

Г.П. БЕВЗ, В.Г. БЕВЗ

Алгебра

8



Числа



N — натуральні,
 Z — цілі,
 Q — раціональні,
 R — дійсні

Закони дій

$$a + b = b + a,$$

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

$$ab = ba,$$

$$(ab)c = a(bc),$$

$$a(b + c) = ab + ac$$

Властивості степенів

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n b^n,$$

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Формули скороченого множення

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Властивості дробів

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m},$$

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn},$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}$$

Властивості коренів

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

$$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|,$$

$$(\sqrt{a})^2 = a,$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Області допустимих значень цих рівностей указано в тексті підручника

Стандартний вигляд числа

$$x = a \cdot 10^n, \text{ де } 1 \leq a < 10,$$

n — порядок числа x

Квадратні рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ — рівняння,}$$

$$D = b^2 - 4ac \text{ — дискримінант,}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a};$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

$$x^2 + px + q = 0 \text{ — зведене рівняння,}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ — його корені,}$$

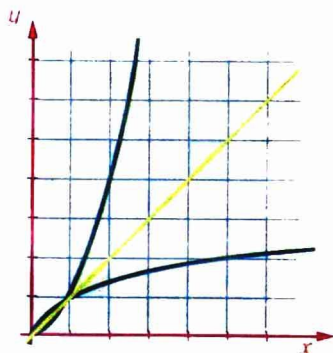
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q \end{cases} \text{ — теорема Вієта}$$

Г. П. БЕВЗ, В. Г. БЕВЗ

Алгебра

Підручник для 8 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України



Підручник – переможець
Всеукраїнського конкурсу підручників
для 12-річної школи
Міністерства освіти і науки України в 2008

Київ
«Зодіак-ЕКО»
2008

ББК 22.1я721
Б36

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
наказ від 17 березня 2008 р., № 179*

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Відповідальні від Міністерства освіти і науки України за підготовку до видання підручника: **Прокопенко Н. С.** — головний спеціаліст; **Потапова Ж. В.** — методист вищої категорії.

ТВОРЧА ГРУПА РОЗРОБНИКІВ ПІДРУЧНИКА

Юрій Кузнецов — керівник проекту, розробник концепцій: структури, дизайну;

Григорій Бевз, Валентина Бевз — автори тексту і методичного апарату;

Олег Костенко — заступник керівника проекту;

Наталія Демиденко — редактор-організатор, контрольне редагування;

Андрій Віксенко — розробник макета, художнього оформлення, художник обкладинки;

Валентина Максимовська — організатор виробничого процесу;

Галина Кузнєцова — економічний супровід проекту;

Роман Костенко — маркетингові дослідження підручника;

Андрій Кузнецов — моніторинг апробації підручника

Бевз, Г. П.

Б36 Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Зодіак-ЕКО, 2008. — 256 с. : іл.

ISBN 978-966-7090-51-7.

ББК 22.1я721

© Видавництво «Зодіак-ЕКО». Усі права захищені. Жодні частина, елемент, ідея, композиційний підхід цього видання не можуть бути копіюваними чи відтвореними в будь-якій формі та будь-якими засобами — ні електронними, ні фотомеханічними, зокрема ксерокопіюванням, записом або комп'ютерним архівуванням, — без письмового дозволу видавця.

© Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, 2008

© Видавництво «Зодіак-ЕКО», 2008

© Художнє оформлення. А. М. Віксенко, 2008

© Концепції: структури, дизайну.

Ю. Б. Кузнецов, 2008

ISBN 978-966-7090-51-7

ЗМІСТ

Дорогі восьмикласники! 5

Розділ 1



РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

§ 1. Ділення степенів і одночленів	7
§ 2. Ділення і дроби	16
§ 3. Основна властивість дроби	27
§ 4. Раціональні вирази	36
§ 5. Додавання і віднімання дробів	44
§ 6. Множення дробів	55
Завдання для самостійної роботи	64
Готуємося до тематичного оцінювання	
Тестові завдання № 1	65
Типові завдання до контрольної роботи № 1	66
§ 7. Ділення дробів	67
§ 8. Перетворення раціональних виразів	76
§ 9. Раціональні рівняння	86
§ 10. Степені з цілими показниками	96
§ 11. Стандартний вигляд числа	104
§ 12. Функція $y = \frac{k}{x}$	111
Завдання для самостійної роботи	121
Історичні відомості	122
Головне в розділі	123
Готуємося до тематичного оцінювання	
Тестові завдання № 2	124
Типові завдання до контрольної роботи № 2	125

Розділ 2



КВАДРАТНІ КОРЕНІ І ДІЙСНІ ЧИСЛА

§ 13. Функція $y = x^2$	127
§ 14. Квадратні корені	135
§ 15. Дійсні числа	144
§ 16. Квадратний корінь з добутку, дроби, степеня	152
§ 17. Перетворення виразів з коренями	161
§ 18. Функція $y = \sqrt{x}$	171
Завдання для самостійної роботи	179
Історичні відомості	180
Головне в розділі	181
Готуємося до тематичного оцінювання	
Тестові завдання № 3	182
Типові завдання до контрольної роботи № 3	183

Розділ 3

**КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ**

§ 19. Неповні квадратні рівняння	185
§ 20. Формула коренів квадратного рівняння	194
§ 21. Теорема Вієта	205
§ 22. Квадратний тричлен	213
§ 23. Розв'язування задач складанням квадратних рівнянь	220
Завдання для самостійної роботи	231
Історичні відомості	232
Головне в розділі	233
Готуємося до тематичного оцінювання	
Тестові завдання № 4	234
Типові завдання до контрольної роботи № 4	235

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ


Раціональні вирази	236
Квадратні корені та дійсні числа	239
Квадратні рівняння	240
Задачі та вправи підвищеної складності	242
Відомості з курсу алгебри 7 класу	246
Відповіді та вказівки до задач і вправ	250
Предметний покажчик	254

Дорогі восьмикласники!

Цей підручник — продовження підручника з алгебри, за яким ви працювали в 7 класі. Він містить виклад теорії, задачі та вправи, «Завдання для самостійної роботи», «Тестові завдання», «Типові завдання до контрольної роботи» тощо.

Користуючись підручником, ви значно розширите свої математичні знання й уміння. Якщо досі вам були відомі з алгебри тільки раціональні числа, цілі вирази і лінійні рівняння, то у 8 класі ви опануєте дійсні числа, раціональні вирази і квадратні рівняння. Отже, навчіться розв'язувати багато і таких задач, які досі розв'язувати не вміли. Вивчаючи теоретичний матеріал, звертайте увагу на слова, надруковані *курсивом*, — це нові алгебраїчні терміни. Ви повинні усвідомити, що вони означають, і запам'ятати їх. Виділені **жирним шрифтом** речення є основними означеннями, правилами та іншими важливими математичними твердженнями. Слід навчитися їх формулювати (можна — своїми словами) та застосовувати до розв'язування пропонуванних вправ і задач.

У кожному параграфі підручника є рубрика «Хочете знати ще більше?». Вона містить додатковий матеріал, адресований зацікавленим учням. У книжці є також «Відомості з курсу алгебри 7 класу», «Історичні відомості».

Підручник містить вправи різних рівнів складності: для усного розв'язування та рівнів А і Б. У рубриці «Виконаємо разом!» наведено зразки розв'язань важливих видів задач. Корисно ознайомитися з ними перед виконанням домашніх завдань, які позначено .

Рубрику «Готуємося до тематичного оцінювання» побудовано так, щоб ви мали змогу якнайкраще підготуватися до зовнішнього незалежного оцінювання.

Велика добірка задач і вправ для повторення допоможе закріпити набуті навички. Okремо вміщено задачі підвищеної складності. Їх пропонувано насамперед тим учням, які цікавляться математикою і мають бажання краще опанувати цей предмет. Сподіваємося, що ви дістанете насолоду, розв'язуючи логічні задачі.

Бажаємо успіхів у вивченні алгебри!

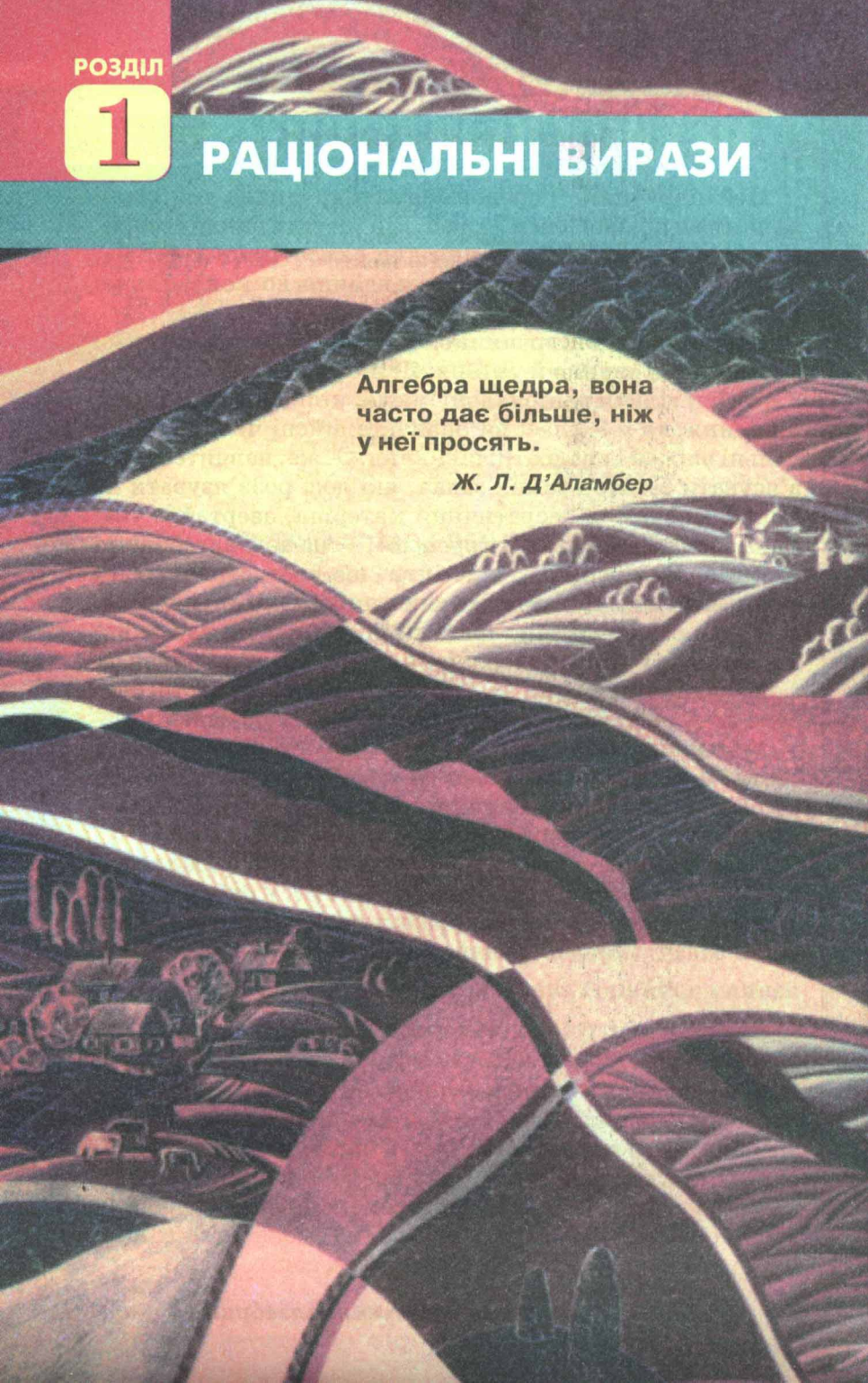
РОЗДІЛ

1

РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Алгебра щедра, вона
часто дає більше, ніж
у неї просять.

Ж. Л. Д'Аламбер



Досі вам були відомі тільки цілі алгебраїчні вирази. А вони дають можливість розв'язувати лише прості задачі. Набагато зручнішою і потужнішою є алгебра, в якій використовуються не тільки цілі вирази, а й дробові. Такі вирази разом називають раціональними.

У цьому розділі ви дізнаєтеся про:

- алгебраїчні дробові та дії над ними;
- раціональні вирази, тотожності та рівняння;
- стандартний вигляд числа;
- функцію $y = \frac{k}{x}$ та її властивості.

§ 1. ДІЛЕННЯ СТЕПЕНІВ І ОДНОЧЛЕНІВ

У курсі алгебри 7 класу ми ознайомилися з цілими виразами, навчилися додавати і віднімати їх, множити і підносити до степеня. Тепер розглянемо, як можна ділити вирази.



♦ **Поділити вираз A на вираз B — означає знайти такий вираз X , що $X \cdot B = A$.**

Приклади. $a^7 : a^4 = a^3$, оскільки $a^3 \cdot a^4 = a^7$,

$x^{12} : x^{11} = x$, оскільки $x \cdot x^{11} = x^{12}$.

Взагалі, якщо a — відмінне від нуля число, а m і n — натуральні числа, причому $m > n$, то

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Адже за правилом множення степенів, $a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$. З тотожності $a^m : a^n = a^{m-n}$ випливає правило:

при діленні степенів з однаковими основами основу залишають без зміни, а від показника степеня діленого віднімають показник степеня дільника.

Користуючись цим правилом, можна писати, так:

$$6^9 : 6^7 = 6^2, a^8 : a^3 = a^5, (-x)^{15} : (-x)^8 = (-x)^7.$$

Якщо $a \neq 0$, то завжди $a^m : a^m = 1$. Щоб тотожність $a^m : a^n = a^{m-n}$ поширити і на цей випадок, у математиці домовились вважати, що при кожному значенні a , відмінному від нуля, $a^0 = 1$. Запис 0^0 не має змісту.

Приклади. $7^0 = 1$; $3,5^0 = 1$; $(-8)^0 = 1$.

Розглянемо ще, як можна ділити одночлени.

$$12a^3 : 6a = 2a^2, \text{ бо } 2a^2 \cdot 6a = 12a^3;$$

$$15x^2y : 5xy = 3x, \text{ бо } 3x \cdot 5xy = 15x^2y;$$

$$-a^2z^3 : 2az^3 = -\frac{1}{2}a, \text{ бо } -\frac{1}{2}a \cdot 2az^3 = -a^2z^3.$$



Щоб поділити одночлен на одночлен, треба:

- 1) поділити коефіцієнт діленого на коефіцієнт дільника;
- 2) до знайденої частки приписати множниками кожен змінну діленого з показником, що дорівнює різниці показників цієї змінної в діленому і дільнику.

Приклад. Нехай треба поділити одночлен $8a^5m^2x^4$ на $4am^2x^2$.

Ділимо 8 на 4, a^5 — на a , m^2 — на m^2 і x^4 — на x^2 . Маємо, відповідно, 2, a^4 , 1 і x^2 . Отже,

$$8a^5m^2x^4 : 4am^2x^2 = 2a^4x^2.$$

Але, наприклад, одночлен a^2c на pc таким способом поділити не можна. Їх частка не дорівнює тотожно деякому одночлену. Говорять, що у множині одночленів ділення не завжди можливе. Якщо виникає потреба поділити і такі одночлени, частка яких не є одночленом, її записують у вигляді дробу. Про це йтиметься в наступному параграфі.



Хочете знати ще більше?

Розглянемо, як можна ділити не лише одночлени, а й вирази, що містять степені многочленів.

Наприклад,

$$(8-x)^5 : (8-x)^2 = (8-x)^3,$$

$$12a^4(a+c)^4 : 4a^3(a+c)^3 = 3a(a+c).$$

Іноколи перед діленням треба перетворити многочлени. Поділимо, наприклад, $x^2 - 2ax + a^2$ на $x - a$:

$$(x^2 - 2ax + a^2) : (x - a) = (x - a)^2 : (x - a) = x - a.$$

Відомі й інші способи ділення многочленів. Зокрема, многочлени можна ділити «кутом», подібно до того, як ділять числа. Порівняйте, для прикладу, ділення чисел 7488 і 234 та ділення многочленів $x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ і $x^2 - 2x + 3$:

$$\begin{array}{r|l} 7488 & 234, \\ \hline 702 & 32 \\ \hline 468 & \\ -468 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 + 5x - 3 & \\ \hline x^3 - 2x^2 + 3x & \\ \hline -x^2 + 2x - 3 & \\ -x^2 + 2x - 3 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} x^2 - 2x + 3. & \\ \hline x - 1 & \end{array}$$

Частка від ділення многочленів не завжди є многочленом. Як і частка від ділення двох цілих чисел не завжди число ціле. Тобто у множині многочленів ділення не завжди можливе.

Перевірте себе

1. Що означає поділити вираз A на вираз B ?
2. Сформулюйте правило ділення одночленів.
3. Як можна перевірити, чи правильно виконано ділення одного виразу на інший?
4. Чому дорівнює нульовий степінь числа, відмінного від нуля?
5. Чи позначає запис 0^0 яке-небудь число?

Виконаємо разом!

1. Поділіть: а) $6a^2 x^5$ на $2ax$; б) $a^5 c^3$ на $-2ac^3$.

Розв'язання. а) $6a^2 x^5 : 2ax = 3ax^4$;

$$\text{б) } a^5 c^3 : (-2ac^3) = -\frac{1}{2} a^4 = -0,5a^4.$$

Відповідь. а) $3ax^4$; б) $-0,5a^4$.

2. Перевірте, чи правильно виконано ділення:

$$-18x^5 y^3 : (-6xy^2) = 3x^4 y.$$

Розв'язання. $3x^4y \cdot (-6xy^2) = -18x^5y^3$.

Добуток частки і дільника тотожно дорівнює діленому, тому ділення виконано правильно.

Відповідь. Правильно.

3. Спростіть вираз: $(a-2)^8 : (a-2)^6 + 4(a-1)$.

Розв'язання. $(a-2)^8 : (a-2)^6 + 4(a-1) =$
 $= (a-2)^{8-6} + 4a - 4 = (a-2)^2 + 4a - 4 =$
 $= a^2 - 4a + 4 + 4a - 4 = a^2$.

Відповідь. a^2 .

Виконайте усно

1. Обчисліть:

а) $325 : 10$;

б) $327 : 3,27$;

в) $\frac{3}{5} : \frac{5}{3}$.

2. Знаючи, що $a \cdot b = 12$, обчисліть:

а) $a : 12$;

б) $b : 12$;

в) $12 : ab$.

Знайдіть частку (3—4).

3. а) $3^{12} : 3^7$;

б) $(-8)^6 : (-8)^5$;

в) $10^{10} : 10^{10}$;

г) $(-3)^5 : (-3)^3$;

г) $7^5 : 7^0$;

д) $50^3 : 50$.

4. а) $a^{18} : a^7$;

б) $x^6 : x$;

в) $m^9 : m^9$;

г) $n^{11} : n^{10}$;

г) $p^{30} : p^{10}$;

д) $c^{14} : c^7$.

5. Укажіть, яку частку слід вписати в кожну порожню клітинку таблиці.

Ділене	Дільник				
	3	$3a$	$-2a$	$2a^2$	$-6a^4$
$6a^5$					
$-9a^4$					

6. Виконайте ділення:

а) $(x-5)^3 : (x-5)$;

б) $(2x+y)^4 : (2x+y)$;

в) $(m+n)^5 : (m+n)^2$;

г) $(1-3x)^4 : (1-3x)^4$.

Рівень **A**

Обчисліть (7–8).

7. а) $2^8 : 2^4$; б) $0,4^3 : 0,4$; в) $3^{10} : 9$; г) $3,75^8 : 3,75^7$;

г) $\left(-\frac{2}{3}\right)^6 : \left(-\frac{2}{3}\right)^4$; д) $\left(1\frac{1}{2}\right)^5 : \left(1\frac{1}{2}\right)^4$; е) $\left(\frac{3}{5}\right)^7 : \frac{81}{625}$.

8. а) $0,6^9 : 0,6^6$; б) $(-0,2)^{10} : (-0,2)^7$; в) $\left(-\frac{2}{5}\right)^8 : \left(-\frac{2}{5}\right)^5$;

г) $\left(1\frac{1}{3}\right)^5 : \left(1\frac{1}{3}\right)^4$; г) $3,3^{11} : 3,3^9$; д) $(-8\ 75)^7 : (-8\ 75)^6$.

9. Знайдіть значення виразу:

а) $5^4 : 5^2 - 2^5$; б) $(-2)^5 : (-2)^2 + 2^3$; в) $1 + 3^7 : 3^5$;

г) $100 + 19^3 : 19^3$; г) $2^3 \cdot 2 - 3^2 : 3$; д) $0^4 : 4^0 - 44^0$.

Знайдіть частку (10–12).

10. а) $x^8 : x^3$; б) $m^{10} : m^4$; в) $n^5 : n$;

г) $p^{12} : p$; г) $x^{10} : x^9$; д) $c^5 : c^5$.

11. а) $(3x)^{20} : (3x)^{16}$; б) $(2y)^{34} : (2y)^{29}$;

в) $(-5a)^{17} : (-5a)^{14}$; г) $(10m^2)^{23} : (10m^2)^{19}$.

12. а) $(x+4)^8 : (x+4)^6$; б) $(6-2a)^9 : (6-2a)^8$;

в) $(3b-2)^{12} : (2-3b)^3$; г) $(x-y)^{10} : (y-x)^5$.

Поділіть (13–14).

13. а) $18a^4x$ на $9a$; б) $-9a^2cx^4$ на $-3ax^2$;

в) $20x^4y^3z^2$ на $4x^2y$; г) $-15a^5b^2c$ на $-5a^3c$.

14. а) $12x^4y^3$ на $3xy^2$; б) $16x^2y^2$ на $8x^2y$;

в) $9a^3b^2$ на $-3a^2b$; г) $-18m^6n^3$ на $3mn^2$.

15. Виконайте ділення:

а) $3a^5 : a^2$; б) $6m^8 : 3m^3$; в) $2a^{10} : 2a$;

г) $\frac{2}{3}a^2z^3 : \frac{1}{3}az^3$; г) $0,8x^2yz : 0,2xy$; д) $-2\frac{1}{5}abcx : 2,2ax$.

Обчисліть значення виразу (16–17).

16. а) $(3^5 - 7)^0$; б) $17^0 + 15$; в) $(8^0 - 2) \cdot (2,5^7 - 3)^0$;

г) $9^{10} : 9^8 \cdot (3^2 - 10)^0$; г) $6^4 : 6^3 - (5 : 125)^0$.

17. а) $16^0 + 4$;

б) $(128 - 8^2)^0$;

в) $(7^0 - 12) \cdot (3 + 14^0)$;

г) $(2^6 - 14)^0 + (5^3 - 13 \cdot 2)^3$.

18. Знайдіть відношення чисел 27^6 і $2,7^6$.

19. Розгадайте ребус (мал. 1).

Знайдіть значення виразу (18–19).

20. а) $-36a^8 : 9a^5$, якщо $a = 7$;

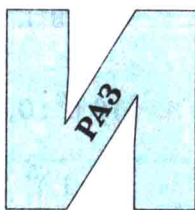
б) $x^9 : 0,5x^3$, якщо $x = \frac{1}{2}$;

в) $0,03x^{16}y^8 : 10x^{10}y^5$, якщо $x = 2, y = 10$.

21. а) $12m^5 : 6m^3$, якщо $m = -5$;

б) $x^4 : 2x^3$, якщо $x = 0,8$;

в) $0,01a^3b^7 : 4a^2b^4$, якщо $a = 1000, b = 3$.



Мал. 1

Рівень Б

22. Виконайте дії:

а) $4^5 : 16 + (7,6 - 11,6)^3$; б) $6^8 : 36 - 6^7 : 6^4$;

в) $\left(4 - 3\frac{1}{4}\right)^5 : \left(\frac{3}{4}\right)^2$; г) $\left(\frac{7}{8}\right)^{12} : \left(2\frac{1}{8} - 1\frac{1}{4}\right)^{10}$;

г) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 : 0,5^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2$; д) $0,25^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$.

23. На який одночлен треба помножити одночлен $3ax^3$, щоб дістати:

а) $6a^2x^5$;

б) $12a^5x^7$;

в) $-a^6x^3$?

Виконайте ділення одночленів (24–25).

24. а) $a^3x^5 : a^2x^4$;

б) $n^7x^3 : n^5x^2$;

в) $x^6m : x^5m$;

г) $ab^2c^3 : abc$;

г) $6ac^3 : 2ac^2$;

д) $10ax^7 : 5ax^5$;

е) $24c^5x^5 : 8c^4x$;

е) $20m^2x^7 : 4mx^5$.

25. а) $-2,5a^2x^3 : 0,5ax$; б) $-3,2c^5x^4 : 0,4cx^4$;
 в) $6a^3xz^2 : (-3az)$; г) $16n^5xy^4 : (-4nx)$;
 ґ) $\frac{3}{5}abx^5 : \frac{1}{5}ax^4$; д) $\frac{3}{7}a^2x^3y^4 : \frac{1}{14}ax^3y$;
 е) $-\frac{6}{7}an^2x^3 : \frac{2}{7}n^2x^2$; є) $-\frac{4}{5}a^7x^6 : \left(-\frac{2}{15}a^6x\right)$.

26. Виконайте ділення:

- а) $7(x-7)^5 : (x-7)^4$; б) $(3+2,5x)^{10} : (3+2,5x)^9$;
 в) $ac(a-2c)^7 : (a-2c)^5$; г) $(1+2ax^2)^{15} : (2ax^2+1)^{13}$;
 ґ) $2,5a^2(x+2)^4 : (x+2)^3$; д) $2a^8(2a+3)^8 : (2a+3)^6$.

27. Спростіть вираз:

- а) $(4-x)^5 : (4-x)^3 + 8(x-2)$;
 б) $4a(a+3) - (2a+3)^{10} : (2a+3)^8$;
 в) $(x+1)^7 : (x+1)^4 - 3x(x+1)$;
 ґ) $6a(2-a) - (a-2)^{11} : (a-2)^8$.

28. Розв'яжіть рівняння:

- а) $x^8 : x^5 = -1$; б) $4x^5 : 2x^4 = 6$;
 в) $(z-3)^7 : (z-3)^6 = 5$; г) $(x-2)^5 : (x-2)^2 = -1$.


29. Замініть зірочку «*» одночленом так, щоб утворилась правильна рівність:

- а) $* : (-5x^8) = 4x^2$; б) $* : 3n^5 = 12n^5$;
 в) $0,6a^4 : * = 0,2$; г) $-x^{11} : * = 5x^3$;
 ґ) $* : \frac{1}{2}m^2n^6 = -8n$; д) $\frac{3}{4}x^{12}y^3 : * = \frac{1}{2}xy^2$.

30. Знайдіть значення виразу:

- а) $\frac{1}{3}m^3n^2p^2 : \left(-\frac{2}{3}m^2n^2p^2\right)$, якщо $m = 4$, $n = 14$, $p = 114$;
 б) $\left(-1\frac{1}{2}a^4b^3c^2\right) : \left(-\frac{2}{3}a^3bc^2\right)$, якщо $a = \frac{1}{10}$, $b = 10$, $c = 7$;

- в) $(-4,5x^5y^5z^5) : (-1,5x^5y^4z)$, якщо $y = 0,5$, $z = 2$; $x = 9$;
 г) $(-1,7p^2q^2r^3) : 28,9p^2qr$, якщо $p = 28,9$, $q = 1,7$, $r = -1$.

 31. Подайте у вигляді степеня частку від ділення:

- а) $a^{m+3} : a^m$; б) $b^{n+2} : b^{n-2}$; в) $x^{2m+5} : x^{2m}$;
 г) $y^{3n+1} : y^{n+1}$; д) $m^{5k} : m^{3k+1}$; е) $n^{6k-2} : n^{2(k+1)}$.

32. Виконайте ділення:

- а) $16x^{n+2}y^{n+3} : 8x^{n+1}y^{3-n}$; б) $36x^{1-n}y^{2n} : 3x^{1-2n}y^n$;
 в) $-2ab^{m+1}c^m : (-5a^{1-m}b)$; г) $2,7a^mb^{m-1}c^{m-2} : 0,3b^{m-2}c^{m-3}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

33. Виконайте дії:

- а) $7x^2 - 2x + (5 + 11x - 6x^2)$; б) $8ab + 7b - (4ab + 7b - 3)$;
 в) $2a^3(4a^2 + 3a)$; г) $(x - 1)(x^2 - 2x + 2)$;
 д) $(3a - b)(3a + b)(9a^2 + b^2)$;
 е) $(x - 2)(x + 2)$;

Подайте у вигляді многочлена вираз (34–35).

34. а) $7x^2 - 2x(3x - y)$; б) $(a + 2)(a - 5) + 3a$;
 в) $3x(x - 6) + (2x^2 + 18x - 4)$; г) $(a - 2)(a + 3) + 2a(1 - a)$.
 35. а) $(x - y)(x + y) - x(x - 3)$; б) $(b + 1)^2 + 3b(2b - 1)$;
 в) $y(y + 2x) - (x + y)^2$; г) $(b + 4)^2 - (b - 3)(b + 3)$.

36. Розкладіть на множники вираз:

- а) $x^2 - 16$; б) $x^2 - 9y^4$; в) $x^2 - 6x + 9$;
 г) $a^3 - 4a$; д) $3a^2 - 6ab + 3b^2$; е) $2x + 2y - ax - ay$.

Розв'яжіть рівняння (37–39).

37. а) $3,5 - 3x = x - 4,5$; б) $3x - (x + 2) = 5$;
 в) $5 - 3(x + 1,5) = 2(x + 3)$; г) $9x - 3(x + 1,5) = 4x + 0,5$.
 38. а) $x + \frac{2}{3}x = -\frac{1}{3}$; б) $x : \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$;
 в) $\frac{2}{5}x - \frac{3}{8}x = \frac{7}{20}$; г) $5 : x = \frac{10}{11}$.

39. а) $3x - 1\frac{7}{16}x = \frac{5}{8}$;

б) $x : \frac{2}{3} = \frac{1}{3} : \frac{18}{19}$;

в) $3\frac{4}{9}x + \frac{5}{12}x = 1\frac{7}{18}$;

г) $\frac{2}{7} : x = \frac{5}{14}$.

Розв'яжіть систему рівнянь (40–41).

40. а) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = 0, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$

41. а) $\begin{cases} u - 2v = 1, \\ u + 2v = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2s + t = 7, \\ s - 2t = 1; \end{cases}$

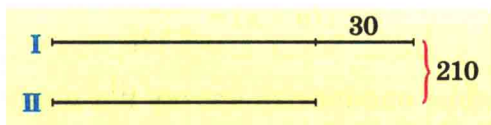
в) $\begin{cases} m = n, \\ 4m = n + 6. \end{cases}$

42. Складіть задачу, математична модель якої наведена на малюнку 2. Розв'яжіть її:

а) за допомогою системи двох рівнянь;

б) за допомогою одного рівняння;

в) арифметичним способом.



Мал. 2

43. Знайдіть два числа, якщо їх сума дорівнює 71, а різниця становить 31.

44. Половина одного числа на 4 більша від третини другого, а половина другого — на 18 більша від чверті першого. Знайдіть ці числа.

45. 20 % першого числа на 15 менше, ніж 30 % другого, а 40 % першого на 2 більше від 20 % другого. Знайдіть ці числа.

46. Різниця двох чисел дорівнює 10, а різниця їх квадратів становить 240. Знайдіть ці числа.

§2. ДІЛЕННЯ І ДРОБИ



Ділення двох цілих виразів не завжди можна виконати без остачі. Наприклад, частки $a^3 : a^5$, $4xy^2 : 2yz$ не можна записати у вигляді цілих виразів. Ділення одночленів не можна виконати без остачі, якщо дільник містить змінну, якої немає в діленому, або якщо показник степеня будь-якої змінної в дільнику більший від показника степеня тієї самої змінної в діленому.

Якщо частка від ділення одного виразу на інший не є цілим виразом, то її записують у вигляді дроби. Наприклад:

$$2 : 3 = \frac{2}{3}, a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5}, 2ax : 3bx^2 = \frac{2ax}{3bx^2},$$

$$ax : (a + x) = \frac{ax}{a+x}.$$

► **Дробом називають частку від ділення двох виразів, записану за допомогою дробової риски.**

Якби не були вирази A і B , їх частка $\frac{A}{B}$ — дріб. Вирази A і B — члени цього дроби, A — **чисельник**, B — **знаменник**.

Як і інші вирази, дробі бувають **числові** й **зі змінними**.

Наприклад, дробі $\frac{5}{7}$, $\frac{-3}{0,4}$, $\frac{2^2+3^2}{4^2+5^2}$ — **числові вирази**, а

$\frac{ab}{x}$, $\frac{4m}{m+1}$, $\frac{a-2b}{a+b}$ — **вирази зі змінними**.

Звичайний дріб — окремий вид дроби. Це дріб, члени якого — натуральні числа. Якщо члени дроби — многочлени, його називають **алгебраїчним дробом**.

Дробі зі змінними мають значення (зміст) не при всіх значеннях змінних. Наприклад, якщо $a = 5$, то

$$\frac{2a+3}{a-5} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5 - 5} = \frac{13}{0}.$$

Запис $\frac{13}{0}$ — не число, бо на 0 ділити не можна. Отже,

дріб $\frac{2a+3}{a-5}$ при $a = 5$ не має змісту. При всіх інших значеннях a він має зміст. Говорять, що для даного дробу *допустимими* є всі значення змінної a , крім $a = 5$.



Для змінних, що входять у знаменник дробу, допустимими є тільки ті значення, які не перетворюють цей знаменник на нуль.

Розглянемо два дробу:

$$\frac{6}{a} \text{ і } \frac{6(a-3)}{a(a-3)}$$

Складемо таблицю їх значень для таких a : $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

a	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{6}{a}$	-1,5	-2	-3	-6		6	3	2	1,5	1,2	1	$\frac{6}{7}$
$\frac{6(a-3)}{a(a-3)}$	-1,5	-2	-3	-6		6	3		1,5	1,2	1	$\frac{6}{7}$

Як видно з таблиці, при значеннях a , що дорівнюють $-4, -3, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 6, 7$, обидва дробу мають рівні значення. Рівні вони і при інших значеннях змінної a , за винятком 0 і 3. Значення $a = 0$ недопустиме для обох розглядуваних дробів, значення $a = 3$ недопустиме для другого дробу. При всіх допустимих значеннях змінної a всі відповідні значення цих дробів рівні.

♦ Два вирази, відповідні значення яких рівні при всіх допустимих значеннях змінних, називаються **тотожно рівними, або тотожними**.

Це означення від подібного означення для цілих виразів відрізняється тільки словом «допустимих». Говорячи тільки про цілі вирази, це слово раніше ми вилучали, оскільки для них усі значення змінних допустимі.

- ♦ Два тотожних вирази, сполучені знаком рівності, утворюють **тотожність**. Заміна одного виразу іншим, тотожним йому, називається **тотожним перетворенням** даного виразу.



Хочете знати ще більше?

Як співвідносяться між собою різні види дробів, можна ілюструвати такою діаграмою (мал. 3). Тут кожне вужче поняття є складовою ширшого. Звичайні дроби є складовою частиною числових дробів, які, у свою чергу, є складовою алгебраїчних дробів, і т. д. Приклади звичайних дробів:

$$\frac{3}{7}, \frac{11}{35}, \frac{1}{149};$$

числових:

$$\frac{0,5}{2,3}, \frac{-\frac{3}{4}}{0,25}, \frac{3,7-\frac{1}{2}}{2^2+7};$$

алгебраїчних:

$$\frac{a}{5}, \frac{1}{n}, \frac{x^2-2}{2x}, \frac{a^2-3ac+5c^2}{2ac}.$$



Мал. 3

Загальне поняття дробу досить широке. Крім алгебраїчних дробів бувають і неалгебраїчні, поки що вам не відомі, наприклад,

$$\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{x}}, \frac{\cos x}{\sin x}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^2}, \frac{1+\ln x}{2\ln x}.$$

Перевірте себе

1. Що таке дріб?
2. Як називають члени дробу?
3. Які дроби називають алгебраїчними? Наведіть приклади.
4. Що таке допустимі значення змінних? Наведіть приклади.
5. Які вирази називають тотожними?
6. Що таке тотожність?

 **Виконаємо разом!**

1. Які значення змінних допустимі для дробу:

$$\text{а) } \frac{1}{x+7}; \quad \text{б) } \frac{x-a}{x^2-a^2}?$$

Розв'язання. а) $x + 7 = 0$, якщо $x = -7$. Це значення x недопустиме для даного дробу. Всі інші значення допустимі;

б) $x^2 - a^2 = 0$, якщо $(x - a)(x + a) = 0$, звідси або $x = a$, або $x = -a$.

Відповідь. а) Для даного дробу допустимі всі значення, крім $x = -7$;

б) допустимі всі значення, крім $x = a$ і $x = -a$.

2. Доведіть, що дріб $\frac{m}{m^2+1}$ має зміст при всіх значеннях m .

Доведення. При кожному раціональному значенні m число m^2 невід'ємне, а $m^2 + 1$ — додатне. Знаменник даного дробу при кожному значенні m не дорівнює 0.

Отже, при кожному значенні m даний дріб має зміст. А це й треба було довести.

3. Чи тотожні вирази:

$$\text{а) } \frac{14a^3b^2}{7ab} \text{ і } 2a^2b; \quad \text{б) } \frac{(-a)^7}{a^6} \text{ і } \frac{(-a)^6}{a^5}?$$

Розв'язання. а) Подамо дріб $\frac{14a^3b^2}{7ab}$ у вигляді частки двох одночленів і виконаємо ділення:

$$\frac{14a^3b^2}{7ab} = 14a^3b^2 : 7ab = 2a^2b.$$

При всіх допустимих значеннях змінних ($a \neq 0$, $b \neq 0$) перший вираз дорівнює другому, а тому їх відповідні значення

рівні. Отже, вирази $\frac{14a^3b^2}{7ab}$ і $2a^2b$ тотожні.

б) Виконаємо дії в кожному виразі, використовуючи властивості степенів:

$$\frac{(-a)^7}{a^6} = \frac{-a^7}{a^6} = -a; \quad \frac{(-a)^6}{a^5} = \frac{a^6}{a^5} = a.$$

Як бачимо, при всіх допустимих значеннях змінної ($a \neq 0$) вирази набувають протилежних значень. Отже, вони нетотожні.

Відповідь. а) Вирази тотожні; б) вирази нетотожні.

Виконайте усно

47. Які з наведених нижче виразів — дробі:

а) $x - \frac{1}{x}$; б) $\frac{1}{2} - \frac{3}{x}$; в) $\frac{\frac{2}{3}}{0,5}$; г) $\frac{1-a^2}{2a}$?

48. Обчисліть:

а) $\frac{0,8}{2}$; б) $\frac{2}{0,5}$; в) $\frac{0,6}{-0,2}$; г) $\frac{2^5}{2^6}$.

49. Які значення змінних допустимі для дробів:

а) $\frac{2x}{x+3}$; б) $\frac{1}{x(x-y)}$; в) $\frac{c-x}{1+c^2x^2}$; г) $\frac{a}{a^2-1}$?


50. Чи тотожні вирази:

а) $\frac{4x^4}{4x^2} i x^2$; б) $\frac{8m^5}{5m^4} i 3m$; в) $\frac{7x^2}{7x^4} i x^2$;
г) $\frac{a-b}{ab} i \frac{a+b}{ab}$; д) $\frac{ab}{a+b} i \frac{ba}{a+b}$; е) $1 + \frac{a^2}{b} i \frac{a+b}{b}$?

Рівень А

51. Запишіть у вигляді дроби частку від ділення:

а) 2 на 7; б) x на y ; в) $3m$ на c ;
г) $2x$ на $3y$; д) x^2 на $1+x$; е) $4ab$ на $(a+b)^2$.

 52. Запишіть дріб, у якого: а) чисельник $2c$, знаменник $3p$;
б) чисельник 1, знаменник $x-y$; в) чисельник z^2 , знаменник $2+z^2$.

53. Складіть дріб, у якого чисельник дорівнює $6m$, а знаменник: а) на 5 менший від чисельника; б) дорівнює чисельнику; в) удвічі менший за чисельник; г) дорівнює квадрату чисельника без одиниці.


 54. Обчисліть:

а) $\frac{5^8}{5^5}$; б) $\frac{0,3^{10}}{0,3^{11}}$; в) $\frac{(-3)^{12}}{5 \cdot (-3)^9}$; г) $\frac{-0,5^8}{(-0,5)^9}$; ґ) $\frac{3,4^0}{2^5 - 5^2}$.

55. Знайдіть значення виразу:

а) $\frac{8^9}{8^6 \cdot 8^4}$; б) $\frac{7^2 \cdot (-7)^5}{(-7)^6}$; в) $\frac{0,2^7}{0,2^8 \cdot 10}$; ґ) $\frac{2,4^4}{8^4 \cdot 0,3^4}$.

Визначте, при яких значеннях змінних не має змісту дріб (56–58).


 56. а) $\frac{m}{n}$; б) $\frac{2}{a-3}$; в) $\frac{x+p}{x+4}$; ґ) $\frac{3c-8}{3c+8}$.

57. а) $\frac{3}{x-5}$; б) $\frac{a-6}{a+9}$; в) $\frac{3m}{2-m}$; ґ) $\frac{12z}{3z-15}$.

58. а) $\frac{3a}{a^2-16}$; б) $\frac{1}{x(x^2-9)}$; в) $\frac{m}{(m^2-1)(m^2-4)}$; ґ) $\frac{a^0}{a^2+1}$.

59. Наведіть приклади дробів, знаменники яких дорівнюють нулю, якщо:

а) $x = 5$; б) $z = -1$; в) $t = 0$; ґ) $x = 0$ або $x = -3$.

 60. Укажіть значення x , допустимі для дробу:

а) $\frac{1}{x-5}$; б) $\frac{2}{5-x}$; в) $\frac{3x}{x^2-4}$; ґ) $\frac{x-3}{x^2+3}$.

61. Які значення x допустимі для дробу:

а) $\frac{3}{x+5}$; б) $\frac{x}{x-1}$; в) $\frac{3x}{3+x}$;

ґ) $\frac{-5}{x}$; д) $\frac{2}{x^2+4}$; е) $\frac{1}{2x-5}$?

62. Знайдіть значення дробу:

а) $\frac{36}{3x-x^2}$, якщо $x = -3$; б) $\frac{a+4}{6a}$, якщо $a = \frac{1}{2}$;

в) $\frac{1}{c^2-9}$, якщо $c = -3$; ґ) $\frac{m}{|m|}$, якщо $m = -5$.

 **63.** Заповніть таблицю:

a	-2	-1	0	1	2	3	4	10
$\frac{2}{a-3}$								
$\frac{2a}{a^2-3a}$								

Які значення a недопустимі для дробу $\frac{2}{a-3}$? А для дробу

бу $\frac{2a}{a^2-3a}$? Чи рівні значення цих дробів, коли $a = 100$?

64. Чи є тотожністю рівність:


а) $\frac{a^5}{a^4} = a$; б) $\frac{m^5}{m^4} = m^3$; в) $\frac{6x^3}{3x} = m^3$?

65. Чи можна вважати тотожними дроби:

а) $\frac{12}{x}$ і $\frac{12x^3}{x^2}$; б) $\frac{2a}{b}$ і $\frac{2a^2}{b^2}$;

в) $\frac{3x^2}{6x}$ і $\frac{6x^2}{12x}$; г) $\frac{m}{n}$ і $\frac{n}{m}$?

Доведіть тотожність (66—67).

 **66.** а) $\frac{2a \cdot 3b}{a+b} = \frac{6ab}{a+b}$; б) $\frac{15a^3b^2}{5a^2b} = 3ab$;

в) $\frac{2a+5a}{3a+4a} = \frac{3a+4a}{2a+5a}$; г) $\left(\frac{2ab^2}{6a}\right)^3 = 3 \cdot \left(\frac{b^3}{9}\right)^2$.

67. а) $\frac{a^6}{a^3} = a^2 \cdot a$; б) $\frac{(m-1)^7}{(m-1)^5} = \frac{(m-1)^5}{(m-1)^3}$;

в) $\frac{3a^5+2a^5}{a^5} = \frac{15a^5}{2a^5+a^5}$; г) $x+y = \frac{(x+y)^2}{x+y}$.

Рівень **Б**

Запишіть у вигляді одночлена або дробу частку (68—69).

68. а) $-8x^4 : 2a$; б) $-6x^4 : 3x^5$; в) $-9x^7 : 9x^7$;
 г) $32ac^2 : 8a^3c$; р) $2,5x^7 : 0,5x^3$; д) $1,2 : (-0,3xy^3)$.
69. а) $6ac : (-3a)$; б) $6xy : (-3xz)$; в) $4a^2 : (-2a^3)$;
 г) $-3 : 21x$; р) $3,3a^5c^3 : 11a^3$; д) $1,8p^2 : 6q^2$.

70. Знайдіть значення дробу:

а) $\frac{x^2}{a^2-10}$, якщо $x = 2,5$;

б) $\frac{2x}{x^2-y^2}$, якщо $x = -12$ і $y = 13$;

в) $\frac{2(a+b)}{a-b}$, якщо $a = 9$ і $b = -7$;

г) $\frac{x}{y(x-2)}$, якщо $x = 6$ і $y = \frac{1}{3}$.

71. Користуючись калькулятором, знайдіть значення дробу

бу $\frac{2x^2+3}{3x}$, якщо: а) $x = 2,75$; б) $x = 21,8$.

72. Складіть і заповніть таблицю значень дробів $\frac{2a}{2+a}$,

$\frac{a}{1+0,5a}$ і $\frac{2a^2}{2a+a^2}$ для цілих значень a , $|a| \leq 5$. Який висновок можна зробити?

73. Чи при будь-якому значенні змінної x значення дробу:

а) $\frac{9}{x^2+1}$ додатне; б) $\frac{3x^2}{4x^2-4x+1}$ додатне;

в) $\frac{-x^2}{x^2+15}$ від'ємне; г) $\frac{x^2+6}{2x-x^2-1}$ від'ємне?

74. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної x значення дробу $\frac{5}{x^2+3}$ додатне, а значення дробу $\frac{(-3)^2}{-3-x^2}$ від'ємне.

75. Доведіть, що для даного дробу допустимими є будь-які значення змінних:

а) $\frac{3x}{x^2+1}$; б) $\frac{5}{(x-1)^2+3}$; в) $\frac{2}{4x^2-4x+3}$.

76. При яких значеннях змінної x не має змісту дріб:


а) $\frac{2}{x(1+x)}$; б) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$; в) $\frac{x^3}{4x^2-100}$;

г) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$; д) $\frac{-1}{x^3-x^2}$; е) $\frac{3}{9x-x^3}$?

77. Які значення x допустимі для дробу:

а) $\frac{1}{x(x-1)(x+2)}$; б) $\frac{3-x}{(2x-1)(x^2-16)}$; в) $\frac{(x-3)^2}{(2x+1)^2(x-7)^2}$;

г) $\frac{x+13}{(x^2+1)(2x^2+3)}$; д) $\frac{x^2-5x+100}{(x^2-4)(x^4-1)}$; е) $\frac{1}{x^2-4x+4}$?

 78. Укажіть допустимі значення змінної для дробу:

а) $\frac{2x}{x+7}$; б) $\frac{4}{1-2x}$; в) $\frac{5a}{a^2+3}$; г) $\frac{m+12}{m^2-16}$;

д) $\frac{3}{(y-1)(y+6)}$; е) $\frac{8-x}{x(x^2+1)}$; ж) $\frac{(c-2)^2}{24}$; з) $\frac{7a-2}{a^2-5a}$.

79. Запишіть дробу, які не мають змісту, якщо:

а) $x=3$; б) $y=-1$; в) $y=-4$ і $y=0$; г) $a=0$ і $a=0,5$;
д) $m=1$ і $m=-5$; е) $x=0$ і $x=-2$, або $x=2$.

80. Розв'яжіть рівняння відносно змінної x і вкажіть, при яких значеннях a рівняння має корені:

а) $ax-2=2x+3$; б) $ax-a=7x-4$;
в) $4(a^2x-3)=a+x$; г) $9x-5=a(ax-2)$.

 81. При яких значеннях c значення дробу $\frac{c+2}{5}$ дорівнює:

а) 1; б) 0; в) -1; г) 2; д) -100?

82. При яких значеннях x значення дробу $\frac{3x-12}{4}$ дорівнює:

- а) -3 ; б) 0 ; в) 1 ; г) 3 ?

Розв'яжіть рівняння (83—86):

83. а) $\frac{4x+1}{3} = 3$; б) $\frac{2x-3}{7} = 9$; в) $\frac{2x+3}{5} = 7$.

84. а) $\frac{x+4}{3} = \frac{2x-1}{5}$; б) $\frac{x+1}{3} = \frac{2x+1}{9}$; в) $\frac{x-3}{4} = \frac{2-3x}{5}$;

г) $\frac{7+3x^2}{3} = \frac{2x^2+5x-2}{2}$; г) $\frac{4x^2-x+9}{6} = \frac{2x^2+1}{3}$.

85. а) $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{5} = 6$; б) $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = 14$; в) $\frac{5x}{3} = \frac{x}{5} - 2$.

86. а) $\frac{x+2}{3} = \frac{x-2}{5}$; б) $\frac{2x-1}{5} = \frac{5-x}{3}$; в) $\frac{3x+1}{5} - \frac{2x}{3} = 6$.

87. Чи можна вважати тотожними дробі:

а) $\frac{a}{a-2}$ і $\frac{a^2}{a^2-4}$; б) $\frac{a}{a-2}$ і $\frac{a^2}{(a-2)^2}$?

88. Чи тотожні вирази:

а) $\frac{a}{a^2-b^2}$ і $\frac{b}{a^2-b^2}$; б) $\frac{x}{x^2-y^2}$ і $\frac{x}{(x-y)(x+y)}$;

в) $\frac{a^2+2ab^2+b^2}{(a+b)^2}$ і $\frac{(a-b)^2}{a^2-2ab+b^2}$; г) $\frac{x+1}{x-1}$ і $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy-y^2}$?

89*. Доведіть тотожність, поділивши чисельник на знаменник:

а) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1} = x^2-5x+6$;

б) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-2} = x^2-4x+3$;

в) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-3} = x^2-3x+2$.

90. Доведіть тотожність:

а) $\frac{x^4+2x^3-13x^2-14x+24}{(x-3)(x+4)} = x^2+x-2$;

$$б) \frac{x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24}{(x-1)(x+2)} = x^2 + x - 12.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

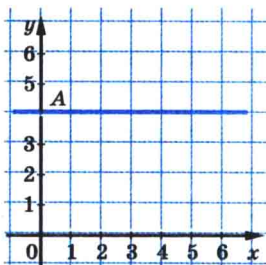
91. Скоротіть дріб

а) $\frac{35}{56}$; б) $\frac{144}{441}$; в) $\frac{5120}{2520}$; г) $\frac{693}{825}$; ґ) $\frac{3366}{4488}$.

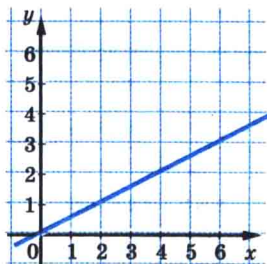
92. Заповніть порожні клітинки таблиці.

Ділене	Дільник				
	a^2	ac	$2a^3c$	$-2ac^3$	$-12c^2$
$6a^5c^4$					
$12a^3c^5$					
$-6a^4c^3x$					
$0,5a^3c^2$					

93. Задайте формулами функції, графіки яких зображено на малюнках 4 і 5.

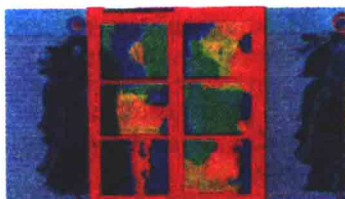


Мал. 4



Мал. 5

§3. ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ ДРОБУ



Згадаймо основну властивість звичайного дробу. Якщо чисельник і знаменник звичайного дробу помножити на одне й те саме натуральне число, то дістанемо дріб, який йому дорівнює. Іншими словами: при будь-яких натуральних a , b і m

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

Ця рівність — тотожність. Доведемо її для будь-яких раціональних a , b і m , таких, що $b \neq 0$ і $m \neq 0$.

Нехай $\frac{a}{b} = r$, де r — деяке раціональне число. За означенням дії ділення, $a = br$. Помноживши обидві частини цієї рівності на відмінне від нуля число m , одержимо рівність

$$am = bm \cdot r, \text{ звідси } \frac{am}{bm} = r.$$

Отже, якщо $b \neq 0$ і $m \neq 0$, то $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$.

Доведена тотожність справедлива для будь-яких дробів. Її називають **основною властивістю дробу**.

Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на один і той самий вираз, то дістанемо дріб, який тотожно дорівнює даному.

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M}; \quad \frac{A \cdot M}{B \cdot M} = \frac{A}{B}.$$

Тут під «виразом» розуміють вираз зі змінними, який тотожно не дорівнює нулю, або число, відмінне від нуля.

Основна властивість дробу дає можливість замінити дріб виду $\frac{A \cdot M}{B \cdot M}$ тотожно рівним йому дробом $\frac{A}{B}$. Таке перетворення називають **скороченням дробу**. Наприклад,

$$\frac{cx^3}{ax^3} = \frac{c}{a}, \quad \frac{5a^2m^3x}{10m^4} = \frac{a^2x}{2m}.$$

Перший з цих дробів скорочено на x^3 , другий — на $5m^3$.

З основної властивості дробу випливають такі наслідки.



1. Значення дробу не зміниться, якщо знаки чисельника і знаменника змінити на протилежні.
2. Значення дробу не зміниться, якщо змінити знак у одного з членів дробу і перед самим дробом.

$$\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}; \quad \frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}; \quad \frac{A}{B} = -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B}.$$

Якщо члени дробу — многочлени, то перед скороченням дробу їх часто доводиться розкласти на множники. Іноді перед скороченням дробу змінюють знак чисельника або знаменника, змінивши відповідно і знак перед дробом.

Приклади.

$$\frac{2ax - 4a}{x^2 - 4} = \frac{2a(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{2a}{x + 2};$$

$$\frac{m^2 - 1}{1 - m} = -\frac{(m - 1)(m + 1)}{m - 1} = -\frac{m + 1}{1} = -m - 1.$$

З а у в а ж е н н я. Останнє перетворення і рівність $\frac{m^2 - 1}{1 - m} = -m - 1$ є правильними тільки для $m \neq 1$. Щоб не ускладнювати розв'язування вправ, подібні умови можна не вказувати. Домовимось кожний дріб розглядати тільки при допустимих значеннях його змінних.



Хочете знати ще більше?

Скоротити дріб можна діленням чисельника й знаменника на їх спільний дільник, виражений не тільки цілим виразом, а й дробовим. Наприклад, можна писати

$$\frac{\left(\frac{m}{a} - 5\right)x}{\left(\frac{m}{a} - 5\right)a} = \frac{x}{a}.$$

Ця рівність — тотожність, правильна за умови, що $a \neq 0$ і $m \neq 5a$. Іноді доводиться мати справу з дробами, члени яких містять вирази з модулями, наприклад:

$$\frac{|a| \cdot c^2}{c}, \quad \frac{a^2}{|a|}.$$

Такі дроби не відносять до алгебраїчних дробів. Докладніше з ними ви ознайомитеся в старших класах. А тепер розглянемо тільки найпростіші випадки. Перший дріб можна скоротити на c . Рівність

$$\frac{|a| \cdot c^2}{c} = |a| \cdot c$$

правильна при будь-яких значеннях a і $c \neq 0$.

Рівність $\frac{a^2}{|a|} = a$ правильна, якщо $a > 0$. Якщо $a < 0$, то $\frac{a^2}{|a|} = -a$.

Перевірте себе

1. Сформулюйте основну властивість дробу.
2. Що означає «скоротити дріб»?
3. При яких a, b, m значення дробу $\frac{am}{bm}$ існує? А значення дробу $\frac{a}{b}$?
4. Чи можна множити чисельник і знаменник дробу на 0?
5. Сформулюйте наслідки з основної властивості дробу.



Виконаємо разом!

1. Скоротіть дріб $\frac{a^2 - 4}{a^2 + 2a}$.

Розв'язання. $\frac{a^2 - 4}{a^2 + 2a} = \frac{(a-2)(a+2)}{a(a+2)} = \frac{a-2}{a}$.

2. Подайте дріб $\frac{3}{2x}$ зі знаменником: а) $4x^3$; б) $6x(x-1)$.

Розв'язання. а) Щоб одержати знаменник $4x^3$, треба

$2x$ помножити на $2x^2$. Отже, $\frac{3}{2x} = \frac{3 \cdot 2x^2}{2x \cdot 2x^2} = \frac{6x^2}{4x^3}$;

б) щоб одержати знаменник $6x(x-1)$, треба $2x$ помножити на $3(x-1)$. Отже,

$$\frac{3}{2x} = \frac{3 \cdot 3(x-1)}{2x \cdot 3(x-1)} = \frac{9(x-1)}{6x(x-1)}$$

Відповідь. а) $\frac{6x^2}{4x^3}$; б) $\frac{9(x-1)}{6x(x-1)}$.

3. Зведіть до спільного знаменника дробі $\frac{3}{ax^2}$ і $\frac{2a}{cx^3}$.

Розв'язання. Спільний знаменник acx^3 .

$$\frac{3}{ax^2} = \frac{3 \cdot cx}{ax^2 \cdot cx} = \frac{3cx}{acx^3}, \quad \frac{2a}{cx^3} = \frac{2a \cdot a}{cx^3 \cdot a} = \frac{2a^2}{acx^3}.$$

Відповідь. $\frac{3cx}{acx^3}$; $\frac{2a^2}{acx^3}$.

Виконайте усно

94. Скоротіть дріб:

а) $\frac{8}{12}$; б) $\frac{21}{105}$; в) $\frac{160}{20}$; г) $\frac{-21}{21}$;

г) $\frac{-6}{54}$; д) $\frac{14}{-56}$; е) $\frac{-40}{-48}$; є) $\frac{0,9}{0,15}$.

95. Скоротіть дріб:

а) $\frac{a^3}{a^5}$ на a, a^2, a^3 ; б) $\frac{8x^5}{12x^4}$ на $x, x^2, x^3, x^4, 4x, 2x^2, 4x^4$.

96. Оцініть роботу учнів 7 класу (мал. 6).

Варіант I
Скоротіть дробі:

а) $\frac{2c^2}{4c} = 2c$;

б) $\frac{x^2-x}{x^2} = -x$.

Варіант II
Скоротіть дробі:

а) $\frac{3m^3}{9m^2} = \frac{m}{3}$;

б) $\frac{y^2-y}{y^2} = \frac{y-1}{y}$.

Мал. 6

97. На які вирази можна скоротити дріб $\frac{a^2c^4}{a^4c^2}$?

98. Зведіть до спільного знаменника вирази:

а) $\frac{1}{a}$ і $\frac{2}{c}$; б) $\frac{1}{x^2}$ і $\frac{3}{2x}$; в) $\frac{a}{xy}$ і $\frac{b}{yz}$.

Рівень **A**

Скоротіть дріб (99—107).

99. а) $\frac{4}{18}$; б) $\frac{120}{40}$; в) $\frac{15}{15}$; г) $\frac{3,6}{12}$.

100. а) $\frac{2a}{4b}$; б) $\frac{a^5}{a^7}$; в) $\frac{x}{x^4}$; г) $\frac{4a}{a}$.

101. а) $\frac{6a^2}{12a^3}$; б) $\frac{3c}{15c^4}$; в) $\frac{7b^3}{14b^3}$; г) $\frac{18}{9a^2x}$.

102. а) $\frac{-6}{12}$; б) $\frac{130}{-70}$; в) $\frac{-25}{-30}$; г) $\frac{0,5}{0,2}$.

103. а) $\frac{a^3}{-a^5}$; б) $\frac{-c^3}{c^5}$; в) $\frac{-x}{-xa}$; г) $\frac{-2a^2}{-a}$.

104. а) $\frac{12^{10}}{12^{12}}$; б) $\frac{35^5}{-35^4}$; в) $\frac{0,3^8}{0,3^{11}}$; г) $\frac{(-0,4)^4}{-0,4^4}$.

105. а) $\frac{x(a-2)}{x(b+2)}$; б) $\frac{mp(m-p)}{m^2p(m+p)}$; в) $\frac{27x^2(x+1)}{9x(x+1)}$.

106. а) $\frac{x(a+b)^2}{y(a+b)}$; б) $\frac{(a-x)^2c}{(a-x)^2m}$; в) $\frac{4x(x-y)}{7y(x-y)^2}$.

107. а) $\frac{2a(x+3)}{a^2(x+3)}$; б) $\frac{m^2(m-n)^2}{n^2(m-n)^2}$; в) $\frac{6a(2-x)}{3a^2(2-x)}$.

Скоротіть дріб, розклавши, якщо потрібно, чисельник і знаменник дробу на множники і (108—111).

108. а) $\frac{a(b-x)}{xb-x^2}$; б) $\frac{a(4a-3)}{4a^2-3a}$; в) $\frac{x^2(5x-1)}{5xy^2-y^2}$;

г) $\frac{xc-mc}{ax-am}$; д) $\frac{ax^2-x^3}{ax-x^2}$; е) $\frac{2x-x^4}{2y-x^3y}$.

109. а) $\frac{8a-8b}{16b}$; б) $\frac{xy}{x+xy}$; в) $\frac{m-n}{3m-3n}$;

г) $\frac{a+1}{a^2+a}$; д) $\frac{ax-ay}{bx-by}$; е) $\frac{6a-3b}{6b-12a}$.

$$110. \text{ а) } \frac{5-x}{(x-5)^2}; \quad \text{ б) } \frac{7a^3+a^4}{a^3+7a^2}; \quad \text{ в) } \frac{a^5-ma^2}{a^3b^2-mb^2}.$$

$$\text{111. а) } \frac{2c^2-4c}{2a-ac}; \quad \text{ б) } \frac{b-a}{(a-b)^2}; \quad \text{ в) } \frac{m^4-m}{1-m^3}.$$

112. Виконайте ділення:

$$\text{ а) } 24p^2x : 48px^2; \quad \text{ б) } -3ax : 12a^2x^3;$$

$$\text{ в) } (a^2c+bc) : (xa^2+xb); \quad \text{ г) } (c^2-n^2) : (n-c).$$

$$\text{113. Подайте дріб } \frac{2}{a} \text{ зі знаменником: а) } 3a^4; \quad \text{ б) } 5a^2(a-3).$$

114. Зведіть до спільного знаменника дробі:

$$\text{ а) } \frac{2}{x} \text{ і } \frac{1}{a}; \quad \text{ б) } \frac{a}{2m} \text{ і } \frac{b}{3m^2}; \quad \text{ в) } \frac{2}{c} \text{ і } \frac{1}{a-b};$$

$$\text{ г) } \frac{8}{x} \text{ і } \frac{7}{x(x-a)}; \quad \text{ д) } \frac{1}{x-a} \text{ і } \frac{1}{x+a}; \quad \text{ е) } \frac{1}{(a+b)^2} \text{ і } \frac{2a}{a-b}.$$

Доведіть тотожність (115—118).

$$115. \text{ а) } \frac{5x^2y}{xy} = \frac{10xy}{2y}; \quad \text{ б) } \frac{6ab}{2b^2c} = \frac{3ac}{bc^2};$$

$$\text{ в) } \frac{4b(a+b)}{12b} = \frac{5a(a+b)}{15a}; \quad \text{ г) } \frac{2(x-y)}{xy-y^2} = \frac{4(x-y)}{2y(x-y)}.$$

$$116. \text{ а) } \frac{a^2-1}{a-1} = a+1; \quad \text{ б) } \frac{a^2-1}{a+1} = a-1;$$

$$\text{ в) } \frac{4a^2-x^2}{2a+x} = 2a-x; \quad \text{ г) } \frac{4a^2-x^2}{2a-x} = 2a+x.$$

$$\text{117. а) } \frac{(a+c)^2}{a+c} = a+c; \quad \text{ б) } \frac{(a+c)^3}{a+c} = (a+c)^2;$$

$$\text{ в) } \frac{x^2+2x+1}{x+1} = x+1; \quad \text{ г) } \frac{x^2-2x+1}{x-1} = x-1.$$

$$118. \text{ а) } \frac{x^3-c^3}{x^2+xc+c^2} = x-c; \quad \text{ б) } \frac{x^3+c^3}{x+c} = x^2-xc+c^2.$$

119. Замініть «зірочку» одночленом так, щоб рівність стала тотожністю:

$$\text{а) } \frac{5x^3}{*} = \frac{x}{2}; \quad \text{б) } \frac{3}{xy} = \frac{*}{2x^2y}; \quad \text{в) } \frac{3}{7y^2} = \frac{3xy}{*};$$

$$\text{г) } \frac{*}{10a^4x} = \frac{4x^3}{5a^3}; \quad \text{р) } \frac{*}{16m^7} = \frac{3n}{4m}; \quad \text{д) } \frac{4x^3}{5a^3} = \frac{8ax^4}{*}.$$

120. Скоротивши дріб, учень витер на класній дошці частину записів (мал. 7). Відновіть ці записи.

$$\text{а) } \frac{120(a-b)x}{4(a-)} = \frac{30}{-b)x}$$

$$\text{б) } \frac{}{x^2-2x} = \frac{x+}{x}$$

Мал. 7

121. Знайдіть значення дробу:

$$\text{а) } \frac{6a^3c^2}{3a^2c^3}, \text{ якщо } a = 8, c = 16;$$

$$\text{б) } \frac{x^2-9}{x+3}, \text{ якщо } x = 3,25.$$

Рівень **Б**

Скоротіть дріб (122—125).

$$122. \text{ а) } \frac{7a^2b}{21ab^3}; \quad \text{б) } \frac{35xz^5}{7xz^5}; \quad \text{в) } \frac{25ax^2}{75a^8x}; \quad \text{г) } \frac{5^3cm}{5^0c^2m}.$$

$$123. \text{ а) } \frac{x^2-a^2}{3x^3-3a^2x}; \quad \text{б) } \frac{5x^2-5xy}{5(x-y)^2}; \quad \text{в) } \frac{3x^2c-6xc^2}{x^2c-2xc^2}.$$

$$124. \text{ а) } \frac{a^2-2ac+c^2}{(a-c)^3}; \quad \text{б) } \frac{(x+z)^4}{x^2+2xz+z^2}; \quad \text{в) } \frac{a^2-n^2}{a^2-2an+n^2}.$$

$$125. \text{ а) } \frac{ax+ay-az}{cx+cy-cz}; \quad \text{б) } \frac{a^3-1}{a^2+a+1}; \quad \text{в) } \frac{x^2-xz+z^2}{x^3+z^3}.$$

126. Виконайте ділення:

$$\text{а) } 8a^2c^3 : 4a^3c^2;$$

$$\text{б) } 5a^3x^5 : (-25a^2x^4);$$

$$\text{в) } (nx^2 + mx^2) : (m + n);$$

$$\text{г) } (a^2 - 36) : (36 - a^2);$$

$$\text{р) } (xa^3 - x) : (a - 1);$$

$$\text{д) } (nx^3 + n^4) : (nx + n^2).$$

Доведіть тотожність (127 – 128).

