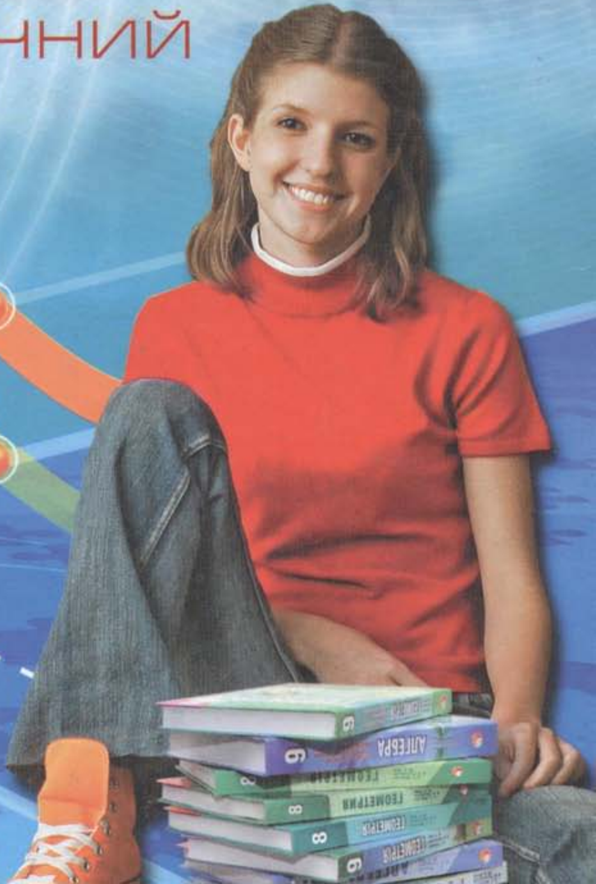
А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

10

АЛГЕБРА
І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

АКАДЕМІЧНИЙ РІВЕНЬ



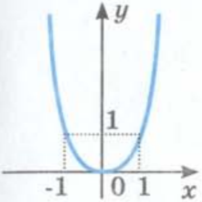
ГІМНАЗІЯ

«Моя любов — Україна і математика». Ці слова Михайла Пилиповича Кравчука (1892–1942) викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника науковцеві.

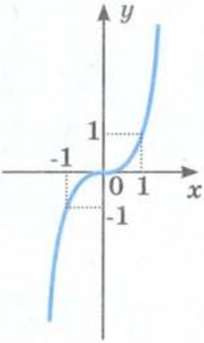
Ми сподіваємося, що це патріотичне висловлювання видатного українського математика стане для вас надійним дороговказом на шляху до професіоналізму.

Графік степеневої функції

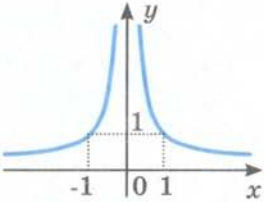
$y = x^n$, n — парне натуральне число



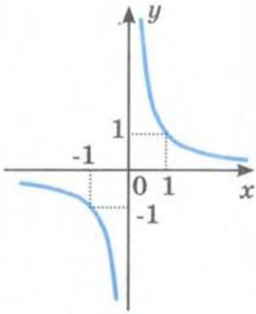
$y = x^n$, n — непарне натуральне число, $n > 1$



$y = x^{-n}$, n — парне натуральне число



$y = x^{-n}$, n — непарне натуральне число



Властивості кореня n-го степеня

Для будь-якого дійсного a виконуються рівності

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a, \quad \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|.$$

Якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

якщо $a \geqslant 0$ і $b > 0$, то $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

якщо $a \geqslant 0$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$;

якщо $a \geqslant 0$, то $\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$;

якщо $a \geqslant 0$, то $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$

Властивості степеня з раціональним показником

Якщо $a > 0$ і $b > 0$, то

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$; $\quad a^p : a^q = a^{p-q}$;

$(a^p)^q = a^{pq}$; $\quad (ab)^p = a^p b^p$;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Академічний рівень

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2010

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]
ББК 22.141я721
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(Наказ від 03.03.2010 р. № 177)

Мерзляк А. Г.

М52 Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : академ. рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2010. — 352 с. : іл.

ISBN 978-966-474-094-1.

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]
ББК 22.141я721

ISBN 978-966-474-094-1

Від авторів

ЛЮБІ ДЕСЯТИКЛАСНИКИ!

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — **алгебру і початки аналізу.**

Цей предмет надзвичайно важливий. Мабуть, немає сьогодні такої галузі науки, де б не застосовувалися досягнення цього розділу математики. Фізики та хіміки, астрономи та біологи, географи та економісти, навіть мовознавці та історики використовують «математичний інструмент».

Алгебра і початки аналізу — корисний і дуже цікавий предмет, який розвиває аналітичне і логічне мислення, дослідницькі навички, математичну культуру, кмітливість. Ми сподіваємося, що ви в цьому скоро переконаєтеся, чому сприятиме підручник, який ви тримаєте. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник розділено на п'ять параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено зірочкою (*)). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі у тестовій формі з рубрики «Перевір себе».

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете знати більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Крім того, у підручнику ви зможете прочитати оповідання з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків. Назви цих оповідань надруковано синім кольором.

Дерзайте! Бажаємо успіху!

ШАНОВНІ КОЛЕГИ!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка і факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

Умовні позначення

n°	завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;
$n^{\bullet}$	завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
$n^{\bullet\bullet}$	завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
n^{*}	задачі для математичних гуртків і факультативів;
⊙	доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;
⊙⊙	доведення теореми, що відповідає високому рівню навчальних досягнень;
▲	закінчення доведення теореми;
	рубрика «Коли зроблено уроки».

§ 1 МНОЖИНИ. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

У цьому параграфі ви ознайомитеся з такими поняттями, як множина, елементи множини. Дізнаєтесь, які множини називають рівними, які існують способи задання множин, яку множину називають порожньою, яку множину називають підмножиною іншої множини, яку множину називають перетином, а яку — об'єднанням множин.

Ви навчитеся задавати множину переліком елементів і за допомогою характеристичної властивості її елементів, установлювати рівність множин, визначати, чи є дана множина підмножиною іншої множини, знаходити перетин і об'єднання множин, ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера співвідношення між множинами.

1. Множина та її елементи

Ми часто говоримо: косяк риб; зграя птахів; рій бджіл; колекція марок; зібрання картин; набір ручок; букет квітів; компанія друзів; парк машин; отара овець.

Якщо в цих парах перетасувати перші слова, то може вийти смішно. Наприклад, букет овець, косяк картин, колекція друзів тощо. Водночас такі словосполучення, як колекція риб, колекція картин, колекція ручок, колекція машин тощо, достатньо прийнятні. Справа в тому, що слово «колекція» досить універсальне. Однак у математиці є більш всеосяжне слово, яким можна замінити будь-яке з перших слів у наведених парах. Це слово **множина**.

Наведемо ще кілька прикладів множин:

- множина учнів вашого класу;
- множина планет Сонячної системи;
- множина двоцифрових чисел;
- множина пар чисел $(x;\ y)$, які є розв'язками рівняння $x^2 + y^2 = 1$.

Окремі найважливіші множини мають загальноприйняті назви та позначення:

- множина точок площини — **геометрична фігура**;
- множина точок, яким притаманна певна властивість, — **геометричне місце точок (ГМТ)**;
- множина значень аргументу функції f — **область визначення функції** f, яку позначають $D(f)$;
- множина значень функції f — **область значень функції** f, яку позначають $E(f)$;
- множина натуральних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{N}$;
- множина цілих чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Z}$;
- множина раціональних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Q}$;
- множина дійсних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{R}$.

Множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — приклади **числових** множин. Також прикладами числових множин є **числові проміжки**. Наприклад, проміжки $[-3;\ 2]$, $(5;\ +\infty)$, $(-\infty;\ -4]$ є числовими множинами.

Як правило, множини позначають великими латинськими літерами: A, B, C, D тощо.

Об'єкти, які складають множину, називають **елементами** цієї множини. Зазвичай елементи позначають малими латинськими літерами: a, b, c, d тощо.

Якщо a належить множині A, то пишуть $a \in A$ (читають: «a належить множині A»). Якщо b не належить множині A, то пишуть $b \notin A$ (читають: «b не належить множині A»).

Наприклад, $12 \in \mathbb{N}$, $-3 \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Якщо множина A складається з трьох елементів a, b, c, то пишуть $A = \{a, b, c\}$.

Наприклад, якщо M — множина натуральних дільників числа 6, то пишуть $M = \{1, 2, 3, 6\}$. Множина дільників числа 6, які є складеними числами, має такий вигляд: $\{6\}$. Це приклад **одноелементної** множини.

Позначення множини за допомогою фігурних дужок, у яких указано список її елементів, є зручним у тих випадках, коли множина складається з невеликої кількості елементів.

Означення. Дві множини A і B називають рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B і, навпаки, кожний елемент множини B належить множині A.

Якщо множини A і B рівні, то пишуть $A = B$.

З означення випливає, що ***множина однозначно визначається своїми елементами***. Якщо множину записано за допомогою фігурних дужок, то порядок, у якому виписано її елементи, не має значення. Так, множина, яка складається з трьох елементів a, b, c, припускає шість варіантів запису:

$$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}.$$

Оскільки з означення рівних множин випливає, що, наприклад, $\{a, b, c\} = \{a, a, b, c\}$, то надалі будемо розглядати множини, які складаються з різних елементів. Так, множина букв слова «шаровари» має вигляд {ш, а, р, о, в, и}.

Найчастіше множину задають одним із двох таких способів.

Перший спосіб полягає в тому, що множину задають указанням (переліком) усіх її елементів. Ми вже використовували цей спосіб, записуючи множину за допомогою фігурних дужок, у яких зазначали список її елементів. Зрозуміло, що не всяку множину можна задати в такий спосіб. Наприклад, множину парних чисел так задати не можна.

Другий спосіб полягає в тому, що задається **характеристична властивість** елементів множини, тобто властивість, яка притаманна всім елементам даної множини і тільки їм. Наприклад, властивість «натуральне число при діленні на 2 дає в остачі 1» задає множину непарних чисел.

Якщо задавати множину характеристичною властивістю її елементів, то може статися, що жодний об'єкт такої властивості не має.

Розглянемо приклади.

- Множина трикутників, сторони яких пропорційні числам 1, 2, 5. З нерівності трикутника випливає, що ця множина не містить жодного елемента.
- Позначимо через A множину учнів вашого класу, які є майстрами спорту з шахів. Може виявитися, що множина A також не містить жодного елемента.
- Розглядаючи множину коренів довільного рівняння, слід передбачити ситуацію, коли рівняння коренів не має.

Наведені приклади вказують на те, що зручно до сукупності множин віднести ще одну особливу множину, яка не містить жодного елемента. Її називають **порожньою множиною** і позначають символом $\varnothing$.

?

1. Наведіть приклади множин.

2. Як позначають множину та її елементи?

3. Як позначають множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел?

4. Як записати, що елемент a належить (не належить) множині A?

5. Які множини називають рівними?

6. Які існують способи задання множин?

7. Яку множину називають порожньою? Як її позначають?

Вправи

1.° Як називають множину точок кута, рівновіддалених від його сторін?

2.° Як називають множину вовків, які підкорюються одному ватажку?

3.° Назвіть яку-небудь множину запорізьких козаків.

4.° Як називають множину вчителів, які працюють в одній школі?

5.° Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $5 * \mathbb{N}$;　3) $-5 * \mathbb{Q}$;　5) $3{,}14 * \mathbb{Q}$;　7) $1 * \mathbb{R}$;

2) $0 * \mathbb{N}$;　4) $-\frac{1}{2} * \mathbb{Z}$;　6) $\pi * \mathbb{Q}$;　8) $\sqrt{2} * \mathbb{R}$.

6.° Дано функцію $f(x) = x^2 + 1$. Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $3 * D(f)$;
2) $0 * D(f)$;
3) $0 * E(f)$;
4) $\frac{1}{2} * E(f)$;
5) $1{,}01 * E(f)$.

7.° Які з наступних тверджень є правильними:

1) $1 \in \{1, 2, 3\}$;
2) $1 \notin \{1\}$;
3) $\{1\} \in \{1, 2\}$;
4) $\varnothing \notin \{1, 2\}$?

8.° Запишіть множину коренів рівняння:

1) $x(x - 1) = 0$;
2) $(x - 2)(x^2 - 4) = 0$;
3) $x = 2$;
4) $x^2 + 3 = 0$.

9.° Задайте переліком елементів множину:

1) правильних дробів зі знаменником 7;
2) правильних дробів, знаменник яких не перевищує 4;
3) букв у слові «математика»;
4) цифр числа 5555.

10.° Чи рівні множини A і B, якщо:

1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$;
2) $A = \{(1; 0)\}$, $B = \{(0; 1)\}$;
3) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$?

11.° Чи рівні множини A і B, якщо:

1) $A = [-1; 2)$, $B = (-1; 2]$;
2) A — множина коренів рівняння $|x| = x$, $B = [0; +\infty)$;
3) A — множина чотирикутників, у яких протилежні сторони попарно рівні; B — множина чотирикутників, у яких діагоналі точкою перетину діляться навпіл?

12.° Які з наступних множин дорівнюють порожній множині:

1) множина трикутників, сума кутів яких дорівнює 181°;
2) множина гірських вершин заввишки понад 8800 м;
3) множина гострокутних трикутників, медіана яких дорівнює половині сторони, до якої вона проведена;
4) множина функцій, графіком яких є коло?

Вправи для повторення

13. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 7x = 0$;
2) $4x^2 - 5 = 0$;
3) $x^2 - 12x + 24 = 0$;
4) $-x^2 - 8x + 9 = 0$;
5) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;
6) $16x^2 + 24x + 9 = 0$.

14. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $6 - 4x > 7 - 6x$;
2) $12 - 5x < 3 - 2x$;
3) $8 + 6y < 2(5y - 8)$;
4) $7a - 3 \geqslant 7(a + 1)$;
5) $4(2 + 3b) - 3(4b - 3) > 0$;
6) $\frac{12-9x}{7} \geqslant 7$;
7) $x^2 - 8x + 7 > 0$;
8) $x^2 + x - 2 \leqslant 0$;
9) $9 - x^2 \geqslant 0$;
10) $6x^2 - 2x < 0$;
11) $-x^2 + 3x + 4 > 0$;
12) $0{,}2x^2 > 1{,}8x$.

2. Підмножина. Операції над множинами

Розглянемо множину цифр десяткової системи числення $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Виокремимо з множини A ті її елементи, які є парними цифрами. Отримаємо множину $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, усі елементи якої є елементами множини A.

Означення. **Множину B називають підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A.**

Це записують так: $B \subset A$ або $A \supset B$ (читають: «множина B є підмножиною множини A» або «множина A містить множину B»).

Наприклад, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\{a\} \subset \{a, b\}$, $(1; 2] \subset [1; 2]$, $[2; 5] \subset (1; +\infty)$.

Множина учнів вашого класу є підмножиною множини учнів вашої школи.

Множина ссавців є підмножиною множини хребетних.

Множина точок променя CB є підмножиною множини точок прямої AB (рис. 1).

Для ілюстрації співвідношень між множинами використовують схеми, які називають **діаграмами Ейлера**.

На рисунку 2 зображено множину A (більший круг) і множину B (менший круг, який міститься в більшому). Ця схема означає, що $B \subset A$ (або $A \supset B$).

На рисунку 3 за допомогою діаграм Ейлера показано співвідношення між множинами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$.

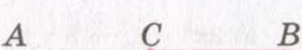


Рис. 1

З означень підмножини і рівності множин випливає, що коли $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$.

Будь-яка множина A є підмножиною самої себе, тобто $A \subset A$.

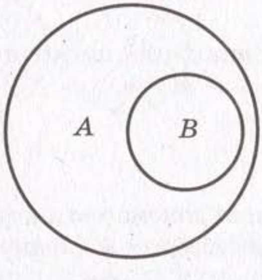
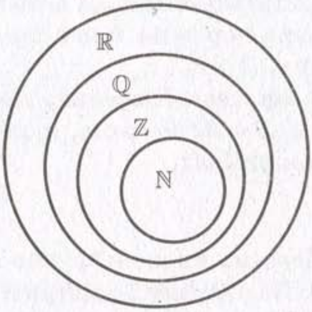


Рис. 2



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Рис. 3

Якщо в множині B немає такого елемента, який не належить множині A, то множина B є підмножиною множини A. У силу цих міркувань порожню множину вважають підмножиною будь-якої множини. Справді, порожня множина не містить жодного елемента, отже, у ній немає елемента, який не належить даній множині A. Тому для будь-якої множини A справедливе твердження: $\varnothing \subset A$.

ПРИКЛАД Випишіть усі підмножини множини $A = \{a, b, c\}$.

Розв'язання. Маємо: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\varnothing$.

Нехай A — множина розв'язків рівняння $x + y = 5$, а B — множина розв'язків рівняння $x - y = 3$. Тоді множина C розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3 \end{cases}$$

складається з усіх елементів, які належать і множині A, і множині B. У такому випадку кажуть, що множина C є **перетином** множин A і B.

Означення. Перетином множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать і множині A, і множині B.

Перетин множин A і B позначають так: $A \cap B$.

Наприклад, $[-1;\ 3) \cap (2;\ +\infty) = (2;\ 3)$ (рис. 4).

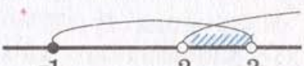


Рис. 4

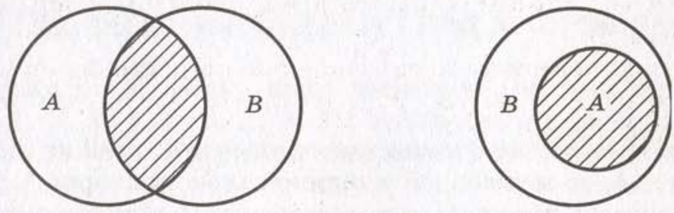
Якщо множини A і B не мають спільних елементів, то їх перетином є порожня множина, тобто $A \cap B = \varnothing$. Також зазначимо, що $A \cap \varnothing = \varnothing$.

З означення перетину двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cap B = A$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cap A = A$.

Наприклад,

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N},$$
$$\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}.$$

Перетин множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 5 заштрихована фігура зображує множину $A \cap B$.



а) *б)*

Рис. 5

Для того щоб розв'язати рівняння $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, треба розв'язати кожне з рівнянь $x^2 - x = 0$ і $x^2 - 1 = 0$.

Маємо: $A = \{0, 1\}$ — множина коренів першого рівняння, $B = \{-1, 1\}$ — множина коренів другого рівняння. Зрозуміло, що множина $C = \{-1, 0, 1\}$, кожний елемент якої належить або множині A, або множині B, є множиною коренів заданого рівняння. Множину C називають **об'єднанням** множин A і B.

Означення. Об'єднанням множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин: або множині A, або множині B.

Об'єднання множин A і B позначають так: $A \cup B$.

Наприклад, $(-3; 1) \cup (0; 2] = (-3; 2]$, $(-\infty; 1) \cup (-1; +\infty) = (-\infty; +\infty)$.

Об'єднання множин ірраціональних і раціональних чисел дорівнює множині дійсних чисел.

Зауважимо, що $A \cup \varnothing = A$.

З означення об'єднання двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cup B = B$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cup A = A$.

Наприклад, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Об'єднання множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 6 заштрихована фігура зображує множину $A \cup B$.

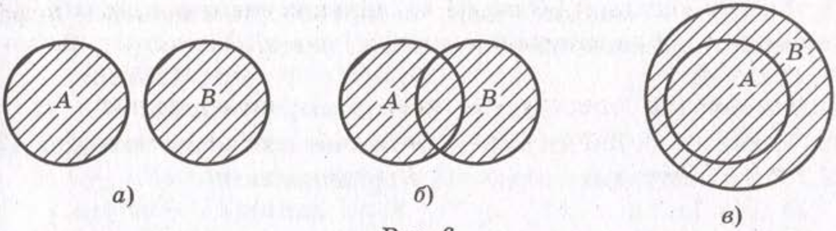


Рис. 6

Якщо треба знайти об'єднання множин розв'язків рівнянь (нерівностей), то кажуть, що треба розв'язати сукупність рівнянь (нерівностей).

Сукупність записують за допомогою квадратної дужки. Так, щоб розв'язати рівняння $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, треба розв'язати сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x = 0, \\ x^2 - 1 = 0. \end{array}\right.$$

?

1. Яку множину називають підмножиною даної множини?
2. Як наочно ілюструють співвідношення між множинами?
3. Яка множина є підмножиною будь-якої множини?
4. Що називають перетином двох множин?
5. Що називають об'єднанням двох множин?
6. Як за допомогою діаграм Ейлера ілюструють перетин (об'єднання) двох множин?

Вправи

15.° Назвіть кілька підмножин учнів вашого класу.

16.° Назвіть які-небудь геометричні фігури, які є підмножинами множини точок прямої.

17.° Назвіть які-небудь геометричні фігури, які є підмножинами множини точок круга.

18.° Нехай A — множина букв у слові «координата». Множина букв якого слова є підмножиною множини A:

1) кора;	4) крокодил;	7) тин;	10) дорога;
2) дірка;	5) нитки;	8) криниця;	11) дар;
3) картина;	6) нирки;	9) сокирка;	12) кардинал?

19.° Нехай A — множина цифр числа 1958. Чи є множина цифр числа x підмножиною множини A, якщо:

1) $x = 98$;
2) $x = 9510$;
3) $x = 519$;
4) $x = 5858$;
5) $x = 195888$;
6) $x = 91258$?

20.° Нехай $A \neq \varnothing$. Які дві різні підмножини завжди має множина A?

21.° Які з наступних тверджень є правильними:

1) $\{a\} \in \{a, b\}$;
2) $\{a\} \subset \{a, b\}$;
3) $a \subset \{a, b\}$;
4) $\{a, b\} \in \{a, b\}$?

22.° Доведіть, що коли $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

23.° Розмістіть дані множини у такій послідовності, щоб кожна наступна множина була підмножиною попередньої:

1) A — множина прямокутників;
B — множина чотирикутників;
C — множина квадратів;
D — множина паралелограмів;

2) A — множина ссавців;
B — множина собачих;
C — множина хребетних;
D — множина вовків;
E — множина хижих ссавців.

24.° Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера співвідношення між множинами:

1) A — множина невід'ємних раціональних чисел;
$B = \{0\}$;
$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

2) $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;
A — множина натуральних чисел, кратних 6;
B — множина натуральних чисел, кратних 3.

25.° Запишіть усі підмножини множини $\{1, 2\}$.

26.° Запишіть усі підмножини множини $\{-1, 0, 1\}$.

27.° Які з наступних тверджень є правильними:

1) $\{a, b\} \cap \{a\} = a$;
2) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a, b\}$;
3) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{b\}$?

28.° Знайдіть перетин множин цифр, які використовуються в записі чисел:

1) 555288 і 82223;
2) 470713 і 400007.

29.° Нехай A — множина двоцифрових чисел, B — множина простих чисел. Чи належить множині $A \cap B$ число: 5, 7, 11, 31, 57, 96?

30.° Знайдіть множину спільних дільників чисел 30 і 45.

31.• Знайдіть перетин множин A і B, якщо:

1) A — множина рівнобедрених трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
2) A — множина прямокутних трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
3) A — множина двоцифрових чисел, B — множина натуральних чисел, кратних 19;
4) A — множина одноцифрових чисел, B — множина простих чисел.

32.• Накресліть два трикутники так, щоб їх перетином була така геометрична фігура: 1) відрізок; 2) точка; 3) трикутник; 4) п'ятикутник; 5) шестикутник.

33.• Які фігури можуть бути перетином двох променів, що лежать на одній прямій?

34.• Знайдіть:

1) $[-4; 6) \cap (-2; 7)$;
2) $(-\infty; 3) \cap (1; 4)$;
3) $(-\infty; 2) \cap (3; 8]$;
4) $\mathbb{N} \cap (-3; 4]$;
5) $(-2; 2) \cap \mathbb{Z}$;
6) $(-1; 1] \cap [1; +\infty)$;
7) $(-1; 1] \cap (1; +\infty)$;
8) $\mathbb{R} \cap (-2; 3)$.

35.• Знайдіть:

1) $(-\infty; 2) \cap \mathbb{N}$;
2) $(-\infty; 1) \cap \mathbb{N}$;
3) $[-1; 1) \cap \mathbb{Z}$;
4) $(-\infty; -7) \cap \mathbb{R}$.

36.• Які з наступних тверджень є правильними:

1) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\}$;
2) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{b\}$;
3) $\{a, b\} \cup \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{\{b\}\}$?

37.• Знайдіть об'єднання множин цифр, які використовуються в запису чисел:

1) 27288 і 56383;
2) 55555 і 777777.

38.• Знайдіть об'єднання множин A і B, якщо:

1) A — множина рівнобедрених трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
2) A — множина простих чисел, B — множина складених чисел;
3) A — множина простих чисел, B — множина непарних чисел.

39.• Накресліть два трикутники так, щоб їх об'єднанням був: 1) чотирикутник; 2) трикутник; 3) шестикутник. Чи може об'єднання трикутників бути відрізком?

40.° Які фігури можуть бути об'єднанням двох променів, що лежать на одній прямій?

41.° Знайдіть:

1) $(-2; 5] \cup (2; 7]$; 3) $(-\infty; 8) \cup [-2; +\infty)$; 5) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{N}$;

2) $(-\infty; 3) \cup (-3; 3]$; 4) $\mathbb{R} \cup (-7; 2]$; 6) $\mathbb{R} \cup \mathbb{N}$.

42.° Знайдіть:

1) $(-\infty; 1] \cup [1; +\infty)$; 3) $\mathbb{R} \cup \mathbb{Q}$;

2) $(-\infty; 5) \cup (3; 5]$; 4) $(5; +\infty) \cup \mathbb{R}$.

Вправи для повторення

43. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2}{x-4} = \frac{4x}{x-4}$; 3) $\frac{4}{(x+1)^2} + \frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{1-x} = 0$;

2) $\frac{x}{x-3} - \frac{5}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$; 4) $\frac{12}{(x-5)(x+1)} + \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-5}$.

44. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 6x+3 \geqslant 0, \\ 7-4x < 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+x-6 \leqslant 0, \\ x > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x+19 \leqslant 5x-1, \\ 10x < 3x+21; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-x-12 \geqslant 0, \\ 10-3x-x^2 > 0. \end{cases}$

45. При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\frac{x^2}{x+5}$; 7) $\sqrt{5-x} + \frac{1}{3\sqrt{x}}$;

2) $\frac{x+4}{x^2-4}$; 8) $\sqrt{7x-42} + \frac{1}{x^2-8x}$;

3) $\frac{x^2-4}{x^2+4}$; 9) $\sqrt{-x^2+3x+4}$;

4) $\frac{4}{x-2} + \frac{1}{x}$; 10) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x-12}}$;

5) $\sqrt{6-7x}$; 11) $\sqrt{x^2+5x-14} - \frac{4}{x^2-49}$;

6) $\frac{9}{\sqrt{3x+6}}$; 12) $\frac{x+2}{\sqrt{35+2x-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{8-4x}}$?

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 27–30 на с. 323–325.

ПІДСУМКИ

Вивчивши матеріал параграфа «Множини. Операції над множинами», ви дізналися, що:

- об'єкти, які складають множину, називають елементами цієї множини;
- дві множини A і B називають рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B і, навпаки, кожний елемент множини B належить множині A. Якщо множини A і B рівні, то пишуть $A = B$. Множина однозначно визначається своїми елементами. Якщо множину записують за допомогою фігурних дужок, то порядок, у якому виписано її елементи, не має значення;
- найчастіше множину задають одним із двох таких способів. Перший спосіб полягає в тому, що множину задають указанням (переліком) усіх її елементів. Другий спосіб полягає в тому, що задається характеристична властивість елементів множини, тобто властивість, яка притаманна всім елементам даної множини і тільки їм;
- множину, яка не містить жодного елемента, називають порожньою множиною і позначають символом $\varnothing$;
- множину B називають підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A. Це записують так: $B \subset A$ або $A \supset B$ (читають: «множина B є підмножиною множини A» або «множина A містить множину B»);
- для ілюстрації співвідношень між множинами використовують схеми, які називають діаграмами Ейлера;
- коли $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$;
- будь-яка множина A є підмножиною самої себе, тобто $A \subset A$;
- для будь-якої множини A справедливе твердження: $\varnothing \subset A$;
- перетином множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать і множині A, і множині B. Перетин множин A і B позначають так: $A \cap B$;

- **якщо множини A і B не мають спільних елементів, то їх перетином є порожня множина, тобто $A \cap B = \varnothing$. Також $A \cap \varnothing = \varnothing$;**
- **коли $A \subset B$, то $A \cap B = A$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cap A = A$;**
- **об'єднанням множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин: або множині A, або множині B. Об'єднання множин A і B позначають так: $A \cup B$;**
- **$A \cup \varnothing = A$;**
- **коли $A \subset B$, то $A \cup B = B$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cup A = A$;**
- **якщо треба знайти об'єднання множин розв'язків рівнянь (нерівностей), то кажуть, що треба розв'язати сукупність рівнянь (нерівностей). Сукупність записують за допомогою квадратної дужки.**

§ 2 ПОВТОРЕННЯ ТА РОЗШИРЕННЯ ВІДОМОСТЕЙ ПРО ФУНКЦІЮ

У цьому параграфі ви повторите основні відомості про функцію, дізнаєтеся, що називають найбільшим і найменшим значеннями функції на множині, які функції називають парними, а які — непарними, ознайомитеся з властивостями графіків парних і непарних функцій, дізнаєтеся, яку функцію називають оборотною, які функції називають взаємно оберненими, яке взаємне розміщення графіків взаємно обернених функцій; повторите, як, використовуючи графік функції $y = f(x)$, можна побудувати графіки функцій $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$, $y = kf(x)$; повторите, які рівняння і нерівності називають рівносильними; дізнаєтеся, яке рівняння і яку нерівність називають наслідком іншого рівняння й іншої нерівності; ознайомитеся з методом інтервалів розв'язування нерівностей.

Ви навчитеся знаходити найбільше і найменше значення функції на множині, досліджувати функцію на парність; будувати графік функції $y = f(kx)$, коли відомо графік функції $y = f(x)$; знаходити функцію, обернену до даної; розв'язувати нерівності методом інтервалів.

3. Функція та її основні властивості

Нагадаємо й уточнимо основні відомості про функцію, з якими ви ознайомилися в 7–9 класах.

У повсякденному житті нам часто доводиться спостерігати процеси, у яких зміна однієї величини (незалежної змінної) призводить до зміни іншої величини (залежної змінної). Вивчення цих процесів потребує створення їх математичних моделей. Однією з таких найважливіших моделей є **функція**.

Нехай X — множина значень незалежної змінної, Y — множина значень залежної змінної. **Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y.**

Зазвичай незалежну змінну позначають буквою x, залежну — буквою y, функцію (правило) — буквою f. Кажуть, що змінна y **функціонально залежить** від змінної x. Цей факт позначають так: $y = f(x)$.

Незалежну змінну ще називають **аргументом функції.**

Множину значень, яких набуває аргумент, тобто множину X, називають **областю визначення функції** і позначають $D(f)$ або $D(y)$.

Наприклад, областю визначення функції $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ є множина $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Множину значень, яких набуває залежна змінна y, тобто множину Y, називають **областю значень функції** і позначають $E(f)$ або $E(y)$. Наприклад, областю значень функції $y = x^2 + 1$ є множина $E(y) = [1; +\infty)$.

Елементами множин $D(f)$ і $E(f)$ можуть бути об'єкти найрізноманітнішої природи.

Так, якщо кожному многокутнику поставити у відповідність його площу, то можна говорити про функцію, область визначення якої — множина многокутників, а область значень — множина додатних чисел.

Якщо кожній людині поставити у відповідність день тижня, у який вона народилася, то можна говорити про функцію, область визначення якої — множина людей, а область значень — множина днів тижня.

Коли $D(f) \subset \mathbb{R}$ і $E(f) \subset \mathbb{R}$, функцію f називають **числовою.**

Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення і правило, за яким за кожним значенням незалежної змінної з області визначення можна знайти значення залежної змінної з області значень.

Функцію можна задати одним з таких способів:

- описово;
- за допомогою формули;
- за допомогою таблиці;
- графічно.

Найчастіше функцію задають за допомогою формули. Якщо при цьому не вказано область визначення, то вважають, що областю визначення функції є область визначення виразу, який входить до формули. Наприклад, якщо функція f задана формулою $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, то її областю визначення є область визначення виразу $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, тобто проміжок $(1; +\infty)$.

Означення. Графіком числової функції f **називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції** f.

Сказане означає, що коли якась фігура є графіком функції f, то виконуються дві умови:

1) якщо x_0 — деяке значення аргументу, а $f(x_0)$ — відповідне значення функції, то точка з координатами $(x_0; f(x_0))$ належить графіку;
2) якщо $(x_0; y_0)$ — координати довільної точки графіка, то x_0 і y_0 — відповідні значення незалежної і залежної змінних функції f, тобто $y_0 = f(x_0)$.

Фігура на координатній площині може бути графіком деякої числової функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має з цією фігурою не більше однієї спільної точки. Наприклад, коло не може слугувати графіком жодної функції: тут за заданим значенням аргументу x не завжди однозначно знаходиться значення змінної y (рис. 7).

Графічний спосіб задання функції широко застосовується при дослідженні реальних процесів. Існують прилади, які видають оброблену інформацію у вигляді графіків. Так, у медицині використовують електрокардіограф. Цей прилад рисує криві, які характеризують роботу серця.

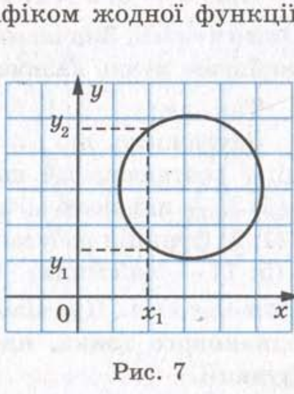
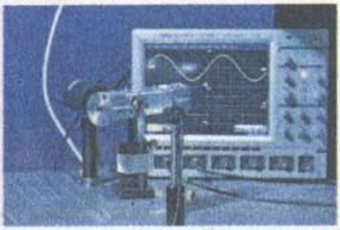
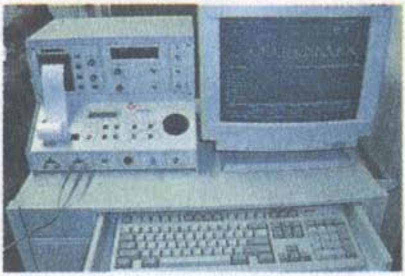


Рис. 7



Осцилограф



Електрокардіограф

На рисунку 8 зображено графік деякої функції $y = f(x)$.

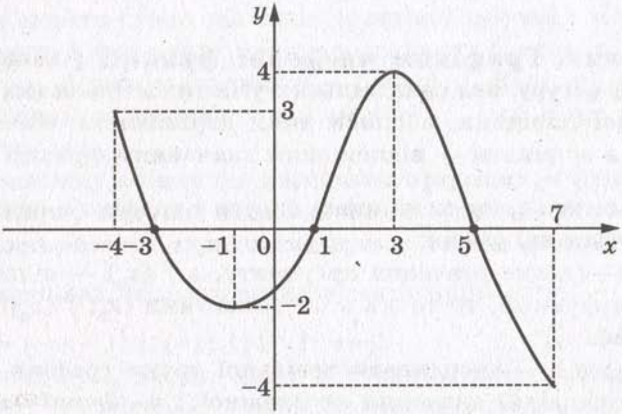


Рис. 8

Її областю визначення є проміжок $[-4; 7]$, а областю значень — проміжок $[-4; 4]$.

При $x = -3$, $x = 1$, $x = 5$ значення функції дорівнює нулю.

Означення. Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають *нулем функції*.

Так, числа -3, 1, 5 є нулями даної функції.

Зауважимо, що на проміжках $[-4; -3)$ і $(1; 5)$ графік функції f розташований над віссю абсцис, а на проміжках $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ — під віссю абсцис. Це означає, що на проміжках $[-4; -3)$ і $(1; 5)$ функція набуває додатних значень, а на проміжках $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ — від'ємних.

Означення. Проміжок, на якому функція набуває значень однакового знака, називають *проміжком знакосталості* функції.

Наприклад, проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $y = x^2$.

Зауваження. Під час пошуку проміжків знакосталості функції прийнято вказувати проміжки максимальної довжини. Наприклад, проміжок $(-2; -1)$ є проміжком знакосталості функції f (рис. 8), але до відповіді увійде проміжок $(-3; 1)$, який містить проміжок $(-2; -1)$.

Якщо переміщатися по осі абсцис від -4 до -1, то можна помітити, що графік функції йде вниз, тобто значення функції зменшуються. Кажуть, що на проміжку $[-4; -1]$ **функція спадає.** Із збільшенням x від -1 до 3 графік функції йде вгору, тобто значення функції збільшуються. Кажуть, що на проміжку $[-1; 3]$ **функція зростає.**

Означення. Функцію f називають зростаючою на множині $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Означення. Функцію f називають спадною на множині $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Часто використовують коротше формулювання.

Означення. Функцію f називають зростаючою (спадною) на множині M, якщо для будь-яких значень аргументу з цієї множини більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції.

Наприклад, функція $y = x^2 - 2x$ (рис. 9) спадає на множині $(-\infty; 1]$ і зростає на множині $[1; +\infty)$. Також кажуть, що проміжок $(-\infty; 1]$ є **проміжком спадання**, а проміжок $[1; +\infty)$ є **проміжком зростання** функції $y = x^2 - 2x$.

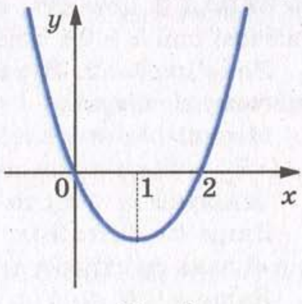


Рис. 9

У задачах на пошук проміжків зростання і спадання функції прийнято вказувати проміжки максимальної довжини.

Якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають **зростаючою.** Якщо функція спадає на всій області визначення, то її називають **спадною.**

Наприклад, на рисунку 10 зображено графік функції $y=\sqrt{x}$. Ця функція є зростаючою. На рисунку 11 зображено графік спадної функції $y = -x$.

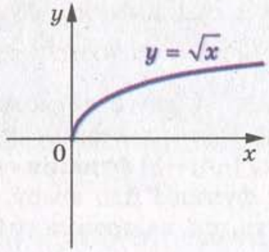


Рис. 10

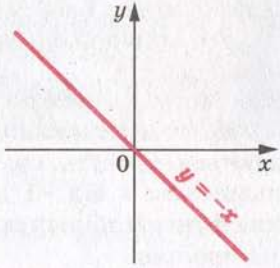


Рис. 11

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що функція $f(x)=\frac{1}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з проміжку $(0; +\infty)$, причому $x_1 < x_2$. Тоді за властивістю числових нерівностей $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$. Отже, дана функція спадає на проміжку $(0; +\infty)$.

Аналогічно доводять, що функція f спадає на проміжку $(-\infty; 0)$.

Зауважимо, що не можна стверджувати, що дана функція спадає на всій області визначення $D(f) = (-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$, тобто є спадною. Дійсно, якщо, наприклад, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, то з нерівності $x_1 < x_2$ не випливає, що $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що лінійна функція $f(x) = kx + b$ є зростаючою при $k > 0$ і спадною при $k < 0$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу, причому $x_1 < x_2$.

Маємо:

$$f(x_1) - f(x_2) = (kx_1 + b) - (kx_2 + b) = kx_1 - kx_2 = k(x_1 - x_2).$$

Оскільки $x_1 < x_2$, то $x_1 - x_2 < 0$.

Якщо $k > 0$, то $k(x_1 - x_2) < 0$, тобто $f(x_1) < f(x_2)$. Отже, при $k > 0$ дана функція є зростаючою.

Якщо $k < 0$, то $k(x_1 - x_2) > 0$, тобто $f(x_1) > f(x_2)$. Отже, при $k < 0$ дана функція є спадною.

Нехай у множині $M \subset D(f)$ існує таке число x_0, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$. У такому випадку говорять, що число $f(x_0)$ — **найбільше значення функції f на множині M**, і записують $\max\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Якщо для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$, то число $f(x_0)$ називають **найменшим значенням функції f на множині M** і записують $\min\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Розглянемо кілька прикладів.

Для $f(x) = \sqrt{x}$ і множини $M = [0; 4]$ маємо: $\min\limits_{[0;4]} f(x) = \min\limits_{[0;4]} \sqrt{x} = f(0) = 0$, $\max\limits_{[0;4]} f(x) = f(4) = 2$ (рис. 12).

Для $f(x) = |x|$ і множини $M = [-1; 2]$ маємо: $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 2$ (рис. 13).

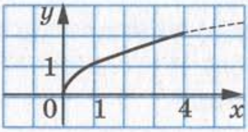


Рис. 12

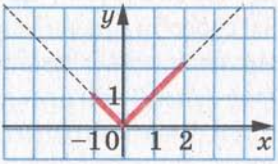


Рис. 13

Якщо c — деяке число і $f(x) = c$ для будь-якого $x \in M$, то число c є і найбільшим, і найменшим значенням функції f на множині M.

Не будь-яка функція на заданій множині $M \subset D(f)$ має найменше або найбільше значення. Так, для функції $f(x) = x^2$ маємо $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 0$. Найбільшого значення на множині $\mathbb{R}$ ця функція не має.

Функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на множині $M = (0; +\infty)$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень.

Часто для знаходження найбільшого і найменшого значень функції зручно користуватися таким очевидним фактом:

- якщо функція f зростає на проміжку $[a; b]$, то $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ (рис. 14);
- якщо функція f спадає на проміжку $[a; b]$, то $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ (рис. 15).

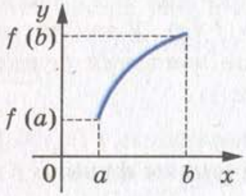


Рис. 14

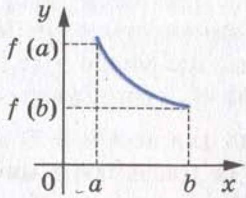


Рис. 15

1. Що таке функція?
2. Що називають аргументом функції?
3. Що називають областю визначення функції?
4. Що називають значенням функції?
5. Що називають областю значень функції?
6. Що треба вказати, щоб функція вважалася заданою?
7. Які способи задання функції ви знаєте?
8. Що вважають областю визначення функції, якщо вона задана формулою і при цьому не вказано область визначення?
9. Що називають графіком числової функції?
10. Яке значення аргументу називають нулем функції?
11. Поясніть, що називають проміжком знакосталості функції.
12. Яку функцію називають зростаючою на множині?
13. Яку функцію називають спадною на множині?
14. Яку функцію називають зростаючою?
15. Яку функцію називають спадною?
16. Поясніть, що називають найбільшим (найменшим) значенням функції на множині.
17. Як записують, що число $f(x_0)$ є найбільшим (найменшим) значенням функції f на множині M?

Вправи

46.° **Функцію задано формулою $f(x) = -3x^2 + 2x$.**

1) Знайдіть: $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f(-2)$.

2) Знайдіть значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 0; −1; −56.

3) Чи є правильною рівність: $f(-1) = 5$; $f(2) = -8$?

47.° Функцію задано формулою $f(x) = \frac{18}{x-3}$.

1) Знайдіть: $f(4)$; $f(0)$; $f(9)$; $f(-3)$.

2) Знайдіть значення x, при якому: $f(x) = 9$; $f(x) = 0{,}5$; $f(x) = -10$.

48.° Кожному натуральному числу, більшому за 15, але меншому від 25, поставили у відповідність остачу від ділення цього числа на 4.

1) Яким способом задано цю функцію?

2) Яка область значень цієї функції?

3) Задайте дану функцію таблично.

49.° Функцію задано формулою $y = \sqrt{x+2}$. Заповніть таблицю відповідних значень x і y:

x	2		−1,75	
y		5		0,4

50.° Функцію задано формулою $y = -0{,}5x + 3$. Заповніть таблицю відповідних значень x і y:

x	−4		1,2	
y		2		−5

51.° Укажіть на рисунку 16 фігуру, яка не може слугувати графіком функції.

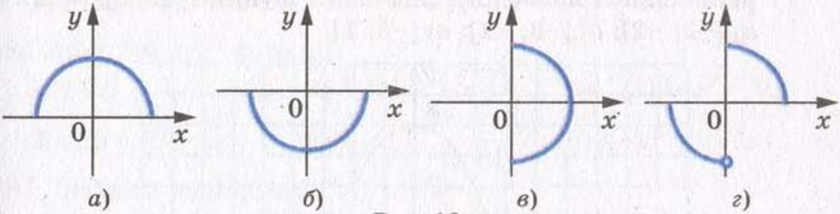


Рис. 16

52.° На рисунку 17 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 5]$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) $f(-3{,}5)$; $f(-2{,}5)$; $f(-1)$; $f(2)$;

2) значення x, при яких $f(x) = -2{,}5$; $f(x) = -2$; $f(x) = 2$;

3) область значень функції;

4) нулі функції;

5) проміжки знакосталості функції;

6) проміжки зростання і проміжки спадання функції;

7) найбільше і найменше значення функції на проміжку: *а*) $[1; 2]$; *б*) $[-2{,}5; 1]$; *в*) $[-2{,}5; 3{,}5]$.

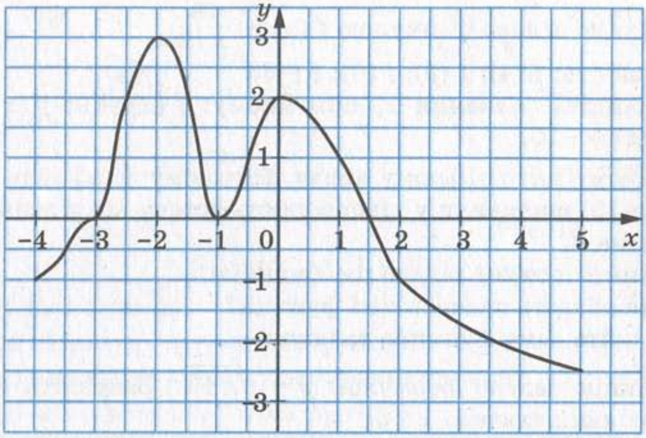


Рис. 17

53.° На рисунку 18 зображено графік функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 4]$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) $f(-4)$; $f(-1)$; $f(1)$; $f(2,5)$;
2) значення x, при яких $f(x) = -1$; $f(x) = 2$;
3) область значень функції;
4) нулі функції;
5) проміжки знакосталості функції;
6) проміжки зростання і проміжки спадання функції;
7) найбільше і найменше значення функції на проміжку: *а*) $[-3; -2]$; *б*) $[-3; -1]$; *в*) $[-3; 1]$.

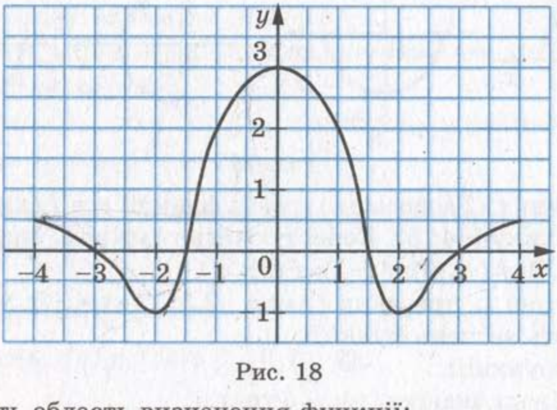


Рис. 18

54.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \frac{9}{x+4}$; 2) $f(x) = \frac{x-6}{4}$;

3) $f(x)=\sqrt{x-7}$;

4) $f(x)=\dfrac{10}{\sqrt{-x-1}}$;

5) $f(x)=\sqrt{x^2+6x-7}$;

6) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x}$;

7) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$;

8) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{12+4x-x^2}}$;

9) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$;

10) $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{-x}$.

55.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+9}$;

3) $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-5x+4}$;

4) $f(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5}$;

5) $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}$;

6) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.

56.° Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину з осями координат графіка функції:

1) $f(x)=\dfrac{1}{7}x-6$;

2) $h(x)=\dfrac{12+3x}{2x-5}$;

3) $g(x)=5-x^2$;

4) $\varphi(x)=\sqrt{x}-2$.

57.° Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину з осями координат графіка функції:

1) $f(x)=5x^2+x-4$;

2) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-8}$.

58.° Знайдіть нулі функції:

1) $f(x)=0{,}4x-8$;

2) $g(x)=28+3x-x^2$;

3) $h(x)=\sqrt{x+4}$;

4) $\varphi(x)=\dfrac{x^2+x-30}{x+5}$;

5) $f(x)=x^3-9x$;

6) $g(x)=x^2+4$.

59.° Знайдіть нулі функції:

1) $f(x)=15-\dfrac{1}{3}x$;

2) $f(x)=5x^2+4x-1$;

3) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$;

4) $f(x)=-4$;

5) $f(x)=\dfrac{5-0{,}2x}{x-2}$;

6) $f(x)=x^2+x$.

60.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y=-7x+3$;

2) $y=x^2-8x+16$;

3) $y=\dfrac{6}{4-x}$;

4) $y=-x^2-1$;

5) $y=3x^2-7x+4$;

6) $y=-2x^2+3x-1$.

61.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y=0{,}6x+12$;

2) $y=\sqrt{x}+3$;

3) $y=9x-x^2$;

4) $y=4x^2-3x-1$.

62.° Зростаючою чи спадною є функція:

1) $y = 10x - 3$; 3) $y = 9 - 2x$; 5) $y = \frac{1}{5}x$;

2) $y = -3x + 7$; 4) $y = -x$; 6) $y = 2 - 0{,}6x$?

63.° Побудуйте графік функції:

1) $y = -2x + 5$; 3) $y = 2$; 5) $y = x^2 + 2x - 3$;

2) $y = -\frac{1}{3}x$; 4) $y = -\frac{6}{x}$; 6) $y = 2x - x^2$.

Користуючись побудованим графіком, знайдіть нулі, проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

64.° Побудуйте графік функції:

1) $y = 3 - \frac{1}{4}x$; 3) $y = -x^2 + 4x - 3$;

2) $y = \frac{8}{x}$; 4) $y = 9 - x^2$.

Користуючись побудованим графіком, знайдіть нулі, проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

65.° Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на множині дійсних чисел, нулями якої є числа: 1) −3 і 4; 2) −2, 0, 3 і 5.

66.° Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на проміжку $[-6; 5]$, нулями якої є числа −6, 2 і 5.

67.° Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на проміжку $[-5; 4]$, яка:

1) зростає на проміжку $[-5; 1]$ і спадає на проміжку $[1; 4]$;

2) спадає на проміжках $[-5; -1]$ і $[2; 4]$ та зростає на проміжку $[-1; 2]$.

68.° Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на множині дійсних чисел, яка зростає на проміжках $(-\infty; -2]$ і $[0; 3]$ та спадає на проміжках $[-2; 0]$ і $[3; +\infty)$.

69.• Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x}$; 4) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3} + \sqrt{15 + 7x - 2x^2}$;

2) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$; 5) $f(x) = \sqrt{2x-8} + \sqrt{x^2 - 8x + 7}$;

3) $f(x) = \frac{\sqrt{3x-2}}{x^2 - x - 2}$; 6) $f(x) = \sqrt{|x| - x}$.

70. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{2}{x-4}$;
2) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x^2+5x+4}$;
3) $f(x)=\sqrt{-x}-\frac{3x}{\sqrt{4-x^2}}$;
4) $f(x)=\sqrt{6-x}+\frac{2}{x^2-6x}$.

71. Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = \sqrt{x} + 2$;
2) $f(x) = 7 - x^2$;
3) $f(x) = -6$;
4) $f(x) = |x| - 3$;
5) $f(x) = \sqrt{-x^2}$;
6) $f(x) = \sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$;
7) $f(x) = x^2 + 4x + 8$;
8) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$.

72. Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = 4 - \sqrt{x}$;
2) $f(x) = x^2 - 6x$.

73. Задайте формулою яку-небудь функцію, областю визначення якої є:

1) множина дійсних чисел, крім чисел -2 і 3;
2) множина дійсних чисел, не більших за 3;
3) множина дійсних чисел, не менших від -4, крім числа 5;
4) множина, яка складається з одного числа -1.

74. Задайте формулою яку-небудь функцію, областю визначення якої є:

1) множина дійсних чисел, крім чисел -1, 0 і 1;
2) множина дійсних чисел, менших від 7;
3) множина дійсних чисел, не менших від 2, крім чисел 5 і 6.

75. Чи є правильним твердження:

1) будь-яка пряма, паралельна осі ординат, перетинає графік будь-якої функції в одній точці;
2) пряма, паралельна осі абсцис, може не перетинати графік функції;
3) пряма, паралельна осі ординат, не може перетинати графік функції більше ніж в одній точці;
4) існують функції, графік яких симетричний відносно осі ординат;
5) існують функції, графік яких симетричний відносно осі абсцис;
6) існують функції, графік яких симетричний відносно початку координат?

76.° Дано функцію $f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ якщо } x<-1, \\ x^2-1, \text{ якщо } x\geqslant -1. \end{cases}$

1) Знайдіть $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$.

2) Побудуйте графік даної функції.

3) Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання.

77.° Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\begin{cases} x+6, \text{ якщо } x<-2, \\ x^2-x-2, \text{ якщо } -2\leqslant x\leqslant 2, \\ 2-x, \text{ якщо } x>2; \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, \text{ якщо } x\leqslant 0, \\ x^2-2x, \text{ якщо } x>0. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання.

78.° Побудуйте графік функції $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{8}{x}, \text{ якщо } x<-2, \\ 2x^2-4, \text{ якщо } -2\leqslant x\leqslant 2, \\ \dfrac{8}{x}, \text{ якщо } x>2. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання.

79.° На проміжку [2; 5] знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $f(x) = -\dfrac{10}{x}$; 2) $f(x) = \dfrac{10}{x}$.

80.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = -x^2 + 6x - 7$ на проміжку:

1) [1; 2]; 2) [1; 4]; 3) [4; 5].

81.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^2 + 2x - 8$ на проміжку:

1) [−5; −2]; 2) [−5; 1]; 3) [0; 3].

82.° При яких значеннях a має два нулі функція:

1) $y = x^2 + (a - 2)x + 25$; 2) $y = 2x^2 + 2(a - 6)x + a - 2$?

83.$^{\bullet}$ При яких значеннях a має не більше одного нуля функція:

1) $y = x^2 + (a-1)x + 1 - a - a^2$; 2) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 5ax - 9a^2 - 8a$?

84.$^{\bullet}$ Доведіть, що функція $y = \frac{k}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ при $k > 0$ і зростає на кожному з цих проміжків при $k < 0$.

85.$^{\bullet}$ Функція $y = f(x)$ є спадною. Зростаючою чи спадною є функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $y = 3f(x)$; 2) $y = \frac{1}{3}f(x)$; 3) $y = -f(x)$?

86.$^{\bullet}$ Функція $y = f(x)$ є зростаючою. Зростаючою чи спадною є функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $y = \frac{1}{2}f(x)$; 2) $y = -2f(x)$?

87.$^{\bullet\bullet}$ При якому найменшому цілому значенні m функція $y = 7mx + 6 - 20x$ є зростаючою?

88.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях k функція $y = kx - 2k + 3 + 6x$ є спадною?

89.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях b функція $y = 3x^2 - bx + 1$ зростає на множині $[3; +\infty)$?

90.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях b функція $y = bx - 4x^2$ спадає на множині $[-1; +\infty)$?

91.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях c найбільше значення функції $y = -0{,}6x^2 + 18x + c$ дорівнює 2?

92.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях c найменше значення функції $y = 2x^2 - 12x + c$ дорівнює -3?

93.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть область визначення і побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$; 4) $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$;

2) $f(x) = \frac{12x + 48}{x^2 + 4x}$; 5) $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x + 2} - \frac{x^2 + 4x}{x}$;

3) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 16}$; 6) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$.

94.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть область визначення і побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} - \frac{x^2 - 1}{x - 1}$; 3) $y = \frac{6x - 18}{x^2 - 3x}$;

2) $f(x) = \frac{2x^2 - x^3}{x}$; 4) $y = \frac{x^4 + 4x^2 - 5}{x^2 - 1}$.

95.•• Доведіть, що функція:

1) $f(x) = \frac{4}{x+2}$ спадає на проміжку $(-2; +\infty)$;

2) $f(x) = -x^2 - 8x + 10$ зростає на проміжку $(-\infty; -4]$.

96.•• Доведіть, що функція:

1) $f(x) = \frac{5}{6-x}$ зростає на проміжку $(-\infty; 6)$;

2) $f(x) = x^2 + 2x$ спадає на проміжку $(-\infty; -1]$.

97.•• Доведіть, що функція $f(x) = \sqrt{x}$ є зростаючою.

98.•• Функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел, є зростаючою і набуває лише додатних значень. Доведіть, що:

1) функція $y = f^2(x)$ зростає на множині $\mathbb{R}$;

2) функція $y = \frac{1}{f(x)}$ спадає на множині $\mathbb{R}$;

3) функція $y = \sqrt{f(x)}$ зростає на множині $\mathbb{R}$.

99.•• Функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел, є зростаючою і набуває лише від'ємних значень. Доведіть, що:

1) функція $y = f^2(x)$ спадає на множині $\mathbb{R}$;

2) функція $y = \frac{1}{f(x)}$ спадає на множині $\mathbb{R}$.

100.•• Функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ зростають на деякій множині M. Доведіть, що функція $y = f(x) + g(x)$ зростає на множині M.

101.•• Чи можна стверджувати, що коли функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ зростають на множині M, то функція $y = f(x) - g(x)$ теж зростає на множині M?

102.•• Функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ спадають на деякій множині M і набувають на цій множині від'ємних значень. Доведіть, що функція $y = f(x)\,g(x)$ зростає на множині M.

103.•• Наведіть приклад двох зростаючих на множині M функцій, добуток яких не є зростаючою на цій множині функцією.

104.•• Сума двох чисел дорівнює 8. Знайдіть:

1) якого найбільшого значення може набувати добуток цих чисел;

2) якого найменшого значення може набувати сума квадратів цих чисел.

105.•• Ділянку землі прямокутної форми обгородили парканом завдовжки 200 м. Яку найбільшу площу може мати ця ділянка?

106.•• Доведіть, що функція $f(x) = x^2$ не є ні зростаючою, ні спадною на множині $\mathbb{R}$.

Вправи для повторення

107. Обчисліть значення виразу:

1) $(7^3)^2 \cdot 7^{-8}$; 2) $\frac{36^{-3} \cdot 6^3}{6^{-5}}$; 3) $\frac{625^{-2} \cdot 5^5}{25^{-3}}$; 4) $\frac{0{,}125^3 \cdot 32^2}{0{,}5^{-2}}$.

108. Знайдіть значення виразу:

1) $18a^2$, якщо $a = -\frac{1}{6}$; 3) $16 + b^2$, якщо $b = -2$;

2) $(18a)^2$, якщо $a = -\frac{1}{6}$; 4) $(16 + b)^2$, якщо $b = -2$.

109. Доведіть, що при додатних значеннях a і b є правильною нерівність $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$.

110. Не виконуючи обчислення, порівняйте:

1) $(-5{,}8)^2$ і 0; 3) $(-12)^7$ і $(-6)^4$; 5) $(-17)^6$ і 17^6;

2) 0 і $(-3{,}7)^3$; 4) -8^8 і $(-8)^8$; 6) $(-34)^5$ і $(-39)^5$.

4. Парні і непарні функції

Означення. **Функцію f називають парною, якщо для будь-якого x з області визначення $f(-x) = f(x)$.**

Означення. **Функцію f називають непарною, якщо для будь-якого x з області визначення $f(-x) = -f(x)$.**

Очевидно, що функція $y = x^2$ є парною, а функція $y = x^3$ — непарною.

Виконання рівності $f(-x) = f(x)$ або рівності $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого $x \in D(f)$ означає, що область визначення функції f має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $-x_0 \in D(f)$. Таку множину називають **симетричною відносно початку координат.**

З вищенаведених означень випливає, що коли область визначення функції не є симетричною відносно початку координат, то ця функція не може бути парною (непарною).

Наприклад, областю визначення функції $y = \frac{1}{x-1}$ є множина $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, яка не є симетричною відносно початку координат. Тому ця функція не є ні парною, ні непарною.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що функція $f(x) = x^3 - x$ є непарною.

Розв'язання. Оскільки $D(f) = \mathbb{R}$, то область визначення функції f симетрична відносно початку координат.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$.

Отже, функція f є непарною.

ПРИКЛАД 2 Дослідіть на парність функцію

$$f(x) = \frac{|x-2|}{1+x} + \frac{|x+2|}{1-x}.$$

Розв'язання. Маємо: $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Отже, область визначення функції f симетрична відносно початку координат.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо:

$$f(-x) = \frac{|-x-2|}{1-x} + \frac{|-x+2|}{1-(-x)} = \frac{|x+2|}{1-x} + \frac{|x-2|}{1+x} = f(x).$$

Отже, функція f є парною.

Теорема 4.1. ***Вісь ординат є віссю симетрії графіка парної функції.***

Доведення. Для доведення теореми достатньо показати, що коли точка $M(a; b)$ належить графіку парної функції, то точка $M_1(-a; b)$ також належить її графіку.

Якщо точка $M(a; b)$ належить графіку функції f, то $f(a) = b$. Оскільки функція f є парною, то $f(-a) = f(a) = b$. Це означає, що точка $M_1(-a; b)$ також належить графіку функції f (рис. 19). ▲

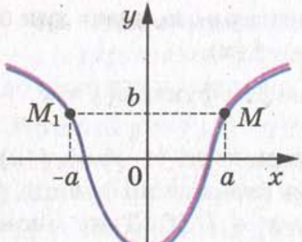


Рис. 19

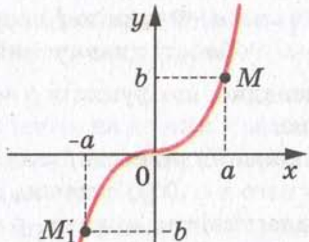


Рис. 20

Теорема 4.2. ***Початок координат є центром симетрії графіка непарної функції.***

Доведіть цю теорему самостійно (рис. 20).

Очевидно, що функція $y = 0$, у якої $D(y) = \mathbb{R}$, одночасно є і парною, і непарною. Можна показати, що інших функцій з областю визначення $\mathbb{R}$, які є одночасно і парними, і непарними, не існує.

1. Яку функцію називають парною?
2. Яку функцію називають непарною?
3. Яку множину називають симетричною відносно початку координат?
4. Сформулюйте властивість графіка парної функції.
5. Сформулюйте властивість графіка непарної функції.

Вправи

111.° Відомо, що $f(7) = -16$. Знайдіть $f(-7)$, якщо функція f є: 1) парною; 2) непарною.

112.° Функція f є парною. Чи може виконуватися рівність:

1) $f(2) - f(-2) = 1$; 2) $f(5)\,f(-5) = -2$; 3) $\frac{f(1)}{f(-1)} = 0$?

113.° Функція f є парною. Чи обов'язково виконується рівність $\frac{f(1)}{f(-1)} = 1$?

114.° Функція f є непарною. Чи може виконуватися рівність:

1) $f(1) + f(-1) = 1$; 2) $f(2)\,f(-2) = 3$; 3) $\frac{f(-2)}{f(2)} = 0$?

115.° Чи є парною функція, задана формулою $y = x^2$, якщо її областю визначення є множина:

1) $[-9; 9]$; 2) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; 3) $[-6; 6)$; 4) $(-\infty; 4]$?

116.° Доведіть, що є парною функція:

1) $f(x) = 171$;
2) $f(x) = -5x^4$;
3) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$;
4) $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}$;
5) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}$;
6) $f(x) = (x+2)\,|x-4| - (x-2)\,|x+4|$.

117.° Доведіть, що є парною функція:

1) $f(x) = x^n$, де $n \in \mathbb{N}$ і n — парне;
2) $f(x) = -3x^2 + |x| - 1$;
3) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+5} + \sqrt{x^2+3x+5}$;
4) $f(x) = \sqrt{5-x^2}$;
5) $f(x) = \frac{|5x-2| + |5x+2|}{x^2-1}$;
6) $f(x) = \frac{1}{(3x-1)^7} - \frac{1}{(3x+1)^7}$.

118.° Доведіть, що є непарною функція:

1) $f(x) = 4x^7$;
2) $f(x) = 2x - 3x^5$;
3) $f(x) = x\,|x|$;
4) $f(x) = (5 - x)^5 - (5 + x)^5$;
5) $g(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}$;
6) $g(x) = \frac{3x+2}{x^2-x+1} + \frac{3x-2}{x^2+x+1}$.

119.° Доведіть, що є непарною функція:

1) $f(x) = x - \frac{1}{x}$;
2) $f(x) = (x^3 + x)(x^4 - x^2)$;
3) $g(x) = x^n$, де $n \in \mathbb{N}$ і n — непарне;
4) $g(x) = \frac{|x|}{x}$;
5) $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}}$;
6) $g(x) = \frac{|4x-1| - |4x+1|}{x^4-1}$.

120.° Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = \frac{x}{x}$;
2) $f(x) = \frac{x-1}{x-1}$;
3) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-1}$;
4) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$;
5) $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$;
6) $f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^3-x}$.

121.° Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = x^2 + 2x - 4$;
2) $f(x) = \frac{6x^3}{x^2-9}$;
3) $f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$;
4) $f(x) = \frac{1}{x^3-2x}$;
5) $f(x) = \frac{x^2+6x}{2x+12}$;
6) $f(x) = |x-1| - 2|x| + |x+1|$.

122.° Парною чи непарною є функція, графік якої зображено на рисунку 21?

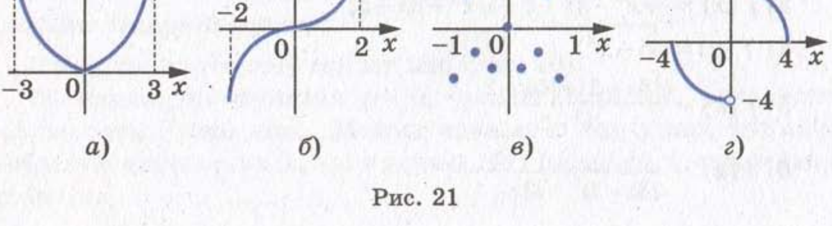


Рис. 21

123.• На рисунку 22 зображено частину графіка функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-5; 5]$. Добудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

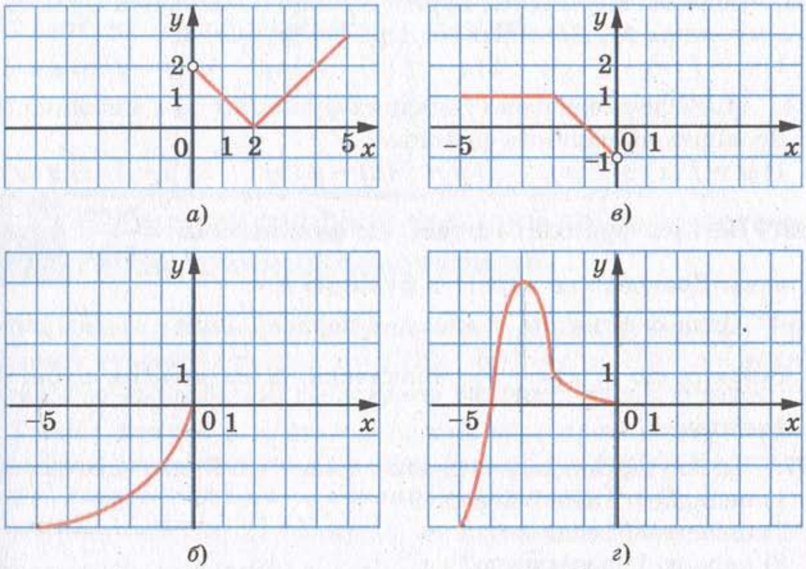


Рис. 22

124.• Ламана $ABCD$, де $A(0; 0)$, $B(2; -2)$, $C(3; 4)$, $D(6; 1)$, є частиною графіка функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-6; 6]$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

125.• Про функцію f, яка визначена на множині $\mathbb{R}$, відомо, що $f(x) = x^2 - 4x$ при $x \geqslant 0$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

126.• Про функцію f, яка визначена на множині $\mathbb{R}$, відомо, що $f(x) = -0{,}5x^2$ при $0 \leqslant x \leqslant 2$ і $f(x) = -\dfrac{4}{x}$ при $x > 2$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

127.•• Непарна функція f така, що $0 \in D(f)$. Знайдіть $f(0)$.

128.•• Непарна функція f має 4 нулі. Доведіть, що $0 \notin D(f)$.

129.•• Непарна функція f має 7 нулів. Знайдіть $f(0)$.

130.•• Парна функція f має 7 нулів. Знайдіть $f(0)$.

131.•• Область визначення функції f симетрична відносно початку координат. Доведіть, що функція $g(x) = f(x) + f(-x)$ є парною, а функція $h(x) = f(x) - f(-x)$ є непарною.

132.•• Областю визначення парних функцій f і g є множина M. Дослідіть на парність функцію:
1) $y = f(x) + g(x)$; 2) $y = f(x) - g(x)$; 3) $y = f(x)\,g(x)$.

133.•• Областю визначення парної функції f і непарної функції g є множина M. Дослідіть на парність функцію:
1) $y = f(x) + g(x)$; 2) $y = f(x) - g(x)$; 3) $y = f(x)\,g(x)$.

134.•• Областю визначення непарних функцій f і g є множина M. Дослідіть на парність функцію:
1) $y = f(x) + g(x)$; 2) $y = f(x) - g(x)$; 3) $y = f(x)\,g(x)$.

135.•• Непарні функції f і g такі, що функція $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ визначена. Дослідіть на парність функцію h.

136.•• Одна з функцій, f або g, є парною, інша — непарною. Відомо, що $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ визначена. Дослідіть на парність функцію h.

137.•• Чи існує функція, визначена на множині $\mathbb{R}$, яка одночасно є:
1) непарною і зростаючою;
2) непарною і спадною;
3) парною і зростаючою?

138.•• Парна функція f, визначена на множині $\mathbb{R}$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Визначте, зростаючою чи спадною є функція f на проміжку $(-\infty; 0]$.

139.•• Непарна функція f, визначена на множині $\mathbb{R}$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Визначте, зростаючою чи спадною є функція f на проміжку $(-\infty; 0]$.

140.•• Функція f є парною і $\min\limits_{[1;3]} f(x) = 2$, $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 5$. Знайдіть $\min\limits_{[-3;-1]} f(x)$, $\max\limits_{[-3;-1]} f(x)$.

141.•• Функція f є непарною і $\min\limits_{[2;5]} f(x) = 1$, $\max\limits_{[2;5]} f(x) = 3$. Знайдіть $\min\limits_{[-5;-2]} f(x)$, $\max\limits_{[-5;-2]} f(x)$.

Вправи для повторення

142. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y - 7x = 3, \\ x^2 + 6xy - y^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 100, \\ y + x = 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y + xy = -15, \\ x^2y + xy^2 = -54. \end{cases}$

143. З двох селищ, відстань між якими дорівнює 66 км, виїхали одночасно назустріч один одному два велосипедисти і зустрілися через 3 год. Знайдіть швидкість руху кожного велосипедиста, якщо один з них витрачає на весь шлях з одного селища в інше на 1 год 6 хв більше за другого.

5. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

У 9 класі ви навчилися за допомогою графіка функції $y = f(x)$ будувати графіки функцій $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$, $y = kf(x)$. Нагадаємо правила, які дозволяють виконати такі побудови.

Графік функції $y = f(x) + b$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ на b одиниць угору, якщо $b > 0$, і на $-b$ одиниць униз, якщо $b < 0$.

На рисунках 23, 24 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = x^2 - 4$ і $y=\sqrt{x}+3$.

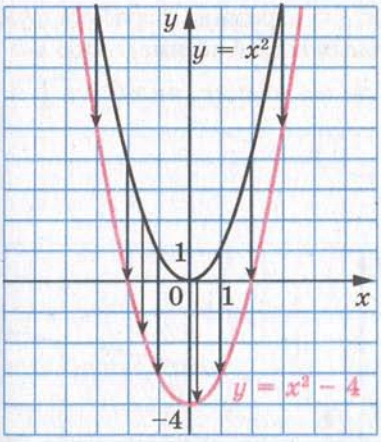


Рис. 23

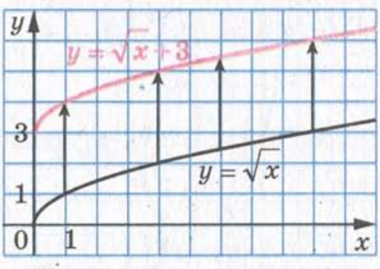


Рис. 24

Графік функції $y = f(x + a)$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ на a одиниць уліво, якщо $a > 0$, і на $-a$ одиниць управо, якщо $a < 0$.

На рисунках 25, 26 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = (x - 2)^2$ і $y = \sqrt{x+3}$.

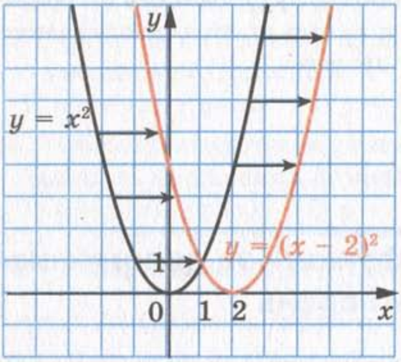


Рис. 25

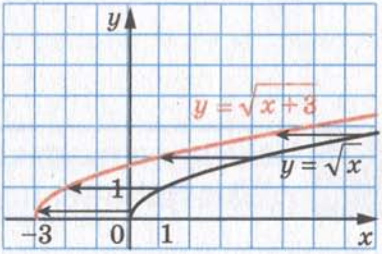


Рис. 26

Графік функції $y = kf(x)$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою абсцисою і ординатою, помноженою на k.

На рисунках 27, 28, 29 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = 2x^2$, $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}$, $y=-\frac{1}{2}\sqrt{x}$ і $y=-2\sqrt{x}$.

Кажуть, що графік функції $y = kf(x)$ отримано з графіка функції $y = f(x)$ у результаті **розтягу в k разів від осі абсцис**, якщо $k > 1$, або в результаті **стиску в $\frac{1}{k}$ разів до осі абсцис**, якщо $0 < k < 1$.

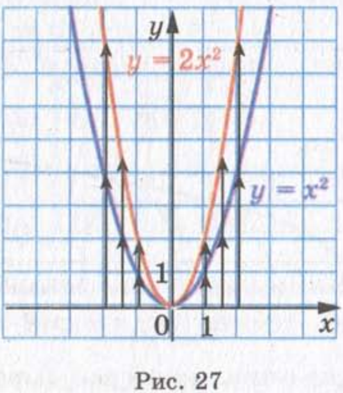


Рис. 27

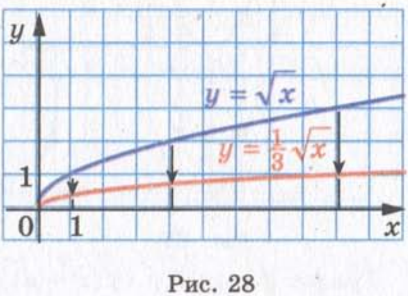


Рис. 28

Покажемо, як можна побудувати графік функції $y = f(kx)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$.

Розглянемо випадок, коли $k > 0$. Якщо точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ належить графіку функції $y = f(kx)$. Справді, при $x = \frac{x_0}{k}$ маємо:

$$f(kx) = f\left(k \cdot \frac{x_0}{k}\right) = f(x_0) = y_0.$$

Отже, кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = f(x)$ відповідає єдина точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ графіка функції $y = f(kx)$. Аналогічно можна показати (зробіть це самостійно), що кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = f(kx)$ є відповідною єдиній точці $(kx_1; y_1)$ графіка функції $y = f(x)$.

Тому ***графік функції $y = f(kx)$, де $k > 0$, можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою ординатою і абсцисою, поділеною на k.***

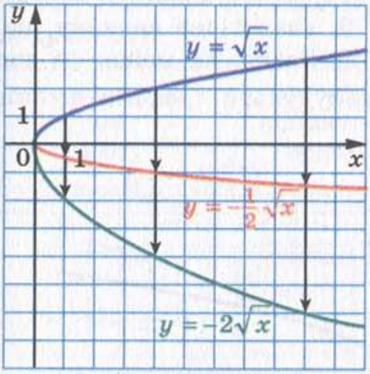


Рис. 29

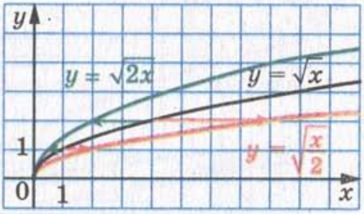


Рис. 30

На рисунку 30 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = \sqrt{2x}$ і $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$.

Говорять, що графік функції $y = f(kx)$ отримано з графіка функції $y = f(x)$ у результаті **стиску в k разів до осі ординат**, якщо $k > 1$, або в результаті **розтягу в $\frac{1}{k}$ разів від осі ординат**, якщо $0 < k < 1$.

Покажемо, як побудувати графік функції $y = f(-x)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$.

Зазначимо, що коли точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $(-x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(-x)$. Дійсно, $f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$.

Тоді всі точки графіка функції $y = f(-x)$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку, симетричну їй відносно осі ординат, тобто відобразивши графік функції $y = f(x)$ симетрично відносно осі ординат.

На рисунку 31 показано, як за допомогою графіка функції $y=\sqrt{x}$ побудовано графік функції $y=\sqrt{-x}$.

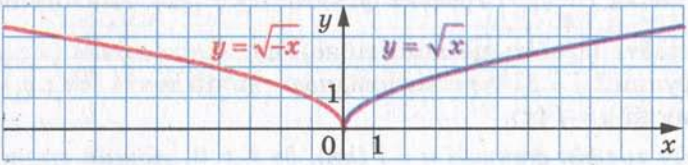


Рис. 31

З огляду на сказане стає зрозумілим, що правило побудови графіка функції $y = f(kx)$, де $k < 0$, аналогічне випадку, коли $k > 0$. Наприклад, на рисунку 32 показано, як можна за допомогою графіка функції $y=\sqrt{x}$ побудувати графіки функцій $y=\sqrt{-3x}$ і $y=\sqrt{-\frac{x}{2}}$.

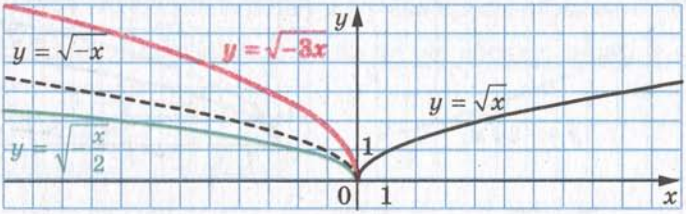


Рис. 32

ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік функції $y=\sqrt{3x-2}$.

Розв'язання. Схема побудови має такий вигляд (рис. 33):

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{управо на 2 од.}} y=\sqrt{x-2} \xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}} y=\sqrt{3x-2}$$

Якщо задану функцію подати у вигляді $y=\sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}$, то побудову графіка можна вести і за такою схемою (рис. 34):

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}} y=\sqrt{3x}\xrightarrow{\text{управо на } \frac{2}{3} \text{ од.}} y=\sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}$$

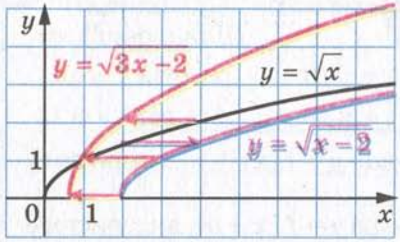


Рис. 33

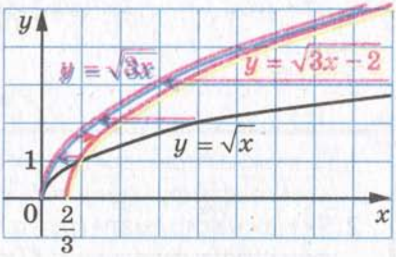


Рис. 34

ПРИКЛАД 2 Побудуйте графік функції $y=\sqrt{1-3x}$.

Розв'язання. Побудову графіка можна вести за такою схемою (рис. 35):

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{уліво на 1 од.}} y=\sqrt{x+1}\xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y=\sqrt{-x+1}\xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}} y=\sqrt{-3x+1}$$

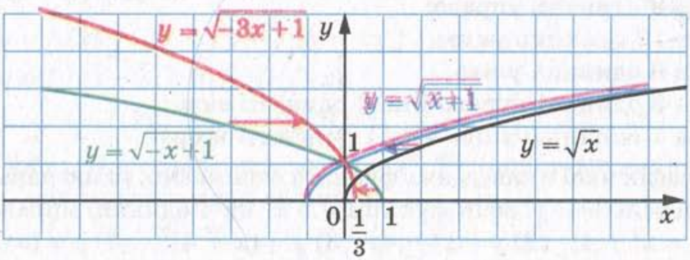


Рис. 35

Зауважимо, що можливі й інші схеми розв'язування цієї задачі, наприклад, так (рис. 36):

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{уліво на 1 од.}} y=\sqrt{x+1}\xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}} y=\sqrt{3x+1}\xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y=\sqrt{-3x+1}$$

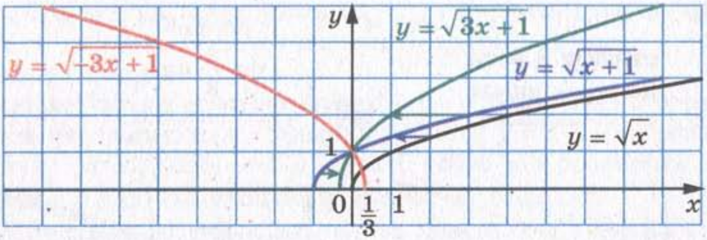


Рис. 36

1. Як можна отримати графік функції $y = f(x) + b$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
2. Як можна отримати графік функції $y = f(x + a)$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
3. Як можна отримати графік функції $y = kf(x)$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
4. Як можна отримати графік функції $y = f(kx)$, де $k \neq 0$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?

Вправи

144.° Графік якої функції отримаємо, якщо графік функції $y = x^2$ паралельно перенесемо:
1) на 5 одиниць угору;
2) на 8 одиниць управо;
3) на 10 одиниць униз;
4) на 6 одиниць уліво;
5) на 3 одиниці вправо і на 2 одиниці вниз;
6) на 1 одиницю вліво і на 1 одиницю вгору?

145.° Графік якої з наведених функцій отримаємо, якщо паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ на 4 одиниці вправо:
1) $y = x^2 + 4$; 2) $y = x^2 - 4$; 3) $y = (x + 4)^2$; 4) $y = (x - 4)^2$?

146.° Графік якої з наведених функцій отримаємо, якщо паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ на 5 одиниць угору:
1) $y = x^2 + 5$; 2) $y = x^2 - 5$; 3) $y = (x + 5)^2$; 4) $y = (x - 5)^2$?

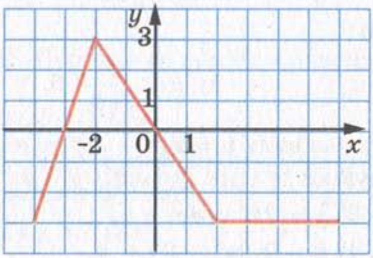
147.° Як треба паралельно перенести графік функції $y=\frac{5}{x}$, щоб отримати графік функції $y=\frac{5}{x-8}$:
1) на 8 одиниць угору;
2) на 8 одиниць униз;
3) на 8 одиниць управо;
4) на 8 одиниць уліво?

148.° Як треба паралельно перенести графік функції $y=\sqrt{x}$, щоб отримати графік функції $y=\sqrt{x+3}$:

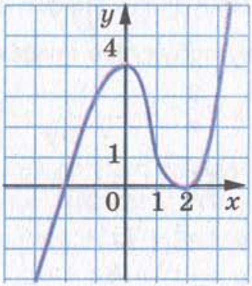
1) на 3 одиниці вгору;
2) на 3 одиниці вниз;
3) на 3 одиниці вправо;
4) на 3 одиниці вліво?

149.° На рисунку 37 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = f(x) - 2$;
2) $y = f(x) + 4$;
3) $y = f(x - 3)$;
4) $y = f(x + 1)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = 3 - f(x)$.



а)



б)

Рис. 37

150.° На рисунку 38 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = f(x) + 5$;
2) $y = f(x) - 3$;
3) $y = f(x + 1)$;
4) $y = f(x - 2)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = -f(x) - 1$.

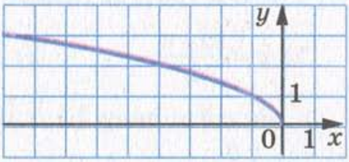


Рис. 38

151.° Побудуйте графік функції $y = x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 - 3$;
2) $y = x^2 + 4$;
3) $y = (x - 5)^2$;
4) $y = (x + 2)^2$;
5) $y = (x - 1)^2 + 2$;
6) $y = (x + 3)^2 - 2$.

152.° Побудуйте графік функції $y = -x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = -x^2 + 1$;
2) $y = -x^2 - 2$;
3) $y = -(x - 2)^2$;
4) $y = -(x + 4)^2$;
5) $y = -(x + 1)^2 - 1$;
6) $y = -(x - 3)^2 + 4$.

153.° Побудуйте графік функції $y=-\frac{6}{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y=-\frac{6}{x}+5$; 2) $y=-\frac{6}{x-2}$; 3) $y=-\frac{6}{x+4}-2$.

154.° Побудуйте графік функції $y=\sqrt{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{x}-4$; 2) $y=\sqrt{x-4}$; 3) $y=\sqrt{x-1}+3$.

155.° Побудуйте графік функції $y=\frac{2}{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{2}{x}-1$; 2) $y=\frac{2}{x+1}$; 3) $y=\frac{2}{x-3}+6$.

156.° Задайте дану функцію формулою виду $y = a(x - m)^2 + n$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 4x + 6$; 3) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
2) $y = -x^2 + 6x - 6$; 4) $y = 0{,}2x^2 - 2x - 4$.

157.° Задайте дану функцію формулою виду $y=\frac{k}{x+a}+b$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y=\frac{k}{x}$:

1) $y=\frac{3x+8}{x}$; 2) $y=\frac{2x+14}{x+3}$; 3) $y=\frac{-2x}{x-1}$.

158.° Задайте дану функцію формулою виду $y = \frac{k}{x+a} + b$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y=\frac{k}{x}$:

1) $y=\frac{4x+14}{x+1}$; 2) $y=\frac{7-x}{x-2}$.

159.° На рисунку 39 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{1}{2}f(x)$; 2) $y = -3f(x)$.

160.° На рисунку 40 зображено графік функції $y = g(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2g(x)$; 2) $y=-\frac{1}{4}g(x)$.

161.° Побудуйте графік функції:

1) $y=0{,}5\sqrt{x}$; 2) $y=-2\sqrt{x-2}$.

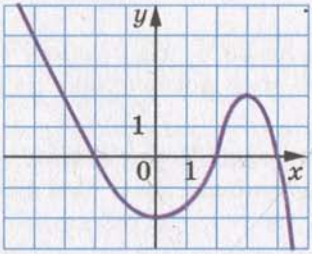


Рис. 39

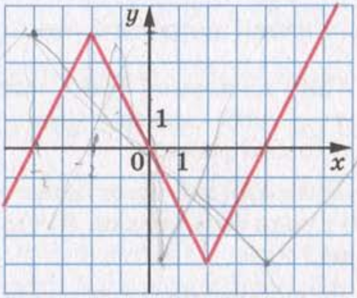


Рис. 40

162.° Побудуйте графік функції:

1) $y = 3\sqrt{x}$; 2) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x+4}$.

163.° На рисунку 39 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = f(2x)$; 2) $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$.

164.° На рисунку 40 зображено графік функції $y = g(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = g\left(\frac{x}{2}\right)$; 2) $y = g(4x)$.

165.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$; 2) $y = \sqrt{-2x}$.

166.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{3x}$; 2) $y = \sqrt{\frac{x}{4}}$; 3) $y = \sqrt{-\frac{x}{3}}$.

167.° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x + 1 = \sqrt{x+7}$; 2) $2\sqrt{x} = 3 - x$; 3) $\frac{2}{x-2} = x - 3$.

168.° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{3-x} = 0{,}5x$; 2) $\sqrt{x} + 2 = \frac{12}{x-1}$.

169.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{2x-1}$; 2) $y = \sqrt{3-4x}$; 3) $y = \sqrt{\frac{1}{2}x+2}$.

170.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{3x+1}$; 2) $y = \sqrt{5-2x}$.

Вправи для повторення

171. Ціну на деякий товар підвищили на 25 %. На скільки відсотків треба знизити нову ціну, щоб вона повернулася до початкового рівня?

172. Було 200 г 8-відсоткового розчину солі. Через деякий час 40 г води випарували. Яким став відсотковий вміст солі в розчині?

173. До сплаву міді і цинку, який містив 12 кг міді, додали 2 кг цинку, після чого відсотковий вміст цинку у сплаві збільшився на $8\frac{1}{3}$ %. Скільки кілограмів цинку було в сплаві спочатку?

Готуємося до вивчення нової теми

174. Виразіть:

1) з рівності $y=\frac{x+7}{3}$ змінну x через змінну y;

2) з рівності $y=\frac{10}{x-2}+6$ змінну x через змінну y;

3) з рівності $y=\frac{\sqrt{x+2}}{5}-1$ змінну x через змінну y;

4) з рівності $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ змінну b через змінні a і c.

Як побудувати графіки функцій $y = f(|x|)$ і $y = |f(x)|$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$

Скориставшись означенням модуля, запишемо:

$$y=f(|x|)=\begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ f(-x), & \text{якщо } x<0. \end{cases}$$

Звідси можна зробити висновок, що графік функції $y = f(|x|)$ при $x \geqslant 0$ збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при $x < 0$ — з графіком функції $y = f(-x)$.

Тоді побудову графіка функції $y = f(|x|)$ можна проводити за такою схемою:

1) побудувати ту частину графіка функції $y = f(x)$, усі точки якої мають невід'ємні абсциси;
2) побудувати ту частину графіка функції $y = f(-x)$, усі точки якої мають від'ємні абсциси.

Об'єднання цих двох частин і складатиме графік функції $y = f(|x|)$.

Фактично це означає, що слід побудувати графік функції $y = f(x)$ для $x \geqslant 0$, а потім відобразити його симетрично відносно осі ординат.

На рисунку 41 показано, як за допомогою графіка функції $y = (x-2)^2$ побудовано графік функції $y = (|x|-2)^2$.

Для функції $y = |f(x)|$ можна записати:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що графік функції $y = |f(x)|$ при всіх x, для яких $f(x) \geqslant 0$, збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при всіх x, для яких $f(x) < 0$, — з графіком функції $y = -f(x)$.

Тоді будувати графік функції $y = |f(x)|$ можна за такою схемою:

1) усі точки графіка функції $y = f(x)$ з невід'ємними ординатами залишити незмінними;

2) точки з від'ємними ординатами замінити на точки з тими самими абсцисами, але протилежними ординатами, тобто частину графіка $y = f(x)$, розміщену нижче від осі абсцис, відобразити симетрично відносно осі абсцис.

На рисунку 42 показано, як за допомогою графіка функції $y = (x-1)^2 - 2$ побудовано графік функції $y = |(x-1)^2 - 2|$.

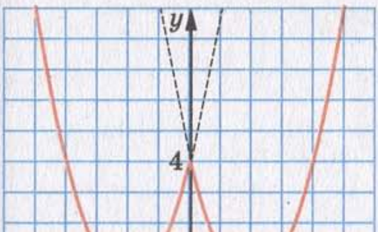


Рис. 41

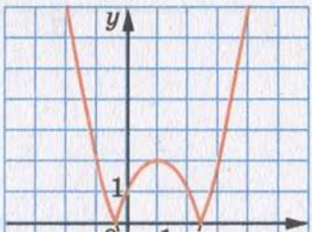


Рис. 42

ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік функції $y=\left|\sqrt{|x|+1}-2\right|$.

Розв'язання. Алгоритм побудови шуканого графіка можна подати у вигляді такої схеми (рис. 43):

$$y=\sqrt{x+1}\xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y=\sqrt{|x|+1}\xrightarrow{\text{униз на 2 од.}} y=\sqrt{|x|+1}-2\xrightarrow{\text{симетрія відносно осі абсцис}} y=\left|\sqrt{|x|+1}-2\right|$$

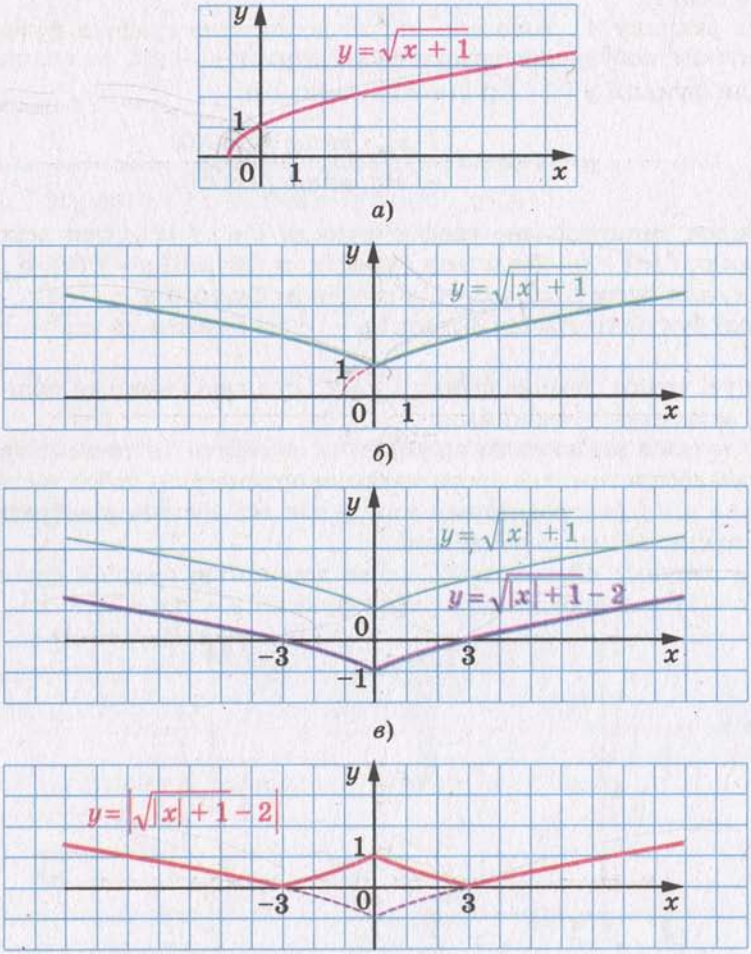


Рис. 43

ПРИКЛАД 2 Побудуйте графік функції $y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$.

Розв'язання. Побудову шуканого графіка можна подати за такою схемою (рис. 44):

$$y = \sqrt{|x|} \xrightarrow{\text{уліво на 1 од.}} y = \sqrt{|x+1|} \xrightarrow{\text{униз на 1 од.}} y = \sqrt{|x+1|} - 1 \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі абсцис}} y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$$

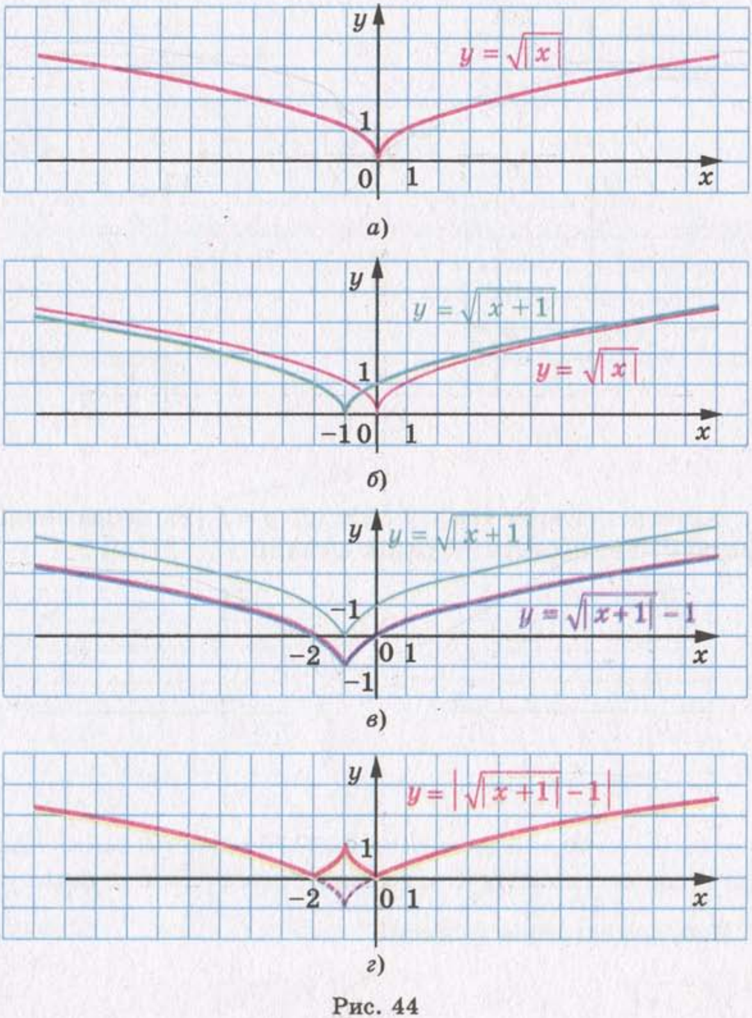


Рис. 44

Вправи

175. Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 45, побудуйте графік функції:

1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

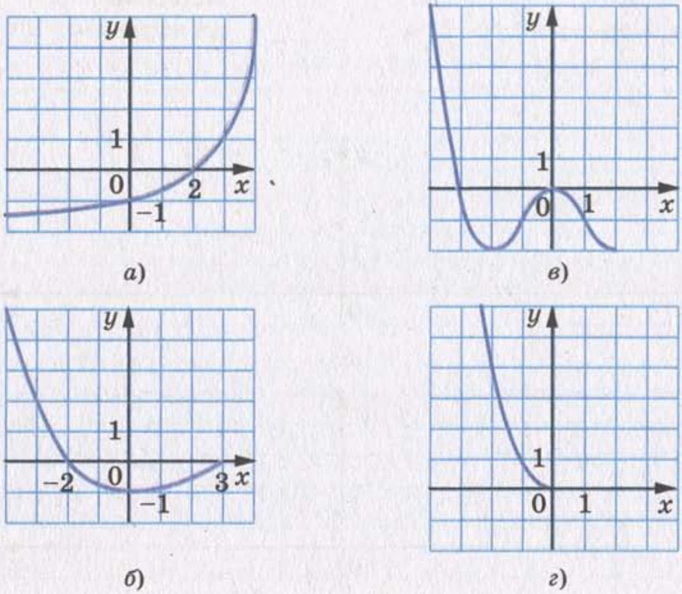


Рис. 45

176. Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 46, побудуйте графік функції $y = |f(|x|)|$.

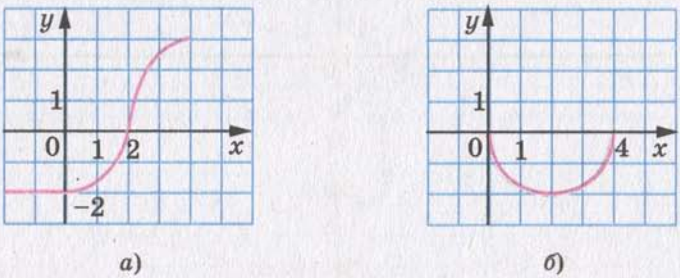


Рис. 46

177. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{|x|}$; 2) $y = -\frac{6}{|x|}$.

178. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x^2 - 1|$; 2) $y = \left|\sqrt{x} - 2\right|$; 3) $y = \left|\frac{2}{x} - 1\right|$; 4) $y = \left|\frac{2}{x-1}\right|$.

179. Побудуйте графік функції:

1) $y = (|x| - 1)^2$; 2) $y = \sqrt{|x| + 2}$; 3) $y = \frac{1}{|x| - 3}$; 4) $y = \sqrt{1 - |x|}$.

180. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{|x+2|}$;

2) $y = (|x - 2| - 1)^2$;

3) $y = \sqrt{|x-1| + 2}$;

4) $y = \frac{1}{|x+1| - 3}$.

6. Обернена функція

На рисунках 47, 48 зображено графіки функцій f і g.

Будь-яка горизонтальна пряма перетинає графік функції f не більше ніж в одній точці. Це означає, що кожному числу $y_0 \in E(f)$ відповідає єдине число $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$. Функція g такої властивості не має. Справді, з рисунка 48 видно, що значенню y_0 відповідають два значення аргументу x_1 і x_2 такі, що $y_0 = g(x_1)$ і $y_0 = g(x_2)$.

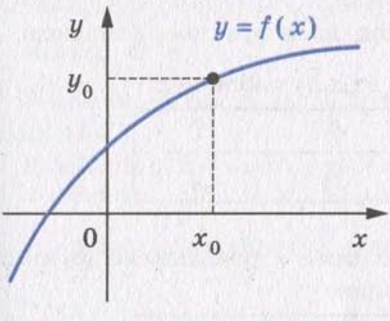


Рис. 47

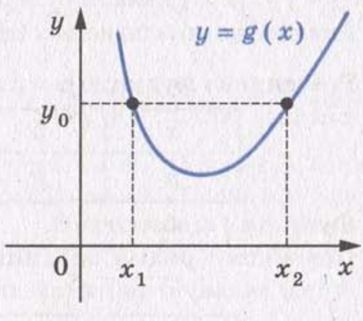


Рис. 48

Означення. **Функцію $y = f(x)$ називають оборотною, якщо для будь-якого $y_0 \in E(f)$ існує єдине $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$.**

Функція f (рис. 47) є оборотною. Функція g (рис. 48) не є оборотною.

Функції $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ є прикладами оборотних функцій (рис. 49).

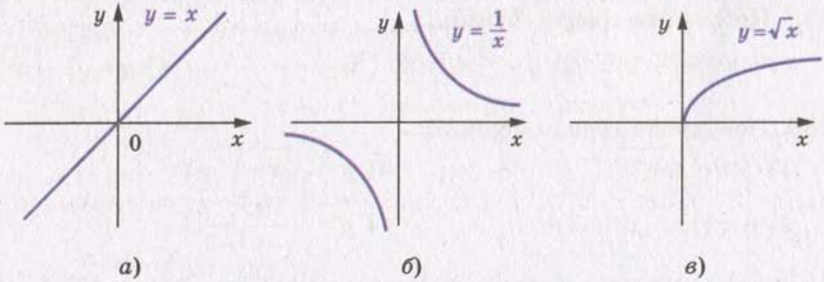


Рис. 49

Функція $y = x^2$ не є оборотною. Наприклад, значенню функції, яке дорівнює 4, відповідають два значення аргументу $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$.

Теорема 6.1. ***Якщо функція є зростаючою (спадною), то вона є оборотною.***

Доведення. Припустимо, що існує зростаюча функція f, яка не є оборотною. Тоді знайдеться $y_0 \in E(f)$, для якого існують x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$) такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Разом з тим функція f — зростаюча, і з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) < f(x_2)$. Отримали суперечність.

Аналогічно розглядається випадок, коли функція f є спадною. ▲

Розглянемо функцію $y = f(x)$, задану таблично:

x	5	6	7
y	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

Функція f є оборотною.

Поміняємо рядки таблиці місцями і розглянемо функцію $y = g(x)$, задану отриманою таблицею:

x	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$
y	5	6	7

Функції f і g зв'язані такими властивостями:

1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;

2) $f(5) = \sqrt{5}$, $g(\sqrt{5}) = 5$;

$f(6) = \sqrt{6}$, $g(\sqrt{6}) = 6$;

$f(7) = \sqrt{7}, \ g\left(\sqrt{7}\right) = 7.$

Ці рівності означають, що коли $f(x_0) = y_0$, то $g(y_0) = x_0$.

У таких випадках говорять, що функція g є **оберненою** до функції f, а функція f — **оберненою** до функції g. Такі функції f і g називають **взаємно оберненими.**

Означення. Функції f і g називають взаємно оберненими, якщо:
1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;
2) для будь-якого $x_0 \in D(f)$ з рівності $f(x_0) = y_0$ випливає, що $g(y_0) = x_0$, тобто $g(f(x_0)) = x_0$.

Можна показати, що другу умову в означенні можна замінити на таке: для будь-якого $x_0 \in D(g)$ з рівності $g(x_0) = y_0$ випливає, що $f(y_0) = x_0$, тобто $f(g(x_0)) = x_0$.

Коли функція f не є оборотною, то не існує функції, оберненої до неї. Будь-яка оборотна функція має обернену.

ПРИКЛАД Доведіть, що функція $f(x) = 2x - 1$ є оборотною. Знайдіть обернену функцію.

Розв'язання. Функція $f(x) = 2x - 1$ є зростаючою. Отже, вона є оборотною.

Щоб задати обернену функцію, потрібно вказати правило, яке дає змогу за кожним значенням змінної y знайти відповідне значення змінної x таке, що $y = 2x - 1$.

Маємо: $2x = y + 1$; $x = \frac{y+1}{2}$.

Отримана рівність задає функцію з аргументом y і залежною змінною x.

Традиційно незалежну змінну позначають буквою x, а залежну — буквою y. Дотримуючись таких позначень, можна сказати, що ми отримали функцію, яка задається формулою $y = \frac{x+1}{2}$.

Покажемо, що функції $g(x) = \frac{x+1}{2}$ і $f(x) = 2x - 1$ є взаємно оберненими.

Маємо: $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$, $E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = 2x_0 - 1$. Доведемо, що $g(y_0) = x_0$.

Маємо: $g(y_0) = \frac{y_0+1}{2} = \frac{2x_0-1+1}{2} = x_0$.

Функція $f(x) = x^2$ не є оборотною. Разом з тим ця функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Отже, функція $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, є оборотною. Також прийнято говорити, що функція $f(x) = x^2$ є **оборотною на множині** $[0; +\infty)$. Знайдемо обернену функцію.

Маємо: $y = x^2$, де $x \in [0; +\infty)$. Звідси $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$.

Скориставшись традиційними позначеннями, отримаємо функцію $y = \sqrt{x}$.

Покажемо, що функції $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, і $g(x) = \sqrt{x}$ є взаємно оберненими.

Маємо: $D(f) = E(g) = [0; +\infty)$, $E(f) = D(g) = [0; +\infty)$.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = {x_0}^2$, де $x_0 \geqslant 0$. Запишемо $g(y_0) = \sqrt{y_0} = \sqrt{x_0^2} = |x_0| = x_0$.

Теорема 6.2. ***Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.***

Доведення. Нехай точка $M(a; b)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Тоді $b = f(a)$. Якщо функція g обернена до функції f, то $g(b) = a$, тобто точка $N(b; a)$ належить графіку функції $y = g(x)$.

Покажемо, що точки M і N є симетричними відносно прямої $y = x$.

Якщо $a = b$, то точки M і N збігаються і належать прямій $y = x$.

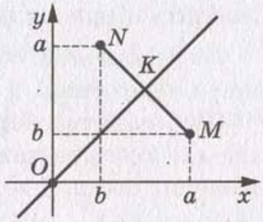


Рис. 50

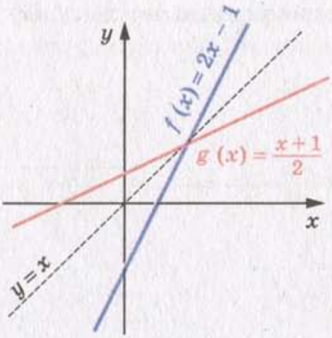
При $a \neq b$ маємо (рис. 50): $ON = \sqrt{a^2 + b^2}$, $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$, тобто точка O рівновіддалена від кінців відрізка MN, а отже, належить серединному перпендикуляру відрізка MN. Середина K відрізка MN має координати $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$, тобто належить прямій $y = x$. Отже, пряма $y = x$ і є серединним перпендикуляром відрізка MN. ▲

Доведену теорему ілюструють графіки взаємно обернених функцій, що розглядалися вище (рис. 51).

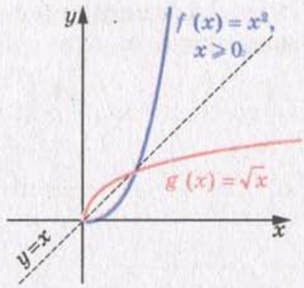
Теорема 6.3. ***Якщо функція f є зростаючою (спадною), то обернена функція g є також зростаючою (спадною).***

Доведення. Припустимо, що функція f — зростаюча і при цьому обернена до неї функція g не є зростаючою. Тоді знайдуться такі $y_1 \in D(g)$ і $y_2 \in D(g)$, що з нерівності $y_1 < y_2$ випливатиме нерівність $g(y_1) \geqslant g(y_2)$. Нехай $g(y_1) = x_1$, $g(y_2) = x_2$. Отримуємо, що $x_1 \geqslant x_2$. Оскільки функція f — зростаюча, то $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, тобто $y_1 \geqslant y_2$. Отримали суперечність.

Для спадної функції міркуємо аналогічно. ▲



а)



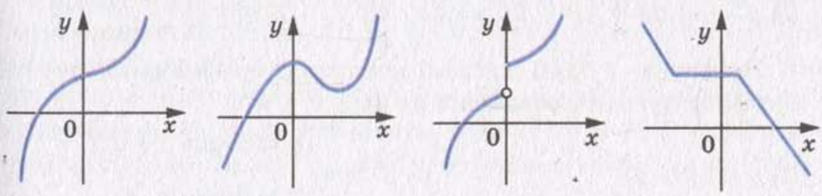
б)

Рис. 51

1. Яку функцію називають оборотною?
2. Сформулюйте теорему про оборотність зростаючої (спадної) функції.
3. Як пов'язані область визначення функції та область значень оберненої до неї функції?
4. Як пов'язані область значень функції та область визначення оберненої до неї функції?
5. Які дві функції називають взаємно оберненими?
6. Як розташовані графіки взаємно обернених функцій?
7. Якою є функція, обернена до зростаючої функції? до спадної функції?

Вправи

181.° **Які з функцій, графіки яких зображено на рисунку 52, є оборотними?**



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 52

182.° Які з функцій, графіки яких зображено на рисунку 53, є оборотними?

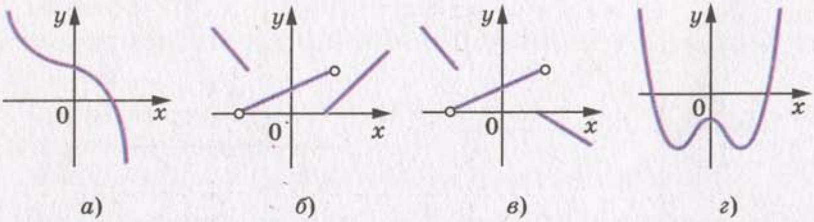


Рис. 53

183.° Доведіть, що дана функція не є оборотною:

1) $y = |x|$; 2) $y = \frac{1}{x^4}$; 3) $y = 5$.

184.• Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = \frac{1}{2x+1}$; 4) $y = \frac{1}{3}x + 4$.

185.• Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 0{,}2x + 3$; 2) $y = \frac{1}{x-1}$; 3) $y = \frac{4}{x+2}$; 4) $y = 4x - 5$.

186.• Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = \frac{x}{x-1}$; 3) $y = 2\sqrt{x} - 1$; 5) $y = \frac{1-x}{1+x}$.

2) $y = \sqrt{2x-1}$; 4) $y = x^2$, $D(y) = (-\infty; 0]$;

187.• Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = \frac{x+2}{x}$; 3) $y = \sqrt{x^2 - 4}$, $D(y) = [2; +\infty)$.

2) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

188.• Побудуйте в одній системі координат графік даної функції і графік функції, оберненої до неї:

1) $y = -0{,}5x + 2$; 2) $y = \sqrt{x+1}$; 3) $y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ 2x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

189.• Побудуйте в одній системі координат графік даної функції і графік функції, оберненої до неї:

1) $y = 3x - 1$; 3) $y = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

2) $y = x^2 - 4$, якщо $x \geqslant 0$;

190.$^{\bullet}$ Користуючись графіком функції $y = f(x)$, зображеним на рисунку 54, побудуйте графік функції, оберненої до функції f.

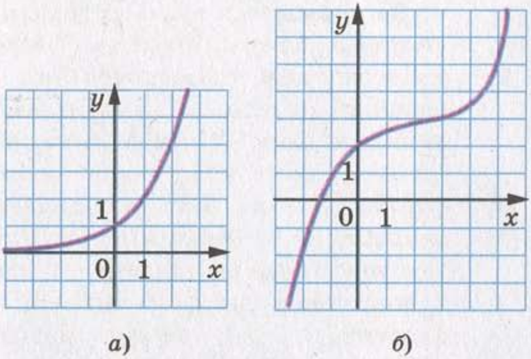


Рис. 54

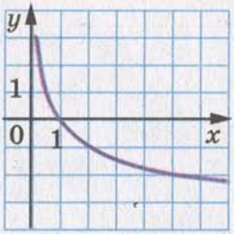


Рис. 55

191.$^{\bullet}$ Користуючись графіком функції $y = f(x)$, зображеним на рисунку 55, побудуйте графік функції, оберненої до функції f.

192.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що функція, обернена до лінійної функції $y = kx + b$ при $k \neq 0$, теж є лінійною.

193.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що функція, обернена до непарної функції, теж є непарною.

Вправи для повторення

194. Один робітник може виконати деяке виробниче завдання за 20 год, а другий — за 30 год. За який час вони виконають це завдання, працюючи разом?

195. Через першу трубу басейн можна наповнити водою за 9 год, а через другу — за 12 год. Спочатку 3 год була відкрита перша труба, потім її закрили, але відкрили другу. За скільки годин було наповнено басейн?

196. Дві бригади, працюючи разом, зорали поле за 8 год. За скільки годин може зорати поле кожна бригада, працюючи самостійно, якщо одній бригаді на це потрібно на 12 год більше, ніж другій?

197. Перша труба може заповнити басейн водою на 24 год швидше, ніж друга. Спочатку відкрили другу трубу, а через 8 год — першу. Через 20 год спільної роботи двох труб було заповнено водою $\frac{2}{3}$ басейну. За скільки годин може заповнити басейн кожна труба, працюючи самостійно?

Львівська математична школа

Підручник Банаха «Курс функціонального аналізу»

Ви тримаєте в руках підручник «Алгебра і початки аналізу». У назві з'явилося нове словосполучення — «початки аналізу». Що ж приховано за цією назвою? Відповідь дуже проста — математичний аналіз вивчає функції. З цього року ви починаєте знайомство з елементами аналізу; вам доведеться розглядати все нові й нові класи функцій, вивчати їх властивості, опановувати методи дослідження функцій.

У першій половині XX ст. при вивченні певних класів функцій з'явилася нова математична дисципліна, вершина сучасної математики — «функціональний аналіз». Важливу, фактично головну роль у створенні цієї дисципліни відіграли науковці Львівської математичної школи.

У 20–30-х рр. XX ст. місто Львів було справжньою світовою математичною столицею. У той час у його закладах працювали такі легендарні математики, як Казимир Куратовський, Станіслав Мазур, Владислав Орліч, Вацлав Серпінський, Станіслав Улам, Юліуш Шаудер, Гуґо Штейнгауз і багато інших. Кваліфікація науковців Львова була настільки високою, що всесвітньо відомий математик, автор видатних теорем у математичній логіці та теорії множин Альфред Тарський не пройшов за конкурсом на вакантну посаду професора Львівського університету.

Математики Львова створили міцний науковий колектив, відомий як «львівська математична школа». Її керівником вважають геніального математика Стефана Банаха.

Сьогодні С. Банаха в усьому світі з цілковитою підставою вважають засновником функціонального аналізу. Один з перших у світі підручників з цієї дисципліни написано самим С. Банахом. Багато результатів С. Банаха та введених ним понять стали класичними. Наприклад, досліджені ним множини одержали назву «простори Банаха» і зараз входять до необхідного мінімуму знань кожного студента-математика, фізика, кібернетика тощо.

Стефан Банах
(1892–1945)

Вручення гусака

Розповідають, що багато теорем львівські математики доводили... у кав'ярні. С. Банах з учнями облюбували «Шкотську (шотландську) кав'ярню», де маленькі столики мали мармурове покриття — дуже зручне для запису математичних формул і теорем. Господар кав'ярні був незадоволений таким свавіллям науковців, але ситуацію врятувала дружина С. Банаха, яка придбала великий зошит для записів. Так з'явилася знаменита «Шкотська книга» — збірка математичних проблем, над якими працювала група С. Банаха. Як винагороду за розв'язання складних задач автори з гумором пропонували коли кухлі пива, коли вечерю в ресторані. Так, одна з проблем, за яку автор пообіцяв живого гусака (1936 р.), була розв'язана лише в 1972 р., тоді ж і було вручено винагороду.

Проблеми, поставлені в «Шкотській книзі», вважають настільки важливими і складними, що кожний, кому вдасться розв'язати хоча б одну з них, одразу дістає світового визнання. Сама ж «Шкотська книга» є однією з найвідоміших і найцінніших реліквій світової науки.

7. Рівносильні рівняння. Рівняння–наслідок. Рівносильні нерівності

Нехай задано дві функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ і поставлено задачу знайти множину значень аргументу x, при яких значення функцій f і g рівні. У такому випадку кажуть, що треба розв'язати рівняння $f(x) = g(x)$.

Означення. Областю визначення рівняння $f(x) = g(x)$ називають множину значень змінної x, при яких мають зміст обидві частини рівняння.

З означення випливає, що областю визначення рівняння $f(x) = g(x)$ є множина $D(f) \cap D(g)$.

Розглянемо кілька прикладів:

- областю визначення лінійного рівняння, тобто рівняння виду $ax = b$, є множина дійсних чисел;
- областю визначення рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ є множина $(-\infty; -2) \cup \cup (-2; +\infty)$;
- областю визначення рівняння $\frac{x+3}{|x|-x}=0$ є множина $(-\infty; 0)$.

Незважаючи на те що рівняння $x^2 = -2$ не має коренів, його областю визначення є множина дійсних чисел.

Рис. 56

Зрозуміло, що кожний корінь рівняння обов'язково належить його області визначення. Цей факт ілюструє діаграма Ейлера (рис. 56). Наприклад, не розв'язуючи рівняння $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47$, можна сміливо стверджувати, що число 0 не є його коренем.

Розглянемо два рівняння: $x^2 = 4$ і $|x| = 2$.

Очевидно, що кожне з них має одні й ті самі корені: -2 і 2.

У таких випадках кажуть, що рівняння $x^2 = 4$ і $|x| = 2$ **рівносильні.**

Означення. Рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ називають рівносильними, якщо множини їх коренів рівні.

Наведемо приклади пар рівносильних рівнянь:

$$\frac{1}{2}x = 0 \text{ і } 2x = 0;$$

$$x^2 = 1 \text{ і } (x - 1)(x + 1) = 0;$$

$$x - 1 = 0 \text{ і } (x^2 + 1)(x - 1) = 0;$$

$$(x - 1)^{100} = 0 \text{ і } (x - 1)^{1000} = 0.$$

Множина коренів кожного з рівнянь $x^2 = -5$ і $|x| = -3$ є порожньою, тобто множини коренів цих рівнянь рівні. Отже, за означенням ці рівняння є рівносильними.

Розв'язуючи рівняння, важливо знати, за допомогою яких перетворень можна замінити дане рівняння на рівносильне.

Теорема 7.1. ***Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Теорема 7.2. ***Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Теорема 7.3. ***Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Ви зможете довести теореми 7.1 – 7.3 на заняттях математичного гуртка.

Зауваження. З теорем 7.1 і 7.3 не випливає, що коли до обох частин рівняння додати один і той самий вираз зі змінною або обидві частини помножити на один і той самий вираз зі змінною, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Так, якщо до обох частин рівняння $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$ додати дріб $\frac{1}{5-x}$, то отримаємо рівняння $x^2 = 25$, яке не рівносильне даному.

Означення. **Якщо множина коренів рівняння $f_2(x) = g_2(x)$ містить множину коренів рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, то рівняння $f_2(x) = g_2(x)$ називають наслідком рівняння $f_1(x) = g_1(x)$.**

Наприклад, рівняння $x^2 = 25$ є наслідком рівняння $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$.

Також говорять, що з рівняння $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$ **випливає** рівняння $x^2 = 25$.

Рис. 57

На рисунку 57 означення рівняння-наслідку проілюстровано за допомогою діаграми Ейлера.

Оскільки порожня множина є підмножиною будь-якої множини, то, наприклад, наслідком рівняння $x^2 = -5$ є будь-яке рівняння з однією змінною x.

Зауважимо, що коли два рівняння рівносильні, то кожне з них можна вважати наслідком іншого.

Ті корені рівняння-наслідку, які не є коренями даного рівняння, називають **сторонніми коренями** даного рівняння.

Наприклад, рівняння $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+2) = 0$ є наслідком рівняння $2x - 1 = 0$. Рівняння-наслідок має два корені: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -2$, а рівняння $2x - 1 = 0$ має один корінь $\frac{1}{2}$. У цьому випадку корінь -2 є стороннім коренем рівняння $2x - 1 = 0$.

Розв'язуючи рівняння, треба намагатися побудувати ланцюжок рівносильних рівнянь, щоб урешті-решт отримати рівняння, яке рівносильне даному і корені якого легко знайти.

Проте якщо під час розв'язування рівняння рівносильність не було дотримано і відбувся перехід до рівняння-наслідку, то отримані при цьому сторонні корені, як правило, можна відкинути за допомогою перевірки.

Розв'яжемо рівняння $\frac{x^2 - 4}{x+2} = 0$. Прирівнявши чисельник дробу до нуля, отримаємо рівняння $x^2 - 4 = 0$, коренями якого є числа -2 і 2. Проте число -2 не належить області визначення даного рівняння, а число 2 задовольняє дане рівняння і є його єдиним коренем.

Розв'язуючи рівняння $\frac{x^2 - 4}{x+2} = 0$, ми перейшли до рівняння-наслідку $x^2 - 4 = 0$, корені якого було перевірено.

При розв'язуванні рівняння важливо розуміти, на якому етапі було порушено рівносильність і що спричинило це порушення.

Так, при переході від рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ до рівняння $x^2-4=0$ було розширено область визначення даного рівняння. Тобто, зняття обмеження $x \neq -2$ якраз і призвело до появи стороннього кореня -2.

Означення. Нерівності називають рівносильними, якщо множини їх розв'язків рівні.

Наведемо кілька прикладів.

Нерівності $x^2 \leqslant 0$ і $|x| \leqslant 0$ є рівносильними. Справді, кожна з них має єдиний розв'язок $x = 0$.

Нерівності $x^2 > -1$ і $|x| > -2$ є рівносильними, оскільки множиною розв'язків кожної з них є множина дійсних чисел.

Оскільки кожна з нерівностей $|x| < -1$ і $0x < -3$ розв'язків не має, то вони також є рівносильними.

Розв'язуючи рівняння, ми заміняли його іншим, більш простим рівнянням, але рівносильним даному. За аналогічною схемою розв'язують і нерівності, використовуючи такі правила.

- Якщо до обох частин нерівності додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
- Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини нерівності в іншу, замінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
- Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
- Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Означення. Якщо множина розв'язків першої нерівності є підмножиною множини розв'язків другої нерівності, то другу нерівність називають наслідком першої нерівності.

Наприклад, нерівність $x > 2$ є наслідком нерівності $x > 5$ (рис. 58).

Оскільки порожня множина є підмножиною будь-якої множини, то будь-яка нерівність з однією змінною є наслідком нерівності, яка не має розв'язків, наприклад нерівності $|x| < 0$.

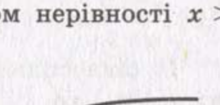


Рис. 58

1. Що називають областю визначення рівняння $f(x) = g(x)$?
2. Які рівняння називають рівносильними?
3. За допомогою яких перетворень рівняння можна отримати рівняння, рівносильне даному?
4. Яке рівняння називають наслідком даного рівняння?
5. Які корені називають сторонніми коренями даного рівняння?
6. Які нерівності називають рівносильними?
7. За допомогою яких перетворень нерівності можна отримати нерівність, рівносильну даній?
8. Яку нерівність називають наслідком даної нерівності?

Вправи

198.° Чи рівносильні рівняння:

1) $x + 2 = 10$ і $3x = 24$;
2) $-2x = -6$ і $\frac{1}{3}x = 1$;
3) $x - 5 = 0$ і $x(x - 5) = 0$;
4) $(3x - 12)(x + 2) = 0$ і $(0,4 - 0,1x)(7x + 14) = 0$;
5) $\frac{6}{x} = 0$ і $x^2 = -4$;
6) $x + 1 = 1 + x$ і $\frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$;
7) $x^3 = 1$ і $|x| = 1$;
8) $x^{100} = 1$ і $x^{1000} = 1$;
9) $\frac{x}{x} = 1$ і $x = x$;
10) $x^2 + 2x + 1 = 0$ і $x + 1 = 0$;
11) $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$ і $x + 1 = 0$;
12) $\frac{x^2-1}{x+1} = 0$ і $x - 1 = 0$;
13) $\frac{x^2-9}{x+2} = 0$ і $x^2 - 9 = 0$?

199.° Чи рівносильні рівняння:

1) $x + 6 = 10$ і $2x - 1 = 7$;
2) $x^2 = x$ і $x = 1$;
3) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x + 1) = 0$ і $4x^2 - 1 = 0$;

4) $x^2 + 1 = 0$ і $\frac{3}{x-1}=0$;

5) $\frac{x+1}{x+1}=1$ і $\frac{x^2+1}{x^2+1}=1$;

6) $\frac{x-2}{x-2}=0$ і $2x^2 + 3 = 0$;

7) $x^2 + 4x + 4 = 0$ і $\frac{x+2}{x-1}=0$;

8) $\frac{x^2-9}{x-3}=0$ і $x + 3 = 0$;

9) $\frac{x+1}{x+1}=0$ і $\frac{x^2-1}{x^2-1}=0$?

200.° Складіть рівняння, рівносильне даному:

1) $2x - 3 = 4$;

2) $|x| = 1$;

3) $x + 6 = x - 2$;

4) $\frac{x-1}{x-1}=0$;

5) $\frac{x-1}{x-1}=1$.

201.' Обґрунтуйте рівносильність рівнянь:

1) $4x - 8 = x + 3$ і $4x - x = 8 + 3$;

2) $x^2 - 1 = 3$ і $x^2 + 5 = 9$;

3) $\frac{3x-5}{2}-\frac{x}{6}=1$ і $9x - 15 - x = 6$;

4) $(2x + 1)(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1)$ і $2x + 1 = 3$.

202.' Чи буде рівняння, отримане в результаті вказаного перетворення, рівносильним даному:

1) у рівнянні $3(2x - 1) - 5(4x + 2) = 1$ розкрити дужки і звести подібні доданки;

2) у рівнянні $x^2+\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-7}=49$ різницю $\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-7}$ замінити на нуль;

3) у рівнянні $\frac{x^2-1}{x-1}+3x-5=0$ скоротити дріб;

4) обидві частини рівняння $x^3 = x$ поділити на x;

5) обидві частини рівняння $(x + 1)(x^2 + 4) = x^2 + 4$ поділити на $x^2 + 4$;

6) обидві частини рівняння $\frac{x^2}{x}=2$ помножити на x;

7) обидві частини рівняння $2x + 1 = 5$ помножити на $x + 1$?

203.° Чи рівносильні нерівності:

1) $x + 3 > 6$ і $-4x < -12$;
2) $(x+2)^2(x+1)<0$ і $x+1<0$;
3) $(x+2)^2(x+1)\leqslant 0$ і $x+1\leqslant 0$;
4) $\frac{1}{x}<1$ і $x > 1$;
5) $x^2 \geqslant x$ і $x \geqslant 1$;
6) $(x + 4)^2 < 0$ і $|x - 2| < 0$?

204.° Чи рівносильні нерівності:

1) $(x - 3)^2(x + 4) \leqslant 0$ і $x + 4 \leqslant 0$;
2) $(x - 3)^2(x + 4) < 0$ і $x + 4 < 0$;
3) $\frac{x-2}{x-4}>0$ і $x - 2 > 0$;
4) $\sqrt{x}\leqslant 0$ і $x^4 \leqslant 0$?

205.° Яке з двох рівнянь є наслідком другого:

1) $x^2 = x$ і $x = 1$;
2) $\frac{x}{x}=1$ і $0x = 0$;
3) $x^3 = 1$ і $x^2 = 1$;
4) $|x|=1$ і $x^3=1$;
5) $\frac{x^2}{x-6}=\frac{36}{x-6}$ і $x^2 = 36$;
6) $x^2 = 4$ і $x^2-\frac{1}{x+2}=4-\frac{1}{x+2}$;
7) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ і $x^2 - 1 = 0$?

206.° Яке з двох рівнянь є наслідком другого:

1) $\frac{x^2}{x}=1$ і $x^2 = x$;
2) $x^2 + 1 = 1$ і $x(x - 1) = 0$;
3) $\frac{x^2}{x+8}=\frac{64}{x+8}$ і $x^2 = 64$;
4) $x^2+\frac{1}{x+3}=9+\frac{1}{x+3}$ і $x^2=9$?

207.° Складіть пару рівносильних рівнянь, кожне з яких:

1) має один корінь;
2) має два корені;
3) має безліч коренів;
4) не має коренів.

208.° Як може змінитися (розширитися чи звузитися) множина коренів заданого рівняння, якщо:

1) рівняння $(|x| + 3)f(x) = 2|x| + 6$ замінити на рівняння $f(x) = 2$;
2) рівняння $\frac{f(x)}{x^2+1}=0$ замінити на рівняння $f(x) = 0$;
3) рівняння $(x + 1)f(x) = x + 1$ замінити на рівняння $f(x) = 1$;
4) рівняння $\frac{f(x)}{x+1}=\frac{g(x)}{x+1}$ замінити на рівняння $f(x) = g(x)$;
5) рівняння $f(x) = g(x)$ замінити на рівняння $(x + 1)f(x) = (x + 1)g(x)$?

209.$^\bullet$ Яка з двох нерівностей є наслідком другої:

1) $x < -4$ і $x < 1$;
2) $x \geqslant 5$ і $x > 5$;
3) $x^2 < 0$ і $x < 0$?

210.$^\bullet$ Яка з двох нерівностей є наслідком другої:

1) $x^2 - 4 > 0$ і $x - 2 > 0$;
2) $x^2 \geqslant 0$ і $x > 0$?

Готуємося до вивчення нової теми

211. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-5)^2 > 0$;
2) $(x-5)^2 \geqslant 0$;
3) $(x-5)^2 < 0$;
4) $(x-5)^2 \leqslant 0$;
5) $\left(\dfrac{x-5}{x+5}\right)^2 > 0$;
6) $\left(\dfrac{x-5}{x+5}\right)^2 \geqslant 0$;
7) $\dfrac{x+5}{x+5} > \dfrac{1}{2}$;
8) $\dfrac{x^2+1}{x^2} \geqslant 0$;
9) $\dfrac{x^2}{x^2+1} \geqslant 0$.

212. Яким числом, додатним чи від'ємним, є значення виразу $x - 2$, якщо:

1) $x \in (2; +\infty)$;
2) $x \in (-3; -2)$;
3) $x \in (-\infty; -3)$;
4) $x \in (5; 9)$?

213. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2 + x - 6$;
2) $35 - 2x - x^2$;
3) $2x^2 + 9x - 18$;
4) $5x^2 - 16x + 3$.

Поновіть у пам'яті зміст п. 24; 25 на с. 322.

8. Метод інтервалів

На рисунку 59 зображено графік деякої функції f, у якої $D(f) = \mathbb{R}$ і нулями є числа x_1, x_2 і x_3. Ці числа розбивають область визначення функції на проміжки знакосталості $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$.

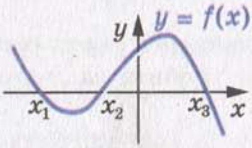


Рис. 59

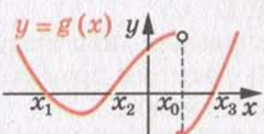


Рис. 60

А чи завжди нулі функції розбивають її область визначення на проміжки знакосталості? Відповідь на це запитання негативна. Для функції g, графік якої зображено на рисунку 60, проміжок $(x_2; x_3)$ не є проміжком знакосталості. Справді, якщо $x \in (x_2; x_0)$, то $g(x) > 0$, а якщо $x \in (x_0; x_3)$, то $g(x) < 0$.

Принципова відмінність між функціями f і g полягає в тому, що графіком функції f є **неперервна крива**, а графік функції g такої властивості не має. Говорять, що функція f **неперервна в кожній точці області визначення**, або, як ще прийнято говорити, **неперервна на $D(f)$**, а функція g **у точці $x_0 \in D(g)$ має розрив.**

Таке уявлення про неперервну функцію інтуїтивно зрозуміле. Детальніше з цим поняттям ви ознайомитеся в 11 класі.

Для подальших міркувань нам знадобиться така наочно очевидна теорема:

Теорема 8.1. ***Якщо функція f неперервна і не має нулів на деякому проміжку, то вона на цьому проміжку зберігає постійний знак.***

Ілюстрацією до цієї теореми слугує графік функції, зображений на рисунку 59.

Ця теорема дозволяє, не будуючи графіка функції f, розв'язувати нерівності $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$.

Звернемося знову до рисунку 59.

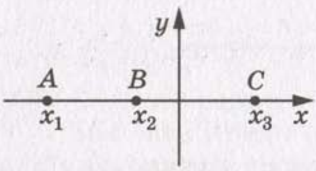


Рис. 61

Уявімо собі, що з цього рисунка «зникли» всі точки графіка функції f, за винятком точок $A(x_1; 0)$, $B(x_2; 0)$, $C(x_3; 0)$ (рис. 61). Очевидно, що кожний з проміжків $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$ не містить нулів функції f.

Тоді, пам'ятаючи, що функція f неперервна на $D(f) = \mathbb{R}$, можна стверджувати: указані проміжки є проміжками знакосталості функції f.

Залишається лише з'ясувати, якого знака набувають значення функції f на цих проміжках. Це можна зробити за допомогою «пробних точок».

Нехай, наприклад, $a \in (-\infty; x_1)$ і $f(a) > 0$. Тоді для будь-якого $x \in (-\infty; x_1)$ виконується нерівність $f(x) > 0$. Аналогічно можна «взяти пробу» з кожного проміжку знакосталості.

Описаний метод розв'язування нерівностей називають **методом інтервалів**.

Справедлива така теорема.

Теорема 8.2. ***Функція*** $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, ***де*** $f(x)$ ***і*** $g(x)$ ***— многочлени, неперервна на*** $D(y)$.

Наприклад, функція $y=\dfrac{1}{x}$ неперервна в кожній точці множини $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, тобто на $D(y)$.

Ця теорема дозволяє для нерівностей виду $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ або $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$, де $f(x)$ і $g(x)$ – многочлени, застосовувати метод інтервалів.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $(x + 3)(x - 1)(x - 2) > 0$.

Розв'язання. Числа -3, 1 і 2 є нулями функції $f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 2)$, яка неперервна на $D(f) = \mathbb{R}$. Тому ці числа розбивають множину $\mathbb{R}$ на проміжки знакосталості функції f: $(-\infty;\ -3)$, $(-3;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$ (рис. 62).

За допомогою «пробних точок» установимо знаки функції f на зазначених проміжках.

Маємо:

$3 \in (2;\ +\infty)$; $f(3) > 0$, тому $f(x) > 0$ при будь-якому $x \in (2;\ +\infty)$;

$\dfrac{3}{2} \in (1;\ 2)$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0$, тому $f(x) < 0$ при будь-якому $x \in (1;\ 2)$;

$0 \in (-3;\ 1)$; $f(0) > 0$, тому $f(x) > 0$ при будь-якому $x \in (-3;\ 1)$;

$-4 \in (-\infty;\ -3)$; $f(-4) < 0$, тому $f(x) < 0$ при будь-якому $x \in (-\infty;\ -3)$.

Результати дослідження знака функції f показано на рисунку 63.

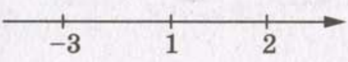


Рис. 62

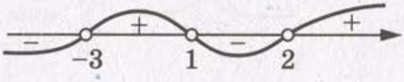


Рис. 63

Тепер можна записати відповідь.

Відповідь: $(-3;\ 1) \cup (2;\ +\infty)$.

Зауваження. При оформленні розв'язування нерівностей процес дослідження знака функції можна проводити усно, фіксуючи результати у вигляді схеми, показаної на рисунку 63.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $(x + 1)(3 - x)(x - 2)^2 > 0$.

Розв'язання. Позначимо нулі функції $f(x) = (x + 1) \times (3 - x)(x - 2)^2$ на координатній прямій (рис. 64). Вони розбивають множину $D(f) = \mathbb{R}$ на проміжки знакосталості функції f.

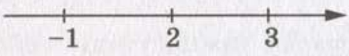


Рис. 64

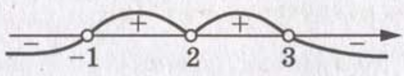


Рис. 65

Дослідимо знак функції f на цих проміжках. Результат дослідження показано на рисунку 65.

Відповідь: $(-1; 2) \cup (2; 3)$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\frac{(x-1)^3 (x+2)^4 (x-5)}{(2x+1)(x-4)^2} < 0$.

Розв'язання. Областю визначення функції

$$f(x) = \frac{(x-1)^3 (x+2)^4 (x-5)}{(2x+1)(x-4)^2}$$

є множина $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 4\right) \cup (4; +\infty)$. Функція f є неперервною на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; 4\right), (4; +\infty)$. Тому нулі -2, 1, 5 функції f розбивають $D(f)$ на проміжки знакосталості $(-\infty; -2)$, $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$, $(1; 4)$, $(4; 5)$, $(5; +\infty)$.

Результат дослідження знака функції f на цих проміжках показано на рисунку 66.

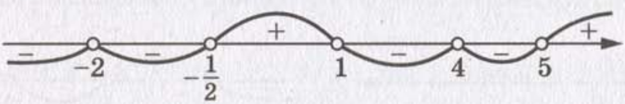


Рис. 66

Відповідь: $(-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; 4) \cup (4; 5)$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{2+x+10-5x-4+x^2}{(2-x)(2+x)} < 0$; $\frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)} < 0$.

Областю визначення функції $f(x)=\dfrac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)}$ є множина $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$. Функція f нулів не має. Оскільки функція f неперервна на кожному з проміжків $(-\infty;\ -2)$, $(-2;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$, то ці проміжки є для неї проміжками знакосталості.

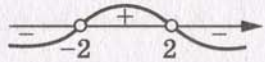


Рис. 67

На рисунку 67 показано результат дослідження знака функції f.

Розв'язання цієї нерівності можна оформити інакше. Оскільки дискримінант квадратного тричлена $x^2 - 4x + 8$ від'ємний, а старший коефіцієнт додатний, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ маємо $x^2 - 4x + 8 > 0$. Тому нерівність $\dfrac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)}<0$ рівносильна такій: $(2 - x)(2 + x) < 0$. Далі слід звернутися до рисунка 67.

Відповідь: $(-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$.

За допомогою методу інтервалів можна розв'язувати і нестрогі нерівності $f(x) \geqslant 0$ або $f(x) \leqslant 0$. Множина розв'язків такої нерівності — це об'єднання множини розв'язків нерівності $f(x) > 0$ (або відповідно $f(x) < 0$) і множини коренів рівняння $f(x) = 0$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\dfrac{4x^2+4x+1}{x^2+2x-3}\geqslant 0$.

Розв'язання. Радимо, якщо це можливо, многочлени, записані в чисельнику і знаменнику дробу, розкладати на множники. Тоді набагато зручніше досліджувати знак функції на проміжках знакосталості.

Маємо: $\dfrac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)}\geqslant 0$.

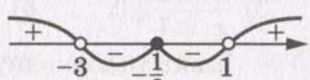


Рис. 68

Установлюємо (рис. 68), що множина $(-\infty;\ -3) \cup (1;\ +\infty)$ є множиною розв'язків нерівності $\dfrac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)}>0$.

Рівняння $\dfrac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)}=0$ має єдиний корінь $x=-\dfrac{1}{2}$.

Об'єднавши множини розв'язків рівняння і нерівності, отримаємо відповідь.

Відповідь: $(-\infty;\ -3) \cup (1;\ +\infty) \cup \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

?

1. Чи завжди нулі функції розбивають її область визначення на проміжки знакосталості?
2. Чи кожна неперервна функція зберігає постійний знак на проміжку з області визначення, який не містить її нулів?
3. Опишіть метод інтервалів розв'язування нерівностей.

Вправи

214.° Розв'язжіть нерівність:

1) $(x+1)(x-2)(x+5)>0$;
2) $x(x-3)(x+2)<0$;
3) $(x+7)(x+5)(x-9)\leqslant 0$;
4) $(x+3)(x-8)(x-10)\geqslant 0$;
5) $(2x+3)(3x-1)(x+4)>0$;
6) $(2x-1)(3-x)(x+1)<0$;
7) $(x-6)(7x+1)(2-9x)\geqslant 0$;
8) $(x-3)(2x+1)(1-5x)(x+4)>0$.

215.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+3)(x-1)(x+4)<0$;
2) $(x-7)(x+8)(x-12)\geqslant 0$;
3) $(3x+2)(x-5)(4x-1)>0$;
4) $(1-3x)(x+2)(3-x)<0$;
5) $x(5-x)(6-x)\leqslant 0$;
6) $x(5x+3)(2-x)(4x-3)(x+5)>0$.

216.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\frac{x-8}{x+7}<0$;
2) $\frac{x+9}{x-11}>0$;
3) $\frac{x-2,4}{x-3,7}\geqslant 0$;
4) $\frac{x+5,2}{x-1,4}\leqslant 0$;
5) $\frac{5-x}{x-6}\geqslant 0$;
6) $\frac{6x+3,6}{2,5-5x}\leqslant 0$;
7) $\frac{(x+15)(x-2)}{x-15}\geqslant 0$;
8) $\frac{x-3,8}{(x+5)(x-16)}\leqslant 0$;
9) $\frac{(x+5,4)(x+4,2)}{(12-x)(x-4)}\geqslant 0$.

217.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\frac{x+3}{x-1}>0$;
2) $\frac{x}{x+2}<0$;
3) $\frac{x-4}{x}\geqslant 0$;
4) $\frac{(x-2)(x+1)}{x-4}<0$;
5) $\frac{(x+1,2)(x-1,6)}{x-1,4}\leqslant 0$;
6) $\frac{x-2,3}{(1,9-x)(x-1,3)}\geqslant 0$;
7) $\frac{(3x-2)(4-x)}{(x+3)(x-1)}>0$;
8) $\frac{(x+1)(x-7)}{(8+x)(10-x)}\leqslant 0$;
9) $\frac{(x+1)(3-x)}{(3x-2)(4-3x)}\geqslant 0$.

