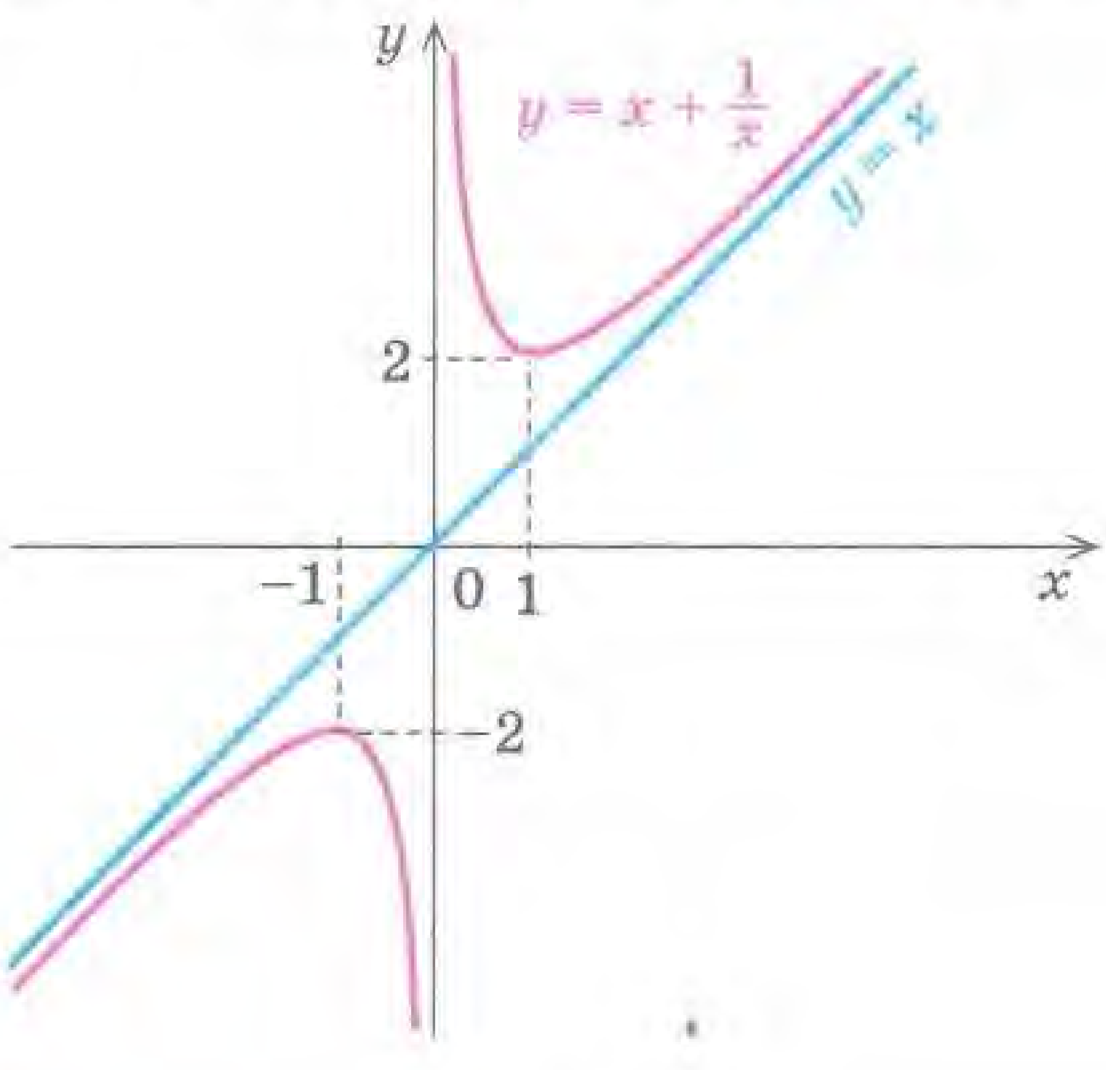


Рис. 7.2

Таким чином, пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою, оскільки коли функція прямує до нескінченності, її графік необмежено наближається до прямої $x = 1$ (рис. 7.3).

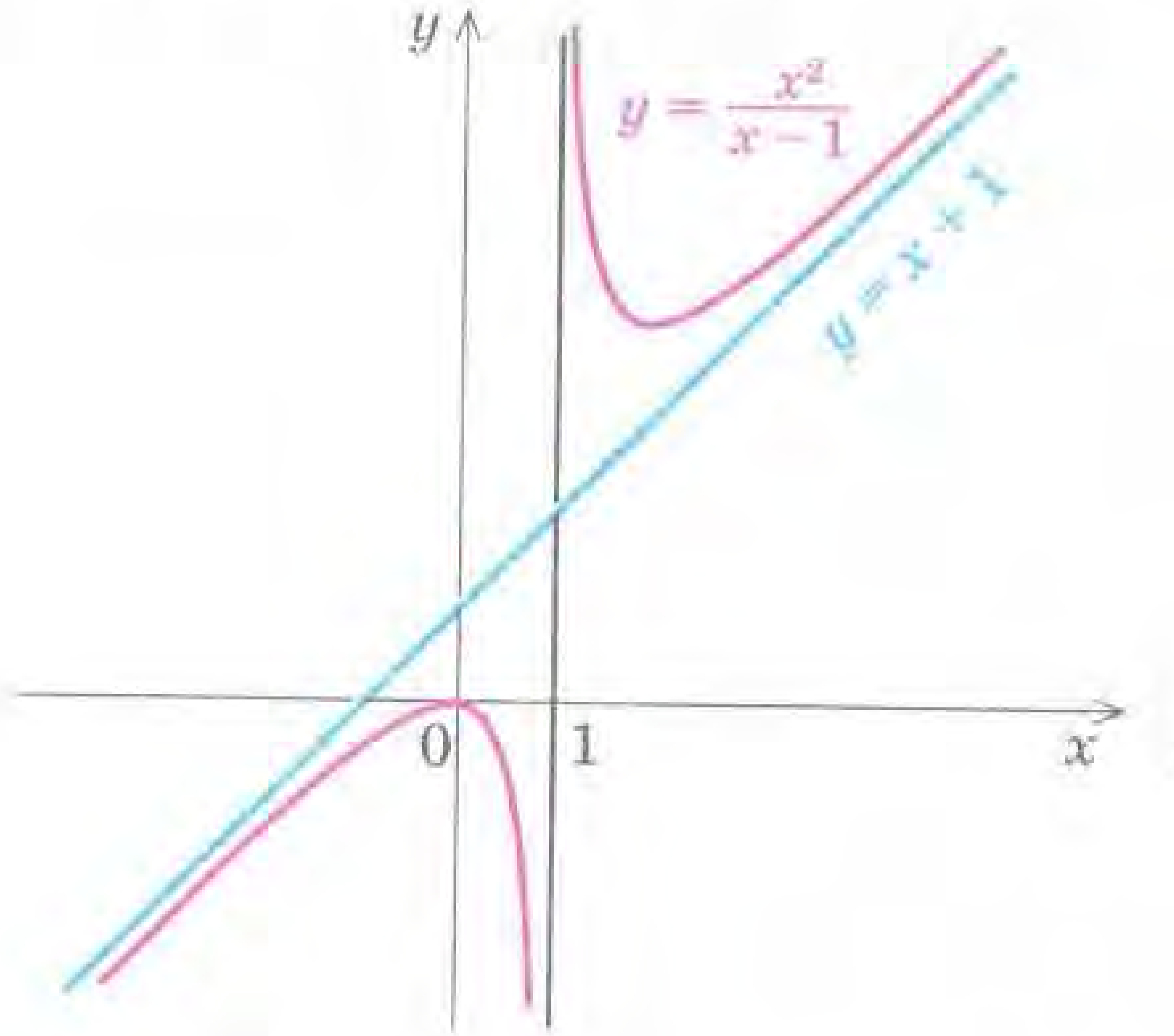


Рис. 7.3

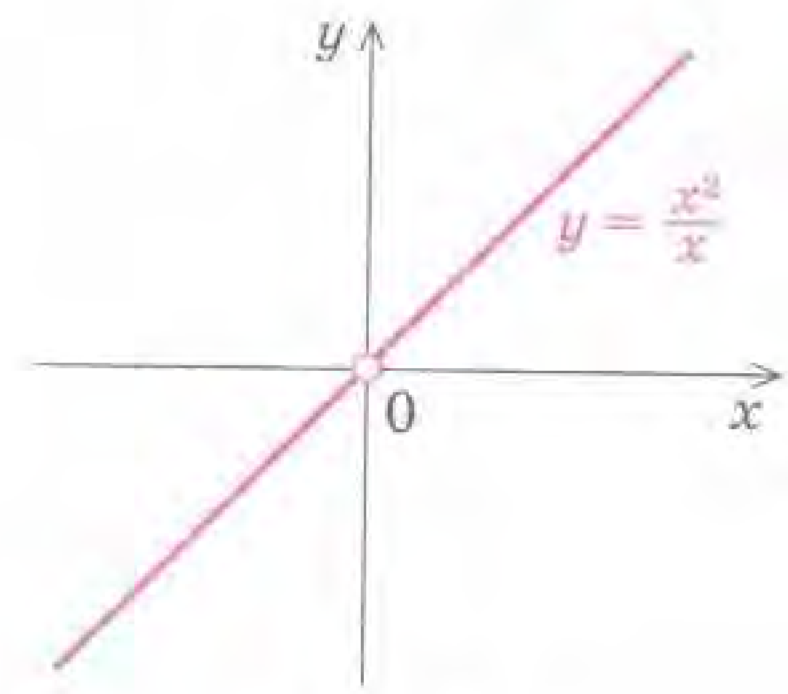


Рис. 7.4

Зазначимо, що не завжди в точці розриву області визначення функція матиме вертикальну асимптоту. Наприклад, функція $f(x)=\frac{x^2}{x}$ має область визначення $x \neq 0$. Тому пряма $x = 0$ «підозріла» на вертикальну асимптоту. Але $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=\lim\limits_{x\to -0}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to -0} x=0$. Аналогічно $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=0$. Отже, біля прямої $x = 0$ функція $f(x)$ не прямує до нескінченності, і тому пряма $x = 0$ не є асимптотою графіка заданої функції (рис. 7.4).

3. Похилі та горизонтальні асимптоти. Досить просто знайти похилі та горизонтальні асимптоти для графіків дробово-раціональних функцій, у яких степінь чисельника на одиницю більший за степінь знаменника (або дорівнює степеню знаменника). Для цього потрібно виділити цілу частину заданого дробу і використати означення асимптоти.

Наприклад, ще раз розглянемо функцію $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

Виділимо цілу частину: $f(x)=x+1+\frac{1}{x-1}$.

При $x\to\infty$ вираз $\frac{1}{x-1}\to 0$, тобто графік нашої функції необмежено наближатиметься до прямої $y = x + 1$ при $x\to\infty$. А це означає, що похилою асимптотою графіка заданої функції* буде пряма $y = x + 1$ (див. рис. 7.3).

* Побудову графіків таких функцій розглянуто в § 5.

Розглянемо, як розташовуються *похилі та горизонтальні асимптоти в загальному випадку.*

Нехай похилою (або горизонтальною) асимптотою графіка функції $y = f(x)$ є пряма $y = kx + b$. За означенням асимптоти при $x \to \infty$ графік функції $f(x)$ необмежено наближається до прямої $y = kx + b$. Іншими словами, при $x \to \infty$ з будь-якою точністю буде виконуватися рівність

$$f(x) \approx kx + b. \qquad (1)$$

Ця рівність не порушиться, якщо обидві її частини поділити на $x \neq 0$. Одержимо: $\frac{f(x)}{x} \approx k + \frac{b}{x}$.

При $x \to \infty$ відношення $\frac{b}{x} \to 0$, тому відношення $\frac{f(x)}{x} \to k$ при $x \to \infty$, тобто

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}. \qquad (2)$$

Із формули (1) одержуємо, що при $x \to \infty$ $b \approx f(x) - kx$, тобто

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx). \qquad (3)$$

Формули (2) і (3) дають можливість знаходити похилі та горизонтальні асимптоти для графіка будь-якої функції $y = f(x)$ (якщо вони існують).

Зауваження. Якщо у графіка функції $f(x)$ є горизонтальна асимптота, то її рівняння буде $y = b$ (у цьому випадку $k = 0$). Але при $k = 0$ з формули (3) одержуємо $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Отже, *якщо існує число* $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, *то графік функції* $y = f(x)$ *має горизонтальну асимптоту* $y = b$.

Приклад 1 Користуючись загальними формулами, знайдіть похилу асимптоту графіка функції $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Розв'язання

Будемо шукати похилу асимптоту у вигляді $y = kx + b$, де k і b знаходять за формулами (2) і (3):

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-1)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

Асимптотою графіка заданої функції буде пряма $y = kx + b$, тобто пряма $y = x + 1$. ◁

Приклад 2 Знайдіть асимптоти графіка функції $f(x)=\sqrt{x^4+9}-x^2$.

Розв'язання

▶ Область визначення цієї функції: x — будь-яке дійсне число, тобто $D(f) = (-\infty; +\infty)$, або $D(f) = \boldsymbol{R}$. На всій області визначення ця функція неперервна, тому вертикальних асимптот її графік не має. Шукатимемо похилі та горизонтальні асимптоти у вигляді $y = kx + b$. Тоді

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+9}-x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+9}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}{x\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+9-x^4}{x\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{x\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+9}-x^2\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+9}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}{\sqrt{x^4+9}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+9-x^4}{\sqrt{x^4+9}+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{\sqrt{x^4+9}+x^2}=0.$$

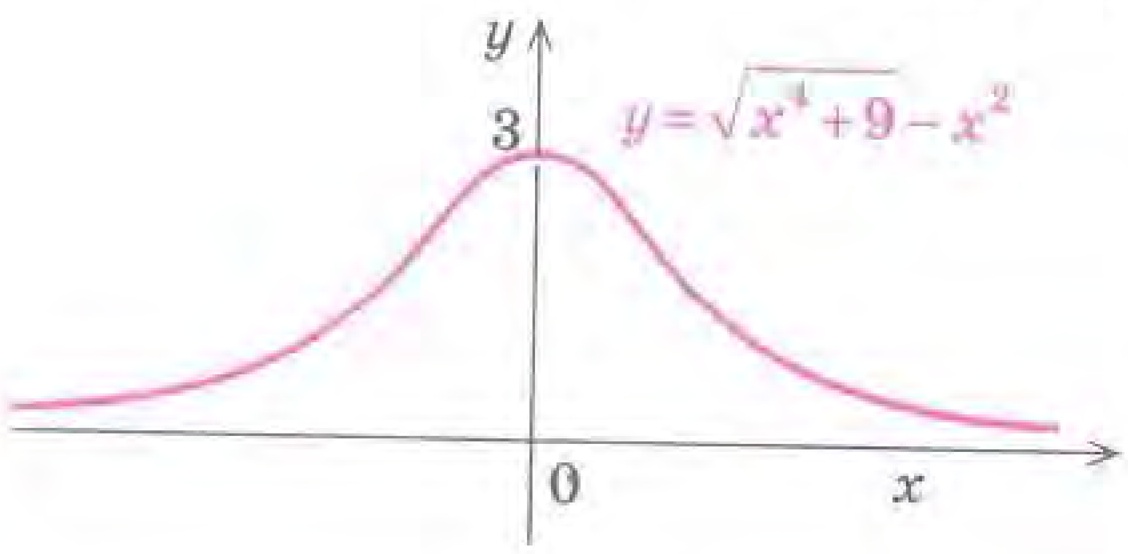


Рис. 7.5

Тому задана функція має тільки горизонтальну асимптоту $y = 0$ $(y = 0\cdot x + 0)$ (рис. 7.5).

Іноді графік функції $y = f(x)$ може мати різні асимптоти при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$. Тому при використанні формул (2) і (3) доводиться окремо знаходити значення k і b при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$. ◁

Запитання для контролю

1. Поясніть зміст поняття «асимптота кривої».
2. Наведіть приклади графіків функцій, які мають вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти. Поясніть, чому відповідні прямі є асимптотами.
3. Обґрунтуйте формули для знаходження коефіцієнтів горизонтальних та похилих асимптот $(y = kx + b)$ графіка функції $y = f(x)$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

Вправи

Знайдіть асимптоти графіків функцій (якщо вони існують) **(1–4)**.

1. 1) $y=\frac{3}{x}$; 2) $y=4-\frac{1}{x-3}$; 3) $y=\frac{x^2-9}{x-3}$; 4) $y=\frac{x+1}{x-1}$.

2. 1) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$; 4) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+2}$.

3. 1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$; 3) $f(x)=\dfrac{3x^2+5}{x^2}$; 4) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$.

4. 1) $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}$; 2) $y=\sqrt{x^2+3x+2}$; 3) $y=\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$; 4) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}}$.

§ 8 ПОХІДНІ ОБЕРНЕНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ. ДОВЕДЕННЯ ТОТОЖНОСТЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНОЇ

Таблиця 14

1. Формули похідних обернених тригонометричних функцій	
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1<x<1$	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1<x<1$
$(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$
2. Доведення тотожностей за допомогою похідної	
Умова сталості функції	
Функція $f(x)$ є сталою ($f(x)=C$) на інтервалі $(a; b)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x)=0$ в усіх точках цього інтервалу (а якщо функція $f(x)$ є також неперервною на відрізку $[a; b]$, то $f(x)=C$ на $[a; b]$).	
Схема доведення тотожностей виду $\varphi(x)=g(x)$ за допомогою похідної	Приклад Доведіть, що $\arccos x=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$ при $-1\leqslant x\leqslant 1$.
1. Розглянути допоміжну функцію $f(x)=\varphi(x)-g(x)$ (на її області визначення або на заданому інтервалі). **2. Перевірити, що $f'(x)=0$ на цьому інтервалі.** **3. Користуючись умовою сталості функції, зробити висновок, що $f(x)=C$ на розглянутому інтервалі.**	▶ Розглянемо функцію $f(x)=\arccos x-\dfrac{\pi}{2}+\arcsin x.$ Її область визначення $D(f)=[-1; 1]$. На інтервалі $(-1; 1)$ $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-0+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0.$

Закінчення табл. 14

4. Щоб знайти сталу C, треба підставити замість x будь-яке значення x_0 з розглянутого інтервалу і довести, що $C = f(x_0) = 0$. **5. Зробити такий висновок: оскільки** $$f(x) = \varphi(x) - g(x) = 0,$$ **то** $$\varphi(x) = g(x).$$	Тоді за умовою сталості функції одержуємо, що $f(x) = C$ при всіх значеннях x з інтервалу $(-1; 1)$, а враховуючи, що функція $f(x)$ неперервна на своїй області визначення, і при всіх значеннях x з відрізка $[-1; 1]$. Щоб знайти значення C, підставимо в рівність $f(x) = C$ замість x, наприклад, значення $x = 0$. Отримуємо: $$C = f(0) = \arccos 0 - \frac{\pi}{2} + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 0 = 0.$$ Отже, при всіх значеннях x з відрізка $[-1; 1]$ $$f(x) = \arccos x - \frac{\pi}{2} + \arcsin x = 0.$$ Звідси $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. ◁

Пояснення й обґрунтування

1. Формули похідних обернених тригонометричних функцій доведемо, використовуючи означення цих функцій (існування їх похідних приймемо без доведення).

● Наприклад, якщо $y = \arcsin x$, то за означенням арксинуса $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin y = x$. Продиференціюємо обидві частини цієї рівності, розглядаючи похідну $\sin y$ як похідну складеної функції. Одержуємо $(\sin y)' = x'$, тобто $\cos y \cdot y' = 1$. Звідси $y' = \frac{1}{\cos y}$. Але $\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Ураховуючи, що $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, де $\cos y \geqslant 0$, одержуємо $\cos y = \sqrt{1-x^2}$.

Тоді при $-1 < x < 1$ (у цьому випадку $1 - x^2 \neq 0$ і $1 - x^2 > 0$) маємо $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Тому при $-1 < x < 1$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$ ○

Аналогічно, якщо $y = \arccos x$, то за означенням арккосинуса $y \in [0; \pi]$ і $\cos y = x$. Продиференціюємо обидві частини цієї рівності, розглядаючи похідну $\cos y$ як похідну складеної функції. Одержуємо $(\cos y)' = x'$, тобто $(-\sin y)\,y' = 1$. Звідси $y' = -\frac{1}{\sin y}$. Але $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$. Ураховуючи, що $y \in [0; \pi]$, де $\sin y \geqslant 0$, одержуємо $\sin y = \sqrt{1-x^2}$. Тоді при $-1 < x < 1$ (у цьому випадку $1 - x^2 \neq 0$ і $1 - x^2 > 0$) маємо $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Тому при $-1 < x < 1$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Знайдемо похідну функції $y = \operatorname{arctg} x$. За означенням арктангенса $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg} y = x$. Після диференціювання останньої рівності одержуємо $(\operatorname{tg} y)' = x'$, тобто $\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1$. Звідси $y' = \cos^2 y$. Але $1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$. Тоді

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Отже, при будь-яких значеннях x

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Аналогічно, якщо $y = \operatorname{arcctg} x$, то за означенням арккотангенса $y \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg} y = x$. Після диференціювання останньої рівності одержуємо $(\operatorname{ctg} y)' = x'$, тобто $-\frac{1}{\sin^2 y} \cdot y' = 1$. Звідси $y' = -\sin^2 y$. Але $1 + \operatorname{ctg}^2 y = \frac{1}{\sin^2 y}$. Тоді $\sin^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$.

Отже, при будь-яких значеннях x

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

2. Доведення тотожностей за допомогою похідної. У п. 5.1 (с. 47) підручника розглянуто умову сталості функції: якщо на деякому інтервалі $(a; b)$ $f'(x) = 0$ в усіх точках цього інтервалу, то функція $f(x)$ постійна на цьому інтервалі. Якщо ж нам відомо також, що функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$, то функція $f(x)$ є постійною і на відрізку $[a; b]$.

Цю умову можна використати для доведення деяких тотожностей.

Приклад Доведіть тотожність $2\arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$, де $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Розв'язання

▶ Розглянемо допоміжну функцію $f(x) = 2\arccos x - \arccos(2x^2 - 1)$ і знайдемо її похідну при $0 < x < 1$:

$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4x}{2x\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

За умовою сталості функції одержуємо, що $f(x) = C$ при всіх значеннях x з інтервалу $(0; 1)$, а враховуючи, що функція $f(x)$ неперервна на своїй області визначення, і при всіх x з відрізка $[0; 1]$. Щоб знайти C, відзначимо, що рівність $f(x) = C$ виконується тотожно, тобто при будь-якому значенні x. Підставляючи в цю рівність $x = 0$, одержуємо

$$C = f(0) = 2\arccos 0 - \arccos(-1) = 2\cdot\frac{\pi}{2} - \pi = 0.$$

Тому $C = 0$, а отже, $f(x) = 0$, тобто $2\arccos x - \arccos(2x^2 - 1) = 0$ і $2\arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$. ◁

Наведене розв'язання дозволяє виділити таку *схему доведення тотожностей виду $\varphi(x) = g(x)$ за допомогою похідної.*

1. *Розглянути допоміжну функцію $f(x) = \varphi(x) - g(x)$ (на її області визначення або на заданому інтервалі).*
2. *Перевірити, що $f'(x) = 0$ на цьому інтервалі.*
3. *Користуючись ознакою сталості функції, зробити висновок, що $f(x) = C$ на розглянутому інтервалі (якщо функція $f(x)$ неперервна також на відрізку, що включає кінці розглянутого інтервалу, то $f(x) = C$ на цьому відрізку).*
4. *Щоб знайти C, підставити замість x будь-яке значення x_0 з розглянутого проміжку і довести, що $C = f(x_0) = 0$.*
5. *Зробити висновок: оскільки $f(x) = \varphi(x) - g(x) = 0$, то $\varphi(x) = g(x)$.*
   Приклад використання цієї схеми наведено в п. 2 табл. 14 на с. 121.

Запитання для контролю

1. Запишіть формули знаходження похідних обернених тригонометричних функцій: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.
2. Обґрунтуйте формули знаходження похідних обернених тригонометричних функцій.
3. Поясніть на прикладі схему використання похідної до доведення тотожностей.

Вправи

1. Знайдіть похідні заданих функцій:

1) $f(x) = \arcsin x \cdot \operatorname{arctg} x$;
2) $f(x) = \operatorname{arcctg}^2 x$;
3) $f(x) = x^4 \arcsin 2x$;
4) $f(x) = \arcsin 3x + \arccos 4x$;
5) $f(x) = \arcsin(\sin x)$;
6) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x^3}$.

2. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = \arcsin 2x$, $x_0 = \frac{1}{4}$.

3. Доведіть тотожність, використовуючи похідну:

1) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$;
2) $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ при $-1 < x < 1$;

3) $\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ при $0 < x \leqslant 1$;

4) $\arccos x = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ при $-1 \leqslant x < 0$;

5) $2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$ при $-1 < x < 1$;

6) $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$ при $x \geqslant 1$;

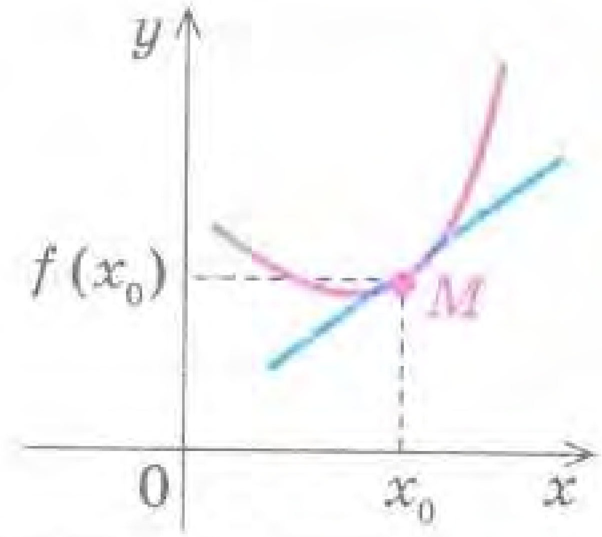
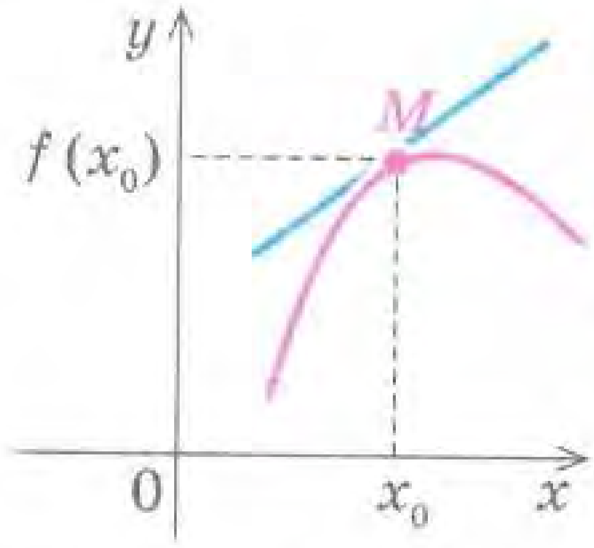
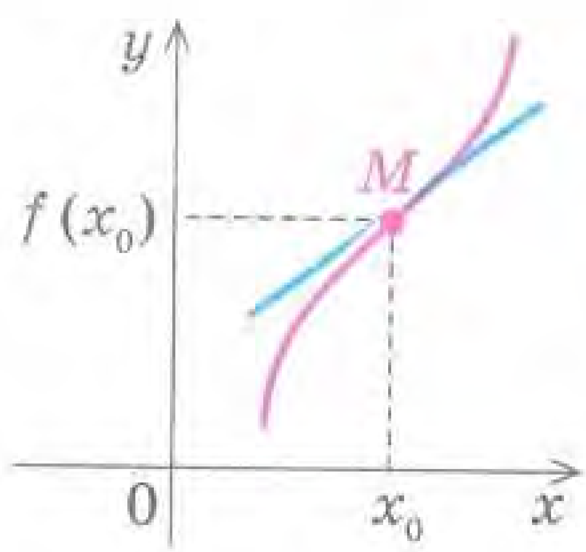
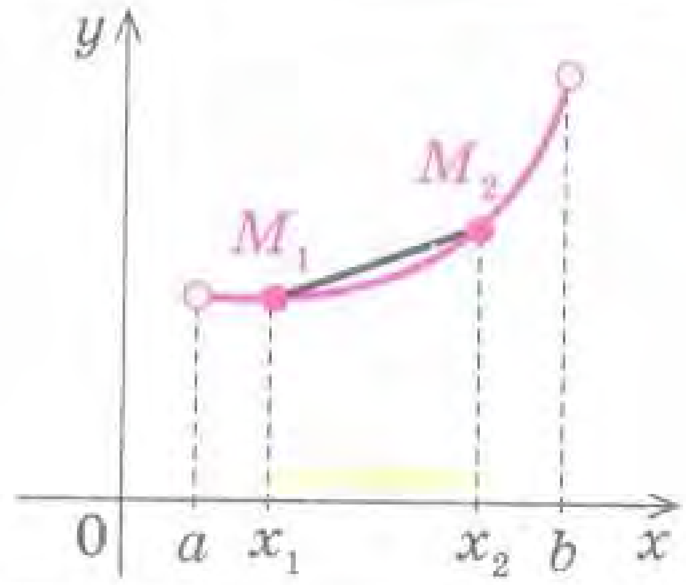
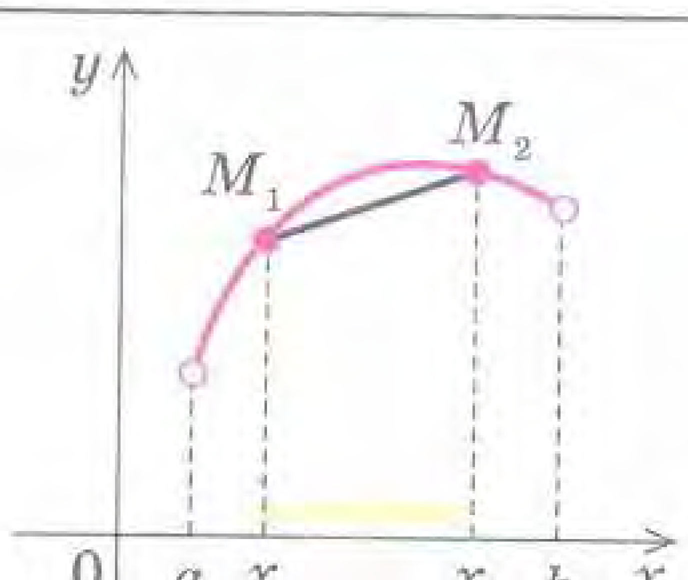
7) $(x + a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$.

§ 9 ДРУГА ПОХІДНА Й ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ПОНЯТТЯ ОПУКЛОСТІ ФУНКЦІЇ

Таблиця 15

1. Поняття другої похідної		
Поняття	Запис	Приклад
Нехай функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$ у всіх точках деякого проміжку. Ця похідна, у свою чергу, є функцією аргументу x. Якщо функція $f'(x)$ є диференційовною, то її похідну називають *другою похідною* від $f(x)$ і позначають $f''(x)$ (або y'').	$y = f(x)$, $y' = f'(x)$, $y'' = (f'(x))' = (y')'$.	$y = x^5$, $y' = 5x^4$, $y'' = (5x^4)' = 20x^3$.

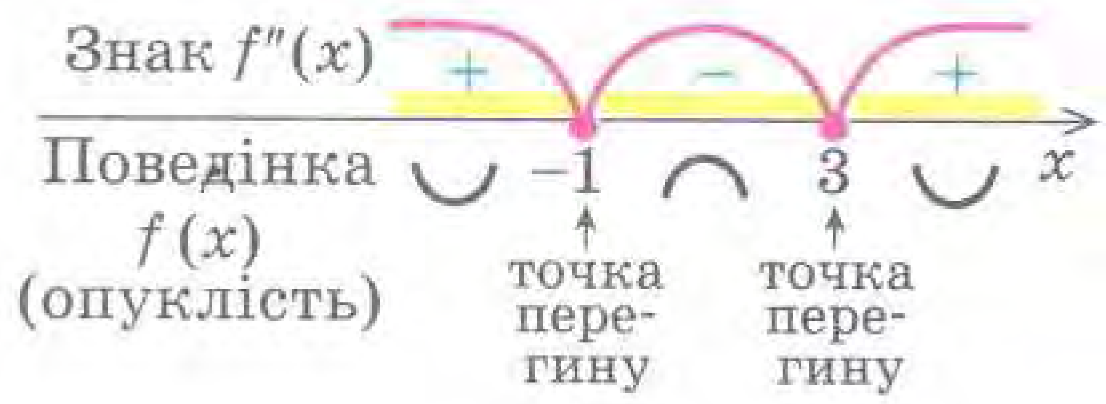
Продовження табл. 15

2. Поняття опуклості і точок перегину диференційовної на інтервалі $(a; b)$ функції	
	Функцію $f(x)$ називають ***опуклою вниз*** на інтервалі $(a; b)$, якщо для будь-якої точки x_0 з цього інтервалу при всіх $x \in (a; b)$ і $x \neq x_0$ ***графік функції лежить вище дотичної до цього графіка*** в точці $(x_0; f(x_0))$.
	Функцію $f(x)$ називають ***опуклою вгору*** на інтервалі $(a; b)$, якщо для будь-якої точки x_0 з цього інтервалу при всіх $x \in (a; b)$ і $x \neq x_0$ ***графік функції лежить нижче дотичної до цього графіка*** в точці $(x_0; f(x_0))$.
	Точку M графіка неперервної функції $f(x)$, у якій існує дотична і при переході через яку ***крива змінює напрям опуклості***, називають ***точкою перегину графіка функції***. У точці перегину графік функції переходить з одного боку дотичної до іншого. Абсцису x_0 точки M перегину графіка функції $f(x)$ називають ***точкою перегину функції*** $f(x)$. Точка x_0 розділяє інтервали опуклості функції.
3. Властивість графіків опуклих функцій	
	Якщо функція $f(x)$ ***опукла вниз*** на інтервалі $(a; b)$ і M_1 та M_2 — точки її графіка на цьому інтервалі, то на інтервалі $(x_1; x_2)$ графік функції $y = f(x)$ лежить нижче відрізка M_1M_2, тобто ***графік лежить нижче хорди***.
	Якщо функція $f(x)$ ***опукла вгору*** на інтервалі $(a; b)$ і M_1 та M_2 — точки її графіка на цьому інтервалі, то на інтервалі $(x_1; x_2)$ графік функції $y = f(x)$ лежить вище відрізка M_1M_2, тобто ***графік лежить вище хорди***.

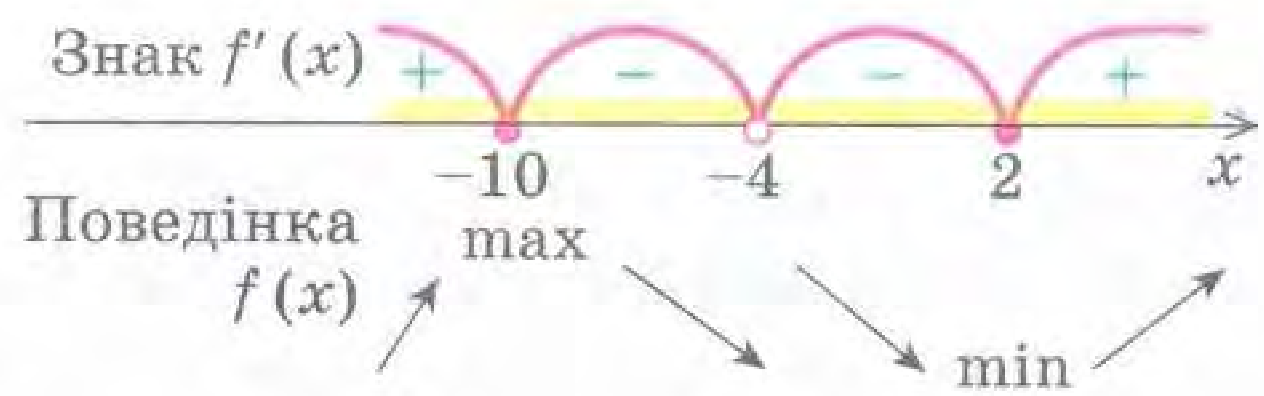
Продовження табл. 15

4. Достатні умови опуклості функції, що має другу похідну на заданому інтервалі $(a; b)$	
Умова опуклості вниз	Умова опуклості вгору
Якщо на інтервалі $(a; b)$ двічі диференційовна функція $f(x)$ має додатну другу похідну **($f''(x) > 0$** при всіх $x \in (a; b)$), то її ***графік на інтервалі $(a; b)$ спрямований опуклістю вниз.***	Якщо на інтервалі $(a; b)$ двічі диференційовна функція $f(x)$ має від'ємну другу похідну **($f''(x) < 0$** при всіх $x \in (a; b)$), то її ***графік на інтервалі $(a; b)$ спрямований опуклістю вгору.***
5. Знаходження точок перегину функції, що має другу похідну на заданому інтервалі	
Необхідна умова	Достатня умова
У точках перегину функції $f(x)$ її друга похідна дорівнює нулю або не існує. x_0 — точка перегину функції $f(x)$ $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує	Нехай функція $f(x)$ має на інтервалі $(a; b)$ другу похідну. Тоді **якщо $f''(x)$ змінює знак при переході через x_0, де $x_0 \in (a; b)$, то x_0 — точка перегину функції $f(x)$.** У точці x_0 знак $f''(x_0)$ змінюється з «+» на «−» або з «−» на «+» $\Rightarrow$ x_0 — точка перегину функції $f(x)$
6. Дослідження функції $y = f(x)$ на опуклість і точки перегину	
Схема	Приклад
1. Знайти область визначення функції.	Дослідіть функцію $f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 1$ на опуклість і точки перегину. ▶ 1. Область визначення: $D(f) = \mathbf{R}$. Функція $f(x)$ неперервна в кожній точці своєї області визначення (як многочлен).
2. Знайти другу похідну.	2. $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 36x$. $f''(x) = 12x^2 - 24x - 36 = 12(x^2 - 2x - 3)$.
3. Знайти внутрішні точки області визначення, у яких друга похідна дорівнює нулю або не існує.	3. $f''(x)$ існує й неперервна на всій області визначення функції $f(x)$. $f''(x) = 0$; $12(x^2 - 2x - 3) = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Продовження табл. 15

4. Позначити одержані точки на області визначення функції, знайти знак другої похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.	4. 
5. Записати результат дослідження (інтервали і характер опуклості й точки перегину).	5. На інтервалах $(-\infty;\ -1)$ і $(3;\ +\infty)$ графік функції спрямовано опуклістю вниз $(f''(x) > 0)$, а на інтервалі $(-1; 3)$ — опуклістю вгору $(f''(x) < 0)$. Точки перегину: $x = -1$ і $x = 3$ (у цих точках $f''(x)$ змінює знак). ◁
7. Розширена схема дослідження функції для побудови її графіка	
Схема	Приклад
1. Знайти область визначення функції.	Побудуйте графік функції $$f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x + 4}.$$ ▶ 1. Область визначення: $x \neq -4$ $(D(f) = (-\infty;\ -4) \cup (-4;\ +\infty))$.
2. З'ясувати, чи є функція парною або непарною, або періодичною.	2. Функція $f(x)$ ні парна, ні непарна, оскільки $f(-x) \neq f(x)$ та $f(-x) \neq -f(x)$, і неперіодична.
3. Точки перетину графіка з осями координат (якщо їх можна знайти).	3. На осі Oy значення $x = 0$, тоді $y = 0$. На осі Ox значення $y = 0$: $\frac{x^2 - 5x}{x + 4} = 0$, $x^2 - 5x = 0$, $x(x - 5) = 0$. Тоді $x = 0$, $x = 5$ — абсциси точок перетину графіка з віссю Ox.
4. Похідна і критичні точки функції.	4. $f'(x) = \frac{(2x-5)(x+4) - (x^2 - 5x)}{(x+4)^2} = \frac{x^2 + 8x - 20}{(x+4)^2}$. Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$. Отже, функція $f(x)$ неперервна в кожній точці своєї області визначення. $f'(x) = 0$. При $x \neq -4$ маємо $$x^2 + 8x - 20 = 0,$$ $x_1 = 2$, $x_2 = -10$ — критичні точки.

Продовження табл. 15

5. Проміжки зростання і спадання та точки екстремуму (і значення функції в цих точках).	5. Позначимо критичні точки на області визначення і знайдемо знак похідної та характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.  Отже, функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -10]$ та $[2; +\infty)$ і спадає на проміжках $[-10; -4)$ та $(-4; 2]$. Оскільки в критичній точці (-10) похідна змінює знак з «+» на «–», то $x = -10$ — точка максимуму, а в критичній точці 2 похідна змінює знак з «–» на «+», тому $x = 2$ — точка мінімуму. Отже, $x_{max} = -10$, тоді $y_{max} = f(-10) = -25$; $x_{min} = 2$, тоді $y_{min} = f(2) = -1$.
6. Поведінка функції на кінцях проміжків області визначення і асимптоти графіка функції (вертикальні, горизонтальні та похилі).	6.  При $x \to -4$ зліва $f(x) \to \left(\frac{36}{-0}\right) \to -\infty$, а при $x \to -4$ справа $f(x) \to \left(\frac{36}{+0}\right) \to +\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to -4-0} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to -4+0} f(x) = +\infty\right)$. Отже, пряма $x = -4$ — *вертикальна асимптота.* $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x+4} = \frac{x(x+4) - 9(x+4) + 36}{x+4} =$ $= x - 9 + \frac{36}{x+4}$. При $x \to \infty$ $\frac{36}{x+4} \to 0$, тоді $f(x) \to x - 9$, тобто пряма $y = x - 9$ — *похила асимптота.*

Продовження табл. 15

<table>
<tr>
<td>7. Друга похідна й дослідження функції на опуклість і точки перегину (та значення функції в цих точках).</td>
<td>

7. $$f''(x) = (f'(x))' =$$

$$= \frac{(2x+8)(x+4)^2 - 2(x+4)(x^2+8x-20)}{(x+4)^4} =$$

$$= \frac{72}{(x+4)^3}.$$

Оскільки $f''(x) \neq 0$, то знак другої похідної може змінитися лише в точці $x = -4$. Одержуємо такі знаки другої похідної і відповідний характер опуклості:

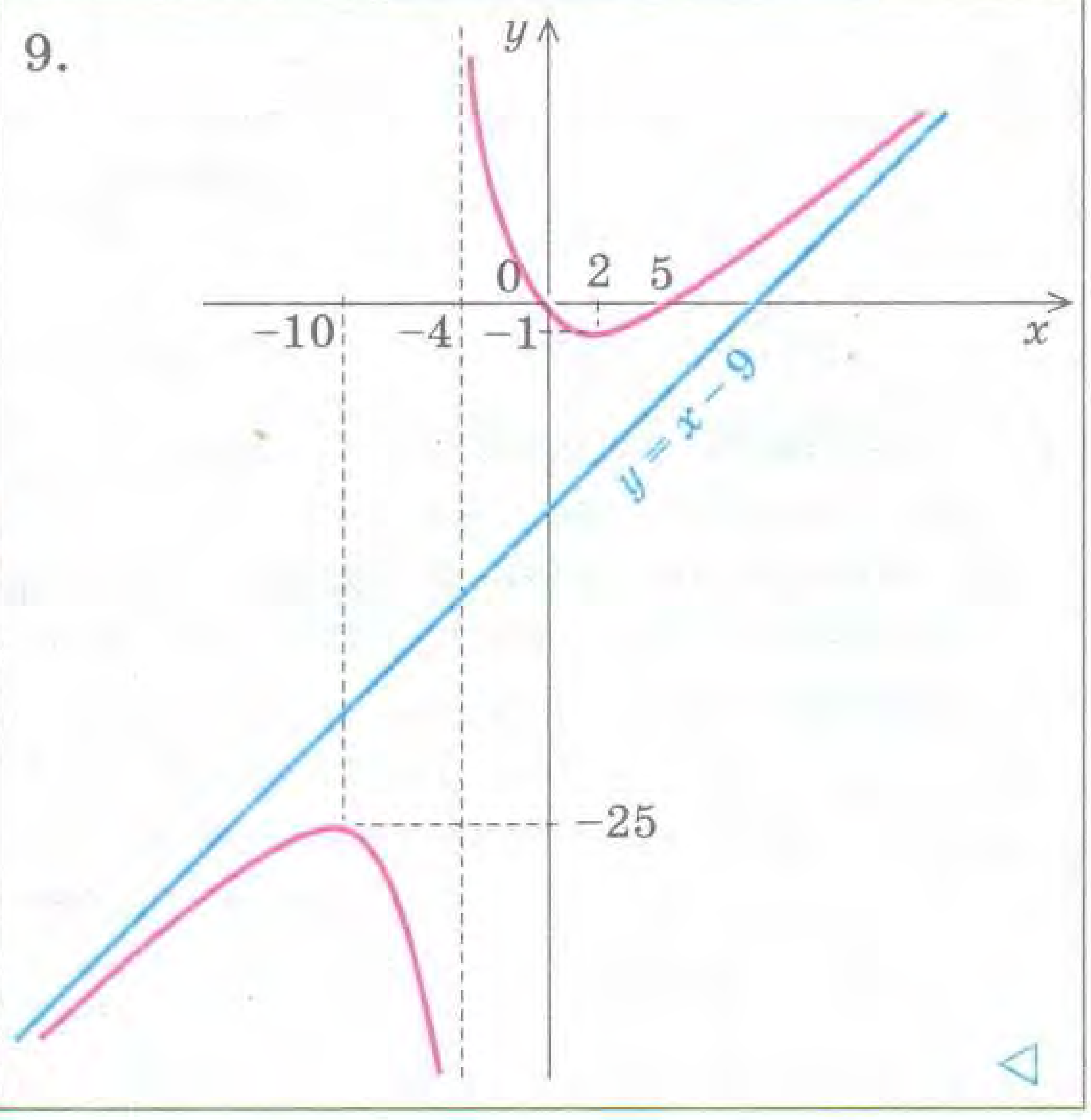
</td>
</tr>
<tr>
<td>8. Знайти координати додаткових точок графіка функції (якщо необхідно уточнити його поведінку).</td>
<td>

8.

x	-7	-2
y	-28	7

</td>
</tr>
<tr>
<td>9. На підставі проведеного дослідження побудувати графік функції.</td>
<td>

9.



</td>
</tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Друга похідна й похідні вищих порядків. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$ у всіх точках деякого проміжку, то цю похідну можна розглядати як функцію від аргументу x. Якщо функція $f'(x)$ є диференційовною, то її похідну називають *другою похідною* від $f(x)$ і позначають $f''(x)$ (або y'').

Наприклад, якщо $f(x) = 2x - \sin x$, то $f'(x) = (2x - \sin x)' = 2 - \cos x$, тоді $f''(x) = (2 - \cos x)' = \sin x$.

По аналогії з другою похідною означають і похідні вищих порядків. Похідну від другої похідної функції $f(x)$ називають *третьою похідною*, або *похідною третього порядку* цієї функції і т. д., тобто *похідною n-го порядку функції $f(x)$ називають похідну від похідної $(n-1)$-го порядку цієї функції.* Похідну n-го порядку функції $f(x)$ позначають $f^{(n)}(x)$.

Наприклад, якщо $f(x) = x^5$, то* $f'(x) = (x^5)' = 5x^4$; $f''(x) = (5x^4)' = 20x^3$; $f'''(x) = (20x^3)' = 60x^2$; $f^{(4)}(x) = (60x^2)' = 120x$; $f^{(5)}(x) = (120x)' = 120$; $f^{(6)}(x) = (120)' = 0$.

2. Опуклість функції. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a; b)$, а в точці $x_0 \in (a; b)$ має скінченну похідну. Тоді до графіка цієї функції в точці $M(x_0; f(x_0))$ можна провести дотичну. Залежно від розміщення графіка відносно дотичної функцію називають *опуклою вниз*, якщо графік розміщено вище дотичної (рис. 9.1) або *опуклою вгору*, якщо графік розміщено нижче дотичної (рис. 9.2). Відповідно і сам графік у першому випадку називають *опуклим униз*, а в другому — *опуклим угору*. Наведемо відповідні означення та властивості для функції $f(x)$, визначеної і диференційовної двічі на інтервалі $(a; b)$.

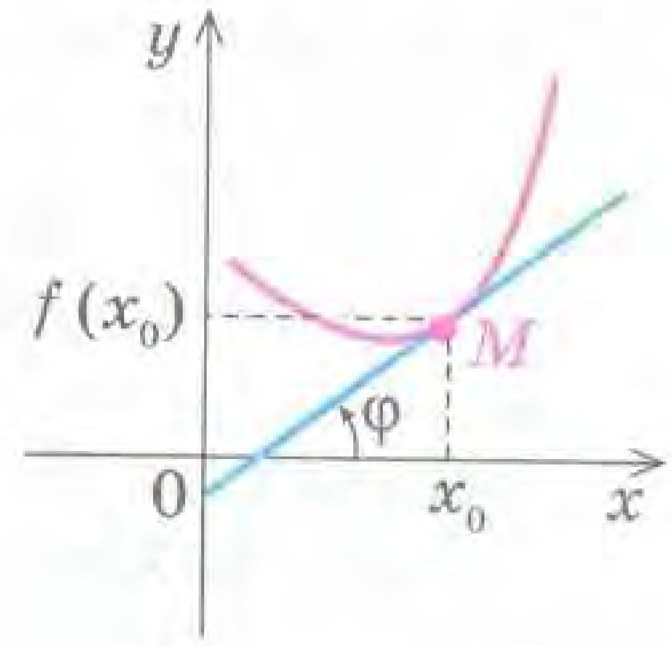


Рис. 9.1

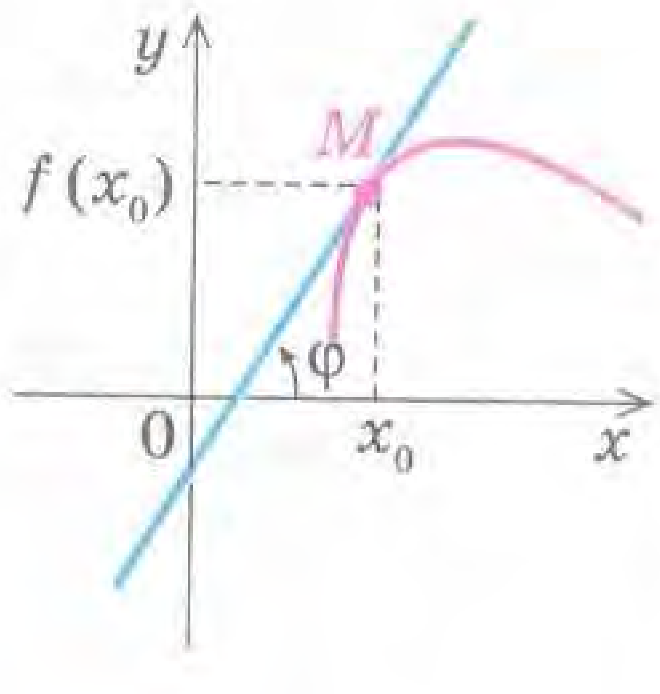


Рис. 9.2

Функцію $f(x)$ називають *опуклою вниз* на інтервалі $(a; b)$, якщо для будь-якої точки x_0 з цього інтервалу при всіх $x \in (a; b)$ і $x \ne x_0$ графік функції лежить вище дотичної до цього графіка в точці $(x_0; f(x_0))$.

Функцію $f(x)$ називають *опуклою вгору* на інтервалі $(a; b)$, якщо для будь-якої точки x_0 з цього інтервалу при всіх $x \in (a; b)$ і $x \ne x_0$ графік функції лежить нижче дотичної до цього графіка в точці $(x_0; f(x_0))$.

Зазначимо, що на інтервалі, де функція $f(x)$ опукла вниз, її похідна $f'(x)$ зростає. Дійсно, як видно з рис. 9.1, із зростанням аргументу x величина кута φ, що утворює дотична до графіка функції $f(x)$ із додат-

* Четверту, п'яту й шосту похідні функції $f(x)$ часто позначають відповідно $f^{IV}(x)$, $f^{V}(x)$, $f^{VI}(x)$.

ним напрямком осі Ox, зростає, набуваючи значень між $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$. Але тоді $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$ теж зростає.

На інтервалі, де функція $f(x)$ опукла вгору, її похідна $f'(x)$ спадає. Дійсно, як видно з рис. 9.2, зі зростанням аргументу x величина кута φ, що утворює дотична до графіка функції $f(x)$ із додатним напрямком осі Ox, спадає, набуваючи значень між $\frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2}$. Але тоді $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$ теж спадає.

Можна довести, що справедливі й обернені твердження.

1. *Якщо похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ зростає на інтервалі $(a; b)$, то функція $f(x)$ є опуклою вниз на цьому інтервалі.*
2. *Якщо похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ спадає на інтервалі $(a; b)$, то функція $f(x)$ є опуклою вгору на цьому інтервалі.*

Ці властивості дозволяють сформулювати *достатні умови опуклості функції (і графіка функції)*.

1. **Якщо на інтервалі $(a; b)$ двічі диференційовна функція $f(x)$ має додатну другу похідну ($f''(x) > 0$ при всіх $x \in (a; b)$), то її графік на інтервалі $(a; b)$ спрямований опуклістю вниз.**
2. **Якщо на інтервалі $(a; b)$ двічі диференційовна функція $f(x)$ має від'ємну другу похідну ($f''(x) < 0$ при всіх $x \in (a; b)$), то її графік на інтервалі $(a; b)$ спрямований опуклістю вгору.**

Дійсно, нехай $f''(x) > 0$ при всіх $x \in (a; b)$. Якщо розглядати $f'(x)$ як функцію від x, то $f''(x)$ є похідною цієї функції ($f''(x) = (f'(x))'$). Але тоді, маючи додатну похідну, функція $f'(x)$ зростає на інтервалі $(a; b)$. Отже, за властивістю 1 функція $f(x)$ є опуклою вниз на цьому інтервалі, її графік відповідно опуклий униз на інтервалі $(a; b)$.

Аналогічно обґрунтовують і другу достатню умову.

Ці умови є тільки достатніми, але не є необхідними. Наприклад, функція $y = x^4$ є опуклою вниз на всій числовій прямій (рис. 9.3), хоча в точці $x = 0$ її друга похідна $y'' = 12x^2$ дорівнює нулю.

У випадку, коли функція $f(x)$ *опукла вниз* на інтервалі $(a; b)$ і M_1 та M_2 — точки її графіка на цьому інтервалі (рис. 9.4), то на інтервалі $(x_1; x_2)$, де $a < x_1 < x_2 < b$, графік функції $y = f(x)$ лежить нижче відрізка M_1M_2. Цей відрізок по аналогії з відрізком, що сполучає дві точки дуги кола, часто називають *хордою* кривої. Отже, у цьому випадку на інтервалі $(x_1; x_2)$ *графік лежить нижче хорди*.

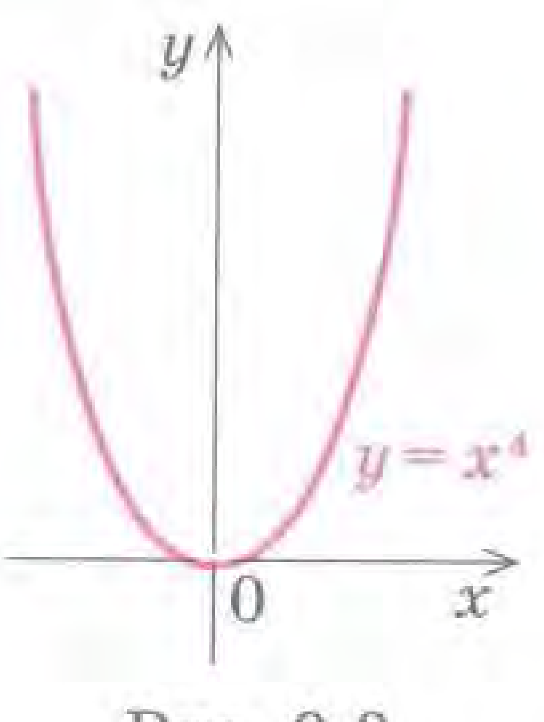


Рис. 9.3

Якщо функція $f(x)$ *опукла вгору* на інтервалі $(a; b)$ і M_1 та M_2 — точки її графіка на цьому інтервалі (рис. 9.5), то на інтервалі $(x_1; x_2)$, де $a < x_1 < x_2 < b$, графік функції $y = f(x)$ лежить вище відрізка M_1M_2, тобто *графік лежить вище хорди*.

3. Точки перегину

Точку M графіка неперервної функції $f(x)$, у якій існує дотична і при переході через яку крива змінює напрям опуклості, називають *точкою перегину* графіка функції.

Враховуючи означення опуклості функції вгору й опуклості функції вниз (с. 131), одержуємо, що дотична розміщена вище однієї частини графіка і нижче другої (рис. 9.6). Інакше кажучи, у точці перегину дотична перетинає криву, а сам графік функції переходить з одного боку дотичної до іншого.

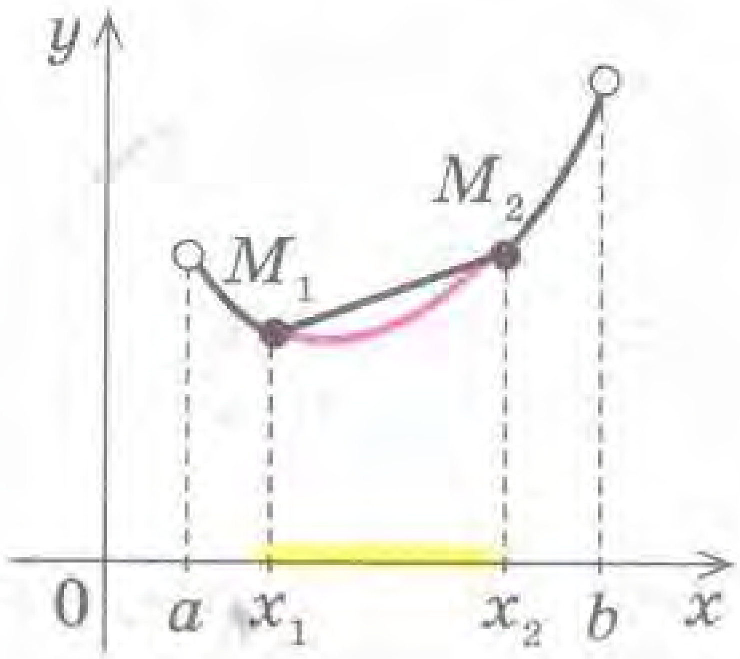


Рис. 9.4

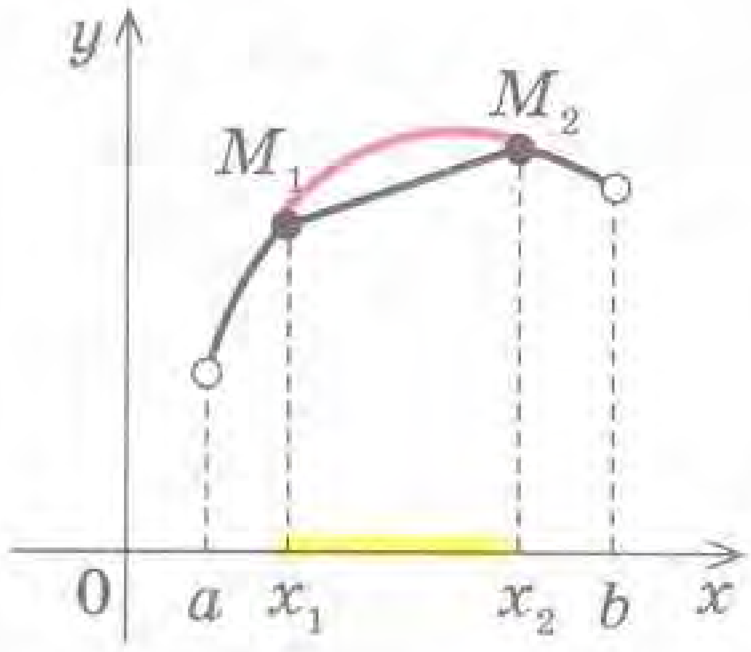


Рис. 9.5

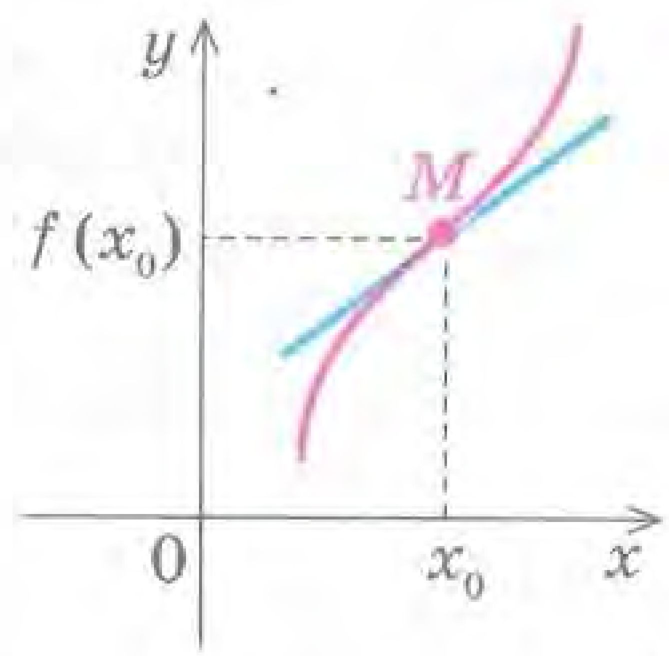


Рис. 9.6

Абсцису x_0 точки перегину графіка функції $f(x)$ називають *точкою перегину функції*. Тоді x_0 є одночасно кінцем інтервалу опуклості вгору і кінцем інтервалу опуклості вниз функції $f(x)$.

Точки перегину двічі диференційовної функції можна знайти за допомогою її другої похідної. Наведемо *достатню умову існування точки перегину*.

Нехай функція $f(x)$ має на інтервалі $(a; b)$ другу похідну. Якщо $f''(x)$ змінює знак при переході через x_0, де $x_0 \in (a; b)$, то x_0 — точка перегину функції $f(x)$.

Дійсно, якщо функція $f(x)$ має на інтервалі $(a; b)$ другу похідну, то вона має на цьому інтервалі й першу похідну. Отже, функція $f(x)$ є неперервною на заданому інтервалі та існує дотична до графіка функції в точці з абсцисою x_0. Нехай $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ і $f''(x) > 0$ при $x > x_0$ (на заданому інтервалі). Тоді, використовуючи достатні умови опуклості функції, одержуємо, що при $x < x_0$ графік функції $f(x)$ спрямований опуклістю вгору, а при $x > x_0$ — опуклістю вниз. Таким чином, точка x_0 є точкою перегину функції $f(x)$.

Аналогічно розглядається і випадок, коли $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ та $f''(x) < 0$ при $x > x_0$: точка x_0 є також точкою перегину функції $f(x)$. ○

Для знаходження проміжків опуклості функції й точок її перегину потрібно враховувати таке.

Нехай функція $f(x)$ задана на інтервалі $(a; b)$ і в кожній точці цього інтервалу має другу похідну $f''(x)$, яка є на ньому неперервною функцією. Якщо для точки x_0 з цього інтервалу $f''(x_0) > 0$, то в деякому δ-околі цієї точки друга похідна теж буде додатною, тобто для всіх $x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ значення $f''(x) > 0$. Але тоді в інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ функція $f(x)$ спрямована опуклістю вниз, і точка x_0 не може бути точкою перегину функції $f(x)$. Аналогічно, якщо $f''(x_0) < 0$, то в деякому околі точки x_0 функція $f(x)$ спрямована опуклістю вгору, і точка x_0 не може бути точкою перегину функції $f(x)$. Отже, точкою перегину може бути тільки така точка x_0, у якій друга похідна дорівнює нулю. З цього випливає *необхідна умова існування точок перегину*:

якщо функція $f(x)$ задана на інтервалі $(a;\ b)$, у кожній точці цього інтервалу має другу похідну $f''(x)$, яка є неперервною функцією на заданому інтервалі, і має точку перегину x_0, то $f''(x_0) = 0$. ○

Наприклад, функція $y = x^3$ (рис. 9.7) має перегин у точці 0, у якій її друга похідна дорівнює нулю. Дійсно, $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y''(0) = 0$. При $x > 0$ значення $y''(x) > 0$ і графік спрямований опуклістю вниз; а при $x < 0$ значення $y''(x) < 0$ і графік спрямований опуклістю вгору. Отже, $x = 0$ — точка перегину функції.

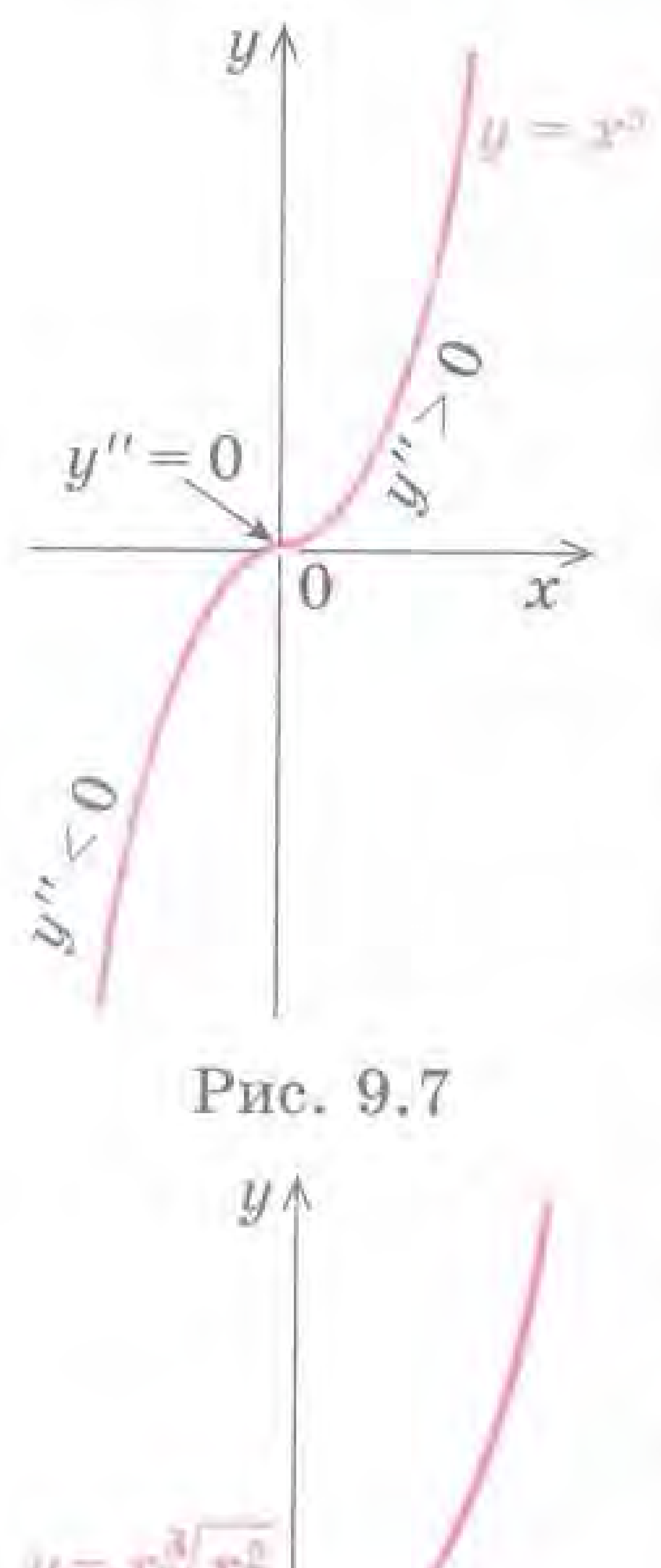


Рис. 9.7

Точка перегину функції $f(x)$ може бути і в тій точці x_0, у якій $f''(x_0)$ не існує (але $f'(x_0)$ існує).

Наприклад, функція $y = x\sqrt[3]{x^2}$ (рис. 9.8), означена на всій числовій прямій, має перегин у точці 0, у якій існує її перша похідна $y' = \left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$ ($y'(0) = 0$), але не існує друга похідна
$$y'' = \left(\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}\right)' = \frac{5}{3}\cdot\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$$ ($y''(0)$ не існує).

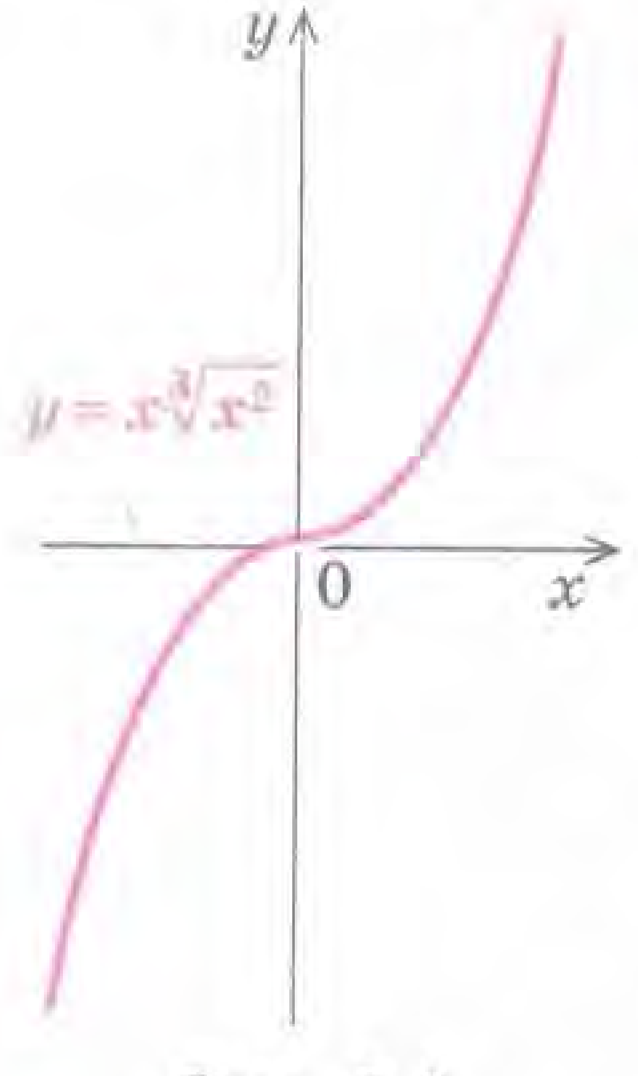


Рис. 9.8

При $x > 0$ значення $y''(x) > 0$ і графік спрямований опуклістю вниз, а при $x < 0$ значення $y''(x) < 0$ і графік спрямований опуклістю вгору. Отже, 0 — точка перегину функції.

Щоб знайти проміжки опуклості функції $f(x)$, потрібно розв'язати нерівності $f''(x) > 0$ і $f''(x) < 0$ на області визначення функції $f(x)$. Оскільки $f''(x)$ теж є функцією від змінної x, то у випадку, коли функція $f''(x)$ є неперервною в кожній точці своєї області визначення, для розв'язування цих нерівностей можна використати метод інтервалів, точніше, його узагальнення, що спирається на властивість: *точки, у яких друга похідна дорівнює нулю* *або не існує, розбивають область визначення функції $f(x)$ на проміжки, у кожному з яких $f''(x)$ зберігає сталий знак.*

Ураховуючи цю властивість і умови опуклості функції та існування її точок перегину, можна запропонувати таку *схему дослідження функції $f(x)$ на опуклість і точки перегину.*

1. *Знайти область визначення функції.*
2. *Знайти другу похідну.*
3. *Знайти внутрішні точки області визначення, у яких друга похідна дорівнює нулю або не існує**.
4. *Позначити одержані точки на області визначення функції, знайти знак другої похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.*
5. *Записати результат дослідження (інтервали та характер опуклості й точки перегину).*

Застосування цієї схеми показано в табл. 15 (с. 128–130).

Використання другої похідної дозволяє детальніше дослідити властивості функції для побудови її графіка. У табл. 15 наведено розширену схему (порівняно зі схемою в табл. 6 на с. 67, 68) дослідження функції та приклад її використання. До схеми додатково включено знаходження інтервалів опуклості функції, точок перегину та асимптот графіка функції (див. також § 7).

Запитання для контролю

1. Використовуючи графік, поясніть, яку функцію називають опуклою вгору, яку — опуклою вниз.
2. Використовуючи графік функції, поясніть, яку точку називають точкою перегину графіка. Що називають точкою перегину функції?
3. Поясніть, як розміщується на відповідному інтервалі графік опуклої вгору або опуклої вниз функції відносно хорди, що сполучає дві точки цього графіка.
4. Сформулюйте достатні умови опуклості вгору та опуклості вниз функції, що має другу похідну на заданому інтервалі. Наведіть приклади.
5. Сформулюйте необхідну і достатню умови існування точок перегину функції, що має другу похідну на заданому інтервалі. Наведіть приклади.
6. Охарактеризуйте схему дослідження функції на опуклість і точки перегину її графіка.
7. Охарактеризуйте розширену схему дослідження функції для побудови її графіка.

* По аналогії з критичними точками (див. с. 53) внутрішні точки області визначення, у яких друга похідна дорівнює нулю або не існує, часто називають критичними точками другого роду, або критичними точками за другою похідною.

Вправи

1. Знайдіть другу похідну заданої функції:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$;
2) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$;
3) $f(x) = x \cos x$;
4) $f(x) = x^2 \sin x$.

2. Знайдіть інтервали опуклості вгору й опуклості вниз і точки перегину функції:

1) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$;
2) $f(x) = \cos 2x$ при $-\pi < x < \pi$;
3) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$;
4) $y = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$.

3. Дослідіть функцію за розширеною схемою та побудуйте її графік:

1) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$;
2) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$;
3) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$;
4) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$
5) $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$;
6) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$;
7) $y = \frac{x}{x^2+4}$.

§ 10 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ

10.1. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ

У підручнику для 10 класу було розглянуто використання властивостей функцій щодо розв'язування деяких рівнянь. Іноді для з'ясування потрібних властивостей функцій доцільно використати похідну. Це перш за все дослідження проміжків зростання і спадання функції та оцінка області значень функції (відповідні прийоми такого дослідження подано в табл. 16).

Таблиця 16

<table>
<tr><th colspan="2">1. Оцінка значень лівої та правої частин рівняння</th></tr>
<tr><th colspan="2">Орієнтир</th></tr>
<tr><td>$\boxed{f(x) = g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a \end{cases}$
$\boxed{\begin{matrix} f(x) \geq a \\ g(x) \leq a \end{matrix}}$</td><td>Якщо потрібно розв'язати рівняння виду $f(x) = g(x)$ і з'ясувалося, що $f(x) \geq a$, $g(x) \leq a$, то рівність між лівою і правою частинами рівняння можлива тоді і тільки тоді, коли одночасно $f(x)$ і $g(x)$ дорівнюють a.</td></tr>
</table>

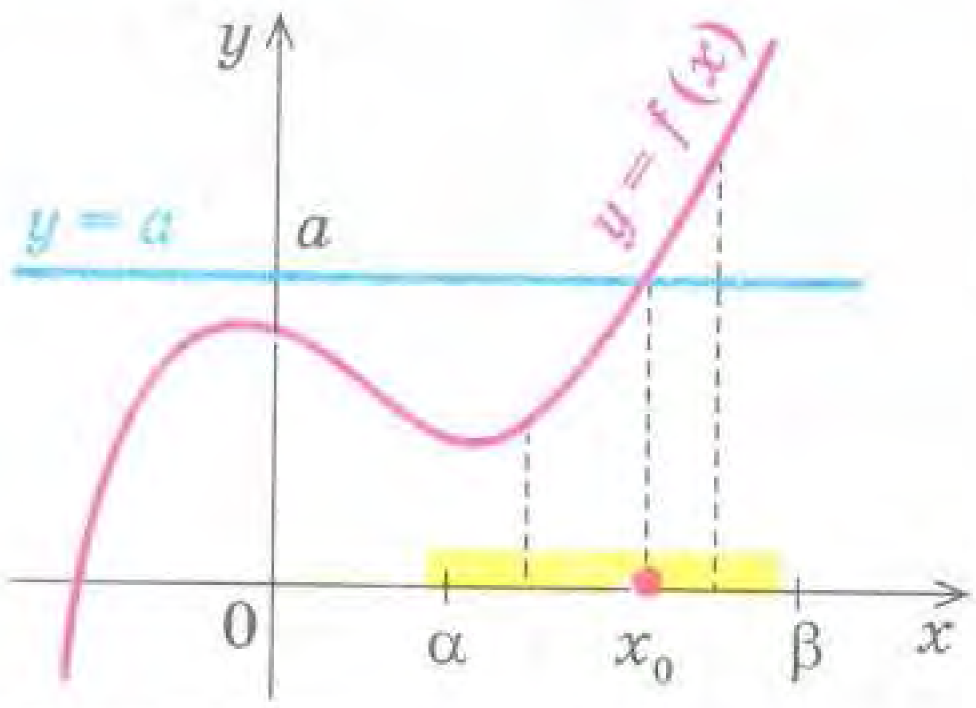
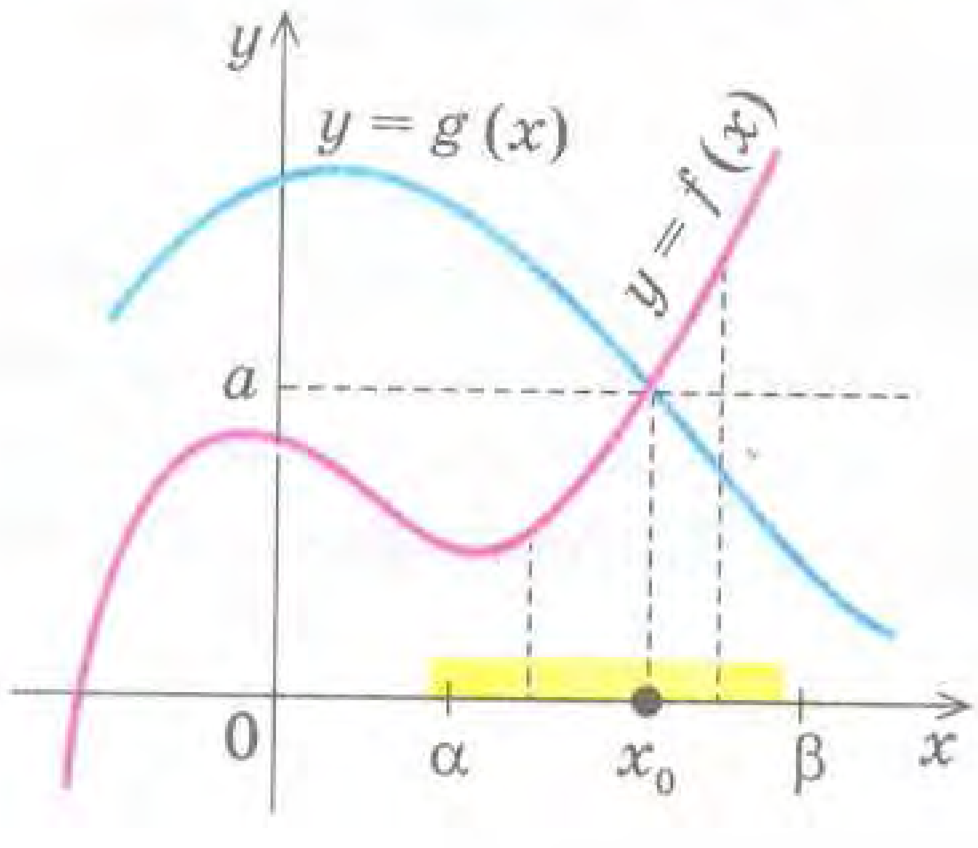
Продовження табл. 16

Приклад
Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6$.   ▶ Оцінимо значення лівої і правої частин рівняння: $g(x) = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 \geqslant 2$, $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$. Дослідимо функцію $f(x)$ на найбільше та найменше значення за допомогою похідної. $D(f)$: $\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ 3-x \geqslant 0, \end{cases}$ тобто $1 \leqslant x \leqslant 3$. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$. Похідна не існує в точках 1 і 3 з області визначення функції $f(x)$, але ці точки не є внутрішніми для $D(f)$, отже, вони не є критичними. $$f'(x)=0,\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}=0,\ \sqrt{3-x}=\sqrt{x-1},\ 3-x=x-1,$$ $x = 2$ — критична точка ($f'(2) = 0$).   Неперервна функція* $f(x)$ задана на відрізку [1; 3], тому вона набуває найбільшого та найменшого значень або на кінцях відрізка, або в критичній точці з цього відрізка. Оскільки $f(1)=f(3)=\sqrt{2}$, а $f(2) = 2$, то $\max\limits_{[1;3]} f(x)=f(2)=2$, тобто** $f(x) \leqslant 2$. Крім того, $g(x) \geqslant 2$,   отже, задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=2, \\ (x-2)^2+2=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$.   *Відповідь:* 2. ◁
2. Використання зростання та спадання функцій
Схема розв'язування рівняння
1. *Підбираємо один або декілька коренів рівняння.*   2. *Доводимо, що інших коренів це рівняння не має (використовуючи теореми про корені рівняння, або оцінку значень лівої та правої частин рівняння, або таку властивість функцій: зростаюча або спадна функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення).*

* Звичайно, у точці $x = 1$ функція $f(x)$ неперервна справа, а в точці $x = 3$ — зліва (див. с. 104).

** Ми могли б виконати точнішу оцінку області значень неперервної функції $f(x)$: оскільки $\min\limits_{[1;3]} f(x)=f(1)=f(3)=\sqrt{2}$, то $\sqrt{2} \leqslant f(x) \leqslant 2$, але для наведеного розв'язання достатньо оцінки $f(x) \leqslant 2$.

Закінчення табл. 16

Теореми про корені рівняння	Приклад
1. Якщо в рівнянні $f(x) = a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку.  	1. ▶ Рівняння $2x + \cos x = \pi$ має корінь* $x = \frac{\pi}{2}$ $\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = \pi,\right.$ тобто $\left.\pi = \pi\right)$. Інших коренів це рівняння не має, оскільки функція $f(x) = 2x + \cos x$ зростаюча (її похідна $f'(x) = 2 - \sin x > 0$ при всіх значеннях x з області визначення: $D(f) = \mathbf{R}$). *Відповідь:* $\frac{\pi}{2}$. ◁
2. Якщо функція $f(x)$ у рівнянні $f(x) = g(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ — спадає (або навпаки), то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку.  	2. ▶ Рівняння $3x^2 - \frac{1}{x} = \frac{4}{\sqrt{x}+1}$ має корінь $x = 1$ $\left(3 - 1 = \frac{4}{\sqrt{1}+1},\right.$ тобто $\left.2 = 2\right)$. Інших коренів це рівняння не має, оскільки його ОДЗ $x > 0$ і на цій ОДЗ функція $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x}$ зростаюча $\left(f'(x) = 6x + \frac{1}{x^2} > 0 \text{ при } x > 0\right)$, а функція $g(x) = \frac{4}{\sqrt{x}+1}$ спадна при $x > 0$ $\left(g'(x) = \frac{-\frac{4}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} < 0 \text{ при } x > 0\right)$. *Відповідь:* 1. ◁

* Корені рівнянь у прикладах 1 і 2 одержано підбиранням. Як правило, підбір починають із цілих значень: $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, які підставляють у задане рівняння, а для тригонометричних рівнянь перевіряють також «табличні» значення $x = 0, \pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \ldots$.

Пояснення й обґрунтування

У табл. 16 показано, як можна використати похідну для розв'язування рівнянь способами, які пов'язані із застосуванням властивостей функцій і були розглянуті та обґрунтовані в підручнику для 10 класу. Ці способи найчастіше використовують у тих випадках, коли розв'язати задане рівняння за допомогою рівносильних перетворень або рівнянь-наслідків неможливо чи тоді, коли таке розв'язання є дуже громіздким.

Використовуючи похідну під час розв'язування деяких рівнянь, можна міркувати за такою схемою.

Припустимо, ми змогли підібрати два корені заданого рівняння виду $f(x) = a$. Щоб довести, що рівняння не має інших коренів, достатньо впевнитися, що функція $f(x)$ має тільки два проміжки зростання або спадання (на кожному з них рівняння $f(x) = a$ може мати тільки один корінь). Якщо функція $f(x)$ диференційовна на якомусь проміжку, то зростання функції $f(x)$ на цьому проміжку може змінитися на спадання тільки в її критичних точках.

Наприклад, якщо в точці x_0 зростання диференційовної (а отже, і неперервної) функції змінилося на спадання, то це означає, що в точці x_0 функція має максимум, але тоді x_0 — критична точка. Таким чином, *для того щоб диференційовна на інтервалі функція мала на цьому інтервалі не більше двох проміжків зростання або спадання, достатньо, щоб на цьому інтервалі вона мала тільки одну критичну точку.*

Приклад Розв'яжемо за допомогою вказаної вище схеми рівняння

$$x^8 - 255x + 254 = 0.$$

Розв'язання

▶ Задане рівняння має корені $x = 1$ ($1^8 - 255 \cdot 1 + 254 = 0$, $0 = 0$) та $x = 2$ ($2^8 - 255 \cdot 2 + 254 = 0$, $0 = 0$). Доведемо, що інших коренів це рівняння не має. Для цього достатньо довести, що функція $f(x) = x^8 - 255x + 254$ має не більше двох проміжків зростання або спадання. Дійсно, $D(f) = \mathbf{R}$, $f'(x) = 8x^7 - 255$ існує на всій області визначення функції $f(x)$. Якщо $f'(x) = 0$, то $8x^7 - 255 = 0$,

$x = \sqrt[7]{\dfrac{255}{8}} = x_0$ — єдина критична точка функції $f(x)$. Якщо відмітити цю критичну точку на області визначення функції $f(x)$ (на множині $\mathbf{R}$), то область визначення розіб'ється на два проміжки: на проміжку $(-\infty; x_0]$ функція $f(x)$ спадає, а на проміжку $[x_0; +\infty)$ — зростає. Тоді на кожному з цих двох проміжків рівняння $f(x) = 0$ може мати не більше ніж один корінь, а всього буде не більше ніж два корені, які ми вже підібрали. Отже, задане рівняння має тільки ці два корені: $x = 1$ та $x = 2$.

Відповідь: 1, 2. ◁

Аналогічні міркування для випадку, коли для рівняння виду $f(x) = a$ вдається підібрати три корені, наведено в прикладі 2 на с. 141.

При розв'язуванні нерівностей виду $f(x) \gtreqless 0$ методом інтервалів часто доводиться застосовувати описані вище прийоми розв'язування рівнянь з використанням похідної для знаходження нулів функції $f(x)$ (див. приклад 5, с. 144).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}=2(1+\cos 2\pi x). \tag{1}$$

Коментар

Оскільки у нас немає формул, які б дозволяли перетворювати одночасно ірраціональні й тригонометричні вирази, то спробуємо розв'язати задане рівняння, використовуючи властивості відповідних функцій. Оцінимо області значень функцій: для функції, яка стоїть у правій частині рівняння, це легко зробити без похідної, а для функції, що стоїть у лівій частині рівняння, зручно використати похідну.

Розв'язання

ОДЗ заданого рівняння: $x > 0$. Оцінимо значення лівої і правої частин рівняння. Оскільки $\cos 2\pi x$ набуває всіх значень від (-1) до 1, то вираз $1 + \cos 2\pi x$ набуває всіх значень від 0 до 2, а функція $g(x) = 2(1 + \cos 2\pi x)$ набуває всіх значень від 0 до 4. Отже, $0 \leqslant g(x) \leqslant 4$.

Функцію $f(x)=\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}$ дослідимо за допомогою похідної. $D(f) = (0; +\infty)$.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{-\frac{4}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{x\sqrt{x}}=\frac{x-4}{2x\sqrt{x}}$$ — існує на всій області визначення функції $f(x)$.

$f'(x) = 0$, $\frac{x-4}{2x\sqrt{x}}=0$, $x = 4$ — критична точка. Відмічаємо критичну точку на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знаки похідної в кожному з одержаних проміжків (рис. 10.1).

Неперервна функція $f(x)$ має на інтервалі $(0; +\infty)$ тільки одну критичну точку — точку мінімуму (у ній похідна змінює знак «$-$» на знак «$+$»). Тоді в цій точці функція набуває свого найменшого значення: $f(4) = 4$. Отже, $f(x) \geqslant 4$.

Ураховуючи, що $g(x) \leqslant 4$, задане рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x)=4, \\ g(x)=4. \end{cases}$ Але значення 4 функція $f(x)$ набуває тільки при

$x = 4$, що задовольняє й друге рівняння (g (4) = 2 (1 + cos 8π) = 4).

Отже, одержана система (і задане рівняння) має єдиний розв'язок — $x = 4$.

Відповідь: 4. ◁

Рівняння (1) можна розв'язати також способом, описаним у підручнику для 10 класу під назвою «Шукай квадратний тричлен», у якому пропонується спробувати *розглянути задане рівняння як квадратне відносно якоїсь змінної (або відносно якоїсь функції).*

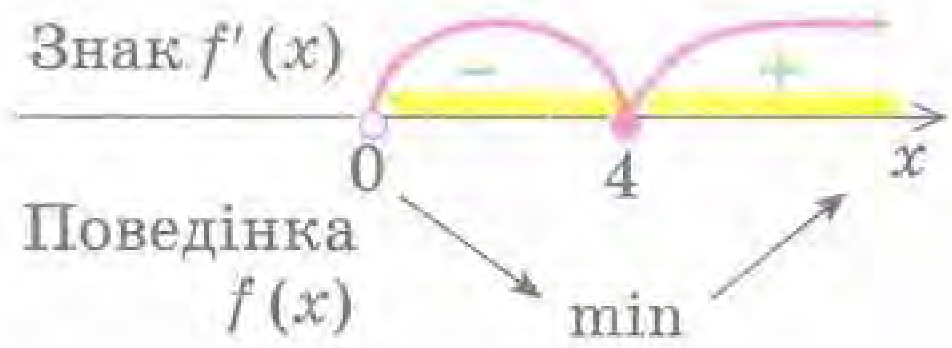


Рис. 10.1

▶ Задане рівняння можна записати так: $\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}-2(1+\cos 2\pi x)=0.$

Заміна $\sqrt{x}=t$, де $t > 0$, дає рівняння $t+\frac{4}{t}-2(1+\cos 2\pi x)=0$, яке при $t > 0$ рівносильне рівнянню

$$t^2 - 2(1 + \cos 2\pi x)\,t + 4 = 0. \qquad (2)$$

Якщо рівняння (2) розглянути як квадратне відносно змінної t, то для існування коренів його дискримінант має бути невід'ємним. Отже, $D = 4(1+\cos 2\pi x)^2 - 16 \geqslant 0$. Тоді $(1 + \cos 2\pi x)^2 \geqslant 4$, а враховуючи, що $1 + \cos 2\pi x \geqslant 0$ завжди, одержуємо $1 + \cos 2\pi x \geqslant 2$, тобто $\cos 2\pi x \geqslant 1$. Але в останній нерівності знак «більше» не може виконуватися (значення косинусу не бувають більші за 1), отже,

$$\cos 2\pi x = 1. \qquad (3)$$

Тоді рівняння (2) перетворюється на рівняння $t^2 - 4t + 4 = 0$, звідки $(t - 2)^2 = 0$, $t = 2$. Обернена заміна дає: $\sqrt{x}=2$, отже, $x = 4$, що задовольняє і рівняння (3).

Відповідь: 4. ◁

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння

$$x^7 - 42x^2 - x + 42 = 0. \qquad (1)$$

Коментар

Ураховуючи громіздкість заданого рівняння, спробуємо застосувати властивості відповідних функцій. Але й на цьому шляху (див., наприклад, § 3 підручника для 10 класу) нам не вдається використати скінченність ОДЗ (ОДЗ нескінченна), оцінку значень лівої частини рівняння (вони знаходяться в межах від $-\infty$ до $+\infty$). Залишається використати монотонність функції, хоча й тут ми не можемо безпосередньо застосувати теореми про корені рівняння.

Тоді *спробуємо підібрати корені заданого рівняння* $f(x) = 0$ *і довести, що інших коренів воно не має*. Послідовно підставляючи $x = 0$, $x = \pm 1$,

$x = \pm 2$, $x = \pm 3$, з'ясовуємо, що $f(-1) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, тобто рівняння $f(x) = 0$ має три корені.

Доведемо, що інших коренів немає. Для цього достатньо довести, що у функції $f(x)$ не більше трьох проміжків зростання або спадання, а враховуючи неперервність $f(x)$ на всій числовій прямій, що у неї не більше двох критичних точок, тобто довести, що рівняння $f'(x) = 0$ має не більше двох коренів.

Розглядаючи тепер рівняння $f'(x) = 0$ після його перетворення, ми можемо провести аналогічні міркування, але вже для двох коренів (як це було зроблено в прикладі на с. 139).

Розв'язання

Позначимо $f(x) = x^7 - 42x^2 - x + 42 = 0$. Оскільки $f(1) = 1 - 42 - 1 + 42 = 0$, $f(-1) = -1 - 42 + 1 + 42 = 0$, $f(2) = 128 - 168 - 2 + 42 = 0$, то рівняння $f(x) = 0$ має три корені: -1, 1, 2. Доведемо, що інших коренів рівняння (1) не має.

Для цього достатньо довести, що у функції $f(x)$ є не більше трьох проміжків зростання або спадання, а враховуючи неперервність функції $f(x)$ на всій числовій прямій, що функція має не більше двох критичних точок.

Область визначення $D(f) = \boldsymbol{R}$.

Похідна $f'(x) = f(x) = 7x^6 - 84x - 1$ існує при всіх значеннях x.

Отже, критичними точками можуть бути тільки ті значення x, при яких $f'(x) = 0$. Одержуємо рівняння

$$7x^6 - 84x - 1 = 0. \quad (2)$$

Щоб довести, що рівняння (2) має не більше двох коренів, достатньо довести, що функція $\varphi(x) = 7x^6 - 84x - 1$, яка стоїть у лівій частині рівняння, має не більше двох проміжків зростання або спадання, а враховуючи неперервність цієї функції на всій числовій прямій, що вона має тільки одну критичну точку.

Дійсно, $\varphi'(x) = 42x^5 - 84$ існує при всіх значеннях x. Отже, критичними точками можуть бути тільки ті значення x, при яких $\varphi'(x) = 0$.

Одержуємо рівняння $42x^5 - 84 = 0$. Звідси $x^5 = 2$, $x = \sqrt[5]{2}$. Отже, останнє рівняння має єдиний корінь. Тоді функція $\varphi(x)$ має єдину критичну точку і тому рівняння (2) має не більше двох коренів. Це означає, що функція $f(x)$ має не більше двох критичних точок. Тоді рівняння (1) має не більше трьох коренів. Три корені ми вже знаємо: -1, 1, 2. Отже, інших коренів задане рівняння не має.

Відповідь: -1, 1, 2. ◁

Приклад 3 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3x - 3y = \sin x - \sin y, \\ 2x^3 - y^3 = 1. \end{cases}$

Розв'язання

Задана система рівносильна системі

$$\begin{cases} 3x - \sin x = 3y - \sin y, \\ 2x^3 - y^3 = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Розглянемо функцію

$$f(t) = 3t - \sin t.$$

Оскільки $f'(t) = 3 - \cos t > 0$ завжди, то на своїй області визначення ($t \in \boldsymbol{R}$) функція $f(t)$ є зростаючою. Тоді перше рівняння системи (1), яке має вигляд $f(x) = f(y)$, рівносильне рівнянню $x = y$. Отже, система (1) рівносильна системі

$$\begin{cases} x = y, \\ 2x^3 - y^3 = 1. \end{cases}$$

Підставляючи $x = y$ у друге рівняння системи, маємо

$2y^3 - y^3 = 1$, $y^3 = 1$, $y = 1$. Тоді $x = y = 1$.

Відповідь: (1; 1). ◁

Коментар

Розв'язати задану систему за допомогою рівносильних перетворень не вдається. Тому спробуємо використати властивості функцій.

Якщо в першому рівнянні системи члени зі змінною x перенести в один бік, а з y — в інший, то одержимо в лівій і правій частинах рівняння значення однієї і тієї самої функції. За допомогою похідної легко перевірити, що ця функція є зростаючою. Але *рівність $f(x) = f(y)$ для зростаючої функції можлива тоді і тільки тоді, коли $x = y$*, оскільки кожного свого значення зростаюча (або спадна) функція може набувати тільки при одному значенні аргументу. Коротко цей результат можна сформулювати так: **якщо функція $f(x)$ є зростаючою (або спадною) на певній множині, то на цій множині $f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta$.**

Приклад 4 Розв'яжіть нерівність $x^{11} - x^6 + 2x < -4$.

Розв'язання

Задана нерівність рівносильна нерівності

$$x^{11} - x^6 + 2x + 4 < 0.$$

Функція $f(x) = x^{11} - x^6 + 2x + 4$ неперервна в кожній точці своєї області визначення, тому для розв'язування нерівності можна використати метод інтервалів.

1. ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$.
2. Нулі функції: $f(x) = 0$. Знайдемо похідну функції $f(x)$: $f'(x) = 11x^{10} - 6x^5 + 2$. Якщо позначити $x^5 = t$, то $f' = 11t^2 - 6t + 2$. Але квадратний тричлен $11t^2 - 6t + 2$ має від'ємний дискримінант, тоді для всіх t $11t^2 - 6t + 2 > 0$.

Коментар

Задану нерівність не вдається розв'язати за допомогою рівносильних перетворень, тому використовуємо метод інтервалів. Для цього нерівність потрібно звести до виду $f(x) \gtrless 0$, де $f(x)$ — неперервна в кожній точці своєї області визначення функція, оскільки це многочлен.

Нагадаємо схему розв'язування нерівності методом інтервалів.

1. *Знайти ОДЗ нерівності.*
2. *Знайти нулі функції: $f(x) = 0$.*
3. *Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.*

Отже, для всіх x значення $f'(x) > 0$. Тоді функція $f(x)$ зростає на всій числовій прямій, і рівняння $f(x) = 0$ може мати тільки один корінь. Оскільки $f(-1) = 0$, то $x = -1$ — єдиний нуль функції $f(x)$.

3. Відмічаємо нулі на ОДЗ і знаходимо знак у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ (рис. 10.2).

Рис. 10.2

Відповідь: $(-\infty; -1)$. ◁

4. *Записати відповідь, ураховуючи знак заданої нерівності.*

Для знаходження нулів функції потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$. Оскільки його не вдається розв'язати за допомогою рівносильних перетворень, то доцільно використати властивості функції $f(x)$, зокрема її монотонність, яку можна обґрунтувати за допомогою похідної.

Приклад 5 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x} \geqslant 3-\dfrac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}$.

Коментар

Спробуємо розв'язати задану нерівність методом інтервалів (див. схему розв'язування в прикладі 4). Для цього її потрібно звести до виду $f(x) \geqslant 0$ (де функція $f(x)$ — неперервна в кожній точці своєї області визначення).

При знаходженні нулів функції для розв'язування рівняння $f(x) = 0$ доцільно використати властивості відповідних функцій, зокрема оцінку значень лівої і правої частин рівняння виду $g(x) = \varphi(x)$. Значення функції $\varphi(x) = 3-\dfrac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}$ легко оцінити без застосування похідної, а для дослідження функції $g(x) = \sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ використаємо похідну. У даному випадку всередині ОДЗ ми не знайдемо жодного нуля функції $f(x)$ (див. далі розв'язання: нулем є тільки крайня точка ОДЗ). Але метод інтервалів працює і в цьому випадку, тільки ми отримаємо єдиний інтервал, у якому функція зберігає свій знак.

Розв'язання

▶ Задана нерівність рівносильна нерівності

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}-3+\frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi} \geqslant 0. \quad (1)$$

Функція $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}-3+\dfrac{\arccos\left(-\dfrac{x}{4}\right)}{\pi}$ неперервна в кожній точці* своєї області визначення, тому для розв'язування нерівності (1) можна використати метод інтервалів.

1. ОДЗ: $\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ 5-x\geqslant 0, \\ -1\leqslant -\dfrac{x}{4}\leqslant 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x\leqslant 5, \\ -4\leqslant x\leqslant 4, \end{cases}$ $3\leqslant x\leqslant 4.$

2. Нулі: $f(x)=0$. $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}-3+\dfrac{\arccos\left(-\dfrac{x}{4}\right)}{\pi}=0.$

Це рівняння рівносильне рівнянню

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}=3-\frac{\arccos\left(-\dfrac{x}{4}\right)}{\pi}. \qquad (2)$$

Оцінимо значення функцій $g(x)$ і $\varphi(x)$, які стоять відповідно в лівій і правій частинах рівняння (2).

Оскільки $0\leqslant\arccos\left(-\dfrac{x}{4}\right)\leqslant\pi$, то $0\leqslant\dfrac{\arccos\left(-\dfrac{x}{4}\right)}{\pi}\leqslant 1.$

Тоді $2\leqslant 3-\dfrac{\arccos\left(-\dfrac{x}{4}\right)}{\pi}\leqslant 3.$

Дослідимо функцію $g(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ на ОДЗ нерівності (1), тобто при $x\in[3;\,4]$.

Функція $g(x)$ неперервна на відрізку $[3;\,4]$, тому вона набуватиме найбільшого і найменшого значень або на кінцях, або в критичних точках цього відрізка.

$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}$ не існує в точці 3 відрізка $[3;\,4]$, але ця точка не є внутрішньою точкою цього відрізка, отже, вона не є критичною. З'ясуємо, коли $g'(x)=0$.

$\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}=0$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}$, $\sqrt{5-x}=\sqrt{x-3}$, $5-x=x-3$,

$$x=4.$$

---

* Звичайно, якщо врахувати, що в точці 3 функція $f(x)$ неперервна справа, а в точці 4 — зліва (див. її ОДЗ).

Порівнюючи значення $g(3)=\sqrt{2}$ і $g(4)=2$, одержуємо, що $\min\limits_{[3;\,4]} g(x)=g(3)=\sqrt{2}$, $\max\limits_{[3;\,4]} g(x)=g(4)=2$. Отже, $\sqrt{2}\leqslant g(x)\leqslant 2$. Тоді рівняння (2) рівносильне системі $\begin{cases}\varphi(x)=2,\\ g(x)=2.\end{cases}$ Оскільки 2 — найбільше значення функції $g(x)$, яке досягається при $x = 4$, то рівняння $g(x) = 2$ має тільки один корінь $x = 4$, який задовольняє і рівняння $\varphi(x) = 2$ (дійсно, $\varphi(4)=3-\dfrac{\arccos(-1)}{\pi}=3-\dfrac{\pi}{\pi}=2$). Отже, функція $f(x)$ має тільки один нуль: $x = 4$.

Відмічаємо нуль на ОДЗ і знаходимо знак функції в одержаному проміжку (рис. 10.3).

Рис. 10.3

Як бачимо, функція $f(x)$ не набуває додатних значень, і в нерівності (1) знак «більше» не може виконуватися. Отже, виконуватиметься лише знак «дорівнює», але $f(x) = 0$ тільки при $x = 4$.

Відповідь: 4. ◁

Зауваження. Використовуючи введені позначення, задану нерівність запишемо так: $g(x)\geqslant\varphi(x)$. Після оцінювання значень функцій $g(x)$ і $\varphi(x)$: $\sqrt{2}\leqslant g(x)\leqslant 2$ та $2\leqslant\varphi(x)\leqslant 3$ і без методу інтервалів робимо висновок, що нерівність $g(x)>\varphi(x)$ не може виконуватися. Отже, задана нерівність рівносильна рівнянню $g(x)=\varphi(x)$, яке рівносильне системі $\begin{cases}\varphi(x)=2,\\ g(x)=2,\end{cases}$ що має єдиний розв'язок $x = 4$. Але такі міркування можна застосувати тільки для розв'язування цієї конкретної нерівності, а метод інтервалів — для довільної нерівності виду $f(x)\gtreqless 0$ (де функція $f(x)$ неперервна в кожній точці своєї області визначення). Через це основним способом розв'язування таких нерівностей ми обрали метод інтервалів.

Запитання для контролю

1. Поясніть, у яких випадках вдається розв'язати рівняння за допомогою оцінки значень його лівої і правої частин. Наведіть приклад.
2. Поясніть, як можна використати зростання і спадання функцій для розв'язування рівнянь. Наведіть приклади.

Вправи

Розв'яжіть рівняння (1–7).

1. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$; 2) $\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}=x^2-10x+29$.

2. 1) $x+\frac{1}{x}=2\sin\frac{\pi x}{2}$; 2) $\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}=2\cos\frac{x}{3}$;

3) $\sqrt{2x}+\frac{4}{\sqrt{2x}}=1+3\sin\frac{\pi x}{4}$.

3. 1) $x^5-x^3+2x-28=0$; 2) $5x-3\cos x=3$;

3) $2x^3-3x^2+\sqrt{x-1}=5$.

4. 1) $\sin 5x-2\cos x-8x=x^5-2$;

2) $4\cos 3x+5\sin\frac{x}{2}+15x=4-x^3$.

5. 1) $x^6-63x+62=0$; 2) $x^6-364x+363=0$;

3) $x^6+63x+62=0$.

6. 1) $x^7-21x^2-64x+84=0$; 2) $x^7+21x^2-64x-84=0$;

3) $x^9-170x^2-x+170=0$.

7. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}4x-\sin x=4y-\sin y,\\ 3x^2-y=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x-2y=\sin x-\sin y,\\ x+2y=9.\end{cases}$

Розв'яжіть нерівність **(8, 9)**.

8. 1) $x^7-x^4+3x>-5$; 2) $2x^9-x^5+x>2$; 3) $\sqrt{x-1}+x^2-2x>17$.

9. 1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\geqslant\frac{9}{2}-\frac{\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)}{\pi}$; 2) $\sqrt{x-2}+\sqrt{20-x}\geqslant 7-\frac{\arccos\left(-\frac{x}{11}\right)}{\pi}$.

10.2. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Похідну інколи вдається використати при доведенні нерівностей від однієї змінної.

Наведемо орієнтовну *схему доведення нерівностей виду $\varphi(x)>g(x)$ (або $\varphi(x)<g(x)$) за допомогою похідної.*

1. *Розглянути допоміжну функцію $f(x)=\varphi(x)-g(x)$ (на її області визначення або на заданому проміжку).*
2. *Дослідити за допомогою похідної поведінку функції $f(x)$* (зростання чи спадання або її найбільше чи найменше значення) *на розглянутому проміжку.*
3. *Обґрунтувати* (спираючись на поведінку функції $f(x)$), *що $f(x)>0$ (або $f(x)<0$) на розглянутому проміжку, і зробити висновок, що $\varphi(x)>g(x)$ (або $\varphi(x)<g(x)$) на цьому проміжку.*

Зауважимо, що при доведенні деяких нерівностей цю схему доводиться використовувати декілька разів (див. приклад 2), а іноді зручно використати другу похідну й опуклість відповідної функції (див. приклад 3).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Доведіть нерівність $x^2+3\geqslant 4\sqrt{x}$ при $x\geqslant 1$.

Розв'язання

▶ Для доведення даної нерівності достатньо довести нерівність $x^2+3-4\sqrt{x}\geqslant 0$ при $x\geqslant 1$. Розглянемо функцію $f(x)=x^2+3-4\sqrt{x}$ при $x\geqslant 1$ (її область визначення $x\geqslant 0$ містить заданий проміжок). Похідна $f'(x)=2x-\frac{4}{2\sqrt{x}}=\frac{2x\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}=\frac{2\left(\sqrt{x^3}-1\right)}{\sqrt{x}}>0$ при $x>1$. Отже, функція $f(x)$ зростає на інтервалі $(1;+\infty)$, а враховуючи неперервність функції $f(x)$ у точці 1 (вона неперервна і на всій області визначення), одержуємо, що функція $f(x)$ зростає і на проміжку $[1;+\infty)$. Але $f(1)=0$. Тоді при $x\geqslant 1$ значення $f(x)\geqslant f(1)=0$. Отже, $x^2+3-4\sqrt{x}\geqslant 0$, тобто $x^2+3\geqslant 4\sqrt{x}$ при $x\geqslant 1$, що й потрібно було довести. (Зазначимо, що при $x>1$ значення $f(x)>f(1)=0$, а при $x=1$ задана нерівність перетворюється на рівність.) ◁

Приклад 2 Доведіть нерівність $\sin x>x-\frac{2x^2}{\pi}$ при $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання

▶ Задана нерівність рівносильна нерівності $\sin x-x+\frac{2x^2}{\pi}>0$. Розглянемо функцію $f(x)=\sin x-x+\frac{2x^2}{\pi}$. Ця функція неперервна на всій числовій прямій і має похідну $f'(x)=\cos x-1+\frac{4x}{\pi}$. Тепер розглянемо функцію $g(x)=\cos x-1+\frac{4x}{\pi}$ і доведемо, що $g(x)>0$ на проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Функція $g(x)$ неперервна на всій числовій прямій і має похідну $g'(x)=-\sin x+\frac{4}{\pi}$. Ураховуючи, що $\frac{4}{\pi}>1\geqslant\sin x$, одержуємо $g'(x)=-\sin x+\frac{4}{\pi}>0$. Отже, функція $g(x)$ зростає на всій числовій прямій, зокрема на проміжку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$. Тоді за означенням зростаючої функції при $x>0$ одержуємо, що $g(x)>g(0)$. Але $g(0)=$

$=\cos 0-1+\frac{4\cdot 0}{\pi}=0$, тобто при $x\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ $f'(x)=g(x)>0$. Це означає, що функція $f(x)$ зростає на інтервалі $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, а оскільки вона неперервна, то і на проміжку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Тоді з нерівності $x>0$ випливає нерівність $f(x)>f(0)$. Але $f(0)=\sin 0-0+\frac{2\cdot 0^2}{\pi}=0$, отже, $f(x)>0$ при всіх $x\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Таким чином, на цьому інтервалі виконується нерівність $\sin x-x+\frac{2x^2}{\pi}>0$, а значить, і нерівність $\sin x>x-\frac{2x^2}{\pi}$. ◁

Приклад 3 Доведіть, що при всіх $0<x<\frac{\pi}{2}$ виконується нерівність

$$\sin x>\frac{2}{\pi}x.$$

Розв'язання	*Коментар*
▶ Якщо $f(x)=\sin x$, то $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$. При $0<x<\frac{\pi}{2}$ $f''(x)<0$, отже, на інтервалі $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ функція $f(x)=\sin x$ опукла вгору. Тоді на цьому інтервалі її графік лежить вище хорди OA (рис. 10.4).	На тих інтервалах, де функція $f(x)=\sin x$ опукла вгору, графік функції $f(x)$ лежить вище відповідної хорди (рис. 10.5, *а*), а на тих інтервалах, де ця функція опукла вниз, — нижче хорди (рис. 10.5, *б*). Спробуємо використати це при доведенні заданої нерівності: за допомогою другої похідної дослідимо функцію $f(x)=\sin x$ на опуклість, розглянемо рівняння відповідної хорди AB і порівняємо його з рівнянням прямої $y=\frac{2}{\pi}x$ (де $\frac{2}{\pi}x$ — функція з правої частини нерівності).

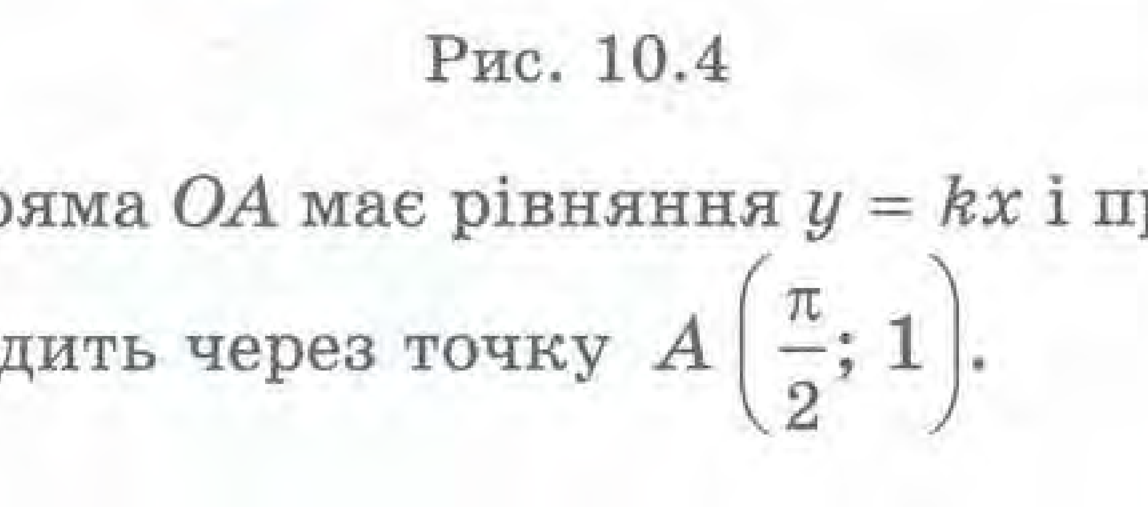


Рис. 10.4

Пряма OA має рівняння $y=kx$ і проходить через точку $A\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$.

Отже, $1 = k\cdot\frac{\pi}{2}$, тобто $k = \frac{2}{\pi}$. Тоді рівняння прямої OA: $y = \frac{2}{\pi}x$. Таким чином, при всіх $0 < x < \frac{\pi}{2}$ виконується нерівність $\sin x > \frac{2}{\pi}x$. ◁

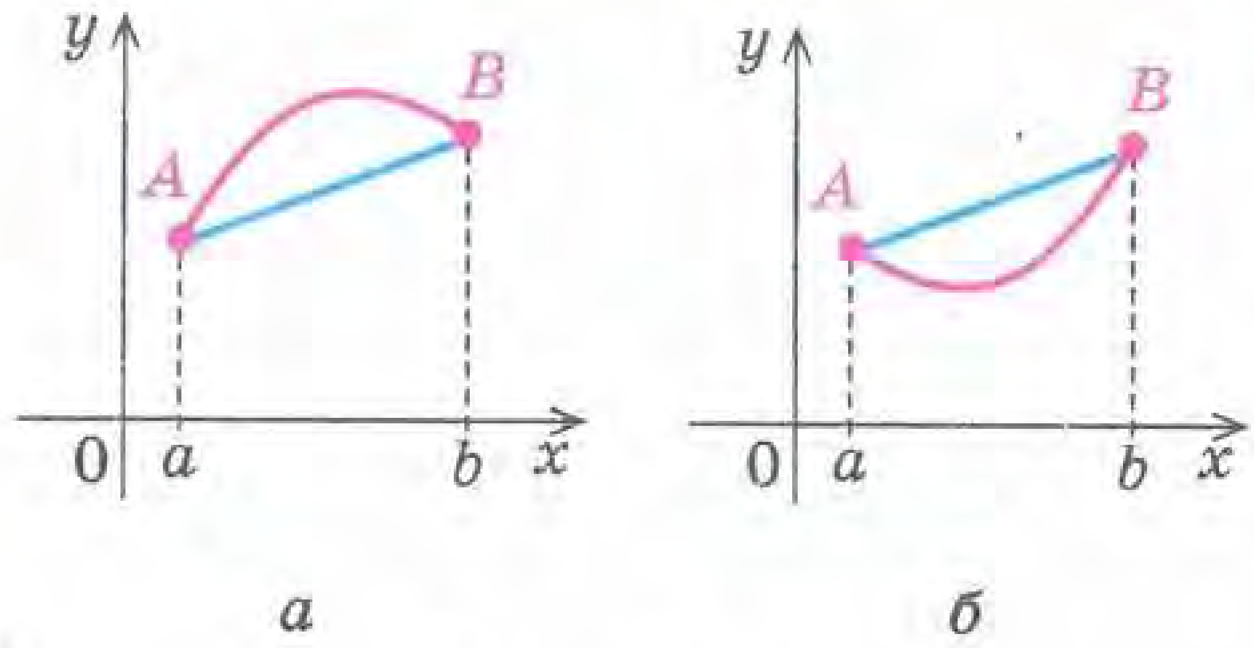


Рис. 10.5

Запитання для контролю

Поясніть, як можна використати похідну для доведення нерівності з однією змінною. Наведіть приклади.

Вправи

Доведіть нерівність **(1–4)**.

1. 1) $x^5 - 2x^3 + 2x > 20$ при $x > 2$; 2) $a^3 + 4 > a^2 + 3a$ при $a \geqslant 0$;
3) $2x + \frac{1}{x^2} > 5$ при $0 < x < \frac{1}{2}$.

2. 1) $\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} \geqslant 6$ при $x > 0$; 2) $2\sqrt{x} + \frac{1}{x} \geqslant 3$ при $x > 0$;
3) $4\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \geqslant 5$ при $x > 0$.

3. 1) $\operatorname{tg} x > x$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

4. 1) $a^3 + 4 > a^2 + 3a$ при $a \geqslant 0$; 2) $a^3 + 3a^2 + 10 > 13a$ при $a \geqslant 0$.

§ 11 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ З ПАРАМЕТРАМИ

При розв'язуванні завдань з параметрами можна використовувати похідну для дослідження функцій на монотонність і екстремуми та для дослідження функції і побудови її графіка, для запису рівнянь дотичних до графіків функцій, для знаходження найбільшого і найменшого значень функції. Слід також пам'ятати ті орієнтири, які використовувалися для розв'язування завдань з параметрами в 10 класі. Зокрема, *якщо в завданні з параметрами йдеться про кількість розв'язків рівняння (нерівності або системи), то для аналізу заданої ситуації зручно використати графічну ілюстрацію розв'язування* (див. приклад 2 на с. 76, приклад 3 на с. 153 та приклад у п. 1 табл. 45).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $y = (a + 2)\,x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$ спадає для всіх $x \in \boldsymbol{R}$.

Розв'язання

▶ Область визначення функції
$$D(y) = \boldsymbol{R}.$$
Функція диференційовна на всій числовій прямій:
$$y' = 3\,(a + 2)\,x^2 - 6ax + 9a.$$
Задана функція буде спадати для всіх $x \in \boldsymbol{R}$, якщо $y' \leqslant 0$ на всій числовій прямій (причому рівняння $y' = 0$ має тільки скінченну множину коренів).

Якщо $a = -2$, то $y' = 12x - 18$ і нерівність $y' \leqslant 0$ не виконується на всій числовій прямій ($12x - 18 \leqslant 0$ тільки при $x \leqslant 1{,}5$).

Якщо $a \neq -2$, то похідна є квадратичною функцією відносно змінної x, яка набуває значень $y' \leqslant 0$ на всій числовій прямій тоді і тільки тоді (див. таблицю в коментарі), коли виконуються умови $\begin{cases} a+2<0, \\ D \leqslant 0 \end{cases}$ (1)

(при цьому рівняння $y' = 0$ може мати хіба що один корінь).

З нерівності $a + 2 < 0$ одержуємо
$$a < -2.$$
З нерівності $D \leqslant 0$ маємо:
$$36a^2 - 4 \cdot 3\,(a + 2) \cdot 9a \leqslant 0,$$
$$36a\,(a - 3a - 6) \leqslant 0,$$
$$36a\,(-2a - 6) \leqslant 0,$$
$$-72a\,(a + 3) \leqslant 0. \qquad (2)$$
Ураховуючи одержану умову $a < -2$, отримуємо, що $(-72a) > 0$. Тоді з нерівності (2) маємо $a + 3 \leqslant 0$, тобто $a \leqslant -3$. Отже, система (1) рівносильна системі $\begin{cases} a<-2, \\ a \leqslant -3. \end{cases}$

Звідси одержуємо $a \leqslant -3$.

Відповідь: $(-\infty;\ -3]$. ◁

Коментар

Використаємо уточнений варіант умови спадання функції (с. 59).

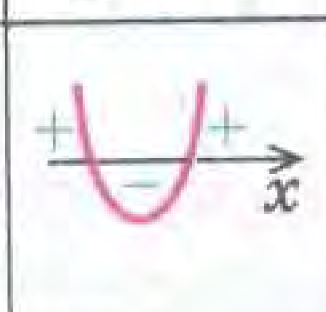
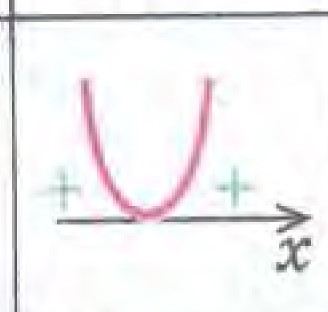
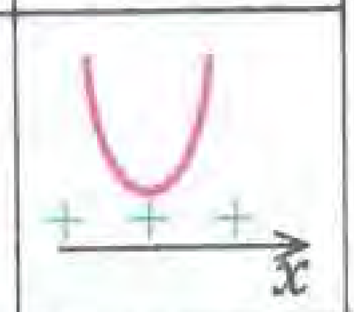
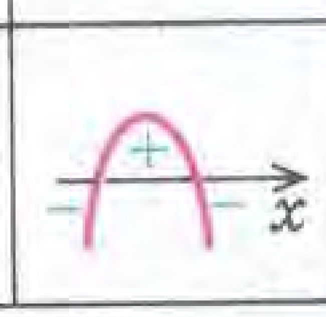
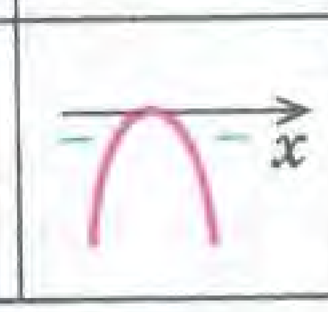
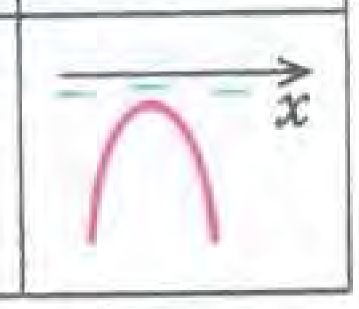
Якщо $f'(x) \leqslant 0$ у кожній точці інтервалу $(a;\ b)$ (причому рівняння $f'(x) = 0$ має лише скінченну множину коренів), то функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.

Ця умова є не тільки достатньою, а й необхідною для диференційовної на інтервалі функції (*якщо на якомусь інтервалі функція $f(x)$ диференційовна і спадає, то $f'(x) \leqslant 0$ на цьому інтервалі* — див. с. 50). Отже, умову задачі можуть задовольняти ті і тільки ті значення параметра, які ми знайдемо за цією умовою.

Аналізуючи похідну заданої функції, ураховуємо, що вона є квадратичною функцією тільки у випадку, коли $a + 2 \neq 0$ (тобто $a \neq -2$).

Тому випадок $a + 2 = 0$ (тобто $a = -2$) слід розглянути окремо.

Для квадратичної функції згадуємо всі можливі варіанти розміщення параболи відносно осі абсцис (див. таблицю нижче) і з'ясовуємо, коли нерівність $y' \leqslant 0$ виконується для всіх $x \in R$.

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a+2>0$			
$a+2<0$			

Зауважимо, що нерівність $D \leqslant 0$ (при $a \neq -2$), яка звелася до нерівності (2), можна було розв'язати окремо методом інтервалів або за допомогою графіка квадратичної функції (виключаючи точку з абсцисою $a = -2$), а вже потім знайти спільний розв'язок системи (1).

Приклад 2 Знайдіть найменше значення k, при якому графік функції $y = (k - 1)\, x^2 + 2kx + 3k - 2$ дотикається до осі абсцис.

Розв'язання

▶ За умовою вісь абсцис (яка має рівняння $y = 0$ і кутовий коефіцієнт 0) має бути дотичною до графіка функції

$y = f(x) = (k - 1)\, x^2 + 2kx + 3k - 2.$

Якщо x_0 — абсциса точки дотику, то, ураховуючи геометричний зміст похідної, одержуємо $f'(x_0) = 0$. Дотичною буде саме вісь абсцис (а не паралельна їй пряма, яка має такий самий кутовий коефіцієнт), якщо $f(x_0) = 0$.

Оскільки $f'(x) = 2(k - 1)\, x + 2k$, $f'(x) = 0$, то

$$2(k - 1)\, x + 2k = 0. \qquad (1)$$

При $k = 1$ рівняння (1) не має розв'язку (одержуємо рівняння $0 \cdot x + 2 = 0$).

При $k \neq 1$ одержуємо:

$$(k - 1)x = -k,$$

$$x = -\frac{k}{k-1} = x_0.$$

Тоді

$$f(x_0) = (k-1)\frac{k^2}{(k-1)^2} - \frac{2k^2}{k-1} + 3k - 2 = \frac{2k^2 - 5k + 2}{k-1}.$$

З'ясуємо, при яких k значення $f(x_0) = 0$. Ураховуючи, що $k \neq 1$, одержуємо

$$2k^2 - 5k + 2 = 0,$$

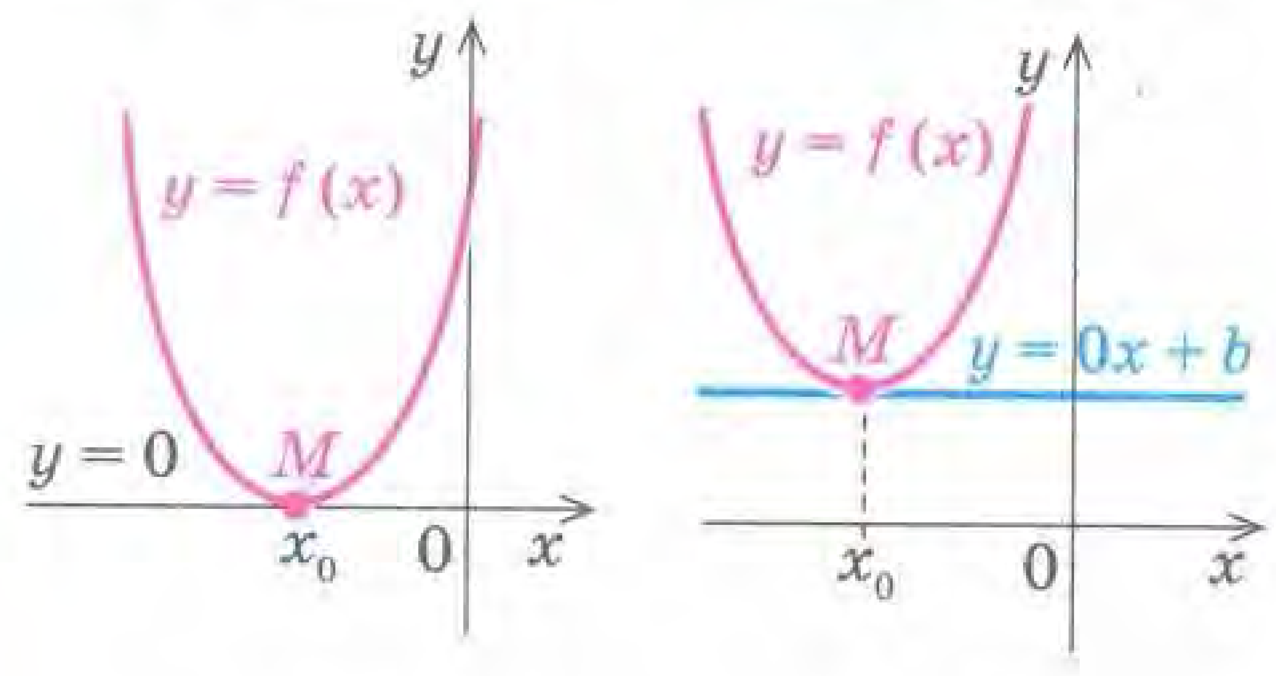
$$k_1 = 2,\ k_2 = 0{,}5.$$

Коментар

Для того щоб графік функції дотикався до осі абсцис, потрібно, щоб вісь абсцис була дотичною до цього графіка. Ураховуючи, що рівняння осі абсцис $y = 0$ ($y = 0x + 0$), задану ситуацію можна дослідити двома способами.

1. Якщо дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 має рівняння $y = 0$, то кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 0. Тоді за геометричним змістом похідної $f'(x_0) = 0$.

Але кутовий коефіцієнт 0 має не тільки вісь абсцис, а й усі прямі, які паралельні осі Ox (рис. 11.1, *а*, *б*). Дотичною буде саме вісь абсцис, якщо точка дотику M розташована на осі Ox (рис. 11.1, *а*), тобто ордината дорівнює 0, отже, $f(x_0) = 0$.



а *б*

Рис. 11.1

Отже, при цих значеннях k графік функції $f(x)$ дотикається до осі абсцис. Найменше з цих значень $k = 0,5$.

Відповідь: 0,5. ◁

2. Можна також записати рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

і порівняти одержане рівняння з рівнянням осі абсцис: $y = 0x + 0$ (знову одержимо ті самі умови $f'(x_0) = 0$ і $f(x_0) = 0$).

Застосовуючи кожний з указаних способів розв'язування, при дослідженні рівняння $f'(x_0) = 0$ випадок $k = 1$ потрібно дослідити окремо.

Приклад 3 Знайдіть усі значення a, при яких рівняння $\cos 2x + \frac{a}{\sin x} = -7$ має хоча б один корінь.

Розв'язання	*Коментар*

▶ ОДЗ: $\sin x \neq 0$. На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням

$$1 - 2\sin^2 x + \frac{a}{\sin x} = -7,$$

$$a = 2\sin^3 x - 8\sin x.$$

Заміна $\sin x = t$ (де $t \in [-1; 1]$ і $t \neq 0$ за ОДЗ) дає рівносильне рівняння

$$2t^3 - 8t = a. \qquad (1)$$

Для заданого рівняння вимога задачі буде виконуватися тоді і тільки тоді, коли рівняння (1) матиме хоча б один ненульовий корінь у проміжку $[-1; 1]$. Для цього достатньо забезпечити, щоб число a входило до області значень функції $f(t) = 2t^3 - 8t$ при $t \in [-1; 1]$ і $t \neq 0$. Знайдемо область значень. Похідна $f'(t) = 6t^2 - 8$ існує на всій числовій прямій, і $f'(t) = 0$ при $6t^2 - 8 = 0$, $t = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ (критичні точки не входять до відрізка $[-1; 1]$, оскільки $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$).

Почнемо розв'язувати задане рівняння за схемою розв'язування тригонометричних рівнянь: *пробуємо звести всі тригонометричні функції* ***до одного аргументу;*** *якщо вдалося звести до одного аргументу, далі пробуємо звести всі тригонометричні вирази* ***до однієї функції.*** Указані два етапи можна виконати одночасно, використовуючи формулу

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Після заміни $\sin x = t$ для дослідження існування коренів у одержаного кубічного рівняння зручно використати графічну ілюстрацію розв'язків (звівши рівняння до виду $f(t) = a$). Можна також знайти найбільше та найменше значення неперервної функції $f(t)$, заданої на відрізку, або скористатися властивостями функції $f(t)$ на відрізку $[-1; 1]$, дослідженими за допомогою похідної (див. розв'язання). Нагадаємо, що після заміни змінної вимога задачі в завданнях

Отже, на всьому заданому відрізку $f'(t)$ зберігає свій знак. Оскільки $f'(0) = -8 < 0$, то $f'(t) < 0$ при $t \in [-1; 1]$, тобто функція $f(t)$ спадає на $[-1; 1]$. Тоді її найбільше значення на цьому відрізку дорівнює $f(-1) = 6$, а найменшим є $f(1) = -6$.