127. а) $\frac{4ab}{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 1$; б) $\frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2 + (a-b)^2} = \frac{1}{2}$;

в) $\frac{x+y}{x^2 - y^2} = \frac{x-y}{x^2 - 2xy + y^2}$; г) $\frac{a^2 + ab}{a+b} = \frac{a^3 - a}{(a-1)(a+1)}$.

128. а) $\frac{3a^2 + 2a}{6 + 9a} = \frac{2(a^3 + a)}{6 + 6a^2}$; б) $\frac{x^3 - 1}{(x+1)^2 - x} = \frac{x - 2x^2 + x^3}{x^2 - x}$;

в) $\frac{a^4 - 2a^2 + 1}{a^3 - a^2 - a + 1} = a + 1$; г) $\frac{a^6 - 2a^3 + 1}{(a^2 + a + 1)^2} = (a-1)^2$.

Спростіть вираз (129 – 131).

129. а) $\frac{3x + 2 + 3xy + 2y}{2y - 2 + 3xy - 3x}$; б) $\frac{6a^2 + 15ab - 8ac - 20bc}{12a^2 - 9ab - 16ac + 12bc}$.

130. а) $\frac{(x+2)(x-1)}{x^2 + 3x + 2}$; б) $\frac{2a^2 - 18}{a^2 + 2a - 15}$; в) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$.

131. а) $\frac{x(y+1)^2 - y(x+1)^2}{x(y+1) - y(x+1)}$; б) $\frac{3p^3 - 81q^3}{2p^2q + 6q^2p + 18q^3}$.

132. Чи зміниться значення дробу, якщо x і y одночасно помножити на 10:

а) $\frac{x}{y}$; б) $\frac{5x}{y}$; в) $\frac{x-y}{3x}$; г) $\frac{x-y}{x+y}$;
 г) $\frac{x+y}{y^2}$; д) $\frac{10x}{x^2 + y^2}$; е) $\frac{x-5}{y+5}$; є) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$?

133. Який з наступних дробів: а) найменший; б) найбільший, якщо кожне з чисел a і c більше від 1:

$\frac{a}{c-1}$; $\frac{a}{c+1}$; $\frac{2a}{2c+1}$; $\frac{2a}{2c-1}$; $\frac{3a}{3c+1}$; $\frac{3a}{3c-1}$?

134. Відновіть втрачені у знаменниках записи:

а) $\frac{15(x-y)^2 x^2}{21(x-\dots)} = \frac{5x}{\dots-y}$; б) $\frac{4(x^2 - y^2)}{24\dots} = \frac{x+y}{\dots x}$.

135. Подайте дріб, тотожний дробу $\frac{x+y}{3x}$, за умови, що його знаменник дорівнює:

а) $9x^2y$; б) $12xy^2$; в) $3x(x-y)$; г) $6x^2 - 6xy$.

Зведіть до спільного знаменника дробу (136—138).

136. а) $\frac{3}{a-2}$ і $\frac{2}{(2-a)^2}$; б) $\frac{5}{3x-4}$ і $\frac{7}{4-3x}$; в) $\frac{4z}{3-z}$ і $\frac{1}{(z-3)^3}$.

137. а) $\frac{x+3}{x(x-5)}$ і $\frac{x}{x^2-25}$; б) $\frac{a+b}{a-b}$ і $\frac{a+2}{a^2-b^2}$.

138. а) $\frac{a+b}{a^2(a-b)}$ і $\frac{a+2}{a^3-ab^2}$; б) $\frac{a+2}{a^3-8}$ і $\frac{1}{a^2-2a}$.

Спростіть вираз (139—141).

139. а) $\frac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}$; б) $\frac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3}$.

140. а) $\frac{x^2-(a-b)x-ab}{x^3+bx^2+ax+ab}$; б) $\frac{(x+a)^2-(z+c)^2}{(x+z)^2-(a+c)^2}$.

141. а) $\frac{x^4+(2c^2-a^2)x^2+c^4}{x^4+2ax^3+a^2x^2-c^4}$; б) $\frac{a^3c-2a^2c^2+ac^3-ab^2c}{(a^2+c^2-b^2)^2-4a^2c^2}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

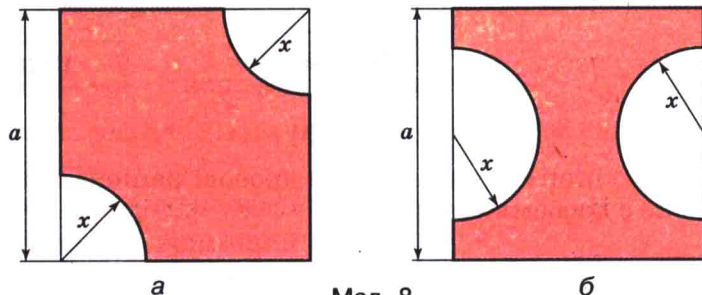
142. Напишіть число без показника степеня:

а) $3 \cdot 10^5$; б) $2,7 \cdot 10^7$; в) $1,43 \cdot 10^6$.

143. Розв'яжіть рівняння: а) $5(2x-8)+8(3x-2)=12$;

б) $5-2x(3x-2)=x(x+4)-7x(x-5)$.

144. Складіть вираз для обчислення площі фігури, зображеної на малюнку 8 (а, б).



Мал. 8

145. Катер за 7 год проходить за течією річки такий самий шлях, як за 9 год проти течії. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки — 2,5 км/год.

§4. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

♦ Вираз, складений із чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення або піднесення до степеня, називається **раціональним**.



Приклади раціональних виразів:

$$3, x, a-x^2, m+\frac{x-1}{x^2+1}, \left(\frac{a}{x}+1\right):\left(\frac{a+x}{2x}-1\right)^2.$$

Цілі вирази — це раціональні вирази, які не містять ділення на змінну.

Дробові вирази — це раціональні вирази, які містять ділення на змінну.

Цілі вирази і дроби — найпростіші види раціональних виразів. Інші види цих виразів пов'язані між собою, як показано на схемі (мал. 9).




Мал. 9

Словом «інші» тут позначено дробові раціональні вирази, які не є дробами, наприклад:

$$a - \frac{a}{1 + \frac{1}{a}}, \quad \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{x + y} - \frac{1}{xy}.$$

♦ Рівняння називається **раціональним**, якщо його ліва і права частини — раціональні вирази.

 **Раціональне рівняння називається дробовим, якщо його права або ліва частина — вирази дробові.**

Приклади дробових рівнянь:

$$\frac{2x(x-2)}{x} = 0; \quad \frac{1}{5+x} - \frac{2}{x} = 3; \quad \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = 2x; \quad \frac{x+1}{x} = \frac{x+1}{x+2}.$$

Щоб розв'язувати такі рівняння, потрібно перш за все знати, як виконують дії з дробовими виразами. Тому в наступних параграфах будемо розглядати додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення дробів до степеня.

Найпростіші дробові рівняння, а саме рівняння, в яких ліва частина — це дріб, а права — нуль, розв'язують на основі умови рівності дробу нулю.

 **Дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля.**

Наприклад, щоб розв'язати рівняння $\frac{5x-3}{10x} = 0$, потрібно привіняти до нуля чисельник і розв'язати утворене рівняння:

$$5x - 3 = 0, \quad 5x = 3, \quad x = \frac{3}{5}.$$

Крім того, слід перевірити, чи не дорівнює нулю при такому значенні x знаменник:

$$10 \cdot \frac{3}{5} = 6 \neq 0.$$

Отже, $x = \frac{3}{5}$ — корінь даного рівняння.

Зверніть увагу! Умова рівності дробу нулю складається з двох частин:

- 1) чисельник дорівнює нулю;
- 2) знаменник відмінний від нуля.

Кожна з цих частин умови однаково важлива.



Хочете знати ще більше?

У наведеній вище схемі словом «дроби» названо тільки *раціональні дроби* (частину раціональних виразів). А бувають дроби не лише раціональні, наприклад,

$$\frac{2-x}{2-|x|}, \frac{\sin x}{\cos x}, \frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}.$$

Це також дроби, але не раціональні. Тому, забігаючи трохи наперед, співвідношення між різними видами виразів можна зобразити такою діаграмою (мал. 10).



Мал. 10

Якщо вираз містить змінні під знаком модуля, його не вважають раціональним. Хоч багато таких виразів можна замінити двома, трьома чи більшою кількістю раціональних виразів. Наприклад, розглянемо дріб $\frac{x-|x|}{2x^2}$.

Якщо $x \geq 0$, то $|x| = x$; якщо $x < 0$, то $|x| = -x$. Тому

$$\frac{x-|x|}{2x^2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x > 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{якщо } x < 0, \\ \text{не існує,} & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Перевірте себе

1. Які вирази називають раціональними?
2. Які вирази називають цілими?
3. Які вирази називають дробовими?
4. Чим відрізняються поняття «дріб» і «дробовий вираз»?
5. Які рівняння називають раціональними?
6. Які рівняння називають дробовими?
7. Сформулюйте умови рівності дробу нулю.



Виконаємо разом!

1. При яких значеннях змінної x значення дробу $\frac{5x-1}{4-3x}$ дорівнює нулю?

Розв'язання. Значення дробу дорівнює нулю тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля. Прирівнюємо чисельник до нуля: $5x - 1 = 0$, $5x = 1$, $x = 0,2$.

Якщо $x = 0,2$, знаменник $4 - 3x$ не дорівнює нулю. Отже, якщо $x = 0,2$, то дріб $\frac{5x-1}{4-3x}$ дорівнює нулю.

Відповідь. $x = 0,2$.

2. Чи має корені рівняння $\frac{x-3}{x^2-9} = 0$?

Розв'язання. Значення дробу дорівнює нулю тільки тоді, коли нулю дорівнює його чисельник. Чисельник дробу в даному рівнянні дорівнює 0 тільки тоді, коли $x = 3$. Але при такому значенні x знаменник дорівнює нулю. А на нуль ділити не можна. Символ $\frac{0}{0}$ — не число.

Відповідь: Рівняння коренів не має.

Виконайте усно

146. Який з виразів: 1) цілий; 2) дробовий; 3) раціональний:

а) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$; б) $\frac{x}{2} - \frac{2}{x}$; в) $x^4 : y^4$; г) $\frac{(x+y)^2}{2}$;

г) $\frac{2+3x}{3x+2}$; д) $5 + 5 : x$; е) $\frac{1-x^2}{x+1}$; є) $a^3 \cdot b^3$?

147. Знайдіть значення виразу $\frac{12}{m}$, якщо:

а) $m = 1$; б) $m = 2$; в) $m = 3$; г) $m = 4$;
г) $m = 5$; д) $m = 6$; е) $m = 7$; є) $m = 8$.

148. При яких значеннях змінної не має змісту вираз:

а) $\frac{x+1}{4} + \frac{4}{x+1}$; б) $x + \frac{1}{x+1}$; в) $\frac{1}{x(x+1)}$?

149. При яких значеннях змінної дріб дорівнює нулю:

а) $\frac{x+5}{x-5}$; б) $\frac{5}{x-5}$; в) $\frac{x-5}{5}$; г) $\frac{x^2-5}{x+5}$?


Рівень **A**

150. Які з виразів цілі, а які — дробові:

а) $\frac{7x+3}{x}$; б) $\frac{3x-7}{3}$; в) $\frac{1}{3}x+7$; г) $\frac{1}{3}:(x-7)$?

151. Знайдіть значення виразу:

а) $7,5 - 2,5^2$; б) $1\frac{1}{2} - 2,5$; в) $\frac{3,5}{2,3+4,7}$; г) $(1+51)^0$.

 152. Знайдіть значення виразу $\frac{10}{x} + \frac{x}{10}$, якщо:

а) $x = 1$; б) $x = 2$; в) $x = 5$; г) $x = 10$.

Укажіть, при яких значеннях x не має змісту вираз (153 – 154).

153. а) $\frac{9}{x}$; б) $\frac{3}{x^2}$; в) $-\frac{5}{x^3}$; г) $\frac{8}{-x}$.


154. а) $\frac{5}{x+3}$; б) $\frac{7}{x-2}$; в) $\frac{x}{x+1}$; г) $\frac{x+1}{x-3}$.

155. При яких значеннях x дорівнює нулю значення дробу:

а) $\frac{x-3}{8}$; б) $\frac{x+5}{14}$; в) $\frac{2x+3}{3x}$; г) $\frac{x(x-3)}{x^2+2x}$?

156. Наведіть приклади дробів, які дорівнюють нулю, якщо:


а) $x = 3$; б) $y = -1$; в) $x = 0,5$; г) $y = -1,5$.

 157. Чи може дорівнювати нулю значення дробу:

а) $\frac{5}{x+3}$; б) $\frac{(-1)^2}{(x-1)^2}$; в) $\frac{x-1}{x}$; г) $\frac{x+1}{x^2-1}$?

158. Чи є значення $x = 15$ коренем рівняння:

а) $\frac{30}{x} = 2$; б) $\frac{1}{x-8} = \frac{1}{7}$; в) $\frac{x+15}{x-15} = 0$?

 159. Яке з чисел -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 є коренем рівняння

$$\frac{2x-x^2}{4-x^2} = 0?$$

Розв'яжіть рівняння (160–161).

160. а) $\frac{x+3}{3-x}=0$; б) $\frac{2x-10}{x+5}=0$; в) $\frac{x^2}{x+2}=0$; г) $\frac{x-1}{x^2+1}=0$.

161. а) $\frac{x(x+1)}{x^2-1}=0$; б) $\frac{x^2-4}{x^2+4}=0$; в) $\frac{x^2-25}{(x+5)^2}=0$; г) $\frac{2x^2-10x}{x(x+5)}=0$.

Рівень Б

162. Розмістіть вирази $4a^2b$; $\frac{a^2}{4b}$; $4 + a^2b$; $4 : a^2b$; $4a^2 + |b|$; $(4 + a^2b)$; $(4 + a)^2 : b$; $\frac{|b|}{4a}$; $\frac{a^2b}{4}$; $\frac{4+a^2}{b}$; $\left(\frac{a}{4}\right)^2 + b$ у відповідних колонках таблиці.

Раціональні вирази	
цілі	дробові

163. Чи є дробом вираз:

а) $\frac{1}{2}x$; б) $\frac{x+5}{5}$; в) $5(x+5)$; г) $\frac{x+y}{0,1}+10$; р) $5\frac{2}{3}$?

Який з цих виразів є дробовим?

164. Знайдіть значення виразу $|x| + |y|$, якщо

а) $x = 0,75$, $y = -7,25$; б) $x = 1,331$, $y = -1,331$.

Чи є цей вираз раціональним?


165. Знайдіть значення числового виразу:

а) $\frac{1,5}{4,5-1\frac{1}{2}}$; б) $\frac{15^2-5^2}{20}$; в) $\frac{144}{12^2} + \left(\frac{144}{12}\right)^2$.

166. Знайдіть значення виразу:


а) $x^2 + 2x + 1 - \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$, якщо: 1) $x = 0$; 2) $x = 1$; 3) $x = 9$;

б) $4a^2 - 4a + 1 + \frac{1}{4a^2 - 4a + 1}$, якщо: 1) $a = \frac{1}{2}$; 2) $a = 5\frac{1}{2}$.

-  167. Знайдіть значення виразу, розглянувши всі можливі випадки:

а) $1 + \frac{|a|}{a}$; б) $\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b}$; в) $\frac{a|b|}{ab}$; г) $\frac{ab}{|ab|}$.

168. Швидкість човна становить v км/год, а швидкість течії річки — 2 км/год. За який час човен пройшов 100 км:
а) за течією; б) проти течії?

-  169. Швидкість катера — 50 км/год, а швидкість течії річки — v км/год. За який час човен пройшов 50 км:
а) за течією річки; б) проти течії річки?

170. Один кухар виготовив 96 вареників за n хв, а другий — 105 вареників за m хв. Скільки вареників виготовляли обидва кухарі за 1 год?


171. Змішали m г 10 %-го та n г 15 %-го розчину солі. Якою буде концентрація утвореного розчину?

172. Чи може значення даного дробу бути від'ємним? А дорівнювати нулю?

а) $\frac{8}{2+c^2}$; б) $\frac{n^2+2}{(n-1)^2+2}$; в) $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^4+2}$.

Визначте, при яких x дорівнює нулю значення дробу (173–174).

173. а) $\frac{2x+3}{x^2+5}$; б) $\frac{x^2-4x}{x+3}$; в) $\frac{x^2-9}{x-3}$; г) $\frac{x}{x^2-3x}$.

 174. а) $\frac{x+3}{6-2x}$; б) $\frac{2y-1}{y^2-1}$; в) $\frac{x(x-4)}{12+x}$; г) $\frac{12m}{m+m^2}$.

175. Наведіть приклади дробів, які дорівнюють нулю, якщо:

а) $x = 0$; б) $m = -4$ і $m = 4$; в) $y = 0$ і $y = -2$;

г) $x = 5$; г) $z = 3$ і $z = -4$; д) $a = -\frac{1}{3}$ або $a = \frac{2}{3}$.



176. Чи є значення $x = 12$ коренем рівняння:

а) $\frac{x}{4} = 3$; б) $\frac{3x-1}{5} = 7$; в) $\frac{x+12}{x-12} = 0$;

г) $\frac{x-2}{2-x} = 1$; р) $\frac{x-4}{4} = \frac{x}{6}$; д) $\frac{x(x-9)}{4} = x-3$?

177. Покажіть, що дане рівняння не має розв'язків:

а) $\frac{5}{x-3} = 0$; б) $\frac{z^2+10}{z-5} = 0$; в) $\frac{x-7}{x^2-7x} = 0$.

Розв'яжіть рівняння (178–180).

178. а) $\frac{2x-3}{5x} = 0$; б) $\frac{15-3x}{x+4} = 0$; в) $\frac{0,5+2x}{x^2-1} = 0$.

179. а) $\frac{3x}{x^2-1} = 0$; б) $\frac{x^2-2x+1}{1-x^3} = 0$; в) $\frac{x^2-1}{x^2+4} = 0$.

180. а) $\frac{x^2+4}{x^2-1} = 0$; б) $\frac{x^2-3x}{x^2-6x+9} = 0$; в) $\frac{4-4x+x^2}{4-x^2} = 0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

181. Виконайте дії:

а) $1\frac{2}{3} + \frac{5}{3}$; б) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$; г) $7 - \frac{9}{11}$; д) $\frac{5}{21} - 1\frac{1}{35}$.

Зведіть до спільного знаменника дроби (182–184):

182. а) $\frac{a}{4(a-b)}$ і $\frac{b}{20(a-b)}$; б) $\frac{x+z}{xyz}$ і $\frac{6y}{xz^2}$.

183. а) $\frac{x}{2(x-1)}$ і $\frac{2}{x(x-1)}$; б) $\frac{1}{x^2+x}$ і $\frac{1}{x^2+2x+1}$.

184. а) $\frac{2a}{a^2-b^2}$ і $\frac{b}{18a}$; б) $\frac{3}{x^2-a^2}$ і $\frac{x+1}{(x+a)^2}$.

185. Розкладіть на множники:

а) $6x^2 - 6y^2$; б) $5 - 5m^2$; в) $ax^2 - a^3$;
г) $3x^4 - 12x^2$; р) $20a^2 - 45b^2$; д) $48x^2 - 75y^2$.

§5. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ



Для натуральних чисел a, b, c справджується рівність

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Справджується вона і для довільних раціональних значень a, b, c , крім $c = 0$. Доведемо це.

Нехай a, b і $c \neq 0$ — довільні раціональні числа. Тоді $\frac{a}{c}$ і $\frac{b}{c}$ — також раціональні числа. Якщо $\frac{a}{c} = r$ і $\frac{b}{c} = p$, то, за означенням дії ділення, $a = cr$ і $b = cp$. Додавши ліві й праві частини цих рівностей, одержимо $a + b = c(r + p)$. За означенням дії ділення, з утвореної рівності випливає, що

$$r + p = \frac{a+b}{c}, \text{ тобто } \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Подібним способом можна довести і тотожність

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Із цих двох тотожностей випливають правила додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками.



Щоб додати дробі з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити той самий.

Щоб знайти різницю дробів з однаковими знаменниками, треба від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити той самий.

На основі цих правил виконують додавання і віднімання будь-яких дробів з однаковими знаменниками:

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{C} = \frac{A \pm B}{C}.$$

Приклади. $\frac{5ax}{3m} + \frac{2c}{3m} = \frac{5x+2c}{3m}$; $\frac{a}{m+x} - \frac{m}{m+x} = \frac{a-m}{m+x}$.

Якщо треба знайти суму або різницю дробів з різними знаменниками, то спочатку їх зводять до спільного знаменника, як це роблять при додаванні та відніманні звичайних дробів.

Щоб звести дроби до спільного знаменника, попередньо знаменник кожного дробу розкладають на множники. Якщо знаменники дробів не мають спільних множників, то додавання і віднімання дробів виконують за формулою:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} \pm \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{A \cdot D \pm C \cdot B}{B \cdot D}$$

Приклади.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a} + \frac{3a}{5x} &= \frac{5x}{10ax} + \frac{6a^2}{10ax} = \frac{5x+6a^2}{10ax}; \\ \frac{x}{x^2-4} - \frac{2}{3x+6} &= \frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{2}{3(x+2)} = \\ &= \frac{3x}{(x-2)(x+2)3} - \frac{2(x-2)}{3(x+2)(x-2)} = \frac{3x-2x+4}{3(x-2)(x+2)} = \frac{x+4}{3(x^2-4)}. \end{aligned}$$

Іноді виникає потреба знайти суму або різницю дробу і цілого виразу. Їх можна додавати або віднімати, як дроби, записавши цілий вираз у вигляді дробу зі знаменником 1.

Приклад.

$$\frac{2xy}{3c} + 5c = \frac{2xy}{3c} + \frac{5c}{1} = \frac{2xy+15c^2}{3c}.$$

Подібним способом спрощують вирази, які складаються з трьох або більше дробів, сполучених знаками «плюс» або «мінус». Наприклад,

$$\frac{2c}{3x} + \frac{1}{a} - \frac{3a}{2x} = \frac{4ac}{6ax} + \frac{6x}{6ax} - \frac{9a^2}{6ax} = \frac{4ac+6x-9a^2}{6ax}.$$



Хочете знати ще більше?

Домовившись розглядати кожну тотожність тільки при її допустимих значеннях змінних, тобто за умови, коли її ліва і права частини мають зміст, ми свідомо спрощуємо задачу. Довівши тотожність, стверджуємо тільки, що вона правильна на всій області допустимих значень, не зазначаючи, яка це область.

Щоб дати вичерпне розв'язання такої вправи, варто не лише переконатися, що тотожність правильна на всій області допустимих значень, а й указати, якою є ця область. Або чітко зазначити, які з дійсних чисел не належать цій області. Наприклад, показавши, що

$$\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x} = \frac{y}{(x-y)x},$$

бажано вказати, що доведена рівність правильна, якщо $x \neq y$ і $x \neq 0$.

У відповідальних випадках, наприклад у екзаменаційних роботах, такі уточнення доцільні.

Перевірте себе

1. Сформулюйте правило додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками.
2. Як додавати дробі з різними знаменниками?
3. Як знайти різницю дробів з різними знаменниками?
4. Як знайти суму чи різницю дробу і цілого виразу?

Виконаємо разом!

1. Знайдіть різницю дробів $\frac{3-a^2}{a^2}$ і $\frac{3}{a^2}$.

Розв'язання.
$$\frac{3-a^2}{a^2} - \frac{3}{a^2} = \frac{3-a^2-3}{a^2} = \frac{-a^2}{a^2} = -1.$$

Відповідь. -1 .

2. Знайдіть суму дробів $\frac{6}{a}$ і $\frac{3a}{a^2-c}$.

Розв'язання. Спільний знаменник даних дробів $a(a^2-c)$. Щоб звести дані дробі до спільного знаменника, треба домножити першій дріб на a^2-c , а другий — на a .

$$\frac{6}{a} + \frac{3a}{a^2-c} = \frac{6a^2-6c+3a^2}{a(a^2-c)} = \frac{9a^2-6c}{a(a^2-c)} = \frac{3(3a^2-2c)}{a(a^2-c)}.$$

Відповідь.
$$\frac{3(3a^2-2c)}{a(a^2-c)}.$$

3. Виконайте дії: $\frac{3a^2}{2a-b} - \frac{a^2-b^2}{b-2a}$.

Розв'язання. Використаємо формулу

$$-\frac{A}{B} = \frac{A}{-B}.$$

$$\begin{aligned} \frac{3a^2}{2a-b} - \frac{a^2-b^2}{b-2a} &= \frac{3a^2}{2a-b} + \frac{a^2-b^2}{2a-b} = \frac{3a^2+a^2-b^2}{2a-b} = \\ &= \frac{4a^2-b^2}{2a-b} = \frac{(2a-b)(2a+b)}{2a-b} = 2a+b. \end{aligned}$$

Відповідь. $2a+b$.

Виконайте усно

186. Додайте дроби:

а) $\frac{2}{5}$ і $\frac{4}{5}$; б) $\frac{7}{13}$ і $\frac{6}{13}$; в) $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ і $\frac{5}{4}$;
 г) $\frac{a}{2x}$ і $\frac{3}{2x}$; ґ) $\frac{2c^2}{3ab}$ і $\frac{1-c^2}{3ab}$; д) $\frac{2x}{x+2}$, $\frac{6}{x+2}$ і $\frac{x}{x+2}$.

187. Знайдіть різницю дробів:

а) $\frac{2c}{3ax}$ і $\frac{c}{3ax}$; б) $\frac{7x}{6ab}$ і $\frac{x}{6ab}$; в) $\frac{2a}{a-3}$ і $\frac{6}{a-3}$;
 г) $\frac{4x+1}{3x-2}$ і $\frac{x-3}{3x-2}$; ґ) $\frac{a^2}{a-c}$ і $\frac{c^2}{a-c}$; д) $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$ і $\frac{2x}{(x-1)^2}$.

Подайте у вигляді дробу вираз (188—189).

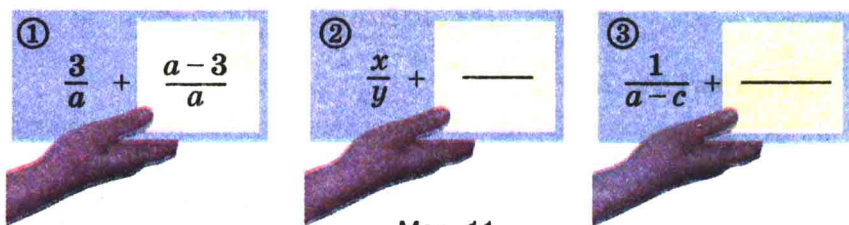
188. а) $\frac{x}{3a} + \frac{y}{3a}$; б) $\frac{1}{-5x} + \frac{a}{-5x}$; в) $\frac{1}{4m} + \frac{3}{4m} + \frac{5}{4m}$;
 г) $\frac{1}{9a} - \frac{c}{9a}$; ґ) $\frac{x+m}{2m} - \frac{x}{2m}$; д) $\frac{x+3}{0,5c} - \frac{9}{0,5c}$.

189. а) $\frac{a}{a+x} + \frac{2x}{a+x} - \frac{x}{a+x}$; б) $\frac{2c}{c-x} - \frac{c}{c-x} - \frac{x}{c-x}$;
 в) $\frac{m+c}{2x} + \frac{m-c}{2x}$; ґ) $\frac{2x}{0,5a} - \frac{x-c}{0,5a} - \frac{c}{0,5a}$.

190. Спростіть вираз:

а) $\frac{1}{2x} + \frac{3}{2x} - \frac{2}{2x}$; б) $\frac{a}{7m} + \frac{2a}{7m} + \frac{4a}{7m}$;
 в) $\frac{3}{5ac} - \frac{2}{5ac} + \frac{4}{5ac}$; ґ) $\frac{5}{3am} - \frac{2,5}{3am} + \frac{0,5}{3am}$.

191. Який дріб слід записати у рамку на картці, щоб у сумі з написаним дробом одержати номер картки (мал. 11)?



Мал. 11

Рівень **A**

Подайте у вигляді дробу або одночлена вираз (192–196).

192. а) $\frac{2a}{a-c} - \frac{a}{a-c} - \frac{c}{a-c}$; б) $\frac{3a}{a^2-1} - \frac{2a}{a^2-1} + \frac{1}{a^2-1}$;
 в) $\frac{3x+y}{x+y+z} + \frac{z-2x}{x+y+z}$; г) $\frac{2a-b}{a+b-c} - \frac{a-2b+c}{a+b-c}$.
 193. а) $\frac{1-a}{1-c^2} + \frac{a-3}{1-c^2} - \frac{c-3}{1-c^2}$; б) $\frac{a^2-c^3}{a-c} + \frac{c^3-a^3}{a-c} + \frac{a^3-a^2}{a-c}$.

194. а) $\frac{a+b-c}{3abc} + \frac{a-b+c}{3abc} + \frac{b-a+c}{3abc}$;
 б) $\frac{x+y-z}{x+y+z} + \frac{x-y+z}{x+y+z} + \frac{-x+y+z}{x+y+z}$.

195. а) $\frac{2}{3a} + \frac{4}{3a} - \frac{6-a^2}{3a}$; б) $\frac{2a+3}{5b} + \frac{2a-9}{5b} + \frac{a+1}{5b}$;
 в) $\frac{x^2}{x+1} + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{1-x}{x+1}$; г) $\frac{2(m+n)}{m-n} - \frac{m}{m-n} - \frac{m}{m-n}$.

196. а) $\frac{5x}{2y} - \frac{x+y}{2y} + \frac{2x+y}{2y}$; б) $\frac{2a^2}{a+b} + \frac{ab}{a+b} - \frac{a^2}{a+b}$;
 в) $\frac{2a-5}{2a-3} + \frac{a-2}{2a-3} - \frac{a-4}{2a-3}$; г) $\frac{x^3}{x^2-4} - \frac{x^3-x}{x^2-4} - \frac{2}{x^2-4}$.

197. Доведіть тотожність:

- а) $\frac{a}{a+c} + \frac{c}{a+c} = 1$; б) $\frac{a}{a-c} - \frac{c}{a-c} = 1$;
 в) $\frac{x(1+y)}{x-y} - \frac{y(1+x)}{x-y} = 1$; г) $\frac{a(b-1)}{a-b} - \frac{b(a-1)}{a-b} = -1$.

198. Спростіть вираз:

$$а) \frac{a^2}{a+3} - \frac{9}{a+3};$$

$$б) \frac{2}{m^2-4} + \frac{m}{m^2-4};$$

$$в) \frac{5a-1}{a^2-b^2} - \frac{5b-1}{a^2-b^2};$$

$$г) \frac{a^2-30}{a-5} + \frac{5}{a-5}.$$

199. Спростіть ліву частину рівняння і знайдіть його корені:

$$а) \frac{x}{x+5} - \frac{3}{x+5} = 0;$$

$$б) \frac{2x+3}{5x} + \frac{3x+2}{5x} = 0;$$

$$в) \frac{2x}{x+3} + \frac{6}{x+3} = 0;$$

$$г) \frac{1}{x^2-x} - \frac{x+1}{x^2-x} = 0.$$

200. Розв'яжіть рівняння:

$$а) \frac{8}{3x} + \frac{2x}{3x} = 0;$$

$$б) \frac{x}{x-2} - \frac{2}{x-2} = 0;$$

$$в) \frac{x-5}{x^2-25} - \frac{x}{x^2-25} = 0;$$

$$г) \frac{5x-1}{2x+5} + \frac{2x+15}{2x+5} = 0.$$

Зведіть до спільного знаменника вирази (201–202).

$$201. а) \frac{3}{2x} \text{ і } \frac{1}{3x}; \quad б) \frac{a}{4c} \text{ і } \frac{c}{4a}; \quad в) \frac{35}{9a^2} \text{ і } \frac{7}{12a};$$

$$г) \frac{4}{a^3} \text{ і } \frac{7}{a^2b}; \quad д) \frac{1}{x^2y} \text{ і } \frac{1}{y^2z}; \quad е) \frac{2}{3ax^2} \text{ і } \frac{a}{6bx^2}.$$

$$202. а) \frac{1}{a^2-x^2} \text{ і } \frac{2}{a+x}; \quad б) \frac{a}{a-c} \text{ і } \frac{c}{a^2-c^2}; \quad в) \frac{a}{45b} \text{ і } \frac{b}{18a};$$

$$г) \frac{2c}{c^3-cz^2} \text{ і } \frac{3z}{c^2+cz}; \quad д) \frac{x}{a(x+a)^2} \text{ і } \frac{a}{x(x+a)}; \quad е) \frac{3x}{56a^3} \text{ і } \frac{x^2}{63a}.$$

Використовуючи формули $\frac{M}{A-B} = \frac{-M}{B-A}$ або $(A-B)^2 = (B-A)^2$, зведіть до спільного знаменника дробу (203–204).

$$203. а) \frac{1}{a-c} \text{ і } \frac{3}{c-a}; \quad б) \frac{x}{x-y} \text{ і } \frac{1-y}{y-x}; \quad в) \frac{-5}{a^2-4} \text{ і } \frac{a}{4-a^2}.$$

$$204. а) \frac{4ax}{a+x} \text{ і } \frac{5x}{x^2-a^2}; \quad б) \frac{3x}{x-1} \text{ і } \frac{1}{(1-x)^2};$$

$$в) \frac{4}{35(x-2)} \text{ і } \frac{x}{14-7x}; \quad г) \frac{1}{c-a}, \frac{2}{a-c} \text{ і } \frac{3}{(a-c)^2}.$$

205. Додайте дроби:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{1}{x} \text{ і } \frac{3}{2x}; & \text{б) } & \frac{a}{c} \text{ і } \frac{3-a}{4c}; & \text{в) } & \frac{a+x}{2x} \text{ і } \frac{x-a}{3x}; \\ \text{г) } & \frac{1}{a+b} \text{ і } \frac{3}{x(a+b)}; & \text{г) } & \frac{a-c}{c} \text{ і } \frac{-a^2}{c(a-c)}; & \text{д) } & \frac{1}{2a^2bx^3} \text{ і } \frac{5}{3ax^4}. \end{aligned}$$

206. Знайдіть різницю дробів:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{4a}{ax^2} \text{ і } \frac{5}{ax}; & \text{б) } & \frac{1}{c} \text{ і } \frac{1}{a-c}; & \text{в) } & \frac{x^2-m}{m(x+m)} \text{ і } \frac{x}{m}; \\ \text{г) } & \frac{3}{a-b} \text{ і } \frac{2}{a+b}; & \text{г) } & \frac{x^2}{(a+x)^2} \text{ і } \frac{x}{a+x}; & \text{д) } & \frac{x}{3a^2b^3c} \text{ і } \frac{2}{5abc^3}. \end{aligned}$$

 **207.** Знайдіть суму і різницю дробів:

$$\text{а) } \frac{1}{3cx} \text{ і } \frac{c-x}{3c^2x}; \quad \text{б) } \frac{a^2}{(a-b)^2} \text{ і } \frac{a}{a-b}; \quad \text{в) } \frac{3}{c(x-y)} \text{ і } \frac{2}{x^2-xy};$$

Виконайте дії (208–211).

$$\text{208. а) } \frac{1}{2x} + \frac{4}{x+2}; \quad \text{б) } \frac{2}{3c} - \frac{1}{c-3}; \quad \text{в) } \frac{2}{a-x} - \frac{1}{ax}.$$

$$\text{209. а) } \frac{6}{4x-5y} - \frac{3}{2x}; \quad \text{б) } \frac{3}{4} - \frac{x+2}{4-3x}; \quad \text{в) } \frac{7+2x}{5-3x} + \frac{2}{3}.$$

$$\text{210. а) } \frac{a+b}{c} + 1; \quad \text{б) } m + \frac{3c-m^2}{m-c}; \quad \text{в) } 5 - \frac{3x^2}{a-x^2}.$$

$$\text{211. а) } a + \frac{1-a^2}{a}; \quad \text{б) } 2c - \frac{2c}{c-1}; \quad \text{в) } x^2 - \frac{x^3}{a+x}.$$

212. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:

$$\text{а) } \frac{5x-3}{4x+4} - \frac{4x-2}{3x+3}; \quad \text{б) } \frac{3m-2}{8+4m} - \frac{2m-2}{6+3m}.$$

Розв'яжіть рівняння (213–214).

$$\text{213. а) } \frac{5}{2x+1} - \frac{5}{3x-2} = 0; \quad \text{б) } \frac{3}{1+2x} + \frac{2}{1-x} = 0;$$

$$\text{в) } \frac{3x-7}{x-5} + \frac{x+3}{5-x} = 0; \quad \text{г) } \frac{1}{1+x} - \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

$$214. \text{ а) } \frac{3a-1}{3a^2} - \frac{2+a}{2a} = 0; \quad \text{ б) } \frac{a}{3a-3} - \frac{5}{2-2a} = 0;$$

$$\text{ в) } \frac{m}{(m+3)^2} + \frac{2}{m+3} = 0; \quad \text{ г) } \frac{1+m^2}{m-m^2} + \frac{m+5}{m-1} = 0.$$

Рівень **Б**

Подайте у вигляді дробу вираз (215—218).

$$215. \text{ а) } \frac{4x-5y+8}{18y} + \frac{7x+3y-5}{30y} + \frac{2x+5y+3}{45y};$$

$$\text{ б) } \frac{2a+3b}{4c} - \frac{a+2b}{6c} + \frac{4a-b}{8c} - \frac{3a-4b}{12c}.$$

$$216. \text{ а) } \frac{x-4}{2x} - \frac{5x-7}{10x} - \frac{3x+9}{4x} + \frac{2x+5}{5x};$$

$$\text{ б) } \frac{2a-ab+3b}{9ab} - \frac{a-2ab}{ab} - \frac{4a+ab-5b}{6ab}.$$

$$217. \text{ а) } \frac{x+1}{x-1} - 1; \quad \text{ б) } \frac{a}{3bc^2} + \frac{2b}{5ac^2} - c; \quad \text{ в) } 1 - a + \frac{2a^2}{a+1}.$$

$$218. \text{ а) } \frac{2}{3x+6} + \frac{x^2-x-2}{x^2-4} - 1; \quad \text{ б) } 1 + \frac{2m+1}{m^3-1} - \frac{m}{m-1}.$$

Спростіть вираз (219—228).

$$219. \text{ а) } \frac{9x^2+4y^2}{12x^2y-8xy} + \frac{3x}{2xy-3x^2}; \quad \text{ б) } \frac{2a+1}{6-3a} - \frac{a+3}{6a-12} + \frac{2a+1}{2a-4}.$$

$$220. \text{ а) } \frac{6a-4b}{4ab-2b^2} + \frac{8a-3b}{8a^2-4ab}; \quad \text{ б) } \frac{x-1}{2x+2} - \frac{3x-4}{3x+3} + \frac{2x-1}{6x+6}.$$

$$221. \text{ а) } \frac{5}{a-1} - \frac{8}{1+a} + \frac{3a+7}{a^2-1}; \quad \text{ б) } \frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x-1}{x^2-x}.$$

$$222. \text{ а) } \frac{2}{x+1} + \frac{5}{x-1} - \frac{5}{x+2}; \quad \text{ б) } \frac{2}{(a+1)^3} + \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{2}{1-a}.$$

$$223. \text{ а) } \frac{2x-3}{3x-3} - \frac{3x-1}{4x+4} - \frac{x+2}{x^2-1}; \quad \text{ б) } \frac{7}{a+b} + \frac{3a^2-2b^2}{a^2-b^2} - 3 - \frac{5}{a-b}.$$

$$224. \text{ а) } \frac{2}{a} + \frac{3}{x-2a} - \frac{2a-3x}{4a^2-x^2}; \quad \text{ б) } \frac{1}{a-2} + \frac{3}{a+2} + \frac{2a}{(a+2)^2}.$$

$$\text{225. а) } \frac{2}{x+4} - \frac{x-3}{x^2-4x+16} - \frac{x^2-9x}{x^3+64};$$

$$226. \text{ а) } \frac{1}{2a-3x} - \frac{2a+3x}{4a^2+6ax+9x^2} - \frac{6ax}{8a^3-27x^3}.$$

$$\text{227. а) } \frac{3}{(x-a)(x-c)} + \frac{2}{(x-a)(c-a)} - \frac{2}{(c-x)(a-c)};$$

$$228. \text{ а) } \frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{c+a}{(a-b)(b-c)}.$$

229. Знайдіть значення виразу:

$$\text{а) } \frac{2a}{1-a^2} + \frac{a+1}{2a-2} - \frac{a-1}{3a+3}, \text{ якщо } a = 3;$$

$$\text{б) } \frac{x+2}{x} - \frac{x}{x-2} + \frac{x+2}{x^2-2x}, \text{ якщо } x = \frac{1}{5};$$

$$\text{в) } \frac{1}{x} + \frac{x+2y}{x^2-2xy} - \frac{4x}{x^2-4y^2}, \text{ якщо } x = 2, y = 3;$$

$$\text{г) } \frac{x-3}{x^2+3x} - \frac{x+3}{x^2-3x} - \frac{4x}{x^2-9}, \text{ якщо } x = 7.$$

230. Подайте дріб у вигляді суми дробів:

$$\text{а) } \frac{2x+9}{12x^2}; \quad \text{б) } \frac{4a^2+5b^2}{10ab}; \quad \text{в) } \frac{6a^2+3b^2+ab}{ab(2a^2+b^2)}.$$

231. Подайте дріб у вигляді суми цілого і дробового виразів:

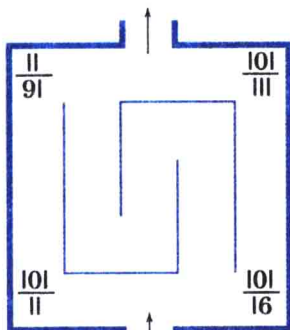
$$\text{а) } \frac{10x^2-y^2}{5x^2}; \quad \text{б) } \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}; \quad \text{в) } \frac{x^3-xy+y^3}{x^2-xy+y^2}.$$

232. Доведіть тотожність:

$$\text{а) } \frac{m}{m+n} + \frac{2mn}{m^2-n^2} - \frac{n}{m-n} = 1;$$

$$\text{б) } \frac{x^3}{x^2-4} - \frac{x}{x-2} - \frac{2}{x+2} = x-1.$$

233. Для кмітливих. Пройдіть через лабіринт так, щоб перетнути дроби, сума яких дорівнює 2. Не можна проходити двічі один і той самий відрізок шляху або перетинати пройдену лінію (мал. 12).



Мал. 12

234. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{7x^2+4}{3x^2+3} - \frac{5x^2+3}{2x^2+2}$$

не залежить від значення x .

235. Доведіть, що значення виразу не може бути від'ємним числом:

а) $\frac{2b^2}{a^2+2} - \frac{4b}{a^2+2} + \frac{2}{a^2+2}$; б) $\frac{4y^2}{x^2+1} + \frac{12y}{1+x^2} + \frac{9}{x^2+1}$;

в) $\frac{1}{(1-m)^2} + \frac{3m}{(m-1)^2} + \frac{m}{m-1}$; г) $\frac{10x}{(x-2)^2} + \frac{6(x+4)}{(2-x)^2} + \frac{4x}{x-2}$.

236. Доведіть, що при кожному допустимому a значення виразу $\frac{a^3+3a}{a+2} - \frac{3a^2-14a+16}{a^2-4} + 2a$ є додатним числом.

237. Доведіть тотожність:

а) $\frac{a^2-x^2}{a-x} = a+x$; б) $\frac{a^3-x^3}{a-x} = a^2+ax+x^2$;

в) $\frac{a^4-x^4}{a-x} = a^3+a^2x+ax^2+x^3$;

г) $\frac{a^5-x^5}{a-x} = a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4$.

238. Виконайте дії:

а) $\frac{1}{x^2+3xy} + \frac{2}{9y^2-x^2} + \frac{1}{2x-6y}$;

б) $\frac{7-x^2}{x^3-1} + \frac{3x+5}{x^2+x+1} + \frac{2}{1-x}$;

в) $\frac{3-b}{b-2} - \frac{b+4}{2b^3-8b} + \frac{b+3}{b+2} - \frac{b}{b^2-4}$;

$$\text{г)} \frac{3a+2}{9a^2-6a+4} - \frac{18a}{27a^3+8} - \frac{1}{3a+2}.$$

239. Доведіть тотожність:

$$\text{а)} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{8}{1-x^8};$$

$$\text{б)} \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1+2x} + \frac{2}{1+4x^2} + \frac{4}{1+16x^4} = \frac{8}{1-256x^8}.$$

Розв'яжіть рівняння (240—243).

$$\text{240. а)} \frac{x-25}{5x-25} - \frac{3x+5}{5x-x^2} = 0; \quad \text{б)} \frac{6}{x^2-6x} + \frac{12+x}{6x-36} = 0;$$

$$\text{в)} \frac{x^2-6x}{x^2-4} + \frac{x}{x-2} = 0; \quad \text{г)} \frac{x+3}{x^2-1} - \frac{x-1}{x^2+x} = 0.$$

$$\text{241. а)} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{x+1}{1-x} = 0; \quad \text{б)} \frac{1}{2x-1} + \frac{6x}{1-8x^3} = 0;$$

$$\text{в)} \frac{x^2}{(x-2)^2} - \frac{x+2}{2x-4} = 0; \quad \text{г)} \frac{x^2-8}{x^3+8} - \frac{1}{x+2} = 0.$$

$$\text{242. а)} \frac{12x}{4x^2-9} + \frac{2x-3}{4x+6} + \frac{2x+3}{6x-9} = 0;$$

$$\text{б)} \frac{1}{x^2+3x} + \frac{3}{9-x^2} + \frac{1}{2x^2-6x} = 0.$$

$$\text{243. а)} \frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{x^2+2x+4} - \frac{6x}{x^3-8} = 0;$$

$$\text{б)} \frac{3x^2+7x+3}{x^3-1} - \frac{2x-1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x-1} = 0.$$

Доведіть тотожність (244—246).

$$\text{244. } \frac{x^2-(y-z)^2}{(x+z)^2-y^2} + \frac{y^2-(x-z)^2}{(x+y)^2-z^2} + \frac{z^2-(x-y)^2}{(y+z)^2-x^2} = 1.$$

$$\text{245. } \frac{x^2-yz}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2+xz}{(y+z)(y-x)} + \frac{z^2+xy}{(z-x)(z+y)} = 0.$$

$$\text{246. } \frac{(y-b)(z-b)}{b(b-c)} + \frac{(y-c)(z-c)}{c(c-b)} + \frac{yz}{bc} = 1.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

247. Напишіть замість букв числа, назви яких починаються на вказані букви, і такі, щоб їх сума в кожному рядку і кожному стовпчику дорівнювали одна одній (мал. 13).

В	В	Д
Ч	Д	Д
Ч	Ш	Ш

Мал. 13

248. Обчисліть:

а) $5^{30} \cdot 3^{30} - (15^{15} - 1)(15^{15} + 1)$;

б) $7^{24} \cdot 8^{24} + (1 - 56^{12})(1 + 56^{12})$.

Виконайте дії (240–250).

249. а) $2 + \frac{8}{15} \cdot 1 \frac{9}{16}$;

б) $1 \frac{5}{12} \cdot 2 + 4 \cdot 1 \frac{1}{18} + 1 \frac{1}{9} \cdot 1 \frac{1}{4}$.

250. а) $2 \frac{2}{11} \cdot \frac{7}{8} - 6 \cdot \frac{1}{5}$;

б) $2 \frac{1}{10} \cdot 4 \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{3}{8} - \frac{9}{20} \cdot 6$.

§6. МНОЖЕННЯ ДРОБІВ

Правило множення звичайних дробів вам уже відоме. Для будь-яких натуральних чисел a, b, c і d справджується рівність



$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Доведемо, що ця рівність — тотожність, тобто що вона справджується для всіх допустимих значень a, b, c, d ($b \neq 0$ і $d \neq 0$).

Нехай $\frac{a}{b} = r$ і $\frac{c}{d} = p$. За означенням дії ділення, $a = br$ і $c = dp$, звідси $ac = br \cdot dp = bd \cdot rp$. Оскільки $bd \neq 0$, то з рівності $ac = bd \cdot rp$, за означенням дії ділення, маємо:

$$rp = \frac{ac}{bd}, \text{ або } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

З доведеної тотожності випливає правило множення дробів.

Щоб помножити дріб на дріб, треба перемножити їх чисельники й окремо знаменники і перший добуток записати чисельником, а другий — знаменником дробу.

На основі цього правила виконують множення будь-яких дробів:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}.$$

Приклади.

$$\frac{2x}{3n} \cdot \frac{m}{5n} = \frac{2x \cdot m}{3n \cdot 5n} = \frac{2xm}{15n^2};$$

$$\frac{a}{a-b} \cdot \frac{2x}{a+b} = \frac{a \cdot 2x}{(a-b)(a+b)} = \frac{2ax}{a^2-b^2}.$$

Оскільки цілий вираз можна вважати дробом із знаменником 1, то, за сформульованим правилом, можна перемножати дробі і цілі вирази.

Приклади.

$$\frac{2a}{mx} \cdot 3m^2 = \frac{2a}{mx} \cdot \frac{3m^2}{1} = \frac{2a \cdot 3m^2}{mx} = \frac{6am}{x};$$

$$(c^2 - 1) \cdot \frac{c}{(c+1)^2} = \frac{(c^2-1)c}{(c+1)^2} = \frac{(c-1)(c+1)c}{(c+1)^2} = \frac{(c-1)c}{c+1}.$$

Правило множення дробів поширюється на добуток трьох і більше множників, наприклад:

$$\frac{1}{a-b} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{4a^2} = \frac{a(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)4a^2} = \frac{1}{4a}.$$

Піднести дріб до n -го степеня означає перемножити n таких дробів:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b} = \frac{aa \cdot \dots \cdot a}{bb \cdot \dots \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}.$$



Щоб піднести дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник та знаменник і перший результат записати у чисельнику, а другий — у знаменнику дробу.

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$$

Приклад. Піднесемо дріб $\frac{ax^2}{2c}$ до p 'ятого степеня:

$$\left(\frac{ax^2}{2c}\right)^5 = \frac{(ax^2)^5}{(2c)^5} = \frac{a^5 x^{10}}{32c^5}.$$



Хочете знати ще більше?

Ви знаєте, що для множення многочленів існує обернене перетворення: розкладання многочленів на множники. Чи існує обернене до множення дробів перетворення?

Кожний дріб можна подати у вигляді добутку двох, трьох чи довільної кількості інших дробів. Наприклад,

$$\frac{a}{m} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{m}, \quad \frac{a}{m} = \frac{a}{n} \cdot \frac{n}{c} \cdot \frac{c}{m}.$$

Перетворення, обернене до множення дробів, неоднозначне, невизначене. Простішою є така задача. Подайте дріб $\frac{a}{n}$ у вигляді добутку двох дробів, один з яких дорівнює $\frac{n}{ca}$. У даному випадку відповідь неважко підібрати:

$$\frac{a}{n} = \frac{n}{ca} \cdot \frac{ca^2}{n^2}.$$

Розв'язування таких задач у складніших випадках, як і операції, обернені до піднесення дробів до степеня, розглянемо згодом.

Перевірте себе

1. Сформулюйте правило множення двох дробів.
2. Як помножити дріб на цілий вираз? А цілий вираз — на дріб?
3. Чому дорівнює добуток кількох дробів?
4. Як піднести дріб до степеня?

✓ Виконаємо разом!

1. Знайдіть добуток дробів: $\frac{x^2 - c^2}{2xc}$ і $\frac{16}{(x-c)^2}$.

✓ Розв'язання.

$$\frac{x^2 - c^2}{2xc} \cdot \frac{16}{(x-c)^2} = \frac{(x-c)(x+c) \cdot 16}{2xc(x-c)^2} = \frac{8(x+c)}{xc(x-c)}.$$

Відповідь. $\frac{8(x+c)}{xc(x-c)}$.

2. Знайдіть значення виразу $\left(\frac{x-5}{5-x}\right)^4$.

✓ Розв'язання. $\left(\frac{x-5}{5-x}\right)^4 = \left(-\frac{x-5}{x-5}\right)^4 = (-1)^4 = 1.$

Відповідь. При кожному значенні x , крім $x = 5$, значення даного виразу дорівнює 1.

3. Подайте у вигляді степеня дробу вираз $\frac{a^7 x^{14}}{(a-x)^{21}}.$

✓ Розв'язання.

$$\frac{a^7 \cdot x^{14}}{(a-x)^{21}} = \frac{a^7 \cdot (x^2)^7}{\left((a-x)^3\right)^7} = \left(\frac{ax^2}{(a-x)^3}\right)^7.$$

Відповідь. $\left(\frac{ax^2}{(a-x)^3}\right)^7.$

Виконайте усно

251. Перемножте дробі:

а) $\frac{2}{3}$ і $\frac{5}{7}$; б) $\frac{2,5}{2}$ і $\frac{0,4}{5a}$; в) $\frac{3}{-5}$ і $\frac{-3}{4}$;

г) $\frac{x}{a}$ і $\frac{m}{2c}$; д) $\frac{3}{ab}$ і $\frac{0,5}{ax^2}$; е) $\frac{-1}{ab}$ і $\frac{-1}{ac}.$

Виконайте множення (252—253).

252. а) $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{t}$; б) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{m}{n}$; в) $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x}$; г) $\frac{4a}{c} \cdot \frac{x}{3a}.$

253. а) $\frac{3}{2b} \cdot \frac{6b}{c}$; б) $\frac{x^3}{3} \cdot \frac{9}{x^4}$; в) $\frac{m^2}{10} \cdot \frac{5}{m}$; г) $\frac{8a^2}{15} \cdot \frac{25}{12a}.$

254. Піднесіть до квадрата і куба дріб:

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{x}{ac}$; в) $\frac{0,1}{x^2}$; г) $\frac{-2a}{x^3}.$

Рівень А

Виконайте множення (255—260).

255. а) $\frac{2,7}{2x^2} \cdot \frac{20}{9x^3}$; б) $\frac{1}{4a^3} \cdot \frac{-2a}{7c}$; в) $\frac{2ab}{-5a^2} \cdot \frac{5c^2}{4a^2b^3}$;

$$\text{г) } 2m^2 \cdot \frac{n}{8m}; \quad \text{р) } \frac{-b}{12ac} \cdot 4ac^2; \quad \text{д) } \frac{5a^2}{3bc^2} \cdot (-6ac^3).$$

$$\text{256. а) } \frac{15n^6}{-8m^2} \cdot \frac{4m^2}{5n}; \quad \text{б) } \frac{3a^3}{-x^4} \cdot \frac{5x}{4a}; \quad \text{в) } \frac{1}{2cx} \cdot \frac{-4c^2}{3x^2};$$

$$\text{г) } 2ax^2 \cdot \frac{3a}{x^3}; \quad \text{р) } -\frac{7a^2m}{8xn} \cdot 4x^2n; \quad \text{д) } \frac{-1}{2a^2c} \cdot (-3a^4).$$

$$\text{257. а) } \frac{a+b}{x} \cdot \frac{3x^2}{2(a+b)}; \quad \text{б) } \frac{1}{x^2-y^2} \cdot \frac{x-y}{4xy}; \quad \text{в) } \frac{3}{x^2-y^2} \cdot \frac{(x+y)^2}{3};$$

$$\text{г) } \frac{a^2-ab}{m^3} \cdot \frac{m^2}{a-b}; \quad \text{р) } \frac{3ax}{ax+ac} \cdot \frac{cx+c^2}{9x}; \quad \text{д) } \frac{6m}{a^2-a} \cdot \frac{2a-2}{9m^2}.$$

$$\text{258. а) } \frac{a-b}{3} \cdot \frac{15}{a^2-b^2}; \quad \text{б) } \frac{a-x}{4m^2} \cdot \frac{16am}{(a-x)^2}; \quad \text{в) } \frac{a^2-c^2}{2ac} \cdot \frac{8}{(a+c)^2};$$

$$\text{г) } \frac{3a-3b}{4a+4c} \cdot \frac{(a+c)^2}{a^2-b^2}; \quad \text{р) } \frac{3a+9}{(a+3)^2} \cdot \frac{2a-4}{a^2-4}; \quad \text{д) } \frac{x^2-y^2}{12} \cdot \frac{0,6}{(x-y)^2}.$$

$$\text{259. а) } \frac{(x-y)^2}{(x+y)y} \cdot \frac{y^2}{x^2-y^2}; \quad \text{б) } \frac{(a+b)^2}{(a-b)b} \cdot \frac{b}{a^2-b^2};$$

$$\text{в) } \frac{a^2+ab}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^3-b^3}{a(a+b)}; \quad \text{г) } \frac{x^2-xy}{y(x+y)} \cdot \frac{(x+y)^2}{x^2-y^2}.$$

$$\text{260. а) } \frac{x^2-c^2}{x^2-a^2} \cdot \frac{a+x}{c+x}; \quad \text{б) } \frac{a^2-4}{a^2+4} \cdot \frac{a+2}{a-2};$$

$$\text{в) } \frac{a^3-1}{a+1} \cdot \frac{a^3+1}{a-1}; \quad \text{г) } \frac{x^2-1}{x^3-1} \cdot \frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

261. Піднесіть до квадрата дріб:

$$\text{а) } \frac{5a}{4x}; \quad \text{б) } \frac{x}{a+x}; \quad \text{в) } \frac{-m}{2ac^3}; \quad \text{г) } \frac{3xz}{2a+z}.$$

262. Піднесіть до квадрата, куба і четвертого степеня дріб $\frac{2a}{3cx^2}$.

Піднесіть до степеня (263—264).

$$\text{263. а) } \left(\frac{m}{3n}\right)^2; \quad \text{б) } \left(\frac{a}{2dx}\right)^3; \quad \text{в) } \left(-\frac{3c}{1-a^2}\right)^2; \quad \text{г) } \left(\frac{-2x}{3abc}\right)^4.$$

264. а) $\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2$; б) $\left(\frac{2a}{c-3}\right)^0$; в) $\left(\frac{2ab}{3c}\right)^2$; г) $\left(\frac{x^2z}{2a^3}\right)^3$.

265. Спростіть вираз:

а) $\frac{x^2-9y^2}{a^2+8ab+16b^2} \cdot \frac{a^2-16b^2}{3y-x}$; б) $\frac{x^2+6x+9}{2x-4} \cdot \frac{x^2-4}{3x+9}$;

в) $\frac{2x-6}{x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2-3x}$; г) $\frac{x^2-10x+25}{6x+3y} \cdot \frac{2xy+y^2}{25-x^2}$.

266. Відновіть утрачені записи:

а) $\frac{(x+2)^2}{a^2 \dots} \cdot \frac{ax^2}{\dots} = \frac{x(x+2)}{\dots(x-2)}$; б) $\frac{x-y}{\dots} \cdot \frac{2x^2y^2}{\dots} = \frac{xy}{x+y}$.

Рівень Б

267. Виконайте множення дробів:

а) $\frac{4a^2-9}{3+2a} \cdot \frac{6a}{3-2a}$;

б) $\frac{1-9x^4}{3x^2-1} \cdot \frac{x-1}{3x^2+1}$;

в) $\frac{a^3+x^3}{a-x} \cdot \frac{a^2-2ax+x^2}{a^2-ax+x^2}$;

г) $\frac{a^6-1}{a^2+1} \cdot \frac{1+a^2}{a^4+1+a^2}$.

Перемножте дроби (268–269).

268. а) $\frac{2x}{y^2} \cdot \frac{y^4}{6x^3} \cdot \frac{9x}{y} \cdot \left(-\frac{5y^3}{3x^2}\right)$; б) $\frac{3}{a} \cdot \frac{b^2}{4a} \cdot \frac{a^3}{9b^3} \cdot \frac{8a}{b}$.

269. а) $\frac{a+3}{10a^2} \cdot \frac{6-2a}{a} \cdot \frac{5a^3}{3-a}$; б) $\frac{0,2}{x} \cdot \frac{x^2-1}{2x} \cdot \frac{5x}{x+1}$;

в) $\frac{-6x^4}{35y^6z^3} \cdot \frac{5y^4z^7}{42x^6} \cdot \left(-\frac{49x^3y^2}{z^4}\right)$; г) $\frac{a^3b^2}{-20c^4} \cdot \frac{-5a^4c}{24b^5} \cdot \frac{16b^3c^3}{-30a^6}$.

270. Заповніть таблицю:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\frac{x+1}{x} \cdot \frac{2x}{x^2-1}$							
$\frac{x^2-4}{x} \cdot \frac{x^2-2x}{x+1}$							

271. Знайдіть значення виразу:

а) $\frac{ax^2 - a}{x^2 + ax + a^2} \cdot \frac{a^3 - x^3}{4 + 4x}$, якщо $a = 4$, $x = 3$;

б) $\frac{y^2 - 16x^2}{4x^2 + 10x + 25} \cdot \frac{8x^3 - 125}{4x - y}$, якщо $x = \frac{1}{4}$, $y = 3$;

в) $\frac{x^2 - xy + 2y - 4}{xy + 2y} \cdot \frac{x^2 + 2x}{(x - y)^2 - 4}$, якщо $x = 3$, $y = 2$;

г) $\frac{ab - 2b}{(b - 3)^2 - 4a^2} \cdot \frac{4a^2 + 2ab + 3b - 9}{a^2 - 2a}$, якщо $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$.

272. Виконавши перетворення дробових виразів, учень витер частину класної дошки (мал. 14). Відновіть витерті записи.

$$\frac{(a-b)^2 c^3}{(a^2 - \quad)} = \frac{a-b}{(a+b)c}$$

$$\frac{2x + \quad}{2x - 1} \cdot \frac{\quad}{2x + 1} = \frac{6x + 9}{4x^2 - 1}$$

Спростіть вираз (273—274).

273. а) $\frac{x+3}{24x^2} \cdot \frac{9+x^2}{9-x^2} \cdot (-4x(x-3))$;

Мал. 14

б) $\frac{4a^2b}{4a^2 - b^2} \cdot \frac{6a^2 - 3ab}{12a^3b^3} \cdot \frac{2ab^2}{2a+b}$.

274. а) $(-8a^2(a+b)) \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{b-a}{(8a)^2}$;

б) $\frac{x^2 - x}{2x + 2} \cdot \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4x} \cdot \frac{x^2 - 16}{3x - 3}$.

Піднесіть до степеня дріб (275—276).

275. а) $\left(-\frac{x^2z}{a^3n}\right)^2$; б) $\left(\frac{-3m^2n}{2ac^3}\right)^3$; в) $\left(\frac{xy^2z}{-2an^4}\right)^4$.

276. а) $\left(\frac{0,2a^2}{3x^2y^3}\right)^3$; б) $\left(\frac{a-c}{-2x^2z}\right)^3$; в) $\left(\frac{0,3ax^5}{2x-1}\right)^0$.

277. Подайте дріб у вигляді степеня:

$$\text{а) } \frac{a^{15} \cdot x^{30}}{(a+x)^{15}}; \quad \text{б) } \frac{(x-y)^{10} \cdot (x+y)^{20}}{(2x+y)^{20}}.$$

Спростіть вираз (278—283).

$$278. \text{ а) } \left(-\frac{3a^2}{2a^2b^3}\right)^2 \cdot 12a^4b^6; \quad \text{б) } \left(\frac{x^2}{-2y^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-2y^2}{x^3}\right)^3.$$

$$279. \text{ а) } (-8x^6y^3) \cdot \left(\frac{3z^4}{2x^2y}\right)^3; \quad \text{б) } \left(\frac{a^2}{3b^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{9b^4}{a^3}\right)^2.$$

$$\text{280. а) } \frac{ax^3}{5-5a} \cdot \frac{a^2-2a+1}{0,2ax^3}; \quad \text{б) } \left(\frac{2a-1}{a-1}\right)^2 \cdot \frac{a^3-1}{4a^2-4a+1}.$$

$$281. \text{ а) } \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} \cdot \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2; \quad \text{б) } \frac{1}{a+c} \cdot \left(\frac{a^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) + 1.$$

$$282. \text{ а) } \frac{25+10a}{a-1} \cdot \left(\frac{3a+4}{4a^2-25} - \frac{1}{2a-5}\right); \quad \text{б) } \left(\frac{x+y}{x} - \frac{2x}{x-y}\right) \cdot \frac{y-x}{x^2+y^2}.$$

$$283. \text{ а) } \frac{1-a^2}{(1+ax)^2 - (a+x)^2} \cdot \frac{x+x^2}{1-x}; \quad \text{б) } \left(\frac{a^2+3a}{9a^2-1} - \frac{1}{3a+1}\right) \cdot \frac{9a^2+3a}{a^2+1}.$$

284. Знайдіть значення виразу:

$$\text{а) } \frac{2x+4}{(x-2)^2} \cdot \frac{x^2-4}{(x+2)^2}, \text{ якщо } x = 3,2;$$

$$\text{б) } \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 \cdot \frac{3m^2}{2m^2+4m+2}, \text{ якщо } m = 4,357.$$

Доведіть тотожність (285—286).

$$285. \text{ а) } \frac{1-a^2}{1+b} \cdot \frac{1-b^2}{1+a} \cdot \left(1 + \frac{a}{1-a}\right) = 1-b;$$

$$\text{б) } \left(1 - \frac{3-a}{a+2}\right) \cdot \left(\frac{a^2+1}{2a-1} - \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{286. а) } \frac{1}{5x} - \frac{1}{x+y} \cdot \left(\frac{x+y}{5x} - x - y\right) = 1;$$

$$\text{б) } \frac{a^2-x^2}{a+1} \cdot \frac{a^2-1}{a+x} \cdot \left(a + \frac{ax}{a-x}\right) = a^3 - a^2.$$

287. Доведіть, що квадрат суми двох взаємно обернених дробів на 2 більший від суми їх квадратів.

288. Доведіть, що при будь-якому натуральному n число

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \cdot (n^2 + n) \text{ — натуральне.}$$

Розв'яжіть рівняння (289–291).

289. а) $\frac{2x^2}{x-3} \cdot \frac{x^2-9}{x} = 0$; б) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{x} = 0$.

290. а) $\frac{3x+2}{2x-3} \cdot \frac{5x-7}{7x-5} = 0$; б) $\frac{(x-1)^2}{x^4-16} \cdot \frac{x-2}{x^2+1} = 0$.

