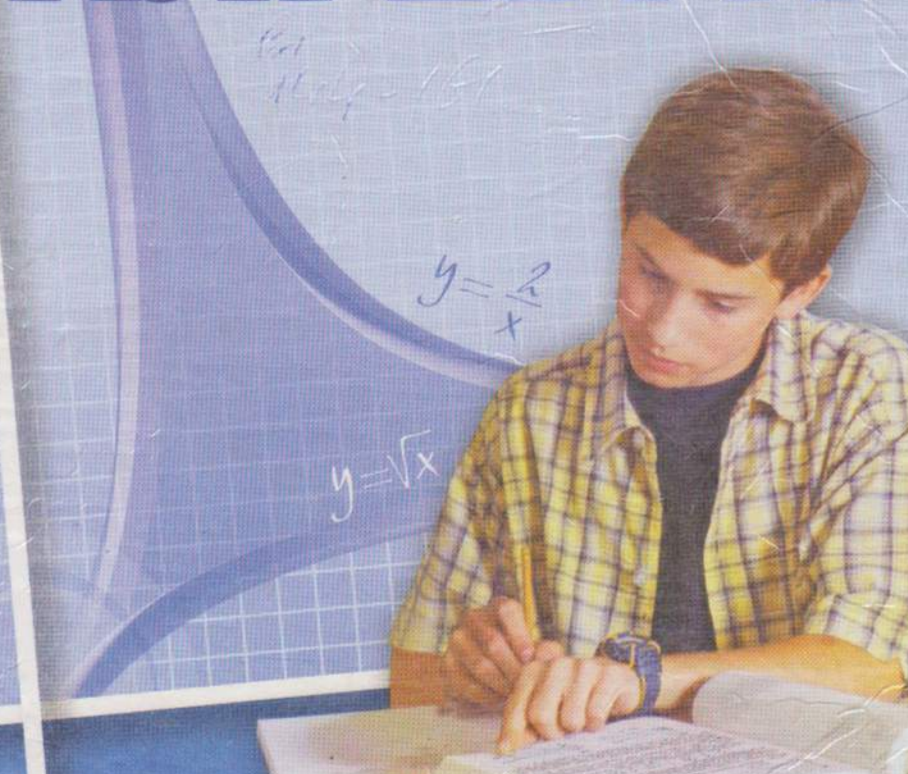
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

8

# АЛГЕБРА



УДК 373:512
ББК 22.141я721
М52

**Видано за рахунок державних коштів**
**Продаж заборонено**

*Рекомендовано*
*Міністерством освіти і науки України*
(Лист № 1.4/18-1127 від 12.05.2008 р.)

Відповідальні за випуск:
Головний спеціаліст Міністерства освіти і науки України Прокопенко Н.С.
Методист вищої категорії інституту інноваційних технологій і змісту освіти Міністерства освіти і науки України Потапова Ж.В.



ISBN 978-966-8319-57-0

# Від авторів

## ЛЮБІ ВОСЬМИКЛАСНИКИ!

У цьому навчальному році ви продовжуватимете вивчати алгебру. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу і красиву науку, а отже, з інтересом будете засвоювати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник розділено на три параграфи, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено «зірочкою» (*)). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі у тестовій формі з рубрики «Перевір себе».

Кожний пункт завершує особлива рубрика, яку ми назвали «Учимося робити нестандартні кроки». У ній зібрано задачі, для розв'язання яких потрібні не спеціальні знання з алгебри, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі корисні, як вітаміни. Вони допоможуть вам навчитися приймати несподівані й нестандартні рішення не лише в математиці, а й у житті.

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете знати більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Дерзайте! Бажаємо успіху!

## ШАНОВНІ КОЛЕГИ!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

**Червоним** кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Матеріал рубрики **«Коли зроблено уроки»** може бути використаний для організації роботи математичного гуртка і факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

## УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

- $n^{\circ}$ завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;
- $n^{\cdot}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
- $n^{\cdot\cdot}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
- $n^{*}$ задачі для математичних гуртків і факультативів;
- ⊙ доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;
- ⊖ доведення теореми, що відповідає високому рівню навчальних досягнень;
- ▲ закінчення доведення теореми.

# § 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

- У цьому параграфі ви познайомитеся з дробами, чисельниками й знаменниками яких є вирази зі змінними, навчитеся додавати, віднімати, множити і ділити такі дроби, познайомитеся з рівняннями, які складено за допомогою цих дробів.
- Ви дізнаєтеся, завдяки яким правилам можна замінити дане рівняння на більш просте.
- Ви розширите своє уявлення про поняття «степінь». Навчитеся підносити числа до степеня з цілим від'ємним показником.
- Ви навчитеся будувати математичні моделі процесів, у яких збільшення (зменшення) однієї величини в кілька разів призводить до зменшення (збільшення) другої величини у ту саму кількість разів.

## 1. Раціональні дроби

Перед вивченням цього пункту рекомендуємо повторити зміст пункту 1 на с. 224 і пункту 6 на с. 227.

У курсі алгебри 7 класу було розглянуто цілі вирази, тобто такі, що складаються з чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення й ділення на відмінне від нуля число.

Ось приклади цілих виразів: $x - y$, $\frac{a+b}{5}$, $m^2 + 2m + n^2$, $\frac{1}{3}x - 4$, $\frac{c}{4} + \frac{d}{7}$, $x : 5$, $y$, 7.

У VIII класі ми розглянемо **дробові вирази.**

Дробові вирази відрізняються від цілих тим, що вони *містять дію ділення на вираз зі змінними*.

Ось приклади дробових виразів:

$$2x + \frac{a}{b};\ (x - y) : (x + y);\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}};\ \frac{5}{x}.$$

Цілі й дробові вирази називають **раціональними виразами.**

Якщо в раціональному виразі замінити змінні числами, то отримаємо числовий вираз. Проте *ця заміна можлива лише тоді, коли вона не призводить до ділення на нуль.*

Наприклад, вираз $2 + \frac{a+2}{a-1}$ при $a = 1$ не має змісту, тобто числового значення цього виразу не існує. При всіх інших значеннях $a$ цей вираз має зміст.

**Означення.** **Допустимими значеннями змінних, що входять до раціонального виразу, називають усі значення змінних, при яких цей вираз має зміст.**

Наприклад, у розглянутому вище виразі допустимими значеннями для змінної $a$ є всі числа, крім $a = 1$.

Допустимими значеннями змінних, які входять до цілого виразу, є всі числа.

Окремим видом раціонального виразу є **раціональний дріб.** Це дріб, чисельником і знаменником якого є многочлени[1]. Наприклад,

$$\frac{x}{7};\quad \frac{x^2-2xy}{x+y};\quad \frac{12}{a};\quad \frac{a+b}{5}.$$

Зазначимо, що раціональний дріб може бути як цілим виразом, так і дробовим.

Знаменником раціонального дробу не може бути многочлен, який тотожно дорівнює нулю.


Рис. 1

[1] Нагадуємо, що числа і одночлени вважають окремими видами многочленів (див. п. 6 на с. 227).

Допустимими значеннями змінних, які входять до раціонального дробу, є всі значення цих змінних, при яких значення знаменника дробу не дорівнює нулю.

Схема, зображена на рисунку 1, ілюструє зв'язок між поняттями, що розглядаються в цьому пункті.

**ПРИКЛАД**

Знайдіть допустимі значення змінної, що входить до виразу $\frac{1}{x}+\frac{3}{x-5}$.

*Розв'язання*

Дріб $\frac{1}{x}$ має зміст при всіх значеннях $x$, крім $x = 0$, а дріб $\frac{3}{x-5}$ має зміст при всіх значеннях $x$, крім $x = 5$.

Отже, шуканими допустимими значеннями змінної є всі числа, відмінні від 0 і 5.

1. Чим відрізняються дробові вирази від цілих?
2. Як разом називають цілі і дробові вирази?
3. Які значення змінних називають допустимими?
4. Які дроби називають раціональними?
5. Окремим видом яких виразів є раціональні дроби?
6. Який многочлен не може бути знаменником раціонального дробу?

**1.°** Які з виразів $\frac{3a^2}{4b^3}$, $\frac{5x^2}{4}+\frac{x}{7}$, $\frac{8}{6n+1}$, $3a-\frac{b^2}{c^4}$, $\frac{t^2-6t+15}{2t}$, $\frac{x-2}{x+2}$, $\frac{1}{6}m^3n^5$, $(y-4)^3+\frac{1}{y}$, $\frac{m^2-3mn}{18}$ є:

1) цілими виразами; 2) дробовими виразами; 3) раціональними дробами?

**2.°** Чому дорівнює значення дробу $\frac{c^2-4c}{2c+1}$, якщо:

1) $c = -3$; 2) $c = 0$?

**3.°** Знайдіть значення виразу $\frac{2m-n}{3m+2n}$, якщо:

1) $m = -1$, $n = 1$; 2) $m = 4$, $n = -5$.

**4.°** Чому дорівнює значення виразу:

1) $\frac{a^2-1}{a-5}$ при $a = -4$; 2) $\frac{x+3}{y}-\frac{y}{x+2}$ при $x = -5$, $y = 6$?

**5.°** Знайдіть допустимі значення змінної, що входить до виразу:

1) $2x - 5$;
2) $\frac{18}{m}$;
3) $\frac{9}{x-5}$;
4) $\frac{x-5}{9}$;
5) $\frac{2+y}{1+y}$;
6) $\frac{1}{x^2+4}$;
7) $\frac{5}{x^2-4}$;
8) $\frac{5}{|x|-4}$;
9) $\frac{2}{x-2}+\frac{3x}{x+1}$;
10) $\frac{x+4}{x(x-6)}$;
11) $\frac{x}{|x|+1}$;
12) $\frac{x^2}{(x-3)(x+5)}$.

**6.°** При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\frac{9}{y}$;
2) $\frac{x+7}{x+9}$;
3) $\frac{m-1}{m^2-9}$;
4) $\frac{x}{|x|-3}$;
5) $\frac{4}{x-8}+\frac{1}{x-1}$;
6) $\frac{2x-3}{(x+2)(x-10)}$?

**7.•** Запишіть раціональний дріб, який містить змінну $x$ і має зміст при всіх значеннях $x$, крім:

1) $x = 7$;
2) $x = -1$;
3) $x = 0$ і $x = 4$.

**8.•** Запишіть раціональний дріб, що містить змінну $y$, допустимими значеннями якої є:

1) усі числа, крім 5;
2) усі числа, крім $-2$ і 0;
3) усі числа, крім 3, $-3$ і 6;
4) усі числа.

**9.•** Автомобіль проїхав по шосе $a$ км зі швидкістю 75 км/год і по ґрунтовій дорозі $b$ км зі швидкістю 40 км/год. За який час автомобіль проїхав увесь шлях? Складіть вираз і знайдіть його значення при $a = 150$, $b = 20$.

**10.•** Учень придбав зошити по 60 коп., заплативши за них $m$ грн., і по 90 коп., заплативши за них $n$ грн. Скільки зошитів придбав учень? Складіть вираз і знайдіть його значення при $m = 2{,}4$; $n = 4{,}5$.

**11.•** Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної $x$ значення дробу:

1) $\frac{1}{x^2}$ додатне;
2) $\frac{x^2+1}{6x-9-x^2}$ від'ємне.

**12.•** Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної $x$ значення дробу:

1) $\frac{-x^2}{x^2+5}$ недодатне; 2) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-2x+1}$ невід'ємне.

**13.**˙ Відомо, що $5x - 15y = 1$. Знайдіть значення виразу:

1) $x - 3y$; 3) $\frac{18y-6x}{9}$;

2) $\frac{8}{2x-6y}$; 4) $\frac{1}{x^2-6xy+9y^2}$.

**14.**˙ Відомо, що $4a + 8b = 10$. Знайдіть значення виразу:

1) $2b + a$; 2) $\frac{5}{a+2b}$; 3) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{2a+4b}$.

**15.**¨ Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{1}{4-\frac{4}{x}}$; 2) $y = \frac{1}{x-\frac{1}{x}}$.

**16.**¨ При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\frac{x}{x-\frac{9}{x}}$; 2) $\frac{10}{2+\frac{6}{x}}$?

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**17.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{5}{15}$; 2) $\frac{12}{18}$; 3) $\frac{27}{45}$; 4) $\frac{30}{48}$.

**18.** Зведіть дріб:

1) $\frac{3}{7}$ до знаменника 14;

2) $\frac{8}{15}$ до знаменника 60.

**19.** Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $a^5a^3$; 3) $a^5 : a^3$;

2) $(a^5)^3$; 4) $(a^8)^4 : (a^2)^8$.

**20.** Розкладіть на множники:

1) $6a - 15b$; 5) $a^6 + a^2$;

2) $2a + ab$; 6) $12m^2n - 4mn$;

3) $7am + 7bn$; 7) $2x^2 - 4x^3 + 10x^4$;

4) $4x^2 - 12xy$; 8) $10a^3b^2 - 15a^2b + 25ab^2$.

**21.** Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $ab - ac + bd - cd$; 2) $3m + 3n - mx - nx$;

3) $a^5 + a^3 + 2a^2 + 2$; 4) $8a^2b - 2a^2 - 4b^2 + b$.

**22.** Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

1) $a^2 - 8a + 16$; 3) $40xy + 16x^2 + 25y^2$;
2) $9x^2 + 6x + 1$; 4) $a^8 - 4a^4b + 4b^2$.

**23.** Розкладіть на множники:

1) $x^2 - 9$; 4) $a^2b^2 - 81$; 7) $c^3 - d^3$;
2) $25 - 4y^2$; 5) $100m^6 - 1$; 8) $a^3 + 8$;
3) $36m^2 - 49n^2$; 6) $a^{10} - b^6$; 9) $27m^6 - n^9$.

**24.** Розкладіть на множники:

1) $7a^2 - 7$; 4) $-8a^5 + 8a^3 - 2a$;
2) $3b^3 - 3b$; 5) $x - 4y + x^2 - 16y^2$;
3) $2x^3 - 2xy^2$; 6) $ab^6 - ab^4 - b^6 + b^4$.

**25.** Яка з рівностей є тотожністю:

1) $3x^2 - 36xy + 108y^2 = 3(x - 6y)^2$;
2) $4m^3 - 500n^6 = 4(m - 5n)(m - 5mn + 25n^2)$?

**Поновіть у пам'яті зміст пункту 2 на с. 224.**

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**26.** Дано два числа: $a = \underbrace{44\ldots4}_{m \text{ цифр}}$, $b = \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ цифр}}$. Чи можна підібрати такі $m$ і $n$, щоб:

1) число $a$ було дільником числа $b$;
2) число $b$ було дільником числа $a$?

# 2. Основна властивість раціонального дробу

Рівність $3a - 1 + 2a + 5 = 5a + 4$ є тотожністю, оскільки вона виконується при всіх значеннях $a$.

Рівність $\frac{3a - 1 + 2a + 5}{a + 1} = \frac{5a + 4}{a + 1}$ також природно вважати тотожністю. Але вона виконується при всіх значеннях $a$, крім $a = -1$. При $a = -1$ раціональні дроби, які утворюють дану рівність, не мають змісту. Отже, треба уточнити прийняті в 7 класі означення тотожно рівних виразів і тотожності.

**Означення.** **Вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких допустимих значеннях змінних, називають тотожно рівними.**

**Означення.** **Рівність, правильну при будь-яких допустимих значеннях змінних, називають тотожністю.**

Наприклад, рівність $\frac{a-2}{a-2} = 1$ є тотожністю, оскільки вона виконується при всіх допустимих значеннях $a$, тобто при всіх $a$, крім $a = 2$.

У 7 класі розглядались тотожні перетворення цілих виразів. Тепер розглянемо тотожні перетворення дробових виразів.

Згідно з основною властивістю відношення виконується рівність:

$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$, де $a$, $b$ і $m$ — деякі числа, причому $b \neq 0$ і $m \neq 0$.

Раціональні дроби мають властивість, аналогічну основній властивості відношення:

***якщо чисельник і знаменник раціонального дробу помножити на один і той самий многочлен, який тотожно не дорівнює нулю, то отримаємо дріб, тотожно рівний даному.***

Цю властивість називають **основною властивістю раціонального дробу** і записують:

$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}$, де $A$, $B$ і $C$ — многочлени, причому многочлени $B$ і $C$ тотожно не дорівнюють нулю.

Відповідно до цієї властивості вираз $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ можна замінити на тотожно рівний дріб $\frac{A}{B}$. Таке тотожне перетворення називають **скороченням дробу** на множник $C$.

**ПРИКЛАД 1**

Скоротіть дріб: 1) $\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}$; 2) $\frac{3x + 15y}{3x}$; 3) $\frac{y^2 + 4y + 4}{y^2 + 2y}$.

*Розв'язання*

1) Одночлени $6a^3b^2$ і $24a^2b^4$ мають спільний множник $6a^2b^2$. Тоді маємо:

$$\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4} = \frac{a \cdot 6a^2b^2}{4b^2 \cdot 6a^2b^2} = \frac{a}{4b^2}.$$

2) Розкладемо чисельник даного дробу на множники:

$$\frac{3x + 15y}{3x} = \frac{3(x + 5y)}{3x}.$$

Отже, чисельник і знаменник даного дробу мають спільний множник 3, скоротивши на який, отримуємо:

$$\frac{3x + 15y}{3x} = \frac{3(x + 5y)}{3x} = \frac{x + 5y}{x}.$$

3) Розклавши попередньо чисельник і знаменник даного дробу на множники і скоротивши на спільний множник $y + 2$, маємо:

$$\frac{y^2 + 4y + 4}{y^2 + 2y} = \frac{(y + 2)^2}{y(y + 2)} = \frac{y + 2}{y}.$$

З основної властивості дробу випливає, що

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} \text{ і } \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}.$$

Кожен з дробів $\frac{-A}{B}$ і $\frac{A}{-B}$ можна записати у вигляді виразу $-\frac{A}{B}$, тобто

$$\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}.$$

**ПРИКЛАД 2**

Скоротіть дріб $\frac{4a - 20}{5a - a^2}$.

*Розв'язання*

Маємо:

$$\frac{4a - 20}{5a - a^2} = \frac{4(a - 5)}{a(5 - a)} = \frac{4(a - 5)}{-a(a - 5)} = -\frac{4}{a}.$$

**ПРИКЛАД 3**

Зведіть:

1) дріб $\frac{a^2}{5bc^3}$ до знаменника $15ab^3c^5$;

2) дріб $\frac{a}{a + 2b}$ до знаменника $a^2 - 4b^2$;

3) дріб $\frac{a - b}{2a - 3b}$ до знаменника $3b - 2a$.

*Розв'язання*

1) Оскільки $15ab^3c^5 = 5bc^3 \cdot 3ab^2c^2$, то новий знаменник відрізняється від знаменника даного дробу множником $3ab^2c^2$. Отже, чисельник і знаменник даного дробу треба помножити на **додатковий множник** $3ab^2c^2$:

$$\frac{a^2}{5bc^3} = \frac{a^2 \cdot 3ab^2c^2}{5bc^3 \cdot 3ab^2c^2} = \frac{3a^3b^2c^2}{15ab^3c^5}.$$

2) $\dfrac{a}{a+2b} = \dfrac{a\,(a-2b)}{(a+2b)\,(a-2b)} = \dfrac{a^2-2ab}{a^2-4b^2}.$

3) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на число $-1$, отримуємо:

$$\frac{a-b}{2a-3b} = \frac{(a-b)\cdot(-1)}{(2a-3b)\cdot(-1)} = \frac{b-a}{3b-2a}.$$

**ПРИКЛАД 4**

Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\dfrac{2m}{9a^2b^6}$ і $\dfrac{5n^2}{6a^4b^3}$; 2) $\dfrac{1}{a+b}$ і $\dfrac{1}{a-b}$; 3) $\dfrac{4a^2}{a^2-36}$ і $\dfrac{6}{a^2+6a}$.

*Розв'язання*

1) Добуток знаменників даних дробів, який дорівнює $9a^2b^6 \cdot 6a^4b^3 = 54a^6b^9$, можна прийняти за їх спільний знаменник. Проте зручніше за спільний знаменник узяти одночлен $18a^4b^6$, коефіцієнт якого 18 є найменшим спільним кратним коефіцієнтів 9 і 6 даних знаменників, а кожну зі змінних $a$ і $b$ взято з найбільшим показником степеня, з яким вона міститься у знаменниках даних дробів.

Оскільки $18a^4b^6 = 9a^2b^6 \cdot 2a^2$, то додатковим множником до дробу $\dfrac{2m}{9a^2b^6}$ є одночлен $2a^2$. Ураховуючи, що $18a^4b^6 = 6a^4b^3 \cdot 3b^3$, маємо, що додатковим множником до дробу $\dfrac{5n^2}{6a^4b^3}$ є одночлен $3b^3$.

Отже, $\dfrac{2m}{9a^2b^6} = \dfrac{2m \cdot 2a^2}{9a^2b^6 \cdot 2a^2} = \dfrac{4a^2m}{18a^4b^6}$;

$$\frac{5n^2}{6a^4b^3} = \frac{5n^2 \cdot 3b^3}{6a^4b^3 \cdot 3b^3} = \frac{15b^3n^2}{18a^4b^6}.$$

2) Спільний знаменник даних дробів дорівнює добутку їх знаменників. Маємо:

$$\frac{1}{a+b}=\frac{a-b}{(a+b)(a-b)}=\frac{a-b}{a^2-b^2},$$

$$\frac{1}{a-b}=\frac{a+b}{(a-b)(a+b)}=\frac{a+b}{a^2-b^2}.$$

3) Для знаходження спільного знаменника раціональних дробів буває корисним попередньо розкласти їх знаменники на множники:

$$a^2-36=(a+6)(a-6),\ a^2+6a=a(a+6).$$

Отже, за спільний знаменник даних дробів можна взяти вираз $a(a+6)(a-6)$.

Тоді $\frac{4a^2}{a^2-36}=\frac{\overset{a}{}\,4a^2}{(a+6)(a-6)}=\frac{4a^3}{a(a+6)(a-6)}=\frac{4a^3}{a^3-36a}$;

$$\frac{6}{a^2+6a}=\frac{\overset{a-6}{}\,6}{a(a+6)}=\frac{6a-36}{a(a+6)(a-6)}=\frac{6a-36}{a^3-36a}.$$

## ПРИКЛАД 5

Побудуйте графік функції $y=\frac{x^2-1}{x-1}$.

*Розв'язання*

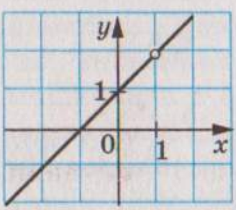



Рис. 2

Дана функція визначена при всіх значеннях $x$, крім 1. Маємо:

$$y=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1,\ x\neq 1.$$

Отже, шуканим графіком є пряма $y=x+1$ за винятком однієї точки, абсциса якої дорівнює 1 (рис. 2).

## ПРИКЛАД 6

Розв'яжіть рівняння $(a^2-9)x=a+3$.

*Розв'язання*

Запишемо дане рівняння у вигляді $(a+3)(a-3)x=$ $=a+3$ і розглянемо три випадки.

1) $a=3$.

Тоді отримуємо рівняння $0x=6$, яке не має коренів.

2) $a=-3$.

У цьому випадку отримуємо рівняння $0x=0$, коренем якого є будь-яке число.

3) $a\neq 3$ і $a\neq -3$.

Тоді $x = \frac{a+3}{(a+3)(a-3)} = \frac{1}{a-3}$.

Відповідь: якщо $a = 3$, то рівняння не має коренів; якщо $a = -3$, то коренем є будь-яке число; якщо $a \neq 3$ і $a \neq -3$, то $x = \frac{1}{a-3}$.

**1.** Які вирази називають тотожно рівними?

**2.** Що називають тотожністю?

**3.** Сформулюйте основну властивість раціонального дробу.

**27.°** Якому з наведених виразів тотожно дорівнює дріб $\frac{6a^2}{24a}$:

1) $\frac{a^2}{4}$; 2) $\frac{a}{4}$; 3) $\frac{12a^3}{48a}$; 4) $\frac{3a^4}{12a^2}$?

**28.°** Чи є тотожністю рівність:

1) $\frac{3m^2}{7m} = \frac{3m}{7}$; 3) $\frac{2b}{5c^3} = \frac{8b}{20c^5}$;

2) $\frac{4x^8}{16x^4} = \frac{x^2}{4}$; 4) $\frac{8m^2}{9n} = \frac{8m^5}{9nm^3}$?

**29.°** Скоротіть дріб:

1) $\frac{14a^3}{21a}$; 3) $\frac{5x}{20x}$; 5) $\frac{4abc}{16ab^4}$; 7) $\frac{-10n^{10}}{5n^4}$;

2) $\frac{8b^3c^2}{12bc^3}$; 4) $\frac{24x^2y^2}{32xy}$; 6) $\frac{56m^5n^7}{42m^5n^{10}}$; 8) $\frac{3p^4q^6}{-9p^8q^7}$.

**30.°** Подайте частку у вигляді дробу й скоротіть отриманий дріб:

1) $6a : (18a^5)$; 3) $35a^8b^6 : (-49a^6b^8)$.

2) $16b^7 : (48b^4)$;

**31.°** Скоротіть дріб:

1) $\frac{3x}{21y}$; 3) $\frac{5c^4}{10c^5}$; 5) $\frac{16ab^4}{40ab^2}$; 7) $\frac{12a^8}{-42a^2}$;

2) $\frac{5x^2}{6x}$; 4) $\frac{2m^4}{m^3}$; 6) $\frac{63x^5y^4}{42x^4y^5}$; 8) $\frac{-13a^5b^5}{26a^4b^3}$.

**32.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{-a}{-b}$; 2) $-\frac{-a}{b}$; 3) $-\frac{a}{-b}$; 4) $-\frac{-a}{-b}$.

**33.°** Відновіть рівності:

1) $\frac{a}{3} = \frac{\quad}{6a} = \frac{\quad}{9a^3} = \frac{\quad}{15b} = \frac{4a^2c^3}{\quad}$;

2) $\frac{m}{n} = \frac{4m}{\phantom{n}} = \frac{\phantom{m}}{2n^2} = \frac{\phantom{m}}{mnp} = \frac{3m^4n^3}{\phantom{n}}$.

**34.°** Зведіть дріб:

1) $\frac{a}{b^3}$ до знаменника $b^5$;

2) $\frac{m}{9n}$ до знаменника $27n^4$;

3) $\frac{6}{7x^2y}$ до знаменника $35x^3y^2$;

4) $\frac{5k}{6p^5}$ до знаменника $24p^9c$.

**35.°** Зведіть дріб:

1) $\frac{x}{y^2}$ до знаменника $y^8$;

2) $\frac{a}{3b}$ до знаменника $6b^3$;

3) $\frac{9}{4m^2n}$ до знаменника $12m^3n^2$;

4) $\frac{11c}{15d^6}$ до знаменника $30bd^7$.

**36.°** Скоротіть дріб:

1) $\frac{a(x+2)}{b(x+2)}$;
2) $\frac{4(a-6)^2}{(a-6)^3}$;
3) $\frac{c^3(c-4)^5}{c^6(c-4)^3}$;
4) $\frac{2a+2b}{7(a+b)}$;
5) $\frac{7x-21y}{5x-15y}$;
6) $\frac{4a-20b}{12ab}$;
7) $\frac{6x+12}{6x}$;
8) $\frac{a-5b}{a^2-5ab}$;
9) $\frac{y^2-25}{10+2y}$;
10) $\frac{a^2+4a+4}{9a+18}$;
11) $\frac{c^2-6c+9}{c^2-9}$;
12) $\frac{m^3+1}{m^2-m+1}$.

**37.°** Скоротіть дріб:

1) $\frac{a-b}{2(b-a)}$;
2) $\frac{3x-6y}{4y-2x}$;
3) $\frac{m^2-5mn}{15n-3m}$;
4) $\frac{7a^4-a^3b}{b^4-7ab^3}$;
5) $\frac{x^2-25}{5x^2-x^3}$;
6) $\frac{y^2-12y+36}{36-y^2}$.

**38.°** Скоротіть дріб:

1) $\frac{3m-3n}{7m-7n}$;
2) $\frac{5a+25b}{2a^2+10ab}$;
3) $\frac{4x-16y}{16y}$;
4) $\frac{x^2-49}{6x+42}$;
5) $\frac{12a^2-6a}{3-6a}$;
6) $\frac{9b^2-1}{9b^2+6b+1}$;

7) $\frac{b^5 - b^4}{b^5 - b^6}$; 8) $\frac{7m^2 + 7m + 7}{m^3 - 1}$; 9) $\frac{64 - x^2}{3x^2 - 24x}$.

**39.°** Зведіть дріб:

1) $\frac{a}{a+2}$ до знаменника $4a + 8$;

2) $\frac{m}{m - 3n}$ до знаменника $m^2 - 9n^2$;

3) $\frac{x}{2x - y}$ до знаменника $7y - 14x$;

4) $\frac{5b}{2a + 3b}$ до знаменника $4a^2 + 12ab + 9b^2$;

5) $\frac{x + 1}{x^2 + x + 1}$ до знаменника $x^3 - 1$.

**40.°** Подайте вираз $x - 5y$ у вигляді дробу із знаменником:

1) $2$; 2) $x$; 3) $4y^3$; 4) $x^2 - 25y^2$.

**41.°** Зведіть дріб $\frac{6}{b - 4}$ до знаменника:

1) $5b - 20$; 2) $12 - 3b$; 3) $b^2 - 4b$; 4) $b^2 - 16$.

**42.°** Подайте дані дроби у вигляді дробів з однаковими знаменниками:

1) $\frac{1}{8ab}$ і $\frac{1}{2a^3}$;

2) $\frac{3x}{7m^3n^3}$ і $\frac{4y}{3m^2n^4}$;

3) $\frac{a + b}{a - b}$ і $\frac{2}{a^2 - b^2}$;

4) $\frac{3d}{m - n}$ і $\frac{8p}{(m - n)^2}$;

5) $\frac{x}{2x + 1}$ і $\frac{x}{3x - 2}$;

6) $\frac{a - b}{3a + 3b}$ і $\frac{a}{a^2 - b^2}$;

7) $\frac{3a}{4a - 4}$ і $\frac{2a}{5 - 5a}$;

8) $\frac{7a}{b - 3}$ і $\frac{c}{9 - b^2}$.

**43.°** Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{4}{15x^2y^2}$ і $\frac{1}{10x^3y}$;

2) $\frac{c}{6a^4b^5}$ і $\frac{d}{9ab^2}$;

3) $\frac{x}{y - 5}$ і $\frac{z}{y^2 - 25}$;

4) $\frac{m + n}{m^2 - mn}$ і $\frac{2m - 3n}{m^2 - n^2}$;

5) $\frac{x + 1}{x^2 - xy}$ і $\frac{y - 1}{xy - y^2}$;

6) $\frac{6a}{a - 2b}$ і $\frac{3a}{a + b}$;

7) $\frac{1 + c^2}{c^2 - 16}$ і $\frac{c}{4 - c}$;

8) $\frac{2m + 9}{m^2 + 5m + 25}$ і $\frac{m}{m - 5}$.

**44.**• Скоротіть дріб:

1) $\frac{(3a + 3b)^2}{a + b}$; 2) $\frac{(6x - 18y)^2}{x^2 - 9y^2}$;

3) $\frac{xy + x - 5y - 5}{4y + 4}$; 4) $\frac{a^2 - ab + 2b - 2a}{a^2 - 4a + 4}$.

**45.**° Скоротіть дріб:

1) $\frac{2m^2 - 72n^2}{(4m + 24n)^2}$; 2) $\frac{a^3 - 8}{ab - a - 2b + 2}$; 3) $\frac{a^3 + 2a^2b + ab^2}{a^3 - ab^2}$.

**46.**° Знайдіть значення дробу, попередньо скоротивши його:

1) $\frac{15a^2 + 10ab}{3ab + 2b^2}$, якщо $a = -2$; $b = 0,4$;

2) $\frac{9b^2 - 4c^2}{12b^2c - 8bc^2}$, якщо $b = \frac{1}{3}$; $c = -6$;

3) $\frac{36x^2 - 12xy + y^2}{y^2 - 36x^2}$, якщо $x = 1,2$; $y = -3$;

4) $\frac{a^8 - a^6}{a^9 + a^8}$, якщо $a = -0,1$.

**47.**° Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{16x^2 - 4y^2}{6x - 3y}$ при $x = 2,5$; $y = -2$;

2) $\frac{49c^2 - 9}{49c^2 + 42c + 9}$ при $c = -4$.

**48.**° Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{2p}{5p - 15}$ і $\frac{1}{p^3 - 27}$;

2) $\frac{3a + 1}{9a^2 - 6a + 1}$ і $\frac{a - 2}{9a^2 - 1}$;

3) $\frac{a}{a^2 - 7a}$ і $\frac{a + 3}{a^2 - 14a + 49}$;

4) $\frac{2x}{x^2 - 1}$, $\frac{3x}{x^2 - 2x + 1}$ і $\frac{4}{x^2 + 2x + 1}$;

5) $\frac{a^2}{a^2 - ab - ac + bc}$, $\frac{b}{2a - 2b}$ і $\frac{ab}{4a - 4c}$.

**49.**° Запишіть у вигляді дробів з однаковими знаменниками дроби:

1) $\frac{3a}{3a - 2}$, $\frac{a}{9a + 6}$ і $\frac{a^2}{9a^2b - 4b}$;

2) $\frac{1}{a - 5b}$, $\frac{1}{a^2 + 7ac}$ і $\frac{1}{a^2 + 7ac - 5ab - 35bc}$.

**50.**°° Знайдіть значення виразу $\frac{2xy - y^2}{3xy + x^2}$, якщо $\frac{x}{y} = 2$.

**51.**** Знайдіть значення виразу $\frac{4a^2 - ab}{ab + 14b^2}$, якщо $\frac{a}{b} = 5$.

**52.**** Відомо, що $2a - 6b = 1$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{8}{a - 3b}$;    2) $\frac{a^2 - 9b^2}{0,5a + 1,5b}$.

**53.**** Знайдіть значення виразу $\frac{2m - 1,5n}{32m^2 - 18n^2}$, якщо $4m + 3n = 8$.

**54.**** Чи існує таке значення $a$, при якому дріб $\frac{a^3 - a^2 - a + 1}{a^3 + a^2 + a + 1}$ набуває від'ємного значення?

**55.**** Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$;    3) $y = \frac{x^2 - 10x + 25}{x - 5} - \frac{2x^2 - 4x}{x}$;

2) $y = \frac{x - 3}{3 - x}$;    4) $y = \frac{2}{x + 4} - \frac{2}{x + 4}$.

**56.**** Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4}$;    3) $y = \frac{x^2 - 3x}{x} - \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 1}$.

2) $y = x - \frac{x}{x}$;

**57.**** Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{|x|}{x}$;    2) $y = \frac{x^2 - 1}{|x| - 1}$.

**58.**** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x + 1}{x + 1} = 1$;    2) $\frac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$;    3) $\frac{x + 6}{|x| - 6} = 0$.

**59.**** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 - 16}{x + 4} = -8$;    2) $\frac{|x| - 7}{x - 7} = 0$.

**60.*** Для кожного значення $a$ розв'яжіть рівняння:

1) $ax = 1$;    3) $(a - 6)x = a^2 - 12a + 36$;

2) $ax = a$;    4) $(a^2 - 4)x = a - 2$.

**61.*** Для кожного значення $a$ розв'яжіть рівняння:

1) $(a + 3)x = 3$;   2) $(a^2 - 9a)x = a^2 - 18a + 81$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**62.** Спростіть вираз:

1) $(x + 2)(x - 9) - 3x(3 - 2x)$;

2) $(a + 5)(a - 2) + (a + 4)(a - 5)$;
3) $(y - 8)(2y + 1) - (3y + 1)(y - 6)$;
4) $(2x - 3y)(2x + 3y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$;
5) $(x + 1)^2 - (x - 3)(x + 3)$;
6) $(y - 4)(y + 3) - (y - 6)^2$.

**63.** Побудуйте графік функції:
1) $y = 2$; 2) $y = 2x$; 3) $y = 2x - 1$.

**64.** Якого найменшого значення та при яких значеннях $a$ і $b$ набуває вираз $(a - 2)(a + 2) + 4b(b - a)$?

**65.** Відстань від села Вишневе до залізничної станції на 14 км менша ніж відстань від села Яблуневе до тієї самої станції. Час, за який автобус проїжджає відстань від села Вишневе до станції, становить 45 хв, а час, за який легковий автомобіль проїжджає від села Яблуневе до станції, на 5 хв більше, при цьому швидкість автомобіля на 12 км/год більша за швидкість автобуса. Знайдіть швидкість автобуса і швидкість легкового автомобіля.

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**66.** Виконайте дії:
1) $\frac{7}{18} + \frac{5}{18}$; 2) $\frac{9}{16} + \frac{7}{16}$; 3) $\frac{23}{32} - \frac{15}{32}$; 4) $4 - 1\frac{3}{11}$.

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**67.** На сторонах квадрата записано чотири натуральних числа. У кожній вершині квадрата записано число, яке дорівнює добутку чисел, записаних на сторонах, для яких ця вершина є спільною. Сума чисел, записаних у вершинах, дорівнює 55. Знайдіть суму чисел, записаних на сторонах квадрата.

## 3. Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками

Ви знаєте правила додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками. Їх можна виразити такими рівностями:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},\quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

За цими самими правилами додають і віднімають раціональні дроби з однаковими знаменниками.

***Щоб додати раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити той самий.***

***Щоб відняти раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба від чисельника першого дробу відняти чисельник другого дробу, а знаменник залишити той самий.***

**ПРИКЛАД 1**

Виконайте віднімання:

1) $\frac{7x-5}{8x^2}-\frac{3x-5}{8x^2}$; 2) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}$; 3) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}$.

*Розв'язання*

1) $\frac{7x-5}{8x^2}-\frac{3x-5}{8x^2}=\frac{7x-5-(3x-5)}{8x^2}=\frac{7x-5-3x+5}{8x^2}=\frac{4x}{8x^2}=\frac{1}{2x}$.

2) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}=\frac{y^2+2y-(12y-25)}{y^2-25}=\frac{y^2+2y-12y+25}{y^2-25}=$

$=\frac{y^2-10y+25}{y^2-25}=\frac{(y-5)^2}{(y+5)(y-5)}=\frac{y-5}{y+5}$.

3) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}=\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{-(2a-1)}=\frac{4}{2a-1}+\frac{2a-3}{2a-1}=$

$=\frac{4+2a-3}{2a-1}=\frac{2a+1}{2a-1}$.

**ПРИКЛАД 2**

Відомо, що $\frac{m}{n}=-3$. Знайдіть значення виразу $\frac{2m+n}{m}$.

*Розв'язання*

Подамо даний дріб у вигляді суми цілого й дробового виразів:

$$\frac{2m+n}{m}=\frac{2m}{m}+\frac{n}{m}=2+\frac{n}{m}.$$

Якщо $\frac{m}{n}=-3$, то $\frac{n}{m}=-\frac{1}{3}$. Отже,

$$\frac{2m+n}{m}=2+\frac{n}{m}=2-\frac{1}{3}=1\frac{2}{3}.$$

**ПРИКЛАД 3**

Знайдіть усі натуральні значення $n$, при яких значення виразу $\frac{2n^2+3n-15}{n}$ є цілим числом.

*Розв'язання*

Подамо даний дріб у вигляді різниці цілого й дробового виразів:

$$\frac{2n^2+3n-15}{n}=\frac{2n^2}{n}+\frac{3n}{n}-\frac{15}{n}=2n+3-\frac{15}{n}.$$

Вираз $2n+3$ набуває натурального значення при будь-якому натуральному $n$. Вираз $2n+3-\frac{15}{n}$ набуває цілого значення, якщо значення виразу $\frac{15}{n}$ є цілим числом. Це можливо лише при таких значеннях $n$: 1, 3, 5, 15.

В і д п о в і д ь: при $n=1$, або $n=3$, або $n=5$, або $n=15$.

1. Як додати раціональні дроби з однаковими знаменниками?
2. Як відняти раціональні дроби з однаковими знаменниками?

**68.°** Виконайте дії:

1) $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}$;

2) $\frac{a}{3}-\frac{b}{3}$;

3) $\frac{m}{n}+\frac{4m}{n}$;

4) $\frac{6c}{d}-\frac{2c}{d}$;

5) $\frac{m+n}{6}-\frac{m-2n}{6}$;

6) $\frac{2a-3b}{6ab}+\frac{9b-2a}{6ab}$;

7) $-\frac{5c+4d}{cd}+\frac{4d+9c}{cd}$;

8) $\frac{8m+3}{10m^2}-\frac{2m+3}{10m^2}$.

**69.°** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{7k}{18p}-\frac{4k}{18p}$;

2) $\frac{a-b}{2b}-\frac{a}{2b}$;

3) $-\frac{a-12b}{27a}+\frac{a+15b}{27a}$;

4) $\frac{x-7y}{xy}-\frac{x-4y}{xy}$;

5) $\frac{10a+6b}{11a^3}-\frac{6b-a}{11a^3}$;

6) $\frac{x^2-xy}{x^2y}+\frac{2xy-3x^2}{x^2y}$.

**70.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2}{a+3}-\frac{9}{a+3}$;

2) $\frac{t}{t^2-16}-\frac{4}{t^2-16}$;

3) $\frac{m^2}{(m-5)^2}-\frac{25}{(m-5)^2}$;

4) $\frac{5x+9}{x^2-1}-\frac{4x+8}{x^2-1}$;

5) $\frac{b^2}{b+10}+\frac{20b+100}{b+10}$;

6) $\frac{c^2}{c-7}-\frac{14c-49}{c-7}$.

**71.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{c^2}{c-9}-\frac{81}{c-9}$;

2) $\frac{a^2}{(a-6)^2}-\frac{36}{(a-6)^2}$;

3) $\frac{3x+5}{x^2-4}-\frac{2x+7}{x^2-4}$;

4) $\frac{y^2}{y-2}-\frac{4y-4}{y-2}$.

**72.°** Виконайте дії:

1) $\frac{a+b}{c-7}+\frac{a}{7-c}$;

2) $\frac{5m}{m-n}+\frac{5n}{n-m}$;

3) $\frac{2x-4y}{x-3y}-\frac{4x-14y}{3y-x}$;

4) $\frac{81b^2}{9b-a}+\frac{a^2}{a-9b}$;

5) $\frac{t^2}{3t-6}+\frac{4}{6-3t}$;

6) $\frac{y^2}{y-1}-\frac{1-2y}{1-y}$.

**73.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{x}{y-1}+\frac{2}{1-y}$;

2) $\frac{3c}{c-d}+\frac{3d}{d-c}$;

3) $\frac{3m+2n}{2m-3n}-\frac{m-8n}{3n-2m}$;

4) $\frac{b^2}{2b-14}+\frac{49}{14-2b}$.

**74.** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{a^2-48}{a-8}-\frac{16}{a-8}$ при $a=32$;

2) $\frac{c^2+3c+7}{c^3-8}+\frac{c+3}{8-c^3}$ при $c=-3$.

**75.** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{5x+3}{x^2-16}+\frac{6x-1}{16-x^2}$ при $x=-4{,}1$;

2) $\frac{a^2+a}{a^2-9}-\frac{7a-9}{a^2-9}$ при $a=7$.

**76.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{5n-1}{20n}-\frac{7n-8}{20n}-\frac{8n+7}{20n}$;

2) $\frac{9m+2}{m^2-4}-\frac{m-9}{4-m^2}+\frac{1-7m}{m^2-4}$;

3) $\frac{3k}{k^3-1}+\frac{4k+1}{1-k^3}+\frac{k^2}{1-k^3}$.

**77.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{6a-1}{16a-8}+\frac{4a-7}{16a-8}+\frac{-2a-2}{8-16a}$;

2) $\frac{2a^2+12a}{a^2-25}+\frac{8a-9}{25-a^2}-\frac{a^2+14a-16}{a^2-25}$.

**78.°** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{15-8a}{(a-1)^2}-\frac{14-7a}{(1-a)^2}$;

2) $\frac{3b^2+12}{(b-2)^3}+\frac{12b}{(2-b)^3}$;

3) $\frac{m^2-8n}{(m-2)(n-5)}-\frac{2m-8n}{(2-m)(5-n)}$.

**79.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{x^2-16x}{(x-7)^4}+\frac{2x+49}{(7-x)^4}$;

2) $\frac{y^2+y}{(y-6)(y+2)}+\frac{y+36}{(6-y)(2+y)}$.

**80.°** Доведіть тотожність:

1) $\frac{(a+b)^2}{4ab}-\frac{(a-b)^2}{4ab}=1$;

2) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}=2$.

**81.°** Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної $x$ значення виразу $\frac{12x-25}{20x-15}+\frac{8x+10}{20x-15}$ не залежить від значення $x$.

**82.°** Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної $y$ значення виразу $\frac{17y+5}{21y-3}-\frac{9-11y}{21y-3}$ не залежить від значення $y$.

**83.°** Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз $\frac{a^2-6}{(a-2)^4}-\frac{7a-4}{(a-2)^4}+\frac{3a+6}{(a-2)^4}$ набуває додатних значень.

**84.°** Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз $\frac{2-b^2}{(b-5)^6}-\frac{7-3b}{(b-5)^6}+\frac{7b-20}{(b-5)^6}$ набуває від'ємних значень.

**85.**•• Подайте даний дріб у вигляді суми або різниці цілого і дробового виразів:

1) $\frac{x+3}{x}$;
2) $\frac{a^2-2a-5}{a-2}$.

**86.**•• Подайте даний дріб у вигляді суми або різниці цілого і дробового виразів:

1) $\frac{4a-b}{a}$;
2) $\frac{b^2+7b+3}{b+7}$.

**87.**•• Відомо, що $\frac{x}{y}=4$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{y}{x}$;
2) $\frac{2x-3y}{y}$;
3) $\frac{x^2+y^2}{xy}$.

**88.**•• Відомо, що $\frac{a}{b}=-2$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{a-b}{a}$;
2) $\frac{4a+5b}{b}$;
3) $\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

**89.**•• Знайдіть усі натуральні значення $n$, при яких є цілим числом значення виразу:

1) $\frac{n+6}{n}$;
2) $\frac{3n^2-4n-14}{n}$;
3) $\frac{4n+7}{2n-3}$.

**90.**•• Знайдіть усі натуральні значення $n$, при яких є цілим числом значення виразу:

1) $\frac{8n-9}{n}$;
2) $\frac{n^2+2n-8}{n}$;
3) $\frac{9n-4}{3n-5}$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**91.** З двох сіл, відстань між якими дорівнює 9 км, одночасно назустріч один одному виїхали два велосипедисти, які зустрілися через 20 хв. Якби велосипедисти їхали в одному напрямі, то один з них наздогнав би другого через 3 год. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста.

**92.** Розв'яжіть рівняння:

1) $1-4(x+1)=1{,}8-1{,}6x$;
2) $3(0{,}5x-4)+8{,}5x=10x-11$.

**93.** Доведіть, що вираз $(a+4)(a-8)+4(2a+9)$ при всіх значеннях $a$ набуває невід'ємних значень.

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**94.** Замість зірочки запишіть такий одночлен, щоб справджувалася рівність:

1) $a^2b \cdot * = a^2b^2$;
2) $5xy^3 \cdot * = 10x^4y^6$;
3) $6x^5 \cdot * = 12x^{10}$.

**95.** Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоб справджувалася рівність:

1) $* \cdot (a - b) = (a + b)(a - b)^2$;
2) $(a + 10b) \cdot * = a^3 - 100ab^2$.

**96.** Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{1}{3a}$ і $\frac{2}{3b}$;
2) $\frac{4m}{p^3q^2}$ і $\frac{3n}{p^2q^3}$;
3) $\frac{5}{m-n}$ і $\frac{6}{m+n}$;
4) $\frac{6x}{x-2y}$ і $\frac{y}{x+y}$;
5) $\frac{y}{6y-36}$ і $\frac{1}{y^2-6y}$;
6) $\frac{1}{a^2-1}$ і $\frac{1}{a^2+a}$.

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**97.** Чи може парне число мати непарних дільників більше, ніж парних?

# 4. Додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками

Застосовуючи основну властивість дробу, можна додавання і віднімання дробів з різними знаменниками звести до додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Нехай треба додати два раціональних дроби $\frac{A}{B}$ і $\frac{C}{D}$.

Можна записати: $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D}$; $\frac{C}{D} = \frac{C \cdot B}{D \cdot B}$.

Тоді $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} + \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{A \cdot D + C \cdot B}{B \cdot D}$.

Тут за **спільний знаменник** обрано вираз, який дорівнює добутку знаменників даних дробів.

Зазначимо, що добуток знаменників даних дробів не завжди є найбільш зручним спільним знаменником.

Нагадаємо, що при знаходженні спільного знаменника звичайних дробів ми знаходили найменше спільне кратне знаменників, розкладаючи їх на прості множники. Аналогічно для знаходження спільного знаменника раціональних дробів може виявитися зручним розкладання знаменників на множники.

Зрозуміло, що сума і різниця двох раціональних дробів є раціональними дробами.

## ПРИКЛАД 1

Спростіть вираз:

1) $\frac{b+1}{abc}+\frac{1-a}{a^2c}$;

2) $\frac{m}{7m+7n}-\frac{n}{7m-7n}$;

3) $\frac{10n+14}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}$;

4) $\frac{2a}{25-10a+a^2}-\frac{1}{3a-15}$;

5) $\frac{x}{x-4}-\frac{x+2}{x-2}$.

*Розв'язання*

1) Спільним знаменником даних дробів є одночлен $a^2bc$. Отже,

$$^{a/}\frac{b+1}{abc}+{}^{b/}\frac{1-a}{a^2c}=\frac{ab+a+b-ab}{a^2bc}=\frac{a+b}{a^2bc}.$$

2) Розклавши попередньо знаменники даних дробів на множники, отримуємо:

$$\frac{m}{7m+7n}-\frac{n}{7m-7n}={}^{m-n/}\frac{m}{7(m+n)}-{}^{m+n/}\frac{n}{7(m-n)}=\frac{m(m-n)-n(m+n)}{7(m+n)(m-n)}=$$

$$=\frac{m^2-mn-mn-n^2}{7(m^2-n^2)}=\frac{m^2-2mn-n^2}{7(m^2-n^2)}.$$

3) Маємо:

$$\frac{10n+14}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}=\frac{10n+14}{(n-7)(n+7)}-{}^{n+7/}\frac{6}{n-7}=\frac{10n+14-6(n+7)}{(n-7)(n+7)}=$$

$$=\frac{10n+14-6n-42}{(n-7)(n+7)}=\frac{4n-28}{(n-7)(n+7)}=\frac{4(n-7)}{(n-7)(n+7)}=\frac{4}{n+7}.$$

4) $$\frac{2a}{25-10a+a^2}-\frac{1}{3a-15}=\frac{2a}{(5-a)^2}-\frac{1}{3(a-5)}={}^{3/}\frac{2a}{(a-5)^2}-{}^{a-5/}\frac{1}{3(a-5)}=$$

$$=\frac{6a-a+5}{3(a-5)^2}=\frac{5a+5}{3(a-5)^2}.$$

5) У цьому випадку спільний знаменник даних дробів дорівнює добутку їх знаменників. Тоді

$$ {}^{x-2\backslash}\frac{x}{x-4} - {}^{x-4\backslash}\frac{x+2}{x-2} = \frac{x(x-2)-(x+2)(x-4)}{(x-4)(x-2)} = $$

$$ = \frac{x^2-2x-x^2+4x-2x+8}{(x-4)(x-2)} = \frac{8}{(x-4)(x-2)}. $$

**ПРИКЛАД 2**

Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{21c^2}{7c-2} - 3c$.

*Розв'язання*

Подавши вираз $3c$ у вигляді дробу зі знаменником 1, отримуємо:

$$ \frac{21c^2}{7c-2} - 3c = \frac{21c^2}{7c-2} - {}^{7c-2\backslash}\frac{3c}{1} = \frac{21c^2-21c^2+6c}{7c-2} = \frac{6c}{7c-2}. $$

1. Як виконати додавання й віднімання раціональних дробів з різними знаменниками?
2. Що є сумою і різницею двох раціональних дробів?

**98.°** Виконайте дії:

1) $\frac{x}{4} + \frac{2x}{3}$;
2) $\frac{5b}{14} - \frac{b}{7}$;
3) $\frac{m}{8} - \frac{n}{6}$;
4) $\frac{4}{x} - \frac{3}{y}$;
5) $\frac{m}{4n} + \frac{m}{6n}$;
6) $\frac{c}{b} - \frac{d}{3b}$;
7) $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{ab^4}$;
8) $\frac{11}{5a} - \frac{2c}{15ab}$;
9) $\frac{m}{abc} + \frac{c}{abm}$.

**99.°** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{x}{8} - \frac{y}{12}$;
2) $\frac{4a}{7} + \frac{a}{4}$;
3) $\frac{m}{n} - \frac{n}{m}$;
4) $\frac{x^2}{2y} + \frac{y}{8x}$;
5) $\frac{7}{cd} + \frac{k}{cp}$;
6) $\frac{6a}{35c^5} - \frac{9b}{14c^2}$.

**100.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{a+7}{12} + \frac{a-4}{9}$;
2) $\frac{2b-7c}{6} - \frac{3b+2c}{15}$;
3) $\frac{3x-2}{x} - \frac{3y-1}{y}$;
4) $\frac{6p+1}{p} - \frac{2p+8}{3p}$;
5) $\frac{5m-n}{14m} - \frac{m-6n}{7m}$;
6) $\frac{x+4}{11x} - \frac{y-3}{11y}$;

7) $\frac{a+b}{ab}+\frac{a-c}{ac}$;
8) $\frac{2}{p^2}+\frac{p-1}{p}$;
9) $\frac{k+4}{k}-\frac{3k-4}{k^2}$;
10) $\frac{x-y}{x^3}-\frac{y-x^2}{x^2y}$;
11) $\frac{2m-3n}{m^2n}+\frac{7m-2n}{mn^2}$;
12) $\frac{c+d}{cd^4}-\frac{c^2-8d}{c^3d^3}$.

**101.°** Виконайте додавання або віднімання дробів:

1) $\frac{9-5b}{b}-\frac{7-5c}{c}$;
2) $\frac{4d+7}{7d}-\frac{d-6}{6d}$;
3) $\frac{5-k}{5p}-\frac{p+10}{5k}$;
4) $\frac{m-n}{mn}-\frac{p-n}{np}$;
5) $\frac{6a+2}{ab}-\frac{2a+4}{a^2b}$;
6) $\frac{c^2-16}{c^6}-\frac{c-9}{c^5}$;
7) $\frac{1}{x^3}-\frac{1+x^2}{x^5}$;
8) $\frac{1-ab}{abc}-\frac{1-ad}{acd}$.

**102.°** Виконайте дії:

1) $\frac{2}{x}+\frac{3x-2}{x+1}$;
2) $\frac{m}{n}-\frac{m}{m+n}$;
3) $\frac{a}{a-3}-\frac{3}{a+3}$;
4) $\frac{c}{3c-1}-\frac{c}{3c+1}$;
5) $\frac{x}{2y+1}-\frac{x}{3y-2}$;
6) $\frac{a-b}{b}-\frac{a-b}{a+b}$.

**103.°** Перетворіть у дріб вираз:

1) $\frac{a}{a-b}+\frac{a}{b}$;
2) $\frac{4}{x}-\frac{5x+4}{x+2}$;
3) $\frac{b}{b-2}-\frac{2}{b+2}$.

**104.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{b(a-b)}-\frac{1}{a(a-b)}$;
2) $\frac{5}{a}+\frac{30}{a(a-6)}$;
3) $\frac{3}{x-2}-\frac{2x+2}{x(x-2)}$;
4) $\frac{y}{2(y+3)}-\frac{y}{5(y+3)}$;
5) $\frac{5m+3}{2(m+1)}-\frac{7m+4}{3(m+1)}$;
6) $\frac{c-a}{a(a+b)}+\frac{c+b}{b(a+b)}$.

**105.°** Виконайте дії:

1) $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(a+b)}$;
2) $\frac{4}{b}-\frac{8}{b(b+2)}$;
3) $\frac{x}{5(x+7)}-\frac{x}{6(x+7)}$;
4) $\frac{4n+2}{3(n-1)}-\frac{5n+3}{4(n-1)}$.

**106.°** Виконайте додавання або віднімання дробів:

1) $\frac{a}{a-2}-\frac{3a+1}{3a-6}$;
2) $\frac{18}{b^2+3b}-\frac{6}{b}$;
3) $\frac{2}{c+1}-\frac{c-1}{c^2+c}$;
4) $\frac{d-1}{2d-8}+\frac{d}{d-4}$;

5) $\frac{m+1}{3m-15}-\frac{m-1}{2m-10}$;

6) $\frac{m-2n}{6m+6n}-\frac{m-3n}{4m+4n}$;

7) $\frac{a^2+2}{a^2+2a}-\frac{a+4}{2a+4}$;

8) $\frac{3x-4y}{x^2-2xy}-\frac{3y-x}{xy-2y^2}$.

**107.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{b}{b-5}-\frac{4b-1}{4b-20}$;

2) $\frac{2}{m}-\frac{16}{m^2+8m}$;

3) $\frac{a-2}{2a-6}-\frac{a-1}{3a-9}$;

4) $\frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab}+\frac{b}{a+b}$;

5) $\frac{b+4}{ab-b^2}-\frac{a+4}{a^2-ab}$;

6) $\frac{c-4}{4c+24}+\frac{4c+9}{c^2+6c}$.

**108.°** Виконайте дії:

1) $\frac{3}{x+3}+\frac{x+4}{x^2-9}$;

2) $\frac{a^2}{a^2-64}-\frac{a}{a-8}$;

3) $\frac{6b}{9b^2-4}-\frac{1}{3b-2}$;

4) $\frac{3a+b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}$;

5) $\frac{m}{m+5}-\frac{m^2}{m^2+10m+25}$;

6) $\frac{b}{a+b}-\frac{b^2}{a^2+b^2+2ab}$.

**109.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{4x-y}{x^2-y^2}+\frac{1}{x-y}$;

2) $\frac{y^2}{y^2-81}-\frac{y}{y+9}$;

3) $\frac{10a}{25a^2-9}-\frac{1}{5a+3}$;

4) $\frac{n}{n-7}-\frac{n^2}{n^2-14n+49}$.

**110.°** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{a}{b}+1$;

2) $\frac{x}{y}-x$;

3) $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2$;

4) $\frac{9}{p^2}-\frac{4}{p}+3$;

5) $2-\frac{3b+2a}{a}$;

6) $\frac{3b+4}{b-2}-3$;

7) $6m-\frac{12m^2+1}{2m}$;

8) $\frac{20b^2+5}{2b-1}-10b$.

**111.°** Виконайте дії:

1) $a-\frac{4}{a}$;

2) $\frac{1}{x}+x-2$;

3) $\frac{m}{n^3}-\frac{1}{n}+m$;

4) $\frac{2k^2}{k-5}-k$;

5) $3n-\frac{9n^2-2}{3n}$;

6) $5-\frac{4y-12}{y-2}$.

**112.**$^{\cdot}$ Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2+1}{a^2-2a+1}+\frac{a+1}{a-1}$;

2) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}$;

3) $\frac{c+7}{c-7}+\frac{28c}{49-c^2}$;

4) $\frac{5a+3}{2a^2+6a}+\frac{6-3a}{a^2-9}$;

5) $\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{a+4}{a^2-4}$;

6) $\frac{2p}{p-5}-\frac{5}{p+5}+\frac{2p^2}{25-p^2}$;

7) $\frac{1}{y}-\frac{y+8}{16-y^2}-\frac{2}{y-4}$;

8) $\frac{2b-1}{4b+2}+\frac{4b}{4b^2-1}+\frac{2b+1}{3-6b}$.

**113.**$^{\cdot}$ Спростіть вираз:

1) $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$;

2) $\frac{x-y}{x+y}+\frac{y^2}{2xy+x^2+y^2}$;

3) $\frac{2a}{4a^2-1}-\frac{a+4}{2a^2+a}$;

4) $\frac{b-2}{b^2+6b+9}-\frac{b}{b^2-9}$;

5) $\frac{x-6}{x^2+3x}+\frac{x}{x+3}-\frac{x-3}{x}$;

6) $\frac{y+2}{y-2}-\frac{y-2}{y+2}-\frac{16}{y^2-4}$.

**114.**$^{\cdot}$ Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення даного виразу не залежить від її значення:

1) $\frac{2x+1}{2x-4}+\frac{2x-1}{6-3x}-\frac{x+7}{6x-12}$; 2) $\frac{24-2a}{a^2-16}-\frac{a}{2a-8}+\frac{4}{a+4}$.

**115.**$^{\cdot}$ Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $1-a+\frac{a^2-2}{a+2}$;

2) $\frac{a^2-b^2}{3a+b}+3a-b$;

3) $\frac{c^2+9}{c-3}-c-3$;

4) $\frac{8m^2}{4m-3}-2m-1$.

**116.**$^{\cdot}$ Спростіть вираз:

1) $b+7-\frac{14b}{b+7}$;

2) $5c-\frac{10-29c+10c^2}{2c-5}+2$.