218.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+2)(x^2-1)>0$;
2) $(x^2-6x)(x^2+5x-6)<0$;
3) $(x^2-4x+3)(x^2+3x+2)\geqslant 0$;
4) $4x^3-25x<0$;

5) $\dfrac{x^2-4}{x^2-9}>0$;

6) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-8x+7}\leqslant 0$;

7) $\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-3x-4}\geqslant 0$;

8) $\dfrac{x^3-16x}{x^2-x-30}<0$.

219. **Знайдіть множину розв'язків нерівності:**

1) $(x^2-64)(x^2-10x+9)\geqslant 0$;

2) $(x^2+7x)(x^2-7x+6)<0$;

3) $\dfrac{x^2-x-12}{x^2-36}\leqslant 0$;

4) $\dfrac{3x^2+2x-1}{4x^2-x-3}\geqslant 0$.

220. Розв'яжіть нерівність:

1) $(2x+1)(x-3)(x^2+4)<0$;

2) $(2-x)(3x+5)(x^2-x+1)>0$;

3) $(3x^2-5x-2)(2x^2+x+1)<0$;

4) $(4-x)(3x+1)(x^4+x^2+1)<0$.

221. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^4+1)(5-6x)(x-2)<0$;

2) $(x+3)(x+6)(x+5)(x^2-4x+5)\geqslant 0$.

222. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-4)^2(x^2-7x+10)<0$;

2) $(x-4)^2(x^2-7x+10)\leqslant 0$;

3) $(x-4)^2(x^2-7x+10)>0$;

4) $(x-4)^2(x^2-7x+10)\geqslant 0$;

5) $(x-3)^2(x^2+x-2)<0$;

6) $(x-3)^2(x^2+x-2)\leqslant 0$;

7) $(x-3)^2(x^2+x-2)>0$;

8) $(x-3)^2(x^2+x-2)\geqslant 0$.

223. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-1)(x+3)^2(x-2)<0$;

2) $|x-4|(x+1)(x-3)>0$;

3) $(2x+1)^2(x^2-4x+3)>0$;

4) $(2x+1)^2(x-1)(x-2)\geqslant 0$;

5) $(x-5)(x+4)(x^2+6x+9)\geqslant 0$.

224. Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2(x+1)(x-4)>0$;

2) $(x-3)(x+2)^2(x-5)\geqslant 0$.

225. Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{x^2+x-20}{x^2-6x+9}>0$;

2) $\dfrac{x^2+x-20}{x^2-6x+9}\geqslant 0$;

3) $\dfrac{x^2+x-20}{x^2-6x+9}<0$;

4) $\dfrac{x^2+x-20}{x^2-6x+9}\leqslant 0$;

5) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8}>0$;

6) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8}\geqslant 0$;

7) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8}<0$;

8) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8}\leqslant 0$.

226.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x-2}{x+3} \geqslant \frac{3x-4}{x+3}$;
4) $\frac{x}{x+3} > \frac{1}{2}$;
7) $\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} > 1$;
2) $\frac{x^2+3x}{x-5} \geqslant \frac{28}{x-5}$;
5) $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$;
8) $\frac{x-3}{x+3} \leqslant \frac{2x-5}{4x-3}$.
3) $\frac{1}{x} < 1$;
6) $\frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-1} < 2$;

227.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{1}{x+2} \leqslant 1$; 2) $\frac{x}{x+1} \geqslant 2$; 3) $\frac{5x+8}{4-x} < 2$; 4) $\frac{2}{x+3} \geqslant \frac{1}{x-1}$.

228.°° Розв'яжіть нерівність:

1) $(2x+3)(1-4x)^4(x-2)^3(x+6) < 0$;
2) $(1-3x)^3(x+2)^2(x+4)^5(x-3) > 0$;
3) $(x^2+2x-15)(x^2-4x+3)(x-1) \leqslant 0$;
4) $(1-2x)(x-3)^9(2x+7)^6(x+4)(x-2)^2 > 0$.

229.°° Розв'яжіть нерівність:

1) $(3-x)^3(x+2)^2(x-1)(2x-5) < 0$;
2) $(x^2-4)(x^2+x-2) \leqslant 0$;
3) $(x^3-4x)(x^2+2x-8)(x^2+7x+10) \leqslant 0$.

230.°° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\frac{x^3(x-1)^4(x+5)}{(x-8)(1-4x)} > 0$;
4) $\frac{x^5|3x-1|(x+3)}{x-2} \leqslant 0$;
2) $\frac{(x-2)(2x+1)^3}{(3-x)^4(1-5x)^5} > 0$;
5) $\frac{(2-x)(4x+3)}{(x-3)^3(x+1)^2} \leqslant 0$;
3) $\frac{(x-3)(5x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)^2} \geqslant 0$;
6) $\frac{(x+6)^3(x+4)(6-x)^5}{|x+5|} \geqslant 0$.

231.°° Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x-3)^3} \leqslant 0$;
3) $\frac{x^2(x^2-1)}{x-4} > 0$;
2) $\frac{(x-1)^2(x+2)^3}{x-5} \geqslant 0$;
4) $\frac{(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4}{x^5} \leqslant 0$.

232.°° Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \geqslant \frac{3}{x}$;
2) $\frac{12}{x^2-4} - \frac{7}{x^2-9} \leqslant 0$.

233.°° Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{2(x-3)}{x(x-6)} < \frac{1}{x-1}$;
2) $\frac{2x+3}{x^2+x-12} < \frac{1}{2}$.

234.* Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}<0$;
2) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}>0$;
3) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\leqslant 0$;
4) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\geqslant 0$;
5) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}<0$;
6) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}>0$;
7) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}\leqslant 0$;
8) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}\geqslant 0$.

235.* Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}>0$;
2) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}\geqslant 0$;
3) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}<0$;
4) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}\leqslant 0$;
5) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}<0$;
6) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}>0$;
7) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}\leqslant 0$;
8) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}\geqslant 0$.

236.* Розв'яжіть нерівність $\left|\dfrac{x}{x^2-9}\right|\leqslant\dfrac{x}{x^2-9}$.

237.* Розв'яжіть нерівність $\left|\dfrac{x-1}{x^2-16}\right|\leqslant\dfrac{x-1}{x^2-16}$.

238.* Для кожного значення a розв'яжіть нерівність:

1) $(x-3)(x-a)<0$;
2) $(x-3)(x-a)^2>0$;
3) $(x-3)(x-a)^2\geqslant 0$;
4) $(x-a)(x+5)^2<0$;
5) $(x-a)(x+5)^2\leqslant 0$;
6) $\dfrac{x-5}{x-a}\geqslant 0$;
7) $\dfrac{(x+1)(x-a)}{x+1}\geqslant 0$;
8) $\dfrac{(x+1)(x-a)}{x-a}\leqslant 0$.

Вправи для повторення

239. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2=2x+3$;
2) $x^2=\dfrac{8}{x}$.

240. Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y-x^2=0, \\ 2x+5y=10; \end{cases}$
2) $\begin{cases} y=x^2, \\ 3x+2y=-6. \end{cases}$

241. Побудуйте графік функції $y=\begin{cases} -\dfrac{6}{x}, \text{ якщо } x\leqslant -1, \\ x^2, \text{ якщо } x>-1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 1

1. Дано функцію $y=\begin{cases} x+3, & \text{якщо } x<0, \\ x, & \text{якщо } x\geqslant 0. \end{cases}$ Укажіть правильне твердження:

А) $f(-1) < f(1)$;   В) $f(0) = f(-3)$;
Б) $f(-1{,}5) \neq f(1{,}5)$;   Г) $f(3) = f(0)$.

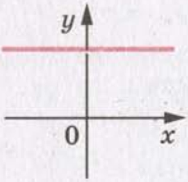
2. Яка область визначення функції $f(x)=\sqrt{4-x^2}$?

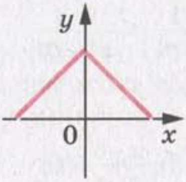
А) $\mathbb{R}$; Б) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; В) $[-2; 2]$; Г) $[0; 2]$.

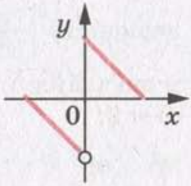
3. Яка з функцій визначена на множині дійсних чисел?

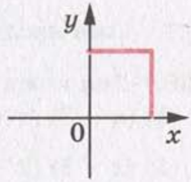
А) $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$; Б) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2}$; В) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$; Г) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

4. Яка із зображених фігур не може слугувати графіком функції?

А)


Б)


В)


Г)


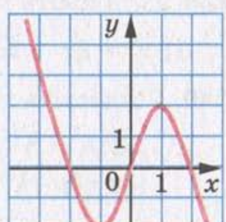
5. Область значень якої з функцій складається з одного числа?

А) $y=\sqrt{x}$; Б) $y=\sqrt{x^2}$; В) $y=\sqrt{-x}$; Г) $y=\sqrt{-x^2}$.

6. Знайдіть нулі функції $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{4}{x}$.

А) -4; 4; Б) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; В) 0; $2\sqrt{2}$; Г) 2; 4.

7. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Укажіть проміжок зростання функції.



А) $[-1; 1]$;   В) $[0; 2]$;
Б) $[-2; 2]$;   Г) $(-\infty; +\infty)$.

8. Яка з даних функцій є спадною на множині $\mathbb{R}$?

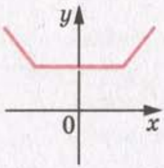
А) $y = -x^2$;   В) $y=\dfrac{1}{x}$;
Б) $y = -x$;   Г) $y = x$.

9. Чому дорівнює найбільше значення функції $y = 9 - x^2$ на проміжку $[1; 2]$?

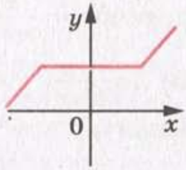
А) 8; Б) 5; В) 9; Г) такого значення не існує.

10. **Укажіть графік непарної функції.**

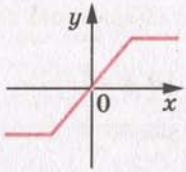
А)



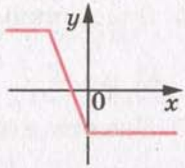
Б)



В)



Г)



11. **Яка з даних функцій є парною?**

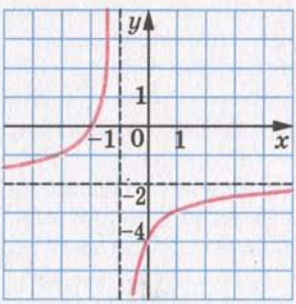
А) $y=x^2-\dfrac{5}{x}$; Б) $y=x^2-5\sqrt{x}$; В) $y=x^2-5$; Г) $y=x^2-5x$.

12. **Графік функції $y=\sqrt{x}$ перенесли паралельно на 3 одиниці вправо. Графік якої функції було отримано?**

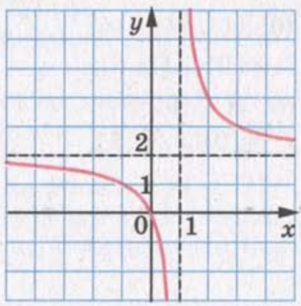
А) $y=\sqrt{x-3}$; Б) $y=\sqrt{x}-3$; В) $y=\sqrt{x+3}$; Г) $y=\sqrt{x}+3$.

13. **Укажіть графік функції $y=\dfrac{2}{x-1}+2$.**

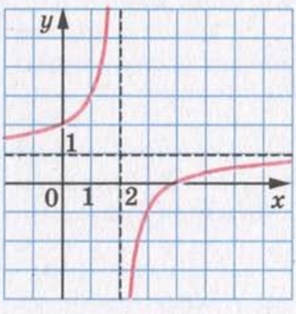
А)



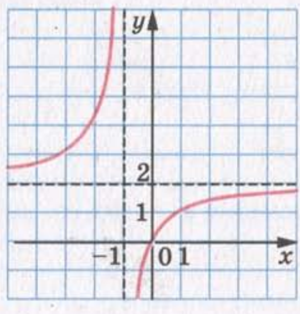
В)



Б)



Г)



14. Яка функція є оберненою до функції $y = x - 3$?

А) $y = x - 3$; Б) $y = x + 3$; В) $y = -x - 3$; Г) $y = -x + 3$.

15. Яка функція є оберненою до функції $y = \frac{x}{x+1}$?

А) $y = \frac{x}{x-1}$; Б) $y = \frac{x+1}{x}$; В) $y = \frac{x}{1-x}$; Г) $y = \frac{x}{x+1}$.

16. Укажіть пару рівносильних рівнянь.

А) $x^2 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ і $x^2 = 0$;

Б) $2x(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1)$ і $2x = 3$;

В) $2x - 3 = 4$ і $(2x - 3)^2 = 16$;

Г) $5x(x^2 + 1) = 7(x^2 + 1)$ і $5x = 7$.

17. Множиною розв'язків якої нерівності є проміжок $[-3; 2]$?

А) $\frac{x+3}{x-2} < 0$; В) $(x + 3)(x - 2) < 0$;

Б) $\frac{x+3}{x-2} \leqslant 0$; Г) $(x + 3)(x - 2) \leqslant 0$.

18. Розв'яжіть нерівність $\frac{5}{x} \leqslant 6 - x$.

А) $(0; 1] \cup [5; +\infty)$;

Б) $(-\infty; 0) \cup [1; 5]$;

В) $[0; 1] \cup [5; +\infty)$;

Г) $(-\infty; 0] \cup [1; 5]$.

ПІДСУМКИ

При вивченні матеріалу параграфа «Повторення та розширення відомостей про функцію» ви повторили, що:

- функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y. Незалежну змінну ще називають аргументом функції. Множину значень, яких набуває аргумент функції $y = f(x)$, називають областю визначення функції і позначають $D(f)$ або $D(y)$. Множину значень, яких набуває залежна змінна, називають областю значень функції і позначають $E(f)$ або $E(y)$. Коли $D(f) \subset \mathbb{R}$ і $E(f) \subset \mathbb{R}$, функцію f називають числовою;
- графіком числової функції f називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f;
- значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають нулем функції;
- проміжок, на якому функція набуває значень однакового знака, називають проміжком знакосталості функції;
- функцію f називають зростаючою на множині $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$;
- функцію f називають спадною на множині $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$;
- якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають зростаючою. Якщо функція спадає на всій області визначення, то її називають спадною;
- графік функції $y = f(x) + b$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ на b одиниць угору, якщо $b > 0$, і на $-b$ одиниць униз, якщо $b < 0$;
- графік функції $y = f(x + a)$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ на a одиниць уліво, якщо $a > 0$, і на $-a$ одиниць управо, якщо $a < 0$;
- графік функції $y = kf(x)$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою абсцисою і ординатою, помноженою на k;

- рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ називають рівносильними, якщо множини їх коренів рівні;
- нерівності називають рівносильними, якщо множини їх розв'язків рівні.

Ви дізналися, що:

- якщо для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$, де $x_0 \in M$, то число $f(x_0)$ називають найменшим значенням функції f на множині M і записують $\min\limits_M f(x) = f(x_0)$
- якщо для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$, де $x_0 \in M$, то число $f(x_0)$ називають найбільшим значенням функції f на множині M і записують $\max\limits_M f(x) = f(x_0)$
- функцію f називають парною, якщо для будь-якого x з області визначення $f(-x) = f(x)$;
- функцію f називають непарною, якщо для будь-якого x з області визначення $f(-x) = -f(x)$;
- вісь ординат є віссю симетрії графіка парної функції;
- початок координат є центром симетрії графіка непарної функції;
- графік функції $y = f(kx)$, де $k > 0$, можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою ординатою і абсцисою, поділеною на k;
- функцію $y = f(x)$ називають оборотною, якщо для будь-якого $y_0 \in E(f)$ існує єдине $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$;
- якщо функція є зростаючою (спадною), то вона є оборотною;
- функції f і g називають взаємно оберненими, якщо: 1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$; 2) для будь-якого $x_0 \in D(f)$ з рівності $f(x_0) = y_0$ випливає, що $g(y_0) = x_0$, тобто $g(f(x_0)) = x_0$;
- графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$;
- якщо функція f є зростаючою (спадною), то обернена функція g є також зростаючою (спадною);
- якщо множина коренів рівняння $f_2(x) = g_2(x)$ містить множину коренів рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, то рівняння $f_2(x) = g_2(x)$ називають наслідком рівняння $f_1(x) = g_1(x)$;
- якщо множина розв'язків першої нерівності є підмножиною множини розв'язків другої нерівності, то другу нерівність називають наслідком першої нерівності.

§ 3 СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

У цьому параграфі ви дізнаєтесь, яку функцію називають степеневою функцією з цілим показником, які властивості має ця функція, що називають коренем *n*-го степеня, які властивості має корінь *n*-го степеня, що називають степенем з раціональним показником і які його властивості, які рівняння називають ірраціональними.

Ви навчитеся добувати корені *n*-го степеня, виконувати піднесення до степеня з раціональним показником, перетворювати вирази, які містять корені *n*-го степеня, степінь з раціональним показником; розв'язувати ірраціональні рівняння.

9. Степенева функція з натуральним показником

Властивості і графіки функцій $y = x$ і $y = x^2$ добре знайомі вам з попередніх класів. Ці функції є окремими випадками функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, яку називають **степеневою функцією з натуральним показником**.

Оскільки вираз x^n, $n \in \mathbb{N}$, має зміст при будь-якому x, то *областю визначення степеневої функції з натуральним показником є множина* $\mathbb{R}$.

Очевидно, що розглядувана *функція має єдиний нуль* $x = 0$.

Подальше дослідження властивостей функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

• **Перший випадок: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.**

Зазначимо, що при $k = 1$ отримуємо функцію $y = x^2$, властивості і графік якої були розглянуті у 8 класі.

Оскільки при будь-якому x вираз x^{2k} набуває тільки невід'ємних значень, то область значень розглядуваної функції не містить жодного від'ємного числа.

Можна показати, що для будь-якого $a \geqslant 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{2k} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є множина* $[0; +\infty)$.

Якщо $x \neq 0$, то $x^{2k} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число.*

Функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є парною. Справді, для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Звідси $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

Отже, *функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, спадає на проміжку* $(-\infty; 0]$. Аналогічно можна показати, що ця функція *зростає на проміжку* $[0; +\infty)$.

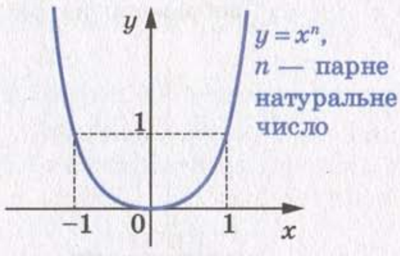


Рис. 69

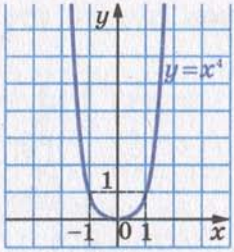


Рис. 70

Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число (рис. 69). Зокрема, графік функції $y = x^4$ зображено на рисунку 70.

- **Другий випадок: n — непарне натуральне число.**

Зазначимо, що при $n = 1$ отримуємо функцію $y = x$, властивості і графік якої були розглянуті в 7 класі.

Тепер нехай $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Можна показати, що для будь-якого a існує таке значення аргументу x, що $x^{2k+1} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є множина $\mathbb{R}$.*

Якщо $x < 0$, то $x^{2k+1} < 0$; якщо $x > 0$, то $x^{2k+1} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty;\ 0)$ *і* $(0;\ +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число.*

Функція $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є непарною. Справді, для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

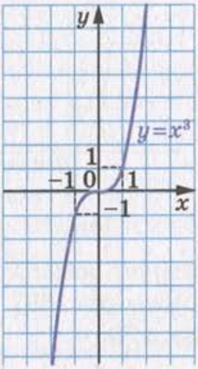
Рис. 71

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 < x_2$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$.

Отже, *функція $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є зростаючою.*

Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, $n > 1$ (рис. 71).

Зокрема, графіки функцій $y = x^3$ і $y = x^5$ зображено на рисунку 72.



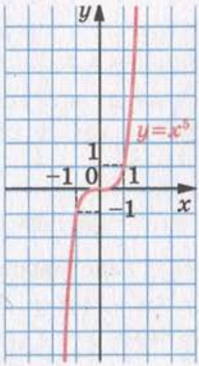


Рис. 72

У таблиці наведено властивості функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, установлені в цьому пункті.

	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число
Область визначення	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значень	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання / спадання	Спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$	Зростаюча

?

1. Яку функцію називають степеневою функцією з натуральним показником?
2. Яка область визначення степеневої функції з натуральним показником?
3. Сформулюйте властивості функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число.

4. Як виглядає графік функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число?

5. Сформулюйте властивості функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число.

6. Як виглядає графік функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число?

Вправи

242.° Через які з даних точок проходить графік функції $y = x^5$:

1) $A\ (-1;\ 1)$;
2) $B\ (2;\ 32)$;
3) $C\ (-0{,}2;\ -0{,}0032)$;
4) $D\ (-3;\ -243)$?

243.° Через які з даних точок проходить графік функції $y = x^4$:

1) $A\ (2;\ 16)$;
2) $B\ (-10;\ -10\ 000)$;
3) $C\left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{81}\right)$;
4) $D\ (0{,}5;\ -0{,}0625)$?

244.° При яких значеннях a графік функції $y = ax^4$ проходить через точку: 1) $A\ (2;\ -12)$; 2) $B\ (-3;\ -3)$?

245.° При яких значеннях a графік функції $y = ax^3$ проходить через точку: 1) $C\ (3;\ -18)$; 2) $D\ (-2;\ 64)$?

246.° Функцію задано формулою $f\ (x) = x^{19}$. Порівняйте:

1) $f\ (1{,}4)$ і $f\ (1{,}8)$;
2) $f\ (-7{,}6)$ і $f\ (-8{,}5)$;
3) $f\ (-6{,}9)$ і $f\ (6{,}9)$;
4) $f\ (0{,}2)$ і $f\ (-12)$.

247.° Функцію задано формулою $f\ (x) = x^{21}$. Порівняйте:

1) $f\ (20)$ і $f\ (17)$;
2) $f\ (-44)$ і $f\ (1{,}5)$;
3) $f\ (-52)$ і $f\ (-45)$.

248.° Функцію задано формулою $f\ (x) = x^{20}$. Порівняйте:

1) $f\ (3{,}6)$ і $f\ (4{,}2)$;
2) $f\ (-6{,}7)$ і $f\ (-5{,}8)$;
3) $f\ (-2{,}4)$ і $f\ (2{,}4)$;
4) $f\ (-15)$ і $f\ (2)$.

249.° Функцію задано формулою $f\ (x) = x^{50}$. Порівняйте:

1) $f\ (9{,}2)$ і $f\ (8{,}5)$;
2) $f\ (-1{,}1)$ і $f\ (-1{,}2)$;
3) $f\ (19)$ і $f\ (-19)$;
4) $f\ (-7)$ і $f\ (9)$.

250.° Скільки коренів має рівняння $x^n = 1600$, якщо:

1) n — парне натуральне число;
2) n — непарне натуральне число?

251.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^5 = 32$; 2) $x^3 = -\frac{8}{27}$; 3) $x^4 = 81$; 4) $x^4 = -16$.

252.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 = -27$; 2) $x^5 = 0{,}00032$; 3) $x^6 = 64$; 4) $x^8 = -1$.

253.° Чи має дане рівняння від'ємний корінь:

1) $x^6 = 2$; 2) $x^5 = -3$; 3) $x^7 = 9$; 4) $x^6 = -10$?

254.• Розташуйте в порядку спадання значення виразів $\left(-\frac{3}{4}\right)^5$, $\left(-2\frac{1}{3}\right)^5$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$, $\left(-2\frac{2}{5}\right)^5$.

255.• Розташуйте в порядку зростання значення виразів $(1{,}06)^4$, $(-0{,}48)^4$, $(-2{,}12)^4$, $(-3{,}25)^4$.

256.• Знайдіть точки перетину графіків функцій:

1) $y = x^6$ і $y = 2x^4$; 2) $y = x^4$ і $y = -27x$.

257.• Знайдіть точки перетину графіків функцій $y = x^5$ і $y = x^3$.

258.• Побудуйте графік функції:

1) $y = x^3 - 1$; 3) $y = -x^3$; 5) $y = (x - 1)^4$;

2) $y = (x + 2)^3$; 4) $y = x^4 - 4$; 6) $y = -\frac{1}{2}x^4$.

259.• Побудуйте графік функції:

1) $y = x^3 + 3$; 3) $y = x^4 + 2$; 5) $y = \frac{1}{4}x^3$;

2) $y = (x - 3)^3$; 4) $y = (x + 1)^4$; 6) $y = -x^4$.

260.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^8$ на проміжку:

1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-1; 1]$; 4) $(-\infty; -2]$.

261.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^5$ на проміжку:

1) $[-3; 3]$; 2) $[-2; 0]$; 3) $[1; +\infty)$.

262.• Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $x^8 = x + 1$; 2) $x^5 = 3 - 2x$; 3) $x^4 = 0{,}5x - 2$.

263.• Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} y = x^6, \\ 2x - y - 3 = 0. \end{cases}$$

264. Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\begin{cases} x^4, & \text{якщо } x<0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x\geqslant 0; \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x^5, & \text{якщо } x<-1, \\ -x-2, & \text{якщо } x\geqslant -1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

265. Побудуйте графік функції $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{якщо } x<0, \\ -\sqrt{x}, & \text{якщо } x\geqslant 0. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

266. Скільки коренів залежно від значення a має рівняння:
1) $x^{12} = a - 6$;
2) $x^{24} = a^2 + 7a - 8$?

267. Скільки коренів залежно від значення a має рівняння $x^8 = 9a - a^3$?

268. Парним чи непарним натуральним числом є показник степеня n функції $f(x) = x^n$, якщо:
1) $f(-4) > f(-2)$;
2) $f(-4) < f(2)$;
3) $f(-4) < f(-2)$;
4) $f(4) > f(2)$;
5) $f(-4) > f(2)$;
6) $f(4) > f(-2)$?

Готуємося до вивчення нової теми

269. Подайте степінь у вигляді дробу:
1) 3^{-8};
2) 5^{-6};
3) a^{-9};
4) d^{-3};
5) 12^{-1};
6) m^{-1};
7) $(a - b)^{-2}$;
8) $(2x - 3y)^{-4}$.

270. Обчисліть значення виразу:
1) $3^{-1} - 4^{-1}$;
2) $2^{-3} + 6^{-2}$;
3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2{,}3)^0 - 5^{-2}$;
4) $9 \cdot 0{,}1^{-1}$;
5) $0{,}5^{-2} \cdot 4^{-1}$;
6) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$.

271. Подайте у вигляді дробу вираз:
1) $a^{-2} + a^{-3}$;
2) $mn^{-4} + m^{-4}n$;
3) $(c^{-1} - d^{-1})(c - d)^{-2}$;
4) $(x^{-2} + y^{-2})(x^2 + y^2)^{-1}$.

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 2; 3 на с. 315.

10. Степенева функція з цілим показником

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^n$, де $n \in \mathbb{Z}$, називають **степеневою функцією з цілим показником.**

Властивості цієї функції для натурального показника було розглянуто в попередньому пункті. Тут ми розглянемо випадки, коли показник n є цілим від'ємним числом або нулем.

Областю визначення функції $y = x^0$ є множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, областю значень — одноелементна множина $\{1\}$. Графік цієї функції зображено на рисунку 73.

Розглянемо функцію $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbb{N}$.

З окремим випадком цієї функції, коли $n = 1$, тобто з функцією $y = \frac{1}{x}$, ви знайомі з курсу алгебри 8 класу.

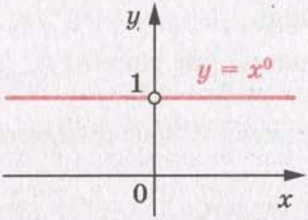


Рис. 73

Запишемо функцію $y = x^{-n}$ у вигляді $y = \frac{1}{x^n}$. Зрозуміло, що *областю визначення функції* $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, *є множина* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Очевидно, що ця функція нулів не має.

Подальші дослідження властивостей функції $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

- **Перший випадок: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.**

Маємо: $x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}$. Оскільки вираз $\frac{1}{x^{2k}}$ набуває тільки додатних значень, то до області значень розглядуваної функції не входять від'ємні числа, а також число 0.

Можна показати, що для будь-якого $a > 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{-2k} = a$.

- Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^{-n}$, *де n — парне натуральне число, є множина* $(0; +\infty)$.
- Очевидно, що *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^{-n}$, *де n — парне натуральне число.*
- *Функція* $y = x^{-n}$, *де n — парне натуральне число, є парною.* Справді, для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{-2k} = \frac{1}{(-x)^{2k}} = \frac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 > 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо $0 < -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$. Звідси $\left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k}$; $\frac{1}{x_1^{2k}} < \frac{1}{x_2^{2k}}$; $x_1^{-2k} < x_2^{-2k}$.

Отже, *функція* $y = x^{-n}$, *де* n *— парне натуральне число, зростає на проміжку* $(-\infty; 0)$.

Аналогічно можна показати, що *функція* $y = x^{-n}$, *де* n *— парне натуральне число, спадає на проміжку* $(0; +\infty)$.

Зауважимо, що зі збільшенням модуля x значення виразу $\frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, стає все меншим і меншим. Тому відстань від точки графіка функції $y = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, до осі абсцис зменшується і може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Аналогічно можна встановити, що зі збільшенням модуля ординати відстань від точки графіка до осі ординат зменшується і може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число (рис. 74). Зокрема, графік функції $y = \frac{1}{x^2}$ зображено на рисунку 75.

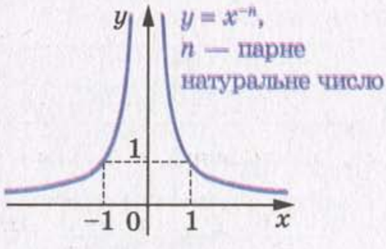


Рис. 74

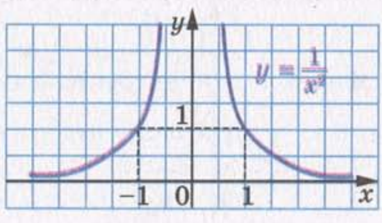


Рис. 75

- **Другий випадок: $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.**

Можна показати, що для будь-якого $a \neq 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{-(2k-1)} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^{-n}$, *де* n *— непарне натуральне число, є множина* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Якщо $x < 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$; якщо $x > 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$.

Отже, проміжки $(-\infty; 0)$ ***і*** $(0; +\infty)$ ***є проміжками знакосталості функції*** $y = x^{-n}$, ***де*** n ***— непарне натуральне число.***

Функція $y = x^{-n}$, ***де*** n ***— непарне натуральне число, є непарною.*** **Справді, для будь-якого** x **з області визначення виконується рівність** $(-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{-x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}$.

Розглянемо довільні числа x_1 **і** x_2 **такі, що** $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ **і** $x_1 < x_2$. **Тоді** $-x_1 > -x_2 > 0$. **Скориставшись властивостями числових нерівностей, отримуємо** $-\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$; $\left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k-1}$; $-\frac{1}{x_1^{2k-1}} < -\frac{1}{x_2^{2k-1}}$; $\frac{1}{x_1^{2k-1}} > \frac{1}{x_2^{2k-1}}$. **Отже, розглядувана функція спадає на проміжку** $(-\infty; 0)$. **Аналогічно можна показати, що ця функція спадає і на проміжку** $(0; +\infty)$.

Отже, функція $y = x^{-n}$, ***де*** n ***— непарне натуральне число, спадає на кожному з проміжків*** $(-\infty; 0)$ ***і*** $(0; +\infty)$.

Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, **де** n **— непарне натуральне число (рис. 76). Зокрема, графік функції** $y = \frac{1}{x^3}$ **зображено на рисунку 77.**

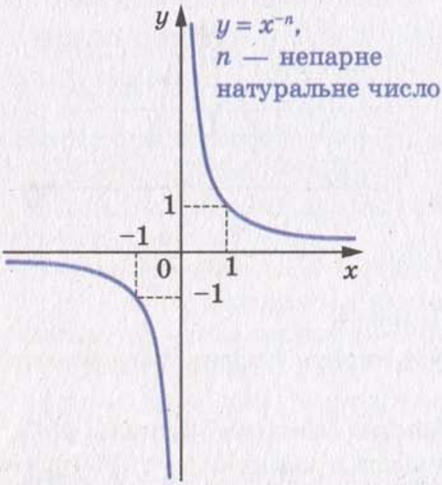


Рис. 76

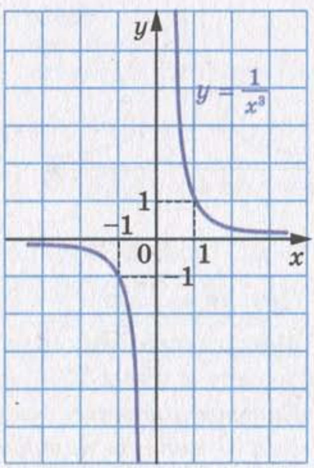


Рис. 77

У таблиці наведено властивості функції $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, вивчені в цьому пункті.

	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число
Область визначення	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Область значень	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Нулі функції	–	–
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання / спадання	Зростає на проміжку $(-\infty; 0)$, спадає на проміжку $(0; +\infty)$	Спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$

?

1. Яку функцію називають степеневою функцією з цілим показником?
2. Яка область визначення функції $y = x^0$?
3. Яка область значень функції $y = x^0$?
4. Яка фігура є графіком функції $y = x^0$?
5. Яка область визначення степеневої функції з цілим від'ємним показником?
6. Сформулюйте властивості функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число.
7. Як виглядає графік функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число?
8. Сформулюйте властивості функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число.
9. Як виглядає графік функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число?

Вправи

272.° Чи проходить графік функції $y = x^{-4}$ через точку:

1) $A\left(2;\ \frac{1}{16}\right)$; 2) $B\left(-2;\ \frac{1}{8}\right)$; 3) $C\left(\frac{1}{3};\ 81\right)$; 4) $D\left(\sqrt{2};\ -\frac{1}{4}\right)$?

273.° Чи проходить графік функції $y = x^{-5}$ через точку:

1) A (0; 0); 2) B (−1; −1); 3) $C\left(\frac{1}{2};\ 32\right)$; 4) $D\left(-3;\ -\frac{1}{243}\right)$?

274.° При яких значеннях a графік функції $y = ax^{-3}$ проходить через точку: 1) A (−5; 20); 2) $B\left(2;\ \frac{1}{24}\right)$?

275.° При яких значеннях a графік функції $y = ax^{-4}$ проходить через точку: 1) A (3; −3); 2) $B\left(-2;\ \frac{1}{2}\right)$?

276.° Дано функцію $f(x) = x^{-19}$. Порівняйте:

1) $f(1{,}6)$ і $f(2)$;
2) $f(-5{,}6)$ і $f(-6{,}5)$;
3) $f(-9{,}6)$ і $f(9{,}6)$;
4) $f(0{,}1)$ і $f(-10)$.

277.° Дано функцію $f(x) = x^{-25}$. Порівняйте:

1) $f(18)$ і $f(16)$; 2) $f(-42)$ і $f(2{,}5)$; 3) $f(-32)$ і $f(-28)$.

278.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{-16}$. Порівняйте:

1) $f(1{,}6)$ і $f(2{,}2)$;
2) $f(-4{,}5)$ і $f(-3{,}6)$;
3) $f(-3{,}4)$ і $f(3{,}4)$;
4) $f(-18)$ і $f(3)$.

279.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{-40}$. Порівняйте:

1) $f(6{,}2)$ і $f(5{,}5)$;
2) $f(-1{,}6)$ і $f(-1{,}7)$;
3) $f(24)$ і $f(-24)$;
4) $f(-8)$ і $f(6)$.

280.° Скільки коренів має рівняння $x^{-n} = 2500$, якщо:

1) n — парне натуральне число;
2) n — непарне натуральне число?

281.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = (x^{-1})^{-1}$; 2) $y = ((x-2)^{-2})^{-2}$.

282.° Чи має дане рівняння від'ємний корінь:

1) $x^{-6} = 2$; 2) $x^{-5} = 0{,}3$; 3) $x^{-7} = -3$; 4) $x^{-8} = -2$?

283.• Знайдіть точки перетину графіків функцій:

1) $y = x$ і $y = x^{-3}$; 2) $y = x^{-2}$ і $y = \frac{1}{8}x$.

284.• Знайдіть точки перетину графіків функцій $y = x^{-4}$ і $y = \frac{1}{32}x$.

285.• Побудуйте графік функції:

1) $y = x^{-2} + 2$; 3) $y = -\frac{1}{2}x^{-2}$; 5) $y = (x - 1)^{-3}$;

2) $y = (x - 3)^{-2}$; 4) $y = x^{-3} - 1$; 6) $y = 3x^{-3}$.

286.• Побудуйте графік функції:

1) $y = x^{-5} - 3$; 2) $y = 4x^{-5}$; 3) $y = (x + 1)^{-4}$; 4) $y = -x^{-4}$.

287.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-6}$ на проміжку:

1) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; 2) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$; 3) $[1; +\infty)$.

288.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-3}$ на проміжку:

1) $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $(-\infty; -3]$.

289.• Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^{-6}, \\ y = 4 - x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = x^3 + 3. \end{cases}$

290.• Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = \frac{1}{8}x^2 - 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^{-2}, \\ y = x^2 - 2. \end{cases}$

291.• Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^{-2}, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ x^2, \text{ якщо } x > -1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, установіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

292.• Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^{-3}, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ -x^2, \text{ якщо } -1 < x \leqslant 1, \\ x^{-3}, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, установіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

293.• Парним чи непарним є натуральне число n у показнику степеня функції $f(x) = x^{-n}$, якщо:

1) $f(-2) > f(-1)$; 3) $f(-2) < f(-1)$;

2) $f(-2) < f(1)$; 4) $f(2) < f(1)$?

Готуємося до вивчення нової теми

294. Знайдіть значення виразу:

1) $5\sqrt{4}-\sqrt{25}$; 3) $(\sqrt{13})^2-3\cdot(\sqrt{8})^2$;

2) $\frac{1}{3}\sqrt{0{,}09}-2$; 4) $\frac{1}{6}\cdot(\sqrt{18})^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)^2$.

295. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 25$; 2) $x^2 = 0{,}49$; 3) $x^2 = 3$; 4) $x^2 = -25$.

296. При яких значеннях x має зміст вираз:

1) $\sqrt{-x}$; 3) $\sqrt{-x^2}$; 5) $\sqrt{x^2+8}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{(x-8)^2}}$;

2) $\sqrt{x^2}$; 4) $\sqrt{x-8}$; 6) $\sqrt{(x-8)^2}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{x}-3}$?

Поновіть у пам'яті зміст пункту 10 на с. 317.

11. Означення кореня n-го степеня

Ви знаєте, що квадратним коренем (коренем другого степеня) з числа a називають таке число, квадрат якого дорівнює a. Аналогічно дають означення кореня n-го степеня з числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Означення. Коренем n-го степеня з числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке число, n-й степінь якого дорівнює a.

Наприклад, коренем п'ятого степеня з числа 32 є число 2, оскільки $2^5 = 32$; коренем третього степеня з числа -64 є число -4, оскільки $(-4)^3 = -64$; коренями четвертого степеня з числа 81 є числа 3 і -3, оскільки $3^4 = 81$ і $(-3)^4 = 81$.

З означення випливає, що будь-який корінь рівняння $x^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є коренем n-го степеня з числа a, і навпаки, корінь n-го степеня з числа a є коренем розглядуваного рівняння.

Якщо n — непарне натуральне число, то графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ при будь-якому a перетинаються в одній точці (рис. 78). Це означає, що рівняння $x^n = a$ має єдиний корінь при будь-якому a. Тоді можна зробити такий висновок:

якщо n — непарне натуральне число, більше за 1, то корінь n-го степеня з будь-якого числа існує, причому тільки один.

Корінь непарного степеня n, $n > 1$, з числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$ (читають: «корінь n-го степеня з a»). Знак $\sqrt[n]{\ }$ називають **знаком кореня n-го степеня** або **радикалом**. Вираз, який стоїть під радикалом, називають **підкореневим виразом**.

Наприклад, $\sqrt[5]{32}=2$, $\sqrt[3]{-64}=-4$, $\sqrt[7]{0}=0$.

Корінь третього степеня також прийнято називати **кубічним коренем**. Наприклад, запис $\sqrt[3]{2}$ читають: «корінь кубічний з числа 2».

Наголосимо, що вираз $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$, існує при будь-якому a.

З означення кореня n-го степеня випливає, що ***при будь-якому a виконується рівність***

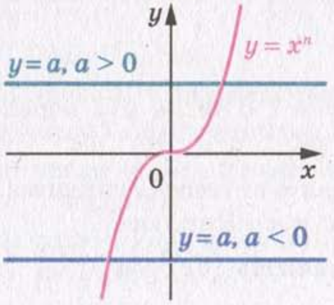
$$\boxed{\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1}=a}$$

Наприклад, $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=2$, $\left(\sqrt[7]{-0{,}1}\right)^7=-0{,}1$.

Розглянемо рівняння $x^n = a$, де n — парне натуральне число.

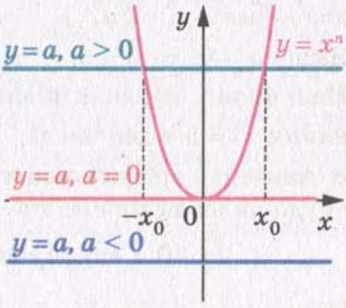
Якщо $a < 0$, то графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ не мають спільних точок; якщо $a = 0$, то розглядувані графіки мають одну спільну точку; якщо $a > 0$, то спільних точок дві, причому їх абсциси — протилежні числа (рис. 79). Тоді можна зробити такий висновок:

якщо n — парне натуральне число, то при a < 0 корінь n-го степеня з числа a не існує; при a = 0 корінь n-го степеня з числа a дорівнює 0; при a > 0 існують два протилежні числа, які є коренями n-го степеня з числа a.



n — непарне натуральне число, $n > 1$

Рис. 78



n — парне натуральне число

Рис. 79

З рисунків 78 і 79 видно, що рівняння $x^n = a$ при $a \geqslant 0$ обов'язково має один невід'ємний корінь. Його називають **арифметичним коренем n-го степеня з числа a.**

Означення. **Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.**

Арифметичний корінь n-го степеня з невід'ємного числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$.

Наприклад, $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3 \geqslant 0$ і $3^4 = 81$;

$\sqrt[6]{64} = 2$, оскільки $2 \geqslant 0$ і $2^6 = 64$;

$\sqrt[10]{0} = 0$, оскільки $0 \geqslant 0$ і $0^{10} = 0$.

Узагалі, якщо $b \geqslant 0$ і $b^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{a} = b$.

Звернемо увагу на те, що для позначення арифметичного кореня n-го степеня з невід'ємного числа a і кореня непарного степеня n з числа a використовують один і той самий запис: $\sqrt[n]{a}$. Запис $\sqrt[2k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$, використовують тільки для позначення арифметичного кореня. Зауважимо, що корінь парного степеня з числа a не має позначення.

За допомогою знака кореня n-го степеня можна записувати розв'язки рівняння $x^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

- Якщо n — непарне натуральне число, то при будь-якому значенні a розглядуване рівняння має єдиний корінь $x = \sqrt[n]{a}$.
- Якщо n — парне натуральне число і $a > 0$, то рівняння має два корені: $x_1 = \sqrt[n]{a}$, $x_2 = -\sqrt[n]{a}$.
- Якщо $a = 0$, то $x = 0$.

Наприклад, коренем рівняння $x^3 = 7$ є число $\sqrt[3]{7}$; коренями рівняння $x^4 = 5$ є два числа: $-\sqrt[4]{5}$ і $\sqrt[4]{5}$.

З означення арифметичного кореня n-го степеня випливає, що для будь-якого невід'ємного числа a має місце таке:

$$\sqrt[n]{a} \geqslant 0 \text{ і виконується рівність } \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Наприклад, $\left(\sqrt[6]{7}\right)^6 = 7$.

Покажемо, що при будь-якому a і $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}}$$

Для того щоб довести рівність $\sqrt[2k+1]{x} = y$, потрібно показати, що $y^{2k+1} = x$.

Маємо: $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$.

Доведена властивість дозволяє корінь непарного степеня з від'ємного числа виразити через арифметичний корінь.

Наприклад, $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{-12} = -\sqrt[5]{12}$.

?

1. Що називають коренем n-го степеня з числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?

2. Що називають кубічним коренем з числа a?

3. Що називають підкореневим виразом?

4. При яких значеннях a має зміст вираз $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$?

5. Що називають арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?

6. При яких значеннях a має зміст вираз $\sqrt[2k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$?

Вправи

297.° Чи має зміст запис:

1) $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[3]{-2}$; 3) $\sqrt[4]{2}$; 4) $\sqrt[4]{-2}$; 5) $\sqrt[6]{0}$; 6) $\sqrt[6]{-1}$?

298.° Чи є правильною рівність (відповідь обґрунтуйте):

1) $\sqrt[3]{27} = 3$; 3) $\sqrt[3]{-27} = -3$; 5) $\sqrt[4]{-16} = -2$;

2) $\sqrt[8]{1} = 1$; 4) $\sqrt[4]{16} = 2$; 6) $\sqrt[5]{-32} = 2$?

299.° Доведіть, що:

1) число 2 є арифметичним кубічним коренем з числа 8;

2) число 3 є арифметичним коренем четвертого степеня з числа 81;

3) число −3 не є арифметичним коренем четвертого степеня з числа 81;

4) число 10 не є арифметичним коренем п'ятого степеня з числа 10 000.

300.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{0{,}25}$; 3) $\sqrt[4]{0{,}0016}$; 5) $\sqrt[4]{3\frac{13}{81}}$; 7) $4\sqrt[3]{0{,}125}$; 9) $\sqrt[4]{9^2}$;

2) $\sqrt[3]{216}$; 4) $\sqrt[5]{-0{,}00001}$; 6) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; 8) $\frac{1}{3}\sqrt[5]{-243}$; 10) $\sqrt[6]{8^2}$.

301.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt[3]{343}$; 3) $0{,}5\sqrt[3]{-64}$; 5) $\sqrt[6]{27^2}$;

2) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$; 4) $-8\sqrt[5]{-\frac{1}{1024}}$; 6) $\sqrt[100]{49^{50}}$?

302.° Обчисліть:

1) $\left(\sqrt{11}\right)^2$; 3) $\left(-\sqrt[4]{7}\right)^4$; 5) $-\sqrt[8]{7^8}$; 7) $\left(-3\sqrt[4]{10}\right)^4$; 9) $\frac{1}{2}\sqrt[6]{48^6}$.

2) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$; 4) $\left(-\sqrt[7]{2}\right)^7$; 6) $\left(5\sqrt[3]{3}\right)^3$; 8) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{48}\right)^6$;

303.° Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\sqrt[8]{18}\right)^8$; 3) $\left(-\sqrt[6]{11}\right)^6$; 5) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{45^3}$;

2) $\left(-\sqrt[9]{9}\right)^9$; 4) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{45}\right)^3$; 6) $\left(-2\sqrt[5]{-5}\right)^5$.

304.° Обчисліть:

1) $0{,}3\sqrt[3]{1000}-5\sqrt[8]{256}+6\cdot\left(-\sqrt[10]{6}\right)^{10}$;

2) $\sqrt[5]{14^5}+\left(-2\sqrt{10}\right)^2-\sqrt[7]{-128}$;

3) $\sqrt[4]{2\frac{113}{256}}\cdot\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}+\frac{1}{16}\cdot\sqrt[3]{14^3}-\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{-5}\right)^3$.

305.° Обчисліть:

1) $200\sqrt[3]{0{,}001}-\sqrt[5]{-0{,}00032}-\left(-4\sqrt{2}\right)^2$;

2) $\sqrt[3]{8000}\cdot\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}-\left(-\sqrt[5]{8}\right)^5+\sqrt[7]{17^7}$.

306.° При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\sqrt[8]{x+6}$; 3) $\sqrt[4]{y(y-1)}$; 5) $\sqrt[6]{-x^2}$;

2) $\sqrt[9]{a-10}$; 4) $\sqrt[6]{-x}$; 6) $\sqrt[10]{x^2+2x-8}$?

307.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt[4]{x-2}$; 2) $y=\sqrt[7]{4-x}$; 3) $y=\sqrt[12]{2x-x^2}$; 4) $y=\frac{1}{\sqrt[8]{x^2-4x+4}}$.

308.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3=27$; 4) $x^4=16$; 7) $27x^3-1=0$;

2) $x^5=9$; 5) $x^6=5$; 8) $(x-2)^3=125$;

3) $x^7=-2$; 6) $x^4=-81$; 9) $(x+5)^4=10\,000$.

309.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^9=1$; 2) $x^8=12$; 3) $x^{10}=1$;

4) $x^{18} = 0$; 6) $x^6 = -64$; 8) $(2x + 1)^3 = 8$;
5) $x^5 = -32$; 7) $64x^5 + 2 = 0$; 9) $(x - 3)^6 = 729$.

310.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = 9$; 4) $\sqrt[3]{x} = -6$; 7) $\sqrt[3]{2x} + 7 = 0$;

2) $\sqrt[3]{x} = \frac{4}{5}$; 5) $\sqrt[6]{x} = -2$; 8) $\sqrt[3]{2x + 7} = 0$;

3) $\sqrt[4]{x} = 3$; 6) $\sqrt[8]{x} = 0$; 9) $\sqrt[3]{2x + 7} = 7$.

311.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{x} = -2$; 3) $\sqrt[5]{x} = -2$; 5) $\sqrt[4]{3x - 2} = 0$;

2) $\sqrt[4]{x} = -2$; 4) $\sqrt[4]{3x} - 2 = 0$; 6) $\sqrt[4]{3x - 2} = 2$.

312.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^8 - 82x^4 + 81 = 0$; 2) $x^6 + x^3 - 56 = 0$; 3) $x^{12} + x^6 - 12 = 0$.

313.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^6 - 25x^3 - 54 = 0$; 2) $x^8 + 13x^4 - 48 = 0$.

Готуємося до вивчення нової теми

314. При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt{a^2} = a$; 2) $\sqrt{a^2} = -a$?

315. Замініть вираз тотожно рівним, який не містить знака кореня:

1) $\sqrt{b^2}$; 2) $-0{,}4\sqrt{c^2}$; 3) $\sqrt{a^6}$; 4) $\sqrt{m^8}$.

316. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{m^2}$, якщо $m > 0$; 4) $\sqrt{0{,}36k^2}$, якщо $k \leqslant 0$;

2) $\sqrt{n^2}$, якщо $n < 0$; 5) $\sqrt{c^{12}}$;

3) $\sqrt{16p^2}$, якщо $p \geqslant 0$; 6) $\sqrt{0{,}25b^{14}}$, якщо $b \leqslant 0$.

317. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{0{,}64 \cdot 36}$; 2) $\sqrt{6^2 \cdot 3^4}$; 3) $\sqrt{\frac{81}{100}}$; 4) $\sqrt{3\frac{13}{36}}$.

318. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$; 3) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{26}$; 5) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$; 7) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{147}}$;

2) $\sqrt{200} \cdot \sqrt{0{,}18}$; 4) $\sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2^5 \cdot 3^3}$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$; 8) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}}$.

Поновіть у пам'яті зміст пункту 11 на с. 317.

12. Властивості кореня n-го степеня

Розглянемо теореми, які виражають властивості кореня n-го степеня.

Теорема 12.1 (корінь із степеня). ***Для будь-якого*** $a \in \mathbb{R}$ ***і*** $k \in \mathbb{N}$ ***виконуються рівності:***

$$\boxed{\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a}$$

$$\boxed{\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|}$$

Доведення. ⊙ Для того щоб довести рівність $\sqrt[2k+1]{x} = y$, достатньо показати, що $y^{2k+1} = x$. Тоді перша з рівностей, що доводяться, є очевидною.

Для того щоб довести рівність $\sqrt[2k]{x} = y$, достатньо показати, що $y \geqslant 0$ і $y^{2k} = x$. Маємо: $|a| \geqslant 0$ і $(|a|)^{2k} = a^{2k}$. ▲

Теорема 12.2 (корінь з добутку). ***Якщо*** $a \geqslant 0$ ***і*** $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ***то***

$$\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$$

Доведення. ⊙ Для того щоб довести рівність $\sqrt[n]{x} = y$, де $x \geqslant 0$, достатньо показати, що $y \geqslant 0$ і $y^n = x$.

Маємо: $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ і $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Тоді $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Крім того,

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab. \ ▲$$

Теорема 12.3 (корінь з дробу). ***Якщо*** $a \geqslant 0$ ***і*** $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ***то***

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 12.4 (степінь кореня). ***Якщо*** $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ***то***

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}}$$

Доведення. ⊙ Якщо $k = 1$, то рівність, що доводиться, є очевидною.

Нехай $k > 1$. Маємо: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ множників}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множників}}} = \sqrt[n]{a^k}$. ▲

Теорема 12.5 (корінь з кореня). ***Якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, то***

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}}$$

Доведення. ⊙ Маємо: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geqslant 0$.

Крім того, $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$. ▲

Теорема 12.6. ***Якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то***

$$\boxed{\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}}$$

Доведення. ⊙ Якщо $k = 1$, то рівність, що доводиться, є очевидною.

Нехай $k > 1$. Маємо: $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}} = \sqrt[n]{a}$. ▲

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу: 1) $\sqrt[4]{(-7{,}3)^4}$; 2) $\sqrt[6]{1{,}2^{12}}$; 3) $\sqrt[4]{0{,}0081 \cdot 625}$.

Розв'язання

1) $\sqrt[4]{(-7{,}3)^4} = |-7{,}3| = 7{,}3$.

2) $\sqrt[6]{1{,}2^{12}} = 1{,}2^2 = 1{,}44$.

3) $\sqrt[4]{0{,}0081 \cdot 625} = \sqrt[4]{0{,}0081} \cdot \sqrt[4]{625} = 0{,}3 \cdot 5 = 1{,}5$.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть значення виразу: 1) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}}$.

Розв'язання

1) Замінивши добуток коренів коренем з добутку, дістанемо:

$$\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{16 \cdot 2} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

2) Замінивши частку коренів коренем з частки (дробу), матимемо:

$$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}} = \sqrt[3]{\frac{24}{375}} = \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}.$$

ПРИКЛАД 3 Спростіть вираз: 1) $\sqrt[4]{a^{28}}$; 2) $\sqrt[6]{64a^{18}}$, якщо $a \leqslant 0$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 4) $\sqrt[4]{a^{12}}$; 5) $\sqrt[6]{a^2}$; 6) $\sqrt[6]{a^6 b^6}$, якщо $a \geqslant 0$ і $b \leqslant 0$.

Розв'язання

1) За теоремою про корінь зі степеня маємо:

$$\sqrt[4]{a^{28}} = \sqrt[4]{(a^7)^4} = |a^7| = \begin{cases} a^7, & \text{якщо } a \geqslant 0, \\ -a^7, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

2) Маємо $\sqrt[6]{64a^{18}} = 2|a^3|$. Оскільки за умовою $a \leqslant 0$, то $a^3 \leqslant 0$. Тоді $\sqrt[6]{64a^{18}} = 2|a^3| = -2a^3$.

3) З умови випливає, що $a \geqslant 0$. Застосовуючи теореми 12.5 і 12.1, можна записати: $\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a}$.

4) $\sqrt[4]{a^{12}} = \sqrt[4]{(a^3)^4} = |a^3|$.

5) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[3]{|a|}$.

6) Ураховуючи, що $a \geqslant 0$ і $b \leqslant 0$, можна записати:

$$\sqrt[6]{a^6b^6} = \sqrt[6]{(ab)^6} = |ab| = |a||b| = a(-b) = -ab.$$

ПРИКЛАД 4 Побудуйте графік функції $y = \sqrt[6]{x^6} + x$.

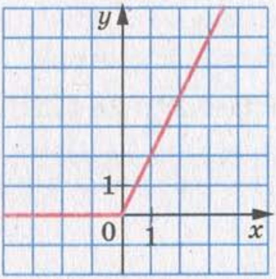


Рис. 80

Розв'язання. Оскільки $\sqrt[6]{x^6} = |x|$, то $y = |x| + x$.

Якщо $x \geqslant 0$, то $y = x + x = 2x$.

Якщо $x < 0$, то $y = -x + x = 0$.

Отже, $y = \begin{cases} 2x, \text{ якщо } x \geqslant 0, \\ 0, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

Графік функції зображено на рисунку 80.

?

1. Сформулюйте теорему про корінь із степеня.
2. Сформулюйте теорему про корінь з добутку.
3. Сформулюйте теорему про корінь з дробу.
4. Сформулюйте теорему про степінь кореня.
5. Сформулюйте теорему про корінь з кореня.

Вправи

319.° Знайдіть:

1) $\sqrt[3]{64 \cdot 125}$;
2) $\sqrt[4]{0{,}0625 \cdot 81}$;
3) $\sqrt[5]{2^{10} \cdot 7^5}$;
4) $\sqrt[6]{3^{18} \cdot 10^{24}}$;
5) $\sqrt[4]{\dfrac{3^{12} \cdot 11^4}{5^8 \cdot 2^{16}}}$.

320.° Обчисліть:

1) $\sqrt[3]{0{,}064 \cdot 343}$; 2) $\sqrt[4]{0{,}0081 \cdot 11^4}$; 3) $\sqrt[5]{\dfrac{7^5}{2^{10}}}$; 4) $\sqrt[8]{\dfrac{2^{24} \cdot 3^{16}}{5^{16}}}$.

321.° Знайдіть:

1) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$;

2) $\sqrt[3]{0{,}054}\cdot\sqrt[3]{4}$;

3) $\dfrac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}$;

4) $\dfrac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{128}}$;

5) $\sqrt[6]{3^4\cdot5^2}\cdot\sqrt[6]{3^8\cdot5^4}$;

6) $\dfrac{\sqrt[8]{2^{30}\cdot7^{12}}}{\sqrt[8]{2^6\cdot7^4}}$;

7) $\sqrt[4]{11-\sqrt{40}}\cdot\sqrt[4]{11+\sqrt{40}}$;

8) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}\cdot\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$;

9) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[3]{-9}$;

10) $\dfrac{\sqrt[4]{28}\cdot\sqrt[4]{20}}{\sqrt[4]{35}}$.

322.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}$;

2) $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$;

3) $\sqrt[7]{2^{15}\cdot5^3}\cdot\sqrt[7]{2^6\cdot5^4}$;

4) $\dfrac{\sqrt[6]{3^{10}\cdot10^2}}{\sqrt[6]{10^8\cdot3^4}}$;

5) $\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}$;

6) $\sqrt[5]{2\sqrt{17}+10}\cdot\sqrt[5]{2\sqrt{17}-10}$;

7) $\dfrac{\sqrt[3]{256}\cdot\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{12}}$;

8) $\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{80}$?

323.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt[4]{(-13)^4}$; 2) $\sqrt[5]{(-9)^5}$; 3) $\sqrt[6]{(-8)^6}$?

324.° Подайте вираз у вигляді одночлена, якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$:

1) $\sqrt{25a^2}$;

2) $\sqrt[3]{27b^9}$;

3) $\sqrt[4]{625a^{12}b^4}$;

4) $\sqrt[6]{729a^{54}b^{18}}$.

325.° Подайте вираз у вигляді одночлена, якщо $m \geqslant 0$ і $n \geqslant 0$:

1) $\sqrt{49m^2}$;

2) $\sqrt[3]{125n^{15}}$;

3) $\sqrt[6]{0{,}000064m^{30}n^{42}}$;

4) $\sqrt[8]{m^{72}n^{24}}$.

326.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\sqrt[5]{a}}$;

2) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$;

3) $\sqrt[27]{b^9}$;

4) $\sqrt[15]{c^6}$;

5) $\sqrt[18]{a^8b^{24}}$;

6) $\sqrt[6]{16}$;

7) $\sqrt[12]{81}$;

8) $\dfrac{\sqrt[10]{x^7}}{\sqrt[10]{x^2}}$;

9) $\dfrac{\sqrt[4]{m^7n^9}}{\sqrt[4]{m^5n^3}}$.

327.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{\sqrt{x}}$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 5) $\sqrt[21]{a^{14}b^7}$; 7) $\sqrt[9]{64}$;

2) $\sqrt{\sqrt{y}}$; 4) $\sqrt[9]{b^6}$; 6) $\sqrt[6]{27}$; 8) $\frac{\sqrt[4]{c^3}}{\sqrt[4]{c}}$.

328.° Подайте вираз $\sqrt{a}$ у вигляді кореня:

1) четвертого степеня; 4) чотирнадцятого степеня;

2) шостого степеня; 5) вісімнадцятого степеня;

3) десятого степеня; 6) п'ятдесятого степеня.

329.° Подайте вираз $\sqrt[3]{b}$, $b \geqslant 0$, у вигляді кореня:

1) шостого степеня; 3) п'ятнадцятого степеня;

2) дев'ятого степеня; 4) тридцятого степеня.

330.° При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{a^4} = a$; 4) $\sqrt[3]{a^3} = -a$;

2) $\sqrt[4]{a^4} = -a$; 5) $\sqrt[4]{(a-5)^3} = \left(\sqrt[4]{a-5}\right)^3$;

3) $\sqrt[3]{a^3} = a$; 6) $\sqrt[3]{(a-5)^4} = \left(\sqrt[3]{a-5}\right)^4$?

331.° При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt[6]{a^{30}} = a^5$; 2) $\sqrt[6]{a^{30}} = -a^5$; 3) $\sqrt[4]{a^4} = \left(\sqrt[4]{a}\right)^4$; 4) $\sqrt[4]{a^4} = \left(\sqrt[4]{-a}\right)^4$?

332.° При яких значеннях a і b виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b}$; 4) $\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{b}$;

2) $\sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{-a} \cdot \sqrt[4]{-b}$; 5) $\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{-a} \cdot \sqrt[5]{-b}$?

3) $\sqrt[4]{-ab} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{-b}$;

333.° При яких значеннях x виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{x^2-4} = \sqrt[4]{x-2} \cdot \sqrt[4]{x+2}$;

2) $\sqrt[8]{(x-3)(7-x)} = \sqrt[8]{x-3} \cdot \sqrt[8]{7-x}$;

3) $\sqrt[3]{(x-6)(x-10)} = \sqrt[3]{x-6} \cdot \sqrt[3]{x-10}$;

4) $\sqrt[6]{(x+1)(x+2)(x+3)} = \sqrt[6]{x+1} \cdot \sqrt[6]{x+2} \cdot \sqrt[6]{x+3}$?

334.° Замініть вираз тотожно рівним виразом, який не містить знака кореня:

1) $\sqrt[4]{b^4}$; 3) $\sqrt[3]{a^{18}}$; 5) $\sqrt[8]{m^{16}}$;

2) $-0{,}4\sqrt[6]{c^6}$; 4) $\sqrt[6]{a^{18}}$; 6) $\sqrt[12]{(x-5)^{12}}$.

335.° Замініть вираз тотожно рівним виразом, який не містить знака кореня:

1) $1{,}2\sqrt[10]{x^{10}}$; 2) $\sqrt[6]{y^{12}}$; 3) $\sqrt[12]{n^{36}}$; 4) $\sqrt[14]{(8-y)^{14}}$.

336.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{m^6}$, якщо $m \geqslant 0$;
2) $\sqrt[4]{n^4}$, якщо $n \leqslant 0$;
3) $\sqrt[4]{16p^4}$, якщо $p \geqslant 0$;
4) $\sqrt[8]{256k^8}$, якщо $k \leqslant 0$;
5) $\sqrt[6]{c^{24}}$;
6) $\sqrt{0{,}25b^{14}}$, якщо $b \leqslant 0$;
7) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$, якщо $y \geqslant 0$;
8) $\sqrt{0{,}01a^6b^{10}}$, якщо $a \leqslant 0, b \geqslant 0$;
9) $-1{,}2x\sqrt[6]{64x^{30}}$, якщо $x \leqslant 0$;
10) $\dfrac{\sqrt[4]{a^{12}b^{28}c^{32}}}{a^4b^8c^{10}}$, якщо $a > 0, b < 0$.

337.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{625a^{24}}$;
2) $\sqrt[4]{0{,}0001b^{20}}$, якщо $b \geqslant 0$;
3) $-5\sqrt{4x^2}$, якщо $x \leqslant 0$;
4) $\sqrt[10]{p^{30}q^{40}}$, якщо $p \geqslant 0$;
5) $-0{,}1\sqrt[6]{1\,000\,000z^{42}}$, якщо $z \geqslant 0$;
6) $\sqrt[12]{m^{36}n^{60}}$, якщо $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$;
7) $ab^2\sqrt[4]{a^{48}b^{36}c^{44}}$, якщо $b \geqslant 0$, $c \leqslant 0$;
8) $-\dfrac{8m^3p^4}{k^2}\sqrt[4]{\dfrac{k^{60}p^{40}}{256m^{12}}}$, якщо $m<0, k>0$.

338.° При яких значеннях a виконується нерівність:

1) $\sqrt[3]{a^3} \geqslant \sqrt[4]{a^4}$; 2) $\sqrt[5]{a^5} \leqslant \sqrt[6]{a^6}$?

339.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{a^4}+a$, якщо $a > 0$;
2) $\sqrt[6]{a^6}+\sqrt[3]{a^3}$, якщо $a < 0$;
3) $\sqrt[5]{a^5}+\sqrt[4]{a^4}$;
4) $\sqrt{a^2}-\sqrt[7]{a^7}$.

340.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{(x+4)^4}=x+4$;
2) $\sqrt[4]{(1-3x)^8}=(1-3x)^2$;
3) $\sqrt[6]{(x^2-2x-3)^6}=3+2x-x^2$.

341.°° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{\left(\sqrt{6}-2\right)^3}$; 2) $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$; 3) $\sqrt[9]{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^3}$; 4) $\sqrt[6]{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$.

342.°° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[8]{\left(\sqrt{5}-2\right)^4}$; 2) $\sqrt[10]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}$; 3) $\sqrt[12]{\left(\sqrt{11}-3\right)^3}$; 4) $\sqrt[15]{\left(\sqrt{7}-3\right)^3}$.

343.** Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt[4]{x^4}-x$, якщо $x \leqslant 0$;
2) $y=2x+\sqrt[6]{x^6}$;
3) $y=\sqrt[8]{(x-2)^8}$;
4) $y=\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{x^3}$;
5) $y=\sqrt[4]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^2}$;
6) $y=\dfrac{x^3}{\sqrt[6]{x^6}}+2$;
7) $y=\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{x^9}$.

344.** Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt[8]{x^8}-2x$; 2) $y=\sqrt[4]{-x}\cdot\sqrt[4]{-x^3}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt[6]{x^6}}{x}$.

345.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[6]{x^6}=x-4$; 2) $\sqrt[10]{x^{10}}=6-x$; 3) $2\sqrt[4]{x^4}=x+3$.

346.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[8]{x^8}=x+8$; 2) $\sqrt[12]{x^{12}}=6x-10$.

347.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{(x-3)^4}+\sqrt[6]{(5-x)^6}=2$.

348.* Побудуйте графік функції $y=\sqrt[8]{(x+1)^8}+\sqrt{(x-3)^2}$.

Готуємося до вивчення нової теми

349. Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{128}$; 3) $\frac{1}{10}\sqrt{200}$; 4) $-0{,}05\sqrt{4400}$.

350. Внесіть множник під знак кореня:

1) $3\sqrt{13}$; 2) $-10\sqrt{14}$; 3) $6\sqrt{a}$; 4) $-\frac{2}{3}\sqrt{54}$.

351. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{75}-6\sqrt{3}$;
2) $5\sqrt{12}-7\sqrt{3}$;
3) $3\sqrt{72}-4\sqrt{2}+2\sqrt{98}$;
4) $3\sqrt{8}+\sqrt{128}-\frac{1}{3}\sqrt{162}$.

352. Спростіть вираз:

1) $(\sqrt{3}-\sqrt{12})\cdot\sqrt{3}$;
2) $(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)$;
3) $(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})$;
4) $(2-3\sqrt{3})^2$.

353. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{12}{\sqrt{6}}$; 2) $\dfrac{24}{5\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$; 4) $\dfrac{15}{\sqrt{15}-\sqrt{12}}$; 5) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

354. Скоротіть дріб:

1) $\frac{c-9}{\sqrt{c}-3}$;
4) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{5-\sqrt{10}}$;
7) $\frac{4a+4\sqrt{5}}{a^2-5}$;
2) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;
5) $\frac{13-\sqrt{13}}{\sqrt{13}}$;
8) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}$.
3) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$;
6) $\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

355. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\sqrt{17}-4}\cdot\sqrt{\sqrt{17}+4}$;
2) $\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2$.

356. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{-m^9}$;
3) $\sqrt{4x^6y}$, якщо $x<0$;
2) $\sqrt{a^4b^{13}}$, якщо $a\neq 0$;
4) $\sqrt{45x^3y^{14}}$, якщо $y<0$.

357. Внесіть множник під знак кореня:

1) $m\sqrt{7}$, якщо $m\geqslant 0$;
3) $p\sqrt{p^3}$;
2) $3n\sqrt{6}$, якщо $n\leqslant 0$;
4) $x^4y\sqrt{x^5y}$, якщо $y\leqslant 0$.

Поновіть у пам'яті зміст пункту 12 на с. 318.

13. Тотожні перетворення виразів, які містять корені n-го степеня

Користуючись теоремою про корінь з добутку, перетворимо вираз $\sqrt[4]{48}$:

$$\sqrt[4]{48}=\sqrt[4]{16\cdot 3}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{3}=2\sqrt[4]{3}.$$

Отже, вираз $\sqrt[4]{48}$ ми подали у вигляді добутку раціонального числа 2 та ірраціонального числа $\sqrt[4]{3}$. Таке перетворення називають ***винесенням множника з-під знака кореня***. У даному випадку було винесено з-під кореня множник 2.

Розглянемо виконане перетворення у зворотному порядку:

$$2\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{16\cdot 3}=\sqrt[4]{48}.$$

Таке перетворення називають ***внесенням множника під знак кореня***.

ПРИКЛАД 1 Винесіть множник з-під знака кореня: 1) $\sqrt[3]{250}$; 2) $\sqrt[4]{162a^8}$; 3) $\sqrt[8]{b^{43}}$; 4) $\sqrt[8]{-b^{43}}$; 5) $\sqrt[6]{a^6b^7}$, якщо $a < 0$.

Розв'язання

1) Подамо число, яке стоїть під знаком кореня, у вигляді добутку двох чисел, одне з яких є кубом раціонального числа:

$$\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{125\cdot 2}=5\sqrt[3]{2}.$$

2) $\sqrt[4]{162a^8}=\sqrt[4]{81a^8\cdot 2}=3a^2\cdot\sqrt[4]{2}.$

3) З умови випливає, що $b \geqslant 0$. Тоді

$$\sqrt[8]{b^{43}}=\sqrt[8]{b^{40}b^3}=|b^5|\sqrt[8]{b^3}=b^5\sqrt[8]{b^3}.$$

4) З умови випливає, що $b \leqslant 0$. Тоді

$$\sqrt[8]{-b^{43}}=\sqrt[8]{b^{40}(-b)^3}=|b^5|\sqrt[8]{-b^3}=-b^5\sqrt[8]{-b^3}.$$

5) З умови випливає, що $b \geqslant 0$. Тоді

$$\sqrt[6]{a^6b^7}=\sqrt[6]{a^6b^6b}=|a||b|\sqrt[6]{b}=-ab\sqrt[6]{b}.$$

ПРИКЛАД 2 Внесіть множник під знак кореня: 1) $-2\sqrt[6]{3}$; 2) $a\sqrt[4]{7}$; 3) $c\sqrt[10]{c^7}$; 4) $3b\sqrt[4]{-\frac{b}{3}}$.

