

О. С. Істер



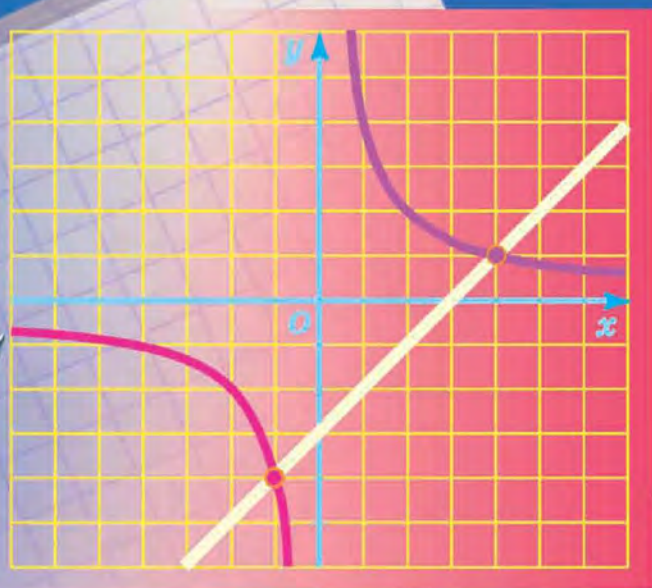
y

Алгебра

8

x

O



О. С. Істер

Алгебра

**ПІДРУЧНИК ДЛЯ 8 КЛАСУ
ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

**КИЇВ
«ОСВІТА»
2008**

ББК 22.14я721

I-89

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(Рішення Колегії Міністерства освіти і науки України;
Протокол № 2/2-19 від 28.02.2008; Наказ Міністерства
освіти і науки України № 179 від 17.03.2008.)*

Права авторів та видавничі права ДСВ «Освіта» захищені Законом України «Про авторське право і суміжні права» від 23.12.1993 р. (зі змінами від 11.07.2001 р.).

Друковане копіювання книги або її частини, будь-які інші контрафактні видання тягнуть за собою відповідальність згідно зі ст. 52 цього Закону.

Істер, О. С.

I-89 Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. /
О. С. Істер. — К.: Освіта, 2008. — 208 с.

ISBN 978-966-04-0625-4.

ББК 22.14я721

ISBN 978-966-04-0625-4

© О. С. Істер, 2008

© Художнє оформлення.

Видавництво «Освіта», 2008

ВІД АВТОРА

Шановні восьмикласники!

У цьому навчальному році ви продовжуєте вивчати алгебру. Підручник, який ви тримаєте в руках, складається з трьох розділів, що містять 26 параграфів.

Під час вивчення теоретичного матеріалу зверніть увагу на тексти, надруковані жирним шрифтом. Це математичні терміни, означення, теореми, правила.

У підручнику ви побачите умовні позначення. Ось що вони означають:



— треба запам'ятати;



— запитання і завдання до вивченого матеріалу;



— вправи для повторення;

1

— задача для розв'язування в класі;

2

— задача для розв'язування вдома.

Кожна вправа відповідає певному рівню навчальних досягнень і має позначення:

①

— вправа початкового рівня;

②

— вправа середнього рівня;

③

— вправа достатнього рівня;

④

— вправа високого рівня.

Перевірити свої знання та підготуватися до підсумкової атестації ви зможете, якщо виконаєте «Завдання для перевірки знань».

З метою здійснення самоконтролю та самоперевірки знань після кожного розділу наведено «Вправи для повторення розділу». З'ясувати свій рівень опанування навчальним матеріалом ви зможете, звернувшись до рубрики «Завдання для перевірки знань за курс алгебри 8 класу» наприкінці підручника. Ті, хто виявляє підвищений інтерес до математики, можуть удосконалити вміння, скориставшись матеріалом рубрики «Задачі підвищеної складності». Пригадати раніше вивчене вам допоможуть «Відомості з курсу математики 5—6 класів та алгебри 7 класу».

Бажаю успіхів в опануванні курсу алгебри!

Шановні вчителі!

Матеріал підручника поділено на параграфи, кожний з яких відповідає певній кількості уроків. Нумерація уроків наводиться поряд з нумерацією параграфів. Вважаємо, що такий підхід полегшує роботу з підручником, і водночас не виключаємо можливості, що ви інакше розподілятимете навчальні години.

Кількість вправ у більшості параграфів подано з невеличким запасом, тож обирайте їх для виконання на уроках та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня індивідуалізації навчання тощо.

Шановні батьки!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, ви матимете чіткий орієнтир — матеріал якого уроку (чи уроків) треба опрацювати вдома, які вправи розв'язати.

Крім того, ви можете запропонувати дитині додатково розв'язати вдома вправи, які не були розв'язані на уроці. Це сприятиме кращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема завершується підсумковою атестацією. Перед її проведенням запропонуйте дитині виконати «Завдання для перевірки знань», подані у підручнику. Це допоможе пригадати основні типи вправ та підготуватися до тематичного оцінювання.



$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Уроки 1, 2

§ 1. ДРОБИ. ДРОБОВІ ВИРАЗИ. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ. ДОПУСТИМІ ЗНАЧЕННЯ ЗМІННИХ

У курсі алгебри 7 класу ми ознайомилися із *цілими раціональними виразами*, тобто виразами, які не містять ділення на вираз зі змінною. Приклади таких виразів:

$$5m^2p; \quad 4c^3 + t^9; \quad (m - n)(m^2 + n^7); \quad k^9 - \frac{p+l}{4}.$$

Кожний цілий вираз можна записати у вигляді многочлена. Наприклад: $(m - n)(m^2 + n^7) = m^3 + mn^7 - nm^2 - n^8$;
 $k^9 - \frac{p+l}{4} = k^9 - \frac{1}{4}p - \frac{1}{4}l$.

На відміну від цілих вирази

$$5m - \frac{3}{p}; \quad \frac{x+2}{y-9}; \quad \frac{1}{5}x - \frac{19}{m^2}; \quad \frac{a-b}{a^2+ab+b^2}; \quad \frac{1}{(x-y)(x^2+7)}$$

містять ділення на вираз зі змінною. Такі вирази називають *дробовими раціональними виразами*.

Цілі раціональні і дробові раціональні вирази називають *раціональними виразами*.



Раціональні вирази — це математичні вирази, що містять дії додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня з цілим показником.

Раціональний вираз вигляду $\frac{a}{b}$, де a і b — вирази, що містять числа або змінні, називають *дробом*, де a — чисельник цього дробу, b — його знаменник.

Якщо чисельник і знаменник дробу — многочлени, то дріб називають *раціональним дробом*.

Цілий раціональний вираз має зміст при будь-яких значеннях змінних, що входять до нього, оскільки для знаходження значення цього виразу необхідно виконати дії додавання, віднімання та множення, що завжди можливо.

Розглянемо дробовий раціональний вираз $\frac{5}{x-3}$. Значення цього виразу можна знайти для будь-якого значення x , крім $x = 3$, оскільки при цьому значенні x знаменник дробу перетворюється на нуль. Вираз $\frac{5}{x-3}$ має зміст при всіх значеннях змінної x , крім $x = 3$.



Значення змінних, при яких вираз має зміст, називають допустимими значеннями змінних.

Ці значення утворюють *область визначення*, або *область допустимих значень* змінних.

Приклад 1. Знайти допустимі значення змінних у виразах:

$$1) \frac{m-3}{9}; \quad 2) \frac{5}{p+2}; \quad 3) \frac{x+7}{x(x-9)}; \quad 4) \frac{7}{|y|-3}.$$

Р о з в' я з а н н я. 1) Вираз має зміст при будь-яких значеннях змінної m . 2) Допустимі значення змінної p — усі числа, крім -2 , оскільки якщо $p = -2$, то знаменник дробу перетворюється на нуль. 3) Знаменник дробу $\frac{x+7}{x(x-9)}$ перетво-

рюється на нуль, якщо $x = 0$ або $x = 9$. Тому допустимі значення змінної x — усі числа, крім 0 і 9 . 4) Допустимі значення змінної y — всі числа, крім 3 і -3 .

Скорочено *відповіді* можна записати так:

1) m — будь-яке число; 2) $p \neq -2$; 3) $x \neq 0$; $x \neq 9$; 4) $y \neq 3$; $y \neq -3$.

Розглянемо *умову рівності дробу нулю*. Оскільки $\frac{0}{b} = 0$, якщо $b \neq 0$, то можна зробити висновок, що дріб $\frac{a}{b}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник a дорівнює нулю, а знаменник b не дорівнює нулю.

Приклад 2. При яких значеннях змінної дорівнює нулю значення дробу: 1) $\frac{x-3}{x+1}$; 2) $\frac{(a-2)(a+1)}{a+5}$; 3) $\frac{b(b+3)}{b}$?

Р о з в' я з а н н я. 1) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $x = 3$. При цьому значенні змінної знаменник не дорівнює нулю, тому при $x = 3$ значення дробу дорівнює нулю. 2) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $a = 2$ або $a = -1$. При кожному з цих значень знаменник дробу не дорівнює нулю. Тому при $a = 2$ і $a = -1$ значення дробу дорівнює нулю. 3) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $b = 0$ або $b = -3$. Але

при $b = 0$ знаменник дробу дорівнює нулю, а при $b = -3$ знаменник дробу не дорівнює нулю. Тому дріб дорівнює нулю лише коли $b = -3$.

В і д п о в і д ь. 1) $x = 3$; 2) $a = 2$, $a = -1$; 3) $b = -3$.



Які вирази називають цілими раціональними виразами, а які — дробовими раціональними виразами? Наведіть приклади таких виразів. • Які вирази називають раціональними виразами? • Які дробі називають раціональними дробами? • Що називають допустимими значеннями змінної? • Коли дріб $\frac{a}{b}$ дорівнює нулю?

1¹⁰. (Усно.) Які з виразів є цілими, а які — дробовими:

1) $\frac{1}{7}m^3n$; 2) $\frac{a+1}{a}$; 3) $\frac{b-2}{8}$; 4) $m^2 + 2m - 8$;

5) $\frac{1}{x^2+m^2}$; 6) $\frac{x+y-a}{10}$; 7) $(p-2)^2 + 7p$; 8) $a^2 + \frac{2}{a}$?

2¹⁰. З раціональних виразів $a^3 - ab$; $\frac{m}{17}$; $\frac{17}{a}$; $t(t-1) + \frac{t}{p}$;

$\frac{1}{9}a - \frac{1}{8}b$; $\frac{7}{x^2+1} - 5$ випишіть ті, що є:

- 1) цілими раціональними виразами;
- 2) дробовими раціональними виразами.

3¹⁰. Які з дробів є раціональними дробами:

1) $\frac{a}{a^2-3}$; 2) $\frac{m\left(n+\frac{1}{k}\right)}{p^2-2}$; 3) $\frac{x^2-4x+5}{y^2-9}$; 4) $\frac{x}{m-3}$?

4¹⁰. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{3a+9}{a^2}$, якщо $a = 1$; -2 ; -3 ;

2) $\frac{x+3}{x} - \frac{x}{x-2}$, якщо $x = 4$; -1 .

5¹⁰. Перемалюйте в зошит та заповніть таблицю значень виразів $\frac{1+x}{1-x}$ та $\frac{5}{x-1}$ при даних значеннях змінної:

x	-3	-2	-1	0	2	3
$\frac{1+x}{1-x}$						
$\frac{5}{x-1}$						

6². Складіть дріб:

- 1) чисельником якого є різниця змінних a і b , а знаменником — їх сума;
- 2) чисельником якого є добуток змінних x і y , а знаменником — сума їх квадратів.

7². Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

- 1) $m^2 - 5$;
- 2) $\frac{3a-5}{a}$;
- 3) $\frac{7b+9}{8}$;
- 4) $\frac{t-9}{t+1}$;
- 5) $\frac{x^2+1}{x} + \frac{2}{x-1}$;
- 6) $\frac{p+2}{p(p-1)}$;
- 7) $\frac{3}{x^2+1}$;
- 8) $\frac{1}{m} + \frac{1}{|m|+5}$.

8². Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

- 1) $p + 9$;
- 2) $\frac{a-7}{a+4}$;
- 3) $\frac{b-9}{4}$;
- 4) $\frac{x^2-3}{x(x+2)}$;
- 5) $\frac{2y}{y-1} + \frac{3}{y+2}$;
- 6) $\frac{4}{m^2+2}$.

9². За t год автомобіль проїхав 240 км. Складіть вираз для обчислення швидкості v (у км/год) автомобіля. Знайдіть значення отриманого виразу, якщо $t = 3$; 4.

10². Учень витратив 12 грн. для придбання a ручок. Складіть вираз для обчислення вартості однієї ручки (у грн.) та обчисліть його значення, якщо $a = 8$; 10.

11³. При якому значенні змінної значення дробу $\frac{x+2}{8}$ дорівнює:

- 1) -2;
- 2) 9;
- 3) 0,01;
- 4) -4,9?

12³. При якому значенні змінної значення дробу $\frac{m-1}{10}$ дорівнює: 1) -8; 2) 0,25?

13³. При якому значенні x дорівнюють нулю дробі:

- 1) $\frac{4x-8}{x}$;
- 2) $\frac{x(x-2)}{x^2}$;
- 3) $\frac{(x-1)(x+7)}{x+5}$;
- 4) $\frac{3x-6}{8-4x}$?

14³. При якому значенні y дорівнюють нулю дробі:

- 1) $\frac{y}{5y-7}$;
- 2) $\frac{(y+1)y}{y^7}$;
- 3) $\frac{(y+2)(y-3)}{y+4}$;
- 4) $\frac{y+1}{5y+5}$?

15³. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

- 1) $\frac{a+1}{(a-1)(2a+7)}$;
- 2) $\frac{t+2}{t^2-7t}$;
- 3) $\frac{m}{m^2-25}$;
- 4) $\frac{5}{(x-9)^2}$.

16³. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

- 1) $\frac{p-7}{(9-p)(4p+10)}$;
- 2) $\frac{a+2}{5a-a^2}$;
- 3) $\frac{c}{4-c^2}$;
- 4) $\frac{a}{(a+1)^2}$.

17³. Складіть вираз зі змінною x , що має зміст при всіх значеннях x , крім: 1) $x = 2$; 2) $x = 1$ та $x = -4$.

18³. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{37}{a(a-2)-3a+6}$; 2) $\frac{x}{|x|-1}$; 3) $\frac{5m}{1-\frac{1}{m}}$; 4) $\frac{4k}{4-|k-2|}$.

19³. Знайдіть область визначення виразу:

1) $\frac{12}{x(x+2)-4x-8}$; 2) $\frac{m}{4-|m|}$; 3) $\frac{7}{\frac{1}{x}+1}$; 4) $\frac{2a}{|a+2|-3}$.

20³. Визначте знак дробу:

1) $\frac{x^7}{y^8}$, якщо $x > 0$, $y < 0$; 2) $\frac{m+1}{n^7}$, якщо $m > 0$, $n < 0$;
3) $\frac{|p-1|}{n^{19}}$, якщо $p < 0$, $n > 0$; 4) $\frac{|a|+1}{c^8}$, якщо $a < 0$, $c < 0$.

21³. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної значення дробу:

1) $\frac{7}{a^2+1}$ додатне; 2) $\frac{4}{-p^2-2}$ від'ємне;
3) $\frac{(a+1)^2}{a^2+7}$ невід'ємне; 4) $\frac{-(p-2)^2}{p^4+1}$ недодатне.



22³. Перетворіть вираз на многочлен:

1) $(a^2 + 2a - 7) - (a^2 - 4a - 9)$; 2) $3x^2y(2x - 3y + 7)$;
3) $(x^2 - 2x)(x + 9)$; 4) $(x^2 - 5)^2 + 10x^2$.

23³. Розкладіть на множники вираз:

1) $x^2 + 6x + 9$; 2) $x^2 - 25$; 3) $a^2 + ab + 7a + 7b$.

24³. Розв'яжіть рівняння:

$$4x(2x - 7) + 3x(5 - 2x) = 2x^2 + 39.$$

Уроки 3, 4

§ 2. ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ ДРОБУ. СКОРОЧЕННЯ ДРОБУ

Нам відома основна властивість звичайних дробів: якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне й те саме натуральне число, то дістанемо дріб, що дорівнює даному. Інакше кажучи, при будь-яких натуральних числах a , b і c правильними є рівності:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \text{ і } \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

Доведемо, що ці рівності правильні не тільки для натуральних чисел a , b і c , а й для будь-яких інших їх значень, таких, що $b \neq 0$ і $c \neq 0$.

Доведемо спочатку, що $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. Нехай $\frac{a}{b} = a : b = p$. Тоді за означенням частки $a = bp$. Помножимо обидві частини цієї рівності на c :

$$ac = (bp)c.$$

Використовуючи переставну та сполучну властивості множення, маємо:

$$ac = (bc)p.$$

Оскільки $b \neq 0$ і $c \neq 0$, то $bc \neq 0$. За означенням частки маємо $\frac{ac}{bc} = p$. Оскільки $\frac{a}{b} = p$ і $\frac{ac}{bc} = p$, то

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

Ця рівність є тотожністю.

Поміняємо в цій тотожності місцями ліву і праву частини:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

Ця тотожність дає змогу замінити дріб $\frac{ac}{bc}$ дробом $\frac{a}{b}$, тобто скоротити дріб $\frac{ac}{bc}$ на спільний множник c чисельника і знаменника.

Властивість, виражену тотожностями $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ і $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, називають *основною властивістю дробу*.



Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на один і той самий вираз, то дістанемо дріб, який дорівнює даному.

Розглянемо приклади застосування цієї властивості за умови допустимих значень усіх змінних у дробах.

Приклад 1. Скоротити дріб $\frac{24a^2}{16a}$.

Розв'язання. Подамо чисельник і знаменник цього дробу у вигляді добутків, що містять їх спільний множник — вираз $8a$, і скоротимо дріб на цей вираз:

$$\frac{24a^2}{16a} = \frac{8a \cdot 3a}{8a \cdot 2} = \frac{3a}{2}.$$

Відповідь. $\frac{3a}{2}$.

Приклад 2. Скоротити дріб $\frac{x^3 - 9y^2}{5x + 15y}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники чисельник і знаменник дробу: $\frac{(x-3y)(x+3y)}{5(x+3y)}$. Скоротимо дріб на спільний множник $x + 3y$ чисельника і знаменника:

$$\frac{(x-3y)(x+3y)}{5(x+3y)} = \frac{x-3y}{5}.$$

Відповідь. $\frac{x-3y}{5}$.

Отже, щоб скоротити дріб, необхідно:



- 1) розкласти на множники чисельник і знаменник дробу;
- 2) виконати скорочення на спільний множник чисельника і знаменника та записати відповідь.

Тотожність $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ дає змогу зводити дробу до заданого знаменника.

Приклад 3. Звести дріб $\frac{5m}{4p}$ до знаменника $12p^4$.

Розв'язання. Оскільки $12p^4 = 4p \cdot 3p^3$, то, помноживши чисельник і знаменник дробу $\frac{5m}{4p}$ на $3p^3$, дістанемо дріб зі знаменником $12p^4$:

$$\frac{5m}{4p} = \frac{5m \cdot 3p^3}{4p \cdot 3p^3} = \frac{15mp^3}{12p^4}.$$

Множник $3p^3$ називають *додатковим множником* до чисельника і знаменника дробу $\frac{5m}{4p}$.

Відповідь. $\frac{15mp^3}{12p^4}$.

Приклад 4. Звести дріб $\frac{7}{a-b}$ до знаменника $b-a$.

Розв'язання. Оскільки $b-a = -1 \cdot (a-b)$, то, помноживши чисельник і знаменник дробу $\frac{7}{a-b}$ на -1 , дістанемо дріб зі знаменником $b-a$:

$$\frac{7}{a-b} = \frac{7 \cdot (-1)}{(a-b) \cdot (-1)} = \frac{-7}{b-a}.$$

Дріб $\frac{-7}{b-a}$ можна замінити тотожно рівним виразом $-\frac{7}{b-a}$.

При цьому поставили знак «мінус» перед дробом та змінили знак чисельника: $\frac{-7}{b-a} = -\frac{7}{b-a}$.

Відповідь. $-\frac{7}{b-a}$.

Аналогічно, наприклад, дріб $\frac{c+d}{-5}$ можна записати так: $-\frac{c+d}{5}$.

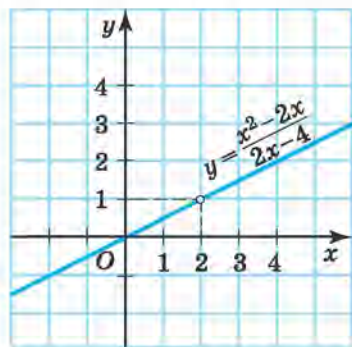
Отже,

! якщо змінити знак у чисельнику або знаменнику дробу і знак перед дробом, то дістанемо вираз, тотожно рівний даному.

Це правило можна записати за допомогою тотожностей:

$$\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b}, \quad \frac{a}{b} = -\frac{a}{-b} \quad \text{та} \quad \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}.$$

Приклад 5. Знайти область визначення і побудувати графік функції $y = \frac{x^2-2x}{2x-4}$.



Мал. 1

Розв'язання. Область визначення функції складається з усіх чисел, крім тих, при яких знаменник $2x-4$ перетворюється на нуль. Оскільки $2x-4=0$, коли $x=2$, то область визначення функції складається з усіх чисел, крім числа 2. Спростуючи вираз $\frac{x^2-2x}{2x-4}$, маємо $\frac{x^2-2x}{2x-4} = \frac{x(x-2)}{2(x-2)} = \frac{x}{2}$.

Отже, $y = \frac{x}{2}$, якщо $x \neq 2$.

Графіком функції $y = \frac{x^2-2x}{2x-4}$ є пряма, що задається формулою $y = \frac{x}{2}$, але без точки з абсцисою 2, тобто точки (2; 1). На малюнку цю точку «виколюють» (зображають «порожньою»). Графік функції $y = \frac{x^2-2x}{2x-4}$ подано на малюнку 1.

? Які рівності виражають основну властивість дробу? Сформулюйте її. • Доведіть тотожність $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. • Як скоротити дріб?

25^Д. (Усно.) Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{7x}{7y}$; 2) $\frac{3a}{15b}$; 3) $\frac{xy}{xt}$; 4) $\frac{ab}{b^2}$; 5) $\frac{5ac}{4ab}$; 6) $\frac{10xy}{10ty}$.

26. Скоротіть дріб:

1) $\frac{3m}{3p}$; 2) $\frac{4x}{12y}$; 3) $\frac{ab}{ap}$; 4) $\frac{t^2}{tx}$; 5) $\frac{9xy}{8xz}$; 6) $\frac{4mn}{4pn}$.

27. Скоротіть дріб:

1) $\frac{15ab}{20am}$; 2) $\frac{-2a^2m}{5ap}$; 3) $\frac{16ax^2}{20xb}$; 4) $\frac{-8m^2n}{-2n^3}$;
5) $\frac{-ap^2}{p^3c}$; 6) $\frac{4abc}{12ac^3}$; 7) $\frac{26m^2n}{39mn^2}$; 8) $\frac{a^5c^4}{-c^3a^6}$.

28. Скоротіть дріб:

1) $\frac{8at}{12ap}$; 2) $\frac{-3xy}{7x^2y}$; 3) $\frac{12m^2n}{20xm}$; 4) $\frac{-6p^3c}{-3p^4}$;
5) $\frac{-kp^3}{p^4t}$; 6) $\frac{5xyz}{15y^2z}$; 7) $\frac{22x^2y}{-33y^2x}$; 8) $\frac{t^7p^8}{p^6t^9}$.

29. Подайте частку у вигляді дробу і скоротіть цей дріб:

1) $12x^2y : (4xy^3)$; 2) $3a^2bc : (-18ab^2c^2)$;
3) $-10ap^3 : (-15a^2)$; 4) $-14x^9 : (2x^7y)$.

30. Зведіть дріб:

1) $\frac{5}{4m}$ до знаменника $20m$;
2) $\frac{p}{a^2}$ до знаменника a^5 .

31. Зведіть дріб:

1) $\frac{4}{3p}$ до знаменника $15p$;
2) $\frac{x}{y^3}$ до знаменника y^7 .

32. Скоротіть дріб:

1) $\frac{m(a-2)}{p(a-2)}$; 2) $\frac{4(x+2)^2}{(x+2)^3}$; 3) $\frac{mn(p+7)}{m^2n(p+7)^2}$; 4) $\frac{16m^3(a+3)^2}{20m^4(a+3)}$.

33. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x(b+7)}{y(b+7)}$; 2) $\frac{5(m-3)^3}{(m-3)^4}$; 3) $\frac{a^2y(x-2)^2}{ay(x-2)}$; 4) $\frac{12x^3(y-7)}{16x^2(y-7)^2}$.

34. Розкладіть на множники чисельник і знаменник дробу і скоротіть його:

1) $\frac{4a+12b}{16ab}$; 2) $\frac{5x-5y}{7(x-y)}$; 3) $\frac{3m(x+2)}{x^2+2x}$; 4) $\frac{ax-a}{a}$;
5) $\frac{y}{y^2-yx}$; 6) $\frac{2x-6y}{5x-15y}$; 7) $\frac{a+2b}{a^2+2ab}$; 8) $\frac{2x^2-10xy}{x-5y}$.

35². Розкладіть на множники чисельник і знаменник дробу й скоротіть його:

1) $\frac{3a+15b}{9ab}$; 2) $\frac{mn-m}{4(n-1)}$; 3) $\frac{p^2-3p}{4k(p-3)}$;

4) $\frac{xy-2x}{x}$; 5) $\frac{m}{m^2+mn}$; 6) $\frac{4a-12b}{7a-21b}$.

36². Скоротіть дріб:

1) $\frac{a(x-y)}{5(y-x)}$; 2) $\frac{3a-9b}{15b-5a}$; 3) $\frac{7y-14}{y^2-4}$;

4) $\frac{m^2-9}{m^2-6m+9}$; 5) $\frac{p^2-1}{p^3-p^2}$; 6) $\frac{x^2+10x+25}{mx+5m}$.

37². Скоротіть дріб:

1) $\frac{m(p-2)}{a(2-p)}$; 2) $\frac{3a+12}{a^2-16}$; 3) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$; 4) $\frac{mc+4c}{m^2+8m+16}$.

38³. Скоротіть дріб:

1) $\frac{m^2n-m}{m^2-m^3n}$; 2) $\frac{15m^4-15mn}{10n^2-10nm^2}$; 3) $\frac{m^3+27}{m^2-3m+9}$;

4) $\frac{20+10a+5a^2}{a^3-8}$; 5) $\frac{3p+pn-3y-yn}{7p-7y}$; 6) $\frac{am+an-bm-bn}{am-an-bm+bn}$.

39³. Скоротіть дріб:

1) $\frac{16p^3-16pq}{12pq-12pq^2}$; 2) $\frac{a^2-2a+4}{a^3+8}$;

3) $\frac{7+7a+7a^2}{a^3-1}$; 4) $\frac{5m+an-5n-am}{a^2-10a+25}$.

40³. Зведіть дріб:

1) $\frac{5}{a-b}$ до знаменника a^2-ab ;

2) $\frac{4}{m+n}$ до знаменника $m^2+2mn+n^2$;

3) $\frac{9}{x-y}$ до знаменника x^2-y^2 ;

4) $\frac{4}{k-1}$ до знаменника k^3-1 ;

5) $\frac{a}{a-b}$ до знаменника $b-a$;

6) $\frac{p}{p-2}$ до знаменника $4-p^2$.

41³. Зведіть дріб:

- 1) $\frac{7}{m+n}$ до знаменника $m^2 + mn$;
- 2) $\frac{4}{x-y}$ до знаменника $x^2 - 2xy + y^2$;
- 3) $\frac{a}{a+b}$ до знаменника $a^2 - b^2$;
- 4) $\frac{c}{c-7}$ до знаменника $7 - c$.

42³. Обчисліть значення дробу $\frac{-2(c^3)^4(x^{12})^2}{5(c^5)^2(x^3)^8}$, якщо $c = \frac{1}{5}$, $x = 2008$.

43³. Обчисліть значення дробу $\frac{6x^2 - 3xy}{8xy - 4y^2}$, якщо $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$.

44³. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{a^5 - a^3}{a^4 - a^2}$;
- 2) $\frac{p^9 + p^7}{p^5 + p^7}$;
- 3) $\frac{2a^2 - a^3}{a^6 - 2a^5}$;
- 4) $\frac{5c^5 - 10c^4}{12c^5 - 6c^6}$.

45³. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{t^9 - t^8}{t^8 - t^7}$;
- 2) $\frac{a^6 + a^3}{a^9 + a^6}$;
- 3) $\frac{3b^2 - b^3}{b^8 - 3b^7}$;
- 4) $\frac{4a^4 - 8a^3}{12a^2 - 6a^3}$.

46³. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{(x+2)^2 - (x-2)^2}{48x}$;
- 2) $\frac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4}$;
- 3) $\frac{(3b-9c)^2}{5b-15c}$.

47³. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{(m+5)^2 + (m-5)^2}{m^2 + 25}$;
- 2) $\frac{a^4 - b^4}{a^3 + b^3}$;
- 3) $\frac{6m+2n}{(12m+4n)^2}$.

48³. Знайдіть область визначення і побудуйте графік функції:

- 1) $y = \frac{x^2 + 6x}{6x + 36}$;
- 2) $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{2 - x}$.

49³. Знайдіть область визначення і побудуйте графік функції:

- 1) $y = \frac{x^2 - 5x}{25 - 5x}$;
- 2) $y = \frac{x^2 + 6x + 9}{3 + x}$.



50³. Обчисліть значення виразу:

- 1) $\frac{2^{13}}{2^{14}}$;
- 2) $\frac{3^9}{3^6}$;
- 3) $\frac{7^4}{49}$;
- 4) $\frac{125}{5^5}$.

51². Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + 3y = 2, \\ 3x - 2y = 17; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 2y = 2, \\ 7x - 2y = -22. \end{cases}$$

52³. Спростіть вираз:

$$1) (2x + 3y)^2 - (x + 7y)(4x - y); \quad 2) (m + 3)(m^2 - 5) - m(m - 4)^2.$$

Уроки 5, 6

§ 3. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ З ОДНАКОВИМИ ЗНАМЕННИКАМИ

Щоб додати два дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити той самий. Наприклад:

$$\frac{3}{11} + \frac{5}{11} = \frac{3+5}{11} = \frac{8}{11}.$$

У буквеному вигляді це записують так:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Ця рівність справджується для будь-яких дробів. Доведемо цю рівність (при умові $c \neq 0$).

Нехай $\frac{a}{c} = p$ і $\frac{b}{c} = q$. Тоді за означенням частки $a = cp$ і $b = cq$.

Маємо:

$$a + b = cp + cq = c(p + q).$$

Оскільки $c \neq 0$, то, використовуючи означення частки, дістанемо:

$$p + q = \frac{a+b}{c}.$$

Отже, якщо $c \neq 0$, то

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Маємо правило додавання дробів з однаковими знаменниками:

! щоб додати дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити той самий.

$$\text{Приклад 1. } \frac{5p}{2x} + \frac{3p}{2x} = \frac{5p+3p}{2x} = \frac{8p}{2x} = \frac{4p}{x}.$$

Аналогічно можна довести тотожність

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c},$$

на основі якої виконується віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Маємо правило віднімання дробів з однаковими знаменниками:



щоб виконати віднімання дробів з однаковими знаменниками, треба від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити той самий.

Приклад 2.

$$\frac{10x-14}{7p} - \frac{3x}{7p} = \frac{10x-14-3x}{7p} = \frac{7x-14}{7p} = \frac{7(x-2)}{7p} = \frac{x-2}{p}.$$

Розглянемо складніші приклади.

Приклад 3. Знайти суму та різницю дробів $\frac{2x+y}{2xy}$ і $\frac{2x-y}{2xy}$.

Розв'язання. $\frac{2x+y}{2xy} + \frac{2x-y}{2xy} = \frac{2x+y+2x-y}{2xy} = \frac{4x}{2xy} = \frac{2}{y};$

$$\frac{2x+y}{2xy} - \frac{2x-y}{2xy} = \frac{2x+y-(2x-y)}{2xy} = \frac{2x+y-2x+y}{2xy} = \frac{2y}{2xy} = \frac{1}{x}.$$

Відповідь. $\frac{2}{y}; \frac{1}{x}.$

Приклад 4. Спростити вираз $\frac{m^2+5m}{m^2-3m} + \frac{7}{m^2-3m} - \frac{11m-2}{m^2-3m}.$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \frac{m^2+5m}{m^2-3m} + \frac{7}{m^2-3m} - \frac{11m-2}{m^2-3m} &= \frac{m^2+5m+7-(11m-2)}{m^2-3m} = \\ &= \frac{m^2+5m+7-11m+2}{m^2-3m} = \frac{m^2-6m+9}{m^2-3m} = \frac{(m-3)^2}{m(m-3)} = \frac{m-3}{m}. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{m-3}{m}.$

Приклад 5. Додати дроби $\frac{10x}{y-2x} + \frac{5y}{2x-y}.$

Розв'язання. Знаменник $2x-y = -(y-2x)$. Перетворимо другий дріб так, щоб знаменники дробів стали однаковими:

$$\frac{5y}{2x-y} = \frac{5y}{-(y-2x)} = -\frac{5y}{y-2x}.$$

Тоді

$$\frac{10x}{y-2x} + \frac{5y}{2x-y} = \frac{10x}{y-2x} - \frac{5y}{y-2x} = \frac{10x-5y}{y-2x} = \frac{-5(y-2x)}{y-2x} = -5.$$

Відповідь. $-5.$

Якщо у тотожностях $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ і $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ поміняти місцями ліві та праві частини, то дістанемо тотожності:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \quad \text{і} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

За допомогою цих тотожностей дріб, чисельник якого є сумою або різницею двох виразів, можна записати у вигляді суми або різниці двох дробів.

Приклад 6.
$$\frac{2x+5y-9}{xy} = \frac{2x}{xy} + \frac{5y}{xy} - \frac{9}{xy} = \frac{2}{y} + \frac{5}{x} - \frac{9}{xy}.$$

Приклад 7. Записати дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу: 1) $\frac{a^2+2a-7}{a}$; 2) $\frac{5m+3n}{m+n}$.

Розв'язання. 1) $\frac{a^2+2a-7}{a} = \frac{a^2}{a} + \frac{2a}{a} - \frac{7}{a} = a + 2 - \frac{7}{a};$
 2) $\frac{5m+3n}{m+n} = \frac{2m+3m+3n}{m+n} = \frac{3(m+n)+2m}{m+n} = \frac{3(m+n)}{m+n} + \frac{2m}{m+n} = 3 + \frac{2m}{m+n}.$

Відповідь. 1) $a + 2 - \frac{7}{a}$; 2) $3 + \frac{2m}{m+n}.$



Сформулюйте правило додавання дробів з однаковими знаменниками. Доведіть його. • Сформулюйте правило віднімання дробів з однаковими знаменниками.

53^①. (Усно.) Виконайте дію:

1) $\frac{a}{5} + \frac{b}{5}$; 2) $\frac{x}{9} - \frac{y}{9}$; 3) $\frac{2}{a} + \frac{3}{a}$; 4) $\frac{7}{b} - \frac{5}{b}.$

54^①. Виконайте додавання і віднімання:

1) $\frac{2x}{5} + \frac{x}{5}$; 2) $\frac{7y}{3} - \frac{2y}{3}$; 3) $\frac{a+b}{x} - \frac{a}{x}$; 4) $\frac{7x^2}{y} + \frac{5x^2}{y}.$

55^①. Виконайте дію:

1) $\frac{3m}{8} + \frac{2m}{8}$; 2) $\frac{9p}{17} - \frac{p}{17}$; 3) $\frac{x-y}{m} + \frac{y}{m}$; 4) $\frac{5c^2}{m} - \frac{2c^2}{m}.$

56^②. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{7a}{4x} - \frac{3a}{4x}$; 2) $\frac{x+y}{8} - \frac{x-3y}{8}$; 3) $\frac{a+4}{9} + \frac{5-a}{9}$;
 4) $\frac{x+3y}{10} + \frac{4x+7y}{10}$; 5) $\frac{5m-2}{8m} - \frac{m-10}{8m}$; 6) $\frac{7a+13}{6a} + \frac{17-a}{6a}.$

57^②. Спростіть вираз:

1) $\frac{5x}{2a} + \frac{3x}{2a}$; 2) $\frac{a+b}{12} - \frac{a-5b}{12}$; 3) $\frac{b-3}{5} + \frac{13-b}{5}$;
 4) $\frac{a+2b}{8} + \frac{3a+6b}{8}$; 5) $\frac{6m-3}{10m} - \frac{m-13}{10m}$; 6) $\frac{5x-3}{4x} + \frac{11-x}{4x}.$

58^②. Спростіть вираз:

1) $\frac{3x-7y}{4xy} + \frac{15y-3x}{4xy}$; 2) $\frac{7a+p^3}{3p} - \frac{7a-2p^3}{3p};$

$$3) \frac{5a-b^4}{6b^5} - \frac{b^4+5a}{6b^5}; \quad 4) \frac{3a-4}{8a} + \frac{4a+5}{8a} - \frac{1-a}{8a}.$$

59Ⓢ. Подайте у вигляді дробу:

$$1) \frac{3a-b}{ab} - \frac{5b+3a}{ab}; \quad 2) \frac{9m+2k^2}{5k} - \frac{9m-3k^2}{5k};$$

$$3) \frac{5b-m^2}{4m^3} - \frac{m^2+5b}{4m^3}; \quad 4) \frac{4a-3}{6a} + \frac{a+8}{6a} - \frac{5-a}{6a}.$$

60Ⓢ. Обчисліть значення виразу $\frac{3a-5}{4a^2} + \frac{5+a}{4a^2}$, якщо $a = \frac{1}{2}$.

61Ⓢ. Знайдіть значення виразу $\frac{5b-7}{6b^2} + \frac{7+b}{6b^2}$, якщо $b = \frac{1}{7}$.

62Ⓢ. Виконайте додавання і віднімання:

$$1) \frac{x^2}{x-5} - \frac{25}{x-5}; \quad 2) \frac{36}{y+6} - \frac{y^2}{y+6}; \quad 3) \frac{x-3}{x^2-9} + \frac{6}{x^2-9};$$

$$4) \frac{7a-1}{a^2-b^2} - \frac{7b-1}{a^2-b^2}; \quad 5) \frac{2x+y}{(x-y)^2} + \frac{x-4y}{(x-y)^2}; \quad 6) \frac{9m+5n}{(m+n)^2} - \frac{m-3n}{(m+n)^2}.$$

63Ⓢ. Спростіть вираз:

$$1) \frac{49}{7-m} - \frac{m^2}{7-m}; \quad 2) \frac{x+7}{x^2-1} - \frac{6}{x^2-1};$$

$$3) \frac{5x-2}{x^2-y^2} - \frac{5y-2}{x^2-y^2}; \quad 4) \frac{3a-4b}{(a-b)^2} + \frac{2a-b}{(a-b)^2}.$$

64Ⓢ. Спростіть вираз:

$$1) \frac{a}{x-1} + \frac{5}{1-x}; \quad 2) \frac{m}{c-3} - \frac{p}{3-c};$$

$$3) \frac{5x}{x-y} + \frac{5y}{y-x}; \quad 4) \frac{10p}{2p-m} + \frac{5m}{m-2p}.$$

65Ⓢ. Виконайте дію:

$$1) \frac{c}{a-2} + \frac{x}{2-a}; \quad 2) \frac{a}{x-y} - \frac{8}{y-x};$$

$$3) \frac{2m}{m-n} + \frac{2n}{n-m}; \quad 4) \frac{16x}{4x-y} + \frac{4y}{y-4x}.$$

66Ⓢ. Виконайте дію:

$$1) \frac{m^2-m}{m^2+4m+4} - \frac{4-m}{m^2+4m+4}; \quad 2) \frac{9c}{c^2-6c} - \frac{18+6c}{c^2-6c}.$$

67Ⓢ. Виконайте віднімання дробів:

$$1) \frac{a^2+3a}{a^2+6a+9} - \frac{3a+9}{a^2+6a+9}; \quad 2) \frac{3m}{m^2-5m} - \frac{m+10}{m^2-5m}.$$

68³. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{(a-b)^2}{2ab} - \frac{(a+b)^2}{2ab} = -2; \quad 2) \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} + \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} = 2.$$

69³. Обчисліть значення виразу:

$$1) \frac{m^2}{2m-10} + \frac{25}{10-2m}, \text{ якщо } m = 25;$$
$$2) \frac{x^2+9y^2}{x-3y} + \frac{6xy}{3y-x}, \text{ якщо } x = 2008, y = \frac{1}{3}.$$

70³. Обчисліть значення виразу:

$$1) \frac{x^2}{3x-18} + \frac{36}{18-3x}, \text{ якщо } x = -12;$$
$$2) \frac{c^2}{c-5k} - \frac{25k^2-10ck}{5k-c}, \text{ якщо } c = 199, k = 0,2.$$

71³. Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу:

$$1) \frac{m+3}{m}; \quad 2) \frac{a^4+a^3-5}{a^2}; \quad 3) \frac{x^2+5x-3}{x+5}; \quad 4) \frac{4a-4b+7}{a-b}.$$

72³. Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу:

$$1) \frac{a-7}{a}; \quad 2) \frac{m^2-m^3+7}{m^2}; \quad 3) \frac{y^2+y+2}{y+1}; \quad 4) \frac{5p-5q-1}{p-q}.$$

73⁴. Подайте у вигляді дробу вираз:

$$1) \frac{7-4m}{(2-m)^2} - \frac{9-5m}{(m-2)^2}; \quad 2) \frac{12a}{(2-a)^3} + \frac{3a^2+12}{(a-2)^3};$$
$$3) \frac{m^2-6n}{(m-2)(n-3)} - \frac{2(m-3n)}{(2-m)(3-n)}.$$

74⁴. Спростіть вираз:

$$1) \frac{16-7a}{(3-a)^2} - \frac{13-6a}{(a-3)^2}; \quad 2) \frac{15(2m-3)}{(3-m)^3} + \frac{5m^2}{(m-3)^3};$$
$$3) \frac{p^2-9q}{(p-3)(q-4)} - \frac{3(p-3q)}{(3-p)(4-q)}.$$



75². Обчисліть:

$$1) \frac{1}{7} + \frac{5}{14}; \quad 2) \frac{5}{12} - \frac{3}{16}; \quad 3) \frac{1}{8} - \frac{3}{16} + \frac{7}{24}.$$

76³. Подайте одночлен $15a^3b^7$ у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює:

$$1) 3ab^5; \quad 2) -5a^2b^7; \quad 3) -b^6; \quad 4) 15ab.$$

77⁴. Скоротіть дріб $\frac{x^2+y^2-z^2-2xy}{x^2-y^2+z^2+2xz}.$

§ 4. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ
ДРОБІВ З РІЗНИМИ
ЗНАМЕННИКАМИ

Якщо дроби мають різні знаменники, то їх, як і звичайні дроби, спочатку треба звести до спільного знаменника. Після цього можна буде скористатися правилом додавання або віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Розглянемо додавання дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$. Зведемо ці дроби до спільного знаменника bd . Для цього чисельник і знаменник дробу $\frac{a}{b}$ помножимо на d : $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$, а чисельник і знаменник дробу $\frac{c}{d}$ помножимо на b : $\frac{c}{d} = \frac{cb}{db}$. Дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ звели до спільного знаменника bd . Нагадаємо, що d є додатковим множником до чисельника і знаменника дробу $\frac{a}{b}$, а b — додатковим множником до чисельника і знаменника дробу $\frac{c}{d}$.

Після зведення дробів до спільного знаменника можна скористатися правилом додавання дробів з однаковими знаменниками:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+bc}{bd},$$

або в скороченому вигляді:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Аналогічно можна виконати віднімання дробів з різними знаменниками:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}.$$

Приклад 1. $\frac{\frac{n}{3}}{m} + \frac{\frac{m}{4}}{n} = \frac{3n+4m}{mn}; \quad \frac{\frac{7}{2}}{a} - \frac{\frac{a}{7}}{b} = \frac{14-ab}{7a}.$

Часто при додаванні і відніманні дробів з різними знаменниками вдається знайти простіший спільний знаменник, ніж добуток їх знаменників.

Розглянемо приклад, у якому знаменниками дробів є одночлени.

Приклад 2. Виконати додавання $\frac{7}{6x^2y} + \frac{3}{8xy^3}.$

Розв'язання. Спільним знаменником дробів, знаменники яких є одночленами, буде також одночлен. Коефіцієнт цього одночлена повинен ділитися як на 6, так і на 8.

Найменшим таким числом є 24 ($\text{НСК}(6; 8) = 24$). У спільний знаменник кожна із змінних має входити з найбільшим показником степеня, з яким вона входить у знаменники дробів. Таким чином, спільним знаменником дробів є одночлен $24x^2y^3$. Додатковим множником до чисельника і знаменника першого дробу є $4y^2$, бо $24x^2y^3 = 6x^2y \cdot 4y^2$, а до чисельника і знаменника другого дробу — $3x$, бо $24x^2y^3 = 8xy^3 \cdot 3x$. Отже, маємо:

$$\frac{\frac{4y^2}{7}}{6x^2y} + \frac{\frac{3x}{3}}{8xy^3} = \frac{7 \cdot 4y^2 + 3 \cdot 3x}{24x^2y^3} = \frac{28y^2 + 9x}{24x^2y^3}.$$

В і д п о в і д ь. $\frac{28y^2 + 9x}{24x^2y^3}.$

Розглянемо приклад, у якому знаменниками дробів є многочлени.

Приклад 3. Виконати віднімання $\frac{x+4}{xy-x^2} - \frac{y+4}{y^2-xy}.$

Р о з в' я з а н н я. Щоб знайти спільний знаменник, розкладемо знаменники дробів на множники:

$$xy - x^2 = x(y - x) \text{ і } y^2 - xy = y(y - x).$$

Найпростішим спільним знаменником дробів буде вираз $xy(y - x)$. Додатковим множником до першого дробу буде y , а до другого — x . Виконаємо віднімання:

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{xy-x^2} - \frac{y+4}{y^2-xy} &= \frac{\frac{y}{x}+4}{x(y-x)} - \frac{\frac{x}{y}+4}{y(y-x)} = \frac{y(x+4)-x(y+4)}{xy(y-x)} = \\ &= \frac{xy+4y-xy-4x}{xy(y-x)} = \frac{4(y-x)}{xy(y-x)} = \frac{4}{xy}. \end{aligned}$$

В і д п о в і д ь. $\frac{4}{xy}.$

Отже, щоб виконати додавання або віднімання дробів з різними знаменниками, треба:

-  1) розкласти на множники знаменники дробів, якщо це необхідно;
- 2) визначити спільний знаменник, бажано найпростіший;
- 3) записати додаткові множники;
- 4) знайти дріб, що є сумою або різницею даних дробів;
- 5) спростити цей дріб та дістати відповідь.

Аналогічно виконують додавання і віднімання цілого виразу і дробу.

Приклад 4. Спростити вираз $a + 1 - \frac{a^2 - a}{a - 2}.$

Розв'язання. Запишемо вираз $a + 1$ у вигляді дробу із знаменником 1 та виконаємо віднімання:

$$\begin{aligned} a + 1 - \frac{a^2 - a}{a - 2} &= \frac{a - 2}{a - 2} - \frac{a^2 - a}{a - 2} = \frac{(a - 2)(a + 1) - (a^2 - a)}{a - 2} = \\ &= \frac{a^2 + a - 2a - 2 - a^2 + a}{a - 2} = \frac{-2}{a - 2} = \frac{2}{2 - a}. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{2}{2 - a}$.



Який знаменник спільний для дробів $\frac{2}{n}$ і $\frac{4}{m}$? Як виконують додавання і віднімання дробів з різними знаменниками?

78[Ⓢ]. (Усно.) Знайдіть спільний знаменник дробів:

1) $\frac{a}{3}$ і $\frac{b}{6}$; 2) $\frac{x}{12}$ і $\frac{y}{8}$; 3) $\frac{a}{x}$ і $\frac{b}{y}$; 4) $\frac{c}{m}$ і $\frac{x}{3}$.

79[Ⓢ]. Виконайте дію:

1) $\frac{m}{2} - \frac{y}{3}$; 2) $\frac{a}{4} + \frac{x}{8}$; 3) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$; 4) $\frac{2}{c} + \frac{k}{3}$.

80[Ⓢ]. Виконайте додавання і віднімання:

1) $\frac{x}{5} + \frac{a}{4}$; 2) $\frac{m}{6} - \frac{n}{3}$; 3) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$; 4) $\frac{t}{5} - \frac{4}{p}$.

81[Ⓢ]. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{3}{5a} - \frac{4}{2a}$; 2) $\frac{a}{4b} + \frac{7a}{5b}$; 3) $\frac{2a^2}{9b} + \frac{5a^2}{18b}$; 4) $\frac{7m}{12n^2} - \frac{m}{18n^2}$.

82[Ⓢ]. Виконайте дію:

1) $\frac{3}{4m} + \frac{2}{5m}$; 2) $\frac{x}{6y} - \frac{3x}{8y}$; 3) $\frac{4a}{9m^2} + \frac{5a}{12m^2}$; 4) $\frac{4x^2}{15y} - \frac{x^2}{10y}$.

83[Ⓢ]. Перетворіть у дріб вираз:

1) $\frac{2x}{3} + \frac{x-4}{5}$; 2) $\frac{4m-2n}{10} - \frac{m-n}{5}$; 3) $\frac{a+2}{4a} - \frac{3-7a}{6a}$;
4) $\frac{2-3y}{y} - \frac{5-3x}{x}$; 5) $\frac{x+7}{5x} - \frac{3y+4}{15y}$; 6) $\frac{4a+b}{2a} + \frac{a-6b}{3b}$.

84[Ⓢ]. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{a}{4} + \frac{a-2}{3}$; 2) $\frac{2x-y}{14} - \frac{x-y}{7}$;
3) $\frac{x-6}{2x} + \frac{7-2y}{4y}$; 4) $\frac{6m-n}{3m} - \frac{8n-5m}{4n}$.

85². Виконайте додавання і віднімання:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{1}{a^2} + \frac{a-2}{a}; & 2) \frac{2+m}{m^2} - \frac{m^2-5}{m^3}; & 3) \frac{1}{2x^5} + \frac{1-3x^2}{x^7}; \\ 4) \frac{a-b}{ab} - \frac{b-a}{b^2}; & 5) \frac{3n+m}{mn^2} + \frac{n-3m}{m^2n}; & 6) \frac{x-2y}{xy^2} - \frac{y-2x}{x^2y}. \end{array}$$

86². Спростіть:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{m+2}{m^2} - \frac{1}{m}; & 2) \frac{5}{n^5} + \frac{3-4n^2}{n^7}; \\ 3) \frac{x-y}{x^2} - \frac{y-x}{xy}; & 4) \frac{c-2p}{cp^2} + \frac{2c-p}{pc^2}. \end{array}$$

87². Виконайте дії:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}; & 2) \frac{1}{c^3} - \frac{2}{c^2} + \frac{3}{c}; \\ 3) \frac{1}{xy} - \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz}; & 4) \frac{a+b}{ab} - \frac{b+c}{bc} + \frac{a+c}{ac}. \end{array}$$

88². Виконайте дії:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{1}{p} - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}; & 2) \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}; \\ 3) \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}; & 4) \frac{x-y}{xy} + \frac{y-z}{yz} + \frac{x+z}{xz}. \end{array}$$

89². Доведіть тотожність $\frac{3x+1}{7x} - \frac{y-1}{2y} - \frac{7x+y}{14xy} = \frac{1-x}{14x}$.

90². Доведіть тотожність $\frac{3m+2}{5m} - \frac{n-1}{2n} - \frac{5m+3n}{10mn} = \frac{m+1}{10m}$.

91². Перетворіть у дріб вираз:

$$\begin{array}{lll} 1) x + \frac{2}{y}; & 2) 3m - \frac{1}{m}; & 3) \frac{4}{p} - p^2; \\ 4) \frac{a^2+y}{a} - a; & 5) 2x - \frac{6x^2+1}{3x}; & 6) m + \frac{2-4mn}{4n}. \end{array}$$

92². Перетворіть у дріб:

$$\begin{array}{ll} 1) m - \frac{3}{n}; & 2) 4p + \frac{1}{p}; \\ 3) \frac{x+y^2}{y} - y; & 4) 7p - \frac{14p^2+3}{2p}. \end{array}$$

93². Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) 1 - \frac{m}{2} - \frac{n}{3}; & 2) 4 + \frac{1}{a} - \frac{1}{b}; \\ 3) \frac{m-2}{3} - 1 + \frac{m+2}{4}; & 4) \frac{1}{a+b} + a - b. \end{array}$$

94Ⓢ. Виконайте дії:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{m}{3} + \frac{n}{4} - 1; & 2) 5 - \frac{1}{c} + \frac{1}{d}; \\ 3) \frac{a+3}{5} - 1 + \frac{a-2}{2}; & 4) \frac{1}{x-y} + x + y. \end{array}$$

95Ⓢ. Знайдіть суму і різницю дробів:

$$1) \frac{1}{x-y} \text{ і } \frac{1}{x+y}; \quad 2) \frac{1}{a+b} \text{ і } \frac{1}{a}.$$

96Ⓢ. Знайдіть суму і різницю дробів:

$$1) \frac{1}{2a+b} \text{ і } \frac{1}{2a-b}; \quad 2) \frac{1}{m-n} \text{ і } \frac{1}{m}.$$

97Ⓢ. Виконайте додавання і віднімання:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{2}{a} + \frac{3}{a-1}; & 2) \frac{c}{a-c} - \frac{c}{a}; & 3) \frac{3}{x+y} + \frac{2}{x-y}; \\ 4) \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x-2}; & 5) \frac{a+1}{a} - \frac{a}{a-1}; & 6) \frac{a}{2a-1} - \frac{a}{2a+1}. \end{array}$$

98Ⓢ. Виконайте дію:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{4}{b} + \frac{7}{b+2}; & 2) \frac{3}{m-n} - \frac{2}{m+n}; \\ 3) \frac{p}{p-2} - \frac{3}{p+3}; & 4) \frac{x}{1-x} + \frac{1+x}{x}. \end{array}$$

99Ⓢ. Виконайте дію:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{a-2}{2(a+1)} + \frac{a}{a+1}; & 2) \frac{2m}{4(a+b)} - \frac{3m}{5(a+b)}; & 3) \frac{a-2}{2a+6} - \frac{a+1}{3a+9}; \\ 4) \frac{4}{ax-ay} + \frac{5}{bx-by}; & 5) \frac{5}{x} - \frac{30}{x(x+6)}; & 6) \frac{6}{x^2+3x} - \frac{2}{x}. \end{array}$$

100Ⓢ. Виконайте додавання і віднімання:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{m-1}{3(m+2)} + \frac{m}{m+2}; & 2) \frac{7a}{3(b+2a)} - \frac{4a}{9(b+2a)}; \\ 3) \frac{x-2}{3x-12} - \frac{x+1}{2x-8}; & 4) \frac{3}{mx+my} + \frac{2}{nx+ny}; \\ 5) \frac{4}{a} - \frac{8}{a(a+2)}; & 6) \frac{8}{m^2+8m} - \frac{1}{m}. \end{array}$$

101Ⓢ. Подайте вираз у вигляді дробу:

$$1) \frac{4n+m}{n^2-m^2} + \frac{1}{n+m}; \quad 2) \frac{a-6}{a^2-4} + \frac{3}{a-2}; \quad 3) \frac{x}{x-5} - \frac{x^2}{x^2-10x+25}.$$

102Ⓢ. Перетворіть вираз у дріб:

$$1) \frac{4a-b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a-b}; \quad 2) \frac{2}{b+3} + \frac{b+6}{b^2-9}; \quad 3) \frac{m}{m+4} - \frac{m^2}{m^2+8m+16}.$$

103³. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{a+4}{ab-a^2} + \frac{b+4}{ab-b^2}; & 2) \frac{m^2}{mx-x^2} + \frac{x}{x-m}; \\ 3) \frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2+2x}; & 4) \frac{3ab-27a^2}{b^2-3ab} - \frac{3a^2-b^2}{ab-3a^2}. \end{array}$$

104³. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{a-2}{ab-a^2} - \frac{2-b}{ab-b^2}; & 2) \frac{t^2}{ta+a^2} - \frac{a}{t+a}; \\ 3) \frac{4}{a^2-9} - \frac{2}{a^2+3a}; & 4) \frac{3n^2-8m^2}{n^2-2mn} - \frac{3mn-n^2}{mn-2m^2}. \end{array}$$

105³. Доведіть тотожність

$$\frac{(a-1)(a-2)}{12} - \frac{(a-1)(a-5)}{3} + \frac{(a-5)(a-2)}{4} = 1.$$

106³. Подайте вираз у вигляді дробу:

$$\begin{array}{ll} 1) m - n - \frac{m^2+n^2}{m+n}; & 2) p - \frac{4}{p-2} - 2; \\ 3) a^2 - \frac{a^4}{a^2-1} + 1; & 4) \frac{8p^2}{2p-3} - 4p - 1. \end{array}$$

107³. Подайте вираз у вигляді дробу:

$$1) m - \frac{9}{m+3} + 3; \quad 2) \frac{6m^2}{3m+1} - 2m + 4.$$

108³. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу $\frac{4m-5}{7m-21} - \frac{m-1}{2m-6}$ не залежить від m .

109³. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x-1}{x^2-x+1} + \frac{2-x}{x^3+1}; & 2) \frac{2m}{m-5} - \frac{5}{m+5} + \frac{2m^2}{25-m^2}; \\ 3) \frac{6}{m^2-6m} + \frac{m-12}{6m-36}; & 4) \frac{3}{2a+6} + \frac{a^2-a-3}{a^2-9} - 1. \end{array}$$

110³. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{a+1}{a^2+a+1} + \frac{a+2}{a^3-1}; & 2) \frac{2a}{a-3} + \frac{a}{a+3} + \frac{2a^2}{9-a^2}; \\ 3) \frac{4}{m^2+4m} + \frac{m+8}{4m+16}; & 4) \frac{2}{3b+6} + \frac{b^2-b-2}{b^2-4} - 1. \end{array}$$

111³. Доведіть тотожність $\frac{0,9}{0,25a+0,5} - \frac{0,3a+0,6}{0,5a^2+2a+2} = \frac{3}{a+2}$.

112³. Доведіть тотожність $\frac{0,35}{0,5a-1,5} - \frac{0,2a-0,6}{a^2-6a+9} = \frac{1}{2(a-3)}$.

113³. Перетворіть у дріб вираз:

$$1) \frac{a^2 - 2ab + 4b^2}{a^2 - 4b^2} + \frac{a^2 + 2ab + 4b^2}{(a + 2b)^2}; \quad 2) \frac{2}{(a - 3)^2} - \frac{4}{a^2 - 9} + \frac{2}{(a + 3)^2}.$$

114³. Перетворіть у дріб вираз:

$$1) \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x^2 + xy + y^2}{(x + y)^2}; \quad 2) \frac{1}{(x - 2)^2} - \frac{2}{x^2 - 4} + \frac{1}{(x + 2)^2}.$$

115³. При якому значенні a вираз $2 + \frac{a}{x - 4}$ тотожно дорівнює дробу $\frac{2x}{x - 4}$?

116³. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{a^3 + 3a}{a + 2} - \frac{3a^2 - 14a + 16}{a^2 - 4} + 2a$$

при всіх допустимих значеннях змінної — додатне.

117³. Доведіть тотожність

$$a + a^2 + \frac{2a^2 + 3a + 1}{a^2 - 1} - \frac{a^3 + 2a}{a - 1} = -1.$$

118³. Побудуйте графік функції

$$y = 15 \left(\frac{3x + 4}{5x - 10} - \frac{x + 4}{3x - 6} \right).$$

119³. Знайдіть значення виразу

$$\frac{3a + 0,5b}{9a^2 - 1,5ab} - \frac{12a}{9a^2 - 0,25b^2} - \frac{3a - 0,5b}{9a^2 + 1,5ab},$$

якщо $a = -3$, $b = 19$.

120³. Знайдіть значення виразу

$$\frac{x + 0,2y}{4x^2 - 0,8xy} - \frac{12,5x}{12,5x^2 - 0,5y^2} - \frac{x - 0,2y}{4x^2 + 0,8xy},$$

якщо $x = -10$, $y = 49$.

121³. Чи може значення виразу

$$\frac{1}{2 - x} - \frac{1}{2 + x} - \frac{x}{4 - x^2} + \frac{x^2 + 4}{2x^3 - 8x}$$

при деякому значенні x дорівнювати нулю?

 **122**². Виконайте множення:

$$1) \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{16}; \quad 2) \frac{3}{7} \cdot 1 \frac{5}{9}; \quad 3) 2 \frac{2}{3} \cdot 3 \frac{3}{4}; \quad 4) 7 \frac{1}{7} \cdot 2 \frac{1}{5} \cdot 3 \frac{1}{2}.$$

123². Скільки кілограмів солі міститься у 60 кг 5-відсоткового розчину?

124³. З міст M і N назустріч один одному одночасно виїхали два велосипедисти. Відстань між містами M і N становить s км, швидкості велосипедистів v_1 км/год і v_2 км/год. Через t год вони зустрілися. Складіть вираз для обчислення t . Знайдіть його значення, якщо $s = 150$ км, $v_1 = 12$ км/год, $v_2 = 13$ км/год.

125³. Відомо, що $\frac{x}{y} = 3$. Знайдіть значення дробу:

1) $\frac{x+y}{y}$; 2) $\frac{x-y}{y}$; 3) $\frac{x+7y}{y}$; 4) $\frac{x^2+2xy}{xy}$.

Урок 11

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО § 1—4

1¹⁰. Які з виразів є цілими, а які — дробовими:

1) $\frac{1}{3}a^2b$; 2) $\frac{x-y}{x}$; 3) $\frac{c+2}{9}$; 4) $p^2 - p - 19$?

2¹⁰. Скоротіть дріб: 1) $\frac{m^2}{mn}$; 2) $\frac{4ab}{4bc}$.