**117.**$^{\cdot}$ Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $\frac{7}{2a-4}-\frac{12}{a^2-4}-\frac{3}{a+2}$, якщо $a=5$;

2) $\frac{2c+3}{2c^2-3c}+\frac{2c-3}{2c^2+3c}-\frac{16c}{4c^2-9}$, якщо $c=-0{,}8$;

3) $\frac{m^2+16n^2}{m^2-16n^2}-\frac{m+4n}{2m-8n}$, якщо $m=3$, $n=0{,}5$.

**118.**$^{\cdot}$ Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{6}{5x-20}-\frac{x-5}{x^2-8x+16}$, якщо $x=5$;

2) $\frac{2y-1}{2y}-\frac{2y}{2y-1}-\frac{1}{2y-4y^2}$, якщо $y=-2\frac{3}{7}$.

**119.**° Доведіть тотожність:

1) $\frac{a+b}{a}-\frac{a}{a-b}+\frac{b^2}{a^2-ab}=0$;

2) $\frac{a+3}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{6}{a^2-1}=\frac{2}{a^2-1}$;

3) $\frac{2a^2+4}{a^2-1}-\frac{a-2}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}=\frac{1}{a-1}$.

**120.**° Доведіть тотожність:

1) $\frac{1}{6a-4b}-\frac{1}{6a+4b}-\frac{3a}{4b^2-9a^2}=\frac{1}{3a-2b}$;

2) $\frac{c+2}{c^2+3c}-\frac{1}{3c+9}-\frac{2}{3c}=0$.

**121.**° Знайдіть різницю дробів:

1) $\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}$;

2) $\frac{1}{b+3}-\frac{b^2-6b}{b^3+27}$.

**122.**° Спростіть вираз:

1) $\frac{9m^2-3mn+n^2}{3m-n}-\frac{9m^2+3mn+n^2}{3m+n}$;

2) $1-\frac{2b-1}{4b^2-2b+1}-\frac{2b}{2b+1}$.

**123.**° Доведіть тотожність:

$$\frac{3a^2+24}{a^3+8}-\frac{6}{a^2-2a+4}-\frac{1}{a+2}=\frac{2}{a+2}.$$

**124.**•• Спростіть вираз:

1) $\frac{4b}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a+b}{b^2-ab}$;

2) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}+\frac{x^2+4}{8x-2x^3}$;

3) $\frac{1}{(a-5b)^2}-\frac{2}{a^2-25b^2}+\frac{1}{(a+5b)^2}$;

4) $\frac{x^2+9x+18}{xy+3y-2x-6}-\frac{x+5}{y-2}$.

**125.**•• Доведіть тотожність:

1) $\frac{a+3}{a^2-3a}+\frac{a-3}{3a+9}+\frac{12}{9-a^2}=\frac{a-3}{3a}$;

2) $\frac{b-4}{2a-1}-\frac{b^2-2b-24}{2ab-4-b+8a}=\frac{2}{2a-1}$.

**126.**** Доведіть тотожність:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0.$$

**127.**** Доведіть тотожність:

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1.$$

**128.*** Спростіть вираз:

$$\frac{1}{(a-1)(a-2)}+\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-4)}.$$

**129.*** Спростіть вираз:

$$\frac{1}{(a-1)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-5)}+\frac{1}{(a-5)(a-7)}.$$

**130.*** Доведіть тотожність:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}=\frac{32}{1-a^{32}}.$$

**131.*** Доведіть тотожність:

$$\frac{3}{1-a^2}+\frac{3}{1+a^2}+\frac{6}{1+a^4}+\frac{12}{1+a^8}+\frac{24}{1+a^{16}}=\frac{48}{1-a^{32}}.$$

**132.*** Доведіть, що коли $\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{a+c}+\frac{c-b}{a+b}=1$, то $\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+c}+\frac{a+c}{a+b}=4$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**133.** Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{x}{3}+\frac{x-1}{2}=4$;  2) $\frac{x-4}{2}-\frac{x-1}{5}=3$.

**134.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y=8, \\ 3x-2y=9; \end{cases}$  2) $\begin{cases} 2x+5y=13, \\ 3x-5y=-13. \end{cases}$

**135.** За перший день триденної гонки велосипедисти проїхали $\frac{4}{15}$ усього маршруту, за другий день — $\frac{2}{5}$ усього маршруту, а за третій — решту 90 км. Яку відстань проїхали велосипедисти за 3 дні?

**136.** (*З болгарського фольклору.*) П'ятеро братів хотіли поділити 20 овець так, щоб кожен з них одержав непарну кількість овець. Чи можливо це?

**137.** Чи є правильним твердження, що при будь-якому натуральному $n$ значення виразу $(5n+7)^2-(n-1)^2$ ділиться націло на 48?

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**138.** Укажіть число, обернене до числа:

1) $\frac{5}{8}$; 2) 7; 3) $-3\frac{5}{6}$; 4) $\frac{1}{14}$; 5) 0,12.

**139.** Знайдіть значення добутку:

1) $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{20}$; 2) $6\cdot\frac{7}{18}$; 3) $\frac{3}{8}\cdot\left(-2\frac{2}{3}\right)$.

**140.** Виконайте ділення:

1) $\frac{5}{18}:\left(-\frac{25}{27}\right)$; 2) $8:\frac{4}{17}$; 3) $-\frac{8}{15}:(-24)$; 4) $1\frac{3}{5}:5\frac{1}{3}$.

**141.** Знайдіть значення степеня:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; 2) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; 3) $\left(-2\frac{2}{3}\right)^2$; 4) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$.

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**142.** Два пороми одночасно відпливають від протилежних берегів річки і перетинають її перпендикулярно до них. Швидкості поромів сталі, але різні. Пороми зустрічаються на відстані 720 м від одного з берегів, після чого продовжують рух. Діставшись берегів, пороми відразу починають рухатися назад. На зворотному шляху вони зустрічаються на відстані 400 м від другого берега. Яка ширина річки?

## ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 1

**1.** Який з наведених виразів є цілим?

А) $\frac{m+n}{m}$; Б) $\frac{m+n}{7}$; В) $\frac{m+n}{7m}$; Г) $m+\frac{n}{7m}$.

**2.** При якому значенні змінної не має змісту вираз $\frac{3a}{2a-10}$?

А) 0; Б) 10; В) 5; Г) 0; 5.

**3.** При яких значеннях аргументу функція $y=\frac{x+2}{x^2-1}$ є невизначеною?

А) $-1; 1$;   Б) $1$;   В) $-2; -1; 1$;   Г) $-2; 1$.

**4.** Скоротіть дріб $\dfrac{21a^6}{14a^3}$.

А) $\dfrac{3a^3}{2}$;   Б) $\dfrac{3a^2}{2}$;   В) $\dfrac{3}{2a^3}$;   Г) $\dfrac{3}{2a^2}$.

**5.** Якому з наведених дробів тотожно дорівнює дріб $\dfrac{5b-15}{b^2-9}$?

А) $\dfrac{b-3}{5}$;   Б) $\dfrac{b+3}{5}$;   В) $\dfrac{5}{b-3}$;   Г) $\dfrac{5}{b+3}$.

**6.** Скоротіть дріб $\dfrac{12c^2-4c}{3c-1}$.

А) $4c$;   Б) $-4c$;   В) $\dfrac{1}{4c}$;   Г) $-\dfrac{1}{4c}$.

**7.** Виконайте віднімання: $\dfrac{5x}{x-2}-\dfrac{10}{x-2}$.

А) $\dfrac{x+2}{x-2}$;   Б) $\dfrac{5x+10}{x-2}$;   В) $5$;   Г) $-5$.

**8.** Виконайте додавання: $\dfrac{4-m}{m-3}+\dfrac{2m-5}{3-m}$.

А) $\dfrac{m-1}{m-3}$;   Б) $\dfrac{1-3m}{m-3}$;   В) $3$;   Г) $-3$.

**9.** Подайте у вигляді дробу вираз $\dfrac{3n^2}{n-6}-3n$.

А) $\dfrac{3n}{n-4}$;   Б) $\dfrac{3n}{4-n}$;   В) $\dfrac{18n}{n-6}$;   Г) $\dfrac{18}{6-n}$.

**10.** Спростіть вираз $\dfrac{2m+1}{3m-2}-\dfrac{3m^2+m-2}{9m^2-12m+4}$.

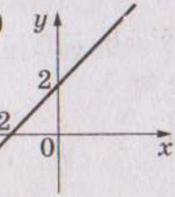
А) $\dfrac{1}{(3m-2)^2}$;   Б) $\dfrac{1}{3m-2}$;   В) $\dfrac{m}{(3m-2)^2}$;   Г) $\dfrac{m}{3m-2}$.

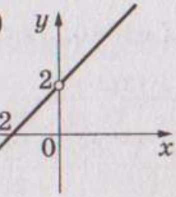
**11.** Спростіть вираз $\dfrac{a-12}{a^2+4a}-\dfrac{a-4}{a}+\dfrac{a}{a+4}$.

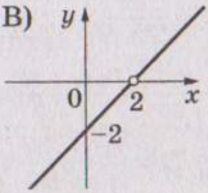
А) $\dfrac{4}{a}$;   Б) $\dfrac{1}{a}$;   В) $a$;   Г) $a+4$.

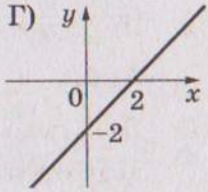
**12.** На якому рисунку зображено графік функції

$y=\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}$?

А)



Б)



В)



Г)


## 5. Множення і ділення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня

Ви знаєте правила множення і ділення звичайних дробів. Їх можна виразити такими рівностями:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\ \ \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

За аналогічними правилами виконують множення і ділення раціональних дробів.

***Добутком двох раціональних дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників даних дробів, а знаменник — добутку їх знаменників.***

***Часткою двох раціональних дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельника діленого і знаменника дільника, а знаменник — добутку знаменника діленого і чисельника дільника.***

**ПРИКЛАД 1**

Виконайте дії:

1) $\frac{21c^6}{b^8}\cdot\frac{b^2}{14c^4}$;

2) $(2x-12)\cdot\frac{4x}{x^2-12x+36}$;

3) $\frac{a^2+2ab}{a+9}:\frac{a^2-4b^2}{3a+27}$;

4) $\frac{5c^2-35c}{c+2}:(c-7)$.

*Розв'язання*

1) Маємо:

$$\frac{21c^6}{b^8}\cdot\frac{b^2}{14c^4}=\frac{21c^6\cdot b^2}{b^8\cdot 14c^4}=\frac{3c^2}{2b^6}.$$

2) Подавши многочлен $2x-12$ у вигляді дробу зі знаменником 1, отримуємо:

$$(2x-12)\cdot\frac{4x}{x^2-12x+36}=\frac{2x-12}{1}\cdot\frac{4x}{x^2-12x+36}=$$

$$=\frac{2(x-6)\cdot 4x}{(x-6)^2}=\frac{8x}{x-6}.$$

3) $\frac{a^2+2ab}{a+9}:\frac{a^2-4b^2}{3a+27}=\frac{a(a+2b)}{a+9}\cdot\frac{3(a+9)}{(a-2b)(a+2b)}=\frac{3a}{a-2b}.$

4) $\frac{5c^2-35c}{c+2}:(c-7)=\frac{5c^2-35c}{c+2}:\frac{c-7}{1}=\frac{5c(c-7)}{c+2}\cdot\frac{1}{c-7}=\frac{5c}{c+2}.$

Правило множення двох дробів можна узагальнити для знаходження добутку трьох або більше раціональних дробів. Наприклад, для трьох дробів маємо:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C \cdot P}{B \cdot D \cdot Q}.$$

**ПРИКЛАД 2**

Спростіть вираз $\frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3}$.

*Розв'язання*

Маємо:

$$\frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3} = \frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} \cdot \frac{9bc^3}{4a^2} = \frac{2a^5 \cdot 10b^2 \cdot 9bc^3}{15b^3 \cdot 7c^4 \cdot 4a^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot a^5b^3c^3}{15 \cdot 7 \cdot 4 \cdot a^2b^3c^4} = \frac{3a^3}{7c}.$$

Застосовуючи правило множення дробів, можна отримати правило піднесення раціональних дробів до степеня. Для натурального $n$, $n > 1$, маємо:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \underbrace{\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \ldots \cdot \frac{A}{B}}_{n \text{ множників}} = \frac{\overbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}^{n \text{ множників}}}{\underbrace{B \cdot B \cdot \ldots \cdot B}_{n \text{ множників}}} = \frac{A^n}{B^n}.$$

Для $n = 1$ домовилися, що $\left(\frac{A}{B}\right)^1 = \frac{A}{B}$.

Отже,

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}, \text{ де } n \text{ — натуральне число.}$$

***Щоб піднести раціональний дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник і знаменник і перший результат записати як чисельник, а другий — як знаменник дробу.***

**ПРИКЛАД 3**

Подайте у вигляді дробу вираз $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3$.

*Розв'язання*

$$\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\frac{(3a^2)^3}{(2bc^4)^3} = -\frac{3^3 \cdot (a^2)^3}{2^3b^3(c^4)^3} = -\frac{27a^6}{8b^3c^{12}}.$$

1. Що є добутком двох раціональних дробів?
2. Що є часткою двох раціональних дробів?
3. Як піднести раціональний дріб до степеня?

**143.°** Якому з наведених виразів дорівнює добуток $\frac{a^3}{c^8} \cdot \frac{c^4}{a^3}$?

1) $\frac{1}{c^2}$; 2) $\frac{a}{c^2}$; 3) $\frac{1}{c^4}$; 4) $\frac{a}{c^4}$.

**144.°** Виконайте множення:

1) $\frac{3a^2}{c} \cdot \frac{a^2}{c}$; 4) $\frac{3m}{16n^2} \cdot 8n^6$; 7) $\frac{48ab}{17c^4} \cdot \frac{51bc^5}{40a^4}$;

2) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{8a}$; 5) $14m^9 \cdot \frac{n^2}{7m^3}$; 8) $\frac{21c^3}{13p^2} \cdot \frac{39p}{28c^2}$.

3) $\frac{x}{yz} \cdot \frac{y^4}{5x}$; 6) $\frac{15a^4}{b^{12}} \cdot \frac{b^6}{10a^2}$;

**145.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2}{b^6} \cdot \frac{b^2}{a^2}$; 3) $\frac{a}{2b} \cdot 2a$; 5) $\frac{11x^3}{y^8} \cdot \frac{y^5}{33x^7}$;

2) $\frac{4m^2}{k^5} \cdot \frac{mk^5}{12}$; 4) $15x^{12} \cdot \frac{y^2}{5x^4}$; 6) $\frac{7k^8}{9mp} \cdot \frac{27m^3}{56k^6p^2}$.

**146.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{a-b}{3b} \cdot \frac{3}{a-b}$; 6) $\frac{m-2}{m^2-49} \cdot \frac{m+7}{m-2}$;

2) $\frac{2mn+n^2}{6m} \cdot \frac{2m}{n}$; 7) $(a+4) \cdot \frac{a}{2a+8}$;

3) $\frac{7a+7b}{b^6} \cdot \frac{b^3}{a+b}$; 8) $\frac{x-9}{4x+8} \cdot \frac{x^2+2x}{x-9}$;

4) $\frac{32a}{a^2-9} \cdot \frac{a-3}{8a}$; 9) $\frac{4a^2-4a+1}{3a+3} \cdot \frac{a+1}{2a-1}$;

5) $\frac{c-1}{c+6} \cdot \frac{c+6}{c^2-2c+1}$; 10) $\frac{a^2-25}{4a} \cdot \frac{4a^2}{a^2-5a}$.

**147.°** Виконайте множення:

1) $\frac{3a+b}{4c} \cdot \frac{c}{3a+b}$; 4) $\frac{18b}{b^2-16} \cdot \frac{b+4}{3b}$;

2) $\frac{ab-b^2}{8} \cdot \frac{4a}{b^4}$; 5) $\frac{6}{m^2-9n^2} \cdot (m-3n)$;

3) $\frac{5x-5y}{x^6} \cdot \frac{x^3}{x-y}$; 6) $\frac{3c-9}{9c^2+6c+1} \cdot \frac{3c+1}{c-3}$.

**148.°** Якому з наведених виразів дорівнює частка $\frac{3}{c^3} : \frac{12}{c^9}$?

1) $\frac{c^3}{4}$; 2) $\frac{c^6}{4}$; 3) $4c^3$; 4) $4c^6$.

**149.°** Виконайте ділення:

1) $\frac{8m}{n} : \frac{4m}{n}$;
2) $\frac{3b}{8} : b$;
3) $\frac{7c^2}{d} : \frac{c}{d^3}$;
4) $\frac{6a}{5b} : \frac{3a^2}{20b^2}$;
5) $-\frac{9a}{b^5} : \frac{18a^4}{b^3}$;
6) $a^2 : \frac{a}{b^2c}$;
7) $24a^3 : \frac{12a^2}{b}$;
8) $\frac{36a}{c^3} : (4a^2c)$.

**150.°** Знайдіть частку:

1) $\frac{7}{a^2} : \frac{28}{a^8}$;
2) $\frac{b^9}{8} : \frac{b^3}{48}$;
3) $\frac{27}{m^6} : \frac{36}{m^7n^2}$;
4) $\frac{6x^{10}}{y^8} : (30x^5y^2)$;
5) $49m^4 : \frac{21m}{n^2}$;
6) $\frac{16x^3y^8}{33z^5} : \left(-\frac{10x^2}{55z^6}\right)$.

**151.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{a-b}{7a} : \frac{a-b}{7b}$;
2) $\frac{x^2-y^2}{x^2} : \frac{6x+6y}{x^5}$;
3) $\frac{c-5}{c^2-4c} : \frac{c-5}{5c-20}$;
4) $\frac{x-y}{xy} : \frac{x^2-y^2}{3xy}$;
5) $\frac{a^2-25}{a+7} : \frac{a-5}{a+7}$;
6) $\frac{a^2-4a+4}{a+2} : (a-2)$;
7) $(p^2-16k^2) : \frac{p+4k}{p}$;
8) $\frac{a^2-ab}{a^2} : \frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

**152.°** Виконайте ділення:

1) $\frac{5m-2n}{10k} : \frac{5m-2n}{10k^2}$;
2) $\frac{p+3}{p^2-2p} : \frac{p+3}{4p-8}$;
3) $\frac{a^2-b^2}{2ab} : \frac{a+b}{ab}$;
4) $\frac{a^2-16}{a-3} : \frac{a+4}{a-3}$;
5) $\frac{y-9}{y-8} : \frac{y^2-81}{y^2-16y+64}$;
6) $(x^2-49y^2) : \frac{x-7y}{x}$.

**153.°** Виконайте піднесення до степеня:

1) $\left(\frac{a}{b}\right)^9$; 2) $\left(\frac{m}{n^2}\right)^8$; 3) $\left(\frac{c}{2d}\right)^5$;

4) $\left(\frac{5a^6}{b^5}\right)^2$; 5) $\left(-\frac{3m^4}{2n^3}\right)^3$; 6) $\left(-\frac{6a^6}{b^7}\right)^2$.

**154.°** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\left(\frac{a^6}{b^3}\right)^{10}$; 3) $\left(-\frac{10c^7}{3d^5}\right)^3$;

2) $\left(-\frac{4m}{9n^3}\right)^2$; 4) $\left(\frac{2m^3n^2}{kp^8}\right)^6$.

**155.˙** Спростіть вираз:

1) $\frac{6a^4b^2}{35c^3}\cdot\frac{14b^2}{a^7c^5}\cdot\frac{5a^3c^8}{18b^4}$; 4) $\left(\frac{m^5n}{3p^3}\right)^3 : \frac{m^{10}n^5}{54p^8}$;

2) $\frac{33m^8}{34n^8} : \frac{88m^4}{51n^4} : \frac{21m^6}{16n^2}$; 5) $\left(\frac{2a^5}{y^6}\right)^4 : \left(\frac{4a^6}{y^8}\right)^3$;

3) $\frac{36x^6}{49y^5} : \frac{24x^9}{25y^4}\cdot\frac{7x^2}{30y}$; 6) $\left(-\frac{27x^3}{16y^5}\right)^2\cdot\left(\frac{8y^3}{9x^2}\right)^3$.

**156.˙** Спростіть вираз:

1) $\frac{3a^4b^3}{10c^5}\cdot\frac{4b^4c^2}{27a^7} : \frac{5b^7}{9a^3c^3}$; 3) $\left(\frac{5a^3}{b^4}\right)^4\cdot\frac{b^{18}}{50a^{16}}$;

2) $\frac{3a^2}{2b^2c^2} : \frac{7c^8}{6b^3} : \frac{9ab}{14c^{12}}$; 4) $\left(\frac{3x^7}{y^{10}}\right)^4 : \left(\frac{3x^6}{y^8}\right)^3$.

**157.˙** Замініть змінну $x$ таким виразом, щоб утворилася тотожність:

1) $\left(\frac{4a^2}{b^3}\right)^2\cdot x = \frac{6a}{b^2}$; 2) $\left(\frac{2b^4}{3c}\right)^3 : x = \frac{b^6}{12}$.

**158.˙** Виконайте множення і ділення дробів:

1) $\frac{4-a}{8a^3}\cdot\frac{12a^5}{a^2-16}$; 6) $\frac{x^2-9}{x+y}\cdot\frac{5x+5y}{x^2-3x}$;

2) $\frac{4c-d}{c^2+cd}\cdot\frac{2c^2-2d^2}{4c^2-cd}$; 7) $\frac{m+2n}{2-3m} : \frac{m^2+4mn+4n^2}{3m^2-2m}$;

3) $\frac{b^2-6b+9}{b^2-3b+9}\cdot\frac{b^3+27}{5b-15}$; 8) $\frac{a^3+8}{16-a^4} : \frac{a^2-2a+4}{a^2+4}$;

4) $\frac{a^3-16a}{3a^2b}\cdot\frac{12ab^2}{4a+16}$; 9) $\frac{x^2-12x+36}{3x+21}\cdot\frac{x^2-49}{4x-24}$;

5) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}\cdot\frac{7a-7b}{a^2-ab+b^2}$; 10) $\frac{3a+15b}{a^2-81b^2} : \frac{4a+20b}{a^2-18ab+81b^2}$.

**159.**[•] Спростіть вираз:

1) $\frac{7a^2}{a^2-25}\cdot\frac{5-a}{a}$;

2) $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\cdot\frac{b-a}{b+a}$;

3) $\frac{a^4-1}{a^3-a}\cdot\frac{a}{1+a^2}$;

4) $\frac{a^2-8ab}{12b}:\frac{8b^2-ab}{24a}$;

5) $\frac{5m^2-5n^2}{m^2+n^2}:\frac{15n-15m}{4m^2+4n^2}$;

6) $\frac{mn^2-36m}{m^3-8}:\frac{2n+12}{6m-12}$;

7) $\frac{a^4-1}{a^2-a+1}:\frac{a-1}{a^3+1}$;

8) $\frac{4x^2-100}{6x}:(2x^2-20x+50)$.

**160.**[•] Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $\frac{a^2-81}{a^2-8a}:\frac{a-9}{a^2-64}$, якщо $a=-4$;

2) $\frac{x}{4x^2-4y^2}:\frac{1}{6x+6y}$, якщо $x=4{,}2$, $y=-2{,}8$;

3) $(3a^2-18a+27):\frac{3a-9}{4a}$, якщо $a=0{,}5$;

4) $\frac{a^6+a^5}{(3a-3)^2}:\frac{a^5+a^4}{9a^2-9a}$, якщо $a=0{,}8$.

**161.**[•] Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{a^2-ab}:\frac{b}{b^2-a^2}$, якщо $a=2\frac{1}{3}$, $b=-\frac{3}{7}$;

2) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{a^2-9b^2}:\frac{3a+6b}{2a-6b}$, якщо $a=4$, $b=-5$.

**162.**[••] Відомо, що $x-\frac{1}{x}=9$. Знайдіть значення виразу $x^2+\frac{1}{x^2}$.

**163.**[••] Відомо, що $3x+\frac{1}{x}=-4$. Знайдіть значення виразу $9x^2+\frac{1}{x^2}$.

**164.**[••] Дано: $x^2+\frac{16}{x^2}=41$. Знайдіть значення виразу $x+\frac{4}{x}$.

**165.**[••] Дано: $x^2+\frac{1}{x^2}=6$. Знайдіть значення виразу $x-\frac{1}{x}$.

**166.**[••] Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2-36}{a^2+ab-6a-6b}:\frac{a^2+ab+6a+6b}{a^2+2ab+b^2}$;

2) $\frac{a^2+a-ab-b}{a^2+a+ab+b}:\frac{a^2-a-ab+b}{a^2-a+ab-b}$.

**167.**" Виконайте дії:

1) $\frac{25-5a+5b-ab}{25+5a-5b-ab}\cdot\frac{ab-5a-5b+25}{ab+5a+5b+25}$;

2) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab-4a+4b}:\frac{a^2-ab+4a-4b}{a^2-16}$.

**168.**" Доведіть тотожність $\frac{8a^2}{a-3b}:\frac{6a^3}{a^2-9b^2}\cdot\frac{3a}{4a+12b}=1$.

**169.**" Доведіть тотожність:

$\frac{a^2+a}{2a-12}\cdot\frac{6a+6}{2a+12}:\frac{9a^3+18a^2+9a}{a^2-36}=\frac{1}{6}$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**170.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x+3)^2-2x(5+2x)=10$;

2) $(x-2)(x-3)-(x-6)(x+1)=12$.

**171.** Доведіть, що рівняння $\frac{2x+1}{3}-\frac{x-4}{2}=\frac{x+5}{6}$ не має коренів.

**172.** З пункту $A$ в пункт $B$, відстань між якими дорівнює 192 км, зі швидкістю 60 км/год виїхав мотоцикліст. Через 30 хв назустріч йому з пункту $B$ зі швидкістю 75 км/год виїхав другий мотоцикліст. Скільки часу їхав другий мотоцикліст до зустрічі з першим?

**173.** У двох бідонах разом 80 л молока. Якщо з першого бідона перелити 20 % молока в другий бідон, то в обох бідонах молока стане порівну. Скільки літрів молока було в кожному бідоні?

**174.** (*З підручника «Арифметика» Л. Ф. Магницького*[1].) Дванадцятеро людей несуть 12 хлібів. Кожний чоловік несе по 2 хліби, жінка — по половині хліба, а дитина — по чверті хліба. Скільки було чоловіків, жінок і дітей?

[1] Магницький Л. Ф. (1669–1739) — російський математик-педагог, автор знаменитого підручника «Арифметика» (1703), за яким навчалося багато поколінь.

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**175.** Василь і Петро по черзі заміняють у рівнянні $x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + * = 0$ один знак * на деяке число. Першим заміну робить Василь. Петро прагне, щоб отримане рівняння мало корінь. Чи може Василь йому завадити?

# 6. Тотожні перетворення раціональних виразів

Правила дій над раціональними дробами дають змогу будь-який раціональний вираз перетворити в раціональний дріб.

Розглянемо це на прикладах.

**ПРИКЛАД 1**

Спростіть вираз:

$$\left(\frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{a^2 - 4a + 4}\right) : \frac{a-4}{a^2-4} - \frac{2a^2+8a}{a-2}.$$

*Розв'язання*

Як і обчислення значення числового виразу, що містить кілька арифметичних дій, спрощення даного виразу можна виконати по діях, визначаючи порядок виконання відповідно до порядку виконання арифметичних дій: спочатку — віднімання виразів, які стоять у дужках, потім — ділення, і наприкінці — віднімання:

1) $\frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{a^2-4a+4} \overset{a-2}{=} \frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{(a-2)^2} = \frac{3a^2-6a-6a}{(a-2)^2} = \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}$;

2) $\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2} : \frac{a-4}{a^2-4} = \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2} \cdot \frac{a^2-4}{a-4} = \frac{3a(a-4)}{(a-2)^2} \cdot \frac{(a-2)(a+2)}{a-4} =$
$= \frac{3a(a+2)}{a-2} = \frac{3a^2+6a}{a-2}$;

3) $\frac{3a^2+6a}{a-2} - \frac{2a^2+8a}{a-2} = \frac{3a^2+6a-2a^2-8a}{a-2} = \frac{a^2-2a}{a-2} = \frac{a(a-2)}{a-2} = a.$

Відповідь: $a$.

Перетворення раціонального виразу можна виконувати не по окремих діях, а «ланцюжком». Проілюструємо цей прийом на наступному прикладі.

**ПРИКЛАД 2**

Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу $\frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{18-6a} \cdot \frac{54a}{5a+a^2}$ не залежить від значення $a$.

*Розв'язання*

$$\frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{18-6a} \cdot \frac{54a}{5a+a^2} = \frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{6(3-a)} \cdot \frac{54a}{a(5+a)} = \frac{3a}{a-3} + \frac{9}{3-a} =$$

$$= \frac{3a}{a-3} - \frac{9}{a-3} = \frac{3a-9}{a-3} = \frac{3(a-3)}{a-3} = 3.$$

Отже, при всіх допустимих значеннях $a$ значення даного виразу дорівнює 3.

**ПРИКЛАД 3**

Доведіть тотожність:

$$\left(\frac{a-7}{3a-1} + \frac{a-7}{a+1}\right) \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} = \frac{4}{a+1}.$$

*Розв'язання*

У цьому випадку для перетворення лівої частини даної рівності доцільно розкрити дужки, застосовуючи розподільну властивість множення:

$$\left(\frac{a-7}{3a-1} + \frac{a-7}{a+1}\right) \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} = \frac{a-7}{3a-1} \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} + \frac{a-7}{a+1} \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} =$$

$$\overset{a+1}{=} \frac{1}{a} + \frac{3a-1}{a(a+1)} = \frac{a+1+3a-1}{a(a+1)} = \frac{4a}{a(a+1)} = \frac{4}{a+1}.$$

Тотожність доведено.

**ПРИКЛАД 4**

Спростіть вираз $\dfrac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}}$.

*Розв'язання*

Записавши даний вираз у вигляді частки чисельника і знаменника, отримуємо:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right):\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=\frac{bc+ac+ab}{abc}:\frac{c+a+b}{abc}=$$

$$=\frac{bc+ac+ab}{abc}\cdot\frac{abc}{c+a+b}=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Заданий вираз можна спростити іншим способом, використовуючи основну властивість дробу, а саме помножити його чисельник і знаменник на одночлен $abc$:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)abc}{\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)abc}=\frac{\frac{1}{a}\cdot abc+\frac{1}{b}\cdot abc+\frac{1}{c}\cdot abc}{\frac{1}{ab}\cdot abc+\frac{1}{bc}\cdot abc+\frac{1}{ac}\cdot abc}=$$

$$=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Відповідь: $\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}$.

**176.°** Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{4}\right)\cdot\frac{6}{a^2}$;

2) $\frac{a^2b}{a-b}\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$;

3) $\left(1+\frac{a}{b}\right):\left(1-\frac{a}{b}\right)$;

4) $\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{2a}{b}+1\right)\cdot\frac{b}{a-b}$;

5) $\frac{a^2-ab}{b^2-1}\cdot\frac{b+1}{a}-\frac{a}{b-1}$;

6) $\left(\frac{5}{m-n}-\frac{4}{m+n}\right):\frac{m+9n}{m+n}$;

7) $\frac{x-2}{x+2}\cdot\left(x-\frac{x^2}{x-2}\right)$;

8) $\frac{x^2+x}{4}:\frac{x^2}{4}+\frac{x-1}{x}$;

9) $\frac{6c^2}{c^2-1}:\left(\frac{1}{c-1}+1\right)$;

10) $\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right)\cdot\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$.

**177.°** Спростіть вираз:

1) $\left(x+\frac{x}{y}\right):\left(x-\frac{x}{y}\right)$;

2) $\left(\frac{a}{b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\cdot\frac{ab^2}{a^2+b^2}$;

3) $\left(\frac{m}{m-1}-1\right):\frac{m}{mn-n}$;

4) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{4ab}{a-b}$;

5) $\frac{a}{b}-\frac{a^2-b^2}{b^2}:\frac{a+b}{b}$;

6) $\frac{7x}{x+2}-\frac{x-8}{3x+6}\cdot\frac{84}{x^2-8x}$;

7) $\left(a-\frac{9a-9}{a+3}\right):\frac{a^2-3a}{a+3}$;

8) $\left(\frac{a}{a+2}-\frac{8}{a+8}\right)\cdot\frac{a^2+8a}{a-4}$.

**178.**$^{\bullet}$ Виконайте дії:

1) $\frac{a+2}{a^2-2a+1} : \frac{a^2-4}{3a-3} - \frac{3}{a-2}$;

2) $\frac{b^2+3b}{b^3+9b} \cdot \left(\frac{b-3}{b+3} + \frac{b+3}{b-3}\right)$;

3) $\left(\frac{3c+1}{3c-1} - \frac{3c-1}{3c+1}\right) : \frac{2c}{6c+2}$;

4) $\left(\frac{1}{a^2-4ab+4b^2} - \frac{1}{4b^2-a^2}\right) : \frac{2a}{a^2-4b^2}$;

5) $\left(\frac{a-8}{a^2-10a+25} - \frac{a}{a^2-25}\right) : \frac{a-20}{(a-5)^2}$;

6) $\left(\frac{2x+1}{x^2+6x+9} - \frac{x-2}{x^2+3x}\right) : \frac{x^2+6}{x^3-9x}$.

**179.**$^{\bullet}$ Виконайте дії:

1) $\frac{b+4}{b^2-6b+9} : \frac{b^2-16}{2b-6} - \frac{2}{b-4}$;

2) $\left(\frac{m-1}{m+1} - \frac{m+1}{m-1}\right) : \frac{4m}{m^2-1}$;

3) $\frac{2x}{x^2-y^2} : \left(\frac{1}{x^2+2xy+y^2} - \frac{1}{y^2-x^2}\right)$;

4) $\left(\frac{2a-3}{a^2-4a+4} - \frac{a-1}{a^2-2a}\right) : \frac{a^2-2}{a^3-4a}$.

**180.**$^{\bullet}$ Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{15}{x-7} - x - 7\right) \cdot \frac{7-x}{x^2-16x+64}$;

2) $\left(a - \frac{5a-16}{a-3}\right) : \left(2a - \frac{2a}{a-3}\right)$;

3) $\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{a}{b^2}\right) \cdot \frac{ab}{a^2-b^2} + \frac{2}{b-a}$;

4) $\left(\frac{a}{a-1} - \frac{a}{a+1} - \frac{a^2+1}{1-a^2}\right) : \frac{a^2+a}{(a-1)^2}$;

5) $\left(\frac{x+2y}{x-2y} - \frac{x-2y}{x+2y} - \frac{16y^2}{x^2-4y^2}\right) : \frac{4y}{x+2y}$;

6) $\left(\frac{3a-8}{a^2-2a+4} + \frac{1}{a+2} - \frac{4a-28}{a^3+8}\right) \cdot \frac{a^2-4}{4}$.

**181.**˙ Спростіть вираз:

1) $\frac{x^2+14x+49}{x+6}:\left(\frac{13}{x+6}-x+6\right)$;

2) $\left(c-\frac{2c-9}{c+8}\right):\frac{c^2+3c}{c^2-64}+\frac{24}{c}$;

3) $\left(\frac{36}{x^2-9}-\frac{x-3}{x+3}-\frac{3+x}{3-x}\right):\frac{6}{3-x}$;

4) $\left(\frac{2y-1}{y^2+2y+4}+\frac{9y+6}{y^3-8}+\frac{1}{y-2}\right)\cdot\frac{y^2-4}{18}$.

**182.**˙ Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{2b-2a}\right):\frac{2b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{4}$;

2) $\left(\frac{8a}{4-a^2}-\frac{a-2}{a+2}\right):\frac{a+2}{a}+\frac{2}{a-2}=-1$;

3) $\left(\frac{3}{36-c^2}+\frac{1}{c^2-12c+36}\right)\cdot\frac{(c-6)^2}{2}+\frac{3c}{c+6}=2$.

**183.**˙ Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{b}{a^2-ab}-\frac{2}{a-b}-\frac{a}{b^2-ab}\right):\frac{a^2-b^2}{4ab}=\frac{4}{a+b}$;

2) $\frac{(a-b)^2}{a}\cdot\left(\frac{a}{(a-b)^2}+\frac{a}{b^2-a^2}\right)+\frac{3a+b}{a+b}=3$.

**184.**˙ Чи залежить значення виразу від значення змінної, яка входить до нього:

1) $\left(\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{1}{a^2+a}\right):\frac{3a+3}{a^2-a}$;

2) $\left(\frac{a}{a^2-49}-\frac{1}{a+7}\right):\frac{7a}{a^2+14a+49}-\frac{2}{a-7}$?

**185.**˙ Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної, яка входить до нього:

1) $\frac{3x^2-27}{4x^2+2}\cdot\left(\frac{6x+1}{x-3}+\frac{6x-1}{x+3}\right)$;

2) $\frac{3}{2a-3}-\frac{8a^3-18a}{4a^2+9}\cdot\left(\frac{2a}{4a^2-12a+9}-\frac{3}{4a^2-9}\right)$.

**186.**˙ Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a-\frac{a^2}{a+1}}{a-\frac{a}{a+1}}$;

2) $\dfrac{a-\frac{6a-9}{a}}{1-\frac{3}{a}}$;

3) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}}$;

4) $\dfrac{\dfrac{2a-b}{b}+1}{\dfrac{2a+b}{b}-1}+\dfrac{3-\dfrac{b}{a}}{\dfrac{3a}{b}-1}$.

**187.**$^{\bullet}$ Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a-b}{a}}$;

2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a+1}}}$.

**188.**$^{\bullet\bullet}$ Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{a^2}{b^3-ab^2}+\dfrac{a-b}{b^2}-\dfrac{1}{b}\right):\left(\dfrac{a+b}{b-a}-\dfrac{b-a}{a+b}+\dfrac{6a^2}{a^2-b^2}\right)$;

2) $\left(\dfrac{a+2}{4a^3-4a^2+a}-\dfrac{2-a}{1-8a^3}\cdot\dfrac{4a^2+2a+1}{2a^2+a}\right):\left(\dfrac{1}{1-2a}\right)^2-\dfrac{8a-1}{2a^2+a}$.

**189.**$^{\bullet\bullet}$ Спростіть вираз:

$\left(\dfrac{18y^2+3y}{27y^3-1}-\dfrac{3y+1}{9y^2+3y+1}\right):\left(1-\dfrac{3y-1}{y}-\dfrac{5-6y}{3y-1}\right)$.

**190.**$^{\bullet\bullet}$ Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{16}{(a-2)^4}:\left(\dfrac{1}{(a-2)^2}-\dfrac{2}{a^2-4}+\dfrac{1}{(a+2)^2}\right)-\dfrac{8a}{(a-2)^2}=1$;

2) $\dfrac{a+11}{a+9}-\left(\dfrac{a+5}{a^2-81}+\dfrac{a+7}{a^2-18a+81}\right):\left(\dfrac{a+3}{a-9}\right)^2=1$.

**191.**$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз $\dfrac{b^2+9}{3b^2-b^3}+\left(\dfrac{b+3}{b-3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{b-3}+\dfrac{6}{9-b^2}-\dfrac{3}{b^2+3b}\right)$ набуває додатних значень.

**192.**$^{\bullet\bullet}$ Підставте замість $x$ даний вираз і виконайте спрощення:

1) $\dfrac{x-a}{x-b}$, якщо $x=\dfrac{ab}{a+b}$;   2) $\dfrac{a-bx}{b+ax}$, якщо $x=\dfrac{a-b}{a+b}$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**193.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x-1)(4x+5)-(2x+3)(6x+1)=4$;

2) $8x(2x+7)-(4x+3)^2=15$.

**194.** Доведіть, що значення виразу $2^{14}-2^{12}-2^{10}$ ділиться націло на 11.

**195.** Доведіть, що при будь-якому натуральному $n$ значення виразу $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ ділиться націло на 10.

**196.** У першому складі було картоплі у 3 рази більше, ніж у другому. Коли з першого складу вивезли 400 кг картоплі, то в ньому залишилося картоплі у 2 рази менше, ніж було в другому. Скільки картоплі було в першому складі спочатку?

**197.** Куртка коштувала на 200 грн. менше від костюма. Під час сезонного розпродажу куртка подешевшала на 10 %, а костюм — на 20 %, після чого куртку і костюм можна було придбати за 1010 грн. Якою була початкова ціна куртки і яка — костюма?

**198.** З пункту $A$ в пункт $B$ автомобіль їхав зі швидкістю 60 км/год, а повертався з пункту $B$ у пункт $A$ зі швидкістю 70 км/год іншою дорогою, яка на 15 км коротша від першої, і витратив на зворотний шлях на 30 хв менше, ніж на шлях з $A$ до $B$. За який час він проїхав з пункту $A$ в пункт $B$?

**199.** Робітник мав виготовляти щодня 10 деталей. Проте він виготовляв щодня 12 деталей і вже за 2 дні до закінчення терміну роботи йому залишилося виготовити 6 деталей. Скільки деталей мав виготовити робітник?

**200.*** (*З українського фольклору.*) За 30 монет купили 30 птахів. Скільки купили птахів кожного виду, якщо за 3 горобців платили одну монету, за 2 голубів — теж одну монету, а за одну горлицю — 2 монети, причому кожного виду купили хоча б одну пташку?

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**201.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x+7}{4} = \frac{x+5}{3}$; 3) $0{,}21x - 0{,}7x = 0$; 5) $25x^2 - 36 = 0$;

2) $x^2 + 6x = 0$; 4) $x^2 - 16 = 0$; 6) $x^2 + 4 = 0$.

**202.** При якому значенні змінної не має змісту вираз:

1) $\frac{6}{3x-9}$; 2) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$; 3) $\frac{x+4}{3x^2+12x}$;

4) $\frac{8}{x+7}+\frac{4}{x-2}$; 5) $\frac{x}{x^2-10x+25}$; 6) $\frac{x+2}{(x+10)(x-12)}$?

**203.** При якому значенні змінної значення дробу дорівнює нулю:

1) $\frac{x-8}{9}$; 2) $\frac{x-2}{x+2}$; 3) $\frac{4}{x-5}$?

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 14, 15 на с. 229, 230.

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**204.** На дошці написано многочлени $x + 2$ і $2x + 1$. Дозволяється записати суму, різницю або добуток будь-яких двох з уже написаних многочленів. Чи може на дошці з'явитися многочлен $2x^3 + x + 5$?

## ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 2

**1.** Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{12m^4}{n^{10}}\cdot\frac{n^5}{36m^8}$.

А) $\frac{1}{3m^2n^2}$; Б) $\frac{1}{3m^4n^5}$; В) $\frac{3}{m^2n^2}$; Г) $\frac{3}{m^4n^5}$.

**2.** Виконайте множення: $(a+5b)\cdot\frac{8}{a^2-25b^2}$.

А) $8(a - 5b)$; Б) $8(a + 5b)$; В) $\frac{8}{a+5b}$; Г) $\frac{8}{a-5b}$.

**3.** Спростіть вираз $\frac{b^2-6b+9}{b-7}\cdot\frac{b-7}{b-3}$.

А) $b + 3$; Б) $b - 3$; В) $\frac{1}{b-3}$; Г) $\frac{1}{b+3}$.

**4.** Виконайте ділення: $\frac{5a^6}{b^8}:10a^3b^2$.

А) $\frac{2a^9}{b^6}$; Б) $\frac{b^6}{2a^9}$; В) $\frac{2b^{10}}{a^3}$; Г) $\frac{a^3}{2b^{10}}$.

**5.** Спростіть вираз $\frac{3x+9}{x^2-2x}:\frac{x+3}{4x-8}$.

А) $\frac{12}{x}$; Б) $\frac{x}{12}$; В) 12; Г) $x$.

**6.** Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{n^2-3n}{64n^2-1}:\frac{n^4-27n}{64n^2+16n+1}$.

А) $\dfrac{8n+1}{(8n-1)(n^2+3n+9)}$; В) $\dfrac{8n-1}{(8n+1)(n^2+3n+9)}$;

Б) $\dfrac{8n+1}{(8n-1)(n^2-3n+9)}$; Г) $\dfrac{8n-1}{(8n+1)(n^2-3n+9)}$.

**7. Виконайте піднесення до степеня:** $\left(-\dfrac{2a^2}{b^3}\right)^4$.

А) $\dfrac{8a^8}{b^{12}}$; Б) $-\dfrac{8a^8}{b^{12}}$; В) $\dfrac{16a^8}{b^{12}}$; Г) $-\dfrac{16a^8}{b^{12}}$.

**8. Спростіть вираз** $\left(\dfrac{1}{a-6}-\dfrac{1}{a+6}\right):\dfrac{2}{a+6}$.

А) $\dfrac{6}{a+6}$; Б) $\dfrac{6}{a-6}$; В) $6(a-6)$; Г) $6(a+6)$.

**9. Якому числу при всіх допустимих значеннях $a$ дорівнює значення виразу** $\left(\dfrac{30a}{9a^2-25}+\dfrac{5}{5-3a}\right):\left(\dfrac{3a-5}{3a+5}-1\right)$?

А) $\dfrac{1}{2}$; Б) 2; В) $-\dfrac{1}{2}$; Г) −2.

**10. Чому дорівнює значення виразу** $\dfrac{a^2-4ab}{b^2}$, **якщо** $3a-5b=0{,}2(2a+b)$?

А) 4; Б) −4; В) 3; Г) −3.

**11. Відомо, що** $x+\dfrac{1}{x}=6$. **Знайдіть значення виразу** $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

А) 36; Б) 38; В) 34; Г) 35.

**12. Спростіть вираз** $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{a}{b^2}}{\dfrac{a}{b^2}-\dfrac{1}{a}}$.

А) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; В) $\dfrac{a^2+b^2}{ab^2(a^2-b^2)}$;

Б) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$; Г) $\dfrac{ab(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$.

# 7. Рівносильні рівняння. Раціональні рівняння

Розглянемо два рівняння: $x^2 = 4$ і $|x| = 2$.

Очевидно, що кожне з них має одні й ті самі корені: $-2$ і $2$.

У таких випадках говорять, що рівняння $x^2 = 4$ і $|x| = 2$ **рівносильні**.

Наведемо ще приклади пар рівносильних рівнянь:

$$\frac{1}{2}x = 0 \text{ і } 2x = 0;$$
$$2x = 4 \text{ і } 4x - 8 = 0;$$
$$x^2 = 1 \text{ і } (x - 1)(x + 1) = 0.$$

Розглянемо рівняння $x^2 = -5$ і $|x| = -3$. Кожне з цих рівнянь не має коренів. Такі рівняння прийнято вважати рівносильними.

**Означення.** **Два рівняння називають *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті самі корені або кожне з рівнянь коренів не має.**

Кожне з рівнянь $(x - 2)(x + 1) = 0$ і $x - 2 = 0$ має корінь $x = 2$. Проте ці рівняння не є рівносильними, оскільки корінь $-1$ першого рівняння не є коренем другого рівняння.

У VII класі ви вивчили властивості рівнянь з однією змінною. Тепер, застосовуючи поняття «рівносильне рівняння», ці властивості можна сформулювати так.

- Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, яке рівносильне даному.
- Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, яке рівносильне даному.
- Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, яке рівносильне даному.

Розглянемо задачу: «Автомобіль, проїхавши 180 км шляху, збільшив швидкість на 10 км/год і решту шляху, що становить 210 км, проїхав за той самий час, що й першу частину шляху. Знайдіть початкову швидкість автомобіля».

Нехай $x$ км/год — шукана швидкість. Тоді швидкість автомобіля на другій частині шляху дорівнює $(x + 10)$ км/год. Автомобіль подолав першу частину шляху за $\frac{180}{x}$ год, а другу — за $\frac{210}{x+10}$ год.

Рівняння $\frac{180}{x} = \frac{210}{x+10}$ є математичною моделлю розглянутої реальної ситуації. Обидві частини отриманого рівняння є раціональними виразами.

**Означення. Рівняння, ліва і права частини якого є раціональними виразами, називають раціональним.**

З означення випливає, що, розв'язуючи задачу, ми отримали раціональне рівняння.

Зазначимо, що лінійні рівняння з однією змінною, тобто рівняння виду $ax = b$, є раціональними.

Розглянемо раціональне рівняння виду $\frac{A}{B} = 0$, де $A$ і $B$ — многочлени.

Ви знаєте, що *дріб дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля*. Тому, щоб розв'язати рівняння виду $\frac{A}{B} = 0$, треба вимагати *одночасного* виконання двох умов: $A = 0$ і $B \neq 0$. Це означає, що при розв'язуванні рівнянь указаного виду слід керуватися таким алгоритмом:

- розв'язати рівняння $A = 0$;
- перевірити, які із знайдених коренів задовольняють умову $B \neq 0$;
- корені, які задовольняють умову $B \neq 0$, включити до відповіді.

**ПРИКЛАД 1**

Розв'яжіть рівняння $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2 - 4x + 3} = 0$.

*Розв'язання*

Прирівняємо чисельник дробу, який стоїть у лівій частині рівняння, до нуля. Маємо: $(x-1)(x+1)=0$. Коренями цього рівняння є числа $-1$ і $1$.

Перевіримо, чи задовольняють ці корені умову $x^2-4x+3\neq 0$.

При $x=-1$ отримуємо, що $x^2-4x+3=8\neq 0$.

При $x=1$ отримуємо, що $x^2-4x+3=0$.

Отже, $x=-1$ є коренем заданого рівняння, а $x=1$ — ні.

Відповідь: $-1$.

Таким чином, розв'язання рівняння виду $\frac{A}{B}=0$ зводиться до розв'язання рівняння $A=0$ і перевірки умови $B\neq 0$. У таких випадках говорять, що рівняння $\frac{A}{B}=0$ рівносильне системі:

$$\begin{cases} A=0, \\ B\neq 0. \end{cases}$$

Наприклад, рівняння $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3}=0$ рівносильне системі:

$$\begin{cases} (x-1)(x+1)=0, \\ x^2-4x+3\neq 0. \end{cases}$$

Як ми з'ясували, розв'язком цієї системи є $x=-1$.

Тепер ми можемо завершити розв'язування задачі про автомобіль. Маємо:

$$\frac{180}{x}=\frac{210}{x+10}.$$

Переходимо до рівносильного рівняння

$$\frac{180}{x}-\frac{210}{x+10}=0.$$

Звідси

$$\frac{180(x+10)-210x}{x(x+10)}=0;$$

$$\frac{1800-30x}{x(x+10)}=0.$$

Останнє рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 1800-30x=0, \\ x(x+10)\neq 0. \end{cases}$$

Коренем рівняння, яке входить до системи, є число 60; очевидно, що воно задовольняє умову $x(x+10) \neq 0$.
Відповідь: 60 км/год.

Як відомо, будь-який раціональний вираз можна подати у вигляді дробу. Тому будь-яке раціональне рівняння можна звести до рівняння виду $\frac{A}{B}=0$. Саме так ми зробили, розв'язуючи рівняння $\frac{180}{x}=\frac{210}{x+10}$.

**ПРИКЛАД 2**

Розв'яжіть рівняння $\frac{3x+5}{6x+3}+\frac{1}{4x^2-1}=\frac{x}{2x-1}$.

*Розв'язання*

Маємо:

$$\frac{3x+5}{3(2x+1)}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}-\frac{x}{2x-1}=0;$$

$$\frac{4x-2}{3(2x-1)(2x+1)}=0.$$

Здобуте рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 4x-2=0, \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -0,5. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x=0,5, \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -0,5. \end{cases}$$

Отже, дане рівняння не має коренів.
Відповідь: коренів немає.

**ПРИКЛАД 3**

Розв'яжіть рівняння $\frac{2x^2-4x-16}{x-4}-x=0$.

*Розв'язання*

Подамо ліву частину рівняння у вигляді дробу:

$$\frac{2x^2-4x-16-x^2+4x}{x-4}=0;$$

$$\frac{x^2-16}{x-4}=0.$$

Отримане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - 16 = 0, \\ x - 4 \neq 0, \end{cases}$$

звідки отримуємо:

$$\begin{cases} x = 4 \text{ або } x = -4, \\ x \neq 4; \end{cases}$$

$$x = -4.$$

Відповідь: −4.

**ПРИКЛАД 4**

Турист проплив на човні 3 км за течією річки і 2 км проти течії за 30 хв. Знайдіть швидкість човна в стоячій воді, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

*Розв'язання*

Нехай швидкість човна в стоячій воді дорівнює $x$ км/год. Тоді його швидкість за течією річки дорівнює $(x + 2)$ км/год, а проти течії — $(x - 2)$ км/год. Турист проплив 3 км за течією за $\frac{3}{x+2}$ год, а 2 км проти течії — за $\frac{2}{x-2}$ год. Оскільки весь шлях було пройдено за 30 хв $= \frac{1}{2}$ год, то $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2}$.

Розв'яжемо отримане рівняння:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{3x - 6 + 2x + 4}{x^2 - 4} - \frac{1}{2} = 0;$$

$$\frac{10x - 4 - x^2 + 4}{2(x^2 - 4)} = 0;$$

$$\frac{10x - x^2}{2(x^2 - 4)} = 0;$$

$$\begin{cases} 10x - x^2 = 0, \\ 2(x^2 - 4) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(10 - x) = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$x = 0 \text{ або } x = 10.$$

**Корінь $x = 0$ не задовольняє змісту задачі. Отже, швидкість човна в стоячій воді дорівнює 10 км/год.**

**Відповідь: 10 км/год.**

**1.** Які два рівняння називають рівносильними?

**2.** За допомогою яких перетворень даного рівняння можна отримати рівняння, рівносильне даному?

**3.** Яке рівняння називають раціональним?

**4.** Сформулюйте умову рівності дробу нулю.

**5.** Опишіть алгоритм, за яким розв'язують рівняння виду $\frac{A}{B} = 0$, де $A$ і $B$ — многочлени.

**205.°** **Чи є рівносильними рівняння:**

1) $x + 2 = 10$ і $3x = 24$;

2) $-2x = -6$ і $\frac{1}{3}x = 1$;

3) $x - 5 = 0$ і $x(x - 5) = 0$;

4) $(3x - 12)(x + 2) = 0$ і $(0{,}4 - 0{,}1x)(7x + 14) = 0$;

5) $\frac{6}{x} = 0$ і $x^2 = -4$;

6) $x + 1 = 1 + x$ і $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1$?

**206.°** **Складіть рівняння, яке рівносильне даному:**

1) $2x - 3 = 4$; 2) $|x| = 1$; 3) $x + 6 = x - 2$.

**207.°** **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\frac{x - 6}{x - 4} = 0$;

2) $\frac{x - 2}{x^2 - 4} = 0$;

3) $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$;

4) $\frac{x - 2}{x - 2} = 1$;

5) $\frac{2x^2 + 18}{x^2 + 9} = 2$;

6) $\frac{x}{x - 5} + \frac{2x - 9}{x - 5} = 0$;

7) $\frac{5x - 7}{x + 1} - \frac{x - 5}{x + 1} = 0$;

8) $\frac{2x + 16}{x + 3} - \frac{1 - 3x}{x + 3} = 0$;

9) $\frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} = 0$;

10) $\frac{3}{x - 2} = \frac{4}{x + 3}$;

11) $\frac{x}{x - 6} = 2$;

12) $\frac{x - 4}{x - 3} = \frac{2x + 1}{2x - 1}$;

13) $\frac{x+8}{x} - \frac{6}{x-2} = 0$;

14) $\frac{2x}{x-5} - \frac{x^2+15x}{x^2-25} = 0$;

15) $3 - \frac{2x^2-5x}{x^2-3x} = 0$.

**208.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = 0$;

2) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = 0$;

3) $\frac{x+7}{x-7} - \frac{2x-3}{x-7} = 0$;

4) $\frac{10-3x}{x+8} + \frac{5x+6}{x+8} = 0$;

5) $\frac{x-6}{x-2} - \frac{x-8}{x} = 0$;

6) $\frac{2x-4}{x} - \frac{3x+1}{x} + \frac{x+5}{x} = 0$;

7) $\frac{x}{x+6} - \frac{36}{x^2+6x} = 0$;

8) $\frac{2x^2+3x+1}{2x+1} - x = 1$;

9) $\frac{4}{x-1} - \frac{4}{x+1} = 1$.

**209.°** Яке число треба відняти від чисельника і знаменника дробу $\frac{15}{19}$, щоб отримати дріб, який дорівнює $\frac{2}{3}$?

**210.°** Яке число треба додати до чисельника і знаменника дробу $\frac{25}{32}$, щоб отримати дріб, який дорівнює $\frac{5}{6}$?

**211.•** Складіть пару рівносильних рівнянь, кожне з яких:

1) має один корінь;

2) має два корені;

3) має безліч коренів;

4) не має коренів.

**212.•** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{5}{x^2-4} + \frac{2x}{x+2} = 2$;

2) $\frac{2}{6x+1} + \frac{3}{6x-1} = \frac{30x+9}{36x^2-1}$;

3) $\frac{6x+14}{x^2-9} + \frac{7}{x^2+3x} = \frac{6}{x-3}$;

4) $\frac{2y^2+5}{1-y^2} + \frac{y+1}{y-1} = \frac{4}{y+1}$;

5) $\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x-1} + \frac{4}{1-4x^2}$;

6) $\frac{7}{(x+2)(x-3)} - \frac{4}{(x-3)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$;

7) $\frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x-1}{4-x} = \frac{6x+64}{x^2-16} + 4$;

8) $\frac{2x-6}{x^2-36}-\frac{x-3}{x^2-6x}-\frac{x-1}{x^2+6x}=0.$

**213.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{1-x}=\frac{x^2+27}{x^2-1}$; 4) $\frac{2x^2-2x}{x^2-4}+\frac{6}{x+2}=\frac{x+2}{x-2}$;

2) $\frac{3x+1}{3x-1}-\frac{3x-1}{3x+1}=\frac{6}{1-9x^2}$; 5) $\frac{7}{x^2+2x}+\frac{x+1}{x^2-2x}=\frac{x+4}{x^2-4}$;

3) $\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x}=\frac{5}{x-2}$; 6) $\frac{x^2-9x+50}{x^2-5x}=\frac{x+1}{x-5}+\frac{x-5}{x}$.

**214.°** Моторний човен проплив 8 км за течією річки і повернувся назад, витративши на весь шлях 54 хв. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість човна дорівнює 18 км/год.

**215.°** Теплохід пройшов 28 км проти течії і повернувся назад, витративши на зворотний шлях на 4 хв менше. Знайдіть швидкість теплохода в стоячій воді, якщо швидкість течії дорівнює 1 км/год.

**216.°** Човен пройшов 6 км проти течії річки і 12 км за течією, витративши на весь шлях 2 год. Знайдіть швидкість човна в стоячій воді, якщо швидкість течії становить 3 км/год.

**217.°°** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+5}{x^2-5x}-\frac{x-5}{2x^2+10x}=\frac{x+25}{2x^2-50}$;

2) $\frac{2}{x^2-9}-\frac{1}{2x^2-12x+18}=\frac{3}{2x^2+6x}$;

3) $\frac{9x+12}{x^3-64}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x^2+4x+16}$.

**218.°°** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4y+24}{5y^2-45}+\frac{y+3}{5y^2-15y}=\frac{y-3}{y^2+3y}$;

2) $\frac{y+2}{8y^3+1}-\frac{1}{4y+2}=\frac{y+3}{8y^2-4y+2}$.

**219.*** Для кожного значення $a$ розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-1}{x-a}=0$; 3) $\frac{a(x-a)}{x-3}=0$;

2) $\frac{x-a}{x+5}=0$; 4) $\frac{(x-a)(x-6)}{x-7}=0$;

5) $\dfrac{(x-4)(x+2)}{x-a}=0$;  6) $\dfrac{x-a}{(x-4)(x+2)}=0$.

**220.*** При яких значеннях $a$ рівняння $\dfrac{x+a}{x^2-4}=0$ не має коренів?

**221.*** При яких значеннях $a$ рівняння $\dfrac{(x-a)(x-3a)}{x+9}=0$ має один корінь?

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**222.** На кінець року населення міста становило 72 100 мешканців. Визначте кількість мешканців у цьому місті на початок року, якщо приріст населення за цей час становив 3 %.

**223.** Відстань між двома станціями електропоїзд проходить за 45 хв. Якщо його швидкість збільшити на 10 км/год, то він пройде цю відстань за 40 хв. Яка відстань між станціями?

**224.** Доведіть, що при будь-якому значенні змінної даний вираз набуває невід'ємного значення:

1) $(a-5)^2-2(a-5)+1$;
2) $(a-b)(a-b-8)+16$.

**225.** Знайдіть значення функції $f(x)=3x-7$ при: 1) $x=-3$; 2) $x=2\frac{1}{3}$. При якому значенні аргументу значення функції дорівнює 0,2?

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**226.** Знайдіть значення виразу:

1) $4^3+3^4$;  3) $9\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)^2$;
2) $(-8)^2-(-1)^{12}$;  4) $(2,8-3,1)^3\cdot\left(-1\frac{2}{3}\right)^2$.

**227.** Не виконуючи обчислення, порівняйте значення виразів:

1) $(-5,7)^2$ і 0;  3) $(-23)^5$ і $(-2)^4$;
2) 0 і $(-6,9)^3$;  4) $-8^8$ і $(-8)^8$.

**228.** Подайте у вигляді степеня:

1) з основою 2 числа 4; 8; 16; 32; 64;

2) з основою 10 числа 100; 1000; 10 000; 1 000 000.

**229.** Знайдіть значення виразу:

1) $18a^2$, якщо $a = -\frac{1}{6}$;    3) $16 + b^4$, якщо $b = -2$;

2) $(18a)^2$, якщо $a = -\frac{1}{6}$;    4) $(16 + b)^4$, якщо $b = -2$.