Ураховуючи, що $f(0) = 0$, одержуємо, що при $t \in [-1; 1]$ і $t \neq 0$ неперервна функція $f(t)$ набуває всіх значень із проміжків $[-6; 0)$ і $(0; 6]$. Саме при цих значеннях a і буде виконуватися вимога задачі.

Відповідь: $[-6; 0) \cup (0; 6]$. ◁

з параметрами найчастіше змінюється, тому потрібно з'ясувати нову вимогу для рівняння (1).

Відзначимо, що достатньо наочною є графічна ілюстрація розв'язання (рис. 11.2), але дослідження функції $f(t)$ для побудови графіка виявляється більш громіздким, ніж у наведеному розв'язанні.

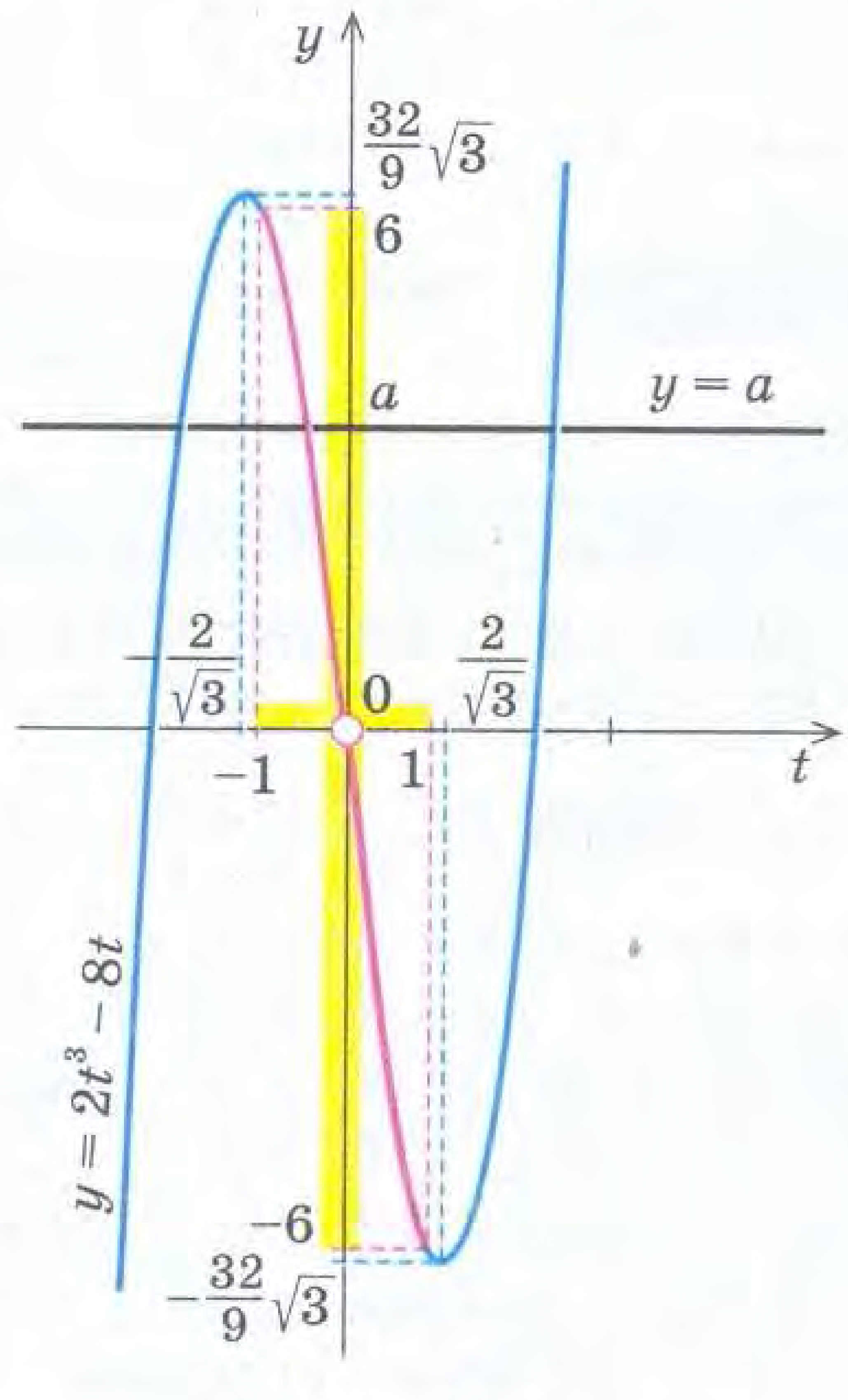


Рис. 11.2

Вправи

1. Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція
$$y = \frac{a^2 - 1}{3}x^3 - (a-1)x^2 + 2x + 1$$
зростає для всіх $x \in \boldsymbol{R}$.

2. При якому значенні a пряма $16x + y - 13 = 0$ є дотичною до графіка функції $y = \frac{a + x^2}{x^2}$?

3. Знайдіть найбільше значення k, при якому графік функції $y = x^2 + 2(k+1)x + 2k^2 + k - 1$ дотикається до осі абсцис.

4. Знаючи, що рівняння $x^3 + 2 = ax$ при $x > 0$ має тільки один корінь, знайдіть цей корінь і відповідне значення a.
5. Графік функції $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$ перетинає вісь Ox у точці з абсцисою $x = -2$ і дотикається до осі Ox у точці з абсцисою $x = 7$. Знайдіть точки локального мінімуму цієї функції.
6. Знайдіть значення a і b, при яких пряма $y = 7x - 2$ дотикається до графіка функції $y = ax^2 + bx + 1$ у точці A (1; 5).
7. Знайдіть значення a, при якому дотична до параболи $y = 2x^2 + 3x + 5$ у точці $x_0 = -2$ є дотичною до параболи $y = -x^2 + 4x + a$.
8. Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x) = \frac{3 - x^2}{a - 2 - 3x - x^2}$ не є спадною ні на якому відрізку, що належить її області визначення.
9. При яких значеннях параметра a рівняння $x^3 + \frac{48}{x} = a$ має хоча б один корінь?
10. Знайдіть усі значення a, при яких рівняння $4 \sin^3 x = a + 7 \cos 2x$ не має коренів.
11. Знайдіть усі значення a, при яких рівняння $3 \cos 2x + \frac{2a}{\sin x} = -17$ має хоча б один корінь.
12. Знайдіть усі значення a, при яких рівняння $7 - 2 \cos x = a (1 + \operatorname{tg}^2 x)$ має хоча б один корінь.
13. Сторони трикутника лежать на осях координат і на дотичній до графіка функції $y = x^2 + 4x + 4$ в точці, абсциса a якої задовольняє умову $1 \leqslant a \leqslant 0$. Знайдіть значення a, при якому площа трикутника буде найбільшою.

§ 12 ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

Нехай функція $f(x)$ у точці x_0 має похідну $f'(x_0)$.

Диференціалом функції $f(x)$ у точці x_0 називають добуток похідної $f'(x_0)$ на приріст аргументу Δx у точці x_0.

Диференціал функції позначають символом $df(x_0)$. Тоді

$$df(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x. \qquad (1)$$

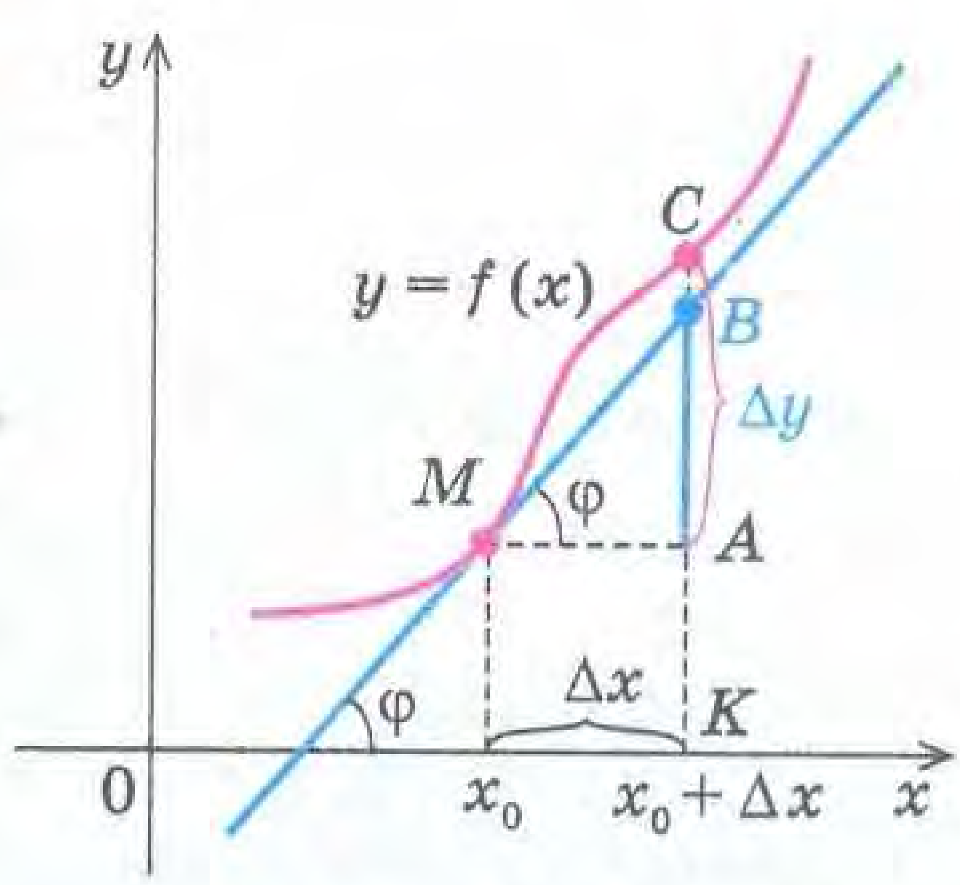


Рис. 12.1

Розглянемо геометричний зміст диференціала. На рис. 12.1 MB — це дотична в точці M до графіка функції $y = f(x)$, довжина відрізка $MA = \Delta x$. Оскільки за геометричним змістом похідної $\operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)$, з прямокутного трикутника AMB одержуємо $AB = AM \cdot \mathrm{tg}\ \varphi$, тобто $AB = f'(x_0)\ \Delta x$. Тому довжина відрізка AB дорівнює величині диференціала функції $f(x)$ у точці x_0: $AB = df(x_0)$.

Ураховуючи, що $AB = BK - AK$, можна сформулювати геометричний зміст поняття диференціала: $df(x_0) = BK - AK$.

З геометричної точки зору, $df(x_0)$ є приростом ординати дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0, якому відповідає приріст аргументу Δx.

При знаходженні диференціала функції $f(x)$ у будь-якій точці $x \in D(f)$ на основі формули (1) одержимо

$$df(x) = f'(x)\ \Delta x. \qquad (2)$$

Ця рівність справедлива для будь-якої функції. Зокрема, для функції $f(x) = x$ рівність (2) перетворюється на таку: $df(x) = 1 \cdot \Delta x$. Звідси одержуємо, що диференціал аргументу dx дорівнює приросту аргументу Δx: $dx = \Delta x$.

Підставляючи dx замість Δx в формулу (2), одержуємо

$$df(x) = f'(x)\ dx. \qquad (3)$$

На рівності (3) ґрунтується знаходження диференціала функції.

Приклад 1 Знайдіть $df(x)$ для функції $f(x) = \sin x$.

Розв'язання

▶ Оскільки $f'(x) = \cos x$, то $d(\sin x) = \cos x\ dx$. ◁

Рівність (3) показує, що між поняттям похідної і поняттям диференціала існує тісний зв'язок. Тому і **правила знаходження диференціалів** аналогічні до правил диференціювання функцій:

1. $dC = 0$.
2. $d(Cu) = C\ du$.
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
4. $d(uv) = (du)\ v + (dv)\ u$.
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{(du) \cdot v - (dv) \cdot u}{v^2}$.

Обґрунтуємо, наприклад, правило 2:

$$d(Cu) = (Cu)'\ dx = Cu'\,dx = C\ du.$$

Інші правила обґрунтовують аналогічно (обґрунтуйте їх самостійно).

За означенням похідної $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$. Використовуючи поняття нескінченно малої функції (див. табл. 10), цю рівність можна записати так: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x)$, де $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тоді приріст Δf диференційовної в точці x_0 функції $f(x)$ дорівнює: $\Delta f = f'(x_0)\ \Delta x + \alpha(x)\ \Delta x$, де $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Перший доданок правої частини рівності є диференціалом функції, отже,

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \alpha(x)\ \Delta x. \qquad (4)$$

Ураховуючи, що $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, одержуємо, що другий доданок при $\Delta x \to 0$ прямує до нуля швидше, ніж Δx. У цьому випадку кажуть, що $\alpha(x)\Delta x$ є величиною більш високого порядку малості, ніж Δx, тобто другий доданок значно менший за перший доданок. Це дозволяє зробити такий висновок:

диференціал функції $df(x_0)$ є головною частиною приросту функції.

З геометричної точки зору (див. рис. 12.1), при $\Delta x \to 0$ відстань BC стає значно меншою, ніж відстань $AB = df(x_0)$, тому $AB = df(x_0)$ — головна частина відрізка $AC = \Delta f$.

Якщо в рівності (4) знехтувати другим доданком (який при малих значеннях Δx значно менший за перший доданок), то одержимо наближену рівність $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$, тобто $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$. Тоді

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{5}$$

Останню рівність використовують для наближених обчислень значень функцій, якщо $f(x_0)$ і $f'(x_0)$ неважко обчислити.

Приклад 2 Користуючись формулою (5), знайдіть наближене значення $\sqrt{9{,}06}$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Якщо розглянути функцію $f(x)=\sqrt{x}$, то $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Візьмемо $x_0 = 9$. Тоді $f(x_0)=\sqrt{x_0}=\sqrt{9}=3$ і $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$. За формулою (5) маємо $\sqrt{x_0+\Delta x}\approx\sqrt{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\Delta x.$ При $\Delta x = 0{,}06$ і $x_0 = 9$ одержуємо $\sqrt{9{,}06}\approx 3+\frac{1}{6}\cdot 0{,}06=3{,}01.$ ◁	При обчисленні значення $\sqrt{9{,}06}$ за формулою (5) $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ розглядаємо функцію $f(x)=\sqrt{x}$ та беремо за x_0 число 9, оскільки 9,06 близьке до 9. Тоді $\Delta x = 0{,}06$, і значення $f(x_0)=\sqrt{x_0}$ та $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ легко знайти при $x_0 = 9$.

Значення $\sqrt{9{,}06}$, обчислене на калькуляторі, дорівнює 3,00998... .

Вправи

1. Знайдіть диференціал функції:

1) $f(x)=\frac{1}{x}$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} x$; 3) $f(x) = \arcsin x$;

4) $f(x) = \sin^2 3x$; 5) $f(x)=\sqrt{x^2-4}\operatorname{ctg} x$; 6) $f(x)=\frac{x^2-9}{x+1}$.

2. Обчисліть за допомогою формули (5) наближене значення:

1) $\sqrt{4{,}08}$; 2) $\sqrt{16{,}06}$;

3) $\sqrt{1{,}004}$; 4) $\sqrt{25{,}012}$.

3. Доведіть наближену формулу $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\,\Delta x$.

4. Обчисліть наближене значення:

1) $1{,}001^{100}$; 2) $1{,}03^{200}$;

3) $0{,}995^{6}$; 4) $0{,}998^{20}$.

5. Обчисліть за допомогою формули (5) наближене значення:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0{,}03\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+0{,}04\right)$;

3) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-0{,}02\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+0{,}05\right)$.

ДОДАТКОВІ ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 1

1. До якого числа прямує значення функції, якщо:

1) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$, $x \to 1$; 2) $f(x)=\frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}$, $x \to 1$;

3) $f(x) = \cos x + \sin x$, $x \to \frac{\pi}{4}$; 4) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, $x \to \frac{\pi}{4}$.

2. Знайдіть асимптоти графіка функції:

1) $y=\frac{2x^2+x}{x-3}$; 2) $y=\frac{x^3+1}{x^3-2x+4}$.

3. Дослідіть на неперервність функцію на зазначеному проміжку:

1) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$, $[-5; 0]$; 2) $f(x)=\frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}$, $[0; 5]$.

4. Знайдіть точки розриву функції:

1) $y=\begin{cases}\frac{|x+2|}{x+2} \text{ при } x \neq -2,\\ 1 \text{ при } x=-2;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}\frac{1}{(x-1)^2} \text{ при } x \neq 1,\\ 3 \text{ при } x=1.\end{cases}$

Дослідіть функцію і побудуйте її графік **(7, 8)**.

5. 1) $y=\frac{4x}{x^2+1}$; 2) $y=\frac{2x}{x^2+2}$; 3) $y=\frac{x^3-x}{x^2-4}$;

4) $y=\frac{x^3}{x^2-1}$; 5) $y=\frac{x^2-1}{x^2-9}$; 6) $y=\frac{x^2-4}{x^2-25}$;

7) $y=\frac{1}{x^2-5x+6}$; 8) $y=\frac{1}{x^2+5x+6}$.

6. 1) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$; 2) $y = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 - 4x$; 3) $y = x^4 - 4x^2 + 4$;

4) $y = x^4 + 6x^2 + 9$; 5) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$; 6) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$;

7) $y = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$; 8) $y = \frac{x^2 - 1}{|x + 1|}$.

7. Розв'яжіть нерівність:

1) $f'(x) < g'(x)$, якщо $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$, $g(x) = 5x + \frac{1}{x}$;

2) $f'(x) + g'(x) \leqslant 0$, якщо $f(x) = 2x^3 + 12x^2$, $g(x) = 9x^2 + 72x$.

8. Розв'яжіть рівняння:

$1 + 5f(x) + 6f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \frac{1}{1 - x}$.

9. Знайдіть область визначення функції та її похідну:

1) $y = \operatorname{arctg}\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$; 2) $y = \operatorname{arcctg}\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$.

10. Під яким кутом* перетинається з віссю Oy графік функції:

1) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$?

11. 1) На кривій $y = x^2 - 7x + 3$ знайдіть точку, у якій дотична паралельна прямій $y = -5x + 3$.

2) У яких точках дотичні до кривої $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 1$ паралельні прямій $y = 2x - 1$?

12. 1) У якій точці кривої $y = ax^2 + bx + c$ потрібно провести дотичну до неї так, щоб дотична проходила через початок координат? Дослідіть, при яких значеннях a, b і c задача має розв'язок.

2) У якій точці кривої $y = x^2 - 5x + 6$ потрібно провести дотичну, щоб вона проходила через точку $M(a; b)$? Дослідіть, при яких значеннях a і b задача має розв'язок.

13. 1) Знайдіть кут між дотичними до графіка функції $y = x^3 - x$ у точках з абсцисами -1 і 0.

2) Знайдіть кут між дотичними до графіка функції $y = x^2$, що проходять через точку з координатами $(0; -1)$.

14. 1) З точки $A(1; 6)$ проведено дотичні до кола $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$. Складіть рівняння цих дотичних.

2) Складіть рівняння дотичних до графіка функції $y = x^2 - 4x + 3$, що проходять через точку $M(2; -5)$.

---

* Мається на увазі кут між віссю Oy і дотичною до графіка функції, проведеною в точці перетину графіка й осі.

15. 1) Складіть рівняння дотичних до графіків функцій $y = 2x^2 - 5$ і $y = x^2 - 3x + 5$, що проходять через точки перетину цих кривих.

2) Складіть рівняння дотичних до графіків функцій $y=\sqrt{2x}$ та $y=\frac{x^2}{2}$, проведених через точку перетину цих кривих.

16. 1) При яких значеннях a функція $f(x) = x^3 + 3(a - 7)x^2 + 3(a^2 - 9)x + 1$ має точку максимуму?

2) При яких значеннях a функція $f(x)=\frac{a}{3}x^3+(a+2)x^2+(a-1)x+2$ має точку мінімуму?

17. 1) Знайдіть найменшу з відстаней від точки M з координатами $(0; -2)$ до точок $(x; y)$, таких, що $y=\frac{16}{\sqrt{3x^3}}-2,\ x>0$.

2) Знайдіть відстань від точки M $(1; 0)$ до графіка функції $y = x^2 + 6x + 10$ (тобто найменшу з усіх відстаней від точки M до точок графіка).

18. Знайдіть координати точки M, що лежить на графіку функції $y = 1 + \cos x$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$ і є найменш віддаленою від прямої $x\sqrt{3}+2y+4=0$.

19. 1) Знайдіть відстань між графіками функцій $y = x^2$ і $y = x - 1$ (тобто найменшу з усіх відстаней між точками цих графіків).

2) Знайдіть відстань між графіками функцій $y = -x$ і $y=\frac{1}{x}$.

20. 1) Фігура обмежена параболою $y = x^2 + 1$ і відрізками прямих $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. У якій точці M даної кривої $y = x^2 + 1$, $x \in [1; 2]$, потрібно провести дотичну, щоб вона відтинала від цієї фігури трапецію найбільшої площі?

2) У фігуру, обмежену лініями $y = 3x$ та $y = x^2$, вписано прямокутник найбільшої площі так, що дві його вершини лежать на прямій, а дві інші — на параболі. Знайдіть площу цього прямокутника.

21. 1) Знайдіть число, що в сумі зі своїм квадратом дає найменше значення цієї суми.

2) Знайдіть таке додатне число, щоб різниця між ним і його кубом була найбільшою.

22. Серед усіх циліндрів, вписаних у дану кулю, знайдіть той, який має:
1) найбільший об'єм;
2) найбільшу бічну поверхню.

23. Бічне ребро правильної трикутної піраміди має постійну задану довжину й утворює з площиною основи кут α. При якому значенні α об'єм піраміди є найбільшим?

ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

Розділ математики, у якому вивчають похідні та їх застосування до дослідження функцій, називають *диференціальним* численням. Прирости аргументу Δx і функції Δf, які є різницями, відіграють помітну роль у роботі з похідними. Через це природною була поява кореня *differentia* (різниця) у назві *calculis differentialis* нового числення, яка в перекладі з латинської означає *числення різниць*. Ця назва з'явилася вже наприкінці XVII ст., під час народження нового методу.

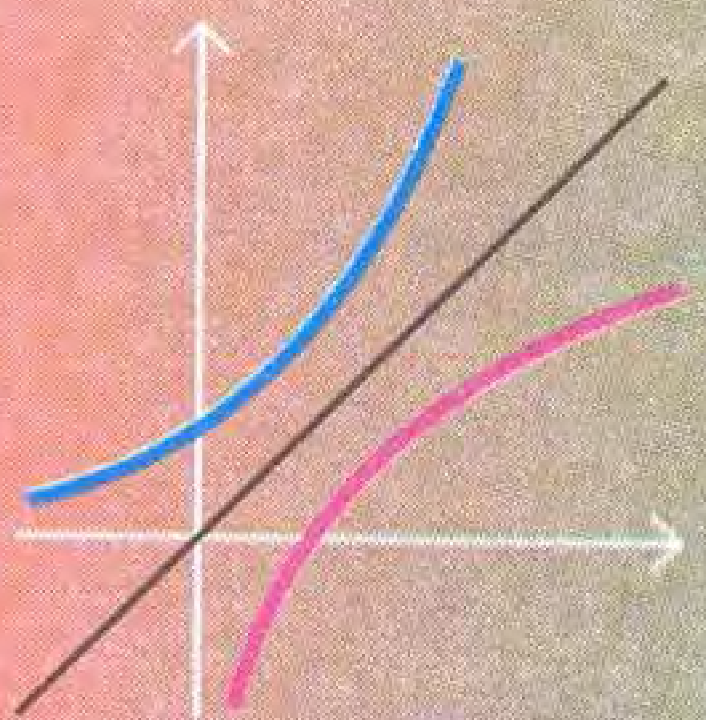
Термін «похідна» є буквальним перекладом французького слова *dérivée*, яке ввів у 1797 р. Ж. Лагранж (1736–1813); він же ввів сучасні позначення y', f'. Така назва відображає зміст поняття: функція $f'(x)$ походить від $f(x)$, є похідною від $f(x)$.

Дивовижно, що задовго до появи диференціального числення Архімед (бл. 287–212 рр. до н. е.) не тільки розв'язав задачу на побудову дотичної до такої складної кривої, як спіраль (застосовуючи при цьому граничні переходи), а й зміг знайти максимум функції $f(x) = x^2(a - x)$.

Розвитку основ диференціального числення сприяли роботи математика та юриста П. Ферма (1601–1665), який у 1629 р. запропонував правила знаходження екстремумів многочленів. Виводячи ці правила, Ферма активно застосовував граничні переходи, маючи найпростішу диференціальну умову максимуму і мінімуму. Розвитку нового числення сприяли також роботи Р. Декарта (1596–1650), який розробив метод координат і основи аналітичної геометрії.

Систематичне вчення про похідні розвинули І. Ньютон (1643–1727) і Г. Лейбніц (1646–1716), які незалежно один від одного створили теорію диференціального числення. Ньютон виходив в основному із задач механіки, а Лейбніц — переважно з геометричних задач. Зокрема, до означення похідної Ньютон прийшов, розв'язуючи задачу про миттєву швидкість, а Лейбніц — геометричну задачу про проведення дотичної до кривої.

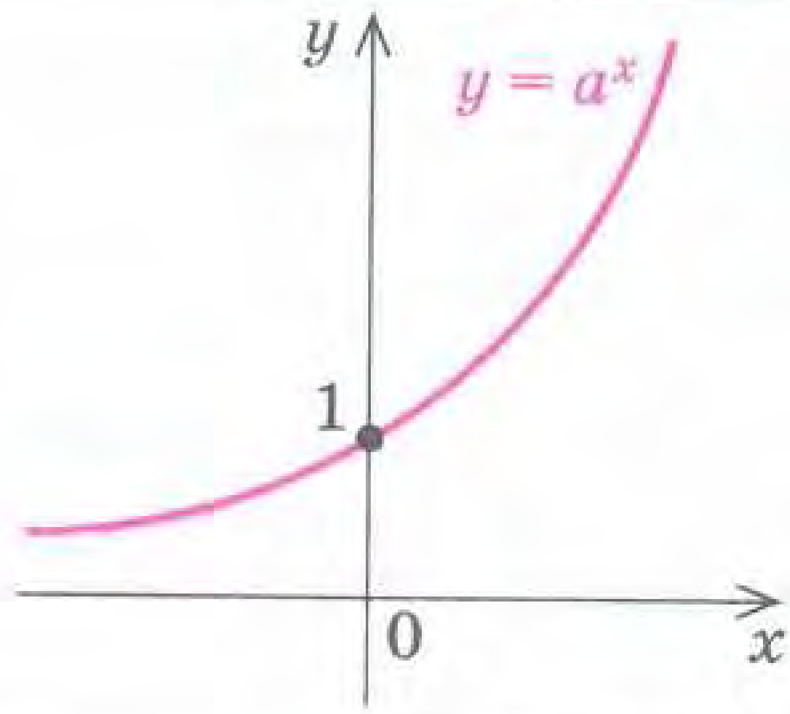
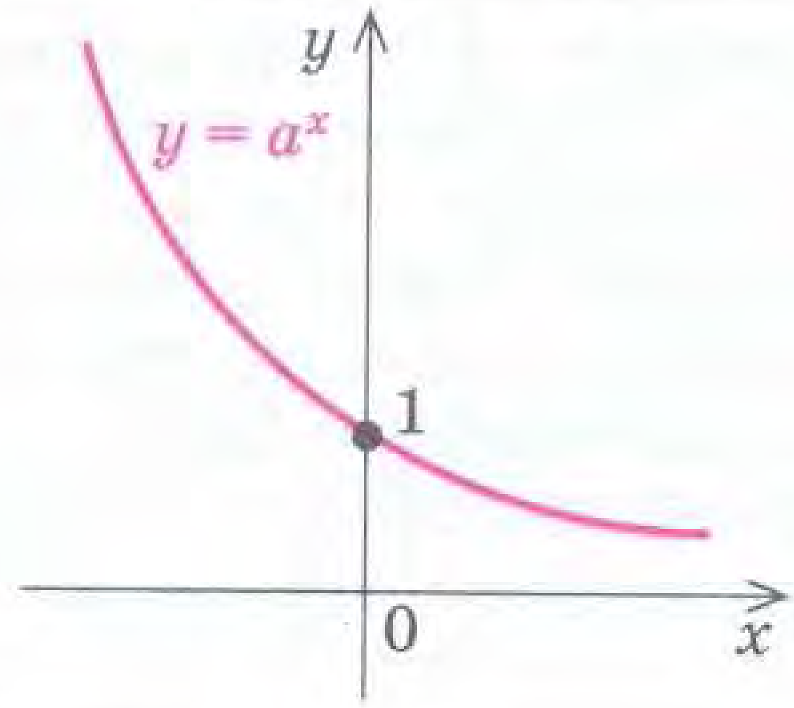
У подальшому працями Л. Ейлера (1707–1783), О. Коші (1789–1857), К. Гаусса (1777–1855) та інших математиків диференціальне числення було перетворене на цілісну теорію для дослідження функціональних залежностей.



Розділ 2
ПОКАЗНИКОВА Й ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ

§ 13 ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

Таблиця 17

<table>
<tr><td colspan="2">1. Поняття показникової функції та її графік</td></tr>
<tr><td colspan="2">Означення. Показниковою функцією називають функцію виду $y = a^x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Графік показникової функції (експонента)</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Властивості показникової функції</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Область визначення: $x \in R$. $D(a^x) = R$
2. Область значень: $y > 0$. $E(a^x) = (0; +\infty)$
3. Функція ні парна, ні непарна.
4. Точки перетину з осями координат:
з віссю Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 1 \end{cases}}$ з віссю Ox немає
5. Проміжки зростання й спадання:</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>функція $y = a^x$ зростає на всій області визначення</td><td>функція $y = a^x$ спадає на всій області визначення</td></tr>
</table>

Закінчення табл. 17

6. *Проміжки знакосталості:* $y > 0$ при всіх значеннях $x \in \boldsymbol{R}$.

7. *Найбільшого й найменшого значень* функція не має.

8. *Для будь-яких дійсних значень* u і v $(a > 0,\ b > 0)$ *виконуються рівності:*

$$a^u \cdot a^v = a^{u+v} \qquad \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v} \qquad (a^u)^v = a^{uv}$$

$$(ab)^u = a^u b^u \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}$$

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття показникової функції та її графік. *Показниковою функцією називають функцію виду* $y = a^x$, *де* $a > 0$ *і* $a \neq 1$.

Наприклад, $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$, $y = \pi^x$ — показникові функції.

Зазначимо, що функція виду $y = a^x$ існує й при $a = 1$.

Тоді $y = a^x = 1^x$, тобто $y = 1$ при всіх значеннях $x \in \boldsymbol{R}$. Але в цьому випадку функція $y = 1^x$ не називається показниковою. (Графік функції $y = 1^x$ — пряма, зображена на рис. 13.1.)

Оскільки при $a > 0$ вираз a^x означений при всіх дійсних значеннях x, то *областю визначення показникової функції* $y = a^x$ *є всі дійсні числа.*

Спробуємо спочатку побудувати графіки деяких показникових функцій, наприклад $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, «за точками», а потім перейдемо до характеристики загальних властивостей показникової функції.

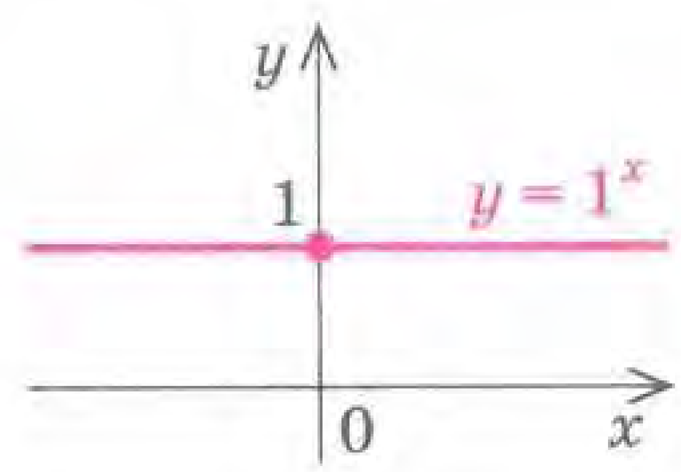


Рис. 13.1

Складемо таблицю деяких значень функції $y = 2^x$.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$	1	$\sqrt{2} \approx 1,4$	2	4	8

Побудуємо на координатній площині відповідні точки (рис. 13.2, *а*) і з'єднаємо їх плавною лінією, яку природно вважати графіком функції $y = 2^x$ (рис. 13.2, *б*).

Як бачимо з графіка, функція $y = 2^x$ є зростаючою функцією, яка набуває всіх значень із проміжку $(0; +\infty)$.

Аналогічно складемо таблицю деяких значень функції $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	$\sqrt{2}\approx 1{,}4$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}7$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

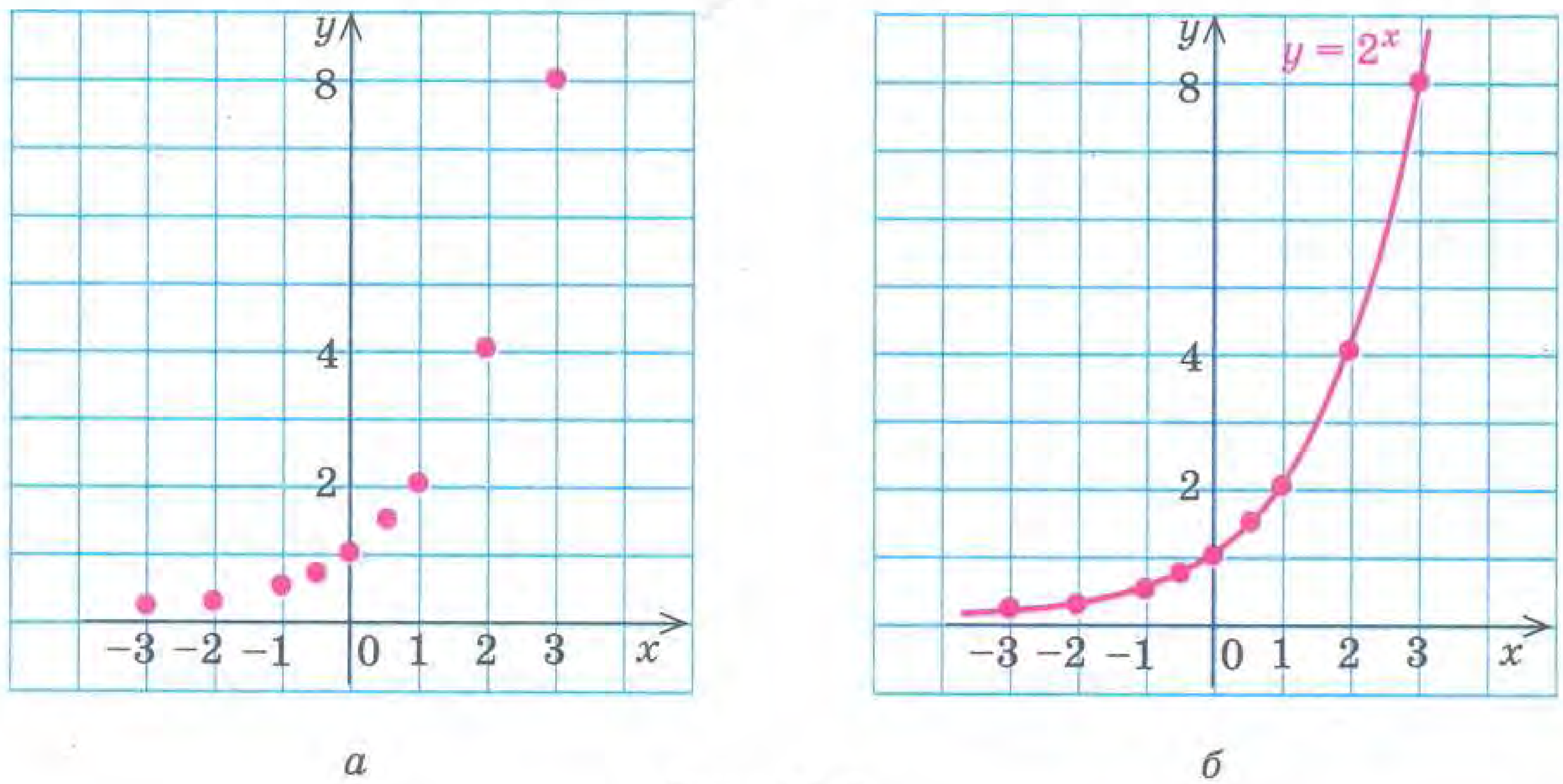


Рис. 13.2

Побудуємо на координатній площині відповідні точки (рис. 13.3, *а*) і з'єднаємо їх плавною лінією, яку природно вважати графіком функції $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 13.3, *б*). Як бачимо з графіка, функція $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ є спадною функцією, яка набуває всіх значень із проміжку $(0; +\infty)$.

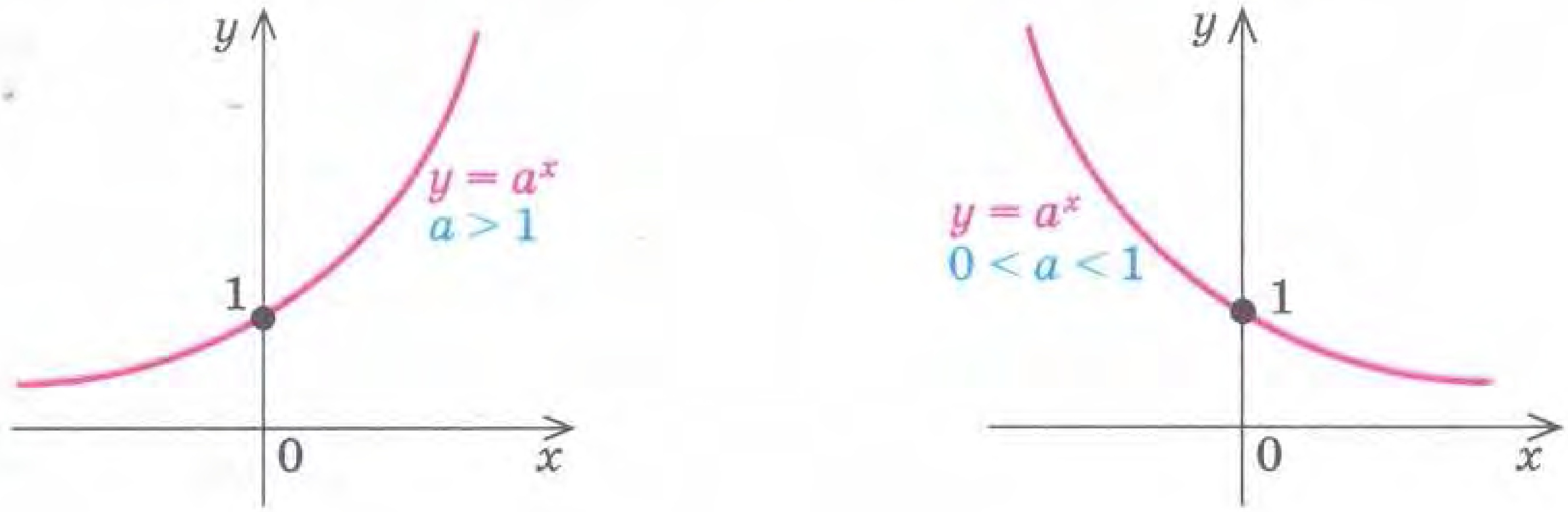
Зауважимо, що графік функції $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ можна одержати з графіка функції $y = f\ (x) = 2^x$ за допомогою геометричних перетворень. Дійсно, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{2^x}=2^{-x}=f\,(-x)$. Отже, графік функції $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ симетричний графіку функції $y = 2^x$ відносно осі Oy (див. п. 2.3 підручника для 10 класу), і тому, якщо функція $y = 2^x$ є зростаючою, функція $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ обов'язково буде спадною.

а *б*

Рис. 13.3

Виявляється, завжди при $a > 1$ графік функції $y = a^x$ схожий на графік функції $y = 2^x$, а при $0 < a < 1$ — на графік функції $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ (рис. 13.4).

Графік показникової функції називають *експонентою*.



а *б*

Рис. 13.4

2. Властивості показникової функції. Як обґрунтовувалося вище, *областю визначення показникової* функції $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ *є всі дійсні числа*: $D(a^x) = \boldsymbol{R}$.

Областю значень функції $y = a^x$ є множина всіх додатних чисел, тобто *функція* $y = a^x$ *набуває тільки додатних значень*, причому будь-яке додатне число є значенням функції, або

$$E(a^x) = (0;\ +\infty).$$

Це означає, що графік показникової функції $y = a^x$ завжди розміщений вище осі Ox і будь-яка пряма, що паралельна осі Ox і знаходиться вище неї, перетинає цей графік.

При $a > 1$ функція $y = a^x$ зростає на всій області визначення, а при $0 < a < 1$ функція $y = a^x$ спадає на всій області визначення.

Обґрунтування області значень та проміжків зростання й спадання показникової функції проводиться так: ці властивості перевіряються послідовно для натуральних, цілих, раціональних показників, а потім уже переносяться на довільні дійсні показники. Але треба ураховувати, що при введенні поняття степеня з ірраціональним показником ми вже користувалися зростанням функції, коли проводили такі міркування: оскільки $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, то $2^{1{,}7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}8}$. Отже, у нашій системі викладу матеріалу ми зможемо обґрунтувати ці властивості тільки для раціональних показників, але, ураховуючи громіздкість таких обґрунтувань, приймемо їх без доведення.

Усі інші властивості показникової функції легко обґрунтовуються за допомогою цих властивостей.

Функція $y = a^x$ — ні парна, ні непарна, оскільки $f(-x) = a^{-x} = \frac{1}{a^x} \neq$ $\neq f(x) = a^x$ (за означенням $a \neq 1$). Також $f(-x) \neq -f(x)$, оскільки $f(-x) = a^{-x} > 0$ (за властивістю 2), а $-f(x) = -a^x < 0$.

Точки перетину з осями координат. **Графік функції $y = a^x$ перетинає вісь Oy у точці $y = 1$.** Дійсно, на осі Oy значення $x = 0$, тоді $y = a^0 = 1$.

Графік показникової функції $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) не перетинає вісь Ox, оскільки на осі Ox $y = 0$, а значення $y = 0$ не входить до області значень показникової функції $y = a^x$ ($y = a^x = 0$ тільки при $a = 0$, але за означенням $a > 0$).

Проміжки знакосталості. $y > 0$ при всіх дійсних значеннях x, оскільки $y = a^x > 0$ при $a > 0$.

Зазначимо ще одну властивість показникової функції. Оскільки графік функції $y = a^x$ перетинає вісь Oy у точці $y = 1$, то, ураховуючи зростання функції при $a > 1$ та спадання при $0 < a < 1$, одержуємо такі співвідношення між значеннями функції й відповідними значеннями аргументу:

Значення функції	Значення аргументу	
	при $a > 1$	при $0 < a < 1$
$y > 1$	$x \in (0; +\infty)$	$x \in (-\infty; 0)$
$0 < y < 1$	$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; +\infty)$

Функція $y = a^x$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень, оскільки її область значень — проміжок $(0; +\infty)$, який не містить ні найменшого, ні найбільшого числа.

Властивості показникової функції, указані в п. 8 табл. 17:

$$a^u a^v = a^{u+v};\ \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v};\ (a^u)^v = a^{uv};\ (ab)^u = a^u b^u;\ \left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u},$$

було обґрунтовано в курсі 10 класу.

Зазначимо ще одну властивість показникової функції, яка виділяє її з ряду інших функцій: *якщо* $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, *то при будь-яких дійсних значеннях аргументів* x_1 *і* x_2 *виконується рівність*

$$\boxed{f(x_1)\,f(x_2) = f(x_1 + x_2)}.$$

Дійсно, $f(x_1)\,f(x_2) = a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2} = f(x_1 + x_2)$. У курсах вищої математики ця властивість (разом зі строгою монотонністю) є основою аксіоматичного означення показникової функції. У цьому випадку дається означення, що *показникова функція* $y = f(x)$ — *це строго монотонна функція, визначена на всій числовій осі, яка задовольняє функціональне рівняння* $f(x_1)\,f(x_2) = f(x_1 + x_2)$, а потім обґрунтовується, що функція $f(x)$ збігається з функцією $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

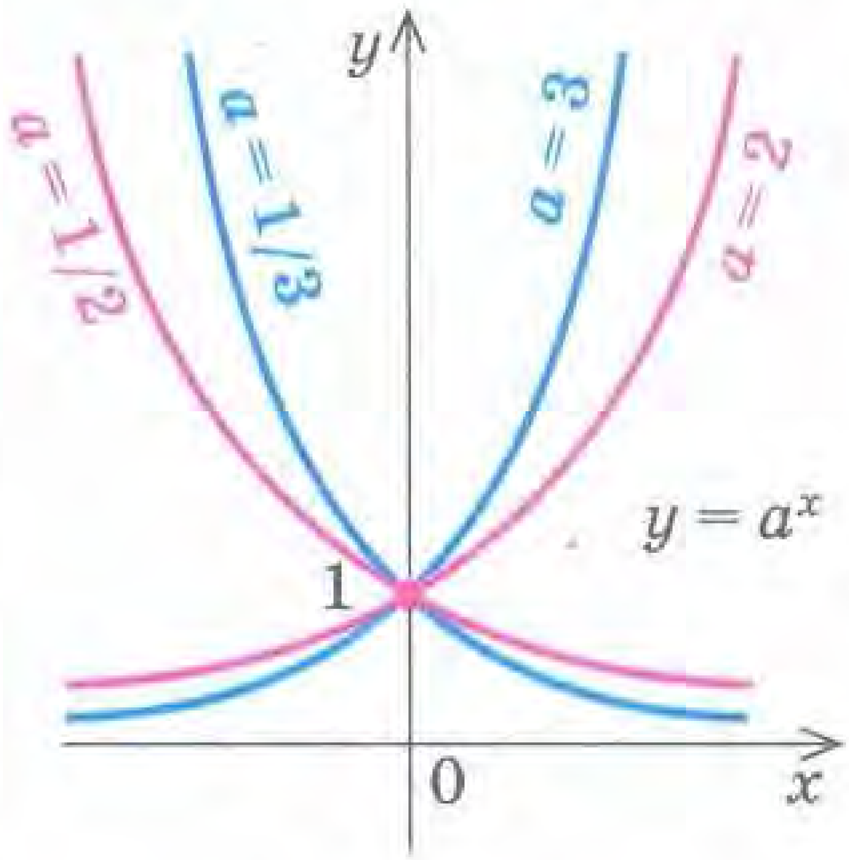


Рис. 13.5

Крім загальних властивостей показникової функції при $a > 1$ і при $0 < a < 1$, відзначимо деякі особливості поведінки графіків показникових функцій при конкретних значеннях a. Так, на рис. 13.5 наведено графіки показникових функцій $y = a^x$ при значеннях основи $a = 2;\ 3;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3}$.

Порівнюючи ці графіки, можна зробити висновок: *чим більша основа* $a > 1$, *тим крутіше піднімається графік функції* $y = a^x$ *при русі точки вправо й тим швидше графік наближається до осі Ox при русі точки вліво. Аналогічно, чим менша основа* $0 < a < 1$, *тим крутіше піднімається графік функції* $y = a^x$ *при русі точки вліво й тим швидше графік наближається до осі Ox при русі точки вправо.*

Завершуючи розмову про показникову функцію, укажемо на ті причини, які заважають розглядати показникові функції з від'ємною або нульовою основою.

Певна річ, вираз a^x можна розглядати й при $a = 0$, і при $a < 0$, але в цих випадках він уже буде означений не при всіх дійсних значеннях x як показникова функція $y = a^x$. Зокрема, вираз 0^x означений при всіх $x > 0$ (і тоді $0^x = 0$), а вираз $(-2)^x$ — при всіх цілих значеннях x (наприклад, $\left((-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}\right)$. Із цієї причини й не беруть основу показникової функції $a = 0$ (отримуємо постійну функцію при $x > 0$) та $a < 0$ (одержуємо функцію, означену тільки при досить «рідких» значеннях x: $x \in \mathbb{Z}$). Але наведені міркування стосовно доцільності вибору основи показникової функції не впливають на область допустимих значень виразу a^x (наприклад, як ми бачили вище, пара значень $a = -2$, $x = -3$ входить до його ОДЗ, і це доводиться враховувати при розв'язуванні деяких завдань).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Порівняйте значення виразів:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ і $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$; 2) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{4}$ і $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{3}$.

Розв'язання	*Коментар*
1) ▶ Функція $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ є спадною $\left(\frac{2}{3}<1\right)$, тому з нерівності $-3>-5$ одержуємо $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}<\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$. ◁ 2) ▶ Функція $y=\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{x}$ є зростаючою $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}>1\right)$, тому з нерівності $4>3$ одержуємо $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{4}>\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{3}$. ◁	Урахуємо, що функція $y=a^x$ при $a>1$ зростаюча, а при $0<a<1$ — спадна. Отже, спочатку порівняємо задану основу a з одиницею, а потім, порівнюючи аргументи, зробимо висновок про співвідношення між заданими значеннями функції.

Приклад 2 Порівняйте з одиницею додатну основу a, якщо відомо, що виконується нерівність:

1) $a^{\sqrt{5}}>a^{\sqrt{11}}$; 2) $a^{-\frac{1}{3}}<a^{-\frac{1}{5}}$.

Розв'язання	*Коментар*
1) ▶ Оскільки $\sqrt{5}<\sqrt{11}$ і за умовою $a^{\sqrt{5}}>a^{\sqrt{11}}$, то функція a^x є спадною, отже, $0<a<1$. ◁ 2) ▶ Оскільки $-\frac{1}{3}<-\frac{1}{5}$ і за умовою $a^{-\frac{1}{3}}<a^{-\frac{1}{5}}$, то функція a^x є зростаючою, отже, $a>1$. ◁	Задані в кожному завданні вирази — це два значення функції a^x. Проаналізуємо, яке значення функції відповідає більшому значенню аргументу (для цього спочатку порівняємо аргументи). Якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, то функція a^x є зростаючою й $a>1$; якщо відповідає менше значення функції, то функція a^x — спадна й $0<a<1$.

Приклад 3 Побудуйте графік функції: 1) $y = 1{,}7^x$; 2) $y = 0{,}3^x$.

Коментар

При $a > 0$ значення $a^x > 0$, отже, графік функції $y = a^x$ завжди розміщений вище осі Ox. Цей графік перетинає вісь Oy в точці $y = 1$ ($a^0 = 1$).

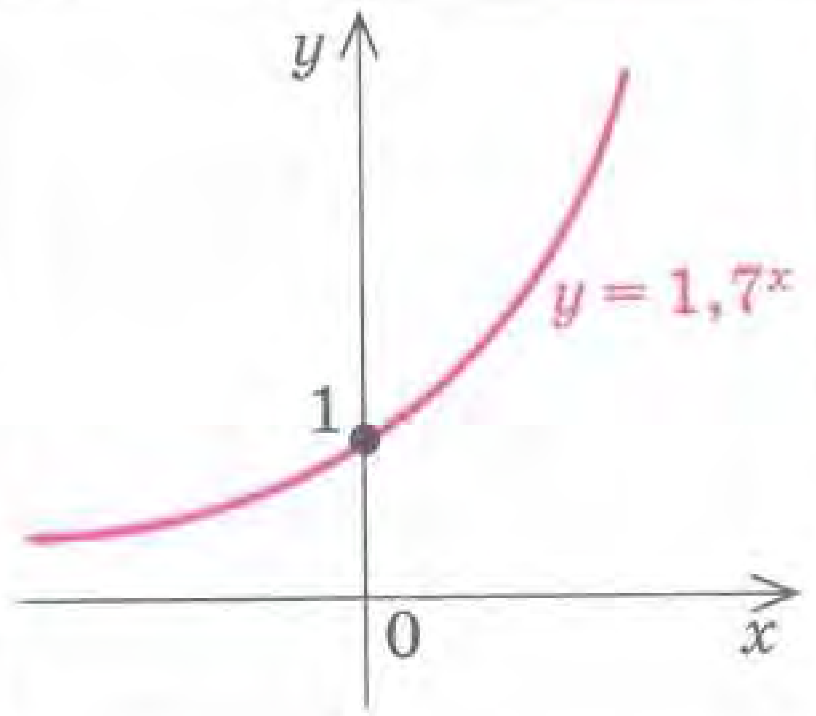
При $a > 1$ показникова функція ($y = 1{,}7^x$) зростає, отже, її графіком буде крива (експонента), точки якої при збільшенні аргументу піднімаються вгору.

При $0 < a < 1$ показникова функція ($y = 0{,}3^x$) спадає, отже, графіком функції $y = a^x$ буде крива, точки якої при збільшенні аргументу опускаються вниз. (Нагадаємо, що, опускаючись вниз, графік наближається до осі Ox, але ніколи її не перетинає.)

Щоб уточнити поведінку графіків заданих функцій, знайдемо координати кількох додаткових точок.

Розв'язання

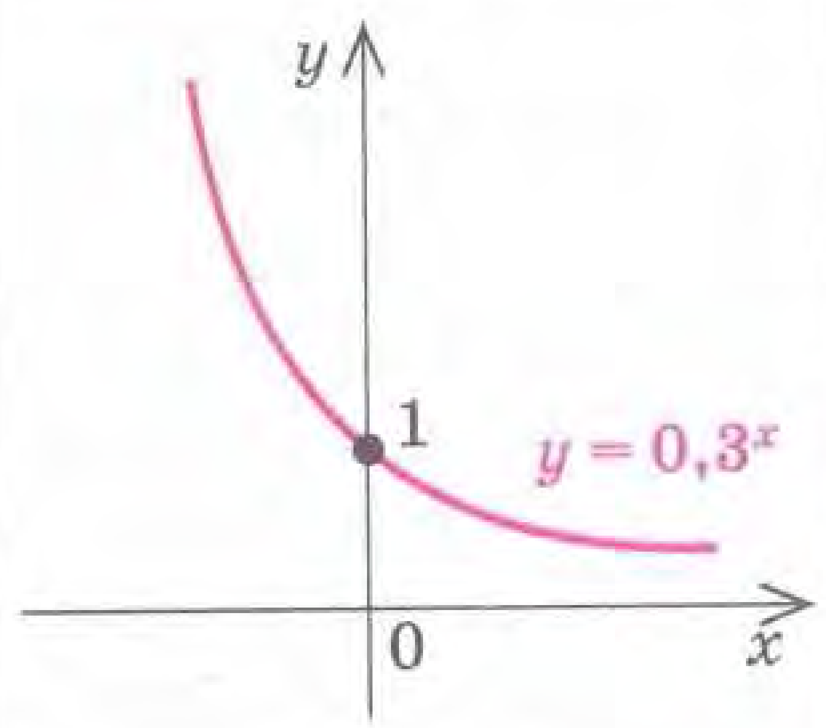
1) ▶ $y = 1{,}7^x$



x	-1	0	1	2
y	$\frac{10}{17}$	1	1,7	2,89

◁

2) ▶ $y = 0{,}3^x$



x	-1	0	1	2
y	$\frac{10}{3}$	1	0,3	0,09

◁

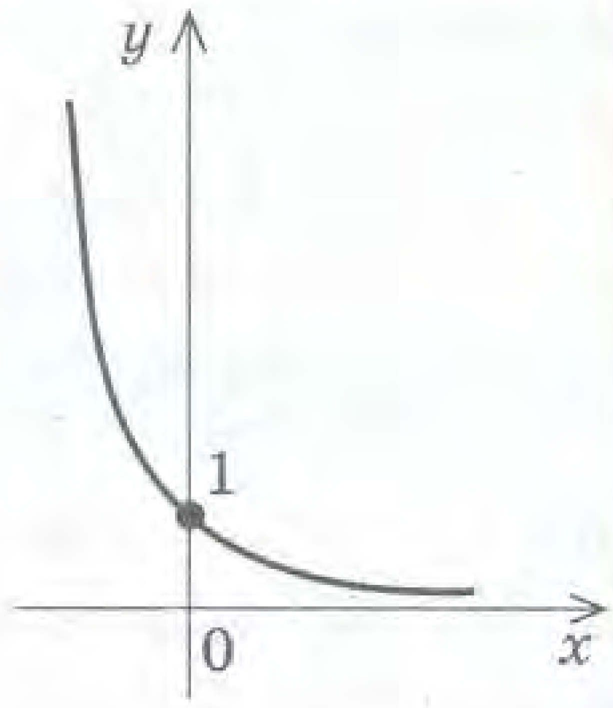
Приклад 4* Зобразіть схематично графік функції $y = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} - 3\right|$.

Розв'язання | *Коментар*

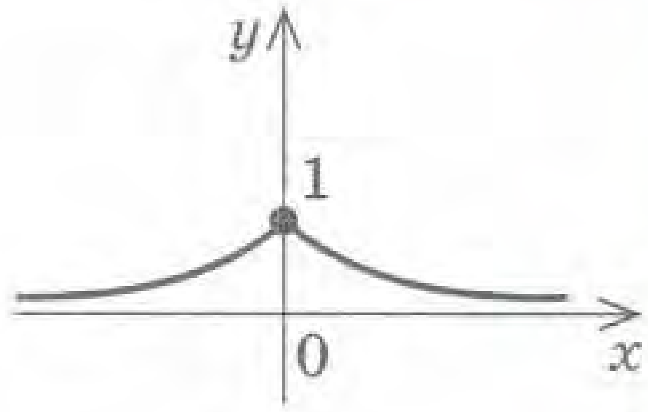
Складемо план побудови графіка заданої функції за допомогою послідовних геометричних перетворень (див. п. 2.3 підручника для 10 класу).

▶ Послідовно будуємо графіки:

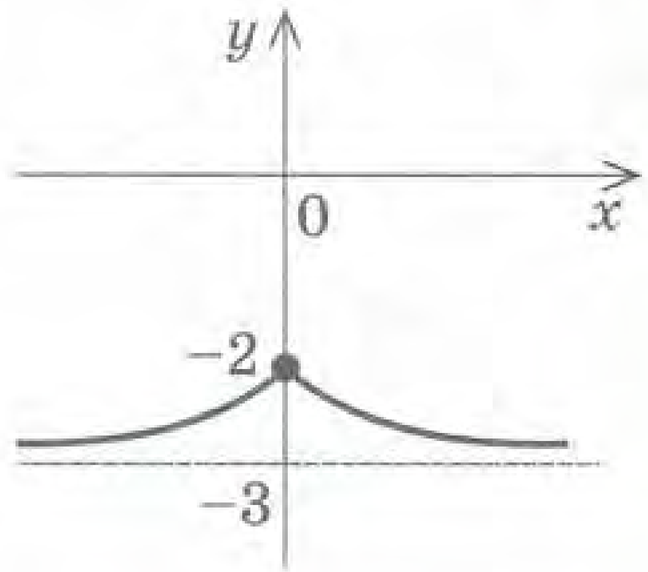
1. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$



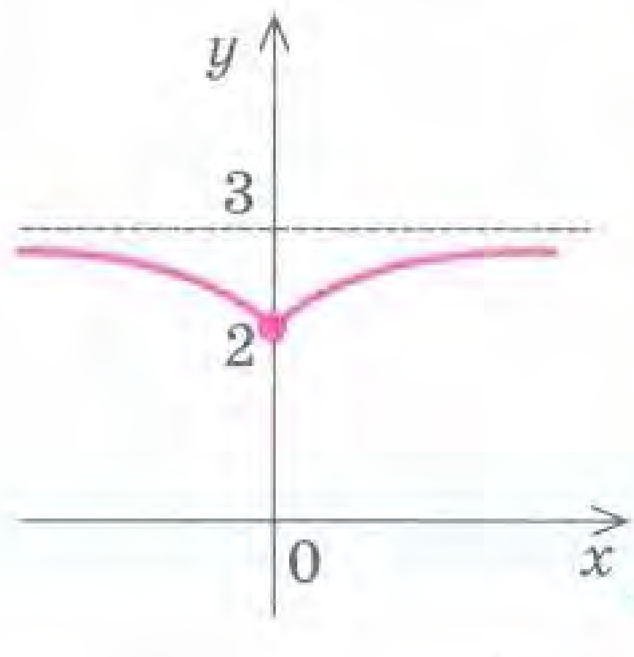
2. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$



3. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3$



4. $y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3\right|$



◁

1. Ми можемо побудувати графік функції $y=f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ (основа $a=\frac{1}{3}<1$ — показникова функція спадає).
2. Потім можна побудувати графік функції $y=g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}=f(|x|)$: праворуч від осі Oy (і на самій осі) графік функції $y=f(x)$ залишається без зміни, і саме ця частина графіка — симетрія відносно осі Oy.
3. Після цього можна побудувати графік функції
$$y=\varphi(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3=g(x)-3:$$
паралельно перенести графік $g(x)$ уздовж осі Oy на (-3) одиниці.
4. Далі можна побудувати графік заданої функції
$$y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3\right|=|\varphi(x)|:$$
вище осі Ox (і на самій осі) графік функції $y=\varphi(x)$ повинен залишитися без зміни, але таких точок у графіка функції $y=\varphi(x)$ немає, а нижче осі Ox — симетрія відносно осі Ox (тобто весь графік функції $y=\varphi(x)$ потрібно відобразити симетрично відносно осі Ox).

Запитання для контролю

1. Дайте означення показникової функції.
2. Побудуйте графіки показникової функції $y=a^x$ при $a>1$ та при $0<a<1$ (виберіть конкретні значення a). Через яку точку проходять графіки всіх показникових функцій?
3. Користуючись графіком показникової функції $y=a^x$ (при $a>1$ та при $0<a<1$), охарактеризуйте її властивості.

4*. Обґрунтуйте властивості функції $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

5. Використовуючи зростання чи спадання відповідної показникової функції, порівняйте значення: а) 7^5 та 7^9; б) $0{,}7^5$ та $0{,}7^9$.

Вправи

1. Укажіть, які із заданих функцій зростають, а які спадають:

1°) $y = 4^x$; 2°) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$; 3°) $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$; 4°) $y = \pi^x$; 5) $y=\left(\sqrt{5}-2\right)^x$;

6*) $y=\left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^x$; 7*) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$; 8*) $y = 2^{-x}$; 9*) $y = -5^x$.

2°. Побудуйте графік функції:

1) $y = 3^x$; 2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$; 3) $y = 0{,}2^x$; 4) $y = 2{,}5^x$; 5) $y = 0{,}7^x$.

3. Знаючи, що $a > b > 1$, зобразіть схематично в одній системі координат графіки функцій $y = a^x$ і $y = b^x$.

4. Знайдіть область значень функції:

1) $y = 3^x + 1$; 2) $y = -5^x$; 3) $y = 7^x - 2$; 4) $y=-\left(\frac{1}{6}\right)^x$.

5. Побудуйте графік функції:

1°) $y = -3^x$; 2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x+3$; 3*) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; 4*) $y = 5^{|x|}$; 5*) $y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right|$.

6. Порівняйте значення виразів:

1°) $3^{1,5}$ та $3^{1,4}$; 2°) $\left(\frac{2}{7}\right)^{1,3}$ та $\left(\frac{2}{7}\right)^{1,8}$; 3°) $0{,}78^{-0,7}$ та $0{,}78^{-0,6}$;

4) $\left(\sqrt{2}\right)^{-3}$ та $\left(\sqrt{2}\right)^{-5}$; 5) $0{,}5^{\sqrt{3}}$ та $0{,}5^{\sqrt{7}}$; 6) $2^{\sqrt{2}}$ та $2^{\sqrt{3}}$;

7) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^8$ та $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^9$; 8) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$ та $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 9) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-4}$ та $\left(\frac{5}{4}\right)^5$;

10) $0{,}2^{-10}$ та 5^{11}.

7. Порівняйте показники m і n, якщо відомо, що є правильною нерівність:

1) $3{,}2^m < 3{,}2^n$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^m > \left(\frac{1}{9}\right)^n$; 3) $\left(\frac{7}{6}\right)^m > \left(\frac{7}{6}\right)^n$;

4) $0{,}99^m < 0{,}99^n$; 5) $\left(\sqrt{2}\right)^m > \left(\sqrt{2}\right)^n$; 6) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$;

7) $\left(\sqrt{5}-1\right)^m < \left(\sqrt{5}-1\right)^n$; 8) $\left(\sqrt{2}-1\right)^m < \left(\sqrt{2}-1\right)^n$.

8. Порівняйте з одиницею додатну основу a, якщо відомо, що є правильною нерівність:

1) $a^{100} > a^{99}$; 2) $a^{0,2} < a^{\frac{1}{3}}$; 3) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{7}}$;

4) $a^{\sqrt{17}} < a^{4}$; 5) $a^{-\frac{1}{17}} < a^{-\frac{1}{8}}$; 6) $a^{-0,25} > a^{-\sqrt{3}}$.

9. Порівняйте з одиницею значення виразу:

1) $0,01^{1,2}$; 2) $0,99^{100}$; 3) $\left(\frac{13}{12}\right)^{\frac{1}{3}}$; 4) $\left(\frac{30}{31}\right)^{-\frac{1}{5}}$;

5) $0,007^{0}$; 6) $100^{-0,01}$; 7) $3^{-\sqrt{2}}$; 8) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\sqrt{3}}$.

10. Який висновок можна зробити про знак числа x, якщо:

1) $3^{x} = 0,6$; 2) $\left(\frac{1}{6}\right)^{x} = 10$; 3) $10^{x} = 4$; 4) $0,3^{x} = 0,1$?

11. Розташуйте числа в порядку їх зростання:

1) $2^{\frac{1}{3}}$, $2^{-1,5}$, $2^{\sqrt{2}}$, $2^{-\sqrt{2}}$, $2^{1,4}$, 1;

2) $0,3^{9}$, 1, $0,3^{-\sqrt{5}}$, $0,3^{\frac{1}{2}}$, $0,3^{-9}$, $0,3^{\frac{1}{3}}$.

12*. Відомо, що коли при радіоактивному розпаді кількість речовини за добу зменшується вдвічі, то через x діб від маси M_0 залишається маса M, яка обчислюється за формулою $M = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$. Звідси $\frac{M}{M_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$.

Покажіть графічно, як зі зміною x змінюється відношення $\frac{M}{M_0}$.

Використовуючи у випадку необхідності побудований графік, дайте відповіді (точні або наближені) на запитання:

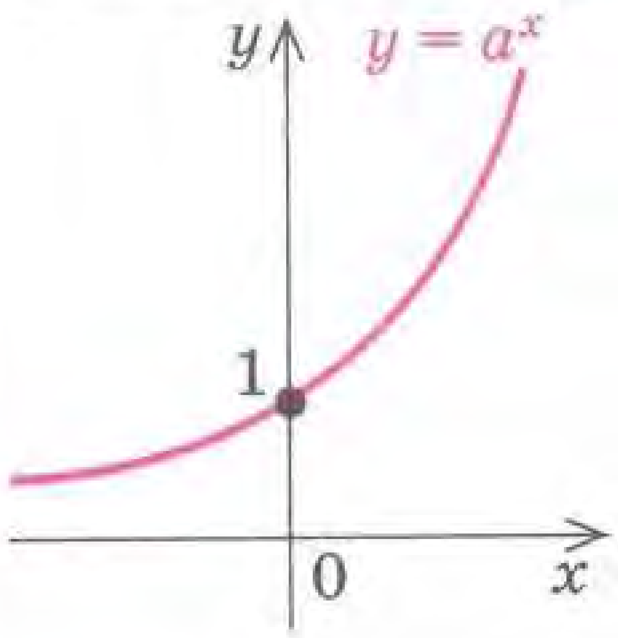
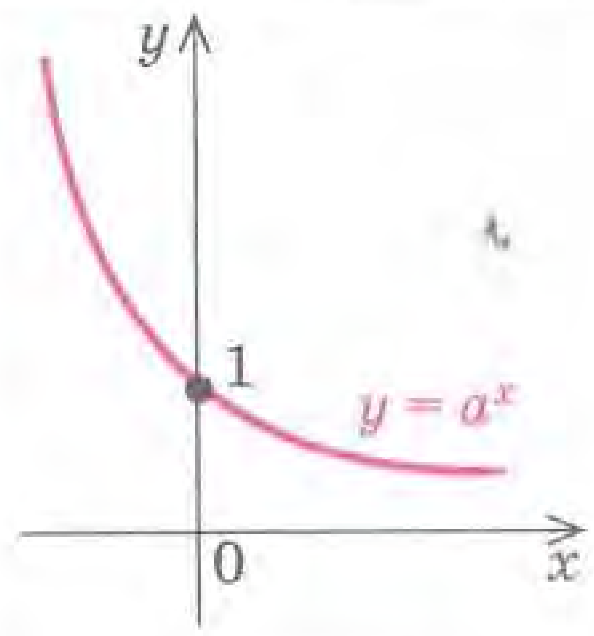
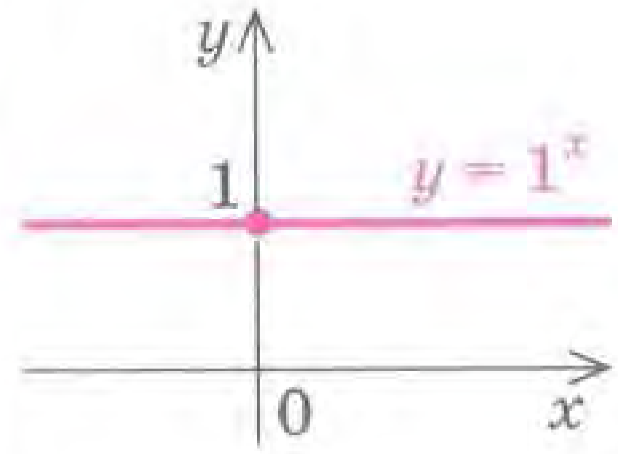
а) У скільки разів зменшиться маса радіоактивної речовини через 1,5 доби, 2,5 доби, 3 доби, 4 доби?

б) Скільки часу має минути, щоб початкова маса радіоактивної речовини зменшилася у 2,5 раза, у 3 рази, у 4 рази?

§ 14 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОКАЗНИКОВИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

14.1. НАЙПРОСТІШІ ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ

Таблиця 18

1. Основні формули та співвідношення			
$a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ $(ab)^u = a^u \cdot b^u$ $\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}$ $(a^u)^v = a^{uv}$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	Графік функції $y = a^x$ $(a > 0)$		
	$a > 1$	$0 < a < 1$	$a = 1$
			
	зростає	спадає	стала

2. Схема рівносильних перетворень найпростіших показникових рівнянь		
Орієнтир	Приклад	
При $a > 0$ і $a \neq 1$ $\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)}$	$3^{2x+4} = 9.$ ▶ $3^{2x+4} = 3^2,$ $2x + 4 = 2,$ $x = -1.$ *Відповідь:* -1. ◁	$6^{x+3} = -36.$ ▶ Коренів немає, оскільки $6^t > 0$ для всіх t. *Відповідь:* коренів немає. ◁

3. Зведення деяких показникових рівнянь до найпростіших	
Орієнтир	Приклад
1) *Якщо ліва й права частини показникового рівняння містять тільки добутки, частки, корені або степені, то доцільно за допомогою основних формул спробувати записати обидві частини рівняння як степені з однією основою.*	$2^{x-3} \cdot 4^x = \frac{\sqrt{2}}{16^x}.$ ▶ $2^{x-3} \cdot 2^{2x} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{4x}}, \quad 2^{3x-3} = 2^{\frac{1}{2} - 4x},$ $3x - 3 = \frac{1}{2} - 4x, \quad x = \frac{1}{2}.$ *Відповідь:* $\frac{1}{2}$. ◁

Закінчення табл. 18

2) *Якщо в одній частині показникового рівняння стоїть число, а в іншій усі члени містять вираз виду a^{kx} (показники степенів відрізняються тільки вільними членами), то зручно в цій частині рівняння винести за дужки найменший степінь a.*	$5^x - 2 \cdot 5^{x-2} = 23$. ▶ $5^{x-2}(5^2 - 2) = 23$, $5^{x-2} \cdot 23 = 23$, $5^{x-2} = 1$, $5^{x-2} = 5^0$ $x - 2 = 0$, $x = 2$. *Відповідь:* 2. ◁

Пояснення й обґрунтування

Показниковими звичайно називають рівняння, у яких змінна входить у показник степеня (а основа цього степеня не містить змінної).

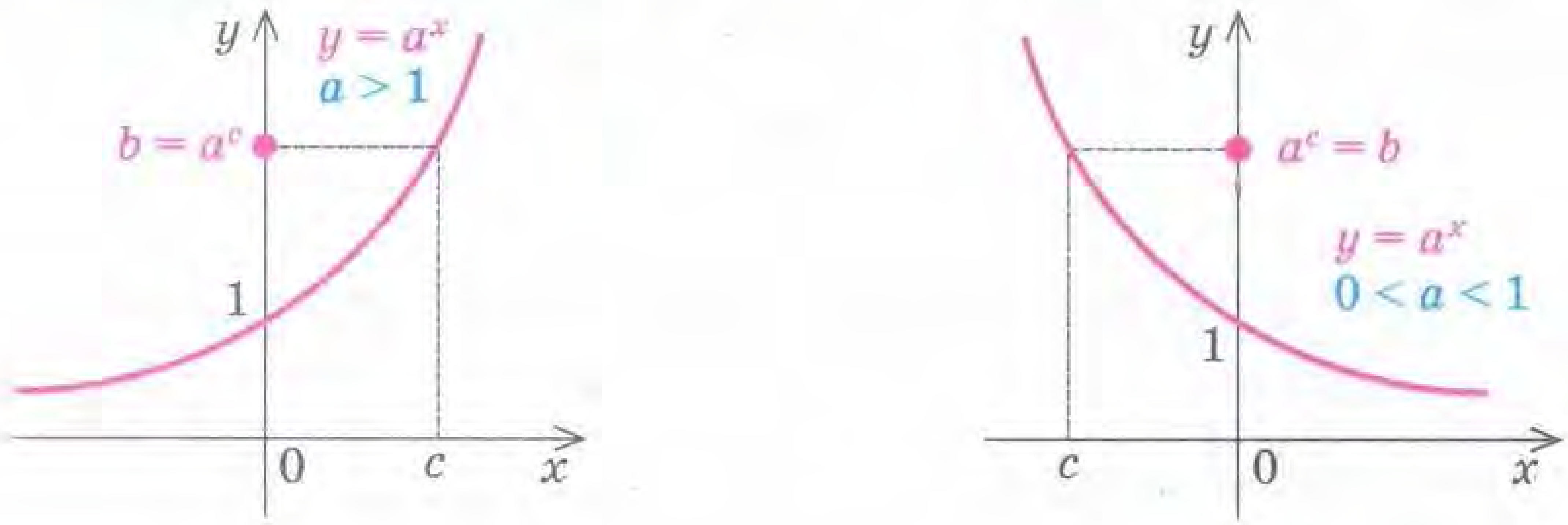
Розглянемо найпростіше показникове рівняння

$$a^x = b, \tag{1}$$

де $a > 0$ і $a \neq 1$. Оскільки при цих значеннях a функція $y = a^x$ строго монотонна (зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$), то кожного свого значення вона набуває тільки при одному значенні аргументу. Це означає, що **рівняння $a^x = b$ при $b > 0$ має єдиний корінь.** Щоб його знайти, досить подати b у вигляді $b = a^c$.

Очевидно, що $x = c$ — корінь рівняння $a^x = a^c$.

Графічно це проілюстровано на рис. 14.1.



а б

Рис. 14.1

Наприклад, щоб розв'язати рівняння $7^x = 49$, досить подати це рівняння у вигляді $7^x = 7^2$ і записати його єдиний корінь $x = 2$.

Якщо $b \leqslant 0$, то рівняння $a^x = b$ (при $a > 0$) коренів не має, оскільки a^x завжди більше нуля. (На графіках, наведених на рис. 14.2, пряма $y = b$ не перетинає графік функції $y = a^x$ при $b \leqslant 0$.)

Наприклад, рівняння $7^x = -7$ не має коренів.

Узагальнюючи наведені вище міркування стосовно розв'язування найпростіших показникових рівнянь, відзначимо, що **при $a > 0$ і $a \neq 1$ рівняння**

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \qquad (2)$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = g(x). \qquad (3)$$

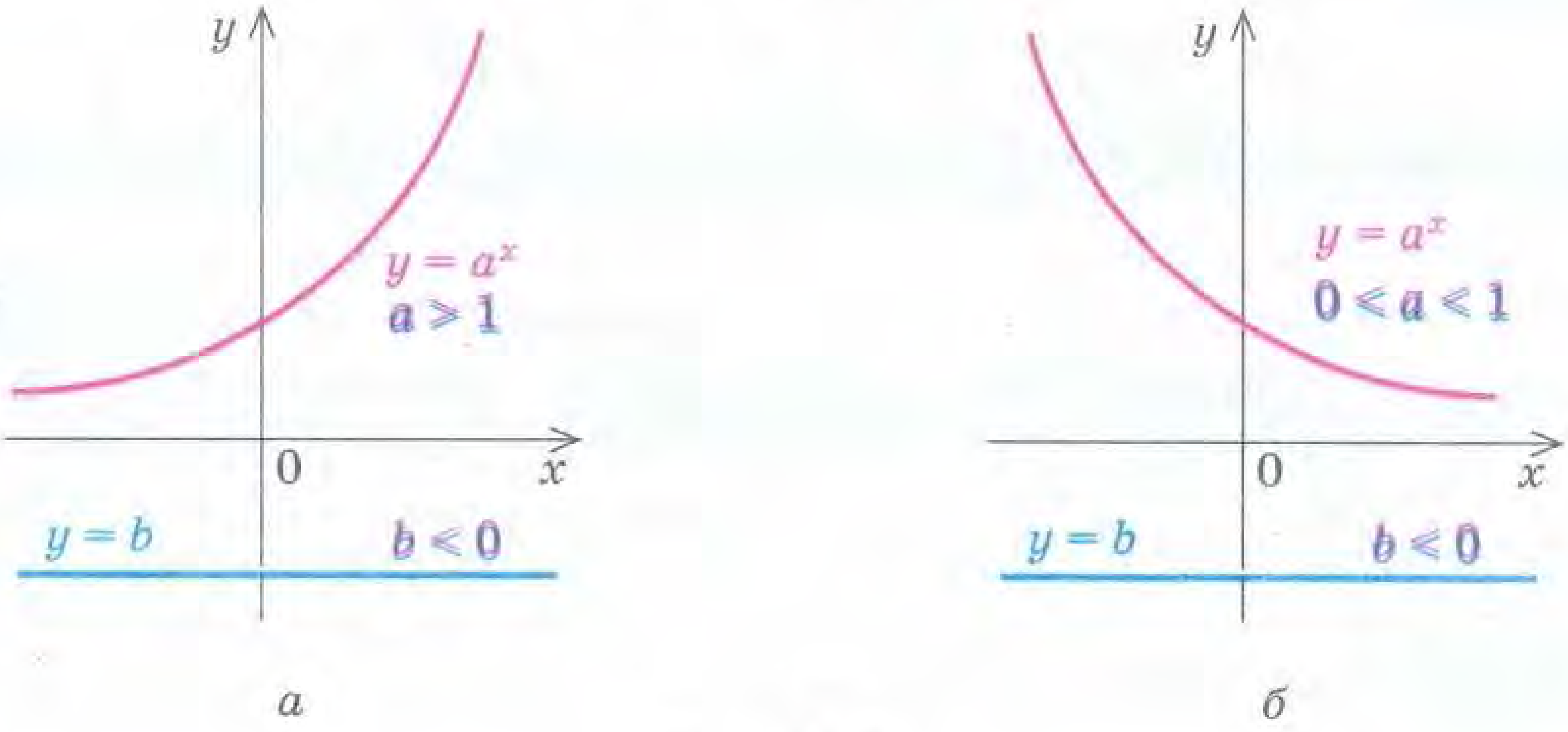


Рис. 14.2

Коротко це твердження можна записати так: **при $a > 0$ і $a \neq 1$**

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)}.$$

Щоб обґрунтувати цю рівносильність, досить помітити, що рівності (2) і (3) можуть бути правильними тільки одночасно, оскільки функція $y = a^t$ є строго монотонною й кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргументу t (тобто з рівності степенів (2) обов'язково випливає рівність показників (3)). Отже, усі корені рівняння (2) (які перетворюють це рівняння на правильну рівність) будуть і коренями рівняння (3), та навпаки, усі корені рівняння (3) будуть коренями рівняння (2). А це й означає, що рівняння (2) і (3) рівносильні.

У найпростіших випадках при розв'язуванні показникових рівнянь треба за допомогою основних формул дій над степенями (див. табл. 18) звести (якщо це можливо) задане рівняння до виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Для розв'язування більш складних показникових рівнянь найчастіше використовують заміну змінних (застосування цього методу розглянуто в табл. 19, с. 178) або властивості відповідних функцій (ці методи розглянуто в табл. 27, с. 251).

Як відомо, усі рівносильні перетворення рівняння завжди виконуються на його області допустимих значень (ОДЗ), тобто на спільній області визначення для всіх функцій, які входять до запису цього рівняння. Але в показникових рівняннях найчастіше областю допустимих значень є множина всіх дійсних чисел. У цих випадках, як правило, ОДЗ не знаходять і не записують до розв'язання рівняння (див. приклади 1–3).

Якщо ж у процесі розв'язування показникових рівнянь рівносильні перетворення виконуються не на всій множині дійсних чисел, то доводиться згадувати про ОДЗ (приклад 4* на с. 177).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння:

1) $4^x = 64$; 2) $5^x = -1$; 3) $12^{x^2-4} = 1$.

Розв'язання	*Коментар*
1) ▶ $4^x = 64$, $4^x = 4^3$, $x = 3$; ◁ 2) ▶ $5^x = -1$ — коренів немає, оскільки $5^x > 0$ завжди; ◁ 3) ▶ $12^{x^2-4} = 1$, $12^{x^2-4} = 12^0$, $x^2 - 4 = 0$; $x = \pm 2$. ◁	При $a > 0$ завжди $a^x > 0$, тому рівняння $5^x = -1$ не має коренів. Інші рівняння зведемо до виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (де $a > 0$ і $a \neq 1$) і перейдемо до рівносильного рівняння $f(x) = g(x)$.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{(0,2)^{x-0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot (0,04)^{x-2}$; 2) $2^x \cdot 3^x = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{2x-3}$.

Розв'язання	*Коментар*
1) ▶Задане рівняння рівносильне рівнянням $\dfrac{(5^{-1})^{x-0,5}}{5^{\frac{1}{2}}} = 5 \cdot (5^{-2})^{x-2}$, $\dfrac{5^{-x+0,5}}{5^{\frac{1}{2}}} = 5^1 \cdot 5^{-2x+4}$, $5^{-x+0,5-\frac{1}{2}} = 5^{1+(-2x+4)}$, $5^{-x} = 5^{5-2x}$, $-x = 5 - 2x$, $x = 5$. *Відповідь:* 5. ◁ 2) ▶Задане рівняння рівносильне рівнянням $(2 \cdot 3)^x = (6^{-1})^{2x-3}$, $6^x = 6^{-2x+3}$, $x = -2x + 3$, $x = 1$. *Відповідь:* 1. ◁	*Ліва й права частини заданих рівнянь містять тільки добутки, частки, корені або степені. У цьому випадку для зведення рівняння до виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ спробуємо використати основні формули дій над степенями, щоб записати обидві частини рівняння як степені з однією основою.* У рівнянні 1 треба звернути увагу на те, що $0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 5^{-1}$, а $0,04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = 5^{-2}$ і $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$. Отже, ліву й праву частини цього рівняння можна записати як степені числа 5. Для перетворення рівняння 2 згадаємо, що всі формули можна використовувати як зліва направо, так і справа наліво, наприклад для лівої частини цього рівняння скористаємося формулою $a^u b^u = (ab)^u$, тобто $2^x \cdot 3^x = (2 \cdot 3)^x = 6^x$.

16) $3^{2x} = 81$; 17°) $2^{3x} = 8$; 18) $3^{x^2-5x+8} = 9$; 19) $7^x = 7^{2-x}$;
20) $25^x = 5^{3-x}$; 21*) $2^x \cdot 3^{x+1} = 108$; 22*) $3^x \cdot 5^{2x-3} = 45$.

2. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{9}{16}\right)^x = \frac{3}{8}$; 2) $\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\frac{10}{15}\right)^x = \frac{2}{5}$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$.

3. 1) $2^{x^2} = \frac{16^2}{4^x}$; 2) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2x^2}{3}} = 4^{-x}\cdot 8^{-4}$; 3) $(0{,}5)^{x^2}\cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$;
4) $\frac{3^{x^2}}{27} = 9^x$; 5) $2^{x(x+2)-\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}\cdot 4^x$.

4. 1°) $7^{x+2} + 4\cdot 7^{x+1} = 539$; 2°) $2\cdot 3^{x+1} - 3^x = 15$;
3°) $4^{x+1} + 4^x = 320$; 4°) $3\cdot 5^{x+3} + 2\cdot 5^{x+1} = 77$;
5°) $3^{x+2} - 2\cdot 3^{x-2} = 79$; 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 4{,}8$;
7) $5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 162$; 8) $5\cdot 9^x + 9^{x-2} = 406$.

5*. 1) $\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^{2x-3} = \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^{x+5}$; 2) $(1 + |a|)^x = (1 + |a|)^{2-x}$;
3) $\left(1+\sqrt{a}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(1+\sqrt{a}\right)^{6-\frac{2}{x}}$.

14.2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БІЛЬШ СКЛАДНИХ ПОКАЗНИКОВИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

Таблиця 19

Схема пошуку плану розв'язування показникових рівнянь	
Орієнтир	Приклад
1. **Позбавляємося числових доданків у показниках степенів** (використовуємо справа наліво основні формули дій над степенями, наведені в табл. 18).	$4^{x+1} - 3\cdot 2^x - 10 = 0$. ⇔ $4^x\cdot 4^1 - 3\cdot 2^x - 10 = 0$. Ураховуючи, що $4^x = 2^{2x}$, зводимо до однієї основи 2: $4\cdot 2^{2x} - 3\cdot 2^x - 10 = 0$.
2. **Якщо можливо, зводимо всі степені (із змінною в показнику) до однієї основи** *і виконуємо заміну змінної.*	*Заміна* $2^x = t$ дає рівняння $4t^2 - 3t - 10 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{5}{4}$. Обернена заміна дає $2^x = 2$, тоді $x = 1$, або $2^x = -\frac{5}{4}$ — коренів немає. *Відповідь:* 1.

Закінчення табл. 19

3. Якщо не можна звести до однієї основи, то пробуємо звести всі степені **до двох основ так, щоб одержати однорідне рівняння** (*яке розв'язується діленням обох частин рівняння на найбільший степінь одного з видів змінних*).	$4^x + 3\cdot 6^x - 4\cdot 9^x = 0.$ ▶Зведемо всі степені до двох основ 2 і 3: $2^{2x} + 3\cdot 2^x\cdot 3^x - 4\cdot 3^{2x} = 0.$ Маємо однорідне рівняння (у всіх членів однаковий сумарний степінь — $2x$). Для його розв'язування поділимо обидві частини на $3^{2x} \neq 0$: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 3\left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0.$ *Заміна* $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ дає рівняння $t^2 + 3t - 4 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = -4.$ Обернена заміна дає $\left(\frac{2}{3}\right)^x = -4$ — коренів немає, або $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$, тоді $x = 0$. *Відповідь:* 0.◁
4. В інших випадках **переносимо всі члени рівняння в один бік і пробуємо розкласти одержаний вираз на множники або** застосовуємо спеціальні прийоми розв'язування, у яких **використовуються властивості відповідних функцій.**	$6^x - 9\cdot 2^x - 2\cdot 3^x + 18 = 0.$ ▶Якщо попарно згрупувати члени в лівій частині рівняння і в кожній парі винести за дужки спільний множник, то одержуємо $2^x(3^x - 9) - 2(3^x - 9) = 0.$ Тепер можна винести за дужки спільний множник $3^x - 9$: $(3^x - 9)\cdot(2^x - 2) = 0.$ Тоді $3^x - 9 = 0$ або $2^x - 2 = 0$. Одержуємо два рівняння: 1) $3^x = 9$, тоді $x = 2$; 2) $2^x = 2$, тоді $x = 1$. *Відповідь:* 2; 1.◁

Пояснення й обґрунтування

Для розв'язування більш складних показникових рівнянь (порівняно з тими, які було розглянуто в п. 14.1) найчастіше використовують заміну змінних. Щоб зорієнтуватися, чи можна ввести заміну змінних у даному показниковому рівнянні, часто буває корисно на початку розв'язування *позбутися числових доданків у показниках степенів*, використовуючи формули $a^{u+v} = a^u a^v$; $a^{u-v} = \frac{a^u}{a^v}$. Наприклад, у рівнянні

$$4^{x+1} - 3 \cdot 2^x - 10 = 0 \qquad (1)$$

замість 4^{x+1} записуємо добуток $4^x \cdot 4^1$ і одержуємо рівняння

$$4^x \cdot 4 - 3 \cdot 2^x - 10 = 0, \qquad (2)$$

рівносильне заданому.

Потім пробуємо *всі степені* (із змінною в показнику) *звести до однієї основи і виконати заміну змінної*. Наприклад, у рівнянні (2) степінь з основою 4 можна записати як степінь з основою 2: $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$ й одержати рівняння

$$2^{2x} \cdot 4 - 3 \cdot 2^x - 10 = 0. \qquad (3)$$

Нагадаємо загальний орієнтир: **якщо до рівняння, нерівності або тотожності змінна входить в одному й тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною).** Звертаємо увагу на те, що $2^{2x} = (2^x)^2$. Отже, у рівняння (3) змінна фактично входить в одному вигляді — 2^x, тому в ньому зручно ввести заміну $2^x = t$ й одержати квадратне рівняння

$$4t^2 - 3t - 10 = 0. \qquad (4)$$

Знаходимо корені для цього рівняння, а потім виконуємо обернену заміну (див. розв'язання в табл. 19).

Зазначимо, що використання як основних формул дій над степенями, так і заміни та оберненої заміни завжди приводить до рівняння, рівносильного даному на його ОДЗ (у рівнянні (1) — на множині всіх дійсних чисел), через те що всі вказані перетворення ми можемо виконати і в прямому, і в зворотному напрямках. (Отже, ми завжди зможемо довести, що кожен корінь одного рівняння є коренем другого й навпаки, аналогічно тому, як було обґрунтовано рівносильний перехід для найпростіших показникових рівнянь на с. 175.)

У тих випадках, коли всі степені (із змінною в показнику) у показниковому рівнянні, яке не зводиться безпосередньо до найпростішого, не вдається звести до однієї основи, потрібно *спробувати звести всі степені до двох основ так, щоб одержати однорідне рівняння*.

Наприклад, розглянемо рівняння

$$4^x + 3 \cdot 6^x - 4 \cdot 9^x = 0. \qquad (5)$$

Усі степені в цьому рівнянні можна записати через основи 2 і 3, оскільки

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$, $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$, $6^x = (2 \cdot 3)^x = 2^x \cdot 3^x$.

Одержуємо рівняння

$$2^{2x} + 3 \cdot 2^x \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{2x} = 0. \qquad (6)$$

Усі одночлени, які стоять у лівій частині цього рівняння, мають степінь $2x$ (степінь одночлена $2^x \cdot 3^x$ теж дорівнює $x + x = 2x$).

Нагадаємо загальний орієнтир (розглянутий у підручнику для 10 класу): **якщо всі члени рівняння, у лівій і правій частинах якого стоять многочлени від двох змінних (або від двох функцій однієї змінної), мають однаковий сумарний степінь*, то рівняння називається однорідним.**

Розв'язується однорідне рівняння діленням обох його частин на найвищий степінь однієї із змінних.

Отже, рівняння (6) є однорідним, і його можна розв'язати діленням обох частин або на 2^{2x}, або на 3^{2x}. Відзначимо, що при всіх значеннях x вирази 2^{2x} і 3^{2x} не дорівнюють нулю. Отже, при діленні на ці вирази не може відбутися втрата коренів (як це могло бути, наприклад, для однорідних тригонометричних рівнянь) і в результаті ділення обох частин рівняння на будь-який із цих виразів завжди одержуємо рівняння, рівносильне заданому. Наприклад, якщо розділити обидві частини рівняння (6) на $3^{2x} \neq 0$, одержуємо

$$\frac{2^{2x}}{3^{2x}}+\frac{3\cdot 2^x\cdot 3^x}{3^{2x}}-\frac{4\cdot 3^{2x}}{3^{2x}}=0, \text{ або після скорочення } \frac{2^{2x}}{3^{2x}}+3\cdot\frac{2^x}{3^x}-4=0.$$

В останньому рівнянні всі члени можна подати як степені з однією основою $\frac{2}{3}$: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-4=0$ і виконати заміну $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t$. Подальше розв'язання одержаного рівняння повністю аналогічне розв'язанню рівняння (2). Повне розв'язання цього рівняння наведене в табл. 19.

Шукаючи план розв'язування показникового рівняння, потрібно враховувати, що при розв'язуванні деяких з них доцільно *перенести всі члени рівняння в один бік і спробувати розкласти* одержаний вираз *на множники,* наприклад з використанням групування членів, як це зроблено в табл. 19 для рівняння

$$6^x - 9\cdot 2^x - 2\cdot 3^x + 18 = 0.$$

Для розв'язування деяких показникових рівнянь можна використовувати властивості відповідних функцій (ці методи розглянуто в § 20).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\frac{6}{3^x}-\frac{4}{3^x+1}=1.$

Розв'язання	*Коментар*
► Заміна $3^x = t$. Одержуємо $$\frac{6}{t}-\frac{4}{t+1}=1.$$ Тоді $6(t+1) - 4t = t(t+1)$, $t^2 - t - 6 = 0$. Звідси $t_1 = -2$, $t_2 = 3$.	У задане рівняння змінна входить тільки в одному вигляді 3^x, тому зручно ввести заміну $3^x = t$ й одержати дробове рівняння. Знаходимо його корені, а потім виконуємо обернену заміну.

* Звичайно, якщо рівняння має вигляд $f=0$ (де f — многочлен), то йдеться тільки про степінь членів многочлена f, оскільки нуль-многочлен степеня не має.

Обернена заміна дає

$3^x = -2$ — коренів немає,

або $3^x = 3$, тоді $x = 1$.

Відповідь: 1. ◁

Як уже відзначалося, заміна й обернена заміна — це рівносильні перетворення заданого рівняння, але при розв'язуванні одержаного дробового рівняння треба подбати про те, щоб не отримати сторонніх коренів (для цього, наприклад, досить урахувати, що $t = 3^x > 0$, і тоді ОДЗ одержаного рівняння: $t \neq -1$ і $t \neq 0$ буде врахована автоматично).

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $25^{x+\frac{1}{2}} - 10 \cdot 5^{x-1} - 3 = 0$.

Розв'язання

▶ $$25^x \cdot 25^{\frac{1}{2}} - 10\frac{5^x}{5^1} - 3 = 0,$$

$$5^{2x} \cdot 5 - 2 \cdot 5^x - 3 = 0.$$

Заміна $5^x = t$ дає рівняння

$$5t^2 - 2t - 3 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = -\frac{3}{5}.$$

Обернена заміна дає

$5^x = 1$, тоді $x = 0$,

або $5^x = -\frac{3}{5}$ — коренів немає.

Відповідь: 0. ◁

Коментар

1. Позбуваємося числових доданків у показниках степенів.
2. Зводимо всі степені (із змінною в показнику) до однієї основи 5.
3. Виконуємо заміну $5^x = t$, розв'язуємо одержане рівняння, здійснюємо обернену заміну й розв'язуємо одержані найпростіші показникові рівняння (а також ураховуємо, що всі перетворення були рівносильними).

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x$.

Розв'язання

▶ $$2^x \cdot 2^3 - 3^x - 3^x \cdot 3^1 + 2^x = 0,$$

$$9 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^x = 0 \ \big| : 3^x \neq 0,$$

$$9\frac{2^x}{3^x} - \frac{4 \cdot 3^x}{3^x} = 0,$$

$$9\left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

$$x = 2.$$

Відповідь: 2. ◁

Коментар

1. Позбуваємося числових доданків у показниках степенів, переносимо всі члени рівняння в один бік і зводимо подібні члени.
2. Помічаємо, що степені всіх членів одержаного рівняння $9 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^x = 0$ (з двома основами 2 і 3) однакові — x, отже, це рівняння однорідне. Його можна розв'язати діленням обох частин на найвищий степінь одного з видів виразу із змінною — або на 2^x, або на 3^x.

Ураховуючи, що $3^x \neq 0$ при всіх значеннях x, у результаті ділення на 3^x отримуємо рівняння, рівносильне попередньому (а відповідно, і заданому).

При розв'язуванні систем рівнянь, що містять показникові функції, найчастіше використовують традиційні методи розв'язування систем рівнянь: метод підстановки й метод заміни змінних.

Приклад 4 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+y=1, \\ 4^x+4^y=5. \end{cases}$

Розв'язання	*Коментар*
▶ З першого рівняння системи $y = 1 - x$. Тоді з другого рівняння одержуємо $4^x + 4^{1-x} = 5$, тобто $4^x+\frac{4^1}{4^x}=5$. Заміна $4^x = t$ дає рівняння $t+\frac{4}{t}=5$, з якого одержуємо рівняння $t^2 - 5t + 4 = 0$, що має корені: $t_1 = 1$, $t_2 = 4$. Обернена заміна дає $4^x = 1$, тоді $x_1 = 0$ або $4^x = 4$, звідки $x_2 = 1$. Знаходимо відповідні значення $y = 1 - x$: якщо $x_1 = 0$, то $y_1 = 1$; якщо $x_2 = 1$, то $y_2 = 0$. *Відповідь:* (0; 1), (1; 0). ◁	Якщо з першого рівняння виразити y через x і підставити в друге рівняння, то одержимо показникове рівняння, яке ми вміємо розв'язувати (аналогічно розв'язуванню приклада 2). Виконуючи заміну, ураховуємо, що $t = 4^x \neq 0$. Тоді в одержаному дробовому рівнянні $t+\frac{4}{t}=5$ знаменник $t \neq 0$. Отже, це дробове рівняння рівносильне рівнянню $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Приклад 5* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 5^x-3^y=16, \\ 5^{\frac{x}{2}}-3^{\frac{y}{2}}=2. \end{cases}$

Розв'язання	*Коментар*
▶ Заміна $5^{\frac{x}{2}}=u$ і $3^{\frac{y}{2}}=v$ дає систему $\begin{cases} u^2-v^2=16, \\ u-v=2. \end{cases}$	Якщо позначити $5^{\frac{x}{2}}=u$ і $3^{\frac{y}{2}}=v$, то $5^x = u^2$ і $3^y = v^2$.

З другого рівняння цієї системи маємо $u = 2 + v$. Тоді з першого рівняння одержуємо $(2 + v)^2 - v^2 = 16$. Звідси $v = 3$, тоді $u = 5$.

Обернена заміна дає

$3^{\frac{y}{2}} = 3$, тоді $\frac{y}{2} = 1$, отже, $y = 2$;

$5^{\frac{x}{2}} = 5$, тоді $\frac{x}{2} = 1$, отже, $x = 2$.

Відповідь: (2; 2). ◁

Тоді задана система буде рівносильною алгебраїчній системі, яку легко розв'язати.

Після оберненої заміни одержуємо систему найпростіших показникових рівнянь.

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах, як можна організувати пошук плану розв'язування показникових рівнянь, які не зводяться безпосередньо до найпростіших?
2. Яку заміну змінних можна виконати при розв'язуванні рівняння $4^{2x} + 2 \cdot 4^x - 3 = 0$? Яке рівняння одержимо після заміни?
3. Поясніть, чому рівняння $5^x = 7^x$ і $2^{2x} + 3 \cdot 2^x \cdot 5^x - 4 \cdot 5^{2x} = 0$ є однорідними. Як можна розв'язати ці однорідні рівняння?

Вправи

Розв'яжіть рівняння **(1–5)**.

1°. 1) $5^{2x} + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$; 2) $6^{2x} - 5 \cdot 6^x - 6 = 0$; 3) $3^{2x} - 2 \cdot 3^x = 3$;

4) $\frac{8}{5^x - 3} - \frac{6}{5^x + 1} = 3$; 5) $\frac{6}{4^x - 2} - \frac{5}{4^x + 1} = 2$.

2. 1) $49^x - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$; 2) $64^x - 7 \cdot 8^x - 8 = 0$; 3) $2^x + 2^{2-x} = 5$;

4) $3^x + 3^{2-x} = 10$; 5) $2^{x+1} + 4^x = 80$; 6) $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$;

7) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$; 8*) $10^{\sin^2 x} + 10^{\cos^2 x} = 11$.

3. 1°) $7^x = 9^x$; 2°) $5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^x = 0$;

3) $2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x$; 4) $4^{x+1} + 4 \cdot 3^x = 3^{x+2} - 4^x$;

5) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 2 \cdot 5^x + 5^{x+1}$; 6) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

4. 1) $2^{2x} + 2^x \cdot 5^x - 2 \cdot 5^{2x} = 0$; 2) $3^{2x} + 2 \cdot 3^x \cdot 7^x - 3 \cdot 7^{2x} = 0$;

3) $4^x = 3 \cdot 49^x - 2 \cdot 14^x$; 4) $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0$;

5) $5 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0$.

5*. 1) $6^x - 4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x + 36 = 0$; 2) $5 \cdot 15^x - 3 \cdot 5^{x+1} - 3^x + 3 = 0$;

3) $4 \cdot 20^x - 20 \cdot 5^{x-1} + 5 \cdot 4^{x+1} - 20 = 0$; 4) $8^x - 4^x - 2^{x+3} + 8 = 0$.

6. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $2^x = 3 - x$; 2) $3^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 3$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$.

Перевірте підстановкою, що знайдене значення x дійсно є коренем рівняння.

7*. Доведіть, що рівняння, наведені в завданні 6, не мають інших коренів, крім знайдених графічно.

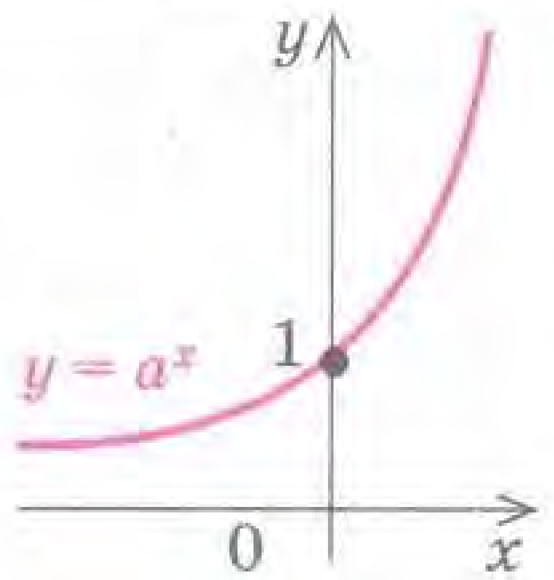
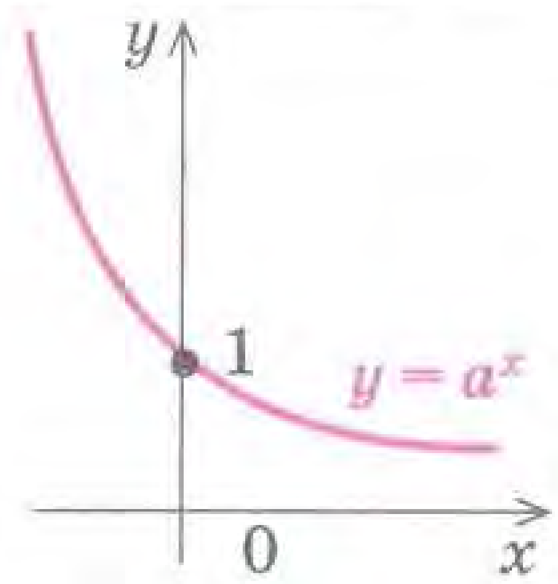
8. Розв'яжіть систему:

1) $\begin{cases} 4^{x+y}=16, \\ 5^{x+2y-1}=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{2y-x}=\dfrac{1}{81}, \\ 3^{x-y+2}=27; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=3, \\ 2^x+2^y=6; \end{cases}$

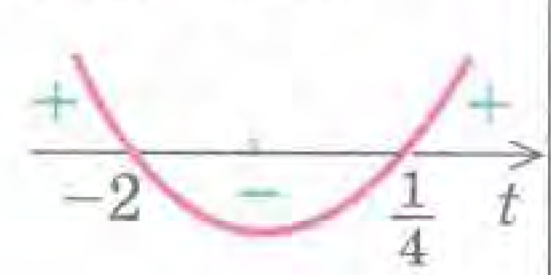
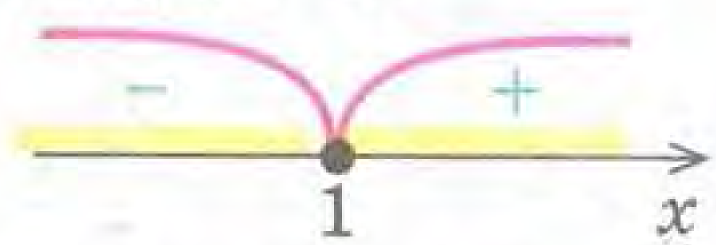
4) $\begin{cases} x-y=2, \\ 3^x-3^y=24; \end{cases}$ 5*) $\begin{cases} 3^x-2^y=77, \\ 3^{\frac{x}{2}}-2^{\frac{y}{2}}=7; \end{cases}$ 6*) $\begin{cases} 5^x-6^y=589, \\ 5^{\frac{x}{2}}+6^{\frac{y}{2}}=31. \end{cases}$

14.3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОКАЗНИКОВИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Таблиця 20

<table>
<tr><td colspan="2">1. Графік показникової функції $y = a^x$ ($a > 0$ і $a \neq 1$)</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Схема рівносильних перетворень
найпростіших показникових нерівностей</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)}$
знак нерівності зберігається</td><td>$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)}$
знак нерівності змінюється на протилежний</td></tr>
<tr><td colspan="2">Приклади</td></tr>
<tr><td>$2^{x-3} > 4.$
▶ $2^{x-3} > 2^2.$
Функція $y = 2^t$ є зростаючою, отже:
$x - 3 > 2,\ \ x > 5.$
Відповідь: $(5; +\infty)$. ◁</td><td>$(0,7)^{x-3} > 0,49.$
▶ $(0,7)^{x-3} > (0,7)^2.$
Функція $y = 0,7^t$ є спадною, отже:
$x - 3 < 2,\ \ x < 5.$
Відповідь: $(-\infty; 5)$. ◁</td></tr>
</table>

Закінчення табл. 20

3. Розв'язування більш складних показникових нерівностей	
Орієнтир	**Приклад**
I. **За допомогою рівносильних перетворень** (за схемою розв'язування показникових рівнянь, табл. 19) **задана нерівність зводиться до нерівності відомого виду** (квадратної, дробової тощо). Після розв'язування одержаної нерівності приходимо до найпростіших показникових нерівностей.	$4^{x+1} + 7\cdot 2^x - 2 > 0.$ ▶ $4^x\cdot 4 + 7\cdot 2^x - 2 > 0,$ $2^{2x}\cdot 4 + 7\cdot 2^x - 2 > 0.$ *Заміна* $2^x = t$ дає нерівність $4t^2 + 7t - 2 > 0$, розв'язки якої $t < -2$ або $t > \frac{1}{4}$  (див. рисунок). Обернена заміна дає $2^x < -2$ (розв'язків немає) або $2^x > \frac{1}{4}$, звідки $2^x > 2^{-2}$, тобто $x > -2$. *Відповідь:* $(-2; +\infty)$. ◁
II. **Застосовуємо загальний *метод інтервалів*,** зводячи задану нерівність до виду $f(x) \gtrless 0$ і використовуючи схему: 1. **Знайти ОДЗ.** 2. **Знайти нулі $f(x)$.** 3. **Відмітити нулі функції на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.** 4. **Записати відповідь, ураховуючи знак нерівності.**	$3^x + 4^x > 7.$ ▶ Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Задана нерівність рівносильна нерівності $3^x + 4^x - 7 > 0$. Позначимо $f(x) = 3^x + 4^x - 7$. 1. ОДЗ: $x \in \mathbf{R}$. 2. Нулі функції: $f(x) = 0$. $3^x + 4^x - 7 = 0$. Оскільки функція $f(x) = 3^x + 4^x - 7$ є зростаючою (як сума двох зростаючих функцій), то значення, рівного нулю, вона набуває тільки в одній точці області визначення: $x = 1$ $(f(1) = 3^1 + 4^1 - 7 = 0)$. 3. Відмічаємо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ, і записуємо розв'язки нерівності $f(x) > 0$.  *Відповідь:* $(1; +\infty)$. ◁

Пояснення й обґрунтування

Розв'язування найпростіших показникових нерівностей виду $a^x > b$ (або $a^x < b$, де $a > 0$ і $a \neq 1$) ґрунтується на властивостях функції $y = a^x$, яка зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$. Наприклад, щоб знайти розв'язки нерівності $a^x > b$ при $b > 0$, досить подати b у вигляді $b = a^c$. Одержуємо нерівність

$$a^x > a^c. \qquad (1)$$

При $a > 1$ функція a^x зростає, отже, більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, тому з нерівності (1) одержуємо $x > c$ (знак цієї нерівності збігається зі знаком нерівності (1)).

При $0 < a < 1$ функція a^x спадає, отже, більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу, тому з нерівності (1) одержуємо $x < c$ (знак цієї нерівності протилежний знаку нерівності (1)).

Графічно це проілюстровано на рис. 14.3.

Наприклад, щоб розв'язати нерівність $5^x > 25$, досить подати цю нерівність у вигляді $5^x > 5^2$, урахувати, що $5 > 1$ (функція 5^x — зростаюча, отже, при переході до аргументів знак нерівності не змінюється), і записати розв'язки: $x > 2$.

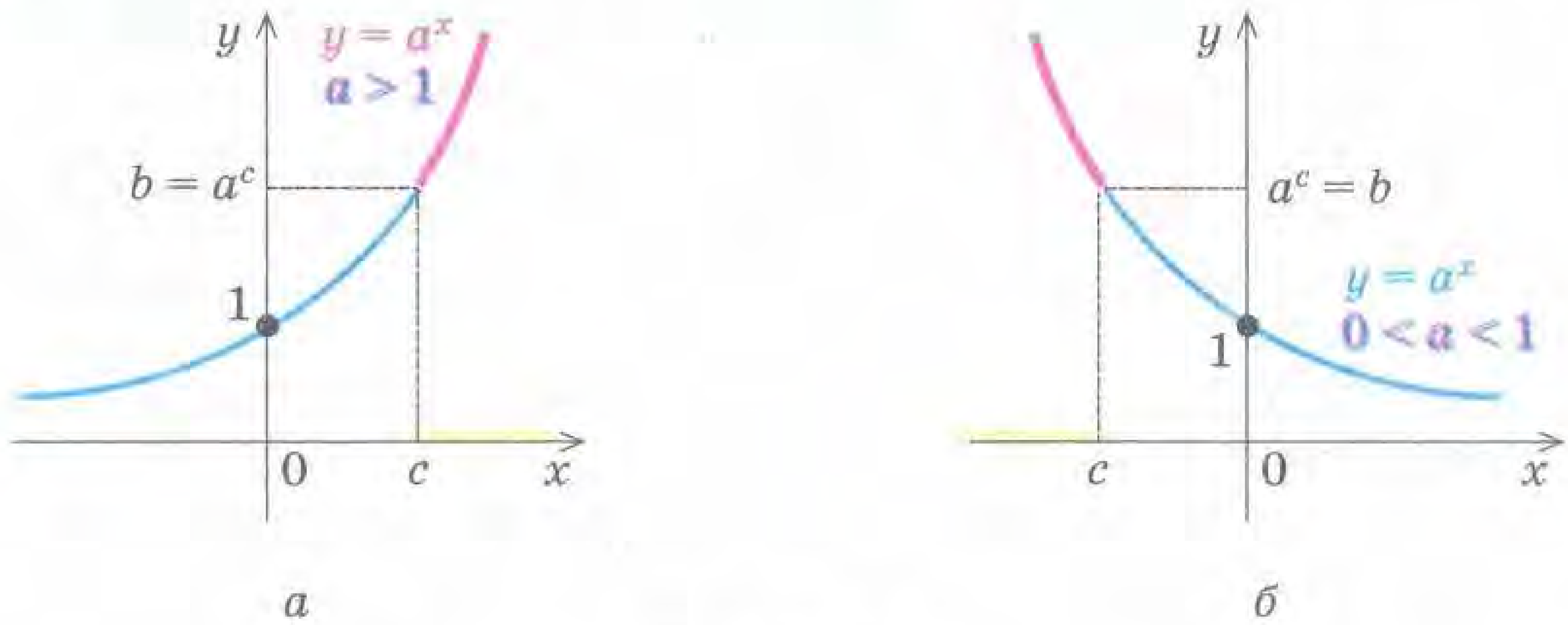


Рис. 14.3

Зауважимо, що розв'язки заданої нерівності можна записувати у вигляді $x > 2$ або у вигляді проміжка $(2; +\infty)$.

Аналогічно, щоб розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \frac{1}{16}$, досить подати цю нерівність у вигляді $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^2$, урахувати, що $\frac{1}{4} < 1$ (функція $\left(\frac{1}{4}\right)^x$ — спадна, отже, при переході до аргументів знак нерівності змінюється на протилежний), і записати розв'язки: $x < 2$.

Ураховуючи, що при будь-яких додатних значеннях a значення a^x завжди більше нуля, одержуємо, що **при $b \leqslant 0$ нерівність $a^x < b$ розв'язків не має, а нерівність $a^x > b$ виконується при всіх дійсних значеннях x.**

Наприклад, нерівність $7^x < -7$ не має розв'язків, а розв'язками нерівності $7^x > -7$ є всі дійсні числа.

Узагальнюючи наведені вище міркування стосовно розв'язування найпростіших показникових нерівностей, відзначимо, що

при $a > 1$ нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$,

а при $0 < a < 1$ — нерівності $f(x) < g(x)$.

Коротко це твердження можна записати так:

при $a > 1$ $\quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (*знак нерівності зберігається*);

при $0 < a < 1$ $\quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

(*знак змінюється на протилежний*).

Щоб обґрунтувати рівносильність відповідних нерівностей, досить відзначити, що при $a > 1$ нерівності

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \tag{2}$$

$$f(x) > g(x) \tag{3}$$

можуть бути правильними тільки одночасно, оскільки функція $y = a^t$ при $a > 1$ є зростаючою й більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу (і навпаки: більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції). Отже, усі розв'язки нерівності (2) (які перетворюють її на правильну числову нерівність) будуть і розв'язками нерівності (3), та навпаки: усі розв'язки нерівності (3) будуть розв'язками нерівності (2). А це означає, що нерівності (2) і (3) — рівносильні. ○

Аналогічно обґрунтовується рівносильність нерівностей $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ і $f(x) < g(x)$ при $0 < a < 1$.

У найпростіших випадках при розв'язуванні показникових нерівностей, як і при розв'язуванні показникових рівнянь, треба за допомогою основних формул дій над степенями звести (якщо це можливо) задану нерівність до виду $a^{f(x)} \gtrless a^{g(x)}$.

Для розв'язування більш складних показникових нерівностей найчастіше використовують заміну змінних або властивості відповідних функцій (ці методи розглянуто в § 20).

Аналогічно до розв'язування показникових рівнянь усі рівносильні перетворення нерівності завжди виконуються на її області допустимих значень (ОДЗ), тобто на спільній області визначення для всіх функцій, які входять до запису цієї нерівності. Для показникових нерівностей досить часто областю допустимих значень є множина всіх дійсних чисел. У цих випадках, як правило, ОДЗ не знаходять і не записують до розв'язання нерівності (див. приклад 1). Якщо ж у процесі розв'язування показникової нерівності рівносильні перетворення виконуються не на всій множині дійсних чисел, то доводиться згадувати про ОДЗ (див. приклад 2).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть нерівність $(0,6)^{x^2-7x+6} \geqslant 1$.

Розв'язання

▶ $(0,6)^{x^2-7x+6} \geqslant (0,6)^0$.

Оскільки функція $y=(0,6)^t$ є спадною, то $x^2-7x+6 \leqslant 0$.

Звідси $1 \leqslant x \leqslant 6$ (див. рисунок).

Відповідь: [1; 6]. ◁

Коментар

Запишемо праву частину нерівності як степінь числа 0,6: $1=(0,6)^0$.

Оскільки $0,6<1$, то при переході від степенів до показників знак нерівності змінюється на протилежний (одержуємо нерівність, рівносильну заданій).

Для розв'язування одержаної квадратної нерівності використаємо графічну ілюстрацію.

Приклад 2 Розв'яжіть нерівність $3^{\sqrt{x}}-3^{2-\sqrt{x}} \leqslant 8$.

Розв'язання

▶ОДЗ: $x \geqslant 0$.

$$3^{\sqrt{x}}-\frac{3^2}{3^{\sqrt{x}}} \leqslant 8.$$

Заміна $3^{\sqrt{x}}=t$ $(t>0)$ дає нерівність $t-\frac{9}{t} \leqslant 8$, яка рівносильна нерівності

$$\frac{t^2-8t-9}{t} \leqslant 0.$$

Оскільки $t>0$, одержуємо $t^2-8t-9 \leqslant 0$. Звідси $-1 \leqslant t \leqslant 9$. Ураховуючи, що $t>0$, маємо

$$0<t \leqslant 9.$$

Виконуючи обернену заміну, одержуємо $0<3^{\sqrt{x}} \leqslant 9$.

Тоді

$$3^{\sqrt{x}} \leqslant 3^2.$$

Функція $y=3^t$ — зростаюча, отже, $\sqrt{x} \leqslant 2$. Ураховуючи ОДЗ, одержуємо

$$0 \leqslant x \leqslant 4.$$

Відповідь: [0; 4]. ◁

Коментар

Оскільки рівносильні перетворення нерівностей виконуються на ОДЗ початкової нерівності, то зафіксуємо цю ОДЗ. Використовуючи формулу $a^{u-v}=\frac{a^u}{a^v}$, позбуваємося числового доданка в показнику степеня й одержуємо степені з однією основою 3, що дозволяє ввести заміну $3^{\sqrt{x}}=t$, де $t>0$.

В одержаній нерівності знаменник додатний, тому цю дробову нерівність можна звести до рівносильної їй квадратної.

Після виконання оберненої заміни треба врахувати не тільки зростання функції $y=3^t$, а й ОДЗ початкової нерівності.

Приклад 3* Розв'яжіть нерівність $2^{2x+1} - 5\cdot 6^x + 3^{2x+1} > 0$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Позначимо $f(x) = 2^{2x+1} - 5\cdot 6^x + 3^{2x+1}$.	Задану нерівність можна розв'язувати або зведенням до алгебраїчної нерівності, або методом інтервалів. Для розв'язування її методом інтервалів використаємо схему, наведену в табл. 20.

Розв'язання

▶ Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Позначимо

$$f(x) = 2^{2x+1} - 5\cdot 6^x + 3^{2x+1}.$$

1. ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$.

2. Нулі функції: $f(x) = 0$.

$$2^{2x+1} - 5\cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0,$$

$$2^{2x}\cdot 2 - 5\cdot 6^x + 3^{2x}\cdot 3 = 0,$$

$$2\cdot 2^{2x} - 5\cdot 2^x\cdot 3^x + 3\cdot 3^{2x} = 0 \,\Big|\, : 3^{2x} \neq 0,$$

$$2\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 3 = 0.$$

Заміна $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = t$. Одержуємо

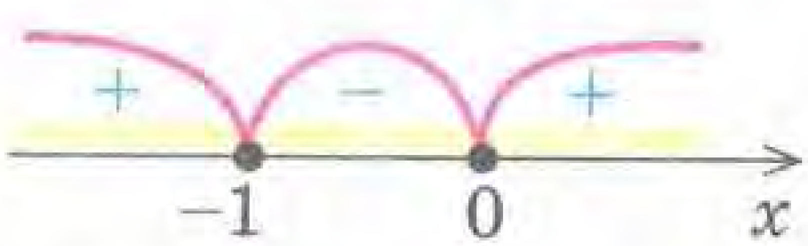
$$2t^2 - 5t + 3 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = \frac{3}{2}.$$

Обернена заміна дає:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = 1 \text{ або } \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{3}{2}.$$

Звідси $x = 0$ або $x = -1$.

3. Відмічаємо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з одержаних проміжків і записуємо розв'язки нерівності $f(x) > 0$.



Відповідь: $(-\infty;\ -1) \cup (0;\ +\infty)$. ◁

Коментар

Задану нерівність можна розв'язувати або зведенням до алгебраїчної нерівності, або методом інтервалів. Для розв'язування її методом інтервалів використаємо схему, наведену в табл. 20.

При знаходженні нулів функції зведемо всі степені до двох основ (2 і 3), щоб одержати однорідне рівняння. Це рівняння розв'язується діленням обох частин на найвищий степінь одного з видів змінних — на 3^{2x}. Ураховуючи, що $3^{2x} \neq 0$ при всіх значеннях x, у результаті ділення на 3^{2x} одержуємо рівняння, рівносильне попередньому.

Звичайно, для розв'язування заданої нерівності можна було врахувати, що $3^{2x} > 0$ завжди, і після ділення заданої нерівності на 3^{2x} та заміни $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = t$ одержати алгебраїчну нерівність.

Приклад 4* Розв'яжіть нерівність $(3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leqslant 0$.

Коментар

Задану нестрогу нерівність зручно теж розв'язувати методом інтервалів. Записуючи відповідь, треба враховувати, що *у випадку, коли ми розв'язуємо нестрогу нерівність $f(x) \leqslant 0$, усі нулі функції $f(x)$ мають увійти до відповіді.*

Розв'язання

▶ Позначимо $f(x)=(3^x-9)\sqrt{x^2-2x-8}$.

1. ОДЗ: $x^2-2x-8 \geqslant 0$. Тоді $x \leqslant -2$ або $x \geqslant 4$ (див. рисунок).
2. Нулі функції: $f(x)=0$.
$(3^x-9)\sqrt{x^2-2x-8}=0$.

Тоді $3^x-9=0$ або $\sqrt{x^2-2x-8}=0$.

З першого рівняння: $x=2$ — не входить до ОДЗ; з другого: $x_1=-2$, $x_2=4$.

3. Позначаємо нулі $f(x)$ на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ, і записуємо розв'язки нерівності $f(x) \leqslant 0$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -2]$ або $x=4$. ◁

Запитання для контролю

1. Поясніть, у яких випадках показникові нерівності $a^x > b$ та $a^x < b$ (де $a>0$ і $a \neq 1$) мають розв'язки. У яких випадках дані нерівності не мають розв'язків? Наведіть приклади. Проілюструйте ці приклади графічно.
2. Якій нерівності рівносильна показникова нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ при $a>1$? При $0<a<1$? Наведіть приклади.

Вправи

1. Розв'яжіть нерівність (1–4).

1°) $2^x > 1$; 2°) $2^x > \frac{1}{2}$; 3) $3^x > 0$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 0$;

5°) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 9$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \leqslant 4$; 7°) $5^x \geqslant 25\sqrt{5}$; 8) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} < 16$;

9*) $(0,3)^{\frac{x^2-7x+6}{x-3}} \leqslant 1$; 10*) $(1,3)^{\frac{x^2-9x+8}{x-4}} \geqslant 1$.

2. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > \frac{5}{2}$; 2°) $3^{x+2}+3^{x-1} < 28$; 3) $3^{2x+1}+8\cdot 3^x-3 \geqslant 0$;

4) $6^{2x-1}-\frac{1}{3}\cdot 6^x-4 \leqslant 0$; 5) $4^x-2^{x+1}-8>0$; 6) $9^x-12\cdot 3^x+27 \leqslant 0$.

3. 1) $3^x > 5^x$; 2) $7^{x-1} \leqslant 2^{x-1}$;

3*) $2^{2x+1}-5\cdot 6^x+3^{2x+1} \geqslant 0$; 4*) $5\cdot 3^{2x}+15\cdot 5^{2x-1} \leqslant 8\cdot 15^x$.

4*. 1) $(2^x-2)\sqrt{x^2-x-6} \geqslant 0$; 2) $(3^{x-2}-1)\sqrt{x^2-2x-8} \leqslant 0$;

3) $\sqrt{6\cdot 3^x-2} > 3^x+1$; 4) $\sqrt{2\cdot 5^{x+1}-1} > 5^x+2$.

§ 15 ЛОГАРИФМ ЧИСЛА. ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІВ

Таблиця 21

1. Логарифм числа	
Означення	Приклади
Логарифмом додатного числа b за основою a (a > 0, a ≠ 1) називають показник степеня, до якого треба піднести a, щоб одержати b. Позначення: $\log_a b$.	1) $\log_4 16 = 2$, оскільки $4^2 = 16$; 2) $\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$, оскільки $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$; 3) $\lg 1000 = 3$, оскільки $10^3 = 1000$.
Десятковий логарифм — це логарифм за основою 10. Позначення: $\log_{10} b = \lg b$.	
Натуральний логарифм — це логарифм за основою e (*e* — ірраціональне число, наближене значення якого $e \approx 2{,}7$). Позначення: $\log_e b = \ln b$.	4) $\ln \frac{1}{e^2} = -2$, оскільки $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$.
2. Основна логарифмічна тотожність	
$\boxed{a^{\log_a b} = b}$ $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$	1) $3^{\log_3 5} = 5$; 2) $10^{\lg 2} = 2$.
3. Властивості логарифмів і формули логарифмування ($a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y > 0$)	
1) $\boxed{\log_a 1 = 0}$	*Логарифм одиниці за будь-якою основою дорівнює нулю.*
2) $\boxed{\log_a a = 1}$	
3) $\boxed{\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y}$	*Логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів множників.*
4) $\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$	*Логарифм частки додатних чисел дорівнює різниці логарифмів діленого й дільника.*
5) $\boxed{\log_a x^n = n \log_a x}$	*Логарифм степеня додатного числа дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня.*

Закінчення табл. 21

4. Формула переходу до логарифмів з іншою основою	
$\boxed{\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}}$ $\quad a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ x > 0$	
Наслідки	
$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$	$\log_a b = \log_{a^k} b^k$

Пояснення й обґрунтування

1. Логарифм числа. Якщо розглянути рівність $2^3 = 8$, то, знаючи будь-які два числа з цієї рівності, можна знайти третє.

Задана рівність	Що відомо	Що знаходимо	Запис	Назва
$2^3 = 8$	числа 2 і 3	число 8	$8 = 2^3$	**степінь**
	числа 8 і 3	число 2	$2 = \sqrt[3]{8}$	**корінь третього степеня**
	числа 8 і 2	число 3	$3 = \log_2 8$	**логарифм**

Перші дві операції, представлені в таблиці (піднесення до степеня й добування кореня n-го степеня), нам уже відомі, а з третьою — логарифмуванням, тобто знаходженням логарифму заданого числа, — ми ознайомимося в цьому параграфі.

У загальному вигляді операція логарифмування дозволяє з рівності $a^x = b$ (де $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$) знайти показник x. Результат виконання цієї операції позначається $\log_a b$. Отже,

логарифмом додатного числа b за основою a **($a > 0$, $a \neq 1$) називають показник степеня, до якого треба піднести a, щоб одержати b.**

Наприклад: 1) $\log_2 8 = 3$, оскільки $2^3 = 8$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{4}\right) = 2$, оскільки $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$;

3) $\log_4\left(\dfrac{1}{16}\right) = -2$, оскільки $4^{-2} = \dfrac{1}{16}$.

Зазначимо, що при додатних b і a ($a \neq 1$) рівняння $a^x = b$ завжди має єдиний розв'язок, оскільки функція $y = a^x$ набуває всіх значень з проміжку $(0; +\infty)$ і при $a > 1$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ — спадною (рис. 15.1).

Отже, кожного свого значення $b > 0$ функція a^x набуває тільки при одному значенні x. Таким чином, *для будь-яких додатних чисел b і a ($a \neq 1$) рівняння $a^x = b$ має єдиний корінь $x = \log_a b$.*

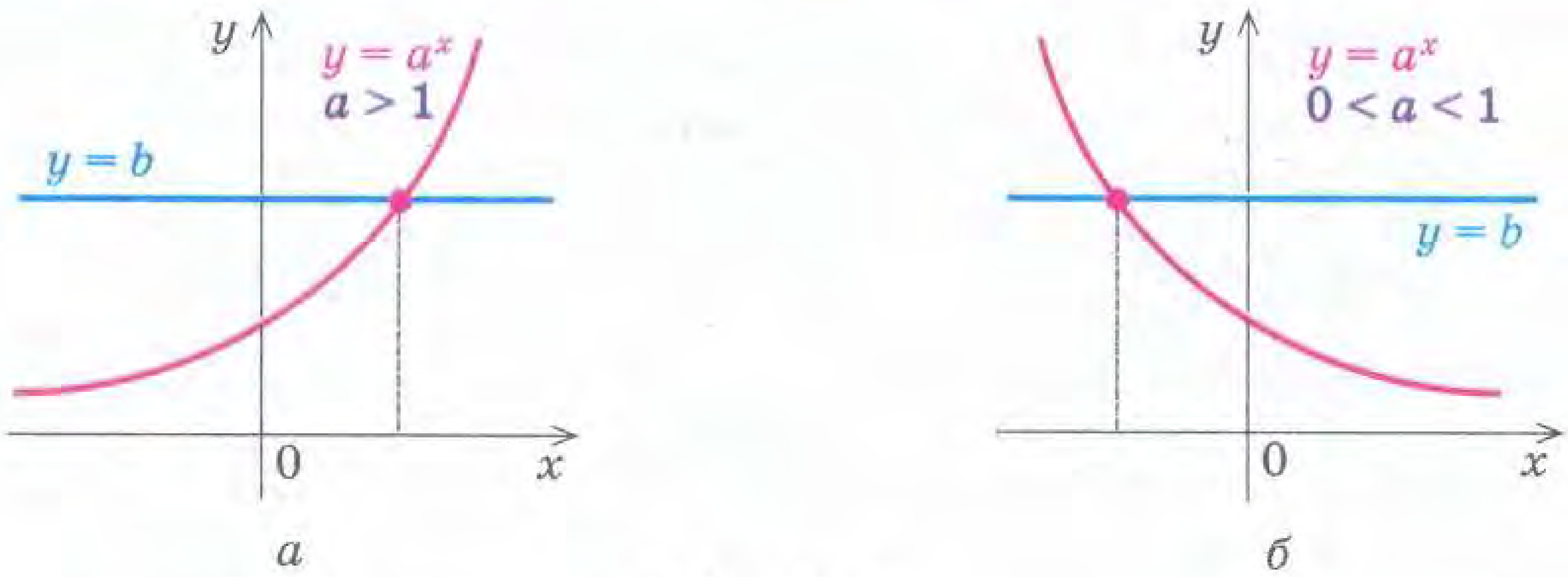


Рис. 15.1

При $b \leqslant 0$ рівняння $a^x = b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ не має коренів, отже, *при $b \leqslant 0$ значення виразу $\log_a b$ не існує.*

Наприклад, не існують значення $\log_3 (-9)$, $\log_{\frac{1}{2}} (-7)$, $\log_2 0$.