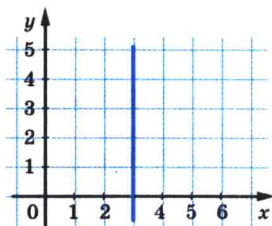
291. а) $\left(\frac{x^2}{2} + x + 0,5\right) \cdot \frac{x^2-9}{(x-1)(x+3)} = 0$;

б) $\frac{3x^2-12}{x-3} \cdot \left(3-2x+\frac{x^2}{3}\right) = 0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

292. Провідмініяйте слова: *дріб, частка, знаменник*.

293. Графік якого рівняння з двома змінними зображено на малюнку 15? Чи є ця пряма графіком функції?



Мал. 15

294. Розкладіть на множники:

а) $6x^2 - 6y^2$; б) $5 - 5m^2$;
 в) $ax^2 - a^3$; г) $3x^4 - 12x^2$;
 г) $20a^2 - 45b^2$; д) $48x^2 - 75y^2$.

295. Виконайте дії:

а) $\left(1\frac{8}{13} : 3\frac{3}{13} + \frac{5}{7} : \frac{8}{21}\right) : \left(8\frac{1}{8} + 3\frac{1}{2}\right)$;

б) $\left(28\frac{4}{5} : 13\frac{5}{7} + 6\frac{3}{5} : \frac{2}{3}\right) : \left(1\frac{11}{16} : 2\frac{1}{4}\right)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант I

1°. Обчисліть: $3^5 : 81 + (5,3 - 7,3)^3$.

2°. Скоротіть дріб: а) $\frac{8x^2c}{12axc^3}$; б) $\frac{15a^2-60}{20a+40}$.

3°. Знайдіть суму, різницю та добуток дробів:

а) $\frac{ac^2}{12x}$ і $\frac{5ac^2}{12x}$; б) $\frac{x-1}{x(x-4)}$ і $\frac{1}{4-x}$.

Варіант II

1°. Обчисліть: $2^5 : 8 + (3,5 - 5,5)^2$.

2°. Скоротіть дріб: а) $\frac{16ax^2}{24amx^3}$; б) $\frac{6n^2-24}{12n-24}$.

3°. Знайдіть суму, різницю та добуток дробів:

а) $\frac{n^2x}{12c}$ і $\frac{7n^2x}{12c}$; б) $\frac{a-1}{a(a-5)}$ і $\frac{1}{5-a}$.

Варіант III

1°. Обчисліть: $4^5 : 16 + (7,5 - 5,5)^3$.

2°. Скоротіть дріб: а) $\frac{20cx^3}{24cnx^2}$; б) $\frac{12x^2-48}{10x+20}$.

3°. Знайдіть суму, різницю та добуток дробів:

а) $\frac{ax^2}{10m}$ і $\frac{3ax^2}{10m}$; б) $\frac{n+1}{n(n-5)}$ і $\frac{1}{5-n}$.

Варіант IV

1°. Обчисліть: $32 : 2^4 + (5,7 - 7,7)^3$.

2°. Скоротіть дріб: а) $\frac{32az^2}{24acz^3}$; б) $\frac{8c^2-32}{15c-30}$.

3°. Знайдіть суму, різницю та добуток дробів:

а) $\frac{cx^3}{14n}$ і $\frac{5cx^3}{14n}$; б) $\frac{c-2}{c(c-3)}$ і $\frac{1}{3-c}$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 1

- Подайте вираз $x^8 : x^4 y$ вигляді степеня:
а) x^2 ; б) x^{12} ; в) x^4 ; г) x^{32} .
- Обчисліть: $(-3,27)^3 : 3,27^3$
а) 1; б) 3; в) 3,27; г) -1.
- Знайдіть корінь рівняння $x^5 : x^2 = 1$:
а) 5; б) 2; в) 1; г) 10.
- При якому значенні x не має змісту дріб $\frac{5-x}{3x-6}$:
а) $x = 0$; б) $x = 5$; в) $x = 2$; г) $x = 3$?
- Укажіть спільний знаменник дробів $\frac{2}{3x^2}$ і $\frac{3}{2xy}$:
а) $3x^2y$; б) $2xy$; в) $6x^2y$; г) $6xy$.
- Укажіть пропущений член тотожності $\frac{5}{xy} = \frac{*}{3x^2y}$:
а) $15x$; б) $15x^3$; в) $5x^2$; г) $5y^2$.
- Сумою дробів $\frac{2}{x}$ і $\frac{x}{2}$ є дріб:
а) $\frac{2+x}{x+2}$; б) $\frac{2+x}{2x}$; в) $\frac{2x}{x+2}$; г) $\frac{4+x^2}{2x}$.
- Добуток дробів $\frac{x}{x^2-4}$ і $\frac{x+2}{x}$ дорівнює:
а) $\frac{x^2+2}{x^3-4}$; б) $\frac{1}{x-2}$; в) $\frac{2+x}{x-2}$; г) $\frac{1}{x+2}$.
- Коренем якого рівняння є число 5:
а) $\frac{x+5}{x-5} = 0$; б) $\frac{x}{5} = 0$; в) $\frac{2x+10}{x+5} = 0$; г) $\frac{2x-10}{x+5} = 0$?
- Скільки коренів має рівняння $\frac{7}{x^2-1} = 0$:
а) один; б) два; в) безліч; г) жодного?

Типові завдання до контрольної роботи № 1

1. Скоротить дріб:

$$a^{\circ}) \frac{6a^2b^3}{8a^4b^2};$$

$$б^{\circ}) \frac{3a^2 - 75}{9a + 45}.$$

2. При яких значеннях змінних не має змісту дріб:

$$a^{\circ}) \frac{5}{a-2};$$

$$б^{\circ}) \frac{x^2 + x}{x^2 - x}?$$

3. Виконайте дії:

$$a^{\circ}) \frac{x}{x+y} + \frac{2y}{x+y};$$

$$б^{\circ}) \frac{a^2}{a^2 - 4} - \frac{a}{a+2}.$$

4. Перемножьте дроби:

$$a^{\circ}) \frac{2a^2b}{3x^3} \cdot \frac{5ax^2}{4x^3};$$

$$б^{\circ}) \frac{9xy^3}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x+y}{6y^2}.$$

5. Розв'яжіть рівняння:

$$a^{\circ}) \frac{2x-5}{x+5} = 0;$$

$$б^{\circ}) \frac{2x^2-18}{x^2+3x} = 0.$$

6. Спростіть вираз:

$$a^{\circ}) \left(\frac{3a}{a+1} + \frac{3}{a+1} \right)^2; \quad б^{\circ}) \frac{2c-1}{4c+2} + \frac{2c+1}{6c-3} + \frac{4c}{4c^2-1}.$$

7. Обчисліть значення виразу:

$$a^{\circ}) a - \frac{a^2}{a-1}, \text{ якщо } a = 2;$$

$$б^{\circ}) \frac{x^3 + y^3}{x^2 - xy + y^2} - \frac{x+y}{x^2 - y^2}, \text{ якщо } x = 1,5, y = 0,5;$$

$$в^{\circ\circ}) \frac{4m^2 + 2mn - n^2}{8m^2 + 3n^2}, \text{ якщо } \frac{m}{n} = \frac{1}{2}.$$

8^{••}. Розв'яжіть рівняння $4(a^2x - 1) = 9(a + x)$ відносно змінної x і вкажіть, при яких значеннях a рівняння має корені.

§7. ДІЛЕННЯ ДРОБІВ

Дія ділення дробів обернена до множення:

$$\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 4}, \text{ оскільки } \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{5}.$$

Так само

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \text{ бо } \frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

Вираз $\frac{ad}{bc}$ — добуток дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{d}{c}$. Отже,

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Дріб $\frac{d}{c}$ називають *оберненим до* $\frac{c}{d}$. Тому ділити дроби можна за таким правилом.

Щоб поділити один дріб на другий, треба перший дріб помножити на дріб, обернений до другого.

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

Приклади.

$$\frac{4a^2b}{5x} : \frac{2ax}{3b^2} = \frac{4a^2b}{5x} \cdot \frac{3b^2}{2ax} = \frac{12a^2b^3}{10ax^2} = \frac{6ab^3}{5x^2};$$

$$\frac{1}{a+b} : \frac{a}{a^2-b^2} = \frac{1}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{a} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)a} = \frac{a-b}{a}.$$

Оскільки цілий вираз можна подати у вигляді дроби зі знаменником 1, то, за сформульованим правилом, можна ділити дріб на цілий вираз і цілий вираз — на дріб:

$$\frac{4ax^2}{5c} : 2a^2x = \frac{4ax^2}{5c} \cdot \frac{1}{2a^2x} = \frac{2x}{5ac};$$

$$(2a+3) : \frac{a}{2a-3} = \frac{2a+3}{1} \cdot \frac{2a-3}{a} = \frac{4a^2-9}{a}.$$





Хочете знати ще більше?

Проаналізуємо, при яких значеннях змінних a, b, c, d значення частки $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ існує.

Знаменники дробів не можуть дорівнювати нулю, тому $b \neq 0$ і $d \neq 0$. Не може дорівнювати нулю і значення c , бо за цієї умови значення другого дробу дорівнює 0 , а на 0 ділити не можна.

Отже, дана частка має значення тільки в тому випадку, коли виконуються всі три наступні умови: $b \neq 0$, $d \neq 0$ і $c \neq 0$.

Розглянемо, при яких значеннях x має зміст вираз

$$\frac{6}{x-|x|} : \frac{x+|x|}{2}.$$

Якщо $x \geq 0$, то $x - |x| = 0$; у цьому випадку знаменник першого дробу дорівнює 0 , і частки не існує.

Якщо $x < 0$, то $x + |x| = 0$; у цьому випадку значення другого дробу дорівнює 0 , а на нуль ділити не можна.

Отже, даний вираз не має змісту при будь-якому значенні x .

Перевірте себе

1. Що означає «поділити один вираз на другий»?
2. Який дріб називається оберненим до даного дробу?
3. Сформулюйте правило ділення дробів.
4. Як поділити дріб на цілий вираз? А як — цілий вираз на дріб?
5. При яких значеннях змінних частка дробів $\frac{a}{m} : \frac{c}{n}$ має зміст?



Виконаємо разом!

1. Спростіть вираз $1 - \frac{a}{c} : \frac{a}{c^2}$.

✓ Розв'язання.

$$1 - \frac{a}{c} : \frac{a}{c^2} = 1 - \frac{a}{c} \cdot \frac{c^2}{a} = 1 - \frac{a \cdot c^2}{c \cdot a} = 1 - c.$$

Відповідь. $1 - c$.

2. Знайдіть частку від ділення дробу $\frac{ac^2}{a^2-1}$ на $\frac{2c}{a^3-a^2}$ і вкажіть, при яких значеннях змінних частка існує.

✓ Розв'язання.

$$\frac{ac^2}{a^2-1} : \frac{2c}{a^3-a^2} = \frac{ac^2}{(a-1)(a+1)} \cdot \frac{a^2(a-1)}{2c} = \frac{a^3c}{2(a+1)}.$$

Перший з даних дробів не має змісту, якщо $a^2 - 1 = 0$, тобто при $a = 1$, або $a = -1$.

Другий дріб не має змісту, якщо $a^2(a-1) = 0$, тобто при $a = 0$, або $a = 1$.

При $c = 0$ значення другого дробу дорівнює 0, а на 0 ділити не можна.

Отже, частка даних дробів існує, якщо $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$ і $c \neq 0$.

Відповідь. $\frac{a^3c}{2(a+1)}$; частка існує при $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$, $c \neq 0$.

Виконайте усно

296. Поділіть вираз c^3 на: c , c^2 , c^3 , c^4 , c^5 , c^6 .

297. Поділіть дріб $\frac{2}{x}$ на: x^2 , x , $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$.

298. Обчисліть частку:

$$10 : \frac{1}{5}; \quad 20 : \frac{4}{5}; \quad \frac{2}{3} : 2; \quad \frac{3}{4} : 6;$$

$$\frac{2}{3} : \frac{2}{3}; \quad \frac{3}{5} : \frac{5}{3}; \quad 1\frac{1}{2} : \frac{1}{2}; \quad \frac{3}{2} : 1,5.$$

299. Заповніть порожні клітинки таблиці:

A	$\frac{c}{2x}$	$-\frac{c}{2x}$	$\frac{c}{4x}$	$\frac{c^2}{4x}$	$\frac{1}{ax}$	$\frac{c}{ax^2}$
$\frac{c}{2x} : A$						

Рівень **A**

Виконайте ділення (300–308).

300. а) $\frac{4}{7} : \frac{2}{21}$; б) $-15 : \frac{5}{7}$; в) $\frac{3,5}{4} : \frac{-7}{16}$;
 г) $\frac{5x}{3y} : \frac{10x}{6y}$; г) $\frac{3a}{8b^2} : \frac{1}{4b^2}$; д) $\frac{4m^2}{n^3} : \frac{12m^3}{n^4}$.

301. а) $\frac{1}{3ax^2} : \frac{1}{9a^2x}$; б) $\frac{6x^2}{y} : \frac{1,5x^3}{y^2}$; в) $\frac{14}{5x^3} : \frac{7x}{2y^2}$;
 г) $\frac{2a}{3x} : \frac{4a^2}{9x}$; г) $\frac{18c^2}{5xy} : \frac{9c^3}{15x^2}$; д) $\frac{1,8z^3}{xy^2} : \frac{9z^3}{x^2y}$.

302. а) $\frac{34ab^2}{17b^2} : \frac{1}{ac^2}$; б) $\frac{3m^2n^3}{4ap} : 9mn^4$; в) $3x^2 : \frac{1}{9x^3}$;
 г) $-\frac{2ab}{3xy} : \frac{8a^2b^2}{9x^2y^2}$; г) $\frac{x}{5cz} : \left(-\frac{1}{15z^3}\right)$; д) $1 : \frac{2xy}{x^0}$.

303. а) $\frac{1}{x+y} : \frac{1}{(x+y)^2}$; б) $\frac{(a+b)^2}{3c} : \frac{a+b}{6c}$; в) $\frac{x}{x+y} : \frac{x+y}{x}$.

304. а) $\frac{a^3+a^2}{11c^2} : \frac{4a+4}{c^3}$; б) $\frac{8cx}{c^2-2c} : \frac{4cx}{3c-6}$; в) $\frac{mc^2}{m^2-1} : \frac{3c}{m^3-m^2}$.

305. а) $\frac{3a}{x-y} : \frac{6a^2(x^2-y^2)}{(x-y)^2xy}$; б) $\frac{x^2-2x+1}{3x^2} : \frac{(x-1)^2}{3x^3}$;
 в) $(a^2-b^2) : \frac{a+b}{a-b}$; г) $\frac{2x+1}{2x-1} : \frac{2x}{2x-1}$.

306. а) $\frac{4c^2-x^2}{3cx} : \frac{2c+x}{6cx^2}$; б) $2ac^2 : \frac{ac^2}{3a-c}$;
 в) $\frac{x^3-3x}{x^2-4} : \frac{x^2-3}{x^2+2x}$; г) $\frac{(a+c)^2}{a-c} : \frac{a^2-c^2}{2a}$.

307. а) $\frac{ab^3}{6-6a} : \frac{ab^2}{a^2-2a+1}$; б) $\frac{5a^2-5}{3a^2} : \frac{(a+1)^2}{5a}$;

$$в) (a^2 - 4c^2) : \frac{a - 2c}{3ac};$$

$$г) (x^6 - 1) : \frac{1}{x^6 + 1}.$$

$$308. а) \frac{x^2 - y^2 z^2}{yz + x} : (yz - x);$$

$$б) \frac{9 - 25x^2}{15x} : (5x + 3);$$

$$в) (a - 4x^2) : (16x^4 - a^2);$$

$$г) (x^2 + x + 1) : (x^3 - 1).$$

Спростіть вираз (309–310).

$$309. а) \frac{3x}{8a} : \left(\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{4c} \right);$$

$$б) \left(\frac{2x}{m} \right)^2 : \frac{6x^3}{m^2}.$$

$$310. а) \frac{-5a^2}{4c^3} : \left(\frac{a^3}{2c^3} : \frac{m}{c^2} \right);$$

$$б) \frac{-9c^2}{5a} : \left(\frac{3c}{10a^2} \right)^3.$$

311. Знайдіть значення виразу:

$$а) \frac{(t-2)^2}{t-1} : (t^2 - 4), \text{ якщо } t = 0,5;$$

$$б) (2a - 4b) : \frac{3(a^2 - 4b^2)}{a + 2b}, \text{ якщо } a = 2,65, b = 7,35.$$

312. Які з чисел $-2, -1, 0, 1, 2$ задовольняють рівняння

$$\frac{x-1}{x} : \frac{x}{x+1} = \frac{x^4-1}{5x^2} ?$$

313. Розв'яжіть рівняння:

$$а) x : \frac{2x}{x-2} = 3;$$

$$б) \frac{3x-2}{2x} : \frac{4}{x} = 2;$$

$$в) \frac{2x+6}{x} : \frac{2}{x} = 3;$$

$$г) 6x : \frac{18x}{3x+2} = \frac{5}{3}.$$

Рівень Б

Виконайте ділення (314–318).

$$314. а) \frac{x^2 - xy}{x^2 + xy} : \frac{xy}{x^2 y + xy^2};$$

$$б) \frac{a^2 b - 4b^3}{3ab^2} : \frac{a^2 - 2ab}{a^2 b};$$

$$в) \frac{4x^2 - 16x + 16}{x^2 - 9} : \frac{x-2}{x-3};$$

$$г) \frac{a^2 + 6a + 9}{36 - a^2} : \frac{a+3}{a+6}.$$

$$315. \text{ а) } \frac{16xy^2 - x^3}{x^2 - 2xy + y^2} : \frac{x^2y - 16y^3}{x^2 - y^2}; \quad \text{б) } \frac{x^2 + 2xy + y^2}{y^2x - 9x^3} : \frac{x^2 - y^2}{9x^2y - y^3};$$

$$\text{в) } \frac{x^2 + xy}{5x^2 - 5y^2} : \frac{x^2 - xy}{x^3 + y^3}; \quad \text{г) } \frac{x^2 - 2xy}{x^2 + 4y^2} : \frac{(x - 2y)^2}{x^4 - 16y^4}.$$

$$\text{316. а) } \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 + 2a + 1} : \frac{5a - 5}{3a^3 + 3};$$

$$\text{б) } \frac{1 - x^2y^2}{1 + xy} : \frac{xy - 1}{xy^2 + y};$$

$$\text{в) } (4a^2 - 1) : \frac{1 + 2a}{1 - 2a};$$

$$\text{г) } \frac{3 - x}{3 + x} : (x^2 - 9).$$

$$317. \text{ а) } \frac{a^2 - 3ab}{3b} : (4a - 12b);$$

$$\text{б) } (8x - 12y) : \frac{(2x - 3y)^2}{xy};$$

$$\text{в) } (4x^2 - y^2) : \frac{10x + 5y}{x - y};$$

$$\text{г) } \frac{9a^3 - ab^2}{2b} : (3a^2 + ab).$$

$$318. \text{ а) } \frac{x^2 - 6x + 9}{4x^2 - 6x + 9} : \frac{6 - 2x}{27 + 8x^3};$$

$$\text{б) } \frac{a^2 + ax + x^2}{x - 1} : \frac{a^3 - x^3}{x^2 - 1};$$

$$\text{в) } \frac{2a^3 + 16}{a^2 + 3a + 9} : \frac{a^2 - 2a + 4}{2a^3 - 54};$$

$$\text{г) } \frac{64a^3 - b^3}{16a^2 - 8ab + b^2} : \frac{16a^2 + 4ab + b^2}{b^2 - 16a^2}.$$

Знайдіть значення виразу (319–320).

$$319. \text{ а) } \frac{ab + 4b - 5a - 20}{b^2 - 1} : \frac{2b - 10}{b + 1}, \text{ якщо } a = 4, b = \frac{3}{4};$$

$$\text{б) } \frac{9 - (a + x)^2}{6a + 6x} : \frac{a^2 + 3a - x^2 - 3x}{a^2 + ax}, \text{ якщо } a = \frac{3}{2}, x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{320. а) } \frac{xy + 2x + y + 2}{4y^2 - 16} : \frac{xy + 2x}{4 - 2y}, \text{ якщо } x = \frac{1}{2}, y = 3;$$

$$\text{б) } \frac{(a - n)^2 - 16}{a^2 - an} : \frac{a^2 - n^2 + 4a + 4n}{5n - 5a}, \text{ якщо } a = \frac{5}{8}, n = \frac{3}{8}.$$

321. Заповніть таблицю:

x	-4	-3	-1	0	1	3	4
$\frac{x^2-2x+1}{x+1} : \frac{x-1}{(x+1)^2}$							
$\frac{3x^2-48}{x-1} : \frac{12+3x}{1-x}$							

322. Спростіть вираз:

а) $\frac{3y-9}{x^2-xy+x-y} : \frac{xy-3x+2y-6}{x^2-y^2}$;

б) $\frac{a^2-2ab+a-2b}{ab^2+a^2b} : \frac{a^2-4b^2}{a^2+ab+a+b}$.

323. На який вираз треба помножити дріб $\frac{3a}{a-2}$, щоб одержати:

а) $\frac{a-2}{3a}$;

б) $\frac{a+2}{a-2}$;

в) $3a(a-2)$?

Спростіть вираз (324—332).

324. а) $\left(\frac{2a}{3b} \cdot \frac{6ab}{5c^2}\right) : \frac{4ab^2}{9c^2}$;

б) $\frac{-3xy}{25ac^3} : \left(\frac{-2cx}{5a} \cdot \frac{3}{-2c^3}\right)$.

325. а) $\left(\frac{2a}{m^2c}\right)^3 : \left(\frac{4a^2}{3mc^2}\right)^2$;

б) $\left(\frac{-a}{9c^2x}\right)^3 : \left(\frac{2a}{3cx^2}\right)^4$.

326. а) $\frac{8mn}{9ax^2} : \left(\frac{6m}{5x} : \frac{3x^2}{2n}\right)$;

б) $\left(\frac{0,5ax}{2m} : \frac{x}{4m^2}\right) : \frac{m}{a}$.

327. а) $\left(\frac{a+x}{a} - \frac{x-y}{x}\right) : \frac{x^2+xy}{a^2}$;

б) $\left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}\right) : \frac{x^2+y^2}{x^2+xy}$.

328. а) $\left(\frac{a}{a+1} + 1\right) : \left(1 - \frac{3a^2}{1-a^2}\right)$;

б) $\left(\frac{2x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x-1}\right) : \frac{4x}{5-10x}$.

329. а) $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b}{a}\right) : \left(\frac{a}{b^2} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$;

б) $\left(1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) : \frac{1}{x^2-1}$.

$$330. \text{ а) } \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) : \left(1+x - \frac{1-2x^2}{1-x} \right);$$

$$\text{ б) } \left(1 - \frac{b}{a+b} \right) : \left(a+b - \frac{b^2}{a+b} \right).$$

$$\text{331. а) } \left(\frac{1}{a+b} + \frac{b^2}{a^3-ab^2} \right) : \left(\frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{a}{ab+b^2} \right);$$

$$\text{ б) } (a+b) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - ab \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \right).$$

$$332. \text{ а) } \left(\frac{c-x}{c^2+cx} - \frac{c}{cx+x^2} \right) : \left(\frac{x^2}{c^3-cx^2} + \frac{1}{c+x} \right);$$

$$\text{ б) } \frac{a+b}{ab} : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) + \frac{1}{b-a}.$$

333. Розв'яжіть рівняння:

$$\text{ а) } \frac{x^2-2x+1}{4x+8} : \frac{x-1}{x+2} = 6; \quad \text{ б) } \frac{4x^2-1}{3-x} : \frac{2x+1}{6-2x} = 10;$$

$$\text{ в) } \frac{x^2-9}{x^2+4} : \frac{x+3}{x-2} = 0; \quad \text{ г) } \frac{16-x^2}{3x} : \frac{16+x^2}{6x^2} = 0.$$

Поділіть многочлен на многочлен, записавши частку у вигляді дробу і скоротивши його (334—338).

$$334. \text{ а) } (a^5 - a) : (a^2 - 1); \quad \text{ б) } (z^6 - z^2) : (z^2 - 1);$$

$$\text{ в) } (2a + 8b) : (16b^2 - a^2); \quad \text{ г) } (4x^2 - 4xy + y^2) : (y^2 - 4x^2).$$

$$\text{335. а) } (c^6 - c^2) : (c^3 - c); \quad \text{ б) } (c^4 + c) : (c^2 + c);$$

$$\text{ в) } (x^3 + 4x^2 + 4x) : (x^2 + 2x); \quad \text{ г) } (x^4 + x) : (x^2 - x + 1).$$

$$336. \text{ а) } (ac + ax + bc + bx) : (c + x);$$

$$\text{ б) } (ac - ax + bc - bx) : (a + b).$$

$$337. \text{ а) } (a^3 - 2a^2 + 2a - 4) : (a^2 + 2);$$

$$\text{ б) } (a^3 + 2a^2 - 2a - 4) : (a + 2).$$

$$338. \text{ а) } (2a^3b^2 + 3abc^2x - 2a^2bcx - 3c^3x^2) : (ab - cx);$$

$$\text{ б) } (32ac^2 + 15cx^2 - 48ax^2 - 10c^3) : (2c^2 - 3x^2).$$

Спростіть вираз (339–341).

339. а) $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 : \frac{a^2-2a+1}{a^2+2a+1}$; б) $\left(\frac{x+z}{2x}\right)^3 : \frac{x^2+z^2+2xz}{8x^4}$;

в) $\left(1-\frac{a}{c}\right)^2 : \frac{a^2-2ac+c^2}{6c^3}$; г) $\left(2+\frac{x}{a}\right)^3 : \frac{x^2+4a^2+4ax}{8a^3}$.

340. а) $\left(1-\frac{2c}{a+c}\right)^2 : \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^3$; б) $\frac{3a^4}{a^2+x^2-2ax} : \left(1+\frac{x}{a-x}\right)^2$;

в) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}-a\right) : \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) + \frac{ba}{2}$; г) $\left(\frac{a^2+b^2}{a}-2b\right) : \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$.

341. а) $\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) : \frac{a+b+c}{2abc} + a^2$;

б) $\left(1-\frac{b^2-a^2-c^2}{2ac}\right) : \left(\frac{a+c}{b}-1\right) - \frac{b^2}{2ac}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

342. Розв'яжіть систему рівнянь:

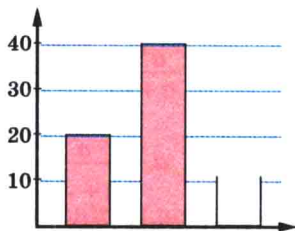
а)
$$\begin{cases} 8(2x-3y-3)=6x(4y-3)-3y(8x-5), \\ 3(10x+3y)=9y(4x+7)-6x(6y+1); \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} (x-2)^2-(x+3)^2=(y-3)^2-(y+2)^2, \\ (x+2)^2+(x-3)^2=2x(x-4)+13y. \end{cases}$$

343. Знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:

а) $3x+2y=6$; б) $x-5y=12$.

344. У таборі для відпочинку є учні тільки 7–9 класів. Кількість учнів 7 і 8 класів наведено на діаграмі (мал. 16). Домалюйте діаграму в зошиті, якщо всього у таборі було 95 учнів.



Мал. 16

§8. ПЕРЕТВОРЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ



Ви вже знаєте, що будь-який числовий вираз після виконання усіх наявних у ньому дій набуває конкретного значення, яке виражається деяким числом. Подібно до того, як знаходять значення числового виразу, виконують перетворення раціональних виразів. Заданий вираз замінюють іншим — тотожним йому. Такі перетворення називають **тотожними перетвореннями**.

Тотожні перетворення раціональних виразів виконують частинами або «ланцюжком» на основі відомих вам з попередніх параграфів правил дій над дробами і цілими виразами. Якщо вираз містить кілька дій різних ступенів, то їх виконують у такій самій послідовності, що й при перетворенні числових виразів:

- 1) дії в дужках;
- 2) дії третього ступеня (піднесення до степеня);
- 3) дії другого ступеня (множення, ділення);
- 4) дії першого ступеня (додавання, віднімання).

Кожний раціональний дробовий вираз можна подати у вигляді дроби, а деякі — навіть у вигляді цілого виразу. Роз-

глянемо, наприклад, вирази: $a - \frac{a}{1 + \frac{1}{a}}, \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{x + y} - \frac{1}{xy}$.

Перший з них можна перетворювати так:

$$1) 1 + \frac{1}{a} = \frac{a + 1}{a}; \quad 2) a : \frac{a + 1}{a} = \frac{a^2}{a + 1};$$

$$3) a - \frac{a^2}{a + 1} = \frac{a^2 + a - a^2}{a + 1} = \frac{a}{a + 1}.$$

$$\text{Отже, } a - \frac{a}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{a}{a + 1}.$$

Подібним способом (частинами) можна спростити і другий вираз. А можна перетворювати його і «ланцюжком»:

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{x+y} - \frac{1}{xy} = \frac{y+x}{xy} : (x+y) - \frac{1}{xy} = \frac{1}{xy} - \frac{1}{xy} = 0.$$



Хочете знати ще більше?

У математиці часто доводиться не лише спрощувати вирази, наприклад суму кількох дробів записати одним виразом, а й робити зворотні операції.

Задача (О. Коші). Розкладіть дріб $\frac{2}{x^2-1}$ на суму двох дробів зі знаменниками $x-1$ і $x+1$.

✓ Розв'язання. Нехай $\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$. (1)

Перетворимо праву частину рівності у дріб:

$$\begin{aligned} & \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \\ = & \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{Ax+A+Bx-B}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(A+B)+A-B}{(x-1)(x+1)}. \end{aligned}$$

Підставимо цей вираз у праву частину (1):

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(A+B)+A-B}{(x-1)(x+1)}, \text{ звідси } x(A+B)+A-B=2.$$

Права частина останньої рівності не містить змінної x . Це можливо тільки за умови, коли $A+B=0$, тобто коли $B=-A$. За такої умови $A-(-A)=2$, звідси $2A=2$, $A=1$, $B=-1$.

Отже, $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}$.

Відповідь. $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}$.

Перевірте себе

1. Які вирази називають раціональними?
2. Які вирази називають дробовими?
3. Які дії можна виконувати з раціональними виразами?
4. Який порядок виконання дій?

✓ Виконаємо разом!

1. Спростіть вираз:

а) $\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x}$; б) $\left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{y}{x-y}\right) : \frac{x^2-3xy}{x-y}$.

✓ Розв'язання.

а) Перетворюватимемо даний вираз частинами:

$$1) \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x} = \frac{1}{x+2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2) \cdot x} = \frac{x-2}{x};$$

$$2) \frac{x+1}{x} - \frac{x-2}{x} = \frac{x+1-x+2}{x} = \frac{3}{x}.$$

б) Перетворимо даний вираз «ланцюжком»:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{y}{x-y}\right) : \frac{x^2-3xy}{x-y} = \frac{(x-y)^2 - y(x+y)}{(x+y)(x-y)} : \frac{x(x-3y)}{x-y} = \\ & = \frac{x^2 - 2xy + y^2 - yx - y^2}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x-y}{x(x-3y)} = \frac{x^2 - 3xy}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x-y}{x(x-3y)} = \\ & = \frac{x(x-3y)(x-y)}{(x-y)(x+y)x(x-3y)} = \frac{1}{x+y}. \end{aligned}$$

Відповідь: а) $\frac{3}{x}$; б) $\frac{1}{x+y}$.

2. Подайте дріб $\frac{5x+19}{x+3}$ у вигляді $m + \frac{n}{x+3}$, де m і n — цілі числа.

✓ Розв'язання.

$$\frac{5x+19}{x+3} = \frac{5(x+3)+4}{x+3} = \frac{5(x+3)}{x+3} + \frac{4}{x+3} = 5 + \frac{4}{x+3}.$$

Виконайте усно

Спростіть вираз (345–348).

345. а) $\left(a + \frac{x}{c}\right) : \left(a + \frac{x}{c}\right)$; б) $\left(1 + \frac{a}{n}\right) : \frac{n+a}{n}$.

$$346. \text{ а) } 1: \frac{a-c}{a+c}; \quad \text{ б) } 1: \frac{1+x}{x-1}.$$

$$347. \text{ а) } \left(n + \frac{1}{n} \right) \left(n - \frac{1}{n} \right) : \left(n^2 - \frac{1}{n^2} \right); \quad \text{ б) } \frac{a}{c} \cdot \frac{a-c}{a+c} \cdot \frac{a+c}{a}.$$

$$348. \text{ а) } \frac{a^3-1}{a-1} : (a^2+a+1); \quad \text{ б) } \frac{1+x^3}{1+x} : (1-x-x^2).$$

Рівень **A**

Виконайте дії (349–352).

$$349. \text{ а) } \frac{a}{a-1} \cdot (a-1)^2 + 1; \quad \text{ б) } (x+2) \cdot \frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x};$$

$$\text{ в) } \frac{1}{x} - \frac{x-2}{x} : (x-2)^2; \quad \text{ г) } \frac{3}{a^2-16} \cdot (a+4) + \frac{a}{2}.$$

$$350. \text{ а) } (x-3) \cdot \frac{5}{9-x^2} + \frac{4}{x}; \quad \text{ б) } \frac{a+6}{a} : (a+6)^2 + \frac{1}{a};$$

$$\text{ в) } \frac{2}{(x+3)} \cdot (x^2-9) + \frac{6}{x+3}; \quad \text{ г) } \frac{5}{a^2-4} \cdot (a+2)^2 - \frac{10}{a-2}.$$

$$351. \text{ а) } \frac{x+2}{x+3} : \frac{5x+10}{9-x^2} - \frac{2x-1}{15}; \quad \text{ б) } \left(\frac{6y}{y-4} - 3y \right) : \frac{6-y}{y-4};$$

$$\text{ в) } \frac{x^2-y^2}{(x-y)^2} \cdot \frac{x^2}{x+y} + \frac{1-x^2}{x-y}; \quad \text{ г) } \frac{m-5}{m+5} \cdot \left(m + \frac{2m^2}{5-m} \right).$$

$$352. \text{ а) } \frac{a^2-4}{9-a^2} : \frac{a-2}{3+a} - \frac{2}{3-a}; \quad \text{ б) } \left(x - \frac{5x}{x+3} \right) : \frac{x-2}{x+3};$$

$$\text{ в) } \frac{a^2-b^2}{4a+4} \cdot \frac{a+1}{a-b} + \frac{a+b}{4}; \quad \text{ г) } \left(\frac{2a}{2a-1} + 1 \right) \cdot \frac{6a-3}{4a^2-a}.$$

Спростіть вираз (353–357).

$$353. \text{ а) } \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) \cdot \frac{xy}{x+y}; \quad \text{ б) } \frac{a-b}{ab} : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right);$$

$$\text{ в) } \left(1 + \frac{a}{b} \right) : \left(1 - \frac{a}{b} \right); \quad \text{ г) } \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{y} \right) : \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{y} \right).$$

$$354. \text{ а) } \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right); \quad \text{б) } \left(\frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} \right) : \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{b}{a} \right);$$

$$\text{в) } \left(\frac{m}{m+1} + 1 \right) : \left(1 - \frac{3m^2}{1-m^2} \right); \quad \text{г) } \left(\frac{3a+1}{3a-1} - \frac{3a-1}{3a+1} \right) : \frac{12a}{15a-5}.$$

$$355. \text{ а) } \frac{a-b}{a} \cdot \left(\frac{a}{a-b} + \frac{a}{b} \right); \quad \text{б) } \left(\frac{x}{y} - \frac{x}{x+y} \right) \cdot \frac{x+y}{x};$$

$$\text{в) } \left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} \right) : \frac{2}{x^2-y^2}; \quad \text{г) } \left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} \right) : \frac{4}{a^2-b^2}.$$

$$356. \text{ а) } \frac{a^2-2a+1}{a^2-1} \cdot \left(\frac{a+1}{a-1} \right)^2; \quad \text{б) } \frac{1-4x^2}{4x^2+4x+1} \cdot \frac{3x}{2x-1}.$$

$$357. \text{ а) } \frac{x^3-a^3}{x^2-a^2} \cdot \frac{x+a}{a^2+ax+x^2}; \quad \text{б) } \left(\frac{2a}{a-x} \right)^3 \cdot \frac{a^2-2ax+x^2}{6a^2}.$$

Доведіть тотожність (358–359).

$$358. \text{ а) } \frac{(2a+1)^2}{(2a-1)^2+8a} = 1; \quad \text{б) } \frac{(2a-1)^2}{(2a+1)^2-8a} = 1.$$

$$359. \text{ а) } \frac{8c}{(2c+1)^2-(2c-1)^2} = 1; \quad \text{б) } \frac{8a^2+2}{(2a+1)^2+(2a-1)^2} = 1.$$

360. Доведіть, що значення виразу не залежить від значень змінних, які до нього входять:

$$\text{а) } \left(\frac{4}{x} - \frac{x}{4} \right) \cdot \left(\frac{1}{4-x} - \frac{1}{4+x} \right); \quad \text{б) } \left(\frac{2}{3a} - \frac{3a}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{3a-2} + \frac{1}{3a+2} \right);$$

$$\text{в) } \left(\frac{2a}{b} - \frac{8b}{a} \right) \cdot \left(\frac{a}{a-2b} - \frac{a}{a+2b} \right); \quad \text{г) } \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) \cdot \left(\frac{x^2y}{y-x} + \frac{x^2y}{y+x} \right).$$

Виконайте дії:

$$361. \text{ а) } \left(\frac{x+y}{y} - \frac{2y}{y-x} \right) \cdot \frac{y-x}{x^2+y^2}; \quad \text{б) } \left(\frac{2a}{a+x} + \frac{x-a}{a} \right) : \frac{x^2+a^2}{x+a};$$

$$\text{в) } \left(a+x - \frac{2ax}{a+x} \right) : \left(\frac{a-x}{a+x} + \frac{x}{a} \right); \quad \text{г) } \left(\frac{y}{x} - \frac{2y}{x+y} \right) \cdot \left(y + \frac{x^2+y^2}{x-y} \right).$$

362. Знайдіть значення виразу:

а) $\frac{a}{a+1} \cdot \left(a - \frac{1}{a}\right)$, якщо $a = 2,37$;

б) $\left(\frac{x+1}{x} - \frac{2x}{x-1}\right) \cdot \frac{1-x}{x^2+1}$, якщо $x = -0,25$;

в) $\left(\frac{a+x}{a} - \frac{x-1}{x}\right) \cdot \frac{a^2 x}{x^4 - a^2}$, якщо $a = 2,25$, $x = 3,5$.

363. Доведіть рівності, які *Евклід* (III ст. до н. е.) довів геометричним способом для додатних a і b .

а) $ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$;

б) $a^2 + b^2 = 2 \left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 \right)$.

Рівень Б

Спростіть вираз (364–377).

364. а) $\frac{\frac{a+c}{n} - \frac{c}{n}}{\frac{a}{n}}$; б) $\frac{\frac{a+b}{a} - \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{a}{a}}$; в) $\frac{m + \frac{mn}{m-n}}{m - \frac{mn}{m-n}}$.

365. а) $\frac{a - \frac{b^2}{a+b}}{b - \frac{a^2}{a+b}}$; б) $\frac{x - \frac{yz}{y-z}}{y - \frac{xz}{x-z}}$; в) $\frac{x+2 - \frac{1}{x+2}}{x+2 + \frac{x}{x+2}}$.

366. а) $\frac{a(a-x) - x(a+x)}{\frac{a}{a+x} - \frac{x}{a-x}}$; б) $\left(\frac{a^2}{4b^2} + \frac{9b^2}{a^2} + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{a}{2b} - \frac{3b}{a}\right)$.

367. а) $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}}$; б) $\frac{n}{n - \frac{1}{n - \frac{n}{1-n}}}$.

368. а) $\frac{n^2-1}{n^2+n} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}\right)^2$; б) $\frac{a^4+c^4}{(a-c)^2} - \frac{2}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)^2}$.

$$369. \text{ a) } \left(\frac{2c}{3c+1} + \frac{3c}{1-2c} \right) \cdot \frac{9c^2+6c+1}{10c^2+10c}; \text{ б) } \frac{1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2}}{1 - \frac{x}{a}}.$$

$$370. \text{ a) } \frac{\frac{1}{a+c} - \frac{1}{x}}{a+c-x} \cdot \left(\frac{a}{c} - \frac{c}{a} \right); \text{ б) } \frac{\frac{1}{a+c} - \frac{2}{x}}{a+c-\frac{x}{2}} : 2;$$

$$\text{в) } \left(n - \frac{1}{1-n} \right) \cdot \frac{n^2-2n+1}{n^2-n+1}; \text{ г) } \left(\frac{xy}{ab} + \frac{ax}{b^2} - \frac{by}{a^2} \right) : \left(\frac{xy}{ab} - \frac{ax}{b^2} + \frac{by}{a^2} \right).$$

$$371. \text{ a) } \left(1+x+\frac{1}{x} \right) \cdot \left(1+x-\frac{1}{x} \right); \text{ б) } \left(x+1-\frac{1}{1-x} \right) : \left(x-\frac{x^2}{x-1} \right).$$

$$\text{🏠 372. a) } (a^2-1) \cdot \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} - 1 \right); \text{ б) } \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{c}{a} \right) : \left(\frac{a}{c^2} - \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right).$$

$$373. \text{ a) } \left(1 - \frac{2x-3y}{2x+3y} \right) : \left(\frac{2xy}{4x^2-9y^2} + \frac{y}{3y-2x} \right); \text{ б) } 1 - \frac{x^2-c^2}{x} : \frac{c-x}{x^2};$$

$$\text{в) } \left(\frac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3} + \frac{b}{a^2+b^2} \right) : \left(\frac{1}{a-b} - \frac{2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3} \right).$$

$$374. \text{ a) } \left(\frac{3}{a-1} - \frac{3a^2+6a+3}{a^2-1} : \frac{a^4+a}{a^3+1} \right) \cdot \frac{a+a^2}{-3};$$

$$\text{б) } \left(\frac{4a}{a+2} - \frac{a^3-8}{a^3+8} : \frac{a^2-4}{4a^2-16a+16} \right) \cdot \frac{a+2}{16}.$$

$$\text{🏠 375. a) } \frac{4ab}{b^2-a^2} : \left(\frac{1}{b^2-a^2} + \frac{1}{a^2+2ab+b^2} \right);$$

$$\text{б) } \frac{3c-3}{c^2-4} \cdot \frac{c+2}{c^2-2c+1} - \frac{3(c+2)}{c^2-4}.$$

$$376. \text{ a) } \left(\frac{x^2}{x+a} - \frac{x^3}{x^2+2xa+a^2} \right) : \left(\frac{x}{x+a} - \frac{x^2}{x^2-a^2} \right);$$

$$\text{б) } \frac{4a^2+16+16a}{a-2} \cdot \left(\frac{a}{2a-4} - \frac{a^2+4}{2a^2-8} - \frac{2}{a^2+2a} \right).$$

$$377. \text{ а) } \left(\frac{2x-1}{x+1} - x \right) \cdot \left(\frac{3}{x^3+1} - \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^2-x+1} \right);$$

$$\text{ б) } \frac{3x^2}{a^2-x^2} - 3a \left(\frac{1}{a-x} - \frac{x}{a^3-x^3} \cdot \frac{a^2+ax+x^2}{a+x} \right);$$

$$\text{ в) } \frac{xy^2-x^3}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{x}{(x-y)^2} - \frac{y}{x^2-y^2} \right) + \frac{y}{x-y}.$$

Доведіть тотожність (378–380).

$$378. \text{ а) } \frac{2a-b}{ab} - \frac{1}{a+b} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) = \frac{1}{b};$$

$$\text{ б) } \frac{1}{x+y} \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \right) + 1 = \frac{x^2+y^2}{xy}.$$

$$379. \text{ а) } \left(\frac{4ab}{a-b} + a - b \right) : \left(1 + \frac{2b}{a-b} \right) = a + b;$$

$$\text{ б) } \left(\frac{2a+2}{a-1} + a + 1 \right) \cdot \left(1 - \frac{2}{a+1} \right) = a + 1.$$

$$380. \text{ а) } \frac{1}{xy} + \left(x^2 - xy - \frac{x-y}{xy+y^2} \right) : \frac{x^2-xy}{x+y} = x + y;$$

$$\text{ б) } \left(\frac{xy+y^2}{x^2-xy} + xy + y^2 \right) \cdot \frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} = xy.$$

381. Доведіть, що вирази A_1 і A_2 тотожно рівні:


$$\text{ а) } A_1 = \frac{2}{mn} : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)^2, \quad A_2 = \frac{m^2+n^2}{(m-n)^2} - 1;$$

$$\text{ б) } A_1 = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2 - \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right)^2, \quad A_2 = \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) : \frac{xy}{x^2-y^2};$$

$$\text{ в) } A_1 = \left(a - \frac{a^2+b^2}{a+b} \right) \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{a-b} \right),$$

$$A_2 = \left(1 + \frac{a^2-ab+b^2}{a^2-b^2} \right) \cdot \left(\frac{2a+b}{a} - \frac{3a}{2a-b} \right).$$


382. Значення дробу $\frac{ax+15}{a}$ дорівнює 8, якщо $x=3$. При якому значенні x цей дріб дорівнює 18?

 383. Подайте дріб $\frac{7x+9}{x+1}$ у вигляді $a + \frac{b}{x+1}$, де a, b — цілі числа.

384. При яких цілих значеннях n число $\frac{2n+5}{n+1}$ є цілим?

385. Натуральні числа a, b, c, d, e такі, що $ab=2, bc=3, cd=4, de=5$. Знайдіть значення дробу $\frac{e}{a}$.

386. При яких натуральних значеннях n число $\frac{4n^2-12n+21}{n-3}$ є натуральним?

 387. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n число $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ є натуральним?

388. Доведіть, що при будь-якому значенні $a > 1$ число $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8}$ є від'ємним.

389. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях x вираз


$$\frac{18x}{27x^3+8} + \frac{1}{3x+2} - \frac{3x+2}{9x^2-6x+4}$$

дорівнює нулю.

390. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях x вираз

$$\left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} + \frac{3}{x^2-x+1} \right) \cdot \left(x - \frac{2x-1}{x+1} \right)$$

не залежить від значення змінної.

 391. *Задача китайського вченого Дай Шу.*

Спростіть:

$$\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \right) \cdot \frac{ab}{a^2 - (b+c)^2}$$

392. Знайдіть значення виразу:

а) $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) : \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right)$, якщо $x=3,7, y=-1,3$;

$$\text{б) } \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b}{a} \right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{a}{b^2} \right), \text{ якщо } a = 12, b = 8;$$

$$\text{в) } \left(\frac{xy}{x^2 - y^2} + \frac{y}{2y - 2x} \right) \cdot \left(\frac{x^2 - y}{2y} - \frac{y}{2} \right), \text{ якщо } x = 5,6, y = -2,4;$$

$$\text{г) } \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \left(\frac{x + y}{x - y} - \frac{x - y}{x + y} \right), \text{ якщо } x = \frac{1}{3}, y = 12.$$

393. Доведіть твердження:

$$\text{а) якщо } x = \frac{a-b}{a+b}, \text{ то } \left(\frac{a}{b} - x \right) \cdot \frac{b}{ax+b} = 1;$$

$$\text{б) якщо } x = \frac{ab}{a+b}, \text{ то } \frac{x^2 - a^2}{x^2 - b^2} \cdot \frac{b^3}{a^3} = \frac{a + 2b}{b + 2a};$$

$$\text{в) якщо } x = \frac{ab}{a^2 + b^2}, \text{ то } \frac{0,5 - x}{0,5 + x} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}.$$

394. Виконайте підстановку і спростіть:

$$\text{а) } \frac{x-a}{x-b}, \text{ де } x = \frac{ab}{a+b}; \quad \text{б) } \frac{\frac{a}{b} - x}{\frac{a}{b} + x}, \text{ де } x = \frac{a-b}{a+b};$$

$$\text{в) } \frac{ax}{a+x} - \frac{bx}{b-x}, \text{ де } x = \frac{ab}{a+b};$$

$$\text{г) } \left(\frac{x+2b}{x-2b} + \frac{x+2a}{x-2a} \right) : \frac{x}{2}, \text{ де } x = \frac{4ab}{a+b}.$$

395*. Спростіть вираз:

$$\text{а) } \frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)};$$

$$\text{б) } \frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

396. Подайте вираз у вигляді добутку:

$$\text{а) } 0,36x^4 - (1 - 0,4x^2)^2; \quad \text{б) } (3 + 0,1y^3)^2 - 0,81y^6;$$

$$\text{в) } (2x-1)^2 - (4-5x)^2; \quad \text{г) } (a-2b)^2 - (3a+b)^2.$$



397. Круг з буквами перекресліть двома прямими так, щоб із букв у кожній частині круга можна було скласти алгебраїчний термін (мал. 17).

Мал. 17



398. Обчисліть:

а) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) : (-2) - 16\frac{1}{4} : (-4)$;

б) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) : (-3) + \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right) : (-2)$.

399. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x+1}{6} - \frac{2x}{9} = 5$;

б) $\frac{x-2}{3} - \frac{5x+1}{4} = \frac{11x}{12}$;

в) $\frac{3x}{4} + \frac{2(x-1)}{5} = \frac{111}{10}$;

г) $\frac{2x+3}{5} + \frac{15-3x}{3} = \frac{4}{5}$.

\$9.

РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Уміти перетворювати дробові вирази потрібно, зокрема, для того, щоб розв'язувати дробові рівняння.


Ви вже знаєте, що рівняння називається *раціональним*, якщо його ліва і права частини — раціональні вирази. Раціональне рівняння називають *дробовим*, якщо його права, ліва або права і ліва частини — дробові вирази.



Приклади дробових рівнянь:

$$\frac{1}{x+5} = 3, \quad x - \frac{1-2x}{x} = 2, \quad \frac{x+1}{x-2} = \frac{x-3}{x+2}.$$

Розв'язуючи ціле рівняння, його найчастіше намагаються замінити рівносильним. З дробовими рівняннями це можна зробити тільки в окремих випадках. Здебільшого їх замінюють рівняннями-наслідками.

 **Рівняння називають наслідком даного, якщо всі розв'язки даного рівняння задовольняють утворене рівняння.**

Рівняння-наслідок задовольняють усі корені даного рівняння, але крім них воно може мати і сторонні корені.

Розв'язувати дробові раціональні рівняння можна різними способами. Зокрема:

1) замінити дане рівняння рівносильним йому рівнянням, ліва частина якого є дробом, а права – нулем;

2) замінити дане рівняння цілим, яке є наслідком даного.

Розглянемо на конкретних прикладах кожен із цих способів.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{2}{x-2} - \frac{x+2}{x+3} = \frac{10}{(x+3)(x-2)}.$$

Розв'язання. Замінімо дане рівняння рівносильним йому, в якому права частина — нуль, а ліва — дріб. Для цього перенесемо дріб з правої частини в ліву, змінивши знак перед ним на протилежний, і спростимо одержаний дробовий вираз:

$$\frac{2}{x-2} - \frac{x+2}{x+3} - \frac{10}{(x+3)(x-2)} = 0,$$

$$\frac{2(x+3) - (x+2)(x-2) - 10}{(x+3)(x-2)} = 0, \quad \frac{x(x-2)}{(x+3)(x-2)} = 0.$$

Одержане рівняння рівносильне даному. А розв'язати його неважко, врахувавши, що дріб дорівнює нулю тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля.

Прирівнюємо чисельник до нуля: $x(x - 2) = 0$, якщо $x = 0$ або $x = 2$.

Якщо $x = 0$, то знаменник $(x + 3)(x - 2)$ не дорівнює 0. Отже, $x = 0$ — корінь даного рівняння. Якщо $x = 2$, то $(x + 3)(x - 2) = 0$.

Отже, $x = 2$ не задовольняє дане рівняння.

Відповідь. $x = 0$.

Щоб розв'язати дробове рівняння з використанням рівняння-наслідку, потрібно помножити його обидві частини на спільний знаменник — цілий вираз. Одержимо ціле рівняння. Треба знайти його корені й випробувати, які з них не задовольняють дане рівняння. Таким чином, перевірка коренів є невід'ємною складовою розв'язання.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{a+3}{a-1} + \frac{1}{a} = 1.$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на $a(a - 1)$ — спільний знаменник дробів.

Маємо:

$$\frac{(a+3) \cdot a(a-1)}{a-1} + \frac{a(a-1)}{a} = a(a-1).$$

$$a^2 + 3a + a - 1 = a^2 - a, \quad 5a = 1, \quad a = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Перевірка. $\frac{0,2+3}{0,2-1} + \frac{1}{0,2} = \frac{3,2}{-0,8} + 5 = -4 + 5 = 1.$

Відповідь. $x = 0,2$.

Якщо дробове рівняння має вигляд пропорції або є таким, що його легко подати у вигляді пропорції, то можна скористатися основною властивістю пропорції. У цьому випадку також одержують рівняння-наслідок.



Хочете знати ще більше?

Відомі вам лінійні рівняння — це окремий вид раціональних рівнянь. Як пов'язані між собою раціональні рівняння, ілюструє малюнок 18. Ті раціональні рівняння, які не є цілими, називають *дробово-раціональними*. Тільки деякі з них зводяться до лінійних. Переважна більшість дробово-раціональних рівнянь зводяться до таких, які ви розв'язувати ще не вмієте. Розв'язування деяких з них розглянемо згодом.

РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ

ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНІ
РІВНЯННЯ

ІНШІ

Мал. 18

Дробово-раціональними бувають не тільки рівняння з однією змінною, а й з двома, трьома і більшою кількістю змінних та системи таких рівнянь. Для прикладу розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{2}{x-1} + \frac{4}{y+1} = 2, \\ \frac{6}{x-1} - \frac{4}{y+1} = 2. \end{cases}$$

Додавши ліві й праві частини цих рівнянь, одержимо: $\frac{8}{x-1} = 4$,

або $4x - 4 = 8$, звідси $x = 3$.

Підставивши це значення x у перше рівняння, матимемо:

$$\frac{4}{y+1} = 1, \text{ звідси } y = 3.$$

Відповідь. $x = 3, y = 3$.

Перевірте себе

1. Що таке рівняння?
2. Які рівняння називають раціональними?
3. За якої умови дріб дорівнює нулю?
4. Як розв'язують рівняння з використанням основної властивості пропорції? Сформулюйте цю властивість.

✓ Виконаємо разом!

1. Розв'яжіть рівняння $\frac{x+3}{6(x-3)} = \frac{1}{x-3}$.

✓ Розв'язання. За основною властивістю пропорції:
 $x^2 - 9 = 6x - 18$; $x^2 - 6x + 9 = 0$; $(x-3)^2 = 0$, звідси $x = 3$.

При такому значенні x знаменники дробів, що входять до даного рівняння, дорівнюють 0. Тому це значення x не є коренем рівняння.

Відповідь. Рівняння розв'язків не має.

2. Яке число слід додати до членів дробу $\frac{3}{5}$, аби одержати дріб, що дорівнює $\frac{5}{6}$?

✓ Розв'язання. Позначимо шукане число буквою x . Тоді за умовою задачі:

$$\frac{3+x}{5+x} = \frac{5}{6}, \quad 18 + 6x = 25 + 5x, \quad \text{звідси } x = 7.$$

Перевірка. $\frac{3+7}{5+7} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Відповідь. Шукане число дорівнює 7.

Виконайте усно

400. Укажіть, при яких значеннях змінної чисельник дробу дорівнює нулю, при яких — нулю дорівнює знаменник:

а) $\frac{2x-8}{3x+15}$; б) $\frac{16+4y}{3-6y}$; в) $\frac{6x-18}{x(x+5)}$; г) $\frac{1+3a}{a(2-a)}$;
 г) $\frac{y^2-25}{4y-3}$; д) $\frac{5x+2}{16-x^2}$; е) $\frac{a^2-2a+1}{2a-1}$; є) $\frac{3y-2}{4+4y+y^2}$.

401. Чи має розв'язки рівняння:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2} = 0, \quad \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 0, \quad \frac{x-1}{1-x} = 0?$$

402. Поясніть, чому не має розв'язків рівняння:

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + 1 = 0; \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = 0.$$

403. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x-2}{x} = 0$; б) $\frac{3+x}{x} = 0$; в) $\frac{x}{x+7} = 0$;
 г) $\frac{x}{x+2} = 0$; д) $\frac{x^2}{x-1} = 0$; е) $\frac{5x^3}{x^2+9} = 0$.

Рівень **A**

Розв'яжіть рівняння (404—408).

404. а) $\frac{x+3}{x}-2=0$; б) $\frac{2x-1}{3x}=0$; в) $\frac{x}{x+2}-2=0$;

г) $\frac{x-8}{x}=3$; г) $\frac{5-x}{x}=6$; д) $\frac{x}{x-2}=2$.

405. а) $\frac{x-5}{x}-2=0$; б) $\frac{x}{x+6}+2=0$; в) $\frac{3x-7}{x}+4=0$;

г) $\frac{3x-4}{x}=2$; г) $\frac{5-2x}{x}=3$; д) $\frac{2x}{x+3}=1$.

406. а) $\frac{5x^2+1}{3x}=2x$; б) $\frac{3x^2-4}{x}=2x$; в) $\frac{x^2-1}{x}=2x$;

г) $\frac{2x+3}{x-1}-3=0$; г) $\frac{4x-2}{x+3}+6=0$; д) $\frac{4-3x}{1-2x}-5=0$.

407. а) $\frac{3x}{x+2}=-5$; б) $\frac{2x+5}{x+2}=3$; в) $\frac{x-6}{3x-1}=5$;

г) $\frac{4+x}{3x}=\frac{1}{3}$; г) $\frac{7-2x}{x+1}=\frac{2}{3}$; д) $\frac{x+5}{x-3}=\frac{3}{4}$.

408. а) $\frac{7x^2+1}{2x}=4x$; б) $\frac{5x^2+4}{2x}=3x$; в) $\frac{x^2+3}{x^2+1}=2$;

г) $\frac{3x^2-4}{2x}=x$; г) $\frac{3x^2+5}{x^2-1}=4$; д) $\frac{9-4x^2}{3x}=-x$.

Користуючись властивістю пропорції, розв'яжіть рівняння (409—412).


409. а) $\frac{1}{23-3x}=\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{29}=\frac{1}{34y-5}$; в) $\frac{x}{x+1}=\frac{2}{3}$.

410. а) $\frac{0,5}{18-x}=\frac{1}{4}$; б) $\frac{5}{7x-2}=\frac{13}{0,2}$; в) $\frac{2}{x-1}=\frac{5}{x}$.

411. а) $\frac{1}{x^2+4}=\frac{1}{4}$; б) $\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{12}$; в) $\frac{5x^2-16}{12x}=\frac{x}{3}$.

412. а) $\frac{4}{x-1} = \frac{x+1}{6}$; б) $\frac{3z-1}{2} = \frac{1}{3z+1}$; в) $\frac{2x^2+8}{6x} = \frac{2x}{3}$.

413. Яке одне й те саме число треба додати до чисельника і знаменника дробу $\frac{11}{17}$, щоб одержати $\frac{3}{4}$?

 414. Знаменник даного дробу на 2 більший від чисельника. Якщо його чисельник збільшити в 3 рази, а до знаменника додати 67, то одержимо $\frac{1}{8}$. Знайдіть даний дріб.


415. Чисельник дробу на 5 менший від знаменника. Якщо до чисельника додати 11, а від знаменника відняти 2, то одержимо дріб, обернений до даного. Знайдіть даний дріб.

Рівень Б

Розв'яжіть рівняння (416—427).

416. а) $\frac{3x^2-5}{x+2} = 3x+1$; б) $\frac{6x^2+5}{3x+2} = 2x-1$; в) $\frac{4x^2-x}{2x+3} + 3 = 2x$;

г) $\frac{2-x}{3x^2} = \frac{1}{x+2}$; р) $\frac{2}{x+3} = \frac{3-x}{4x^2}$; д) $\frac{x+1}{5} = \frac{3}{x-1}$.


 417. а) $\frac{3x^2-4}{x} = 3x+1$; б) $\frac{2x^2-3}{2x+1} = x+1$; в) $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x+1}$;

г) $\frac{2}{z-3} = \frac{3}{z-2}$; р) $\frac{y-2}{y-6} = \frac{y}{y-5}$; д) $\frac{c+1}{c-1} = \frac{c-5}{c-3}$.

418. а) $\frac{x-2}{x+2} = \frac{x+3}{x-4}$; б) $\frac{x}{x-3} = \frac{x+4}{x+5}$; в) $\frac{y-5}{y-3} = \frac{y+1}{y-1}$;

г) $\frac{2x+3}{2x-1} = \frac{x-5}{x+3}$; р) $\frac{1+3x}{1-2x} = \frac{5-3x}{1+2x}$; д) $\frac{5y+1}{y-2} = \frac{5y-2}{y-3}$.

419. а) $\frac{6}{x^2-9} + \frac{2}{x+3} = \frac{3}{x-3}$; б) $\frac{7x}{4-x^2} + \frac{5}{2+x} = \frac{3}{2-x}$.

 420. а) $\frac{2x+4}{3-x} + 1 = \frac{5-x}{x+2}$; б) $\frac{3x-5}{x+1} - \frac{x+5}{x-3} = 2$.

421. а) $\frac{2x^2+8x-5}{x+3} - 2x = 1$; б) $2x - \frac{4x^2+3}{2x-1} = 5$.

$$422. \text{ а) } \frac{4}{1+x} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{x^2-3}{1-x^2}; \quad \text{ б) } \frac{2z-1}{2z+1} - \frac{2z+1}{2z-1} = \frac{8}{1-4z^2}.$$

$$423. \text{ а) } \frac{3}{(x+2)^2} + \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{5}{x^2-4};$$

$$\text{ б) } \frac{1}{(x+5)^2} - \frac{3}{(x-5)^2} = \frac{2}{25-x^2};$$

$$\text{ в) } \frac{2}{(1+x)^2} - \frac{5}{(1-x)^2} = \frac{3}{1-x^2};$$

$$\text{ г) } \frac{1}{(3-2x)^2} - \frac{4}{(3+2x)^2} = \frac{3}{9-4x^2}.$$

$$424. \text{ а) } \frac{8+9x}{36x^2-1} + \frac{1}{1-6x} = \frac{2}{6x+1}; \quad \text{ б) } \frac{1-2x}{1+2x} = \frac{1+2x}{1-2x} + \frac{16}{4x^2-1}.$$

$$425. \text{ а) } \frac{5}{2-2t} - \frac{5}{18} = \frac{8}{3t-3} - \frac{2+t}{t-1};$$

$$\text{ б) } \frac{3}{8-2x} - \frac{5}{6} = \frac{14}{3x-12} - \frac{2+x}{x-4}.$$

$$426. \frac{2z-1}{z+4} - \frac{3z-1}{4-z} - \frac{96}{z^2-16} = 5.$$

$$427. \frac{6n+5}{4n+3} + \frac{3n-7}{3-4n} + \frac{12n^2+30n+7}{9-16n^2} = 0.$$

$$428. \frac{7}{(5+2x)(1+2x)} = \frac{3}{(5+2x)^2} + \frac{4}{(1+2x)^2}.$$

$$429. \frac{1}{(1-3z)^2} - \frac{3}{(11+3z)^2} = \frac{2}{(1-3z)(11+3z)}.$$

Розв'яжіть систему рівнянь (430—434).

$$430. \text{ а) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$\text{ б) } \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{2}{y} = 2, \\ \frac{10}{x} - \frac{6}{y} = -1. \end{cases}$$

$$431. \text{ а) } \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 51, \\ \frac{1}{x} - \frac{8}{y} = 8; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 35, \\ \frac{15}{x} - \frac{7}{y} = 9. \end{cases}$$

$$432. \text{ а) } \begin{cases} \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = \frac{5}{8}, \\ \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{3}{8}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{10}{z-5} + \frac{1}{x+2} = 1, \\ \frac{25}{z-5} + \frac{3}{x+2} = 2. \end{cases}$$

$$\text{433. а) } \begin{cases} 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{y}{1-x^2}, \\ \frac{x-5}{3-y} = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{3y}{9-x^2} + \frac{x}{x-3} = 1, \\ \frac{5-y}{x-5} = 2. \end{cases}$$

$$434. \text{ а) } \begin{cases} x - \frac{xy+13}{y+6} = 2, \\ y - \frac{xy-13}{x+4} = 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{11-xy}{y+2} + x = 2\frac{1}{7}, \\ \frac{13-xy}{x-1} + y = 8. \end{cases}$$

435. Яке число слід додати до знаменника дробу $\frac{2}{5}$, щоб одержати дріб, на $\frac{3}{20}$ менший від даного?

436. Яке число слід відняти від знаменника дробу $\frac{1}{12}$, щоб значення дробу збільшилось на $\frac{1}{24}$?

437. Коли від мотузки відрізали 6 м, то виявилось, що відрізана частина відноситься до решти, як 2 : 7. Якої довжини була мотузка?

438. Один брат старший за другого на 6 років. Скільки років кожному з них, якщо три роки тому їх літа відносились, як 4 : 3?

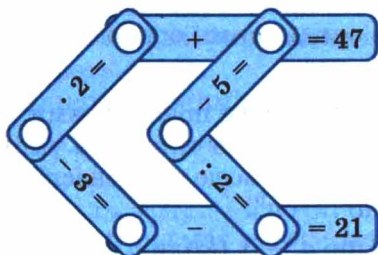
439. Відстань 160 км легковий автомобіль долає на 2 год швидше, ніж автобус. Знайдіть їх швидкості, якщо вони відносяться, як 2 : 1.

440. Два трактористи, працюючи разом, можуть зорати поле за 6 год, а один перший — за 10 год. За скільки годин може зорати поле другий тракторист?

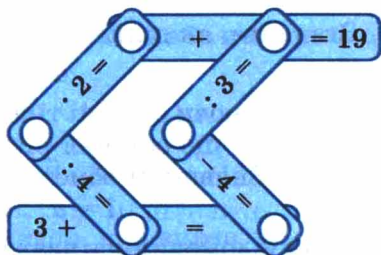
441. Басейн наповнюється водою через дві труби за 6 год, а через одну трубу — за 10 год. За скільки годин може наповнитися басейн, якщо відкрити тільки другу трубу?
442. Дві бригади шляховиків, працюючи разом, можуть відремонтувати дорогу за 12 днів. За скільки днів виконала б цю саму роботу кожна бригада окремо, якщо відомо, що продуктивність однієї з них у 1,5 раза вища від продуктивності другої?
443. Стародавня задача. Один чоловік випиває барильце квасу за 14 днів, а із жінкою — за 10 днів. За скільки днів таке барильце квасу випиває одна жінка?
444. Задача-жарт.