**Поновіть у пам'яті зміст пункту 3 на с. 225.**

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**230.** Чи існує натуральне число, яке при множенні на 2 стає квадратом натурального числа, а при множенні на 3 — кубом натурального числа?

# 8. Степінь з цілим від'ємним показником

Часто для запису великих чисел у компактному вигляді використовують степінь з натуральним показником. Наприклад,

$$129\ 140\ 163 = 3^{17},$$
$$282\ 475\ 249 = 7^{10}.$$

У науці та практиці для короткого позначення великих значень величин використовують степінь числа 10.

Наприклад, відстань від Землі до Полярної зірки приблизно дорівнює 4 470 000 000 000 000 км або $4{,}47 \cdot 10^{15}$ км. Маса Сонця дорівнює

1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 000 кг або

$1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг.

Це були приклади з макросвіту, тобто світу дуже великих фізичних величин.

Наведемо приклади з мікросвіту, тобто світу дуже маленьких фізичних величин.

Маса атома Гідрогену дорівнює

0,000000000000000000000000001661 кг.

Радіус атома Оксигену дорівнює 0,0000000066 см.

Для запису цих величин так само можна використовувати степінь числа 10. Маємо:

$$0,000000000000000000000000001661 \text{ кг} = \frac{1,661}{10^{27}} \text{ кг},$$

$$0,0000000066 \text{ см} = \frac{6,6}{10^{9}} \text{ см}.$$

Проте якщо домовитися позначити $\frac{1}{10^{27}}$ і $\frac{1}{10^{9}}$ відповідно $10^{-27}$ і $10^{-9}$, то для розглянутих величин отримаємо «одноповерхову» форму запису:

$$\frac{1,661}{10^{27}} = 1,661 \cdot 10^{-27}, \ \frac{6,6}{10^{9}} = 6,6 \cdot 10^{-9}.$$

Аналогічно можна домовитися, що, наприклад, $\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$, $\frac{1}{(-3)^5} = (-3)^{-5}$, $\frac{1}{0,7} = (0,7)^{-1}$.

**Означення. Для будь-якого числа $a$, яке не дорівнює нулю, і натурального числа $n$**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

З означення випливає, що, наприклад, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, $(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16$, $(0,3)^{-1} = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$.

Отже, можна підносити число до будь-якого цілого степеня, крім нуля. Заповнимо цю прогалину.

**Означення. Для будь-якого числа $a$, яке не дорівнює нулю, $a^0 = 1$.**

Наприклад, $5^0 = 1$, $(-17)^0 = 1$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^0 = 1$, $\pi^0 = 1$.

Зауваження. Вираз $0^n$ при цілих $n$, які менше або дорівнюють нулю, не має змісту.

З наведених означень випливає, що при будь-якому $a \neq 0$ і цілому $n$ числа $a^n$ і $a^{-n}$ є взаємно оберненими. Тому рівність

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

виконується при будь-якому цілому $n$.

Наприклад, при $n = -2$ маємо $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$.

У довідковій літературі ви можете знайти таку інформацію:

«Маса Венери дорівнює $4{,}9 \cdot 10^{24}$ кг. Маса Марса дорівнює $6{,}423 \cdot 10^{23}$ кг. Площа поверхні Місяця складає $3{,}8 \cdot 10^7$ км$^2$».

Наведені числа записано в так званому **стандартному вигляді**.

**Означення. Стандартним виглядом числа називають його запис у вигляді добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a < 10$ і $n$ — ціле число.**

Число $n$ називають **порядком** числа, записаного в стандартному вигляді. Наприклад, порядок числа, яке виражає масу Сонця в кілограмах, дорівнює 30, а порядок числа, яке виражає масу атома Гідрогену в кілограмах, дорівнює −27.

У стандартному вигляді можна записати будь-яке додатне число. Наприклад, $171{,}25 = 1{,}7125 \cdot 10^2$; $0{,}00958 = 9{,}58 \cdot 10^{-3}$. Проте стандартний вигляд числа на практиці використовують для запису великих і маленьких чисел. При цьому порядок числа дає уявлення про величину числа.

## ПРИКЛАД 1

Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}$; 2) $1{,}2^{-2}$; 3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4{,}3^0$.

*Розв'язання*

1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}$.

І взагалі, **якщо $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.**

2) $1{,}2^{-2} = \left(\frac{12}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$.

3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4{,}3^0 = \frac{1}{3^3} \cdot 15 + \frac{1}{6^2} \cdot 8 - 1 =$

$= \frac{1}{27} \cdot 15 + \frac{1}{36} \cdot 8 - 1 = \frac{5}{9} + \frac{2}{9} - 1 = -\frac{2}{9}$.

**ПРИКЛАД 2**

**Подайте вираз $(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2})$ у вигляді раціонального дробу.**

*Розв'язання*

$$(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2})=\frac{1}{(a-b)^2}\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{1}{(a-b)^2}\cdot\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=$$

$$=\frac{1}{(b-a)^2}\cdot\frac{(b-a)(b+a)}{a^2b^2}=\frac{b+a}{a^2b^2(b-a)}=\frac{b+a}{a^2b^3-a^3b^2}.$$

**ПРИКЛАД 3**

**Запишіть у стандартному вигляді число:**

**1) 564 000 000; 2) 0,0036.**

*Розв'язання*

1) $564\ 000\ 000=5{,}64\cdot100\ 000\ 000=5{,}64\cdot10^8$.

2) $0{,}0036=3{,}6\cdot0{,}001=3{,}6\cdot\frac{1}{1000}=3{,}6\cdot\frac{1}{10^3}=3{,}6\cdot10^{-3}$.

?

1. Чому дорівнює $a^{-n}$ для будь-якого числа $a$, відмінного від нуля, і натурального числа $n$?
2. Чому дорівнює нульовий степінь будь-якого відмінного від нуля числа?
3. Що називають стандартним виглядом числа?
4. У яких межах має знаходитися число $a$, щоб запис $a\cdot10^n$, де $n$ — ціле число, був стандартним виглядом числа?
5. Як називають число $n$ у записі $a\cdot10^n$ числа в стандартному вигляді?

**231.°** Якому з виразів дорівнює вираз $a^{-6}$:

1) $-a^6$; 2) $\frac{1}{a^{-6}}$; 3) $\frac{1}{a^6}$; 4) $-\frac{1}{a^6}$?

**232.°** Подайте степінь у вигляді дробу:

1) $3^{-8}$; 3) $a^{-9}$; 5) $12^{-1}$; 7) $(a-b)^{-2}$;
2) $5^{-6}$; 4) $d^{-3}$; 6) $m^{-1}$; 8) $(2x-3y)^{-4}$.

**233.°** Замініть степінь дробом:

1) $14^{-4}$; 2) $p^{-20}$; 3) $(m+n)^{-1}$; 4) $(4c-5d)^{-10}$.

**234.°** Подайте дріб у вигляді степеня з цілим від'ємним показником або у вигляді добутку степенів:

1) $\frac{1}{7^2}$; 3) $\frac{1}{c}$; 5) $\frac{a}{b}$; 7) $\frac{(a+b)^5}{(c-d)^8}$;

2) $\frac{1}{x^5}$; 4) $\frac{m}{n^3}$; 6) $\frac{x^6}{y^7}$; 8) $\frac{(x-y)^2}{x+y}$.

**235.°** Замініть дріб степенем з цілим від'ємним показником або добутком степенів:

1) $\frac{1}{11^{11}}$; 2) $\frac{1}{k^4}$; 3) $\frac{x^2}{y}$; 4) $\frac{m^6}{n^6}$; 5) $\frac{(2x-y)^3}{(x-2y)^9}$.

**236.°** Подайте числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ у вигляді степеня з основою: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

**237.°** Подайте у вигляді степеня одноцифрового натурального числа дріб:

1) $\frac{1}{49}$; 2) $\frac{1}{216}$; 3) $\frac{1}{625}$; 4) $\frac{1}{128}$.

**238.°** Подайте у вигляді степеня з основою 10 число:

1) 0,1; 2) 0,01; 3) 0,0001; 4) 0,000001.

**239.°** Подайте числа 1, 3, 9, 27, 81, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ у вигляді степеня з основою: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

**240.°** Обчисліть:

1) $5^{-2}$; 3) $(-9)^{-2}$; 5) $1^{-24}$; 7) $(-1)^{-17}$; 9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;

2) $2^{-4}$; 4) $0{,}2^{-3}$; 6) $(-1)^{-16}$; 8) $\left(\frac{7}{8}\right)^{0}$; 10) $\left(-1\frac{1}{6}\right)^{-2}$.

**241.°** Знайдіть значення виразу:

1) $20^{-2}$; 3) $(-6)^{-3}$; 5) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$;

2) $0{,}3^{-1}$; 4) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

**242.°** Обчисліть значення виразу:

1) $3^{-1} - 4^{-1}$; 4) $9 \cdot 0{,}1^{-1}$;

2) $2^{-3} + 6^{-2}$; 5) $0{,}5^{-2} \cdot 4^{-1}$;

3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2{,}3)^0 - 5^{-2}$; 6) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$.

**243.°** Чому дорівнює значення виразу:

1) $2^{-2} + 2^{-1}$; 2) $3^{-2} - 6^{-1}$;

3) $0{,}03^0 + 0{,}7^0$; 4) $(9 \cdot 3^{-3} - 12^{-1})^{-1}$?

**244.°** Яке з даних чисел записане в стандартному вигляді:
1) $12 \cdot 10^4$; 2) $1{,}2 \cdot 10^4$; 3) $0{,}12 \cdot 10^4$?

**245.°** Запишіть число в стандартному вигляді та вкажіть порядок числа:
1) 3400; 4) 0,000008; 7) $0{,}86 \cdot 10^3$;
2) 15; 5) 0,73; 8) $0{,}23 \cdot 10^4$;
3) 0,0046; 6) $250 \cdot 10^2$; 9) $9300 \cdot 10^5$.

**246.°** Використовуючи стандартний вигляд числа, запишіть:
1) швидкість світла у вакуумі дорівнює 300 000 км/с;
2) висота Говерли, найвищої гори України, дорівнює 2061 м;
3) площа України становить 603 700 км$^2$;
4) середня відстань від Землі до Сонця становить 149,6 млн км;
5) атмосферний тиск на висоті 100 км становить 0,032 Па;
6) діаметр молекули води дорівнює 0,00000028 мм.

**247.°** Запишіть число в стандартному вигляді та вкажіть порядок числа:
1) 45 000; 4) 0,032;
2) 260; 5) $0{,}059 \cdot 10^8$;
3) 0,00024; 6) $526 \cdot 10^4$.

**248.°** Запишіть у вигляді натурального числа або десяткового дробу число, записане в стандартному вигляді:
1) $1{,}6 \cdot 10^3$; 3) $2{,}1 \cdot 10^{-2}$;
2) $5{,}7 \cdot 10^6$; 4) $1{,}1 \cdot 10^{-5}$.

**249.°** Запишіть у вигляді натурального числа або десяткового дробу число, записане в стандартному вигляді:
1) $2{,}4 \cdot 10^2$; 2) $4{,}8 \cdot 10^5$; 3) $1{,}4 \cdot 10^{-3}$; 4) $8{,}6 \cdot 10^{-4}$.

**250.•** Доведіть, що $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

**251.•** Знайдіть значення виразу:

1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 10^{-1} + 9^0 - (-2)^3 + \left(\frac{2}{9}\right)^{-2} \cdot (-1{,}5)^{-3}$;

2) $(2{,}5)^{-2} - (8^5)^0 + \left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} + 0{,}1^{-1}$.

**252.** Розташуйте в порядку спадання:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(\frac{1}{2}\right)^0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$;

2) $4^{-1}$, $4^3$, $4^0$, $4^{-2}$.

**253.** Розташуйте в порядку зростання:

1) $7^{-2}$, $7^2$, $7^{-1}$, $7^0$;

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^0$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

**254.** Порівняйте значення виразів:

1) $12^0$ і $(-6)^0$;

2) $0{,}2^3$ і $0{,}2^{-3}$;

3) $4^6$ і $0{,}25^{-6}$;

4) $3^{-1} \cdot 7^{-1}$ і $21^{-1}$;

5) $5^{-1} - 7^{-1}$ і $2^{-1}$;

6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ і $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^{-1}$.

**255.** Порівняйте значення виразів:

1) $3^{-2}$ і $(-3)^0$;

2) $3^{-1} + 2^{-1}$ і $5^{-1}$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ і $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)^{-2}$.

**256.** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $ab^{-1} + a^{-1}b$;

2) $3a^{-1} + ab^{-2}$;

3) $m^2n^2\,(m^{-3} - n^{-3})$;

4) $(a + b)^{-1} \cdot (a^{-1} + b^{-1})$;

5) $(c^{-2} - d^{-2}) : (c + d)$;

6) $(xy^{-2} + x^{-2}y) \cdot \left(\frac{x^2 - xy + y^2}{x}\right)^{-1}$.

**257.** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $a^{-2} + a^{-3}$;

2) $mn^{-4} + m^{-4}n$;

3) $(c^{-1} - d^{-1}) \cdot (c - d)^{-2}$;

4) $(x^{-2} + y^{-2}) \cdot (x^2 + y^2)^{-1}$.

**258.** Порядок деякого натурального числа дорівнює 4. Скільки цифр містить десятковий запис цього числа?

**259.** Десятковий запис деякого натурального числа складається із семи цифр. Чому дорівнює порядок цього числа?

**260.** Яке число більше:

1) $9{,}7 \cdot 10^{11}$ чи $1{,}2 \cdot 10^{12}$;

2) $3{,}6 \cdot 10^{-5}$ чи $4{,}8 \cdot 10^{-6}$;

3) $2{,}34 \cdot 10^6$ чи $0{,}23 \cdot 10^7$;

4) $42{,}7 \cdot 10^{-9}$ чи $0{,}072 \cdot 10^{-7}$?

**261.**° Яке число менше:

1) $6{,}1 \cdot 10^{19}$ чи $6{,}15 \cdot 10^{18}$;   2) $1{,}5 \cdot 10^{-9}$ чи $0{,}9 \cdot 10^{-8}$?

**262.**° У таблиці наведено середні відстані від Сонця до планет Сонячної системи:

| Планета | Відстань, км |
|---|---|
| Венера | $1{,}082 \cdot 10^8$ |
| Земля | $1{,}495 \cdot 10^8$ |
| Марс | $2{,}280 \cdot 10^8$ |
| Меркурій | $5{,}790 \cdot 10^7$ |
| Нептун | $4{,}497 \cdot 10^9$ |
| Сатурн | $1{,}427 \cdot 10^9$ |
| Уран | $2{,}871 \cdot 10^9$ |
| Юпітер | $7{,}781 \cdot 10^8$ |

1) Яка планета знаходиться на найменшій відстані від Сонця, а яка — на найбільшій?
2) Яка з планет, Марс або Сатурн, знаходиться далі від Сонця?
3) Складіть таблицю, записавши в лівому стовпці назви планет у порядку збільшення відстані від них до Сонця, а в правому — відстані їх до Сонця, виражені у млн. км.

**263.**° У таблиці наведено маси атомів деяких хімічних елементів:

| Елемент | Маса атома, кг | Елемент | Маса атома, кг |
|---|---|---|---|
| Нітроген | $2{,}32 \cdot 10^{-26}$ | Аурум | $3{,}27 \cdot 10^{-25}$ |
| Алюміній | $4{,}48 \cdot 10^{-26}$ | Купрум | $1{,}05 \cdot 10^{-25}$ |
| Гідроген | $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ | Натрій | $3{,}81 \cdot 10^{-26}$ |
| Гелій | $6{,}64 \cdot 10^{-27}$ | Станум | $1{,}97 \cdot 10^{-25}$ |
| Ферум | $9{,}28 \cdot 10^{-26}$ | Уран | $3{,}95 \cdot 10^{-25}$ |

1) Маса атома якого з наведених елементів найменша, а якого — найбільша?
2) Маса якого з елементів, Купруму чи Натрію, більша?
3) Складіть таблицю, упорядкувавши елементи в порядку зменшення маси їх атомів.

**264.**° У таблиці наведено запаси деяких речовин у мінеральних ресурсах світу:

| Речовина | Запаси, т | Речовина | Запаси, т |
|---|---|---|---|
| Алюміній | $1{,}1 \cdot 10^9$ | Нікель | $6{,}8 \cdot 10^7$ |
| Вольфрам | $1{,}3 \cdot 10^6$ | Олово | $4{,}76 \cdot 10^6$ |
| Залізо | $8{,}8 \cdot 10^{10}$ | Ртуть | $1{,}15 \cdot 10^5$ |
| Золото | $1{,}1 \cdot 10^4$ | Фосфати | $1{,}98 \cdot 10^{10}$ |
| Марганець | $6{,}35 \cdot 10^8$ | Хром | $4{,}4 \cdot 10^9$ |
| Мідь | $2{,}8 \cdot 10^9$ | Цинк | $1{,}12 \cdot 10^8$ |

1) Запаси якої з наведених речовин найбільші, а якої — найменші?
2) Запаси якої з речовин, нікелю чи цинку, більші?
3) Складіть таблицю мінеральних ресурсів, розмістивши речовини в порядку зменшення їх запасів.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**265.** Маса чавунної болванки 16 кг. Яка потрібна найменша кількість болванок, щоб відлити 41 деталь масою 12 кг кожна?

**266.** У деякому місті на сьогоднішній день проживає 88 200 мешканців. Скільки мешканців було в цьому місті 2 роки тому, якщо щорічний приріст населення становив 5 %?

**267.** Дмитро ходить з дому до стадіону пішки зі швидкістю 4 км/год. Якщо він поїде до стадіону на велосипеді зі швидкістю 12 км/год, то приїде до нього на 20 хв раніше, ніж зазвичай. На якій відстані від дому Дмитра знаходиться стадіон?

**268.** Спростіть вираз:

$$\frac{2a^2+2}{a^2-1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{3a-3}{2a+2}.$$

**269.** Чи можна стверджувати, що при будь-якому натуральному $n$ значення виразу $(5n+6{,}5)^2-(2n+0{,}5)^2$ кратне 42?

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**270.** Подайте у вигляді степеня з основою $a$ вираз:

1) $a^7 \cdot a^5$; 2) $a^7 : a^5$; 3) $(a^7)^5$; 4) $\frac{(a^3)^6 \cdot a^4}{a^{16}}$.

**271.** Спростіть вираз:

1) $-4m^3n^5 \cdot 5m^4n^2$; 2) $(-2m^7n^2)^4$; 3) $8x^3y^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2y^5\right)^3$.

**272.** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{3^{10} \cdot 27^3}{9^9}$; 2) $\left(5\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^8$.

Поновіть у пам'яті зміст пункту 4 на с. 225.

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**273.** У деякому будинку живуть тільки подружні пари з маленькими дітьми, причому в кожного хлопчика є сестра і хлопчиків більше, ніж дівчат. Чи може дорослих бути більше, ніж дітей?

# 9. Властивості степеня з цілим показником

У 7 класі ви вивчали властивості степеня з натуральним показником. Вони залишаються справедливими і для степеня з будь-яким цілим показником.

***Для будь-якого $a \neq 0$ і будь-яких цілих $m$ і $n$ виконуються рівності:***

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (1)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \quad (2)$$

***Для будь-яких $a \neq 0$ і $b \neq 0$ та будь-якого цілого $n$ виконується рівність:***

$$(ab)^n = a^n b^n. \quad (3)$$

Рівність (1) виражає **основну властивість степеня**. Доведемо її.

Для натуральних $m$ і $n$ цю рівність уже було доведено в 7 класі.

Розглянемо тепер випадок, коли $m$ і $n$ — цілі від'ємні числа.

Якщо $m$ і $n$ — цілі від'ємні числа, то $-m$ і $-n$ — натуральні числа. Тоді $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)} = a^{-m-n}$.

Маємо: $a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$.

Для того щоб доведення основної властивості степеня стало повним, слід розглянути ще такі випадки: один з показників степеня $m$ або $n$ від'ємний, а другий — додатний; один або обидва показники дорівнюють нулю. Розгляньте ці випадки самостійно.

Рівності (2) і (3) доводять аналогічно.

З основної властивості степеня випливає такий важливий наслідок: ***для будь-якого $a \neq 0$ і будь-яких цілих $m$ і $n$ виконується рівність:***

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \qquad (4)$$

Справді, $a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$.

З властивостей (2) и (3) можна отримати ще одну властивість степеня з цілим показником: ***для будь-яких $a \neq 0$ і $b \neq 0$ і будь-якого цілого $n$ виконується рівність:***

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \qquad (5)$$

Справді, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot b^{-n} = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Властивості (1)–(5) називають **властивостями степеня з цілим показником.**

**ПРИКЛАД 1**

Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $a^{-14} \cdot a^{12}$; 2) $a^{-5} : a^{-9}$; 3) $(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6$.

*Розв'язання*

1) Застосувавши основну властивість степеня, отримуємо:
$$a^{-14} \cdot a^{12} = a^{-14+12} = a^{-2}.$$

2) Використовуючи рівність $a^m : a^n = a^{m-n}$, маємо:
$$a^{-5} : a^{-9} = a^{-5-(-9)} = a^{-5+9} = a^4.$$

3) Застосувавши послідовно правила піднесення степеня до степеня (властивість (2)), множення і ділення степенів з однаковою основою (властивості (1) і (4)), отримуємо:
$$(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6 = a^{-4\cdot(-2)} \cdot a^{-7} : a^6 = a^8 \cdot a^{-7} : a^6 =$$
$$= a^{8+(-7)-6} = a^{-5}.$$

**ПРИКЛАД 2**

Знайдіть значення виразу:

1) $(5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3}$; 2) $16^{-9} \cdot 8^{12}$; 3) $\dfrac{6^{-3}}{18^{-3}}$; 4) $\left(1\dfrac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\dfrac{5}{6}\right)^3\right)^{-5}$.

*Розв'язання*

1) Маємо: $(5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3} = 5^{20} : 5^{21} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$.

2) Подавши числа 16 і 8 у вигляді степенів з основою 2, отримуємо:
$16^{-9} \cdot 8^{12} = (2^4)^{-9} \cdot (2^3)^{12} = 2^{-36} \cdot 2^{36} = 2^0 = 1$.

3) Використовуючи правило піднесення дробу до степеня (властивість (5)), маємо: $\frac{6^{-3}}{18^{-3}} = \left(\frac{6}{18}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$.

4) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^{-5} = \left(\frac{36}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} =$
$= \left(\frac{6}{5}\right)^{-16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-16} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{15} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{6}$.

**ПРИКЛАД 3**

Спростіть вираз: 1) $0,6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3$;
2) $(a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6)$.

*Розв'язання*

1) $0,6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3 = \left(0,6 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot (m^2 \cdot m^{-4}) \cdot (n^{-6} \cdot n^3) =$
$= 0,2m^{-2}n^{-3}$.

2) $(a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6) =$
$= a^{-4} - 4a^{-2} + 9a^{-2} - 36 - a^{-4} + 36 = 5a^{-2}$.

**ПРИКЛАД 4**

Виконайте множення $(3,4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8})$ і результат запишіть у стандартному вигляді.

*Розв'язання*

$$(3,4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8}) = (3,4 \cdot 7) \cdot (10^{14} \cdot 10^{-8}) = 23,8 \cdot 10^6 =$$
$$= 2,38 \cdot 10 \cdot 10^6 = 2,38 \cdot 10^7.$$

? Сформулюйте властивості степеня з цілим показником.

**274.°** Подайте вираз у вигляді степеня або добутку степенів:
1) $a^{-6} \cdot a^9$;  2) $a^5 \cdot a^{-8}$;  3) $a^{-5} \cdot a^{10} \cdot a^{-12}$;

4) $a^{-2} : a^{6}$; 7) $a^{12} \cdot a^{-20} : a^{-9}$; 10) $(a^{2})^{-4} \cdot (a^{-3})^{-2} : (a^{-8})^{3}$;
5) $a^{7} : a^{-3}$; 8) $(a^{-5})^{4}$; 11) $(a^{4}b^{-2}c^{3})^{-10}$;
6) $a^{-3} : a^{-15}$; 9) $(a^{-6})^{-8}$; 12) $\left(\frac{a^{10}b^{-7}}{c^{6}d^{-14}}\right)^{-2}$.

**275.°** Подайте вираз у вигляді степеня або добутку степенів:
1) $a^{6} \cdot a^{-10}$; 4) $(a^{-2})^{6}$; 7) $a^{-16} \cdot a^{8} : a^{-4}$;
2) $a^{4} : a^{7}$; 5) $(a^{-3}b^{-1}c^{7})^{-4}$; 8) $(a^{-3})^{8} : (a^{-1})^{7} \cdot (a^{-7})^{-4}$.
3) $a^{-5} : a^{-9}$; 6) $\left(\frac{a^{2}}{bc^{-1}}\right)^{-3}$;

**276.°** Знайдіть значення виразу:
1) $9^{5} \cdot 9^{-7}$; 4) $2^{-9} \cdot 2^{-12} : 2^{-22}$; 7) $3^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;
2) $10^{-8} \cdot 10^{12}$; 5) $(17^{4})^{-12} \cdot (17^{-6})^{-8}$; 8) $\frac{14^{-5}}{7^{-5}}$.
3) $3^{-18} : 3^{-21}$; 6) $\frac{6^{-5} \cdot (6^{-3})^{4}}{(6^{-7})^{2} \cdot 6^{-3}}$;

**277.°** Знайдіть значення виразу:
1) $6^{-9} \cdot 6^{6}$; 3) $5^{-7} : 5^{-6} \cdot 5^{3}$; 5) $0,8^{-4} \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^{-4}$;
2) $7^{-16} : 7^{-18}$; 4) $\frac{4^{-7} \cdot (4^{-5})^{3}}{(4^{-3})^{7}}$; 6) $\frac{11^{-2}}{22^{-2}}$.

**278.°** Спростіть вираз:
1) $3a^{-3} \cdot 4a^{-4}$; 7) $(c^{-6}d^{2})^{-7}$;
2) $\frac{10b^{-4}}{15b^{-5}}$; 8) $\frac{1}{3}a^{-3}b^{-6} \cdot \frac{6}{7}a^{7}b^{4}$;
3) $(2c^{-6})^{4}$; 9) $0,2c^{-3}d^{5} \cdot 1,5c^{-2}d^{-5}$;
4) $m^{-2}n \cdot mn^{-2}$; 10) $4x^{8} \cdot (-3x^{-2}y^{4})^{-2}$;
5) $abc^{-1} \cdot ab^{-1}c$; 11) $\frac{13m^{-10}}{12n^{-8}} \cdot \frac{27n}{26m^{2}}$;
6) $\frac{kp^{-6}}{k^{4}p^{4}}$; 12) $\frac{18p^{-6}k^{2}}{7} : \frac{15k^{-2}}{p^{6}}$.

**279.°** Спростіть вираз:
1) $2a^{-5}b^{2} \cdot 3a^{-2}b^{-5}$; 3) $\frac{3,6a^{2}b}{0,9a^{3}b^{-3}}$;
2) $\left(\frac{1}{2}mn^{-3}\right)^{-2}$; 4) $0,8a^{-6}b^{8} \cdot 5a^{10}b^{-8}$;

5) $\frac{25x^{-3}}{y^{-4}} \cdot \frac{y^4}{5x^{-7}}$; 6) $28c^3d^{-2} \cdot (2cd^{-1})^{-2}$.

**280.**° Знайдіть значення виразу:

1) $8^{-3} \cdot 2^7$; 5) $25^{-4} : (0{,}2^{-3})^{-2}$;

2) $27^{-2} : 9^{-4}$; 6) $\frac{(-36)^{-3} \cdot 6^8}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}}$;

3) $100^{-2} : 1000^{-5} \cdot 0{,}01^6$; 7) $\frac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 16^{-3}}$;

4) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{-3}$; 8) $\frac{14^5 \cdot 2^{-7}}{28^{-2} \cdot 7^8}$.

**281.**° Знайдіть значення виразу:

1) $9^{-4} \cdot 27^2$; 4) $8^{-2} : 0{,}5^4$;

2) $32^{-5} : 64^{-4}$; 5) $\frac{22^6 \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^9}$;

3) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5$; 6) $\frac{10^{-2} \cdot 15^{-4}}{30^{-6}}$.

**282.**° Виконайте дії і зведіть отриманий вираз до вигляду, який не містить степеня з від'ємним показником:

1) $-2{,}4a^{-4}b^3 \cdot (-2a^{-3}c^{-5})^{-3}$; 4) $\left(-\frac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3} \cdot (-6a^2b^9)^{-2}$;

2) $(-10x^{-2}yz^{-8})^{-2} \cdot (0{,}1yz^{-4})^{-2}$; 5) $\left(\frac{7p^{-3}}{5k^{-1}}\right)^{-2} \cdot 49m^{-6}n^4$;

3) $1\frac{7}{9}m^{-6}n \cdot \left(1\frac{1}{3}m^{-1}n^{-4}\right)^{-3}$; 6) $\left(\frac{4x^{-5}}{3y^{-2}}\right)^{-3} \cdot (16x^{-6}y^4)^2$.

**283.**° Виконайте дії і зведіть отриманий вираз до вигляду, який не містить степеня з від'ємним показником:

1) $3{,}6a^{-8}b^4 \cdot (-3a^{-3}b^{-7})^{-2}$; 3) $\left(\frac{5m^{-4}}{6n^{-1}}\right)^{-3} \cdot 125m^{-10}n^2$;

2) $1\frac{9}{16}x^{-6}y^2 \cdot \left(1\frac{1}{4}x^{-1}y^{-3}\right)^{-3}$; 4) $\left(\frac{7a^{-6}}{b^5}\right)^{-2} \cdot (a^{-4}b)^4$.

**284.**° Винесіть за дужки степінь з основою $a$ і з найменшим з даних показників:

1) $a^3 - 2a^4$; 2) $a^{-3} - 2a^{-4}$; 3) $a^3 - 2a^{-4}$.

**285.**° Винесіть за дужки степінь з основою $b$ і з найменшим з даних показників:

1) $b^3 + 3b^2$; 2) $b^{-3} + 3b^{-2}$; 3) $b^{-3} + 3b^2$.

**286.**° Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $a^{-2} - 4$;
2) $a^{-4}b^{-6} - 1$;
3) $25x^{-8}y^{-12} - z^{-2}$;
4) $a^{-3} + b^{-3}$;
5) $m^{-4} - 6m^{-2}p^{-1} + 9p^{-2}$;
6) $a^{-8} - 49a^{-2}$.

**287.**° Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $x^{-4} - 25$;
2) $m^{-6} - 8n^{-3}$;
3) $a^{-10} + 8a^{-5}b^{-7} + 16b^{-14}$;
4) $a^{-4} - a^{-2}$.

**288.**° Доведіть тотожність:

$a^{-8} - b^{-8} = (a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} + b^{-2})(a^{-4} + b^{-4})$.

**289.**° Спростіть вираз:

1) $(a^{-4} + 3)(a^{-4} - 3) - (a^{-4} + 2)^2$;

2) $\dfrac{m^{-2} - n^{-2}}{m^{-1} + n^{-1}}$;

3) $\dfrac{2x^{-2} + y^{-2}}{3x^{-2} - 3x^{-1}y^{-1}} - \dfrac{x^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}$;

4) $\dfrac{a^{-5} + b^{-5}}{a^{-6}} : \dfrac{a^{-3}b^{-5} + a^{-8}}{a^{-4}}$.

**290.**° Спростіть вираз:

1) $(x^{-2} - 1)^2 - (x^{-2} - 4)(x^{-2} + 4)$;

2) $\dfrac{a^{-2} - 10a^{-1}b^{-1} + 25b^{-2}}{a^{-1} - 5b^{-1}}$;

3) $\dfrac{5m^{-2} + n^{-2}}{4m^{-3} + 4m^{-1}n^{-2}} - \dfrac{m^{-1}}{m^{-2} + n^{-2}}$;

4) $\dfrac{b^{-1} + 3c^{-1}}{c^{-2}} \cdot \dfrac{bc}{b^{-2}c^{-1} + 3b^{-1}c^{-2}}$.

**291.**° Порядок числа $a$ дорівнює $-4$. Визначте порядок числа:

1) $10a$;
2) $0{,}1a$;
3) $100a$;
4) $0{,}001a$;
5) $10\,000a$;
6) $1\,000\,000a$.

**292.**° Порядок числа $b$ дорівнює 3. Визначте порядок числа:

1) $10b$; 2) $0{,}01b$; 3) $0{,}0001b$; 4) $1000b$.

**293.**° Виконайте обчислення і результат запишіть у стандартному вигляді:

1) $(1{,}8 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^3)$;

2) $(3 \cdot 10^6) \cdot (5{,}2 \cdot 10^{-9})$;

3) $\dfrac{5{,}4 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^8}$;

4) $\dfrac{1{,}7 \cdot 10^{-6}}{3{,}4 \cdot 10^{-4}}$.

**294.**$^{\bullet}$ Виконайте обчислення і результат запишіть у стандартному вигляді:

1) $(1{,}6 \cdot 10^{-5}) \cdot (4 \cdot 10^{7})$; 3) $\dfrac{7 \cdot 10^{-4}}{1{,}4 \cdot 10^{-6}}$;

2) $(5 \cdot 10^{-3}) \cdot (1{,}8 \cdot 10^{-1})$; 4) $\dfrac{6{,}4 \cdot 10^{3}}{8 \cdot 10^{-2}}$.

**295.**$^{\bullet}$ Середня відстань від Землі до Сонця дорівнює $1{,}5 \cdot 10^{8}$ км, а швидкість світла — $3 \cdot 10^{8}$ м/с. За скільки хвилин світло від Сонця дійде до Землі? Відповідь округліть до одиниць.

**296.**$^{\bullet}$ Густина міді дорівнює $8{,}9 \cdot 10^{3}$ кг/м$^3$. Знайдіть масу мідної плити, довжина якої $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ м, ширина — 12 см, а висота — 0,02 м.

**297.**$^{\bullet}$ Маса Землі дорівнює $6 \cdot 10^{24}$ кг, а Місяця — $7{,}4 \cdot 10^{22}$ кг. У скільки разів маса Місяця менша від маси Землі? Відповідь округліть до одиниць.

**298.**$^{\bullet\bullet}$ Спростіть вираз і запишіть результат у вигляді раціонального виразу, який не містить степеня з від'ємним показником:

1) $\left(\dfrac{a^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}} - \dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}}\right) : \left(\dfrac{b}{a^{2}}\right)^{-1}$;

2) $\dfrac{b^{-2}-2}{b^{-2}} - \dfrac{b^{-4}-4}{b^{-2}} \cdot \dfrac{1}{b^{-2}-2}$;

3) $\dfrac{5c^{-3}}{c^{-3}-3} - \dfrac{c^{-3}+6}{2c^{-3}-6} \cdot \dfrac{90}{c^{-6}+6c^{-3}}$;

4) $\left(\dfrac{m^{-4}}{m^{-4}-4} - \dfrac{3m^{-4}}{m^{-8}-8m^{-4}+16}\right) \cdot \dfrac{16-m^{-8}}{m^{-4}-7} + \dfrac{8m^{-4}}{m^{-4}-4}$.

**299.**$^{\bullet\bullet}$ Спростіть вираз і запишіть результат у вигляді раціонального виразу, який не містить степеня з від'ємним показником:

1) $\dfrac{a^{-2}+5}{a^{-4}-6a^{-2}+9} : \dfrac{a^{-4}-25}{4a^{-2}-12} - \dfrac{2}{a^{-2}-5}$;

2) $\left(b^{-1} - \dfrac{5b^{-1}-36}{b^{-1}-7}\right) \cdot \left(2b^{-1} + \dfrac{2b^{-1}}{b^{-1}-7}\right)^{-1}$.

**300.**$^{\bullet\bullet}$ Порядок числа $a$ дорівнює $-4$, а порядок числа $b$ дорівнює 3. Яким може бути порядок значення виразу:
1) $ab$; 2) $a + b$; 3) $a + 10b$; 4) $10a + 0{,}1b$?

**301.**'' Порядок числа $m$ дорівнює 2, а порядок числа $n$ дорівнює 4. Яким може бути порядок значення виразу: 1) $mn$; 2) $0{,}01mn$; 3) $100m + n$; 4) $0{,}01m + n$?

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**302.** Середнє арифметичне двох натуральних чисел дорівнює 18. При діленні більшого з цих чисел на менше отримаємо неповну частку 3 і остачу 4. Знайдіть ці числа.

**303.** Завдяки заходам з економії електроенергії за перший місяць її витрати було зменшено на 20 %, за другий — на 10 % порівняно з попереднім, а за третій — на 5 % порівняно з попереднім. На скільки відсотків у результаті було зменшено витрати електроенергії?

**304.** Для відкачування води із затопленого приміщення було задіяно 3 насоси. Перший з них може викачати всю воду за 12 год, другий — за 15 год, а третій — за 20 год. Спочатку протягом 3 год працювали перший і другий насоси, а потім підключили третій насос. За який час було відкачано всю воду?

**305.** Книжка коштує 19 грн. У покупця є лише купюри по 5 грн., а в продавця — лише по 2 грн. Чи може покупець розрахуватися за книжку без додаткового розміну грошей? У разі позитивної відповіді визначте, яку найменшу кількість купюр відповідної вартості повинні мати покупець і продавець.

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**306.** Знайдіть значення функції $y = -\frac{14}{x}$, якщо:

1) $x = 2$; 2) $x = -1$; 3) $x = 3{,}5$; 4) $x = -6$.

**307.** Функцію задано формулою $y = \frac{x+2}{x-6}$. Яка область визначення даної функції? Заповніть таблицю, обчисливши відповідні значення функції:

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | |

**308.** Побудуйте графік функції $y = 2x - 1$. Чи проходить цей графік через точку: 1) $A$ (30; 59); 2) $B$ (–15; –29)?

**309.** Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіків функцій $y = 2{,}7x - 8$ і $y = 1{,}2x + 7$.

**310.** Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + y = 7. \end{cases}$$

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 17, 18, 19 на с. 231–232.

### УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**311.** Після закінчення тенісного турніру, який проводився за олімпійською системою (той, хто програв, вибуває), виявилося, що тільки 32 учасники виграли зустрічей більше, ніж програли. Скільки тенісистів брало участь у турнірі?

## 10. Функція $y = \frac{k}{x}$ та її графік

У 6 класі ви познайомилися з такою залежністю однієї величини від другої, коли збільшення (зменшення) однієї величини в кілька разів призводить до збільшення (зменшення) другої величини у таку саму кількість разів.

У 7 класі ви дізналися, що ця залежність є функціональною і визначає функцію $y = kx$, де $k \neq 0$, яку називають прямою пропорційністю.

Існує також функціональна залежність, яка характеризується тим, що із **збільшенням** (**зменшенням**) однієї величини у кілька разів друга величина **зменшується** (**збільшується**) у стільки ж разів. Таку залежність називають **оберненою пропорційністю**.

**ПРИКЛАД 1**

Нехай є 100 грн. Позначимо через $x$ грн. ціну 1 кг товару, а через $y$ кг — кількість цього товару, яку можна придбати за 100 грн.

Зрозуміло, що залежність змінної $y$ від змінної $x$ є оберненою пропорційністю: збільшення ціни $x$ у кілька разів призводить до зменшення кількості товару $y$ у стільки ж разів, і навпаки, зменшення ціни веде до збільшення кількості купленого товару.

Цій функціональній залежності відповідає функція, яка задається формулою $y = \frac{100}{x}$.

**ПРИКЛАД 2**

Розглянемо прямокутник, площа якого дорівнює 18 см$^2$, а сторони — $x$ см і $y$ см. Тоді

$$y = \frac{18}{x}.$$

Збільшення (зменшення) знаменника $x$ у кілька разів веде до зменшення (збільшення) величини $y$ у стільки ж разів, тобто залежність змінної $y$ від змінної $x$ є оберненою пропорційністю.

У розглянутих прикладах математичною моделлю реальних ситуацій є функція, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$.

**Означення. Функцію, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, називають оберненою пропорційністю.**

Оскільки у виразі $\frac{k}{x}$ допустимими значеннями змінної $x$ є всі числа, крім 0, то областю визначення функції $y = \frac{k}{x}$ також є всі числа, крім 0.

Розглянемо функцію $y = \frac{6}{x}$. У таблиці вказано деякі значення аргументу і відповідні їм значення функції.

| $x$ | $-6$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1,5$ | $-1$ | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-1$ | $-1,5$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ | $-6$ | 6 | 4 | 3 | 2 | 1,5 | 1 |

Позначимо на координатній площині точки, координати яких вказано в таблиці (рис. 3).

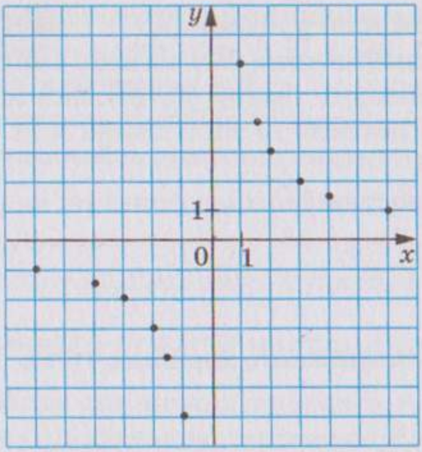



Рис. 3

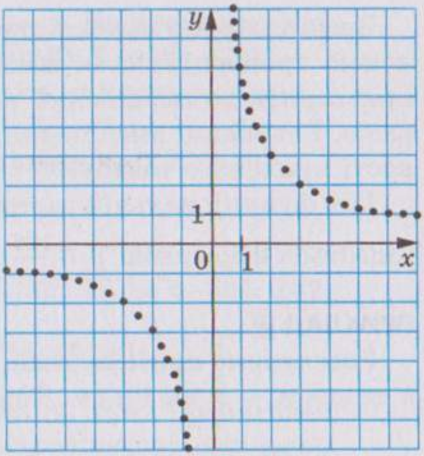



Рис. 4

Чим більше точок, координати яких задовольняють рівнянню $y = \frac{6}{x}$, нам удасться позначити, тим менше отримана фігура (рис. 4) буде відрізнятися від графіка функції $y = \frac{6}{x}$.

Серед позначених точок не може бути точки, абсциса якої дорівнює нулю, оскільки число 0 не належить області визначення даної функції. Тому графік функції $y = \frac{6}{x}$ не має спільних точок з віссю ординат.

Крім того, графік не має спільних точок також і з віссю абсцис. Справді, рівняння $\frac{6}{x} = 0$ не має розв'язків. Отже, число 0 не належить області значень даної функції.

Якщо $x > 0$, то $\frac{6}{x} > 0$, тобто $y > 0$; якщо $x < 0$, то $y < 0$. Отже, точки графіка даної функції можуть знаходитися тільки в I і III чвертях.

Зауважимо, що зі збільшенням модуля абсциси відстань від точки графіка функції $y = \frac{6}{x}$ до осі абсцис зменшується і може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю. Справді, чим більше модуль аргументу, тим менше модуль відповідного значення функції.

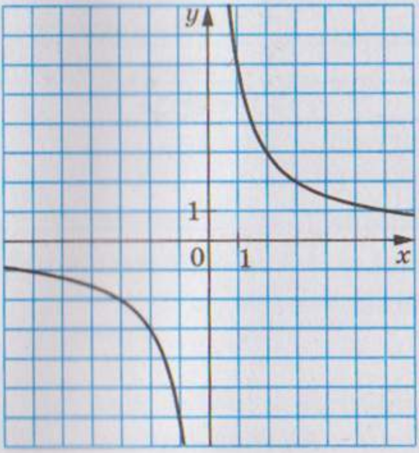



Рис. 5

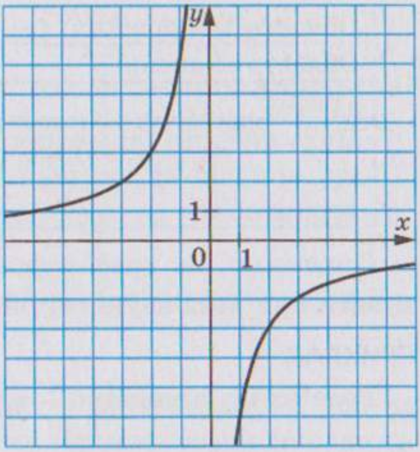



Рис. 6

Аналогічно можна встановити, що зі збільшенням модуля ординати відстань від точок графіка до осі ординат зменшується і може стати як завгодно малою, проте ніколи не дорівнюватиме нулю.

Якби вдалося позначити на координатній площині всі точки, координати яких задовольняють рівнянню $y=\frac{6}{x}$, то ми отримали б фігуру, зображену на рисунку 5.

Фігуру, яка є графіком функції $y=\frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, називають **гіперболою**. Гіпербола складається з двох частин — **віток гіперболи**. На рисунку 5 зображено гіперболу $y=\frac{6}{x}$.

Якщо $k > 0$, то вітки гіперболи розміщені в I і III чвертях, а якщо $k < 0$ – то у II і IV чвертях.

На рисунку 6 зображено графік функції $y=-\frac{6}{x}$.

Зауважимо, що областю значень функції $y=\frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, є все числа, крім 0.

У таблиці наведено властивості функції $y=\frac{k}{x}$, вивчені у цьому пункті.

| | |
|---|---|
| Область визначення | Усі числа, крім 0 |
| Область значень | Усі числа, крім 0 |
| Графік | Гіпербола |
| Нуль функції (значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0) | Не існує |

Покажемо, як графік функції $y = \frac{k}{x}$ можна використовувати при розв'язуванні рівнянь.

**ПРИКЛАД**

Розв'яжіть рівняння $\frac{4}{x} = x + 3$.

*Розв'язання*

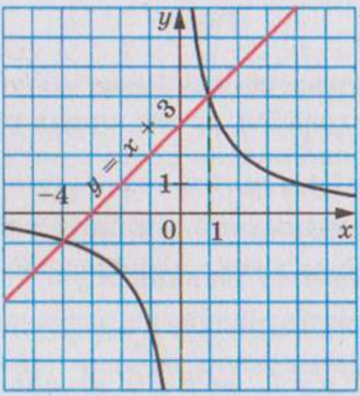



Рис. 7

Розглянемо функції $y = \frac{4}{x}$ і $y = x + 3$. Побудуємо в одній системі координат графіки цих функцій (рис. 7). Вони перетинаються у двох точках, абсциси яких дорівнюють 1 і −4. У точках перетину графіків функцій самі функції набувають рівних значень. Отже, при знайдених абсцисах значення виразів $\frac{4}{x}$ і $x + 3$ рівні, тобто числа 1 і −4 є коренями рівняння $\frac{4}{x} = x + 3$. Перевірка це підтверджує.

Описаний метод розв'язування рівнянь називають **графічним**. У VII класі ви ознайомилися з графічним методом розв'язування систем рівнянь і знаєте, що цей метод не завжди дає точний результат. Тому перевірка знайдених коренів є обов'язковим етапом розв'язування рівняння.

У подальшому (п. 21) ви навчитеся розв'язувати це рівняння, не застосовуючи графіків.

1. Поясніть, яку залежність між величинами називають оберненою пропорційністю.
2. Яку функцію називають оберненою пропорційністю?

**3.** Що є областю визначення функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$?

**4.** Як називають фігуру, яка є графіком оберненої пропорційності?

**5.** Як називають частини, з яких складається гіпербола?

**6.** Що є областю значень функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$?

**7.** У яких чвертях розташований графік функції $y = \frac{k}{x}$, якщо $k > 0$? якщо $k < 0$?

**8.** Поясніть, у чому полягає графічний метод розв'язування рівнянь.

**312.°** Автомобіль проїжджає деяку відстань за 10 год. За який час він проїде цю саму відстань, якщо його швидкість:

1) збільшиться у 2 рази; 2) зменшиться в 1,2 раза?

**313.°** Довжина прямокутника дорівнює 30 см. Якою стане його довжина, якщо при тій самій площі ширину прямокутника:

1) збільшити в 1,5 раза; 2) зменшити в 3,2 раза?

**314.°** За деяку суму грошей купили 40 м тканини. Скільки метрів тканини купили б за ту саму суму грошей, якби її ціна за 1 м:

1) зменшилась у 2,6 раза; 2) збільшилася в 1,6 раза?

**315.°** Пішохід пройшов 12 км. Заповніть таблицю, у першому рядку якої вказано швидкість, а в другому — час руху.

| $v$, км/год | 5 | | 2,4 | |
|---|---|---|---|---|
| $t$, год | | 3 | | $3\frac{1}{3}$ |

Задайте формулою залежність $t$ від $v$.

**316.°** Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює 48 см$^3$. Заповніть таблицю, у першому рядку якої вказано площу його основи, а в другому — висоту.

| $S$, см$^2$ | 16 | | 240 | |
|---|---|---|---|---|
| $h$, см | | 8 | | 4,8 |

Задайте формулою залежність $h$ від $S$.

**317.°** Бригада із 7 робітників з однаковою продуктивністю праці може виконати певне виробниче завдання за 12 днів. Скільки треба робітників з такою самою продуктивністю праці, щоб виконати це завдання за 4 дні?

**318.°** Заготовлених кормів вистачить для 24 коней на 18 днів. На скільки днів вистачить цих кормів для 36 коней?

**319.°** Серед даних функцій укажіть обернені пропорційності:

1) $y = 2x$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 5) $y = -\frac{0,8}{x}$; 7) $y = \frac{1}{2x}$;

2) $y = \frac{x}{2}$; 4) $y = -\frac{1}{x}$; 6) $y = \frac{2x}{3}$; 8) $y = \frac{2}{3x}$.

**320.°** Задано функцію $y = \frac{24}{x}$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює −3; 6; 0,2;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 12; −6; 100.

**321.°** Задано функцію $y = -\frac{36}{x}$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює −4; 0,9; 18;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 6; −0,3; 8.

**322.°** Побудуйте графік функції $y = -\frac{8}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 4; −1;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 2; −8;
3) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень.

**323.°** Побудуйте графік функції $y = \frac{10}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 2; −10;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 5; −2;

3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

**324.°** Не виконуючи побудови графіка функції $y = \frac{28}{x}$, установіть, чи проходить графік через точку:

1) $A\ (-4; -7)$;
2) $B\ (14; -2)$;
3) $C\ (0{,}5; 14)$;
4) $D\ (0{,}2; 140)$.

**325.°** Не виконуючи побудови графіка функції $y = -\frac{48}{x}$, установіть, чи проходить графік через точку:

1) $A\ (-6; -8)$;
2) $B\ (12; -4)$;
3) $C\ (0{,}3; -16)$;
4) $D\ (0{,}4; -120)$.

**326.•** На рисунку 8 зображено графік залежності часу $t$ руху з пункту $A$ до пункту $B$ від швидкості $v$ руху. Користуючись графіком, установіть:

1) за який час можна дістатися з пункту $A$ до пункту $B$, якщо рухатися зі швидкістю 8 км/год, 24 км/год;
2) з якою швидкістю треба рухатися, щоб дістатися з пункту $A$ до пункту $B$ за 3 год; 4 год;
3) чому дорівнює відстань між пунктами $A$ і $B$.

**327.•** Дротяний реостат під'єднано до блоку живлення (рис. 9). Опір реостата $R$ залежить від положення повзунка і може змінюватися в межах від 0 до 6 Ом.

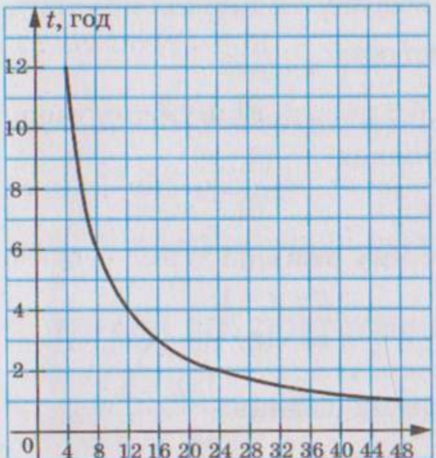



Рис. 8

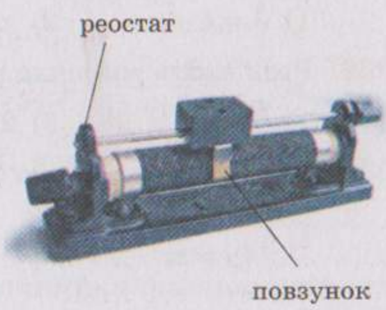



Рис. 9

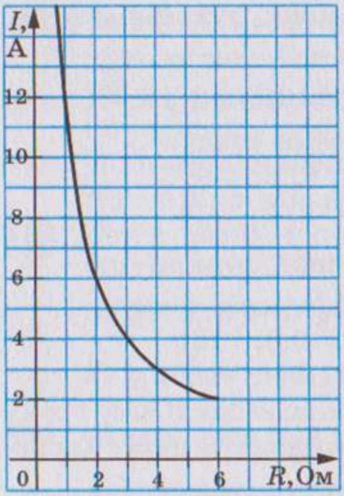



Рис. 10

Користуючись графіком залежності сили струму $I$ від опору $R$ (рис. 10) за умови, що напруга на кінцях реостата залишається незмінною, установіть:

1) чому дорівнює сила струму, якщо опір дорівнює 2 Ом;
2) при якому значенні опору сила струму дорівнює 3 А;
3) скільки вольт становить напруга на кінцях реостата.

**328.**° Знайдіть значення $k$, при якому графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:

1) $A\,(-5;\ 4)$;
2) $B\left(\frac{1}{6};\ -2\right)$;
3) $C\,(1{,}5;\ -8)$.

**329.**° Графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку $A\,(10;\ 1{,}6)$. Чи проходить графік цієї функції через точку:

1) $B\,(-1;\ -16)$;
2) $C\,(-2;\ 8)$?

**330.**° Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{4}{x}$ і $y = x$ і визначте координати точок їх перетину.

**331.**° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\frac{4}{x} = 4 - x$;
2) $x - 2 = \frac{3}{x}$;
3) $x + 2 = -\frac{5}{x}$.

**332.**° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\frac{8}{x} = 6 - x$;
2) $2x = \frac{2}{x}$;
3) $\frac{7}{x} = -x$.

**333.**° Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} xy = 4, \\ 4y = x; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2. \end{cases}$

**334.**° Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} xy = 5, \\ y - x = 4. \end{cases}$

**335.**° Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} xy = -1, \\ x + 3y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -1, \\ x - 3y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy = 6, \\ 3x - 2y = 6. \end{cases}$

**336.**° Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь $\begin{cases} xy = -8, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$

**337.**•• Знайдіть координати всіх точок графіка функції $y = \frac{64}{x}$, у яких абсциса і ордината рівні.

**338.**•• Знайдіть координати всіх точок графіка функції $y = -\frac{25}{x}$, у яких абсциса і ордината — протилежні числа.

**339.**•• Побудуйте графік функції $y = \frac{6}{|x|}$.

**340.**•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} -\frac{2}{x}, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ x + 3, \text{ якщо } x > -1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} -2x + 10, \text{ якщо } x \leqslant 2, \\ \frac{12}{x}, \text{ якщо } 2 < x < 4, \\ 3, \text{ якщо } x \geqslant 4. \end{cases}$

**341.**•• Побудуйте графік функції:

$$y = \begin{cases} -\frac{4}{x}, \text{ якщо } x < -2, \\ 2, \text{ якщо } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ \frac{4}{x}, \text{ якщо } x > 2. \end{cases}$$

**342.**•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{9x - 18}{x^2 - 2x}$; 2) $y = \frac{5x^2 - 5}{x - x^3}$.

**343.**•• Побудуйте графік функції $y = \frac{10x^2 - 40}{x^3 - 4x}$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**344.** Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінних, які містить вираз, його значення не залежить від значень $a$ і $b$:

$$\frac{a^2 - b^2}{a + 3b} \cdot \left(\frac{a + b}{a^2 - 2ab + b^2} + \frac{b}{a^2 - b^2}\right) - \frac{b}{a - b}.$$

**345.** Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{3}{5x+25}+\frac{1}{2x-10}=\frac{5}{x^2-25}.$$

**346.** Ціну шафи знизили на 30 %, а через деякий час підвищили на 30 %. Як змінилася, збільшилася чи зменшилася, ціна шафи порівняно з початковою і на скільки відсотків?

**347.** (*Задача Сунь-Цзи*[1].) Два чоловіки отримали монети, які вони повинні поділити між собою так, що коли до монет, які матиме один з них, додати половину монет другого, або до монет, які матиме другий, додати $\frac{2}{3}$ монет першого, то в обох випадках буде 48 монет. Скільки монет отримав кожен з них?

**348.** Якщо лижник буде рухатися зі швидкістю 10 км/год, то дістанеться пункту призначення на 1 год пізніше від запланованого часу прибуття, а якщо рухатиметься зі швидкістю 15 км/год — то на 1 год раніше. З якою швидкістю він повинен рухатися, щоб прибути до пункту призначення в запланований час?

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**349.** Кожний з трьох учнів виписав 100 різних слів. Після цього слова, які зустрілися не менше двох разів, викреслили. У результаті в одного залишилося 45 слів, у другого — 68, а в третього — 54. Доведіть, що щонайменше одне слово виписали всі троє.

## ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 3

**1.** Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2-100}{x-10}=0.$

А) $-10$; 10; Б) 10; В) $-10$; Г) коренів немає.

**2.** Розв'яжіть рівняння $\frac{x-10}{x^2-100}=0.$

А) $-10$; 10; Б) 10; В) $-10$; Г) коренів немає.

[1] Сунь-Цзи — китайський математик, який жив у III чи IV ст.

**3.** Яка з наведених рівностей є правильною?

А) $10^{-3} = -1000$; В) $(-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$;

Б) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-2} = -\frac{9}{16}$; Г) $\frac{1}{7^{-2}} = -49$.

**4.** Як записують у стандартному вигляді число 42 000?

А) $4{,}2 \cdot 10^3$; Б) $4{,}2 \cdot 10^4$; В) $0{,}42 \cdot 10^5$; Г) $42 \cdot 10^3$.

**5.** Як записують у вигляді десяткового дробу число $6{,}3 \cdot 10^{-3}$?

А) 0,63; Б) 0,063; В) 0,0063; Г) 0,00063.

**6.** Подайте число $\frac{1}{25}$ у вигляді степеня з основою 5.

А) $5^{-2}$; Б) $5^2$; В) $5^{-3}$; Г) $5^3$.

**7.** Чому дорівнює значення виразу $(1{,}7 \cdot 10^8) \cdot (6 \cdot 10^{-3})$?

А) $1{,}02 \cdot 10^5$; Б) $1{,}02 \cdot 10^6$; В) $10{,}2 \cdot 10^6$; Г) $1{,}02 \cdot 10^7$.

**8.** Знайдіть значення виразу $\frac{9^{-2} \cdot 3^{-5}}{81 \cdot 27^{-3}}$.

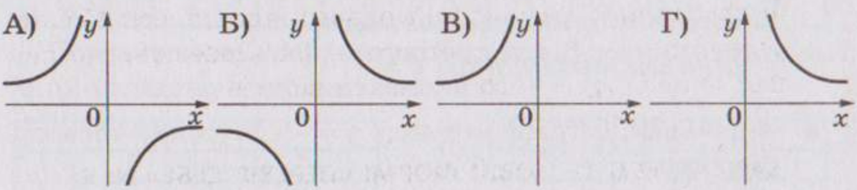
А) 81; Б) $\frac{1}{81}$; В) 27; Г) $\frac{1}{27}$.

**9.** Яка з даних функцій не є оберненою пропорційністю?

А) $y = \frac{3}{x}$; Б) $y = -\frac{3}{x}$; В) $y = \frac{3}{2x}$; Г) $y = \frac{3x}{2}$.

**10.** На одному з рисунків зображено графік функції $y = -\frac{4}{x}$.

Укажіть цей рисунок.




**11.** При якому значенні $k$ графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку $A\ (-3;\ 0{,}6)$?

А) $-1{,}8$; Б) $-0{,}2$; В) $-2{,}4$; Г) $-3{,}6$.

**12.** Розв'яжіть рівняння $\frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x+1}{4-x} = \frac{4x^2+8}{x^2-16}$.

А) 0; 4; Б) −4; 0; В) −4; Г) 0.

## ПІДСУМКИ

У цьому параграфі:

- було введено такі поняття:
  - раціональний дріб;
  - дробовий вираз;
  - раціональний вираз;
  - допустимі значення змінних;
  - раціональне рівняння;
  - рівносильні рівняння;
  - степінь з цілим показником;
  - стандартний вигляд числа;
  - обернена пропорційність;
- ви навчилися:
  - скорочувати раціональний дріб;
  - виконувати дії з раціональними дробами;
  - розв'язувати деякі види раціональних рівнянь;
  - підносити числа до нульового степеня і степеня з цілим від'ємним показником;
- ви вивчили:
  - основну властивість дробу;
  - властивості рівносильних рівнянь;
  - властивості степеня з цілим показником;
  - деякі властивості функції $y = \frac{k}{x}$;
- ви дізналися, що графіком функції $y = \frac{k}{x}$ є фігура, яку називають гіперболою;
- ви познайомилися з графічним методом розв'язування рівнянь.

# §2. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

- Ви дізнаєтеся про деякі властивості функції $y = x^2$.
- Ознайомитеся з новою дією «добування квадратного кореня». Для вас стане зрозумілим, що для вивчення навколишнього світу раціональних чисел недостатньо.
- Ви вивчите властивості нового математичного об'єкта «арифметичний квадратний корінь». Навчитеся спрощувати вирази, які містять квадратні корені.