Розв'язання

1) $-2\sqrt[6]{3}=-\sqrt[6]{64}\cdot\sqrt[6]{3}=-\sqrt[6]{192}.$

2) Якщо $a \geqslant 0$, то $a\sqrt[4]{7}=\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{7}=\sqrt[4]{7a^4}$; якщо $a<0$, то $a\sqrt[4]{7}=-\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{7}=-\sqrt[4]{7a^4}$.

3) З умови випливає, що $c \geqslant 0$. Тоді $c\sqrt[10]{c^7}=\sqrt[10]{c^{10}}\cdot\sqrt[10]{c^7}=\sqrt[10]{c^{17}}$.

4) З умови випливає, що $b \leqslant 0$. Тоді

$$3b\sqrt[4]{-\frac{b}{3}}=-\sqrt[4]{81b^4}\cdot\sqrt[4]{-\frac{b}{3}}=-\sqrt[4]{81b^4\cdot\left(-\frac{b}{3}\right)}=-\sqrt[4]{-27b^5}.$$

ПРИКЛАД 3 Спростіть вираз: 1) $\sqrt[3]{54a}+\sqrt[3]{16a}-\sqrt[3]{2000a}$; 2) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}$; 3) $\sqrt{4-\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23+8\sqrt{7}}$.

Розв'язання

1) Маємо:

$$\sqrt[3]{54a}+\sqrt[3]{16a}-\sqrt[3]{2000a}=\sqrt[3]{27\cdot 2a}+\sqrt[3]{8\cdot 2a}-\sqrt[3]{1000\cdot 2a}=$$
$$=3\sqrt[3]{2a}+2\sqrt[3]{2a}-10\sqrt[3]{2a}=-5\sqrt[3]{2a}.$$

2) Внесемо множник 4 під знак кубічного кореня, а потім скористаємося теоремою про корінь з кореня:

$$\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{4^3\cdot 4}}=\sqrt[12]{4^4}.$$

Далі, використовуючи теорему 12.6, остаточно отримуємо: $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[3]{4}$.

3) $\sqrt{4-\sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23+8\sqrt{7}} = \sqrt[4]{\left(4-\sqrt{7}\right)^2} \cdot \sqrt[4]{23+8\sqrt{7}} =$

$$= \sqrt[4]{16-8\sqrt{7}+7} \cdot \sqrt[4]{23+8\sqrt{7}} = \sqrt[4]{\left(23-8\sqrt{7}\right)\left(23+8\sqrt{7}\right)} =$$

$$= \sqrt[4]{23^2-\left(8\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt[4]{529-448} = \sqrt[4]{81} = 3.$$

ПРИКЛАД 4 Скоротіть дріб: 1) $\dfrac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1}$; 2) $\dfrac{2-3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}$.

Розв'язання

1) Розклавши чисельник даного дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1} = \frac{\left(\sqrt[6]{b}\right)^2-1}{\sqrt[6]{b}+1} = \frac{\left(\sqrt[6]{b}-1\right)\left(\sqrt[6]{b}+1\right)}{\sqrt[6]{b}+1} = \sqrt[6]{b}-1.$$

2) $\dfrac{2-3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{\left(\sqrt[4]{2}\right)^4-3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{\sqrt[4]{2}\left(\sqrt[4]{2^3}-3\right)}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{8}-3.$

3) Розклавши чисельник і знаменник даного дробу на множники, маємо:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}} = \frac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2} = \frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}.$$

ПРИКЛАД 5 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу: 1) $\dfrac{15}{2\sqrt[3]{3}}$; 2) $\dfrac{5}{2-\sqrt[3]{3}}$.

Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу означає перетворити дріб так, щоб його знаменник не містив знака кореня n-го степеня.

Розв'язання

1) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на $\sqrt[3]{3^2}$, отримуємо:

$$\frac{15}{2\sqrt[3]{3}} = \frac{15\sqrt[3]{3^2}}{2\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}} = \frac{15\sqrt[3]{9}}{2\left(\sqrt[3]{3}\right)^3} = \frac{15\sqrt[3]{9}}{2\cdot 3} = \frac{5\sqrt[3]{9}}{2}.$$

2) Урахувавши формулу $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, помножимо чисельник і знаменник даного дробу на неповний квадрат суми чисел 2 і $\sqrt[3]{3}$. Отримуємо:

$$\frac{5}{2-\sqrt[3]{3}}=\frac{5\left(4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}{\left(2-\sqrt[3]{3}\right)\left(4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}=\frac{5\left(4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}{2^3-\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}=$$

$$=\frac{5\left(4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}{8-3}=4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}.$$

ПРИКЛАД 6 Доведіть тотожність

$$\left(\frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}+\frac{\sqrt[8]{b}}{\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}}-\frac{2\sqrt[8]{ab}}{\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}}\right)\cdot\left(\sqrt[8]{a}-\frac{\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}\right)=\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}.$$

Розв'язання

$$\left(\frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}+\frac{\sqrt[8]{b}}{\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}}-\frac{2\sqrt[8]{ab}}{\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}}\right)\cdot\left(\sqrt[8]{a}-\frac{\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[8]{a}\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)+\sqrt[8]{b}\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)+2\sqrt[8]{ab}}{\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)}\cdot\left(\sqrt[8]{a}-\frac{\sqrt[8]{b}\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[8]{ab}+\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b}+2\sqrt[8]{ab}}{\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)}\cdot\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)=\frac{\sqrt[4]{a}+2\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}=\frac{\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)^2}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}=$$

$$=\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}.$$

Вправи

358.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[3]{16}$; 3) $\sqrt[3]{250}$; 5) $\sqrt[3]{40a^5}$; 7) $\sqrt[3]{-54a^5b^9}$;

2) $\sqrt[4]{162}$; 4) $\sqrt[6]{7290}$; 6) $\sqrt[3]{-a^7}$; 8) $\sqrt[3]{-108a^7b^{10}}$.

359.° Спростіть вираз:

1) $-\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}$; 2) $\frac{1}{8}\sqrt[7]{640}$; 3) $\frac{3}{7}\sqrt[3]{686}$; 4) $-1{,}2\sqrt[5]{96}$.

360.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{80}$; 3) $\sqrt[3]{432}$; 5) $\sqrt[3]{54y^8}$;

2) $\sqrt[4]{486}$; 4) $\sqrt[7]{30\,000\,000}$; 6) $\sqrt[4]{243b^9c^{18}}$.

361.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $2\sqrt{3}$; 3) $-10\sqrt[4]{0{,}271}$; 5) $5\sqrt[3]{0{,}04x}$; 7) $b\sqrt[5]{3b^3}$;

2) $4\sqrt[3]{5}$; 4) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}$; 6) $2\sqrt[5]{6y}$; 8) $c\sqrt[3]{\frac{5}{c^2}}$.

362.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{320}$; 3) $5\sqrt[4]{4a}$; 5) $2x^3\sqrt[5]{\frac{x^3}{8}}$.

2) $2\sqrt[4]{7}$; 4) $0{,}3\sqrt[3]{100c^2}$;

363.° Спростіть вираз:

1) $4\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{a}-5\sqrt[3]{a}$; 3) $5\sqrt[6]{c}+3\sqrt[6]{d}-\sqrt[6]{c}+3\sqrt[6]{d}$;

2) $6\sqrt[4]{b}+2\sqrt[4]{b}-8\sqrt[4]{b}$; 4) $9\sqrt[5]{6}-2\sqrt[4]{3}+8\sqrt[4]{3}-3\sqrt[5]{6}$.

364.° Спростіть вираз:

1) $3\sqrt[4]{c}-2\sqrt[4]{c}$; 2) $\sqrt[7]{5}+7\sqrt[7]{5}-4\sqrt[7]{5}$.

365.° Замініть вираз на тотожно рівний йому:

1) $\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{320}-\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}$;

2) $\sqrt[3]{56m}+\sqrt[3]{-189m}-\sqrt[3]{-81n}-1{,}5\sqrt[3]{24n}+\sqrt[3]{448m}$.

366.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{2000}$;

2) $\sqrt[4]{625a}+3\sqrt[4]{16a}-2\sqrt[4]{81a}+4\sqrt[4]{1296a}$.

367.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{2\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$; 5) $\sqrt[8]{x^3\sqrt[3]{x^7}}$;

2) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}}$; 4) $\sqrt[5]{b\sqrt[6]{b}}$; 6) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

368.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a\sqrt{a}}$; 3) $\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 5) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[6]{x^{13}}}$;

2) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt[9]{c^2\sqrt[4]{c}}$; 6) $\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}$.

369.° Спростіть вираз:

1) $(1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2})(1-\sqrt[3]{a})$; 2) $(1+\sqrt{a})(1+\sqrt[4]{a})(1-\sqrt[4]{a})$.

370.° Спростіть вираз:

1) $(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})(\sqrt[8]{m}+\sqrt[8]{n})(\sqrt[8]{m}-\sqrt[8]{n})$;

2) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})$.

371. Подайте у вигляді кореня вираз:

1) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a}$; 4) $\dfrac{\sqrt[12]{a^5}}{\sqrt[4]{a}}$; 7) $\dfrac{\sqrt[6]{3\sqrt[7]{3^5}}}{\sqrt[14]{9}}$;

2) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[6]{b}$; 5) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{6}}$; 8) $\sqrt[4]{a^2b}\cdot\sqrt[6]{ab^2}\cdot\sqrt[12]{a^8b}$;

3) $\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[12]{n}$; 6) $\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a}}\cdot\sqrt[5]{a}$; 9) $\dfrac{\sqrt[6]{a^3b^2\sqrt[3]{ab^2}}}{\sqrt{ab}}$.

372. Подайте у вигляді кореня вираз:

1) $\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[3]{x}$; 3) $a\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a}$; 5) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}$;

2) $\sqrt[5]{y^2}\cdot\sqrt[15]{y^4}$; 4) $\dfrac{\sqrt[9]{a^8}}{\sqrt[6]{a^5}}$; 6) $\sqrt[5]{a^2b}\cdot\sqrt[10]{a^2b}\cdot\sqrt[15]{ab^3}$.

373. Обчисліть значення виразу:

1) $\left(5\sqrt[3]{4}+0{,}5\sqrt[3]{108}-\sqrt[3]{500}\right)\sqrt[3]{2}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{9}-6\sqrt[3]{72}+2\sqrt[3]{1125}}{\sqrt[3]{9}}$;

2) $\sqrt[3]{0{,}25}\left(\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{32}-2\sqrt[3]{108}\right)$; 5) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}\right)^2}{4+3\sqrt{2}}$.

3) $\left(2\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{100}\right)\left(\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)$;

374. Обчисліть значення виразу:

1) $\left(4\sqrt[3]{72}-3\sqrt[3]{9}+5\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}\right)\sqrt[3]{3}$; 3) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{24}-\sqrt[4]{6}\right)^2}{4\sqrt{3}-3\sqrt{6}}$.

2) $\dfrac{5\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}$;

375. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$; 5) $\dfrac{10}{\sqrt[4]{8}}$; 7) $\dfrac{n^4}{\sqrt[8]{n^5}}$; 9) $\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{x^4}}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 4) $\dfrac{12}{\sqrt[5]{-3}}$; 6) $\dfrac{18}{\sqrt[5]{8}}$; 8) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{6}}$; 10) $\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$.

376. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{3}}$; 3) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{2}}$; 5) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{10}}$; 7) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}$;

2) $\dfrac{20}{\sqrt[3]{25}}$; 4) $\dfrac{15}{\sqrt[4]{27}}$; 6) $\dfrac{24}{\sqrt[5]{16}}$; 8) $\dfrac{m^5}{\sqrt[7]{m^3}}$.

377.• Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 5) $\dfrac{\sqrt[8]{ab^2}-\sqrt[8]{a^2b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$; 9) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}$;

2) $\dfrac{\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$; 6) $\dfrac{\sqrt[6]{a}+\sqrt[12]{ab}}{\sqrt[12]{ab}+\sqrt[6]{b}}$; 10) $\dfrac{2-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$;

3) $\dfrac{\sqrt[6]{x}-9}{\sqrt[12]{x}+3}$; 7) $\dfrac{a\sqrt[3]{b^2}-b\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2b^2}}$; 11) $\dfrac{\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{2}}$;

4) $\dfrac{\sqrt{m}+\sqrt[4]{m}}{m-\sqrt[4]{m^3}}$; 8) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{x-64}$; 12) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}+\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}$.

378.• Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{\sqrt[6]{a}+1}{\sqrt[3]{a}-1}$; 3) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; 5) $\dfrac{\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{a^2b}}$;

2) $\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt[4]{mn}}{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}$; 4) $\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$; 6) $\dfrac{3+\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}}$.

379.• Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$; 3) $\dfrac{15}{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{6}+1}$; 5) $\dfrac{5}{2+\sqrt[3]{2}}$.

2) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}$; 4) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}}$;

380.• Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; 3) $\dfrac{27}{\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{10}+1}$;

2) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{63}+\sqrt[3]{49}}$; 4) $\dfrac{11}{3-\sqrt[3]{5}}$.

381.•• При яких значеннях a і b є правильною рівність:

1) $\sqrt[4]{a^5b^5}=ab\sqrt[4]{ab}$; 2) $\sqrt[4]{a^4b}=a\sqrt[4]{b}$; 3) $\sqrt[4]{a^4b}=-a\sqrt[4]{b}$?

382.•• Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{-m^9}$; 5) $\sqrt[4]{162a^4b^8c^{12}}$, якщо $a>0$, $c<0$;

2) $\sqrt[4]{a^8b^{13}}$, якщо $a>0$; 6) $\sqrt[4]{a^{15}b^{15}}$;

3) $\sqrt[6]{x^6y^7}$, якщо $x\neq 0$; 7) $\sqrt[8]{-a^{25}b^{50}}$.

4) $\sqrt[4]{32m^{18}n^{17}}$;

383.•• Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{32a^6}$, якщо $a \leqslant 0$;
2) $\sqrt[4]{-625a^5}$;
3) $\sqrt[6]{a^7b^7}$, якщо $a < 0$, $b < 0$;
4) $\sqrt[6]{a^{20}b^{19}}$, якщо $a > 0$.

384.•• Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt[4]{2}$, якщо $a \geqslant 0$;
2) $ab\sqrt[6]{\dfrac{6}{a^3b^2}}$, якщо $a > 0$, $b < 0$;
3) $mn\sqrt[4]{\dfrac{1}{m^3n^3}}$;
4) $b\sqrt[6]{6}$;
5) $a\sqrt[6]{-a}$;
6) $ab\sqrt[4]{ab^2}$, якщо $b \leqslant 0$.

385.•• Внесіть множник під знак кореня:

1) $c\sqrt[8]{3}$, якщо $c \leqslant 0$;
2) $a\sqrt[6]{a}$;
3) $-ab\sqrt[4]{6}$, якщо $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$;
4) $ab\sqrt[8]{\dfrac{3}{a^4b^5}}$, якщо $a < 0$;
5) $a\sqrt[4]{-a^3}$.

386.•• Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{10}-3} \cdot \sqrt[6]{19+6\sqrt{10}}$;
2) $\sqrt[4]{24-8\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2\sqrt{5}+2}$;
3) $\sqrt[6]{\sqrt{15}+4} \cdot \sqrt[12]{31-8\sqrt{15}}$;
4) $\sqrt{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{6-4\sqrt{2}}$.

387.•• Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$;
2) $\sqrt{2\sqrt{6}-1} \cdot \sqrt[4]{25+4\sqrt{6}}$.

388.•• Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-1}-\dfrac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt{a}}\right):\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a}+1}$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}-\dfrac{4\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}+1\right)$;

4) $\dfrac{\sqrt{a}+27}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt[6]{a}-3}{\sqrt[3]{a}-3\sqrt[6]{a}+9}-\dfrac{\sqrt[6]{ab}-9}{\sqrt{a}+27}\right)$;

5) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{bc^2}+\sqrt[3]{b^2c}}{\sqrt[3]{b^2}+2\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}}+\dfrac{b-c}{\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{c^2}}-2\sqrt[3]{c}\right):\left(\sqrt[6]{b}+\sqrt[6]{c}\right)$;

6) $\dfrac{a-b}{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}}:\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{b}}\right)$.

389.** Доведіть тотожність:

1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}+1}-\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}\right):\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+1}=\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{x}$;

2) $\dfrac{\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\dfrac{\left(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}\right)^2}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}=\dfrac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$.

390.* Доведіть, що значення виразу є числом раціональним:

1) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$.

391.* Доведіть, що $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

Готуємося до вивчення нової теми

392. Функцію задано формулою $y=\sqrt{x}$.

1) Чому дорівнює значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 0,16; 64; 1,44; 3600?

2) При якому значенні аргументу значення функції дорівнює: 0,2; 5; 120; –4?

393. Через які з даних точок проходить графік функції $y=\sqrt{x}$:

1) A (16; 4); 2) B (49; –7); 3) C (3,6; 0,6); 4) D (–36; 6)?

394. Порівняйте числа:

1) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ і $\sqrt{\dfrac{1}{5}}$; 3) $\sqrt{33}$ і 6; 5) $\sqrt{30}$ і $2\sqrt{7}$;

2) $\sqrt{32}$ і $\sqrt{26}$; 4) $3\sqrt{5}$ і $\sqrt{42}$; 6) $7\sqrt{\dfrac{1}{7}}$ і $\dfrac{1}{2}\sqrt{20}$.

395. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-4\right)^2}$; 2) $\sqrt{\left(\sqrt{8}-3\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-3\right)^2}$.

396. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{x}=-x-1$; 2) $\sqrt{x}=2-x$; 3) $\sqrt{x}=\dfrac{1}{x}$.

Поновіть у пам'яті зміст пункту 32 на с. 326.

14. Функція $y = \sqrt[n]{x}$

• У пункті 11 було встановлено, що корінь непарного степеня з будь-якого числа існує і набуває тільки одного значення. Тому кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність єдине число y таке, що $y = \sqrt[2k+1]{x}$. Тим самим для всіх $k \in \mathbb{N}$ задано функцію $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ з областю визначення $\mathbb{R}$.

Покажемо, що функція f є оберненою до функції $g(x) = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Оскільки рівняння $\sqrt[2k+1]{x} = a$ при будь-якому a має корінь $x = a^{2k+1}$, то областю значень функції f є множина $\mathbb{R}$.

Маємо: $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$,

$E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\sqrt[2k+1]{x^{2k+1}} = x$. Іншими словами, $f(g(x)) = x$ для всіх $x \in D(g)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Використовуючи графік функції $y = x^{2k+1}$ і теорему 6.2, можна побудувати графік функції $y = \sqrt[2k+1]{x}$ (рис. 81). Зокрема, на рисунку 82 зображено графіки функцій $y = \sqrt[3]{x}$ і $y = \sqrt[5]{x}$.

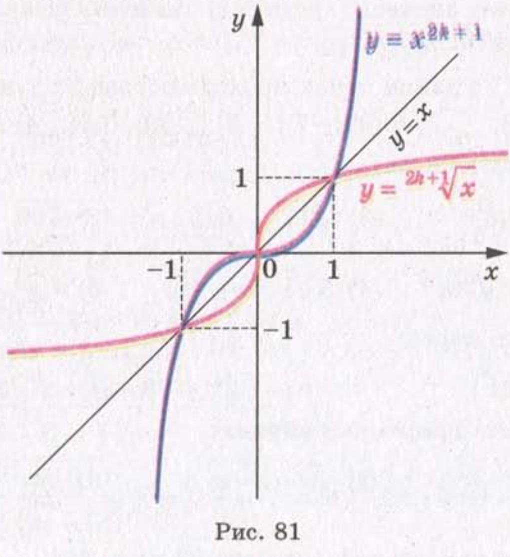


Рис. 81

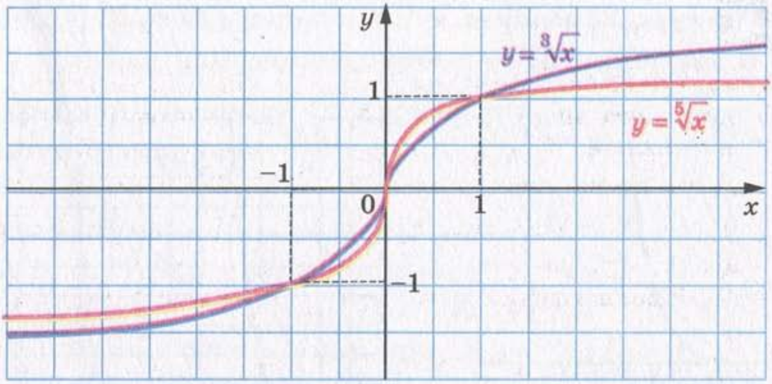


Рис. 82

Оскільки функція $g(x) = x^{2k+1}$ є зростаючою, то за теоремою 6.3 функція $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ також є зростаючою.

Функція $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ має єдиний нуль $x = 0$.

Якщо $x < 0$, то $f(x) < 0$; якщо $x > 0$, то $f(x) > 0$. Отже, проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції f.

Для будь-якого x з області визначення функції f виконується рівність $f(-x) = \sqrt[2k+1]{-x} = -\sqrt[2k+1]{x} = -f(x)$. Отже, функція f є непарною.

• У пункті 11 було встановлено, що арифметичний корінь парного степеня з будь-якого невід'ємного числа існує і набуває тільки одного значення. Тому кожному числу x з проміжку $[0; +\infty)$ можна поставити у відповідність єдине число y таке, що $y = \sqrt[2k]{x}$. Тим самим задано функцію $f(x) = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, з областю визначення $[0; +\infty)$.

Покажемо, що функція f є оберненою до функції $g(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, з областю визначення $[0; +\infty)$.

Оскільки рівняння $\sqrt[2k]{x} = a$ при будь-якому $a \geqslant 0$ має корінь $x = a^{2k}$ і при будь-якому $a < 0$ не має коренів, то областю значень функції $f(x) = \sqrt[2k]{x}$ є проміжок $[0; +\infty)$.

Маємо: $D(f) = E(g) = [0; +\infty)$,
$E(f) = D(g) = [0; +\infty)$.

Для будь-якого $x \in [0; +\infty)$ виконується рівність $\sqrt[2k]{x^{2k}} = x$. Іншими словами, $f(g(x)) = x$ для всіх $x \in D(g)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

На рисунку 83 показано, як побудувати графік функції $y=\sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$. На рисунку 84 зображено графік функції $y=\sqrt[4]{x}$.

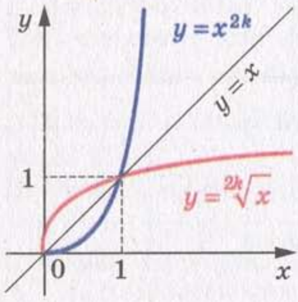


Рис. 83

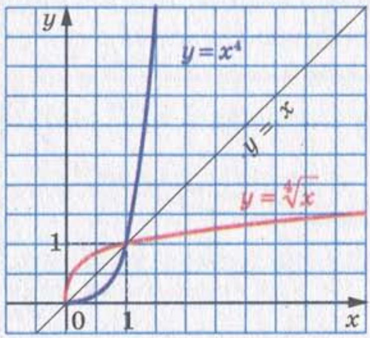


Рис. 84

Оскільки функція $g(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, $D(g) = [0; +\infty)$, є зростаючою, то функція $f(x)=\sqrt[2k]{x}$ також є зростаючою.

Функція f має єдиний корінь $x = 0$.

Якщо $x > 0$, то $f(x) > 0$. Отже, проміжок $(0; +\infty)$ є проміжком знакосталості функції f.

Оскільки область визначення функції f не є симетричною відносно початку координат, то функція f не є ні парною, ні непарною.

У таблиці наведено властивості функції $y=\sqrt[n]{x}$, вивчені в цьому пункті.

	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число, $n > 1$
Область визначення	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Область значень	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Не є ні парною, ні непарною	Непарна
Зростання / спадання	Зростаюча	Зростаюча

ПРИКЛАД Порівняйте $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[4]{2}$.

Розв'язання. Маємо: $\sqrt[3]{2}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[12]{16}$; $\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[12]{8}$.

Оскільки функція $y=\sqrt[12]{x}$ є зростаючою, то $\sqrt[12]{16}>\sqrt[12]{8}$.

Відповідь: $\sqrt[3]{2}>\sqrt[4]{2}$.

?

1. До якої функції є оберненою функція $y=\sqrt[2k+1]{x}$, $k\in\mathbb{N}$?

2. Які властивості має функція $y=\sqrt[2k+1]{x}$, $k\in\mathbb{N}$?

3. Зобразіть схематично графік функції $y=\sqrt[2k+1]{x}$, $k\in\mathbb{N}$.

4. До якої функції є оберненою функція $y=\sqrt[2k]{x}$, $k\in\mathbb{N}$?

5. Які властивості має функція $y=\sqrt[2k]{x}$, $k\in\mathbb{N}$?

6. Зобразіть схематично графік функції $y=\sqrt[2k]{x}$, $k\in\mathbb{N}$.

Вправи

397.° Через які з даних точок проходить графік функції $y=\sqrt[4]{x}$:

$A\,(2;\,16)$; $B\,(16;\,2)$; $C\,(-1;\,1)$; $D\left(\frac{1}{81};\,3\right)$; $E\,(81;\,3)$; $F\,(0{,}001;\,0{,}1)$; $G\,(10\,000;\,10)$?

398.° Через які з даних точок проходить графік функції $y=\sqrt[3]{x}$:

$A\,(-8;\,-2)$; $B\left(\frac{1}{125};\,\frac{1}{5}\right)$; $C\,(3;\,27)$; $D\,(0{,}64;\,0{,}4)$; $E\,(-216;\,6)$; $F\,(-1000;\,-10)$?

399.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt[3]{x-1}$;

2) $y=\sqrt[6]{x+1}$;

3) $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{x+2}}$;

4) $y=\sqrt[4]{x^2-x-2}$.

400.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt[5]{x+2}$;

2) $y=\sqrt[4]{2-x}$;

3) $y=\sqrt[9]{\dfrac{x+1}{x-3}}$;

4) $y=\sqrt[6]{x^2-4x+3}$.

401.° Знайдіть область значень функції:

1) $y=\sqrt[4]{x}+1$;   2) $y=-\sqrt[6]{x}-2$;   3) $y=\sqrt[3]{x}-3$.

402.° Знайдіть область значень функції:

1) $y=\sqrt[8]{x}+2$; 2) $y=\sqrt[4]{x}-4$; 3) $y=\sqrt[5]{x}-2$.

403.° Оцініть значення виразу $\sqrt[3]{x}$, якщо:

1) $1 \leqslant x \leqslant 216$; 2) $-729 < x < 8$.

404.° Оцініть значення виразу $\sqrt[4]{x}$, якщо:

1) $0 \leqslant x \leqslant 256$; 2) $16 < x < 10\,000$.

405.° Порівняйте:

1) $\sqrt[3]{1{,}6}$ і $\sqrt[3]{1{,}4}$; 4) $\sqrt[3]{5}$ і $\sqrt[6]{28}$; 7) $4\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ і $5\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$;

2) $\sqrt[5]{-23}$ і $\sqrt[5]{-26}$; 5) $\sqrt[15]{60}$ і $\sqrt[5]{4}$; 8) $6\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ і $4\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$.

3) 2 і $\sqrt[4]{17}$; 6) $2\sqrt[3]{3}$ і $3\sqrt[3]{2}$;

406.° Порівняйте:

1) $\sqrt{5}$ і $\sqrt[6]{80}$; 3) $3\sqrt[3]{4}$ і $4\sqrt[3]{2}$;

2) $\sqrt[6]{2}$ і $\sqrt[24]{18}$; 4) $5\sqrt[4]{0{,}2}$ і $10\sqrt[4]{0{,}012}$.

407.° Між якими двома послідовними цілими числами знаходиться на координатній прямій число:

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[3]{3}$; 3) $\sqrt[4]{21}$; 4) $\sqrt[3]{100}$; 5) $-\sqrt[5]{30}$; 6) $-\sqrt[3]{81}$?

408.° Між якими двома послідовними цілими числами знаходиться на координатній прямій число:

1) $\sqrt[3]{18}$; 2) $\sqrt[4]{139}$; 3) $-\sqrt[3]{212}$?

409.° Укажіть усі цілі числа, які розташовані на координатній прямій між числами:

1) 4 і $\sqrt[3]{140}$; 2) $\sqrt[5]{-35}$ і $\sqrt[4]{640}$.

410.° Укажіть усі цілі числа, які розташовані на координатній прямій між числами $-\sqrt[4]{1300}$ і $\sqrt[3]{40}$.

411.° Порівняйте:

1) $\sqrt[3]{6}$ і $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$ і $\sqrt[4]{4}$;

2) $\sqrt[9]{12}$ і $\sqrt[6]{5}$; 5) $\sqrt{3}$ і $\sqrt[3]{\sqrt{28}}$;

3) $\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt[6]{2\sqrt{7}}$; 6) $\sqrt[5]{\sqrt{32}}$ і $\sqrt[6]{8}$.

412.° Порівняйте:

1) $\sqrt{5}$ і $\sqrt[3]{10}$; 3) $\sqrt[10]{7}$ і $\sqrt[5]{2\sqrt{2}}$;

2) $\sqrt[8]{16}$ і $\sqrt[5]{\sqrt{33}}$; 4) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ і $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$.

413.* Розташуйте в порядку зростання числа:

1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ і $\sqrt[5]{4}$;
2) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[15]{30}$;
3) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ і $\sqrt[4]{7}$;
4) $\sqrt[15]{125}$, $\sqrt[5]{6}$ і $\sqrt[6]{4\sqrt[5]{4}}$.

414.* Розташуйте в порядку спадання числа:

1) $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[3]{4}$ і $\sqrt{3}$;
2) $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[6]{30}$ і $\sqrt[4]{10}$.

415.* Побудуйте графік функції:

1) $y=-\sqrt[3]{x}$;
2) $y=\sqrt[3]{x}-2$;
3) $y=\sqrt[3]{x-2}$;
4) $y=\sqrt[3]{2-x}$;
5) $y=\sqrt[3]{x-2}-2$;
6) $y=\sqrt[3]{|x|}$.

416.* Побудуйте графік функції:

1) $y=-\sqrt[4]{x}$;
2) $y=\sqrt[4]{-x}$;
3) $y=\sqrt[4]{x}+3$;
4) $y=\sqrt[4]{x+3}$;
5) $y=\sqrt[4]{x+3}+1$;
6) $y=\sqrt[4]{|x|}$.

Готуємося до вивчення нової теми

417. Подайте числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ у вигляді степеня з основою 2.

418. Знайдіть значення виразу:

1) $(-8)^2-(-1)^{12}$;
2) $9\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)^2$;
3) $3^{-1}-4^{-1}$;
4) $2^{-3}+6^{-2}$;
5) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}+(-2{,}3)^0-5^{-2}$;
6) $9\cdot 0{,}1^{-1}$.

419. Подайте у вигляді степеня з основою a вираз:

1) $a^7\cdot a^5$;
2) $a^7:a^5$;
3) $(a^7)^5$;
4) $\frac{(a^3)^6\cdot a^4}{a^{16}}$;
5) $a^5\cdot a^{-8}$;
6) $a^{-5}\cdot a^{10}\cdot a^{-12}$;
7) $a^{-3}:a^{-15}$;
8) $a^{12}\cdot a^{-20}:a^{-9}$.
9) $(a^{-5})^4$;
10) $(a^2)^{-4}\cdot(a^{-3})^{-2}:(a^{-8})^3$.

420. Знайдіть значення виразу:

1) $2^{-9}\cdot 2^{-12}:2^{-22}$;
2) $3^{-3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;
3) $\frac{14^{-5}}{7^{-5}}$;
4) $9^{-4}\cdot 27^2$;
5) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{-7}\cdot\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5$;
6) $\frac{22^6\cdot 2^{-8}}{44^{-3}\cdot 11^9}$.

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 1–3 на с. 315.

15. Означення та властивості степеня з раціональним показником

Нагадаємо означення степеня з натуральним показником:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множників}},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1;$$

$$a^1 = a.$$

Ви знаєте, що степінь з натуральним показником має такі властивості:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$, $m > n$;
3. $(a^m)^n = a^{mn}$;
4. $(ab)^n = a^n b^n$;
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Пізніше ви ознайомилися з означеннями степеня з нульовим показником і степеня з від'ємним цілим показником:

$a^0 = 1$, $a \neq 0$;

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Ці означення дуже вдалі: при такому підході всі п'ять властивостей степеня з натуральним показником залишилися справедливими і для степеня з цілим показником.

Введемо поняття степеня з дробовим показником, тобто степеня a^r, показник якого є раціональним числом виду $r = \dfrac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Бажано зробити це так, щоб степеню з дробовим показником залишилися притаманними всі властивості степеня з цілим показником. Підказкою для такого означення може слугувати такий приклад.

Якщо через x позначити шукане значення степеня $2^{\frac{2}{3}}$, то, ураховуючи властивість $(a^m)^n = a^{mn}$, можна отримати рівності $x^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2^2$. Отже, x — це кубічний корінь з числа 2^2, тобто $x = \sqrt[3]{2^2}$ або $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Ці міркування підказують таке означення.

Означення. Степенем додатного числа a з раціональним показником r, поданим у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають число $\sqrt[n]{a^m}$, тобто

$$\boxed{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Наприклад, $5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3}$, $3^{-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{-1}{5}} = \sqrt[5]{3^{-1}}$, $0{,}4^{0{,}3} = 0{,}4^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{0{,}4^3}$.

Зауважимо, що значення степеня a^r, де r — раціональне число, не залежить від дробу, у вигляді якого подано число r. Це можна показати, використовуючи рівності $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ і $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Степінь з основою, яка дорівнює нулю, означають тільки для додатного раціонального показника.

Означення. $0^{\frac{m}{n}} = 0$, **де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.**

Зазначимо, що, наприклад, запис $0^{-\frac{1}{2}}$ не має змісту.

Зауважимо, що в означенні не йдеться про степінь $a^{\frac{m}{n}}$ для $a < 0$, наприклад, вираз $(-2)^{\frac{1}{3}}$ залишився невизначеним. Разом з тим вираз $\sqrt[3]{-2}$ має зміст. Виникає природне запитання: чому б не вважати, що $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}}$? Покажемо, що така домовленість привела б до суперечності:

$$\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}.$$

Отримали, що від'ємне число $\sqrt[3]{-2}$ дорівнює додатному числу $\sqrt[6]{4}$.

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, називають **степеневою функцією з раціональним показником.**

Якщо нескоротний дріб $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є числом додатним, то областю визначення функції $y = x^{\frac{m}{n}}$ є проміжок $[0; +\infty)$; а якщо цей дріб — від'ємне число, то — проміжок $(0; +\infty)$.

Властивості функції $y = x^r$ для цілого показника було вивчено в п. 9 і 10. Випадок, коли показник r не є цілим числом, буде розглянуто в 11 класі.

Покажемо, що властивості степеня з цілим показником залишаються справедливими і для степеня з довільним раціональним показником.

Теорема 15.1 (добуток степенів). ***Для будь-якого $a > 0$ і будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність***

$$\boxed{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$$

Доведення. ⊙ Запишемо раціональні числа p і q у вигляді дробів з однаковими знаменниками: $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Маємо:

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{n}} = a^{p+q}. \ ▲$$

Наслідок. ***Для будь-якого $a > 0$ і будь-якого раціонального числа p виконується рівність***

$$\boxed{a^{-p} = \frac{1}{a^p}}$$

Доведення. ⊙ Застосовуючи теорему 15.1, запишемо: $a^{-p} \cdot a^p = a^{-p+p} = a^0 = 1$. Звідси $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. ▲

Теорема 15.2 (частка степенів). ***Для будь-якого $a > 0$ і будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність***

$$\boxed{a^p : a^q = a^{p-q}}$$

Доведення. ⊙ Застосовуючи теорему 15.1, запишемо: $a^q \cdot a^{p-q} = = a^{q+p-q} = a^p$. Звідси $a^{p-q} = a^p : a^q$. ▲

Теорема 15.3 (степінь степеня). ***Для будь-якого $a > 0$ і будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність***

$$\boxed{(a^p)^q = a^{pq}}$$

Доведення. ⊙ Нехай $p = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, та $q = \frac{s}{k}$, $s \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Маємо:

$$(a^p)^q = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{s}{k}} = \sqrt[k]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^s} = \sqrt[k]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^s} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{ms}}} = \sqrt[kn]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{kn}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{s}{k}} = a^{pq}. \ ▲$$

Теорема 15.4 (степінь добутку і степінь дробу). ***Для будь-яких $a > 0$ і $b > 0$ та будь-якого раціонального числа p виконуються рівності***

$$\boxed{(ab)^p = a^p b^p} \quad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}}$$

Доведіть цю теорему самостійно.

?

1. Що називають степенем додатного числа a з показником $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
2. Що називають степенем числа 0 з показником $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$?
3. Сформулюйте теорему про добуток степенів.
4. Сформулюйте теорему про частку степенів.
5. Сформулюйте теорему про степінь степеня.
6. Сформулюйте теорему про степінь добутку.
7. Сформулюйте теорему про степінь дробу.
8. Яку функцію називають степеневою функцією з раціональним показником?

Вправи

421.° Подайте степінь з дробовим показником у вигляді кореня:

1) $5^{\frac{1}{3}}$; 3) $b^{-\frac{1}{7}}$; 5) $(ab)^{\frac{4}{7}}$; 7) $(m+n)^{2,5}$;

2) $a^{\frac{3}{5}}$; 4) $10^{-\frac{5}{6}}$; 6) $ab^{\frac{4}{7}}$; 8) $(x-3y)^{1\frac{1}{3}}$.

422.° Замініть степінь з дробовим показником коренем:

1) $13^{\frac{1}{2}}$; 3) $c^{0,2}$; 5) $3m^{1,25}n^{0,75}$;

2) $3^{-\frac{1}{9}}$; 4) $x^{\frac{6}{7}}$; 6) $(a-2b)^{\frac{9}{16}}$.

423.° Подайте корінь у вигляді степеня з дробовим показником:

1) $\sqrt{x}$; 3) $\sqrt[7]{6^5}$; 5) $\sqrt[5]{2^{-2}}$; 7) $\sqrt[8]{(a-b)^7}$;

2) $\sqrt[4]{a^3}$; 4) $\sqrt[3]{3a}$; 6) $\sqrt[11]{49}$; 8) $\sqrt[8]{a^7-b^7}$.

424.° Замініть корінь степенем з дробовим показником:

1) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt[14]{m^{-9}}$; 5) $\sqrt[4]{x+y}$;

2) $\sqrt[7]{a^3}$; 4) $\sqrt[6]{5a^5}$; 6) $\sqrt[13]{0,3^8}$.

425.° **Знайдіть значення виразу:**

1) $4^{\frac{1}{2}}$; 3) $3\cdot 64^{-\frac{1}{3}}$; 5) $0{,}216^{-\frac{1}{3}}$; 7) $27^{\frac{4}{3}}$;

2) $25^{-\frac{1}{2}}$; 4) $-5\cdot 0{,}01^{-\frac{3}{2}}$; 6) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 8) $32^{-0,2}$.

426.° **Чому дорівнює значення виразу:**

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 3) $0{,}0081^{-0,25}$; 5) $0{,}125^{-\frac{2}{3}}$;

2) $10\,000^{\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$; 6) $\left(11\frac{25}{64}\right)^{\frac{5}{6}}$?

427.° **Знайдіть область визначення функції:**

1) $y=x^{\frac{5}{6}}$; 3) $y=(x-3)^{2,6}$;

2) $y=x^{-1,4}$; 4) $y=(x^2-6x-7)^{-\frac{1}{9}}$.

428.° **Знайдіть область визначення функції:**

1) $y=x^{-\frac{2}{3}}$; 3) $y=(x+1)^{-\frac{7}{12}}$;

2) $y=x^{3,2}$; 4) $y=(x^2-x-30)^{\frac{4}{15}}$.

429.° **Спростіть вираз:**

1) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}$; 5) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-6}$; 9) $a^{\frac{7}{8}}:a^{-\frac{3}{4}}$; 13) $\left(a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{14}{27}}\right)^{\frac{3}{7}}$;

2) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$; 6) $\sqrt[3]{a}\cdot a^{\frac{1}{4}}$; 10) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{6}}a^{-\frac{1}{3}}$; 14) $a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{8}}a^{\frac{5}{3}}a^{\frac{1}{8}}$;

3) $a^{\frac{1}{2}}:a^{\frac{1}{3}}$; 7) $a^{\frac{2}{3}}:\sqrt[5]{a^2}$; 11) $(a^{0,4})^{0,8}a^{0,18}$; 15) $\dfrac{a^{-\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{12}}}{a^{-\frac{17}{4}}b^{\frac{1}{3}}}$;

4) $a^{-0,6}a^{1,5}$; 8) $(a^{-2,4})^{-3}$; 12) $\dfrac{a^{\frac{1}{6}}a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{4}}}$; 16) $\left(a^{\frac{5}{9}}\right)^{1,8}\left(a^{-\frac{3}{8}}\right)^{2,4}$.

430.° **Спростіть вираз:**

1) $b^{3,5}b^{-4,2}$; 5) $\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{6}}$; 9) $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{7}{12}}a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{2}{3}}$; 13) $b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}}$;

2) $b^{\frac{-3}{7}}b^{\frac{3}{7}}$; 6) $b^{-\frac{1}{2}}:\sqrt{b}$; 10) $\dfrac{a^{\frac{7}{4}}b^{\frac{5}{24}}}{a^{\frac{5}{16}}b^{-\frac{1}{8}}}$; 14) $(b^{0,6})^{0,5}b^{-0,4}$;

3) $b:b^{\frac{2}{3}}$; 7) $\sqrt[4]{b}:b^{-\frac{1}{6}}$; 11) $\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{-3}$; 15) $(b^{-0,3})^{1,2}(b^{0,8})^{0,4}$;

4) $b:b^{-\frac{1}{4}}$; 8) $\dfrac{b^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}}}{b^{-\frac{4}{3}}}$; 12) $\left(a^{-\frac{4}{5}}b^{\frac{1}{6}}\right)^{-\frac{3}{4}}$; 16) $(b^4)^{-0,7}:(b^{-0,8})^{-5}$.

431.° **Знайдіть значення виразу:**

1) $3^{1,8}\cdot 3^{-2,6}\cdot 3^{2,8}$; 4) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5}$; 7) $\frac{8^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$;

2) $(5^{-0,8})^6\cdot 5^{4,8}$; 5) $\left(\frac{5}{6}\right)^{4,5}\cdot 1,2^{4,5}$; 8) $36^{0,4}\cdot 6^{1,2}$;

3) $\left(25^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}$; 6) $\left(\frac{7}{10}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{700}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 9) $\left(4^{-\frac{1}{8}}\right)^{1,6}\cdot 16^{0,6}$.

432.° **Чому дорівнює значення виразу:**

1) $5^{3,4}\cdot 5^{-1,8}\cdot 5^{-2,6}$; 4) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25}$; 7) $8^{0,4}\cdot 2^{1,8}$;

2) $(7^{-0,7})^8 : 7^{-7,6}$; 5) $\left(2\frac{6}{7}\right)^{2,5}\cdot 1,4^{2,5}$; 8) $(6^{-1,8})^{\frac{1}{3}}\cdot 216^{0,2}$?

3) $\left(9^{\frac{3}{7}}\right)^{4\frac{2}{3}}$; 6) $\frac{81^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}$;

433.° Відомо, що a — додатне число. Подайте a у вигляді:

1) квадрата; 3) шостого степеня;
2) куба; 4) восьмого степеня.

434.° Відомо, що m — додатне число. Подайте у вигляді квадрата вираз:

1) m^4; 3) m^3; 5) $m^{\frac{1}{3}}$; 7) $m^{-1,2}$;

2) m^{-6}; 4) $m^{\frac{1}{2}}$; 6) $m^{\frac{5}{6}}$; 8) $m^{\frac{2}{7}}$.

435.° Відомо, що b — додатне число. Подайте у вигляді куба вираз:

1) b^6; 3) b^2; 5) $b^{\frac{1}{3}}$; 7) $b^{-1,8}$;

2) b^{-15}; 4) $b^{\frac{1}{2}}$; 6) $b^{\frac{4}{5}}$; 8) $b^{\frac{7}{11}}$.

436.• **Обчисліть значення виразу:**

1) $12^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{2}{3}}\cdot (0,5)^{\frac{1}{3}}$; 4) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot (0,81)^{-0,5}$;

2) $25^{1,5}+(0,25)^{-0,5}-81^{0,75}$; 5) $16^{\frac{1}{8}}\cdot 8^{-\frac{5}{6}}\cdot 4^{1,5}$;

3) $0,008^{-\frac{2}{3}}+0,064^{-\frac{1}{3}}-0,0625^{-\frac{3}{4}}$; 6) $\frac{10\,000^{0,4}\cdot 10^{0,5}}{100^{0,3}\cdot 1000^{\frac{1}{6}}}$;

7) $\dfrac{5^{\frac{3}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{12}}}{9^{\frac{1}{6}}} \cdot \dfrac{8^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{5}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}}}$;

8) $\left(72^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{4}{3}} : 36^{-\frac{1}{6}}$;

9) $\left(12^{-\frac{1}{3}} \cdot 18^{-\frac{4}{3}} \cdot 6^{3,5}\right)^{4} - 5^{\frac{1}{4}} \cdot 25^{\frac{3}{8}}$;

10) $\left(\dfrac{3^{-\frac{5}{6}} \cdot 7^{-\frac{5}{6}}}{21^{-1} \cdot 5^{\frac{1}{3}}}\right)^{-6}$;

11) $\left(\dfrac{128^{\frac{3}{28}} \cdot 27^{-\frac{4}{9}}}{3^{\frac{1}{6}} \cdot 16^{\frac{1}{8}}}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{16^{\frac{3}{2}} \cdot 81^{\frac{9}{8}}}{9^{3} \cdot 4^{-\frac{3}{8}}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

437.° Знайдіть значення виразу:

1) $\left(343^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\dfrac{1}{49}\right)^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{3}}$;

2) $10^{\frac{1}{4}} \cdot 40^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$;

3) $0{,}0016^{-\frac{3}{4}} - 0{,}04^{-\frac{1}{2}} + 0{,}216^{-\frac{2}{3}}$;

4) $625^{-1,25} \cdot 25^{1,5} \cdot 125^{\frac{2}{3}}$;

5) $\dfrac{32^{0,24} \cdot 4^{0,7}}{64^{0,6} \cdot 16^{0,25}}$;

6) $\dfrac{12^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{6}}} \cdot \dfrac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{5}{3}}}{8^{\frac{1}{2}}}$;

7) $\left(\dfrac{5^{-\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{15^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{16}{3}}}\right)^{-1,5}$;

8) $\left(\dfrac{81^{\frac{4}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{9}}}{9^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}}}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{2^{\frac{11}{9}} \cdot 27^{\frac{14}{5}}}{3^{-\frac{18}{5}} \cdot 128^{-\frac{1}{9}}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

438.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{-\frac{2}{3}} = 0{,}04$; 2) $(x-2)^{\frac{5}{2}} = 32$; 3) $(x^2 - 2x)^{-\frac{1}{4}} = -1$.

439.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{-1,5} = 27$; 2) $(x-1)^{-\frac{2}{5}} = 100$; 3) $(x-5)^{\frac{3}{7}} = 0$.

Вправи для повторення

440. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{4a - 20b}{12ab}$; 2) $\dfrac{m^3 + 1}{m^2 - m + 1}$; 3) $\dfrac{m^2 - 5mn}{15n - 3m}$; 4) $\dfrac{7a^4 - a^3 b}{b^4 - 7ab^3}$; 5) $\dfrac{x^2 - 25}{5x^2 - x^3}$; 6) $\dfrac{y^2 - 12y + 36}{36 - y^2}$.

441. Спростіть вираз:

1) $\frac{5a+3}{2a^2+6a}+\frac{6-3a}{a^2-9}$;

2) $\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{a+4}{a^2-4}$;

3) $\frac{2p}{p-5}-\frac{5}{p+5}+\frac{2p^2}{25-p^2}$;

4) $\frac{1}{y}-\frac{y+8}{16-y^2}-\frac{2}{y-4}$.

442. Виконайте дії:

1) $\left(\frac{3c+1}{3c-1}-\frac{3c-1}{3c+1}\right):\frac{2c}{6c+2}$;

2) $\left(\frac{1}{a^2-4ab+4b^2}-\frac{1}{4b^2-a^2}\right):\frac{2a}{a^2-4b^2}$;

3) $\left(\frac{a}{a-1}-\frac{a}{a+1}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right):\frac{a^2+a}{(a-1)^2}$.

16. Перетворення виразів, які містять степені з раціональним показником

Розглянемо приклади, у яких виконуються тотожні перетворення виразів, що містять степені з раціональним показником.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз:

1) $(3a^{0,3}+b^{0,2})(a^{0,3}-4b^{0,2})-(a^{0,3}+2b^{0,2})(a^{0,3}-2b^{0,2})$;

2) $\left(a^{\frac{1}{12}}-b^{\frac{1}{12}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{12}}+b^{\frac{1}{6}}\right)+\left(a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{8}}\right)^2$.

Розв'язання

1) Розкриємо дужки, використовуючи правило множення многочленів, формулу різниці квадратів, а потім зведемо подібні доданки:

$(3a^{0,3}+b^{0,2})(a^{0,3}-4b^{0,2})-(a^{0,3}+2b^{0,2})(a^{0,3}-2b^{0,2})=$
$=\underline{3a^{0,6}}-\underline{\underline{12a^{0,3}b^{0,2}}}+\underline{\underline{a^{0,3}b^{0,2}}}-\underbrace{4b^{0,4}}-\underline{a^{0,6}}+\underbrace{4b^{0,4}}=2a^{0,6}-11a^{0,3}b^{0,2}$.

2) Маємо: $\left(a^{\frac{1}{12}}-b^{\frac{1}{12}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{12}}+b^{\frac{1}{6}}\right)+\left(a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{8}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{12}}\right)^3-\left(b^{\frac{1}{12}}\right)^3+$
$+\left(a^{\frac{1}{8}}\right)^2+2a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}+\left(b^{\frac{1}{8}}\right)^2=a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{4}}+2a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{4}}=2a^{\frac{1}{4}}+2a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}$.

ПРИКЛАД 2 Розкладіть на множники вираз $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{4}}$, використовуючи формулу: 1) різниці квадратів; 2) різниці кубів.

Розв'язання

1) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{4}}=\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(b^{\frac{3}{8}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{3}{8}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{3}{8}}\right).$

2) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{4}}=\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^3-\left(b^{\frac{1}{4}}\right)^3=\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}\right).$

ПРИКЛАД 3 Скоротіть дріб: 1) $\dfrac{4a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{3}}}$; 2) $\dfrac{b^{\frac{5}{6}}+3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}}-9c^{\frac{1}{2}}}$; 3) $\dfrac{32^{\frac{1}{3}}-16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}$.

Розв'язання

1) Розкладемо знаменник дробу на множники, винісши за дужки спільний множник, і скоротимо дріб:

$$\frac{4a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{3}}}=\frac{4a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{6}}-1\right)}=\frac{4}{a^{\frac{1}{6}}-1}.$$

2) Розклавши чисельник і знаменник дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{b^{\frac{5}{6}}+3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}}-9c^{\frac{1}{2}}}=\frac{b^{\frac{1}{2}}\left(b^{\frac{1}{3}}+3c^{\frac{1}{4}}\right)}{\left(b^{\frac{1}{3}}-3c^{\frac{1}{4}}\right)\left(b^{\frac{1}{3}}+3c^{\frac{1}{4}}\right)}=\frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}-3c^{\frac{1}{4}}}.$$

3) Маємо: $\dfrac{32^{\frac{1}{3}}-16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{16^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)}{2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)}=\dfrac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}=\left(\dfrac{16}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=2.$

ПРИКЛАД 4 Спростіть вираз $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+2}{x^{\frac{1}{3}}-2}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-2}{x^{\frac{1}{3}}+2}-\dfrac{16}{x^{\frac{2}{3}}-4}$.

Розв'язання. Зробимо заміну $x^{\frac{1}{3}}=y$. Тоді даний вираз набуває вигляду:

$$\frac{y+2}{y-2}-\frac{y-2}{y+2}-\frac{16}{y^2-4}.$$

Цей вираз легко спростити. Завершіть розв'язування самостійно.

Відповідь: $\dfrac{8}{x^{\frac{1}{3}}+2}$.

Вправи

443.° Розкрийте дужки:

1) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$;
2) $2a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-4\right)+8a^{\frac{1}{2}}$;
3) $(a^{0,5}-3b^{0,3})(2a^{0,5}+b^{0,3})$;
4) $\left(m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{4}}\right)\left(m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}\right)$;
5) $\left(3b^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{3}{2}}\right)\left(3b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{3}{2}}\right)$;
6) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^2$;
7) $\left(4n^{-\frac{5}{6}}+3n^{\frac{5}{6}}\right)^2$;
8) $\left(a^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}a^{-\frac{1}{6}}\right)^2$;
9) $(b^{0,4}+3)^2-6b^{0,4}$;
10) $\left(c^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(c^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{1}{3}}+1\right)$;
11) $\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{5}{6}}+a\right)$;
12) $a^{\frac{1}{6}}\left(a^{\frac{1}{6}}+10\right)-\left(a^{\frac{1}{6}}+5\right)^2$;
13) $\left(b^{\frac{3}{5}}-2b^{\frac{1}{3}}\right)^2+4b^{\frac{1}{6}}\left(b^{\frac{23}{30}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$;
14) $\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)$;
15) $\left(x^{\frac{2}{9}}-1\right)\left(x^{\frac{4}{9}}+x^{\frac{2}{9}}+1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)$.

444.° Розкрийте дужки:

1) $(5a^{0,4}+b^{0,2})(3a^{0,4}-4b^{0,2})$;
2) $(m^{0,5}+n^{0,5})(m^{0,5}-n^{0,5})$;
3) $\left(a^{\frac{1}{3}}-5b^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+5b^{-\frac{1}{4}}\right)$;
4) $\left(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)^2$;
5) $\left(b^{\frac{4}{3}}-b^{-\frac{2}{3}}\right)^2$;
6) $\left(x^{\frac{1}{6}}+2\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+4\right)$;
7) $(y^{1,5}-4y^{0,5})^2+8y^2$;
8) $\left(c^{\frac{2}{3}}+3c^{\frac{1}{6}}\right)^2-3c^{\frac{1}{12}}\left(3c^{\frac{1}{4}}+2c^{\frac{3}{4}}\right)$;
9) $\left(a^{\frac{1}{8}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{8}}+1\right)$;
10) $\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$.

445.• Подайте даний вираз у вигляді різниці квадратів і розкладіть його на множники (змінні набувають тільки невід'ємних значень):

1) $a-b$;
2) a^3-b^3;
3) $m^{\frac{2}{3}}-n^{\frac{2}{5}}$;
4) $x^{\frac{1}{2}}-3$;
5) $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{7}}$;
6) $4x^{0,4}-9y^{0,7}$.

446.• Розкладіть на множники, використовуючи формулу різниці квадратів (змінні набувають тільки невід'ємних значень):

1) a^5-b^5;
2) $m^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}$;
3) $x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}$;
4) $x^{\frac{1}{4}}-2$;
5) $5-c$;
6) $16x^{0,3}-25y^{\frac{2}{9}}$.

447.° Подайте даний вираз у вигляді суми кубів і розкладіть його на множники (змінні набувають тільки невід'ємних значень):

1) $a + b$;
3) $a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}$;
5) $a^{1,2} + 2$;
2) $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{3}}$;
4) $a^{\frac{3}{2}} + 27$;
6) $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$.

448.° Розкладіть на множники, використовуючи формулу різниці кубів (змінні набувають тільки невід'ємних значень):

1) $a - b$;
2) $a^{1,5} - b^{1,5}$;
3) $m^{0,6} - 8n^{1,8}$;
4) $x^{\frac{6}{7}} - 6$.

449.° Винесіть за дужки спільний множник:

1) $a + 3a^{\frac{1}{2}}$;
3) $ab^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b$;
5) $m^{\frac{3}{5}} - m^{\frac{1}{5}}$;
7) $2 - 2^{\frac{1}{7}}$;
2) $b^{\frac{1}{2}} - 4b^{\frac{1}{4}}$;
4) $c^{\frac{3}{4}} - c^{\frac{1}{2}}$;
6) $6^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{1}{4}}$;
8) $x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{1}{3}}$.

450.° Винесіть за дужки спільний множник:

1) $x - 5x^{\frac{2}{3}}$;
4) $3b - b^{0,5}c^{0,5}$;
7) $8^{\frac{1}{12}} - 4^{\frac{1}{12}}$;
2) $a^{\frac{1}{2}} + 6a^{\frac{1}{3}}$;
5) $ab^{\frac{2}{5}} - a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{10}}$;
8) $10 + 10^{\frac{5}{8}}$.
3) $p^{\frac{4}{9}} - p^{\frac{7}{9}}$;
6) $m^{\frac{3}{2}}n^{\frac{1}{2}} + mn + m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{3}{2}}$;

451.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{a - 5a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - 5}$;
5) $\frac{a - b}{ab^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b}$;
9) $\frac{m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}}$;
2) $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{3}} + a^{\frac{2}{3}}}$;
6) $\frac{a + 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}$;
10) $\frac{x - 6x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{7}{6}} - 6x^{\frac{1}{3}}}$;
3) $\frac{b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}} + c^{\frac{1}{4}}}$;
7) $\frac{4c^{\frac{2}{3}} - 12c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}} + 9d^{\frac{2}{3}}}{2c^{\frac{1}{3}} - 3d^{\frac{1}{3}}}$;
11) $\frac{a^{\frac{3}{4}} + 7a^{\frac{1}{2}}}{a - 49a^{\frac{1}{2}}}$;
4) $\frac{a - 4b}{a^{0,5} + 2b^{0,5}}$;
8) $\frac{a + b}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}$;
12) $\frac{30^{\frac{1}{5}} - 6^{\frac{1}{5}}}{10^{\frac{1}{5}} - 2^{\frac{1}{5}}}$.

452.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{a + 2a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + 2}$;
3) $\frac{a - b^2}{a - a^{\frac{1}{2}}b}$;
5) $\frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{a - b}$;
2) $\frac{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{1}{4}} - m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{5}{4}}}{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{5}{4}}}$;
4) $\frac{a - b}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$;
6) $\frac{x^{3,5}y^{2,5} - x^{2,5}y^{3,5}}{x + 2x^{0,5}y^{0,5} + y}$;

7) $\dfrac{a-125}{a^{\frac{2}{3}}-25}$; 8) $\dfrac{m^{\frac{7}{6}}-36m^{\frac{5}{6}}}{m^{\frac{1}{2}}-6m^{\frac{1}{3}}}$; 9) $\dfrac{24^{\frac{1}{4}}-8^{\frac{1}{4}}}{6^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}}$.

453.• **Знайдіть значення виразу:**

1) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\dfrac{1}{2^{-1,5}}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-\left(2\sqrt{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)$;

2) $\left(\dfrac{5^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{6}}+3^{\frac{1}{6}}}\right)^6+\left(\dfrac{3^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{4}}}\right)^6$.

454.•• **Спростіть вираз:**

1) $\dfrac{a-b}{a^{0,5}-b^{0,5}}-\dfrac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a-b}$;

2) $\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}+\dfrac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}-b^{0,5}}$;

3) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}-1}{b^{\frac{1}{10}}-1}+\left(1-b^{\frac{1}{30}}\right)\left(1+b^{\frac{1}{30}}+b^{\frac{1}{15}}\right)$;

4) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{5}{6}}-a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{7}{6}}}\cdot\dfrac{a-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}}$;

5) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{\left(a^2-ab\right)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}$.

455.•• **Спростіть вираз:**

1) $\dfrac{m-n}{m^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}}$;

2) $\left(1-a^{\frac{1}{36}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{36}}+a^{\frac{1}{18}}\right)+\dfrac{4-a^{\frac{1}{6}}}{2-a^{\frac{1}{12}}}$;

3) $\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right):\left(\dfrac{b^{\frac{5}{4}}}{a}-\dfrac{b}{a^{\frac{3}{4}}}\right)$;

4) $\dfrac{m^{\frac{5}{2}}-m^{\frac{3}{2}}}{m^3-m^{\frac{5}{2}}}-\dfrac{m^{\frac{1}{2}}+m}{m^2+m^{\frac{3}{2}}}$.

456.•• **Доведіть тотожність:**

1) $\left(\dfrac{m^2+n^2}{m^{\frac{3}{2}}+mn^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{m}{n}=n^{\frac{1}{2}}-m^{\frac{1}{2}}$;

2) $\left(\dfrac{a^{0,5}+2}{a+2a^{0,5}+1}-\dfrac{a^{0,5}-2}{a-1}\right):\dfrac{a^{0,5}}{a^{0,5}+1}=\dfrac{2}{a-1}$;

3) $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}{a^{-1}-b^{-1}}-\dfrac{1}{a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}}\right):\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$;

4) $\dfrac{(a-b)^2}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{a^2-b^2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}=2a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}}$.

457.** Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right):\dfrac{2x+2y}{\sqrt{xy}}$;

2) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{6}}+3y^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{x^{\frac{1}{6}}-3y^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}\right):\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+3y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}}$.

Вправи для повторення

458. У коробці лежать 10 синіх, 15 червоних і 20 зелених олівців. Яка ймовірність того, що обраний навмання олівець виявиться:

1) зеленим;
2) жовтим;
3) синім;
4) синім або зеленим?

459. З натуральних чисел від 11 до 40 включно навмання називають одне. Яка ймовірність того, що це число: 1) кратне 7; 2) є дільником числа 40; 3) просте?

460. У коробці лежать білі і чорні кульки. Скільки білих кульок у коробці, якщо ймовірність вийняти з неї навмання білу кульку дорівнює $\frac{2}{7}$, а чорних кульок у коробці 25?

17. Ірраціональні рівняння

Розглянемо функцію $y = x^3$. Вона є зростаючою, а отже, оборотною. Тому функція $y = x^3$ кожного свого значення набуває тільки один раз. Іншими словами: з рівності $x_1^3 = x_2^3$ випливає, що $x_1 = x_2$. А оскільки з рівності $x_1 = x_2$ випливає, що $x_1^3 = x_2^3$, то можна стверджувати, що *коли обидві частини рівняння піднести до куба, то отримаємо рівняння, рівносильне даному*.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{2x+1}=-3$.

Розв'язання. Підносячи обидві частини рівняння до куба, отримаємо рівняння, рівносильне даному. Маємо:

$$\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^3=(-3)^3;$$
$$2x+1=-27;$$
$$x=-14.$$

Відповідь: −14.

Оскільки функція $y = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, є оборотною, то міркування, використані при розв'язуванні приклада 1, можна узагальнити: *якщо обидві частини рівняння піднести до непарного степеня, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.*

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt[7]{x^2 - 2} = \sqrt[7]{x}$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини даного рівняння до сьомого степеня. Отримаємо рівносильне рівняння:

$$\left(\sqrt[7]{x^2 - 2}\right)^7 = \left(\sqrt[7]{x}\right)^7;$$
$$x^2 - 2 = x;$$
$$x^2 - x - 2 = 0;$$
$$x_1 = -1,\ x_2 = 2.$$

Відповідь: -1; 2.

Рівняння, які ми розглянули в прикладах 1 і 2, містять змінну під знаком кореня. Такі рівняння називають **ірраціональними**.

Ось ще приклади ірраціональних рівнянь:

$$\sqrt{x-3} = 2;\ \ \sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x} + 1 = 0;\ \ \sqrt{3-x} = \sqrt[3]{2+x}.$$

При розв'язуванні прикладів 1 і 2 нам довелося спрощувати вирази виду $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n$, де n — непарне натуральне число. Розглянемо випадок, коли n — парне натуральне число.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = \left(\sqrt{x-2}\right)^2$. (1)

Розв'язання. Природно замінити це рівняння на таке:

$$3x + 4 = x - 2. \qquad (2)$$

Звідси $x = -3$.

Але перевірка показує, що число -3 не є коренем початкового рівняння. Отже, рівняння (1) не має коренів. Причина появи стороннього кореня полягає в тому, що застосування формули $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ призводить до розширення області визначення рівняння. Тому рівняння (2) є наслідком рівняння (1).

Ще однією причиною появи сторонніх коренів при розв'язуванні ірраціональних рівнянь є необоротність функції $y = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$. Це означає, що з рівності $x_1^{2k} = x_2^{2k}$ не обов'язково випливає, що $x_1 = x_2$. Наприклад, $(-2)^4 = 2^4$, але $-2 \neq 2$. Водночас із рівності $x_1 = x_2$ випливає рівність $x_1^{2k} = x_2^{2k}$.

Таким чином, *при піднесенні обох частин рівняння до парного степеня отримане рівняння є наслідком даного* і може містити сторонні корені. Сторонні корені можна виявити за допомогою перевірки.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4+3x}=x$.

Розв'язання. Підносячи обидві частини рівняння до квадрата, отримаємо рівняння, яке є наслідком даного:

$$4+3x=x^2;$$

$$x^2-3x-4=0;\ x_1=-1,\ x_2=4.$$

Перевірка показує, що число -1 є стороннім коренем, а число 4 задовольняє дане рівняння.

Відповідь: 4.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини даного рівняння до квадрата:

$$2x-3+2\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1}+4x+1=16.$$

Звідси $\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1}=9-3x$.

Переходячи до рівняння-наслідку, отримуємо:

$$8x^2-10x-3=81-54x+9x^2;$$

$$x^2-44x+84=0;\ x_1=42,\ x_2=2.$$

Перевірка показує, що число 42 є стороннім коренем, а число 2 задовольняє дане рівняння.

Відповідь: 2.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^3+1}+2\sqrt[4]{x^3+1}-3=0$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt[4]{x^3+1}=t$. Тоді $\sqrt{x^3+1}=t^2$ і рівняння набуває вигляду:

$$t^2+2t-3=0.\ \text{Звідси}\ t=-3\ \text{або}\ t=1.$$

Випадок $t=-3$ приводить до рівняння $\sqrt[4]{x^3+1}=-3$, яке не має розв'язків.

Випадок $t=1$ приводить до рівняння $\sqrt[4]{x^3+1}=1$.

Закінчіть розв'язування самостійно.

Відповідь: 0.

Нагадаємо, що з методом, використаним при розв'язуванні останнього рівняння, ви знайомі ще з курсу алгебри 8–9 класів. Цей метод називають ***методом заміни змінної***.

?

1. Яке рівняння називають ірраціональним?
2. Обидві частини рівняння піднесли до непарного степеня. Чи будуть початкове і отримане рівняння рівносильними?
3. Обидві частини рівняння піднесли до парного степеня. Чи будуть початкове і отримане рівняння рівносильними?
4. Як можна виявити сторонні корені рівняння?

Вправи

461.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x-2}=2$; 3) $\sqrt[5]{x-6}=-3$; 5) $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}}=3$;

2) $\sqrt[3]{x-4}=2$; 4) $\sqrt[3]{x^3-2x+3}=x$; 6) $\sqrt[3]{x^2+15}=2\sqrt[3]{x+1}$.

462.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-3}=4$; 2) $\sqrt{3x^2-x-15}=3$; 3) $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}=3$.

463.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[7]{2x-1}=\sqrt[7]{3-x}$; 3) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-3}$;

2) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{1-2x}$; 4) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x^2+4x-16}$.

464.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{x+3}=\sqrt[4]{2x-3}$; 3) $\sqrt[5]{x^2-25}=\sqrt[5]{2x+10}$;

2) $\sqrt{4x-5}=\sqrt{1-x}$; 4) $\sqrt{x^2-36}=\sqrt{2x-1}$.

465.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2-x}=x$; 5) $2\sqrt{x+5}=x+2$;

2) $\sqrt{x+1}=x-1$; 6) $\sqrt{15-3x}-1=x$;

3) $\sqrt{3x-2}=x$; 7) $x-\sqrt{2x^2+x-21}=3$;

4) $\sqrt{2x^2-3x-10}=x$; 8) $x+2+\sqrt{8-3x-x^2}=0$.

466.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{10-3x}=-x$; 4) $3\sqrt{x+10}-11=2x$;

2) $x=\sqrt{x+5}+1$; 5) $x-\sqrt{3x^2-11x-20}=5$.

3) $\sqrt{2x^2+5x+4}=2x+2$;

467.° Поясніть, чому не має коренів рівняння:

1) $\sqrt{x-2}+1=0$; 4) $\sqrt[4]{x-6}+\sqrt{6-x}=1$;

2) $\sqrt[6]{x}+\sqrt[8]{x-1}=-2$; 5) $\sqrt{26+\sqrt{x+1}}=5$.

3) $\sqrt{x-4}+\sqrt{1-x}=5$;

468.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}-3=0$; 3) $2x-7\sqrt{x}-15=0$;

2) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-6=0$; 4) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}=4$;

5) $2\sqrt{x+1}-5=\frac{3}{\sqrt{x+1}}$;

6) $x^2-x+9+\sqrt{x^2-x+9}=12$;

7) $\sqrt[3]{x^2-4x+4}-2\sqrt[3]{x-2}-3=0$;

8) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}+\frac{3}{\sqrt[4]{x}+1}=2$;

9) $\sqrt{\frac{x+5}{x-1}}+7\sqrt{\frac{x-1}{x+5}}=8$;

10) $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.

469.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x-\sqrt{x}-12=0$;

2) $\sqrt[3]{x^2}+8=9\sqrt[3]{x}$;

3) $\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=1$;

4) $\sqrt{x+5}-3\sqrt[4]{x+5}+2=0$;

5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}+3}=1$;

6) $\sqrt[6]{9-6x+x^2}+2\sqrt[6]{3-x}-8=0$;

7) $x^2-x+4+\sqrt{x^2-x+4}=6$;

8) $\sqrt{\frac{3x+2}{2x-3}}+\sqrt{\frac{2x-3}{3x+2}}=2{,}5$.

470.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$;

2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=1$;

3) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$;

4) $2\sqrt{2-x}-\sqrt{7-x}=1$.

471.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{3x-5}=2$;

2) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}=2$.

472.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3$;

2) $\sqrt{x-7}+\sqrt{x-1}=4$;

3) $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=1$;

4) $\sqrt{13-4x}+\sqrt{x+3}=5$.

473.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}=3$;

2) $\sqrt{5x+1}+\sqrt{7-x}=6$;

3) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+5}=3$.

474.•• Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x^2-5x+16-3\sqrt{x^2-5x+20}=0$;

2) $x^2+4-5\sqrt{x^2-2}=0$;

3) $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$;

4) $\sqrt{3x^2-9x-26}=12+3x-x^2$;

5) $2x^2+6x-3\sqrt{x^2+3x-3}=5$;

6) $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}+\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=72$.

475.•• Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x^2-4x-3\sqrt{x^2-4x+20}+10=0$;

2) $2\sqrt{x^2-3x+11}=4+3x-x^2$;

3) $\sqrt{2x^2-6x+40}=x^2-3x+8$;

4) $5x^2+10x+\sqrt{x^2+2x-15}=123$.

Вправи для повторення

476. Побудуйте графік функції $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, \text{ якщо } x<1,\\ x-1, \quad \text{якщо } x\geqslant 1.\end{cases}$ Користуючись побудованим графіком, визначте проміжки зростання і спадання даної функції.