Для тата з мамою десяток
на рік потрібно поросятко,
із сином тато вісім з'їсть,
а мама з сином — тільки шість.
За скільки тижнів кожен сам
упорався б із поросям?

445. Басейн наповнюється водою через одну трубу за 4 год, через другу — за 2 год. За який час наповниться басейн, якщо відкрити одночасно обидві труби?
446. Один робітник може скласти секційні меблі для кабінету математики за 9 год, а другий — за 6 год. За який час вони виконають завдання, якщо працюватимуть одночасно?
447. Катер пройшов 28 км за течією річки і 25 км — проти течії, витративши на весь шлях стільки часу, скільки йому потрібно для проходження 53 км у стоячій воді. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки становить 2 км/год.
448. Розв'яжіть математичні кросворди, які зображено на малюнках 19 і 20.



Мал. 19



Мал. 20

449. Пасажирський поїзд, швидкість якого на 20 км/год більша від швидкості товарного, затрачає на шлях між станціями A і B на 3 год менше, ніж товарний поїзд. Швидкий поїзд, швидкість якого на 20 км/год більша від швидкості пасажирського, затрачає на проїзд від A до B у 2 рази менше часу, ніж товарний. Знайдіть відстань між A і B та швидкості поїздів.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

450. Які з чисел 7, 84, 0, $\frac{2}{9}$, 0,5, -8, $2\frac{1}{3}$, -24, 9 натуральні; які — цілі; які — раціональні?
451. Доведіть, що $10^{12} + 2$ ділиться на 3.
452. Доведіть, що: а) $1 + 10^{10} + 10^{100}$ ділиться на 3; б) $10^{15} + 8$ ділиться на 9; в) $10^{10} - 1$ ділиться на 9.
453. Побудуйте графік функції:
а) $y = 3 - 2x$; б) $y = \frac{6-x}{2}$.

§10. СТЕПЕНІ З ЦІЛИМИ ПОКАЗНИКАМИ



Деякі дроби часто записують у вигляді степенів з від'ємними показниками. Наприклад, замість

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{m^5}, \text{ пишуть } a^{-1}, x^{-2}, m^{-5}.$$

Згадайте, як ділять степені з однаковими основами:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Розглядаючи степені тільки з додатними показниками, наголошують, що остання рівність правильна тільки за умови, що $m > n$. Знявши це обмеження, приходимо до таких наслідків.

$$1 = a^n : a^n = a^{n-n} = a^0.$$

Тому й домовились вважати, що $a^0 = 1$ (коли $a \neq 0$).

$$1 : a^n = a^0 : a^n = a^{0-n} = a^{-n}.$$

Тому є сенс домовитися, що

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}.$$

Отже, можна розглядати степені з довільними цілими показниками. Коротко зміст цього поняття пояснюється так:

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ раз}}, & \text{якщо натуральне число } n > 1, \\ a, & \text{якщо } n = 1; \\ 1, & \text{якщо } n = 0 \text{ і } a \neq 0; \\ \frac{1}{a^{-n}} & \text{якщо число } n \text{ — ціле від'ємне і } a \neq 0. \end{cases}$$

Властивості степенів з цілими показниками такі самі, як і степенів з натуральними показниками:



$$1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad 2) a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$3) (a^m)^n = a^{mn}; \quad 4) (ab)^n = a^n b^n;$$

$$5) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Доведемо першу з цих тотожностей (її називають **основною властивістю степенів**) для випадку, якщо m і n — цілі від'ємні числа. За цієї умови $m = -p$ і $n = -q$, де p, q — натуральні числа. Тому

$$a^m \cdot a^n = a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{m+n}.$$

Так само можна довести рівність $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ для випадку, якщо один з показників m і n від'ємний, а другий — додатний або дорівнює 0.

Зверніть увагу на степені, в яких основа або показник дорівнюють нулю.

Якщо a і n відмінні від нуля, то

$$a^0 = 1, 0^n = 0.$$

Вираз 0^0 не має змісту, це не число, як і вираз $\frac{0}{0}$.

Вирази, що містять степені з цілими показниками, мож-

на перетворювати двома способами: замінюючи їх дробами або користуючись властивостями степенів. Наприклад, спростимо вираз $9x^{-3} \cdot 3^{-2}x^6$.

Перший спосіб.

$$9x^{-3} \cdot 3^{-2}x^6 = 9 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot x^6 = x.$$

Другий спосіб.

$$9x^{-3} \cdot 3^{-2}x^6 = 3^2 \cdot 3^{-2} \cdot x^{-3} \cdot x^6 = 3^{2-2} \cdot x^{-3+6} = 3^0x = x.$$



Хочете знати ще більше?

Зверніть увагу на те, як здійснюється розширення поняття *ступінь*. Спочатку вам були відомі тільки *квадрат числа* і *куб числа*. Потім узнали про степені чисел і змінних з довільним *натуральним показником*. Тепер ви ознайомлюєтеся зі степенями з довільними *цілими показниками*. Згодом ви узнаете також про степені, показники яких – довільні раціональні і навіть *нерациональні* числа.

Перевірте себе

1. Що таке квадрат числа, куб числа?
2. Сформулюйте означення степеня числа з натуральним показником n .
3. Що розуміють під степенем числа з показником 1?
4. Що розуміють під степенем числа з показником 0?
5. Що розуміють під степенем числа з цілим від'ємним показником?
6. Запишіть у вигляді формули означення степеня з довільним цілим показником.



Виконаємо разом!

1. Обчисліть: а) $100 \cdot 2^{-2}$; б) $81 \cdot (-3)^{-4}$.

✓ Розв'язання.

$$\text{а) } 100 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{100}{4} = 25; \quad \text{б) } 81 \cdot \frac{1}{(-3)^4} = \frac{81}{81} = 1.$$

Відповідь. а) 25; б) 1.

2. Запишіть без знаменника вираз $\frac{2}{ax^2}$.

✓ Розв'язання. $\frac{2}{ax^2} = 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x^2} = 2a^{-1}x^{-2}$.

Відповідь. $2a^{-1}x^{-2}$.

3. Спростіть вираз: $(a-c)^{-1} \cdot (a^{-1} - c^{-1})$.

✓ Розв'язання. $(a-c)^{-1} \cdot (a^{-1} - c^{-1}) = \frac{1}{a-c} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) =$
 $= \frac{1}{a-c} \cdot \frac{c-a}{ac} = \frac{1}{a-c} \cdot \frac{a-c}{-ac} = -\frac{1}{ac}$.

Відповідь. $-\frac{1}{ac}$.

Виконайте усно

454. Обчисліть: а) 35^0 ; б) $(-8)^0$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^0$; г) $1,23^0$; д) $\left(4\frac{1}{3}\right)^0$;

е) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$; ж) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$; з) $(-5)^{-1}$; и) $0,3^{-1}$; к) $0,02^{-1}$.

455. Як записати вираз без знаменника:

$$\frac{1}{2^3}; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7^4}; \frac{1}{a^2}; \frac{1}{c^5}?$$

456. Обчисліть: а) $31^0 + 2^{-1}$; б) $3 + 3^{-1}$; в) $2^2 + 2^{-2}$; г) $(-1)^{-4}$.

457. Згрупуйте степені: a^{-3} ; a^{-2} ; a^{-1} ; a ; a^2 ; a^3 по два так, щоб їх добутки дорівнювали один одному.

Рівень А

458. Замініть степінь з цілим від'ємним показником дробом:

а) 2^{-3} ; б) 3^{-2} ; в) 77^{-1} ;

г) b^{-3} ; д) $(xy)^{-3}$; е) $(m-n)^{-2}$.

459. Замініть дріб степенем з цілим від'ємним показником:

а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{7^3}$; в) $\frac{1}{33^2}$;

$$\text{г) } \frac{1}{ab}; \quad \text{г) } \frac{1}{x^9}; \quad \text{д) } \frac{1}{m^2+n^2}.$$



460. Подайте числа:

а) 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ у вигляді степеня з основою 2;

б) 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ у вигляді степеня з основою 3;

в) 625, 125, 25, 1, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{625}$ у вигляді степеня з основою 5;

г) 10 000, 1 000, 100, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ у вигляді степеня з основою 10.

Знайдіть значення виразу (461—462).



461. а) $3^{-4} \cdot 3^2$; б) $5^4 \cdot 5^{-4}$; в) $0,5^{-3} \cdot 0,5^2$; г) $(-2)^{-3} \cdot (-2)^5$;

$$\text{г) } \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5; \quad \text{д) } \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}; \quad \text{е) } \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 2^2; .$$

462. а) $7 \cdot 14^{-1}$; б) $-2^{-4} \cdot 48$; в) $(-4)^{-3} : \frac{1}{8}$;

г) $10 : (-5)^{-2}$; г) $-0,3^{-4} \cdot 0,81$; д) $0,1 : (-0,5)^{-3}$;

е) $100 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$; є) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} : \frac{2}{9}$; ж) $(1,5)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4$.

463. Спростіть вираз:

а) $a^{-10} \cdot a^8$; б) $x^5 \cdot x^0$; в) $c^{12} \cdot c^{-10}$; г) $a^3 : a^{-3}$.

464. Подайте у вигляді дробу вираз:

а) $3x^{-2}$; б) a^2c^{-3} ; в) $4a^{-2}x^{-3}$; г) $\frac{2}{3}a^2c^{-5}x^{-3}$.



465. Знайдіть значення виразу:

а) $800a^{-5}$, якщо $a = 2$;

б) $0,5a^{-2}x^{-5}$, якщо $a = 4$, $x = 0,5$.

Спростіть вираз (466–467).

466. а) $6x^{-2}c \cdot 1,5xc^{-3}$; б) $1,6x^{-1}y^{-5} \cdot \frac{5}{8}xy$; в) $\frac{3}{4}a^2n^{-4} \cdot 8a^{-3}n^2$;

г) $\frac{6x^{-5}}{a^{-6}} \cdot \frac{a}{36x^{-9}}$; р) $\frac{8x^2}{z} \cdot \frac{z^{-3}}{16x^{-3}}$; д) $\frac{14c^{-17}}{x^{-8}} \cdot \frac{x}{7c^{-18}}$.

467. а) $\frac{1}{6}p^2q^{-5} \cdot \frac{1}{2}p^{-1}q^{-3}$; б) $15ac^{-2} : a^2c$; в) $3,6x^4y^5 : xy^5$;

г) $\frac{6x^{-5}}{y^{-6}} \cdot \frac{y}{36x^{-7}}$; р) $\frac{5x^{-1}c}{3} \cdot \frac{9x^5}{c^{-3}}$; д) $\left(\frac{a^{-2}}{10^4x}\right)^2 \cdot (ax^{-1})^2$.

Подайте степінь у вигляді добутку (468–469):

468. а) $(0,5x^{-3}y^2)^{-2}$; б) $(6a^2b)^{-1}$; в) $(-0,2m^2n^{-4})^{-3}$;

г) $\left(\frac{1}{2}x^3y^{-2}\right)^{-3}$; р) $\left(\frac{5}{6}m^{-8}n\right)^{-1}$; д) $(-0,3x^{-3}y)^2$.

469. а) $(xz^{-2})^{-3}$; б) $(a^3y^{-2})^4$; в) $(5a^{-3}b)^{-1}$;

г) $\left(1\frac{1}{3}a^4b^{-2}\right)^2$; р) $(-0,1ab)^{-2}$; д) $(-2m^5n^{-1})^{-1}$.

470. На малюнку 21 зображена розгортка куба. Напишіть на кожній її грані один з виразів $a, b, c, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}$ так, щоб добуток на двох протилежних гранях дорівнював добутку на двох інших протилежних гранях.



Мал. 21

Рівень Б

Обчисліть значення виразу (471–474).

471. а) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4^{-1} \cdot 5$; б) $-\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} + 0,25^2 \cdot 11^2$;

в) $2\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + 35 \cdot 2^{-3}$; г) $0,6^{-3} : 1\frac{2}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

472. а) $1000^{-2} : 0,1^5 + \frac{2}{5}$; б) $0,1^{-1} - 1,1^0 : 10^{-1}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (0,05)^{-2} + (-0,2)^{-3}$; г) $(-0,8)^3 : \left(-1\frac{1}{4}\right)^{-2} + 2,8$.

473. а) $0,064^2 : 0,16^3$; б) $0,0081^3 \cdot 0,3^{-10}$; в) $\frac{125^5}{25^8 \cdot 5^{-3}}$;

г) $\frac{(6^6)^2 \cdot 36^{-2}}{6^{10}}$; д) $\frac{0,8^7 \cdot 0,16^{-4}}{0,64^3 \cdot 0,4^{-7}}$; е) $\frac{9^{-4} \cdot 27^3}{100^5 \cdot 10^{-12}}$.

474. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-7}$; б) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^5 : \left(\frac{2}{3}\right)^{-9} : \frac{2}{3}$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \cdot \frac{32}{81} - \left(\frac{3^0}{3}\right)^{-1}$; г) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^{-2} : \frac{6}{7} - \left(1\frac{8}{17}\right)^{-1}$;

д) $\left(\frac{4}{5} + 4^{-2} + 0,2 : 5^{-2}\right)^{-1}$.

Спростіть вираз (475—477).

475. а) $0,2x^{-3} \cdot 5x^2y^3$; б) $3^{-3}a^{-1}x \cdot 81a^2x$; в) $0,2c^{-5}x \cdot 5^{-2}c^3x^{-1}$;

г) $0,5x^{-6}y^2 \cdot 4x^7y^{-2}$; д) $8a^{-3}b^3 \cdot 0,25a^5b^{-1}$;

е) $9a^6b^{-2} : (-3a^2b^{-5})$.

476. а) $\frac{27x^{-1}y^2}{10} \cdot \frac{5x^6}{9y^{-4}}$; б) $\frac{12x^2}{7y^7} \cdot \frac{14y^9}{3x^{-2}}$;

в) $\frac{16a^4b^6}{c^7} : \frac{8b^6c^{-6}}{3a^{-3}}$; г) $\frac{3x^8}{4y^3z^{-2}} : \frac{x^7y^{-4}}{12z^{-2}}$.

477. а) $\left(\frac{x^2y^{-3}}{6z}\right)^{-3} : \left(\frac{x^3y^{-5}}{9z}\right)^{-2}$; б) $\left(\frac{a^{-3}b^4}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{10}{a^{-2}b^3}\right)^{-3}$;

в) $(2a^{-2}x^3)^2 \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^6$; г) $4a^7c^{-1} \cdot \left(\frac{ac}{5}\right)^{-1}$;

д) $(x^{-1}y) : \left(\frac{y^2}{2x^2}\right)^{-1}$.

Спростіть вираз і знайдіть його значення (478—479).

478. а) $2,2a^{-8}b^5 \cdot 5a^{10}b^{-4}$ при $a = -0,2, b = 50$;

б) $2,8x^9y : (0,7x^{10}y^{-2})$ при $x = 0,125, y = -0,25$.

479. а) $\frac{14a^{-7}}{b^{-3}} \cdot \frac{b^{-2}}{56a^{-5}}$ при $a = 1,5, b = 45$;

б) $\frac{21x^{15}}{10y^{-5}} : \frac{7x^{12}}{5y^{-2}}$ при $x = \frac{3}{7}, y = 2\frac{1}{3}$.

480. Доведіть, що вираз набуває одного й того самого значення при будь-якому цілому n :

а) $\frac{5^{2n+1}}{25^n}$; б) $\frac{2^{n-1} \cdot 3^{n+1}}{6^n}$; в) $\frac{4^{n+1} - 4^n}{2^{2n}}$; г) $\frac{2 \cdot 3^n + 3^n}{2 \cdot 3^{n+1}}$.

481. Скоротіть дріб (n — ціле число):

а) $\frac{4^{n+2} - 4^n}{15}$; б) $\frac{5^{n+1} + 5^{n+3}}{26}$; в) $\frac{3^n + 1}{3^{-n} + 1}$; г) $\frac{6^{-n} + 6^n}{36^n + 1}$.

482. Спростіть вираз (n — ціле число):

а) $\frac{x^{6n}y^{n+4}}{x^{2n}y^{n+5}}$; б) $\frac{a^{3n}b^{n-3}}{a^{2n}b^{n-5}}$; в) $\frac{x^{-2n} + x^n}{x^{-n}}$; г) $\frac{a^{2n} - a^{-3n}}{a^{-2n}}$.

Спростіть вираз (483—486).

483. а) $\frac{x^7 + x^{13}}{x^{-3} + x^3}$; б) $\frac{a^8 + a^{12}}{a^{-8} + a^{-12}}$;

в) $\frac{x^4 + 2x^6 + x^7}{2 + x + x^{-2}}$; г) $\frac{x^4 + 3x^5 + x^6}{x^{-4} + 3x^{-5} + x^{-6}}$.

484. а) $(a^{-1} - c^{-1}) : \frac{a^2 - c^2}{ac}$; б) $\frac{1}{a^{-3} - x^{-3}} - \frac{1}{a^{-3} + x^{-3}}$.

485. а) $(m^{-1} + n^{-1})^2 + (m^{-1} - n^{-1})^2$; б) $(c^{-2} - c^2)^2 - c^{-4} + 2$.

486. а) $(x - y)^{-2}(x^2 - y^2)$; б) $(a^{-3} - b^{-3})^{-1} - (a^{-3} + b^{-3})^{-1}$.

Розв'яжіть рівняння (487—488).

487. а) $2x^{-1} - x^{-1} = 2$; б) $x^{-2} - x^{-1} = 0$; в) $x^{-1} - 4x^{-3} = 0$.

488. а) $x^{-1} + x = 2$; б) $(2x - 1)x^{-1} = x$.

489. Чи може значення виразу $\frac{c^{-2}}{c^{-2}-1}$ дорівнювати 0 або 1?

Чи може воно бути більшим за 1?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

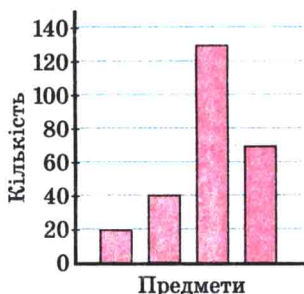
490. Виконайте множення:

а) $(2x - 3)(y + 1)$; б) $(x - a)(y - b)$;
в) $(m + 5)(n - m)$; г) $(6 - a)(2b - a)$.

491. Подайте вираз у вигляді добутку трьох або чотирьох множників:

а) $16a^4 - 1$; б) $81 - x^{12}$; в) $(x^2 + xy + y^2)^2 - x^2y^2$;
г) $a^2b^2 - (a^2 + ab - b^2)^2$.

492. На діаграмі (мал. 22) вказано кількість зошитів, альбомів, блокнотів і ручок, проданих крамницею за тиждень. Назви предметів не вказано, але відомо, що зошитів продали найбільше, альбомів — удвічі менше, ніж блокнотів. Скільки чого було продано?



Предмети

Мал. 22

493. Побудуйте графік рівняння:

а) $2x - 3y = 0$; б) $2x + 3y = x$.

§11. СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ЧИСЛА

Якщо мають справу з дуже великими або дуже малими числами, то такі числа зручно записувати в *стандартному вигляді*, тобто у вигляді $a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10$ і число n ціле. Показник степеня n називають *порядком числа* $a \cdot 10^n$. Масу Землі, яка дорівнює 6 000 000 000 000 000 000 000 т, у стандартному вигляді записують так: $6 \cdot 10^{21}$ т. А масу атома Гідрогену



0,0000000000000000000000000000000017 г у стандартному вигляді записують так: $1,7 \cdot 10^{-21}$ г. Порядок маси Землі дорівнює 21, а маси атома Гідрогену — становить -21 .

Над числами, записаними у стандартному вигляді, математичні дії можна виконувати так само, як їх виконують над одночленами. Але щоб вміти робити це, треба навчитися перетворювати добутки вигляду $a \cdot 10^n$ у рівні їм добутки з іншими показниками степенів. Щоб значення такого добутку не змінилось, при збільшенні показника степеня n на 1, 2, 3, значення a слід відповідно зменшувати в 10, 100, 1000 разів. І навпаки, зменшуючи n на 1, 2, 3, значення a слід відповідно збільшувати в 10, 100, 1000 разів.

Наприклад,

$$35 \cdot 10^5 = 3,5 \cdot 10^6; \quad 0,23 \cdot 10^8 = 2,3 \cdot 10^7;$$

$$227 \cdot 10^{-4} = 2,27 \cdot 10^{-2}; \quad 0,024 \cdot 10^{14} = 2,4 \cdot 10^{12}.$$

Як виконувати дії над числами, записаними в стандартному вигляді, покажемо на прикладах.

Якщо $a = 1,5 \cdot 10^8$, $b = 2,4 \cdot 10^7$, то:

$$a \cdot b = (1,5 \cdot 10^8) \cdot (2,4 \cdot 10^7) = 1,5 \cdot 2,4 \cdot 10^8 \cdot 10^7 = 3,6 \cdot 10^{15};$$

$$a : b = (1,5 \cdot 10^8) : (2,4 \cdot 10^7) = (15 \cdot 10^7) : (2,4 \cdot 10^7) = 6,25;$$

$$a + b = 1,5 \cdot 10^8 + 0,24 \cdot 10^8 = (1,5 + 0,24) \cdot 10^8 = 1,74 \cdot 10^8;$$

$$a - b = 1,5 \cdot 10^8 - 0,24 \cdot 10^8 = (1,5 - 0,24) \cdot 10^8 = 1,26 \cdot 10^8.$$

Зверніть увагу! Числа, записані у стандартному вигляді, виражають переважно наближені значення величин. Це пояснюється тим, що у такий спосіб найчастіше записують значення відстаней, площ, мас, об'ємів, швидкостей, температур, які майже завжди є наближеними.

Наприклад, маса Місяця дорівнює $7,35 \cdot 10^{22}$ кг, тобто 73 500 000 000 000 000 000 000 кг. Чи є це значення точним? Ні, це наближене значення. Усі нулі в цьому числі — цифри не точні, а округлені. Значущими є тільки три перші цифри: 7, 3 і 5. А всі нулі поставлено замість невідомих нам точних цифр.

Взагалі, якщо значення величин записують у стандартному вигляді, тобто $a \cdot 10^n$, то число a — точне, всі його цифри — значущі. А всі нулі, які одержують від множення a на 10^n , є результатом округлення.



Хочете знати ще більше?

Як треба розуміти вислів *число x більше від y на порядок?*
 Це передбачає, що число x більше від y приблизно в 10 разів.
 Наприклад,

$2 \cdot 10^7$ і $9 \cdot 10^7$ — числа одного порядку;

$2 \cdot 10^7$ більше від $9 \cdot 10^6$ на порядок, оскільки бо $7 - 6 = 1$;

$2 \cdot 10^7$ менше від $8 \cdot 10^{10}$ на три порядки, оскільки $10 - 7 = 3$.

Перевірте себе

1. Що таке стандартний вигляд числа?
2. Наведіть приклад числа, записаного в стандартному вигляді.
3. Що таке порядок числа?
4. Укажіть порядок чисел 327, 0,5, 0,000026.
5. Перше число менше від другого у 100 разів. На скільки порядків друге число більше від першого?



Виконаємо разом!

1. Запишіть у стандартному вигляді число:
 а) 320; б) 0,4; в) 1000 000; г) 0,00000027.
 ✓ Розв'язання.
 а) $320 = 3,2 \cdot 10^2$; б) $0,4 = 4 \cdot 10^{-1}$;
 в) $1\ 000\ 000 = 1 \cdot 10^6$; г) $0,00000027 = 2,7 \cdot 10^{-7}$.
2. Знайдіть добуток, частку, суму, різницю чисел $x = 4,5 \cdot 10^{-7}$ і $y = 1,5 \cdot 10^{-6}$.
 ✓ Розв'язання. $xy = (4,5 \cdot 1,5) \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-6} = 6,75 \cdot 10^{-13}$;
 $x : y = (4,5 : 1,5) \cdot (10^{-7} : 10^{-6}) = 3 \cdot 10^{-7-(-6)} = 3 \cdot 10^{-1}$;
 $x + y = 4,5 \cdot 10^{-7} + 15 \cdot 10^{-7} = 19,5 \cdot 10^{-7} = 1,95 \cdot 10^{-6}$;
 $x - y = 4,5 \cdot 10^{-7} - 1,5 \cdot 10^{-6} = 0,45 \cdot 10^{-6} - 1,5 \cdot 10^{-6} = -1,05 \cdot 10^{-6}$.

Виконайте усно

494. Яке з чисел записано в стандартному вигляді:
 а) $0,35 \cdot 10^{12}$; б) $2 \cdot 10^{30}$; в) $32,4 \cdot 10^8$;

г) $2,5 \cdot 10^{-4}$; г) $5 \cdot 100^4$; д) $0,23 \cdot 10^6$?

495. Назвіть порядок числа:

а) $3,07 \cdot 10^7$; б) $5,9 \cdot 10^8$; в) $6,2 \cdot 10^{-8}$;
г) 300 000; г) 8 320 000; д) 0,000008.

496. Обчисліть:

а) $2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^4$; б) $5 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^7$;
в) $(2 \cdot 10^7) \cdot (3 \cdot 10^7)$; г) $(6 \cdot 10^9) : (3 \cdot 10^9)$.

Рівень А

Запишіть без показника степеня (497—498).

497. а) $7 \cdot 10^5$; б) $2,3 \cdot 10^8$; в) $4,7 \cdot 10^{10}$; г) $3,02 \cdot 10^{13}$.

498. а) $9 \cdot 10^{-8}$; б) $3,5 \cdot 10^{-12}$; в) $1,9 \cdot 10^{-9}$; г) $9,83 \cdot 10^{-11}$.

Запишіть у стандартному вигляді число (499—500).

499. а) 370 000 000; б) 4 250 000 000; в) 1 002 000 000.

500. а) 0,000 000 053; б) 0,000 000 000 27;
в) 0,000 000 034 05.

501. Запишіть у стандартному вигляді масу:

а) Місяця — 73 500 000 000 000 000 000 т;

б) Сонця — 1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 т.

502. Маса Землі дорівнює 5 980 000 000 000 000 000 000 т, а маса Місяця — 73 500 000 000 000 000 000 т. На скільки тонн маса Землі перевищує масу Місяця?

503. Виразіть:

а) $2,6 \cdot 10^3$ т у грамах; б) $4,75 \cdot 10^{12}$ см у метрах;




в) $1,44 \cdot 10^9$ г у тоннах; г) $9,6 \cdot 10^5$ см у кілометрах;

г) $3,4 \cdot 10^{-8}$ т у грамах; д) $3,2 \cdot 10^8$ м² у гектарах.

504. Виконайте дії і результати запишіть у стандартному вигляді:

а) $8 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5$; б) $15 \cdot 10^{-8} - 8 \cdot 10^{-8}$;

в) $(2 \cdot 10^7) \cdot 30$; г) $(8 \cdot 10^{-9}) : 400$.

- 505.** Виконайте дії над числами, записаними в стандартному вигляді:
- а) $(5,2 \cdot 10^9) \cdot (5 \cdot 10^{-2})$; б) $8,4 \cdot 10^6 + 5,6 \cdot 10^6$;
 в) $(9,6 \cdot 10^{-12}) : (3,2 \cdot 10^{-16})$; г) $9,5 \cdot 10^{-5} - 8,6 \cdot 10^{-5}$.
-  **506.** Знайдіть добуток чисел $5 \cdot 10^6$ і $8 \cdot 10^9$, а також порядок кожного множника та добутку.
- 507.** Знайдіть квадрат і куб числа:
- а) $4 \cdot 10^{-12}$; б) $1,3 \cdot 10^{-6}$.
- 508.** Густина алюмінію становить $2,7 \cdot 10^3$ кг/м³. Знайдіть масу алюмінієвого куба, ребро якого дорівнює:
- а) 0,2 м; б) 10^{-3} м; в) $2,5 \cdot 10^{-2}$ дм.
-  **509.** Швидкість світла становить $3 \cdot 10^5$ км/с. Яку відстань світло проходить за: а) 5 с; б) за 1 год?
-  **510.** У таблиці подано маси і радіуси семи планет Сонячної системи.

Планета	M , кг	R , м
Меркурій	$3,26 \cdot 10^{23}$	$2,42 \cdot 10^6$
Венера	$4,88 \cdot 10^{24}$	$6,10 \cdot 10^6$
Марс	$6,43 \cdot 10^{23}$	$3,38 \cdot 10^6$
Юпітер	$1,90 \cdot 10^{27}$	$7,13 \cdot 10^7$
Сатурн	$5,69 \cdot 10^{26}$	$6,04 \cdot 10^7$
Уран	$8,69 \cdot 10^{25}$	$2,38 \cdot 10^7$
Нептун	$1,04 \cdot 10^{26}$	$2,22 \cdot 10^7$

За даними таблиці:

- а) виразіть діаметри планет у кілометрах;
 б) знайдіть маси планет у тоннах;
 в) перелічіть планети в порядку зростання їх мас;
 г) обчисліть, у скільки разів маса Нептуна більша за масу Меркурія;
 г) порівняйте радіуси Урана і Марса. Який із них більший? Обчисліть, на скільки метрів;
 д) порівняйте радіуси і маси Урана та Нептуна. Зробіть висновок.

Рівень **Б**

511. Виконайте дії:

- а) $(2,8 \cdot 10^5) \cdot (2,5 \cdot 10^{-7})$; б) $(1,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (9,2 \cdot 10^{-4})$;
 в) $(5,7 \cdot 10^4) : (3,8 \cdot 10^{-3})$; г) $(1,56 \cdot 10^{-2}) : (2,6 \cdot 10^{-6})$;
 р) $6,2 \cdot 10^{-2} + 4,8 \cdot 10^{-2}$; д) $5,1 \cdot 10^5 - 2,9 \cdot 10^6$.

Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел (512—513).

512. а) $1,8 \cdot 10^4$ і $6 \cdot 10^3$; б) $8 \cdot 10^{-6}$ і $4 \cdot 10^{-6}$.

513. а) $6,5 \cdot 10^7$ і $5 \cdot 10^6$; б) $3,2 \cdot 10^{-5}$ і $4 \cdot 10^{-4}$.

514. Округліть число до десятків і одержаний результат запишіть у стандартному вигляді:

- а) 1427; б) 155,678; в) 54,23; г) 4911,2.

515. Округліть число до одиниць і одержаний результат запишіть у стандартному вигляді:

- а) 157,415; б) 8901,5; в) 18,9; г) 315,5.

516. Порівняйте числа:

- а) $4,2 \cdot 10^6$ і $3,95 \cdot 10^6$; б) $2,1 \cdot 10^{-5}$ і $2 \cdot 10^{-5}$;
 в) $5,8 \cdot 10^9$ і $7,5 \cdot 10^8$; г) $7,3 \cdot 10^{-7}$ і $6,4 \cdot 10^{-6}$;
 р) $2,26 \cdot 10^{20}$ і $8,12 \cdot 10^{19}$; д) $4,71 \cdot 10^{-12}$ і $5 \cdot 10^{-13}$.

517. Порядок числа a дорівнює -12 . Який порядок числа:

- а) $1000a$; б) $0,0001a$; в) $a \cdot 10^{15}$; г) $\frac{a}{10^{-20}}$?

518. Знаючи наближені значення $x \approx 3,7 \cdot 10^{11}$ і $y \approx 8,5 \cdot 10^{10}$, обчисліть:

- а) xy ; б) $x : y$; в) $x + y$; г) $x - y$.


519. Відомо, що перша космічна швидкість дорівнює $7,9 \cdot 10^3$ м/с, друга — $1,12 \cdot 10^4$ м/с, третя становить $1,667 \cdot 10^4$ м/с. Виразіть ці швидкості в кілометрах за секунду і запишіть одержані результати числами у стандартному вигляді.

520. Яку відстань у метрах пролетить супутник, що має першу космічну швидкість, за 1 год?

521. Швидкість світла $v = 3 \cdot 10^8$ м/с. Яку відстань воно проходить за 1 рік? За скільки секунд світло проходить 10 км?

522. Виразіть:

а) $2,5 \cdot 10^3 \text{ м}^2$ у см^2 і км^2 ; б) $3,7 \cdot 10^2 \text{ м}^3$ у см^3 і км^3 .

 523. Маса Юпітера дорівнює $1,90 \cdot 10^{27}$ кг, а Землі — $5,98 \times 10^{24}$ кг. Що більше: маса Юпітера чи маса Землі? У скільки разів? На скільки порядків?

524. Густина сталі дорівнює $7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Знайдіть масу сталевого листа розміром $1,5 \times 8 \cdot 10^{-1} \times 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

525. За даними таблиці:

а) запишіть наведені значення величин у стандартному вигляді;

б) округліть значення швидкості світла у вакуумі так, щоб воно мало тільки одну значущу цифру;

в) порівняйте (приблизно) радіус Сонця і відстань від Землі до Місяця;

г) обчисліть, на скільки порядків відстань від Землі до Сонця більша за відстань від Землі до Місяця;

г) обчисліть, на скільки порядків діаметр еритроцита більший (чи менший) за діаметр молекули води.

Числа «ліліпути» і числа «велетні»

«Ліліпути»	«Велетні»
0,000 000 000 28 м — діаметр молекули води	299 792 458 м/с — швидкість світла у вакуумі
0,000 000 000 6 м — товщина плівки мильної бульбашки	696 000 000 м — радіус Сонця
0,000 003 75 м — радіус еритроцита	510 083 000 км^2 — площа поверхні Землі
0,000 000 000 000 000 001 7 мг — маса атома Гідрогену	384 400 000 м — відстань від Землі до Місяця
0,000 000 000 001 с — час існування атома надважкого Гідрогену	149 600 000 000 м — відстань від Землі до Сонця

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

526. Знайдіть добуток і частку чисел, сума і різниця яких дорівнюють: а) 1,5 і 0,5; б) a і c .

527. Знайдіть середнє арифметичне чисел 2, 4 і x .

528. Розв'яжіть рівняння:

а) $|2x - 1| = 5$; б) $|6 - x| = 2x$.

529. Подайте у вигляді многочлена:

а) $(x^n + 1)^2$; б) $(a^{2m} - 1)^2$; в) $(a^n + a^m)^2$;

г) $(x^{n-1} - x)^2$; г) $\left(\frac{1}{2}y^m + y^{2m}\right)^2$; д) $\left(\frac{1}{4}b^n - 2b^2\right)^2$.

§12. Функція $y = \frac{k}{x}$

Ви вже знаєте, що *функція* — це відповідність між двома змінними, при якій кожному значенню однієї змінної відповідає єдине значення другої. Пригадайте, що таке *аргумент* функції, її *область визначення*, *множина значень*, як можна задавати функції (див. с. 248).



Далі ми розглянемо функцію, задану формулою $y = \frac{k}{x}$, де k — довільне дійсне число, відмінне від нуля; аргумент x може набувати не тільки додатних, а й від'ємних значень.


Нприклад, дано функцію $y = \frac{6}{x}$. Область її визначення — множина всіх дійсних чисел, окрім $x = 0$ (бо на 0 ділити не можна). Складемо таблицю значень цієї функції для кількох значень аргументу:

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	-1	-1,2	-1,5	-2	-3	-6	—	6	3	2	1,5	1,2	1

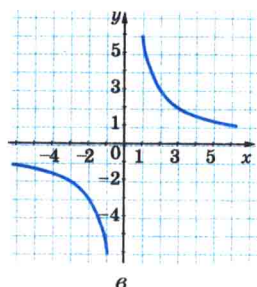
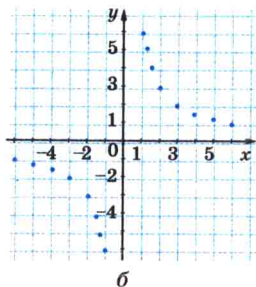
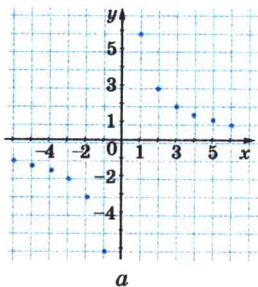
Позначимо точки, координати яких наведено в таблиці (мал. 23, а). Коли б на цій самій координатній площині позначили більше точок, координати яких задовольняють рівність $y = \frac{6}{x}$, вони розмістилися б, як показано на малюнку 23, б. Якщо для кожного дійсного значення x , крім $x = 0$, за формулою $y = \frac{6}{x}$ обчислити відповідне значення y і нанести всі точки з одержаними координатами на координатну площину, матимемо графік даної функції (мал. 23, в). Таку лінію називають *гіперболою*. Гіпербола складається з двох віток.

Графік функції $y = \frac{6}{x}$ — гіпербола, симетрична відносно початку координат. Її вітки розміщено в I і III координатних кутах. (Осі координат поділяють координатну площину на чотири координатних кути, їх називають також координатними чвертями, або квадрантами, і нумерують, як показано на малюнку 24).

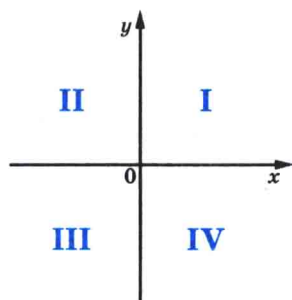
Якщо таким способом побудувати графік функції $y = \frac{-12}{x}$, дістанемо також гіперболу; тільки її вітки розміщені в II і IV координатних кутах (мал. 25).

 **Графік кожної функції $y = \frac{k}{x}$, де k — відмінне від нуля дане число, — це гіпербола, симетрична відносно початку координат.**

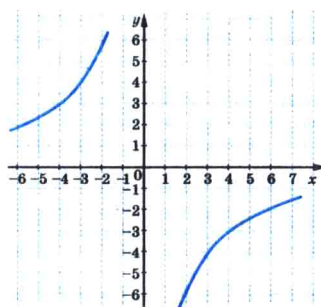
Якщо $k > 0$, вітки такої гіперболи розміщено в I і III координатних кутах, коли $k < 0$, — у II та IV.



Мал. 23



Мал. 24



Мал. 25

Властивості функції $y = \frac{k}{x}$ для різних значень k можна визначити за графіками, наведеними, наприклад, на малюнках 23, в і 25. Подаємо їх у вигляді таблиці.

Властивості функції	Вид функції	
	$y = \frac{k}{x} (k > 0)$	$y = \frac{k}{x} (k < 0)$
Область визначення	Усі числа, крім $x = 0$	Усі числа, крім $x = 0$
Область значень	Усі числа, крім $y = 0$	Усі числа, крім $y = 0$
Додатні значення	$x > 0$	$x < 0$
Від'ємні значення	$x < 0$	$x > 0$
Проміжки спадання	$x < 0$ і $x > 0$	—
Проміжки зростання	—	$x < 0$ і $x > 0$



Хочете знати ще більше?

Функцію, задану формулою $y = \frac{k}{x}$, часто називають *оберненою пропорційністю* (на відміну від функції $y = kx$, яку називають *прямою пропорційністю*). Раніше оберненою пропорційністю ви називали відповідність, при якій зі збільшенням однієї змінної в кілька разів значення другої зменшувалися в стільки само разів. Так буває тільки у випадку, коли k і x — додатні числа. Якщо у функції $y = \frac{k}{x}$ число k від'ємне, то зі збільшенням значень x у кілька разів значення y також збільшуються у стільки само разів. Це видно з мал. 26.

Використовуючи степінь 3 від'ємним показником, функцію

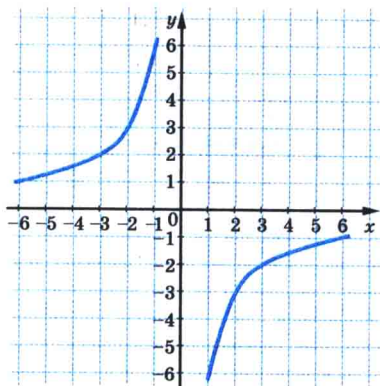
$$y = \frac{k}{x} \text{ можна записати так: } y = kx^{-1}.$$

Іноді її записують і у вигляді: $yx = k$.

Приклад. Чи є оберненою пропорційністю залежність, задана

рівністю: а) $y = \frac{k}{|x|}$; б) $y = \frac{k}{x^2}$?

Відповідь. а) Ні; б) ні.



Мал. 26

Перевірте себе

1. Що таке функція, аргумент функції?
2. Що таке область визначення функції?
3. Яку функцію називають лінійною, яку — прямою пропорційністю?
4. Наведіть приклади прямої пропорційності.
5. Як називають графік оберненої пропорційності?

✓ Виконаємо разом!

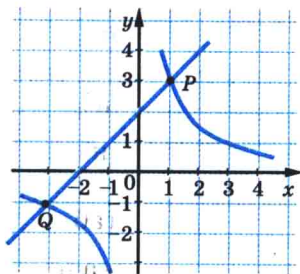
1. Функцію задано формулою $y = \frac{n}{x}$. Знайдіть значення n , якщо графік функції проходить через точку $A(5; 2)$.

✓ Розв'язання. Підставимо значення $x = 5$ і $y = 2$ у формулу, якою задано функцію. Одержимо $2 = \frac{n}{5}$. Отже, $n = 10$.

2. Розв'яжіть графічно рівняння

$$x + 2 = \frac{3}{x}.$$

✓ Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = x + 2$ і $y = \frac{3}{x}$ (мал. 27). Ці графіки перетинаються в точках P і Q , абсциси яких дорівнюють приблизно 1 і -3 . Перевіряємо, чи



Мал. 27

це точне значення, чи наближене: $1 + 2 = 3$, $-3 + 2 = -1$.

Відповідь. $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

Виконайте усно

530. Яка із заданих функцій є прямою пропорційністю:

а) $y = 2x$; б) $y = -\frac{2}{3}x$; в) $y = 3x - 1$?

531. Яка з заданих функцій є оберненою пропорційністю:

а) $y = \frac{6}{x}$; б) $y = \frac{x}{6}$; в) $y = 3x^{-1}$; г) $y = -3x$?

532. Укажіть область визначення функції:

а) $y = \frac{5}{x-2}$; б) $y = \frac{5}{x} - 2$; в) $y = \frac{1}{x^2-4}$; г) $y = \frac{x-3}{x^2-9}$.

533. В яких чвертях координатної площини розміщений графік функції:

а) $y = \frac{12}{x}$; б) $y = -\frac{8}{x}$; в) $y = x^{-1}$?

534. Чим відрізняються графіки функцій:

а) $y = \frac{-3}{x}$ і $y = -\frac{3}{x}$; б) $y = \frac{1}{z}$ і $y = z^{-1}$?

Рівень **A**

535. Сторони прямокутника дорівнюють x і y , а площа — 60 см^2 . Виразить формулою залежність y від x .

536. Відомо, що сила струму I в провіднику пропорційна напрузі на кінцях провідника U і обернено пропорційна його опорю R . Зобразить цю залежність формулою.

537. Складіть таблицю значень функції $y = \frac{-12}{x}$ для цілих значень x , якщо $-6 \leq x \leq 6$.

538. Складіть таблицю значень функції $y = \frac{12}{x}$ для натуральних значень x , менших від 13. Запишіть кілька пропорцій із чисел цієї таблиці.

539. Функцію задано формулою $y = \frac{16}{x}$. Заповніть таблицю:

x	-32		-2	-0,5				8
y		-1			16	8	4	

540. Обернену пропорційність задано формулою $y = -\frac{10}{x}$.

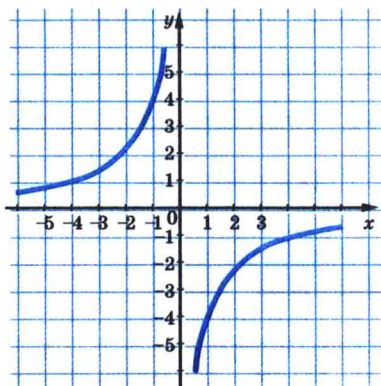
Знайдіть значення функції, що відповідає значенню аргументу, яке дорівнює -1000; -100; 0,1; 0,02; 50. При якому значенні аргументу значення функції дорівнює -100; -40; 2; 100; 200?

541. Функцію задано формулою $y = \frac{10}{x}$. Яке значення функції відповідає значенню $x = 0,2$? При якому значенні аргументу значення функції дорівнює -5?

542. На малюнку 28 побудовано графік оберненої пропорційності, заданої формулою $y = -\frac{4}{x}$. Знайдіть за графіком:

а) значення y , яке відповідає значенню x , що дорівнює -5; -4; -1; -0,8; 1,6; 2; 4;

б) значення x , якому відповідає значення y , що дорівнює -4; -2,6; -2; 0,8; 1; 1,6; 5.



Мал. 28

543. Які з точок $A(-8; 1)$, $B(16; 0,5)$, $C(0; 0)$, $D(0,01; -800)$, $E(-32; 0,25)$, $F(80; 0,1)$, $G(100; -0,08)$, $K(-0,08; 1000)$

належать графіку функції ?

544. Побудуйте графік функції:

а) $y = \frac{12}{x}$; б) $y = -\frac{12}{x}$; в) $y = \frac{4}{x}$; г) $y = -\frac{1}{x}$.

545. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \frac{0,5}{x}$; б) $y = \frac{3}{x+1}$; в) $y = -\frac{5}{x-5}$; г) $y = \frac{1}{x} - 2$.

546. Побудуйте графік функції, заданої формулою:

а) $y = \frac{2}{x}$; б) $y = -\frac{2}{x}$; в) $y = \frac{9}{x}$; г) $y = -\frac{9}{x}$.

547. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \frac{1}{2x}$; б) $y = \frac{8}{x}$; в) $y = \frac{12}{x-5x}$; г) $y = \frac{4}{3x} - \frac{3}{2x}$;

г) $y = \frac{3}{x} + 1$; д) $y = 2 - \frac{1}{x}$; е) $y = \frac{1}{x-2}$; є) $y = \frac{16}{x+4}$.

548. Функцію задано формулою $y = \frac{8}{x}$. Заповніть таблицю:

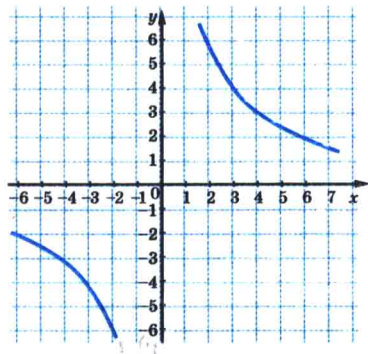
x							
y	1	2	4	8	16	32	64

549. Чи перетинає графік функції $y = \frac{2}{x}$ вісь абсцис; вісь ординат?

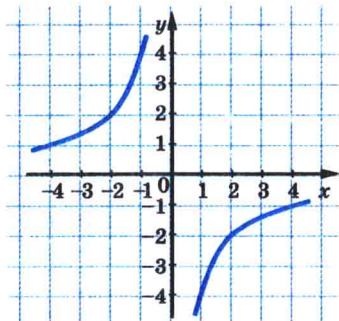
550. При якому значенні k графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:

а) $A(1; 1)$; б) $B(2; 3)$; в) $C(1; -3)$?

551. Графік якої функції зображено на малюнках 29, 30?



Мал. 29

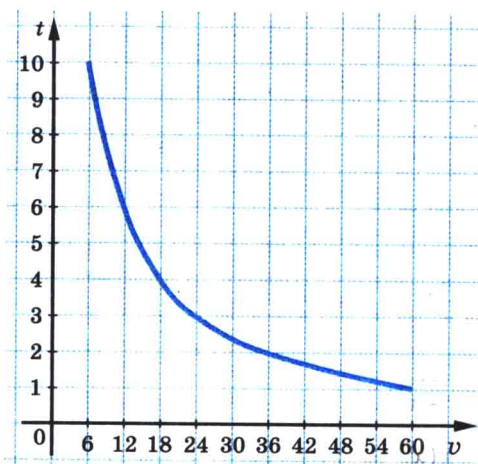


Мал. 30

- 552.** Графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку $A(2; 1)$. Чи проходить він через точку: $B(1; 2)$, $C(-2; -1)$, $K(-1; -2)$?
- 553.** Графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку $A(-3; 3)$. Покажіть, що він проходить і через точку $B(3; -3)$. Узагальніть задачу.
- 554.** Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{30}{x}$ і $y = -\frac{30}{x}$ для $x > 0$. Як розміщені ці графіки?
- 555.** Чи правильно, що при рівномірному русі час, який витрачає поїзд на проїзд 10 км, обернено пропорційний швидкості?
- 556.** Три трактори мають зорати поле за 48 год. За скільки годин зорють це поле чотири таких самих трактори?

Рівень **Б**

- 557.** На малюнку 31 зображено графік залежності часу, затраченого на шлях з пункту A в пункт B , від швидкості руху. Яка відстань між A і B ? Скільки часу потрібно, щоб прибути з A до B , рухаючись зі швидкістю 6 км/год; 30 км/год; 60 км/год? З якою швидкістю треба рухатись, щоб дістатися з A до B за 1 год; 2 год; 10 год?




Мал. 31

558. Зобразіть формулою залежність тиску сталої сили F на площу поверхні S . Чи є ця залежність є оберненою пропорційністю?

559. Зі збільшенням висоти над рівнем моря зменшується атмосферний тиск і температура повітря. Чи кожна з цих залежностей оберненою пропорційністю?

560. Мідний і алюмінієвий бруски мають однакову масу. Який з них має більший об'єм і в скільки разів? Густина міді становить $8,6 \text{ г/см}^3$, алюмінію — $2,6 \text{ г/см}^3$.


 **561.** Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{6}{x}$ і $y = 5 - x$. За допомогою цих графіків, назвіть корені рівняння $\frac{6}{x} = 5 - x$.

562. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

а) $y = \frac{8}{x}$ і $y = 2x$; б) $y = \frac{12}{x}$ і $y = x - 4$;

в) $y = -\frac{6}{x}$ і $y = 1 - \frac{x}{3}$; г) $y = -\frac{4}{x}$ і $y = -2x - 2$.

Вкажіть координати точок їх перетину.

 **563.** При яких значеннях k і b гіпербола $y = \frac{k}{x}$ і пряма $y = kx + b$ проходять через точку:

а) $K(3; 4)$; б) $L(-4; 6)$; в) $M(-1; -8)$; г) $N(2; -2)$?

564. Побудуйте графік рівняння:


а) $\frac{1}{4}xy = 4$; б) $xy = -6$; в) $2xy = 1$.

565. Побудуйте графік функції:

а) $y = \frac{1}{|x|}$; б) $y = \frac{1}{|x|} + 1$; в) $y = \frac{1}{x^2}$; г) $y = x^{-2} - 2$.

Знайдіть область визначення функції і побудуйте її графік (566—567).

566. а) $y = \frac{32}{(2-x)^2 - (2+x)^2}$; б) $y = \frac{48}{(x-1)^2 - (x+1)^2}$.

 **567.** а) $y = \frac{3x(x+2) - 3x^2 - 18}{x(x-3)}$; б) $y = \frac{16+7x}{x^2+4x} - \frac{3}{x+4}$.

568*. Побудуйте графік функції:

$$\text{а) } y = \frac{2}{|x|}; \quad \text{б) } y = -\frac{12}{|x|}; \quad \text{в) } y = \frac{36}{|x|}; \quad \text{г) } y = -\frac{24}{|x|}.$$

Побудуйте графік функції, заданої формулою (569—570).



$$569*. \text{ а) } y = \begin{cases} -x-4, & x < -6, \\ -\frac{12}{x}, & -6 \leq x < -2, \\ 6, & x \geq -2; \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} -\frac{8}{x}, & x < -2, \\ -4, & -2 \leq x < 2, \\ \frac{8}{x}, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$570*. \text{ а) } y = \begin{cases} \frac{6}{x}, & x < -2, \\ 1,5x, & -2 \leq x < 2, \\ \frac{6}{x}, & x \geq 2; \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} -x-3, & x < -5, \\ -\frac{10}{x}, & -5 \leq x < 0, \\ \frac{10}{x}, & 0 < x \leq 5, \\ x-3, & x \geq 5. \end{cases}$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

571. Обчисліть і порівняйте:

- а) суму кубів чисел 3 і 2 та куб їх суми;
- б) різницю кубів чисел 5 і 2 та куб їх різниці;
- в) півсуму кубів чисел 7 і 5 та куб їх півсуми.

572. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

- а) $-4x(x^2 - x - 3) + 2x(2x^2 + x - 5)$, якщо $x = -3$;
- б) $3a(4a^2 - 3a) - 6(4 + 2a^3) - 5a(2 - 5a)$, якщо $a = \frac{1}{2}$;
- в) $(5a(a - 4b) + 12ab) \cdot 2b + 16ab^2$, якщо $a = 3, b = 1,2$.

573. Знайдіть два числа, якщо їх сума дорівнює 2,5, а різниця квадратів становить $-2,5$.

574. Сума квадратів двох від'ємних чисел дорівнює 74, а різниця їх квадратів — 24. Знайдіть ці числа.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**Варіант I**

1°. Спростіть вираз:

а) $\frac{9ax^3}{x^2-a^2} \cdot \frac{a+x}{6x^2} - \frac{3a^2}{2x-2a}$; б) $\left(n + \frac{1}{2+n}\right) : \frac{n+1}{n+2} - n$.

2°. Розв'яжіть рівняння: $\frac{3}{x-2} = \frac{10}{x} - \frac{7}{x+2}$.

3°. Побудуйте графік функції $y = \frac{6}{x}$.

Варіант II

1°. Спростіть вираз:

а) $\frac{8cn^2}{c^2-n^2} \cdot \frac{n+c}{4n} - \frac{2n^2}{c-n}$; б) $\left(\frac{a^2+c^2}{c} - 2a\right) : \frac{a-c}{2c} - a$.

2°. Розв'яжіть рівняння: $\frac{1}{x} + \frac{4}{x-3} = \frac{5}{x-2}$.

3°. Побудуйте графік функції: $y = -\frac{6}{x}$.

Варіант III

1°. Спростіть вираз:

а) $\frac{6ac^2}{c^2-a^2} \cdot \frac{a+c}{4c} + \frac{3a^2}{2a-2c}$; б) $\left(1 + \frac{a^2}{2a+1}\right) : \frac{a+1}{2a+1} - a$.

2°. Розв'яжіть рівняння: $\frac{2z^2-7z+3}{2z-1} = 1+z$.

3°. Побудуйте графік функції: $y = \frac{4}{x}$.

Варіант IV

1°. Спростіть вираз:

а) $\frac{4xa^3}{a^2-x^2} \cdot \frac{x+a}{6ax} + \frac{2ax}{3(x-a)}$; б) $\left(a+2+\frac{1}{a}\right) : \frac{1-a^2}{a} - 1$.

2°. Розв'яжіть рівняння: $\frac{x+9}{x-1} + \frac{x+1}{x+5} = 2$.

3°. Побудуйте графік функції: $y = -\frac{4}{x}$.

ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Звичайні дроби в стародавніх Вавилоні та Єгипті були відомі ще 4 тис. років тому. Грецькі математики вміли виконувати над звичайними дробами всі арифметичні дії. В «Арифметиці» Діофанта (III ст.) є також багато дробів зі змінними. Наприклад, у ній показано, що

$$\frac{96}{x^2+36-12x^2} - \frac{12}{6-x^2} = \frac{12x^2+24}{x^4+36-12x^2}.$$

Записували тоді дробові вирази зовсім не так, як тепер.

Дробову риску вперше застосував італійський математик Л. Фібоначчі (1180—1240).

Дроби зі змінними стали широко використовувати після появи «Загальної арифметики» відомого англійського вченого І. Ньютона (1643—1727). У цій книжці, зокрема,

пояснювалось: «... $\frac{a}{b}$ — це величина, що утворюється при діленні a на b , ... $\frac{ab-bb}{a+x}$ означає величину, утворену при діленні $ab-bb$ на $a+x$ і т. п. Величини такого роду називають дробами». Тоді замість b^2 ще писали bb .

Степені з цілими показниками впроваджувалися в математику поступово. Майже 4 тис. років тому вчені Вавилону розглядали квадрат і куб числа під час з обчислення площі квадрата та об'єму куба. До нашого часу збереглися глиняні плитки з таблицями квадратів і кубів натуральних чисел, зроблені стародавніми вавилонянами. Згодом учені стали розглядати четвертий, п'ятий та вищі степені, називаючи їх спочатку квадрато-квадратом, кубо-квадратом і т. п.

Степінь з нульовим показником запровадили в V ст. незалежно один від одного самаркандець аль-Каші і француз Н. Шюке. Степені з від'ємними показниками Н. Шюке також використовував. Теорію степенів з від'ємними показниками розробив у XVII ст. англійський математик Д. Валліс. Він ототожнював послідовності

$$a, 1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \dots,$$

$$a, a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, \dots$$

Стандартний вигляд числа введено в науку тільки в XX ст. у зв'язку з використанням електронних обчислювальних машин (ЕОМ).

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ

Частку від ділення виразу A на вираз B можна записати у вигляді дробу $\frac{A}{B}$. Дріб має зміст тільки тоді, коли його знаменник не дорівнює нулю. *Алгебраїчним дробом* називають дріб, чисельник і знаменник якого — многочлени. Вираз, складений зі змінних і чисел за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення або піднесення до степеня з цілим показником, називають *раціональним*. При будь-яких значеннях a, b і $c \neq 0$ $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ (*основна властивість дробу*). На основі цієї властивості дроби можна скорочувати або зводити до спільного знаменника.

Дії над будь-якими дробами можна виконувати так само, як над звичайними дробами. Якщо знаменники не дорівнюють 0, то завжди

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}, \quad \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}, \quad \frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd}.$$

Дробовий вираз $\frac{1}{a^n}$ записують також у вигляді a^{-n} .

Степінь з цілим показником

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}, & \text{якщо } n \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{якщо } n = 0, \quad a \neq 0, \\ \frac{1}{a^{-n}}, & \text{якщо } n < 0. \end{cases}$$

Властивості степенів з цілими показниками аналогічні властивостям степенів із натуральними показниками. Якщо числа m і n — цілі, a і b — відмінні від 0, то завжди:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (ab)^n = a^n \cdot b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}; \quad (a^m)^n = a^{mn};$$

Якщо число x записане у вигляді $a \cdot 10^n$, де n — ціле число, а $1 \leq a < 10$, то кажуть, що воно записане в *стандартному вигляді*, а n — *порядок* числа x .

Функція $y = \frac{k}{x}$ визначена на множині всіх дійсних чисел за винятком $x = 0$. Якщо $k > 0$, то вона спадна.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 2

- Дріб $\frac{1}{16}$ можна записати у вигляді:
 - 2^4 ;
 - 2^6 ;
 - 2^{-4} ;
 - 2^{-6} .
- Значення виразу $(3,75 - 5,75)^{-2}$ дорівнює:
 - 4;
 - 4;
 - 0,5;
 - 0,25.
- Подайте у вигляді дробу вираз $4a^{-2}c^{-3}$:
 - $\frac{1}{4a^2c^3}$;
 - $\frac{4}{a^2c^3}$;
 - $\left(\frac{2}{ac}\right)^2$;
 - $\frac{4}{a^{-2}c^{-3}}$.
- Порядок числа $3,07 \cdot 10^5$ дорівнює:
 - 3;
 - 10;
 - 7;
 - 5.
- Яке з чисел записане в стандартному вигляді:
 - $255 \cdot 10^2$;
 - $0,1 \cdot 10^5$;
 - $3,5 \cdot 10^{21}$;
 - 35700?
- Скільки коренів має рівняння $x^{-2} = 0$:
 - один;
 - два;
 - жодного;
 - безліч?
- Вираз: $\frac{x^3+1}{x+1} : (x^2-x+1)$ тотожно дорівнює:
 - 0;
 - 1;
 - 1;
 - x .
- Укажіть корені рівняння $\frac{x^2-3x}{x^2-9} = 0$:
 - $x = 0$;
 - $x = 3$;
 - $x = 0$ і $x = 3$;
 - $x = 3$ і $x = -3$.
- Графіком якої з функцій є гіпербола:
 - $y = 5$;
 - $y = 5x$;
 - $y = \frac{5}{x}$;
 - $y = \frac{x}{5}$.
- Графік функції $y = \frac{2}{x}$ проходить через точку:
 - (0; 2);
 - (1; 2);
 - (2; 2);
 - (3; 2).

Типові завдання до контрольної роботи № 2

1. Виконайте ділення:

$$a^{\circ}) \frac{6x^5}{y^4} : \frac{12x^5}{y^2};$$

$$б^{\circ}) \frac{4a^2-1}{a^2-9} : \frac{6a+3}{a+3}.$$

2. Обчисліть:

$$a^{\circ}) \frac{3^5 \cdot 3^{-3}}{5^0};$$

$$б^{\circ}) \frac{4^{-6} \cdot 16^{-5}}{8^{-10}};$$

$$в^{\circ}) 2,8 \cdot 10^{-12} \cdot 4,5 \cdot 10^7.$$

3. Запишіть число в стандартному вигляді:

$$a^{\circ}) 257\,000\,000;$$

$$б^{\circ}) 0,000\,000\,002\,2.$$

4. Розв'яжіть рівняння:

$$a^{\circ}) \frac{2}{x-3} = \frac{3}{x-2};$$

$$б^{\circ}) \frac{x+7}{x} - \frac{x+6}{x+4} = \frac{8}{x^2+4x}.$$

5[•]. Розв'яжіть графічно рівняння $\frac{6}{x} = 6x$.

6[•]. Катер проходить 160 км за течією річки за той самий час, що й 136 км — проти течії. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 2,4 км/год.

7. Знайдіть значення виразу:

$$a^{\circ}) \frac{(x-1)^2}{x} \cdot \frac{2x}{x-1}, \text{ якщо } x = 1,5;$$

$$б^{\circ}) \frac{2(a+b)}{3a+b} + \frac{1}{a+b} : \frac{3a+b}{a^2-b^2}, \text{ якщо } a = 1,5; b = -1\frac{1}{3}.$$

8^{••}. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу є сталим:

$$a) \frac{x}{x+2} - \frac{(x-2)^2}{x+2} \cdot \left(\frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x^2-4x+4} \right);$$

$$б) \left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}+b^{-2}} \right)^{-1} \cdot \left(\left(\frac{b}{3a} \right)^{-1} + \left(\frac{a}{3b} \right)^{-1} \right)^{-1} \cdot \frac{3(a^{-1}+b^{-1})}{(ab)^{-1}}.$$

РОЗДІЛ

2

КВАДРАТНІ КОРЕНІ І ДІЙСНІ ЧИСЛА

Число висвітлює
глибину світобудови.

Г. В. Лейбніц

Раціональні числа, з якими ви ознайомилися в попередніх класах, — це тільки незначна частина множини чисел. На числовій прямій крім чисел раціональних є ще більше нераціональних чисел. Без засвоєння і цих чисел, без уміння виконувати дії з ними неможливо далі вивчати математику та інші прикладні науки.

У цьому розділі ви дізнаєтеся про:

- квадратні корені;
- дійсні числа;
- квадратний корінь з добутку, дробу, степеня;
- перетворення виразів з коренями;
- функції $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

§13. Функція

$$y = x^2$$

Розглянемо функцію, задану формулою $y = x^2$. Область її визначення — множина всіх чисел.

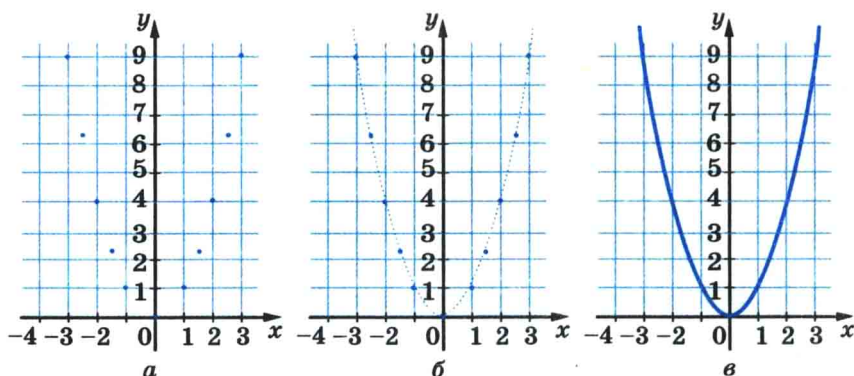
Складемо таблицю значень функції для деяких значень аргументу x :

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	0	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0	1	2,25	4	6,25	9

Позначимо точки, координати яких подано в цій таблиці (мал. 32, а). Якщо на координатній площині позначити більше точок з координатами x і y , що задовольняють формулу $y = x^2$, вони розмістяться би так, як показано на малюнку 32, б. Якщо для кожного дійсного значення x за формулою $y = x^2$ обчислити відповідне значення y і позначити точки з такими координатами на координатній площині, одержимо неперервну криву лінію, яку називають **параболою** (мал. 32, в). Парабола має дві нескінченні вітки, що плавно сходяться в одній точці — **вершині параболу**.

Для функції $y = x^2$ вершиною параболу є точка $(0; 0)$. Тобто графік функції $y = x^2$ проходить через початок координат.





Мал. 32

нат. Оскільки протилежним значенням аргументу відповідають рівні значення функції, то її графік симетричний відносно осі y .

Побудований графік дає змогу наочно виявити властивості функції $y = x^2$.

Властивості функції $y = x^2$, що їх визначено за графіком, можна подати у вигляді таблиці.

Властивості функції	Вид функції
	$y = x^2$
Область визначення	Усі числа (R)
Область значень	Усі невід'ємні числа ($y \geq 0$)
Додатні значення	$x \neq 0$
Від'ємні значення	—
Проміжки спадання	$x < 0$
Проміжки зростання	$x > 0$

Навіщо треба знати, яким є графік функції? Докладніше про це ви дізнаєтеся в старших класах. А зараз звернемо увагу тільки на те, що графіки функцій дають змогу розв'язувати рівняння, які іншими способами розв'язувати або надто важко, або й взагалі не можливо.

Скільки розв'язків має рівняння $x^2 = 4$? Пряма, рівняння якої $y = 4$, перетинає графік функції $y = x^2$ у двох точках (мал. 33). Їх абсциси $x = 2$ і $x = -2$ — розв'язки рівняння.

А скільки розв'язків має рівняння $x^2 = 2$? Спробуйте відповісти на це запитання самостійно.



Хочете знати ще більше?

З кривими у вигляді парабол мають справу фізики, астрономи, архітектори та інші фахівці. Графічне зображення траєкторії струменя води або кинутого (не вертикально) предмета — це параболи (мал. 34), арки мостів і споруд часто мають форму парабол. У багатьох прожекторів і різних приймачів радіохвиль також осьові перерізи параболічної форми.