## 11. Функція $y = x^2$ та її графік

Позначимо через $y$ площу квадрата зі стороною $x$. Тоді $y = x^2$.

Якщо змінювати сторону $x$ квадрата, то відповідно змінюватиметься і його площа $y$.

Зрозуміло, що кожному значенню змінної $x$ відповідає єдине значення змінної $y$. Отже, залежність змінної $y$ від змінної $x$ є функціональною, а формула $y = x^2$ задає функцію.

Розглянемо функцію $y = x^2$, областю визначення якої є всі числа. У таблиці наведено деякі значення аргументу і відповідні їм значення функції.

| $x$ | −3 | −2,5 | −2 | −1,5 | −1 | −0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 9 | 6,25 | 4 | 2,25 | 1 | 0,25 | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 | 6,25 | 9 |

Позначимо на координатній площині точки, координати яких наведено в таблиці (рис. 11).

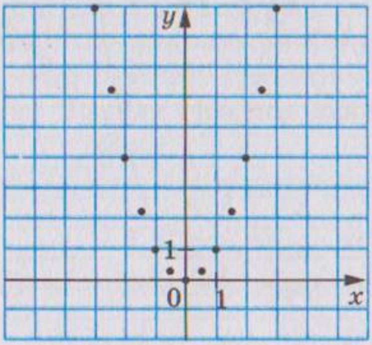



Рис. 11

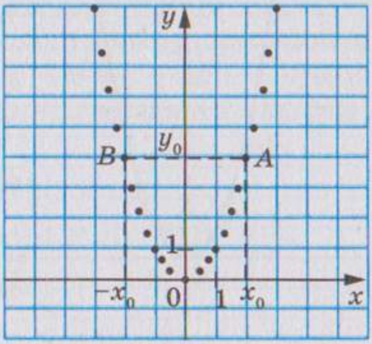



Рис. 12

Чим більше точок, координати яких задовольняють рівнянню $y = x^2$, позначимо, тим менше отримана фігура (рис. 12) відрізнятиметься від графіка функції $y = x^2$.

Пара (0; 0) є розв'язком рівняння $y = x^2$. Отже, графік даної функції проходить через початок координат. Оскільки $y = x^2$ і $x^2 \geqslant 0$, то $y \geqslant 0$, тобто серед позначених точок не може бути таких, що мають від'ємні ординати.

Областю значень функції $y = x^2$ є всі невід'ємні числа.

Оскільки $x^2 = (-x)^2$, то можна зробити висновок: якщо точка $A(x_0,\ y_0)$ належить графіку функції, то й точка $B\ (-x_0,\ y_0)$ також належить графіку (рис. 12).

Якби вдалося позначити на координатній площині всі точки, координати яких задовольняють рівняння $y = x^2$, то отримали б фігуру, яку називають **параболою** (рис. 13).

Точка з координатами (0; 0) поділяє параболу на дві рівні частини, кожну з яких називають **віткою параболи**, а саму точку — **вершиною параболи**.

У таблиці наведено властивості функції $y = x^2$, вивчені у цьому пункті.

| | |
|---|---|
| Область визначення | Усі числа |
| Область значень | Усі невід'ємні числа |
| Графік | Парабола |
| Нуль функції (значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0) | $x = 0$ |

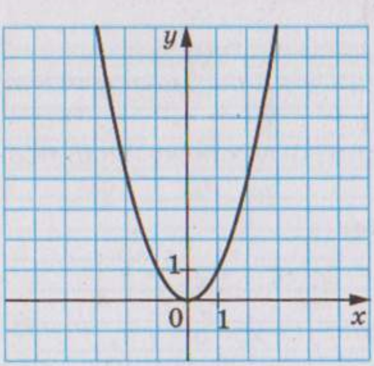



Рис. 13

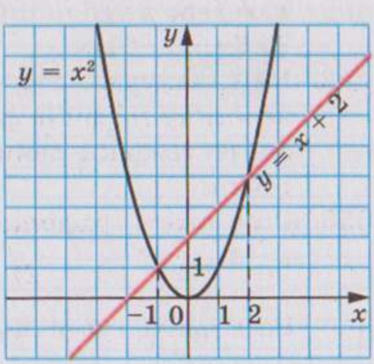



Рис. 14

**ПРИКЛАД**

Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 = x + 2$.

*Розв'язання*

В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = x^2$ і $y = x + 2$ (рис. 14). Ці графіки перетинаються у двох точках, абсциси яких дорівнюють 2 і −1. Перевірка підтверджує, що знайдені значення є коренями даного рівняння.

?

1. Що є областю визначення функції $y = x^2$?
2. Що є областю значень функції $y = x^2$?
3. Яка фігура є графіком функції $y = x^2$?
4. При якому значенні аргументу значення функції $y = x^2$ дорівнює нулю?
5. Порівняйте значення функції $y = x^2$ при протилежних значеннях аргументу.

**350.°** Функцію задано формулою $y = x^2$. Знайдіть:
1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює −6; 0,8; −1,2; 150;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 49; 0; 2500; 0,04.

**351.°** Не виконуючи побудови графіка функції $y = x^2$, визначте, чи проходить цей графік через точку:
1) $A$ (−8; 64);
2) $B$ (−9; −81);
3) $C$ (0,5; 2,5);
4) $D$ (0,1; 0,01).

**352.•** Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = x^2$ і $y = 4x - 4$. Побудуйте графіки даних функцій і позначте знайдені точки.

**353.•** Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2 = x - 1$; 2) $x^2 - 2x - 3 = 0$; 3) $x^2 = \frac{8}{x}$.

**354.•** Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2 = -4x - 3$; 2) $x^2 - 3x + 5 = 0$; 3) $x^2 + \frac{1}{x} = 0$.

**355.**$^{\bullet}$ Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x - y + 6 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x + 5y = 10. \end{cases}$

**356.**$^{\bullet}$ Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ 3x + 2y = -6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2, \\ x - 3y = -3. \end{cases}$

**357.**$^{\bullet\bullet}$ Функцію $f$ задано у такий спосіб:

$$f(x) = \begin{cases} 4, \text{ якщо } x \leqslant -2, \\ x^2, \text{ якщо } -2 < x < 1, \\ 2x - 1, \text{ якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$$

1) Знайдіть $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(0{,}5)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

**358.**$^{\bullet\bullet}$ Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ x^2, \text{ якщо } -1 < x < 2, \\ 4, \text{ якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$

1) Знайдіть $f(-4)$, $f(-0{,}3)$, $f(1{,}9)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(2)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

**359.**$^{\bullet\bullet}$ Дано функцію $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ якщо } x \leqslant 0, \\ x + 1, \text{ якщо } x > 0. \end{cases}$

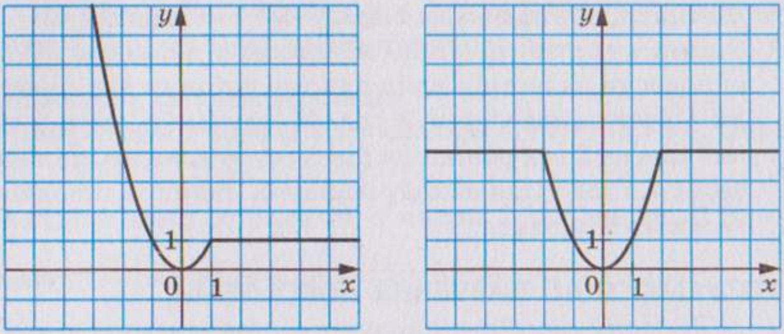
1) Знайдіть $f(-7)$, $f(0)$, $f(2)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

**360.**$^{\bullet\bullet}$ Дано функцію $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{6}{x}, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ x^2, \text{ якщо } x > -1. \end{cases}$

1) Знайдіть $f(-12)$, $f(-1)$, $f(-0{,}9)$, $f(3)$, $f(0)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

**361.**$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{x^3 + x^2}{x + 1}$; 2) $y = \dfrac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 4}$.



*а)* *б)*

Рис. 15

**362.••** Побудуйте графік функції $y = \frac{x^3}{x}$.

**363.••** Знайдіть область визначення, область значень і нулі функції $y = -x^2$. Побудуйте графік цієї функції.

**364.*** Побудуйте графік рівняння:

1) $\frac{y - x^2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0$; 2) $\frac{y - x^2}{y - x} = 0$.

**365.*** Побудуйте графік рівняння $\frac{x^2 - y}{(x+2)^2 + (y-4)^2} = 0$.

**366.*** Задайте функцію, графік якої зображено на рисунку 15, у спосіб, який використано в задачі 357.

**367.*** Задайте функцію, графік якої зображено на рисунку 16, у спосіб, який використано в задачі 357.

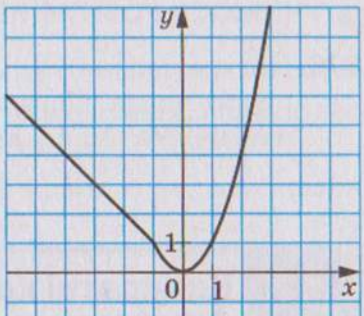


Рис. 16

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**368.** Доведіть тотожність:

$$\frac{(a+b)^2}{a-b} : \left(\frac{a}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{a+b}\right) = a + b.$$

**369.** Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{6}{x-2} - \frac{x+3}{x} = \frac{x+6}{x^2-2x}.$$

**370.** Доведіть, що значення виразу $27^6 - 9^7$ кратне 48.

**371.** З двох пунктів, відстань між якими дорівнює 30 км, одночасно назустріч один одному вийшли два пішоходи і зустрілися через 3 год 45 хв. Якби один з них вийшов на 2 год раніше за другого, то вони зустрілися б через 4,5 год після виходу першого. Знайдіть швидкості кожного пішохода.

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**372.** Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює:
1) 25 см$^2$; 2) 1600 дм$^2$; 3) 0,04 м$^2$.

**373.** Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 = 9$; 2) $x^2 = \frac{36}{49}$.

**374.** При яких значеннях $a$ рівняння $x^2 = a$ не має коренів?

**375.** Побудувавши графіки функцій $y = x^2$ і $y = 1$, знайдіть координати їх спільних точок.

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**376.** Натуральні числа $x$, $y$, $z$ такі, що $x + y$, $y + z$, $x + z$ — прості числа. Доведіть, що серед чисел $x$, $y$, $z$ є принаймні два числа, які дорівнюють 1.

# 12. Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь

Розглянемо квадрат, площа якого дорівнює 49 см$^2$. Нехай довжина його сторони дорівнює $x$ см. Тоді рівняння $x^2 = 49$ можна розглядати як математичну модель задачі про знаходження сторони квадрата, площа якого дорівнює 49 квадратним одиницям.

Коренями цього рівняння є числа 7 і $-7$, квадрати яких дорівнюють 49. Кажуть, що числа 7 и $-7$ є **квадратними коренями** з числа 49.

**Означення. Квадратним коренем з числа $a$ називають число, квадрат якого дорівнює $a$.**

Наведемо кілька прикладів.

Квадратними коренями з числа 9 є числа 3 і $-3$. Справді, $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$.

Квадратними коренями з числа $\frac{25}{4}$ є числа $\frac{5}{2}$ і $-\frac{5}{2}$. Справді, $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Квадратним коренем з числа 0 є тільки число 0.

Оскільки не існує числа, квадрат якого дорівнює від'ємному числу, то квадратний корінь з від'ємного числа не існує.

Додатний корінь рівняння $x^2 = 49$, число 7, є відповіддю до задачі про знаходження сторони квадрата. Це число називають **арифметичним квадратним коренем** з числа 49.

**Означення. Арифметичним квадратним коренем з числа $a$ називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює $a$.**

Арифметичний квадратний корінь з числа $a$ позначають $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{\ }$ називають **знаком квадратного кореня** або **радикалом** (від латинського слова *radix* — корінь).

Запис $\sqrt{a}$ читають «квадратний корінь з $a$», опускаючи при читанні слово «арифметичний».

Вираз, який стоїть під знаком радикала, називають **підкореневим виразом**. Наприклад, у запису $\sqrt{b-5}$ двочлен $b - 5$ є підкореневим виразом. З означення арифметичного квадратного кореня випливає, що *підкореневий вираз може набувати тільки невід'ємних значень*.

Дію знаходження арифметичного квадратного кореня з числа називають **добуванням квадратного кореня**.

Розглянемо кілька прикладів:

$\sqrt{9} = 3$, оскільки $3 \geqslant 0$ і $3^2 = 9$;

$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$, оскільки $\frac{5}{2} \geqslant 0$ і $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$;

$\sqrt{0} = 0$, оскільки $0 \geqslant 0$ і $0^2 = 0$.

Узагалі, ***якщо*** $b \geqslant 0$ ***і*** $b^2 = a$, ***то*** $\sqrt{a} = b$.

***Для будь-якого невід'ємного числа*** $a$ ***справедливо, що*** $\sqrt{a} \geqslant 0$ ***і*** $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Наприклад, $\left(\sqrt{4}\right)^2 = 4$, $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, $\left(\sqrt{5,2}\right)^2 = 5,2$.

Підкреслимо, що до поняття квадратного кореня ми прийшли, розв'язуючи рівняння виду $x^2 = a$, де $a \geqslant 0$. Коренями цього рівняння є числа, кожне з яких є квадратним коренем з числа $a$.

Знаходження коренів рівняння $x^2 = a$ проілюструємо, розв'язавши графічно рівняння $x^2 = 4$.

В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = x^2$ і $y = 4$ (рис. 17). Точки перетину цих графіків мають абсциси 2 і $-2$, які й є коренями заданого рівняння.

Зрозуміло, що рівняння $x^2 = a$ при $a < 0$ не має коренів, що підтверджують графічні міркування: графіки функцій $y = x^2$ і $y = a$ при $a < 0$ спільних точок не мають (рис. 18).

При $a = 0$ рівняння $x^2 = a$ має єдиний корінь $x = 0$.

Графічний метод дозволяє зробити такий висновок: якщо $a > 0$, то рівняння $x^2 = a$ має два корені. Дійсно, парабола $y = x^2$ і пряма $y = a$, де $a > 0$, мають дві спільні точки (рис. 18). При цьому коренями рівняння $x^2 = a$ є числа $\sqrt{a}$ і $-\sqrt{a}$. Справді, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$.

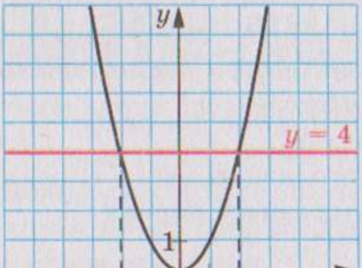



Рис. 17

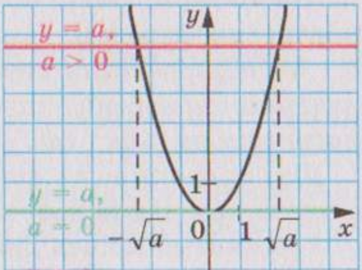



Рис. 18

Наприклад, рівняння $x^2 = 5$ має два корені: $\sqrt{5}$ і $-\sqrt{5}$.

### ПРИКЛАД 1

Знайдіть значення виразу $\left(-8\sqrt{2}\right)^2$.

*Розв'язання*

Застосувавши правило піднесення добутку до степеня і тотожність $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, отримуємо:

$$\left(-8\sqrt{2}\right)^2 = (-8)^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 64 \cdot 2 = 128.$$

### ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть рівняння: 1) $\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$; 2) $\sqrt{1 + \sqrt{x+2}} = 2$.

*Розв'язання*

1) Маємо: $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3$; $\sqrt{x} = 6$. Тоді $x = 6^2$; $x = 36$.

2) Маємо: $\sqrt{1 + \sqrt{x+2}} = 2$; $1 + \sqrt{x+2} = 2^2$; $\sqrt{x+2} = 3$; $x + 2 = 3^2$; $x = 7$.

### ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть рівняння $(x - 5)^2 = 16$.

*Розв'язання*

$$(x - 5)^2 = 16;$$

$$x - 5 = -4 \text{ або } x - 5 = 4;$$

$$x = 1 \text{ або } x = 9.$$

Відповідь: 1; 9.

### ПРИКЛАД 4

Розв'яжіть рівняння $(3x - 1)^2 = 2$.

*Розв'язання*

$$(3x - 1)^2 = 2;$$

$$3x - 1 = -\sqrt{2} \text{ або } 3x - 1 = \sqrt{2};$$

$$3x = 1 - \sqrt{2} \text{ або } 3x = 1 + \sqrt{2};$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{2}}{3} \text{ або } x = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}.$$

Відповідь: $\frac{1 - \sqrt{2}}{3}$; $\frac{1 + \sqrt{2}}{3}$.

**ПРИКЛАД 5**

При яких значеннях $x$ має зміст вираз:

1) $\sqrt{-5x}$; 2) $\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}$?

*Розв'язання*

1) Вираз $\sqrt{-5x}$ має зміст, якщо підкореневий вираз $-5x$ набуває невід'ємних значень. Підкореневий вираз є добутком двох множників, один з яких є від'ємним числом. Отже, цей добуток набуватиме невід'ємних значень, якщо другий множник $x$ буде приймати недодатні значення.

Відповідь: при $x \leqslant 0$.

2) Даний вираз має зміст, якщо виконуються дві умови: має зміст вираз $\sqrt{x}$ і знаменник $\sqrt{x}-2$ відмінний від нуля. Отже, повинні одночасно виконуватися дві умови: $x \geqslant 0$ і $\sqrt{x}-2 \neq 0$. Звідси $x \geqslant 0$ і $x \neq 4$.

Відповідь: при $x \geqslant 0$ і $x \neq 4$.

**ПРИКЛАД 6**

Розв'яжіть рівняння: 1) $\sqrt{-x}+\sqrt{x-2}=2$;

2) $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x-2}=0$; 3) $(x+2)\sqrt{x-2}=0$.

*Розв'язання*

1) Ліва частина даного рівняння має зміст, якщо підкореневі вирази $-x$ і $x-2$ одночасно набувають невід'ємних значень. Маємо: $-x \geqslant 0$, тоді $x \leqslant 0$. Зрозуміло, що при $x \leqslant 0$ вираз $x-2$ набуває тільки від'ємних значень. Отже, ліва частина даного рівняння не має змісту.

Відповідь: коренів немає.

2) Ліва частина даного рівняння є сумою двох доданків, кожен з яких може набувати тільки невід'ємних значень. Тоді їх сума дорівнюватиме нулю, якщо кожен з доданків дорівнює нулю. Отже, одночасно мають виконуватися дві умови: $\sqrt{x^2-2x}=0$ і $\sqrt{x-2}=0$. Це означає, що треба знайти спільні корені отриманих рівнянь. У таких випадках кажуть, що треба розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-2x}=0,\\ \sqrt{x-2}=0.\end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases} x^2 - 2x = 0, \\ x - 2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x(x-2) = 0, \\ x = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \text{ або } x = 2, \\ x = 2. \end{cases}$

Розв'язком останньої системи є число 2.

Відповідь: 2.

3) Використовуючи умову рівності добутку нулю, отримуємо:

$$x + 2 = 0 \text{ або } \sqrt{x-2} = 0;$$
$$x = -2 \text{ або } x = 2.$$

Проте при $x = -2$ вираз $\sqrt{x-2}$ не має змісту. Отже, дане рівняння має єдиний корінь $x = 2$.

Відповідь: 2.

1. Що називають квадратним коренем з числа $a$?
2. Що називають арифметичним квадратним коренем з числа $a$?
3. Як позначають арифметичний квадратний корінь з числа $a$?
4. Як називають знак $\sqrt{\ }$ ?
5. Як читають запис $\sqrt{a}$ ?
6. Як називають вираз, який стоїть під знаком радикала?
7. Яких значень може набувати підкореневий вираз?
8. Як називають дію знаходження арифметичного квадратного кореня з числа?
9. Чому дорівнює значення виразу $(\sqrt{a})^2$ для будь-якого невід'ємного числа?
10. Скільки коренів має рівняння $x^2 = a$ при $a > 0$? Чому вони дорівнюють?
11. Чи має корені рівняння $x^2 = a$ при $a = 0$? при $a < 0$?

**377.°** Чому дорівнює квадратний корінь з числа 16? з числа 1? з числа 0? Чому дорівнює арифметичний квадратний корінь з цих чисел?

**378.°** Чи є правильною рівність (відповідь обґрунтуйте):

1) $\sqrt{25} = 5$; 3) $\sqrt{36} = -6$; 5) $\sqrt{0,81} = 0,9$;

2) $\sqrt{0} = 0$; 4) $\sqrt{0,4} = 0,2$; 6) $\sqrt{10} = 100$?

**379.°** Знайдіть значення арифметичного квадратного кореня:

1) $\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{49}$; 3) $\sqrt{100}$; 4) $\sqrt{225}$;

5) $\sqrt{0,25}$; 8) $\sqrt{1,96}$; 11) $\sqrt{\frac{1}{64}}$; 14) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$;

6) $\sqrt{0,01}$; 9) $\sqrt{400}$; 12) $\sqrt{\frac{4}{9}}$; 15) $\sqrt{0,0004}$;

7) $\sqrt{1,21}$; 10) $\sqrt{3600}$; 13) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 16) $\sqrt{0,000025}$.

**380.°** Знайдіть значення арифметичного квадратного кореня:

1) $\sqrt{36}$; 4) $\sqrt{0,04}$; 7) $\sqrt{2500}$; 10) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$;

2) $\sqrt{64}$; 5) $\sqrt{0,49}$; 8) $\sqrt{10\ 000}$; 11) $\sqrt{0,0009}$;

3) $\sqrt{144}$; 6) $\sqrt{1,69}$; 9) $\sqrt{\frac{16}{121}}$; 12) $\sqrt{0,0196}$.

**381.°** Чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{-2}$; 5) $\left(\sqrt{-2}\right)^2$?

2) $-\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{(-2)^2}$;

**382.°** Арифметичний квадратний корінь з якого числа дорівнює:

1) 4; 2) 0; 3) 0,8; 4) $2\frac{1}{4}$; 5) 1,6; 6) –9?

**383.°** Користуючись таблицею квадратів натуральних чисел, розміщеною на форзаці, знайдіть:

1) $\sqrt{484}$; 4) $\sqrt{5929}$; 7) $\sqrt{68,89}$;

2) $\sqrt{729}$; 5) $\sqrt{5,76}$; 8) $\sqrt{67\ 600}$;

3) $\sqrt{1156}$; 6) $\sqrt{14,44}$; 9) $\sqrt{384\ 400}$.

**384.°** Знайдіть:

1) $\sqrt{841}$; 3) $\sqrt{9,61}$; 5) $\sqrt{72,25}$;

2) $\sqrt{1296}$; 4) $\sqrt{10,24}$; 6) $\sqrt{672\ 400}$.

**385.°** Користуючись мікрокалькулятором, знайдіть значення квадратного кореня (результат округліть до сотих):

1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{34}$; 4) $\sqrt{1,8}$; 5) $\sqrt{2,439}$.

**386.°** Користуючись мікрокалькулятором, знайдіть значення квадратного кореня (результат округліть до сотих):

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5,1}$; 3) $\sqrt{40}$; 4) $\sqrt{12,56}$.

**387.°** Знайдіть значення виразу:

1) $(\sqrt{7})^2$; 4) $-(\sqrt{10})^2$; 7) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

2) $(\sqrt{4,2})^2$; 5) $(2\sqrt{3})^2$; 8) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{14}\right)^2$;

3) $(-\sqrt{11})^2$; 6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$; 9) $(-0,3\sqrt{2})^2$.

**388.°** Обчисліть:

1) $(\sqrt{6})^2$; 3) $(3\sqrt{2})^2$; 5) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$;

2) $(-\sqrt{21})^2$; 4) $(-4\sqrt{5})^2$; 6) $\left(\frac{1}{4}\sqrt{26}\right)^2$.

**389.°** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{16+9}$; 7) $\frac{1}{3}\sqrt{0,09}-2$;

2) $\sqrt{16}+\sqrt{9}$; 8) $-2\sqrt{0,16}+0,7$;

3) $\sqrt{36}-\sqrt{49}$; 9) $(\sqrt{13})^2-3\cdot(\sqrt{8})^2$;

4) $\sqrt{36}\cdot\sqrt{49}$; 10) $\frac{1}{6}\cdot(\sqrt{18})^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)^2$;

5) $5\sqrt{4}-\sqrt{25}$; 11) $50\cdot\left(-\frac{1}{5}\sqrt{2}\right)^2$;

6) $\sqrt{0,81}+\sqrt{0,01}$; 12) $\sqrt{4\cdot5^2-6^2}$.

**390.°** Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{3+\sqrt{36}}$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt{900}+0,2\sqrt{1600}$;

2) $\sqrt{72-\sqrt{64}}$; 5) $(2\sqrt{6})^2-3(\sqrt{21})^2$;

3) $\sqrt{16}\cdot\sqrt{225}$; 6) $\sqrt{10^2-4\cdot3^2}$.

**391.°** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{12+a}$, якщо $a = 0,25$;

2) $\sqrt{7-3b}$, якщо $b = 2$;

3) $\sqrt{2a-b}$, якщо $a = 34$, $b = 19$.

**392.°** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{27+m}$, якщо $m = 54$;

2) $\sqrt{m-3n}$, якщо $m = 0,13$, $n = -0,04$.

**393.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = 9$;

2) $\sqrt{x} = \frac{1}{4}$;

3) $\sqrt{x} - 0,2 = 0$;

4) $\sqrt{x} + 7 = 0$.

**394.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = 20$; 2) $\sqrt{x} = -16$; 3) $\sqrt{x} - \frac{2}{3} = 0$.

**395.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 25$; 2) $x^2 = 0,49$; 3) $x^2 = 3$; 4) $x^2 = -25$.

**396.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 100$; 2) $x^2 = 0,81$; 3) $x^2 = 7$; 4) $x^2 = 3,6$.

**397.•** Знайдіть значення виразу:

1) $-0,06 \cdot \sqrt{10\ 000} + \frac{8}{\sqrt{256}} - 2,5\sqrt{3,24}$;

2) $\sqrt{64} \cdot \sqrt{6,25} + \sqrt{2^3 + 17}$;

3) $\sqrt{1\frac{11}{25}} + 3\sqrt{7\frac{1}{9}} - 0,6\sqrt{3025}$;

4) $\left(\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2 + \sqrt{26^2 - 24^2}$;

5) $(3\sqrt{8})^2 + (8\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{24})^2$;

6) $\sqrt{144} : \sqrt{0,04} - \sqrt{2,56} \cdot \sqrt{2500}$.

**398.•** Знайдіть значення виразу:

1) $0,15\sqrt{3600} - 0,18\sqrt{400} + (10\sqrt{0,08})^2$;

2) $\frac{95}{\sqrt{361}} - \frac{13}{14}\sqrt{1\frac{27}{169}} + \sqrt{8^2 + 15^2}$;

3) $\left(-8\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{1,44}}{3} \cdot \sqrt{12,25}\right) : (0,1\sqrt{13})^2$.

**399.•** При яких значеннях $x$ має зміст вираз:

1) $\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{-x}$; 3) $\sqrt{x^2}$; 4) $\sqrt{-x^2}$;

5) $\sqrt{x-8}$; 8) $\sqrt{(x-8)^2}$; 11) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$; 14) $\sqrt{|x|}$;

6) $\sqrt{8-x}$; 9) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-8)^2}}$; 12) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{-x}$; 15) $\sqrt{-|x|}$;

7) $\sqrt{x^2+8}$; 10) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$; 13) $\dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{-x}}$; 16) $\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$?

**400.**° При яких значеннях $y$ має зміст вираз:

1) $\sqrt{2y}$; 3) $\sqrt{y^3}$; 5) $\sqrt{-y^4}$; 7) $\dfrac{1}{\sqrt{y}-1}$;

2) $\sqrt{-3y}$; 4) $\sqrt{-y^3}$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{y}}$; 8) $\dfrac{1}{\sqrt{y}+1}$?

**401.**° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{5x}-4=0$; 3) $\sqrt{5x-4}=6$; 5) $\dfrac{18}{\sqrt{x+3}}=9$;

2) $\sqrt{5x-4}=0$; 4) $\dfrac{42}{\sqrt{x}}=6$; 6) $\sqrt{x^2-36}=8$.

**402.**° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{3}\sqrt{x}-2=0$; 3) $\dfrac{4}{\sqrt{x-5}}=6$;

2) $\sqrt{2x+3}=11$; 4) $\sqrt{130-x^2}=9$.

**403.**° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+6)^2=0$; 3) $(x+6)^2=3$;

2) $(x+6)^2=9$; 4) $(7x+6)^2=5$.

**404.**° Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x-3)^2=25$; 2) $(x-3)^2=7$; 3) $(2x-3)^2=7$.

**405.**°° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3+\sqrt{2+x}}=4$;

2) $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=3$;

3) $\sqrt{4-\sqrt{10+\sqrt{x}}}=2$.

**406.**°° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{17+\sqrt{\sqrt{x}-6}}=5$; 2) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=1$.

**407.**°° При яких значеннях $a$ і $b$ має зміст вираз:

1) $\sqrt{ab}$; 2) $\sqrt{-ab}$; 3) $\sqrt{ab^2}$; 4) $\sqrt{a^2b^2}$; 5) $\sqrt{-a^2b}$?

**408.**'' Чи можна стверджувати, що при будь-якому значенні $x$ має зміст вираз:

1) $\sqrt{x^2-4x+4}$;  2) $\sqrt{x^2-4x+5}$?

**409.**'' Доведіть, що не існує такого значення $x$, при якому має зміст вираз $\sqrt{-x^2+6x-12}$.

**410.**'' Який з даних виразів має зміст при будь-якому значенні $x$:

1) $\sqrt{x^2+8x+15}$;  2) $\sqrt{x^2-10x+27}$?

**411.**'' Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}=-x$;  4) $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4}=0$;

2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=0$;  5) $(x-1)\sqrt{x+1}=0$;

3) $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x-1}=0$;  6) $(x+1)\sqrt{x-1}=0$.

**412.**'' Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=0$;  3) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-1}=0$;

2) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=1$;  4) $(x-2)\sqrt{x-3}=0$.

**413.**'' При яких значеннях $a$ рівняння $x^2=a+1$:

1) має два корені;
2) має один корінь;
3) не має коренів?

**414.**'' Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{-x^2}$;

2) $y=\sqrt{-x^2-4x-4}+2$;

3) $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$.

**415.**'' Побудуйте графік функції $y=\sqrt{2x-1-x^2}-1$.

**416.*** Для кожного значення $a$ розв'яжіть рівняння:

1) $a\sqrt{x-1}=0$;  3) $a\sqrt{x-1}=a$;

2) $\sqrt{(a-1)x}=0$;  4) $\sqrt{x-2}=a$.

**417.*** При яких значеннях $a$ рівняння $\left(\sqrt{x}-1\right)(x-a)=0$ має тільки один корінь?

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**418.** Будинки на вулиці пронумеровано поспіль числами від 1 до 24. Скільки разів цифра 1 зустрічається в нумерації?

**419.** Спростіть вираз:

$$\left(\frac{a}{a^2-25}+\frac{5}{5-a}+\frac{1}{a+5}\right):\left(\frac{28-a^2}{a+5}+a-5\right).$$

**420.** Робітник одержав 470 грн. авансу купюрами по 5 грн. і по 20 грн. Скільки було купюр кожного виду, якщо всього було 31 купюра?

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**421.** Порівняйте:

1) 2,4578 і 2,4569; 2) −1,9806 і −1,981.

**422.** Прочитайте періодичний дріб і назвіть його період:

1) 0,(5); 2) 1,(32); 3) 8,4(65); 4) 3,424242....

**423.** Перетворіть у десятковий дріб:

1) $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{7}{16}$; 4) $\frac{97}{80}$; 5) $\frac{42}{15}$.

**424.** Перетворіть звичайний дріб у нескінченний періодичний десятковий дріб і визначте його період:

1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{11}{15}$; 3) $\frac{9}{11}$; 4) $\frac{31}{33}$.

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**425.** Знайдіть усі тризначні натуральні числа $n$ такі, що сума цифр числа $n$ в 11 разів менша від самого числа $n$.

## КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

### *Чи ростуть у городі радикали?*

У Стародавній Греції дію добування кореня ототожнювали з пошуком сторони квадрата за його площею, а сам квадратний корінь називали «стороною».

У Стародавній Індії слово «мула» означало «початок», «основа», «корінь дерева». Це слово почали застосовувати

*Рене Декарт*

і до сторони квадрата, виходячи, можливо, з такої асоціації: із сторони квадрата, як з кореня, виростає сам квадрат. Можливо, тому в латинській мові поняття «сторона» і «корінь» виражаються одним і тим самим словом — *radix*. Від цього слова походить термін «радикал».

Слово *radix* можна також перекласти як «редис», тобто коренеплід — рослина, їстівною частиною якої є корінь.

У XIII–XV ст. європейські математики, скорочуючи слово *radix*, позначали квадратний корінь знаками $R$, $R$, $R^2$. Наприклад, запис $\sqrt{7}$ мав такий вигляд: $R^27$.

У XVI ст. стали використовувати знак √. Походження цього символу, мабуть, пов'язано з рукописною латинською буквою *r*.

У XVII ст. видатний французький математик Рене Декарт, поєднавши знак √ з горизонтальною рискою, отримав символ $\sqrt{\phantom{x}}$, який ми використовуємо сьогодні.

## 13. Числові множини

Натуральні числа — це перші числа, якими почали користуватися люди. З ними ви ознайомилися, коли вчилися рахувати предмети. Усі натуральні числа утворюють **множину натуральних чисел**, яку позначають буквою $N$.

Той факт, що деяке число $m$ є натуральним, тобто належить множині натуральних чисел, позначають так: $m \in N$ (читають: «ем належить ен»). Наприклад, $5 \in N$. Число 0 не є натуральним. Пишуть $0 \notin N$ (читають: «нуль не належить ен»).

Практичні потреби привели до виникнення дробових чисел. Пізніше з'явилася необхідність розглядати величини, для характеристики яких додатних чисел виявилося недостатньо. Так виникли від'ємні числа.

Усі натуральні числа, протилежні їм числа і число нуль утворюють **множину цілих чисел**, яку позначають буквою $Z$.

Наприклад, $-2 \in \boldsymbol{Z}$, $0 \in \boldsymbol{Z}$, $5 \in \boldsymbol{Z}$.

Множина натуральних чисел є частиною множини цілих чисел. Говорять, що множина $\boldsymbol{N}$ є **підмножиною** множини $\boldsymbol{Z}$, і пишуть $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$ (читають: «ен підмножина зет»).

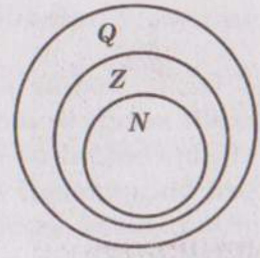


Рис. 19

Цілі й дробові (як додатні, так і від'ємні) числа утворюють **множину раціональних чисел**, яку позначають буквою $\boldsymbol{Q}$. Наприклад, $\frac{2}{3} \in \boldsymbol{Q}$, $-0{,}2 \in \boldsymbol{Q}$, $0 \in \boldsymbol{Q}$, $-3 \in \boldsymbol{Q}$, $15 \in \boldsymbol{Q}$.

Зрозуміло, що $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$. Схема, зображена на рисунку 19, показує, як пов'язані між собою множини $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ і $\boldsymbol{Q}$.

Кожне раціональне число можна подати у вигляді відношення $\frac{m}{n}$, де $m$ — ціле число, а $n$ — натуральне. Наприклад, $5 = \frac{5}{1}$; $-3 = \frac{-3}{1}$; $0{,}2 = \frac{1}{5}$; $0 = \frac{0}{7}$; $5{,}3 = \frac{53}{10}$.

З можливістю такого подання пов'язана назва «раціональне число»: одним з перекладів латинського слова *ratio* є «відношення».

У VI класі ви дізналися, що кожне раціональне число можна подати у вигляді скінченного десяткового дробу або у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. Для дробу $\frac{m}{n}$ таке подання можна отримати, виконавши ділення числа $m$ на число $n$ «куточком».

Наприклад, $\frac{5}{8} = 0{,}625$; $\frac{5}{11} = 0{,}454545\ldots$ .

Число $\frac{5}{8}$ записано у вигляді скінченного десяткового дробу, а число $\frac{5}{11}$ — у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу. У запису 0,454545... цифри 4 і 5 періодично повторюються. Групу цифр, яка повторюється, називають **періодом дробу** і записують 0,(45), тобто $\frac{5}{11} = 0{,}(45)$.

Зауважимо, що будь-який скінченний десятковий дріб і будь-яке ціле число можна подати у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу. Наприклад,

$$0{,}625 = 0{,}6250000\ldots = 0{,}625(0);$$
$$2 = 2{,}000\ldots = 2{,}(0).$$

Отже, ***кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу***.

Справедливим є й таке твердження: ***кожний нескінченний десятковий періодичний дріб є записом деякого раціонального числа***. У IX класі ви навчитеся записувати нескінченний десятковий періодичний дріб у вигляді звичайного дробу.

Сума і добуток двох натуральних чисел є натуральними числами. Проте різниця таку властивість має не завжди. Наприклад, $(5 - 7) \notin \boldsymbol{N}$.

Сума, різниця, добуток двох цілих чисел є цілими числами. Проте частка таку властивість не має. Наприклад, $\frac{5}{7} \notin \boldsymbol{Z}$.

Сума, різниця, добуток і частка (крім ділення на нуль) двох раціональних чисел є раціональними числами.

Отже, дія віднімання може вивести результат за межі множини $\boldsymbol{N}$, дія ділення — за межі множини $\boldsymbol{Z}$, проте виконання будь-якої з чотирьох арифметичних дій не виводить результат за межі множини $\boldsymbol{Q}$.

Ви познайомилися з новою дією — добуванням квадратного кореня. Виникає природне запитання: чи завжди квадратний корінь з невід'ємного раціонального числа є число раціональне?

Розглянемо рівняння $x^2 = 2$. Оскільки $2 > 0$, то рівняння має два корені: $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$ (рис. 20). Проте *не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює* 2 (доведення цього факту ви можете знайти в розділі «Коли зроблено уроки»), тобто числа $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$ не є раціональними. Їх називають **ірраціональними** (приставка «ір» означає заперечення).

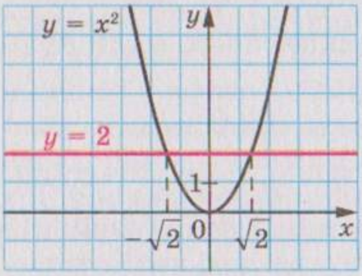



Рис. 20

Отже, дія добування кореня з раціонального числа може вивести результат за межі множини $\boldsymbol{Q}$.

Жодне ірраціональне число не можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, а отже, й у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.

Ірраціональні числа можуть бути подані у вигляді **нескінченних неперіодичних** десяткових дробів.

Наприклад, за допомогою спеціальної комп'ютерної програми можна встановити, що

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097\ldots .$$

Числа $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$ — це не перші ірраціональні числа, з якими ви зустрічаєтесь. Число $\pi$, яке дорівнює відношенню довжини кола до діаметра, є ірраціональним:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716 93\ldots$$

Ірраціональні числа виникають не тільки в результаті добування квадратних коренів. Їх можна конструювати, будуючи нескінченні неперіодичні десяткові дроби.

Наприклад, число 0,1010010001000010000 0... (після коми записуються послідовно степені числа 10) є ірраціональним. Дійсно, якщо припустити, що цей десятковий дріб має період, який складається з $n$ цифр, то з деякого місця він повністю складатиметься з нулів, тобто починаючи з цього місця в запису не повинно бути жодної одиниці, що суперечить конструкції числа.

Множини ірраціональних і раціональних чисел утворюють **множину дійсних чисел**, яку позначають буквою $\boldsymbol{R}$.

Тепер «ланцюжок» $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$ можна продовжити: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.

На заняттях математичного гуртка ви можете дізнатися, що цей ланцюжок також можна продовжити.

Зв'язок між числовими множинами, які розглянуто в цьому пункті, ілюструє схема, зображена на рисунку 21.


Рис. 21

Над дійсними числами можна виконувати чотири арифметичних дії (крім ділення на нуль), у результаті отримуватимемо дійсне число. Цим діям притаманні звичні для вас властивості:

| | |
|---|---|
| $a + b = b + a$ | переставна властивість додавання |
| $ab = ba$ | переставна властивість множення |
| $(a + b) + c = a + (b + c)$ | сполучна властивість додавання |
| $(ab)\,c = a\,(bc)$ | сполучна властивість множення |
| $a\,(b + c) = ab + ac$ | розподільна властивість |

Додатні дійсні числа можна порівнювати, використовуючи правила порівнювання десяткових дробів, тобто порівнювання цифр у відповідних розрядах. Наприклад, $7{,}853126... < 7{,}853211...$ .

Будь-яке додатне дійсне число більше за нуль і за будь-яке від'ємне дійсне число. Будь-яке від'ємне дійсне число менше від нуля.

Знаходячи довжину кола і площу круга, ви користувалися наближеним значенням числа $\pi$ ($\pi \approx 3{,}14$). Аналогічно при розв'язуванні практичних задач, де необхідно виконати дії з дійсними числами, ці числа заміняють їх наближеними значеннями. Наприклад, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

На закінчення підкреслимо, що з будь-якого невід'ємного дійсного числа можна добути квадратний корінь і в результаті цієї дії отримати дійсне число, тобто дія добуття квадратного кореня з невід'ємного дійсного числа не виводить результат за межі множини $\boldsymbol{R}$.

?

1. Якою буквою позначають множину натуральних чисел?
2. Що означає запис $m \in \boldsymbol{N}$? Як читають цей запис?
3. Як читають запис $a \notin \boldsymbol{N}$?
4. Які числа утворюють множину цілих чисел?
5. Якою буквою позначають множину цілих чисел?
6. У якому випадку одна множина є підмножиною іншої множини?
7. Як читають запис $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$?
8. Які числа утворюють множину раціональних чисел?

**9.** Якою буквою позначають множину раціональних чисел?
**10.** У вигляді якого відношення можна подати кожне раціональне число?
**11.** Як пов'язані між собою раціональні числа і нескінченні десяткові періодичні дроби?
**12.** Як називають числа, які не є раціональними?
**13.** Які множини утворюють разом множину дійсних чисел?
**14.** Якою буквою позначають множину дійсних чисел?
**15.** Як взаємопов'язані множини $N$, $Z$, $Q$ і $R$?

**426.°** Яке з наведених тверджень хибне:
1) −3 — дійсне число;
2) −3 — раціональне число;
3) −3 — ціле число;
4) −3 — натуральне число?

**427.°** Чи є правильним твердження:
1) $1 \in N$;
2) $1 \in Z$;
3) $1 \in Q$;
4) $1 \in R$;
5) $-2{,}3 \in N$;
6) $-2{,}3 \in R$;
7) $\sqrt{7} \notin R$;
8) $\sqrt{121} \notin R$;
9) $\frac{\pi}{3} \in R$?

**428.°** Чи є правильним твердження:
1) $0 \in N$;
2) $0 \notin Z$;
3) $0 \in R$;
4) $-\frac{3}{7} \in Q$;
5) $-\frac{3}{7} \notin R$;
6) $\sqrt{9} \in Q$;
7) $\sqrt{9} \in Z$;
8) $\sqrt{9} \in R$?

**429.°** Чи є правильним твердження:
1) будь-яке натуральне число є цілим;
2) будь-яке натуральне число є раціональним;
3) будь-яке натуральне число є дійсним;
4) будь-яке раціональне число є цілим;
5) будь-яке дійсне число є раціональним;
6) будь-яке раціональне число є дійсним;
7) будь-яке ірраціональне число є дійсним;
8) будь-яке дійсне число є раціональним або ірраціональним?

**430.°** Які з даних нескінченних дробів є записами раціональних чисел, а які — ірраціональних:

1) 0,(3);
2) 0,4(32);
3) 0,20200200020... (кількість нулів між сусідніми двійками послідовно збільшується на 1)?

**431.°** Порівняйте:
1) 6,542... і 6,452... ; 2) −24,064... і −24,165... .

**432.°** Порівняйте:
1) 0,234... і 0,225... ; 2) −1,333... і −1,345... .

**433.˙** Укажіть яке-небудь значення $a$, при якому рівняння $x^2 = a$:
1) має два раціональні корені;
2) має два ірраціональні корені;
3) не має коренів.

**434.˙** Порівняйте числа:
1) $\frac{43}{7}$ і 6,12;
2) 3,(24) і 3,24;
3) $\pi$ і 3,(14);
4) −2,(36) і −2,36;
5) 7,(18) і 7,(17).

**435.˙** Порівняйте числа:
1) $\frac{1}{6}$ і 0,2; 2) $\frac{7}{9}$ і 0,77; 3) −1,(645) і −1,(643).

**436.˙** Запишіть у порядку спадання числа 3,(16); $\pi$; −1,82...; −0,08...; 2,(136).

**437.˙** Запишіть у порядку зростання числа 1,57; 1,571...; $\frac{\pi}{2}$; 1,(56); 1,(572).

**438.˙˙** Доведіть, що сума, різниця, добуток і частка двох раціональних чисел є число раціональне.

**439.˙˙** Доведіть, що сума раціонального та ірраціонального чисел є число ірраціональне.

**440.˙˙** Чи правильно, що:
1) сума будь-яких двох ірраціональних чисел є число ірраціональне;
2) добуток будь-яких двох ірраціональних чисел є число ірраціональне;
3) добуток будь-якого ірраціонального числа і будь-якого раціонального числа є число ірраціональне?

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**441.** У кожному під'їзді на кожному поверсі дев'ятиповерхового будинку є по 8 квартир. У якому під'їзді і на якому поверсі знаходиться квартира № 186?

**442.** Натуральні числа $a$ і $b$ такі, що $a$ — парне число, а $b$ — непарне. Значення якого з даних виразів не може бути натуральним числом:

1) $\frac{8b}{5a}$; 2) $\frac{a^2}{b^2}$; 3) $\frac{4a}{b}$; 4) $\frac{b^2}{a}$?

**443.** Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу не залежить від значення $a$:

$$\left(\frac{3}{4-4a+a^2}+\frac{2}{a^2-4}\right)\cdot(a-2)^2-\frac{2a-4}{a+2}.$$

**444.** У цеберці є кілька літрів води. Якщо відлити половину води, то в ньому залишиться на 14 л води менше, ніж вміщується в цеберці. Якщо долити 4 л, то об'єм води становитиме $\frac{2}{3}$ того, що вміщує цеберко. Скільки літрів води вміщує цеберко?

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**445.** Знайдіть значення виразу:

1) $|-3,5|-|2,6|$; 2) $|-9,6|-|-32|$.

**446.** Модуль якого числа дорівнює 6?

**447.** Для яких чисел виконується рівність:

1) $|a|=a$;
2) $|a|=-a$;
3) $|a|=|-a|$;
4) $|a|=-|a|$?

**448.** Для яких чисел одночасно виконуються обидві рівності $|a|=a$ і $|a|=-a$?

**449.** Знайдіть значення кожного з виразів $a^2$, $(-a)^2$, $|a|^2$ при $a=-8$ і при $a=7$. Зробіть висновок.

**450.** Відомо, що $a>0$, $c<0$. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $a^3c^4$; 2) $ac^5$.

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**451.** У класі 30 учнів. Вони сидять за 15 партами так, що половина всіх дівчат класу сидять з хлопцями. Доведіть, що учнів не можна пересадити так, щоб половина всіх хлопців класу сиділо з дівчатами.

## КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

### *Відкриття ірраціональності*

У п. 13, розв'язуючи графічно рівняння $x^2 = 2$, ми встановили, що довжина кожного з відрізків $OA$ і $OB$ дорівнює $\sqrt{2}$ (рис. 22). Покажемо, що число $\sqrt{2}$ ірраціональне.

Припустимо, що число $\sqrt{2}$ раціональне. Тоді його можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де $m$ і $n$ — натуральні числа. Маємо:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Тоді $(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$, $2 = \frac{m^2}{n^2}$, $m^2 = 2n^2$.

З останньої рівності випливає, що число $m^2$ парне. А це означає, що парним є і число $m$. Тоді $m = 2k$, де $k$ — деяке натуральне число. Маємо: $(2k)^2 = 2n^2$; $4k^2 = 2n^2$; $n^2 = 2k^2$. Звідси випливає, що число $n^2$, а отже, і число $n$ є парні.

Таким чином, чисельник і знаменник дробу $\frac{m}{n}$ — парні числа. Отже, цей дріб є скоротним. Отримали суперечність.

Цей приклад демонструє, що існують відрізки (у нашому випадку це відрізки $OA$ і $OB$ на рисунку 22), довжини яких не виражаються раціональними числами, тобто *для вимірювання відрізків раціональних чисел недостатньо.*

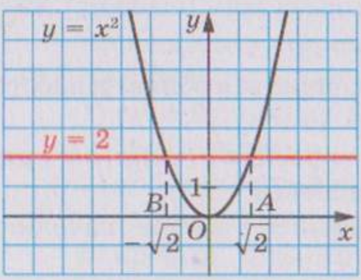


Рис. 22

Цей факт було відкрито у школі великого давньогрецького вченого Піфагора.

Спочатку піфагорійці вважали, що для будь-яких відрізків

*Піфагор*
(бл. 570 —
бл. 500 р.
до н. е.)

$AB$ і $CD$ завжди можна знайти такий відрізок $MN$, який у кожному з них вкладається ціле число разів. Звідси випливало, що відношення довжин будь-яких двох відрізків виражається відношенням натуральних чисел, тобто раціональним числом.

Наприклад, на рисунку 23 $AB = 5MN$, $CD = 2MN$ і $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{2}$. Відрізок $MN$ називають **спільною мірою** відрізків $AB$ і $CD$.

Якщо для відрізків існує спільна міра, то їх називають **спільномірними**. Наприклад, відрізки $AB$ і $CD$ (рис. 23) є спільномірними.

Отже, давньогрецькі вчені вважали, що будь-які два відрізки є спільномірними. А це надавало змогу виразити довжину будь-якого відрізка раціональним числом.

Справді, нехай деякий відрізок $AB$ обрано за одиничний. Тоді для відрізка $AB$ і будь-якого іншого відрізка $CD$ існує відрізок $e$, який є їх спільною мірою. Отримуємо $AB = ne$, $CD = me$, де $m$ і $n$ — деякі натуральні числа. Звідси $\frac{CD}{AB} = \frac{me}{ne} = \frac{m}{n}$. Оскільки $AB = 1$, то $CD = \frac{m}{n}$.

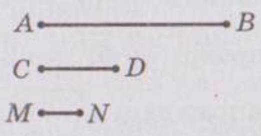



Рис. 23

Проте самі ж піфагорійці зробили видатне відкриття. Вони довели, що діагональ і сторона квадрата неспільномірні, тобто якщо сторону квадрата взяти за одиницю, то довжину діагоналі квадрата виразити раціональним числом не можна.

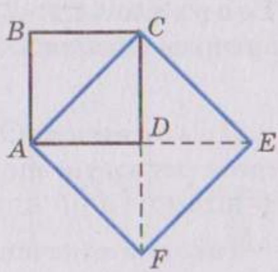



Рис. 24

Для доведення розглянемо довільний квадрат $ABCD$ і візьмемо його сторону за одиницю довжини. Тоді його площа дорівнює $AB^2 = 1$. На діагоналі $AC$ побудуємо квадрат $ACEF$ (рис.24). Зрозуміло, що площа квадрата $ACEF$ у 2 рази більша за площу квадрата $ABCD$. Звідси $AC^2 = 2$, тобто

$AC = \sqrt{2}$. Отже, довжина діагоналі $AC$ не виражається раціональним числом.

Це відкриття змінило один з фундаментальних постулатів давньогрецьких вчених, який полягав у тому, що відношення будь-яких двох величин виражається відношенням цілих чисел.

Існує легенда про те, що піфагорійці тримали відкриття ірраціональних чисел у найсуворішій таємниці, а людину, яка розголосила цей факт, покарали боги: вона загинула під час корабельної катастрофи.

## ВПРАВИ

1. Доведіть, що число $\sqrt{3}$ — ірраціональне.
2. Доведіть, що коли натуральне число $n$ не є квадратом натурального числа, то число $\sqrt{n}$ — ірраціональне.

# 14. Властивості арифметичного квадратного кореня

Легко перевірити, що $\sqrt{5^2} = 5$, $\sqrt{1,4^2} = 1,4$, $\sqrt{0^2} = 0$. Може здаватися, що взагалі $\sqrt{a^2} = a$. Проте це не так. Наприклад, рівність $\sqrt{(-5)^2} = -5$ є неправильною, оскільки $-5 < 0$, насправді $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$. Також можна переконатися, що, наприклад, $\sqrt{(-7)^2} = 7$, $\sqrt{(-2,8)^2} = 2,8$.

Узагалі, є справедливою наступна теорема.

**Теорема 14.1.** ***Для будь-якого дійсного числа a виконується рівність***

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Доведення. ⊙ Для того щоб довести рівність $\sqrt{a} = b$, треба показати, що $b \geqslant 0$ і $b^2 = a$.

Маємо: $|a| \geqslant 0$ при будь-якому $a$.

Також з означення модуля випливає, що $(|a|)^2 = a^2$. ▲

Наступна теорема узагальнює доведений факт.

**Теорема 14.2** (арифметичний квадратний корінь із степеня). ***Для будь-яких дійсного числа a і натурального числа n виконується рівність***

$$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|.$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 14.1. Проведіть це доведення самостійно.

**Теорема 14.3** (арифметичний квадратний корінь з добутку). ***Для будь-яких дійсних чисел a і b таких, що $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, виконується рівність***

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доведення. ⊙ Маємо: $\sqrt{a} \geqslant 0$ і $\sqrt{b} \geqslant 0$. Тоді $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$. Крім того, $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$. Отже, вираз $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ набуває тільки невід'ємних значень, і його квадрат дорівнює $ab$. ▲

Зазначимо, що ця теорема є справедливою для добутку будь-якої кількості множників. Наприклад, якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ і $c \geqslant 0$, то

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)\,c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

**Теорема 14.4** (арифметичний квадратний корінь з дробу). ***Для будь-яких дійсних чисел a і b таких, що $a \geqslant 0$ і $b > 0$ , виконується рівність***

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 14.3.

Зрозуміло, що з двох квадратів, площі яких $S_1$ і $S_2$ (рис.25), більшу сторону має той, у якого площа більша, тобто якщо $S_1 > S_2$, то $\sqrt{S_1} > \sqrt{S_2}$. Це очевидне міркування ілюструє таку властивість арифметичного квадратного кореня: ***для будь-яких невід'ємних чисел $a_1$ і $a_2$ таких, що $a_1 > a_2$, виконується нерівність $\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}$.***

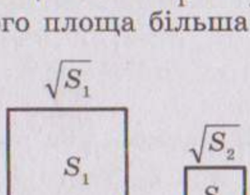



Рис. 25

**ПРИКЛАД 1**

Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{(-7,3)^2}$; 2) $\sqrt{1,2^4}$; 3) $\sqrt{0,81 \cdot 225}$; 4) $\sqrt{\dfrac{16}{49}}$.

*Розв'язання*

1) $\sqrt{(-7,3)^2} = |-7,3| = 7,3.$

2) $\sqrt{1,2^4} = 1,2^2 = 1,44.$

3) $\sqrt{0,81 \cdot 225} = \sqrt{0,81} \cdot \sqrt{225} = 0,9 \cdot 15 = 13,5.$

4) $\sqrt{\dfrac{16}{49}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \dfrac{4}{7}.$

**ПРИКЛАД 2**

Знайдіть значення виразу: 1) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}}$.

*Розв'язання*

1) Замінивши добуток коренів коренем з добутку, дістанемо:

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6.$$

2) Замінивши частку коренів коренем з частки (дробу), матимемо:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}} = \sqrt{\frac{24}{150}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}.$$

**ПРИКЛАД 3**

Спростіть вираз: 1) $\sqrt{a^{14}}$; 2) $\sqrt{9a^6}$, якщо $a \leqslant 0$; 3) $\sqrt{m^2n^2}$, якщо $m \geqslant 0$, $n \leqslant 0$; 4) $\sqrt{a^{36}}$.

*Розв'язання*

1) За теоремою про корінь зі степеня маємо:

$$\sqrt{a^{14}} = |a^7| = \begin{cases} a^7, \text{ якщо } a \geqslant 0, \\ -a^7, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

2) Маємо $\sqrt{9a^6} = 3 \cdot |a^3|$. Оскільки за умовою $a \leqslant 0$, то $a^3 \leqslant 0$. Тоді

$$\sqrt{9a^6} = 3 \cdot |a^3| = -3a^3.$$

3) $\sqrt{m^2n^2} = |m| \cdot |n| = m \cdot (-n) = -mn.$

4) $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}|$. Оскільки $a^{18} \geqslant 0$, то $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}| = a^{18}$.

**ПРИКЛАД 4**

Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{37^2 - 12^2}$; 2) $\sqrt{8 \cdot 648}$; 3) $\sqrt{16{,}9 \cdot 0{,}4}$.

*Розв'язання*

1) Перетворивши підкореневий вираз за формулою різниці квадратів, отримуємо:

$$\sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{(37-12)(37+12)} = \sqrt{25 \cdot 49} = 5 \cdot 7 = 35.$$

2) Подавши підкореневий вираз у вигляді добутку квадратів раціональних чисел, маємо:

$$\sqrt{8 \cdot 648} = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 324} = \sqrt{16 \cdot 324} = 4 \cdot 18 = 72.$$

3) $\sqrt{16{,}9 \cdot 0{,}4} = \sqrt{169 \cdot 0{,}04} = 13 \cdot 0{,}2 = 2{,}6$.

**ПРИКЛАД 5**

Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x^2} + x$.

*Розв'язання*

Оскільки $\sqrt{x^2} = |x|$, то $y = |x| + x$.

Якщо $x \geqslant 0$, то $y = x + x = 2x$.

Якщо $x < 0$, то $y = -x + x = 0$.

Отже, $y = \begin{cases} 2x, \text{ якщо } x \geqslant 0, \\ 0, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

Графік функції зображено на рисунку 26.

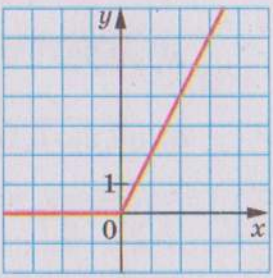



Рис. 26

1. Якому виразу тотожно дорівнює вираз $\sqrt{a^2}$?
2. Сформулюйте теорему про арифметичний квадратний корінь зі степеня.
3. Сформулюйте теорему про корінь з добутку.
4. Сформулюйте теорему про корінь з дробу.
5. Відомо, що невід'ємні числа $a_1$ і $a_2$ такі, що $a_1 > a_2$. Порівняйте значення виразів $\sqrt{a_1}$ і $\sqrt{a_2}$.

**452.°** Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt{0,4^2}$; 4) $3\sqrt{1,2^2}$; 7) $5\sqrt{(-10)^4}$;

2) $\sqrt{(-1,8)^2}$; 5) $\sqrt{6^4}$; 8) $-4\sqrt{(-1)^{14}}$;

3) $2\sqrt{(-15)^2}$; 6) $\sqrt{(-2)^{10}}$; 9) $-10\sqrt{3^6}$ ?

**453.°** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{a^2}$, якщо $a = 4{,}6; -18{,}6$;

2) $\sqrt{b^4}$, якщо $b = -3; 1{,}2$;

3) $0,1\sqrt{c^6}$, якщо $c = -2; 5$.

**454.°** Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{9 \cdot 25}$;

2) $\sqrt{16 \cdot 2500}$;

3) $\sqrt{0,64 \cdot 36}$;

4) $\sqrt{400 \cdot 1,44}$;

5) $\sqrt{0,09 \cdot 0,04}$;

6) $\sqrt{6,25 \cdot 0,16}$;

7) $\sqrt{6^2 \cdot 3^4}$;

8) $\sqrt{7^2 \cdot 2^8}$;

9) $\sqrt{25 \cdot 64 \cdot 0,36}$;

10) $\sqrt{0,01 \cdot 0,81 \cdot 2500}$;

11) $\sqrt{\frac{81}{100}}$;

12) $\sqrt{\frac{49}{256}}$;

13) $\sqrt{3\frac{13}{36}}$;

14) $\sqrt{3\frac{1}{16} \cdot 2\frac{14}{25}}$;

15) $\sqrt{\frac{169}{36 \cdot 81}}$;

16) $\sqrt{\frac{121 \cdot 256}{25 \cdot 100}}$.

**455.°** Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt{36 \cdot 81}$; 5) $\sqrt{0,36 \cdot 1,21}$; 9) $\sqrt{2,25 \cdot 0,04 \cdot 1600}$;

2) $\sqrt{900 \cdot 49}$; 6) $\sqrt{5^2 \cdot 3^6}$; 10) $\sqrt{13\frac{4}{9}}$;

3) $\sqrt{16 \cdot 0,25}$; 7) $\sqrt{4^4 \cdot 3^2}$; 11) $\sqrt{1\frac{7}{9} \cdot \frac{4}{25}}$;

4) $\sqrt{9 \cdot 1,69}$; 8) $\sqrt{2^6 \cdot 5^2}$; 12) $\sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{9}{25}}$ ?