477. Задайте формулою лінійну функцію f, якщо $f(-2)=5$, $f(2)=-3$.

478. Задайте формулою квадратичну функцію f, якщо $f(-3)=-8$, $f(0)=-2$, $f(3)=10$.

479. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{\frac{1}{x}-1}$; 2) $y=\sqrt{x^3-x}$; 3) $y=\sqrt{2-\frac{1}{x+6}+\frac{9}{x-2}}$.

Метод рівносильних перетворень при розв'язуванні ірраціональних рівнянь

Ви знаєте, що сторонні корені рівняння можна виявити в результаті перевірки.

Коли йдеться про перевірку як про етап розв'язування рівняння, неможливо уникнути проблеми її технічної реалізації. Наприклад, число $\frac{-2+6\sqrt{11}}{7}$ є коренем рівняння $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}$. Щоб у цьому переконатися, потрібно провести значну обчислювальну роботу.

Для подібних ситуацій можливий інший шлях розв'язування — метод рівносильних перетворень.

Теорема 17.1. ***Рівняння виду*** $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ ***рівносильне системі***

$$\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

Доведення. Нехай число α є коренем даного рівняння. Тоді $\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{g(\alpha)}$. Звідси $f(\alpha)\geqslant 0$. Обидві частини числової рівності піднесемо до квадрата. Отримаємо правильну числову рівність $f(\alpha)=g(\alpha)$. Таким чином, число α є розв'язком системи.

Нехай число β є розв'язком системи, тобто

$$\begin{cases}f(\beta)=g(\beta),\\ f(\beta)\geqslant 0.\end{cases}$$

Звідси отримуємо, що $g(\beta) \geqslant 0$. З того, що невід'ємні числа $f(\beta)$ і $g(\beta)$ рівні, випливає, що $\sqrt{f(\beta)} = \sqrt{g(\beta)}$. Отже, число β є коренем даного рівняння.

Таким чином, кожний розв'язок даного рівняння є розв'язком системи, і навпаки, кожний розв'язок системи є розв'язком даного рівняння. Отже, множини розв'язків рівняння і системи рівні. ▲

Зауваження. Зрозуміло, що рівняння $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ також рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Вибір відповідної системи, як правило, пов'язаний з тим, яку з нерівностей, $f(x) \geqslant 0$ чи $g(x) \geqslant 0$, розв'язати легше.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{x - 1}$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - 3x = x - 1, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x^2 - 4x + 1 = 0, \\ x \geqslant 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{3}, \\ x = 2 - \sqrt{3}, \end{array}\right. \\ x \geqslant 1; \end{cases}$ $x = 2 + \sqrt{3}$.

Відповідь: $2 + \sqrt{3}$.

Теорема 17.2. ***Рівняння виду $\sqrt{f(x)} = g(x)$ рівносильне системі***

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Скориставшись ідеєю доведення теореми 17.1, доведіть цю теорему самостійно.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x + 7} = x - 3$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x + 7 = (x - 3)^2, \\ x - 3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x^2 - 7x + 2 = 0, \\ x \geqslant 3; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7 + \sqrt{41}}{2}, \\ x = \dfrac{7 - \sqrt{41}}{2}, \end{array}\right. \\ x \geqslant 3; \end{cases}$ $x = \dfrac{7 + \sqrt{41}}{2}$.

Відповідь: $\frac{7+\sqrt{41}}{2}$.

Теореми 17.1 і 17.2 можна узагальнити, керуючись таким очевидним твердженням: якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то з рівності $a^{2k} = b^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, випливає, що $a = b$.

Теорема 17.3. ***Якщо для будь-якого $x \in M$ виконуються нерівності $f(x) \geqslant 0$ і $g(x) \geqslant 0$, то рівняння $f(x) = g(x)$ і $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, рівносильні на множині M.***

Скориставшись ідеєю доведення теорем 17.1 і 17.2, доведіть цю теорему самостійно.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$.

Розв'язання. Областю визначення цього рівняння є множина $M=\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$. На цій множині обидві частини даного рівняння набувають невід'ємних значень. Тому дане рівняння на множині M рівносильне рівнянню

$$\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}\right)^2=4^2.$$

Звідси $2x-3+2\sqrt{2x-3}\,\sqrt{4x+1}+4x+1=16$; $\sqrt{2x-3}\,\sqrt{4x+1}=9-3x$.

Ліва частина останнього рівняння на множині $M=\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$ набуває невід'ємних значень. Тому права частина, тобто $9-3x$, має також бути невід'ємною. Звідси $9-3x \geqslant 0$; $x \leqslant 3$. Тоді на множині $M_1=\left[\frac{3}{2};3\right]$ обидві частини рівняння $\sqrt{2x-3}\,\sqrt{4x+1}=9-3x$ набувають невід'ємних значень. Отже, за теоремою 17.3 це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}(2x-3)(4x+1)=(9-3x)^2,\\ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-44x+84=0,\\ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=42,\end{array}\right.\\ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3;\end{cases} \qquad x=2.$$

Відповідь: 2.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}$.

Розв'язання. Областю визначення даного рівняння є множина $M=\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$. Обидві частини даного рівняння на цій множині набувають невід'ємних значень. Тому дане рівняння на множині M рівносильне рівнянню $\left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}\right)^2=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2$. Звідси $2\sqrt{2x-5}\sqrt{x+2}=4-x$.

Скориставшись теоремою 17.3, отримуємо:

$$\begin{cases}4(2x-5)(x+2)=(4-x)^2,\\ \frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

Звідси $\begin{cases}7x^2+4x-56=0,\\ \frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 4;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{-2-6\sqrt{11}}{7},\\ x=\frac{-2+6\sqrt{11}}{7},\end{array}\right.\\ \frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$

Відповідь: $\frac{-2+6\sqrt{11}}{7}$.

Вправи

480. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}=6$;
2) $\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}=3$;
3) $\sqrt{x}\sqrt{1-x}=x$;
4) $\frac{x-2}{\sqrt{2x-7}}=\sqrt{x-4}$;
5) $\sqrt{x-9}+\sqrt{x}=\frac{36}{\sqrt{x-9}}$;
6) $\frac{12}{\sqrt{x+10}}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{x+10}$.

481. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{(2x+3)(x-4)}=x-4$;
2) $\sqrt{(x-2)(2x-5)}+2=x$;
3) $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12$;
4) $(x+1)\sqrt{x^2-5x+5}=x+1$.

482. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$;
2) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1$.

483. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$;
2) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+7}=\sqrt{8-x}$;
3) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-1}$;
4) $2\sqrt{3x-1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x-9}$.

Ірраціональні нерівності

Розглянемо теореми, за допомогою яких розв'язують основні типи ірраціональних нерівностей. Доведення цих теорем аналогічні доведенню теореми 17.1.

Теорема 17.4. ***Нерівність виду*** $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ ***рівносильна системі***

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2 - 3x + 1} \geqslant \sqrt{3x - 4}$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 \geqslant 3x - 4, \\ 3x - 4 \geqslant 0. \end{cases} \quad \text{Далі маємо:} \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geqslant 0, \\ x \geqslant \frac{4}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 5, \\ x \leqslant 1, \end{array}\right. \\ x \geqslant \frac{4}{3}; \end{cases} \qquad x \geqslant 5.$$

Відповідь: $[5; +\infty)$.

Теорема 17.5. ***Нерівність виду*** $\sqrt{f(x)} < g(x)$ ***рівносильна системі***

$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 < (x-1)^2, \\ x - 1 > 0, \\ 2x^2 - 3x - 5 \geqslant 0. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} -2 < x < 3, \\ x > 1, \\ x \leqslant -1 \text{ або } x \geqslant 2{,}5. \end{cases}$$

Розв'язання цієї системи проілюстровано на рисунку 85.

Отримуємо $2{,}5 \leqslant x < 3$.

Відповідь: $[2{,}5; 3)$.

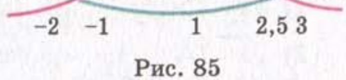


Рис. 85

Теорема 17.6. ***Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > g(x)$ рівносильна сукупності двох систем***

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}\end{array}\right.$$

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2+7x+12} > 6-x$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем.

1) $\begin{cases} 6-x<0, \\ x^2+7x+12 \geqslant 0; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x>6, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -4, \\ x \geqslant -3; \end{array}\right. \end{cases}$ $\quad x > 6.$

2) $\begin{cases} 6-x \geqslant 0, \\ x^2+7x+12 > (6-x)^2; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \leqslant 6, \\ x > \dfrac{24}{19}; \end{cases}$ $\quad \dfrac{24}{19} < x \leqslant 6.$

Відповідь: $\left(\dfrac{24}{19}; +\infty\right)$.

Вправи

484. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x-1} > 4$; 2) $\sqrt{x-1} < 4$; 3) $\sqrt{x-1} > -4$; 4) $\sqrt{x-1} < -4$.

485. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2x-4} > \sqrt{5-x}$;
2) $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$;
3) $\sqrt{x^2+x} < \sqrt{x^2+1}$;
4) $\sqrt{x^2-3x+1} > \sqrt{2x-3}$;
5) $\sqrt{8-5x} \geqslant \sqrt{x^2-16}$;
6) $\sqrt{x^2-3x+2} < \sqrt{2x^2-3x+1}$.

486. Розв'яжіть нерівність:

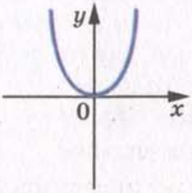
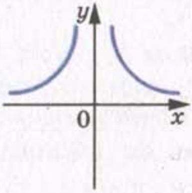
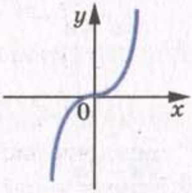
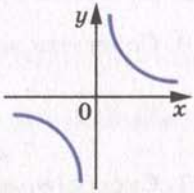
1) $x > \sqrt{24-5x}$;
2) $\sqrt{2x+7} \leqslant x+2$;
3) $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$;
4) $3-x > 3\sqrt{1-x^2}$;
5) $\sqrt{x^2+3x+3} < 2x+1$;
6) $\sqrt{7x-x^2-6} < 2x+3$.

487. Розв'яжіть нерівність:

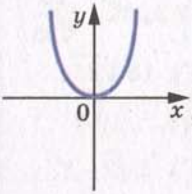
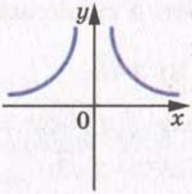
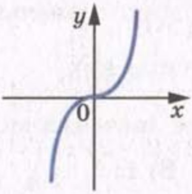
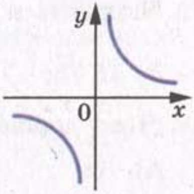
1) $\sqrt{2-x} > x$;
2) $\sqrt{x+7} \geqslant x+1$;
3) $\sqrt{x^2-1} > x$;
4) $\sqrt{x^2-2x} \geqslant 4-x$;
5) $\sqrt{x^2+x-2} > x$;
6) $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 2

1. Укажіть рисунок, на якому зображено графік функції $y = x^5$.

А)

Б)

В)

Г)


2. Укажіть рисунок, на якому зображено графік функції $y = x^{-4}$.

А)

Б)

В)

Г)


3. Функцію задано формулою $f(x) = x^8$. Укажіть неправильне твердження.

А) $f(2{,}6) < f(3{,}2)$; В) $f(-4{,}8) < f(4{,}2)$;
Б) $f(-1{,}4) > f(-1{,}2)$; Г) $f(-7{,}2) > f(6{,}8)$.

4. Функцію задано формулою $f(x) = x^{-15}$. Укажіть правильне твердження.

А) $f(2{,}7) < f(3)$; В) $f(-4{,}2) = f(4{,}2)$;
Б) $f(-3{,}6) > f(-2{,}5)$; Г) $f(-4) > f(3)$.

5. Чому дорівнює найбільше значення функції $y = x^{-2}$ на проміжку $[-4; -2]$?

А) 16; Б) $\frac{1}{16}$; В) 4; Г) $\frac{1}{4}$.

6. Знайдіть значення виразу $\sqrt[3]{0{,}064 \cdot 3^6}$.

А) 7,2; Б) 1,8; В) 5,4; Г) 3,6.

7. Розв'яжіть рівняння $x^4 = 6$.

А) 1,5; Б) $\sqrt[4]{6}$; В) $-\sqrt[4]{6}$; $\sqrt[4]{6}$; Г) $-1{,}5$; 1,5.

8. При яких значеннях a виконується рівність $\sqrt[6]{a^6} = -a$?

А) $a > 0$; В) $a = 1$;
Б) $a \leqslant 0$; Г) таких значень не існує.

9. Обчисліть значення виразу $\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{8}-\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{96}}$.

А) 1,5; Б) 0; В) 4; Г) 2,5.

10. Спростіть вираз $\dfrac{\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a}}}{\sqrt{a}}$.

А) $\sqrt[7]{a^3}$; Б) $\sqrt[6]{a^7}$; В) $\sqrt[6]{a}$; Г) $\sqrt[12]{a}$.

11. Скоротіть дріб $\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a}-1}$.

А) $\sqrt[6]{a}$; Б) $\sqrt[3]{a}$; В) $\sqrt{a}$; Г) $\sqrt[3]{a}-1$.

12. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\dfrac{15}{\sqrt[3]{25}}$.

А) $15\sqrt[3]{5}$; Б) $3\sqrt[3]{25}$; В) $3\sqrt[3]{5}$; Г) $15\sqrt[3]{25}$.

13. Чому дорівнює значення виразу $\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^3}$?

А) -1; Б) 1; В) $3-2\sqrt{3}$; Г) $2\sqrt{3}-1$.

14. Яка область визначення функції $y=(2-x)^{-\frac{1}{3}}$?

А) $[2;\ +\infty)$; Б) $(-\infty;\ 2]$; В) $(2;\ +\infty)$; Г) $(-\infty;\ 2)$.

15. Обчисліть значення виразу $4^{1,5}-9^{-0,5}+\left(\dfrac{1}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

А) 27; Б) $23\dfrac{2}{3}$; В) 21; Г) $15\dfrac{1}{3}$.

16. Спростіть вираз $\dfrac{\left(a^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{5}{6}}\cdot a^{-2,5}}{a^{-1,5}}$.

А) $a^{-\frac{3}{8}}$; Б) $a^{-\frac{3}{4}}$; В) $a^{-\frac{3}{2}}$; Г) a^{-3}.

17. Розв’яжіть рівняння $\sqrt{1-3x}=x+3$.

А) $-8;\ -1$; Б) -1; В) 8; 1; Г) 1.

18. Скільки коренів має рівняння $x^2-7x+\sqrt{x^2-7x+18}=24$?

А) жодного; Б) один; В) два; Г) чотири.

ПІДСУМКИ

При вивченні матеріалу параграфа «Степенева функція» ви дізналися, що:

- **функцію $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, називають степеневою функцією з натуральним показником;**
- **графік степеневої функції з натуральним показником, відмінним від одиниці, має такий вигляд:**

- **функція $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, має такі властивості:**

	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число
Область визначення	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значень	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання / спадання	Спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$	Зростаюча

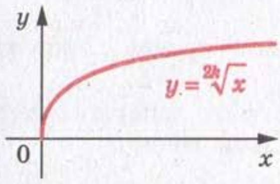
- функцію $y = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, називають степеневою функцією з цілим показником;
- графік степеневої функції з цілим від'ємним показником має такий вигляд:

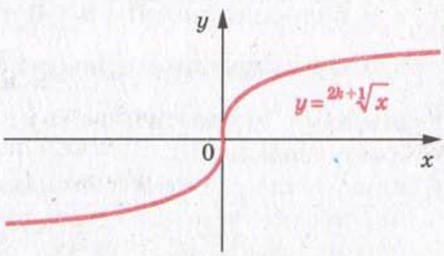
- функція $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, має такі властивості:

	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число
Область визначення	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Область значень	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Нулі функції	–	–
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання / спадання	Зростає на проміжку $(-\infty; 0)$, спадає на проміжку $(0; +\infty)$	Спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$

- коренем n-го степеня з числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке число, n-й степінь якого дорівнює a;

- якщо n — непарне натуральне число, більше за 1, то корінь n-го степеня з будь-якого числа існує, причому тільки один. Корінь непарного степеня n з числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$ (читають: «корінь n-го степеня з a»);
- знак $\sqrt[n]{\ }$ називають знаком кореня n-го степеня або радикалом. Вираз, який стоїть під знаком радикала, називають підкореневим виразом;
- якщо n — парне натуральне число, то при $a < 0$ корінь n-го степеня з числа a не існує; при $a = 0$ корінь n-го степеня з числа a дорівнює 0; при $a > 0$ існують два протилежні числа, які є коренями n-го степеня з числа a;
- арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a;
- для будь-якого a і $k \in \mathbb{N}$ виконується рівність
$$\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a;$$
- для будь-якого a і $k \in \mathbb{N}$ виконуються рівності $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$;
- якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;
- якщо $a \geqslant 0$ і $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;
- якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$;
- якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, то $\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$;
- якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$;
- графік функції $y = \sqrt[n]{x}$ має такий вигляд:





- функція $y = \sqrt[n]{x}$ має такі властивості:

	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число, $n > 1$
Область визначення	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Область значень	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Не є ні парною, ні непарною	Непарна
Зростання / спадання	Зростаюча	Зростаюча

- степенем додатного числа a з показником $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають число $\sqrt[n]{a^m}$, тобто $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$;
- $0^{\frac{m}{n}} = 0$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$;
- функцію, яку можна задати формулою $y = x^p$, $p \in \mathbb{Q}$, називають степеневою функцією з раціональним показником;
- для будь-якого $a > 0$ і будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;
- для будь-якого $a > 0$ і будь-якого раціонального числа p виконується рівність $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$;
- для будь-якого $a > 0$ і будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність $a^p : a^q = a^{p-q}$;
- для будь-якого $a > 0$ і будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність $(a^p)^q = a^{pq}$;
- для будь-яких $a > 0$ і $b > 0$ та будь-якого раціонального числа p виконуються рівності $(ab)^p = a^p b^p$, $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$;
- рівняння, яке містить змінну під знаком кореня, називають ірраціональним;
- якщо обидві частини рівняння піднести до непарного степеня, то отримаємо рівняння, рівносильне даному;
- при піднесенні обох частин рівняння до парного степеня отримане рівняння є наслідком даного.

§ 4 ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Вивчаючи цей параграф, ви розширите свої знання про тригонометричні функції та їх властивості, дізнаєтеся, що таке радіанна міра кута, які функції називають періодичними, які функції називають функціями гармонічних коливань.

Ознайомитеся з формулами, які пов'язують різні тригонометричні функції, навчитеся застосовувати їх для виконання обчислень, спрощення виразів, доведення тотожностей тощо.

18. Радіанне вимірювання кутів

Досі для вимірювання кутів ви використовували градуси або частини градуса — мінути і секунди.

У багатьох випадках зручно користуватися іншою одиницею вимірювання кутів. Її називають **радіаном**.

Означення. Кутом в один радіан називають центральний кут кола, який спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола.

На рисунку 86 зображено центральний кут AOB, величина якого дорівнює одному радіану. Пишуть: $\angle AOB = 1$ рад. Також говорять, що радіанна міра дуги AB дорівнює одному радіану. Пишуть: $\cup AB = 1$ рад.

Радіанна міра кута (дуги) не залежить від радіуса кола. Цей факт проілюстровано на рисунку 87.

На рисунку 88 зображено коло радіуса R і дугу MN, довжина якої дорівнює $\frac{3}{2}R$. Тоді радіанна міра кута MON (дуги MN) дорівнює $\frac{3}{2}$ рад. Узагалі, якщо центральний кут кола радіуса R спирається на дугу кола довжини αR, то кажуть, що **радіанна міра цього центрального кута дорівнює α рад.**

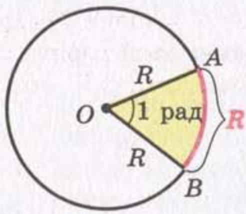


Рис. 86

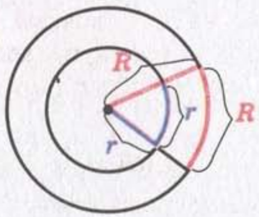


Рис. 87

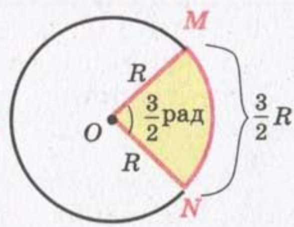


Рис. 88

Довжина півкола дорівнює πR. Отже, радіанна міра півкола дорівнює π рад, а його градусна міра становить 180°.

Це дозволяє встановити зв'язок між радіанною та градусною мірами, а саме:

$$\pi \text{ рад} = 180°. \qquad (1)$$

Звідси

$$\boxed{1\text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ}$$

Поділивши 180 на 3,14 (нагадаємо, що $\pi \approx 3{,}14$), можна установити: 1 рад $\approx 57°$.

Рівність (1) дозволяє також записати, що

$$\boxed{1° = \frac{\pi}{180}\text{ рад}} \qquad (2)$$

З цієї формули легко встановити, що, наприклад,

$$15° = 15 \cdot \frac{\pi}{180}\text{ рад} = \frac{\pi}{12}\text{ рад},\quad 90° = 90 \cdot \frac{\pi}{180}\text{ рад} = \frac{\pi}{2}\text{ рад},$$

$$135° = 135 \cdot \frac{\pi}{180}\text{ рад} = \frac{3\pi}{4}\text{ рад}.$$

Зазвичай при записі радіанної міри кута позначення «рад» опускають. Наприклад, пишуть $135° = \frac{3\pi}{4}$.

У таблиці наведено градусну і радіанну міри кутів, які часто зустрічаються:

Градусна міра кута	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Радіанна міра кута	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Використовуючи радіанну міру кута, можна отримати зручну формулу для обчислення довжини дуги кола. Оскільки центральний кут в 1 рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу R, то кут в α рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює αR. Якщо довжину дуги, яка містить α рад, позначити l, то можна записати

$$\boxed{l = \alpha R}$$

На координатній площині розглянемо коло одиничного радіуса з центром у початку координат. Таке коло називають **одиничним**.

Нехай точка P, починаючи рух від точки P_0 (1; 0), переміщується по одиничному колу проти годинникової стрілки. У певний момент часу вона займе положення, при якому $\angle P_0OP = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (рис. 89).

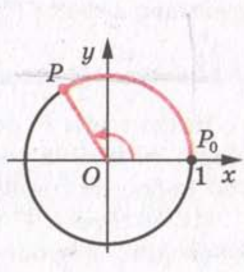


Рис. 89

Будемо говорити, що **точку P отримано з точки P_0 у результаті повороту навколо початку координат** на кут $\frac{2\pi}{3}$ (на кут 120°).

Нехай тепер точка P перемістилася по одиничному колу за годинниковою стрілкою і зайняла положення, при якому $\angle POP_0 = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (рис. 90). Говоритимемо, що точку P отримано з точки P_0 у результаті повороту навколо початку координат на кут $-\frac{2\pi}{3}$ (на кут −120°).

Узагалі, коли розглядають рух точки по колу проти годинникової стрілки, то кут повороту вважають додатним, а за годинниковою стрілкою — від'ємним.

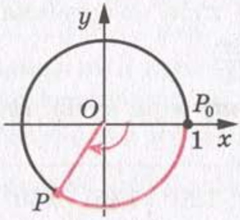


Рис. 90

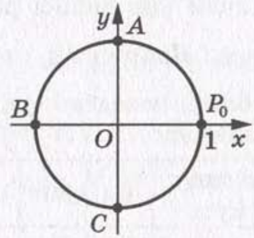


Рис. 91

Розглянемо ще кілька прикладів. Звернемося до рисунку 91. Можна говорити, що точку A отримано з точки P_0 у результаті повороту навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{2}$ (на кут 90°) або на кут $-\frac{3\pi}{2}$ (на кут −270°). Точку B отримано з точки P_0 у результаті повороту на кут π (на кут 180°) або на кут $-\pi$ (на кут −180°). Точку C отримано з точки P_0 у результаті повороту на кут $\frac{3\pi}{2}$ (на кут 270°) або на кут $-\frac{\pi}{2}$ (на кут −90°).

Якщо точка P, рухаючись по одиничному колу, зробить повний оберт, то можна говорити, що кут повороту дорівнює 2π (тобто 360°) або -2π (тобто −360°).

Якщо точка P зробить півтора оберти проти годинникової стрілки, то природно вважати, що кут повороту дорівнює 3π (тобто 540°), якщо за годинниковою стрілкою — то -3π (тобто −540°).

Зрозуміло, що кут повороту як у радіанах, так і в градусах може виражатися будь-яким дійсним числом.

Кут повороту однозначно визначає положення точки P на одиничному колі. Проте будь-якому положенню точки P на колі відповідає безліч кутів повороту. Наприклад, точці P (рис. 92) відповідають такі кути повороту: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}+2\pi$, $\frac{\pi}{4}+4\pi$, $\frac{\pi}{4}+6\pi$ і т. д., а також $\frac{\pi}{4}-2\pi$, $\frac{\pi}{4}-4\pi$, $\frac{\pi}{4}-6\pi$ і т. д. Усі ці кути записують однією формулою: $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

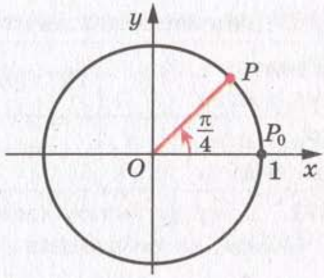


Рис. 92

?

1. Що називають кутом в один радіан?
2. Чому дорівнює радіанна міра півкола?
3. Скільком градусам дорівнює 1 рад?
4. Скільком радіанам дорівнює 1°?
5. Чому дорівнює довжина дуги кола радіуса R, яка містить α рад?
6. Яке коло називають одиничним?
7. Яким числом, додатним чи від'ємним, позначають кут повороту при русі точки по одиничному колу проти годинникової стрілки? за годинниковою стрілкою?
8. Чому дорівнює кут повороту, якщо точка при русі по одиничному колу проти годинникової стрілки робить один повний оберт?
9. Яким числом може виражатися кут повороту?
10. Скільки точок визначає на одиничному колі кут повороту?
11. Скільки кутів повороту відповідають положенню точки на одиничному колі?

Вправи

488.° Знайдіть радіанну міру кута, який дорівнює:

1) 25°; 2) 40°; 3) 100°; 4) 160°; 5) 210°; 6) 300°.

489.° Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:

1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) $1{,}2\pi$; 5) 3π; 6) $2{,}5\pi$.

490.° Заповніть таблицю:

Градусна міра кута		12°	36°			105°	225°			240°
Радіанна міра кута	$\frac{\pi}{18}$			$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{5}$			4π	$1{,}8\pi$	

491.° Чому дорівнює довжина дуги кола, радіус якого дорівнює 12 см, якщо радіанна міра дуги становить:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 2; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) 2π?

492.° Обчисліть довжину дуги кола, якщо відомо її радіанну міру α і радіус R кола:

1) $\alpha = 3$, $R = 5$ см; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $R = 6$ см; 3) $\alpha = 0{,}4\pi$, $R = 2$ см.

493.° Порівняйте величини кутів, заданих у радіанах:

1) $\frac{\pi}{2}$ і 1,5; 2) $-\frac{\pi}{2}$ і -2; 3) $\frac{\pi}{3}$ і 1; 4) $\frac{3\pi}{2}$ і 4,8.

494.° Порівняйте величини кутів, заданих у радіанах:

1) $\frac{\pi}{4}$ і 1; 2) $-\frac{1}{2}$ і $-\frac{\pi}{6}$.

495.° Позначте на одиничному колі точку, яку отримаємо при повороті точки P_0 (1; 0) на кут:

1) 45°; 3) 150°; 5) $\frac{5\pi}{3}$; 7) −120°; 9) 450°; 11) $-\frac{5\pi}{2}$;

2) $\frac{\pi}{3}$; 4) 210°; 6) −45°; 8) −300°; 10) −480°; 12) $-\frac{7\pi}{3}$.

496.° Позначте на одиничному колі точку, яку отримаємо при повороті точки P_0(1; 0) на кут:

1) 225°; 3) $\frac{\pi}{6}$; 5) 420°; 7) $\frac{2\pi}{3}$; 9) 6π;

2) −60°; 4) 320°; 6) −315°; 8) $-\frac{5\pi}{6}$; 10) −720°.

497.° У якій чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана при повороті точки P_0(1; 0) на кут:

1) 127°; 5) −240°; 9) −24°; 13) $\frac{\pi}{5}$; 17) $-1{,}8\pi$; 21) 3;

2) 89°; 6) 400°; 10) −300°; 14) $\frac{4\pi}{3}$; 18) $2{,}4\pi$; 22) 6;

3) 276°; 7) 600°; 11) −400°; 15) $\frac{5\pi}{6}$; 19) $2{,}6\pi$; 23) −2;

4) −130°; 8) 750°; 12) −470°; 16) $-\frac{7\pi}{6}$; 20) $-\frac{17}{4}$; 24) 7?

498.° У якій чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана при повороті точки P_0 (1; 0) на кут:

1) 94°; 4) –100°; 7) –800°; 10) $-\frac{7\pi}{3}$; 13) 1;

2) 176°; 5) –380°; 8) $\frac{3\pi}{4}$; 11) 5,5π; 14) –3;

3) 200°; 6) 700°; 9) $-\frac{3\pi}{4}$; 12) $-\frac{11\pi}{6}$; 15) 5?

499.° Знайдіть координати точки одиничного кола, отриманої при повороті точки P_0(1; 0) на кут:

1) $\frac{\pi}{2}$; 3) –90°; 5) $\frac{5\pi}{2}$; 7) 450°;

2) π; 4) –180°; 6) $-\frac{3\pi}{2}$; 8) –2π.

500.° Які координати має точка одиничного кола, отримана при повороті точки P_0 (1; 0) на кут:

1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) 3π; 3) $-\frac{\pi}{2}$; 4) 180°; 5) –270°; 6) –540°?

501.• Кути трикутника відносяться як 2 : 3 : 5. Знайдіть радіанні міри його кутів.

502.• Кути чотирикутника відносяться як 1 : 3 : 4 : 7. Знайдіть радіанні міри його кутів.

503.• Скільки сторін має правильний многокутник, кут якого дорівнює $\frac{13\pi}{15}$?

504.• Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 36°. Знайдіть радіанні міри кутів цього трикутника.

505.• Укажіть найменший додатний і найбільший від'ємний кути, при повороті на які точки P_0 (1; 0) буде отримано точку з координатами:

1) (0; 1); 2) (–1; 0); 3) (0; –1); 4) (1; 0).

506.• Серед кутів 400°, 510°, 870°, 1230°, –150°, –320°, –210°, –680°, –1040° укажіть ті, при повороті на які точка P_0 (1; 0) займе те саме положення, як при повороті на кут: 1) 40°; 2) 150°.

507.• Знайдіть кут α, 0° ⩽ α ⩽ 360°, при повороті на який точка P_0 (1; 0) займе те саме положення, як при повороті на кут: 1) 440°; 2) –170°; 3) –315°; 4) 1000°.

508.•• Знайдіть усі кути, на які потрібно повернути точку $P_0\,(1; 0)$, щоб отримати точку:

1) $P_1(0; 1)$; 2) $P_2(-1; 0)$; 3) $P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; 4) $P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

509.•• Знайдіть усі кути, на які потрібно повернути точку $P_0\,(1; 0)$, щоб отримати точку:

1) $P_1(0; -1)$; 2) $P_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Вправи для повторення

510. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-6}{x-3} = \frac{x}{x-3}$; 2) $\frac{3x-1}{x} - \frac{4}{x-2} = \frac{10-9x}{x^2-2x}$.

511. У деякому місті на сьогоднішній день проживає 88 200 мешканців. Скільки мешканців було в цьому місті 2 роки тому, якщо щорічний приріст населення становив 5 %?

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 50–52 на с. 333.

19. Тригонометричні функції числового аргументу

Поняття «синус», «косинус» і «тангенс» кутів від 0° до 180° знайомі вам з курсу геометрії 9 класу. Узагальнимо ці поняття для довільного кута повороту α.

Означаючи тригонометричні функції кутів від 0° до 180°, ми користувалися одиничним півколом. Для довільних кутів повороту природно звернутися до одиничного кола.

Означення. Косинусом і синусом кута повороту α називають відповідно абсцису x і ординату y точки $P(x; y)$ одиничного кола, яку отримано з точки $P_0\,(1; 0)$ у результаті повороту навколо початку координат на кут α (рис. 93).

Пишуть: $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$.

Точки P_0, A, B і C (рис. 94) мають відповідно такі координати: (1; 0), (0; 1), (−1; 0), (0; −1). Вони отримані з точки $P_0\,(1; 0)$ у результаті повороту відповідно на такі кути: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

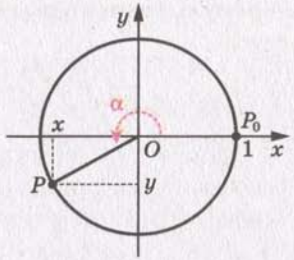


Рис. 93

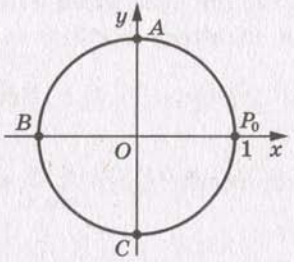


Рис. 94

Тому, користуючись даним означенням, можна скласти таблицю:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	-1
$\cos x$	1	0	-1	0

ПРИКЛАД 1 Знайдіть усі кути повороту α, при яких: 1) $\sin\alpha = 0$; 2) $\cos\alpha = 0$.

Розв'язання

1) Ординату, яка дорівнює нулю, мають тільки дві точки одиничного кола: P_0 і B (рис. 94). Ці точки отримано з точки P_0 у результаті поворотів на такі кути:

$$0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \dots \text{ або}$$
$$-\pi,\ -2\pi,\ -3\pi,\ \dots$$

Отже, $\sin\alpha = 0$ при $\alpha = \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

2) Абсцису, яка дорівнює нулю, мають тільки дві точки одиничного кола: A і C (рис. 94). Ці точки отримано з точки P_0 у результаті поворотів на такі кути:

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+\pi,\ \frac{\pi}{2}+2\pi,\ \frac{\pi}{2}+3\pi,\ \dots \text{ або}$$
$$\frac{\pi}{2}-\pi,\ \frac{\pi}{2}-2\pi,\ \frac{\pi}{2}-3\pi,\ \dots$$

Отже, $\cos\alpha = 0$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

Означення. Тангенсом кута повороту α називають відношення синуса цього кута до його косинуса:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Означення. Котангенсом кута повороту α називають відношення косинуса цього кута до його синуса:

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Наприклад, $\operatorname{tg}\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = 0$, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 0$,

$$\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = \frac{\cos\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{3\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1.$$

З означення тангенса випливає, що тангенс визначено для тих кутів повороту α, для яких $\cos\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

З означення котангенса випливає, що котангенс визначено для тих кутів повороту α, для яких $\sin\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ви знаєте, що кожному куту повороту α відповідає *єдина* точка одиничного кола. Отже, кожному значенню кута α відповідає єдине число, яке є значенням синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, котангенса для $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) кута α. Тому залежність значень синуса (косинуса, тангенса, котангенса) від величини кута повороту є функціональною.

Функції $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $p(\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, які відповідають цим функціональним залежностям, називають **тригонометричними функціями** кута повороту α.

Кожному дійсному числу α поставимо у відповідність кут α рад. Це дозволяє розглядати тригонометричні функції числового аргументу.

Наприклад, запис $\sin 2$ означає синус кута 2 радіана.

З означення синуса і косинуса випливає, що областю визначення функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є множина $\mathbb{R}$.

Оскільки абсциси і ординати точок одиничного кола набувають усіх значень від -1 до 1 включно, то областю значень функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є проміжок $[-1; 1]$.

Кутам повороту α і $\alpha + 2\pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$, відповідає одна й та сама точка одиничного кола. Тому

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z} \\ \cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z}\end{array}}$$

Область визначення функції $y = \operatorname{tg} x$ складається з усіх дійсних чисел, крім чисел виду $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Область визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$ складається з усіх дійсних чисел, крім чисел виду πk, $k \in \mathbb{Z}$.

Щоб знайти області значень цих функцій, звернемося до такої геометричної інтерпретації.

Проведемо пряму $x = 1$. Вона проходить через точку P_0 (1; 0) і дотикається до одиничного кола (рис. 95).

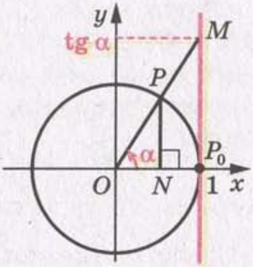


Рис. 95

Нехай точка P отримана з точки P_0 (1; 0) у результаті повороту на кут α і розміщена так, як показано на рисунку 95. Пряма OP перетинає пряму $x = 1$ у точці M. Проведемо $PN \perp OP_0$.

З подібності трикутників OPN і OMP_0 випливає, що $\frac{PN}{ON} = \frac{MP_0}{OP_0}$.

Оскільки $PN = \sin\alpha$, $ON = \cos\alpha$, $OP_0 = 1$, то $MP_0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Отже, ордината точки M дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$.

Можна показати, що і при будь-якому іншому положенні точки P на одиничному колі виконується таке: якщо пряма OP перетинає пряму $x = 1$, то ордината точки перетину дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$. Тому пряму $x = 1$ називають **віссю тангенсів.**

Зрозуміло, що при зміні положення точки P на одиничному колі (рис. 96) точка M може зайняти довільне положення на прямій $x = 1$. Це означає, що областю значень функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина $\mathbb{R}$.

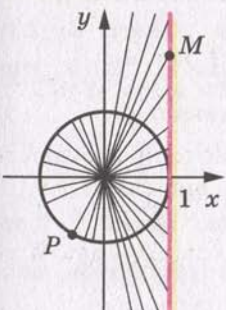


Рис. 96

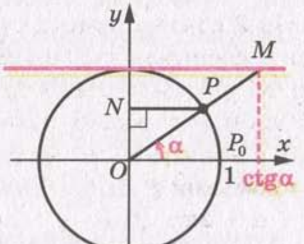


Рис. 97

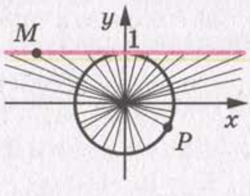


Рис. 98

Нехай точка P отримана з точки P_0 (1; 0) у результаті повороту на кут α і розміщена так, як показано на рисунку 97. Можна показати, що коли пряма OP перетинає пряму $y = 1$, то абсциса точки перетину дорівнює $\operatorname{ctg} \alpha$ (рис. 97). Тому пряму $y = 1$ називають **віссю котангенсів.**

З рисунка 98 зрозуміло, що областю значень функції $y = \operatorname{ctg} x$ є множина $\mathbb{R}$.

Якщо точки P_1, O і P_2 лежать на одній прямій, то прямі OP_1 і OP_2 перетинають вісь тангенсів (котангенсів) в одній і тій самій точці M (рис. 99, 100). Це означає, що тангенси (котангенси) кутів, які відрізняються на π, 2π, 3π і т. д., рівні. Звідси

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha + \pi n),\ n \in \mathbb{Z}\\ \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} (\alpha + \pi n),\ n \in \mathbb{Z}\end{gathered}}$$

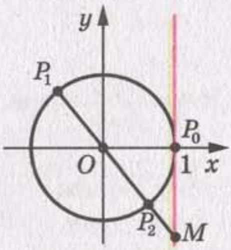


Рис. 99

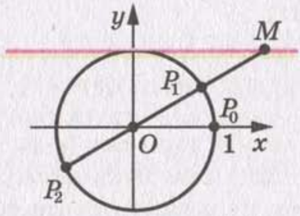


Рис. 100

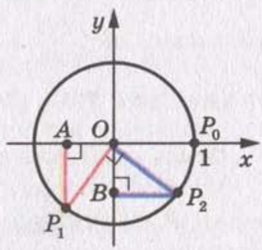


Рис. 101

ПРИКЛАД 2 Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $1-4\cos\alpha$.

Розв'язання. Оскільки $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, то $-4 \leqslant -4\cos\alpha \leqslant 4$, $-3 \leqslant 1-4\cos\alpha \leqslant 5$. Отже, найменше значення даного виразу дорівнює -3; вираз набуває його при $\cos\alpha = 1$. Найбільше значення дорівнює 5, вираз набуває його при $\cos\alpha = -1$.

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Нехай точки P_1 і P_2 отримано з точки P_0 у результаті поворотів на кути α і $\alpha + \frac{\pi}{2}$ відповідно. Опустимо перпендикуляри P_1A і P_2B на осі x і y відповідно (рис. 101). Оскільки $\angle P_1OP_2 = \frac{\pi}{2}$, то можна встановити, що $\Delta OP_1A = \Delta OP_2B$.

Звідси $OA = OB$. Отже, абсциса точки P_1 дорівнює ординаті точки P_2, тобто $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

Випадки розміщення точок P_1 і P_2 в інших координатних чвертях розглядаються аналогічно.

Розгляньте самостійно випадки, коли точки P_1 і P_2 лежать на координатних осях.

?

1. Що називають косинусом кута повороту? синусом кута повороту? тангенсом кута повороту? котангенсом кута повороту?

2. Поясніть, що називають тригонометричними функціями кута повороту; числового аргументу.

3. Яка область визначення функції $y = \sin x$? $y = \cos x$?

4. Яка область значень функції $y = \sin x$? $y = \cos x$?

5. Чому дорівнює $\sin(\alpha + 2\pi n)$, де $n \in \mathbb{Z}$? $\cos(\alpha + 2\pi n)$, де $n \in \mathbb{Z}$?

6. Яка область визначення функції $y = \operatorname{tg} x$? $y = \operatorname{ctg} x$?

7. Яку пряму називають віссю тангенсів? віссю котангенсів?

8. Яка область значень функції $y = \operatorname{tg} x$? $y = \operatorname{ctg} x$?

9. Чому дорівнює $\operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$, де $n \in \mathbb{Z}$? $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n)$, де $n \in \mathbb{Z}$?

Вправи

512.° Обчисліть значення виразу:

1) $2\cos 0° + 3\sin 90°$;
2) $4\operatorname{tg} 180° - 2\operatorname{ctg} 90°$;
3) $\sin 45° + \cos 45°$;
4) $\sin^2 60° + \cos^2 30°$;
5) $\sin 45° \cos 60° \operatorname{ctg} 30°$;
6) $\sin 0 + \operatorname{tg}\pi - \sin\frac{3\pi}{2}$;
7) $5\cos\pi + 4\cos\frac{3\pi}{2} + 2\cos 2\pi$;
8) $6\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - 7\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;
9) $2\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{6}$;
10) $\sin\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.

513.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sin 270° - 3\cos 180°$;
2) $\cos 60° + \sin 30°$;
3) $7\operatorname{tg}^2 45° - 3\operatorname{ctg} 45°$;
4) $\sin 180° \cos 120° \operatorname{tg} 60°$;

5) $\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos\pi+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}}{2\sin\dfrac{\pi}{6}}$;

6) $\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}$;

7) $\cos\dfrac{3\pi}{2}-\sin\dfrac{3\pi}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{2}$;

8) $6\cos 0+4\sin 2\pi+4\sin^2\dfrac{2\pi}{3}$?

514.° Відомо, що $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$. Знайдіть і порівняйте значення виразів:

1) $\sin 2\alpha$ і $2\sin\alpha$; 2) $\cos 3\alpha$ і $3\cos\alpha$.

515.° Відомо, що $\beta=\dfrac{\pi}{4}$. Знайдіть і порівняйте значення виразів:

1) $\sin 4\beta$ і $4\sin\beta$; 2) $\operatorname{tg} 4\beta$ і $4\operatorname{tg}\beta$.

516.° Чи можлива рівність:

1) $\cos\alpha=\dfrac{4}{7}$;
2) $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$;
3) $\sin\alpha=-\sqrt[3]{1{,}2}$;
4) $\cos\alpha=\dfrac{\pi}{3}$;
5) $\cos\alpha=\dfrac{\pi}{4}$;
6) $\sin\alpha=\dfrac{9}{8}$;
7) $\operatorname{tg}\alpha=-4$;
8) $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{26}$?

517.° Чи може дорівнювати числу $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ значення:

1) $\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha$?

518.• Укажіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $3\sin\alpha$;
2) $4+\cos\alpha$;
3) $2-\sin\alpha$;
4) $6-2\cos\alpha$;
5) $\sin^2\alpha$;
6) $2\cos^2\alpha-3$.

519.• Укажіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $-5\cos\alpha$; 2) $\cos\alpha-2$; 3) $5+\sin^2\alpha$; 4) $7-3\sin\alpha$.

520.• Укажіть які-небудь три значення x, при яких виконується рівність:

1) $\sin x=1$; 2) $\sin x=-1$.

521.• Укажіть які-небудь три значення x, при яких виконується рівність:

1) $\cos x=1$; 2) $\cos x=-1$.

522.• Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{12}\right)+3\operatorname{tg}\alpha}$, якщо $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$;

2) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}$, якщо $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{6}$;

3) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2-(\sin\alpha-\sin\beta)^2$, якщо $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$.

523.˙ **Знайдіть значення виразу:**

1) $\frac{\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}$, якщо $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

2) $\frac{\sin3\beta-\sin\beta\operatorname{tg}\alpha}{\cos3\alpha-3\sin(3\alpha+3\beta)}$, якщо $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{6}$.

524.˙˙ **Знайдіть усі значення x, при яких виконується рівність:**

1) $\sin x=1$; 2) $\sin x=-1$.

525.˙˙ **Знайдіть усі значення x, при яких виконується рівність:**

1) $\cos x=1$; 2) $\cos x=-1$.

526.˙˙ **Чи існує таке значення $x\in\mathbb{R}$, при якому обидві функції $y=\operatorname{tg}x$ і $y=\operatorname{ctg}x$ не визначені?**

527.˙˙ При яких значеннях a можлива рівність:

1) $\cos x=a+3$; 3) $\cos x=a^2-1$; 5) $\cos x=a^2-5a+5$;

2) $\sin x=a^2+1$; 4) $\sin x=a^2-a-1$; 6) $\operatorname{tg}x=\frac{a+2}{a-2}$?

528.˙˙ При яких значеннях a можлива рівність:

1) $\sin x=a-2$; 3) $\cos x=a^2-3$;

2) $\cos x=a^2+2$; 4) $\sin x=2a-a^2-2$?

529.˙˙ Порівняйте значення виразів $2\sin\alpha$ і $\sin^2\alpha$, якщо $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

530.˙˙ Порівняйте:

1) $\cos10°$ і $\cos10°\cos20°$; 2) $\sin40°$ і $\sin^2 40°$.

531.˙˙ Знайдіть область значень виразу:

1) $\frac{1}{2+\sin x}$; 2) $\frac{1}{1-\cos x}$.

532.˙˙ Знайдіть область значень функції:

1) $y=\frac{2}{3-\cos x}$; 2) $y=\frac{1}{\sin x+1}$.

533.˙˙ Доведіть, що $\sin\alpha=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

534.˙˙ Доведіть, що $\cos\alpha=-\cos(\pi+\alpha)$.

Готуємося до вивчення нової теми

535. Порівняйте з нулем координати точки A (x; y), якщо ця точка лежить:

1) у I координатній чверті;
2) у II координатній чверті;
3) у III координатній чверті;
4) у IV координатній чверті.

536. Парною чи непарною є функція:

1) $f(x) = \frac{x^3}{25 - x^2}$;
2) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$;
3) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$;
4) $f(x) = 2x^7 + 4x^5 - 3x$;
5) $f(x) = \frac{5}{x^4 - 4x^2}$;
6) $f(x) = \sqrt[4]{|x|}$?

20. Знаки значень тригонометричних функцій. Парність і непарність тригонометричних функцій

Нехай точку P отримано з точки P_0 (1; 0) у результаті повороту навколо початку координат на кут α. Якщо точка P належить I чверті, то говорять, що кут α є **кутом I чверті**. Аналогічно можна говорити про кути II, III і IV чвертей.

Наприклад, $\frac{\pi}{7}$ і $-300°$ — кути I чверті, $\frac{2\pi}{3}$ і $-185°$ — кути II чверті, $\frac{5\pi}{4}$ і $-96°$ — кути III чверті, $355°$ і $-\frac{\pi}{8}$ — кути IV чверті.

Кути виду $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, не відносять до жодної чверті.

Точки, розміщені в I чверті, мають додатні абсцису і ординату. Отже, якщо α — кут I чверті, то $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$.

Зрозуміло, що коли α — кут II чверті, то $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$.

Якщо α — кут III чверті, то $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$.

Якщо α — кут IV чверті, то $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$.

Знаки значень синуса і косинуса схематично показано на рисунку 102.

Оскільки $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, то тангенси і котангенси кутів I і III чвертей є додатними, а кутів II і IV чвертей — від'ємними (рис. 103).

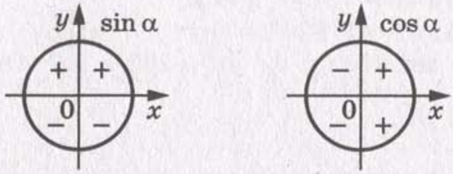


Рис. 102

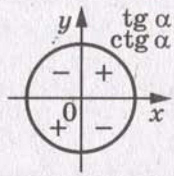


Рис. 103

Нехай точки P_1 і P_2 отримано в результаті повороту точки P_0 (1; 0) на кути α і $-\alpha$ відповідно (рис. 104).

Для будь-якого α точки P_1 і P_2 мають рівні абсциси і протилежні ординати. Тоді з означень синуса і косинуса випливає, що для будь-якого дійсного числа α

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha\end{array}}$$

Це означає, що ***функція косинус є парною, а функція синус — непарною.***

Області визначення функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ симетричні відносно початку координат (перевірте це самостійно). Крім того:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Отже, ***функції тангенс і котангенс є непарними.***

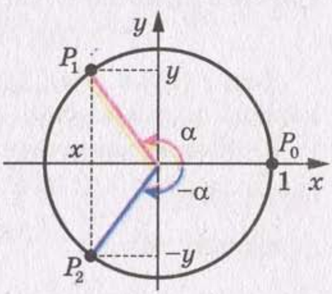


Рис. 104

ПРИКЛАД 1 Який знак має: 1) $\sin 280°$; 2) $\operatorname{tg}(-140°)$; 3) $\operatorname{tg} 2$?

Розв'язання. 1) $\sin 280° < 0$, оскільки кут 280° є кутом IV чверті;

2) $\operatorname{tg}(-140°) > 0$, оскільки кут $-140°$ є кутом III чверті;

3) оскільки $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, то кут 2 рад є кутом II чверті. Отже, $\operatorname{tg} 2 < 0$.

ПРИКЛАД 2 Визначте знак виразу $\cos 123° \operatorname{tg} 231° \sin 312°$.

Розв'язання. Оскільки 123° — кут II чверті, 231° — кут III чверті, 312° — кут IV чверті, то $\cos 123° < 0$, $\operatorname{tg} 231° > 0$, $\sin 312° < 0$ і їх добуток більший за 0.

ПРИКЛАД 3 Порівняйте $\sin 200°$ і $\sin(-200°)$.

Розв'язання. Оскільки кут $200°$ — кут III чверті, кут $-200°$ — кут II чверті, то $\sin 200° < 0$, $\sin(-200°) > 0$. Отже, $\sin 200° < \sin(-200°)$.

ПРИКЛАД 4 Дослідіть на парність функцію: 1) $f(x)=\frac{1+\cos x}{x^2}$; 2) $f(x) = 1 + \sin x$; 3) $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$; 4) $f(x)=\frac{\cos x}{x-1}$.

Розв'язання. 1) Область визначення даної функції $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ є симетричною відносно початку координат. Маємо:

$$f(-x)=\frac{1+\cos(-x)}{(-x)^2}=\frac{1+\cos x}{x^2}=f(x).$$

Отже, дана функція є парною.

2) Область визначення даної функції $D(f) = (-\infty; +\infty)$ є симетричною відносно початку координат. Маємо:

$$f(-x) = 1 + \sin(-x) = 1 - \sin x.$$

Тоді $f(-x) \neq f(x)$; $f(-x) \neq -f(x)$. Отже, дана функція не є ні парною, ні непарною.

3) Область визначення даної функції — усі дійсні числа, крім чисел виду $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, — є симетричною відносно початку координат. Маємо:

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos^2(-x)}=-\frac{\sin x}{\cos^2 x}=-f(x).$$

Отже, дана функція є непарною.

4) Область визначення даної функції $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ не є симетричною відносно початку координат. Отже, дана функція не є ні парною, ні непарною.

?

1. Коли говорять, що кут α є кутом I координатної чверті? II чверті? III чверті? IV чверті?
2. Які знаки мають синус, косинус, тангенс і котангенс у кожній з координатних чвертей?
3. Які з тригонометричних функцій є парними, а які — непарними? Запишіть відповідні рівності.

Вправи

537.° Кутом якої чверті є кут:

1) $38°$; 4) $302°$; 7) $-98°$; 10) $\frac{3\pi}{5}$; 13) $-\frac{2\pi}{3}$;

2) $119°$; 5) $217°$; 8) $-285°$; 11) $\frac{7\pi}{6}$; 14) $-\frac{5\pi}{4}$;

3) $196°$; 6) $-74°$; 9) $\frac{2\pi}{5}$; 12) $\frac{7\pi}{4}$; 15) $-\frac{16\pi}{9}$?

538.° Додатним чи від'ємним числом є значення тригонометричної функції:

1) $\sin 110°$; 5) $\sin(-280°)$; 9) $\sin(-130°)$; 13) $\operatorname{tg} 1$;

2) $\cos 200°$; 6) $\cos 340°$; 10) $\cos 2$; 14) $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}$;

3) $\operatorname{tg} 160°$; 7) $\operatorname{tg}(-75°)$; 11) $\sin(-3)$; 15) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$;

4) $\operatorname{ctg} 220°$; 8) $\operatorname{ctg}(-230°)$; 12) $\operatorname{ctg} 1{,}7$; 16) $\cos\frac{2\pi}{3}$?

539.° Який знак має:

1) $\sin 186°$; 4) $\operatorname{ctg} 340°$; 7) $\operatorname{tg}(-100°)$; 10) $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{8}$;

2) $\operatorname{tg} 104°$; 5) $\sin(-36°)$; 8) $\operatorname{ctg}(-291°)$; 11) $\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$;

3) $\cos 220°$; 6) $\cos(-78°)$; 9) $\sin\frac{3\pi}{7}$; 12) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{19}{12}\pi\right)$?

540.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sin(-30°)$; 2) $\operatorname{tg}(-60°)$; 3) $\operatorname{ctg}(-45°)$; 4) $\cos(-30°)$.

541.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\cos(-60°) + \operatorname{tg}(-45°)$; 2) $\operatorname{ctg}(-60°)\sin(-45°)\cos(-45°)$?

542.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sin(-30°) - 2\operatorname{tg}(-45°) + \cos(-45°)$;

2) $5\operatorname{tg} 0 + 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 3\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\cos(-\pi) + 4\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

4) $\dfrac{1{,}5 + \sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

543.° Знайдіть значення виразу:

1) $3\sin(-45°) + \cos(-45°) + 2\sin(-30°) + 6\cos(-60°)$;
2) $\sin^2(-60°) + \cos^2(-30°)$;
3) $2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)+3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

544.° Визначте знак виразу:

1) $\sin 100° \sin 132°$;
2) $\cos 210° \sin 115°$;
3) $\cos 285° \cos(-316°)$;
4) $\operatorname{tg} 112° \sin 165°$;
5) $\cos 318° \operatorname{tg}(-214°)$;
6) $\operatorname{ctg} 300° \sin 220°$;
7) $\sin 1 \cos 2$;
8) $\sin 5 \operatorname{tg} 5$;
9) $\sin 3 \cos 4 \operatorname{tg} 5$;
10) $\sin(-118°) \cos 118° \operatorname{tg} 118°$.

545.° Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin 102° \cos 350°$;
2) $\sin 134° \cos 131°$;
3) $\frac{\sin 157°}{\cos 256°}$;
4) $\frac{\cos 142°}{\sin 72°}$;
5) $\sin 112° \cos(-128°) \operatorname{tg} 198°$;
6) $\sin(-245°) \operatorname{tg} 183° \operatorname{ctg}(-190°)$.

546.° Відомо, що $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin\alpha \operatorname{tg}\alpha$;
2) $\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$;
3) $\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha}$;
4) $\sin\alpha - \cos\alpha$.

547.° Відомо, що $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin\beta\cos\beta$;
2) $\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}$;
3) $\frac{\operatorname{tg}^3\beta}{\sin\beta}$;
4) $\sin\beta + \cos\beta$.

548.° Порівняйте:

1) $\operatorname{tg} 130°$ і $\operatorname{tg}(-130°)$;
2) $\operatorname{tg} 110°$ і $\operatorname{tg} 193°$;
3) $\cos 80°$ і $\sin 330°$;
4) $\sin 60°$ і $\sin\frac{8\pi}{7}$;
5) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$ і $\cos 280°$;
6) $\operatorname{ctg} 6$ і $\operatorname{ctg} 6°$.

549.° Порівняйте:

1) $\sin 200°$ і $\sin(-250°)$;
2) $\operatorname{ctg} 100°$ і $\operatorname{ctg} 80°$;
3) $\cos 250°$ і $\cos 290°$;
4) $\cos 6{,}2$ і $\sin 5$.

550.° Відомо, що α — кут III чверті. Спростіть вираз:

1) $\sin\alpha - |\sin\alpha|$; 2) $|\cos\alpha| - \cos\alpha$; 3) $|\operatorname{tg}\alpha| - \operatorname{tg}\alpha$.

551.° Відомо, що β — кут IV чверті. Спростіть вираз:

1) $|\sin\beta| + \sin\beta$; 2) $\cos\beta - |\cos\beta|$; 3) $|\operatorname{ctg}\beta| - \operatorname{ctg}\beta$.

552. Кутом якої чверті є кут α, якщо:

1) $\sin\alpha > 0$ і $\cos\alpha < 0$;
2) $\sin\alpha < 0$ і $\operatorname{tg}\alpha > 0$;
3) $|\sin\alpha| = \sin\alpha$ і $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha + |\operatorname{ctg}\alpha| = 0$ і $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$?

553. Кутом якої чверті є кут α, якщо:

1) $\cos\alpha > 0$ і $\operatorname{tg}\alpha > 0$;
2) $\sin\alpha < 0$ і $\operatorname{ctg}\alpha < 0$;
3) $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$ і $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;
4) $|\operatorname{tg}\alpha| - \operatorname{tg}\alpha = 0$ і $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$?

554. Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = \sin^2 x$;
2) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$;
3) $f(x) = \operatorname{tg} x + \cos x$;
4) $f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$;
5) $f(x) = x^3 + \cos x$;
6) $f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x}$;
7) $f(x) = \frac{(x-1)\cos x}{x-1}$;
8) $f(x) = \frac{x^3\sin x}{x}$.

555. Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
2) $f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\sin x - \operatorname{tg} x}$;
3) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2-1}$;
4) $f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^3-1}$;
5) $f(x) = \cos x + \frac{\pi}{3}$;
6) $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x\cdot(x^2-1)}{x^2-1}$.

Вправи для повторення

556. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2-36} = \sqrt{2x-1}$;
2) $\sqrt{15-3x} - 1 = x$.

557. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\frac{x^2-2x}{x+2} \leqslant 3$;
2) $\frac{x^2+3x}{x-3} \geqslant -2$;
3) $(x+1)(x-2)(x+3)^2 > 0$;
4) $(x+2)(x-1)(x-3)^2 \leqslant 0$.

558. З пунктів A і B, відстань між якими 56 км, назустріч один одному вирушили два туристи. Якщо перший з них вийде на 1 год 10 хв раніше, ніж другий, то вони зустрінуться на середині дороги між A і B. Якщо ж вони вирушать одночасно, то їх зустріч відбудеться через 4 год. Знайдіть швидкість кожного туриста.

21. Періодичні функції

Багато процесів і подій, які відбуваються в навколишньому світі, повторюються через рівні проміжки часу. Наприклад, через 27,3 доби повторюється значення відстані від Землі до Місяця; якщо сьогодні субота, то через 7 діб знову настане субота.

Подібні явища і процеси називають **періодичними**, а функції, які є їх математичними моделями, — **періодичними функціями**.

Ви знаєте, що для будь-якого числа x виконуються рівності

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi);$$
$$\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi).$$

Це означає, що значення функцій синус і косинус періодично повторюються при зміні аргументу на 2π. Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є прикладами періодичних функцій.

Означення. **Функцію f називають періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x з області визначення функції f виконуються рівності**

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Число T називають періодом функції f.

Виконання записаних рівностей для будь-якого x з області визначення означає, що область визначення періодичної функції f має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $(x_0 - T) \in D(f)$ і $(x_0 + T) \in D(f)$.

Ви знаєте, що для будь-якого x з області визначення функції $y = \operatorname{tg} x$ виконуються рівності

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi).$$

Також для будь-якого x з області визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$ виконуються рівності:

$$\operatorname{ctg}(x - \pi) = \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi).$$

Тоді з означення періодичної функції випливає, що тангенс і котангенс є періодичними з періодом π.

Якщо функція f має період T, то будь-яке число виду nT, *де* $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, *також є її періодом.* Доведемо цю властивість, наприклад, для $n = 3$.

Маємо:

$$f(x - 3T) = f((x - 2T) - T) = f(x - 2T) =$$
$$= f((x - T) - T) = f(x - T) = f(x);$$
$$f(x + 3T) = f((x + 2T) + T) = f(x + 2T) =$$
$$= f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x).$$

Наведена властивість означає, що кожна періодична функція має безліч періодів.

Наприклад, будь-яке число виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, є періодом функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$; будь-яке число виду πn, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, є періодом функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$.

Якщо серед усіх періодів функції f існує найменший додатний період, то його називають **головним періодом** функції f.

Можна показати, що *головним періодом функцій* $y = \sin x$ *і* $y = \cos x$ *є число* 2π, *а головним періодом функцій* $y = \operatorname{tg} x$ *і* $y = \operatorname{ctg} x$ *є число* π.

Зазначимо, що не будь-яка періодична функція має головний період. Наприклад, функція $y = c$, де c — деяке число, є періодичною. Очевидно, що будь-яке дійсне число, відмінне від нуля, є її періодом. Отже, ця функція не має головного періоду.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу: 1) $\sin 660°$; 2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$; 3) $\operatorname{tg} 135°$.

Розв'язання. 1) $\sin 660° = \sin(720° - 60°) = \sin(-60° + 360° \cdot 2) = = \sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = -\sin\frac{13\pi}{3} = -\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg}(-45° + 180°) = \operatorname{tg}(-45°) = -1$.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що число $T = 5\pi$ є періодом функції $f(x) = \sin 4x$.

Розв'язання. Маємо: $f(x + T) = \sin 4(x + 5\pi) = \sin(4x + 20\pi) = = \sin 4x = f(x)$;

$f(x - T) = \sin 4(x - 5\pi) = \sin(4x - 20\pi) = \sin 4x = f(x)$.

Отже, $f(x - 5\pi) = f(x) = f(x + 5\pi)$ для всіх $x \in D(f)$, тобто число 5π є періодом функції f.

На рисунку 105 зображено графік деякої періодичної функції f з періодом T, $D(f) = \mathbb{R}$.

Очевидно, що фрагменти графіка цієї функції на проміжках $[0; T]$, $[T; 2T]$, $[2T; 3T]$ і т. д., а також на проміжках

$[-T; 0]$, $[-2T; -T]$, $[-3T; -2T]$ і т. д. є рівними фігурами, причому будь-яка з цих фігур може бути отримана з будь-якої іншої паралельним перенесенням на вектор з координатами $(nT; 0)$, де n — деяке ціле число.

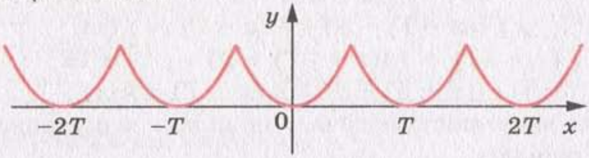


Рис. 105

ПРИКЛАД 3 На рисунку 106 зображено фрагмент графіка періодичної функції, період якої дорівнює T. Побудуйте графік цієї функції на проміжку $\left[-\frac{3T}{2}; \frac{5T}{2}\right]$.

Розв'язання. Побудуємо образи зображеної фігури при паралельних перенесеннях на вектори з координатами $(T; 0)$, $(2T; 0)$ і $(-T; 0)$. Об'єднання даної фігури та отриманих образів — шуканий графік (рис. 107).

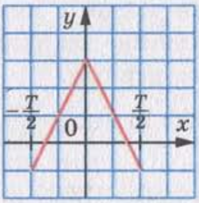


Рис. 106

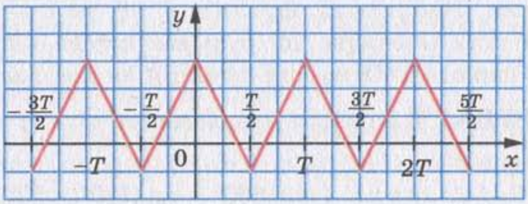


Рис. 107

?

1. Яку функцію називають періодичною?
2. Що таке період функції?
3. Яку властивість має область визначення періодичної функції?
4. Що називають головним періодом функції?
5. Яке число є головним періодом функції $y = \sin x$? $y = \cos x$? $y = \operatorname{tg} x$? $y = \operatorname{ctg} x$?

Вправи

559.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sin 390°$; 3) $\operatorname{tg} 780°$; 5) $\cos(-750°)$; 7) $\operatorname{tg}(-210°)$;
2) $\cos 420°$; 4) $\operatorname{ctg} 405°$; 6) $\sin(-390°)$; 8) $\operatorname{ctg} 225°$;

9) $\cos 300°$; 11) $\cos \frac{11\pi}{6}$; 13) $\sin \frac{5\pi}{3}$; 15) $\operatorname{tg}\left(-\frac{19\pi}{3}\right)$.

10) $\operatorname{tg} 150°$; 12) $\sin \frac{23\pi}{4}$; 14) $\cos \frac{7\pi}{4}$;

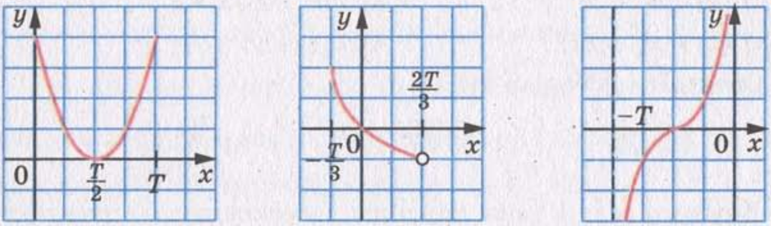
560.° **Знайдіть значення виразу:**

1) $\sin 420°$; 4) $\sin 1110°$; 7) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4}$;

2) $\cos 405°$; 5) $\operatorname{tg} 765°$; 8) $\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$;

3) $\operatorname{tg}(-315°)$; 6) $\cos \frac{7\pi}{3}$; 9) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$.

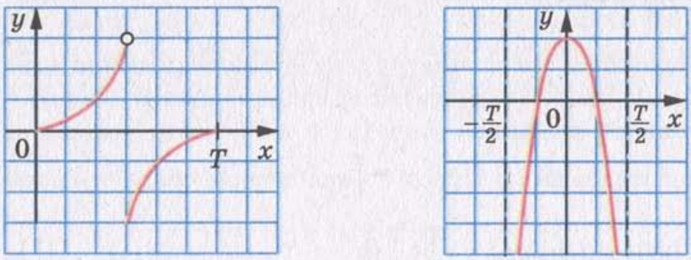
561.° На рисунку 108 зображено частину графіка періодичної функції, період якої дорівнює T. Побудуйте графік цієї функції на проміжку $[-2T; 3T]$.



а) б) в)

Рис. 108

562.° На рисунку 109 зображено частину графіка періодичної функції, період якої дорівнює T. Побудуйте графік цієї функції на проміжку $[-2T; 2T]$.



а) б)

Рис. 109

563.* Доведіть, що число T є періодом функції f:

1) $f(x)=\cos\frac{x}{4}$, $T=8\pi$;
2) $f(x)=\operatorname{tg} 3x$, $T=-\frac{2\pi}{3}$;
3) $f(x)=\operatorname{ctg} \pi x$, $T=3$;
4) $f(x)=\sin(5x-2)$, $T=\frac{4\pi}{5}$.

564.* Доведіть, що числа $\frac{2\pi}{3}$ і -4π є періодами функції $f(x)=\cos 3x$.

565.** Доведіть, що число π не є періодом функції $f(x)=\sin x$.

566.** Доведіть, що число $-\frac{\pi}{2}$ не є періодом функції $f(x)=\operatorname{tg} x$.

Вправи для повторення

567. Знайдіть область значень функції:

1) $f(x)=x^2+2$;
2) $f(x)=x^2+2x$;
3) $f(x)=2\sqrt{x}+3$;
4) $f(x)=4-3\sqrt{x}$.

568. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[6]{7}$;
2) $\sqrt[3]{3\sqrt[5]{3}}\cdot\sqrt[5]{27}$;
3) $\frac{\sqrt[3]{4\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{8\sqrt[3]{2}}}$.

569. З одного села в інше вирушив велосипедист зі швидкістю 12 км/год, а через півгодини після нього в тому самому напрямку виїхав трактор зі швидкістю 20 км/год, який прибув у друге село на півгодини раніше від велосипедиста. Чому дорівнює відстань між селами?

22. Властивості і графіки функцій $y=\sin x$ і $y=\cos x$

Періодичність тригонометричних функцій дозволяє досліджувати їх властивості та будувати графіки за такою схемою.

1) Розглянути проміжок виду $[a;\ a+T]$, тобто довільний проміжок завдовжки в період T $\left(\right.$найчастіше обирають проміжок $[0;\ T]$ або проміжок $\left.\left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right]\right)$.
2) Дослідити властивості функції на вибраному проміжку.
3) Побудувати графік функції на цьому проміжку.

4) Здійснити паралельне перенесення отриманої фігури на вектори з координатами $(nT;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Розглянемо функцію $y = \sin x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$, тобто на проміжку завдовжки в період цієї функції.

При повороті точки $P_0\ (1;\ 0)$ навколо початку координат на кути від 0 до $\frac{\pi}{2}$ ордината точки одиничного кола збільшується від 0 до 1 (рис. 110). Це означає, що функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

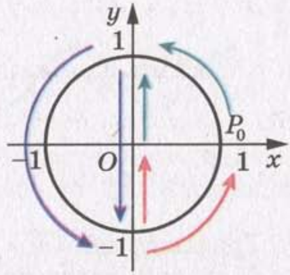


Рис. 110

При повороті точки $P_0\ (1;\ 0)$ на кути від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ ордината точки одиничного кола зменшується від 1 до −1 (рис. 110). Отже, функція $y = \sin x$ спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

При повороті точки $P_0\ (1;\ 0)$ на кути від $\frac{3\pi}{2}$ до 2π ордината точки одиничного кола збільшується від −1 до 0 (рис. 110). Отже, функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Функція $y = \sin x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$ має три нулі: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Якщо $x \in (0;\ \pi)$, то $\sin x > 0$; якщо $x \in (\pi;\ 2\pi)$, то $\sin x < 0$.

Функція $y = \sin x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$ досягає свого найбільшого значення, яке дорівнює 1, при $x = \frac{\pi}{2}$, і найменшого значення, яке дорівнює −1, при $x = \frac{3\pi}{2}$.