3¹⁰. Виконайте дію: 1) $\frac{a-b}{n} + \frac{b}{n}$; 2) $\frac{x}{2} - \frac{3}{y}$.

4¹⁰. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{5}{x(x-1)}$; 2) $\frac{2a}{a+2} + \frac{1}{a-3}$.

5¹⁰. Скоротіть дріб:

1) $\frac{16am}{20bm}$; 2) $\frac{12am^2}{8mc}$; 3) $\frac{2m-6}{m^2-9}$; 4) $\frac{ax+2a}{x^2+4x+4}$.

6¹⁰. Виконайте дію:

1) $\frac{3a}{a-b} + \frac{3b}{b-a}$; 2) $\frac{5x+y}{x^2y} + \frac{x-5y}{xy^2}$.

7¹⁰. Спростіть вираз $\frac{2b}{b-4} + \frac{b}{b+4} + \frac{2b^2}{16-b^2}$.

8¹⁰. Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу:

1) $\frac{c^2-c^3+5}{c^2}$; 2) $\frac{p^2-p-2}{p-1}$.

9¹⁰. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2-4x}{16-4x}$.

Додаткові завдання

10¹⁰. 1) Знайдіть область визначення виразу $\frac{x^2-16}{|x+1|-5}$;

2) При яких значеннях x дріб $\frac{x^2-16}{|x+1|-5}$ дорівнює нулю?

11¹⁰. Спростіть вираз $\frac{3(a-2b)}{(a-3)(b-4)} - \frac{a^2-6b}{(3-a)(4-b)}$.

Нагадаємо, що добуток двох звичайних дробів — це дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник — добутку знаменників даних дробів. У буквенному вигляді це записують так:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Доведемо, що ця рівність є тотожністю для всіх значень a , b , c і d (де $b \neq 0$ і $d \neq 0$).

Нехай $\frac{a}{b} = p$; $\frac{c}{d} = q$. Тоді за означенням частки $a = bp$, $c = dq$. Тому $ac = (bp)(dq) = (bd)(pq)$. Оскільки $bd \neq 0$, то, використовуючи означення частки ще раз, дістанемо $pq = \frac{ac}{bd}$. Отже, якщо $b \neq 0$ і $d \neq 0$, то

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Сформулюємо правило множення дробів:



щоб помножити дріб на дріб, треба перемножити окремо їх чисельники і окремо знаменники та записати перший добуток чисельником, а другий — знаменником дробу.

Приклад 1. Виконати множення $\frac{b^4}{9m^2} \cdot \frac{12m}{b^2}$.

Розв'язання. $\frac{b^4}{9m^2} \cdot \frac{12m}{b^2} = \frac{b^4 \cdot 12m}{9m^2 \cdot b^2} = \frac{4b^2}{3m}$.

Відповідь. $\frac{4b^2}{3m}$.

Приклад 2. Виконати множення дробу $\frac{cm+cd}{2x}$ на дріб $\frac{8x^3}{m^2-d^2}$.

Розв'язання. Використаємо правило множення дробів та розкладемо на множники чисельник першого дробу та знаменник другого:

$$\frac{cm+cd}{2x} \cdot \frac{8x^3}{m^2-d^2} = \frac{c(m+d) \cdot 8x^3}{2x(m-d)(m+d)} = \frac{4cx^2}{m-d}.$$

Відповідь. $\frac{4cx^2}{m-d}$.

Приклад 3. Помножити дріб $\frac{x-2}{x^2+2x}$ на многочлен x^2+4x+4 .

Розв'язання. Цілий вираз (многочлен x^2+4x+4) можна подати у вигляді дробу зі знаменником 1: $\frac{x^2+4x+4}{1}$.

Маємо:

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x^2+2x} \cdot (x^2+4x+4) &= \frac{x-2}{x^2+2x} \cdot \frac{x^2+4x+4}{1} = \frac{(x-2)(x+2)^2}{x(x+2)} = \\ &= \frac{(x-2)(x+2)}{x} = \frac{x^2-4}{x}.\end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{x^2-4}{x}$.

Правило множення дробів поширюється на добуток трьох і більше множників.

Приклад 4.

$$\frac{x^3-8}{x^2-9} \cdot \frac{3x+9}{x-2} \cdot \frac{5x-15}{3x^2+6x+12} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4) \cdot 3(x+3) \cdot 5(x-3)}{(x-3)(x+3)(x-2) \cdot 3(x^2+2x+4)} = 5.$$

Розглянемо піднесення дробу $\frac{a}{b}$ до степеня n , де n — натуральне число. За означенням степеня маємо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ множників}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ множників}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ множників}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Отже,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Сформулюємо правило піднесення дробу до степеня:

! щоб піднести дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник та знаменник і перший результат записати в чисельник, а другий — у знаменник дробу.

Приклад 5. Піднести до куба дріб $\frac{3x^2y}{5t^3}$.

$$\text{Розв'язання.} \left(\frac{3x^2y}{5t^3}\right)^3 = \frac{(3x^2y)^3}{(5t^3)^3} = \frac{3^3(x^2)^3y^3}{5^3 \cdot (t^3)^3} = \frac{27x^6y^3}{125t^9}.$$

Відповідь. $\frac{27x^6y^3}{125t^9}$.

Приклад 6. Подати у вигляді дробу $\left(-\frac{m^7 p^{12}}{t}\right)^5$.

Розв'язання. $\left(-\frac{m^7 p^{12}}{t}\right)^5 = (-1)^5 \cdot \frac{(m^7)^5 \cdot (p^{12})^5}{t^5} = -\frac{m^{35} p^{60}}{t^5}$.

Відповідь. $-\frac{m^{35} p^{60}}{t^5}$.



Сформулюйте правило множення дробів. Доведіть його.

• Сформулюйте правило піднесення дробу до степеня. Доведіть його.

126^①. Виконайте множення:

1) $\frac{4x}{a} \cdot \frac{b}{3m}$; 2) $\frac{2}{a} \cdot \frac{a}{5}$; 3) $\frac{5m}{4n} \cdot \frac{3}{p}$; 4) $\frac{3x}{8} \cdot \frac{1}{x}$.

127^①. Виконайте множення:

1) $\frac{5p}{a} \cdot \frac{x}{2b}$; 2) $\frac{b}{9} \cdot \frac{7}{b}$; 3) $\frac{4}{7a} \cdot \frac{5b}{3}$; 4) $\frac{1}{m} \cdot \frac{m}{8}$.

128^①. Перетворіть у дріб вираз:

1) $\frac{a^2}{5} \cdot \frac{7}{a}$; 2) $\frac{b^4}{3} \cdot \frac{5}{b^2}$; 3) $\frac{1}{a^2} \cdot \frac{a}{3}$; 4) $\frac{9}{x^2} \cdot \frac{x}{3}$.

129^①. Перетворіть у дріб вираз:

1) $\frac{7}{b} \cdot \frac{b^2}{3}$; 2) $\frac{5}{a^3} \cdot \frac{a^5}{2}$; 3) $\frac{m}{8} \cdot \frac{1}{m^2}$; 4) $\frac{a^2}{12} \cdot \frac{4}{a}$.

130^②. Перетворіть у дріб вираз:

1) $\frac{5a}{7} \cdot \frac{21}{20a^2}$; 2) $\frac{3,5}{14a^2} \cdot \frac{4a^3}{5b}$; 3) $\frac{c^2}{30} \cdot \frac{20}{cm}$;
4) $-\frac{3m}{5a^2} \cdot \frac{a}{9m^2}$; 5) $\frac{4x^2}{7p} \cdot \left(-\frac{21p}{8x^3}\right)$; 6) $-\frac{5x^2}{7y^3} \cdot \left(-\frac{21y^2}{25x}\right)$.

131^②. Перетворіть у дріб вираз:

1) $\frac{15m^2}{22} \cdot \frac{11}{10m}$; 2) $\frac{6p}{7} \cdot \frac{2,5c^2}{15p^3}$; 3) $\frac{15}{xp} \cdot \frac{x^2}{45}$;
4) $\frac{4a}{p^2} \cdot \left(-\frac{p}{8a^2}\right)$; 5) $-\frac{5c^2}{7y} \cdot \frac{49y}{10c^3}$; 6) $-\frac{6a^2}{65b^3} \cdot \left(-\frac{13b}{30a}\right)$.

132^②. Перетворіть у дріб вираз:

1) $9p \cdot \frac{b}{6p^2}$; 2) $\frac{4m^3}{x^2} \cdot x^3$; 3) $9ab^2 \cdot \left(-\frac{5b}{3a^3}\right)$;

$$4) -7ab^3 \cdot \frac{b^5}{14a}; \quad 5) -4mn^2 \cdot \frac{1}{8mn}; \quad 6) -11a^3b \cdot \left(-\frac{5}{22a^3b^2}\right).$$

133 Подайте у вигляді дробу:

$$\begin{aligned} 1) \frac{a}{16m^2} \cdot 12m; \quad 2) a^3 \cdot \frac{7x^3}{a^2}; \quad 3) -\frac{7y}{4x^2} \cdot 12xy^3; \\ 4) 5cm^4 \cdot \left(-\frac{m}{15c}\right); \quad 5) -5ab^2 \cdot \left(-\frac{1}{10ab}\right); \quad 6) 13c^2d \cdot \frac{7}{26c^3d^2}. \end{aligned}$$

134 Спростіть вираз:

$$\begin{aligned} 1) \frac{7c^3}{10m^2} \cdot \frac{25m^3}{14c^8}; \quad 2) -\frac{8a^3}{27c^4} \cdot \frac{45c^5}{16a^3}; \\ 3) \frac{4c^3}{15a^8} \cdot \left(-\frac{5a^3}{8c^4}\right); \quad 4) -\frac{1}{25p^2q^7} \cdot \left(-\frac{10p^3q^7}{11}\right). \end{aligned}$$

135 Спростіть вираз:

$$\begin{aligned} 1) \frac{9m^2}{25a^2} \cdot \frac{35a^3}{18m^5}; \quad 2) \frac{7p^3}{18a^3} \cdot \left(-\frac{27a^4}{14p^8}\right); \\ 3) -\frac{5m^3}{21n^7} \cdot \frac{7n^2}{10m^4}; \quad 4) -\frac{1}{18c^3d^4} \cdot \left(-\frac{12c^4d^4}{7}\right). \end{aligned}$$

136 Виконайте множення:

$$\begin{aligned} 1) \frac{a^2+2a}{5} \cdot \frac{a}{4a+8}; \quad 2) \frac{7m}{a} \cdot \frac{a^2-ab}{21}; \quad 3) \frac{2a-b}{10a} \cdot \frac{15a^2}{b-2a}; \\ 4) \frac{10ab}{x+y} \cdot \frac{x^2-y^2}{5ab}; \quad 5) -\frac{ab-ac}{10p} \cdot \frac{25p}{xc-xb}; \quad 6) \frac{a^2+ab}{x^2} \cdot \frac{xy}{a^2+2ab+b^2}. \end{aligned}$$

137 Виконайте множення:

$$\begin{aligned} 1) \frac{m^2-3m}{7} \cdot \frac{x}{2m-6}; \quad 2) \frac{5a}{x^2+xy} \cdot \frac{x}{15}; \quad 3) \frac{a-b}{16m^2} \cdot \frac{24m}{b-a}; \\ 4) \frac{x^2+y^2}{5pc} \cdot \frac{20pc}{x-y}; \quad 5) \frac{3a-3b}{12x} \cdot \left(-\frac{18x}{mb-ma}\right); \quad 6) \frac{m^2-2mn+n^2}{pc} \cdot \frac{p^2}{m^2-mn}. \end{aligned}$$

138 Піднесіть до степеня:

$$\begin{aligned} 1) \left(\frac{p}{4m}\right)^3; \quad 2) \left(\frac{3c^2}{m}\right)^4; \quad 3) \left(-\frac{3m^2n}{7}\right)^2; \\ 4) \left(-\frac{2m^2}{3x^3}\right)^3; \quad 5) \left(\frac{2a^3b}{x^7}\right)^5; \quad 6) \left(-\frac{c^2m^3}{p}\right)^{10}. \end{aligned}$$

139 Піднесіть до степеня:

$$1) \left(\frac{c}{5m}\right)^2; \quad 2) \left(\frac{y}{2x^3}\right)^4; \quad 3) \left(-\frac{4c^2m^3}{5}\right)^2;$$

$$4) \left(-\frac{3c^3}{m^7}\right)^3; \quad 5) \left(\frac{c^3m}{2a^2}\right)^6; \quad 6) \left(-\frac{ab^3}{c^2}\right)^8.$$

140Ⓢ. Спростіть вираз:

$$1) \frac{54a^2c}{81b^3} \cdot \frac{32ab}{13c^3} \cdot \frac{52bc^2}{128a^3}; \quad 2) \frac{147x^4y^2}{p^3} \cdot 10xp^2 \cdot \frac{y^3}{105x^5y}.$$

141Ⓢ. Спростіть вираз:

$$1) \frac{14xz^3}{81y^2} \cdot \frac{27y^3}{5xz} \cdot \frac{45xy}{7z^2}; \quad 2) \frac{b^3}{111m^5} \cdot 3mc^3 \cdot \frac{74m^3b}{c^4}.$$

142Ⓢ. Виконайте множення:

$$1) \frac{m^2-4m+4}{m^2+6m+9} \cdot \frac{m^2-9}{3m-6}; \quad 2) -\frac{x^2-10x+25}{x^2-3x+9} \cdot \frac{x^3+27}{25-x^2}.$$

143Ⓢ. Виконайте множення:

$$1) \frac{a^2+8a+16}{a^2-2a+1} \cdot \frac{7a-7}{a^2-16}; \quad 2) -\frac{y^3-8}{9-y^2} \cdot \frac{y^2-6y+9}{y^2+2y+4}.$$

144Ⓢ. Перетворіть у дріб:

$$1) (4a+20b) \cdot \frac{5}{a^2-25b^2}; \quad 2) (m^2-4) \cdot \frac{2m}{(m-2)^2};$$

$$3) -\frac{a}{2a^2-18} \cdot (a^2-6a+9); \quad 4) (x^3+27y^3) \cdot \frac{5}{3x^2-9xy+27y^3}.$$

145Ⓢ. Перетворіть у дріб:

$$1) \frac{4}{x^2-9y^2} \cdot (6x+18y); \quad 2) (c^2+4c+4) \cdot \left(-\frac{c}{3c^2-12}\right).$$

146Ⓢ. Перетворіть у дріб:

$$1) \left(\frac{25x^2}{8y^3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{16y^5}{125x^3}\right)^2; \quad 2) \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^3.$$

147Ⓢ. Перетворіть у дріб:

$$1) \left(-\frac{16m^3}{27n^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{9n^4}{8m^2}\right)^3; \quad 2) \left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 \cdot \frac{m^2+2mn+n^2}{m^2-2mn+n^2}.$$

148Ⓢ. Обчисліть значення виразу:

$$1) \frac{6ab-b}{5a+b} \cdot \frac{25a^2-b^2}{6a-1}, \text{ якщо } a = 1,2, b = 6;$$

$$2) \frac{a^3+8}{a^2-1} \cdot \frac{a^2+a}{a^2-2a+4}, \text{ якщо } a = 6.$$

149^②. Подайте у вигляді дробу:

$$1) \frac{x^2+ax-cx-ca}{x^2-ax+cx-ac} \cdot \frac{x^2+ac+xc+xa}{x^2+ac-xc-xa}; \quad 2) \frac{5a-5b}{3c+3y} \cdot \frac{c^2-y^2-c-y}{a^2-b^2+a-b}.$$

150^③. Обчисліть значення виразу: $\frac{a^2-b^2+a+b}{a^2-b^2+a-b} \cdot \frac{4a-4b}{8a+8b}$, якщо $a = 100, b = 101$.



151^②. Обчисліть:

$$1) \frac{26}{45} : \frac{91}{135}; \quad 2) 2\frac{1}{2} : \frac{15}{16};$$

$$3) -3\frac{1}{7} : 2\frac{5}{14}; \quad 4) -5\frac{13}{15} : \left(-1\frac{8}{25}\right).$$

152^③. Розв'яжіть систему:

$$1) \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y) = 3, \\ \frac{1}{3}(x-y) = 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{x-1}{3} + \frac{y-1}{2} = 2, \\ \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{6} = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

153^③. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^3-8}{x-2} - x^2$.

Уроки 14, 15 § 6. ДІЛЕННЯ ДРОБІВ

Щоб знайти частку двох звичайних дробів, треба ділене помножити на дріб, обернений до дільника:

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}.$$

У буквеному вигляді це записують так:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Доведемо, що ця рівність є тотожністю для всіх значень a , b , c і d (де $b \neq 0, c \neq 0$ і $d \neq 0$).

Оскільки

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b},$$

то за означенням частки $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Отже, якщо $b \neq 0, c \neq 0$ і $d \neq 0$, то

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Дріб $\frac{d}{c}$ називають *оберненим до дробу $\frac{c}{d}$* .

Сформулюємо правило ділення дробів:



щоб поділити один дріб на другий, треба перший дріб помножити на дріб, обернений до другого.

Приклад 1. Поділити дріб $\frac{21x^2}{8y^3}$ на дріб $\frac{3x}{16y^2}$.

Розв'язання.

$$\frac{21x^2}{8y^3} : \frac{3x}{16y^2} = \frac{21x^2}{8y^3} \cdot \frac{16y^2}{3x} = \frac{21x^2 \cdot 16y^2}{8y^3 \cdot 3x} = \frac{7x \cdot 2}{y} = \frac{14x}{y}.$$

Відповідь. $\frac{14x}{y}$.

Приклад 2. Виконати ділення $\frac{x^2-25}{x^2+2x} : \frac{3x+15}{x}$.

Розв'язання.

$$\frac{x^2-25}{x^2+2x} : \frac{3x+15}{x} = \frac{(x-5)(x+5)}{x(x+2)} \cdot \frac{x}{3(x+5)} = \frac{(x-5)(x+5)x}{3x(x+2)(x+5)} = \frac{x-5}{3(x+2)}.$$

Відповідь. $\frac{x-5}{3(x+2)}$.

Приклад 3. Поділити дріб $\frac{a^2-4}{5a}$ на многочлен a^2+4a+4 .

Розв'язання. Подамо цілий вираз a^2+4a+4 у вигляді дробу зі знаменником 1: $a^2+4a+4 = \frac{a^2+4a+4}{1}$ та виконаємо ділення:

$$\begin{aligned} \frac{a^2-4}{5a} : (a^2+4a+4) &= \frac{a^2-4}{5a} : \frac{a^2+4a+4}{1} = \frac{(a-2)(a+2)}{5a} \cdot \frac{1}{(a+2)^2} = \\ &= \frac{(a-2)(a+2) \cdot 1}{5a(a+2)^2} = \frac{a-2}{5a(a+2)}. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{a-2}{5a(a+2)}$.



Сформулюйте правило ділення дробів. Доведіть його.

154^①. Виконайте ділення:

$$1) \frac{2}{a} : \frac{3}{b}; \quad 2) \frac{7}{x} : \frac{y}{2}; \quad 3) \frac{m}{3} : \frac{m}{4}; \quad 4) \frac{a^2}{2} : \frac{a}{7}.$$

155^①. Виконайте ділення:

$$1) \frac{5}{x} : \frac{2}{y}; \quad 2) \frac{a}{2} : \frac{5}{b}; \quad 3) \frac{4}{x} : \frac{5}{x}; \quad 4) \frac{x^2}{3} : \frac{x}{2}.$$

156Ⓢ. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{3b}{12a} : \frac{21b^2}{16a}; & 2) \frac{15}{2n^2} : \frac{3m}{8n}; & 3) \frac{9b}{14a} : \frac{5b^2}{21a^2}; \\ 4) -\frac{3x^2}{a} : \frac{6x^3}{a^2}; & 5) 14x^2 : \frac{7x}{a}; & 6) \frac{8x^3}{7a} : (-2x^2); \\ 7) -\frac{12a^2}{b} : (16a^2); & 8) -40ma^5 : \left(-\frac{8m^2}{a}\right). \end{array}$$

157Ⓢ. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{3a^2}{b} : \frac{a}{b^2}; & 2) -\frac{3p}{c^3} : \frac{15p^2}{c^2}; & 3) \frac{4p}{5c} : \frac{8p^2}{15c^3}; \\ 4) \frac{15m^3}{c} : (-10m^2); & 5) -\frac{2a^2}{b} : (-8a^2); & 6) -12a^2bc : \frac{4ab}{m}. \end{array}$$

158Ⓢ. Подайте у вигляді дробу:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{12m^2}{7c^4} : \frac{6m^4}{35c^3}; & 2) \frac{9m^2}{22n^3} : \left(-\frac{m^5}{11n^6}\right); \\ 3) -\frac{7ab}{4cd} : \frac{21a^2b}{8cd^3}; & 4) -\frac{27m^2n}{7c^2x} : \left(-\frac{9mn^2}{7c^2x^3}\right). \end{array}$$

159Ⓢ. Подайте у вигляді дробу:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{6a^2}{5b^3} : \frac{2a^3}{15b}; & 2) -\frac{4a^2}{27x} : \frac{a^4}{9x^3}; \\ 3) \frac{5xy}{2m^2n} : \left(-\frac{15x^2y}{8mn^3}\right); & 4) -\frac{2ab^2}{9x^2p} : \left(-\frac{2a^2b}{27x^2p^3}\right). \end{array}$$

160Ⓢ. Виконайте ділення:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{2a+b}{4p} : \frac{b+2a}{8p^2}; & 2) \frac{3a-2x}{7x^2} : \frac{2x-3a}{14x}; & 3) \frac{a^2-3a}{9y^2} : \frac{5a}{9y}; \\ 4) \frac{a^2+a}{9b^2} : \frac{5+5a}{b^3}; & 5) \frac{7ab}{c^2-3c} : \frac{14ab^2}{3c-9}; & 6) \frac{11a}{m^2-2m} : \frac{22a^2}{6-3m}. \end{array}$$

161Ⓢ. Виконайте ділення:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x-y}{2a^2} : \frac{y-x}{8a}; & 2) \frac{p^2+2p}{18a^2} : \frac{7p}{9a}; \\ 3) \frac{x^2+x}{9ab} : \frac{5x+5}{18a^2b}; & 4) \frac{3x-x^2}{7p} : \frac{2x-6}{14p^2}. \end{array}$$

162Ⓢ. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{m^2-n^2}{p+2q} : \frac{mn+m^2}{2p+4q}; & 2) \frac{6x-30}{2x+5} : \frac{x^2-25}{4x+10}; \\ 3) \frac{a+2}{a-2} : \frac{a^2+4a+4}{5a-10}; & 4) \frac{x+y}{p-2m} : \frac{x^2+2xy+y^2}{2m^2-mp}. \end{array}$$

163³. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{ab+b^2}{m-3n} : \frac{a^2-b^2}{2m-6n}; & 2) \frac{x-5}{y^2-4} : \frac{2x-10}{3y-6}; \\ 3) \frac{x^2-9}{x^2+x} : \frac{x^2+6x+9}{7x+7}; & 4) \frac{x-4y}{a^2-2ab+b^2} : \frac{4xy-x^2}{a-b}. \end{array}$$

164³. Подайте у вигляді дробу вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{4a^2}{5b^3} : \frac{8a^3}{7c^3} : \frac{14c^2}{15b^2}; & 2) \frac{2a^3}{25b^3} : \frac{10b^2}{3c^4} : \frac{4a^2}{15bc}; \\ 3) \frac{c^3}{18p^4} : \left(\frac{9c^2}{20p^3} : \frac{27c^3p}{10} \right); & 4) \frac{115a^3}{34b^4} : \frac{92a^6}{51b^3} : \frac{4b^2}{15a^2}. \end{array}$$

165³. Подайте у вигляді дробу вираз:

$$1) \frac{3a^2}{2b^2c^2} : \frac{7c^6}{6b^3} : \frac{9ab}{14c^2}; \quad 2) \frac{7x^3}{4y^2} : \frac{216x^6}{343y^3} : \frac{18x^8}{49y^4}.$$

166³. Виконайте ділення:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{9+6a+4a^2}{2a-1} : \frac{27-8a^3}{1-4a^2}; & 2) \frac{8+x^3}{16-x^4} : \frac{x-2x+4}{x^2+4}; \\ 3) (25x^2-10xy+y^2) : \frac{y^2-5xy}{7}; & 4) \frac{(6y-4x)^2}{3} : (9y^2-12xy+4x^2). \end{array}$$

167³. Обчисліть значення виразу:

$$\begin{array}{l} 1) \frac{x^3-8}{9x^2-16} : \frac{x^2+2x+4}{3x-4}, \text{ якщо } x = -3; \\ 2) (m^2-10mn+25n^2) : \frac{0,2m^2-5n^2}{5}, \text{ якщо } m = 10, n = 3. \end{array}$$

168³. Обчисліть значення виразу:

$$\begin{array}{l} 1) \left(\frac{a^2y^3}{5} \right)^3 : \left(-\frac{a^3y^4}{25} \right)^2, \text{ якщо } a = 117 \frac{1}{3}, y = 0,02; \\ 2) \frac{(2x-y)^2}{(x-2y)^2} : \frac{4x^2-y^2}{x^2-4y^2}, \text{ якщо } x = 34, y = -17. \end{array}$$

169³. Спростіть вираз $\frac{0,5a^2-32}{0,5a^3-62,5} : \frac{0,2a+1,6}{0,2a^2+a+5}$.

170³. Доведіть тотожність $\frac{m^3+27}{75m^2-12} : \frac{\frac{1}{3}m^2-m+3}{m-0,4} = \frac{m+3}{25m+10}$.

171³. Спростіть $\frac{6ab+6-4a-9b}{a^2-12a+36} : \frac{3ab-18b-2a+12}{9b^2-12b+4}$.

172³. Спростіть $\frac{a+4}{x-a} : \frac{ab+4b-2a-8}{cx+xy-ac-ay}$.



173³. Подайте дріб у вигляді суми або різниці дробів:

1) $\frac{2a-b}{ab}$; 2) $\frac{7y^2+y^3}{y^5}$; 3) $\frac{4m^2+5n^2}{m^2n}$; 4) $\frac{18x-24x^2y}{30y^2}$.

174³. Обчисліть значення дробу:

1) $\frac{m^2+6mn+9n^2}{(2m+6n)^2}$, якщо $m = 2\frac{1}{13}$, $n = -2\frac{1}{7}$;

2) $\frac{0,1x^2-2,5y^2}{x^2-10xy+25y^2}$, якщо $x = 100$, $y = 20$.

175³. Доведіть тотожність $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{8}{1-x^8}$.

Уроки 16—18

§ 7. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

Розглянемо приклади перетворень раціональних виразів.

Приклад 1. Довести тотожність

$$\frac{6x+y}{3x} - \frac{5y^2}{x^2} \cdot \frac{x}{15y} = 2.$$

Розв'язання. Спростимо ліву частину рівності:

$$\begin{aligned} \frac{6x+y}{3x} - \frac{5y^2}{x^2} \cdot \frac{x}{15y} &= \frac{6x+y}{3x} - \frac{5y^2 \cdot x}{x^2 \cdot 15y} = \frac{6x+y}{3x} - \frac{y}{3x} = \\ &= \frac{6x+y-y}{3x} = \frac{6x}{3x} = 2. \end{aligned}$$

За допомогою тотожних перетворень звели ліву частину рівності до правої. Отже, рівність є тотожністю.

Приклад 2. Спростити вираз

$$\left(\frac{2x}{4x^2-y^2} + \frac{1}{y-2x} \right) : \left(\frac{2x}{2x+y} - \frac{4x^2}{4x^2+4xy+y^2} \right).$$

Розв'язання. Спочатку подамо вирази в кожному з дужок у вигляді дробів, а потім виконаємо ділення:

$$\begin{aligned} 1) \frac{2x}{4x^2-y^2} + \frac{1}{y-2x} &= \frac{2x}{(2x-y)(2x+y)} - \frac{\frac{2x+y}{1}}{2x-y} = \frac{2x-(2x+y)}{(2x-y)(2x+y)} = \\ &= \frac{2x-2x-y}{(2x-y)(2x+y)} = -\frac{y}{(2x-y)(2x+y)} = \frac{y}{(y-2x)(2x+y)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{2x}{2x+y} - \frac{4x^2}{4x^2+4xy+y^2} &= \frac{\frac{2x+y}{1}}{2x+y} - \frac{4x^2}{(2x+y)^2} = \frac{2x(2x+y)-4x^2}{(2x+y)^2} = \\ &= \frac{4x^2+2xy-4x^2}{(2x+y)^2} = \frac{2xy}{(2x+y)^2}; \end{aligned}$$

$$3) \frac{y}{(y-2x)(2x+y)} : \frac{2xy}{(2x+y)^2} = \frac{y \cdot (2x+y)^2}{(y-2x)(2x+y) \cdot 2xy} = \frac{2x+y}{2x(y-2x)}.$$

Запис розв'язання можна подати інакше:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2x}{4x^2 - y^2} + \frac{1}{y - 2x} \right) : \left(\frac{2x}{2x + y} - \frac{4x^2}{4x^2 + 4xy + y^2} \right) = \\ & = \left(\frac{2x}{(2x - y)(2x + y)} - \frac{1}{2x - y} \right) : \left(\frac{2x}{2x + y} - \frac{4x^2}{(2x + y)^2} \right) = \\ & = \frac{2x - (2x + y)}{(2x - y)(2x + y)} : \frac{2x(2x + y) - 4x^2}{(2x + y)^2} = \frac{(2x - 2x - y)(2x + y)^2}{(2x - y)(2x + y)(4x^2 + 2xy - 4x^2)} = \\ & = \frac{-y(2x + y)}{(2x - y) \cdot 2xy} = -\frac{2x + y}{2x(2x - y)} = \frac{2x + y}{2x(y - 2x)}. \end{aligned}$$

В і д п о в і д ь. $\frac{2x + y}{2x(y - 2x)}.$

Поданий у прикладі вираз звели до раціонального дробу $\frac{2x + y}{2x(y - 2x)}$. Взагалі, кожний вираз, що містить суму, різницю, добуток та частку раціональних дробів, можна подати у вигляді раціонального дробу.

Приклад 3. Довести, що при всіх допустимих значеннях

$$\frac{\frac{3x^3 - y}{y} + 1}{\frac{3x + y}{y} - 1} \text{ невід'ємне.}$$

Р о з в' я з а н н я. Перетворювати вираз, заданий в умові, можна по-різному. Можна подати у вигляді раціональних дробів окремо чисельник і знаменник, а потім поділити перший результат на другий.

А можна помножити чисельник і знаменник на y , використовуючи основну властивість дробу:

$$\frac{\frac{3x^3 - y}{y} + 1}{\frac{3x + y}{y} - 1} = \frac{\left(\frac{3x^3 - y}{y} + 1 \right) y}{\left(\frac{3x + y}{y} - 1 \right) y} = \frac{\frac{(3x^3 - y)y}{y} + y}{\frac{(3x + y)y}{y} - y} = \frac{3x^3 - y + y}{3x + y - y} = \frac{3x^3}{3x} = x^2.$$

Отже, при всіх допустимих значеннях змінних вираз тожно дорівнює одночлену x^2 , значення якого є невід'ємним при всіх значеннях x .

176②. Виконайте дії:

1) $\frac{12a+b}{3a} - \frac{7b^2}{a^2} \cdot \frac{a}{21b}$; 2) $\frac{m^2-n^2}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{m-n} - \frac{m}{x+3}$;

3) $\frac{a-b}{2a+b} + \frac{1}{a-b} \cdot \frac{2a+b}{a^2-b^2}$; 4) $x - \frac{x^2-xy}{x+y} \cdot \frac{x}{x-y}$.

177②. Виконайте дії:

1) $\frac{10x+y}{5x} - \frac{3y^2}{x^2} \cdot \frac{x}{15y}$; 2) $\frac{a^2-4}{9-b^2} \cdot \frac{a-2}{3+b} - \frac{2}{3-b}$;

3) $\frac{x+y}{3x-y} + \frac{1}{x+y} \cdot \frac{x^2-y^2}{3x-y}$; 4) $m + \frac{m^2+mn}{n-m} \cdot \frac{m}{m+n}$.

178②. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{x}{7} + \frac{7}{x} + 2\right) \cdot \frac{1}{x+7}$; 2) $\left(1 + \frac{m}{3n}\right) \cdot \left(1 - \frac{m}{3n}\right)$;

3) $\left(\frac{a}{a+2} - 3a\right) \cdot \frac{a+2}{a}$; 4) $\left(2 + \frac{x}{x+1}\right) \cdot \frac{9x+6}{5x^2+5x}$.

179②. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{m}{5} + \frac{5}{m} - 2\right) \cdot \frac{1}{m-5}$; 2) $\left(1 - \frac{x}{y}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{y}\right)$;

3) $\left(\frac{b}{b-3} - 2b\right) \cdot \frac{b-3}{b}$; 4) $\left(3 - \frac{m}{m+2}\right) \cdot \frac{4m+12}{m^2+2m}$.

180②. Доведіть тотожність:

1) $\left(1 - \frac{2a}{b} + \frac{a^2}{b^2}\right) \cdot \frac{b}{a-b} = \frac{a-b}{b}$; 2) $\left(\frac{m}{n^2} - \frac{1}{m}\right) \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) = \frac{m+n}{n}$.

181②. Доведіть тотожність:

1) $\left(1 + \frac{2x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) \cdot \frac{y}{x+y} = \frac{x+y}{y}$; 2) $\left(\frac{2m}{n^2} - \frac{1}{2m}\right) \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2m}\right) = \frac{2m-n}{n}$.

182③. Виконайте дії:

1) $\left(\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2}\right) \cdot \frac{x^2-4}{4x}$; 2) $\left(\frac{a+3}{a-3} - \frac{a-3}{a+3}\right) \cdot \frac{24a}{a^2-6a+9}$.

183③. Виконайте дії:

1) $\frac{8m}{m^2-1} \cdot \left(\frac{m+1}{m-1} - \frac{m-1}{m+1}\right)$; 2) $\left(\frac{a-2}{a+2} + \frac{a+2}{a-2}\right) \cdot \frac{a^2-4a+4}{2a^2+8}$.

184③. Спростіть вираз:

1) $\frac{36}{a-3} \cdot \left(\frac{a+3}{a-3} - \frac{a-3}{a+3} + \frac{36}{a^2-9}\right)$; 2) $\left(\frac{2x+y}{x-2y} + \frac{2x-y}{x+2y}\right) \cdot \frac{x^2-4y^2}{x^2+y^2}$.

185³. Спростіть вираз:

$$1) \frac{16}{x+2} : \left(\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} - \frac{x-2}{x+2} \right); \quad 2) \left(\frac{5a+1}{a-2} + \frac{5a-1}{a+2} \right) \cdot \frac{a^2-4}{5a^2+2}.$$

186³. Доведіть тотожність

$$\left(\frac{a}{a-5} - \frac{a}{a+5} - \frac{a^2+25}{25-a^2} \right) \cdot \frac{a-5}{a^2+10a+25} = \frac{1}{a+5}.$$

187³. Доведіть тотожність

$$\left(\frac{b}{b+7} + \frac{b^2+49}{b^2-49} - \frac{b}{b-7} \right) : \frac{b-7}{b^2+14b+49} = b+7.$$

188³. Виконайте дії:

$$1) \left(\frac{1}{1-a^2} - \frac{1}{a^2+2a+1} \right) : \frac{2a}{a^2-1}; \quad 2) \left(\frac{x+1}{2x-2} - \frac{x+3}{2x+2} + \frac{6}{2x^2-2} \right) \cdot \frac{4x^2-4}{5}.$$

189³. Виконайте дії:

$$1) \left(\frac{1}{4-a^2} - \frac{1}{a^2-4a+4} \right) \cdot \frac{a^2-4}{2a};$$
$$2) \left(\frac{a+1}{3a-3} - \frac{a+2}{3a+3} + \frac{21-a}{3a^2-3} \right) : \frac{4}{a^2-1}.$$

190³. Доведіть тотожність:

$$1) \left(2 - \frac{2a^2-a}{a^2-a+1} \right) : \left(\frac{1}{a+1} - \frac{a-1}{a^2-a+1} \right) = a+1;$$
$$2) \left(\frac{m-2}{m^2-2m+4} - \frac{6m-13}{m^3+8} \right) \cdot \frac{2m^3+16}{18-6m} = \frac{3-m}{3}.$$

191³. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях a значення виразу не залежить від a :

$$1) \frac{a+2}{16} \cdot \left(\frac{1}{a+2} + \frac{3a-8}{a^2-2a+4} - \frac{4a-28}{a^3+8} \right);$$
$$2) \left(\frac{1}{a+1} - \frac{3}{a^3+1} + \frac{3}{a^2-a+1} \right) \left(a - \frac{2a-1}{a+1} \right).$$

192³. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях b значення виразу

$$\frac{b-2}{15} \cdot \left(\frac{1}{b-2} + \frac{9b+6}{b^3-8} - \frac{1-2b}{b^2+2b+4} \right)$$

не залежить від b .

193³. Подайте у вигляді раціонального дробу:

$$\begin{array}{ll} 1) \left(\frac{m}{n} - \frac{n}{m}\right)^2; & 2) \left(\frac{a^2}{b} - 1\right)^2 + \left(\frac{a^2}{b} + 1\right)^2; \\ 3) \left(\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}\right)^2 + \left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}\right)^2; & 4) \left(\frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{a} - \frac{a-b}{b}\right)^2. \end{array}$$

194³. Подайте у вигляді раціонального дробу:

$$1) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2; \quad 2) \left(\frac{m}{n^2} + 1\right)^2 - \left(\frac{m}{n^2} - 1\right)^2.$$

195³. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}; & 2) \frac{\frac{7x-a}{a} + 1}{\frac{7x+a}{a} - 1}; & 3) \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{2p}}{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{2p^2}}; \\ 4) \frac{c - \frac{6c-9}{c}}{\frac{3}{c} - 1}; & 5) \frac{\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x}}{\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}}; & 6) \frac{\frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m}}{\frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m}}. \end{array}$$

196³. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{1 + \frac{4}{m}}{1 - \frac{4}{m}}; & 2) \frac{\frac{3p+m}{m} - 1}{\frac{3p-m}{m} + 1}; & 3) \frac{\frac{1}{4t} + \frac{1}{t}}{\frac{1}{4t^2} - \frac{1}{t^2}}; \\ 4) \frac{1 - \frac{1}{x}}{x - \frac{2x-1}{x}}; & 5) \frac{\frac{m}{2-m} + \frac{2+m}{m}}{\frac{m}{2+m} + \frac{2-m}{m}}; & 6) \frac{\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}}. \end{array}$$

197³. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінних значення виразу не залежить від a і b :

$$\frac{8}{4a-b} : \left(\frac{2a-0,5b}{4a^2+ab+0,25b^2} + \frac{24ab}{64a^3-b^3} + \frac{1}{2a-0,5b} \right).$$

198³. Знайдіть значення виразу

$$\left(\frac{1,5a-4}{0,5a^2-a+2} - \frac{2a-14}{0,5a^3+4} + \frac{1}{a+2} \right) : \frac{4}{a+2},$$

якщо $a = 197$.

199⁴. Відомо, що $x - \frac{1}{x} = 7$. Знайдіть значення виразу $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

200³. Відомо, що $x + \frac{1}{x} = 3$. Знайдіть значення виразу $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

201^а. Спростіть вираз:

$$1) \left(\frac{8x^2+2x}{8x^3-1} - \frac{2x+1}{4x^2+2x+1} \right) \left(1 + \frac{2x+1}{2x} - \frac{4x^2+10x}{4x^2+2x} \right);$$

$$2) \frac{p^2-2p+1}{4} \cdot \left(\frac{2p}{p^3+1} : \frac{1-p}{p^2-p+1} + \frac{2}{p-1} \right) : \frac{p-1}{p+1}.$$

202^а. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{2x}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{4x}{x^2-1} \right) \left(\frac{2x}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4x}{x^2-1} \right)$$

не залежить від значення змінної.

203^а. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{m^2-3m}{m^3+3m^2+3m+1} + \frac{1}{m^2+2m+1} \right) \left(\frac{3-m}{m^2-2m+1} - \frac{2}{1-m} \right)$$

є додатним при всіх допустимих значеннях змінної.

204^а. Подайте у вигляді раціонального дробу або цілого виразу:

$$1) 1 - \frac{x}{1 - \frac{x}{x+1}}; \quad 2) \frac{m}{m - \frac{1}{m - \frac{m}{1-m}}}.$$

205^а. Подайте у вигляді раціонального дробу або цілого виразу:

$$1) 1 + \frac{2x}{1 - \frac{x}{x+2}}; \quad 2) \frac{1}{n - \frac{1}{n + \frac{n}{n-1}}}.$$



206^а. Подайте вираз у вигляді степеня:

$$1) x^7 x^3 : x^2; \quad 2) (x^5 : x^2) : x; \quad 3) (a^2)^3 \cdot a; \quad 4) (x^3)^5 : x^4.$$

207^а. При яких значеннях змінних дріб дорівнює нулю:

$$1) \frac{(m-1)m}{m+2}; \quad 2) \frac{x^2-2x}{8}; \quad 3) \frac{(m+2)m}{m^2-4}; \quad 4) \frac{x}{x^2+x}?$$

208^а. Доведіть, що число $8^9 - 4^{12}$ кратне 7.

209^а. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} 2x+4, & \text{якщо } x < 0, \\ 4-x, & \text{якщо } x \geq 0; \end{cases}$$
$$2) y = \begin{cases} 2x+5, & \text{якщо } x < -1, \\ 3, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 4, \\ x-1, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$$

Розглянемо рівняння:

$$3(x-1) + 2x = x + 7; \quad \frac{x+2}{3} - \frac{x+7}{6} = x;$$

$$\frac{2}{x-1} = 14; \quad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 3.$$

Ліва і права частини кожного з цих рівнянь є раціональними виразами.



Рівняння, ліва і права частини яких є раціональними виразами, називають раціональними рівняннями.

У перших двох з розглянутих рівнянь ліва і права частини — цілі вирази. Такі рівняння називають **цілими раціональними рівняннями**. Якщо у рівнянні хоча б одна частина є дробовим виразом, таке рівняння називають **дробовим раціональним рівнянням**. Серед розглянутих вище рівнянь останні два — дробові раціональні.

Розв'язування цілих раціональних рівнянь ми розглянули в попередніх класах. Розглянемо методи розв'язування дробових раціональних рівнянь, тобто рівнянь зі змінною у знаменнику.

1. Використання умови рівності дробу нулю: дріб $\frac{a}{b}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $a = 0$ і $b \neq 0$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{x}{x-2} = 3$.

Розв'язання. За допомогою тотожних перетворень зведемо рівняння до виду $\frac{a}{b} = 0$, де a і b — цілі раціональні вирази. Маємо:

$$\frac{x}{x-2} = 3; \quad \frac{x}{x-2} - \frac{3}{1} = 0; \quad \frac{x-3(x-2)}{x-2} = 0; \quad \frac{x-3x+6}{x-2} = 0; \quad \frac{6-2x}{x-2} = 0.$$

Щоб дріб $\frac{6-2x}{x-2}$ дорівнював нулю, необхідно, щоб чисельник $6-2x$ дорівнював нулю, а знаменник $x-2$ не дорівнював нулю.

Отже, $6-2x = 0$; $x = 3$. При $x = 3$ знаменник $x-2$ відмінний від нуля: $x-2 = 3-2 = 1 \neq 0$. Отже, $x = 3$ — єдиний корінь рівняння.

Запис розв'язування рівняння можна було закінчити інакше, а саме:

$$\frac{6-2x}{x-2} = 0; \begin{cases} 6-2x = 0, \\ x-2 \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ x \neq 2; \end{cases} x = 3.$$

В і д п о в і д ь. $x = 3$.

Отже, розв'язуючи дробове раціональне рівняння, можна:



1) за допомогою тотожних перетворень звести рівняння до виду $\frac{a}{b} = 0$;

2) прирівняти чисельник a до нуля і розв'язати утворене ціле рівняння;

3) виключити з його коренів ті, при яких знаменник дробу b дорівнює нулю.

2. Використання основної властивості пропорції: якщо $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (де $b \neq 0, d \neq 0$), то $ad = bc$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\frac{2x+1}{x-1} = \frac{x}{x-2} + 1$.

Р о з в' я з а н н я . Виконаємо додавання у правій частині рівняння:

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{x+x-2}{x-2}; \quad \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x-2}{x-2}.$$

За основною властивістю пропорції маємо:

$(2x+1)(x-2) = (2x-2)(x-1)$ при умові, що $x-1 \neq 0$ і $x-2 \neq 0$.

Розв'яжемо утворене рівняння:

$$2x^2 - 4x + x - 2 = 2x^2 - 2x - 2x + 2; \quad 2x^2 - 3x - 2x^2 + 4x = 2 + 2; \\ x = 4.$$

Перевіримо умови $x-1 \neq 0$ і $x-2 \neq 0$. Якщо $x = 4$, то $x-1 = 4-1 = 3 \neq 0$ і $x-2 = 4-2 = 2 \neq 0$. Отже, $x = 4$ — корінь рівняння.

Запис розв'язування можна було закінчити інакше, а саме:

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x-2}{x-2}; \begin{cases} (2x+1)(x-2) = (2x-2)(x-1), \\ x-1 \neq 0, \\ x-2 \neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2 - 4x + x - 2 = 2x^2 - 2x - 2x + 2, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2; \end{cases} \quad x = 4.$$

В і д п о в і д ь. $x = 4$.

Отже, при розв'язуванні дробового раціонального рівняння можна:

-  1) за допомогою тотожних перетворень звести рівняння до виду $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$;
- 2) використовуючи основну властивість пропорції, дістати ціле рівняння $ad = bc$ та розв'язати його;
- 3) виключити з його коренів ті, при яких знаменники b або d дорівнюють нулю.

3. Метод множення обох частин рівняння на спільний знаменник дробів.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\frac{x-2}{x^2-1} = \frac{5}{x^2-x} + \frac{5}{x^2+x}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники знаменники дробів:

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{x(x-1)} + \frac{5}{x(x+1)}.$$

Спільним знаменником усіх дробів є $x(x-1)(x+1)$. Помножимо обидві частини рівняння на цей вираз за умови, що $x(x-1)(x+1) \neq 0$. Маємо:

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{x(x-1)} + \frac{5}{x(x+1)} \quad \Bigg| \times x(x-1)(x+1);$$

$$x(x-2) = 5(x+1) + 5(x-1), \quad x^2 - 2x = 5x + 5 + 5x - 5;$$
$$x^2 - 12x = 0; \quad x(x-12) = 0.$$

Звідси $x = 0$ або $x = 12$.

Але, якщо $x = 0$, то спільний знаменник $x(x-1)(x+1)$ перетворюється на нуль і дробі $\frac{5}{x(x-1)}$ і $\frac{5}{x(x+1)}$ не мають змісту. Тому число 0 не є коренем рівняння.

Якщо ж $x = 12$, то спільний знаменник дробів не перетворюється на нуль. Тому число 12 — корінь рівняння.

В і д п о в і д ь. $x = 12$.

Розв'язуючи дробове раціональне рівняння, можна:

-  1) розкласти на множники знаменники дробів, якщо це можливо;
- 2) знайти найменший спільний знаменник дробів, що входять у рівняння;
- 3) помножити обидві частини рівняння на цей спільний знаменник;
- 4) розв'язати утворене ціле рівняння;
- 5) виключити з його коренів ті, при яких спільний знаменник дробів перетворюється на нуль.

Приклад 4. Чи рівносильні рівняння $\frac{x-2}{x+1} = 0$ і $\frac{2x-x^2}{x-3} = 0$?

Розв'язання. Нагадаємо, що два рівняння називаються рівносильними, якщо вони мають одні й ті самі корені; також рівносильними вважають рівняння, які не мають коренів.

Перше рівняння має єдиний корінь $x = 2$, а друге — два корені $x = 0$ і $x = 2$ (розв'яжіть рівняння самостійно). Тому рівняння не є рівносильними.

Відповідь. Ні.



Які рівняння називають раціональними? • Яке рівняння називають цілим раціональним, а яке — дробовим раціональним? • Як можна розв'язати дробове раціональне рівняння?

210^①. (Усно.) Назвіть цілі раціональні рівняння, дробові раціональні рівняння:

1) $\frac{2}{x} + \frac{x}{3} = 1$; 2) $x^2 - 2x(x+3) = x-7$;

3) $\frac{x+2}{4} - \frac{x-3}{8} = 15$; 4) $\frac{4}{x+2} - \frac{8}{x-3} = 15$.

211^①. Чи є число 1 коренем рівняння:

1) $\frac{x}{x+2} = 0$; 2) $\frac{x-1}{x+2} = 0$; 3) $\frac{x}{x-1} = 0$; 4) $\frac{x^2-1}{x} = 0$?

212^①. Чи є число 2 коренем рівняння:

1) $\frac{x-2}{x+3} = 0$; 2) $\frac{x}{x+3} = 0$; 3) $\frac{x}{x-2} = 0$; 4) $\frac{4-x^2}{x+1} = 0$?

213^①. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{x-2} = 0$; 2) $\frac{x-3}{x} = 0$; 3) $\frac{x+2}{x-1} = 0$; 4) $\frac{x+5}{x} = 0$.

214^①. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{x+1} = 0$; 2) $\frac{x-2}{x} = 0$; 3) $\frac{x+3}{x-4} = 0$; 4) $\frac{x+7}{x} = 0$.

215^②. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-8}{x+4} = 0$; 2) $\frac{3x+7}{x} = 0$; 3) $\frac{x^2}{x-9} = 0$; 4) $\frac{x-1}{1-x} = 0$.

216^②. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3x+12}{x-4} = 0$; 2) $\frac{2x-5}{x} = 0$; 3) $\frac{x^2}{x+1} = 0$; 4) $\frac{2-x}{x-2} = 0$.

217^②. Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{x+3}{x} - 2 = 0$; 2) $\frac{x}{x+2} = 2$; 3) $\frac{x}{x-4} = \frac{9}{5}$; 4) $\frac{3}{x-2} = \frac{2}{x-3}$.

218². Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{2x+1}{x} - 3 = 0$; 2) $\frac{x}{x-4} = 5$; 3) $\frac{x}{x+2} = \frac{5}{3}$; 4) $\frac{5}{x-2} = \frac{3}{x+4}$.

219². Чи рівносильні рівняння:

1) $\frac{x}{x-2} = \frac{4}{x-2}$ і $\frac{x-5}{x} = \frac{3-x}{x}$; 2) $\frac{x^2+2x}{x-3} = \frac{x^2-4}{x-3}$ і $\frac{2x-3}{3x} - \frac{x-2}{3x} = 0$?

220². Чи рівносильні рівняння:

1) $\frac{x}{x+1} = \frac{3}{x+1}$ і $\frac{x-4}{x} = \frac{2-x}{x}$; 2) $\frac{x^2-x}{x-1} = \frac{x^2+5}{x-1}$ і $\frac{3x-1}{2x} - \frac{2x-5}{2x} = 0$?

221². Розв'яжіть рівняння, використовуючи основну властивість пропорції:

1) $\frac{2x^2-1}{x+1} = 2x$; 2) $\frac{3x^2+1}{x} = 3x-1$;

3) $\frac{x-3}{2x^2+1} = \frac{1}{2x}$; 4) $\frac{4x^2-3}{2x-1} = 2x+3$.

222². Розв'яжіть рівняння, використовуючи основну властивість пропорції:

1) $\frac{3x^2+2}{x-2} = 3x$; 2) $\frac{2x^2-1}{x} = 2x+1$;

3) $\frac{2x-3}{2x^2+3} = \frac{1}{x}$; 4) $\frac{6x^2-1}{2x+3} = 3x-1$.

223². Знайдіть дріб, що дорівнює $\frac{2}{3}$, у якого чисельник на 5 менший від знаменника.

224². Знайдіть дріб, що дорівнює $\frac{1}{5}$, у якого знаменник на 12 більший від чисельника.

225². Яке число треба додати до чисельника дробу $\frac{3}{10}$, щоб дістати дріб $\frac{1}{2}$?

226². Яке число треба відняти від знаменника дробу $\frac{5}{18}$, щоб дістати дріб $\frac{1}{3}$?

227³. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+4}{2x-1} - \frac{x+8}{2x+1} = 0$; 2) $\frac{1}{5x} - \frac{1}{10x} = \frac{1}{30}$;

3) $2 + \frac{1}{x-2} = \frac{8-x}{2-x}$; 4) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{5x-5} = 2\frac{1}{10}$.

228³. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+1}{3x+1} - \frac{x}{3x-1} = 0$; 2) $\frac{1}{6x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{6}$;

$$3) 3 + \frac{1}{1-x} = \frac{x}{x-1}; \quad 4) \frac{1}{4x+4} - \frac{1}{x+1} = \frac{3}{8}.$$

229Ⓢ. Чи рівносильні рівняння $\frac{2x+6}{x+1} + \frac{3x-7}{x-2} = 5$ і $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$?

230Ⓢ. Чи рівносильні рівняння

$$\frac{3x-12}{x-3} + \frac{x+12}{x} = 4 \text{ і } \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}?$$

231Ⓢ. Чисельник дробу на 5 менший від знаменника. Якщо до чисельника додати 14, а від знаменника відняти 1, то дістанемо дріб, обернений даному. Знайдіть початковий дріб.

232Ⓢ. Знаменник дробу на 3 більший від чисельника. Якщо до чисельника додати 8, а від знаменника відняти 1, то дістанемо дріб, обернений даному. Знайдіть початковий дріб.

233Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^2-2}{x^2+2x} = \frac{x-1}{x} + \frac{x+3}{x+2}; \quad 2) \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x}{x+1} + \frac{2}{x-1}.$$

234Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^2-2}{x^2-x} = \frac{x+2}{x} + \frac{x+3}{x-1}; \quad 2) \frac{x^2+8}{x^2-4} = \frac{x}{x+2} + \frac{3}{x-2}.$$

235Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{|x-1|-5}{x-6} = 0; \quad 2) \frac{|x-1|-1}{x(x-2)} = 0.$$

236Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{|x-2|-3}{x-5} = 0; \quad 2) \frac{|x-2|-2}{x(x-4)} = 0.$$

237Ⓢ. При яких значеннях a рівняння не має розв'язків:

$$1) \frac{x-2a}{x(x-8)} = 0; \quad 2) \frac{x-a+1}{x^2-3x} = 0?$$

238Ⓢ. При яких значеннях a рівняння $\frac{(x-a)(x-2a-1)}{x-3} = 0$ має один корінь?



239Ⓢ. Обчисліть:

$$1) 2^5 - 3^2; \quad 2) (-1)^9 + (-1)^8; \quad 3) 4^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2; \quad 4) 5^3 : \left(\frac{5}{6}\right)^2.$$

240Ⓢ. Спростіть вираз $\frac{10x}{x+2} - \frac{x-8}{3x+6} \cdot \frac{120}{x^2-8x}$ та знайдіть його значення, якщо $x = 100$.

241Ⓢ. Скоротіть дріб $\frac{4a^2-b^2+2a-b}{4a^2+4ab+b^2+2a+b}.$

1^①. Виконайте множення:

$$1) \frac{c^4}{4} \cdot \frac{5}{c^2}; \quad 2) \frac{12}{a^2} \cdot \frac{a}{3}.$$

2^①. Виконайте ділення:

$$1) \frac{p}{5} : \frac{p}{7}; \quad 2) \frac{2}{a^2} : \frac{4}{a}.$$

3^①. Чи є число 4 коренем рівняння:

$$1) \frac{x^2-16}{x} = 0; \quad 2) \frac{x}{x-4} = 0?$$

4^②. Виконайте дії:

$$1) \frac{2a^3}{15m^2} \cdot \left(-\frac{5m}{6a^3}\right); \quad 2) \frac{x^2-xy}{a^2} \cdot \frac{ab}{x^2-2xy+y^2};$$

$$3) -\frac{3m^2}{7c^3} : \left(-\frac{9m^3}{28c}\right); \quad 4) \frac{x^2-16}{3x-6} : \frac{2x+8}{5x-10}.$$

5^②. Піднесіть до степеня:

$$1) \left(-\frac{2a^3}{m^2}\right)^3; \quad 2) \left(\frac{a^2b}{c^3}\right)^{10}.$$

6^②. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{4x+8}{x-3} = 0; \quad 2) \frac{4x^2-8}{x+1} = 4x.$$

7^③. Доведіть тотожність

$$\left(\frac{7}{x+7} + \frac{x^2+49}{x^2-49} - \frac{7}{7-x}\right) \cdot \frac{x-7}{x^2+14x+49} = \frac{1}{x+7}.$$

8^③. Спростіть вираз $\left(\frac{2a+1}{2a-1} - \frac{2a-1}{2a+1}\right) : \frac{2a^2}{4a^2-1}$.

9^④. Відомо, що $x + \frac{1}{x} = 9$. Знайдіть значення виразу $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Додаткові завдання

10^④. Спростіть вираз $\frac{0,2a^3-1,6}{0,1a^2-1,6} : \frac{0,5a^2+a+2}{0,25a-1}$.

11^④. Розв'яжіть рівняння $\frac{|2-x|-3}{x-5} = 0$.

Нагадаємо, що в 7 класі ми вивчали степінь з натуральним показником. За означенням степеня $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$, якщо n — множників

$n > 1$, n — натуральне число і $a^1 = a$.

У математиці, а також під час розв'язування задач практичного змісту, наприклад з фізики або хімії, трапляються степені, показник яких нуль або ціле від'ємне число. Степінь з від'ємним показником можна знайти в науковій та довідковій літературі. Наприклад, масу атома гелію, записують так: $6,64 \cdot 10^{-27}$ кг. Як розуміти зміст запису 10^{-27} ?

Розглянемо степені числа 3 з показниками 1, 2, 3, 4...:

$$3^1, 3^2, 3^3, 3^4 \dots \text{або } 3, 9, 27, 81 \dots$$

У цьому рядку кожне наступне число у 3 рази більше за попереднє. Продовжимо рядок вліво, зменшуючи кожного разу показник степеня на 1. Дістанемо:

$$\dots 3^{-3}, 3^{-2}, 3^{-1}, 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4 \dots$$

Число 3^0 повинно бути в 3 рази менше за $3^1 = 3$. Але в 3 рази меншим за число 3 є число 1, отже, $3^0 = 1$. Така сама рівність $a^0 = 1$ буде виконуватися для будь-якої основи a , відмінної від нуля.



Степінь числа a , яке не дорівнює нулю, з нульовим показником дорівнює одиниці:

$$a^0 = 1 \text{ (якщо } a \neq 0 \text{)}.$$

Зліва у рядку від числа $3^0 = 1$ стоїть число 3^{-1} . Це число у 3 рази менше за 1, тобто дорівнює $\frac{1}{3}$. Отже, $3^{-1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}$. Міркуючи далі аналогічно, дістанемо $3^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$; $3^{-3} = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$ і т. д. Доцільно прийняти наступне означення степеня з цілим від'ємним показником ($-n$):



якщо $a \neq 0$ і n — натуральне число, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Приклад 1. Замінити степінь з цілим від'ємним показником дробом: 1) 5^{-7} ; 2) x^{-1} ; 3) $(a+b)^{-9}$.

$$\text{Розв'язання. 1) } 5^{-7} = \frac{1}{5^7}; \text{ 2) } x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}; \text{ 3) } (a+b)^{-9} = \frac{1}{(a+b)^9}.$$

Приклад 2. Замінити дріб степенем з цілим від'ємним показником: 1) $\frac{1}{a^2}$; 2) $\frac{1}{m-n}$; 3) $\frac{1}{7^{13}}$.

Розв'язання. 1) $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$; 2) $\frac{1}{m-n} = (m-n)^{-1}$; 3) $\frac{1}{7^{13}} = 7^{-13}$.

Приклад 3. Виконати піднесення до степеня: 1) 4^{-2} ; 2) $(-9)^0$; 3) $(-5)^{-3}$.

Розв'язання. 1) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$; 2) $(-9)^0 = 1$;

3) $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$.

Розглянемо піднесення до від'ємного цілого степеня дробу $\frac{a}{b}$. Якщо n — натуральне число і $a \neq 0$, маємо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = 1 : \left(\frac{a}{b}\right)^n = 1 : \frac{a^n}{b^n} = 1 \cdot \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Отже,



$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Приклад 4. Обчислити: 1) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 2) $27 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{-4}$.

Розв'язання. 1) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$. 2) Нагадаємо, що дія піднесення до степеня виконується раніше за дію множення. Маємо:

$$27 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{-4} = 27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{27 \cdot 16}{81} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

Відповідь. 1) $\frac{9}{49}$; 2) $5\frac{1}{3}$.



Чому дорівнює a^0 , якщо $a \neq 0$? • Сформулюйте означення степеня з цілим від'ємним показником. • Доведіть тотожність $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

242⁰. (Усно). Чи правильна рівність:

$$1) 2^{-3} = \frac{1}{2^3}; \quad 2) 4^0 = 0; \quad 3) 19^{-5} = \frac{1}{19^{-5}}; \quad 4) (-4)^0 = 1?$$

243^①. Замініть дробом степінь з цілим від'ємним показником:

- 1) 4^{-5} ; 2) a^{-1} ; 3) p^{-10} ;
4) c^{-8} ; 5) $(2a)^{-3}$; 6) $(a + b)^{-4}$.

244^①. Замініть дробом степінь з цілим від'ємним показником:

- 1) b^{-3} ; 2) 7^{-1} ; 3) 2^{-7} ;
4) t^{-6} ; 5) $(3m)^{-2}$; 6) $(c - d)^{-7}$.

245^①. Замініть дріб степенем з цілим від'ємним показником:

- 1) $\frac{1}{9^4}$; 2) $\frac{1}{p^5}$; 3) $\frac{1}{10^9}$;
4) $\frac{1}{m}$; 5) $\frac{1}{(ab)^4}$; 6) $\frac{1}{(m-n)^4}$.

246^①. Замініть дріб степенем з цілим від'ємним показником:

- 1) $\frac{1}{c^3}$; 2) $\frac{1}{19^7}$; 3) $\frac{1}{t^5}$;
4) $\frac{1}{b}$; 5) $\frac{1}{(cm)^6}$; 6) $\frac{1}{(a+x)^2}$.