**456.°** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$;  4) $\sqrt{0,009}\cdot\sqrt{1000}$;  7) $\sqrt{2,4}\cdot\sqrt{1\frac{2}{3}}$;

2) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}$;  5) $\sqrt{200}\cdot\sqrt{0,18}$;  8) $\sqrt{\frac{2}{11}}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{\frac{1}{11}}$;

3) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{50}$;  6) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{26}$;  9) $\sqrt{2^3\cdot 3}\cdot\sqrt{2^5\cdot 3^3}$.

**457.°** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$;  3) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{12,1}$;  5) $\sqrt{1\frac{3}{7}}\cdot\sqrt{2,8}$;

2) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$;  4) $\sqrt{0,5}\cdot\sqrt{50}$;  6) $\sqrt{5\cdot 2^3}\cdot\sqrt{5^3\cdot 2^3}$.

**458.°** Знайдіть значення частки:

1) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$;  3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$;  5) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}}$;  7) $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;

2) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$;  4) $\frac{\sqrt{3,2}}{\sqrt{0,2}}$;  6) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{147}}$;  8) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}}$.

**459.°** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$;  3) $\frac{\sqrt{6,3}}{\sqrt{0,7}}$;  5) $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

2) $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$;  4) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{242}}$;

**460.•** При яких значеннях $a$ виконується рівність:

1) $\sqrt{a^2}=a$;  2) $\sqrt{a^2}=-a$?

**461.•** При яких значеннях $a$ і $b$ виконується рівність:

1) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$;  3) $\sqrt{-ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-b}$?

2) $\sqrt{ab}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$;

**462.•** Знайдіть значення виразу, подавши попередньо підкореневий вираз у вигляді добутку квадратів раціональних чисел:

1) $\sqrt{18\cdot 32}$;  4) $\sqrt{75\cdot 48}$;  7) $\sqrt{2,7\cdot 1,2}$;

2) $\sqrt{8\cdot 98}$;  5) $\sqrt{288\cdot 50}$;  8) $\sqrt{80\cdot 45}$;

3) $\sqrt{3,6\cdot 14,4}$;  6) $\sqrt{4,5\cdot 72}$;  9) $\sqrt{33\cdot 297}$.

**463.**˙ Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{18 \cdot 200}$; 3) $\sqrt{14,4 \cdot 0,9}$; 5) $\sqrt{12,5 \cdot 32}$;

2) $\sqrt{3,6 \cdot 0,4}$; 4) $\sqrt{13 \cdot 52}$; 6) $\sqrt{108 \cdot 27}$.

**464.**˙ Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{41^2 - 40^2}$; 3) $\sqrt{8,5^2 - 7,5^2}$; 5) $\sqrt{\dfrac{155^2 - 134^2}{84}}$;

2) $\sqrt{145^2 - 144^2}$; 4) $\sqrt{21,8^2 - 18,2^2}$; 6) $\sqrt{\dfrac{139^2 - 86^2}{98,5^2 - 45,5^2}}$.

**465.**˙ Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{6,8^2 - 3,2^2}$; 2) $\sqrt{98,5^2 - 97,5^2}$; 3) $\sqrt{\dfrac{98}{228^2 - 164^2}}$.

1, 196

**466.**˙ Замініть вираз тотожно рівним, який не містить знака кореня:

1) $\sqrt{b^2}$; 2) $-0,4\sqrt{c^2}$; 3) $\sqrt{a^6}$; 4) $\sqrt{m^8}$.

**467.**˙ Замініть вираз тотожно рівним, який не містить знака кореня:

1) $1,2\sqrt{x^2}$; 2) $\sqrt{y^4}$; 3) $\sqrt{n^{10}}$.

**468.**˙ Спростіть вираз:

1) $\sqrt{m^2}$, якщо $m > 0$;

2) $\sqrt{n^2}$, якщо $n < 0$;

3) $\sqrt{16p^2}$, якщо $p \geqslant 0$;

4) $\sqrt{0,36k^2}$, якщо $k \leqslant 0$;

5) $\sqrt{c^{12}}$;

6) $\sqrt{0,25b^{14}}$, якщо $b \leqslant 0$;

7) $\sqrt{81x^4y^2}$, якщо $y \geqslant 0$;

8) $\sqrt{0,01a^6b^{10}}$, якщо $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$;

9) $-1,2x\sqrt{64x^{18}}$, якщо $x \leq 0$;

10) $\dfrac{\sqrt{a^{12}b^{22}c^{36}}}{a^4b^8c^{10}}$, якщо $b < 0$;

11) $\frac{3,3a^4}{b^3}\sqrt{\frac{b^{24}}{121a^{26}}}$, якщо $a < 0$;

12) $-0,5m^5\sqrt{1,96m^6n^8}$, якщо $m \leqslant 0$.

**469.**° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{9a^{16}}$;

2) $\sqrt{0,81d^6}$, якщо $d \geqslant 0$;

3) $-5\sqrt{4x^2}$, якщо $x \leqslant 0$;

4) $-0,1\sqrt{100z^{10}}$, якщо $z \geqslant 0$;

5) $\sqrt{p^6q^8}$, якщо $p \geqslant 0$;

6) $\sqrt{25m^{34}n^{38}}$, якщо $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$;

7) $ab^2\sqrt{a^4b^{18}c^{22}}$, якщо $b \geqslant 0$, $c \leqslant 0$;

8) $-\frac{8m^3p^4}{k^2}\sqrt{\frac{625k^{30}p^{40}}{144m^6}}$, якщо $m < 0$, $k > 0$.

**470.**•• Які з наведених рівностей виконуються при всіх дійсних значеннях $a$:

1) $\sqrt{a^2} = a$; 2) $\sqrt{a^4} = a^2$; 3) $\sqrt{a^6} = a^3$; 4) $\sqrt{a^8} = a^4$?

**471.**•• При яких значеннях $a$ виконується рівність:

1) $\sqrt{a^{10}} = a^5$;

2) $\sqrt{a^{10}} = -a^5$;

3) $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2$;

4) $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{-a}\right)^2$?

**472.**•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x^2} - x$, якщо $x \leqslant 0$;

2) $y = 2x + \sqrt{x^2}$;

3) $y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$;

4) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} + 3$.

**473.**•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x^2} - 2x$, якщо $x \geqslant 0$;

2) $y = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}$.

**474.*** При якому значенні $x$ виконується рівність:

1) $\sqrt{x^2} = x - 4$; 2) $\sqrt{x^2} = 6 - x$; 3) $2\sqrt{x^2} = x + 3$?

**475.*** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2} = x + 8$;

2) $\sqrt{x^2} = 6x - 10$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**476.** Знайдіть значення виразу

$$\left(\frac{a^2-5a}{a^2-10a+25}+\frac{25}{a^2-25}\right):\frac{125-a^3}{5+a}$$

при $a = 4{,}5$.

**477.** Тракторист мав засіяти поле за 8 днів. Проте через погану погоду він засіював щодня на 3 га менше від норми і тому виконав роботу за 10 днів. Яка площа поля?

**478.** Натуральне число $a$ — парне, а число $b$ — непарне. Значенням якого з даних виразів обов'язково є парне число:

1) $(a+b)\,b$; 2) $\frac{ab}{2}$; 3) $\frac{a^2b}{2}$; 4) $\frac{ab^2}{2}$?

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**479.** На дошці записано 102 послідовних натуральних числа. Чи можна розбити їх на дві групи так, щоб сума чисел у кожній групі була простим числом (у кожній групі має бути не менше ніж два числа)?

# 15. Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені

Користуючись теоремою про корінь з добутку, перетворимо вираз $\sqrt{48}$:

$$\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

Отже, вираз $\sqrt{48}$ ми подали у вигляді добутку раціонального числа 4 та ірраціонального числа $\sqrt{3}$. Таке перетворення називають ***винесенням множника з-під знака кореня***. У даному випадку було винесено з-під кореня множник 4.

Розглянемо виконане перетворення у зворотному порядку:

$$4\sqrt{3}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{48}.$$

Таке перетворення називають ***внесенням множника під знак кореня***.

**ПРИКЛАД 1**

Винесіть множник з-під знака кореня: 1) $\sqrt{150}$; 2) $\sqrt{72a^8}$; 3) $\sqrt{b^{35}}$; 4) $\sqrt{-b^{35}}$; 5) $\sqrt{a^2b^3}$, якщо $a < 0$.

*Розв'язання*

1) Подамо число, яке стоїть під знаком кореня, у вигляді добутку двох чисел, одне з яких є квадратом раціонального числа:

$$\sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = 5\sqrt{6}.$$

2) $\sqrt{72a^8} = \sqrt{36a^8 \cdot 2} = 6a^4\sqrt{2}.$

3) З умови випливає, що $b \geqslant 0$. Тоді

$$\sqrt{b^{35}} = \sqrt{b^{34}b} = |b^{17}|\sqrt{b} = b^{17}\sqrt{b}.$$

4) З умови випливає, що $b \leqslant 0$. Тоді

$$\sqrt{-b^{35}} = \sqrt{b^{34} \cdot (-b)} = |b^{17}|\sqrt{-b} = -b^{17}\sqrt{-b}.$$

5) З умови випливає, що $b \geqslant 0$. Тоді $\sqrt{a^2b^3} = \sqrt{a^2b^2b} = |a| \cdot |b|\sqrt{b} = -ab\sqrt{b}.$

**ПРИКЛАД 2**

Внесіть множник під знак кореня: 1) $-2\sqrt{7}$; 2) $a\sqrt{7}$; 3) $3b\sqrt{-\frac{b}{3}}$; 4) $c\sqrt{c^7}$.

*Розв'язання*

1) $-2\sqrt{7} = -\sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{28}.$

2) Якщо $a \geqslant 0$, то $a\sqrt{7} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7a^2}$, якщо $a < 0$, то $a\sqrt{7} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{7a^2}.$

3) З умови випливає, що $b \leqslant 0$. Тоді $3b\sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2} \cdot \sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2 \cdot \left(-\frac{b}{3}\right)} = -\sqrt{-3b^3}.$

4) З умови випливає, що $c \geqslant 0$. Тоді $c\sqrt{c^7} = \sqrt{c^2} \cdot \sqrt{c^7} = \sqrt{c^9}.$

**ПРИКЛАД 3**

Спростіть вираз: 1) $\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a}$;
2) $(3 + 2\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$; 3) $(7 - 3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10} + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{5})$.

*Розв'язання*

1) Маємо:

$$\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a} = \sqrt{9 \cdot 6a} + \sqrt{4 \cdot 6a} - \sqrt{100 \cdot 6a} =$$
$$= 3\sqrt{6a} + 2\sqrt{6a} - 10\sqrt{6a} = \sqrt{6a}\,(3 + 2 - 10) =$$
$$= \sqrt{6a} \cdot (-5) = -5\sqrt{6a}.$$

2) $\left(3 + 2\sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right) = 6 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3}\right)^2 =$
$= 6 + \sqrt{3} - 6 = \sqrt{3}.$

3) Застосовуючи формули скороченого множення (квадрат двочлена і добуток суми та різниці двох виразів), отримуємо:

$$\left(7 - 3\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{10} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10} - \sqrt{5}\right) = 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3\sqrt{2} + \left(3\sqrt{2}\right)^2 -$$
$$-\left(\left(\sqrt{10}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2\right) = 49 - 42\sqrt{2} + 18 - (10 - 5) = 62 - 42\sqrt{2}.$$

**ПРИКЛАД 4**

Розкладіть на множники вираз: 1) $a^2 - 2$; 2) $b - 4$, якщо $b \geqslant 0$; 3) $9c - 6\sqrt{5c} + 5$; 4) $a + \sqrt{a}$; 5) $\sqrt{3} + 6$; 6) $\sqrt{35} - \sqrt{15}$.

*Розв'язання*

1) Подавши даний вираз у вигляді різниці квадратів, маємо:

$$a^2 - 2 = a^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(a - \sqrt{2}\right)\left(a + \sqrt{2}\right).$$

2) Оскільки за умовою $b \geqslant 0$, то

$$b - 4 = \left(\sqrt{b}\right)^2 - 4 = \left(\sqrt{b} - 2\right)\left(\sqrt{b} + 2\right).$$

3) Застосуємо формулу квадрата різниці:

$$9c - 6\sqrt{5c} + 5 = \left(3\sqrt{c}\right)^2 - 2 \cdot 3\sqrt{c} \cdot \sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(3\sqrt{c} - \sqrt{5}\right)^2.$$

4) Маємо: $a + \sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^2 + \sqrt{a} = \sqrt{a}\left(\sqrt{a} + 1\right).$

5) $\sqrt{3} + 6 = \sqrt{3} + 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{3}\left(1 + 2\sqrt{3}\right).$

6) $\sqrt{35} - \sqrt{15} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5}\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right).$

**ПРИКЛАД 5**

Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{b - 1}{\sqrt{b} + 1}$; 2) $\dfrac{2 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{a - b}{a - 2\sqrt{ab} + b}$, якщо $a > 0$, $b > 0$.

*Розв'язання*

1) Розклавши чисельник даного дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{b-1}{\sqrt{b}+1}=\frac{\left(\sqrt{b}\right)^2-1}{\sqrt{b}+1}=\frac{\left(\sqrt{b}-1\right)\left(\sqrt{b}+1\right)}{\sqrt{b}+1}=\sqrt{b}-1.$$

2) $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-3\right)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-3.$

3) Оскільки за умовою $a>0$ і $b>0$, то чисельник і знаменник даного дробу можна розкласти на множники таким чином:

$$\frac{a-b}{a-2\sqrt{ab}+b}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

**ПРИКЛАД 6**

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{15}{2\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{14}{5\sqrt{2}-1}$.

**Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу** означає перетворити дріб так, щоб його знаменник не містив квадратного кореня.

*Розв'язання*

1) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на $\sqrt{3}$, отримуємо:

$$\frac{15}{2\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{15\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

2) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на вираз $5\sqrt{2}+1$, отримуємо:

$$\frac{14}{5\sqrt{2}-1}=\frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{\left(5\sqrt{2}-1\right)\left(5\sqrt{2}+1\right)}=\frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{\left(5\sqrt{2}\right)^2-1}=\frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{50-1}=$$

$$=\frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{49}=\frac{2\left(5\sqrt{2}+1\right)}{7}=\frac{10\sqrt{2}+2}{7}.$$

Відповідь: 1) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$; 2) $\dfrac{10\sqrt{2}+2}{7}$.

**ПРИКЛАД 7**

Доведіть тотожність

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

*Розв'язання*

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})+\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})+2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$$

$$=\frac{a-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}}{a-b}\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})=\frac{(a+2\sqrt{ab}+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

**ПРИКЛАД 8**

Спростіть вираз $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$.

*Розв'язання*

Подавши підкореневий вираз у вигляді квадрата суми, отримуємо:

$$\sqrt{12+6\sqrt{3}}=\sqrt{9+2\cdot3\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{(3+\sqrt{3})^2}=3+\sqrt{3}.$$

Відповідь: $3+\sqrt{3}$.

**480.°** Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{8}$; 4) $\sqrt{54}$; 7) $\sqrt{275}$; 10) $\sqrt{0,48}$;
2) $\sqrt{12}$; 5) $\sqrt{490}$; 8) $\sqrt{108}$; 11) $\sqrt{450}$;
3) $\sqrt{32}$; 6) $\sqrt{500}$; 9) $\sqrt{0,72}$; 12) $\sqrt{36\,300}$.

**481.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; 3) $\frac{1}{10}\sqrt{200}$;
2) $\frac{1}{2}\sqrt{128}$; 4) $-0,05\sqrt{4400}$.

**482.°** Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{27}$; 4) $\sqrt{125}$; 7) $-2\sqrt{0,18}$; 10) $\frac{3}{7}\sqrt{98}$;
2) $\sqrt{24}$; 5) $\frac{1}{8}\sqrt{96}$; 8) $\frac{4}{9}\sqrt{63}$; 11) $10\sqrt{0,03}$;
3) $\sqrt{20}$; 6) $0,4\sqrt{250}$; 9) $0,8\sqrt{1250}$; 12) $0,7\sqrt{1000}$.

**483.°** Внесіть множник під знак кореня:

1) $7\sqrt{2}$; 4) $-10\sqrt{14}$; 7) $\frac{1}{4}\sqrt{32}$; 10) $-0,3\sqrt{10b}$;

2) $3\sqrt{13}$; 5) $5\sqrt{8}$; 8) $-\frac{2}{3}\sqrt{54}$; 11) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$;

3) $-2\sqrt{17}$; 6) $6\sqrt{a}$; 9) $\frac{1}{8}\sqrt{128a}$; 12) $\frac{2}{9}\sqrt{\frac{27}{28}}$.

**484.°** Внесіть множник під знак кореня:

1) $2\sqrt{6}$; 3) $-11\sqrt{3}$; 5) $-7\sqrt{3c}$; 7) $8\sqrt{\frac{n}{8}}$;

2) $9\sqrt{2}$; 4) $12\sqrt{b}$; 6) $-10\sqrt{0,7m}$; 8) $-\frac{1}{3}\sqrt{18p}$.

**485.°** Спростіть вираз:

1) $4\sqrt{a}+3\sqrt{a}-5\sqrt{a}$; 3) $5\sqrt{c}+3\sqrt{d}-\sqrt{c}+3\sqrt{d}$;

2) $6\sqrt{b}+2\sqrt{b}-8\sqrt{b}$; 4) $\sqrt{5}+7\sqrt{5}-4\sqrt{5}$.

**486.°** Спростіть вираз:

1) $3\sqrt{a}-2\sqrt{a}$; 3) $9\sqrt{6}-2\sqrt{3}+8\sqrt{3}-3\sqrt{6}$.

2) $\sqrt{c}+10\sqrt{c}-14\sqrt{c}$;

**487.°** Замініть вираз на тотожно рівний йому:

1) $\sqrt{9a}+\sqrt{25a}-\sqrt{49a}$;

2) $\sqrt{64b}-\frac{1}{6}\sqrt{36b}$;

3) $2\sqrt{0,04c}-0,3\sqrt{16c}+\frac{1}{3}\sqrt{0,81c}$;

4) $0,4\sqrt{100m}+15\sqrt{\frac{4}{9}m}-1,2\sqrt{2,25m}$.

**488.°** Спростіть вираз:

1) $2\sqrt{4x}+6\sqrt{16x}-\sqrt{625x}$;

2) $3\sqrt{0,09y}-0,6\sqrt{144y}+\frac{18}{11}\sqrt{\frac{121}{36}y}$.

**489.°** Спростіть вираз:

1) $8\sqrt{2}-\sqrt{32}$; 3) $\sqrt{96}-3\sqrt{6}$;

2) $6\sqrt{3}-\sqrt{27}$; 4) $2\sqrt{500}-8\sqrt{5}$;

5) $5\sqrt{7}-\sqrt{700}-0,5\sqrt{28}$; 6) $2\sqrt{20}-\frac{1}{3}\sqrt{45}-0,6\sqrt{125}$.

**490.°** Раціональним чи ірраціональним є значення виразу:

1) $\sqrt{48}-6-4\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{162}-9\sqrt{2}+\sqrt{27}$?

**491.°** Спростіть вираз:

1) $4\sqrt{700}-27\sqrt{7}$; 4) $5\sqrt{12}-7\sqrt{3}$;

2) $\sqrt{75}-6\sqrt{3}$; 5) $3\sqrt{72}-4\sqrt{2}+2\sqrt{98}$;

3) $2\sqrt{50}-8\sqrt{2}$; 6) $\frac{1}{3}\sqrt{108}+\sqrt{363}-\frac{2}{9}\sqrt{243}$.

**492.°** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{2}(\sqrt{50}+\sqrt{8})$; 3) $(3\sqrt{5}-4\sqrt{3})\cdot\sqrt{5}$;

2) $(\sqrt{3}-\sqrt{12})\cdot\sqrt{3}$; 4) $2\sqrt{2}\left(3\sqrt{18}-\frac{1}{4}\sqrt{2}+\sqrt{32}\right)$.

**493.°** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{7}(\sqrt{7}-\sqrt{28})$; 3) $(4\sqrt{3}-\sqrt{75}+4)\cdot 3\sqrt{3}$;

2) $(\sqrt{18}+\sqrt{72})\cdot\sqrt{2}$; 4) $(\sqrt{600}+\sqrt{6}-\sqrt{24})\cdot\sqrt{6}$.

**494.°** Виконайте множення:

1) $(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)$; 6) $(y-\sqrt{7})(y+\sqrt{7})$;

2) $(\sqrt{2}+\sqrt{5})(2\sqrt{2}-\sqrt{5})$; 7) $(4\sqrt{2}-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}+4\sqrt{2})$;

3) $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})$; 8) $(m+\sqrt{n})^2$;

4) $(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})$; 9) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$;

5) $(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})$; 10) $(2-3\sqrt{3})^2$.

**495.°** Виконайте множення:

1) $(\sqrt{7}+3)(3\sqrt{7}-1)$; 5) $(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)$;

2) $(4\sqrt{2}-\sqrt{3})(2\sqrt{2}+5\sqrt{3})$; 6) $(\sqrt{19}+\sqrt{17})(\sqrt{19}-\sqrt{17})$;

3) $(\sqrt{p}-q)(\sqrt{p}+q)$; 7) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$;

4) $(6-\sqrt{13})(6+\sqrt{13})$; 8) $(3-2\sqrt{15})^2$.

**496.°** Чому дорівнює значення виразу:

1) $(2+\sqrt{7})^2-4\sqrt{7}$; 2) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+6\sqrt{2}$?

**497.°** Знайдіть значення виразу:

1) $(3+\sqrt{5})^2 - 6\sqrt{5}$; 2) $(\sqrt{12} - 2\sqrt{2})^2 + 8\sqrt{6}$.

**498.°** Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{4}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{18}{\sqrt{5}}$; 5) $\frac{a}{b\sqrt{b}}$; 7) $\frac{7}{\sqrt{7}}$;

2) $\frac{12}{\sqrt{6}}$; 4) $\frac{m}{\sqrt{n}}$; 6) $\frac{5}{\sqrt{15}}$; 8) $\frac{24}{5\sqrt{3}}$.

**499.°** Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{a}{\sqrt{11}}$; 2) $\frac{18}{\sqrt{6}}$; 3) $\frac{5}{\sqrt{10}}$; 4) $\frac{13}{\sqrt{26}}$; 5) $\frac{30}{\sqrt{15}}$; 6) $\frac{2}{3\sqrt{x}}$.

**500.˙** Розкладіть на множники вираз:

1) $a^2 - 3$;
2) $4b^2 - 2$;
3) $5 - 6c^2$;
4) $a - 9$, якщо $a \geqslant 0$;
5) $m - n$, якщо $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$;
6) $16x - 25y$, якщо $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;
7) $a - 2\sqrt{a} + 1$;
8) $4m - 28\sqrt{mn} + 49n$, якщо $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$;
9) $b + 6\sqrt{b} + 9$;
10) $3 + 2\sqrt{3c} + c$;
11) $2 + \sqrt{2}$;
12) $6\sqrt{7} - 7$;
13) $a - \sqrt{a}$;
14) $\sqrt{b} + \sqrt{3b}$;
15) $\sqrt{15} - \sqrt{5}$.

**501.˙** Розкладіть на множники вираз:

1) $15 - x^2$;
2) $49x^2 - 2$;
3) $36p - 64q$, якщо $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$;
4) $c - 100$, якщо $c \geqslant 0$;
5) $a - 8b\sqrt{a} + 16b^2$;
6) $m + 2\sqrt{mn} + n$, якщо $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$;
7) $a - 4\sqrt{a} + 4$;
8) $5 + \sqrt{5}$;
9) $\sqrt{3p} - p$;
10) $\sqrt{12} + \sqrt{32}$.

**502.˙** Скоротіть дріб:

1) $\frac{a^2 - 7}{a + \sqrt{7}}$; 3) $\frac{c - 9}{\sqrt{c} - 3}$; 5) $\frac{5\sqrt{a} - 7\sqrt{b}}{25a - 49b}$;

2) $\frac{\sqrt{3} - b}{3 - b^2}$; 4) $\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; 6) $\frac{100a^2 - 9b}{10a + 3\sqrt{b}}$;

7) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$; 9) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{5-\sqrt{10}}$; 11) $\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

8) $\frac{\sqrt{35}+\sqrt{10}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$; 10) $\frac{13-\sqrt{13}}{\sqrt{13}}$; 12) $\frac{4b^2-4b\sqrt{c}+c}{2b-\sqrt{c}}$.

**503.**˙ Скоротіть дріб:

1) $\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$; 4) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$; 7) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-2\sqrt{ab}+b}$;

2) $\frac{\sqrt{a}+2}{a-4}$; 5) $\frac{23-\sqrt{23}}{\sqrt{23}}$; 8) $\frac{b-8\sqrt{b}+16}{\sqrt{b}-4}$.

3) $\frac{a-3}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}$; 6) $\frac{\sqrt{24}-\sqrt{28}}{\sqrt{54}-\sqrt{63}}$;

**504.**˙ Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{3a^2}$, якщо $a \geqslant 0$; 3) $\sqrt{12a^4}$;

2) $\sqrt{5b^2}$, якщо $b \leqslant 0$; 4) $\sqrt{c^5}$.

**505.**˙ Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{18x^{12}}$; 2) $\sqrt{y^9}$.

**506.**˙ Спростіть вираз:

1) $\sqrt{98}-\sqrt{50}+\sqrt{32}$;

2) $3\sqrt{8}+\sqrt{128}-\frac{1}{3}\sqrt{162}$;

3) $0,7\sqrt{300}-7\sqrt{\frac{3}{49}}+\frac{2}{3}\sqrt{108}$;

4) $\sqrt{5a}-2\sqrt{20a}+3\sqrt{80a}$;

5) $\sqrt{a^3b}-\frac{2}{a}\sqrt{a^5b}$, якщо $a > 0$, $b \geqslant 0$;

6) $\sqrt{c^5}+4c\sqrt{c^3}-5c^2\sqrt{c}$.

**507.**˙ Спростіть вираз:

1) $0,5\sqrt{12}-3\sqrt{27}+0,4\sqrt{75}$;

2) $2,5\sqrt{28b}+\frac{2}{3}\sqrt{63b}-10\sqrt{0,07b}$;

3) $\sqrt{81a^7}-5a^3\sqrt{a}+\frac{6}{a}\sqrt{a^9}$.

**508.˙** Доведіть, що:

1) $\sqrt{11+4\sqrt{7}}=\sqrt{7}+2$; 2) $\sqrt{14+8\sqrt{3}}=\sqrt{8}+\sqrt{6}$.

**509.˙** Спростіть вираз:

1) $(2\sqrt{3}-1)(\sqrt{27}+2)$; 4) $(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2$;

2) $(\sqrt{5}-2)^2-(3+\sqrt{5})^2$; 5) $\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2$.

3) $\sqrt{\sqrt{17}-4}\cdot\sqrt{\sqrt{17}+4}$;

**510.˙** Знайдіть значення виразу:

1) $(3\sqrt{2}+1)(\sqrt{8}-2)$; 3) $(10-4\sqrt{6})(2+\sqrt{6})^2$;

2) $(3-2\sqrt{7})^2+(3+2\sqrt{7})^2$; 4) $\left(\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}\right)^2$.

**511.˙** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{4a+4\sqrt{5}}{a^2-5}$; 4) $\dfrac{x^2-6y}{x^2+6y-x\sqrt{24y}}$;

2) $\dfrac{\sqrt{28}-2\sqrt{2a}}{6a-21}$; 5) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}$;

3) $\dfrac{a+4\sqrt{ab}+4b}{a-4b}$, якщо $a>0$, $b>0$; 6) $\dfrac{m\sqrt{m}-27}{\sqrt{m}-3}$.

**512.˙** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a-b}{\sqrt{11b}-\sqrt{11a}}$; 3) $\dfrac{a-2\sqrt{a}+4}{a\sqrt{a}+8}$.

2) $\dfrac{2a+10\sqrt{2ab}+25b}{6a-75b}$, якщо $a>0$, $b>0$;

**513.˙** Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$; 3) $\dfrac{15}{\sqrt{15}-\sqrt{12}}$; 5) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

2) $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$; 4) $\dfrac{19}{2\sqrt{5}-1}$; 6) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

**514.˙** Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$; 2) $\dfrac{8}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{9}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 4) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

**515.**$^{\bullet}$ Доведіть рівність:

1) $\frac{1}{5-2\sqrt{6}}+\frac{1}{5+2\sqrt{6}}=10$;
3) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=4\sqrt{2}$.
2) $\frac{2}{3\sqrt{2}+4}-\frac{2}{3\sqrt{2}-4}=-8$;

**516.**$^{\bullet}$ Доведіть, що значенням виразу є раціональне число:

1) $\frac{6}{3+2\sqrt{3}}+\frac{6}{3-2\sqrt{3}}$;
2) $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{11}-\sqrt{6}}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}$.

**517.**$^{\bullet}$ Спростіть вираз:

1) $\frac{a}{\sqrt{a}-2}-\frac{4\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}-2}$;
6) $\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{a}+2}$;
2) $\frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-2}-\frac{\sqrt{m}+3}{\sqrt{m}}$;
7) $\frac{\sqrt{c}-5}{\sqrt{c}}:\frac{c-25}{3c}$;
3) $\frac{\sqrt{y}+4}{\sqrt{xy}+y}-\frac{\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{xy}}$;
8) $\left(\sqrt{a}-\frac{a}{\sqrt{a}+1}\right):\frac{\sqrt{a}}{a-1}$;
4) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}-\frac{a}{a-16}$;
9) $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;
5) $\frac{a}{\sqrt{ab}-b}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$;
10) $\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}+\frac{12\sqrt{x}}{x-9}\right):\frac{\sqrt{x}+3}{x-3\sqrt{x}}$.

**518.**$^{\bullet}$ Спростіть вираз:

1) $\frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}}$;
4) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}:\left(\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right)$;
2) $\frac{\sqrt{a}+1}{a-\sqrt{ab}}-\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{ab}-b}$;
5) $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{4\sqrt{x}}{x-1}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;
3) $\frac{\sqrt{x}}{y-2\sqrt{y}}:\frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{y}-6}$;
6) $\frac{a-64}{\sqrt{a}+3}\cdot\frac{1}{a+8\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}+8}{a-3\sqrt{a}}$.

**519.**$^{\bullet\bullet}$ Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{-m^9}$;
4) $\sqrt{m^7n^7}$, якщо $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$;
2) $\sqrt{a^4b^{13}}$, якщо $a \neq 0$;
5) $\sqrt{45x^3y^{14}}$, якщо $y < 0$;
3) $\sqrt{4x^6y}$, якщо $x < 0$;
6) $\sqrt{64a^2b^9}$, якщо $a > 0$;

7) $\sqrt{242m^{11}b^{18}}$, якщо $b < 0$;

8) $\sqrt{-m^2n^2p^{15}}$, якщо $m > 0$, $n < 0$.

**520.**¨ Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{-m^{19}}$;

2) $\sqrt{a^{23}b^{24}}$, якщо $b \neq 0$;

3) $\sqrt{49a^2b}$, якщо $a < 0$;

4) $\sqrt{a^9b^9}$;

5) $\sqrt{27x^{15}y^{34}}$, якщо $y < 0$;

6) $\sqrt{-50m^6n^6p^7}$, якщо $m > 0$, $n > 0$.

**521.**¨ Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt{3}$;

2) $b\sqrt{-b}$;

3) $c\sqrt{c^5}$;

4) $m\sqrt{n}$, якщо $m \geqslant 0$;

5) $xy^2\sqrt{xy}$, якщо $x \leqslant 0$;

6) $2p\sqrt{\frac{p}{2}}$;

7) $2p\sqrt{-\frac{p}{2}}$;

8) $ab^2\sqrt{\frac{a}{b}}$, якщо $a \geqslant 0$.

**522.**¨ Внесіть множник під знак кореня:

1) $m\sqrt{7}$, якщо $m \geqslant 0$;

2) $3n\sqrt{6}$, якщо $n \leqslant 0$;

3) $p\sqrt{p^3}$;

4) $x^4y\sqrt{x^5y}$, якщо $y \leqslant 0$;

5) $7a\sqrt{\frac{3}{a}}$;

6) $5ab\sqrt{-\frac{a^7}{5b}}$, якщо $a \leqslant 0$, $b > 0$.

**523.**¨ Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{8\sqrt{a}}{\sqrt{a}+7} - \frac{15\sqrt{a}}{a+14\sqrt{a}+49}\right) : \frac{8\sqrt{a}+41}{a-49} + \frac{7\sqrt{a}-49}{\sqrt{a}+7} = \sqrt{a} - 7$;

2) $\frac{a\sqrt{a}+27}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-3}{a-3\sqrt{a}+9} - \frac{\sqrt{ab}-9}{a\sqrt{a}+27}\right) = \sqrt{a}$.

**524.**** Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}-\frac{1}{a-b}\cdot\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}$;

2) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)$.

**525.*** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$.

**526.*** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}$; 2) $\sqrt{15+6\sqrt{6}}$; 3) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$.

**527.*** Спростіть вираз:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

**528.*** Доведіть, що:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{91}+\sqrt{89}}=\frac{\sqrt{91}-1}{2}.$$

**529.*** Доведіть, що:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2.$$

**530.*** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{10+8\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$; 2) $\sqrt{22+6\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**531.** Робітник мав виготовляти щодня 12 деталей. Проте він виготовляв щодня 15 деталей, і вже за 5 днів до кінця терміну роботи йому залишилося виготовити 30 деталей. Скільки деталей мав виготовити робітник?

**532.** При розпродажу ціну на товар знизили на 20 %. На скільки відсотків треба підвищити ціну на товар, щоб вона дорівнювала початковій?

**533.** Човен проплив 32 км за течією річки за 4 год, а проти течії — за 8 год. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії.

**534.** Федір і Олеся їхали в одному поїзді. Федір сів у дванадцятий вагон від голови поїзда, а Олеся — у шостий вагон з хвоста поїзда. Виявилося, що вони їдуть в одному вагоні. Скільки вагонів у поїзді?

**535.** Число $a$ — додатне, а число $b$ — від'ємне. Який з даних виразів набуває найбільшого значення:
1) $a^2b$; 2) $-a^2b^2$; 3) $-ab^2$; 4) $ab$; 5) $-a^2b$?

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**536.** Космічний корабель відвідує планету Гостинну через рівні проміжки часу (не обов'язково через цілу кількість днів). Чи може бути так, що перше відвідування в цьому році відбулося в понеділок, друге — у вівторок, а четверте — у неділю?

# 16. Функція $y = \sqrt{x}$ та її графік

Якщо площа квадрата дорівнює $x$, то його сторону $y$ можна знайти за формулою $y = \sqrt{x}$. Зміна площі $x$ квадрата призводить і до зміни його сторони $y$.

Зрозуміло, що кожному значенню змінної $x$ відповідає єдине значення змінної $y$. Отже, залежність змінної $y$ від змінної $x$ є функціональною, а формула $y = \sqrt{x}$ задає функцію.

Оскільки у виразі $\sqrt{x}$ допустимими значеннями змінної $x$ є всі невід'ємні числа, то областю визначення функції $y = \sqrt{x}$ також є всі невід'ємні числа.

Вираз $\sqrt{x}$ не може набувати від'ємних значень, тобто жодне від'ємне число не може належати області значень розглядуваної функції. Покажемо, що функція $y = \sqrt{x}$ може набувати будь-яких невід'ємних значень, наприклад, $y = 7,2$. Справді, існує таке значення аргументу $x$, що $\sqrt{x} = 7,2$, а саме $x = 7,2^2$. На цьому прикладі ми бачимо, що для будь-якого невід'ємного числа $b$ завжди знайдеться таке значення $x$, що $\sqrt{x} = b$. Таким значенням аргументу $x$ є число $b^2$.

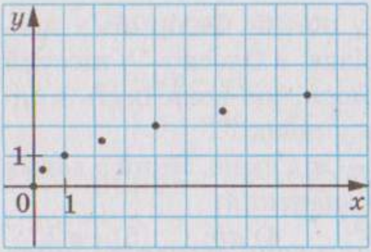



Рис. 27

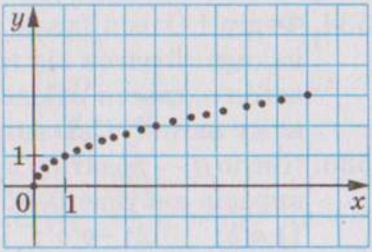



Рис. 28

Отже, областю значень функції $y = \sqrt{x}$ є всі невід'ємні числа.

Ураховуючи область визначення та область значень функції $y = \sqrt{x}$, можна зробити висновок, що її графік розташований тільки в першій координатній чверті.

У таблиці наведено деякі значення аргументу і відповідні їм значення функції $y = \sqrt{x}$ :

| $x$ | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 | 6,25 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |

Позначимо на координатній площині точки, координати яких наведено в таблиці (рис. 27).

Чим більше точок, координати яких задовольняють рівняння $y = \sqrt{x}$, позначити, тим менше отримана фігура буде відрізнятися від графіка функції $y = \sqrt{x}$ (рис. 28).

Якби вдалося на координатній площині позначити всі такі точки, то отримали б фігуру, яку зображено на рисунку 29. У старших класах буде доведено, що графіком функції $y = \sqrt{x}$ є фігура, яка дорівнює вітці параболи $y = x^2$.

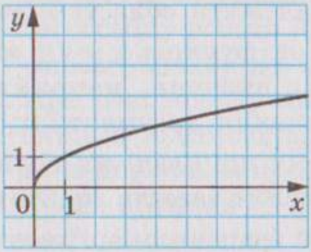



Рис. 29

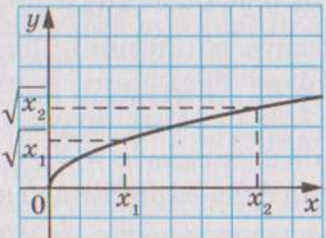



Рис. 30

Нехай $x_1$ і $x_2$ — два довільних аргументи функції $y = \sqrt{x}$ такі, що $x_1 < x_2$. Тоді з властивості арифметичного квадратного кореня випливає, що $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Це означає, що більшому значенню аргументу функції $y = \sqrt{x}$ відповідає більше значення функції, і навпаки, більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, тобто якщо $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, то $x_1 < x_2$ (рис. 30).

У таблиці наведено властивості функції $y = \sqrt{x}$, вивчені у цьому пункті:

| | |
|---|---|
| Область визначення | Усі невід'ємні числа |
| Область значень | Усі невід'ємні числа |
| Графік | Вітка параболи |
| Нуль функції (значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0) | $x = 0$ |

**ПРИКЛАД 1**

Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x} = 6 - x$.

*Розв'язання*

В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = 6 - x$ (рис. 31). Ці графіки перетинаються в точці, абсциса якої дорівнює 4. Перевірка підтвердить, що число 4 є коренем даного рівняння.

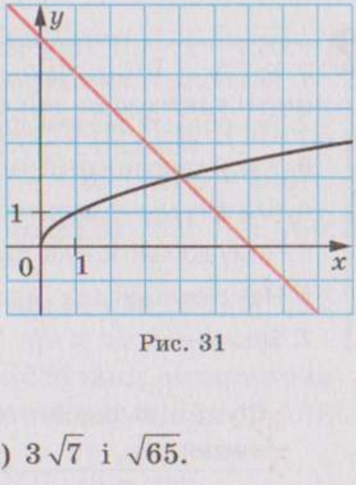



Рис. 31

**ПРИКЛАД 2**

Порівняйте числа: 1) 6 і $\sqrt{31}$; 2) $3\sqrt{7}$ і $\sqrt{65}$.

*Розв'язання.*

1) Оскільки $6 = \sqrt{36}$ і $36 > 31$, то $\sqrt{36} > \sqrt{31}$, тобто $6 > \sqrt{31}$.

2) Маємо $3\sqrt{7} = \sqrt{63}$, $63 < 65$, $\sqrt{63} < \sqrt{65}$. Отже, $3\sqrt{7} < \sqrt{65}$.

**ПРИКЛАД 3**

При яких значеннях $x$ виконується нерівність $\sqrt{x} < 3$?

*Розв'язання*

Запишемо дану нерівність так: $\sqrt{x} < \sqrt{9}$. Оскільки більшому значенню функції $y = \sqrt{x}$ відповідає більше значення аргументу, то можна зробити висновок, що $x < 9$. Ураховуючи, що вираз $\sqrt{x}$ має зміст тільки при $x \geqslant 0$, отримуємо, що дана нерівність виконується при $0 \leqslant x < 9$.

**ПРИКЛАД 4**

Спростіть вираз $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$.

*Розв'язання*

Оскільки $\sqrt{5} > 2$ і $\sqrt{5} < 3$, то $\sqrt{5} - 2 > 0$ і $\sqrt{5} - 3 < 0$. Отже, маємо:

$$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = |\sqrt{5}-2| + |\sqrt{5}-3| =$$
$$= \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1.$$

Відповідь: 1.

1. Яка область визначення функції $y = \sqrt{x}$?
2. Яка область значень функції $y = \sqrt{x}$?
3. У якій координатній чверті знаходиться графік функції $y = \sqrt{x}$?
4. Яка фігура є графіком функції $y = \sqrt{x}$?
5. Чому дорівнює нуль функції $y = \sqrt{x}$?
6. Невід'ємні числа $a$ і $b$ такі, що $a > b$. Порівняйте $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$.
7. Відомо, що $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Порівняйте числа $a$ і $b$.

**537.°** Функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$. Заповніть таблицю:

| $x$ | 0,01 | 3 | | | | 1600 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | 9 | 11 | 1,5 | |

**538.°** Функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$.
1) Чому дорівнює значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 0,16; 64; 1,44; 3600?
2) При якому значенні аргументу значення функції дорівнює 0,2; 5; 120; −4?

**539.°** Не виконуючи побудови, визначте, через які з даних точок проходить графік функції $y = \sqrt{x}$: $A$ (36; 6), $B$ (4; −2), $C$ (0,81; 0,9), $D$ (−1; 1), $E$ (42,25; 6,5).

**540.°** Через яку з даних точок проходить графік функції $y = \sqrt{x}$:
1) $A$ (16; 4);
2) $B$ (49; −7);
3) $C$ (3,6; 0,6);
4) $D$ (−36; 6)?

**541.°** Порівняйте числа:
1) $\sqrt{86}$ і $\sqrt{78}$;
2) $\sqrt{1,4}$ і $\sqrt{1,6}$;
3) 5 і $\sqrt{26}$;
4) $\sqrt{\frac{6}{7}}$ і 1;
5) −7 і $-\sqrt{48}$;
6) $3\sqrt{2}$ і $2\sqrt{3}$;
7) $\sqrt{41}$ і $2\sqrt{10}$;
8) $0,6\sqrt{3\frac{1}{3}}$ і $\sqrt{1,1}$;
9) $\sqrt{75}$ і $4\sqrt{3}$.

**542.°** Порівняйте числа:
1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ і $\sqrt{\frac{1}{5}}$;
2) $\sqrt{32}$ і $\sqrt{6}$;
3) $\sqrt{33}$ і 6;
4) $3\sqrt{5}$ і $\sqrt{42}$;
5) $\sqrt{30}$ і $2\sqrt{7}$;
6) $7\sqrt{\frac{1}{7}}$ і $\frac{1}{2}\sqrt{20}$.

**543.˙** Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіка функції $y = \sqrt{x}$ і прямої:
1) $y = 1$; 2) $y = 0,8$; 3) $y = -6$; 4) $y = 500$.

**544.˙** Запишіть у порядку спадання числа 8; $\sqrt{62}$; 7,9; $\sqrt{65}$; 8,2.

**545.˙** Запишіть у порядку зростання числа $\sqrt{38}$; 6,1; 6; $\sqrt{35}$; 5,9.

**546.˙** Між якими двома послідовними цілими числами знаходиться на координатній прямій число:
1) $\sqrt{2}$;
2) $\sqrt{3}$;
3) $\sqrt{5}$;
4) $\sqrt{7}$;
5) $\sqrt{13}$;
6) $\sqrt{0,98}$;
7) $\sqrt{59}$;
8) $-\sqrt{115}$;
9) $-\sqrt{76,19}$?

**547.**° Між якими двома послідовними цілими числами знаходиться на координатній прямій число:

1) $\sqrt{6}$; 3) $\sqrt{29}$; 5) $-\sqrt{86}$;

2) $\sqrt{19}$; 4) $\sqrt{160}$; 6) $-\sqrt{30,5}$?

**548.**° Укажіть усі цілі числа, які розташовані на координатній прямій між числами:

1) 3 і $\sqrt{68}$; 3) $-\sqrt{31}$ і $-2,3$;

2) $\sqrt{7}$ і $\sqrt{77}$; 4) $-\sqrt{42}$ і 2,8.

**549.**° Укажіть усі цілі числа, які розташовані на координатній прямій між числами:

1) $\sqrt{3}$ і $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{10}$ і $\sqrt{90}$; 3) $-\sqrt{145}$ і $-\sqrt{47}$.

**550.**° При яких значеннях $x$ виконується нерівність:

1) $\sqrt{x} \geqslant 2$; 2) $\sqrt{x} < 4$; 3) $6 \leqslant \sqrt{x} < 9$?

**551.**° При яких значеннях $x$ виконується нерівність:

1) $\sqrt{x} \leqslant 8$; 2) $\sqrt{x} > 7$; 3) $10 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 20$?

**552.**° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{x} = x$; 3) $\sqrt{x} = x + 2$; 5) $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$;

2) $\sqrt{x} = x^2$; 4) $\sqrt{x} = 0,5x + 0,5$; 6) $\sqrt{x} = 1,5 - 0,5x$.

**553.**° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{x} = -x - 1$; 2) $\sqrt{x} = 2 - x$; 3) $\sqrt{x} = \frac{1}{x}$.

**554.**° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$; 3) $\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}$;

2) $\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{7})^2}$; 4) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(3-\sqrt{3})^2}$.

**555.**° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(\sqrt{5}-4)^2}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}$.

**556.**°° Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x} = -x^2$.

**557.**°° Дано функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, \text{ якщо } x < 0, \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x \geqslant 0. \end{cases}$

1) Знайдіть $f(-8)$, $f(0)$, $f(9)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

**558.**•• Дано функцію $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ якщо } x \leqslant 1, \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$

1) Знайдіть $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

**559.**•• Установіть область визначення, область значень і нулі функції $y = \sqrt{-x}$. Побудуйте графік даної функції.

**560.**•• Побудуйте графік функції $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$.

**561.*** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{8 - 2\sqrt{7}}$;
2) $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$;
3) $\sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$;
4) $\sqrt{38 - 12\sqrt{2}}$.

**562.*** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$;
2) $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$;
3) $\sqrt{37 - 20\sqrt{3}}$.

**563.*** Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x} = a - x$ залежно від значення $a$?

**564.*** Спростіть вираз $\sqrt{(\sqrt{a} + 1)^2 - 4\sqrt{a}} + \sqrt{(\sqrt{a} - 2)^2 + 8\sqrt{a}}$.

**565.*** Спростіть вираз

$$\sqrt{(\sqrt{a} - 6)^2 + 24\sqrt{a}} - \sqrt{(\sqrt{a} + 6)^2 - 24\sqrt{a}}.$$

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**566.** У першому контейнері було 90 кг яблук, а в другому — 75 кг. Після того як з першого контейнера взяли у 3 рази більше яблук, ніж з другого, то в першому залишилося у 2 рази менше, ніж у другому. Скільки кілограмів яблук взяли з першого контейнера?

**567.** Від пристані проти течії річки відплив моторний човен, власна швидкість якого дорівнює 12 км/год. Через 40 хв після виходу човна зіпсувався мотор, і човен течією річки через 2 год принесло до пристані. Яка швидкість течії?

**568.** Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{a-2b}{a^2+2ab}-\frac{1}{a^2-4b^2}:\frac{a+2b}{(2b-a)^2}\right):\frac{a^2-2ab}{a^2+4ab+4b^2}=\frac{2b}{a^2}$;

2) $\left(\frac{2a}{a+3}-\frac{4a}{a^2+6a+9}\right)\cdot\frac{a^2-9}{a+1}-\frac{a^2-9a}{a+3}=a$.

**569.** Відстань між двома містами легкова машина проїжджає за 2 год, а вантажна — за 3 год. Через який час після початку руху вони зустрінуться, якщо виїдуть одночасно назустріч одна одній з цих міст?

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**570.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2=0$; 4) $-3x^2+12=0$; 7) $\frac{1}{6}x^2-5x=0$;

2) $x^2-1=0$; 5) $5x^2-6x=0$; 8) $x^2-2x+1=0$;

3) $x^2+5x=0$; 6) $0{,}2x^2+2=0$; 9) $9x^2+30x+25=0$.

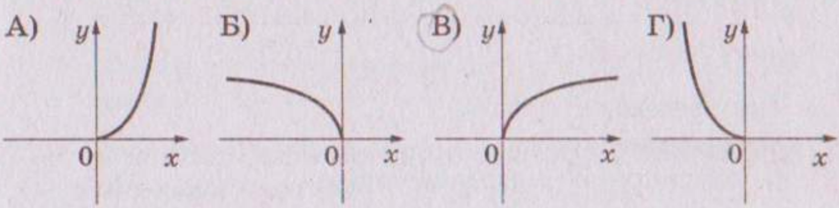
## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**571.** Натуральні числа від 1 до 37 записано в рядок так, що сума будь-яких перших кількох чисел ділиться на наступне за ними число. Яке число записано на третьому місці, якщо на першому місці записано число 37, а на другому — 1?

## ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 4

1. Яке з наведених тверджень хибне?
   А) −5 — ціле число;
   Б) −5 — раціональне число;
   В) −5 — ірраціональне число;
   Г) −5 — дійсне число.
2. Яке з чисел є ірраціональним?
   А) $\sqrt{4}$; Б) $\sqrt{0,4}$; В) $\sqrt{0,04}$; Г) $\sqrt{400}$.
3. Графіком якої з функцій є парабола?
   А) $y=2x$; Б) $y=x^2$; В) $y=\frac{2}{x}$; Г) $y=\frac{x}{2}$.

**4.** На якому з рисунків зображено графік функції $y = \sqrt{x}$?




**5.** Який з наведених виразів не має змісту?

А) $\sqrt{2}$; Б) $-\sqrt{2}$; В) $\sqrt{-2}$; Г) $\sqrt{(-2)^2}$.

**6.** Обчисліть значення виразу $\sqrt{7x-3}$ при $x = 4$.

А) 5; Б) −5; В) 25; Г) −25.

**7.** Чому дорівнює значення виразу $\sqrt{36 \cdot 0,81}$?

А) 6,9; Б) 54; В) 5,4; Г) 0,54.

**8.** Знайдіть значення виразу $\left(\frac{1}{5}\sqrt{10}\right)^2$.

А) 2; Б) 4; В) 2,5; Г) 0,4.

**9.** Спростіть вираз $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{64a}$.

А) $15\sqrt{a}$; Б) $15a$; В) $7\sqrt{a}$; Г) $7a$.

**10.** Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{12}{\sqrt{2}}$.

А) $\sqrt{2}$; Б) $4\sqrt{2}$; В) $6\sqrt{2}$; Г) $10\sqrt{2}$.

**11.** Скоротіть дріб $\frac{a-2}{a-2\sqrt{2a}+2}$.

А) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{2}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}$; Б) $\frac{a+2}{a-2}$; В) 1; Г) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$.

**12.** Спростіть вираз $(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5}) + (\sqrt{5}+1)^2 - \sqrt{20}$.

А) 15; Б) 5; В) $10-\sqrt{5}$; Г) $10+5\sqrt{5}$.

## ПІДСУМКИ

У цьому параграфі:

- було введено такі поняття:
  - квадратний корінь;
  - арифметичний квадратний корінь;
  - множина;
  - підмножина;
  - ірраціональне число;
  - дійсні числа;
- ви навчилися:
  - добувати квадратні корені з невід'ємних чисел;
  - спрощувати вирази, які містять квадратні корені;
  - будувати графіки функцій $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$;
- ви вивчили:
  - властивості арифметичного квадратного кореня;
  - деякі властивості функцій $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

# § 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

- Ви навчитеся розв'язувати рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$.
- Вивчите знамениту теорему Вієта для квадратного рівняння.
- Оволодієте прийомами розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних.

## 17. Квадратні рівняння. Розв'язування неповних квадратних рівнянь

Ви вмієте розв'язувати лінійні рівняння, тобто рівняння виду $ax = b$, де $x$ — змінна, $a$ і $b$ — деякі числа.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ називають **рівнянням першого степеня.**

Наприклад, кожне з лінійних рівнянь $2x = 3$, $3x = 0$, $\frac{1}{3}x = -7$ є рівнянням першого степеня. А ось лінійні рівняння $0x = 0$, $0x = 2$ не є рівняннями першого степеня.

Числа $a$ и $b$ називають **коефіцієнтами рівняння першого степеня $ax = b$.**

Те, що рівняння першого степеня є окремим випадком лінійного рівняння, ілюструє схема, зображена на рисунку 32.

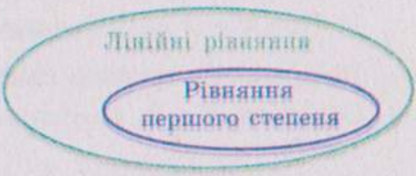



Рис. 32

Ви також умієте розв'язувати деякі рівняння, які містять змінну в другому степені. Наприклад, готуючись до вивчення цього пункту, ви розв'язали рівняння $x^2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 + 5x = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$ (вправа № 570). Кожне з цих рівнянь має вигляд $ax^2 + bx + c = 0$.

**Означення. Квадратним рівнянням називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де $x$ — змінна, $a$, $b$, $c$ — деякі числа, причому $a \neq 0$.**

Числа $a$, $b$ і $c$ називають **коефіцієнтами квадратного рівняння.** Число $a$ називають **першим** або **старшим коефіцієнтом**, число $b$ — **другим коефіцієнтом**, число $c$ — **вільним членом**.

Наприклад, квадратне рівняння $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ має такі коефіцієнти: $a = -2$, $b = 5$, $c = 3$.

Квадратне рівняння, перший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають **зведеним.**

Наприклад, $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x^2 + 3x = 0$ — це зведені квадратні рівняння.

Оскільки в квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ старший коефіцієнт не дорівнює нулю, то незведене квадратне рівняння завжди можна перетворити в зведене, рівносильне даному. Розділивши обидві частини рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ на число $a$, отримаємо зведене квадратне рівняння $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Якщо в квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один з коефіцієнтів $b$ або $c$ дорівнює нулю, то таке рівняння називають **неповним квадратним рівнянням.**

Існують три види неповних квадратних рівнянь:
1. При $b = c = 0$ маємо: $ax^2 = 0$.
2. При $c = 0$ і $b \neq 0$ маємо: $ax^2 + bx = 0$.
3. При $b = 0$ і $c \neq 0$ маємо: $ax^2 + c = 0$.

Розв'яжемо неповне квадратне рівняння кожного виду.

1. Оскільки $a \neq 0$, то рівняння $ax^2 = 0$ має єдиний корінь $x = 0$.
2. Рівняння $ax^2 + bx = 0$ подамо у вигляді $x(ax + b) = 0$. Це рівняння завжди має два корені $x_1$ і $x_2$, один з яких дорівнює нулю, а другий є коренем рівняння першого степеня $ax + b = 0$. Звідси $x_1 = 0$ і $x_2 = -\frac{b}{a}$.
3. Рівняння $ax^2 + c = 0$ подамо у вигляді $x^2 = -\frac{c}{a}$. Оскільки $c \neq 0$, то можливі два випадки: $-\frac{c}{a} < 0$ або $-\frac{c}{a} > 0$. Очевидно, що в першому випадку рівняння коренів не має.

У другому випадку рівняння має два корені: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ і $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Отримані результати підсумовує наступна таблиця.

| Значення коефіцієнтів $b$ і $c$ | Рівняння | Корені |
|---|---|---|
| $b = c = 0$ | $ax^2 = 0$ | $x = 0$ |
| $b \neq 0,\ c = 0$ | $ax^2 + bx = 0$ | $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$ |
| $b = 0,\ -\frac{c}{a} < 0$ | $ax^2 + c = 0$ | коренів немає |
| $b = 0,\ -\frac{c}{a} > 0$ | $ax^2 + c = 0$ | $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ |

**ПРИКЛАД**

Розв'яжіть рівняння $x^2 - \frac{4x}{|x|} = 0$.

*Розв'язання*

При $x > 0$ маємо: $x^2 - \frac{4x}{x} = 0$; $x^2 - 4 = 0$; $x = 2$ або $x = -2$. Але корінь $x = -2$ не задовольняє умову $x > 0$.

При $x < 0$ маємо: $x^2 + \frac{4x}{x} = 0$; $x^2 + 4 = 0$. Останнє рівняння не має коренів.

Відповідь: 2.

1. Яке рівняння називають лінійним?
2. Яке рівняння називають рівнянням першого степеня?
3. Наведіть приклад лінійного рівняння, яке є рівнянням першого степеня, і приклад лінійного рівняння, яке не є рівнянням першого степеня.
4. Яке рівняння називають квадратним?
5. Як називають коефіцієнти квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$?
6. Яке квадратне рівняння називають зведеним?

**7.** Яке квадратне рівняння називають неповним?

**8.** Які існують види неповних квадратних рівнянь? Скільки коренів може мати рівняння кожного виду?

**572.°** Укажіть серед даних рівнянь квадратні і назвіть, чому дорівнюють старший коефіцієнт, другий коефіцієнт і вільний член кожного з них:

1) $x = 0$;
2) $x^2 = 0$;
3) $x^2 + x = 0$;
4) $x^2 + 1 = 0$;
5) $x^2 - 4x + 2 = 0$;
6) $3x^3 - x^2 + 6 = 0$;
7) $-2x^2 + 7x - 8 = 0$;
8) $x^3 - x - 9 = 0$;
9) $6 - x^2 + 4x = 0$;
10) $-x^2 - 2x + 3 = 0$.

**573.°** Складіть квадратне рівняння, у якому:

1) старший коефіцієнт дорівнює 6, другий коефіцієнт дорівнює 7, а вільний член дорівнює 2;
2) старший коефіцієнт дорівнює 1, другий коефіцієнт дорівнює −8, а вільний член дорівнює $-\frac{1}{3}$;
3) старший коефіцієнт дорівнює −0,5, другий коефіцієнт дорівнює 0, а вільний член дорівнює $2\frac{3}{7}$;
4) старший коефіцієнт дорівнює 7,2, другий коефіцієнт дорівнює −2, а вільний член дорівнює 0.

**574.°** Складіть квадратне рівняння, у якому:

1) старший коефіцієнт дорівнює −1, другий коефіцієнт дорівнює −2, а вільний член дорівнює 1,6;
2) старший коефіцієнт і вільний член дорівнюють 2, а другий коефіцієнт дорівнює 0.

**575.°** Подайте дане рівняння у вигляді $ax^2 + bx + c = 0$, укажіть значення коефіцієнтів $a$, $b$ і $c$:

1) $6x(3 - x) = 7 - 2x^2$;
2) $x(x + 1) = (x - 3)(7x + 2)$;
3) $(5x - 1)^2 = (x + 4)(x - 2)$;
4) $4x(x + 8) - (x - 6)(x + 6) = 0$.

**576.°** Подайте дане рівняння у вигляді $ax^2 + bx + c = 0$, укажіть значення коефіцієнтів $a$, $b$ і $c$:

1) $x(x + 10) = 8x + 3$;
2) $(x + 2)^2 = 2x^2 + 4$.

**577.°** Укажіть, які з даних рівнянь є зведеними, і перетворіть незведені рівняння у зведені:

1) $x^2 - 5x + 34 = 0$;
2) $2x^2 + 6x + 8 = 0$;
3) $\frac{1}{3}x^2 + x - 5 = 0$;
4) $16 - 6x + x^2 = 0$;
5) $-x^2 + 8x - 7 = 0$;
6) $-0,2x^2 + 0,8x + 1 = 0$.

**578.°** Перетворіть дане квадратне рівняння у зведене:

1) $\frac{1}{6}x^2 - 2x - 3 = 0$;
2) $-4x^2 + 20x - 16 = 0$;
3) $3x^2 + x + 2 = 0$.

**579.°** Які з чисел 1; 0; –3; 2; –10 є коренями рівняння $x^2 + 9x - 10 = 0$?

**580.°** Доведіть, що:

1) число –1 не є коренем рівняння $x^2 - 2x + 3 = 0$;
2) числа $-\frac{1}{3}$ і –3 є коренями рівняння $3x^2 + 10x + 3 = 0$;
3) числа $-\sqrt{2}$ і $\sqrt{2}$ є коренями рівняння $3x^2 - 6 = 0$.

**581.°** Доведіть, що:

1) число –5 є коренем рівняння $x^2 + 3x - 10 = 0$;
2) число 4 не є коренем рівняння $\frac{1}{4}x^2 - 4x = 0$.

**582.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $5x^2 - 45 = 0$;
2) $x^2 + 8x = 0$;
3) $2x^2 - 10 = 0$;
4) $2x^2 - 10x = 0$;
5) $64x^2 - 9 = 0$;
6) $x^2 + 16 = 0$.

**583.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 7x = 0$;
2) $2x^2 - 11x = 0$;
3) $3x^2 - 6 = 0$;
4) $-8x^2 = 0$.

**584.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 1)(x + 4) = -4$;
2) $(2x - 1)^2 - 6(6 - x) = 2x$;
3) $(x + 2)(x - 3) - (x - 5)(x + 5) = x^2 - x$.