Зазначимо, що *логарифм за основою 10 називають десятковим логарифмом і позначають* lg.

Наприклад, $\log_{10} 7 = \lg 7$, $\lg 100 = \log_{10} 100 = 2$.

У недалекому минулому десятковим логарифмам віддавали перевагу й складали дуже детальні таблиці десяткових логарифмів, які використовувалися в різних обчисленнях. В епоху загальної комп'ютеризації десяткові логарифми втратили свою провідну роль. У сучасній науці й техніці широко використовуються логарифми, основою яких є особливе число e (таке саме знамените, як і число π). Число e, як і число π, — ірраціональне, $e = 2{,}718281828459045\ldots$. *Логарифм за основою e називають натуральним логарифмом і позначають* ln.

Наприклад, $\log_e 7 = \ln 7$, $\ln\frac{1}{e} = \log_e \frac{1}{e} = -1$.

2. Основна логарифмічна тотожність. За означенням логарифма, якщо $\log_a b = x$, то $a^x = b$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$. Підставляючи в останню рівність замість x його значення, одержуємо рівність, яка називається *основною логарифмічною тотожністю*:

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}, \text{ де } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0.$$

Наприклад: 1) $5^{\log_5 9} = 9$; 2) $10^{\lg 7} = 7$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 2} = 2$.

3. Властивості логарифмів і формули логарифмування. У всіх наведених нижче формулах $a > 0$ і $a \neq 1$.

1) З означення логарифма одержуємо, що

$$\boxed{\log_a 1 = 0},$$

оскільки $a^0 = 1$ (при $a > 0$, $a \neq 1$). Отже, *логарифм одиниці за будь-якою основою дорівнює нулю.*

2) Оскільки $a^1 = a$, то

$$\boxed{\log_a a = 1}.$$

3) Щоб одержати формулу логарифма добутку xy ($x > 0$, $y > 0$), позначимо $\log_a x = u$ й $\log_a y = v$. Тоді за означенням логарифма

$$x = a^u \text{ і } y = a^v. \qquad (1)$$

Перемноживши почленно дві останні рівності, маємо $xy = a^{u+v}$. За означенням логарифма й з урахуванням уведених позначень з останньої рівності одержуємо

$$\log_a (xy) = u + v = \log_a x + \log_a y.$$

Отже,

$$\boxed{\mathbf{\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y}}. \qquad (2)$$

Логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів множників.

4) Аналогічно, щоб одержати формулу логарифма частки $\frac{x}{y}$ ($x > 0$, $y > 0$), досить поділити почленно рівності (1). Тоді $\frac{x}{y} = a^{u-v}$. За означенням логарифма й з урахуванням уведених позначень з останньої рівності одержуємо $\log_a \frac{x}{y} = u - v = \log_a x - \log_a y$.

Отже,

$$\boxed{\mathbf{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}}. \qquad (3)$$

Логарифм частки додатних чисел дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника.

5) Щоб одержати формулу логарифма степеня x^n (де $x > 0$), позначимо $\log_a x = u$. За означенням логарифма $x = a^u$, тоді $x^n = a^{nu}$. За означенням логарифма й з урахуванням позначення для u маємо $\log_a x^n = nu = n \log_a x$. Отже,

$$\boxed{\mathbf{\log_a x^n = n \log_a x}}. \qquad (4)$$

Логарифм степеня додатного числа дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня. ○

Ураховуючи, що при $x > 0$ $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, за формулою (4) маємо $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$. Таким чином, при $x > 0$ можна користуватися формулою

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$$

(можна не запам'ятовувати цю формулу, а кожного разу записувати корінь з додатного числа як відповідний степінь).

Зауваження. Інколи доводиться знаходити логарифм добутку xy і в тому випадку, коли числа x і y — від'ємні ($x < 0$, $y < 0$). Тоді $xy > 0$ і $\log_a(xy)$ існує, але формулою (2) скористатися не можна — вона обґрунтована тільки для додатних значень x і y. У випадку $xy > 0$ маємо $xy = |x| \cdot |y|$, і тепер $|x| > 0$ та $|y| > 0$, отже, для логарифма добутку $|x| \cdot |y|$ можна скористатися формулою (2). Тому при $x < 0$ і $y < 0$ можемо записати

$$\log_a(xy) = \log_a(|x| \cdot |y|) = \log_a|x| + \log_a|y|.$$

Одержана формула справедлива й при $x > 0$ та $y > 0$, оскільки в цьому випадку $|x| = x$ і $|y| = y$. Отже,

при $xy > 0$ $\boxed{\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|}$. (2′)

Аналогічно можна узагальнити й формули (3) та (4):

при $\frac{x}{y} > 0$ $\boxed{\log_a\frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|}$, (3′)

при $x \neq 0$ $\boxed{\log_a x^{2k} = 2k\log_a|x|}$. (4′)

4. Формула переходу до логарифмів з іншою основою

Нехай $\log_a x = u$ ($x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$). Тоді за означенням логарифма $a^u = x$. Прологарифмуємо обидві частини останньої рівності за основою b ($b > 0$, $b \neq 1$). Одержимо $\log_b a^u = \log_b x$.

Використовуючи в лівій частини цієї рівності формулу логарифма степеня, маємо $u\log_b a = \log_b x$. Тоді $u = \frac{\log_b x}{\log_b a}$. Ураховуючи, що $u = \log_a x$,

одержуємо $\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$,

де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$.

Отже, *логарифм додатного числа x за старою основою a дорівнює логарифму цього самого числа x за новою основою b, поділеному на логарифм старої основи a за новою основою b.* ○

За допомогою останньої формули можна одержати такі наслідки:

1) $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a}$. Ураховуючи, що $\log_b b = 1$, маємо $\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$,

де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$;

2) аналогічно, ураховуючи формулу переходу від однієї основи логарифма до іншої й формулу логарифма степеня, одержуємо (при $k \neq 0$)

$$\log_{a^k} b^k = \frac{\log_a b^k}{\log_a a^k} = \frac{k \log_a b}{k} = \log_a b.$$

Записавши одержану формулу справа наліво, маємо

$$\boxed{\log_a b = \log_{a^k} b^k},$$

де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $k \neq 0$.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Обчисліть: 1) $\log_5 125$; 2) $\log_{\frac{1}{27}} 3$.

Розв'язання	*Коментар*
1) ▶ $\log_5 125 = 3$, оскільки $5^3 = 125$; ◁ 2) ▶ $\log_{\frac{1}{27}} 3 = -\frac{1}{3}$, оскільки $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{27}}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$ ◁	Ураховуючи означення логарифма, потрібно підібрати такий показник степеня, щоб при піднесенні основи логарифма до цього степеня одержати число, яке стоїть під знаком логарифма.

Приклад 2 Запишіть розв'язки найпростіших показникових рівнянь:

1) $5^x = 3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 10$; 3) $10^x = \frac{1}{3}$.

Розв'язання	*Коментар*
За означенням логарифма: 1) ▶ $x = \log_5 3$; ◁ 2) ▶ $x = \log_{\frac{1}{3}} 10$; ◁ 3) ▶ $x = \lg \frac{1}{3}$. ◁	Для будь-яких додатних чисел b і a ($a \neq 1$) рівняння $a^x = b$ має єдиний корінь. Показник степеня x, до якого потрібно піднести основу a, щоб одержати b, називається логарифмом b за основою a, тому $x = \log_a b$.

Приклад 3 Виразіть логарифм за основою 3 виразу $\frac{27a^2}{\sqrt[5]{b}}$ (де $a > 0$ і $b > 0$) через логарифми за основою 3 чисел a і b. (Коротко кажуть: «прологарифмуйте заданий вираз за основою 3».)

Розв'язання	*Коментар*
▶ $\log_3 \frac{27a^2}{\sqrt[5]{b}} = \log_3 \frac{3^3 a^2}{b^{\frac{1}{5}}} =$ $= \log_3 (3^3 a^2) - \log_3 b^{\frac{1}{5}} =$ $= \log_3 (3^3) + \log_3 a^2 - \log_3 b^{\frac{1}{5}} =$ $= 3\log_3 3 + 2\log_3 a - \frac{1}{5}\log_3 b =$ $= 3 + 2\log_3 a - \frac{1}{5}\log_3 b.$ ◁	Спочатку запишемо вирази в чисельнику й знаменнику заданого виразу як степені чисел і букв. Потім урахуємо, що логарифм частки $\frac{3^3 a^2}{b^{\frac{1}{5}}}$ додатних чисел дорівнює різниці логарифмів чисельника і знаменника, а потім те, що логарифм добутку (3^3a^2) дорівнює сумі логарифмів множників.

Приклад 4 Відомо, що $\log_2 5 = a$, $\log_2 7 = b$. Виразіть $\log_2 700$ через a і b.

Розв'язання	*Коментар*
▶ $\log_2 700 = \log_2 (7 \cdot 5^2 \cdot 2^2) =$ $= \log_2 7 + \log_2 5^2 + \log_2 2^2 =$ $= \log_2 7 + 2\log_2 5 + 2\log_2 2 =$ $= b + 2a + 2.$ ◁	Спочатку подамо число 700 як добуток степенів заданих чисел 5 і 7 та основи логарифма 2, а потім використаємо властивості логарифмів та підставимо в одержаний вираз значення $\log_2 5$ та $\log_2 7$.

Приклад 5* Прологарифмуйте за основою 10 вираз $\frac{ab^3}{c^2}$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Якщо $\frac{ab^3}{c^2} > 0$, то $\lg \frac{ab^3}{c^2} = \lg \lvert ab^3 \rvert - \lg \lvert c^2 \rvert =$ $= \lg (\lvert a \rvert \cdot \lvert b^3 \rvert) - \lg \lvert c \rvert^2 =$ $= \lg \lvert a \rvert + \lg \lvert b^3 \rvert - 2\lg \lvert c \rvert =$ $= \lg \lvert a \rvert + 3\lg \lvert b \rvert - 2\lg \lvert c \rvert.$ ◁	Оскільки логарифми існують тільки для додатних чисел, то ми можемо прологарифмувати заданий вираз тільки у випадку, коли $\frac{ab^3}{c^2} > 0$. З умови не випливає, що в заданому виразі значення a, b, c додатні. Тому будемо користуватися узагальненими формулами логарифмування (2′–4′), а також урахуємо, що $\lvert ab^3 \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert b^3 \rvert$, $\lvert b^3 \rvert = \lvert b \rvert^3$, $\lvert c^2 \rvert = \lvert c \rvert^2$.

Інколи доводиться шукати вираз, знаючи його логарифм. Таку операцію називають *потенціюванням*.

Приклад 6 Знайдіть x за його логарифмом:

1) $\lg x = \lg 5 - 2 \lg 3 + 3 \lg 2$;

2) $\log_a x = \frac{1}{2}\log_a b + 5\log_a c - \log_a p$.

Розв'язання	*Коментар*
1) ▶ $\lg x = \lg 5 - 2 \lg 3 + 3 \lg 2$, $\lg x = \lg 5 - \lg 3^2 + \lg 2^3$, $\lg x = \lg \frac{5\cdot 2^3}{3^2}$, $x = \frac{5\cdot 2^3}{3^2} = \frac{40}{9}$; ◁ 2) ▶ $\log_a x = \frac{1}{2}\log_a b + 5\log_a c - \log_a p$, $\log_a x = \log_a b^{\frac{1}{2}} + \log_a c^5 - \log_a p$, $\log_a x = \log_a \frac{b^{\frac{1}{2}}c^5}{p}$, $x = \frac{b^{\frac{1}{2}}c^5}{p}$. ◁	Користуючись формулами логарифмування справа наліво, запишемо праві частини заданих рівностей у вигляді логарифма від якогось виразу. З одержаної рівності $\log_a x = \log_a M$ (1) отримуємо $x = M$ (як буде показано в § 16, значення x, що задовольняє рівність (1), — єдине).

Приклад 7* Обчисліть значення виразу $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2}\log_5 4}$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Оскільки $\log_{\sqrt{3}} 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 \sqrt{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\log_5 3} = \frac{2}{\log_5 3}$, то $\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} = \frac{4}{\frac{2}{\log_5 3}} = 2\log_5 3 = \log_5 3^2 = \log_5 9$. Крім того, $\frac{1}{2}\log_5 4 = \log_5 4^{\frac{1}{2}} = \log_5 \sqrt{4} = \log_5 2$. Тоді $\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2}\log_5 4 = \log_5 9 + \log_5 2 = \log_5 (9\cdot 2) = \log_5 18$. Отже, $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2}\log_5 4} = 5^{\log_5 18} = 18$. ◁	Спробуємо привести показник степеня заданого виразу до виду $\log_5 b$, щоб можна було скористатися основною логарифмічною тотожністю: $5^{\log_5 b} = b$. Для цього перейдемо в показнику степеня до однієї основи логарифма (до основи 5).

Запитання для контролю

1. Дайте означення логарифма додатного числа b за основою a ($a > 0$, $a \neq 1$).
2. Який логарифм називають десятковим і який натуральним? Наведіть приклади запису й обчислення таких логарифмів.
3. 1) Запишіть основну логарифмічну тотожність. Наведіть приклади її використання.
   2*) Обґрунтуйте основну логарифмічну тотожність.
4. 1) Запишіть і сформулюйте формули логарифмування. Наведіть приклади їх використання.
   2*) Обґрунтуйте формули логарифмування.
5. 1) Запишіть формулу переходу від однієї основи логарифма до іншої. Наведіть приклади її використання.
   2*) Обґрунтуйте формулу переходу від однієї основи логарифма до іншої.

6*. Чи можна в тому випадку, коли значення x і y від'ємні, прологарифмувати вирази: xy, $\frac{x}{y}$, x^4? Як це зробити? Обґрунтуйте відповідні формули.

Вправи

1°. Перевірте правильність рівності:

1) $\log_2 16 = 4$; 2) $\log_3 27 = 3$; 3) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$;
4) $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$; 5) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$; 6) $\log_{0,2} 0{,}008 = 3$.

2. Обчисліть:

1°) $\log_5 25$; 2°) $\log_4 64$; 3°) $\log_3 \frac{1}{9}$; 4°) $\log_6 \sqrt{6}$;
5) $\log_9 \frac{1}{27}$; 6°) $\log_{\frac{1}{7}} 1$; 7*) $\log_2 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$; 8*) $\log_7 \sqrt[5]{7\sqrt[4]{7}}$;
9*) $\log_{7+4\sqrt{3}} (7-4\sqrt{3})$; 10*) $\log_{9-4\sqrt{5}} (9+4\sqrt{5})$.

3°. Користуючись означенням логарифма, запишіть розв'язки найпростіших показникових рівнянь:

1) $4^x = 9$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 15$; 3) $10^x = 11$;
4) $5^x = 19$; 5) $0{,}2^x = 0{,}7$; 6) $e^x = 3$.

4. Користуючись основною логарифмічною тотожністю, спростіть вираз:

1) $5^{\log_5 7}$; 2) $3^{\log_3 4}$; 3) $\sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}}$;
4) $3{,}5^{\log_{3,5} 13}$; 5*) $7^{1+\log_7 2}$; 6*) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 6 - 2}$.

5. Прологарифмуйте вираз за заданою основою, знаючи, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$:

1°) $10a^3c^4$ за основою 10; 2) $\dfrac{0,1a^2b^5}{c^7}$ за основою 10;

3°) $a^2c\sqrt{b}$ за основою e; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}}{c^2}$ за основою e;

5°) $9a^7\sqrt[3]{b}$ за основою 3; 6) $\dfrac{a^{\frac{2}{5}}b^4}{c^{\frac{1}{2}}}$ за основою 3.

6*. Прологарифмуйте вираз за основою 10, знаючи, що $ab > 0$ і $c \neq 0$:

1) $a^3b^5c^8$; 2) $\dfrac{\sqrt[3]{ab}}{c^2}$; 3) $\dfrac{c^4}{(ab)^{\frac{2}{5}}}$; 4) $100\sqrt[5]{abc^2}$.

7. Відомо, що $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$. Виразіть через a і b:

1) $\log_5 15$; 2) $\log_5 12$; 3) $\log_5 30$; 4) $\log_5 72$.

8. Знайдіть x, якщо:

1) $\log_6 x = 3\log_6 2 + 0,5\log_6 25 - 2\log_6 3$;

2) $\lg x = \frac{1}{3}\lg(5a) - 2\lg b + 5\lg c$;

3) $\lg x = 3\lg m + \frac{2}{7}\lg n - \frac{1}{5}\lg p$;

4) $\log_3 x = \frac{1}{3}\log_3 8 - 2\log_3 20 - 3\log_3 2$.

9. Замініть даний логарифм логарифмом за основою 3:

1) $\log_{\frac{1}{3}} a$; 2) $\log_9 a$; 3) $\log_{\frac{1}{9}} a$; 4) $\log_{\sqrt{3}} a$; 5) $\log_2 a$.

10*. Обчисліть значення виразу:

1) $6^{\frac{6}{\log_{\sqrt{2}} 6} + \frac{1}{3}\log_6 27}$; 2) $3^{\frac{2}{\log_{\sqrt{5}} 3} + \frac{1}{4}\log_3 16}$;

3) $\log_4 5 \log_5 6 \log_6 7 \log_7 32$; 4) $\log_9 10 \lg 11 \log_{11} 12 \log_{12} 27$;

5) $\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right)49^{\log_7 2}$; 6) $15\log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt[5]{7} \cdot \frac{1}{49} \cdot 5^{\log_{\sqrt{5}} \sqrt[4]{49}}\right)$.

11*. Знайдіть

1) $\log_8 9$, якщо $\log_{12} 18 = a$;

2) $\log_9 15$, якщо $\log_{45} 25 = a$;

3) $\log_{175} 56$, якщо $\log_{14} 7 = a$ і $\log_5 14 = b$;

4) $\log_{150} 200$, якщо $\log_{20} 50 = a$ і $\log_3 20 = b$.

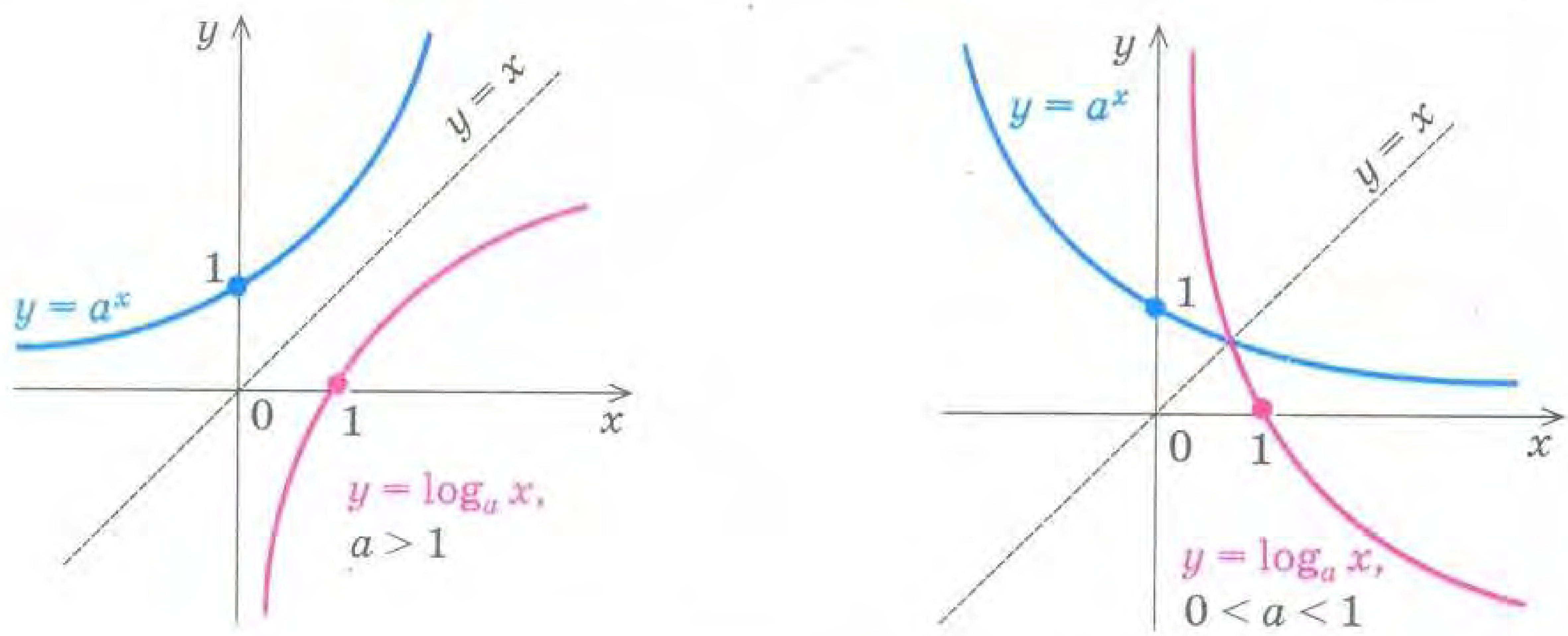
§ 16 ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

Таблиця 22

Означення. ***Логарифмічною функцією* називають функцію виду $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$.**

1. Графік логарифмічної функції

Функції $y = a^x$ та $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ — взаємно обернені функції, тому їх графіки симетричні відносно прямої $y = x$.



2. Властивості логарифмічної функції

1. *Область визначення:* $x > 0$. **$D(\log_a x) = (0; +\infty)$**
2. *Область значень:* $y \in R$. **$E(\log_a x) = R$**
3. *Функція* ***ні парна, ні непарна***.
4. *Точки перетину з осями координат:*

з віссю Oy $\boxed{\text{немає}}$ з віссю Ox $\begin{cases} y = 0, \\ x = 1 \end{cases}$

5. *Проміжки зростання і спадання:*

$a > 1$	$0 < a < 1$
функція $\log_a x$ *зростає на всій області визначення*	*функція* $\log_a x$ *спадає на всій області визначення*

6. *Проміжки знакосталості:*

$a > 1$	$0 < a < 1$
$y = \log_a x > 0$ при $x > 1$ $y = \log_a x < 0$ при $0 < x < 1$	$y = \log_a x > 0$ при $0 < x < 1$ $y = \log_a x < 0$ при $x > 1$

7. *Найбільшого і найменшого значень функція не має.*

Закінчення табл. 22

8.	$\log_a a = 1$ $\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v \quad (u > 0,\ v > 0)$ $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v \quad (u > 0,\ v > 0)$ $\log_a u^n = n \log_a u \quad (u > 0)$

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття логарифмічної функції та її графік. *Логарифмічною функцією називають функцію виду* $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Покажемо, що ця функція є оберненою до функції $y = a^x$.

Дійсно, показникова функція $f(x) = a^x$ при $a > 1$ зростає на множині $\boldsymbol{R}$, а при $0 < a < 1$ — спадає на множині $\boldsymbol{R}$. Область значень функції $f(x) = a^x$ — проміжок $(0; +\infty)$. Отже, як було показано в підручнику для 10 класу, функція $f(x)$ оборотна й має обернену функцію з областю визначення $(0; +\infty)$ і областю значень $\boldsymbol{R}$. Нагадаємо, що для запису формули оберненої функції досить з рівності $y = f(x)$ виразити x через y і в одержаній формулі $x = g(y)$ аргумент позначити через x, а функцію — через y.

Тоді з рівняння $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ за означенням логарифма одержуємо $x = \log_a y$ — формулу оберненої функції, у якій аргумент позначено через y, а функцію — через x. Змінюючи позначення на традиційні, маємо формулу $y = \log_a x$ — функції, оберненої до функції $y = a^x$.

Як відомо, графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Отже, графік функції $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ можна одержати з графіка функції $y = a^x$ симетричним відображенням відносно прямої $y = x$. На рис. 16.1 наведено графіки логарифмічних функцій при $a > 1$ та при $0 < a < 1$. Графік логарифмічної функції називають *логарифмічною кривою*.

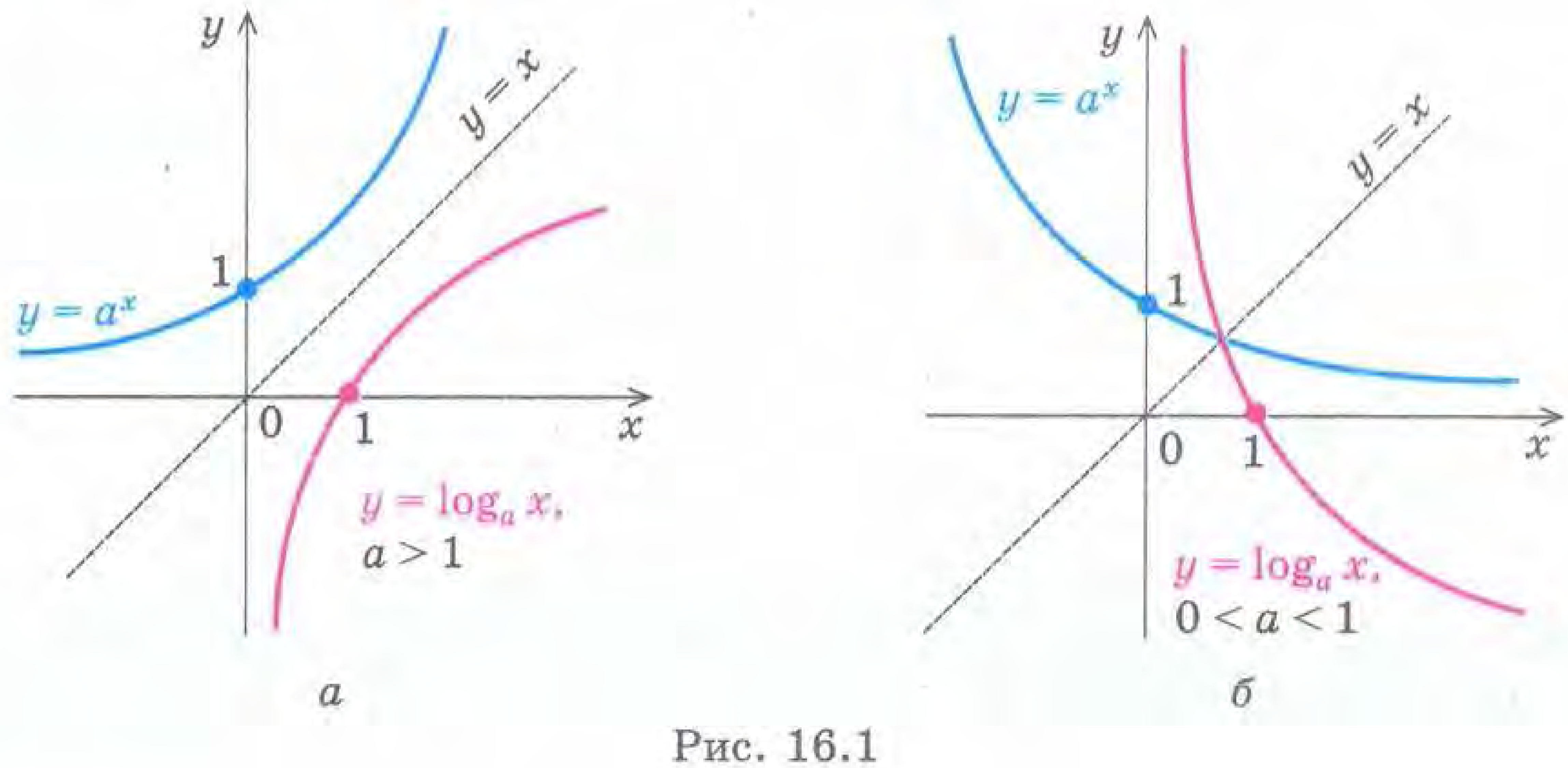


Рис. 16.1

2. Властивості логарифмічної функції. Властивості логарифмічної функції, наведені в п. 8 табл. 22, було обґрунтовано в § 15. Інші властивості функції $y = \log_a x$ або прочитаємо з одержаного графіка цієї функції, або обґрунтуємо їх, спираючись на властивості функції $y = a^x$.

Оскільки область визначення прямої функції є областю значень оберненої, а область значень прямої функції — областю визначення оберненої, то, знаючи ці характеристики для функції $y = a^x$, одержуємо відповідні характеристики для функції $y = \log_a x$:

Характеристика	Функція	
	$y = a^x$	$y = \log_a x$
Область визначення	$\boldsymbol{R}$	$(0; +\infty)$
Область значень	$(0; +\infty)$	$\boldsymbol{R}$

1. ***Областю визначення*** **функції $y = \log_a x$ є множина R_+ усіх додатних чисел ($x > 0$).**
2. *Областю значень функції $y = \log_a x$ є множина $\boldsymbol{R}$ усіх дійсних чисел* (тоді функція $y = \log_a x$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень).
3. Функція $y = \log_a x$ не може бути *ні парною, ні непарною,* оскільки її область визначення не симетрична відносно точки 0.
4. **Графік функції $y = \log_a x$ не перетинає вісь Oy,** оскільки на осі Oy $x = 0$, а це значення не входить до області визначення функції $y = \log_a x$.

   Графік функції $y = \log_a x$ перетинає вісь Ox у точці $x = 1$, оскільки $\log_a 1 = 0$ при всіх значеннях a ($a > 0$, $a \neq 1$).
5. З графіків функції $y = \log_a x$, наведених на рис. 16.1, видно, що ***при $a > 1$ функція $y = \log_a x$ зростає на всій області визначення, а при $0 < a < 1$ — спадає на всій області визначення.***

   Цю властивість можна обґрунтувати, спираючись не на вид графіка, а тільки на властивості функції $y = a^x$.

   Наприклад, при $a > 1$ візьмемо $x_2 > x_1 > 0$. За основною логарифмічною тотожністю можна записати: $x_1 = a^{\log_a x_1}$, $x_2 = a^{\log_a x_2}$. Тоді, ураховуючи, що $x_2 > x_1$, маємо $a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$. Оскільки при $a > 1$ функція $y = a^x$ зростаюча, то з останньої нерівності одержуємо $\log_a x_2 > \log_a x_1$. А це й означає, що при $a > 1$ функція $y = \log_a x$ зростає на всій області визначення. ○

   Аналогічно можна обґрунтувати, що при $0 < a < 1$ функція $y = \log_a x$ спадає на всій області визначення.
6. *Проміжки знакосталості.* Оскільки графік функції $y = \log_a x$ перетинає вісь Ox у точці $x = 1$, то, ураховуючи зростання функції при $a > 1$ та спадання при $0 < a < 1$, маємо:

Значення функції	Значення аргументу	
	при $a > 1$	при $0 < a < 1$
$y > 0$	$x \in (1; +\infty)$	$x \in (0; 1)$
$y < 0$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; +\infty)$

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \log_5 (3 - x)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 3)$; 3) $y = \log_7 (x^2 - x)$.

Розв'язання

1) $y = \log_5 (3 - x)$.

▶ Область визначення задається нерівністю $3 - x > 0$. Звідси $x < 3$, тобто

$$D(y) = (-\infty; 3). \triangleleft$$

2) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 3)$.

▶ Область визначення задається нерівністю $x^2 + 3 > 0$. Ця нерівність виконується при всіх дійсних значеннях x. Отже, $D(y) = \boldsymbol{R}$. ◁

3) $y = \log_7 (x^2 - x)$.

▶ Область визначення задається нерівністю $x^2 - x > 0$. Розв'язуючи цю квадратну нерівність, одержуємо $x < 0$ або $x > 1$ (див. рисунок). Отже, $D(y) = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. ◁

Коментар

Оскільки вираз, що стоїть під знаком логарифма, має бути додатним, то для знаходження області визначення заданої функції треба знайти ті значення аргументу x, при яких вираз, що стоїть під знаком логарифма, буде додатним.

Приклад 2 Зобразіть схематично графік функції:

1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Коментар

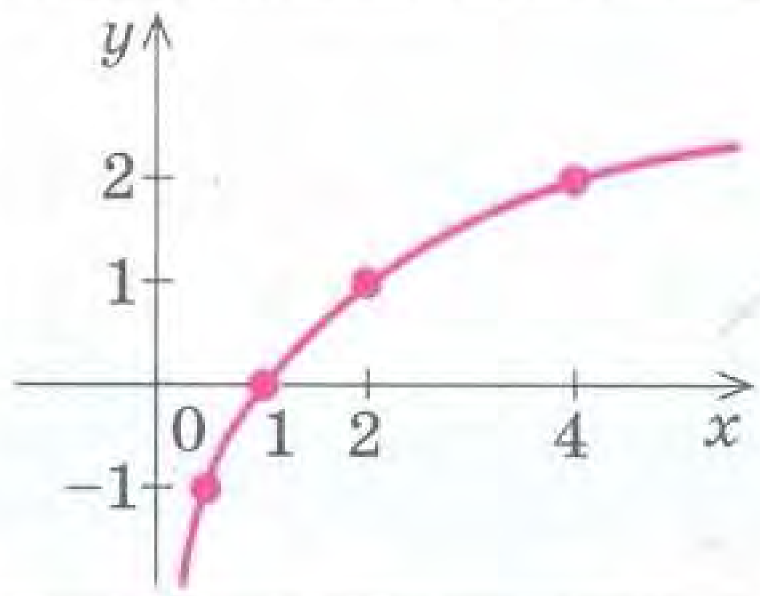
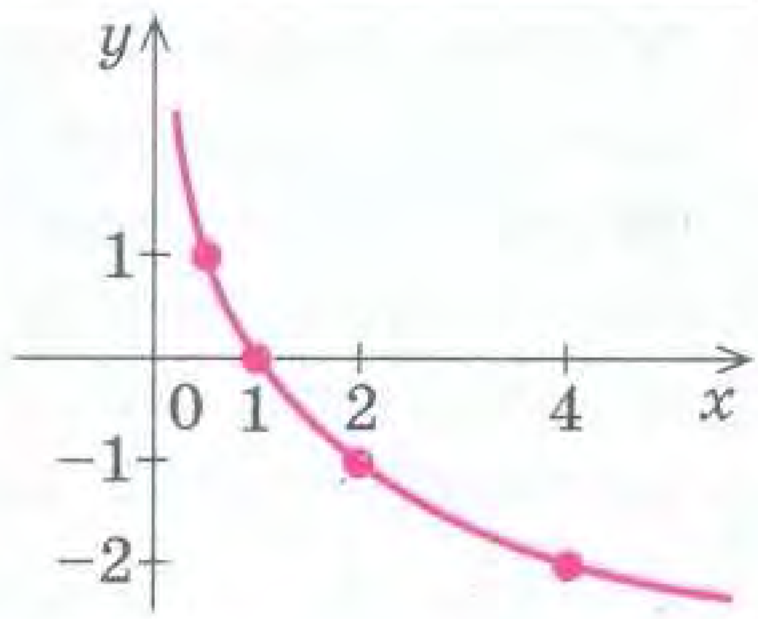
Область визначення функції $y = \log_a x$ — значення $x > 0$, отже, графік цієї функції завжди розташований праворуч від осі Oy. Цей графік перетинає вісь Ox у точці $x = 1$ ($\log_a 1 = 0$).

При $a > 1$ логарифмічна функція зростає, отже, графіком функції $y = \log_2 x$ буде логарифмічна крива, точки якої при збільшенні аргументу піднімаються вгору.

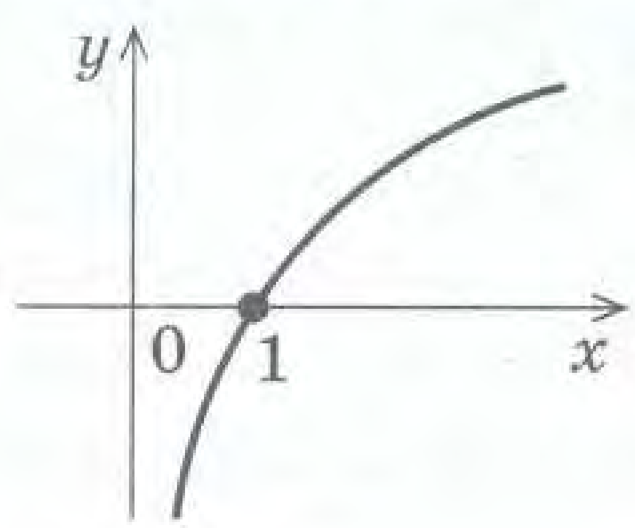
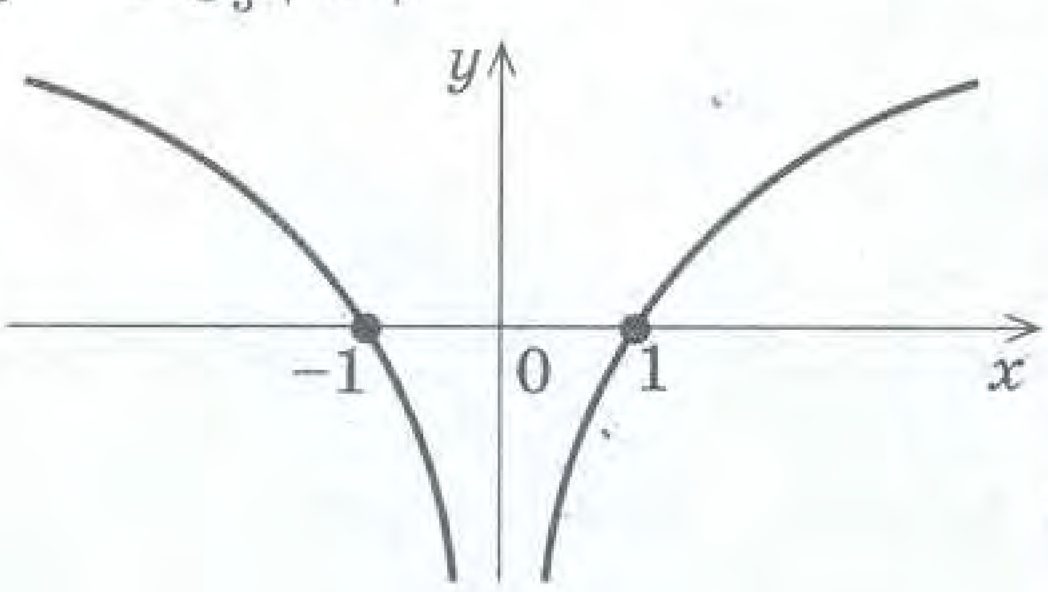
При $0 < a < 1$ логарифмічна функція спадає, отже, графіком функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ буде логарифмічна крива, точки якої при збільшенні аргументу опускаються вниз.

Щоб уточнити поведінку графіків заданих функцій, знайдемо координати кількох додаткових точок.

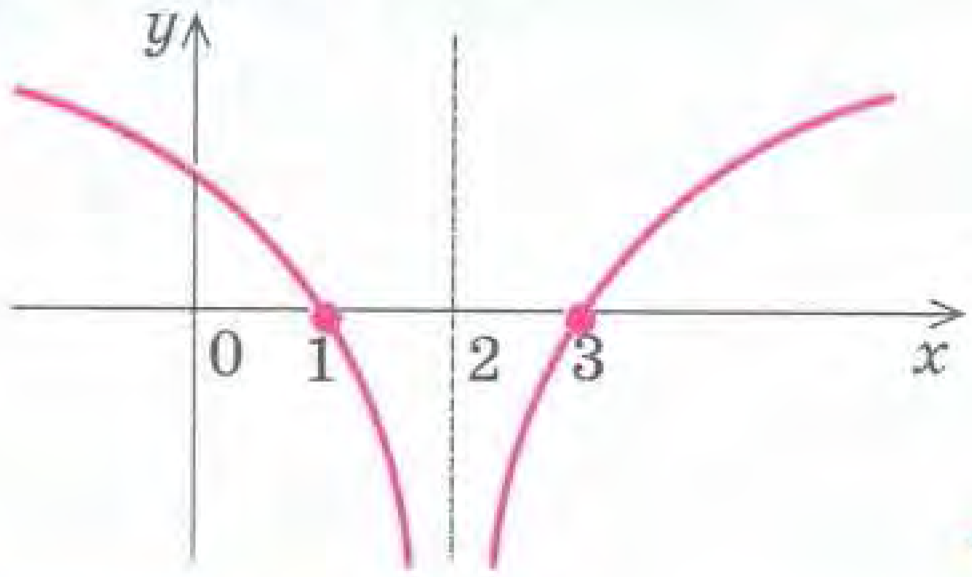
Розв'язання

▶ $y = \log_2 x$		x	1	$\frac{1}{2}$	2	4	
		y	0	−1	1	2	◁
▶ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$		x	1	$\frac{1}{2}$	2	4	
		y	0	1	−1	−2	◁

Приклад 3* Зобразіть схематично графік функції $y = \log_3 |x - 2|$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Послідовно будуємо графіки:	Складемо план послідовної побудови графіка заданої функції за допомогою геометричних перетворень.
1) $y = \log_3 x$ 	1. Ми можемо побудувати графік функції $y = f(x) = \log_3 x$ (основа логарифма $a = 3 > 1$ — логарифмічна функція зростає).
2) $y = \log_3 \lvert x \rvert$ 	2. Потім можна побудувати графік функції $y = g(x) = \log_3 \lvert x \rvert = f(\lvert x \rvert)$ (праворуч від осі Oy графік $f(x)$ залишається без зміни, і ця сама частина графіка симетрично відображується відносно осі Oy).

3) $y = \log_3 |x - 2|$



◁

3. Після цього можна побудувати графік заданої функції
$y = \log_3 |x - 2| = g(x - 2)$
паралельним перенесенням графіка функції $g(x)$ уздовж осі Ox на 2 одиниці.

Приклад 4 Порівняйте додатні числа b і c, знаючи, що:
1) $\log_3 b > \log_3 c$; 2) $\log_{0,3} b > \log_{0,3} c$.

Розв'язання

1) ▶Оскільки функція $y = \log_3 x$ — зростаюча, то для додатних чисел b і c з нерівності $\log_3 b > \log_3 c$ одержуємо $b > c$.◁

2) ▶Оскільки функція $y = \log_{0,3} x$ — спадна, то для додатних чисел b і c з нерівності $\log_{0,3} b > \log_{0,3} c$ одержуємо $b < c$. ◁

Коментар

У кожному завданні задані вирази — це значення логарифмічної функції $y = \log_a x$ у точках b і c.

Далі використовуємо зростання або спадання відповідної функції:
1) при $a = 3 > 1$ функція $y = \log_3 x$ є зростаючою, тому більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу;
2) при $a = 0,3 < 1$ функція $y = \log_{0,3} x$ є спадною, тому більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу.

Приклад 5 Порівняйте з одиницею додатне число a, знаючи, що $\log_a 6 < 0$.

Розв'язання

▶ Оскільки $6 > 1$, а з умови одержуємо, що $\log_a 6 < 0 = \log_a 1$ (тобто $\log_a 6 < \log_a 1$), то функція $y = \log_a x$ є спадною, отже, $0 < a < 1$.◁

Коментар

Числа $\log_a 6$ і 0 — це два значення функції $\log_a x$. Ураховуючи задану нерівність, з'ясовуємо, чи ця функція є зростаючою або спадною, і згадуємо, що вона зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$.

Запитання для контролю

1. Дайте означення логарифмічної функції.
2. Як розташовані графіки функцій $y = a^x$ та $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) відносно прямої $y = x$? Відповідь поясніть. Побудуйте ці графіки при $a > 1$ і при $0 < a < 1$.
3. Користуючись графіком функції $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), охарактеризуйте її властивості.

4*. Обґрунтуйте властивості функції $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

5. Ураховуючи зростання або спадання відповідної логарифмічної функції, порівняйте значення: а) $\log_5 7$ і $\log_5 3$; б) $\log_{\frac{1}{5}} 7$ і $\log_{\frac{1}{5}} 3$.

Вправи

1. Знайдіть область визначення функції:

1°) $y = \log_{11}(2x + 6)$; 2°) $y = \log_{\frac{1}{6}}(x - 3)$; 3) $y = \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 1)$;

4) $y = \log_{5,2}(3x - x^2)$; 5) $y = \log_{\frac{3}{8}}(2x^2 + 1)$; 6) $y = \log_{\pi}(x^2 + x + 1)$;

7*) $y = \log_{0,4}\dfrac{2x-6}{x+2}$; 8*) $y = \log_{\sqrt{7}}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$; 9*) $y = \log_{3,1}\dfrac{|x|+5}{|x|-3}$;

10*) $y = \log_x(2x - x^2)$; 11*) $y = \log_{2x-3}(5x - x^2)$.

Зобразіть схематично графік функції (**2**, **3**).

2. 1°) $y = \log_3 x$; 2°) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; 3°) $y = \log_{0,3} x$;

4) $y = \log_{\sqrt{5}} x$; 5) $y = \log_{\frac{1}{6}} x$; 6) $y = \log_{\sqrt{2}} x$.

3. 1) $y = \log_2(-x)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{4}}(x - 1)$; 3) $y = \log_4(x + 3)$;

4) $y = \log_4 x + 3$; 5) $y = -\log_6 x$; 6*) $y = |\log_3 |x||$;

7*) $y = \left|\log_{\frac{1}{2}}(2x - 4)\right|$; 8*) $y = \log_4\dfrac{x^2}{|x|}$; 9*) $y = \log_3 \log_3 x$.

4. Порівняйте числа:

1) $\log_2 3,5$ і $\log_2 4,5$; 2) $\log_{0,1} 1,3$ і $\log_{0,1} 1,1$; 3) $\log_{\frac{1}{5}} 2$ і $\log_{\frac{1}{5}} 5$;

4) $\log_{\sqrt{3}} 2,3$ і $\log_{\sqrt{3}} 0,2$; 5) $\log_{\pi} 5$ і $\log_{\pi} 7$; 6) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 10$ і $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 20$;

7) $\log_2 3$ і 0; 8) $\log_7 \dfrac{1}{3}$ і 0; 9) $\log_3 4$ і 1; 10) $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{1}{5}$ і 1.

5. Порівняйте додатні числа b і c, знаючи, що:

1) $\log_5 b > \log_5 c$; 2) $\log_{0,5} b > \log_{0,5} c$;

3) $\log_{\sqrt{7}} b < \log_{\sqrt{7}} c$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} b < \log_{\frac{1}{3}} c$.

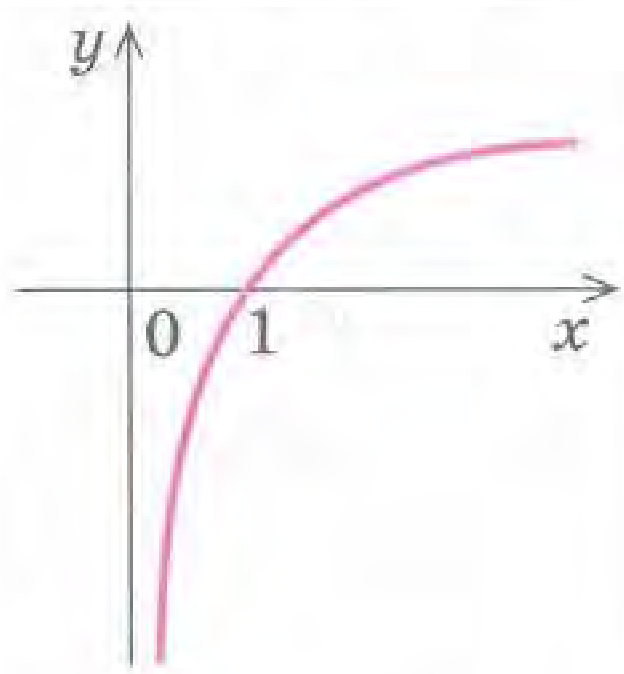
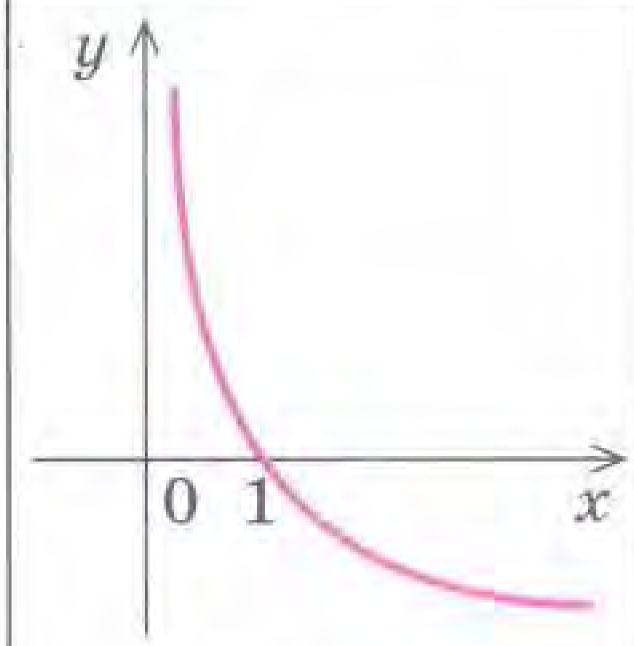
6. Порівняйте з одиницею додатне число a, знаючи, що:

1) $\log_a 5 > 0$; 2) $\log_a \dfrac{1}{3} > 0$; 3) $\log_a 2,3 < 0$; 4) $\log_a 0,2 < 0$.

§ 17 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

17.1. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ

Таблиця 23

<table>
<tr><td colspan="3">1. Основні означення та співвідношення</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Означення. Логарифмом додатного числа b за основою a ($a > 0$, $a \neq 1$) називають показник степеня, до якого треба піднести a, щоб одержати b.
$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$</td><td colspan="2">Графік функції $y = \log_a x$
($a > 0$, $a \neq 1$)</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>
зростає</td><td>
спадає</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td colspan="2">Приклад</td></tr>
<tr><td>Якщо a — число ($a > 0$ і $a \neq 1$), то
$\boxed{\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c}$
(використовуємо означення логарифма)</td><td colspan="2">$\log_3 (x - 1) = 2.$
▶ $x - 1 = 3^2,$
$x = 10.$
Відповідь: 10. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Використання рівнянь-наслідків</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td colspan="2">Приклад</td></tr>
<tr><td>Якщо з припущення, що перша рівність правильна, випливає правильність кожної наступної, то гарантуємо, що одержуємо рівняння-наслідки. При використанні наслідків не відбувається втрати коренів початкового рівняння, але можлива поява сторонніх коренів. Тому перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування.</td><td colspan="2">$\log_x (x + 2) = 2.$
▶ За означенням логарифма одержуємо
$x + 2 = x^2,$
$x^2 - x - 2 = 0,$
$x_1 = -1,\ x_2 = 2.$
Перевірка. $x = -1$ — сторонній корінь (в основі логарифма одержуємо від'ємне число);
$x = 2$ — корінь ($\log_2 (2 + 2) = 2,$
$\log_2 4 = 2,\ 2 = 2$).
Відповідь: 2. ◁</td></tr>
</table>

Закінчення табл. 23

<table>
<tr><td colspan="2">4. Рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь</td></tr>
<tr><td colspan="2">Заміна змінних</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>Якщо до рівняння (нерівності або тотожності) змінна входить в одному й тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз зі змінною позначити однією буквою (новою змінною).</td><td>$\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0.$
▶ Заміна: $\lg x = t$,
$t^2 - 2t - 3 = 0$, $t_1 = -1$, $t_2 = 3$.
Отже, $\lg x = -1$ або $\lg x = 3$. Тоді $x = 10^{-1} = 0{,}1$ або $x = 10^3 = 1000$.
Відповідь: 0,1; 1000. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a > 0$ і $a \neq 1)$</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ \left.\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{array}\right| \text{ОДЗ} \end{cases}}$$
(ураховуємо ОДЗ і прирівнюємо вирази, які стоять під знаками логарифмів).</td><td>$\log_3(x^2 - 2) = \log_3(4x - 5).$
▶ ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 2 > 0, \\ 4x - 5 > 0. \end{cases}$
На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням
$x^2 - 2 = 4x - 5$, $x^2 - 4x + 3 = 0$,
$x_1 = 1$, $x_2 = 3$.
$x = 1$ — сторонній корінь (не задовольняє умовам ОДЗ);
$x = 3$ — корінь (задовольняє умовам ОДЗ).
Відповідь: 3. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рівносильні перетворення рівнянь в інших випадках</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>1. Ураховуємо ОДЗ заданого рівняння (і уникаємо перетворень, які призводять до звуження ОДЗ).
2. Стежимо за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильної рівності.</td><td>$\log_2(x + 1) = 3 - \log_2(x + 3).$
▶ ОДЗ: $\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x + 3 > 0. \end{cases}$
На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням
$\log_2(x + 1) + \log_2(x + 3) = 3$,
$\log_2((x + 1)(x + 3)) = 3$,
$(x + 1)(x + 3) = 2^3$,
$x^2 + 4x - 5 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -5$.
$x = 1$ — корінь (задовольняє умовам ОДЗ);
$x = -5$ — сторонній корінь (не задовольняє умовам ОДЗ).
Відповідь: 1. ◁</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь. *Найпростішим логарифмічним рівнянням* звичайно вважають рівняння

$$\log_a x = c \ (a > 0 \text{ і } a \neq 1).$$

Логарифмічна функція зростає (або спадає) на всій своїй області визначення, тобто при $x > 0$ (див. графіки в п. 1 табл. 23), і тому кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргументу. Ураховуючи, що логарифмічна функція набуває всіх дійсних значень, рівняння

$$\log_a x = c \qquad (1)$$

завжди має єдиний корінь, який можна записати, скориставшись означенням логарифма:

$$x = a^c.$$

Якщо розглянемо рівняння

$$\log_a f(x) = c \qquad (2)$$

і виконаємо заміну змінної $f(x) = t$, то одержимо найпростіше логарифмічне рівняння $\log_a t = c$, яке має єдиний корінь $t = a^c$. Виконуючи обернену заміну, одержуємо, що розв'язки рівняння (2) збігаються з розв'язками рівняння

$$f(x) = a^c. \qquad (3)$$

Отже, рівняння (2) і (3) — рівносильні. Таким чином, ми обґрунтували, що *для рівносильного перетворення найпростішого логарифмічного рівняння* (1) або рівняння (2) (яке ми теж будемо відносити до найпростіших за умови, що основа a — число) *досить використати означення логарифма.*

Якщо позначити рівносильність рівнянь значком $\Leftrightarrow$, то коротко цей результат можна записати так:

$$\boxed{\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c}.$$

Нагадаємо, що всі рівносильні перетворення рівняння виконуються на його ОДЗ. Для рівняння (2) ОДЗ задається умовою $f(x) > 0$. Для всіх коренів рівняння (3) ця умова виконується автоматично (через те що $a > 0$). Тому *для найпростіших логарифмічних рівнянь ОДЗ можна не записувати* (оскільки вона враховується автоматично при переході від рівняння (2) до рівняння (3)).

Наприклад, рівняння $\log_5 (2x - 3) = 2$ рівносильне рівнянню $2x - 3 = 5^2$, корінь якого $x = 14$ і є коренем заданого рівняння. Аналогічно записано й розв'язання найпростішого рівняння $\log_3 (x - 1) = 2$ в табл. 23.

2. Використання рівнянь-наслідків при розв'язуванні логарифмічних рівнянь. При розв'язуванні рівняння головне — не загубити його корені, тому важливо стежити за тим, щоб кожен корінь першого рівняння залишався коренем наступного — у цьому випадку одержуємо рівняння-наслідки. Нагадаємо, що кожен корінь заданого рівняння перетворює його на правильну числову рівність. Використовуючи це означення, можна обґрунтувати такий орієнтир: *якщо з припущення про правильність першої рівності випливає правильність кожної наступної, ми одержуємо рівняння-наслідки* (оскільки кожен корінь першого рівняння буде коренем наступного рівняння). Нагадаємо, що хоча при використанні наслідків не відбувається втрати коренів початкового рівняння, але можлива поява сторонніх коренів. Тому *перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування при використанні рівнянь-наслідків.*

Приклад розв'язування логарифмічного рівняння за допомогою рівнянь-наслідків та оформлення такого розв'язання наведено в п. 3 табл. 23.

3. Рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь. Одним із часто використовуваних способів рівносильних перетворень рівнянь є **заміна змінної**.

Нагадаємо загальний орієнтир, якого ми дотримувалися при розв'язуванні рівнянь у 10 класі: *якщо до рівняння* (нерівності або тотожності) *змінна входить в одному й тому ж вигляді, то зручно відповідний вираз зі змінною позначити однією буквою* (*новою змінною*).

Наприклад, до рівняння $\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0$ змінна входить тільки у вигляді $\lg x$, тому для його розв'язування доцільно використати заміну $\lg x = t$, одержати квадратне рівняння $t^2 - 2t - 3 = 0$, яке має корені $t_1 = -1$ і $t_2 = 3$, а потім виконати обернену заміну й одержати найпростіші логарифмічні рівняння: $\lg x = -1$ і $\lg x = 3$. Тоді за означенням логарифма коренями заданого рівняння є $x = 10^{-1} = 0{,}1$ та $x = 10^3 = 1000$.

Враховуючи, що заміна змінної (разом з оберненою заміною) є рівносильним перетворенням рівняння на будь-якій множині, для виконання заміни не обов'язково знаходити ОДЗ заданого рівняння. А після виконання оберненої заміни ми одержали найпростіші логарифмічні рівняння, для яких (як було показано вище) ОДЗ враховується автоматично. Отже, у наведеному розв'язанні ОДЗ заданого рівняння врахована автоматично, і тому ОДЗ можна не записувати до розв'язання. Саме так й оформлено розв'язання цього рівняння в п. 4 табл. 23.

Розглянемо також **рівносильні перетворення рівняння виду**

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \ (a > 0 \text{ і } a \neq 1). \qquad (4)$$

Як уже відзначалося, усі рівносильні перетворення рівняння виконуються на його області допустимих значень. Для рівняння (4) ОДЗ задається системою нерівностей $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Оскільки логарифмічна функція $\log_a t$ зростає (при $a > 1$) або спадає (при $0 < a < 1$) на всій своїй області визначення й кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргументу, то рівність (4) може виконуватися (на ОДЗ) тоді й тільки тоді, коли $f(x) = g(x)$. Ураховуючи ОДЗ, одержуємо, що рівняння (4) рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = g(x), & (5) \\ f(x) > 0, & (6) \\ g(x) > 0. & (7) \end{cases}$$

Символічно одержаний результат зафіксовано в п. 4 табл. 23, а коротко його можна сформулювати так:

щоб розв'язати рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ за допомогою рівносильних перетворень, ураховуємо ОДЗ цього рівняння й прирівнюємо вирази, які стоять під знаками логарифмів. ○

Приклад використання цього орієнтира наведено в табл. 23.

Зауваження 1. Систему (5)–(7) можна спростити. Якщо в цій системі виконується рівність (5), то значення $f(x)$ і $g(x)$ рівні, тому коли одне з цих значень буде додатним, то друге теж буде додатним. Отже, рівняння (4) рівносильне системі, яка складається з рівняння (5) і однієї з нерівностей (6) або (7) (звичайно вибирають простішу).

Наприклад, рівняння $\log_3(x^2 - 2) = \log_3(4x - 5)$, розглянуте в табл. 23, рівносильне системі $\begin{cases} x^2 - 2 = 4x - 5, \\ 4x - 5 > 0. \end{cases}$ Але враховуючи, що обмеження ОДЗ цього рівняння $\begin{cases} x^2 - 2 > 0, \\ 4x - 5 > 0 \end{cases}$ ми не розв'язували, а тільки перевіряли, чи задовольняють знайдені корені ці обмеження, наведене спрощення не дає суттєвого виграша при розв'язуванні цього рівняння.

Зауваження 2. Як було обґрунтовано вище, коли виконується рівність (4), то обов'язково виконується і рівність (5). Отже, рівняння (5) є наслідком рівняння (4), і тому для знаходження коренів рівняння (4): $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ досить знайти корені рівняння-наслідку (5): $f(x) = g(x)$ і виконати перевірку знайдених коренів підстановкою в задане рівняння. (При такому способі розв'язування ОДЗ рівняння (4) буде враховано опосередковано, у момент перевірки одержаних коренів, тому її не доведеться записувати.)

Виконуючи **рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь у більш складних випадках,** можна дотримуватися орієнтира, який було обґрунтовано в 10 класі:

1. Ураховуємо ОДЗ заданого рівняння.

2. Стежимо за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильної рівності.

Наприклад, розв'яжемо рівняння

$$\log_2(x + 1) = 3 - \log_2(x + 3) \quad (8)$$

за допомогою рівносильних перетворень.

Для цього достатньо врахувати ОДЗ рівняння $\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0, \end{cases}$ а потім, виконуючи кожне перетворення рівняння, весь час стежити за тим, чи можна на ОДЗ виконати це перетворення й у зворотному напрямку. Коли відповідь позитивна, то виконані перетворення рівносильні. Якщо ж якесь перетворення для всіх значень змінної з ОДЗ можна виконати тільки в одному напрямку (від початкового рівняння до наступного), а для його виконання у зворотному напрямку потрібні якісь додаткові обмеження, то ми одержимо тільки рівняння-наслідок, і отримані корені доведеться перевіряти підстановкою в початкове рівняння.

Застосуємо цей план до розв'язування рівняння (8).

Щоб звести це рівняння до найпростішого, перенесемо всі члени рівняння з логарифмами вліво. Одержимо рівносильне рівняння

$$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x + 3) = 3. \quad (9)$$

(Рівносильність рівнянь (8) і (9) випливає з відомої теореми: якщо з однієї частини рівняння перенести в іншу доданки з протилежним знаком, то одержимо рівняння, рівносильне заданному на будь-якій множині. Рівносильність цих рівнянь випливає також з того, що ми можемо перейти не тільки від рівності (8) до рівності (9), а й виконати зворотне перетворення, користуючись властивостями числових рівностей.)

Ураховуючи, що сума логарифмів додатних (на ОДЗ) чисел дорівнює логарифму добутку, одержуємо рівняння

$$\log_2 ((x + 1) (x + 3)) = 3. \quad (10)$$

На ОДЗ заданого рівняння можна виконати й зворотне перетворення: оскільки $x + 1 > 0$ і $x + 3 > 0$, то логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів множників. Отже, від рівності (10) можна повернутися до рівності (9), тобто цей перехід теж приводить до рівносильного рівняння. Рівняння (10) — це найпростіше логарифмічне рівняння. Воно рівносильне рівнянню, яке отримуємо за означенням логарифма:

$$(x + 1) (x + 3) = 2^3.$$

Виконуючи рівносильні перетворення одержаного рівняння, маємо

$$x_2 + 4x - 5 = 0, \; x_1 = 1, \; x_2 = -5.$$

Оскільки всі рівносильні перетворення виконувалися на ОДЗ заданого рівняння, урахуємо її, підставляючи одержані корені в обмеження ОДЗ:

$x = 1$ — корінь, оскільки задовольняє умови ОДЗ;

$x = -5$ не є коренем (сторонній корінь), тому що не задовольняє умови ОДЗ. Отже, задане рівняння має тільки один корінь $x = 1$.

Зауваження. Звичайно, розглянуте рівняння можна було розв'язати з використанням рівнянь-наслідків, без явного врахування ОДЗ, але з перевіркою одержаних розв'язків підстановкою в початкове рівняння. Тому кожен має право обирати шлях розв'язування рівняння: або це буде використання рівнянь-наслідків, або рівносильні перетворення заданого рівняння. Але для багатьох рівнянь перевірку одержаних коренів виконати досить непросто, а для нерівностей і зовсім не можна користуватися наслідками. Це пов'язано з тим, що не вдається перевірити всі розв'язки — їх кількість у нерівностей, як правило, нескінченна. Отже, для нерівностей доводиться виконувати тільки рівносильні перетворення (їх можна виконувати за орієнтирами, повністю аналогічними наведеним вище).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння

$$\lg(x-2)-\frac{1}{2}\lg(3x-6)=\lg 2. \qquad (1)$$

Розв'язання

$$2\lg(x-2)-\lg(3x-6)=2\lg 2, \qquad (2)$$

$$\lg(x-2)^2-\lg(3x-6)=\lg 2^2, \qquad (3)$$

$$\lg\frac{(x-2)^2}{3x-6}=\lg 4, \qquad (4)$$

$$\frac{(x-2)^2}{3x-6}=4, \qquad (5)$$

$$(x-2)^2=4(3x-6), \qquad (6)$$

$$x^2-16x+28=0, \qquad (7)$$

$$x_1=2,\ x_2=14.$$

Перевірка. $x = 2$ — сторонній корінь (під знаком логарифма отримуємо 0),

$x = 14$ — корінь, оскільки маємо

$$\lg(14-2)-\frac{1}{2}\lg(3\cdot 14-6)=\lg 2,$$

$$\lg 12-\frac{1}{2}\lg 36=\lg 2,$$

$$\lg 12-\lg\sqrt{36}=\lg 2,$$

$$\lg\frac{12}{6}=\lg 2,$$

$$\lg 2=\lg 2.$$

Відповідь: 14. ◁

Коментар

Розв'яжемо задане рівняння за допомогою наслідків. Нагадаємо, що *при використанні наслідків головне — гарантувати, що у випадку, коли перша рівність буде правильною, усі наступні теж будуть правильними.*

Щоб позбутися дробового коефіцієнта, помножимо обидві частини рівняння (1) на 2 (якщо рівність (1) правильна, то й рівність (2) теж правильна). Якщо рівності (1) або (2) правильні (при тих значеннях x, що є коренями цих рівнянь), то при таких значеннях x існують усі записані логарифми, тоді вирази $x - 2$ та $3x - 6$ — додатні. Але для додатних a, b, c можна скористатися формулами $2\lg a=\lg a^2$, $\lg b-\lg c=\lg\frac{b}{c}$, отже, рівності (3) і (4) теж будуть правильними. Ураховуючи, що функція $y = \lg t$ — зростаюча, отже, кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргументу, з рівності логарифмів (4) одержуємо рівність відповідних аргументів (5).

Якщо рівність (5) правильна, то знаменник дробу не дорівнює нулю, і після множення обох її частин на $3x - 6 \neq 0$ одержуємо правильну рівність (6) (а отже, і правильну рівність (7)). Оскільки ми користувалися рівняннями-наслідками, то в кінці необхідно виконати перевірку.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння

$$\log_2 (x-5)^2 - 2 = 2\log_2 (2x). \qquad (1)$$

Розв'язання	*Коментар*
▶ОДЗ: $\begin{cases}(x-5)^2>0,\\ 2x>0.\end{cases}$ Тоді $\begin{cases}x\neq 5,\\ x>0.\end{cases}$ На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням $\log_2 (x-5)^2 - \log_2 2^2 = 2\log_2 (2x),$ $\log_2 \frac{(x-5)^2}{2^2} = \log_2 (2x)^2, \qquad (2)$ $\frac{(x-5)^2}{2^2} = (2x)^2, \qquad (3)$ $(x-5)^2 = 4\cdot 4x^2,$ $15x^2 + 10x - 25 = 0,$ $3x^2 + 2x - 5 = 0.$ $x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{5}{3}.$ Ураховуючи ОДЗ, одержуємо, що $x = 1$ входить до ОДЗ, отже, є коренем; $x = -\frac{5}{3}$ не входить до ОДЗ, отже, не є коренем заданого рівняння. *Відповідь:* 1. ◁	Розв'яжемо задане рівняння за допомогою рівносильних перетворень. Нагадаємо, що для цього досить *урахувати ОДЗ заданого рівняння й стежити за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильної рівності.* Зауважимо, що на ОДЗ вираз $x - 5$ може бути як додатним, так і від'ємним, і тому ми не маємо права застосовувати до виразу $\log_2 (x-5)^2$ формулу $\log_2 (x-5)^2 = 2\log_2 (x-5)$ (це приведе до втрати кореня). Застосування узагальненої формули логарифмування приведе до рівняння з модулем. Використаємо інший шлях перетворень, урахувавши, що $2 = \log_2 2^2$. Оскільки на ОДЗ усі вирази, що стоять під знаками логарифмів, додатні, то всі перетворення від рівняння (1) до рівняння (2) будуть рівносильними. Виконувати рівносильні перетворення рівняння (2) можна з використанням орієнтира, наведеного на с. 213. Також рівносильність рівнянь (2) і (3) може бути обґрунтована через зростання функції $y = \log_2 t$, яка кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргументу.

Приклад 3* Розв'яжіть рівняння $\log_4 x + 6 \log_x 4 = 5$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$ На ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянню $$\log_4 x + 6\frac{1}{\log_4 x} = 5.$$ *Заміна:* $\log_4 x = t$. Одержуємо: $$t+\frac{6}{t}=5, \qquad (1)$$ $$t^2 - 5t + 6 = 0, \qquad (2)$$ $$t_1 = 2,\ t_2 = 3;$$ $$\log_4 x = 2 \text{ або } \log_4 x = 3;$$ $$x = 4^2 = 16 \text{ або } x = 4^3 = 64$$ (обидва корені входять до ОДЗ). *Відповідь:* 16; 64. ◁	Виконаємо рівносильні перетворення заданого рівняння. Для цього знайдемо його ОДЗ ($x > 0$, $x \neq 1$). Оскільки до рівняння входять логарифми з різними основами, зведемо їх до однієї основи (бажано числової, інакше можна загубити корені рівняння) — у даному випадку до основи 4 — за формулою $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$. Після зведення логарифмів до однієї основи змінна входить до рівняння тільки в одному вигляді $\log_4 x$. Виконаємо заміну $\log_4 x = t$. Оскільки за обмеженнями ОДЗ $x \neq 1$, то $t \neq 0$. Тоді одержане дробове рівняння (1) рівносильне квадратному рівнянню (2). Оскільки заміна й обернена заміна є рівносильними перетвореннями на ОДЗ, то для одержаних розв'язків досить перевірити, чи входять вони до ОДЗ.

Приклад 4* Розв'яжіть рівняння

$$x^{\lg x - 2} = 1000. \qquad (1)$$

Розв'язання	*Коментар*
▶ ОДЗ: $x > 0$. На ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням $$\lg\left(x^{\lg x - 2}\right) = \lg 1000, \qquad (2)$$ $$(\lg x - 2)\lg x = 3. \qquad (3)$$ *Заміна:* $\lg x = t$. Одержуємо $$(t-2)t = 3,\ t^2 - 2t - 3 = 0,$$ $$t_1 = -1,\ t_2 = 3.$$ Обернена заміна дає $$\lg x = -1 \text{ або } \lg x = 3.$$ Звідси $x = 10^{-1} = 0{,}1$ або $x = 10^3 = 1000$. *Відповідь:* 0,1; 1000. ◁	Виконаємо рівносильні перетворення заданого рівняння. Для цього знайдемо його ОДЗ і використаємо орієнтир: *якщо змінна входить і до основи, і до показника степеня, то для розв'язування такого рівняння можна спробувати прологарифмувати обидві частини рівняння* (звичайно, тільки якщо вони додатні). До запису рівняння вже входить десятковий логарифм, тому прологарифмуємо обидві частини за основою 10 (на ОДЗ обидві частини заданого рівняння додатні).

Оскільки функція $y = \lg t$ — зростаюча, то кожного свого значення вона набуває тільки при одному значенні аргументу. Отже, якщо виконується рівність (1), то виконується й рівність (2), і навпаки: якщо виконується рівність (2), то виконується й рівність (1). Таким чином, рівняння (1) і (2) рівносильні на ОДЗ. При $x > 0$ застосування формули $\lg x^\alpha = \alpha \lg x$ є рівносильним перетворенням, отже, рівняння (2) і (3) теж рівносильні.

Обґрунтування рівносильності подальших перетворень повністю збігається з аналогічним обґрунтуванням у попередньому прикладі.

Приклад 5 Розв'яжіть рівняння $\log_3 (3^x - 8) = 2 - x$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ $3^x - 8 = 3^{2-x}$, (1) $3^x - 8 = \frac{3^2}{3^x}$. *Заміна:* $3^x = t$. Одержуємо $t - 8 = \frac{9}{t}$, (2) $t^2 - 8t - 9 = 0$, (3) $t_1 = 9$, $t_2 = -1$. Обернена заміна дає $3^x = 9$, $x = 2$ або $3^x = -1$ — коренів немає. *Відповідь:* 2. ◁	Якщо спочатку подивитися на задане рівняння як на найпростіше логарифмічне, то за означенням логарифма воно рівносильне рівнянню $3^x - 8 = 3^{2-x}$. Як уже відзначалося (с. 211), ОДЗ заданого рівняння $3^x - 8 > 0$ для всіх коренів рівняння (1) ураховується автоматично, оскільки $3^{2-x} > 0$ завжди. Після цього рівняння (1) розв'язується за схемою розв'язування показникових рівнянь (табл. 19, с. 178). Оскільки $t = 3^x > 0$, то $t \neq 0$, і тому рівняння (2) рівносильне рівнянню (3).

Приклад 6 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=2,\\ \log_3(y-x)=1.\end{cases}$

Розв'язання	*Коментар*
▶ $\begin{cases}\log_2(xy)=2,\\ \log_3(y-x)=1.\end{cases}$ За означенням логарифма маємо $\begin{cases}xy=2^2,\\ y-x=3.\end{cases}$ Із другого рівняння останньої системи одержуємо $y=x+3$ і підставляємо в перше рівняння: $x(x+3)=4,\ x^2+3x-4=0,$ $x_1=1,\ x_2=-4.$ Тоді $y_1=4,\ y_2=-1.$ Перевірка. $\begin{cases}x=1,\\ y=4\end{cases}$ — розв'язок заданої системи. $\left(\begin{cases}\log_2 1+\log_2 4=2,\\ \log_3(4-1)=1;\end{cases}\ \begin{cases}2=2,\\ 1=1\end{cases}\right).$ $\begin{cases}x=-4,\\ y=-1\end{cases}$ — сторонній розв'язок (під знаком логарифма одержуємо від'ємні числа). *Відповідь:* (1; 4). ◁	Як і логарифмічні рівняння, системи логарифмічних рівнянь можна розв'язувати за допомогою як *систем-наслідків* (*кожен розв'язок першої системи є розв'язком другої*), так і рівносильних перетворень систем (усі розв'язки кожної з них є розв'язками іншої). Крім того, при розв'язуванні логарифмічних систем можна використовувати ті самі методи, що й при розв'язуванні інших видів систем (метод алгебраїчного додавання, підстановка деякого виразу з одного рівняння в інші, заміна змінних). Наприклад, розв'яжемо задану систему за допомогою систем-наслідків. Для цього досить гарантувати, що у випадку, коли задана система складається з правильних рівностей, кожна наступна система також буде містити правильні рівності. Як і для рівнянь, *при використанні систем-наслідків обов'язково необхідно виконати перевірку одержаних розв'язків підстановкою в початкову систему.*

Зауваження. Звичайно, задану систему можна було розв'язувати й за допомогою рівносильних перетворень систем. При цьому довелося б урахувати ОДЗ заданої системи $\begin{cases}x>0,\\ y>0,\\ y-x>0,\end{cases}$ стежити за рівносильністю виконаних перетворень (у нашому випадку всі записані перетворення є рівносильними на ОДЗ), а в кінці перевіряти, чи задовольняють одержані розв'язки умовам ОДЗ (пара чисел $\begin{cases}x=1,\\ y=4\end{cases}$ задовольняє умови ОДЗ, а пара $\begin{cases}x=-4,\\ y=-1\end{cases}$ не задовольняє умови ОДЗ).

Приклад 7 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$

Тоді з першого рівняння маємо

$$\frac{1}{\log_x y} + \log_x y = 2.$$

Заміна $t = \log_x y$ дає рівняння

$\frac{1}{t} + t = 2$, $t^2 - 2t + 1 = 0$, $t = 1$.

Обернена заміна дає

$\log_x y = 1$, тобто $y = x$.

Тоді з другого рівняння системи маємо $x^2 - x - 20 = 0$,

$x_1 = -4$ (не входить до ОДЗ),

$x_2 = 5$ (входить до ОДЗ).

Отже, розв'язок заданої системи

$$\begin{cases} x = 5, \\ y = 5. \end{cases}$$

Відповідь: (5; 5).

Коментар

Розв'яжемо задану систему за допомогою рівносильних перетворень. Для цього досить урахувати її ОДЗ і гарантувати, що на кожному кроці було виконано саме рівносильні перетворення рівняння або всієї системи. У першому рівнянні системи всі логарифми зведемо до однієї основи x (на ОДЗ $x > 0$, $x \neq 1$): $\log_y x = \frac{\log_x x}{\log_x y} = \frac{1}{\log_x y}$. На ОДЗ $y \neq 1$, отже, $\log_x y \neq 0$. Тоді після заміни $t = \log_x y$ маємо $t \neq 0$, і тому перехід у розв'язанні від дробового рівняння до квадратного є рівносильним.

Оскільки заміна (разом з оберненою заміною) є рівносильним перетворенням, то, замінюючи перше рівняння системи рівносильним йому (на ОДЗ) рівнянням $y = x$, одержуємо систему, рівносильну заданій (на її ОДЗ).

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах, як можна розв'язувати найпростіші логарифмічні рівняння, користуючись означенням логарифма.
2*. Обґрунтуйте справедливість рівносильного переходу $\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.
3. Поясніть, як можна розв'язати рівняння $\log_5 (x - 2) = \log_5 (x^2 - 2)$:
   а) за допомогою рівнянь-наслідків;
   б*) за допомогою рівносильних перетворень.
4. Поясніть на прикладі використання заміни змінних при розв'язуванні логарифмічних рівнянь. У яких випадках доцільно використовувати заміну змінних?

Вправи

Розв'яжіть рівняння **(1–5)**.

1°. 1) $\log_2 x = 4$; 2) $\log_{0,2} x = -1$; 3) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; 4) $\lg x = 2$.

2. 1°) $\log_3(2x-1)=2$; 2°) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-21)=-2$;

3) $\log_\pi(x^2+2x-2)=0$; 4) $\lg(3-x)=-1$.

3. 1°) $\lg(x+9)+\lg(2x+8)=2$; 2°) $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$;

3) $2\log_2 x-\log_2(3x-4)=1$; 4) $\frac{1}{2}\log_5(x-4)+\frac{1}{2}\log_5(2x-1)=\log_5 3$.

4. 1°) $\log_3^2 x-4\log_3 x+3=0$; 2°) $\frac{1}{3-\lg x}+\frac{1}{1+\lg x}=1$;

3) $\log_3^2 x+\log_3 x^2=8$; 4) $\lg^3 x^2=8\lg x$.

5. 1) $\log_2(10-2^x)=x+2$; 2) $\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)=1+\lg(2^{x-2}+1)$;

3) $\log_7(6+7^{-x})=1+x$; 4) $\log_2 2(4\cdot 3^x-6)-\log_2(9^x-6)=1$.

6. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\log_2 x=3-x$; 2) $\log_3 x=\log_{\frac{1}{2}} x$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} x=x-1$; 4) $\lg x=11-x$.

Перевірте підстановкою, що знайдене значення x дійсно є коренем рівняння.

7*. Доведіть, що рівняння, наведені в завданні 6, не мають інших коренів, крім знайдених графічно.

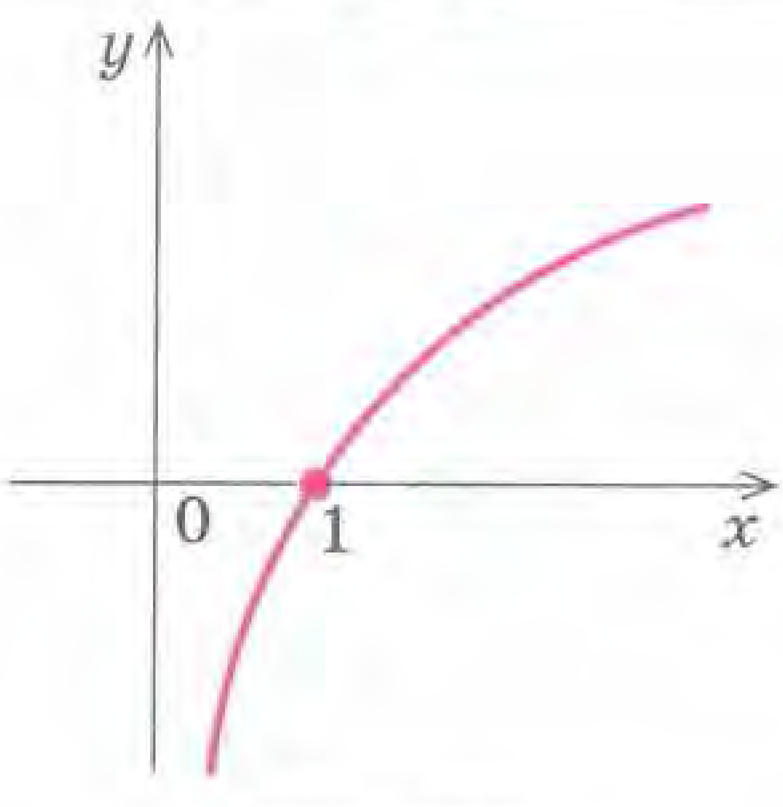
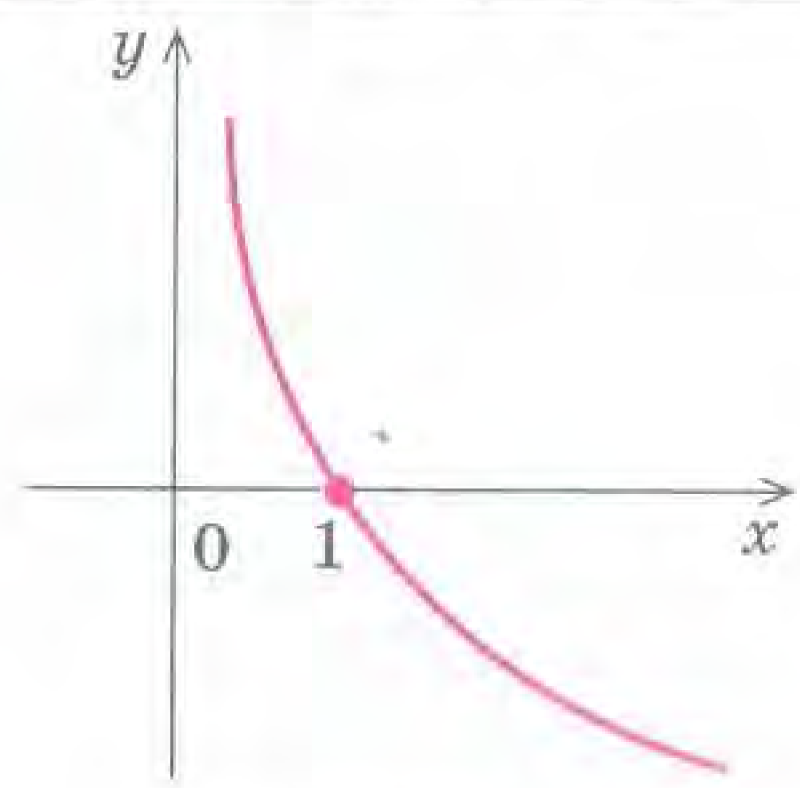
8. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}\lg(xy)=3,\\ \lg x\lg y=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_2 x+\log_2(y-1)=3,\\ 2x-y=1;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=2,\\ \log_2(x+y-3)=1;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\log_y x-\log_x y=\frac{8}{3},\\ xy=16.\end{cases}$

17.2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

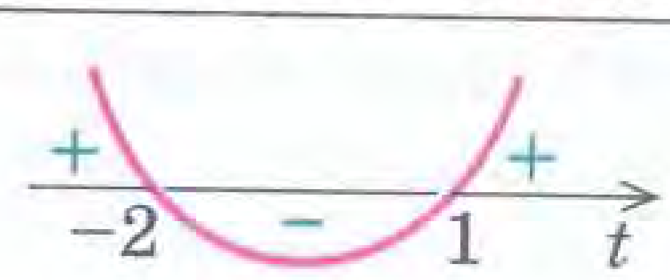
Таблиця 24

1. Графік функції $y=\log_a x$ $(a>0;\ a\neq 1)$	
$a>1$	$0<a<1$
	
зростає	спадає

Продовження табл. 24

2. Рівносильні перетворення найпростіших логарифмічних нерівностей	
$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$ *Знак нерівності не змінюється, і враховується ОДЗ.*	$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$ *Знак нерівності змінюється, і враховується ОДЗ.*
Приклади	
$\log_2 (x - 5) > 3.$ ▶ОДЗ: $x - 5 > 0$, тобто $x > 5$. $\log_2 (x - 5) > \log_2 2^3.$ Функція $y = \log_2 t$ є зростаючою, отже, $x - 5 > 2^3,$ $x > 13.$ Ураховуючи ОДЗ, маємо $x > 13$. *Відповідь:* $(13; +\infty)$.◁	$\log_{\frac{1}{2}} (x-5) > 3.$ ▶ОДЗ: $x - 5 > 0$, тобто $x > 5$. $\log_{\frac{1}{2}} (x-5) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3.$ Функція $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ є спадною, отже, $x - 5 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$, $x < 5\frac{1}{8}$. Ураховуючи ОДЗ, маємо $5 < x < 5\frac{1}{8}$. *Відповідь:* $\left(5; 5\frac{1}{8}\right)$.◁
3. Розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей	
Орієнтир	Приклад
I. За допомогою рівносильних перетворень задана нерівність зводиться до нерівності відомого виду. *Схема рівносильних перетворень нерівності* 1. **Ураховуємо ОДЗ** заданої нерівності (і уникаємо перетворень, які приводять до звуження ОДЗ).	$\lg^2 (10x) - \lg x \geqslant 3.$ ▶ОДЗ: $x > 0$. На цій ОДЗ задана нерівність рівносильна нерівностям $(\lg 10 + \lg x)^2 - \lg x \geqslant 3,$ $(1 + \lg x)^2 - \lg x \geqslant 3.$ *Заміна* $\lg x = t$ дає нерівність $(1 + t)^2 - t \geqslant 3$, тобто $t^2 + t - 2 \geqslant 0$, розв'язки якої $t \leqslant -2$ або $t \geqslant 1$ (див. рисунок).

Закінчення табл. 24

2. Стежимо за тим, щоб **на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так й у зворотному напрямках зі збереженням правильної нерівності.**	 Обернена заміна дає $\lg x \leqslant -2$ або $\lg x \geqslant 1$. Тоді $\lg x \leqslant \lg 10^{-2}$ або $\lg x \geqslant \lg 10$. Ураховуючи, що функція $y = \lg x$ є зростаючою, одержуємо $x \leqslant 10^{-2}$ або $x \geqslant 10$. Після врахування ОДЗ маємо $0 < x \leqslant 0{,}01$ або $x \geqslant 10$. *Відповідь:* $(0;\ 0{,}01] \cup [10;\ +\infty)$. ◁
II. Застосовуємо метод інтервалів (задана нерівність зводиться до нерівності виду $f(x) \gtrless 0$) і використовуємо схему: 1. **Знайти ОДЗ.** 2. **Знайти нулі $f(x)$.** 3. **Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.** 4. **Записати відповідь, ураховуючи знак нерівності.**	$\log_x (2x + 3) < 2$. ▶Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Вона рівносильна нерівності $\log_x (2x + 3) - 2 < 0$. Позначимо $f(x) = \log_x (2x + 3) - 2$. 1. ОДЗ: $\begin{cases} 2x+3>0, \\ x>0, \\ x \neq 1, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x>0, \\ x \neq 1. \end{cases}$ 2. Нулі функції: $f(x) = 0$. $\log_x (2x + 3) - 2 = 0$. Тоді $\log_x (2x + 3) = 2$. На ОДЗ це рівняння рівносильне рівнянню $2x + 3 = x^2$ (яке одержуємо за означенням логарифма). Тоді $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. До ОДЗ входить тільки $x = 3$, отже, $f(x)$ має єдиний нуль $x = 3$. 3. Відмічаємо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ, і записуємо розв'язки нерівності $f(x) < 0$.  *Відповідь:* $(0;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$. ◁

Пояснення й обґрунтування

1. Розв'язування найпростіших логарифмічних нерівностей. *Найпростішими логарифмічними нерівностями* звичайно вважають нерівності виду

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \text{ (де } a > 0 \text{ і } a \neq 1). \qquad (1)$$

Для розв'язування такої нерівності можна використати рівносильні перетворення. Для цього необхідно врахувати її ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$ і розглянути два випадки: основа логарифма більша за 1 або основа менша від 1 (але більша за 0).

I. При $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a t$ зростає на всій своїй області визначення (тобто при $t > 0$), і тому більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу. Отже, переходячи в нерівності (1) від значень функції до значень аргументу (у даному випадку переходячи до виразів, які стоять під знаком логарифма), ми повинні залишити той самий знак нерівності, тобто

$$f(x) > g(x). \qquad (2)$$

Ураховуючи, що на ОДЗ указаний перехід можна виконати й у зворотному напрямку (більшому додатному значенню аргументу відповідає більше значення функції), одержуємо, що на ОДЗ нерівність (1) рівносильна нерівності (2). Коротко це можна записати так:

при $a > 1$ $\quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), & (2) \\ f(x) > 0, & (3) \\ g(x) > 0. & (4) \end{cases}$

II. При $0 < a < 1$ логарифмічна функція $y = \log_a t$ спадає на всій своїй області визначення (тобто при $t > 0$), і тому більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу. Отже, переходячи в нерівності (1) від значень функції до значень аргументу, ми повинні знак нерівності змінити на протилежний, тобто

$$f(x) < g(x). \qquad (5)$$

Ураховуючи, що на ОДЗ указаний перехід можна виконати й у зворотному напрямку (меншому додатному значенню аргументу відповідає більше значення функції), одержуємо, що при $0 < a < 1$ нерівність (1) на її ОДЗ рівносильна нерівності (5). Коротко це записуємо так:

при $0 < a < 1$ $\quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), & (5) \\ f(x) > 0, & (3) \\ g(x) > 0. & (4) \end{cases}$

Підсумовуючи одержані результати, відзначимо, що

для розв'язування нерівності $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ за допомогою рівносильних перетворень необхідно врахувати її ОДЗ, а при переході від значень функції до значень аргументу (тобто до виразів, які стоять під знаком логарифма) ураховувати значення a:
при $a > 1$ знак нерівності не змінюється,
при $0 < a < 1$ знак нерівності змінюється на протилежний. ○

Приклади використання цих орієнтирів наведено в табл. 24.

Зауваження. Системи нерівностей, які одержано для випадків (I) і (II), можна дещо спростити. Наприклад, якщо в системі з випадку I виконуються нерівність (2): $f(x) > g(x)$ і нерівність (4): $g(x) > 0$, то з цих нерівностей випливає, що $f(x) > 0$. Отже, нерівність (3) цієї системи автоматично виконується, коли виконуються нерівності (2) і (4), тому її можна не записувати до цієї системи (див. п. 2 табл. 24).

Аналогічно обґрунтовується, що в системі з випадку II нерівність (4) є наслідком нерівностей (3) і (5), її теж можна не записувати до системи.

Наприклад, розв'яжемо нерівність $\log_5(x^2 - 2x) > \log_5 3$.

▶ $$\log_5(x^2 - 2x) > \log_5 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 3.$$

(ОДЗ заданої нерівності $x^2 - 2x > 0$ враховано автоматично, оскільки якщо виконується нерівність $x^2 - 2x > 3$, то виконується і нерівність $x^2 - 2x > 0$.)

Розв'язуємо нерівність $x^2 - 2x > 3$. Тоді $x^2 - 2x - 3 > 0$, отже (див. рисунок), $x < -1$ або $x > 3$ — розв'язок заданої нерівності. Звичайно, його можна записати і так: $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. ◁

2. Розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей виконується за допомогою або рівносильних перетворень заданої нерівності (і зведення її до відомого виду нерівностей), або методу інтервалів.

Схема рівносильних перетворень логарифмічних нерівностей повністю аналогічна схемі рівносильних перетворень логарифмічних рівнянь:

1) ураховуємо ОДЗ заданої нерівності;
2) стежимо за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильної нерівності.

У цьому випадку на ОДЗ кожен розв'язок заданої нерівності буде розв'язком другої і, навпаки, кожен розв'язок другої нерівності буде розв'язком першої, тобто ці нерівності будуть рівносильними (на ОДЗ).

Приклади розв'язування логарифмічних нерівностей за допомогою рівносильних перетворень і методу інтервалів та оформлення такого розв'язування наведено в табл. 24. Розглянемо ще кілька прикладів.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть нерівність $\log_{0,2}(x-1)+\log_{0,2}(x+3)\geqslant -1$.

Коментар

Розв'яжемо задану нерівність за допомогою рівносильних перетворень. Як і для рівнянь, для цього досить *урахувати ОДЗ заданої нерівності й стежити за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильної нерівності.* Оскільки на ОДЗ вирази, що стоять під знаком логарифмів, є додатними, то формулу $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$ для додатних b і c можна використовувати як у прямому, так й у зворотному напрямках. Отже, виконуючи перетворення нерівності за цією формулою, одержимо нерівність, рівносильну заданій (на її ОДЗ).

Щоб використати властивості логарифмічної функції, запишемо число (-1) як значення логарифмічної функції $-1=\log_{0,2}(0,2)^{-1}$ (зрозуміло, що й цю формулу можна використовувати як у прямому, так і у зворотному напрямках) і врахуємо, що $(0,2)^{-1}=\left(\frac{2}{10}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=5$.

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases}x-1>0,\\ x+3>0.\end{cases}$ Тоді $x>1$.

На цій ОДЗ задана нерівність рівносильна нерівності

$$\log_{0,2}((x-1)(x+3))\geqslant\log_{0,2}(0,2)^{-1}.$$

Функція $y=\log_{0,2}t$ є спадною, отже, $(x-1)(x+3)\leqslant(0,2)^{-1}$.

Одержуємо $x^2+2x-3\leqslant 5$, $x^2+2x-8\leqslant 0$.

Остання нерівність має розв'язки:

$$-4\leqslant x\leqslant 2 \text{ (див. рисунок).}$$

Ураховуючи ОДЗ, одержуємо $1<x\leqslant 2$.

Відповідь: (1; 2]. ◁

Приклад 2* Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{x-1}{2-x}>-1$.

Розв'язання

$$\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{x-1}{2-x}>\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}. \quad (1)$$

Ураховуючи ОДЗ заданої нерівності й те, що функція $y=\log_{\frac{1}{3}}t$ спадає,

Коментар

ОДЗ заданої нерівності задається системою

$$\begin{cases}\log_2\frac{x-1}{2-x}>0, & (6)\\ \frac{x-1}{2-x}>0. & (7)\end{cases}$$

одержуємо

$$0 < \log_2 \frac{x-1}{2-x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, \qquad (2)$$

тобто $0 < \log_2 \frac{x-1}{2-x} < 3.$

Тоді $\log_2 1 < \log_2 \frac{x-1}{2-x} < \log_2 2^3.$

Ураховуючи, що функція $y = \log_2 t$ зростає, одержуємо

$$1 < \frac{x-1}{2-x} < 2^3. \qquad (3)$$

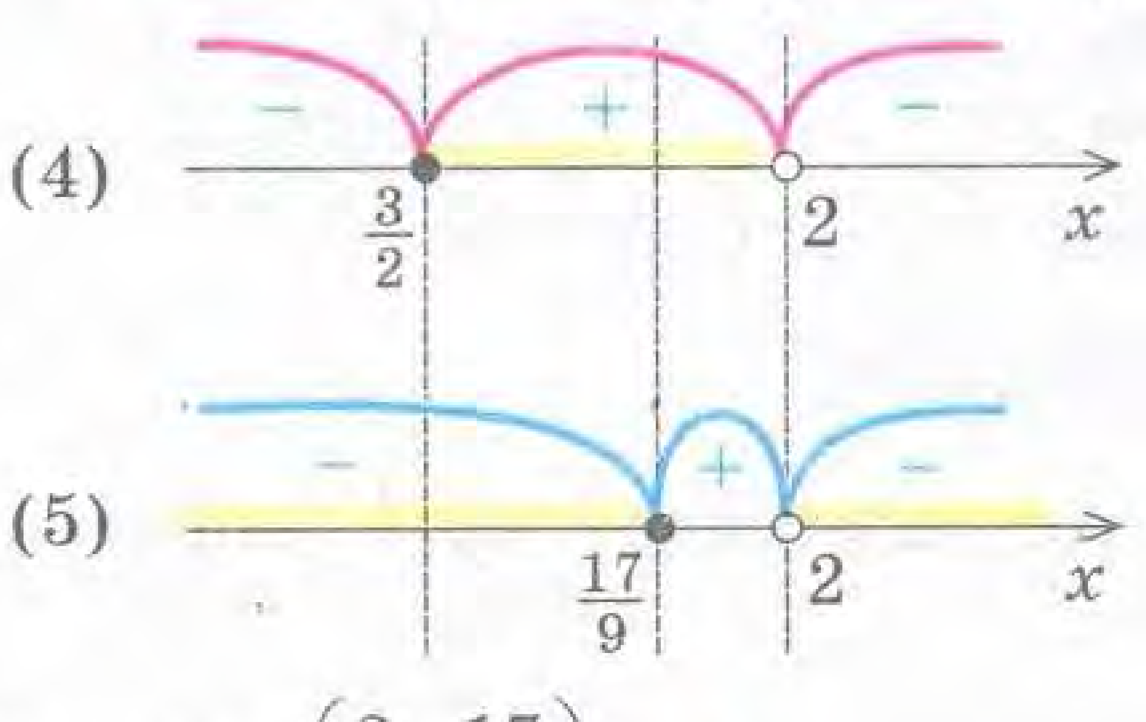
Ця нерівність рівносильна системі $\begin{cases} \frac{x-1}{2-x} > 1, \\ \frac{x-1}{2-x} < 8, \end{cases}$ яка рівносильна системі

$$\begin{cases} \frac{2x-3}{2-x} > 0, & (4) \\ \frac{9x-17}{2-x} < 0. & (5) \end{cases}$$

Розв'язуємо нерівності (4) і (5) методом інтервалів і знаходимо їх спільний розв'язок (див. рисунок).

Для нерівності (4) ОДЗ: $x \neq 2$, нулі функції $f(x) = \frac{2x-3}{2-x}$: $x = \frac{3}{2}$.

Для нерівності (5) ОДЗ: $x \neq 2$, нулі функції $g(x) = \frac{9x-17}{2-x}$: $x = \frac{17}{9}$.



Відповідь: $\left(\frac{3}{2}; \frac{17}{9}\right)$. ◁

При виконанні рівносильних перетворень головне не записати ОДЗ, а врахувати її в процесі розв'язування. При переході від нерівності (1) до нерівності (2) у запису останньої нерівності залишається вираз $\log_2 \frac{x-1}{2-x}$, для якого ОДЗ: $\frac{x-1}{2-x} > 0$. Отже, при такому переході обмеження (7) буде неявно враховане й тому достатньо врахувати тільки обмеження (6) (що й зроблено в лівій частині нерівності (2)). Щоб використати властивості відповідних логарифмічних функцій, записуємо спочатку

$$-1 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

(і враховуємо, що $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$), а потім $0 = \log_2 1$ і $3 = \log_2 2^3$.

При переході від нерівності (2) до нерівності (3) одержуємо, що $\frac{x-1}{2-x} > 1$, отже, і в цьому випадку нерівність (7) урахована автоматично. Для знаходження спільних розв'язків нерівностей (4) і (5) зручно їх розв'язання методом інтервалів розмістити одне над одним так, щоб однаково позначені точки знаходилися одна над одною. Тоді з наведеного рисунка відразу зчитується спільний розв'язок системи нерівностей.

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах, як можна розв'язувати найпростіші логарифмічні нерівності, користуючись властивостями логарифмічної функції.
2*. Обґрунтуйте справедливість рівносильних переходів:

1) при $a > 1$ $\quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0; \end{cases}$

2) при $0 < a < 1$ $\quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

3. Поясніть на прикладі використання методу інтервалів при розв'язуванні логарифмічних нерівностей.

Вправи

Розв'яжіть нерівність **(1–6)**.

1°. 1) $\log_3 x > 2$; 2) $\log_{0,2} x > -1$;
3) $\log_{0,5} x < 1$; 4) $\lg x < 2$.

2. 1) $\log_2 (3x - 2) > 2$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} (5x-1) > -2$;
3) $\log_5 (3x - 2) < 2$; 4) $\log_{\frac{1}{4}} (2x+1) > -1$.

3°. 1) $\lg (2x - 1) > \lg (x + 2)$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} (3x+1) > \log_{\frac{1}{3}} (x+3)$;
3) $\log_{0,2} x < \log_{0,2} (3x - 6)$; 4) $\log_4 (2x - 1) \leqslant \log_4 (x + 3)$.

4. 1) $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 > 0$; 2) $\dfrac{1}{3-\lg x} + \dfrac{1}{1+\lg x} > 1$;
3) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 4 \leqslant 0$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \geqslant 0$.

5. 1) $\lg x + \lg (x - 9) > 1$; 2) $\log_{0,1} (x + 4) + \log_{0,1} (x - 5) \leqslant -1$;
3) $\log_2 (x^2 - x - 12) < 3$; 4) $\log_\pi (x + 1) + \log_\pi x \geqslant \log_\pi 2$.

6*. 1) $\log_3 \log_2 \log_{0,5} x \geqslant 0$; 2) $\log_x \sqrt{x+12} > 1$;
3) $\log_2 x + \log_x 2 \leqslant 2,5$; 4) $\log_{\frac{2x-1}{x-3}} 3 < 0$.

7*. У прямокутній системі координат на площині побудуйте графік заданого рівняння або нерівності.

1) $\log_{y-2x}(3-x^2) = 1$; 2) $\log_{2y}(3x^2 + y^2) = 2$;
3) $\log_{1-x}(1+y) > 1$; 4) $\log_{0,3}(x+x^2) \geqslant \log_{0,3}(x+y)$.

§ 18 ПОХІДНІ ПОКАЗНИКОВОЇ ТА ЛОГАРИФМІЧНОЇ ФУНКЦІЙ

Таблиця 25

$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$ ($a > 0$, a — стала)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ($x > 0$)	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ($x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, a — стала)	$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ (на ОДЗ правої частини формули)

Пояснення й обґрунтування

Щоб обґрунтувати *формули похідних показникової та логарифмічної функцій*, використаємо без доведення властивість функції e^x, яка доводиться в курсі вищої математики*:

похідна функції e^x дорівнює цій самій функції e^x, тобто

$$(e^x)' = e^x.$$

- При $a > 0$ за основною логарифмічною тотожністю маємо

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}.$$

Тоді за правилом знаходження похідної складеної функції одержуємо

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = a^x \ln a, \text{ тобто}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a. \qquad \bigcirc$$

За одержанною формулою ми можемо знайти значення похідної показникової функції для будь-якого значення x. Отже, *показникова функція диференційована в кожній точці області визначення*, а відповідно, *і неперервна в кожній точці своєї області визначення* (тобто при всіх дійсних значеннях x).

- Для логарифмічної функції спочатку знайдемо похідну функції $\ln x$, приймаючи без доведення існування похідної. Область визначення цієї функції — $x > 0$, тобто $(0; +\infty)$. При $x > 0$ за основною логарифмічною тотожністю маємо $e^{\ln x} = x$. Ця рівність означає, що при $x > 0$ функції $e^{\ln x}$ і x збігаються (це одна і та сама функція, задана на множині R_+), а отже, збігаються їх похідні. Використовуючи для лівої частини рівності правило знаходження похідної складеної функції, одержуємо

$$(e^{\ln x})' = (x)'; \quad e^{\ln x}(\ln x)' = 1, \text{ тобто } x(\ln x)' = 1. \text{ Звідси}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ (де } x > 0).$$

Оскільки $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \ln x$, то

---

* Нагадаємо, що e — ірраціональне число, $e = 2,71828182...$.

$$(\log_a x)' = \left(\frac{1}{\ln a}\ln x\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}.\ \text{Отже,}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}\quad (\text{де } x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ a \text{ — стала}).$$ ○

Зауваження. Формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ була обґрунтована в § 3 тільки для цілих значень n. Доведемо, що вона виконується й при будь-яких дійсних значеннях n.

● Якщо n — довільне неціле число, то функція x^n означена тільки при $x > 0$. Тоді за основною логарифмічною тотожністю $x^n = e^{\ln x^n} = e^{n\ln x}$. За правилом обчислення похідної складеної функції одержуємо

$$(x^n)' = (e^{n\ln x})' = e^{n\ln x}(n\ln x)' = x^n n(\ln x)' = x^n n\frac{1}{x} = nx^{n-1}.$$ ○

Отже, надалі формулою $(x^n)' = nx^{n-1}$ можна користуватися при будь-яких дійсних значеннях n (нагадаємо, що в цьому випадку її можна використовувати тільки при тих значеннях x, при яких визначена її права частина).

Спираючись на одержаний результат, обґрунтуємо також формулу

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\quad (n \in Z), \tag{1}$$

яку можна використовувати при тих значеннях x, при яких визначена її права частина.

● Якщо n — парне число, то ОДЗ правої частини формули (1): $x > 0$. Але за цієї умови

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}. \tag{2}$$

Якщо n — непарне число, то ОДЗ правої частини формули (1): $x \neq 0$. При $x > 0$ залишається справедливою рівність (2), при $x < 0$ врахуємо, що $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$ і $-x > 0$, а також те, що при непарному n число $1 - n$ буде парним (тому $(-1)^{1-n} = 1$).
Тоді

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(-\sqrt[n]{-x}\right)' = \left(-(-x)^{\frac{1}{n}}\right)' = -\frac{1}{n}(-x)^{\frac{1}{n}-1}(-x)' = \frac{1}{n}(-x)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(-x)^{1-n}} =$$

$$= \frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Отже, для непарного n при всіх $x \neq 0$ формула (1) теж виконується. ○

В останньому випадку такі громіздкі перетворення довелося виконувати через те, що при $x < 0$ вираз $x^{\frac{1}{n}}$ не означений, а вираз $(-x)^{\frac{1}{n}}$ існує, оскільки $-x > 0$ при $x < 0$.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть похідну функції:

$$1)\ f(x) = \sin^2 x + e^{\frac{x}{2}};\qquad 2)\ f(x) = \frac{\ln x}{\cos 3x}.$$

Розв'язання	*Коментар*
1) ▶ $f'(x) = \left(\sin^2 x + e^{\frac{x}{2}}\right)' =$ $= (\sin^2 x)' + \left(e^{\frac{x}{2}}\right)' =$ $= 2\sin x\,(\sin x)' + e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)' =$ $= 2\sin x\cos x + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \sin 2x + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}.$ ◁	Послідовно визначаємо, від якого виразу береться похідна (орієнтуючись на результат останньої дії). У завданні 1 спочатку береться похідна суми: $(u + v)' = u' + v'$. Потім для кожного з доданків використовується похідна складеної функції: береться похідна від u^2 та e^u і множиться на u'. Одержаний результат бажано спростити за формулою $2\sin x\cos x = \sin 2x$.
2) ▶ $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{\cos 3x}\right)' =$ $= \frac{(\ln x)'\cos 3x - (\cos 3x)'\ln x}{(\cos 3x)^2} =$ $= \frac{\frac{1}{x}\cos 3x - (-\sin 3x)(3x)'\ln x}{\cos^2 3x} =$ $= \frac{\cos 3x + 3x\sin 3x\ln x}{x\cos^2 3x}.$ ◁	У завданні 2 спочатку береться похідна частки: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, а для похідної знаменника використовується похідна складеної функції (похідна $\cos u$ множиться на u').

Приклад 2 Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $y = xe^x$ у точці $x_0 = 1$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Якщо $f(x) = xe^x$, то $f(x_0) = f(1) = e$. $f'(x) = x'e^x + (e^x)'x = e^x + xe^x$.	Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0

Тоді $f'(x_0) = f'(1) = 2e$. Підставляючи ці значення в рівняння дотичної

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

одержуємо $y = e + 2e(x - 1)$.

Тобто $y = 2ex - e$ — шукане рівняння дотичної. ◁

у загальному вигляді записується так:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Щоб записати це рівняння для заданої функції, потрібно знайти $f(x_0)$, похідну $f'(x)$ і значення $f'(x_0)$. Для виконання відповідних обчислень зручно позначити задану функцію через $f(x)$, а для знаходження її похідної використати формулу похідної добутку

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

Приклад 3 1) Побудуйте графік функції $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

2*) Знайдіть найбільше значення параметра a, при якому рівняння $\ln x = ax$ має єдиний корінь.

Коментар

Для розв'язування завдання 1 досліджуємо функцію $y = \dfrac{\ln x}{x}$ за загальною схемою й за результатами дослідження будуємо її графік. При дослідженні функції на парність і непарність можна скористатися тим, що *в парної або непарної функції* до області визначення входять точки x і $(-x)$. Отже, для таких функцій *область визначення має бути симетричною відносно точки* 0. Якщо ж ця умова не виконується, то функція не може бути ні парною, ні непарною.

Для кращого уявлення про вид графіка доцільно уточнити поведінку функції на кінцях області визначення ($D(y) = (0; +\infty)$). При $x \to 0$ (справа, тобто при $x \to +0$) значення $\ln x \to -\infty$. Тоді $y = \dfrac{\ln x}{x} \to \left(\dfrac{-\infty}{+0}\right) \to -\infty$ (рис. 18.2). Але при $x \to +\infty$ ми не можемо виконати таку оцінку (одержуємо невизначеність виду $\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$). У такому випадку поведінку функції при $x \to +\infty$ можна уточнити за допомогою додаткових контрольних точок.

При розв'язуванні завдання 2 доцільно використати графічну ілюстрацію розв'язування. Це можна зробити двома способами.

I. За допомогою рівносильних перетворень привести задане рівняння до виду $f(x) = a$ $\left(\text{де } f(x) = \dfrac{\ln x}{x}\right)$ і, використовуючи графік, побудований у завданні 1, з'ясувати, скільки коренів має рівняння $f(x) = a$ при різних значеннях параметра a.

II. Застосувати графічне розв'язування безпосередньо до рівняння $\ln x = ax$ (графіки функцій $y = \ln x$ і $y = ax$ відомі), а для дослідження єдиності кореня використати геометричний зміст похідної.

Розв'язання

1) Дослідимо функцію $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Область визначення: $x > 0$, тобто $D(y) = (0; +\infty)$.
2. Функція ні парна, ні непарна, оскільки її область визначення не симетрична відносно точки 0.
3. Точки перетину графіка з осями координат. Графік не перетинає вісь Oy ($x \neq 0$).

   На осі Ox $y = 0$, тобто $\dfrac{\ln x}{x} = 0$. Тоді при $x > 0$ одержуємо: $\ln x = 0$; $x = 1$ — абсциса точки перетину графіка з віссю Ox.
4. Похідна і критичні точки.

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)'x - x'\ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}x - 1\cdot\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

   Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$ (тобто при $x > 0$), отже, функція неперервна на всій області визначення.

   $y' = 0$. Тоді $\dfrac{1-\ln x}{x^2} = 0$. Звідси при $x > 0$ одержуємо $\ln x = 1$, отже, $x = e$ — критична точка.
5. Відмічаємо критичні точки на області визначення функції й знаходимо знак $y'(x)$ у кожному з одержаних проміжків (рис. 18.1).

   Складаємо таблицю, у якій відмічаємо проміжки зростання й спадання та екстремуми функції.

Рис. 18.1

x	$(0; e)$	e	$(e; +\infty)$
$y'(x)$	+	0	–
$y(x)$	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘
		max	

6. Знайдемо ще декілька точок графіка функції:

x	$\dfrac{1}{e} \approx 0{,}4$	$e^2 \approx 7{,}4$	$e^3 \approx 20{,}1$
$y(x)$	$-e \approx -2{,}7$	$\dfrac{2}{e^2} \approx 0{,}3$	$\dfrac{3}{e^3} \approx 0{,}1$

7. Використовуючи результати дослідження, будуємо графік функції $y=\frac{\ln x}{x}$ (рис. 18.2).

I спосіб розв'язування завдання 2

Область допустимих значень рівняння $\ln x = ax$ задається нерівністю $x > 0$. Але тоді $x \neq 0$ і задане рівняння на його ОДЗ рівносильне рівнянню $\frac{\ln x}{x}=a$.

Розв'яжемо останнє рівняння графічно. Для цього побудуємо графіки функцій $y=\frac{\ln x}{x}$ (див. завдання 1) та $y = a$ (рис. 18.3).

Як бачимо, рівняння $\frac{\ln x}{x}=a$ має єдиний корінь тільки при $a \leqslant 0$ та при $a=\frac{1}{e}$ (при $0<a<\frac{1}{e}$ рівняння має два корені, а при $a>\frac{1}{e}$ рівняння не має коренів).

Отже, найбільше значення параметра a, при якому рівняння $\ln x = ax$ має єдиний корінь, — це $a=\frac{1}{e}$.

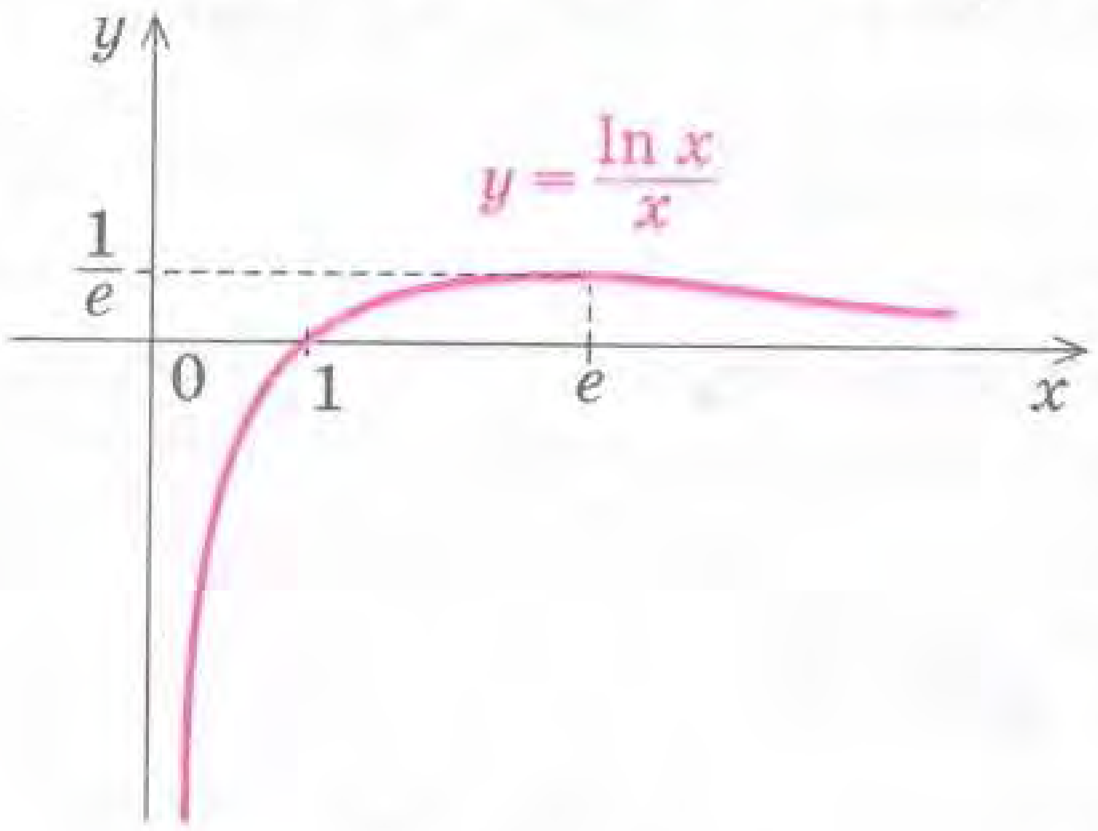


Рис. 18.2

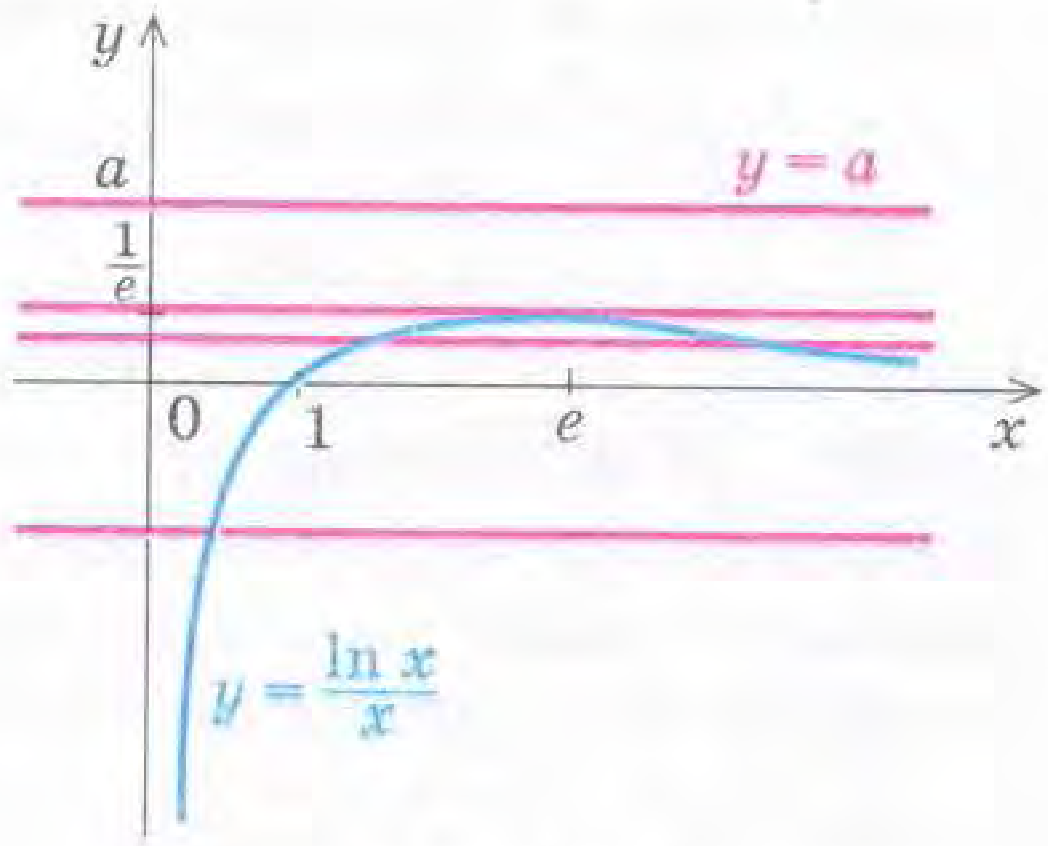


Рис. 18.3

II спосіб розв'язування завдання 2

Розглянемо графічну ілюстрацію (рис. 18.4) розв'язування заданого рівняння

$$\ln x = ax. \tag{1}$$

Функція $y = \ln x$ зростаюча й набуває всіх значень від $-\infty$ до $+\infty$.

Графіком функції $y = ax$ є пряма, яка проходить через початок координат.

При $a < 0$ пряма $y = ax$ перетинає графік функції $y = \ln x$ тільки в одній точці (пряма 1 на рис. 18.4). Отже, рівняння (1) має єдиний корінь (дійсно, функція $y = \ln x$ зростаюча, а функція $y = ax$ — спадна, і тому рівняння (1) може мати тільки єдиний корінь).

При $a = 0$ рівняння (1) має вигляд $\ln x = 0$ і теж має єдиний корінь ($x = 1$).

При $a > 0$ пряма $y = ax$ може дотикатися до графіка функції $y = \ln x$ (пряма 2 на рис. 18.4). Тоді рівняння (1) буде мати єдиний корінь. Пряма $y = ax$ може проходити в першій чверті нижче дотичної (пряма 3 на рис. 18.4). Тоді рівняння (1) буде мати два корені. Також пряма $y = ax$ може проходити в першій чверті вище дотичної (пряма 4 на рис. 18.4), тоді рівняння (1) не буде мати коренів.

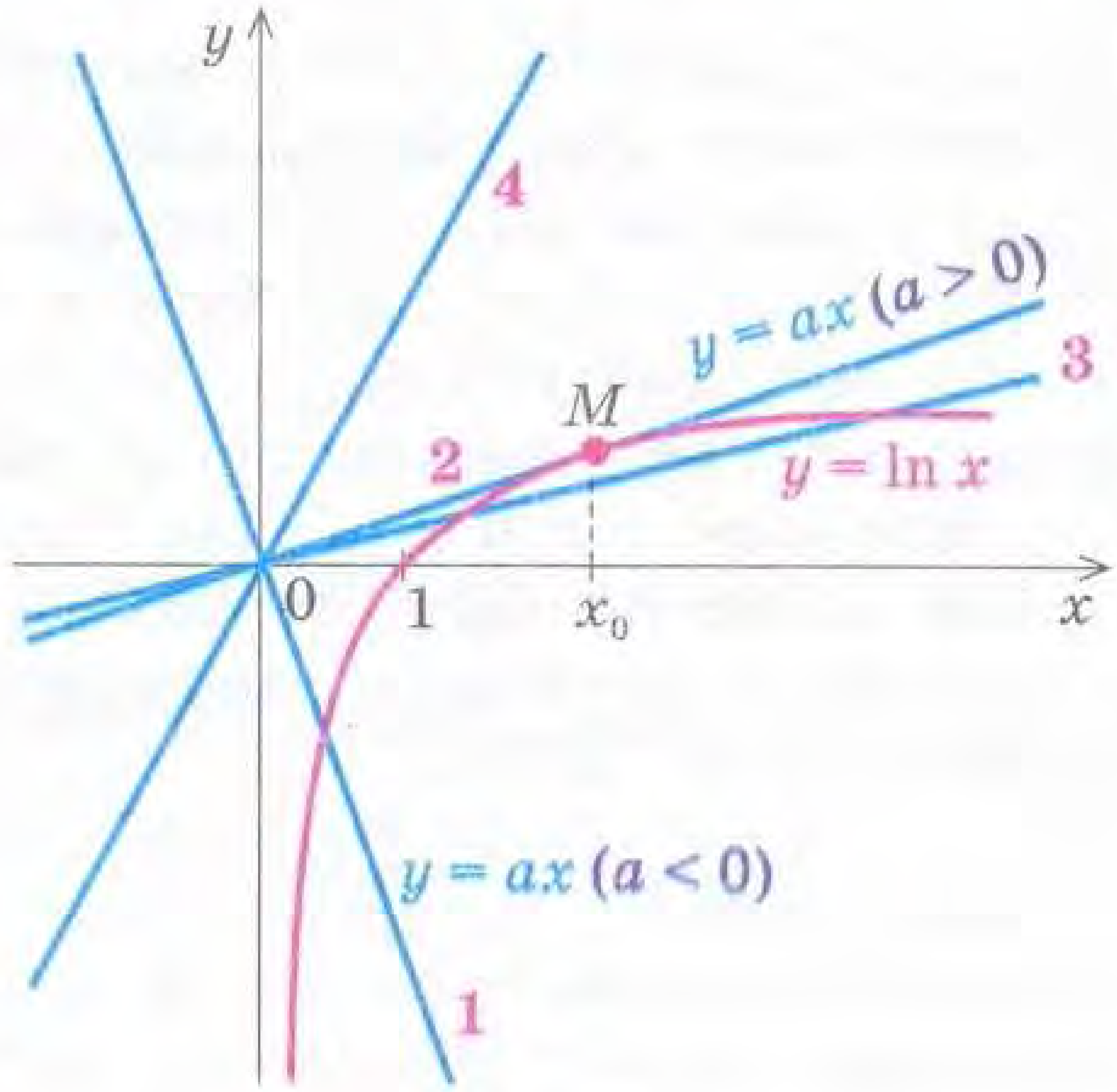


Рис. 18.4

З'ясуємо, коли пряма $y = ax$ буде дотичною до графіка функції $y = f(x) = \ln x$. Нехай точка дотику M має абсцису x_0. Ураховуючи геометричний зміст похідної, одержуємо, що $f'(x_0) = a$ (значення похідної в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної через точку M). Оскільки $f'(x) = \frac{1}{x}$, то $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$. Тоді з рівності $f'(x_0) = a$ маємо $\frac{1}{x_0} = a$. Звідси $x_0 = \frac{1}{a}$. Тоді $y_0 = \ln\frac{1}{a}$. У той же час оскільки точка дотику M лежить і на дотичній $y = ax$, то її координати задовольняють рівняння дотичної. Одержуємо $\ln\frac{1}{a} = a\cdot\frac{1}{a}$, тобто $\ln\frac{1}{a} = 1$. Тоді $\frac{1}{a} = e$, отже, $a = \frac{1}{e}$.

Таким чином, задане рівняння буде мати єдиний корінь тільки при $a < 0$ та при $a = \frac{1}{e}$. Тоді найбільше значення параметра a, при якому рівняння $\ln x = ax$ має єдиний корінь, — це $a = \frac{1}{e}$.

Приклад 4 Доведіть, що при всіх дійсних значеннях x виконується нерівність $e^x \geqslant 1 + x$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Розглянемо функцію $f(x) = e^x - 1 - x.$ Область визначення: $D(f) = \mathbf{R}$.	Використаємо похідну для доведення заданої нерівності. Для цього дослідимо функцію $f(x)$, яка

Похідна $f'(x) = e^x - 1$ існує на всій області визначення. Отже, функція $f(x)$ неперервна на всій числовій прямій; $f'(x) = 0$, $e^x - 1 = 0$, $e^x = 1$, $x = 0$ — критична точка.

Відмічаємо критичну точку на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знаки похідної та поведінку функції в кожному з одержаних проміжків (рис. 18.5).

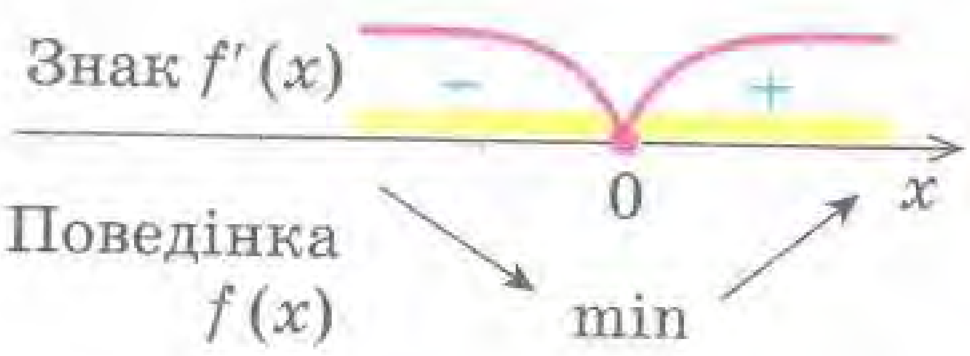


Рис. 18.5

Як бачимо, неперервна функція $f(x)$ має на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ тільки одну критичну точку, і це точка мінімуму. Отже, у цій точці функція набуває свого найменшого значення на цьому інтервалі. Тоді при всіх дійсних значеннях x значення $f(x) \geqslant f(0) = 0$, тобто $e^x - 1 - x \geqslant 0$. Отже, $e^x \geqslant 1 + x$ при всіх дійсних значеннях x. ◁

є різницею лівої й правої частин нерівності.

Спробуємо в результаті дослідження знайти найбільше чи найменше значення функції $f(x)$ на всій числовій прямій. Для цього можна використати таку властивість: *якщо неперервна функція $f(x)$ має на заданому інтервалі тільки одну точку екстремуму x_0 і це точка мінімуму, то на заданому інтервалі функція набуває свого найменшого значення в точці x_0*. Далі користуємося тим, що коли в точці x_0 функція набуває найменшого значення на заданому інтервалі, то для всіх значень x із цього інтервалу $f(x) \geqslant f(x_0)$ (якщо необхідно, то можна уточнити, що знак рівності досягається тільки в точці x_0).

При доведенні числових нерівностей або при порівнянні двох чисел часто буває зручно перейти до більш загальної функціональної нерівності.

Приклад 5* Порівняйте числа π^e і e^π.

Коментар

Щоб знайти план розв'язування, можна міркувати так. Ми не знаємо, яке із заданих чисел більше: π^e або e^π, тому для аналізу поставимо між ними «$\vee$» — знак нерівності, спрямований гострим кінцем униз. Це свідчить про те, що ми не знаємо, у який бік його треба направити. Будемо виконувати перетворення нерівності до тих пір, поки не з'ясуємо, яке число більше. Потім знак «$\vee$» замінимо відповідним знаком нерівності («$>$» або «$<$»), який і запишемо в розв'язанні. (У процесі аналізу, якщо на якомусь кроці перетворень потрібно поміняти знак нерівності, знак «$\vee$» змінюють на знак «$\wedge$», а в запису розв'язання у відповідному місці змінюють знак нерівності.) При аналізі запис типу $\pi^e \vee e^\pi$ теж будемо називати нерівністю (але, звичайно, не в розв'язанні).

Розглянемо нерівність $\pi^e \vee e^\pi$. Це нерівність із додатними членами ($\pi > 0$ і $e > 0$), отже, обидві її частини можна прологарифмувати. Функція $\ln t$ — зростаюча, тому після логарифмування обох частин за основою e знак нерівності не зміниться й ми одержимо нерівність $\ln(\pi^e) \vee \vee \ln(e^\pi)$, тобто нерівність $e \ln \pi \vee \pi \ln e$. Оскільки $e\pi > 0$, то після ділення обох частин останньої нерівності на $e\pi$ знак нерівності не зміниться й ми одержимо нерівність $\frac{\ln \pi}{\pi} \vee \frac{\ln e}{e}$. Помічаємо, що в лівій і правій частинах останньої нерівності стоять значення однієї й тієї самої функції $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Дослідимо цю функцію за допомогою похідної на зростання й спадання. Далі, ураховуючи, що $\pi > e$, порівняємо одержані вирази, а потім і задані вирази (виконуючи всі ті самі перетворення, що й в процесі аналізу, тільки у зворотному порядку).

Розв'язання

▶Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Її область визначення: $x > 0$. Похідна $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ існує на всій області визначення. З'ясуємо, коли $f'(x) = 0$: $\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$. Тоді на області визначення одержуємо рівносильне рівняння $\ln x = 1$, тобто $x = e$ — критична точка. Відмічаємо критичну точку на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знаки похідної та поведінку функції в кожному з одержаних проміжків (рис. 18.6).