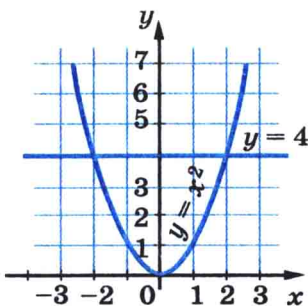
Функція $y = x^2$ — найпростіша із квадратичних функцій. Приклади інших квадратичних функцій:

$$y = x^2 + 1, y = x^2 - 3, y = -x^2.$$

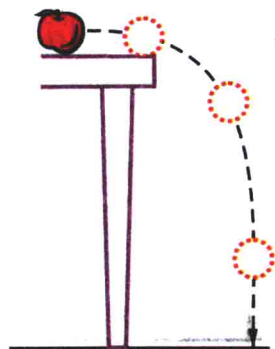
Кожне значення функції $y = x^2 + 1$ на одиницю більше за відповідне значення функції $y = x^2$. Тому графік функції — така сама парабола, тільки зміщена вгору на 1 одиницю (мал. 35).

Спробуйте побудувати графіки функцій:

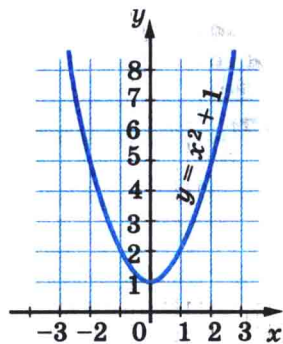
$$y = x^2 - 1, y = -x^2, y = 2x^2.$$



Мал. 33



Мал. 34



Мал. 35

Перевірте себе

1. Як називають лінію, що є графіком функції $y = x^2$?
2. Назвіть основні елементи параболи.
3. Укажіть основні властивості функції $y = x^2$.
4. На яких проміжках функція $y = x^2$ зростає, на яких — спадає?



Виконаємо разом!

1. Побудуйте графік залежності площі квадрата S від довжини його сторони a .

✓ Розв'язання. Якщо сторона квадрата a , то його площа $S = a^2$. Це та сама функція $y = x^2$, тільки позначена буквами a і S . Тому такими самими буквами слід позначити і координатні осі. Оскільки довжина сторони квадрата може

набувати тільки додатних значень, то область визначення розглядуваної функції — множина додатних чисел. Її графік — на малюнку 36.

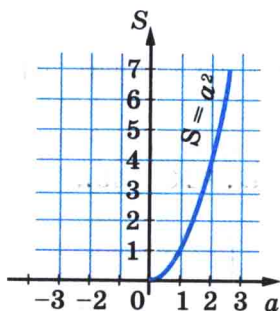
2. Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 + 2x - 3 = 0$.

✓ Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

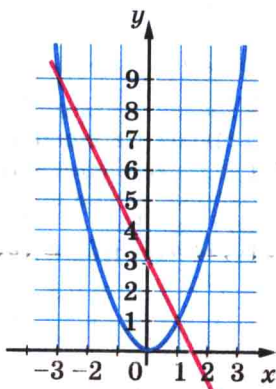
$$x^2 = 3 - 2x.$$

Водній системі координат побудуємо графіки функцій $y = x^2$ і $y = 3 - 2x$ (мал. 37). Перетинаються вони в точках, абсциси яких дорівнюють (можливо, наближено) 1 і -3 . Перевірка переконує, що це — точні корені.

Відповідь. $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.



Мал. 36



Мал. 37

Виконайте усно

575. При яких значеннях аргументу значення функції $y = x^2$ дорівнює: 4, 9, 16, 25, 0,01, 0,04, 0,36?
576. Чи при всіх відповідних значеннях аргументу значення функцій $y = x^2$ і $y = (-x)^2$ рівні? Чим різняться графіки цих функцій?
577. Як називають криві лінії, що є графіками функцій $y = x^2$ і $y = x^{-1}$?
578. Чи може функція $y = x^2$ набувати від'ємних значень?
579. Як, маючи графік функції $y = x^2$, побудувати графік функції $y = x^2 + 3$? А функції $y = -x^2$?

Рівень **A**

580. Заповніть таблицю для функції $y = x^2$:

x	-5	-4,5	-3	-1,5	-1	0	0,5	2	2,5	3,5	4	5
y												

Побудуйте графік.

581. Побудуйте графік функції $y = x^2$:

а) для $0 \leq x \leq 4$; б) для $-4 \leq x \leq 0$; в) для $-3 \leq x \leq 3$.

582. Побудуйте графік функції, яка виражає залежність площі квадрата від його периметра.

583. Чи проходить графік функції $y = x^2$ через точки: $A(5; 25)$; $B(-5; 25)$; $C(5; -25)$?

584. Які з точок належать графіку функції $y = x^2$:

$A(0,1; 0,01)$; $B(0,2; 0,4)$; $C(-10; 100)$;

$D(-1,1; 1,21)$; $E\left(1\frac{1}{2}; 2\frac{1}{4}\right)$; $F\left(-\frac{1}{2}; -\frac{4}{9}\right)$.

585. Користуючись графіком функції $y = x^2$ (мал. 38), знайдіть:

а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: $-2,6$; $-1,7$; $-0,9$; $0,9$; $1,4$;

б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 2 , 3 , 4 , 5 , 6 .

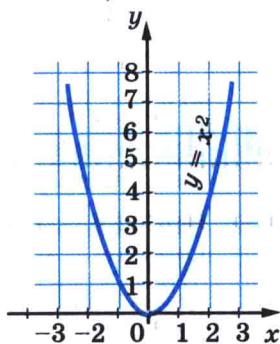
586. Користуючись графіком функції $y = x^2$, зображеним на малюнку 38, знайдіть:

а) значення функції, якщо значення x дорівнює: $1,2$; $3,1$; $2,3$;

б) значення x , при яких значення y дорівнюють: 4 ; 5 ; 6 ;

в) цілі значення x , при яких значення функції менші від 5 ;

г) значення аргументу, при яких значення функції — цілі числа, не більші від 7 .




Мал. 38

587. Заповніть порожні клітинки таблиці:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2$							

Побудуйте графік функції $y = -x^2$.

588. Одна сторона прямокутника дорівнює x , а друга — вдвічі довша. Як залежить площа прямокутника від його меншої сторони?

 589. Як залежить площа S прямокутного рівнобедреного трикутника від довжини його катета a ? Заповніть таблицю:

a	1	2	3	4	5	6	7	8
S								


Рівень Б

590. У скількох точках перетинаються графіки функцій:

а) $y = x^2$ і $y = x + 2$; б) $y = x^2$ і $y = -2x + 4$;

в) $y = x^2$ і $y = x^{-1}$; г) $y = x^2$ і $y = -3x$?

591. При яких значеннях аргументу функції $y = x^2$ і $y = 2x + 3$ набувають рівних значень?

 592. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = x^2$ і $y = 8x^{-1}$.

593. Дано графік функції:

1) $y = x^2$; 2) $y = -x^2$.

Чи перетинає кожний графік пряма:

а) $y = 1$; б) $y = -1$; в) $y = 8$;

г) $y = -8$; ґ) $y = 1000$; д) $y = -1000$?


Якщо перетинає, то в якій точці?

594. Доведіть, що кожна пряма, паралельна осі y , перетинає графік функції $y = x^2$. Чи кожна пряма, паралельна осі x , перетинає графік цієї функції?

595. При яких значеннях x значення функції $y = x^2$ менші від 9? А при яких — більші за 9?
596. Знайдіть значення c , при яких графіки функцій $y = x^2$ і $y = c$ перетинаються в точці з абсцисою 5. Яка ордината цієї точки? Знайдіть координати другої точки перетину цих графіків.
597. На якому проміжку функція $y = x^2$ зростає швидше: коли x змінюється від 1 до 2, чи — від 3 до 4?
598. Чим графіки функцій $y = x^2$ і $y = |x|$ подібні і чим вони відрізняються? Побудуйте ці графіки в одній системі координат.
599. Побудуйте графік залежності площі круга від довжини його радіуса.
600. Чи має розв'язки рівняння:
- а) $x^2 = -\frac{1}{3}x - 1$; б) $x^2 + 3 = x$; в) $\frac{4}{x} = x^2$?
601. Розв'яжіть графічним способом рівняння:
- а) $x^2 = x + 2$; б) $x^2 = 3x - 2$; в) $\frac{1}{x} - x^2 = 0$;
- г) $x^2 = \frac{8}{x}$; г) $x^2 - x = 6$; д) $x^2 + 2x - 3 = 0$.
602. Складіть і розв'яжіть графічно рівняння, яке мало би:
- а) один розв'язок у I кварталі;
 б) один розв'язок у II кварталі;
 в) один розв'язок у III кварталі;
 г) один розв'язок у IV кварталі.
602. Складіть і розв'яжіть графічно рівняння, яке мало би:
- а) один розв'язок у I кварталі та один — у II кварталі;
 б) один розв'язок у I кварталі та один — у III кварталі;
 в) один розв'язок у II кварталі та один — у IV кварталі, які були б симетричні відносно початку координат;
 г) один розв'язок у I кварталі та один — у III кварталі, які були б симетричні відносно початку координат.
- 604*. Складіть і розв'яжіть графічно рівняння, яке мало б корені:
- а) $x_1 = 0, x_2 = 2$; б) $x_1 = -1, x_2 = 1$; в) $x = 4$;
 г) $x_1 = -3, x_2 = 0$; г) $x = 9$; д) $x_1 = -1, x_2 = 2$.

605*. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $x^2 = 2|x|$; б) $x^2 = \frac{1}{|x|}$.

 **606*.** Побудуйте графік функції, заданої формулою:

а) $y = x^2 + 2$; б) $y = 3 - x^2$; в) $y = (x + 1)^2$.

607*. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $x^2 = 2 - x^2$; б) $x^2 - 1 = \frac{6}{x}$; в) $(x - 3)^2 = x - 1$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

608. Запишіть у стандартному вигляді число:

а) 47 000 000; б) 308 000 000; в) 0,000000039;
 г) 0,00000407; ґ) $803 \cdot 10^9$; д) $0,067 \cdot 10^7$;
 е) $3,7 \cdot 100^5$; є) $0,42 \cdot 10^{-7}$; ж) 2000^5 .

609. Назвіть порядок числа:

а) $2,3 \cdot 10^8$; б) $7,8 \cdot 10^{-12}$.

610. Спростіть вираз:

а) $2a^2 + 3 - ((a^2 - 5ab) - (7 - 3ab))$;
 б) $-(1 - 6xy) + (7 + x^4 - (4xy + 6 - 2x^4))$;
 в) $4a^3 + b^3 - (a^3 - 5ab + (3a^3 - (3b^3 + 4ab - a^3)))$.

611. Доведіть, що для будь-якого натурального n значення дробу є натуральним числом:

а) $\frac{6^n - 1}{5}$; б) $\frac{10^n + 5}{3}$; в) $\frac{10^n - 1}{9}$;
 г) $\frac{3^{4n} + 4}{5}$; ґ) $\frac{7^{4n} - 1}{10}$; д) $\frac{9^{2n-1} + 1}{10}$.

612. При якому значенні x :

а) значення виразу $|x - 5| + 9$ найменше;
 б) значення виразу $13 - |2x + 3|$ найбільше?

613. Розв'яжіть рівняння:

а) $|x - 5| = 8$; б) $|2x - 3| = 2,5$; в) $|x - 3| = x$.

§14. КВАДРАТНІ КОРЕНІ



Рівняння $x^2 = 9$ має два розв'язки: 3 і -3 . Говорять, що 3 і -3 — квадратні корені з числа 9.

► **Квадратним коренем з числа a називають число, квадрат якого дорівнює a .**

Приклади. Квадратними коренями з числа:

а) $1600 \in 40$ і -40 , тому що $40^2 = 1600$ і $(-40)^2 = 1600$;

б) $0,49 \in 0,7$ і $-0,7$, тому що $0,7^2 = 0,49$ і $(-0,7)^2 = 0,49$.

Оскільки серед відомих вам чисел немає такого, квадрат якого дорівнював би від'ємному числу, то **квадратний корінь з від'ємного числа не існує**.

Квадратний корінь з числа 0 дорівнює нулю. Квадратний корінь з додатного числа має два значення: одне з них додатне, інше — протилежне йому від'ємне число.

► **Невід'ємне значення квадратного кореня називають арифметичним значенням цього кореня.**

Арифметичне значення квадратного кореня з числа a позначають символом \sqrt{a} . Наприклад,

$$\sqrt{9} = 3, \sqrt{1600} = 40, \sqrt{0,49} = 0,7, \sqrt{0} = 0.$$

З а у в а ж е н н я. Символом \sqrt{a} позначають тільки арифметичне значення квадратного кореня з числа a , хоч і читають його коротше: «квадратний корінь з числа a ».

► **Обчислення арифметичного значення квадратного кореня називають добуванням квадратного кореня.**

З невеликих чисел, що є точними квадратами натуральних чисел, добувати квадратні корені бажано усно.

a	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
\sqrt{a}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Квадратні корені з більших натуральних чисел можна знаходити, користуючись таблицею квадратів (див. 2-й роз'яз). Наприклад, $\sqrt{5329} = 73$, $\sqrt{1000} \approx 32$.

Користуючись калькулятором, можна добувати квадратні корені з більшою точністю. Наприклад, щоб добути квадратний корінь з 1000, набираємо це число, після чого натискаємо клавіш « $\sqrt{\quad}$ ». На екрані висвітиться число 31,622776. Отже, $\sqrt{1000} \approx 31,622776$.

Якщо таким способом знайти значення $\sqrt{0,0035}$, то деякі калькулятори висвітять два числа: 5,9160797 і -2. Число -2 тут показує порядок шуканого значення, записаного в стандартному вигляді. Отже,

$$\sqrt{0,0035} \approx 5,9160797 \cdot 10^{-2} = 0,059160797.$$



Хочете знати ще більше?

Добувати квадратні корені з натуральних чисел вавилонські вчені вміли ще 4 тис. років тому. Вони склали таблицю квадратів багатьох натуральних чисел і, користуючись нею, знаходили квадратні корені з чисел, які були в тій таблиці. Якщо число m не було точним квадратом натурального числа, то вони шукали найближче наближене значення a квадратного кореня з m , подавали число m у вигляді $m = a^2 + b$ і застосовували правило, яке тепер можна записати у вигляді формули

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}.$$

Наприклад, якщо $m = 108$, то

$$\sqrt{108} = \sqrt{10^2 + 8} = 10 + \frac{8}{2 \cdot 10} = 10,4.$$

Перевірка. $10,4^2 = 108,16$.

Таке правило добування квадратних коренів знали і вчені Стародавньої Греції.

Відомі й інші алгоритми добування квадратних коренів, але тепер це найзручніше робити, користуючись калькулятором.

Перевірте себе

1. Що таке квадратний корінь з числа a ?
2. Скільки існує різних квадратних коренів з додатного числа a ? А з числа 0?
3. Що таке арифметичне значення квадратного кореня з числа a ?
4. Скільки існує арифметичних значень квадратних коренів з додатного числа a ? А з числа 0?
5. Як читають вираз: $\sqrt{0,9}$; $\sqrt{a^2+b^2}$?

✓ Виконаємо разом!

1. Покажіть, що 28 — арифметичне значення квадратного кореня із 784.

✓ Розв'язання. $28^2 = 784$; 28 — число додатне, тому $\sqrt{784} = 28$.

2. Чи є число $\frac{1}{7}$ квадратним коренем з числа $\frac{1}{49}$? А число $-\frac{1}{7}$?

✓ Розв'язання. $\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$, $\left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$.

Відповідь. Числа $\frac{1}{7}$ і $-\frac{1}{7}$ — квадратні корені з числа $\frac{1}{49}$.

3. Обчисліть $2,5\sqrt{64} - 3\sqrt{0,64}$.

✓ Розв'язання. $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{0,64} = 0,8$. Тому

$$2,5\sqrt{64} - 3\sqrt{0,64} = 2,5 \cdot 8 - 3 \cdot 0,8 = 20 - 2,4 = 17,6.$$

Відповідь. 17,6.

4. Розв'яжіть рівняння: а) $\sqrt{10x+9} = 7$; б) $\sqrt{x^2-9} = 4$.

✓ Розв'язання.

а) За означенням квадратного кореня, $7^2 = 10x + 9$, тоді $10x + 9 = 49$, $10x = 40$, $x = 4$;

б) $4^2 = x^2 - 9$, $x^2 - 9 - 16 = 0$, $x^2 - 25 = 0$, $(x - 5)(x + 5) = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = -5$.

Відповідь. а) $x = 4$; б) $x_1 = 5$, $x_2 = -5$.

Виконайте усно

614. Обчисліть:

а) $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{90000}$;

б) $\sqrt{0,01}$, $\sqrt{0,04}$, $\sqrt{0,09}$, $\sqrt{0,16}$, $\sqrt{0,0081}$;

в) $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{\frac{25}{36}}$, $\sqrt{\frac{16}{9}}$.

615. Знайдіть усі квадратні корені з числа:

$25, 36, 49, 64, \frac{4}{25}, \frac{16}{81}, 3^2, 7^2, 4,2^2, \sqrt{81}, \sqrt{16}$.

616. Знайдіть арифметичний квадратний корінь з числа:

$9, 100, 400, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}, 3^2, (-4)^2$.

Рівень **A**

617. Покажіть, що 8 — квадратний корінь із числа 64. Чи існують інші квадратні корені з числа 64?



618. Покажіть, що:

а) 5,4 — квадратний корінь з числа 29,16;

б) 0,99 — квадратний корінь з числа 0,9801.

619. Знайдіть від'ємні значення квадратних коренів з чисел 29,16 і 0,9801.

620. Чи є число -37 арифметичним значенням квадратного кореня a числа 1369? А число 37?

Обчисліть значення виразу (621—630).



621. а) $\sqrt{169}$; б) $\sqrt{256}$; в) $\sqrt{324}$; г) $\sqrt{361}$;

г) $\sqrt{400}$; д) $\sqrt{900}$; е) $\sqrt{2500}$; є) $\sqrt{3600}$.



622. а) $\sqrt{0,04}$; б) $\sqrt{0,09}$; в) $\sqrt{0,16}$; г) $\sqrt{0,64}$;

г) $\sqrt{1,21}$; д) $\sqrt{1,44}$; е) $\sqrt{2,89}$; є) $\sqrt{3,24}$.

623. а) $\sqrt{121}$; б) $\sqrt{196}$; в) $\sqrt{225}$; г) $\sqrt{625}$;

г) $\sqrt{100}$; д) $\sqrt{10\,000}$; е) $\sqrt{1600}$; є) $\sqrt{2500}$.

624. а) $\sqrt{0,01}$; б) $\sqrt{0,49}$; в) $\sqrt{1,44}$; г) $\sqrt{1,69}$;
 р) $\sqrt{4,84}$; д) $\sqrt{2,25}$; е) $\sqrt{0,0004}$; є) $\sqrt{0,0036}$.

625. а) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; б) $\sqrt{\frac{9}{16}}$; в) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; г) $\sqrt{\frac{25}{49}}$;
 р) $2 \cdot \sqrt{49}$; д) $4 \cdot \sqrt{64}$; е) $7 \cdot \sqrt{100}$; є) $5 \cdot \sqrt{144}$.

626. а) $\sqrt{\frac{1}{64}}$; б) $\sqrt{\frac{9}{25}}$; в) $\sqrt{\frac{25}{36}}$; г) $\sqrt{\frac{4}{49}}$;
 р) $16 : \sqrt{16}$; д) $25 : \sqrt{25}$; е) $90 : \sqrt{81}$.

627. а) $-5 \cdot \sqrt{36}$; б) $-4,7 \cdot \sqrt{0}$; в) $0 \cdot \sqrt{47}$;
 г) $\frac{2}{3} \sqrt{81}$; д) $\frac{1}{5} \sqrt{225}$; є) $-\frac{3}{4} \sqrt{196}$.

628. а) $\sqrt{25} + \sqrt{49}$; б) $8 + \sqrt{16}$; в) $\sqrt{36} - 4$;
 г) $5 \cdot \sqrt{36} + \sqrt{16}$; р) $\sqrt{49} - 7 \cdot \sqrt{25}$; д) $3 \cdot \sqrt{16} - 2 \cdot \sqrt{36}$.

629. а) $3 \cdot \sqrt{0,01} + \sqrt{0,09}$; б) $\sqrt{0,04} - 0,5 \cdot \sqrt{1}$;
 в) $\sqrt{2,25} - \frac{1}{7} \sqrt{1,96}$; г) $2\sqrt{0,16} + \sqrt{1,44}$.

630. а) $\sqrt{36} \cdot \sqrt{25}$; б) $-\sqrt{0,49} \cdot \sqrt{49}$;
 в) $\sqrt{81} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{16}$; г) $\sqrt{64} \cdot \sqrt{0,25}$.

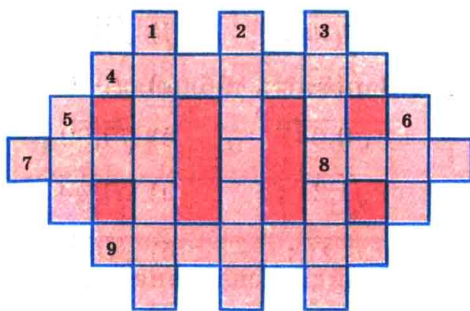
631. Розв'яжіть кросворд (мал. 39).

По горизонталі:

4. Давньогрецький математик. 7. Елемент системи координат. 8. Основна думка. 9. Компонент дії додавання.

По вертикалі:

1. Квадрат числа 1000. 2. Знак $\sqrt{\quad}$. 3. Латинська назва многочлена. 5. Четверте просте число. 6. Латинська буква.



Мал. 39

Користуючись таблицею квадратів, обчисліть значення виразу (632—637).

632. а) $\sqrt{529}$; б) $\sqrt{729}$; в) $\sqrt{841}$; г) $\sqrt{961}$.

633. а) $\sqrt{1089}$; б) $\sqrt{2601}$; в) $\sqrt{2916}$; г) $\sqrt{3364}$.

634. а) $-\sqrt{5041}$; б) $-\sqrt{7396}$; в) $-\sqrt{8464}$; г) $\sqrt{5776}$.

635. а) $-\sqrt{48\,400}$; б) $-32,25 \cdot \sqrt{0}$; в) $24\sqrt{325 \cdot 0}$.

636. а) $169 : \sqrt{169}$; б) $576 : \sqrt{576}$; в) $24 : \sqrt{144}$.

637. а) $\frac{2}{3}\sqrt{36}$; б) $\frac{3}{4}\sqrt{1600}$; в) $-\frac{2}{5}\sqrt{1225}$.

638. Чи правильна рівність:

а) $\sqrt{121} = -11$; б) $\sqrt{47^2} = 47$; в) $\sqrt{(-12)^2} = -12$?

639. Користуючись таблицею квадратів, знайдіть наближене значення виразу:

а) $\sqrt{624}$; б) $\sqrt{840}$; в) $\sqrt{5775}$; г) $-\sqrt{6725}$.

Користуючись калькулятором, знайдіть наближене значення виразу (640—641).

640. а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{10}$.

641. а) $\sqrt{37}$; б) $\sqrt{3,7}$; в) $\sqrt{30,7}$; г) $\sqrt{54,76}$.

642. Чи має зміст вираз:

а) $\sqrt{48}$; б) $\sqrt{-49}$; в) $-\sqrt{64}$; г) $\sqrt{(-5)^2}$;

г) $\sqrt{(-4)^3}$; д) $\sqrt{8 \cdot (-4)}$; е) $-\sqrt{-17}$; є) $\sqrt{(-6) \cdot (-12)}$?

643. Заповніть таблицю:

x	0	1	4	9	16	25	36
\sqrt{x}							

644. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt{2x+3}$, якщо $x = 11$; $x = -1$; $x = 83$;

б) $\sqrt{14-t}$, якщо $t = 5$; $t = -2$; $t = 14$;

в) $\sqrt{a+2c}$, якщо $a = 6$ і $c = 5$; $a = 0$ і $c = 8$.

645. Знайдіть сторону квадрата (у сантиметрах), площа якого дорівнює:

а) 64 см^2 ;

б) 25 дм^2 ;

в) $0,36 \text{ дм}^2$;

г) 16 м^2 ;

р) $0,49 \text{ м}^2$;

д) $6,25 \text{ м}^2$.

Рівень **Б**

646. Заповніть таблицю:

a	0	$\frac{1}{9}$				49	144		
\sqrt{a}			$\frac{1}{2}$	1	4			15	16

Обчисліть (647—648).

647. а) $\sqrt{\frac{121}{64}}$; б) $\sqrt{\frac{225}{81}}$; в) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; г) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$;

р) $\sqrt{11\frac{1}{9}}$; д) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$; е) $\sqrt{6\frac{19}{25}}$; є) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$.

648. а) $\sqrt{0,0001}$; б) $\sqrt{0,0025}$; в) $\sqrt{0,0081}$; г) $\sqrt{0,0169}$;

р) $\sqrt{10,24}$; д) $\sqrt{10,89}$; е) $\sqrt{12,25}$; є) $\sqrt{98,01}$.

Обчисліть значення виразу (649—652).

649. а) $\sqrt{225} - \sqrt{196}$; б) $\sqrt{676} + \sqrt{196}$;

в) $\sqrt{2025} + \sqrt{2704}$; г) $\sqrt{1681} - \sqrt{5929}$.

650. а) $2\sqrt{256} + 3\sqrt{169}$; б) $4\sqrt{225} - 3\sqrt{169}$;

в) $0,5\sqrt{1936} - 0,1\sqrt{256}$; г) $2,5\sqrt{676} + 1,2\sqrt{625}$.

651. а) $\frac{2}{3}\sqrt{784} - \frac{3}{4}\sqrt{676}$; б) $\frac{3}{5}\sqrt{3025} - 29\sqrt{0,01}$;

в) $-\frac{1}{2}\sqrt{1156} + 17\sqrt{0,04}$; г) $-\sqrt{7056} - 380\sqrt{0,25}$.

- 652.** а) $\sqrt{1296} - 0,2\sqrt{2025}$; б) $0,4\sqrt{1225} + \sqrt{256}$;
 в) $5,4 : \sqrt{3,24} - \frac{1}{3}\sqrt{144}$; г) $\frac{1}{4}\sqrt{576} + \sqrt{1,96} : 0,35$.

653. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt{a+b}$, якщо $a = 102$, $b = 19$; $a = -4$, $b = 85$;

$a = 1,21$, $b = \frac{3}{4}$;

б) $\sqrt{2x+y}$, якщо $x = 32$, $y = 0$; $x = 17$, $y = -18$; $x = \frac{1}{8}$, $y = 2$.

Знайдіть наближене значення виразу (654—655).

- 654.** а) $27\sqrt{321} - 15\sqrt{105}$; б) $32\sqrt{635} + 15\sqrt{483}$;
 в) $(\sqrt{353} - \sqrt{187}) : 12$; г) $(\sqrt{879} + \sqrt{1125}) \cdot 0,5$.

- 655.** а) $34 : \sqrt{127} + 127$; б) $85 : \sqrt{325} - 12$;
 в) $0,24 : \sqrt{0,15} + 2,4$; г) $1,37 : \sqrt{0,2} - 73,8$

- 656.** Знайдіть число, квадратний корінь з якого дорівнює:
 а) 48; б) -37; в) 0,07; г) -0,0004.

657. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$, якщо $x = 3,5$;

б) $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$, якщо $x = -2,8$;

в) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1}$, якщо $x = 0,25$.

658. Чи існує значення змінної x , при якому:

а) $\sqrt{x} = 4$; б) $\sqrt{x} = 0$; в) $\sqrt{x} = -2$; г) $5 + \sqrt{x} = 0$;

г) $\sqrt{x} = 100$; д) $\sqrt{x} = 360$; е) $\sqrt{x-3} = 5$; е) $\sqrt{-x} = 2$?

Розв'яжіть рівняння (659—662).

659. а) $\sqrt{x} = 7$; б) $3 - \sqrt{x} = 0$; в) $2 \cdot \sqrt{x} = 12$;

г) $5\sqrt{y} = 10$; г) $-3 + \sqrt{y} = 0$; д) $z\sqrt{z} = 0$.

- 660.** а) $\sqrt{x+3} = 5$; б) $\sqrt{11-y} = 7$; в) $\sqrt{2+x} = -3$;

г) $\sqrt{1+x^2} = 1$; г) $\sqrt{5x-1} = 3$; д) $1+\sqrt{1-x} = 0$.

661. а) $\sqrt{x+2} = 3$; б) $\sqrt{x-12} = 8$; в) $\frac{36}{\sqrt{x-5}} = 4$;

г) $\frac{15}{\sqrt{x-3}} = 3$; г) $\sqrt{14+5x} = 8$; д) $\sqrt{6-\sqrt{x}} = 3$.

662. а) $\sqrt{\sqrt{x+5}} = 4$; б) $\sqrt{x^2+20} = 6$; в) $\sqrt{58-x^2} = 7$;

г) $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}} = 2$; г) $\sqrt{7+\sqrt{6-\sqrt{x}}} = 3$.

663. Заповніть таблицю:

x	0	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1
\sqrt{x}											

Позначте точки з відповідними координатами на координатній площині.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

664. Подайте многочлен у вигляді степеня:

а) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$; б) $8y^3 - 36y^2 + 54y - 27$.

665. Обчисліть значення виразу:

а) $(3x - 7y)^2 - (7x - 3y)^2$, якщо $x = 2,8$, $y = 2,2$;

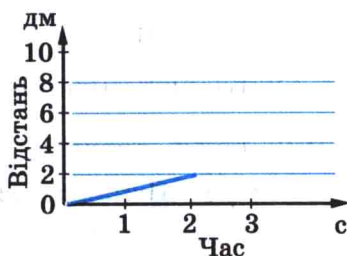
б) $(3x - 4y)^2 + (4x + 3y)^2$, якщо $x = 1,8$, $y = 2,6$.

666. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:

а) $(x + 5)(x^2 - 2x - 3) - (5x + x^2)(x - 2) + 3(x + 5)$;

б) $(2x^2 - 3x + 6)(x + 4) - (x^2 + 4x + 3)(2x - 3)$.

667. На малюнку 40 зображено графік руху жука, який повзе прямолінійно і рівномірно. За який час він подолає відстань 6 дм, рухаючись з тією самою швидкістю?



Мал. 40

§15. ДІЙСНІ ЧИСЛА



Відомі вам досі числа — цілі й дробові, додатні й від’ємні — становлять множину *раціональних чисел*. Раціональними їх називають тому, що кожне з них можна записати у вигляді частки, відношення двох цілих чисел, а слово «відношення» латинською мовою — *ratio*.

Спробуємо записати раціональні числа $\frac{9}{8}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{4}{11}$ у вигляді десяткових дробів. Для цього їх чисельники поділимо на знаменники.

$$\text{Отже, } \frac{9}{8} = 1,125, \quad \frac{7}{6} = 1,16666\dots, \quad \frac{4}{11} = 0,363636\dots$$

У двох останніх прикладах ділення можна продовжувати без кінця (чому?). Утворені частки — нескінченні десяткові дроби, цифри яких періодично повторюються. Це *нескінченні періодичні десяткові дроби*.

Нескінченні періодичні десяткові дроби записують коротше:

$$0,363636\dots = (0,36); \quad 1,166666\dots = 1,1(6).$$

Цифру або групу цифр, які повторюються, називають *періодом* періодичного десяткового дробу.

Будь-який десятковий дріб і навіть ціле число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу, якщо дописати до його дробової частини безліч нулів:

$$1,125 = 1,125000\dots, \quad 18 = 18,000\dots, \quad -3,7 = -3,7000\dots$$

Можна довести, що:

кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу; кожний нескінченний періодичний десятковий дріб зображає деяке раціональне число.

Чи існують числа, відмінні від раціональних? Існують. Наприклад, обчислюючи значення $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, π , дістають нескінченні неперіодичні десяткові дроби:

$$\sqrt{2} = 1,4142135\dots, \quad \sqrt{10} = 3,1622776\dots, \quad \pi = 3,1415926\dots$$

Ці числа — нерациональні.

Числа, які зображаються нескінченними неперіодичними десятковими дробами, називають *іраціональними*. Іраціональний — значить не раціональний (латинське *ir* відповідає заперечувальній частці *ne*).

♦ Іраціональні числа разом з раціональними утворюють множину дійсних чисел.

Множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел позначають відповідно буквами N , Z , Q і R . Кожна з цих множин є підмножиною (частиною) наступної множини (мал. 41).

Кожне натуральне число є водночас і цілим, і раціональним, і дійсним. Кожне ціле число є також раціональним і дійсним. Наприклад, усі числа

12 , -3 , $\frac{2}{7}$, $\sqrt{10}$ — дійсні, три перших — раціональні, два перших — цілі і тільки число 12 — натуральне.

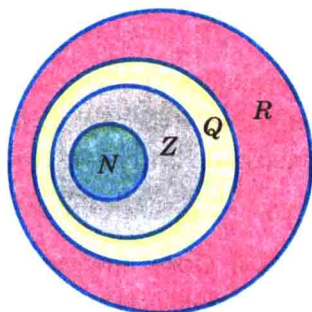
Дійсні числа, записані у вигляді нескінченних десяткових дробів, порівнюють за тим самим правилом, що й десяткові дробі. Наприклад, число $3,131313\dots$ менше від $4,0111\dots$, і від $3,25$, і від π , але більше від $3,1222\dots$, від -2 , від 0 .

Дійсні числа можна додавати, віднімати, множити, підносити до степеня і ділити (на числа, відмінні від 0). Для додавання і множення їх справедливі переставний, сполучений і розподільний закони.

Наприклад,

$$\begin{aligned} \sqrt{2} + \pi &= \pi + \sqrt{2}, & (3 + \pi) + \sqrt{5} &= 3 + (\pi + \sqrt{5}), \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}, & (\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}) \cdot \sqrt{8} &= \sqrt{5} \cdot (\sqrt{20} \cdot \sqrt{8}), \\ \pi \cdot (1,020202\dots + 5,12345\dots) &= \\ &= \pi \cdot 1,020202\dots + \pi \cdot 5,12345\dots \end{aligned}$$

Усі правила дій над виразами зі змінними, доведені раніше для раціональних значень змінних, справедливі і для довільних дійсних значень цих змінних. Зокрема, для будь-яких дійсних чисел правильні відомі вам властивості пропорцій, дробів, степенів.



Мал. 41

Розв'язуючи прикладні задачі, ірраціональні числа звичайно округлюють, відкидаючи їх нескінченні «хвости» десяткових знаків. Наприклад, якщо треба знайти значення суми чисел π і $\sqrt{2}$ з точністю до тисячних, пишуть:

$$\pi + \sqrt{2} \approx 3,1416 + 1,4142 \approx 4,5556.$$



Хочете знати ще більше?

Ірраціональність числа $\sqrt{2}$ можна довести так. Припустимо, що число $\sqrt{2}$ раціональне, тобто дорівнює деякому нескоротному звичайному дроби $\frac{m}{n}$. Тоді: $2n^2 = m^2$, тобто число m^2 , а отже, і m — парне: $m = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$. Тоді, підставивши $m = 2k$ у рівність $2n^2 = m^2$, одержимо $2n^2 = 4k^2$, $n^2 = 2k^2$, число n також парне. Виходить, що дріб $\frac{m}{n}$ можна скоротити на 2. А припускалось, що цей дріб нескоротний. Отже, припущення приводить до протиріччя, тому число $\sqrt{2}$ не є раціональним.

Доведіть таким способом, що числа $\sqrt{3}$ і $\sqrt{5}$ — ірраціональні.

Перевірте себе

1. Які числа називають дійсними?
2. Які числа називають раціональними, які — ірраціональними?
3. Наведіть приклади ірраціональних чисел.
4. Чи бувають ірраціональні числа від'ємними?
5. Чи є число 0 цілим, раціональним, дійсним?
6. Які дії можна виконувати над ірраціональними числами? А над дійсними числами?
7. Чи завжди сума, різниця, добуток або частка двох ірраціональних чисел є числом ірраціональним?



Виконаємо разом!

1. Подайте у вигляді десяткового дроби: а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{5}{11}$; в) $\frac{13}{6}$.

✓ **Розв'язання.** а) Щоб перетворити звичайний дріб у десятковий, потрібно чисельник даного дроби поділити на його знаменник. Маємо:

$$\text{а) } \frac{3}{8} = 0,375; \quad \text{б) } \frac{5}{11} = 0,4545\dots = 0,(\overline{45});$$

$$\text{в) } \frac{13}{6} = 2,1666\dots = 2,1(\overline{6}).$$

В і д п о в і д ь: а) 0,375; б) 0,(45); в) 2,1(6).

2. Порівняйте числа:

$$\text{а) } -\frac{4}{3} \text{ і } -1,33; \quad \text{б) } -\frac{4}{3} \text{ і } -1,34; \quad \text{в) } -\frac{4}{3} \text{ і } -1,333\dots$$

✓ **Р о з в ' я з а н н я.** а) Поділивши чисельник даного дробу $\frac{4}{3}$ на знаменник, одержимо 1,333... . Число 1,333...

більше від 1,33. Тому $-1,333\dots < -1,33$, або $-\frac{4}{3} < -1,33$;

$$\text{б) } 1,333\dots < 1,34, \text{ отже, } -\frac{4}{3} > -1,34;$$

$$\text{в) } \frac{4}{3} = 1,333\dots, \text{ отже, } -\frac{4}{3} = -1,333\dots$$

Виконайте усно

668. Які з чисел 35, -128, π , $\sqrt{25}$, $\sqrt{10}$, $-\sqrt{0,04}$ — раціональні, які — ірраціональні, які — дійсні?

669. Яке з тверджень правильне:

- а) кожне натуральне число є дійсним;
- б) кожне ціле число є дійсним;
- в) кожне раціональне число є дійсним;
- г) кожне ірраціональне число є дійсним;
- г) не кожне дійсне число є раціональним;
- д) не кожне дійсне число є ірраціональним?

670. Укажіть правильні твердження:

- 2π — число дійсне, $-\pi$ — число ірраціональне,
- $1 + \pi$ — число ірраціональне, $\pi : 2\pi$ — число раціональне.

671. Чи правильні схеми на малюнках 42 і 43?



Мал. 42



Мал. 43

672. Чи правильно, що:

- а) $10 \in \mathbf{N}$; б) $11 \in \mathbf{Z}$; в) $12 \in \mathbf{Q}$; г) $13 \in \mathbf{R}$?

673. Який із записів правильний:

- а) $10,5 \in \mathbf{N}$; б) $10,6 \in \mathbf{Z}$; в) $10,7 \in \mathbf{Q}$; г) $10,8 \in \mathbf{R}$;
 р) $\sqrt{3} \in \mathbf{N}$; д) $\sqrt{4} \in \mathbf{Z}$; е) $\sqrt{5} \in \mathbf{Q}$; є) $\sqrt{6} \in \mathbf{R}$?

Рівень

A

674. Із наведених чисел випишіть — а) цілі, б) ірраціональні:

$$5, \frac{3}{4}, \sqrt{-4}, -32, \sqrt{3}, 0,7, -\sqrt{49}, \frac{12}{3}, 0, 7\frac{1}{2}, 2\sqrt{\frac{25}{4}},$$

$$-1,1111, \sqrt{3\frac{1}{16}}.$$

675. Які з чисел $-3,5$, $-\sqrt{39}$, 6 , $1,010010001$, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{7}$, $-\sqrt{1024}$, $5\frac{1}{3}$ є раціональними?

676. Чи є серед чисел 49 , $-1,21$, 1 , $-2,5\sqrt{100}$, 3 , 0 , $\sqrt{1000}$ а) натуральні; б) дійсні?

677. Яке з наведених чисел є ірраціональним: $\sqrt{17}$, $\sqrt{17,64}$,

$4\sqrt{3}$, $3\sqrt{4}$, $\sqrt{2\frac{7}{9}}$, $\sqrt{2\frac{8}{9}}$, $5+\sqrt{2}$, $-0,30033000333$, π ,
 -2π ?

678. Подайте у вигляді звичайного дробу:

а) 0,7; б) 0,53; в) 3; г) 1,25.

679. Подайте у вигляді десяткового дробу:

а) $\frac{9}{4}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{13}{25}$; г) $\frac{17}{16}$; д) $\frac{1}{125}$.

680. Подайте у вигляді нескінченного десяткового дробу:

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{16}{15}$; г) $\frac{38}{12}$; д) $\frac{1}{7}$.

681. Яке з чисел більше:

а) 0,3754 чи 1,2; б) 2,0379 чи 2,0401;
 в) 2,333... чи 2,327; г) 13,777... чи 12,888...?

Порівняйте числа (682—685).

682. а) $\frac{5}{6}$ і $\frac{6}{7}$; б) $\frac{8}{3}$ і $\frac{9}{4}$; в) $-\frac{3}{8}$ і $-\frac{4}{9}$.

683. а) $\frac{2}{3}$ і 0,66; б) $\frac{2}{3}$ і 0,67; в) $\frac{2}{3}$ і 0,666... .

684. а) $\sqrt{2}$ і 1,41; б) $\sqrt{2}$ і 1,42; в) $\sqrt{2}$ і 1,414141... .

685. а) π і 3,14; б) π і $\frac{27}{7}$; в) π і $\sqrt{10}$.

Рівень Б

686. Користуючись таблицями, обчисліть з точністю до тисячних:

а) $\frac{2}{3} + \sqrt{15}$; б) $4,13 - \sqrt{10}$; в) $\sqrt{23} + \pi$;

г) $\sqrt{35} \cdot \sqrt{10}$; д) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20}$; е) $\pi : \sqrt{5,7}$.

687. Користуючись калькулятором, обчисліть:

а) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$; б) $\sqrt{40} + \sqrt{90}$; в) $\pi + \sqrt{18}$;


г) $3 \cdot \sqrt{30} - \frac{2}{3}$; д) $\frac{2}{3} + 2\sqrt{3}$; е) $\pi \cdot \sqrt{10} - \frac{2}{7}$.

 **688.** Подайте у вигляді нескінченного десяткового дробу:

а) $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{2}{15}$; в) $\frac{4}{9}$; г) $5\frac{7}{18}$.

689. Яке з чисел більше:

а) 0,257 чи 0,26; б) $-3,0973$ чи $-3,098$;
в) 7,666... чи 7,67; г) $-0,0222...$ чи $-0,019$?

 **690.** Записи 0,(6) і 0,(58) означають нескінченні періодичні десяткові дроби 0,666... і 0,585858... . Яке з цих чисел більше? Знайдіть таке раціональне число, яке менше одного з них, але більше за друге.

691. Відомо, що числа a і b : 1) натуральні; 2) цілі; 3) раціональні. Яким буде в кожному з випадків 1) – 3) число:


а) $a + b$; б) $a - b$; в) ab ; г) $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)?

692. Раціональне чи ірраціональне число 2,001001001..., якщо група його цифр 001 нескінченно повторюється?


693. Раціональне чи ірраціональне число 2,010010001..., якщо після кожної його одиниці на один нуль більше, ніж перед нею?

694. Обчисліть з точністю до тисячних:

а) $0,5 + \sqrt{2}$; б) $\frac{1}{3} + \sqrt{10}$; в) $\pi + \sqrt{2}$;
г) $\sqrt{10} - 0,4$; г) $\pi - \sqrt{10}$; д) $\sqrt{2} \cdot \pi$;
е) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{2}$; е) $1 : \pi$; ж) $\pi : \sqrt{10}$.


 **695.** Користуючись калькулятором, обчисліть:

а) $3\sqrt{20}$; б) $\sqrt{37} - 1,5$; в) $5,74 - \sqrt{74}$;
г) $\sqrt{50} - \sqrt{30}$; г) $2\sqrt{13} + \sqrt{3}$; д) $\pi - \sqrt{37}$.

 **696.** Доведіть, що сума двох раціональних чисел — число раціональне.

697. Доведіть, що добуток двох раціональних чисел — число раціональне.

698. Чи правильно, що різниця двох будь-яких раціональних чисел є раціональним числом? А частка?

 **699.** Чи може сума двох ірраціональних чисел бути числом раціональним? Наведіть приклад.

700. Наведіть приклад двох ірраціональних чисел, добуток яких дорівнює раціональному числу.
701. Доведіть, що сума раціонального та ірраціонального чисел завжди є числом ірраціональним.
702. Доведіть, що ірраціональним є число:
а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{6}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

703. Спростіть вираз:

а) $(x+4)(2x^4 - x^3 + 3x^2)$; б) $(a^3 + a^2 + a + 1)(a - 1)$.

704. а) $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$; б) $(a^2 + ab - b^2)(a + b)$.

705. На скільки порядків число 342 000 000 більше за 4 000 000?

706. Виразіть:

а) $2,4 \cdot 10^3$ т у грамах; б) $6,23 \cdot 10^{12}$ кг у тоннах;

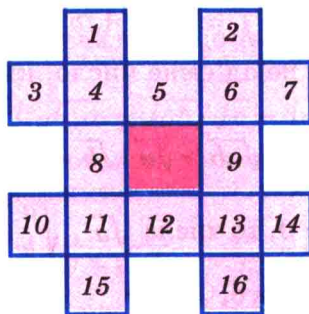
в) $5,4 \cdot 10^{-6}$ км у міліметрах; г) $3,8 \cdot 10^{-10}$ см у метрах.

707. Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел:

а) $8 \cdot 10^9$ і $4 \cdot 10^9$; б) $4,8 \cdot 10^7$ і $4 \cdot 10^6$;

в) $6 \cdot 10^{-5}$ і $3 \cdot 10^{-5}$; г) $4,5 \cdot 10^{-6}$ і $1,5 \cdot 10^{-7}$.

708. Перенесіть у зошит малюнок 44 і переставте числа так, щоб чотири суми — в двох горизонтальних і двох вертикальних рядах — стали рівними. Знайдіть найменшу з таких сум.



Мал. 44

§16. КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ З ДОБУТКУ, ДРОБУ, СТЕПЕНЯ



Арифметичний корінь із a — невід'ємне значення квадратного кореня з невід'ємного числа a . Тому для будь-якого невід'ємного числа a справджується тотожність $(\sqrt{a})^2 = a$.

Приклади. $(\sqrt{7})^2 = 7$, $(\sqrt{0,3})^2 = 0,3$, $(\sqrt{0})^2 = 0$.

Правильні й такі тотожності:

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ — для невід'ємних значень a і b .
2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ — для невід'ємного a і додатного b .
3. $\sqrt{a^{2k}} = a^k$ — для невід'ємного a і натурального k .

Доведемо ці тотожності.

1. Якщо a і b — довільні невід'ємні числа, то числа \sqrt{a} , \sqrt{b} , \sqrt{ab} і $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ також невід'ємні. Крім того,

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Отже, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ — невід'ємне число, квадрат якого дорівнює ab , тобто

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

2. Якщо $a \geq 0$ і $b > 0$, то числа \sqrt{a} , $\sqrt{\frac{a}{b}}$ і $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ невід'ємні, а \sqrt{b} — додатне. Крім того,

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Отже, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ — невід'ємне число, квадрат якого дорівнює $\frac{a}{b}$.

тобто

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

3. Якщо число a — невід'ємне, а k — натуральне, то числа a^k , a^{2k} і $\sqrt{a^{2k}}$ — невід'ємні. Крім того, $(a^k)^2 = a^{2k}$. Отже, a^k — невід'ємний квадратний корінь з a^{2k} , тобто

$$\sqrt{a^{2k}} = a^k.$$

Доведені три теореми коротко можна сформулювати так.

1. Корінь із добутку двох невід'ємних чисел дорівнює добутку коренів із цих чисел (теорема про корінь із добутку).

2. Корінь із дробу, чисельник якого невід'ємний, а знаменник додатний, дорівнює кореню з чисельника, поділеному на корінь із знаменника (теорема про корінь із дробу).

3. Корінь із степеня a^{2k} , в якому числа a — невід'ємне і k — натуральне, дорівнює a^k (теорема про корінь із степеня).

З а у в а ж е н н я. Тут під «коренем» розуміють тільки квадратний арифметичний корінь.

Теорему про корінь із добутку можна поширити на три і більше множників. Справді, якщо числа a , b і c — невід'ємні, то

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab) \cdot c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Якщо в доведених тотожностях поміняти місцями їх ліві й праві частини, одержимо:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ці тотожності показують, як можна множити і ділити корені. Наприклад,

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100} = 10, \quad \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3.$$

З теореми про корінь із степеня випливає, що $\sqrt{a^2} = a$, якщо $a \geq 0$. Якщо $a < 0$, то рівність $\sqrt{a^2} = a$, неправильна, оскільки число $\sqrt{a^2}$ невід'ємне і не може дорівнювати від'ємному числу a .

Рівність

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

правильна при кожному значенні a , оскільки число $|a|$ — невід'ємне і його квадрат дорівнює a^2 .

Приклади. $\sqrt{7^2} = 7$, $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.



Хочете знати ще більше?

У сформульованих вище теоремах ідеться тільки про найпростіші випадки перетворення арифметичних значень квадратних коренів: коли усі числа під коренями додатні або невід'ємні. Але нерідко доводиться мати справу і з такими виразами, в яких під знаком кореня — добуток чи частка двох від'ємних чисел. У таких випадках можна користуватися означенням квадратного кореня, арифметичного значення квадратного кореня тощо. Наприклад,

$$\sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6;$$

$$\sqrt{\frac{-4}{-9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3};$$

$$\sqrt{(-2)^4} = \sqrt{16} = 4.$$

З теореми 3 неважко одержати такий наслідок.

Якщо натуральне число k — парне, то для будь-яких значень a правильна тотожність

$$\sqrt{a^{2k}} = a^k.$$

Адже обидві частини цієї рівності — числа невід'ємні, їх квадрати — рівні.

Перевірте себе

1. Сформулюйте теорему про корінь з добутку.
2. Сформулюйте теорему про корінь з дробу.
3. Сформулюйте теорему про корінь зі степеня.
4. При яких значеннях змінної правильні тотожності

$$\sqrt{a^2} = a; \sqrt{a^2} = -a; \sqrt{a^2} = |a|; (\sqrt{a})^2 = a?$$

 **Виконаємо разом!**

Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt{49 \cdot 25}$; б) $\sqrt{9 \cdot 0,16}$; в) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$.

✓ Розв'язання.

а) $\sqrt{49 \cdot 25} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{25} = 7 \cdot 5 = 35$;

б) $\sqrt{9 \cdot 0,16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{0,16} = 3 \cdot 0,4 = 1,2$;

в) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$;

г) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{3}{12}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Відповідь. а) 35; б) 1,2; в) 6; г) $\frac{1}{2}$.

 **Виконайте усно**

Знайдіть значення виразу (709—712).

709. а) $\sqrt{25 \cdot 36}$; б) $\sqrt{18 \cdot 2}$; в) $\sqrt{10 \cdot 0,1}$.

710. а) $\sqrt{3 \cdot 0,03}$; б) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$; в) $\sqrt{0,2 \cdot 0,2}$.

711. а) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; в) $\sqrt{\frac{64}{81}}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}}$.

712. а) $\sqrt{2^2}$; б) $\sqrt{3^4}$; в) $\sqrt{(-3)^2}$; г) $\sqrt{0}$.

713. Знайдіть добуток чисел:

а) $\sqrt{30}$ і $\sqrt{30}$; б) $\sqrt{18}$ і $\sqrt{2}$.

714. Знайдіть значення x , якщо:

а) $x \cdot \sqrt{2} = 2$; б) $x \cdot \sqrt{7} = 7$; в) $x \cdot \sqrt{2} = 4$.

 **Рівень А**

Обчисліть значення виразу (715—722).

715. а) $\sqrt{64 \cdot 100}$; б) $\sqrt{49 \cdot 144}$; в) $\sqrt{25 \cdot 121}$;

$$\text{г) } \sqrt{36 \cdot 900}; \quad \text{г) } \sqrt{121 \cdot 64}; \quad \text{д) } \sqrt{900 \cdot 81}.$$

$$716. \text{ а) } \sqrt{0,01 \cdot 25}; \quad \text{б) } \sqrt{0,04 \cdot 144}; \quad \text{в) } \sqrt{0,25 \cdot 0,01};$$

$$\text{г) } \sqrt{0,16 \cdot 49}; \quad \text{г) } \sqrt{0,01 \cdot 0,04}; \quad \text{д) } \sqrt{0,16 \cdot 0,09}.$$

$$\text{717. а) } \sqrt{\frac{16}{25}}; \quad \text{б) } \sqrt{\frac{9}{144}}; \quad \text{в) } \sqrt{\frac{121}{144}}; \quad \text{г) } \sqrt{\frac{0,04}{0,49}}.$$

$$718. \text{ а) } \sqrt{2\frac{1}{4}}; \quad \text{б) } \sqrt{2\frac{7}{9}}; \quad \text{в) } \sqrt{3\frac{6}{25}}; \quad \text{г) } \sqrt{11\frac{1}{9}}.$$

$$719. \text{ а) } \sqrt{8 \cdot 50}; \quad \text{б) } \sqrt{40 \cdot 90}; \quad \text{в) } \sqrt{20 \cdot 45}; \quad \text{г) } \sqrt{7 \cdot 63};$$

$$\text{г) } \sqrt{72 \cdot 72}; \quad \text{д) } \sqrt{18 \cdot 98}; \quad \text{е) } \sqrt{2,5 \cdot 6,4}; \quad \text{є) } \sqrt{9,8 \cdot 7,2}.$$

$$\text{720. а) } \sqrt{10 \cdot 490}; \quad \text{б) } \sqrt{360 \cdot 40}; \quad \text{в) } \sqrt{7 \cdot 700}; \quad \text{г) } \sqrt{12 \cdot 48};$$

$$\text{г) } \sqrt{72 \cdot 32}; \quad \text{д) } \sqrt{80 \cdot 45}; \quad \text{е) } \sqrt{1,6 \cdot 90}; \quad \text{є) } \sqrt{6,4 \cdot 250}.$$

$$721. \text{ а) } \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 25}; \quad \text{б) } \sqrt{36 \cdot 225 \cdot 144}; \quad \text{в) } \sqrt{144 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 9};$$

$$\text{г) } \sqrt{64 \cdot 100 \cdot 9}; \quad \text{г) } \sqrt{25 \cdot 16 \cdot 81}; \quad \text{д) } \sqrt{1,69 \cdot 0,0001 \cdot 0,16}.$$

$$722. \text{ а) } \sqrt{2\frac{7}{9} \cdot \frac{1}{4}}; \quad \text{б) } \sqrt{5\frac{1}{16} \cdot 9}; \quad \text{в) } \sqrt{12\frac{1}{4} \cdot 10\frac{6}{25}};$$

$$\text{г) } \sqrt{\frac{9}{4} \cdot \frac{25}{49} \cdot \frac{81}{121}}; \quad \text{г) } \sqrt{\frac{8 \cdot 50 \cdot 49}{27 \cdot 81 \cdot 3}}; \quad \text{д) } \sqrt{\frac{16}{25} \cdot \frac{49}{36} \cdot \frac{64}{81}}.$$

Обчисліть значення добутку (723—727).

$$723. \text{ а) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{32}; \quad \text{б) } \sqrt{14} \cdot \sqrt{56}; \quad \text{в) } \sqrt{75} \cdot \sqrt{3};$$

$$\text{г) } \sqrt{11} \cdot \sqrt{44}; \quad \text{г) } \sqrt{15} \cdot \sqrt{60}; \quad \text{д) } \sqrt{135} \cdot \sqrt{15};$$

$$\text{е) } \sqrt{200} \cdot \sqrt{0,18}; \quad \text{е) } \sqrt{12,5} \cdot \sqrt{24,5}; \quad \text{ж) } \sqrt{3,2} \cdot \sqrt{80}.$$

$$\text{724. а) } \sqrt{50} \cdot \sqrt{8}; \quad \text{б) } \sqrt{3} \cdot \sqrt{12}; \quad \text{в) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{242};$$

$$\text{г) } \sqrt{11} \cdot \sqrt{99}; \quad \text{г) } \sqrt{37} \cdot \sqrt{3700}; \quad \text{д) } \sqrt{444} \cdot \sqrt{111};$$

$$\text{е) } \sqrt{1,2} \cdot \sqrt{120}; \quad \text{е) } \sqrt{40} \cdot \sqrt{62,5}; \quad \text{ж) } \sqrt{1,44} \cdot \sqrt{0,49}.$$

$$725. \text{ а) } \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{6}{25}}; \quad \text{б) } \sqrt{\frac{5}{9}} \cdot \sqrt{5}; \quad \text{в) } \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{6}.$$

726. а) $\sqrt{41} \cdot \sqrt{\frac{1}{41}}$; б) $\sqrt{3\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{1\frac{1}{5}}$; в) $\sqrt{3\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{8}{7}}$.

727. а) $\sqrt{1\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{1\frac{3}{13}}$; б) $\sqrt{1\frac{1}{16}} \cdot \sqrt{1\frac{8}{7}}$; в) $\sqrt{1\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{1\frac{3}{13}}$.

728. Користуючись таблицею квадратів, обчисліть:

а) $\sqrt{202500}$; б) $\sqrt{4840000}$; в) $\sqrt{33,64}$;

г) $-\sqrt{152100}$; р) $2\sqrt{230400}$; д) $\frac{1}{2}\sqrt{7290000}$.

Знайдіть значення частки (729—730).

729. а) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{50}}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{112}}$; в) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{108}}$; г) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}$.

730. а) $\frac{\sqrt{2,5}}{\sqrt{90}}$; б) $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{1,5}}$; в) $\frac{\sqrt{4,8}}{\sqrt{0,3}}$; г) $\frac{\sqrt{2,7}}{\sqrt{4,8}}$.

Обчисліть значення виразу (731—734).

731. а) $\sqrt{3^4}$; б) $\sqrt{975^2}$; в) $\sqrt{0,2^6}$; г) $\sqrt{1,2^4}$;

р) $5 \cdot \sqrt{12^2}$; д) $3 \cdot \sqrt{(-2)^8}$; е) $-0,4 \cdot \sqrt{(-10)^6}$; є) $-0,1 \cdot \sqrt{3^6}$.

732. а) $3 \cdot \sqrt{5^2}$; б) $-\sqrt{4^4}$; в) $4\sqrt{0,1^4}$; г) $-8\sqrt{0,2^4}$;

р) $\sqrt{(-5)^2}$; д) $\sqrt{(-3)^2}$; е) $-\sqrt{(-7)^2}$; є) $-2\sqrt{(-4)^2}$.

733. а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$; б) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{135} - \sqrt{24} \cdot \sqrt{6}$.

734. а) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{\frac{2}{27}}$; б) $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{9} - \sqrt{0,1} \cdot \sqrt{4}$.

Обчисліть найраціональнішим способом (735—737).

735. а) $\sqrt{20^2 - 16^2}$; б) $\sqrt{29^2 - 20^2}$; в) $\sqrt{17^2 - 8^2}$;

г) $\sqrt{25^2 - 24^2}$; р) $\sqrt{41^2 - 40^2}$; д) $\sqrt{50,5^2 - 49,5^2}$.

736. а) $\sqrt{100^2 - 96^2}$; б) $\sqrt{61^2 - 60^2}$; в) $\sqrt{37^2 - 12^2}$;

г) $\sqrt{6,8^2 - 3,2^2}$; р) $\sqrt{13^2 - 6,6^2}$; д) $\sqrt{3,73^2 - 2,52^2}$.

737. а) $\sqrt{660^2 + 880^2}$; б) $\sqrt{333^2 + 444^2}$; в) $\sqrt{666^2 + 888^2}$.

738. Гіпотенуза і катет прямокутного трикутника дорівнюють c і a . Знайдіть другий катет, якщо:

а) $c = 13$ см, $a = 12$ см;

б) $c = 8,2$ м, $a = 1,8$ м;

в) $c = 21,8$ дм, $a = 18,2$ дм; г) $c = 45,8$ км, $a = 44,2$ км.


Рівень Б

739. Обчисліть, розклавши підкореневий вираз на множники:

а) $\sqrt{640\,000}$; б) $\sqrt{6\,250\,000}$; в) $\sqrt{20\,736}$; г) $\sqrt{50\,625}$;

р) $\sqrt{30\,976}$; д) $\sqrt{86\,436}$; е) $\sqrt{213\,444}$; є) $\sqrt{104\,976}$.

Обчисліть значення виразу (740 – 741).

 740. а) $\sqrt{12 \cdot 27}$; б) $\sqrt{80 \cdot 45}$; в) $\sqrt{297 \cdot 33}$; г) $\sqrt{48 \cdot 768}$;

р) $\sqrt{250 \cdot 160}$; д) $\sqrt{600 \cdot 150}$; е) $\sqrt{243 \cdot 108}$; є) $\sqrt{125 \cdot 245}$.

741. а) $\sqrt{5 \frac{2}{5}} \cdot \sqrt{6 \frac{2}{3}}$; б) $\sqrt{4 \frac{9}{24}} \cdot \sqrt{1 \frac{23}{40}}$; в) $\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{1 \frac{1}{5}}$;

р) $\sqrt{3 \frac{5}{7}} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{\frac{9}{14}}$; г) $\sqrt{\frac{4}{15}} \cdot \sqrt{1 \frac{7}{8}} \cdot \sqrt{2 \frac{13}{18}}$;


д) $\sqrt{10 \frac{5}{7}} \cdot \sqrt{\frac{8}{11}} \cdot \sqrt{1 \frac{1}{21}}$.

742. При яких значеннях змінної правильна рівність:


а) $\sqrt{a^4} = a^2$; б) $\sqrt{a^6} = a^3$; в) $\sqrt{a^4} = a\sqrt{a^2}$?

743. Замініть вираз тотожно рівним йому, користуючись знаком модуля:

а) $(\sqrt{x})^2$; б) $5\sqrt{a^2}$; в) $b\sqrt{b^2}$; г) $-\sqrt{m^2}$.

 744. При яких значеннях змінної правильна рівність:

а) $\sqrt{x^2} = x$; б) $(\sqrt{a})^2 = a$; в) $m\sqrt{m^2} = m^2$?

 745. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{9n^2}$, якщо $n < 0$; б) $x\sqrt{x^2}$, якщо $x < 0$.

746. Замініть вираз тотожно рівним:

а) $(\sqrt{a-1})^2$; б) $\sqrt{(a-1)^2}$; в) $-\sqrt{(a-1)^2}$.

747. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{(-x)^2}$, якщо $x > 0$; б) $\sqrt{(x-1)^2}$, якщо $x < 1$;

в) $\sqrt{(a-b)^2}$, якщо $a < b$; г) $\sqrt{(a-b)^2}$, якщо $a > b$.

748. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt{4m^2}$, якщо $m = -3$; б) $\sqrt{(-4m)^2}$, якщо $m = -3$;

в) $\sqrt{\left(\frac{a}{a-1}\right)^4}$, якщо $a = 2$; г) $\sqrt{\left(\frac{a}{1-a}\right)^4}$, якщо $a = 2$.

749. Знайдіть значення виразу $\sqrt{b^2 - 4ac}$:

а) якщо $a = 3, b = 5, c = -2$;

б) якщо $a = 100, b = 160, c = 63$.

750. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt{c^2}$, якщо $c = 3, c = -6, c = -12$;

б) $x\sqrt{x^2}$, якщо $x = 5, x = -5, x = -7$.

751. Спростіть вираз, якщо a, b, c — додатні числа:

а) $\sqrt{9a^4b^2c^6}$; б) $\sqrt{0,25a^2b^6c^{10}}$;

в) $-\sqrt{16a^4b^4c^6}$; г) $-\sqrt{2,25a^2b^2c^8}$.

752. Спростіть вираз, якщо x, y, z — від'ємні числа:

а) $\sqrt{x^2y^2z^2}$; б) $\sqrt{x^2y^2z^4}$;

в) $-\sqrt{4x^2y^2z^2}$; г) $-\sqrt{0,81x^4y^4z^2}$.

753. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$; б) $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2}$;

в) $\sqrt{(a+1)^2(a^2+1)^2}$; г) $\sqrt{(2n-1)^2(n^4+1)^2}$.

754. Обчисліть:

а) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$; б) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}+3)^2}$;

$$в) \sqrt{(\sqrt{17}-3)^2} + \sqrt{(12-\sqrt{17})^2};$$

$$г) \sqrt{(\sqrt{11}-4)^2} + \sqrt{(3-\sqrt{11})^2}.$$

755*. Спростіть вираз:

$$а) \sqrt{4-2\sqrt{3}}; \quad б) \sqrt{7+2\sqrt{6}}; \quad в) \sqrt{21-8\sqrt{5}};$$

$$г) \sqrt{31+12\sqrt{3}}; \quad р) \sqrt{17-12\sqrt{2}}; \quad д) \sqrt{67+12\sqrt{7}}?$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

756. Замініть «зірочки» одночленом, щоб утворилась тотожність;

$$а) (*+2a)^2 = * + 8ab + 4b^2; \quad б) (3x-*)^2 = 25y^2 + * - 30xy;$$

$$в) (4a^2+*)^2 = * + * + b^6; \quad г) (*-6b)^2 = * - 60a^4b + *.$$

757. Розкладіть на множники:

$$а) -1 + 4a - 4a^2; \quad б) 0,36x^2 + 25y^2 - 6xy;$$

$$в) 2xy - 0,01x^2y^2 - 100; \quad г) 2ab - 25a^2b^2 - 0,04.$$

758. Подайте у вигляді добутку:

$$а) x^{2n} - 1; \quad б) a^{4p} - 4; \quad в) 9x^{2n+2} - y^{6n}; \quad г) a^{4m-2} - 49b^{2m-4}.$$

759. У таблиці представлено результати виконання учнями контрольної роботи з 10 завдань. Скільки учнів одержали більше 7 балів? Скільки це становить відсотків від усіх учнів класу?

Кількість балів	Підрахунок	Кількість учнів
4	/	1
5	///	3
6	### /	6
7	//	2
8	////	4
9	///	3
10	/	1

§17. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ З КОРЕНЯМИ



Вирази, що містять квадратні корені, можна додавати, віднімати, множити, підносити до степеня і ділити (на дільник, відмінний від 0).

Приклади.

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}; \quad 12\sqrt{6} : 3\sqrt{6} = \frac{12\sqrt{6}}{3\sqrt{6}} = 4;$$

$$4\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2} = 12\sqrt{10}; \quad (3\sqrt{2})^2 = 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 18.$$

Розглянемо ще деякі перетворення виразів з коренями.

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}.$$

Таке перетворення називають *винесенням множника за знак кореня*. В останньому прикладі за знак кореня винесено множник 10.

Перетворення, обернене до винесення множника за знак кореня, називають *внесенням множника під знак кореня*.

$$0,3\sqrt{10} = \sqrt{0,09} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{0,09 \cdot 10} = \sqrt{0,9}.$$

У цьому прикладі під знак кореня внесено множник 0,3. Розглянуті перетворення здійснюються на основі теореми про корінь з добутку.