**585.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 2)(3x + 2) + (4x - 5)^2 = 10x + 21$;
2) $(2x - 1)(x + 8) - (x - 1)(x + 1) = 15x$.

**586.°** Знайдіть два послідовних натуральних числа, добуток яких на 36 більший за менше з них.

**587.°** Знайдіть два послідовних натуральних числа, добуток яких на 80 більший за більше з них.

**588.•** Доведіть, що числа $2-\sqrt{3}$ і $2+\sqrt{3}$ є коренями рівняння $x^2 - 4x + 1 = 0$.

**589.•** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 - 8x}{6} = x$; 2) $\frac{x^2 - 3}{5} - \frac{x^2 - 1}{2} = 2$.

**590.•** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 + x}{7} - \frac{x}{3} = 0$; 2) $\frac{x^2 + 1}{6} - \frac{x^2 + 2}{4} = -1$.

**591.•** При якому значенні $m$:

1) число 2 є коренем рівняння $x^2 + mx - 6 = 0$;
2) число −3 є коренем рівняння $2x^2 - 7x + m = 0$;
3) число $\frac{1}{7}$ є коренем рівняння $m^2x^2 + 14x - 3 = 0$?

**592.•** При якому значенні $n$:

1) число 6 є коренем рівняння $x^2 - nx + 3 = 0$;
2) число 0,5 є коренем рівняння $nx^2 - 8x + 10 = 0$?

**593.•** Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники способом групування:

1) $x^2 - 6x + 8 = 0$; 3) $x^2 + 22x - 23 = 0$.
2) $x^2 + 12x + 20 = 0$;

**594.•** Розв'яжіть рівняння, виділивши у його лівій частині квадрат двочлена:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$; 3) $x^2 + 8x + 20 = 0$.
2) $x^2 + 6x - 7 = 0$;

**595.•** Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

1) $x^2 - 10x + 9 = 0$; 3) $x^2 - x - 2 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 3 = 0$; 4) $x^2 + 6x + 5 = 0$.

**596.•** Сума квадратів двох послідовних цілих чисел на 17 більша за подвоєне більше з них. Знайдіть ці числа.

**597.•** Знайдіть два послідовних цілих числа, сума квадратів яких дорівнює 1.

**598.•** При якому значенні $m$ не є квадратним рівняння:

1) $(m - 4)x^2 + mx + 7 = 0$;
2) $(m^2 + 8m)x^2 + (m + 8)x + 10 = 0$;
3) $(m^2 - 81)x^2 - 6x + m = 0$?

**599.**• Яким числом, додатним чи від'ємним, є відмінний від 0 корінь неповного квадратного рівняння $ax^2 + bx = 0$, якщо:

1) $a > 0,\ b > 0$;
2) $a < 0,\ b > 0$;
3) $a > 0,\ b < 0$;
4) $a < 0,\ b < 0$?

**600.**• Чи має корені неповне квадратне рівняння $ax^2 + c = 0$, якщо:

1) $a > 0,\ c > 0$;
2) $a < 0,\ c > 0$;
3) $a > 0,\ c < 0$;
4) $a < 0,\ c < 0$?

**601.**•• Яким многочленом можна замінити зірочку в рівнянні $3x^2 - 2x + 4 + * = 0$, щоб утворилося неповне квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) 0 і 4;
2) −1 і 1?

**602.**•• Яким многочленом можна замінити-зірочку в рівнянні $x^2 + 5x - 1 + * = 0$, щоб утворилося неповне квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) 0; −7;
2) −4; 4?

**603.**•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 3|x| = 0$;
2) $x^2 + |x| - 2x = 0$;
3) $x^2 - \frac{|x|}{x} = 0$;
4) $x^2 - \frac{2x^2}{|x|} = 0$.

**604.**•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 7|x| = 0$;
2) $x^2 - 6|x| + x = 0$;
3) $2x^2 - \frac{3x^2}{|x|} = 0$.

**605.**•• При якому значенні $a$ рівняння
$(a - 2)x^2 + (2a - 1)x + a^2 - 4 = 0$ є:

1) лінійним;
2) зведеним квадратним;
3) неповним незведеним квадратним рівнянням;
4) неповним зведеним квадратним рівнянням?

**606.**•• Установіть, при якому значенні $a$ один з коренів квадратного рівняння дорівнює 0, і знайдіть другий корінь рівняння:

1) $x^2 + ax + a - 4 = 0$;
2) $4x^2 + (a - 8)x + a^2 + a = 0$;
3) $ax^2 + (a + 3)x + a^2 - 3a = 0$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**607.** Виконайте дії:

1) $\frac{3-2a}{2a}-\frac{1-a^2}{a^2}$;
2) $\frac{a^2-6b^2}{3b}+2b$;
3) $\frac{4}{c^2-4c}-\frac{c+4}{c^2-16}$;
4) $\frac{56a^5}{b^4}\cdot\frac{b^2}{14b^5}$;
5) $\frac{72a^3b}{c}:(27a^2b)$;
6) $\frac{4a^2-1}{a^2-9}:\frac{10a+5}{a+3}$.

**608.** Спростіть вираз:

1) $10\sqrt{3}-5\sqrt{48}+2\sqrt{75}$;
2) $(3\sqrt{5}-\sqrt{20})\sqrt{5}$;
3) $(5-\sqrt{2})^2$;
4) $(\sqrt{18}-\sqrt{3})\sqrt{2}+0,5\sqrt{24}$.

**609.** Який з графіків, зображених на рисунку 33, є графіком функції:

1) $y=x^2$; 2) $y=2x$; 3) $y=\frac{x}{2}$; 4) $y=\frac{2}{x}$?

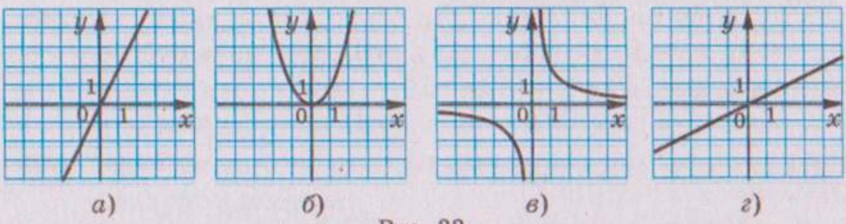



Рис. 33

**610.** Учень задумав двоцифрове число. Якщо кожну цифру цього числа збільшити на 2, то отримане число буде на 13 менше від подвоєного задуманого числа. Яке число було задумано?

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**611.** Друкарський автомат отримує на вході картку з числами $(a; b)$ і видає на виході картку з числами $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)$.

Чи можна за допомогою цього автомата з картки $(0,25; 1000)$ отримати картку $(1,25; 250)$?

# 18. Формула коренів квадратного рівняння

Знаючи коефіцієнти $a$ і $b$ рівняння першого степеня $ax = b$, можна знайти його корінь за формулою $x = \frac{b}{a}$.

Виведемо формулу, яка дає змогу за коефіцієнтами $a$, $b$ і $c$ квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ знаходити його корені.

Маємо:

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Оскільки $a \neq 0$, то, помноживши обидві частини цього рівняння на $4a$, отримаємо рівняння, рівносильне даному:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Виділимо в лівій частині цього рівняння квадрат двочлена:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0;$$
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \qquad (2)$$

Існування коренів рівняння (2) та їх кількість залежить від знака виразу $b^2 - 4ac$. Цей вираз називають **дискримінантом квадратного рівняння** $ax^2 + bx + c = 0$ і позначають буквою $D$, тобто $D = b^2 - 4ac$. Термін «дискримінант» походить від латинського слова *discriminare*, що означає «розрізняти», «розділяти».

Тепер рівняння (2) можна записати так:

$$(2ax + b)^2 = D. \qquad (3)$$

Можливі три випадки: $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

1. Якщо $D < 0$, то рівняння (3), а отже і рівняння (1), коренів не має. Справді, при будь-якому значенні $x$ вираз $(2ax + b)^2$ набуває тільки невід'ємних значень.

   Висновок: ***якщо D < 0, то квадратне рівняння коренів не має.***

2. Якщо $D = 0$, то рівняння (3) набуває вигляду:

   $$(2ax + b)^2 = 0.$$

   Звідси $2ax + b = 0$; $x = -\frac{b}{2a}$.

   Висновок: ***якщо D = 0, то квадратне рівняння має один корінь*** $x = -\frac{b}{2a}$.

3. Якщо $D > 0$, то рівняння (3) можна записати у вигляді:

$$(2ax + b)^2 = \left(\sqrt{D}\right)^2.$$

Звідси $2ax + b = -\sqrt{D}$ або $2ax + b = \sqrt{D}$. Тоді $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ або $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Висновок: ***якщо $D > 0$, то квадратне рівняння має два корені $x_1$ і $x_2$:***

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Також застосовують коротку форму запису:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

Цей запис називають **формулою коренів квадратного рівняння** $ax^2 + bx + c = 0$.

Отриману формулу можна застосовувати і для випадку, коли $D = 0$. Тоді

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

При розв'язуванні квадратних рівнянь зручно керуватися таким алгоритмом:

- знайти дискримінант $D$ квадратного рівняння;
- якщо $D < 0$, то у відповіді записати, що коренів немає;
- якщо $D \geqslant 0$, то скористатися формулою коренів квадратного рівняння.

Якщо другий коефіцієнт квадратного рівняння подати у вигляді $2k$, то можна користуватися іншою формулою, яка в багатьох випадках полегшує обчислення.

Розглянемо квадратне рівняння $ax^2 + 2kx + c = 0$.

Знайдемо його дискримінант: $D = 4k^2 - 4ac = 4\,(k^2 - ac)$.

Позначимо вираз $k^2 - ac$ через $D_1$.

Якщо $D_1 \geqslant 0$, то за формулою коренів квадратного рівняння отримуємо:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{2\left(-k \pm \sqrt{D_1}\right)}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

тобто $$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ де } D_1 = k^2 - ac.$$

**ПРИКЛАД 1**

Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2 - 2x - 16 = 0$;
2) $-0{,}5x^2 + 2x - 2 = 0$;
3) $x^2 + 5x - 3 = 0$;
4) $x^2 - 6x + 11 = 0$;
5) $5x^2 - 16x + 3 = 0$.

*Розв'язання*

1) Для даного рівняння $a = 3$, $b = -2$, $c = -16$.
Дискримінант рівняння
$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 4 + 192 = 196.$$
Отже, $x_1 = \frac{2 - \sqrt{196}}{6} = \frac{2 - 14}{6} = -2$, $x_2 = \frac{2 + 14}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

В і д п о в і д ь: $-2$; $2\frac{2}{3}$.

2) Маємо:
$$D = 2^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-2) = 4 - 4 = 0.$$
Отже, дане рівняння має один корінь:
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-1} = 2.$$
Зауважимо, що дане рівняння можна розв'язати іншим способом. Помноживши обидві частини рівняння на $-2$, отримуємо:
$$x^2 - 4x + 4 = 0;\ (x - 2)^2 = 0;\ x - 2 = 0;\ x = 2.$$

В і д п о в і д ь: 2.

3) $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 25 + 12 = 37$.

Рівняння має два корені: $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2}$, $x_2 = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2}$.

В і д п о в і д ь: $\frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

4) $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 36 - 44 = -8 < 0$.
Отже, рівняння не має коренів.

В і д п о в і д ь: коренів немає.

5) Подамо дане рівняння у вигляді $5x^2 + 2 \cdot (-8)x + 3 = 0$ і застосуємо формулу для рівняння виду $ax^2 + 2kx + c = 0$:

$$D_1 = (-8)^2 - 5 \cdot 3 = 49;$$

$$x_1 = \frac{8-7}{5} = \frac{1}{5};\ \ x_2 = \frac{8+7}{5} = 3.$$

Відповідь: $\frac{1}{5}$; 3.

**ПРИКЛАД 2**

Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 6\sqrt{x^2} - 16 = 0;$

2) $x^2 - 10\left(\sqrt{x}\right)^2 - 24 = 0;$

3) $9x^2 - 8x + \frac{5}{x-1} = 1 + \frac{5}{x-1}.$

*Розв'язання*

1) Маємо: $x^2 + 6\,|\,x\,| - 16 = 0.$

При $x \geqslant 0$ отримуємо рівняння $x^2 + 6x - 16 = 0$, яке має корені $-8$ і $2$, проте корінь $-8$ не задовольняє умову $x \geqslant 0$.

При $x < 0$ отримуємо рівняння $x^2 - 6x - 16 = 0$, яке має корені $-2$ і $8$, проте корінь $8$ не задовольняє умову $x < 0$.

Відповідь: $-2$; 2.

2) Оскільки $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ при $x \geqslant 0$, то шукані корені мають задовольняти дві умови одночасно: $x^2 - 10x - 24 = 0$ і $x \geqslant 0$. У такому випадку кажуть, що дане рівняння рівносильне системі: $\begin{cases} x^2 - 10x - 24 = 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

Рівняння $x^2 - 10x - 24$ має корені $-2$ і $12$, але корінь $-2$ не задовольняє умову $x \geqslant 0$.

Відповідь: 12.

3) Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} 9x^2 - 8x = 1, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases}$ Маємо:

$$\begin{cases} 9x^2 - 8x - 1 = 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \text{ або } x = -\frac{1}{9}, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$x = -\frac{1}{9}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{9}$.

**ПРИКЛАД 3**

При якому значенні $b$ має один корінь рівняння:
1) $2x^2 - bx + 18 = 0$; 2)* $(b + 6)\,x^2 - (b - 2)\,x + 1 = 0$?

*Розв'язання*

1) Дане рівняння є квадратним і має один корінь, якщо його дискримінант дорівнює нулю.
Маємо:

$$D = b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = b^2 - 144;$$
$$b^2 - 144 = 0;$$
$$b = -12 \text{ або } b = 12.$$

Відповідь: $b = -12$ або $b = 12$.

2) При $b = -6$ отримуємо рівняння $8x + 1 = 0$, яке має один корінь.
При $b \neq -6$ дане рівняння є квадратним і має один корінь, якщо його дискримінант дорівнює нулю:

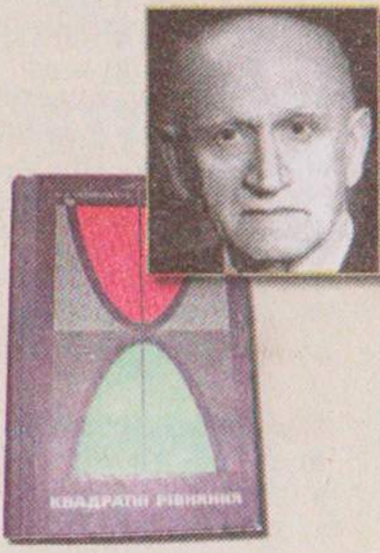
$$D = (b - 2)^2 - 4\,(b + 6) = b^2 - 4b + 4 - 4b - 24 = b^2 - 8b - 20.$$

Маємо: $b^2 - 8b - 20 = 0$, звідси $b = -2$ або $b = 10$.

Відповідь: $b = -2$ або $b = 10$, або $b = -6$.

Кілька поколінь учителів математики та їх учнів набували педагогічного досвіду й поглиблювали свої знання, користуючись чудовою книжкою «Квадратні рівняння» блискучого українського педагога й математика Миколи Андрійовича Чайковського (1887–1970).

М. А. Чайковський залишив велику наукову й педагогічну спадщину. Його роботи відомі далеко за межами України.




*М. А. Чайковський*

1. Який вираз називають дискримінантом квадратного рівняння?
2. Як залежить кількість коренів квадратного рівняння від знака дискримінанта?
3. Запишіть формулу коренів квадратного рівняння.
4. Яким алгоритмом зручно користуватися при розв'язуванні квадратних рівнянь?

**612.°** Знайдіть дискримінант і визначте кількість коренів рівняння:

1) $x^2 + 2x - 4 = 0$;
2) $x^2 - 3x + 5 = 0$;
3) $2x^2 - 6x - 3{,}5 = 0$;
4) $5x^2 - 2x + 0{,}2 = 0$.

**613.°** Яке з наведених рівнянь має два корені:

1) $x^2 + 4x + 8 = 0$;
2) $3x^2 - 4x - 1 = 0$;
3) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
4) $2x^2 - 9x + 15 = 0$?

**614.°** Яке з наведених рівнянь не має коренів:

1) $x^2 - 6x + 4 = 0$;
2) $5x^2 - 10x + 6 = 0$;
3) $3x^2 + 4x - 2 = 0$;
4) $0{,}04x^2 - 0{,}4x + 1 = 0$?

**615.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 3 = 0$;
3) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
4) $x^2 - 4x - 21 = 0$;
5) $x^2 + x - 56 = 0$;
6) $x^2 - 6x - 7 = 0$;
7) $x^2 - 8x + 12 = 0$;
8) $x^2 + 7x + 6 = 0$;
9) $-x^2 + 6x + 55 = 0$;
10) $2x^2 - 3x - 2 = 0$;
11) $2x^2 - x - 6 = 0$;
12) $3x^2 - 4x - 20 = 0$;
13) $10x^2 - 7x - 3 = 0$;
14) $-5x^2 + 7x - 2 = 0$;
15) $-6x^2 - 7x - 1 = 0$;
16) $3x^2 - 10x + 3 = 0$;
17) $-3x^2 + 7x + 6 = 0$;
18) $x^2 - 4x + 1 = 0$;
19) $2x^2 - x - 4 = 0$;
20) $x^2 - 8x + 20 = 0$.

**616.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$;
2) $x^2 + 12x - 13 = 0$;
3) $x^2 - 7x + 10 = 0$;
4) $x^2 - x - 72 = 0$;
5) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;
6) $2x^2 - 7x - 4 = 0$;
7) $4x^2 - 3x - 1 = 0$;
8) $-2x^2 + x + 15 = 0$;
9) $6x^2 + 7x - 5 = 0$;
10) $18x^2 - 9x - 5 = 0$;
11) $x^2 - 6x + 11 = 0$;
12) $-x^2 - 8x + 12 = 0$.

**617.°** При яких значеннях змінної:

1) значення многочленів $6x^2 - 2$ і $5 - x$ рівні;

2) значення двочлена $y - 6$ дорівнює значенню тричлена $y^2 - 9y + 3$;
3) тричлени $4m^2 + 4m + 2$ і $2m^2 + 10m + 8$ набувають рівних значень?

**618.°** При яких значеннях змінної:
1) значення двочлена $4x + 4$ дорівнює значенню тричлена $3x^2 + 5x - 10$;
2) значення тричленів $10p^2 + 10p + 8$ і $3p^2 - 10p + 11$ рівні?

**619.°** Знайдіть корені рівняння:
1) $(2x - 5)(x + 2) = 18$;
2) $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$;
3) $(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 16$;
4) $(x - 6)^2 - 2x(x + 3) = 30 - 12x$;
5) $(x + 7)(x - 8) - (4x + 1)(x - 2) = -21x$;
6) $(2x - 1)(2x + 1) - x(1 - x) = 2x(x + 1)$.

**620.°** Розв'яжіть рівняння:
1) $(x - 4)^2 = 4x - 11$;
2) $(x + 5)^2 + (x - 7)(x + 7) = 6x - 19$;
3) $(3x - 1)(x + 4) = (2x + 3)(x + 3) - 17$.

**621.°** Знайдіть натуральне число, квадрат якого на 42 більший за дане число.

**622.°** Знайдіть периметр прямокутника, площа якого дорівнює 70 см$^2$, а одна зі сторін на 9 см більша за другу.

**623.°** Добуток двох чисел дорівнює 84. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 8 менше від другого.

**624.°** Добуток двох послідовних натуральних чисел на 89 більший за їх суму. Знайдіть ці числа.

**625.°** Сума квадратів яких двох послідовних натуральних чисел дорівнює 365?

**626.**• Розв'яжіть рівняння:
1) $2x^2 + x\sqrt{5} - 15 = 0$;
2) $x^2 - x(\sqrt{6} - 1) - \sqrt{6} = 0$;
3) $\frac{x^2 - 4}{8} - \frac{2x + 3}{3} = -1$;
4) $\frac{4x^2 + x}{3} - \frac{x^2 + 17}{9} = \frac{5x - 1}{6}$.

**627.**• Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 + 3x\sqrt{2} + 4 = 0$;

2) $x^2 - x(\sqrt{3} + 2) + 2\sqrt{3} = 0$;

3) $\frac{2x^2 + x}{3} - \frac{x + 3}{4} = x - 1$.

**628.**˙ При якому значенні $a$ число $\frac{1}{4}$ є коренем рівняння $a^2x^2 + 4ax - 5 = 0$?

**629.**˙ При якому значенні $a$ число 2 є коренем рівняння $x^2 - 0,5ax - 3a^2 = 0$?

**630.**˙ Від квадратного листа картону відрізали смужку у формі прямокутника завширшки 3 см. Площа листа, що залишився, становить 40 см². Якою була довжина сторони квадратного листа картону?

**631.**˙ Від прямокутного листа паперу, довжина якого дорівнює 18 см, відрізали квадрат, сторона якого дорівнює ширині листа. Площа частини прямокутника, що залишилася, дорівнює 72 см². Якою була ширина листа паперу?

**632.**˙ Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо один з них на 14 см менший від другого, а гіпотенуза дорівнює 34 см.

**633.**˙ Знайдіть сторони прямокутника, якщо їх різниця дорівнює 31 см, а діагональ прямокутника дорівнює 41 см.

**634.**˙ Знайдіть три послідовних непарних натуральних числа, якщо квадрат першого з них на 33 більше, ніж подвоєна сума другого і третього.

**635.**˙ Знайдіть чотири послідовних парних натуральних числа, якщо сума першого й третього чисел у 5 разів менше, ніж добуток другого та четвертого чисел.

**636.**˙ Доведіть, що коли старший коефіцієнт і вільний член квадратного рівняння мають різні знаки, то рівняння має два корені.

**637.**˙ (*Стародавня індійська задача.*)

На дві зграї розділившись,
Розважались в гаї мавпи.
Одна восьма їх в квадраті
Гучно разом забавлялись.
Криком радісним дванадцять
Все повітря колихали.

Разом скільки, ти дізнайся,
Мавп було у тому гаї?

**638.**** У турнірі з футболу було зіграно 36 матчів. Скільки команд брало участь у турнірі, якщо кожна команда зіграла по одному разу з кожною іншою командою?

**639.**** Скільки сторін має многокутник, якщо в ньому можна провести 90 діагоналей?

**640.**** Розв'яжіть рівняння:

1) $| x^2 + 7x - 4 | = 4$;
2) $5x^2 - 8 | x | + 3 = 0$;
3) $x | x | + 6x - 5 = 0$;
4) $x^2 + \frac{4x^2}{|x|} - 12 = 0$;
5) $x^2 - 8\sqrt{x^2} + 15 = 0$;
6) $x^2 + 4\sqrt{x^2} - 12 = 0$.

**641.**** Розв'яжіть рівняння:

1) $| x^2 + 10x - 4 | = 20$;
2) $x | x | + 12x - 45 = 0$;
3) $\frac{x^3}{|x|} - 14x - 15 = 0$;
4) $x^2 - 8\sqrt{x^2} - 9 = 0$.

**642.**** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 2x + \frac{3}{x-8} = \frac{3}{x-8} + 80$; 2) $x^2 + 8\left(\sqrt{x}\right)^2 - 33 = 0$.

**643.**** Розв'яжіть рівняння:

1) $6x^2 + 5x - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$; 2) $5x^2 - 14\left(\sqrt{x}\right)^2 - 3 = 0$.

**644.**** При якому значенні $b$ має один корінь рівняння:
1) $2x^2 + 4x - b = 0$; 2) $3x^2 - bx + 12 = 0$?

**645.**** При якому значенні $b$ має один корінь рівняння:
1) $6x^2 - 18x + b = 0$; 2) $8x^2 + bx + 2 = 0$?

**646.**** Доведіть, що при будь-якому значенні $p$ має два корені рівняння:
1) $4x^2 - px - 3 = 0$; 2) $x^2 + px + p - 2 = 0$.

**647.**** Доведіть, що при будь-якому значенні $m$ не має коренів рівняння:
1) $x^2 + mx + m^2 + 1 = 0$; 2) $x^2 - 2mx + 2m^2 + 9 = 0$.

**648.**** Доведіть, що при будь-якому значенні $b$ рівняння $x^2 + bx - 7 = 0$ має два корені.

**649.*** Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + a = 0$;

2) $x^2 - (2a + 4)x + 8a = 0$;
3) $a^2x^2 - 24ax - 25 = 0$;
4) $3(2a - 1)x^2 - 2(a + 1)x + 1 = 0$.

**650.*** Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 - (2a - 5)x - 3a^2 + 5a = 0$;
2) $x^2 + (3a - 4)x - 12a = 0$;
3) $ax^2 - (a + 1)x + 1 = 0$.

**651.*** При якому значенні $b$ має один корінь рівняння:
1) $bx^2 - 6x - 7 = 0$;
2) $(b + 5)x^2 - (b + 6)x + 3 = 0$;
3) $(b - 4)x^2 + (2b - 8)x + 15 = 0$?

**652.*** При якому значенні $b$ має один корінь рівняння:
1) $bx^2 + x + b = 0$;
2) $(b + 3)x^2 + (b + 1)x - 2 = 0$?

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**653.** Спростіть вираз:

$$\left(\frac{a+b}{a} - \frac{4b}{a+b}\right) \cdot \frac{a+b}{a-b}.$$

**654.** Знайдіть значення виразу $\frac{\left(a^{-3}\right)^3}{a^{-2} \cdot a^{-5}}$ при $a = \frac{1}{3}$.

**655.** Розташуйте у порядку зростання числа $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$ і 4.

**656.** Є брухт металу двох сортів, які містять 5 % і 45 % нікелю відповідно. Скільки брухту кожного з цих сортів треба взяти, щоб одержати 120 т сплаву з 30-відсотковим вмістом нікелю?

**657.** У книжці бракує кількох аркушів. На лівій сторінці розвороту є номер 24, а на правій — номер 53. Скільки аркушів бракує між цими сторінками?

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**658.** Розв'яжіть рівняння, знайдіть суму і добуток його коренів та порівняйте їх з другим коефіцієнтом і вільним членом рівняння:
1) $x^2 - 4x - 12 = 0$; 2) $x^2 + 9x + 14 = 0$.

**659.** Заповніть таблицю, де $a$, $b$ і $c$ — коефіцієнти квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, а $x_1$ і $x_2$ — його корені:

| Рівняння | $-\frac{b}{a}$ | $\frac{c}{a}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_1 + x_2$ | $x_1x_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $7x^2 - 8x + 1 = 0$ | | | | | | |
| $6x^2 + 13x - 15 = 0$ | | | | | | |

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**660.** Доведіть, що з 101 кубика, пофарбованого у довільні кольори, можна вибрати або 11 кубиків одного кольору, або 11 кубиків різного кольору.

# 19. Теорема Вієта

Готуючись до вивчення цього пункту, ви розв'язали вправи №№ 658, 659. Можливо, ці вправи підказали вам, яким чином сума і добуток коренів квадратного рівняння пов'язані з його коефіцієнтами.

**Теорема 19.1** (теорема Вієта). ***Якщо $x_1$ і $x_2$ — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то***

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \; x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

*Франсуа Вієт* (1540–1603) — французький математик, за фахом — юрист. У 1591 р. упровадив буквені позначення не лише для невідомих величин, а й для коефіцієнтів рівнянь, завдяки цьому стало можливим виражати властивості рівнянь та їх корені загальними формулами. Серед своїх відкриттів сам Вієт особливо високо цінив установлення залежності між коренями і коефіцієнтами рівнянь.

Доведення. ⊙ Нехай дискримінант даного рівняння $D > 0$. Застосовуючи формулу коренів квадратного рівняння, запишемо:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \;\; x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Маємо: $x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D} - b + \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a}$;

$$x_1 x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$ ▲

Зауваження. Теорема Вієта є справедливою й тоді, коли $D = 0$. При цьому вважають, що $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Маємо:

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Наслідок. ***Якщо $x_1$ і $x_2$ — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$, то***

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -b,}$$
$$\boldsymbol{x_1 x_2 = c,}$$

тобто *сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену*.

**Теорема 19.2** (обернена до теореми Вієта). ***Якщо числа $\alpha$ і $\beta$ такі, що $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ і $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, то ці числа є коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.***

Доведення. ⊙ Розглянемо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Перетворимо його у зведене:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Згідно з умовою теореми це рівняння можна записати так:

$$x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta = 0. \qquad (*)$$

Підставляючи у ліву частину цього рівняння замість $x$ спочатку число $\alpha$, а потім число $\beta$, отримуємо:

$$\alpha^2 - (\alpha + \beta)\,\alpha + \alpha\beta = \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = 0;$$
$$\beta^2 - (\alpha + \beta)\,\beta + \alpha\beta = \beta^2 - \alpha\beta - \beta^2 + \alpha\beta = 0.$$

Таким чином, числа $\alpha$ і $\beta$ є коренями рівняння (*), а отже, і коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. ▲

Наслідок. ***Якщо числа $\alpha$ і $\beta$ такі, що $\alpha + \beta = -b$ і $\alpha\beta = c$, то ці числа є коренями зведеного квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$.***

Застосовуючи цей наслідок, можна розв'язувати деякі квадратні рівняння усно, не використовуючи формулу коренів.

**ПРИКЛАД 1**

Знайдіть суму й добуток коренів рівняння $3x^2 - 15x + 2 = 0$.

*Розв'язання*

З'ясуємо, чи має дане рівняння корені.

Маємо: $D = (-15)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 225 - 24 > 0$. Отже, рівняння має два корені: $x_1$ і $x_2$.

Тоді за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -\frac{-15}{3} = 5$, $x_1 x_2 = \frac{2}{3}$.

**ПРИКЛАД 2**

Знайдіть коефіцієнти $b$ і $c$ рівняння $x^2 + bx + c = 0$, якщо його коренями є числа $-7$ і $4$.

*Розв'язання*

За теоремою Вієта $b = -(-7 + 4) = 3$, $c = -7 \cdot 4 = -28$.

**ПРИКЛАД 3**

Складіть квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють: 1) $4$ і $-\frac{5}{7}$; 2) $\frac{6 - \sqrt{7}}{2}$ і $\frac{6 + \sqrt{7}}{2}$.

*Розв'язання*

1) Нехай $x_1 = 4$ і $x_2 = -\frac{5}{7}$. Тоді

$$x_1 + x_2 = 4 - \frac{5}{7} = \frac{23}{7}, \quad x_1 x_2 = 4 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{20}{7}.$$

За теоремою, оберненою до теореми Вієта, числа $x_1$ і $x_2$ є коренями рівняння $x^2 - \frac{23}{7}x - \frac{20}{7} = 0$. Помноживши обидві частини цього рівняння на 7, отримуємо квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами:

$$7x^2 - 23x - 20 = 0.$$

2) Нехай $x_1 = \frac{6-\sqrt{7}}{2}$ і $x_2 = \frac{6+\sqrt{7}}{2}$. Тоді

$$x_1 + x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} + \frac{6+\sqrt{7}}{2} = 6,$$

$$x_1x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{6+\sqrt{7}}{2} = \frac{36-7}{4} = \frac{29}{4}.$$

Отже, $x_1$ і $x_2$ є коренями рівняння $x^2 - 6x + \frac{29}{4} = 0$. Звідси шуканим є рівняння $4x^2 - 24x + 29 = 0$.

**ПРИКЛАД 4**

Відомо, що $x_1$ і $x_2$ — корені рівняння $2x^2 - 3x - 9 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$.

*Розв'язання*

За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1x_2 = -\frac{9}{2}$.

Тоді маємо:

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{3}{2} : \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{3}$.

**ПРИКЛАД 5**

Число 4 є коренем рівняння $3x^2 - 10x + n = 0$. Знайдіть другий корінь рівняння і значення $n$.

*Розв'язання*

Нехай $x_1$ і $x_2$ — корені даного рівняння, причому $x_1 = 4$. За теоремою Вієта

$$x_1 + x_2 = \frac{10}{3},\ x_2 = \frac{10}{3} - 4 = -\frac{2}{3},\ n = x_1x_2 = -\frac{8}{3}.$$

Відповідь: $x_2 = -\frac{2}{3}$, $n = -\frac{8}{3}$.

**ПРИКЛАД 6**

Складіть квадратне рівняння, корені якого на 4 більші за відповідні корені рівняння $x^2 + 6x - 14 = 0$.

*Розв'язання*

Нехай $x_1$ і $x_2$ — корені даного рівняння, $x_1'$ і $x_2'$ — корені шуканого рівняння.

За умовою $x_1' = x_1 + 4$, $x_2' = x_2 + 4$.

За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -6$, $x_1 x_2 = -14$.

Тоді маємо:

$$x_1' + x_2' = x_1 + 4 + x_2 + 4 = (x_1 + x_2) + 8 = -6 + 8 = 2;$$

$$x_1' x_2' = (x_1 + 4)(x_2 + 4) = x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 =$$
$$= -14 + 4 \cdot (-6) + 16 = -22.$$

Отже, за теоремою, оберненою до теореми Вієта, шуканим є рівняння $x^2 - 2x - 22 = 0$.

Відповідь: $x^2 - 2x - 22 = 0$.

**1.** Сформулюйте теорему Вієта.
**2.** Сформулюйте наслідок з теореми Вієта.
**3.** Сформулюйте теорему, обернену до теореми Вієта.
**4.** Сформулюйте наслідок з теореми, оберненої до теореми Вієта.

**661.°** Чому дорівнює сума коренів рівняння $x^2 + 5x - 10 = 0$:
1) 5; 2) −5; 3) −10; 4) 10?

**662.°** Чому дорівнює добуток коренів рівняння $x^2 - 14x + 12 = 0$:
1) −14; 2) 14; 3) 12; 4) −12?

**663.°** Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму й добуток його коренів:
1) $x^2 + 6x - 32 = 0$;
2) $x^2 - 10x + 4 = 0$;
3) $2x^2 - 6x + 3 = 0$;
4) $10x^2 + 42x + 25 = 0$.

**664.°** Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму й добуток його коренів:
1) $x^2 - 12x - 18 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 9 = 0$;
3) $3x^2 + 7x + 2 = 0$;
4) $-4x^2 - 8x + 27 = 0$.

**665.°** Користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, установіть, чи є коренями рівняння:
1) $x^2 - 8x + 12 = 0$ числа 2 і 6;
2) $x^2 + x - 56 = 0$ числа −7 і 8;

3) $x^2 - 13x + 42 = 0$ числа 5 і 8;
4) $x^2 - 20x - 99 = 0$ числа 9 і 11.

**666.°** Користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, установіть, чи є коренями рівняння:
1) $x^2 + 2x - 3 = 0$ числа 1 і $-2$;
2) $x^2 + 5x + 6 = 0$ числа $-2$ і $-3$.

**667.°** Знайдіть коефіцієнти $b$ і $c$ рівняння $x^2 + bx + c = 0$, якщо його коренями є числа:
1) $-8$ і 6; 2) 4 і 5.

**668.°** Знайдіть коефіцієнти $b$ і $c$ рівняння $x^2 + bx + c = 0$, якщо його коренями є числа:
1) $-2$ і 0,5; 2) $-10$ і $-20$.

**669.°** Складіть квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:
1) 2 і 5; 3) $-0{,}2$ і $-10$; 5) 0 і 6;
2) $-\frac{1}{3}$ і 2; 4) $2-\sqrt{3}$ і $2+\sqrt{3}$; 6) $-\sqrt{7}$ і $\sqrt{7}$.

**670.°** Складіть квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:
1) $-7$ і $-8$; 3) $\frac{1}{2}$ і $\frac{2}{3}$;
2) 5 і $-0{,}4$; 4) $5-\sqrt{10}$ і $5+\sqrt{10}$.

**671.•** Число $-2$ є коренем рівняння $x^2 - 8x + q = 0$. Знайдіть значення $q$ і другий корінь рівняння.

**672.•** Число 7 є коренем рівняння $x^2 + px - 42 = 0$. Знайдіть значення $p$ і другий корінь рівняння.

**673.•** Число $\frac{1}{3}$ є коренем рівняння $6x^2 - bx + 4 = 0$. Знайдіть значення $b$ і другий корінь рівняння.

**674.•** Число $-0{,}2$ є коренем рівняння $4x^2 - 5{,}6x + m = 0$. Знайдіть значення $m$ і другий корінь рівняння.

**675.•** Відомо, що $x_1$ і $x_2$ — корені рівняння $2x^2 - 7x - 13 = 0$. Не розв'язуючи це рівняння, знайдіть значення виразу $x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2$.

**676.•** Відомо, що $x_1$ і $x_2$ — корені рівняння $5x^2 + 4x - 13 = 0$. Не розв'язуючи це рівняння, знайдіть значення виразу $3x_1x_2 - x_1 - x_2$.

**677.**° При якому значенні $b$ корені рівняння $x^2 + bx - 17 = 0$ є протилежними числами? Знайдіть ці корені.

**678.**° Застосовуючи теорему, обернену до теореми Вієта, розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
2) $x^2 + 5x + 4 = 0$;
3) $x^2 - 4x - 5 = 0$;
4) $x^2 + 4x - 5 = 0$;
5) $x^2 - 9x + 20 = 0$;
6) $x^2 - x - 2 = 0$;
7) $x^2 + 2x - 8 = 0$;
8) $x^2 - 3x - 18 = 0$.

**679.**° Застосовуючи теорему, обернену до теореми Вієта, розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 10x + 24 = 0$;
2) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
3) $x^2 - 2x - 8 = 0$;
4) $x^2 + x - 12 = 0$.

**680.**° Які з даних рівнянь мають два додатні корені, які — два від'ємні, а які — корені різних знаків:

1) $x^2 - 12x + 14 = 0$;
2) $x^2 + 6x - 42 = 0$;
3) $x^2 - 7x - 30 = 0$;
4) $x^2 + 16x + 10 = 0$;
5) $x^2 - 24x + 0,1 = 0$;
6) $x^2 + 20x + 3 = 0$?

**681.**•• Один з коренів рівняння $x^2 - 10x + c = 0$ на 8 менший від другого. Знайдіть значення $c$ і корені рівняння.

**682.**•• Корені рівняння $x^2 + 20x + a = 0$ відносяться як 7 : 3. Знайдіть значення $a$ і корені рівняння.

**683.**•• Корені $x_1$ і $x_2$ рівняння $x^2 - 7x + m = 0$ задовольняють умову $2x_1 - 5x_2 = 28$. Знайдіть корені рівняння і значення $m$.

**684.**•• Корені $x_1$ і $x_2$ рівняння $x^2 + 4x + n = 0$ задовольняють умову $3x_1 - x_2 = 8$. Знайдіть корені рівняння і значення $n$.

**685.**•• Знайдіть, користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, корені рівняння:

1) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;
2) $2x^2 + 5x + 3 = 0$;
3) $16x^2 - 23x + 7 = 0$;
4) $-8x^2 - 19x + 27 = 0$.

**686.**•• Знайдіть, користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, корені рівняння:

1) $7x^2 + 11x - 18 = 0$;
2) $9x^2 - 5x - 4 = 0$.

**687.**•• Відомо, що $x_1$ і $x_2$ — корені рівняння $x^2 - 9x + 6 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;
2) $x_1^2 + x_2^2$;
3) $(x_1 - x_2)^2$;
4) $x_1^3 + x_2^3$.

688.'' Відомо, що $x_1$ і $x_2$ — корені рівняння $x^2 + 5x - 16 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1$; 2) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$; 3) $| x_2 - x_1 |$.

689.'' Складіть квадратне рівняння, корені якого на 2 менші від відповідних коренів рівняння $x^2 + 8x - 3 = 0$.

690.'' Складіть квадратне рівняння, корені якого на 3 більші за відповідні корені рівняння $x^2 - 12x + 4 = 0$.

691.'' Складіть квадратне рівняння, корені якого у 3 рази менші від відповідних коренів рівняння $2x^2 - 14x + 9 = 0$.

692.'' Складіть квадратне рівняння, корені якого у 2 рази більші за відповідні корені рівняння $2x^2 - 15x + 4 = 0$.

693.* Сума квадратів коренів рівняння $3x^2 + ax - 7 = 0$ дорівнює $\frac{46}{9}$. Знайдіть значення $a$.

694.* Корені $x_1$ і $x_2$ рівняння $x^2 - ax + 8 = 0$ задовольняють умову $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$. Знайдіть значення $a$.

695.* Чи є правильним твердження:

1) рівняння $7x^2 + 4x - a^2 - 1 = 0$ має корені різних знаків при будь-якому значенні $a$;
2) якщо рівняння $x^2 + 6x + a^2 + 4 = 0$ має корені, то незалежно від значення $a$ вони обидва від'ємні?

696.* Знайдіть усі цілі значення $b$, при яких має цілі корені рівняння:

1) $x^2 + bx + 6 = 0$; 2) $x^2 + bx - 12 = 0$.

697.* Знайдіть усі цілі значення $b$, при яких має цілі корені рівняння:

1) $x^2 + bx + 8 = 0$; 2) $x^2 + bx - 18 = 0$.

698.* Корені рівняння $x^2 + bx + c = 0$ дорівнюють його коефіцієнтам $b$ і $c$. Знайдіть $b$ і $c$.

699.* При якому значенні $a$ сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 4x + a = 0$ дорівнює:

1) 12; 2) 6?

700.* При якому значенні $a$ сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (a - 1)x - 2a = 0$ дорівнює 9?

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**701.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{4a-16}{a^2-16}$; 3) $\frac{c^2+10c+25}{5c+25}$; 5) $\frac{n^3-n^5}{n^3-n}$;

2) $\frac{12b^3-8b^2}{2-3b}$; 4) $\frac{4-m^2}{m^2-4m+4}$; 6) $\frac{2-2x^2}{4x^2-8x+4}$.

**702.** У саду посадили однаковими рядами 48 дерев. Рядів виявилося на 8 менше, ніж дерев у кожному ряду. Скільки дерев у кожному ряду і скільки рядів дерев посадили?

**703.** Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = x^2$ і $y = x + 2$. Накресліть графіки даних функцій і позначте знайдені точки.

**704.** У саду 60 % дерев становлять вишні й сливи, з них 30 % становлять сливи. Який відсоток усіх дерев саду становлять сливи?

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**705.** Користуючись методом групування, розкладіть на множники многочлен:

1) $x^2 - 7x + 10$; 3) $a^2 + 8a + 12$;

2) $y^2 + 3y - 4$; 4) $x^2 - x - 6$.

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**706.** Василь задумав три цифри $x$, $y$, $z$. Петро називає три числа $a$, $b$, $c$. Василь повідомляє Петру значення виразу $ax + by + cz$. Які числа повинен назвати Петро, щоб за отриманою інформацією визначити, які цифри задумав Василь?

## ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 5

**1.** Яке з даних рівнянь не є квадратним?

А) $x^2 = 0$; В) $x^3 + x = 0$;

Б) $x^2 + x = 0$; Г) $x^2 + x - 2 = 0$.

**2.** Розв'яжіть рівняння $9x - x^2 = 0$.

А) $-3; 0; 3$; Б) $0; 3$; В) $-3; 3$; Г) $0; 9$.

**3.** Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2 - x}{6} - \frac{x-2}{3} = \frac{3-x}{2}$.

А) $0; 5$; Б) $5$; В) $\sqrt{5}$; Г) $-\sqrt{5}; \sqrt{5}$.

**4.** Яке з наведених рівнянь не має коренів?

А) $x^2 - 5x - 2 = 0$; В) $x^2 - 2x + 5 = 0$;
Б) $x^2 - 5x + 2 = 0$; Г) $x^2 + 2x - 5 = 0$.

**5.** Скільки коренів має рівняння $6x^2 + 13x + 5 = 0$?

А) два корені; В) жодного кореня;
Б) безліч коренів; Г) один корінь.

**6.** Знайдіть корені рівняння $x^2 + 4x - 21 = 0$.

А) $7; -3$; Б) $-7; 3$; В) $-7; -3$; Г) $3; 7$.

**7.** Чому дорівнює сума коренів рівняння $x^2 - 10x - 12 = 0$?

А) $10$; Б) $-10$; В) $-12$; Г) $12$.

**8.** Чому дорівнює добуток коренів рівняння $3x^2 - 16x + 6 = 0$?

А) $6$; Б) $2$; В) $-16$; Г) $\frac{16}{3}$.

**9.** При яких значеннях змінної набувають рівних значень вирази $(3x - 1)(x + 2)$ і $(x - 12)(x - 4)$?

А) $-12,5; 2$; В) $-25; 4$;
Б) $12,5; -2$; Г) $25; -4$.

**10.** Складіть квадратне рівняння, корені якого дорівнюють $3 - \sqrt{2}$ і $3 + \sqrt{2}$.

А) $x^2 + 6x - 7 = 0$; В) $x^2 + 6x + 7 = 0$;
Б) $x^2 - 6x - 7 = 0$; Г) $x^2 - 6x + 7 = 0$.

**11.** Розв'яжіть рівняння $x\,|x| - 9x - 10 = 0$.

А) $-1; 10; \frac{-9-\sqrt{41}}{2}; \frac{-9+\sqrt{41}}{2}$; В) $-1; \frac{-9-\sqrt{41}}{2}$;
Б) $10; \frac{-9-\sqrt{41}}{2}; \frac{-9+\sqrt{41}}{2}$; Г) $-1; 10$.

**12.** Число $-5$ є коренем рівняння $2x^2 + 9x + c = 0$. Знайдіть другий корінь рівняння і значення $c$.

А) $x_2 = 0,5; c = -5$; В) $x_2 = 9,5; c = 22,5$;
Б) $x_2 = -0,5; c = 5$; Г) $x_2 = 9,5; c = -22,5$.

## 20. Квадратний тричлен

**Означення. Квадратним тричленом називають многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де $x$ — змінна, $a$, $b$ і $c$ — деякі числа, причому $a \neq 0$.**

Наведемо приклади многочленів, які є квадратними тричленами:

$$2x^2 - 3x + 5;\ x^2 + 7x;\ x^2 - 5;\ 3x^2.$$

Зазначимо, що ліва частина квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ є квадратним тричленом.

**Означення. Коренем квадратного тричлена називають значення змінної, при якому значення квадратного тричлена дорівнює нулю.**

Наприклад, число 2 є коренем квадратного тричлена $x^2 - 6x + 8$.

Щоб знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, треба розв'язати відповідне квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Число $D = b^2 - 4ac$ називають **дискримінантом квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$.**

Якщо $D < 0$, то квадратний тричлен коренів не має. Якщо $D = 0$, то квадратний тричлен має один корінь, якщо $D > 0$ — то два корені.

Розглянемо квадратний тричлен $x^2 - 3x + 2$. Розкладемо його на множники методом групування (подібну вправу 705 ви виконували під час підготовки до вивчення цього пункту).

Маємо:

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) = \\ = (x - 1)(x - 2).$$

Про таке тотожне перетворення говорять, що квадратний тричлен $x^2 - 3x + 2$ розкладено на **лінійні множники** $x - 1$ і $x - 2$.

Зв'язок між коренями квадратного тричлена і лінійними множниками, на які він розкладається, установлює наступна теорема.

**Теорема 20.1.** ***Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ додатний, то даний тричлен можна розкласти на лінійні множники:***

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

***де $x_1$ і $x_2$ — корені квадратного тричлена.***

Доведення. ⊙ Оскільки числа $x_1$ і $x_2$ є коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Тоді $a(x - x_1)(x - x_2) =$
$= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c$. ▲

Зауваження. Якщо дискримінант квадратного тричлена дорівнює нулю, то вважають, що квадратний тричлен має два рівні корені, тобто $x_1 = x_2$. У цьому випадку розклад квадратного тричлена на множники має такий вигляд:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

**Теорема 20.2.** ***Якщо дискримінант квадратного тричлена від'ємний, то даний тричлен не можна розкласти на лінійні множники.***

Доведення. ⊙ Припустимо, що даний квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ можна розкласти на лінійні множники, тобто $ax^2 + bx + c = a(x - m)(x - n)$. Тоді $m$ і $n$ — корені даного квадратного тричлена. Отже, його дискримінант невід'ємний, що суперечить умові. ▲

**ПРИКЛАД 1**

Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 14x - 32$; 2) $-x^2 + 17x - 30$; 3) $3x^2 - 7x + 2$.

*Розв'язання*

1) Знайдемо корені даного тричлена:

$$x^2 - 14x - 32 = 0;$$
$$x_1 = -2,\ x_2 = 16.$$

Отже, $x^2 - 14x - 32 = (x + 2)(x - 16)$.

2) Маємо:

$$-x^2 + 17x - 30 = 0;$$
$$x^2 - 17x + 30 = 0;$$
$$x_1 = 2,\ x_2 = 15.$$

Отже, $-x^2 + 17x - 30 = -(x - 2)(x - 15)$.

3) Розв'яжемо рівняння $3x^2 - 7x + 2 = 0$. Маємо:

$$x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 2.$$

Тоді $3x^2 - 7x + 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2) = (3x - 1)(x - 2)$.

**ПРИКЛАД 2**

Скоротіть дріб $\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1}$.

*Розв'язання*

Розкладемо на множники квадратний тричлен, який є чисельником даного дробу:

$$6a^2 - a - 1 = 0;$$

$$a_1 = -\frac{1}{3};\ a_2 = \frac{1}{2};$$

$$6a^2 - a - 1 = 6\left(a + \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{2}\right) = 3\left(a + \frac{1}{3}\right) \cdot 2\left(a - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= (3a + 1)(2a - 1).$$

Тоді маємо:

$$\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1} = \frac{(3a + 1)(2a - 1)}{(3a + 1)(3a - 1)} = \frac{2a - 1}{3a - 1}.$$

Відповідь: $\frac{2a - 1}{3a - 1}$.

**ПРИКЛАД 3**

При якому значенні $m$ розклад на множники тричлена $2x^2 + 9x + m$ містить множник $(x + 5)$?

*Розв'язання*

Оскільки розклад даного тричлена на множники має містити множник $(x + 5)$, то один з коренів цього тричлена дорівнює $-5$.

Тоді маємо:

$$2 \cdot (-5)^2 + 9 \cdot (-5) + m = 0;$$

$$m = -5.$$

Відповідь: $m = -5$.

?

1. Який многочлен називають квадратним тричленом?
2. Що називають коренем квадратного тричлена?

**3.** Що називають дискримінантом квадратного тричлена?

**4.** У якому випадку квадратний тричлен не має коренів? має один корінь? має два корені?

**5.** У якому випадку квадратний тричлен можна розкласти на лінійні множники?

**6.** За якою формулою квадратний тричлен можна розкласти на лінійні множники?

**7.** У якому випадку квадратний тричлен не можна розкласти на лінійні множники?

**707.°** Знайдіть корені квадратного тричлена:

1) $x^2 - x - 12$; 3) $3x^2 - 16x + 5$; 5) $4x^2 + 28x + 49$;
2) $x^2 + 2x - 35$; 4) $16x^2 - 24x + 3$; 6) $3x^2 + 21x - 90$.

**708.°** Чи можна розкласти на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 12x + 6$; 3) $2a^2 - 8a + 8$;
2) $3x^2 - 8x + 6$; 4) $-6b^2 + b + 12$?

**709.°** Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 7x + 12$; 7) $4x^2 + 3x - 22$;
2) $x^2 + 8x + 15$; 8) $-3a^2 + 8a + 3$;
3) $x^2 - 3x - 10$; 9) $\frac{1}{6}b^2 - \frac{5}{6}b + 1$;
4) $-x^2 - 5x - 6$; 10) $-2x^2 - 0{,}5x + 1{,}5$;
5) $-x^2 + x + 2$; 11) $0{,}4x^2 - 2x + 2{,}5$;
6) $6x^2 - 5x - 1$; 12) $-1{,}2m^2 + 2{,}6m - 1$.

**710.°** Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 3x - 18$; 4) $5x^2 + 8x - 4$; 7) $-\frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$;
2) $x^2 + 5x - 14$; 5) $2a^2 - 3a + 1$; 8) $0{,}3m^2 - 3m + 7{,}5$.
3) $-x^2 + 3x + 4$; 6) $4b^2 - 11b - 3$;

**711.°** Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$; 3) $\frac{3x - 15}{x^2 - x - 20}$; 5) $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x}$;

2) $\frac{x - 4}{x^2 - 10x + 24}$; 4) $\frac{x^2 - 3x + 2}{6x - 6}$; 6) $\frac{x^2 + 4x}{x^2 + 2x - 8}$.

**712.°** Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2-6x+5}{x-5}$; 2) $\frac{2x+12}{x^2+3x-18}$; 3) $\frac{x^2+9x+14}{x^2+7x}$.

**713.•** Скоротіть дріб:

1) $\frac{4a^2-9}{2a^2-9a-18}$; 3) $\frac{c^2-5c-6}{c^2-8c+12}$; 5) $\frac{x^2-16}{32-4x-x^2}$;

2) $\frac{2b^2-7b+3}{4b^2-4b+1}$; 4) $\frac{m^3-1}{m^2+9m-10}$; 6) $\frac{4n^2-9n+2}{2+9n-5n^2}$.

**714.•** Скоротіть дріб:

1) $\frac{4x^2+x-3}{x^2-1}$; 3) $\frac{a^2+5a+4}{a^2-a-20}$;

2) $\frac{2y^2+3y-5}{y^2-2y+1}$; 4) $\frac{3+20b-7b^2}{7b^2-6b-1}$.

**715.••** При якому значенні $b$ розклад на лінійні множники тричлена:

1) $2x^2-5x+b$ містить множник $(x-3)$;
2) $-4x^2+bx+2$ містить множник $(x+1)$;
3) $3x^2-4x+b$ містить множник $(3x-2)$?

**716.••** При якому значенні $a$ розклад на лінійні множники тричлена:

1) $2x^2-7x+a$ містить множник $(x-4)$;
2) $4x^2-ax+6$ містить множник $(2x+1)$?

**717.••** Спростіть вираз:

1) $\frac{9a^2-4}{2a^2-5a+2}\cdot\frac{a-2}{3a+2}+\frac{a-1}{1-2a}$;

2) $\frac{b-4}{b^3-b}:\left(\frac{b-1}{2b^2+3b+1}-\frac{1}{b^2-1}\right)$;

3) $\left(\frac{c+2}{c^2-c-6}-\frac{2c}{c^2-6c+9}\right):\frac{c^2+3c}{(2c-6)^2}$;

4) $\left(\frac{3}{m-4}+\frac{2m}{m+1}+\frac{4m-6}{m^2-3m-4}\right)\cdot\frac{4m-16}{2m-3}$.

**718.••** Доведіть, що при всіх допустимих значеннях $a$ значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $\frac{25a^2-36}{10a^2-9a+2}:\frac{5a+6}{5a-2}+\frac{9a-8}{1-2a}$;

2) $\left(\frac{2a}{a+3}+\frac{1}{a-1}-\frac{4}{a^2+2a-3}\right):\frac{2a+1}{a+3}$.

**719.**** Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 1}$; 2) $y = \dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x - 3} - \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$.

**720.**** Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$; 2) $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1} - \dfrac{x^2 - x - 30}{x + 5}$.

**721.*** Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^2 - 6xy + 5y^2$; 3) $3m^2 - 8mn - 3n^2$;

2) $a^2 + 5ab - 36b^2$; 4) $4x^2 - 5xy + y^2$.

**722.*** Розкладіть на множники многочлен:

1) $a^2 - 14ab + 40b^2$; 2) $12b^2 + bc - 6c^2$.

**723.*** Розв'яжіть рівняння:

1) $(a^2 - a - 6)\,x = a^2 - 9$;

2) $(a^2 - 8a + 7)\,x = 2a^2 - 13a - 7$.

**724.*** Розв'яжіть рівняння $(a^2 + 7a - 8)\,x = a^2 + 16a + 64$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**725.** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{2 - \sqrt{6}}{\sqrt{6} - 3}$; 5) $\dfrac{9a - b^2}{9a + 6b\sqrt{a} + b^2}$;

2) $\dfrac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10} - 5\sqrt{2}}$; 4) $\dfrac{4a - 2}{2\sqrt{a} + \sqrt{2}}$; 6) $\dfrac{a\sqrt{a} - 8}{a + 2\sqrt{a} + 4}$.

**726.** Який із графіків, зображених на рисунку 34, є графіком руху пішохода, який ішов зі сталою швидкістю? Визначте швидкість руху цього пішохода.

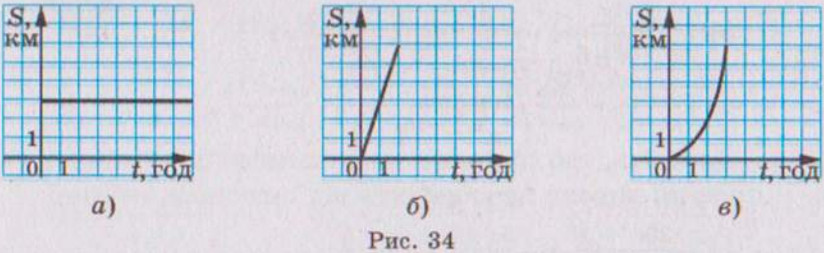



Рис. 34

**727.** Змішали 2 л молока жирністю 8 % і 3 л молока жирністю 6 %. Яка жирність утвореної суміші?

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**728.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 9$;
3) $(4x + 1)^2 = 9$;
5) $\sqrt{x} = 9$;
2) $x^2 = -9$;
4) $(x - 1)^2 = 5$;
6) $\sqrt{x} = -9$.

**729.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4x-1}{x-2} = \frac{x+5}{x-2}$;
3) $\frac{5x-3}{x+1} - \frac{4x-2}{x+2} = 1$;
2) $\frac{2y^2-3y-20}{y-4} - y = 1$;
4) $\frac{1}{y-5} - \frac{1}{y+4} = \frac{9}{(y-5)(y+4)}$.

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**730.** Розглядаються всі прямокутники, довжини сторін яких — натуральні числа. Яких прямокутників більше: з периметром 1000 чи з периметром 1002?

# 21. Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних рівнянь

### ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть рівняння $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

*Розв'язання*

Позначимо $x^2 = t$. Тоді $x^4 = t^2$. Отримуємо квадратне рівняння зі змінною $t$:

$$t^2 - 13t + 36 = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо: $t_1 = 4$, $t_2 = 9$. Оскільки $t = x^2$, то розв'язування заданого рівняння зводиться до розв'язування двох рівнянь:

$$x^2 = 4 \text{ і } x^2 = 9.$$

Звідси $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$.

Відповідь: $-2$; $2$; $-3$; $3$.

**Означення.** **Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де $x$ — змінна, $a$, $b$ і $c$ — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають біквадратним рівнянням.**

Заміною $x^2 = t$ біквадратне рівняння зводиться до квадратного рівняння $at^2 + bt + c = 0$. Такий спосіб розв'язування рівнянь називають **методом заміни змінної.**

Метод заміни змінної можна використовувати не тільки при розв'язуванні біквадратних рівнянь.

**ПРИКЛАД 2**

Розв'яжіть рівняння $(2x - 1)^4 + (2x - 1)^2 - 2 = 0$.

*Розв'язання*

Зробимо заміну $(2x - 1)^2 = t$. Тоді дане рівняння зводиться до квадратного рівняння

$$t^2 + t - 2 = 0.$$

Звідси $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

Тепер треба розв'язати два такі рівняння:

$$(2x - 1)^2 = -2 \text{ і } (2x - 1)^2 = 1.$$

Перше з них коренів не має. З другого рівняння отримуємо: $2x - 1 = -1$ або $2x - 1 = 1$.

Звідси $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Відповідь: 0; 1.

**ПРИКЛАД 3**

Розв'яжіть рівняння $6x + 5\sqrt{x} + 1 = 0$.

*Розв'язання*

Нехай $\sqrt{x} = t$. Тоді $x = t^2$. Маємо: $6t^2 + 5t + 1 = 0$.

Звідси $t_1 = -\frac{1}{3}$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Отримуємо два рівняння:

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{3}, \ \sqrt{x} = -\frac{1}{2}.$$

Оскільки $\sqrt{x} \geqslant 0$, то ці рівняння коренів не мають, а отже, і задане рівняння коренів не має.

Відповідь: Коренів немає.

**ПРИКЛАД 4**

Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2 + 2x}{x - 6} = \frac{5x + 18}{x - 6}$.

*Розв'язання*

Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^2 + 2x = 5x + 18, \\ x - 6 \neq 0. \end{cases}$

Звідси:
$$\begin{cases} x^2 - 3x - 18 = 0, \\ x \neq 6; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = -3 \text{ або } x = 6, \\ x \neq 6; \end{cases}$$
$$x = -3.$$

Відповідь: −3.

**ПРИКЛАД 5**

Розв'яжіть рівняння $\frac{5}{x^2 - 4x + 4} - \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{1}{x + 2}$.

*Розв'язання*

Маємо: $\frac{5}{(x-2)^2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x+2} = 0$;

$$\frac{5(x+2) - 4(x-2) - (x-2)^2}{(x-2)^2 (x+2)} = 0.$$

Отже, дане рівняння рівносильне системі
$$\begin{cases} 5(x+2) - 4(x-2) - (x-2)^2 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Звідси:
$$\begin{cases} 5x + 10 - 4x + 8 - x^2 + 4x - 4 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 - 5x - 14 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 7 \text{ або } x = -2, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$
$$x = 7.$$

Відповідь: 7.

Яке рівняння називають біквадратним?