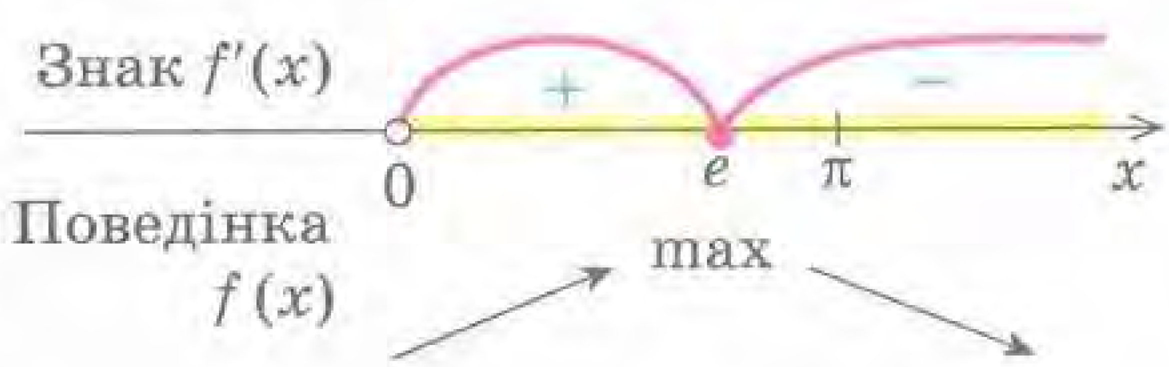


Рис. 18.6

Отже, в інтервалі $(e; +\infty)$ функція $f(x)$ спадає, а її неперервність на всій області визначення свідчить про те, що вона спадає на проміжку $[e; +\infty)$.

Оскільки $\pi > e$, то $f(\pi) < f(e)$, тобто $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$. Домноживши обидві частини цієї нерівності на додатне число πe (знак нерівності не змінюється), одержуємо нерівність $e \ln \pi < \pi \ln e$. Тоді $\ln(\pi^e) < \ln(e^\pi)$. Оскільки функція $\ln t$ — зростаюча ($e > 1$), то $\pi^e < e^\pi$.

Відповідь: $\pi^e < e^\pi$. ◁

Приклад 6* Розв'яжіть рівняння $2^{x+3} + 2^{2x+1} = 7 \cdot 3^x + 3$.

Коментар

Якщо спробувати застосувати до заданого рівняння схему розв'язування показникових рівнянь (див. с. 178), то вдається реалізувати тільки перший її пункт — позбутися числових доданків у показниках степенів.

А от звести всі степені до однієї основи (зі зручними показниками) або до двох основ так, щоб одержати однорідне рівняння, або перенести всі члени в один бік і розкласти одержаний вираз на множники — не вдається.

Спробуємо застосувати властивості відповідних функцій. Але і на цьому шляху (див., наприклад, підручник для 10 класу, розділ 1, або § 10 та § 20 цього підручника) нам не вдається використати скінченність ОДЗ (вона нескінченна), оцінку лівої й правої частин рівняння (вони обидві в межах від 0 до $+\infty$). Якщо сподіватися на можливість використання монотонності функції, то й тут ми не можемо застосувати теореми про корені (в обох частинах заданого рівняння стоять зростаючі функції).

Тоді *спробуємо підібрати корені цього рівняння й довести, що інших коренів воно не має* (зручно попередньо звести рівняння до виду $f(x) = 0$). Послідовно підставляючи $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, з'ясовуємо, що $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(3) = 0$, тобто рівняння $f(x) = 0$ має три корені. Щоб довести, що інших коренів немає, достатньо довести, що у функції $f(x)$ є не більше трьох проміжків зростання або спадання; ураховуючи ж неперервність $f(x)$ на всій числовій прямій, достатньо довести, що в неї не більше двох критичних точок, тобто рівняння $f'(x) = 0$ має не більше двох коренів. Розглядаючи тепер рівняння $f'(x) = 0$, після його перетворення ми можемо провести аналогічні міркування, але вже для двох коренів (як це було зроблено в прикладі на с. 139).

Виконуючи перетворення рівняння $f'(x) = 0$, урахуємо, що всі його члени мають однаковий степінь — x (тобто воно є однорідним відносно трьох функцій від змінної x, а саме: 2^x, 3^x, 4^x). За допомогою ділення обох частин рівняння $f'(x) = 0$ на степінь з основою 2, 3 або 4 вдається зменшити кількість виразів зі змінною на один.

Розв'язання

▶ Задане рівняння рівносильне рівнянню $2^x \cdot 2^3 + 2^{2x} \cdot 2^1 - 7 \cdot 3^x - 3 = 0$, тобто

$$8 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^x - 7 \cdot 3^x - 3 = 0. \qquad (1)$$

Позначимо $f(x) = 8 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^x - 7 \cdot 3^x - 3$. Оскільки $f(0) = 8 + 2 - 7 - 3 = 0$, $f(1) = 16 + 8 - 21 - 3 = 0$, $f(3) = 64 + 128 - 189 - 3 = 0$, то рівняння $f(x) = 0$ має три корені: 0, 1, 3. Доведемо, що інших коренів у рівняння (1) немає. Для цього достатньо довести, що у функції $f(x)$ є не більше трьох проміжків зростання або спадання, оскільки ж функція $f(x)$ на всій числовій прямій неперервна, достатньо довести, що функція має не більше двох критичних точок.

Область визначення: $D(f) = \boldsymbol{R}$.

Похідна $f'(x) = 8 \cdot 2^x \ln 2 + 2 \cdot 4^x \ln 4 - 7 \cdot 3^x \ln 3$ існує при всіх значеннях x. Отже, критичними точками можуть бути тільки ті значення x, при яких $f'(x) = 0$. Одержуємо рівняння $8 \cdot 2^x \ln 2 + 2 \cdot 4^x \ln 4 - 7 \cdot 3^x \ln 3 = 0$.

Оскільки $3^x \neq 0$, то після ділення обох частин останнього рівняння на 3^x одержуємо рівносильне рівняння

$$8\left(\frac{2}{3}\right)^x \ln 2 + 2\left(\frac{4}{3}\right)^x \ln 4 - 7\ln 3 = 0. \qquad (2)$$

Щоб довести, що рівняння (2) має не більше двох коренів, достатньо довести, що функція $\varphi(x) = 8\left(\frac{2}{3}\right)^x \ln 2 + 2\left(\frac{4}{3}\right)^x \ln 4 - 7\ln 3$, яка стоїть у лівій частині рівняння, має не більше двох проміжків зростання або спадання. Ураховуючи неперервність цієї функції на всій числовій прямій, достатньо довести, що вона має тільки одну критичну точку. Дійсно, $\varphi'(x) = (8\ln 2)\left(\frac{2}{3}\right)^x \ln\frac{2}{3} + (2\ln 4)\left(\frac{4}{3}\right)^x \ln\frac{4}{3}$ існує при всіх значеннях x. Отже, критичними точками можуть бути тільки ті значення x, при яких $\varphi'(x) = 0$. Одержуємо однорідне рівняння

$$(8\ln 2)\left(\frac{2}{3}\right)^x \ln\frac{2}{3} + (4\ln 2)\left(\frac{4}{3}\right)^x \ln\frac{4}{3} = 0.$$

Оскільки $(4\ln 2)\left(\frac{2}{3}\right)^x \neq 0$, то після ділення обох частин рівняння на цей вираз одержуємо рівносильне рівняння $2\ln\frac{2}{3} + 2^x \ln\frac{4}{3} = 0$. Звідси $2^x = \dfrac{-2\ln\frac{2}{3}}{\ln\frac{4}{3}}$. Ураховуючи, що $\ln\frac{2}{3} < 0$, а $\ln\frac{4}{3} > 0$, одержуємо $\dfrac{-2\ln\frac{2}{3}}{\ln\frac{4}{3}} > 0$. Отже, останнє рівняння має єдиний корінь. Тоді функція $\varphi(x)$ має єдину критичну точку й рівняння (2) має не більше двох коренів. Це означає, що функція $f(x)$ має не більше двох критичних точок. Тоді рівняння (1) (і задане рівняння) має не більше трьох коренів. Але три корені заданого рівняння ми вже знаємо: 0, 1, 3. Отже, інших коренів задане рівняння не має.

Відповідь: 0, 1, 3. ◁

Запитання для контролю

1. Запишіть формули знаходження похідних:
   а) показникової і логарифмічної функцій;
   б) функції $\sqrt[n]{x}$.

2*. Обґрунтуйте формули знаходження похідних, указаних у запитанні 1.

Вправи

Знайдіть похідну функції (1, 2).

1°. 1) $y = 3e^x + 4$; 2) $y = e^x - \ln x$; 3) $y = e^{-x} + x^5$; 4) $y = \ln(2x - 1)$.

2. 1) $y = e^{5x}\cos x$; 2) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; 3) $y = \sqrt{x}\lg x$; 4) $y = x^3 \log_2 x$.

3. Розв'яжіть нерівність $f'(x) > 0$, якщо:
1°) $f(x) = e^{2x} - x$; 2°) $f(x) = 2x - \ln x$;
3) $f(x) = x\ln x$; 4) $f(x) = (1 - x)e^{-2x}$.

4. Знайдіть значення x, при яких значення похідної функції $f(x)$:
а) дорівнює нулю; б) додатне; в) від'ємне.
1) $f(x) = x^2\ln x$; 2) $f(x) = x^3 - 3\ln x$;
3) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; 4) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$.

5. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо:
1) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$;
3) $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$, $x_0 = 0$; 4) $f(x) = \ln x - x$, $x_0 = 1$.

6. Знайдіть абсциси x_0 точок графіка функції $y = f(x)$, у яких дотична до нього утворює кут φ з додатним напрямком осі Ox:
1) $f(x) = \sin 2x$, $\varphi = 0°$; 2) $f(x) = \ln 2x$, $\varphi = 45°$; 3) $f(x) = e^{-x}$, $\varphi = 135°$.

7*. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^{5x+1}$, яка паралельна прямій $y = 5x - 8$.

8*. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^{3x-2}$, яка паралельна прямій $y = 3x + 17$.

9. Знайдіть найбільше й найменше значення функції на заданому відрізку:
1) $f(x) = x + e^{-x}$, $[-1; 2]$; 2) $f(x) = \ln(2x) - 6x^2 + 11x$, $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$;
3) $f(x) = |x^2 - x - 2| + \ln x$, $[1; 3]$.

10. а) Дослідіть функцію $f(x)$ і побудуйте її графік.
б) Знайдіть область значень функції $f(x)$.
в*) Скільки коренів має рівняння $f(x) = a$ залежно від значення параметра a?
1) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$; 2) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

11*. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $ax^6 = e^x$ має єдиний додатний корінь.

12*. Доведіть, що рівняння має єдиний корінь, і знайдіть цей корінь.

1) $e^x + 2x - 1 = 0$; 2) $\frac{1}{x} - \ln x = 1$.

Розв'яжіть рівняння **(13–15)**.

13*. 1) $2^x + 2^{-x} = 2\cos\frac{x}{3}$; 2) $4^x + 4^{1-x} = 1 + 3\sin \pi x$; 3) $4^{\frac{1}{x}} - 1 = 3^{2x-1}$.

14*. 1) $2^{x+1} - 4x = 0$; 2) $3^{x-1} - 4x = -3$; 3) $5^{x+2} - 12x = 25$.

15*. 1) $3 \cdot 2^{x+2} + 5^x = 8 \cdot 3^x + 5$; 2) $3 \cdot 2^x - 3^{x+1} + 4^x = 1$;
3) $3 \cdot 2^{x+4} + 6 \cdot 7^{x+1} = 3 \cdot 5^{x+2} + 15$. 4) $3^x + 3^{2-x} = 3(1 + \cos 2\pi x)$.

16*. Доведіть нерівність:

1) $e^{-x} > 1 - x$ при $x < 0$; 2) $e^x > ex$ при $x > 1$;

3) $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$ при $x \geqslant 0$; 4) $\ln(1+x) \geqslant \frac{x}{x+1}$ при $x > -1$;

5) $2x \ln x \leqslant x^2 - 1$ при $x \geqslant 1$.

17*. Порівняйте числа:

1) 1000^{1001} і 1001^{1000}; 2) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}$ і $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$; 3) $(\lg 5)^3$ і $3^{\lg 5}$.

§ 19 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОКАЗНИКОВО-СТЕПЕНЕВИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

Таблиця 26

<table>
<tr><td colspan="2">Показниково-степеневі рівняння</td></tr>
<tr><td colspan="2">Показниково-степеневими рівняннями звичайно називають рівняння, що містять вирази виду $(f(x))^{g(x)}$, тобто рівняння виду $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$ (основою степенів, які стоять у лівій і правій частинах показниково-степеневого рівняння є $f(x)$ — вираз зі змінною).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Основні способи розв'язування рівняння $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td colspan="2">I. $f(x) > 0$</td></tr>
<tr><td>Якщо можливо, використовуємо основну логарифмічну тотожність у вигляді
$$a^{\log_a N} = N$$
$(a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0)$</td><td>1. ► $x^{\log_x (x+1)} = x^2 - 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x + 1 = x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x_1 = -1 \text{ або } x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$
Відповідь: 2. ◁</td></tr>
</table>

Закінчення табл. 26

<table>
<tr><td>Якщо можливо, логарифмуємо обидві частини рівняння за числовою основою або подаємо всі степені як степені з однією й тією самою числовою основою за формулою
$$U(x) = a^{\log_a U(x)}$$
$(a > 0,\ a \neq 1,\ U(x) > 0)$</td><td>2. $x^{2\lg x + 1} = 100x$.
▶На ОДЗ ($x > 0$) обидві частини рівняння додатні, тому після логарифмування за основою 10 одержуємо рівняння, рівносильне даному:
$\lg(x^{2\lg x + 1}) = \lg(100x)$.
Звідси $(2\lg x + 1)\lg x = \lg 100 + \lg x$.
Заміна: $\lg x = t$. $(2t + 1)t = 2 + t$, $t^2 = 1$, $t_1 = 1$, $t_2 = -1$. Тоді $\lg x = 1$ або $\lg x = -1$, тобто $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$ (обидва корені входять до ОДЗ).
Відповідь: 10; 0,1. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">II. $f(x)$ — довільний вираз</td></tr>
<tr><td>Два степені з однаковими основами $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$ можуть бути рівні в одному з чотирьох випадків:
1) $f(x) = -1$ і для коренів цього рівняння $g(x)$ та $\varphi(x)$ — цілі числа однакової парності;
2) $f(x) = 0$ і для коренів цього рівняння $g(x) > 0$ та $\varphi(x) > 0$;
3) $f(x) = 1$ і для коренів цього рівняння $g(x)$ та $\varphi(x)$ існують;
4) $g(x) = \varphi(x)$ і для коренів цього рівняння існують $(f(x))^{g(x)}$ та $(f(x))^{\varphi(x)}$.</td><td>3. $x^{2x + 4} = x^{20}$.
▶Якщо вважати основу x числом, то спочатку розглянемо три особливих випадки (основа степеня дорівнює −1; 0; 1), а потім прирівняємо показники степенів:
1) при $x = -1$:
$(-1)^2 = (-1)^{20}$ — правильна рівність;
2) при $x = 0$:
$0^4 = 0^{20}$— правильна рівність;
3) при $x = 1$:
$1^6 = 1^{20}$ — правильна рівність;
4) при $2x + 4 = 20$, тобто $x = 8$:
$8^{20} = 8^{20}$ — правильна рівність.
Відповідь: −1; 0; 1; 8.
Зауваження. Якщо вважати основу x змінною, то функція $f(x) = x^{2x} + 4$ вважається означеною лише при $x > 0$. Із цього погляду дане рівняння має тільки корені 1 і 8.
Відповідь: 1; 8. ◁
Тобто відповідь до такого рівняння не можна записати однозначно.</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

Показниково-степеневими рівняннями та нерівностями звичайно називають рівняння й нерівності, що містять вирази виду $(f(x))^{g(x)}$ (тобто змінна входить і до основи, і до показника степеня).

Аналізуючи показниково-степеневі рівняння, представлені в табл. 26, треба пам'ятати, що в шкільному курсі математики поняття рівняння на різних етапах вводилося по-різному. А саме: у 4–5 класах рівнянням називалася *числова рівність, яка містить невідоме число, позначене буквою*. Значення невідомого, при якому рівняння перетворюється на правильну числову рівність, називалося *коренем* або *розв'язком* цього рівняння. Наприклад, для рівняння $2x = 6$ коренем є значення $x = 3$.

З точки зору наведеного означення, у рівнянні $2x = 6$ літерою x позначено хоча й невідоме нам, але конкретне число, тому x може набувати тільки єдиного значення ($x = 3$). Але таке означення утруднює в подальшому роботу з рівнянням. Коли x набуває тільки єдиного значення, ми не можемо використовувати, наприклад, графічне розв'язування рівняння (маючи тільки одне значення x, неможливо одержати графік $y = 2x$ як пряму лінію на площині). Тому починаючи з 6–7 класу *рівняння* означається як *рівність зі змінною* (коренем або розв'язком рівняння відповідно називається таке значення змінної, при якому це рівняння перетворюється на правильну числову рівність). Тепер x у тому самому рівнянні $2x = 6$ — це змінна, для якої немає жодного обмеження, і через це x може бути будь-яким числом (ОДЗ рівняння: $x \in \boldsymbol{R}$). При такому підході кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної $2x$. Отже, це рівняння можна розв'язати графічно, побудувавши графіки функцій $y = 2x$ і $y = 6$. Крім того, при такому підході можна записати рівняння в загальному вигляді як рівність $f(x) = \varphi(x)$ і обґрунтовано використовувати властивості функцій для розв'язування рівнянь.

Для всіх видів рівнянь, які розглядалися в курсі алгебри або алгебри й початків аналізу, наведені два означення рівняння приводять до одного й того самого результату при розв'язуванні рівнянь. Але у випадку показниково-степеневого рівняння інколи можна отримати різні відповіді, використовуючи різні підходи до означення рівняння.

Наприклад, розглянемо рівняння $x^{2x+1} = x^5$.

Якщо розглядати таке рівняння як числову рівність, то два степені з однаковою основою x можуть бути рівними тільки в одному з чотирьох випадків. А саме: якщо основою степеня є значення -1; 0; 1 ($x = -1$, $x = 0$, $x = 1$), то степені можуть бути рівними навіть тоді, коли їх показники будуть різними (звичайно, якщо ці степені існують). У всіх інших випадках степені з однаковою основою будуть рівними тільки тоді, коли показники цих степенів будуть рівними ($2x + 1 = 5$, тобто $x = 2$). Отже, для одержання всіх коренів заданого рівняння досить перевірити значення x, рівні -1; 0; 1; 2. Усі ці числа є коренями, бо при підстановці кожного з них у задане рівняння воно перетворюється на правильну числову рівність.

Якщо ж розглядати це рівняння як рівність зі змінною, з функціональної точки зору, то функція $f(x) = x^{2x+1}$, як правило, вважається означеною тільки при $x > 0$, і тоді задане рівняння має тільки два корені: 1 і 2. ◁

Отже, до розглянутого рівняння відповідь не можна записати однозначно (оскільки кожен з указаних підходів до означення рівняння має право на існування й реально використовується в математиці). Тому в подібних ситуаціях доводиться наводити обидва варіанти відповіді.

Аналогічний приклад наведено в табл. 26.

Узагальнюючи наведені вище міркування, зазначимо, що, коли при розв'язуванні рівняння виду $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$ *з умови не випливає, що основа степеня* $f(x) > 0$, *доводиться розглядати три особливих випадки: основа* $f(x)$ *дорівнює* -1, 0, 1 (*зрозуміло, що в цих випадках степені* $(f(x))^{g(x)}$ *і* $(f(x))^{\varphi(x)}$ *можуть бути рівними навіть тоді, коли показники* $g(x)$ *і* $\varphi(x)$ *різні*), *а потім прирівняти показники* ($g(x) = \varphi(x)$). Якщо ж з умови випливає, що $f(x) > 0$, то розглядаємо тільки один особливий випадок — основа степеня дорівнює 1 ($f(x) = 1$) — і прирівнюємо показники степенів ($g(x) = \varphi(x)$).

Наприклад, розглянемо рівняння $(x^2 - 1)^{3x-7} = (x^2 - 1)^8$.

▶ З умови не випливає, що основа степеня $x^2 - 1 > 0$, отже, доводиться розглядати всі випадки.

1) Якщо $x^2 - 1 = -1$, то $x^2 = 0$, отже, $x = 0$.
Підставляючи це значення в задане рівняння, маємо $(-1)^{-7} = (-1)^8$, тобто $-1 = 1$ (неправильна рівність), отже, $x = 0$ не є коренем заданого рівняння.
2) Якщо $x^2 - 1 = 0$, тобто $x = \pm 1$, то при цих значеннях x задане рівняння перетворюється на неправильну числову рівність (оскільки значення виразів 0^{-4} та 0^{-10} не існують). Отже, числа 1 і -1 не є коренями даного рівняння.
3) Якщо $x^2 - 1 = 1$, тобто $x = \pm\sqrt{2}$, то задане рівняння перетворюється на правильну рівність ($1 = 1$), отже, $x = \pm\sqrt{2}$ — корені даного рівняння.
4) Прирівняємо показники степенів заданого рівняння (основи степенів у лівій і правій частинах рівняння однакові): $3x - 7 = 8$, тоді $x = 5$ (при підстановці отримуємо правильну рівність $24^8 = 24^8$). Отже, $x = 5$ — корінь даного рівняння.
Об'єднуючи одержані результати, отримуємо відповідь.
Відповідь: $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 5. ◁

Зауваження. При $f(x) > 0$ для розв'язування рівняння $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$ можна прологарифмувати обидві його частини за будь-якою числовою основою, одержати рівносильне рівняння, у якому вже не доведеться розглядати особливий випадок — він буде врахований автоматично. Це пов'язано з тим, що функція $y = a^x$ при $a > 0$ має особливий випадок, якщо $a = 1$ (див. графік функції $y = a^x$ при $a > 0$), а функція $y = \log_b x$ (де $b > 0$, $b \neq 1$) особливих випадків не має.

Також зауважимо, що *при розв'язуванні нерівностей виду* $(f(x))^{g(x)} > (f(x))^{\varphi(x)}$, як правило, використовують функціональний підхід і *вважають, що* $f(x) > 0$.

Відзначимо, що в тих випадках, *коли до показниково-степеневого рівняння входять вирази виду* $a^{\log_a N}$, *для розв'язування такого рівняння може використовуватися основна логарифмічна тотожність*. У цьому випадку треба враховувати ОДЗ заданого рівняння (див. приклад 1 у табл. 26).

Досить часто для розв'язування показниково-степеневих рівнянь використовується логарифмування обох частин. Звичайно, це можна зробити тільки тоді, коли на ОДЗ заданого рівняння обидві частини рівняння додатні (див. приклад 2 в табл. 26).

Наведемо ще кілька прикладів розв'язування показниково-степеневих рівнянь і нерівностей.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ Зазначимо, що $x = 3$ не є коренем заданого рівняння (0^0 не існує). При $x \neq 3$ обидві частини рівняння додатні. Після логарифмування (за основою 10) обох частин заданого рівняння одержуємо рівносильні йому рівняння: $$\lg|x-3|^{3x^2-10x+3}=\lg 1,$$ $$(3x^2-10x+3)\lg|x-3|=0,$$ $$3x^2-10x+3=0 \text{ або } \lg|x-3|=0.$$ З першого одержаного рівняння маємо $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2 = 3$ (не є коренем), а з другого $\lvert x-3\rvert = 1$, тоді $x - 3 = 1$ або $x - 3 = -1$. Тобто $x = 4$ або $x = 2$. *Відповідь:* $\frac{1}{3}$; 2; 4. ◁	Оскільки $\lvert x-3\rvert \geqslant 0$, то з особливих випадків можна розглянути тільки один — основа дорівнює 0 ($\lvert x-3\rvert = 0$, тобто $x = 3$). Щоб не розглядати випадок, коли основа дорівнює 1, досить при $x \neq 3$ прологарифмувати обидві частини рівняння за числовою основою (наприклад, за основою 10). При $x \neq 3$ обидві частини заданого рівняння додатні, тому після логарифмування одержуємо рівняння, рівносильне заданому. Оскільки всі подальші перетворення є рівносильними (при $x \neq 3$), то всі одержані розв'язки (які не дорівнюють 3) є коренями заданого рівняння.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $5^{\log_2 x}+x^{\log_2 5}=10$.

Коментар

Прологарифмувати обидві частини заданого рівняння не вдається (у лівій частині стоїть сума), тому спробуємо всі степені подати як степені з однією й тією самою числовою основою. Ураховуючи, що в заданому рівнянні є логарифм за основою 2, подамо всі задані степені як степені з основою 2 за формулою $u=a^{\log_a u}$, де $u>0$, $a>0$, $a\neq 1$. Тоді

$$5^{\log_2 x}=2^{\log_2\left(5^{\log_2 x}\right)}=2^{\log_2 x\log_2 5}, \qquad (1)$$

$$x^{\log_2 5}=2^{\log_2\left(x^{\log_2 5}\right)}=2^{\log_2 5\log_2 x}$$

(тобто доданки, які стоять у лівій частині заданого рівняння, однакові). Після одержання рівняння (2) (див. розв'язання) можна використати рівність (1) справа наліво. Можна також записати праву частину рівняння (2) як степінь числа 2 або прологарифмувати обидві його частини за основою 2.

Розв'язання

ОДЗ: $x>0$. На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням

$$2^{\log_2 x\log_2 5}+2^{\log_2 5\log_2 x}=10, \quad 2\cdot 2^{\log_2 x\log_2 5}=10,$$

$$2^{\log_2 x\log_2 5}=5, \qquad (2)$$

$$5^{\log_2 x}=5,$$

$\log_2 x=1$, $x=2$ (входить до ОДЗ).

Відповідь: 2. ◁

Приклад 3 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}x^{\log_3 y}+y^{\log_3 x}=18,\\ \log_3 x+\log_3 y=3.\end{cases}$

Коментар

Використаємо рівносильні перетворення системи. Для цього врахуємо ОДЗ і простежимо за тим, щоб на цій ОДЗ всі перетворення рівнянь як у прямому, так і в зворотному напрямках зберігали правильні рівності.

У першому рівнянні заданої системи запишемо всі степені як степені з основою 3 (див. коментар до прикладу 2). Після рівносильних (на ОДЗ) перетворень першого рівняння одержуємо систему (1) (див. розв'язання), до якої змінні входять тільки у вигляді $\log_3 x$ і $\log_3 y$, тому зручно використати заміну змінних. Після оберненої заміни застосовуємо означення логарифма.

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases}x>0,\\ y>0.\end{cases}$ На цій ОДЗ перше рівняння заданої системи рівносильне

рівнянням $3^{\log_3\left(x^{\log_3 y}\right)}+3^{\log_3\left(y^{\log_3 x}\right)}=18$, $3^{\log_3 y\log_3 x}+3^{\log_3 x\log_3 y}=18$,

$2\cdot 3^{\log_3 x\log_3 y}=18$, $3^{\log_3 x\log_3 y}=9$, $3^{\log_3 x\log_3 y}=3^2$, $\log_3 x\,\log_3 y=2$.

Тоді задана система рівносильна системі

$$\begin{cases}\log_3 x\log_3 y=2,\\ \log_3 x+\log_3 y=3.\end{cases} \qquad (1)$$

Заміна $\log_3 x = u$, $\log_3 y = v$ дає систему $\begin{cases} uv = 2, \\ u + v = 3. \end{cases}$

З другого рівняння останньої системи $v = 3 - u$, тоді з першого рівняння $u\,(3 - u) = 2$, тобто $u^2 - 3u + 2 = 0$. Звідси $u_1 = 1$, $u_2 = 2$. Тоді $v_1 = 2$, $v_2 = 1$.

Обернена заміна дає $\begin{cases} \log_3 x = 1, \\ \log_3 y = 2 \end{cases}$ або $\begin{cases} \log_3 x = 2, \\ \log_3 y = 1. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} x = 3, \\ y = 9 \end{cases}$ або $\begin{cases} x = 9, \\ y = 3 \end{cases}$ (знайдені розв'язки входять до ОДЗ).

Відповідь: (3; 9), (9; 3). ◁

Приклад 4 Розв'яжіть нерівність $|\,x - 4\,|^{\lg (x-2)} \geqslant |\,x - 4\,|^{\lg (6-x)}$.

I спосіб

Коментар

Спробуємо виконати рівносильні перетворення заданої нерівності, використовуючи міркування, аналогічні тим, що застосовувалися при розв'язуванні показниково-степеневих рівнянь (див. п. II табл. 26). Оскільки $|\,x - 4\,| \geqslant 0$, то з особливих випадків потрібно розглянути тільки два: основа дорівнює 0 (тобто $x = 4$) і основа дорівнює 1 (тобто $|\,x - 4\,| = 1$). При інших значеннях x основа — додатне число, що не дорівнює 1. Розглянемо два випадки: 1) основа більша за 1 (при переході до показників у заданій нерівності знак нерівності не змінюється); 2) основа менша від 1, але більша за 0 (при переході від степенів до показників у заданій нерівності знак нерівності змінюється на протилежний). При таких перетвореннях одержуємо нерівності, рівносильні заданій (на її ОДЗ), оскільки можемо гарантувати правильність не тільки прямих, а й зворотних переходів.

При розв'язуванні одержаних найпростіших логарифмічних нерівностей ураховуємо, що функція $y = \lg t$ є зростаючою.

До відповіді необхідно включити всі розв'язки одержаних систем нерівностей і всі особливі значення, які є розв'язками заданої нерівності.

Розв'язання

▶ОДЗ: $\begin{cases} x - 2 > 0, \\ 6 - x > 0, \end{cases}$ тобто $2 < x < 6$.

При $x = 4$ задана нерівність виконується ($0^{\lg 2} \geqslant 0^{\lg 2}$, $0 \geqslant 0$ — правильна нерівність), отже, $x = 4$ — один з розв'язків цієї нерівності.

Якщо $|\,x - 4\,| = 1$ (тобто $x - 4 = 1$ або $x - 4 = -1$, отже, $x = 5$ або $x = 3$ — ці значення входять до ОДЗ), то задана нерівність теж виконується. При $x = 5$ і $x = 3$ одержуємо правильну нерівність $1 \geqslant 1$. Отже, ці числа теж є розв'язками заданої нерівності.

При $x \neq 4$, $x \neq 5$ і $x \neq 3$ на ОДЗ задана нерівність рівносильна такій сукупності систем:

$$\begin{cases} |x-4|>1, \\ \lg(x-2) \geqslant \lg(6-x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 0<|x-4|<1, \\ \lg(x-2) \leqslant \lg(6-x). \end{cases}$$

Тобто $\begin{cases} x \neq 4, \\ x \neq 5, \\ x \neq 3, \\ 2<x<6, \\ x-4<-1 \text{ або } x-4>1, \\ x-2 \geqslant 6-x \end{cases}$ або $\begin{cases} x \neq 4, \\ x \neq 5, \\ x \neq 3, \\ 2<x<6, \\ -1<x-4<1, \\ x-2 \leqslant 6-x. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} x \neq 4, \\ x \neq 5, \\ x \neq 3, \\ 2<x<6, \\ x<3 \text{ або } x>5, \\ x \geqslant 4 \end{cases}$ або $\begin{cases} x \neq 4, \\ x \neq 5, \\ x \neq 3, \\ 2<x<6, \\ 3<x<5, \\ x \leqslant 4. \end{cases}$

Отже, $5 < x < 6$ або $3 < x < 4$. Ураховуючи особливі значення, які є розв'язками, одержуємо: $3 \leqslant x \leqslant 4$ або $5 \leqslant x < 6$.

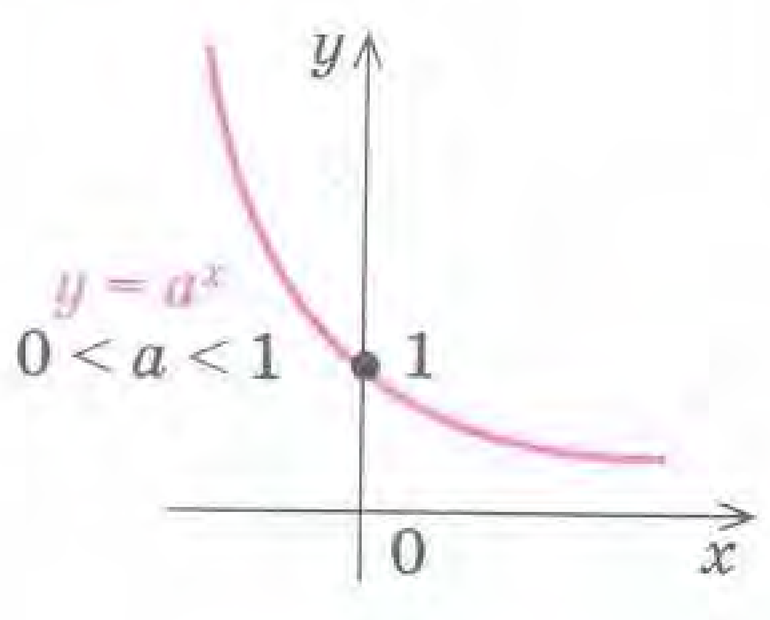
Відповідь: $[3;\ 4] \cup [5;\ 6)$.◁

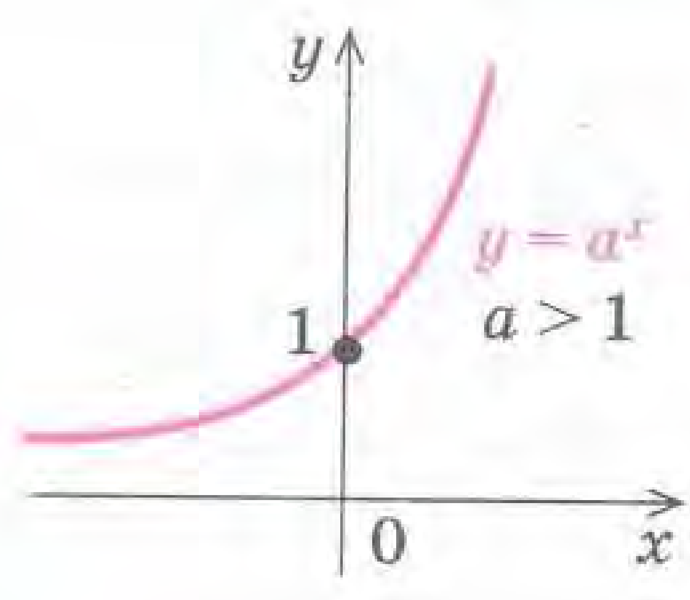
II спосіб

Коментар

Розв'яжемо задану нерівність методом інтервалів, для цього зведемо її до виду $f(x) \geqslant 0$.

Для знаходження нулів $f(x)$ потрібно розв'язати показниково-степеневе рівняння (2). Оскільки $|x-4| \geqslant 0$, то з особливих випадків потрібно розглянути тільки два — основа дорівнює 0 (тобто $x = 4$) або основа дорівнює 1 (тобто $|x-4| = 1$). При інших значеннях x з ОДЗ у рівнянні (3) основа — додатне число, що не дорівнює 1. Тоді можна прирівняти показники степенів (одержуємо рівняння, рівносильне заданому).





Для знаходження знаків $f(x)$ зручно використати графіки функції $y = a^x$ при $0 < a < 1$ і при $a > 1$.

Розв'язання

▶ 1. ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0; \\ 6-x>0, \end{cases}$ тобто $2 < x < 6$.

На цій ОДЗ задана нерівність рівносильна нерівності

$$|x-4|^{\lg(x-2)} - |x-4|^{\lg(6-x)} \geqslant 0. \quad (1)$$

2. Нехай $f(x) = |x-4|^{\lg(x-2)} - |x-4|^{\lg(6-x)}$.

Нулі $f(x)$: $\quad |x-4|^{\lg(x-2)} - |x-4|^{\lg(6-x)} = 0. \quad (2)$

На ОДЗ рівняння (2) рівносильне рівнянню

$$|x-4|^{\lg(x-2)} = |x-4|^{\lg(6-x)}. \quad (3)$$

При $x = 4$ рівність (3) виконується ($0^{\lg 2} = 0^{\lg 2}$; $0 = 0$ — правильна рівність), отже, $x = 4$ — корінь рівняння (3).

Якщо $|x-4| = 1$ (тобто $x - 4 = 1$ або $x - 4 = -1$, отже, $x = 5$ або $x = 3$), рівність (3) теж виконується. При $x = 5$ і $x = 3$ одержуємо правильну рівність $1 = 1$. Отже, ці числа теж є коренями рівняння (3).

При $x \neq 4$, $x \neq 5$ і $x \neq 3$ на ОДЗ рівняння (3) рівносильне рівнянню $\lg(x-2) = \lg(6-x)$. Тоді $x - 2 = 6 - x$, отже, $x = 4$ — не задовольняє умову $x \neq 4$. Тобто на останній множині рівняння (3) коренів не має.

3. Відмічаємо нулі функції на ОДЗ і знаходимо знак $f(x)$ на кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ (див. рисунок).

Відповідь: $[3; 4] \cup [5; 6)$. ◁

Приклад 5 Розв'яжіть нерівність $x^{\log_a x+1} > a^2 x$.

Коментар

На ОДЗ обидві частини нерівності є додатними, тому спробуємо прологарифмувати обидві частини нерівності. Оскільки до заданої нерівності вже входить $\log_a x$, то зручно прологарифмувати за основою a. Але при логарифмуванні за основою, більшою за 1, знак нерівності не змінюється, а при логарифмуванні за основою, меншою від 1, знак нерівності змінюється. Доводиться розглядати два випадки (у кожному з них одержуємо нерівність, рівносильну заданій на її ОДЗ).

Розв'язання

▶ ОДЗ: $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Прологарифмуємо обидві частини нерівності.

1. При $a > 1$ задана нерівність на її ОДЗ рівносильна нерівностям

$\log_a\left(x^{\log_a x+1}\right) > \log_a(a^2 x)$, $(\log_a x + 1)\log_a x > \log_a a^2 + \log_a x$,

$\log_a^2 x + \log_a x > 2 + \log_a x$, $\log_a^2 x > 2$.

Отже, $\log_a x < -\sqrt{2}$ або $\log_a x > \sqrt{2}$.

Тобто $\log_a x < \log_a a^{-\sqrt{2}}$ або $\log_a x > \log_a a^{\sqrt{2}}$.

Ураховуючи ОДЗ ($x > 0$) і те, що $a > 1$, одержуємо $0 < x < a^{-\sqrt{2}}$ або $x > a^{\sqrt{2}}$.

2. При $0 < a < 1$ задана нерівність на її ОДЗ рівносильна нерівностям $\log_a\left(x^{\log_a x+1}\right) < \log_a (a^2x)$, $(\log_a x + 1)\log_a x < \log_a a^2 + \log_a x$, $\log_a^2 x + \log_a x < 2 + \log_a x$, $\log_a^2 x < 2$.

Отже, $-\sqrt{2} < \log_a x < \sqrt{2}$.

Тобто $\log_a a^{-\sqrt{2}} < \log_a x < \log_a a^{\sqrt{2}}$.

Ураховуючи ОДЗ ($x > 0$) і те, що $0 < a < 1$, одержуємо $a^{\sqrt{2}} < x < a^{-\sqrt{2}}$.

Відповідь: 1) при $a > 1$ $x \in \left(0; a^{-\sqrt{2}}\right) \cup \left(a^{\sqrt{2}}; +\infty\right)$;

2) при $0 < a < 1$ $x \in \left(a^{\sqrt{2}}; a^{-\sqrt{2}}\right)$. ◁

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах, як можна розв'язувати показниково-степеневі рівняння.
2. Поясніть, чому при переході від рівняння $x^{\lg x} = x^2$ до рівняння $\lg x = 2$ (основи рівні — прирівняли показники) губиться корінь заданого рівняння.

Вправи

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\lg x} = x^3$; 2) $x^{2\lg x} - 10x = 0$; 3) $x^{2\log_{16} x} = \dfrac{64}{\sqrt{x}}$; 4) $x^{\log_x (x^2-3)} = 2x$;

5) $x^{x+2} = x^6$: а) при $x > 0$; б) при $x \in \boldsymbol{R}$; 6) $|x-1|^{x^2-1} = 1$;

7) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_3 \sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\log_3 (x^2-1)} = \sqrt{2(x-1)}$; 8) $4^{\log_4^2 x} + x^{\log_4 x} = 8$;

9) $2x^{2\lg(x-1)} = 1 + (x-1)^{\lg x}$.

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^{\log_5 y} + y^{\log_5 x} = 50, \\ \log_{25} x + \log_{25} y = 1{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 16, \\ \log_2 x - \log_2 y = 2. \end{cases}$

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2 - x + 1)^{x^2 - 2{,}5x + 1} < 1$; 2) $|x+1|^{x^2-2x} \geqslant |x+1|^3$;

3) $|x-2|^{\log_3 (x-2)} \leqslant |x-2|^{\log_3 (8-x)}$; 4) $x^{\log_a x + 4} < a^4 x$;

5) $x^{3+\log_a x} > a^2x^2$.

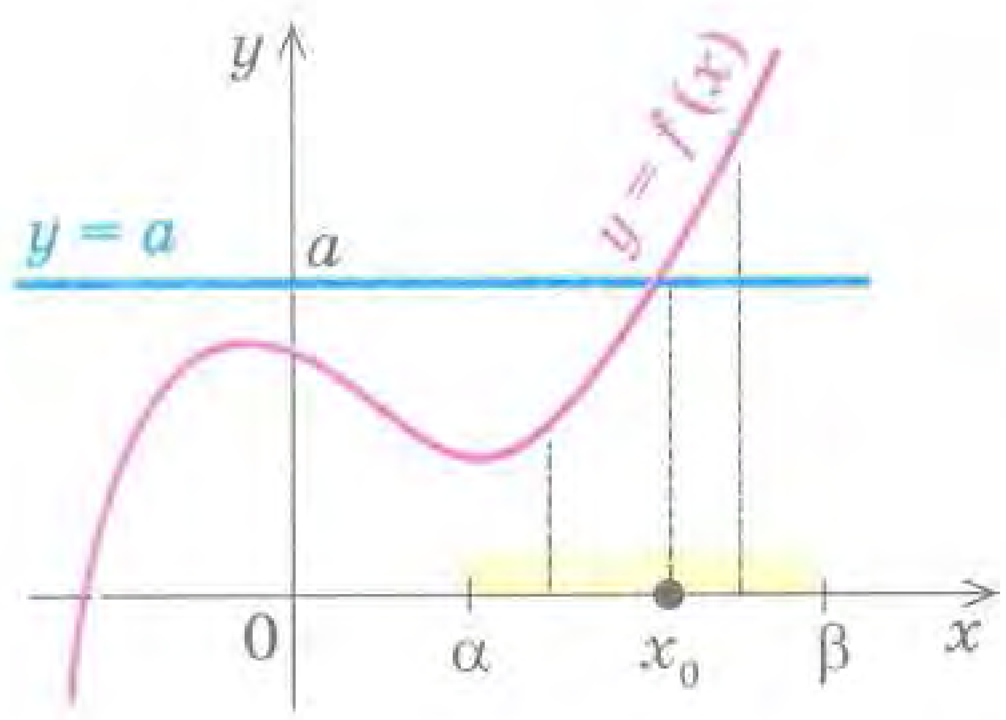
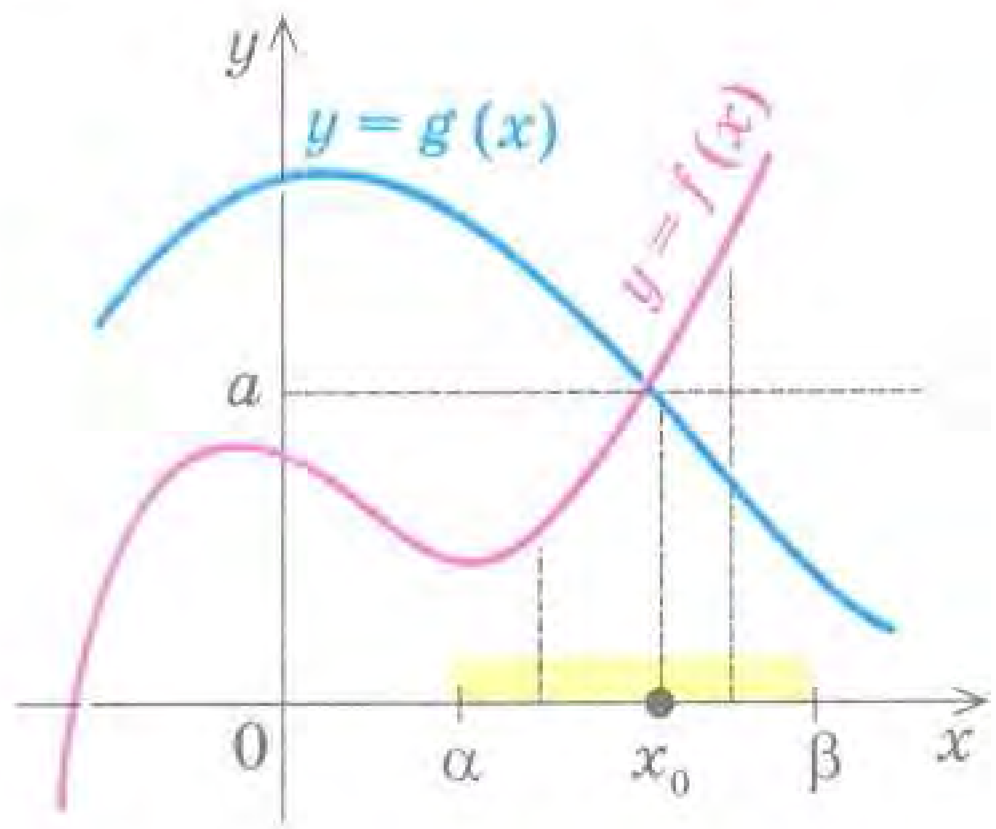
§ 20 ПОКАЗНИКОВІ ТА ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ Й НЕРІВНОСТІ

Деякі показникові та логарифмічні рівняння можна розв'язати, застосовуючи властивості відповідних функцій. Нагадаємо основні прийоми, які використовують при розв'язуванні рівнянь за допомогою властивостей функцій, та наведемо приклади розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять показникові, логарифмічні та інші функції.

Таблиця 27

Орієнтир	Приклад
1. Скінченна ОДЗ	
Якщо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння (нерівності або системи) складається зі скінченного числа значень, то для розв'язування досить перевірити всі ці значення.	$$2^{\sqrt{x-1}}+3^x=4^{1-\sqrt{2-2x}}.$$ ▶ОДЗ: $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\2-2x\geqslant 0.\end{cases}$ Тоді $\begin{cases}x\geqslant 1,\\x\leqslant 1.\end{cases}$ Отже, ОДЗ: $x=1$. Перевірка: $x=1$ — корінь $\left(2^{\sqrt{1-1}}+3^1=4^{1-\sqrt{2-2}},\ 4=4\right)$. Інших коренів немає, оскільки до ОДЗ входить тільки одне число. *Відповідь:* 1. ◁
2. Оцінка лівої та правої частин рівняння	
$\boxed{\begin{array}{c}f(x)=g(x)\\ \hline f(x)\geqslant a\\ g(x)\leqslant a\end{array}}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=a,\\g(x)=a.\end{cases}$ **Якщо потрібно розв'язати рівняння виду $f(x)=g(x)$ і $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$, то рівність між лівою й правою частинами можлива тоді й тільки тоді, коли $f(x)$ і $g(x)$ одночасно дорівнюють a.**	$$2^{x^2}=\cos\frac{x}{2}.$$ ▶Оцінимо значення лівої й правої частин заданого рівняння: $f(x)=2^{x^2}\geqslant 1$ (оскільки $x^2\geqslant 0$); якщо $g(x)=\cos\frac{x}{2}$, то $-1\leqslant g(x)\leqslant 1$. Отже, $f(x)\geqslant 1$, $g(x)\leqslant 1$. Тоді задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}2^{x^2}=1,\\ \cos\frac{x}{2}=1.\end{cases}$ Із першого рівняння одержуємо $x^2=0$, тобто $x=0$, що задовольняє друге рівняння. *Відповідь:* 0. ◁

Продовження табл. 27

<table>
<tr><th colspan="2">3. Використання монотонності функцій</th></tr>
<tr><td colspan="2">Схема розв'язування рівняння
1. Підбираємо один або кілька коренів рівняння.
2. Доводимо, що інших коренів це рівняння не має (використовуючи теореми про корені рівняння або оцінку значень лівої та правої частин рівняння).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Теореми про корені рівняння</td></tr>
<tr><td>1. Якщо в рівнянні $f(x) = a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку.
Приклад
Рівняння $2^x + 3^x = 5$ має єдиний корінь $x = 1$ ($2^1 + 3^1 = 5$, тобто $5 = 5$), оскільки функція $f(x) = 2^x + 3^x$ зростає (на всій області визначення $x \in \boldsymbol{R}$) як сума двох зростаючих функцій.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>2. Якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому ж проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку.
Приклад
Рівняння $5^x = 27 - x$ має єдиний корінь $x = 2$ ($5^2 = 27 - 2$, тобто $25 = 25$), оскільки $f(x) = 5^x$ зростає, а $g(x) = 27 - x$ спадає (при всіх $x \in \boldsymbol{R}$).</td></tr>
<tr><th colspan="2">4. «Шукай квадратний тричлен»</th></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>Спробуйте розглянути задане рівняння як квадратне відносно якоїсь змінної (чи відносно якоїсь функції).</td><td>$$4^x - (7 - x)\cdot 2^x + 12 - 4x = 0.$$
▶ Запишемо, що $4^x = 2^{2x}$, і введемо заміну $2^x = t$. Одержуємо
$$t^2 - (7 - x)\cdot t + 12 - 4x = 0.$$
Розглянемо це рівняння як квадратне відносно t. Його дискримінант</td></tr>
</table>

Закінчення табл. 27

	$D = (7 - x)^2 - 4(12 - 4x) =$ $= x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$ Тоді $t_{1,2} = \frac{7 - x \pm (x+1)}{2}$, тобто $t_1 = 4,\ t_2 = 3 - x.$ Обернена заміна дає $2^x = 4$ (звідси $x = 2$) або $2^x = 3 - x$. Останнє рівняння має єдиний корінь $x = 1$, оскільки $f(x) = 2^x$ зростає, а $g(x) = 3 - x$ спадає (при всіх $x \in \boldsymbol{R}$). *Відповідь:* 1; 2. ◁

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4.$

Розв'язання	*Коментар*
▶Якщо $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = t$, то $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = \frac{1}{t}$. Одержуємо $t + \frac{1}{t} = 4$. Отже, $t^2 - 4t + 1 = 0$. Тоді $t_1 = 2 - \sqrt{3},\ t_2 = 2 + \sqrt{3}.$ Обернена заміна дає $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2 - \sqrt{3}$ (звідси $x = 2$) або $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2 + \sqrt{3}$ (звідси $x = -2$). *Відповідь:* -2; 2. ◁	Помічаємо, що $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = 1.$ Отже, якщо $\sqrt{2-\sqrt{3}} = a$, то $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{a}$. Тобто задане рівняння має вигляд $a^x + \frac{1}{a^x} = 4$ і його можна розв'язати за допомогою заміни $a^x = t$. Але тепер цю заміну можна безпосередньо використати для заданого рівняння, не вводячи проміжні позначення. Після оберненої заміни враховуємо, що $2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2} = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{-2}.$

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $4^x + \frac{1}{4^x} + 2^x - \frac{1}{2^x} = 4.$

Коментар

Якщо звести всі степені до однієї основи 2 і позначити $2^x = t$, то одержимо рівняння (1) (див. розв'язання), у якому можна ввести заміну

$t-\frac{1}{t}=u$ (тоді $u^2=t^2-2+\frac{1}{t^2}$, отже, $t^2+\frac{1}{t^2}=u^2+2$). На ОДЗ заданого рівняння ($x \in R$) усі заміни й обернені заміни є рівносильними перетвореннями цього рівняння. Отже, розв'язавши рівняння, одержані в результаті замін, і виконавши обернені заміни, ми отримаємо корені заданого рівняння.

Розв'язання

▶ $$2^{2x}+\frac{1}{2^{2x}}+2^x-\frac{1}{2^x}=4.$$

Заміна $2^x = t$ дає рівняння

$$t^2+\frac{1}{t^2}+t-\frac{1}{t}=4. \qquad (1)$$

Позначимо $t-\frac{1}{t}=u$, тоді $t^2+\frac{1}{t^2}=u^2+2$, отже, з рівняння (1) одержуємо рівняння $u^2 + u - 2 = 0$, яке має корені: $u_1 = 1$, $u_2 = -2$.

Обернена заміна дає $t-\frac{1}{t}=1$ або $t-\frac{1}{t}=-2$. Тоді $t^2 - t - 1 = 0$ або $t^2 + 2t - 1 = 0$.

Одержуємо $t_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $t_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ або $t_3=-1+\sqrt{2}$, $t_4=-1-\sqrt{2}$.

Тоді $2^x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (звідси $x=\log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}$), або $2^x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (коренів немає, оскільки $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$), або $2^x=-1+\sqrt{2}$ (звідси $x=\log_2(\sqrt{2}-1)$), або $2^x=-1-\sqrt{2}$ (коренів немає, оскільки $-1-\sqrt{2}<0$).

Відповідь: $\log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\log_2(\sqrt{2}-1)$. ◁

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $4^x+\frac{1}{4^x}=2\cos 2x$.

<u>І спосіб</u>

Коментар

Ураховуючи, що $4^x > 0$, одержуємо, що в лівій частині рівняння стоїть *сума двох взаємно обернених додатних чисел, яка завжди більша або дорівнює* 2. (Дійсно, якщо $a > 0$, то $a+\frac{1}{a}-2=\frac{a^2-2a+1}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}\geqslant 0$, отже, при всіх $a > 0$ $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$.)

Для оцінки значень правої частини досить згадати, що областю значень функції $\cos 2x$ є проміжок $[-1; 1]$, отже, $-2 \leqslant 2\cos 2x \leqslant 2$.

Розв'язання

▶ Оцінимо значення лівої й правої частин рівняння. $f(x)=4^x+\frac{1}{4^x}\geqslant 2$ як сума двох взаємно обернених додатних чисел. Якщо $g(x) = 2\cos 2x$, то $-2 \leqslant g(x) \leqslant 2$.

Отже, $f(x) \geqslant 2$, $g(x) \leqslant 2$, тоді задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 4^x+\dfrac{1}{4^x}=2, \\ 2\cos 2x=2. \end{cases}$$

З першого рівняння, використовуючи заміну $4^x = t$, одержуємо

$t+\frac{1}{t}=2$, тобто $t^2 - 2t + 1 = 0$. Звідси $t = 1$.

Тоді $4^x = 1$, отже, $x = 0$, що задовольняє й друге рівняння.

Відповідь: 0. ◁

II спосіб

Коментар

Якщо позначити $4^x = t$, то задане рівняння зводиться до рівняння (2) (див. розв'язання), яке можна розглядати як квадратне відносно змінної t. Зауважимо, що $t = 4^x \neq 0$, отже, при таких значеннях t рівняння (1) і (2) є рівносильними. Далі використовуємо умову існування коренів квадратного рівняння.

Розв'язання

▶ Після заміни $4^x = t$ ($t > 0$) із заданого рівняння одержуємо рівносильне рівняння

$$t+\frac{1}{t}=2\cos 2x, \qquad (1)$$

яке, у свою чергу, рівносильне рівнянню

$$t^2 - (2\cos 2x)\,t + 1 = 0. \qquad (2)$$

Розглянемо рівняння (2) як квадратне відносно змінної t.

Тоді його дискримінант $D = 4\cos^2 2x - 4$.

Рівняння (2) може мати корені тільки тоді, коли $D \geqslant 0$, тобто коли $4\cos^2 2x - 4 \geqslant 0$, тоді

$$\cos^2 2x \geqslant 1. \qquad (3)$$

У цій нерівності знак «більше» не може виконуватися ($\cos^2 2x \leqslant 1$ завжди), отже, нерівність (3) рівносильна рівнянню $\cos^2 2x = 1$. Тоді $\cos 2x = 1$ або $\cos 2x = -1$. Підставляючи ці значення в рівняння (2), одержуємо дві системи:

$$\begin{cases} \cos 2x=1, \\ t^2-2t+1=0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \cos 2x=-1, \\ t^2+2t+1=0. \end{cases}$$

У другій системі з другого рівняння маємо $t = -1$, що не задовольняє умову $t > 0$. Отже, задане рівняння рівносильне тільки першій системі. З другого рівняння першої системи маємо $t = 1$, тоді $4^x = 1$, тобто $x = 0$, що задовольняє й перше рівняння цієї системи.

Відповідь: 0. ◁

Приклад 4 Розв'яжіть рівняння $2^{|x|} - |2^{x+1} - 2| = 2^{x+1}$.

Коментар

Для розв'язування рівняння з кількома модулями можемо використати загальну схему, розглянуту в 10 класі (див. також табл. 43 на с. 391):

1) знайти ОДЗ;
2) знайти нулі всіх підмодульних функцій;
3) позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки;
4) знайти розв'язки рівняння в кожному з проміжків.

Розв'язання

▶ ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$.

Нулі підмодульних функцій: $x = 0$ і $2^{x+1} - 2 = 0$, $2^{x+1} = 2$,

$$x + 1 = 1,\ x = 0.$$

Цей нуль ($x = 0$) розбиває ОДЗ на два проміжки, у кожному з яких кожна підмодульна функція має постійний знак (рис. 20.1).

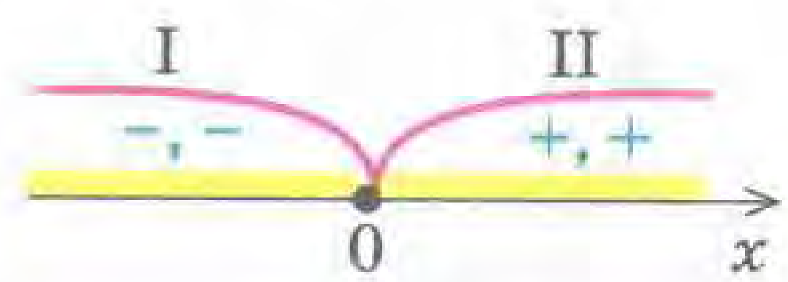


Рис. 20.1

Проміжок I. При $x \in (-\infty; 0]$ маємо рівняння $2^{-x} + 2^{x+1} - 2 = 2^{x+1}$. Тоді

$2^{-x} = 2$, отже, $x = -1 \in (-\infty; 0]$.

Проміжок II. При $x \in [0; +\infty)$ маємо рівняння $2^x - (2^{x+1} - 2) = 2^{x+1}$. Тоді $2^x = \frac{2}{3}$, звідси $x = \log_2 \frac{2}{3}$. Але $\log_2 \frac{2}{3} < 0$, отже, у II проміжку задане рівняння коренів не має.

Відповідь: −1. ◁

Приклад 5 Розв'яжіть рівняння

$$\lg^2 (x + 1) = \lg (x + 1) \lg (x - 1) + 2 \lg^2 (x - 1).$$

Розв'язання	*Коментар*
▶ОДЗ: $\begin{cases} x+1>0, \\ x-1>0. \end{cases}$ Тобто $x > 1$. Оскільки $x = 2$ не є коренем заданого рівняння, то при діленні обох частин рівняння на $\lg^2 (x - 1) \neq 0$ одержуємо рівносильне рівняння (на ОДЗ)	Якщо виконати заміну $\lg (x + 1) = u$, $\lg (x - 1) = v$, то одержимо *рівняння* $u^2 = uv + 2v^2$, *усі члени якого мають однаковий сумарний степінь* — два. Нагадаємо, що таке рівняння *називають однорідним і розв'язують діленням обох частин на найвищий степінь однієї зі змінних.*

$$\frac{\lg^2(x+1)}{\lg^2(x-1)}=\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}+2.$$

Після заміни $t=\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}$ маємо рівняння $t^2 - t - 2 = 0$, корені якого:

$$t_1 = -1,\ t_2 = 2.$$

Виконавши обернену заміну, одержуємо

$$\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}=-1 \text{ або } \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}=2.$$

Тоді на ОДЗ маємо рівносильні рівняння

$\lg(x + 1) = -\lg(x - 1)$ або $\lg(x + 1) = 2\lg(x - 1)$,

$\lg(x + 1) = \lg(x - 1)^{-1}$ або $\lg(x + 1) = \lg(x - 1)^2$,

$x+1=\frac{1}{x-1}$ або $x + 1 = (x - 1)^2$,

$x^2 - 1 = 1$ або $x + 1 = x^2 - 2x + 1$,

$x^2 = 2$ або $x^2 - 3x = 0$,

$x=\pm\sqrt{2}$, або $x = 0$, або $x = 3$.

Ураховуючи ОДЗ, одержуємо

$$x=\sqrt{2} \text{ або } x = 3.$$

Відповідь: $\sqrt{2}$; 3. ◁

Розділимо, наприклад, обидві частини на v^2 (тобто на $\lg^2(x - 1)$).

Щоб не загубити корені рівняння при діленні на вираз зі змінною, потрібно ті значення змінної, при яких цей вираз дорівнює нулю, розглянути окремо. Значення x, при якому $\lg(x - 1) = 0$ (тоді $x - 1 = 1$), тобто $x = 2$, підставляємо в задане рівняння.

Для реалізації одержаного плану розв'язування не обов'язково вводити змінні u і v, досить помітити, що задане рівняння однорідне, розділити обидві частини на $\lg^2(x - 1)$, а вже потім увести нову змінну t.

У кінці враховуємо, що всі перетворення були рівносильними на ОДЗ, отже, необхідно вибрати тільки ті зі знайдених розв'язків, які входять до ОДЗ.

Приклад 6 Розв'яжіть рівняння $\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)=0.$

Коментар

Логарифмічні функції, які стоять у лівій частині заданого рівняння, набувають тільки невід'ємних значень.

Дійсно, на всій області визначення $1+\sqrt{x-2}\geqslant 1$, отже, $\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)\geqslant 0$; аналогічно, оскільки $1 - |x^2 - 4| \leqslant 1$, то на своїй області визначення $\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)\geqslant 0$. *У цьому випадку сума двох невід'ємних функцій може дорівнювати нулю тоді й тільки тоді, коли кожна з цих функцій дорівнює нулю.*

Зауважимо, що при переході від заданого рівняння до системи рівнянь ОДЗ не змінюється, отже, її можна не записувати в явному вигляді. При розв'язуванні одержаних найпростіших логарифмічних рівнянь ОДЗ теж ураховується автоматично, тому її можна взагалі не записувати до розв'язання.

Розв'язання

▶ Оскільки на всій області визначення $\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)\geqslant 0$ і $\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)\geqslant 0$, то задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)=0,\\ \log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)=0.\end{cases}$$

З першого рівняння системи одержуємо $1+\sqrt{x-2}=2^0$. Тоді $\sqrt{x-2}=0$, тобто $x = 2$, що задовольняє й друге рівняння системи.

Відповідь: 2. ◁

Приклад 7 При яких значеннях параметра a нерівність

$$\log_{\frac{2a-15}{5}}\left(\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x+a-5}{5}\right)>0$$

виконується для будь-яких значень x?

Коментар

Спочатку скористаємося формулою

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi):$$

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

Потім запишемо праву частину нерівності як значення логарифмічної функції і, переходячи до аргументів, урахуємо, що у випадку, коли основа цієї функції більша за 1, функція зростає, а коли менша від 1 (але більша за 0) — спадає. Також урахуємо ОДЗ заданої нерівності.

При подальшому аналізі одержаних нерівностей ураховуємо, що нерівність $\sin t > b$ виконується для будь-яких значень t тоді й тільки тоді, коли $b < -1$, а нерівність $\sin t < c$ — коли $c > 1$.

Розв'язання

▶ Задана нерівність рівносильна нерівності

$$\log_{\frac{2a-15}{5}}\left(\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}\right)>\log_{\frac{2a-15}{5}}1.$$

Ця нерівність рівносильна сукупності систем

$$\begin{cases}\dfrac{2a-15}{5}>1,\\ \dfrac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}>1\end{cases}\quad\text{або}\quad\begin{cases}0<\dfrac{2a-15}{5}<1,\\ 0<\dfrac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}<1.\end{cases}$$

Тоді $\begin{cases} a>10, \\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)>5-\dfrac{a}{2} \end{cases}$ або $\begin{cases} 7{,}5<a<10, \\ \dfrac{5-a}{2}<\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)<5-\dfrac{a}{2}. \end{cases}$

Нерівності зі змінною x в останній сукупності систем виконуватимуться для будь-яких значень x за умов:

$\begin{cases} a>10, \\ 5-\dfrac{a}{2}<-1 \end{cases}$ або $\begin{cases} 7{,}5<a<10, \\ \dfrac{5-a}{2}<-1, \\ 5-\dfrac{a}{2}>1. \end{cases}$ Тобто $\begin{cases} a>10, \\ a>12 \end{cases}$ або $\begin{cases} 7{,}5<a<10, \\ a>7, \\ a<8. \end{cases}$

Тоді $a > 12$ або $7{,}5 < a < 8$.

Відповідь: $a \in (7{,}5; 8) \cup (12; +\infty)$. ◁

Приклад 8 При яких значеннях параметра a рівняння $\log_2 (4^x - a) = x$ має єдиний корінь?

Коментар

Виконуючи рівносильні перетворення заданого рівняння, як завжди, ураховуємо, що при використанні означення логарифма для розв'язування цього найпростішого логарифмічного рівняння його ОДЗ ураховується автоматично.

При виконанні заміни змінної в завданні з параметром ураховуємо, що після заміни вимога задачі може змінитися.

Досліджуючи розміщення коренів квадратного тричлена $f(t) = t^2 - t - a$, застосовуємо умови, наведені в підручнику для 10 класу (для запису відповідних умов використаємо позначення: D — дискримінант, t_0 — абсциса вершини параболи). Як відомо, *для того щоб корені квадратного тричлена $f(t)$ (з додатним коефіцієнтом при t^2) були розміщені по різні боки від числа A, необхідно й достатньо виконання умови $f(A) < 0$.*

Розв'язання

▶ Задане рівняння рівносильне рівнянню

$$4^x - a = 2^x. \quad (1)$$

Тобто $2^{2x} - a = 2^x$. *Заміна* $2^x = t$ $(t > 0)$ дає рівняння

$$t^2 - t - a = 0. \quad (2)$$

Вимога задачі буде виконуватися тоді й тільки тоді, коли рівняння (2) матиме єдиний додатний корінь. Це буде в одному з двох випадків:

1) рівняння (2) має єдиний корінь, і він додатний;
2) рівняння (2) має два корені, з яких тільки один додатний, а другий — від'ємний або нуль.

Для першого випадку одержуємо $\begin{cases} D=0, \\ t_0>0, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} 1+4a=0, \\ t_0=\dfrac{1}{2}>0. \end{cases}$

Отже, $a=-\frac{1}{4}$.

Для другого випадку значення $t = 0$ дослідимо окремо.

При $t = 0$ з рівняння (2) одержуємо $a = 0$. При $a = 0$ рівняння (2) має корені $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Отже, умова задачі при $a = 0$ виконується.

Залишається ще один випадок — корені рівняння (2) мають різні знаки (розміщені по різні боки від нуля). Це буде тоді й тільки тоді, коли буде виконуватися умова $f(0) < 0$ (де $f(t) = t^2 - t - a$), тобто умова $-a < 0$, отже, $a > 0$. Об'єднуючи всі одержані результати, маємо відповідь.

Відповідь: при $a=-\frac{1}{4}$ або $a \geqslant 0$ задане рівняння має єдиний корінь. ◁

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах, як можна використати властивості функцій до розв'язування показникових та логарифмічних рівнянь.

Вправи

Розв'язіть рівняння (1–5).

1. 1) $2^{2x} = 5 - x$; 2) $\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x=1$; 3) $3^x + 4^x = 5^x$; 4) $2^x+2^{-x}=2\cos\frac{x}{3}$;

5) $\log_3(x+5)=\log_{\frac{1}{2}}x+4$; 6) $\log_2(3^x + 4) = 2 - 5^x$; 7) $\log_2|x| = 5 - x^2$;

8) $\log_2(1 + x^2) = \log_2 x + 2x - x^2$; 9) $\log_5 x=\sqrt{1-x^2}$.

2. 1) $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=8$; 2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x=6$;

3) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2^x$.

3. 1) $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$; 2) $x^2 + (x - 3)\log_2 x = 4x - 3$;

3) $2\lg^2(2x - 1) = \lg^2(2x + 1) - \lg(2x - 1)\lg(2x + 1)$.

4. 1) $2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$; 2) $\left|2+\log_{\frac{1}{5}}x\right|+3=\left|1+\log_5 x\right|$.

5. 1) $25^x - (a - 1)\cdot 5^x + 2a + 3 = 0$; 2) $\sqrt{4^x-6\cdot 2^x+1}=2^x-a$.

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+2^x=y+2^y, \\ x^2+3y=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 x-\log_2 y=y-x, \\ x^3+y^3=54. \end{cases}$

7. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $4^x + a\cdot 2^{x+1} - a = 0$ не має коренів.

8. Знайдіть усі значення параметра a, при яких нерівність $a\cdot 9^x + 4(a - 1)\cdot 3^x + a > 1$ виконується при всіх x.

9. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $3^x + 3^{-x} = 2\cos x + a + 4$ має єдиний корінь.

10. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $\log_3(9^x + a) = x$ має єдиний корінь.

11. Для кожного значення параметра a визначіть число коренів рівняння $|\lg x| = -(x-1)^2 + a$.

12. Скільки розв'язків має рівняння $(\log_2(x+1)-3)\sqrt{x-a}=0$ залежно від значення параметра a?

13. Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases}\lg(4+y)=\lg x,\\ a-y=\dfrac{1}{2}(x+a)^2\end{cases}$ має розв'язки.

ДОДАТКОВІ ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 2

Обчисліть **(1–4)**.

1. 1) $10\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$; 2) $9^{\log_{16}2+\log_3\sqrt{5}}$; 3) $81^{0,5\log_9 7}$; 4) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$.

2. 1) $\sqrt[4]{25^{-3\log_{\sqrt{5}}0,1}}+64^{\log_4 5}$; 2) $(15+3^{1+\log_3 4})\log_2\sqrt{3}\log_3 4$.

3. 1) $\dfrac{\log_2 66}{\log_6 66}-\log_2 3$; 2) $\log_2 27-2\log_2 3+\log_2\dfrac{2}{3}$.

4. 1) $20^{\frac{1}{2\log_{81}5}}\cdot(0,25)^{\frac{1}{2\log_{81}5}}$; 2) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)49^{\log_7 2}$.

5. 1) Знайдіть $\log_{b^{-\frac{1}{4}}}\left(\dfrac{a^4}{b^6}\right)$, якщо $\log_a b = -5$.

2) Знайдіть $\log_{b^5}(a^5b^5)$, якщо $\log_a b = 5$.

3) Знайдіть $\log_{b^6}(a^6b^6)$, якщо $\log_a b = 6$.

6. 1) Знайдіть $\log_4 20$, якщо $\lg 2 = a$.

2) Знайдіть $\log_{70} 32$, якщо $\log_{70} 5 = a$, $\log_{70} 7 = b$.

Порівняйте значення заданих числових виразів **(7, 8)**.

7. 1) $\log_{0,5}\dfrac{7}{4}$ і $\log_{0,125}\dfrac{7}{164}$; 2) $\sqrt{15}$ і $8^{\frac{1}{3}\log_2\left(1-\frac{1}{32}\right)\cdot 2\log_{27}3}$.

8. 1) $7^{\log_5 2}-0,1$ і $2^{\log_5 7}$; 2) $5^{\log_3 7}+0,1$ і $7^{\log_3 5}$; 3) $2^{\log_7 3}+0,1$ і $3^{\log_7 2}$.

Знайдіть область визначення функції **(9, 10)**.

9. 1) $y=\sqrt{\log_2(x^2-2x-2)}$; 2) $y=\sqrt{\log_4(x^2-4x-4)}$;

3) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-2x)}$; 4) $y=\sqrt{1-\log_4(x^2-3x)}$.

10. 1) $f(x)=\sqrt{2\cdot 3^{1-x}+1-3^x}$; 2) $f(x)=\lg\left((1,25)^{1-x^2}-(0,4096)^{1+x}\right)$;

3) $f(x)=\sqrt{27^x-9^{x^2+0,5}}$; 4) $f(x)=\sqrt{(4-x)(3^x-9)}$.

11. Знайдіть множину значень функції:

1) $y=\log_{0,1}\left(\dfrac{300}{1+\lg(100+x^2)}\right)$; 2) $y=\log_{0,5}\left(\dfrac{24}{11+\sqrt{1+|\ln x|}}\right)$.

Розв'яжіть рівняння **(12, 13)**.

12. 1) $2^{5x-1}\cdot 3^{4x+1}\cdot 7^{3x+3}=504^{x-2}$; 2) $2^{9x+9}\cdot 3^{7x+3}\cdot 5^{6x}=720^{x+3}$;

3) $2^{13-x}\cdot 3^{11-2x}\cdot 5^{9-3x}=360^{x+2}$; 4) $32^{x+3}\cdot 3^{3x+1}\cdot 625^{x+2}=600^{x+7}$.

13. 1) $3\log_6\left(3-\dfrac{3}{2x+3}\right)=4\log_6\left(2+\dfrac{1}{x+1}\right)+3$;

2) $\sqrt{33+\dfrac{8}{\log_x 4}}=3\log_4\left(4\sqrt[3]{x^2}\right)$; 3) $\sqrt{7-\dfrac{1}{\log_x 4}}=2\log_4\left(0,5\sqrt{x}\right)$.

14. При яких значеннях a вираз $\left(1-|x|\right)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}$ більший за вираз $0,2^{4-a^2-\log_{25}\left(1+x^2-2|x|\right)}$ при всіх допустимих значеннях x?

15. При яких значеннях a сума $\log_a(\sin x+2)$ та $\log_a(\sin x+3)$ буде дорівнювати одиниці хоча б при одному значенні x?

16. При яких значеннях a сума $\log_a(\cos^2 x+1)$ та $\log_a(\cos^2 x+5)$ буде дорівнювати одиниці хоча б при одному значенні x?

17. При яких значеннях a вираз $(\sin x)^{\lg(\sin x)-a^2}$ більший за вираз $10^{\log_{100}\left(1-\cos^2 x\right)+\log_7 a}$ при всіх допустимих значеннях x?

18. При яких значеннях a вираз $(1-2^x)^{\log_2(1-2^x)-2^a}$ більший за вираз $0,5^{3-\sqrt{a}-\log_4\left(1+4^x-2^{x+1}\right)}$ при всіх допустимих значеннях x?

19. Знайдіть усі значення a, при яких область визначення функції $y=\lg\left(a^{x+2}\cdot x^{3\log_x a}+a^4\cdot x^5-\left(\sqrt{x}\right)^{10+2x\log_x a}-\left(\sqrt{a}\right)^{18}\right)$ містить тільки одне ціле число.

20. З області визначення функції $y=\log_3\left(a^a-a^{\frac{5x+2}{x+2}}\right)$ взяли всі цілі додатні числа й додали їх. Знайдіть усі додатні значення a, при яких така сума буде більшою за 9, але меншою від 13.

21. Знайдіть усі значення a, при яких функція

$f(x)=a\,8^x-(3a-2)\,4^x+3(3a-2)\,2^x$ не має екстремумів.

22. Знайдіть найбільше значення площі прямокутника зі сторонами, паралельними осям координат, і діагоналлю OP, де точка O — початок координат, а P — точка на графіку функції $y=49xe^{2-7x}+\frac{9}{x}$ і $0,2 \leqslant x \leqslant 1$.

23. Знайдіть найбільше значення площі трикутника OPK, де O — початок координат, P — точка на графіку функції $y=\frac{5}{x}+64x^5e^{6-4x}$, $0,7 \leqslant x \leqslant 2$, а K — точка на осі Ox, абсциса якої дорівнює абсцисі точки P.

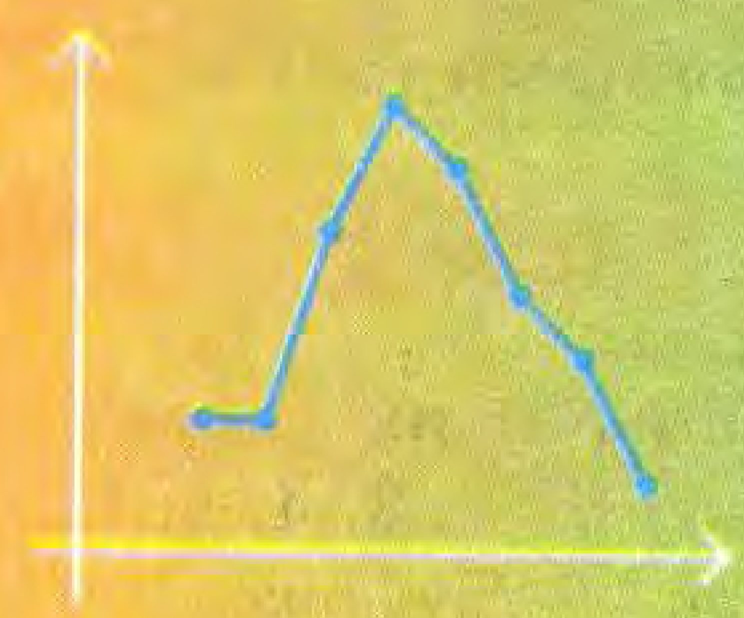
ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

Поняття показникової функції було введено з опорою на степеневу функцію з раціональним показником, яка має давню історію. Зокрема дробові показники степеня й найпростіші правила дій над степенями з дробовими показниками зустрічаються в XIV ст. у французького математика Н. Орема (бл. 1323–1382). Відомо, що Н. Шюке (бл. 1445–бл. 1500) розглядав степені з від'ємними й нульовим показниками. С. Стевін запропонував розуміти під $a^{\frac{1}{n}}$ корінь $\sqrt[n]{a}$. Але систематично дробові й від'ємні показники став застосовувати І. Ньютон.

Німецький математик М. Штіфель (1487–1567) дав позначення $a^0 = 1$, якщо $a \neq 0$, і ввів назву *показник* (це переклад з німецької Exponent). Німецьке potenzieren означає *піднести до степеня.* (Звідси походить і слово *потенціювати*, яке було застосоване для позначення переходів від логарифмів (log) виразів $f(x)$ і $g(x)$ до відповідних степенів, тобто від рівності $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ до рівності $a^{\log_a f(x)}=a^{\log_a g(x)}$.) У свою чергу, термін exponenten виник унаслідок не зовсім точного перекладу з грецької слова, яким Діофант Александрійський (бл. III ст.) позначав квадрат невідомої величини.

Термін *логарифм* походить від сполучення грецьких слів «логос» (у значенні «відношення») і «аритмос» (число) і перекладається як *відношення чисел.* Вибір винахідником логарифмів Дж. Непером такої назви (1594 р.) пояснюється тим, що логарифми виникли внаслідок зіставлення двох чисел, одне з яких є членом арифметичної прогресії, а друге — геометричної. Логарифми з основою e увів Дж. Спейдел (1619 р.), який склав перші таблиці для функції $\ln x$. Назву *натуральний* (природний) для цього логарифма запропонував Н. Меркатор (1620–1687), який виявив, що $\ln x$ — це площа фігури під гіперболою $\frac{1}{x}$.

Близьке до сучасного розуміння *логарифмування* — як операції, оберненої до піднесення до степеня, — уперше з'явилося в роботах Дж. Валліса і Йогана Бернулі, а остаточно було уточнено Л. Ейлером у XVIII ст. У книзі «Вступ до аналізу нескінченних» (1748) Ейлер дав сучасне означення як показникової, так і логарифмічної функцій і навів їх розклад у степеневі ряди, відзначив особливу роль натурального логарифма.



Розділ 3
ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА СТАТИСТИКИ

§ 21 ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ Й БІНОМ НЬЮТОНА

21.1. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Таблиця 28

<table>
<tr><th colspan="2">Комбінаторика</th></tr>
<tr><td colspan="2">Комбінаторика — розділ математики, у якому вивчають способи вибору та розміщення елементів деякої скінченної множини на основі якихось умов. Вибрані (або вибрані й розміщені) групи елементів називають сполуками.
Якщо всі елементи різні, то одержуємо сполуку без повторень, а якщо елементи можуть повторюватися, то сполуку з повтореннями*.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Перестановки</th></tr>
<tr><td colspan="2">Перестановкою з n елементів називають будь-яку впорядковану множину з n заданих елементів (тобто таку множину, для якої вказано, який елемент знаходиться на першому місці, який — на другому, ..., який — на n-му).</td></tr>
<tr><th>Формула числа перестановок (P_n)</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td>$P_n = n!$,
де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
(читають: «ен факторіал»)</td><td>Кількість різних шестицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, не повторюючи ці цифри в одному числі, дорівнює
$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Розміщення</th></tr>
<tr><td colspan="2">Розміщенням з n елементів по k називають будь-яку впорядковану множину з k елементів, складену з елементів заданої n-елементної множини.</td></tr>
</table>

---

* Формули для знаходження кількості сполук з повтореннями є необов'язковими й пропонуються тільки для ознайомлення.

Продовження табл. 28

Формула числа розміщень $\left(A_n^k\right)$	Приклад
$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	Кількість різних трицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри не можуть повторюватися, дорівнює $A_6^3 = \dfrac{6!}{(6-3)!} = \dfrac{6!}{3!} = \dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 4\cdot5\cdot6 = 120.$
Комбінації	
***Комбінацією* без повторень *з n елементів по k* називають будь-яку *k*-елементну підмножину заданої *n*-елементної множини.**	
Формула числа комбінацій $\left(C_n^k\right)$	Приклад
$C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ (за означенням вважають, що $C_n^0 = 1$)	Із класу, що складається з 25 учнів, можна виділити 5 учнів для чергування по школі C_{25}^5 способами, тобто $C_{25}^5 = \dfrac{25!}{5!(25-5)!} = \dfrac{25!}{5!\cdot20!} = \dfrac{21\cdot22\cdot23\cdot24\cdot25}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 53\,130$ способами.
Деякі властивості числа комбінацій без повторень	
$C_n^k = C_n^{n-k}$ (зокрема $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1$)	$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$
Схема пошуку плану розв'язування комбінаторних задач	
Правило суми	Правило добутку
Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n способами (при цьому вибір елемента A виключає одночасний вибір і елемента B), то **A або B** можна вибрати **$(m + n)$** способами.	Якщо елемент A можна вибрати m способами, а після цього елемент B — n способами, то **A і B** можна вибрати **$(m \cdot n)$** способами.

Закінчення табл. 28

Вибір формули

Чи враховується порядок наступності елементів у сполуці?

Так — Чи всі елементи входять до сполуки?

Так — Перестановки; Ні — Розміщення

Ні — Комбінації

Перестановки		Розміщення		Комбінації	
без повторень	з повтореннями	без повторень	з повтореннями	без повторень	з повтореннями
$P_n = n!$	$\widetilde{P}_n = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$, де $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\widetilde{A}_n^k = n^k$	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Пояснення й обґрунтування

21.1.1. Правило суми й добутку. Упорядковані множини. Розміщення

1. Поняття сполуки. Правило суми й добутку. Під час розв'язування багатьох практичних задач доводиться вибирати з певної сукупності об'єктів елементи, що мають ті або інші властивості, розміщувати ці елементи в певному порядку тощо. Оскільки в таких задачах йдеться про ті або інші комбінації об'єктів, то такі задачі називають *комбінаторними.* Розділ математики, у якому розглядають методи розв'язування комбінаторних задач, називають *комбінаторикою.* У комбінаториці розглядають вибір і розміщення елементів деякої скінченної множини на основі якихось умов.

Вибрані (або вибрані й розміщені) групи елементів називають *сполуками.* Якщо всі елементи сполуки різні, то одержуємо сполуку без повторень, а якщо елементи можуть повторюватися, то одержуємо сполуку з повтореннями. У цьому параграфі ми разглянемо сполуки без повторень.

Розв'язування багатьох комбінаторних задач спирається на два основних правила — правило суми й правило добутку.

Правило суми. Якщо на тарілці лежить 5 груш і 4 яблука, то вибрати один фрукт (тобто грушу або яблуко) можна 9 способами ($5 + 4 = 9$). У загальному вигляді справедливе таке твердження:

якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n способами (при цьому вибір елемента A виключає одночасний вибір і елемента B), то A *або* B можна вибрати $(m + n)$ способами.

Уточнимо зміст цього правила, використовуючи поняття множин та операцій над ними.

Нехай множина A складається з m елементів, а множина B — з n елементів. Якщо множини A і B не перетинаються (тобто $A \cap B = \varnothing$), то множина $A \cup B$ складається з $m + n$ елементів.

Правило добутку. Якщо в кіоску продають ручки 5 видів і зошити 4 видів, то вибрати набір з ручки й зошита (тобто пару — ручку та зошит) можна $5 \cdot 4 = 20$ способами (оскільки до кожної з 5 ручок можна взяти будь-який із 4 зошитів). У загальному вигляді має місце таке твердження:

якщо елемент A можна вибрати m способами, а після цього елемент B — n способами, то A і B можна вибрати $(m \cdot n)$ способами.

Це твердження означає, що оскільки для кожного з m елементів A можна взяти в пару будь-який з n елементів, то кількість пар дорівнює добутку $m \cdot n$.

У термінах множин одержаний результат можна сформулювати так: якщо множина A складається з m елементів, а множина B — з n елементів, то множина всіх упорядкованих пар* $(a; b)$, де перший елемент належить множині A (тобто $a \in A$), а другий — множині B (тобто $b \in B$), складається з $m \cdot n$ елементів.

Повторюючи наведені міркування декілька разів (більш строго — використовуючи метод математичної індукції), одержуємо, що правила суми й добутку можна застосовувати при виборі довільної скінченної кількості елементів.

2. Упорядковані множини. Під час розв'язування комбінаторних задач доводиться розглядати не тільки множини, у яких елементи можна записувати в будь-якому порядку, а й так звані впорядковані множини. Для впорядкованих множин суттєвим є порядок наступності їх елементів, тобто те, який елемент записано на першому місці, який на другому і т. д. Зокрема, якщо одні й ті самі елементи записати в різному порядку, то отримаємо різні впорядковані множини. Щоб відрізнити запис упорядкованої множини від невпорядкованої, елементи впорядкованої множини часто записують у круглих дужках, наприклад $(1; 2; 3) \neq (1; 3; 2)$.

Розглядаючи впорядковані множини, треба враховувати, що одну й ту саму множину можна по-різному впорядкувати. Наприклад, множину з трьох чисел $\{-5; 1; 3\}$ можна впорядкувати за зростанням: $(-5; 1; 3)$, за спаданням: $(3; 1; -5)$, за зростанням абсолютної величини числа: $(1; 3; -5)$ тощо.

---

* Множину всіх упорядкованих пар $(a; b)$, де перший елемент належить множині A (тобто $a \in A$), а другий — множині B (тобто $b \in B$), називають декартовим добутком множин A і B і позначають $A \times B$. (Зазначимо, що декартовий добуток $B \times A$ теж складається з $m \cdot n$ елементів.)

Будемо розуміти, що
для того щоб задати скінченну впорядковану множину з n елементів, достатньо вказати, який елемент знаходиться на першому місці, який на другому, ..., який на n-му.

3. Розміщення

Розміщенням з n елементів по k називають будь-яку впорядковану множину з k елементів, складену з елементів заданої n-елементної множини.

Наприклад, із множини з трьох цифр {1; 5; 7} можна скласти такі розміщення з двох елементів без повторень:

$$(1; 5), (1; 7), (5; 7), (5; 1), (7; 1), (7; 5).$$

Кількість розміщень з n елементів по k позначають A_n^k (читають: «A з n по k»; A — перша літера французького слова *arrangement* — розміщення). Як бачимо, $A_3^2 = 6$.

З'ясуємо, скільки можна скласти розміщень з n елементів по k (без повторень). Складання розміщення уявимо як послідовне заповнення k місць, які будемо зображати у вигляді клітинок (рис. 21.1). На перше місце ми можемо вибрати один з n елементів заданої множини (тобто елемент для першої клітинки можна вибрати n способами). Якщо елементи не можна повторювати, то на друге місце можна вибрати тільки один елемент із тих, що залишилися, тобто з $(n - 1)$. Тепер уже два елементи використано й на третє місце можна вибрати тільки один з $(n - 2)$ елементів тощо. На k-те місце можна вибрати тільки один з $n - (k-1) = n - k + 1$ елементів (див. рис. 21.1).

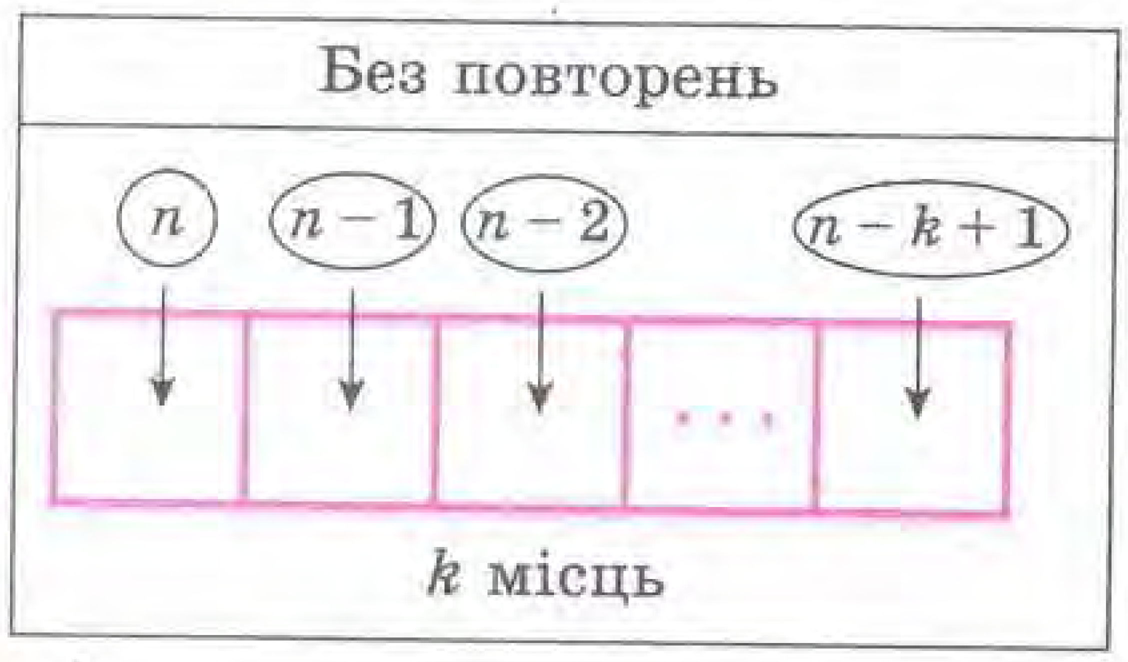


Рис. 21.1

Оскільки нам потрібно вибрати елементи й на перше, і на друге, ..., і на k-те місце, то використовуємо правило добутку й одержуємо **формулу числа розміщень з n елементів по k**

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k \text{ множників}}$$

Наприклад, $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$ (що збігається з відповідним значенням, одержаним вище).

Аналогічно можна обґрунтувати формулу для знаходження числа розміщень з повтореннями.

Під час розв'язування найпростіших комбінаторних задач важливо правильно вибрати формулу, за якою будуть проводитись обчислення кількості сполук. Для цього достатньо з'ясувати:

— *Чи враховують порядок наступності елементів у сполуці?*
— *Чи всі задані елементи входять до одержаної сполуки?*

Якщо, наприклад, порядок наступності елементів ураховують і з n заданих елементів у сполуці використовують тільки k елементів, то за означенням це розміщення з n елементів по k. Після визначення виду сполуки необхідно також з'ясувати, *чи можуть елементи в сполуці повторюватися*, щоб зрозуміти, яку формулу потрібно використати — для кількості сполук без повторень або з повтореннями.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 На змагання з легкої атлетики приїхала команда з 12 спортсменок. Скількома способами тренер може визначити, хто з них побіжить в естафеті 4 по 100 м на першому, другому, третьому й четвертому етапах?

Розв'язання	*Коментар*
▶Кількість способів вибрати з 12 спортсменок чотирьох для участі в естафеті дорівнює кількості розміщень з 12 елементів по 4 (без повторень), тобто $A_{12}^4 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880$. ◁	Для вибору формули відповідаємо на запитання, наведені вище. Оскільки для спортсменок важливо, у якому порядку вони будуть бігти, то порядок наступності при виборі елементів ураховується. До одержаної сполуки входять не всі 12 заданих елементів. Отже, відповідна сполука — розміщення з 12 елементів по 4 (без повторень, тому що кожна спортсменка може бігти тільки на одному етапі естафети).

Приклад 2 Знайдіть кількість трицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, якщо цифри в числі не повторюються.

Розв'язання	*Коментар*
▶Кількість трицифрових чисел, які можна скласти з семи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, дорівнює числу розміщень з 7 елементів по 3, тобто $A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. ◁	Для вибору формули з'ясовуємо, що для чисел, які ми будемо складати, порядок наступності враховується й не всі елементи вибираються (тільки 3 із заданих семи). Отже, відповідна сполука — розміщення з 7 елементів по 3 (без повторень).

Приклад 3*. Знайдіть кількість трицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, якщо цифри в числі не повторюються.

Коментар

Вибір формули проводять так само, як і в прикладі 2. Треба врахувати, що коли число, складене з трьох цифр, починається цифрою 0, то його не вважають трицифровим. Отже, для відповіді на запитання задачі можна спочатку із заданих 7 цифр утворити всі числа, що складаються з 3 цифр (див. приклад 2), а потім від кількості одержаних чисел відняти кількість тих чисел, які складені з трьох цифр, але починаються цифрою 0. В останньому випадку ми фактично будемо з усіх цифр без нуля (їх 6) складати двоцифрові числа. Тоді їх кількість дорівнює числу розміщень з 6 елементів по 2 (див. розв'язання завдання).

Також можна виконати безпосереднє обчислення, послідовно заповнюючи три місця в трицифровому числі й використовуючи правило добутку. У цьому випадку зручно унаочнити міркування, зображаючи відповідні розряди в трицифровому числі у вигляді клітинок, наприклад так:

6 можливостей	6 можливостей	5 можливостей

Розв'язання

► Кількість трицифрових чисел, які можна скласти з 7 цифр (серед яких немає цифри 0), дорівнює числу розміщень із 7 елементів по 3, тобто A_7^3.

Але серед даних цифр є цифра 0, з якої не може починатися трицифрове число. Тому з розміщень із 7 елементів по 3 необхідно вилучити ті розміщення, у яких першим елементом є цифра 0. Їх кількість дорівнює числу розміщень із 6 елементів по 2, тобто A_6^2. Отже, шукана кількість трицифрових чисел дорівнює

$$A_7^3 - A_6^2 = 7\cdot6\cdot5 - 6\cdot5 = 180. \quad \triangleleft$$

Приклад 4 Розв'яжіть рівняння $\dfrac{A_x^4}{A_x^2} = 6.$

Розв'язання

► ОДЗ: $x \in N$, $x \geqslant 4$. Тоді одержуємо

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{x(x-1)} = 6.$$

На ОДЗ це рівняння рівносильне рівнянням

$$(x-2)(x-3) = 6,$$

$$x^2 - 5x = 0,$$

$$x(x-5) = 0.$$

Коментар

Рівняння, до запису яких входять вирази, що позначають кількість відповідних сполук з x елементів, вважають означеними тільки при натуральних значеннях змінної x.

У даному випадку для існування виразу A_x^4 потрібно вибирати натуральне значення $x \geqslant 4$ (у цьому випадку A_x^2 теж існує і, звичайно, $A_x^2 \neq 0$).

Тоді $x = 0$ або $x = 5$.
Але до ОДЗ входить тільки $x = 5$.
Відповідь: 5. ◁

Для перетворення рівняння використовуємо відповідні формули:

$$A_x^4 = x(x-1)(x-2)(x-3),$$

$$A_x^2 = x(x-1).$$

Запитання для контролю

1. Сформулюйте й поясніть на прикладах правило суми й правило добутку для розв'язування комбінаторних задач.
2. Поясніть, яку скінченну множину вважають упорядкованою. Наведіть приклади впорядкованих скінченних множин.
3. Поясніть, що називають розміщенням з n елементів по k без повторень. Наведіть приклади.
4. Запишіть формулу для обчислення числа розміщень з n елементів по k без повторень. Наведіть приклади її використання.

5*. Обґрунтуйте формулу для обчислення числа розміщень з n елементів по k без повторень.

Вправи

1°. Маємо 4 різні конверти без марок і 3 різні марки. Скількома способами можна вибрати конверт і марку для відправки листа?

2°. У коробці міститься 10 білих і 6 чорних куль.
1) Скількома способами з коробки можна витягти одну кулю будь-якого кольору?
2) Скількома способами з коробки можна витягти дві кулі різного кольору?

3. У корзині лежать 12 яблук і 9 апельсинів (усі різні). Петрик вибирає або яблуко, або апельсин, після чого Надійка вибирає з тих фруктів, що залишилися, і яблуко, і апельсин. Скільки можливо таких виборів? При якому виборі Петрика в Надійки більше можливостей вибору?

4*. Учневі потрібно скласти 4 екзамени протягом 8 днів. Скількома способами може бути складений розклад його екзаменів, якщо в один день він може складати тільки один екзамен?

5*. Скількома способами може розміститися родина з трьох осіб у чотиримісному купе, якщо інших пасажирів у купе немає?

6. Із 30 учасників зборів треба вибрати голову та секретаря. Скількома способами це можна зробити?

7. Скількома способами можуть зайняти перше, друге й третє місця 8 учасниць фінального забігу на дистанції 100 м (припускаємо, що всі вони покажуть різний час)?

8. Скількома способами можна виготовити трикольоровий прапор з горизонтальними смугами, якщо є матеріал 7 різних кольорів?

9. Скількома способами організатори конкурсу можуть визначити, хто з 15 його учасників буде виступати першим, другим і третім?

10. На площині відмітили 5 точок. Їх потрібно позначити латинськими буквами. Скількома способами це можна зробити (у латинському алфавіті 26 букв)?

11. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 3, 5, 7, 9, якщо цифри в числі не повторюються?

12*. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 2, 4, 6, 8, якщо цифри в числі не повторюються?

13. Скільки існує семицифрових телефонних номерів, у яких усі цифри різні й перша цифра відмінна від нуля?

14*. Скільки різних трицифрових чисел (без повторення цифр) можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб одержані числа були: 1) парними; 2) кратними 5?

15*. Розв'яжіть рівняння: 1) $A_x^2 = 20$; 2) $\dfrac{A_x^5}{A_x^3} = 6$.

21.1.2. Перестановки

Пояснення й обґрунтування

***Перестановкою* з *n* елементів називають будь-яку впорядковану множину з *n заданих* елементів.**

Нагадаємо, що впорядкована множина — це така *множина, для якої вказано, який елемент знаходиться на першому місці, який на другому, ..., який на n-му.*

Наприклад, переставляючи цифри в числі 236 (там множина цифр {2; 3; 6} уже впорядкована), можна скласти такі *перестановки без повторень*: (2; 3; 6), (2; 6; 3), (3; 2; 6), (3; 6; 2), (6; 2; 3), (6; 3; 2) — усього 6 перестановок*.

Кількість перестановок без повторень з n елементів позначають P_n (P — перша літера від французького слова *permutation* — перестановка). Як бачимо, $P_3 = 6$.

Фактично перестановки без повторень з n елементів є розміщеннями з n елементів по n без повторень, тому $P_n = A_n^n = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}_{n\ \text{множників}}$.

Добуток $1\cdot 2\cdot 3\ldots n$ позначають $n!$. Тому одержана **формула числа перестановок без повторень з *n* елементів** може бути записана так:

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n.$$

Наприклад, $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ (що збігається з відповідним значенням, одержаним вище).

За допомогою факторіалів формулу для числа розміщень без повторень

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}_{k\ \text{множників}} \qquad (1)$$

* Зазначимо, що кожна така перестановка визначає трицифрове число, складене з цифр 2, 3, 6, так, що цифри в числі не повторюються.

можна записати в іншому вигляді. Для цього помножимо й поділимо вираз у формулі (1) на добуток $(n-k)(n-k-1)...2\cdot 1=(n-k)!$. Одержуємо

$$A_n^k=n(n-1)(n-2)...(n-k+1)=$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)(n-k-1)...3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)...3\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Отже, **формула для числа розміщень без повторень з n елементів по k** може бути записана так:

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!} \qquad (2)$$

Для того щоб цією формулою можна було користуватися при всіх значеннях k, і зокрема при $k=n-1$ та при $k=n$, домовилися вважати, що

$1!=1$ і $0!=1$.

Наприклад, за формулою (2) $A_6^5=\frac{6!}{(6-5)!}=\frac{6!}{1!}=6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720.$

Зауважимо, що в тих випадках, коли значення $n!$ виявляється дуже великим, відповіді залишають записаними за допомогою факторіалів. Наприклад, $A_{30}^{25}=\frac{30!}{(30-25)!}=\frac{30!}{5!}.$

Приклади розв'язання завдань

Для вибору формули під час розв'язування найпростіших комбінаторних задач досить з'ясувати відповіді на питання:

1) *Чи враховується порядок наступності елементів у сполуці?*

2) *Чи всі задані елементи входять до одержаної сполуки?*

Якщо, наприклад, порядок наступності елементів ураховується й всі n заданих елементів використовуються в сполуці, то за означенням це перестановки з n елементів.

Приклад 1 Знайдіть, скількома способами можна вісім учнів вишикувати в колону по одному.

Розв'язання	*Коментар*
▶Кількість способів дорівнює числу перестановок з 8 елементів. Тобто $P_8=8!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8=40\,320$. ◁	Для вибору відповідної формули з'ясовуємо відповіді на запитання, наведені вище. Оскільки порядок наступності елементів ураховується й всі 8 заданих елементів вибираються, то відповідні сполуки — це перестановки з 8 елементів (без повторень). Їх кількість можна обчислити за формулою $P_n=n!=1\cdot 2\cdot 3...n.$

Приклад 2 Знайдіть кількість різних чотирицифрових чисел, які можна скласти з цифр 0, 3, 7, 9 (цифри в числі не повторюються).

Розв'язання

З чотирьох цифр 0, 3, 7, 9 можна одержати P_4 перестановок. Але ті перестановки, які починаються з 0, не будуть записом чотирицифрового числа — їх кількість P_3. Тоді шукана кількість чотирицифрових чисел дорівнює

$$P_4 - P_3 = 4! - 3! = \\ = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 18. \triangleleft$$

Коментар

Оскільки порядок наступності елементів ураховується й для одержання чотирицифрового числа потрібно використати всі елементи, то потрібна сполука — це перестановки з 4 елементів. Їх кількість — P_4. Але ще потрібно врахувати, що в чотирицифровому числі на першому місці не може стояти цифра 0. Таких чисел буде стільки, скільки разів ми зможемо виконати перестановки з 3 цифр, які залишилися, тобто P_3.

Приклад 3* З десяти книг чотири — підручники. Скількома способами можна поставити ці книги на полицю так, щоб усі підручники стояли разом?

Розв'язання

Спочатку будемо розглядати підручники, що стоять разом, як одну книгу. Тоді на полиці потрібно розставити не 10, а 7 книг. Це можна зробити P_7 способами.

У кожному з одержаних наборів книг ще можна виконати P_4 перестановок підручників. За правилом добутку шукана кількість способів дорівнює

$P_7 \cdot P_4 = 7! \cdot 4! = 5040 \cdot 24 = 120\,960.$ $\triangleleft$

Коментар

Задачу можна розв'язувати у два етапи. На першому етапі умовно будемо вважати всі підручники за 1 книгу. Тоді одержимо 7 книг (6 не підручників + 1 умовна книга — підручник).

Порядок наступності елементів ураховується, і використовуються всі елементи (поставити на полицю потрібно всі книги). Отже, відповідна сполука — це перестановки з 7 елементів. Їх кількість — P_7. На другому етапі розв'язування будемо переставляти між собою тільки підручники. Це можна зробити P_4 способами. Оскільки нам потрібно переставити й підручники, й інші книги, то використовуємо правило добутку.

Запитання для контролю

1. Поясніть, що називається перестановкою з n елементів без повторень. Наведіть приклади.
2. Запишіть формулу для обчислення числа перестановок з n елементів без повторень. Наведіть приклади її використання.
3*. Обґрунтуйте формулу для обчислення числа перестановок з n елементів без повторень.

Вправи

1. Скількома способами 4 чоловіки можуть розміститися на чотиримісній лавці?
2. Кур'єр повинен рознести пакети в 7 різних установ. Скільки маршрутів він може вибрати?
3. Скільки існує виразів, тотожно рівних добутку $abcde$, що одержуються з нього перестановкою множників?
4. Ольга пам'ятає, що телефон подруги закінчується цифрами 5, 7, 8, але забула, у якому порядку ці цифри розміщено. Укажіть найбільше число варіантів, що їй доведеться перебрати, щоб зателефонувати подрузі (якщо вона пам'ятає всі інші цифри номера).
5. Скільки шестицифрових чисел (без повторення цифр) можна скласти з цифр:

   1) 1, 2, 5, 6, 7, 8; 2) 0, 2, 5, 6, 7, 8?
6. Скільки серед чотирицифрових чисел, складених з цифр 3, 5, 7, 9 (без повторення цифр), є таких, що:

   1) починаються з цифри 3; 2) кратні 5?
7. Знайдіть суму цифр усіх чотирицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 3, 5, 7 (без повторення цифр у числі).
8. У розкладі на понеділок шість уроків: алгебра, геометрія, іноземна мова, історія, фізкультура, хімія. Скількома способами можна скласти розклад уроків на цей день так, щоб два уроки математики стояли підряд?
9. Скількома способами можна розставити на полиці 12 книг, з яких 5 книг — це збірники віршів, так, щоб збірники стояли поруч у довільному порядку?
10. Знайдіть, скількома способами 5 хлопчиків і 5 дівчаток можуть зайняти в театрі в одному ряді місця з 1 по 10. Скількома способами вони можуть це зробити, якщо хлопчики будуть сидіти на непарних місцях, а дівчатка — на парних?

21.1.3. Комбінації

Пояснення й обґрунтування

1. Комбінації без повторень

***Комбінацією без повторень* з *n* елементів по *k* називається будь-яка *k*-елементна підмножина заданої *n*-елементної множини.**

Наприклад, з множини $\{a, b, c, d\}$ можна скласти такі комбінації без повторень з трьох елементів: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$.

Кількість комбінацій без повторень з n елементів по k позначають символом C_n^k (читають: «число комбінацій з n по k» або «це із n по k»; C — перша літера французького слова *combinaison* — комбінація). Як бачимо, $C_4^3 = 4$.

● З'ясуємо, скільки всього можна скласти комбінацій без повторень з n елементів по k. Для цього використаємо відомі нам формули числа розміщень і перестановок.

Складання розміщення без повторень з n елементів по k проведемо у два етапи. Спочатку виберемо k різних елементів із заданої n-елементної множини, не враховуючи порядок вибору цих елементів (тобто виберемо k-елементну підмножину з n-елементної множини — комбінацію без повторень з n елементів по k). За нашим позначенням це можна зробити C_n^k способами. Після цього одержану множину з k різних елементів упорядкуємо. Її можна впорядкувати $P_k = k!$ способами. Одержимо розміщення без повторень з n елементів по k. Отже, кількість розміщень без повторень з n елементів по k в $k!$ разів більша за число комбінацій без повторень з n елементів по k, тобто $A_n^k = C_n^k \cdot k!$. Звідси $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$. Ураховуючи, що за формулою (2) $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, одержуємо

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \quad ○ \tag{3}$$

Наприклад, $C_4^3 = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = 4$, що збігається зі значенням, одержаним вище.

Використовуючи формулу (3), легко обґрунтувати *властивість* 1 *числа комбінацій без повторень*, наведену в табл. 28.

● 1) Оскільки $C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\big(n-(n-k)\big)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} = C_n^k$, то

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \quad ○ \tag{4}$$

Для того щоб формулу (4) можна було використовувати й при $k = n$, домовилися вважати, що $C_n^0 = 1$. Тоді за формулою (4) $C_n^n = C_n^0 = 1$.

Зауважимо, що формулу (4) можна отримати без обчислень за допомогою досить простих комбінаторних міркувань.

Коли ми вибираємо k предметів з n, то $n - k$ предметів ми залишаємо. Якщо ж, навпаки, вибрані предмети залишимо, а інші $n - k$ — виберемо, то одержимо спосіб вибору $n - k$ предметів з n. Помітимо, що ми одержали *взаємно-однозначну відповідність* способів вибору k і $n - k$ предметів з n. Значить, кількість одних і інших способів однакова. Але кількість одних C_n^k, а інших C_n^{n-k}, тому $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Якщо у формулі (3) скоротити чисельник і знаменник на $(n - k)!$, то дістанемо формулу, за якою зручно обчислювати C_n^k при малих значеннях k:

$$C_n^k = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}^{k\text{ множників}}}{k!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}^{k\text{ множників}}}{\underbrace{1\cdot 2\dots k}_{k\text{ множників}}}. \quad (5)$$

Наприклад, $C_{25}^2 = \frac{\overbrace{25\cdot 24}^{2\text{ множники}}}{1\cdot 2} = 25\cdot 12 = 300$, $C_8^3 = \frac{\overbrace{8\cdot 7\cdot 6}^{3\text{ множники}}}{1\cdot 2\cdot 3} = 8\cdot 7 = 56$.

2. Обчислення числа комбінацій без повторень за допомогою трикутника Паскаля. Для обчислення числа комбінацій без повторень можна користуватися формулою (3): $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, а можна організувати послідовне обчислення відповідних значень, користуючись такою властивістю:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \quad (6)$$

Для обґрунтування рівності (6) можна записати суму $C_n^k + C_n^{k+1}$, використовуючи формулу (3), і, після зведення отриманих дробів до спільного знаменника, одержати формулу для правої частини рівності (6) (виконайте це самостійно).

Також формулу (6) можна отримати без обчислень за допомогою комбінаторних міркувань.

C_{n+1}^{k+1} — це кількість способів вибрати $k+1$ предметів з $n+1$. Порахуємо цю кількість, зафіксувавши один предмет (назвемо його «фіксованим»). Якщо ми не беремо фіксований предмет, то нам треба вибрати $k+1$ предмет з n тих, що залишилися, а якщо ми його беремо, то треба вибрати з n тих, що залишилися, ще k предметів. Перше можна зробити C_n^{k+1} способами, друге — C_n^k способами. Усього як раз $C_n^k + C_n^{k+1}$, отже, $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$. ○

Ця рівність дозволяє послідовно обчислювати значення C_n^k за допомогою спеціальної таблиці, яку називають *трикутником Паскаля*. Якщо вважати, що $C_0^0 = 1$, то ця таблиця буде мати такий вигляд (табл. 29).

Таблиця 29

Значення C_n^k

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
...	•	•	•					
n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5	C_n^6	...

Кожний рядок цієї таблиці починається з одиниці й закінчується одиницею $\left(C_n^0 = C_n^n = 1\right)$.

Якщо якийсь рядок уже записано, наприклад третій, то в четвертому рядку потрібно записати на першому місці одиницю. На другому місці записуємо число, яке дорівнює сумі двох чисел третього рядка, які стоять над ним ліворуч і праворуч (оскільки за формулою (6) $C_4^1 = C_3^0 + C_3^1 = 1 + 3 = 4$). На третьому місці записуємо число, яке дорівнює сумі двох наступних чисел третього рядка, які стоять над ним ліворуч і праворуч $\left(C_4^2 = C_3^1 + C_3^2 = 3 + 3 = 6\right)$, тощо (а на останньому місці знову записуємо одиницю).

Приклади розв'язання завдань

Зауважимо, що, як і раніше, для вибору формули під час розв'язування найпростіших комбінаторних задач досить з'ясувати відповіді на запитання:

1) *Чи враховується порядок наступності елементів у сполуці?*
2) *Чи всі задані елементи входять до одержаної сполуки?*

Але для з'ясування того, що задана сполука є комбінацією, достатньо відповісти тільки на перше запитання (див. схему в табл. 28). Якщо порядок наступності елементів не враховується, то за означенням це комбінації з n елементів по k.

Приклад 1 З 12 членів туристичної групи потрібно вибрати трьох чергових. Скількома способами можна виконати цей вибір?

Розв'язання

► Кількість способів вибрати з 12 туристів трьох чергових дорівнює кількості комбінацій з 12 елементів по 3 (без повторень), тобто

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 220.$$ ◁

Коментар

Для вибору відповідної формули з'ясовуємо відповіді на запитання, наведені вище. Оскільки порядок наступності елементів не враховується (для чергових не важливо, у якому порядку їх виберуть), то відповідна сполука є комбінацією з 12 елементів по 3 (без повторень). Для обчислення можна використати формули (3) або (5), у даному випадку застосували формулу (3):

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Приклад 2 З вази із фруктами, у якій лежить 10 різних яблук і 5 різних груш, потрібно вибрати 2 яблука й 3 груші. Скількома способами можна виконати такий вибір?

Розв'язання

► Вибрати 2 яблука з 10 можна C_{10}^2 способами. При кожному виборі яблук груші можна вибрати C_5^3 способами. Тоді за правилом добутку вибір потрібних фруктів можна виконати $C_{10}^2 \cdot C_5^3$ способами. Одержуємо:

$$C_{10}^2 \cdot C_5^3 = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 450.$$ ◁

Коментар

Спочатку окремо виберемо 2 яблука з 10 і 3 груші з 5. Оскільки при виборі яблук чи груш порядок наступності елементів не враховується, то відповідні сполуки — комбінації без повторень.

Ураховуючи, що потрібно вибрати й 2 яблука, і 3 груші, використовуємо правило добутку й перемножуємо одержані можливості вибору яблук $\left(C_{10}^2\right)$ і груш $\left(C_5^3\right)$.

Запитання для контролю

1. Поясніть, що називається комбінаціями з n елементів по k без повторень. Наведіть приклади.

2. Запишіть формулу для обчислення числа комбінацій з n елементів по k без повторень. Наведіть приклади її використання.

3*. Обґрунтуйте формулу для обчислення числа комбінацій з n елементів по k без повторень.

4*. Обґрунтуйте властивість $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

5*. Поясніть, як можна послідовно обчислювати значення C_n^k за допомогою спеціальної таблиці — трикутника Паскаля.

6. Поясніть на прикладах, як можна вибирати відповідну формулу при розв'язуванні найпростіших комбінаторних задач.

Вправи

1°. У класі 7 учнів успішно навчаються математиці. Скількома способами можна вибрати з них двох для участі в математичній олімпіаді?

2°. У магазині «Філателія» продають 8 різних наборів марок на спортивну тематику. Скількома способами можна вибрати з них 3 набори?

3°. Учням дали список з 10 книг, що рекомендовано прочитати під час канікул. Скількома способами учень може вибрати з них 6 книг?

4. На полиці стоїть 12 книг: англо-український словник і 11 художніх творів англійською мовою. Скількома способами читач може вибрати 3 книги, якщо:
   1) словник потрібний йому обов'язково;
   2) словник йому не потрібний?

5°. У класі навчаються 16 хлопчиків і 12 дівчаток. Для прибирання території потрібно виділити чотирьох хлопчиків і трьох дівчаток. Скількома способами це можна зробити?

Розв'яжіть вправи **(6–26)**, використовуючи відомі вам формули й правила комбінаторики.

6. Під час зустрічі 16 осіб потисли один одному руки. Скільки всього зроблено рукостискань?

7. Група учнів з 30 осіб вирішила обмінятися фотокартками. Скільки всього фотокарток потрібно було для цього?

8°. Скільки перестановок можна зробити з букв слова «Харків»?

9°. З 12 робітників-бурильників потрібно відрядити 5 для роботи в сусідній області. Скількома способами можна утворити таку бригаду для відрядження?

10. Скількома різними способами збори, на яких присутні 40 осіб, можуть обрати з числа своїх учасників голову зборів, його заступника та секретаря?

11. Скільки прямих ліній можна провести через 8 точок, з яких ніякі три не лежать на одній прямій (так, щоб кожна пряма проходила через дві задані точки)?

12. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 без їх повторень?

13. Визначити число всіх діагоналей правильного: 1) п'ятикутника; 2) восьмикутника; 3) дванадцятикутника; 4) п'ятнадцятикутника.

14. Скільки різних трикольорових прапорів можна зробити, комбінуючи синій, червоний і білий кольори?

15. Скільки різних площин можна провести через 10 точок, якщо ніякі чотири точки не лежать в одній площині?

16*. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна написати за допомогою цифр 0, 2, 4, 6, 8 без їх повторень?

17. Серед перестановок з цифр 1, 2, 3, 4, 5 скільки таких, що не починаються цифрою 5? числом 12? числом 123?

18. Серед комбінацій з 10 букв a, b, c, ... по 4 скільки таких, що не містять букви a? букв a і b?

19. Серед розміщень з 12 букв a, b, c, ... по 5 скільки таких, що не містять букви a? букв a і b?

20*. Скільки треба взяти елементів, щоб число розміщень з них по чотири було у 12 разів більшим, ніж число розміщень з них по 2?

Розв'яжіть рівняння **(21–25)**.

21. 1) $A_x^2=42$; 2) $A_x^3=56x$; 3) $A_{x+1}^2=30$; 4) $5C_x^3=C_{x+2}^4$.

22. 1) $C_{x-3}^2=21$; 2) $C_x^3=\frac{5x(x-3)}{4}$; 3) $C_x^3+C_x^2=15(x-1)$; 4) $C_x^4=\frac{15A_x^2}{4}$.

23*. 1) $\frac{A_x^5+A_x^3}{A_x^3}=43$; 2) 1) $\frac{A_x^7-A_x^5}{A_x^5}=89$;

3) $12C_x^1+C_{x+4}^2=162$; 4) $C_{x+1}^5=\frac{3A_x^3}{8}$.

24*. 1) $\frac{A_x^4\,P_{x-4}}{P_{x-2}}=42$; 2) $\frac{A_{x+1}^{n+1}\,P_{x-n}}{P_{x-1}}=90$;

3) $\frac{P_{x+2}}{A_x^n\,P_{x-n}}=132$; 4) $\frac{A_{x+2}^{n+2}\,P_{x-n}}{P_x}=110$.

25*. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1}=10, \\ C_x^y : C_x^{y-1}=\frac{5}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} C_x^{y+1}=2{,}5x, \\ C_{x-1}^y=10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} C_x^y : C_x^{y+2}=1, \\ C_x^2=153; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1}=8, \\ C_x^y : C_x^{y-1}=1{,}6. \end{cases}$

21.2. БІНОМ НЬЮТОНА

Таблиця 30

Біном Ньютона

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^{n-1} a x^{n-1} + x^n$$

Оскільки $1 = C_n^0 = C_n^n$ і $x^0 = 1$, $a^0 = 1$ (при $x \neq 0$ і $a \neq 0$), то формулу бінома Ньютона можна записати ще й так:

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n x^0 + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^n a^0 x^n$$

Загальний член цього розкладу має вигляд

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} x^k \quad (\text{де } k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Коефіцієнти C_n^k називають **біноміальними коефіцієнтами.**

Властивості біноміальних коефіцієнтів

1. **Число біноміальних коефіцієнтів** (а отже, і число доданків у розкладі n-го степеня бінома) **дорівнює $n + 1$.**
2. **Коефіцієнти членів, рівновіддалених від початку й кінця розкладу, рівні між собою** (оскільки $C_n^k = C_n^{n-k}$).
3. **Сума всіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n:**
$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$
4. **Сума біноміальних коефіцієнтів, що стоять на парних місцях, дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів, що стоять на непарних місцях.**
5. Для обчислення біноміальних коефіцієнтів можна скористатися трикутником Паскаля, у якому обчислення коефіцієнтів ґрунтується на формулі $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

Трикутник Паскаля

Степінь	Коефіцієнти розкладу	Орієнтир
$(a+x)^0$	1	*У кожному рядку по краях стоять одиниці, а кожне з решти чисел дорівнює сумі двох чисел, що знаходяться над ним ліворуч і праворуч.*
$(a+x)^1$	1 1	
$(a+x)^2$	1 2 1	
$(a+x)^3$	1 3 3 1	
$(a+x)^4$	1 4 6 4 1	
$(a+x)^5$	1 5 10 10 5 1	
$(a+x)^6$	1 6 15 20 15 6 1	
...	...	

Наприклад, $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Пояснення й обґрунтування

1. Біном Ньютона. Двочлен виду $a + x$ також називають біномом. З курсу алгебри відомо, що:

$(a + x)^1 = a + x = 1 \cdot a + 1 \cdot x;$

$(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ax + 1 \cdot x^2;$

$(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2x + 3 \cdot ax^2 + 1 \cdot x^3.$

Можна помітити, що коефіцієнти розкладу степеня бінома $(a + x)^n$ при $n = 1, 2, 3$ збігаються з відповідним рядком трикутника Паскаля. Виявляється, що ця властивість виконується й для довільного натурального n, тобто

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 + C_n^3 a^{n-3} x^3 + ... + C_n^k a^{n-k} x^k + ... + C_n^n x^n. \quad (7)$$

Формулу (7) називають *біномом Ньютона*. Праву частину цієї рівності називають розкладом степеня бінома $(a + x)^n$, а числа C_n^k (при $k = 0, 1, 2, ..., n$) — *біноміальними коефіцієнтами*. **Загальний член розкладу** степеня бінома має вигляд

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} x^k \quad (\text{де } k = 0, 1, 2, ..., n).$$

Обґрунтувати формулу (7) можна, наприклад, за допомогою методу математичної індукції (зміст та алгоритм використання методу див. у підручнику для 10 класу). (Виконайте це обґрунтування самостійно.) Наведемо також комбінаторні міркування для обґрунтування формули бінома Ньютона.

За означенням степеня з натуральним показником $(a + x)^n = (a + x) \times \times (a + x)...(a + x)$ (всього n дужок). Розкриваючи дужки, одержуємо в кожному доданку добуток n букв, кожна з яких — a або x. Якщо, наприклад, у якомусь доданку кількість букв x дорівнює k, то кількість букв a в ньому дорівнює $n - k$, тобто кожний доданок має вигляд $a^{n-k} x^k$ при якомусь k від 0 до n. Доведемо, що для кожного такого k число доданків $a^{n-k} x^k$ дорівнює C_n^k, звідки, звівши подібні члени, і одержуємо формулу бінома.

Добуток $a^{n-k} x^k$ отримуємо, взявши букву x з k дужок і букву a з $n - k$ тих дужок, що залишилися. Різні такі доданки отримаємо шляхом різного вибору перших k дужок, а k дужок з n можна вибрати саме C_n^k способами. Отже, загальний член розкладу бінома $(a + x)^n$ дійсно має вид $C_n^k a^{n-k} x^k$, де $k = 0, 1, 2, ..., n$. ○

Саме через біном Ньютона числа C_n^k часто називають *біноміальними коефіцієнтами*. Записуючи степінь двочлена за формулою бінома Ньютона для невеликих значень n, біноміальні коефіцієнти можна обчислювати за трикутником Паскаля (див. табл. 30).

Наприклад, $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Ураховуючи, що $C_n^0 = C_n^n = 1$, формулу бінома Ньютона можна записати так:

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^{n-1}ax^{n-1} + x^n. \quad (8)$$

Якщо в формулі бінома Ньютона (8) замінити x на $(-x)$, то одержимо *формулу піднесення до степеня різниці* $a - x$:

$$(a-x)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 - C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + (-1)^n x^n.$$

Наприклад, $(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$ (знаки членів розкладу чергуються!).

2. Властивості біноміальних коефіцієнтів

1. **Число біноміальних коефіцієнтів** (а отже, і число доданків) у розкладі n-го степеня бінома **дорівнює $n + 1$**, оскільки розклад містить усі степені x від 0 до n (інших доданків не містить).
2. **Коефіцієнти членів, рівновіддалених від початку й кінця розкладу, рівні між собою**, оскільки $C_n^k = C_n^{n-k}$.
3. **Сума всіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n.**

Для обґрунтування покладемо в рівності (7) значення $a = x = 1$ й одержуємо

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Наприклад, $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 1+5+10+10+5+1 = 32 = 2^5$.

4. **Сума біноміальних коефіцієнтів, що стоять на парних місцях, дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів, що стоять на непарних місцях.**

Для обґрунтування покладемо в рівності (7) значення $a = 1$, $x = -1$ й одержуємо

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + \ldots + (-1)^n C_n^n.$$

Тоді

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots.$$

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 За формулою бінома Ньютона знайдіть розклад степеня $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$.

Коментар

Для знаходження коефіцієнтів розкладу можна використати трикутник Паскаля (табл. 30) або обчислити їх за загальною формулою. За трикутником Паскаля коефіцієнти дорівнюють: 1; 6; 15; 20; 15; 6; 1. Ураховуємо, що підносимо до степеня різницю, отже, знаки чергуються. Тоді

$$(a - b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6.$$

Для спрощення запису відповіді можна позбутися в одержаних виразах від ірраціональності в знаменниках (як це зроблено в розв'язанні) або з самого початку врахувати, що ОДЗ заданого виразу: $x > 0$, і тоді $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$. Отже, заданий вираз можна записати так: $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 = \left(x - x^{-\frac{1}{2}}\right)^6$ і виконувати піднесення до степеня останнього виразу.

Розв'язання

▶ $$\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 = x^6 - 6x^5\frac{1}{\sqrt{x}} + 15x^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 20x^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + 15x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 -$$

$$-6x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 = x^6 - \frac{6x^5}{\sqrt{x}} + 15x^3 - \frac{20x^3}{x\sqrt{x}} + 15 - \frac{6}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3} =$$

$$= x^6 - 6x^4\sqrt{x} + 15x^3 - 20x\sqrt{x} + 15 - \frac{6\sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$ ◁

Приклад 2 У розкладі $\left(\sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^{16}$ знайдіть член, який містить b^3.

Розв'язання

▶ ОДЗ: $b > 0$. Тоді

$$\left(\sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^{16} = \left(b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}\right)^{16}.$$

Загальний член розкладу:

$$T_{k+1} = C_{16}^k \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{16-k} \left(b^{-\frac{1}{3}}\right)^k = C_{16}^k b^{\frac{16-k}{2} - \frac{k}{3}}.$$

За умовою член повинен містити b^3, отже, $\frac{16-k}{2} - \frac{k}{3} = 3$. Звідси $k = 6$.

Тоді членом, що містить b^3, буде

$$T_{k+1} = T_7 = C_{16}^6 b^{\frac{16-6}{2} - \frac{6}{3}} =$$

$$= C_{16}^6 b^3 = \frac{16!}{6!(16-6)!} b^3 =$$

$$= \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 8008b^3.$$ ◁

Коментар

На ОДЗ ($b > 0$) кожен доданок у заданому двочлені можна записати як степінь з дробовим показником. Це дозволить простіше записати загальний член розкладу степеня $(a + x)^n$:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} x^k,$$

(де $k = 0, 1, 2, \ldots, n$), з'ясувати, який із членів буде містити b^3, і записати такий член.

Для спрощення запису загального члена зручно відзначити, що

$$a = \sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}, \quad x = \frac{1}{\sqrt[3]{b}} = b^{-\frac{1}{3}}, \quad n = 16.$$

Запитання для контролю

1. а) Запишіть формулу бінома Ньютона. Наведіть приклади її використання.
   б*) Доведіть формулу бінома Ньютона.
2*. Сформулюйте й доведіть властивості біноміальних коефіцієнтів.

Вправи

Знайдіть розклад степенів біномів **(1–3)**.

1. 1) $(x+a)^6$; 2) $(x+c)^4$; 3) $(x+2)^5$; 4*) $(1+a)^{12}$.

2. 1) $(x-a)^7$; 2) $(x^2-a)^6$; 3) $(a^2+1)^8$; 4*) $\left(a+\sqrt{b}\right)^{11}$.

3. 1) $\left(\sqrt{m}-n\right)^5$; 2) $(x-2y)^5$; 3) $(3x+2y)^4$;

4) $(2a^2-3a)^5$; 5) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$.

4. Знайдіть:

1) четвертий член розкладу $(a+3)^7$;

2) дев'ятий член розкладу $\left(a+\sqrt{b}\right)^{12}$;

3) шостий член розкладу $(a^2+b^3)^{13}$;

4) середній член розкладу $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^8$.

5. Знайдіть член розкладу бінома:

1) $(x+y)^9$, що містить x^7; 2) $\left(\sqrt{a}+b\right)^9$, що містить a^3;

3) $\left(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}\right)^{20}$, що містить a^7; 4) $\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[5]{x^8}\right)^{12}$, що містить $x^{\frac{22}{3}}$;

5) член розкладу $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$, що не містить a;

6) член розкладу $\left(\sqrt[3]{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{15}$, що не містить a.

6*. Знайдіть показник степеня бінома, якщо:

1) третій член розкладу $\left(\sqrt[3]{a^2}+a^{-1}\right)^n$ містить a^0;

2) біномінальні коефіцієнти четвертого й шостого членів розкладу $(1+x)^{n+1}$ рівні між собою;

3) біномінальні коефіцієнти четвертого й шостого членів розкладу відповідно дорівнюють 120 і 252.

7*. Знайдіть показник степеня бінома, якщо:

1) шостий член розкладу $\left(a^{\frac{1}{30}}+\sqrt[5]{a}\right)^n$ не містить a;

2) шостий член розкладу $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}-\sqrt[5]{a^3}\right)^n$ не залежить від a.

§ 22 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

22.1. ПОНЯТТЯ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ. КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Таблиця 31

1. Випадкові події	
Поняття	Приклади
Під експериментами з випадковими результатами (або коротше, випадковими експериментами) розуміють різні експерименти, досліди, випробовування, спостереження, виміри, результати яких залежать від випадку і які можна повторити багато разів в однакових умовах.	Експерименти з рулеткою, підкиданням грального кубика, підкиданням монети, серія пострілів одного й того ж стрільця по одній і тій самій мішені, участь у лотереї тощо.
Будь-який результат випадкового експерименту називають випадковою подією. Унаслідок такого експерименту ця подія може або відбутися, або не відбутися. Випадкові події звичайно позначають великими літерами латинського алфавіту: A, B, C, D, ...	Випадання «герба», випадання «числа» при підкиданні монети; виграш у лотерею; випадання певної кількості очок при підкиданні грального кубика тощо.
2. Поняття, пов'язані з випадковими подіями в деякому експерименті	
Події B_1, B_2, ..., B_n називають *рівноможливими*, якщо в даному експерименті немає ніяких підстав вважати, що одна з них може відбутися переважніше за будь-яку іншу.	В експерименті по одноразовому підкиданню однорідної монети правильної форми рівноможливими є події: A — випав «герб», B —випало «число».
Події A і B називають *несумісними*, якщо вони не можуть відбутися одночасно в даному експерименті.	В експерименті по підкиданню монети події A — випав «герб» і B — випало «число» — несумісні.
Події C_1, C_2, ..., C_n називають несумісними, якщо кожна пара з них несумісна в даному експерименті.	Для експерименту по підкиданню грального кубика події C_1 — випадання 1 очка, C_2 — випадання 3 очок, C_3 — випадання 5 очок, C_4 — випадання парного числа очок — несумісні.