Якщо знак кореня міститься в знаменнику дроби, то такий дріб можна замінити тотожним йому дробом, знаменник якого не містить коренів. Досить домножити члени дроби на відповідно підібраний вираз. Наприклад,

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3}.$$

Такі перетворення називають *звільненням дроби від ірраціональності в знаменнику*.

Наведені перетворення можна виконувати і над виразами зі змінними. Наприклад,

$$a\sqrt{2} \cdot x\sqrt{3} = ax\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}ax;$$

$$\sqrt{9a} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{a} = 3\sqrt{a};$$

$$2\sqrt{\frac{x}{2}} = \sqrt{4 \cdot \frac{x}{2}} = \sqrt{2x};$$

$$\frac{x}{a-\sqrt{x}} = \frac{x(a+\sqrt{x})}{(a-\sqrt{x})(a+\sqrt{x})} = \frac{x(a+\sqrt{x})}{a^2-x}.$$

З а у в а ж е н н я. Виносячи за знак кореня змінну, слід пам'ятати, що рівність $\sqrt{a^2c} = a\sqrt{c}$ правильна тільки при невід'ємних значеннях a і c . Якщо $a < 0$, $c \geq 0$, то $\sqrt{a^2c} = -a\sqrt{c}$. При будь-яких дійсних значеннях a і невід'ємних c правильною є тотожність:

$$\sqrt{a^2c} = |a| \cdot \sqrt{c}.$$

Приклад. Винесіть множник з-під знака кореня:

а) $\sqrt{16a^2c^4d^3}$, $a > 0, d > 0$; б) $\sqrt{50x^6y}$, $x < 0, y > 0$.

Р о з в ' я з а н н я.

а) $\sqrt{16a^2c^4d^3} = 4|a| \cdot c^2 \cdot |d| \cdot \sqrt{d} = 4ac^2d\sqrt{d}$;

б) $\sqrt{50x^6y} = 5|x^3| \sqrt{2y} = -5x^3\sqrt{2y}$.

В і д п о в і д ь. а) $4ac^2d\sqrt{d}$; б) $-5x^3\sqrt{2y}$.

Вносячи змінну під знак кореня, слід пам'ятати, що під корінь можна вносити лише додатні числа.

Приклад. Внесіть множник під знак кореня:

а) $2a\sqrt{3ab^2}$, $a \geq 0$; б) $mn^2\sqrt{5mn}$, $m < 0, n < 0$.

Р о з в ' я з а н н я.

а) $2a\sqrt{3ab^2} = \sqrt{(2a)^2 3ab^2} = \sqrt{12a^3b^2}$;

б) $mn^2\sqrt{5mn} = -(-m) \cdot n^2\sqrt{5mn} = -\sqrt{((-m) \cdot n^2)^2 \cdot 5mn} =$
 $= -\sqrt{m^2n^4 \cdot 5mn} = -\sqrt{5m^3n^5}.$

В і д п о в і д ь. а) $\sqrt{12a^3b^2}$; б) $-\sqrt{5m^3n^5}$.



Хочете знати ще більше?

Вживаючи словосполучення «вирази з коренями», в цьому розділі ми маємо на увазі тільки «вирази з арифметичними квадратними коренями». Насправді вирази з коренями в математиці мають ширший зміст. Бо корені бувають не тільки квадратні, а й кубічні четвертого, п'ятого, ..., n -го степенів. Корені з числа a таких степенів позначають символами:

$$\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \dots, \sqrt[n]{a}.$$

Вирази, що містять будь-які з таких коренів, називають виразами з коренями, або ірраціональними виразами. Вирази з арифметичними квадратними коренями — це тільки частина ірраціональних виразів (мал. 45).



Мал. 45

Раніше знаки коренів $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \dots, \sqrt[n]{a}$ називали *радикалами*, тому в деяких публікаціях дотепер ірраціональні вирази називають виразами з радикалами.

Перевірте себе

1. Які дії можна виконувати над виразами з коренями?
2. Чи можна перетворювати вирази з коренями за формулами скороченого множення?
3. Наведіть приклади винесення множника за знак кореня.
4. Покажіть на прикладах, як можна вносити множник під знак кореня.
5. Як можна позбутися ірраціональності в знаменнику дробу?



Виконаємо разом!

1. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{50} - \sqrt{18}$; б) $(\sqrt{17} - 1)(\sqrt{17} + 1)$; в) $(\sqrt{5} + 2)^2 - 4\sqrt{5}$.

✓ Розв'язання.

а) $\sqrt{50} - \sqrt{18} = \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

б) $(\sqrt{17} - 1)(\sqrt{17} + 1) = (\sqrt{17})^2 - 1 = 17 - 1 = 16$.

$$\text{в) } (\sqrt{5} + 2)^2 - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} \cdot 2 + 4 - 4\sqrt{5} = 9.$$

Відповідь. а) $2\sqrt{2}$; б) 16; в) 9.

2. Розкладіть на множники вираз:

а) $\sqrt{28} - \sqrt{2}$; б) $n + \sqrt{n}$; в) $a - 1$, якщо $a > 1$.

✓ Розв'язання.

а) $\sqrt{28} - \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 14} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{14} - \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{14} - 1)$;

б) $n + \sqrt{n} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} + \sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n} + 1)$;

в) якщо a — число додатне, то $a = (\sqrt{a})^2$. Тому

$$a - 1 = (\sqrt{a})^2 - 1 = (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1).$$

Відповідь. а) $\sqrt{2}(\sqrt{14} - 1)$; б) $\sqrt{n}(\sqrt{n} + 1)$;

в) $(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)$.

3. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

а) $\frac{4}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

✓ Розв'язання.

а) $\frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$;

б) $\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$.

Відповідь. а) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$; б) $\frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$.

Виконайте усно

760. Спростіть вираз:

а) $2\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$; б) $8\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$; в) $13 - 3\sqrt{13}$.

761. Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел:

а) $6\sqrt{2}$ і $3\sqrt{2}$; б) $-10\sqrt{3}$ і $5\sqrt{3}$.

762. Знайдіть квадрат числа: а) $\sqrt{23}$; б) $3\sqrt{2}$; в) $-\sqrt{0,4}$.

763. Піднесіть до квадрата вираз:

а) $\sqrt{7}$; б) $\sqrt{8}$; в) $-\sqrt{31}$; г) $-0,1\sqrt{0,1}$.

764. Винесіть множник з-під знака кореня:

а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{18}$; в) $\sqrt{32}$; г) $\sqrt{98}$; р) $\sqrt{500}$.

765. Внесіть множник під знак кореня:

а) $5\sqrt{3}$; б) $6\sqrt{6}$; в) $-3\sqrt{2}$; г) $7\sqrt{10}$.

Рівень А

Винесіть множник з-під знака кореня (766—768).

766. а) $\sqrt{250}$; б) $\sqrt{490}$; в) $\sqrt{5000}$; г) $\sqrt{1600}$;
 р) $\sqrt{6000}$; д) $-\sqrt{7200}$; е) $-\sqrt{7500}$; є) $\sqrt{17500}$.

767. а) $\sqrt{242}$; б) $\sqrt{363}$; в) $\sqrt{484}$; г) $\sqrt{847}$;
 р) $\sqrt{605}$; д) $\sqrt{882}$; е) $\sqrt{720}$; є) $\sqrt{2178}$.

768. а) $\sqrt{2,5}$; б) $\sqrt{12,1}$; в) $\sqrt{6,75}$; г) $\sqrt{28,88}$.

Внесіть множник під знак кореня (769—773).

769. а) $2\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{10}$; в) $12\sqrt{2}$; г) $2\sqrt{21}$;
 р) $0,1\sqrt{10}$; д) $0,2\sqrt{5}$; е) $1,2\sqrt{0,1}$.


770. а) $11\sqrt{11}$; б) $5\sqrt{3}$; в) $10\sqrt{7}$;
 г) $0,1\sqrt{0,1}$; р) $1,5\sqrt{2}$; д) $2,5\sqrt{10}$.

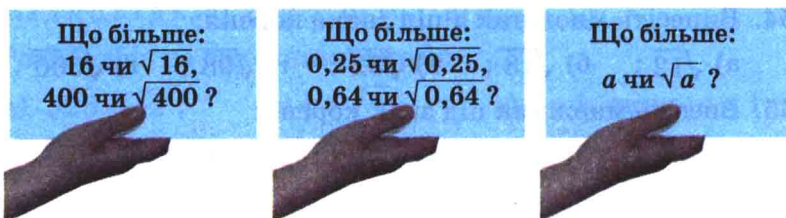
771. а) $0,3\sqrt{10}$; б) $0,2\sqrt{35}$; в) $0,04\sqrt{65}$;
 г) $0,5\sqrt{0,2}$; р) $0,2\sqrt{0,5}$; д) $\sqrt{1,2} \cdot 1,5$.

772. а) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $3\sqrt{\frac{2}{3}}$; в) $1\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{33}}$;

г) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; р) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$; д) $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

773. а) $1\frac{1}{5}\sqrt{2\frac{1}{2}}$; б) $2\frac{1}{4}\sqrt{5\frac{1}{3}}$; в) $3\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5}{17}}$.

-  **774.** Дайте відповідь на запитання, наведені на малюнку 46. Спробуйте зробити узагальнення.



Мал. 46

Порівняйте значення виразів (775—777).

775. а) $2\sqrt{3}$ і $\sqrt{15}$; б) $3\sqrt{2}$ і $\sqrt{17}$; в) $\sqrt{26}$ і $3\sqrt{3}$.

 **776.** а) $3\sqrt{5}$ і $5\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{10}$ і $10\sqrt{2}$;


в) $1,5\sqrt{1,1}$ і $1,3\sqrt{1,2}$; г) $3\sqrt{7}$ і $6\sqrt{2}$.

777. а) $\frac{2}{3}\sqrt{27}$ і $7\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $0,2\sqrt{150}$ і $\frac{1}{3}\sqrt{54}$.

Виконайте дії (778—783).

778. а) $(\sqrt{12} + \sqrt{75}) \cdot \sqrt{3}$; б) $(\sqrt{18} - \sqrt{50}) \cdot \sqrt{2}$;


в) $(4\sqrt{3} - \sqrt{24}) \cdot \sqrt{12}$; г) $(2\sqrt{18} + \sqrt{12}) \cdot \sqrt{8}$.

 **779.** а) $(\sqrt{20} + \sqrt{45}) \cdot \sqrt{5}$; б) $(\sqrt{63} - \sqrt{28}) \cdot \sqrt{7}$;

в) $(7\sqrt{3} + 5\sqrt{2}) \cdot \sqrt{6}$; г) $(5\sqrt{12} - 3\sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3}$.

780. а) $(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 3)$; б) $(2 - \sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3})$;

в) $(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})$; г) $(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)$.

 **781.** а) $(2 - \sqrt{3})(4 + 2\sqrt{3})$; б) $(6 - 3\sqrt{2})(2 - \sqrt{2})$;

в) $(2\sqrt{3} + 1)(2\sqrt{3} - 1)$; г) $(4 + 3\sqrt{7})(3\sqrt{7} - 4)$.

782. а) $(1 + \sqrt{3})^2$; б) $(3 - \sqrt{5})^2$;

в) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6}$; г) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{10}$.

 **783.** а) $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$; б) $(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3})^2$;

в) $(\sqrt{5} - 1)^2 + \sqrt{20}$; г) $(1 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{12}$.

784. Винесіть множник з-під знака кореня, якщо $a > 0$:

а) $\sqrt{2a^2}$; б) $\sqrt{12a^2}$; в) $3\sqrt{a^3}$; г) $\sqrt{8a^4}$.

785. Винесіть множник з-під знака кореня, якщо $x > 0, y > 0$:

а) $\sqrt{3x^2}$; б) $\sqrt{7y^4}$; в) $\sqrt{2x^3}$; г) $\sqrt{9x^5}$.

786. Внесіть множник під знак кореня, якщо $x > 0$:

а) $2x\sqrt{3}$; б) $x\sqrt{2x}$; в) $x^2\sqrt{5}$; г) $3x^3\sqrt{x}$.

787. Внесіть множник під знак кореня, якщо $x > 0, y > 0$:

а) $x\sqrt{2}$; б) $y\sqrt{3}$; в) $2x^2\sqrt{x}$; г) $3y\sqrt{x}$.

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу (788—791).

788. а) $\frac{x}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{a}}$; в) $\frac{7}{3\sqrt{2}}$; г) $\frac{6}{5\sqrt{12}}$.

789. а) $\frac{a}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; в) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; г) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$.

790. а) $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; б) $\frac{c}{1-\sqrt{3}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{2+x}}$; г) $\frac{x}{1-\sqrt{x}}$.

791. а) $\frac{m}{1-\sqrt{5}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; в) $\frac{a}{1+\sqrt{c}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Рівень **Б**

Порівняйте значення виразів (792—793).

792. а) $-3\sqrt{10}$ і $-2\sqrt{22}$; б) $-1,5\sqrt{10}$ і $-2\sqrt{5}$.

793. а) $-1,5\sqrt{2}$ і $-2\sqrt{1,1}$; б) $-0,2\sqrt{0,1}$ і $-0,1\sqrt{0,2}$.

794. Що більше:

а) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{235} \cdot \sqrt{6}$ чи $\sqrt{3} \cdot \sqrt{237} \cdot \sqrt{10}$;

б) $\sqrt{0,2} \cdot \sqrt{0,03} \cdot \sqrt{0,006}$ чи $\sqrt{0,3} \cdot \sqrt{0,06} \cdot \sqrt{0,002}$?

795. Що більше: сума десяти доданків $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{2}$ чи добуток десяти множників $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \dots \cdot \sqrt{2}$?


Виконайте дії (796 — 799).

796. а) $\sqrt{48} - \sqrt{300} + \sqrt{75}$;

б) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{50} + 2\sqrt{18}$;

в) $\sqrt{200} + \sqrt{8} - \sqrt{32}$;

г) $3\sqrt{8} + \sqrt{98} - \sqrt{2}$.

 797. а) $\sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}$;

б) $\sqrt{150} - \sqrt{54} + \sqrt{24}$;

в) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{50} + \sqrt{32})$;

г) $2\sqrt{10} \cdot (\sqrt{45} - \sqrt{80})$.

798. а) $(\sqrt{30} + \sqrt{24}) \cdot \sqrt{6}$;

б) $(\sqrt{60} - \sqrt{15}) \cdot \sqrt{15}$;

в) $(\sqrt{125} - 2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{10} + \sqrt{32}$;

г) $(7\sqrt{3} + \sqrt{6}) \cdot \sqrt{6} - \sqrt{800}$.

799. а) $(\sqrt{45} - \sqrt{20}) : \sqrt{5}$;

б) $(\sqrt{28} + \sqrt{63}) : \sqrt{7}$;


в) $\frac{3\sqrt{28} + 2\sqrt{175}}{2\sqrt{112}}$;

г) $\frac{7\sqrt{108} - \sqrt{12}}{2\sqrt{75}}$.

Обчисліть (800—801).


800. а) $(3\sqrt{32} + \sqrt{162} - 2\sqrt{288}) \cdot \sqrt{2} + 15$;

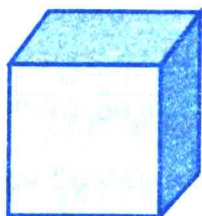
б) $(4\sqrt{12} - 6\sqrt{48} + 5\sqrt{27}) \cdot \sqrt{3} - 12$.

 801. а) $(2\sqrt{320} - 7\sqrt{20} - \sqrt{45})^2 + 20$;

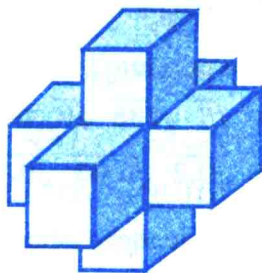
б) $(4\sqrt{150} - 6\sqrt{54} + 2\sqrt{96})^2 - 20$.

802. Площа поверхні куба дорівнює $37,5 \text{ дм}^2$ (мал. 47). Знайдіть довжину його ребра.

 803. Площа поверхні тіла, складеного із семи рівних кубів (мал. 48), дорівнює 480 см^2 . Знайдіть довжину ребра такого куба.



Мал. 47



Мал. 48

804. Винесіть множник з-під знака кореня, якщо $x < 0$:

а) $\sqrt{2x^2}$; б) $\sqrt{20x^4}$; в) $\frac{2}{x}\sqrt{x^2c}$; г) $\sqrt{x^6m}$.

805. Винесіть множник з-під знака кореня, якщо $a < 0, c < 0$:

а) $\sqrt{12a^4}$; б) $\sqrt{3c^{10}}$; в) $-\sqrt{-18a^7}$; г) $-\sqrt{32c^8}$;

г) $\sqrt{-48a^{11}c^2}$; д) $\sqrt{60a^7c^9}$; е) $\sqrt{\frac{20a^4}{-9c}}$; є) $\sqrt{\frac{27a^{16}}{16c^6}}$.

806. Внесіть множник під знак кореня, якщо $c < 0$:

а) $c\sqrt{a}$; б) $c^2\sqrt{a}$; в) $c^3\sqrt{x}$; г) $c^4\sqrt{p}$.

807. Внесіть множник під знак кореня, якщо $m < 0$:

а) $m\sqrt{m^2}$; б) $2m\sqrt{\frac{1}{m^2}}$; в) $m^2\sqrt{\frac{3}{m^4}}$; г) $m^3\sqrt{\frac{1}{m^8}}$.

Спростіть вираз (808—816).

808. а) $2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - 4\sqrt{a}$; б) $2\sqrt{x} + y\sqrt{x} - \sqrt{4x}$.

809. а) $\sqrt{25a} - \sqrt{64a} + \sqrt{9a}$; б) $9\sqrt{p} - \sqrt{9p} + \sqrt{16p}$.

810. а) $2\sqrt{20x} - \sqrt{5x} - \sqrt{45x}$; б) $\sqrt{18p} - \sqrt{8p} + \sqrt{81}$.

811. а) $(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 2)$; б) $(\sqrt{x} + 2)(3 + \sqrt{x})$.

812. а) $\sqrt{a}(\sqrt{a} - 2) + 2\sqrt{a}$; б) $(3 - 2\sqrt{x})\sqrt{x} - 3\sqrt{x}$.

813. а) $(-b + \sqrt{x})(-b - \sqrt{x})$; б) $\left(b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$.

814. а) $\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{x}) + \sqrt{ax}$; б) $\sqrt{xy} - \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

815. а) $(a - b):(\sqrt{a} - \sqrt{b})$; б) $(x - y):(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

816. а) $(4a^2 - x):(2a - \sqrt{x})$; б) $(x^4 - 9z):(x^2 + 3\sqrt{z})$.

Розкладіть на множники вираз (817—819).


817. а) $\sqrt{35} - \sqrt{5}$; б) $\sqrt{35} - \sqrt{7}$; в) $7 - \sqrt{7}$.

818. а) $a + \sqrt{a}$; б) $x\sqrt{y} - \sqrt{x}$; в) $a\sqrt{c} - c\sqrt{a}$.

819. а) $a^2 - c$; б) $a - c$; в) $x - 2$.

Скоротіть дріб (820—822).

820. а) $\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$; б) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{x-z}$; в) $\frac{a+\sqrt{2}}{a^2-2}$.


 821. а) $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+a}$; б) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{a\sqrt{x}+x\sqrt{a}}$; в) $\frac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1}$.

822. а) $\frac{x-6\sqrt{x}+9}{x-9}$; б) $\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2+\sqrt{3}}$; в) $\frac{(\sqrt{7}-1)^2}{\sqrt{7}-4}$.

Звільніть від ірраціональності знаменник дробу (823—825).

823. а) $\frac{2a}{\sqrt{2ax}}$; б) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$; в) $\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}$; г) $\frac{3}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$.

824. а) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; б) $\frac{a+1}{\sqrt{a+3}-2}$; в) $\frac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x}}$; г) $\frac{10}{\sqrt{6}+1}$.

 825. а) $\frac{5}{\sqrt{x+3}}$; б) $\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$; в) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$; г) $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{8}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

826. Доведіть, що:


а) $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^2=12$;

б) $\left(\sqrt{6+\sqrt{20}}-\sqrt{6-\sqrt{20}}\right)^2=4$.

827. Порівняйте числа:

а) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ і $\sqrt{19}$; б) $6-\sqrt{15}$ і $\sqrt{37}-\sqrt{14}$;

в) $\sqrt{3}+\sqrt{19}$ і $\sqrt{7}+\sqrt{10}$; г) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ і $\sqrt{17}-\sqrt{15}$.

 828. Що більше: $\sqrt{2003}-\sqrt{2001}$ чи $\sqrt{2004}-\sqrt{2002}$?

829. Знайдіть суму, різницю, добуток і частку виразів:

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ і } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

830. Спростіть вираз:

а) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{(b-a)^2}{\sqrt{ab}}$;

$$б) \left(\frac{1}{x+x\sqrt{y}} + \frac{1}{x-x\sqrt{y}} \right) : \frac{2}{y-1}.$$

831*. Доведіть рівності *індійського математика А. Бхаскара* (1114 – 1185):

а) $\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$;

б) $\frac{\sqrt{9} + \sqrt{54} + \sqrt{450} + \sqrt{75}}{5 + \sqrt{3}} = 3\sqrt{2} + \sqrt{3}$;

в) $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

832*. *Задача французького математика Ж. Л. Ф. Бертра*на (1822–1900). Доведіть, що

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2}.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

833. Знайдіть квадрат і куб числа: а) $2,1 \cdot 10^6$; б) $8,3 \cdot 10^{-5}$.

834. Побудуйте графік рівняння $x^2 - y = 0$.

835. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$а) \begin{cases} \frac{x+y}{3} + x = 15, \\ y - \frac{y-x}{5} = 6; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{x-y}{2} + y = 4, \\ x - \frac{y-x}{3} = 9; \end{cases} \quad в) \begin{cases} x+y=7, \\ |x-y|=5. \end{cases}$$

836. Один із кутів трикутника дорівнює 50° , а різниця двох інших — 50° . Знайдіть міри цих кутів.

§18. ФУНКЦІЯ $y = \sqrt{x}$



Ви вже знаєте, що площа квадрата є функцією довжини його сторони: $S = a^2$. У даному параграфі ми з'ясуємо, як залежить довжина сторони квадрата від зміни його площі. Для цього розв'яжемо рівняння $a^2 = S$ ($S > 0$, $a > 0$), використавши означення арифметичного кореня.

Маємо: $a = \sqrt{S}$. Користуючись цією формулою, кожному значенню S можемо поставити у відповідність єдине значення a , тобто a є функцією S .

Існують й інші задачі, розв'язування яких приводить до функцій, де аргумент розміщується під знаком квадратного кореня. Наведемо приклади.

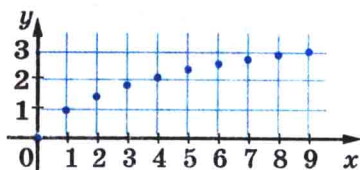
Площу круга (S) знаходять за формулою $S = \pi R^2$, де R — радіус круга, $\pi \approx 3,14$. Звідси $R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

Шлях, що проходить тіло під час вільного падіння, визначається формулою $h = \frac{1}{2}gt^2$, де t — час, g — сталие число. Звідси $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

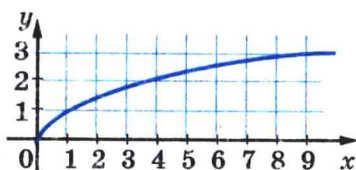
Далі розглянемо властивості функції $y = \sqrt{x}$. Область її визначення — множина невід'ємних дійсних чисел, оскільки тільки з невід'ємного числа можна добути квадратний корінь. Складемо таблицю значень функції для кількох значень аргументу x :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3

Дробові значення тут наближені. Точки з координатами, наведеними у цій таблиці, позначимо на малюнку 49, а. Якщо на координатній площині позначити точки з координатами x і y за умови, що змінна x набуває всіх невід'ємних дійсних значень, то одержимо графік функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 49, б). Цей графік — одна вітка параболи, вона виходить з початку координат і розміщена в першому координатному куті. Функція $y = \sqrt{x}$ зростає на всій області визначення.



а



б

Мал. 49

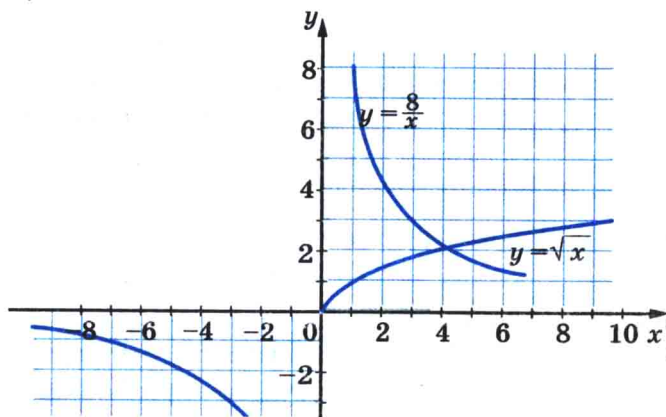
Властивості функції $y = \sqrt{x}$ можна встановити за графіком, зображеним, наприклад, на малюнку 49, б. Подаємо їх у вигляді таблиці.

Властивості функції	Вид функції
	$y = \sqrt{x}$
Область визначення	Усі невід'ємні числа ($x \geq 0$)
Область значень	Усі невід'ємні числа ($y \geq 0$)
Додатні значення	Усі числа, крім $x = 0$
Від'ємні значення	—
Проміжки спадання	—
Проміжки зростання	$x > 0$

У сучасній математиці графіки функцій використовують досить часто. Зупинимось на *графічному розв'язуванні рівнянь*.

Нехай треба розв'язати рівняння $\frac{8}{x} - \sqrt{x} = 0$.

Замінімо дане рівняння рівносильним $\frac{8}{x} = \sqrt{x}$ і побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{8}{x}$ і $y = \sqrt{x}$ (мал. 50).



Мал. 50

Ці графіки перетинаються в точці з абсцисою $x \approx 4$.

При такому значенні x вирази $\frac{8}{x}$ і \sqrt{x} набувають рівних значень, тобто число 4 — корінь (можливо, наближений) рівняння $\frac{8}{x} = \sqrt{x}$. Підставивши $x = 4$ у дане рівняння, переконуємось, що 4 — точний корінь.

Інших спільних точок побудовані графіки не мають, отже, дане рівняння має тільки один корінь: $x = 4$.



Хочете знати ще більше?

Графік функції $y = \sqrt{x}$ не обов'язково будувати за точками. Виявляється, що цей графік для $y > x$ симетричний графіку функції $y = x^2$ відносно бісектриси першого координатного кута. Адже рівності $y = \sqrt{x}$ і $y^2 = x$ при додатному x виражають одну й ту саму залежність між змінними x і y . Якщо у другій з цих рівностей поміняти x на y , а y — на x , то це рівнозначно заміні осі x віссю y і навпаки. Такі функції, як $y = \sqrt{x}$ і $y = x^2$, називаються *оберненими*. Побудуйте їх графіки в одній системі координат і переконайтесь, що вони симетричні відносно прямої $y = x$.

Перевірте себе

1. Якою є область визначення функції $y = \sqrt{x}$?
2. Яких значень може набувати функція $y = \sqrt{x}$?
3. Чи має найменше значення функція $y = \sqrt{x}$?
4. Чи має найбільше значення функція $y = \sqrt{x}$?
5. Який графік має функція $y = \sqrt{x}$?



Виконаємо разом!

1. В одній системі координат побудуйте графіки функцій

$$y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x} \quad \text{та} \quad y = -2\sqrt{x}.$$

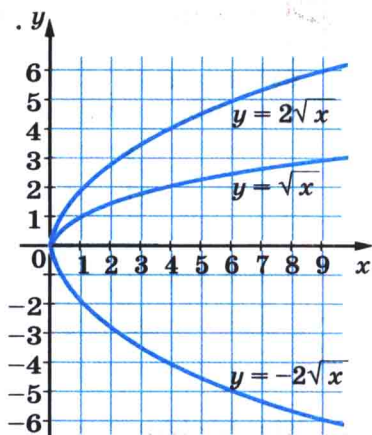
✓ Розв'язання.

Складемо таблицю відповідних значень x і y .

x	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\sqrt{x}	0	0,7	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
$2\sqrt{x}$	0	1,4	2	2,8	3,4	4	4,4	4,8	5,2	5,6	6
$-2\sqrt{x}$	0	-1,4	-2	-2,8	-3,4	-4	-4,4	-4,8	-5,2	-5,6	-6

Дробові значення тут наближені.

Побудуємо в системі координат точки, координати яких подано в таблиці. Одержимо графіки відповідних функцій (мал. 51).



Мал. 51

Виконайте усно

837. Обчисліть:

а) $\sqrt{1}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{16}$;

$\sqrt{25}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{49}$;

б) $\sqrt{1,21}$; $\sqrt{1,44}$; $\sqrt{1,69}$; $\sqrt{1,96}$; $\sqrt{2,25}$.

838. Зростаючою чи спадною є функція:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = -\sqrt{x}$?

839. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x} = 0$; б) $\sqrt{x} = -1$; в) $\sqrt{x} = 2$.

840. Скільки спільних точок мають графіки функцій:

а) $y = 1$ і $y = \sqrt{x}$;

б) $y = -5$ і $y = -\sqrt{x}$;

в) $y = 1$ і $y = -\sqrt{x}$;

г) $y = \sqrt{x}$ і $y = -5$?

Рівень **A**

841. Заповніть таблицю для функції $y = \sqrt{x}$:

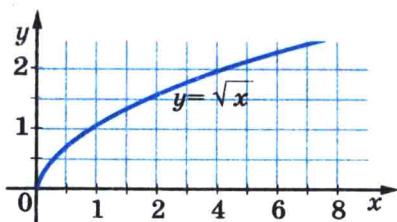
x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	7,84	9	12,25	14,44	16
y											

Побудуйте графік.

842. Користуючись графіком функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 52), знайдіть:

а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 0,8; 1,2; 2; 2,3; 5;

б) значення аргументу, якому відповідає значення функції, що дорівнює: 0,5; 1,3; 1,7; 2; 2,2.



Мал. 52

843. Які з точок належать графіку функції $y = \sqrt{x}$:

$A(0,01; 0,1)$; $B(0,16; -0,4)$; $C(0,4; 0,2)$;

$D(0,09; 0,3)$; $E\left(2\frac{7}{9}; 1\frac{2}{3}\right)$; $F\left(-\frac{4}{9}; -\frac{2}{3}\right)$?

844. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x}$, якщо $0 \leq x \leq 10$.

845. Чи проходить графік функції $y = \sqrt{x}$ через точки

$A(16; 4)$, $B(16; -4)$, $C(-5; 25)$, $K(10; \sqrt{10})$?

846. Користуючись графіком функції $y = \sqrt{x}$ (див. мал. 52), знайдіть:

а) значення функції, якщо значення x дорівнюють: 0,5; 2; 3; 4; 5;

б) значення x , при яких значення y дорівнюють: 0,5; 1; 2;

в) цілі значення x , при яких значення функції менші від 3.

Розв'яжіть графічно рівняння (847—848).

847. а) $\sqrt{x} = 3$; б) $\sqrt{x} - 1 = 0$; в) $\sqrt{x} + 2 = 0$.

848. а) $\sqrt{x} = 0$; б) $\sqrt{x} + 3 = 0$; в) $\sqrt{x} - 2 = 0$.

Рівень **Б**

849. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

а) $y = \sqrt{x}$ і $y = -\sqrt{x}$; б) $y = 2\sqrt{x}$ і $y = -2\sqrt{x}$;

в) $y = \sqrt{x}$ і $y = 2\sqrt{x}$; г) $y = 2\sqrt{x}$ і $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

850. Побудуйте графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = x^2$, якщо $x \geq 0$, в одній системі координат. Чи симетричні ці графіки? Відносно якої прямої?

851. Дано графік функції: 1) $y = x^2$; 2) $y = \sqrt{x}$.

Чи перетинає його пряма:

а) $y = 1$; б) $y = -1$; в) $y = 4$;
г) $y = -4$; д) $y = 100$; е) $y = -100$,

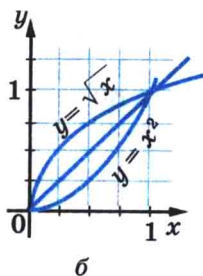
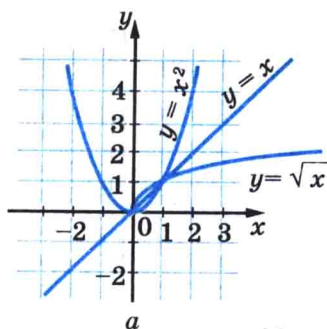
кожний графік? Якщо перетинає, то в якій точці?

852. На малюнку 53, а, б побудовано графіки функцій $y = x$;

$y = x^2$, $y = \sqrt{x}$. Користуючись графіками, порівняйте:

а) $0,7^2$ і $0,7$; б) $0,2^2$ і $\sqrt{0,2}$; в) 2 і $\sqrt{2}$; г) $1,3$ і $\sqrt{1,3}$;

д) $0,26$ і $\sqrt{0,26}$; е) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ і $\sqrt{\frac{4}{5}}$; ж) $\left(\frac{5}{3}\right)^2$ і $\sqrt{\frac{5}{3}}$.



Мал. 53

 **853.** Розмістіть у порядку зростання числа:

а) $0,32$; $0,32^2$; $\sqrt{0,32}$; б) $1,74$; $1,74^2$; $\sqrt{1,74}$.

854. Розв'яжіть графічним способом рівняння:

а) $\sqrt{x} + \frac{1}{x} = 0$; б) $x^2 - \sqrt{x} = 0$; в) $\sqrt{x} - \frac{1}{x} = 0$;

г) $\sqrt{x} + 2 = x$; ґ) $x + \sqrt{x} = 6$; д) $x^2 + \sqrt{x} = 0$.

855. Чи має розв'язки рівняння:

а) $\sqrt{x} = x + 3$; б) $x + \sqrt{x} + 1 = 0$; в) $\sqrt{x} = 0,5x - 4$?

856*. Побудуйте графік функції:

а) $y = \sqrt{x+3}$; б) $y = \sqrt{x} + 3$; в) $y = \sqrt{x} - 3$.

 **857.** Скільки коренів має рівняння:

а) $\sqrt{x} = 0,5x + 2$; б) $\sqrt{x} = \frac{1}{3}(x+2)$; в) $\sqrt{x} = x^2 - 2$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Спростіть вираз (858—859).

858. а) $0,2x^{-2}y \cdot 5x^2y^{-1}$; б) $(a^{-1} + b^{-1}) \cdot (a + b)^{-1}$;

в) $\left(\frac{m^4n^{-2}}{9p}\right)^2 \left(\frac{m^2n^{-3}}{3p}\right)^{-3}$; ґ) $\left(\frac{a^4b^{-3}}{c^5}\right)^{-3} \left(\frac{c^8}{ab^3}\right)^2$.

859. а) $\frac{x}{x^2-4} - \frac{2}{3x+6}$; б) $\frac{1}{3x-1} - \frac{2x}{6x^2-5}$; в) $1 - a + \frac{2a^2}{a+1}$.

860. Сплав міді та цинку масою 16 кг містить 55 % міді. Скільки міді потрібно додати у сплав, щоб новий сплав містив 60 % міді?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**Варіант I**

1°. Обчисліть: а) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$; б) $\sqrt{562^2 - 462^2}$.

2°. Спростіть вираз:

а) $(4 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})$; б) $(1 + \sqrt{5})^2 - \sqrt{20}$;

в) $(2 + \sqrt{9x})(2 - 3\sqrt{x})$; г) $(a + \sqrt{a})(\sqrt{a} + 1)$.

3°. Розв'яжіть графічно рівняння а) $\sqrt{x} = 0,5x$.

Варіант II

1°. Обчисліть: а) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$; б) $\sqrt{628^2 - 528^2}$.

2°. Спростіть вираз:

а) $(6 + \sqrt{5})(6 - \sqrt{5})$; б) $(x - \sqrt{x})(\sqrt{x} - 1)$;

в) $(3 - \sqrt{4a})(3 + 2\sqrt{a})$; г) $(3 - \sqrt{2})^2 + \sqrt{72}$.

3°. Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x} = x - 6$.

Варіант III

1°. Обчисліть: а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$; б) $\sqrt{698^2 - 598^2}$.

2°. Спростіть вираз:

а) $(\sqrt{44} - 6)(\sqrt{44} + 6)$; б) $(2 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{48}$;

в) $(5 + \sqrt{4x})(5 - 2\sqrt{x})$; г) $(n + 2\sqrt{n} + 1)(\sqrt{n} + 1)$.

3°. Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 = 2x$.

Варіант IV

1°. Обчисліть: а) $\sqrt{22} \cdot \sqrt{88}$; б) $\sqrt{922^2 - 522^2}$.

2°. Спростіть вираз:

а) $(2\sqrt{3} - 1)(\sqrt{12} + 1)$; б) $(2 - \sqrt{5})^2 + \sqrt{80}$;

в) $(4 - \sqrt{9c})(4 + 3\sqrt{c})$; г) $(x^2 - 3)(x - \sqrt{3})$.

3°. Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 = x + 2$.

ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Квадратні корені з чисел вавилонські математики вміли добувати ще 4 тис. років тому. Знаходили навіть наближені значення квадратних коренів, користуючись правилом, яке тепер можна записати (при малих c) у вигляді такої наближеної рівності:

$$\sqrt{b^2 + c} \approx b + \frac{c}{2b}.$$

У XIII ст. європейські математики запропонували скорочене позначення кореня. Наприклад, замість теперішнього $\sqrt{12}$ писали $R12$ (латинське *Radix* — корінь). Згодом замість R стали писати знак V , наприклад $V7$, $V(a + b)$. Пізніше над многочленом за коренем додали риску: $\overline{V(a + b)}$. Р. Декарт (1596–1650) сполучив знак кореня з рискою, після чого запис набув сучасного вигляду: $\sqrt{a + b}$.

Дійсні числа входили в математику непросто. Вчені античного світу не допускали і думки, що крім цілих і дробових можуть існувати ще якісь інші числа. Хоч Піфагор (VI ст. до н. е.) та його учні довели: якщо довжина сторони квадрата дорівнює 1, то довжину його діагоналі не можна виразити жодним раціональним числом. Тим самим вони встановили існування відрізків, довжини яких не виражаються раціональними числами, проте ірраціональних чисел не запровадили.

Математики Індії і Середнього Сходу користувались ірраціональними числами, але вважали їх несправжніми, неправильними, «глухими». Тільки коли Р. Декарт запропонував кожній точці координатної прямої ставити у відповідність число, ірраціональні числа довелось об'єднати з раціональними в одну множину дійсних чисел. Строга теорія дійсних чисел була опрацьована тільки в XIX ст.

У 8 класі розглядають не всі дійсні числа. Крім квадратних існують також корені третього, четвертого та вищих степенів, наприклад $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[5]{0,6}$. З такими дійсними числами ви ознайомитесь у старших класах.

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ

Квадратним коренем із числа a називають число, квадрат якого дорівнює a . Наприклад, з числа 16 існує два квадратних корені: 4 і -4 . Невід'ємне значення квадратного кореня з числа a називають *арифметичним значенням кореня* і позначають символом \sqrt{a} .

Властивості квадратних коренів. Якщо $a > 0$ і $b > 0$, то

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}; (\sqrt{a})^2 = a; \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \sqrt{a^{2k}} = a^k.$$

Для будь-якого дійсного a $\sqrt{a^2} = |a|$.

Значення багатьох квадратних коренів — числа не раціональні, а ірраціональні.

Числа цілі й дробові, додатні, від'ємні та нуль разом становлять множину *раціональних чисел*. Кожне раціональне число можна записати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — число ціле, а n — натуральне.

Кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. І кожний нескінченний періодичний десятковий дріб зображає деяке раціональне число.

Приклади: $\frac{2}{3} = 0,6666\dots$, $-\frac{13}{11} = -1,181818\dots$

Числа, які зображаються нескінченними неперіодичними десятковими дробами, називають *ірраціональними*.

Приклади ірраціональних чисел: $\sqrt{2} = 1,4142136\dots$, $\pi = 3,1415927\dots$

Ірраціональні числа разом з раціональними утворюють множину *дійсних чисел*. Множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел позначають відповідно буквами N , Z , Q , R (див. мал. 41).

Дійсні числа можна додавати, віднімати, множити, підносити до степеня і ділити (на числа, відмінні від 0). Для додавання і множення довільних дійсних чисел справедливі переставні, сполучні й розподільні закони: $a + b = b + a$, $ab = ba$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (bc) = (ab) \cdot c$, $(a + b)c = ac + bc$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 3

- Скільки коренів має рівняння $x^2 = 4$:
а) один; б) два; в) безліч; г) жодного?
- Число $\sqrt{51}$ міститься між числами:
а) 5 і 6; б) 6 і 7; в) 7 і 8; г) 8 і 9.
- Укажіть, яке число є ірраціональним:
а) $\sqrt{25}$; б) $-1,7$; в) $3,14$; г) $\sqrt{5}$.
- Значення виразу $2\sqrt{25} - 4$ дорівнює:
а) 5; б) 6; в) 4; г) 2.
- Рівність $(\sqrt{x})^2 = -x$ виконується, якщо:
а) $x > 0$; б) $x = 0$; в) $x < 0$; г) x — будь-яке.
- Графіком якої функції є парабола:
а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y = \frac{5}{x}$; г) $y = \frac{x}{5}$.
- Знайдіть корені рівняння $\sqrt{x} = 3$:
а) 5; б) 3; в) 9; г) 10.
- Значення $\sqrt{11\frac{1}{9}}$ дорівнює:
а) $1\frac{1}{3}$; б) $\frac{3}{10}$; в) $\frac{10}{3}$; г) $11\frac{1}{3}$.
- Число $0,27777777\dots$ можна записати так:
а) 0,27; б) $0,(27)$; в) $0,2(7)$; г) 0,28.
- Графік функції $y = \sqrt{x}$ проходить через точку:
а) (2; 4); б) (1; 2); в) (4; 2); г) (4; -2).

Типові завдання до контрольної роботи № 3

1. Обчисліть:

$$a^\circ) \sqrt{625} - 2\sqrt{144}; \quad б^\circ) \sqrt{2} \cdot \sqrt{32}.$$

2. Внесіть множник під знак кореня:

$$a^\circ) 5\sqrt{3}; \quad б^\circ) 2x^2\sqrt{x}.$$

3. Винесіть множник з-під знака кореня

$$a^\circ) \sqrt{980}; \quad б^\circ) \sqrt{49x^4y^5}.$$

4. Розв'яжіть графічно рівняння:

$$a^\circ) x^2 = 5; \quad б^\circ) \sqrt{x} = 1,5.$$

5. Виконайте дії:

$$a^\circ) \sqrt{2}(\sqrt{18} - \sqrt{2}); \quad б^\circ) \sqrt{10}(\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + \sqrt{125}) + 5\sqrt{2}.$$

6. Раціональним чи ірраціональним є число:

$$a^\circ) \sqrt{10\frac{9}{16}}; \quad б^\circ) \sqrt{9-6\sqrt{2}} + \sqrt{9+6\sqrt{2}}?$$

7. Спростіть вираз:

$$a^\circ) ab\sqrt{a^3b} - 5a^2\sqrt{ab^3};$$

$$б^{\circ\circ}) ab^2\sqrt{9a^6b^3} - 5a^2b\sqrt{a^4b^5},$$

якщо $a \leq 0, b \geq 0$.

8. Звільніться від ірраціональності в знаменнику:


$$a^\circ) \frac{15}{\sqrt{5}}; \quad б^\circ) \frac{8}{\sqrt{6+\sqrt{2}}}; \quad в^\circ) \frac{1}{2\sqrt{7}-1} - \frac{1}{2\sqrt{7}+1}.$$

9^{oo}. Спростіть вираз:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \right) \left(\sqrt{x} - \frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right)$$

10^{oo}. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{5+\sqrt{4+\sqrt{x}}} = 3.$$



Мені доводиться розподіляти свій час між політикою і рівняннями. Але рівняння, на мою думку, набагато важливіші.

А. Ейнштейн

У попередніх класах ви вже навчилися складати та розв'язувати рівняння, але тільки найпростіші, до яких зводяться порівняно нескладні задачі. Для розв'язування складніших задач використовують квадратні рівняння. Вивчивши цю тему, ви зможете розв'язувати багато прикладних задач з різних галузей знань.

У цьому розділі ви дізнаєтеся про:

- **неповні квадратні рівняння;**
- **формулу коренів квадратного рівняння;**
- **теорему Вієта;**
- **розкладання квадратного тричлена на множники.**

§19. НЕПОВНІ КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ



Задача. Одне з двох чисел більше від другого на 6, а їх добуток дорівнює 112. Знайдіть ці числа.

Розв'язання. Позначимо менше із шуканих чисел буквою x . Тоді більше число дорівнює $x + 6$. Їх добуток — 112. Отже,

$$x(x + 6) = 112, \text{ або } x^2 + 6x - 112 = 0.$$

Це *рівняння другого степеня з однією змінною*. Такі рівняння називають також квадратними. Як його розв'язувати, покажемо у § 20.

♦ **Квадратним** називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна; a, b, c — дані числа, причому $a \neq 0$.

Числа a, b, c — *коефіцієнти квадратного рівняння*: a — перший коефіцієнт, b — другий, c — вільний член.

За означенням перший коефіцієнт квадратного рівняння не може дорівнювати нулю. Якщо хоч один коефіцієнт (b або c) дорівнює нулю, то квадратне рівняння називають *неповним*. Неповні квадратні рівняння бувають трьох видів:

$$1) ax^2 = 0; \quad 2) ax^2 + bx = 0; \quad 3) ax^2 + c = 0.$$

1. Рівняння виду $ax^2 = 0$ рівносильне рівнянню $x^2 = 0$, і тому завжди має тільки один корінь $x = 0$.

2. Рівняння виду $ax^2 + bx = 0$ рівносильне рівнянню $x(ax + b) = 0$ і завжди має два корені: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $5x^2 + 4x = 0$.

Розв'язання. Винесемо змінну x за дужки:

$$x(5x + 4) = 0.$$

Отже, $x = 0$, або $5x + 4 = 0$, звідси $x = -0,8$.

Відповідь. $x_1 = 0$, $x_2 = -0,8$.

3. Квадратне рівняння виду $ax^2 + c = 0$ рівносильне рівнянню $x^2 = -\frac{c}{a}$. Якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то воно має два розв'язки; якщо $-\frac{c}{a} < 0$ — жодного розв'язку.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $4x^2 - 3 = 0$.

Розв'язання. Перетворимо дане рівняння: $4x^2 = 3$, $x^2 = \frac{3}{4}$, x — число, квадрат якого дорівнює $\frac{3}{4}$, тобто квадратний корінь із числа $\frac{3}{4}$. Таких коренів є два: $\sqrt{\frac{3}{4}}$ і $-\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Відповідь. $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Якщо знаки коефіцієнтів a і c різні, то число $-\frac{c}{a}$ додатне, і рівняння має два корені. Якщо знаки коефіцієнтів a і c однакові, то число $-\frac{c}{a}$ від'ємне, і рівняння $ax^2 + c = 0$ не має коренів.



Хочете знати ще більше?

Деякі квадратні рівняння (повні) можна розв'язувати, зводячи їх до неповних квадратних рівнянь. Наприклад, користуючись формулою квадрата двочлена, рівняння

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

можна подати у вигляді $(x - 1)^2 = 0$ і розв'язати його так: $(x - 1)^2$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $x - 1 = 0$, тобто $x = 1$.

Таким способом можна розв'язати кожне квадратне рівняння, ліву частину якого можна подати у вигляді квадрата двочлена.

Наприклад,

$$4y^2 + 4y + 1 = 0, (2y + 1)^2 = 0, 2y + 1 = 0, y = -0,5.$$

$$c^2 - 2\sqrt{2}c + 2 = 0, (c - \sqrt{2})^2 = 0, c - \sqrt{2} = 0, c = \sqrt{2}.$$

Перевірте себе

1. Які рівняння називають квадратним?
2. Як інакше називають рівняння другого степеня з однією змінною?
3. Які рівняння називають неповними квадратними?
4. Назвіть три види неповних квадратних рівнянь. Як розв'язувати рівняння виду:
а) $ax^2 = 0$; б) $ax^2 + bx = 0$; в) $ax^2 + c = 0$?
5. Скільки розв'язків може мати неповне квадратне рівняння?

✓ Виконаємо разом!

1. Розв'яжіть квадратне рівняння:

а) $3x^2 - 6x = 0$; б) $2y^2 - 72 = 0$.

✓ Розв'язання.

а) $3x^2 - 6x = 0$; б) $2y^2 - 72 = 0$;

$3x(x - 2) = 0$; $2(y^2 - 36) = 0$;

$x_1 = 0$; $y^2 - 36 = 0$;

$x - 2 = 0$; $y_1 = 6$;

$x_2 = 2$; $y_2 = -6$.

Відповідь. а) $x_1 = 2, x_2 = 0$; б) $y_1 = 6, y_2 = -6$.

2. Розв'яжіть рівняння $\frac{9}{x+25} + \frac{16}{x} = 1$.

✓ Розв'язання. $\frac{9}{x+25} + \frac{16}{x} - 1 = 0$,

$$\frac{9x + 16x + 400 - x^2 - 25x}{x(x+25)} = 0, \frac{400 - x^2}{x(x+25)} = 0, 400 - x^2 = 0,$$

звідси $x_1 = -20, x_2 = 20$.

При цих значеннях x знаменник не перетворюється на нуль. Отже, $x_1 = -20$, $x_2 = 20$ — корені рівняння.

Відповідь. $x_1 = -20$, $x_2 = 20$.

Виконайте усно

861. Яке з даних рівнянь є квадратним:

а) $x^2 = \frac{1}{x} + 3$; б) $2x^2 - 3x = 0$; в) $-x^2 + 5x + \sqrt{8} = 0$;

г) $2x^2 + x^3 = 0$; р) $5x^2 = 4 - 3x$; д) $2z(z + 5) = 7$?

862. Яке з рівнянь є неповним квадратним:

а) $x^2 + 8 = 0$; б) $\sqrt{2}x^2 = 0$; в) $x^2 + 3x = 1$;

г) $x^2 + \frac{2}{x} = 0$; р) $\sqrt{5}x^2 + \pi x = 0$; д) $2x^2 - \sqrt{x} = 0$?

Розв'яжіть рівняння (863–866).

863. а) $3x^2 = 0$; б) $\sqrt{7}y^2 = 0$; в) $-z^2 = 0$.

864. а) $x^2 - 2x = 0$; б) $3z^2 - 6z = 0$; в) $2c = c^2$.

865. а) $y^2 - 9 = 0$; б) $2x^2 - 8 = 0$; в) $-x^2 + 1 = 0$.

866. а) $(x - 3)(x - 5) = 0$; б) $3(x + 7)(x - 2) = 0$;
в) $(2x - 1)(x + 3) = 0$; г) $(x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0$.

Рівень А

867. З наведених нижче рівнянь випишіть: а) квадратні рівняння; б) неповні квадратні рівняння. Для кожного з них укажіть, чому дорівнюють його перший і другий коефіцієнти та вільний член.

а) $3x - 7 = x^2$; б) $-2x^2 + \sqrt{3}x = 4$; в) $6x^2 - x^3 = 0$;

г) $(x + 4)^2 = 8x$; р) $\frac{1}{3}x^2 + 2x = 0$; д) $x + \frac{1}{x} + 4 = 0$;

е) $9x^2 = 0$; є) $x^2 - 25 = x$.

 868. Замініть дане рівняння рівносильним йому квадратним рівнянням:

а) $2x(x - 3) = 50$;

б) $(x - y)y = 5y^2 - 4$;

в) $4z^2 = 2z(3z + 5)$;

г) $(1 - x)(3x - 2) = 2x + x^2$;

$$\text{г) } (x-1)(x-2) = 4x; \quad \text{д) } 3(x+5) - 8 = -5x(x+2).$$

Розв'яжіть рівняння (869—881).

$$\text{869. а) } 3x^2 + 27 = 0; \quad \text{б) } 3x^2 - 27 = 0; \quad \text{в) } 0,5y^2 + y = 0;$$

$$\text{г) } z - 2z^2 = 0; \quad \text{г) } \frac{1}{3}x^2 = 0; \quad \text{д) } (5 - 0,5)x^2 = 0.$$

$$\text{870. а) } 16x^2 = 0; \quad \text{б) } -4y^2 = 0; \quad \text{в) } (\sqrt{7} - \sqrt{3})x^2 = 0.$$

$$\text{871. а) } 2x^2 - 8x = 0; \quad \text{б) } x^2 + 3x = 0; \quad \text{в) } 7x^2 = \frac{1}{2}x;$$

$$\text{г) } 12x = 0,24x^2; \quad \text{г) } x - x^2 = 0; \quad \text{д) } 0,5x + 9x^2 = 0.$$

$$\text{872. а) } x^2 - 144 = 0; \quad \text{б) } 9x^2 = 64;$$

$$\text{в) } -2x^2 + 50 = 0; \quad \text{г) } 0,16x^2 + 100 = 0;$$

$$\text{г) } 100x^2 - 225 = 0; \quad \text{д) } x^2 + 16^2 = 65^2.$$

$$\text{873. а) } (x-1)x + x = 0; \quad \text{б) } 2y(y+3) = 6y;$$

$$\text{в) } (z+2)(z-2) = 0; \quad \text{г) } (x+2)(x-2) = 4.$$

$$\text{874. а) } 2x(x+5) = 7x; \quad \text{б) } -x(2x+3) = 8x;$$

$$\text{в) } 4x^2 - 2x = x(x-2); \quad \text{г) } 8 - 6z = 2z(z-3).$$

$$\text{875. а) } 5x^2 + 3x + 7 = 7(x+1); \quad \text{б) } 15 - 2y = 8y^2 + 3(y+5).$$

$$\text{876. а) } -2x^2 + 6 = 3(x^2 + x + 2); \quad \text{б) } 3(x^2 + 5) = 4x^2 + x(1-x).$$

$$\text{877. а) } 2(x^2 - 1) = (x-1)(x+1); \quad \text{б) } (x+3)^2 = (x-3)(x+3).$$

$$\text{878. а) } \frac{5-x^2}{3} = \frac{3x^2-2}{4}; \quad \text{б) } \frac{2z^2}{5} = \frac{3z^2+1}{4}.$$

$$\text{879. а) } \frac{x^2-1}{7} = \frac{3}{4}; \quad \text{б) } \frac{2x^2+3}{5} = \frac{4}{7}.$$

$$\text{880. а) } \frac{z+1}{8} = \frac{1}{z-1}; \quad \text{б) } \frac{y-2}{4} = \frac{-1}{y+2}.$$

$$\text{881. а) } (2x+1) : 13 = 3 : (2x-1); \quad \text{б) } (3x^2-4) : 5 = 3x^2 : 20.$$

882. Знайдіть периметр квадрата, площа якого дорівнює:

$$\text{а) } 289 \text{ см}^2; \quad \text{б) } 0,81 \text{ м}^2; \quad \text{в) } S.$$

883. а) Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа дорівнює 484 м^2 ;

б) знайдіть сторону квадрата, якщо його площа дорівнює S .

Рівень Б

Розв'яжіть рівняння (884—887).

884. а) $3x(x-1) = 12 - 3x$; б) $5x(x+2) = 10(1+x)$;

в) $x(x+\sqrt{2}) = 4 + \sqrt{2}x$; г) $2x(3-x) = 6x - 8$.

885. а) $\frac{1}{3}(x^2+2x) = \frac{1}{4}(2x^2-3x)$; б) $\frac{1}{5}(x^2+3x) = \frac{1}{2}(5x-x^2)$;

в) $5x^2+3x = x(3+x)+32$; г) $(7x-2)(x+1) = 5(x+4)-1$.

 886. а) $(x+3)(x-3) = 16$; б) $(2x+4)^2 = 16x+20$;

в) $6x - (x+2)^2 = 3x^2 - 4$; г) $(2x+3)(3-2x) = 24x+9$.

887. а) $1,5(x^2-2x) = 0,9(2x-x^2)$;

б) $3,7(x^2-5x) = 2(5x-x^2)$.

888. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

а) $y = x^2$ і $y = 121$;

б) $y = x^2$ і $y = 25,6$.


Розв'яжіть рівняння (889—892).

889. а) $3(x-5)^2 = 0$;

б) $0,7(2-z)^2 = 0$;

в) $(x-3)^2 = 1$;


г) $(5-y)^2 = 1$.

 890. а) $23(3x-2)^2 = 0$;

б) $78(5z-4)^2 = 0$;

в) $2(x-7)^2 = 8$;

г) $3(5-z)^2 = 12$.

 891. а) $(x+15)^2 + (x+15) = 0$;


б) $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - x - \frac{2}{3} = 0$.

892. а) $5(3-2x)^2 + 20(3-2x) = 0$;

б) $6\left(3x - \frac{1}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{3} - 3x\right) = 0$.

893. Складіть неповне квадратне рівняння, яке мало б корені:

а) -3 і 3 ; б) $-\sqrt{2}$ і $\sqrt{2}$; в) 0 і 7 ; г) 0 і -4 .

 894. Доповніть вираз $2x^2 + x - 8$ так, щоб утворилося рівняння, яке мало б корені:

а) 0 і -2 ; б) -2 і 2 .

895. Доповніть вираз $x^2 - 3x$ так, щоб утворилось рівняння, яке мало б корені:

а) -3 і 3 ; б) 0 і 3 .

Розв'яжіть рівняння (896—900).

896. а) $\frac{2x+5}{x-2} = \frac{9(x+2)}{8x-20}$;

б) $\frac{4x+12}{x-3} = \frac{x-3}{x+3}$.

897. а) $\frac{x}{x+5} + \frac{x}{x-5} = 2\frac{2}{3}$;

б) $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = 3\frac{1}{3}$.

898. а) $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} = \frac{5}{2}$;

б) $\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{3-x} = 4$.

899. а) $\frac{4}{3+x} = \frac{3-4x^2}{x^2-9} - \frac{5}{x-3}$;

б) $\frac{5(x+2)}{x^2+6x+9} + \frac{1}{x+3} = 1$.

900. а) $(x^2 - 2)^2 - 2(x^2 - 2) = 0$; б) $(x^2 + 3)^2 - 5(x^2 + 3) = 0$.

901. Які значення змінних задовольняють пропорцію:

а) $(x + 1) : 2 = 4 : (x - 1)$; б) $(x - 4) : 3 = 3 : (x + 4)$;

в) $(3x - 6) : x = 5x : (3x + 6)$;

г) $(0,2 - x) : 4 = (0,01 + x) : (0,2 + x)$?

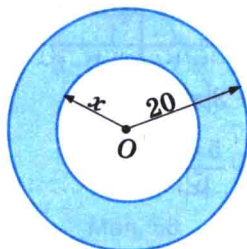
902. Знайдіть довжини катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, площа якого дорівнює $0,72 \text{ дм}^2$.

903. Площу круга радіуса r знаходять за формулою $S = \pi r^2$. Знайдіть радіус круга, площа якого дорівнює:

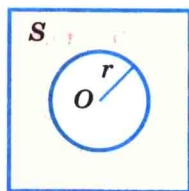
а) 314 см^2 ; б) S .

904. Площа кільця дорівнює 942 см^2 , а радіус його зовнішнього кола — 20 см (мал. 54). Знайдіть радіус його внутрішнього кола.

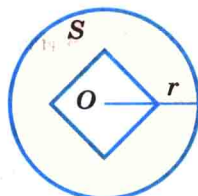
905. Знайдіть радіус кола r , якщо площа зафарбованої фігури (мал. 55) дорівнює S , а сторона квадрата — a .



Мал. 54






а



б

Мал. 55

- 906.** Добуток двох послідовних натуральних чисел на 324 більший від меншого з них. Знайдіть ці числа.
-  **907.** Добуток двох послідовних натуральних чисел на 224 більший від більшого з них. Знайдіть ці числа.
- 908.** Сума квадратів трьох послідовних натуральних чисел дорівнює 365. Знайдіть ці числа. Як слід позначити їх, щоб розв'язання задачі звелось до неповного квадратного рівняння?
- 909.** За якої умови дорівнює нулю:
- а) один корінь квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$;
 б) сума коренів рівняння $(x - a)(x + a - b) = 0$?
- 910.** Знайдіть число, яке менше від квадратного кореня з цього числа в 2,5 раза.
- 911.** Добуток двох послідовних натуральних чисел в 1,5 раза більший від квадрата меншого з них. Знайдіть ці числа.
- 912.** Знайдіть площу прямокутного трикутника, в якого гіпотенуза дорівнює 10 м, а катети відносяться, як 3 : 4.
-  **913.** Периметр одного квадрата на 8 см менший від периметра другого, а їх площі відносяться, як 1 : 4. Знайдіть довжини сторін квадратів.
- 914.** Сторона одного квадрата на 3 дм довшя від сторони другого квадрата, а їх площі відносяться, як 9 : 4. Знайдіть їх периметри.
-  **915.** Користуючись калькулятором, розв'яжіть рівняння:
- а) $2,324x^2 = 74,825$; б) $4,027y^2 - 12,449 = 0$;
 в) $4,574z^2 = 48,226z$; г) $7,467x^2 = 15,227x$.
- 916*.** Розв'яжіть рівняння:
- а) $x^2 - 7|x| = 0$; б) $x^2 + 3|x| - x = 0$;
 в) $2x^2 - \frac{8x}{|x|} = 0$; г) $x^2 + \frac{5x^2}{|x|} = 0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Обчисліть:

917. а) $-12 \frac{3}{80} + \left(-\frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{2} \right) : (-0,8) \right) : (-2);$

б) $(3,56 - (-7,92 : 11) + (-2,54 + 1,26)) : (-1,25);$

в) $5 \cdot (14,7 : \left(-0,75 - 0,7 : 2 \frac{1}{3} \right) - 0,15) - 101,21;$

г) $-5,33 : \left(5 \frac{5}{28} - 1 \frac{8}{9} \cdot 1,25 + 1 \frac{16}{63} \right) + 101,26.$

918. Знайдіть останню цифру числа:

а) $5^{100};$ б) $6^{66};$ в) $4^{1000};$ г) $9^{999};$

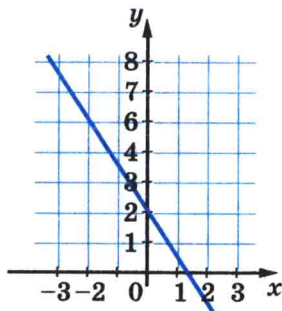
г) $2^{100};$ д) $2^{99};$ е) $3^{101};$ є) $3^{102}.$

919. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

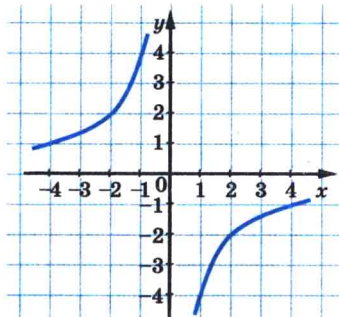
а) $(x^2 + 3xy + 2y^2)(x - 3y) + 6y^2(x + y)$, якщо $x = 6, y = 5;$

б) $(a + 5b)(a^2 - 5ab + 6b^2) - 10b^2(3b - 2a)$,
якщо $a = -8, b = 6.$

920. Опишіть властивості функції, заданої графіком (мал. 56, 57).



Мал. 56



Мал. 57

§20. ФОРМУЛА КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ



Розв'яжемо рівняння

$$x^2 + 6x - 112 = 0,$$

яке ми склали за умовою задачі (с. 185).

Розв'язання. Якщо до виразу $x^2 + 6x$ додати 9, то одержимо квадрат двочлена $x + 3$. Тому дане рівняння рівносильне рівнянню

$$x^2 + 6x + 9 - 9 - 112 = 0, \text{ або } (x + 3)^2 = 121.$$

Отже, $x + 3 = 11$, звідки $x = 8$; або $x + 3 = -11$, звідси $x = -14$.

Відповідь. $x_1 = 8, x_2 = -14$.

Розглянутий спосіб розв'язування квадратного рівняння називають *способом виділення квадрата двочлена*.

Розв'яжемо цим способом рівняння

$$5x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Щоб перший його член став квадратом одночлена з цілим коефіцієнтом, помножимо обидві частини даного рівняння на 5:

$$25x^2 - 10x - 15 = 0,$$

$$25x^2 - 2 \cdot 5x + 1 - 1 - 15 = 0, \quad (5x - 1)^2 = 16.$$

Отже, $5x - 1 = 4$, звідси $5x = 5, x = 1$; або $5x - 1 = -4$, звідси $5x = -3, x = -0,6$.

Відповідь. $x_1 = 1, x_2 = -0,6$.

Розв'яжемо таким способом рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Помножимо обидві частини рівняння на $4a$ (пам'ятаємо, що $a \neq 0$):

$$\begin{aligned} 4a^2x^2 + 4ax \cdot b + 4ac &= 0, \\ (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 - b^2 + 4ac &= 0, \\ (2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac. \end{aligned}$$

► Вираз $b^2 - 4ac$ називають **дискримінантом** (від латинського *discriminans* — розрізняючий) даного квадратного рівняння і позначають буквою D .

Якщо $D < 0$, то дане рівняння не має коренів: не існує такого значення x , при якому значення виразу $(2ax + b)^2$ було б від'ємним.

Якщо $D = 0$, то $2ax + b = 0$, звідси $x = -\frac{b}{2a}$ — єдиний корінь.

Якщо $D > 0$, то дане квадратне рівняння рівносильне рівнянню $(2ax + b)^2 = (\sqrt{D})^2$, звідси

$$2ax + b = \sqrt{D}, \quad x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

або
$$2ax + b = -\sqrt{D}, \quad x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

У цьому випадку дане рівняння має два корені, які відрізняються тільки знаками перед \sqrt{D} . Коротко записують їх так:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{де } D = b^2 - 4ac.$$

Це формула коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Користуючись нею, можна розв'язати будь-яке квадратне рівняння.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння:

а) $3x^2 - 5x + 2 = 0$; б) $x^2 + 6x + 9 = 0$; в) $5x^2 - x + 1 = 0$.

Розв'язання. а) $D = 25 - 24 = 1$, $D > 0$,

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{2}{3};$$

б) $D = 36 - 36 = 0$,

$$x = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3; \quad x_1 = -3;$$

в) $D = 1 - 20 = -19$, $D < 0$. Рівняння коренів не має.

Відповідь. а) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2}{3}$; б) $x = -3$; в) рівняння коренів не має.

Формулу коренів квадратного рівняння використовують для розв'язування багатьох рівнянь, які зводяться до квадратних.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння:

а) $4x^4 - 9x^2 + 5 = 0$; б) $(3x^2 - x - 3)(3x^2 - x + 5) = 9$.