**731.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
2) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$;
3) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;
4) $x^4 + 14x^2 - 32 = 0$;
5) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$;
6) $3x^4 + 8x^2 - 3 = 0$.

**732.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$;
2) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$;
3) $x^4 - 2x^2 - 24 = 0$;
4) $x^4 + 3x^2 - 70 = 0$;
5) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$;
6) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

**733.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 + 3x - 4}{x + 1} = 0$;
2) $\frac{x^2 - 6x - 7}{x - 7} = 0$;
3) $\frac{3x^2 - x - 2}{1 - x} = 0$;
4) $\frac{x^2 - 8x}{x + 10} = \frac{20}{x + 10}$;
5) $\frac{x^2 - 14}{x + 2} = \frac{5x}{x + 2}$;
6) $\frac{x^2 + 10x}{x - 8} = \frac{12x + 48}{x - 8}$;
7) $\frac{x^2 + 4x}{x - 5} - \frac{9x + 50}{x - 5} = 0$;
8) $\frac{x^2 - 6x}{x - 3} + \frac{15 - 2x}{x - 3} = 0$;
9) $\frac{x^2 - 6x}{x - 4} = 4$;
10) $\frac{5x + 18}{x - 2} = x$;
11) $x + 1 = \frac{6}{x}$;
12) $5 - \frac{8}{x^2} = \frac{18}{x}$.

**734.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 - 5x - 6}{x - 6} = 0$;
2) $\frac{4x^2 - 7x - 2}{x - 2} = 0$;
3) $\frac{2x^2 + 6}{x + 8} = \frac{13x}{x + 8}$;
4) $\frac{x^2 + 4x}{x + 7} = \frac{5x + 56}{x + 7}$;
5) $\frac{x^2 + 12x}{x + 4} - \frac{5x - 12}{x + 4} = 0$;
6) $\frac{x^2 - 3x}{x + 6} = 6$;
7) $\frac{2 - 33y}{y - 4} = 7y$;
8) $y - \frac{39}{y} = 10$.

**735.*** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 3)^4 - 3(x + 3)^2 - 4 = 0$;
2) $(2x + 1)^4 - 10(2x + 1)^2 + 9 = 0$;
3) $(6x - 7)^4 + 4(6x - 7)^2 + 3 = 0$;
4) $(x - 4)^4 + 2(x - 4)^2 - 8 = 0$.

**736.*** Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 1)^4 - 20(3x - 1)^2 + 64 = 0$;
2) $(2x + 3)^4 - 24(2x + 3)^2 - 25 = 0$.

**737.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$;
2) $x - \sqrt{x} - 12 = 0$;
3) $3x - 10\sqrt{x} + 3 = 0$;
4) $8\sqrt{x} + x + 7 = 0$;
5) $6\sqrt{x} - 27 + x = 0$;
6) $8x - 10\sqrt{x} + 3 = 0$.

**738.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x - 6\sqrt{x} + 8 = 0$;
2) $x - 5\sqrt{x} - 50 = 0$;
3) $2x - 3\sqrt{x} + 1 = 0$.

**739.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 9} = 0$;
2) $\frac{3x^2 - 14x - 5}{3x^2 + x} = 0$;
3) $\frac{x^2 - 12x + 35}{x^2 - 10x + 25} = 0$;
4) $\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 2x - 3} = 0$.

**740.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 - 9x - 10}{x^2 - 1} = 0$;
2) $\frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 6x + 8} = 0$.

**741.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2y}{y-3} = \frac{3y+3}{y}$;
2) $\frac{3x+4}{x-3} = \frac{2x-9}{x+1}$;
3) $\frac{5x+2}{x-1} = \frac{4x+13}{x+7}$;
4) $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x-1} = 3x - 4$.

**742.** Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{2x-13}{x-6} = \frac{x+6}{x}$;
2) $\frac{3x^2 - 4x - 20}{x+2} = 2x - 5$.

**743.** Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{10}{x+2} + \frac{9}{x} = 1$;
2) $\frac{48}{14-x} - \frac{48}{14+x} = 1$;
3) $\frac{x-1}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$;
4) $\frac{x-1}{x+3} + \frac{x+1}{x-3} = \frac{2x+18}{x^2-9}$;
5) $\frac{4x-10}{x-1} + \frac{x+6}{x+1} = 4$;
6) $\frac{1}{x} - \frac{10}{x^2-5x} = \frac{3-x}{x-5}$;
7) $\frac{4x}{x^2+4x+4} - \frac{x-2}{x^2+2x} = \frac{1}{x}$;
8) $\frac{6}{x^2-36} - \frac{3}{x^2-6x} + \frac{x-12}{x^2+6x} = 0$;
9) $\frac{x}{x+7} + \frac{x+7}{x-7} = \frac{63-5x}{x^2-49}$;
10) $\frac{4}{x^2-10x+25} - \frac{1}{x+5} = \frac{10}{x^2-25}$.

**744.**' Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}=\frac{1}{5}$;

2) $\frac{x}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{16}{x^2-4}$;

3) $\frac{9}{x+3}+\frac{14}{x-3}=\frac{24}{x}$;

4) $\frac{2y+3}{2y+2}-\frac{y+1}{2y-2}+\frac{1}{y^2-1}=0$;

5) $\frac{3x}{x^2-10x+25}-\frac{x-3}{x^2-5x}=\frac{1}{x}$;

6) $\frac{x-20}{x^2+10x}+\frac{10}{x^2-100}-\frac{5}{x^2-10x}=0$.

**745.**' При якому значенні змінної:

1) сума дробів $\frac{24}{x-2}$ і $\frac{16}{x+2}$ дорівнює 3;

2) значення дробу $\frac{42}{x}$ на $\frac{1}{4}$ більше за значення дробу $\frac{36}{x+20}$?

**746.**' При якому значенні змінної:

1) значення дробу $\frac{30}{x+3}$ на $\frac{1}{2}$ менше від значення дробу $\frac{30}{x}$;

2) значення дробу $\frac{20}{x}$ на 9 більше за значення дробу $\frac{20}{x+18}$?

**747.**'' Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-10}{x^3+1}+\frac{4}{x+1}=\frac{5x-1}{x^2-x+1}$;

2) $\frac{6}{x^2-4x+3}+\frac{5-2x}{x-1}=\frac{3}{x-3}$;

3) $\frac{4x-6}{x+2}-\frac{x}{x+1}=\frac{14}{x^2+3x+2}$;

4) $\frac{x}{x^2-4}-\frac{3x-1}{x^2+x-6}=\frac{2}{x^2+5x+6}$.

**748.**'' Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3x+2}{x^2+2x+4}+\frac{x^2+39}{x^3-8}=\frac{5}{x-2}$;

2) $\frac{x}{x-1}+\frac{x+1}{x+3}=\frac{8}{x^2+2x-3}$.

**749.**** Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $(x^2-2)^2-8(x^2-2)+7=0$;
2) $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)-24=0$;
3) $(x^2-3x+1)(x^2-3x+3)=3$;
4) $(x^2+2x+2)(x^2+2x-4)=-5$.

**750.**** Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2-\frac{6(2x-1)}{x}+5=0$;

2) $\frac{3x-1}{x+1}+\frac{x+1}{3x-1}=3\frac{1}{3}$.

**751.**** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2-6x)^2+(x^2-6x)-56=0$;
2) $(x^2+8x+3)(x^2+8x+5)=63$;
3) $\frac{x^4}{(x-2)^2}-\frac{4x^2}{x-2}-5=0$;
4) $\frac{x+4}{x-3}-\frac{x-3}{x+4}=\frac{3}{2}$.

**752.*** Для кожного значення $a$ розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-8x+7}{x-a}=0$;
2) $\frac{x-a}{x^2-8x+7}=0$;
3) $\frac{x^2-(3a+2)x+6a}{x-6}=0$;
4) $\frac{a(x-a)}{x+3}=0$.

**753.*** При яких значеннях $a$ рівняння $\frac{x^2-ax+5}{x-1}=0$ має один корінь?

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**754.** Чи є правильним твердження, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу

$$(a-1)^2\left(\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{a^2-2a+1}\right)+\frac{2}{a+1}$$

є додатним числом?

**755.** Яким числом, раціональним чи ірраціональним, є значення виразу $\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2}-\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}$?

**756.** Побудуйте графік функції:

$$y=\begin{cases}-\frac{8}{x}, \text{ якщо } x<-2,\\ x^2, \text{ якщо } x\geqslant -2.\end{cases}$$

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**757.** На екрані монітора комп'ютера записано число 1. Щосекунди комп'ютер додає до числа, що знаходиться на екрані, суму його цифр. Чи може через якийсь час на екрані з'явитися число 123 456 789?

## КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

### *Розв'язування рівнянь методом заміни змінної*

У пункті 21 ви познайомилися з розв'язуванням рівнянь методом заміни змінної. Розглянемо ще кілька прикладів, які ілюструють ефективність цього методу.

**ПРИКЛАД 1**

Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2-3x-6}{x}-\frac{8x}{x^2-3x-6}=-2.$

*Розв'язання*

Нехай $\frac{x^2-3x-6}{x}=t.$ Тоді $\frac{8x}{x^2-3x-6}=\frac{8}{t}.$ Отримуємо рівняння $t-\frac{8}{t}=-2,$ яке рівносильне системі $\begin{cases}t^2+2t-8=0,\\ t\neq 0.\end{cases}$

Звідси $t_1=-4$, $t_2=2$.

Тепер розв'язування заданого рівняння зводиться до розв'язування двох рівнянь:

1) $\frac{x^2-3x-6}{x}=-4;$

2) $\frac{x^2-3x-6}{x}=2.$

Розв'яжіть ці рівняння самостійно.

Відповідь: $-3$; $-1$; $2$; $6$.

**ПРИКЛАД 2**

Розв'яжіть рівняння $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 = 0$.

*Розв'язання*

Запишемо це рівняння так:

$$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 5 + 4 = 0;$$

$$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 5\,(2x^2 + 3x - 1) + 4 = 0.$$

Нехай $2x^2 + 3x - 1 = t$. Тоді $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Звідси $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

Отже, $2x^2 + 3x - 1 = 1$ або $2x^2 + 3x - 1 = 4$.

Розв'язавши ці два квадратні рівняння, дістанемо відповідь.

Відповідь: $-2$; $\frac{1}{2}$; $-\frac{5}{2}$; $1$.

**ПРИКЛАД 3**

Розв'яжіть рівняння $(2x^2 - 3x + 1)\,(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$.

*Розв'язання*

За допомогою перевірки легко переконатися, що $x = 0$ не є коренем даного рівняння. Тоді, поділивши обидві частини даного рівняння на $x^2$, перейдемо до рівносильного рівняння:

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x} \cdot \frac{2x^2 + 5x + 1}{x} = 9.$$

Звідси $\left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right)\left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9$.

Зробимо заміну: $2x + \frac{1}{x} - 3 = t$. Тоді $t\,(t + 8) = 9$. Звідси $t_1 = 1$, $t_2 = -9$.

З урахуванням заміни отримуємо два рівняння:

1) $2x + \frac{1}{x} - 3 = 1$;

2) $2x + \frac{1}{x} - 3 = -9$.

Пропонуємо розв'язати ці рівняння самостійно.

Відповідь: $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$, $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$, $\frac{-3 - \sqrt{7}}{2}$, $\frac{-3 + \sqrt{7}}{2}$.

**ПРИКЛАД 4**

Розв'яжіть рівняння $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9.$

*Розв'язання*

Нехай $x+\frac{1}{x}=t$. Тоді

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=t^2;\ x^2+2+\frac{1}{x^2}=t^2;\ x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2.$$

Така заміна дозволяє переписати вихідне рівняння таким чином:

$$7t-2(t^2-2)=9;$$
$$2t^2-7t+5=0.$$

Звідси $t_1=1$, $t_2=\frac{5}{2}$.

Отже, $x+\frac{1}{x}=1$ або $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$.

Пропонуємо розв'язати ці рівняння самостійно.

Відповідь: $\frac{1}{2}$; 2.

**ПРИКЛАД 5**

Розв'яжіть рівняння $(x^2-2x+2)^2+3x(x^2-2x+2)=10x^2$.

*Розв'язання*

За допомогою перевірки переконаємося, що $x=0$ не є коренем даного рівняння. Тоді рівняння

$$\frac{(x^2-2x+2)^2}{x^2}+\frac{3(x^2-2x+2)}{x}=10,$$

отримане в результаті ділення обох частин заданого рівняння на $x^2$, є рівносильним даному.

Заміна $\frac{x^2-2x+2}{x}=t$ приводить до квадратного рівняння

$$t^2+3t-10=0.$$

Завершіть розв'язування самостійно.

Відповідь: $2-\sqrt{2}$; $2+\sqrt{2}$; $-1$; $-2$.

Після наведених прикладів може виникнути запитання: чому при розв'язуванні цих рівнянь ми не пробували спростити їх за допомогою тотожних перетворень?

Справа в тому, що намагання спростити рівняння привело б до необхідності розв'язувати рівняння виду $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (ви можете переконатися в цьому самостійно). При $a \neq 0$ таке рівняння називають **рівнянням четвертого степеня**, при $a = 0$ і $b \neq 0$ його називають **рівнянням третього степеня**. Окремим видом цього рівняння, коли $b = 0$ і $d = 0$, є біквадратне рівняння. Його ви розв'язувати вмієте.

У загальному випадку для розв'язування рівнянь третього і четвертого степенів необхідно знати формули знаходження їх коренів. З історією відкриття цих формул ви можете познайомитися в наступному оповіданні.

## ВПРАВИ

**1.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{3x^2 - 9x}{2} - \dfrac{12}{x^2 - 3x} = 3;$

2) $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{8}{(x-1)(x+4)} = 1;$

3) $x(x+3)(x+5)(x+8) = 100;$

4) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2;$

5) $7\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 9;$

6) $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3 - 1);$

7) $(x-6)^4 + (x-4)^4 = 82.$

Відповідь: 1) $-1$; 1; 2; 4; 2) $-3$; 0; $\dfrac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$; 3) $-4 \pm \sqrt{21}$; 4) $-6$; $-4$; $\dfrac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$; 5) $\dfrac{1}{2}$; 2; 6) 2; 4; $-1$; $-\dfrac{1}{2}$; 7) 3; 7.

### *Таємна зброя Сципіона Даль Ферро*

Ви легко розв'яжете кожне з наступних рівнянь третього степеня:

$$x^3 - 8 = 0,\ x^3 + x^2 = 0,\ x^3 - x = 0.$$

Усі вони є окремими видами рівняння $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, де $x$ — змінна, $a$, $b$, $c$ і $d$ — деякі числа, причому

$a \neq 0$. Вивести формулу його коренів — задача складна. Недарма появу цієї формули вважають значним математичним відкриттям XVI сторіччя.

Першим винайшов розв'язання рівняння виду $x^3 + px = q$, де $p$ і $q$ — додатні числа, італійський математик Сципіон Даль Ферро (1465–1526). Знайдену формулу він зберігав у секреті. Це було зумовлено тим, що кар'єра вченого того часу багато в чому залежала від його виступів у публічних математичних турнірах. Було вигідно зберігати відкриття в таємниці, розраховуючи використати їх як секретну зброю.

Після смерті Даль Ферро його учень Фіоре, володіючи секретною формулою, викликав на математичний двобій талановитого математика-самоучку Нікколо Тарталья (1499–1557). За кілька днів до турніру Тарталья сам вивів формулу коренів рівняння третього степеня. Диспут, на якому Тарталья здобув переконливу перемогу, відбувся 20 лютого 1535 року.

Уперше секретну формулу було опубліковано в книзі відомого італійського вченого Джероламо Кардано (1501–1576) «Велике мистецтво». У цій роботі також описано метод розв'язування рівняння четвертого степеня, відкритий Людовіко Феррарі (1522–1565).

У XVII–XVIII ст. зусилля багатьох провідних математиків зосередилися на пошуку формули для розв'язання рівнянь 5-го степеня. Отриманню результату сприяли роботи

*Нікколо Тарталья*

*Джероламо Кардано*

*Нільс Хенрік Абель*

італійського математика Паоло Руффіні (1765–1822) і норвезького математика Нільса Хенріка Абеля (1802–1829). Сам результат виявився цілком несподіваним: було доведено, що не існує формули, за якою можна виразити корені будь-якого рівняння 5-го степеня і вище через коефіцієнти рівняння, використовуючи лише чотири арифметичні операції та дію добування кореня.

## 22. Раціональні рівняння як математичні моделі реальних ситуацій

У пункті 7 ви вже ознайомилися з використанням раціональних рівнянь як математичних моделей реальних ситуацій. Розглянемо ще кілька прикладів.

**ПРИКЛАД 1**

З пункту $A$ виїхав велосипедист, а через 45 хв після цього у тому самому напрямку виїхала вантажівка, яка наздогнала велосипедиста на відстані 15 км від пункту $A$. Знайдіть швидкість велосипедиста і швидкість вантажівки, якщо швидкість вантажівки на 18 км/год більша за швидкість велосипедиста.

*Розв'язання*

Нехай швидкість велосипедиста дорівнює $x$ км/год, тоді швидкість вантажівки становить $(x + 18)$ км/год. Велосипедист проїжджає 15 км за $\frac{15}{x}$ год, а вантажівка — за $\frac{15}{x+18}$ год. Оскільки вантажівка проїхала 15 км на 45 хв, тобто на $\frac{3}{4}$ год, швидше, ніж велосипедист, то $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} = \frac{3}{4}$.

Маємо:

$$\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} = \frac{3}{4};$$

$$\frac{5}{x} - \frac{5}{x+18} = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{20x+360-20x-x^2-18x}{4x(x+18)}=0;$$

$$\begin{cases} x^2+18x-360=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq -18; \end{cases}$$

$$x=12 \text{ або } x=-30.$$

Корінь −30 не задовольняє умову задачі.

Отже, швидкість велосипедиста дорівнює 12 км/год, а швидкість вантажівки становить 12 + 18 = 30 (км/год).

Відповідь: 12 км/год, 30 км/год.

**ПРИКЛАД 2**

Одна бригада працювала на ремонті дороги 7 год, після чого до неї приєдналася друга бригада. Через 2 год спільної роботи ремонт було закінчено. За скільки годин може відремонтувати дорогу кожна бригада, працюючи самостійно, якщо першій для цього потрібно на 4 год більше, ніж другій?

*Розв'язання*

Нехай перша бригада може самостійно відремонтувати дорогу за $x$ год, тоді другій для цього потрібно $(x - 4)$ год. За 1 год перша бригада ремонтує $\frac{1}{x}$ частину дороги, а друга — $\frac{1}{x-4}$ частину дороги. Перша бригада працювала 9 год і відремонтувала $\frac{9}{x}$ дороги, а друга працювала 2 год і відремонтувала відповідно $\frac{2}{x-4}$ дороги. Оскільки в результаті було відремонтовано всю дорогу, то $\frac{9}{x}+\frac{2}{x-4}=1.$

Отримане рівняння має два корені $x_1 = 12$ і $x_2 = 3$. Другий корінь не задовольняє умову задачі, оскільки тоді друга бригада мала б відремонтувати дорогу за 3 − 4 = −1 (год), що не має змісту.

Отже, перша бригада може відремонтувати дорогу за 12 год, а друга — за 8 год.

Відповідь: 12 год, 8 год.

**ПРИКЛАД 3**

Водний розчин солі містив 120 г води. Після того як до розчину додали 10 г солі, її концентрація збільшилась на 5 %. Скільки грамів солі містив розчин спочатку?

*Розв'язання*

Нехай початковий розчин містив $x$ г солі. Тоді його маса дорівнювала $(x + 120)$ г, а маса солі становила $\frac{x}{x+120}$ частину маси всього розчину. Після того як до розчину додали 10 г солі, її маса в розчині склала $(x + 10)$ г, а маса розчину — $(x + 130)$ г. Тепер сіль становить $\frac{x+10}{x+130}$ частину розчину, що на 5 %, тобто на $\frac{1}{20}$, більше, ніж $\frac{x}{x+120}$. Звідси маємо $\frac{x+10}{x+130} - \frac{x}{x+120} = \frac{1}{20}$.

Отримане рівняння має два корені $x_1 = 30$ і $x_2 = -280$, з яких другий корінь не задовольняє умову задачі.

Отже, розчин містив спочатку 30 г солі.

Відповідь: 30 г.

**758.**° Перші 150 км дороги з міста $A$ до міста $B$ автомобіль проїхав з певною швидкістю, а решту 240 км — із швидкістю на 5 км/год більшою. Знайдіть початкову швидкість автомобіля, якщо на весь шлях з міста $A$ до міста $B$ він витратив 5 год.

**759.**° Один мотоцикліст проїжджає 90 км на 18 хв швидше за другого, оскільки його швидкість на 10 км/год більша за швидкість другого мотоцикліста. Знайдіть швидкість кожного мотоцикліста.

**760.**° З одного міста в інше, відстань між якими дорівнює 240 км, виїхали одночасно автобус і автомобіль. Автобус рухався зі швидкістю на 20 км/год меншою, ніж автомобіль, і прибув до пункту призначення на 1 год пізніше за автомобіль. Знайдіть швидкість автомобіля і швидкість автобуса.

**761.**° Поїзд запізнювався на 10 хв. Щоб прибути на станцію призначення вчасно, він за 80 км від цієї станції збільшив свою швидкість на 16 км/год. Знайдіть початкову швидкість поїзда.

**762.**˙ Із села Вишневе в село Яблуневе, відстань між якими дорівнює 15 км, вершник проскакав з певною швидкістю, а повертався зі швидкістю на 3 км/год більшою і витратив на 15 хв менше, ніж на шлях з Вишневого до Яблуневого. Знайдіть початкову швидкість вершника.

**763.**˙ Друкарка мала за певний час надрукувати 180 сторінок. Проте вона виконала цю роботу на 5 год раніше строку, оскільки друкувала щогодини на 3 сторінки більше, ніж планувала. Скільки сторінок вона друкувала щогодини?

**764.**˙ Перший насос перекачує 90 $м^3$ води на 1 год швидше, ніж другий 100 $м^3$. Скільки води щогодини перекачує кожен насос, якщо перший перекачує за годину на 5 $м^3$ води більше, ніж другий?

**765.**˙ Робітник мав за певний час виготовити 72 деталі. Проте щодня він виготовляв на 4 деталі більше, ніж планував, і закінчив роботу на 3 дні раніше терміну. За скільки днів він виконав роботу?

**766.**˙ Катер пройшов 16 км за течією річки і 30 км проти течії, витративши на весь шлях 1 год 30 хв. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії становить 1 км/год.

**767.**˙ Човен проплив 15 км за течією річки і повернувся назад, витративши на зворотний шлях на 1 год більше. Знайдіть швидкість човна за течією річки, якщо швидкість течії становить 2 км/год.

**768.**˙ За течією річки від пристані відійшов пліт. Через 4 год від цієї пристані в тому самому напрямку відійшов човен, який наздогнав пліт на відстані 15 км від пристані. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість човна становить 12 км/год.

**769.**˙ Катер проплив 45 км за течією річки і 28 км проти течії, витративши на весь шлях 4 год. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість катера становить 18 км/год.

**770.**˙ Турист проїхав $\frac{5}{8}$ всього шляху на катері, а решту — на автомобілі. Швидкість автомобіля на 20 км/год більша за швидкість катера. Автомобілем він їхав на 1 год 30 хв менше, ніж катером. Знайдіть швидкість автомобіля й швидкість катера, якщо всього турист подолав 160 км.

**771.**˙ Міжміський автобус мав проїхати 72 км. Коли він проїхав 24 км, то був затриманий біля залізничного переїзду на 12 хв. Потім він збільшив швидкість на 12 км/год і прибув у пункт призначення із запізненням на 4 хв. Знайдіть початкову швидкість автобуса.

**772.**˙ Група школярів виїхала на екскурсію з міста *A* до міста *B* автобусом, а повернулася до міста *A* залізницею, витративши на зворотний шлях на 30 хв більше, ніж на шлях до міста *B*. Знайдіть швидкість поїзда, якщо вона на 20 км/год менша, ніж швидкість автобуса, довжина шосе між містами *A* і *B* становить 160 км, а довжина залізниці — 150 км.

**773.**˙ Турист проплив на байдарці 4 км по озеру і 5 км за течією річки за той самий час, за який проплив би 6 км проти течії. З якою швидкістю турист плив по озеру, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год?

**774.**˙ Теплохід пройшов 16 км по озеру, а потім 18 км по річці, яка бере початок з цього озера, за 1 год. Знайдіть швидкість теплохода в стоячій воді, якщо швидкість течії становить 4 км/год.

**775.**˙ Знаменник звичайного дробу на 3 більший за його чисельник. Якщо чисельник цього дробу збільшити на 4, а знаменник — на 8, то отриманий дріб буде на $\frac{1}{6}$ більший за даний. Знайдіть даний дріб.

**776.**˙ Чисельник звичайного дробу на 5 менший від його знаменника. Якщо чисельник цього дробу зменшити на 3, а знаменник збільшити на 4, то отриманий дріб буде на $\frac{1}{3}$ менший від даного. Знайдіть цей дріб.

**777.**˙ Два робітники, працюючи разом, можуть виконати виробниче завдання за 20 днів. За скільки днів може виконати це завдання кожен із них, працюючи самостійно, якщо одному для цього потрібно на 9 днів більше, ніж другому?

**778.**˙ Одному маляру треба на 5 год більше, ніж другому, щоб пофарбувати фасад будинку. Коли перший маляр пропрацював 3 год, а потім його змінив другий, який пропрацював 2 год, то виявилося, що пофарбовано 40 % фасаду. За скільки годин може пофарбувати фасад кожний маляр, працюючи самостійно?

**779.**˙ Першого дня тракторист працював на оранці поля 6 год. Другого дня до нього приєднався другий тракторист, і через 8 год спільної роботи вони закінчили оранку. За скільки годин може зорати це поле кожний тракторист, працюючи окремо, якщо першому для цього потрібно на 3 год менше, ніж другому?

**780.**˙ До розчину, який містить 20 г солі, додали 100 г води, після чого концентрація солі зменшилася на 10 %. Скільки грамів води містив розчин спочатку?

**781.**˙ Сплав міді й цинку, який містив 10 кг цинку, сплавили з 10 кг міді. Одержаний сплав містить на 5 % міді більше, ніж початковий. Скільки кілограмів міді містив початковий сплав?

**782.**˙˙ Через 2 год 40 хв після відправлення плоту від пристані $A$ за течією річки назустріч йому від пристані $B$ відійшов катер. Знайдіть швидкість течії річки, якщо пліт і катер зустрілися на відстані 14 км від пристані $A$, швидкість катера в стоячій воді дорівнює 12 км/год, а відстань між пристанями $A$ і $B$ дорівнює 32 км.

**783.**˙˙ До басейну підведено дві труби. Через одну трубу басейн наповнюють водою, а через другу спорожнюють, причому для спорожнення басейну треба на 1 год більше, ніж на його наповнення. Якщо ж відкрити обидві труби одночасно, то басейн наповниться водою за 30 год. За скільки годин можна наповнити порожній басейн водою через першу трубу?

**784.**'' Для наповнення басейну через першу трубу треба стільки часу, як і для наповнення через другу й третю труби одночасно. Через першу трубу басейн наповнюється на 2 год швидше, ніж через другу, і на 8 год швидше, ніж через третю. Скільки часу потрібно для наповнення басейну через кожну трубу?

**785.**'' Автобус мав проїхати відстань між двома містами, яка дорівнює 400 км, з деякою швидкістю. Проїхавши 2 год із запланованою швидкістю, він зупинився на 20 хв, і щоб прибути у пункт призначення вчасно, збільшив швидкість руху на 10 км/год. З якою швидкістю автобус мав проїхати відстань між містами?

**786.**'' Робітник за певний термін мав виготовити 360 деталей. Перші 5 днів він виготовляв щоденно заплановану кількість деталей, а потім щодня виготовляв на 4 деталі більше й уже за день до строку виготовив 372 деталі. Скільки деталей щодня мав виготовляти за планом робітник?

**787.*** Щоб виконати певне виробниче завдання, одному робітникові треба на 12 год менше, ніж другому, і на 4 год більше, ніж обом робітникам для спільного виконання завдання. За скільки годин може виконати це завдання перший робітник?

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**788.** Обчисліть:

1) $(27\cdot 3^{-4})^2$;   2) $\dfrac{7^{-4}\cdot 7^{-9}}{7^{-12}}$;   3) $(10^9)^2\cdot 1000^{-6}$.

**789.** Знайдіть значення виразу $a^2-2\sqrt{5}a+2$ при $a=\sqrt{5}-3$.

**790.** Побудуйте графік функції $y=-2x+4$.

1) Чому дорівнює нуль даної функції?

2) Укажіть значення $x$, при яких $y>0$.

3) Чи проходить графік функції через точку $M(-36;\ 68)$?

**791.** При якому значенні $k$ графік функції $y=\dfrac{k}{x}$ проходить через точку $A\left(-\sqrt{12};\ \sqrt{3}\right)$? Побудуйте цей графік.

**792.** Яка з рівностей є правильною: $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=\sqrt{3}-2$ чи $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=2-\sqrt{3}$? Відповідь обґрунтуйте.

**793.** Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{1}{4}a^{-1}b^{-3}\right)^{-2}$; 2) $\left(\frac{a^4}{b^{-5}}\right)^{-3}$; 3) $(0,2a^{-1}b^2)^2\cdot 4a^5b^{-4}$.

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**794.** На тарілці лежать 9 шматочків сиру різної маси. Доведіть, що можна один зі шматочків сиру розрізати на дві частини так, що одержані 10 шматочків можна буде розкласти на дві тарілки, маса сиру на кожній з яких буде однаковою.

## ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 6

**1.** Знайдіть корені квадратного тричлена $5x^2 - x - 6$.

А) 2; –0,6; Б) –2; 0,6; В) 1; –1,2; Г) –1; 1,2.

**2.** Розкладіть на множники квадратний тричлен

$$-x^2 - 4x + 5.$$

А) $(x-1)(x+5)$; В) $-(x-1)(x+5)$;
Б) $(x+1)(x-5)$; Г) $-(x+1)(x-5)$.

**3.** Скоротіть дріб $\frac{x^2+7x+12}{x^2+x-6}$.

А) $\frac{x+4}{x-2}$; Б) $\frac{x-4}{x-2}$; В) $\frac{x+4}{x+2}$; Г) $\frac{x-4}{x+2}$.

**4.** Розв'яжіть рівняння $x^4 + 7x^2 - 18 = 0$.

А) –3; 3; В) $-3;\ \sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ 3$;
Б) $-\sqrt{2};\ \sqrt{2}$; Г) $\sqrt{2};\ 3$.

**5.** Знайдіть корені рівняння

$$(x^2-4x)^2 - 2(x^2-4x) - 15 = 0.$$

А) –1; 1; 3; 5; Б) –1; 5; В) 1; 3; Г) 1; 3; 5.

**6.** Розв'яжіть рівняння $x-\sqrt{x}-12=0$.

А) –3; 4; Б) –2; 2; В) 16; Г) 9; 16.

**7.** Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2 - 6}{x - 3} = \frac{x}{x - 3}$.

А) $-2$; Б) 3; В) $-2$; 3; Г) $-3$; 2.

**8.** Розв'яжіть рівняння $\frac{3x - 1}{x} - \frac{4}{x - 2} = \frac{10 - 9x}{x^2 - 2x}$.

А) $-\frac{4}{3}$; 2; Б) $\frac{4}{3}$; $-2$; В) $-\frac{4}{3}$; Г) 2.

**9.** З одного міста в інше, відстань між якими дорівнює 350 км, виїхали одночасно вантажний і легковий автомобілі. Швидкість вантажівки на 20 км/год менша від швидкості легкового автомобіля, через що вона прибула до пункту призначення на 2 год пізніше за легковий автомобіль.

Нехай швидкість вантажного автомобіля дорівнює $x$ км/год. Яке з рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові задачі?

А) $\frac{350}{x} - \frac{350}{x + 20} = 2$; В) $\frac{350}{x + 20} - \frac{350}{x} = 2$;

Б) $\frac{350}{x} + \frac{350}{x + 20} = 2$; Г) $\frac{350}{x} - \frac{350}{x - 20} = 2$.

**10.** Катер проплив 30 км за течією річки, швидкість якої дорівнює 1 км/год, і повернувся назад, витративши на весь шлях 3 год 10 хв.

Нехай власна швидкість катера становить $x$ км/год. Яке з рівнянь відповідає умові задачі?

А) $\frac{30}{x+1} + \frac{30}{x-1} = 3{,}1$; В) $\frac{30}{x+1} + \frac{30}{x} = 3\frac{1}{6}$;

Б) $\frac{30}{x+1} - \frac{30}{x-1} = 3{,}1$; Г) $\frac{30}{x+1} + \frac{30}{x-1} = 3\frac{1}{6}$.

**11.** Робітник мав за деякий час виготовити 96 деталей. Щодня він виготовлював на 2 деталі більше, ніж планував, і закінчив роботу на 3 дні раніше строку.

Нехай робітник виготовляв щодня $x$ деталей. Яке з рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові задачі?

А) $\frac{96}{x} - \frac{96}{x - 2} = 3$; В) $\frac{96}{x} - \frac{96}{x - 3} = 2$;

Б) $\frac{96}{x - 2} - \frac{96}{x} = 3$; Г) $\frac{96}{x - 3} - \frac{96}{x} = 2$.

**12.** Два робітники, працюючи разом, можуть виконати деяке виробниче завдання за 10 год, причому один з них може виконати це завдання самостійно на 15 год швидше за другого.
Нехай перший робітник може виконати самостійно завдання за $x$ год. Яке з рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові задачі?

А) $\frac{15}{x} + \frac{15}{10 - x} = 1$;

Б) $\frac{15}{x} + \frac{15}{x - 10} = 1$;

В) $\frac{10}{x} + \frac{10}{x + 15} = 1$;

Г) $\frac{10}{x} + \frac{10}{x - 15} = 1$.

## ПІДСУМКИ

У цьому параграфі:

- було введено такі поняття:
  - рівняння першого степеня;
  - квадратне рівняння;
  - коефіцієнти квадратного рівняння;
  - неповне квадратне рівняння;
  - зведене квадратне рівняння;
  - дискримінант квадратного рівняння;
  - квадратний тричлен;
  - корінь квадратного тричлена;
  - дискримінант квадратного тричлена;
  - біквадратне рівняння;
- ви навчилися:
  - розв'язувати неповні квадратні рівняння;
  - розв'язувати квадратні рівняння за допомогою формули коренів квадратного рівняння;
  - застосовувати теорему Вієта;
  - розкладати на множники квадратний тричлен з невід'ємним дискримінантом;
  - розв'язувати раціональні рівняння, які зводяться до квадратних;
  - розв'язувати деякі рівняння методом заміни змінної;
- ви вивчили:
  - алгоритм розв'язування неповних квадратних рівнянь;
  - формулу коренів квадратного рівняння;
  - теорему Вієта (пряму і обернену);
  - правило розкладання квадратного тричлена на множники.

# Вправи для повторення курсу алгебри 8 класу

**795.** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{3m-n}{m+2n}$, якщо $m = -4$, $n = 3$;

2) $\frac{a^2-2a}{4a+2}$, якщо $a = -0{,}8$.

**796.** При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $7b - 11$;

2) $\frac{9}{x}$;

3) $\frac{5}{2-y}$;

4) $\frac{m-3}{7}$;

5) $\frac{3+t}{4-t}$;

6) $\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x-6}$;

7) $\frac{5}{x^8+3}$;

8) $\frac{x-2}{|x|+7}$;

9) $\frac{4}{x^2-25}$;

10) $\frac{3}{|x|-5}$;

11) $\frac{x}{8+\frac{4}{x}}$;

12) $\frac{5}{6-\frac{2}{x}}$;

13) $\frac{1}{(x-3)(x-4)}$;

14) $\frac{x+8}{(x+8)(x-3)}$?

**797.** Спростіть вираз:

1) $(5x - 7y)(5x + 7y) + (7x - 5y)(7x + 5y)$;

2) $(x + 4)^2 - (x - 2)(x + 2)$;

3) $(8a - 3b)(8a + 3b) - (6a - 5b)^2$;

4) $(m - 3)(m + 4) - (m + 2)^2 + (4 - m)(m + 4)$;

5) $0{,}4a(5a - 1)(5a + 1) - 0{,}5(5 - 2a)^2 + 0{,}3(3 + 2a) \times$
$\times (3 - 2a)$.

**798.** Подайте частку у вигляді дробу й скоротіть отриманий дріб:

1) $4mn^2p : (28m^2np^6)$;

2) $-30x^5y^3 : (36x^4y^8)$;

3) $-63xy^9 : (-72xy^7)$.

**799.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{3x-6y}{3x}$;
2) $\frac{3a+9b}{4a+12b}$;
3) $\frac{a^2-49}{3a+21}$;
4) $\frac{12x^2-4x}{2-6x}$;
5) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$;
6) $\frac{b^7+b^4}{b^2+b^5}$;
7) $\frac{a^3+64}{3a+12}$;
8) $\frac{xb-5y+5b-xy}{x^2-25}$;
9) $\frac{7m^2-7m+7}{14m^3+14}$;
10) $\frac{a^2+bc-b^2+ac}{ab+c^2+ac-b^2}$;
11) $\frac{20mn^2-20m^2n+5m^3}{10mn-5m^2}$;
12) $\frac{x^2-yz+xz-y^2}{x^2+yz-xz-y^2}$.

**800.** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{x^5y^7-x^3y^9}{x^3y^7}$, якщо $x=-0{,}2$, $y=0{,}5$;
2) $\frac{4a^2-36}{5a^2-30a+45}$, якщо $a=2$;
3) $\frac{(3a+3b)^2}{3a^2-3b^2}$, якщо $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{6}$;
4) $\frac{20x^2-140xy+245y^2}{4x-14y}$, якщо $2x-7y=-0{,}5$.

**801.** Скоротіть дріб ($n$ — натуральне число):

1) $\frac{100^n}{2^{2n+3}\cdot 5^{2n+1}}$;
2) $\frac{2^{2n+1}\cdot 7^{n+1}}{6\cdot 28^n}$;
3) $\frac{5^{n+1}-5^n}{2\cdot 5^n}$;
4) $\frac{18^n}{3^{2n+2}\cdot 2^{n+3}}$;
5) $\frac{41\cdot 9^n}{9^{n+2}+9^n}$.

**802.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(a+2)\,x=7$;
2) $(a+6)\,x=a+6$;
3) $(a+3)\,x=a^2+6a+9$;
4) $(a^2-4)\,x=a-2$.

**803.** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{7a}{22}+\frac{4a}{22}$;
2) $\frac{8x}{3y}-\frac{5x}{3y}$;
3) $\frac{7x-2y}{15p}+\frac{3x+7y}{15p}$;
4) $\frac{x+y}{9p}-\frac{x}{9p}$;

5) $\frac{a}{8}-\frac{a-b}{8}$;

6) $\frac{7p-17}{5k}+\frac{7-2p}{5k}$;

7) $\frac{6a^2-4a}{15a}-\frac{a^2+a}{15a}$;

8) $\frac{x-y}{8}+\frac{x+y}{8}$;

9) $\frac{10x-6}{x}-\frac{4x+11}{x}$.

**804.** Спростіть вираз:

1) $\frac{7y}{y^2-4}-\frac{14}{y^2-4}$;

2) $\frac{y^2-3y}{25-y^2}-\frac{7y-25}{25-y^2}$;

3) $\frac{9p+5}{3p+6}-\frac{10p-12}{3p+6}+\frac{9p-1}{3p+6}$;

4) $\frac{7x+5}{3-x}+\frac{5x+11}{x-3}$;

5) $\frac{(3a-1)^2}{4a-4}+\frac{(a-3)^2}{4-4a}$;

6) $\frac{x^2-3x}{(2-x)^2}-\frac{x-4}{(x-2)^2}$;

7) $\frac{7}{a-2}-\frac{b}{2-a}$;

8) $\frac{6a}{5-a}-\frac{4a}{a-5}$.

**805.** Виконайте додавання і віднімання дробів:

1) $\frac{8}{x}-\frac{5}{y}$;

2) $\frac{7}{ab}+\frac{5}{b}$;

3) $\frac{5}{24xy}-\frac{7}{18xy}$;

4) $\frac{5b^2-8b+1}{a^2b^2}-\frac{2b-1}{a^2b}$.

**806.** Виконайте дії:

1) $\frac{2a-1}{a-4}-\frac{3a+2}{2(a-4)}$;

2) $\frac{x+2}{3x+9}-\frac{4-x}{5x+15}$;

3) $\frac{m+1}{m-3}-\frac{m+2}{m+3}$;

4) $\frac{x}{x+y}-\frac{2y^2}{y^2-x^2}-\frac{y}{x-y}$;

5) $\frac{m}{3m-2n}-\frac{3m^2-3mn}{9m^2-12m+4n^2}$;

6) $\frac{a+3}{a^2-2a}-\frac{a-2}{5a-10}+\frac{a+2}{5a}$;

7) $\frac{3}{3a-3}-\frac{a-1}{2a^2-4a+2}$;

8) $2-\frac{14}{m-2}-m$;

9) $\frac{2x+1}{x^2-6x+9}-\frac{8}{x^2-9}-\frac{2x-1}{x^2+6x+9}$.

**807.** Доведіть тотожність:

$$\frac{2}{(b-c)(c-a)}-\frac{2}{(a-b)(c-b)}+\frac{2}{(a-c)(b-a)}=0.$$

**808.** Запишіть дріб у вигляді суми цілого виразу й дробу:

1) $\frac{a-7}{a}$; 2) $\frac{a^2+2a-2}{a+2}$; 3) $\frac{x^2+3x-2}{x-3}$.

**809.** Відомо, що $\frac{x}{y}=4$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{x+y}{x}$; 2) $\frac{3x+4y}{x}$.

**810.** Знайдіть усі натуральні значення $n$, при яких є натуральним числом значення виразу:

1) $\frac{12n^2-5n+33}{n}$; 3) $\frac{10-4n}{n}$;

2) $\frac{n^3-6n^2+54}{n^2}$; 4) $\frac{12-3n}{n}$.

**811.** Виразіть змінну $x$ через інші змінні, якщо:

1) $x+\frac{a}{b}=1$; 2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=b$; 3) $\frac{a}{b}+\frac{x}{4}=\frac{b}{a}$.

**812.** Доведіть тотожність:

1) $\frac{1}{a^2+12a+36}+\frac{2}{36-a^2}+\frac{1}{a^2-12a+36}=\frac{144}{(a^2-36)^2}$;

2) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$.

**813.*** Спростіть вираз:

$$\frac{1}{a(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+6)}+\frac{1}{(a+6)(a+9)}+\frac{1}{(a+9)(a+12)}.$$

**814.*** Доведіть, що коли $\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{a-b+c}{a-b-c}$, то $b=0$ або $c=0$.

**815.** Виконайте множення:

1) $\frac{9x}{y}\cdot\frac{y}{24x}$; 3) $\frac{16a^4}{21b^5}\cdot\frac{9b^2}{10a^3}$;

2) $\frac{m^2n^3}{25t}\cdot\left(\frac{-5t}{mn^2}\right)$; 4) $26m^2\cdot\frac{3n^2}{13m^4}$;

5) $\frac{24t^7}{16u^3} \cdot 34u^5$;  6) $\frac{4x^5y^2}{7a^3b} \cdot \frac{21xb^2}{10y^3a^2} \cdot \frac{25a^5y}{3x^4b}$.

**816.** Виконайте множення:

1) $\frac{2xy - y^2}{9} \cdot \frac{36}{y^4}$;  3) $\frac{m^2 - 64}{m^3 - 9m^2} \cdot \frac{m^2 - 81}{m^2 + 8m}$;

2) $\frac{a^2 - 7ab}{a^2 + 2ab} \cdot \frac{a^2b + 2ab^2}{a^3 - 7a^2b}$;  4) $\frac{2x^2 - 16x + 32}{3x^2 - 6x + 12} \cdot \frac{x^3 + 8}{4x^2 - 64}$.

**817.** Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\left(\frac{a^5}{x^4}\right)^2$;  3) $\left(-\frac{10x^2y^5}{3a^4b^3}\right)^3$;

2) $\left(-\frac{4y}{3m^2}\right)^4$;  4) $\left(-\frac{2a^4b^4}{25x^5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5x^2}{4a^2b^3}\right)^3$.

**818.** Виконайте ділення:

1) $\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 100} : \frac{x - 5}{x - 10}$;

2) $\frac{a^2 - 1}{a - 8} : \frac{a^2 + 2a + 1}{a - 8}$;

3) $\frac{ab + b^2}{8b} : \frac{ab + a^2}{2a}$;

4) $\frac{2c - 3}{c - 1} : (2c - 3)$;

5) $\frac{x^2 - 16y^2}{25x^2 - 4y^2} : \frac{x^2 + 8xy + 16y^2}{25x^2 + 20xy + 4y^2}$;

6) $\frac{n^2 - 3n}{49n^2 - 1} : \frac{n^4 - 27n}{49n^2 - 14n + 1}$;

7) $\frac{m^{12} - n^{15}}{2m^{10} - 8n^{14}} : \frac{5m^8 + 5m^4n^5 + 5n^{10}}{3m^5 + 6n^7}$;

8) $\frac{5a^2 - 20ab}{3a^2 + b^2} : \frac{30(a - 4b)^2}{9a^4 - b^4}$.

**819.** Вважаючи дані дроби нескоротними, замініть $x$ і $y$ одночленами так, щоб утворилася тотожність:

1) $\frac{x}{7a^2b^3} \cdot \frac{y}{4c} = \frac{6a^3c^2}{b}$;  2) $\frac{36m^2n^4}{x} : \frac{y}{35p^6} = \frac{21n}{5mp^3}$.

**820.** Дано: $3x - \frac{1}{x} = 8$. Знайдіть значення виразу $9x^2 + \frac{1}{x^2}$.

**821.** Дано: $4x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$. Знайдіть значення виразу $2x - \frac{1}{x}$.

**822.** Спростіть вираз:

1) $\frac{x^{3k}}{y^{2n}} : \frac{x^{6k}}{y^{5n}}$, де $k$ і $n$ — цілі числа;

2) $\frac{a^{k+5} \cdot b^{k+3}}{c^{3k+2}} : \frac{a^{k+3} \cdot b^{k+2}}{c^{2k+1}}$, де $k$ — ціле число;

3) $\frac{(x^n + 3y^n)^2 - 12x^n y^n}{x^{3n} + 27y^{3n}} : \frac{x^{2n} - 9y^{2n}}{(x^n - 3y^n)^2 + 12x^n y^n}$, де $n$ — ціле число.

**823.** Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{a+4}{a-4} - \frac{a-4}{a+4}\right) \cdot \frac{16 - a^2}{32a^3}$;

2) $\left(7x - \frac{4x}{x-3}\right) : \frac{14x - 50}{3x - 9}$;

3) $\frac{2a}{a-2} + \frac{a+7}{8-4a} \cdot \frac{32}{7a + a^2}$;

4) $\left(\frac{9c}{c-8} + \frac{7c}{c^2 - 16c + 64}\right) : \frac{9c - 65}{c^2 - 64} - \frac{8c + 64}{c - 8}$;

5) $\left(\frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2 + ab + b^2}\right) : \left(\frac{a}{a-b} - \frac{a^2}{a^2 - b^2}\right)$;

6) $\left(\frac{b}{b+6} + \frac{36 + b^2}{36 - b^2} - \frac{b}{b-6}\right) : \frac{6b + b^2}{(6-b)^2}$;

7) $\left(\frac{2x}{x^3 + 1} : \frac{1-x}{x^2 - x + 1} + \frac{2}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2 - 2x + 1}{4} : \frac{x-1}{x+1}$.

**824.** Доведіть, що при всіх допустимих значеннях $a$ значення виразу

$$\left(\frac{1}{(a-3)^2} - \frac{6}{9-a^2} + \frac{1}{(a+3)^2}\right) : \frac{4(2a^2 - 9)}{81 - a^4} - \frac{2a^2}{9 - a^2}$$

не залежить від значення $a$.

**825.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a + \dfrac{25}{a+10}}{\dfrac{25}{a} - a}$;

2) $1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{a}{1 - \dfrac{1}{a+1}}}$.

**826.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x+6}{x+3} = 2$;

2) $\frac{x^2 - 16}{x+4} = -8$;

3) $\frac{2x-9}{2x+5}+\frac{3x}{3x-2}=2$; 4) $\frac{5x^2+8}{x^2-16}=\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x-1}{4-x}$.

**827.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+2}{x+a}=0$; 2) $\frac{x-a}{x-1}=0$.

**828.** Знайдіть значення виразу:

1) $2^{-3}+4^{-2}$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$;

2) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}+(-1,8)^0-5^{-1}$; 4) $2^{-3}-6^{-1}+3^{-2}$.

**829.** Перетворіть вираз так, щоб він не містив степенів з від'ємними і нульовими показниками:

1) $\frac{3x^{-8}y^5z^{-12}}{7a^0b^{-3}c^4}$; 2) $\frac{1,001^0m^{-15}n^{-7}p^{-4}}{2^{-3}a^{-11}b^{16}c^{-22}}$.

**830.** Подайте вираз у вигляді степеня або добутку степенів:

1) $a^{-7}\cdot a^{10}$;
2) $a^{-9}\cdot a^5$;
3) $b^{17}\cdot b^{-4}\cdot b^{-11}$;
4) $x^{-2}:x^3$;
5) $a^{12}:a^{-4}$;
6) $a^{-7}:a^{-11}$;
7) $a^{-12}:a^{-10}\cdot a^4$;
8) $(a^3)^{-5}$;
9) $(a^{-12})^{-2}$;
10) $(a^{-3})^4:(a^{-2})^5:(a^{-1})^{-7}$;
11) $(m^{-3}n^4p^7)^{-4}$;
12) $(a^{-1}b^{-2})^{-3}$;
13) $(x^3y^{-4})^5\cdot(x^{-2}y^{-3})^3$;
14) $\left(\frac{a^{11}b^{-7}}{c^{-3}d^4}\right)^{-3}$;
15) $\left(\frac{a^{-7}}{b^5}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{a^4}{b^{-7}}\right)^{-5}$.

**831.** Знайдіть значення виразу:

1) $11^{-23}\cdot 11^{25}$;
2) $3^{17}\cdot 3^{-14}$;
3) $4^{-16}:4^{-12}$;
4) $10^{-15}:10^{-14}\cdot 10^{-2}$;
5) $(14^{-10})^5\cdot(14^{-6})^{-8}$;
6) $\frac{3^{-12}\cdot(3^{-6})^{-3}}{(3^{-3})^{-4}\cdot(3^{-4})^2}$.

**832.** Знайдіть значення виразу:

1) $25^{-3}\cdot 5^8$;
2) $64^{-3}:32^{-3}$;
3) $10^{-10}:1000^{-3}\cdot(0,001)^{-5}$;
4) $\frac{(-27)^{-12}\cdot 9^5}{81^{-4}\cdot 3^{-7}}$;
5) $\frac{15^4\cdot 5^{-6}}{45^{-3}\cdot 3^9}$;
6) $\frac{(0,125)^{-8}\cdot 16^{-7}}{32^{-2}}$.

**833.** Спростіть вираз:

1) $\frac{3}{5}x^{-3}y^{5}\cdot\frac{5}{9}x^{4}y^{-7}$;

2) $0{,}2a^{12}b^{-9}\cdot 50a^{-10}b^{10}$;

3) $-0{,}3a^{10}b^{7}\cdot 5a^{-8}b^{-6}$;

4) $0{,}36a^{-5}b^{6}c^{3}\cdot\left(-2\frac{2}{9}\right)a^{4}b^{-4}c^{-5}$;

5) $2x^{7}\cdot(-3x^{-2}y^{3})^{3}$;

6) $(a^{2}b^{9})^{-3}\cdot(-2a^{4}b^{10})$;

7) $(-5a^{-3}b^{2}c^{-2})^{-2}\cdot(0{,}1a^{2}b^{-3}c)^{-3}$;

8) $0{,}1m^{-5}n^{4}\cdot(0{,}01m^{-3}n)^{-2}$;

9) $-6\frac{1}{4}a^{-7}b^{4}\cdot\left(\frac{5}{2}a^{-2}b^{2}\right)^{-3}$;

10) $-(4a^{-4}b^{3})^{-2}\cdot\left(-\frac{1}{8}a^{3}b^{-3}\right)^{-3}$;

11) $\frac{19a^{-15}}{33b^{-14}}\cdot\frac{11b^{-11}}{76a^{-17}}$;

12) $\left(\frac{9x^{-3}}{5y^{-2}}\right)^{-2}\cdot(27x^{-2}y^{4})^{2}$.

**834.** Спростіть вираз:

1) $(a^{-5}-1)(a^{-5}+1)-(a^{-5}-2)^{2}$;

2) $\frac{y^{-2}-x^{-2}}{x+y}$;

3) $\frac{a^{-3}-3b^{-6}}{a^{-6}-2a^{-3}b^{-6}+b^{-12}}-\frac{a^{-3}+3b^{-6}}{a^{-6}-b^{-12}}$;

4) $\frac{m^{-4}+n^{-4}}{n^{-10}}:\frac{m^{-4}n^{-6}+n^{-10}}{n^{-2}}$;

5) $\frac{x^{-2}}{x^{-2}-y^{-2}}:\left(\frac{x^{-2}}{x^{-2}-y^{-2}}-\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-2}}\right)$;

6) $\frac{x^{-10}-4}{x^{-5}}\cdot\frac{1}{x^{-5}+2}-\frac{x^{-5}+2}{x^{-5}}$;

7) $\left(\frac{4c^{-6}}{c^{-6}+1}-\frac{c^{-6}}{c^{-12}+2c^{-6}+1}\right):\frac{4c^{-6}+3}{c^{-12}-1}+\frac{2c^{-6}}{c^{-6}+1}$.

**835.** Виконайте дії і результат подайте у стандартному вигляді:

1) $1{,}3 \cdot 10^4 + 1{,}8 \cdot 10^5$;
3) $5{,}6 \cdot 10^3 - 3{,}2 \cdot 10^2$;
2) $1{,}5 \cdot 10^2 - 2{,}8 \cdot 10^{-2}$;
4) $4{,}8 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4}$.

**836.** Скоротіть дріб ($n$ — ціле число):

1) $\dfrac{9^{n-1}}{3^{2n-3}}$;
5) $\dfrac{a^{-3} + a^{-2} + a^{-1}}{a^3 + a^2 + a}$;
2) $\dfrac{7^{n+1} \cdot 2^{n-1}}{14^n}$;
6) $\dfrac{6^{n+2} - 6^n}{35}$;
3) $\dfrac{2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}}{12^n}$;
7) $\dfrac{5^{n+2} - 5^{n-2}}{5^n}$;
4) $\dfrac{a^6 + a^{11}}{a^{-4} + a}$;
8) $\dfrac{2^{-n} + 1}{2^n + 1}$.

**837.** Функцію задано формулою $y = -\dfrac{24}{x}$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює −4; 8; 1,2;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 24; −18; 60.

**838.** Побудуйте графік функції $y = \dfrac{6}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 2; −1,5; 4;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює −2; 3; −4,5;
3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

**839.** Побудуйте графік функції $y = \dfrac{5}{|x|}$.

**840.** Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \dfrac{4}{x}$ і $y = x - 3$ та вкажіть координати точок їх перетину.

**841.** Знайдіть значення $p$, якщо відомо, що графік функції $y = \dfrac{p}{x}$ проходить через точку: 1) $A\,(-3;\,2)$; 2) $B\left(-\dfrac{1}{7};\,3\right)$; $C\,(-0{,}4;\,1{,}6)$.

**842.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} -\dfrac{12}{x}, \text{ якщо } x \leqslant -3, \\ 1 - x, \text{ якщо } x > -3; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 3x - 1, \text{ якщо } x < 2, \\ \dfrac{10}{x}, \text{ якщо } 2 \leqslant x < 5, \\ x - 3, \text{ якщо } x \geqslant 5. \end{cases}$

**843.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{4x + 12}{x^2 + 3x}$;  2) $y = \dfrac{32 - 2x^2}{x^3 - 16x}$.

**844.** Знайдіть значення виразу:

1) $0,4\sqrt{625} - \frac{1}{4}\sqrt{144}$;  4) $\sqrt{1\frac{11}{25}} + \sqrt{3\frac{6}{25}} - 0,04\sqrt{10\,000}$;

2) $\sqrt{64} \cdot \sqrt{0,25} + \sqrt{2^4 + 9}$; 5) $\frac{1}{5}\sqrt{625} - \frac{3}{17}\sqrt{289}$.

3) $3\sqrt{0,25} - \sqrt{7^2 + 24^2}$;

**845.** Знайдіть значення виразу:

1) $(\sqrt{3})^2 - \sqrt{1,69}$;

2) $(3\sqrt{15})^2 - (15\sqrt{3})^2$;

3) $50 \cdot \left(-\frac{1}{5}\sqrt{7}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot (3\sqrt{2})^2$;

4) $\sqrt{1089} - \left(\frac{1}{6}\sqrt{216}\right)^2$;

5) $\frac{4}{9}\sqrt{39,69} - \frac{5}{49}\sqrt{59,29} + \left(-\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2$;

6) $\frac{1}{2}\sqrt{17^2 - 15^2} + \left(2\sqrt{5\frac{1}{2}}\right)^2 - 0,3\sqrt{900}$.

**846.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = 2$;  4) $2\sqrt{x} - 7 = 0$;

2) $\sqrt{x} = \frac{1}{4}$;  5) $\sqrt{x} + 5 = 0$;

3) $\sqrt{x} - 3 = 0$;  6) $\frac{1}{4}\sqrt{x} + 5 = 0$;

7) $\sqrt{7x}-4=0$; 10) $\frac{28}{\sqrt{x}}=7$;

8) $\sqrt{7x-4}=0$; 11) $\frac{15}{\sqrt{x+4}}=3$;

9) $\sqrt{7x-4}=2$; 12) $\sqrt{4+\sqrt{3+x}}=5$.

**847.** Знайдіть значення кореня:

1) $\sqrt{9\cdot 100}$; 5) $\sqrt{\frac{25}{196}}$;

2) $\sqrt{0,49\cdot 16}$; 6) $\sqrt{18\frac{1}{16}}$;

3) $\sqrt{676\cdot 0,04}$; 7) $\sqrt{\frac{9}{64}\cdot\frac{1024}{1089}}$;

4) $\sqrt{0,64\cdot 0,25\cdot 121}$; 8) $\sqrt{3\frac{13}{36}\cdot 4\frac{29}{49}}$.

**848.** Знайдіть значення кореня:

1) $\sqrt{75\cdot 234}$; 3) $\sqrt{1,6\cdot 12,1}$;

2) $\sqrt{2\cdot 800}$; 4) $\sqrt{2890\cdot 2,5}$.

**849.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{108}\cdot\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{0,4}\cdot\sqrt{4,9}$;

2) $\sqrt{52}\cdot\sqrt{13}$; 5) $\frac{\sqrt{288}}{\sqrt{2}}$;

3) $\sqrt{160}\cdot\sqrt{250}$; 6) $\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{0,225}}$.

**850.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{(17,1)^2}$; 5) $\sqrt{11^4}$;

2) $\sqrt{(-1,17)^2}$; 6) $\sqrt{(-23)^4}$;

3) $\frac{1}{2}\sqrt{(62)^2}$; 7) $\sqrt{2^6\cdot 7^4}$;

4) $-2,4\sqrt{(-4)^2}$; 8) $\sqrt{(-3)^4\cdot 2^6\cdot(-0,1)^2}$.

**851.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{q^2}$, якщо $q>0$;

2) $\sqrt{t^2}$, якщо $t \leqslant 0$;

3) $\sqrt{49m^2n^8}$, якщо $m \geqslant 0$;

4) $\sqrt{0,81a^6b^{10}}$, якщо $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$;

5) $\frac{1}{5}x\sqrt{100x^{26}}$, якщо $x \leqslant 0$;

6) $\frac{\sqrt{a^6b^{20}c^{34}}}{ab^8c^{12}}$, якщо $a > 0$, $c < 0$;

7) $\frac{1,2x^3}{y^5}\sqrt{\frac{y^{14}}{x^{10}}}$, якщо $y > 0$, $x < 0$;

8) $-0,1x^2\sqrt{1,96x^{18}y^{16}}$, якщо $x \leqslant 0$.

**852.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(10-\sqrt{11})^2}$;

2) $\sqrt{(\sqrt{10}-11)^2}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{11})^2}$;

4) $\sqrt{(3-\sqrt{6})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{6})^2}$;

5) $\sqrt{(\sqrt{24}-5)^2}-\sqrt{(\sqrt{24}-4)^2}$.

**853.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{18+8\sqrt{2}}$;

2) $\sqrt{38-12\sqrt{2}}$;

3) $\sqrt{16+6\sqrt{7}}+\sqrt{23-8\sqrt{7}}$;

4) $\sqrt{26-6\sqrt{17}}-\sqrt{66-14\sqrt{17}}$;

5) $\sqrt{46+10\sqrt{21}}+\sqrt{46-10\sqrt{21}}$.

**854.** Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{24}$; 3) $\sqrt{700}$; 5) $\frac{1}{7}\sqrt{196}$; 7) $-1,6\sqrt{50}$;

2) $\sqrt{63}$; 4) $\sqrt{0,32}$; 6) $-2,4\sqrt{600}$; 8) $\frac{5}{8}\sqrt{3\frac{21}{25}}$.