Продовження табл. 31

Подію U називають *вірогідною*, якщо в результаті даного експерименту вона обов'язково відбудеться.	Випадання менше 7 очок при підкиданні звичайного грального кубика (на гранях якого позначено від 1 до 6 очок).
Подію $\varnothing$ називають *неможливою*, якщо вона не може відбутися в даному експерименті.	Випадання 7 очок при підкиданні грального кубика.
3. Простір елементарних подій	
Поняття	Приклад
Нехай результатом деякого випадкового експерименту може бути тільки одна з попарно несумісних подій $u_1, u_2, ..., u_n$. Назвемо ці події *елементарними подіями*, а множину всіх цих подій $$U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$$ — ***простором елементарних подій.*** *Випадковою подією A* назвемо будь-яку підмножину простору елементарних подій U.	1. Для експерименту по підкиданню монети елементарними будуть події: u_1 — випав «герб», u_2 — випало «число». Тоді простір елементарних подій буде складатися з двох подій: $U = \{u_1, u_2\}$. (Ці події попарно несумісні, у результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій.) 2. Для експерименту по підкиданню грального кубика елементарними можуть бути події $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$, де u_k — випадання k очок, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. У цьому випадку простір елементарних подій буде складатися з шести подій: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$.
4. Класичне означення ймовірності (для рівноможливих елементарних подій)	
Нехай задано простір елементарних подій, усі елементарні події якого — рівноможливі. **Ймовірність події A — це відношення числа сприятливих для неї елементарних подій (m) до числа всіх рівноможливих елементарних подій у даному експерименті (n):** $$P(A) = \frac{m}{n}.$$	**Приклад.** Знайдіть ймовірність випадання більше чотирьох очок при підкиданні грального кубика. ▶ Розглянемо як елементарні події шість рівноможливих результатів підкидання кубика — випало 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок (отже, $n = 6$). Подія A — випало більше 4 очок. Сприятливими для події A

Закінчення табл. 31

	є тільки дві елементарні події — випало 5 або 6 очок (тобто $m = 2$). Тоді $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. ◁
Ймовірність вірогідної (U) та неможливої ($\varnothing$) подій $\boldsymbol{P(U) = 1}$ $\boldsymbol{P(\varnothing) = 0}$	

Пояснення й обґрунтування

1. Випадкові експерименти й випадкові події. Нам часто доводиться проводити різні спостереження, досліди, брати участь в експериментах або випробуваннях. Часто такі експерименти завершуються результатом, який заздалегідь передбачити неможливо. Наприклад, ми купуємо лотерейний квиток і не знаємо, виграємо чи ні; підкидаємо монету і не знаємо, що випаде — «число» чи «герб». Чи можна якимось чином оцінити шанси появи результата, який нас цікавить? Відповідь на ці питання дає розділ математики, що називається *теорія ймовірностей.* Ми ознайомимося тільки з основами цієї теорії.

Одним з основних понять, які розглядаються в теорії ймовірностей, є поняття *експерименту з випадковими результатами*. Прикладом такого експерименту може бути підкидання монети суддею футбольного матчу перед його початком, щоб визначити, яка з команд почне матч із центра поля.

Під експериментами з випадковими результатами (або коротше, випадковими експериментами) розуміють різні експерименти, досліди, випробовування, спостереження, виміри, результати яких залежать від випадку і які можна повторити багато разів в однакових умовах. Наприклад, це серія пострілів одного стрільця по одній і тій самій мішені, участь у лотереї, витягання пронумерованих куль з коробки, експерименти з рулеткою, підкиданням грального кубика, підкиданням монети.

Будь-який результат випадкового експерименту називають випадковою подією. Унаслідок експерименту, який розглядається, ця подія може або відбутися, або не відбутися. Відмітимо, що для кожного випадкового експерименту звичайно заздалегідь домовляються, які його результати розглядаються як елементарні події, а потім випадкова подія розглядається як підмножина отриманої множини (див. с. 288).

Надалі, як правило, будемо позначати випадкові події великими латинськими літерами: $A, B, C, D, \dots$.

Говорячи про випадкові події, будемо вважати, що вони пов'язані з одним цілком певним випадковим експериментом.

Зауважимо, що багато важливих і потрібних фактів теорії ймовірностей спочатку були одержані за допомогою дуже простих експериментів. Велику роль у розвитку теорії ймовірностей як науки зіграли звичайні монети та гральні кубики. Але ті монети й кубики, які розглядаються в теорії ймовірностей, є математичними образами справжніх монет і кубиків (тому про них іноді говорять, що це математична монета й математичний гральний кубик).

Наприклад, *математична монета*, яку використовують у теорії ймовірностей, позбавлена багатьох якостей справжньої монети. У математичної монети немає кольору, розміру, ваги та ціни. Вона не зроблена ні з якого матеріалу й не може служити платіжним засобом. Монета, з погляду теорії ймовірностей, має тільки дві сторони, одна з яких називається «герб»[*], а інша — «число». Монету кидають, і вона падає однією із сторін угору. Ніяких інших властивостей у математичної монети немає. Математична монета вважається *симетричною*. Це означає, що *кинута на стіл монета має рівні шанси випасти «гербом» або «числом»*. При цьому мається на увазі, що ніякий інший результат кидання монети неможливий — вона не може загубитися, закотившись у куток і, тим більше, не може «стати на ребро».

Рис. 22.1

Справжня металева монета (рис. 22.1) служить лише ілюстрацією для математичної монети. Справжня монета може бути трохи ввігнутою, може мати інші дефекти, які впливають на результати кидання. Проте, щоб перевірити на практиці досліди з підкиданням математичної монети, ми кидаємо звичайну монету (без явних дефектів).

Гральний кубик також служить прекрасним засобом для отримання випадкових подій. Гральний кубик має дивовижну історію. Гра з кубиками — одна з найдавніших. Вона була відома в глибокій давнині в Індії, Китаї, Лідії, Єгипті, Греції й Римі. Гральні кубики знаходили в Єгипті (датуються XX ст. до н. е.) і в Китаї (VI ст. до н. е.) при розкопках стародавніх поховань. *Правильні* (*симетричні*) *кубики* забезпечують однакові

[*] Часто в українських чи російських підручниках з теорії ймовірностей замість терміну «герб» для позначення оборотного боку (так званого реверса) монети використовують термін «орел», а замість терміну «число» — термін «решка». Це пов'язано з тим, що на реверсі монет Російської імперії був зображений двоголовий орел, а на лицьовій стороні монети (аверсі) її номінал (офіційно об'явлена вартість) був написаний на фоні рисунка, який нагадував решітку.

шанси випадання кожної грані. Для цього всі грані мають бути однакової площі, бути плоскими й однаково гладенькими. Кубик має бути кубічної форми, а його центр ваги має збігатися з геометричним центром. Вершини й ребра кубиків мають бути правильної форми. Якщо вони округлені, то всі округлення мають бути однаковими. Отвори, які маркірують кількість очок на гранях, мають бути просвердлені на однакову глибину. Сума очок на протилежних гранях правильного кубика дорівнює 7 (рис. 22.2).

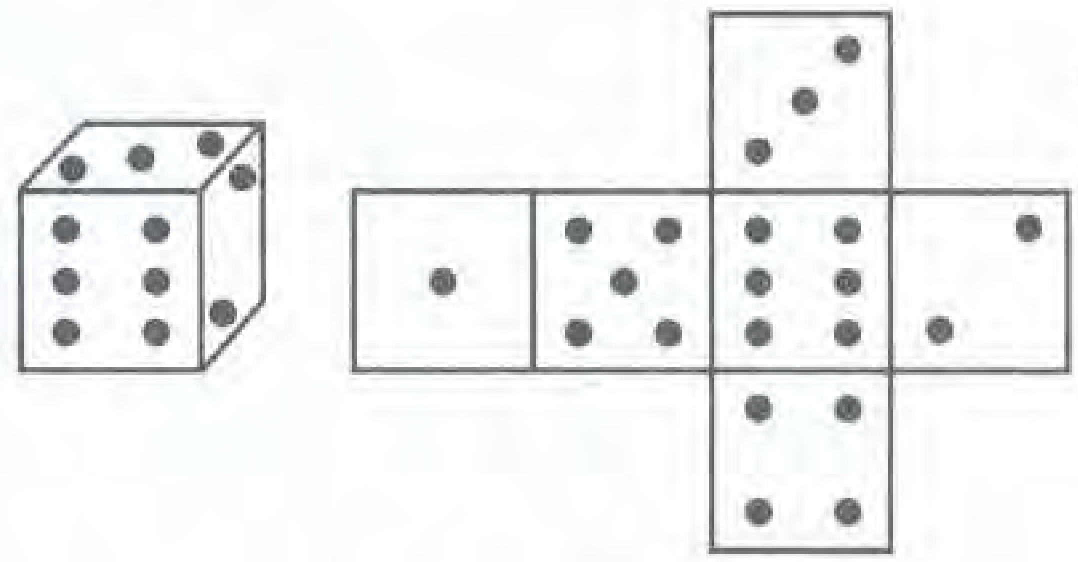


Рис. 22.2

Математичний гральний кубик, який обговорюється в теорії ймовірностей, — це математичний образ правильного кубика. Випадання всіх граней рівноможливе. Подібно до математичної монети, математичний кубик не має ні кольору, ні розміру, ні ваги, ні інших матеріальних якостей.

2. Деякі поняття, пов'язані з випадковими подіями. Нехай проведено якийсь випадковий експеримент. Як відмічалося вище, його результатами є деякі випадкові події. Унаслідок такого експерименту кожна з подій може або відбутися, або не відбутися. Ці події пов'язані з одним цілком певним випадковим експериментом.

Події називають *рівноможливими*, якщо в даному експерименті немає ніяких підстав вважати, що одна з них може відбутися переважніше за будь-яку іншу. Наприклад, в експерименті по одноразовому підкиданню однорідної монети правильної форми рівноможливими є події: A — випав «герб», B — випало «число».

Події A і B називають *несумісними*, якщо вони не можуть відбутися одночасно в даному експерименті. Так, в експерименті по одноразовому підкиданню монети події A — випав «герб» і B — випало «число» — несумісні.

Події C_1, C_2, ..., C_n називають несумісними, якщо кожна пара з них несумісна в даному експерименті. Для експерименту по підкиданню грального кубика події: C_1 — випадання 1 очка, C_2 — випадання 2 очок, C_3 — випадання 3 очок, C_4 — випадання 4 очок, C_5 — випадання 5 очок, C_6 — випадання 6 очок — несумісні (і рівноможливі).

Подію U називають *вірогідною*, якщо в результаті даного експерименту вона обов'язково відбудеться. Наприклад, випадання менше 7 очок при підкиданні грального кубика (на гранях якого позначено від 1 до 6 очок) є вірогідною подією.

Подію $\varnothing$ називають *неможливою*, якщо вона не може відбутися в даному експерименті. Наприклад, випадання 7 очок при підкиданні грального кубика — неможлива подія.

3. Простір елементарних подій. Нехай результатом деякого випадкового експерименту може бути тільки одна з попарно несумісних подій $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Назвемо їх *елементарними подіями*, а множину всіх цих подій $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ — *простором елементарних подій*.

Наприклад, для експерименту по підкиданню монети елементарними подіями будуть: u_1 — випадання «герба», u_2 — випадання «числа». Тоді простір елементарних подій буде складатися з двох подій: $U = \{u_1, u_2\}$. (Ці події несумісні, і в результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій.)

Для експерименту по підкиданню грального кубика елементарними подіями можуть бути: u_1 — випадання 1 очка, u_2 — випадання 2 очок, u_3 — випадання 3 очок, u_4 — випадання 4 очок, u_5 — випадання 5 очок, u_6 — випадання 6 очок. У цьому випадку простір елементарних подій буде складатися з шести подій: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$.

Випадковою подією A назвемо будь-яку підмножину простору елементарних подій U. Наприклад, для експерименту по підкиданню грального кубика випадковою є подія A — випадання парної кількості очок, оскільки $A = \{u_2, u_4, u_6\}$ — підмножина U.

4. Класичне означення ймовірності. Нехай результатом деякого випадкового експерименту може бути одна й тільки одна з n попарно несумісних і рівноможливих елементарних подій $u_1, u_2, \ldots, u_n$ (тобто простір U елементарних подій даного випадкового експерименту складається з елементарних подій $u_1, u_2, \ldots, u_n$). І нехай у даному експерименті подія A полягає в тому, що відбувається одна з m наперед виділених елементарних подій $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}$, тобто $A = \left\{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\right\}$ (у цьому випадку говорять, що елементарні події $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}$ *сприяють події A*).

Ймовірність події A означимо як відношення числа m елементарних подій, що сприяють події A, до загального числа n елементарних подій у даному експерименті, тобто як відношення $\frac{m}{n}$.

Ймовірність події A звичайно позначають $P(A)$ (буква P — перша буква французького слова *probabilité* або латинського слова *probabilitas*, що в перекладі означає «ймовірність»). Тоді

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Цією рівністю виражається *класичне означення ймовірності*, яке можна сформулювати таким чином:

якщо розглядається простір рівноможливих елементарних подій, то ймовірність події A — це відношення числа сприятливих для неї елементарних подій до числа всіх рівноможливих елементарних подій у даному експерименті.

Наприклад, у експерименті по підкиданню монети рівноможливими елементарними подіями є дві ($n = 2$) події: A — випав «герб» і B — випало «число». Події A сприяє тільки один випадок ($m = 1$), тому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}.$$

Очевидно, що ймовірність події B також дорівнює $\frac{1}{2}$: $P(B) = \frac{1}{2}$. Отже, в експерименті по одноразовому підкиданню монети ймовірність випадання «ґерба» (або «числа») дорівнює $\frac{1}{2}$.

Аналогічно обґрунтовується, що в експерименті по підкиданню грального кубика ймовірність події A_i — випало i очок ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) дорівнює $\frac{1}{6}$ (обґрунтуйте це самостійно).

Відмітимо, що коли в будь-якому експерименті розглянути неможливу подію $\varnothing$, то немає елементарних подій, що сприяють даній події, тобто число елементарних подій, сприятливих для неї, дорівнює нулю ($m = 0$), і тоді $P(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0$. Отже,

ймовірність неможливої події дорівнює 0.

Наприклад, в експерименті по підкиданню грального кубика ймовірність неможливої події A — випало 7 очок — дорівнює 0.

Якщо в будь-якому експерименті розглянути вірогідну подію U, то їй сприяють усі елементарні події в цьому експерименті ($m = n$), і тоді $P(U) = \frac{n}{n} = 1$. Отже,

ймовірність вірогідної події дорівнює 1.

Наприклад, в експерименті по підкиданню грального кубика подія A — випало 1 очко, або 2 очки, або 3 очки, або 4 очки, або 5 очок, або 6 очок — вірогідна й її ймовірність дорівнює 1.

Приклад 1 Користуючись класичним означенням ймовірності, знайдемо ймовірність події A — випадання числа очок, кратного 3, при підкиданні грального кубика.

▶ Як відмічалося вище, в експерименті по підкиданню кубика існує шість попарно несумісних рівноможливих елементарних подій — випало 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок (також можна сказати, що простір елементарних подій складається з шести вказаних попарно несумісних рівноможливих подій). Сприятливими для події A є тільки дві елементарні події: випало 3 очки і випало 6 очок. Отже, ймовірність події A дорівнює: $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. ◁

Приклад 2 Петро й Павло кидають жовтий і синій гральні кубики (рис. 22.3) і кожного разу підраховують суму очок, що випали. Вони домовилися, що у випадку, коли в черговій спробі в сумі випаде 8 очок, виграє Петро, а коли в сумі випаде 7 очок — виграє Павло. Чи є ця гра справедливою?

▶ При киданні кубиків на кожному з них може випасти 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок. Кожному числу очок, які випали на жовтому кубику (1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок), відповідає шість варіантів числа очок, які випали на синьому кубику. Отже, усього одержуємо 36 попарно несумісних рівноможливих елементарних подій — результатів цього експерименту, які наведено в таблиці:

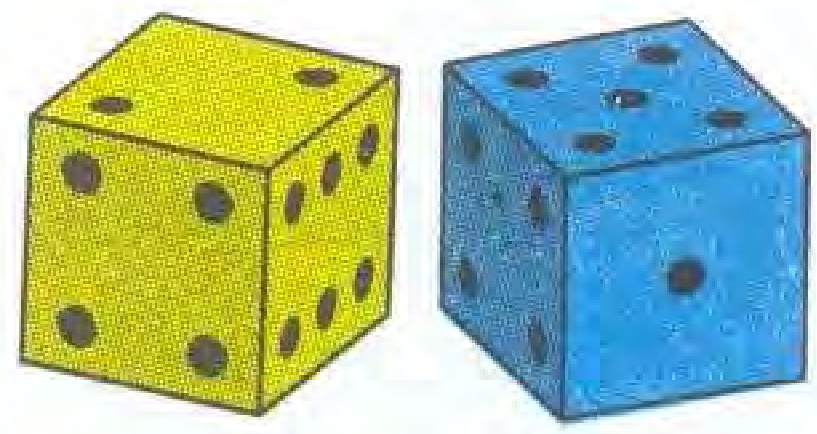


Рис. 22.3

(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)	(4; 1)	(5; 1)	(6; 1)
(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)	(4; 2)	(5; 2)	(6; 2)
(1; 3)	(2; 3)	(3; 3)	(4; 3)	(5; 3)	(6; 3)
(1; 4)	(2; 4)	(3; 4)	(4; 4)	(5; 4)	(6; 4)
(1; 5)	(2; 5)	(3; 5)	(4; 5)	(5; 5)	(6; 5)
(1; 6)	(2; 6)	(3; 6)	(4; 6)	(5; 6)	(6; 6)

(У кожній парі чисел на першому місці записано число очок, яке випало на жовтому кубику, а на другому місці — число очок, що випало на синьому кубику.)

Нехай подія A означає, що при киданні кубиків у сумі випало 8 очок, а подія B —що при киданні кубиків у сумі випало 7 очок.

Для події A сприятливими є такі 5 результатів (елементарних подій):

$$(2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2).$$

Для події B сприятливими є такі 6 результатів (елементарних подій):

$$(1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1).$$

Тоді

$$P(A)=\frac{5}{36}, \quad P(B)=\frac{6}{36}.$$

Отже, шансів виграти в Павла більше, ніж у Петра. Тобто така гра не буде справедливою. ◁

Зазначимо, що результати експерименту по підкиданню двох гральних кубиків, наведені у прикладі 2, дозволяють обчислити ймовірності появи тієї або іншої суми очок, що випадають при підкиданні двох гральних кубиків.

Сума очок	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ймовірність	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Приклад 3* З 15 виготовлених велосипедів 3 виявилися з дефектами. Яка ймовірність того, що 2 велосипеди, вибрані навмання з цих п'ятнадцяти, будуть без дефектів?

▶Нехай подія A полягає в тому, що 2 вибрані навмання велосипеди будуть без дефектів. З 15 велосипедів вибрати 2 можна C_{15}^2 способами (число комбінацій з 15 по 2). Усі ці вибори є рівноможливими й попарно несумісними. Отже, загальна кількість рівноможливих результатів (тобто загальна кількість елементарних подій) дорівнює C_{15}^2. Сприятливим результатом для події A є вибір 2 бездефектних велосипедів із 12 бездефектних $(15 - 3 = 12)$. Отже, число сприятливих результатів (подій) для події A дорівнює C_{12}^2. Звідси одержуємо

$$P(A)=\frac{C_{12}^2}{C_{15}^2}=\frac{\dfrac{12!}{2!(12-2)!}}{\dfrac{15!}{2!(15-2)!}}=\frac{12\cdot 11}{15\cdot 14}=\frac{22}{35}. \ \triangleleft$$

Приклад 4* Група туристів, у якій 6 юнаків і 4 дівчини, вибирає за жеребом чотирьох чергових. Яка ймовірність того, що буде вибрано 2 юнаки й 2 дівчини?

▶Число результатів (елементарних подій) при виборі чотирьох чергових з 10 туристів дорівнює C_{10}^4. Усі ці події рівноможливі й попарно несумісні.

Нехай подія A полягає в тому, що серед 4 чергових є 2 юнаки й 2 дівчини. Вибрати двох юнаків з 6 можна C_6^2 способами, а вибрати двох дівчат з 4 можна C_4^2 способами. За правилом добутку вибір і двох юнаків, і двох дівчат можна виконати $C_6^2 \cdot C_4^2$ способами — це й є кількість сприятливих подій для події A. Тоді

$$P(A)=\frac{C_6^2\cdot C_4^2}{C_{10}^4}=\frac{\dfrac{6!}{2!(6-2)!}\cdot\dfrac{4!}{2!(4-2)!}}{\dfrac{10!}{4!(10-4)!}}=\frac{\dfrac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot\dfrac{4\cdot 3}{1\cdot 2}}{\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}}=\frac{3}{7}. \ \triangleleft$$

Зауважимо, що залежно від задачі, яка розглядається, для одного й того самого експерименту простір елементарних подій можна вводити по-різному. Найчастіше для цього незалежні елементарні події підбираємо так, щоб подія, ймовірність якої потрібно знайти, сама була елементарною або виражалася через суму елементарних подій. Але для того щоб використати класичне означення ймовірності, потрібно бути впевненим, що всі виділені елементарні події — рівноможливі.

Наприклад, як уже відмічалось у задачі про підкидання грального кубика, простір елементарних подій може складатися з 6 незалежних рівноможливих подій — випадання 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок. Але якщо в задачі просять знайти ймовірність випадання парного числа очок, то простором елементарних подій для цього експерименту може бути множина тільки двох подій: u_1 — випадання парної кількості очок, u_2 — випадання непарної кількості очок (оскільки ці події попарно несумісні й у результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій). Ці події рівноможливі (оскільки серед чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 рівно половина парних і половина непарних). Отже, за класичним означенням ймовірність кожної з них дорівнює $\frac{1}{2}$. Звичайно, якби ми розглянули перший з указаних просторів елементарних подій, то теж змогли би розв'язати цю задачу: всього подій — 6, а сприятливих — 3 (випадання парного числа очок: 2, 4, 6). Тоді ймовірність випадання парного числа очок дорівнює $\frac{3}{6}$, тобто $\frac{1}{2}$.

Спробуємо ввести для розв'язування цієї задачі такий простір елементарних подій: u_1 — випадання парної кількості очок, u_2 — випадання 1 очка, u_3 — випадання 3 очок, u_4 — випадання 5 очок. Ці події дійсно утворюють простір елементарних подій експерименту по підкиданню грального кубика, оскільки вони попарно несумісні й у результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій. Але, користуючись таким простором елементарних подій, ми не зможемо застосувати класичне означення ймовірності, бо, як ми вже бачили, указані елементарні події не є рівноможливими: $P(u_1)=\frac{1}{2}$, $P(u_2)=\frac{1}{6}$, $P(u_3)=\frac{1}{6}$, $P(u_4)=\frac{1}{6}$.

Запитання для контролю

1. Поясніть, що таке випадковий експеримент та випадкова подія. Наведіть приклади.
2. Поясніть, які події вважаються рівноможливими. Наведіть приклади рівноможливих та нерівноможливих подій. Які події вважаються несумісними? Наведіть приклади.
3. Поясніть зміст класичного означення ймовірності. Наведіть приклади. Як позначається ймовірність події A?
4. Яка подія вважається вірогідною, а яка неможливою? Наведіть приклади. Чому дорівнюють ймовірності вірогідної та неможливої подій?

Вправи

1°. Укажіть, які з подій у наведених експериментах (табл. 32) є вірогідними, неможливими чи просто випадковими.

Таблиця 32

№	Експеримент	Подія
1	Виконання пострілу	Попадання в ціль
2	Нагрівання води (при звичайних умовах)	Вода перетворилася на лід
3	Участь у лотереї	Ви виграєте, беручи участь у лотереї
4	Участь у безпрограшній лотереї	Ви не виграєте, беручи участь у безпрограшній лотереї
5	Підкидання звичайного грального кубика	Випало 5 очок
6	Підкидання звичайного грального кубика	Випало менше 8 очок
7	Перевірка роботи дзвінка	Ви натиснули на кнопку дзвінка, а він не задзвонив
8	Витягання кулі з коробки з білими кулями	Витягли чорну кулю
9	Витягання кулі з коробки з білими кулями	Витягли білу кулю
10	Витягання двох куль з коробки з 10 білими й 5 чорними кулями	Витягли білу й чорну кулю
11	Витягання карти з колоди	Витягли туза

2. Придумайте по три приклади вірогідних, неможливих і просто випадкових подій. Приклади запишіть у вигляді таблиці, як це зроблено у вправі 1.

3°. Відомо, що на 100 батарейок зустрічаються 3 бракованих. Яка ймовірність купити браковану батарейку?

4°. У магазині підрахували, що звичайно з тисячі телевізорів виявляється 2 бракованих. Яка ймовірність того, що телевізор, вибраний навмання в цьому магазині, буде бракованим?

5°. За статистикою в місті N в середньому за рік із 1000 автомобілістів 2 попадають в аварію. Яка ймовірність того, що автомобіліст у цьому місті весь рік проїздить без аварій?

6°. Яка ймовірність того, що в Києві сонце зійде на заході?

7°. Яка ймовірність того, що після 31 грудня наступить 1 січня?

8°. У пакеті лежать 20 зелених і 10 жовтих груш. Яка ймовірність вийняти з пакета грушу? Яка ймовірність вийняти з пакета яблуко?

9°. На екзамені — 24 білети. Андрій не розібрався в одному білеті й дуже боїться його витягнути. Яка ймовірність, що Андрію дістанеться «нещасливий» білет?

10°. На питання вікторини було отримано 1250 листівок із правильними відповідями, у тому числі й ваша. Для визначення призера ведучий повинен навмання витягти одну листівку. Яка ймовірність того, що приз дістанеться вам?

11. У лотереї 10 виграшних квитків і 240 квитків без виграшу. Яка ймовірність виграти в цю лотерею, купивши один квиток?

12. *Задача Даламбера.* Яка ймовірність того, що при двох підкиданнях монети хоча б один раз випаде «герб»?

13. За перемогу в телегрі Яна одержить головний приз — подорож, якщо за одну спробу вгадає, у якому з 12 секторів табло (рис. 22.4) захований приз.
Яка ймовірність того, що Яна відправиться в подорож?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Рис. 22.4

14. У лотереї 100 квитків, з них 5 виграшних. Яка ймовірність програшу?

15. У кишені жителя деякої країни лежать 6 монет (рис. 22.5). Яка ймовірність вийняти навмання монету: 1) з парним числом копійок; 2) з непарним числом копійок; 3) менше 20 копійок?

Рис. 22.5

16. На картці спортлото (6 з 49) Данило відзначив номери: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Наташа на своїй картці відзначила номери: 5, 12, 17, 23, 35, 49. Як ви думаєте, виграш якого набору чисел більш ймовірний? Поясніть свою відповідь.

17. Ілля відзначив у картці спортлото (6 з 49) номери: 7, 11, 15, 29, 38, 40 — і виграв. Тоді він вирішив, що ця комбінація чисел щаслива і він буде відмічати її у всіх тиражах. Чи дійсно він збільшить свої шанси на виграш? Поясніть свою відповідь.

18. У сумці лежать 12 червоних, 10 зелених і 3 жовтих яблука. 1) Яблуко якого кольору ймовірніше всього вийняти навмання із сумки? 2) Яка ймовірність вийняти навмання: а) яблуко; б) грушу; в) зелене яблуко; г) не червоне яблуко?

19. Ви виграєте, якщо куля, вийнята навмання з коробки, біла. Яку з коробок вигідніше вибрати для гри, щоб ймовірність виграшу була більшою: 1) у коробці 15 білих куль із 45; 2) у коробці 40 білих куль із 120; 3) у коробці 22 білі кулі й 44 червоні; 4) у коробці порівну білих, червоних і чорних куль.

20. Грані звичайного грального кубика пофарбовано в червоний і жовтий кольори. Ймовірність випадання червоної грані дорівнює $1/6$, ймовірність випадання жовтої грані дорівнює $5/6$. Скільки червоних і жовтих граней у кубика?

21. У коробці половина цукерок у червоних обгортках, третина — у синіх обгортках, інші — у зелених обгортках. Навмання вийняли одну цукерку. Якого кольору обгортка найменш ймовірна в цієї цукерки? Знайдіть цю ймовірність.

22. У шухляді лежать 8 червоних, 2 синіх і 20 зелених олівців. Ви навмання виймаєте олівець. Яка ймовірність того, що це:
1) червоний олівець? 2) жовтий олівець? 3) не зелений олівець?
4) Яку найменшу кількість олівців потрібно вийняти, щоб з ймовірністю, рівною 1, серед них був зелений олівець?

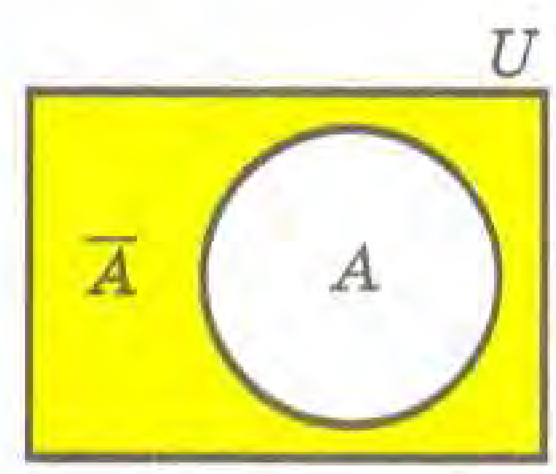
23. Кидають одночасно два гральні кубики. Яка ймовірність того, що сума очок буде дорівнювати 12?

24. На лавку довільним чином сідають двоє чоловіків і жінка. Яка ймовірність того, що чоловіки опиняться поруч?

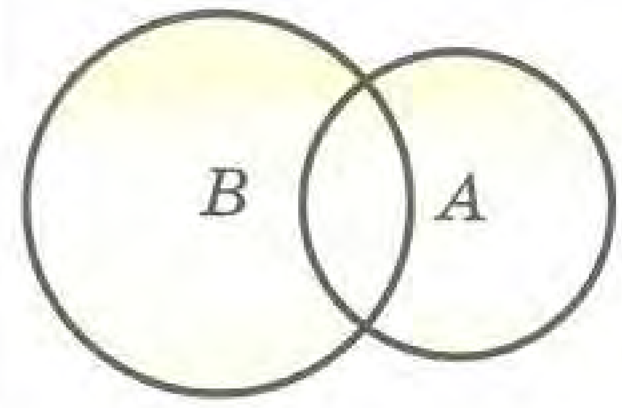
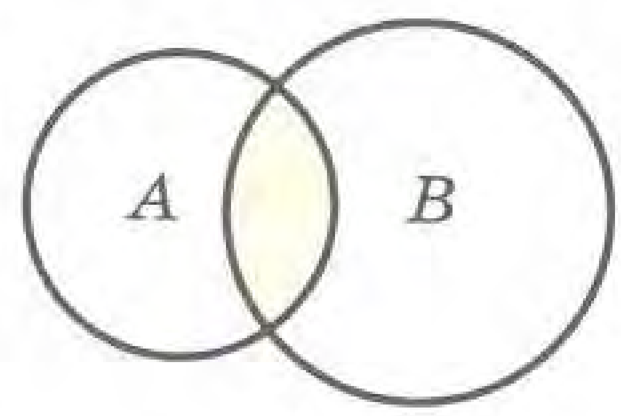
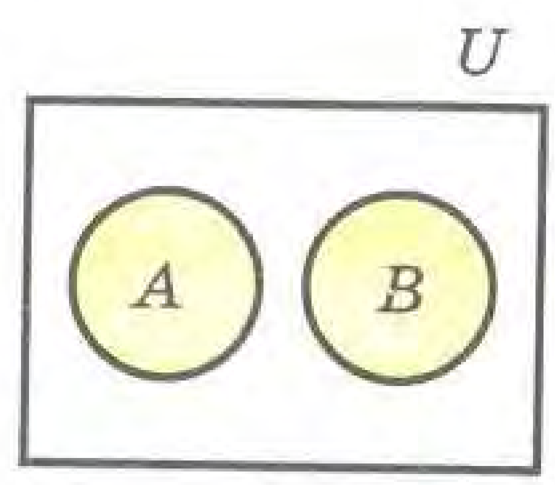
25. З 5 карток з буквами M, P, O, A, E навмання вибираємо 4 картки. Знайдіть ймовірність того, що, поклавши їх у ряд у тому порядку, у якому ми їх вибирали, одержимо слово «море».

22.2. Операції над подіями. Властивості ймовірностей подій

Таблиця 33

Означення	Приклад	Теоретико-множинна ілюстрація
1. Протилежна подія		
Подія $\overline{A}$ називається *протилежною* до події A, якщо вона полягає в тому, що в розглянутому випадковому експерименті не відбувається подія A.	Подія A — випав «герб» при підкиданні монети, тоді подія $\overline{A}$ — не випав «герб» при підкиданні монети (тобто випало «число»).	
Ймовірність протилежної події: $P(\overline{A})=1-P(A)$	Якщо ймовірність купити справний прилад дорівнює 0,95, то ймовірність купити несправний прилад дорівнює $1 - 0{,}95 = 0{,}05$.	

Закінчення табл. 33

2. Сума подій		
***Сумою** (або **об'єднанням**)* **подій A і B називається подія $A + B$ (інше позначення $A \cup B$), яка полягає в тому, що відбувається подія A або подія B (або A, або B, або обидві події).**	З колоди карт навмання витягають 1 карту. Розглянемо події: A — витягли бубнову карту, B — витягли чирвову карту. Тоді подія $A + B$ — витягли або бубнову, або чирвову карту (тобто карту червоної масті).	 $A + B$
3. Добуток подій		
***Добутком** (або **перерізом**)* **подій A і B називається подія $A \cdot B$ (інше позначення $A \cap B$), яка полягає в тому, що відбуваються обидві події A і B.**	При підкиданні грального кубика розглядають події: A — випало парне число очок, B — випало число очок, кратне 3. Тоді подія $A \cdot B$ — випало число очок, яке одночасно і парне, і кратне 3 (тобто випало 6 очок).	 $A \cdot B$
4. Несумісні події		
Дві випадкові події A і B *несумісні тоді і тільки тоді, коли* їх добуток є неможливою подією, тобто $A \cdot B = \varnothing$ **(інше позначення** $A \cap B = \varnothing$**).**	При підкиданні грального кубика розглядають події: A — випало парне число очок, B — випало 1 очко, C — випало число очок, кратне 3. Події A і B та події B і C — ***несумісні*** (*не можуть відбутися одночасно*). Події A і C — ***сумісні*** (*можуть відбутися одночасно*, якщо випаде 6 очок, тобто $A \cdot C \neq \varnothing$).	 $A \cdot B = \varnothing$
5. Ймовірність суми двох несумісних подій		
Якщо події A і B несумісні, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$, тобто *ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.*		

Пояснення й обґрунтування

Іноді доводиться, знаючи ймовірності одних випадкових подій, обчислювати ймовірності інших, які одержуються з заданих за допомогою певних операцій. Розглянемо найпростіші операції над випадковими подіями, які далі будемо називати просто подіями.

1. Знаходження протилежної події. Нехай задана випадкова подія A.

Подія $\overline{A}$ називається *протилежною* до події A, якщо вона полягає в тому, що в розглянутому випадковому експерименті не відбувається подія A.

Наприклад, якщо подія A полягає в тому, що випав «герб» при підкиданні монети, то подія $\overline{A}$ (читається: «Не A») означає, що «герб» не випав, а отже, випало «число» при підкиданні монети. Якщо подія B полягає в тому, що випало 1 очко при підкиданні грального кубика, то подія $\overline{B}$ означає, що 1 очко не випало, а отже, випало або 2, або 3, або 4, або 5, або 6 очок при підкиданні грального кубика.

Ураховуючи, що в кожному експерименті відбувається одна й тільки одна з подій — A або $\overline{A}$, отримуємо, що в просторі рівноможливих елементарних подій сума кількості m елементарних подій, які сприяють події A, і кількості k елементарних подій, які сприяють події $\overline{A}$, дорівнює кількості n усіх елементарних подій: $m+k=n$. Тоді $\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=\frac{m+k}{n}=\frac{n}{n}=1$.

Отже, $P(A)+P(\overline{A})=1$. Звідси

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

Наприклад, розглянемо подію A — випало 1 очко при підкиданні грального кубика. Тоді, як відмічалося вище, подія $\overline{A}$ — 1 очко не випало (тобто випало або 2, або 3, або 4, або 5, або 6 очок). Як було показано на с. 293, ймовірність події A дорівнює $\frac{1}{6}$, тобто $P(A)=\frac{1}{6}$, тоді ймовірність події $\overline{A}$ дорівнює $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

При означенні операцій суми й добутку подій розглядатимемо події, що відносяться до одного випадкового експерименту.

2. Знаходження суми подій. Нехай задано дві випадкові події A і B.

***Сумою* (або *об'єднанням*) подій A і B називається подія $A+B$ (інше позначення $A \cup B$), яка полягає в тому, що відбувається подія A або подія B (або A, або B, або обидві події).**

Наприклад, нехай при підкиданні грального кубика події A і B означають: A — випаде парна кількість очок, B — випаде число очок, яке ділиться на 3. Тоді подія $A+B$ означає, що випаде або парна кількість очок, або число очок, яке ділиться на 3, тобто випаде 2, 3, 4 або 6 очок.

Аналогічно вводиться поняття суми декількох подій.

*Сумою (*або *об'єднанням) подій* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *називається подія* $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ (інше позначення $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$), *яка полягає в тому, що відбувається хоча б одна з даних подій.*

3. Знаходження добутку подій. Нехай задано дві випадкові події A і B.

Добутком **(або *перерізом*) подій A і B називається подія $A \cdot B$ (інше позначення $A \cap B$), яка полягає в тому, що відбуваються обидві події A і B.**

У наведеному вище прикладі подія $A \cdot B$ означає, що випаде й парна кількість очок, і число очок, яке ділиться на 3, тобто випаде 6 очок.

Аналогічно вводиться поняття добутку декількох подій.

*Добутком (*або *перерізом) подій* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *називається подія* $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ (інше позначення $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$), *яка полягає в тому, що відбуваються всі задані події*: і A_1, і A_2, ..., і A_n.

Зауваження. Означення операцій над подіями аналогічні до відповідних означень операцій над множинами (тому й позначення операцій над подіями збігаються з позначеннями операцій над множинами). Операції над подіями (як і операції над множинами) зручно ілюструвати за допомогою кругів Ейлера–Венна (див. рис. 22.6–22.8).

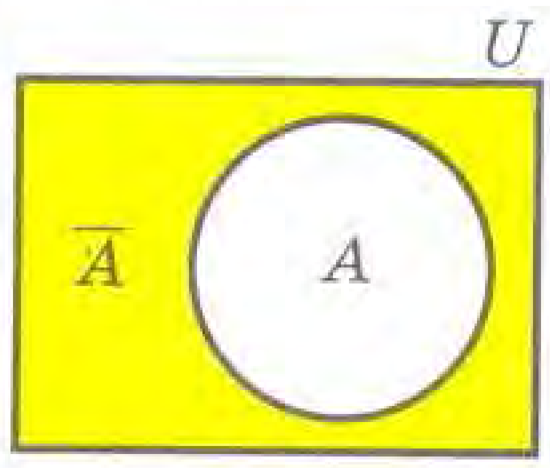


Рис. 22.6

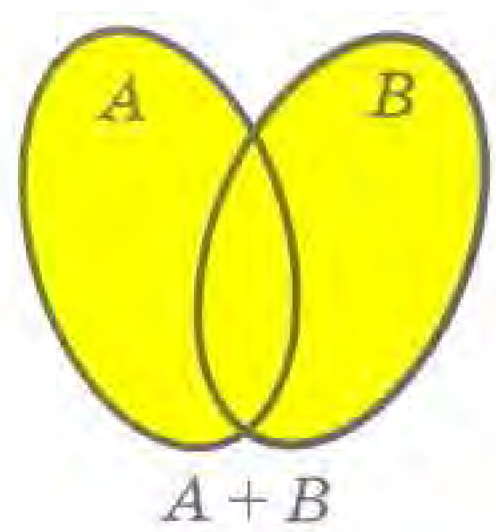


Рис. 22.7

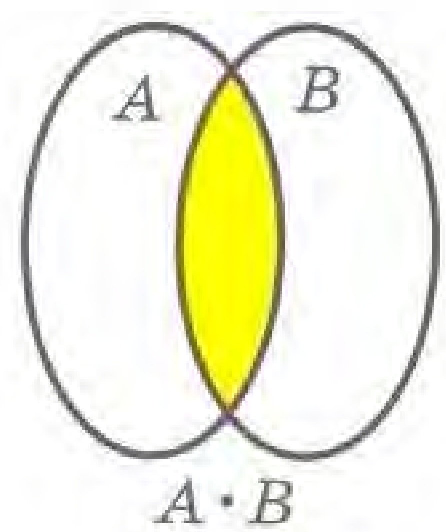


Рис. 22.8

Наприклад, ураховуючи, що завжди виконується або подія A, або подія $\overline{A}$, одержуємо, що $A + \overline{A} = U$ (вірогідна подія). Ураховуючи, що одночасно події A і $\overline{A}$ не можуть виконуватися, маємо $A \cdot \overline{A} = \varnothing$ (неможлива подія). Тоді подію $\overline{A}$ можна проілюструвати доповненням множини A (до множини U) (рис. 22.6).

Аналогічно суму двох подій A і B (нагадаємо, що подія $A + B$ полягає в тому, що відбувається подія A, або подія B, або обидві разом) можна проілюструвати у вигляді об'єднання множин A і B (рис. 22.7), а добуток подій A і B (подія $A \cdot B$ полягає в тому, що відбуваються обидві події A і B) — у вигляді перерізу множин A і B (рис. 22.8).

4. Властивості ймовірностей подій. Ймовірності подій мають такі властивості.

1) Ймовірність будь-якої події A задовольняє нерівність

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

2) Ймовірність вірогідної події U дорівнює 1:

$$P\ (U) = 1.$$

3) Ймовірність суми несумісних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P\ (A + B) = P\ (A) + P\ (B).$$

Дійсно, з означення, наведеного в п. 22.1, випливає, що ймовірність $P\ (A)$, тобто дріб $\frac{m}{n}$, невід'ємна і не більша за 1. Вона дорівнює нулю для неможливої події й одиниці для вірогідної події.

Щоб обґрунтувати властивість 3, уточнимо поняття несумісних подій, спираючись на введені операції над подіями. З означення несумісних подій одержуємо:

дві випадкові події A і B *несумісні* тоді й тільки тоді, коли їх добуток є неможливою подією, тобто $A \cdot B = \varnothing$ (інше позначення $A \cap B = \varnothing$).

Наприклад, при підкиданні грального кубика можуть відбутися події: A — випало парне число очок, B — випало 5 очок. Ці події несумісні, оскільки 5 — непарне число; тому подія $A \cdot B$, яка полягає в тому, що випало парне число очок і це 5 очок, — неможлива.

Розглянемо несумісні події A і B у просторі з n рівноможливих елементарних подій. Нехай m — кількість елементарних подій, що сприяють події A, і k — кількість елементарних подій, що сприяють події B. Оскільки події A і B несумісні, то елементарні події, які сприяють події A, відмінні від елементарних подій, які сприяють події B, і, отже, події $A + B$ сприяють $m + k$ елементарних подій. Але тоді

$$P\,(A+B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P\,(A)+P\,(B).$$

Таким чином, **для несумісних подій A і B** виконується рівність

$$\mathbf{P\ (A + B) = P\ (A) + P\ (B).} \qquad (1)$$

Тобто **ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.** ○

Властивість (1) можна узагальнити.

Назвемо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *несумісними*, якщо будь-які дві з цих подій A_i і A_j (при $i \neq j$) несумісні, тобто їх добуток є неможливою подією:

$$A_i \cdot A_j = \varnothing.$$

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несумісні, то з рівності (1) випливає, що

$$P\ (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P\ (A_1) + P\ (A_2) + \ldots + P\ (A_n),$$

тобто *ймовірність суми несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.* (Для обґрунтування цієї властивості досить використати метод математичної індукції.)

Зазначимо, що для несумісних подій A і B ймовірність $P(A \cdot B) = 0$ (оскільки $A \cdot B = \varnothing$).

Спираючись на розглянуті основні властивості, можна довести інші властивості ймовірностей подій.

Покажемо, що для довільних подій A і B справедлива рівність

$$\boldsymbol{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).} \qquad (2)$$

Позначимо через $A \setminus B$ подію, яка полягає в тому, що подія A відбувається, а подія B не відбувається.

Оскільки події A і $B \setminus A \cdot B$ несумісні й $A + B = A + (B \setminus A \cdot B)$, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B \setminus A \cdot B). \qquad (3)$$

Аналогічно, оскільки події $B \setminus A \cdot B$ і $A \cdot B$ несумісні й очевидно, що $B = (B \setminus A \cdot B) + A \cdot B$, то

$$P(B) = P(B \setminus A \cdot B) + P(A \cdot B). \qquad (4)$$

Виражаючи з рівності (4) значення $P(B \setminus A \cdot B)$ і підставляючи його в рівність (3), одержуємо рівність (2). ○

Приклад З колоди, яка містить 36 гральних карт, навмання виймають одну карту. Яка ймовірність, що буде вийнята козирна карта або дама?

▶ Нехай подія A полягає в тому, що вийнята козирна карта, подія B — вийнята дама. Тоді подія $A + B$ — вийнята козирна карта або дама, а подія $A \cdot B$ — вийнята козирна дама.

Ураховуючи, що $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, $P(A \cdot B) = \frac{1}{36}$,
за формулою (2) одержуємо

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}. \ \triangleleft$$

Запитання для контролю

1. Поясніть, яка подія називається протилежною до події A. Наведіть приклади.
2. Як знайти ймовірність протилежної події, знаючи ймовірність події A? Чому дорівнює ймовірність події $\overline{A}$, якщо $P(A) = 0{,}6$?
3. Яка подія називається сумою (або об'єднанням) подій A і B? Наведіть приклади.
4. Яка подія називається добутком (або перерізом) подій A і B? Наведіть приклади.
5. Які дві події називаються несумісними? Наведіть приклади.
6. а) Чому дорівнює ймовірність суми двох несумісних подій? б*) Обґрунтуйте відповідну формулу.
7. Які три (або більше) події вважаються несумісними? Як обчислюється ймовірність суми декількох несумісних подій?

Вправи

1. Проводиться експеримент по підкиданню двох монет. Розглядаються такі події:
A — випав «герб» на першій монеті, B — випало «число» на першій монеті, C — випав «герб» на другій монеті, D — випало «число» на другій монеті.
Що означають події:
1) $A + C$; 2) $A \cdot C$; 3) $B + C$; 4) $B \cdot D$; 5) $\bar{A}$; 6) $\bar{B} \cdot D$?

2. Проводиться експеримент по підкиданню кубика. Розглядаються такі події:
A — випала парна кількість очок, B — випала непарна кількість очок, C — випало 3 очки, D — випало число очок, менше 4.
Що означають події:
1) $\bar{A}$, 2) $A + C$; 3) $A \cdot D$; 4) $B \cdot C$; 5) $B \cdot D$; 6) $B \cdot \bar{D}$?
Знайдіть ймовірність кожної з цих подій.

3*. Користуючись означеннями операцій над подіями, обґрунтуйте справедливість таких рівностей:
1) $A + U = U$; 2) $A + A = A$; 3) $A + \bar{A} = U$;
4) $A \cdot \bar{A} = \varnothing$; 5) $A + \varnothing = A$; 6) $A \cdot \varnothing = \varnothing$.

4. М'яч тричі кидають у баскетбольний кошик. Події A_1, A_2, A_3 означають:
A_1 — при першому кидку м'яч улучив у кошик, A_2 — при другому кидку м'яч улучив у кошик, A_3 — при третьому кидку м'яч улучив у кошик.
Запишіть через події A_1, A_2, A_3 такі події:
1) B — м'яч улучив у кошик усі три рази;
2) C — м'яч жодного разу не влучив у кошик;
3) D — м'яч хоча б один раз улучив у кошик;
4) K — м'яч улучив у кошик тільки при першому кидку;
5) M — м'яч улучив у кошик тільки при другому та третьому кидку.

5. Для експерименту по підкиданню кубика вкажіть, які з наведених подій є попарно несумісними: A — випала парна кількість очок, B — випала непарна кількість очок, C — випало 3 очка, D — випало менше 3 очок, K — випала кількість очок, кратна 3, M — випало 6 очок, T — випало більше 4 очок, F — випало число очок, менше 7.

6. Для експерименту по витяганню карт з колоди вкажіть, які з наведених подій є попарно несумісними: A — витягли карту чирвової масті, B — витягли карту бубнової масті, C — витягли короля, D — витягли даму, K — витягли карту, старшу за валета, M — витягли карту з числовими позначеннями.

7. Є 16 гральних карт: 4 валети, 4 дами, 4 королі, 4 тузи. З цих 16 карт навмання виймають одну карту. Яка ймовірність, що буде вийнята козирна карта або туз?
8. З колоди, яка містить 52 гральні карти, навмання виймають одну карту. Яка ймовірність, що буде вийнята козирна карта або король?

22.3. Відносна частота випадкової події. Статистичне означення ймовірності

Таблиця 34

<table>
<tr><td colspan="2">1. Частота й відносна частота випадкової події</td></tr>
<tr><td>Якщо випадковий експеримент проведено n разів і в $n(A)$ випадків відбулася подія A, то число $n(A)$ називають частотою події A.</td>
<td rowspan="2">Подія A — випадання «герба» при підкиданні монети.
<table>
<tr><td rowspan="2">Показник</td><td colspan="3">Експериментатори</td></tr>
<tr><td>Бюффон*</td><td>Пірсон</td><td>Пірсон</td></tr>
<tr><td>Кількість експериментів n</td><td>4 040</td><td>12 000</td><td>24 000</td></tr>
<tr><td>Частота $n(A)$</td><td>2 048</td><td>6 019</td><td>12 012</td></tr>
<tr><td>Відносна частота</td><td>0,5069</td><td>0,5016</td><td>0,5005</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Відносною частотою випадкової події називають відношення числа появ цієї події до загального числа проведених експериментів, тобто відношення $\frac{n(A)}{n}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Статистичне означення ймовірності</td></tr>
<tr><td>Якщо при проведенні великої кількості випадкових експериментів, у кожному з яких може відбутися або не відбутися подія A, значення відносної частоти події A близькі до деякого певного числа (яке залежить тільки від виду події A і не залежить від серії експериментів), то це число називають ймовірністю випадкової події A і позначають $P(A)$.
$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$</td>
<td>Подія A — випав «герб» при підкиданні монети.
$P(A) = 0,5$</td></tr>
</table>

* Жорж Луї де Бюффон (1707–1782) — французький математик і природознавець, Карл Пірсон (1857–1936) — англійський математик і біолог. Їх праці сприяли розвитку теорії ймовірностей і математичної статистики.

Пояснення й обґрунтування

Частота й відносна частота випадкової події. Статистичне означення ймовірності. Нехай у результаті випадкового експерименту може відбутися подія A, яка має ймовірність $p = P(A)$, де $0 < p < 1$. Повторимо експеримент n разів, і нехай при цьому подія A відбудеться m разів. Число m називають частотою події A (її часто позначають $n(A)$), а число $\frac{n(A)}{n} = \frac{m}{n}$ називають *відносною частотою події A*. Тобто *відносною частотою випадкової події називають відношення числа появ цієї події до загального числа проведених експериментів.*

Розглянемо результати експериментів по підкиданню монети, які були проведені математиками Ж. Бюффоном і К. Пірсоном (п. 1 табл. 34). Як видно з таблиці, відносна частота випадання «герба», одержана в експериментах Бюффона й Пірсона, мало відрізняється від ймовірності випадання «герба» в указаному експерименті, рівної 0,5.

Той факт, що ймовірність появи «герба» дорівнює 0,5, звичайно, не означає, що в будь-якій серії експериментів «герб» з'явиться в точності в половині випадків. Але якщо число експериментів достатньо велике, ми можемо дати прогноз, що «герб» випаде приблизно в половині випадків. Таким чином, знаючи ймовірність події, ми можемо прогнозувати частоту її з'явлення в майбутньому при великій кількості відповідних експериментів.

Одержаний результат відображає чудовий факт: *при великій кількості експериментів відносна частота події, як правило, мало відрізняється від ймовірності цієї події.* Цю закономірність називають *статистичною стійкістю відносних частот.*

Не завжди вдається визначити ймовірність p події апріорі (від лат. apriori — незалежно від досвіду), як це має місце з підкиданням монети або грального кубика. Але якщо можливо повторити експеримент n разів, то при великому n відносна частота події $\frac{m}{n}$ може розглядатися як наближене значення ймовірності цієї події $\left(\frac{m}{n} \approx p\right)$. Одержимо так зване статистичне означення ймовірності. Більш точно його можна сформулювати таким чином:

якщо при проведенні великої кількості випадкових експериментів, у кожному з яких може відбутися або не відбутися подія A, значення відносної частоти події A близькі до деякого певного числа (яке залежить тільки від виду події A і не залежить від серії експериментів), то це число називають *ймовірністю випадкової події A*.

Статистична оцінка ймовірності подій з використанням відносної частоти події широко використовується в фізиці, біології, соціології, економіці та в повсякденному житті кожної людини. Наведемо приклад використання такої оцінки. Згідно із законом України «Про обов'язкове страхування цивільно-правової відповідальності власників наземних транспортних засобів» кожен власник автомобіля повинен укласти договір з якою-небудь уповноваженою страховою компанією. За цим договором власник машини платить компанії певну суму, а компанія натомість зобов'язується компенсувати (до певної межі) той збиток, який може бути нанесений цим автовласником іншому автовласнику, міській власності або пішоходам. Щоб по справедливості вирішити, хто й скільки повинен платити, треба врахувати дві обставини: 1) з якою ймовірністю автомобіль (протягом терміну страхування) може потрапити в аварію; 2) який у середньому збиток оточуючим наносить одна аварія. Знаючи це, можна обчислити страхові внески. Зокрема, ймовірність випадкової події «протягом року автомобіль потрапляє в аварію» була обчислена за статистичними даними, які мали у своєму розпорядженні страхові компанії, державна автомобільна інспекція та інші організації. Ця ймовірність виявилася рівною приблизно 0,015.

Нагадаємо, що наведене в п. 22.1 означення ймовірності подій називають класичним означенням ймовірності.

Існує ще й аксіоматичне означення ймовірності, у якому означення ймовірності задається переліком її властивостей. При аксіоматичному означенні ймовірність задається як функція $P(A)$, визначена на множині M усіх подій, що визначаються даним експериментом, яка (для експериментів зі скінченним числом результатів) задовольняє такі аксіоми:

1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ для будь-якої події A з M;
2) $P(A) = 1$, якщо A — вірогідна подія;
3) $P(A + B) = P(A) + P(B)$, якщо події A і B несумісні.

Теорію, що вивчає ймовірність подій лише для експериментів зі скінченним числом результатів, називають елементарною теорією ймовірностей. Звичайно, існують і експерименти з нескінченним числом можливих подій. Теорію, що вивчає ймовірність таких подій, називають загальною теорією ймовірностей.

У загальній теорії ймовірностей властивість 3 розуміється в розширеному сенсі:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots .$$

Властивості 1–3 називають аксіомами Колмогорова теорії ймовірностей. Саме А. М. Колмогоров у 1933 р. вперше дав аксіоматичну побудову теорії ймовірностей.

Запитання для контролю

1. Поясніть, що таке частота та відносна частота випадкової події.
2. Поясніть зміст статистичного означення ймовірності.

Вправи

1. Проведіть експеримент по підкиданню монети 50 разів. Обчисліть відносну частоту випадання «герба». Порівняйте свій результат з результатами інших учнів вашого класу.

2. Щоб визначити, як часто зустрічаються в лісопарку дерева різних порід, учні провели такі експерименти. Кожний вибрав свою стежину і, йдучи нею, записував породу кожного десятого дерева. Результати було занесено в таблицю:

Порода дерева	Сосна	Дуб	Береза	Ялина	Осика	Усього
Число дерев	315	217	123	68	34	757

Оцініть ймовірність того, що обране навмання в цьому парку дерево буде:

1) сосною; 2) хвойним; 3) листяним.

(Відповідь запишіть наближено у вигляді десяткового дробу з двома знаками після коми.)

3. Щоб визначити, який колір волосся в жителів міста зустрічається частіше, а який рідше, учні за півгодини провели такий експеримент. Кожний вибрав свій маршрут і записував по шляху проходження колір волосся кожного п'ятого зустрічного. Результати було занесено в таблицю:

Колір волосся	Брюнети	Шатени	Руді	Блондини	Усього
Число людей	198	372	83	212	865

Оцініть ймовірність того, що обраний навмання житель цього міста буде:

а) шатеном; б) рудим; в) не рудим.

(Відповідь запишіть наближено у вигляді десяткового дробу з двома знаками після коми.)

4*. Виберіть навмання одну сторінку з книги будь-якого письменника і підрахуйте, скільки разів на цій сторінці з'являються букви «о» і «б», а також скільки всього на ній букв. Оцініть ймовірність появи букв «о» і «б» у цьому тексті.

Поясніть, чому на клавіатурах друкарських машинок і комп'ютерів буква «о» розташована ближче до центра, а буква «б» — ближче до краю (рис. 22.9). Як ви поясните розташування інших букв?

Рис. 22.9

5. Виготовили «неправильний» кубик зі зміщеним центром ваги. Після проведення 1000 експериментів по підкиданню кубика отримали такі результати:

Число очок	1	2	3	4	5	6
Число випадань відповідної кількості очок	71	145	169	91	21	503

Використовуючи ці дані, оцініть ймовірності вказаних нижче подій (записавши відповідні ймовірності у вигляді десяткового дробу з трьома знаками після коми) і дайте відповіді на запитання.

1. Чи справедливе таке парі: «Я виграю, якщо випаде парне число очок, ви — якщо непарне»?
2. Чи справедливе таке парі: «Я виграю, якщо випаде число очок від 4 до 6, ви — якщо від 1 до 3»?
3. Чи справедливе таке парі: «Я виграю, якщо випаде не 6 очок, ви — якщо 6 очок»?

6. У результаті значної кількості спостережень учні визначили ймовірність, з якою в лісопарку зустрічаються дерева різних порід, і записали результати в таблицю:

Порода дерева	Сосна	Дуб	Береза	Ялина	Осика
Ймовірність	0,42	0,29	0,16	0,09	0,04

Знайдіть ймовірність того, що обране навмання в цьому лісопарку дерево буде:

1) сосною або дубом; 2) не дубом; 3) хвойним; 4) листяним; 5) не осикою; 6) хвойним або листяним (поясніть, що означає останній результат).

7. У результаті значної кількості спостережень учні визначили ймовірності того, який колір волосся зустрічається в жителів міста частіше, а який рідше, і склали таблицю:

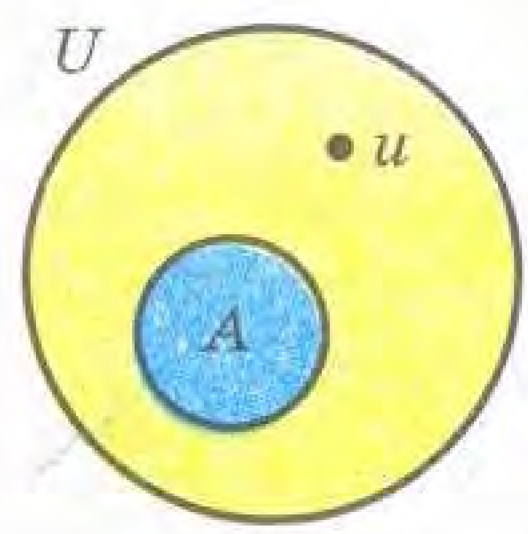
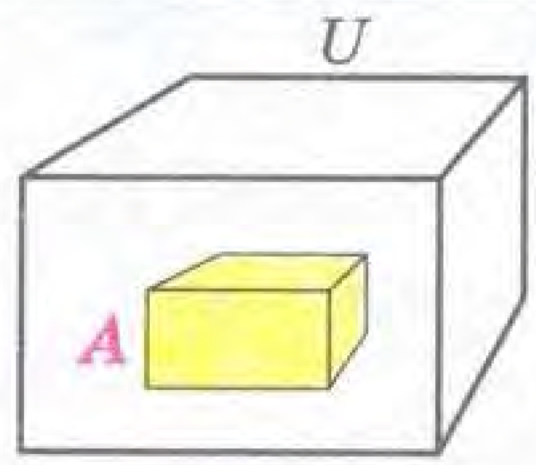
Колір волосся	Брюнети	Шатени	Руді	Блондини
Ймовірність	0,23	0,43	0,1	0,24

Знайдіть ймовірність того, що обраний навмання житель цього міста буде:

1) шатеном або рудим; 2) не рудим; 3) брюнетом або блондином; 4) не блондином.

22.4. Геометричне означення ймовірності

Таблиця 35

<table>
<tr><td colspan="2">1. Основні поняття</td></tr>
<tr><td>
</td><td>U — деяка фігура на площині,
S (U) — площа фігури U.
Експеримент — це випадковий вибір якоїсь точки u з фігури U (можна також вважати, що цю точку u випадково кинули на фігуру U).
Елементарні події u — точки фігури U.
A — частина фігури U ($A \subseteq U$),
S (A) — площа фігури A.
Подія A — попадання точок u у фігуру A. Тоді сприятливими елементарними подіями для події A будуть усі точки фігури A.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Означення геометричної ймовірності</td></tr>
<tr><td>$P(A) = \frac{S(A)}{S(U)}$</td><td>Геометричною ймовірністю події A називають відношення площі фігури, сприятливої для події A, до площі всієї заданої фігури.
(Припускаємо, що ймовірність попадання точки в частину фігури U пропорційна площі цієї частини й не залежить від її конфігурації й розміщення у фігурі U.)</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Загальне означення</td></tr>
<tr><td>

$P(A) = \frac{\text{міра } A}{\text{міра } U}$</td><td>Якщо U — просторова фігура (тіло), то під записами S (U) і S (A) розуміють об'єми тіла U і його частини — тіла A.
Якщо U — відрізок, то під записами S (U) і S (A) розуміють довжини відрізка U і його частини — відрізка A.
(Об'єм тіла U у просторі, площу плоскої фігури U на площині, довжину відрізка U на прямій назвемо мірою фігури U.)
Геометричною ймовірністю події A називають відношення міри фігури, сприятливої для події A, до міри всієї заданої фігури.</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

Наведене в п. 22.1 класичне означення ймовірності не можна застосувати до випадкових експериментів з нескінченною кількістю результатів (тобто у випадку, коли множина U нескінченна).

Розглянемо випадок задання ймовірностей $P(A)$ за допомогою так званих *геометричних ймовірностей*. Нехай U — деяка фігура на площині, $S(U)$ — її площа, A — частина фігури U з площею $S(A)$, B — частина фігури U з площею $S(B)$ (рис. 22.10). Елементарною подією u будемо вважати деяку точку фігури U, випадково вибрану на фігурі U або кинуту на фігуру U. Подією A будемо вважати попадання точок u у фігуру A. Також будемо вважати такий випадковий вибір точок *рівномірним* (або, як кажуть, розподіл ймовірностей рівномірний). Іншими словами, ймовірності попадання точки u у фігури A і B, які мають однакові площі, однакові й не залежать від положення цих фігур (якщо $A \subseteq U$, $B \subseteq U$ і $S(A) = S(B)$, то $P(A) = P(B)$). Тобто ми припускаємо, що ймовірність попадання точки в частину фігури U пропорційна тільки площі цієї частини й не залежить від її розміщення у фігурі U. Тоді ймовірність попадання точки u у фігуру A означається як відношення площ

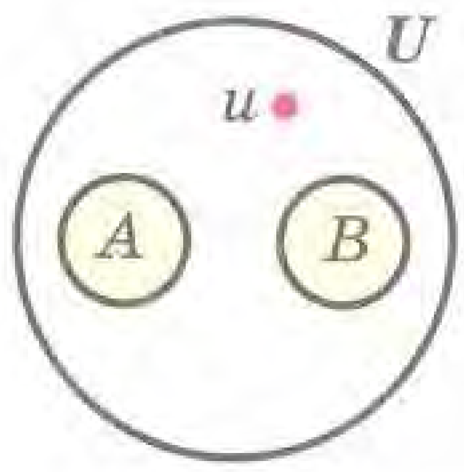


Рис. 22.10

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(U)}. \tag{5}$$

Оскільки сприятливими елементарними подіями для розглянутої події є попадання вибраної точки у фігуру A, то фігуру A можна назвати сприятливою для цієї події, і тоді означення геометричної ймовірності можна сформулювати так:

геометричною ймовірністю події A називають відношення площі фігури, сприятливої для події A, до площі всієї заданої фігури.

Приклад 1 Нехай кругла мішень радіуса 20 см поділена концентричними колами з радіусами $R_k = 2(10 - k)$, де $k = 1, 2, \ldots, 9$ на 10 кілець. Внутрішній круг радіуса $R_9 = 2$ теж назвемо кільцем і будемо вважати, що $R_{10} = 0$, а $R_0 = 20$ (рис. 22.11). Стрілець попав у мішень. Будемо вважати, що стрілець вибив k очок, якщо він попав у k-те кільце, тобто в кільце між колами радіусів R_{k-1} і R_k (або попав у коло радіуса R_{k-1}).

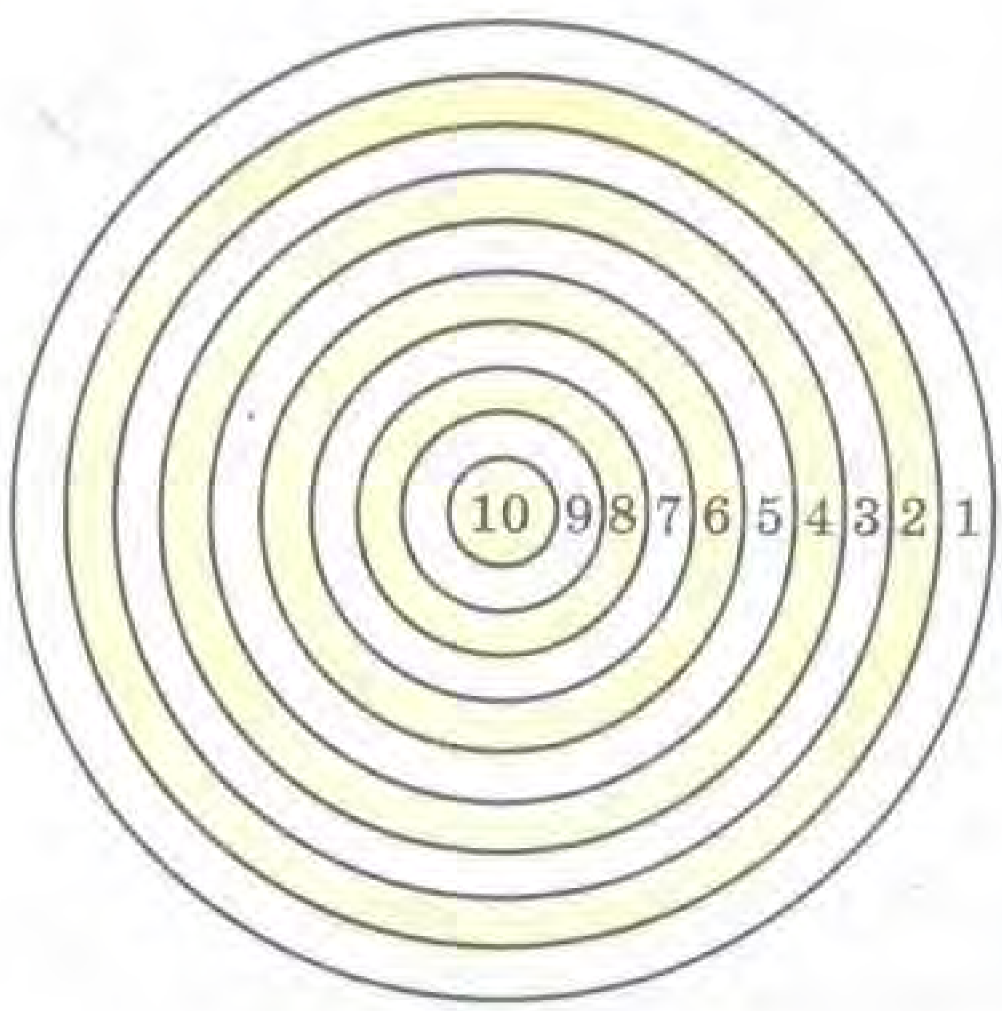


Рис. 22.11

Позначимо подію A_k — «стрілець вибив k очок» і визначимо ймовірність кожної з таких подій при $k = 1, 2, \ldots, 9, 10$.

▶ Якщо вважати, що у стрільця точки попадання куль рівномірно розподілені на крузі мішені, то можна використати геометричне означення ймовірності. Одержуємо $P(A_k)=\frac{S_{k\text{-го кільця}}}{S_{\text{мішені}}}$. Ураховуючи, що

$$S_{k\text{-го кільця}}=\pi R_{k-1}^2-\pi R_k^2=4\pi(11-k)^2-4\pi(10-k)^2=4\pi(21-2k) \text{ і}$$

$$S_{\text{мішені}}=\pi R_0^2=400\pi, \text{ маємо}$$

$$P(A_k)=\frac{21-2k}{100}, \text{ де } k=1, 2, \ldots, 9, 10. \triangleleft$$

Зауваження 1. Назвемо події A і B несумісними (подія A — точка попала у фігуру A, подія B — точка попала у фігуру B), якщо фігури A і B не мають спільних точок (тобто множини точок фігур A і B не мають спільних елементів). *Суму* подій $A + B$ і *добуток* $A \cdot B$ означимо як об'єднання $A \cup B$ і переріз $A \cap B$ множин точок фігур A і B.

Подію $\bar{A}$, *протилежну* до події A, означимо як доповнення $\bar{A}$ множини точок фігури A до множини U (тобто як множину всіх точок фігури U, які не входять до A).

Тоді наведене означення геометричної ймовірності задовольняє аксіоми 1–3, наведені на с. 308.

● Дійсно, $P(U)=\frac{S(U)}{S(U)}=1$, отже, аксіома 2 виконується.

За властивістю площі $S(A) \geqslant 0$, $S(U) > 0$, отже, $P(A) \geqslant 0$. Ураховуючи, що $A \subseteq U$ (рис. 22.15), одержуємо, що $S(A) \leqslant S(U)$. Отже, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ (тобто аксіома 1 виконується).

Якщо події A і B несумісні, то фігури A і B не мають спільних точок. Тоді $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$. Отже,

$$P(A+B)=\frac{S(A\cup B)}{S(U)}=\frac{S(A)+S(B)}{S(U)}=\frac{S(A)}{S(U)}+\frac{S(B)}{S(U)}=P(A)+P(B),$$

тобто виконується й аксіома 3. ○

Оскільки різні означення ймовірності задовольняють одним і тим самим основним властивостям (аксіомам), то наслідки, які можуть бути отримані з використанням цих аксіом, не залежать від способу означення ймовірності. Тому далі обґрунтування загальних властивостей ймовірностей ми будемо проводити для одного означення — або, як кажуть у математиці, для однієї ймовірнісної моделі, — і мати на увазі, що аналогічне обґрунтування можна провести й для інших моделей. Хоча, звичайно, у кожній моделі можна вказати й свої специфічні властивості, яких немає в інших моделях.

Зауваження 2. Означення геометричної ймовірності (8) можна використовувати не тільки в тому випадку, коли U — плоска фігура.

Якщо, наприклад, U — просторова фігура (тіло), то у випадку рівномірного розподілу ймовірностей (у тому розумінні, що ймовірності попадання точки u у частини даного тіла, що мають однакові об'єми, однакові й не залежать від положення цих частин у заданому тілі), у формулі (8) під записами $S(U)$ і $S(A)$ треба розуміти об'єми тіла U і його частини — тіла A.

Аналогічно, якщо U — відрізок, то у випадку рівномірного розподілу ймовірностей (у тому розумінні, що ймовірності попадання точки u у частини даного відрізка, які мають однакові довжини, однакові й не залежать від положення цих частин на заданому відрізку), у формулі (8) під записами $S(U)$ і $S(A)$ треба розуміти довжини відрізка U і його частини — відрізка A.

Зазначимо, що об'єм тіла U у просторі, площу плоскої фігури U на площині, довжину відрізка U на прямій можна назвати *мірою* фігури U. Тоді в загальному вигляді формулу (8) можна записати так:

$$P(A)=\frac{\text{міра } A}{\text{міра } U},$$

тобто в загальному випадку

***геометричною ймовірністю події A* називають відношення міри фігури, сприятливої для події A, до міри всієї заданої фігури.**

Приклад 2 Оля пообіцяла подрузі Каті зателефонувати в проміжку від 9 до 10 год. Знайдіть ймовірність того, що їх розмова почнеться в проміжку від 9 год 20 хв до 9 год 25 хв.

▶ У цій задачі експеримент — це фіксування часу телефонного дзвінка. Зобразимо всі результати експерименту у вигляді відрізка AB (рис. 22.12). Елементарні події — це точки відрізка AB (Оля може зателефонувати подрузі в будь-який час з 9.00 до 10.00). Якщо подія A — виклик відбувся в проміжку 9.20–9.25, то сприятливі для події A елементарні результати можна зобразити точками відрізка CD. Якщо вважати, що час виклику по домовленому проміжку розподіляється рівномірно, то

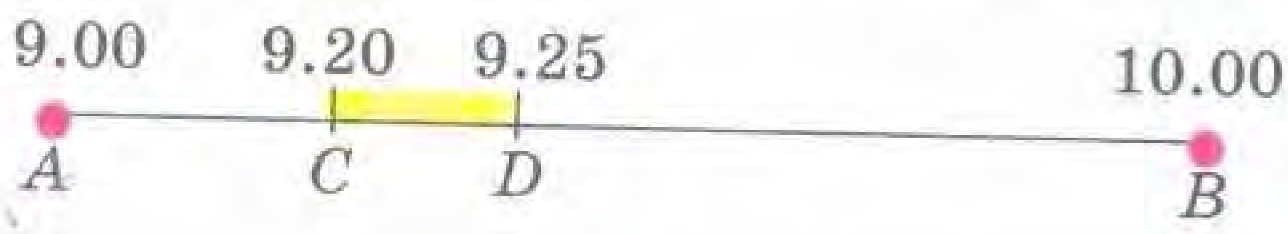


Рис. 22.12

$$P(A)=\frac{\text{міра } CD}{\text{міра } AB}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}\approx 0{,}08. \triangleleft$$

(При обчисленні враховано, що в хвилинах міра CD дорівнює 5, а міра AB дорівнює 60 (1 год = 60 хв).)

Приклад 3* До сигналізатора надходять сигнали від двох пристроїв, причому надходження кожного із сигналів рівноможливе в будь-який момент проміжку часу тривалістю T хв. Моменти надходження сигналів незалежні один від іншого.

Сигналізатор спрацьовує, якщо різниця між моментами надходження сигналів менша 1 хв. Знайдіть ймовірність того, що сигналізатор спрацьовує за час T, якщо кожен з пристроїв пошле по одному сигналу.

▶ Виберемо проміжок часу тривалістю T, наприклад $[0; T]$. Позначимо моменти надходження сигналів першого й другого пристроїв відповідно через x і y. З умови задачі випливає, що мають виконуватися подвійні нерівності: $0 \leqslant x \leqslant T$, $0 \leqslant y \leqslant T$.

Уведемо прямокутну систему координат xOy. У цій системі подвійним нерівностям задовольняють координати будь-якої точки, що належить квадрату $OTCT$. Таким чином, цей квадрат можна розглядати як фігуру G, координати точок якої задають усі можливі значення моментів надходження сигналів.

Сигналізатор спрацьовує, якщо різниця між моментами надходження сигналів менше 1 хв, тобто якщо $|y - x| < 1$, що рівносильно нерівностям

$$y < x + 1 \text{ при } y > x, \qquad (6)$$

$$y > x - 1 \text{ при } y < x. \qquad (7)$$

Нерівності (6) виконуються для координат тих точок фігури G, що лежать вище прямої $y = x$ і нижче прямої $y = x + 1$; нерівності (7) мають місце для координат точок, розташованих нижче прямої $y = x$ і вище прямої $y = x - 1$.

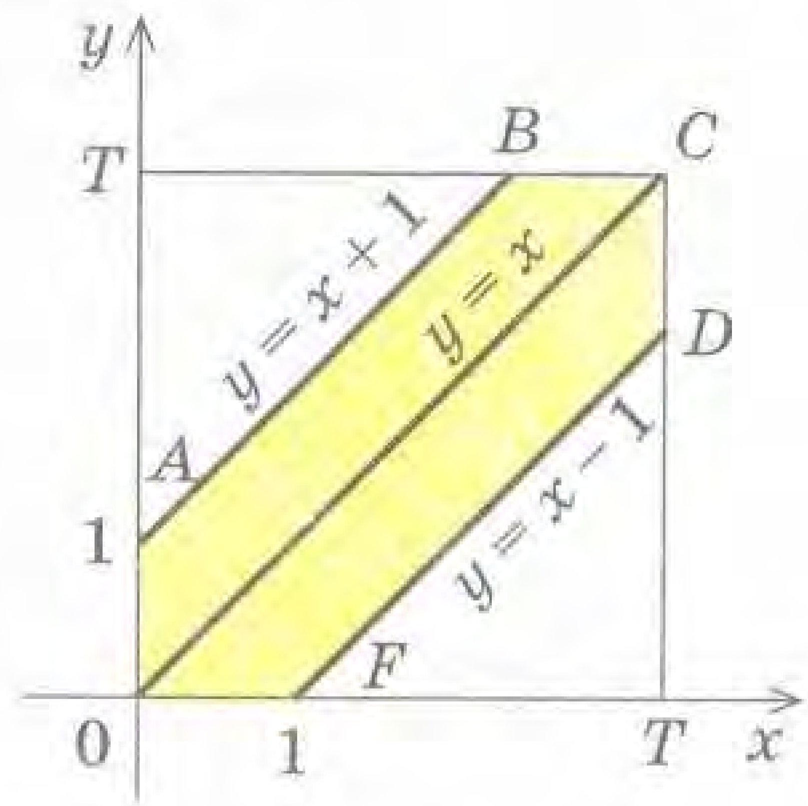


Рис. 22.13

Як видно з рис. 22.13, усі точки, координати яких задовольняють нерівностям (6) і (7), належать заштрихованому шестикутнику $OABCDF$. Таким чином, цей шестикутник можна розглядати як фігуру g, координати точок якої є сприятливими моментами часу x і y для спрацьовування сигналізатора.

Ураховуючи, що

$$\text{площа } g = 2S_{OABC} = 2 \cdot (S_{\Delta\, OTC} - S_{\Delta\, ATB}) =$$
$$= 2S_{\Delta\, OTC} - 2S_{\Delta\, ATB} = T^2 - (T-1)^2 = 2T - 1,$$

одержуємо, що шукана ймовірність дорівнює

$$P(A) = \frac{\text{площа } g}{\text{площа } G} = \frac{2T - 1}{T^2}. \ \triangleleft$$

Запитання для контролю

1. Поясніть, у чому полягає експеримент при геометричному означенні ймовірності.
2. Дайте означення геометричної ймовірності. У яких випадках його можна використовувати? Наведіть приклади.

Вправи

1°. Єгор і Данило домовилися: якщо стрілка вертушки (рис. 22.14) зупиниться на білому полі, то огорожу буде фарбувати Єгор, а якщо на синьому полі — Данило. У кого з хлопчиків більше шансів фарбувати огорожу?


Рис. 22.14


Рис. 22.15

2°. Два приятелі за допомогою вертушки (рис. 22.15) вирішують, як їм провести вихідний: якщо стрілка зупиниться на білому, вони підуть у кіно, якщо на синьому — на стадіон. Яка з подій ймовірніша: приятелі підуть на стадіон чи в кіно?

3°. Ви виграєте, якщо стрілка вертушки зупиняється на білому. Яка з вертушок, зображених на рис. 22.16 та 22.17, дає вам більше шансів на виграш?

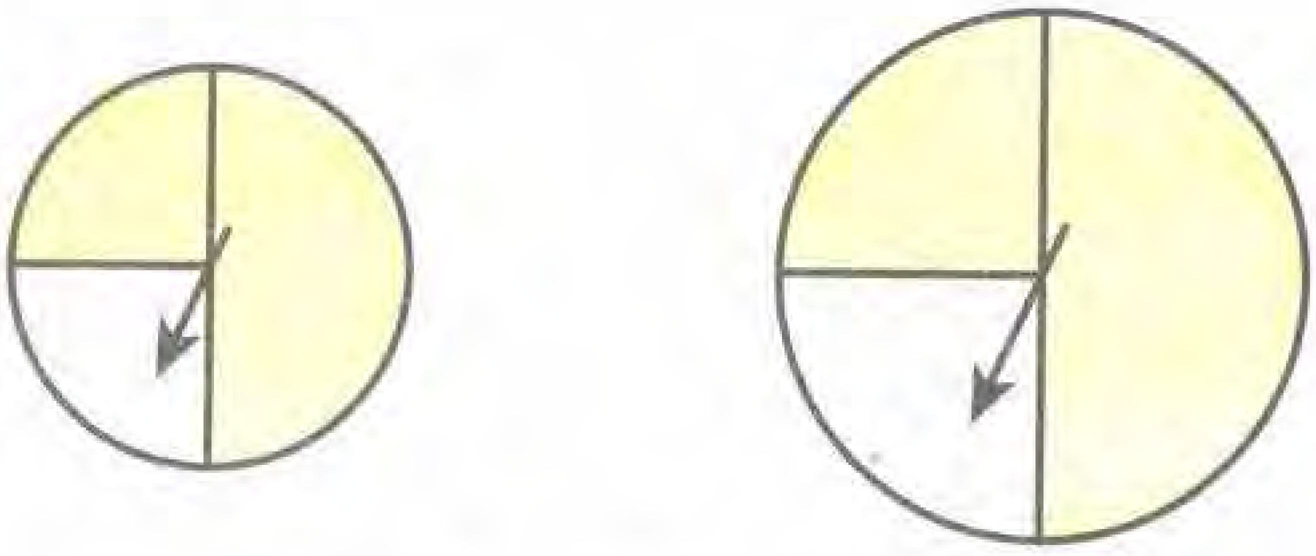


Рис. 22.16


Рис. 22.17

4. У коло радіуса R вписано квадрат. У круг, обмежений заданим колом, навмання поставили точку. Знайдіть ймовірність того, що ця точка буде знаходитися всередині квадрата, вважаючи, що ймовірність попадання точки в частину круга пропорційна площі цієї частини й не залежить від її розміщення в крузі.

5. У сферу радіуса R вписано куб. У кулю, обмежену заданою сферою, навмання кинули точку. Знайдіть ймовірність того, що ця точка буде знаходитися всередині куба, вважаючи, що ймовірність попадання точки в частину кулі пропорційна об'єму цієї частини й не залежить від її розміщення відносно кулі.

6. На відрізку L довжиною 20 см розмістили менший відрізок l довжиною 10 см. Знайдіть ймовірність того, що точка, навмання поставлена на більший відрізок, попаде на менший відрізок. Передбачається, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізка й не залежить від його розміщення.

7*. *Задача про зустріч.* Два друга домовилися зустрітися в певному місці між 12 і 13 год. Той, хто прийде першим, буде чекати другого $\frac{1}{4}$ год, після чого покине місце зустрічі. Знайдіть ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожен з друзів вибирає навмання момент свого прибуття (у проміжку від 12 до 13 год).
Вказівка. Для спрощення графічної ілюстрації будемо вважати, що зустріч може відбутися між 0 год і 1 год. Зручно позначити час прибуття першого друга на місце зустрічі через x, а другого — через y і ввести прямокутну систему координат xOy.

22.5. Незалежні події

Таблиця 36

<table>
<tr><td colspan="2">1. Поняття незалежності двох подій</td></tr>
<tr><td>Зміст</td><td>Означення</td></tr>
<tr><td>Подія B називається незалежною від події A, якщо подія A не змінює ймовірність події B.</td><td>Події A і B називаються незалежними, якщо виконується рівність
$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$
(ймовірність їх добутку — тобто сумісної появи — дорівнює добутку ймовірностей цих подій).</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Незалежність декількох подій</td></tr>
<tr><td colspan="2">Декілька подій називаються незалежними, якщо для будь-якої підмножини цих подій (що містить дві або більше подій) ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей.
Зокрема,
якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ незалежні, то
$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2) \ldots P(A_n).$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Властивість незалежних подій</td></tr>
<tr><td colspan="2">Якщо ми маємо сукупність незалежних подій, то, замінивши деякі з цих подій на протилежні їм події, знову одержимо сукупність незалежних подій. Наприклад, якщо події A і B незалежні, то незалежними будуть також події
$$A \text{ і } \bar{B},\ \bar{A} \text{ і } B,\ \bar{A} \text{ і } \bar{B}.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Ймовірність того, що відбудеться хоча б одна з незалежних подій $A_1, A_2, ..., A_n$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - (1 - P(A_1))\,(1 - P(A_2)) \ldots (1 - P(A_n))$$</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

Подія B називається незалежною від події A, якщо поява події A не змінює ймовірність події B. Загальне означення незалежності подій найчастіше формулюють так:

події A і B називаються *незалежними*, якщо виконується рівність

$$P(AB) = P(A)\,P(B), \tag{8}$$

тобто *дві події називаються незалежними, якщо ймовірність їх добутку (тобто сумісної появи) дорівнює добутку ймовірностей цих подій.*

Рівність (8) обов'язково виконуватиметься, якщо одна з подій неможлива або вірогідна. Наприклад, якщо подія B — неможлива, тобто $B = \varnothing$, то $AB = \varnothing$. Отже, $P(AB) = 0$ і $P(B) = 0$, тобто рівність (8) виконується. Якщо подія B — вірогідна, тобто $B = U$, то $AB = AU = A$. Тоді $P(AB) = P(A)$ і $P(B) = 1$, отже, рівність (8) виконується й в цьому випадку. Таким чином, *якщо хоча б одна з двох подій неможлива або вірогідна, то такі дві події незалежні.*

Звернемо увагу, що у випадку, коли *події A і B незалежні, також незалежними будуть події* A і $\bar{B}$, $\bar{A}$ і B, $\bar{A}$ і $\bar{B}$.

Доведемо, наприклад, що будуть незалежними події A і $\bar{B}$. Якщо події A і B незалежні, то за означенням $P(AB) = P(A)\,P(B)$. Коли відбувається подія A, то в цей час подія B може відбуватися або не відбуватися. Отже, можна стверджувати, що подія A відбувається тоді й тільки тоді, коли відбуваються або події A і B, або події A і $\bar{B}$, тобто $A = AB + A\bar{B}$. Ураховуючи, що події AB і $A\bar{B}$ несумісні (оскільки події B і $\bar{B}$ — несумісні) і що $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$, одержуємо

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}). \text{ Тоді}$$

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)\,P(B) =$$
$$= P(A)\,(1 - P(B)) = P(A)\,P(\bar{B}).$$

А це й означає, що події A і $\bar{B}$ незалежні. ○

Аналогічно обґрунтовується незалежність подій $\bar{A}$ і B, $\bar{A}$ і $\bar{B}$.

Поняття незалежності подій може бути поширене на будь-яку скінченну кількість подій.

Декілька подій називають *незалежними* (ще говорять — «незалежними в сукупності»), якщо для будь-якої підмножини цих подій (яка містить дві або більше подій) ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей.

Наприклад, три події A, B, C будуть незалежними, якщо виконуються умови:

$$P(AB) = P(A)\,P(B),\ P(AC) = P(A)\,P(C),\ P(BC) = P(B)\,P(C)$$
$$P(ABC) = P(A)\,P(B)\,P(C).$$

З означення випливає, що у випадку, коли **події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ незалежні,**

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2) \ldots P(A_n)$$

(але виконання цієї рівності при $n > 2$ ще не означає, що події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ незалежні).

Як і у випадку двох подій, можна довести, що коли в деякій сукупності незалежних подій замінити якісь події протилежними їм подіями, то вийде також сукупність незалежних подій.

Відмітимо, що наведені означення незалежності подій у теоретико-ймовірнісному розумінні відповідають звичайному розумінню незалежності подій як відсутності впливу одних подій на інші. Тому при розв'язуванні задач можна користуватися таким принципом: *причинно незалежні події є незалежними й в теоретико-ймовірнісному розумінні.*

Приклад 1 Прилад складається з трьох вузлів, кожен з яких протягом доби може вийти з ладу незалежно від інших. Прилад не працює, якщо не працює хоча б один з вузлів. Ймовірність роботи без поломки протягом доби першого вузла дорівнює 0,95, другого — 0,9, третього — 0,85. Знайдіть ймовірність того, що протягом доби прилад працюватиме без поломок.

▶ Нехай подія A_1 — перший вузол справний, подія A_2 — другий вузол справний, подія A_3 — третій вузол справний, подія A — протягом доби прилад працює без поломок. Оскільки прилад працює без поломок тоді й тільки тоді, коли справні всі три вузли, то $A = A_1A_2A_3$. За умовою події A_1, A_2, A_3 — незалежні, отже,

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) =$$
$$= 0{,}95 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}85 = 0{,}72675 \approx 0{,}73. \ \triangleleft$$

Приклад 2 Два стрільці зробили по одному пострілу в одну мішень. Ймовірність попасти в мішень для першого стрільця дорівнює 0,9, для другого — 0,8. Знайдіть ймовірність того, що мішень буде влучена.

▶Розглянемо такі події: A — перший стрілець попав у мішень, B — другий стрілець попав у мішень, C — мішень улучена. Події A і B незалежні, але безпосередньо використовувати в даному випадку множення ймовірностей не можна, оскільки подія C відбувається не тільки тоді, коли обидва стрільці попали у мішень, але й тоді, коли в мішень попав хоча б один з них.

Міркуватимемо інакше. Розглянемо події $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, протилежні відповідно подіям A, B, C. Оскільки події A і B незалежні, то події $\bar{A}$ і $\bar{B}$ — також незалежні. Якщо $P(A) = 0{,}9$, то $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Якщо $P(B) = 0{,}8$, то $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Ураховуючи, що мішень не буде влучена тоді й тільки тоді, коли в неї не попаде ні перший стрілець, ні другий, одержуємо, що $\bar{C} = \bar{A}\bar{B}$. Тоді

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A})\,P(\bar{B}) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02.$$

Оскільки події C і $\bar{C}$ протилежні, то

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98. \triangleleft$$

Зауваження. Міркування, наведені при розв'язуванні задачі 2, можна узагальнити.

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ незалежні, то події $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$ також незалежні (і $P(\bar{A}_i) = 1 - P(A_i)$, де $i = 1, 2, \ldots, n$). Для знаходження ймовірності появи хоча б однієї з незалежних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$, тобто події $C = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, можна знайти ймовірність протилежної події $\bar{C}$. Подія $\bar{C}$ відбудеться тоді й тільки тоді, коли не відбудеться ні подія A_1, ні подія A_2, …, ні подія A_n, тобто

$$\bar{C} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_n.$$

Тоді

$$P(\bar{C}) = P\left(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_n\right) = P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) \ldots P(\bar{A}_n) =$$
$$= (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \ldots (1 - P(A_n)).$$

Ураховуючи, що $P(C) = 1 - P(\bar{C})$, одержуємо, що *ймовірність появи хоча б однієї з незалежних подій* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можна обчислити за формулою

$$\boldsymbol{P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \ldots (1 - P(A_n)).}$$

Зрозуміло, наведену формулу необов'язково запам'ятовувати, досить при розв'язуванні задач на знаходження ймовірності появи хоча б однієї з незалежних подій провести вищевикладені міркування.

Запитання для контролю

1. Поясніть, у якому випадку подія B називається незалежною від події A.
2. Дайте означення незалежності двох подій. Користуючись цим означенням, доведіть, що в експерименті по витяганню карт з колоди (36 карт) незалежними є події: A — витяли даму, B — витягли бубнову карту.
3*. Відомо, що події A і B незалежні. Обґрунтуйте незалежність подій A і $\bar{B}$, $\bar{A}$ і B, $\bar{A}$ і $\bar{B}$.
4. Поясніть, як розуміють незалежність (тобто незалежність у сукупності) трьох подій K, M, N.
5. Запишіть формулу для знаходження ймовірності добутку декількох незалежних подій. Наведіть приклад її використання.

Вправи

1°. Ймовірність того, що стрілець при одному пострілі попаде в ціль, дорівнює 0,8. Стрілець зробив два постріли. Знайдіть ймовірність того, що при обох пострілах стрілець улучив у ціль.

2°. Одночасно підкинули монету й гральний кубик. Знайдіть ймовірність одночасного випадання «герба» на монеті і 1 очка на кубику.

3°. В одній партії електролампочок 3 % бракованих, а в другій — 4 % бракованих. Навмання беруть по одній лампочці з кожної партії. Знайдіть ймовірність того, що обидві лампочки виявляться бракованими.

4. Підкидають два гральні кубики. Знайдіть ймовірність того, що на одному кубику випаде 1 очко, а на другому — більше трьох очок.

5. Три стрільці, для яких ймовірність попадання в мішень дорівнює 0,8, 0,75, 0,7, роблять по одному пострілу по одній мішені. Знайдіть ймовірність того, що:
   1°) усі три стрільці улучать у мішень;
   2) хоча б один із стрільців улучить у мішень;
   3) тільки один із стрільців улучить у мішень;
   4) тільки двоє із стрільців улучать у мішень.

6. Ймовірність зупинки за зміну одного з верстатів, що працюють в цеху, дорівнює 0,15, а другого — 0,16. Знайдіть ймовірність того, що обидва верстати за зміну не зупиняться.

7. Прилад містить два незалежні елементи. Ймовірність відмови елементів відповідно дорівнює 0,05 і 0,08. Знайдіть ймовірність відмови приладу, якщо для цього досить, щоб відмовив хоча б один елемент.

8*. Ймовірність хоча б одного попадання стрільцем у мішень при трьох пострілах дорівнює 0,875. Знайдіть ймовірність попадання при одному пострілі.

9*. Ймовірність того, що при одному пострілі стрілець улучить у ціль, дорівнює 0,5. Скільки пострілів повинен зробити стрілець, щоб з ймовірністю не менше 0,9 улучить у ціль хоча б один раз?

22.6. Поняття випадкової величини та її розподілу. Математичне сподівання випадкової величини

1. Поняття випадкової величини та її розподілу. Під *випадковою величиною* в теорії ймовірностей розуміють змінну величину, яка в даному випадковому експерименті може набувати тих чи інших числових значень з певною ймовірністю. Позначають випадкові величини великими латинськими літерами: X, Y, Z, ..., а їх значення — відповідними малими літерами: x, y, z, ... Той факт, що випадкова величина X набула значення x, записують так: $X = x$. Наприклад, у п. 22.1 (с. 295) було знайдено ймовірності появи тієї чи іншої суми очок при киданні двох гральних кубиків. Сума очок, що з'являється, — *випадкова величина*. Позначимо її через X. Тоді $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, ..., $x_{10} = 11$, $x_{11} = 12$ — значення випадкової величини X. Значення випадкової величини X та відповідні ймовірності їх появи $(p_1, p_2, ..., p_{10}, p_{11})$* наведені в таблиці:

* Таким чином, через p_i позначено ймовірність події «випадкова величина X набула значення x_i». Це можна записати так: $P(X = x_i) = p_i$ (де $i = 1, 2, ..., 11$).

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

За допомогою цієї таблиці легко побачити, яких значень величина X набуває з однаковими ймовірностями, яке значення величини X з'являється з більшою ймовірністю тощо. Таку таблицю називають *таблицею розподілу значень випадкової величини за їх ймовірностями* й кажуть, що ця таблиця задає *закон розподілу* розглянутої *випадкової величини*.

Наведемо означення розглянутих понять. Відзначимо, що випадкову величину можна задати в будь-якому випадковому експерименті. Для цього досить кожній елементарній події з простору елементарних подій експерименту поставити у відповідність якесь число (у цьому випадку кажуть, що задано числову функцію, областю визначення якої є простір елементарних подій).

Випадковою величиною **називається числова функція, областю визначення якої є простір елементарних подій.**

Наприклад, в експерименті по підкиданню монети простір елементарних подій складається з двох подій: u_1 — випав «герб», u_2 — випало «число». Ці події несумісні, і в результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій. Поставимо у відповідність події u_1 число 1, а події u_2 — число 0 (тобто фактично будемо вважати, що у випадку появи «герба» випадає число 1, а у випадку появи «числа» випадає 0). Тоді одержимо випадкову величину X, яка набуває тільки двох значень: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ (тобто $X(u_1) = x_1 = 1$, $X(u_2) = x_2 = 0$). Розглянуту функцію — випадкову величину X — можна задати також за допомогою таблиці.

Результат експерименту	u_1 — випав «герб»	u_2 — випало «число»
Значення X	1	0

Закон розподілу цієї випадкової величини задається таблицею:

X	1	0
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Зазначимо, що закон розподілу кожної випадкової величини встановлює відповідність між значеннями випадкової величини й їх ймовірностями, тобто є функцією, областю визначення якої є всі значення випадкової величини. Тому

законом розподілу випадкової величини X **називається функція, яка кожному значенню** x **випадкової величини** X **ставить у відповідність число** $P(X = x)$ **(ймовірність події «випадкова величина** X **набула значення** x**»).**

У загальному випадку закон розподілу випадкової величини, яка набуває тільки n значень, можна записати у вигляді таблиці:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Тут x_1, x_2, ..., x_n — різні значення випадкової величини X, а $p_i = P\ (X = x_i)$ (де $i = 1, 2, ..., n$) — ймовірності, з якими X набуває цих значень.

Події $(X = x_1)$, $(X = x_2)$, ..., $(X = x_n)$ попарно несумісні, і їх сума є вірогідною подією. Тому сума ймовірностей цих подій дорівнює 1, отже,

$$\boldsymbol{p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.}$$

Цю рівність часто використовують для перевірки правильності задання закону розподілу випадкової величини, особливо в тих випадках, коли він задається не в результаті теоретичного розрахунку ймовірностей подій з використанням класичного означення ймовірності, а в результаті використання статистичного означення ймовірності.

Наприклад, в експериментах по підкиданню ґудзика з вушком для пришивання падіння ґудзика на вушко чи на лицьову сторону може бути розглянуте як випадкова величина Y з умовними значеннями $y_1 = 1$ (падіння на вушко) і $y_2 = 0$ (падіння на лицьову сторону). Результати серії експериментів для деякого ґудзика наведені в таблиці, яка задає закон розподілу випадкової величини.

Y	1	0	(перевірка: 0,45 + 0,55 = 1)
P	0,45	0,55	

З а у в а ж е н н я. У тому випадку, коли доводиться знаходити суму всіх значень деякої величини, можна використовувати знак $\sum$ (сигма, читається: «Сума»), уведений Л. Ейлером (1707–1783). Наприклад, якщо ймовірність P набуває значення P_1, P_2, ..., P_k, то введемо позначення*:

$$P_1 + P_2 + ... + P_k = \sum P.$$

Використовуючи це позначення, перевірку правильності складання останньої таблиці можна записати так: $\sum P = 0,45 + 0,55 = 1$.

Розглянуті в цьому пункті випадкові величини набували ізольованих одне від одного значень. Такі величини називають *дискретними* (від латинського *discretus* — роздільний, переривистий), а розподіл ймовірностей такої величини — *дискретним розподілом ймовірностей*.

Якщо випадкова величина може набувати будь-якого значення з деякого проміжку, то така величина називається *неперервною*. Наприклад, час T чекання автобуса на зупинці є неперервною випадковою величиною.

* Детальніше вказана сума записується так: $P_1 + P_2 + ... + P_k = \sum_{i=1}^{k} P_i$.

2. Математичне сподівання випадкової величини. Дамо означення цього поняття для дискретної випадкової величини.

Нехай випадкова величина X набуває значень $x_1, x_2, \ldots, x_k$ відповідно до ймовірностей $p_1, p_2, \ldots, p_k$, тобто має закон розподілу:

X	x_1	x_2	...	x_k
P	p_1	p_2	...	p_k

Сума добутків усіх значень випадкової величини на відповідні ймовірності називається *математичним сподіванням величини X* (*і позначається MX або M (X)*):

$$MX = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k. \qquad (9)$$

Якщо значення випадкової величини X мають одну й ту ж ймовірність p, то, враховуючи, що $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$, одержуємо $kp = 1$ і $p = \frac{1}{k}$. Тоді

$$MX = x_1p + x_2p + \ldots + x_kp = p(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k},$$

тобто в цьому випадку математичне сподівання випадкової величини X дорівнює середньому арифметичному всіх її значень.

Говорять, що *математичне сподівання випадкової величини є середнє зважене (ймовірностями) її значень.*

Математичне сподівання називають ще середнім значенням випадкової величини. Іноді також говорять, що математичне сподівання випадкової величини є її *значення в середньому*.

Математичне сподівання показує, на яке середнє значення випадкової величини X можна сподіватися в результаті тривалої серії експериментів (при значній кількості повторень експерименту). За допомогою математичного сподівання можна порівнювати випадкові величини, які задані законами розподілу.

Наприклад, нехай кількості очок, що вибиваються при одному пострілі кожним із двох вправних стрільців, мають такі закони розподілу:

X	8	9	10
P	0,4	0,1	0,5

Y	8	9	10
P	0,1	0,6	0,3

Щоб з'ясувати, який із стрільців стріляє краще, знаходять математичне сподівання для кожної випадкової величини:

$MX = 8 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}5 = 9{,}1$; $MY = 8 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 10 \cdot 0{,}3 = 9{,}2$.

Отже, середня кількість очок, які вибиває другий стрілець при одному пострілі, дещо вища, ніж у першого. Це дає підставу зробити висновок, що другий стрілець стріляє трохи краще, ніж перший.

Поняття математичного сподівання виникло у зв'язку з вивченням азартних ігор. Наведемо приклади.

Приклад 1 Гравець вносить у банк грального дому 1000 грн. Кидають гральний кубик. За правилами гри гравець може одержати 1800 грн, якщо відбудеться подія A_1 — випаде 6 очок; 1200 грн, якщо відбудеться подія A_2 — випаде або 4, або 5 очок; 0 гривень, якщо відбудеться подія A_3 — випаде або 1, або 2, або 3 очки.

Вважатимемо, що гравець одержує X гривень, тобто X — випадкова величина, яка може приймати значення $x_1 = 1800$, $x_2 = 1200$, $x_3 = 0$ відповідно до ймовірностей

$$p_1 = p(A_1) = \frac{1}{6},\ p_2 = p(A_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\ p_3 = p(A_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \text{ де } p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Математичне сподівання випадкової величини X дорівнює

$$MX = 1800 \cdot \frac{1}{6} + 1200 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{2} = 700.$$

Математичне сподівання — дуже важливий показник гри. Численні досліди показують, що число $MX = 700$ у нашому випадку — це є та сума, яку в середньому гральний дім виплачує кожному гравцю. Але це означає, що кожен гравець в середньому втрачає 300 грн з внесених у банк грального дому 1000 грн.

Приклад 2 Гравець виймає з колоди (у 36 карт) одну карту. Він одержує (тобто виграє) 10 грн, якщо вийме бубнового туза, 5 грн, якщо вийме бубнового короля, і кладе на стіл 1 грн (тобто програє, але можна сказати, що виграє −1 грн) у решті випадків.

Вважатимемо, що гравець одержує X гривень, де X — випадкова величина, яка може приймати значення $x_1 = 10$, $x_2 = 5$, $x_3 = -1$ відповідно до ймовірностей

$$p_1 = \frac{1}{36},\ p_2 = \frac{1}{36},\ p_3 = \frac{34}{36}, \text{ де } p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Математичне сподівання випадкової величини X дорівнює

$$MX = 10\,\frac{1}{36} + 5\ \frac{1}{36} + (-1)\ \frac{34}{36} = -\frac{19}{36}\quad.$$

Це означає, що кожен гравець у середньому втрачає $\frac{19}{36}$ грн.

Приклад 3 *Задача Паскаля.* Два гравці A і B погодилися, що в їх грі вся ставка дістанеться тому, хто перший виграє 5 партій.

Але гра перервалася, коли гравець A мав 4 виграші, а гравець B — 3 виграші. У якому відношенні гравці повинні розділити ставку в цій перерваній грі (у кожній партії виграє один з гравців — нічиїх немає; ймовірність виграшу кожного гравця в одній партії вважається рівною 0,5)?

Розглянемо, які випадки могли б відбутися, якби гравці зіграли ще дві партії (незалежно від їх початкової домовленості):

1) гравець B виграє обидві партії; 2) гравець B виграє першу партію, але програє другу; 3) гравець B програє першу партію, але виграє другу; 4) гравець B програє обидві партії.

За початковою угодою всю гру виграє перший гравець у трьох з цих чотирьох випадків, другий — лише в одному. Отже, ймовірність події A (гравець A виграв усю гру) дорівнює $\frac{3}{4}$, а ймовірність події B (гравець B виграв усю гру) дорівнює $\frac{1}{4}$.

Якщо ставка дорівнює m грн, то гравець A одержав би X_A грн, де X_A — випадкова величина, яка приймає значення m з ймовірністю $\frac{3}{4}$ і значення 0 з ймовірністю $\frac{1}{4}$, а гравець B одержав би X_B грн, де X_B — випадкова величина, яка приймає значення m з ймовірністю $\frac{1}{4}$ і значення 0 з ймовірністю $\frac{3}{4}$.

Знайдемо математичне сподівання величин X_A і X_B, тобто знайдемо, скільки в середньому одержав би кожен гравець:

$$M(X_A)=m\frac{3}{4}+0\frac{1}{4}=\frac{3}{4}m, \quad M(X_B)=m\frac{1}{4}+0\frac{3}{4}=\frac{1}{4}m.$$

Отже, в середньому гравці розділили б ставку у відношенні 3 : 1, тому ставку треба розділити у відношенні $M(X_A) : M(X_B)$, тобто 3 : 1.

Запитання для контролю

1. а) Поясніть, що таке випадкова величина для даного випадкового експерименту. Наведіть приклади. б*) Дайте означення випадкової величини. Користуючись означенням, задайте якусь випадкову величину для експерименту по підкиданню двох монет.
2. Поясніть, що таке закон розподілу випадкової величини. Наведіть приклади.
3. Закон розподілу випадкової величини, яка набуває тільки n значень, задано у вигляді таблиці. Як можна перевірити правильність заповнення рядка зі значеннями ймовірностей у цій таблиці?
4. Дайте означення математичного сподівання випадкової величини X.

Вправи

1°. Складіть таблицю розподілу за ймовірностями P випадкової величини X — числа очок, яке випадає при підкиданні грального кубика.

2. Є 3 гральних кубики, на гранях яких відмічені тільки одне або два очки: у кубика A одне очко зустрічається на гранях один раз, у кубика B — 2 рази, а в кубика C — 3 рази (рис. 22.18). Випадкові величини X, Y і Z — число очок, що випало відповідно на кожному з кубиків A, B і C. Задайте закони розподілу випадкових величин X, Y і Z за допомогою відповідних таблиць.

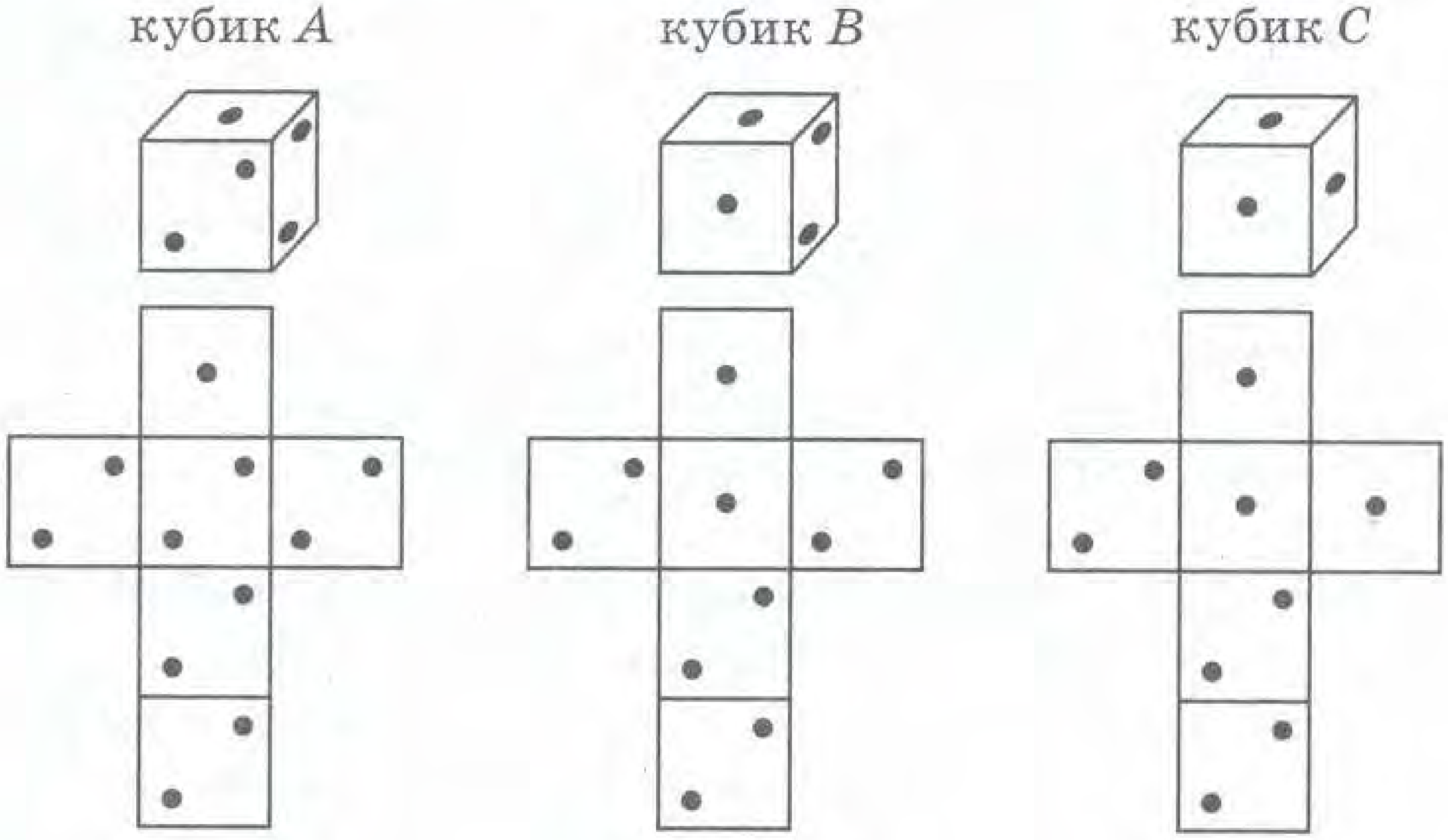


Рис. 22.18

3. Підкидають дві монети. Результату «герб» припишемо умовне числове значення 0, а результату«число» — 1. Складіть таблицю розподілу за ймовірностями P значень випадкової величини X — суми чисел, що випали на монетах.

4*. Тричі кидають монету. Випадкова величина X — число випадань «герба». Задайте закон розподілу випадкової величини X за допомогою таблиці.

5. Нехай закон розподілу випадкової величини X задано таблицею:

1)

X	2	5	6	7
P	0,3	0,1	0,2	0,4

2)

X	4	5	8	10	12
P	0,4	0,1	0,05	0,95	0,4

Знайдіть математичне сподівання цієї величини.

6. Підкидають гральний кубик. Знайдіть математичне сподівання випадкової величини X — числа очок, що випали на кубику.

7. Виграші (у гривнях), які припадають на один білет у кожній з двох лотерей, мають такі закони розподілу:

X	0	1	5	10
P	0,9	0,06	0,03	0,01

Y	0	1	5	10
P	0,85	0,12	0,02	0,01

Якій з цих лотерей ви віддали би перевагу?

Називатимемо гру справедливою, якщо в середньому буде однаковим число очок або грошей, які одержує кожен гравець. Визначте, чи є справедливою гра, описана в завданнях (**8–11**).

8. Підкидають дві монети. Гравець A одержує 3 очки, якщо випадають два «герби», 0 очок в інших випадках. Гравець B одержує 2 очки, якщо випадають «герб» і «число», 0 очок в інших випадках.

9. Підкидають дві монети. Гравець A одержує 2 очки, якщо випадають два «числа», 0 очок в інших випадках. Гравець B одержує 1 очко, якщо випадають «герб» і «число», 0 очок в інших випадках.

10. Підкидають дві гральні кістки. Гравець A одержує 6 очок, якщо випадає сума, не більша 7 очок, 0 очок в інших випадках. Гравець B одержує 7 очок, якщо випадає сума, більша 7 очок, 0 очок в інших випадках.

11*. Підкидають дві монети. Гравець A одержує a очок, якщо випадають два «герби», 0 очок в інших випадках. Гравець B одержує b очок, якщо випадають «герб» і «число», 0 очок в інших випадках. Знайдіть відношення $a : b$, при якому ця гра буде справедливою.

12. *Задача Луки Пачолі* (1494 р.). Двоє гравців грають до трьох виграшів. Після того як перший гравець виграв дві партії, а другий — одну, гра урвалася. Як справедливо розділити ставку 210 ліврів (лівр — срібна монета)?

13*. *Задача П'єра Ферма* (1654 р.). Нехай до виграшу всієї гри гравцю A бракує двох партій, а гравцю B — трьох партій. Як справедливо розділити ставку, якщо гра перервана?

§ 23 ПОНЯТТЯ ПРО СТАТИСТИКУ. ХАРАКТЕРИСТИКИ РЯДІВ ДАНИХ

23.1. ПОНЯТТЯ ПРО СТАТИСТИКУ. ГЕНЕРАЛЬНА СУКУПНІСТЬ І ВИБІРКА

1. Поняття про статистику. «Статистика знає все», — стверджували Ільф і Петров у своєму знаменитому романі «Дванадцять стільців» і продовжували: «Відомо, скільки якої їжі з'їдає за рік середній громадянин республіки... Відомо, скільки в країні мисливців, балерин... верстатів, велосипедів, пам'ятників, маяків і швейних машинок... Як багато життя, повного запалу, пристрастей і думки, дивиться на нас із статистичних таблиць...»

Цей іронічний опис дає досить точне уявлення про *статистику* (від лат. *status* — стан) — *науку, що вивчає, обробляє й аналізує кількісні дані про найрізноманітніші масові явища в житті*. Економічна статистика вивчає зміну цін, попиту та пропозиції на товари, прогнозує зростання й падіння виробництва й споживання. Медична статистика вивчає ефективність різних ліків і методів лікування, ймовірність виникнення деякого захворювання залежно від віку, статі, спадковості, умов життя, шкідливих звичок, прогнозує поширення епідемій. Демографічна статистика вивчає народжуваність, чисельність населення, його склад (віковий, національний, професійний). А є ще статистика фінансова, податкова, біологічна, метеорологічна...

Статистика має багатовікову історію. Уже в стародавньому світі вели статистичний облік населення. Однак довільні тлумачення статистичних даних, відсутність строгої наукової бази статистичних прогнозів навіть у середині XIX ст. ще не дозволяли говорити про статистику як науку. Тільки в XX ст. з'явилася математична статистика — наука, яка спирається на закони теорії ймовірностей. Виявилося, що статистичні методи обробки даних із самих різних областей життя мають багато спільного. Це дозволило створити універсальні науково обґрунтовані методи статистичних досліджень і перевірки статистичних гіпотез. Отже,

***математична статистика* — це розділ математики, який вивчає математичні методи обробки й використання статистичних даних для наукових і практичних висновків.**

У математичній статистиці розглядають методи, які дають можливість за результатами експериментів (статистичними даними) робити певні висновки ймовірнісного характеру.

Математична статистика підрозділяється на дві обширні області:

1) *описова статистика*, яка розглядає методи опису статистичних даних, їх табличне й графічне подання тощо;

2) *аналітична статистика* (теорія статистичних висновків), яка розглядає обробку даних, одержаних у ході експерименту, і формулю-

вання висновків, що мають прикладне значення для конкретної області людської діяльності. Теорія статистичних висновків тісно пов'язана з теорією ймовірностей і базується на її математичному апараті.

Серед основних задач математичної статистики можна відзначити такі.

1. **Оцінка ймовірності.** Нехай деяка випадкова подія має ймовірність $p > 0$, але її значення нам невідоме. Необхідно оцінити цю ймовірність за результатами експериментів, тобто розв'язати задачу про оцінку ймовірності через частоту.
2. **Оцінка закону розподілу.** Досліджується деяка випадкова величина, точний вираз для закону розподілу якої нам невідомий. Потрібно за результатами експериментів знайти наближений вираз для функції, що задає закон розподілу.
3. **Оцінка числових характеристик випадкової величини** (наприклад, математичного сподівання — див. п. 22.6).
4. **Перевірка статистичних гіпотез** (припущень). Досліджується деяка випадкова величина. Виходячи з певних міркувань, висувається гіпотеза, наприклад, про розподіл цієї випадкової величини. Потрібно за результатами експериментів прийняти або відхилити цю гіпотезу.

Результати досліджень, що проводяться методами математичної статистики, застосовуються для прийняття рішень. Зокрема, при плануванні й організації виробництва, при контролі якості продукції, при виборі оптимального часу наладки або заміни діючої апаратури (наприклад, при визначенні часу заміни двигуна літака, окремих частин верстатів тощо).

Як і в кожній науці, у статистиці використовуються свої специфічні терміни й поняття. Деякі з них наведено в табл. 37. Запам'ятовувати їх означення не обов'язково, досить розуміти зміст.

Таблиця 37

Часто вживаний термін	Зміст терміну	Науковий термін	Означення
Загальний ряд даних	Те, звідки вибирають	**Генеральна сукупність**	*Множина всіх можливих результатів спостереження (вимірювання)*
Вибірка	Те, що вибирають	**Статистична вибірка, статистичний ряд**	*Множина результатів, які реально одержані в даному спостереженні (вимірюванні)*

Часто вживаний термін	Зміст терміну	Науковий термін	Означення
Варіанта	Значення одного з результатів спостереження (вимірювання)	**Варіанта**	*Одне зі значень елементів вибірки*
Ряд даних	Значення всіх результатів спостереження (вимірювання)	**Варіаційний ряд**	*Упорядкована множина всіх варіант*

2. Генеральна сукупність і вибірка. Для вивчення різних масових явищ проводяться спеціальні статистичні дослідження. Будь-яке статистичне дослідження починається з цілеспрямованого збору інформації про явище або процес, що вивчається. Цей етап називають *етапом статистичних спостережень*. Для отримання статистичних даних у результаті спостережень схожі елементи деякої сукупності порівнюють за різними ознаками. Наприклад, учнів 11 класів можна порівнювати за зростом, розміром одягу, успішністю і т. д. Болти можна порівнювати за довжиною, діаметром, вагою, матеріалом тощо. Практично будь-яка ознака або піддається безпосередньому вимірюванню, або може одержати умовну числову характеристику (див. приклад з випаданням «герба» й «числа» при підкиданні монети на с. 322). Таким чином, деяку ознаку елементів сукупності можна розглядати як випадкову величину, що набуває тих чи інших числових значень.

При вивченні реальних явищ часто буває неможливо обстежувати всі елементи сукупності. Наприклад, практично неможливо виявити розміри взуття у всіх людей планети. А перевірити, наприклад, наявність аркушів неякісного фотопаперу у великій партії хоча й реально, але безглуздо, тому що повна перевірка призведе до знищення всієї партії паперу. У подібних випадках замість вивчення всіх елементів сукупності, яку називають *генеральною сукупністю*, обстежують її значну частину, обрану випадковим чином. Цю частину називають *вибіркою*, а число елементів у вибірці — *об'ємом вибірки*.

Якщо у вибірці всі основні ознаки генеральної сукупності представлені в тій же пропорції і з тією ж відносною частотою, з якою дана ознака виступає в заданій генеральній сукупності, то цю вибірку називають *репрезентативною* (від французького *représentatif*— представницький).

Іншими словами, репрезентативна вибірка є меншою за розміром, але точною моделлю тієї генеральної сукупності, яку вона має відображати. У тій мірі, у якій вибірка є репрезентативною, висновки, що ґрунтуються на вивченні цієї вибірки, можна з великою упевненістю вважати застосовними до всієї генеральної сукупності.

Поняття репрезентативності відібраної сукупності не означає, що вона повністю за всіма ознаками представляє генеральну сукупність, оскільки це практично неможливо забезпечити. Відібрана частина має бути репрезентативною відносно тих ознак, які вивчаються.

Щоб вибірка була репрезентативною, вона має бути виділена з генеральної сукупності випадковим чином. Найчастіше використовують такі види вибірок: 1) *власне-випадкову*; 2) *механічну*; 2) *типову*; 3) *серійну*. Стисло охарактеризуємо кожну з них.

1) Члени генеральної сукупності можна заздалегідь занумерувати й кожен номер записати на окремій картці. Після ретельного перемішування відбиратимемо навмання з пачки таких карток по одній картці і одержимо вибіркову сукупність будь-якого потрібного об'єму, яка називається *власне-випадковою вибіркою*. Номери на відібраних картках вкажуть, які члени генеральної сукупності потрапили у вибірку. (Відмітимо, що при цьому можливі два принципово різних способи відбору карток залежно від того, повертається або не повертається до інших вийнята картка після запису її номера.) Власне-випадкову вибірку заданого об'єму n можна утворити й за допомогою так званих таблиць випадкових чисел або генератора випадкових чисел на комп'ютері. *При утворенні власне-випадкової вибірки кожен член генеральної сукупності з однаковою ймовірністю може потрапити у вибірку.*
2) Вибірка, у яку члени з генеральної сукупності відбираються через певний інтервал, називається *механічною*. Наприклад, якщо об'єм вибірки має складати 5 % об'єму генеральної сукупності (5 %-ва вибірка), то відбирається її кожен 20-й член, при 10 %-вій вибірці — кожен 10-й член генеральної сукупності і т. д. Механічну вибірку можна утворити, якщо є певний порядок розташування членів генеральної сукупності, наприклад якщо вони слідують один за одним у певній послідовності в часі. Саме так з'являються виготовлені на верстаті деталі, прилади, що зійшли з конвеєра, тощо. При цьому необхідно переконатися, що в членах генеральної сукупності, які слідують один за одним, значення ознаки не змінюються з тією ж (або кратною їй) періодичністю, що і періодичність відбору елементів у вибірку. Наприклад, нехай з продукції металообробного верстата у вибірку потрапляє кожна п'ята деталь, а після кожної десятої деталі робітник проводить заміну (або заточування) ріжучого інструменту і наладку верстата. Ці операції робітника спрямовані на поліпшення якості деталей (спрацювання ріжучого інструменту відбувається більш-менш рівномірно). Отже, у вибіркову сукупність потраплять деталі, на якість яких робота верстата впливає в одну й ту ж сторону, і значення ознаки вибіркової сукупності можуть неправильно відобразити відповідні значення ознаки генеральної сукупності.
3) Якщо з генеральної сукупності, заздалегідь розбитої на групи, що не перетинаються, утворити власне-випадкові вибірки з кожної групи (з повторним або безповторним відбором членів), то відібрані елементи складуть вибіркову сукупність, яка називається *типовою*.

4) Якщо генеральну сукупність заздалегідь розбити на серії (групи), що не перетинаються, а потім, розглядаючи серії як елементи, утворити власне-випадкову вибірку (з повторним або безповторним відбором серій), то всі члени відібраних серій складуть вибіркову сукупність, яка називається *серійною*.

Наприклад, нехай на заводі 150 верстатів (10 цехів по 15 верстатів) випускають однакові вироби. Якщо у вибірку відбирати вироби з ретельно перемішаної продукції всіх 150 верстатів, то утворюється власне-випадкова вибірка. Але можна відбирати вироби окремо з продукції першого верстата, другого і т. д. Тоді буде утворена типова вибірка. Якщо ж членами генеральної сукупності вважати цехи й спочатку утворити власне-випадкову вибірку цехів, а потім у кожному з відібраних цехів узяти всі випущені вироби, то всі відібрані вироби (із всіх відібраних цехів) складуть серійну вибірку.

Як уже відмічалося, практично будь-яка ознака X, яка вивчається, або безпосередньо вимірюється, або може одержати числову характеристику. Тому первинні експериментальні дані, що характеризують виділену вибірку, звичайно представлені у вигляді набору чисел, записаних дослідником у порядку їх надходження. Кількість (n) чисел в цьому наборі називають *об'ємом вибірки*, а кількість (m) з'явлень варіанти (одного зі значень елементів вибірки) — *частотою варіанти*. Відношення $\frac{m}{n}$ називають відносною частотою (W) варіанти.

Використовуючи ці поняття, запишемо співвідношення між ними в репрезентативній вибірці.

Нехай S — об'єм генеральної сукупності, n — об'єм репрезентативної вибірки, у якій k значень досліджуваної ознаки розподілено по частотах $M_1, M_2, \ldots, M_k$, де $\sum M = n$. Тоді в генеральній сукупності частотам $M_1, M_2, \ldots, M_k$ будуть відповідати частоти $s_1, s_2, \ldots, s_k$ тих самих значень ознаки, що й у вибірці ($\sum s = S$). За означенням репрезентативної вибірки одержуємо

$$\frac{M_i}{n} = W_i = \frac{s_i}{S},$$

де i — порядковий номер значення ознаки ($1 \leqslant i \leqslant k$). Із цього співвідношення знаходимо

$$s_i = SW_i \ \left(\text{або } s_i = S\,\frac{M_i}{n}\right), \text{ де } 1 \leqslant i \leqslant k. \qquad (1)$$

Приклад Взуттєвий цех має випустити 1000 пар кросівок молодіжного фасону. Для визначення того, скільки кросівок і якого розміру потрібно випустити, були виявлені розміри взуття у 50 випадковим чином вибраних підлітків. Розподіл розмірів взуття за частотами подано в таблиці:

Розмір (X)	36	37	38	39	40	41	42	43	44	
Частота (M)	2	5	6	12	11	7	4	2	1	$\sum M = n = 50$

Скільки кросівок різного розміру буде виготовляти фабрика?

Розв'язання

Будемо вважати розглянуту вибірку об'ємом $n = 50$ підлітків репрезентативною. Тоді в генеральній сукупності (об'ємом $S = 1000$) кількість кросівок кожного розміру пропорційна кількості кросівок відповідного розміру у вибірці (і для кожного розміру знаходиться за формулою (1)). Результати розрахунків будемо записувати в таблицю:

Розмір (X)	36	37	38	39	40	41	42	43	44	
Частота (M)	2	5	6	12	11	7	4	2	1	$\sum M = n = 50$
Відносна частота (W)	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\sum W = 1$
Кількість кросівок (SW)	40	100	120	240	220	140	80	40	20	$\sum(SW) = S = 1000$

Відповідь:

Розмір	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Кількість кросівок	40	100	120	240	220	140	80	40	20

◁

У сільському господарстві для визначення кількісного співвідношення виробів різного сорту користуються так званим *вибірковим методом.* Суть цього методу буде ясна з опису такого досліду.

У коробці ретельно перемішаний горох двох сортів: зелений і жовтий. Ложкою витягають з різних місць коробки порції гороху. У кожній порції підраховують число жовтих горошин M і число всіх горошин n. Для кожної порції знаходять відносну частоту появи жовтої горошини $W = \frac{M}{n}$. Так роблять k разів (на практиці зазвичай беруть $5 < k < 10$) і щораз обчислюють відносну частоту. За статистичну ймовірність вилучення жовтої горошини з коробки приймають середнє арифметичне отриманих відносних частот $W_1, W_2, \ldots, W_k$:

$$W_{\text{сер}} = \frac{W_1 + W_2 + \ldots + W_k}{k}.$$

Запитання для контролю

1. Поясніть, які завдання розв'язують статистика й математична статистика.
2. Поясніть, як ви розумієте терміни: генеральна сукупність, вибірка, репрезентативна вибірка. Наведіть приклади.

Вправи

1. Визначте, яку із запропонованих вибірок в останньому стовпці таблиці можна вважати репрезентативною.

№	Генеральна сукупність	Мета обстеження	Вибірка
1°	Партія однакових деталей обсягом 10 000 штук	Визначення числа бракованих деталей у партії	1) 100 деталей, які лежать поряд; 2) 100 деталей, вибраних випадковим чином із різних частин партії
2°	Усі бродячі собаки обласного центру	Визначення числа собак, які хворіють на чумку	1) Одна собача зграя; 2) по декілька випадковим чином відловлених собак з кожного району міста
3°	Усі екзаменаційні роботи зовнішнього тестування з математики випускників шкіл міста	Виявлення співвідношення між числом учнів, які знаходяться на достатньому, середньому й високому рівнях навчальних досягнень з математики	1) 10 робіт, узятих випадковим чином із числа всіх робіт; 2) 100 робіт, узятих випадковим чином із числа всіх робіт; 3) 100 робіт випускників однієї школи
4°	Партія штампованих деталей обсягом 100 000 штук	Визначення середньої маси деталі в партії	1) 2 деталі; 2) 100 деталей, які виготовили останніми; 3) 50 випадковим чином вибраних деталей з партії
5	Бідон молока	Визначення жирності молока (у відсотках)	1) Ложка молока, яка взята з поверхні через 2 год після надою; 2) стакан молока, налитий з бідона після 2 год охолодження його в погребі;

№	Генеральна сукупність	Мета обстеження	Вибірка
			3) ложка молока, узята після ретельного перемішування молока
6	Урожай зерна на площі 1000 га	Визначення урожайності зерна на цьому полі	1) Урожай зерна з північного схилу пагорба площею 1 га; 2) середнє арифметичне врожайності зерна з двох сусідніх ділянок площею 1 га — північного і східного схилів пагорба; 3) середнє арифметичне врожайностей зерна з 10 ділянок, кожна з яких площею 10 соток і вибрана на полі випадковим чином

2. В уривку з художнього твору деякого автора обсягом 600 слів дієслова трапляються 72 рази. Визначте орієнтовну кількість дієслів в уривку обсягом 2000 слів цього автора.