Отримані властивості функції $y = \sin x$ дозволяють побудувати її графік на проміжку $[0;\ 2\pi]$ (рис. 111). Графік можна побудувати точніше, якщо скористатися даними таблиці значень тригонометричних функцій деяких кутів, наведеної на форзаці 3.

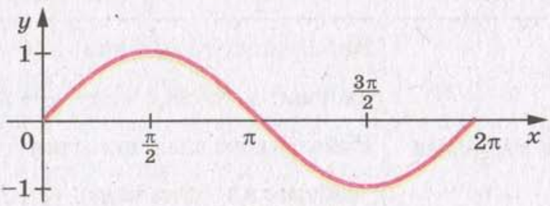


Рис. 111

На всій області визначення графік функції $y = \sin x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(2\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 112).

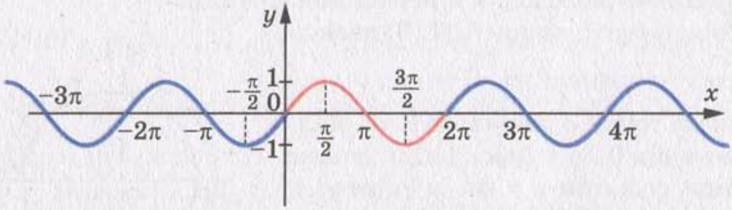


Рис. 112

Графік функції $y = \sin x$ називають **синусоїдою.**

У таблиці наведено основні властивості функції $y = \sin x$.

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$[-1; 1]$
Періодичність	Періодична з головним періодом, який дорівнює 2π
Нулі функції	Числа виду πn, $n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\sin x > 0$ на кожному з проміжків виду $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$ $\sin x < 0$ на кожному з проміжків виду $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
Парність	Непарна
Зростання/спадання	Зростає на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ Спадає на кожному з проміжків виду $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$
Найбільше і найменше значення	Найбільшого значення, яке дорівнює 1, набуває в точках виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ Найменшого значення, яке дорівнює -1, набуває в точках виду $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Розглянемо функцію $y = \cos x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$.

Розглядаючи повороти точки $P_0\ (1;\ 0)$ навколо початку координат, можна дійти такого висновку: функція $y = \cos x$ спадає на проміжку $[0;\ \pi]$ і зростає на проміжку $[\pi;\ 2\pi]$.

Функція $y = \cos x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$ має два нулі: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

Якщо $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, то $\cos x > 0$; якщо $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, то $\cos x < 0$.

Функція $y = \cos x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$ досягає свого найбільшого значення, яке дорівнює 1, при $x = 0$ або $x = 2\pi$ і найменшого значення, яке дорівнює -1, при $x = \pi$.

Графік функції $y = \cos x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$ зображено на рисунку 113.

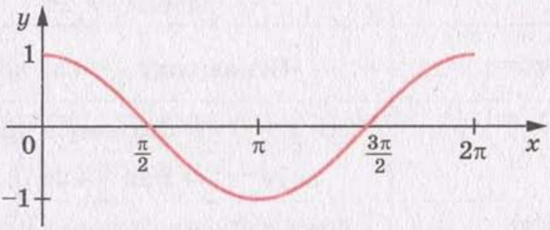


Рис. 113

На всій області визначення графік функції $y = \cos x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(2\pi n;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 114).

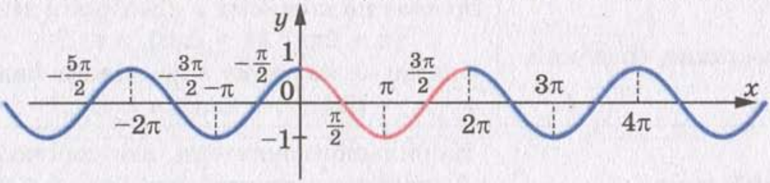


Рис. 114

Графік функції $y = \cos x$ називають **косинусоїдою**.

Якщо скористатися формулою $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ (див. приклад 3 п. 19), то зрозуміло, що графік функції $y = \cos x$ можна отримати як результат паралельного перенесення графіка функції $y = \sin x$ на вектор з координатами $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ (рис. 115). Це означає, що графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ — рівні фігури.

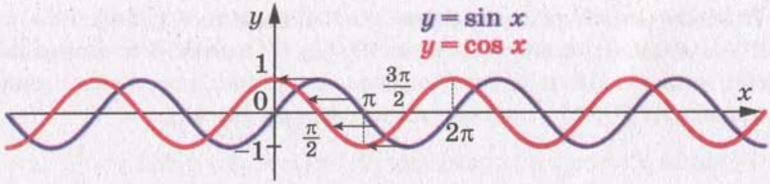


Рис. 115

У таблиці наведено основні властивості функції $y = \cos x$.

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$[-1; 1]$
Періодичність	Періодична з головним періодом, який дорівнює 2π
Нулі функції	Числа виду $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\cos x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$ $\cos x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$
Парність	Парна
Зростання/спадання	Зростає на кожному з проміжків виду $[\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n],\ n \in \mathbb{Z}$ Спадає на кожному з проміжків виду $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n],\ n \in \mathbb{Z}$
Найбільше і найменше значення	Найбільшого значення, яке дорівнює 1, набуває в точках виду $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ Найменшого значення, яке дорівнює -1, набуває в точках виду $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

ПРИКЛАД 1 Порівняйте: 1) $\sin 0{,}7\pi$ і $\sin 0{,}71\pi$; 2) $\cos 324°$ і $\cos 340°$.

Розв'язання. 1) Оскільки числа $0{,}7\pi$ і $0{,}71\pi$ належать проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, на якому функція $y = \sin x$ спадає, і $0{,}7\pi < 0{,}71\pi$, то $\sin 0{,}7\pi > \sin 0{,}71\pi$.

2) Оскільки $324°$ і $340°$ належать проміжку $[180°; 360°]$, на якому функція $y = \cos x$ зростає, і $324° < 340°$, то $\cos 324° < \cos 340°$.

ПРИКЛАД 2 Визначте знак різниці $\cos\frac{7\pi}{36} - \cos\frac{2\pi}{9}$.

Розв'язання. Числа $\frac{7\pi}{36}$ і $\frac{2\pi}{9}$ належать проміжку $[0; \pi]$, на якому функція $y = \cos x$ спадає, і $\frac{7\pi}{36} < \frac{8\pi}{36} = \frac{2\pi}{9}$. Отже, $\cos\frac{7\pi}{36} > \cos\frac{2\pi}{9}$, тому різниця $\cos\frac{7\pi}{36} - \cos\frac{2\pi}{9}$ є додатним числом.

ПРИКЛАД 3 Порівняйте $\sin 40°$ і $\cos 40°$.

Розв'язання. Оскільки $\sin 40° < \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 40° > \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos 40° > \sin 40°$.

ПРИКЛАД 4 Чи можлива рівність $\sin\alpha = 2\sin 31°$?

Розв'язання. Оскільки $\sin 31° > \sin 30° = \frac{1}{2}$, то $2\sin 31° > 1$. Отже, дана рівність неможлива.

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. Шуканий графік отримуємо з графіка функції $y = \sin x$ у результаті його паралельного перенесення вздовж осі абсцис у від'ємному напрямі на $\frac{\pi}{3}$ одиниць (рис. 116).

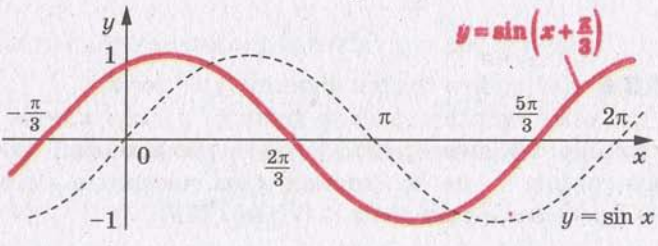


Рис. 116

ПРИКЛАД 6 Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Розв'язання. Стиснемо графік функції $y = \sin x$ до осі ординат у 2 рази, тобто зменшимо у 2 рази відстані від кожної точки графіка функції $y = \sin x$ до осі ординат. Отримаємо графік функції $y = \sin 2x$. Потім цей графік стиснемо у 2 рази до осі абсцис. Це і буде шуканий графік (рис. 117).

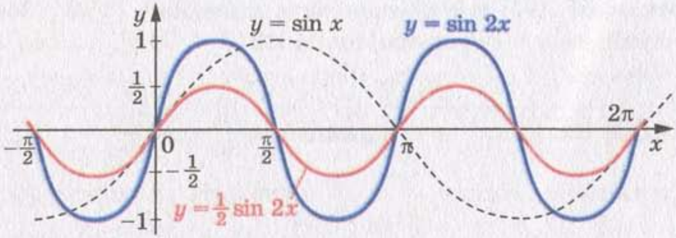


Рис. 117

ПРИКЛАД 7 Побудуйте графік функції $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. Проведемо такі перетворення:

1) $y = \sin x \rightarrow y = \sin 2x$ — стиск до осі ординат у 2 рази;

2) $y = \sin 2x \rightarrow y = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ — паралельне перенесення вздовж осі абсцис у від'ємному напрямі на $\frac{\pi}{6}$ одиниць (рис. 118).

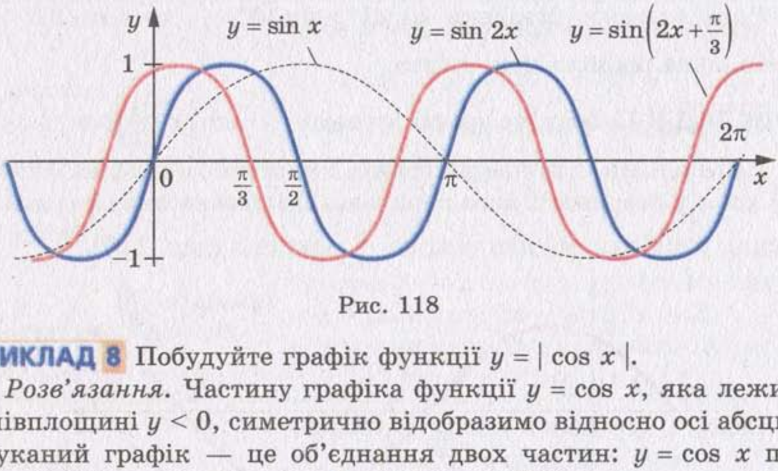


Рис. 118

ПРИКЛАД 8 Побудуйте графік функції $y = |\cos x|$.

Розв'язання. Частину графіка функції $y = \cos x$, яка лежить у півплощині $y < 0$, симетрично відобразимо відносно осі абсцис. Шуканий графік — це об'єднання двох частин: $y = \cos x$ при $\cos x \geqslant 0$ і $y = -\cos x$ при $\cos x < 0$ (рис. 119).

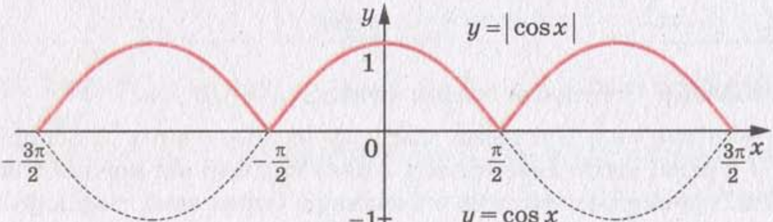


Рис. 119

?

1. Чому дорівнюють нулі функції $y = \sin x$?

2. На яких проміжках функція $y = \sin x$ набуває додатних значень, а на яких — від'ємних?

3. Назвіть проміжки зростання і проміжки спадання функції $y = \sin x$.

4. Якого найбільшого (найменшого) значення набуває функція $y = \sin x$ і при яких значеннях аргументу?

5. Як називають графік функції $y = \sin x$?

6. Чому дорівнюють нулі функції $y = \cos x$?

7. На яких проміжках функція $y = \cos x$ набуває додатних значень, а на яких — від'ємних?

8. Назвіть проміжки зростання і проміжки спадання функції $y = \cos x$.

9. Якого найбільшого (найменшого) значення набуває функція $y = \cos x$ і при яких значеннях аргументу?

10. Як називають графік функції $y = \cos x$?

11. Чому графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є рівними фігурами?

Вправи

570.° Чи належить графіку функції $y = \cos x$ точка:

1) $A\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$; 2) $B\left(\frac{9\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $C(-4\pi; -1)$; 4) $D\left(\frac{11\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$?

571.° Чи проходить графік функції $y = \sin x$ через точку:

1) $A\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$; 2) $B\left(\frac{\pi}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 3) $C(\pi; -1)$; 4) $D\left(\frac{23\pi}{6}; -\frac{1}{2}\right)$?

572.° Серед чисел -3π, $-\frac{5\pi}{2}$, -2π, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{9\pi}{2}$, 6π, 7π укажіть:

1) нулі функції $y = \sin x$;

2) значення аргументу, при яких функція $y = \sin x$ набуває найбільшого значення;

3) значення аргументу, при яких функція $y = \sin x$ набуває найменшого значення.

573.° Серед чисел $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, 5π, 8π укажіть:
1) нулі функції $y = \cos x$;
2) значення аргументу, при яких функція $y = \cos x$ набуває найбільшого значення;
3) значення аргументу, при яких функція $y = \cos x$ набуває найменшого значення.

574.° На яких з наведених проміжків функція $y = \sin x$ є зростаючою:
1) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 3) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$?

575.° На яких з наведених проміжків функція $y = \sin x$ є спадною:
1) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $[-\pi; 0]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$?

576.° Серед наведених проміжків укажіть проміжки спадання функції $y = \cos x$:
1) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $[-2\pi; -\pi]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $[6\pi; 7\pi]$.

577.° Серед наведених проміжків укажіть проміжки зростання функції $y = \cos x$:
1) $[-3\pi; -2\pi]$; 2) $[0; \pi]$; 3) $[-\pi; \pi]$; 4) $[3\pi; 4\pi]$.

578.° Порівняйте:
1) $\cos 1{,}6\pi$ і $\cos 1{,}68\pi$;
2) $\sin 20°$ і $\sin 21°$;
3) $\cos 20°$ і $\cos 21°$;
4) $\sin\frac{10\pi}{9}$ і $\sin\frac{25\pi}{18}$;
5) $\cos\frac{10\pi}{9}$ і $\cos\frac{25\pi}{18}$;
6) $\cos 5{,}1$ і $\cos 5$;
7) $\sin 2$ і $\sin 2{,}1$.

579.° Порівняйте:
1) $\cos\frac{\pi}{9}$ і $\cos\frac{4\pi}{9}$;
2) $\sin\frac{5\pi}{9}$ і $\sin\frac{17\pi}{18}$;
3) $\sin\left(-\frac{7\pi}{30}\right)$ і $\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$;
4) $\cos\frac{10\pi}{7}$ і $\cos\frac{11\pi}{9}$.

580.° Розташуйте числа в порядку зростання:
1) $\sin 3{,}2$, $\sin 4$, $\sin 3{,}6$, $\sin 2{,}4$, $\sin 1{,}8$;
2) $\cos 3{,}5$, $\cos 4{,}8$, $\cos 6{,}1$, $\cos 5{,}6$, $\cos 4{,}2$.

581.° Розташуйте числа в порядку спадання:
1) $\sin(-0{,}2)$, $\sin 0{,}2$, $\sin 1{,}5$, $\sin 1$, $\sin 0{,}9$;
2) $\cos 0{,}1$, $\cos 1{,}4$, $\cos 2{,}4$, $\cos 3{,}1$, $\cos 1{,}8$.

582.$^{\bullet}$ Визначте знак різниці:

1) $\sin 123° - \sin 132°$; 2) $\cos 4{,}2 - \cos 3{,}4$; 3) $\cos\frac{5\pi}{8} - \cos\frac{7\pi}{9}$.

583.$^{\bullet}$ Визначте знак різниці:

1) $\sin 190° - \sin 191°$; 2) $\cos 130° - \cos 110°$.

584.$^{\bullet\bullet}$ Порівняйте:

1) $\sin 58°$ і $\cos 58°$; 2) $\sin 18°$ і $\cos 18°$; 3) $\cos 80°$ і $\sin 70°$.

585.$^{\bullet\bullet}$ Чи можлива рівність:

1) $\cos\alpha = 2\sin 25°$; 2) $\sin\alpha = \sqrt{2}\cos 35°$?

586.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$; 2) $y = -\frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

587.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = -3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$.

588.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt{\sin x}\right)^2$; 4) $y = \sqrt{-\sin^2 x}$;

2) $y = \sin x + \sin|x|$; 5) $y = \sqrt{\cos x - 1}$;

3) $y = \cos x + \sqrt{\cos^2 x}$; 6) $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$.

589.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt{\cos x}\right)^2$; 3) $y = \sqrt{-\cos^2 x}$; 5) $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$.

2) $y = \sin x - \sqrt{\sin^2 x}$; 4) $y = \sqrt{\sin x - 1}$;

590.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції, укажіть область значень даної функції, її нулі, проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання, якого найбільшого і найменшого значення може набувати функція і при яких значеннях аргументу:

1) $y = \sin x + 1$; 3) $y = \sin 2x$;

2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y = -\frac{1}{2}\sin x$.

591.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції, укажіть область значення даної функції, її нулі, проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання, якого найбільшого і найменшого значення може набувати функція і при яких значеннях аргументу:

1) $y = \cos x - 1$; 2) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 3) $y = \cos\frac{x}{2}$; 4) $y = 3\cos x$.

592.* Побудуйте графік функції $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1.$

593.* Побудуйте графік функції $y=-3\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+2.$

Вправи для повторення

594. Знайдіть нулі функції:

1) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$;

2) $f(x)=\sqrt{x^2+9}$;

3) $f(x)=x\sqrt{x-1}$;

4) $f(x)=\sqrt{|x|-2}$.

595. Обчисліть значення виразу:

1) $\left(\frac{5^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{1}{4}}\cdot 10}\right)^4$;

2) $\left(\frac{7^{\frac{9}{4}}\cdot 3^{\frac{7}{4}}}{3^{\frac{1}{4}}\cdot 7^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

596. Зазвичай шлях між двома селами автобус проїжджає з певною швидкістю. Якщо його швидкість збільшити на 20 км/год, то цей шлях він проїде в $1\frac{1}{3}$ раза швидше. Якщо ж його швидкість зменшити на 10 км/год, то на цей шлях йому знадобиться на 8 хв більше. Знайдіть відстань між цими селами.

23. Властивості і графіки функцій $y=\operatorname{tg} x$ і $y=\operatorname{ctg} x$

Розглянемо функцію $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тобто на проміжку завдовжки в період цієї функції (нагадаємо, що функція $y = \operatorname{tg} x$ у точках $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$ не визначена).

З рисунка 120 видно, що при зміні аргументу x від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ значення функції $y = \operatorname{tg} x$ збільшується від $-\infty$ до $+\infty$. Це означає, що функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Функція $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ має один нуль: $x = 0$.

Якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то $\operatorname{tg} x < 0$; якщо $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg} x > 0$.

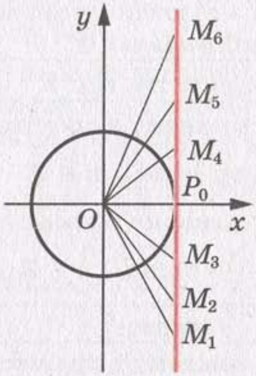


Рис. 120

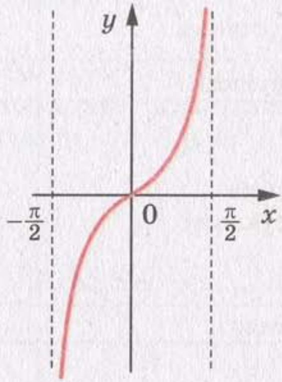


Рис. 121

Отримані властивості функції $y = \operatorname{tg} x$ дозволяють побудувати її графік на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 121). Графік можна побудувати точніше, якщо скористатися даними таблиці значень тригонометричних функцій деяких кутів, наведеної на форзаці 3.

На всій області визначення графік функції $y = \operatorname{tg} x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 122).

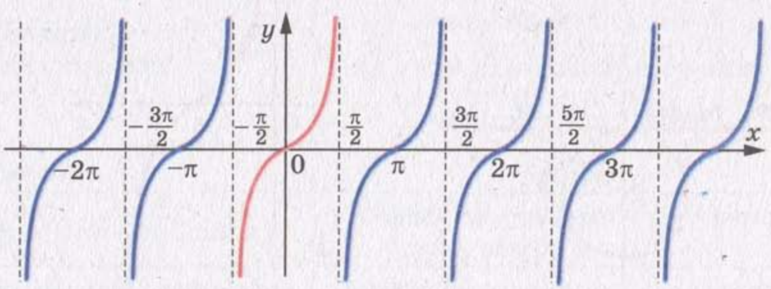


Рис. 122

У таблиці наведено основні властивості функції $y = \operatorname{tg} x$.

Область визначення	Усі дійсні числа, крім чисел виду $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
Область значень	$\mathbb{R}$
Періодичність	Періодична з головним періодом, який дорівнює π
Нулі функції	Числа виду $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\operatorname{tg} x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{tg} x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$
Парність	Непарна
Зростання/спадання	Зростає на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$
Найбільше і найменше значення	Найбільшого і найменшого значень не набуває

Розглянемо функцію $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$, тобто на проміжку завдовжки в період (нагадаємо, що функція $y = \operatorname{ctg} x$ не визначена в точках 0 і π).

З рисунка 123 видно, що при зміні аргументу x від 0 до π значення функції $y = \operatorname{ctg} x$ зменшується від $+\infty$ до $-\infty$. Це означає, що функція $y = \operatorname{ctg} x$ спадає на проміжку $(0; \pi)$.

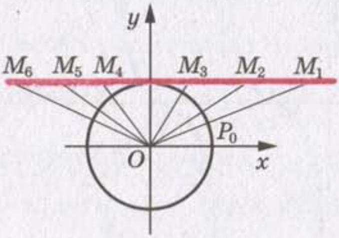


Рис. 123

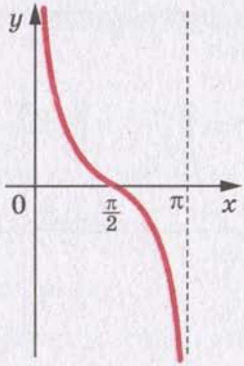


Рис. 124

Функція $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$ має один нуль: $x = \frac{\pi}{2}$.

Якщо $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{ctg} x > 0$; якщо $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то $\operatorname{ctg} x < 0$.

Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$ зображено на рисунку 124.

На всій області визначення графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 125).

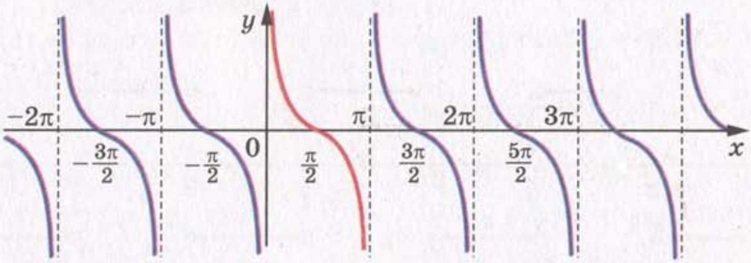


Рис. 125

У таблиці наведено основні властивості функції $y = \operatorname{ctg} x$.

Область визначення	Усі дійсні числа, крім чисел виду πn, $n \in \mathbb{Z}$
Область значень	$\mathbb{R}$
Періодичність	Періодична з головним періодом, який дорівнює π
Нулі функції	Числа виду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\operatorname{ctg} x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{ctg} x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$
Парність	Непарна
Зростання/спадання	Спадає на кожному з проміжків виду $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
Найбільше і найменше значення	Найбільшого і найменшого значень не набуває

ПРИКЛАД Побудуйте графік функції $y = |\operatorname{ctg} x| \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є всі дійсні числа, крім чисел виду $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Якщо $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\operatorname{ctg} x > 0$ і $y = 1$.

Якщо $\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\operatorname{ctg} x < 0$ і $y = -1$.

Шуканий графік складається з окремих відрізків з «виколотими» кінцями (рис. 126).

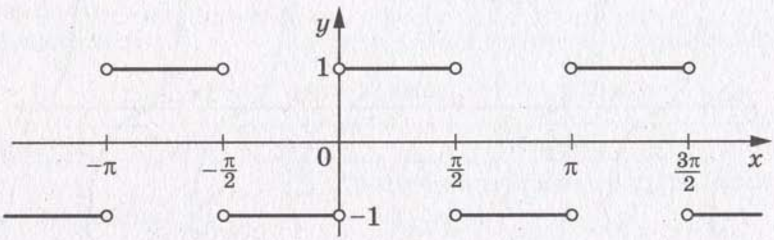


Рис. 126

?

1. Чому дорівнюють нулі функції $y = \operatorname{tg} x$?
2. На яких проміжках функція $y = \operatorname{tg} x$ набуває додатних значень, а на яких — від'ємних?
3. Назвіть проміжки зростання функції $y = \operatorname{tg} x$. Чи існують проміжки, на яких ця функція спадає?
4. Чому дорівнюють нулі функції $y = \operatorname{ctg} x$?
5. На яких проміжках функція $y = \operatorname{ctg} x$ набуває додатних значень, а на яких — від'ємних?
6. Назвіть проміжки спадання функції $y = \operatorname{ctg} x$. Чи існують проміжки, на яких ця функція зростає?

Вправи

597.° Чи проходить графік функції $y = \operatorname{tg} x$ через точку:

1) $A\left(-\frac{\pi}{4}; 1\right)$; 2) $B\left(-\frac{\pi}{3}; -\sqrt{3}\right)$; 3) $C(\pi; 0)$; 4) $D\left(\frac{7\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$?

598.° Чи проходить графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ через точку:

1) $A\left(\frac{\pi}{4};1\right)$; 2) $B\left(\frac{3\pi}{2};0\right)$; 3) $C\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 4) $D\left(\frac{4\pi}{3};\sqrt{3}\right)$?

599.° Які з чисел $\frac{\pi}{2}$, 0, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, 2π, $-\frac{5\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$:

1) є нулями функції $y = \operatorname{ctg} x$;

2) не належать області визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$?

600.° Які з чисел $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, 3π:

1) є нулями функції $y = \operatorname{tg} x$;

2) не належать області визначення функції $y = \operatorname{tg} x$?

601.° Порівняйте:

1) $\operatorname{tg}(-38°)$ і $\operatorname{tg}(-42°)$;

2) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$ і $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{15}$;

3) $\operatorname{tg} 130°$ і $\operatorname{tg} 150°$;

4) $\operatorname{tg} 0{,}9\pi$ і $\operatorname{tg} 1{,}2\pi$;

5) $\operatorname{tg} 1$ і $\operatorname{tg} 1{,}5$;

6) $\operatorname{ctg} 24°$ і $\operatorname{ctg} 28°$;

7) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}$ і $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{7}$;

8) $\operatorname{ctg}(-40°)$ і $\operatorname{ctg}(-60°)$;

9) $\operatorname{ctg} 0{,}4\pi$ і $\operatorname{ctg} 1{,}4\pi$;

10) $\operatorname{ctg} 2$ і $\operatorname{ctg} 3$.

602.° Порівняйте:

1) $\operatorname{tg} 100°$ і $\operatorname{tg} 92°$;

2) $\operatorname{ctg} 100°$ і $\operatorname{ctg} 92°$;

3) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}$ і $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{18}$;

4) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}$ і $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$;

5) $\operatorname{tg}(-1)$ і $\operatorname{tg}(-1{,}2)$;

6) $\operatorname{ctg}(-3)$ і $\operatorname{ctg}(-3{,}1)$.

603.° Розташуйте в порядку спадання:

1) $\operatorname{tg} 0{,}5$, $\operatorname{tg} 1{,}2$, $\operatorname{tg}(-0{,}4)$, $\operatorname{tg} 0{,}9$;

2) $\operatorname{ctg} 3{,}2$, $\operatorname{ctg} 4{,}6$, $\operatorname{ctg} 6$, $\operatorname{ctg} 5{,}3$.

604.° Розташуйте в порядку зростання:

1) $\operatorname{tg} 1{,}6$, $\operatorname{tg} 4{,}1$, $\operatorname{tg} 3{,}6$, $\operatorname{tg} 2{,}5$;

2) $\operatorname{ctg}(-0{,}7)$, $\operatorname{ctg}(-2{,}4)$, $\operatorname{ctg}(-2{,}8)$, $\operatorname{ctg}(-1{,}4)$.

605.° Побудуйте графік функції:

1) $y = -\operatorname{tg} x$;

2) $y = \operatorname{tg} x + 2$;

3) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

4) $y = \operatorname{tg} 3x$.

606.° Побудуйте графік функції:

1) $y = -\operatorname{ctg} x$;

2) $y = \operatorname{ctg} x - 1$;

3) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

4) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

607.** Чи можлива рівність:

1) $\sin\alpha = \frac{2}{3}\,\mathrm{tg}\,80°$;
2) $\cos\alpha = \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{18}$;
3) $\cos\alpha = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{9}$?

608.** Порівняйте:

1) $\sin 78°$ і $\mathrm{tg}\,78°$;
2) $\sin 40°$ і $\mathrm{ctg}\,20°$.

609.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$;
2) $y = \mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

610.** Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\,\mathrm{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$;
2) $y = \mathrm{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{12}\right)$.

611.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt{\mathrm{ctg}\,x}\right)^2$;
2) $y = \mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,|x|$;
3) $y = \sqrt{-\mathrm{tg}^2 x}$;
4) $y = \frac{\mathrm{ctg}\,x}{|\mathrm{ctg}\,x|}$;
5) $y = \mathrm{ctg}\,x - \sqrt{\mathrm{ctg}^2 x}$;
6) $y = |\mathrm{tg}\,x|$.

612.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt{\mathrm{tg}\,x}\right)^2$;
2) $y = \mathrm{ctg}\,x - \mathrm{ctg}\,|x|$;
3) $y = \sqrt{-\mathrm{ctg}^2 x}$;
4) $y = \frac{|\mathrm{tg}\,x|}{\mathrm{tg}\,x}$;
5) $y = \mathrm{tg}\,x + \sqrt{\mathrm{tg}^2 x}$;
6) $y = |\mathrm{ctg}\,x|$.

Вправи для повторення

613. Між числами −4 і 5 вставте п'ять таких чисел, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію.

614. Які три числа треба вставити між числами 256 і 1, щоб вони разом з даними числами утворювали геометричну прогресію?

615. Двоє робітників мали виготовити по 90 деталей. Один з них виготовляв щодня на 3 деталі більше за другого і виконав замовлення на один день раніше за нього. Скільки деталей виготовляв щодня кожний робітник?

24. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

У цьому пункті встановимо тотожності, які пов'язують значення тригонометричних функцій одного й того самого аргументу.

Координати будь-якої точки $P\ (x;\ y)$ одиничного кола задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$. Оскільки $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, де α — кут повороту, у результаті якого з точки $P_0\ (1;\ 0)$ було отримано точку P, то

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \qquad (1)$$

Звернемо увагу на те, що точку P обрано довільно. Тому тотожність (1) справедлива для будь-якого α. Її називають **основною тригонометричною тотожністю.**

Використовуючи основну тригонометричну тотожність, знайдемо залежності між тангенсом і косинусом, а також між котангенсом і синусом.

Припустивши, що $\cos\alpha \neq 0$, поділимо обидві частини рівності (1) на $\cos^2\alpha$. Отримаємо:

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$\boxed{1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

Ця тотожність є правильною для всіх α, при яких $\cos\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Припустивши, що $\sin\alpha \neq 0$, поділимо обидві частини рівності (1) на $\sin^2\alpha$. Отримаємо:

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\boxed{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

Ця тотожність є правильною для всіх α, при яких $\sin\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Зв'язок між тангенсом і котангенсом можна встановити за допомогою означень цих функцій. Маємо: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Звідси

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1}$$

Ця тотожність є правильною для всіх α, при яких $\sin\alpha \neq 0$ і $\cos\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi k$ і $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Зауважимо, що ці два обмеження для α можна об'єднати в одне: $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз:

1) $\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{tg}^2 x$; 2) $\frac{1}{\cos^2\varphi} - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi$; 3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Розв'язання. 1) $\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$;

2) $\frac{1}{\cos^2\varphi} - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = \cos^2\varphi$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1+\cos\alpha} = 1 - \cos\alpha$.

ПРИКЛАД 2 Доведіть тотожність:

1) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$;

2) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta = 1$.

Розв'язання. 1) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right) : \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}\beta\right) =$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + 1}{\operatorname{tg}\beta} : \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta.$$

2) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha(\sin^2\beta +$ $+ \cos^2\beta) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

ПРИКЛАД 3 Відомо, що $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Обчисліть $\sin\alpha$.

Розв'язання. Маємо:

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$. Звідси $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ або $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Рисунок 127 ілюструє цей приклад.

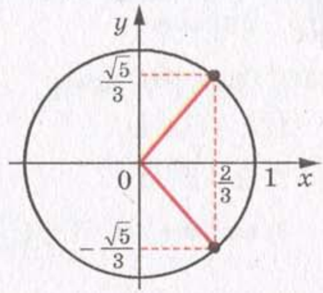


Рис. 127

ПРИКЛАД 4 Знайдіть cos α, tg α, ctg α, якщо $\sin\alpha = -\frac{7}{25}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}.$$

Оскільки $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, отже, $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{576}{625}} = -\frac{24}{25}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{7}{25} : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{24}{7}.$$

ПРИКЛАД 5 Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{16}{63}$, $90° < \alpha < 270°$. Знайдіть sin α, cos α, tg α.

Розв'язання. Маємо: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{63}{16}$.

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 + \frac{256}{3969} = \frac{4225}{3969};\ \sin^2\alpha = \frac{3969}{4225} = \left(\frac{63}{65}\right)^2.$$

Оскільки $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ і $90° < \alpha < 270°$, то $180° < \alpha < 270°$. Отже, $\sin\alpha < 0$. Тоді $\sin\alpha = -\frac{63}{65}$.

Маємо: $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \sin\alpha = \frac{16}{63} \cdot \left(-\frac{63}{65}\right) = -\frac{16}{65}$.

?

1. Яку рівність називають основною тригонометричною тотожністю?
2. Яка тотожність зв'язує тангенс і косинус одного й того самого аргументу? Для яких значень аргументу є правильною ця тотожність?
3. Яка тотожність зв'язує котангенс і синус одного й того самого аргументу? Для яких значень аргументу є правильною ця тотожність?
4. Яка тотожність зв'язує тангенс і котангенс одного й того самого аргументу? Для яких значень аргументу є правильною ця тотожність?

Вправи

616.° Спростіть вираз:

1) $1 - \cos^2 \alpha$;
2) $\sin^2 \beta - 1$;
3) $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + 1$;
4) $1 - \sin^2 3\alpha - \cos^2 3\alpha$;
5) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$;
6) $\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$;
7) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1$;
8) $1 - \sin^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$;
9) $\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;
10) $\dfrac{\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta}\cdot\operatorname{ctg}^2\beta$;
11) $\left(1+\sin\dfrac{x}{2}\right)\left(1-\sin\dfrac{x}{2}\right)$;
12) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$.

617.° Спростіть вираз:

1) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \operatorname{ctg}^2 5\alpha$;
2) $\sin\dfrac{\alpha}{3}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{3}$;
3) $1-\dfrac{1}{\sin^2\gamma}$;
4) $\dfrac{\sin^2\alpha-1}{\cos^2\alpha-1}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;
5) $(\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha)^2 + (\operatorname{ctg} \alpha \sin \alpha)^2$;
6) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha(\cos^2\alpha-1)}$;
7) $\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\right)\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\right)$;
8) $(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} \beta)^2 - (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{ctg} \beta)^2$.

618.° Чи можуть одночасно виконуватися рівності:

1) $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$ і $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{13}}{4}$;
2) $\operatorname{tg} \alpha = 2{,}5$ і $\operatorname{ctg} \alpha = 0{,}6$?

619.° Чи можуть одночасно виконуватися рівності:

1) $\sin\alpha=\dfrac{2}{5}$ і $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$;
2) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{4}{9}$ і $\operatorname{ctg}\alpha=1\dfrac{1}{4}$?

620.° Чи можуть $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ одночасно дорівнювати нулю?

621.° Чи можуть $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ за модулем бути: 1) обидва більші за 1; 2) обидва менші від 1?

622.° Спростіть вираз:

1) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2$;
2) $\sin^4\alpha + 2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;
3) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$;
4) $\operatorname{ctg} x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$;
5) $\dfrac{1-\sin x}{\cos x}-\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$;
6) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

7) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$;

8) $\dfrac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha-1}\cdot\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg}3\alpha}$;

9) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$;

10) $\dfrac{1-\operatorname{ctg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\gamma}$;

11) $\cos^4\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$;

12) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$;

13) $\cos(-\alpha)+\cos\alpha\operatorname{tg}^2(-\alpha)$;

14) $\dfrac{1+\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)}-\operatorname{tg}(-\beta)$.

623.° Спростіть вираз:

1) $(1+\operatorname{ctg}\beta)^2+(1-\operatorname{ctg}\beta)^2$;

2) $\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2)$;

3) $\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}+\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}$;

4) $\operatorname{tg}x+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$;

5) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}+\dfrac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$;

6) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

7) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$;

8) $\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^2\alpha-1$;

9) $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;

10) $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}\alpha+\sin^2(-\alpha)$.

624.° Знайдіть значення тригонометричних функцій аргументу α, якщо:

1) $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$;

2) $\sin\alpha=0{,}6$ і $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

3) $\operatorname{tg}\alpha=2$ і $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{4}{3}$ і $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

625.° Знайдіть значення тригонометричних функцій аргументу α, якщо:

1) $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$ і $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$;

2) $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ і $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{1}{3}$ і $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha=-7$ і $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

626.° Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$;

2) $\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

3) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$;

4) $\dfrac{\sqrt{3}-2\sin\alpha}{2\cos\alpha-1}=\dfrac{1+2\cos\alpha}{2\sin\alpha+\sqrt{3}}$;

5) $\frac{\text{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \text{tg}^2\alpha} = -\text{ctg}^6\alpha;$

6) $\frac{\sin\alpha + \text{tg}\,\alpha}{1+\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha;$

7) $1 + (\text{ctg}^2\alpha - \text{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha = \text{ctg}^2\alpha;$

8) $\frac{\sin^2\alpha}{\text{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha} = \text{tg}^4\alpha.$

627.* Доведіть тотожність:

1) $\sin^4\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^4\alpha = \sin^2\alpha\cos^2\alpha;$

2) $\text{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \text{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha;$

3) $(\text{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot\frac{\text{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1.$

628.** Доведіть тотожність:

1) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha = \sin^2\alpha\cos^2\alpha;$

2) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1.$

629.** Доведіть тотожність $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) = -1.$

630.** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, якщо $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{3};$

2) $\frac{2\cos^2\alpha - 7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha}$, якщо $\text{ctg}\,\alpha = -2.$

631.** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{5\cos\alpha + 6\sin\alpha}{3\sin\alpha - 7\cos\alpha}$, якщо $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2};$

2) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$, якщо $\text{ctg}\,\alpha = \frac{3}{4}.$

632.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\cos^2\beta(1+\text{tg}\,\beta) + \sin^2\beta(1+\text{ctg}\,\beta)}$, якщо $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2};$

2) $\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\cos^2\beta}}{\text{tg}\,\beta\,\text{ctg}\,\alpha}$, якщо $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi.$

633.** Спростіть вираз $\sin\alpha - \sqrt{\text{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha}$, якщо $180° < \alpha < 360°.$

634.** Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = b$. Знайдіть:

1) $\sin\alpha\cos\alpha;$ 2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha;$ 3) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha.$

635.** Дано: $\text{tg}\,\alpha + \text{ctg}\,\alpha = b$. Знайдіть:

1) $\text{tg}^2\alpha + \text{ctg}^2\alpha;$ 2) $\text{tg}^3\alpha + \text{ctg}^3\alpha.$

636.** Знайдіть найбільше і найменше значення виразу
$$\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha.$$

637.** Знайдіть найбільше і найменше значення виразу
$$3\sin^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha.$$

Вправи для повторення

638. Доведіть, що функція:

1) $y = \frac{7}{x+5}$ спадає на проміжку $(-5; +\infty)$;

2) $y = 6x - x^2$ зростає на проміжку $(-\infty; 3]$.

639. Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\frac{a^{\frac{8}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{-\frac{3}{2}}$ при $a = 0{,}008$; 2) $\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}$ при $a = 0{,}0625$.

640. Кожна з двох друкарок друкувала рукопис обсягом 56 сторінок. Перша закінчила роботу на 2 год раніше від другої, оскільки друкувала 5 сторінок за той час, за який друга друкувала 4 сторінки. По скільки сторінок в годину друкувала кожна друкарка?

25. Формули додавання

Формулами додавання називають формули, які виражають $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin(\alpha \pm \beta)$ і $\text{tg}(\alpha \pm \beta)$ через тригонометричні функції кутів α і β.

Доведемо, що
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Нехай точки P_1 і P_2 отримано в результаті повороту точки P_0 $(1; 0)$ на кути α і β відповідно.

Розглянемо випадок, коли
$$0 \leqslant \alpha - \beta \leqslant \pi.$$

Тоді кут між векторами $\overline{OP_1}$ і $\overline{OP_2}$ дорівнює $\alpha - \beta$ (рис. 128). Координати точок P_1 і P_2 відповідно дорівнюють $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ і $(\cos\beta; \sin\beta)$. Тоді

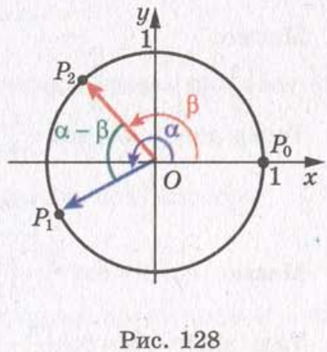


Рис. 128

вектор $\overrightarrow{OP_1}$ має координати ($\cos\alpha$; $\sin\alpha$), а вектор $\overrightarrow{OP_2}$ — ($\cos\beta$; $\sin\beta$).

Виразимо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{OP_1}$ і $\overrightarrow{OP_2}$ через їх координати:

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Водночас за означенням скалярного добутку векторів можна записати

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\left|\overrightarrow{OP_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OP_2}\right|\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta).$$

Звідси отримуємо формулу, яку називають **косинус різниці:**

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} \qquad (1)$$

Для доведення формули (1) скалярний добуток векторів $\overrightarrow{OP_1}$ і $\overrightarrow{OP_2}$ можна застосувати і тоді, коли $(\alpha-\beta)\notin[0;\pi]$. У цьому ви зможете переконатися на заняттях математичного гуртка.

Доведемо формулу **косинус суми:**

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

Маємо: $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=$
$=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$

Доведемо формули **синуса суми і синуса різниці:**

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$$

За допомогою формули (1) доведемо, що

$$\boxed{\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

Маємо:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha+1\cdot\sin\alpha=\sin\alpha.$$

Тепер доведемо, що

$$\boxed{\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

Маємо: $\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$

Тоді $\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Формули **тангенса суми і тангенса різниці** мають вигляд:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}} \qquad (2)$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}} \qquad (3)$$

Доведемо формулу (2). Маємо:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Припустивши, що $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$, отриманий дріб можна переписати так:

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Формулу тангенса різниці (3) доведіть самостійно.

Тотожність (2) є правильною для всіх α і β, при яких $\cos(\alpha+\beta) \neq$ $\neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$.

Тотожність (3) є правильною для всіх α і β, при яких $\cos(\alpha-\beta) \neq$ $\neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

2) $\sin(\alpha + 45°)\cos(\alpha - 45°) - \cos(\alpha + 45°)\sin(\alpha - 45°)$;

3) $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos(60° + \alpha)}{2\sin(60° + \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha}$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи формули синуса суми і синуса різниці, отримуємо: $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) =$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right) - \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha = \sin\alpha.$$

2) Замінимо даний вираз на синус різниці аргументів $\alpha + 45°$ і $\alpha - 45°$. Отримуємо:

$$\sin(\alpha+45°)\cos(\alpha-45°)-\cos(\alpha+45°)\sin(\alpha-45°)=$$
$$=\sin((\alpha+45°)(\alpha-45°))=\sin(\alpha+45°-\alpha+45°)\sin 90°=1.$$

3) Маємо: $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos(60°+\alpha)}{2\sin(60°+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+2(\cos 60°\cos\alpha-\sin 60°\sin\alpha)}{2(\sin 60°\cos\alpha+\cos 60°\sin\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

ПРИКЛАД 2 Доведіть тотожність: 1) $\sin\alpha-\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

Розв'язання. 1) $\sin\alpha-\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha-\dfrac{\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

2) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть значення виразу $\dfrac{1-\operatorname{tg}70°\operatorname{tg}65°}{\operatorname{tg}70°+\operatorname{tg}65°}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу тангенса суми кутів $70°$ і $65°$, маємо: $\dfrac{1-\operatorname{tg}70°\operatorname{tg}65°}{\operatorname{tg}70°+\operatorname{tg}65°}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}(70°+65°)}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}135°}=\operatorname{ctg}135°=$

$=\operatorname{ctg}(180°-45°)=-\operatorname{ctg}45°=-1.$

ПРИКЛАД 4 Знайдіть $\cos 15°$.

Розв'язання. Маємо: $\cos 15°=\cos(60°-45°)=$

$=\cos 60°\cos 45°+\sin 60°\sin 45°=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$

ПРИКЛАД 5 Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$.

Розв'язання. Представимо даний вираз у вигляді синуса суми. Для цього помножимо і поділимо даний вираз на 2:

$$\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right).$$

Ураховуючи, що $\frac{1}{2}=\sin 30°$, $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30°$, отримуємо:

$$\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=2(\sin 30°\cos\alpha+\cos 30°\sin\alpha)=2\sin(30°+\alpha).$$

Отже, найбільше значення даного виразу дорівнює 2 (його вираз набуває, наприклад, при $\alpha=60°$), найменше значення дорівнює -2 (його вираз набуває, наприклад, при $\alpha=-120°$).

?

1. Які формули називають формулами додавання?

2. Запишіть формулу:

1) косинуса різниці;
2) косинуса суми;
3) синуса суми;
4) синуса різниці;
5) тангенса суми;
6) тангенса різниці.

3. Чому дорівнює $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$? $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$?

Вправи

641.° Спростіть вираз:

1) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$;
2) $\sin(30°+\alpha)-\cos(60°+\alpha)$;
3) $\sqrt{2}\sin(\alpha-45°)-\sin\alpha+\cos\alpha$;
4) $2\cos(60°-\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$.

642.° Спростіть вираз:

1) $\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)$;
2) $\sin(30°-\alpha)+\cos(60°-\alpha)$;
3) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\alpha-\sin\alpha$.

643.° Спростіть вираз:

1) $\sin\alpha\cos 4\alpha+\cos\alpha\sin 4\alpha$;
2) $\cos 17°\cos 43°-\sin 17°\sin 43°$;
3) $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$;

4) $\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$;

5) $\sin 53^\circ\cos 7^\circ-\cos 53^\circ\sin(-7^\circ)$;

6) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$;

7) $(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)^2$;

8) $\dfrac{\sin 20^\circ\cos 5^\circ-\cos 20^\circ\sin 5^\circ}{\cos 10^\circ\cos 5^\circ-\sin 10^\circ\sin 5^\circ}$;

9) $\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\sin\beta$.

644.° Спростіть вираз:

1) $\cos 6\alpha\cos 2\alpha-\sin 6\alpha\sin 2\alpha$;

2) $\sin 12^\circ\cos 18^\circ+\sin 18^\circ\cos 12^\circ$;

3) $\sin(-15^\circ)\cos 75^\circ+\cos 15^\circ\sin 75^\circ$;

4) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;

5) $\dfrac{\cos 64^\circ\cos 4^\circ+\sin 64^\circ\sin 4^\circ}{\sin 19^\circ\cos 41^\circ+\sin 41^\circ\cos 19^\circ}$;

6) $\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta$.

645.° Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{4}$. Знайдіть значення виразу $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

646.° Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha=3$, $\operatorname{tg}\beta=5$. Знайдіть значення виразу $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

647.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}13^\circ+\operatorname{tg}47^\circ}{1-\operatorname{tg}13^\circ\operatorname{tg}47^\circ}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}1^\circ-\operatorname{tg}46^\circ}{1+\operatorname{tg}1^\circ\operatorname{tg}46^\circ}$;

3) $\dfrac{1-\operatorname{tg}27^\circ\operatorname{tg}33^\circ}{\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{tg}33^\circ}$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}+\operatorname{tg}\frac{5\pi}{36}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{36}}$.

648.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}24^\circ+\operatorname{tg}36^\circ}{1-\operatorname{tg}24^\circ\operatorname{tg}36^\circ}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}5\alpha-\operatorname{tg}3\alpha}{1+\operatorname{tg}5\alpha\operatorname{tg}3\alpha}$.

649.° Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=1$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$;

3) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(45^\circ+\alpha)}{2\sin(45^\circ+\alpha)-\sqrt{2}\sin\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

4) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}2\alpha;$

5) $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha;$

6) $\dfrac{\sin\alpha+2\sin(60^\circ-\alpha)}{2\cos(30^\circ-\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha.$

650.° Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha}=1;$

2) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin(45^\circ-\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\sqrt{2};$

3) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta).$

651.° Дано: $\sin\alpha=\dfrac{9}{41}$, $90^\circ<\alpha<180^\circ$. Знайдіть $\sin(\alpha+45^\circ)$.

652.° Дано: $\cos\alpha=-0{,}6$, $180^\circ<\alpha<270^\circ$. Знайдіть $\cos(60^\circ-\alpha)$.

653.° Знайдіть $\cos(\alpha+\beta)$, якщо $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ і $\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

654.° Знайдіть $\sin(\alpha-\beta)$, якщо $\sin\alpha=-\dfrac{15}{17}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$ і $\cos\beta=\dfrac{7}{25}$, $\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$.

655.° Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\sin\beta=\dfrac{3}{5}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$. Знайдіть $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

656.° Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2}{3}$. Знайдіть $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$.

657.° Знайдіть:

1) $\sin 15^\circ$; 2) $\sin 105^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 105^\circ$.

658.° Знайдіть:

1) $\cos 75^\circ$; 2) $\sin 75^\circ$.

659.° Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

660.° Доведіть тотожність $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

661.* Спростіть вираз:

1) $\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{2}$;
2) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha$;
3) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}$;
4) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$.

662.* Спростіть вираз:

1) $\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$;
2) $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha$.

663.** Доведіть тотожність:

1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;
2) $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2-2=2\cos(\alpha+\beta)$;
3) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$;
4) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}+2\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{2}{\cos^2\alpha}$.

664.** Доведіть тотожність:

1) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;
2) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=0$.

665.** Знайдіть найбільше значення виразу:

1) $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$;
2) $\sin\alpha+\cos\alpha$.

666.** Знайдіть найменше значення виразу:

1) $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha$;
2) $\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{6}\cos\alpha$.

Вправи для повторення

667. При яких значеннях x значення виразів $4x+5$, $7x-1$ і x^2+2 будуть послідовними членами арифметичної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

668. При яких значеннях x значення виразів $x-1$, $1-2x$ і $x+7$ будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

669. Якщо відкрити одночасно дві труби, то басейн буде наповнено за 7 год 12 хв. Коли спочатку відкрити на 8 год одну трубу, а потім відкрити другу, то басейн буде заповнено через 4 год спільної роботи. За скільки годин може наповнити цей басейн кожна труба, працюючи самостійно?

26. Формули зведення

Періодичність тригонометричних функцій дозволяє зводити обчислення значень синуса і косинуса до випадку, коли значення аргументу належить проміжку $[0; 2\pi]$, а значень тангенса і котангенса — до випадку, коли значення аргументу належить $[0; \pi]$. У цьому пункті ми розглянемо формули, які дозволяють у таких обчисленнях обмежитись лише кутами від 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Кожний кут у межах від 0 до 2π можна подати у вигляді $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, або $\pi \pm \alpha$, або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, де $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Наприклад, $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$.

Обчислення синусів і косинусів кутів виду $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ можна звести до обчислення синуса або косинуса кута α. Наприклад:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = -\sin\alpha;$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = \sin\alpha.$$

Застосовуючи формули додавання, аналогічно можна отримати:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$$

Ці шість формул називають **формулами зведення для синуса**.

Наступні шість формул називають **формулами зведення для косинуса:**

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha \qquad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$$

Ці тотожності теж легко отримати, застосувавши формули додавання.

Обчислення тангенсів і котангенсів кутів виду $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ можна звести до обчислення тангенса або котангенса кута α. Наприклад:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Аналогічно можна отримати:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha & \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha \end{array}}$$

Ці чотири формули називають **формулами зведення для тангенса і котангенса**.

Проаналізувавши записані 16 формул зведення, можна помітити закономірності, які роблять заучування цих формул не обов'язковим.

Для того щоб записати будь-яку з них, можна керуватися такими правилами.

1. ***У правій частині рівності ставлять той знак, який має ліва частина за умови, що*** $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

2. Якщо в лівій частині формули аргумент має вигляд $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ***або*** $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, ***то синус міняють на косинус, тангенс — на котангенс, і навпаки. Якщо аргумент має вигляд*** $\pi \pm \alpha$, ***то зміни функції не відбувається.***

Покажемо, як працюють ці правила для виразу $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

Припустивши, що $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, доходимо висновку: $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ є кутом III чверті. Тоді $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)<0$. За першим правилом у правій частині рівності має стояти знак «$-$».

Оскільки аргумент має вигляд $\frac{3\pi}{2}-\alpha$, то за другим правилом слід замінити синус на косинус.

Отже, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

ПРИКЛАД 1 Зведіть до тригонометричної функції кута α: 1) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 2) $\operatorname{ctg}(\alpha - 90°)$.

Розв'язання. 1) Маємо: $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2=$

$$=(-\sin\alpha)^2=\sin^2\alpha.$$

2) $\operatorname{ctg}(\alpha - 90°) = -\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$

ПРИКЛАД 2 Замініть значення тригонометричної функції значенням функції гострого кута: 1) $\cos\frac{9\pi}{10}$; 2) $\cos\frac{8\pi}{7}$; 3) $\operatorname{tg}(-125°)$.

Розв'язання. 1) $\cos\frac{9\pi}{10}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{10}\right)=-\cos\frac{\pi}{10}$;

2) $\cos\frac{8\pi}{7}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)=-\cos\frac{\pi}{7}$;

3) $\operatorname{tg}(-125°) = -\operatorname{tg}125° = -\operatorname{tg}(90° + 35°) = -(-\operatorname{ctg}35°) = \operatorname{ctg}35°.$

ПРИКЛАД 3 Обчисліть: 1) $\sin 930°$; 2) $\cos(-480°)$.

Розв'язання. 1) $\sin 930° = \sin(360°\cdot 2 + 210°) = \sin 210° =$

$$=\sin(180°+30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2};$$

2) $\cos(-480°) = \cos 480° = \cos(360° + 120°) = \cos 120° =$

$$=\cos(90°+30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}.$$

ПРИКЛАД 4 Обчисліть $\operatorname{tg}41°\operatorname{tg}42°\operatorname{tg}43°\operatorname{tg}44°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}49°$.

Розв'язання. Маємо: $\operatorname{tg}49° = \operatorname{ctg}41°$, $\operatorname{tg}48° = \operatorname{ctg}42°$ і т. д. Тоді, об'єднавши попарно множники, які рівновіддалені від кінців добутку, отримаємо чотири добутки, кожний з яких дорівнює 1:

$$\operatorname{tg}41°\operatorname{tg}49° = \operatorname{tg}42°\operatorname{tg}48° = \operatorname{tg}43°\operatorname{tg}47° = \operatorname{tg}44°\operatorname{tg}46° = 1.$$

Ще один множник даного добутку $\operatorname{tg}45° = 1$. Отже,

$$\operatorname{tg}41°\operatorname{tg}42°\operatorname{tg}43°\operatorname{tg}44°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}49° = 1.$$

ПРИКЛАД 5 Спростіть вираз:

$$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\alpha-\pi).$$

Розв'язання. Маємо: $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

Оскільки $\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\pi}{2}$, то $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. Отже,

$$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\alpha-\pi)=$$

$$=\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\cdot\left(-\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)+\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)=$$

$$=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\left(-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)-\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha.$$

Сформулюйте правила, якими можна керуватися при застосуванні формул зведення.

Вправи

670.° Зведіть до тригонометричної функції кута α:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;
2) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;
3) $\sin(\pi-\alpha)$;
4) $\cos(-\alpha+270°)$;
5) $\cos(\alpha-180°)$;
6) $\cos^2(3\pi-\alpha)$;
7) $\operatorname{ctg}^2(90°+\alpha)$;
8) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;
9) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

671.° Зведіть до тригонометричної функції кута α:

1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;
2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;
3) $\cos(\pi-\alpha)$;
4) $\operatorname{ctg}(\alpha-270°)$;
5) $\sin(180°+\alpha)$;
6) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$.

672.° Зведіть до тригонометричної функції найменшого додатного аргументу:

1) $\cos 123°$; 2) $\sin 216°$; 3) $\cos(-218°)$; 4) $\cos\frac{5\pi}{9}$.

673.° Зведіть до тригонометричної функції найменшого додатного аргументу:

1) $\operatorname{tg} 124°$; 2) $\sin(-305°)$; 3) $\operatorname{ctg}(-0{,}7\pi)$; 4) $\sin\frac{14\pi}{15}$.

674.° Обчисліть:

1) $\cos 225°$; 2) $\sin 240°$; 3) $\cos\frac{5\pi}{4}$; 4) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

675.° Обчисліть:

1) $\operatorname{tg} 210°$; 2) $\operatorname{ctg} 315°$; 3) $\cos(-150°)$; 4) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$.

676.° Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)$;

2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

3) $\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;

4) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$;

5) $\cos^2(\pi+\alpha)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

6) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

677.° Спростіть вираз:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)$;

2) $\sin(270°-\alpha)+\cos(270°+\alpha)$;

3) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)$;

4) $\sin^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

678.• Обчисліть:

1) $3\operatorname{tg}135°-2\sin150°+\operatorname{tg}300°-2\sin240°$;

2) $\dfrac{\sin^2 315°\cos300°+\operatorname{tg}(-315°)}{\sin(-120°)\cos150°}$;

3) $\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{6}\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$;

4) $\dfrac{\sin20°\cos10°+\cos160°\cos100°}{\sin21°\cos9°+\cos159°\cos99°}$;

5) $\dfrac{\cos66°\cos6°+\cos84°\cos24°}{\cos65°\cos5°+\cos85°\cos25°}$.

679.• Знайдіть значення виразу:

1) $4\cos225°-6\cos120°+3\operatorname{ctg}300°+\operatorname{tg}240°$;

2) $\dfrac{6\cos^2(-240°)\operatorname{ctg}210°}{\sin(-300°)\cos^2 180°}$;

3) $\sin\frac{7\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}$;

4) $\dfrac{\cos64°\cos4°-\cos86°\cos26°}{\cos71°\cos41°-\cos49°\cos19°}$.

Розв'язання. Маємо: $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

Оскільки $\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\pi}{2}$, то $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. Отже,

$$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\alpha-\pi)=$$

$$=\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\cdot\left(-\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)+\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)=$$

$$=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\left(-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)-\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha.$$

Сформулюйте правила, якими можна керуватися при застосуванні формул зведення.

Вправи

670.° Зведіть до тригонометричної функції кута α:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;
2) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;
3) $\sin(\pi-\alpha)$;
4) $\cos(-\alpha+270°)$;
5) $\cos(\alpha-180°)$;
6) $\cos^2(3\pi-\alpha)$;
7) $\operatorname{ctg}^2(90°+\alpha)$;
8) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;
9) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

671.° Зведіть до тригонометричної функції кута α:

1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;
2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;
3) $\cos(\pi-\alpha)$;
4) $\operatorname{ctg}(\alpha-270°)$;
5) $\sin(180°+\alpha)$;
6) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$.

672.° Зведіть до тригонометричної функції найменшого додатного аргументу:

1) $\cos 123°$; 2) $\sin 216°$; 3) $\cos(-218°)$; 4) $\cos\frac{5\pi}{9}$.

673.° Зведіть до тригонометричної функції найменшого додатного аргументу:

1) $\operatorname{tg} 124°$; 2) $\sin(-305°)$; 3) $\operatorname{ctg}(-0{,}7\pi)$; 4) $\sin\frac{14\pi}{15}$.

674.° Обчисліть:

1) $\cos 225°$; 2) $\sin 240°$; 3) $\cos \frac{5\pi}{4}$; 4) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

675.° Обчисліть:

1) $\operatorname{tg} 210°$; 2) $\operatorname{ctg} 315°$; 3) $\cos(-150°)$; 4) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$.

676.° Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)$;

2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

3) $\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;

4) $\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$;

5) $\cos^2(\pi+\alpha)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

6) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

677.° Спростіть вираз:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)$;

2) $\sin(270°-\alpha)+\cos(270°+\alpha)$;

3) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)$;

4) $\sin^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

678.• Обчисліть:

1) $3\operatorname{tg} 135° - 2\sin 150° + \operatorname{tg} 300° - 2\sin 240°$;

2) $\frac{\sin^2 315°\cos 300°+\operatorname{tg}(-315°)}{\sin(-120°)\cos 150°}$;

3) $\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{6}\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$;

4) $\frac{\sin 20°\cos 10°+\cos 160°\cos 100°}{\sin 21°\cos 9°+\cos 159°\cos 99°}$;

5) $\frac{\cos 66°\cos 6°+\cos 84°\cos 24°}{\cos 65°\cos 5°+\cos 85°\cos 25°}$.

679.• Знайдіть значення виразу:

1) $4\cos 225° - 6\cos 120° + 3\operatorname{ctg} 300° + \operatorname{tg} 240°$;

2) $\frac{6\cos^2(-240°)\operatorname{ctg} 210°}{\sin(-300°)\cos^2 180°}$;

3) $\sin\frac{7\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}$;

4) $\frac{\cos 64°\cos 4°-\cos 86°\cos 26°}{\cos 71°\cos 41°-\cos 49°\cos 19°}$.

680.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha)}$;

2) $\sin(\pi-\beta)\cos\left(\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)\cos(\pi-\beta)$;

3) $\sin(90°+\alpha)\sin(180°-\alpha)(\operatorname{tg}(180°+\alpha)+\operatorname{tg}(270°-\alpha))$;

4) $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)-\sin^2(\alpha-\pi)\sin^2(\alpha+\pi)-\cos^2(\alpha+\pi)\cos^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)$;

5) $\sin^2(\pi-x)+\operatorname{tg}^2(\pi-x)\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\cos(x-2\pi)$;

6) $\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi-x)\right)^2+\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)+\cos(2\pi-x)\right)^2$;

7) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-x)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)}{\cos(\pi+x)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)}$;

8) $\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)}{\operatorname{ctg}^2(x-2\pi)}+\dfrac{\sin^2(-x)}{\operatorname{ctg}^2\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)}$.

681.° Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\sin(\alpha+2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}=-\cos\alpha$;

2) $\sin(\pi+x)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\cos(2\pi+x)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=-1$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}(180°-\alpha)\cos(180°-\alpha)\operatorname{tg}(90°-\alpha)}{\sin(90°+\alpha)\operatorname{ctg}(90°+\alpha)\operatorname{tg}(90°+\alpha)}=1$;

4) $\sin(2\pi-\varphi)\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\varphi\right)-\cos(\varphi-\pi)-\sin(\varphi-\pi)=\sin\varphi$;

5) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\sin\alpha$;

6) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}-\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-1$.

682.•• Обчисліть:

1) $\text{ctg}\,5°\,\text{ctg}\,15°\,\text{ctg}\,25° \cdot \ldots \cdot \text{ctg}\,75°\,\text{ctg}\,85°$;

2) $\text{tg}\,20° + \text{tg}\,40° + \text{tg}\,60° + \ldots + \text{tg}\,160° + \text{tg}\,180°$;

3) $\sin 0° + \sin 1° + \sin 2° + \ldots + \sin 359° + \sin 360°$.

683.•• Обчисліть:

1) $\text{tg}\,10°\,\text{tg}\,20°\,\text{tg}°\,30° \cdot \ldots \cdot \text{tg}\,70°\,\text{tg}\,80°$;

2) $\text{ctg}\,15° + \text{ctg}\,30° + \text{ctg}\,45° + \ldots + \text{ctg}\,165°$.

684.•• Доведіть тотожність:

1) $\left(\text{tg}\,\frac{5\pi}{4} + \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2 + \left(\text{ctg}\,\frac{9\pi}{4} + \text{ctg}\,(\pi - \alpha)\right)^2 = \frac{2}{\sin^2\alpha}$;

2) $\dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\text{tg}^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)} + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\text{tg}^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = 1$;

3) $\dfrac{\cos^4(\alpha - \pi)}{\cos^4\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \sin^4\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) - 1} = -\frac{1}{2}\text{ctg}^2\alpha$.

685.•• Знайдіть значення виразу $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{11} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{22}$.

686.•• Спростіть вираз:

1) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\text{tg}\,(\pi + \alpha)$;

2) $\dfrac{\cos^2(20° - \alpha)}{\sin^2(70° + \alpha)} + \text{tg}\,(\alpha + 10°)\,\text{ctg}\,(80° - \alpha)$.

Вправи для повторення

687. Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{x^2 - 10}{x} \geqslant 3$; 2) $\dfrac{x^2 + x}{x - 2} \geqslant \dfrac{6}{x - 2}$; 3) $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 - x - 3} \leqslant 0$.

688. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3 - 2\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

689. Від пристані за течією річки вирушив пліт. Через 5 год 20 хв від цієї пристані в тому самому напрямку вирушив моторний човен, який наздогнав пліт, пройшовши 20 км. З якою швидкістю плив пліт, якщо швидкість моторного човна на 12 км/год більша за швидкість плота?

27. Формули подвійного аргументу

Формули, які виражають тригонометричні функції аргументу 2α через тригонометричні функції аргументу α, називають **формулами подвійного аргументу.**

У формулах додавання

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

покладемо $\beta=\alpha$.

Отримаємо:

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Ці формули відповідно називають **формулами косинуса, синуса і тангенса подвійного аргументу.**

Оскільки $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ і $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$, то з формули $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ отримуємо ще дві формули:

$$\boxed{\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1}$$

Інколи ці формули зручно використовувати в такому вигляді:

$$\boxed{1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha}$$

або в такому вигляді:

$$\boxed{\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

Дві останні формули називають **формулами пониження степеня.**

ПРИКЛАД 1 Виразіть дану тригонометричну функцію через функції вдвічі меншого аргументу:

1) $\sin\alpha$; 3) $\cos 5\alpha$; 5) $\sin\frac{3\alpha}{4}$;

2) $\sin 4\alpha$; 4) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 6) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$.

Розв'язання. 1) Оскільки $\alpha=2\cdot\frac{\alpha}{2}$, то

$$\sin\alpha=\sin 2\cdot\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2};$$

2) $4\alpha=2\cdot 2\alpha$; $\sin 4\alpha=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$;

3) $5\alpha=2\cdot\frac{5\alpha}{2}$; $\cos 5\alpha=\cos^2\frac{5\alpha}{2}-\sin^2\frac{5\alpha}{2}$;

4) Маємо: $\frac{\alpha}{2}=2\cdot\frac{\alpha}{4}$. Тоді $\cos\frac{\alpha}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{4}-\sin^2\frac{\alpha}{4}$;

5) $\frac{3\alpha}{4}=2\cdot\frac{3\alpha}{8}$; $\sin\frac{3\alpha}{4}=2\sin\frac{3\alpha}{8}\cos\frac{3\alpha}{8}$;

6) Маємо: $\frac{\pi}{3}+\alpha=2\cdot\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)$. Тоді $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\dfrac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)}$.

ПРИКЛАД 2 Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$; 4) $1-8\sin^2\beta\cos^2\beta$;

2) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}$; 5) $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$;

Розв'язання. 1) Застосовуючи формулу синуса подвійного аргументу, отримуємо:

$$\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha}=\sin\alpha.$$

2) Застосовуючи формулу косинуса подвійного аргументу $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ і формулу різниці квадратів, отримуємо:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}=-\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos 2\alpha$.

4) $1-8\sin^2\beta\cos^2\beta=1-2\cdot 4\sin^2\beta\cos^2\beta=1-2\sin^2 2\beta=\cos 4\beta$.

5) Оскільки сума аргументів $\frac{\pi}{4}-\alpha$ і $\frac{\pi}{4}+\alpha$ дорівнює $\frac{\pi}{2}$, то, використовуючи формулу зведення $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, отримуємо: $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. Тоді

$$\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha}{2\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}.$$

Застосувавши формулу синуса подвійного аргументу до кута $\frac{\pi}{4}-\alpha$, отримуємо:

$$\frac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}=1.$$

ПРИКЛАД 3 Обчисліть $2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\left(\cos^2\frac{\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}\right)$.

Розв'язання. Застосовуючи формули синуса і косинуса подвійного аргументу до кута $\frac{\pi}{24}$, отримуємо:

$$2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\left(\cos^2\frac{\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}\right)=\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}.$$

Тепер застосуємо формулу синуса подвійного аргументу до кута $\frac{\pi}{12}$: $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

ПРИКЛАД 4 Подайте у вигляді добутку вираз: 1) $1+\cos 4\alpha$; 2) $1-\cos 6\alpha$; 3) $1-\sin\alpha$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи формулу $1+\cos 2x=2\cos^2 x$, отримуємо: $1+\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha$.

2) Застосовуючи формулу $1-\cos 2x=2\sin^2 x$, отримуємо:

$$1-\cos 6\alpha=2\sin^2 3\alpha.$$

3) За допомогою формули зведення замінимо синус на косинус і застосуємо формулу $1-\cos 2x=2\sin^2 x$:

$$1-\sin\alpha=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

ПРИКЛАД 5 Спростіть вираз $2\sin^2(45° - \alpha) + \sin 2\alpha$.

Розв'язання. Застосуємо формулу пониження степеня для синуса, а потім формулу зведення. Отримуємо:

$$2\sin^2(45° - \alpha) + \sin 2\alpha = 1 - \cos(90° - 2\alpha) + \sin 2\alpha =$$
$$= 1 - \sin 2\alpha + \sin 2\alpha = 1.$$

ПРИКЛАД 6 Доведіть тотожність $\dfrac{1+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}} = -\mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{4}$.

Розв'язання. Маємо: $\dfrac{1+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\cos^2\frac{\alpha}{4}-2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}{2\sin^2\frac{\alpha}{4}-2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}} =$

$$= \frac{2\cos\frac{\alpha}{4}\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{4}\left(\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\right)} = -\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{4}.$$

ПРИКЛАД 7 Доведіть рівність $16\cos 20°\cos 40°\cos 60°\cos 80° = 1$.

Розв'язання. Помножимо і поділимо ліву частину даної рівності на $\sin 20°$ та багаторазово застосуємо формулу синуса подвійного аргументу:

$$16\cos 20°\cos 40°\cos 60°\cos 80° = \frac{16\sin 20°\cos 20°\cos 40°\cos 80°\cos 60°}{\sin 20°} =$$

$$= \frac{8\sin 40°\cos 40°\cos 80°\cdot\frac{1}{2}}{\sin 20°} = \frac{2\sin 80°\cos 80°}{\sin 20°} = \frac{\sin 160°}{\sin 20°} = \frac{\sin 20°}{\sin 20°} = 1.$$

?