247^②. Обчисліть:

- 1) 7^{-2} ; 2) $(-2)^{-2}$; 3) $(-1)^{-5}$; 4) 12^{-1} ;
5) $(-7)^{-1}$; 6) 10^{-3} ; 7) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 8) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$;
9) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}$; 10) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-5}$; 11) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 12) $\left(-2\frac{1}{5}\right)^{-1}$;
13) $0,1^{-1}$; 14) $(-0,2)^{-2}$; 15) $(1,2)^{-2}$; 16) $(-0,25)^{-3}$.

248^②. Обчисліть:

- 1) 2^{-3} ; 2) $(-1)^{-6}$; 3) 15^{-1} ; 4) $(-9)^{-1}$;
5) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$; 6) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$; 7) $\left(1\frac{1}{4}\right)^{-2}$; 8) $\left(-3\frac{1}{7}\right)^{-1}$;
9) $0,2^{-1}$; 10) $(-0,1)^{-2}$; 11) $(1,5)^{-2}$; 12) $(-0,5)^{-4}$.

249^②. Подайте числа 16; 8; 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$ і $\frac{1}{16}$ у вигляді степеня з основою 2.

250^②. Подайте числа 100; 10; 1; 0,1; 0,01 у вигляді степеня з основою 10.

251^②. Обчисліть:

- 1) -5^{-2} ; 2) $(-0,8)^{-2}$; 3) $- \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$; 4) $- \left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$.

252². Обчисліть:

1) -2^{-3} ; 2) $(-0,4)^{-2}$; 3) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 4) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

253². Подайте вираз у вигляді дробу, що не містить степеня з від'ємним показником:

1) $2a^{-3}$; 2) $3mb^{-1}$; 3) $a^2b^{-3}c$; 4) $a^{-3}b^{-7}$.

254². Подайте вираз у вигляді дробу, що не містить степеня з від'ємним показником:

1) $4b^{-5}$; 2) $7a^{-1}p$; 3) $mn^{-2}p^7$; 4) $c^{-2}b^{-5}$.

255³. Обчисліть:

1) $81 \cdot 3^{-5}$; 2) $-25 \cdot 10^{-2}$; 3) $27 \cdot (-18)^{-1}$; 4) $2\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$;
5) $-8 \cdot 2^{-4} + 3^0$; 6) $8^{-2} + 6^{-1}$; 7) $2,5^{-1} + (-13)^0$; 8) $4^{-3} - (-4)^{-2}$;
9) $(-8)^{-2} + (0,4)^{-1}$; 10) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2} \cdot 10^{-3}$; 11) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-3} : \left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$;
12) $1,25^{-2} + 2,5^{-3}$.

256³. Знайдіть значення виразу:

1) $-64 \cdot 4^{-4}$; 2) $36 \cdot (-27)^{-1}$; 3) $-3\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{-1}$; 4) $-7 \cdot 0,1^{-2} + 5^0$;
5) $5^{-2} - 10^{-1}$; 6) $3,2^{-1} + \left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 7) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot 20^{-2}$; 8) $1,5^{-2} - 1,2^{-3}$.

257³. Порівняйте з нулем степені:

1) 8^{-13} ; 2) $(-3,7)^{-10}$; 3) $(-2,9)^{-11}$; 4) $-(-2,1)^{-7}$.

258³. Порівняйте з нулем значення виразу a^n , якщо:

- 1) $a > 0$ і n — ціле число;
- 2) $a < 0$ і n — парне від'ємне число;
- 3) $a < 0$ і n — непарне від'ємне число.

259³. Порівняйте з нулем значення виразу b^m , якщо:

1) $b = 5, m = -13$; 2) $b = -1, m = -200$; 3) $b = -3, m = -13$.

260³. Перетворіть вираз так, щоб він не містив степенів з від'ємним показником:

1) $\frac{m^2n^2p^{-3}}{cx^3a^{-4}}$; 2) $\frac{7^0a^{-1}b^2}{5^{-2}x^{-3}m^{-1}}$.

261³. Використовуючи від'ємний показник, подайте у вигляді добутку дробів:

1) $\frac{3x^2}{p}$; 2) $\frac{15m}{n^2c^3}$; 3) $\frac{2x}{b^5(a-b)^2}$; 4) $\frac{(x+y)^7}{(x-y)^3}$.

262^а. Подайте дріб у вигляді добутку, використовуючи степінь з від'ємним показником:

1) $\frac{5m^2}{x}$; 2) $\frac{7c^2}{y^7n^5}$; 3) $\frac{p}{c^4(x-y)^8}$; 4) $\frac{(a+2)^5}{(a-5)^2}$.

263^а. Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $m^{-3} + n^{-2}$; 2) $ab^{-1} + ba^{-1} + c^0$;
3) $(m + n^{-1})(m^{-1} + n)$; 4) $(a^{-1} + b^{-1}) : (a^{-2} - b^{-2})$.

264^а. Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $xy^{-3} + x^{-1}y^2$; 2) $(x^{-2} - y^{-2}) : (x^{-1} - y^{-1})$.

265^а. Обчисліть значення виразу:

1) $(1 + (1 - 5^{-2})^{-1})^{-1}$; 2) $(1 - (1 + 3^{-1})^{-2})^{-2}$.

266^а. Обчисліть значення виразу $(1 + (1 - 3^{-1})^{-1})^{-1} + (1 - (1 + 3^{-1})^{-1})^{-1}$.

267^а. Спростіть вираз $(1 - x^{-2}) \left(1 - \frac{1}{x^{-1}-1} + \frac{1}{x^{-1}+1} \right)$.



268^а. Подайте у вигляді степеня:

1) a^5a^3 ; 2) $b^7 : b^3$; 3) $(c^5)^4$; 4) m^7m ; 5) $t^{10} : t$; 6) $(p^7)^2$.

269^а. Виконайте піднесення до степеня:

1) $(mn^2)^7$; 2) $(-2p^3)^2$; 3) $(-5cm^2)^3$; 4) $(-a^2c^3)^{10}$.

270^а. Спростіть вираз:

1) $(5m^2n)^3 \cdot (0,2m^3n)^2$; 2) $(-0,1p^7c^3)^4 \cdot (10pc^2)^3$.

Уроки 24–26

§ 10. ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ З ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

Властивості степеня з натуральним показником справджуються і для степеня з будь-яким цілим показником (необхідно лише зауважити, що основа степеня відмінна від нуля).

Отже,



для будь-якого $a \neq 0$ і будь-яких цілих m і n :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

для будь-яких $a \neq 0$, $b \neq 0$ і будь-якого цілого n :

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Ці властивості можна довести, спираючись на формулу $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ та властивості степеня з натуральним показником.

Доведемо, наприклад, формулу $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ для випадку, коли m і n — від'ємні цілі числа. Нехай $m = -p$, $n = -q$, де p і q — натуральні числа. Маємо:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^p \cdot a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = \\ &= a^{-p-q} = a^{m+n}. \end{aligned}$$

Отже, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, якщо m і n — від'ємні цілі числа. Так само цю формулу можна довести, якщо один з показників m і n — від'ємне ціле число, а інший — додатний або дорівнює нулю.

Приклад 1. 1) $a^2 a^{-7} = a^{2+(-7)} = a^{-5}$; 2) $b^{15} : b^{20} = b^{15-20} = b^{-5}$; 3) $(x^{-3})^2 \cdot x^{-14} = x^{-3 \cdot 2} \cdot x^{-14} = x^{-6} \cdot x^{-14} = x^{-6+(-14)} = x^{-20}$.

Приклад 2. Спростити вираз $(4a^5 b^{-6})^{-2}$.

Розв'язання. $(4a^5 b^{-6})^{-2} = 4^{-2} \cdot (a^5)^{-2} (b^{-6})^{-2} = \frac{1}{16} a^{-10} b^{12}$.

Приклад 3. Обчислити $\frac{9^4 \cdot 3^{-22}}{27^{-5}}$.

Розв'язання. Подамо 9 та 27 як степені числа 3 та виконаємо обчислення:

$$\frac{9^4 \cdot 3^{-22}}{27^{-5}} = \frac{(3^2)^4 \cdot 3^{-22}}{(3^3)^{-5}} = \frac{3^8 \cdot 3^{-22}}{3^{-15}} = \frac{3^{-14}}{3^{-15}} = 3^{-14-(-15)} = 3^1 = 3.$$

Відповідь. 3.



Сформулюйте властивості степеня з цілим показником.

271^①. (Усно.) Які з рівностей правильні:

- 1) $m^3 \cdot m^{-7} = m^{-21}$; 2) $a^7 \cdot a^{-9} = a^{-2}$; 3) $a^5 \cdot a^{-5} = a$;
 4) $c^8 : c^{-5} = c^{13}$; 5) $c^4 : c^5 = c$; 6) $m : m^8 = m^{-7}$;
 7) $(a^7)^{-1} = a^{-7}$; 8) $(b^{-2})^{-3} = b^{-6}$; 9) $(t^5)^{-2} = t^{10}$?

272^①. Подайте добуток у вигляді степеня:

- 1) $a^5 a^{-2}$; 2) $a^{-7} a^6$; 3) $a^9 a^{-9}$; 4) $a^{-7} a^{-8}$.

273^①. Подайте добуток у вигляді степеня:

- 1) $b^7 b^{-3}$; 2) $b^{-8} b^3$; 3) $b^{-5} b^{-7}$; 4) $b^{-8} b^8$.

274^①. Подайте частку у вигляді степеня:

- 1) $m^3 : m^{-2}$; 2) $m^5 : m^6$; 3) $m^{-3} : m^{-3}$; 4) $m^{-1} : m^{-8}$.

275^①. Подайте частку у вигляді степеня:

1) $c^5 : c^{-1}$; 2) $c^2 : c^8$; 3) $c^{-2} : c^{-3}$; 4) $c^{-4} : c^{-4}$.

276^①. Піднесіть степінь до степеня:

1) $(x^{-4})^{-2}$; 2) $(x^{-1})^{17}$; 3) $(x^0)^{-5}$; 4) $(x^7)^{-4}$.

277^①. Піднесіть степінь до степеня:

1) $(n^{-2})^{-7}$; 2) $(n^{15})^{-1}$; 3) $(n^{-8})^0$; 4) $(n^5)^{-3}$.

278^②. Подайте a^{-10} у вигляді добутку двох степенів з однаковими основами, якщо один з множників дорівнює:

1) a^{-3} ; 2) a^7 ; 3) a^{-1} ; 4) a^{12} .

279^②. Подайте степінь у вигляді добутку двох степенів з однаковими основами будь-яким способом:

1) m^8 ; 2) m^{-2} ; 3) m^{-17} ; 4) m^0 .

280^②. Обчисліть:

1) $2^7 \cdot 2^{-6}$; 2) $5^{-3} \cdot 5$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$;
5) $3^8 : 3^9$; 6) $7^{-15} : 7^{-16}$; 7) $9 : 9^{-1}$; 8) $\left(\frac{1}{15}\right)^{-15} : \left(\frac{1}{15}\right)^{-15}$;
9) $(2^{-2})^3$; 10) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^{-2}$; 11) $(0,1^{-1})^4$; 12) $\left(\left(\frac{1}{19}\right)^{-8}\right)^0$.

281^②. Знайдіть значення виразу:

1) $3^9 \cdot 3^{-8}$; 2) $2^{-3} \cdot 2$; 3) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^5$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7$;
5) $10^4 : 10^5$; 6) $8^{-12} : 8^{-13}$; 7) $7 : 7^{-1}$; 8) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-7} : \left(\frac{2}{7}\right)^{-7}$;
9) $(3^{-1})^4$; 10) $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}$; 11) $(0,2^3)^{-1}$; 12) $\left(\left(\frac{7}{13}\right)^0\right)^{-12}$.

282^②. Подайте вираз у вигляді степеня з основою a :

1) $a^7 : a^3 \cdot a^{-12}$; 2) $(a^5)^{-3} \cdot a^{12}$; 3) $(a^{-8})^3 : a^4$;
4) $a^0 \cdot (a^{-3})^4 \cdot a^5$; 5) $a^{-3} \cdot a^0 : a^5 : a$; 6) $(a^3)^{-2} \cdot (a^{-1})^{-6}$.

283^②. Подайте вираз у вигляді степеня з основою b :

1) $b^3 : b^7 \cdot b^2$; 2) $(b^{-2})^4 \cdot b^{10}$; 3) $(b^3)^{-2} : b^3$;
4) $b^7 \cdot (b^{-2})^3 \cdot b^0$; 5) $b^0 \cdot b^{-4} : b^3 : b$; 6) $(b^{-4})^{-1} \cdot (b^2)^{-2}$.

284②. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) 4a^{-8}b^7 \cdot 5a^{10}b^{-3}; & 2) 0,4m^{-6}n^4 \cdot 10m^6n^{-9}; \\ 3) \frac{1}{3}x^{-4}y^6 \cdot (-9x^5y^{-3}); & 4) \left(-\frac{2}{7}b^{-6}m^{-4}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{6}b^{-4}m^{-2}\right). \end{array}$$

285②. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) 10m^3n^{-2} \cdot 2m^{-5}n^4; & 2) 0,02a^{-8}b^3 \cdot 100a^8b^{-7}; \\ 3) -\frac{1}{8}x^{-3}y^7 \cdot 16x^4y^{-10}; & 4) \left(-\frac{2}{5}p^{-3}c^{-5}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{4}p^{-2}c^{-3}\right). \end{array}$$

286②. Подайте степінь у вигляді добутку:

$$\begin{array}{llll} 1) (xy)^{-2}; & 2) (ab^{-2})^{-3}; & 3) (x^{-4}y^3)^{-1}; & 4) (m^0c^{-3})^{-2}; \\ 5) (0,1a^{-2})^{-1}; & 6) \left(\frac{1}{3}m^{-3}p\right)^{-2}; & 7) (-2c^{-3}p)^{-3}; & 8) \left(\frac{2}{3}b^{-1}c^{-8}\right)^{-1}. \end{array}$$

287②. Подайте степінь у вигляді добутку:

$$\begin{array}{lll} 1) (p^{-2}n)^{-5}; & 2) (a^{-2}b^3)^{-4}; & 3) (0,2m^{-4})^{-1}; \\ 4) \left(\frac{1}{5}a^{-2}b\right)^{-2}; & 5) (-4ab^{-2})^{-3}; & 6) \left(\frac{3}{4}c^{-2}b^{-3}\right)^{-1}. \end{array}$$

288③. Подайте у вигляді степеня вираз:

$$1) 64m^{-3}; \quad 2) 0,01p^{-8}; \quad 3) 0,0025c^{-8}p^{12}; \quad 4) 5\frac{1}{16}c^{12}x^{-20}.$$

289③. Обчисліть значення виразу:

$$\begin{array}{ll} 1) ((5^{-2})^{-6} \cdot (5^{-8})^2)^{-1}; & 2) \frac{10^{-8} \cdot (10^{-2})^4}{(10^{-5})^3}; \\ 3) \frac{(3^{-2})^3 \cdot (3^{-1})^5}{(3^6)^{-2}}; & 4) \frac{(7^{-2})^{-5} \cdot (7^4)^{-3}}{(7^3)^{-4} \cdot (7^{-1})^{-8}}. \end{array}$$

290③. Обчисліть значення виразу:

$$1) ((4^{-4})^{-2} \cdot (4^{-5})^2)^{-1}; \quad 2) \frac{2^{-8} \cdot (2^{-2})^5}{(2^{-4})^6 \cdot (2^2)^4}.$$

291③. Обчисліть значення виразу:

$$\begin{array}{lll} 1) 243 \cdot 3^{-6}; & 2) 64 \cdot (2^{-3})^3; & 3) 5^{-8} \cdot 25^5 : 125; \\ 4) 49^{-1} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{-4}; & 5) \frac{36^{-3} \cdot 6^{-8}}{(-6)^{-13}}; & 6) \frac{8^{-3} \cdot 2^{-10}}{16^{-5}}. \end{array}$$

292③. Обчисліть значення виразу:

$$\begin{array}{lll} 1) 128 \cdot 2^{-5}; & 2) 81 \cdot (3^{-2})^3; & 3) 7^{-8} \cdot 343^3 : 49; \\ 4) 36^{-2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-6}; & 5) \frac{100^{-2} \cdot 10^{-7}}{1000^{-3}}; & 6) \frac{5^{-3} \cdot 25^8}{125^5}. \end{array}$$

293^①. Спростіть вираз:

$$1) 3,5a^3b^7 : (0,5a^{-2}b^9); \quad 2) 3\frac{1}{2}x^{-12}y^{-1} : \left(-1\frac{3}{4}x^6y^{-4}\right).$$

294^①. Спростіть вираз:

$$1) \frac{13a}{b^{-5}} \cdot \frac{b^{-8}}{26a^{-2}}; \quad 2) -\frac{12a^{-3}}{35x} \cdot \frac{7x^{-7}}{6a^{-8}}.$$

295^①. Спростіть вираз:

$$1) 4,9m^3n^{-4} : (0,7mn^{-2}); \quad 2) \frac{7c^{-3}}{x^5} \cdot \left(-\frac{x^7}{21c^{-1}}\right).$$

296^①. Подайте у вигляді виразу, який не містить степеня з від'ємним показником:

$$1) \left(\frac{p^{-8}c^{12}}{m^{-4}t^{15}}\right)^{-2}; \quad 2) \left(\frac{b^{-3}}{c^5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{b^{-2}}{c^{-4}}\right)^3;$$
$$3) \left(\frac{7x^{-2}}{3y^{-4}}\right)^{-2} \cdot 49x^{-4}y^3; \quad 4) \left(\frac{a^{-3}b}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{a^{-2}b^2}\right)^{-3}.$$

297^①. Подайте у вигляді виразу, який не містить степеня з від'ємним показником:

$$1) \left(\frac{c^{-7}a^2}{b^{-2}x}\right)^{-3}; \quad 2) \left(\frac{x^{-4}}{y^2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{x^{-3}}{y^{-3}}\right)^2;$$
$$3) \left(\frac{5a^{-2}}{2b^{-3}}\right)^{-2} \cdot 25a^{-4}b^2; \quad 4) \left(\frac{m^{-2}n^3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{8}{m^{-3}n^4}\right)^{-2}.$$

298^①. Спростіть вираз (n — ціле число):

$$1) \frac{25^n}{5^{2n-8}}; \quad 2) \frac{12^n}{2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}}; \quad 3) \frac{a^4n^2b^{2n-1}}{a^{2n}b^{3+2n}}.$$

299^①. Спростіть вираз (m — ціле число):

$$1) \frac{49^m}{7^{2m-2}}; \quad 2) \frac{18^m}{2^{m+2} \cdot 3^{2m-1}}; \quad 3) \frac{x^{9m}y^{3m-2}}{x^{3m}y^{4+3m}}.$$

300^①. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{5^{n+2}-5^n}{12} \quad (n \text{ — ціле число}); \quad 2) \frac{x^7+x^{10}}{x^{-1}+x^2}; \quad 3) \frac{m^{-3}+5-m^7}{5m^2-m^9+m^{-1}}.$$

301^①. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{18}{4^{n+1}-4^n} \quad (n \text{ — ціле число}); \quad 2) \frac{x^9+x^5}{x^{-3}+x}; \quad 3) \frac{b^{-5}+3-b^2}{3b^3-b^5+b^{-2}}.$$

302^а. Доведіть, що за будь-яких цілих значень m і n вираз набуває одного й того самого значення:

$$1) \frac{2^m \cdot 3^{n-1} - 2^{m-1} \cdot 3^n}{2^m \cdot 3^n}; \quad 2) \frac{7^{2m} \cdot 4^n}{49^{m+1} \cdot 2^{2n-1} - 49^{m-1} \cdot 2^{2n+1}}.$$

 **303²**, Виконайте дії:

1) $2,7 \cdot 10^3$; 2) $1,32 \cdot 10^5$; 3) $4,7 \cdot 10^{-3}$; 4) $3,42 \cdot 10^{-4}$.

304Ⓢ. Подайте у вигляді дробу вираз:

$$1) \frac{a^2+2a}{a^2-4a+4} - \frac{4a}{a^2-4a+4}; \quad 2) \frac{3p}{p^2-2p} - \frac{8-p}{p^2-2p}.$$

305®. Відомо, що 3 кг огірків і 2 кг помідорів коштували 17 грн. Після того, як огірки подешевшали на 20 %, а помідори подорожчали на 10 %, за 2 кг огірків і 3 кг помідорів заплатили 18 грн. Знайдіть початкову вартість 1 кг огірків і 1 кг помідорів.

306®. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних непарних чисел кратна 8.

Уроки 27, 28 § 11. СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ЧИСЛА

У фізиці, хімії, техніці, астрономії часто мають справу як з дуже великими, так і дуже малими числами. Наприклад, маса Землі дорівнює 5 976 000 000 000 000 000 000 000 кг, а діаметр молекули водню 0,00000000025 м.

Читати чи записувати дуже великі і дуже малі числа у вигляді десяткових дробів незручно, також незручно виконувати дії із цими числами. У таких випадках зручно використовувати степінь числа 10 з цілим показником і записувати число у вигляді $a \cdot 10^n$, де n — ціле число, $1 \leq a < 10$. Наприклад,

$$5\,976\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,\text{кг} = 5,976 \cdot 10^{24}\,\text{кг};$$
$$0,00000000025\,\text{м} = 2,5 \cdot 10^{-10}\,\text{м}.$$

Кажуть, що числа 5 976 000 000 000 000 000 000 000 і 0,00000000025 записано у *стандартному вигляді*.

 **Стандартним виглядом числа** називають його запис у вигляді добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10$ і n — ціле число.

Якщо число записано у стандартному вигляді, то порядок степеня n називають **порядком числа**. Наприклад, порядок числа, що виражає масу Землі в кілограмах, дорівнює 24, а порядок числа, що виражає діаметр молекули водню в метрах, дорівнює -10 .

У стандартному вигляді можна записати будь-яке додатне число. Порядок числа дає уявлення про це число.

Якщо порядок числа x дорівнює 4, то це означає, що $1 \cdot 10^4 \leq x < 10 \cdot 10^4$, тобто $10\,000 \leq x < 100\,000$. Якщо порядок числа y дорівнює -2 , то $1 \cdot 10^{-2} \leq y < 10 \cdot 10^{-2}$, тобто $0,01 \leq y < 0,1$. Великий додатний порядок числа показує, що число дуже велике. Великий за модулем від'ємний порядок числа показує, що число дуже мале.

Приклад 1. Подати число $x = 272\,000$ у стандартному вигляді.

Розв'язання. У числі x поставимо кому так, щоб у цілій частині була одна цифра, відмінна від нуля. В результаті дістанемо 2,72. Комою відокремили 5 цифр справа, тому x зменшили у 10^5 раз. Звідси $x = 2,72 \cdot 10^5$.

Відповідь. $x = 2,72 \cdot 10^5$.

Приклад 2. Подати число $x = 0,00013$ у стандартному вигляді.

Розв'язання. У числі x перенесемо кому на 4 знаки вправо, маємо 1,3. При цьому число x збільшили у 10^4 раз. Отже, $x = 1,3 \cdot 10^{-4}$.

Відповідь. $x = 1,3 \cdot 10^{-4}$.

Приклад 3. Виконати дії і записати результат у стандартному вигляді: 1) $(5,7 \cdot 10^8) \cdot (3,6 \cdot 10^{-2})$; 2) $(2,1 \cdot 10^7) : (4,2 \cdot 10^{-3})$.

Розв'язання. 1) $(5,7 \cdot 10^8) \cdot (3,6 \cdot 10^{-2}) = (5,7 \cdot 3,6) \cdot (10^8 \times 10^{-2}) = 20,52 \cdot 10^6 = 2,052 \cdot 10^1 \cdot 10^6 = 2,052 \cdot 10^7$;

2) $(2,1 \cdot 10^7) : (4,2 \cdot 10^{-3}) = \frac{2,1 \cdot 10^7}{4,2 \cdot 10^{-3}} = \frac{2,1}{4,2} \cdot \frac{10^7}{10^{-3}} = 0,5 \cdot 10^{10} = 5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{10} = 5 \cdot 10^9$.

Відповідь. 1) $2,052 \cdot 10^7$; 2) $5 \cdot 10^9$.

Приклад 4. Виконати додавання $2,3 \cdot 10^4 + 3,7 \cdot 10^3$ та записати у стандартному вигляді.

Розв'язання. $2,3 \cdot 10^4 + 3,7 \cdot 10^3 = 2,3 \cdot 10^4 + 3,7 \cdot 10^4 \times 10^{-1} = 10^4 (2,3 + 3,7 \cdot 10^{-1}) = (2,3 + 0,37) \cdot 10^4 = 2,67 \cdot 10^4$.

Відповідь. $2,67 \cdot 10^4$.



Який запис числа називають його стандартним виглядом?

307[®]. (Усно.) Чи записане число у стандартному вигляді:

- 1) 0,42; 2) 2,9; 3) $3,7 \cdot 10^{-8}$; 4) $0,05 \cdot 10^{-12}$;
5) $19,2 \cdot 10^2$; 6) $1,92 \cdot 10^{-29}$; 7) $1,92 \cdot 8^{-29}$; 8) $1,001 \cdot 10^{77}$

308^①. Які з чисел подано у стандартному вигляді:

- 1) 3,0017; 2) $4,2 \cdot 10^{-5}$; 3) 0,03; 4) 117;
5) $10,5 \cdot 10^7$; 6) $1,115 \cdot 10^{17}$; 7) $2,7 \cdot 10^{-3}$; 8) $2,7 \cdot 5^{-3}$?

309^①. (Усно.) Назвіть порядок числа, поданого у стандартному вигляді:

- 1) $1,7 \cdot 10^5$; 2) $2,001 \cdot 10^{-17}$; 3) $4,5 \cdot 10^1$; 4) 3,7.

310^①. Який порядок числа, поданого у стандартному вигляді:

- 1) $2,7 \cdot 10^{-5}$; 2) $3,8 \cdot 10^{12}$; 3) $2,45 \cdot 10^0$; 4) $4,11 \cdot 10^{-1}$?

311^②. Запишіть у стандартному вигляді число:

- 1) 200 000; 2) 5800; 3) 20 500; 4) 739;
5) 107,5; 6) 37,04; 7) 2700,5; 8) 300,8;
9) 0,37; 10) 0,0029; 11) 0,000007; 12) 0,010203.

312^②. Подайте число у стандартному вигляді:

- 1) 50 000; 2) 470 000; 3) 5 030 000; 4) 975;
5) 32,5; 6) 409,1; 7) 12900,5; 8) 87,08;
9) 0,43; 10) 0,00017; 11) 0,00004; 12) 0,90807.

313^②. Подайте число у стандартному вигляді:

- 1) $27 \cdot 10^5$; 2) $427 \cdot 10^{-3}$; 3) $0,00027 \cdot 10^5$; 4) $0,0037 \cdot 10^{-4}$.

314^②. Запишіть у стандартному вигляді:

- 1) $58 \cdot 10^{-8}$; 2) $237,2 \cdot 10^7$; 3) $0,2 \cdot 10^{-4}$; 4) $0,0017 \cdot 10^5$.

315^②. Округліть число до сотень і утворений результат запишіть у стандартному вигляді:

- 1) 137 152; 2) 12 311; 3) 2197,2; 4) 1000,135.

316^②. Подайте величини у вигляді десяткового дробу або цілого числа:

- 1) територія України становить $6,037 \cdot 10^5$ км²;
2) діаметр молекули води дорівнює $2,8 \cdot 10^{-7}$ мм;
3) кількість населення м. Києва на 5 грудня 2001 р. становила $2,611 \cdot 10^6$ осіб;
4) маса пташки колібрі дорівнює $1,7 \cdot 10^{-3}$ кг.

317^②. Запишіть у вигляді десяткового дробу або цілого числа:

- 1) $2,735 \cdot 10^4$; 2) $3,7 \cdot 10^{-3}$; 3) $3,17 \cdot 10^7$; 4) $1,2 \cdot 10^{-5}$.

318^②. Виконайте множення та подайте результат у стандартному вигляді:

- 1) $(1,7 \cdot 10^3) \cdot (3 \cdot 10^{-8})$; 2) $(2,5 \cdot 10^{-5}) \cdot (6 \cdot 10^{-2})$.

319^а. Виконайте множення та подайте результат у стандартному вигляді:

1) $(1,2 \cdot 10^{-8}) \cdot (4 \cdot 10^5)$; 2) $(1,5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^3)$.

320^а. Виконайте ділення та подайте результат у стандартному вигляді:

1) $(4,2 \cdot 10^7) : (2,1 \cdot 10^3)$; 2) $(1,4 \cdot 10^5) : (2,8 \cdot 10^{-2})$.

321^а. Виконайте ділення та подайте результат у стандартному вигляді:

1) $(7,2 \cdot 10^5) : (2,4 \cdot 10^3)$; 2) $(1,7 \cdot 10^{-3}) : (8,5 \cdot 10^{-7})$.

322^а. Порівняйте числа:

1) $1,7 \cdot 10^5$ і $2,8 \cdot 10^5$; 2) $1,3 \cdot 10^{-4}$ і $1,29 \cdot 10^{-4}$.

323^а. Порівняйте числа:

1) $2,8 \cdot 10^{-3}$ і $3,7 \cdot 10^{-3}$; 2) $1,42 \cdot 10^5$ і $1,5 \cdot 10^5$.

324^а. Виконайте дію та подайте результат у стандартному вигляді:

1) $2,7 \cdot 10^3 + 3,2 \cdot 10^3$; 2) $4,7 \cdot 10^{-15} - 3,2 \cdot 10^{-15}$.

325^а. Виконайте дію та подайте результат у стандартному вигляді:

1) $4,7 \cdot 10^{-8} + 5,1 \cdot 10^{-8}$; 2) $2,9 \cdot 10^7 - 1,8 \cdot 10^7$.

326^а. Порівняйте числа:

1) $2,9 \cdot 10^8$ і $1,8 \cdot 10^9$; 2) $1,12 \cdot 10^{-7}$ і $1,12 \cdot 10^{-8}$.

327^а. Порівняйте числа:

1) $1,7 \cdot 10^5$ і $1,7 \cdot 10^4$; 2) $1,8 \cdot 10^{-6}$ і $8,9 \cdot 10^{-7}$.

328^а. Виконайте дії та результат подайте у стандартному вигляді:

1) $2,7 \cdot 10^4 + 3,2 \cdot 10^5$; 2) $1,42 \cdot 10^{-1} - 2,8 \cdot 10^{-2}$.

329^а. Виконайте дії та результат подайте у стандартному вигляді:

1) $2,7 \cdot 10^{-5} + 1,7 \cdot 10^{-4}$; 2) $3,7 \cdot 10^3 - 2,3 \cdot 10^2$.

330^а. Площа Автономної Республіки Крим дорівнює $2,61 \cdot 10^4$ км², а площа Чернівецької області дорівнює $8,1 \cdot 10^3$ км². Скільки відсотків становить площа Чернівецької області від площі Автономної Республіки Крим? (Відповідь округліть до цілих.)

331^а. Відстань від Землі до найближчої після Сонця зорі α Центавра дорівнює $4,1 \cdot 10^{13}$ км. За який час доходить

від Землі світло до зорі αЦентавра? (Швидкість світла $3 \cdot 10^5$ км/с.)

332③. Виразіть:

- 1) $8,3 \cdot 10^6$ т у грамах; 2) $3,72 \cdot 10^{-3}$ г у тоннах;
3) $4,9 \cdot 10^{-5}$ км у сантиметрах; 4) $4,97 \cdot 10^7$ см у метрах.

333③. Подайте:

- 1) $3,87 \cdot 10^5$ см у кілометрах; 2) $4,92 \cdot 10^{-2}$ км у метрах;
3) $3,7 \cdot 10^{-3}$ кг у центнерах; 4) $1,8 \cdot 10^9$ т у кілограмах.

334④. Порядок числа a дорівнює -18 . Яким є порядок числа:

- 1) $100a$; 2) $0,00001a$; 3) $a \cdot 10^7$; 4) $\frac{a}{10^{-3}}$?

335④. Порядок числа b дорівнює 15 . Яким є порядок числа:

- 1) $1000b$; 2) $0,01b$; 3) $b \cdot 10^{-3}$; 4) $\frac{b}{10^5}$?

 **336②.** Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 2x - 1$; 2) $y = -5x$; 3) $y = -\frac{2}{3}x + 5$;
4) $y = -5$; 5) $y = 4$; 6) $y = 0,3x + 2$.

337③. Обчисліть значення виразу:

- 1) $\frac{2x^4 - 6x^2}{12x^3 - 4x^5}$, якщо $x = -0,5$; 2) $\frac{8y^6 - 8y^4}{4y^4 + 4y^3}$, якщо $y = 10$.

338③. Сергій сказав Олексію: «Дай мені 2 грн., і у нас їх буде порівну». Олексій відповів Сергію: «Краще ти дай мені 2 грн., і у мене буде грошей удвічі більше, ніж у тебе». Скільки грошей у кожного хлопця?

339③. Скільки непарних п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 4; 5; 6; 7; 8, використовуючи кожен цифру тільки один раз.

Уроки 29, 30 § 12. ФУНКЦІЯ $y = \frac{k}{x}$, ЇЇ ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ

Приклад 1. Пішоходу треба пройти 16 км. Якщо він буде йти зі швидкістю v км/год, то залежність часу t (у год), який він витратить на весь шлях, від швидкості руху виражається формулою $t = \frac{16}{v}$. При збільшенні значення v у кілька разів значення t зменшується у стільки ж разів. Кажуть, що змінні t і v *обернено пропорційні*.

Приклад 2. Площа прямокутника дорівнює 32 см^2 , а одна з його сторін a см. Тоді другу сторону b (у см) можна знайти за формулою $b = \frac{32}{a}$. У цьому прикладі змінні a і b також обернено пропорційні.

У розглянутих прикладах змінні t , v , a і b набувають лише додатних значень. Далі розглядатимемо функції, задані формулою виду $y = \frac{k}{x}$ (де k — число, $k \neq 0$), в яких змінні x і y можуть набувати як додатних, так і від'ємних значень. Кожну з таких функцій називають **оберненою пропорційністю**.



Оберненою пропорційністю називають функцію, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$, де x — незалежна змінна, k — деяке число, відмінне від нуля.

Областю визначення функції $y = \frac{k}{x}$ є множина всіх чисел, крім нуля, оскільки вираз $\frac{k}{x}$ не має змісту, якщо $x = 0$.

Побудуємо графік функції $y = \frac{k}{x}$ окремо у випадку, коли $k > 0$ і коли $k < 0$.

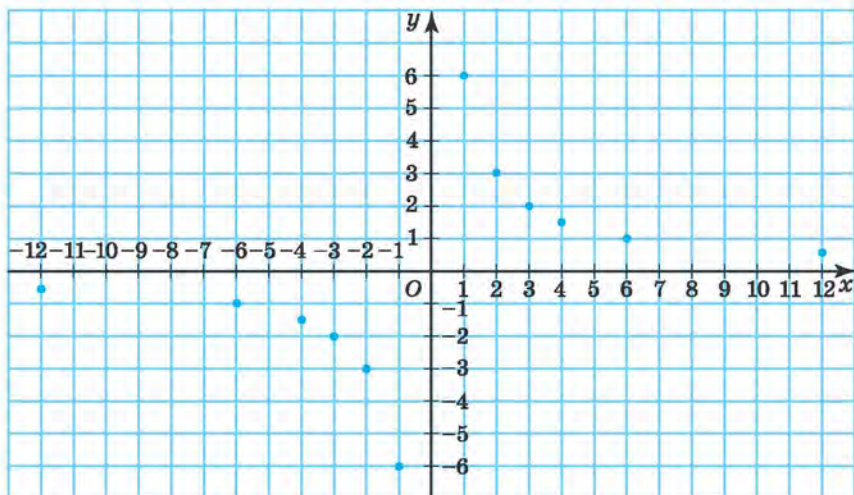
Приклад 3. Побудувати графік функції $y = \frac{6}{x}$.

Розв'язання. Складемо таблицю значень функції $y = \frac{6}{x}$ для кількох значень аргументу:

x	-12	-6	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	6	12
y	-0,5	-1	-1,5	-2	-3	-6	6	3	2	1,5	1	0,5

Позначимо на координатній площині точки, координати яких подано в таблиці (мал. 2).

Якби на цій площині позначити більшу кількість точок, координати яких задовольняють формулу $y = \frac{6}{x}$, а потім з'єднати їх плавною лінією, то дістали б графік функції $y = \frac{6}{x}$ (мал. 3). Криву, що є графіком оберненої пропорційності, називають **гіперболою**. Гіпербола складається з двох віток. Одна з них розміщена у першій координатній чверті, а друга — в третій. Гіпербола не перетинає координатних осей: на графіку немає точки, у якої абсциса $x = 0$, і немає точки, у якої

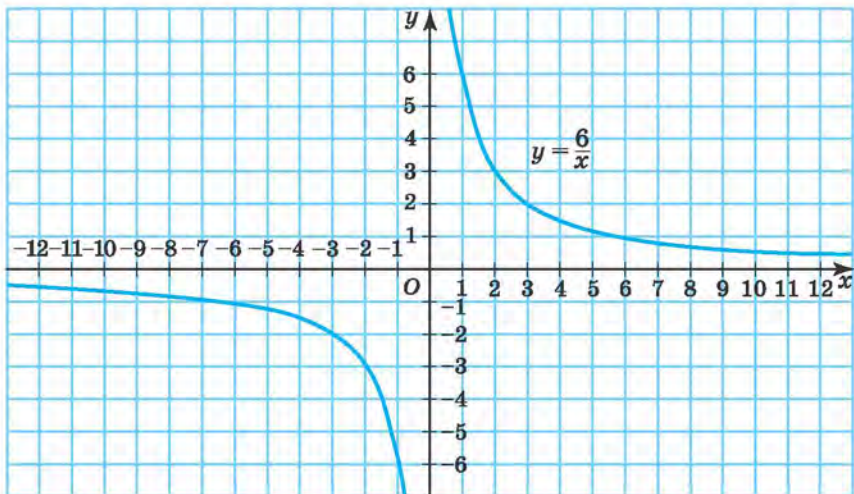


Мал. 2

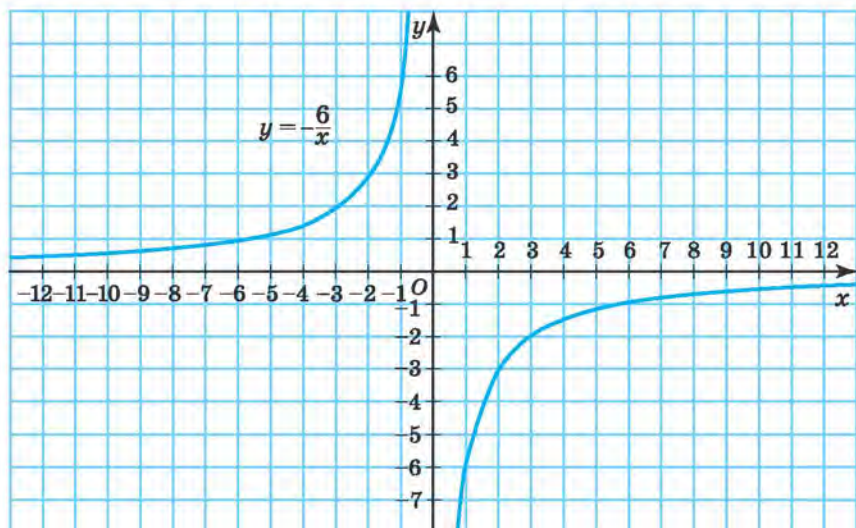
ордината $y = 0$ (оскільки рівняння $\frac{6}{x} = 0$ не має розв'язків).

Чим більшим за модулем є значення x , тим меншим за модулем є значення y , і навпаки, чим меншим за модулем є значення x , тим більшим за модулем є значення y . Це означає, що вітки гіперболи необмежено наближаються до осей координат.

Такий самий вигляд має графік функції $y = \frac{k}{x}$ при будь-якому $k > 0$.



Мал. 3



Мал. 4

Приклад 4. Побудувати графік функції $y = -\frac{6}{x}$.

Розв'язання. Міркуючи аналогічно до попереднього прикладу, дістанемо графік функції $y = -\frac{6}{x}$ (мал. 4).

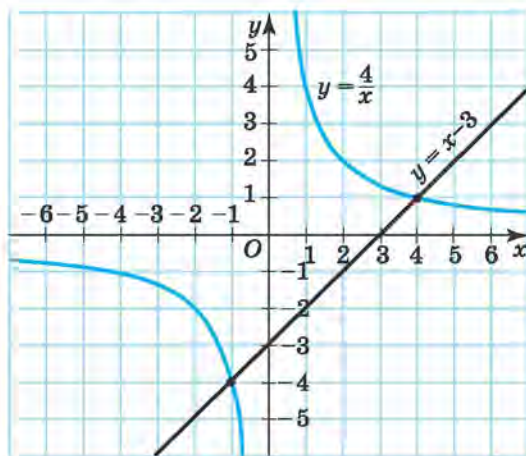
Це також гіпербола, одна з віток якої розміщена у другій чверті, а друга — у четвертій. Такий самий вигляд має графік функції $y = \frac{k}{x}$ при будь-якому $k < 0$.

Узагальнимо властивості оберненої пропорційності $y = \frac{k}{x}$.



1. Область визначення функції складається з усіх чисел, крім $x = 0$.
2. Область значень функції складається з усіх чисел, крім $y = 0$.
3. Графік функції — гіпербола, вітки якої розміщені в першій і третій координатних чвертях, якщо $k > 0$, і в другій та четвертій, якщо $k < 0$.
4. Вітки гіперболи необмежено наближаються до осей координат.

Приклад 5. Побудувати в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{4}{x}$ і $y = x - 3$. Знайти точки перетину цих графіків та розв'язки рівняння $\frac{4}{x} = x - 3$.



Мал. 5

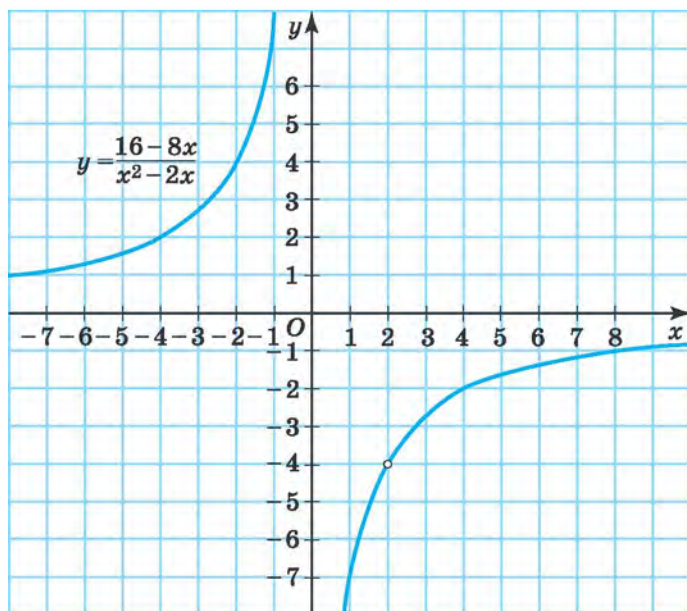
Розв'язання. Графіком функції $y = \frac{4}{x}$ є гіпербола, розміщена у I і III чверті, а графіком функції $y = x - 3$ є пряма, яка проходить через точки $(0; -3)$ і $(3; 0)$ (мал. 5). Вони перетинаються в точках $(4; 1)$ і $(-1; -4)$. Абсциси цих точок $x = 4$ і $x = -1$ є розв'язками рівняння $\frac{4}{x} = x - 3$. Справді, якщо $x = 4$, то вирази $\frac{4}{x}$ і $x - 3$ набувають рівних значень $\left(\frac{4}{x} = \frac{4}{4} = 1 \text{ і } x - 3 = 4 - 3 = 1\right)$. Також рівних значень ці вирази набувають, якщо $x = -1$ $\left(\frac{4}{x} = \frac{4}{-1} = -4 \text{ і } x - 3 = -1 - 3 = -4\right)$.

Отже, $x = 4$ і $x = -1$ — корені рівняння $\frac{4}{x} = x - 3$.

Запропонований метод розв'язування рівнянь називають **графічним методом розв'язування рівнянь**. Якщо абсциса точки перетину графіків функцій — ціле число, необхідно виконати перевірку, оскільки у більшості випадків корні рівняння цим методом визначаються наближено.

Приклад 6. Побудувати графік функції $y = \frac{16-8x}{x^2-2x}$.

Розв'язання. Область визначення функції складається з усіх чисел, крім тих, при яких знаменник $x^2 - 2x$ перетворюється на нуль. Оскільки $x^2 - 2x = 0$, коли $x = 0$ або $x = 2$, то область визначення складається з усіх чисел, крім чисел 0 і 2 . Спростуючи вираз $\frac{16-8x}{x^2-2x}$, маємо $\frac{16-8x}{x^2-2x} = \frac{8(2-x)}{x(x-2)} = -\frac{8(x-2)}{x(x-2)} = -\frac{8}{x}$. Отже, $y = -\frac{8}{x}$, якщо $x \neq 0$; $x \neq 2$.



Мал. 6

Графіком функції $y = \frac{16-8x}{x^2-2x}$ є гіпербола, що задається формулою $y = -\frac{8}{x}$, але без точки з абсцисою 2, тобто точки $(2; -4)$. Графік функції $y = \frac{16-8x}{x^2-2x}$ подано на малюнку 6.



Яку функцію називають оберненою пропорційністю? • Що є графіком оберненої пропорційності? • Які властивості має обернена пропорційність?

340⁰. (Усно.) Які з функцій задають обернену пропорційність:

- 1) $y = \frac{8}{x}$; 2) $y = \frac{x}{8}$; 3) $y = -\frac{x}{2}$; 4) $y = -\frac{2}{x}$;
 5) $y = \frac{0}{x}$; 6) $y = 7$; 7) $y = \frac{0,0002}{x}$; 8) $y = \frac{0,0002}{x^2}$?

341⁰. Виписати функції, що задають обернену пропорційність:

- 1) $y = \frac{x}{7}$; 2) $y = \frac{7}{x}$; 3) $y = -\frac{3}{x}$; 4) $y = -\frac{x}{3}$;
 5) $y = -9$; 6) $y = -\frac{0,01}{x}$; 7) $y = -\frac{0,01}{x^2}$; 8) $y = 0,01x$.

342⁰. В яких координатних чвертях розміщено графік функції: 1) $y = \frac{15}{x}$; 2) $y = -\frac{8}{x}$?

343®. Обчисліть значення функції $y = \frac{20}{x}$, якщо значення аргументу дорівнює $-2, 5, -10, 1$.

344®. Обчисліть значення функції $y = \frac{12}{x}$, якщо значення аргументу дорівнює $-3, 4, -6, 1$.

345®. Обернену пропорційність задано формулою $y = \frac{100}{x}$. Заповніть таблицю:

x	-50		-20		5	10		
y		-4		1000			5	0,1

346®. Обернену пропорційність задано формулою $y = \frac{80}{x}$. Заповніть таблицю:

x	-80	-40		1			160	
y			-5		20	16		0,1

347®. Побудуйте графік функції $y = -\frac{8}{x}$, склавши таблицю значень функції для значень аргументу $-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8$.

348®. Побудуйте графік функції $y = \frac{12}{x}$, склавши таблицю значень функції для значень аргументу $-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12$.

349®. Не виконуючи побудови графіка функції $y = \frac{128}{x}$, вкажіть, через які з даних точок проходить цей графік:

1) $A(4; 32)$; 2) $B(-8; 16)$; 3) $C(-2; -64)$; 4) $D(0; -128)$.

350®. Чи належить графіку функції $y = -\frac{162}{x}$ точка:

1) $A(-6; 27)$; 2) $B(9; 18)$; 3) $C(0; -162)$; 4) $D(81; -2)$?

351®. (Усно.) Графіки яких функцій проходять через точку $A(4; -3)$:

1) $y = \frac{12}{x}$; 2) $y = -\frac{12}{x}$; 3) $y = -\frac{24}{x}$; 4) $y = x - 7$?

352®. За 45 грн. купили y кг цукерок по x грн. за кожний кілограм. Виразіть формулою залежність y від x . Чи є ця залежність оберненою пропорційністю?

353^а. Побудуйте графік функції $y = \frac{10}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює $-2; 2,5; -1$;
- 2) значення аргументу, при яких функція дорівнює $10; -4; 2$;
- 3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень; додатних значень.

354^а. Побудуйте графік функції $y = -\frac{4}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює $-0,5; 2; -4$;
- 2) значення аргументу, при яких функція дорівнює $4; -1; 2$;
- 3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень; додатних значень.

355^а. Графік оберненої пропорційності проходить через точку $M(-4; 12)$. Задайте формулою цю обернену пропорційність.

356^а. Запишіть формулою функцію, яка є оберненою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку $P\left(12; 1\frac{1}{6}\right)$.

357^а. Функцію задано формулою $y = \frac{8}{x}$ для $1 \leq x \leq 4$. Яка область значень цієї функції?

358^а. Розв'яжіть графічно рівняння:

- 1) $\frac{8}{x} = 2$;
- 2) $\frac{18}{x} = 2x$;
- 3) $-\frac{4}{x} = 3 - x$.

359^а. Розв'яжіть графічно рівняння:

- 1) $\frac{6}{x} = 3$;
- 2) $\frac{4}{x} = x$;
- 3) $-\frac{5}{x} = 4 - x$.

360^а. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \frac{4}{|x|}$;
- 2) $y = -\frac{8}{|x|}$.

361^а. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} -\frac{6}{x}, & \text{якщо } x \leq -2, \\ -1,5x, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ -\frac{6}{x}, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$

362^а. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{якщо } x \leq -2, \\ x, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ \frac{4}{x}, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$

363④. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{24}{(x+3)^2 - (x-3)^2}$; 2) $y = \frac{6x-18}{3x-x^2}$.



364②. Обчисліть:

1) 3^{-4} ; 2) $(-19)^{-1}$; 3) $\left(1\frac{1}{7}\right)^{-2}$; 4) $(-0,2)^{-3}$.

365③. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{2}{3}a^{-1}b\right)^{-2} \cdot \left(\frac{9}{10}a^{-3}b^{-2}\right)^{-1}$; 2) $\left(\frac{4mn^{-2}}{5a}\right)^{-1} \cdot 8m^{-3}n^{-2}a^5$.

366⑥. Обчисліть: $((1 - (1 + 2^{-1})^{-1})^{-1})^{-4}$.

Урок 31

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО § 9—12

1①. Подайте у вигляді степеня з основою a :

1) a^2a^{-3} ; 2) $a^{-5}a^{-4}$; 3) $a^5 : a^{-7}$; 4) $(a^{-2})^3$.

2①. Чи записано у стандартному вигляді число:

1) $0,37 \cdot 10^5$; 2) $2,4 \cdot 10^{-12}$; 3) $1,5 \cdot 10^8$; 4) $3,5 \cdot 8^{10}$?

3①. Які з функцій задають обернену пропорційність:

1) $y = \frac{x}{5}$; 2) $y = \frac{5}{x}$; 3) $y = -\frac{6}{x}$; 4) $y = -\frac{6}{x^2}$?

4②. Обчисліть:

1) 2^{-3} ; 2) $(-5)^{-1}$; 3) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 4) $(2,7 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^{-8})$.

5②. Спростіть вираз:

1) $-7a^{-3}b^9 \cdot 1\frac{1}{7}a^{-5}b^{-3}$; 2) $\left(-\frac{2}{3}x^3y\right) \cdot \left(-\frac{9}{10}x^{-5}y^{-1}\right)$.

6②. Подайте число у стандартному вигляді:

1) 27 000; 2) 0,02; 3) 371,5; 4) 0,0109.

7③. Подайте у вигляді виразу, який не містить степеня з від'ємним показником:

1) $(4,2a^7b^{-9}) : (0,7a^{-3}b^{-5})$; 2) $\left(\frac{2x^4}{5y^7}\right)^{-2} \cdot 4x^8y^{-18}$.

8③. Побудуйте графік функції $y = -\frac{12}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть:

- 1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 4; -2;
- 2) значення аргументу, при яких функція дорівнює -6; 1;
- 3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень; додатних значень.

9④. Скоротіть дроб:

$$1) \frac{48}{5^{n+2}-5^n}; \quad 2) \frac{x^{-8}+x^2}{x+x^6}.$$

Додаткові завдання

10④. Обчисліть: $((1 + (1 - 2^{-1})^{-1})^{-1})^{-3}$.

11④. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} \frac{8}{x}, & \text{якщо } x \leq -2, \\ -4, & \text{якщо } -2 < x < 3, \\ -\frac{12}{x}, & \text{якщо } x \geq 3. \end{cases}$

Урок 32

Резервний час.

Вправи для повторення розділу I

До § 1

367①. З раціональних виразів $m^3 - mp^2$; $\frac{t^2+2}{t-7}$; $\frac{p(3-\frac{2}{x})}{x^2}$; $\frac{17}{x-y}$;

$\frac{x^2+ax-a^2}{19}$; $\frac{(x+p):y}{a-b}$ виписіть:

- 1) цілі раціональні вирази;
- 2) дробові раціональні вирази;
- 3) раціональні дроб.

368②. Знайдіть область допустимих значень виразу:

$$1) c^2 - 3c; \quad 2) \frac{m+2}{m-8}; \quad 3) \frac{a}{a-9} + \frac{a-9}{a}; \quad 4) \frac{3+c}{c(c-1)}.$$

369③. Пішохід пройшов 12 км по шосе зі швидкістю a км/год і 8 км по степовій дорозі зі швидкістю b км/год. Скільки часу витратив пішохід на всю дорогу? Складіть вираз та знайдіть його значення, якщо $a = 5$; $b = 4$.

370③. Обчисліть значення дробу $\frac{x^2+2xy+y^2}{0,1x}$, якщо $x = -100$,
 $y = 99$.

371^а. Знайдіть допустимі значення змінних:

1) $\frac{1}{|x|+7}$; 2) $\frac{p}{|m|-m}$; 3) $\frac{1}{1-\frac{1}{|a|}}$; 4) $\frac{3}{|2x-7|-3}$.

372^а. При яких значеннях x дробі дорівнюють нулю:

1) $\frac{x^2-1}{x+1}$; 2) $\frac{x+3}{x^2-9}$; 3) $\frac{|x|-2}{(x-2)(x+5)}$; 4) $\frac{|x|-x}{x(x-3)}$.

До § 2

373^а. Скоротіть дробі:

1) $\frac{5m}{20n}$; 2) $\frac{4x}{5x}$; 3) $\frac{p}{10p}$; 4) $\frac{-3}{6t}$; 5) $\frac{ax}{xb}$; 6) $\frac{mn}{2m}$.

374^а. Скоротіть дробі:

1) $\frac{a^2b^3}{ab^7}$; 2) $\frac{-63xa^5}{81xa^6}$; 3) $\frac{p(a-2)}{m(a-2)}$; 4) $\frac{7a-14b}{3a-6b}$;
5) $\frac{a-2y}{a^2-2ay}$; 6) $\frac{m^2-1}{7m+7}$; 7) $\frac{x^2-4x+4}{3x-6}$; 8) $\frac{x^2-2xy}{y-2x}$.

375^а. Зведіть дріб:

1) $\frac{c}{a^2}$ до знаменника a^5 ; 2) $\frac{p}{3c}$ до знаменника $12c^7$.

376^а. Подайте частку у вигляді дробу та скоротіть цей дріб:

1) $(x^3+8):(x+2)$; 2) $(a^2-5a+25):(a^3+125)$.

377^а. Обчисліть значення дробу:

1) $\frac{10xy-5x^2}{8y^2-4xy}$, якщо $x = 0,2$; $y = 0,25$;
2) $\frac{a^2-4b^2}{3a^2b-6ab^2}$, якщо $a = 20$; $b = -10$.

378^а. Зведіть дріб $\frac{3}{a-2}$ до знаменника:

1) $7a-14$; 2) a^2-2a ; 3) $16-8a$; 4) a^2-4 .

379^а. Доведіть тотожність $\frac{22,5a^2-2,5b^2}{7,5a^2-2,5ab} = \frac{3a+b}{a}$.

380^а. Відомо, що $x+4y=5$. Знайдіть значення дробу $\frac{2x-8y}{0,2x^2-3,2y^2}$.

381^а. Подайте вираз $5a+4b$ у вигляді дробу зі знаменником:

1) 5; 2) $-a$; 3) $2b$; 4) $2a-3b$.

382^а. Скоротіть дріб $\frac{x^2-y^2-z^2+2yz}{y^2-x^2-z^2-2xz}$.

До § 3

383①. Виконайте дію:

$$1) \frac{4m}{7} + \frac{m}{7}; \quad 2) \frac{9p}{8a} - \frac{2p}{8a}; \quad 3) \frac{m-n}{p} + \frac{n}{p}; \quad 4) \frac{12a^2}{5m} - \frac{3a^2}{5m}.$$

384②. Скоротіть вираз:

$$1) \frac{3m-7}{12m} + \frac{13-5m}{12m} - \frac{6m-2}{12m}; \quad 2) \frac{m^2+1}{a(m-1)} - \frac{2}{a(m-1)};$$

$$3) \frac{x-8}{x^2-25} + \frac{13}{x^2-25}; \quad 4) \frac{a-4}{a-2} - \frac{2}{2-a}.$$

385②. Обчисліть значення виразу $\frac{m+1}{m^2-16} + \frac{3}{m^2-16}$, якщо $m = 14$.

386③. Перетворіть у дріб вираз:

$$1) \frac{9b+1}{b^2-4} + \frac{8-b}{4-b^2} - \frac{7b-1}{b^2-4}; \quad 2) \frac{5m}{m^3-1} - \frac{1-4m}{1-m^3} + \frac{m^2}{m^3-1}.$$

387③. При якому значенні a вирази $\frac{2x+3}{x-2}$ і $\frac{2x}{x-2} + \frac{a}{2-x}$ тотожно рівні?

388③. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу не залежить від a : $\frac{8+3a}{5-4a} + \frac{13a-14}{4a-5} - \frac{2a+7}{5-4a}$.

389④. Спростіть вираз:

$$1) \frac{16m^2}{(4m-1)(4m+1)} - \frac{8m}{16m^2-1} - \frac{1}{(1-4m)(1+4m)};$$

$$2) \frac{8x-9}{(2x+1)^2} - \frac{8x^3+3x-1}{(1+2x)^2} - \frac{5x-7}{1+4x^2+4x}.$$

390④. Доведіть, що вираз $\frac{x+6}{(2-x)^4} + \frac{x^2-3}{(x-2)^4} - \frac{5x-1}{(2-x)^4}$ при всіх значеннях $x \neq 2$ набуває додатних значень.

391③. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2}{x-1} + \frac{1}{1-x}$.

392④. Знайдіть, при яких натуральних значеннях n набуває натуральних значень дріб:

$$1) \frac{n+2}{n}; \quad 2) \frac{n^2+6}{n}; \quad 3) \frac{n^2-10n+16}{n}.$$

До § 4

393①. Виконайте додавання і віднімання:

$$1) \frac{c}{5} - \frac{a}{4}; \quad 2) \frac{a}{3} + \frac{b}{12}; \quad 3) \frac{p}{x} - \frac{x}{a}; \quad 4) \frac{4}{m} + \frac{n}{7}.$$

394②. Виконайте дію:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{2}{3p} - \frac{4}{9p}; & 2) \frac{7x^2}{12m} + \frac{x^2}{m}; & 3) \frac{3x-2y}{12} + \frac{y+x}{6}; \\ 4) \frac{3a+b}{6} - \frac{4a-b}{8}; & 5) \frac{1}{p^2} - \frac{p-2}{p^3}; & 6) \frac{4a+b}{2a} - \frac{6b-a}{3b}. \end{array}$$

395②. Спростіть:

$$1) \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn}; \quad 2) \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}; \quad 3) \frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b} - \frac{1}{ab}.$$

396②. Подайте у вигляді дробу:

$$\begin{array}{lll} 1) 2x - \frac{1}{x}; & 2) 4p - \frac{4p^2-1}{p}; & 3) \frac{2}{m} + \frac{3}{m-1}; \\ 4) \frac{m}{1-m} + \frac{1+m}{m}; & 5) \frac{c}{3c-1} + \frac{c}{3c+1}; & 6) \frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y}. \end{array}$$

397②. Виконайте дію:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{2c-7}{2(c+5)} + \frac{4-c}{c+5}; & 2) \frac{a-1}{3a+6} - \frac{a}{4a+8}; & 3) \frac{7}{x} - \frac{14}{x(x+2)}; \\ 4) \frac{9}{m^2+4m} - \frac{5}{m+4}; & 5) \frac{b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a+b}; & 6) \frac{x+3}{x^2+2x+1} - \frac{1}{x+1}. \end{array}$$

398③. Доведіть, що для всіх значень змінної значення виразу $\frac{(a-3)(a-7)}{12} - \frac{(a-7)(a-1)}{8} + \frac{(a-1)(a-3)}{24}$ не залежить від a .

399③. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{4m+18}{m^2-9} - \frac{5}{m-3} + \frac{1}{m+3}; & 2) \frac{2x}{2x+3} + \frac{5}{3-2x} - \frac{4x^2+9}{4x^2-9}; \\ 3) \frac{9x}{3xy+2y^2} - \frac{4y}{3x^2+2xy}; & 4) \frac{4a}{4a^2-1} - \frac{2a+1}{6a-3} + \frac{2a-1}{4a+2}; \\ 5) \frac{2x-1}{x^2+x+1} + \frac{4x^2+3x-7}{x^3-1}; & 6) \frac{a^2}{3ab-2-a+6b} - \frac{a}{3b-1}. \end{array}$$

400④. Доведіть тотожність:

$$\begin{array}{l} 1) \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0; \\ 2) \frac{yz}{(x-y)(x-z)} + \frac{xz}{(y-x)(y-z)} + \frac{xy}{(z-x)(z-y)} = 1. \end{array}$$

401④. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу

$$\frac{3x+2}{9x^2-6x+4} - \frac{18x}{27x^3+8} - \frac{1}{3x+2}$$

дорівнює нулю.