3. Серед випадковим чином вибраних 100 молодих людей, які влітку носять кепки, провели опитування про кольорові переваги для цього виду головних уборів. Результати опитування відображено в таблиці:

Колір	Чорний	Червоний	Синій	Сірий	Білий	Жовтий	Зелений
Частота	32	20	16	14	11	5	2

Вважаючи розглянуту вибірку репрезентативною, запропонуйте рекомендації швейній фабриці з кількості випуску кепок кожного кольору, якщо фабрика має випустити 30 000 кепок.

4. Молокозавод випускає молоко різної жирності. У продуктових магазинах міста, для яких завод виробляє молоко, було проведено опитування 50 навмання вибраних покупців про те, якої жирності молоко вони споживають. Результати опитування відображено в таблиці:

Жирність молока (у %)	0	0,5	1	1,5	2,5	3,5	5
Частота	10	6	4	5	12	7	6

Вважаючи розглянуту вибірку репрезентативною, запропонуйте рекомендації молокозаводу по об'єму випуску молока кожного виду, якщо молокозавод має випускати 2000 літрів молока щоденно.

23.2. ТАБЛИЧНЕ Й ГРАФІЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДАНИХ. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЯДІВ ДАНИХ

Таблиця 38

<table>
<tr><th>Означення</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ранжирування ряду даних</td></tr>
<tr><td>Під ранжируванням ряду даних розуміють розташування елементів цього ряду в порядку зростання (мається на увазі, що кожне наступне число або більше, або не менше попереднього).</td><td>Якщо ряд даних вибірки має вигляд
$5, 3, 7, 4, 6, 4, 6, 9, 4,$
то після ранжирування він перетворюється на ряд
$3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9 \qquad (*)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Розмах вибірки ($\boldsymbol{R}$)</td></tr>
<tr><td>Розмах вибірки — це різниця між найбільшим і найменшим значеннями величини у вибірці.</td><td>Для ряду (*) розмах вибірки:
$R = 9 - 3 = 6$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Мода ($\boldsymbol{Mo}$)</td></tr>
<tr><td>Мода — це значення елемента вибірки, яке зустрічається частіше за інші.</td><td>У ряді (*) значення 4 зустрічається найчастіше, отже, $Mo = 4$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Медіана ($\boldsymbol{Me}$)</td></tr>
<tr><td>Медіана — це так зване серединне значення впорядкованого ряду значень випадкової величини:
— якщо кількість чисел у ряді непарна, то медіана — це число, записане посередині;
— якщо кількість чисел у ряді парна, то медіана — це середнє арифметичне двох чисел, що стоять посередині.</td><td>Для ряду (*), у якому 9 членів, медіана — це середнє (тобто п'яте) число 5: $Me = 5$.
Якщо розглянути ряд
$3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9,$
у якому 10 членів, то медіана — це середнє арифметичне п'ятого і шостого членів:
$$Me = \frac{4+5}{2} = 4{,}5.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Середнє значення ($\bar{X}$) вибірки</td></tr>
<tr><td>Середнім значенням вибірки називають середнє арифметичне всіх чисел ряду даних вибірки.
Якщо в ряді даних записані значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (серед яких можуть бути й однакові), то</td><td>Нехай ряд даних заданий таблицею розподілу за частотами M:
<table><tr><td>X</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>M</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr></table></td></tr>
</table>

Закінчення табл. 38

$$\overline{X}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}. \qquad (**)$$ Якщо відомо, що в ряді даних різні значення $x_1, x_2, \ldots, x_k$ зустрічаються відповідно до частот $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (тоді $\sum M = n$), то середнє арифметичне можна обчислювати за формулою $$\overline{X}=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k}{n}.$$	$$\sum M = n = 8.$$ Тоді за формулою (**) $$\overline{X}=\frac{2+2+2+4+5+5+7+7}{8}=\frac{34}{8}=4{,}25$$ або за другою формулою $$\overline{X}=\frac{2\cdot3+4\cdot1+5\cdot2+7\cdot2}{8}=\frac{34}{8}=4{,}25$$

Пояснення й обґрунтування

1. Табличне й графічне представлення даних. Полігони частот. Як уже зазначалося, практично будь-яка ознака X, яка вивчається, або безпосередньо вимірюється, або може одержати числову характеристику. Тому початкові експериментальні дані, що характеризують виділену вибірку, звичайно представлені у вигляді набору чисел, записаних дослідником у порядку їх надходження. Якщо даних багато, то одержаний набір чисел важко осягнути й зробити по ньому якісь висновки дуже складно. Тому первинні дані потребують обробки, яка звичайно починається з їх групування. Групування виконується різними методами залежно від цілей дослідження, виду ознаки, що вивчається, і кількості експериментальних даних (об'єму вибірки), але найчастіше групування зводиться до представлення даних у вигляді таблиць, у яких різні значення елементів вибірки впорядковані за зростанням і вказані їх частоти (тобто кількість кожного елементу у вибірці). За необхідності в цій таблиці вказують також відносні частоти для кожного елементу, записаного в першому рядку. Таку таблицю часто називають рядом розподілу (або *варіаційним рядом*).

Наприклад, нехай у результаті вивчення розміру взуття 30 хлопчиків 11 класу було одержано набір чисел (результати записано в порядку опитування):

39; 44; 41; 39; 40; 41; 45; 42; 44; 41; 41; 43; 42; 43; 41; 44; 42; 38; 40; 38; 41; 40; 42; 43; 42; 41; 43; 40; 40; 42.

Щоб зручніше було аналізувати інформацію, у подібних ситуаціях числові дані спочатку *ранжирують*, розташовуючи їх у порядку зростання (коли кожне наступне число або більше, або не менше за попереднє). У результаті ранжирування одержуємо такий ряд:

38; 38; 39; 39; 40; 40; 40; 40; 40; 41; 41; 41; 41; 41; 41; 41; 42; 42; 42; 42; 42; 42; 43; 43; 43; 43; 44; 44; 44; 45.

Потім складаємо таблицю, у першому рядку якої вказані всі різні значення одержаного ряду даних (X — розмір взуття вибраних 30 хлопчиків 11 класу), а в другому рядку — їх частоти M:

X	38	39	40	41	42	43	44	45
W	2	2	5	7	6	4	3	1

$n = \sum M = 30$

Одержуємо ряд розподілу ознаки X, яка розглядається, за частотами.

Іноді зручно проводити аналіз ряду розподілу на основі його графічного зображення.

Відмітимо на координатній площині точки з координатами $(x_1; m_1)$, $(x_2; m_2)$, ..., $(x_8; m_8)$ і з'єднаємо їх послідовно відрізками (рис. 23.1). Одержану ламану лінію називають *полігоном частот*.

Тобто

***полігоном частот* називають ламану, відрізки якої послідовно з'єднують точки з координатами $(x_1; m_1)$, $(x_2; m_2)$, ..., $(x_k; m_k)$, де x_i — значення різних елементів ряду даних, а m_i — відповідні їм частоти.**

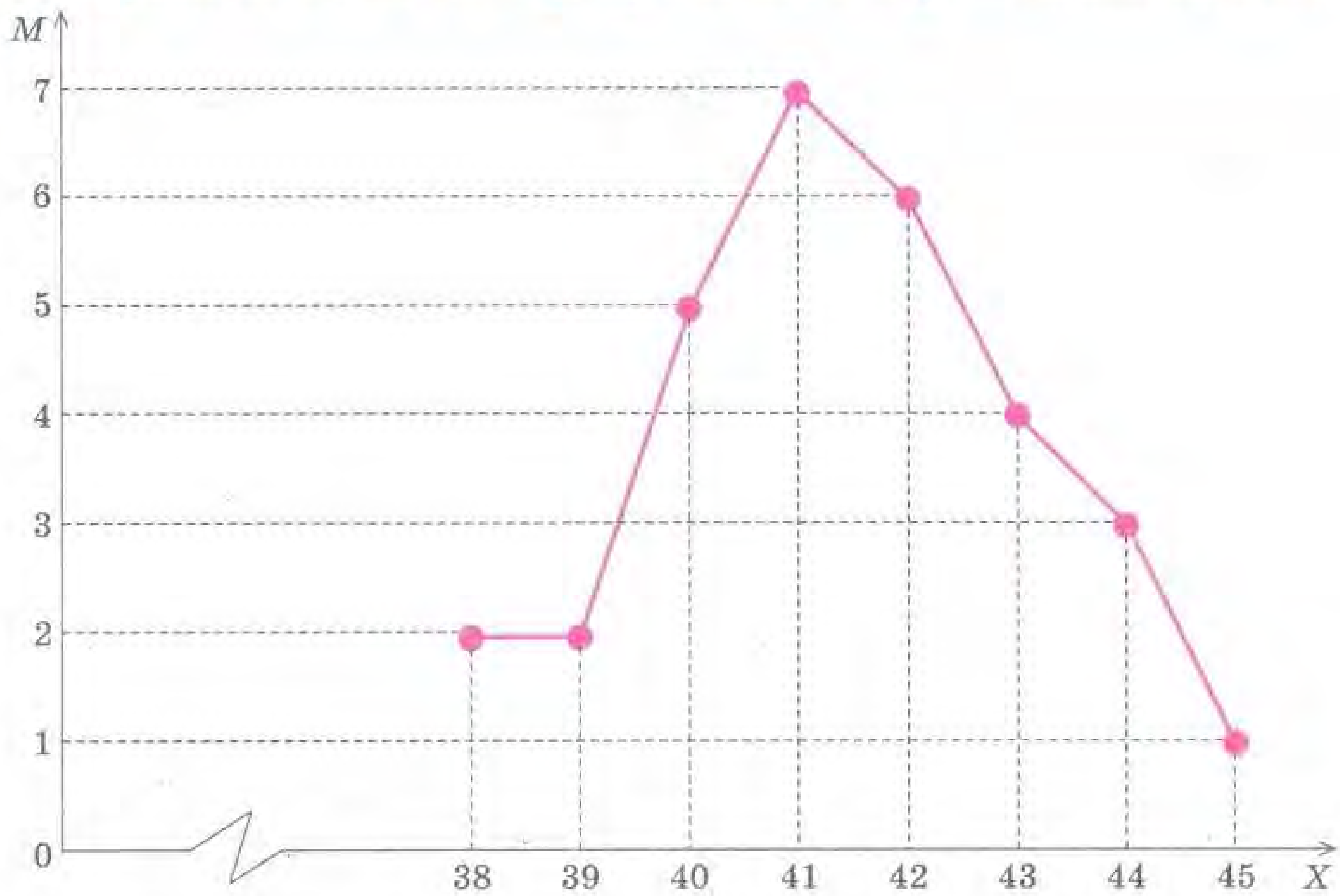


Рис. 23.1

Аналогічно означається й будується *полігон відносних частот* для ознаки X, яка розглядається (будуються точки з координатами $(x_1; w_1)$, $(x_2; w_2)$, ..., $(x_k; w_k)$, де x_i — значення різних елементів ряду даних, а w_i — відповідні їм відносні частоти.

Якщо порахувати відносні частоти для кожного з різних значень ряду даних, розглянутого на початку цього пункту, то розподіл значень ознаки X, яка розглядається, за відносними частотами можна задати таблицею:

X	38	39	40	41	42	43	44	45
W	$\frac{1}{15}\approx 0{,}07$	$\frac{1}{15}\approx 0{,}07$	$\frac{1}{6}\approx 0{,}17$	$\frac{7}{30}\approx 0{,}23$	$\frac{1}{5}\approx 0{,}2$	$\frac{2}{15}\approx 0{,}13$	$\frac{1}{10}\approx 0{,}1$	$\frac{1}{30}\approx 0{,}03$

$\sum W = 1$

Також розподіл значень ознаки X, яка розглядається, за відносними частотами можна подати у вигляді полігона відносних частот (рис. 23.2), у вигляді лінійної діаграми (рис. 23.3) або у вигляді кругової діаграми, попередньо записавши значення відносної частоти у відсотках (рис. 23.4).

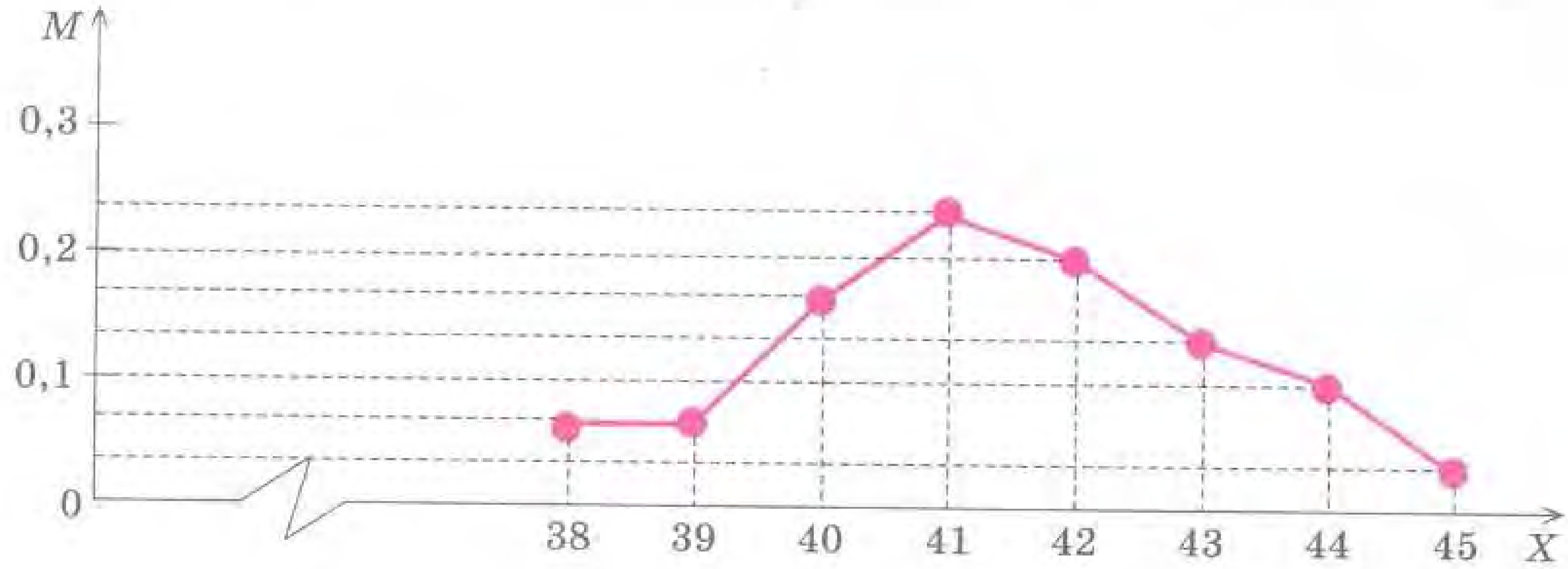


Рис. 23.2

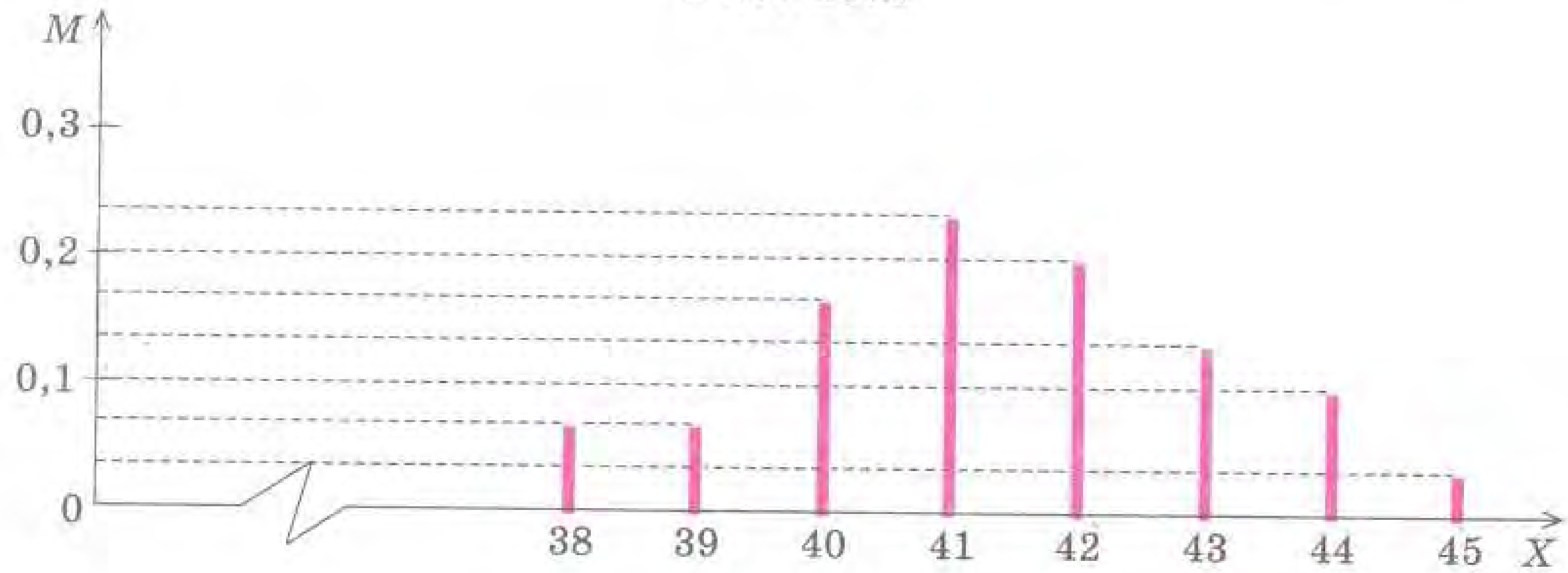


Рис. 23.3

Нагадаємо, що для побудови кругової діаграми круг розбивається на сектори, центральні кути яких пропорційні відносним частотам, обчисленим для кожного з різних значень ряду даних. Зауважимо, що кругова діаграма зберігає свою наочність і виразність тільки при невеликій кількості одержаних секторів. В іншому випадку її застосування малоефективне.

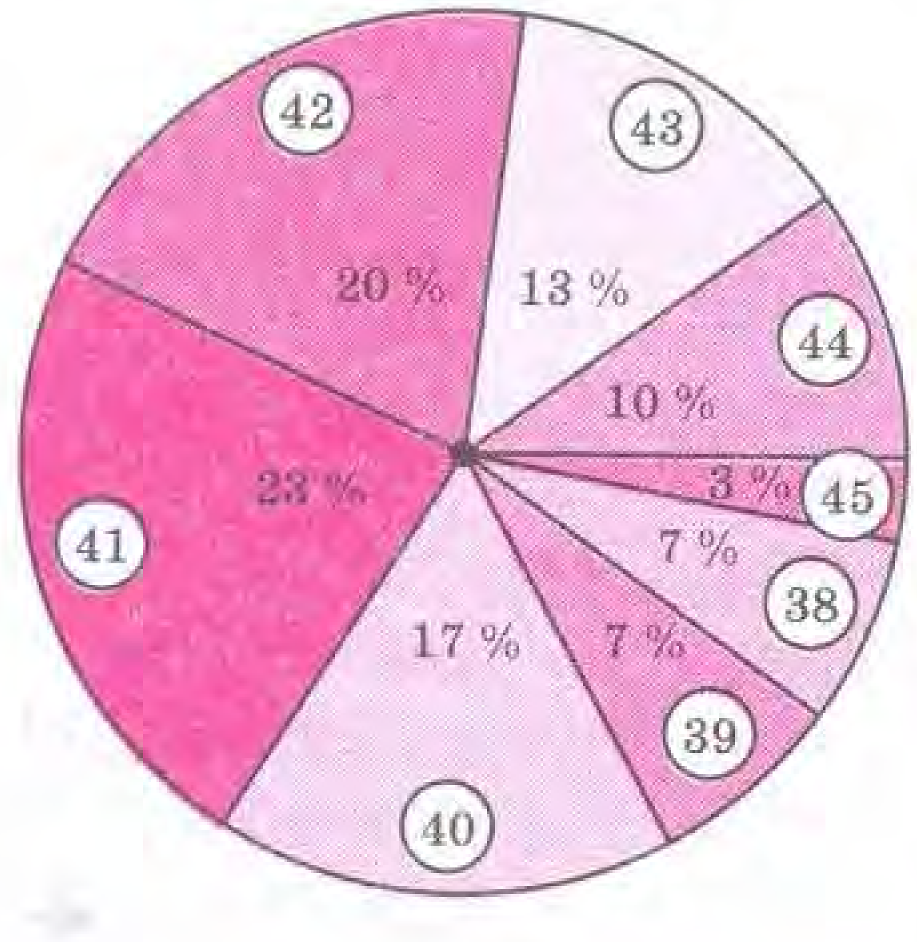


Рис. 23.4

Якщо ознака, яка розглядається, набуває багато різних значень, то її розподіл можна краще уявити після розбиття всіх значень ряду даних на класи. Кількість класів може бути будь-якою, зручною для дослідження (зазвичай їх вибирають у кількості від 4 до 12). При цьому величини (об'єми) класів мають бути однаковими.

Наприклад, у таблиці подано відомості про заробітну платню 100 робітників одного підприємства (у деяких умовних одиницях). При цьому значення платні (округлені до цілого числа умовних одиниць) згруповані в 7 класів, кожний об'ємом у 100 умовних одиниць.

Класи	Від 400 до 500	Від 500 до 600	Від 600 до 700	Від 700 до 800	Від 800 до 900	Від 900 до 1000	Від 1000 до 1100
Номер класу X	1	2	3	4	5	6	7
Частота (кількість робітників) M	4	6	18	36	22	10	4

(перевірка: $\sum M = 100$).

Наочно частотний розподіл зарплатні за класами можна подати за допомогою полігона частот (рис. 23.5) або стовбчастої діаграми (рис. 23.6).

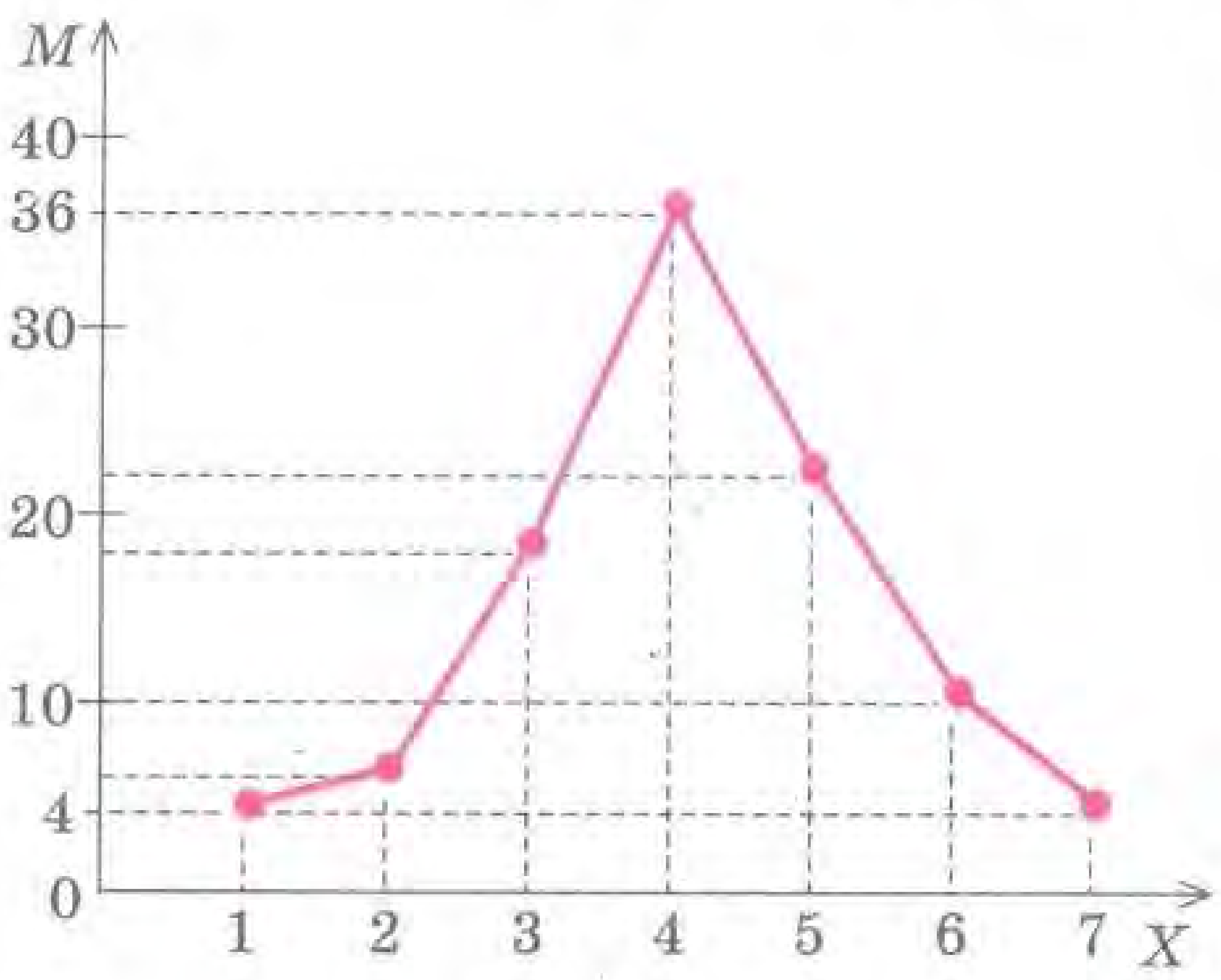


Рис. 23.5

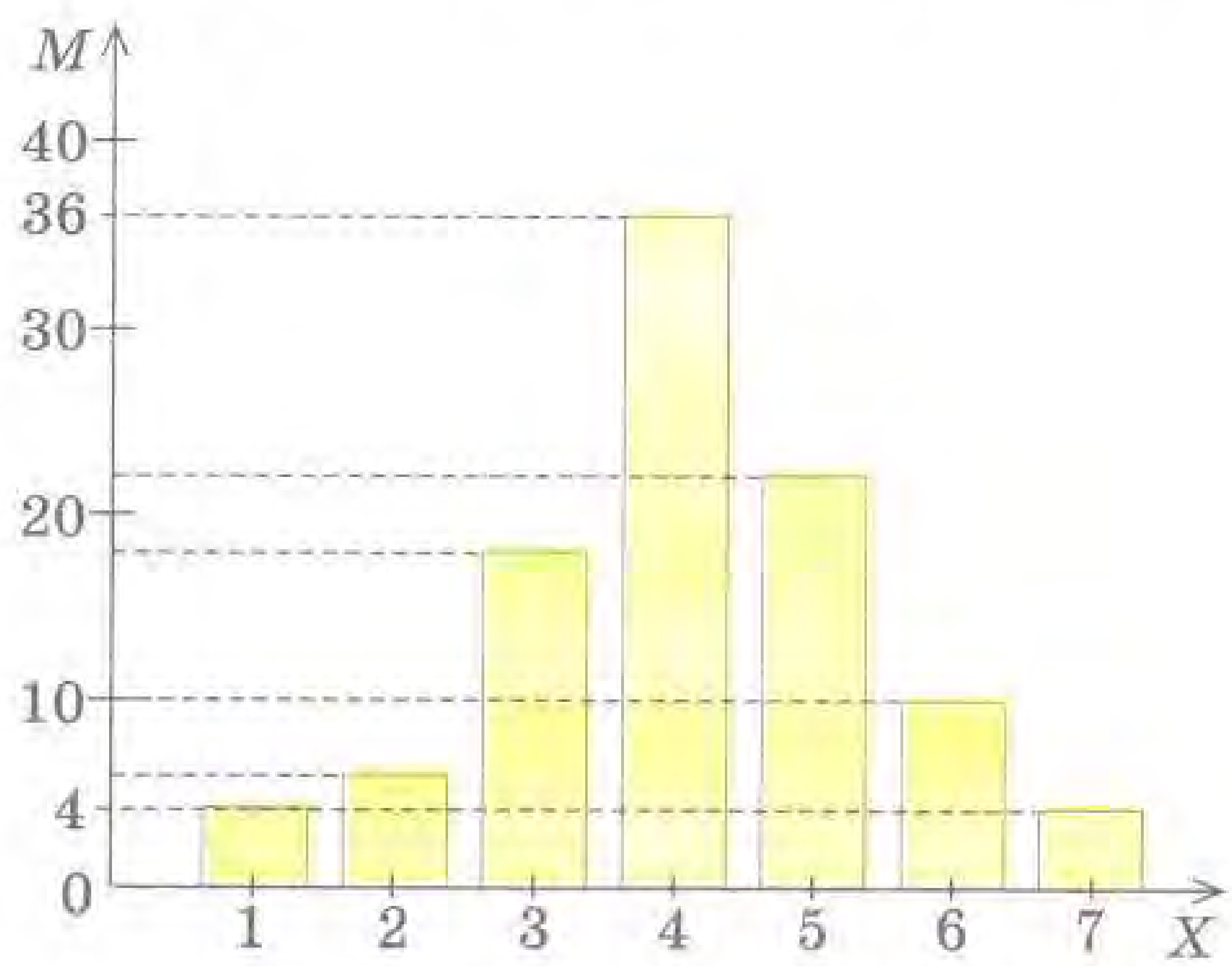


Рис. 23.6

2. Числові характеристики рядів даних. Розмах, мода й медіана ряду даних. Іноді вибірку випадкових величин або всю генеральну сукупність цих величин доводиться характеризувати одним числом. На практиці це необхідно, наприклад, для швидкого порівняння двох або більше сукупностей за загальною ознакою.

Розглянемо конкретний приклад.

Нехай після літніх канікул провели опитування 10 дівчат і 9 хлопців одного класу відносно кількості книг, які вони прочитали за канікули.

Результати було записано в порядку опитування. Одержали такі ряди чисел:

Дівчата: 4, 3, 5, 3, 8, 3, 12, 4, 5, 5.

Хлопці: 5, 3, 3, 4, 6, 4, 4, 7, 4.

Як уже відмічалося, щоб зручніше було аналізувати інформацію, у подібних випадках числові дані ранжирують, розташовуючи їх у порядку зростання (коли кожне наступне число або більше, або не менше за попереднє). У результаті ранжирування одержимо такі ряди:

Дівчата: 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 8, 12. (1)

Хлопці: 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7. (2)

Тоді розподіл за частотами M величин: X — число прочитаних за канікули книг дівчатами й Y — число прочитаних за канікули книг хлопцями, можна задати таблицями:

X	3	4	5	8	12
M	3	2	3	1	1

$\sum M = n = 10$

Y	3	4	5	6	7
M	2	4	1	1	1

$\sum M = n = 9$

Ці розподіли можна проілюструвати також графічно за допомогою полігону частот (рис. 23.7, *а*, *б*).

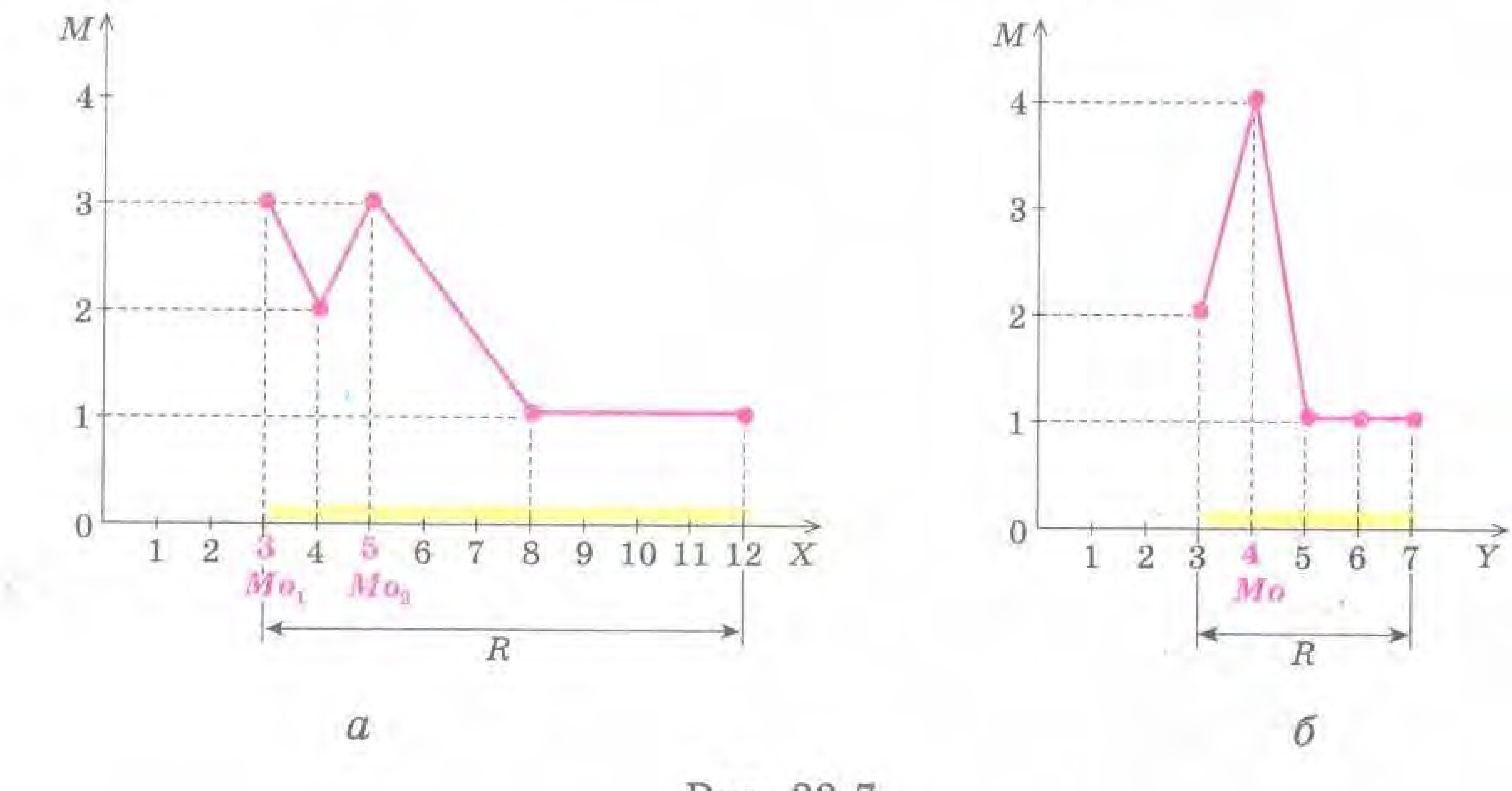


Рис. 23.7

Для порівняння рядів (1) і (2) використовують різні характеристики. Наведемо деякі з них.

Розмахом ряду чисел (позначають R) називають різницю між найбільшим і найменшим із цих чисел. Оскільки ми аналізуємо вибірку деяких величин, то

розмах вибірки **— це різниця між найбільшим і найменшим значеннями величини у вибірці.**

Для ряду (1) розмах $R = 12 - 3 = 9$, а для ряду (2) розмах $R = 7 - 3 = 4$. На графіку розмах — це довжина області визначення полігону частот (рис. 23.7).

Однією із статистичних характеристик ряду даних є його *мода* (позначають Mo, від латинського слова *modus* — міра, правило).

***Мода* — це те значення елемента вибірки, яке зустрічається частіше за інші.**

Так, у ряді (1) дві моди — числа 3 і 5: $Mo_1 = 3$, $Mo_2 = 5$, а в ряді (2) одна мода — число 4: $Mo = 4$. На графіку мода — це значення абсциси точки, у якій досягається максимум полігону частот (рис. 23.7). Зазначимо, що моди може й не бути, якщо всі значення ознаки, яка розглядається, зустрічаються однаково часто.

Моду ряду даних зазвичай знаходять тоді, коли хочуть з'ясувати деякий типовий показник. Наприклад, коли вивчаються дані про моделі чоловічих сорочок, які продали в певний день в універмазі, то зручно використати такий показник, як мода, який характеризує модель, що користується найбільшим попитом (власне, цим і пояснюється назва «мода»).

Ще однією статистичною характеристикою ряду даних є його медіана.

Медіана — це так зване серединне значення впорядкованого ряду значень (позначають Me).

Медіана поділяє впорядкований ряд даних на дві рівні за кількістю елементів частини.

Якщо кількість чисел у ряді непарна, то медіана — це число, записане посередині.

Наприклад, у ряді (2) непарна кількість елементів ($n = 9$). Тоді його медіаною є число, яке стоїть посередині, тобто на п'ятому місці: $Me = 4$.

$$3,\ 3,\ 4,\ 4,\ \underset{\textbf{медіана}}{4},\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$$

Отже, про хлопців можна сказати, що одна половина з них прочитала не більше 4 книг, а друга половина — не менше 4 книг. (Відзначимо, що у випадку непарного n номер середнього члена ряду дорівнює $\frac{n+1}{2}$.)

Якщо кількість чисел у ряді парна, то медіана — це середнє арифметичне двох чисел, що стоять посередині.

Наприклад, у ряді (1) парна кількість елементів ($n = 10$). Тоді його медіаною є число, яке дорівнює середньому арифметичному чисел, які стоять посередині, тобто на п'ятому й шостому місцях: $Me = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$.

$$3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ \ 5,\ 5,\ 5,\ 8,\ 12$$

$4{,}5$ **— медіана**

Отже, про дівчат можна сказати, що одна половина з них прочитала менше 4,5 книг, а друга половина — більше 4,5 книг. (Відзначимо, що у випадку парного n номери середніх членів ряду дорівнюють $\frac{n}{2}$ і $\frac{n}{2}+1$.)

3. Середнє значення вибірки

Середнім значенням вибірки (позначають $\overline{X}$) **називають середнє арифметичне всіх чисел ряду даних вибірки.**

Якщо в ряді даних записані значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (серед яких можуть бути й однакові), то

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Якщо відомо, що в ряді даних різні значення $x_1, x_2, \ldots, x_k$ зустрічаються відповідно до частот $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (тоді $\sum M = n$), то, замінюючи однакові доданки в чисельнику на відповідні добутки, одержуємо, що середнє арифметичне можна обчислювати за формулою

$$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n}. \qquad (4)$$

Останню формулу зручно використовувати в тих випадках, коли у вибірці розподіл величини за частотами задано у вигляді таблиці. Нагадаємо, що розподіл за частотами M величин: X — число прочитаних за канікули книг дівчатами й Y — число прочитаних за канікули книг хлопцями, було задано такими таблицями:

X	3	4	5	8	12
M	3	2	3	1	1

$\sum M = n = 10$

Y	3	4	5	6	7
M	2	4	1	1	1

$\sum M = n = 9$

Тоді середні значення заданих вибірок дорівнюють:

$$\overline{X} = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 12 \cdot 1}{10} = \frac{52}{10} = 5{,}2,$$

$$\overline{Y} = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 1}{9} = \frac{40}{9} \approx 4{,}4.$$

Оскільки $\overline{X} > \overline{Y}$, то можна сказати, що за один і той самий проміжок часу дівчата в класі читають книг більше, ніж хлопці.

Зауважимо, що в посібниках із статистики моду, медіану й середнє значення вибірки об'єднують одним терміном — *міри центральної* *тенденції*, підкреслюючи тим самим можливість охарактеризувати ряд вибірки одним числом.

Не для кожного ряду даних має сенс формально знаходити центральні тенденції. Наприклад, якщо досліджується ряд

$$5,\ 5,\ 8,\ 110 \tag{5}$$

річних прибутків чотирьох людей (у тис. у. о.), то очевидно, що ні мода (5), ні медіана (6,5), ні середнє значення (32) не можуть виступати в ролі єдиної характеристики всіх значень ряду даних. Це пояснюється тим, що розмах ряду (105) є сумірний із найбільшим з його значень.

У даному випадку можна шукати центральні тенденції, наприклад, для частини ряду (5):

$$5,\ 5,\ 8,$$

умовно назвавши його вибіркою річного прибутку низькооплачуваної частини населення.

Якщо у вибірці середнє значення суттєво відрізняється від моди, то його недоречно вибирати як типову характеристику розглянутої сукупності даних (чим більше значення моди відрізняється від середнього значення, тим «більш несиметричним» є полігон частот сукупності).

Запитання для контролю

1. Поясніть, що називають полігоном частот ознаки X, яка розглядається. Наведіть приклади побудови полігону частот і полігону відносних частот.
2. На прикладі ряду даних 2, 2, 3, 5, 5, 5, 13 поясніть, що таке розмах, мода, медіана та середнє значення ряду й дайте відповідні означення.

Вправи

1°. На основі даних таблиці подайте у вигляді стовбчастої і кругової діаграм розподіл значень деякої ознаки X.

1)

X	1	2	3	4
W	0,1	0,3	0,4	0,2

2)

X	1	2	3	4	5
W	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

2. Побудуйте полігон частот і полігон відносних частот значень деякої ознаки X, розподіл якої подано в таблиці:

1)

X	1	3	5	7	9
M	3	0	5	7	5

2)

X	11	12	13	14	15	16
M	6	5	2	3	1	3

3°. На рис. 23.8 побудовано полігони, що ілюструють розподіл частоти продажу магазином протягом тижня комп'ютерів (синя лінія) і телевізорів (червона лінія). Укажіть два дні, які безпосередньо слідують один за другим, коли:

1) число проданих телевізорів виросло більше, ніж число проданих комп'ютерів;

2) число проданих телевізорів збільшилося, а число проданих комп'ютерів зменшилося;

3) число проданих комп'ютерів виросло, а число проданих телевізорів залишилося тим самим.

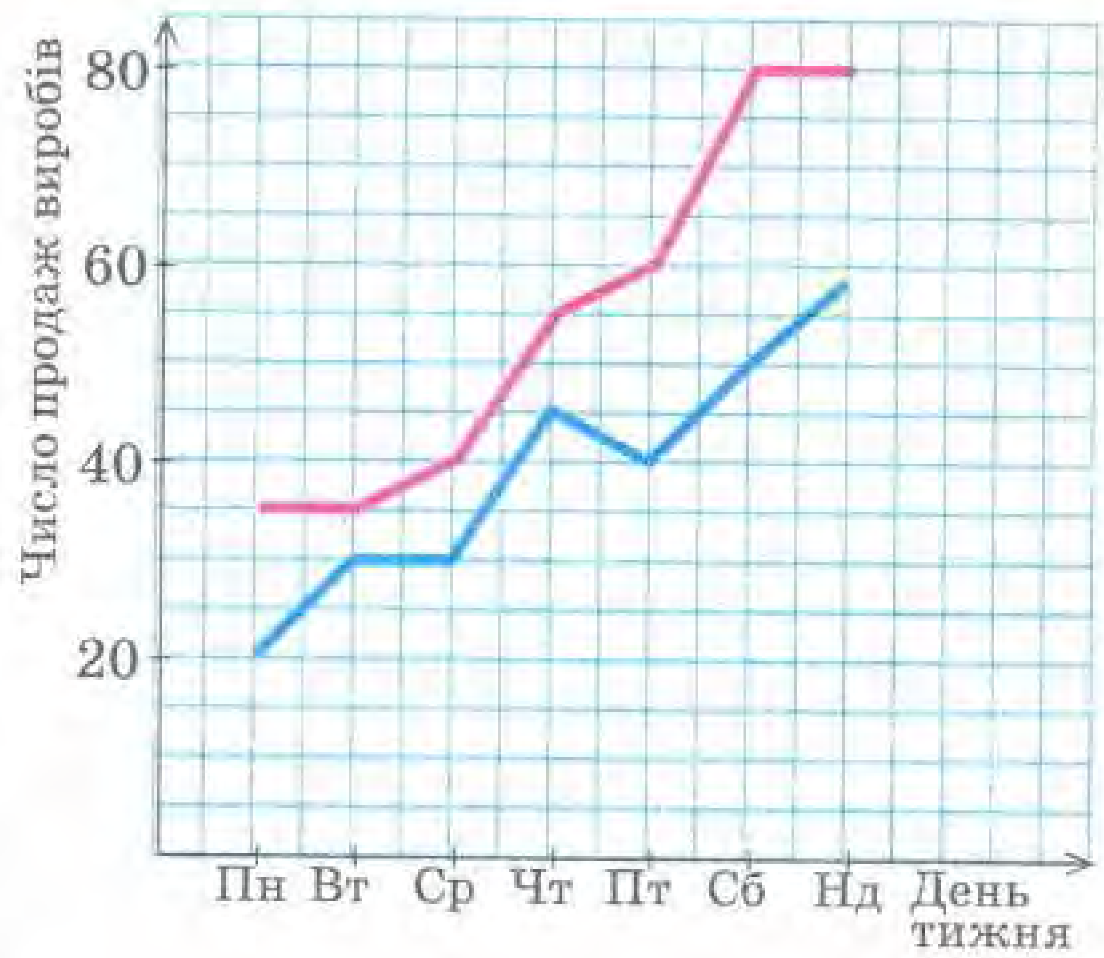


Рис. 23.8

4. Виміряли зріст 50 старшокласників і результати записали в таблицю:

149	150	150	151	151	152	152	153	154	154
155	155	155	156	156	157	157	157	158	158
159	159	159	159	161	161	161	162	162	162
162	162	165	166	166	166	167	167	169	170
171	171	173	173	173	175	176	178	180	182

Згрупувавши ці дані за класами 145–149, 150–154, 155–159, 160–164, 165–169, 170–174, 175–179, 180–184, подайте частотний розподіл зросту учнів за цими класами за допомогою:
1) таблиці; 2) полігону частот; 3) стовбчастої діаграми.

5. Знайдіть розмах, моду, медіану й середнє значення ряду даних деякої величини X:

1) 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5; 2) −3, −2, −2, −1, 0, 2, 2, 2, 3, 5.

Побудуйте полігон частот значень величини X. Укажіть на рисунку розмах, моду й медіану заданого ряду даних.

6. Знайдіть розмах, моду, медіану й середнє значення вибірки, заданої таблицею розподілу значень величини X за частотами:

1)

X	2	3	4	5
M	3	4	1	3

2)

X	−1	3	4	5	7
M	2	3	4	4	1

Побудуйте полігон частот значень величини X. Укажіть на рисунку розмах, моду й медіану заданої сукупності даних.

7. Дівчата 11 класу на уроці фізкультури в стрибках у висоту показали такі результати (у см):
90, 125, 125, 130, 130, 135, 135, 135, 140, 140, 140.
Знайдіть моду, медіану й середнє значення цієї сукупності даних. Яке з цих значень найкраще характеризує спортивну підготовку дівчат класу?

ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

Елементарні задачі, які пізніше були віднесені до стохастики, тобто до комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики, ставилися й розв'язувалися ще в часи Стародавніх Єгипту, Греції та Риму. Цей період так званої передісторії теорії ймовірностей закінчився в XVI ст. працями італійських математиків Д. Кардано (1501–1576) «Книга про гру в кості», Н. Тарталья (1499–1557) «Загальний трактат про число та міру», Г. Галілея (1564–1642) «Про випадання очок при грі в кості». У цих працях уже фігурує поняття ймовірності, використовується теорема про ймовірність добутку незалежних подій, висловлюються деякі міркування щодо так званого закону великих чисел. У XVII–XVIII ст. питаннями теорії ймовірностей цікавилися французькі математики П. Ферма (1601–1665) і Б. Паскаль (1623–1662), нідерландський математик Х. Гюйгенс (1629–1695), швейцарські математики Я. Бернуллі (1654–1705), Н. Бернуллі (1687–1759), Д. Бернуллі (1700–1782) та російський математик Л. Ейлер (1707–1783). У своїх працях вони вже використовували теореми додавання й множення ймовірностей, поняття залежних та незалежних подій, математичного сподівання.

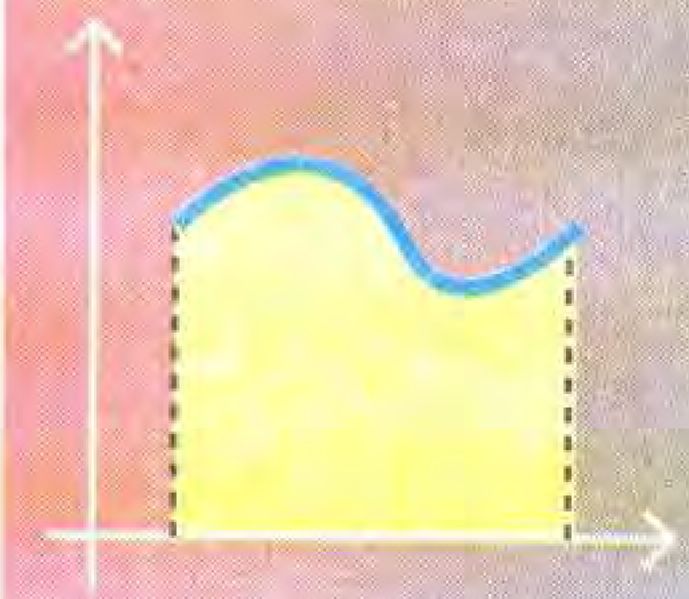
Велику роль у розповсюдженні ідей теорії ймовірностей та математичної статистики в Росії та Україні відіграли видатні російські математики українського походження В. Я. Буняковський (1804–1889) та М. В. Остроградський (1801–1862).

Подальший розвиток теорії ймовірностей потребував уточнення основних її положень. Велику роботу в цьому напрямку провів видатний російський математик П. Л. Чебишов (1821–1894). Його учень А. А. Марков (1856–1922) став видатним математиком саме завдяки своїм дослідженням у теорії ймовірностей.

Книга А. А. Маркова «Числення ймовірностей», перше видання якої відбулося в 1900 р., а четверте — у 1924 р., протягом багатьох років була найкращою серед тих, за якими навчалися російські математики. У цій книзі, зокрема, розкривається, у якому розумінні *статистична ймовірність* $P^*(A)$ *близька до ймовірності* $P(A)$ *при великих* n: *ймовірність значного відхилення* $P_n^*(A)$ *від* $P(A)$ *є близькою до нуля, проте це не означає, що значні відхилення неможливі при великих* n.

У XX ст. теорія ймовірностей поступово перетворюється на строгу аксіоматичну теорію. Це відбулося завдяки працям багатьох математиків. Але дійсно вирішальним етапом розвитку теорії ймовірностей стала праця А. М. Колмогорова (1903–1987) «Основні поняття теорії ймовірностей» (видана в 1937 р.), у якій він виклав свою аксіоматику теорії ймовірностей і після якої вона зайняла рівноправне місце серед інших математичних дисциплін.

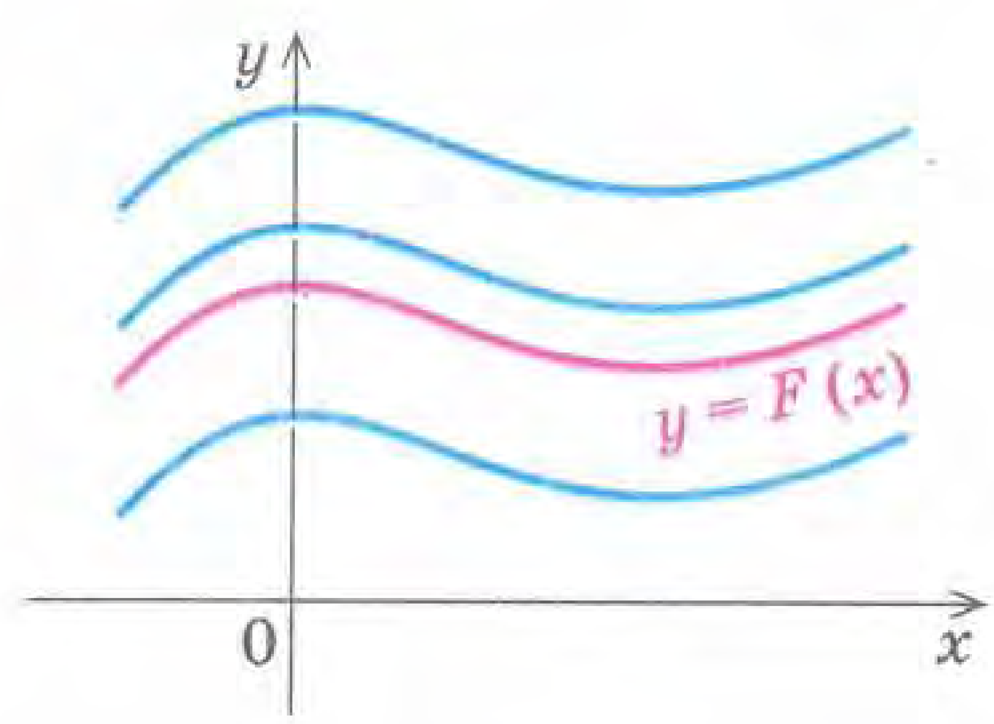
Великі досягнення в теорії ймовірностей та математичній статистиці мали також російські математики О. Я. Хінчин (1894–1959), Є. Є. Слуцький (1880–1948), Б. В. Гнєденко (1911–1995) і багато інших, українські математики Й. І. Гіхман (1918–1985), В. С. Михалевич (1930–1994), М. Й. Ядренко (1932–2004), Ю. М. Єрмольєв (1936 р. н.), І. М. Коваленко (1935 р. н.), В. С. Королюк (1925 р. н.), А. В. Скороход (1930–2011), А. Ф. Турбін (1940 р. н.) та інші.



Розділ 4
ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

§ 24 ПЕРВІСНА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Таблиця 39

1. Первісна	
Означення	Приклад
Функцію $F(x)$ називають *первісною для функції $f(x)$* на даному проміжку, якщо для будь-якого x із цього проміжку $F'(x) = f(x)$.	Для функції $f(x) = x^3$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ первісною є функція $F(x)=\frac{x^4}{4}$, оскільки $F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}\right)'=\frac{1}{4}\cdot 4x^3=x^3$.
2. Основна властивість первісної	
Властивість	Геометричний зміст
Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку, а C — довільна стала, то функція $F(x)+C$ також є первісною для функції $f(x)$, при цьому будь-яку первісну для функції $f(x)$ на даному проміжку можна записати у вигляді $F(x)+C$, де C — довільна стала. Приклад Оскільки функція $F(x)=\frac{x^4}{4}$ є первісною для функції $f(x) = x^3$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ (див. вище), то *загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x) = x^3$* можна записати так: $\frac{x^4}{4}+C$, де C — довільна стала.	*Графіки будь-яких первісних для даної функції одержують один з одного паралельним перенесенням уздовж осі Oy.* 

Продовження табл. 39

3. Невизначений інтеграл	
Означення	Приклад
Сукупність усіх первісних для даної функції $f(x)$ називають невизначеним інтегралом і позначають символом $\int f(x)\,dx$, тобто $$\int f(x)\,dx = F(x)+C,$$ де $F(x)$ — одна з первісних для функції $f(x)$, а C — довільна стала.	$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}+C,$$ оскільки для функції $f(x)=x^3$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ усі первісні можна записати так: $\frac{x^4}{4}+C$ (див. п. 2 табл. 39).
4. Правила знаходження первісних (правила інтегрування)	
1. Якщо F — первісна для f, а G — первісна для g, то $F+G$ — первісна для $f+g$. *Первісна для суми дорівнює сумі первісних для доданків.*	1. $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ *Інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів від доданків.*
2. Якщо F — первісна для f, а c — стала, то cF — первісна для функції cf.	2. $\int c\cdot f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$, де c — стала. *Сталий множник можна виносити за знак інтеграла.*
3. Якщо F — первісна для f, а k і b — сталі (причому $k\neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx+b)$.	3. $\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C.$

5. Таблиця первісних (невизначених інтегралів)

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x)+C$, де C — довільна стала	Запис за допомогою невизначеного інтеграла
0	C	$\int 0\cdot dx = C$
1	$x+C$	$\int dx = x+C$
x^{α} $(\alpha\neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ $(\alpha\neq -1)$

Закінчення табл. 39

$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int\sin x\,dx=-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int\cos x\,dx=\sin x+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx=e^x+C$
a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття первісної. Основна властивість первісних. У розділі 1 ми знаходили за заданою функцією її похідну й застосовували цю операцію диференціювання до розв'язування різноманітних задач. Однією з таких задач було знаходження швидкості й прискорення прямолінійного руху за відомим законом зміни координати $x(t)$ матеріальної точки:

$$v(t) = x'(t), \quad a(t) = v'(t) = x''(t).$$

Наприклад, якщо в початковий момент часу $t = 0$ швидкість тіла дорівнює нулю, тобто $v(0) = 0$, то при вільному падінні тіло на момент часу t пройде шлях

$$s(t)=\frac{gt^2}{2}.$$

Тоді швидкість і прискорення знаходять за допомогою диференціювання:

$$v(t)=s'(t)=\left(\frac{gt^2}{2}\right)'=\frac{g}{2}\cdot 2t=gt, \qquad a(t) = v'(t) = (gt)' = g.$$

Але важливо вміти не тільки знаходити похідну заданої функції, а й розв'язувати обернену задачу: знаходити функцію $f(x)$ за її заданою похідною $f'(x)$. Наприклад, у механіці часто доводиться визначати координату $x(t)$, знаючи закон зміни швидкості $v(t)$, а також визначати швидкість $v(t)$, знаючи закон зміни прискорення $a(t)$. Знаходження функції $f(x)$ за її заданою похідною $f'(x)$ називають операцією *інтегрування*.

Таким чином, операція інтегрування обернена до операції диференціювання. Операція інтегрування дозволяє за заданою похідною $f'(x)$ знайти (відновити) функцію $f(x)$ (латинське слово *integratio* означає «відновлення»).

Наведемо означення понять, пов'язаних з операцією інтегрування.

Функцію $F(x)$ називають первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку, якщо для будь-якого x із цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, для функції $f(x) = 3x^2$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ первісною є функція $F(x) = x^3$, оскільки $F'(x) = (x^3)' = 3x^2$.

Зазначимо, що функція $x^3 + 5$ має таку саму похідну $(x^3 + 5)' = 3x^2$. Отже, функція $x^3 + 5$ також є первісною для функції $3x^2$ на множині $\boldsymbol{R}$. Зрозуміло, що замість числа 5 можна підставити будь-яке інше число. Тому задача знаходження первісної має безліч розв'язків. Знайти всі ці розв'язки дозволяє *основна властивість первісної*.

Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку, а C — довільна стала, то функція $F(x) + C$ також є первісною для функції $f(x)$, при цьому будь-яка первісна для функції $f(x)$ на даному проміжку може бути записана у вигляді $F(x) + C$, де C — довільна стала.

Вираз $F(x) + C$ називають *загальним виглядом первісних* для функції $f(x)$.

● 1) За умовою функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку I. Отже, $F'(x) = f(x)$ для будь-якого x з цього проміжку I. Тоді

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x),$$

тобто $F(x) + C$ теж є первісною для функції $f(x)$.

2) Нехай функція $F_1(x)$ — інша первісна для функції $f(x)$ на тому самому проміжку I, тобто $F_1'(x) = f(x)$ для всіх $x \in I$. Тоді

$$(F_1(x) - F(x))' = F'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

За умовою сталості функції (с. 47), якщо похідна функції $F_1(x) - F(x)$ дорівнює нулю на проміжку I, то ця функція набуває деякого сталого значення C на цьому проміжку. Отже, для всіх $x \in I$ функція $F_1(x) - F(x) = C$. Звідси $F_1(x) = F(x) + C$. Таким чином, будь-яка первісна для функції $f(x)$ на даному проміжку може бути записана у вигляді $F(x) + C$, де C — довільна стала. ○

Наприклад, оскільки для функції $f(x) = 2x$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ однією з первісних є функція $F(x) = x^2$ (дійсно, $F'(x) = (x^2)' = 2x$), то загальний вигляд усіх первісних функції $f(x) = 2x$ можна записати так: $x^2 + C$, де C — довільна стала.

Зауваження. Для стислості формулювань при знаходженні первісної функції $f(x)$ проміжок, на якому задано функцію $f(x)$, найчастіше не зазначають. При цьому мають на увазі проміжки найбільшої довжини.

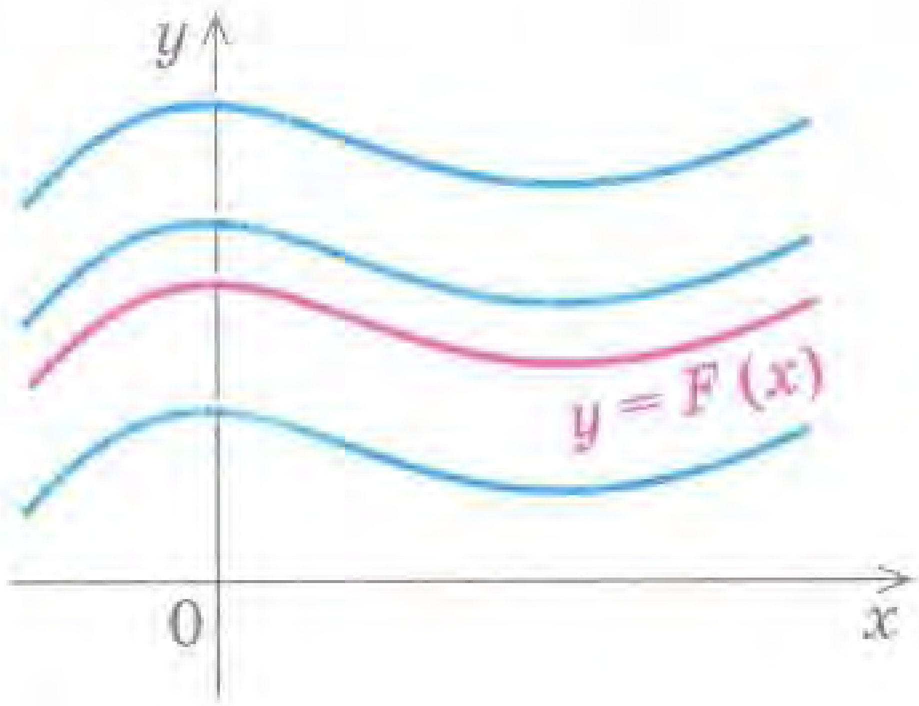


Рис. 24.1

Геометрично основна властивість первісної означає, що *графіки будь-яких первісних даної функції $f(x)$ одержують один з одного паралельним перенесенням уздовж осі Oy* (рис. 24.1). Дійсно, графік довільної первісної $F(x) + C$ можна одержати з графіка первісної $F(x)$ паралельним перенесенням уздовж осі Oy на C одиниць.

2. Невизначений інтеграл. Нехай функція $f(x)$ має на деякому проміжку первісну $F(x)$. Тоді за основною властивістю первісної сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на заданому проміжку задається формулою $F(x) + C$, де C — довільна стала.

Сукупність усіх первісних даної функції $f(x)$ називають *невизначеним інтегралом* і позначають символом $\int f(x)\,dx$, тобто

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

де $F(x)$ — одна з первісних для функції $f(x)$, а C — довільна стала.

У наведеній рівності знак $\int$ називають знаком інтеграла, функцію $f(x)$ — підінтегральною функцією, вираз $f(x)\,dx$ — підінтегральним виразом, змінну x — змінною інтегрування і доданок C — сталою інтегрування.

Наприклад, як зазначалося вище, загальний вигляд первісних для функції $f(x) = 2x$ записують так: $x^2 + C$, отже, $\int 2x\,dx = x^2 + C$.

3. Правила знаходження первісних (правила інтегрування). Ці правила подібні до відповідних правил диференціювання.

Правило 1. **Якщо F — первісна для f, а G — первісна для g, то $F + G$ — первісна для $f + g$.**

Первісна для суми дорівнює сумі первісних для доданків.

Дійсно, якщо F — первісна для f (у цьому короткому формулюванні мається на увазі, що функція $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$), то $F' = f$. Аналогічно, якщо G — первісна для g, то $G' = g$. Тоді за правилом обчислення похідної суми маємо

$$(F + G)' = F' + G' = f + g,$$

а це й означає, що $F + G$ — первісна для $f + g$. ○

За допомогою невизначеного інтеграла це правило можна записати так:

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

тобто *інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів від доданків.*

Правило 1 можна поширити на будь-яку кількість доданків (оскільки похідна від будь-якої кількості доданків дорівнює сумі похідних доданків).

Правило 2. **Якщо F — первісна для f, а c — стала, то cF — первісна для функції cf.**

● Дійсно, якщо F — первісна для f, то $F' = f$. Ураховуючи, що сталий множник можна виносити за знак похідної, маємо $(cF)' = cF' = cf$, а це й означає, що cF — первісна для cf. ○

За допомогою невизначеного інтеграла це правило можна записати так:

$$\int c\cdot f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx, \text{ де } c \text{ — стала,}$$

тобто *сталий множник можна виносити за знак інтеграла.*

Правило 3. **Якщо F — первісна для f, а k і b — сталі (причому $k \neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx+b)$.**

● Дійсно, якщо F — первісна для f, то $F' = f$. Ураховуючи правило обчислення похідної складеної функції, маємо

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = f(kx+b),$$

а це й означає, що $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx+b)$. ○

За допомогою невизначеного інтеграла це правило можна записати так:

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

4. Таблиця первісних (невизначених інтегралів). Для обчислення первісних (чи невизначених інтегралів), крім правил знаходження первісних, корисно пам'ятати табличні значення первісних для деяких функцій, які наведено в п. 5 табл. 39. Щоб обґрунтувати правильність заповнення цього пункту таблиці, достатньо перевірити, що похідна від указаної первісної (без сталого доданку C) дорівнює заданій функції. Це буде означати, що розглянута функція дійсно є первісною для заданої функції. Оскільки в запису всіх первісних у другій колонці присутній сталий доданок C, то за основною властивістю первісних можна зробити висновок, що це загальний вигляд усіх первісних заданої функції.

Наведемо обґрунтування формул, за якими знаходять первісні для функцій x^{α} та $\frac{1}{x}$, а для інших функцій пропонуємо провести аналогічну перевірку самостійно.

● Для всіх x з області визначення функції x^α при $\alpha \neq -1$ похідна $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{1}{\alpha+1}\cdot(\alpha+1)\,x^\alpha = x^\alpha$. Отже, функція $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ при $\alpha \neq -1$ є первісною для функції x^α. Тоді за основною властивістю первісних **загальний вигляд усіх первісних для функції x^α при $\alpha \neq -1$ буде**

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C.$$

За допомогою невизначеного інтеграла це твердження записують так:

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha \neq -1).$$ ○

● У функції $f(x)=\frac{1}{x}$ область визначення $x \neq 0$. Розглянемо функцію $F(x) = \ln|x|$ окремо при $x > 0$ і при $x < 0$.

При $x > 0$ $F(x) = \ln x$. Тоді $F'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

При $x < 0$ $F(x) = \ln(-x)$. Тоді $F'(x) = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-x)' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$.

Отже, на кожному з проміжків $(-\infty;\ 0)$ та $(0;\ +\infty)$ функція $F(x) = \ln|x|$ є первісною для функції $f(x)=\frac{1}{x}$. Тоді

загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x)=\frac{1}{x}$ буде

$$\ln|x| + C.$$

За допомогою невизначеного інтеграла це твердження записують так:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$ ○

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Перевірте, чи є функція $F(x)=2\sqrt{x}$ первісною для функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ $F'(x)=\left(2\sqrt{x}\right)' = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, це й означає, що $F(x)$ є первісною для функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. ◁	За означенням функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$.

Приклад 2 1) Знайдіть одну з первісних для функції $f(x) = x^4$ на $\boldsymbol{R}$.

2) Знайдіть усі первісні для функції $f(x) = x^4$.

3*) Знайдіть $\int x^4\,dx$.

Розв'язання	*Коментар*
▶ 1) Однією з первісних для функції $f(x) = x^4$ на множині $\boldsymbol{R}$ є функція $F(x)=\frac{x^5}{5}$, оскільки $$F'(x)=\left(\frac{x^5}{5}\right)'=\frac{1}{5}\cdot 5x^4=x^4.$$ 2) За основною властивістю первісних усі первісні для функції $f(x) = x^4$ можна записати у вигляді $\frac{x^5}{5}+C$, де C — довільна стала. 3*) $\int x^4\,dx=\frac{x^5}{5}+C$, де C — довільна стала. ◁	1) Первісну для функції $f(x) = x^4$ спробуємо знайти підбором. При цьому можна міркувати так: щоб після знаходження похідної одержати x^4, потрібно брати похідну від x^5. Але $(x^5)' = 5x^4$. Щоб похідна дорівнювала x^4, достатньо поставити перед функцією x^5 коефіцієнт $\frac{1}{5}$. Простіше використати формулу з п. 5 табл. 39: *однією з первісних для функції* x^α *є функція* $$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$ 2) *Якщо ми знаємо одну первісну* $F(x)$ *для функції* $f(x)$, *то* за основною властивістю первісних *будь-яку первісну для функції* $f(x)$ *можна записати у вигляді* $F(x) + C$, де C — довільна стала. 3) За означенням $$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$ тобто невизначений інтеграл $\int f(x)\,dx$ — це спеціальне позначення загального виду всіх первісних для даної функції $f(x)$ (який ми вже знайшли в п. 2 розв'язання).

Приклад 3 Для функції $f(x)=\sqrt{x}$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку M (9; 10).

Розв'язання	*Коментар*
▶ $D(f) = [0; +\infty)$. Тоді $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.	Спочатку запишемо загальний вигляд первісних для заданої

Загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x)$ такий:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$$

За умовою графік первісної проходить через точку M (9; 10), отже, при $x = 9$ одержуємо

$$\frac{2}{3}\cdot 9\sqrt{9}+C=10.$$

Звідси $C = -8$. Тоді шукана первісна:

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8. ◁$$

функції: $F(x) + C$. Потім використаємо те, що графік одержаної функції проходить через точку M (9; 10), отже, при $x = 9$ значення функції $F(x) + C$ дорівнює 10.

Щоб знайти первісну для функції $f(x)=\sqrt{x}$, урахуємо, що її область визначення $x \geqslant 0$. Тоді цю функцію можна записати так: $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ і використати формулу знаходження первісної для функції x^{α}, а саме: $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

Приклад 4* Знайдіть загальний вигляд первісних для функції

$$f(x)=\frac{1}{\sin^2 2x}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}-2\cos 3x.$$

Розв'язання

▶ Запишемо одну з первісних для кожного з доданків.

Для функції $\frac{1}{\sin^2 2x}$ первісною є функція $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x$.

Другий доданок запишемо так: $\frac{1}{\sqrt{2-x}}=(2-x)^{-\frac{1}{2}}$. Тоді первісною цієї функції буде функція:

$$\frac{1}{-1}\cdot\frac{(2-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=-2(2-x)^{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2-x}.$$

Первісною для функції $2\cos 3x$ є функція $2\cdot\frac{1}{3}\sin 3x=\frac{2}{3}\sin 3x$. Тоді загальний вигляд первісних для заданої функції є:

$$-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x-2\sqrt{2-x}-\frac{2}{3}\sin 3x+C. ◁$$

Коментар

Використаємо правила знаходження первісних. Оскільки задана функція є алгебраїчною сумою трьох доданків, то її первісна дорівнює алгебраїчній сумі первісних для доданків (правило 1). Потім ураховуємо, що всі функції-доданки є складеними функціями від аргументів виду $kx + b$. Отже, за правилом 3 ми повинні перед кожною функцією-первісною (від аргументу $kx + b$), яку ми отримаємо за таблицею первісних, поставити множник $\frac{1}{k}$.

Для кожного з доданків зручно спочатку записати одну з первісних (без сталого доданка C), а потім — загальний вигляд первісних для заданої функції (додати до одержаної функції сталий доданок C).

Для третього доданка постійний множник 2 можна поставити перед відповідною первісною (правило 2).

Ураховуємо (див. табл. 39), що первісною для першого доданка $\frac{1}{\sin^2 2x}$ є $(-\text{ctg } x)$. Для другого доданка, записаного у вигляді x^α, визначаємо первісну за формулою $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. Щоб знайти первісну для третього доданка, ураховуємо, що первісною для $\cos x$ є $\sin x$ (звичайно, перетворення другого доданка виконуються на області визначення цієї функції, тобто при $2 - x > 0$).

Запитання для контролю

1. Поясніть, у якому випадку функцію $F(x)$ називають первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку. Наведіть приклади.
2. Сформулюйте основну властивість первісних і проілюструйте її на прикладах.
3*. Сформулюйте означення невизначеного інтеграла. Наведіть приклади його обчислення.
4. Сформулюйте правила знаходження первісних. Поясніть їх на прикладах.
5*. Доведіть правила знаходження первісних.
6*. Запишіть і сформулюйте правила знаходження первісних за допомогою невизначених інтегралів.
7*. Запишіть і доведіть загальний вигляд первісних для функцій:

$$x^\alpha\ (\alpha \neq -1),\ \frac{1}{x},\ \sin x,\ \cos x,\ \frac{1}{\cos^2 x},\ \frac{1}{\sin^2 x},\ e^x,\ a^x\ (a > 0,\ a \neq 1).$$

Запишіть відповідні формули за допомогою невизначеного інтеграла.

Вправи

Доведіть, що функція $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на зазначеному проміжку **(1–2)**.

1°. 1) $F(x) = x^5$, $f(x) = 5x^4$, $x \in (-\infty; \infty)$; 2) $F(x) = x^{-3}$, $f(x) = -3x^{-4}$, $x \in (0; \infty)$;

3) $F(x) = \frac{1}{7}x^7$, $f(x) = x^6$, $x \in (-\infty; \infty)$; 4) $F(x) = -\frac{1}{6}x^{-6}$, $f(x) = x^{-7}$, $x \in (0; \infty)$.

2. 1) $F(x) = \sin^2 x$, $f(x) = \sin 2x$, $x \in \boldsymbol{R}$;

2) $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$, $f(x) = -\sin 2x$, $x \in \boldsymbol{R}$;

3) $F(x) = \sin 3x$, $f(x) = 3\cos 3x$, $x \in \boldsymbol{R}$;

4) $F(x)=3+\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $f(x)=\dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, $x\in(-\pi;\ \pi)$.

3. Перевірте, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$. Знайдіть загальний вигляд первісних для f, якщо:
   1) $F(x) = \sin x - x\cos x$, $f(x) = x\sin x$;
   2) $F(x)=\sqrt{x^2+1}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;
   3) $F(x) = \cos x + x\sin x$, $f(x) = x\cos x$;
   4) $F(x)=x-\dfrac{1}{x}$, $f(x)=\dfrac{1+x^2}{x^2}$.

Визначте, чи є функція $F(x)$ первісною для функції $f(x)$ на зазначеному проміжку **(4, 5)**.

4°. 1) $F(x) = 3 - \sin x$, $f(x) = \cos x$, $x\in(-\infty;\ \infty)$;
2) $F(x) = 5 - x^4$, $f(x) = -4x^3$, $x\in(-\infty;\ \infty)$;
3) $F(x) = \cos x - 4$, $f(x) = -\sin x$, $x\in(-\infty;\ \infty)$;
4) $F(x) = x^{-2} + 2$, $f(x)=\dfrac{1}{2x^3}$, $x\in(0;\ \infty)$.

5. 1) $F(x)=2x+\cos\frac{x}{2}$, $f(x)=2-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$, $x\in \boldsymbol{R}$;
2) $F(x)=\sqrt{4-x^2}$, $f(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $x\in(-2;\ 2)$;
3) $F(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $f(x)=14-\dfrac{1}{x^2}$, $x\in(0;\ \infty)$;
4) $F(x)=4x\sqrt{x}$, $f(x)=6\sqrt{x}$, $x\in(0;\ \infty)$.

Знайдіть загальний вигляд первісних для функції **(6–8)**.

6°. 1) $f(x) = 2 - x^4$; 2) $f(x) = x + \cos x$; 3) $f(x) = 4x$; 4) $f(x) = -8$;
5) $f(x) = x^6$; 6) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}-2$; 7) $f(x)=1-\dfrac{1}{x^4}$; 8) $f(x) = x^3$.

7*. 1) $f(x)=2-x^3+\dfrac{1}{x^3}$; 2) $f(x)=x-\dfrac{2}{x^5}+\cos x$; 3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\sin x$;
4) $f(x) = 5x^2 - 1$; 5) $f(x) = (2x - 8)^5$; 6) $f(x) = 3\sin 2x$;
7) $f(x) = (4 - 5x)^7$; 8) $f(x)=-\dfrac{1}{3}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; 9) $f(x)=\dfrac{3}{(4-15x)^4}$;
10) $f(x)=\dfrac{2}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)}$; 11) $f(x)=\dfrac{4}{(3x-1)^2}$; 12) $f(x)=-\dfrac{2}{x^5}+\dfrac{1}{\cos^2(3x-1)}$.

8*. 1) $f(x)=1-\cos 3x+2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 4x}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}-3x^2$;

3) $f(x)=\dfrac{2}{\cos^2(3x+1)}-3\sin(4-x)+2x;$

4) $f(x)=\dfrac{1}{(3-2x)^3}+\dfrac{3}{\sqrt{5x-2}}-2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right).$

9. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну $F(x)$, що набуває заданого значення в зазначеній точці:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2},\ F\left(\dfrac{1}{2}\right)=-12;$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x},\ F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0;$

3) $f(x)=x^3,\ F(-1)=2;$ 4) $f(x)=\sin x,\ F(-\pi)=-1.$

Для функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку M **(10–12)**.

10. 1) $f(x)=2x+1,\ M(0;\ 0);$ 2) $f(x)=3x^2-2x,\ M(1;\ 4);$
3) $f(x)=x+2,\ M(1;\ 3);$ 4) $f(x)=-x^2+3x,\ M(2;\ -1).$

11°. 1) $f(x)=2\cos x,\ M\left(-\dfrac{\pi}{2};\ 1\right);$ 2) $f(x)=1-x^2,\ M(-3;\ 9);$

3) $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right),\ M\left(\dfrac{2\pi}{3};\ -1\right);$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{x^4},\ M\left(\dfrac{1}{2};\ 3\right).$

12. 1) $f(x)=4x+\dfrac{1}{x^2},\ M(-1;\ 4);$ 2) $f(x)=x^3+2,\ M(2;\ 15);$

3) $f(x)=1-2x,\ M(3;\ 2);$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-10x^4+3,\ M(1;\ 5).$

13*. Швидкість матеріальної точки, що рухається прямолінійно, задана формулою $v(t)=t^2+2t-1$. Запишіть формулу залежності її координати x від часу t, якщо відомо, що в початковий момент часу $(t=0)$ точка знаходилася в початку координат.

14*. Швидкість матеріальної точки, що рухається прямолінійно, задана формулою $v(t)=2\cos\dfrac{t}{2}$. Запишіть формулу залежності координати точки від часу, якщо відомо, що в момент $t=\dfrac{\pi}{3}$ с точка знаходилася на відстані 4 м від початку координат.

15*. Матеріальна точка рухається прямолінійно з прискоренням $a(t)=12t^2+4$. Знайдіть закон руху точки, якщо в момент часу $t=1$ с її швидкість дорівнює 10 м/с, а координата — 12 м (одиниця виміру a дорівнює 1 м/с^2).

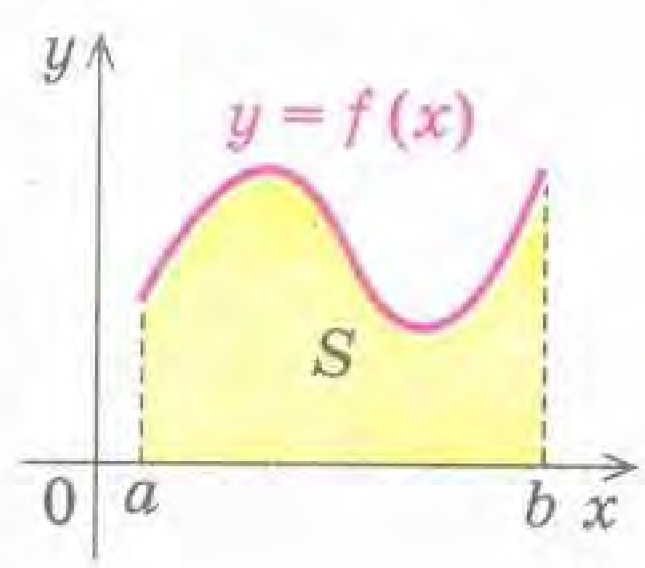
16*. Матеріальна точка масою m рухається по осі Ox під дією сили, напрямленої вздовж цієї осі. У момент часу t сила дорівнює $F(t)$. Знайдіть формулу залежності $x(t)$, якщо відомо, що при $t=t_0$ швидкість точки дорівнює v_0, а координата — x_0 ($F(t)$ вимірюють у ньютонах, t — у секундах, v — у метрах за секунду, m — у кілограмах):

1) $F(t) = 6 - 9t$, $t_0 = 1$, $v_0 = 4$, $x_0 = -5$, $m = 3$;
2) $F(t) = 14 \sin t$, $t_0 = \pi$, $v_0 = 2$, $x_0 = 3$, $m = 7$;
3) $F(t) = 25 \cos t$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $v_0 = 2$, $x_0 = 4$, $m = 5$;
4) $F(t) = 8t + 8$, $t_0 = 2$, $v_0 = 9$, $x_0 = 7$, $m = 4$.

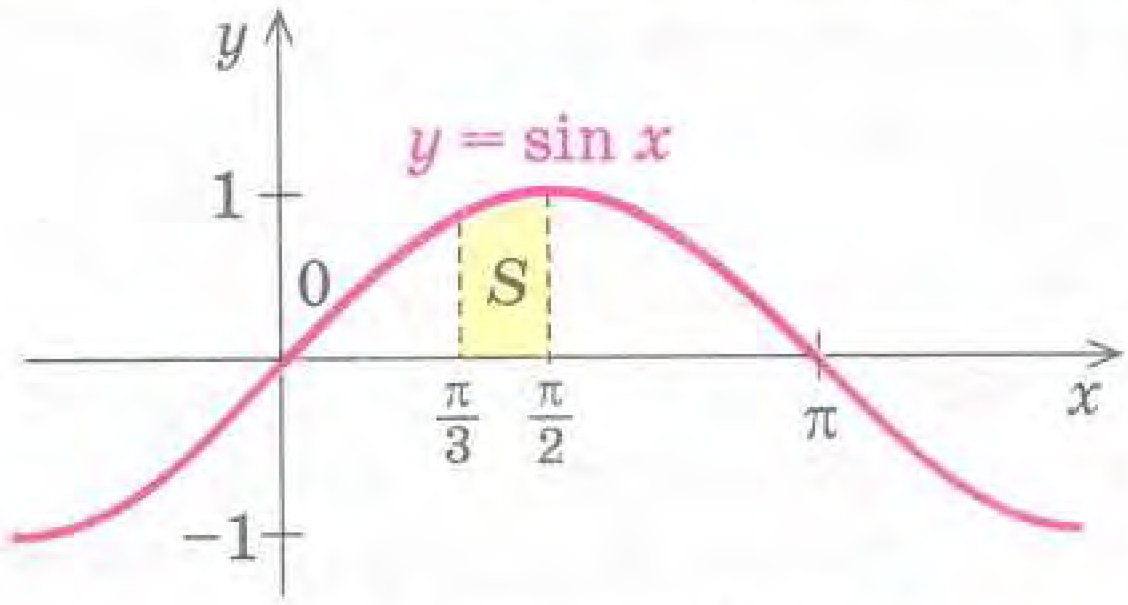
§ 25 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

25.1. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ І ОЗНАЧЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Таблиця 40

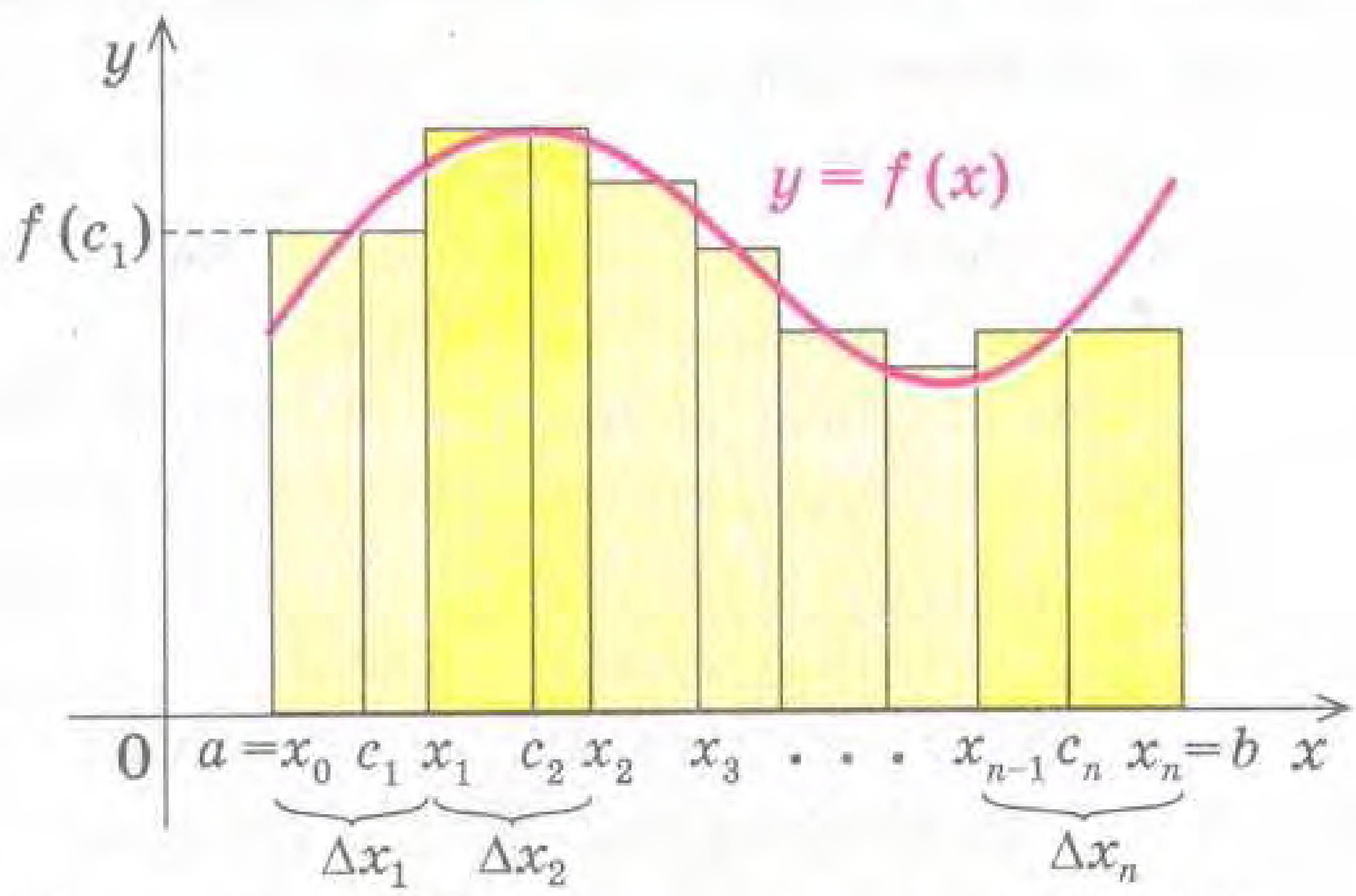
<table>
<tr><td colspan="2">1. Обчислення визначеного інтеграла (формула Ньютона—Лейбніца)</td></tr>
<tr><td>Формула</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$ і $F(x)$ — її довільна первісна на цьому відрізку ($F'(x) = f(x)$), то
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$</td><td>Оскільки для функції $f(x) = x^2$ однією з первісних є $F(x) = \frac{x^3}{3}$, то
$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Криволінійна трапеція</td></tr>
<tr><td>Означення</td><td>Ілюстрація</td></tr>
<tr><td>Нехай на відрізку $[a; b]$ осі Ox задано неперервну функцію $f(x)$, яка набуває на ньому тільки невід'ємних значень.
Фігуру, обмежену графіком функції $y = f(x)$, відрізком $[a; b]$ осі Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, називають *криволінійною трапецією*.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Площа криволінійної трапеції</td></tr>
<tr><td>Формула</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$</td><td>Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$.</td></tr>
</table>

Продовження табл. 40

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">


Зображуючи ці лінії, бачимо, що задана фігура — криволінійна трапеція.

$$S=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$
</td></tr>
<tr><td colspan="4">4. Властивості визначених інтегралів</td></tr>
<tr><td>$\int_a^a f(x)\,dx=0$</td><td>$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$</td><td colspan="2">$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$</td><td colspan="2">Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;\,b]$ і $c\in[a;\,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$</td></tr>
<tr><td colspan="4">5. Означення визначеного інтеграла через інтегральні суми</td></tr>
<tr><td colspan="4">


Нехай функція $f(x)$ — неперервна на відрізку $[a;\,b]$.

Виконаємо такі операції.

1. Розіб'ємо відрізок $[a;\,b]$ на n відрізків точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (вважаємо, що $a=x_0$, $b=x_n$).
</td></tr>
</table>

Закінчення табл. 40

2. Позначимо довжину першого відрізка через Δx_1, другого — через Δx_2 і т. д. (тобто $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, ..., $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$). 3. На кожному з одержаних відрізків виберемо довільну точку c_i ($c_i \in [x_{i-1}; x_i]$, де $i = 1, 2, ..., n$). 4. Складемо **суму $S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... + f(c_n)\Delta x_n$.** Цю суму **називають *інтегральною сумою функції f (x) на відрізку [a; b]*. Якщо $n \to \infty$ і довжини відрізків розбиття прямують до нуля, то інтегральна сума S_n прямує до деякого числа, яке називають визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначають $\int_a^b f(x)\,dx$.**

Пояснення й обґрунтування

1. Геометричний зміст і означення визначеного інтеграла. Як відмічалося в § 24, інтегрування — це дія, обернена до диференціювання. Вона дозволяє за заданою похідною функції знайти (відновити) цю функцію. Покажемо, що ця операція тісно пов'язана із задачею обчислення площі фігури.

Наприклад, у механіці часто доводиться визначати координату $x(t)$ матеріальної точки при прямолінійному русі, знаючи закон зміни її швидкості $v(t)$ (нагадаємо, що $v(t) = x'(t)$).

Розглянемо спочатку випадок, коли точка рухається з постійною швидкістю $v = v_0$. Графіком швидкості в системі координат $(t; v)$ є пряма $v = v_0$, паралельна осі часу t (рис. 25.1). Якщо вважати, що в початковий момент часу $t = 0$ точка перебувала в початку координат, то її шлях s, пройдений за час t, обчислюють за формулою $s = v_0 t$. Величина $v_0 t$ дорівнює площі прямокутника, обмеженого графіком швидкості, віссю абсцис і двома вертикальними прямими, тобто шлях точки можна обчислити як площу під графіком швидкості.

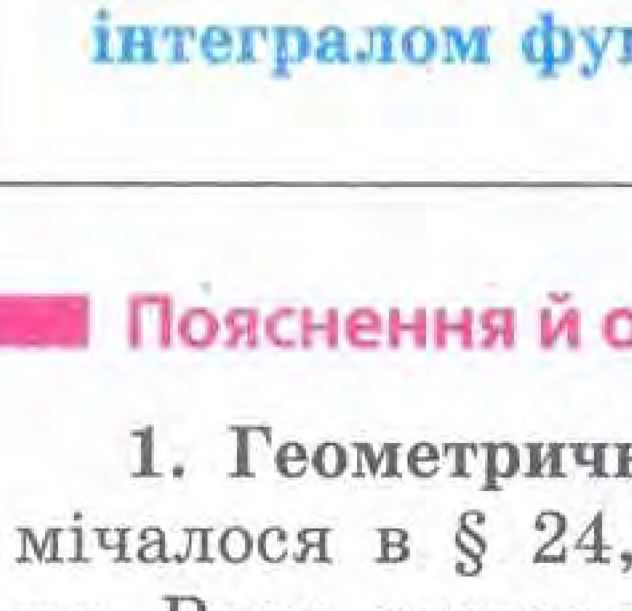


Рис. 25.1

Розглянемо випадок нерівномірного руху. Тепер швидкість можна вважати постійною тільки на маленькому відрізку часу Δt. Якщо швидкість v змінюється за законом $v = v(t)$, то шлях, пройдений за відрізок часу $[t; t + \Delta t]$, наближено виражається добутком $v(t)\,\Delta t$. На графіку цей добуток дорівнює площі прямокутника зі сторонами Δt і $v(t)$ (рис. 25.2). Точне значення шляху за відрізок часу $[t; t + \Delta t]$ дорівнює площі *криволінійної трапеції*, виділеної на цьому рисунку. Тоді весь шлях, пройдений матеріальною точкою за відрізок часу $[0; t]$, можна обчислити додаванням площ таких криволінійних трапецій, тобто шлях дорівнюватиме площі заштрихованої фігури під графіком швидкості (рис. 25.3).

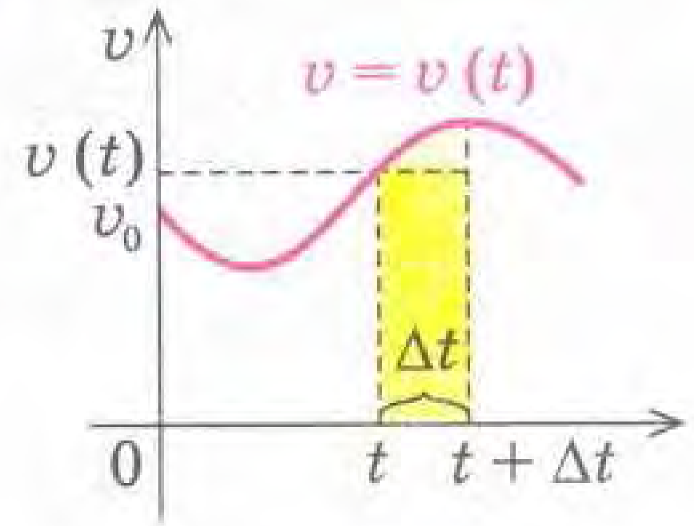


Рис. 25.2

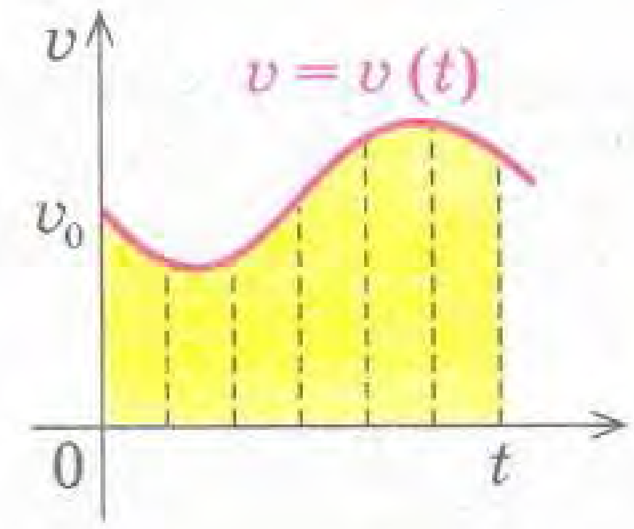


Рис. 25.3

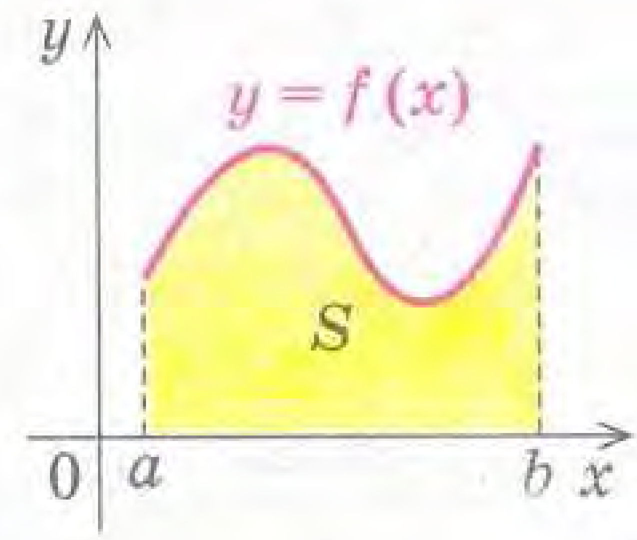


Рис. 25.4

Наведемо відповідні означення й обґрунтування, які дозволять зробити ці міркування більш строгими.

Нехай на відрізку $[a;\ b]$ осі Ox задано неперервну функцію $f(x)$, яка набуває на цьому відрізку тільки невід'ємних значень. Фігуру, обмежену графіком функції $y = f(x)$, відрізком $[a;\ b]$ осі Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, називають *криволінійною трапецією* (рис. 25.4).

Відрізок $[a;\ b]$ називають *основою криволінійної трапеції*.

З'ясуємо, як можна обчислити площу криволінійної трапеції за допомогою первісної функції $f(x)$.

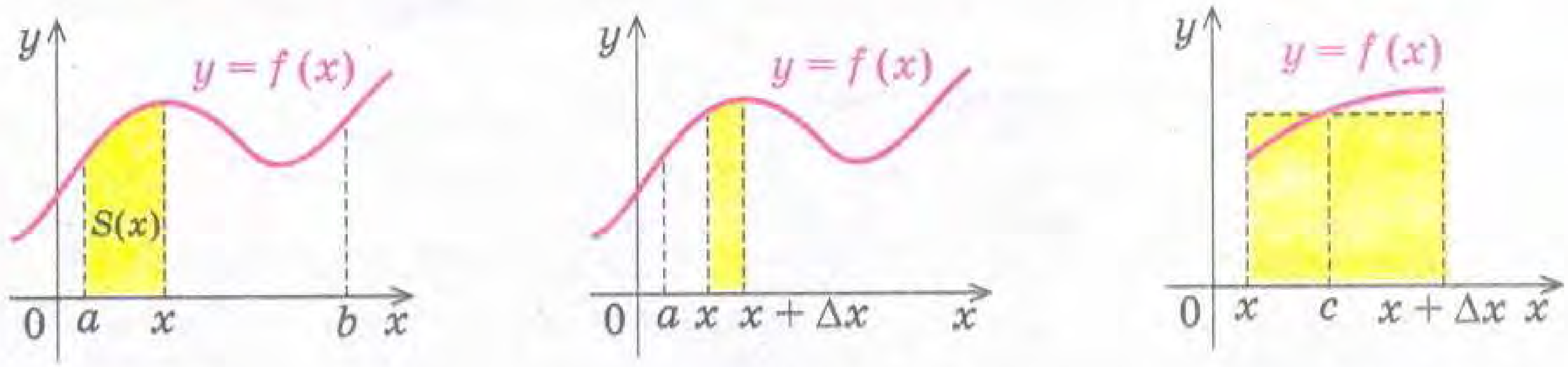
Позначимо через $S(x)$ площу криволінійної трапеції з основою $[a;\ x]$ (рис. 25.5, *а*), де x — будь-яка точка відрізка $[a;\ b]$. При $x = a$ відрізок $[a;\ x]$ вироджується в точку, і тому $S(a) = 0$, при $x = b$ маємо $S(b) = S$, де S — площа криволінійної трапеції з основою $[a;\ b]$ (див. рис. 25.4).

Покажемо, що $S(x)$ *є первісною для функції* $f(x)$, тобто що $S'(x) = f(x)$.

За означенням похідної потрібно довести, що $\dfrac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$.

Для спрощення міркувань розглянемо випадок $\Delta x > 0$ (випадок $\Delta x < 0$ розглядається аналогічно).

Оскільки $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$, то геометрично ΔS — площа фігури, виділеної на рис. 25.5, *б*.



а *б* *в*

Рис. 25.5

Розглянемо тепер прямокутник з такою самою площею ΔS, однією зі сторін якого є відрізок $[x;\ x + \Delta x]$ (рис. 25.5, *в*). Оскільки функція $f(x)$ неперервна, то верхня сторона цього прямокутника перетинає графік функції в деякій точці з абсцисою $c \in [x;\ x + \Delta x]$ (інакше розглянутий прямокутник або містить криволінійну трапецію, виділену на рис. 25.5, *в*, або міститься в ній, і відповідно його площа буде більшою або меншою від площі ΔS). Висота прямокутника дорівнює $f\ (c)$. За формулою площі прямокутника маємо $\Delta S = f\ (c)\ \Delta x$. Тоді $\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{f\ (c)\ \Delta x}{\Delta x} = f\ (c)$. (Ця формула буде правильною і при $\Delta x < 0$.)

Оскільки точка c лежить між x і $x + \Delta x$, то c прямує до x, якщо $\Delta x \to 0$. Ураховуючи неперервність функції $f\ (x)$, одержуємо також, що $f\ (c) \to f\ (x)$ при $\Delta x \to 0$.

Отже, $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f\ (x)$ при $\Delta x \to 0$. Це означає, що $S'\ (x) = f\ (x)$, тобто $S\ (x)$ є первісною для функції $f\ (x)$. ○

Оскільки $S\ (x)$ є первісною для функції $f\ (x)$, то за основною властивістю первісних будь-яка інша первісна $F\ (x)$ для функції $f\ (x)$ для всіх $x \in [a;\ b]$ відрізняється від $S\ (x)$ на постійну C, тобто

$$F\ (x) = S\ (x) + C. \qquad (1)$$

Щоб знайти C, підставимо $x = a$. Одержуємо $F\ (a) = S\ (a) + C$. Оскільки $S\ (a) = 0$, то $C = F\ (a)$, і рівність (1) можна записати так:

$$S\ (x) = F\ (x) - F\ (a). \qquad (2)$$

Ураховуючи, що площа криволінійної трапеції дорівнює $S\ (b)$, підставляємо в формулу (2) $x = b$ і одержуємо $S\ = S\ (b) = F\ (b) - F\ (a)$. Отже, **площу криволінійної трапеції (рис. 25.4) можна обчислити за формулою**

$$\boldsymbol{S\ = F\ (b) - F\ (a),} \qquad (3)$$

де $F\ (x)$ — довільна первісна для функції $f\ (x)$.

Таким чином, обчислення площі криволінійної трапеції зводиться до знаходження первісної $F\ (x)$ для функції $f\ (x)$, тобто до інтегрування функції $f\ (x)$.

Різницю $F\ (b) - F\ (a)$ називають визначеним інтегралом функції $f\ (x)$ на відрізку $[a;\ b]$ і позначають так: $\int_a^b f\ (x)\ dx$.

Запис $\int_a^b f\ (x)\ dx$ читають: «інтеграл від a до b еф від ікс де ікс». Числа a і b називають *межами інтегрування*: a — нижньою межею, b — верхньою. Отже, за наведеним означенням

$$\int_a^b f\ (x)\ dx = F\ (b) - F\ (a). \qquad (4)$$

Формулу (4) називають **формулою Ньютона–Лейбніца.**

Виконуючи обчислення визначеного інтеграла, різницю $F(b) - F(a)$ зручно позначати так: $F(x)\Big|_a^b$, тобто $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Користуючись цим позначенням, формулу Ньютона–Лейбніца можна записати у такому вигляді:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Наприклад, оскільки для функції $f(x) = e^x$ однією з первісних є $F(x) = e^x$, то

$$\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

У тому випадку, коли для функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, функцію $f(x)$ називають *інтегрованою на відрізку* $[a; b]$.

Із формул (3) і (4) випливає, що *площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної і невід'ємної на відрізку* $[a; b]$ *функції* $y = f(x)$, *відрізком* $[a; b]$ *осі* Ox *і прямими* $x = a$ *і* $x = b$ (рис. 25.4), *можна обчислювати за формулою*

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Наприклад, площу криволінійної трапеції, обмеженою графіком функції $y = \cos x$, відрізком $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ осі Ox і прямими $x = 0$ і $x = \frac{\pi}{6}$ (рис. 25.6), можна обчислити за формулою

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

(При обчисленні визначеного інтеграла враховано, що для функції $f(x) = \cos x$ однією з первісних є функція $F(x) = \sin x$.)

Зауваження. У задачах з курсу алгебри і початків аналізу на обчислення площ як відповідь найчастіше наводять числове значення площі. Оскільки на координатній площині, де зображено фігуру, завжди вказують одиницю виміру по осях, то ми маємо й одиницю виміру площі — квадрат зі стороною 1.

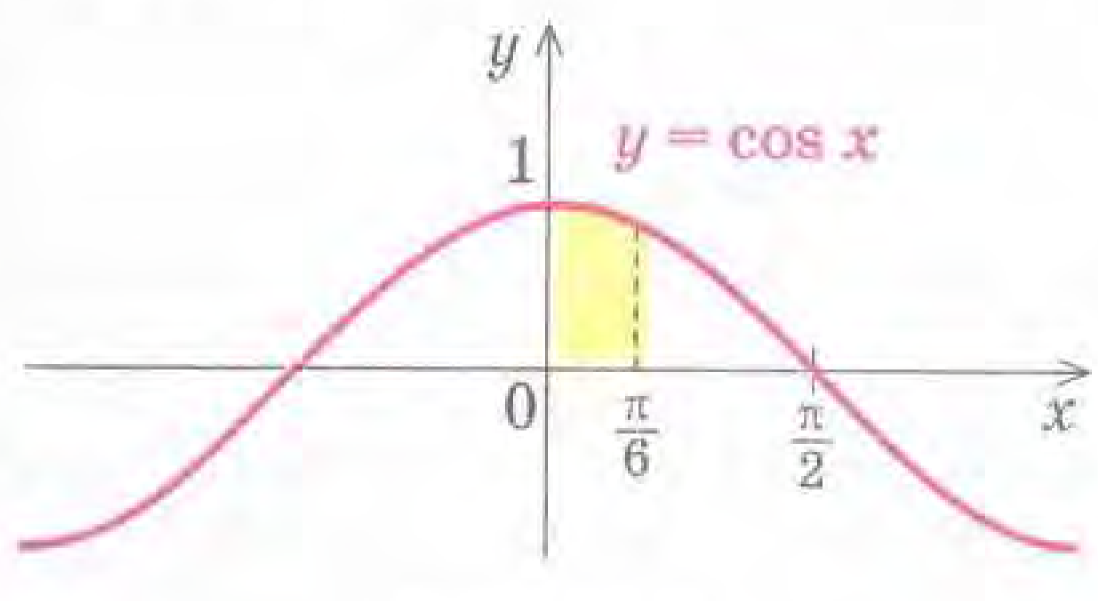


Рис. 25.6

Інколи, щоб підкреслити, що одержане число виражає саме площу, відповідь до останнього прикладу записують так: $S=\frac{1}{2}$ (кв. од.), тобто квадратних одиниць. Зазначимо, що таким чином записують тільки числові відповіді. Якщо в результаті обчислень площі ми одержали, наприклад, $S = 2a^2$, то ніяких позначень про квадратні одиниці не записують, оскільки відрізок a був виміряний у якихось лінійних одиницях, і тоді вираз a^2 містить інформацію про квадратні одиниці, у яких вимірюють площу в цьому випадку.

2. Властивості визначених інтегралів. Формулюючи означення визначеного інтеграла, ми вважали, що $a < b$. Зручно розширити поняття визначеного інтеграла і для випадку $a > b$ прийняти за означенням, що

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{5}$$

Для випадку $a = b$ також за означенням будемо вважати, що

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{6}$$

Формальне застосування формули Ньютона–Лейбніца до обчислення інтегралів у формулах (5) і (6) дає такий самий результат. Дійсно, якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0.$$

Також

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

За допомогою формули Ньютона–Лейбніца легко обґрунтувати й інші властивості визначених інтегралів, наведені в п. 4 табл. 40.

● Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то для функції $kf(x)$ первісною буде функція $kF(x)$. Тоді

$$\int_a^b kf(x)\,dx = kF(x)\Big|_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Отже,

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx. \ \bigcirc \tag{7}$$

● Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, а $G(x)$ — первісною для функції $g(x)$, то для функції $f(x) + g(x)$ первісною буде функція $F(x) + G(x)$. Тоді

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = (F(x)+G(x))\Big|_a^b = (F(b)+G(b))-(F(a)+G(a)) =$$

$$=(F(b)-F(a))+(G(b)-G(a)) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Отже,

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \quad \bigcirc \qquad (8)$$

Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ і $c \in [a; b]$, то

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^c + F(x)\Big|_c^b = F(c)-F(a)+F(b)-F(c) =$$

$$= F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Отже, якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і $c \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad \bigcirc$$

3. Означення визначеного інтеграла через інтегральні суми. Історично інтеграл виник у зв'язку з необхідністю обчислення площ фігур, обмежених кривими, зокрема площі криволінійної трапеції.

Розглянемо криволінійну трапецію, зображену на рис. 25.7 (функція $f(x)$ — неперервна на відрізку $[a; b]$). Основу трапеції — відрізок $[a; b]$ — розбито на n відрізків (не обов'язково рівних) точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (для зручності будемо вважати, що $a = x_0$, $b = x_n$). Через ці точки проведено вертикальні прямі. На першому відрізку обрано довільну точку c_1, і на ньому як на основі побудовано прямокутник з висотою $f(c_1)$. Аналогічно на другому відрізку обрано довільну точку c_2, і на ньому як на основі побудовано прямокутник з висотою $f(c_2)$ і так далі.

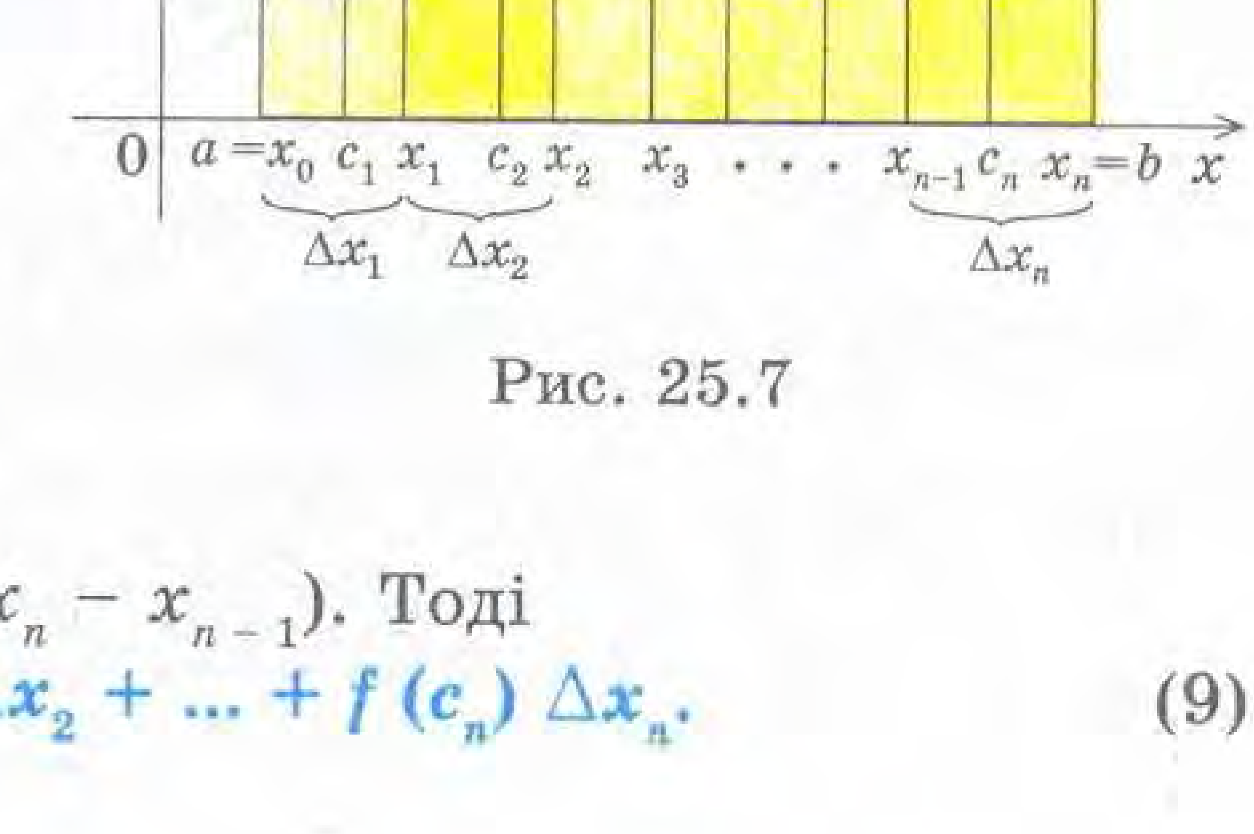


Рис. 25.7

Площа S заданої криволінійної трапеції наближено дорівнює сумі площ побудованих прямокутників. Позначимо цю суму через S_n, довжину першого відрізка — через Δx_1, другого — через Δx_2 і т. д. (тобто $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, ..., $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$). Тоді

$$S_n = f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\,\Delta x_n. \qquad (9)$$

Отже, площу S криволінійної трапеції можна наближено обчислювати за формулою (9), тобто $S \approx S_n$.

Суму (9) називають *інтегральною сумою функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a; b]$. При цьому вважають, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і може набувати будь-яких значень: додатних, від'ємних і рівних нулю (а не тільки невід'ємних, як для випадку криволінійної трапеції). Якщо $n \to \infty$ і довжини відрізків розбиття прямують до нуля, то інтегральна сума S_n прямує до деякого числа, яке і називають *визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначають $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Можна довести, що при цьому також виконується формула Ньютона–Лейбніца і всі розглянуті властивості визначеного інтеграла.

Зауваження. Змінюючи спосіб розбиття відрізка $[a; b]$ на n частин (тобто фіксуючи інші точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$) і вибираючи на кожному з одержаних відрізків інші точки c_i (де $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$), ми одержимо для функції $f(x)$ інші інтегральні суми. У курсі математичного аналізу доводиться, що для будь-якої неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$ незалежно від способу розбиття цього відрізка і вибору точок c_i, якщо $n \to \infty$ і довжини відрізків розбиття прямують до нуля, то інтегральні суми S_n прямують до одного й того самого числа.

Означення через інтегральні суми дозволяє наближено обчислювати визначені інтеграли за формулою (9). Але такий спосіб потребує громіздких обчислень, і його використовують у тих випадках, коли для функції $f(x)$ не вдається знайти первісну (тоді наближене обчислення визначеного інтеграла зазвичай проводять на комп'ютері з використанням спеціальних програм). Якщо ж первісна для функції $f(x)$ відома, то інтеграл можна обчислити точно, використовуючи формулу Ньютона–Лейбніца (див. приклад у п. 1 табл. 40 та приклади, наведені далі).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Обчисліть $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Розв'язання	*Коментар*
► $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big\|_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 =$ $= 1 - 0 = 1.$ *Відповідь:* 1. ◁	Оскільки для функції $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ми знаємо первісну $F(x) = \operatorname{tg} x$ (див. табл. 39), то заданий інтеграл можна обчислити безпосереднім застосуванням формули Ньютона–Лейбніца $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big\|_a^b = F(b) - F(a).$

Приклад 2 Обчисліть $\int_1^3 \left(\frac{4}{x}-x\right) dx.$

Розв'язання	*Коментар*
I спосіб Для функції $f(x)=\frac{4}{x}-x$ однією з первісних є $F(x)=4\ln\|x\|-\frac{x^2}{2}.$ Тоді $\int_1^3\left(\frac{4}{x}-x\right)dx=\left(4\ln\|x\|-\frac{x^2}{2}\right)\Big\|_1^3=$ $=\left(4\ln\|3\|-\frac{3^2}{2}\right)-\left(4\ln\|1\|-\frac{1^2}{2}\right)=4\ln 3-4.$ II спосіб $\int_1^3\left(\frac{4}{x}-x\right)dx=\int_1^3\frac{4dx}{x}-\int_1^3 xdx=$ $=4\int_1^3\frac{dx}{x}-\int_1^3 xdx=4\ln\|x\|\Big\|_1^3-\frac{x^2}{2}\Big\|_1^3=$ $=4(\ln\|3\|-\ln\|1\|)-\left(\frac{3^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)=4\ln 3-4.$ ◁	Можливі два шляхи обчислення заданого інтеграла. 1) Спочатку знайти первісну для функції $f(x)=\frac{4}{x}-x$, використовуючи правила обчислення первісних і таблицю первісних, а потім знайти інтеграл за формулою Ньютона–Лейбніца. 2) Використати формулу (8) $\int_a^b(f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)dx$ і записати заданий інтеграл як алгебраїчну суму двох інтегралів, кожний з яких можна безпосередньо обчислити, як у прикладі 1 (для першого доданка можна також використати формулу (7) і винести постійний множник 4 за знак інтеграла).

Зауваження. Заданий інтеграл розглядають на відрізку [1; 3], де $x>0$. Але при $x>0$ однією з первісних для функції $f(x)=\frac{1}{x}$ є функція $F(x)=\ln x$. Тому, ураховуючи, що $x>0$, можна, наприклад, записати, що $\int_1^3\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^3$. Хоча, звичайно, наведений вище запис первісної теж є правильним (оскільки при $x>0$ $\ln|x|=\ln x$).

Приклад 3 Обчисліть площу фігури, обмеженої прямими $x=1$, $x=8$, віссю Ox і графіком функції $y=\sqrt[3]{x}$.

Розв'язання	*Коментар*
Зображуючи ці лінії, бачимо, що задана фігура — криволінійна трапеція (рис. 25.8).	Задана фігура є криволінійною трапецією, і тому її площу можна обчислити за формулою

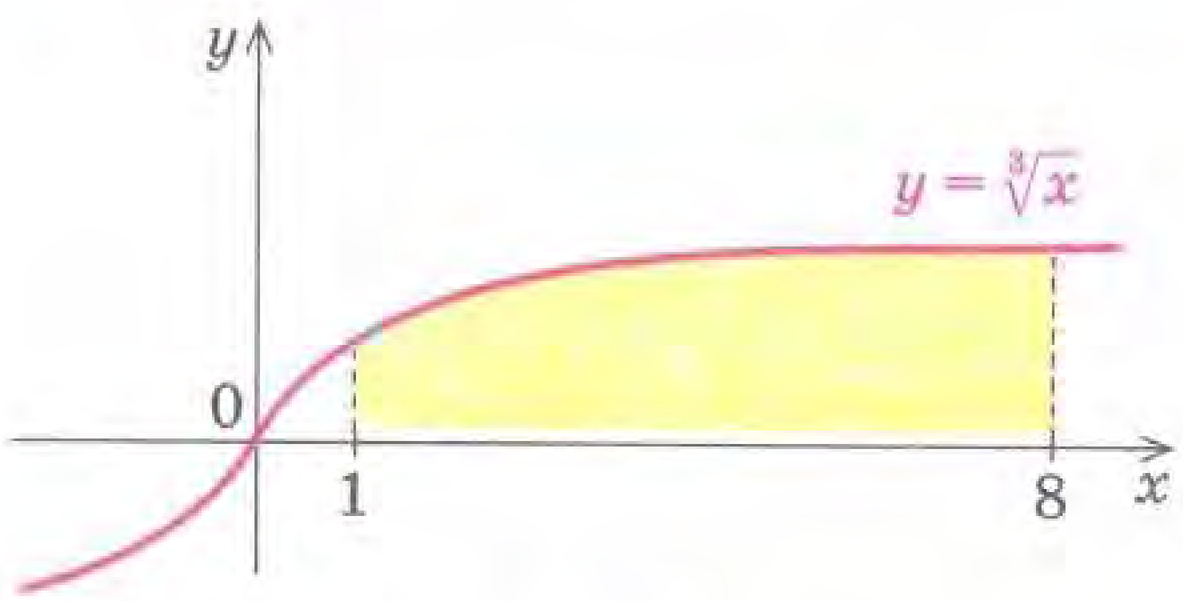


Рис. 25.8

$$S=\int_a^b f(x)\,dx, \text{ де } a=1,\ b=8,$$

$$f(x)=\sqrt[3]{x}.$$

Також потрібно врахувати, що на заданому відрізку [1; 8] значення $x>0$, і за цієї умови можна записати $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$.

Тоді її площа

$$S=\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx=\int_1^8 x^{\frac{1}{3}}dx=\left.\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right|_1^8=\left.\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right|_1^8=$$

$$=\frac{3}{4}\left(8^{\frac{4}{3}}-1^{\frac{4}{3}}\right)=\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{8^4}-1\right)=\frac{45}{4}=11\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $11\frac{1}{4}$. ◁

Вправи

1. Обчисліть интеграл:

1°) $\int_{-1}^{2} x^4\,dx$; 2°) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; 3°) $\int_{1}^{3} x^3\,dx$; 4°) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$;

5) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{(2x+1)^2}$; 6) $\int_{0}^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}\,dx$; 7) $\int_{1}^{10} \frac{dx}{x^2}$; 8) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$.

2. Доведіть правильність рівності:

1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}=\int_{0}^{1} dx$; 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx=\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx=\int_{0}^{\sqrt[3]{3}} x^2\,dx$; 4) $\int_{0}^{1} (2x+1)\,dx=\int_{0}^{2} (x^3-1)\,dx$.

3. Обчисліть интеграл:

1) $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{3}\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$; 3) $\int\limits_{0}^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{9}}$; 4) $\int\limits_{-2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$;

5) $\int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)^2 dx$; 6) $\int\limits_{0}^{2} (1+2x)^3\,dx$;

7) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}} (1+\cos 2x)\,dx$; 8) $\int\limits_{1}^{4} \left(x+\frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx$.

Обчисліть (попередньо виконавши рисунок) площу фігури, обмеженої заданими лініями (**4–8**).

4. 1) $y = x^4$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$;
2) $y = x^4$, $y = 1$;
3) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$;
4) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$.

5. 1) $y = 1 - x^3$, $y = 0$, $x = 0$;
2) $y = 2 - x^3$, $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$;
3) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$;
4) $y = -x^2 - 4x$, $y = 1$, $x = -3$, $x = -1$.

6. 1) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 1$;
2) $y = 2\cos x$, $y = 1$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$;
3) $y = x^2 - 2x + 4$, $y = 3$, $x = -1$;
4) $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = -\frac{5\pi}{6}$.

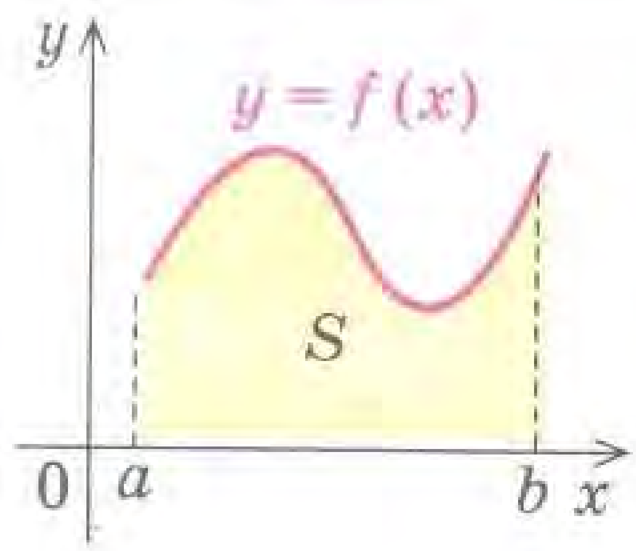
7. 1) $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$; 2) $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 2x$, $x = 4$;
3) $y = x^2$, $y = 2x$; 4) $y = 6 - 2x$, $y = 6 + x - x^2$.

8. 1) $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 4 - x^2$; 2) $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 6x - x^2$;
3) $y = x^2$, $y = 2x - x^2$; 4) $y = x^2$, $y = x^3$.

25.2. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ І ОБ'ЄМІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Таблиця 41

1. Площа криволінійної трапеції

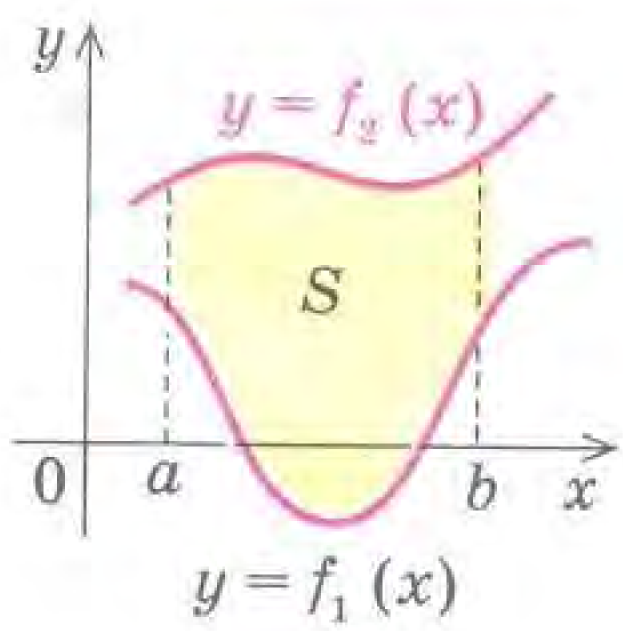


Площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної невід'ємної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, дорівнює

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$

2. Площа фігури, обмеженої графіками двох функцій і прямими $x = a$ та $x = b$

Формула

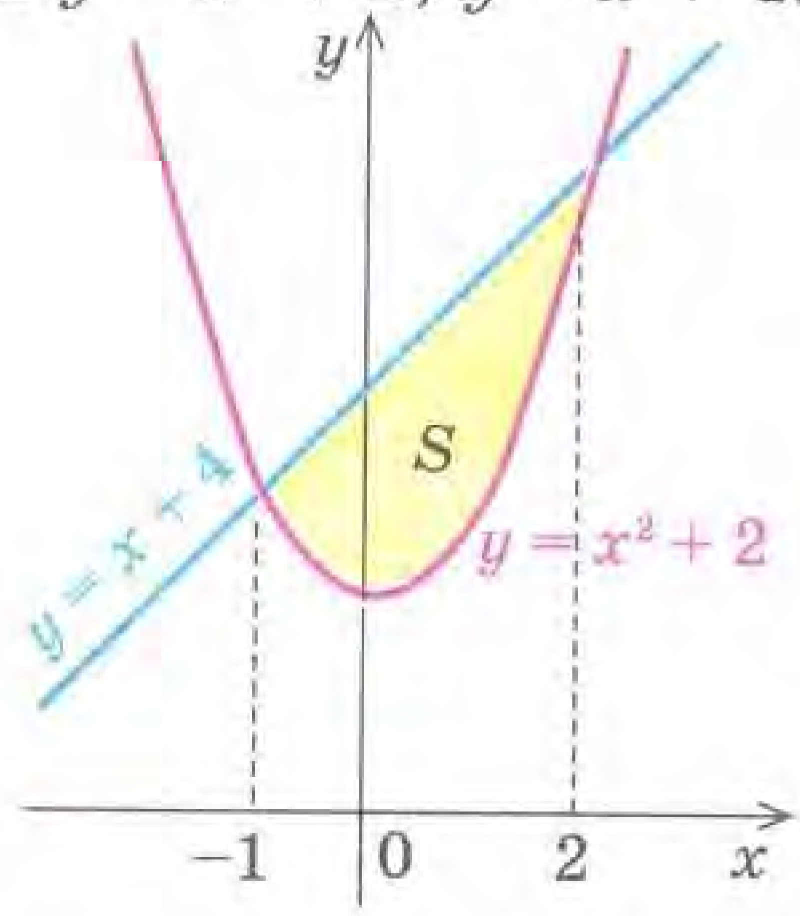


Якщо на заданому відрізку $[a; b]$ неперервні функції $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ мають таку властивість, що $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ для всіх $x \in [a; b]$, то

$$\boxed{S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx}. \qquad (1)$$

Приклад

Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$.



Зобразимо задані лінії та абсциси їх точок перетину.

Абсциси точок перетину:

$$x^2 + 2 = x + 4,$$

$$x^2 - x - 2 = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = 2.$$

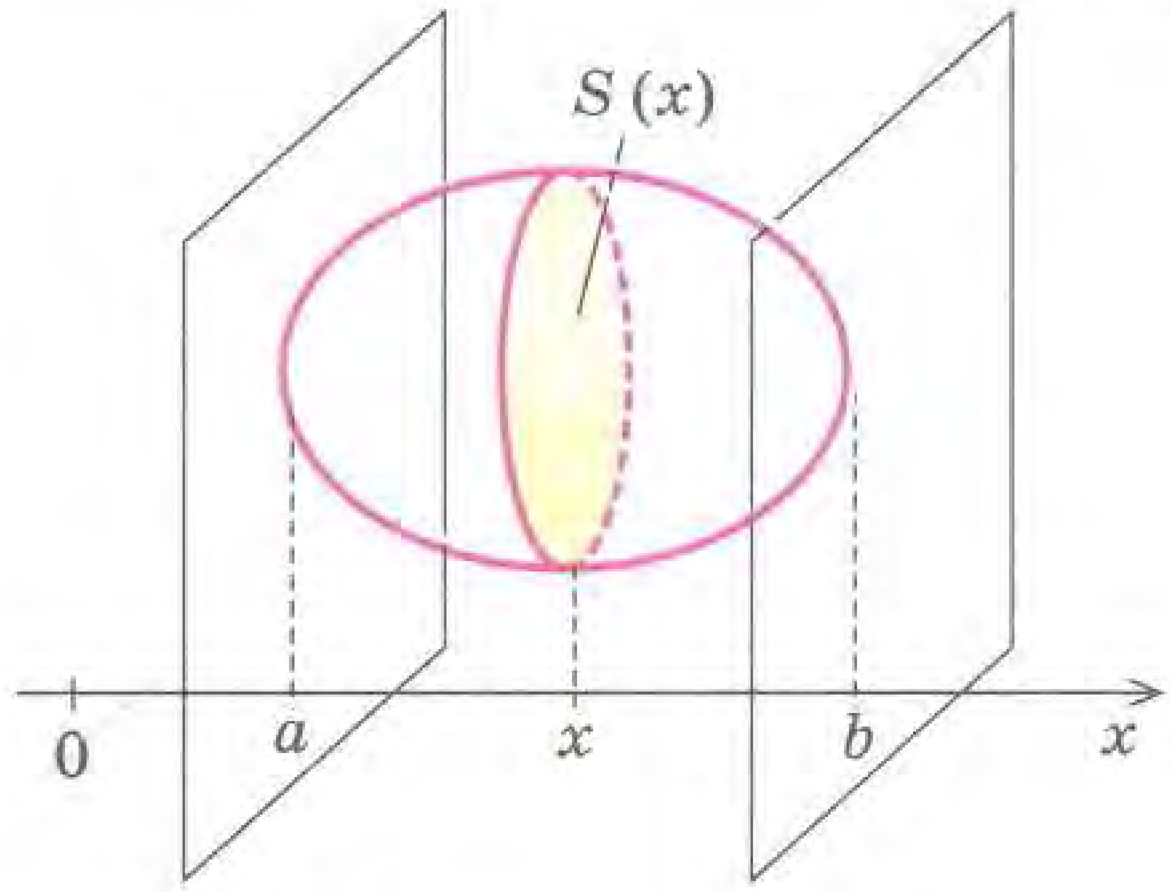
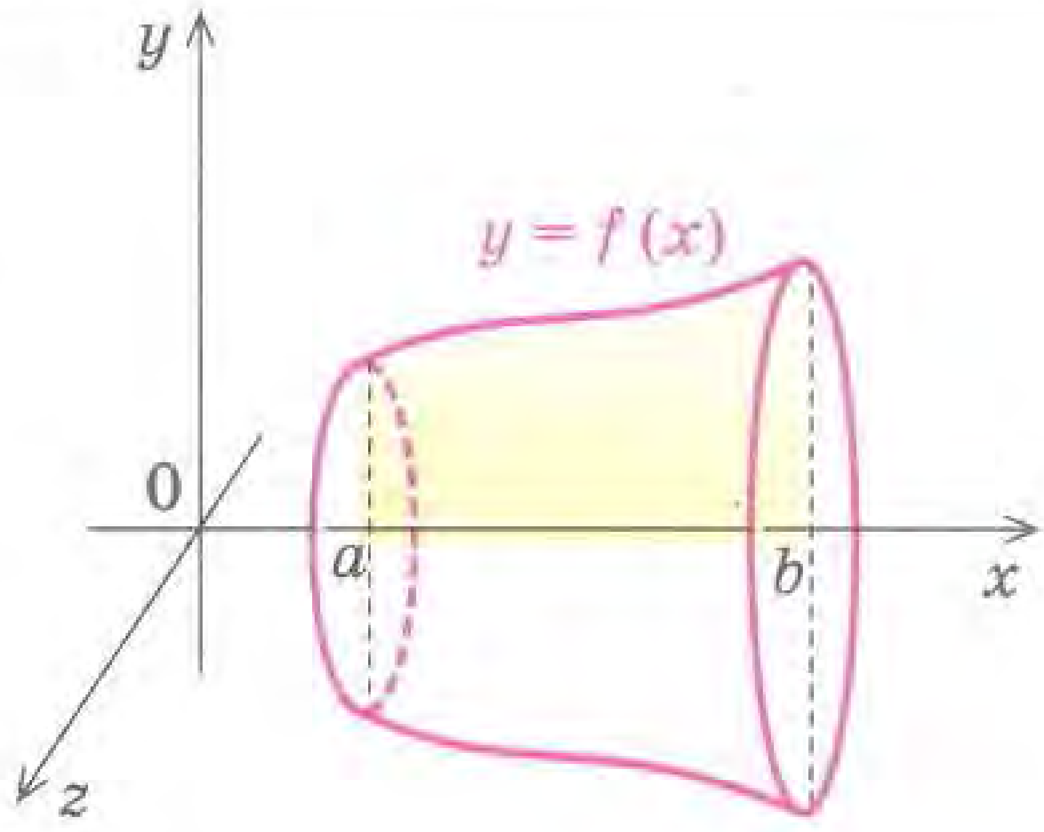
Тоді за формулою (1)

$$S = \int_{-1}^{2} \big((x+4) - (x^2+2)\big)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 4\frac{1}{2}.$$

Закінчення табл. 41

<table>
<tr><th colspan="2">3. Об'єми тіл</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Якщо тіло вміщене між двома перпендикулярними до осі Ox площинами, що проходять через точки $x = a$ і $x = b$, то $V = \int\limits_a^b S(x)\,dx$, де $S(x)$ — площа перерізу тіла площиною, яка проходить через точку $x \in [a;\ b]$ і перпендикулярна до осі Ox.</td><td>Якщо тіло одержали обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, яка обмежена графіком неперервної та невід'ємної на відрізку $[a;\ b]$ функції $y = f(x)$ і прямими $x = a$ й $x = b$, то
$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx.$$</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Обчислення площ фігур. Обґрунтування формули площі криволінійної трапеції та приклади її застосування було наведено в п. 25.1.