1. Які формули називають формулами подвійного аргументу?
2. Запишіть формули:
   1) косинуса подвійного аргументу;
   2) синуса подвійного аргументу;
   3) тангенса подвійного аргументу.
3. Як називають формули, які дозволяють знайти $\cos^2\alpha$ і $\sin^2\alpha$, якщо відомо $\cos 2\alpha$?
4. Запишіть формули пониження степеня.

Вправи

690.° Виразіть дані тригонометричні функції через функції вдвічі меншого аргументу:

1) $\cos\alpha$; 2) $\sin 3\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$; 4) $\cos 8\alpha$; 5) $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$; 6) $\operatorname{tg} 7\alpha$.

691.° Виразіть дані тригонометричні функції через функції вдвічі меншого аргументу:

1) $\sin 10\alpha$;
2) $\sin(\alpha-\beta)$;
3) $\cos\dfrac{\alpha}{4}$;
4) $\cos\left(\dfrac{x}{2}-20^\circ\right)$;
5) $\operatorname{tg} 3$;
6) $\operatorname{tg} 12\alpha$.

692.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$;
2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$;
3) $\cos 2\alpha+\sin^2\alpha$;
4) $\dfrac{\sin 50^\circ}{2\cos 25^\circ}$;
5) $\dfrac{\cos 44^\circ+\sin^2 22^\circ}{\cos^2 22^\circ}$;
6) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$;
7) $1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{4}$;
8) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha\operatorname{tg}\alpha}$;
9) $\dfrac{\sin^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\sin 2\alpha}$;
10) $(\sin\varphi-\cos\varphi)^2+\sin 2\varphi$;
11) $\left(\sin\dfrac{\alpha}{4}+\cos\dfrac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\dfrac{\alpha}{4}-\cos\dfrac{\alpha}{4}\right)$;
12) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$;
13) $\cos^4\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin^4\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$;
14) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha}$;
15) $\dfrac{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)}$;
16) $4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha$.

693.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sin 80^\circ}{\cos 40^\circ}$;
2) $2\cos^2\dfrac{11\alpha}{2}-1$;
3) $\cos 4\beta+\sin^2 2\beta$;
4) $2\sin 20^\circ\cos 20^\circ$;
5) $\cos^2 10\varphi-\sin^2 10\varphi$;
6) $\cos 6\alpha+2\sin^2 3\alpha$;
7) $\dfrac{\cos 70^\circ}{\cos 35^\circ+\sin 35^\circ}$;
8) $\dfrac{\sin\alpha}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

9) $\frac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$;

10) $\sin\alpha\cos\alpha\,(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$;

11) $\frac{\sin 4\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}$;

12) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

13) $\sin^2(\beta-45^\circ)-\cos^2(\beta-45^\circ)$;

14) $4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\sin(270^\circ-\alpha)$;

15) $\frac{2\,\mathrm{tg}\,1{,}5\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,1{,}5\alpha}$.

694.° Обчисліть:

1) $2\sin 75^\circ\cos 75^\circ$;
2) $\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ$;
3) $1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$;
4) $\sin 22^\circ30'\cos 22^\circ30'$;
5) $\frac{2\,\mathrm{tg}\,165^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\,165^\circ}$;
6) $\frac{1-\mathrm{tg}^2 15^\circ}{\mathrm{tg}\,15^\circ}$.

695.° Обчисліть:

1) $\cos^2 22^\circ30'-\sin^2 22^\circ30'$;
2) $\frac{2\,\mathrm{tg}\,75^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\,75^\circ}$;
3) $2\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}$;
4) $1-2\cos^2\frac{\pi}{12}$.

696.° Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\sin\alpha=-0{,}6$ і $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

697.° Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ і $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

698.° Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

699.° Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\sin\alpha=-\frac{1}{4}$.

700.° Знайдіть $\mathrm{tg}\,2\alpha$, якщо $\mathrm{tg}\,\alpha=4$.

701.° Знайдіть $\mathrm{tg}\,2\alpha$, якщо $\mathrm{ctg}\,\alpha=2$.

702.° Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $1-\cos 4\alpha$; 2) $1+\cos\frac{\alpha}{3}$; 3) $1-\cos 50^\circ$; 4) $1+\sin 2\alpha$.

703.° Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $1-\cos\frac{5\alpha}{6}$; 2) $1+\cos 12\alpha$; 3) $1+\cos 40^\circ$; 4) $1-\sin\frac{\alpha}{2}$.

704.° Понизьте степінь виразу:

1) $\cos^2 8x$; 2) $\sin^2\frac{x}{2}$; 3) $\sin^2(2x-15^\circ)$; 4) $\cos^2\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$.

705.° Понизьте степінь виразу:

1) $\sin^2 5x$; 2) $\cos^2\frac{x}{6}$; 3) $\cos^2(4x+10^\circ)$; 4) $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$.

706.° Доведіть тотожність:

1) $2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha = 1$;

2) $\operatorname{ctg} 3\alpha\,(1 - \cos 6\alpha) = \sin 6\alpha$;

3) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha} = 2$;

4) $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{1+\cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^2 2\alpha$.

707.° Спростіть вираз:

1) $2\sin^2(135° - \alpha) - \sin 2\alpha$;

2) $\dfrac{1+\cos 8\alpha}{\sin 8\alpha}$.

708.° Знайдіть $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ і $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

709.° Знайдіть $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ і $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

710.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$;

2) $\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$;

3) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$;

4) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$;

5) $\dfrac{4\operatorname{tg}\alpha\,(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2}$;

6) $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$;

7) $\dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$;

8) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

711.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\cos 6\alpha}{\sin 2\alpha} + \dfrac{\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha}$;

2) $\dfrac{2\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$;

4) $\left(\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)\sin 2\alpha$;

5) $(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha)\sin 2\alpha$;

6) $\dfrac{\cos 2\alpha + 1 - \cos^2\alpha}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}$.

712.° Доведіть тотожність:

1) $\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\alpha\right) = \sin 4\alpha$;

2) $1 + 2\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 4\cos^2\alpha\cos 2\alpha$;

3) $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2} 2\alpha - 1} + \dfrac{1+\cos 4\alpha}{\sin^{-2} 2\alpha - 1} = 2$;

4) $\dfrac{1+\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

5) $\dfrac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^2\alpha - 4}{1 - 8\sin^2\alpha - \cos 4\alpha} = \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^4\alpha;$

6) $\dfrac{\cos\left(4\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} + 2\alpha\right)}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha;$

7) $\dfrac{\sin^2\left(4\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\alpha\right)} = -\dfrac{1}{4}\sin 8\alpha.$

713.˙ Доведіть тотожність:

1) $\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{4} - 4\alpha\right) - \sin^2\left(\dfrac{5\pi}{4} + 4\alpha\right) = -\sin 8\alpha;$

2) $1 - 2\cos 3\alpha + \cos 6\alpha = -4\sin^2\dfrac{3\alpha}{2}\cos 3\alpha;$

3) $\dfrac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{2}\sin 4\alpha;$

4) $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}.$

714.˙ Доведіть, що $\operatorname{tg} 15° + \operatorname{ctg} 15° = 4$.

715.˙ Доведіть, що $\operatorname{tg} 75° - \operatorname{ctg} 75° = 2\sqrt{3}$.

716.˙˙ Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\cos\alpha + \sin\alpha = \dfrac{1}{3}$.

717.˙˙ Знайдіть $\sin\alpha$, якщо $\cos\dfrac{\alpha}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

718.˙˙ Спростіть вираз:

1) $\dfrac{2\sin(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha}{2\cos\alpha + 1 + \cos^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\alpha}{2}};$

2) $\cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha;$

3) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin 2\alpha};$

4) $\dfrac{2\sin 4\alpha\,(1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha)}{1 + \operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\alpha\right)};$

5) $\dfrac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha};$

6) $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}.$

719.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha\,(\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin^2 3\alpha}{\sin^2\alpha} - \dfrac{\cos^2 3\alpha}{\cos^2\alpha}$;

3) $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

4) $\dfrac{\sin^2(\alpha-\pi) - 4\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha - \dfrac{5\pi}{2}\right) - 4 + 4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{2}\right)}$;

5) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\sin 3\alpha\cos\alpha - \cos 3\alpha\sin\alpha}$.

720.* Доведіть, що:

1) $\sin 18^\circ \cos 36^\circ = \dfrac{1}{4}$;

2) $8\cos\dfrac{\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9} = 1$;

3) $\cos 3\alpha\cos 6\alpha\cos 12\alpha = \dfrac{\sin 24\alpha}{8\sin 3\alpha}$.

721.* Доведіть, що:

1) $\sin 54^\circ \cos 72^\circ = \dfrac{1}{4}$;

2) $8\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7} = -1$.

722.* Доведіть тотожність $\dfrac{3 + 4\cos\alpha + \cos 2\alpha}{3 - 4\cos\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}^4\dfrac{\alpha}{2}$.

723.* Спростіть вираз $\dfrac{\cos^4(\alpha - \pi)}{\cos^4\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right) + \sin^4\left(\alpha + \dfrac{3\pi}{2}\right) - 1}$.

Вправи для повторення

724. Спростіть вираз:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{a+b}}{\sqrt[3]{a-b}} + \frac{\sqrt[3]{a-b}}{\sqrt[3]{a+b}} - 2\right) : \left(\frac{1}{\sqrt[3]{a-b}} - \frac{1}{\sqrt[3]{a+b}}\right).$$

725. Придумайте нерівність виду $ax + b < 0$, де x — змінна, a і b — деякі числа, множиною розв'язків якої є:

1) проміжок $(-\infty; 4)$;
2) проміжок $(-3; +\infty)$;
3) множина дійсних чисел;
4) порожня множина.

726. Номери квартир під'їзду будинку є послідовними числами від 41 до 80. Яка ймовірність того, що номер навмання вибраної квартири є числом:

1) парним;
2) кратним 5;
3) цифри якого однакові?

Формули половинного аргументу

Замінивши у формулах пониження степеня α на $\frac{\alpha}{2}$, отримуємо:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

Почленне ділення першої рівності на другу призводить до формули

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Тепер можна записати

$$\boxed{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$$

Ці формули називають відповідно **формулами синуса, косинуса і тангенса половинного аргументу.**

ПРИКЛАД 1 Дано: $\operatorname{tg}3\alpha=3\frac{3}{7}$, $60° < \alpha < 90°$. Знайдіть $\sin\frac{3\alpha}{2}$, $\cos\frac{3\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{1}{\cos^2 3\alpha}=1+\operatorname{tg}^2 3\alpha=1+\left(\frac{24}{7}\right)^2=\frac{625}{49}$; $\cos^2 3\alpha=\frac{49}{625}$.

Оскільки $60° < \alpha < 90°$, то $180° < 3\alpha < 270°$. Отже, $\cos 3\alpha < 0$. Тоді $\cos 3\alpha=-\frac{7}{25}$.

Оскільки $90^\circ < \frac{3\alpha}{2} < 135^\circ$, то $\sin\frac{3\alpha}{2} > 0$, а $\cos\frac{3\alpha}{2} < 0$. Тоді:

$$\sin\frac{3\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 3\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{7}{25}\right)} = \frac{4}{5},$$

$$\cos\frac{3\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos 3\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{7}{25}\right)} = -\frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{\cos\frac{3\alpha}{2}} = -\frac{4}{3}.$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть $\sin 22^\circ30'$ і $\cos 22^\circ30'$.

Розв'язання. Використовуючи формули половинного аргументу, отримуємо:

$$\sin 22^\circ30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$

$$\cos 22^\circ30' = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

ПРИКЛАД 3 Спростіть вираз $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.

Розв'язання. Маємо: $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} =$

$$= \left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| + \left|\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right| = \frac{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|} + \frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|^2 + \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|^2}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} =$$

$$= \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{2}{\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{2}{|\sin\alpha|}.$$

Вправи

727. Дано: $\cos 2\alpha = -0{,}6$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$.

728. Дано: $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $135^\circ < \alpha < 180^\circ$. Знайдіть $\sin\alpha$.

729. Дано: $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $90° < \frac{\alpha}{2} < 135°$. Знайдіть $\cos\frac{\alpha}{2}$.

730. Дано: $\sin 2\alpha = -\frac{1}{3}$. Знайдіть $\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)$.

731. Знайдіть:

1) $\sin 15°$; 3) $\operatorname{tg} 75°$; 5) $\operatorname{tg} 112°\,30'$;

2) $\cos 15°$; 4) $\cos 75°$; 6) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

732. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sin\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1 - \sin\alpha}} - \dfrac{\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1 + \sin\alpha}}$, якщо $0° < \alpha < 90°$;

2) $\sqrt{1 + \sin\varphi} - \sqrt{1 - \sin\varphi}$, якщо $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

28. Сума і різниця синусів (косинусів)

У цьому пункті ми розглянемо формули, які дозволяють перетворити суму та різницю синусів (косинусів) у добуток.

Запишемо формули додавання для синуса:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \qquad (1)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y. \qquad (2)$$

Додаючи почленно ліві і праві частини цих рівностей, отримаємо:

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2\sin x \cos y. \qquad (3)$$

Введемо позначення:

$$x + y = \alpha,$$
$$x - y = \beta.$$

Звідси $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$. Зазначимо, що α і β можуть набувати будь-яких значень.

Тоді рівність (3) можна переписати так:

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}}$$

Цю тотожність називають **формулою суми синусів.**

Віднімемо почленно від рівності (1) рівність (2):

$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2\cos x \sin y.$$

Якщо скористатися раніше введеними позначеннями, то отримаємо рівність, яку називають **формулою різниці синусів:**

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Запишемо формули додавання для косинуса:

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$

Додаючи і віднімаючи почленно ці рівності, відповідно отримуємо:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y; \qquad (4)$$
$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y. \qquad (5)$$

Звідси, ввівши позначення $x+y=\alpha$ і $x-y=\beta$, отримаємо відповідно **формули суми і різниці косинусів:**

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ПРИКЛАД 1 Перетворіть у добуток: 1) $\sin 26^\circ+\sin 14^\circ$; 2) $\cos\alpha-\cos 8\alpha$; 3) $\sin\alpha+\cos\alpha$; 4) $\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{7}$; 5) $\sqrt{3}-2\sin\alpha$.

Розв'язання

1) Застосовуючи формулу суми синусів, маємо:

$$\sin 26^\circ+\sin 14^\circ=2\sin\frac{26^\circ+14^\circ}{2}\cos\frac{26^\circ-14^\circ}{2}=2\sin 20^\circ\cos 6^\circ.$$

2) Застосуємо формулу різниці косинусів:

$$\cos\alpha-\cos 8\alpha=-2\sin\frac{\alpha+8\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-8\alpha}{2}=2\sin\frac{9\alpha}{2}\sin\frac{7\alpha}{2}.$$

3) $$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}=$$
$$=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

4) У даному прикладі перейдемо до різниці косинусів:

$$\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{7}=\cos\frac{\pi}{8}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{5\pi}{14}=$$
$$=-2\sin\frac{\frac{\pi}{8}+\frac{5\pi}{14}}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{8}-\frac{5\pi}{14}}{2}=2\sin\frac{\frac{27\pi}{56}}{2}\sin\frac{\frac{13\pi}{56}}{2}=2\sin\frac{27\pi}{112}\sin\frac{13\pi}{112}.$$

5) $\sqrt{3}-2\sin\alpha=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\right)=$

$$=2\cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{3}-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}+\alpha}{2}=4\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

ПРИКЛАД 2 Доведіть тотожність:

$$\sin 4\alpha-\sin 5\alpha-\sin 6\alpha+\sin 7\alpha=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{11\alpha}{2}.$$

Розв'язання. Згрупувавши перший з четвертим і другий з третім доданки, перетворимо суми синусів:

$$\sin 4\alpha-\sin 5\alpha-\sin 6\alpha+\sin 7\alpha=(\sin 4\alpha+\sin 7\alpha)-(\sin 5\alpha+\sin 6\alpha)=$$

$$=2\sin\frac{11\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}-2\sin\frac{11\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{11\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Перетворимо різницю косинусів, що стоїть у дужках, у добуток.

$$2\sin\frac{11\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\frac{11\alpha}{2}\cdot\left(-2\sin\frac{\frac{3\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}}{2}\sin\frac{\frac{3\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}}{2}\right)=$$

$=-4\sin\frac{11\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$, що й треба було довести.

?

Запишіть формулу: 1) суми синусів; 2) різниці синусів; 3) суми косинусів; 4) різниці косинусів.

Вправи

733.° Перетворіть у добуток:

1) $\cos 50^\circ+\cos 20^\circ$;
2) $\cos 2\alpha-\cos 4\alpha$;
3) $\sin\beta+\sin 4\beta$;
4) $\sin 5^\circ-\sin 3^\circ$;
5) $\cos\frac{\pi}{18}+\cos\frac{\pi}{12}$;
6) $\sin(x+\alpha)+\sin(x-\alpha)$;
7) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$;
8) $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$;
9) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

734.° Перетворіть у добуток:

1) $\cos 16^\circ-\cos 36^\circ$;
2) $\sin 28^\circ+\sin 12^\circ$;
3) $\cos 3\alpha+\cos 5\alpha$;
4) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;
5) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;
6) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

735.° Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 8\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 2\alpha}$; 2) $\frac{\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\cos 5\alpha-\cos\alpha}$; 3) $\frac{\cos 74°-\cos 14°}{\sin 74°+\sin 14°}$.

736.° Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos 6\alpha+\cos 4\alpha}{\cos\alpha+\cos 9\alpha}$; 2) $\frac{\cos\alpha-\cos 11\alpha}{\sin 11\alpha-\sin\alpha}$; 3) $\frac{\cos 58°+\cos 32°}{\sin 58°+\sin 32°}$.

737.• Перетворіть у добуток:

1) $\sin 20° + \cos 20°$; 3) $\sin\alpha - \cos\alpha$;

2) $\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}$; 4) $\sin\alpha - \cos(\alpha - 60°)$.

738.• Перетворіть у добуток:

1) $\sin 25° + \cos 55°$; 2) $\cos 22° - \sin 66°$; 3) $\sin\alpha + \cos\beta$.

739.• Перетворіть у добуток:

1) $1 - 2\cos\alpha$; 2) $\sqrt{3}+2\cos\alpha$; 3) $1-\sqrt{2}\sin\alpha$.

740.• Перетворіть у добуток:

1) $1 - 2\sin\alpha$; 2) $\sqrt{3}-2\cos\alpha$; 3) $\sqrt{2}+2\cos\alpha$.

741.• Доведіть тотожність:

1) $\cos 3\alpha-\cos 4\alpha-\cos 5\alpha+\cos 6\alpha=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{9\alpha}{2}$;

2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)=4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha$;

3) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)$;

4) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}=\operatorname{tg} 4\alpha$;

5) $\frac{2(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}$;

6) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=2\cos\alpha$;

7) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

8) $\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-1+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

9) $\left(\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}\right)\cdot\frac{\cos\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha}=-4\sin 3\alpha$;

10) $\frac{(\cos\alpha-\cos 3\alpha)(\sin\alpha+\sin 3\alpha)}{1-\cos 4\alpha}=\sin 2\alpha$;

11) $\frac{\sin(2\alpha+2\pi)+2\sin(4\alpha-\pi)+\sin(6\alpha+4\pi)}{\cos(6\pi-2\alpha)+2\cos(4\alpha-\pi)+\cos(6\alpha-4\pi)}=\operatorname{tg} 4\alpha$.

742.[•] Доведіть тотожність:

1) $\sin 5\alpha + \sin 6\alpha + \sin 7\alpha + \sin 8\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{13\alpha}{2}$;

2) $\sin\alpha + \sin 3\alpha - \sin 2\alpha = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{3\alpha}{2}$;

3) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha-\beta) = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

4) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;

5) $\frac{\cos\alpha - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha - \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 5\alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha$;

6) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

7) $\frac{\sin 2\alpha\cos 4\alpha\,(1+\cos 2\alpha)}{(\sin 3\alpha + \sin\alpha)(\cos 3\alpha + \cos 5\alpha)} = \frac{1}{2}$;

8) $\left(\frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 4\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\sin 3\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}\right) = 4\operatorname{ctg}\alpha$.

743.[••] Доведіть тотожність:

1) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha = 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\frac{1 + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{1 + \cos(4\alpha + \pi) + \cos\left(4\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)} = \operatorname{ctg} 2\alpha$;

3) $\sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha\right) = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}$.

744.[••] Доведіть тотожність:

1) $1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha = -4\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

2) $1 - \sin\alpha - \cos\alpha = 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ\right)$;

3) $\cos^2\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right) = \sin 4\alpha$.

Вправи для повторення

745. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{9 + 8x - x^2} = x - 3$;

2) $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{-2x}$;

3) $\sqrt{x+6}\cdot\sqrt{5-2x} = 2 - 2x$;

4) $\frac{5}{\sqrt{3x-2}} + \sqrt{3x-2} = 3\sqrt{3x+1}$.

746. Спростіть вираз $3\sqrt[3]{-2}+4\sqrt[3]{16}+6\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-2\sqrt[3]{-6\frac{3}{4}}-\sqrt[3]{24}$.

747. Велосипедист, рухаючись з одного села в інше, спочатку збільшив швидкість на 30 %, а через деякий час зменшив швидкість на 20 %. На скільки відсотків зросла початкова швидкість?

29. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

У пункті 28 під час доведення формул суми та різниці синусів (косинусів) було отримано тотожності:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y;$$
$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y;$$
$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y.$$

Перепишемо їх так:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))\\&\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))\\&\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))\end{aligned}}$$

Ці тотожності називають **формулами перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.**

ПРИКЛАД 1 Перетворіть добуток у суму:

1) $\sin 15^\circ\cos 10^\circ$; 3) $\cos\alpha\cos 3\alpha$; 5) $2\sin 2\alpha\cos 5\alpha$.

2) $\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{8}$; 4) $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;

Розв'язання

1) $\sin 15^\circ\cos 10^\circ=\frac{1}{2}(\sin(15^\circ-10^\circ)+\sin(15^\circ+10^\circ))=\frac{1}{2}(\sin 5^\circ+\sin 25^\circ)$;

2) $\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{8}\right)\right)=$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}\right)-\cos\frac{5\pi}{24}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{24}-\cos\frac{5\pi}{24}\right);$$

3) $\cos\alpha\cos 3\alpha=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-3\alpha)+\cos(\alpha+3\alpha))=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)$;

4) $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = 2\cdot\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta-\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta+\alpha-\beta)) =$

$= \sin 2\beta + \sin 2\alpha;$

5) $2\sin 2\alpha\cos 5\alpha = 2\cdot\frac{1}{2}(\sin(2\alpha-5\alpha)+\sin(2\alpha+5\alpha)) =$

$$= \sin(-3\alpha) + \sin 7\alpha = \sin 7\alpha - \sin 3\alpha.$$

ПРИКЛАД 2 Доведіть тотожність

$$4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha) = \cos 3\alpha.$$

Розв'язання. Двічі застосовуючи формулу перетворення добутку косинусів у суму, отримуємо: $4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha) =$

$$= 2\cos\alpha\,(\cos(60^\circ-\alpha-60^\circ-\alpha)+\cos(60^\circ-\alpha+60^\circ+\alpha)) =$$

$$= 2\cos\alpha\,(\cos 2\alpha + \cos 120^\circ) = 2\cos\alpha\left(\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha = \cos\alpha + \cos 3\alpha - \cos\alpha = \cos 3\alpha.$$

ПРИКЛАД 3 Доведіть тотожність $\sin^2 2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}.$

Розв'язання. Застосуємо формули пониження степеня і перетворення добутку в суму:

$$\sin^2 2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{1-\cos 4\alpha}{2} - \frac{1}{2}\left(\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)+\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\cos 4\alpha - \sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\cos 4\alpha+\cos 4\alpha-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Вправи

748.° Перетворіть добуток у суму:

1) $\cos 15^\circ \cos 5^\circ$;
2) $2\cos 3\alpha\cos 2\alpha$;
3) $2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;
4) $2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{40}$;
5) $\sin 6\alpha\cos 4\alpha$;
6) $\sin 48^\circ\sin 74^\circ$;
7) $2\sin\alpha\sin 2\alpha$;
8) $\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)$.

749.° Перетворіть добуток у суму:

1) $2\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{5}$;
2) $\sin 28^\circ\cos 24^\circ$;
3) $\sin 5\alpha\sin 3\alpha$;
4) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

750.° Спростіть вираз:

1) $2 \cos 20° \cos 40° - \cos 20°$;

2) $\sin \alpha (1 + 2 \cos 2\alpha)$;

3) $2 \cos \alpha \cos 2\alpha - \cos 3\alpha$;

4) $\cos 2\alpha + 2 \sin (\alpha + 30°) \sin (\alpha - 30°)$.

751.° Спростіть вираз:

1) $2 \sin 2\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha$;

2) $\sin \alpha - 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$.

752.• Доведіть тотожність:

1) $\sin \alpha \sin 3\alpha + \sin 4\alpha \sin 8\alpha = \sin 7\alpha \sin 5\alpha$;

2) $\sin \left(\frac{\pi}{4} + 5\alpha\right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - 6\alpha\right) = \sin 4\alpha \cos \alpha$.

753.• Доведіть тотожність:

1) $\cos 3\alpha \cos 6\alpha - \cos 4\alpha \cos 7\alpha = \sin 10\alpha \sin \alpha$;

2) $2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{4} + 15°\right) \cos \left(\frac{\alpha}{4} - 15°\right) = \sin \left(45° + \frac{\alpha}{4}\right) \cos \left(45° - \frac{3\alpha}{4}\right)$.

754.• Спростіть вираз:

1) $\sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$;

2) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)$;

3) $\cos^2 (45° + \alpha) - \cos^2 (30° - \alpha) + \sin 15° \sin (75° - 2\alpha)$.

755.• Спростіть вираз:

1) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)$;

2) $\cos^2 (45° - \alpha) - \cos^2 (60° + \alpha) - \sin (75° - 2\alpha) \cos 75°$.

756.•• Доведіть, що:

1) $16 \sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = 3$;

2) $8 \sin 10° \sin 50° \sin 70° = 1$.

757.•• Доведіть тотожність

$$4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(30° - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \left(60° - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin \frac{3\alpha}{2}.$$

758.•• Доведіть рівність:

1) $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$;

2) $\sin 10° + \sin 20° + \ldots + \sin 50° = \frac{\sin 25°}{2 \sin 5°}$.

759.•• Доведіть рівність $\cos \frac{\pi}{19} + \cos \frac{3\pi}{19} + \ldots + \cos \frac{17\pi}{19} = \frac{1}{2}$.

Вправи для повторення

760. Розв'яжіть рівняння:

1) $x-\sqrt{x-1}=3$;
2) $\sqrt{1+4x-x^2}+1=x$;
3) $\sqrt{3x+4}\cdot\sqrt{2x-5}=2x+1$;
4) $\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{5+x}}=\sqrt{5+x}$.

761. Задайте формулою лінійну функцію $y = f(x)$, якщо $f(-10) = -2$, $f(5) = 1$.

762. Знайдіть нулі функції $y=\dfrac{x}{3}-\dfrac{2}{x}$.

30. Гармонічні коливання

У попередніх пунктах ви ознайомилися з тригонометричними функціями $y = \sin x$, $y = \cos x$ та їх властивостями. Розглядаючи графіки цих функцій, можна згадати, що в повсякденному житті ви бачили схожі криві та поверхні. Наприклад, хвилі на морі мають форму, що нагадує синусоїду. І це не випадково. Багато фізичних величин періодично змінюються і можуть бути описані за допомогою тригонометричних функцій $y = A\sin(kx + \alpha)$ або $y = A\cos(kx + \alpha)$, де A, k, α — задані числа, $A \neq 0$, $k \neq 0$. У такому випадку говорять, що фізична величина здійснює **гармонічне коливання**, а відповідну тригонометричну функцію називають **функцією гармонічного коливання**.

Розглянемо рух точки зі сталою ненульовою швидкістю v по одиничному колу (рис. 129). Нехай початкове положення точки задається кутом α, тобто в початковий момент часу точка має координати $M_0(\cos\alpha; \sin\alpha)$. За час t точка пройде по дузі кола

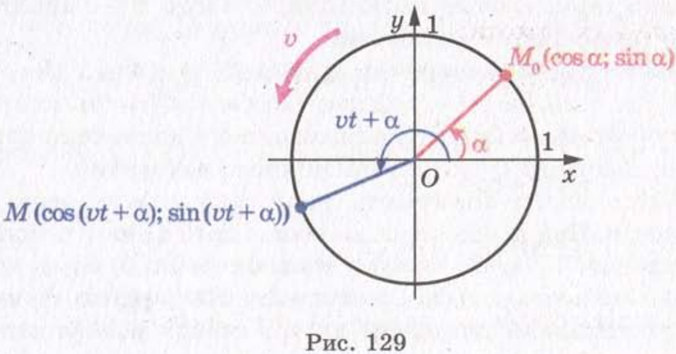


Рис. 129

відстань vt. З означення радіанної міри кута випливає, що довжина дуги одиничного кола, по якій перемістилася точка, дорівнює куту повороту початкової точки M_0. Тому через час t положення точки визначатиметься кутом $vt + \alpha$, а отже, точка матиме координати M ($\cos(vt + \alpha)$; $\sin(vt + \alpha)$). Бачимо, що кожна координата точки, яка рухається колом, визначає функцію гармонічного коливання:

$$x = \cos(vt + \alpha),\ y = \sin(vt + \alpha).$$

У 8 класі на уроках фізики ви вивчали коливальний рух, зокрема рух математичного маятника (рис. 130). Можна встановити (це буде зроблено в старших класах), що відхилення маятника від положення рівноваги визначається функцією $y = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)$,

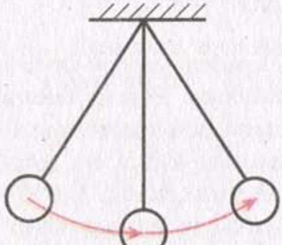


Рис. 130

де A — величина відхилення маятника від вертикалі у початковий момент часу, g — стала прискорення вільного падіння, l — довжина нитки маятника, t — час. Таким чином, коливання математичного маятника — приклад гармонічного коливання.

Гармонічні коливання також можна спостерігати при коливанні гирьки з пружиною; слухаючи музику, адже при цьому в повітрі утворюються звукові хвилі; граючи на гітарі, бо струна набуває форми, близької до синусоїди; вивчаючи роботу електроприладів, оскільки змінний електричний струм також описується тригонометричними функціями, та в багатьох інших випадках.

Якщо у функції гармонічного коливання $y = A\sin(kx + \alpha)$ або $y = A\cos(kx + \alpha)$ числа A і k є додатними, то число A називають **амплітудою** гармонічного коливання, а число k — **циклічною частотою** гармонічного коливання.

Оскільки тригонометричні функції $y = A\sin(kx + \alpha)$, $y = A\cos(kx + \alpha)$, де A — додатне число, набувають значень з проміжку $[-A; A]$, то амплітуда гармонічного коливання показує найбільше значення функції гармонічного коливання.

Гармонічні коливання грають значну роль при вивченні багатьох процесів. При цьому намагаються подати функцію складного періодичного процесу як суму кількох функцій гармонічних коливань, які вважаються простішими. Наприклад, функцію, що описує складний музичний акорд, можна подати як суму

функцій гармонічних коливань окремих нот, що складають цей акорд. На цьому принципі працюють багато технічних пристроїв. Так, деякі типи радіопередавачів кодують інформацію у вигляді окремих гармонічних коливань, випромінюючи у простір хвилю, що є їх сумою. В іншому місці радіоприймач виконує зворотний процес — подає отриманий сигнал як суму окремих гармонічних коливань, що дозволяє відтворити передану інформацію.

Розділ математики, який вивчає гармонічні коливання, називають «Гармонічний аналіз». Якщо ви пов'яжете своє майбутнє з математикою, фізикою, технікою, то зможете ознайомитися з цим розділом у вищому навчальному закладі.

ПРИКЛАД 1 Укажіть амплітуду A і циклічну частоту k гармонічного коливання, яке задається функцією: 1) $y=-3\sin\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)$; 2) $y=-6\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)$.

Розв'язання

1) Можна записати:

$$y=-3\sin\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)=3\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Отже, $A = 3$, $k = 4$.

2) Маємо:

$$-6\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)=6\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}+\pi\right)=6\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{9\pi}{8}\right).$$

Отже, $A = 6$, $k=\frac{1}{2}$.

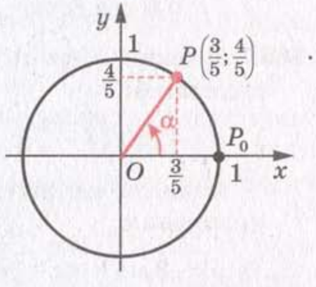


Рис. 131

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що функція $y = 3\sin 2x + 4\cos 2x$ є функцією гармонічного коливання.

Розв'язання. Запишемо вираз $3\sin 2x + 4\cos 2x$ у вигляді

$$\sqrt{3^2+4^2}\left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin 2x+\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos 2x\right)=5\left(\frac{3}{5}\sin 2x+\frac{4}{5}\cos 2x\right).$$

Оскільки $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$, то існує такий кут α, що $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ (рис. 131). Тоді маємо:

$$y = 5(\sin 2x\cos\alpha + \cos 2x\sin\alpha) = 5\sin(2x + \alpha).$$

Отже, дана функція є функцією гармонічного коливання, амплітуда якого дорівнює 5, а циклічна частота коливання — 2.

1. У якому випадку кажуть, що фізична величина здійснює гармонічні коливання?
2. Що називають функцією гармонічного коливання?
3. Що називають амплітудою гармонічного коливання?
4. Що називають циклічною частотою гармонічного коливання?

Вправи

763.° Укажіть амплітуду A і циклічну частоту k гармонічного коливання:

1) $y = 2{,}6 \sin 3\pi x$;   2) $y = 4\cos\left(\frac{x}{3} - 1\right)$.

764.° Укажіть амплітуду A і циклічну частоту k гармонічного коливання:

1) $y = 0{,}6 \cos(2\pi x - 3)$;   2) $y = 8\sin\left(7x + \frac{\pi}{12}\right)$.

765.• Укажіть амплітуду A і циклічну частоту k гармонічного коливання:

1) $y = -2\sin\left(6 - \frac{\pi x}{2}\right)$;   2) $y = -1{,}5\cos\left(-5x - \frac{\pi}{6}\right)$.

766.• Укажіть амплітуду A і циклічну частоту k гармонічного коливання:

1) $y = -3\sin\left(-\pi x - \frac{\pi}{3}\right)$;   2) $y = -\frac{1}{3}\cos\left(-7x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

767.•• Доведіть, що функція $y = 2\sin 3x - \cos 3x$ є функцією гармонічного коливання. Укажіть амплітуду і циклічну частоту цього коливання.

768.•• Доведіть, що функція $y = 5\sin\frac{x}{4} + 12\cos\frac{x}{4}$ є функцією гармонічного коливання. Укажіть амплітуду і циклічну частоту цього коливання.

Вправи для повторення

769. Знайдіть функцію, обернену до функції:

1) $y = \sqrt[3]{x-1} + 2$;   3) $y = \frac{x+1}{x}$;

2) $y = (x+3)^5 - 3$;   4) $y = \sqrt[4]{x-2}$.

770. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-5}-\dfrac{6}{\sqrt{x-5}}=1;$ 2) $4\sqrt[3]{x+3}+5=\sqrt[3]{x^2+6x+9}.$

771. Вартість товару була підвищена на 30 %, а потім знижена на 30 %. Як остаточно змінилася, збільшилася чи зменшилася, вартість товару і на скільки відсотків?

Ставай Остроградським!

Видатний український математик Михайло Васильович Остроградський народився в селі Пашенівка на Полтавщині. У 1816–1820 рр. він навчався в Харківському університеті, а потім удосконалював математичну освіту, навчаючись у таких великих учених, як П'єр Симон Лаплас (1749–1827), Симеон Дені Пуассон (1781–1840), Огюстен Луї Коші (1789–1857), Жан Батіст Жозеф Фур'є (1768–1830).

Михайло Васильович Остроградський
(1801–1862)

Серед величезної наукової спадщини, яку залишив нам Михайло Остроградський, значну роль відіграють роботи, пов'язані з дослідженням тригонометричних рядів і коливань. Багато важливих математичних теорем сьогодні носять ім'я Остроградського.

Крім наукових досліджень, Остроградський написав низку чудових підручників для молоді, зокрема «Програму і конспект тригонометрії». Сам Остроградський надавав питанню викладання тригонометрії такого значення, що це стало предметом доповіді в Академії наук.

Науковий авторитет Остроградського був настільки високим, що в ті часи, відправляючи молодь на навчання, казали: «Ставай Остроградським!» Це побажання актуальне і сьогодні, тому:

«Ставай Остроградським!»

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 3

1. Обчисліть значення виразу $4\cos^2\frac{\pi}{6}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

А) 3; Б) 4; В) 5; Г) 6.

2. Укажіть правильну нерівність:

А) $\sin 140° < 0$; Б) $\cos 200° > 0$; В) $\operatorname{tg} 100° > 0$; Г) $\operatorname{ctg} 250° > 0$.

3. Яка з наведених нерівностей виконується при всіх дійсних значеннях x?

А) $\sin x < 1$; Б) $\sin x > -1$; В) $\sin x > 1$; Г) $\sin x > -2$.

4. Яка область визначення функції $y=\sqrt{x\cos 3}$?

А) $[0; +\infty)$; Б) $(-\infty; 0]$; В) $[-1; 1]$; Г) $[0; 1]$.

5. Серед наведених функцій укажіть парну функцію.

А) $y = x\cos x$; Б) $y = x\sin x$; В) $y = x + \cos x$; Г) $y = x - \cos x$.

6. Чому дорівнює найбільше значення виразу $2 - 3\cos\alpha$?

А) 5; Б) 3; В) −1; Г) −2.

7. Областю визначення періодичної функції $y = f(x)$ з періодом $T = 4$ є множина дійсних чисел. Чому дорівнює значення виразу $3f(-3) + 2f(9)$, якщо $f(1) = 2$?

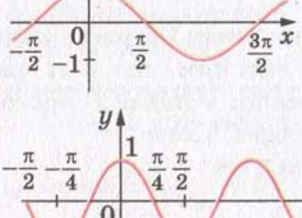
А) 2; Б) −2; В) 10; Г) 12.

8. Як треба перенести графік функції $y = \sin x$, щоб отримати графік функції $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$?

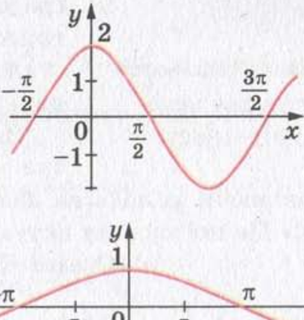
А) на $\frac{\pi}{6}$ одиниць управо; В) на $\frac{\pi}{6}$ одиниць угору;

Б) на $\frac{\pi}{6}$ одиниць уліво; Г) на $\frac{\pi}{6}$ одиниць униз.

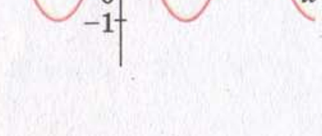
9. На якому рисунку зображено графік функції $y = \cos 2x$?



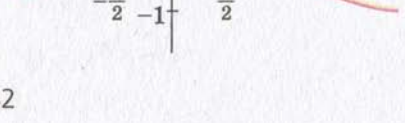
А)



В)



Б)



Г)

10. Знайдіть значення $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

А) $-\frac{3}{5}$; Б) $\frac{3}{5}$; В) $\frac{1}{5}$; Г) $-\frac{1}{5}$.

11. Спростіть вираз $\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha$.

А) $\frac{1}{\sin\alpha}$; Б) $\frac{1}{\cos\alpha}$; В) $\sin\alpha$; Г) $\cos\alpha$.

12. Чому дорівнює $\sin\frac{7\pi}{6}$?

А) $\frac{1}{2}$; Б) $-\frac{1}{2}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; Г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. Яка з даних рівностей є тотожністю?

А) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$; В) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$;

Б) $\cos(\pi-\alpha) = -\sin\alpha$; Г) $\operatorname{ctg}(\pi-\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$.

14. Спростіть вираз $\frac{\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}$.

А) $\operatorname{tg}\alpha$; Б) $-\operatorname{ctg}\alpha$; В) $\sin\alpha\cos\alpha$; Г) $-\sin^2\alpha$.

15. Обчисліть значення виразу $\frac{\sin 56^\circ\cos 11^\circ - \cos 56^\circ\sin 11^\circ}{\cos 48^\circ\cos 18^\circ + \sin 48^\circ\sin 18^\circ}$.

А) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; Б) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; В) $\sqrt{3}$; Г) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

16. Спростіть вираз $\frac{\cos 2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

А) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; Б) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha$; В) $2\operatorname{tg}\alpha$; Г) $2\operatorname{ctg}\alpha$.

17. Спростіть вираз $\frac{\cos 4\alpha - \cos 6\alpha}{\sin 4\alpha + \sin 6\alpha}$.

А) $\operatorname{tg}\alpha$; Б) $-\operatorname{tg}\alpha$; В) $\operatorname{tg}5\alpha$; Г) $-\operatorname{tg}5\alpha$.

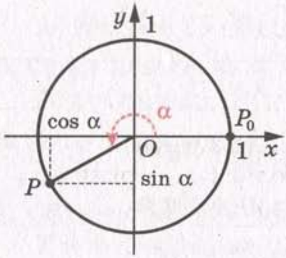
18. Знайдіть значення виразу $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{2\sin\alpha - \cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

А) 3; Б) 1; В) −3; Г) −1.

ПІДСУМКИ

Вивчаючи матеріал цього параграфа, ви дізналися, що:

- кутом в один радіан називають центральний кут кола, який спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола;
- радіанна і градусна міри кута пов'язані формулами $1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$, $1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)$ рад;



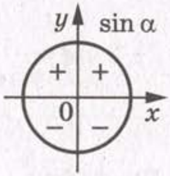
- косинусом і синусом кута повороту α називають відповідно абсцису x і ординату y точки $P\ (x;\ y)$ одиничного кола, яку отримано з точки $P_0\ (1;\ 0)$ у результаті повороту навколо початку координат на кут α;
- тангенсом кута повороту α називають відношення синуса цього кута до його косинуса:

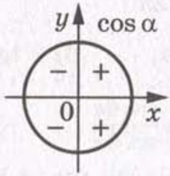
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha};$$

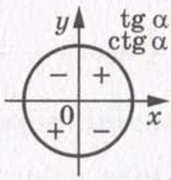
- котангенсом кута повороту α називають відношення косинуса цього кута до його синуса:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

- значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута α залежно від того, кутом якої чверті є кут α, мають знаки, які схематично показано на рисунках:







- функція косинус є парною, а функції синус, тангенс і котангенс — непарними:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

- функцію f називають періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x з області визначення функції f виконуються рівності $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Число T називають періодом функції f. Якщо серед усіх періодів функції f існує додатний найменший період, то його називають головним періодом функції f;
- функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є періодичними з головним періодом, рівним 2π, а функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ є періодичними з головним періодом, рівним π;
- функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ мають властивості, наведені в таблицях.

Властивості функції $y = \sin x$:

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$[-1; 1]$
Періодичність	Періодична з головним періодом, який дорівнює 2π
Нулі функції	Числа виду πn, $n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\sin x > 0$ на кожному з проміжків виду $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$ $\sin x < 0$ на кожному з проміжків виду $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
Парність	Непарна
Зростання/спадання	Зростає на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ Спадає на кожному з проміжків виду $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$
Найбільше і найменше значення	Найбільшого значення, яке дорівнює 1, набуває в точках виду $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ Найменшого значення, яке дорівнює -1, набуває в точках виду $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Властивості функції $y = \cos x$:

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$[-1; 1]$

Періодичність	Періодична з головним періодом, який дорівнює 2π
Нулі функції	Числа виду $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\cos x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$ $\cos x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$
Парність	Парна
Зростання/спадання	Зростає на кожному з проміжків виду $[\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n],\ n \in \mathbb{Z}$ Спадає на кожному з проміжків виду $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n],\ n \in \mathbb{Z}$
Найбільше і найменше значення	Найбільшого значення, яке дорівнює 1, набуває в точках виду $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ Найменшого значення, яке дорівнює -1, набуває в точках виду $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Властивості функції $y = \operatorname{tg} x$:

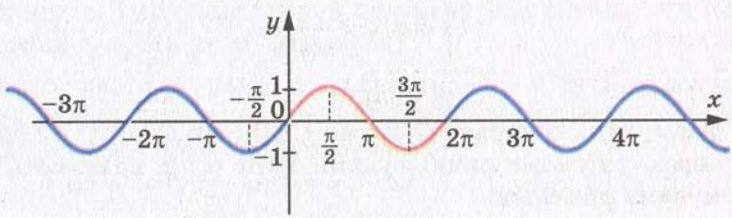
Область визначення	Усі дійсні числа, крім чисел виду $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
Область значень	$\mathbb{R}$
Періодичність	Періодична з головним періодом, який дорівнює π
Нулі функції	Числа виду $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\operatorname{tg} x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{tg} x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$
Парність	Непарна
Зростання/спадання	Зростає на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$
Найбільше і найменше значення	Найбільшого і найменшого значень не набуває

Властивості функції $y = \operatorname{ctg} x$:

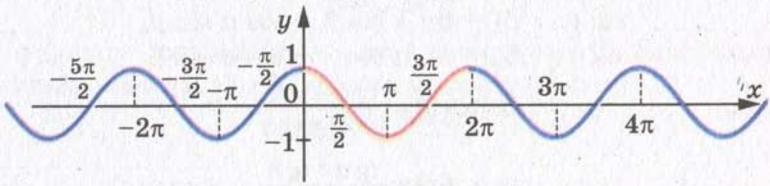
Область визначення	Усі дійсні числа, крім чисел виду πn, $n \in \mathbb{Z}$
Область значень	$\mathbb{R}$
Періодичність	Періодична з головним періодом, який дорівнює π
Нулі функції	Числа виду $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\operatorname{ctg} x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{ctg} x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$
Парність	Непарна
Зростання/спадання	Спадає на кожному з проміжків виду $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
Найбільше і найменше значення	Найбільшого і найменшого значень не набуває

➤ графіки тригонометричних функцій мають такий вигляд:

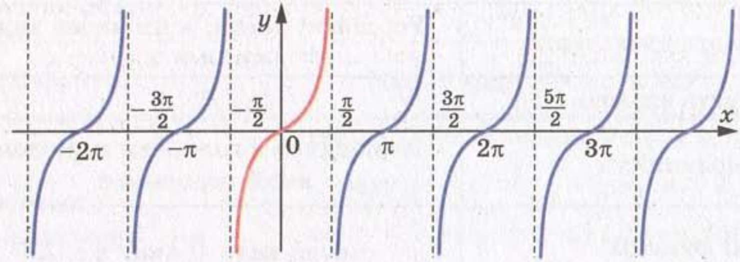
Графік функції $y = \sin x$:



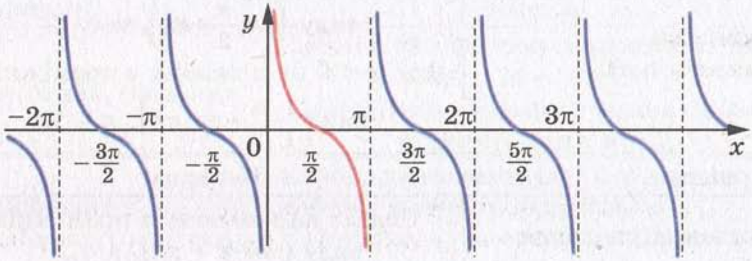
Графік функції $y = \cos x$:



Графік функції $y = \operatorname{tg} x$:



Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$:



- тригонометричні функції одного й того самого аргументу пов'язані формулами:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1;$$

- формули, які виражають $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin(\alpha \pm \beta)$ і $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ через тригонометричні функції кутів α і β, називають формулами додавання:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta};$$

- формули, які дозволяють зводити пошук значень тригонометричних функцій будь-якого кута до пошуку їх значень для кута від 0 до $\frac{\pi}{2}$, називають формулами зведення:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha,\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha;$$

- для того щоб записати будь-яку з формул зведення, можна керуватися такими правилами: 1) у правій частині рівності ставлять той знак, який має ліва частина при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; 2) якщо в лівій частині формули аргумент має вигляд $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ або $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, то синус міняють на косинус, тангенс — на котангенс, і навпаки. Якщо аргумент має вигляд $\pi\pm\alpha$, то зміни функції не відбувається;
- формули, які виражають тригонометричні функції аргументу 2α через тригонометричні функції аргументу α, називають формулами подвійного аргументу:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};$$

- формули, які дозволяють знайти $\cos^2\alpha$ і $\sin^2\alpha$, якщо відомо $\cos 2\alpha$, називають формулами пониження степеня:

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$

- **суму або різницю тригонометричних функцій можна перетворити в добуток, використовуючи формули:**

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

- **добуток тригонометричних функцій можна перетворити в суму, використовуючи формули:**

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$$

- **функції $y = A\cos(kx + \alpha)$ і $y = A\sin(kx + \alpha)$, де A, k, α — задані числа, $A \neq 0$, $k \neq 0$, називають функціями гармонічного коливання. Якщо A і k є додатними числами, то число A називають амплітудою гармонічного коливання, а число k — його циклічною частотою.**

§ 5 ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

У цьому параграфі ви ознайомитеся з функціями, оберненими до тригонометричних функцій.

Ви дізнаєтеся, які рівняння і нерівності називають найпростішими тригонометричними рівняннями і нерівностями; які рівняння називають однорідними тригонометричними рівняннями першого і другого степенів; ознайомитеся з формулами коренів найпростіших тригонометричних рівнянь; оволодієте різними методами розв'язування тригонометричних рівнянь; навчитеся розв'язувати найпростіші тригонометричні нерівності.

31. Рівняння $\cos x = b$

Оскільки областю значень функції $y = \cos x$ є проміжок $[-1; 1]$, то при $|b| > 1$ рівняння $\cos x = b$ не має розв'язків. Разом з тим при будь-якому b такому, що $|b| \leqslant 1$, це рівняння має корені, більш того, їх безліч.

Сказане легко зрозуміти, звернувшись до графічної інтерпретації: графіки функцій $y = \cos x$ і $y = b$, де $|b| \leqslant 1$, мають безліч спільних точок (рис. 132).

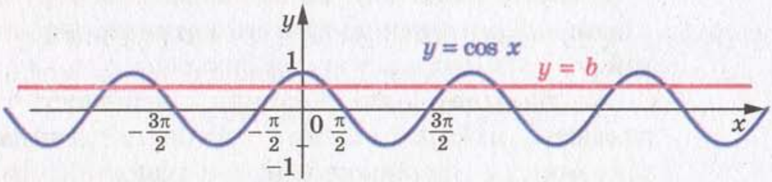


Рис. 132

Зрозуміти, як розв'язувати рівняння $\cos x = b$ у загальному випадку, допоможе розгляд окремого випадку. Наприклад, розв'яжемо рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$.

На рисунку 133 зображено графіки функцій $y = \cos x$ і $y = \frac{1}{2}$.

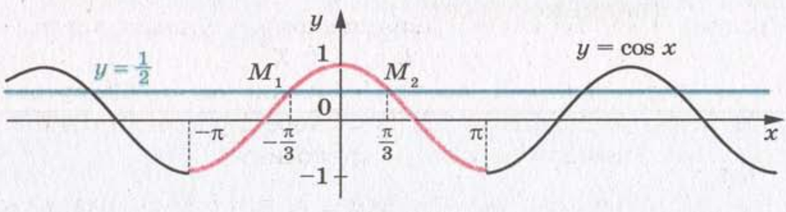


Рис. 133

Розглянемо функцію $y = \cos x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції (червона крива на рисунку 133). Пряма $y = \frac{1}{2}$ перетинає графік функції $y = \cos x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ у двох точках M_1 і M_2, абсциси яких є протилежними числами. Отже, рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ має два корені. Оскільки $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, то цими коренями є числа $-\frac{\pi}{3}$ і $\frac{\pi}{3}$.

Функція $y = \cos x$ є періодичною з періодом 2π. Тоді кожен з інших коренів рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$ відрізняється від одного із знайдених коренів $-\frac{\pi}{3}$ або $\frac{\pi}{3}$ на число виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отже, корені розглядуваного рівняння задаються формулами $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ і $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Як правило, ці дві формули замінюють одним записом:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Повернемося до рівняння $\cos x = b$, де $|b| \leqslant 1$ (рис. 134). На проміжку $[-\pi; \pi]$ це рівняння має два корені α і $-\alpha$, де $\alpha \in [0; \pi]$ (при $b = 1$ ці корені збігаються).

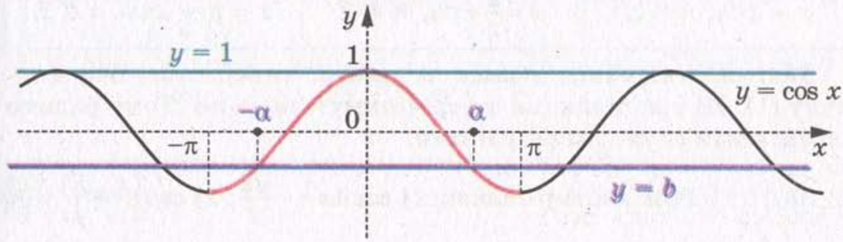


Рис. 134

Зрозуміло, що всі корені рівняння $\cos x = b$ мають вигляд

$$x = \pm\alpha + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ця формула показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння $\cos x = b$. Корінь α має спеціальну назву — арккосинус.

Означення. Арккосинусом числа b, де $|b| \leqslant 1$, називають таке число α з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює b.

Для арккосинуса числа b використовують позначення $\arccos b$.

Наприклад,

$$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},\ \text{оскільки}\ \frac{\pi}{3} \in [0; \pi]\ \text{і}\ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4},\ \text{оскільки}\ \frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]\ \text{і}\ \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2},\ \text{оскільки}\ \frac{\pi}{2} \in [0; \pi]\ \text{і}\ \cos\frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\arccos(-1) = \pi,\ \text{оскільки}\ \pi \in [0; \pi]\ \text{і}\ \cos\pi = -1.$$

Узагалі, **$\arccos b = \alpha$, *якщо* $\alpha \in [0; \pi]$ *і* $\cos\alpha = b$.**

Зазначимо, що, наприклад, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$. Проте $\arccos\frac{1}{2}\neq-\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3}\notin[0;\pi]$.

Тепер формулу коренів рівняння $\cos x = b$, $|b|\leqslant 1$, можна записати так:

$$\boxed{x=\pm\arccos b+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}} \qquad (1)$$

Зазначимо, що окремі випадки рівняння $\cos x = b$ (для $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) було розглянуто раніше (див. п. 19). Нагадаємо отримані результати:

$\cos x = 1$	$\cos x = 0$	$\cos x = -1$
$x = 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$	$x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

Такі самі відповіді можна отримати, використовуючи формулу (1). Ці три рівняння зустрічатимуться часто. Тому радимо запам'ятати отримані результати.

ПРИКЛАД Розв'яжіть рівняння: 1) $\cos 4x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{5}-7x\right)=0$.

Розв'язання. 1) Використовуючи формулу (1), можемо записати:

$$4x=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Далі отримуємо:

$$4x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \ x=\pm\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}.$$

Відповідь: $\pm\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$.

2) Маємо:

$$\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$$

$$\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\quad \frac{x}{3}=\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2\pi n;$$

$$x=\pm\pi-\frac{3\pi}{4}+6\pi n.$$

Відповідь: $\pm\pi-\frac{3\pi}{4}+6\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

3) Перепишемо дане рівняння у вигляді $\cos\left(7x-\frac{\pi}{5}\right)=0$. Маємо:

$$7x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді $7x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}+\pi n$; $7x=\frac{7\pi}{10}+\pi n$; $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{7}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$.

?

1. При яких значеннях b має корені рівняння $\cos x = b$?
2. Скільки коренів має рівняння $\cos x = b$ при $|b| \leqslant 1$?
3. Що називають арккосинусом числа b?
4. Який вигляд має формула коренів рівняння $\cos x = b$ при $|b| \leqslant 1$?
5. Який вигляд має формула коренів рівняння $\cos x = 1$? $\cos x = 0$? $\cos x = -1$?

Вправи

772.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x=\frac{1}{2}$; 3) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\cos x=\frac{\pi}{3}$;

2) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x=\frac{1}{3}$; 6) $\cos x=\frac{\pi}{4}$.

773.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\cos x=\frac{4}{7}$.

2) $\cos x=-\frac{1}{2}$; 4) $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{2}$;

774.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 3x=-\frac{1}{2}$; 3) $\cos 6x = 1$; 5) $\cos 9x=-\frac{1}{5}$;

2) $\cos\frac{5}{6}x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos\frac{2\pi x}{3}=0$; 6) $\cos\left(-\frac{x}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

775.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x=\frac{1}{2}$; 2) $\cos\frac{x}{5}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos\frac{3x}{4}=-1$.

776.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\cos\left(\frac{x}{6}-2\right)=-1$;

4) $2\cos\left(\frac{\pi}{8}-3x\right)+1=0$.

777.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{9}-4x\right)=1$;

2) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+3\right)+1=0$.

778.• Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.$$

779.• Знайдіть найменший додатний корінь рівняння

$$\cos\frac{x}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

780.•• Скільки коренів рівняння $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$?

781.•• Знайдіть усі корені рівняння $\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{1}{2}$, які задовольняють нерівність $-\frac{\pi}{6}<x<4\pi$.

Вправи для повторення

782. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{ab^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}}$;

2) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}\cdot\dfrac{a-b}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}\right)}$.

783. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{3x^2-5x+2}}$;

2) $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x+2}$;

3) $y=\sqrt{x^2+5x-14}+\dfrac{1}{x^2-64}$;

4) $y=\sqrt{4-2\sqrt{x}}$.

32. Рівняння $\sin x = b$

Оскільки областю значень функції $y = \sin x$ є проміжок $[-1; 1]$, то при $|b| > 1$ рівняння $\sin x = b$ не має розв'язків. Разом з тим при будь-якому b такому, що $|b| \leqslant 1$, це рівняння має корені, більш того, їх безліч.

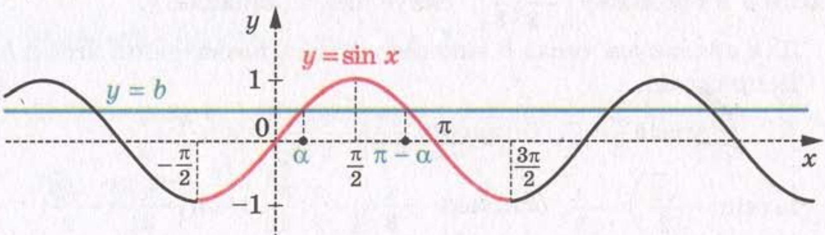
Зазначимо, що окремі випадки рівняння $\sin x = b$ (для $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) було розглянуто раніше (див. п. 19).

Нагадаємо отримані результати:

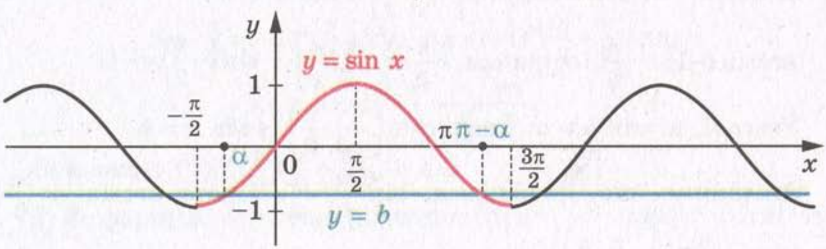
$\sin x = 1$	$\sin x = 0$	$\sin x = -1$
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Для того щоб отримати загальну формулу коренів рівняння $\sin x = b$, де $|b| \leqslant 1$, звернемося до графічної інтерпретації.

На рисунку 135 зображено графіки функцій $y = \sin x$ і $y = b$, $|b| \leqslant 1$.



а)



б)

Рис. 135

Розглянемо функцію $y = \sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції (червона лінія на рисунку 135). На цьому проміжку рівняння $\sin x = b$ має два корені α і $\pi - \alpha$, де $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (при $b = 1$ ці корені збігаються).

Оскільки функція $y = \sin x$ є періодичною з періодом 2π, то кожен з інших коренів рівняння $\sin x = b$ відрізняється від одного із знайдених коренів на число виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тоді корені рівняння $\sin x = b$ задаються формулами

$$x = \alpha + 2\pi n \text{ і } x = \pi - \alpha + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ці дві формули можна замінити одним записом:

$$x = (-1)^k \alpha + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Справді, якщо k — парне число, тобто $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, то отримуємо $x = \alpha + 2\pi n$; якщо k — непарне число, тобто $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, то отримуємо $x = -\alpha + \pi + 2\pi n = \pi - \alpha + 2\pi n$.

Формула (1) показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння $\sin x = b$. Корінь α має спеціальну назву — арксинус.

Означення. Арксинусом числа b, де $|b| \leqslant 1$, називають таке число α з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює b.

Для арксинуса числа b використовують позначення: $\arcsin b$.

Наприклад,

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ і } \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \text{ оскільки } -\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ і } \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\arcsin 0 = 0, \text{ оскільки } 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ і } \sin 0 = 0;$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \text{ оскільки } -\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ і } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Узагалі, **$\arcsin b = \alpha$, *якщо* $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *і* $\sin \alpha = b$.**

Зазначимо, що, наприклад, $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Проте $\arcsin\frac{1}{2} \neq \frac{5\pi}{6}$, оскільки $\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Тепер формулу коренів рівняння $\sin x = b$, $|b| \leqslant 1$, можна записати так:

$$\boxed{x = (-1)^k \arcsin b + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}} \qquad (2)$$

Зрозуміло, що формула (2) застосовна і для окремих випадків: $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$. Проте рівняння $\sin x = 1$, $\sin x = 0$, $\sin x = -1$ зустрічатимуться часто. Тому радимо запам'ятати формули їх коренів, які записано на початку пункту.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння: 1) $\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin\left(t+\frac{\pi}{10}\right)=-1$.

Розв'язання. 1) Використовуючи формулу (2), можемо записати:

$$\frac{x}{2}=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Далі отримуємо:

$$\frac{x}{2}=(-1)^n\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n;\ \ \frac{x}{2}=-(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n;$$

$$\frac{x}{2}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n;$$

$$x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+2\pi n.$$

Відповідь: $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

2) Перепишемо дане рівняння у вигляді $-\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тоді $\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$3x-\frac{\pi}{3}=(-1)^n\cdot\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$$

$$3x-\frac{\pi}{3}=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \ 3x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\pi n;$$

$$x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}.$$

Відповідь: $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}$.

3) За формулою коренів рівняння $\sin x = -1$ можемо записати:

$$t+\frac{\pi}{10}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Далі маємо: $t=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}+2\pi n$; $t=-\frac{3\pi}{5}+2\pi n$.

Відповідь: $-\frac{3\pi}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2$.

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=1.$$

Оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$, а $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$, то можна записати:

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\sin x=1.$$

Використовуючи формулу синуса суми $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=$ $=\sin(\alpha+\beta)$, отримаємо:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=1.$$

Звідси $\frac{\pi}{3}+x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Відповідь: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Зауважимо, що при розв'язуванні рівняння прикладу 2 можна було скористатися і формулою косинуса різниці $\cos\alpha\cos\beta+$ $+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$. Справді, оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$, а $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, то

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x=1;$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1.$$

Звідси отримуємо таку саму відповідь: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

?

1. При яких значеннях b має корені рівняння $\sin x=b$?
2. Скільки коренів має рівняння $\sin x=b$ при $|b|\leqslant 1$?
3. Що називають арксинусом числа b?
4. Який вигляд має формула коренів рівняння $\sin x=b$ при $|b|\leqslant 1$?
5. Який вигляд має формула коренів рівняння $\sin x=1$? $\sin x=0$? $\sin x=-1$?

Вправи

784.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x = \frac{1}{4}$; 4) $\sin x = \sqrt{2}$.

785.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$; 4) $\sin x = 1{,}5$.

786.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin \frac{x}{6} = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin \frac{4x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin 5x = 1$; 4) $\sin(-8x) = \frac{2}{9}$.

787.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin \frac{x}{7} = 0$; 3) $\sin \frac{2x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

788.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin\left(\frac{x}{3} + 1\right) = -1$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12} - 3x\right) - 1 = 0$.

789.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{18} - 8x\right) = 1$; 2) $2\sin\left(\frac{x}{5} - 4\right) + 1 = 0$.

790.° Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

791.° Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння $\sin\left(3x - \frac{\pi}{15}\right) = -1$.

792.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$; 3) $3\sin\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 3$.

2) $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 1$;

793.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$; 2) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

794.•• Знайдіть усі корені рівняння $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, які належать проміжку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

795.•• Скільки коренів рівняння $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ належать проміжку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?

Вправи для повторення

796. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{30}{\sqrt[4]{216}}$; 5) $\frac{16}{\sqrt[3]{7}+1}$;

2) $\frac{15}{\sqrt[3]{25}}$; 4) $\frac{12}{\sqrt{17}+\sqrt{5}}$; 6) $\frac{21}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$.

797. Побудуйте графік функції, укажіть її область значень та проміжки зростання і спадання:

1) $y=\begin{cases} x, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ 4x-x^2, & \text{якщо } x>0; \end{cases}$ 2) $y=\begin{cases} -\frac{4}{x}, & \text{якщо } x<-2, \\ -x, & \text{якщо } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt[4]{x}, & \text{якщо } x>0. \end{cases}$

33. Рівняння $\operatorname{tg} x = b$ і $\operatorname{ctg} x = b$

Оскільки областю значень функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина $\mathbb{R}$, то рівняння $\operatorname{tg} x = b$ має розв'язки при будь-якому значенні b.

Для того щоб отримати формулу коренів рівняння $\operatorname{tg} x = b$, звернемося до графічної інтерпретації.

На рисунку 136 зображено графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = b$.

Рис. 136

Розглянемо функцію $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції (червона крива на рис. 136). На цьому проміжку рівняння $\operatorname{tg} x = b$ при будь-якому b має один корінь α.

Оскільки функція $y = \operatorname{tg} x$ є періодичною з періодом π, то кожен з інших коренів рівняння $\operatorname{tg} x = b$ відрізняється від знайденого кореня на число виду πn, $n \in \mathbb{Z}$.

Тоді множина коренів рівняння $\operatorname{tg} x = b$ задається формулою
$$x = \alpha + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Отримана формула показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння $\operatorname{tg} x = b$. Корінь α має спеціальну назву — арктангенс.

Означення. Арктангенсом числа b називають таке число α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює b.

Для арктангенса числа b використовують позначення $\operatorname{arctg} b$. Наприклад,

$$\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},\ \text{оскільки}\ \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\ \text{і}\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4},\ \text{оскільки}\ -\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\ \text{і}\ \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1;$$

$$\operatorname{arctg} 0 = 0,\ \text{оскільки}\ 0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\ \text{і}\ \operatorname{tg} 0 = 0.$$

Узагалі, $\boldsymbol{\operatorname{arctg} b = \alpha}$, ***якщо*** $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ***і*** $\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha = b}$.

Зазначимо, що, наприклад, $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$. Проте $\operatorname{arctg} 1 \neq -\frac{3\pi}{4}$, оскільки $-\frac{3\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Тепер формулу коренів рівняння $\operatorname{tg} x = b$ можна записати так:

$$\boxed{\boldsymbol{x = \operatorname{arctg} b + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}}$$

Оскільки областю значень функції $y = \operatorname{ctg} x$ є множина $\mathbb{R}$, то рівняння $\operatorname{ctg} x = b$ має розв'язки при будь-якому значенні b. На рисунку 137 зображено графіки функцій $y = \operatorname{ctg} x$ і $y = b$.

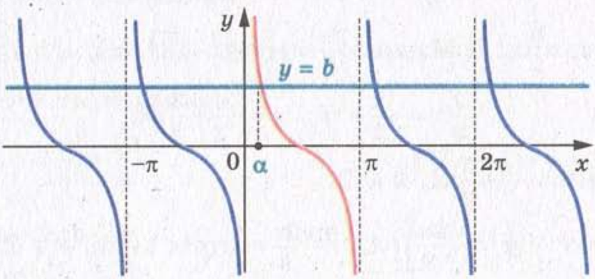


Рис. 137

Розглянемо функцію $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції (червона крива на рис. 137). На цьому проміжку рівняння $\operatorname{ctg} x = b$ при будь-якому b має один корінь α.

Оскільки функція $y = \operatorname{ctg} x$ є періодичною з періодом π, то кожен з інших коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = b$ відрізняється від знайденого кореня на число виду πn, $n \in \mathbb{Z}$.

Тоді множина коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = b$ задається формулою

$$x = \alpha + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Корінь α має спеціальну назву — арккотангенс.

Означення. Арккотангенсом числа b називають таке число α з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює b.

Для арккотангенса числа b використовують позначення $\operatorname{arcctg} b$. Наприклад,

$\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$, оскільки $\frac{\pi}{3}\in(0;\pi)$ і $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$, оскільки $\frac{5\pi}{6}\in(0;\pi)$ і $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}$;

$\operatorname{arcctg} 0=\frac{\pi}{2}$, оскільки $\frac{\pi}{2}\in(0;\pi)$ і $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0$.

Узагалі, **$\operatorname{arcctg} b = \alpha$, *якщо* $\alpha \in (0; \pi)$ *і* $\operatorname{ctg} \alpha = b$.**

Зазначимо, що, наприклад, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$. Проте $\operatorname{arcctg}(-1)\neq-\frac{\pi}{4}$, оскільки $-\frac{\pi}{4}\notin(0;\pi)$.

Тепер формулу коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = b$ можна записати так:

$$\boxed{x = \operatorname{arcctg} b + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$$

ПРИКЛАД Розв'яжіть рівняння:

$$1)\ \operatorname{tg}\frac{2x}{3}=-\sqrt{3};\quad 2)\ \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=-1.$$

Розв'язання. 1) Маємо: $\frac{2x}{3}=\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

$$\frac{2}{3}x=-\frac{\pi}{3}+\pi k;\quad x=-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi k.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

2) Маємо: $\operatorname{ctg}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=1$; $x-\frac{2\pi}{3}=\operatorname{arcctg} 1+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

$$x-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+\pi k;\quad x=\frac{11}{12}\pi+\pi k.$$

Відповідь: $x=\frac{11}{12}\pi+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

1. При яких значеннях b має корені рівняння $\operatorname{tg} x = b$? $\operatorname{ctg} x = b$?
2. Скільки коренів має рівняння $\operatorname{tg} x = b$? $\operatorname{ctg} x = b$?
3. Що називають арктангенсом числа b? арккотангенсом числа b?
4. Який вигляд має формула коренів рівняння $\operatorname{tg} x = b$? $\operatorname{ctg} x = b$?

Вправи

798.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;
2) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
3) $\operatorname{tg} x = -1$;
4) $\operatorname{tg} x = 5$;
5) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
6) $\operatorname{ctg} x = -1$;
7) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$;
8) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{7}$;
9) $\operatorname{ctg} x = 0$.

799.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} x = 1$;
2) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$;
4) $\operatorname{tg} x = -2$;
5) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$;
6) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
7) $\operatorname{tg} x = 0$.

800.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} 2x = 1$;
2) $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = \frac{1}{3}$;
3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7x}{4}\right) = \sqrt{3}$;
4) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 0$;
5) $\operatorname{ctg} 6x = \frac{6}{11}$;
6) $\operatorname{ctg}(-9x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

801.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} \frac{3}{5}x = 0$;
2) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\sqrt{3}$;
3) $\operatorname{ctg} \frac{3}{2}x = 5$.