402^а. Знайдіть значення a і b , при яких є тотожністю рівність:

$$1) \frac{3x}{x+2} - \frac{9x+3}{3x-1} = \frac{ax+b}{3x^2+5x-2}; \quad 2) \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}.$$

403^а. Човен, власна швидкість якого v км/год, пройшов відстань s км між містами A і B і повернувся назад за t год. Виразіть t через s і v , якщо швидкість течії 3 км/год. Спростіть утворений вираз і обчисліть його значення, якщо $v = 12$, $s = 45$.

До § 5

404^а. Виконайте множення:

$$1) \frac{7}{m} \cdot \frac{m}{9}; \quad 2) \frac{p^3}{4} \cdot \frac{5}{p}; \quad 3) \frac{4}{b} \cdot \frac{b^3}{3}; \quad 4) \frac{c}{5} \cdot \frac{10}{c^2}.$$

405^а. Подайте у вигляді дробу вираз:

$$1) \frac{4}{15m^2} \cdot \frac{5m}{16}; \quad 2) \frac{t^3}{15} \cdot \frac{20}{tk}; \quad 3) -\frac{24m}{5a^2} \cdot \frac{15a}{8m^3};$$

$$4) -12x \cdot \left(-\frac{p}{16x^2}\right); \quad 5) 15m^2n \cdot \frac{7}{25m^3n}; \quad 6) \frac{7c^3}{12a^8} \cdot \left(-\frac{8a^5}{21c}\right).$$

406^а. Виконайте множення:

$$1) \frac{x^2-3x}{7} \cdot \frac{21}{x^2-9}; \quad 2) -\frac{3x-y}{6x+6} \cdot \frac{8x+8}{y-3x};$$

$$3) \frac{a^2-2a+1}{15m^2} \cdot \frac{5m}{a^2-1}; \quad 4) \frac{c^2+2c}{12ab} \cdot \frac{20a^2b}{c^2+4c+4}.$$

407^а. Піднесіть до степеня:

$$1) \left(\frac{c}{2m}\right)^3; \quad 2) \left(-\frac{p}{a^2}\right)^3; \quad 3) \left(-\frac{3a^3}{b^2}\right)^4; \quad 4) \left(-\frac{t^2c^3}{p^{10}}\right)^8.$$

408^а. Виконайте множення:

$$1) \frac{a^7+a^5}{a^6-a^4} \cdot \frac{a^6-a^8}{a^3+a^5}; \quad 2) -\frac{a^2-25}{a^2-4b^2} \cdot \left(-\frac{a+2b}{2a-10}\right);$$

$$3) \frac{5c^5-3c^4}{c^3-8} \cdot \frac{2c-4}{3c^2-5c^3}; \quad 4) (a^2+4a+4) \cdot \left(-\frac{4}{10+5a}\right).$$

409^а. Подайте у вигляді дробу:

$$1) \left(-\frac{25x^2y^3}{9t}\right)^2 \cdot \left(\frac{3t^4}{5xy^2}\right)^3; \quad 2) \frac{(a-b)^3}{a+b} \cdot \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}.$$

410^а. Виконайте множення:

$$\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2-(a-c)x-ac} \cdot \frac{x^2-c^2}{x^2-a^2}.$$

411^④. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{0,5x^2+2}{0,5x^2-x+2} \cdot (2-x) \cdot \frac{4+0,5x^3}{8-0,5x^4}$$

не залежить від значення змінної.

412^④. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{a^2-ab+ac-bc}{a^2+ab-ac-bc} \cdot \frac{a^2+bc-ab-ac}{a^2+bc+ab+ac}$$

невід'ємне при всіх допустимих значеннях змінних.

До § 6

413^①. Виконайте ділення:

$$1) \frac{c}{3} : \frac{a}{2}; \quad 2) \frac{p}{4} : \frac{c}{17}; \quad 3) \frac{3}{a} : \frac{7}{a}; \quad 4) \frac{5}{m^2} : \frac{3}{m}.$$

414^②. Спростіть вираз:

$$1) \frac{12a}{5b^2} : \frac{16a}{15b}; \quad 2) -\frac{7m^2}{n^2} : \frac{21m}{n^3}; \quad 3) -\frac{5a^3}{4b^2} : (-10a^2);$$
$$4) 20m^2n : \left(-\frac{4m^3}{p}\right); \quad 5) \frac{5c^2}{9m^3} : \frac{25c^3}{81m}; \quad 6) -\frac{22x^2}{39a} : \left(-\frac{33x^3}{26a^4}\right).$$

415^②. Виконайте ділення:

$$1) \frac{ax-xy}{a} : \frac{a^2-ay}{x}; \quad 2) \frac{a^2-b^2}{5a} : \frac{3a+3b}{10a^2};$$
$$3) \frac{x^2-36}{a-2b} : \frac{x^2+12x+36}{2b-a}; \quad 4) \frac{3a-a^2}{a^2-4a+4} : \frac{3-a}{4-2a}.$$

416^③. Подайте у вигляді дробу вираз:

$$1) \frac{27+x^3}{81-x^4} : \frac{x^2-3x+9}{x^2+9}; \quad 2) \frac{(10x-4y)^2}{100} : (2,5x^2 - 0,4y^2).$$

417^③. Подайте дріб $\frac{\frac{a^2+5a}{a^2-9}}{\frac{a^2-25}{a^2-3a}}$ у вигляді раціонального дробу.

418^③. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{2x^3+2y^3}{xy-x^2} : \frac{x^3-x^2y+xy^2}{x^2-y^2}$$

не додатне для всіх допустимих значень змінної.

419^④. Обчисліть значення виразу

$$\frac{27a^3-64b^3}{b^2-4} : \frac{9a^2+12ab+16b^2}{b^2+4b+4},$$

якщо $a = 4$; $b = 3$.

420³. Доведіть тотожність:

$$\frac{a^2-16}{a^2-ab+5a-5b} : \frac{a^2+5a+4}{a^2-ab+a-b} = \frac{a-4}{a+5}.$$

До § 7

421². Виконайте дії:

$$1) \left(\frac{2a}{2a-1} + 1 \right) \cdot \frac{6a-3}{4a^2-a}; \quad 2) \left(m + \frac{m^2}{3-m} \right) : \frac{m+3}{m-3};$$

$$3) \left(\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b} \right) : \frac{ab}{a+b}; \quad 4) \left(p - \frac{p^2-3}{p+1} \right) \cdot \frac{p^2-1}{p+3}.$$

422². Доведіть тотожність:

$$1) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \right) : (a+b) = \frac{a+b}{ab}; \quad 2) \frac{m-n}{mn} : \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = \frac{mn}{m+n}.$$

423³. Спростіть вираз:

$$1) \left(\frac{1}{a+b} - \frac{a}{b^2+ab} \right) \cdot \left(\frac{b^2}{a^3-ab^2} - \frac{b}{a^2-ab} \right);$$

$$2) \left(\frac{6a+1}{a-3} + \frac{6a-1}{a+3} \right) : \frac{2a^2+1}{a-3}.$$

424³. Обчисліть значення виразу

$$\left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} \right) : \left(\frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{b} \right),$$

якщо $a = 4$; $b = 3$.

425³. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу не залежить від значення змінної:

$$1) \frac{2x}{x+3} + (x-3)^2 \left(\frac{2}{x^2-6x+9} + \frac{1}{9-x^2} \right);$$

$$2) \left(\frac{3}{4m^2-9} - \frac{2m}{4m^2-12m+9} \right) \cdot \frac{8m^3-18m}{4m^2+9} + \frac{3}{2m-3}.$$

426³. Доведіть тотожність:

$$1) \left(\frac{a}{a-3} + \frac{10}{a-3} + \frac{25}{a^2-3a} \right) : \left(\frac{5}{a^2} + \frac{2}{a} + \frac{1}{5} \right) = \frac{5a}{a-3};$$

$$2) \left(\frac{a-1}{a^2-a+1} - \frac{4a-5}{a^3+1} \right) : \frac{2-a}{4a^2-4a+4} = \frac{4(2-a)}{a+1}.$$

427³. Дано $x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$. Знайдіть значення виразу $x + \frac{1}{x}$.

428^а. Спростіть вираз:

$$\left(\frac{4}{x^2-6x} - \frac{2}{6-x} + 1\right)\left(\frac{1}{x^2-4} - \frac{2}{x^3-6x^2+12x-8}\right).$$

429^а. Доведіть, що вираз

$$\frac{x^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{8x^2-32}{x^3-2x^2} + \frac{x^5-8x^2}{x} : (x^2-4)$$

набуває додатних значень при всіх допустимих значеннях змінної.

430^а. Доведіть, що вираз

$$\left(\frac{3m+2}{3m^2+1} - \frac{18m^3-m-9}{9m^4-1} + \frac{3m-2}{3m^2-1}\right) : \frac{m^2+10m+25}{9m^4-1}$$

набуває від'ємних значень для всіх $m < -5$.

431^а. Чи може значення виразу

$$\left(\frac{1}{x^2-xy} - \frac{3y^2}{x^4-xy^3} - \frac{y}{x^3+x^2y+xy^2}\right)\left(y + \frac{x^2}{x+y}\right)$$

при деяких значеннях змінних x і y дорівнювати 0?

До § 8

432^а. Чи є число 3 коренем рівняння:

$$1) \frac{x}{x+2} = 0; \quad 2) \frac{x-3}{x+1} = 0; \quad 3) \frac{x+2}{x-3} = 0; \quad 4) \frac{x^2-9}{x} = 0?$$

433^а. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{3x-9}{2-x} = 0; \quad 2) \frac{2x-4}{2-x} = 0; \quad 3) \frac{x}{x+3} - 2 = 0; \\ 4) \frac{x}{x-3} = \frac{2}{5}; \quad 5) \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{x^2-8}{x+2}; \quad 6) \frac{4x^2-1}{x+1} = 4x.$$

434^а. Яке одне й те саме число треба додати до чисельника і знаменника дробу $\frac{5}{12}$, щоб дістати дріб $\frac{1}{2}$?

435^а. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{2x-1}{3x+1} - \frac{2x+1}{3x-5} = 0; \quad 2) 4 + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-x}; \\ 3) \frac{8}{3x-3} + \frac{2+x}{x-1} = \frac{5}{2-2x} - \frac{5}{18}; \quad 4) \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}.$$

436^а. Катер проходить 80 км за течією річки за той самий час, що й 64 км проти течії. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

437^а. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{5}{(3x-1)^2} + \frac{1}{(3x+1)^2} = \frac{6}{9x^2-1}; \quad 2) \frac{|4x+3|}{x-1} = \frac{7}{x-1}.$$

438Ⓢ. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати завдання за 8 днів. Перший робітник, працюючи один, може виконати роботу в 2 рази швидше, ніж другий. За скільки днів кожний з робітників, працюючи окремо, може виконати цю роботу?

439Ⓢ. Розв'яжіть рівняння, вважаючи x — невідомою змінною:

1) $\frac{a}{x} = 5$; 2) $\frac{a}{x} - \frac{b}{x} = 2$.

До § 9

440Ⓢ. Замініть дробом степінь з цілим від'ємним показником:

1) 8^{-3} ; 2) c^{-1} ; 3) $(3m)^{-2}$; 4) $(a+2)^{-5}$.

441Ⓢ. Замініть дріб степенем з цілим від'ємним показником:

1) $\frac{1}{8^2}$; 2) $\frac{1}{c}$; 3) $\frac{1}{(ab)^3}$; 4) $\frac{1}{(1-m)^4}$.

442Ⓢ. Обчисліть:

1) 9^{-2} ; 2) 4^{-1} ; 3) $(-5)^{-1}$; 4) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$;
5) $0,1^{-3}$; 6) $\left(2\frac{1}{7}\right)^{-1}$; 7) $0,25^{-4}$; 8) $(-2,5)^{-3}$.

443Ⓢ. Обчисліть значення виразу:

1) $100x^{-2}$, якщо $x = 1$; 10; 100;
2) $a^{-3}b$, якщо $a = 4$; $b = 8$.

444Ⓢ. Обчисліть значення виразів a^n і $-a^n$, якщо:

1) $a = -1$; $n = 8$; 2) $a = 5$; $n = -2$.

445Ⓢ. Не виконуючи обчислень, порівняйте:

1) 7^{-3} і $(-7)^3$; 2) $(-1,2)^0$ і $(-5)^{-5}$;
3) $(-13)^4$ і $(-13)^{-4}$; 4) $(-12)^6$ і 12^{-6} .

446Ⓢ. Обчисліть:

1) $-0,25^{-2} : (-4^3)$; 2) $0,02 \cdot (-0,5)^{-3}$;
3) $0,4^{-2} \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)^{-1}$; 4) $(-1,8)^0 - 4^{-1} \cdot 0,05^{-2}$.

447Ⓢ. Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $(1+a^{-3})(1+a)^{-2}$; 2) $\left(\frac{1}{x^{-1}} - \frac{1}{y^{-1}}\right) \cdot (y-x)^{-1}$.

448^②. Обчисліть $\frac{0,6^{-4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-6}}{(0,36)^{-5} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{-6}}$.

449^④. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{x-1}{2x}\right)^{-1} = 3$.

450^④. Спростіть вираз $\left(\frac{1}{b^{-8}} - \frac{1}{a^{-8}}\right) \cdot \left(\frac{a^{-8} + b^{-8}}{a^{-16} - b^{-16}}\right)$.

До § 10

451^①. Подайте у вигляді степеня з основою a :

- 1) $a^3 a^{-5}$; 2) $a^8 a^{-7} a^{-2}$; 3) $a^7 : a^{-3}$;
4) $a^{-5} : a^{-4}$; 5) $(a^2)^{-6}$; 6) $(a^{-3})^{-5}$.

452^②. Обчисліть:

- 1) $4^{-5} \cdot 4^6$; 2) $2^{-7} \cdot 2^4$; 3) $3^{-9} : 3^{-7}$;
4) $5^{17} : 5^{19}$; 5) $((0,3)^{-1})^{-2}$; 6) $\left(\left(\frac{1}{6}\right)^{-9}\right)^0$.

453^②. Спростіть вираз:

- 1) $12a^{-2}b \cdot \frac{1}{3}ab^{-3} \cdot \frac{3}{4}a^{-3}b^2$; 2) $\left(-\frac{7}{12}x^{-2}\right) \cdot (-6x^3) \cdot \frac{1}{7}x^{-8}$.

454^②. Подайте вираз x^{-12} , де $x \neq 0$, у вигляді степеня з основою:

- 1) x^2 ; 2) x^{-3} .

455^③. Знайдіть значення виразу $\frac{9}{28}x^{-2}y^7 \cdot \frac{14}{15}x^7y^{-2} \cdot (-10x^{-5}y^{-6})$, якщо $x = -1,19$; $y = -0,1$.

456^③. Спростіть вираз:

- 1) $(-3p^{-3}ca^{-2})^{-2} \cdot (0,1pc^{-2}a)^2$; 2) $\left(\frac{1}{4}a^{-4}b^{-2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^{-3}}{4b}\right)^{-3}$.

457^③. Доведіть тотожність

$$(a^{-2} - a^{-1} + 1) : (a^{-2} + a) = \frac{1}{a+1}.$$

458^①. Подайте вираз $x^3 + 5 + x^{-5}$ у вигляді добутку двох множників, один з яких дорівнює:

- 1) x ; 2) x^{-1} ; 3) x^{-3} .

459Ⓢ. Доведіть, що при будь-якому цілому n правильною є рівність:

1) $3 \cdot 7^n + 4 \cdot 7^n = 7^{n+1}$; 2) $5 \cdot 4^n - 4^n = 4^{n+1}$.

До § 11

460Ⓢ. Які з чисел записані у стандартному вигляді? Для чисел, записаних у стандартному вигляді, назвіть порядок числа:

1) $3,7 \cdot 10^8$; 2) $0,29 \cdot 10^{11}$; 3) 2,94; 4) 10,94;
5) $1,135 \cdot 10^{-11}$; 6) 0,311; 7) $1,02 \cdot 10^{15}$; 8) $1,02 \cdot 15^{10}$.

461Ⓢ. Подайте число у стандартному вигляді:

1) 130 000; 2) 783,5; 3) 0,0012; 4) 0,001002003.

462Ⓢ. Виконайте дію над числами, поданими у стандартному вигляді:

1) $(2,7 \cdot 10^8) \cdot (5 \cdot 10^{-5})$; 2) $(9,6 \cdot 10^{-8}) : (3,2 \cdot 10^{-12})$;
3) $2,7 \cdot 10^4 + 3,1 \cdot 10^4$; 4) $3,42 \cdot 10^{-5} - 2,11 \cdot 10^{-5}$.

463Ⓢ. Площа басейну Дніпра становить $5,04 \cdot 10^5$ км², а площа басейну річки Південний Буг становить 12,6 % площі басейну Дніпра. Знайдіть площу басейну річки Південний Буг. Подайте її у стандартному вигляді $a \cdot 10^n$, округливши число a до сотих.

464Ⓢ. Виразіть час у секундах і запишіть утворене число у стандартному вигляді:

1) 1 година; 2) 1 доба; 3) 1 місяць (30 днів);
4) 1 рік (365 днів); 5) 1 сторіччя.

До § 12

465Ⓢ. Які з функцій задають обернену пропорційність? В яких координатних чвертях розміщено їх графіки:

1) $y = \frac{x^2}{4}$; 2) $y = \frac{4}{x^2}$; 3) $y = \frac{x}{4}$; 4) $y = \frac{4}{x}$;
5) $y = -\frac{4}{x}$; 6) $y = -\frac{x}{4}$; 7) $y = 4x$; 8) $y = -4x$?

466Ⓢ. Обернену пропорційність задано формулою $y = -\frac{16}{x}$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює -8; 2; -5;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 4; -0,5; 2,5.

467Ⓢ. Побудуйте графік функції:

1) $y = -\frac{10}{x}$; 2) $y = \frac{2}{x}$, де $-2 \leq x \leq 4$, $x \neq 0$.

468³. Графіку оберненої пропорційності належить точка $A(-3; 4)$.

Чи належить цьому графіку точка: 1) $B(1; 12)$; 2) $C(2; -6)$?

469³. Прямокутний паралелепіпед, сторони основи якого дорівнюють x см і y см, має висоту 10 см та об'єм 120 см^3 . Виразить формулою залежність y від x . Чи є ця залежність оберненою пропорційністю? Якою є область визначення функції? Побудуйте її графік.

470³. На малюнку 7 подано графік залежності часу, що витрачається на подолання відстані від пункту A до пункту B , залежно від швидкості. За допомогою графіка дайте відповіді на запитання:

1) Скільки треба часу, щоб подолати відстань від A до B , якщо швидкість руху: 10 км/год; 40 км/год?

2) З якою швидкістю треба рухатися, щоб дібратися з A до B за: 2 год; 8 год?

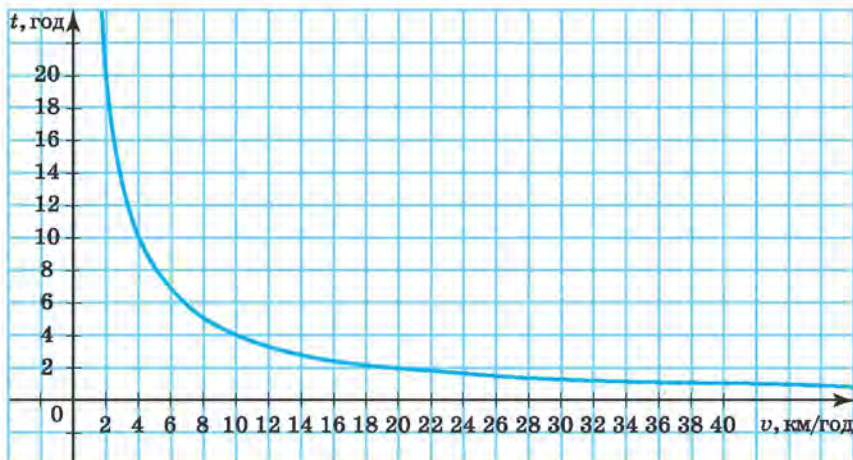
3) Якою є відстань від A до B ?

471⁴. Не виконуючи побудови графіка функції $y = \frac{4}{x}$, знайдіть точки, що належать цьому графіку, координати яких рівні.

472⁴. Не виконуючи побудови графіка функції $y = -\frac{9}{x}$, знайдіть точки, що належать цьому графіку, координати яких — протилежні числа.

473⁴. Побудуйте графіки функцій:

$$1) y = \frac{30x - 18x^2}{3x^3 - 5x^2}; \quad 2) y = \frac{4+x}{x^2+x} + \frac{3}{x+1}.$$



Мал. 7

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356237$$

Розділ



КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

Урок 33

§ 13. ФУНКЦІЯ $y = x^2$ ТА ЇЇ ГРАФІК

Приклад 1. Нехай сторона квадрата дорівнює a см. Тоді його площа (у см^2) обчислюється за формулою $S = a^2$. У цій формулі кожному додатному значенню змінної a відповідає єдине значення змінної S .

Якщо позначимо незалежну змінну через x , а залежну — через y , то матимемо функцію, що задана формулою $y = x^2$. У цій формулі змінна x може набувати будь-якого значення (додатне, від'ємне, нуль).

Складемо таблицю значень функції $y = x^2$ для кількох значень аргументу:

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

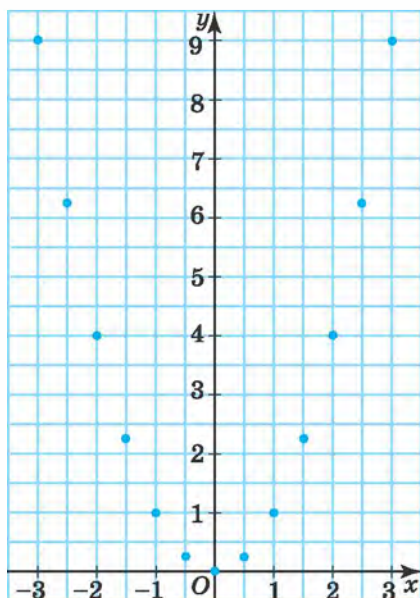
Позначимо на координатній площині точки, що подані в таблиці (мал. 8). Якби на цій самій площині позначити більшу кількість точок, координати яких задовольняють формулу $y = x^2$, а потім з'єднати їх плавною лінією, то дістали б графік функції $y = x^2$ (мал. 9). Криву, що є графіком цієї функції, називають **параболою**, точку $(0; 0)$ — **вершиною параболі**. Вершина параболі розбиває її на дві частини, кожна з яких називається **віткою параболі**.

Сформулюємо деякі властивості функції $y = x^2$.

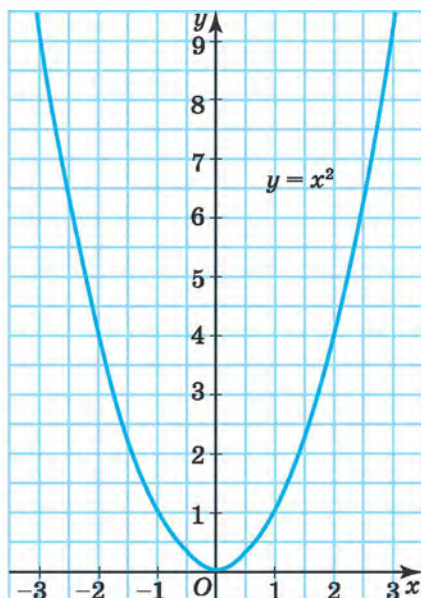


1. Область визначення функції складається з усіх чисел.
2. Областю значень функції є множина всіх невід'ємних чисел: $y \geq 0$.

Справді, оскільки $x^2 \geq 0$ для всіх значень x , то $y \geq 0$.



Мал. 8



Мал. 9



3. Графік функції — парабола, її вітки направлені вгору, а вершиною є точка $(0; 0)$. Всі точки графіка, крім вершини параболи, розміщені вище від осі абсцис.

4. Протилежним значенням аргументу відповідає одне й те саме значення функції. Це випливає з того, що $(-x)^2 = x^2$ при будь-якому значенні x .

Приклад 2. Розв'язати графічно рівняння $x^2 = 3 - 2x$.

Розв'язання. Побудуємо графіки функцій $y = x^2$ і $y = 3 - 2x$ (мал. 10). Графік першої функції — парабола, а другої — пряма, що проходить через точки $(0; 3)$ і $(2; -1)$. Абсциси точок перетину графіків: $x = -3$ і $x = 1$.

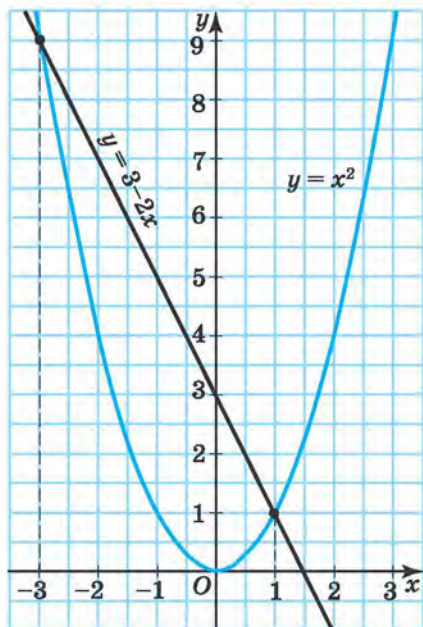
Перевірка: 1) $x = -3$; $x^2 = (-3)^2 = 9$ і $3 - 2x = 3 - 2 \cdot (-3) = 9$; 2) $x = 1$, $x^2 = 1^2 = 1$ і $3 - 2x = 3 - 2 \cdot 1 = 1$.

Отже, $x = -3$ і $x = 1$ — корені рівняння $x^2 = 3 - 2x$.

Відповідь. $x = -3$, $x = 1$.

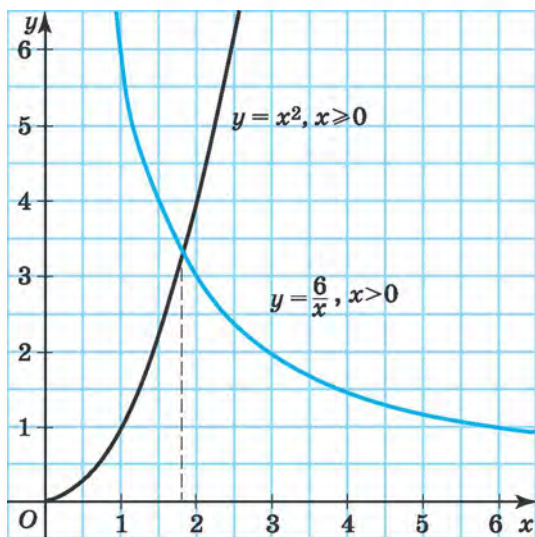
Приклад 3. Між якими послідовними цілими числами міститься єдиний корінь рівняння $\frac{6}{x} = x^2$?

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння графічно, побудувавши графіки функцій $y = \frac{6}{x}$ і $y = x^2$. Оскільки $x^2 \geq 0$ для всіх значень x ,



Мал. 10

то і $\frac{6}{x} \geq 0$. Тому $x > 0$. Розглянемо графіки даних функцій при $x > 0$. Обидва графіки в цьому випадку розміщені в I чверті (мал. 11).



Мал. 11

Отже, єдиний корінь рівняння $\frac{6}{x} = x^2$ міститься між числами 1 і 2.

В і д п о в і д ь. Корінь міститься між 1 і 2.



Що є графіком функції $y = x^2$? • Сформулюйте властивості функції $y = x^2$.

474^①. (Усно.) Прямою, гіперболою чи параболою є графік функції:

- 1) $y = \frac{6}{x}$; 2) $y = 6x$; 3) $y = 6$;
4) $y = x^2$; 5) $y = 2x - 3$; 6) $y = -\frac{8}{x}$?

475^①. Для функції $y = x^2$ знайдіть значення y , яке відповідає $x = -3$; 0; 5.

476^①. Для функції $y = x^2$ знайдіть значення y , яке відповідає значенням $x = -2$; 1; 6.

477^②. Використовуючи графік функції $y = x^2$ (див. мал. 9), знайдіть:

- 1) значення y , відповідне $x = -2,5$; -1 ; $1,5$; 3 ;
2) значення x , відповідне $y = 1$; $3,5$; 9 ;
3) кілька значень x , при яких значення функції більше від 2; менше від 2.

478^②. Користуючись графіком функції $y = x^2$ (див. мал. 9), знайдіть:

- 1) значення функції, відповідне значенню аргументу, що дорівнює -3 ; $-0,5$; $2,5$;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 4; дорівнює 5;
3) кілька значень x , при яких значення функції менше від 1; більше від 1.

479^②. Побудуйте графік функції $y = x^2$, якщо $-1 \leq x \leq 4$.

480^②. Побудуйте графік функції $y = x^2$, якщо $-2 \leq x \leq 3$.

481^②. Чи проходить графік функції $y = x^2$ через точку:

- 1) $A(-1; -1)$; 2) $B(-5; 25)$; 3) $C(0; 0)$; 4) $D(25; 5)$?

482^②. Чи належить графіку функції $y = x^2$ точка:

- 1) $A(-4; 16)$; 2) $B(16; -4)$; 3) $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$; 4) $D(0; 2)$?

483ⓐ. Знайдіть область значень функції $y = x^2$, якщо:

- 1) $-3 \leq x \leq 0$; 2) $-1 \leq x \leq 2$.

484ⓐ. Порівняйте значення функції $y = x^2$, якщо:

- 1) $x = 2,7$ і $x = -2,7$; 2) $x = -1,9$ і $x = 1,8$;
3) $x = 0$ і $x = -3,2$; 4) $x = -1,1$ і $x = 1,2$.

485ⓐ. Розв'яжіть рівняння графічно:

- 1) $x^2 = 4x$; 2) $x^2 = -\frac{8}{x}$.

486ⓐ. Розв'яжіть рівняння графічно:

- 1) $x^2 = 4$; 2) $x^2 = -2x$.

487ⓐ. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \frac{x^3 + x^2}{x+1}$; 2) $y = \frac{4x^2 - x^4}{4 - x^2}$.

488ⓐ. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \frac{x^3}{x}$; 2) $y = \frac{x^2 - x^4}{1 - x^2}$.



489ⓐ. Обчисліть:

- 1) $25^2 + (-6)^2$; 2) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(1\frac{3}{5}\right)^2$;
3) $0,01^2 : (-0,1)^2$; 4) $(-4)^2 \cdot (-0,5)^2$.

490ⓐ. При яких значеннях a правильно є рівність:

- 1) $a^2 = (-a)^2$; 2) $a^2 = |a|^2$; 3) $a^2 = -a^2$; 4) $(-a)^2 = -a^2$?

491ⓐ. Знайдіть:

- 1) найменше значення виразу: $x^2 - 19$; $18 + (x - 3)^2$;
2) найбільше значення виразу: $17 - x^2$; $-9 - (x + 7)^2$.

При яких значеннях x досягаються ці значення?

Уроки 34, 35

§ 14. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. АРИФМЕТИЧНИЙ КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ

Якщо відомо сторону квадрата, то легко можна знайти його площу. Водночас доводиться часто розв'язувати також обернену задачу: за відомою площею квадрата знаходити його сторону.

Приклад 1. Площа квадрата дорівнює 16 см^2 . Чому дорівнює його сторона?

Р о з в' я з а н н я. Нехай сторона квадрата дорівнює x см, тоді його площа дорівнює x^2 см². За умовою $x^2 = 16$. Це рівняння має два корені: числа 4 і -4 . Справді $4^2 = 16$ і $(-4)^2 = 16$. Оскільки довжина сторони квадрата не може бути від'ємним числом, то умову задачі задовольняє лише один з коренів рівняння — число 4. Отже, довжина сторони квадрата дорівнює 4 см.

Корені рівняння $x^2 = 16$, тобто числа, квадрати яких дорівнюють 16, називають **квадратними коренями** з числа 16.



Квадратним коренем з числа a називають число, квадрат якого дорівнює a .

Приклад 2. 1) Квадратними коренями з числа 100 є числа 10 і -10 , бо $10^2 = 100$ і $(-10)^2 = 100$. 2) Квадратним коренем з числа 0 є 0, бо $0^2 = 0$. 3) Квадратний корінь з числа -16 ви, поки що, знайти не можете, оскільки серед відомих вам чисел не існує числа, квадрат якого дорівнює -16 .

Число 4, яке є невід'ємним коренем рівняння $x^2 = 16$, називають **арифметичним квадратним коренем** з числа 16.



Арифметичним квадратним коренем з числа a називають таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a .

Арифметичний квадратний корінь з числа a позначають $\sqrt{a}$ ($\sqrt{}$ — знак арифметичного квадратного кореня). Вираз, що стоїть під знаком кореня, називають **підкореневим виразом**. Запис $\sqrt{a}$ читають так: **квадратний корінь з числа a** (слово арифметичний під час читання прийнято опускати).

Приклад 3. 1) $\sqrt{81} = 9$ (оскільки $9^2 = 81$ і $9 \geq 0$);

2) $\sqrt{0} = 0$ (оскільки $0^2 = 0$ і $0 \geq 0$);

3) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ (оскільки $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ і $\frac{2}{3} \geq 0$);

4) $\sqrt{1\frac{24}{25}} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$ (оскільки $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} = 1\frac{24}{25}$ і $\frac{7}{5} \geq 0$).

Взагалі рівність $\sqrt{a} = x$ є правильною, якщо виконуються дві умови: 1) $x \geq 0$; 2) $x^2 = a$.

Оскільки $x^2 \geq 0$ для всіх значень змінної x , то $a \geq 0$.



Вираз $\sqrt{a}$ не має змісту, якщо $a < 0$.

Наприклад, не мають змісту вирази $\sqrt{-1}$; $\sqrt{-2,9}$.

Обчислення арифметичного значення квадратного кореня називають **добуванням квадратного кореня**. З невеликих чисел квадратний корінь бажано добувати усно. Добувати квадратний корінь з більших чисел допоможе таблиця квадратів двоцифрових натуральних чисел на форзаці.

Приклад 4. Знайти значення кореня $\sqrt{4096}$.

Розв'язання. За таблицею квадратів двоцифрових натуральних чисел маємо $64^2 = 4096$. Тому $\sqrt{4096} = 64$.

Приклад 5. Обчислити $\sqrt{37^2 - 12^2}$.

Розв'язання. Спочатку необхідно знайти значення виразу $37^2 - 12^2$, а потім добути корінь з отриманого виразу:
 $\sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1369 - 144} = \sqrt{1225} = 35$.

Відповідь. 35.

Розглянемо рівняння $\sqrt{x} = m$, де m — деяке число. Якщо $m \geq 0$, то з означення квадратного кореня випливає, що $x = m^2$. Якщо ж $m < 0$, то рівняння не має розв'язків, оскільки не існує числа x , для якого $\sqrt{x} < 0$. Систематизуємо дані про розв'язки рівняння $\sqrt{x} = m$ у вигляді таблиці:

$\sqrt{x} = m$, m — число	
$m \geq 0$	$m < 0$
$x = m^2$	рівняння не має розв'язків

Приклад 6. Розв'язати рівняння: 1) $\sqrt{x} = 7$; 2) $\sqrt{x} = -3$; 3) $\sqrt{2x - 1} = 5$.

Розв'язання. 1) $x = 7^2$; $x = 49$; 2) рівняння не має розв'язків; 3) $2x - 1 = 5^2$; $2x = 26$; $x = 13$.

Відповідь. 1) $x = 49$; 2) рівняння не має розв'язків; 3) $x = 13$.



Що називають квадратним коренем з числа a ? • Що називають арифметичним квадратним коренем з числа a ? • При яких значеннях a вираз $\sqrt{a}$ не має змісту? • Чи має розв'язки рівняння $\sqrt{x} = m$, якщо $m \geq 0$, $m < 0$, і якщо має, то які?

492^①. (Усно.) Чи існує квадратний корінь з числа:

- 1) 9; 2) 16; 3) -4; 4) 0?

493^①. Знайдіть значення квадратного кореня з числа: 1) 4;
2) 25.

494^①. Знайдіть значення квадратного кореня з числа: 1) 0;
2) 1; 3) 36.

495^①. (Усно.) Чи має зміст вираз: 1) $\sqrt{1}$; 2) $\sqrt{0}$; 3) $\sqrt{-4}$?

496^①. Чи має зміст вираз: 1) $\sqrt{4}$; 2) $\sqrt{-36}$?

497^①. Доведіть, що:

- 1) число 2 є арифметичним квадратним коренем з числа 4;
- 2) число -2 не є арифметичним квадратним коренем з числа 4;
- 3) число 0,1 є арифметичним квадратним коренем з числа 0,01;
- 4) число 0,2 не є арифметичним квадратним коренем з числа 0,4.

498^①. Доведіть, що: 1) $\sqrt{169} = 13$; 2) $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$.

499^②. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{16}$; 2) $\sqrt{49}$; 3) $\sqrt{0,25}$; 4) $\sqrt{6400}$;
5) $\sqrt{0,09}$; 6) $\sqrt{\frac{1}{121}}$; 7) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 8) $\sqrt{20\frac{1}{4}}$.

500^②. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{25}$; 2) $\sqrt{36}$; 3) $\sqrt{0,16}$; 4) $\sqrt{4900}$;
5) $\sqrt{0,04}$; 6) $\sqrt{\frac{1}{64}}$; 7) $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; 8) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$.

501^②. Чи правильна рівність:

- 1) $\sqrt{900} = 30$; 2) $\sqrt{4} = -2$; 3) $\sqrt{0,9} = 0,3$; 4) $\sqrt{0,64} = 0,8$?

502^②. За допомогою таблиці квадратів двоцифрових натуральних чисел знайдіть:

- 1) $\sqrt{1296}$; 2) $\sqrt{9409}$; 3) $\sqrt{2916}$; 4) $\sqrt{30,25}$.

503^②. Обчисліть значення виразу:

- 1) $\sqrt{64} + \sqrt{25}$; 2) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{0,36}$; 3) $2\sqrt{100} - \sqrt{144}$;
4) $\sqrt{81} : \sqrt{0,01}$; 5) $-5\sqrt{0,64} + 3,9$; 6) $\sqrt{5^2 - 25}$;
7) $\sqrt{6^2 + 8^2}$; 8) $\sqrt{2(0,2^2 + 0,46)}$.

504². Обчисліть значення виразу:

- 1) $\sqrt{49} + \sqrt{9}$; 2) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{100}$; 3) $2\sqrt{121} - \sqrt{81}$;
4) $\sqrt{64} : \sqrt{0,25}$; 5) $-5\sqrt{0,36} + 2,8$; 6) $\sqrt{10^2 - 8^2}$;
7) $\sqrt{3^2 + 4^2}$; 8) $\sqrt{0,3^2 - 0,09}$.

505². Обчисліть значення виразу:

- 1) $\sqrt{12 + a}$, якщо $a = 4; -8; -12$;
2) $\sqrt{m + n}$, якщо $m = 0,09; n = 0,07$;
3) $x + 4\sqrt{x}$, якщо $x = 49; 121$;
4) $3\sqrt{b} - b$, якщо $b = 1,96; 0,04$.

506². Обчисліть значення виразу:

- 1) $\sqrt{16 - b}$, якщо $b = -9; 15$;
2) $2\sqrt{m} - m$, якщо $m = 1,69; 0,49$.

507². Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sqrt{x} = 2$; 2) $\sqrt{x} = 0$; 3) $\sqrt{x} = -2$;
4) $\sqrt{x} - 3 = 0$; 5) $2\sqrt{x} = 8$; 6) $\frac{1}{3}\sqrt{x} = 2$.

508². Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sqrt{x} = 1$; 2) $\sqrt{x} = -3$;
3) $\sqrt{x} - 5 = 0$; 4) $3\sqrt{x} = 21$.

509³. Чи має зміст вираз:

- 1) $\sqrt{12 \cdot 14 - 13^2}$; 2) $\sqrt{2009^2 - 2008^2}$; 3) $\sqrt{1000^2 - 1001^2}$?

510³. При яких значеннях x має зміст вираз:

- 1) $\frac{5}{\sqrt{x}}$; 2) $\sqrt{x^2}$; 3) $\sqrt{x^5}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{-x}}$?

511³. При яких значеннях y має зміст вираз:

- 1) $\sqrt{2y}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{y^3}}$; 3) $\sqrt{y^6}$; 4) $\sqrt{-y}$?

512³. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $3\sqrt{x} + 7 = 0$; 2) $2\sqrt{\frac{x}{8}} - 4 = 0$;
3) $\frac{16}{\sqrt{x+3}} = 4$; 4) $7\sqrt{2x-5} - 14 = 0$.

513^③. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{2}\sqrt{3x} - 3 = 0$; 2) $2\sqrt{\frac{x}{3}} + 6 = 0$;

3) $\frac{14}{\sqrt{2x}} = 28$; 4) $2\sqrt{2x+7} - 6 = 0$.

514^④. При яких значеннях a має зміст вираз:

1) $\sqrt{-a^2}$; 2) $\sqrt{-(a+3)^2}$; 3) $\sqrt{a^{10}+1}$; 4) $\frac{\sqrt{a}}{a-3}$?

515^④. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{|2x-1|} = 3$; 2) $\sqrt{5+\sqrt{x}} = 3$; 3) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}} = 2$.

516^④. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{|2x+3|} = 5$; 2) $\sqrt{9+\sqrt{x}} = 4$.



517^①. Подайте у вигляді звичайного дробу:

1) 0,3; 2) 0,25; 3) 1,2; 4) 2,5.

518^①. Подайте десятковим дробом:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $2\frac{1}{5}$; 4) $3\frac{1}{4}$.

519^②. Запишіть звичайний дріб нескінченним десятковим періодичним дробом:

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{11}$; 3) $\frac{7}{9}$; 4) $\frac{5}{6}$.

520^③. Спростіть вираз:

$$\frac{4a}{a+2} - (a-2)^2 \cdot \left(\frac{3}{(a-2)^3} + \frac{2}{a^3-4} \right).$$

Урок 36

§ 15. РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА.

ІРРАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА. ДІЙСНІ ЧИСЛА. ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ



Цілі числа (додатні, від'ємні та 0), дробові числа (додатні та від'ємні) складають множину *раціональних чисел*.

Множину натуральних чисел позначають буквою N , множину цілих чисел — буквою Z , множину раціональних чисел — буквою Q . Щоб записати, що певне число належить деякій множині, використовують знак $\in$. Наприклад, $5 \in N$. Якщо ж число не належить певній множині, це записують за допомогою знака $\notin$. Наприклад, $\frac{2}{3} \notin Z$.



Будь-яке раціональне число можна записати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, n — натуральне число.

Наприклад,

$$9 = \frac{9}{1}; \quad 2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}; \quad -5 = \frac{-5}{1}; \quad -0,2 = \frac{-2}{10} = \frac{-1}{5}.$$

Раціональні числа можна також подати у вигляді десяткового дробу. Для цього треба чисельник дробу поділити на його знаменник.

Наприклад,

$$\frac{3}{8} = 0,375; \quad \frac{-5}{4} = -1,25; \quad \frac{8}{33} = 0,242424\dots = 0,(24).$$

В останньому випадку дістали нескінченний десятковий періодичний дріб. Дроби $\frac{3}{8}$ і $\frac{-5}{4}$ також можна подати у вигляді нескінченних десяткових періодичних дробів, приписавши справа у вигляді десяткових знаків нескінченну кількість нулів:

$$\frac{3}{8} = 0,375 = 0,375000\dots; \quad \frac{-5}{4} = -1,25 = -1,25000\dots$$

Отже,



кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу.

Обернене твердження також правильне:



кожний нескінченний десятковий періодичний дріб є записом деякого раціонального числа.

Наприклад, $1,2000\dots = 1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}; \quad 0,(3) = \frac{1}{3}; \quad -1,(15) = -1\frac{5}{33}.$

У цих рівностях легко переконатися, виконавши відповідні ділення.

Але в математиці існують числа, які не можна записати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне число.



Числа, які не можна записати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне число, називають ірраціональними числами.

Префікс *ір* означає заперечення, *іраціональні* означає не раціональні.

Прикладами ірраціональних чисел є $\sqrt{2}$, π , $-\sqrt{7}$ тощо. Наближені значення цих чисел можна знаходити з певною точністю (тобто округлені до певного розряду) за допомогою мікрокалькулятора або комп'ютера:

$$\sqrt{2} \approx 1,4142135; \pi \approx 3,1415926; -\sqrt{7} \approx -2,6457513.$$

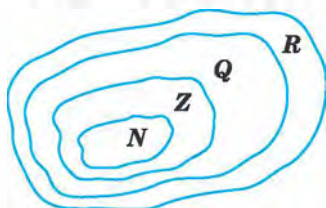


Кожне ірраціональне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового неперіодичного дробу.

Раціональні числа разом з ірраціональними числами утворюють множину дійсних чисел.

Множину дійсних чисел позначають буквою R .

Оскільки кожне натуральне число є цілим числом, то мно-



Мал. 12

жина натуральних чисел є частиною множини цілих чисел (мал. 12). Кажуть, що множина N є підмножиною множини Z . Аналогічно, множина Z є підмножиною множини Q , а множина Q підмножиною множини R .

Дійсні числа, що записані за допомогою нескінченних десяткових неперіодичних дробів, можна порівнювати за тими самими правилами, що й скінченні десяткові дробі.

Приклад 1. 1) $\sqrt{2} > 1,4$ (бо $\sqrt{2} \approx 1,41$); 2) $-\sqrt{7} < -2,6$ (бо $-\sqrt{7} \approx -2,63$).

У практичних задачах, виконуючи дії над дійсними числами, їх заміняють наближеними значеннями, округлюючи до певного розряду.

Приклад 2. Обчислити $\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{3} + \sqrt{3}$ з точністю до тисячних.

Р о з в' я з а н н я. $\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{3} + \sqrt{3} \approx 2,3562 + 0,3333 + 1,7321 = 4,4218 \approx 4,422$. Зауважимо, що при додаванні, відніманні, множенні і діленні (на відмінне від нуля число), піднесенні до степеня дійсних чисел мають місце всі властивості, що й для дій над раціональними числами.



Історичні відомості

Поняття числа з'явилося в стародавні часи. Воно є одним з найзагальніших понять математики. Необхідність виконувати вимірювання та підрахунки зумовила появу додатних раціональних чисел. Саме тоді

виникли і використовувалися натуральні числа та дробові числа, які розглядали як відношення натуральних чисел.

Наступним етапом розвитку поняття числа є введення у практику від'ємних чисел. У Стародавньому Китаї ці числа з'явилися у II ст. до н. д. Там уміли додавати і віднімати від'ємні числа. Від'ємні числа тлумачили як борг, а додатні як майно. В Індії у VII ст. ці числа розуміли так само, але вже знали і правила множення та ділення.

Інший напрямок розвитку поняття числа сприяв виникненню поняття дійсного числа. Ще древні вавилоняни близько 4 тис. років тому вміли давати відповідь на запитання: «Якою повинна бути сторона квадрата, щоб його площа дорівнювала S ?» Вони склали таблицю квадратів чисел та квадратних коренів з чисел. Вавилоняни використовували метод наближеного добування квадратного кореня з числа S , що не є квадратом натурального числа. Він полягає у наступному: записували S у вигляді $a^2 + b$, де b — досить мале у порівнянні з a^2 , та використовували формулу: $\sqrt{S} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$.

Наприклад: $\sqrt{102} = \sqrt{10^2 + 2} \approx 10 + \frac{2}{2 \cdot 10} = 10,1$. Перевірка показує, що $10,1^2 = 102,01$.

Запропонований метод наближеного обчислення квадратного кореня використовувався у Стародавній Греції. Цей метод детально описав *Герон Александрійський* (I ст. н. д.).

В епоху Відродження європейські математики позначали корінь латинським словом *Radix* (корінь), а потім — скорочено буквою *R*. Звідси пішов термін «радикал», яким називають знак кореня. Згодом для позначення кореня використовували точку, а потім ромбик. Надалі стали використовувати знак $\sqrt{}$, а над підкореневим виразом писали горизонтальну риску. Далі знак $\sqrt{}$ і риска були поєднані, і саме у вигляді $\sqrt{}$ знак квадратного кореня використовують сучасні математики.



Які числа утворюють множину раціональних чисел? • У вигляді яких дробів можна подати будь-яке раціональне число? • Як можна записати кожний нескінченний десятковий періодичний дріб? • Які числа називають ірраціональними? • Як можна подати кожне ірраціональне число? • Які числа утворюють множину дійсних чисел?

521^Q. (Усно.) Чи правильно, що:

- | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) 5 — натуральне число; | 2) -2,1 — ціле число; |
| 3) $\sqrt{3}$ — раціональне число; | 4) $-\frac{5}{7}$ — дійсне число? |

522^Q. З чисел $\sqrt{3}$; $-2\frac{1}{9}$; 52; -2,(1); π ; 19; -3,7; 0; $-\sqrt{5}$; 0,222... виписіть:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------|
| 1) натуральні числа; | 2) цілі невід'ємні числа; |
| 3) раціональні від'ємні числа; | 4) ірраціональні числа. |

523^①. З чисел 8 ; $-\sqrt{7}$; -5 ; $\frac{2}{3}$; $\sqrt{17}$; $3,(7)$; $\sqrt{13}$; $-1\frac{1}{3}$; 0 ; $5,137$

виписіть:

- 1) натуральні числа; 2) цілі недодатні числа;
3) раціональні додатні числа; 4) ірраціональні числа.

524^②. Подайте у вигляді відношення цілого числа до натурального:

- 1) 31; 2) -8 ; 3) $2\frac{1}{7}$; 4) $-5,1$.

525^②. Подайте у вигляді відношення цілого числа до натурального:

- 1) -21 ; 2) 10; 3) $-3\frac{1}{5}$; 4) 2,8.

526^②. Подайте число $\frac{2}{33}$ у вигляді нескінченного десяткового дробу й округліть його: 1) до сотих; 2) до тисячних.

527^②. Подайте число $\frac{4}{11}$ у вигляді нескінченного десяткового дробу й округліть його: 1) до сотих; 2) до тисячних.

528^②. (Усно.) Чи правильно, що:

- 1) $7 \notin N$; 2) $10 \in Z$; 3) $5 \notin Q$; 4) $32 \in R$;
5) $-3,9 \notin N$; 6) $-9,2 \in Q$; 7) $-3,17 \notin R$; 8) $\sqrt{3} \in Q$;
9) $\sqrt{64} \in N$; 10) $-\sqrt{27} \notin R$; 11) $\sqrt{\frac{4}{9}} \notin Z$; 12) $\sqrt{1\frac{7}{9}} \in Q$?

529^②. Порівняйте:

- 1) 1,366 і 1,636; 2) $-2,63$ і $-2,36$; 3) $-\frac{1}{17}$ і 0;
4) π і 3,2; 5) $-\pi$ і $-3,1$; 6) 1,7 і 1,(7);
7) $-1,41$ і $-\sqrt{2}$; 8) $\sqrt{3}$ і 1,8; 9) $2\frac{5}{13}$ і 2,(39).

530^②. Порівняйте:

- 1) $-2,17$ і $-2,71$; 2) 0 і $\frac{1}{16}$; 3) 2,(3) і 2,3;
4) $\sqrt{2}$ і 1,4; 5) $-\sqrt{3}$ і $-1,7$; 6) $\frac{1}{11}$ і 0,(08).

531^②. Знайдіть наближене значення виразів, округливши значення коренів до сотих:

- 1) $\sqrt{7} + 2,12$; 2) $3,18 - \sqrt{5}$.

532^③. Розмістіть числа в порядку спадання: 0,11; 0,(1); 0,01;
 $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{2}$.

533^а. Розмістіть числа в порядку зростання: $0,(2)$; $0,22$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $0,02$.

534^а. Чи правильно що:

- 1) сума двох цілих чисел — ціле число;
- 2) частка двох раціональних чисел — число раціональне;
- 3) будь-яке ціле число є натуральним;
- 4) множина дійсних чисел складається з чисел додатних і від'ємних?

535^а. Запишіть три раціональних числа, розміщених між числами $1,55$ і $1,(5)$.

536^а. Запишіть два раціональних числа, розміщених між числами $2,333$ і $2,(3)$.

537^а. Доведіть, що число $\sqrt{2}$ є ірраціональним.

538^а. Доведіть, що число $\sqrt{3}$ є ірраціональним.

539^а. Використовуючи формулу $\sqrt{S} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$, знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює: 39 см^2 ; 83 дм^2 . Порівняйте відповідь з числом, знайденим за допомогою калькулятора.



540^а. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - 16 = 0$; 2) $4x^2 - 9 = 0$; 3) $\frac{1}{16} - x^2 = 0$; 4) $\frac{9}{25} - x^2 = 0$.

541^а. З міст M і N одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі. Відстань між містами M і N дорівнює s км, швидкості автомобілів — v_1 і v_2 . Через t год автомобілі зустрілися. Виразіть t через s , v_1 і v_2 . Обчисліть значення t , якщо $s = 375$ км; $v_1 = 78$ км/год; $v_2 = 72$ км/год.

542^а. Розв'яжіть рівняння з двома змінними:

- 1) $x^2 - 6x + 9 + y^2 = 0$; 2) $|x + 2| + y^2 + 2y + 1 = 0$.

Уроки 37, 38

§ 16. ТОТОЖНІСТЬ $(\sqrt{a})^2 = a$, $a \geq 0$. **РІВНЯННЯ** $x^2 = a$

Нагадаємо, що для всіх значень $a \geq 0$ рівність $\sqrt{a} = x$ є правильною, якщо виконуються дві умови: 1) $x \geq 0$; 2) $x^2 = a$. Підставивши в останню рівність замість x його запис у вигляді $\sqrt{a}$, дістанемо тотожність

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$



Для будь-якого $a \geq 0$ виконується тотожність $(\sqrt{a})^2 = a$.

Приклад 1. Обчислити: 1) $(\sqrt{7})^2$; 2) $(-\sqrt{11})^2$; 3) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{12}\right)^2$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

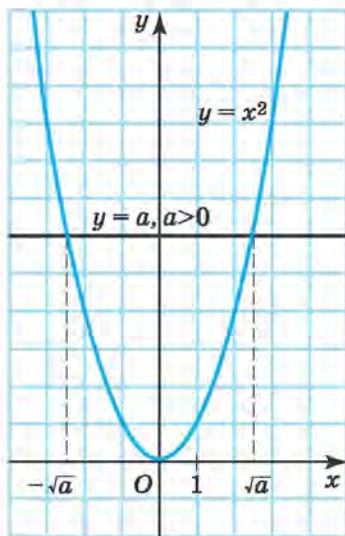
Розв'язання. 1) $(\sqrt{7})^2 = 7$; 2) $(-\sqrt{11})^2 = 11$; 3) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{12}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\sqrt{12})^2 = \frac{1}{4} \cdot 12 = 3$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{(\sqrt{3})^2}{2^2} = \frac{3}{4}$.

Розглянемо рівняння $x^2 = a$, де a — деяке число.

Оскільки квадрат числа не може дорівнювати від'ємному числу, то коли $a < 0$, рівняння $x^2 = a$ не має розв'язків.

Якщо $a = 0$, то єдиним коренем рівняння $x^2 = 0$ є число 0.

Якщо $a > 0$, то коренями рівняння $x^2 = a$ є числа $\sqrt{a}$ і $-\sqrt{a}$. Справді, $(\sqrt{a})^2 = a$ і $(-\sqrt{a})^2 = a$. Для того щоб впевнитися, що рівняння $x^2 = a$, де $a > 0$, інших коренів не має, звернемося до графічної інтерпретації розв'язування цього рівняння. Побудуємо графік функції $y = x^2$ і графік функції $y = a$, де $a > 0$ (мал. 13). Ці графіки перетнулися двічі у точках з абсцисами $\sqrt{a}$ і $-\sqrt{a}$.



Мал. 13

Систематизуємо дані про розв'язки рівняння $x^2 = a$ у вигляді таблиці:

$x^2 = a$, a — число		
$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
$x_1 = \sqrt{a}$; $x_2 = -\sqrt{a}$	$x = 0$	рівняння не має розв'язків

Приклад 2. Розв'язати рівняння: 1) $x^2 = 9$; 2) $x^2 = -7$; 3) $x^2 = 7$; 4) $(2x + 1)^2 = 25$.

Розв'язання. 1) $x_1 = \sqrt{9}$, $x_2 = -\sqrt{9}$; отже, $x_1 = 3$, $x_2 = -3$;

2) рівняння не має розв'язків;

3) $x_1 = \sqrt{7}$, $x_2 = -\sqrt{7}$. Коренями рівняння $x^2 = 7$ є ірраціональні числа;

4) маємо $2x + 1 = \sqrt{25}$ або $2x + 1 = -\sqrt{25}$. Розв'язавши перше з рівнянь, дістанемо $2x + 1 = 5$, $2x = 4$, $x = 2$, а друге — $2x + 1 = -5$, $2x = -6$, $x = -3$. Отже, рівняння має два корені $x_1 = 2$; $x_2 = -3$.

В і д п о в і д ь. 1) $x_1 = 3$, $x_2 = -3$; 2) рівняння не має розв'язків; 3) $x_1 = \sqrt{7}$, $x_2 = -\sqrt{7}$; 4) $x_1 = 2$; $x_2 = -3$.



Для яких значень a правильною є рівність $(\sqrt{a})^2 = a$? Чи має корені рівняння $x^2 = a$, якщо $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$, і якщо має, то скільки?

543^①. Обчисліть значення виразу:

$$1) (\sqrt{3})^2; \quad 2) (\sqrt{0})^2; \quad 3) (\sqrt{2,1})^2; \quad 4) \left(\sqrt{\frac{1}{7}}\right)^2.$$

544^①. Обчислити: 1) $(\sqrt{5})^2$; 2) $(\sqrt{4,2})^2$.

545^①. (Усно.) Чи має корені рівняння:

$$1) x^2 = 9; \quad 2) x^2 = 37; \quad 3) x^2 = 0; \quad 4) x^2 = -5?$$

546^①. Чи має корені рівняння:

$$1) x^2 = 25; \quad 2) x^2 = -10?$$

547^②. Обчисліть:

$$1) (-\sqrt{7})^2; \quad 2) \sqrt{11} \cdot \sqrt{11}; \quad 3) \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2; \quad 4) (-2\sqrt{5})^2;$$
$$5) -5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}; \quad 6) 0,3 \cdot (-\sqrt{10})^2; \quad 7) \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2; \quad 8) \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2.$$

548^②. Обчисліть:

$$1) (-\sqrt{11})^2; \quad 2) \sqrt{19} \cdot \sqrt{19}; \quad 3) (2\sqrt{7})^2; \quad 4) \left(-\frac{1}{4}\sqrt{8}\right)^2;$$
$$5) -7 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}; \quad 6) 0,2 \cdot (-\sqrt{5})^2; \quad 7) \left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2; \quad 8) \left(-\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2.$$

549Ⓢ. Обчисліть значення виразу:

1) $(\sqrt{15})^2 - 3,8$; 2) $5\left(-\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^2$; 3) $7:\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right)^2$; 4) $\frac{1}{8}(-\sqrt{24})^2$.

550Ⓢ. Обчисліть значення виразу:

1) $2,7 + (-\sqrt{13})^2$; 2) $8\left(\sqrt{\frac{5}{8}}\right)^2$; 3) $12:\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$; 4) $\frac{1}{19}(\sqrt{19})^2$.

551Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 25$; 2) $x^2 = 0,36$; 3) $x^2 = 121$;
4) $x^2 = -9$; 5) $x^2 = 11$; 6) $x^2 = \frac{4}{9}$.

552Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 49$; 2) $x^2 = 0,16$; 3) $x^2 = 169$;
4) $x^2 = -4$; 5) $x^2 = 5$; 6) $x^2 = \frac{9}{16}$.

553Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 0,05 = 0,04$; 2) $24 + x^2 = 25$;
3) $x^2 + 12 = 0$; 4) $\frac{1}{3}x^2 = 7$.

554Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 0,01 = 0,26$; 2) $x^2 - 14 = 2$;
3) $17 - x^2 = 0$; 4) $-\frac{1}{4}x^2 = 5$.

555Ⓢ. Чи належить графіку функції $y = x^2$ точка:

1) $M(\sqrt{5}; 5)$; 2) $N(7; \sqrt{7})$;
3) $P(-\sqrt{3}; 3)$; 4) $T(\sqrt{10}; \sqrt{10})$?

556Ⓢ. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює:

1) 36 см^2 ; 2) 49 дм^2 ; 3) $0,09 \text{ м}^2$; 4) $\frac{25}{36} \text{ дм}^2$.

557Ⓢ. Обчисліть:

1) $(-\sqrt{5})^2$; 2) $(2\sqrt{5})^2 - (5\sqrt{2})^2$;
3) $36 \cdot \left(-\frac{1}{3}\sqrt{17}\right)^2 - \frac{1}{5}(2\sqrt{15})^2$; 4) $\sqrt{59,29} + \left(\frac{1}{2}\sqrt{34}\right)^2$;
5) $(-3\sqrt{5})^2 - 3(\sqrt{5})^2$; 6) $\left(-\frac{4}{5}\sqrt{\frac{25}{32}}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{9}}\right)^2$.

558^а. Обчисліть:

1) $((-\sqrt{7})^2)^2$;

2) $(3\sqrt{7})^2 - (7\sqrt{3})^2$;

3) $16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2 + \frac{1}{3}(4\sqrt{3})^2$;

4) $\sqrt{70,56} - \left(\frac{1}{2}\sqrt{42}\right)^2$;

5) $(5\sqrt{2})^2 - 5 \cdot (-\sqrt{2})^2$;

6) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{10}}\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}\sqrt{\frac{36}{65}}\right)^2$.

559^а. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-2)^2 = 36$;

2) $(y+3)^2 = 4$;

3) $(x-1)^2 = 0$;

4) $(x+3)^2 = 7$;

5) $\left(y - \frac{5}{9}\right)^2 = \frac{4}{81}$;

6) $(x+5)^2 = -9$.