Розв'язання. Такі рівняння зручно розв'язувати шляхом уведення допоміжної змінної.

а) $4x^4 - 9x^2 + 5 = 0$. Нехай $x^2 = t$, тоді $x^4 = t^2$, одержимо рівняння відносно змінної t :

$$4t^2 - 9t + 5 = 0, D = (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 81 - 80 = 1, D > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 4} = \frac{9 \pm 1}{8}, t_1 = \frac{9+1}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}, t_2 = \frac{9-1}{8} = 1.$$

Повернемося до змінної x :

$$1) x^2 = 1, x_1 = -1, x_2 = 1;$$

$$2) x^2 = \frac{5}{4}, x_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}, x_4 = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$ називають *біквдратним*.

б) $(3x^2 - x - 3)(3x^2 - x + 5) = 9$. Нехай $3x^2 - x = t$, тоді відносно змінної t одержимо рівняння:

$$(t - 3)(t + 5) = 9, t^2 + 2t - 15 = 9, t^2 + 2t - 24 = 0,$$

$$D = 4 - 4 \cdot (-24) = 4 + 96 = 100, D > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2}, t_1 = 4, t_2 = -6.$$

1) $3x^2 - x = -6, 3x^2 - x + 6 = 0, D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -71, D < 0$, отже, це рівняння коренів не має.

$$2) 3x^2 - x = 4, 3x^2 - x - 4 = 0, x_1 = -1, x_2 = 1\frac{1}{3}.$$

$$\text{В і д п о в і д ь. а) } x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}, x_4 = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$\text{б) } x_1 = -1, x_2 = 1\frac{1}{3}.$$



Хочете знати ще більше?

Формулу коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ можна записати і в такому вигляді:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Якщо другий коефіцієнт рівняння — парне число, тобто рівняння має вигляд $ax^2 + 2kx + c = 0$, то

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Якщо перший коефіцієнт квадратного рівняння дорівнює 1, то таке рівняння називають *зведеним*. Зведене квадратне рівняння має вигляд $x^2 + px + q = 0$. Формула його коренів така:

$$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Виведіть ці формули з основної формули коренів квадратного рівняння.

Перевірте себе

1. Як називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$?
2. Що таке дискримінант квадратного рівняння?
3. Скільки коренів має квадратне рівняння залежно від його дискримінанта?
4. Який вигляд має формула коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$?
5. Яке квадратне рівняння називають зведеним?



Виконаємо разом!

1. Зведіть рівняння $(x - 4)(2x + 1) = 3x(x - 1)$ до квадратного та знайдіть його корені.

✓ Розв'язання. $(x - 4)(2x + 1) = 3x(x - 1)$. Розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$2x^2 - 8x + x - 4 = 3x^2 - 3x,$$

$$3x^2 - 2x^2 - 3x + 8x - x + 4 = 0, x^2 + 4x + 4 = 0.$$

Одержане рівняння розв'яжемо, зваживши на те, що в його лівій частині — квадрат двочлена: $x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x + 2)^2$.

Отже, $(x + 2)^2 = 0$, звідси $x + 2 = 0$, $x = -2$.

Відповідь. $x = -2$.

2. Розв'яжіть дробове раціональне рівняння:

$$\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{x-3}.$$

✓ Розв'язання. $\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} - \frac{2}{x-3} = 0$,

$$\frac{x(x-3) + 2 - 2(x-2)}{(x-2)(x-3)} = 0, \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)(x-3)} = 0.$$

Дріб дорівнює нулю, якщо чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1, \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

Дане рівняння ці значення не задовольняють, оскільки при $x = 2$ знаменник першого дробу дорівнює 0, а при $x = 3$ знаменник другого дробу дорівнює 0.

Відповідь. Рівняння коренів не має.

Виконайте усно

921. Обчисліть дискримінант рівняння:

а) $x^2 - 2x + 1 = 0$;

б) $x^2 + 2x + 1 = 0$;

в) $y^2 - 6y + 1 = 0$;

г) $z^2 + 6z - 1 = 0$;

г) $2x^2 - x - 1 = 0$;

д) $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

922. Скільки коренів має рівняння:

а) $x^2 - 2x + 2 = 0$;

б) $x^2 + 2x + 2 = 0$;

в) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

г) $x^2 + 5x + 6 = 0$;

г) $x^2 - 6x + 9 = 0$;

д) $x^2 + 6x + 9 = 0$?

923. Чому не має коренів рівняння:

а) $x^2 + (x - 1)^2 = 0$;

б) $x^2 + |x| + 1 = 0$;

в) $3x^2 + \sqrt{2} = 0$;

г) $(2x - 5)^2 + 3 = 0$?

Рівень А

Способом виділення квадрата двочлена розв'яжіть рівняння (924 – 926).

924. а) $x^2 - 6x + 8 = 0$;

б) $x^2 - 12x + 35 = 0$;

в) $x^2 - 4x - 12 = 0$;

г) $z^2 + 4z - 12 = 0$.

925. а) $x^2 - 11x + 18 = 0$;

б) $y^2 - 5y - 24 = 0$;

в) $m^2 - 12m + 36 = 0$;

г) $x^2 + 14x + 49 = 0$.

926. а) $x^2 + 6x - 27 = 0$;

б) $x^2 - 10x + 9 = 0$;

в) $x^2 + 3x - 4 = 0$;

г) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

927. Знайдіть дискримінанти квадратних рівнянь у завданнях 924–926.

928. Яке з рівнянь не має коренів:

а) $x^2 + x + 1 = 0$;

б) $2y^2 - 3y + 2 = 0$;

в) $0,5x^2 + 2x + 2 = 0$;

г) $8z^2 - z + 4 = 0$?

Користуючись формулою коренів, розв'яжіть рівняння (929–936).

929. а) $x^2 - 7x - 18 = 0$;

в) $x^2 + x - 6 = 0$;

б) $x^2 + 7x - 18 = 0$;

г) $x^2 - x - 42 = 0$.

930. а) $x^2 + 3x - 130 = 0$;

в) $4x^2 - 4x - 3 = 0$;

б) $x^2 - 7x - 120 = 0$;

г) $4x^2 - 4x - 15 = 0$.

931. а) $9x^2 - 12x - 5 = 0$;

в) $2y^2 - 7y + 3 = 0$;

б) $9z^2 - 24z - 20 = 0$;

г) $5z^2 - 8z + 3 = 0$.

932. а) $2x^2 - 7x - 30 = 0$;

в) $9y^2 - 13y + 4 = 0$;

б) $4x^2 + 3x - 10 = 0$;

г) $5x^2 + 31x - 28 = 0$.

933. а) $16x^2 - 24x + 27 = 0$;

в) $6x^2 - 5x - 6 = 0$;

б) $25c^2 + 15c - 4 = 0$;

г) $4x^2 - 19x + 12 = 0$.

934. а) $2p^2 - 7p + 6 = 0$;

в) $6x^2 - 12,5x + 6 = 0$;

б) $10m^2 - 53m + 15 = 0$;

г) $8x^2 - 8,8x + 2,1 = 0$.

935. а) $10y^2 - 0,8y = 1,92$;

в) $6x^2 - \frac{19x}{6} - 1 = 0$;

б) $4n^2 + 11n + 7,36 = 0$;

г) $6x^2 - 25\frac{1}{2}x + 26\frac{1}{4} = 0$.

936. а) $5x^2 - 7\frac{1}{6}x + 2\frac{1}{2} = 0$;

в) $2y^2 + 3\frac{1}{3}y = 18\frac{2}{3}$;

б) $\frac{x^2}{2} - 2\frac{1}{2}x - 7 = 0$;

г) $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{9} = 1\frac{2}{9}$.

Розв'яжіть рівняння, що зводиться до квадратного (937–950).

937. а) $4x(x - 1) = 3$;

в) $3x(3x - 8) = 20$;

б) $4z(z - 1) = 15$;

г) $3y(3y - 4) = 5$.

938. а) $(2x - 3)^2 = 8x$;

в) $2(3z + 9) = (2z + 5)^2$;

б) $(2x + 1)^2 = 3x + 4$;

г) $12(3 - x) = (3x - 1)^2$.

939. а) $x(7 - x) = 5x - 8$;

б) $2x(3x + 4) = 4x^2 + 5x + 27$.

940. а) $3x(2x - 5) = 2(x^2 + 2)$;

б) $3x(5x + 3) = 2x(6x + 5) + 2$.

941. а) $(x - 5)^2 = 3x + 25$;

в) $(p - 3)^2 = 2(p + 1)$;

б) $(x + 4)^2 = 3x^2 - 8$;

г) $(3c - 5)^2 = 10c + 9$.

942. а) $(2x + 4)^2 = 11x^2 + 1$;

в) $x^2 + 1 = 625 - 2x$;

б) $(9 - 4x)^2 = 5(4x + 1)$;

г) $y^2 + 4 = 961 + 4y$.

943. а) $(x + 4)(2x - 3) - (5x - 6)(x - 3) = 10$;

б) $(2x - 8)(3x + 1) = (4x - 12)(x - 2) + 8$.

944. а) $x+3 = \frac{x+3}{x}$;

б) $\frac{2c^2}{c-1} = c-2$.

945. а) $\frac{16}{x+2} = x$;

б) $y = \frac{18}{y-3}$.

🏠 946. а) $\frac{z+2}{z} = \frac{5z+1}{z+1}$;

б) $\frac{5}{5-m} = \frac{m^2-6m}{m-5}$.

947. а) $\frac{x-5}{x+3} = \frac{3+2x}{2x-1}$;

б) $\frac{2x-1}{3-2x} = \frac{x-1}{2x+3}$.

948. а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

б) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$;

в) $x^4 - x^2 - 6 = 0$;

г) $x^4 + x^2 - 6 = 0$.

🏠 949. а) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;

б) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$;

в) $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$;

г) $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$.

950. а) $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$;

б) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$;

в) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$;

г) $9x^4 + 10x^2 + 1 = 0$.

🏠 951. Складіть рівняння виду $(x-a)(x-b) = 0$, корені якого:

а) $2i3$; б) $1i5$; в) $3i-2$; г) $-2i-6$.

952. Складіть квадратне рівняння, корені якого:

а) $2i5$; б) $3i-7$; в) $0,5i4$; г) $-0,2i-8$.

953. Один корінь квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ дорівнює 1. Чому дорівнює $a + b + c$?**Рівень Б**

Розв'яжіть рівняння способом виділення квадрата двочлена (954 – 955).

954. а) $4x^2 + 4x - 15 = 0$;

б) $9y^2 + 18y + 8 = 0$;

в) $6x^2 - 13x + 6 = 0$;

г) $5x^2 + 31x - 28 = 0$.

🏠 955. а) $2z^2 = 9z - 10$;

б) $8 = 3y + 5y^2$;

в) $3x^2 + 4x - 7 = 0$;

г) $5x^2 + 3x + 2 = 0$.

956. Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

а) $x^2 + 5x + 4 = 0$;

б) $x^2 + 5x + 6 = 0$;

в) $x^2 - 8x + 15 = 0$;

г) $x^2 - x - 6 = 0$.

957. При яких значеннях змінної x правильна рівність:

а) $(3x + 1)^2 = 3x + 1$; б) $(3x + 1)^2 = 3(x + 1)$;

в) $4(3x + 1)^2 = (6x + 2)^2$; г) $(3x + 1)^2 = 3x^2 + x$?

Розв'яжіть рівняння (958—973).

958. а) $(2,5x - 7)(2x + 3) + 3x + 4 = (4x - 9)(1,5x + 1)$;

б) $(3z - 5)(4z + 1) + (2z + 3)(5z - 4) = 6z(3 + 2z) - 11$.

959. а) $(2t - 3)(5t + 2) + (3t - 1)(4t + 2) = 10t^2 - 5$;

б) $(3n - 2)(3n + 2) - (2n - 3)^2 = 3n(n + 7) - 17$.

960. а) $\frac{1+3x}{2+x} + \frac{x-1}{2-x} = 1$;

б) $\frac{2y-2}{y+3} - \frac{3y-y}{3-y} = 6$.

961. а) $\frac{c-6}{c+5} - 2 = \frac{c-4}{5-c}$;

б) $\frac{7}{2x-3} + \frac{5}{x-1} = 12$.

962. а) $\frac{7}{x+2} - \frac{3}{2-x} = \frac{16}{x}$;

б) $\frac{5}{z-2} - \frac{4}{z-3} = \frac{1}{z}$.

963. а) $\frac{3}{2x-1} - \frac{39}{2x+1} + \frac{45}{4x^2-1} = 5$;

б) $\frac{2(x+7)}{x+1} - \frac{x+11}{x^2-1} + \frac{x-1}{x+1} = 4$.

964. а) $\frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1} - \frac{7+18x}{x^3-1} = 0$;

б) $\frac{x+6}{x-1} - \frac{x^2-x+16}{x^2+x+1} = \frac{x+36}{x^3-1}$.

965. а) $\frac{x+1}{4x} - \frac{8-x}{3x^2-6x} = \frac{5x-1}{2x-4}$; б) $\frac{3-2x}{5-x} + \frac{3}{3-x} - \frac{x+3}{x+1} = 1$.

966. а) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{2x-7}{x^2-9x+14}$;

б) $\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2+9x+18} = \frac{2x+7}{x^2+5x-6}$.

967. а) $\frac{5x-7}{9} + \frac{14}{2x-3} = x-1$; б) $\frac{x-4}{12} + \frac{2x-22}{x-6} = \frac{16-x}{4}$.

968. а) $\frac{x}{x-2} + \frac{6}{x^2-7x+10} = \frac{2}{x-5}$;

б) $\frac{2}{x-7} = \frac{x}{x-2} + \frac{10}{(x-2)(x-7)}$.

969. а) $\frac{2z-3}{z-2} + \frac{z+1}{z-1} = \frac{3z+11}{z+1}$; б) $\frac{3c+1}{c-3} + \frac{2c-1}{c-2} = \frac{5c-14}{c-4}$.

970. а) $(x+1)^2 = 7918 - 2x$; б) $(x+2)^2 = 3131 - 2x$.

971. а) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$; б) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$.

972. а) $\sqrt{2}b^2 - 3b + \sqrt{2} = 0$; б) $c^2 - \sqrt{6}c + 2,5 = 0$.

973. а) $\frac{1}{x+x^2} + \frac{8}{x-8x^2+x^3} = \frac{6}{1-7x-7x^2+x^3}$;

б) $\frac{1}{x^4-1} + \frac{x-1}{x^3+3x^2+x+3} = \frac{x+2}{x^3+3x^2-x-3}$.

974. Розв'яжіть ребуси, зображені на малюнках 58 і 59.

Розв'яжіть рівняння (975—978).

975. а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

б) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;

в) $x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$;

г) $x - 7\sqrt{x} + 12 = 0$.

976. а) $x^2 - 5(\sqrt{x})^2 - 6 = 0$;

б) $x^2 + (\sqrt{x})^2 - 12 = 0$;

в) $x^2 - 4\sqrt{x^2} - 21 = 0$;

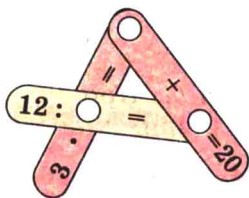
г) $x^2 + 2\sqrt{x^2} - 3 = 0$.

977. а) $x + 4\sqrt{x} - 12 = 0$;

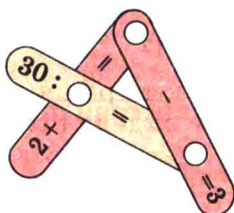
б) $x - 8\sqrt{x} + 15 = 0$;

в) $3x - 8\sqrt{x} + 5 = 0$;

г) $2x + 3\sqrt{x} + 1 = 0$.



Мал. 58



Мал. 59

978. а) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$; б) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$;
 в) $(x+3)^4 - (x+3)^2 - 2 = 0$;
 г) $(2x-1)^4 - 10(2x-1)^2 + 9 = 0$.

Знайдіть корені рівняння (979—980).


979. а) $(x-3)^2 - 6(x-3) + 8 = 0$; б) $(x+2)^2 - (x+2) - 6 = 0$;
 в) $x^2 + 2x + 2(x+1) - 23 = 0$;
 г) $4x^2 - 12x + 2(2x-3) - 6 = 0$.
980. а) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$; б) $x^3 + 7 - 7x^2 = x$;
 в) $(x^2 + x)(x^2 + x - 7) = 60$; г) $x^2 + 5 = 3\sqrt{x^2 + 5}$.

981. Покажіть, що рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ навіть за умови, що $a = 0$, можна розв'язувати за формулою

$$x_{1,2} = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Знайдіть корені рівняння (982—987).

982. а) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 4) = 10$;
 б) $(2x^2 - 5x - 4)(2x^2 - 5x) = 21$.
983. а) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24$;
 б) $(x-2)(x+1)(x+2)(x+5) + 20 = 0$.
984. а) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$;
 б) $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) - 28 = 0$.
985. а) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 - 6\left(\frac{x+1}{x}\right) = -5$; б) $\left(\frac{x}{x-2}\right)^2 - \frac{x}{x-2} = 42$.
986. а) $\left(\frac{\sqrt{x}-1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{x}-1}{2} = 12$; б) $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{x}\right)^2 + \frac{\sqrt{x}+1}{x} = 2$.
987. а) $(x-1)^2(x^2 - 2x) = 12$; б) $(x-2)^2(x^2 - 4x) = -3$.
- 988*. Розв'яжіть рівняння з параметром m . При яких значеннях m дане рівняння має два рівних корені? При яких — не має розв'язків?
- а) $x^2 + 4x + m = 0$; б) $x^2 + mx + 4 = 0$;
 в) $mx^2 + 8x + 1 = 0$; г) $mx^2 + 20x + m = 0$.

 **989***. При яких значеннях m рівняння матиме один корінь:

а) $5x^2 - 2x + m = 0$;

б) $\frac{1}{2}x^2 + mx + 4 = 0$;

в) $mx^2 + (m+1)x + 1 = 0$; г) $x^2 + (m+2)x + 2m + 1 = 0$?

990*. При яких значеннях m рівняння матиме три корені:

а) $(5x^2 - 2x - 3)(x^2 - mx + 4) = 0$;

б) $(x^2 + 3x - 10)(mx^2 - 6x + 1) = 0$?

991. Розв'яжіть рівняння з модулем:

а) $x^2 - 7|x| + 6 = 0$;

б) $x^2 - 4|x| - 21 = 0$.

Розв'яжіть систему рівнянь (**992—994**).

 **992**. а)
$$\begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ 3x - y = -7; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x = 0, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$$

993. а)
$$\begin{cases} \frac{3}{x+5} + \frac{2}{y-3} = 2, \\ \frac{4}{x-2} - \frac{1}{y-6} = 0; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \frac{x^2 + x + 1}{y^2 + y + 1} = 3, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

994. а)
$$\begin{cases} \frac{y+3}{(3x-y)(3y-x)} = 0,5, \\ x-y = 0,4(x+y); \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \frac{2x-5}{x-2} + \frac{2y-3}{y-1} = 2, \\ 3x-4y = 1. \end{cases}$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

995. Порівняйте числа $7,8 \cdot 10^5$ і $2,4 \cdot 10^6$. Знайдіть різницю їх квадратів.

996. Доведіть, що:

а) $4^{20} - 1$ ділиться на 5;

б) $9^{60} + 5$ ділиться на 2;

в) $17^{16} + 9$ ділиться на 10; г) $33^{25} - 3$ ділиться на 6;

г) $8^{10} - 10^8$ ділиться на 8; д) $23^{24} + 24^{23}$ ділиться на 5.

997. Спростіть вираз:

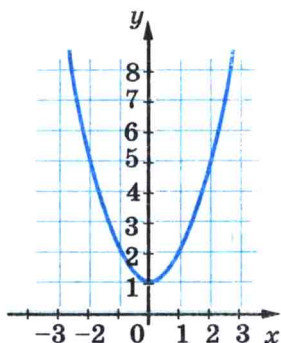
а) $(-x-5)(2x+3)$;

б) $(3a-2)(a-4)$;

в) $(2y+8)\left(3-\frac{1}{2}y\right)$;

г) $\left(5-\frac{1}{3}a\right)(6a+9)$.

998. Чи проходить графік функції $y = x^2 + 1$, зображений на малюнку 60, через точку $A(3,5; 13,25)$? При яких значеннях x значення цієї функції дорівнює 7,25?



Мал. 60

§21. ТЕОРЕМА ВІСТА

Квадратне рівняння називають *зведеним*, якщо перший його коефіцієнт дорівнює одиниці. У таблиці наведено приклади трьох зведених квадратних рівнянь, їх корені, а також суми і добутки коренів:



Рівняння	x_1 і x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
$x^2 - 5x + 6 = 0$	2 і 3	5	6
$x^2 - 3x - 4 = 0$	-1 і 4	3	-4
$x^2 + 8x + 15 = 0$	-5 і -3	-8	15

Порівняйте суму коренів кожного зведеного квадратного рівняння з його другим коефіцієнтом, а добуток коренів — з вільним членом.

Теорема Віста.

Якщо зведене квадратне рівняння має два корені, то їх сума дорівнює другому коефіцієнту рівняння, взятому з протилежним знаком, а добуток — вільному члену.

Доведення. Якщо рівняння $x^2 + px + q = 0$ має корені x_1 і x_2 , то їх можна знайти за формулами:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \quad \text{і} \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}, \quad (*)$$

де $D = p^2 - 4q$ — дискримінант рівняння.

Додамо і перемножимо ці корені:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} + \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = q.$$

Отже, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. А це й вимагалось довести.

Примітка. Якщо $p^2 - 4q = 0$, то рівняння $x^2 + px + q = 0$ має один корінь $x = -\frac{p}{2}$. Формули (*) у цьому випадку дають

$x_1 = -\frac{p}{2}$ і $x_2 = -\frac{p}{2}$. Тому часто вважають, що дане рівняння має два рівних корені. Теорема Вієта правильна і для цього випадку, оскільки

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \left(-\frac{p}{2}\right) = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Кожне квадратне рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) рівносильне зведеному квадратному рівнянню $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Тому якщо таке рівняння має корені x_1 і x_2 , то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{і} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Теорема (обернена до теореми Вієта).



Якщо сума і добуток чисел m і n дорівнюють відповідно $-p$ і q , то m і n — корені рівняння $x^2 + px + q = 0$.

Доведення. Нехай $m + n = -p$ і $m \cdot n = q$.

За цих умов рівняння $x^2 + px + q = 0$ рівносильне рівнянню $x^2 - (m + n)x + mn = 0$.

Підставимо у це рівняння замість змінної x числа m і n :

$$m^2 - (m+n)m + mn = m^2 - m^2 - nm + mn = 0,$$

$$n^2 - (m+n)n + mn = n^2 - mn - n^2 + mn = 0.$$

Отже, m і n — корені даного рівняння. А це й треба було довести.

З теореми Вієта випливає, що коли p і q — цілі числа, то цілі розв'язки рівняння $x^2 + px + q = 0$ є дільниками числа q . Користуючись оберненою теоремою, можна перевіряти, чи є та чи інша пара чисел коренями зведеного квадратного рівняння. Це дає можливість усно розв'язувати такі рівняння.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 12x + 11 = 0$.

Розв'язання (усне). Якщо рівняння має цілі корені, то їх добуток дорівнює 11. Це можуть бути числа 1 і 11 або -1 і -11 . Другий коефіцієнт рівняння додатний, тому корені від'ємні.

Відповідь. $x_1 = -1, x_2 = -11$.



Хочете знати ще більше?

Теорема Вієта правильна не тільки для зведеного квадратного рівняння, а й для рівнянь вищих степенів. Наприклад, якщо рівняння третього степеня $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ має корені x_1, x_2 і x_3 , то

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b,$$

$$x_1x_2x_3 = -c.$$

Якщо таке рівняння з цілими коефіцієнтами має цілі розв'язки, то вони є дільниками вільного члена.

Перевірте себе

1. Які квадратні рівняння називають зведеними?
2. Сформулюйте теорему Вієта для зведеного квадратного рівняння.
3. Сформулюйте теорему, обернену до теореми Вієта.
4. Як можна знаходити цілі розв'язки квадратного рівняння з цілими коефіцієнтами?

✓ Виконаємо разом!

1. Знайдіть суму і добуток коренів рівняння:

а) $x^2 + x - 6 = 0$; б) $x^2 + 2x + 3 = 0$.

✓ Розв'язання. а) $D = 1 + 24 > 0$. Корені існують, тому

$$x_1 + x_2 = -1; \quad x_1 \cdot x_2 = -6;$$

б) $D = 4 - 12 < 0$. Корені не існують.

Відповідь. а) $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 \cdot x_2 = -6$; б) корені не існують.

2. При яких значеннях m добуток коренів рівняння $x^2 + 8x + m - 7 = 0$ дорівнює 3?

✓ Розв'язання. $m - 7 = 3$, $m = 10$.

Відповідь. $m = 10$.

3. Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 4x + 1 = 0$, знайдіть суму квадратів його коренів.

✓ Розв'язання. $D = 16 - 4 > 0$. Корені існують.

$$x_1 + x_2 = 4; \quad x_1 \cdot x_2 = 1;$$

$$(x_1 + x_2)^2 = 16; \quad x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 16;$$

$$x_1^2 + 2 \cdot 1 + x_2^2 = 16; \quad x_1^2 + x_2^2 = 16 - 2, \quad x_1^2 + x_2^2 = 14.$$

Відповідь. $x_1^2 + x_2^2 = 14$.

Виконайте усно

999. Знайдіть суму і добуток коренів рівняння:

а) $x^2 - 7x + 10 = 0$; б) $x^2 - 9x + 14 = 0$;

в) $x^2 - 0,5x - 1,5 = 0$; г) $x^2 - 4x + 2 = 0$.

1000. Перевірте, чи є дані числа коренями рівняння:

а) $x^2 - 8x + 7 = 0$, 1 і 7; б) $x^2 + 8x + 15 = 0$, 3 і 5;

в) $z^2 - 12z - 13 = 0$, -1 і 13; г) $t^2 - 6t + 6 = 0$, 3 і 3.

1001. Визначте знаки коренів рівняння (якщо вони є), не розв'язуючи рівняння:

а) $x^2 - 4x + 3 = 0$; б) $x^2 - 7x + 10 = 0$;

в) $x^2 - 6x + 8 = 0$; г) $x^2 + 10x + 21 = 0$;

$$г) y^2 - 15y + 44 = 0; \quad д) z^2 - 8z - 48 = 0.$$

Розв'яжіть рівняння (1002—1005).

$$1002. а) x^2 - 3x + 2 = 0; \quad б) x^2 - 4x - 5 = 0.$$

$$1003. а) x^2 - 4x + 3 = 0; \quad б) x^2 - 7x + 12 = 0;$$

$$в) y^2 - y - 12 = 0; \quad г) y^2 + y - 12 = 0.$$

$$1004. а) z^2 - 13z + 40 = 0; \quad б) z^2 - 3z - 40 = 0;$$

$$в) x^2 + 5x + 6 = 0; \quad г) x^2 + x - 20 = 0.$$

$$1005. а) y^2 + 5y - 14 = 0; \quad б) z^2 - 2z - 15 = 0;$$

$$в) c^2 + 2c - 8 = 0; \quad г) t^2 + 9t - 10 = 0.$$

1006. Рівняння $x^2 + px + q = 0$ має корені 0,7 і 10. Знайдіть його коефіцієнти p і q .

Рівень А

Перевірте, чи є дані числа m і n коренями рівняння (1007—1008).

$$1007. а) 6x^2 - 5x + 1 = 0, m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{3};$$

$$б) 4x^2 - 4x - 3 = 0, m = -\frac{1}{2}, n = 1\frac{1}{2}.$$

$$1008. а) 3x^2 - 8x + 5 = 0, m = -1, n = -1\frac{2}{3};$$

$$б) 3x^2 + 4x + 1 = 0, m = -1, n = -\frac{1}{3}.$$

1009. Знайдіть значення q , при якому рівняння має рівні корені:

$$а) x^2 - 14x + q = 0; \quad б) x^2 + 12x + q = 0;$$

$$в) x^2 + qx + 25 = 0; \quad г) x^2 + qx + 121 = 0.$$

1010. Знайдіть p і x_1 , якщо:

$$а) x^2 + px + 25 = 0 \text{ і } x_2 = 7;$$

$$б) x^2 + px + 21 = 0 \text{ і } x_2 = -3.$$


1011. Знайдіть q і x_1 , якщо:

$$а) x^2 - 11x + q = 0 \text{ і } x_2 = 6; \quad б) x^2 + 6x + q = 0 \text{ і } x_2 = 3.$$

1012. Знайдіть k і x_1 , якщо:

а) $kx^2 + 9x - 2 = 0$ і $x_2 = -2$;

б) $kx^2 - 4x - 39 = 0$ і $x_2 = -3$.


 **1013.** Рівняння $x^2 + kx + t = 0$ має корені -3 і $\frac{1}{3}$. Знайдіть $5t$.

1014. Складіть зведене квадратне рівняння, корені якого дорівнюють: а) 2 і 4; б) -3 і 5; в) 0,5 і 4; г) $\frac{1}{7}$ і 7;

г) $2 - \sqrt{3}$ і $2 + \sqrt{3}$.

1015. Один із коренів рівняння $x^2 - 5x + c = 0$ дорівнює 3. Знайдіть c .

 **1016.** Один із коренів рівняння $x^2 + mx + 3 = 0$ дорівнює 5. Знайдіть m .

 **1017.** Один із коренів рівняння $ax^2 + 7x + 8 = 0$ дорівнює -2 . Знайдіть a .

1018. Один із коренів рівняння $x^2 + 14x + c = 0$ дорівнює 7. Знайдіть другий корінь і число c .

1019. Один із коренів рівняння $x^2 + px + 8 = 0$ дорівнює $\frac{1}{2}$. Знайдіть другий корінь і коефіцієнт p .

1020. Дано рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. За якої умови:

а) сума його коренів дорівнює 0;

б) добуток його коренів дорівнює 0;

в) різниця його коренів дорівнює 0;

г) сума квадратів його коренів дорівнює 0?


1021. Знайдіть корені рівняння $x^2 - 8x + c = 0$, якщо:

а) один з них у 3 рази більший від другого;

б) один з них на 5 менший від другого;

в) один з них становить 20 % від другого.

Рівень Б

 **1022.** Складіть квадратне рівняння, корені якого дорівнюють:

а) $\frac{2}{3}$ і $1\frac{1}{2}$;

б) $\frac{3}{5}$ і $-1\frac{2}{3}$;

$$\text{в) } 2 - \sqrt{3} \text{ і } 2 + \sqrt{3}; \quad \text{г) } \frac{-2 - \sqrt{5}}{3} \text{ і } \frac{-2 + \sqrt{5}}{3}.$$

1023. Складіть усі можливі квадратні рівняння, які мали б по одному спільному кореню з даними рівняннями:

а) $x^2 - 3x - 28 = 0$ і $2x^2 + x - 10 = 0$;

б) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ і $x^2 - 4x + 4 = 0$.

1024. Не розв'язуючи дане рівняння, складіть нове квадратне рівняння, корені якого менші за відповідні корені даного рівняння на одиницю:

а) $3x^2 + 11x - 4 = 0$; б) $2x^2 - 6x - 3 = 0$.

1025. Не розв'язуючи дане рівняння, складіть нове квадратне рівняння, корені якого втричі більші за відповідні корені даного рівняння:

а) $3x^2 + 2x - 85 = 0$; б) $2x^2 - 6x + 3 = 0$.

1026. Знайдіть корені рівняння x_1 і x_2 ($x_2 > x_1$) та вільний член q , якщо:

а) $x^2 - 10x + q = 0$ і $x_2 - x_1 = 14$;

б) $x^2 + 5x + q = 0$ і $x_2 - x_1 = 9$.

1027. Знайдіть корені рівняння x_1 і x_2 ($x_2 > x_1$) і значення k , якщо:

а) $x^2 + kx + 10 = 0$ і $x_1 : x_2 = 0,4$;

б) $x^2 - 8x + k = 0$ і $x_1 : x_2 = -0,2$.

1028. Різниця коренів рівняння $x^2 + 6x + q = 0$ дорівнює 8. Знайдіть його корені та число q .

1029. Різниця коренів рівняння $2x^2 + 3x + c = 0$ дорівнює 2,5. Знайдіть число c .

1030. Знайдіть корені рівняння $x^2 - 81x + q = 0$, якщо один з них: а) вдвічі більший від другого; б) становить $\frac{4}{5}$ другого.

1031. При яких значеннях параметра c рівняння $x^2 - 4x + c = 0$ має два корені, з яких:


а) один у 3 рази більший від другого;

б) один на 1 більший від другого?

1032. Не знаходячи коренів x_1 і x_2 рівняння $x^2 - 8x + 6 = 0$, обчисліть:

а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $x_1^2 + x_2^2$; в) $x_1^3 + x_2^3$.

1033. Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 2mx + 2m^2 - 2 = 0$, знайдіть суму квадратів його коренів.

 **1034.** Доведіть, що коли $p^2 - 4q = 0$, то $x^2 + px + q$ — квадрат двочлена. Якого?

1035. Не розв'язуючи дане рівняння, складіть нове квадратне рівняння, корені якого були б обернені до відповідних коренів даного рівняння:

а) $8x^2 - 14x + 5 = 0$; б) $2x^2 - 7x + 6 = 0$.

 **1036.** Не розв'язуючи рівняння $3x^2 - 2x + 6 = 0$, обчисліть:

а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$,

де x_1 і x_2 — корені даного рівняння.

1037. Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 2x - 9 = 0$, обчисліть:

а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $x_1^3 + x_2^3$,

де x_1 і x_2 — корені даного рівняння.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1038. Запишіть у стандартному вигляді число:

а) 375 000 000 000; б) 0,000000038.

1039. Знайдіть різницю і відношення чисел:

а) $8,27 \cdot 10^7$ і $4,135 \cdot 10^7$; б) $2,3 \cdot 10^{-5}$ і $4,6 \cdot 10^{-6}$.

1040. Подайте у вигляді многочлена:

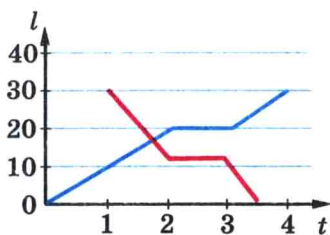
а) $(a + b^2)(a^2 + b)$; б) $(x^2 - 3y)(2x^2 + y)$;
 в) $(5a^2 + b^2)(2a^2 - 3b^2)$; г) $(2m^2 - n)(2n^2 - m)$;
 ґ) $(x^3 - 4)(3x^3 + 5)$; д) $(x^3 - 2x^2)(3x^3 + x^2)$.

1041. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 0,5x + 0,3y = 8, \\ 1,2x - 0,5y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1,4x - 2,5y = 39, \\ 0,8x - 1,3y = 21. \end{cases}$

1042. На малюнку 61 зображено графіки руху двох велосипедистів. Прокоментуйте, як довго кожен з них їхав, з якою швидкістю?

1043. Замініть літери цифрами, щоб виконувалась рівність
ДИСК + РИМ = ІНАНТ.



Мал. 61

§22. КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

Квадратним тричленом називають многочлен вигляду $ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a, b, c — дані числа, причому $a \neq 0$.



Змінну квадратного тричлена можна позначати будь-якою буквою. Приклади квадратних тричленів:

$$4x^2 - 5x + 6, -y^2 + 4y + 7, \frac{1}{2}z^2 + z - 1.$$

Якщо квадратний тричлен прирівняти до нуля, матимемо квадратне рівняння. Його корені й дискримінант називають відповідно коренями і дискримінантом даного квадратного тричлена. Наприклад, дискримінант і корені квадратного тричлена $5x^2 - 7x - 6$ дорівнюють відповідно 169, 2 і $-\frac{3}{5}$, бо це дискримінант і корені рівняння $5x^2 - 7x - 6 = 0$.

З теореми Вієта випливає правило розкладання квадратних тричленів на множники.

Якщо m і n — корені рівняння $x^2 + px + q = 0$, то
 $x^2 + px + q = (x - m)(x - n)$.

$$\text{Бо } x^2 + px + q = x^2 - (m + n)x + mn = x^2 - mx - nx + mn = (x - m)(x - n).$$

Приклад. Розкладіть на множники тричлен: $x^2 + 4x - 21$.
Розв'язання. а) Корені рівняння $x^2 + 4x - 21 = 0$ дорівнюють 3 і -7. Тому

$$x^2 + 4x - 21 = (x - 3)(x + 7).$$

Відповідь. $(x - 3)(x + 7)$.

Правильною є й така теорема.



Якщо корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ дорівнюють m і n , то його можна розкласти на множники:

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)(x - n).$$

Доведення. $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$, $a \neq 0$. Отже, корені m і n тричлена $ax^2 + bx + c$ є також коренями рівняння $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. За теоремою Вієта,

$$\frac{b}{a} = -(m + n), \quad \frac{c}{a} = mn.$$

Тому

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x^2 - (m + n)x + mn) = \\ &= a(x^2 - mx - nx + mn) = \\ &= a(x(x - m) - n(x - m)) = a(x - m)(x - n). \end{aligned}$$

Наприклад, якщо треба розкласти на множники тричлен $3x^2 + 5x - 2$, розв'язуємо рівняння $3x^2 + 5x - 2 = 0$. Його дискримінант $D = 25 + 24 = 49$, тому

$$x_1 = \frac{-5+7}{6} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{-5-7}{6} = -2.$$

Отже,

$$3x^2 + 5x - 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2).$$

Відповідь можна записати і так:

$$3x^2 + 5x - 2 = (3x - 1)(x + 2).$$

Розкладати квадратні тричлени на множники доводитьься при скороченні дробів, зведенні їх до спільного знаменника тощо. Наприклад, щоб скоротити дріб $\frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 2}$, спочатку розкладають його чисельник і знаменник на множники. Оскільки

$$3x^2 + 5x - 2 = (3x - 1)(x + 2), \quad x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2),$$

ТО

$$\frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 2} = \frac{(3x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{3x - 1}{x - 1}.$$

Кожний квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ можна подати у вигляді $a(x - k)^2 + p$, де k і p — деякі числа. Таке перетворення називають *виділенням квадрата двочлена*. Як виконувати таке перетворення, покажемо на прикладі. Щоб виділити з квадратного тричлена $2x^2 - 12x + 25$ квадрат двочлена, спочатку винесемо за дужки множник 2:

$$2x^2 - 12x + 25 = 2\left(x^2 - 6x + \frac{25}{2}\right).$$

Одночлен $6x$ подамо у вигляді добутку $2 \cdot 3x$, додамо до нього 9 і віднімемо 9:

$$x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 + \frac{25}{2} = (x - 3)^2 + \frac{7}{2}.$$

Остаточо маємо: $2x^2 - 12x + 25 = 2(x - 3)^2 + 7$.

Виділення квадрата двочлена дає можливість розв'язувати задачі на знаходження найбільшого чи найменшого значення квадратного тричлена. Наприклад, щоб знайти, при якому значенні x значення виразу $2x^2 - 12x + 25$ найменше, виділимо з нього квадрат двочлена:

$$2x^2 - 12x + 25 = 2(x - 3)^2 + 7.$$

Другий доданок одержаної суми — число 7, а перший має найменше значення, коли дорівнює 0, тобто якщо $x = 3$. Отже, тричлен $2x^2 - 12x + 25$ має найменше значення 7, якщо $x = 3$.



Хочете знати ще більше?

Якщо квадратний тричлен має дробові корені, то в розкладі його на лінійні множники бажано перший коефіцієнт цього тричлена внести в дужки. Наприклад:

$$3x^2 - 5x + 2 = 3(x - 1)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (x - 1)(3x - 2).$$

$$10x^2 - 17x + 3 = 10\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) = (2x - 3)(5x - 1).$$

Перевірте себе

1. Що називають квадратним тричленом?
2. Скільки коренів може мати квадратний тричлен?
3. Як розкласти на лінійні множники тричлен виду $x^2 + px + q$?
4. Як розкласти на лінійні множники тричлен виду $ax^2 + bx + c$?
5. Як виділити квадрат двочлена з квадратного тричлена:
 - а) $x^2 + px + q$;
 - б) $ax^2 + bx + c$?

✓ Виконаємо разом!

Знайдіть значення функції $y = \frac{2x^2 + x - 3}{2x + 3}$ при $x = 2008$.

✓ Розв'язання. Розкладемо чисельник формули на множники:

$$y = \frac{2(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right)}{2x+3} = \frac{(x-1)(2x+3)}{2x+3} = x-1.$$

Якщо $x = 2008$, то $y = 2008 - 1 = 2007$.

Відповідь. $y = 2007$.

Виконайте усно

1044. Знайдіть корені квадратного тричлена:

- | | | |
|---------------------|-----------------------|---------------------|
| а) $x^2 + 2x + 1$; | б) $x^2 + 6x + 9$; | в) $x^2 + 4 + 4x$; |
| г) $x^2 - 4x + 4$; | р) $x^2 - 10x + 25$; | д) $1 + x^2 - 2x$. |
| е) $x^2 + 2x + 3$; | є) $x^2 + 6x + 5$; | ж) $x^2 - 4x + 1$. |

Рівень А

Знайдіть корені квадратного тричлена (1045—1046).

- 🏠 1045. а) $x^2 + 8x - 9$;
 б) $2x^2 - 5x - 7$; | в) $5x^2 + 2x - 3$; |
- г) $y^2 - y - 6$;
 р) $4z^2 - 5z + 1$; | д) $3n^2 - n - 2$. |

1046. а) $4x^2 + 3x - 1$; б) $6x^2 + 7x - 5$;
 в) $-x^2 - 4x + 5$; г) $9x^2 + 6x + 1$;
 д) $0,4x^2 + 0,7x - 3$.

Розкладіть на множники квадратний тричлен (1047—1049).

1047. а) $x^2 - 10x + 21$; б) $a^2 + 2a - 15$; в) $2x^2 + 5x - 3$;
 г) $c^2 - 11c - 26$; г) $9a^2 + 3a - 2$; д) $4c^2 + 25c + 25$.

1048. а) $9x^2 - 12x + 4$; б) $0,5x^2 - 2x + 4$; в) $-x^2 + 5x - 6$;
 г) $x^2 - 5x + 6$; г) $x^2 - 3x + 5$; д) $y^2 + 2y - 8$.

1049. а) $5 + 4z - z^2$; б) $x^2 + 10x + 25$; в) $2x^2 - 12x + 16$;
 г) $2x^2 - 13x + 6$; г) $6a^2 - 5a + 1$; д) $0,2c^2 - c + 1,2$.

Скоротіть дріб (1050—1051).

1050. а) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$; б) $\frac{x - 4}{x^2 - x - 12}$; в) $\frac{2x - 10}{x^2 - 3x - 10}$.

1051. а) $\frac{x + 5}{x^2 + 7x + 10}$; б) $\frac{x - 3}{x^2 - 2x - 3}$; в) $\frac{12 + 3x}{x^2 + 5x + 4}$.

Виділіть квадрат двочлена з квадратного тричлена (1052—1053).

1052. а) $x^2 + 6x - 4$; б) $x^2 - 4x + 5$; в) $x^2 - 8x + 15$;

1053. а) $x^2 + 4x - 18$; б) $x^2 - 6x + 8$; в) $x^2 + 8x + 7$.

Рівень Б

1054. Знайдіть корені квадратного тричлена:

- а) $2x^2 - 5x + 2$; б) $-x^2 - 7x + 8$; в) $1,5y^2 - 3y + \frac{4}{3}$;

- г) $z^2 - \sqrt{2}z + 0,5$; г) $\frac{4}{49}x^2 + 1\frac{5}{7}x + 9$; д) $1\frac{2}{7}x^2 - 3x + 1\frac{17}{28}$.

1055. Розкладіть на множники тричлен:

- а) $6a^2 + a - 2$; б) $c^2 - \sqrt{2}c - 4$;

- в) $0,2n^2 + 0,8n - 12$; г) $m^2 - \sqrt{2}m - 1$.

Скоротіть дріб (1056—1058).

1056. а) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 7x + 10}$; б) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$; в) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$;

$$\text{r)} \frac{2a^2 - 5a + 2}{3a^2 - 3,5a + 1}; \text{г)} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 2\sqrt{3} + 3}; \quad \text{д)} \frac{c^2 + \sqrt{5}c - 10}{c^2 - 3\sqrt{5}c + 10}.$$

$$\text{1057. а)} \frac{3x - 9}{2x^2 - 5x - 3}; \text{б)} \frac{a^2 - 9}{2a^2 + 7a + 3}; \text{в)} \frac{c^2 - 8c - 20}{c^2 - 11c + 10};$$

$$\text{г)} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 4x - 5}; \text{г)} \frac{a^2 + 9a + 14}{a^2 + 10a + 21}; \text{д)} \frac{2c^2 - 5c - 3}{2c^2 + 7c + 3}.$$

$$\text{1058. а)} \frac{a^2 - 8a + 7}{a^2 - 9a + 14}; \text{б)} \frac{2 - 3c + c^2}{c^2 - 4c + 4}; \text{в)} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 4x + 1};$$

$$\text{г)} \frac{3c^2 - 5c + 2}{3c^2 - c - 2}; \text{г)} \frac{x^2 + 2x - 15}{35 + 2x - x^2}; \text{д)} \frac{-3x^2 + 5x - 2}{x^2 - 1}.$$

1059. Знайдіть суму і різницю дробів:

$$\text{а)} \frac{1}{2x^2 + 5x - 3} \text{ і } \frac{1}{2x^2 - 7x + 3};$$

$$\text{б)} \frac{1}{6a^2 - 13a + 6} \text{ і } \frac{1}{3a^2 - 11a + 6}.$$

1060. Доведіть: якщо в квадратному тричлені $ax^2 + bx + c = 0$ коефіцієнти $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.

1061. Доведіть: якщо в квадратному тричлені $ax^2 + bx + c = 0$ сума коефіцієнтів $a + c = b$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

З даного тричлена виділіть квадрат двочлена (**1062—1063**).

$$\text{1062. а)} x^2 - 2x + 5; \quad \text{б)} a^2 - 6a + 10; \quad \text{в)} 2x^2 + x - 3;$$

$$\text{г)} c^2 - \frac{2}{3}c + 1; \quad \text{г)} n^2 - \sqrt{2}n + 3,5; \quad \text{д)} -x^2 + 4x + 5.$$

$$\text{1063. а)} 2a^2 - 12a - 9; \quad \text{б)} 3c^2 + 30c + 5; \quad \text{в)} 3a^2 - 6a - 9;$$

$$\text{г)} 10 + 6x - x^2; \quad \text{г)} 5 + 4x - x^2; \quad \text{д)} -4n^2 + 4n - 3.$$

1064. Доведіть, що при будь-якому значенні x значення виразів

$$x^2 - 4x + 5, \quad 3x^2 - 12x + 7, \quad \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 \text{ є додатними.}$$

$$\text{1065. Обчисліть значення дробу } \frac{2x^2 - 6x + 4}{2x^2 - 2x - 4} \text{ при } x = -1, 1; x = 9;$$

$$x = 11; x = 99.$$

1066. Чим відрізняються графіки функцій $y = x + 3$ і

$$y = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} ?$$

1067. При якому значенні x значення даного тричлена найменше:

а) $x^2 - 6x + 10$; б) $2x^2 + 16x + 13$; в) $\sqrt{3}x^2 - 6x + 9$?

1068. Знайдіть найбільше значення тричлена:

а) $4 - 2x - x^2$; б) $1 - 4z - 4z^2$; в) $3 + 12c - c^2$.

1069*. При яких значеннях x значення виразу $f(x)$ найменше? Обчисліть це найменше значення $f(x)$, якщо:

а) $f(x) = x^2 - 2x + 2$; б) $f(x) = x^2 - 6x + 11$;

в) $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$; г) $f(x) = 1,5x^2 - 3x + 2$.

1070*. Знайдіть відстань між найближчими точками осі x і графіка функції $y = x^2 - 2x + 7$.

1071*. При яких значеннях x значення виразу $f(x)$ найбільше? Обчисліть це значення, якщо:

а) $f(x) = 8 + 6x - x^2$; б) $f(x) = x - x^2$.

1072*. Знайдіть область значень функції:

а) $y = -x^4 - 6x^2 + 5$; б) $y = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1073. Скоротіть дріб з натуральними показниками степенів:

а) $\frac{3^n}{3^{n+1}}$; б) $\frac{2^{3n}}{8^n}$; в) $\frac{a^{n+2}}{a^n}$; г) $\frac{x^{n+3}}{x^3}$;

г) $\frac{a^{2n} + 1}{a^n + 1}$; д) $\frac{a^{2n} - 2a^n + 1}{a^n - 1}$; е) $\frac{x^{3n} - 1}{x^n - 1}$.

1074. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x^2 + 2}{x + 3} = \frac{x^2 + 4x}{x + 3}$; б) $\frac{x^2 + 2x}{x - 4} = \frac{x^2 - 8}{x - 4}$.

1075. Квадрат цілого числа не може закінчуватися однією з цифр — 2, 3, 7 або 8. Чи завжди є цілим числом квадратний корінь з числа, яке закінчується цифрою 5?

§23. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ СКЛАДАННЯМ КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ



За допомогою квадратних рівнянь можна спростити розв'язування багатьох задач.

Задача 1. Знайдіть два числа, добуток і середнє арифметичне яких дорівнюють відповідно 108 і 10,5.

Розв'язання. Якщо середнє арифметичне двох чисел дорівнює 10,5, то їх сума вдвічі більша, тобто 21. Нехай одне з шуканих чисел x , тоді друге дорівнює $21 - x$. Маємо рівняння:

$$x(21 - x) = 108, \text{ або } x^2 - 21x + 108 = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння: $D = 21^2 - 4 \cdot 108 = 9$,

$$x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{9}}{2}, \quad x_1 = 9, \quad x_2 = 12.$$

Якщо $x = 9$, то $21 - x = 12$; якщо $x = 12$, то $21 - x = 9$.

Відповідь. 9 і 12.

Задача 2. Власна швидкість моторного човна — 18 км/год. Відстань 12 км за течією річки він проходить на 9 хв швидше, ніж проти течії. Знайдіть швидкість течії річки.

Розв'язання. 9 хв = 0,15 год. Якщо швидкість течії річки дорівнює x км/год, то швидкість човна за течією становить $(18 + x)$ км/год, а проти течії — $(18 - x)$ км/год.

Відстань 12 км за течією він проходить за $\frac{12}{18+x}$ год, а проти

течії — за $\frac{12}{18-x}$ год. Маємо рівняння:

$$\frac{12}{18-x} - \frac{12}{18+x} = 0,15, \text{ або, } \frac{4}{18-x} - \frac{4}{18+x} = 0,05,$$

звідси

$$4(18+x) - 4(18-x) - 0,05(18-x)(18+x) = 0, \\ x^2 + 160x - 324 = 0, \quad D = 160^2 + 4 \cdot 324 = 26\,896.$$

$$x_{1,2} = \frac{-160 \pm \sqrt{26\,896}}{2} = \frac{-160 \pm 164}{2}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -162.$$

Задачу задовольняє тільки додатний корінь.

Відповідь. 2 км/год.

Задача 3. На площині n точок розміщені так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Якщо кожному з цих точок сполучити відрізком з усіма іншими, то утвориться 351 відрізок. Знайдіть число n .

Розв'язання. З однієї точки виходить $n - 1$ відрізків, з усіх n даних точок виходить $n(n - 1)$ відрізків. При цьому кожен відрізок повторюється двічі, бо має два кінці. Отже,

всього відрізків $\frac{n(n-1)}{2}$.

Маємо рівняння:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 351, \quad \text{або} \quad n^2 - n - 702 = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння: $D = 1 + 4 \cdot 702 = 2809$,

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2809}}{2} = \frac{1 \pm 53}{2},$$

звідси $n_1 = 27$, $n_2 = -26$. Від'ємний корінь задачу не задовольняє.

Відповідь. $n = 27$.



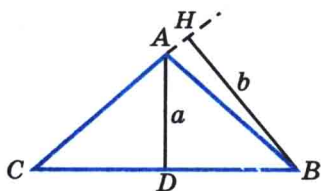
Хочете знати ще більше?

Іноді в задачах крім числових даних бувають і параметри. В таких випадках розв'язування задачі бажано супроводжувати відповідними дослідженнями — вказувати, яких значень можуть набувати параметри. Наприклад, розв'яжемо таку задачу.

Задача. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо відомо, що дві нерівні висоти його дорівнюють a і b .

Розв'язання. Позначимо сторони трикутника буквами: $AC = AB = x$, $CB = y$ (мал. 62). Тоді, користуючись теоремою Піфагора і формулою для обчислення площі трикутника, складемо таку систему:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{y^2}{4} + a^2, \\ bx = ay. \end{cases}$$



Мал. 62

Визначивши з другого рівняння y і підставивши його в перше,

$$\text{одержимо: } x^2 = \frac{b^2}{4a^2}x^2 + a^2, \quad x = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

$$\text{Тоді } y = \frac{b}{a}x = \frac{2ab}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

Отже,

$$x = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}, \quad y = \frac{2ab}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

Дослідження. В обчислених значеннях x і y під знаком кореня маємо різницю $4a^2 - b^2$, яка має бути додатною, а це можливо тільки при $b < 2a$.

Отже, наведений розв'язок задачі правильний не при будь-яких додатних a і b , а лише при $b < 2a$.

Однак це ще не все. Ми розглянули випадок, коли на основу y опущено висоту a . Але для тих самих a і b можливий інший варіант (мал. 63). Тоді маємо:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{y^2}{4} + b^2, \\ ax = by, \end{cases} \quad \text{звідси } x^2 = \frac{a^2}{4b^2}x^2 + b^2.$$

У цьому випадку $a < 2b$.

В і д п о в і д ь. Якщо $a < 2b < 4a$, то задача має два розв'язки:

$$1) \quad x_1 = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}, \quad y_1 = \frac{2ab}{\sqrt{4a^2 - b^2}};$$

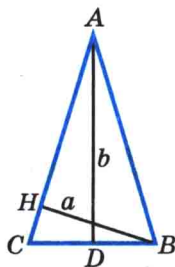
$$2) \quad x_2 = \frac{2b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}, \quad y_2 = \frac{2ab}{\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$

Якщо $2a \leq b$, то задача має один розв'язок:

$$x = \frac{2b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}, \quad y = \frac{2ab}{\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$

Якщо $2b \leq a$, то задача також має один розв'язок:

$$x = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}, \quad y = \frac{2ab}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$



Мал. 63

Перевірте себе

1. Які задачі можна розв'язувати за допомогою квадратних рівнянь?
2. Що таке математична модель задачі?
3. Як знайти швидкість тіла за течією?
4. Як знайти швидкість тіла проти течії?

✓ Виконаємо разом!

Задача 1. Знайдіть три послідовних цілих числа, сума квадратів яких дорівнює 509.

✓ Розв'язання. Нехай шукані числа: $x - 1$, x , $x + 1$.

Тоді маємо рівняння: $(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = 509$. Розв'яжемо його. Розкриємо дужки та зведемо подібні доданки:

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 - 509 = 0,$$

$$3x^2 - 507 = 0, \text{ звідси } x^2 = 169, x_1 = 13, x_2 = -13.$$

Отже, два інші числа: 12, 14 або -12, -14.

Відповідь. 12, 13, 14 або -12, -13, -14.

Виконайте усно

1076. Знайдіть сторону квадрата, площа якого 100 см^2 .

1077. Площа квадрата дорівнює S . Знайдіть його:

- а) сторону;
- б) периметр;
- в) діагональ.

1078. Площа поверхні куба дорівнює Q . Знайдіть:

- а) площу грані куба;
- б) ребро куба;
- в) діагональ грані куба.

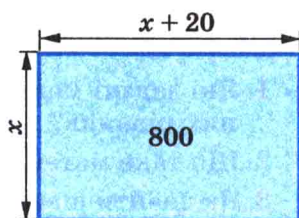
Рівень А

1079. Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 61, а добуток — 900.

1080. Знайдіть два числа, різниця яких дорівнює 11, а добуток — 312.



1081. Знайдіть довжину і ширину ділянки прямокутної форми, якщо її площа дорівнює 800 м^2 , а довжина на 20 м більша від ширини (мал. 64).



Мал. 64

1082. Периметр поля прямокутної форми дорівнює 6 км , а його площа — 200 га . Знайдіть довжину і ширину поля.

1083. Добуток двох послідовних цілих чисел більший від їх суми на 239 . Знайдіть ці числа.

1084. Задача Л. Магніцького. Знайдіть число, знаючи, що, додавши до його квадрата 108 , одержимо число в 24 рази більше від шуканого.



1085. Знайдіть число, яке на:

- 132 менше за його квадрат;
- $0,16$ більше за його квадрат;
- 435 менше за його подвоєний квадрат;
- 240 більше від квадратного кореня з цього числа.

1086. Знайдіть два числа, якщо:

- їх сума дорівнює 20 , а добуток — 91 ;
- їх різниця дорівнює 7 , а добуток — 198 ;
- їх сума дорівнює 23 , а сума квадратів — 265 ;
- їх різниця дорівнює 16 , а сума квадратів — 257 .

1087. Знайдіть дві суміжні сторони прямокутника, якщо:

- їх сума дорівнює 13 м , а площа прямокутника — 40 м^2 ;
- їх різниця дорівнює 5 м , а площа прямокутника — 66 м^2 ;
- периметр прямокутника дорівнює 60 м , а площа — 221 м^2 ;
- їх сума дорівнює 28 см , а довжина діагоналі — 20 см .



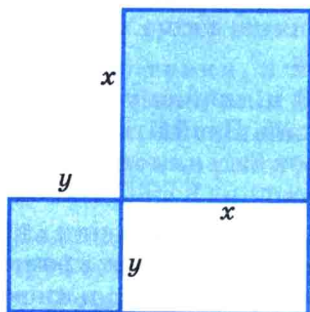
1088. Знайдіть два послідовних натуральних числа, сума квадратів яких дорівнює 545 .

1089. Добуток двох послідовних парних чисел на 41 більший від їх середнього арифметичного. Знайдіть ці числа.

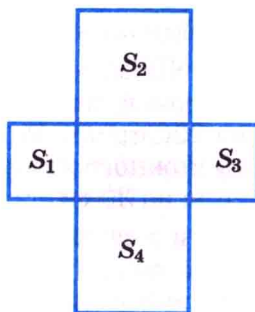
1090. Квадрат суми двох послідовних натуральних чисел більший від суми їх квадратів на 264 . Знайдіть числа.

1091. Знайдіть три послідовних цілих числа, сума квадратів яких дорівнює 434 .

1092. Периметр прямокутника дорівнює 26 см, а сума площ квадратів, побудованих на двох суміжних сторонах прямокутника, дорівнює 89 см^2 . Знайдіть сторони цього прямокутника (мал. 65).
1093. Периметр прямокутника дорівнює 32 см, а сума площ чотирьох квадратів, побудованих на його сторонах, — 260 см^2 . Знайдіть сторони прямокутника (мал. 66).
1094. У кінотеатрі було 320 місць. Коли кількість місць у кожному ряді збільшили на 4 і додали ще один ряд, у залі стало 420 місць. Скільки стало рядів у кінотеатрі?
1095. Теплохід пройшов за течією річки 48 км і стільки само проти течії, затративши на весь шлях 5 год. Знайдіть власну швидкість теплохода, якщо швидкість течії річки становить 4 км/год.
1096. Човен пройшов проти течії 22,5 км і за течією — 28,5 км, затративши на весь шлях 8 год. Швидкість течії річки — 2,5 км/год. Знайдіть власну швидкість човна.
1097. Електропоїзд затримався в дорозі на 4 хв і ліквідував запізнення на перегоні в 20 км, пройшовши його зі швидкістю на 10 км/год більшою, ніж за розкладом. Якою була швидкість поїзда на цьому перегоні?
1098. З пункту A відправили за течією річки пліт. Через 5 год 20 хв з пункту A слідом за плотом вийшов моторний човен, який наздогнав пліт, пройшовши 20 км. Знайдіть швидкість течії річки, якщо човен проходив цьогодини на 12 км більше, ніж пліт.
1099. На середині шляху між A і B поїзд затримали на 10 хв. Щоб прибути у B за розкладом, довелося початкову швидкість поїзда збільшити на 12 км/год. Знайдіть по-




Мал. 65



Мал. 66

чаткову швидкість поїзда, якщо відстань між A і B дорівнює 120 км.


1100. Теплохід пройшов униз річкою 150 км і повернувся назад, затративши на весь шлях 5,5 год. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість теплохода в стоячій воді становить 55 км/год.

 **1101.** Турист проплив моторним човном угору річкою 25 км, а назад спустився плотом. Човном він плыв на 10 год менше, ніж плотом. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість човна в стоячій воді — 12 км/год.


Рівень **Б**

1102. Велосипедист проїхав 96 км на 1,6 год швидше, ніж передбачав. При цьому за кожну годину він проїжджав на 2 км більше, ніж передбачав проїжджати. З якою швидкістю він їхав?

1103. З A до B , відстань між якими становить 700 км, виїхав автобус. Якби він зменшив швидкість на 10 км/год, то в дорозі був би на $1\frac{2}{3}$ год довше. Скільки годин їде автобус від A до B ?

 **1104.** Мотоцикліст їхав з одного міста в друге впродовж 4 год. Повертаючись назад, він перші 100 км їхав з тією самою швидкістю, а потім зменшив її на 10 км/год і тому на зворотний шлях затратив на 30 хв більше. Знайдіть відстань між містами.

1105. Рибалка вирушив на човні з пункту A проти течії річки. Пропливши 6 км, він кинув весла, і через 4,5 год після виходу з A течія знову віднесла його до пункту A . Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість човна в стоячій воді — 90 м/хв.

 **1106.** Батько й син пройшли 480 м, причому батько зробив на 200 кроків менше, ніж син. Знайдіть довжину кроку кожного з них, якщо крок батька довший від кроку сина на 20 см.

1107. Мати з дочкою готували великодні крашанки і писанки (мал. 67). Дочка підраховала: жовтих крашанок у стільки разів більше, ніж голубих, у скільки голубих більше, ніж писанок. А якщо з однієї жовтої крашан-

ки зроблю ще одну писанку, то писанок стане утричі менше, ніж жовтих крашанок. Скільки було тих і тих?

1108. Катер пройшов за течією 90 км за певний час. За той самий час він пройшов би проти течії 70 км. Яку відстань за цей час пропливе пліт?

1109. Дві бригади, працюючи разом, закінчили асфальтування дороги за 4 дні. Скільки днів потрібно було б на виконання цієї роботи кожній бригаді окремо, якщо одна з них могла б закінчити асфальтування дороги на 6 днів раніше, ніж друга?



Мал. 67

1110. Два комбайнери зібрали пшеницю з поля за 4 дні. Якби один з них зібрав половину всієї пшениці, а другий — решту, то всю пшеницю зібрали б за 9 днів. За скільки днів кожний комбайнер окремо міг би зібрати всю пшеницю з поля?

1111. Бригада планувала засіяти 200 га до певного терміну, але засівала щодня на 5 га більше, ніж планувала, і тому завершила роботу на 2 дні раніше. За скільки днів бригада закінчила сівбу?


1112. Двоє мулярів, виконуючи певне завдання разом, могли б закінчити його за 12 днів. Якщо спочатку працюватиме тільки один з них, а коли він виконає половину всієї роботи, його замінить другий робітник, то на виконання завдання потрібно 25 днів. За скільки днів кожний муляр міг би виконати всю роботу?

1113. Два робітники, з яких другий починає роботу на 1,5 дня пізніше від першого, можуть виконати роботу за 7 днів. За скільки днів кожний з них окремо міг би виконати всю роботу, якщо другий робітник може виконати її на 3 дні швидше, ніж перший?


1114. Водонапірний бак наповнюється за допомогою двох труб за 2 год 55 хв. Перша труба може наповнити його на 2 год швидше, ніж друга. За який час кожна труба окремо може наповнити бак?

1115. *Стародавня індійська задача* (Бхаскара, 1114 р.).


Розділившись на дві зграї,
забавлялись мавпи в гаї.
Одна восьма їх в квадраті
танцювали, вельми раді.
А дванадцять на деревах
підняли веселий регіт,
що навколо аж гуло.
Скільки їх всього було?

-  **1116.** На вишні завітчаній кілька гілок,
на них сіли порівну двісті бджілок.
Коли б на п'ять менше гілок розцвіло,
на кожній би бджіл на дві більше було б.
То ж скільки гілок на цій вишенці гоїї
і скільки бджілок працювало на кожній?

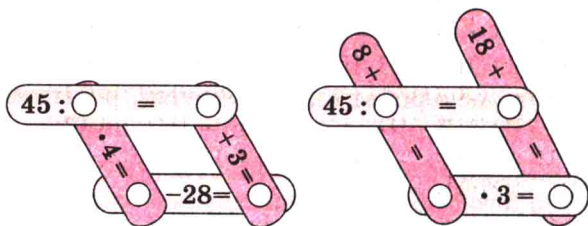
- 1117.** Кілька точок розміщено на площині так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Якщо кожному з них сполучити відрізками зі всіма іншими даними точками, то утвориться 153 відрізки. Скільки дано точок?

-  **1118.** У шаховому турнірі було зіграно 66 партій. Знайдіть кількість учасників турніру, коли відомо, що кожний учасник зіграв з кожним по одній партії.

- 1119.** На першості району з футболу зіграно 56 матчів, причому кожна команда грала з кожною по два рази. Скільки команд брало участь у грі?

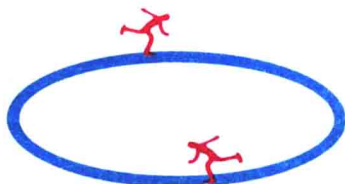
-  **1120.** Розв'яжіть математичні кросворди, які зображені на малюнку 68.

- 1121.** Дно ящика — прямокутник, довжина якого в 1,5 раза більша від ширини. Висота ящика дорівнює 0,5 м. Знайдіть об'єм ящика, коли відомо, що площа його дна на $0,76 \text{ м}^2$ менша від площі бічних стінок.



1122. З першої ділянки землі зібрали 4,8 т картоплі. З другої ділянки, площа якої на 0,03 га менша від першої, — 2 т картоплі, причому з однієї сотки цієї ділянки зібрали на 200 кг менше, ніж з однієї сотки першої ділянки. Знайдіть площу кожної ділянки.

1123. Круговою доріжкою завдовжки 2 км рухаються в одному напрямку два ковзанярі, які сходяться через кожні 20 хв (мал. 69). Знайдіть швидкість кожного ковзаняря, якщо перший з них пробігає коло на 1 хв швидше, ніж другий.