З'ясуємо, як можна обчислити площу фігури, зображеної на рис. 25.9. Ця *фігура обмежена зверху графіком функції* $y = f_2(x)$, *знизу — графіком функції* $y = f_1(x)$, *а також вертикальними прямими* $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$; *функції* $f_1(x)$ і $f_2(x)$ *неперервні та невід'ємні на відрізку* $[a;\ b]$ і $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ для всіх $x \in [a;\ b]$.

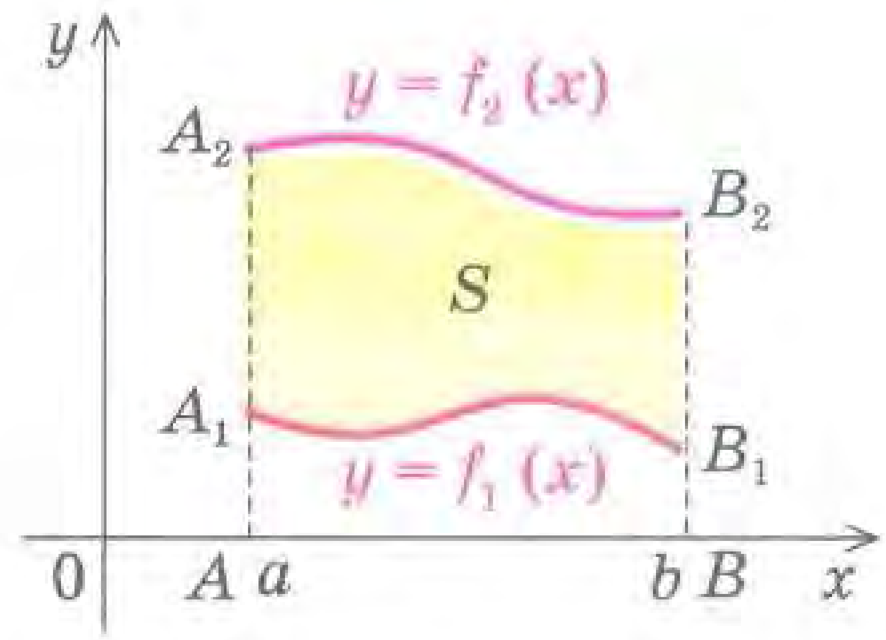


Рис. 25.9

Площа S цієї фігури дорівнює різниці площ S_2 і S_1 криволінійних трапецій (S_2 — площа криволінійної трапеції AA_2B_2B, а S_1 — площа криволінійної трапеції AA_1B_1B). Але

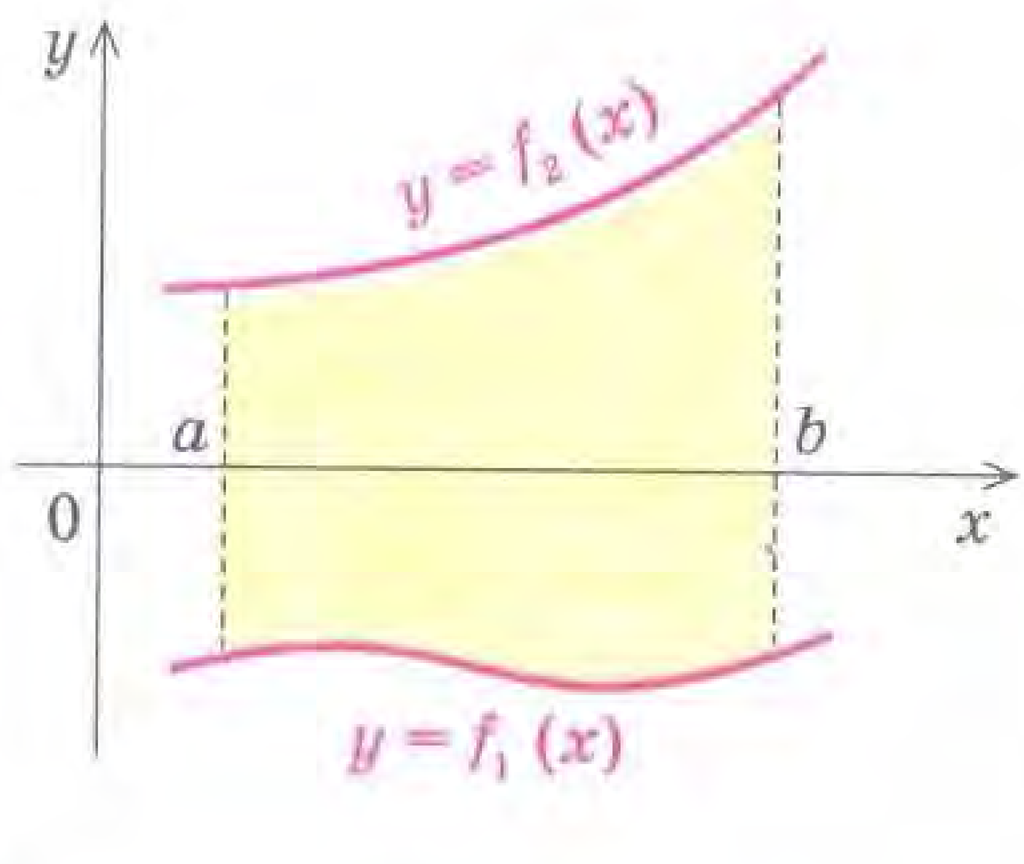
$$S_1 = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx, \quad S_2 = \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$$

Отже, $S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx$. Таким чином, площу заданої фігури можна обчислити за формулою

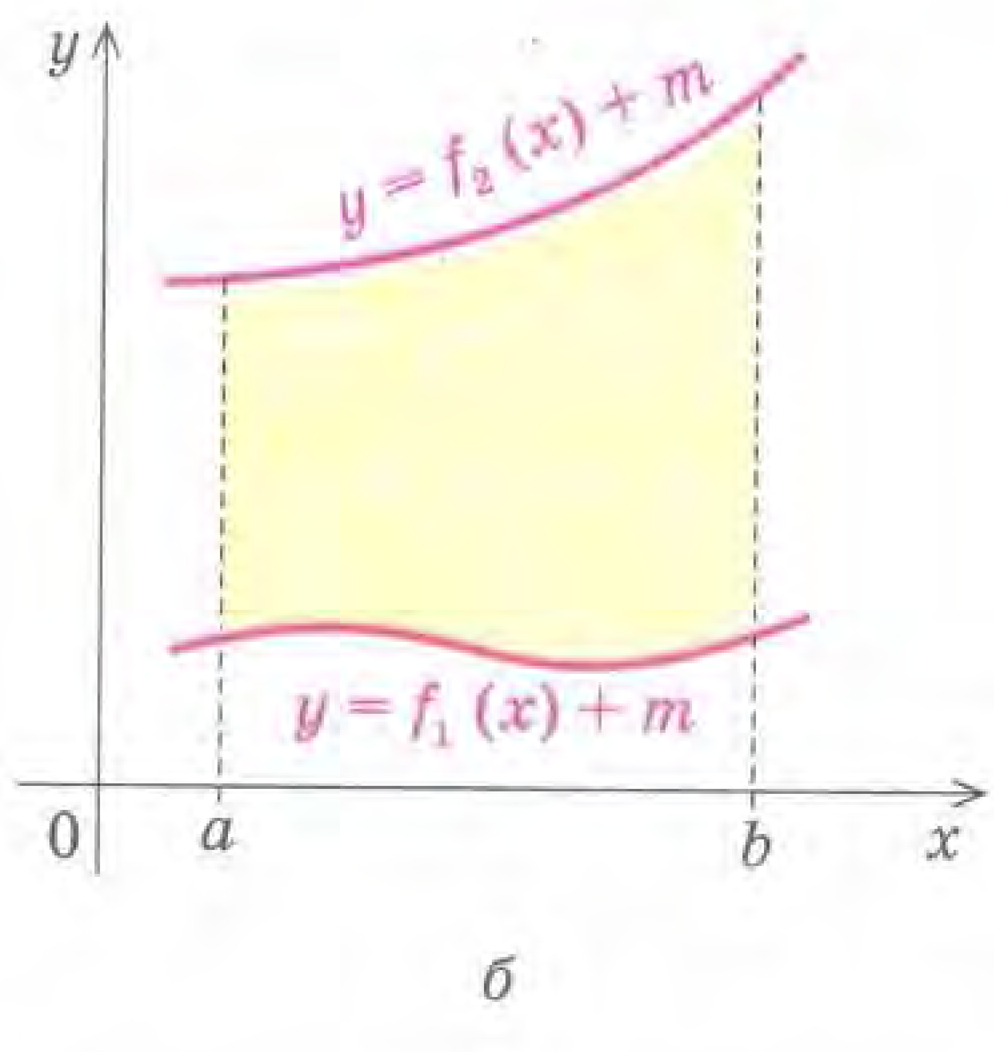
$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \quad \bigcirc \qquad (1)$$

Ця формула буде правильною і в тому випадку, коли задані функції не є невід'ємними на відрізку $[a; b]$ — достатньо виконання умов, що *функції* $f_1(x)$ і $f_2(x)$ *неперервні на відрізку* $[a; b]$ і $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ для всіх $x \in [a; b]$ (рис. 25.10, *а*). Для обґрунтування достатньо перенести задану фігуру паралельно вздовж осі Oy на m одиниць так, щоб вона розмістилася над віссю Ox (рис. 25.10, *б*). Таке перетворення означає, що задані функції $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ ми замінили відповідно на функції $y = f_1(x) + m$ і $y = f_2(x) + m$. Площа фігури, обмеженої графіками цих функцій та прямими $x = a$ і $x = b$, дорівнює площі заданої фігури. Отже, шукана площа

$$S = \int_a^b ((f_2(x) + m) - (f_1(x) + m))\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$



а



б

Рис. 25.10

Наприклад, площа фігури, зображеної на рис. 25.11, дорівнює

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - \cos x)\,dx = (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 + 1 = 2.$$

2. Обчислення об'ємів тіл. Задача на обчислення об'єму тіла за допомогою визначеного інтеграла аналогічна до задачі на знаходження площі криволінійної трапеції. Нехай задано тіло об'ємом V, причому є така пряма (вісь Ox на рис. 25.12), що яку б не взяли площину, перпендикулярну до цієї прямої, нам відома площа S перерізу тіла цією площиною. Але площина, перпендикулярна до осі Ox, перетинає її в деякій точці x. Отже, кожному числу x (з відрізка $[a; b]$ (див. рис. 25.12) поставлено у відповідність єдине число $S(x)$ — площа перерізу тіла цією площиною. Тим самим на відрізку $[a; b]$ дано функцію $S(x)$. Якщо функція S неперервна на відрізку $[a; b]$, то справджується формула

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \qquad (2)$$

Повне доведення її наведено в курсах математичного аналізу, а ми зупинимося на наочних міркуваннях, з яких випливає ця формула.

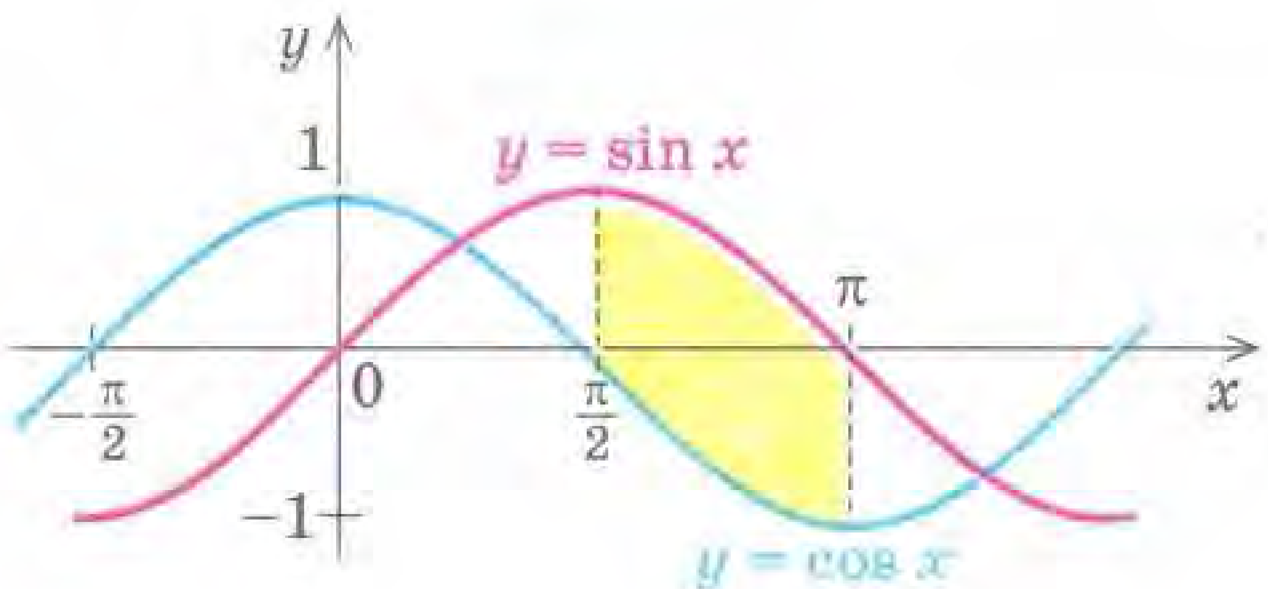


Рис. 25.11

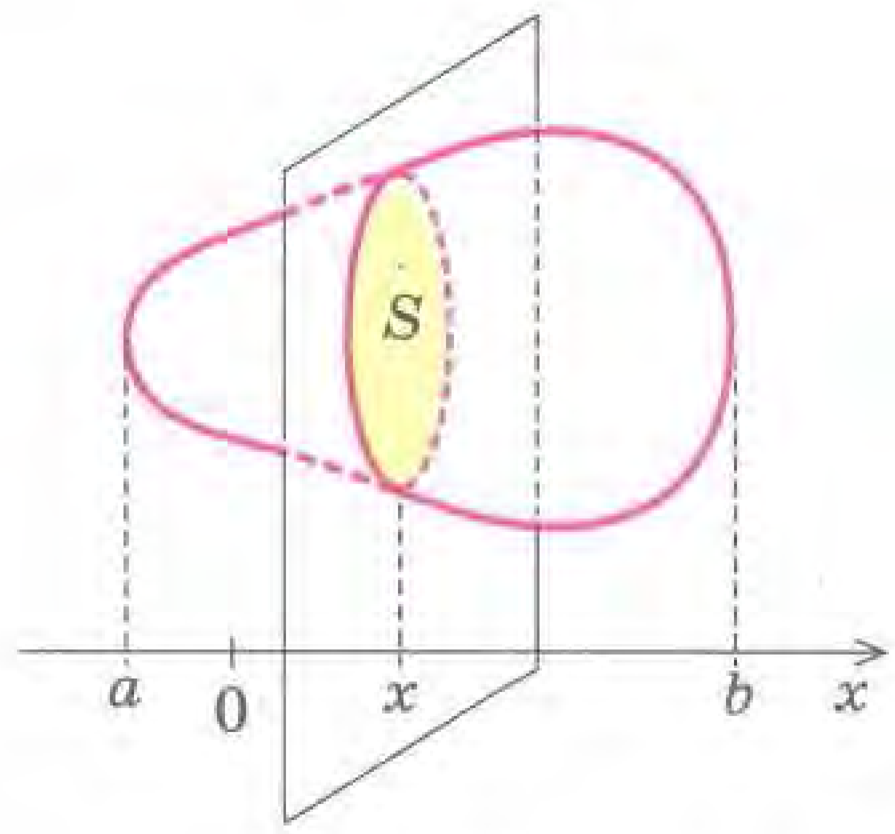


Рис. 25.12

Поділимо відрізок $[a; b]$ на n відрізків однакової довжини точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ і припустимо, що

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Через кожну точку x_k проведемо площину α_k, перпендикулярну до осі Ox. Ці площини розрізають дане тіло на шари (рис. 25.13, *а*). Об'єм шару між площинами α_{k-1} і α_k (рис. 25.13, *б*) при достатньо великих n наближено дорівнює площі $S(x_{k-1})$ перерізу, помноженій на «товщину шару» Δx, і тому

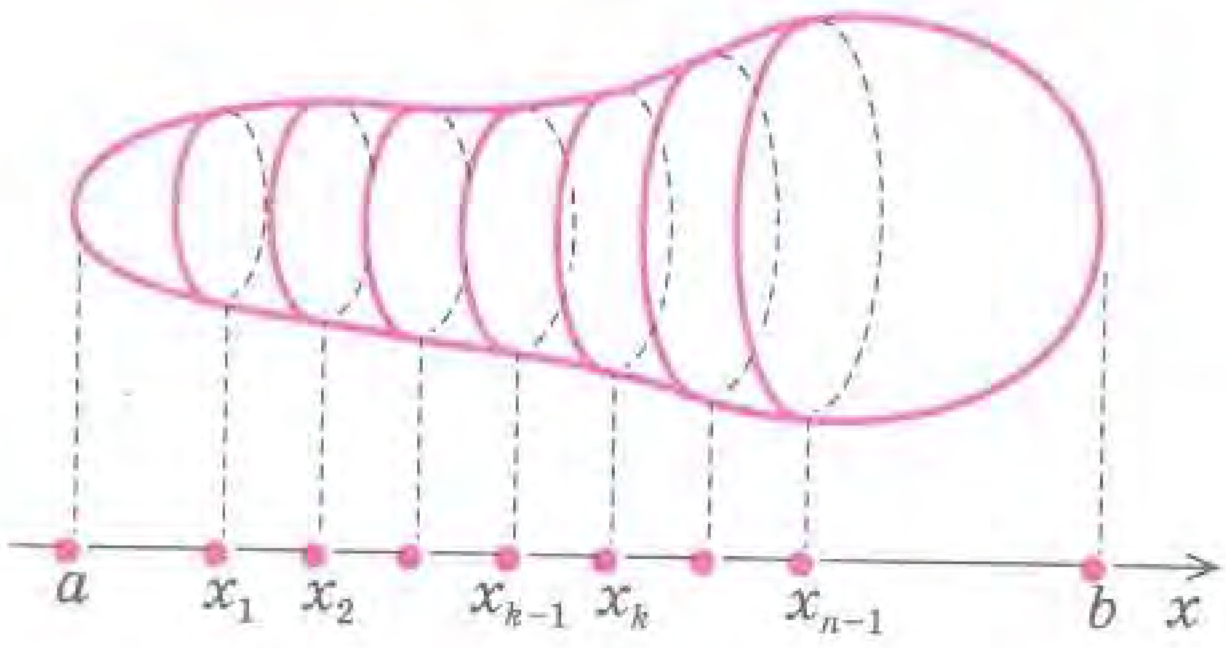
$$V \approx S(x_0)\,\Delta x + S(x_1)\,\Delta x + \ldots + S(x_n)\,\Delta x = V_n.$$

Точність цієї наближеної рівності тим вища, чим тонші шари, на які розрізане тіло, тобто чим більше n.

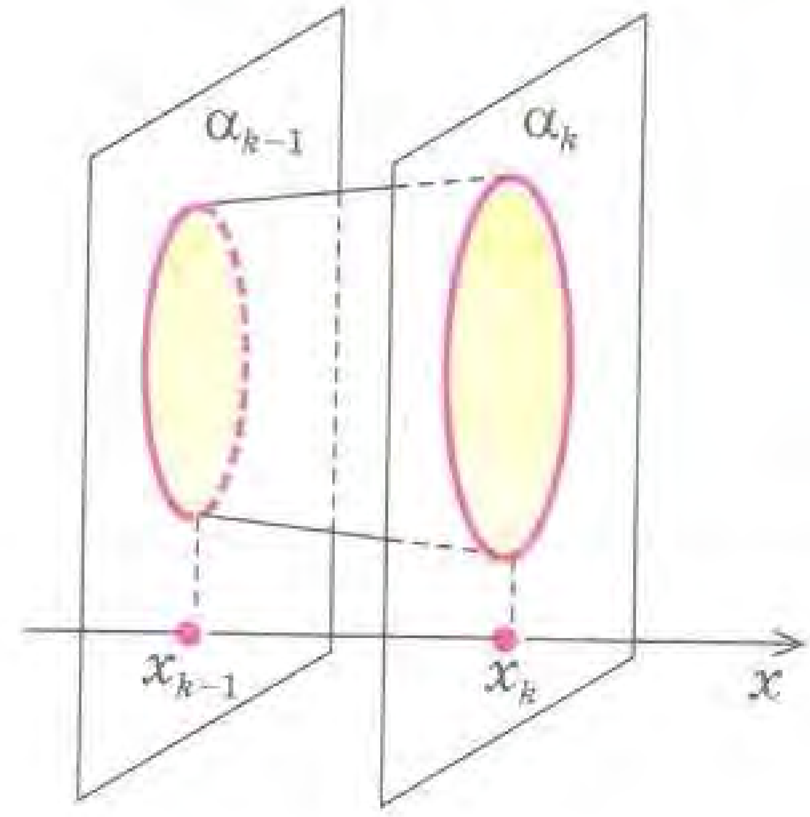
Тому $V_n \to V$, якщо $n \to \infty$. За означенням визначеного інтеграла через інтегральні суми одержуємо, що $V_n \to \int_a^b S(x)\,dx$, якщо $n \to \infty$.

Отже,

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$



а



б

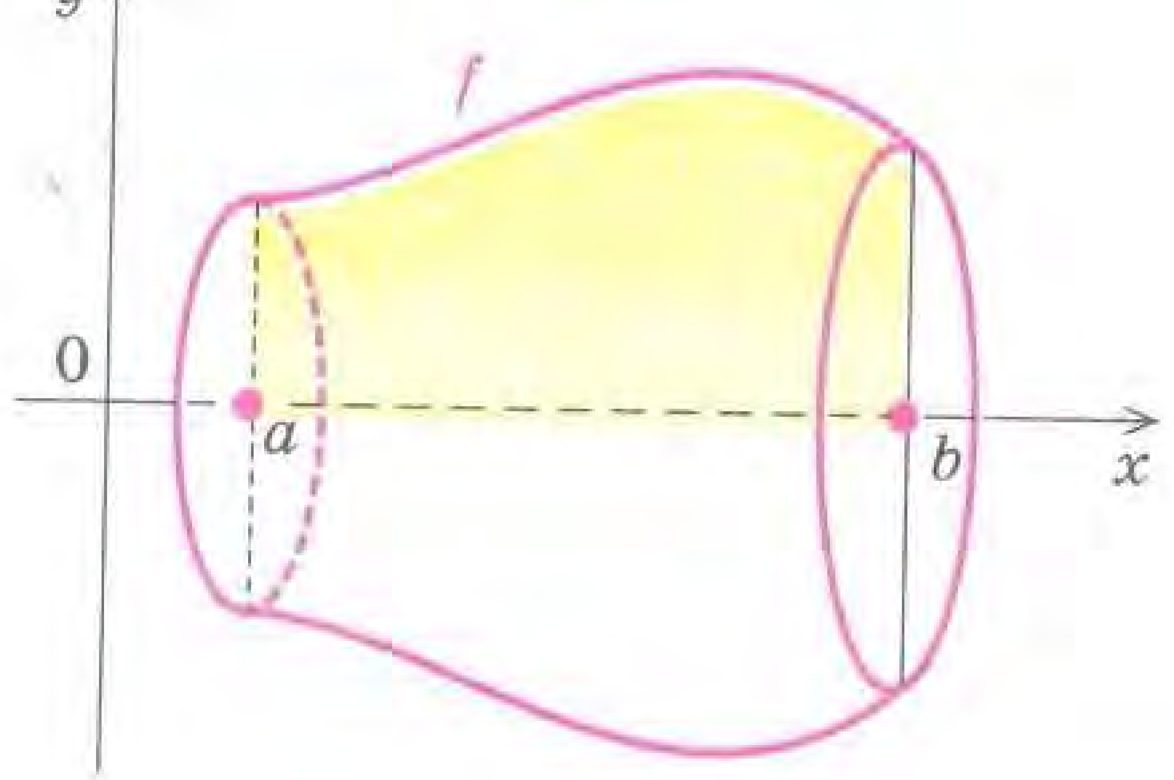
Рис. 25.13

Використаємо одержаний результат для обґрунтування *формули об'єму тіл обертання.*

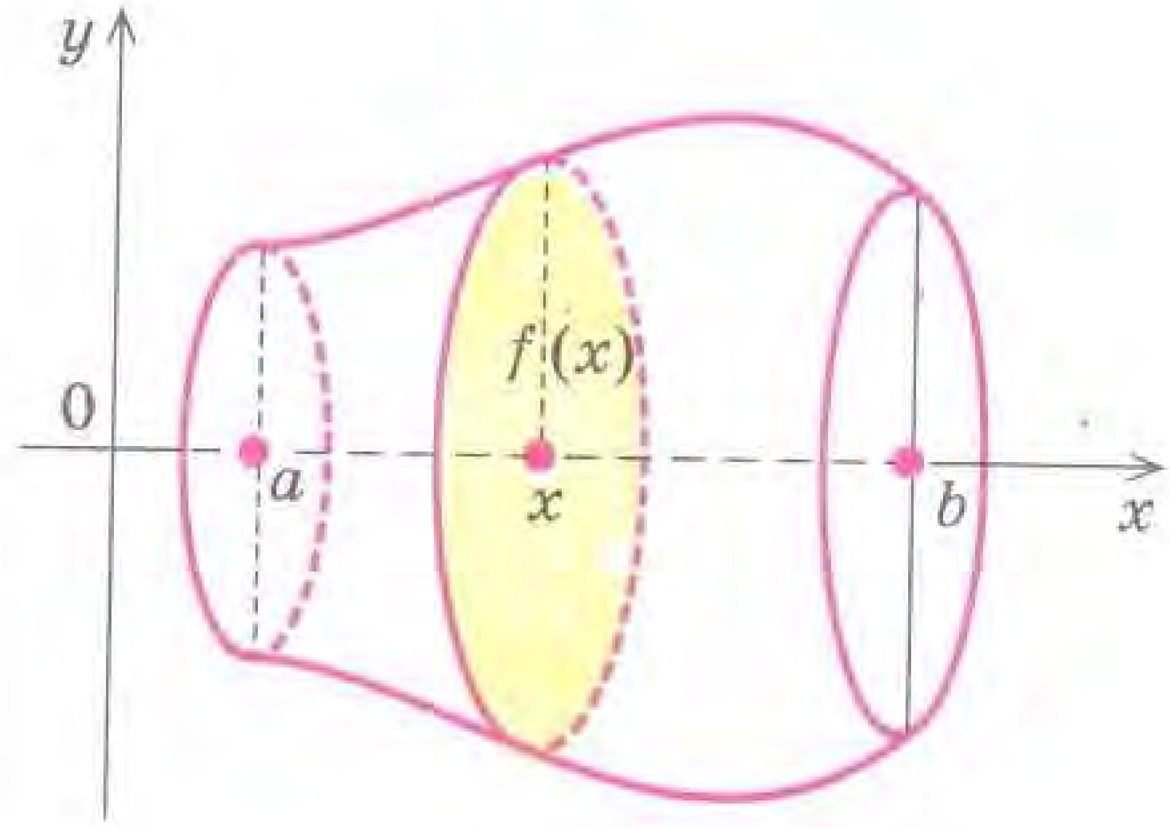
Нехай криволінійна трапеція спирається на відрізок $[a; b]$ осі Ox і обмежена зверху графіком функції $y = f(x)$, яка невід'ємна і неперервна на відрізку $[a; b]$. Унаслідок обертання цієї криволінійної трапеції навколо осі Ox утворюється тіло (рис. 25.14, *а*), об'єм якого можна знайти за формулою

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \quad (3)$$

Дійсно, кожна площина, яка перпендикулярна до осі Ox і перетинає відрізок $[a; b]$ цієї осі в точці x, дає в перерізі з тілом круг радіуса $f(x)$ і площею $S(x) = \pi f^2(x)$ (рис. 25.14, *б*). Звідси за формулою (2) одержуємо формулу (3).



а



б

Рис. 25.14

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ та $y = \sqrt{-x}$.

Розв'язання

▶ Зобразимо задані лінії (рис. 25.15) і знайдемо абсциси точок їх перетину:

$$x^2 = \sqrt{-x}, \qquad (1)$$

тоді $x^4 = -x$, $x^4 + x = 0$,

$$x\,(x^3 + 1) = 0,$$

$x = 0$ або $x = -1$ (обидва корені задовольняють рівняння (1)).

Площа заданої фігури

$$S = \int_{-1}^{0}\left(\sqrt{-x} - x^2\right)dx = \int_{-1}^{0}(-x)^{\frac{1}{2}}\,dx - \int_{-1}^{0}x^2\,dx = -\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{3}. \ ◁$$

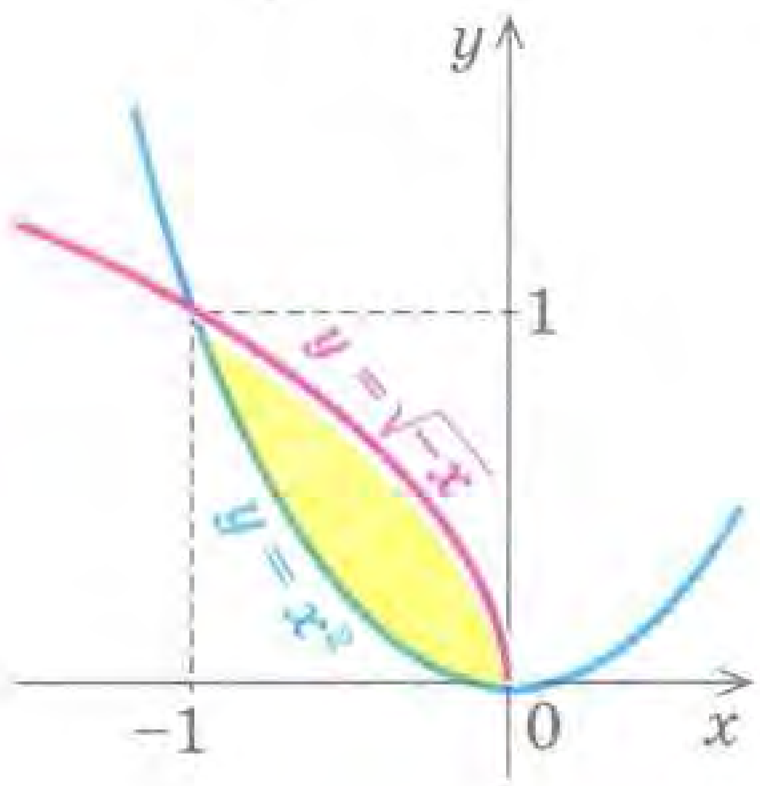


Рис. 25.15

Коментар

Зображуючи задані лінії (рис. 25.15), бачимо, що шукана фігура розташована між графіками двох функцій. Зверху вона обмежена графіком функції $f_2(x) = \sqrt{-x}$, а знизу — графіком функції $f_1(x) = x^2$. Отже, її площу можна обчислити за формулою

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

Щоб знайти межі інтегрування, знайдемо абсциси точок перетину графіків заданих функцій. Оскільки ординати обох кривих у точках перетину однакові, то достатньо розв'язати рівняння $f_1(x) = f_2(x)$.

Для розв'язування одержаного ірраціонального рівняння можна використати рівняння-наслідки (у кінці виконати перевірку) або рівносильні перетворення (на ОДЗ, тобто при $x \leqslant 0$).

Відзначимо також, що на одержаному відрізку $[-1;\ 0]$ значення $(-x) \geqslant 0$. Тоді

$$\sqrt{-x} = (-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Приклад 2 Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = 4 - x^2$ та $y = 0$.

Розв'язання

▶ Знайдемо абсциси точок перетину заданих ліній.

$$4 - x^2 = 0,\ x = \pm 2.$$

Коментар

Зобразимо задану фігуру (рис. 25.16) і впевнимося, що вона є криволінійною трапецією.

Оскільки задана фігура — криволінійна трапеція, то об'єм тіла обертання

$$V=\int_{-2}^{2}\pi(4-x^2)^2\,dx=\pi\int_{-2}^{2}(16-8x+x^4)\,dx=$$

$$=\pi\left(16x-8\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=76\frac{4}{5}\pi.\ \triangleleft$$

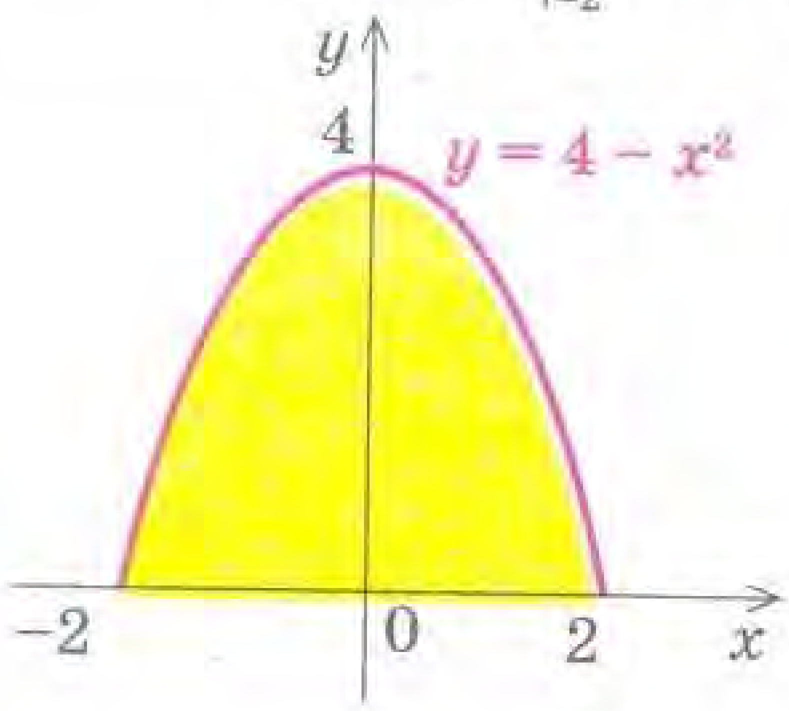


Рис. 25.16

У цьому випадку об'єм тіла обертання можна обчислювати за формулою

$$V=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Щоб знайти межі інтегрування, достатньо знайти абсциси точок перетину заданих ліній.

Як і для задач на обчислення площ, до відповіді записують числове значення об'єму, але можна підкреслити, що ми одержали саме величину об'єму, і записати

відповідь: $76\frac{4}{5}\pi$ куб. од. (тобто кубічних одиниць).

Зауваження. Можна було б звернути увагу на те, що задана фігура симетрична відносно осі Oy і тому об'єм тіла, утвореного обертанням всієї фігури навколо осі абсцис, буде вдвічі більшим за об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції, що спирається на відрізок [0; 2].

Запитання для контролю

1. Поясніть, як можна знайти площу криволінійної трапеції. Наведіть приклад.
2. 1) Запишіть формулу для знаходження площі фігури, обмеженої зверху і знизу графіками неперервних функцій, а також прямими $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$. Наведіть приклад.
   2*) Доведіть цю формулу.
3. Запишіть формулу для знаходження об'єму тіла, одержаного обертанням криволінійної трапеції навколо осі абсцис. Наведіть приклад її використання.

Вправи

Обчисліть площу фігури, обмеженої даними лініями (1–6).

1. 1) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5 - x$; 2) $y = x^2 - 3x + 4$, $y = 4 - x$;
3) $y=\frac{4}{x}$, $y = 4$, $x = 4$; 4) $y=\frac{3}{x}$, $y = 3$, $x = 3$.

2. 1) $y = x^2 - 6x + 9$, $y = 5 - x$; 2) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 3$;
3) $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$; 4) $y = 4 - x^2$, $y = 2 - x$.

3. 1) $y = x^2$, $y = x + 2$; 2) $y = x^2$, $y = 2 - x$.

4. 1) $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = x^2 - 4x + 5$; 2) $y = x^2 + 2x + 2$, $y = 6 - x^2$.

5. 1) $y=\frac{7}{x}$, $x + y = 8$; 2) $y=\frac{5}{x}$, $x + y = 6$;

3) $y=\frac{5}{x}$, $y = 4x + 1$, $x = 2$; 4) $y=\frac{3}{x}$, $y = 2x + 1$, $x = 3$.

6. 1) $y = 8 - x^2$, $y = 4$; 2) $y = 6 - x^2$, $y = 5$;

3) $y = x^2$, $y = 4x - x^2$; 4) $y = x^2$, $y = 2x - x^2$.

7. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 8x - 2x^2$, дотичною до цієї параболи в її вершині та прямою $x = 0$.

8. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком функції

$$f(x) = 8 - 0{,}5x^2,$$

дотичною до нього в точці з абсцисою $x = -2$ і прямою $x = 1$.

9. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$; 2) $y=\sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;

3) $y=\sqrt{x}$, $x = 1$, $y = 0$; 4) $y = 1 - x^2$, $y = 0$.

10. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2$, $y = x$; 2) $y = 2x$, $y = x + 3$, $x = 0$, $x = 1$;

3) $y = x + 2$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 2$; 4) $y=\sqrt{x}$, $y = x$.

11*. 1) Виведіть формулу об'єму кульового сегмента радіуса R і висотою H.

2) Виведіть формулу об'єму зрізаного конуса висотою H з радіусами основ R і r.

§ 26 НАЙПРОСТІШІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. Поняття диференціального рівняння та його розв'язку. До цього ми розглядали рівняння, у яких невідомими були числа. У математиці та її застосуваннях доводиться розглядати рівняння, у яких невідомими є функції. Так, задача про знаходження шляху $s(t)$ за заданою швидкістю $v(t)$ зводиться до розв'язування рівняння $s'(t) = v(t)$, де $v(t)$ — задана функція, а $s(t)$ — шукана функція.

Наприклад, якщо $v(t) = 3 - 4t$, то для знаходження $s(t)$ потрібно розв'язати рівняння $s'(t) = 3 - 4t$.

Це рівняння містить похідну невідомої функції. Такі рівняння називають *диференціальними рівняннями*. *Розв'язком* диференціального рівняння називають будь-яку функцію, яка задовольняє це рівняння (тобто функцію, у результаті підстановки якої в задане рівняння одержуємо тотожність).

Приклад 1 Розв'яжіть диференціальне рівняння $y' = x + 3$.

Розв'язання

▶ Потрібно знайти функцію $y(x)$, похідна якої дорівнює $x + 3$, тобто знайти первісну для функції $x + 3$. За правилами знаходження первісних одержуємо $y = \frac{x^2}{2} + 3x + C$, де C — довільна постійна. ◁

Під час розв'язування слід ураховувати, що *розв'язок диференціального рівняння визначається неоднозначно, з точністю до постійної*. Такий розв'язок називають *загальним розв'язком* заданого рівняння.

Зазвичай до диференціального рівняння додається умова, з якої цю постійну визначають. Розв'язок, одержаний з використанням такої умови, називають *частинним розв'язком* заданого диференціального рівняння.

Приклад 2 Знайдіть розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння $y' = \sin x$, що задовольняє умову $y(0) = 2$.

Розв'язання

▶ Усі розв'язки цього рівняння записують формулою $y(x) = -\cos x + C$. З умови $y(0) = 2$ знаходимо $-\cos 0 + C = 2$. Тоді $C = 3$.
Відповідь: $y = -\cos x + 3$. ◁

Розв'язування багатьох фізичних, біологічних, технічних та інших практичних задач зводиться до розв'язування диференціального рівняння

$$y' = ky, \tag{1}$$

де k — задане число.

Розв'язками цього рівняння є функції

$$y = Ce^{kx}, \tag{2}$$

де C — постійна, яка визначається умовами конкретної задачі.

Наприклад, у дослідах установлено, що швидкість $m'(t)$ розмноження бактерій (для яких достатньо їжі) пов'язана з масою $m(t)$ бактерій у момент часу t рівнянням

$$m'(t) = km(t),$$

де k — додатне число, що залежить від виду бактерій і зовнішніх умов.

Розв'язками цього рівняння є функції

$$m(t) = Ce^{kt}.$$

Постійну C можна знайти, наприклад, з умови, що в момент часу $t = 0$ маса m_0 бактерій відома. Тоді $m(0) = m_0 = Ce^{k \cdot 0} = C$, і тому

$$m(t) = m_0 e^{kt}.$$

Іншим прикладом застосування рівняння (1) є задача про радіоактивний розпад речовини. Якщо $m'(t)$ — швидкість радіоактивного розпаду в момент часу t, то $m'(t) = -km(t)$, де k — постійна, що залежить від радіоактивності речовини.

Розв'язками цього рівняння є функції

$$m\ (t) = Ce^{-kt}.$$

Якщо в момент часу t маса речовини дорівнює m_0, то $C = m_0$, і тому

$$m\ (t) = m_0 e^{-kt}. \qquad (3)$$

Відзначимо, що на практиці швидкість розпаду радіоактивної речовини характеризують періодом напіврозпаду, тобто проміжком часу, протягом якого розпадається половина маси вихідної речовини.

Нехай T — період напіврозпаду, тоді з рівності (3) при $t = T$ одержуємо $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT}$. Звідси $e^{kT} = 2$, $k = \frac{\ln 2}{T}$. У цьому випадку формула (3) запишеться так:

$$m\ (t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t} = m_0 \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{T}} = m_0 2^{-\frac{t}{T}},$$

тобто

$$m\ (t) = m_0 2^{-\frac{t}{T}}.$$

2. Гармонічні коливання. У практиці існують процеси, що періодично повторюються, наприклад коливальні рухи маятника, струни, пружини і т. п.; процеси, позв'язані зі змінним електричним струмом, магнітним полем тощо. Розв'язування багатьох таких задач зводиться до розв'язування диференціального рівняння

$$y'' = -\omega^2 y, \qquad (4)$$

де ω — задане додатне число, $y = y\ (x)$, $y'' = (y'\ (x))'$.

Розв'язками рівняння (4) є функції

$$y\ (x) = C_1 \sin\ (\omega x + C_2), \qquad (5)$$

де C_1 і C_2 — постійні, які визначаються умовами конкретної задачі.

Рівняння (4) називають *диференціальним рівнянням гармонічних коливань.*

Наприклад, якщо $y\ (t)$ — відхилення точки струни, що вільно коливається, від положення рівноваги в момент часу t, то

$$y\ (t) = A \sin\ (\omega t + \varphi),$$

де A — амплітуда коливання, ω — кутова частота, φ — початкова фаза коливання.

Графіком гармонічного коливання є синусоїда.

3. Приклади застосування первісної та інтеграла до розв'язування практичних задач

Приклад 3 Циліндричний бак, висота якого 4,5 м, а радіус основи 1 м, заповнений водою. За який час витече вода з бака через круглий отвір у дні, якщо радіус отвору дорівнює 0,05 м?

Розв'язання

Позначимо висоту бака H, радіус його основи — R, радіус отвору — r (довжини вимірюємо в метрах, час — у секундах) (рис. 26.1).

Швидкість витікання рідини v залежить від висоти стовпа рідини x, її обчислюють за формулою Бернуллі

$$v = \sigma\sqrt{2gx}, \tag{6}$$

де $g = 9{,}8$ м/с^2, σ — коефіцієнт, що залежить від властивості рідини; для води $\sigma = 0{,}6$. Зі зменшенням рівня води в баці швидкість витікання зменшується (не є постійною).

Нехай $t\,(x)$ — час, за який із бака висотою x і радіусом основи R витікає вода через отвір радіуса r (рис. 26.1).

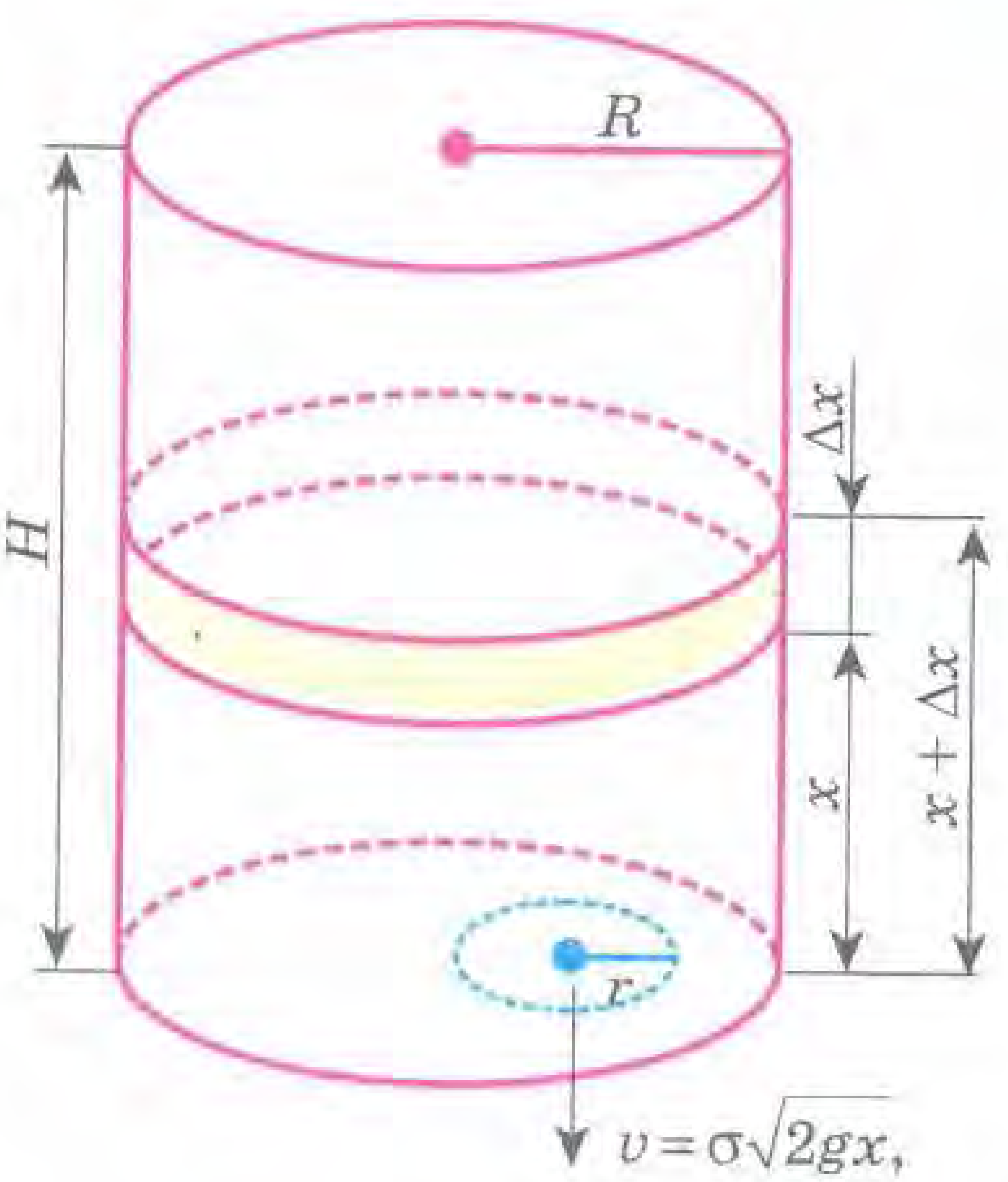


Рис. 26.1

Знайдемо наближено відношення $\frac{\Delta t}{\Delta x}$, уважаючи, що за час $\Delta t = t\,(x + \Delta x) - t(x)$ швидкість витікання води постійна і виражається формулою (6).

За час Δt об'єм води, що витекла з бака, дорівнює об'єму циліндра висотою Δx з радіусом основи R (див. рис. 26.1), тобто дорівнює $\pi R^2 \Delta x$. З іншого боку, цей об'єм дорівнює об'єму циліндра, основою якого служить отвір у дні бака, а висота — добутку швидкості витікання v на час Δt, тобто об'єм дорівнює $\pi r^2 v \Delta t$. Таким чином, $\pi R^2 \Delta x = \pi r^2 v \Delta t$.

Ураховуючи формулу (6), одержуємо

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{R^2}{r^2 v} = \frac{R^2}{r^2 \sigma\sqrt{2gx}} = \frac{R^2}{r^2\sigma\sqrt{2g}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Тоді при $\Delta x \to 0$ одержуємо рівність

$$t'\,(x) = \frac{R^2}{r^2\sigma\sqrt{2g}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Звідси

$$t\,(x) = \frac{R^2}{r^2\sigma\sqrt{2g}}\,2\sqrt{x} + C.$$

Якщо $x = 0$ (у баці немає води), то $t\,(0) = 0$, тому $C = 0$. При $x = H$ знаходимо шуканий час:

$$t\,(H) = \frac{R^2}{r^2\sigma\sqrt{g}}\sqrt{2H}.$$

Використовуючи дані задачі, одержуємо

$$t\,(4{,}5)=\frac{1^2}{(0{,}05)^2\cdot 0{,}6\cdot\sqrt{9{,}8}}\sqrt{9}\approx 639\ (\text{с}).$$

Відповідь: 639 с. ◁

Приклад 4 Обчисліть роботу сили F під час стискування пружини на 0,06 м, якщо для її стиску на 0,01 м потрібна сила 5 Н.

Розв'язання

▶ За законом Гука, сила F пропорційна розтягу або стиску пружини, тобто $F = kx$, де x — величина розтягу чи стиску (у метрах), k — постійна.

З умови задачі знаходимо k. Оскільки при $x = 0{,}01$ м сила $F = 5$ Н, то $k=\frac{F}{x}=500$. Отже, $F\,(x) = kx = 500x$.

Знайдемо формулу для обчислення роботи при переміщенні тіла (яке розглядається як матеріальна точка), що рухається під дією змінної сили $F\,(x)$, напрямленої вздовж осі Ox. Нехай тіло перемістилося з точки $x = a$ в точку $x = b$.

Позначимо через $A\,(x)$ роботу, яку виконано при переміщенні тіла з точки a в точку x. Надамо x приросту Δx. Тоді $\Delta A = A\,(x + \Delta x) - A\,(x)$ — робота, яка виконується силою $F\,(x)$ при переміщенні тіла з точки x у точку $x + \Delta x$. Якщо $\Delta x \to 0$, то силу $F\,(x)$ на відрізку $[x;\ x + \Delta x]$ будемо вважати постійною і рівною $F\,(x)$. Тоді $\Delta A = F\,(x)\Delta x$. Звідси $\frac{\Delta A}{\Delta x}=F\,(x)$. При $\Delta x \to 0$ одержуємо $A'\,(x)=F\,(x)$. Остання рівність означає, що $A\,(x)$ є первісною для функції $F\,(x)$.

Ураховуючи, що $A\,(a)=0$, за формулою Ньютона–Лейбніца одержуємо

$$\int_a^b F\,(x)\,dx=A\,(x)\Big|_a^b=A\,(b)-A\,(a)=A\,(b)=A.$$

Таким чином,

робота змінної сили $F\,(x)$ при переміщенні тіла з точки a в точку b дорівнює

$$A=\int_a^b F\,(x)\,dx.$$

Використовуючи дані задачі, одержуємо

$$A=\int_0^{0{,}06} 500x\,dx=500\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}06}=0{,}9\ (\text{Дж}).$$ ◁

Запитання для контролю

1. Поясніть, яке рівняння називають диференціальним. Наведіть приклади.
2. Поясніть, яку функцію називають розв'язком диференціального рівняння. Наведіть приклади.

Вправи

1. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v\ (t)$ (м/с). Обчисліть шлях, який пройде тіло за проміжок часу від $t = t_1$ до $t = t_2$:
   1) $v\ (t) = 3t^2 + 1,\ t_1 = 0,\ t_2 = 4$; 2) $v\ (t) = 2t^2 + t,\ t_1 = 1,\ t_2 = 3$.
2. Розв'яжіть диференціальне рівняння:
   1) $y' = 3 - 4x$; 2) $y' = 6x^2 - 8x + 1$; 3) $y' = 3e^{2x}$;
   4) $y' = 4 \cos 2x$; 5) $y' = 3 \sin x$; 6) $y' = \cos x - \sin x$.
3. Знайдіть розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє задану умову:
   1) $y' = \sin x,\ y\ (0) = 0$; 2) $y' = 2 \cos x,\ y\ (\pi) = 1$;
   3) $y' = 3x^2 + 4x - 1,\ y\ (1) = -2$; 4) $y' = 2 + 2x - 3x^2,\ y\ (-1) = 2$;
   5) $y' = e^x,\ y\ (1) = 1$; 6) $y' = e^{-x},\ y\ (0) = 2$.
4. Яку роботу потрібно витратити на стискання пружини на 4 см, якщо відомо, що сила 2 Н стискає цю пружину на 1 см?
5. Сила 4 Н розтягує пружину на 8 см. Яку роботу потрібно виконати, щоб розтягти пружину на 8 см?
6. Вода, що подається в циліндричний бак із площини основи через отвір у дні, заповнює весь бак. Визначте затрачену при цьому роботу. Висота бака дорівнює h, радіус основи — r.
7. Знайдіть роботу проти сил виштовхування під час занурення кулі у воду.

ДОДАТКОВІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 4

1. Знайдіть первісну для функції $f\ (x) = e^{2x} - \cos x$, графік якої проходить через початок координат.
2. Знайдіть первісну для функції $f\ (x) = \sin x - e^{3x}$, графік якої проходить через початок координат.

Знайдіть первісну для функції $y = f\ (x)$, графік якої проходить через дану точку **(3–7)**.

3. 1) $f\ (x)=\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3}+4\cos 4x,\ A\ (\pi;\ 3)$;

   2) $f\ (x)=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}-5\sin 5x,\ B\ (\pi;\ 0)$;

   3) $f\ (x) = 5x^4 + 3x^2 - 4,\ B\ (-1;\ 12)$; 4) $f\ (x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-2x,\ N\ (9;\ -8)$.

4. 1) $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$, $A(2; 6)$; 2) $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$, $A(1; 4)$;
3) $f(x)=\dfrac{12}{\sqrt{3x-2}}$, $A(9; 30)$.

Обчисліть площу фігури, обмеженої даними лініями **(10–14)**.

5. 1) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3 - x$; 2) $y = x^2 - 5x + 2$, $y = 2 - x$;
3) $y=\dfrac{1}{x}$, $y = 1$, $x = 4$; 4) $y=\dfrac{2}{x}$, $y = 2$, $x = 3$.

6. 1) $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 2 - x$; 2) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 1$;
3) $y = 5 - x^2$, $y = x + 3$; 4) $y = 4 - x^2$, $y = x + 4$.

7. 1) $y = x^3$, $y = x$; 2) $y = x^3$, $y = 4x$;
3) $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = x^2 - 2x + 1$; 4) $y = x^2 + 2x + 2$, $y = 2 - x^2$.

8. 1) $y=\dfrac{2}{x}$, $x + y = 3$; 2) $y=\dfrac{4}{x}$, $x + y = 5$;
3) $y=\dfrac{3}{x}$, $y = 4x - 1$, $x = 2$; 4) $y=\dfrac{5}{x}$, $y = 2x + 3$, $x = 3$.

9. 1) $y = 9 - x^2$, $y = 1$; 2) $y = 5 - x^2$, $y = 4$;
3) $y = x^2$, $y = 8x - x^2$; 4) $y = x^2$, $y = 3x - 2x^2$.

10. При якому значенні a пряма $x = a$ ділить площу фігури, обмеженої графіком функції $y=\dfrac{8}{x}$ та прямими $y = 0$, $x = 2$, $x = 8$, навпіл?

11. При якому значенні a пряма $x = a$ ділить площу фігури, обмеженої графіком функції $y=\dfrac{4}{x}$ та прямими $y = 0$, $x = 4$, $x = 9$, навпіл?

12. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = 2x - x^2$, дотичною, проведеною до даної параболи в точці з абсцисою $x_0 = 2$, та віссю ординат.

13. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = 3x - x^2$, дотичною, проведеною до даної параболи в точці з абсцисою $x_0 = 3$, та віссю ординат.

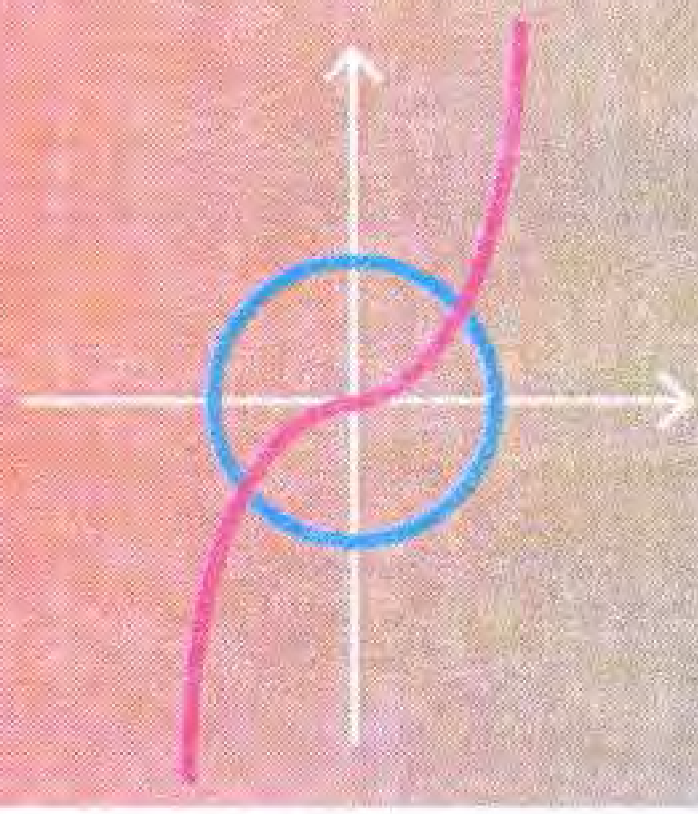
14. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=\sqrt{x+1}$ і $y=\sqrt{7-x}$ та віссю абсцис.

ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

Інтегральне числення й поняття інтеграла виникло через необхідність обчислення площ плоских фігур та об'ємів тіл. Ідеї інтегрального числення беруть свій початок у роботах стародавніх математиків. Зокрема, важливе значення для розвитку інтегрального числення мав *метод вичерпування,* запропонований Евдоксом Кнідським (бл. 408 — бл. 355 рр. до н. е.) і вдосконалений Архімедом. За цим методом для обчислення площі плоскої фігури навколо неї описують ступінчасту фігуру і в неї вписують ступінчасту фігуру. Збільшуючи кількість сторін одержаних многокутників, знаходять границю, до якої прямують площі ступінчастих фігур (саме так у курсі геометрії ви доводили формулу площі круга). Архімед передбачив багато ідей інтегрального числення. Але пройшло більш як півтори тисячі років, перш ніж ці ідеї було доведено до рівня числення. Зазначимо, що математики XVII ст., які здобули багато нових результатів, училися на працях Архімеда. У XVII ст. було зроблено багато відкриттів, що стосуються інтегрального числення, уведено основні поняття і терміни.

Символ $\int$ увів Г. Лейбніц (1675). Цей знак є зміненою латинською буквою S (перша буква слова *summa*). Саме слово *інтеграл* увів Я. Бернуллі (1690). Інші відомі вам терміни, що стосуються інтегрального числення, з'явилися значно пізніше. Назва *первісна функція,* що застосовується тепер, замінила попередню «примітивна функція», яку ввів Ж. Лагранж (1797). Латинське слово *primitivus* перекладається як «початковий»: функція $F(x)=\int f(x)\,dx$ — початкова (або первісна) для функції $f(x)$, яка утворюється з $F(x)$ диференціюванням. Поняття *невизначеного інтеграла* та його позначення ввів Лейбніц, а позначення *визначеного інтеграла* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ увів К. Фур'є (1768—1830).

Слід зауважити, що при всій значущості результатів, здобутих математиками XVII ст., інтегрального числення ще не було. Необхідно було виділити загальні ідеї, на яких ґрунтується розв'язування багатьох окремих задач, а також установити зв'язок операцій диференціювання й інтегрування. Це виконали Ньютон і Лейбніц, які відкрили незалежно один від одного факт, відомий під назвою формули Ньютона–Лейбніца. Тим самим остаточно оформився загальний метод. Треба було ще навчитися знаходити первісні для багатьох функцій, дати логічні основи нового числення тощо. Але головне вже було зроблено: диференціальне й інтегральне числення створено. Методи інтегрального числення активно розвивались у наступному столітті (насамперед слід назвати імена Л. Ейлера, який завершив систематичне дослідження інтегрування елементарних функцій, та Й. Бернуллі). У розвиток інтегрального числення значний внесок зробили російські математики українського походження В. Я. Буняковський (1804–1889) і М. В. Остроградський (1801–1862). Багато теорем і формул Остроградського ввійшли до різних математичних курсів. Добре відомі математикам усього світу метод інтегрування Остроградського, правило Остроградського, формула Остроградського тощо.



Розділ 5
СИСТЕМАТИЗАЦІЯ Й УЗАГАЛЬНЕННЯ ВІДОМОСТЕЙ ПРО РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ

§ 27 РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ. УЗАГАЛЬНЕННЯ Й СИСТЕМАТИЗАЦІЯ

27.1. РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

Таблиця 42

1. Область допустимих значень (ОДЗ)	
Областю допустимих значень **(або областю визначення) рівняння (або нерівності) називають спільну область визначення для функцій, що стоять у лівій і правій частинах рівняння (або нерівності).**	Для рівняння $\sqrt{x+2}=x$ ОДЗ: $x + 2 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant -2$, оскільки область визначення функції $f(x)=\sqrt{x+2}$ визначається умовою $x + 2 \geqslant 0$, а областю визначення функції $g(x) = x$ є множина всіх дійсних чисел.
2. Рівняння-наслідки	
Якщо кожен корінь першого рівняння є коренем другого, то друге рівняння називають *наслідком* першого. Якщо з **правильності першої рівності випливає правильність кожної наступної, одержуємо рівняння-наслідки.** *При цьому можлива поява сторонніх коренів.* Тому **при використанні рівнянь-наслідків перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою розв'язування.**	Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+2}=x$. *Розв'язання.* ▶ Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата: $\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x^2,\ x+2=x^2,$ $x^2-x-2=0,$ $x_1=2,\ x_2=-1.$ Перевірка. $x = 2$ — корінь; $x = -1$ — сторонній корінь. *Відповідь:* 2. ◁

Продовження табл. 42

3. Рівносильні рівняння і нерівності	
Означення	Найпростіші теореми
Два рівняння (нерівності) називають *рівносильними* на деякій множині, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі розв'язки. Тобто *кожен розв'язок першого рівняння (нерівності) є розв'язком другого, і навпаки, кожен розв'язок другого є розв'язком першого* (схеми такого розв'язування рівнянь і нерівностей наведено в пп. 4 і 6 цієї таблиці).	1. **Якщо з однієї частини рівняння (нерівності) перенести в другу доданки з протилежним знаком, одержимо рівняння (нерівність), рівносильне заданому (на будь-якій множині).** 2. **Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, яке не дорівнює нулю (або на одну й ту саму функцію, що визначена і не дорівнює нулю на ОДЗ заданого рівняння), одержимо рівняння, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого).**

4. Схема пошуку плану розв'язування рівнянь

Розв'язування рівнянь

за допомогою **рівнянь-наслідків**

(1) ↓ (2) Перетворення, що гарантують збереження правильної рівності

Перевірка коренів підстановкою в початкове рівняння

за допомогою **рівносильних перетворень**

Урахування ОДЗ початкового рівняння

(1) ↑↓ (2) Зберігання на ОДЗ правильної рівності при прямих і зворотних перетвореннях

застосуванням властивостей функцій

(1) — початкове рівняння;

(2) — рівняння, одержане в результаті перетворення початкового;

↓, ↑ — символічне зображення напрямку виконаних перетворень

Продовження табл. 42

5. Заміна змінних

Орієнтир	Приклад
Якщо до рівняння (нерівності або тотожності) змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз зі змінною позначити однією буквою (новою змінною).	Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0.$ *Розв'язання* ▶ *Заміна:* $\sin x = t.$ $t^2 - 2t - 3 = 0,$ $t_1 = 3,\ t_2 = -1.$ 1. При $t = 3$ маємо $\sin x = 3$ — коренів немає, оскільки $\lvert 3 \rvert > 1.$ 2. При $t = -1$ маємо $\sin x = -1$, тоді $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$ *Відповідь:* $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$ ◁

6. Схема пошуку плану розв'язування нерівностей

Розв'язування нерівностей

за допомогою **рівносильних перетворень**	за допомогою **методу інтервалів ($f(x) \gtrless 0$)**
Урахування ОДЗ початкової нерівності	1. Знайти ОДЗ. 2. Знайти нулі функції: $f(x) = 0$. 3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції $f(x)$ у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ. 4. Записати відповідь, ураховуючи знак заданої нерівності.
1 ↓↑ 2 Збереження на ОДЗ правильної нерівності при прямих і зворотних перетвореннях	

1 — початкова нерівність;

2 — нерівність, одержана в результаті перетворення початкової;

↓, ↑ — символічне зображення виконаних перетворень (із вказівкою напрямку їх виконання)

Закінчення табл. 42

7. Метод інтервалів (розв'язування нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$)	
План	Приклад
1. Знайти ОДЗ. **2. Знайти нулі функції: $f(x) = 0$.** **3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ.** **4. Записати відповідь, ураховуючи знак заданої нерівності.**	Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2-1}{(x+3)^2} \geqslant 0$. *Розв'язання* ▶ Нехай $f(x)=\frac{x^2-1}{(x+3)^2}$. 1. ОДЗ: $(x+3)^2 \neq 0$, отже, $x \neq -3$. 2. Нулі функції: $f(x) = 0$. $\frac{x^2-1}{(x+3)^2}=0$, $x^2 - 1 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ (входять до ОДЗ). 3.  *Відповідь:* $(-\infty;-3)\cup(-3;-1]\cup[1;+\infty)$. ◁

8. Теореми про рівносильність нерівностей	
1.	**Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число** *(або на одну й ту саму функцію, що визначена і додатна на ОДЗ заданої нерівності)*, **не змінюючи знак нерівності, одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої).**
2.	**Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число** *(або на одну й ту саму функцію, що визначена і від'ємна на ОДЗ заданої нерівності)* **і змінити знак нерівності на протилежний, одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої).**

Рівняння і нерівності, що містять знак модуля

Таблиця 43

1. Розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять знак модуля

за означенням

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ при } a > 0, \\ 0, \text{ при } a = 0, \\ -a, \text{ при } a < 0. \end{cases}$$

за геометричним змістом

$|a|$ — відстань на числовій прямій від точки 0 до точки a.

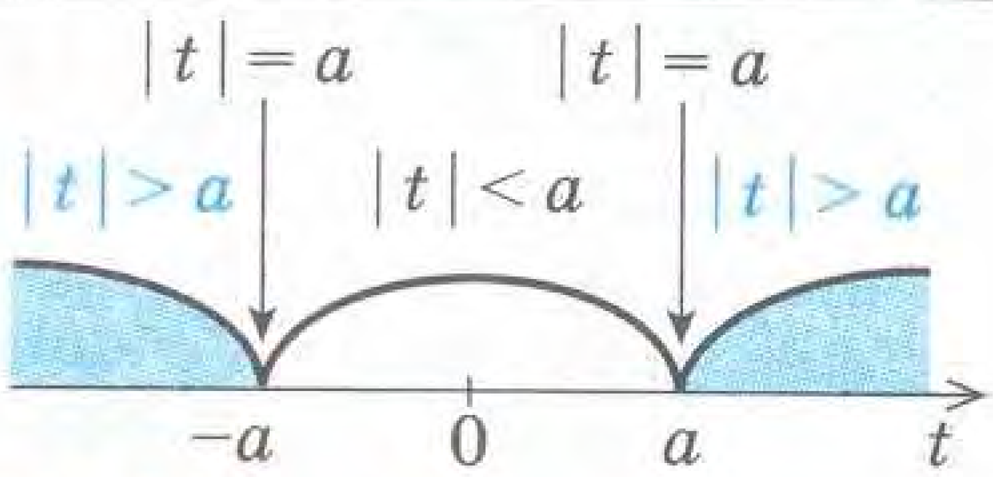
1. $|f(x)| = a$.
2. $|f(x)| = |g(x)|$.
3. $|f(x)| > a$.
4. $|f(x)| < a$.

за загальною схемою

1. **Знайти ОДЗ.**
2. **Знайти нулі всіх підмодульних функцій.**
3. **Позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки.**
4. **Знайти розв'язок у кожному з проміжків (і перевірити, чи входить цей розв'язок у розглянутий проміжок).**

з використанням спеціальних співвідношень

2. Використання геометричного змісту модуля (при $a > 0$)



1. $|f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = a$ **або** $f(x) = -a$.
2. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ **або** $f(x) = -g(x)$.
3. $|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a$ **або** $f(x) > a$.
4. $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a. \end{cases}$

Узагальнення

5. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x) \text{ або } f(x) = -g(x). \end{cases}$
6. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x)$ **або** $f(x) > g(x)$.
7. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x), \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

Закінчення табл. 43

3. Використання спеціальних співвідношень	
1. $\lvert u \rvert = u \Leftrightarrow u \geqslant 0$.	2. $\lvert u \rvert = -u \Leftrightarrow u \leqslant 0$.
3. $\lvert u \rvert = \lvert v \rvert \Leftrightarrow u^2 = v^2$.	
4. $\lvert u \rvert > \lvert v \rvert \Leftrightarrow u^2 > v^2$. Тоді $\lvert u \rvert - \lvert v \rvert > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0$; *знак різниці модулів двох виразів збігається зі знаком різниці їх квадратів.*	
5. $\lvert u \rvert + \lvert v \rvert = u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$	6. $\lvert u \rvert + \lvert v \rvert = -u - v \Leftrightarrow \begin{cases} u \leqslant 0, \\ v \leqslant 0. \end{cases}$
7. $\lvert u \rvert + \lvert v \rvert = \lvert u + v \rvert \Leftrightarrow uv \geqslant 0$.	
8. $\lvert u \rvert + \lvert v \rvert = \lvert u - v \rvert \Leftrightarrow uv \leqslant 0$.	
9. $\lvert x - a \rvert + \lvert x - b \rvert = b - a \Leftrightarrow a \leqslant x \leqslant b$, де $a < b$.	

27.2. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ

Таблиця 44

1. Системи рівнянь і нерівностей	
Поняття системи та її розв'язків	Приклади
Якщо ставиться завдання знайти всі спільні розв'язки двох (або більше) рівнянь (або нерівностей) з однією або кількома змінними, то кажуть, що потрібно розв'язати **систему рівнянь (або нерівностей)**. Записують систему рівнянь, об'єднуючи їх фігурною дужкою. ***Розв'язком системи*** **називають таке значення змінної або такий упорядкований набір значень змінних (якщо змінних декілька), що задовольняє всі рівняння (чи нерівності) системи.** *Розв'язати систему рівнянь (або нерівностей) — значить знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.* Якщо система не має розв'язку, то її називають несумісною.	$\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x + y = 11 \end{cases}$ — система двох рівнянь з двома змінними. Пара чисел (5; 1), тобто $\begin{cases} x = 5, \\ y = 1 \end{cases}$ — розв'язок системи. $\begin{cases} x^2 - y + z = 0, \\ xy + xz + yz = 19, \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ — система трьох рівнянь з трьома змінними. Трійка (1; 4; 3), тобто $\begin{cases} x = 1, \\ y = 4, \\ z = 3 \end{cases}$ — один із розв'язків системи.

Продовження табл. 44

<table>
<tr><th colspan="2">2. Системи-наслідки</th></tr>
<tr><th>Означення</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td>Якщо кожний розв'язок першої системи рівнянь є розв'язком другої, то другу систему називають наслідком першої.

При використанні систем-наслідків можлива поява сторонніх розв'язків, тому перевірка підстановкою розв'язку в початкову систему є складовою розв'язування системи.</td><td>Розв'яжіть систему $\begin{cases} \dfrac{y}{x-1}=1, \\ x^2=y+1. \end{cases}$
Розв'язання. ▶ Із першого рівняння системи $y = x - 1$. Підставляємо в друге рівняння системи й одержуємо $x^2 = x$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Тоді $y_1 = -1$, $y_2 = 0$.
Перевірка. Пара чисел $(0; -1)$ задовольняє обидва рівняння системи і є її розв'язком. Пара чисел $(1; 0)$ не задовольняє перше рівняння і не є розв'язком системи.
Відповідь: $(0; -1)$. ◁</td></tr>
<tr><th colspan="2">3. Рівносильність систем рівнянь і нерівностей</th></tr>
<tr><td>Дві системи рівнянь (чи нерівностей) називають рівносильними на деякій множині, якщо на цій множині вони мають однакові розв'язки (тобто кожний розв'язок першої системи на цій множині є розв'язком другої, і навпаки, кожний розв'язок другої системи є розв'язком першої).</td><td>Областю допустимих значень (ОДЗ) системи називають спільну область визначення всіх функцій, що входять до запису цієї системи.

Усі рівносильні перетворення систем виконують на ОДЗ початкової системи.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Найпростіші властивості рівносильних систем</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Якщо змінити порядок запису рівнянь (чи нерівностей) заданої системи, одержимо систему, рівносильну заданій.
2. Якщо одне з рівнянь (або нерівностей) системи замінити на рівносильне йому рівняння (нерівність), то одержимо систему, рівносильну заданій.
3. Якщо в системі рівнянь з одного рівняння виразити одну змінну через інші й одержаний вираз підставити замість цієї змінної в усі інші рівняння системи, то одержимо систему, рівносильну заданій (на її ОДЗ).
4. Якщо будь-яке рівняння системи замінити сумою цього рівняння, помноженого на число $\alpha \neq 0$, і якогось іншого рівняння системи, помноженого на число $\beta \neq 0$ (а усі інші рівняння залишити без зміни), то одержимо систему, рівносильну заданій.</td></tr>
</table>

Продовження табл. 44

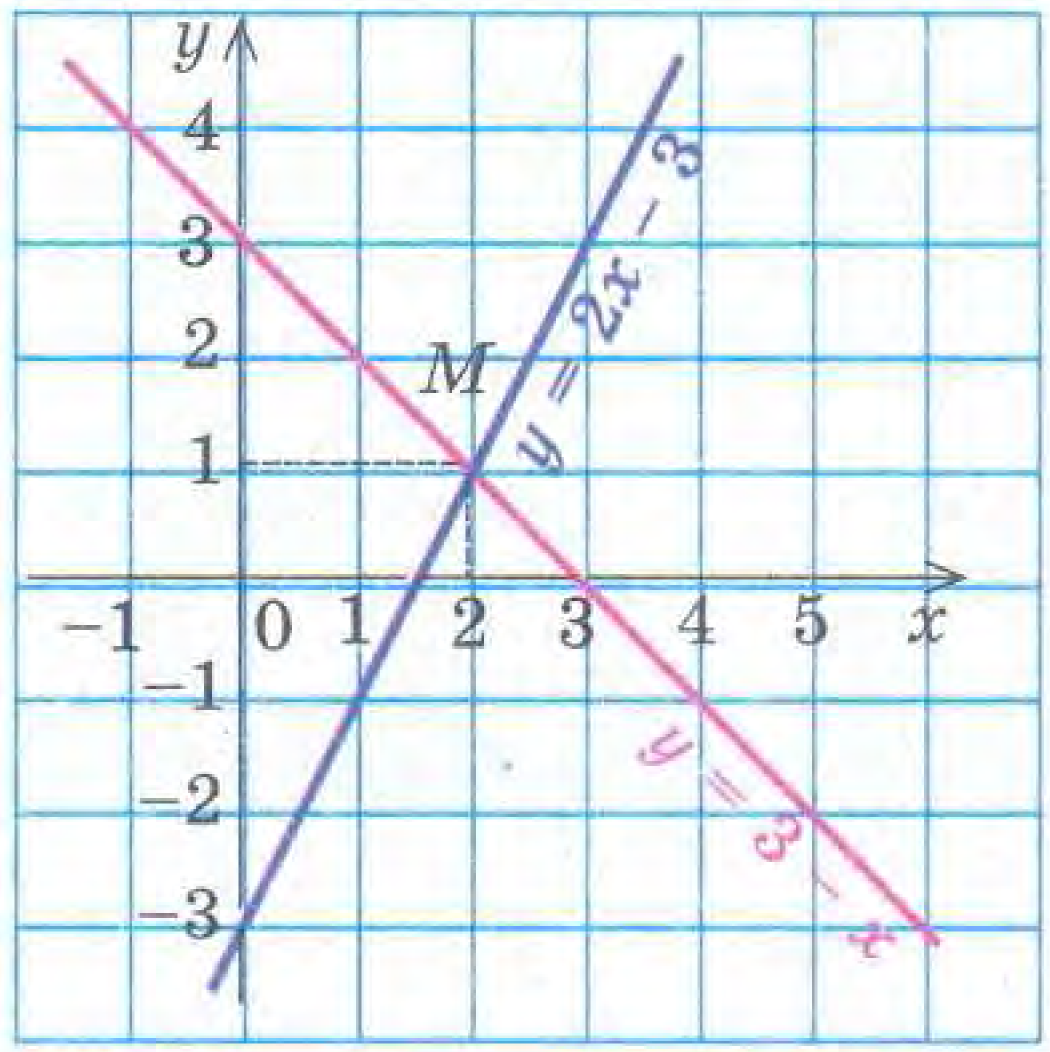
4. Основні способи розв'язування систем рівнянь
Спосіб підстановки
Виражаємо з одного рівняння системи одну змінну через іншу (або через інші) та підставляємо одержаний вираз замість відповідної змінної в усі інші рівняння системи (потім розв'язуємо одержане рівняння або систему і підставляємо результат у вираз для першої змінної).
Приклад. Розв'яжіть систему $\begin{cases} 2x-y=3, \\ x+y=3. \end{cases}$ *Розв'язання.* ▶ Із першого рівняння системи $y = 2x - 3$. Підставляємо в друге рівняння системи й одержуємо $x + 2x - 3 = 3$. Звідси $x = 2$. Тоді $y = 2x - 3 = 1$.   *Відповідь:* (2; 1). ◁
Спосіб додавання
Якщо перше рівняння системи замінити сумою першого рівняння, помноженого на число $\alpha \neq 0$, і другого, помноженого на число $\beta \neq 0$ (а всі інші рівняння залишити без зміни), одержимо систему, рівносильну заданій.
Приклад. Розв'яжіть систему $\begin{cases} 5x-3y=9, \\ 3x+2y=13. \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{vmatrix}$ *Розв'язання.* ▶ Помножимо обидві частини першого рівняння системи на 2, а другого — на 3 (щоб одержати як коефіцієнти при змінній y протилежні числа) і почленно додамо отримані рівняння. З останнього одержаного рівняння знаходимо значення x, підставляємо результат у будь-яке рівняння системи і знаходимо значення y. $\begin{cases} 10x-6y=18, \\ 9x+6y=39. \end{cases} \Big\vert +$ $19x=57,$ $x=3.$ Тоді $3 \cdot 3 + 2y = 13$, $2y = 4$, $y = 2$.   *Відповідь:* (3; 2). ◁
Графічне розв'язування систем рівнянь із двома змінними
Виконуємо рівносильні перетворення заданої системи так, щоб було зручно будувати графіки всіх рівнянь, що входять до системи. Потім будуємо відповідні графіки і знаходимо координати точок перетину побудованих ліній: ці координати і є розв'язками системи.

Закінчення табл. 44

Приклади

1. Розв'яжіть графічно систему $\begin{cases} 2x-y=3, \\ x+y=3. \end{cases}$

Розв'язання. ▶ Задана система рівносильна системі $\begin{cases} y=2x-3, \\ y=3-x. \end{cases}$



Графіком кожного з рівнянь системи є пряма.

Для побудови прямої достатньо побудувати дві її точки.

Наприклад, для

$y = 2x - 3$ такі:

x	0	1
y	−3	−1

для $y = 3 - x$ такі:

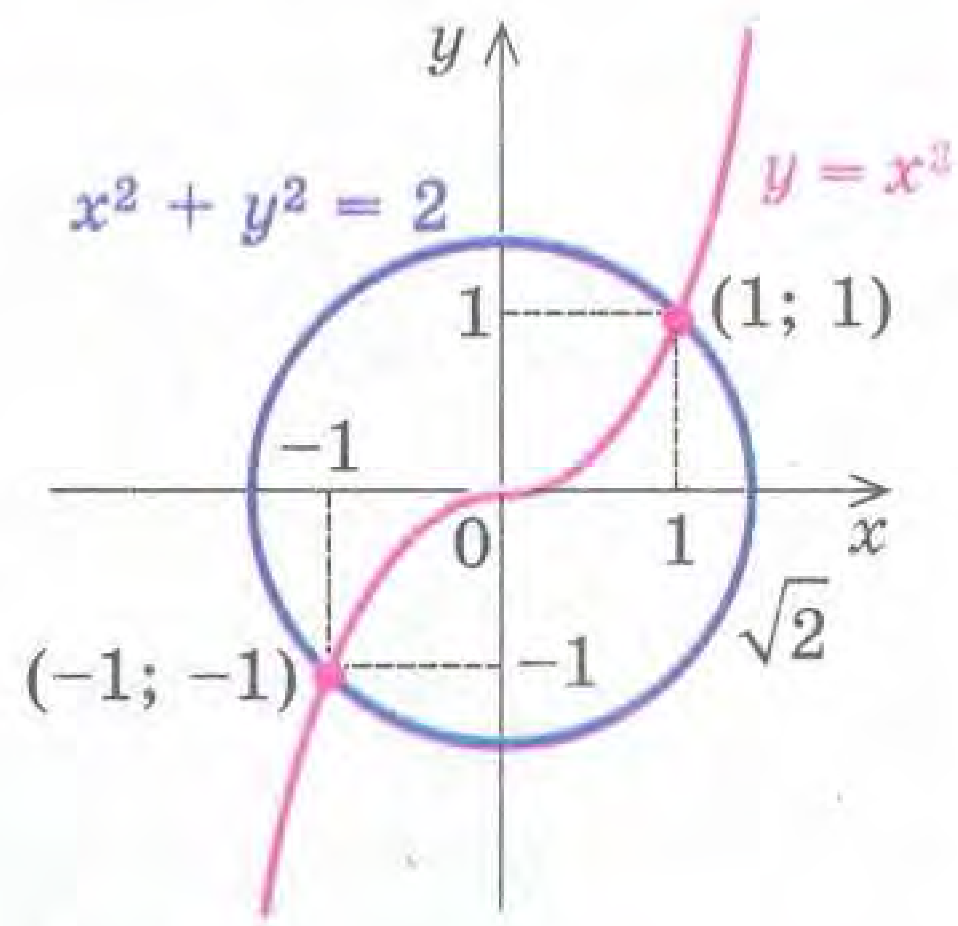
x	0	1
y	3	2

Графіки перетинаються в точці M (2; 1). Отже, пара чисел (2; 1) — єдиний розв'язок заданої системи.

Відповідь: (2; 1). ◁

2. Розв'яжіть графічно систему $\begin{cases} x^2=2-y^2, \\ x^3-y=0. \end{cases}$

Розв'язання. ▶ Задана система рівносильна системі $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ y=x^3. \end{cases}$



Графік першого рівняння системи — коло радіуса $\sqrt{2}$ з центром у початку координат, а графік другого — кубічна парабола $y = x^3$. Ці два графіки перетинаються у двох точках з координатами (−1; −1) і (1; 1).

Відповідь: (−1; −1), (1; 1) — розв'язок системи. ◁

Пояснення й обґрунтування

1. Загальні методи розв'язування рівнянь і нерівностей детально розглянуто в підручнику для 10 класу (див. у розділі 1 пп.: «Рівняння-наслідки та рівносильні перетворення рівнянь», «Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь», «Нерівності: рівносильні перетворення та загальний метод інтервалів», «Рівняння і нерівності, що містять знак модуля», «Рівняння і нерівності з параметрами», «Многочлени. Корені многочлена. Формули Вієта. Знаходження раціональних коренів многочлена з цілими коефіцієнтами»). Там же було розглянуто і відповідні орієнтири для використання цих загальних методів, які подано в табл. 42. (Нагадаємо, що загальні методи, пов'язані із застосуванням властивостей функцій до розв'язування рівнянь, також розглянуто в цьому підручнику в табл. 27 на с. 251, а з використанням похідної — у табл. 16 на с. 136.)

Розгляд усіх рівнянь і нерівностей з кожної теми в 10 та 11 класах проводився з використанням загальних методів розв'язування (див., наприклад, § 17). До них, за необхідності, долучалися спеціальні прийоми розв'язування для деяких типів рівнянь чи нерівностей (див., наприклад, схему розв'язування показникових рівнянь у табл. 19 на с. 178).

Аналогічно можна організувати пошук плану розв'язування рівняння або нерівності.

1. Спочатку *обрати загальний спосіб розв'язування рівняння або нерівності та згадати орієнтири для його реалізації* (див. пп. 4 і 6 табл. 42). Наприклад, якщо для розв'язування рівняння ви вирішили використати рівняння-наслідки, то в кінці обов'язково доведеться виконати перевірку одержаних коренів (і, оформляючи розв'язання, записати або саму перевірку, або речення типу «Перевірка показує, що $x = ...$ — корінь, а $x = ...$ — сторонній корінь», яке свідчить, що перевірку ви виконали усно).
2. *Для виконання перетворень заданого рівняння (нерівності) використати відповідні формули* (залежно від виду рівняння або нерівності) *чи властивості відповідних функцій або спеціальні орієнтири чи теореми,* які розглядали під час розв'язування рівнянь і нерівностей певного виду (цілі, дробові, ірраціональні, показникові, логарифмічні, тригонометричні).

Нагадаємо, що з означення рівняння-наслідку (*якщо кожен корінь першого рівняння є коренем другого, то друге рівняння називають наслідком першого*) одержуємо орієнтир: **для того щоб одержати рівняння-наслідок, достатньо розглянути задане рівняння як правильну числову рівність і гарантувати** (тобто мати можливість обґрунтувати), **що кожне наступне рівняння буде правильною числовою рівністю.**

Дійсно, якщо дотримуватися цього орієнтира, то, розглянувши задане рівняння як правильну числову рівність, ми фактично підставимо в перше рівняння замість змінної його корінь. Друге рівняння теж є правильною числовою рівністю, тоді розглянутий корінь першого рівняння є коренем і другого рівняння. Це означає, що друге рівняння є наслідком першого. Оскільки **в результаті використання рівнянь-наслідків можлива поява сторонніх коренів, то перевірка підстановкою коренів у початкове рівняння є складовою розв'язування** (див. розв'язання рівняння $\sqrt{x+2}=x$ за допомогою рівнянь-наслідків у п. 2 табл. 42).

Аналогічний орієнтир для рівносильних перетворень рівнянь і нерівностей було отримано в курсі 10 класу:

для виконання рівносильних перетворень рівнянь або нерівностей (див. означення в п. 3 табл. 42) *достатньо*:

1. Урахувати ОДЗ заданого рівняння (нерівності).

2. Стежити за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильної рівності (нерівності).

Міркуючи, як і у випадку орієнтира для рівнянь-наслідків, одержуємо таке. Якщо дотримуватися наведеного орієнтира, то на ОДЗ кожен розв'язок першого рівняння (нерівності) буде розв'язком другого (другої), і навпаки, кожен розв'язок другого рівняння (нерівності) буде розв'язком першого (першої), тобто на ОДЗ розглянуті рівняння (нерівності) будуть рівносильні. (Приклад використання цього орієнтира для розв'язування рівнянь і доведення теорем про рівносильність рівнянь наведено на с. 211, 212, а для розв'язування нерівностей — на с. 224, 225.)

Іноді зручно виконувати рівносильні перетворення не на всій ОДЗ, а тільки на тій її частині, де знаходяться корені заданого рівняння (чи розв'язки нерівності).

Наприклад, для розв'язування рівняння

$$\sqrt{x+2}=x \qquad (1)$$

оберемо рівносильні перетворення.

ОДЗ рівняння (1): $x + 2 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant -2$. На цій ОДЗ права частина рівняння (1) може бути і додатною, і від'ємною. Тому при піднесенні обох частин рівняння до квадрата ми можемо гарантувати тільки правильність прямих перетворень (якщо числа рівні, то і квадрати їх обов'язково будуть рівні), а обернених — ні (якщо $a^2 = b^2$, то не обов'язково виконується рівність $a = b$, наприклад, $2^2 = (-2)^2$, але $2 \neq -2$).

Спробуємо розглянути не всю ОДЗ, а тільки ту її частину, де знаходяться корені заданого рівняння.

Для всіх коренів рівняння (1) має виконуватися умова $x \geqslant 0$ (*) (оскільки при підстановці кореня рівняння (1) перетворюється на правильну рівність, у якій ліва частина невід'ємна, отже, для всіх коренів і права частина буде невід'ємною).

За умови (*) *обидві частини рівняння* (1) *невід'ємні, і при піднесенні до квадрата ми одержуємо рівносильне рівняння* (оскільки для невід'ємних значень аргументу функція $y = t^2$ є зростаючою і кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргументу, то при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, якщо $a^2 = b^2$, обов'язково виконується рівність $a = b$):

$$x + 2 = x^2. \tag{2}$$

Для всіх коренів рівняння (2) його права частина $x^2 \geqslant 0$, тоді й ліва частина буде невід'ємна: $x + 2 \geqslant 0$. Це означає, що для всіх коренів рівняння (2) ОДЗ рівняння (1) виконується автоматично і його можна не записувати до розв'язання (але потрібно вміти пояснювати, чому не записали), а записувати і враховувати тільки обмеження (*).

Тоді $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = 2$ — корінь (задовольняє умову (*)), $x_2 = -1$ — сторонній корінь (не задовольняє умову (*)).

Відповідь: 2.

Зауваження 1. Наведене розв'язання можна записати також за допомогою знака рівносильності ($\Leftrightarrow$) так:

$$\sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x+2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x_1 = -1 \text{ або } x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Зауваження 2. У наведених вище міркуваннях щодо розв'язування рівняння (1) ми фактично обґрунтували теорему (наведену і обґрунтовану в підручнику для 10 класу):

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g^2(x), \end{cases} \tag{3}$$

яку можна використовувати під час розв'язування ірраціональних рівнянь виду $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

2. Системи рівнянь і нерівностей. З поняттям системи рівнянь і нерівностей, її розв'язку та з основними методами розв'язування систем рівнянь, поданими в табл. 44, ви знайомі з курсу алгебри 7–9 класів (і використовували їх під час розв'язування систем у 10–11 класах). Нагадаємо, що аналогічно до відповідних понять, пов'язаних з рівняннями або нерівностями, уводять поняття області допустимих значень системи рівнянь або нерівностей (див. п. 3 табл. 44), поняття систем-наслідків для рівнянь (п. 2 табл. 44) та рівносильних систем рівнянь і нерівностей (п. 3 табл. 44).

Усі наведені означення відносяться не тільки до систем рівнянь або систем нерівностей, а й до змішаних систем, до яких входять і рівняння, і нерівності.

З означення *системи-наслідку* для системи рівнянь (*якщо кожний розв'язок першої системи рівнянь є розв'язком другої, то другу систему називають наслідком першої*) випливає такий орієнтир:

для того щоб одержати систему-наслідок, достатньо розглянути задану систему рівнянь як систему правильних числових рівностей і гарантувати (тобто мати можливість обґрунтувати), що кожну наступну систему рівнянь можна одержати як систему правильних числових рівностей.

Дійсно, якщо дотримуватися цього орієнтира, то кожен розв'язок першої системи перетворює всі рівняння системи на правильні числові рівності. Але тоді друга система теж міститиме всі правильні числові рівності, тобто розглядувані значення змінної (або впорядковані набори декількох змінних) є розв'язком і другої системи, а це й означає, що друга система є наслідком першої. Також слід ураховувати, що **при використанні систем-наслідків можлива поява сторонніх розв'язків, і тому перевірка підстановкою розв'язків у початкову систему є складовою розв'язування** (див. приклад у п. 2 табл. 42).

Аналогічно обґрунтовується, що *при рівносильних перетвореннях систем рівнянь чи нерівностей* необхідно враховувати ОДЗ заданої системи і гарантувати для всіх рівнянь збереження правильних рівностей на кожному кроці розв'язування (а для систем нерівностей — збереження правильних нерівностей) як при прямих перетвореннях, так і при зворотних. Цей орієнтир дозволяє обґрунтувати найпростіші властивості рівносильних систем рівнянь і нерівностей, які наведено в п. 3 табл. 44 (проведіть таке обґрунтування самостійно).

Для розв'язування деяких систем іноді вдається використати властивості функцій (див., наприклад, с. 143). Слід також пам'ятати, що для розв'язування деяких рівнянь, нерівностей та їх систем буває зручно ввести *заміну змінних* (див., наприклад, розв'язання рівняння в п. 5 табл. 42, нерівності — у п. 3 табл. 20 на с. 186, системи — на с. 183, 184).

Іноді при розв'язуванні рівнянь і нерівностей доводиться переходити не тільки до рівносильних систем рівнянь чи нерівностей (див., наприклад, формулу (2)), а й до *сукупностей рівнянь або нерівностей* (або їх систем).

Розв'язати сукупність рівнянь (нерівностей) чи їх систем — **значить знайти такі значення змінної** або такі набори значень змінних (якщо змінних декілька), **кожне з яких є розв'язком хоча б одного з рівнянь (нерівностей)**, що входять до сукупності, і **при цьому решта рівнянь (нерівностей) визначена**, або довести, що таких наборів чисел не існує.

З цього означення випливає, що *областю допустимих значень (ОДЗ) сукупності є спільна область визначення для всіх функцій, які входять до запису сукупності.*

Як і для рівнянь, нерівностей або їх систем **дві сукупності рівнянь (нерівностей або їх систем) називають рівносильними на деякій множині, якщо вони на цій множині мають однакові розв'язки.** Інакше кажучи, кожний розв'язок першої сукупності на цій множині є розв'язком другої, і навпаки, кожний розв'язок другої є розв'язком першої.

Сукупність рівнянь, нерівностей чи їх систем записують, користуючися сполучником «або». Можна також використовувати спеціальний знак сукупності «[».

Наприклад, рівняння $\sqrt{2x+2}\,(x^2+3x-4)=0$ на його ОДЗ: $2x+2 \geqslant 0$ рівносильне сукупності

$$\sqrt{2x+2}=0 \tag{4}$$

або

$$x^2+3x-4=0. \tag{5}$$

Рівняння (4) має корінь $x=-1$, який входить до ОДЗ заданого рівняння (тоді рівняння (5) визначене). А рівняння (5) має корені: $x_1=1$ — входить до ОДЗ заданого рівняння (тоді рівняння (4) визначене) і $x_2=-4$ — не входить до ОДЗ заданого рівняння (тоді рівняння (4) не визначене). Таким чином, розв'язком розглянутої сукупності (а отже, і коренями заданого рівняння) є тільки $x=-1$ та $x=1$.

Розглянуте розв'язання можна записувати, використовуючи значки рівносильності, сукупності та системи. Наведемо декілька можливих способів такого запису (проаналізуйте кожен із цих способів), але таке оформлення запису розв'язання не є обов'язковим.

<u>I спосіб</u>

$$\sqrt{2x+2}\,(x^2+3x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+2}=0,\\ x^2+3x-4=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+2}=0,\\ \left\{\begin{array}{l}x^2+3x-4=0,\\ 2x+2\geqslant 0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=1.\end{array}\right.$$

<u>II спосіб</u>

$$\sqrt{2x+2}\,(x^2+3x-4)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x+2\geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+2}=0,\\ x^2+3x-4=0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\geqslant -2,\\ \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=1,\\ x=-4\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=1.\end{array}\right.$$

<u>III спосіб</u>

$$\sqrt{2x+2}\,(x^2+3x-4)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x+2\geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+2}=0,\\ x^2+3x-4=0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x+2\geqslant 0,\\ \sqrt{2x+2}=0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+2\geqslant 0,\\ x^2+3x-4=0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ \left\{\begin{array}{l}x\geqslant -2,\\ \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-4\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=1.\end{array}\right.$$

3. Рівняння і нерівності з параметрами. Розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами детально розглянуто в курсі 10 класу. Для розв'язування таких завдань часто доводиться розбивати область допустимих значень параметра на такі проміжки, що при зміні параметра всередині вибраного проміжку одержуємо рівняння, які можна розв'язати одним і тим самим методом (і розв'язки через параметри записують однаково). Методи розв'язування завдань з параметрами такі самі, як і методи розв'язування аналогічних рівнянь, нерівностей або їх систем без параметрів. Нагадаємо *орієнтир*, який ми використовували для розбиття області допустимих значень параметра на проміжки.

Будь-яке рівняння (нерівність) з параметрами розв'язують як звичайне рівняння (нерівність), до тих пір, поки всі перетворення або міркування, необхідні для розв'язання, можливо виконати однозначно. Якщо якесь перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язування потрібно розбити на кілька випадків, щоб у кожному з них відповідь через параметри можна було записати однозначно.

Приклад Розв'яжіть рівняння $ax+1=\frac{4a+2}{x}$, де x — змінна.

Розв'язання	*Коментар*
► ОДЗ: $x \neq 0$.	Вирази, які стоять в обох частинах рівняння, існують тоді й тільки тоді, коли знаменник дробу не дорівнює нулю.
$ax^2 + x - (4a + 2) = 0.$	Помножимо обидві частини даного рівняння на вираз x — спільний знаменник дробів — і одержимо ціле рівняння, яке за умови $x \neq 0$ (тобто на ОДЗ даного рівняння) рівносильне даному.
1) При $a = 0$ одержуємо лінійне рівняння $x - 2 = 0$. Звідси $x = 2$.	При $a = 0$ дане рівняння не є квадратним. Підставляємо $a = 0$ в дане рівняння і розв'язуємо одержане рівняння (з урахуванням ОДЗ).
2) При $a \neq 0$ розв'язуємо квадратне рівняння: $D = 1 + 4a(4a + 2) = 16a^2 + 8a + 1 = (4a + 1)^2$; $x_{1,2} = \frac{-1 \pm (4a+1)}{2a}$. Тоді $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{2a+1}{a}$. Ураховуємо ОДЗ: $x_1 = 2$ — корінь (входить до ОДЗ) при будь-яких значеннях a.	При $a \neq 0$ маємо квадратне рівняння. Знаходимо його дискримінант. Для обчислення доцільно записати загальну формулу для двох коренів (у цьому випадку знак модуля можна не записувати). Перш ніж дати відповідь, слід обов'язково з'ясувати, чи входять одержані значення коренів до ОДЗ даного рівняння.

Оскільки $x_2 = 0$ при $a = -\frac{1}{2}$, то при цьому значенні параметра $x_2 = 0$ не є коренем даного рівняння (проте його коренем є $x_1 = 2$). При $a \neq -\frac{1}{2}$ значення $x_2 = -\frac{2a+1}{a}$ є коренем рівняння.

Відповідь: 1) при $a = 0$ або $a = -\frac{1}{2}$

$x = 2$;

2) при $a \neq 0$ і $a \neq -\frac{1}{2}$

$x_1 = 2,\ x_2 = -\frac{2a+1}{a}$. ◁

Для кореня x_2 спочатку слід визначити, при яких значеннях параметра a його значення потрапляють до заборонених ($x = 0$). Потім можна дати відповідь для знайденого $a = -\frac{1}{2}$ і для всіх інших значень a $\left(\text{урахувавши, що при } a = 0 \text{ одержали такий самий розв'язок, як і при } a = -\frac{1}{2}\right)$.

У дослідницьких завданнях з параметрами розв'язування заданих рівнянь або нерівностей часто буває дуже складним або неможливим. У таких випадках корисно пам'ятати деякі спеціальні **прийоми дослідження завдань з параметрами** (табл. 45).

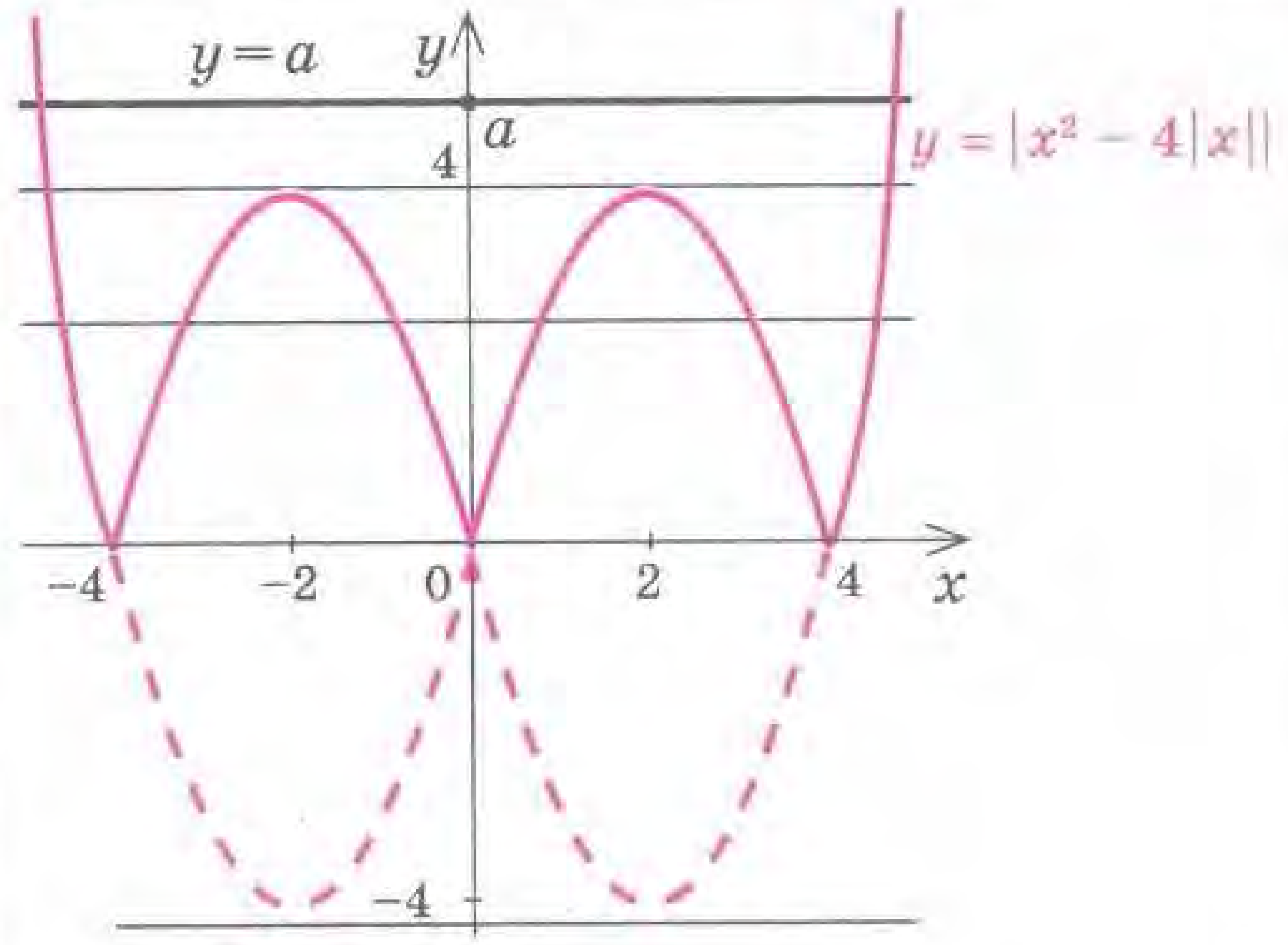
Таблиця 45

1. Дослідження кількості розв'язків рівнянь з параметрами
Орієнтир
Якщо в завданні з параметрами йдеться про кількість розв'язків рівняння (нерівності або системи), то часто для аналізу даної ситуації буває зручним використати графічну ілюстрацію розв'язування.
Особливості використання орієнтира
Дослідження є простим у тому разі, коли дане рівняння можна подати у вигляді $f(x) = a$, оскільки графік функції $y = a$ — це пряма, що паралельна осі Ox і перетинає вісь Oy у точці a. Замінюючи дане рівняння на рівняння $f(x) = a$, потрібно слідкувати за рівносильністю виконаних перетворень, щоб одержане рівняння мало ті самі корені, що й дане. Тоді й кількість коренів у них буде однаковою. Для того щоб визначити, скільки коренів має рівняння $f(x) = a$, достатньо знайти, скільки точок перетину має графік функції $y = f(x)$ з прямою $y = a$ при різних значеннях параметра a. (Для цього на відповідному рисунку доцільно зобразити всі характерні положення прямої.)

Продовження табл. 45

Приклад

Скільки коренів має рівняння $|\,x^2 - 4\,|\,x\,|\,| = a$ залежно від значення параметра a?

План	*Розв'язання*
1. Будуємо графік функції $y = |\,x^2 - 4\,|\,x\,|\,|$ (ураховуючи, що $x^2 = |\,x\,|^2$), наприклад, так: $x^2 - 4x \to |\,x\,|^2 - 4\,|\,x\,| \to \to |\,x^2 - 4\,|\,x\,|\,|$. 2. Будуємо графік функції $y = a$. 3. Аналізуємо взаємне розташування одержаних графіків: *кількість коренів рівняння $f(x) = a$ дорівнює кількості точок перетину графіка функції $y = f(x)$ із прямою $y = a$.* 4. Записуємо відповідь.	 *Відповідь:* 1) при $a < 0$ немає коренів; 2) при $a = 0$ три корені; 3) $a > 4$ два корені; 4) при $a = 4$ чотири корені; 5) при $a < 0 < 4$ шість коренів.

2. Використання парності функцій, що входять до запису рівняння

Орієнтир

Якщо в рівнянні $f(x) = 0$ функція $f(x)$ є парною або непарною, то разом з будь-яким коренем α можна вказати ще один корінь цього рівняння $(-\alpha)$.

Приклад

Знайдіть усі значення параметра a, при яких має єдиний корінь рівняння

$$a^2 \cos^2 x - x^2 - a = 0. \qquad (1)$$

Розв'язання	*Коментар*
▶ Функція $f\ (x) = a^2 \cos^2 x - x^2 - a$ є парною ($D\ (f) = \boldsymbol{R}$, $f\ (-x) = f\ (x)$). Отже, єдиним коренем даного рівняння може бути тільки $x = 0$.	Помічаємо, що в лівій частині рівняння (1) стоїть парна функція, і використовуємо орієнтир. Дійсно, якщо $x = \alpha$ — корінь рівняння $f\ (x) = 0$, то $f\,(\alpha) = 0$ — правильна числова рівність.

Закінчення табл. 45

Якщо $x = 0$, то з рівняння (1) одержуємо $a^2 - a = 0$, тобто $a(a-1) = 0$. Звідси $a = 0$ або $a = 1$. При $a = 0$ рівняння (1) перетворюється на рівняння $x^2 = 0$, яке має єдиний корінь $x = 0$. Отже, $a = 0$ задовольняє умові задачі. При $a = 1$ маємо рівняння $\cos^2 x - x^2 - 1 = 0$, тобто $\cos^2 x = 1 + x^2$. (2) Оскільки $\cos^2 x \leqslant 1$, а $1 + x^2 \geqslant 1$, то рівняння (2) рівносильне системі $\begin{cases} \cos x^2 = 1, \\ 1 + x^2 = 1. \end{cases}$ З другого рівняння системи одержуємо $x = 0$, що задовольняє і перше рівняння. Отже, ця система, а значить, і рівняння (2) мають єдиний розв'язок $x = 0$. Таким чином, $a = 1$ також задовольняє умові задачі. *Відповідь:* $a = 0$, $a = 1$. ◁	Ураховуючи парність функції $f(x)$, маємо $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$. Отже, $x = -\alpha$ — також корінь рівняння $f(x) = 0$. Єдиний корінь у цього рівняння може бути тільки тоді, коли корені α і $-\alpha$ збігаються. Звідси $x = \alpha = -\alpha = 0$. З'ясуємо, чи існують такі значення параметра a, при яких $x = 0$ є коренем рівняння (1). (Це $a = 0$ і $a = 1$.) Оскільки значення $a = 0$ і $a = 1$ ми одержали за умови, що $x = 0$ — корінь рівняння (1), то необхідно перевірити, чи дійсно при цих значеннях a дане рівняння матиме єдиний корінь. Щоб розв'язати рівняння (2), оцінимо значення його лівої і правої частин: $f(x) = \cos^2 x$, $g(x) = 1 + x^2$. $\underbrace{\cos^2 x}_{\boxed{0 \leqslant f(x) \leqslant 1}} = \underbrace{1 + x^2}_{\boxed{g(x) \geqslant 1}} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x^2 = 1, \\ 1 + x^2 = 1. \end{cases}$

Запитання для контролю

1. Що називають розв'язком: а) рівняння; б) нерівності; в) системи рівнянь або нерівностей; г) сукупності рівнянь або нерівностей? Наведіть приклади.
2. Дайте означення області допустимих значень (ОДЗ): а) рівняння; б) нерівності; в) системи рівнянь або нерівностей; г) сукупності рівнянь або нерівностей.
3. Дайте означення системи-наслідку даної системи рівнянь. Наведіть приклади.
4. Дайте означення рівносильності: а) рівнянь; б) нерівностей; в) систем рівнянь або нерівностей; г) сукупностей рівнянь або нерівностей. Наведіть приклади рівносильних перетворень. Поясніть, чому виконані перетворення є рівносильними.
5. Назвіть основні методи розв'язування: а) рівнянь; б) нерівностей; в) систем рівнянь та нерівностей і наведіть приклади їх використання.

Вправи

Розв'яжіть рівняння (1–32).

1. 1) $x=\sqrt{3x+40}$; 2) $x=\sqrt{10x+24}$;

3) $x=\sqrt{5x+36}$; 4) $x=\sqrt{3x+28}$.

2. 1) $\sqrt{10-x}=4-x$; 2) $\sqrt{x-1}=x-3$;

3) $\sqrt{1+x}=2x-4$; 4) $\sqrt{x+7}=4x-5$;

5) $x+3\sqrt{x-5}=5$; 6) $x+2\sqrt{x-6}=6$;

7) $\sqrt{x^4-3x-1}=x^2-1$; 8) $\sqrt{x^4+x-9}=x^2-1$;

9) $\sqrt{x(x-2)(x+3)}=3-x$; 10) $\sqrt{x(x+4)(x-3)}=6-x$.

3. 1) $\sqrt{3x+3}=2x-3$; 2) $\sqrt{3x+2}=2x-4$;

3) $x+1=2-\sqrt{x-1}$; 4) $1-\sqrt{x-2}=x-1$.

4. 1) $x^2-13x+30=\left(\sqrt{3x-18}\right)^2$; 2) $x^2-9x+13=\left(\sqrt{5x-35}\right)^2$;

3) $x^2-8x+10=\left(\sqrt{7x-40}\right)^2$; 4) $x^2-15x+55=\left(\sqrt{x-8}\right)^2$.

5. 1) $\sqrt{3x-5}=3-2x$; 2) $\sqrt{4x^2+4x+1}=x^2+x-1$;

3) $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$;

4*) $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$.

6. 1) $\sqrt{y-1}=6-y$; 2) $\sqrt{x+1}=4-x$;

3) $\sqrt{2x^2-8x+5}=x-2$; 4) $\sqrt{2x^2-8x+6}=x-2$.

7. 1) $5\sqrt{x-2}+3\sqrt{x+1}+2x=17$; 2) $\sqrt{3x-2}+2\sqrt{x-1}+5x=14$.

8. 1) $\sin 2x=\sqrt{3}\cos x$; 2) $\sin 2x=\sqrt{2}\cos x$.

9. 1) $\sin 2x+\sqrt{2}\sin x=0$.

Укажіть усі корені, які належать відрізку $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$;

2) $\sin 2x+\sqrt{3}\cos x=0$. Укажіть усі корені, які належать відрізку $[-\pi; 2\pi]$.

10. 1) $\sin(0{,}5\pi+x)+\sin 2x=0$; 2) $\cos(0{,}5\pi+x)+\sin 2x=0$.

11. 1) $\sin 4x+\sqrt{3}\sin 3x+\sin 2x=0$; 2) $\cos 3x+\sin 5x=\sin x$.

12*. 1) $\sin 2x+\operatorname{tg} x=2$; 2) $\sin x+\sin 3x=4\cos^3 x$;

3) $\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^2 x=16\cos 2x$.

13. 1) $\sin 2x = \cos x$; 2) $\cos 2x = \sin x$.

14. 1) $\sqrt{3}\sin^2 x + 0{,}5\sin(\pi + 2x) = 0$; 2) $\sqrt{3}\cos^2 x - 0{,}5\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = 0$.

15*. 1) Знайдіть усі розв'язки рівняння $\cos 2x = 2\operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x$, які задовольняють нерівність $\cos x < \frac{1}{2}$;

2) Знайдіть усі розв'язки рівняння $4\sin^4 x + \sin^2 2x = 2\operatorname{ctg}^2 x$, які задовольняють нерівність $\cos x < -\frac{1}{2}$.

16. Знайдіть усі розв'язки рівняння:

1) $\cos x + \cos 5x - \cos 2x = 0$, які належать відрізку $[-\pi;\pi]$;

2) $\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} x} + \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x} + 2 = 0$, які належать відрізку $[0;\ 2\pi]$.

17. 1) $3\cos 2x + 4\sin x = 1$;

2) $\cos x - \cos 2x - \sin 2x = 1$, $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right]$;

3) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}\sin x$.

18. 1) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = 2\operatorname{ctg} x$;

3) $\cos x + \cos 3x = \sqrt{3}\cos 2x$.

19. 1) $\left|x - \frac{3}{7}\right| = \frac{2}{7}$; 2) $\left|x - \frac{5}{8}\right| = \frac{3}{5}$.

20. 1) $|14 - x| = x^2 - 196$; 2) $|16 - x| = x^2 - 256$;
3) $|19 - x| = x^2 - 361$; 4) $|17 - x| = x^2 - 289$.

21. 1) $x^2 + 1 + |x - 1| = 2|x|$; 2) $x^2 + 1 + |x + 1| = 2|x|$.

22. 1) $x^2 - 6|x| - 2 = 0$; 2) $x^2 + 4|x| - 1 = 0$;
3) $|x^2 - 2x - 1| - x + 1 = 0$; 4) $|x^2 - 2x - 1| + x - 4 = 0$;
5) $\frac{x}{|x|} + x = x^2 + 1$; 6) $\frac{|x|}{x} + 2x = x^2 + 1$.

23. 1) $|x^2 - 8x + 15| = |15 - x^2|$; 2) $|2x + 3| = x^2$.

24*. 1) $\left|\cos x - \frac{1}{2}\right| = \sin x - \frac{1}{2}$; 2) $\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| = \cos x - \frac{1}{2}$;

3) $|\cos x| - \sqrt{3}\sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = 1$.

25*. 1) $\sqrt{|2x+1|}=1-2|x|$; 2) $\sqrt{|1-3x|}=1-3|x|$.

26. 1) $(2x-7)\sqrt{3x^2-5x-2}=0$; 2) $(2x-3)\sqrt{4x^2-5x-9}=0$;

3) $(3x^2-8x-11)\sqrt{3x-5}=0$; 4) $(4x^2+3x-22)\sqrt{3x-15}=0$.

27. 1) $\left(7\sin x-4\sqrt{3}\right)\left(7\sin x-5\sqrt{2}\right)=0$;

2) $\left(5\cos x-3\sqrt{3}\right)\left(5\cos x-2\sqrt{6}\right)=0$.

28*. 1) $\left(\sin x+\cos x-\sqrt{2}\right)\sqrt{-11x-x^2-30}=0$;

2) $\left(\cos x+\sin x+\sqrt{2}\right)\sqrt{-x^2-7x-12}=0$.

29*. 1) $(2\sin^2 x-3\sin x+1)\sqrt{\operatorname{tg} x}=0$;

2) $(2\cos^2 x-\cos x-1)\sqrt{\operatorname{ctg} x}=0$;

3) $\sqrt{4x-x^2-3}\left(\sqrt{2}\cos x-\sqrt{1+\cos 2x}\right)=0$.

30*. 1) $\arcsin\dfrac{6x-7}{2x-3}=2\pi-\pi x$; 2) $x^2-\cos 2x^2+1=0$.

31*. 1) $\log_{\sin x}(3\sin x-\cos x)=0$; 2) $\sqrt[3]{\dfrac{2+x}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{2-6x}{x}}=1$.

32*. Знайдіть найбільший корінь рівняння:

1) $\left(\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}\right)^x=8$;

2) $\left(2\sqrt{3}-2\right)^x+2^{x+1}=2\left(\sqrt{3}+1\right)^x$.

Розв'яжіть нерівність **(33–57)**.

33. 1) $3x^2+2x+1\geqslant 0$; 2) $-x^2+2x-3>0$.

34. 1) $x^3-3x-2<0$; 2) $x^3-3x^2+4>0$.

35. 1) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}<0$; 2) $\dfrac{x^2-6x+18}{-x^2+8x-12}>0$.

36. 1) $\dfrac{3}{x-2}\geqslant x$; 2) $x\geqslant\dfrac{2}{x-1}$; 3) $\dfrac{x^2-1}{x+5}<1$; 4) $\dfrac{2x-1}{x-3}<x+3$.

37. 1) $\dfrac{5}{2-x}>1+\dfrac{3}{x+2}$; 2) $\dfrac{5}{x+4}<1+\dfrac{1}{4-x}$;

3) $\dfrac{2}{3-x}>1-\dfrac{3}{x+2}$; 4) $\dfrac{7}{x+5}<1+\dfrac{2}{5-x}$.

38. 1) $\sqrt{12x-11}<\sqrt{10x-9}$; 2) $\sqrt{11x-9}<\sqrt{9x-7}$;
3) $\sqrt{10x-7}<\sqrt{9x-5}$; 4) $\sqrt{10x-9}<\sqrt{8x-7}$.

39. 1) $\sqrt{x^2-9}<14-2x$; 2) $\sqrt{x^2-6x}<8+2x$;
3) $2-3x<\sqrt{4+9x-9x^2}$; 4) $4-5x<\sqrt{16+30x-25x^2}$.

40*. 1) $\sqrt{3-x}>x-2$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}>2$.

41*. 1) $\dfrac{5x-3}{\sqrt{7x-4}}<1$; 2) $\dfrac{3x-2}{\sqrt{5x-2}}<1$; 3) $\sqrt{x^2-8x+12}\geqslant x-5$.

42. 1) $3\log_8(3x+2)<2$; 2) $4\log_{16}(4x+3)<3$;
3) $\log_{\frac{\sqrt{10}}{3}}(1-3x)>2$; 4) $\log_{\frac{\sqrt{6}}{3}}(2x-1)>2$;
5) $\log_{0,5}(3-2x)>-\log_{0,5}3$; 6) $\log_2(2x-5)<-\log_2 3$.

43. 1) $\log_{0,4}(3,5-5x)>2\log_{0,4}0,2-1$; 2) $1+2\log_2 0,3>\log_2(1,5-3x)$.

44*. 1) $\log_{\sqrt{2}}(5^{x+1}-25^x)\leqslant 4$; 2) $\log_{\sqrt{6}}(7^{x+1}-49^x)\leqslant 2$;
3) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)\geqslant -2$; 4) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2^{x+2}-4^x)\geqslant -2$.

45. 1) $\operatorname{tg}3x>0$; 2) $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)<1$; 3) $\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;
4) $\operatorname{ctg}2x\leqslant 0$; 5) $\operatorname{ctg}\left(2x-\dfrac{4\pi}{3}\right)>\sqrt{3}$; 6) $\operatorname{ctg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\geqslant 1$.

46*. 1) $5\sin x-\sin 2x>0$; 2) $5\cos x+\sin 2x<0$.

47*. 1) $2\sin x-1\leqslant\sqrt{6\sin^2 x-6\sin x-12}$; 2) $16\sin^2 x+\operatorname{ctg}^2 x\leqslant 7$;
3) $16\sin^2 x+9\operatorname{ctg}^2 x\leqslant 15$.

48. 1) $2x>|x|+1$; 2) $x^2-6\geqslant|x|$;
3) $\dfrac{4}{|x+2|}\geqslant 3-x$; 4) $\dfrac{3}{|x-1|}\geqslant 2x+5$.

49*. 1) $\dfrac{4|2-x|}{4|x|}-|x-2|\leqslant 0$; 2) $|1-x|+\dfrac{4|1-x|}{|x|-3}\geqslant 0$;
3) $|x^2-8x+15|\leqslant|15-x^2|$.

50*. 1) $\dfrac{4^{\frac{1}{x}}-4}{2+x}<0$; 2) $\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-2}{x-2}>0$; 3) $\dfrac{2^{-\frac{1}{x}}-2}{x+2}<0$.

51. 1) $(x^2-9)\sqrt{x+6}>0$; 2) $(16-x^2)\sqrt{8-x}<0$;
3) $\sqrt{x^2-9}\,(x+8)>0$; 4) $(x-4)\sqrt{x^2-4}<0$.

52. 1) $(x-2)(x-3)\sqrt{x-1} \leqslant 0$; 2) $(x+2)(x+3)\sqrt{x+11} \leqslant 0$;

3) $(x-4)(x+3)\sqrt{x} \geqslant 0$; 4) $(x-8)(x+7)\sqrt{x} \geqslant 0$.

53. 1) $\dfrac{\sqrt{6+5x-x^2}}{x-2} < 0$; 2) $\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x-2} < 0$; 3) $\dfrac{\sqrt{4-3x-x^2}}{x+3} > 0$;

4) $\dfrac{1-x}{\sqrt{2+x-x^2}} < 0$; 5) $\dfrac{3x+2}{\sqrt{2-x-x^2}} > 0$; 6) $\dfrac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}} < 0$.

54. 1) $\dfrac{|x-4|-\sqrt{x-2}}{4\sqrt{10-x}+x-13} \geqslant 0$; 2) $\dfrac{x-11+5\sqrt{7-x}}{|x-1|-\sqrt{x+1}} \leqslant 0$;

3) $\dfrac{|x-5|-\sqrt{x-3}}{2\sqrt{11-x}+x-12} \geqslant 0$; 4) $\dfrac{x+2-7\sqrt{6-x}}{|x-3|-\sqrt{x+3}} \leqslant 0$.

55*. 1) $2^x + 2^{|x|} \geqslant 2\sqrt{2}$; 2) $3^x + 3^{|x|} \leqslant 3$;

3) $3\cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10\cdot 2^{\sqrt{2-x}}$; 4) $2\cdot 9^{\sqrt{3-x}} + 2 < 5\cdot 3^{\sqrt{3-x}}$.

56*. 1) $\dfrac{\lg(8-x)}{\lg(x-2)^2} \leqslant 1$; 2) $\dfrac{\lg(2x+9)}{\lg(2x+3)^2} \leqslant 1$;

3) $\dfrac{\lg\left(\dfrac{x}{2}+9\right)}{\lg\left(\dfrac{x}{2}+3\right)^2} \leqslant 1$; 4) $\dfrac{\lg\left(\dfrac{x}{3}+5\right)}{\lg\left(\dfrac{x}{3}-1\right)^2} \leqslant 1$.

57*. 1) $\dfrac{\log_2 x-3}{6\log_x 2-1} \leqslant 2$; 2) $\log_{(x-2)} x \leqslant \log_{(x-2)} 4$.

Розв'яжіть систему рівнянь (58–62).

58. 1) $\begin{cases} x-3y^2=8, \\ x+4y^2=15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-5y^2=10, \\ x+3y^2=18; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-7y^2=9, \\ x+2y^2=18; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-2y^2=12, \\ x+7y^2=21. \end{cases}$

59. 1) $\begin{cases} 4^{2y}+3^{2x}=82, \\ 3^x-4^y=8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^y+5^{2x}=26, \\ 5^x-3^{0,5y}=4. \end{cases}$

60. 1) $\begin{cases} 3^{x^2-2xy}=1, \\ 2\log_3(y+2)=\log_3(5x-2); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{y^2-3xy}=1, \\ 2\log_2(x+1)=\log_2(3y-5). \end{cases}$

61. 1) $\begin{cases} 2^{y-3} = 8^{x-2}, \\ 2\log_3 (y-x) - \log_3 x = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^y = 4^{x-3}, \\ 2\log_2 (x-y) - \log_2 y = 1. \end{cases}$

62*. 1) $\begin{cases} \dfrac{xy}{2} + \dfrac{5}{2x+y-xy} = 5, \\ 2x + y + \dfrac{10}{xy} = 4 + xy; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 9 \cdot 2^x \cdot 5^y - 5 \cdot 3^{y+x} = 3^x \cdot 5^y, \\ 2^{x-2} \cdot 3^{y-x+1} \cdot 5^{1-y} = 1. \end{cases}$

Розв'яжіть задачі з параметрами **(63–71)**.

63. При яких значеннях $c \in \boldsymbol{R}$ для дійсних коренів x_1 і x_2 рівняння $x^2 + (4c - c^2 - 1)x + 2c^2 - 1 = 0$ виконується рівність $x_1 + x_2 = 6$?

64. 1) Побудуйте графік квадратного тричлена $y = x^2 + 3x + a$, якщо відомо, що його корені зв'язані співвідношенням $x_1^2 + x_2^2 = 5$;

2) Побудуйте графік квадратного тричлена $y = x^2 - x - a$, якщо відомо, що його корені зв'язані співвідношенням $x_1^3 + x_2^3 = 4$.

65*. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких рівняння:
1) $2|x + 1| - 2|x - 2| + |x - 6| = x + 3a$ має рівно один корінь;
2) $2|x + 3| - 2|x - 2| + |x - 4| = x + 2a$ має рівно два корені;
3) $|x^2 - 8x - a| = 4x$ має рівно один корінь, менший від 1, і хоча б один корінь, більший за 11,5;
4) $|x^2 - 4x + a| = x$ має рівно один корінь, менший від 1, і хоча б один корінь, більший за 4.

66. Для кожного значення параметра b знайдіть число коренів рівняння:
1) $2x^2 + 10x + |6x + 30| = b$; 2) $6x^2 + 18x + |12x + 36| = b$;
3) $4x^2 + 12x + |8x + 24| = b$; 4) $4x^2 + 8x + |24x + 48| = b$.

67*. Для кожного значення параметра c розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{\dfrac{x}{4} + 2} = c + \sqrt{\dfrac{x}{4} - 3}$; 2) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = c - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$;

3) $\sin\left(c\sqrt{x-1} + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0,5$; 4) $(2^{-x} + 4 + 3c)(5 - c - 2^{-x}) = 0$.

68. Знайдіть усі значення параметра p, при кожному з яких рівняння $8 + 4p(x - 2) = (x - |x|)x$ має єдиний розв'язок. Знайдіть усі розв'язки при кожному p.

69*. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $144^{-|2x-1|} - 2 \cdot 12^{-|2x-1|} + 12a = 0$ має хоча б один корінь.

70. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $|2x + a| \leqslant x + 2$; 2) $3(2x - a) + 5a\sqrt{2x - a} - 2a^2 > 0$.

71. При яких значеннях параметра a рівняння
$$|2x + 6| + |2x - 8| = ax + 12$$
має єдиний розв'язок?

Розв'яжіть задачу **(72–93)**.

72. Яку кількість води потрібно додати до 1 л 10 %-вого водного розчину спирту, щоб одержати 6 %-вий розчин?

73. Є 1 л 6 %-вого розчину спирту. Скільки літрів 3 %-вого розчину спирту потрібно додати в перший розчин, щоб одержати 5 %-вий розчин?

74. Із пункта A виїхав колісний трактор зі швидкістю 25 км/год. За годину вслід за ним одночасно виїхали вантажівка і легковий автомобіль. Швидкість вантажівки постійна і становить $\frac{3}{4}$ швидкості легкового автомобіля. Знайдіть швидкість вантажівки, якщо відомо, що вона наздогнала трактор на 10 хв пізніше, ніж легковий автомобіль.

75. Від пристані по водосховищу зі швидкістю 10 км/год почала рухатися яхта. Через півтори години від тієї самої пристані за яхтою вирушили два катери з постійними швидкостями, причому швидкість першого катера становила $\frac{4}{3}$ швидкості другого. Знайдіть швидкість першого катера, якщо відомо, що він наздогнав яхту на 15 хв раніше, ніж другий.