560^а. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+1)^2 = 16$;

2) $(y-2)^2 = 25$;

3) $(m+2)^2 = 0$;

4) $(x-2)^2 = 3$;

5) $\left(y - \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$;

6) $(m-3)^2 = -4$.

561^а. Наведіть приклад рівняння виду $x^2 = a$, де a — число, яке:

1) має один цілий корінь; 2) має два цілих корені;

3) не має коренів;

4) має два раціональних корені;

5) має корені, але вони не є раціональними.

562^а. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+1}{6} = \frac{4}{x-1}$; 2) $(2x-3)^2 + (2x+3)^2 = 20$.

563^а. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-2}{5} = \frac{12}{x+2}$; 2) $(3x+1)^2 + (3x-1)^2 = 4$.

564^а. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{7 + \sqrt{2 + x^2}} = 3$; 2) $2|x^2 - 5| + 3 = 5$.

565^а. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{1 + \sqrt{x^2 + 4}} = 2$; 2) $2|x^2 - 4| + 1 = 11$.

566^а. При яких значеннях b є правильною рівність:

1) $(\sqrt{b})^2 = -b$; 2) $(\sqrt{b-4})^2 = b-4$; 3) $b(\sqrt{b})^2 = b^2$?

567^а. При яких значеннях m рівняння $mx^2 = 1$:

1) має два корені;

2) має один корінь;

3) не має коренів?



568³. Спростіть вираз:

$$\left(x - \frac{4x-9}{x-2}\right) : \left(2x - \frac{2x}{x-2}\right).$$

569⁴. Відомо, що $2x - 4y = 1$. Обчисліть значення виразів:

$$1) \frac{4}{x-2y}; \quad 2) \frac{8y-4x}{5}; \quad 3) \frac{x^2-4y^2}{2,5x+5y}.$$

Уроки 39—41

§ 17. АРИФМЕТИЧНИЙ КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ З ДОБУТКУ, ДРОБУ І СТЕПЕНЯ. ДОБУТОК І ЧАСТКА КВАДРАТНИХ КОРЕНІВ.

$$\text{ТОТОЖНІСТЬ } \sqrt{a^2} = |a|$$

Порівняємо значення виразів $\sqrt{4 \cdot 9}$ і $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$:

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6, \quad \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Отже, $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$. Аналогічну властивість має корінь із добутку будь-яких двох невід'ємних чисел.

Т е о р е м а (про корінь із добутку). *Корінь із добутку двох невід'ємних чисел дорівнює добутку коренів із цих чисел, тобто якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то*

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то вирази $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ мають зміст і $\sqrt{a} \geq 0$, $\sqrt{b} \geq 0$. Тому $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$. Крім того, $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$.

Отже, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ і $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = ab$. За означенням квадратного кореня маємо: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Доведена теорема поширюється на випадок, коли множників під знаком кореня більше двох.

Н а с л і д о к. *Корінь з добутку невід'ємних множників дорівнює добутку коренів з цих множників.*

Д о в е д е н н я. Доведемо цей наслідок, наприклад, для трьох невід'ємних чисел $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. Маємо:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab}\sqrt{c} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}.$$

$$\text{Приклад 1. } 1) \sqrt{25 \cdot 36} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{36} = 5 \cdot 6 = 30; \quad 2) \sqrt{32 \cdot 72} = \sqrt{(16 \cdot 2) \cdot (36 \cdot 2)} = \sqrt{16 \cdot 36 \cdot 4} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{4} = 4 \cdot 6 \cdot 2 = 48.$$

Якщо в рівності $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ поміняти місцями ліву і праву частини, то дістанемо тотожність:



$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \text{ де } a \geq 0, b \geq 0.$$

Добуток коренів з невід'ємних чисел дорівнює кореню з добутку цих чисел.

Приклад 2. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6.$

Розглянемо квадратний корінь з дробу.

Т е о р е м а (про корінь з дробу). *Корінь з дробу, чисельник якого невід'ємний, а знаменник додатний, дорівнює кореню з чисельника, поділеному на корінь із знаменника, тобто, якщо $a \geq 0$ і $b > 0$, то*

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $a \geq 0$ і $b > 0$, то вирази $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ мають зміст і $\sqrt{a} \geq 0$, $\sqrt{b} > 0$. Тому $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0$. Крім того,

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Отже, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0$ і $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \right)^2 = \frac{a}{b}$. За означенням квадратного кореня

маємо: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$

Приклад 3. 1) $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7};$ 2) $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}.$

Якщо в рівності $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ поміняти місцями ліву і праву частини, то дістанемо тотожність:



$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ де } a \geq 0, b > 0.$$

Частка, чисельник якої є коренем з невід'ємного числа, а знаменник — коренем з додатного числа, дорівнює кореню з частки цих чисел.

Приклад 4. 1) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$; 2) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{20}{45}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$.

Розглянемо добування квадратного кореня з квадрата.

Т е о р е м а (про корінь з квадрата). *Для будь-якого значення a має місце тотожність*

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $|a| \geq 0$ для будь-якого a і $|a|^2 = a^2$, то за означенням квадратного кореня $\sqrt{a^2} = |a|$.

Приклад 5. 1) $\sqrt{7^2} = |7| = 7$; 2) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

Розглянемо квадратний корінь із степеня.

Т е о р е м а (про корінь із степеня). *Для будь-якого значення a і натурального значення k має місце тотожність*

$$\sqrt{a^{2k}} = |a^k|.$$

Д о в е д е н н я. $\sqrt{a^{2k}} = \sqrt{(a^k)^2}$. За теоремою про корінь з квадрата маємо $\sqrt{(a^k)^2} = |a^k|$. Отже, $\sqrt{a^{2k}} = |a^k|$.

Приклад 6. $\sqrt{1,7^4} = \sqrt{(1,7^2)^2} = |1,7^2| = 2,89$.

Приклад 7. Спростити вираз: 1) $\sqrt{a^{12}}$; 2) $\sqrt{p^6}$, де $p < 0$.

Р о з в' я з а н н я. 1) $\sqrt{a^{12}} = \sqrt{(a^6)^2} = |a^6|$. Оскільки $a^6 \geq 0$ для будь-якого a , то $|a^6| = a^6$. Отже, $\sqrt{a^{12}} = a^6$.

2) $\sqrt{p^6} = \sqrt{(p^3)^2} = |p^3|$. Оскільки $p < 0$, то $p^3 < 0$, а тому $|p^3| = -p^3$.
Отже, якщо $p < 0$, то $\sqrt{p^6} = -p^3$.

В і д п о в і д ь. 1) a^6 ; 2) $-p^3$.



Сформулюйте та доведіть теорему про корінь з добутку.
• Чому дорівнює добуток коренів? • Сформулюйте та доведіть теорему про корінь з дробу.
• Чому дорівнює частка коренів? • Сформулюйте та доведіть теорему про корінь з квадрата та зі степеня.

570¹⁰. (Усно.) Чи правильно виконані обчислення:

1) $\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$; 2) $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{25} = \frac{2}{25}$?

571^①. Чи правильно виконані обчислення:

1) $\sqrt{36 \cdot 4} = \sqrt{36} \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$; 2) $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$?

572^②. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{25 \cdot 9}$; 2) $\sqrt{16 \cdot 900}$; 3) $\sqrt{0,25 \cdot 1,44}$;
4) $\sqrt{0,04 \cdot 169}$; 5) $\sqrt{2,25 \cdot 0,09 \cdot 100}$; 6) $\sqrt{1,96 \cdot 0,01 \cdot 6,25}$.

573^②. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{36 \cdot 49}$; 2) $\sqrt{100 \cdot 4}$; 3) $\sqrt{0,49 \cdot 1,69}$;
4) $\sqrt{0,09 \cdot 196}$; 5) $\sqrt{1,44 \cdot 0,16 \cdot 400}$; 6) $\sqrt{2,89 \cdot 10\,000 \cdot 0,25}$.

574^②. Обчисліть значення кореня:

1) $\sqrt{\frac{49}{81}}$; 2) $\sqrt{\frac{121}{400}}$; 3) $\sqrt{\frac{36}{625}}$;
4) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; 5) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 6) $\sqrt{44\frac{4}{9}}$.

575^②. Обчисліть значення кореня:

1) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; 2) $\sqrt{\frac{289}{900}}$; 3) $\sqrt{\frac{9}{784}}$;
4) $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; 5) $\sqrt{1\frac{19}{81}}$; 6) $\sqrt{42\frac{1}{4}}$.

576^②. Обчисліть:

1) $\sqrt{0,2^2}$; 2) $\sqrt{(-0,9)^2}$; 3) $2\sqrt{3^2}$; 4) $-3\sqrt{9^2}$;
5) $0,5\sqrt{(-10)^2}$; 6) $-\frac{1}{5}\sqrt{5^2}$; 7) $-3\sqrt{(-7)^2}$; 8) $\frac{2}{7}\sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2}$.

577^②. Обчисліть:

1) $\sqrt{1,7^2}$; 2) $\sqrt{(-0,3)^2}$; 3) $3\sqrt{4^2}$; 4) $-2\sqrt{7^2}$;
5) $\frac{1}{3}\sqrt{(-9)^2}$; 6) $-0,1\sqrt{20^2}$; 7) $-5\sqrt{(-3)^2}$; 8) $\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2}$.

578^②. Подайте вираз у вигляді добутку коренів:

1) $\sqrt{2 \cdot 7}$; 2) $\sqrt{35}$; 3) $\sqrt{17b}$; 4) $\sqrt{6p}$.

579^②. Подайте вираз у вигляді добутку коренів:

1) $\sqrt{3 \cdot 11}$; 2) $\sqrt{15}$; 3) $\sqrt{19a}$; 4) $\sqrt{10b}$.

580². Подайте вираз у вигляді частки коренів:

1) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; 2) $\sqrt{3\frac{2}{7}}$; 3) $\sqrt{\frac{7}{m}}$; 4) $\sqrt{\frac{p}{23}}$.

581². Подайте вираз у вигляді частки коренів:

1) $\sqrt{\frac{3}{11}}$; 2) $\sqrt{9\frac{1}{2}}$; 3) $\sqrt{\frac{a}{37}}$; 4) $\sqrt{\frac{5}{b}}$.

582². Обчисліть значення добутку:

1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$; 2) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$; 3) $\sqrt{0,02} \cdot \sqrt{50}$;
4) $\sqrt{0,9} \cdot \sqrt{2,5}$; 5) $\sqrt{\frac{1}{7}} \cdot \sqrt{\frac{7}{13}} \cdot \sqrt{\frac{13}{36}}$; 6) $\sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{7}}$.

583². Обчисліть значення добутку:

1) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$; 2) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$; 3) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{0,05}$;
4) $\sqrt{0,4} \cdot \sqrt{0,9}$; 5) $\sqrt{\frac{5}{7}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{7}{9}}$; 6) $\sqrt{\frac{11}{12}} \cdot \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt{11}$.

584². Обчисліть значення частки:

1) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{7,5}}{\sqrt{0,3}}$; 3) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{1,5}}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$; 5) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{50}}$; 6) $\frac{\sqrt{0,27}}{\sqrt{0,75}}$.

585². Обчисліть значення частки:

1) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{2,7}}{\sqrt{0,3}}$; 3) $\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{2,5}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{72}}$; 5) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}$; 6) $\frac{\sqrt{0,18}}{\sqrt{1,28}}$.

586². Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{9^4}$; 2) $\sqrt{2^6}$; 3) $\sqrt{5^8}$;
4) $\sqrt{(-2)^{10}}$; 5) $\sqrt{(-3)^4}$; 6) $\sqrt{(-1)^{12}}$.

587². Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{10^4}$; 2) $\sqrt{3^6}$; 3) $\sqrt{2^8}$;
4) $\sqrt{(-5)^4}$; 5) $\sqrt{(-1)^{10}}$; 6) $\sqrt{(-2)^{12}}$.

588². Замініть вираз тотожно рівним:

1) $\sqrt{m^2}$; 2) $4\sqrt{p^2}$; 3) $-0,1\sqrt{a^2}$; 4) $\frac{17}{\sqrt{c^2}}$.

589². Замініть вираз тотожно рівним:

1) $\sqrt{t^2}$; 2) $-2\sqrt{b^2}$; 3) $\frac{1}{7}\sqrt{x^2}$; 4) $\frac{7}{\sqrt{a^2}}$.

590³. Обчисліть:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{4 \frac{33}{64} \cdot 52 \frac{9}{16}}; & 2) \sqrt{1 \frac{4}{9}} \cdot \sqrt{1 \frac{3}{13}}; \\ 3) \sqrt{20^2 - 16^2}; & 4) \sqrt{0,85^2 - 0,84^2}. \end{array}$$

591³. Обчисліть:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{4 \frac{21}{25} \cdot 23 \frac{73}{81}}; & 2) \sqrt{1 \frac{1}{36}} \cdot \sqrt{1 \frac{12}{37}}; \\ 3) \sqrt{37^2 - 12^2}; & 4) \sqrt{0,25^2 - 0,24^2}. \end{array}$$

592³. Обчисліть:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt{90 \cdot 490}; & 2) \sqrt{72 \cdot 32}; & 3) \sqrt{4,9 \cdot 32,4}; \\ 4) \sqrt{4,5 \cdot \sqrt{72}}; & 5) \sqrt{13} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{39}; & 6) \sqrt{22} \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{77}. \end{array}$$

593³. Обчисліть:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt{40 \cdot 640}; & 2) \sqrt{45 \cdot 125}; & 3) \sqrt{14,4 \cdot 8,1}; \\ 4) \sqrt{1,6 \cdot \sqrt{90}}; & 5) \sqrt{17} \cdot \sqrt{34} \cdot \sqrt{2}; & 6) \sqrt{63} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{14}. \end{array}$$

594³. Обчисліть значення виразу:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{3^4 \cdot 6^2 \cdot (-2)^6}; & 2) \sqrt{2^{10} \cdot 5^2} - \sqrt{(-4)^4}; \\ 3) \sqrt{25^3}; & 4) \sqrt{9^5}. \end{array}$$

595³. Обчисліть:

$$1) \sqrt{3^4 \cdot (-6)^2} - \sqrt{(-2)^6}; \quad 2) \sqrt{36^3}.$$

596³. Обчисліть, розклавши підкореневий вираз на прості множники: 1) $\sqrt{12544}$; 2) $\sqrt{186624}$.

597³. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{0,36x^2}, \text{ якщо } x \geq 0; & 2) \sqrt{121y^2}, \text{ якщо } y < 0; \\ 3) -3\sqrt{\frac{1}{9}p^2}, \text{ якщо } p < 0; & 4) 5\sqrt{x^4}; \\ 5) \sqrt{25a^6}, \text{ якщо } a \geq 0; & 6) \sqrt{\frac{25}{49}c^{10}}, \text{ якщо } c < 0. \end{array}$$

598³. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{0,49p^2}, \text{ якщо } p \geq 0; & 2) \sqrt{\frac{25}{64}m^2}, \text{ якщо } m < 0; \\ 3) 7\sqrt{b^8}; & 4) \sqrt{0,01a^{14}}, \text{ якщо } a < 0. \end{array}$$

599³. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{25m^2n^{12}}$, якщо $m \leq 0$;

2) $\sqrt{\frac{49}{169}m^{14}n^{18}}$, якщо $m \geq 0$, $n < 0$;

3) $\frac{1}{8}xy^3\sqrt{64x^4y^2}$, якщо $y > 0$; 4) $\sqrt{\frac{p^6m^{12}}{x^8}}$, якщо $p < 0$;

5) $2m^5\sqrt{\frac{p^{20}}{m^2}}$, якщо $m < 0$; 6) $\frac{\sqrt{x^{14}y^{16}z^{26}}}{x^9y^8z^{12}}$, якщо $x > 0$, $z < 0$.

600³. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{64a^2b^8}$, якщо $a \geq 0$; 2) $\frac{1}{10}bc\sqrt{25b^6c^{10}}$, якщо $b < 0$, $c > 0$.

3) $\sqrt{\frac{x^8y^{12}}{z^2}}$, якщо $z < 0$; 4) $3a^2\sqrt{\frac{b^{14}}{a^4}}$, якщо $b > 0$.

601⁴. Відомо, що $x < 0$, $y < 0$. Подайте вираз:

1) $\sqrt{xy}$ у вигляді добутку коренів;

2) $\sqrt{\frac{x}{y}}$ у вигляді частки коренів.

602⁴. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(x-y)^2}$, якщо $x \geq y$; 2) $\sqrt{(m-n)^2}$, якщо $m < n$;

3) $\sqrt{x^2 - 10x + 25}$, якщо $x \geq 5$; 4) $\sqrt{36 - 12a + a^2}$, якщо $a < 6$.

5) $(x+2)\sqrt{\frac{25}{x^2+4x+4}}$, якщо $x > -2$;

6) $(a-b)\sqrt{\frac{4}{a^2-2ab+b^2}}$, якщо $a < b$.

603⁴. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(m-2)^2}$, якщо $m \geq 2$; 2) $\sqrt{p^2+8p+16}$, якщо $p < -4$;

3) $(a-5)\sqrt{\frac{1}{a^2-10a+25}}$, якщо $a > 5$;

4) $(x-1)\sqrt{\frac{9}{x^2-2x+1}}$, якщо $x < 1$.

604⁴. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(\sqrt{3}-5)^2} + \left(\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)^2$; 2) $\sqrt{(3-\sqrt{7})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{21}-5)^2} - \sqrt{(\sqrt{21}-4)^2}$; 4) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

605. Спростіть вираз:

$$1) \left(\sqrt{5 - \sqrt{8}} \right)^2 - \sqrt{(\sqrt{8} - 13)^2}; \quad 2) \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}.$$



606. Розкладіть на множники:

$$1) 2x^2y^3 - 8xy^5; \quad 2) 49a^2 - 36;$$

$$3) 36m^3n + 27m^2n^8; \quad 4) \frac{25}{49}m^8 - n^4.$$

607. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{m^2 - 4}{6 + 3m}; \quad 2) \frac{a^2 + 10a + 25}{4a + 20}; \quad 3) \frac{x^2 - 25}{x^2 - 10x + 25}; \quad 4) \frac{x^2 - 8x + 16}{x^3 - 8}.$$

608. Доведіть тотожність:

$$\left(\frac{a}{a-6} - \frac{2a}{a^2 - 12a + 36} \right) : \frac{a-8}{36-a^2} + \frac{12a}{a-6} = -a.$$

609. Побудуйте графік функції $y = 3x + \sqrt{x^2}$, якщо $x \leq 0$.

Уроки 42—44

§ 18. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНІ КОРЕНІ

Розглянемо тотожні перетворення виразів, що містять квадратні корені.

1. Винесення множника з-під знака кореня.

Скористаємося теоремою про корінь з добутку для перетворення виразу $\sqrt{12}$:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

У такому випадку говорять, що *множник винесли з-під знака кореня*. У даному випадку винесли з-під знака кореня множник 2.

Приклад 1. Винести множник з-під знака кореня у виразі $\sqrt{x^{11}}$.

Розв'язання. Вираз $\sqrt{x^{11}}$ має зміст, якщо $x \geq 0$ (якщо $x < 0$, то $x^{11} < 0$). Подамо вираз x^{11} у вигляді добутку $x^{10} \cdot x$, в якому x^{10} є степенем з парним показником. Тоді $\sqrt{x^{11}} = \sqrt{x^{10} \cdot x} = \sqrt{x^{10}} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{(x^5)^2} \cdot \sqrt{x} = |x^5| \sqrt{x}$.

Оскільки $x \geq 0$, то $x^5 \geq 0$. Тому $|x^5| = x^5$. Отже, $\sqrt{x^{11}} = x^5 \sqrt{x}$.

Відповідь: $x^5 \sqrt{x}$.

2. Внесення множника під знак кореня.

Розглянемо тотожне перетворення, обернене до попереднього. Скористаємося правилом множення коренів:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}.$$

Говорять, що *внесли множник під знак кореня*. У даному випадку внесли під знак кореня множник 2.

Зазначимо, що під знак кореня можна внести лише додатний множник.

Приклад 2. Внести множник під знак кореня: 1) $-2\sqrt{3}$; 2) $m\sqrt{5}$.

Розв'язання. 1) $-2\sqrt{3} = -1 \cdot 2\sqrt{3} = -1 \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = -1 \cdot \sqrt{4 \cdot 3} = -\sqrt{12}$.

2) Множник m може набувати будь-яких значень (бути додатним, нулем або від'ємним). Тому слід розглянути два випадки:

якщо $m \geq 0$, то $m\sqrt{5} = |m| \sqrt{5} = \sqrt{m^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5m^2}$;

якщо $m < 0$, то $m\sqrt{5} = -|m| \sqrt{5} = -\sqrt{m^2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{5m^2}$.

В і д п о в і д ь. 1) $-\sqrt{12}$; 2) $\sqrt{5m^2}$, якщо $m \geq 0$; $-\sqrt{5m^2}$, якщо $m < 0$.

3. Додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня виразів, що містять квадратні корені.

Використовуючи правила множення та ділення коренів, можна виконувати відповідні дії над виразами, що містять квадратні корені.

Приклад 3. 1) $5\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{2} = 35\sqrt{6}$; 2) $7\sqrt{a} \cdot (-3\sqrt{6}) = -21\sqrt{6a}$; 3) $8\sqrt{18} : 4\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{18}}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$; 4) $7\sqrt{x} : (-2\sqrt{x}) = -\frac{7\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = -\frac{7}{2}$.

Використовуючи тотожність $(\sqrt{a})^2 = a$, де $a \geq 0$ можна підносити до степеня вирази, що містять квадратні корені.

Приклад 4. 1) $(-5\sqrt{2})^2 = (-5)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 25 \cdot 2 = 50$; 2) $(\sqrt{a})^3 = (\sqrt{a})^2 \sqrt{a} = a\sqrt{a}$.

Розглянемо приклад додавання квадратних коренів.

Приклад 5. Спростити вираз $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$.

Розв'язання. Доданки містять спільний множник $\sqrt{2}$. Винесемо його за дужки: $\sqrt{2}(5 + 3) = 8\sqrt{2}$. Звичайно, розв'язання записують коротше: $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

Зауважимо, що вирази $5\sqrt{2}$ і $3\sqrt{2}$ в даному прикладі називають *подібними радикалами*, ми їх додали, використавши правило зведення подібних доданків.

Приклад 6. Спростити вираз $\sqrt{12a} + \sqrt{48a} - \sqrt{27a}$.

Розв'язання. У кожному з доданків можна винести множник з-під знака кореня:

$$\begin{aligned}\sqrt{12a} + \sqrt{48a} - \sqrt{27a} &= \sqrt{4 \cdot 3a} + \sqrt{16 \cdot 3a} - \sqrt{9 \cdot 3a} = \\ &= 2\sqrt{3a} + 4\sqrt{3a} - 3\sqrt{3a}.\end{aligned}$$

Дістали суму, яка містить корені з однаковим підкореневим виразом. Ця сума дорівнює $3\sqrt{3a}$.

Відповідь. $3\sqrt{3a}$.

Приклад 7. Спростити вираз: 1) $(\sqrt{7} + 2\sqrt{3})(\sqrt{7} - 2\sqrt{3})$; 2) $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + \sqrt{15}$.

Розв'язання. 1) $(\sqrt{7} + 2\sqrt{3})(\sqrt{7} - 2\sqrt{3}) = (\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 7 - 4 \cdot 3 = -5$; 2) $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + \sqrt{15} = (2\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + \sqrt{15} = 4 \cdot 5 - 4\sqrt{15} + 3 + \sqrt{15} = 23 - 3\sqrt{15}$.

Відповідь. 1) -5 ; 2) $23 - 3\sqrt{15}$.

4. Скорочення дробів.

Приклад 8. Скоротити дріб: 1) $\frac{a^2-7}{a-\sqrt{7}}$; 2) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}$.

Розв'язання. 1) Оскільки $7 = (\sqrt{7})^2$, то чисельник дробу можна подати у вигляді різниці квадратів двох виразів:

$$\frac{a^2-7}{a-\sqrt{7}} = \frac{a^2-(\sqrt{7})^2}{a-\sqrt{7}} = \frac{(a-\sqrt{7})(a+\sqrt{7})}{a-\sqrt{7}} = a + \sqrt{7}.$$

2) Врахуємо, що $\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3}$, а $3 = (\sqrt{3})^2$, та винесемо за дужки спільний множник у чисельнику та знаменнику дробу:

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Відповідь. 1) $a + \sqrt{7}$; 2) $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

5. Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу.

Приклад 9. Перетворити дріб $\frac{a}{\sqrt{5}}$ так, щоб він не містив кореня у знаменнику дробу.

Розв'язання. Для виконання завдання досить чисельник і знаменник дробу помножити на $\sqrt{5}$:

$$\frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Відповідь. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

У такому випадку говорять, що ми звільнилися від ірраціональності в знаменнику дробу.

Приклад 10. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу $\frac{2}{\sqrt{7}-1}$.

Розв'язання. Помножимо чисельник і знаменник дробу на $\sqrt{7}+1$:

$$\frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7})^2-1^2} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{7-1} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{6} = \frac{\sqrt{7}+1}{3}.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{7}+1}{3}$.



На прикладі виразу $\sqrt{4m}$ покажіть, як можна винести множник з-під знака кореня. • На прикладі $3\sqrt{p}$ покажіть, як можна внести множник під знак кореня. • Наведіть приклади подібних радикалів. • За яким правилом можна додавати (віднімати) подібні радикали? • На який множник треба помножити чисельник і знаменник, щоб звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу: $\frac{2}{\sqrt{7}}$; $\frac{5}{\sqrt{a+1}}$?

610¹⁰. (Усно.) Виконайте дії:

1) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$; 2) $7\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$; 3) $3\sqrt{7} + \sqrt{7}$; 4) $2\sqrt{5} - \sqrt{5}$.

611¹⁰. Виконайте дії:

1) $7\sqrt{11} + 2\sqrt{11}$; 2) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{7} - \sqrt{7}$.

612¹⁰. Подайте у вигляді кореня:

1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$; 2) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$; 3) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{b}$; 4) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{a}}$.

613¹⁰. Подайте у вигляді кореня:

1) $\sqrt{3}\sqrt{7}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$; 3) $\sqrt{5}\sqrt{a}$; 4) $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{x}}$.

614². Винесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{63}$; 3) $\sqrt{250}$; 4) $\sqrt{363}$;
5) $\sqrt{3^2 \cdot 19}$; 6) $\sqrt{2^4 \cdot 7}$; 7) $\sqrt{5^2 \cdot 7^3}$; 8) $\sqrt{5^3 \cdot 2^5}$.

615². Винесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{20}$; 2) $\sqrt{50}$; 3) $\sqrt{27}$; 4) $\sqrt{192}$;
5) $\sqrt{5^2 \cdot 17}$; 6) $\sqrt{3^4 \cdot 2}$; 7) $\sqrt{7^2 \cdot 2^3}$; 8) $\sqrt{3^5 \cdot 5^3}$.

616². Винесіть множник з-під знака кореня і спростіть утворений вираз:

- 1) $\frac{1}{2}\sqrt{28}$; 2) $-\frac{3}{5}\sqrt{500}$;
3) $1,2\sqrt{75}$; 4) $-1,25\sqrt{48}$.

617². Винесіть множник з-під знака кореня і спростіть утворений вираз:

- 1) $0,5\sqrt{44}$; 2) $-\frac{2}{5}\sqrt{125}$;
3) $0,7\sqrt{300}$; 4) $-1,5\sqrt{112}$.

618². Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $3\sqrt{2}$; 2) $7\sqrt{5}$; 3) $-2\sqrt{3}$; 4) $-5\sqrt{10}$;
5) $10\sqrt{m}$; 6) $\frac{1}{2}\sqrt{8x}$; 7) $-0,1\sqrt{10a}$; 8) $7\sqrt{\frac{1}{7}c}$.

619². Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $4\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt{11}$; 3) $-3\sqrt{5}$; 4) $-7\sqrt{2}$;
5) $5\sqrt{p}$; 6) $\frac{1}{3}\sqrt{18x}$; 7) $-0,2\sqrt{10t}$; 8) $6\sqrt{\frac{1}{6}y}$.

620². Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{25x} + \sqrt{49x} - \sqrt{36x}$; 2) $\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$;
3) $\sqrt{8a} + \frac{1}{2}\sqrt{200a} - \sqrt{50a}$; 4) $\sqrt{3m} - \sqrt{p} + \sqrt{12m}$.

621². Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{100a} + \sqrt{64a} - \sqrt{121a}$; 2) $\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{75}$;
3) $\sqrt{50b} - \frac{1}{5}\sqrt{75b} + \sqrt{250b}$; 4) $\sqrt{7a} + \sqrt{b} + \sqrt{63a}$.

622². Виконайте множення:

- 1) $\sqrt{2}(\sqrt{8} - \sqrt{72})$; 2) $(2\sqrt{3} - \sqrt{63} + \sqrt{45})\sqrt{3}$;
3) $(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})$; 4) $(3 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})$.

623². Виконайте множення:

- 1) $\sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{20})$; 2) $(5\sqrt{2} - \sqrt{18} + \sqrt{50})\sqrt{2}$;
3) $(1 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$; 4) $(2 + \sqrt{7})(1 - \sqrt{7})$.

624². Спростіть вираз, використовуючи формули скороченого множення:

- 1) $(\sqrt{11} + \sqrt{7})(\sqrt{11} - \sqrt{7})$; 2) $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$;
3) $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})(2\sqrt{3} + \sqrt{5})$; 4) $(\sqrt{2} + \sqrt{7})^2 - 9$;
5) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6}$; 6) $(\sqrt{3} - \sqrt{27})^2$.

625². Спростіть вираз, використовуючи формули скороченого множення:

- 1) $(\sqrt{19} + \sqrt{3})(\sqrt{19} - \sqrt{3})$; 2) $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$;
3) $(4\sqrt{3} - \sqrt{19})(4\sqrt{3} + \sqrt{19})$; 4) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 - 8$;
5) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{10}$; 6) $(\sqrt{50} - \sqrt{2})^2$.

626². Розкладіть на множники, використовуючи формулу різниці квадратів:

- 1) $x^2 - 3$; 2) $17 - a^2$; 3) $4a^2 - 5$;
4) $1 - 2x^2$; 5) $a - 9$, де $a \geq 0$; 6) $b - c$, де $b \geq 0, c \geq 0$.

627². Розкладіть на множники, використовуючи формулу різниці квадратів:

- 1) $5 - x^2$; 2) $9m^2 - 7$;
3) $16 - 3b^2$; 4) $b - 2$, де $b \geq 0$.

628². Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{x^2 - 5}{x + \sqrt{5}}$; 2) $\frac{7 - \sqrt{a}}{49 - a}$; 3) $\frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{2\sqrt{3} + 3}{5\sqrt{3}}$.

629². Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{a^2 - 3}{a - \sqrt{3}}$; 2) $\frac{5 + \sqrt{b}}{25 - b}$; 3) $\frac{\sqrt{5} + 5}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{7\sqrt{2} - 2}{3\sqrt{2}}$.

630². Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу:

- 1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{10}{\sqrt{5}}$; 3) $\frac{m}{\sqrt{n}}$; 4) $\frac{6}{5\sqrt{3}}$.

631². Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу:

- 1) $\frac{5}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{9}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; 4) $\frac{8}{3\sqrt{2}}$.

632³. Винесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{13m^2}$, якщо $m \geq 0$; 2) $\sqrt{b^3}$;
3) $\sqrt{7a^6}$, якщо $a < 0$; 4) $\sqrt{16x^7}$.

633³. Винесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{11x^2}$, якщо $x \geq 0$; 2) $\sqrt{c^5}$;
3) $\sqrt{2p^6}$, якщо $p < 0$; 4) $\sqrt{36m^9}$.

634³. Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $a\sqrt{2}$, якщо $a \geq 0$; 2) $b^3\sqrt{5}$, якщо $b < 0$;
3) $b\sqrt{\frac{3}{b}}$; 4) $x^3\sqrt{-x}$.

635³. Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $b\sqrt{3}$, якщо $b \geq 0$; 2) $c^5\sqrt{7}$, якщо $c < 0$;
3) $x^2\sqrt{\frac{5}{x}}$; 4) $y\sqrt{-y}$.

636³. Спростіть вираз:

- 1) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{5})^2 + \sqrt{360}$; 2) $(3\sqrt{2} + 7\sqrt{3})^2 - \sqrt{150}$;
3) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$.

637³. Розкладіть на множники:

- 1) $\sqrt{a} - \sqrt{3a}$; 2) $\sqrt{7p} + \sqrt{4p}$; 3) $\sqrt{21} + \sqrt{7}$;
4) $\sqrt{6} - \sqrt{10}$; 5) $2\sqrt{m} - \sqrt{6m}$; 6) $\sqrt{5x} - \sqrt{10x}$.

638³. Розкладіть на множники:

- 1) $\sqrt{p} + \sqrt{2p}$; 2) $\sqrt{42} - \sqrt{6}$; 3) $3\sqrt{a} + \sqrt{6a}$.

639³. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{x+6\sqrt{x}}{x-36}$; 2) $\frac{a+6\sqrt{a}\sqrt{b}+9b}{a-9b}$; 3) $\frac{\sqrt{10}-5}{2-\sqrt{10}}$.

640³. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{a-25}{a-5\sqrt{a}}$; 2) $\frac{x-4\sqrt{x}\sqrt{y}+4y}{x-4y}$; 3) $\frac{11+\sqrt{22}}{\sqrt{22}+2}$.

641³. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу:

- 1) $\frac{15}{\sqrt{6}-1}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}$; 3) $\frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$.

642³. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу:

1) $\frac{10}{\sqrt{3}+1}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{15}-\sqrt{3}}$; 3) $\frac{1}{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}$.

643⁴. Обчисліть значення виразу:

1) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$; 2) $\frac{15}{11+2\sqrt{30}} + \frac{15}{11-2\sqrt{30}}$;
3) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; 4) $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)^2$.

644⁴. Обчисліть значення виразу:

1) $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2$; 2) $\frac{3}{10-3\sqrt{11}} + \frac{3}{10+3\sqrt{11}}$;
3) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$; 4) $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^2$.

645⁴. Обчисліть суму: $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{13}} + \dots +$
 $+\frac{1}{\sqrt{45}+\sqrt{49}}.$

646⁴. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sqrt{m}+1}{m\sqrt{m+m}+\sqrt{m}} : \frac{1}{m^2-\sqrt{m}}$; 2) $\frac{a+b}{\sqrt{ab}-b} - \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;
3) $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right) : \sqrt{\frac{y}{x}}.$

 **647².** Побудуйте графік функції $y = x^2$, де $x \geq 0$. Якою є область значень цієї функції?

648³. Обчисліть:

1) $\frac{216^3}{36^4}$; 2) $\frac{81^6}{27^8}$; 3) $\frac{4^8 \cdot 16}{64^3}$; 4) $\frac{2^8 \cdot 13^8}{26^7}.$

649³. Розв'яжіть рівняння $\frac{2x+1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{2x^2}{x^2-x}.$

650². Доведіть, що значення виразу $\sqrt{10n-3}$, де $n \in N$, не може бути натуральним числом.

Приклад 1. Нехай S см² — площа квадрата, a см — його сторона. Оскільки $S = a^2$, то залежність сторони квадрата a від його площі S можна задати формулою $a = \sqrt{S}$.

Розглянемо функцію $y = \sqrt{x}$. Очевидно, що змінна x набуває невід'ємних значень: $x \geq 0$. Складемо таблицю значень функції $y = \sqrt{x}$ для кількох значень аргументу:

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Позначимо ці точки на координатній площині (мал. 14). Якби на цій самій площині позначили більшу кількість точок, координати яких задовольняють рівняння $y = \sqrt{x}$, а потім з'єднали їх плавною лінією, то дістали б графік функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 15). Графіком цієї функції є вітка параболи.

Можна виділити наступні *властивості функції* $y = \sqrt{x}$.

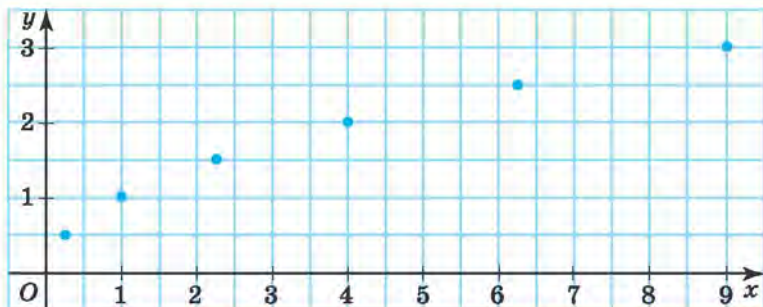


1. Областю визначення функції є множина всіх невід'ємних чисел: $x \geq 0$.

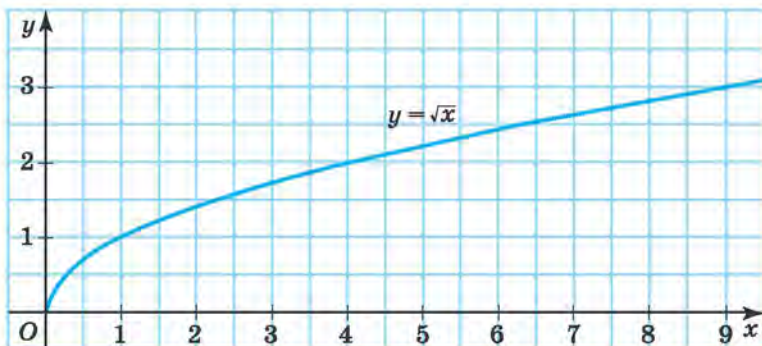
2. Областю значень функції є множина всіх невід'ємних чисел: $y \geq 0$.

3. Графік функції — вітка параболи. Графік функції проходить через точку $(0; 0)$. Всі інші точки графіка розміщені в першій координатній чверті.

4. Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.



Мал. 14



Мал. 15

Остання властивість дає змогу *порівнювати значення виразів, що містять корені*.

Приклад 2. Порівняти числа: 1) $\sqrt{12}$ і $\sqrt{11}$; 2) 7 і $\sqrt{50}$; 3) $5\sqrt{2}$ і $4\sqrt{3}$.

Розв'язання. 1) Оскільки $12 > 11$, то $\sqrt{12} > \sqrt{11}$.

2) Оскільки $7 = \sqrt{49}$, а $49 < 50$, то $\sqrt{49} < \sqrt{50}$, а тому $7 < \sqrt{50}$.

3) Внесемо множники обох виразів під знаки кореня:
 $5\sqrt{2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{50}$; $4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{48}$.

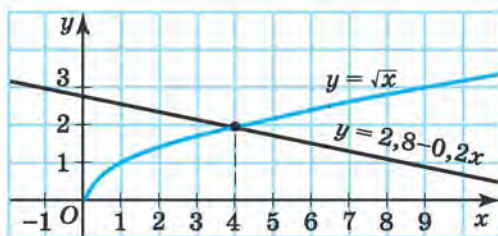
Оскільки $50 > 48$, $\sqrt{50} > \sqrt{48}$, а тому $5\sqrt{2} > 4\sqrt{3}$.

Приклад 3. Розв'язати графічно рівняння $5\sqrt{x} = 14 - x$.

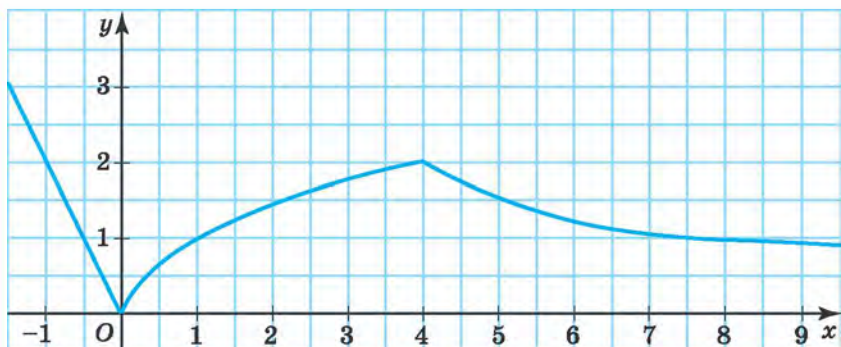
Розв'язання. Оскільки ми поки що не вміємо будувати графік функції $y = 5\sqrt{x}$, то поділимо ліву і праву частини рівняння на 5:

$$\sqrt{x} = 2,8 - 0,2x.$$

Побудуємо графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = 2,8 - 0,2x$ (мал. 16). Дістали точку перетину графіків з абсцисою 4. Перевіркою



Мал. 16



Мал. 17

впевнюємося в тому, що $x = 4$ — корінь рівняння. Справді, $5\sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$ і $14 - 4 = 10$.

В і д п о в і д ь. $x = 4$.

Приклад 4. Побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} -2x, & \text{якщо } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 4, \\ \frac{8}{x}, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$$

Р о з в' я з а н н я. Графік подано на малюнку 17.



Що є графіком функції $y = \sqrt{x}$? ■ Сформулюйте властивості функції $y = \sqrt{x}$.

651®. Для функції $y = \sqrt{x}$ знайдіть значення y , яке відповідає $x = 9; 0; 81$.

652®. Для функції $y = \sqrt{x}$ знайдіть значення y , яке відповідає $x = 1; 4; 100$.

653®. Використовуючи графік функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 15), знайдіть:

- 1) значення y , відповідне $x = 1,5; 3; 4; 6,5$;
- 2) значення x , відповідне $y = 1; 2,5$;
- 3) два значення x , при яких значення функції більше від 2; менше від 2.

654®. Користуючись графіком функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 15), знайдіть:

- 1) значення функції, відповідне значенню аргументу, що дорівнює $0,5; 2; 5,5$;

- 2) значення аргументу, при яких значення функції дорівнює 0,5; 1;
 3) два значення x , при яких значення функції більше від 1; менше від 1.

655². Не виконуючи побудови графіка функції $y = \sqrt{x}$, вкажіть, через які з даних точок проходить цей графік:

- 1) $A(36; 6)$; 2) $B(4; 16)$; 3) $C(-4; 2)$;
 4) $D(0; 0)$; 5) $M(1; -1)$; 6) $P(0,5; 0,25)$.

656². Чи належить графіку функції $y = \sqrt{x}$ точка:

- 1) $F(16; 4)$; 2) $K(-36; 6)$;
 3) $L(5; 25)$; 4) $N(0,9; 0,81)$?

657². Порівняйте значення виразів:

- 1) $2\sqrt{3}$ і $\sqrt{11}$; 2) $\sqrt{29}$ і $2\sqrt{7}$;
 3) $3\sqrt{5}$ і $2\sqrt{10}$; 4) $4\sqrt{3}$ і $3\sqrt{7}$.

658². Порівняйте значення виразів:

- 1) $5\sqrt{2}$ і $\sqrt{51}$; 2) $\sqrt{146}$ і $7\sqrt{3}$;
 3) $2\sqrt{5}$ і $3\sqrt{2}$; 4) $2\sqrt{7}$ і $3\sqrt{3}$.

659³. Порівняйте числа:

- 1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$ і $\frac{1}{2}\sqrt{84}$; 2) $0,2\sqrt{1\frac{3}{8}}$ і $0,4\sqrt{\frac{11}{32}}$.

660³. Порівняйте числа:

- 1) $\frac{3}{4}\sqrt{48}$ і $\frac{3}{5}\sqrt{75}$; 2) $0,3\sqrt{1\frac{4}{9}}$ і $0,2\sqrt{1\frac{3}{4}}$.

661³. Знайдіть область значень функції $y = \sqrt{x}$, якщо: 1) $0 \leq x \leq 4$;
 2) $1 \leq x \leq 9$.

662³. Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x} = 6 - x$.

663³. Розв'яжіть графічно рівняння $3 - 2x = \sqrt{x}$.

664³. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} x - 2, & \text{якщо } x < 4; \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 4; \end{cases} \quad 2) y = \frac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}.$$

665³. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 1; \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases} \quad 2) y = \frac{\sqrt{x} - x}{1 - \sqrt{x}}.$$



666². Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = \frac{2}{5}$; 2) $\sqrt{x} = -5$; 3) $x^2 = 16$; 4) $x^2 = -1$.

667³. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{c^5}$; 2) $\sqrt{3b^{10}}$, якщо $b < 0$.

668². Обчисліть значення виразу $\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}}\right)^2$.

Урок 46

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО § 13—19

1¹⁰. Для функції $y = x^2$ знайдіть значення y , яке відповідає $x = -4$; 7.

2¹⁰. Чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{-4}$; 3) $\sqrt{0}$; 4) $\sqrt{7}$?

3¹⁰. З чисел 2 ; $1\frac{4}{5}$; -8 ; $\sqrt{3}$; 5 ; 0 ; $-\sqrt{8}$; $-2\frac{1}{3}$ випишіть:

- 1) натуральні числа; 2) цілі недодатні числа;
3) раціональні додатні числа; 4) ірраціональні числа.

4². Обчисліть:

1) $\sqrt{2\frac{14}{25}} - 10\sqrt{0,04}$; 2) $(-3\sqrt{5})^2$;

3) $\sqrt{0,1} \cdot \sqrt{1,6}$; 4) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1,5}}$.

5². Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = \frac{3}{4}$; 2) $\sqrt{x} = -1$; 3) $x^2 = 9$; 4) $x^2 = -4$.

6². Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$; 2) $\frac{4\sqrt{7}+7}{5\sqrt{7}}$.

7². Порівняйте числа:

1) $\frac{3}{5}\sqrt{50}$ і $\frac{2}{5}\sqrt{75}$; 2) $0,2\sqrt{2\frac{3}{8}}$ і $0,4\sqrt{\frac{19}{32}}$.

8³. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{b^7}$; 2) $\sqrt{5m^6}$, якщо $m < 0$.

9². Обчисліть значення виразу $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2$.

Додаткові завдання

10^④. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 6 - x, & \text{якщо } x < 4; \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 4. \end{cases}$

11^④. Спростіть вираз $\sqrt{(\sqrt{7} - 13)^2} + \sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2}$.

Вправи для повторення розділу II

До § 13

669^①. Вкажіть область визначення і область значень функції $y = x^2$.

670^②. Побудуйте графік функції $y = x^2$, якщо $-3 \leq x \leq 2$.

671^③. Побудуйте графік функції, що виражає залежність площі квадрата S (у см^2) від сторони квадрата a (у см). Якою є область визначення цієї функції?

672^③. 1) Як зміниться площа квадрата, якщо його сторону збільшити в 3 рази; зменшити у 9 раз?

2) Як треба змінити сторону квадрата, щоб його площа збільшилася у 4 рази, зменшилася у 25 раз?

673^③. Точка $A(m; n)$, де $m \neq 0$, $n \neq 0$, належить графіку функції $y = x^2$. Чи належить графіку функції точка:

1) $B(m; -n)$; 2) $C(-m; n)$; 3) $D(-m; -n)$?

674^⑤. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ та $y = x + 6$ і знайдіть координати точок їх перетину.

675^④. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 1, \\ 2 - x, & \text{якщо } x > 1; \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} 6 + x, & \text{якщо } x < -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{8}{x}, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

До § 14

676^①. Доведіть, що: 1) $\sqrt{0,49} = 0,7$; 2) $\sqrt{2500} = 50$.

677^②. Обчисліть:

$$1) \sqrt{0,49}; \quad 2) \sqrt{2601}; \quad 3) \sqrt{5,76}; \quad 4) \sqrt{\frac{25}{36}};$$

$$5) \sqrt{10,89} + \sqrt{0,01} - 3,2; \quad 6) \sqrt{6\frac{1}{4}} - 2\sqrt{1,44} + 0,9.$$

678². Обчисліть значення виразу $\sqrt{2x - 8y}$, якщо:

- 1) $x = 1,6$; $y = 0,4$; 2) $x = 0,08$; $y = -0,3$.

679³. Обчисліть:

1) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{0,09} + 0,78\sqrt{100}\right) \cdot (\sqrt{2,25} + 2\sqrt{30,25})$;

2) $\left(-7\sqrt{\frac{4}{49}} + 3\sqrt{5,29}\right) : (\sqrt{5^2 + 12^2} - \sqrt{65,61})$.

680². Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{5x} + 3 = 13$; 2) $\frac{1}{3}\sqrt{x-1} = 1,2$.

681². При яких значеннях x має зміст вираз:

1) $\sqrt{x-2}$; 2) $\sqrt{(x-3)^5}$; 3) $\frac{\sqrt{-x}}{x+1}$; 4) $\sqrt{x} + \sqrt{-x}$?

682². Розв'яжіть рівняння відносно змінної x для всіх можливих значень a :

1) $a\sqrt{x} = 0$; 2) $a\sqrt{x} = 1$; 3) $a\sqrt{x-1} = 5$; 4) $\sqrt{ax} = 0$.

До § 15

683¹. Раціональним чи ірраціональним є число? Раціональне число запишіть без знака кореня:

1) $\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{11}$; 3) $-\sqrt{4}$; 4) $\sqrt{13}$.

684². Подайте у вигляді нескінченного десяткового дробу число:

1) $\frac{1}{3}$; 2) -29 ; 3) $5,17$; 4) $\frac{7}{27}$.

685². Між якими послідовними натуральними числами міститься число:

1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{99}$; 4) $\sqrt{20}$?

686³. Чи правильно, що:

- 1) різниця двох цілих від'ємних чисел — число ціле від'ємне;
- 2) добуток двох раціональних чисел — число раціональне;
- 3) сума кубів двох цілих чисел — число натуральне;
- 4) сума квадратів двох цілих чисел — число ціле невід'ємне?

687³. Вкажіть два раціональних числа, що розміщені між числами: 1) $\sqrt{5}$ і $\sqrt{7}$; 2) $-\sqrt{13}$ і $-\sqrt{11}$.

688³. Доведіть, що не існує раціонального числа, що є розв'язком рівняння $x^2 = 7$.

689³. Доведіть, що: 1) $\frac{1}{2} + 0,1(6) = \frac{2}{3}$; 2) $0,8(3) - \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$.

До § 16

690^①. Чи правильна рівність:

1) $(\sqrt{19})^2 = 19$; 2) $(\sqrt{17})^2 = 17^2$;

3) $(\sqrt{5})^2 = \sqrt{5}$; 4) $(\sqrt{0,1})^2 = 0,1$?

691^②. Обчисліть:

1) $(-\sqrt{8})^2$; 2) $\sqrt{13} \cdot (-\sqrt{13})$; 3) $\left(\frac{1}{8}\sqrt{2}\right)^2$; 4) $(-0,1\sqrt{10})^2$;

5) $\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2$; 6) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$; 7) $\left(-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$; 8) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2$.

692^②. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{2}x^2 = 32$; 2) $x^2 - 5 = 0$; 3) $2x^2 = 18$; 4) $49x^2 = 1$.

693^③. Складіть рівняння, що має корені:

1) $5i - 5$; 2) $0,1i - 0,1$; 3) $-\frac{1}{4}i - \frac{1}{4}$;

4) $-\frac{3}{7}i - \frac{3}{7}$; 5) $\sqrt{7}i - \sqrt{7}$; 6) $-\frac{1}{2}\sqrt{5}i - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

694^③. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}}{9}$; 2) $(\sqrt{\sqrt{7}})^2$; 3) $(\sqrt{3\sqrt{2}})^2$; 4) $(\sqrt{\sqrt{5}})^4$.

695^③. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{8}(x-1)^2 = \frac{1}{2}$; 2) $\frac{(x+2)^2}{5} = \frac{16}{5}$.

696^④. Відомо, що $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$. Знайдіть: $x + y$.

697^④. При яких значеннях m рівняння $x^2 = m - 1$:

1) має два корені; 2) має один корінь;

3) не має коренів?

До § 17

698^①. Для яких значень змінних рівність є тотожністю:

1) $\sqrt{m \cdot n} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$; 2) $\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$?

699^②. Обчисліть:

1) $\sqrt{\frac{0,36 \cdot 49}{121}}$; 2) $\sqrt{\frac{25 \cdot 100}{81}}$; 3) $\sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{9}{25}}$; 4) $\sqrt{\frac{64}{9} \cdot \frac{4}{289}}$.

700. Обчисліть:

1) $\sqrt{a^2}$, якщо $a = 13; -17$; 2) $-2\sqrt{x^2}$, якщо $x = 0,5; -2,1$.

701. Відомо, що $37^2 = 1369$. Знайдіть:

1) $\sqrt{136900}$; 2) $\sqrt{13,69}$; 3) $\sqrt{0,1369}$.

702. У скільки разів сторона квадрата, площа якого дорівнює 12 см^2 , більша за сторону квадрата, площа якого дорівнює 3 см^2 ?

703. Обчисліть:

1) $\sqrt{4\frac{1}{20}} \cdot \sqrt{2\frac{2}{9}} - (\sqrt{7})^2$; 2) $\sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} + \left(-\sqrt{\frac{2}{17}}\right)^2$;

3) $\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2$; 4) $\sqrt{2\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{1\frac{1}{11}} \cdot \sqrt{2\frac{2}{5}} + \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 - (\sqrt{3})^2$.

704. Відношення площ двох кругів дорівнює $\frac{4}{9}$, радіус одного з них дорівнює 10 см . Знайдіть радіус другого.

705. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{3,6 \cdot 10^5}$; 2) $\sqrt{8,1 \cdot 10^3}$;

3) $3\sqrt{15} \cdot 2\sqrt{30} \cdot \sqrt{8}$; 4) $\sqrt{3^5 \cdot 12^3}$.

706. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{p^4 c^8 a^{12}}$; 2) $\sqrt{49(-x)^2 y^6}$, якщо $x < 0, y > 0$;

3) $\sqrt{\frac{m^{20}}{n^{24}}}$; 4) $\sqrt{\frac{a^{10}}{b^{14}}}$, якщо $a < 0, b < 0$.

707. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\sqrt{0,16^2}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{(-0,09)^2}}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}$; 4) $\sqrt{(\sqrt{11} - \sqrt{13})^2}$.

708. Спростіть вираз:

1) $\frac{x^2 - 14x + 49}{(x+2)^2} \sqrt{\frac{x^2 + 4x + 4}{(x-7)^2}}$, якщо $x > 7$;

2) $\frac{p^2 - 4}{(p+3)^2} \cdot \sqrt{\frac{p^2 + 6p + 9}{(p+2)^2}}$, якщо $p < -3$.

709^④. Доведіть, що:

1) $\sqrt{16 + 6\sqrt{7}} + \sqrt{23 - 8\sqrt{7}} = 7$;

2) $\sqrt{15 + 4\sqrt{11}} - \sqrt{20 - 6\sqrt{11}} = 5$.

До § 18

710^①. Виконайте дії:

1) $3\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$; 2) $5\sqrt{11} - \sqrt{11}$; 3) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{11}$; 4) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$.

711^②. Спростіть вираз:

1) $(\sqrt{7} - \sqrt{12})(\sqrt{7} + 3\sqrt{3})$; 2) $(\sqrt{3} - \sqrt{11})(\sqrt{33} + 1)$;

3) $4\sqrt{2}(2 - 7\sqrt{8}) - 7\sqrt{2}$; 4) $(\sqrt{5} + 1)(2 - \sqrt{5}) - \sqrt{5}$;

5) $(\sqrt{3} - 7)(4 - \sqrt{3}) - 11\sqrt{3}$; 6) $(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) + 1$.

712^③. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{28x^9}$;

2) $\sqrt{\frac{7m^3}{36}}$;

3) $\sqrt{25a^2b^5}$, якщо $a < 0$;

4) $\sqrt{8x^3y^{10}}$, якщо $y > 0$;

5) $\sqrt{-8p^7}$;

6) $\sqrt{x^3y^3}$, якщо $x < 0$, $y < 0$.

713^③. Спростіть вираз:

1) $(\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{6}})^2$; 2) $\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{8}}$.

714^③. Зведіть вираз до виду $a\sqrt{b}$, де b — ціле число:

1) $\sqrt{\frac{1}{7}}$;

2) $\sqrt{\frac{2}{3}}$;

3) $\sqrt{4\frac{1}{3}}$;

4) $\sqrt{5\frac{1}{2}}$.

715^③. Доведіть, що правильною є рівність:

1) $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2} + 5 = \sqrt{27 + 10\sqrt{2}}$.

716^④. Скоротіть дріб:

1) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - x\sqrt{x}}$; 2) $\frac{x+y+\sqrt{x+y}}{\sqrt{x+y}}$.

717^④. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу

$$\frac{4}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}.$$

718^а. Доведіть, що $\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}}$ — число натуральне.

719^а. Внесіть множник під знак кореня та спростіть утворений вираз:

1) $(x+2)\sqrt{\frac{3}{x^2+4x+4}}$, якщо $x > -2$;

2) $(a-b)\sqrt{\frac{1}{a^2-2ab+b^2}}$, якщо $a < b$;

3) $p(p+1)\sqrt{\frac{7}{p^2+2p+1}}$, якщо $p < -1$;

4) $(b-3)\sqrt{\frac{1}{6-2b}}$.

До § 19

720^а. Чи можна обчислити значення функції $y = \sqrt{x}$ для значень $x = 4$; $x = -1$; $x = 100$; $x = -9$?

721^а. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x}$, якщо:

1) $0 \leq x \leq 4$; 2) $1 \leq x \leq 9$; 3) $4 \leq x \leq 16$.

722^а. Чи перетинає графік функції $y = \sqrt{x}$ пряма:

1) $y = 1$; 2) $y = 8$; 3) $y = 0$; 4) $y = -1$?

Якщо перетинає, то в якій точці?

723^а. Розмістіть у порядку зростання числа:

1) $\sqrt{19,1}$; 3; $\sqrt{16,2}$; 4; $\sqrt{14}$; 2) $\frac{1}{4}$; $\sqrt{0,1}$; 0,2; $\sqrt{\frac{1}{11}}$.

724^а. При яких значеннях x виконується нерівність:

1) $\sqrt{x} \geq 1$; 2) $\sqrt{x} < 2$; 3) $1 < \sqrt{x} \leq 4$;

4) $9 \leq \sqrt{x} < 100$; 5) $\sqrt{x} > -1$; 6) $\sqrt{x} \leq -2,5$?

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 x_2 = q$$

Уроки 47, 48

§ 20. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ. НЕПОВНІ КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ, ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

У математиці, фізиці, економіці, практичній діяльності людини трапляються задачі, що приводять до рівнянь, в які змінна входить у другому степені.

Приклад 1. Довжина земельної ділянки на 15 м більша за ширину, а площа дорівнює 375 м^2 . Знайти ширину ділянки.

Розв'язання. Нехай x м — ширина ділянки, тоді її довжина — $(x + 15)$ м. За умовою задачі площа ділянки дорівнює 375 м^2 . Тому $x(x + 15) = 375$. Звідси маємо рівняння

$$x^2 + 15x - 375 = 0.$$

Таке рівняння називають *квадратним*.

Рівняння $5x^2 - 2x - 7 = 0$, $-3x^2 + x - 8 = 0$ також квадратні.

! *Квадратним рівнянням називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a , b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$.*

Числа a , b і c називають *коефіцієнтами квадратного рівняння*. Число a називають *першим коефіцієнтом*, число b — *другим коефіцієнтом*, число c — *вільним членом*.

Рівняння $x^2 + 15x - 375 = 0$ має такі коефіцієнти: $a = 1$; $b = 15$; $c = -375$. У рівнянні $5x^2 - 2x - 7 = 0$ коефіцієнти: $a = 5$; $b = -2$; $c = -7$, а у рівнянні $-3x^2 + x - 8 = 0$ коефіцієнти $a = -3$; $b = 1$ і $c = -8$.

Квадратне рівняння, перший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають *зведеним*. Рівняння $x^2 + 15x - 375 = 0$ є зведеним, а рівняння $5x^2 - 2x - 7 = 0$ — не є зведеним.

! *Якщо в квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один з коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то таке рівняння називають *неповним квадратним рівнянням*.*

Приклади неповних квадратних рівнянь $-8x^2 = 0$, $2x^2 - 3 = 0$, $-7x^2 + 4x = 0$. У першому з них $b = 0$ і $c = 0$, у другому $b = 0$, у третьому $c = 0$.

Неповні квадратні рівняння бувають трьох видів: 1) $ax^2 = 0$; 2) $ax^2 + c = 0$; 3) $ax^2 + bx = 0$.

Розглянемо розв'язування кожного з них. 1) $ax^2 = 0$. Оскільки $a \neq 0$, то $x^2 = 0$, тоді рівняння має єдиний корінь $x = 0$.

2) $ax^2 + c = 0$, $c \neq 0$. Маємо $ax^2 = -c$; $x^2 = -\frac{c}{a}$. Оскільки $c \neq 0$, то й $-\frac{c}{a} \neq 0$. Якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$; якщо $-\frac{c}{a} < 0$, то рівняння не має розв'язків.

Приклад 2. Розв'язати рівняння: 1) $-2x^2 + 8 = 0$; 2) $3x^2 + 9 = 0$.

Розв'язання. 1) $-2x^2 = -8$; $x^2 = 4$, тоді $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

2) $3x^2 = -9$; $x^2 = -3$. Рівняння не має розв'язків.

3) $ax^2 + bx = 0$, $b \neq 0$. Розкладемо ліву частину рівняння на множники: $x(ax + b) = 0$. Тоді $x_1 = 0$ або $ax + b = 0$, $ax = -b$. Оскільки $a \neq 0$, маємо $x_2 = -\frac{b}{a}$. Отже, рівняння $ax^2 + bx = 0$ має два корені: $x_1 = 0$ і $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $2x^2 + 5x = 0$.

Розв'язання. $x(2x + 5) = 0$, звідси $x_1 = 0$ або $2x + 5 = 0$, $x_2 = -2,5$.

Рівняння має два корені $x_1 = 0$, $x_2 = -2,5$.

В і д п о в і д ь. $x_1 = 0$; $x_2 = -2,5$.

Систематизуємо дані про розв'язки неповного квадратного рівняння у вигляді таблиці:

$ax^2 + bx + c = 0$			
$b = 0$; $c = 0$	$b = 0$		$c = 0$
$ax^2 = 0$	$ax^2 + c = 0$		$ax^2 + bx = 0$
$x^2 = 0$	$ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$		$x(ax + b) = 0$
$x = 0$	$-\frac{c}{a} > 0$	$-\frac{c}{a} < 0$	$x_1 = 0$ або $ax + b = 0$ $ax = -b$ $x_2 = -\frac{b}{a}$
	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$; $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$	рівняння не має розв'язків	



Яке рівняння називають квадратним? • Як називають числа a , b , c ? • Наведіть приклад квадратного рівняння. • Яке квадратне рівняння називають неповним? • Наведіть приклади неповних квадратних рівнянь. • Як розв'язується неповне квадратне рівняння кожного виду?