Мал. 69

1124. До розчину, що містить 40 г солі, додали 200 г води, після чого його концентрація зменшилась на 10 %. Скільки води містив розчин і яка була його концентрація?

1125. З двох кусків металу перший має масу 880 г, а другий — 858 г, причому об'єм першого куска на 10 см^3 менший, ніж другого. Знайдіть густину кожного металу, якщо густина першого на 1 г/см^3 більша за густину другого.

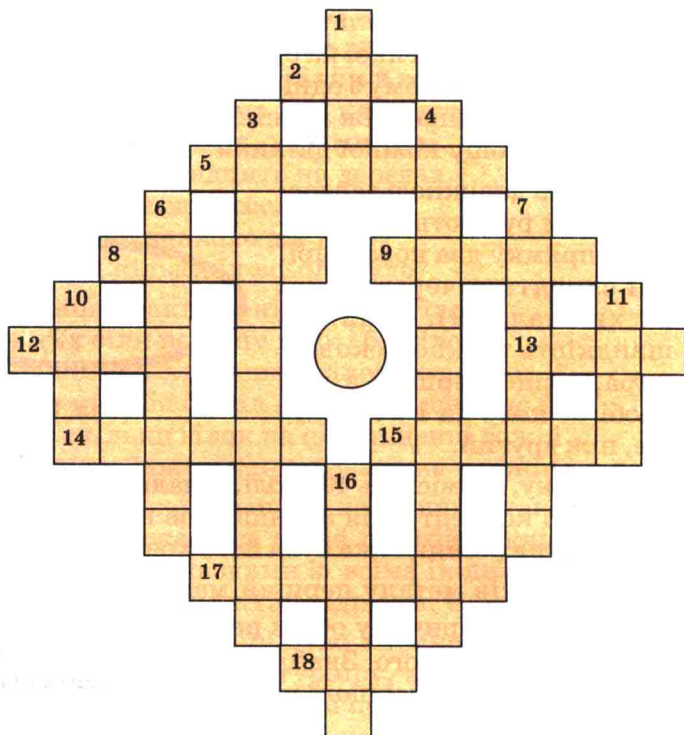
1126. До 20 %-го розчину кислоти додали 200 г води, після чого його концентрація зменшилась на 10 %. Якою стала концентрація розчину і скільки в ньому води?

1127. Сплав золота зі сріблом, який містив 80 г золота, сплавив зі 100 г чистого золота. В результаті вміст золота в сплаві збільшився на 20 %. Скільки в сплаві срібла?

1128. Скільки сторін має опуклий багатокутник, якщо у ньому всього 135 діагоналей?

1129. Практичне завдання. Знаючи, що маса M Землі у 81,5 раза більша від маси m Місяця і що сила взаємного притягання двох космічних тіл прямо пропорційна добутку їх мас і обернено пропорційна квадратові відстані між ними, знайдіть на прямій Земля – Місяць точки, в яких сили тяжіння Землі й Місяця зрівноважені.

Порівняйте власне розв'язання з тим, що є в статті «Алгебра місячного перельоту» в книжці Я. І. Перельмана «Цікава алгебра».



Мал. 70

1130. Розв'яжіть кросворд (мал. 70).

По горизонталі: 2. Третій степінь. 5. Компонент ділення. 8. Куб числа. 9. Система штрихів на вимірювальному приладі. 12. Нахил на бік корабля. 13. Перше натуральне число. 14. Первоначало, найпростіша неподільна єдність. 15. Те, чим міряють що-небудь. 17. Вираз виду a^n . 18. Латинська буква.

По вертикалі: 1. Ціле число. 3. Натуральне число, менше від 20. 4. Вираз $b^2 - 4ac$ для рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. 6. Рівність із невідомою змінною. 7. Сукупність операцій, яка призводить до розв'язування певного виду задач. 10. Одиниця маси. 11. Податок, сплачуваний за перевезення товарів за кордон. 16. Німецький математик і астроном, який відкрив закон руху планет.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**Варіант I**

1°. Розв'яжіть рівняння:

а) $3x^2 - 27 = 0$; б) $4z^2 + z = 0$;

в) $y^2 - 9y + 14 = 0$; г) $\frac{15}{x} - 3x = 14$.

2°. Знайдіть сторони прямокутника, якщо одна з них на 3,5 см довша від другої, а площа прямокутника дорівнює 92 см^2 .

Варіант II

1°. Розв'яжіть рівняння:

а) $2x^2 - 50 = 0$; б) $9z^2 - z = 0$;

в) $y^2 + 2y = 15$; г) $\frac{18}{x} - 5x = 27$.

2°. Знайдіть сторони прямокутника, якщо одна з них на 2,6 см коротша від другої, а площа прямокутника дорівнює $5,6 \text{ см}^2$.

Варіант III

1°. Розв'яжіть рівняння:

а) $5z^2 - 20 = 0$; б) $9x^2 + 4x = 0$;

в) $y^2 + y = 12$; г) $\frac{16}{x} - 7x = 24$.

2°. Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 8,5, а добуток — 15.

Варіант IV

1°. Розв'яжіть рівняння:

а) $7c^2 - 28 = 0$; б) $4x^2 - 9x = 0$;

в) $y^2 - 3y = 10$; г) $\frac{12}{x} - 5x = 28$.

2°. Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 47, а добуток — 510.

ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Квадратні рівняння найпростіших видів вавилонські математики вміли розв'язувати ще 4 тис. років тому. Згодом розв'язували їх також у Китаї і Греції. Особливу увагу квадратним рівнянням приділив Мухаммед аль-Хорезмі (IX ст.). Він показав, як розв'язувати (при додатних a і b) рівняння видів $x^2 + ax = b$, $x^2 + a = bx$, $ax + b = x^2$, не використовуючи будь-яких виразів, навіть числа записував словами. Наприклад, рівняння $x^2 + 21 = 10x$ вчив розв'язувати так: «Поділи пополам корені, вийде п'ять, і помнож це на рівне йому — буде двадцять п'ять, і відними від цього двадцять один, то залишиться чотири, добудь з цього корінь, буде два, і відними це від половини коренів, тобто від п'яти, — залишиться три; це й буде корінь, який ти шукаєш». Від'ємних коренів тоді не визначали.

Індійські вчені у вирішенні цього питання пішли далі. Вони знаходили і від'ємні корені квадратних рівнянь. Наприклад, Бхаскара (1114—1178), розв'язуючи рівняння $x^2 - 45x = 250$, знаходить два корені: 50 і -5 . Тільки після цього зауважує: «Друге значення в даному випадку не слід брати, бо люди не схвалюють від'ємних абстрактних чисел».

Алгебраїчні задачі на складання рівнянь індійські вчені записували у віршованій формі й розглядали їх як окремий вид мистецтва. Вони пояснювали: «Як сонце затьмарює зірки своїм сяйвом, так і вчена людина може затьмарювати славу інших в народних зібраннях, пропонуючи алгебраїчні задачі і, тим паче, розв'язуючи їх».

Формули коренів квадратного рівняння вивів Франсуа Вієт (1540—1603). Теорему, яку тепер називають його ім'ям, учений формулював так: «Якщо $(B + D)A - A^2$ дорівнює BD , то A дорівнює B і дорівнює D ». Від'ємних коренів він не розглядав.

Сучасні способи розв'язування квадратних рівнянь поширились завдяки працям Рене Декарта (1596—1650) та Ісаака Ньютона (1643—1727).

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ

Рівняння — це рівність, яка містить невідомі числа, позначені буквами. Числа, які задовольняють рівняння, — його *розв'язки* (або *корені*). *Розв'язати рівняння* — це означає знайти всі його розв'язки або показати, що їх не існує.

Два рівняння називають *рівносильними*, якщо кожне з них має ті самі розв'язки, що й друге. Рівняння, які не мають розв'язків, також вважають рівносильними одне одному.

Квадратним називають рівняння вигляду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b, c — дані числа, причому $a \neq 0$. Вираз $D = b^2 - 4ac$ — його *дискримінант*. Якщо $D > 0$, то дане рівняння має два корені:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Якщо $D = 0$, то ці корені рівні. Якщо $D < 0$, то таке квадратне рівняння не має дійсних коренів.

Якщо треба, наприклад, розв'язати квадратне рівняння $2x^2 + 9x - 5 = 0$, знаходимо його дискримінант: $D = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 121$. Тому корені рівняння:

$$x_1 = \frac{-9 + 11}{4}, \quad x_2 = \frac{-9 - 11}{4}.$$

Квадратне рівняння називають *неповним*, якщо хоч один з його коефіцієнтів, крім першого, дорівнює 0. Рівняння: $ax^2 = 0$ має єдиний корінь: $x = 0$;

$ax^2 + bx = 0$ має два корені: $x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$;

$ax^2 + c = 0$ має два корені: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$,

якщо $c : a < 0$, і жодного, якщо $c : a > 0$.

Квадратне рівняння називають *зведеним*, якщо його перший коефіцієнт дорівнює одиниці. Якщо рівняння $x^2 + px + q = 0$ має два корені, то

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Теорема Вієта. Якщо зведене квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$ має два корені, то їх сума дорівнює p , а добуток — q .

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 4

1. Укажіть квадратне рівняння:
а) $x^2 + 12 = 0$; б) $20 - x = 0$;
в) $3^x = 9$; г) $x^{-2} = 100$.
2. Рівняння $ax^2 + c = 0$ має корені, якщо:
а) $a > 0, c > 0$; б) $a > 0, c < 0$;
в) $a < 0, c < 0$; г) $a = 0, c \neq 0$.
3. Скільки коренів має рівняння $x^2 + 2x + 1 = 0$:
а) один; б) два; в) безліч; г) жодного?
4. Дискримінант рівняння $x^2 + 7x + 6 = 0$ дорівнює:
а) 7; б) 6; в) 25; г) 5.
5. Перший коефіцієнт зведеного квадратного рівняння дорівнює:
а) 1; б) 2; в) 3; г) 5.
6. Добуток коренів рівняння $x^2 + 12x + 20 = 0$ дорівнює:
а) 1; б) 20; в) 3; г) 12.
7. Сума коренів рівняння $x^2 + 2x - 15 = 0$ дорівнює:
а) 5; б) 2; в) -2; г) -5.
8. Дискримінант рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ - це вираз:
а) $b^2 - ac$; б) $2b - 4ac$; в) $b^2 - 4ac$; г) $-b^2 - 4ac$.
9. Рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два корені, якщо:
а) $D > 0$; б) $D = 0$; в) $D < 0$; г) $D \leq 0$.
10. Рівняння $x^2 + 6x - 7 = 0$ має корені:
а) 1 і 7; б) 1 і 6; в) 1 і -7; г) -1 і 7.

Типові завдання до контрольної роботи № 4

1°. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 - 9x = 0$; б) $16x^2 = 49$.

2°. Знайдіть корені рівняння:

а) $x^2 - 6x - 280 = 0$; б) $3x^2 + 8x - 3 = 0$.

3°. Розкладіть квадратний тричлен на множники:

а) $x^2 - 5x + 4$; б) $3x^2 + 2x - 5$.

4°. У рівнянні $x^2 + px + 35 = 0$ один з коренів дорівнює 7. Знайдіть другий корінь і коефіцієнт p .

5°. Одне з двох натуральних чисел на 5 більше за інше. Знайдіть ці числа, якщо їх добуток дорівнює 266.

6°. Розв'яжіть рівняння:

а) $(5x - 7)(8x + 1) = (8x + 1)^2$;
б) $(2x - 1)^4 - 5(2x - 1)^2 + 4 = 0$.

7°. Розв'яжіть рівняння: $\frac{2x}{x-3} - \frac{1}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$.

8°. Фірма зобов'язалася виготовити за певний час 1200 одиниць продукції. Роботу було закінчено на 4 дні раніше, бо план щоденно перевиконували на 10 одиниць. За скільки днів фірма зобов'язалася виконати роботу?

9°. Не обчислюючи коренів x_1 і x_2 рівняння

$$x^2 - 4x - 10 = 0,$$

знайдіть

а) $\frac{9}{x_1^2 + x_2^2}$; б) $x_1^4 + x_2^4$.

10°. При яких значеннях a рівняння

$$x^2 - (a + 2)x + a + 5 = 0$$

має один корінь?

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Виконайте ділення (1131—1135).

1131. а) $7a^3 : a^2$; б) $8c^4 : c^3$; в) $5x^8 : x^7$.
 1132. а) $12a^5 : 3a^4$; б) $15x^{12} : 5x^7$; в) $4c^{13} : 2c^{10}$.
 1133. а) $-8c^{10} : 4c^5$; б) $-25x^{12} : x^{12}$; в) $16n^{18} : 16$.
 1134. а) $(-8c)^{10} : 8c^5$; б) $36x^{13} : (-3x)^2$; в) $2x^3 : (-2x)^3$.
 1135. а) $1,5x^5 : 0,5x^4$; б) $2,4a^7 : 0,3a^5$; в) $2,1n^5 : 0,3n^3$.

Знайдіть, при яких значеннях змінних не має значення дріб (1136—1140).

1136. а) $\frac{a}{x}$; б) $\frac{m}{n^2}$; в) $-\frac{a}{c^2}$.
 1137. а) $\frac{1}{a-3}$; б) $\frac{5}{2a-6}$; в) $\frac{ac^2}{x(x-3)}$.
 1138. а) $\frac{a+2}{a(3-a)}$; б) $\frac{x+1}{(x-2)(x+3)}$; в) $\frac{x+7}{(x^2-4)(x^2-9)}$.

1139. Знайдіть значення виразу:

- а) $(3-x)^4 : (3-x)^3$, якщо $x = 1,4$;
 б) $(2a-b)^5 : (2a-b)^3$, якщо $a = 2,3$ і $b = 5$.

1140. Знайдіть значення дробу:

- а) $\frac{a+1,25}{a^2-0,25}$, якщо $a = 2,5$;
 б) $\frac{x-y}{x^2-y^2}$, якщо $x = 0,63$ і $y = 0,37$.

Скоротіть дріб (1141—1145).

1141. а) $\frac{5a}{10}$; б) $\frac{3x}{x}$; в) $\frac{8m}{2m}$; г) $\frac{7a}{14a}$.
 1142. а) $\frac{ax}{2a}$; б) $\frac{mn}{3n^2}$; в) $\frac{cz^2}{2cz}$; г) $\frac{6a^2}{12a}$.
 1143. а) $\frac{2a^2b}{6a^3c}$; б) $\frac{3cx^3}{9c^2x}$; в) $\frac{8a^3z}{6a^2z^2}$; г) $\frac{15am^3}{25a^2m}$.

$$1144. \text{ а) } \frac{-4ax^3}{12a^2x^5}; \text{ б) } \frac{-5nz^5}{15n^2z^4}; \text{ в) } \frac{8a^2c^3}{-12ac^3}; \text{ г) } \frac{2a^5bc^2}{-a^2bc^3}.$$

$$1145. \text{ а) } \frac{(a+x)^2}{(a+x)^3}; \text{ б) } \frac{(2-x)^7}{(2-x)^6}; \text{ в) } \frac{(3+c)^5}{(3+c)^4}; \text{ г) } \frac{(a-1)^3}{(a-1)^5}.$$

Спростіть вираз (1146—1148).

$$1146. \frac{2x^2+7xy-9y^2}{x^2-y^2} + \frac{11x^2-7xy-2y^2}{x^2-y^2}.$$

$$1147. \frac{x+2y}{2x-y} + \frac{2x-2y}{2x-y} + \frac{6x-8y}{2x-y} + \frac{x-2y}{2x-y}.$$

$$1148. \frac{5x^2+20xy+10y^2}{3x-15y} + \frac{6x^2-30xy}{3x-15y} - \frac{10x^2-xy+10y^2}{3x-15y}.$$

1149. Доведіть тотожність:

$$\text{а) } \frac{4a}{a-5} - \frac{20}{a-5} = 4; \quad \text{б) } \frac{x^2}{x^2+1} + \frac{2x^2}{x^2+1} + \frac{3}{x^2+1} = 3.$$

1150. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{a^2}{a^2+1} - \frac{2a^2}{a^2+1} + \frac{1}{a^2+1}$$

не може бути від'ємним числом.

Зведіть до спільного знаменника вирази (1151—1153).

$$1151. \text{ а) } \frac{1}{a} \text{ і } \frac{3}{2a}; \quad \text{б) } \frac{x}{a+x} \text{ і } \frac{m}{3(a+x)}; \quad \text{в) } \frac{1}{3c} \text{ і } \frac{5}{7c}.$$

$$1152. \text{ а) } \frac{1}{3a^2x} \text{ і } \frac{1}{5ax^3}; \quad \text{б) } \frac{c}{5b^3z} \text{ і } \frac{c^2}{2az^3}; \quad \text{в) } \frac{4}{3ab^4z} \text{ і } \frac{5}{4a^2bz^3}.$$

$$1153. \text{ а) } \frac{1}{a-x} \text{ і } \frac{1}{(a-x)^2}; \quad \text{б) } \frac{m}{a-c} \text{ і } \frac{n}{a^2-c^2}; \quad \text{в) } \frac{1}{x^3-1} \text{ і } \frac{1}{x-1}.$$

1154. Додайте дробі:

$$\text{а) } \frac{a}{3m} \text{ і } \frac{3}{4m}; \quad \text{б) } \frac{a-x}{2ax} \text{ і } \frac{1-x}{4x}; \quad \text{в) } \frac{1}{2n} \text{ і } \frac{3-n}{4n^2}.$$

1155. Знайдіть різницю дробів:

$$\text{а) } \frac{x}{5a} \text{ і } \frac{1}{a}; \quad \text{б) } \frac{2}{3c} \text{ і } \frac{c-2}{2c}; \quad \text{в) } \frac{x^2+2}{3x} \text{ і } \frac{2}{3}.$$

Спростіть вираз (1156—1159).

1156. а) $\frac{1}{3a} + \frac{1}{9a}$; б) $\frac{c}{x} + \frac{5}{2x}$; в) $\frac{1}{5c} + \frac{4}{c}$.

1157. а) $\frac{1}{m} - \frac{5}{4m}$; б) $\frac{a}{2x} - \frac{4a}{x}$; в) $\frac{1}{0,5c} - \frac{2}{c}$.

1158. а) $\frac{1}{3ax^2} + \frac{2}{5az^2}$; б) $\frac{4m}{3p^2x} - \frac{1}{5m^2x}$; в) $\frac{4}{a} - \frac{3}{2ac^2x}$.

1159. а) $\frac{4a}{a-b} + \frac{2b}{a+b} - 1$; б) $\frac{x}{x-z} + \frac{3x}{x+z} - \frac{2xz}{x^2 - z^2}$.

1160. При яких значеннях m і n є тотожністю рівність

$$\frac{7}{(x-6)(x+1)} = \frac{m}{x-6} + \frac{n}{x+1}?$$

Виконайте множення дробів (1161—1165).

1161. а) $\frac{5ab^2}{3x} \cdot \frac{9x^2}{10a^2}$; б) $\frac{4an^3}{5c^2x} \cdot \frac{c^3x}{8an^4}$; в) $\frac{7xz^3}{9ac^2} \cdot \frac{3ac}{14xz}$.

1162. а) $\frac{-2x^2}{3ac} \cdot \frac{6a^2}{4x^3}$; б) $\frac{5an^3}{-4x} \cdot \frac{8x^3}{10an}$; в) $\frac{-ax^4}{3m^4} \cdot \frac{9m^3}{-2x^5}$.

1163. а) $\frac{a+1}{x} \cdot \frac{4x^2}{a^2-1}$; б) $\frac{1-a}{3x} \cdot \frac{x}{1-a^2}$; в) $\frac{a^2-1}{c} \cdot \frac{3c}{a+1}$.

1164. а) $\frac{2a}{3c} \cdot \frac{6ac^2}{5m} \cdot \frac{15m^2}{4a^2}$; б) $\frac{6n^2}{7c^2} \cdot \frac{14c^3}{15n^3} \cdot \frac{5n^2}{8c^2}$.

1165. а) $\frac{a^2-ax}{c^2-cx} \cdot \frac{cx-x^2}{a}$; б) $\frac{a^3+a^2}{c^3-c^2} \cdot \frac{ac-a}{ax+x}$.

Виконайте ділення дробів (1166—1168).

1166. а) $\frac{2ax}{3c^2} : \frac{4ax^2}{9c^3}$; б) $\frac{a^3c^2}{5xy} : \frac{2a^2c^3}{3x^2y}$; в) $\frac{12mn^3}{5ac^2} : \frac{3mn^2}{10a^2}$.

1167. а) $\frac{1,5a}{2x^2} : \frac{3a^2}{4x^3}$; б) $-\frac{2ac^2}{3mn} : \frac{4a^2}{15m^3}$; в) $-\frac{4nx}{3ac} : \left(-\frac{4x^2}{9c^2}\right)$.

1168. а) $\frac{a^2-x^2}{a^3-x^3} : \frac{a+x}{a^2-x^2}$; б) $\frac{2a+2n}{3a-3n} : \frac{6a+6n}{5a-5n}$.

Спростіть вираз (1169—1173).

1169. а) $\frac{a^2b - 4b^3}{3ab^2} \cdot \frac{a^2b}{a^2 - 2ab}$;

б) $\frac{4p^2 - 9q^2}{p^2q^2} : \frac{2ap + 3aq}{2pq}$.

1170. а) $\frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{a^4}{(a+b)^2}$;

б) $\frac{a^2 - 25}{a^2 - 3a} : \frac{a^2 + 5a}{a^2 - 9}$.

1171. а) $\frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{3a+3b}{4a-4b}$;

б) $\frac{5-5a}{(1+a)^2} : \frac{10-10a^2}{3+3a}$.

1172. а) $\left(\frac{a}{4b} - \frac{b}{4a}\right) \cdot \left(\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} - 1\right)$;

б) $\left(\frac{a^2b^{-3}}{6c}\right)^{-3} : \left(\frac{a^3b^{-5}}{9c}\right)^{-2}$.

1173. $\frac{m^3 - mn^2}{m^2 + n^2} \cdot \left(\frac{n}{m^3 - m^2n + mn^2} + \frac{m-2n}{m^3 + n^3}\right)$.

КВАДРАТНІ КОРЕНІ ТА ДІЙСНІ ЧИСЛА

Винесіть множник з-під знака кореня (1174—1175).

1174. а) $\sqrt{50}$; б) $\sqrt{300}$; в) $\sqrt{405}$.

1175. а) $\sqrt{1960}$; б) $\sqrt{2890}$; в) $\sqrt{1083}$.

1176. Внесіть множник під знак кореня:

а) $5\sqrt{10}$; б) $8\sqrt{5}$; в) $10\sqrt{13}$; г) $30\sqrt{11}$.

Обчисліть значення виразу (1177—1181).

1177. а) $\sqrt{64 \cdot 900}$; б) $\sqrt{25 \cdot 196}$; в) $\sqrt{49 \cdot 676}$.

1178. а) $\sqrt{0,01 \cdot 121}$; б) $\sqrt{0,04 \cdot 169}$; в) $\sqrt{0,09 \cdot 441}$.

1179. а) $\sqrt{10 \frac{9}{16}}$; б) $\sqrt{10 \frac{6}{25}}$; в) $\sqrt{31 \frac{93}{121}}$.

1180. а) $\sqrt{6 \cdot 10 \cdot 15}$; б) $\sqrt{15 \cdot 21 \cdot 35}$; в) $\sqrt{20 \cdot 28 \cdot 35}$.

1181. а) $\sqrt{\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{10}{49}}$; б) $\sqrt{\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{36} \cdot \frac{35}{27}}$; в) $\sqrt{1 \frac{1}{5} \cdot 2 \frac{7}{10}}$.

Обчисліть добуток (1182—1184).

1182. а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{150}$; б) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{60}$.

1183. а) $\sqrt{44,1} \cdot \sqrt{12,1}$; б) $\sqrt{28,9} \cdot \sqrt{32,4}$.

1184. а) $\sqrt{\frac{12}{25}} \cdot \sqrt{\frac{80}{135}}$; б) $\sqrt{8\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{1\frac{8}{73}}$.

Спростіть вираз (1185—1190).

1185. а) $(\sqrt{3}-2)^2 + 4\sqrt{3}$; б) $(3+\sqrt{5})^2 - 6\sqrt{5}$.

1186. а) $(\sqrt{17}-\sqrt{2})(\sqrt{17}+\sqrt{2})$; б) $(\sqrt{23}-\sqrt{19})(\sqrt{19}+\sqrt{23})$.

1187. а) $(2\sqrt{7}-1)(2\sqrt{7}+1)$; б) $(3\sqrt{11}-2\sqrt{7})(3\sqrt{11}+2\sqrt{7})$.

1188. а) $8 - (\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$; б) $10 - (\sqrt{7}+\sqrt{3})^2$.

1189. а) $(\sqrt{6}+\sqrt{3}) : \sqrt{3}$; б) $(\sqrt{15}-\sqrt{5}) : \sqrt{5}$.

1190. а) $(7-5) : (\sqrt{7}-\sqrt{5})$; б) $(13-7) : (\sqrt{13}+\sqrt{7})$.

1191. Скоротіть дріб:

а) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$; б) $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{\sqrt{10}-5}{\sqrt{5}}$.

1192. Звільніть від ірраціональності знаменник дробу:

а) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$; в) $\frac{a}{5-\sqrt{7}}$; г) $\frac{c}{2+\sqrt{15}}$.

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

1193. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; б) $x^2 - 8x - 20 = 0$;
в) $4z^2 + z - 3 = 0$; г) $3y^2 - 2y - 8 = 0$;
д) $0,25x^2 - 2x + 3 = 0$; е) $2z^2 - 3z + 0,75 = 0$.

1194. Розкладіть на множники тричлен:

а) $x^2 - 7x + 10$; б) $x^2 - 9x + 18$;
в) $y^2 - 2y - 35$; г) $y^2 - 4y - 60$;
д) $a^2 - a - 56$; е) $c^2 - 5c - 24$.

1195. Скоротіть дріб:

а) $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$; б) $\frac{z^2+z-6}{z^2-2z-15}$; в) $\frac{a^2-5a+6}{a^2+3a-10}$.

1196. Складіть квадратне рівняння за його коренями:

а) 1 і 3 ; б) -2 і 7 ; в) 3 і $\frac{2}{3}$; г) $\sqrt{2}-1$ і $\sqrt{2}+1$.

Розв'яжіть рівняння (1197—1205).

1197. а) $\frac{x-1}{x+5} + \frac{x-1}{x-5} = 2$; б) $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{1-2x}{x-2} + 4$;

в) $\frac{x-1}{x+4} - 2 = \frac{1-x}{x-4}$; г) $\frac{2x-1}{2x+4} = \frac{1-2x}{2x-4} + 2$.

1198. а) $\frac{2x+2}{x^2-4} - \frac{x^2+2x+4}{x^3+2x^2+4x+8} = \frac{x^2-2x+4}{x^3-2x^2+4x-8}$;

б) $\frac{x+10}{x^2+x-10} - \frac{x+10}{x^2-x-10} = \frac{50}{x^4-21x^2+100}$.

1199. а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; б) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

1200. а) $3x^4 - 2x^2 - 40 = 0$; б) $5y^4 + 7y^2 - 12 = 0$.

1201. а) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$; б) $z^6 - 19z^3 + 216 = 0$.

1202. а) $x - 6\sqrt{x} + 5 = 0$; б) $2x - 3\sqrt{x} - 9 = 0$.

1203. а) $(x^2 - x)^2 - 11(x^2 - x) + 18 = 0$;

б) $(\sqrt{x} - 2)^2 - 6(\sqrt{x} - 2) + 8 = 0$.

1204. а) $x + 2 - 13\sqrt{x+2} + 42 = 0$;

б) $x - 3 + 4\sqrt{x-3} - 12 = 0$.

1205. а) $(2x - 1)^4 - (2x - 1)^2 - 12 = 0$;

б) $(x+3)^2 - 13 + \frac{36}{(x+3)^2} = 0$.

Розв'яжіть рівняння (1206—1207).

1206. а) $\sqrt{x} + 9 = 11$; б) $12 - \sqrt{x} = 0$.

1207. а) $3 + \sqrt{x-2} = 7$; б) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3$.

1208. Розв'яжіть систему рівнянь.

а) $\begin{cases} 2x^2 - y = 2, \\ x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 8, \\ x^2 + y^2 = 40; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - y = 14, \\ y + 2 = x. \end{cases}$

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1209. Скоротіть дріб:

а) $\frac{203203203}{405405405}$; б) $\frac{342+127 \cdot 341}{342 \cdot 127+215}$; в) $\frac{999999}{1002001}$.

1210. Яке число більше:

а) $\frac{35+17}{35+18}$ чи $\frac{35^3+17^3}{35^3+18^3}$; б) $\frac{10^9+1}{10^{10}+1}$ чи $\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$?

1211. Доведіть тотожність:

$$\frac{a+b}{a+(a-b)} = \frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}.$$

1212. Обчисліть суму 999 дробів:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{999 \cdot 1000}.$$

1213. Скоротіть дріб:

а) $\frac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^3+a^3}$; б) $\frac{8x^4+x}{16x^6+4x^4+x^2}$; в) $\frac{a^4+4}{a^2+2a+2}$.

1214. Доведіть, що сума дробів $\frac{a-b}{1+ab}$, $\frac{b-c}{1+bc}$, $\frac{c-a}{1+ca}$ тотожно дорівнює їх добутку.

1215. Доведіть тотожність Ейлера:

$$a^3+b^3 + \left(\frac{2a^3b+b^4}{a^3-b^3} \right)^3 = \left(\frac{a^4+2ab}{a^3-b^3} \right)^3.$$

Чи існують такі натуральні числа x, y, z і t , що $x^3+y^3+z^3=t^3$?

1216. Раціональним чи ірраціональним є число

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{5}?$$

1217. Доведіть, що число $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$ є натуральним.

1218. Чому дорівнюють $\sqrt{1156}$, $\sqrt{111556}$, $\sqrt{11115556}$?
Спробуйте узагальнити задачу.

1219. Що більше: $\sqrt{2009} - \sqrt{2008}$ чи $\sqrt{2010} - \sqrt{2009}$?

1220. Обчисліть:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10000}}.$$

1221. Доведіть, що $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}} < 3$.

Розв'яжіть рівняння (1222—1225).

1222. а) $2008x^2 + 2011x + 3 = 0$;

б) $2010x^2 + 2008x - 2 = 0$.

1223. а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;

б) $(x-1)^4 - 5(x-1)^2 + 4 = 0$.

1224. а) $(x+4)(x+5)(x+7)(x+8) = 4$;

б) $(x^2 - 2x - 1)^2 + (3x^2 - 6x - 13) = 0$.

1225. а) $2 - \sqrt{x} = \sqrt{2-x}$;

б) $x^2 + \sqrt{5} = \sqrt{14+6\sqrt{5}}$.

1226. Доведіть, що корені рівняння $ax^2 + bx + a = 0$ обернені один до одного.

1227. При якому значенні m різниця коренів рівняння $x^2 + mx + 1 = 0$ дорівнює 1?

1228. При якому значенні m сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 5mx + 4m^2 = 0$ дорівнює 68?

1229. При якому значенні m один із коренів рівняння $x^2 - 12x + 9m^2 = 0$ є квадратом другого кореня?

1230. При якому значенні m сума квадратів коренів рівняння $x^2 + mx + m - 2 = 0$ є найменшою? Чому дорівнює ця сума?

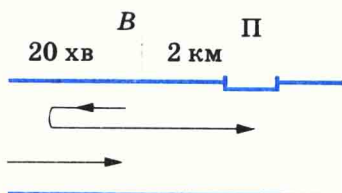
1231. Доведіть, що корені рівняння $x^2 + px + q = 0$ не можуть бути раціональними числами, якщо p і q — цілі непарні числа.

1232. Катер, швидкість якого в стоячій воді — 15 км/год, відійшов від пристані і, пройшовши 36 км, наздогнав пліт, який відправився від тієї самої пристані на 10 год раніше, ніж катер. Знайдіть швидкість течії річки.

1233. Відстань між пристанями A і B човен звичайно долає за 5 год, а від B до A — за 6 год. Якось одночасно з човном від A відправився і пліт. Дійшовши до B і постояв-

ши там 1 год, човен повернув назад і зустрівся з плотом на відстані 22 км від A . Знайдіть відстань від A до B .

1234. Пливучи проти течії річки, біля високої верби юнак загубив порожню флягу. Через 20 хв він помітив це і повернувся, щоб наздогнати флягу. Наздогнав він її біля пристані. Знайдіть швидкість течії річки, якщо відстань від пристані до високої верби 2 км (мал. 71).



Мал. 71

1235. Задача з несподіваною відповіддю. Автомобіль їхав з A до B зі швидкістю 60 км/год, а з B до A — зі швидкістю 70 км/год. Знайдіть його середню швидкість.
1236. Населення міста за два роки збільшилося з 20 000 до 22 050 осіб. Знайдіть щорічний середній відсоток приросту населення цього міста.
1237. Стародавня китайська задача. Два чоловіки одночасно вийшли з одного місця: B — на схід, а A , пройшовши 10 бу на південь, повернув на північний схід до B . Яку відстань пройшов кожний з них, якщо за 1 год A проходив 7 бу, а B — тільки 3 бу?
1238. Задача Безу. Хтось купив коня і через деякий час продав його за 24 пістолі. При цьому він втратив стільки відсотків, скільки коштував йому кінь. За скільки пістолів він купив коня?
1239. Задача Ейлера. Знайдіть число, четвертий степінь якого, поділений на половину шуканого числа і збільшений на $14\frac{1}{4}$, дорівнює 100.
1240. Розв'яжіть рівняння з праць відомих математиків:

а) $14\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x} = 1\frac{1}{4}$ (Омар Хайям);

б) $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$ (Бхаскара);

в) $y^3 - 9y^2 + 26y - 24 = 0$ (Рене Декарт).

1241. Якщо між цифрами двоцифрового числа вписати число, на одиницю менше від нього, вийде чотирицифро-

ве число, яке в 91 раз більше від нього. Знайдіть це двоцифрове число.

1242. Знайдіть двоцифрове число, відношення якого до числа, записаного тими самими цифрами у зворотному порядку, дорівнює 0,375.

1243. Знайдіть два натуральних числа, сума яких дорівнює 667, а частка від ділення їх найменшого спільного кратного на найбільший спільний дільник дорівнює 120.

1244. Знайдіть дріб з найменшим знаменником, який менший за $\frac{1}{2002}$ і більший за $\frac{1}{2003}$.

1245. Доведіть, що дріб $\frac{21n+4}{14n+3}$ нескоротний при будь-якому натуральному значенні n .

1246. **З а д а ч а В і є т а.** Доведіть, що числа a, b, c — корені рівняння $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x = abc$.

Користуючись цим твердженням, розв'яжіть рівняння $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

1247. Доведіть, що коли $ac \neq 0$, то

$$\left(\begin{array}{c} a + \frac{1}{c} \\ c + \frac{1}{a} \end{array} \right) : \left(\begin{array}{c} c + \frac{1}{a} \\ a + \frac{1}{c} \end{array} \right) = a : c.$$

1248. Розв'яжіть рівняння:

$$\text{а) } 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}} = \frac{13}{9};$$

$$\text{б) } 1 + \frac{1}{x + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{29}{24}.$$

1249. Три вівторки місяця припадають на парні числа. Який день тижня припадає на 21 число цього місяця?

1250. Замініть букви цифрами, щоб виконувались рівності:

а) алгебра = лев^б; б) алгебра = ліг^а; в) алгебра = бан^к.

ВІДОМОСТІ З КУРСУ АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

РІВНЯННЯ

Рівняння — це рівність, яка містить невідомі числа, позначені буквами. Числа, які задовольняють рівняння, — його *розв'язки* (або *корені*). *Розв'язати рівняння* — це означає знайти всі його розв'язки або показати, що їх не існує.

Два рівняння називають *рівносильними*, якщо кожне з них має ті самі розв'язки, що й друге. Рівняння, які не мають розв'язків, також вважають рівносильними одне одному.

Основні властивості рівнянь

1. У будь-якій частині рівняння можна звести подібні доданки або розкрити дужки, якщо вони є.

2. Будь-який член рівняння можна перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний.

3. Обидві частини рівняння можна помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля.

Рівняння вигляду $ax = b$, де a і b — довільні числа, називається *лінійним рівнянням* зі змінною x . Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ називають *рівнянням першого степеня* з однією змінною. Кожне рівняння першого степеня $ax = b$ має

один корінь $x = \frac{b}{a}$. Лінійне рівняння може мати один корінь, безліч або не мати жодного кореня.

Наприклад, рівняння:

$$12x = 6 \text{ має один корінь,}$$

$$0x = 0 \text{ має безліч коренів,}$$

$$0x = 5 \text{ не має жодного кореня.}$$

ЦІЛІ ВИРАЗИ

Добуток кількох рівних множників називають *степенем*. Наприклад, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ — п'ятий степінь числа 2. Він дорівнює 32. Отже, $2^5 = 32$. Тут 2 — *основа степеня*, 5 — *показник степеня*, 2^5 , або 32, — *ступінь*. Другий і третій степені називають також *квадратом* та *кубом* числа. Якщо натуральне число n більше за 1, то

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ разів}}$$

Якщо $n = 1$, то $a^n = a$.

Основна властивість степеня: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Перемножуючи степені одного й того самого числа, показники степенів додають, а основу залишають тією самою.

Інші властивості степенів:

$$(a^n)^m = a^{mn}; (ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

Числа, змінні, а також різні записи, складені з чисел чи змінних та знаків дій, разом називають *виразами*. Вирази бувають *числові* (наприклад, $3 - 0,5 : 6$) і *зі змінними* (наприклад, $3x, 2ab, c^2 - 3$). Якщо вираз не містить жодних дій, крім додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня і ділення, то його називають *раціональним*. Раціональний вираз, який не містить дії ділення на вираз зі змінною, називають *цілим виразом*.

Найпростіші вирази — числа, змінні, їх степені або добутки. Їх називають *одночленами*. Приклади одночленів:

$$4x; \frac{2}{3}; -3x^2; -3\frac{1}{3}at^3; 2ax \cdot 3ax^2.$$

Якщо одночлен містить тільки один числовий множник, до того ж поставлений на перше місце, і якщо кожна змінна входить тільки до одного множника, такий одночлен називають *одночленом стандартного вигляду*. Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають *коефіцієнтом* цього одночлена.

Перемножуючи одночлени, ставлять між ними знак множення і одержаний добуток зводять до одночлена стандартного вигляду. Щоб піднести одночлен до степеня, слід піднести до цього степеня кожний множник одночлена і знайдені степені перемножити. Наприклад,

$$2ax \cdot (-3x^2) = 2 \cdot (-3) \cdot a \cdot x \cdot x^2 = -6ax^3;$$

$$(0,3nc^3)^2 = 0,3^2 \cdot n^2 \cdot (c^3)^2 = 0,09n^2c^6.$$

Суму кількох одночленів називають *многочленом*. Для зручності кожний одночлен також вважають многочленом. Як пов'язані між собою різні види цілих виразів, показано на схемі (мал. 72).



Подібними членами многочлена називають такі, що відрізняються тільки коефіцієнтами або й зовсім не відрізняються. Многочлен записано в стандартному вигляді, якщо всі його члени — одночлени стандартного вигляду і серед них немає подібних.

Додаючи многочлени, користуються правилом розкриття дужок: якщо перед дужками стоїть знак «+», то їх не пишуть. Наприклад,

$$(2a + 3) + (a^2 - 2a - 4) = 2a + 3 + a^2 - 2a - 4 = a^2 - 1.$$

Віднімаючи многочлен від многочлена, користуються правилом розкриття дужок: якщо перед дужками стоїть знак «мінус», то дужки можна не писати, змінивши знаки всіх доданків, які були в них, на протилежні. Наприклад,

$$4x^2 + 5 - (x^2 - 2x + 5) = 4x^2 + 5 - x^2 + 2x - 5 = 3x^2 + 2x.$$

Щоб помножити многочлен на одночлен, потрібно кожний член многочлена помножити на даний одночлен і результати додати. Наприклад,

$$(3a^2 + a - 8) \cdot 2ax = 3a^2 \cdot 2ax + a \cdot 2ax - 8 \cdot 2ax = 6a^3x + 2a^2x - 16ax.$$

Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожний член першого многочлена помножити на кожний член другого і отримані добутки додати. Наприклад,

$$(x + 2z - 3) \cdot (4x - 7) = x \cdot 4x + 2z \cdot 4x - 3 \cdot 4x - x \cdot 7 - 2z \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 4x^2 + 8xz - 19x - 14z + 21.$$

Формули скороченого множення

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{— квадрат двочлена,}$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \quad \text{— куб двочлена,}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \text{— різниця квадратів,}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{— різниця кубів,}$$

$$a^3 + b^3 + (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{— сума кубів.}$$

Розкласти многочлен на множники — це означає замінити його добутком кількох многочленів, тотожним даному многочлену. Найпростіші способи розкладання многочленів на множники: винесення спільного множника за дужки, спосіб групування, використання формул скороченого множення.

ФУНКЦІЇ

Якщо кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y , то змінну y називають *функцією від x* , змінну x називають *незалежною змінною*, або *аргументом*

функції. Наприклад, площа S квадрата — функція від довжини його сторони a .

Функції можна задавати за допомогою формул, таблиць, графіків тощо. Графіки функцій найчастіше будують у *декартовій системі координат*, яка складається з двох взаємно перпендикулярних координатних осей — горизонтальної осі *абсцис*, або осі x , і вертикальної осі *ординат*, або осі y . Площину із системою координат називають *координатною площиною*, кожній її точці відповідає єдина пара чисел.

Графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

Усі значення, яких може набувати аргумент функції, утворюють її *область визначення*, а всі відповідні значення функції — *область значень функції*.

Лінійною називають функцію, яку можна задати формулою $y = kx + b$, де x — аргумент, а k і b — дані числа. Якщо $b = 0$, то лінійну функцію називають *прямою пропорційністю*.

Графік кожної лінійної функції — пряма. Графік прямої пропорційності — пряма, яка проходить через початок координат.

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Рівняння вигляду $ax + by = c$, де a, b, c — дані числа, називають *лінійним рівнянням з двома змінними x і y* . Якщо $a \neq 0$ і $b \neq 0$, його називають *рівнянням першого степеня з двома змінними*.

Кожну пару чисел, яка задовольняє рівняння з двома змінними, називають *розв'язком* цього рівняння. Наприклад, пара чисел $(3; -2)$ — розв'язок рівняння $5x + 3y = 9$. Кожне рівняння першого степеня з двома змінними має безліч розв'язків. У декартовій системі координат кожному рівнянню першого степеня з двома змінними відповідає пряма — графік цього рівняння.

Два рівняння з двома змінними називають *рівносильними*, якщо кожне з них має ті самі розв'язки, що й друге. Рівносильні рівняння з двома змінними мають однакові графіки.

Якщо потрібно знайти спільні розв'язки двох чи кількох рівнянь, говорять, що ці рівняння утворюють *систему рівнянь*. *Розв'язком системи рівнянь* називають спільний розв'язок усіх її рівнянь. Система рівнянь може мати один розв'язок, безліч або не мати жодного розв'язку.

Розв'язувати системи рівнянь з двома змінними можна способами підстановки, додавання або графічним.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ЗАДАЧ І ВПРАВ

7. а) 16; г) 3,75. 8. а) 0,216; г) 10,89. 9. а) -7; г) 13. 10. а) x^5 ; в) n^4 ; г) x . 11. а) $81x^4$; г) $10000m^8$. 12. б) $6-2a$. 13. а) $2a^3x$; г) $3a^2b^2$. 14. а) $4x^3y$; г) $-6m^5n$. 15. б) $2m^5$; г) $2a$. 16. б) 16; г) 5. 17. б) 1; в) -44. 20. а) -1372. 21. б) 0,4. 25. а) $-5ax^2$; г) $-4n^4y^4$. 26. а) $7(x-7)$; в) $ac(a-2c)^2$. 27. б) -9; г) $8-a^3$. 28. а) -1; г) 1. 29. б) $36n^{10}$; в) $3a^4$. 30. б) 22,5. 31. а) a^3 ; в) x^5 . 32. а) $2xy^{2n}$; б) $12x^n y^n$. 33. а) x^2+9x+5 ; г) x^3-3x^2+4x-2 . 34. б) a^2-10 . 35. в) $-x^2$. 36. а) $(x-4)(x+4)$; г) $3(a-b)(a-b)$. 37. б) 3,5. 38. г) 5,5. 39. а) 0,4. 40. а) (4; 2). 41. б) (3; 1). 43. 20 і 51. 44. 48 і 60. 45. 45 і 80. 46. 17 і 7. 54. а) 125; г) 2. 55. б) -7; г) 1. 56. а) $n=0$; б) $a=3$; в) $x=-4$. 57. а) $x=5$. 58. б) $x=0$, $x=3$, $x=-3$. 60. а) $x \neq 5$; г) $x \in R$. 61. в) $x \neq -3$. 62. а) -2. 64. а) Так; б) ні. 65. б) Ні. 68. в) -1; г) $5x^4$. 69. а) $-2c$; г) $0,3a^2c^3$. 70. в) 0,25; г) 4,5. 73. б) Ні. 76. а) $x=0$, $x=-1$. 77. а) $x \neq -2$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

78. б) $x \neq 0,5$. 80. а) $x = \frac{5}{a-2}$, $a \neq 2$; г) $x = \frac{5-2a}{9-a^2}$, $a \neq 3$, $a \neq -3$.

81. в) $c=-7$. 82. а) $x=0$. 83. б) 33. 84. б) -2. 85. а) 90. 86. в) -87. 87. а) Ні. 88. а) Ні.

102. а) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{5}{6}$. 104. г) -1. 105. в) $3x$. 106. б) $\frac{c}{m}$. 108. б) 1.

109. в) $\frac{1}{3}$. 110. б) a . 111. в) $-m$. 112. а) $\frac{p}{2x}$; г) $-(n+c)$. 113. а) $\frac{6a^3}{3a^4}$.

119. б) $6x$. 121. б) 0,25. 122. б) 5. 124. б) $x^2+2xz+z^2$. 125. б) $a-1$.

129. $\frac{y+1}{y-1}$. 130. а) $\frac{x-1}{x+1}$. 131. а) $1-xy$. 139. а) $\frac{c+x}{y+2x}$.

140. а) $\frac{x-a}{x^2+a}$. 141. а) $\frac{x^2-ax+c^2}{x^2+ax-c^2}$. 144. б) $a^2-\pi x^2$.

145. 20 км/год. 151. а) 1,25. 152. а) 10,1. 153. а) $x=0$.

154. а) $x=-3$. 155. в) $x=-1,5$. 157. а) Ні. 160. а) -3. 161. б) 2; -2.

164. а) 8. 165. б) 10. 167. а) 2, якщо $a > 0$; 0, якщо $a < 0$, вираз

не має змісту, якщо $a = 0$. 171. $\frac{0,1m+0,15n}{m+n}$. 173. в) $x = -3$.

174. в) $x = 0$, $x = 4$. 178. б) 5. 179. а) 0. 180. а) Рівняння роз-

в'язків не має. 181. б) 1,5. 192. а) 1. 193. б) 0. 194. б) 1. 195. в) x .
196. б) a . 198. а) $a - 3$. 199. а) 3.

$$200. \text{ а) } -4. 205. \text{ в) } \frac{a+5x}{6x}. 206. \text{ а) } \frac{4a-5x}{ax^2}. 207. \text{ а) } \frac{2c-x}{3c^2x} \text{ і } \frac{1}{3c^2}.$$

$$208. \text{ б) } \frac{6+c}{3c(3-c)}. 209. \text{ а) } \frac{15y}{2x(4x-5y)}. 210. \text{ а) } \frac{a+b+c}{c}. 211. \text{ в) } \frac{ax^2}{a+x}.$$

$$213. \text{ б) } -5. 214. \text{ в) } -2. 215. \text{ б) } \frac{14a+15b}{24c}. 216. \text{ а) } \frac{-7x-51}{20x}.$$

$$217. \text{ а) } \frac{2}{x-1}. 218. \text{ а) } -\frac{1}{3(x+2)}. 219. \text{ б) } \frac{1}{6}. 220. \text{ б) } \frac{4-x}{6(x+1)}.$$

$$221. \text{ а) } \frac{20}{a^2-1}. 222. \text{ а) } \frac{2x^2+17x+11}{(x^2-1)(x+2)}. 223. \text{ а) } \frac{x^2+4x+39}{12(1-x^2)}.$$

$$224. \text{ а) } \frac{2x^2}{a(x^2-4a^2)}. 225. \frac{44}{x^3+64}. 226. \frac{18x^2}{8a^3-27x^3}.$$

$$227. \frac{1}{(x-a)(x-c)}. 228. 0. 230. \text{ а) } \frac{1}{6x} + \frac{3}{4x^2}. 238. \text{ б) } 0. 240. \text{ б) } -6.$$

241. а) 0. 242. б) -1. 243. а) 0. 269. а) $a + 3$; в) x . 271. а) 2; б) 18.
278. а) $27a^4$. 279. а) $-27z^{12}$. 280. а) $1 - a$. 284. б) 1,5. 289. а) -3.

290. б) 1. 291. а) $3i - 1$. 294. а) $6(x-y)(x+y)$.

300. а) 6. 302. а) $2a^2c^2$; в) $27x^5$. 303. а) $x + y$. 305. б) x .

306. а) $2x(2c-x)$. 307. г) $x^{1\frac{1}{2}} - 1$. 308. а) -1. 311. а) 1,2. 313. а) 8.

314. а) $x - y$. 315. г) $x(x+2y)$. 316. б) $y(xy+1)$. 318. а) $0,5(3-x)(3+2x)$.

319. б) 0,25. 323. в) $(a-2)^2$. 326. б) a^2 . 329. а) $a + b$. 331. б) 0.

332. б) 0. 333. а) 25; б) 3. 334. а) $a(a^2+1)$. 335. б) $c^2 - c + 1$.

336. а) $a + b$. 337. а) $a - 2$. 338. б) $16a - 5c$. 339. в) $6c$. 340. б) $3a^2$.

349. а) $a^2 - a + 1$. 351. б) $3y$. 352. б) x . 353. а) $x - y$. 355. г) $-ab$.

357. а) 1. 362. а) 1,37. 366. а) $a^2 - x^2$. 368. б) $(a+c)^2$. 371. б) $-x$.

372. а) $3 - a^2$. 375. а) $2a(a+2)$. 377. а) 1. 382. $x = 13$. 384. 2, 0,

-2, -4. 386. 4, 6, 10, 24. 392. а) 5. 395. а) 0; б) 1.

404. а) 3. 405. а) -5. 406. а) -1 і 1. 407. б) -1. 408. б) -2 і 2.

409. а) 7. 410. а) 16. 411. а) 0. 412. а) -5 і 5. 413. 7. 416. а) -1.

417. а) -4. 418. б) -3. 419. а) -9. 421. а) 8. 422. а) 4. 423. б) -2,5.

425. а) 4. 426. а) 8. 428. а) -8,5. 430. а) (2;4). 431. а) (0,1; 4).

432. а) (5; 3). 433. а) (4; 5). 434. а) (4,5; 1). 435. 3. 436. 4.

437. 27 м. 438. 27 і 21 рік. 439. 80 км/год і 40 км/год.

440. 15 год. 442. 20 днів і 30 днів. 446. 3,6 год. 449. 40, 60 і

80 км/год; 360 км. 461. б) 1. 462. г) 250. 463. а) a^{-2} . 465. а) 25.

466. а) $9x^{-1}c^{-2}$. 467. б) $15a^{-1}c^{-3}$. 468. г) $8x^{-9}y^6$. 469. а) $x^{-3}z^6$.
 471. а) 1. 474. г) 1. 478. б) $-0,5$. 487. б) 1. 497. а) 700 000.
 498. а) 0,00000009. 499. а) $3,7 \cdot 10^8$.

500. а) $5,3 \cdot 10^{-8}$. 501. а) $7,35 \cdot 10^{19}$ т. 502. а) $\approx 5,91 \cdot 10^{21}$.
 503. а) $2,6 \cdot 10^9$ г. 504. а) $1,2 \cdot 10^6$. 507. а) $1,6 \cdot 10^{-23}$; $6,4 \cdot 10^{-35}$.
 508. а) 21,6 кг. 509. а) $1,5 \cdot 10^6$ км. 511. а) $7 \cdot 10^{-2}$. 512. а) $2,4 \cdot 10^4$;
 $1,2 \cdot 10^4$; $1,08 \cdot 10^8$; 3. 514. а) $1,43 \cdot 10^3$. 515. а) $1,57 \cdot 10^2$.
 517. а) -9 . 518. а) $\approx 3,1 \cdot 10^{22}$. 520. $\approx 2,8 \cdot 10^7$. 541. 50; -2 .
 543. А, D, E, G. 545. а) $x \neq 0$. 547. в) $x \neq 0$, $x \neq 5$. 550. а) $k = 1$.
 552. Так. 555. Так. 556. За 36 год. 562. а) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.
 563. а) $k = 12$, $b = -32$. 566. а) $x \neq 0$. 567. а) $x \neq 0$ і $x \neq 3$. 572. а) 48.
 573. 0,75 і 1,75. 574. -7 і -5 . 583. Проходить через А і В.
 588. $S = 2x^2$. 591. При $x = -1$ і $x = 3$.

621. а) 13. 622. б) 0,3. 623. а) 11. 624. а) 0,1. 627. а) -30 .
 628. а) 12. 629. а) 0,6. 630. а) 30. 634. а) -71 . 635. а) -220 .
 636. а) 13. 638. а) Ні. 644. а) 5; 1; 13. 649. а) 1. 650. а) 71.
 652. а) 27. 656. а) 2304; б) 1369. 658. а) Так; в) ні. 659. а) 49.
 660. а) 22. 662. б) 4 і -4 . 679. б) 0,4. 688. а) 0, (3).

715. а) 80. 716. а) 0,5. 719. а) 20. 720. а) 70. 721. а) 30. 723. а) 8.
 724. а) 20. 726. а) 1. 731. а) 9. 733. а) 16. 739. а) 800. 740. а) 18.
 742. б) $a \geq 0$. 745. а) $-3n$. 751. а) $3a^2bc^3$. 752. а) $-xyz$. 753. а) $|a + b|$.
 754. а) 1. 755. а) $\sqrt{3} - 1$. 766. а) $5\sqrt{10}$. 767. а) $11\sqrt{2}$. 768. а) $5\sqrt{0,1}$.
 769. а) $\sqrt{12}$. 771. а) $\sqrt{0,9}$. 772. г) $\sqrt{0,5}$. 778. а) 21. 779. а) 25.
 780. а) $1 + \sqrt{7}$. 781. а) 2. 782. а) $4 + 2\sqrt{3}$. 784. а) $a\sqrt{2}$.
 785. а) $x\sqrt{3}$. 786. а) $\sqrt{12x^2}$. 787. а) $\sqrt{2x^2}$. 796. а) $-\sqrt{3}$.
 797. а) $\sqrt{3}$. 798. б) 15. 799. а) 1.

804. а) $-x\sqrt{2}$. 806. а) $-\sqrt{ac^2}$. 812. а) a . 818. а) $\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)$.
 822. б) 2. 825. г) $10 - 4\sqrt{6}$. 857. в) Один. 876. 0 і $-\frac{1}{2}$. 887. а) 0 і 2.
 897. а) 10 і -10 .

909. а) $c = 0$. 916. а) 0; 7 і -7 . 932. а) 6 і $-2,5$. 941. а) 0 і 13.
 946. а) 1 і $-0,5$. 959. а) 1 і $-0,25$. 963. а) 1 і $-4,6$. 970. а) 87 і -91 .
 973. а) 3. 985. а) 0,25. 992. а) $(-2; 1)$ і $(0,25; 7,75)$. 993. а) $(-2; 5)$
 і $(-7,5; 3,625)$.

1015. $c = 6$. 1016. $m = -5,6$. 1026. а) $x_1 = -2$; $x_2 = 12$; $q = -24$.
 1037. а) 22. 1048. а) $(3x - 2) \times (3x - 2)$. 1053. а) $(x + 2)^2 - 22$.
 1065. -21 ; 0,8. 1067. При $x = 3$. 1071. При $x = 3$, $f(3) = 17$.
 1079. 25 і 36. 1080. 24 і 13 або -13 і -24 . 1081. 40 м і 20 м.
 1082. 2 км і 1 км. 1083. 16 і 17 або -14 і -15 . 1084. 6 або 18.

1085. а) 12 і -11. 1086. а) 13 і 7. 1087. а) 5 і 8 м. 1088. 16 і 17.
 1089. 6 і 8. 1090. 11 і 12. 1091. 11, 12 і 13 або -11, -12 і -13.
 1094. 21 ряд. 1096. 7 км/год. 1097. 60 км/год. 1098. 3 км/год.
 1099. 60 км/год.

1101. 2 км/год. 1102. 12 км/год. 1103. 10 год. 1104. 200 км
 або 160 км. 1105. 2,4 км/год або 3 км/год. 1106. 80 см і 60 см.
 1108. 10 км. 1109. 12 днів, 6 днів. 1110. 12 днів, 6 днів.
 1111. 8 днів. 1112. 30 днів, 20 днів. 1113. 14 днів, 11 днів.
 1114. 5 год, 7 год. 1115. 48 або 16. 1116. 25 гілок, 8 бджілок.
 1117. 18 точок. 1118. 12. 1123. 30 км/год і 24 км/год.
 1124. 160 г, 20 %. 1125. 8,8 г/см³, 7,8 г/см³. 1126. 10 %, 360 г.
 1127. 120 г. 1128. 18 сторін. 1133. а) $-2c^5$. 1140. а) 0,625.
 1145. б) $2 - x$. 1162. б) $-n^2x^2$. 1164. а) $3ct$. 1169. а) $a + 2b$.
 1172. б) $\frac{8c}{3b}$. 1173. $\frac{m-n}{m^2+n^2}$. 1175. а) $14\sqrt{10}$. 1183. а) 23,1.
 1188. а) $2\sqrt{15}$. 1191. а) $\sqrt{2}$. 1197. а) 25. 1198. Коренів немає.
 1199. а) $\pm 4, \pm 1$.

1207. а) 18. 1208. а) (1; 0), (-0,5; -1,5). 1209. а) $\frac{203}{405}$; в) $\frac{999}{1001}$.
 1210. а) Ці числа рівні. 1212. 0,999. 1213. а) Розкладіть на
 множники чисельник: $x^4 + a^2x^2 + a^4 = x^4 + 2a^2x^2 + a^4 - a^2x^2 =$
 $= (x^2 + a^2)^2 - (ax)^2 = (x^2 - ax + a^2)(x^2 + ax + a^2)$. 1215. Існують.
 1216. Раціональне. 1217. Покажіть, що $4 \pm 2\sqrt{3} = (1 \pm \sqrt{3})^2$.
 1218. 34, 334, 3334. 1219. Перша різниця більша. 1220. 99.
 1222. а) Розкладіть на множники ліву частину рівняння.
 1224. а) Зробіть заміну $x + 6 = y$; б) Зробіть заміну $x^2 - 2x - 1 = y$.
 1227. $\pm\sqrt{5}$. 1228. ± 2 . 1229. $\pm\sqrt{3}$. 1230. 1; 3. 1231. Щоб ко-
 рені даного рівняння були раціональними, необхідно, щоб ви-
 конувалась рівність $p^2 - 4q = m^2$, де m — ціле непарне число.
 Покажіть, що такого m не існує. 1232. 3 км/год. 1233. 121 км.
 1234. 3 км/год. 1235. $\approx 64,4$ км/год. 1236. 5%. 1237. 10,5 бу
 і 24,5 бу. 1238. 40 або 60 пістолів. 1239. 3,5. 1240. а) Зробіть
 заміну $\frac{1}{x} = y$; б) дане рівняння рівносильне рівнянню
 $(x - 11)(x + 9)(x^2 + 2x + 101) = 0$. 1242. 27. 1244. $\frac{2}{2005}$.
 1245. Зверніть увагу на те, що $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1$.
 1248. а) 1; б) 4 або -1,2. 1250. а) 193^3 .

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Абсциса точки 248
 Аргумент функції 248
- Вершина параболи 117
 Винесення за дужки 248
 — за знак кореня 161
 Вирази дробові 36
 — зі змінними 247
 — з коренями 161
 — раціональні 36
 — цілі 36
 Віднімання дробів 44
 — многочленів 248
 Вісь абсцис 248
 — ординат 249
 Властивості рівнянь 246
 — степенів 247
 — функцій 113
- Гіпербола 112
 Графік рівняння 249
 — функції 249
- Дискримінант 194
 Ділення виразів 7
 — дійсних чисел 145
 — дробів 67
 — одночленів 8
 — степенів 7
 Добування квадратного кореня 135
 Додавання дробів 44
 — многочленів 248
 — одночленів 247
 Допустимі значення 17
 Дроби 16
 — алгебраїчні 16
 — взаємно обернені 67
- Знаменник дробу 16
- Квадрат двочлена 248
 Квадратний тричлен 213
 Корінь арифметичний 135
 — з добутку 135
 — з дробу 135
 — зі степеня 135
 — квадратний 135
 Координатна площина 249
 Куб двочлена 248
- Многочлен 247
 Множення дробів 55
 — многочленів 248
 — одночленів 248
 — степенів 247
 Множина дійсних чисел 145
 — раціональних чисел 144
 — цілих чисел 145
- Незалежна змінна 248
- Обернена пропорційність 113
 Область визначення функції 249
 Одночлен 247
 — стандартного вигляду 247
 Ордината точки 248
 Осі координат 248
 Основа степеня 246
 Основна властивість дробу 27
 — — степеня 97
- Парабола 127
 Перетворення виразів
 — з коренями 161

- раціональних 76
- Періодичні дроби 144
- Подібні члени 248
- Показник степеня 246
- Порядок числа 10
- Пропорційність обернена 113
 - пряма 113
- Раціональні вирази 36
 - числа 144
- Рівняння 246
 - бікватратні 196
 - дробові 86
 - дробово-раціональні 88
 - з двома змінними 249
 - квадратні 185
 - — зведені 196, 205
 - лінійні 249
 - неповні 185
 - першого степеня 249
 - раціональні 36, 86
 - рівносильні 246
- Рівняння-наслідок 87
- Різниця квадратів 248
 - кубів 248
 - одночленів 248
- Розв'язок
 - рівняння 246
 - — з двома змінними 249
 - системи рівнянь 249
- Розкладання многочленів 249
- Система рівнянь 249
- Скорочення дробів 27
- Стандартний вигляд
 - числа 104
- Степінь числа 246
 - — з від'ємним показником 97
 - — з нульовим показником 96
 - — з цілим показником 97
- Сума кубів 249
 - одночленів 247
- Теорема Вієта 205
- Тотожні вирази 17
 - перетворення виразів 18, 76
- Тотожність 18
- Умова рівності дробу нулю 37
- Формула квадрата двочлена 248
 - коренів квадратного рівняння 195
- Формули скороченого множення 248
- Функція 111, 249
 - $y = x^2$ 127
 - $y = \sqrt{x}$ 171
 - лінійна 249
- Функції обернені 174
- Чисельник дробу 16
- Числа дійсні 144
 - ірраціональні 145
 - натуральні 145
 - раціональні 144
 - цілі 145
- Члени дробу 16

Відомості про стан підручника

№	Прізвище та ім'я учня	Навчальний рік	Стан підручника		Оцінка
			на початку року	в кінці року	
1					
2					
3					
4					
5					

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович, БЕВЗ Валентина Григорівна

АЛГЕБРА

Підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Малюнки А. Лапушена

Фото: А. Віксенка, О. Ганжі, Е. Золотарьової,
І. Красуцького, Р. Якименка

У підручнику використано ілюстрований матеріал з журналів: «Образотворче мистецтво» (2002, № 3; 2004, № 3; 2007, № 1, 2, 3), «Україна», «Українська культура» (1998, № 4—5; 2000, № 9—10, 2001, № 6; 2002, № 1, 2006, № 1—2, 9), а також репродукції картин художників: А. Вінничка, А. Віксенка, І. Гресик, Н. Гумена, Д. Дбровольського, О. Дубовика, М. Малишка, Н. Мартиненко, І. Марчука, І. Остафійчука, І. Павельчук, Ф. Панчука, А. Перейми, С. Савченка, Т. Чувалової, Л. Ястреб

Редактори: О. П. Парполіто, Н. В. Демиденко

Художній редактор А. М. Віксенко

Технічний редактор Л. І. Аленіна

Коректор Є. С. Святицька

Комп'ютерний набір і верстка СМП «АВЕРС»

Підписано до друку 14.05.2008. Формат 60×90 $\frac{1}{16}$.

Папір офсет. Гарнітура Шкільна. Друк офсет. Умов. друк.

арк. 16,0+0,25 форз. Обл.-вид. арк. 16,2+0,2 форз. Наклад 137 600 пр. Зам. 30/05.

Видавництво «Зодіак-ЕКО»

Свідоцтво про державну реєстрацію серія ДК № 155 від 22.08.2000 р.

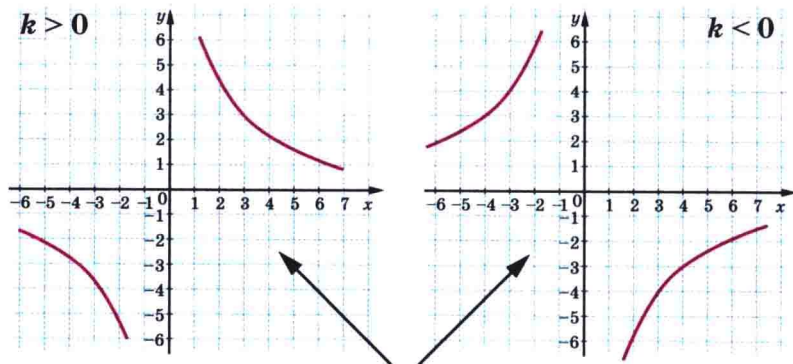
01004, Київ-4, вул. Басейна, $\frac{1}{2}$

Видруковано ТОВ «Торнадо»

61045, м. Харків, вул. Отара Яроша, 18

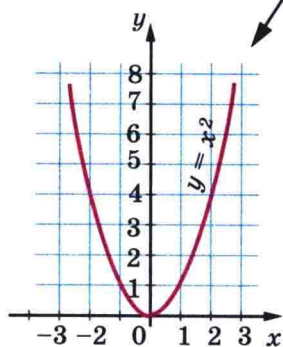
Функції

$$y = \frac{k}{x} \text{ — обернена пропорційність, } x \neq 0$$



Гіпербола

Парабола



Квадрати натуральних чисел

Де-сятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Степені чисел 2 і 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049