76. Два робітники виконали певну роботу за 20 днів. За скільки днів виконав би цю роботу кожний з них, працюючи окремо, якщо відомо, що першому довелося б працювати на 9 днів більше, ніж другому?

77. Двоє робітників, працюючи разом, виконали всю роботу за 5 днів. Якби перший робітник працював у два рази швидше, а другий — у два рази повільніше, то всю роботу вони виконали б за 4 дні. За скільки днів виконав би всю роботу перший робітник?

78. Заповнення басейну через першу трубу вимагає на 3 год менше часу, ніж його звільнення через другу. За який час заповнюється басейн через першу трубу, якщо відомо, що в разі двох відкритих труб басейн заповнюється за 18 год?

79. Товарний потяг затримався в дорозі на 12 хв, а потім на відстані 60 км надолужив утрачений час, збільшивши швидкість на 15 км/год. Знайдіть початкову швидкість потяга.

80. Протягом 7 год 20 хв судно пройшло вгору по річці 35 км і повернулося. Швидкість течії дорівнює 4 км/год. З якою швидкістю судно йшло за течією?

81. Потяг вийшов з пункта A в пункт B, відстань між якими 230 км. За годину назустріч йому вийшов із пункту B другий потяг, швидкість якого на 15 км/год більше, ніж першого. Визначте швидкості потягів, якщо відомо, що вони зустрілися на відстані 120 км від пункта A.

82. Змішали 20 %-вий і 40 %-вий розчини хлоридної кислоти й одержали 25 %-вий розчин. Знайдіть відношення мас початкових розчинів.

83. Є два сплави, в одному з яких міститься 20 %, а в другому — 30 % олова. Скільки потрібно взяти першого і другого сплавів, щоб одержати з них 10 кг нового сплаву, що містить 27 % олова?

84. У суміші пшеничної та житньої муки міститься 55 % житньої. Якщо до цієї суміші додати ще 36 кг житньої муки, то її вміст у суміші досягне 75 %. Знайдіть масу початкової суміші.

85. Морська вода містить за масою 5 % солі. Скільки кілограмів прісної води потрібно додати до 60 кг морської, щоб уміст солі в ній становив 3 %?

86. Свіжі гриби містять за масою 90 % води, а сухі — 12 %. Скільки кілограмів сухих грибів можна отримати з 22 кг свіжих?

87. У траві волога становить $\frac{7}{10}$ від загальної маси, а в сіні — $\frac{1}{10}$. Скільки тонн трави потрібно скосити, щоб заготовити 1 т сіна?

88*. Задано двоцифрове натуральне число, у якого число десятків на одиницю більше числа одиниць, а добуток його цифр на 45 більше потрійного числа його десятків. Знайдіть це число.

89*. Тітці зараз 40 років. Вона вчетверо старше, ніж була її племінниця тоді, коли тітці було стільки ж років, скільки племінниці зараз. Який вік племінниці?

90*. У двох будинках більше 31 квартири. Число квартир у першому будинку, збільшене на 21, більш ніж у три рази перевищує число квартир у другому. Подвоєне число квартир у першому будинку менше потроєного числа квартир у другому будинку, збільшеного на одиницю. Скільки квартир у кожному будинку?

91*. Є три сплави. Перший містить 30 % нікелю і 70 % марганцю, другий — 10 % марганцю і 90 % міді, третій — 15 % нікелю, 25 % марганцю і 60 % міді. З них виготували сплав, маса якого 15 кг і який містить 40 % міді та 42 % марганцю. Яку кількість першого, другого і третього сплавів узяли для цього?

92*. Рідину налили в бутлі місткістю по 40 л, при цьому один з бутлів виявився не зовсім повним. Якщо ж цю рідину перелити в бутлі місткістю по 50 л, то такі бутлі будуть заповнені повністю, але при цьому знадобиться на 5 бутлів менше. Якщо ж цю рідину розлити в бутлі місткістю по 70 л, то знадобиться ще менше на 4 бутлі. При цьому знову один бутель буде не зовсім повним. Скільки було літрів рідини?

93*. Технічну реконструкцію підприємства провели в чотири етапи. Кожний з етапів продовжувався ціле число місяців і супроводжувався падінням обсягу виробництва. Щомісячне падіння обсягу виробництва склало на першому етапі 4 %, на другому — $6\frac{2}{3}$ %, на третьому — $6\frac{1}{4}$ % і на четвертому — $0 < x$ % у місяць. Після закінчення реконструкції початковий обсяг виробництва на підприємстві скоротився на 37 %. Визначте тривалість періоду реконструкції.

ДОДАТОК

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

1. АЛГЕБРАЇЧНА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Таблиця 1

1. Поняття комплексного числа	
Означення	Позначення і терміни
Комплексними числами **називають вирази виду $a + bi$, де a і b — дійсні числа ($a \in R$, $b \in R$), i — деяке (недійсне) число, квадрат якого дорівнює -1:** $$i^2 = -1.$$	$z = a + bi$ — комплексне число, a — дійсна частина комплексного числа, bi —уявна частина комплексного числа, b — коефіцієнт при уявній частині, i — уявна одиниця. **Дійсне число a вважають рівним комплексному числу $a + 0i$,** тобто $a = a + 0i$, де $a \in \boldsymbol{R}$, зокрема $0 = 0 + 0i$. **Числа $z = a + bi$ та $\bar{z} = a - bi$ називають *спряженими* комплексними числами.**

2. Рівність комплексних чисел	
Означення	Приклад
Два комплексних числа називають рівними, якщо рівні їх дійсні частини та рівні коефіцієнти при уявних частинах.	$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ b = d \end{cases}$ $(a, b, c, d \in \boldsymbol{R})$ Якщо $2 + xi = y + 5i$, то $y = 2$, $x = 5$.

3. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі		
Орієнтир	Приклад	Запис у загальному вигляді (означення)
Арифметичні дії (додавання, віднімання, множення і ділення) над комплексними числами виконують, як дії над звичайними буквеними виразами (одночленами й двочленами), але з урахуванням того, що $i^2 = -1$.	*Додавання*	
	$(6 + 7i) + (3 - 5i) =$ $= 6 + 3 + 7i - 5i = 9 + 2i$	$(a + bi) + (c + di) =$ $= (a + c) + (b + d)\,i$
	Віднімання	
	$(9 + 2i) - (3 - 5i) =$ $= 9 - 3 + 2i + 5i = 6 + 7i$	$(a + bi) - (c + di) =$ $= (a - c) + (b - d)\,i$

Продовження табл. 1

	Приклад	Запис у загальному вигляді (означення)
	Множення	
	$(3+2i)(4+3i) =$ $= 12+9i+8i+6i^2 =$ (заміняємо i^2 на -1) $= 12+17i-6 = 6+17i$	$(a+bi)(c+di) =$ $= (ac-bd)+(ad+bc)i$
Виконуючи ділення комплексних чисел, зручно спочатку домножити чисельник і знаменник на число, спряжене дільнику.	*Ділення*	
	$\frac{6+17i}{4+3i}=\frac{(6+17i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=$ $=\frac{24-18i+68i-51i^2}{16-9i^2}=$ $=\frac{24+50i+51}{16+9}=$ $=\frac{75+50i}{25}=3+2i$	$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=$ $=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

4. Властивості спряжених чисел

Якщо $z = a+bi$, $\bar{z} = a-bi$, де $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$, то

$z+\bar{z}=2a \in \boldsymbol{R}$,

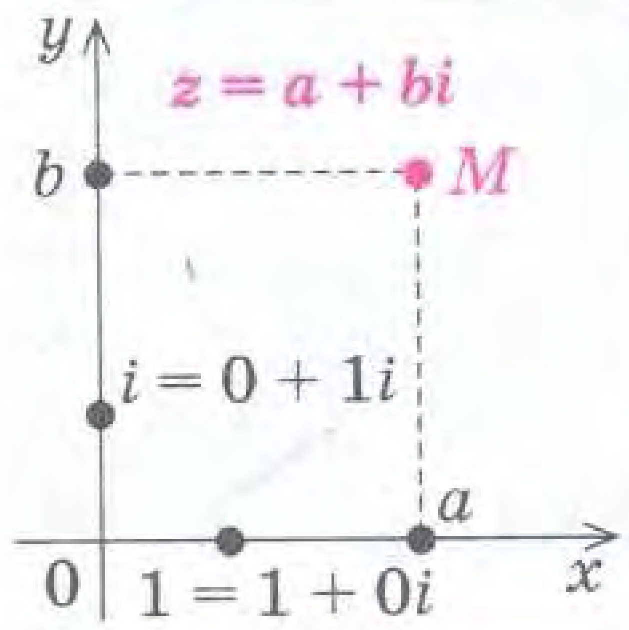
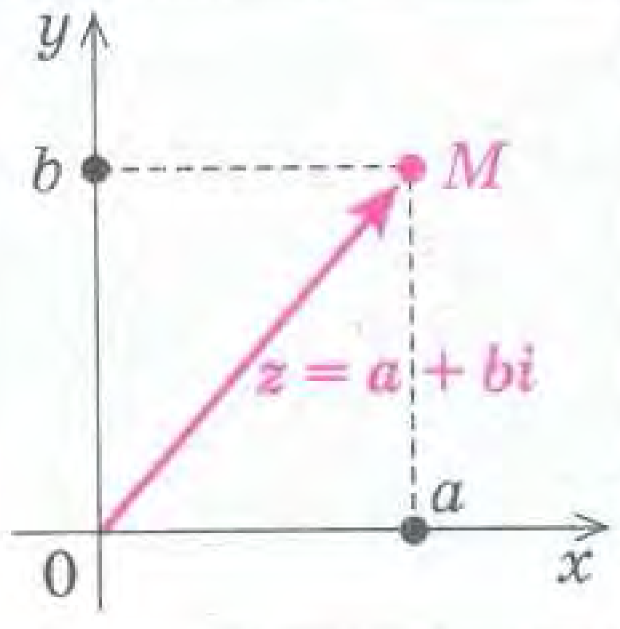
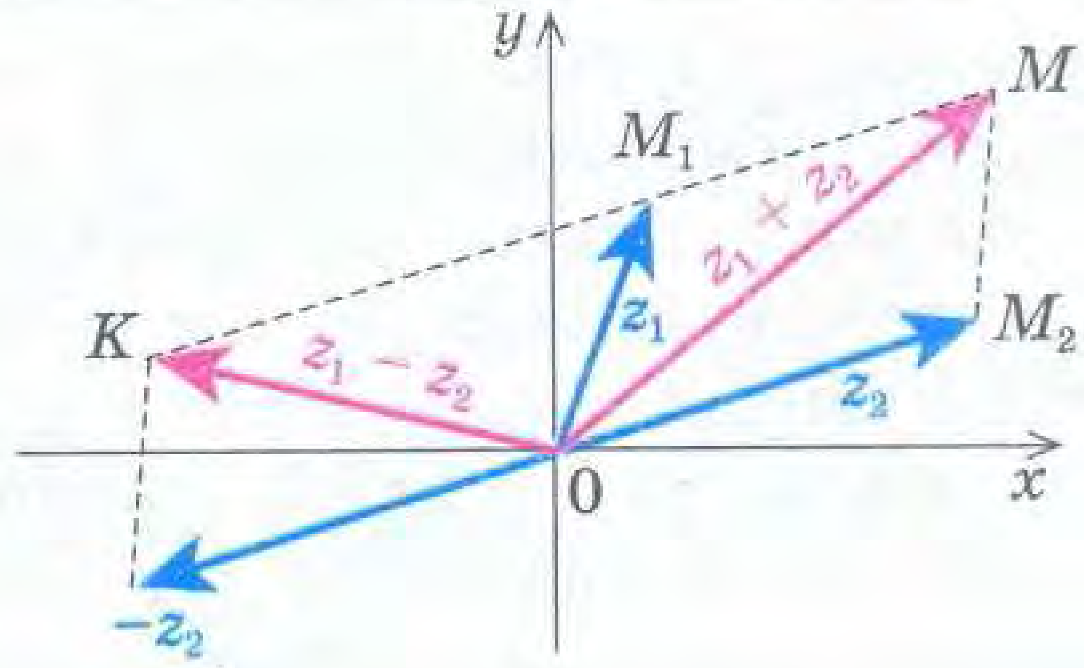
$z\bar{z} = a^2-b^2i^2 = a^2+b^2 \in \boldsymbol{R}$.

Сума і добуток двох спряжених комплексних чисел є число дійсне.

5. Знаходження степенів числа i

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 i = -i$
$i^4 = (i^2)^2 = 1$	$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^6 = i^4 i^2 = -1$	$i^7 = i^4 i^3 = -i$
$i^8 = (i^4)^2 = 1$			
...	...	...	...
$i^{4k} = 1$	$i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = i$	$i^{4k+2} = i^{4k} i^2 = -1$	$i^{4k+3} = i^{4k} i^3 = -i$

Закінчення табл. 1

<table>
<tr><th colspan="3">6. Геометричне зображення комплексних чисел</th></tr>
<tr><td>у вигляді точок координатної площини</td><td colspan="2">у вигляді векторів на координатній площині</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td rowspan="2">

$z_1 = a_1 + b_1 i \leftrightarrow \overline{OM_1}$
$z_2 = a_2 + b_2 i \leftrightarrow \overline{OM_2}$
$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i \leftrightarrow \overline{OM}$
$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i \leftrightarrow \overline{OK}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Геометричне зображення комплексних чисел установлює взаємно однозначну відповідність
між комплексними числами і точками площини (яку називають комплексною площиною) $z = a + bi \leftrightarrow M\,(a;\, b)$.
між комплексними числами і радіусами-векторами (векторами, які відкладені від початку координат) $z = a + bi \leftrightarrow \overline{OM}$</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Розширення поняття числа. Поняття комплексного числа. Розглянемо, як можна розширити поняття числа. Найпростішою числовою множиною є множина N *натуральних чисел.* У цій множині завжди можна виконати дії додавання і множення (тобто сума двох натуральних чисел є натуральне число й добуток двох натуральних чисел є натуральне число). Віднімання можна виконати не завжди ($5 - 3 = 2$, а різниця $3 - 5$ не виражається натуральним числом).

Щоб дію віднімання можна було виконати завжди, необхідно розширити множину натуральних чисел, доповнивши її від'ємними числами і нулем. У результаті такого розширення одержали множину Z *цілих чисел.*

Однак у множині цілих чисел не завжди можна виконати дію ділення. Щоб дію ділення (на число, не рівне нулю) завжди можна було виконати, необхідно розширити множину цілих чисел, доповнивши її множиною всіх звичайних дробів (числами виду $\frac{m}{n}$, де m і n — цілі числа і $n \neq 0$). У результаті такого розширення ми дістанемо множину Q *раціо-*

нальних чисел. У цій множині завжди можна виконати дії додавання, віднімання, множення і ділення (крім ділення на нуль).

Але в множині раціональних чисел не завжди можна виконати дію добування кореня з додатного числа (наприклад, $\sqrt{2}$ не є раціональним числом). Щоб дію добування кореня з додатного числа завжди можна було виконати, необхідно розширити множину раціональних чисел, доповнивши її *ірраціональними числами.* У результаті такого розширення ми одержуємо множину $\boldsymbol{R}$ *дійсних чисел.* У цій множині, за винятком дій додавання, віднімання, множення і ділення (за винятком ділення на нуль) також завжди можна виконати дію добування квадратного кореня з невід'ємного числа. Кожне розширення множини чисел проводять таким чином, щоб у новій множині виконувалися всі закони дій, які виконувалися в попередній множині.

Проте в множині дійсних чисел не можна добути квадратний корінь з від'ємного числа, тобто не можна розв'язати навіть такі найпростіші, на перший погляд, рівняння, як $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + 9 = 0$ тощо. Таким чином, бажано розширити множину дійсних чисел, приєднавши до неї нові числа, такі, щоб у новій множині $\boldsymbol{C}$ так званих *комплексних чисел* завжди можна було добути корінь квадратний (або корінь n-го степеня) не тільки з додатного, а й з від'ємного числа.

Для того щоб добути корінь квадратний з від'ємного числа, досить уміти добувати корінь квадратний з -1. Тоді, наприклад, якщо виконуються відомі правила дій, то $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3\sqrt{-1}$.

Число нового виду $\sqrt{-1}$ прийнято позначати буквою i та називати *уявною одиницею* (i — перша літера латинського слова *imaginarius* — уявний). За означенням квадратного кореня квадрат числа i дорівнює -1, тобто $i^2 = -1$. За допомогою нового числа можна записати значення кореня квадратного з будь-якого від'ємного числа, наприклад*, $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i$. Тоді вираз $2 + \sqrt{-16}$ можна записати у вигляді $2 + 4i$.

Ми одержали вираз виду $a + bi$, де a і b — дійсні числа. Вирази такого виду називають *комплексними числами.* Отже,

комплексними числами називають вирази виду $a + bi$, де a і b — дійсні числа ($a \in R$, $b \in R$), якщо їх рівність і дії над ними визначаються правилами, наведеними в п. 2, а i — деяке (недійсне) число, квадрат якого дорівнює -1: $i^2 = -1$.

У комплексному числі $a + bi$ число a називають *дійсною частиною,* а вираз bi — *уявною частиною* (b — коефіцієнт при уявній частині).

* Для комплексних чисел знак $\sqrt{\ }$ вже не є знаком тільки арифметичного квадратного кореня, тому $\sqrt{-1} = \pm i$ (оскільки $(\pm\, i)^2 = i^2 = -1$), $\sqrt{-16} = \pm 4i$, а $2 + \sqrt{-16} = 2 \pm 4i$. Детальніше операцію добування кореня n-го степеня з комплексного числа розглянуто на с. 430.

2. Поняття рівності комплексних чисел. Операції над комплексними числами

Два комплексних числа називають рівними, якщо рівні їх дійсні частини й коефіцієнти при уявних частинах,

тобто $\boldsymbol{a + bi = c + di}$ тоді і тільки тоді, коли $\boldsymbol{a = c}$ і $\boldsymbol{b = d}$.

Наприклад, рівність $2 + xi = y - 5i$ при дійсних x і y можлива тільки при $y = 2$ та $x = -5$.

Кожне комплексне число виду $a + 0i$ ототожнюють з дійсним числом a та записують: $a + 0i = a$. Таким чином, ***дійсні числа є частиною множини комплексних чисел***. Наприклад, $5 + 0i = 5$, $0 + 0i = 0$.

Кожне комплексне число виду $0 + bi$ ототожнюють з виразом bi та записують: $0 + bi = bi$ (комплексне число bi називають *чисто уявним числом*); зокрема, комплексне число $0 + 1i$ ототожнюють з числом i та записують: $0 + 1i = i$.

Дії додавання, віднімання і множення над комплексними числами виконують за тими самими законами, що і над дійсними. Це дозволяє користуватися таким орієнтиром: ***для практичного виконання дій над комплексними числами достатньо виконувати ці операції так, ніби вираз (a + bi) є не комплексне число, а двочлен. (При цьому необхідно враховувати, що i — це не змінна, а певне число, таке, що $i^2 = -1$, тому в результаті множення необхідно всюди замінити i^2 на -1.)***

Але для того щоб мати право користуватися цим орієнтиром, необхідно відповідним чином дати означення дій над комплексними числами.

1. *Додавання комплексних чисел.* Нехай $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 7 + 4i$. Тоді $z_1 + z_2 = (2 + 7) + (3 + 4)i = 9 + 7i$. Запис виконання відповідної операції в загальному вигляді і є *означенням суми двох комплексних чисел*.
   Якщо $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то *сумою* цих комплексних чисел називають комплексне число $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\,i$.
   Як і для дійсних чисел, $z_1 + 0 = (a + bi) + (0 + 0i) = a + bi = z_1$.
2. *Віднімання комплексних чисел.* Нехай $z_1 = 9 + 7i$, $z_2 = 2 + 3i$.
   Тоді $z_1 - z_2 = (9 - 2) + (7 - 3)\,i = 7 + 4i$. Якщо позначити різницю розглядуваних чисел через $z_3 = z_1 - z_2 = 7 + 4i$, то $z_3 + z_2 = (7 + 4i) + (2 + 3i) = 9 + 7i = z_1$. Тому для *означення дії віднімання* достатньо знати означення суми та рівності комплексних чисел.
   ***Різницею* двох комплексних чисел $z_1 = a + bi$ та $z_2 = c + di$ називають таке комплексне число $z_3 = x + yi$, яке в сумі із z_2 дає z_1.**

Якщо $z_3 + z_2 = z_1$, то $(x + c) + (y + d)\,i = a + bi$. Згідно з означенням рівності комплексних чисел $x + c = a$, $y + d = b$. Тоді $x = a - c$, $y = b - d$. Отже, $z_1 - z_2 = x + yi = (a - c) + (b - d)\,i$.

3. *Множення комплексних чисел.* Нехай $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 7 + 4i$. Тоді $z_1 z_2 = (2 + 3i)\,(7 + 4i) = 14 + 8i + 21i + 12i^2$. Заміняючи i^2 на (-1), одержуємо $z_1 z_2 = 14 + 29i - 12 = 2 + 29i$.
   Запис виконання відповідної операції в загальному вигляді і є *означенням добутку двох комплексних чисел*.

Якщо $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то *добутком* цих комплексних чисел називають комплексне число $z_1z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$.

Як і для дійсних чисел, *піднесення комплексного числа до натурального степеня* зводиться до послідовного множення числа на себе. Зокрема, $i^2 = i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)\, i = -1 + 0i = -1$. Таким чином, ми показали, що з означення множення комплексних чисел випливає, що $i^2 = -1$. Тому при множенні комплексних чисел і при піднесенні їх до степеня ми дійсно маємо право заміняти i^2 на число -1. Наприклад,

$$i^3 = i \cdot i \cdot i = i^2 \cdot i = -i,\ i^4 = i \cdot i \cdot i \cdot i = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1.$$

За означенням покладемо, що $i^0 = 1$ (а також, що при $z \neq 0$ $z^0 = 1$).

Ураховуючи, що $i^4 = 1$, одержуємо: $i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$, $i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = i$, $i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = -1$, $i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = -i$. Наприклад,

$$i^{23} = i^{20} \cdot i^3 = -i, \qquad i^{102} = i^{100} \cdot i^2 = -1.$$

При піднесенні комплексного числа $a + bi$ до квадрата або до куба можна використовувати відповідні формули скороченого множення (замінюючи i^2 на -1). Наприклад,

$$(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i.$$

Уведемо також поняття спряжених комплексних чисел, які нам будуть потрібні для практичного виконання ділення комплексних чисел.

Числа $z = a + bi$ та $\bar{z} = a - bi$ називають *спряженими* комплексними числами.

Наприклад, числа $z = 2 + 5i$ та $\bar{z} = 2 - 5i$ — спряжені. Знайдемо суму і добуток цих чисел:

$$z + \bar{z} = (2 + 5i) + (2 - 5i) = 4 \text{ — дійсне число,}$$

$$z\bar{z} = (2 + 5i)(2 - 5i) = 4 - 25i^2 = 4 + 25 = 29 \text{ — дійсне число.}$$

Сума і добуток двох спряжених комплексних чисел є число дійсне.

Якщо $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, де $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$, то

$$z + \bar{z} = 2a \text{ — дійсне число } (2a \in \boldsymbol{R}).$$

$$z\bar{z} = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \in \boldsymbol{R}. \bigcirc$$

4. *Ділення комплексних чисел.* Нехай потрібно розділити $z_1 = 2 + 29i$ на $z_2 = 2 + 3i$. Запишемо ділення за допомогою риски дробу і, користуючись основною властивістю дробу, домножимо чисельник і знаменник на число, спряжене до знаменника (щоб одержати в знаменнику дійсне число):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 29i}{2 + 3i} = \frac{(2 + 29i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{4 - 6i + 58i - 87i^2}{4 - 9i^2} = \frac{4 + 52i + 87}{4 + 9} = \frac{91 + 52i}{13} = 7 + 4i.$$

Але в прикладі 3 ми одержали, що $(2 + 3i)(7 + 4i) = 2 + 29i$. Отже, і в множині комплексних чисел операцію ділення можна перевіряти за допомогою операції множення.

У загальному вигляді ділення комплексних чисел виконують так:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i. \qquad (1)$$

Строге одержання формули (1) спирається на *означення частки комплексних чисел*, яке аналогічне до означення їх різниці.

Часткою двох комплексних чисел $z_1 = a + bi$ та $z_2 = c + di$ ($z_2 \neq 0$) називають таке комплексне число $z_3 = x + yi$, яке при множенні на z_2 дає z_1.

З цього означення одержуємо, що $z_3 z_2 = z_1$, тобто $(x + yi)(c + di) = a + bi$. Тоді за означенням рівності комплексних чисел $\begin{cases} xc - yd = a, \\ xd + yc = b. \end{cases}$

Помножимо перше рівняння системи на c, а друге — на d і додамо одержані рівняння. Маємо $x(c^2 + d^2) = ac + bd$. Оскільки $z_2 \neq 0$, то $c^2 + d^2 \neq 0$, отже, $x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}$. Аналогічно, якщо перше рівняння помножити на d, а друге — на c і відняти від другого рівняння перше, одержимо $y(c^2 + d^2) = bc - ad$, отже, $y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$. Тоді $\frac{z_1}{z_2} = z_3 = x + yi = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$, що збігається з результатом, отриманим за формулою (1). ○

Таким чином, ми обґрунтували коректність використання наведеного практичного орієнтира для виконання дій над комплексними числами.

З наведених означень операцій над комплексними числами випливає справедливість для комплексних чисел тих основних властивостей операцій додавання та множення, які виконувалися для дійсних чисел (перевірте це самостійно).

Властивості додавання	Властивості множення
1) $z + w = w + z$;	1′) $zw = wz$;
2) $(z + w) + t = z + (w + t)$;	2′) $(zw)\,t = z\,(wt)$;
3) $z + 0 = z$ $(0 = 0 + 0i)$;	3′) $z \cdot 1 = z$ $(1 = 1 + 0i)$;
4) **Для кожного комплексного числа $z = a + bi$ існує протилежне число $(-z = -a - bi)$ таке, що $z + (-z) = 0$;**	4′) **Для кожного комплексного числа $z \neq 0$ існує обернене до нього число $\frac{1}{z}$ таке, що $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.** Наприклад, для комплексного числа $z = c + di$ за формулою (1) маємо $\frac{1}{z} = \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i$.

5) **Операції додавання та множення комплексних чисел об'єднані розподільним законом $(z + w)\,t = zt + wt$.**

Для множини дійсних чисел основні властивості 1–5 (їх ще називають аксіомами поля дійсних чисел) визначають усі інші властивості дійсних чисел (крім властивостей упорядкування та неперервності, які визначаються в полі дійсних чисел іншими аксіомами). Оскільки основні властивості 1–5 виконуються і для комплексних чисел, то всі тотожності, які ви знаєте з курсу алгебри, залишаються справедливими і в множині комплексних чисел. Наприклад,

$$(z + w)^3 = z^3 + 3z^2w + 3zw^2 + w^3.$$

3. Геометричне зображення комплексних чисел. Кожне комплексне число $z = a + bi$ $(a \in \boldsymbol{R}, b \in \boldsymbol{R})$ можна зобразити точкою M на координатній площині з координатами $(a; b)$ (рис. 1.1). І навпаки, кожну точку M $(a; b)$ координатної площини можна вважати зображенням комплексного числа $z = a + bi$. У такому випадку кажуть, що геометричне зображення комплексних чисел у вигляді точок координатної площини встановлює взаємно однозначну відповідність між комплексними числами і точками площини (цю площину називають *комплексною площиною*).

Дійсні числа $a = a + 0i$ зображають точками з координатами $(a; 0)$, які розташовані на осі абсцис. Тому цю вісь комплексної площини називають *дійсною віссю*. Чисто уявні числа $bi = 0 + bi$ зображають точками з координатами $(0; b)$, які розташовані на осі ординат. Тому цю вісь комплексної площини називають *уявною віссю*.

Комплексне число $z = a + bi$ на координатній площині можна зображати також у вигляді так званого радіуса-вектора $\overline{OM}$ (вектора з початком у початку координат і кінцем у точці M $(a; b)$, тобто у вигляді радіуса-вектора $\overline{OM}$ з координатами $(a; b)$) (рис. 1.2). Таке зображення теж установлює взаємно однозначну відповідність між комплексними числами та відповідними радіусами-векторами. За допомогою останнього зображення можна проілюструвати, що знаходження суми й різниці комплексних чисел — це просто знаходження суми та різниці відповідних векторів (рис. 1.3), оскільки при додаванні векторів відповідні координати додаються, а при відніманні — віднімаються (див. записи в табл. 1).

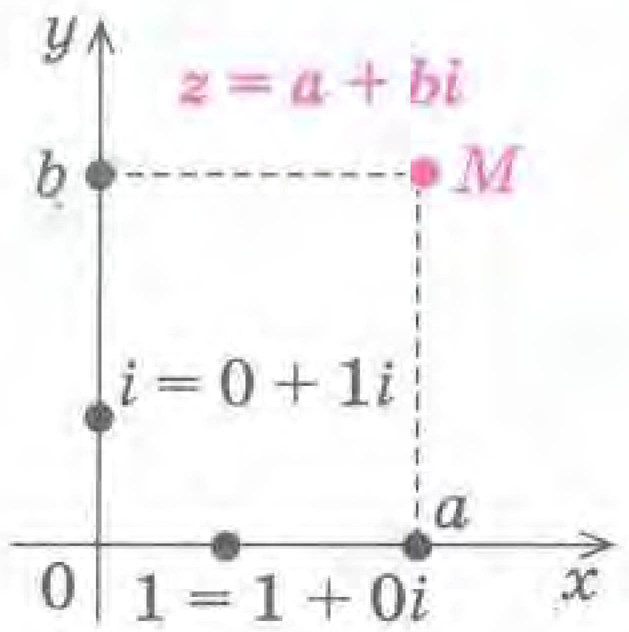


Рис. 1.1

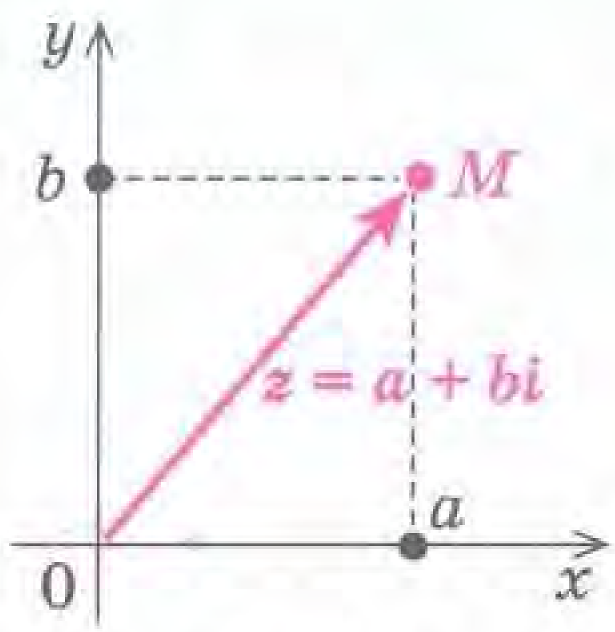


Рис. 1.2

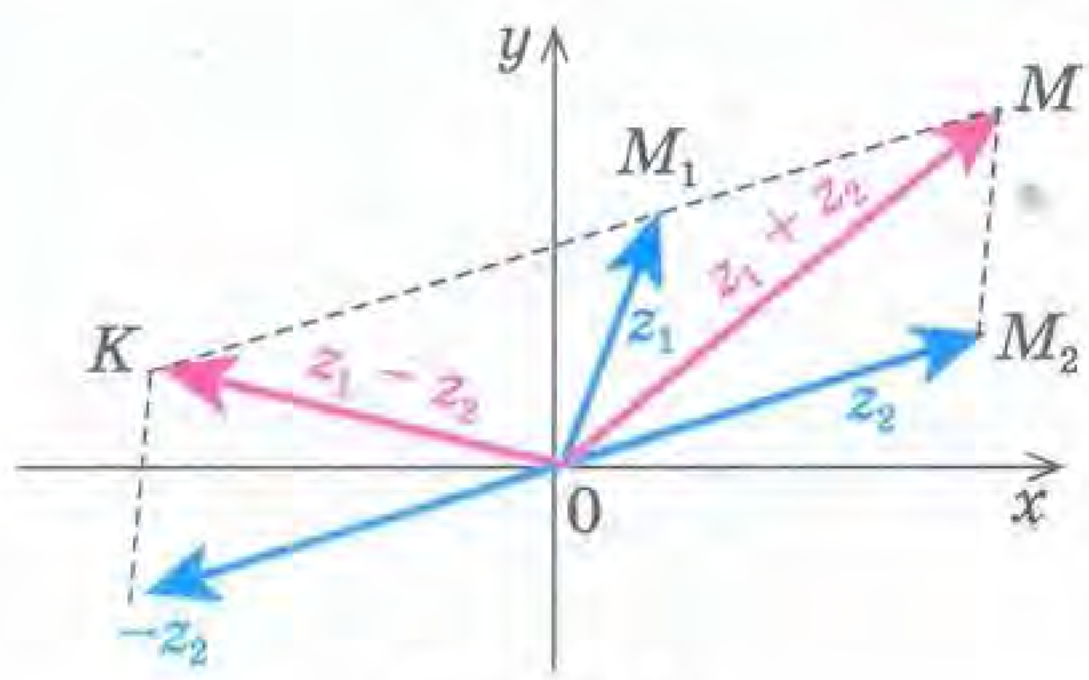


Рис. 1.3

Зауваження. Геометричне зображення дійсних чисел на числовій прямій дозволяє легко порівнювати дійсні числа: з двох чисел на числовій прямій більше те, яке зображене правіше (і менше те, яке зображене лівіше). Але для комплексних чисел, які зображають точками на координатній площині, ми не можемо сказати, яке число більше, а яке менше (оскільки розглядається не одна, а дві координати). Тому для комплексних чисел не вводять поняття «більше» або «менше», тобто не можна, наприклад, сказати, яке з комплексних чисел більше: $3 + 2i$ чи $2 + 5i$.

Уведення комплексних чисел дозволяє розв'язувати *квадратні рівняння з від'ємним дискримінантом* (які в множині дійсних чисел не мали коренів). У множині комплексних чисел знак $\sqrt{\ }$ уже не є знаком тільки арифметичного квадратного кореня. Тому, наприклад, $\sqrt{-1} = \pm i$ (оскільки $(\pm i)^2 = i^2 = -1$), $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = \pm 2i$, $\sqrt{-7} = \sqrt{7}\sqrt{-1} = \pm i\sqrt{7}$. (Як буде показано далі, корінь квадратний з комплексного числа має тільки два значення, тому інших значень записані квадратні корені не мають.) Ураховуючи це, знайдемо корені квадратних рівнянь за допомогою відомих формул.

Приклад Розв'яжіть рівняння: 1) $x^2 - 2x + 5 = 0$, 2) $x^2 - 3x + 4 = 0$.

1) $x^2 - 2x + 5 = 0$, тоді $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$. Отже, $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$.

2) $x^2 - 3x + 4 = 0$, тоді $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Отже,

$$x_1 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i, \quad x_2 = \frac{3 - i\sqrt{7}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i.$$

Запитання для контролю

1. Дайте означення комплексного числа. Наведіть приклади. Укажіть на цих прикладах дійсну та уявну частини комплексного числа.
2. Сформулюйте означення рівності двох комплексних чисел. У якому випадку будуть рівні комплексні числа $(m + 5i)$ та $(-3 + ni)$ при $m, n \in \boldsymbol{R}$?
3. 1) Наведіть приклади виконання операцій додавання, віднімання, множення та ділення над комплексними числами.
   2) Дайте означення суми, різниці, добутку і частки комплексних чисел.
4. 1) Поясніть, які комплексні числа називають спряженими.
   2) Сформулюйте властивості спряжених комплексних чисел. Наведіть приклади.
   3) Доведіть властивості спряжених комплексних чисел.
5. 1) Сформулюйте основні властивості операцій додавання та множення в множині комплексних чисел.
   2) Обґрунтуйте справедливість цих властивостей.
6. Поясніть на прикладах, як можна зображати комплексні числа на координатній площині: а) у вигляді точок, б) у вигляді радіусвекторів.

Вправи

1. Назвіть дійсну й уявну частини комплексного числа:
   1) $5 + 3i$; 2) $2 - 4i$; 3) $-5 + i$; 4) $-5 - 3i$; 5) $4i$; 6) 7.

2. Знаючи, що задані комплексні числа рівні, знайдіть значення x і y (при $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$):
1) $2x + 4i = 6 - yi$;   2) $8 + 4xi = y + 12i$;
3) $-4 + xi = 2y - 3i$;   4) $2xi = y + 2i$.

3. Знайдіть суму комплексних чисел:
1) $(5 + 2i) + (3 - 4i)$;   2) $(1 - 7i) + (-3 + 8i)$;
3) $(4 - i) + (-1 - 3i)$;   4) $(2 + 6i) + (2 - 6i)$.

4. Знайдіть різницю комплексних чисел:
1) $(9 - i) - (5 + 4i)$;   2) $(3 + 8i) - (1 - 11i)$;
3) $(-5 - 2i) - (6 + 3i)$;   4) $(4 + i) - (-2 - 3i)$.

5. Знайдіть добуток комплексних чисел:
1) $(2 + 5i)(4 - 2i)$;   2) $(5 - i)(-2 - 6i)$;
3) $(-4 + 6i)(3 + i)$;   4) $(7 - 4i)(7 + 4i)$.

6. Знайдіть частку комплексних чисел:
1) $\frac{18+i}{2+3i}$;   2) $\frac{6-4i}{1-i}$;   3) $\frac{11-10i}{4-3i}$;   4) $\frac{1}{1+i}$.

Спростіть вираз (**7**, **8**).

7. 1) i^{41};   2) $i^{27} + 2i^{13}$;   3) $3i^{24} + 2i^{14}$;   4) $i^{33} + i^{7}$.

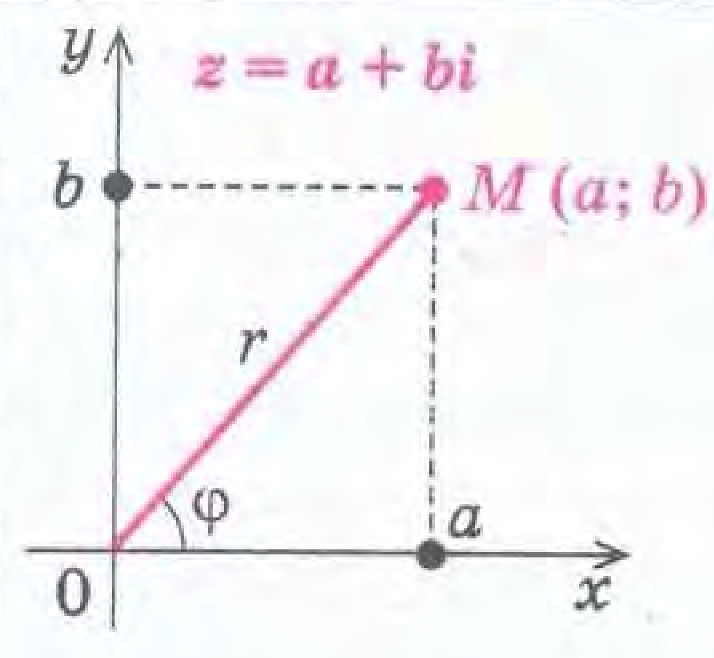
8. 1) $(2 - 3i)^2$;   2) $(1 - i)^3$;   3) $(3 + 4i)^2$;   4) $(2 + i)^3$.

9. Зобразіть на координатній площині задане комплексне число:
а) у вигляді точки; б) у вигляді радіуса-вектора:
1) $z_1 = 2 + 3i$;   2) $z_2 = -1 - i$;   3) $z_3 = 3 - 2i$;
4) $z_4 = -2 - 4i$;   5) $z_5 = -3$;   6) $z_6 = 4i$.

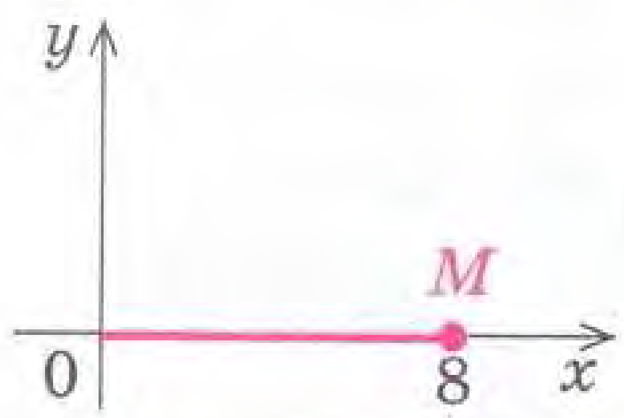
10. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 - 4x + 29 = 0$;   2) $2x^2 - 2x + 1 = 0$;
3) $x^2 + x + 2 = 0$;   4) $3x^2 + 5x + 3 = 0$.

2. ТРИГОНОМЕТРИЧНА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Таблиця 2

1. Поняття тригонометричної форми комплексного числа	
Поняття	Ілюстрація, терміни і позначення
Комплексне число $z = a + bi$ зображають точкою $M\ (a;\ b)$. Положення цієї точки можна однозначно зафіксувати, задаючи довжину відрізка $OM = r$ і величину кута φ, який утворює промінь OM з додатним напрямком осі Ox. Тоді $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.	 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ — *модуль* (або *абсолютна величина*) комплексного числа $z = a + bi$.

Продовження табл. 2

<table>
<tr><td>Звідси $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, тому $z = = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)\,i$.
Тоді $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — тригонометрична форма комплексного числа.</td><td>$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$
φ — аргумент комплексного числа z (позначають Arg z),
$\mathrm{Arg}\,z = \varphi$, де $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Приклади</td></tr>
<tr><td>1. Зобразимо комплексне число $8 = 8 + 0i$ на комплексній площині. З рисунка видно, що $|8| = OM = 8$, $\mathrm{Arg}\ 8 = 0$, тобто в тригонометричній формі
$8 = 8\,(\cos 0 + i\sin 0)$.
</td><td>2. $z = 1 - i$, де $a = 1$, $b = -1$. Тоді
$|z| = |1 - i| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$.
$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\varphi = \frac{b}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}\ \mathrm{Arg}\,z = \varphi = \frac{7\pi}{4}$,
тобто в тригонометричній формі
$1 - i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$
$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Рівність комплексних чисел у тригонометричній формі</td></tr>
<tr><td>$z_1 = r_1\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$
$z_2 = r_2\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$
$\boxed{z_1 = z_2} \Leftrightarrow$ $r_1 = r_2$; $\varphi_1 = \varphi_2$ (або відрізняються на $2\pi k$, де $k \in Z$)</td><td>Два комплексних числа, заданих у тригонометричній формі, рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх модулі, а аргументи або рівні, або відрізняються на $2\pi k$, де $k \in Z$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Дії над комплексними числами в триногометричній формі</td></tr>
<tr><td colspan="2">$z_1 = r_1\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$
$z_2 = r_2\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$</td></tr>
<tr><td>Множення</td><td>Ділення</td></tr>
<tr><td>$z_1 z_2 =$
$= r_1 r_2\,(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
При множенні комплексних чисел їх модулі перемножуються, а аргументи додаються.</td><td>$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$
При діленні комплексних чисел їх модулі діляться, а аргументи віднімаються (модуль діленого ділиться на модуль дільника і від аргументу діленого віднімається аргумент дільника).</td></tr>
</table>

Продовження табл. 2

<table>
<tr><td colspan="2">Піднесення до степеня</td></tr>
<tr><td>$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in N$

При піднесенні комплексного числа до натурального степеня модуль підноситься до цього степеня, а аргумент множиться на показник степеня. (Формулу можна використовувати і для цілих від'ємних n.)</td><td>Приклад
$(1-i)^{20} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^{20} =$
$= \left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\cdot 20\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\cdot 20\right)\right) =$
$= 2^{10}(\cos 35\pi + i\sin 35\pi) =$
$= 1024(-1 + i\cdot 0) = -1024$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Добування кореня n-го степеня</td></tr>
<tr><td>$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in Z}$
(Усього одержуємо n різних значень при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.)</td><td>При добуванні кореня n-го степеня з комплексного числа з модуля добувають арифметичний корінь n-го степеня, а до аргументу додають $2\pi k$ і результат ділять на показник кореня.</td></tr>
<tr><td>У множині комплексних чисел знаки $\sqrt{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[2k]{\ }$ не є знаками лише арифметичних коренів, як це було в множині дійсних чисел. Тому знаком $\sqrt[n]{z}$ позначають усі n значень кореня для будь-якого n (парного або непарного).</td><td>Приклади
1. $\sqrt{-1} = \pm i$.
2. $\sqrt{9} = \pm 3$ (лише в множині комплексних чисел!).
3. $t = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8(\cos 0 + i\sin 0)} =$
$= \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{0 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{0 + 2\pi k}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}\right),$
$k \in Z$ (в останній рівності $\sqrt[3]{8} = 2$ — арифметичний корінь). Маємо три різних значення $\sqrt[3]{8}$:
1) при $k = 0$ $t_0 = \sqrt[3]{8} = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2;$
2) при $k = 1$
$t_1 = \sqrt[3]{8} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3};$
3) при $k = 2$
$t_2 = \sqrt[3]{8} = 2\left(\cos\frac{4\pi k}{3} + i\sin\frac{4\pi k}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3},$
тобто $\sqrt[3]{8}$ має три значення: $2;\ -1 + i\sqrt{3};\ -1 - i\sqrt{3}$.</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття тригонометричної форми комплексного числа. Як уже відмічалося, кожне комплексне число $z = a + bi$ можна зобразити на координатній (комплексній) площині у вигляді точки M $(a; b)$ або вектора $\overline{OM}$ (з координатами $(a; b)$). Але положення точки M (вектора $\overline{OM}$) на координатній площині можна однозначно зафіксувати, задаючи довжину відрізка $OM = r$ і величину кута* φ, який утворює промінь OM з додатним напрямком осі Ox (рис. 2.1). Ураховуючи формулу відстані між двома точками та означення косинуса й синуса на координатній площині, одержуємо:

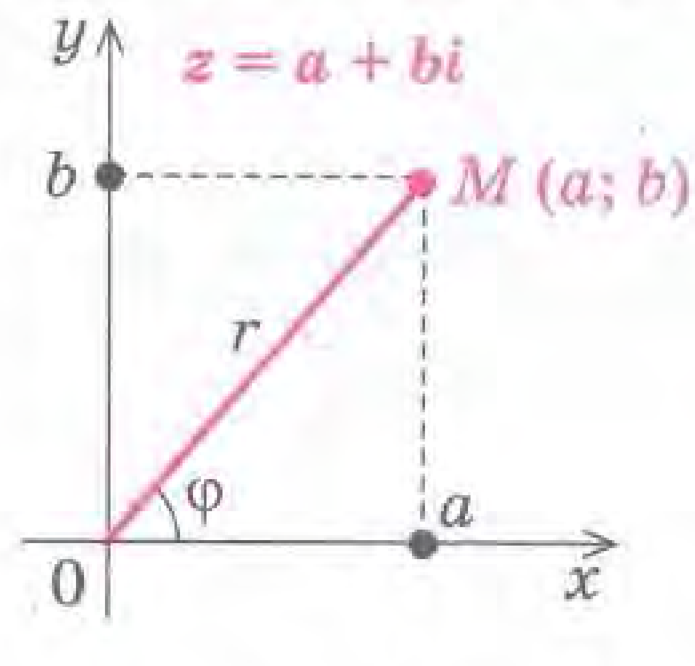


Рис. 2.1

$$r = OM = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

Тоді $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ і задане комплексне число z можна записати так: $z = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)\, i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Одержаний запис комплексного числа z називають *тригонометричною формою* цього числа, а його запис у вигляді $a + bi$ — *алгебраїчною формою* комплексного числа. Отже,

тригонометричною формою комплексного числа $z = a + bi$ називають запис цього числа у вигляді

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \text{де}\ r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

Невід'ємне число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ називають *модулем* (або *абсолютною величиною*) комплексного числа $z = a + bi$) та позначають $|z|$. Отже,

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Як і для дійсних чисел на координатній (комплексній) площині, *модуль комплексного числа — це відстань від точки, що зображає задане число, до точки* 0 (початку координат). Як і для дійсних чисел, тільки при $z = 0$ модуль z дорівнює нулю, а якщо $z \neq 0$, то $|z| > 0$. Для дійсного числа $z = a = a + 0i$ його модуль $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$ збігається зі звичайним розумінням модуля дійсного числа.

Число φ, яке входить до запису тригонометричної форми комплексного числа $z = a + bi$, називають *аргументом* комплексного числа і позначають $\operatorname{Arg} z$. Отже,

$$\operatorname{Arg} z = \varphi,\ \text{де}\ \cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r}\ \left(r = \sqrt{a^2 + b^2}\right).$$

Як уже зазначалося, при геометричному зображенні комплексного числа $z = a + bi$ у вигляді точки M $(a; b)$ (або радіуса-вектора $\overline{OM}$) аргумент φ — це числове значення величини кута, який утворює промінь

* Величину кута будемо вимірювати в радіанах.

OM з додатним напрямком осі Ox (див. рис. 2.1). Зрозуміло, що цей кут можна визначити тільки з точністю до $2\pi k$, де $k \in \mathbf{Z}$. Тому аргумент комплексного числа z має нескінченну множину значень, які відрізняються одне від одного на число, кратне 2π. Зазначимо, що для комплексного числа $0 = 0 + 0i$ аргумент не можна визначити, оскільки $|0| = r = 0$ (у цьому випадку радіус-вектор $\overline{OM}$ перетворюється в точку — нуль-вектор, і ми не можемо вказати його напрям).

Приклад Запишіть у тригонометричній формі число $\sqrt{3}-i$.

▶ Якщо $z=a+bi=\sqrt{3}-i$, то $a=\sqrt{3}$, $b=-1$. Знайдемо модуль цього комплексного числа: $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=2$. Аргумент φ визначимо зі співвідношень: $\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi=\frac{b}{r}=-\frac{1}{2}$. Оскільки косинус φ додатний, а синус φ — від'ємний, то відповідний кут φ розташований у IV чверті, і як одне зі значень аргументу можна взяти $\varphi=-\frac{\pi}{6}$ (або будь-яке інше значення, яке відрізняється від нього на $2\pi k$, де $k \in \mathbf{Z}$, наприклад $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}$). Тоді задане комплексне число в тригонометричній формі запишемо так:

$$z=\sqrt{3}-i=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).\ \triangleleft$$

У найпростіших випадках тригонометричну форму комплексного числа можна записувати, спираючися на зображення цього числа на координатній площині.

Наприклад, для числа $1 = 1 + 0i$, яке зображають точкою M (1; 0) (рис. 2.2), модуль $r = OM = 1$ і аргумент $\varphi = 0$ (кут між променем OM і додатним напрямом осі Ox дорівнює 0). Тоді в тригонометричній формі число 1 можна записати так: $1 = 1\ (\cos 0 + i \sin 0)$.

Аналогічно для числа $i = 0 + 1i$, яке зображають точкою N (0; 1) (див. рис. 2.2), модуль $r = ON = 1$ і аргумент $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (кут між променем ON і додатним напрямом осі Ox дорівнює $\frac{\pi}{2}$). Тоді в тригонометричній формі число i можна записати так: $i=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Оскільки для дійсних чисел геометричний зміст виразу $|a - b|$ — *це відстань між відповідними точками на числовій прямій*, то $|a - b| = AB$ (рис. 2.3).

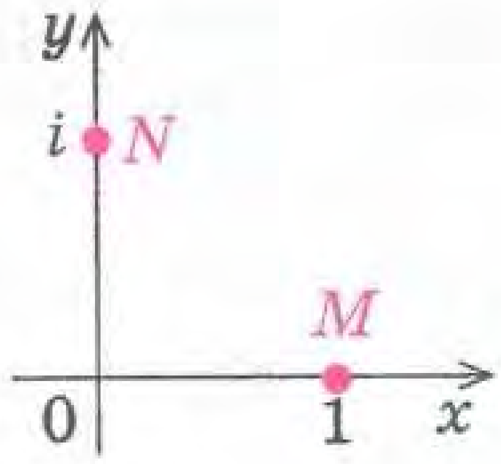


Рис. 2.2

Рис. 2.3

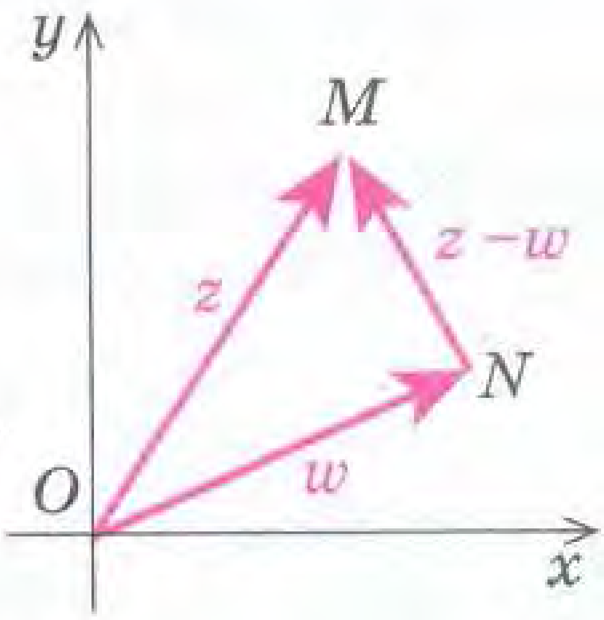


Рис. 2.4

Аналогічно для комплексних чисел

геометричний зміст виразу $|z - w|$ — це відстань між відповідними точками на координатній (комплексній) площині.

● Дійсно, комплексне число z зображають вектором $\overline{OM}$ або точкою M, а комплексне число w — вектором $\overline{ON}$ або точкою N (рис. 2.4). Тоді комплексне число $z - w$ зображають різницею цих векторів, тобто вектором $\overline{MN}$. Число $|z - w|$ дорівнює довжині цього вектора, тобто відстані між точками M і N. ○

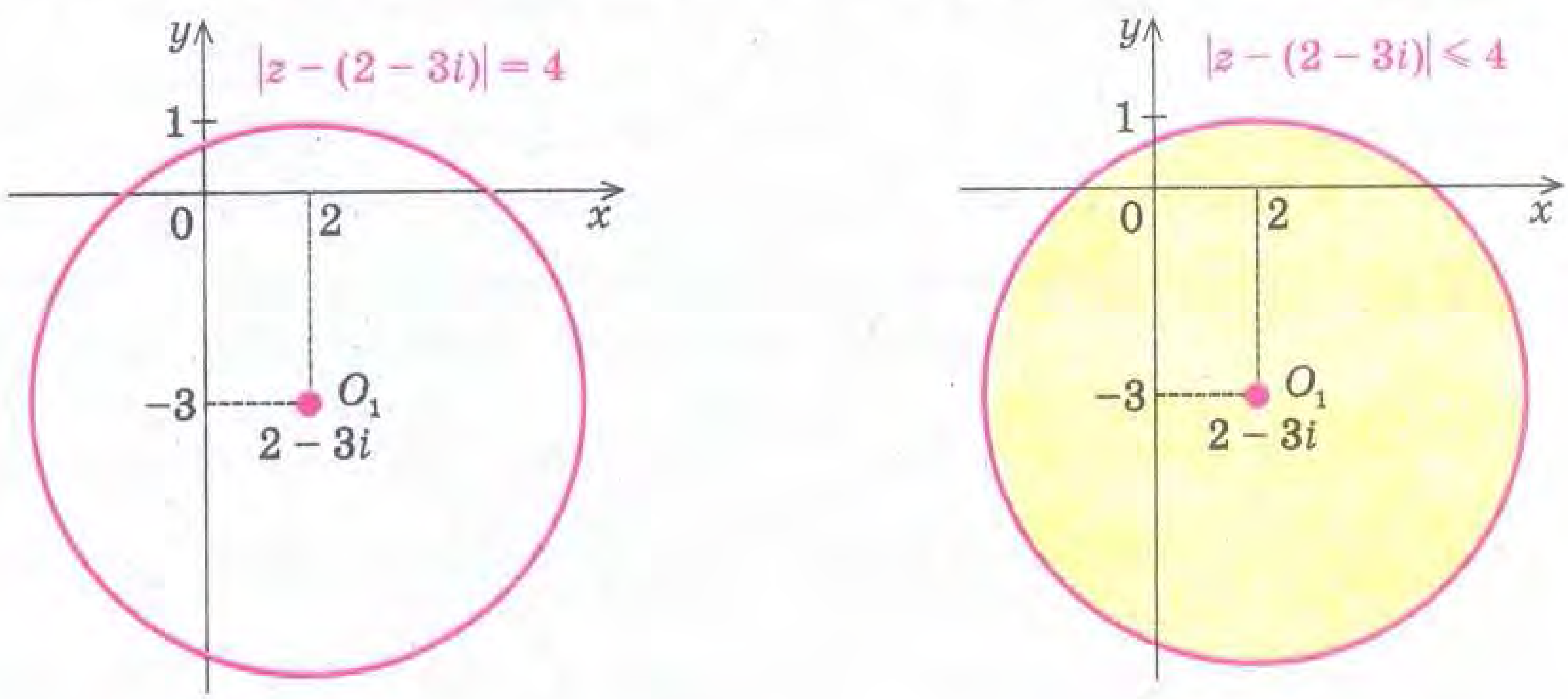
Наприклад, нехай потрібно зобразити множину точок z комплексної площини, для яких виконується рівність

$$|z - 2 + 3i| = 4 \tag{1}$$

або нерівність

$$|z - 2 + 3i| \leqslant 4. \tag{2}$$

Для цього досить записати задані умови так: $|z - (2 - 3i)| = 4$; $|z - (2 - 3i)| \leqslant 4$ і використати геометричний зміст модуля різниці. Тоді множина точок, яку задає рівність (1), — це коло радіуса 4 з центром у точці O_1 (2; −3) (рис. 2.5, *а*), а множина точок, яку задає нерівність (2), — це круг радіуса 4 з центром у точці O_1 (2; −3) (рис. 2.5, *б*).



а *б*

Рис. 2.5

У випадку, коли два комплексних числа рівні, то їх зображають однією і тією самою точкою M на координатній площині. Але тоді їх модулі (відстані до початку координат) рівні, а аргументи (кути, утворені променем OM з додатним напрямком осі Ox) або рівні, або відрізняються на ціле число повних обертів, тобто на $2\pi k$, де $k \in \mathbf{Z}$. І навпаки, якщо модулі двох комплексних чисел рівні, а аргументи або рівні, або відрізняються на $2\pi k$, то ці числа зображають на координатній площині однією і тією самою точкою, отже, ці числа рівні. Таким чином,

два комплексних числа, задані в тригонометричній формі, рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх модулі, а аргументи або рівні, або відрізняються на $2\pi k$, де $k \in \mathbf{Z}$.

Інакше кажучи, якщо $z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то рівність $z_1 = z_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли $r_1 = r_2$ і $\varphi_1 = \varphi_2$ (або φ_2 відрізняється від φ_1 на $2\pi k$, тобто $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi k$, де $k \in \mathbf{Z}$).

2. Множення, піднесення до степеня й ділення комплексних чисел у тригонометричній формі.

Нехай задано два комплексних числа в тригонометричній формі:

$$z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тоді $z_1 z_2 = r_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, r_2 (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$
$= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2))$.

Ураховуючи, що $\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1+\varphi_2)$,
$\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1+\varphi_2)$, одержуємо

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \tag{3}$$

Отже, **при множенні комплексних чисел у тригонометричній формі їх модулі перемножуються, а аргументи додаються.** ○

Піднесення до натурального степеня комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ зводиться до множення однакових множників. Тому, використовуючи декілька разів формулу (3), одержуємо

$$z^n = \underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n\text{ разів}} = \underbrace{r\cdot r\cdot\ldots\cdot r}_{n\text{ разів}}\left(\cos(\underbrace{\varphi+\varphi+\ldots+\varphi}_{n\text{ разів}}) + i\sin(\underbrace{\varphi+\varphi+\ldots+\varphi}_{n\text{ разів}})\right).$$

Таким чином,

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{4}$$

тобто **при піднесенні комплексного числа до натурального степеня модуль підносять до цього степеня, а аргумент помножують на показник степеня.** ○

Наприклад, для знаходження i^{102} врахуємо, що в тригонометричній формі $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ (с. 426). Тоді, використовуючи формулу (4), одержуємо

$$i^{102} = \left(1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right)^{102} = 1^{102}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 102\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 102\right)\right) =$$

$$=1\,(\cos 51\pi+i\sin 51\pi)=1\,(-1+i\cdot 0)=-1$$

(що збігається зі значенням, одержаним на с. 418 в алгебраїчній формі).

Оскільки ділення — дія, обернена до множення, то при діленні числа $z_1 = r_1\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ на число $z_2 = r_2\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ (при $z_2 \neq 0$) модулі потрібно поділити, а аргументи — відняти:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right), \tag{5}$$

тобто **при діленні комплексних чисел їх модулі ділять, а аргументи віднімають.**

● За формулою (3) добуток числа $z_3=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$ на число $z_2 = r_2\,(\cos\varphi_2 + + i\sin\varphi_2)$ дорівнює:

$$z_3z_2=\frac{r_1}{r_2}r_2\left(\cos((\varphi_1-\varphi_2)+\varphi_2)+i\sin((\varphi_1-\varphi_2)+\varphi_2)\right)=r_1\,(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=z_1.$$

Це й означає, що число z_3 є часткою від ділення числа z_1 на число z_2. ○

З а у в а ж е н н я. Якщо $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то за означенням $z^{-n}=\frac{1}{z^n}$ (при $z \neq 0$). Оскільки $1 = 1 + 0i = 1\,(\cos 0 + i\sin 0)$, то, ураховуючи рівності (4) і (5) для $n \in N$, маємо:

$$z^{-n}=\frac{1}{z^n}=\frac{1\,(\cos 0+i\sin 0)}{r^n\,(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}=\frac{1}{r^n}\left(\cos(0-n\varphi)+i\sin(0-n\varphi)\right)=$$

$$=r^{-n}\left(\cos(-n\varphi)+i\sin(-n\varphi)\right).$$

Ця рівність означає, що формулою (4) можна користуватися не тільки для натуральних, а й для цілих значень n при $z \neq 0$ (нагадаємо, що $z^0 = 1$ при $z \neq 0$).

3. Добування кореня з комплексного числа. Як і для дійсних чисел, *коренем n-го степеня з комплексного числа z* (де n — натуральне число) *називають таке комплексне число t, що $t^n = z$.*

Корінь n-го степеня із z позначають $\sqrt[n]{z}$. Отже, якщо $t=\sqrt[n]{z}$, то $z = t^n$. Покажемо, що з будь-якого комплексного числа z можна добути корінь n-го степеня, причому, якщо $z \neq 0$, то $\sqrt[n]{z}$ набуває n різних значень. Для обґрунтування використаємо тригонометричну форму розглянутих комплексних чисел.

● Нехай $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Число t будемо шукати у вигляді

$$t = R\,(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Якщо $t=\sqrt[n]{z}$, то $z = t^n$. Ураховуючи, що $t^n = R^n\,(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$, одержуємо

$$r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = R^n\,(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Але два комплексних числа в тригонометричній формі рівні тоді і тільки тоді, коли їх модулі рівні, а аргументи або рівні, або відрізняються на $2\pi k$, де $k \in \boldsymbol{Z}$. Отже,

$$R^n = r, \tag{6}$$

$$n\alpha = \varphi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{7}$$

Оскільки $r \geqslant 0$ і число R має бути невід'ємним, то з рівності (6) отримуємо

$$R = \sqrt[n]{r}\ \text{(арифметичне значення)},$$

а з рівності (7)

$$\alpha = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{8}$$

Таким чином,

$$\sqrt[n]{z} = t = R\,(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{9}$$

Ураховуючи, що функції $\cos x$ і $\sin x$ є періодичними з найменшим додатним періодом 2π, робимо висновок, що значення $\sqrt[n]{z}$, які дає формула (9), можуть повторюватися тільки тоді, коли значення α (див. формулу 8) будуть відрізнятися на число, кратне 2π. З'ясуємо, при яких значеннях k_1 і k_2 це може бути. Очевидно, що різниця $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\varphi + 2\pi k_1}{n} - \frac{\varphi + 2\pi k_2}{n} = \frac{2\pi(k_1 - k_2)}{n}$ повинна бути кратною 2π, а для цього різниця $k_1 - k_2$ має ділитися на n. Звідси випливає, що при $k = 0$, $1, 2, \ldots, n - 1$ формула (9) дає різні значення $\sqrt[n]{z}$. При $k = n$ одержуємо те саме значення кореня, що і при $k = 0$, при $k = n + 1$ одержуємо те ж саме значення кореня, що і при $k = 1$ і т. д. Отже, за формулою (9) ми завжди одержимо точно n різних значень $\sqrt[n]{z}$ (при $z \neq 0$), тобто

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in Z. \tag{10}$$

(Усього одержуємо n різних значень при $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.) Отже,

при добуванні кореня n-го степеня з комплексного числа з модуля добувають арифметичний корінь n-го степеня, а до аргументу додають $2\pi k$ (де $k \in Z$) і результат ділять на показник кореня. ○

Приклад Знайдіть усі значення $\sqrt[4]{1}$.

Запишемо підкореневе число в тригонометричній формі $1 = 1\,(\cos 0 + i\sin 0)$. Тоді за формулою (10):

$$t = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1\,(\cos 0 + i\sin 0)} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0 + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{0 + 2\pi k}{4}\right) = 1\left(\cos\frac{\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi k}{2}\right).$$

Усього одержуємо 4 різних значення:

при $k = 0$ $\quad t_0 = 1\ (\cos 0 + i \sin 0) = 1\ (1 + i \cdot 0) = 1;$

при $k = 1$ $\quad t_1 = 1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = 1\ (0 + i \cdot 1) = i;$

при $k = 2$ $\quad t_2 = 1\ (\cos \pi + i \sin \pi) = 1\ (-1 + i \cdot 0) = -1;$

при $k = 3$ $\quad t_3 = 1\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) = 1\ (0 + i\,(-1)) = -i.$

Отже, $\sqrt[4]{1}$ має чотири різних значення: 1; –1; i; $-i$.

Зауваження. Якщо записати формулу (10) так:

$$t_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k\right)\right),\ k \in \mathbf{Z}\ (k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1),$$

то, ураховуючи геометричний зміст модуля, одержуємо, що всі точки, які зображають числа t_k, лежать на колі радіуса $\sqrt[n]{r}$ з центром у початку координат. Аргументи сусідніх точок відрізняються на $\frac{2\pi}{n}$, а тому вказані точки ділять коло на n рівних частин, тобто є вершинами правильного n-кутника, вписаного в це коло. Наприклад, точки, які зображають усі значення $\sqrt[4]{1}$ (тобто ± 1 та $\pm i$) є вершинами правильного чотирикутника, вписаного в коло радіуса 1 з центром у початку координат (рис. 2.6).

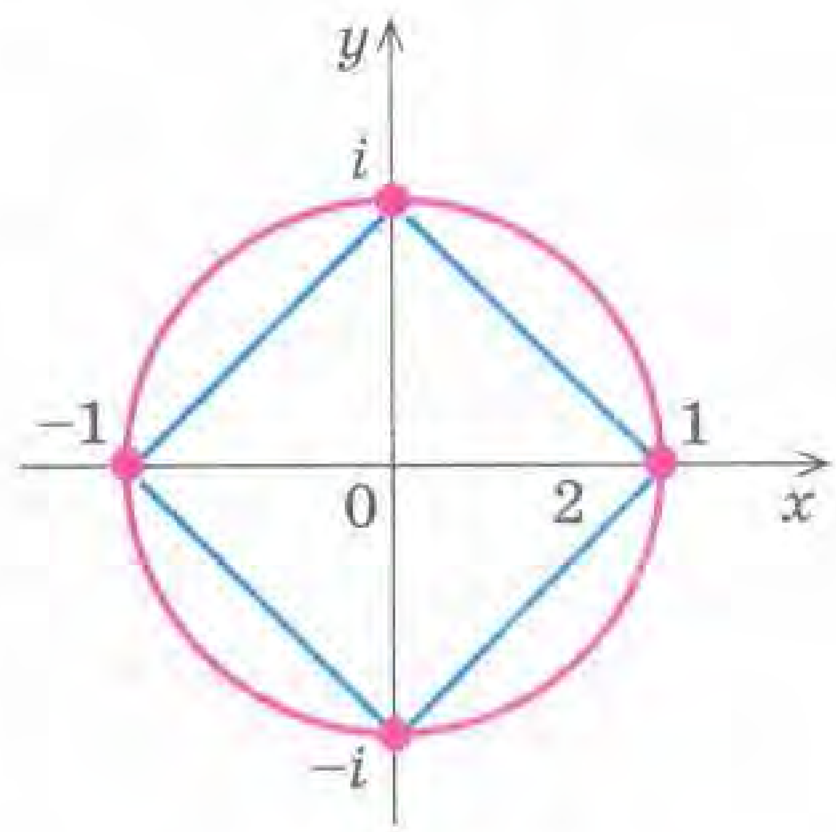


Рис. 2.6

Запитання для контролю

1. Користуючись геометричним зображенням комплексного числа, поясніть зміст понять модуля й аргументу комплексного числа.
2. Запишіть формули, за якими для комплексного числа $z = a + bi$ можна знайти його модуль і аргумент. Наведіть приклади.
3. Запишіть загальний вигляд комплексного числа в тригонометричній формі. Наведіть приклади запису комплексних чисел у тригонометричній формі.
4. Поясніть, у якому випадку будуть рівними комплексні числа $z_1 = r_1\ (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ і $z_2 = r_2\ (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.
5. Поясніть та обґрунтуйте геометричний зміст модуля різниці двох комплексних чисел. Зобразіть множину точок z комплексної площини, для яких $|z - i| = 1$.
6. Поясніть, як виконуються дії множення, ділення й піднесення до степеня над комплексними числами в тригонометричній формі. Запишіть і доведіть відповідні формули.

7. Запишіть і доведіть формулу для добування кореня n-го степеня з комплексного числа в тригонометричній формі.

Вправи

1. Зобразіть на координатній площині задане комплексне число. Користуючись відповідним зображенням, знайдіть його модуль та аргумент та запишіть задане число в тригонометричній формі:
1) $3i$; 2) 4; 3) $-5i$; 4) -7.
2. Подайте в тригонометричній формі комплексне число:
1) $\sqrt{3}+i$; 2) $2+2i$; 3) $3i$; 4) $-3-3i$;
5) -4; 6) $-1-\sqrt{3}\,i$; 7) $-2+2\sqrt{3}\,i$.
3. Подайте в алгебраїчній формі число, яке задано в тригонометричній формі:
1) $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; 3) $2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.
4. Зобразіть на комплексній площині множину точок z, які задовольняють умову:
1) $|z-2-i|=2$; 2) $|z+i|\geqslant 3$; 3) $|z+1-i|\leqslant 2$; 4) $|z-3|=4$.
5. Знайдіть добуток і частку комплексних чисел z_1 і z_2, заданих у тригонометричній формі (результат запишіть у тригонометричній та алгебраїчній формах):
1) $z_1=12\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, $z_2=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;
2) $z_1=6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_2=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
6. Обчисліть значення виразу, попередньо подавши чисельник і знаменник у тригонометричній формі:
1) $\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$; 2) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i}{i-\sqrt{3}}$; 3) $\frac{1+i}{-1-i}$; 4) $\frac{-1+i}{\sqrt{3}-i}$.
7. Піднесіть комплексне число до степеня, попередньо подавши основу степеня в тригонометричній формі.
1) $(1+i)^{16}$; 2) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{15}$; 3) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{12}$; 4) $(1-i)^{20}$.
8. Знайдіть усі значення кореня n-го степеня з комплексного числа:
1) $\sqrt[3]{i}$; 2) $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[4]{-16}$; 4) $\sqrt[6]{-1}$.
9. Знайдіть усі комплексні корені рівняння:
1) $z^3-27=0$; 2) $z^4+81=0$; 3) $z^6+64=0$; 4) $z^4-625=0$.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

Розділ 1

§ 1. **3.** 1) –3; 2) 9; 3) 0; 4) 1. **4.** 1) 11; 2) 1; 3) $\frac{1}{6}$; 4) –8. **5.** 1) [2; 3]; 2) (–1; 0,5); 3) [3; 4); 4) [1; 3] $\cup$ (4; $+\infty$). **6.** 1) (2; 5]; 2) [0,5; 1) $\cup$ (1; $+\infty$); 3) $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right] \cup [-1; 1] \cup \left[\sqrt{3}; +\infty\right)$ або $x = 1{,}5$; 4) (4; 28].

§ 2. **1.** 1) 6; 2) 7; 3) 5. **2.** 1) $3\Delta x$; 2) $3x_0\Delta x\,(x_0 + \Delta x) + (\Delta x)^3$; 3) $\Delta x\,(2x_0 + \Delta x - 1)$; 4) $\Delta x + \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}$. **5.** а) $f'(x_1) = \sqrt{3}$; $f'(x_2) = 1$; б) $f'(x_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $f'(x_2) = 0$; в) $f'(x_1) = 0$; $f'(x_2) = 0$; г) $f'(x_1) = 0$; $f'(x_2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. **6.** 1) 6; 2) 1; 3) –1; 4) 1. **7.** 1) $y = 2x - 1$; 2) $y = 0$; 3) $y = x - 0{,}25$; 4) $y = -6x - 9$. **8.** 1) $y = 0{,}5x + 0{,}5$; 2) $y = x + 0{,}25$; 3) $y = 0{,}25x + 3$; 4) $y = \frac{1}{6}x + 1\frac{1}{2}$. **9.** 1) 1; 2) 13; 3) 75; 4) 0,25.

§ 3. **1.** 1) $8x^7$; 2) $-5x^{-6}$; 3) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$; 4) $20x^{19}$; 5) $-20x^{-21}$; 6) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$. **2.** 1) 1; 2) $5x^4 - 1$; 3) $-\frac{1}{x^2} - 3x^2$; 4) $2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **3.** 1) $6x^2 + 3$; 2) $2x + 5$; 3) $4x^3 - 4x$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x}} + 12x^2$. **4.** 1) $6x^2 + 6x^5$; 2) $-6x^2 + 2x + 2$; 3) $-4x^3 + 6x^2 - 3$; 4) $\frac{15x^2 - 3x}{2\sqrt{x}}$. **5.** 1) $\frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2}$; 2) $-\frac{7}{(3x-2)^2}$; 3) $-\frac{11}{(5x+1)^2}$; 4) $\frac{2x^2 - 2x}{x^4}$. **6.** 1) $f'(-2) = -2$; $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3$; 2) $f'(2) = 28$; $f'(-1) = -8$; 3) $f'(0) = -\frac{5}{9}$; $f'(-3) = -\frac{5}{81}$; 4) $f'\left(-\sqrt{2}\right) = 1{,}5$; $f'(0{,}1) = 101$. **7.** 1) 1; 2) –2; 0; 3) ±0,5; 4) 0,25. **8.** 1) (1; $+\infty$); 2) (–2; 0); 3) (–2; 0) $\cup$ (0; 2); 4) ($-\infty$; –1) $\cup$ (1; $+\infty$). **9.** 1) $f'(u) = \sqrt{u}$; $u(x) = \sin x$; 2) $f(u) = u^5$; $u(x) = 2x + x^2$; 3) $f(u) = \sqrt{u}$; $u(x) = x^3 - x$; 4) $f(u) = \cos u$; $u(x) = 2x - \frac{\pi}{4}$. **10.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) [–3; $+\infty$); 3) ($-\infty$; 4) $\cup$ (4; $+\infty$); 4) ($-\infty$; –2) $\cup$ (2; $+\infty$); 5) $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 6) (0; 0,5]; 7) $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 8) [0,1; 10]. **11.** 1) $3(x^2 - x)^2(2x - 1)$; 2) $-10(2x - 1)^{-6}$; 3) $4\left(x - \frac{1}{x}\right)^3\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$; 4) $\frac{5 - 2x}{2\sqrt{5x - x^2}}$; 5) $\frac{3}{4\sqrt{3x}\left(2 + \sqrt{3x}\right)} - \frac{4}{(2x-1)^3}$. **12.** 1) $y = 7x - 4$; 2) $y = 26x + 54$; 3) $y = -0{,}5x + 1{,}5$; 4) $y = 7x + 6$.

§ 4. **1.** 1) $-\sin x$; 2) $2\cos x - 3$; 3) $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$; 4) $3x^2 + \frac{1}{\sin^2 x}$. **2.** 1) $\operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}$; 2) $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin^2 x}$; 3) $\sin x\left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$; 4) $-\cos x\left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)$. **3.** 1) $\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$; 2) $\frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$; 3) $\sin 2x$; 4) $-\sin 2x$. **4.** 1) $\cos x$; 2) $-6\sin 6x$; 3) $2\cos 2x$;

4) $-4\sin 4x$. **5.** 1) $\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$; 2) $-2x\sin x^2$; 3) $-\sin x\cos(\cos x)$; 4) $\frac{3}{\cos^2 6x\sqrt{\operatorname{tg} 6x}}$. **6.** 1) $5x^4+4\cos 4x$; 3) $-2\cos 2x$; 4) $\frac{12\operatorname{tg}^2 4x}{\cos^2 4x}$. **7.** 1) $\frac{x-\sin 2x}{x^3\cos^2 x}$; 2) $\sin 2x$; 4) $\frac{1+\cos x}{2\sqrt{x+\sin x}}$. **8.** 1) 0; 2) 2; 3) -1; 4) -8. **9.** 1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) -5. **10.** 1) Немає; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi k}{4}, k\in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in \mathbf{Z}$. **11.** 1) 0; 4; 2) 0; 3; 3) 1; 4) 2. **12.** 1) $(-2; 2)$; 2) $(-\infty; 1)\cup(3; +\infty)$; 3) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi+\pi n\right), n\in \mathbf{Z}$; 4) $(0; 4)$. **13.** 1) а) 1; 3; б) $(-\infty; 1)\cup$ $\cup(3; +\infty)$; в) $(1; 3)$; 2) а) 1; 3; б) $(-\infty; 1)\cup(3; +\infty)$; в) $(1; 3)$; 3) а) 1; б) $(1; +\infty)$; в) $(0; 1)$; 4) а) 0; б) $(0; 4)$; в) $(-4; 0)$. **14.** 1) $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}}$; 2) $y=4x+1-\frac{\pi}{2}$; 3) $y=3$; 4) $y=0{,}5x-1{,}5$. **15.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in \mathbf{Z}$; 2) 2; -2; 3) $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in \mathbf{Z}$. **16.** $y=-3x+5$. **17.** $y=5x-5$.

§ 5. <u>**Пункт 5.1.**</u> **1.** а) Зростає на $[-6; -4]$ та $[-2; 2]$; спадає на $[-4; -2]$ та $[2; 6]$; б) зростає на $[-7; -4]$ та $[-2; 2]$; спадає на $[-4; -2]$ та $[2; 7]$. **2.** Зростає на $(-\infty; -5]$ та $[5; +\infty)$; спадає на $[-5; 5]$. **3.** Зростає на $[-3; -1]$; спадає на $(-6; -3]$ та $[-1; 3)$. **6.** 1) Зростає на $[1; +\infty)$; спадає на $(-\infty; 1]$; 2) зростає на $\left(-\infty; -2\sqrt{2}\right]$ та $\left[2\sqrt{2}; +\infty\right)$; спадає на $\left[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right]$; 3) зростає на $[-1; 0]$ та $[1; +\infty)$; спадає на $(-\infty; -1]$ та $[0; 1]$; 4) зростає на $(-\infty; -1]$ та $[1; +\infty)$; спадає на $[-1; 0)$ та $(0; 1]$. **7.** 1) Зростає на $(-\infty; -3]$ та $[3; +\infty)$, спадає на $[-3; 3]$; 2) зростає на $[-1; 1]$, спадає на $(-\infty; -1]$ та $[1; +\infty)$; 3) зростає на $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right], k\in \mathbf{Z}$; спадає на $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right], k\in \mathbf{Z}$; 4) зростає на $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right], k\in \mathbf{Z}$; спадає на $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi k\right], k\in \mathbf{Z}$. **8.** 1) $(-\infty; 0]$; 2) $[1; +\infty)$; 3) $[0; 9]$. **9.** 1) 1; 2) 2; 3) π; 4) -1. **12.** 1) Зростає на $(-\infty; -2]$, $[1; +\infty)$; спадає на $[-2; 1]$; 2) $x=-2$ — точка максимуму; $x=1$ — точка мінімуму. **16.** 1) Зростає на $[3; +\infty)$; спадає на $(-\infty; 3]$; $x=3$ — точка мінімуму; $f(3)=-4$; 2) зростає на $[-1; 0]$ та $[1; +\infty)$; спадає на $(-\infty; -1]$ та $[0; 1]$; $x=\pm 1$ — точки мінімуму; $f(-1)=f(1)=-1$; $x=0$ — точка максимуму; $f(0)=0$; 3) зростає на $(-\infty; -2]$ та $[2; +\infty)$; спадає на $[-2; 0)$ та $(0; 2]$; $x=-2$ — точка максимуму; $f(-2)=-4$; $x=2$ — точка мінімуму; $f(2)=4$; 4) зростає на $[1; 2]$; спадає на $[2; 3]$; $x=2$ — точка максимуму; $f(2)=2$. **17.** 1) Зростає на $[-2; 2]$, спадає на $(-\infty; -2]$ та $[2; +\infty)$; $x=-2$ — точка мінімуму, $y(-2)=-0{,}25$; $x=2$ — точка максимуму, $y(2)=0{,}25$; 2) зростає на $[-0{,}5; 0]$ та $[0{,}5; +\infty)$; спадає на $(-\infty; -0{,}5]$ та $[0; 0{,}5]$; $x=\pm 0{,}5$ — точки мінімуму; $f(-0{,}5)=f(0{,}5)=-1{,}25$; $x=0$ — точка максимуму; $f(0)=-1$; 3) зростає на $(-\infty; +\infty)$; 4) зростає на $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi k\right], k\in \mathbf{Z}$; спадає на $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right], k\in \mathbf{Z}$; $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in \mathbf{Z}$, — точка мінімуму; $f\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}, k\in \mathbf{Z}$; $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in \mathbf{Z}$, —

точка максимуму; $f\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}, k \in Z$. Пункт 5.2. 4. 1) б) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$; в) при $a < -4$, $a > 4$ — два; при $a = \pm 4$ — один; при $-4 < a < 4$ — немає; 2) б) $[-2; +\infty)$; в) при $a < -2$ — немає; при $a = -2$, $a > 0$ — один; при $-2 < a \leqslant 0$ — два; 3) б) $[-0,25; +\infty)$; в) при $a < -0,25$ коренів немає, при $a = -0,25$ або $a > 0$ — один, при $0 < a < -0,25$ — два; 4) б) $[4; +\infty)$; в) при $a < 4$ коренів немає, при $a = 4$ — один, при $a > 4$ — два. **5.** 1) 2; 2) 2; 3) 1; 4) 1. **6.** 3), 4) графіки функцій зображено на **рис. 1 і 2**.

Пункт 5.3. **1.** 1) $f_{max} = 9$, $f_{min} = 5$; 2) $f_{max} = 5$, $f_{min} = -4$; 3) $f_{max} = 6$, $f_{min} = -2$; 4) $f_{max} = 1$, $f_{min} = -31$. **2.** 1) $f_{max} = 4$, $f_{min} = -4$; 3) $f_{max} = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$, $f_{min} = 0$. **3.** 2) $f_{max} = 1$, $f_{min} = -3$; 3) $f_{min} = -5$, f_{max} -3; 4) $f_{min} = -1$, $f_{max} = 1$. **4.** 1) $f_{max} = 5$, $f_{min} = -52$; 2) $f_{min} = 0$, $f_{max} = 2\sqrt{3}$; 4) $f_{min} = 0,5$, $f_{min} = 2,25$. **5.** 5; 5. **6.** 3,5; 0,5. **7.** 6; −2. **8.** Квадрат із стороною 5 см. **9.** $\frac{a}{6}$. **12.** 4. **13.** Рівнобедрений трикутник із бічною стороною $\frac{a}{2}$ і кутом α при вершині. **14.** $\frac{\pi R^3}{\sqrt{2}}$. **16.** $14 + 2\pi$. **17.** До точки відрізка AB, віддаленої від B на 1 км.

§ 6. **4.** 1) −3; 2) ±2; 3) 2; 4) −3; 1. **5.** 1) −3; 2) 25; 3) $-\frac{5}{6}$; 4) 14; 5) 5; 6) −3;

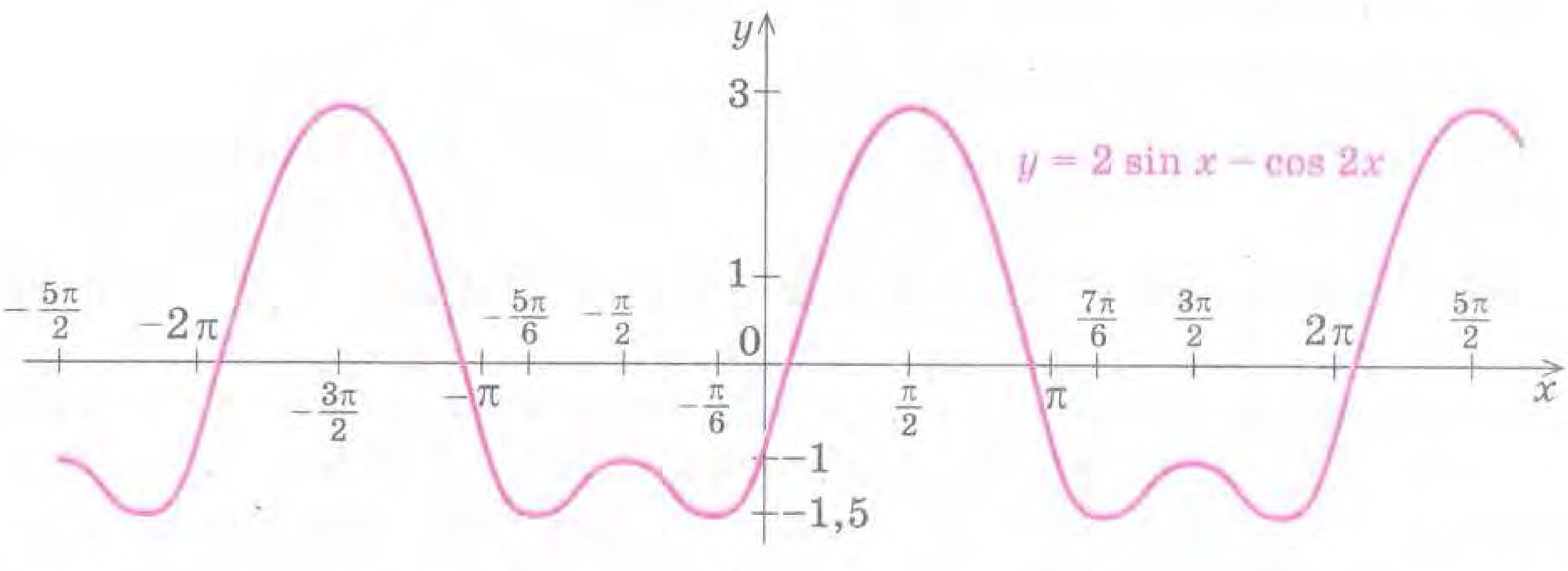


Рис. 1

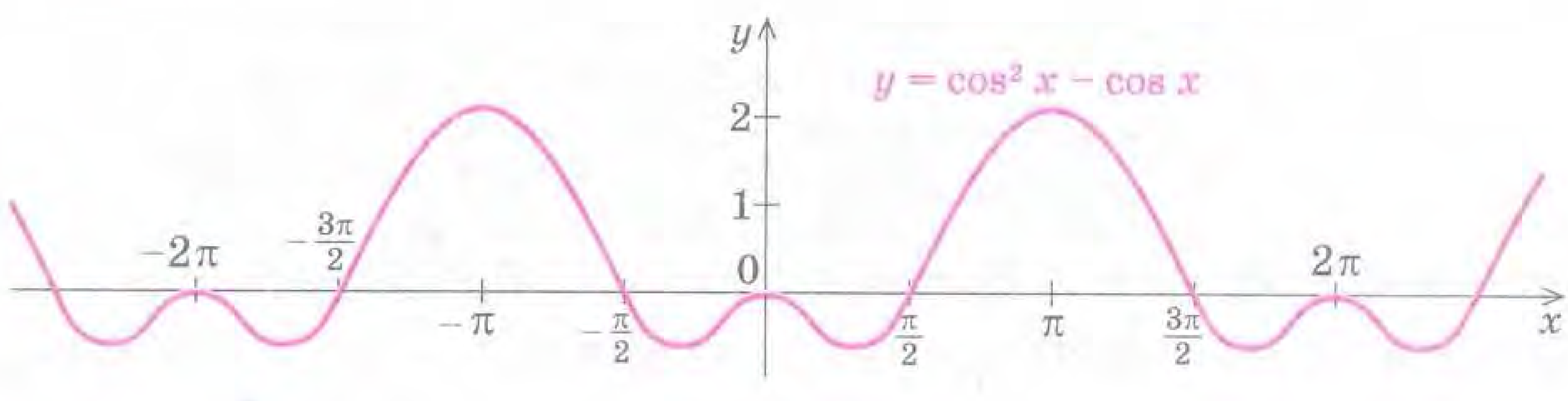


Рис. 2

7) 0,25; 8) $2\sqrt{2}$; 9) 3; 10) 2; 11) 0; 12) $-1\frac{5}{7}$; 13) $\frac{a}{b}$; 14) 1; 15) 1,25; 16) $4\frac{2}{3}$. **6.** 1) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ або $x = 1$; 3) $(-3; -2] \cup [3; 4)$; 5) $(-\infty; -1] \cup (8; +\infty)$; 8) $[-2; 3]$.

§ 9. **1.** 1) $6x - 6$; 2) $\frac{8\sin 2x}{\cos^3 2x}$; 3) $-2\sin x - x\cos x$; 4) $(2 - x^2)\sin x + 4x\cos x$. **2.** 1) Опукла вниз на $(-\infty; -1)$ та $(1; +\infty)$; опукла вгору на $(-1; 1)$; $x = \pm 1$ — точки перегину; 2) опукла вниз на $\left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ та $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$; опукла вгору на $\left(-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ та $\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$; $x = \pm\frac{\pi}{4}$, $x = \pm\frac{3\pi}{4}$ — точки перегину; 3) опукла вниз на $(-\infty; -1)$ та $(0; 1)$; опукла вгору на $(-1; 0)$ та $(1; +\infty)$; $x = 0$ — точка перегину; 4) опукла вниз на $\left(-\infty; \sqrt[3]{36}\right)$, опукла вгору на $\left(\sqrt[3]{36}; +\infty\right)$, $x = \sqrt[3]{36}$ — точка перегину.

§ 10. **<u>Пункт 10.1.</u>** **1.** 1) 3; 2) 5. **2.** 1) ± 1; 2) 0; 3) 2. **3.** 1) 2; 2) 0; 3) 2. **4.** 1) 0; 2) 0; **5.** 1) 1; 2; 2) 1; 3; 3) -1; -2. **6.** 1) 1; 2; -2; 2) -1; 2; -2; 3) 1; -1; 2. **8.** 1) $(-1; +\infty)$; 2) $(1; +\infty)$; 3) $(5; +\infty)$. **9.** 1) 3; 2) 11.

§ 11. **1.** $a \leqslant -3$ або $a \geqslant 1$. **2.** $a = 1$. **3.** $k = 2$. **4.** $x = 1$, $a = 3$. **5.** 1. **6.** $a = 3$, $b = 1$. **7.** $a = -23{,}25$. **8.** $5 - 3\sqrt{3} \leqslant a \leqslant 5 + 3\sqrt{3}$. **9.** $a \leqslant -32$ або $a \geqslant 32$. **10.** $a < -7$ або $a > 11$. **11.** $-7 \leqslant a < 0$ або $0 < a \leqslant 7$. **12.** $0 < a \leqslant 9$. **13.** $a = -\frac{2}{3}$.

Додаткові вправи. **4.** 1) -2; 2) 1. **11.** 1) $(1; -3)$. **23.** 45°.

Розділ 2

§ 13. **4.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0)$; 3) $(-2; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0)$. **10.** 1) «$-$»; 2) «$-$»; 3) «$+$»; 4) «$+$».

§ 14. **<u>Пункт 14.1.</u>** **1.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) 2; 3) 0; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $2 \pm \sqrt{6}$; 7) -3; 2; 8) 0; 9) 2; 10) 4; 11) коренів немає; 12) 5; 13) коренів немає; 14) 0; 15) 1; 16) 2; 17) 1; 18) 2; 3; 19) 1; 20) 1; 21) 2; 22) 2. **2.** 1) 1; 2) 1; 3) 3. **3.** 1) -4; 2; 2) -2; 3; 3) -2; 4; 4) -1; 3; 5) $\pm\sqrt{3}$. **4.** 1) 1; 2) 1; 3) 3; 4) -1; 5) 2; 6) 0; 7) -2; 8) 2. **5.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $\boldsymbol{R}$ при $a = 0$; при $a \neq 0$ $x = 1$; 3) при $a = 0$ $x \in \boldsymbol{R}$, $x \neq 0$; при $a > 0$ $x = 0{,}5$ (при $a < 0$ рівняння не визначене). **<u>Пункт 14.2.</u>** **1.** 1) 0; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 1. **2.** 1) 1; 2) 1; 3) 0; 2; 4) 0; 2; 5) 3; 6) 0,5; 7) ± 1; 8) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 0; 5) 0; 6) 1,5. **4.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 1; 5) 0; 1. **5.** 1) 2; 2) ± 1; 3) 0; 4) 0; 1,5. **8.** 1) $(3; -1)$; 2) $(-2; -3)$; 3) $(1; 2)$; $(2; 1)$; 4) $(3; 1)$; 5) $(4; 2)$; 6) $(4; 2)$. **<u>Пункт 14.3.</u>** **1.** 1) $(0; +\infty)$; 2) $(-1; +\infty)$; 3) $\boldsymbol{R}$; 4) розв'язків немає; 5) $(-\infty; -2]$; 6) $(-\infty; 5]$; 7) $[2{,}5; +\infty)$; 8) $(0; +\infty)$; 9) $[1; 3) \cup [6; +\infty)$; 10) $[1; 4) \cup [8; +\infty)$. **2.** 1) $(-\infty; 0)$; 2) $(-\infty; 1)$; 3) $[-1; +\infty)$; 4) $(-\infty; 1]$; 5) $(2; +\infty)$; 6) $[1; 2]$. **3.** 1) $(-\infty; 0)$; 2) $(-\infty; 1]$; 3) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$; 4) $[0; 1]$. **4.** 1) -2; $[3; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2]$, 4; 3) $(0; 1)$; 4) $(0; 1)$.

§ 15. **2.** 1) 2; 2) 3; 3) -2; 4) 0,5; 5) $-1{,}5$; 6) 0; 7) $\frac{1}{3}$; 8) $\frac{1}{4}$; 9) -1; 10) -1. **3.** 1) $\log_4 9$; 6) $\ln 3$. **4.** 5) 14; 6) 54. **5.** 2) $2\lg a + 5\lg b - 7\lg c - 1$;

5) $2+7\log_3 a+\frac{1}{3}\log_3 b$. **6.** 1) $3\lg|a|+5\lg|b|+8\lg|c|$; 2) $\frac{1}{3}\lg|a|+\frac{1}{3}\lg|b|-2\lg|c|$; 3) $4\lg|c|-\frac{2}{5}\lg|a|-\frac{2}{5}\lg|b|$; 4) $2+\frac{1}{5}\lg|a|+\frac{1}{5}\lg|b|+\frac{2}{5}\lg|c|$. **7.** 1) $b+1$; 2) $2a+b$; 3) $a+b+1$; 4) $3a+2b$. **8.** 1) $\frac{40}{9}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{5a}\cdot c^5}{b^2}$; 3) $\frac{m^3\cdot\sqrt[7]{n^2}}{\sqrt[5]{p}}$; 4) $\frac{1}{1600}$. **9.** 1) $-\log_3 a$; 2) $0{,}5\log_3 a$; 3) $-0{,}5\log_3 a$; 4) $2\log_3 a$; 5) $\frac{\log_3 a}{\log_3 2}$. **10.** 1) 24; 2) 10; 3) 2,5; 4) 1,5; 5) 19; 6) 12. **11.** 1) $\frac{2(2a-1)}{3(2-a)}$; 2) $\frac{2+a}{2(2-a)}$; 3) $\frac{b(3-2a)}{ab+2}$; 4) $\frac{b(a+4)}{3(1+ab)}$.

§ 16. **1.** 1) $(-3;+\infty)$; 2) $(3;+\infty)$; 3) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; 4) $(0;3)$; 5) $\boldsymbol{R}$; 6) $\boldsymbol{R}$; 7) $(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$; 8) $(2;3)\cup(3;+\infty)$; 9) $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$; 10) $(0;1)\cup(1;2)$; 11) $(1{,}5;2)\cup(2;5)$.

§ 17. **Пункт 17.1.** **1.** 1) 16; 2) 5; 3) 2; 4) 100. **2.** 1) 5; 2) 6; 3) -3; 1; 4) 2,9. **3.** 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4; 4) 5. **4.** 1) 3; 27; 2) 10; 3) $\frac{1}{81}$; 9; 4) 0,1; 1; 10. **5.** 1) 1; 2) 2; 4; 3) 0; 4) $\log_3 4$. **8.** 1) (100; 10); (10; 100); 2) $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2};\sqrt{17}\right)$; 3) (4; 1); (1; 4); 4) (0,25; 64); (8; 2). **Пункт 17.2.** **1.** 1) $(9;+\infty)$; 2) $(0;5)$; 3) $(0{,}5;+\infty)$; 4) $(0;100)$. **2.** 1) $(2;+\infty)$; 2) $(0{,}2;2)$; 3) $\left(\frac{2}{3};9\right)$; 4) $(-0{,}5;1{,}5)$. **3.** 1) $(3;+\infty)$; 2) $\left(-\frac{1}{3};1\right)$; 3) $(2;3)$; 4) $(0{,}5;4]$. **4.** 1) $(0;3)\cup(9;+\infty)$; 2) $(0{,}1;10)\cup(10;1000)$; 3) $\left[\frac{1}{9};9\right]$; 4) $(0;0{,}5]\cup[4;+\infty)$. **5.** 1) $(10;+\infty)$; 2) $[6;+\infty)$; 3) $(-4;-3)\cup(4;5)$; 4) $[1;+\infty)$. **6.** 1) $(0;0{,}25]$; 2) $(1;4)$; 3) $(0;1)\cup\left[\sqrt{2};4\right]$; 4) $(-2;0{,}5)$.

§ 18. **1.** 1) $3e^x$; 2) $e^x-\frac{1}{x}$; 3) $-e^{-x}+5x^4$; 4) $\frac{2}{2x-1}$. **2.** 1) $e^{5x}(5\cos x-\sin x)$; 2) $\frac{1-\ln x}{x^2}$; 3) $\frac{\lg x}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}\ln 10}$; 4) $x^2\left(3\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}\right)$. **3.** 1) $(0{,}5\ln 0{,}5;+\infty)$; 2) $(-\infty;0)\cup(0{,}5;+\infty)$; 3) $\left(\frac{1}{e};+\infty\right)$; 4) $(1{,}5;+\infty)$. **4.** 1) а) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right)$; в) $\left(0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; 2) а) 1; б) $(1;+\infty)$; в) $(0;1)$; 3) а) e; б) $(0;e)$; в) $(e;+\infty)$; 4) а) e^{-2}; б) $(e^{-2};+\infty)$; в) $(0;e^{-2})$. **5.** 1) $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}}$; 2) $y=4x+1-\frac{\pi}{2}$; 3) $y=2$; 4) $y=-1$. **6.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 2) 1; 3) 0. **7.** $y=5x+2$. **8.** $y=3x-1$. **9.** 2) $f_{max}=\ln 2+5$, $f_{min}=\ln 4-2$. **10.** 1) а) графік функції зображено на **рис. 3**; б) $\left[-\frac{2}{e};+\infty\right)$; в) при $a<-\frac{2}{e}$ — немає; при $a=-\frac{2}{e}$ і $a\geqslant 0$ — один; при $-\frac{2}{e}<a<0$ — два; 2) а) графік функції зображено на **рис. 4**; б) $(-\infty;0)\cup[e;+\infty)$; в) при $a<0$, $a=e$ — один; при $0\leqslant a<e$ — немає; при $a>e$ — два. **11.** $\left(\frac{e}{6}\right)^6$. **12.** 1) 0; 2) 1. **13.** 1) 0. 3) 1. Вказівка. При $x<0$

виконати оцінку значень лівої і правої частин рівняння. **14.** 1) 1; 2; 2) 1; 3; 3) −2; 0. **15.** 1) 0; 1; 3; 2) 0; 1; 2; 3) 0; ±1; 4) 1.

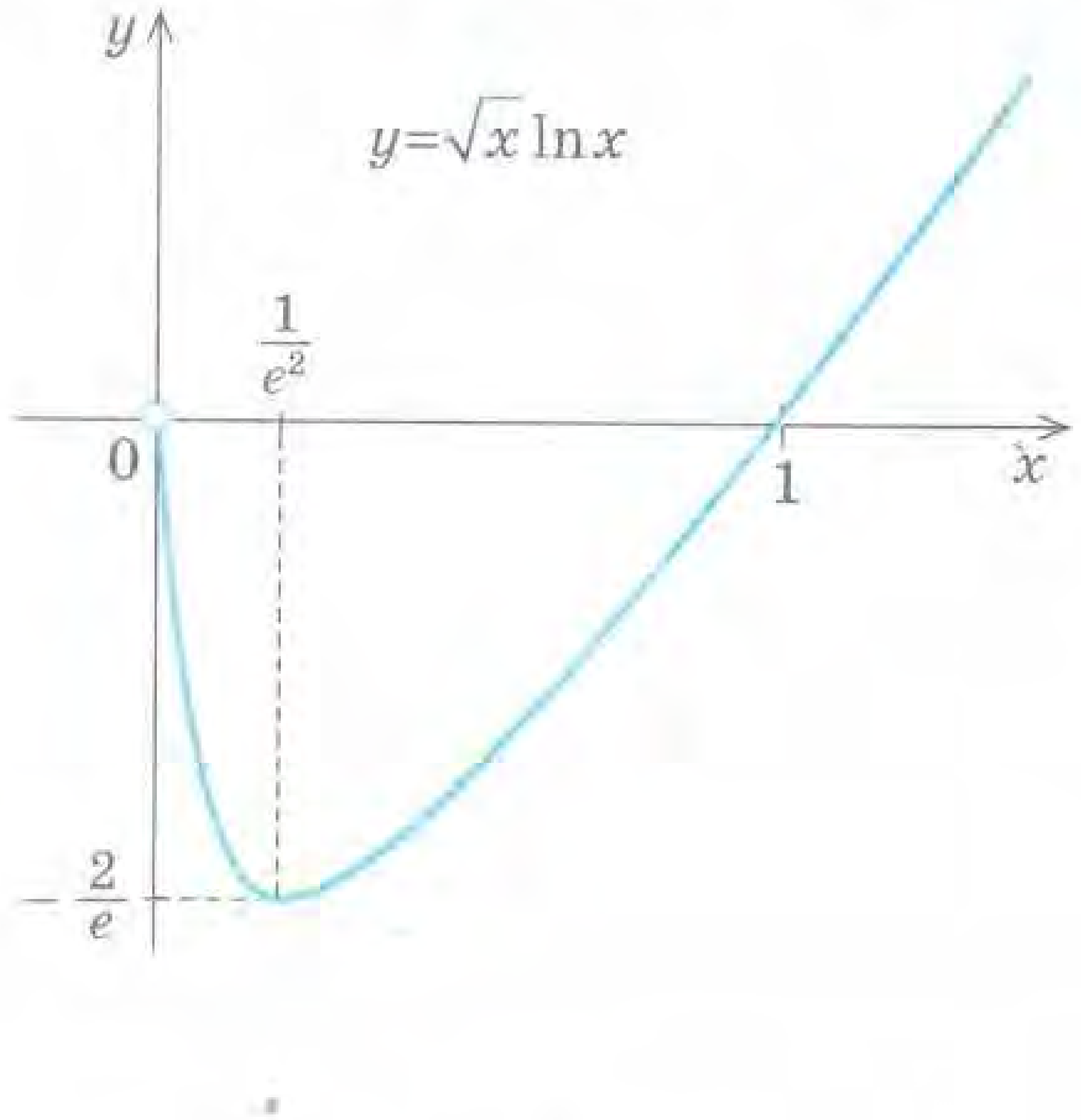


Рис. 3

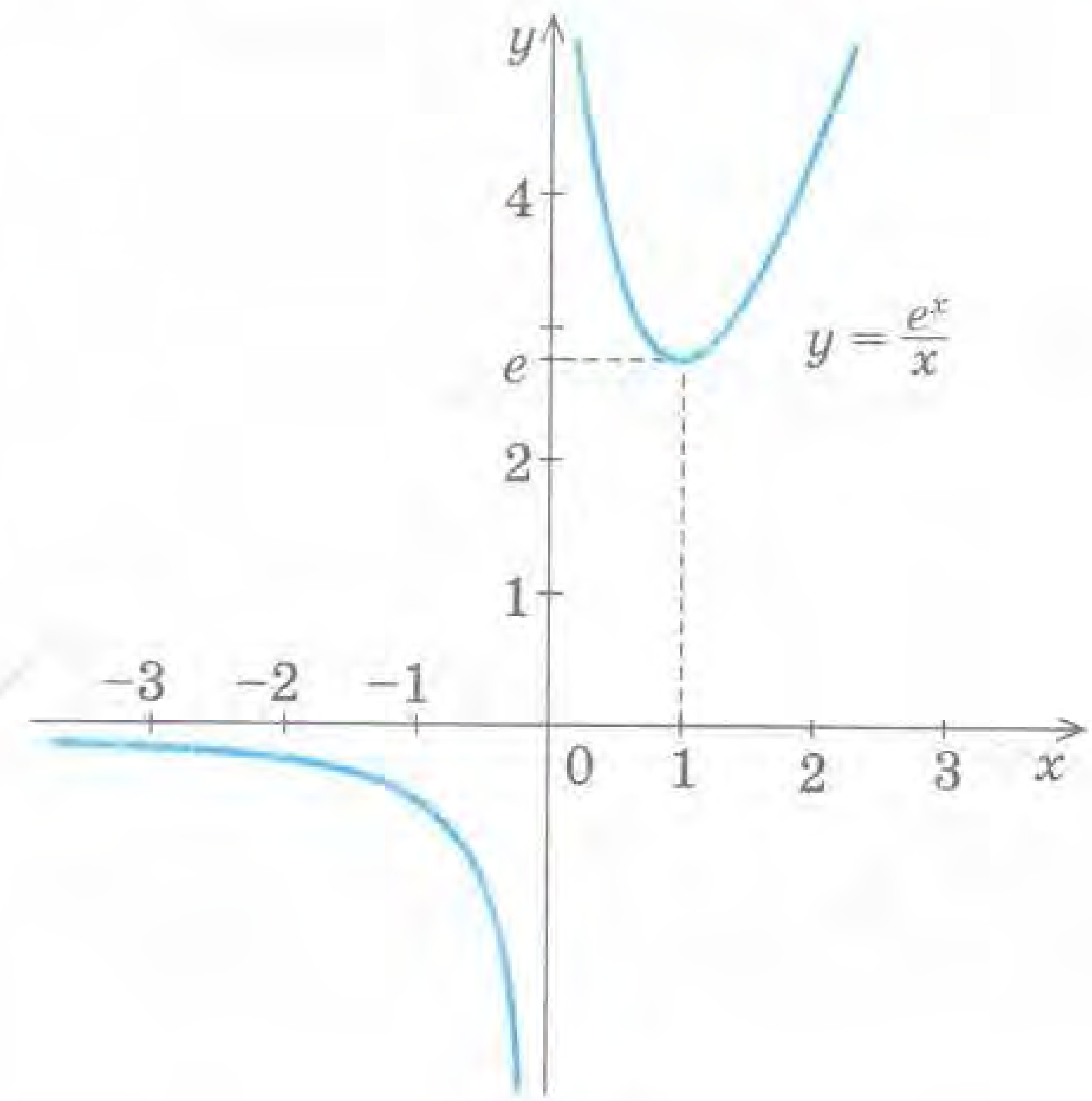


Рис. 4

§ 19. **1.** 1) 1; 1000; 2) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 10; 3) $\frac{1}{16}$; 8; 4) 3; 5) а) 1; 4; б) 0; 1; 4; 6) −1; 0; 2; 7) 3; 8) 0,25; 4; 9) 2. **2.** 1) (25; 5); (5; 25); 2) (0,5; 0,125); (8; 2). **3.** 1) (0; 0,5) ∪ (1; 2); 2) (−∞; −2] ∪ [−1; 0] ∪ [3; +∞); 3) [3; 5]; 4) при $0 < a < 1$ $x \in (0;\, a) \cup (a^{-4};\, +\infty)$; при $a > 1$ $x \in (a^{-4};\, a)$; при $a \leqslant 0$ або $a = 1$ нерівність не визначена; 5) при $0 < a < 1$ $x \in (a;\, a^{-2})$; при $a > 1$ $x \in (0;\, a^{-2}) \cup (a;\, +\infty)$; при $a \leqslant 0$ або $a = 1$ нерівність не визначена.

§ 20. **1.** 1) 1; 2) 1; 3) 2; 4) 0; 5) 4; 6) коренів немає; 7) ±2; 8) 1. *Вказівка.* Записати рівняння у вигляді $\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)=2x-x^2$ і врахувати, що при $x > 0$ $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$; 9) 1. **2.** 1) ±2; 2) ±2; 3) 2. *Вказівка.* Поділити обидві частини рівняння на 2^x і врахувати, що функція, одержана у лівій частині, спадна. **3.** 1) 0,25; 2; 2) 1; 3; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 1,5. **4.** 1) −3; [−1; +∞); 2) [25; +∞). **5.** 1) При $a \geqslant 11$ $x=\log_5\frac{a-1\pm\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$; при $a < -1{,}5$ $x=\log_5\frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$; при $-1{,}5 \leqslant a < 11$ коренів немає; 2) при $-1<a\leqslant 3-2\sqrt{2}$ або $3<a\leqslant 3+2\sqrt{2}$ $x=\log_2\frac{a^2-1}{2(a-3)}$; при $a \leqslant -1$ або $3-2\sqrt{2}<a\leqslant 3$, або $a>3+2\sqrt{2}$ коренів немає. **6.** 1) (−5; −5); (2; 2); 2) (3; 3). **7.** $-1 < a \leqslant 0$. **8.** $a \geqslant 1$. **9.** $a = -4$. *Вказівка.* Звести рівняння до виду $f(x) = 0$ і врахувати, що функція $f(x)$ парна. **10.** $a \leqslant 0$, $a = 0{,}25$. **11.** При $a < 0$ коренів немає; при $a = 0$ один корінь; при $a > 0$ два корені. **12.** При $a \leqslant -1$ або $a \geqslant 7$ один корінь; при $-1 < a < 7$ два корені. **13.** $a \geqslant -2{,}25$.

Додаткові вправи. **1.** 1) –40; 2) $5\sqrt{3}$; 3) 7; 4) 20. **2.** 1) 1000; 2) 27; **3.** 1) 1; 2) 1. **4.** 1) 9; 2) 19. **5.** 1) –27,2; 2) –0,8; 3) $-\frac{5}{6}$. **6.** 1) $\frac{a+1}{2a}$; 2) 5 (1 – *a* – *b*). **9.** 1) $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty]$; 2) $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty]$; 3) $\left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right]$; 4) $[-1; 0) \cup (3; 4]$. **10.** 1) $(-\infty; 1]$; 3) [0,5; 1]; 4) [2; 4]. **11.** 1) $[-2; +\infty)$; 2) $[-1; +\infty]$. **12.** 1) –2,5; 2) 0,6; 3) 1,75; 4) 3. **13.** 1) –2; 2) 16; 4) 64. **14.** $-2 < a < 2$. *Вказівка.* Записати задані вирази як степені з однаковою основою 5.

Розділ 3

§ 21. **Пункт 21.1.1.** **1.** 12. **2.** 1) 16; 2) 60. **3.** 1) 2052; 2) яблуко. **4.** 1680. *Вказівка.* Доцільно за місця вибрати екзамени і розміщувати по них задані дні. **5.** 24. **6.** 870. **7.** 336. **8.** 210. **9.** 2730. **10.** $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$. **11.** 120. **12.** 96. **13.** 544 320. **14.** 1) 24; 2) 12. **15.** 1) 5; 2) 6. **Пункт 21.1.2.** **1.** 24. **2.** 5040. **3.** 120. **4.** 6. **5.** 1) 720; 2) 600. **6.** 1) 6; 2) 6. **7.** 384. **8.** 240. **9.** $5! \cdot 8!$. **10.** $10!$; $(5!)^2$. **Пункт 21.1.3.** **1.** 21. **2.** 56. **3.** 210. **4.** 1) 55; 2) 165. **5.** 400 400.

§ 22. **Пункт 22.1.** **1.** 1) Випадкова; 2) неможлива; 3) випадкова; 4) неможлива; 5) випадкова; 6) неможлива; 7) випадкова; 8) неможлива; 9) вірогідна; 10) випадкова; 11) випадкова. **3.** 0,03. **4.** 0,002. **5.** 0,998. **6.** 0. **7.** 1. **8.** 1) 1; 2) 0. **9.** $\frac{1}{24}$. **10.** $\frac{1}{1250}$. **11.** 0,04. **12.** 0,75. **13.** $\frac{1}{12}$. **14.** 0,95. **15.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) $\frac{2}{3}$. **16.** Виграші рівноможливі. **17.** Ні. **18.** 1) червоне; 2) а) 1; б) 0; в) 0,4; г) 0,52. **19.** Будь-яку. **20.** 1 червона, 5 жовтих. **21.** Зелена, $p = \frac{1}{6}$. **22.** 1) $\frac{4}{15}$; 2) 0; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 11. **23.** $\frac{1}{36}$. **24.** $\frac{2}{3}$. **25.** $\frac{1}{120}$. **Пункт 22.2.** **4.** 1) $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$; 2) $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$; 3) $A_1 + A_2 + A_3$. 4) $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$; 5) $\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3$. **5.** *A* і *B*; *A* і *C*; *B* і *M*; *C* і *D*; *C* і *M*; *C* і *T*; *D* і *K*; *D* і *M*; *D* і *T*. **6.** *A* і *B*; *C* і *D*; *C* і *M*; *D* і *M*; *K* і *M*. **7.** $\frac{7}{16}$. **8.** $\frac{4}{13}$. **Пункт 22.3.** **2.** 1) 0,42; 2) 0,51; 3) 0,49. **3.** 1) 0,43; 2) 0,1; 3) 0,9. **6.** 1) 0,71; 2) 0,71; 3) 0,51; 4) 0,49; 5) 0,96; 6) 1. **7.** 1) 0,53; 2) 0,9; 3) 0,47; 4) 0,76. **Пункт 22.4.** **1.** Шанси однакові. **2.** У кіно. **3.** Шанси однакові. **4.** $\frac{2}{\pi}$. **5.** $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$. **6.** 0,5. **7.** 0,4375. **Пункт 22.5.** **1.** 0,64. **2.** $\frac{1}{12}$. **3.** 0,0012. **5.** 1) 0,42; 2) 0,985; 3) 0,14; 4) 0,425. **6.** 0,714. **7.** 0,126. **8.** 0,5. **9.** $n \geqslant 4$. **Пункт 22.6.**

1.

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2.

X	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Y	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Z	1	2
P	0,5	0,5

3.

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

4.

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

6. 3,5. **8.** Гра несправедлива. **10.** Гра несправедлива. **11.** 2 :1. **12.** Перший гравець повинен одержати 157,5 ліврів, другий — 52,5. **13.** 11 : 5.

§ 23. Пункт 23.1. **2.** 240.

3.

Колір	чорний	червоний	синій	сірий	білий	жовтий	зелений
Кількість кепок	9600	6000	4800	4200	3300	1500	600

4.

Жирність	0	0,5	1	1,5	2,5	3,5	5
Кількість літрів	400	240	160	200	480	280	240

Пункт 23.2. **5.** 1) $R = 4$; $Mo = 2$; $Me = 2$; $\overline{X}=2\frac{2}{3}$; 2) $R = 8$; $Mo = 2$; $Me = 1$; $\overline{X}=0{,}6$. **6.** 1) $R = 3$; $Mo = 3$; $Me = 3$; $\overline{X}=3\frac{4}{11}$; 2) $R = 8$; $Mo_1 = 4$; $Mo_2 = 5$; $Me = 4$; $\overline{X}=3\frac{4}{7}$. **7.** $Mo_1 = 135$; $Mo_2 = 140$; $Me = 135$; $\overline{X}=129\frac{6}{11}$.

Розділ 4

§ 24. **4.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні. **5.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) так. **6.** 1) $2x-\frac{x^5}{5}+C$; 2) $\frac{x^2}{2}+\sin x+C$; 3) $2x^2 + C$; 4) $-8x + C$; 5) $\frac{x^7}{7}+C$; 6) $-\frac{1}{2x^2}-2x+C$; 7) $x+\frac{1}{3x^3}+C$; 8) $\frac{x^4}{4}+C$. **7.** 1) $2x-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2x^2}+C$; 2) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^4}+\sin x+C$; 3) $-\frac{1}{x}+\cos x+C$; 4) $\frac{5}{3}x^3-x+C$; 5) $\frac{1}{12}(2x-8)^6+C$; 6) $-\frac{3}{2}\cos 2x+C$; 7) $-\frac{1}{40}(4-5x)^8+C$; 8) $-\frac{1}{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$; 9) $\frac{1}{15(4-15x)^3}+C$; 10) $-2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+C$; 11) $-\frac{4}{3(3x-1)}+C$; 12) $\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3}\mathrm{tg}\,(3x-1)+C$. **8.** 1) $x-\frac{1}{3}\sin 3x+2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+C$; 2) $-\frac{1}{4}\mathrm{ctg}\,4x-2\sqrt{2-x}-x^3+C$; 3) $\frac{1}{3}\mathrm{tg}\,(3x+1)-3\cos(4-x)+x^2+C$; 4) $\frac{1}{4(3-2x)^2}+\frac{6}{5}\sqrt{5x-2}+2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+C$. **9.** 1) $-\frac{1}{x}-10$; 2) $\mathrm{tg}\,x - 1$; 3) $\frac{x^4}{4}+1\frac{3}{4}$; 4) $-\cos x - 2$. **10.** 1) $x^2 + x$; 2) $x^3 - x^2 + 4$; 3) $\frac{x^2}{2}+2x+\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-4\frac{1}{3}$. **11.** 1) $2\sin x + 3$; 2) $x-\frac{x^3}{3}+3$; 3) $-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$; 4) $-\frac{1}{3x^3}+5\frac{2}{3}$. **12.** 1) $2x^2-\frac{1}{x}+1$; 2) $\frac{x^4}{4}+2x+3$; 3) $x - x^2 + 8$; 4) $-\frac{1}{x}-2x^5+3x+5$. **13.** $\frac{t^3}{3}+t^2-t$. **14.** $4\sin\frac{t}{2}+2$. **15.** $t^4 + 2t^2 + 2t + 7$.

§ 25. **Пункт 25.1.** **1.** 1) 6,6; 2) 1; 3) 20; 4) 1; 5) $\frac{1}{15}$; 6) 6; 7) 0,9; 8) 0,5. **3.** 1) 3; 2) 2; 3) $9\sqrt{3}$; 4) 4; 5) $\frac{2\pi}{3}+1$; 6) 78; 7) $\frac{\pi+3}{12}$; 8) 9,5. **4.** 1) 0,4; 2) 1,6; 3) $9\frac{1}{3}$; 4) $10\frac{2}{3}$. **5.** 1) 0,75; 2) 2; 3) $7\frac{1}{3}$; 4) $5\frac{1}{3}$. **6.** 1) 4,25; 2) $2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$; 3) $2\frac{2}{3}$; 4) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **Пункт 25.2.** **7.** $5\frac{1}{3}$. **8.** 4,5. **9.** 2) $\frac{15\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) $\frac{16\pi}{15}$. **10.** 1) $\frac{2\pi}{5}$; 2) 11π; 3) $\frac{50\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{6}$.

§ 26. **1.** 1) 68 м; 2) $21\frac{1}{3}$. **2.** 1) $y = 3x - 2x^2 + C$; 2) $y = 2x^3 - 4x^2 + x + C$; 3) $y = 1{,}5e^{2x} + C$; 4) $y = 2\sin 2x + C$. **3.** 1) $y = 1 - \cos x$; 2) $y = 2\sin x + 1$; 3) $y = x^3 + 2x^2 - x - 4$; 4) $y = 2x + x^2 - x^3 + 2$; 5) $y = e^x + 1 - e$; 6) $y = -e^{-x} + 3$.

Розділ 5

§ 27. **1.** 1) 8; 2) 12; 3) 9; 4) 7. **2.** 1) 1; 2) 5; 3) 3; 4) 2; 5) 5; 6) 6; 7) 2; 8) –2,5; 2; 9) $\sqrt[3]{9}$; 10) $\sqrt[3]{36}$. **3.** 1) $\frac{15+\sqrt{129}}{8}$; 2) $\frac{19+\sqrt{137}}{8}$; 3) 1; 4) 2. **4.** 1) 12; 2) 8. **5.** 1) корней нет; 2) –3; 2; 3) –1; 0; 4) 4. **6.** 1) $\frac{13-\sqrt{21}}{2}$; 2) $\frac{9-\sqrt{21}}{2}$; 3) $2+\sqrt{3}$; 4) $2+\sqrt{2}$. **7.** 1) 3; 2) 2. **8.** 1) $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$. **9.** 1) 0; $\pm\pi$; $\pm\frac{3\pi}{4}$; $\pm\frac{5\pi}{4}$; 2) $\pm\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$. **10.** 1) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$. **11.** 1) $\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$; $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$; 2) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$. **15.** 1) $\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+$ $+2\pi,\ k\in Z$; 2) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$. **21.** 1) 1; 2) –1. **23.** 1) 0; $\frac{15}{4}$; 4; 2) –1; 3. **24.** 1) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; 2) $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$; $2\pi k,\ k\in Z$; 3) $\pm\arccos\frac{-1}{\sqrt{3}+1}+2\pi n,\ n\in Z$. **28.** 1) $-\frac{7\pi}{4}$; – 6; – 5; 2) – 4; $\frac{5\pi}{4}$; – 3. **29.** 1) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$; $\pi n,\ n\in Z$. **30.** 1) 1,5; 2) 0. **32.** 1) 3; 2) 1. **38.** 1) $\left[\frac{11}{12};1\right)$; 2) $\left[\frac{9}{11};1\right)$. **41.** 1) $\left(\frac{4}{7};\frac{37+\sqrt{69}}{50}\right]$; 2) $\left(\frac{2}{5};\frac{17+\sqrt{73}}{18}\right]$; 3) $(-\infty;\ 2]\cup[6{,}5;\ +\infty)$. **43.** 1) (0,58; 0,6); 2) (0,44; 0,5). **46.** $(\pi k;\ \pi+\pi k)$, $k\in Z$. **50.** 2) $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ 2)$. **62.** 1) (1; 5); 2) (2; 1). **63.** $c = -1$. **69.** $\left(0;\frac{1}{12}\right]$. **72.** $\frac{2}{3}$ л. **73.** 0,5 л. **74.** 75 км/год. **75.** 40 км/год. **76.** 45 і 36 днів. **77.** 10 днів. **78.** 6 годин. **79.** 60 км/год. **80.** 15 км/год. **81.** 40 км/год і 55 км/год. **82.** 3:1. **83.** 3 кг і 7 кг. **84.** 45 кг. **85.** 40 кг. **86.** 2,5 кг. **87.** 3 тони. **88.** 98. **89.** 25 років. **90.** 19 і 13 квартир. **91.** 7 кг; 4 кг; 4 кг. **92.** 850 л. **93.** 6 місяців.

Додаток. **Пункт 1.** **2.** 1) $x = 3$; $y = -4$; 2) $x = 3$; $y = 8$; 3) $x = -3$; $y = -2$; 4) $x = 1$; $y = 0$. **3.** 1) $8 - 2i$; 2) $-2 + i$; 3) $3 - 4i$; 4) 4. **4.** 1) $4 - 5i$; 2) $2 + 19i$; 3) $-11 - 5i$;

4) $6+4i$. **5.** 1) $18+16i$; 2) $-16-28i$; 3) $-18+14i$; 4) 65. **6.** 1) $3-4i$; 2) $5+i$; 3) $2{,}96-0{,}28i$; 4) $0{,}5-0{,}5i$. **7.** 1) i; 2) i; 3) 1; 4) 0. **8.** 1) $-5-12i$; 2) $-2-2i$; 3) $-7+24i$; 4) $2+11i$. **10.** 1) $2\pm i\sqrt{5}$; 2) $0{,}5\pm 0{,}5i$; 3) $\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$; 4) $\frac{-5\pm i\sqrt{11}}{6}$.

<u>Пункт 2.</u> **2.** 1) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 4) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; 5) $4(\cos\pi+i\sin\pi)$; 6) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; 7) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. **3.** 1) $2\sqrt{3}+2i$; 2) $-3+3\sqrt{3}i$; 3) $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$. **5.** 1) $z_1z_2=48\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-24\sqrt{3}-24i$; $\frac{z_1}{z_2}=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=3i$; 2) $z_1z_2=18\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=18i$; $\frac{z_1}{z_2}=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2$. **6.** 1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$; 2) $\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}-3}{4}-\frac{\sqrt{3}+3}{4}i$; 3) $\cos\pi+i\sin\pi=-1$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{\sqrt{3}-1}{4}i$. **7.** 1) 256; 2) $32\,768i$; 3) 4096; 4) -1024. **8.** 1) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; $-i$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}+i\sqrt{\frac{3}{2}}$; 3) $\pm\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}$; 4) $\pm i$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$. **9.** 1) 3; $\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$; 2) $3\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$. 3) $\pm2i$; $\pm\sqrt{3}\pm i$; 4) ±5; $\pm5i$.

Позначення, які застосовано в підручнику

$\boldsymbol{N}$	— множина всіх натуральних чисел
$\boldsymbol{Z}$	— множина всіх цілих чисел
$\boldsymbol{Z}_0$	— множина всіх невід'ємних цілих чисел
$\boldsymbol{Q}$	— множина всіх раціональних чисел
$\boldsymbol{R}$	— множина всіх дійсних чисел, числова пряма
$\boldsymbol{R}_+$	— множина всіх додатних дійсних чисел
$[a;\ b]$	— відрізок (замкнений проміжок) з кінцями a і b, $a < b$
$(a;\ b)$	— інтервал (відкритий проміжок) з кінцями a і b, $a < b$
$(a;\ b]$, $[a;\ b)$	— напіввідкриті проміжки з кінцями a і b, $a < b$
$(a;\ +\infty)$, $[a;\ +\infty)$, $(-\infty;\ b]$, $(-\infty;\ b)$	— нескінченні проміжки
$(-\infty;\ +\infty)$	— нескінченний проміжок, числова пряма
$\vert x \vert$	— модуль (абсолютна величина) числа x
$(a-\delta;\ a+\delta)$	— δ-окіл точки a
$[x]$	— ціла частина числа x
$\{x\}$	— дробова частина числа x
$f(x)$	— значення функції f у точці x
$D(f)$	— область визначення функції f
$E(f)$	— область значень функції f
Δx	— приріст аргументу x
$\Delta f(x_0)$, Δf	— приріст функції f в точці x_0
$f'(x_0)$	— похідна функції f в точці x_0
$\sin$	— функція синус
$\cos$	— функція косинус
tg	— функція тангенс
ctg	— функція котангенс
$\arcsin$	— функція арксинус
$\arccos$	— функція арккосинус
arctg	— функція арктангенс
arcctg	— функція арккотангенс
$\sqrt{a}$	— арифметичний корінь із числа a
$\sqrt[2k]{a}$	— арифметичний корінь $2k$-го степеня із числа a ($k \in N$)
$\sqrt[2k+1]{a}$	— корінь $(2k+1)$-го степеня із числа a ($k \in N$)
$\log_a$	— логарифм за основою a
$\lg$	— десятковий логарифм (логарифм за основою 10)
$\ln$	— натуральний логарифм (логарифм за основою e)
$\max\limits_{[a;b]} f$	— найбільше значення функції f на відрізку $[a;\ b]$
$\min\limits_{[a;b]} f$	— найменше значення функції f на відрізку $[a;\ b]$
$\int f(x)dx$	— невизначений інтеграл функції f
$\int_a^b f(x)dx$	— визначений інтеграл функції f в межах від a до b

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Навчальне видання

Нелін Євген Петрович
Долгова Оксана Євгенівна

АЛГЕБРА
11 клас

Підручник
для загальноосвітніх навчальних закладів

Академічний рівень,
профільний рівень

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Редактор *О. В. Трефілова*
Коректор *Т. Є. Цента*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 70×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Ум. друк. арк. 32,76. Обл.-вид. арк. 25,3.
Тираж 5 643 прим. Замовлення № 354.

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003

ОСНОВНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФОРМУЛИ

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)\, \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \qquad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

$\cos x = a$ $\qquad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

$\cos x = 0$	$\cos x = 1$	$\cos x = -1$
$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = 2\pi n$	$x = \pi + 2\pi n$

$\sin x = a$ $\qquad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$

$\sin x = 0$	$\sin x = 1$	$\sin x = -1$
$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\operatorname{tg} x = a$ $\qquad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$

$\operatorname{tg} x = 0, \quad x = \pi n$

$\operatorname{ctg} x = a$ $\qquad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$

$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$

$\operatorname{ctg} x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

До навчально-методичного комплекту з алгебри для 11 класу входять:

- Підручник. 11 клас. Академічний рівень, профільний рівень. Автори Є. П. Нелін, О. Є. Долгова
- Навчальний посібник для учнів 7–11 класів «Алгебра в таблицях». Автор Є. П. Нелін
- Книга для вчителя. Плани-конспекти уроків. Автори: Є. П. Нелін, О. М. Роганін
- Зошит для поточного і тематичного оцінювання. Академічний рівень, профільний рівень. Автори: Є. П. Нелін, О. М. Роганін

Аналогічний навчально-методичний комплект розроблено для 10 класу

9 789664 741443

61052 Харків, вул. Восьмого Березня, 31
тел.: **(057) 719-46-80, 719-17-26**
факс: **(057) 758-83-93**
e-mail: **contact@gymnasia.com.ua**