725^①. (Усно.) Які з рівнянь є квадратними:

- 1) $x^2 - 2x + 3 = 0$; 2) $x^2 - 3x^3 = 0$; 3) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 5$;
4) $7x - x^2 = 0$; 5) $4x - 5 = 2x + 7$; 6) $1 - 5x^2 = 0$?

726^①. (Усно.) Серед квадратних рівнянь назвіть неповні, зведені:

- 1) $2x^2 + 3x = 0$; 2) $x^2 - 3x + 4 = 0$; 3) $2x^2 - 3x + 5 = 0$;
4) $5x^2 = 0$; 5) $7x^2 - 21 = 0$; 6) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$.

727^①. Запишіть коефіцієнти a , b і c кожного квадратного рівняння:

- 1) $2x^2 + 3x - 5 = 0$; 2) $3x^2 + 9 = 0$; 3) $3x - x^2 + 7 = 0$;
4) $3x^2 = 0$; 5) $7x - x^2 = 0$; 6) $2 + 4x - x^2 = 0$.

728^①. Складіть квадратне рівняння, коефіцієнти якого дорівнюють:

- 1) $a = 3$; $b = 5$; $c = -2$; 2) $a = -1$; $b = 5$; $c = 0$;
3) $a = -4$; $b = 0$; $c = 0$; 4) $a = 13$; $b = 0$; $c = -39$.

729^①. Заповніть таку таблицю в зошиті:

Квадратне рівняння	Коефіцієнти рівняння		
$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c
$5x^2 - 3x - 17 = 0$			
	2	-3	4
$-15x^2 + 14x = 0$			
	-3	0	7
$-x^2 + 5x + 6 = 0$			
	-5	-1	19

730^②. Зведіть рівняння до вигляду $ax^2 + bx + c = 0$:

- 1) $(5x - 1)(5x + 1) = x(7x - 13)$; 2) $(2x - 3)^2 = (x + 2)(x - 7)$.

731². Замініть дане рівняння рівносильним йому квадратним:

1) $(2x + 3)(2x - 3) = x(9x - 12)$; 2) $(4x + 1)^2 = (x - 3)(x + 2)$.

732². Які з чисел -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 є коренями рівнянь:

1) $x^2 - 5x = 0$; 2) $3x^2 = 0$;
3) $x^2 - 3x + 2 = 0$; 4) $x^2 - 2x - 3 = 0$?

733². Які з чисел -5 ; -2 ; 0 ; 2 ; 5 є коренями рівнянь:

1) $x^2 + 2x = 0$; 2) $-5x^2 = 0$;
3) $x^2 - x - 6 = 0$; 4) $x^2 - 25 = 0$?

734². Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2 - 27 = 0$; 2) $3,7x^2 = 0$; 3) $2x^2 + 8 = 0$;
4) $-5x^2 + 10 = 0$; 5) $-5,7x^2 = 0$; 6) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3} = 0$.

735². Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 - 2 = 0$; 2) $3x^2 + 9 = 0$; 3) $1,4x^2 = 0$;
4) $-7x^2 + 21 = 0$; 5) $-1,8x^2 = 0$; 6) $\frac{1}{7}x^2 - \frac{5}{7} = 0$.

736². Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 6x = 0$; 2) $2x^2 - 8x = 0$; 3) $4x^2 - x = 0$;
4) $0,1x^2 + 2x = 0$; 5) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x = 0$; 6) $3x^2 - 7x = 0$.

737². Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 5x = 0$; 2) $3x^2 + 9x = 0$; 3) $5x^2 + x = 0$;
4) $0,2x^2 - 10x = 0$; 5) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x = 0$; 6) $4x^2 + 9x = 0$.

738³. Складіть квадратне рівняння, яке:

- 1) не має розв'язків;
- 2) має один розв'язок;
- 3) має два цілих розв'язки;
- 4) має два ірраціональних розв'язки.

739³. При якому значенні a число 3 є коренем рівняння $ax^2 + 2x - 7 = 0$?

740³. При якому значенні b число -2 є коренем рівняння $x^2 + bx - 8 = 0$?

741³. При яких значеннях a і b числа 1 і 2 є коренями рівняння $ax^2 + bx + 4 = 0$?

742³. При яких значеннях b і c числа 1 і 3 є коренями рівняння $x^2 + bx + c = 0$?

743³. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-2)(x+3) = -6$; 2) $\frac{4}{3}x(x+9) = \frac{1}{8}x(x-16)$;

3) $(3x-1)^2 = (x-3)^2$; 4) $(2x+1)(3x-1) = x(x-2) + 3\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

744³. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+3)(x-5) = -15$; 2) $\frac{2}{3}x(x-3) = \frac{1}{2}x(x+4)$;

3) $(2x-3)^2 = (3x-2)^2$;

4) $(5x+1)(2x-1) = x(x+3) - 6\left(x + \frac{1}{6}\right)$.

745³. При яких значеннях x значення виразу $(3x-1)(x+4)$ на 4 менше за значення виразу $x(x+2)$?

746³. При яких значеннях x значення виразу $(2x+1)(x+3)$ на 3 більше за значення виразу $x(x-4)$?

747³. Добуток двох чисел дорівнює їх середньому арифметичному. Знайдіть ці числа, якщо їх різниця дорівнює 1.

748³. Половина добутку двох чисел дорівнює їх середньому арифметичному. Знайдіть ці числа, якщо їх різниця дорівнює 2.

749³. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 5|x| = 0$; 2) $-\frac{x^8}{|x|} + 4 = 0$.

750³. Розв'яжіть рівняння:

1) $-x^2 + 3|x| = 0$; 2) $\frac{x^8}{|x|} - 9 = 0$.

 **751².** Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{18}$; 2) $\sqrt{300}$; 3) $\sqrt{108}$; 4) $\sqrt{363}$.

752³. Доведіть тотожність

$$\frac{3x+3}{x^2-x} : \left(\frac{x+3}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x} \right) = 3.$$

753³. Побудуйте графік функції

$$y = \begin{cases} -\frac{8}{x}, & \text{якщо } x < -2; \\ x^2, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2; \\ 8-2x, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Розглянемо повне квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ та розв'яжемо його в загальному вигляді.

Помножимо ліву і праву частини рівняння на $4a$ (оскільки $a \neq 0$, то і $4a \neq 0$):

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Додамо до обох частин рівняння b^2 :

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2.$$

Оскільки $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax + b)^2$, то маємо:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$



Вираз $b^2 - 4ac$ називають *дискримінантом квадратного рівняння* $ax^2 + bx + c = 0$ (дискримінант — від латинського розрізняючий).

Позначають дискримінант буквою D . Отже, $D = b^2 - 4ac$. Продовжимо розв'язування рівняння:

$$(2ax + b)^2 = D.$$

Розглянемо різні можливі випадки залежно від D .

Нехай

1) $D > 0$. Тоді

$$2ax + b = \sqrt{D} \text{ або } 2ax + b = -\sqrt{D},$$

$$2ax = -b + \sqrt{D} \text{ або } 2ax = -b - \sqrt{D},$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ або } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

(при діленні на $2a$ врахували, що $2a \neq 0$).

Отже, якщо $D > 0$, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два різних корені:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ і } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Коротко це можна записати так:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac.$$

Це *формула коренів квадратного рівняння*.

2) $D = 0$. Тоді $2ax + b = 0$; $2ax = -b$, $x = -\frac{b}{2a}$.

Якщо $D = 0$, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має один корінь $x = -\frac{b}{2a}$. Цей корінь можна було б знайти і за формулою коренів квадратного рівняння, врахувавши $D = 0$: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}$. Тому інколи говорять, що рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ при $D = 0$ має два однакових корені, кожний з яких дорівнює $-\frac{b}{2a}$.

3) $D < 0$. У цьому випадку рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має коренів, оскільки не існує такого значення x , при якому значення виразу $(2ax + b)^2$ було б від'ємним.

Систематизуємо дані про розв'язки квадратного рівняння у таблиці:

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$		
$D = b^2 - 4ac$		
$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$	$x = -\frac{b}{2a}$	рівняння не має розв'язків

Приклад 1. Розв'язати рівняння: 1) $2x^2 + 3x + 1 = 0$;
2) $9x^2 - 6x + 1 = 0$; 3) $x^2 - 2x + 7 = 0$.

Р о з в ' я з а н н я . 1) $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$; $D > 0$;
 $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4}$; $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{1}{2}$;

2) $D = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$, $x = -\frac{-6}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3}$;

3) $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 4 - 28 = -24 < 0$. Рівняння не має розв'язків.

В і д п о в і д ь. 1) $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; 2) $x = \frac{1}{3}$; 3) рівняння не має розв'язків.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $-\frac{1}{7}x^2 - \frac{4}{7}x + 1 = 0$.

Р о з в ' я з а н н я . Помножимо ліву і праву частини рівняння на (-7) , щоб його коефіцієнти стали цілими числами: $x^2 + 4x - 7 = 0$,
 $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 44$. Тоді $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{44}}{2}$. Оскільки $\sqrt{44} = \sqrt{4 \cdot 11} = 2\sqrt{11}$, то маємо $x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{11}}{2}$, $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{11}$.

В і д п о в і д ь. $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{11}$.



Історичні відомості

Неповні квадратні рівняння та деякі види повних квадратних рівнянь ($x^2 \pm x = a$) вавилонські математики вміли розв'язувати ще 4 тис. років тому. У більш пізні часи деякі квадратні рівняння вміли розв'язувати геометрично математики у Давній Греції та Індії. Прийоми розв'язування деяких квадратних рівнянь без застосування геометрії виклав давньогрецький математик *Діофант* (III ст.).

Багато уваги квадратним рівнянням приділяв арабський математик *Мухаммед аль-Хорезмі* (IX ст.). Він показував прийоми розв'язувань (для додатних a , b , c) рівнянь видів $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $bx + c = ax^2$ і знаходив додатні корені цих рівнянь.

Формули, що виражають залежність коренів квадратного рівняння від його коефіцієнтів, вивів французький математик *Франсуа Вієт* у 1591 році. Його висновок (у сучасних позначеннях) виглядає так: «коренями рівняння $(a + b)x - x^2 = ab$ є числа a і b ».

Після праць нідерландського математика *А. Жірапа* (1595–1632), а також француза *Р. Декарта* (1596–1650) та англійця *І. Ньютона* (1643–1727) формула коренів квадратного рівняння набула сучасного вигляду.



Що називають дискримінантом квадратного рівняння?

• Скільки коренів має квадратне рівняння залежно від дискримінанта? • Напишіть формулу коренів квадратного рівняння.

754^Q. (Усно.) Скільки різних коренів має квадратне рівняння, якщо його дискримінант дорівнює:

- 1) 4; 2) 0; 3) -9; 4) 17?

755^Q. Чи має корені квадратне рівняння, і якщо має, то скільки, якщо його дискримінант дорівнює:

- 1) -7; 2) 49; 3) 13; 4) 0?

756^Q. (Усно.) Чи правильно записано дискримінант квадратного рівняння:

1) $2x^2 + 3x - 1 = 0$, $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$;

2) $3x^2 - 4x + 2 = 0$, $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2$;

3) $-\frac{1}{2}x^2 - 5x + 3 = 0$, $D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $\frac{1}{8}x^2 + 2x - 4 = 0$, $D = 2^2 + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot (-4)$?

757^Q. Знайдіть дискримінант квадратного рівняння та визначте кількість його коренів:

1) $6x^2 - 5x - 1 = 0$; 2) $x^2 - 4x + 4 = 0$;

3) $x^2 + 2x + 5 = 0$; 4) $7x^2 + 2x - 1 = 0$.

758^①. Знайдіть дискримінант квадратного рівняння та визначте кількість його коренів:

- 1) $2x^2 - 3x + 1 = 0$; 2) $x^2 + x + 7 = 0$;
3) $x^2 + 6x + 9 = 0$; 4) $3x^2 + 4x - 1 = 0$.

759^②. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $2x^2 + 5x - 3 = 0$;
3) $3x^2 + 5x + 2 = 0$; 4) $x^2 + 10x + 25 = 0$;
5) $x^2 + x - 90 = 0$; 6) $x^2 - 10x - 24 = 0$.

760^②. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - 4x - 5 = 0$; 2) $2x^2 + 7x - 4 = 0$;
3) $x^2 - 12x + 36 = 0$; 4) $x^2 - x - 56 = 0$.

761^②. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $10x^2 = 5x + 0,6$; 2) $x^2 + 3 = 4x$;
3) $x^2 + 5x = -6$; 4) $1 - 4x = 5x^2$;
5) $81y^2 + 1 = -18y$; 6) $3p = 5p^2 - 2$.

762^②. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $10x^2 = 0,4 - 3x$; 2) $x^2 + 7 = -6x$;
3) $7x = x^2 + 12$; 4) $4y = 4y^2 + 1$.

763^②. При яких значеннях x :

- 1) значення многочлена $x^2 - 2x - 3$ дорівнює нулю;
2) значення многочленів $x^2 + 2x$ і $0,5x + 2,5$ рівні;
3) значення двочлена $10x^2 - 8x$ дорівнює значенню тричлена $9x^2 + 2x - 25$?

764^②. При яких значеннях y :

- 1) значення многочлена $y^2 + 4y - 5$ дорівнює нулю;
2) значення многочленів $y^2 - 3y$ і $0,5y + 4,5$ рівні;
3) значення тричлена $4 + 2y - y^2$ дорівнює значенню двочлена $4y^2 - 6y$?

765^③. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x - 3)^2 = 2x - 3$; 2) $3(x + 1)^2 = 2x + 2$;
3) $(x + 3)(x - 1) = 2x(x - 2) + 5$;
4) $x(x - 3) - (x - 5)(x + 5) = (x + 1)^2$.

766^③. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x + 2)^2 = 2x + 3$; 2) $5(x - 2)^2 = 3x - 6$;

- 3) $(x+2)(x-3) = 2x(x-4) + 6$;
4) $x(x-1) - (x-3)(x+3) = (x+2)^2 - 1$.

767³. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2+2x}{3} = \frac{4x+1}{5}$; 2) $\frac{x+2}{3} + \frac{x^2-1}{2} = \frac{1}{3}$.

768³. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-3x}{4} = \frac{2x+5}{3}$; 2) $\frac{x+1}{2} + \frac{x^2-1}{5} = 1$.

769³. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{2}x^2 - x - 7 = 0$; 2) $-x^2 - 2x + 4 = 0$;
3) $0,1x^2 - 3x - 5 = 0$; 4) $0,5x^2 + 1,5x - 4 = 0$.

770³. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{2}x^2 + x - 3 = 0$; 2) $-x^2 + 2x + 11 = 0$;
3) $0,2x^2 + 2x - 3 = 0$; 4) $0,5x^2 - 2,5x - 4 = 0$.

771⁴. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\sqrt{x}-2)(x^2+x-2) = 0$; 2) $x^2 - \frac{3x^2}{|x|} - 4 = 0$;
3) $x|x| + 3x - 4 = 0$; 4) $\frac{x^3}{|x|} - x - 2 = 0$.

772³. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\sqrt{x}-3)(x^2-x-6) = 0$; 2) $x^2 - \frac{2x^2}{|x|} - 3 = 0$;
3) $x|x| - 4x - 5 = 0$; 4) $\frac{x^3}{|x|} + 4x - 12 = 0$.

773³. При яких значеннях a має один корінь рівняння:

1) $2x^2 + x - a = 0$; 2) $x^2 - ax + 4 = 0$?

774³. При яких значеннях b має один корінь рівняння:

1) $4x^2 - x + b = 0$; 2) $x^2 + bx + 9 = 0$?



775². Скоротіть дріб:

1) $\frac{a^2-49}{a^2-14a+49}$; 2) $\frac{x^3+1}{x^2-x+1}$.

776³. Не виконуючи побудову, знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = 0,2x - 15$ з осями координат.

777⁴. Відомо, що $a+b=5$, $ab=-7$. Знайдіть значення виразу:

1) $ab^2 + a^2b$; 2) $a^2 + b^2$.

Розглянемо таблицю, в якій дано зведені квадратні рівняння, вказано їх корені x_1 і x_2 , суми коренів $x_1 + x_2$ та їх добутки $x_1 \cdot x_2$.

Рівняння	x_1 і x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
$x^2 - 6x + 8 = 0$	2 і 4	6	8
$x^2 + x - 12 = 0$	-4 і 3	-1	-12
$x^2 + 5x + 6 = 0$	-3 і -2	-5	6
$x^2 - 4x - 5 = 0$	-1 і 5	4	-5

З таблиці видно, що сума коренів кожного з рівнянь дорівнює другому коефіцієнту рівняння, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену. Така властивість справджується для будь-якого *зведеного квадратного рівняння*, що має корені. Зведене рівняння у загальному вигляді прийнято записувати так: $x^2 + px + q = 0$.

Теорема Вієта. *Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену.*

Д о в е д е н н я. Нехай x_1 і x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, дискримінант якого $D = p^2 - 4q$. Якщо $D \geq 0$, то рівняння має два корені:

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \text{ і } x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}.$$

Якщо $D = 0$, то рівняння $x^2 + px + q = 0$ має один корінь або $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$ — два однакових корені.

Знайдемо суму і добуток коренів:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} + \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-p + \sqrt{D} - p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \\ &= \frac{p^2 - p^2 + 4q}{4} = \frac{4q}{4} = q. \end{aligned}$$

Отже, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$. Теорему доведено.

Доведену теорему називають *теоремою Вієта* — за ім'ям видатного французького математика Франсуа Вієта. Її можна сформулювати ще так:

! Якщо x_1 і x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$.

Останні дві рівності, що виражають зв'язок між коренями і коефіцієнтами зведеного квадратного рівняння, називають *формулами Вієта*.

Використовуючи теорему Вієта, легко можна вивести відповідні формули для будь-якого квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Оскільки $a \neq 0$, то поділимо ліву і праву частини рівняння на a . Маємо зведене квадратне рівняння:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.



Франсуа Вієт
(1540—1603)

! Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Приклад 1. Рівняння $3x^2 - 5x - 7 = 0$ має додатний дискримінант, тому воно має корені x_1 і x_2 . За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -\frac{-5}{3} = \frac{5}{3}$; $x_1 \cdot x_2 = -\frac{7}{3}$.

Якщо в рівнянні $x^2 + px + q = 0$ число q є цілим, то з рівності $x_1 x_2 = q$ випливає, що цілими коренями цього рівняння можуть бути лише дільники числа q .

Приклад 2. Знайти підбором корені рівняння $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 + 3x - 4 = 0$. Тоді $x_1 + x_2 = -3$ і $x_1 x_2 = -4$. Якщо x_1 і x_2 — цілі числа, то вони є дільниками числа -4 , крім того, їх сума дорівнює -3 . Неважко здогадатися, що $x_1 = 1$; $x_2 = -4$.

Відповідь. $x_1 = 1$; $x_2 = -4$.

Приклад 3. Один з коренів рівняння $x^2 + px - 18 = 0$ дорівнює 3. Знайти p та другий корінь.

Розв'язання. За умовою $x_1 = 3$ — корінь рівняння $x^2 + px - 18 = 0$. Нехай x_2 — другий корінь цього рівняння. За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = -18$. Враховуючи $x_1 = 3$, маємо:

$$\begin{cases} 3 + x_2 = -p, \\ 3 \cdot x_2 = -18; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -6, \\ 3 + (-6) = -p; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -6, \\ p = 3. \end{cases}$$

Відповідь. $x_2 = -6$, $p = 3$.

Приклад 4. x_1 і x_2 — корені рівняння $2x^2 - 3x - 1 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайти:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$; 3) $x_1^2 + x_2^2$.

Розв'язання. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$; $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}$.

Маємо:

$$1) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{2} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -3;$$

$$2) x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4};$$

$$3) x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}.$$

Відповідь. 1) -3 ; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) $3\frac{1}{4}$.

Справджується твердження, обернене до теореми Вієта.

Т е о р е м а (обернена до теореми Вієта). *Якщо числа m і n такі, що $m + n = -p$, а $m \cdot n = q$, то ці числа є коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$.*

Д о в е д е н н я. За умовою $m + n = -p$, а $mn = q$. Тому рівняння $x^2 + px + q = 0$ можна записати так:

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0.$$

Підставимо у це рівняння замість змінної x по черзі числа m і n :

$$m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - mn + mn = 0,$$

$$n^2 - (m + n)n + mn = n^2 - mn - n^2 + mn = 0.$$

Отже, m і n — корені рівняння $x^2 + px + q = 0$, що й треба було довести.

Приклад 5. Скласти зведене квадратне рівняння, корені якого дорівнюють -5 і 2 .

Розв'язання. Шукане рівняння має вигляд $x^2 + px + q = 0$. За теоремою, оберненою до теореми Вієта:

$$p = -(x_1 + x_2) = -(-5 + 2) = 3; \quad q = x_1 \cdot x_2 = -5 \cdot 2 = -10.$$

Отже, $x^2 + 3x - 10 = 0$ — шукане рівняння.

Відповідь. $x^2 + 3x - 10 = 0$.



Сформулюйте і доведіть теорему Вієта для зведеного квадратного рівняння. • Чому дорівнюють сума і добуток коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$? • Сформулюйте і доведіть теорему, обернену до теореми Вієта.

778^①. (Усно.) Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму і добуток його коренів:

1) $x^2 - 15x + 14 = 0$; 2) $x^2 + 12x - 28 = 0$;

3) $x^2 + 17x + 52 = 0$; 4) $x^2 - 6x + 5 = 0$;

5) $x^2 + 2x = 0$; 6) $x^2 - 8 = 0$.

779^①. Знайдіть суму і добуток коренів рівняння:

1) $2x^2 + 4x - 5 = 0$; 2) $-x^2 + 5x - 6 = 0$;

3) $3x^2 - 6x - 8 = 0$; 4) $4x^2 - 7x = 0$.

780^①. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму і добуток його коренів:

1) $x^2 - 2x - 8 = 0$; 2) $x^2 + x - 6 = 0$;

3) $x^2 + 9x + 5 = 0$; 4) $2x^2 - 6x + 3 = 0$.

781^②. Розв'яжіть рівняння і виконайте перевірку за теоремою, оберненою до теореми Вієта:

1) $x^2 + 4x - 5 = 0$; 2) $x^2 - 4x - 21 = 0$;

3) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; 4) $2x^2 + 5x + 2 = 0$.

782^③. Розв'яжіть рівняння і виконайте перевірку за теоремою, оберненою до теореми Вієта:

1) $x^2 + 3x - 28 = 0$; 2) $2x^2 - 13x + 15 = 0$.

783^②. Складіть зведене квадратне рівняння, корені якого дорівнюють:

1) 2 і 3 ; 2) -3 і 4 ; 3) -7 і -2 ; 4) $0,3$ і $-0,5$.

784^②. Складіть зведене квадратне рівняння, корені якого дорівнюють:

1) 5 і 1 ; 2) 2 і -7 ; 3) -2 і -3 ; 4) $0,7$ і $-0,1$.

785². Всі дані рівняння мають корені. В яких рівняннях корені одного знака, а в яких — різних:

- 1) $x^2 + 2x - 8 = 0$; 2) $x^2 - 4x + 4 = 0$;
3) $3x^2 + 4x + 1 = 0$; 4) $2x^2 - 3x - 5 = 0$?

786³. Знайдіть підбором корені рівняння:

- 1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
3) $x^2 - 6x - 7 = 0$; 4) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
5) $x^2 - 17x + 42 = 0$; 6) $x^2 - 5x - 24 = 0$.

787³. Знайдіть підбором корені рівняння:

- 1) $x^2 - 5x + 4 = 0$; 2) $x^2 - x - 6 = 0$;
3) $x^2 + 4x + 3 = 0$; 4) $x^2 - 12x + 27 = 0$;
5) $x^2 + x - 6 = 0$; 6) $x^2 + 9x - 22 = 0$.

788². Визначте знаки коренів рівняння (якщо вони існують), не розв'язуючи його:

- 1) $x^2 + 8x + 5 = 0$; 2) $x^2 - 12x - 1 = 0$;
3) $3x^2 + 14x - 7 = 0$; 4) $4x^2 - 7x + 2 = 0$.

789³. Не розв'язуючи рівняння, визначте, чи має воно корені. Якщо так, то знайдіть знаки коренів:

- 1) $x^2 - 13x - 2 = 0$; 2) $x^2 + 17x + 1 = 0$;
3) $5x^2 - 14x + 1 = 0$; 4) $3x^2 + 7x - 18 = 0$.

790³. Доведіть, що рівняння $12x^2 + 17x - 389 = 0$ не може мати коренів однакових знаків.

791³. Складіть квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:

- 1) $-\frac{1}{3} i 5$; 2) $-\frac{1}{4} i -\frac{5}{6}$; 3) $\sqrt{5} i - \sqrt{5}$; 4) $2 - \sqrt{3} i 2 + \sqrt{3}$.

792³. Складіть квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:

- 1) $-2 i \frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{8} i \frac{1}{2}$; 3) $-\sqrt{7} i \sqrt{7}$; 4) $3 + \sqrt{7} i 3 - \sqrt{7}$.

793³. Один з коренів рівняння $x^2 + px - 9 = 0$ дорівнює 1,5. Знайдіть p і другий корінь.

794³. Один з коренів рівняння $x^2 + 6x + q = 0$ дорівнює -3,5. Знайдіть q і другий корінь.

795³. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - 4x + q = 0$ задовольняють умову $2x_1 - 3x_2 = 13$. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт q .

796^а. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 + px - 10 = 0$ задовольняють умову $2x_1 + 5x_2 = 0$. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт p .

797^а. Рівняння $x^2 + 4x - 3 = 0$ має корені x_1 і x_2 . Не розв'язуючи рівняння, знайдіть:

- 1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$; 3) $x_1^2 + x_2^2$;
4) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; 5) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; 6) $(x_1 - x_2)^2$.

798^а. Рівняння $x^2 - 5x - 2 = 0$ має корені x_1 і x_2 . Не розв'язуючи рівняння, знайдіть:

- 1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$; 3) $x_1^2 + x_2^2$;
4) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; 5) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; 6) $(x_1 - x_2)^2$.

799^а. Складіть квадратне рівняння, корені якого на два більші за відповідні корені рівняння $x^2 - 3x - 9 = 0$.

800^а. Складіть квадратне рівняння, корені якого на три менші від відповідних коренів рівняння $x^2 + 2x - 7 = 0$.



801^а. Сума двох чисел дорівнює 32, одне з них у 7 раз більше за друге. Знайдіть ці числа.

802^а. Маємо два сплави міді і цинку. Перший містить 20% міді, а другий — 35% міді. Скільки треба взяти кілограмів першого сплаву і скільки другого, щоб отримати сплав масою 200 кг, що містить 29% цинку?

803^а. Спростіть вираз:

$$\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{y}}.$$

Уроки 53, 54

§ 23. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ

За допомогою квадратних рівнянь можна розв'язувати багато задач у математиці, фізиці, техніці, практичній діяльності людини.

Приклад 1. Різниця кубів двох натуральних чисел дорівнює 279. Знайти ці числа, якщо їх різниця дорівнює 3.

Розв'язання. Нехай менше з натуральних чисел дорівнює n , тоді більше дорівнює $n + 3$. За умовою

$$(n + 3)^3 - n^3 = 279.$$

Спростимо утворене рівняння. Маємо $n^2 + 3n - 28 = 0$. Звідси $n_1 = 4$; $n_2 = -7$. За змістом задачі число n — натуральне. Тому задачу задовольняє тільки число 4. Отже, перше шукане число 4, а друге $4 + 3 = 7$.

В і д п о в і д ь. 4; 7.

Приклад 2. У кінотеатрі кількість місць у ряді на 6 більша за кількість рядів. Скільки рядів у кінотеатрі, якщо всього в ньому 432 місця?

Р о з в' я з а н н я. Нехай у кінотеатрі x рядів, тоді місць у кожному ряді — $(x + 6)$. Всього місць у залі $x(x + 6)$. За умовою

$$x(x + 6) = 432.$$

Розв'язуючи це рівняння, дістанемо:

$$x^2 + 6x - 432 = 0,$$

$$x_1 = 18, x_2 = -24.$$

За змістом задачі значення x — додатне число. Цю умову задовольняє лише перший корінь. Отже, у кінотеатрі 18 рядів.

В і д п о в і д ь. 18 рядів.

Приклад 3. В опуклому багатокутнику 54 діагоналі. Знайти кількість його сторін.

Р о з в' я з а н н я. Нехай у багатокутника n сторін. З кожної з n вершин виходять $(n - 3)$ діагоналі. А отже, всього з усіх n вершин виходять $n(n - 3)$ діагоналі. Але при цьому кожна діагональ врахована двічі. Отже, всього діагоналей $\frac{n(n-3)}{2}$.

За умовою задачі $\frac{n(n-3)}{2} = 54$, $n^2 - 3n - 108 = 0$. Маємо $n_1 = 12$, $n_2 = -9$. Від'ємний корінь не задовольняє умови задачі.

В і д п о в і д ь. 12 сторін.

Приклад 4. Тіло підкинуто вертикально вгору зі швидкістю 20 м/с. Висота h (у м), на якій через t с буде тіло, обчислюється за формулою $h = 20t - 5t^2$. В який момент часу тіло буде на висоті 15 м?

Р о з в' я з а н н я. За умовою: $15 = 20t - 5t^2$, звідси $t^2 - 4t + 3 = 0$. Розв'язавши це рівняння, маємо $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

Обидва ці корені рівняння є розв'язком задачі, оскільки на висоті 15 м тіло буде двічі: спочатку при підйомі (це відбудеться через 1 с), а другий раз — при спуску (це відбудеться через 3 с).

В і д п о в і д ь. 1 с; 3 с.



Поясніть, як розв'язано задачі 1—4.

- 804²**. Одне з натуральних чисел на 5 менше за інше. Знайдіть ці числа, якщо їх добуток дорівнює 204.
- 805²**. Добуток двох натуральних чисел дорівнює 180. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 3 більше за друге.
- 806²**. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 108 см^2 , а одна із сторін на 3 см більша за другу.
- 807²**. Ділянку прямокутної форми, одна із сторін якої на 10 м більша за другу, треба обнести парканом. Знайдіть довжину паркана, якщо площа ділянки 375 м^2 .
- 808²**. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо їх сума дорівнює 17 см, а площа трикутника дорівнює 35 см^2 .
- 809³**. Один із катетів прямокутного трикутника на 7 см більший за другий. Знайдіть периметр трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 13 см.
- 810³**. Знайдіть площу прямокутника, якщо сума його двох непаралельних сторін дорівнює 14 см, а діагональ дорівнює 10 см.
- 811³**. Добуток двох послідовних натуральних чисел на 181 більший за їх суму. Знайдіть ці числа.
- 812³**. Кусок скла має форму квадрата. Коли від нього відрізали смужку шириною 30 см, його площа стала дорівнювати 2800 см^2 . Знайдіть початкові розміри куска скла.
- 813³**. Площа прямокутного листа фанери дорівнює 300 дм^2 . Лист розрізали на дві частини, одна з яких — квадрат, а інша прямокутник. Знайдіть сторону квадрата, якщо сторона отриманого прямокутника, що не є стороною квадрата, дорівнює 5 дм.
- 814³**. Знайдіть три послідовних цілих числа, якщо потроєний квадрат меншого з них на 242 більший за суму квадратів двох інших.
- 815³**. Знайдіть три послідовних цілих числа, якщо квадрат більшого з них на 970 менший за подвоєну суму квадратів двох інших.
- 816³**. Сума кубів двох натуральних чисел дорівнює 468. Знайдіть ці числа, якщо їх сума дорівнює 12.
- 817³**. Дві дороги перетинаються під прямим кутом. Від перехрестя доріг одночасно від'їхали два велосипедисти, один у східному напрямі, інший — у північному. Швидкість першого з них на 4 км/год більша за швидкість другого. Через 2 год відстань між ними була 40 км. Яка швидкість кожного велосипедиста?

818³. Периметр прямокутника дорівнює 44 см, а сума площ квадратів, побудованих на суміжних сторонах, дорівнює 244 см². Знайдіть сторони прямокутника.

819³. Фотокартка розміром 10×15 см вставлена в рамку однакової ширини, площа якої 204 см². Визначте ширину рамки.

820³. На ділянці землі прямокутної форми зі сторонами 8 м і 6 м треба розмістити прямокутну клумбу площею 15 м² так, щоб навколо клумби утворилася доріжка однакової ширини. Визначте, яку ширину повинна мати доріжка.

821⁴. На шаховому турнірі було зіграно 45 партій. Кожний з учасників зіграв із кожним по одному разу. Скільки було учасників турніру?

822⁴. До Нового року в родині Петренків кожний підготував подарунок кожному з інших членів родини. Всього під ялинкою виявилось 20 подарунків. Скільки чоловік в родині Петренків?

823⁴. Висота h (у м), на якій через t с буде підкинуте вертикально вгору тіло, обчислюється за формулою $h = v_0 t - 5t^2$, де v_0 — початкова швидкість. Після удару футболіста м'яч полетів вертикально вгору, і через 1 с опинився на висоті 10 м. Через який час м'яч буде на висоті 10,8 м?

824⁴. Футболіст, зріст якого 1,8 м, підбиває м'яч головою, і через 0,4 с м'яч опиняється на висоті 3,8 м. Через який час м'яч буде на висоті 4,25 м над землею?

825⁴. Сигнальна ракета, що випущена вертикально вгору, через 2 с була на висоті 40 м. Через який час ракета буде на висоті 44,2 м?



826². Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2 - 12 = 0$;

2) $5x^2 - 9x = 0$;

3) $3x^2 - 10x + 3 = 0$;

4) $x^2 + 4x + 4 = 0$.

827². Складіть зведене квадратне рівняння, корені якого дорівнюють:

1) -2 і 6 ; 2) -7 і -3 .

828³. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 2)^2 = 5x - 7$; 2) $\frac{1}{4}x^2 - x - 5 = 0$.

1¹⁰. Які з рівнянь є квадратними:

1) $x^2 - 4x + 7 = 0$; 2) $x^2 + \frac{1}{x} = 19$;

3) $x^2 - 15 = 0$; 4) $7x - 13 = 2x + 3$?

2¹⁰. Скільки різних коренів має квадратне рівняння, якщо його дискримінант дорівнює:

1) 9; 2) 0; 3) -16; 4) 23?

3¹⁰. Знайдіть суму і добуток коренів рівняння

$$x^2 + 2x - 17 = 0.$$

4¹⁰. Розв'яжіть неповні квадратні рівняння:

1) $2x^2 - 18 = 0$; 2) $3x^2 - 4x = 0$.

5¹⁰. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; 2) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

6¹⁰. Складіть зведене квадратне рівняння, корені якого дорівнюють -3 і 5.

7¹⁰. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 1)^2 = 4x - 5$; 2) $\frac{1}{2}x^2 - x - 3 = 0$.

8¹⁰. Знайдіть три послідовних натуральних числа, якщо квадрат більшого з них на 140 менший за суму квадратів двох інших.

9¹⁰. Розв'яжіть рівняння:

$$(\sqrt{x} - 2)(x^2 + 3x - 4) = 0.$$

Додаткові задачі

10¹⁰. Рівняння $x^2 - 5x - 3 = 0$ має корені x_1 і x_2 . Не розв'язуючи рівняння, знайдіть:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2 + x_2^2$.

11¹⁰. На першості школи з баскетболу було зіграно 28 матчів, причому кожна команда зіграла з кожною. Скільки команд брало участь у першості школи з баскетболу?

§ 24. КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН, ЙОГО КОРЕНІ. РОЗКЛАДАННЯ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА НА ЛІНІЙНІ МНОЖНИКИ

Вирази $5x^2 - 2x + 7$ і $-x^2 + 3x - 9$ є многочленами другого степеня з однією змінною. Такі многочлени називають *квадратними тричленами*.



Квадратним тричленом називають многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a, b, c — числа, причому $a \neq 0$.

Приклад 1. Вираз $x^2 + 2x - 3$ є квадратним тричленом, у якого $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$.

Приклад 2. Розглянемо квадратний тричлен $5x^2 - 3x - 8$. Якщо $x = -1$, то значення квадратного тричлена дорівнює нулю (справді $5 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 8 = 0$). Число -1 є *коренем* цього *квадратного тричлена*.



Коренем квадратного тричлена називають значення змінної, при якому значення цього тричлена дорівнює нулю.

Щоб знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, треба розв'язати рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Приклад 3. Знайти корені квадратного тричлена $3x^2 + 2x - 16$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння $3x^2 + 2x - 16 = 0$. Дістанемо $x_1 = 2$; $x_2 = -2\frac{2}{3}$. Отже, квадратний тричлен $3x^2 + 2x - 16$ має корені 2 і $-2\frac{2}{3}$.

В і д п о в і д ь. 2 ; $-2\frac{2}{3}$.

Квадратний тричлен, як і квадратне рівняння, може мати два різних корені, один корінь (два однакових корені) або не мати коренів. Це залежить від знака дискримінанта квадратного рівняння $D = b^2 - 4ac$, який називають також *дискримінантом квадратного тричлена* $ax^2 + bx + c$.

Якщо $D > 0$, то квадратний тричлен має два різних корені, якщо $D = 0$, то квадратний тричлен має один корінь (два рівних корені), якщо $D < 0$, то квадратний тричлен не має коренів.

Якщо відомі корені квадратного тричлена, то його можна розкласти на лінійні множники, тобто множники, які є многочленами першого степеня.

Т е о р е м а (про розкладання квадратного тричлена на множники). *Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Д о в е д е н н я. Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Для доведення твердження теореми розкриємо дужки у правій частині рівності:

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - x_1x - xx_2 + x_1x_2) = \\ &= a(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2) = a\left(x^2 - x\left(-\frac{b}{a}\right) + \frac{c}{a}\right) = \\ &= ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

Отже, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, що і треба було довести.

Якщо ж квадратний тричлен не має коренів, то його не можна розкласти на множники, які є многочленами першого степеня.

Приклад 4. Розкласти на множники тричлен:

1) $-2x^2 + 3x + 5$; 2) $3x^2 - 12x + 12$; 3) $x^2 - 2x + 5$.

Р о з в' я з а н н я.

1) Коренями рівняння $-2x^2 + 3x + 5 = 0$ є числа -1 і $2,5$. Тому $-2x^2 + 3x + 5 = -2(x + 1)(x - 2,5)$. Знайдений результат можна записати інакше, помноживши на -2 двочлен $x - 2,5$. Маємо $-2x^2 + 3x + 5 = (x + 1)(5 - 2x)$.

2) Квадратне рівняння $3x^2 - 12x + 12 = 0$ має два рівних корені $x_1 = x_2 = 2$. Тому $3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)(x - 2) = 3(x - 2)^2$.

3) Квадратне рівняння $x^2 - 2x + 5 = 0$ не має коренів. Тому квадратний тричлен $x^2 - 2x + 5$ не можна розкласти на множники.

Приклад 5. Скоротити дріб $\frac{4x^2 - 2x - 2}{x^2 - 1}$.

Р о з в' я з а н н я. Розкладемо на множники квадратний тричлен $4x^2 - 2x - 2$. Коренями рівняння $4x^2 - 2x - 2 = 0$ є числа 1 і $-0,5$. Тому $4x^2 - 2x - 2 = 4(x - 1)(x + 0,5)$. Отже,

$$\frac{4x^2 - 2x - 2}{x^2 - 1} = \frac{4(x - 1)(x + 0,5)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{4(x + 0,5)}{x + 1} = \frac{4x + 2}{x + 1}.$$

В і д п о в і д ь. $\frac{4x + 2}{x + 1}$.

Під час розв'язування деяких задач, пов'язаних з квадратним тричленом $ax^2 + bx + c$ буває зручно подати його у вигляді $a(x - m)^2 + n$, де m і n — деякі числа. Таке перетворення називають **виділенням квадрата двочлена** з квадратного тричлена.

Приклад 6. Виділити з тричлена $2x^2 + 8x - 7$ квадрат двочлена.

Розв'язання. Внесемо за дужки множник 2:

$$2x^2 + 8x - 7 = 2(x^2 + 4x - 3,5).$$

Перетворимо вираз у дужках. Для цього представимо $4x$ як добуток $2 \cdot x \cdot 2$, додамо і віднімемо 2^2 :

$$\begin{aligned} 2(x^2 + 4x - 3,5) &= 2(x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 - 3,5) = 2((x + 2)^2 - 7,5) = \\ &= 2(x + 2)^2 - 15. \end{aligned}$$

Відповідь. $2(x + 2)^2 - 15$.

Приклад 7. Дано квадратний тричлен $-4x^2 + 24x - 20$. При якому значенні x він набуває найбільшого значення і чому дорівнює це значення тричлена?

Розв'язання. Виділимо з даного тричлена квадрат двочлена:

$$\begin{aligned} -4x^2 + 24x - 20 &= -4(x^2 - 6x + 5) = -4(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 5) = \\ &= -4((x - 3)^2 - 4) = -4(x - 3)^2 + 16. \end{aligned}$$

Вираз $-4(x - 3)^2$ при будь-якому x від'ємний або дорівнює нулю, причому цей вираз дорівнює нулю лише для значення $x = 3$. Отже, квадратний тричлен $-4x^2 + 24x - 20$ набуває найбільшого значення, що дорівнює 16, якщо $x = 3$.

Відповідь. 16, якщо $x = 3$.



Що називають квадратним тричленом? • Що називають коренем квадратного тричлена? • Скільки коренів може мати квадратний тричлен? • Як розкласти квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ на множники? • Яке перетворення квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ називають виділенням квадрата двочлена?

829^①. (Усно.) Чи є квадратним тричленом вираз:

1) $x^2 + x - 3$;

2) $x^3 - x + 7$;

3) $3x + 7$;

4) $x + 2$;

5) $\frac{1}{x^2 + x - 3}$;

6) $x^2 - x + x^3$;

7) $3x - 7 + 5x^2$;

8) $-7x^2 + 10x + \frac{1}{x}$?

830^①. З даних виразів випишіть квадратні тричлени:

- 1) $x^3 - x$; 2) $x^2 - x - 1$; 3) $4x^2 + 17x + \frac{1}{5}$;
4) $4x + 17$; 5) $x^2 - x + x^7$; 6) $\frac{1}{2x^2 + x}$;
7) $-9x^2 + 18 + 5x$; 8) $-7 + 10x + 14x^2$.

831^①. Які з чисел 1; 2; 3 є коренями квадратного тричлена:

- 1) $x^2 - 2x + 1$; 2) $x^2 + 8x - 9$; 3) $x^2 - 5x + 6$; 4) $x^2 - 2x - 3$?

832^①. Знайдіть дискримінант квадратного тричлена та визначте кількість його коренів:

- 1) $x^2 + 2x - 5$; 2) $x^2 + 3x + 7$; 3) $x^2 - 2x + 1$; 4) $x^2 - x - 2$.

833^①. Знайдіть дискримінант квадратного тричлена та визначте кількість його коренів:

- 1) $x^2 + x - 6$; 2) $x^2 + 6x + 9$; 3) $x^2 - 2x + 5$; 4) $x^2 + 3x - 7$.

834^②. Знайдіть корені квадратного тричлена:

- 1) $x^2 - 6x + 5$; 2) $x^2 - 4x - 12$;
3) $5x^2 - 10x + 5$; 4) $-2x^2 - 3x + 2$.

835^②. Знайдіть корені квадратного тричлена:

- 1) $x^2 - 7x + 12$; 2) $x^2 - x - 20$;
3) $6x^2 - 7x + 1$; 4) $-3x^2 + 6x - 3$.

836^②. Чи можна розкласти на множники квадратний тричлен:

- 1) $16x^2 - 5x + 1$; 2) $4x^2 + 4x + 1$; 3) $2x^2 + x - 19$?

837^②. Розкладіть квадратний тричлен на множники:

- 1) $x^2 - 5x + 4$; 2) $x^2 + 7x - 8$; 3) $2x^2 - 5x + 2$;
4) $-x^2 + 11x - 24$; 5) $-3x^2 + 8x + 3$; 6) $4x^2 + x - 3$.

838^②. Розкладіть квадратний тричлен на множники:

- 1) $x^2 - 8x + 7$; 2) $x^2 + 8x - 9$; 3) $2x^2 - 7x + 3$;
4) $-x^2 + x + 12$; 5) $-6x^2 - 5x + 1$; 6) $7x^2 + 19x - 6$.

839^②. Покажіть, що квадратні тричлени

$$x^2 - 2x - 3; \quad 3x^2 - 6x - 9; \quad -4x^2 + 8x + 12$$

мають одні й ті самі корені. Розкладіть на множники кожний квадратний тричлен.

840^②. Чи правильно розкладено на множники квадратний тричлен:

- 1) $2x^2 + 4x - 6 = (x - 1)(x + 3)$;
2) $4x^2 - 8x + 4 = 4(x - 1)^2$?

841². Чи правильно розкладено на множники квадратний тричлен:

1) $3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1)$;

2) $2x^2 - 8x + 8 = (x - 2)^2$?

842². Скоротіть дріб:

1) $\frac{x-1}{x^2-4x+3}$; 2) $\frac{x^2-5x-14}{x+2}$.

843². Скоротіть дріб:

1) $\frac{x+1}{x^2+3x+2}$; 2) $\frac{x^2+3x-10}{x-2}$.

844². Чому не можна подати у вигляді добутку лінійних множників квадратний тричлен:

1) $x^2 + 2x + 7$; 2) $-2x^2 + 4x - 7$?

845². Виділіть квадрат двочлена з квадратного тричлена:

1) $x^2 + 2x - 5$; 2) $x^2 - 4x + 7$;

3) $2x^2 - 4x + 10$; 4) $3x^2 - 18x + 27$.

846². Виділіть квадрат двочлена з квадратного тричлена:

1) $x^2 - 2x + 7$; 2) $x^2 + 4x - 13$;

3) $3x^2 - 24x + 3$; 4) $2x^2 + 4x + 2$.

847³. Знайдіть корені квадратного тричлена:

1) $\frac{1}{3}x^2 - 2x - 7$; 2) $0,2x^2 + 7x + 40$.

848³. Знайдіть корені квадратного тричлена:

1) $\frac{1}{4}x^2 + 2x - 15$; 2) $0,2x^2 - 3x - 9$.

849³. Розкладіть на множники квадратний тричлен, якщо це можливо:

1) $x^2 - 2x - 11$; 2) $2x^2 - 3x + 7$;

3) $-2x^2 - 3x + 7$; 4) $-x^2 - 5x - 8$.

850³. Розкладіть на множники квадратний тричлен, якщо це можливо:

1) $x^2 + 4x - 7$; 2) $-2x^2 + 3x - 6$.

851³. Скоротіть дріб:

1) $\frac{4x-12}{x^2-5x+6}$; 2) $\frac{x^2-x-12}{x^2+3x}$; 3) $\frac{2x^2+5x-3}{x^2-9}$;

4) $\frac{x^2-4x+4}{x^2+5x-14}$; 5) $\frac{2x^2+9x-5}{3x^2-14x-5}$; 6) $\frac{5x^2-37x+14}{22x-2x^2-56}$.

852³. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2+6x+5}{x^2+5x}$; 2) $\frac{x^2-16}{3x^2-10x-8}$;
3) $\frac{x^2+x-6}{x^2-7x+10}$; 4) $\frac{2x^2+4x+2}{3x^2-6x-9}$.

853³. Обчисліть значення дробу:

1) $\frac{2x^2+9x-5}{x^2+8x+15}$, якщо $x = 97$;
2) $\frac{3x^2-24x+48}{7x-3x^2+20}$, якщо $x = -\frac{2}{3}$.

854³. Виконайте дії:

1) $\frac{1}{x-2} - \frac{x}{x^2+2x-8}$; 2) $\frac{1}{x+4} + \frac{2}{x^2+6x+8}$;
3) $\frac{x+4}{3x+2} \cdot \frac{3x^2-10x-8}{x^2-16}$; 4) $\frac{-2x^2+5x-2}{2x+10} \cdot \frac{2x^2+5x-3}{x^2-25}$.

855³. Виконайте дії:

1) $\frac{1}{x+2} + \frac{7}{x^2-3x-10}$; 2) $\frac{1}{x^2-4} : \frac{3x-2}{3x^2+4x-4}$.

856³. Виділіть з кожного квадратного тричлена квадрат двочлена та доведіть, що при будь-якому значенні x квадратний тричлен:

- 1) $x^2 - 4x + 9$ набуває додатного значення;
- 2) $2x^2 + 8x + 8$ набуває невід'ємного значення;
- 3) $-x^2 + 6x - 16$ набуває від'ємного значення;
- 4) $-x^2 + 10x - 25$ набуває недодатного значення.

857³. Виділіть з кожного квадратного тричлена квадрат двочлена та доведіть, що при будь-якому значенні x квадратний тричлен:

- 1) $x^2 + 6x + 17$ набуває додатного значення;
- 2) $-x^2 + 12x - 37$ набуває від'ємного значення.

858³. Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^3 + 3x^2 + 2x$; 2) $-2x^3 - 5x^2 + 3x$;
3) $\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{5}{4}x^2$; 4) $-\frac{1}{2}x^5 + 2x^4 + 6x^3$.

859³. Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^3 - 12x^2 + 32x$; 2) $\frac{1}{3}x^4 - 4x^3 + 9x^2$.

860³. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x^2+x-2}{x-1}$; 2) $y = \frac{x^3-2x^2-3x}{x^2+x}$.

861^②. Спростіть вираз:

1) $\frac{x^3-16x}{x+40} \cdot \left(\frac{x-4}{3x^2+11x-4} - \frac{16}{16-x^2} \right);$

2) $\frac{1}{(2a-2)^2} : \left(\frac{a}{a^2-2a+1} - \frac{a+2}{a^2+a-2} \right).$

862^②. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{x-1}{2x^2+3x+1} - \frac{1}{x^2-1} \right) : \frac{x-4}{x^3-x};$

2) $(3b-9)^2 \left(\frac{b}{b^2-6b+9} - \frac{b+2}{b^2-b-6} \right).$



863^②. Розкладіть на множники:

1) $x^3 - 4x;$

2) $x^4 - 3x^3 + 4x;$

3) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36;$

4) $x^3 + x^2 - x - 1.$

864^③. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{0,16a^6x^{14}}$, якщо $a > 0$, $x < 0$;

2) $\sqrt{8m^3p^6}$, якщо $p > 0$.

865^④. Рівняння $x^2 - 2x - 10 = 0$ має корені x_1 і x_2 . Не розв'язуючи рівняння, знайдіть:

1) $x_1^2 + x_2^2;$

2) $x_1^3 + x_2^3;$

3) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2};$

4) $x_1^4 + x_2^4.$

Уроки 59—61

§ 25. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ, ЯКІ ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ

1. Дробові раціональні рівняння.

Розв'язування дробових раціональних рівнянь часто приводить до розв'язування квадратних рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{8}{x^3-4x}.$$

Розв'язання. Розкладемо на множники знаменники дробів:

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x(x-2)} = \frac{8}{x(x-2)(x+2)}.$$

Домножимо обидві частини рівняння на спільний знаменник дробів — вираз $x(x-2)(x+2)$ за умови, що він не дорівнює нулю. Маємо:

$$x(x-2) + x + 2 = 8;$$

$$x^2 - x - 6 = 0;$$

$$x_1 = 3; x_2 = -2.$$

Якщо $x = 3$, то $x(x-2)(x+2) \neq 0$; якщо ж $x = -2$, то $x(x-2)(x+2) = 0$, тому $x = -2$ — не є коренем рівняння. Отже, єдиний корінь рівняння — число 3.

В і д п о в і д ь. 3.

2. Метод розкладання многочлена на множники.

Деякі рівняння можна розв'язати за допомогою розкладання многочлена на множники.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $x^3 + 2x^2 - 15x = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Внесемо в лівій частині рівняння за дужки x :

$$x(x^2 + 2x - 15) = 0.$$

Звідси $x = 0$ або $x^2 + 2x - 15 = 0$. Друге рівняння має корені: $x = 3$, $x = -5$. Отже, рівняння $x^3 + 2x^2 - 15x = 0$ має три корені: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = -5$.

В і д п о в і д ь. 0; 3; -5.

3. Біквадратні рівняння.

Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де $a \neq 0$, називають **біквадратним рівнянням**. Це рівняння можна розв'язати, вводячи нову змінну, а саме, позначивши x^2 через t . Маємо $x^4 = (x^2)^2 = t^2$. Початкове рівняння набере вигляду $at^2 + bt + c = 0$. Такий метод розв'язування називають **методом заміни змінної**.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Зробимо заміну $x^2 = t$, тоді маємо рівняння $t^2 + 5t - 36 = 0$. Це рівняння має корені $t_1 = 4$, $t_2 = -9$.

Повернемося до змінної x .

1) $t_1 = 4$. Тоді $x^2 = 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$;

2) $t_2 = -9$. Тоді $x^2 = -9$, рівняння не має розв'язків.

Отже, початкове рівняння має корені $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

В і д п о в і д ь. 2; -2.

4. Метод заміни змінної.

Не лише біквадратні, а й деякі інші види рівнянь можна розв'язати за допомогою заміни змінної.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $(x^2 + 4x)(x^2 + 4x + 4) = 12$.

Р о з в' я з а н н я. Зробимо заміну $x^2 + 4x = t$. Маємо рівняння для t : $t(t + 4) = 12$, $t^2 + 4t - 12 = 0$. Воно має корені $t_1 = 2$, $t_2 = -6$.

Повернемося до змінної x .

1) $t_1 = 2$. Тоді $x^2 + 4x = 2$, $x^2 + 4x - 2 = 0$, $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$;

2) $t_2 = -6$. Тоді $x^2 + 4x = -6$, $x^2 + 4x + 6 = 0$, рівняння не має розв'язків.

Отже, початкове рівняння має два корені $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$.

В і д п о в і д ь. $-2 \pm \sqrt{6}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $x(x-2) = \frac{4}{(x+1)(x-3)}$.

Розв'язання. Оскільки $x(x-2) = x^2 - 2x$, а $(x+1)(x-3) = x^2 + x - 3x - 3 = x^2 - 2x - 3$, то маємо рівняння:

$$x^2 - 2x = \frac{4}{x^2 - 2x - 3}.$$

Зробимо заміну $x^2 - 2x = t$. Маємо рівняння для t :

$$t = \frac{4}{t-3}.$$

Розв'язавши його, дістанемо $t_1 = -1$, $t_2 = 4$. Повернемося до змінної x .

1) $t_1 = -1$; $x^2 - 2x = -1$, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x_1 = 1$;

2) $t_2 = 4$; $x^2 - 2x = 4$, $x^2 - 2x - 4 = 0$, $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{5}$.

Отже, початкове рівняння має корені: $x_1 = 1$, $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{5}$.

В і д п о в і д ь. $1; 1 \pm \sqrt{5}$.



Якими методами можна розв'язувати рівняння? • Яке рівняння називають біквадратним? • Як розв'язують біквадратне рівняння?

866^①. (Усно.) Які з рівнянь — біквадратні:

1) $x^3 + 2x^2 - 5 = 0$;

2) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$;

3) $x^2 + 2x - 1 = 0$;

4) $-7x^4 - 8x^2 - 11 = 0$;

5) $\frac{1}{x^4} + \frac{4}{x^2} - 5 = 0$;

6) $8x^2 - 9x^4 - 5 = 0$?

867^①. Випишіть біквадратні рівняння:

1) $x^2 + x - 7 = 0$;

2) $3x^4 - 2x^3 - 5 = 0$;

3) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$;

4) $x^5 - 3x^2 + 4 = 0$;

5) $7x^4 + 15x^2 - 9 = 0$;

6) $5 - 9x^4 - 8x^2 = 0$.

868^②. Розв'яжіть біквадратне рівняння:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

2) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$;

$$\begin{array}{ll} 3) x^4 - 2x^2 - 8 = 0; & 4) 2x^4 - x^2 - 6 = 0; \\ 5) x^4 + 5x^2 + 4 = 0; & 6) 9x^4 - 6x^2 + 1 = 0. \end{array}$$

869Ⓢ. Знайдіть корені біквадратного рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) x^4 - 17x^2 + 16 = 0; & 2) x^4 - 6x^2 + 8 = 0; \\ 3) x^4 + 2x^2 - 15 = 0; & 4) 3x^4 - 2x^2 - 8 = 0; \\ 5) x^4 + 10x^2 + 9 = 0; & 6) 25x^4 - 10x^2 + 1 = 0. \end{array}$$

870Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^2 - x - 2}{x + 3} = 0; \quad 2) \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 0.$$

871Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 4} = 0; \quad 2) \frac{x^2 - x - 12}{x + 3} = 0.$$

872Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x^2}{x+1} = \frac{x}{x+1}; & 2) \frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2}; \\ 3) \frac{2x^2}{x-1} = \frac{3x-14}{1-x}; & 4) \frac{x^2-5}{x-3} = \frac{2x-10}{3-x}. \end{array}$$

873Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x^2}{x-2} = \frac{3x}{x-2}; & 2) \frac{x^2}{x+3} = \frac{9}{x+3}; \\ 3) \frac{3x^2}{1-x} = \frac{x-14}{x-1}; & 4) \frac{x^2-3}{x-2} = \frac{2x-5}{2-x}. \end{array}$$

874Ⓢ. Знайдіть корені рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x-3}{x} = \frac{8}{x+3}; & 2) \frac{2x-3}{x+2} = \frac{x}{x+6}; \\ 3) \frac{10}{3-x} = x; & 4) \frac{8}{x} = 3x+2. \end{array}$$

875Ⓢ. Знайдіть корені рівняння:

$$1) \frac{x-2}{x} = \frac{3}{x+2}; \quad 2) \frac{3x-1}{x+3} = \frac{x}{x+1}; \quad 3) \frac{3}{4-x} = x; \quad 4) \frac{6}{x} = 2x-1.$$

876Ⓢ. Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

$$\begin{array}{ll} 1) x^3 - 4x = 0; & 2) x^3 + 9x = 0; \\ 3) 4x^4 - x^2 = 0; & 4) x^3 + x^2 - 6x = 0. \end{array}$$

877Ⓢ. Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

$$\begin{array}{ll} 1) x^3 - 9x = 0; & 2) x^3 + 4x = 0; \\ 3) 16x^4 - x^2 = 0; & 4) x^3 + x^2 - 12x = 0. \end{array}$$

878Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{20}{x} - \frac{20}{x+1} = 1$; 2) $\frac{2}{x} + \frac{1}{x-2} = 1$.

879Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{12}{x} - \frac{12}{x+1} = 1$; 2) $\frac{3}{x} + \frac{1}{x-4} = 1$.

880Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x+3} = 0$; 2) $\frac{6x^2 + 19x - 7}{1-3x} = 5$;
3) $\frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4} = 3$; 4) $\frac{4x+2}{1+2x} = 6x + 5$.

881Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^4 + x^2 - 2}{x+1} = 0$; 2) $\frac{6x^2 + 7x - 5}{1-2x} = 4$;
3) $\frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 9} = 2$; 4) $\frac{8x+2}{1+4x} = 12x + 5$.

882Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+7}{x+2} + \frac{x-4}{x-2} = 1$; 2) $\frac{3x+3}{3x+2} + \frac{2x-6}{3x-2} = 2$;
3) $\frac{4}{x-5} - \frac{2}{x+5} = \frac{x^2+15}{x^2-25}$; 4) $\frac{2x+2}{x-3} - \frac{18}{x^2-9} = \frac{x+6}{x+3}$.

883Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3x+9}{x+1} + \frac{x-6}{x-1} = 3$; 2) $\frac{2x+8}{x+5} + \frac{10}{x^2-25} = \frac{x-4}{x-5}$.

884Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-3}{x^2+4x+4} - \frac{x+1}{x^2+2x} = \frac{5}{x}$; 2) $\frac{6}{x^2-9} - \frac{4}{x^2+6x+9} = \frac{1}{x-3}$;
3) $\frac{6}{x^2-36} - \frac{3}{x^2+6x} = \frac{x+12}{x^2-6x}$; 4) $\frac{3x+2}{x+1} + \frac{x+4}{x-3} = \frac{3x^2+1}{x^2-2x-3}$.

885Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{21}{x^2-2x} - \frac{14}{x^2+2x} = \frac{5}{x}$; 2) $\frac{3}{x^2-4x+4} + \frac{4}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} = 0$;
3) $\frac{5}{x^2+10x} + \frac{x+20}{x^2-10x} = \frac{10}{x^2-100}$; 4) $\frac{2x+7}{x+4} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{5}{x^2+3x-4}$.

886Ⓢ. При якому значенні x :

- 1) сума дробів $\frac{6}{1-x}$ і $\frac{x}{x+2}$ дорівнює їх добутку;
2) сума дробів $\frac{2}{x-3}$ і $\frac{6}{x+3}$ дорівнює їх частці?

887^а. Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

1) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$; 2) $3x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0$.

888^а. Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

1) $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$; 2) $4x^3 + 8x^2 - 3x - 6 = 0$.

889^а. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 + 3)^2 - 3(x^2 + 3) - 4 = 0$; 2) $(x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x) - 8 = 0$.

890^а. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 + 2)^2 - 2(x^2 + 2) - 3 = 0$; 2) $(x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x) - 6 = 0$.

891^а. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{2(x^2+3)} - \frac{1}{3(x+4)} = \frac{1}{x^3+4x^2+3x+12}$;

2) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{32}{x^3+2x^2-x-2}$.

892^а. Розв'яжіть рівняння:

$\frac{1}{x-3} - \frac{14}{x^3-x^2-9x+9} = \frac{1}{x^2+2x-3}$.

893^а. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 5x + 5 = 0$; 2) $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$.

894^а. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 3 = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$.

895^а. Розв'яжіть рівняння:

1) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$; 2) $(x^2 + 2x - 2)(x^2 + 2x - 4) = 8$;

3) $(x - 2)^4 - 2(x - 2)^2 - 3 = 0$;

4) $(x^2 + x + 1)^2 - 8x^2 - 8x - 1 = 0$.