**855.** Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{10a^2}$, якщо $a \geqslant 0$;
2) $\sqrt{15b^2}$, якщо $b \leqslant 0$;
3) $\sqrt{x^{11}y^{12}}$;
4) $\sqrt{36m^2n}$, якщо $m \leqslant 0$;
5) $\sqrt{4x^6y^5}$, якщо $x \geqslant 0$;
6) $\sqrt{700a^5b^{22}}$, якщо $b \leqslant 0$.

**856.** Внесіть множник під знак кореня:

1) $3\sqrt{10}$;
2) $2\sqrt{13}$;
3) $0,3\sqrt{3}$;
4) $\frac{1}{5}\sqrt{175}$;
5) $\frac{2}{7}\sqrt{98}$;
6) $-5\sqrt{7}$;
7) $-0,5\sqrt{30}$;
8) $4\sqrt{a}$.

**857.** Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt{5}$;
2) $b\sqrt{-b}$,
3) $x\sqrt{x^7}$;
4) $n\sqrt{m}$, якщо $n \leqslant 0$.

**858.** Порівняйте числа:

1) $5\sqrt{6}$ і $6\sqrt{5}$;
2) $\sqrt{55}$ і $3\sqrt{6}$;
3) $0,3\sqrt{3\frac{1}{2}}$ і $\sqrt{0,3}$;
4) $\frac{3}{7}\sqrt{16\frac{1}{3}}$ і $\frac{3}{4}\sqrt{5\frac{1}{3}}$.

**859.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{64a}+\sqrt{4a}-\sqrt{121a}$;
2) $\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{320}$;
3) $6\sqrt{125a}-2\sqrt{80a}+3\sqrt{180a}$.

**860.** Виконайте множення:

1) $(\sqrt{80}-\sqrt{45})\sqrt{5}$;
2) $(2\sqrt{6}+\sqrt{54}-\sqrt{96})\sqrt{6}$;
3) $(12-\sqrt{10})(3+\sqrt{10})$;
4) $(2\sqrt{5}+\sqrt{7})(2\sqrt{7}-\sqrt{5})$;
5) $(\sqrt{19}-\sqrt{13})(\sqrt{19}+\sqrt{13})$;
6) $(4\sqrt{m}+9\sqrt{n})(4\sqrt{m}-9\sqrt{n})$;
7) $(\sqrt{5x}+\sqrt{11y})^2$;
8) $(3\sqrt{11}-2\sqrt{10})^2$.

**861.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2-19}{x+\sqrt{19}}$; 4) $\frac{29-\sqrt{29}}{\sqrt{29}}$;

2) $\frac{\sqrt{x}-6}{x-36}$; 5) $\frac{a-6\sqrt{ab}+9b}{a-9b}$, якщо $a>0$, $b>0$;

3) $\frac{m+8\sqrt{m}}{m-64}$; 6) $\frac{11-\sqrt{33}}{\sqrt{33}-3}$.

**862.** Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{a^3}{\sqrt{b}}$; 4) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; 7) $\frac{6}{\sqrt{21}+\sqrt{15}}$;

2) $\frac{7}{a\sqrt{a}}$; 5) $\frac{n+9}{\sqrt{n+9}}$; 8) $\frac{18}{\sqrt{47}-\sqrt{29}}$.

3) $\frac{2}{\sqrt{13}}$; 6) $\frac{3}{\sqrt{13}-2}$;

**863.*** Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}+1}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

**864.** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{5}{4-3\sqrt{2}}-\frac{5}{4+3\sqrt{2}}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}+1}-\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}-1}$;

3) $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2$.

**865.** Спростіть вираз:

1) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{x}{x-9}$; 2) $\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}\right):\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$.

**866.*** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(\sqrt{x}+5)^2-20\sqrt{x}}+\sqrt{(\sqrt{x}-4)^2+16\sqrt{x}}$;

2) $\sqrt{a+2\sqrt{a+3}+4}+\sqrt{a-2\sqrt{a+3}+4}$.

**867.*** Спростіть вираз:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{8}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{47}}.$$

**868.*** Доведіть, що:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1.$$

**869.** Розташуйте у порядку зростання числа: 13; $\sqrt{165}$; 12,7; $\sqrt{171}$; 13,4.

**870.** Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y=\sqrt{x}$ і $y = x - 6$ та визначте координати точки їх перетину.

**871.** Між якими двома послідовними цілими числами міститься число: 1) $\sqrt{17}$; 2) $\sqrt{67}$; 3) $\sqrt{103}$; 4) $-\sqrt{51,25}$?

**872.** Які цілі числа містяться на координатній прямій між числами:

1) 6 і $\sqrt{67}$;
2) $\sqrt{14}$ і $\sqrt{52}$;
3) $-\sqrt{53}$ і $-4,9$;
4) $-\sqrt{31}$ і 2,7?

**873.** Дано функцію $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{x}, \text{ якщо } x<0,\\ 3, \text{ якщо } 0\leqslant x\leqslant 4,\\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x>4.\end{cases}$

1) Знайдіть $f(-0,5)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(9)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

**874.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 4x - 32 = 0$;
2) $x^2 - 10x + 21 = 0$;
3) $6x^2 - 5x + 1 = 0$;
4) $8x^2 + 2x - 3 = 0$;
5) $x^2 + 6x - 15 = 0$;
6) $3x^2 - x - 5 = 0$;
7) $4x^2 + 28x + 49 = 0$;
8) $x^2 - 16x + 71 = 0$.

**875.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 4)(x + 2) - 2(3x + 1)(x - 3) = x(x + 27)$;
2) $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$;
3) $(x + 4)(x^2 + x - 13) - (x + 7)(x^2 + 2x - 5) = x + 1$;
4) $\dfrac{2(x^2-9)}{5}-\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{x-41}{4}$;
5) $\dfrac{x^2+5x}{3}-\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{2x^2-2}{8}$.

**876.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + (5a - 1)x + 4a^2 - a = 0$;

2) $x^2 - (2a + 3) + 6a = 0$;
3) $a^2x^2 - 10ax + 16 = 0$.

**877.** Розв'яжіть рівняння:
1) $|x^2 - 2x - 6| = 6$;
2) $x^2 - 6|x| - 16 = 0$;
3) $x|x| + 2x - 15 = 0$;
4) $||x^2 - 6x - 4| - 3| = 1$.

**878.** Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 - 6x + \frac{2}{x-2} = \frac{2}{x-2} - 8$;
2) $(\sqrt{x} - 5)(15x^2 - 7x - 2) = 0$;
3) $(x^2 + 6x)(\sqrt{x} - 4)(x^2 - 8x - 48) = 0$.

**879.** Розв'яжіть рівняння:
1) $\sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{x^2 + 6x + 8} = 0$;
2) $x^2 - 4x + 4 + |x^2 - 3x + 2| = 0$;
3) $\sqrt{25 - x^2} + |x^2 + 8x - 20| = 0$.

**880.** Не обчислюючи дискримінанта, знайдіть, при якому значенні $a$ рівняння:
1) $x^2 + 22x + a = 0$;
2) $x^2 - ax + 81 = 0$

має один корінь. Знайдіть цей корінь.

**881.** При якому значенні $b$ коренями рівняння $x^2 + bx - 23 = 0$ є протилежні числа? Знайдіть ці корені.

**882.** Число $-\frac{1}{3}$ є коренем рівняння $12x^2 - bx + 5 = 0$. Знайдіть значення $b$ і другий корінь рівняння.

**883.** Число 0,2 є коренем рівняння $8x^2 - 3{,}2x + k = 0$. Знайдіть значення $k$ і другий корінь рівняння.

**884.** Корені $x_1$ і $x_2$ рівняння $x^2 - bx + 20 = 0$ задовольняють умову $x_1 = 5x_2$. Знайдіть значення $b$ і корені рівняння.

**885.** Складіть квадратне рівняння, корені якого менші за відповідні корені рівняння $x^2 - 3x - 5 = 0$ на 1.

**886.** Розв'яжіть рівняння:
1) $\frac{x^2 - 7x}{x+1} = \frac{8}{x+1}$;
2) $\frac{3x^2 + 4x}{x^2 - 9} = \frac{3 - 4x}{x^2 - 9}$;
3) $\frac{4 - x}{4x - 3} = \frac{2x - 2}{7 - x}$;

4) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-6}=\frac{7}{12}$;

5) $\frac{63}{x^2+3x}-\frac{2}{x^2-3x}=\frac{7}{x}$;

6) $\frac{2x}{x-2}+\frac{3}{x+4}=\frac{4x-2}{(x+4)(x-2)}$;

7) $\frac{1}{x^2+2x}-\frac{2}{x^2-4}=\frac{x+4}{5x(2-x)}$;

8) $\frac{2}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x^3-1}=\frac{3}{x^2+x+1}$.

**887.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-1}{x+5}+\frac{x+5}{x-1}=\frac{10}{3}$;

2) $\frac{x^2-3x+6}{x}+\frac{2x}{x^2-3x+6}=3$;

3) $\frac{x^2}{(3x-1)^2}-\frac{4x}{3x-1}-5=0$;

4) $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$.

**888.*** При яких значеннях $a$ рівняння $\frac{x^2-2ax+3}{x-2}=0$ має один корінь?

**889.** Чи є правильним твердження (відповідь обґрунтуйте):

1) якщо числа $m$ і $n$ є коренями квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, де $a \neq 0$ і $c \neq 0$, то числа $-m$ і $-n$ є коренями рівняння $ax^2-bx+c=0$;

2) якщо числа $m$ і $n$ є коренями квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, де $a \neq 0$ і $c \neq 0$, то числа $\frac{1}{m}$ і $\frac{1}{n}$ є коренями рівняння $cx^2+bx+a=0$?

**890.*** Знайдіть усі цілі значення $b$, при яких має цілі корені рівняння:

1) $x^2+bx-6=0$; 2) $x^2+bx+21=0$.

**891.*** Відомо, що $x_1$ і $x_2$ — корені рівняння $x^2-(2a-5)x+$ $+a^2-7=0$. При якому значенні $a$ виконується рівність $2x_1+2x_2=x_1x_2$?

**892.*** При якому значенні $a$ добуток коренів рівняння $x^2+(a+9)x+a^2+2a=0$ дорівнює 15?

**893.** Автобус мав проїхати 255 км. Проїхавши $\frac{7}{17}$ шляху, він зупинився на 1 год, а потім продовжив рух із швидкістю на 5 км/год меншою за початкову. Знайдіть початкову швидкість автобуса, якщо в пункт призначення він прибув через 9 год після виїзду.

**894.** У сплаві міді й цинку міститься 20 кг цинку. До цього сплаву додали 3 кг міді та 4 кг цинку. Одержаний сплав містить на 5 % більше міді, ніж початковий. Скільки міді містив початковий сплав?

# Відомості з курсу алгебри 7 класу

## Цілі вирази

### 1. Вирази зі змінними. Цілі раціональні вирази. Числове значення виразу

Вираз, складений зі змінних, чисел, знаків арифметичних дій і дужок, називають виразом зі змінними (або зі змінною, якщо вона одна).

Якщо замість змінних (змінної) підставити у вираз їх значення, то отримаємо числовий вираз, значення якого називають значенням виразу зі змінними при даних значеннях змінних.

Числові вирази і вирази зі змінними називають алгебраїчними виразами.

Вирази зі змінними, які не містять ділення на вирази зі змінними, називають цілими виразами.

Запис $\overline{ab}$ є позначенням двоцифрового числа, яке має $a$ десятків і $b$ одиниць, тобто $\overline{ab} = 10a + b$. Аналогічно запис $\overline{abc}$ є позначенням трицифрового числа, яке має $a$ сотень, $b$ десятків і $c$ одиниць, тобто $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, і т. п.

### 2. Тотожно рівні вирази. Тотожності

Вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких значеннях змінних, називають тотожно рівними.

Рівність, правильну при будь-яких значеннях змінних, що входять до неї, називають тотожністю.

Заміну одного виразу іншим, який тотожно дорівнює йому, називають тотожним перетворенням.

Довести тотожність — це означає довести, що дана рівність є тотожністю.

Для доведення тотожностей використовують такі прийоми (методи):

- тотожно перетворюють одну з частин даної рівності, отримуючи іншу частину;
- тотожно перетворюють кожну з частин даної рівності, отримуючи один і той самий вираз;

- показують, що різниця лівої і правої частин даної рівності тотожно дорівнює нулю.

Щоб довести, що рівність не є тотожністю, досить навести контрприклад: указати таке значення змінної (змінних), при яких дана рівність не справджується.

### 3. Степінь з натуральним показником

Степенем числа $a$ з натуральним показником $n$, більшим за 1, називають добуток $n$ множників, кожний з яких дорівнює $a$.

Степінь з основою $a$ і показником $n$ позначають $a^n$ і читають: «$a$ в $n$-му степені». Степені з показниками 2 і 3 можна прочитати інакше: запис $a^2$ читають «$a$ у квадраті», запис $a^3$ — «$a$ в кубі».

Степенем числа $a$ з показником 1 називають саме це число.

З наведених означень випливає, що

$$a^n = \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ множників}}, \text{ де } n > 1,$$

$$a^1 = a.$$

При піднесенні невід'ємного числа до степеня отримуємо невід'ємне число.

При піднесенні від'ємного числа до степеня з парним показником отримуємо додатне число, а при піднесенні від'ємного числа до степеня з непарним показником отримуємо від'ємне число.

### 4. Властивості степеня з натуральним показником

Для будь-якого числа $a$ і будь-яких натуральних чисел $m$ і $n$ справджується рівність:

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

тобто при множенні степенів з однаковими основами показники додають, а основу залишають тією самою.

Для будь-якого числа $a$, відмінного від нуля, і будь-яких натуральних чисел $m$ і $n$ таких, що $m > n$, справджується рівність:

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

тобто при діленні степенів з однаковими основами від показника степеня діленого віднімають показник степеня дільника, а основу залишають тією самою.

Для будь-якого числа $a$ і будь-яких натуральних чисел $m$ і $n$ справджується рівність:

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

тобто при піднесенні степеня до степеня показники перемножують, а основу залишають тією самою.

Для будь-яких чисел $a$ і $b$ та будь-якого натурального числа $n$ справджується рівність:

$$(ab)^n = a^n b^n,$$

тобто при піднесенні добутку до степеня кожний множник підносять до степеня і отримані результати перемножують.

### 5. Одночлени

Вирази, які є добутками чисел, змінних та їх степенів, називають одночленами.

Одночлен, який містить тільки один відмінний від нуля числовий множник, що стоїть на першому місці, а всі інші множники якого — степені з різними основами, називають стандартним виглядом одночлена.

Число 0, а також одночлени, які тотожно дорівнюють нулю, називають нуль-одночленами. Їх не відносять до одночленів стандартного вигляду.

Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають коефіцієнтом одночлена.

Одночлени, які мають однакові буквені частини, називають подібними.

Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, що входять до нього. Степінь одночлена, який є числом, відмінним від нуля, вважають таким, що дорівнює нулю.

Вважають, що нуль-одночлен степеня не має.

Добутком двох одночленів є одночлен. При піднесенні одночлена до степеня також отримують одночлен.

## 6. Многочлени

Вираз, який є сумою кількох одночленів, називають многочленом.

Одночлени, з яких складено многочлен, називають членами многочлена.

Многочлен, який складається з двох членів, називають двочленом, а з трьох членів — тричленом. Одночлен є окремим видом многочлена. Вважають, що такий многочлен складається з одного члена.

Зв'язки між многочленами, одночленами та їх окремим видом — числами ілюструє схема, зображена на рисунку 35.

Рис. 35

Якщо серед одночленів, з яких складається многочлен, є подібні, то їх називають подібними членами многочлена.

Зведення подібних членів многочлена дає змогу замінити многочлен на такий, що тотожно дорівнює йому, але більш простий — з меншою кількістю членів.

Щоб додати два многочлени, слід кожний з них взяти в дужки і поставити між ними знак «плюс», потім розкрити дужки і звести подібні доданки (якщо такі є).

Щоб від одного многочлена відняти другий, слід кожний з них взяти в дужки, поставити перед від'ємником знак «мінус», потім розкрити дужки і звести подібні доданки (якщо такі є).

Подання многочлена у вигляді добутку кількох многочленів називають розкладанням многочлена на множники.

Універсальних рекомендацій щодо послідовності дій з розкладання многочлена на множники не існує. Проте можна скористатися таким алгоритмом:

1) якщо це можливо, то розкладання треба починати з винесення спільного множника за дужки;
2) перевірити, чи можна застосувати формули скороченого множення;

3) якщо не вдається застосувати формули, то спробуйте скористатися методом групування (тобто об'єднати члени многочлена в групи у вигідний спосіб).

### 7. Множення одночлена на многочлен

Щоб помножити одночлен на многочлен, треба помножити цей одночлен на кожний член многочлена й отримані добутки додати.

При множенні одночлена та многочлена виконується переставна властивість множення. Тому наведене правило дає змогу множити многочлен на одночлен.

### 8. Множення многочлена на многочлен

Щоб помножити многочлен на многочлен, можна кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого і отримані добутки додати.

При множенні многочлена на многочлен завжди отримуємо многочлен.

## Формули скороченого множення

### 9. Добуток різниці і суми двох виразів

Добуток різниці двох виразів та їх суми дорівнює різниці квадратів цих виразів:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

### 10. Різниця квадратів двох виразів

Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів та їх суми:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

### 11. Квадрат суми і квадрат різниці двох виразів

Квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток першого й другого виразів плюс квадрат другого виразу:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток першого й другого виразів плюс квадрат другого виразу:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

### 12. Перетворення многочлена у квадрат суми або різниці двох виразів

Формули

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

дають змогу «згорнути» тричлен у квадрат двочлена.

Тричлен, який можна подати у вигляді квадрата двочлена, називають повним квадратом.

### 13. Сума і різниця кубів двох виразів

Многочлен $a^2 - ab + b^2$ називають неповним квадратом різниці.

Сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їх різниці:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Многочлен $a^2 + ab + b^2$ називають неповним квадратом суми.

Різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їх суми:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

## Рівняння

### 14. Корінь рівняння

Коренем рівняння називають значення змінної, при якому рівняння стає правильною числовою рівністю.

Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або переконатися, що їх узагалі немає.

Часто умова задачі є описом якоїсь реальної ситуації. Складене за цією умовою рівняння називають математичною моделлю даної ситуації. Проте знайдений корінь рівняння не завжди є відповіддю задачі. Слід з'ясувати, чи не суперечить отриманий результат реальній ситуації, яка описана в умові задачі.

Під час розв'язування задач на складання рівнянь зручно використовувати таку схему:

1) за умовою задачі скласти рівняння (сконструювати математичну модель задачі);
2) розв'язати рівняння, отримане на першому кроці;
3) з'ясувати, чи відповідає знайдений корінь змісту задачі, і дати відповідь.

## 15. Властивості рівнянь

Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, яке має ті самі корені, що й дане.

Якщо дане рівняння не має коренів, то, додавши до обох його частин одне й те саме число, отримаємо рівняння, яке теж не має коренів.

Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, яке має ті самі корені, що й дане.

Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме число, відмінне від нуля, то отримаємо рівняння, яке має ті самі корені, що й дане.

## 16. Лінійне рівняння з однією змінною

Рівняння виду $ax = b$, де $x$ — змінна, $a$ і $b$ — деякі числа, називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Якщо $a \neq 0$, то, поділивши обидві частини рівняння $ax = b$ на $a$, отримаємо $x = \frac{b}{a}$. Отже, якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ має єдиний корінь, який дорівнює $\frac{b}{a}$.

Якщо $a = 0$, то лінійне рівняння набуває такого вигляду: $0x = b$. Тут можливі два випадки: $b = 0$ або $b \neq 0$.

У першому випадку отримуємо рівняння $0x = 0$. Звідси, якщо $a = 0$ і $b = 0$, то рівняння $ax = b$ має безліч коренів: будь-яке число є його коренем.

У другому випадку, коли $b \neq 0$, то при будь-якому значенні $x$ маємо хибну рівність $0x = b$. Звідси, якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то рівняння $ax = b$ коренів не має.

| Рівняння $ax = b$ | $a \neq 0$ | $a = 0$, $b = 0$ | $a = 0$, $b \neq 0$ |
|---|---|---|---|
| | $x = \frac{b}{a}$ | $x$ — будь-яке число | коренів немає |

## Функції

### 17. Функція. Область визначення і область значень функції

Правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної, називають функцією, а відповідну залежність однієї змінної від другої — функціональною.

Зазвичай незалежну змінну позначають буквою $x$, залежну — буквою $y$, функцію (правило) — буквою $f$. Якщо змінна $y$ функціонально залежить від змінної $x$, то цей факт позначають так: $y = f(x)$ (читають: «ігрек дорівнює еф від ікс»).

Незалежну змінну ще називають аргументом функції.

Для функції $f$ кожному значенню аргументу $x$ відповідає деяке значення залежної змінної $y$. Значення залежної змінної ще називають значенням функції та позначають $f(x)$.

Усі значення, яких набуває аргумент, утворюють область визначення функції. Усі значення, яких набуває залежна змінна, утворюють область значень функції.

Позначення деяких функцій:

$y = [x]$ — «ціла частина числа». Значення функції дорівнює найбільшому цілому числу, яке не більше за відповідне значення аргументу.

$y = \{x\}$ — «дробова частина числа». $\{x\} = x - [x]$.

### 18. Способи задання функції

Функція вважається заданою, якщо вказано її область визначення і правило, за допомогою якого можна за кожним значенням незалежної змінної знайти значення залежної змінної.

Оскільки функція — це правило, то її можна задати за допомогою речень. Такий спосіб задання функції називають заданням функції описом.

Найпоширенішим способом задання функції є задання функції за допомогою формули.

Якщо функцію задано формулою, права частина якої — цілий вираз, і при цьому не вказано область визначення, то вважатимемо, що областю визначення такої функції є всі числа.

Ще одним способом задання функції є табличний. Функція задається таблицею з двох рядків. Усі числа, записані в першому рядку таблиці, складають область визначення даної функції. Стовпець таблиці являє собою пару «незалежна змінна — залежна змінна». Цей спосіб зручно використовувати у тих випадках, коли область визначення функції складається з кількох чисел.

Якщо значення аргументу в кожному наступному стовпці на 1 більше за значення аргументу в попередньому стовпці, то говорять, що таблицю складено з кроком 1.

## 19. Графік функції

Графіком функції $f$ називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції $f$.

Коли якась фігура є графіком функції $f$, то виконуються дві умови:

1) якщо $x_0$ — деяке значення аргументу, а $f(x_0)$ — відповідне значення функції, то точка з координатами $(x_0; f(x_0))$ обов'язково належить графіку;
2) якщо $(x_0; y_0)$ — координати довільної точки графіка, то $x_0$ і $y_0$ — відповідні значення незалежної і залежної змінних функції $f$, тобто $y_0 = f(x_0)$.

Фігура, зображена на координатній площині, не може слугувати графіком деякої функції, якщо існує значення аргументу $x$, за яким значення змінної $y$ знаходиться неоднозначно.

Фігура може бути графіком деякої функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має з цією фігурою не більше за одну спільну точку.

### 20. Лінійна функція, її графік і властивості

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де $k$ і $b$ — деякі числа, $x$ — незалежна змінна, називають лінійною.

Графіком лінійної функції, область визначення якої — всі числа, є пряма. Оскільки пряма однозначно задається будь-якими двома своїми точками, то для побудови графіка лінійної функції достатньо обрати лише два довільних значення аргументу, обчислити відповідні значення функції і провести пряму через дві віднайдені точки.

Лінійну функцію, яку задають формулою $y = kx$, де $k \neq 0$, називають прямою пропорційністю.

Пряма пропорційність є окремим випадком лінійної функції (це виражає схема, зображена на рисунку 36).


Рис. 36

Графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат. Тому для побудови графіка прямої пропорційності достатньо вказати яку-небудь точку графіка, відмінну від початку координат, і провести пряму через цю точку і точку $O$ (0; 0).

Якщо у формулі $y = kx + b$ покласти $k = 0$, то отримаємо $y = b$. У цьому разі значення функції залишатимуться незмінними при будь-яких змінах значень аргументу. Графіком такої функції є пряма, яка паралельна осі абсцис.

## Системи лінійних рівнянь з двома змінними

### 21. Рівняння з двома змінними

Рівність, яка містить дві змінні, називають рівнянням з двома змінними.

Пару значень змінних, яка перетворює рівняння з двома змінними в правильну рівність, називають розв'язком рівняння з двома змінними.

Той факт, що пара $x = a$, $y = b$ є розв'язком рівняння, прийнято записувати так: $(a; b)$ є розв'язком рівняння. У дужках на першому місці пишуть значення змінної $x$, а на другому — значення змінної $y$. Якщо змінні в рівнянні позначено буквами, відмінними від $x$ і $y$, то, записуючи розв'язок у вигляді пари, потрібно домовитися, значення якої змінної ставиться на перше місце в парі, а якої — на друге. Зазвичай беруть до уваги порядок букв латинського алфавіту.

Розв'язати рівняння з двома змінними — це означає знайти всі його розв'язки або показати, що воно не має розв'язків.

Властивості рівнянь з двома змінними аналогічні властивостям рівнянь з однією змінною (див. п. 15 на с. 230).

Графіком рівняння з двома змінними називають геометричну фігуру, що складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, координати яких (пари чисел) є розв'язками даного рівняння.

Коли якась фігура є графіком рівняння, то виконуються дві умови:

1) усі розв'язки рівняння є координатами точок, які належать графіку;
2) координати будь-якої точки, що належить графіку, — це пара чисел, яка є розв'язком даного рівняння.

## 22. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік

Лінійним рівнянням з двома змінними називають рівняння виду $ax + by = c$, де $x$ і $y$ — змінні, $a$, $b$, $c$ — деякі числа.

У кожному з випадків, коли $b \neq 0$ або $b = 0$ і $a \neq 0$, графіком рівняння $ax + by = c$ є пряма.

Нехай $a = b = 0$ у лінійному рівнянні $ax + by = c$. Маємо $0x + 0y = c$.

Якщо $c \neq 0$, то це рівняння не має розв'язків, а отже, на координатній площині не існує точок, які могли б слугувати графіком рівняння.

Якщо $c = 0$, то рівняння набуває вигляду:

$$0x + 0y = 0.$$

Будь-яка пара чисел є його розв'язком. Отже, у цьому випадку графіком рівняння є вся координатна площина.

Наступна таблиця підсумовує всі випадки, яким може бути графік рівняння $ax + by = c$.

| Рівняння | Значення $a$, $b$, $c$ | Графік |
|---|---|---|
| $ax + by = c$ | $b \neq 0$, $a$ і $c$ — будь-які | невертикальна пряма |
| $ax + by = c$ | $b = 0$, $a \neq 0$, $c$ — будь-яке | вертикальна пряма |
| $ax + by = c$ | $a = b = c = 0$ | уся координатна площина |
| $ax + by = c$ | $a = b = 0$, $c \neq 0$ | — |

## 23. Системи рівнянь з двома змінними

Якщо треба знайти усі спільні розв'язки кількох рівнянь, то говорять, що треба розв'язати систему рівнянь.

Систему рівнянь записують за допомогою фігурної дужки.

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називають пару значень змінних, які перетворюють кожне рівняння на правильну рівність.

Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

## 24. Графічний метод розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними

Графічний метод розв'язування системи рівнянь полягає в наступному:

- побудувати на одній координатній площині графіки рівнянь, що входять до системи;
- знайти координати всіх точок перетину побудованих графіків;

- отримані пари чисел і будуть шуканими розв'язками.

Графічний метод є ефективним тоді, коли треба визначити кількість розв'язків системи.

Якщо графіками рівнянь, що входять в систему лінійних рівнянь, є прямі, то кількість розв'язків цієї системи залежить від взаємного розміщення двох прямих на площині:

- якщо прямі перетинаються, то система має єдиний розв'язок;
- якщо прямі збігаються, то система має нескінченно багато розв'язків;
- якщо прямі паралельні, то система розв'язків не має.

### 25. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом підстановки

За допомогою цього метода розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними зводиться до розв'язування лінійного рівняння з однією змінною.

Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь методом підстановки, треба:

1) виразити з будь-якого рівняння системи одну змінну через другу;
2) підставити в друге рівняння системи замість цієї змінної вираз, отриманий на першому кроці;
3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;
4) підставити знайдене значення змінної у вираз, отриманий на першому кроці;
5) обчислити значення другої змінної;
6) записати відповідь.

### 26. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом додавання

За допомогою цього метода розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними зводиться до розв'язування лінійного рівняння з однією змінною.

Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь методом додавання, треба:

1) дібравши «вигідні» множники, перетворити одне або обидва рівняння системи так, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами;
2) додати почленно ліві й праві частини рівнянь, отриманих на першому кроці;
3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;
4) підставити знайдене на третьому кроці значення змінної у будь-яке з рівнянь вихідної системи;
5) обчислити значення другої змінної;
6) записати відповідь.

# Модуль числа

### 27. Модуль числа

Модулем числа $a$ називають відстань від початку відліку до точки, яка зображує це число на координатній прямій.

Модуль числа $a$ позначають так: $|a|$ (читають «модуль $a$»).

Модуль додатного числа дорівнює цьому числу, модуль від'ємного числа дорівнює числу, яке протилежне даному.

$$|0| = 0.$$

За допомогою фігурної дужки властивість модуля числа $a$ можна записати так:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geqslant 0; \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

Модуль числа набуває тільки невід'ємних значень.
Модулі протилежних чисел рівні: $|a| = |-a|$.

# Координатна площина

### 28. Прямокутна система координат

Проведемо на площині дві перпендикулярні координатні прямі так, щоб їх початки відліку збігалися. Ці прямі називають осями координат, точку $O$ їх перетину — початком координат. Горизонтальну вісь називають віссю абсцис і позначають буквою $x$, вертикальну вісь називають віссю ординат і позначають буквою $y$.

Вісь абсцис називають також віссю $x$, а вісь ординат — віссю $y$, вони разом утворюють прямокутну систему координат. Таку систему координат називають декартовою.

Площину, на якій задано прямокутну систему координат, називають координатною площиною.

Координатні осі розбивають площину на чотири частини, які називають координатними чвертями і нумерують так, як показано на рисунку 37.

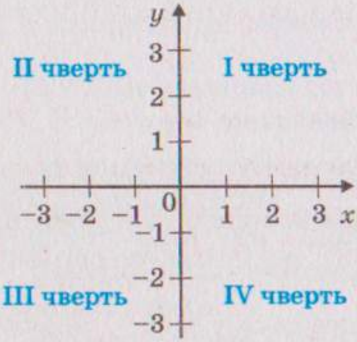



Рис. 37

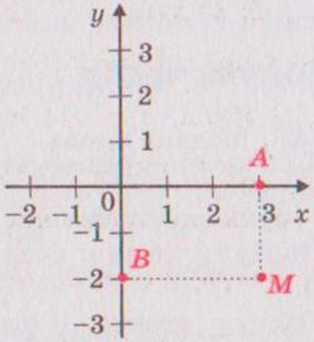


Рис. 38

На координатній площині позначимо точку $M$ (рис. 38). Пряма, що проходить через точку $M$ перпендикулярно до осі абсцис, перетинає її в точці $A$, а пряма, перпендикулярна до осі ординат, перетинає цю вісь у точці $B$. Точка $A$ на осі $x$ має координату 3, а точка $B$ на осі $y$ — координату $-2$.

Число 3 називають абсцисою точки $M$, число $-2$ — ординатою точки $M$. Числа 3 і $-2$ однозначно визначають місце точки $M$ на координатній площині. Тому їх називають координатами точки $M$ і записують: $M\ (3;\ -2)$.

Записуючи координати точки, абсцису завжди ставлять на перше місце, а ординату — на друге.

Якщо точка лежить на осі абсцис, то її ордината дорівнює нулю, а якщо точка лежить на осі ординат, то нулю дорівнює її абсциса.

## Відповіді та вказівки

**50.** 0,3. **51.** 5. **53.** $\frac{1}{32}$. **54.** Ні. *Указівка.* Подайте даний дріб у вигляді $\frac{(a-1)^2}{a^2+1}$. **58.** 1) $x$ — будь-яке число, крім $-1$; 2) коренів немає; 3) коренів немає. **59.** 1) Коренів немає; 2) $-7$. **60.** 1) Якщо $a = 0$, то коренів немає; якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$; 2) якщо $a = 0$, то $x$ — будь-яке число; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$; 3) якщо $a = 6$, то $x$ — будь-яке число; якщо $a \neq 6$, то $x = a - 6$; 4) якщо $a = -2$, то коренів немає; якщо $a = 2$, то $x$ — будь-яке число; якщо $a \neq -2$ і $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{a+2}$. **61.** 1) Якщо $a = -3$, то коренів немає; якщо $a \neq -3$, то $x = \frac{3}{a+3}$; 2) якщо $a = 0$, то коренів немає; якщо $a = 9$, то $x$ — будь-яке число; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 9$, то $x = \frac{a-9}{a}$. **64.** $-4$ при $a = 2b$. **65.** 48 км/год, 60 км/год. **76.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{m+2}$; 3) $\frac{1}{1-k}$. **77.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{a-5}{a+5}$. **78.** 1) $\frac{1}{1-a}$; 2) $\frac{3}{b-2}$; 3) $\frac{m}{n-5}$. **79.** 1) $\frac{1}{(x-7)^2}$; 2) $\frac{y+6}{y+2}$. **87.** 2) 5; 3) $4\frac{1}{4}$. **88.** 2) $-3$; 3) $-4,5$. **89.** 1) 1; 2; 3; 6; 2) 1; 2; 7; 14; 3) 1; 2; 8. **90.** 1) 1; 3; 9; 2) 1; 2; 4; 8; 3) 2. **91.** 15 км/год, 12 км/год. **92.** 1) $-2$; 2) коренів немає. **112.** 6) $\frac{5}{p-5}$; 7) $\frac{16}{16y-y^3}$; 8) $\frac{2b+1}{12b-6}$. **113.** 5) $\frac{1}{x}$; 6) $\frac{8}{y+2}$. **116.** 2) 4. **117.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 2,5; 3) 0,1. **118.** 1) 1,2; 2) $\frac{7}{17}$. **121.** 2) $\frac{3}{b^2-3b+9}$. **122.** 1) $\frac{2n^3}{9m^2-n^2}$; 2) $\frac{2-2b}{8b^3+1}$. **124.** 1) $-\frac{a+b}{ab}$; 2) $\frac{1}{2x}$; 3) $\frac{100b^2}{(a^2-25b^2)^2}$; 4) $\frac{1}{y-2}$. **128.** $\frac{3}{(a-1)(a-4)}$. *Указівка.* Подайте кожний з доданків у вигляді різниці двох дробів. Наприклад, $\frac{1}{(a-1)(a-2)} = \frac{1}{a-2} - \frac{1}{a-1}$. **129.** $\frac{3}{(a-7)(a-1)}$. **132.** *Указівка.* До кожного з дробів, які записано в лівій частині рівності, додайте 1, а до правої частини додайте 3. **135.** 270 км.

**160.** 1) $-5$; 2) 0,9; 3) $-5$; 4) $-3{,}2$. **161.** 1) $\frac{40}{21}$; 2) $\frac{4}{11}$. **162.** 83. **163.** 10. **164.** 7 або $-7$. **165.** 2 або $-2$. **166.** 1) 1; 2) 1. **167.** 1) $\frac{(a-5)^2}{(a+5)^2}$; 2) 1. **170.** 1) 0,5; 2) $x$ — будь-яке число. **172.** 1,2 год. **173.** 50 л, 30 л. **174.** 5 чоловіків, 1 жінка, 6 дітей. **178.** 1) $\frac{3}{1-a}$; 2) $\frac{2}{b-3}$; 3) $\frac{12}{3c-1}$; 4) $\frac{1}{a-2b}$; 5) $\frac{2}{a+5}$; 6) $\frac{x-3}{x+3}$. **179.** 1) $\frac{2}{3-b}$; 2) $-1$; 3) $x+y$; 4) $\frac{a+2}{a-2}$. **180.** 1) $\frac{x+8}{x-8}$; 2) $\frac{a-4}{2a}$; 3) $\frac{1}{b}$; 4) $\frac{a-1}{a}$; 5) 2; 6) $a-2$. **181.** 1) $\frac{7+x}{7-x}$; 2) $c-5$; 3) $-2$; 4) $\frac{y+2}{6}$. **184.** 1) Не залежить; 2) залежить. **186.** 1) $\frac{1}{a}$; 2) $a-3$; 3) $a+1$; 4) $\frac{a+b}{a}$. **187.** 1) $\frac{a^2+b^2}{b^2}$; 2) $-a$. **188.** 1) $-\frac{a+b}{2ab}$; 2) $\frac{1}{a}$. **189.** $-y$. **192.** 1) $\frac{a^2}{b^2}$; 2) 1. **193.** 1) $-1\frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{4}$. **195.** *Указівка.* Подайте даний вираз у вигляді $10\cdot 3^n - 5\cdot 2^n$. **196.** 480 кг. **197.** 500 грн., 700 грн. **198.** 2 год. **199.** 90 деталей. **200.** 9 горобців, 10 голубів, 11 горлиць. **207.** 2) Коренів немає; 3) $-2$; 4) $x$ — будь-яке число, крім 2; 5) $x$ — будь-яке число; 6) 3; 7) 0,5; 8) коренів немає; 9) $-\frac{1}{3}$; 10) 17; 11) 12; 12) $1\frac{3}{4}$; 13) $-4$; 4; 14) 0; 15) 4. **208.** 1) $-1$; 2) коренів немає; 3) 10; 4) коренів немає; 5) 4; 6) $x$ — будь-яке число, крім 0; 7) 6; 8) $x$ — будь-яке число, крім $-0{,}5$; 9) $-3$; 3. **209.** 7. **210.** 10. **212.** 1) $\frac{13}{4}$; 2) коренів немає; 3) 7; 4) 0; $-2$; 5) коренів немає; 6) $-17$; 7) 0; 8) коренів немає. **213.** 1) 10; 2) $-0{,}5$; 3) $-3$; 4) $-4$; 4; 5) коренів немає; 6) $-5$. **214.** 2 км/год. **215.** 29 км/год. **216.** 9 км/год. **217.** 1) Коренів немає; 2) 9; 3) 0. **218.** 1) 0,6; 2) 0. **219.** 1) Якщо $a \neq 1$, то $x = 1$; якщо $a = 1$, то коренів немає; 2) якщо $a \neq -5$, то $x = a$; якщо $a = -5$, то коренів немає; 3) якщо $a = 0$, то $x$ — будь-яке число, крім 3; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 3$, то $x = a$; якщо $a = 3$, то коренів немає; 4) якщо $a \neq 7$, то $x = a$ або $x = 6$; якщо $a = 7$, то $x = 6$; 5) якщо $a \neq 4$ і $a \neq -2$, то $x = 4$ або $x = -2$; якщо

$a = 4$, то $x = -2$; якщо $a = -2$, то $x = 4$; 6) якщо $a \neq 4$ і $a \neq -2$, то $x = a$; якщо $a = 4$ або $a = -2$, то коренів немає. **220.** $a = 2$ або $a = -2$. **221.** $a = -9$, або $a = -3$, або $a = 0$. **222.** 70 000 мешканців. **223.** 60 км. **251.** 1) 2,7; 2) $9\frac{47}{125}$. **258.** 5. **259.** 6. **265.** 31 болванка. **266.** 80 000 мешканців. **267.** 2 км. **280.** 6) $-\frac{1}{6}$; 7) $\frac{4}{9}$; 8) $\frac{4}{7}$. **281.** 5) 16; 6) 144. **291.** 1) $-3$; 2) $-5$; 3) $-2$; 4) $-7$; 5) 0; 6) 2. **292.** 1) 4; 2) 1; 3) $-1$; 4) 6. **295.** 8 хв. **296.** 5,34 кг. **297.** У 81 раз. **298.** 1) $\frac{1}{a+b}$; 2) $-4b^2$; 3) $15c^3 + 5$; 4) $-\frac{1}{m^4}$. **299.** 1) $\frac{2a^2}{3a^2-1}$; 2) $\frac{1-6b}{2}$. **300.** 1) $-1$ або 0; 2) 3 або 4; 3) 4 або 5; 4) 2 або 3. **301.** 1) 6 або 7; 2) 4 або 5; 3) 4 або 5; 4) 4 або 5. **302.** 28; 8. **303.** На 31,6 %. **304.** 5 год 45 хв. **305.** Так, треба 5 купюр по 5 грн. і 3 купюри по 2 грн. **331.** 1) 2; 2) $-1$; 3; 3) коренів немає. **332.** 1) 2; 4; 2) $-1$; 1; 3) коренів немає. **345.** Коренів немає. **346.** Зменшилася на 9 %. **347.** 36 монет, 24 монети. **348.** 12 км/год. **353.** 1) Коренів немає; 2) $-1$; 3; 3) 2. **354.** 1) $-3$; $-1$; 2) коренів немає; 3) $-1$. **369.** 4. **371.** 5 км/год, 3 км/год. **397.** 1) $-10$; 2) 25; 3) $-23{,}8$; 4) 13; 5) 216; 6) $-20$. **398.** 1) 13,4; 2) 21; 3) $-20$. **399.** 2) $x \leqslant 0$; 3) $x$ — будь-яке число; 4) $x = 0$; 5) $x \geqslant 8$; 6) $x \leqslant 8$; 9) $x$ — будь-яке число, відмінне від 8; 10) $x \geqslant 0$ і $x \neq 9$; 11) $x \geqslant 0$; 12) $x = 0$; 13) такого значення $x$ не існує; 14) $x$ — будь-яке число; 15) $x = 0$; 16) $x$ — будь-яке число, відмінне від 0. **400.** 2) $y \leqslant 0$; 3) $y \geqslant 0$; 4) $y \leqslant 0$; 5) $y = 0$; 6) $y > 0$; 7) $y \geqslant 0$ і $y \neq 1$. **401.** 6) $-10$; 10. **402.** 4) $-7$; 7. **405.** 1) 167; 2) 2116; 3) коренів немає. **406.** 1) 4900; 2) коренів немає. **407.** 1) Якщо $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то $a$ і $b$ — числа одного знака; якщо $a = 0$, то $b$ — будь-яке число; якщо $b = 0$, то $a$ — будь-яке число; 3) якщо $b \neq 0$, то $a \geqslant 0$; якщо $b = 0$, то $a$ — будь-яке число; 5) якщо $a \neq 0$, то $b \leqslant 0$; якщо $a = 0$, то $b$ — будь-яке число. **408.** 2) *Указівка.* $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$. **409.** *Указівка.* $-x^2 + 6x - 12 = -(x-3)^2 - 3$. **410.** Вираз 2). **411.** 1) 0; 2) коренів немає; 3) 1; 4) $-2$; 5) $-1$; 1; 6) 1. **412.** 1) 0; 2) коренів немає; 3) 1; 4) 3. **413.** 1) $a > -1$; 2) $a = -1$; 3) $a < -1$. **416.** 1) якщо $a = 0$, то $x \geqslant 1$; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$; 2) якщо $a = 1$, то $x$ — будь-яке число; якщо $a \neq 1$, то $x = 0$; 3) якщо $a = 0$, то $x \geqslant 1$; якщо $a \neq 0$, то $x = 2$; 4) якщо $a < 0$, то нема коренів; якщо $a \geqslant 0$, то $x = a^2 + 2$. **417.** $a < 0$ або $a = 1$. **418.** 13. **419.** $\frac{a+10}{5-a}$. **420.** 10 купюр по 5 грн., 21 купюра по 20 грн. **438.** *Указівка*. Нехай $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ — дані раціональні числа. Тоді їх сума дорівнює $\frac{mq+np}{nq}$, тобто є число виду $\frac{s}{t}$, де $s \in \boldsymbol{Z}$, $t \in \boldsymbol{N}$. **439.** *Указівка*. Якщо припустити, що дана сума є число раціональне, то з цього випливає, що дане ірраціональне число можна подати у вигляді різниці двох раціональних чисел. **440.** 1) Ні, наприклад, $\sqrt{3} + \left(-\sqrt{3}\right) = 0$; 2) ні, наприклад, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$; 3) ні, наприклад, $\sqrt{3} \cdot 0 = 0$. **441.** У третьому під'їзді на шостому поверсі. **442.** $\frac{b^2}{a}$. **444.** 18 л. **474.** 1) Ні при якому значенні $x$; 2) 3; 3) $-1$; 3. **475.** 1) $-4$; 2) 2. **476.** $-4$. **477.** 120 га. **506.** 1) $6\sqrt{2}$; 2) $11\sqrt{2}$; 3) $10\sqrt{3}$; 4) $9\sqrt{5a}$; 5) $-a\sqrt{ab}$; 6) 0. **507.** 1) $-6\sqrt{3}$; 2) $6\sqrt{7b}$; 3) $10a^3\sqrt{a}$. **509.** 1) $16+\sqrt{3}$; 2) $-10\sqrt{5}-5$; 3) 1; 4) 1; 5) 4. **510.** 1) $10-4\sqrt{2}$; 2) 74; 3) 4; 4) 32. **517.** 1) $\sqrt{a}-2$; 2) $\frac{6}{m-2\sqrt{m}}$; 3) $\frac{4}{\sqrt{xy}}$; 4) $\frac{4\sqrt{a}}{16-a}$; 5) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$; 6) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$; 7) $\frac{3\sqrt{c}}{\sqrt{c}+5}$; 8) $\sqrt{a}-1$; 9) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 10) $\sqrt{x}$. **518.** 1) $\frac{4}{a+\sqrt{a}}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{ab}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{y}}$; 4) $\sqrt{\frac{n}{m}}$; 5) $\sqrt{x}$; 6) $\frac{22}{9-a}$. **519.** 1) $m^4\sqrt{-m}$; 2) $a^2b^6\sqrt{b}$; 3) $-2x^3\sqrt{y}$; 4) $m^3n^3\sqrt{mn}$; 5) $-3xy^7\sqrt{5x}$; 6) $8ab^4\sqrt{b}$; 7) $-11m^5b^9\sqrt{2m}$; 8) $mnp^7\sqrt{-p}$. **520.** 1) $-m^9\sqrt{-m}$; 2) $a^{11}b^{12}\sqrt{a}$; 3) $-7a\sqrt{b}$; 4) $a^4b^4\sqrt{ab}$; 5) $-3x^7y^{17}\sqrt{3x}$; 6) $-5m^3n^3p^3\sqrt{-2p}$. **521.** 2) Оскільки з умови випливає, що

$b \leqslant 0$, то $b\sqrt{-b} = -\sqrt{-b^3}$; 3) $\sqrt{c^7}$; 5) $-\sqrt{x^3y^5}$; 8) $\sqrt{a^3b^3}$. **522.** 2) $-\sqrt{54n^2}$; 3) $\sqrt{p^5}$; 6) $-\sqrt{-5a^9b}$. **524.** 1) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 2) $\sqrt{a}$. **525.** 1) $\sqrt{2}+1$; 2) $\sqrt{3}+2$; 3) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$. **526.** 1) $\sqrt{7}+1$; 2) $\sqrt{6}+3$; 3) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$. **527.** 9. **530.** 1) $4+\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{3}+1$. **531.** 180 деталей. **532.** На 25 %. **533.** 6 км/год, 2 км/год. **534.** 17 вагонів. **552.** 1) 0; 1; 2) 0; 1; 3) коренів немає; 4) 1; 5) 4; 6) 1. **554.** 4) $5-2\sqrt{3}$. **555.** 2) $-\sqrt{2}$. **556.** 0. *Указівка*. Ліва частина цього рівняння набуває тільки невід'ємних значень, а права — тільки недодатних. **561.** 1) $\sqrt{7}-1$; 2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 3) $3-\sqrt{3}$; 4) $6-\sqrt{2}$. **562.** 1) $\sqrt{5}-2$; 2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; 3) $5-2\sqrt{3}$. **563.** Якщо $a \geqslant 0$, то один корінь, якщо $a < 0$, то коренів немає. **564.** $2\sqrt{a}+1$ при $a > 1$; 3 при $0 \leqslant a \leqslant 1$. **565.** 12 при $a > 36$; $2\sqrt{a}$ при $0 \leqslant a \leqslant 36$. **566.** 63 кг. **567.** 3 км/год. **569.** 1 год 12 хв. **586.** 6; 7. **587.** 9; 10. **589.** 1) 0; 14; 2) коренів немає. **590.** 1) 0; $\frac{4}{3}$; 2) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$. **596.** −3; −2 або 3; 4. **597.** −1; 0 або 0; 1. **598.** 1) 4; 2) 0; −8; 3) −9; 9. **603.** 1) 0; −3; 3; 2) 0; 1; 3) 1; 4) −2; 2. **604.** 1) 0; 7; −7; 2) 0; 5; −7; 3) −1,5; 1,5. **605.** 1) 2; 2) 3; 3) 0,5; −2; 4) такого значення не існує. **606.** 1) $a = 4$, $x_2 = -4$; 2) $a = 0$, $x_2 = 2$ або $a = -1$, $x_2 = \frac{9}{4}$; 3) $a = 3$, $x_2 = -2$. **610.** 35. **617.** 1) 1; $-\frac{7}{6}$; 2) 1; 9; 3) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$. **618.** 1) 2; $-\frac{7}{3}$; 2) −3; $\frac{1}{7}$. **619.** 1) 4; −3,5; 2) 1; $-\frac{1}{25}$; 3) 2; $\frac{4}{3}$; 4) $-3 \pm \sqrt{15}$; 5) 3; 6; 6) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{6}$. **620.** 1) 3; 9; 2) $\frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$; 3) коренів немає. **621.** 7. **622.** 38 см. **623.** 6 і 14 або −14 і −6. **624.** 10; 11. **625.** 13; 14. **626.** 1) $\sqrt{5}$; $\frac{-3\sqrt{5}}{2}$; 2) −1; $\sqrt{6}$; 3) 6; $-\frac{2}{3}$; 4) −1; $\frac{31}{22}$. **627.** 1) $-\sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}$; 2) 2; $\sqrt{3}$; 3) 1; $\frac{3}{8}$. **628.** −20; 4. **629.** 1; $-\frac{4}{3}$. **630.** 8 см. **631.** 6 см або 12 см. **632.** 16 см, 30 см. **633.** 9 см, 40 см. **634.** 9; 11;

**13. 635.** 4; 6; 8; 10. **637.** 16 мавп або 48 мавп. **638.** 9 команд. **639.** 15 сторін. **640.** 1) −8; −7; 0; 1; 2) −1; 1; 0,6; −0,6; 3) $-3+\sqrt{14}$; 4) −2; 2; 5) 3; 5; −3; −5; 6) 2; −2. **641.** 1) −12; 2; −2; −8; 2) 3; 3) 15; $-7\pm\sqrt{34}$; 4) 9; −9. **642.** 1) −10; 2) 3. **643.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 3. **644.** 1) $b=-2$; 2) $b=-12$ або $b=12$. **645.** 1) $b=13{,}5$; 2) $b=-8$ або $b=8$. **649.** 1) $x=2a+1$ або $x=a$; 2) $x=2a$ або $x=4$; 3) якщо $a\neq 0$, то $x=\frac{25}{a}$ або $x=-\frac{1}{a}$; якщо $a=0$, то коренів немає ; 4) якщо $a=\frac{1}{2}$, то $x=\frac{1}{3}$; якщо $a\neq\frac{1}{2}$, то $x=\frac{1}{3}$ або $x=\frac{1}{2a-1}$. **650.** 1) $x=3a-5$ або $x=-a$; 2) $x=-3a$ або $x=4$; 3) якщо $a=0$, то $x=1$; якщо $a\neq 0$, то $x=1$ або $x=\frac{1}{a}$. **651.** 1) $b=0$ або $b=-\frac{9}{7}$; 2) $b=-5$ або $b=2\sqrt{6}$ або $b=-2\sqrt{6}$; 3) $b=19$. **652.** 1) $b=0$ або $b=-0{,}5$ або $b=0{,}5$; 2) $b=-3$ або $b=-5$. **653.** $\frac{a-b}{a}$. **654.** 9. **655.** 4, $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$. **656.** 45 т, 75 т. **657.** 14 аркушів. **671.** $x_2=10$, $q=-20$. **672.** $x_2=-6$, $p=-1$. **673.** $x_2=2$, $b=14$. **674.** $x_2=1{,}6$, $m=-1{,}28$. **675.** −20,5. **676.** −7. **681.** $x_1=1$, $x_2=9$, $c=9$. **682.** $x_1=-14$, $x_2=-6$, $a=84$. **683.** $x_1=9$, $x_2=-2$, $m=-18$. **684.** $x_1=1$, $x_2=-5$, $n=-5$. **687.** 1) 1,5; 2) 69. *Указівка.* $x_1^2+x_2^2=$ $=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$; 3) 57; 4) 567. **688.** 1) 80; 2) $-\frac{57}{16}$; 3) $\sqrt{89}$. *Указівка.* $|x_2-x_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2}$. **689.** $x^2+12x+17=0$. **690.** $x^2-18x+49=0$. **691.** $6x^2-14x+3=0$. **692.** $x^2-15x+$ $+8=0$. **693.** $a=2$ або $a=-2$. **694.** $a=6$ або $a=-6$. **696.** 1) 7; −7; 5; −5; 2) −11; 11; −1; 1; −4; 4. **697.** 1) −9; 9; −6; 6; 2) −17; 17; −7; 7; −3; 3. **698.** $b=c=0$ або $b=1$, $c=-2$. **699.** 1) $a=2$; 2) такого значення $a$ не існує. **700.** $a=2$. **702.** 4 ряди по 12 дерев. **704.** 18 %. **713.** 1) $\frac{2a-3}{a-6}$; 2) $\frac{b-3}{2b-1}$; 3) $\frac{c+1}{c-2}$; 4) $\frac{m^2+m+1}{m+10}$; 5) $-\frac{x+4}{x+8}$; 6) $\frac{1-4n}{5n+1}$. **714.** 1) $\frac{4x-3}{x-1}$; 2) $\frac{2y+5}{y-1}$; 3) $\frac{a+1}{a-5}$; 4) $\frac{3-b}{b-1}$. **715.** 1) −3; 2) −2;

3) $\frac{4}{3}$. **716.** 1) $-4$; 2) $-14$. **717.** 1) 1; 2) $\frac{2b+1}{b^2}$; 3) $-\frac{4}{c}$; 4) 4. **721.** 1) $(x-y)(x-5y)$; 2) $(a+9b)(a-4b)$; 3) $(3m+n)(m-3n)$; 4) $(4x-y)(x-y)$. **722.** 1) $(a-4b)(a-10b)$; 2) $(3b-2c)(4b+3c)$. **723.** 1) Якщо $a = 3$, то $x$ — будь-яке число, якщо $a = -2$, то коренів немає, якщо $a \neq 3$ і $a \neq -2$, то $x = \frac{a+3}{a+2}$; 2) якщо $a = 7$, то $x$ — будь-яке число, якщо $a = 1$, то коренів немає, якщо $a \neq 7$ і $a \neq 1$, то $x = \frac{2a+1}{a-1}$. **724.** Якщо $a = -8$, то $x$ — будь-яке число, якщо $a = 1$, то коренів немає, якщо $a \neq -8$ і $a \neq 1$, то $x = \frac{a+8}{a-1}$. **727.** 6,8 %. **729.** 1) Коренів немає; 2) $-4$; 3) 3; 4) $y$ — будь-яке дійсне число, відмінне від $-4$ і від 5. **733.** 1) $-4$; 1; 2) $-1$; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) $-2$; 10; 5) 7; 6) $-6$; 7) $-5$; 10; 8) 5; 9) 2; 8; 10) $-2$; 9; 11) $-3$; 2; 12) 4; $-0{,}4$. **734.** 1) $-1$; 2) $-0{,}25$; 3) 0,5; 6; 4) 8; 5) $-3$; 6) $-3$; 12; 7) $-1$; $\frac{2}{7}$; 8) $-3$; 13. **739.** 1) 6; 2) 5; 3) 7; 4) 6. **740.** 1) 10; 2) $-7$. **741.** 1) $3 \pm \sqrt{18}$; 2) $-23$; 1; 3) $-27$; $-1$; 4) 3. **742.** 1) 4; 9; 2) 5. **743.** 1) $-1$; 18; 2) $-98$; 2; 3) $-1{,}5$; 4) $-2$; 5) $-3$; 4; 6) $-3$; 7) 2; 8) 9; 9) 1; 10) 9. **744.** 1) $-60$; 50; 2) $-3$; 3) $-9$; 24; 4) 2; 5) $-20$; 2; 6) 15. **745.** 1) $-\frac{2}{3}$; 14; 2) $-56$; 60. **746.** 1) $-15$; 12; 2) $-20$; 2. **747.** 1) $-5$; 2) коренів немає; 3) $3\frac{1}{3}$; 4) 1. **748.** 1) $-15$; 1; 2) 1,5. **749.** 1) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $-3$; 3; 2) $-6$; $-4$; $-1$; 1; 3) 0; 3; 4) $-1$; $-3$; 1. **750.** 1) $-\frac{1}{3}$; 1; 2) 0,5. **751.** 1) $-1$; 7; 2; 4; 2) $-6$; $-2$; $-4 \pm \sqrt{20}$; 3) $-2$; 1; 4) $-\frac{5}{3}$; 10. **752.** 1) Якщо $a = 1$, то $x = 7$; якщо $a = 7$, то $x = 1$; якщо $a \neq 1$ і $a \neq 7$, то $x = 1$ або $x = 7$; 2) якщо $a \neq 1$ і $a \neq 7$, то $x = a$; якщо $a = 1$ або $a = 7$, то коренів немає; 3) якщо $a \neq 2$ і $a \neq \frac{2}{3}$, то $x = 3a$ або $x = 2$; якщо $a = 2$ або $a = \frac{2}{3}$, то $x = 2$; 4) якщо $a = 0$, то $x$ — будь-яке число, відмінне від $-3$; якщо $a = -3$, то

коренів немає; якщо $a \neq 0$ і $a \neq -3$, то $x = a$. **753.** $a = 2\sqrt{5}$, або $a = -2\sqrt{5}$, або $a = 6$. **758.** 75 км/год. **759.** 50 км/год, 60 км/год. **760.** 80 км/год, 60 км/год. **761.** 80 км/год. **762.** 12 км/год. **763.** 12 сторінок. **764.** 30 м$^3$, 25 м$^3$. **765.** 6 днів. **766.** 31 км/год. **767.** 10 км/год. **768.** 3 км/год. **769.** 2 км/год або 2,25 км/год. **770.** 60 км/год, 40 км/год. **771.** 60 км/год. **772.** 60 км/год. **773.** 8 км/год. **774.** 32 км/год. **775.** $\frac{1}{4}$. **776.** $\frac{7}{12}$. **777.** 45 днів, 36 днів. **778.** 15 год, 10 год. **779.** 21 год, 24 год. **780.** 80 г. **781.** 30 кг. **782.** 3 км/год. **783.** 5 год. **784.** 4 год, 6 год, 12 год. **785.** 80 км/год. **786.** 24 деталі. **787.** 12 год. **789.** 6. **804.** 3) $\frac{8}{3}$. **810.** 4) 1, 2, 3. **813.** $\frac{4}{a(a+12)}$. **814.** *Указівка.* Розгляньте різницю лівої і правої частин даної рівності. **867.** $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{2}}{3}$. **890.** 1) –5; 5; –1; 1; 2) –10; 10; –22; 22. **891.** $a = 1$. **892.** $a = 3$.

## Відповіді до завдань у тестовій формі «Перевір себе»

| Номер завдання | Номер задачі | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | Б | В | А | А | Г | А | В | Г | В | Г | Б | В |
| 2 | Б | Г | Б | Г | А | А | В | Б | В | Б | В | А |
| 3 | В | Г | В | Б | В | А | Б | Б | Г | А | А | Г |
| 4 | В | Б | Б | В | В | А | В | Г | В | В | А | Б |
| 5 | В | Г | Г | В | А | Б | А | Б | А | Г | Б | А |
| 6 | Г | В | А | Б | А | В | А | В | А | Г | Б | В |

# Предметний покажчик

## Додаток. Орієнтовне тематичне поурочне планування

| № з/п | Зміст навчального матеріалу | Кількість годин |
|---|---|---|
| | **I. Раціональні вирази (32 год)** | |
| 1 | Раціональні дроби | 2 |
| 2 | Основна властивість раціонального дробу | 2 |
| 3 | Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками | 2 |
| 4 | Додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками | 4 |
| 5 | Тематичне оцінювання № 1 | 1 |
| 6 | Множення і ділення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня | 3 |
| 7 | Тотожні перетворення раціональних виразів | 5 |
| 8 | Тематичне оцінювання № 2 | 1 |
| 9 | Рівносильні рівняння. Раціональні рівняння | 2 |
| 10 | Степінь з цілим від'ємним показником | 3 |
| 11 | Властивості степеня з цілим показником | 3 |
| 12 | Функція $y = \frac{k}{x}$ та її графік | 3 |
| 13 | Тематичне оцінювання № 3 | 1 |
| | **II. Квадратні корені. Дійсні числа (14 год)** | |
| 14 | Функція $y = x^2$ та її графік | 2 |
| 15 | Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь | 2 |
| 16 | Числові множини | 2 |
| 17 | Властивості арифметичного квадратного кореня | 2 |
| 18 | Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені | 3 |

# Зміст

## § 3. Квадратні рівняння