896^а. Розв'яжіть рівняння:

1) $x + 2\sqrt{x} - 8 = 0$;

2) $(x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x - 3) = 3$;

3) $(x + 1)^4 - 5(x + 1)^2 - 6 = 0$;

4) $(x^2 - x - 1)^2 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$.



897^а. З двох сіл, відстань між якими 84 км, одночасно назустріч один одному виїхали два велосипедисти. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста, якщо вони зустрілися через 3 год і швидкість одного з них на 4 км/год більша за швидкість другого.

898^а. Корені квадратного тричлена $3x^2 + bx + c$ дорівнюють -7 і $\frac{2}{3}$. Розкладіть цей квадратний тричлен на множники.

899^а. Сума двох чисел дорівнює 27, а сума їх квадратів — дорівнює 369. Знайдіть ці числа.

900^а. Спростіть вираз:

$$\frac{x-2}{3x+2} \cdot \frac{9x^2-4}{2x^2-5x+2} - \frac{x}{1-2x}.$$

Уроки 62, 63

§ 26. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ РІВНЯНЬ, ЯКІ ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ

Розв'язування багатьох задач зводиться до розв'язування дробових раціональних рівнянь.

Приклад 1. З одного міста до іншого, відстань між якими 560 км, виїхали одночасно автомобіль і мотоцикл. Швидкість автомобіля на 10 км/год більша за швидкість мотоцикла, тому він приїхав у пункт призначення на 1 год раніше. Знайдіть швидкість мотоцикла і швидкість автомобіля.

Розв'язання. Позначимо швидкість мотоцикла x км/год і систематизуємо дані у вигляді таблиці:

Вид транспорту	s , км	v , км/год	t , год
Мотоцикл	560	x	$\frac{560}{x}$
Автомобіль	560	$x + 10$	$\frac{560}{x+10}$

Оскільки величина $\frac{560}{x+10}$ год на 1 год менша за величину $\frac{560}{x}$ год, то маємо рівняння:

$$\frac{560}{x+10} + 1 = \frac{560}{x}.$$

Розв'язавши його, дістанемо: $x_1 = 70$, $x_2 = -80$. Другий корінь не задовольняє умови задачі. Отже, швидкість мотоцикла 70 км/год, а автомобіля — $70 + 10 = 80$ (км/год).

В і д п о в і д ь. 70 км/год; 80 км/год.

Приклад 2. Майстер і учень, працюючи разом, виконали завдання за 8 год. За скільки годин може виконати це завдан-

ня кожен з них, працюючи окремо, якщо майстру на це потрібно на 12 год менше, ніж учню?

Розв'язання. Нехай майстру, щоб виконати завдання, працюючи окремо, потрібно x год, тоді учневі — $(x + 12)$ год. За 1 год майстер виконає $\frac{1}{x}$ частину завдання, а учень — $\frac{1}{x+12}$ частину завдання. Разом за одну годину вони виконують $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+12}$ частину завдання. За умовою задачі майстер і учень, працюючи разом, виконали завдання за 8 год, тому за 1 год вони виконували $\frac{1}{8}$ частину завдання. Отже, маємо рівняння:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+12} = \frac{1}{8}.$$

Розв'язавши його, дістанемо: $x_1 = 12$, $x_2 = -8$. Другий корінь не задовольняє умови задачі. Отже, майстер, працюючи окремо, може виконати завдання за 12 год, а учень — за $12 + 12 = 24$ (год).

Відповідь. Майстер — за 12 год, учень — за 24 (год).



Поясни, як розв'язано задачі 1—2.

901^а. Одне з натуральних чисел на 2 більше за друге. Знайдіть ці числа, якщо сума обернених до них чисел дорівнює $\frac{5}{12}$.

902^а. Сума двох натуральних чисел 20, а сума чисел, обернених до даних, дорівнює $\frac{5}{24}$. Знайдіть ці числа.

903^а. Чисельник звичайного нескоротного дробу на 1 менший за знаменник. Якщо від чисельника дробу відняти 7, а від знаменника відняти 5, то дріб зменшиться на $\frac{1}{2}$. Знайдіть цей дріб.

904^а. Знаменник звичайного нескоротного дробу на 5 більший за чисельник. Якщо знаменник дробу збільшити на 6, а чисельник збільшити на 4, то дріб збільшиться на $\frac{1}{4}$. Знайдіть цей дріб.

905^а. З міста в село, відстань між якими 48 км, виїхали одночасно два велосипедисти. Швидкість одного з них на 4 км/год більша від швидкості другого і тому він прибув у село на 1 год раніше. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста.

906^а. З міста А в місто В, відстань між якими 420 км, одночасно виїхали два автомобілі. Швидкість одного автомобіля

на 10 км/год більша за швидкість другого і тому він прибув у місто *B* на 1 год раніше, ніж другий. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

907³. Щоб ліквідувати запізнення на 40 хв, потяг на перегоні завдовжки 300 км збільшив швидкість на 5 км/год порівняно зі швидкістю за розкладом. Яка швидкість потяга за розкладом?

908³. Автомобіль мав проїхати 810 км. Після того як він проїхав $\frac{5}{9}$ шляху, автомобіль зробив зупинку на 30 хв. Збільшивши швидкість на 10 км/год, автомобіль прибув у пункт призначення вчасно. Якою була швидкість автомобіля до зупинки?

909³. Потяг мав проїхати 320 км. Проїхавши $\frac{3}{8}$ шляху, він зупинився на 1 год, а потім продовжив рух зі швидкістю, на 10 км/год меншою за початкову. Знайдіть швидкість потяга до зупинки, якщо в пункт призначення він прибув через 7 год після виїзду.

910³. Човен, власна швидкість якого 18 км/год, пройшов 40 км за течією і 16 км проти течії, витративши на весь шлях 3 год. Яка швидкість течії, якщо відомо, що вона менша за 4 км/год?

911³. Відстань між двома пристанями 48 км. На човні шлях туди і назад можна подолати за 7 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

912³. Моторний човен проплив 18 км за течією річки і 28 км проти течії за такий самий час, який потрібний йому, щоб проплисти 48 км у стоячій воді. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 3 км/год.

913³. Катер пропливає 30 км за течією річки і 8 км проти течії річки за такий самий час, який потрібний плоту, щоб проплисти 4 км по цій річці. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість катера дорівнює 18 км/год.

914³. Моторний човен пройшов 40 км по озеру, а потім 18 км по річці, що впадає в це озеро, за 2 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

915³. Дві бригади повинні виготовити по 200 деталей, причому перша виготовляє за годину на 10 деталей більше, ніж друга. Тому друга бригада виконала замовлення на

1 год пізніше, ніж перша. Скільки деталей щогодини виготовляла кожна бригада?

916³. Для перевезення 60 т вантажу потрібна деяка кількість автомашин. Оскільки на кожну автомашину завантажили на 1 т більше, ніж передбачалося, то 3 автомашини виявилися зайвими. Скільки автомашин було використано для перевезення вантажу?

917³. Майстер і учень, працюючи разом, можуть виконати замовлення за 16 год. За скільки годин виконає це замовлення кожен з них, працюючи окремо, якщо майстру на це потрібно на 24 год менше, ніж учню?

918³. Два малярі, працюючи разом, можуть пофарбувати будинок за 20 год. За скільки годин може виконати цю роботу кожний маляр, працюючи окремо, якщо одному для цього потрібно на 9 год більше, ніж другому?

919³. Один кран наповнював басейн 9 хв, після чого було включено другий кран. Через 6 хв спільної роботи було наповнено половину басейну. За скільки хвилин може наповнити басейн кожний кран окремо, якщо першому на це треба на 9 хв більше, ніж другому?

920³. Один з операторів комп'ютерного набору може набрати рукопис на 12 днів швидше, ніж другий. Через 6 днів роботи другого оператора до нього приєднався перший. Через 10 днів спільної роботи виявилось, що набрано $\frac{5}{7}$ рукопису. За скільки днів може набрати рукопис кожен оператор, працюючи окремо?

921³. Пішохід йшов із села *A* в село *B* 4 год. На зворотному шляху перші 10 км він пройшов з тією самою швидкістю, а потім зменшив її на 1 км/год і тому на зворотний шлях витратив на 30 хв більше. Знайдіть відстань між селами.

922³. Відстань від пристані *M* до пристані *N* за течією річки човен проходить за 3 год. Одного разу, не дійшовши 30 км до пристані *N*, човен повернув назад і прибув до пристані *M* через 4,5 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

923³. Посудина містила 6 л чистого спирту. Частину спирту відлили, а посудину долили водою. Потім відлили таку саму кількість суміші, як спирту першого разу, і посудину знову долили водою. Після цього у посудині чистого спирту стало втричі менше, ніж води. Скільки літрів спирту відлили першого разу?



924². Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^4 + 3x^2 - 5 = 0$; 2) $\frac{x^2}{x-6} = \frac{36}{x-6}$.

925³. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2+3x-10}{x^2-2x}$; 2) $\frac{x^2-9}{2x^2-4x-6}$.

926⁴. Розв'яжіть рівняння:

1) $x - 2\sqrt{x} - 8 = 0$; 2) $(x+7)^4 - 5(x+7)^2 - 6 = 0$.

Урок 64

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО § 24—26

1¹. З даних виразів виписіть квадратні тричлени:

1) $2x^2 - 3x + 7$; 2) $\frac{1}{2x^2-3x+7}$;
3) $2x^2 - 3x + 7x^3$; 4) $-8 + 2x^2 - 3x$.

2¹. Знайдіть дискримінант квадратного тричлена та визначте кількість його коренів:

1) $x^2 + 3x - 7$; 2) $x^2 + x + 9$.

3¹. Чи є бікватратним рівняння:

1) $x^2 + 8x - 9 = 0$; 2) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$;
3) $x^3 + 8x^2 - 9 = 0$; 4) $7x^2 - x^4 - 5 = 0$?

4². Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2 + 4x - 5$; 2) $-2x^2 + 5x - 2$.

5². Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$; 2) $\frac{x^2}{x+4} = \frac{16}{x+4}$.

6². Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники: $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$.

7². Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2+2x-8}{x^2+4x}$; 2) $\frac{x^2-4}{2x^2+7x-22}$.

8³. З одного міста в інше, відстань між якими 60 км, виїхали одночасно два велосипедисти. Швидкість одного з них була на 3 км/год більша, ніж другого. Тому він прибув у пункт призначення на 1 год раніше. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста.

9³. Розв'яжіть рівняння:

1) $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$; 2) $(x-3)^4 - 7(x-3)^2 - 8 = 0$.

Додаткові завдання

10³. Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^3 - 4x^2 - 5x$; 2) $-\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 4x^2$.

11³. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 2x}$.

Вправи для повторення розділу III

До § 20

927¹. Спишіть рівняння в зошит та підкресліть однією рискою перший коефіцієнт, двома — другий і хвилястою вільний член (у разі потреби допишіть коефіцієнт 1) за зразком $\underline{ax^2 + bx + c} = 0$, $\underline{2x^2 - 1x + 5} = 0$:

1) $7x^2 - 3x + 5 = 0$; 2) $-2x^2 + x - 4 = 0$;

3) $3x + x^2 - 7 = 0$; 4) $3x^2 = 0$;

5) $2x^2 - 7 = 0$; 6) $2x + 5x^2 = 0$.

928². Розв'яжіть рівняння:

1) $1,8x^2 = 0$; 2) $2x^2 - 32 = 0$; 3) $5x^2 - 7x = 0$;

4) $-x^2 - 9 = 0$; 5) $\frac{1}{2}x^2 + 8x = 0$; 6) $3x^2 - 15 = 0$.

929³. Чи є число $1 - \sqrt{2}$ коренем рівняння $x^2 - 2x - 1 = 0$?

930³. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 + x}{2} + \frac{x - 1}{3} = \frac{5x + 4}{6}$; 2) $\frac{2x^2 - 3x}{4} + \frac{x + 4}{2} = \frac{x + 16}{8}$.

931³. Довжина прямокутника у 1,5 раза більша за ширину. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 54 см^2 .

932⁴. При яких значеннях a число 3 є коренем рівняння:

1) $ax^2 - 7x + (a^2 + 21) = 0$; 2) $x^2 + (a^2 - 4)x - 9 = 0$?

933⁴. При яких значеннях a рівняння:

1) $x^2 - (4a - 5)x = 0$ має один корінь;

2) $a^2x^2 - a = 0$ має два корені?

До § 21

934¹. Знайдіть дискримінант квадратного рівняння та визначте кількість його коренів:

1) $x^2 + 2x - 4 = 0$; 2) $3x^2 - 2x + 3 = 0$;

3) $x^2 - 2x + 1 = 0$; 4) $7x^2 + x - 1 = 0$.

935². Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 + 7x - 8 = 0$; 2) $16x^2 - 8x + 1 = 0$;
3) $2x^2 - x - 3 = 0$; 4) $x^2 + 3x - 10 = 0$;
5) $x^2 + 4x + 7 = 0$; 6) $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

936². Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 = 6x - 7$; 2) $x^2 + 7x = -12$;
3) $10x = 25x^2 + 1$; 4) $2 - 9x = 5x^2$.

937³. Розв'яжіть рівняння графічно, а потім перевірте розв'язок, використавши формулу коренів квадратного рівняння:

- 1) $x^2 = 3 - 2x$; 2) $x^2 = 0,5x + 3$.

938³. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $5(x - 2) = (3x + 2)(x - 2)$; 2) $\frac{1}{5}x^2 - 2x - 7 = 0$;
3) $x^2 + 2\sqrt{x} - 12 = 0$; 4) $\sqrt{3}x^2 - 2x - 3 = 0$.

939⁴. При якому значенні m має один корінь рівняння:

- 1) $x^2 + 2mx + m = 0$; 2) $mx^2 - 4x + 2 = 0$?

940⁴. Доведіть, що при будь-якому a рівняння $2x^2 + ax - 3 = 0$ має два різних корені.

941⁴. Розв'яжіть рівняння відносно x :

- 1) $x^2 - x(3 - 2a) - 6a = 0$; 2) $a^2x^2 - 3ax + 2 = 0$.

942⁴. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $|x^2 + 5x - 3| = 3$; 2) $||x^2 - 5x + 1| - 4| = 3$;
3) $x^2 + x + \frac{4}{x-2} = \frac{4}{x-2} + 6$; 4) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3\right)(x^2 + 2x) = 0$.

До § 22

943¹. Знайдіть суму і добуток коренів рівняння:

- 1) $x^2 + 17x + 60 = 0$; 2) $x^2 - 12 = 0$;
3) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; 4) $-x^2 - 4x + 5 = 0$.

944². Не застосовуючи формулу коренів квадратного рівняння, знайдіть другий корінь, якщо відомий перший:

- 1) $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = 5$; 2) $x^2 + 3x - 18 = 0$, $x_1 = -6$.

945³. Різниця коренів квадратного рівняння $x^2 + 2x + q = 0$ дорівнює 6. Знайдіть ці корені та коефіцієнт q .

946³. Доведіть, що рівняння $3x^2 + bx - 7 = 0$ при будь-якому значенні b має один додатний і один від'ємний корінь.

- 947**^а. Відношення коренів рівняння $x^2 + px + 54 = 0$ дорівнює $2 : 3$. Знайдіть p та корені рівняння.
- 948**^а. Один з коренів рівняння $5x^2 - 6x + c = 0$ у 2 рази більший за другий. Знайдіть c .
- 949**^а. Сума квадратів коренів рівняння $3x^2 + bx - 12 = 0$ дорівнює 33. Знайдіть b .
- 950**^а. Складіть квадратне рівняння, корені якого у 2 рази менші за відповідні корені рівняння $5x^2 - 16x + 4 = 0$.
- 951**^а. При яких значеннях a сума коренів рівняння $x^2 - 2ax + (2a - 1) = 0$ дорівнює сумі квадратів його коренів?

До § 23

- 952**^а. Периметр прямокутника дорівнює 30 см, а його площа 54 см². Знайдіть сторони прямокутника.
- 953**^а. Знайдіть три послідовних цілих чисел, сума квадратів яких дорівнює 230.
- 954**^а. Знайдіть п'ять послідовних цілих чисел, якщо відомо, що сума квадратів трьох перших чисел дорівнює сумі квадратів двох останніх.
- 955**^а. Один з катетів прямокутного трикутника на 2 см менший за другий, а периметр трикутника дорівнює 24 см. Знайдіть площу трикутника.
- 956**^а. У чемпіонаті України з футболу було зіграно 240 матчів. Скільки команд взяло участь в чемпіонаті, якщо кожна команда зіграла з кожною по два матчі?
- 957**^а. Дно ящика — прямокутник, ширина якого в 1,5 рази менша від його довжини. Висота ящика 0,4 м. Знайдіть об'єм ящика, коли відомо, що площа його дна на 0,66 м² менша за площу бічних стінок.
- 958**^а. З аркуша картону прямокутної форми, довжина якого в 2 рази більша за ширину, виготовили відкриту коробку, об'єм якої 10 500 см³, вирізавши з кутів аркуша квадрати зі стороною 5 см. Знайдіть початкові розміри аркуша.

До § 24

- 959**^а. Знайдіть дискримінант кожного квадратного тричлена та визначте ті квадратні тричлени, які можна розкласти на множники, що є многочленами першого степеня:
- 1) $x^2 + x - 5$; 2) $x^2 + 2x + 7$; 3) $9x^2 + 6x + 1$.

960². Знайдіть корені квадратного тричлена:

- 1) $x^2 + 5x + 4$; 2) $x^2 - 4x - 12$;
3) $2x^2 - 12x + 18$; 4) $-4x^2 + 7x + 2$.

961². Розкладіть на множники квадратний тричлен:

- 1) $x^2 + 3x - 4$; 2) $2x^2 - 7x - 4$;
3) $-x^2 + 3x + 18$; 4) $-4x^2 + 9x - 2$.

962². Виділіть квадрат двочлена із квадратного тричлена:

- 1) $x^2 + 6x - 7$; 2) $x^2 - 8x - 9$.

963³. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{4x^2 - 81}{2x^2 - 5x - 18}$; 2) $\frac{2x^2 + 6x - 20}{x^3 - 8}$;
3) $\frac{2x^2 - 12x + 18}{2x^2 - x - 15}$; 4) $\frac{4x^2 - 11x - 3}{-3x^2 + 10x - 3}$.

964³. Виконайте дії:

- 1) $\frac{x-1}{x^2+2x-3} + \frac{x+1}{x^2+4x+3}$; 2) $\frac{2x^2-7}{x^2-3x-4} - \frac{x+1}{x-4}$;
3) $\frac{x^2-x-20}{2-x} \cdot \frac{2x-x^2}{x+4}$; 4) $\frac{x+5}{2x-6} \cdot \frac{x^2+11x+30}{x-3}$.

965³. Один з коренів квадратного тричлена $x^2 + px + 6$ дорівнює -3 . Знайдіть p та другий корінь.

966³. Виділіть квадрат двочлена з квадратного тричлена:

- 1) $x^2 + x - 1$; 2) $2x^2 - 3x + 7$;
3) $3x^2 - 5x + 7$; 4) $-4x^2 + 9x - 2$.

967⁴. Вкажіть таке значення коефіцієнта, щоб тричлен мав один корінь:

- 1) $x^2 + bx + 4$; 2) $ax^2 + 8x + 64$; 3) $x^2 - 18x + c$.

968⁴. Розкладіть на множники квадратний тричлен відносно змінної x :

- 1) $x^2 - 5ax - 6a^2$; 2) $x^2 + 3bx - 10b^2$.

969⁴. Якого найменшого значення може набувати квадратний тричлен $x^2 - 8x + 19$? При якому значенні x це досягається?

970⁴. При якому a квадратний тричлен $-a^2 - 4a - 17$ набуває найбільшого значення? Знайдіть це значення.

971Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2x^4 + x^2 - 3 = 0$; 2) $3x^4 - 2x^2 - 40 = 0$;
3) $x^4 + x^2 + 9 = 0$; 4) $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$.

972Ⓢ. Знайдіть корені рівняння:

- 1) $\frac{x^2+x-2}{x-1} = 0$; 2) $\frac{3x^2}{x+2} = \frac{5x}{x+2}$;
3) $\frac{x^2+1}{x-2} = \frac{1-3x}{2-x}$; 4) $\frac{21}{x} = 2x+1$.

973Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^4 - 16x^2 = 0$; 2) $x^3 - x^2 - 6x = 0$.

974Ⓢ. Знайдіть координати точок перетину з віссю абсцис графіка функції $y = x^4 - 3x^2 - 4$.

975Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{1}{x+2} - \frac{4}{x+3} = \frac{1}{x}$; 2) $\frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2-x} = \frac{3}{3-x}$;
3) $\frac{18}{x^2+6x+9} + \frac{7}{x+3} = 1$; 4) $\frac{13x+4}{4x^2+4x+1} - \frac{1}{2x+1} = 4$;
5) $\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{9}{(x-2)^2} = \frac{6}{x^2-4}$; 6) $\frac{3}{3x^2-x} - \frac{4}{9x^2-1} = \frac{4}{9x^2-6x+1}$.

976Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{1}{2x+x^2} - \frac{1}{x-2} = \frac{8}{4x-x^3}$; 2) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+x^2} = \frac{10}{x-x^3}$;
3) $\frac{7x+6}{x^3-27} = \frac{1}{x^2+3x+9} + \frac{1}{x-3}$.

977Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^3 - x^2 = x - 1$; 2) $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3 = 0$.

978Ⓢ. Знайдіть координати точок перетину графіків $y = 4x$ і $y = \frac{7}{x+1} - 1$.

979Ⓢ. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{8x+29}{16x^4-1} + \frac{18x+5}{8x^3+4x^2+2x+1} = \frac{25}{4x^2+1}$;
2) $\frac{3x}{27x^3+18x^2-12x-8} - \frac{1}{9x^2+12x+4} = \frac{x-1}{4x-9x^3}$.

980^④. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 - 4x)(x - 2)^2 + 3 = 0$; 2) $x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 24$;

3) $x^2 - 3x = \frac{8}{x^2 - 3x - 2}$; 4) $(x + 2)(x - 7) = \frac{19}{(x - 1)(x - 4)}$;

5) $\frac{5}{x^2 - x - 1} + \frac{1}{x^2 - x - 5} = 2$;

6) $\frac{2}{x^2 - 11x + 4} + \frac{3}{x^2 - 11x + 1} = \frac{8}{x^2 - 11x - 2}$.

981^④. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 - 13}{x + 1} + \frac{x + 1}{x^2 - 13} = 2,5$; 2) $\frac{x^2 + 3x}{1 - x} + \frac{5x - 5}{3x + x^2} = 4$.

До § 26

982^③. З міста в село, відстань між якими 16 км, вийшов пішохід. Через 2 год 40 хв у тому самому напрямі виїхав велосипедист і прибув у село одночасно з пішоходом. Знайдіть швидкість велосипедиста, якщо вона на 8 км/год більша за швидкість пішохода.

983^③. Потяг, затриманий на 2 год, на перегоні довжиною 400 км ліквідував запізнення, збільшивши швидкість на 10 км/год. Знайдіть, за який час потяг мав проїхати даний перегін з початковою швидкістю.

984^③. Катер пройшов 45 км за течією і 7 км проти течії, витративши на весь шлях 3 год. Яка власна швидкість катера, якщо швидкість течії 2 км/год?

985^③. О восьмій годині ранку за течією річки від пристані відійшов пліт, а о сімнадцятій годині в тому самому напрямі відійшов човен, який наздогнав пліт на відстані 20 км від пристані. О котрій годині човен наздогнав пліт, якщо власна швидкість човна дорівнює 18 км/год?

986^③. Рибалка відплив на човні з пункту А проти течії річки. Подолавши 5 км, він кинув весла, і через 3 год після відплиття з пункту А його знову віднесло до цього пункту. Швидкість човна в стоячій воді дорівнює 12 км/год. Знайдіть швидкість течії, якщо вона менша за 5 км/год.

987^③. Перший оператор комп'ютерного набору набрав 120 сторінок рукопису, а другий — 144 сторінки. Перший оператор щодня набрав на 4 сторінки більше, ніж другий, і працював на 3 дні менше, ніж другий. Скільки сторінок щодня набрав перший оператор і скільки другий?

- 988^а.** Робочий день становить 8 год. Щоб виготовити 15 деталей, Петру треба на 1 год менше, ніж Степану. Скільки деталей за день виготовляє кожний майстер, якщо Петро за робочий день виготовляє на 20 деталей більше, ніж Степан?
- 989^а.** Через одну трубу можна наповнити басейн на 4 год швидше, ніж через другу спорожнити цей басейн. Якщо одночасно відкрити обидві труби, то басейн наповниться за 3 год. За скільки годин перша труба може наповнити басейн, а друга — спорожнити його?
- 990^а.** Майстер може виконати завдання на 3 год швидше, ніж учень. Якщо майстер пропрацює 4 год, а потім його змінить учень і пропрацює 3 год, то завдання буде виконано. За скільки годин, працюючи окремо, може виконати завдання майстер і за скільки учень?
- 991^а.** Сплав міді і цинку, що містить 1 кг міді, сплавили з 2 кг міді. Дістали сплав, у якому відсоток міді на 25 % більший, ніж у попередньому. Якою була маса початкового сплаву?
- 992^а.** З міст A і B виїхали одночасно назустріч один одному два велосипедисти і зустрілися через 5 год. Швидкість велосипедиста, що виїхав з міста A , на 5 км/год менша за швидкість другого велосипедиста. Якби другий велосипедист виїхав на 4,5 год пізніше, ніж перший, то велосипедисти зустрілися б на відстані 75 км від міста B . Знайдіть відстань між A і B .
- 993^а.** Бригада робітників повинна була виготовити 800 деталей. Перші 5 днів бригада виконувала щодня встановлену норму, а потім кожного дня виготовляла на 5 деталей більше, ніж планувалося, тому вже за день до строку було виготовлено 830 деталей. Скільки деталей щодня повинна була виготовляти бригада?

**ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ
ЗА КУРС АЛГЕБРИ 8 КЛАСУ**

1^①. Виконайте дії:

1) $\frac{3m-4}{a} + \frac{4}{a}$; 2) $\frac{2}{b} : \frac{6}{b^2}$.

2^①. Подайте у вигляді степеня з основою a :

1) $a^{-7} : a^3$; 2) $(a^{-2})^5$.

3^①. Для функції $y = \sqrt{x}$ знайдіть значення y , яке відповідає $x = 9$; 36 .

4^②. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{2\frac{7}{9}} + 10\sqrt{0,16}$; 2) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{0,5} + (-\sqrt{7})^2$.

5^②. Спростіть вираз $-\frac{5}{7}a^{-2}b^7 \cdot 2\frac{1}{10}a^{-3}b^{-5}$.

6^②. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 + 13x + 6 = 0$; 2) $\frac{x^2}{x-1} = \frac{3x-2}{x-1}$.

7^③. Спростіть вираз $\frac{2x}{x-4} - \frac{x+3}{3x-12} \cdot \frac{96}{x^2+3x}$.

8^③. Моторний човен пройшов 36 км проти течії і повернувся назад, витративши на весь шлях 5 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

9^④. Побудуйте графік функції $y = \frac{8x-32}{4x-x^2}$.

Додаткові завдання

10^④. Розв'яжіть рівняння $(x^2 + 4x)(x^2 + 4x + 3) = 10$.

11^④. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{\sqrt{11} + \sqrt{7}}{\sqrt{11} - \sqrt{7}} + \frac{\sqrt{11} - \sqrt{7}}{\sqrt{11} + \sqrt{7}}$$

є натуральним числом.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Раціональні вирази

994. Доведіть, що при додатних значеннях a і b ($a \neq b$) значення дробу $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ більше за відповідне значення дробу $\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

995. Скоротіть дріб $\frac{m^4+m^2n^2+n^4}{m^3+n^3}$.

996. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y+z}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y+z}} \cdot \left(1 + \frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right) : \frac{x-y-z}{xyz};$$

$$2) \frac{\frac{m-n}{2m-n} - \frac{m^2+n^2+m}{2m^2+mn-n^2}}{(4n^4+4mn^2+m^2):(2n^2+m)} \cdot (n^2+n+mn+m);$$

$$3) \frac{4}{x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}}} : \frac{1}{x + \frac{1}{y}} - \frac{4}{y(xyz+x+z)};$$

$$4) \left(\left(\frac{a}{b-a} \right)^{-2} - \frac{(a+b)^2-4ab}{a^2-ab} \right)^2 \cdot \frac{a^4}{a^2b^2-b^4};$$

$$5) \frac{p^{-6}-64}{4+2p^{-1}+p^{-2}} \cdot \frac{p^2}{4-4p^{-1}+p^{-2}} - \frac{4p^2(2p+1)}{1-2p};$$

$$6) \frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-3}+y^{-3}} : \frac{x^2y^2}{(x+y)^2-3xy} \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{xy} \right)^{-1}.$$

997. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\left(x^2 - \frac{1}{y^2}\right)^x \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{y-x}}{\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)^y \cdot \left(x - \frac{1}{y}\right)^{x-y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{x+y};$$

$$2) \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) : \left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}\right)\right) = \frac{(b+c-a)^2}{2bc};$$

$$3) \frac{(x-y)^2+xy}{(x+y)^2-xy} : \frac{x^5+y^5+x^2y^3+x^3y^2}{(x^3+y^3+x^2y+xy^2)(x^3-y^3)} = x-y;$$

$$4) \left(\frac{2-y}{y-1} + \frac{2(x-1)}{x-2}\right) : \left(\frac{y(x-1)}{y-1} + \frac{x(2-y)}{x-2}\right) = \frac{1}{x-y}.$$

- 998.** Доведіть одну з тотожностей відомого математика Л. Ейлера (1707—1783):

$$\left(\frac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3} \right)^3 - \left(\frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3} \right)^3 = a^3 + b^3.$$

- 999.** Доведіть, що значення виразу

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8}$$

від'ємне при будь-якому значенні $a > 1$.

- 1000.** Доведіть, що коли $x + y = 1$, то

$$\frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} = \frac{2(y-x)}{x^2y^2+3}.$$

- 1001.** Доведіть, що коли для чисел x, y, z, m, n, p виконуються рівності $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$ і $\frac{m}{x} + \frac{n}{y} + \frac{p}{z} = 0$, то для них також

$$\text{виконується рівність } \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{p^2} = 1.$$

- 1002.** Доведіть, що коли $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$, то $a^2b^2c^2 = 1$, або $a = b = c$.

- 1003.** Розв'яжіть відносно змінної x рівняння:

$$1) \frac{x-2}{x-a} = 0;$$

$$2) \frac{x-a}{x^2-1} = 0;$$

$$3) (a-2)x = a^2 - 4; \quad 4) (a^2-1)x = a^2 - 2a + 1.$$

- 1004.** Розв'яжіть відносно змінної x рівняння:

$$1) \frac{x}{a} - \frac{a}{2x} = \frac{2x+a}{2a} - \frac{a}{x}; \quad 2) \frac{1+x}{1-x} = \frac{a}{b};$$

$$3) \frac{x-a}{a} - \frac{x}{x-a} = \frac{x+a}{a}; \quad 4) \frac{3}{x-a} + \frac{2}{x+a} = \frac{4x+7a}{x^2-a^2}.$$

- 1005.** Порядок числа a дорівнює -3 , а порядок числа b дорівнює 5 . Яким може бути порядок числа:

$$1) ab; \quad 2) \frac{a}{b}; \quad 3) \frac{b}{a}; \quad 4) a + b?$$

Квадратні корені. Дійсні числа

- 1006.** Розв'яжіть відносно x рівняння:

$$1) a\sqrt{x} = a; \quad 2) \sqrt{x} = a + 3; \quad 3) \sqrt{x-1} = \sqrt{a-2}.$$

- 1007.** Вкажіть ціле число, найближче до кореня рівняння:

$$1) (5\sqrt{2} - 3\sqrt{3})x + 4 = 0; \quad 2) (5\sqrt{2} + 7\sqrt{5})x = 13 + 2\sqrt{3}.$$

1008. Обчисліть значення виразу:

$$1) \sqrt{3 - \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}}; \quad 2) \sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{6 - \sqrt{25 - 4\sqrt{6}}}};$$

$$3) \sqrt{|30\sqrt{3} - 52|} - \sqrt{52 + 30\sqrt{3}}.$$

1009. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}, \text{ якщо } 1 \leq x \leq 2;$$

$$2) \sqrt{10 + \sqrt{24}} + \sqrt{40} + \sqrt{60}.$$

1010. Обчисліть:

$$1) \frac{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}};$$

$$2) (\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}).$$

1011. Побудуйте графік функції:

$$1) y = 4x - \sqrt{x^2}; \quad 2) y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - x.$$

1012. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

$$1) \frac{\sqrt{3}\sqrt{2-2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\sqrt{2+2\sqrt{3}}}; \quad 2) \frac{(1+\sqrt{3})^2-7}{\sqrt{7+\sqrt{3}+1}};$$

$$3) \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}; \quad 4) \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}}.$$

1013. Чи є взаємно оберненими числа $\sqrt{\frac{7-2\sqrt{10}}{3}}$ і $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}$?

1014. Спростіть вираз:

$$1) \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-4y}{(x-y):\left(\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)} : \frac{x+9y+6\sqrt{xy}}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}};$$

$$2) \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)}.$$

1015. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\left(\sqrt{x^2+x\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x^2-x\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2}{2\sqrt{x^3y}} : \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} - 2\right), \text{ якщо } x > y > 0;$$

$$2) \left(\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}} + \frac{b-a}{\sqrt{b^2-a^2}+a-b}\right) : \sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}, \text{ якщо } b > a > 0.$$

1016. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\sqrt{(a+2)^2-8a}}{\sqrt{a}-\frac{2}{\sqrt{a}}}; \quad 2) \frac{x^2+4}{x\sqrt{\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2+4}}.$$

1017. Доведіть тотожність:

$$1) \left(1 + \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) : \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \sqrt{1-x^2};$$

$$2) \frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} + \frac{a^2-\frac{ab}{\sqrt{b}}}{a-\sqrt{b}} - \frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} + \frac{4a\sqrt{b}}{a^2-b} = a.$$

1018. Якщо $\sqrt{3-x} + \sqrt{5+x} = 3$, то чому дорівнює $\sqrt{(3-x)(5+x)}$?
(Значення x знаходити не треба.)

1019. Відомо, що $\sqrt{24-x^2} - \sqrt{12-x^2} = 2$. Чому дорівнює $\sqrt{24-x^2} + \sqrt{12-x^2}$? (Значення x знаходити не треба.)

1020. Відомо, що $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$, $xy = 9$. Знайдіть:

$$1) x+y; \quad 2) x\sqrt{x} + y\sqrt{y}; \quad 3) x^2 + y^2.$$

Квадратні рівняння

1021. При якому значенні a має один корінь рівняння:

$$1) (a+4)x^2 - (a+5)x + 1 = 0; \quad 2) (a-4)x^2 + (2a-8)x + 15 = 0?$$

1022. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2(a-1)x^2 + (a+1)x + 1 = 0; \quad 2) (a+1)x^2 - (a-1)x - 2a = 0.$$

1023. Знайдіть корені рівняння:

$$1) \sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-2x-3} = 0;$$

$$2) x^2 - 4x + 4 + |x^2 + 2x - 8| = 0;$$

$$3) |x - \sqrt{x-6}| + \sqrt{x^2-4x} = 0.$$

1024. Доведіть, що число 3 не може бути дискримінантом квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ ні при яких цілих a , b , c .

1025. При якому значенні a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - (a + 2)x + a - 3 = 0$ найменша?

1026. При якому значенні b сума коренів рівняння $x^2 + (b + 1)x + b^2 - 1,5 = 0$ найбільша?

1027. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 + \sqrt{a - 4}x - 5 = 0$ задовольняють умову $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{18}{25}$. Знайдіть a .

1028. Нехай x_1 і x_2 — корені рівняння $2x^2 + 7x - 1 = 0$. Складіть квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) $\frac{1}{x_1}$ і $\frac{1}{x_2}$; 2) $\frac{x_1}{x_2} - 3$ і $\frac{x_2}{x_1} - 3$; 3) $x_1x_2^3$ і $x_2x_1^3$.

1029. Доведіть, що коли a , b і c — сторони трикутника, то рівняння $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ не має коренів.

1030. Доведіть, що модуль різниці коренів рівняння $5x^2 - 2(5a + 3) + 5a^2 + 6a + 1 = 0$ не залежить від a .

1031. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - 7x + 6 = 0$; 2) $x^3 - 6x^2 + 5 = 0$;
3) $x^3 - 5x^2 + 6 = 0$; 4) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$.

1032. Розв'яжіть відносно x рівняння:

1) $(a^2 + a - 2)x = a - 1$; 2) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x - a} = 0$;
3) $\frac{x - a}{x^2 - 4x + 3} = 0$; 4) $\frac{x^2 - (3a + 4)x + 12a}{x - 3} = 0$;
5) $\frac{a(x - a)}{x + 7} = 0$; 6) $\frac{a^2 - 1}{ax - 1} = \frac{x}{a}$.

1033. При яких значеннях a рівняння $\frac{x^2 + ax + 9}{x + 1} = 0$ має один корінь?

1034. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{38}{x^4 - x^2 + 20x - 100} + \frac{x + 10}{x^2 - x + 10} = \frac{x + 10}{x^2 + x - 10}.$$

1035. При яких значеннях a і b тричлен $4x^2 + 36x + (a + b)$ є повним квадратом, якщо відомо, що $a - b = 3$?

1036. Спростіть вираз:

$$1) \left(\frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{2x}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2+5x+6} \right)^2 \cdot \frac{(x-3)^2+12x}{2};$$

$$2) \frac{3a^2+2ab-b^2}{a^2+4ab+3b^2} - 2 + \frac{10(ab-3b^2)}{a^2-9b^2}.$$

1037. Розв'яжіть відносно x рівняння:

$$1) \frac{x^2+1}{a^2x-2a} - \frac{1}{2-ax} = \frac{x}{a}; \quad 2) \frac{x+2}{3x-a} + \frac{3-x}{3x^2+2xa-a^2} = \frac{3x+2}{x+a}.$$

1038. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} = \frac{x+6}{x+2} + \frac{x-6}{x-2};$$

$$2) \frac{x-2}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} + \frac{28}{15} = \frac{x-4}{x-3} + \frac{x+4}{x+3}.$$

1039. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x-5} = x-11; \quad 2) \sqrt{x^2+20} = 22-x^2.$$

1040. Розв'яжіть рівняння:

$$1) |2x^2+4x-5| = |x^2+x|; \quad 2) 3x^2-4 = 5|x-1|.$$

1041. Побудуйте графік рівняння $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$.

1042. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \left(\frac{2x+1}{3x-4} \right)^2 + \left(\frac{3x-4}{2x+1} \right)^2 = 2;$$

$$2) \left(\frac{5x-6}{2-7x} \right)^2 + \left(\frac{7x-2}{5x-6} \right)^2 = 4,25;$$

$$3) 7 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) = 9;$$

$$4) 3 \left(\frac{4}{x^2} + \frac{x^2}{9} \right) + 4 \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{x} \right) + 8 = 0.$$

1043. У магазин привезли яблука першого сорту на суму 228 грн. і другого сорту на суму 180 грн. Якщо продати всі яблука оптом по одній ціні — на 90 к. нижчій від ціни кілограма першого сорту, то буде виручено намічену суму. Скільки кілограмів яблук привезли в магазин, якщо яблук другого сорту було на 5 кг більше, ніж першого сорту?

1044. Задумано ціле додатне число. До його запису приписали праворуч цифру 7 і від утвореного числа відняли квадрат задуманого числа. Різницю зменшили на 75 % і дістали задумане число. Яке число задумано?

- 1045.** З міста A в місто B , відстань між якими 164 км, зі швидкістю 20 км/год виїхав велосипедист. Через 2 год у тому самому напрямі виїхав мотоцикліст, який, обігнавши велосипедиста, прибув у місто B і повернув назад. Знайдіть швидкість мотоцикліста, якщо він зустрів велосипедиста через 2 год 45 хв, після того як обігнав його.
- 1046.** З міста M в місто N зі швидкістю 12 км/год виїхав велосипедист. Через 1 год у тому самому напрямі зі швидкістю 15 км/год виїхав другий велосипедист. Ще через 1 год з міста M в тому самому напрямі виїхав мотоцикліст, який обігнав одного велосипедиста через 10 хв після того, як обігнав іншого. Знайдіть швидкість мотоцикліста, якщо вона більша за 50 км/год.
- 1047.** З міста A у місто B і з B у A одночасно вийшли два пішоходи. Перший прибув у місто B через 0,8 год після зістрічі, а другий прибув у місто A через 1,25 год після зістрічі. Скільки годин був у дорозі кожний пішохід?
- 1048.** По двох взаємно перпендикулярних дорогах рухаються в напрямі перехрестя пішохід і велосипедист. У деякий момент часу пішохід знаходиться на відстані 2 км, а велосипедист — на відстані 3,75 км від перехрестя доріг. Через який час відстань між ними буде дорівнювати 1,25 км, якщо швидкість пішохода 5 км/год, а велосипедиста — 15 км/год?
- 1049.** Сергій і Олег повинні були набрати рукопис до певного терміну. Після того як було набрано половину рукопису, Олег захворів, і тому Сергій закінчив роботу на 2 дні пізніше, ніж передбачалося. За скільки днів міг би набрати рукопис кожний з операторів, працюючи окремо, якщо Сергію на це було б потрібно на 5 днів менше, ніж Олегу?
- 1050.** Перший кран може заповнити резервуар на 24 хв швидше, ніж другий. Якщо спочатку $\frac{2}{3}$ резервуара заповнить перший кран, а потім частину, що залишилася, — другий, то цей час буде на 33 хв менший, ніж час заповнення резервуара при одночасній роботі обох кранів. За який час може заповнити резервуар кожний кран, працюючи окремо?

ВІДОМОСТІ З КУРСУ МАТЕМАТИКИ 5—6 КЛАСІВ ТА АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

Десяткові дроби

Додавання і віднімання десяткових дробів виконують порозрядно, записуючи їх один під одним так, щоб кома розміщувалася під комою.

П р и к л а д и. 1)
$$\begin{array}{r} 7,813 \\ + 9,4 \\ \hline 17,213 \end{array}$$
 2)
$$\begin{array}{r} 12,47 \\ - 5,893 \\ \hline 6,577 \end{array}$$

Щоб помножити два десяткових дроби, треба виконати множення, не звертаючи уваги на коми, а потім у добутку відокремити комою справа стільки цифр, скільки їх стоїть після коми в обох множниках разом.

П р и к л а д и. 1)
$$\begin{array}{r} 4,07 \\ \times 2,9 \\ \hline 3663 \\ + 814 \\ \hline 11,803 \end{array}$$
 2)
$$\begin{array}{r} 0,017 \\ \times 0,9 \\ \hline 0,0153 \end{array}$$

Щоб поділити десятковий дріб на натуральне число, треба виконати ділення, не звертаючи уваги на кому, проте після закінчення ділення цілої частини діленого треба в частці поставити кому.

П р и к л а д и. 1)
$$\begin{array}{r|l} 42,84 & 12 \\ \hline 36 & 3,57 \\ - 68 & \\ \hline 60 & \\ - 84 & \\ \hline 84 & \\ - 84 & \\ \hline 0 & \end{array}$$
 2)
$$\begin{array}{r|l} 0,024 & 5 \\ \hline 20 & 0,0048 \\ - 40 & \\ \hline 40 & \\ - 0 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Щоб поділити десятковий дріб на десятковий, треба в діленому і дільнику перенести кому на стільки цифр вправо, скільки їх стоїть після коми в дільнику, а потім виконати ділення на натуральне число.

П р и к л а д. $12,1088 : 2,56 = 1210,88 : 256 = 4,73$.

Звичайні дроби

Частку від ділення числа a на число b можна записати у вигляді звичайного дроби $\frac{a}{b}$, де a — чисельник дроби, b — його знаменник.

Основна властивість дробу: величина дробу не зміниться, якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне й те саме натуральне число.

П р и к л а д и. 1) $\frac{15}{20} = \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}$ (скоротили дріб $\frac{15}{20}$ на 5);

2) $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$ (звели дріб $\frac{3}{7}$ до знаменника 14).

Дроби з однаковими знаменниками додають і віднімають, використовуючи формули:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{і} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

П р и к л а д и. 1) $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$; 2) $\frac{17}{19} - \frac{3}{19} = \frac{14}{19}$;

3) $2\frac{1}{5} + 7\frac{3}{5} = 9\frac{4}{5}$; 4) $7\frac{5}{11} - 2\frac{2}{11} = 5\frac{3}{11}$.

Щоб додати або відняти дроби з різними знаменниками, їх спочатку зводять до спільного знаменника, а потім виконують дію за правилом додавання або віднімання дробів з однаковими знаменниками.

П р и к л а д и. 1) $\frac{5}{6} + \frac{3}{10} = \frac{5+9}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$;

2) $\frac{3}{8} - \frac{2}{12} = \frac{21-10}{24} = \frac{11}{24}$.

У наступних прикладах показано, як виконують додавання і віднімання мішаних чисел.

П р и к л а д и. 1) $5\frac{4}{3} + 2\frac{3}{4} = 7\frac{4+9}{12} = 7\frac{13}{12} = 8\frac{1}{12}$;

2) $7\frac{4}{5} - 6\frac{3}{4} = 1\frac{16-15}{20} = 1\frac{1}{20}$;

3) $5\frac{2}{9} - 2\frac{3}{6} = 3\frac{8}{18} - \frac{15}{18} = 2\frac{26-15}{18} = 2\frac{11}{18}$.

Щоб помножити два дроби, треба помножити окремо їх чисельники і знаменники й перший добуток записати чисельником, а другий — знаменником:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

П р и к л а д и. 1) $\frac{5}{8} \cdot \frac{14}{15} = \frac{5 \cdot 14}{8 \cdot 15} = \frac{7}{3}$;

2) $7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{1} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$;

$$3) 2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{2}{7} = \frac{7}{3} \cdot \frac{30}{7} = \frac{\overset{1}{\cancel{7}} \cdot \overset{10}{\cancel{30}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{10}{1} = 10.$$

Щоб поділити один дріб на другий, треба ділене помножити на дріб, обернений до дільника:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

П р и к л а д и. 1) $\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15};$

2) $2\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4} = \frac{5}{2} : \frac{7}{4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 7} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}.$

Додатні і від'ємні числа

Модулем числа називають відстань від початку відліку до точки, що зображує це число на координатній прямій.

Модулем додатного числа і числа нуль є саме це число, а модулем від'ємного числа — протилежне йому число:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

П р и к л а д и. $|3| = 3; |-2| = 2; |0| = 0; |\pi| = \pi; \left| -2\frac{1}{7} \right| = 2\frac{1}{7}.$

Щоб додати два від'ємних числа, треба додати їх модулі і поставити перед знайденим числом знак «-».

П р и к л а д. $-3 + (-7) = -10.$

Щоб додати два числа з різними знаками, треба від більшого модуля доданків відняти менший модуль і поставити перед знайденим числом знак того доданка, модуль якого більший.

П р и к л а д и. 1) $-5 + 5 = 0;$ 2) $7 + (-3) = 4;$
3) $-9 + 5 = -4.$

Щоб від одного числа відняти друге, треба до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику:

$$a - b = a + (-b).$$

П р и к л а д и. 1) $5 - 11 = 5 + (-11) = -6;$
2) $-3 - 7 = -3 + (-7) = -10;$
3) $-5 - (-9) = -5 + 9 = 4;$
4) $4 - (-7) = 4 + 7 = 11.$

Добуток двох чисел з однаковими знаками дорівнює добутку їх модулів. Добуток двох чисел із різними знаками дорівнює добутку їх модулів, взятому зі знаком «-».

П р и к л а д и. 1) $-2 \cdot (-7) = 14$; 2) $4 \cdot (-2) = -8$.

Частка двох чисел з однаковими знаками дорівнює частці від ділення їх модулів. Частка двох чисел із різними знаками дорівнює частці від ділення їх модулів, взятій зі знаком «-».

П р и к л а д и. 1) $-18 : (-3) = 6$; 2) $4 : (-1) = -4$;
3) $-20 : 4 = -5$.

Рівняння

Коренем, або розв'язком, рівняння називають число, яке задовольняє рівняння.

П р и к л а д и. 1) Число 3 є коренем рівняння $2x - 5 = 1$, оскільки $2 \cdot 3 - 5 = 1$.

2) Число -2 не є коренем рівняння $3x + 7 = 0$, оскільки $3 \cdot (-2) + 7 = 1 \neq 0$.

Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або довести, що їх немає.

Два рівняння називають *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті самі корені. Рівносильними вважають і такі рівняння, які не мають коренів.

П р и к л а д и. 1) Рівняння $4x = 8$ і $x + 3 = 5$ — рівносильні, оскільки кожне з них має єдиний корінь, що дорівнює 2.

2) Рівняння $7 - x = 6$ і $10x = 20$ — не є рівносильними, оскільки перше має корінь — число 1, а друге — число 2.

Під час розв'язування рівнянь використовують такі *власності*:

1) якщо в будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то дістанемо рівняння, рівносильне даному;

2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в другу, змінивши його знак на протилежний, то дістанемо рівняння, рівносильне даному;

3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме, відмінне від нуля, число, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Рівняння виду $ax = b$, де a і b — деякі числа, x — змінна, називають *лінійним рівнянням з однією змінною*.

Дані про розв'язки лінійного рівняння подамо у вигляді таблиці:

$ax = b$		
$a \neq 0$	$a = 0; b = 0$	$a = 0; b \neq 0$
$x = \frac{b}{a}$	x — будь-яке число	рівняння не має коренів

П р и к л а д и. 1) $-0,5x = 14$; $x = 14 : (-0,5)$; $x = -28$.
 2) $0x = 5$; рівняння не має коренів.

Багато рівнянь послідовними перетвореннями зводять до лінійного рівняння, рівносильного даному.

П р и к л а д и. 1) $5(x + 2) - 4x = -3(x + 7)$.

Розкриємо дужки:

$$5x + 10 - 4x = -3x - 21.$$

Перенесемо доданки, що містять змінну, у ліву частину, а інші — у праву, змінивши знаки доданків, які переносимо, на протилежні:

$$5x - 4x + 3x = -21 - 10;$$

зведемо подібні доданки:

$$4x = -31;$$

розв'яжемо отримане лінійне рівняння:

$$x = -31 : 4; \quad x = -7,75.$$

В і д п о в і д ь. $x = -7,75$.

$$2) \frac{x+1}{2} + \frac{5-x}{3} = \frac{x+13}{6}.$$

Помножимо обидві частини рівняння на найменше спільне кратне знаменників дробів — число 6:

$$\frac{6(x+1)}{2} + \frac{6(5-x)}{3} = \frac{6(x+13)}{6};$$

$$3(x+1) + 2(5-x) = x+13;$$

Далі розв'язуємо, як у попередньому прикладі:

$$3x + 3 + 10 - 2x = x + 13; \quad 3x - 2x - x = 13 - 3 - 10; \quad 0x = 0;$$

x — будь-яке число.

В і д п о в і д ь. x — будь-яке число.

Степінь з натуральним показником

Степенем числа a з натуральним показником n називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a . Степенем числа a з показником 1 називають саме це число.

П р и к л а д и. 1) $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$;

$$2) \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27};$$

$$3) 0^2 = 0 \cdot 0 = 0.$$

Властивості степеня з натуральним показником

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{m+n}, & a^{m+n} &= a^m a^n, \\ a^m : a^n &= a^{m-n}, & a^{m-n} &= a^m : a^n, \\ (a^m)^n &= a^{mn}, & a^{mn} &= (a^m)^n = (a^n)^m, \\ (ab)^n &= a^n b^n, & a^n b^n &= (ab)^n. \end{aligned}$$

П р и к л а д и. 1) $a^7 a^8 = a^{7+8} = a^{15}$; 2) $m^5 : m = m^{5-1} = m^4$;
3) $(b^5)^{10} = b^{5 \cdot 10} = b^{50}$.

Використовуючи властивості степеня з натуральним показником, можемо значно спрощувати обчислення.

П р и к л а д и. 1) $127^5 : 127^4 = 127^{5-4} = 127^1 = 127$;

2) $(2^3)^8 : 4^{10} = 2^{3 \cdot 8} : (2^2)^{10} = 2^{24} : 2^{20} = 2^{24-20} = 2^4 = 16$;

3) $\frac{3^5 \cdot 9^2}{27^2} = \frac{3^5 \cdot (3^2)^2}{(3^3)^2} = \frac{3^5 \cdot 3^4}{3^6} = 3^{5+4-6} = 3^3 = 27$;

4) $5^{12} \cdot 0,2^{12} = (5 \cdot 0,2)^{12} = 1^{12} = 1$;

5) $2^9 \cdot 0,5^8 = 2 \cdot 2^8 \cdot 0,5^8 = 2 \cdot (2 \cdot 0,5)^8 = 2 \cdot 1^8 = 2 \cdot 1 = 2$.

Одночлен

Цілі вирази — числа, змінні, їх степені й добутки називають *одночленами*.

Наприклад: 7 ; $-\frac{9}{13}b^2c$; $7a^5m^3$ — одночлени; вирази $m + c^2$, $p^3 - 2a + 3b$; $\frac{a+b}{a-b}$ — не є одночленами.

Якщо одночлен містить тільки один числовий множник, до того ж поставлений на перше місце, і степені різних змінних, то такий одночлен називають *одночленом стандартного вигляду*.

Наприклад, $2a^2b$ — одночлен стандартного вигляду, а одночлен $2a^2b \cdot (-3ab^7)$ не є одночленом стандартного вигляду. Цей одночлен можна звести до одночлена стандартного вигляду:

$$2a^2b \cdot (-3ab^7) = 2 \cdot (-3) \cdot (a^2a) \cdot (bb^7) = -6a^3b^8.$$

Множення одночленів

П р и к л а д и.

1) $-2x^2y^7 \cdot 5x = -2 \cdot 5 \cdot (x^2x) \cdot y^7 = -10x^3y^7$;

2) $\frac{1}{3}p^3c^8 \cdot \left(-\frac{2}{7}p^4m^2\right) \cdot 1\frac{1}{6}c^3m = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \frac{7}{6}(p^3p^4) \cdot (c^8c^3) \cdot (m^2m) =$
 $= -\frac{1}{9}p^7c^{11}m^3$.

Піднесення одночлена до степеня

- П р и к л а д и. 1) $(-2m^3n^4)^3 = (-2)^3 \cdot (m^3)^3 \cdot (n^4)^3 = -8m^9n^{12}$;
 2) $(-c^5d^8)^6 = (-1)^6 \cdot (c^5)^6 \cdot (d^8)^6 = c^{30}d^{48}$.

Многочлен

Многочленом називають суму одночленів. Многочлен, що є сумою одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних доданків, називають *многочленом стандартного вигляду*.

Многочлен $3m^2n - 5mn^2 + 7m^2n + mn^2$ не є многочленом стандартного вигляду, але його можна звести до многочлена стандартного вигляду:

$$\underline{3m^2n} - \underline{5mn^2} + \underline{7m^2n} + \underline{mn^2} = 10m^2n - 4mn^2.$$

Додавання і віднімання многочленів

П р и к л а д и. 1) $(2x^2 + 3x - 5) + (x^2 - 3x) = \underline{2x^2} + \underline{3x} - 5 + \underline{x^2} - \underline{3x} = 3x^2 - 5$;

2) $(3a^2 - 5 + 2a) - (2a^2 + 7 - 3a) = \underline{3a^2} - 5 + \underline{2a} - \underline{2a^2} - 7 + \underline{3a} = a^2 + 5a - 12$.

Множення одночлена на многочлен

П р и к л а д и. 1) $3a(a^3 - 2a + 7) = 3a \cdot a^3 + 3a \cdot (-2a) + 3a \cdot 7 = 3a^4 - 6a^2 + 21a$;

2) $-2xy(3x^2 - 5xy + y^2) = -2xy \cdot 3x^2 - 2xy \cdot (-5xy) - 2xy \cdot y^2 = -6x^3y + 10x^2y^2 - 2xy^3$.

Множення многочлена на многочлен

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \downarrow 1 & \downarrow 2 \\ (a + b) & (x + y) \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow 3 & \uparrow 4 \end{array} \end{array} = ax + ay + bx + by.$$

П р и к л а д и. 1) $(3x - 5)(x + 2) = 3x^2 + 6x - 5x - 10 = 3x^2 + x - 10$;

2) $(2a - b)(a^2 - 3ab + b^2) = 2a^3 - 6a^2b + 2ab^2 - ba^2 + 3ab^2 - b^3 = 2a^3 - 7a^2b + 5ab^2 - b^3$.

Формули скороченого множення

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2,$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3,$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

П р и к л а д и. 1) $(x - 5)(x + 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25;$

2) $(2m + 3)^2 = (2m)^2 + 2 \cdot 2m \cdot 3 + 3^2 = 4m^2 + 12m + 9;$

3) $(5x^2 - 2xy)^2 = (5x^2)^2 - 2 \cdot 5x^2 \cdot 2xy + (2xy)^2 = 25x^4 - 20x^3y + 4x^2y^2;$

4) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9) = (a - 3)(a^2 + 3a + 3^2) = a^3 - 3^3 = a^3 - 27;$

5) $\left(\frac{1}{2}b + c^2\right)\left(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}bc^2 + c^4\right) = \left(\frac{1}{2}b + c^2\right) \times$
 $\times \left(\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - \frac{1}{2}b \cdot c^2 + (c^2)^2\right) = \left(\frac{1}{2}b\right)^3 + (c^2)^3 = \frac{1}{8}b^3 + c^6.$

Розкладання многочленів на множники

Винесення спільного множника за дужки

$$\underline{ab} + \underline{ac} = \underline{a} (b + c).$$

П р и к л а д и. 1) $12x^2 + 15x = \underline{3x} \cdot 4x + \underline{3x} \cdot 5 = \underline{3x} (4x + 5);$

2) $25a^3b - 20a^2b^2 = \underline{5a^2b} \cdot 5a - \underline{5a^2b} \cdot 4b = \underline{5a^2b} (5a - 4b).$

Спосіб групування

$$ax + ay + bx + by = \underline{a(x + y)} + \underline{b(x + y)} = (x + y)(a + b).$$

П р и к л а д и. 1) $ab - 5a + 2b - 10 = (ab - 5a) + (2b - 10) =$
 $= \underline{a(b - 5)} + \underline{2(b - 5)} = (b - 5)(a + 2);$

2) $a^2b + c^2 - abc - ac = (a^2b - abc) + (c^2 - ac) = \underline{ab(a - c)} - \underline{c(a - c)} =$
 $= (a - c)(ab - c).$

Використання формул скороченого множення

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2,$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

П р и к л а д и. 1) $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x - 7)(x + 7)$;

2) $m^2 + 10m + 25 = m^2 + 2 \cdot m \cdot 5 + 5^2 = (m + 5)^2$;

3) $4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3b + (3b)^2 = (2a - 3b)^2$;

4) $c^3 - 64 = c^3 - 4^3 = (c - 4)(c^2 + c \cdot 4 + 4^2) = (c - 4) \times$
 $\times (c^2 + 4c + 16)$;

5) $\frac{1}{8}x^6 + y^3 = \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 + (y^3)^3 = \left(\frac{1}{2}x^2 + y^3\right)\left(\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 - \frac{1}{2}x^2 \cdot y^3 + (y^3)^2\right) =$
 $= \left(\frac{1}{2}x^2 + y^3\right)\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^3 + y^6\right).$

Функція

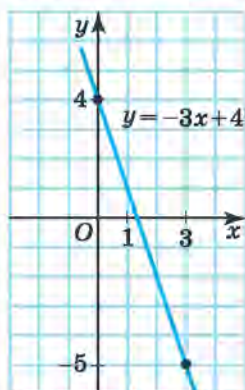
Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини відповідає єдине значення змінної y , то таку залежність називають *функціональною залежністю*, або *функцією*.

Змінну x у цьому випадку називають *незалежною змінною* (або *аргументом*), а змінну y — *залежною змінною* (або *функцією* від заданого аргументу).

Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють *область визначення функції*; усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють *область значень функції*.

Лінійною називають функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де x — незалежна змінна, k і b — деякі числа.

Графіком будь-якої лінійної функції є пряма. Для побудови графіка лінійної функції досить знайти координати двох точок графіка, позначити ці точки на координатній площині і провести через них пряму.



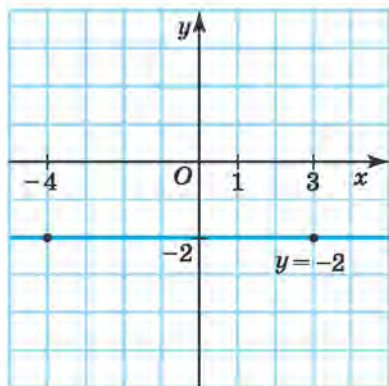
Мал. 18

П р и к л а д. Побудуємо графік функції $y = -3x + 4$.

Складемо таблицю для двох деяких значень аргументу:

x	0	3
y	4	-5

Позначимо на координатній площині отримані точки та проведемо через них пряму (мал. 18).



Мал. 19

П р и к л а д. Побудуємо графік функції $y = -2$. Будь-якому значенню x відповідає одне й те саме значення y , що дорівнює -2 . Графіком функції є пряма, утворена точками з координатами $(x; -2)$, де x — будь-яке число. Позначимо дві будь-які точки з ординатою -2 , наприклад, $(3; -2)$ і $(-4; -2)$ і проведемо через них пряму (мал. 19).

Системи лінійних рівнянь з двома змінними

Якщо треба знайти спільний розв'язок двох (або більшої кількості) рівнянь, то кажуть, що ці рівняння утворюють *систему рівнянь*.

П р и к л а д.
$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$
 — система рівнянь з двома змін-

ними x і y .

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називають пару значень змінних, при яких кожне рівняння перетворюється у правильну числову рівність.

Пара чисел $x = 2$; $y = -1$ є розв'язком наведеної системи, оскільки $2 \cdot 2 + (-1) = 3$ і $2 - 3 \cdot (-1) = 5$.

Пара чисел $x = 5$, $y = 7$ не є розв'язком системи. Для цих значень змінних перше рівняння перетворюється у правильну рівність ($2 \cdot 5 + (-7) = 3$), а друге — ні ($5 - 3 \cdot (-7) = 26 \neq 5$).

Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

*Розв'язування системи двох лінійних рівнянь
з двома змінними способом підстановки*

Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 3x - 7y = 1, \\ 4x + 9y = 38. \end{cases}$$

1.	Виражаємо одну змінну з якого-небудь рівняння системи через другу.	$3x = 1 + 7y, \\ x = \frac{1+7y}{3}.$
2.	Замість цієї змінної підставляємо в друге рівняння системи утворений вираз.	$4 \cdot \frac{1+7y}{3} + 9y = 38.$
3.	Розв'язуємо отримане рівняння з однією змінною.	$4(1+7y) + 3 \cdot 9y = 3 \cdot 38, \\ 4 + 28y + 27y = 114, \\ 55y = 110, \\ y = 2.$
4.	Знаходимо відповідне значення другої змінної.	$x = \frac{1+7 \cdot 2}{3}, \\ x = 5.$
5.	В і д п о в і д ь.	(5; 2).

*Розв'язування системи двох лінійних рівнянь
з двома змінними способом додавання*

Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 7x - 4y = 2, \\ 5x + 3y = 19. \end{cases}$$

1.	Множимо (якщо є необхідність) обидві частини одного чи обох рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти при одній із змінних стали протилежними числами.	$\begin{cases} 7x - 4y = 2, \times 3 \\ 5x + 3y = 19; \times 4 \end{cases} \\ \begin{cases} 21x - 12y = 6, \\ 20x + 12y = 76. \end{cases}$
2.	Додаємо почленно ліві і праві частини рівнянь системи.	$41x = 82.$
3.	Розв'язуємо утворене рівняння з однією змінною.	$x = 2.$
4.	Підставляємо знайдене значення змінної в одне з рівнянь системи (краще початкової) і знаходимо відповідне значення другої змінної.	$7 \cdot 2 - 4y = 2, \\ -4y = -12, \\ y = 3.$
5.	В і д п о в і д ь.	(2; 3).

Розділ І

7. 7) x — будь-яке число; 8) $m \neq 0$. 11. 3) $-1,92$; 4) $-41,2$.
 13. 2) $x = 2$; 3) $x = 1$ і $x = -7$; 4) нема таких значень x . 14. 2) $y = -1$;
 3) $y = -2$ і $y = 3$; 4) нема таких значень y . 15. 1) $a \neq 1$; $a \neq -3,5$;
 2) $t \neq 0$; $t \neq 7$; 3) $m \neq 5$; $m \neq -5$; 4) $x \neq 9$. 16. 1) $p \neq 9$; $p \neq -2,5$;
 2) $a \neq 0$; $a \neq 5$; 3) $c \neq 2$; $c \neq -2$; 4) $a \neq -1$. 18. 1) $a \neq 2$; $a \neq 3$;
 2) $x \neq 1$; $x \neq -1$; 3) $m \neq 0$; $m \neq 1$; 4) $k \neq 6$; $k \neq -2$. 19. 1) $x \neq -2$;
 $x \neq 4$; 2) $m \neq 4$; $m \neq -4$; 3) $x \neq 0$; $x \neq -1$; 4) $a \neq 1$; $a \neq -5$.
 38. 1) $-\frac{1}{m}$; 2) $-\frac{3m}{2n}$; 3) $m + 3$; 4) $\frac{5}{a-2}$; 5) $\frac{3+n}{7}$; 6) $\frac{m+n}{m-n}$; 39. 4) $\frac{m-n}{5-a}$.
 40. 3) $\frac{9x+9y}{x^2-y^2}$; 4) $\frac{4k^2+4k+1}{k^3-1}$; 5) $-\frac{a}{b-a}$; 6) $-\frac{p^2+2p}{4-p^2}$. 42. -10 . 46. 1) $\frac{1}{6}$;
 2) $\frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)}$; 3) $\frac{9(b-3c)}{5}$. 47. 1) 2; 2) $\frac{(a-b)(a^2+b^2)}{a^2-ab+b^2}$; 3) $\frac{1}{8(3m+n)}$.
 48. 1) Графіком є пряма $y = \frac{x}{6}$ з «виколотою» точкою $(-6; -1)$;
 2) графіком є пряма $y = 2 - x$ з «виколотою» точкою $(2; 0)$.
 49. 1) $y = -\frac{x}{5}$ з «виколотою» точкою $(5; -1)$; 2) $y = 3 + x$ з
 «виколотою» точкою $(-3; 0)$. 66. 1) $\frac{m-2}{m+2}$; 2) $\frac{3}{c}$. 67. 1) $\frac{a-3}{a+3}$; 2) $\frac{2}{m}$.
 69. 1) 15; 2) 2007. 70. 1) -2 ; 2) 198. 71. 3) $x - \frac{3}{x+5}$; 4) $4 + \frac{7}{a-b}$.
 72. 3) $y + \frac{2}{y+1}$; 4) $5 - \frac{1}{p-q}$. 73. 1) $\frac{1}{m-2}$; 2) $\frac{3}{a-2}$; 3) $\frac{m}{n-3}$.
 74. 1) $\frac{1}{3-a}$; 2) $\frac{5}{m-3}$; 3) $\frac{p}{q-4}$. 77. $\frac{x-y-z}{x+y+z}$. 103. 1) $\frac{4}{ab}$; 2) $\frac{m+x}{x}$;
 3) $\frac{1}{x(x-2)}$; 4) $\frac{b^2+3ab+9a^2}{ab}$. 104. 1) $-\frac{2}{ab}$; 2) $\frac{t-a}{a}$; 3) $\frac{2}{a(a-3)}$;
 4) $\frac{n^2+2mn+4m^2}{mn}$. 106. 1) $-\frac{2n^2}{m+n}$; 2) $\frac{p^2-4p}{p-2}$; 3) $\frac{1}{1-a^2}$; 4) $\frac{10p+3}{2p-3}$.
 109. 1) $\frac{1}{x+1}$; 2) $\frac{5}{m-5}$; 3) $\frac{m-6}{6m}$; 4) $\frac{1}{2(a-3)}$. 110. 1) $\frac{2x^3}{(x-y)(x+y)^2}$;
 2) $\frac{16}{(x-2)^2(x+2)^2}$. 115. $a = 8$. 116. В к а з і в к а. Після спрощень
 дістанемо $a^2 + 4$. 118. Графіком функції є пряма $y = 4$ з «ви-
 колотою» точкою $(2; 4)$. 119. -8 . В к а з і в к а. Після спрощень

дістанемо $-\frac{8}{6a+b}$. **120.** 5. В к а з і в к а. Після спрощень дістанемо $-\frac{5}{5x+y}$. **121.** Ні. В к а з і в к а. Після спрощень дістанемо $-\frac{1}{2x}$. **125.** 1) 4; 2) 2; 3) 10; 4) 5. **142.** 1) $\frac{(m-2)(m-3)}{3(m+3)}$; 2) $\frac{(x-5)(x+3)}{x+5}$. **143.** 1) $\frac{7(a+4)}{(a-1)(a-4)}$; 2) $\frac{(y-2)(y-3)}{y+3}$. **146.** 1) $\frac{y}{2}$; 2) $\frac{x+y}{x-y}$. **147.** 1) $\frac{n^2}{2}$; 2) $\frac{m-n}{m+n}$. **148.** 1) 0; 2) 9,6. **149.** 1) $\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2$; 2) $\frac{5(c-y-1)}{3(a+b+1)}$. **150.** 0. **164.** 1) $\frac{3c}{4ab}$; 2) $\frac{a}{c^3}$; 3) $\frac{c^4}{3}$; 4) $\frac{b}{2a^5}$. **165.** 1) $\frac{2a}{c^6}$; 2) $\frac{3x}{y}$. **166.** 1) $\frac{2a+1}{2a-3}$; 2) $\frac{1}{2-x}$; 3) $\frac{7(y-5x)}{y}$; 4) $1\frac{1}{3}$. **167.** 1) 1; 2) -5. **168.** 1) 0,1; 2) 0. **169.** $\frac{a-8}{a-5}$. **171.** $\frac{2a-3}{a-6}$. **172.** $\frac{c+y}{b-2}$. **174.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 0. **176.** 1) 4; 2) $\frac{n}{x+3}$; 3) $\frac{2a}{2a+b}$; 4) $\frac{xy}{x+y}$. **177.** 1) 2; 2) $\frac{a}{3-b}$; 3) $\frac{2x}{3x-y}$; 4) $\frac{mn}{n-m}$. **178.** 1) $\frac{x+7}{7x}$; 2) $\frac{3n-m}{3n+m}$; 3) $-3a-5$; 4) $\frac{5x}{3}$. **179.** 1) $\frac{m-5}{5m}$; 2) $\frac{y-x}{y+x}$; 3) $7-2b$; 4) $\frac{m}{2}$. **182.** 1) -2; 2) $\frac{a-3}{2(a+3)}$. **183.** 1) 2; 2) $\frac{a-2}{a+2}$. **184.** 1) 3; 2) 4. **185.** 1) 2; 2) 2. **188.** 1) $-\frac{1}{1+a}$; 2) 4. **189.** 1) $\frac{1}{2-a}$; 2) 2. **193.** 3) $\frac{2(x^6+y^6)}{x^4y^4}$; 4) $\frac{4(a^2-b^2)}{ab}$. В к а з і в к а. Спочатку розкрити квадрати суми та різниці. **194.** 2) $\frac{4m}{n^2}$. **195.** 1) $\frac{x-1}{x+1}$; 2) 1; 3) p ; 4) $3-c$; 5) $\frac{x+1}{x-1}$; 6) $\frac{m}{n}$. **196.** 1) $\frac{m+4}{m-4}$; 2) 1; 3) t ; 4) $\frac{1}{x-1}$; 5) $\frac{2+m}{2-m}$; 6) $\frac{x}{2}$. **197.** В к а з і в к а. Значення виразу дорівнює 2. **198.** 1. **199.** 51. **200.** 7. **201.** 1) $\frac{2x-1}{2x(2x+1)}$; 2) $\frac{1}{2}$. **203.** В к а з і в к а. Значення виразу дорівнює $\frac{1}{(m+1)^2}$. **204.** 1) $1-x^2-x$; 2) $\frac{m^3}{m^3-m+1}$. **205.** 1) x^2+2x+1 ; 2) $\frac{n^2}{n^3-n+1}$. **223.** $\frac{10}{15}$. **224.** $\frac{3}{15}$. **225.** 2. **226.** 3. **227.** 1) 2; 2) 3; 3) -5; 4) -1. **228.** 1) 1; 2) -2; 3) 2; 4) -3. **229.** Ні, корінь першого рівняння 3, а другого — 0. **230.** Ні, корінь першого рівняння 4, а другого — 0. **231.** $\frac{4}{9}$. **232.** $\frac{2}{5}$.

233. 1) -4 ; 2) рівняння не має розв'язків. **234.** 1) -4 ; 2) рівняння не має розв'язків. **235.** 1) -4 ; 2) рівняння не має розв'язків. **236.** 1) -1 ; 2) рівняння не має розв'язків. **237.** 1) $a = 0$; $a = 4$; 2) $a = 1$; $a = 4$. **238.** $a = 3$; $a = 1$. **240.** $\frac{10(x-2)}{x}$;
9,8. **241.** $\frac{2a-b}{2a+b}$. **255.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) $-1,5$; 4) -11 ; 5) $0,5$; 6) $\frac{35}{192}$;
7) $1,4$; 8) $-\frac{3}{64}$; 9) $2\frac{33}{64}$; 10) $0,064$; 11) 14 ; 12) $\frac{88}{125}$. **256.** 1) $-\frac{1}{4}$;
2) $-1\frac{1}{3}$; 3) 19 ; 4) -699 ; 5) $-\frac{3}{50}$; 6) $\frac{7}{8}$; 7) $\frac{5}{16}$; 8) $-\frac{29}{216}$. **258.** 1) $a^n > 0$;
2) $a^n > 0$; 3) $a^n < 0$. **260.** 1) $\frac{m^2n^2a^4}{cx^3p^3}$; 2) $\frac{25x^3mb^2}{a}$. **261.** 1) $3x^2p^{-1}$;
2) $15mn^{-2}c^{-3}$; 3) $2xb^{-5}(a-b)^{-2}$; 4) $(x+y)^7(x-y)^{-3}$. **263.** 3) $\frac{(mn+1)^2}{mn}$;
4) $\frac{ab}{b-a}$; **264.** 2) $\frac{y+x}{xy}$. **265.** 1) $\frac{24}{49}$; 2) $5\frac{11}{49}$. **266.** $4\frac{2}{5}$. **267.** $\frac{3x^2-1}{x^2}$.
288. 1) $(4m^{-1})^3$; 2) $(0,1p^{-4})^2$; 3) $(0,05c^{-4}p^6)^2$; 4) $\left(\frac{3}{2}c^3x^{-5}\right)^4$. **289.** 1) 625 ;
2) $\frac{1}{10}$; 3) 3 ; 4) 49 . **290.** 1) 16 ; 2) $\frac{1}{4}$. **291.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) 49 ; 5) $-\frac{1}{6}$;
6) 2 . **292.** 1) 4 ; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{7}$; 4) 36 ; 5) $\frac{1}{100}$; 6) $\frac{1}{25}$. **293.** 1) $7a^5b^{-2}$;
2) $-2x^{-18}y^3$. **294.** 1) $\frac{a^3}{2b^3}$; 2) $-\frac{2a^5}{5x^8}$. **295.** 1) $7m^2n^{-2}$; 2) $-\frac{x^2}{3c^2}$.
298. 1) 125 ; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{a^{2n}}{b^4}$. **299.** 1) 49 ; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{x^{6m}}{y^6}$. **300.** 1) $2 \cdot 5^n$;
2) x^8 ; 3) $\frac{1}{m^2}$. **301.** 1) $\frac{6}{4^n}$; 2) x^8 ; 3) $\frac{1}{b^3}$. **305.** 3 грн.; 4 грн. **330.** 31% .
331. $\approx 1,37 \cdot 10^8$ с або 1582 дні. **334.** 1) -16 ; 2) -23 ; 3) -11 ;
4) -15 . **335.** 1) 18 ; 2) 13 ; 3) 12 ; 4) 10 . **337.** 1) 1 ; 2) 180 .
338. 10 грн. у Сергія; 14 грн. у Олексія. **339.** 48 . **355.** $y = -\frac{48}{x}$.
356. $y = \frac{14}{x}$. **357.** $2 \leq y \leq 8$. **358.** 1) 4 ; 2) -3 ; 3) -1 ; 4) 359 . 1) 2 ;
2) -2 ; 2) 3 ; 3) -1 ; 5. **363.** В к а з і в к а. 1) Після спрощень
дістанемо $y = \frac{2}{x}$; 2) графіком є гіпербола $y = -\frac{6}{x}$ з «виколотою» точ-
кою $(3; -2)$. **366.** $\frac{1}{81}$. **370.** $-0,1$. **371.** 1) x — будь-яке число; 2) $m < 0$;
3) $a \neq 0$, $a \neq 1$; $a \neq -1$; 4) $x \neq 2$; $x \neq 5$. **372.** 1) 1 ; 2) нема таких
значень x ; 3) -2 ; 4) $0 < x < 3$ або $x > 3$. **377.** 1) 1 ; 2) 0 . **380.** 2.

- 382.** $\frac{z-x-y}{x+y+z}$. **386.** 1) $\frac{3}{b+2}$; 2) $\frac{1}{m-1}$. **387.** $a = -3$. **388.** В к а з і в к а. Значення виразу дорівнює -3 . **389.** 1) $\frac{4m-1}{4m+1}$; 2) $\frac{2x-1-4x^2}{2x+1}$.
- 390.** В к а з і в к а. Після спрощення виразу дістанемо $\frac{1}{(x-2)^2}$.
- 391.** В к а з і в к а. Графіком функції є пряма $y = x + 1$ з «виколотою» точкою $(1; 2)$. **392.** 1) 1; 2) 1; 2; 3; 6; 3) 1; 16.
- 398.** В к а з і в к а. Вираз тотожно дорівнює 1. **399.** 1) 0; 2) $\frac{8}{3-2x}$; 3) $\frac{3x-2y}{xy}$; 4) $\frac{2a+1}{6(2a-1)}$; 5) $\frac{6(x+1)}{x^2+x+1}$; 6) $\frac{2a}{(1-3b)(a+2)}$. **402.** 1) $a = -24$; $b = -5$; 2) $a = 3$; $b = -3$. **403.** $\frac{2sv}{v^2-9}$; 8 год. **409.** 1) $\frac{3xt^{10}}{5}$; 2) $a^2 - b^2$.
- 410.** $\frac{(x+b)(x-c)}{(x-a)^2}$. **411.** В к а з і в к а. Значення виразу дорівнює 1.
- 412.** В к а з і в к а. Значення виразу дорівнює $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$. **416.** 1) $\frac{1}{3-x}$; 2) $\frac{2(5x-2y)}{5(5x+2y)}$. **417.** $\frac{a^2}{(a+3)(a-5)}$. **418.** В к а з і в к а. Після спрощення виразу дістанемо $-\frac{2(x+y)^2}{x^2}$. **419.** 0. **420.** В к а з і в к а. $a^2 + 5a + 4 = a^2 + a + 4a + 4 = a(a+1) + 4(a+1) = (a+1)(a+4)$. **421.** 1) $\frac{3}{a}$; 2) $-\frac{3m}{m+3}$; 3) $\frac{2}{a-b}$; 4) $p - 1$. **423.** 1) $\frac{1}{(a+b)^2}$; 2) $\frac{6}{a+3}$. **424.** 1) $\frac{11}{14}$.
- 425.** В к а з і в к а. 1) Після спрощень дістанемо 3; 2) після спрощень дістанемо -1 . **427.** 5 або -5 . **428.** $\frac{1}{x^2-4}$. **429.** В к а з і в к а. Після спрощень дістанемо $x^2 + 4$. **430.** В к а з і в к а. Після спрощень дістанемо $\frac{1}{m+5}$. **431.** Ні, оскільки після спрощень дістанемо $\frac{1}{x}$. **434.** 2. **435.** 4) 0; 2. **436.** 18 км/год. **437.** 1) $-0,5$; 2) $-2,5$. **438.** 12 дн., 24 дн. **439.** 1) Якщо $a = 0$, рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{a}{5}$; 2) якщо $a = b$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq b$, то $x = \frac{a-b}{2}$. **445.** 1) $7^{-3} > (-7)^3$; 2) $(-1,2)^0 > (-5)^{-5}$; 3) $(-13)^4 > (-13)^{-4}$; 4) $(-12)^6 > 12^{-6}$. **446.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $-0,16$; 3) -10 ; 4) -99 . **447.** 1) $\frac{a^2-a+1}{a^3(1+a)}$; 2) -1 . **448.** 1. **449.** $x = -3$.

450. a^8b^8 . 455. 30. 458. 1) $x(x^2 + 5x^{-1} + x^{-6})$; 2) $x^{-1}(x^4 + 5x + x^{-4})$; 3) $x^{-3}(x^6 + 5x^3 + x^{-2})$. 463. $6,35 \cdot 10^4$ км². 464. 1) $3,6 \cdot 10^3$ с; 2) $8,64 \cdot 10^4$ с; 3) $2,592 \cdot 10^6$ с; 4) $3,1536 \cdot 10^7$ с; 5) $3,15576 \cdot 10^9$ с. В к а з і в к а. Врахувати, що в будь-якому столітті 25 високосних років і 75 — не високосних. 468. 1) Ні; 2) так. 471. (2;2) і (-2; -2). 472. (3; -3) і (-3; 3).

Розділ II

483. 1) $0 \leq y \leq 9$; 2) $0 \leq y \leq 4$. 485. 1) 0; 4; 2) -2. 486. 1) 2; -2; 2) 0; 2. 487. 1) Графіком є парабола $y = x^2$ з «виколотою» точкою (-1; 1); 2) графіком є парабола $y = x^2$ з «виколотими» точками (-2; 4) і (2; 4). 488. 1) Графіком є парабола $y = x^2$ з «виколотою» точкою (0; 0); 2) графіком є парабола $y = x^2$ з «виколотими» точками (-1; 1) і (1; 1). 509. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 510. 1) $x > 0$; 2) x — будь-яке число; 3) $x \geq 0$; 4) $x < 0$. 511. 1) $y \geq 0$; 2) $y > 0$; 3) y — будь-яке число; 4) $y \leq 0$. 512. 1) Нема розв'язків; 2) 32; 3) 13; 4) 4,5. 513. 1) 12; 2) рівняння не має розв'язків; 3) $\frac{1}{8}$; 4) 1. 514. 1) $a = 0$; 2) $a = -3$; 3) a — будь-яке число; 4) $0 \leq a < 3$ або $a > 3$. 515. 1) 5; -4; 2) 16; 3) 49. 516. 1) 11; -14; 2) 49. 520. -1. 532. $\frac{1}{2}$; 0,(1); 0,11; $\frac{1}{10}$; 0,01. 533. 0,02; $\frac{1}{5}$; 0,22; 0,(2); $\frac{1}{4}$. 537. В к а з і в к а. Нехай $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, де $\frac{m}{n}$ — нескоротний дріб. Тоді $2n^2 = m^2$. 539. 6,25 см; $9\frac{1}{9}$ дм. 542. 1) $x = 3$; $y = 0$; 2) $x = -2$; $y = -1$. 557. 1) 25; 2) -30; 3) 56; 4) 16,2; 5) 30; 6) 0. 558. 1) 49; 2) -84; 3) 44; 4) -2,1; 5) 40; 6) $\frac{51}{65}$. 559. 1) 8; -4; 2) -1; -5; 3) 1; 4) $-3 + \sqrt{7}$; $-3 - \sqrt{7}$; 5) $\frac{7}{9}$; $\frac{1}{3}$; 6) рівняння не має розв'язків. 560. 1) 3; -5; 2) 7; -3; 3) -2; 4) $2 + \sqrt{3}$; $2 - \sqrt{3}$; 5) $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{5}$; 6) рівняння не має розв'язків. 562. 1) 5; -5; 2) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$. 563. 1) 8; -8; 2) $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$. 564. 1) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 2) 2; -2; $\sqrt{6}$; $-\sqrt{6}$. 565. 1) $\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$; 2) 3; -3. 566. 1) $b = 0$; 2) $b \geq 4$; 3) $b \geq 0$. 567. 1) $m > 0$; 2) нема таких значень m ; 3) $m \leq 0$. 568. $\frac{x-3}{2x}$. 569. 1) 8; 2) $-\frac{2}{5}$; 3) $\frac{1}{5}$. 590. 1) $15\frac{13}{32}$; 2) $1\frac{1}{3}$; 3) 12; 4) 0,13. 591. 1) $10\frac{34}{45}$; 2) $1\frac{1}{6}$; 3) 35; 4) 0,7. 592. 1) 210; 2) 48; 3) 12,6; 4) 18; 5) 39;

- 6) 154. **593.** 1) 160; 2) 75; 3) 10,8; 4) 12; 5) 34; 6) 126.
594. 1) 432; 2) 144; 3) 125; 4) 243. **595.** 1) 46; 2) 216. **596.** 1) 112;
 2) 432. **597.** 1) $0,6x$; 2) $-11y$; 3) p ; 4) $5x^2$; 5) $5a^3$; 6) $\frac{5}{7}c^5$.
598. 1) $0,7p$; 2) $-\frac{5}{8}m$; 3) $7b^4$; 4) $-0,1a^7$. **599.** 1) $-5mn^6$; 2) $-\frac{7}{13}m^7n^9$;
 3) x^3y^4 ; 4) $-\frac{p^3m^6}{x^4}$; 5) $-2m^4p^{10}$; 6) $-x^4z$. **600.** 1) $8ab^4$; 2) $-\frac{1}{2}b^4c^6$;
 3) $-\frac{x^4y^6}{z}$; 4) $3b^7$. **601.** 1) $\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-y}$; 2) $\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}}$. **602.** 1) $x - y$; 2) $n - m$;
 3) $x - 5$; 4) $6 - a$; 5) 5; 6) -2 . **603.** 1) $m - 2$; 2) $-p - 4$; 3) 1;
 4) -3 . **604.** 1) 4; 2) 1; 3) $9 - 2\sqrt{21}$; 4) $2 + \sqrt{3}$. В к а з і в-
 к а. $7 + 4\sqrt{3} = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = (2 + \sqrt{3})^2$. **605.** 1) -8 ; 2) $\sqrt{2} - 1$.
632. 1) $m\sqrt{13}$; 2) $b\sqrt{b}$; 3) $-a^3\sqrt{7}$; 4) $4x^3\sqrt{x}$. **633.** 1) $x\sqrt{11}$; 2) $c^2\sqrt{c}$;
 3) $-p^3\sqrt{2}$; 4) $6m^4\sqrt{m}$. **634.** 1) $\sqrt{2a^2}$; 2) $-\sqrt{5b^6}$; 3) $\sqrt{3b}$; 4) $-\sqrt{-x^7}$.
635. 1) $\sqrt{3b^2}$; 2) $-\sqrt{7c^{10}}$; 3) $\sqrt{5x^3}$; 4) $-\sqrt{-y^3}$. **636.** 1) 47; 2) $165 + 37\sqrt{6}$;
 3) $36 - 12\sqrt{6}$. **637.** 1) $\sqrt{a}(1 - \sqrt{3})$; 2) $\sqrt{p}(\sqrt{7} + 2)$; 3) $\sqrt{7}(\sqrt{3} + 1)$;
 4) $\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$; 5) $\sqrt{2m}(\sqrt{2} - \sqrt{3})$; 6) $\sqrt{5x}(\sqrt{x} - \sqrt{2})$. **638.** 1) $\sqrt{p}(1 + \sqrt{2})$;
 2) $\sqrt{6}(\sqrt{7} - 1)$; 3) $\sqrt{3a}(\sqrt{3} + \sqrt{2a})$. **639.** 1) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-6}}$; 2) $\frac{\sqrt{a+3\sqrt{b}}}{\sqrt{a-3\sqrt{b}}}$; 3) $\sqrt{2,5}$.
640. 1) $\frac{\sqrt{a+5}}{\sqrt{a}}$; 2) $\frac{\sqrt{x-2\sqrt{y}}}{\sqrt{x+2\sqrt{y}}}$; 3) $\sqrt{5,5}$. **641.** 1) $3(\sqrt{6} + 1)$; 2) $\frac{\sqrt{11} - \sqrt{7}}{2}$;
 3) $\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6}$. **642.** 1) $5(\sqrt{3} - 1)$; 2) $\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}$; 3) $\frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{30}$. **643.** 1) 2;
 2) 330; 3) 8; 4) 14. **644.** 1) 16; 2) 60; 3) 26; 4) 7. **645.** 1,5.
646. 1) $m - 1$; 2) $\frac{\sqrt{a-\sqrt{b}}}{\sqrt{b}}$; 3) $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+\sqrt{y}}}$. **649.** $-\frac{1}{2}$. **650.** В к а з і в к а.

Використати те, що квадрат натурального числа не може за-
 кінчуватися цифрою 7. **659.** 1) $\frac{2}{3}\sqrt{45} < \frac{1}{2}\sqrt{84}$; 2) $0,2\sqrt{1\frac{3}{8}} = 0,4\sqrt{\frac{11}{32}}$.
660. 1) $\frac{3}{4}\sqrt{48} = \frac{3}{5}\sqrt{75}$; 2) $0,3\sqrt{1\frac{4}{9}} > 0,2\sqrt{1\frac{3}{4}}$. **661.** 1) $0 \leq y \leq 2$;
 2) $1 \leq y \leq 3$. **662.** 4. **663.** 1. **672.** Збільшиться в 9 раз; змен-
 шиться у 81 раз. **673.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **674.** $(-2; 4)$, $(3; 9)$.
679. 1) 100; 2) 1. **680.** 1) 20; 2) 13,96. **681.** 1) $x \geq 2$; 2) $x \geq 3$;
 3) $x < -1$, $-1 < x \leq 0$; 4) $x = 0$. **682.** 1) Якщо $a = 0$, то $x \geq 0$; якщо
 $a \neq 0$, то $x = 0$; 2) якщо $a \leq 0$, то рівняння не має розв'язків;
 якщо $a > 0$, то $x = \frac{1}{a^2}$; 3) якщо $a \leq 0$, то рівняння не має

розв'язків; якщо $a > 0$, то $x = \frac{25}{a^2} + 1$; 4) якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 0$, то $x = 0$. **686.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. **689.** В к а з і в к а. 1) Знайти $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$. **694.** 1) $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $3\sqrt{2}$; 4) 5. **696.** 9 або -9 . **697.** 1) $m > 1$; 2) $m = 1$; 3) $m < 1$. **704.** 15 см або $6\frac{2}{3}$ см. **705.** 1) 600; 2) 0,09; 3) 360; 4) 648. **706.** 1) $p^2c^4a^6$; 2) $-7xy^3$; 3) $\frac{m^{10}}{n^{12}}$; 4) $\frac{a^5}{b^7}$. **707.** 1) 0,4; 2) 0,3; 3) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; 4) $\sqrt{13} - \sqrt{11}$. **708.** 1) $\frac{x-7}{x+2}$; 2) $\frac{p-2}{p+3}$. **712.** 1) $2x^4\sqrt{7x}$; 2) $\frac{m\sqrt{7m}}{6}$; 3) $-5ab^2\sqrt{b}$; 4) $2xy^5\sqrt{2x}$; 5) $-2p^3\sqrt{-2p}$; 6) $xy\sqrt{xy}$. **713.** 1) 24; 2) $\frac{\sqrt{6}}{12}$. **716.** 1) $-\frac{1}{2+\sqrt{2x+x}}$; 2) $\sqrt{x+y}+1$. **717.** $\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$. **718.** В к а з і в к а. Позначити $\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}} = x$, та знайти x^2 . **719.** 1) $\sqrt{3}$; 2) -1 ; 3) $\sqrt{7p^2}$; 4) $-\sqrt{\frac{3-b}{2}}$. **722.** 1) Так, (1; 1); 2) так, (64; 8); 3) так, (0; 0); 4) ні. **723.** 1) 3; $\sqrt{14}$; 4; $\sqrt{16,2}$; $\sqrt{19,1}$; 2) 0,2; $\frac{1}{4}$; $\sqrt{\frac{1}{11}}$; $\sqrt{0,1}$. **724.** 1) $x \geq 1$; 2) $0 \leq x < 4$; 3) $1 < x \leq 16$; 4) $81 \leq x < 10\,000$; 5) $x \geq 0$; 6) таких значень x нема.

Розділ III

739. $\frac{1}{9}$. **740.** -2 ; **741.** $a = 2$; $b = -6$. **742.** $b = -4$; $c = 3$. **743.** 1) 0; -1 ; 2) 0; $-11\frac{17}{19}$; 3) -1 ; 1; 4) 0. **744.** 1) 0; 2) 0; 24; 3) -1 ; 1; 4) 0. **745.** 0; $-4,5$. **746.** 0; -11 . **747.** $\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$ або $-\frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$. **748.** $\sqrt{2}i + \sqrt{2} + 2$ або $-\sqrt{2}i - \sqrt{2} + 2$. **749.** 1) 0; 5; -5 ; 2) 2. **750.** 1) 0; 3; -3 ; 2) 3. **763.** 1) -1 ; 3; 2) 1; $-2,5$; 3) 5. **764.** 1) 1; -5 ; 2) -1 ; 4,5; 3) 2; $-0,4$. **765.** 1) 2; 6; 2) -1 ; $-\frac{1}{3}$; 3) 2; 4; 4) 3; -8 . **766.** 1) -1 ; 2) 2; 2,6; 3) 4; 3; 4) 1; -6 . **767.** 1) 1; $-0,6$; 2) -1 ; $\frac{1}{3}$. **768.** 1) -1 ; $\frac{20}{3}$; 2) 1; $-3,5$. **769.** 1) $1 \pm \sqrt{15}$; 2) $-1 \pm \sqrt{5}$; 3) $15 \pm 5\sqrt{11}$; 4) $\frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$. **770.** 1) $-1 \pm \sqrt{7}$; 2) $1 \pm 2\sqrt{3}$; 3) $-5 \pm 2\sqrt{10}$; 4) $\frac{5 \pm \sqrt{57}}{2}$. **771.** 1) 4; 1;

- 2) 4; -4; 3) 1; 4) 2. 772. 1) 9; 3; 2) 3; -3; 3) 5; 4) 2. 773. 1) $-\frac{1}{8}$;
 2) -4; 4. 774. 1) $\frac{1}{16}$; 2) -6; 6. 776. (0; -15), (75; 0). 777. 1) -35;
 2) 39. 788. 1) $x_1 < 0, x_2 < 0$; 2) $x_1 > 0, x_2 < 0$; 3) $x_1 > 0, x_2 < 0$;
 4) $x_1 > 0, x_2 > 0$. 789. 1) $x_1 > 0, x_2 < 0$; 2) $x_1 < 0, x_2 < 0$; 3) $x_1 > 0$,
 $x_2 > 0$; 4) $x_1 > 0, x_2 < 0$. 791. 1) $3x^2 - 14x - 5 = 0$; 2) $24x^2 + 26x +$
 $+ 5 = 0$; 3) $x^2 - 5 = 0$; 4) $x^2 - 4x + 1 = 0$. 792. 1) $3x^2 + 5x - 2 = 0$;
 2) $16x^2 - 10x + 1 = 0$; 3) $x^2 - 7 = 0$; 4) $x^2 - 6x + 2 = 0$. 793. $x_2 = -6$;
 $p = 4,5$. 794. $x_2 = -2,5$; $q = 8,75$. 795. $x_1 = 5$; $x_2 = -1$; $q = -5$.
 796. $x_1 = 5$; $x_2 = -2$; $p = -3$. 797. 1) $\frac{4}{3}$; 2) 12; 3) 22; 4) $-7\frac{1}{3}$; 5) $2\frac{4}{9}$;
 6) 28. 798. 1) -2,5; 2) -10; 3) 29; 4) -14,5; 5) 7,25; 6) 33.
 799. $x^2 - 7x + 1 = 0$. 800. $x^2 + 8x + 8 = 0$. 802. 80 кг; 120 кг.
 803. $-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$. 804. 12 і 17. 805. 12 і 15. 806. 42 см. 807. 80 м.
 808. 7 см і 10 см. 809. 13 см. 810. 48 см². 811. 14 і 15.
 812. 70 × 70 см. 813. 15 дм. 814. 19, 20, 21 або -13, -12, -11.
 815. 18, 19, 20 або -18, -17, -16. 816. 5 і 7. 817. 16 км/год і
 12 км/год. 818. 10 см і 12 см. 819. 1 см. 820. 1,5 м.
 821. 10 учасників. 822. 5. 823. 1,8 с; 1,2 с. В к а з і в к а.
 Спочатку, виходячи з початкових умов, знайти v_0 . 824. 0,7 с.
 825. 2,6 с; 3,4 с. 847. 1) $3 \pm \sqrt{30}$; 2) $\frac{-35 \pm 5\sqrt{17}}{2}$. 848. 1) $-4 \pm 2\sqrt{19}$;
 2) $\frac{15 \pm 9\sqrt{5}}{2}$. 849. 1) $(x - 1 - 2\sqrt{3})(x - 1 + 2\sqrt{3})$; 2) розкласти на
 множники не можна; 3) $-2\left(x + \frac{3 + \sqrt{65}}{4}\right)\left(x + \frac{3 - \sqrt{65}}{4}\right)$; 4) розклас-
 ти на множники не можна. 850. 1) $(x + 2 - \sqrt{11})(x + 2 + \sqrt{11})$;
 2) розкласти на множники не можна. 851. 1) $\frac{4}{x-2}$; 2) $\frac{x-4}{x}$;
 3) $\frac{2x-1}{x-3}$; 4) $\frac{x-2}{x+7}$; 5) $\frac{2x-1}{3x+1}$; 6) $\frac{5x-2}{8-2x}$. 852. 1) $\frac{x+1}{x}$; 2) $\frac{x+4}{3x+2}$; 3) $\frac{x+3}{x-5}$;
 4) $\frac{2(x+1)}{3(x-3)}$. 853. 1) 1,93; 2) $4\frac{2}{3}$. 854. 1) $\frac{4}{(x-2)(x+4)}$; 2) $\frac{1}{x+2}$; 3) 1;
 4) $\frac{(x+2)(5-x)}{2(x+3)}$. 855. 1) $\frac{1}{x-5}$; 2) $\frac{1}{x-2}$. 858. 1) $x(x+1)(x+2)$;
 2) $-2x(x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ або $x(x+3)(1-2x)$; 3) $\frac{1}{4}x^2(x-1)(x+5)$;
 4) $-\frac{1}{2}x^3(x+2)(x-6)$. 859. 1) $x(x-4)(x-8)$; 2) $\frac{1}{3}x^2(x-9)(x-3)$.

860. 1) Графіком є пряма $y = x + 2$ з «виколотою» точкою (1; 3); 2) графіком є пряма $y = x - 3$ з «виколотими» точками (0; -3) і (-1; -4). **861.** 1) $\frac{x^2}{3x-1}$; 2) $\frac{1}{4}$. **862.** 1) $\frac{x^2}{2x+1}$; 2) 27.
864. 1) $-0,4a^3x^7$; 2) $2mp^3\sqrt{2m}$. **865.** 1) 24; 2) 68; 3) 0,68; 4) 376.
874. 1) 9; -1; 2) 2; -9; 3) 5; -2; 4) -2; $1\frac{1}{3}$. **875.** 1) 4; -1; 2) $1; -\frac{1}{2}$; 3) 1; 3; 4) 2; $-1\frac{1}{2}$. **876.** 1) 0; 2; -2; 2) 0; 3) $0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$; 4) 0; 2; -3.
877. 1) 0; 3; -3; 2) 0; 3) $0; \frac{1}{4}; -\frac{1}{4}$; 4) 0; 3; -4. **878.** 1) 4; -5; 2) 1; 4.
879. 1) 3; -4; 2) 2; 6. **880.** 1) 1; -1; 3; 2) -6; 3) -7; 4) рівняння не має розв'язків. **881.** 1) 1; 2) -3; 3) 7; 4) рівняння не має розв'язків. **882.** 1) -6; 3; 2) -2; $-1\frac{2}{3}$; 3) -3; 4) -2. **883.** 1) -4; 3; 2) -2. **884.** 1) -1; -5,5; 2) -7; 3) -9; 4) рівняння не має розв'язків. **885.** 1) 5; -3,6; 2) -1; 3) -15; 4) рівняння не має розв'язків. **886.** 1) -3; 4; 2) 15. **887.** 1) 2; 3; -3; 2) -1; $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
888. 1) 1; 2; -2; 2) -2; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. **889.** 1) 1; -1; 2) -1; 2. **890.** 1) 1; -1; 2) 2; -3. **891.** 1) 0; 1,5; 2) $-2 \pm \sqrt{35}$. **892.** $\frac{-1 \pm \sqrt{57}}{2}$. **893.** 1) 1; -1; $\sqrt{5}; -\sqrt{5}$; 2) $1; \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$. В к а з і в к а. $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 =$
 $= (x^3 - 1) + (2x^2 - 2x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 2x(x - 1) =$
 $= (x - 1)(x^2 + x + 1 + 2x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 1)$. **894.** 1) $1; \pm\sqrt{3}$; 2) -2; 1; 4. **895.** 1) 9. В к а з і в к а. $\sqrt{x} = t$; 2) 0; -2; $-1 \pm \sqrt{7}$; 3) $2 \pm \sqrt{3}$; 4) 0; -1; 2; -3. **896.** 1) 4; 2) 0; 2; $1 \pm \sqrt{5}$; 3) $-1 \pm \sqrt{6}$; 4) 0; 1; -2; 3.
897. 12 км/год; 16 км/год. **898.** $3(x+7)\left(x-\frac{2}{3}\right) = (x+7)(3x-2)$.
899. 12 і 15. **900.** 2. **901.** 4 і 6. **902.** 8 і 12. **903.** $\frac{9}{10}$. **904.** $\frac{1}{6}$.
905. 12 км/год; 16 км/год. **906.** 70 км/год; 60 км/год. **907.** 45 км/год. **908.** 80 км/год. **909.** 60 км/год. **910.** 2 км/год. **911.** 14 км/год. **912.** 24 км/год. **913.** 2 км/год. **914.** 20 км/год. **915.** 50 дет., 40 дет. **916.** 12 автомашин. **917.** 24 год; 48 год. **918.** 36 год; 45 год. **919.** 45 хв; 36 хв. **920.** 30 дн.; 42 дн. **921.** 16 км або 20 км. В к а з і в к а. Нехай x км/год — початкова швидкість, тоді $4x$ км — відстань між селами. Маємо рівняння $\frac{10}{x} + \frac{4x-10}{x-1} = \frac{9}{2}$. **922.** 27 км/год. **923.** 3 л.
В к а з і в к а. Нехай першого разу відлили x л спирту.

Враховуючи те, що остаточно води в посудині стало 4,5 л, маємо рівняння $x - \frac{x}{6} \cdot x + x = 4,5$. **925.** 1) $\frac{x+5}{x}$; 2) $\frac{x+3}{2x+2}$.

926. 1) 16; 2) $-7 \pm \sqrt{6}$. **929.** Так. **930.** 1) $\pm\sqrt{2}$; 2) 0; $\frac{3}{4}$. **931.** 30 см.

932. 1) 0; -9; 2) 2; -2. **933.** 1) $1\frac{1}{4}$; 2) $a > 0$. **937.** 1) 1; -3; 2) 2; -1,5.

938. 1) 1; 2; 2) $5 \pm 2\sqrt{15}$; 3) $2\sqrt{2}$; $-3\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{3}$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **939.** 1) 0; 1; 2) 0;

2. **941.** 1) $x_1 = 3$; $x_2 = -2a$ для будь-якого a ; 2) якщо $a = 0$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 0$, то $x_1 = \frac{1}{a}$; $x_2 = \frac{2}{a}$.

942. 1) 1; -6; 0; -5; 2) -1; 6; 0; 5; $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$; 3) -3; 4) $\frac{1}{9}$. **945.** $x_1 = 2$;

$x_2 = -4$; $q = -8$. **947.** $x_1 = 6$; $x_2 = 9$; $p = -45$. **948.** 1,6. **949.** $b = 15$ або $b = -15$. **950.** $5x^2 - 8x + 1 = 0$. **951.** 1; $\frac{1}{2}$. **952.** 6 см і 9 см.

953. 9; 10; 11 або -11; -10; -9. **954.** 10; 11; 12; 13; 14 або -2; -1; 0; 1; 2. **955.** 24 см². **956.** 16 команд. **957.** 0,216 м³ або $\frac{121}{375}$ м³.

958. 40 см; 80 см. **963.** 1) $\frac{2x+9}{x+2}$; 2) $\frac{2(x+5)}{x^2+2x+4}$; 3) $\frac{x-3}{x+2,5}$; 4) $\frac{4x+1}{1-3x}$.

964. 1) $\frac{2}{x+3}$; 2) $\frac{x+2}{x+1}$; 3) $x(x-5)$; 4) $\frac{1}{2(x+6)}$. **965.** $p = 5$; $x_2 = -2$.

967. 1) 4; -4; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 81. **968.** 1) $(x+a)(x-6a)$; 2) $(x-2b)(x+5b)$.

969. 3; $x = 4$. **970.** $a = -2$; -13. **972.** 1) -2; 2) 0; $1\frac{2}{3}$; 3) 1; 4) 3; -3,5. **974.** (2;0), (-2;0). **975.** 1) -1; -1,5; 2) 0; $1\frac{2}{3}$; 3) -5; 6;

4) рівняння не має розв'язків; 5) -4; 6) 1; -1. **976.** 1) -3; 2) 3; -3; 3) 0. **977.** 1) 1; -1; 2) -1; 1; -3. **978.** (-2; -8); $\left(\frac{3}{4}; 3\right)$. **979.** 1) $\pm\frac{7}{8}$;

2) -1. В к а з і в к а. $27x^3 + 18x^2 - 12x - 8 = (3x-2)(3x+2)^2$.

980. 1) 1; 3; $2 \pm \sqrt{3}$. В к а з і в к а. $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ і далі $x^2 - 4x = t$; 2) -1; 4. В к а з і в к а. $x(x-1)(x-2)(x-3) = (x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2)$ і далі $x^2 - 3x = t$; 3) 1; 2; -1; 4; 4) $\frac{5 \pm \sqrt{85}}{2}$;

$\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$; 5) -2; 3; $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$; 6) 1; 10; $\frac{11 \pm \sqrt{113}}{2}$. **981.** 1) 5; -3; $\frac{1 \pm \sqrt{217}}{4}$;

2) -1; $-4 \pm \sqrt{21}$. **982.** 12 км/год. **983.** 10 год. **984.** 16 км/год. **985.** 18 год. **986.** 2 км/год. **987.** 20 с.; 16с. **988.** Петро — 60 де-

талей; Степан — 40 деталей. 989. 2 год; 6 год. 990. 6 год; 9 год. 991. 2 кг або 4 кг. 992. 225 км. 993. 40 деталей. В к а з і в к а. Нехай x деталей — щоденна норма. Тоді $5x + \left(\frac{800}{x} - 6\right)(x + 5) = 830$.

Задачі підвищеної складності

994. В к а з і в к а. $\frac{a^2 - b^2}{a - b} - \frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{2ab}{a + b} > 0$. 995. $\frac{m^2 + n^2 + mn}{m + n}$.

996. 1) $\frac{(x - y - z)x}{2}$; 2) $\frac{n + 1}{n - 2n}$; 3) 4; 4) $\frac{a - b}{a + b}$; 5) $1 + 2p$; 6) $-\frac{xy}{(x + y)^2}$.

999. В к а з і в к а. Після спрощення дістанемо $\frac{16}{1 - a^{16}}$.

1001. Піднесемо рівність $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$ до квадрата. Маємо

$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{p^2} + 2 \cdot \frac{xyr + xzn + yzm}{mnp} = 1$. З рівності $\frac{m}{x} + \frac{n}{y} + \frac{p}{z} = 0$ знай-

демо, що $xur + xzn + yzm = 0$. Отже, $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{p^2} = 1$.

1002. В к а з і в к а. З умови випливає, що $a - b = \frac{b - c}{bc}$;

$b - c = \frac{c - a}{ac}$, $c - a = \frac{a - b}{ab}$. Перемножити утворені рівності.

1003. 1) Якщо $a = 2$, рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 2$, то $x = 2$; 2) якщо $a = 1$ або $a = -1$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 1$ і $a \neq -1$, то $x = a$; 3) якщо $a = 2$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 2$, то $x = a + 2$; 4) якщо $a = 1$, то x — будь-яке число; якщо $a = -1$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 1$ і $a \neq -1$, то $x = \frac{a - 1}{a + 1}$. 1004. 1) Якщо $a \neq 0$, то $x = a$; 2) якщо $b \neq 0$ і

$a = -b$, то рівняння не має розв'язків; якщо $b \neq 0$ і $a \neq -b$, то $x = \frac{a - b}{a + b}$; 3) якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{2a}{3}$; 4) якщо $a = 0$, то рівняння не

має розв'язків; якщо $a \neq 0$, то $x = 6a$. 1005. 1) Від 2 до 3; 2) від -9 до -8; 3) від 7 до 8; 4) від 5 до 6. 1006. 1) Якщо $a = 0$, то $x \geq 0$; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$; 2) якщо $a < -3$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \geq -3$, то $x = (a + 3)^2$; 3) якщо $a \geq 2$, то $x = a - 3$. 1007. 1) -2; 2) 1. 1008. 1) $\sqrt{3} - 1$; 2) 1; 3) -10. 1009. 1) 2;

2) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. 1010. 1) 1; 2) 8. 1011. 1) $y = \begin{cases} 3x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 5x, & \text{якщо } x < 0; \end{cases}$

$$2) y = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x \geq 1, \\ 1 - 2x, & \text{якщо } x < 1. \end{cases} \quad 1012. 1) \sqrt{3} - \sqrt{2}; 2) 1 + \sqrt{3} - \sqrt{7};$$

$$3) \sqrt{2} - 1; 4) \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{2} + 1)}{2}. \quad 1013. \quad \text{Так.} \quad 1014. 1) \frac{1}{xy}; 2) \frac{1+a}{a}.$$

$$1015. 1) \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x - y}; 2) 1. \quad 1016. 1) -\sqrt{a}, \text{ якщо } 0 < a < 2; \sqrt{a}, \text{ якщо}$$

$$a > 2; 2) -2, \text{ якщо } x < 0; 2, \text{ якщо } x > 0. \quad 1018. \frac{1}{2}. \quad 1019. 6. \quad 1020. 1) 19;$$

$$2) 80; 3) 343. \quad 1021. 1) -4; -3; 2) 19. \quad 1022. 1) \text{Якщо } a = 1, \text{ то}$$

$$x = -\frac{1}{2}; \text{ якщо } a \neq 1, \text{ то } x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{1-a}; 2) \text{ якщо } a = -1, \text{ то}$$

$$x = -1; \text{ якщо } a \neq -1, x_1 = -1, x_2 = \frac{2a}{1+a}. \quad 1023. 1) -1; 2) 2;$$

3) рівняння не має розв'язків. 1024. Нехай $b^2 - 4ac = 3$, тоді $b^2 = 3 + 4ac$. Права частина рівності — непарне число, отже, $b = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$. Тоді дістанемо $2(k^2 + k - ac) = 1$, що неможливо.

$$1025. -1. \quad 1026. 1. \quad 1027. 12. \quad 1028. 1) x^2 - 7x - 2 = 0;$$

$$2) 2x^2 + 65x + 179 = 0; 3) 16x^2 + 106x + 1 = 0. \quad 1029. \text{ В к а з і в к а.}$$

$$D = (b + c - a)(b + c + a)(b - c + a)(b - c - a). \quad 1030. \text{ В к а з і в к а.}$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}. \text{ Далі використати тео-}$$

$$\text{рему Вієта.} \quad 1031. 1) 1; 2; -3; 2) 1; \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}; 3) -1; 3 \pm \sqrt{3};$$

$$4) \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}. \text{ В к а з і в к а. } x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x^4 - 2x^3 + x^2) -$$

$$- (4x^2 + 4x + 1) = (x^2 - x)^2 - (2x + 1)^2. \quad 1032. 1) \text{Якщо } a = 1, \text{ то}$$

$$x \text{ — будь-яке число; якщо } a = -2, \text{ то рівняння не має розв'язків;}$$

$$\text{якщо } a \neq 1 \text{ і } a \neq -2, \text{ то } x = \frac{1}{a+2}; 2) \text{ якщо } a = 1, \text{ то } x = 4; \text{ якщо}$$

$$a = 4, \text{ то } x = 1; \text{ якщо } a \neq 1 \text{ і } a \neq 4, \text{ то } x_1 = 1, x_2 = 4; 3) \text{ якщо } a = 1$$

$$\text{або } a = 3, \text{ то рівняння не має розв'язків; якщо } a \neq 1 \text{ і } a \neq 3,$$

$$\text{то } x = a; 4) \text{ якщо } a = 1, \text{ то } x = 4; \text{ якщо } a \neq 1, \text{ то } x_1 = 3a, x_2 = 4;$$

$$5) \text{ якщо } a = 0, \text{ то } x \text{ — будь-яке число, крім } -7; \text{ якщо } a = -7,$$

$$\text{то рівняння не має розв'язків; якщо } a \neq 0 \text{ і } a \neq -7, \text{ то } x = a;$$

$$6) \text{ якщо } a = 1 \text{ або } a = -1, \text{ то } x = 0; \text{ якщо } a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ то } x = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\text{якщо } a = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ то } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \text{ якщо } a \neq 0, a \neq \pm 1, a \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{то } x_1 = a, x_2 = \frac{1-a^2}{a}. \quad 1033. 6; -6; 10. \quad 1034. 9; -9. \text{ В к а-}$$

з і в к а. $x^4 - x^2 + 20x - 100 = x^4 - (x - 10)^2$. 1035. $a = 42$; $b = 39$. 1036. 1) 2; 2) 1. 1037. 1) Якщо $a = 1$, то $x = -1$; якщо $a = -2$, то $x = \frac{1}{3}$; якщо $a \neq 0, a \neq 1, a \neq -2$, то $x_1 = \frac{a+1}{a-1}, x_2 = -1$; 2) якщо $a = -\frac{11}{4}$, або $a = -\frac{9}{4}$, або $a = -\frac{1}{4}$, то $x = 1$; якщо $a = -3$, то $x = -\frac{9}{8}$; якщо $a = 1$, то $x = \frac{7}{8}$; якщо $a \neq -3, a \neq -\frac{11}{4}, a \neq -\frac{9}{4}, a \neq -\frac{1}{4}, a \neq 1$, то $x_1 = -1, x_2 = \frac{4a+3}{8}$. 1038. 1) 0; 2) 2; $-2; \pm \frac{3\sqrt{21}}{7}$. 1039. 1) 14. В к а з і в к а. Нехай $\sqrt{x-5} = t$. Тоді $x = t^2 + 5$; 2) 4; -4 . 1040. 1) $\frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}; \frac{-5 \pm \sqrt{85}}{6}$; 2) $\frac{5 + \sqrt{13}}{6}; \frac{-5 - \sqrt{136}}{6}$. 1041. В к а з і в к а. Графіком рівняння є дві прямі $y = \frac{x}{3}$ і $y = \frac{x}{2}$. 1042. 1) 5; 0,6; 2) $-\frac{2}{9}; \frac{10}{19}; \frac{14}{17}$; 3) $\frac{1}{3}$; 3) 2; $\frac{1}{2}$. В к а з і в к а. $x + \frac{1}{x} = t$, тоді $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$; 4) $-3 \pm \sqrt{15}$. В к а з і в к а. $\frac{x}{3} - \frac{2}{x} = t$, тоді $\frac{4}{x^2} + \frac{x^2}{9} = t^2 + \frac{4}{3}$. 1043. 85 кг. 1044. 7. 1045. 52 км/год або $38\frac{2}{11}$ км/год. 1046. 60 км/год. В к а з і в к а. Слід розглянути дві можливості залежно від того, якого велосипедиста мотоцикліст обігнав першим. 1047. 1,8 год і 2,25 год. 1048. 0,2 год або 0,33 год. 1049. Сергій — за 10 днів, Олег — за 15 днів. 1050. 60 хв; 84 хв.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Арифметичний квадратний корінь 90

Біквadratні рівняння 157

Вершина параболи 85

Виділення квадрата двочлена з квадратного тричлена 152

Винесення множника з-під знака кореня 111

Вітки параболи 85

Внесення множника під знак кореня 112

Гіпербола 65

Графічний метод розв'язування рівнянь 68

Дискримінант квадратного рівняння 135

— — тричлена 150

Дійсні числа 96

Добування квадратного кореня 91

Додатковий множник 11

Допустимі значення змінних 6

Дробові раціональні вирази 3

— — рівняння 156

Зведене квадратне рівняння 130

Зведення дробів до спільного знаменника 21

Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу 113

Ірраціональні числа 95

Квадратне рівняння 130

Квадратний корінь 90

— тричлен 150

Коефіцієнт квадратного рівняння 130

Корінь квадратного тричлена 150

Метод заміни змінної 157

— розкладання многочлена на множники 157

Неповне квадратне рівняння 130

Обернена пропорційність 64

Область визначення (область допустимих значень) 4

Основна властивість дробу 10

Парабола 85

Підкореневий вираз 90

Подібні доданки 113

Порядок числа 60

Правило віднімання дробів з однаковими знаменниками 16

— ділення дробів 35

— додавання дробів з однаковими знаменниками 16

— множення дробів 29

— піднесення дробу до степеня 30

Раціональне рівняння 44

— число 94

Раціональний вираз 3

— дріб 3

Скорочення дробу 10, 113

Стандартний вигляд числа 60

Степінь з цілим показником 51

Теорема Вієта 140

— обернена до теореми Вієта 142

— про корінь з добутку 104

— — — з дробу 105

— — — зі степеня 106

— — — з квадрата 106

— — розкладання квадратного тричлена на множники 151

Умови рівності дробу нулю 6

Формула коренів квадратного рівняння 135

Формули Вієта 141

Ціле раціональне рівняння 44

Від автора	3
----------------------	---

Розділ І. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

§ 1. Дроби. Дробові вирази. Раціональні вирази. Допустимі значення змінних (Уроки 1, 2)	5
§ 2. Основна властивість дробу. Скорочення дробу (Уроки 3, 4) . . .	9
§ 3. Додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками (Уроки 5, 6)	16
§ 4. Додавання і віднімання дробів з різними знаменниками (Уроки 7—10)	21
Завдання для перевірки знань до § 1—4 (Урок 11)	28
§ 5. Множення дробів. Піднесення дробу до степеня (Уроки 12, 13) . .	29
§ 6. Ділення дробів (Уроки 14, 15)	34
§ 7. Тотожні перетворення раціональних виразів (Уроки 16—18) . .	38
§ 8. Розв'язування раціональних рівнянь (Уроки 19, 20)	44
Завдання для перевірки знань до § 5—8 (Урок 21)	50
§ 9. Степінь з цілим показником (Уроки 22, 23)	51
§ 10. Властивості степеня з цілим показником (Уроки 24—26) . .	55
§ 11. Стандартний вигляд числа (Уроки 27, 28)	60
§ 12. Функція $y = \frac{k}{x}$, її графік і властивості (Уроки 29, 30)	64
Завдання для перевірки знань до § 9—12 (Урок 31)	72
Резервний час (Урок 32)	73
Вправи для повторення розділу І	73

Розділ ІІ. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

§ 13. Функція $y = x^2$ та її графік (Урок 33)	85
§ 14. Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь (Уроки 34, 35)	89
§ 15. Раціональні числа. Ірраціональні числа. Дійсні числа. Числові множини (Урок 36)	94
§ 16. Тотожність $(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0$. Рівняння $x^2 = a$ (Уроки 37, 38) . .	99
§ 17. Арифметичний квадратний корінь з добутку, дробу і степеня. Добуток і частка квадратних коренів. Тотожність $\sqrt{a^2} = a $ (Уроки 39—41)	104
§ 18. Тотожні перетворення виразів, що містять квадратні корені (Уроки 42—44)	111
§ 19. Функція $y = \sqrt{x}$, її графік і властивості (Урок 45)	119
Завдання для перевірки знань до § 13—19 (Урок 46)	123
Вправи для повторення розділу ІІ	124

Розділ ІІІ. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

§ 20. Квадратні рівняння. Неповні квадратні рівняння, їх розв'язування (Уроки 47, 48)	130
--	-----

§ 21. Формула коренів квадратного рівняння (Уроки 49, 50) . . .	135
§ 22. Теорема Вієта (Уроки 51, 52)	140
§ 23. Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь (Уроки 53, 54)	145
Завдання для перевірки знань до § 20—23 (Урок 55)	149
§ 24. Квадратний тричлен, його корені. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники (Уроки 56—58)	150
§ 25. Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних (Уроки 59—61)	156
§ 26. Розв'язування задач за допомогою рівнянь, які зводяться до квадратних (Уроки 62, 63)	162
Завдання для перевірки знань до § 24—26 (Урок 64)	166
Вправи для повторення розділу III	167
Завдання для перевірки знань за курс алгебри 8 класу	174
Задачі підвищеної складності	175
Відомості з курсу математики 5—6 класів та алгебри 7 класу . . .	182
Відповіді та вказівки до вправ	193
Предметний покажчик	206

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

АЛГЕБРА

**Підручник для 8 класу
загальноосвітніх навчальних закладів**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Відповідальна за випуск *Н. В. Сергеева*

Редактор *Г. В. Криволапова*

Художник обкладинки *Л. А. Кузнецова*

Художній редактор *І. В. Бабенцова*

Технічний редактор *Ц. Б. Федосіхіна*

Комп'ютерна верстка *О. М. Білохвост*

Коректори *Г. А. Зацерковна, Л. В. Липницька*

Підписано до друку 26.05.08. Формат 60×90/16. Папір офс.
Гарнітура шкільна. Друк офс. Ум. друк. арк. 13 + 0,25 форзац.
Ум. фарбовідб. 53,5. Обл.-вид. арк. 8,99 + 0,45 форзац.
Тираж 137 580 пр. Вид. № 37230. Зам. №

Набір та верстка комп'ютерного центру видавництва «Освіта»
Видавництво «Освіта», 04053, Київ, вул. Юрія Коцюбинського, 5.
Свідоцтво ДК № 27 від 31.03.2000 р.

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ З ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

m і n — цілі числа, $a \neq 0$, $b \neq 0$

ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОГО КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad a \geq 0$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$a \geq 0, \quad b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$a \geq 0, \quad b > 0$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{a^{2k}} = |a^k|$$

a — будь-яке число, k — натуральне число

ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 10 ДО 99

ДЕСЯТКИ	ОДИНИЦІ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ $\sqrt{x}=m$ ТА $x^2=a$

$$\sqrt{x}=m, \quad m \text{ — число}$$

$$m \geq 0$$

$$m < 0$$

$$x = m^2$$

Рівняння не має розв'язків

$$x^2 = a, \quad a \text{ — число}$$

$$a > 0$$

$$a = 0$$

$$a < 0$$

$$x_1 = \sqrt{a},$$

$$x_2 = -\sqrt{a}$$

$$x = 0$$

Рівняння
не має
розв'язків

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕПОВНОГО КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

$$b = 0, \\ c = 0$$

$$b = 0$$

$$c = 0$$

$$ax^2 = 0$$

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x^2 = 0, \quad ax^2 = -c, \quad x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0$$

$$-\frac{c}{a} > 0$$

$$-\frac{c}{a} < 0$$

$$x_1 = 0 \text{ або } ax + b = 0,$$

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}},$$

Рівняння
не має
розв'язків

$$ax = -b,$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

ФОРМУЛА КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D > 0$$

$$D = 0$$

$$D < 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Рівняння
не має
розв'язків

ТЕОРЕМА ВІЄТА

Якщо x_1 і x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$,

$$\text{то } x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q$$

Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$,

$$\text{то } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$