802.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
2) $\operatorname{tg}(3 - 2x) = 2$;
3) $\sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$;
4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

803.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$;
2) $\operatorname{ctg}(4 - 3x) = 2$;
3) $3 \operatorname{tg}(3x + 1) - \sqrt{3} = 0$.

804.° Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg} 4x = 1$ належать проміжку $[0; \pi]$?

805.° Скільки коренів рівняння $\operatorname{ctg}\frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$?

806.° Знайдіть суму коренів рівняння $\operatorname{ctg} 2x = -\sqrt{3}$, які належать проміжку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

807.° Знайдіть суму коренів рівняння $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{3}$, які належать проміжку $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

808.* При яких значеннях параметра a рівняння $(x + a)\left(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\right) = 0$ має єдиний корінь на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$?

809.* При яких значеннях параметра a рівняння $(x - a)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$ має єдиний корінь на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$?

Вправи для повторення

810. Графіки яких з даних функцій симетричні відносно осі ординат:

1) $f(x) = \frac{4 - x^2}{\cos 2x}$;

2) $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$;

3) $f(x) = \sqrt[4]{2 - x} + \sqrt[4]{2 + x}$;

4) $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x$?

811. Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $f(x) = x^2 + 4$, $x \in [0; +\infty)$;

2) $f(x) = x^2 - 1$, $x \in (-\infty; 0]$;

3) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x \in (-\infty; 0]$.

34. Функції $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$ і $y = \mathrm{arcctg}\, x$

Для будь-якого $a \in [-1; 1]$ рівняння $\cos x = a$ на проміжку $[0; \pi]$ має єдиний корінь, який дорівнює $\arccos a$ (рис. 138). Тому кожному числу x з проміжку $[-1; 1]$ можна поставити у відповідність єдине число y з проміжку $[0; \pi]$ таке, що $y = \arccos x$.

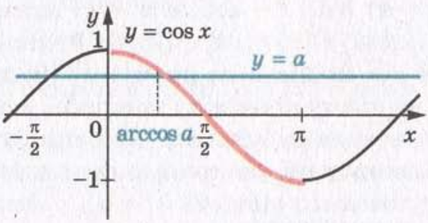


Рис. 138

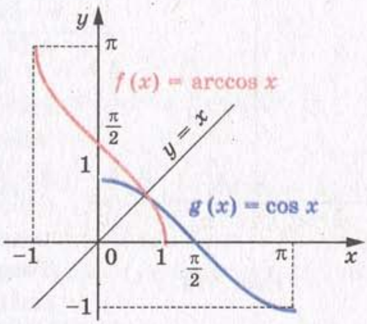


Рис. 139

Тим самим задано функцію $f(x) = \arccos x$ з областю визначення $D(f) = [-1; 1]$ і областю значень $E(f) = [0; \pi]$.

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \cos x$ з областю визначення $D(g) = [0; \pi]$.

Дійсно, $D(f) = E(g) = [-1; 1]$;

$E(f) = D(g) = [0; \pi]$.

З означення арккосинуса випливає, що для всіх x з проміжку $[-1; 1]$ виконується рівність

$$\boxed{\cos(\arccos x) = x}$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Властивості взаємно обернених функцій, розглянуті в п. 6, дозволяють визначити деякі властивості функції $f(x) = \arccos x$.

Оскільки функція $g(x) = \cos x$, $D(g) = [0; \pi]$, є спадною, то з теореми 6.3 випливає, що функція $f(x) = \arccos x$ також є спадною.

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Це дозволяє побудувати графік функції $f(x) = \arccos x$ (рис. 139).

Відзначимо ще одну властивість функції $y = \arccos x$: для будь-якого $x \in [-1; 1]$ виконується рівність

$$\boxed{\arccos(-x) = \pi - \arccos x} \qquad (1)$$

Наприклад, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

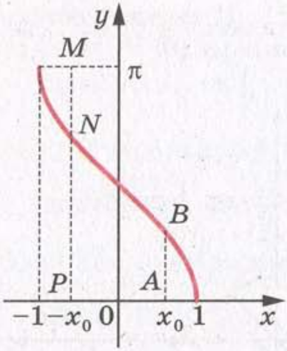


Рис. 140

Ця властивість має просту графічну ілюстрацію. На рисунку 140 $AB = MN = \arccos x_0$, $NP = \arccos(-x_0)$, а $MN + NP = \pi$.

Доведемо рівність (1). Нехай $\arccos(-x) = \alpha_1$, $\pi - \arccos x = \alpha_2$. Зауважимо, що $\alpha_1 \in [0; \pi]$, $\alpha_2 \in [0; \pi]$. Функція $y = \cos x$ є спадною на проміжку $[0; \pi]$, отже, на цьому проміжку кожного свого значення вона набуває тільки один раз. Тому, показавши, що $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$, тим самим доведемо рівність $\alpha_1 = \alpha_2$.

Маємо: $\cos\alpha_1 = \cos(\arccos(-x)) = -x$;
$\cos\alpha_2 = \cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$.

Для будь-якого $a \in [-1; 1]$ рівняння $\sin x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ має єдиний корінь, який дорівнює $\arcsin a$ (рис. 141).

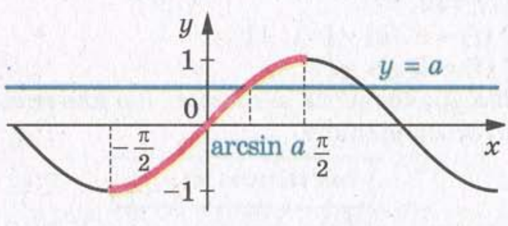


Рис. 141

Тому кожному числу x з проміжку $[-1; 1]$ можна поставити у відповідність єдине число y з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ таке, що $y = \arcsin x$.

Тим самим задано функцію $f(x) = \arcsin x$ з областю визначення $D(f) = [-1; 1]$ і областю значень $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \sin x$ з областю визначення $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Дійсно, $D(f) = E(g) = [-1; 1]$;

$$E(f) = D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

З означення арксинуса випливає, що для всіх $x \in [-1; 1]$ виконується рівність

$$\boxed{\sin(\arcsin x) = x}$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Визначимо деякі властивості функції $f(x) = \arcsin x$.

Оскільки функція $g(x) = \sin x$, $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, є непарною, то функція $f(x) = \arcsin x$ також є непарною (див. задачу № 193). Іншими словами, для будь-якого $x \in [-1; 1]$ виконується рівність

$$\boxed{\arcsin(-x) = -\arcsin x}$$

Наприклад, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

Функція $g(x) = \sin x$, $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, є зростаючою. Отже, функція $f(x) = \arcsin x$ також є зростаючою (див. теорему 6.3).

Знову скористаємося тим, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

На рисунку 142 показано, як за допомогою графіка функції $g(x) = \sin x$, $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, побудувати графік функції $f(x) = \arcsin x$.

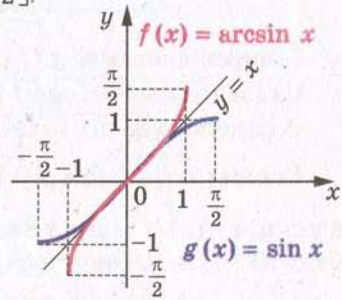


Рис. 142

Для будь-якого a рівняння $\mathrm{tg}\, x = a$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ має єдиний корінь, який дорівнює $\mathrm{arctg}\, a$ (рис. 143). Тому будь-якому числу x можна поставити у відповідність єдине число y з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ таке, що $y = \mathrm{arctg}\, x$.

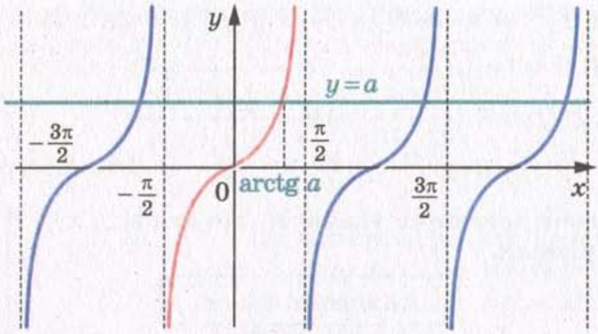


Рис. 143

Тим самим задано функцію $f(x) = \text{arctg}\, x$ з областю визначення $D(f) = \mathbb{R}$ і областю значень $E(f)=\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \text{tg}\, x$ з областю визначення $D(g)=\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Дійсно, $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$;

$$E(f)=D(g)=\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

З означення арктангенса випливає, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\boxed{\text{tg}\,(\text{arctg}\, x) = x}$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Визначимо деякі властивості функції $f(x) = \text{arctg}\, x$.

Оскільки функція $g(x) = \text{tg}\, x$, $D(g)=\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, є непарною, то функція $f(x) = \text{arctg}\, x$ також є непарною. Іншими словами, для будь-якого x виконується рівність

$$\boxed{\text{arctg}\,(-x) = -\text{arctg}\, x}$$

Наприклад, $\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\text{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$.

Функція $g(x) = \text{tg}\, x$, $D(g)=\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, є зростаючою. Отже, функція $f(x) = \text{arctg}\, x$ також є зростаючою.

На рисунку 144 показано, як за допомогою графіка функції $g(x) = \mathrm{tg}\, x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, побудувати графік функції $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$.

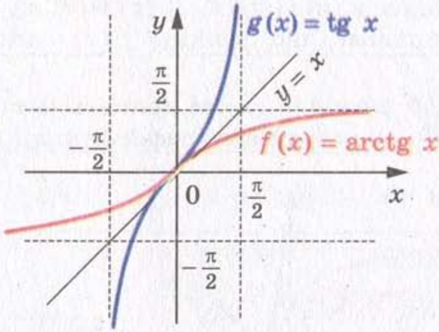


Рис. 144

Для будь-якого a рівняння $\mathrm{ctg}\, x = a$ на проміжку $(0; \pi)$ має єдиний корінь, який дорівнює $\mathrm{arcctg}\, a$ (рис. 145). Тому будь-якому числу x можна поставити у відповідність єдине число y з проміжку $(0; \pi)$ таке, що $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

Тим самим задано функцію $f(x) = \mathrm{arcctg}\, x$ з областю визначення $D(f) = \mathbb{R}$ і областю значень $E(f) = (0; \pi)$.

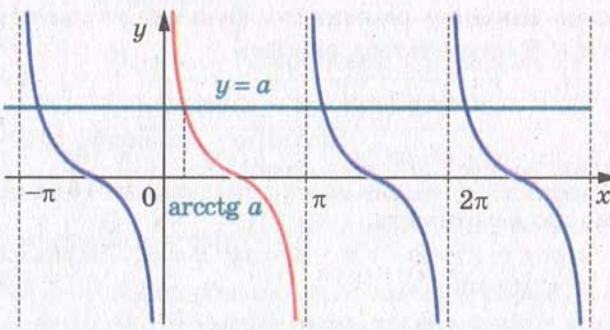


Рис. 145

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \mathrm{ctg}\, x$ з областю визначення $D(g) = (0; \pi)$.

Справді, $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$;

$E(f) = D(g) = (0; \pi)$.

З означення арккотангенса випливає, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\boxed{\mathrm{ctg}\,(\mathrm{arcctg}\, x) = x}$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Визначимо деякі властивості функції $f(x) = \text{arcctg}\, x$.

Оскільки функція $g(x) = \text{ctg}\, x$, $D(g) = (0; \pi)$, є спадною, то з теореми 6.3 випливає, що функція $f(x) = \text{arcctg}\, x$ також є спадною.

На рисунку 146 показано, як за допомогою графіка функції $g(x) = \text{ctg}\, x$, $x \in (0; \pi)$, побудувати графік функції $f(x) = \text{arcctg}\, x$.

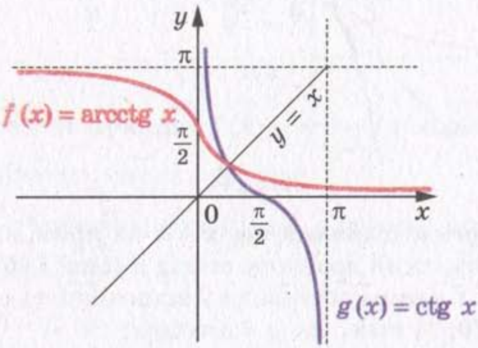


Рис. 146

Відзначимо важливу властивість функції $y = \text{arcctg}\, x$: для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\boxed{\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg}\, x}$$

Наприклад, $\text{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \text{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Доведемо цю властивість.

Нехай $\text{arcctg}(-x) = \alpha_1$ і $\pi - \text{arcctg}\, x = \alpha_2$. Зауважимо, що $\alpha_1 \in (0; \pi)$, $\alpha_2 \in (0; \pi)$.

Функція $y = \text{ctg}\, x$ спадає на проміжку $(0; \pi)$, отже, на цьому проміжку кожного свого значення вона набуває тільки один раз. Тому, показавши, що $\text{ctg}\, \alpha_1 = \text{ctg}\, \alpha_2$, тим самим доведемо рівність $\alpha_1 = \alpha_2$.

Маємо: $\text{ctg}\, \alpha_1 = \text{ctg}(\text{arcctg}(-x)) = -x$;

$$\text{ctg}\, \alpha_2 = \text{ctg}(\pi - \text{arcctg}\, x) = -\text{ctg}(\text{arcctg}\, x) = -x.$$

Отже, $\text{ctg}\, \alpha_1 = \text{ctg}\, \alpha_2$.

У таблиці наведено властивості обернених тригонометричних функцій.

	$y = \arccos x$	$y = \arcsin x$	$y = \mathrm{arctg}\, x$	$y = \mathrm{arcctg}\, x$
Область визначення	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значень	$[0; \pi]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$(0; \pi)$
Нулі функції	$x = 1$	$x = 0$	$x = 0$	—
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in [-1; 1)$, то $\arccos x > 0$	Якщо $x \in [-1; 0)$, то $\arcsin x < 0$; якщо $x \in (0; 1]$, то $\arcsin x > 0$	Якщо $x \in (-\infty; 0)$, то $\mathrm{arctg}\, x < 0$; якщо $x \in (0; +\infty)$, то $\mathrm{arctg}\, x > 0$	$\mathrm{arcctg}\, x > 0$ при всіх x
Парність	Не є ні парною, ні непарною	Непарна	Непарна	Не є ні парною, ні непарною
Зростання / спадання	Спадна	Зростаюча	Зростаюча	Спадна

ПРИКЛАД 1 Обчисліть $\sin\left(\arcsin \frac{3}{5}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи формулу $\sin(\arcsin x) = x$ при $|x| \leqslant 1$, маємо $\sin\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть область визначення функції

$$y = \arccos(x^2 - 3).$$

Розв'язання. Областю визначення $D(y)$ даної функції є множина розв'язків нерівності $-1 \leqslant x^2 - 3 \leqslant 1$.

Маємо: $2 \leqslant x^2 \leqslant 4$;

$$\begin{cases} x^2 \leqslant 4, \\ x^2 \geqslant 2; \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -\sqrt{2}, \\ x \geqslant \sqrt{2}; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} -2 \leqslant x \leqslant -\sqrt{2}, \\ \sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2. \end{array}\right.$$

Отже, $D(y) = \left[-2; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; 2\right]$.

ПРИКЛАД 3 **Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 4 - \arccos 3x$.**

Розв'язання. Оскільки $0 \leqslant \arccos 3x \leqslant \pi$, то $-\pi \leqslant -\arccos 3x \leqslant 0$ і $4 - \pi \leqslant 4 - \arccos 3x \leqslant 4$.

Зазначимо, що $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 4 - \pi$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 4$.

Відповідь: найменше значення дорівнює $4 - \pi$, найбільше значення дорівнює 4.

ПРИКЛАД 4 **Обчисліть: 1) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$; 2) $\sin(\mathrm{arcctg}\,(-3))$.**

Розв'язання. 1) Нехай $\arccos\frac{3}{5} = \alpha$, тоді $\alpha \in [0; \pi]$ і $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Задача звелася до пошуку значення $\sin\alpha$.

Урахуємо, що коли $\alpha \in [0; \pi]$, то $\sin\alpha \geqslant 0$. Тоді отримуємо:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Відповідь: $\frac{4}{5}$.

2) Нехай $\mathrm{arcctg}\,(-3) = \alpha$, де $\alpha \in (0; \pi)$. Тоді $\mathrm{ctg}\,\alpha = -3$.

Оскільки $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, то $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10}$. Ураховуючи, що $\alpha \in (0; \pi)$, отримуємо $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

?

1. Як називають функцію, обернену до функції $y = \cos x$, якщо $x \in [0; \pi]$?
2. Як називають функцію, обернену до функції $y = \sin x$, якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?
3. Як називають функцію, обернену до функції $y = \mathrm{tg}\,x$, якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?
4. Як називають функцію, обернену до функції $y = \mathrm{ctg}\,x$, якщо $x \in (0; \pi)$?
5. Яка область визначення функції $y = \arccos x$? $y = \arcsin x$? $y = \mathrm{arctg}\,x$? $y = \mathrm{arcctg}\,x$?

6. Яка область значень функції $y = \arccos x$? $y = \arcsin x$? $y = \mathrm{arctg}\, x$? $y = \mathrm{arcctg}\, x$?

7. Яке число є нулем функції $y = \arccos x$? $y = \arcsin x$? $y = \mathrm{arctg}\, x$? $y = \mathrm{arcctg}\, x$?

8. Назвіть проміжки знакосталості функції $y = \arccos x$; $y = \arcsin x$; $y = \mathrm{arctg}\, x$; $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

9. Зростаючою чи спадною є функція $y = \arccos x$? $y = \arcsin x$? $y = \mathrm{arctg}\, x$? $y = \mathrm{arcctg}\, x$?

10. Чому дорівнює $\arccos(-x)$? $\arcsin(-x)$? $\mathrm{arctg}(-x)$? $\mathrm{arcctg}(-x)$?

Вправи

812.° **Чи є правильною рівність:**

1) $\arcsin 0 = \pi$;

2) $\arcsin(-1) = \frac{3\pi}{2}$;

3) $\arcsin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$;

5) $\arcsin 0 + \arcsin \frac{1}{2} = \frac{7\pi}{6}$;

6) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{36}$;

7) $\arccos \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}$;

8) $\arccos \frac{\pi}{2} = 0$;

9) $\arccos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

10) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi$;

11) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{12}$;

12) $\mathrm{arcctg}\, 0 = \pi$;

13) $\mathrm{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$;

14) $\mathrm{arctg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

15) $\mathrm{arctg} \sqrt{3} + \mathrm{arcctg}(-1) = \frac{\pi}{12}$?

813.° **Чи є правильною рівність:**

1) $\arcsin \pi = 0$;

2) $\arcsin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

3) $\arcsin 1 + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$;

4) $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2}$;

5) $\arcsin 1 \cdot \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{12}$;

6) $\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}$;

7) $\arccos 0 = -\frac{\pi}{2}$;

8) $\arccos 1 = 2\pi$;

9) $\arccos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$;

10) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$;

11) $\arccos^2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{25\pi^2}{36}$;

12) $\operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}$;

13) $\operatorname{arcctg} \frac{\pi}{2} = 0$;

14) $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5\pi}{12}$;

15) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{2}$?

814.° Обчисліть:

1) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

2) $\cos (2 \operatorname{arctg} 1)$;

3) $\cos\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

4) $\operatorname{ctg}\left(2 \operatorname{arcctg} (-\sqrt{3})\right)$;

5) $\sin\left(3 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$;

6) $\operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6}\right)$;

7) $\sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \operatorname{arctg} 1\right)$.

815.° Обчисліть:

1) $\operatorname{tg} (\arccos 1)$;

2) $\sin\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$;

3) $\cos\left(2 \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

4) $\operatorname{ctg}\left(2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

5) $\operatorname{tg} (2 \arccos (-1))$;

6) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\right)$;

7) $\cos\left(3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

816.° Обчисліть:

1) $\cos\left(\arccos \frac{1}{3}\right)$;

2) $\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} 4)$;

3) $\cos\left(\arccos \frac{\pi}{4}\right)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2}\right)$.

817.° Обчисліть:

1) $\sin\left(\arcsin \frac{3}{4}\right)$;

2) $\operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} 5)$;

3) $\sin\left(\arcsin \frac{\pi}{6}\right)$;

4) $\operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} \pi)$.

818.° **Знайдіть значення виразу:**

1) $\arcsin 1 + \arccos(-1) + \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

2) $\arccos 0 + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

3) $4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 3\arccos 1 + 2\arcsin\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

819.° **Знайдіть значення виразу:**

1) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arcctg} 1 + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 5\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\arcsin(-1)$.

820.° **Знайдіть область визначення функції:**

1) $y = \arcsin(x - 2)$;

2) $y = \arccos(x^2 - 10)$;

3) $y = \arcsin\frac{1}{2x}$;

4) $y = \arccos\sqrt{x}$;

5) $y = \operatorname{arctg}(4 - x)$;

6) $y = \operatorname{arctg}\frac{\pi}{x+5}$;

7) $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x+2}$;

8) $y = \arcsin\frac{1}{x} + \operatorname{arcctg}\sqrt{x-1}$.

821.° **Знайдіть область визначення функції:**

1) $y = \arccos(x + 2)$;

2) $y = \arccos\frac{2}{3x}$;

3) $y = \arcsin\sqrt{x}$;

4) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x-3}$;

5) $y = \operatorname{arcctg}(5 - x)$;

6) $y = \operatorname{arcctg}\frac{\pi}{x+7}$;

7) $y = \arcsin(x-1) + \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

822.° **Знайдіть найбільше і найменше значення функції:**

1) $y = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$;

2) $y = \arccos x + 2$;

3) $y = 2\arcsin x - \frac{\pi}{3}$;

4) $y = \frac{1}{\arccos x}$.

823.° **Знайдіть найбільше і найменше значення функції на її області визначення:**

1) $y = \arccos x + \pi$; 2) $y = \arcsin x - 2$; 3) $y = 3\arccos x + \frac{\pi}{6}$.

824.°° **Знайдіть найбільше і найменше значення функції:**

1) $y = \arccos\sqrt{x} + 2$;

2) $y = \sqrt{\arcsin x}$.

825.°° **Знайдіть найбільше і найменше значення функції:**

1) $y = \arcsin\sqrt{x} + 4$;

2) $y = \sqrt{\arccos x}$.

826.** Обчисліть:

1) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$; 2) $\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$.

827.** Обчисліть:

1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; 2) $\mathrm{ctg}\left(\arccos\frac{12}{13}\right)$.

Вправи для повторення

828. Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x^6 - 3x^3 - 10 = 0$; 3) $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5$;

2) $\sqrt{x+4}+3\sqrt[4]{x+4}=28$; 4) $x^2+x-\sqrt{x^2+x-2}=8$.

829. Дано функції $f(x) = x^{16}$ і $g(x) = x^{17}$. Розташуйте у порядку зростання $f(-5)$, $f(2)$, $g(1)$ і $g(-1)$.

830. Брусок сплаву міді і цинку масою 36 кг містить 45 % міді. Скільки міді потрібно додати до цього бруску, щоб отриманий новий сплав містив 60 % міді?

35. Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних

У пунктах 31–33 було отримано формули для розв'язування рівнянь виду $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\mathrm{tg}\, x = a$, $\mathrm{ctg}\, x = a$. Ці рівняння називають **найпростішими тригонометричними рівняннями**. За допомогою різних прийомів і методів багато тригонометричних рівнянь можна звести до найпростіших.

Спочатку розглянемо тригонометричні рівняння, які зводяться до найпростіших за допомогою введення нової змінної.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$.

Розв'язання. Зробимо заміну $\cos x = t$. Тоді дане рівняння набуває вигляду $2t^2 - 5t + 2 = 0$. Звідси $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2 = 2$. Оскільки $|\cos x| \leqslant 1$, то рівняння $\cos x = 2$ не має коренів. Отже, дане рівняння рівносильне рівнянню $\cos x=\frac{1}{2}$. Маємо: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sin x - 3\cos 2x = 2$.

Розв'язання. Використовуючи формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, перетворимо дане рівняння:

$$\sin x - 3(1 - 2\sin^2 x) - 2 = 0;$$
$$6\sin^2 x + \sin x - 5 = 0.$$

Нехай $\sin x = t$. Отримуємо квадратне рівняння $6t^2 + t - 5 = 0$. Звідси $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{5}{6}$.

Отже, дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = -1,\\ \sin x = \frac{5}{6}.\end{array}\right.$$

Маємо: $\left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\\ x = (-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ (-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, то дане рівняння можна записати так:

$$\operatorname{tg} x + (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 3.$$

Звідси $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$. Нехай $\operatorname{tg} x = t$. Тоді $t^2 + t - 2 = 0$. Звідси $t_1 = 1$, $t_2 = -2$.

Отримуємо, що дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = 1,\\ \operatorname{tg} x = -2.\end{array}\right.$ Звідси $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\\ x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Означення. **Рівняння виду $a\sin x + b\cos x = 0$, де a і b одночасно не дорівнюють нулю, називають однорідним тригонометричним рівнянням першого степеня; рівняння виду $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$, де a, b і c одночасно не дорівнюють нулю, називають однорідним тригонометричним рівнянням другого степеня.**

Наприклад, рівняння $2\sin x - 3\cos x = 0$ — однорідне тригонометричне рівняння першого степеня, а рівняння $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$ і $2\sin^2 x - \cos^2 x = 0$ — однорідні тригонометричні рівняння другого степеня.

Для однорідних рівнянь існує ефективний метод розв'язування. Ознайомимося з ним на прикладах.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\sin x - 2\cos x = 0$.

Розв'язання. Якщо $\cos x = 0$, то з даного рівняння випливає, що $\sin x = 0$. Але $\sin x$ і $\cos x$ не можуть одночасно бути рівними нулю, оскільки має місце рівність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Отже, множина коренів даного рівняння складається з таких чисел x, при яких $\cos x \neq 0$.

Поділивши обидві частини рівняння $\sin x - 2\cos x = 0$ на $\cos x$, отримуємо $\operatorname{tg} x - 2 = 0$.

Звідси $\operatorname{tg} x = 2$; $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння

$$7\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 15\cos^2 x = 0.$$

Розв'язання. Якщо $\cos x = 0$, то з даного рівняння випливає, що $\sin x = 0$. Але $\sin x$ і $\cos x$ не можуть одночасно бути рівними нулю, оскільки має місце рівність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Отже, множина коренів даного рівняння складається з таких чисел x, при яких $\cos x \neq 0$.

Поділивши обидві частини даного рівняння на $\cos^2 x$, отримаємо рівносильне рівняння:

$$\frac{7\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{8\sin x\cos x}{\cos^2 x} - \frac{15\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$

$$7\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x - 15 = 0.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{15}{7}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = \operatorname{arctg}\dfrac{15}{7} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Відповідь: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg}\dfrac{15}{7} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння $3\sin^2 x + \sin 2x = 2$.

Розв'язання. Це рівняння не є однорідним. Проте його можна легко звести до однорідного:

$$3\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x);$$
$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0.$$

Отримали однорідне рівняння. Далі, діючи, як у попередньому прикладі, отримуємо рівняння, рівносильне початковому:

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Завершіть розв'язування самостійно.

Відповідь: $\operatorname{arctg}\left(-1 \pm \sqrt{3}\right) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $2 \sin x - 3 \cos x = 2$.

Розв'язання. Скористаємося формулами подвійного аргументу та основною тригонометричною тотожністю:

$$4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 3\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) = 2\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right);$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 5 \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Поділимо обидві частини останнього рівняння на $\cos^2 \frac{x}{2}$ і зробимо заміну $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Отримуємо: $t^2 + 4t - 5 = 0$, звідси $t_1 = 1$, $t_2 = -5$,

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = -2 \operatorname{arctg} 5 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ -2 \operatorname{arctg} 5 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

?

1. Які рівняння називають найпростішими тригонометричними рівняннями?
2. Які рівняння називають однорідними тригонометричними рівняннями першого степеня? другого степеня?

Вправи

831.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;
2) $2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0$;
3) $\sin^2 3x + 2 \sin 3x - 3 = 0$;
4) $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$;
5) $3 \operatorname{ctg}^2 2x + \operatorname{ctg} 2x - 4 = 0$;
6) $3 \cos^2 \frac{x}{4} + 5 \cos \frac{x}{4} - 2 = 0$.

832.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$;
2) $2 \cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$;
3) $4 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$;
4) $3 \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{3} - \operatorname{ctg} \frac{x}{3} - 2 = 0$.

833.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x - \cos x = 0$;
2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$;
3) $3\sin x = 2\cos x$;
4) $4\cos 2x - \sin 2x = 0$;
5) $\sin\frac{x}{3} + 5\cos\frac{x}{3} = 0$;
6) $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$;
7) $\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$;
8) $3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$.

834.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x + \cos x = 0$;
2) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$;
3) $2\sin x + \cos x = 0$;
4) $\cos 4x - 3\sin 4x = 0$;
5) $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0$;
6) $4\sin^2 x = 3\sin x\cos x + \cos^2 x$.

835.• Розв'яжіть рівняння:

1) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$;
2) $2\sin^2 x + 7\cos x + 2 = 0$;
3) $\cos 2x = 1 + 4\cos x$;
4) $2\cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0$;
5) $\cos 2x + \sin x = 0$;
6) $\cos\frac{2x}{3} - 5\cos\frac{x}{3} - 2 = 0$;
7) $\cos 2x - \cos^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0$;
8) $\cos\frac{x}{2} + \cos x = 0$;
9) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$;
10) $8\sin^2 3x + 4\sin^2 6x = 5$;
11) $4\operatorname{tg} 5x + 3\operatorname{ctg} 5x = 7$;
12) $\frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + 3$;
13) $2\operatorname{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$;
14) $\cos 2x - 4\sqrt{2}\cos x + 4 = 0$.

836.• Розв'яжіть рівняння:

1) $4\sin^2 x + 8\cos x + 1 = 0$;
2) $2\cos^2 x = 1 + \sin x$;
3) $\cos 2x + 8\sin x = 3$;
4) $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$;
5) $5\sin\frac{x}{6} - \cos\frac{x}{3} + 3 = 0$;
6) $\cos x + \sin\frac{x}{2} = 0$;
7) $2\cos^2 4x - 6\cos^2 2x + 1 = 0$;
8) $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 3$;
9) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = \frac{3}{\cos^2 x}$;
10) $4\sin^2 x + 9\operatorname{ctg}^2 x = 6$.

837.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 x + 0{,}5\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$;
2) $\cos^2 5x + 7\sin^2 5x = 4\sin 10x$;
3) $(\cos x + \sin x)^2 = 1 - \cos 2x$;
4) $3\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 14\cos^2 x - 2 = 0$;
5) $5\cos^2 x - 3\sin^2 x - \sin 2x = 2$;
6) $3\sin^2 x + \sin x\cos x + 4\cos^2 x = 3$;
7) $3\sin x\cos x + \cos^2 x = 1$;
8) $\frac{2\cos x + \sin x}{7\sin x - \cos x} = \frac{1}{2}$.

838.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 x + 3\cos^2 x - 2\sin 2x = 0$;
2) $5\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 1$;
3) $6\sin^2 x + 2\sin 2x + 4\cos^2 x = 3$;
4) $2\cos^2 x + \sin 2x - 2 = 0$;
5) $3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$;
6) $\dfrac{2\sin x - \cos x}{5\sin x - 4\cos x} = \dfrac{1}{3}$.

839.° Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння
$$\sin^2 x + \cos x + 1 = 0.$$

840.° Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння
$$\sin^2 x + 0{,}5\sin 2x = 1.$$

841.° Знайдіть найменший додатний корінь рівняння
$$6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5.$$

842.° Знайдіть найменший додатний корінь рівняння
$$\sin x\cos x + \cos^2 x = 0.$$

843.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $4\cos x\sin x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
2) $3\cos x + 2\operatorname{tg} x = 0$;
3) $8\sin^2 x + 4\sin^2 2x + 8\cos 2x = 5$;
4) $3 + 5\cos x = \sin^4 x - \cos^4 x$;
5) $\cos 2x - 9\cos x + 6 = 4\sin^2 \dfrac{x}{2}$.

844.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $4\operatorname{ctg} x - 5\sin x = 0$;
2) $4\sin^2 2x + 7\cos 2x - 2\sin^2 x = 6$;
3) $7 + 2\sin 2x + 1{,}5(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0$;
4) $\sin^2 x = \cos^4 \dfrac{x}{2} - \sin^4 \dfrac{x}{2}$;
5) $2\cos 4x - 2\cos^2 x = 3\cos 2x$.

845.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $3\sin x - 8\cos x = 3$;   2) $2\sin x - 5\cos x = 3$.

846.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $3\sin x + 5\cos x = -3$;   2) $3\sqrt{3}\sin x - 5\cos x = 7$.

847.•• Скільки коренів рівняння $\cos 2x + \sin x = \cos^2 x$ належать проміжку $[-\pi; \pi]$?

848.•• Знайдіть суму коренів рівняння $2\sin^2 x + 7\cos x + 2 = 0$, які належать проміжку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

849.** Знайдіть усі корені рівняння $2\cos^2 x = \sin x$, які задовольняють нерівність $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

850.** Знайдіть усі корені рівняння $\sin x + \cos x = 1$, які задовольняють нерівність $0 < x < \pi$.

851.* При яких значеннях a має корені рівняння:

1) $\sin^2 x - (3a - 3)\sin x + a(2a - 3) = 0$;
2) $\cos^2 x + 2\cos x + a^2 - 6a + 10 = 0$?

852.* При яких значеннях a має корені рівняння:

1) $\cos^2 x - \cos x + a - a^2 = 0$;
2) $\sin^2 x - 2a\sin x + 2a^2 - 4a + 4 = 0$?

Вправи для повторення

853. Порівняйте:

1) $\sqrt[5]{7}$ і $\sqrt[10]{47}$; 2) $\sqrt{2}$ і $\sqrt[5]{\sqrt{33}}$; 3) $\sqrt[3]{15}$ і $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt[5]{25}$ і $\sqrt[3]{5}$.

854. Розв'яжіть рівняння:

1) $6x^3 - 24x = 0$;
2) $x^3 - 5x^2 + 9x - 45 = 0$;
3) $x^5 + 2x^4 + 8x + 16 = 0$;
4) $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$.

855. Є брухт сталі двох сортів з вмістом нікелю 5 % і 40 %. Скільки потрібно взяти брухту кожного з цих сортів, щоб отримати 140 т сталі з 30 %-м вмістом нікелю?

36. Розв'язування тригонометричних рівнянь методом розкладання на множники

Якщо права частина рівняння дорівнює нулю, а ліву частину вдалося розкласти на множники, то розв'язування цього рівняння можна звести до розв'язування кількох більш простих рівнянь.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\sin 2x + \cos x = 0$.

Розв'язання. Маємо: $2\sin x\cos x + \cos x = 0$;

$$\cos x(2\sin x + 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ 2\sin x + 1 = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \sin x = -\frac{1}{2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\cos x + \cos 5x = 0$.

Розв'язання. Скориставшись формулою суми косинусів, запишемо: $2 \cos 3x \cos 2x = 0$. Звідси

$$\left[\begin{array}{l}\cos 3x = 0,\\ \cos 2x = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}3x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$.

Розв'язання. Маємо: $\sin 3x + \sin x - \sin 2x = 0$;

$2 \sin 2x \cos x - \sin 2x = 0$; $\sin 2x\,(2 \cos x - 1) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ \cos x = \frac{1}{2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi n}{2},\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi n}{2},\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1{,}5$.

Розв'язання. Скориставшись формулами пониження степеня, запишемо:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = \frac{3}{2}.$$

Далі маємо: $\cos 4x + (\cos 2x + \cos 6x) = 0$;

$$\cos 4x + 2 \cos 4x \cos 2x = 0;\quad 2\cos 4x\left(\frac{1}{2} + \cos 2x\right) = 0.$$

Отримуємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0,\\ \cos 2x = -\frac{1}{2}.\end{array}\right. \quad \text{Звідси} \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Вправи

856.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x + \cos 3x = 0$;
2) $\sin 5x - \sin x = 0$;
3) $2 \sin x \cos 2x - \sin x + 2 \cos 2x - 1 = 0$;
4) $2 \sin x \operatorname{tg} x + 2\sqrt{3} \sin x - \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$.

857.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 7x + \sin x = 0$;
2) $\cos 9x - \cos x = 0$;
3) $\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\, x - 2 = 0$;
4) $\sqrt{2}\cos x\,\mathrm{ctg}\, x - 3\sqrt{2}\cos x + \mathrm{ctg}\, x - 3 = 0$.

858.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$;
2) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1$;
3) $\sin 5x = \cos 4x$;
4) $\sin 10x - \cos 2x = 0$.

859.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{12}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$;
2) $\cos 5x + \sin 3x = 0$.

860.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 2x + 2\sin x = \cos x + 1$;
2) $1 + \cos 8x = \cos 4x$;
3) $\cos x + \cos 3x + \cos 2x = 0$;
4) $2\sin 2x + \cos 3x - \cos x = 0$;
5) $\cos x - \cos 3x + \sin x = 0$;
6) $\sin 4x + 2\cos^2 x = 1$;
7) $\cos x - \cos 3x = 3\sin^2 x$;
8) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;
9) $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$;
10) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0$.

861.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 2x + 2\sin x = 0$;
2) $\sin 2x - \cos x = 2\sin x - 1$;
3) $1 - \cos 8x = \sin 4x$;
4) $\sin 2x + \sin 4x + \cos x = 0$;
5) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;
6) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$;
7) $\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0$;
8) $\sqrt{2}\cos 5x + \sin 3x - \sin 7x = 0$.

862.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{3x}{2}=1$;
2) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1{,}5$;
3) $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$;
4) $1 - \cos x = \mathrm{tg}\, x - \sin x$;
5) $\sin x + \sin 3x = 4\cos^2 x$;
6) $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$;
7) $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x - \sin^2 4x = 0$;
8) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$;
9) $\cos 9x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)$.

863.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^2 6x + \cos^2 5x = 1$;
2) $\cos^2 x - \sin^2 2x + \cos^2 3x = \frac{1}{2}$;
3) $\cos 2x - \cos 4x = \sin 6x$;
4) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x$;
5) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$;
6) $\sin 6x = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right)$.

Вправи для повторення

864. Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{\sqrt[4]{25\sqrt[3]{5}}}{\sqrt[3]{5}}$;
2) $\frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}{(\sqrt[4]{9}-1)(\sqrt[4]{9}+1)}$.

865. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{3}{x+2} \geqslant \frac{5}{2-x}$;
2) $\frac{2}{1-2x} \leqslant \frac{3}{x+5}$.

866. У двох сплавах маси міді і цинку відносяться як 5 : 2 і 3 : 4. Скільки потрібно взяти кілограмів першого сплаву і скільки другого, щоб, сплавивши їх, отримати 28 кг нового сплаву з рівним вмістом міді й цинку?

Приклади розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\cos x + \sin x + \sin x \cos x = 1$.

Розв'язання. Нехай $\cos x + \sin x = t$. Тоді $\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = t^2$; $\sin x \cos x = \frac{t^2-1}{2}$. Дане в умові рівняння набуває вигляду $t + \frac{t^2-1}{2} = 1$, або $t^2 + 2t - 3 = 0$. Звідси $t_1 = -3$, $t_2 = 1$.

З урахуванням заміни отримуємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l}\cos x + \sin x = -3,\\ \cos x + \sin x = 1.\end{array}\right.$$

Оскільки $|\sin x| \leqslant 1$ і $|\cos x| \leqslant 1$, то перше рівняння сукупності коренів не має.

Залишається розв'язати рівняння $\cos x + \sin x = 1$. Маємо:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$$

$$x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi n;\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=2\pi n,\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n.\end{array}\right.$$

Відповідь: $2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\cos 3x+\sin x\sin 2x=0$.

Розв'язання. Формула $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ дозволяє перетворити дане рівняння таким чином:

$$\cos 3x+\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)=0.$$

Звідси

$$\cos 3x+\cos x=0;$$

$$2\cos 2x\cos x=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos 2x=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\cos\frac{x^2-8x}{5}=x^2+1$.

Розв'язання. Оскільки при будь-якому значенні x виконуються нерівності $\cos\frac{x^2-8x}{5}\leqslant 1$ і $x^2+1\geqslant 1$, то коренями даного рівняння є ті значення змінної x, при яких значення його лівої і правої частин одночасно дорівнюють 1. Отже, дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\cos\frac{x^2-8x}{5}=1,\\ x^2+1=1.\end{cases}$

Друге рівняння системи має єдиний корінь $x = 0$. Він також задовольняє перше рівняння системи.

Відповідь: 0.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$(1 + \cos 2x) + \sin 2x + (\sin x + \cos x) = 0.$$

Тепер можна записати:

$$2\cos^2 x + 2\sin x \cos x + (\sin x + \cos x) = 0;$$
$$2\cos x\,(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x) = 0;$$
$$(2\cos x + 1)(\sin x + \cos x) = 0.$$

Отримуємо сукупність $\left[\begin{array}{l}\cos x = -\frac{1}{2},\\ \sin x + \cos x = 0.\end{array}\right.$ Звідси

$$\left[\begin{array}{l}x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Вправи

867. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$;

2) $2\sin 2x = 3(\sin x + \cos x)$.

868. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 3x \cos 2x = \sin 5x$;

2) $2\cos(x + 20°)\cos x = \cos 40°$.

869. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^3 4x + \cos^3 4x = 1 - 0{,}5 \sin 8x$;

2) $\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 5x$;

3) $\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2}(\cos^4 2x - \sin^4 2x)$.

870. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\cos\frac{x^2 + 2x}{6} = x^2 + 4x + 6$; 2) $\sin\frac{\pi x}{4} = x^2 - 4x + 5$.

37. Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей

Нерівності виду $f(x) > a$, $f(x) < a$, де f — одна з чотирьох тригонометричних функцій, називають **найпростішими тригонометричними нерівностями**.

Підґрунтям для розв'язування цих нерівностей є таке наочне міркування: множиною розв'язків нерівності $f(x) > g(x)$ є множина тих значень змінної x, при яких точки графіка функції f розміщені вище за відповідні точки графіка функції g (рис. 147). На цьому рисунку проміжок $(a; b)$ — множина розв'язків нерівності $f(x) > g(x)$.

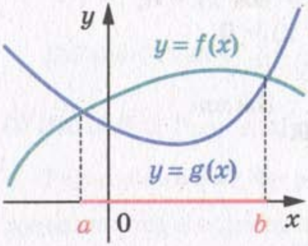


Рис. 147

Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей проводитимемо за такою схемою: знайдемо розв'язки на проміжку, довжина якого дорівнює періоду даної функції; усі інші розв'язки відрізняються від знайдених на Tn, де T — період даної функції, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Розглянемо приклади.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$.

Розв'язання. На рисунку 148 зображено графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$. Оскільки $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, то графіки перетинаються в точках з абсцисами $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

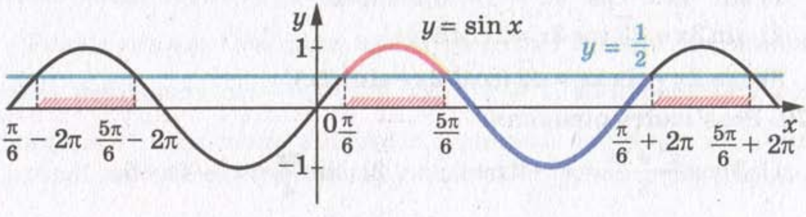


Рис. 148

Розв'яжемо цю нерівність на проміжку $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}+2\pi\right]$ завдовжки в період функції $y = \sin x$.

На цьому проміжку графік функції $y = \sin x$ знаходиться вище за графік функції $y=\frac{1}{2}$ при $x\in\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ (рис. 148).

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. Таке об'єднання прийнято позначати так: $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$.

Відповідь записують в один з трьох способів:

$$\frac{\pi}{6}+2\pi n < x < \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{або } \left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{або } \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right).$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. На рисунку 149 зображено графіки функцій $y = \sin x$ і $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ та позначено абсциси точок їх перетину.

Оскільки $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, то розв'яжемо цю нерівність на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}+2\pi\right]$, тобто на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$.

На проміжку, що розглядається, графік функції $y = \sin x$ розміщений нижче від графіка функції $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ при $x\in\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right)$ (рис. 149).

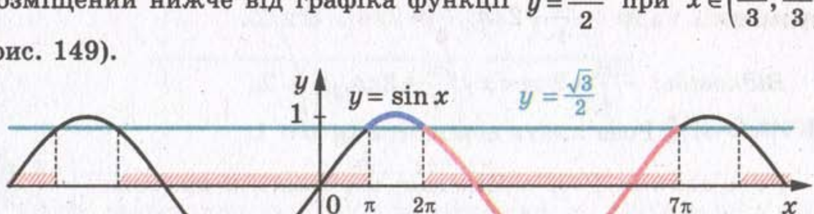


Рис. 149

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{7\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\frac{2\pi}{3}+2\pi n < x < \frac{7\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

У прикладах 1 і 2, розв'язуючи нерівності виду $\sin x > a$ і $\sin x < a$, ми розглядали проміжок виду $[\arcsin a; \arcsin a + 2\pi]$. Зрозуміло, що розв'язування можна провести, розглядаючи будь-який інший проміжок, довжина якого дорівнює 2π, наприклад проміжок $[-2\pi + \arcsin a; \arcsin a]$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. Маємо: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$. Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $\left[-2\pi+\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, тобто на проміжку $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

На цьому проміжку графік функції $y = \cos x$ розміщений вище за графік функції $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x \in \left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$ (рис. 150).

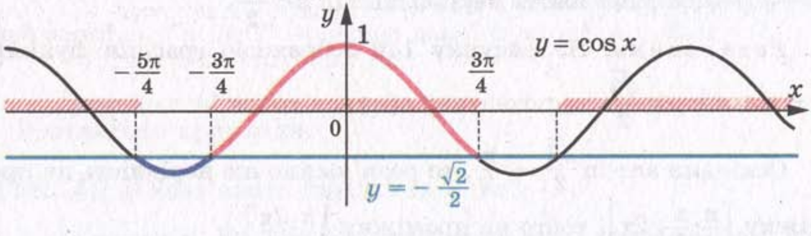


Рис. 150

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n < x < \frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg} x < 1$.

Розв'язання. Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Оскільки $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, то на проміжку, що розглядається, графік функції $y = \operatorname{tg} x$ розміщений нижче від графіка функції $y = 1$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ (рис. 151).

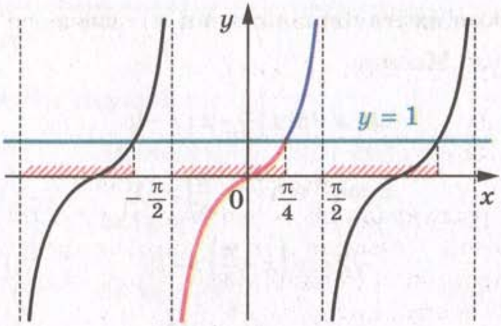


Рис. 151

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < \frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\operatorname{ctg} x \geqslant -\sqrt{3}$.

Розв'язання. Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $(0; \pi)$.

Оскільки $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$, то на проміжку, що розглядається, графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ розміщений не нижче від графіка функції $y=-\sqrt{3}$ при $x \in \left(0; \frac{5\pi}{6}\right]$ (рис. 152).

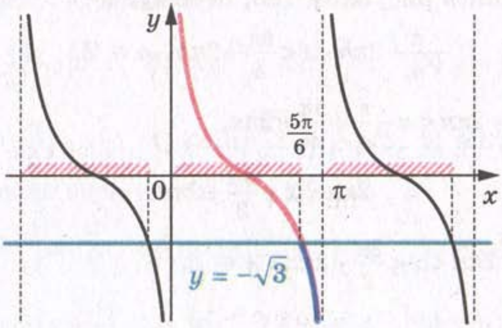


Рис. 152

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(\pi n; \frac{5\pi}{6}+\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\pi n < x \leqslant \frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 6 **Розв'яжіть нерівність $\sin x - \cos x > -1$.**

Розв'язання. **Маємо:**

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > -1;$$

$$2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > -1;$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > -1;$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Нехай $x - \frac{\pi}{4} = t$. **Тоді** $\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

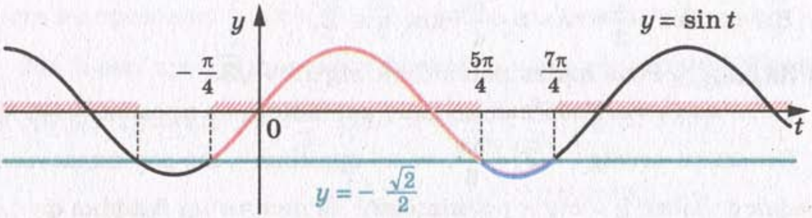


Рис. 153

Скориставшись рисунком 153, отримуємо:

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Звідси $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x - \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n;$

$$2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n.$$

Відповідь: $2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$

?

1. Які нерівності називають найпростішими тригонометричними нерівностями?
2. Поясніть, за якою схемою ведеться розв'язування тригонометричних нерівностей.

Вправи

871.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x < \frac{1}{2}$; 4) $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $\operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}$; 9) $\sin x < \frac{1}{6}$;

2) $\sin x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\operatorname{tg} x < -1$; 8) $\operatorname{ctg} x > -1$; 10) $\operatorname{tg} x > 3$.

3) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\operatorname{tg} x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$;

872.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $\operatorname{ctg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 9) $\cos x > \frac{3}{5}$;

2) $\sin x > -\frac{1}{2}$; 5) $\operatorname{tg} x \geqslant -1$; 8) $\operatorname{ctg} x \leqslant 1$; 10) $\operatorname{ctg} x < 2$.

3) $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$; 6) $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$;

873.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{4}\right) < \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{ctg} 5x > 1$; 4) $\cos(-3x) > \frac{1}{3}$.

874.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin \frac{x}{3} < \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) > \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} 2x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\cos 4x < \frac{1}{4}$.

875.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leqslant \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > \frac{1}{\sqrt{3}}$; 5) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > -\frac{1}{2}$; 4) $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \leqslant \sqrt{3}$; 6) $\sin(1 - 2x) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

876.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geqslant \sqrt{3}$; 3) $2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) < 1$; 5) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{1}{2}$;

2) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\sin\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

877.°° Розв'яжіть нерівність:

1) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \cos x < \frac{1}{2}$; 3) $-2 < \operatorname{tg} x < 3$;

2) $-\frac{1}{2} \leqslant \sin x < \frac{1}{4}$; 4) $-1 \leqslant \operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}$.

878.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x \leqslant -\frac{1}{2}$;
3) $-4 < \operatorname{ctg} x < 1{,}5$;

2) $\frac{1}{3} \leqslant \sin x < \frac{1}{2}$;
4) $-\frac{\sqrt{3}}{3} < \operatorname{tg} x < 1$.

Вправи для повторення

879. Скоротіть дріб:

1) $\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt{a}}$;
2) $\frac{\sqrt[4]{m^2 n}+3\sqrt[4]{mn^2}}{\sqrt{m}+6\sqrt[4]{mn}+9\sqrt{n}}$;
3) $\frac{a+8}{\sqrt[3]{a^2}-4}$.

880. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^2} \leqslant 0$;
2) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8} \geqslant 0$;
3) $\frac{(x+1)(x-3)^2}{x+4} \leqslant 0$.

881. З натуральних чисел від 1 до 32 включно учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 32?

Приклади розв'язування більш складних тригонометричних нерівностей

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg}^2 x < 3$.

Розв'язання. Маємо: $-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.

На рисунку 154 зображено графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}$.

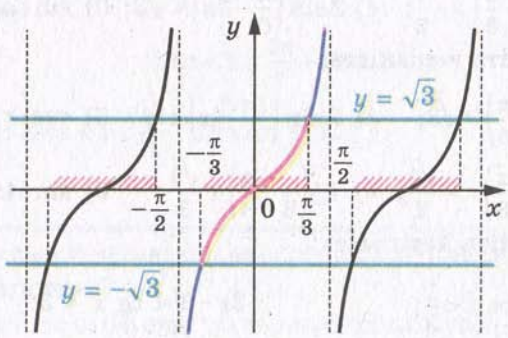


Рис. 154

Оскільки $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$, то на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ графік функції $y=\operatorname{tg}x$ розміщений нижче від графіка функції $y=\sqrt{3}$ і вище за графік функції $y=-\sqrt{3}$ при $x\in\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$.

Звідси отримуємо відповідь.

Відповідь: $-\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\sin^4 x+\cos^4 x<\frac{5}{8}$.

Розв'язання. Маємо: $(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x<\frac{5}{8}$;

$$1-\frac{1}{2}\cdot 4\sin^2 x\cos^2 x<\frac{5}{8};\ \frac{1}{2}\sin^2 2x>\frac{3}{8};$$

$$\frac{1-\cos 4x}{2}>\frac{3}{4};\quad \cos 4x<-\frac{1}{2}.$$

Нехай $4x=t$. Отримуємо $\cos t<-\frac{1}{2}$.

Звідси $\frac{2\pi}{3}+2\pi n<t<\frac{4\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ (рис. 155).

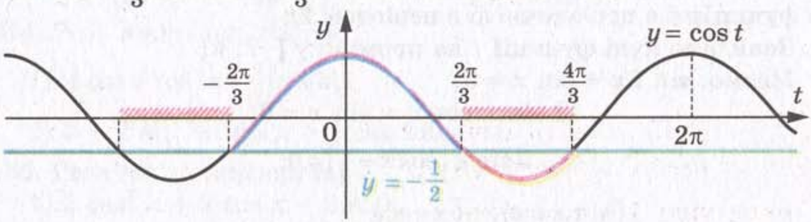


Рис. 155

Тоді $\frac{2\pi}{3}+2\pi n<4x<\frac{4\pi}{3}+2\pi n$;

$$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $-5\sin x+\cos 2x<3$.

Розв'язання. Маємо: $-5\sin x+1-2\sin^2 x<3$;

$$2\sin^2 x+5\sin x+2>0.$$

Зробимо заміну $\sin x=t$, $|t|\leqslant 1$. Маємо:

$$2t^2+5t+2>0;\ t<-2 \text{ або } t>-\frac{1}{2}.$$

Оскільки $|t| \leqslant 1$, то $\sin x > -\frac{1}{2}$. Звідси

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$

У пункті 8 ви ознайомились із методом інтервалів для розв'язування раціональних нерівностей. Цей метод можна використовувати і при розв'язуванні тригонометричних нерівностей.

Для розв'язування нерівності виду $f(x) > 0$ (або $f(x) < 0$), де f — періодична функція, достатньо, користуючись методом інтервалів, знайти розв'язки на проміжку, довжина якого дорівнює періоду функції f. Потім записати відповідь з урахуванням періодичності. В аналогічний спосіб розв'язуються нестрогі нерівності $f(x) \geqslant 0$ і $f(x) \leqslant 0$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\sin 2x + \sin x > 0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sin 2x + \sin x$, $D(f) = \mathbb{R}$. Оскільки для всіх $x \in D(f)$ виконуються рівності $f(x - 2\pi) = f(x + 2\pi) = f(x)$ (переконайтеся в цьому самостійно), то функція f є періодичною з періодом 2π.

Знайдемо нулі функції f на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Маємо: $\sin 2x + \sin x = 0$;

$$2 \sin x \cos x + \sin x = 0;$$

$$2 \sin x \left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

На проміжку $[-\pi; \pi]$ функція f має п'ять нулів: $-\pi$, $-\frac{2\pi}{3}$, 0, $\frac{2\pi}{3}$, π. Ці числа розбивають указаний проміжок на проміжки знакосталості (рис. 156).

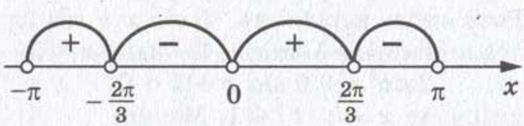


Рис. 156

Функція f набуває додатних значень на проміжках $\left(-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right)$ і $\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

З урахуванням періодичності функції f запишемо відповідь.

Відповідь: $-\pi + 2\pi n < x < -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ або $2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вправи

882. Розв'яжіть нерівність:

1) $|\cos x| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $|\sin 2x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $|\operatorname{tg} x| < \sqrt{3}$;

4) $|\operatorname{ctg} x| > 5$.

883. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} > \frac{1}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \geqslant \sqrt{3}$;

3) $\sin x \geqslant \cos x$;

4) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} > \sqrt{3}$.

884. Розв'яжіть нерівність:

1) $4 \cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}$;

2) $3 + 2 \sin 3x \sin x > 3 \cos 2x$.

885. Розв'яжіть нерівність:

1) $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 < 0$;

2) $\operatorname{tg}^2 x + (2 - \sqrt{3}) \operatorname{tg} x - 2\sqrt{3} < 0$;

3) $2 \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3 \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) > -1$;

4) $\operatorname{tg} x \geqslant 2 \operatorname{ctg} x$;

5) $\sin 2x - \sin 3x > 0$.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 4

1. Чому дорівнює значення виразу $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos 0$?

А) $\frac{\pi}{3}$; Б) $\frac{\pi}{6}$; В) $\frac{5\pi}{6}$; Г) $\frac{2\pi}{3}$.

2. Укажіть правильну нерівність:

А) $\arcsin 1 < \operatorname{arctg} 1$; В) $\operatorname{arctg} 1 < \operatorname{arcctg} 1$;

Б) $\arccos 1 < \operatorname{arctg} 1$; Г) $\arcsin 1 < \arccos 1$.

3. Яке з наведених рівнянь не має коренів?

А) $\sin x=\frac{2}{3}$; Б) $\cos x=\frac{2}{3}$; В) $\sin x=\frac{3}{2}$; Г) $\operatorname{tg} x=\frac{3}{2}$.

4. Скільки коренів має рівняння $\sin x = \sin 1$?

А) жодного; Б) один; В) два; Г) безліч.

5. Знайдіть корені рівняння $\cos\frac{x}{2}=1$.

А) $4\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; В) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

Б) $2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; Г) $\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

6. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$.

А) $-\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; В) $\frac{5\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

Б) $\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; Г) $\frac{7\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

7. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} 3x = 0$.

А) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; В) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$;

Б) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; Г) $\frac{\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$.

8. Знайдіть корені рівняння $\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.

А) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; В) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

Б) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; Г) $\pm\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

9. Розв'яжіть рівняння $\sin 2x=-\frac{1}{2}$.

А) $\pm\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; В) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$;

Б) $\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$; Г) $(-1)^{k}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

10. Скільки коренів рівняння $\cos x = 0$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$?

А) один; Б) два; В) три; Г) чотири.

11. Розв'яжіть рівняння $\frac{\sin 2x}{\cos x} = 0$.

А) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; Б) πk, $k \in \mathbb{Z}$; В) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; Г) коренів немає.

12. Розв'яжіть рівняння $\frac{\cos x}{\sin 2x} = 0$.

А) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; Б) πk, $k \in \mathbb{Z}$; В) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; Г) коренів немає.

13. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\sin^2 2x - \cos^2 2x = 1.$$

А) $-\pi$; Б) $-\frac{\pi}{2}$; В) $-\frac{\pi}{4}$; Г) $-\frac{\pi}{8}$.

14. Яка з наведених нерівностей не має розв'язків?

А) $\sin x > \frac{\pi}{2}$; Б) $\sin x < \frac{\pi}{2}$; В) $\cos x > -\frac{\pi}{2}$; Г) $\operatorname{tg} x < \frac{\pi}{2}$.

15. Укажіть правильне твердження:

А) функція $y = \operatorname{arctg} x$ є парною;
Б) функція $y = \operatorname{arctg} x$ є спадною;
В) функція $y = \arcsin x$ є непарною;
Г) функція $y = \arccos x$ є зростаючою.

16. Розв'яжіть рівняння $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$.

А) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; В) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

Б) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; Г) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

17. Розв'яжіть рівняння $\sin x + \cos x = 0$.

А) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; В) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

Б) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; Г) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

18. Розв'яжіть нерівність $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

А) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; В) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

Б) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; Г) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 4

1. Чому дорівнює значення виразу $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos 0$?

А) $\frac{\pi}{3}$; Б) $\frac{\pi}{6}$; В) $\frac{5\pi}{6}$; Г) $\frac{2\pi}{3}$.

2. Укажіть правильну нерівність:

А) $\arcsin 1 < \operatorname{arctg} 1$; В) $\operatorname{arctg} 1 < \operatorname{arcctg} 1$;
Б) $\arccos 1 < \operatorname{arctg} 1$; Г) $\arcsin 1 < \arccos 1$.

3. Яке з наведених рівнянь не має коренів?

А) $\sin x=\frac{2}{3}$; Б) $\cos x=\frac{2}{3}$; В) $\sin x=\frac{3}{2}$; Г) $\operatorname{tg} x=\frac{3}{2}$.

4. Скільки коренів має рівняння $\sin x = \sin 1$?

А) жодного; Б) один; В) два; Г) безліч.

5. Знайдіть корені рівняння $\cos\frac{x}{2}=1$.

А) $4\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; В) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;
Б) $2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; Г) $\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

6. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$.

А) $-\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; В) $\frac{5\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;
Б) $\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; Г) $\frac{7\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

7. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} 3x = 0$.

А) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; В) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$;
Б) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; Г) $\frac{\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$.

8. Знайдіть корені рівняння $\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.

А) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; В) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;
Б) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; Г) $\pm\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

9. Розв'яжіть рівняння $\sin 2x=-\frac{1}{2}$.

А) $\pm\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; В) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$;
Б) $\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$; Г) $(-1)^{k}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

10. Скільки коренів рівняння $\cos x = 0$ належать проміжк $\left[-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$?

А) один; Б) два; В) три; Г) чотири.

11. Розв'яжіть рівняння $\frac{\sin 2x}{\cos x} = 0$.

А) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; Б) πk, $k \in \mathbb{Z}$; В) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; Г) коренів немає

12. Розв'яжіть рівняння $\frac{\cos x}{\sin 2x} = 0$.

А) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; Б) πk, $k \in \mathbb{Z}$; В) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; Г) коренів немає

13. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\sin^2 2x - \cos^2 2x = 1.$$

А) $-\pi$; Б) $-\frac{\pi}{2}$; В) $-\frac{\pi}{4}$; Г) $-\frac{\pi}{8}$.

14. Яка з наведених нерівностей не має розв'язків?

А) $\sin x > \frac{\pi}{2}$; Б) $\sin x < \frac{\pi}{2}$; В) $\cos x > -\frac{\pi}{2}$; Г) $\operatorname{tg} x < \frac{\pi}{2}$.

15. Укажіть правильне твердження:

А) функція $y = \operatorname{arctg} x$ є парною;
Б) функція $y = \operatorname{arctg} x$ є спадною;
В) функція $y = \arcsin x$ є непарною;
Г) функція $y = \arccos x$ є зростаючою.

16. Розв'яжіть рівняння $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$.

А) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; В) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

Б) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; Г) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

17. Розв'яжіть рівняння $\sin x + \cos x = 0$.

А) $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; В) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

Б) $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; Г) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

18. Розв'яжіть нерівність $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

А) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; В) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Б) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; Г) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

ПІДСУМКИ

Вивчивши матеріал параграфу «Тригонометричні рівняння і нерівності», ви дізналися, що:

- **арккосинусом числа b, де $|b| \leqslant 1$, називають таке число α з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює b. Для арккосинуса числа b використовують позначення $\arccos b$;**
- **арксинусом числа b, де $|b| \leqslant 1$, називають таке число α з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює b. Для арксинуса числа b використовують позначення $\arcsin b$;**
- **арктангенсом числа b називають таке число α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює b. Для арктангенса числа b використовують позначення $\mathrm{arctg}\, b$;**
- **арккотангенсом числа b називають таке число α з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює b. Для арккотангенса числа b використовують позначення $\mathrm{arcctg}\, b$;**
- **формула коренів рівняння $\cos x = b$, $|b| \leqslant 1$, має вигляд**

  $$x = \pm\arccos b + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

  Формула коренів рівняння $\sin x = b$, $|b| \leqslant 1$, має вигляд

  $$x = (-1)^n \arcsin b + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

  У випадках, коли $b = 1$, або $b = 0$, або $b = -1$, зручно користуватися таблицею:

$\cos x = 1$	$\cos x = 0$	$\cos x = -1$
$x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = 1$	$\sin x = 0$	$\sin x = -1$
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

  Формула коренів рівняння $\mathrm{tg}\, x = b$ має вигляд

  $$x = \mathrm{arctg}\, b + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

  Формула коренів рівняння $\mathrm{ctg}\, x = b$ має вигляд

  $$x = \mathrm{arcctg}\, b + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

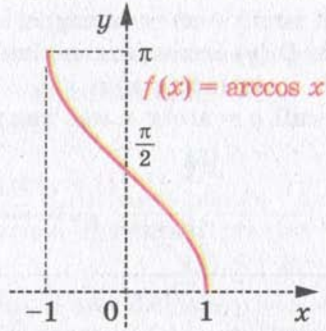
- **функція $y = \arccos x$ має такі властивості:**
  - $D(y) = [-1; 1]$;
  - $E(y) = [0; \pi]$;
  - **число 1 є нулем даної функції;**

- функція є спадною;
- функція не є ні парною, ні непарною;
- для всіх $x \in D(y)$ виконуються рівності

$$\cos(\arccos x) = x;$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

- графік функції $y = \arccos x$ має вигляд



➤ функція $y = \arcsin x$ має такі властивості:

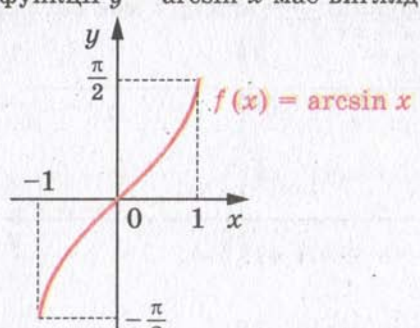
- $D(y) = [-1; 1]$;
- $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
- число 0 є нулем даної функції;
- функція є зростаючою;
- функція є непарною:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x;$$

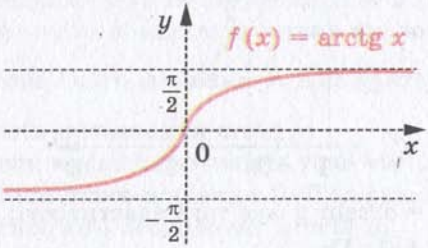
- для всіх $x \in D(y)$ виконується рівність

$$\sin(\arcsin x) = x;$$

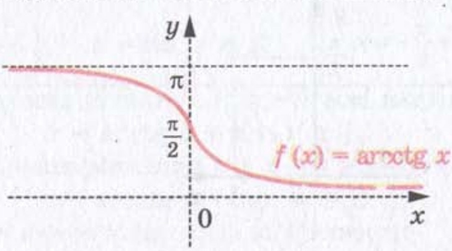
- графік функції $y = \arcsin x$ має вигляд



- функція $y = \operatorname{arctg} x$ має такі властивості:
  - $D(y) = \mathbb{R}$;
  - $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
  - число 0 є нулем даної функції;
  - функція є зростаючою;
  - функція є непарною:
    $$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$$
  - для всіх $x \in D(y)$ виконується рівність
    $$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x;$$
  - графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ має вигляд



- функція $y = \operatorname{arcctg} x$ має такі властивості:
  - $D(y) = \mathbb{R}$;
  - $E(y) = (0; \pi)$;
  - функція не має нулів;
  - функція є спадною;
  - функція не є ні парною, ні непарною;
  - для всіх $x \in D(y)$ виконуються рівності
    $$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x;$$
    $$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$
  - графік функції $y = \operatorname{arcctg} x$ має вигляд



38. Вправи для повторення курсу алгебри та початків аналізу 10 класу

1. Множини. Операції над множинами

886. Яка множина є перетином множин A і B, якщо A — множина прямокутників, B — множина описаних чотирикутників?

887. Яка множина є перетином множин A і B, якщо A — множина ромбів, B — множина вписаних чотирикутників?

888. Замість знака * запишіть знак $\cup$ або $\cap$ так, щоб утворилася правильна рівність:

1) $A * \varnothing = A$;   2) $A * \varnothing = \varnothing$.

889. Відомо, що $A \subset B$. Замість знака * запишіть знак $\cup$ або $\cap$ так, щоб утворилася правильна рівність:

1) $A * B = B$;   2) $A * B = A$.

890. У класі 35 учнів. З них 20 відвідують математичний гурток, 11 — гурток з фізики, а 10 учнів не відвідують ці гуртки. Скільки фізиків захоплюються математикою?

2. Функції, рівняння, нерівності

891. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\sqrt{x-5}$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$;

3) $f(x)=\dfrac{9}{x^2-5}$;

4) $f(x)=\dfrac{14}{x^2+4}$;

5) $f(x)=\dfrac{7x+13}{x^2-7x}$;

6) $f(x)=\dfrac{x}{|x|-3}$;

7) $f(x)=\dfrac{9}{|x|+5}$;

8) $f(x)=\dfrac{13}{|x|+x^2}$;

9) $f(x)=\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}$;

10) $f(x)=\sqrt{x-1}+\dfrac{x+3}{x-10}$;

11) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$;

12) $f(x)=\sqrt{x-9}+\dfrac{6}{\sqrt{8-x}}$;

13) $f(x)=\sqrt{x+2}+\dfrac{x-7}{x^2-4}$;

14) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+3}}+\dfrac{5x-4}{x^2-8x+7}$;

15) $f(x)=\sqrt{-x^2-8x+9}$;

16) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+6x-7}}+\dfrac{1}{x^2-2x}$;

17) $f(x)=\sqrt{x-6}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2-4x-12}}$;

18) $f(x)=\dfrac{6}{\sqrt{15x-3x^2}}+\dfrac{x-5}{x^2-9}$.

892. **Знайдіть область значень функції:**

1) $f(x)=\sqrt{x}+1$;
2) $f(x)=\sqrt{x}-2$;
3) $g(x)=3-x^2$;
4) $f(x)=x^2+2$;
5) $\varphi(x)=5+|x|$;
6) $h(x)=\sqrt{x^2+4}-5$;
7) $f(x)=\sqrt{-x^2}$;
8) $f(x)=\sqrt{x-3}-\sqrt{3-x}$;
9) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$;
10) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

893. **Знайдіть область визначення і побудуйте графік функції:**

1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{3-x}$;
3) $f(x)=\dfrac{4x-20}{x^2-5x}$;
4) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-1}$.

894. **Знайдіть нулі функції:**

1) $f(x)=\sqrt{x+7}$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{x-1}$;
3) $f(x)=\sqrt{x^2-6}$;
4) $f(x)=(x-3)\sqrt{x-4}$.

895. **Побудуйте графік функції:**

1) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{8}{x}, & \text{якщо } x\leqslant -4,\\ -x-2, & \text{якщо } -4<x<2,\\ -\dfrac{8}{x}, & \text{якщо } x\geqslant 2;\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}5, & \text{якщо } x\leqslant -2,\\ x^2-2x-3, & \text{якщо } -2<x<4,\\ 2x-3, & \text{якщо } x\geqslant 4.\end{cases}$

Укажіть проміжки зростання і проміжки спадання функції.

896. **Задайте формулою яку-небудь функцію, область визначення якої:**

1) складається з одного числа;
2) складається з двох чисел;
3) проміжок $[0; 1]$.

897. **Задайте формулою яку-небудь функцію, область значень якої:**

1) складається з одного числа;
2) складається з двох чисел;
3) проміжок $(1; 2)$.

898. Побудуйте графік якої-небудь функції, область визначен якої — проміжок $[-2; 6]$, область значень — проміжок $[-1;$ і яка спадає на проміжку $[-2; 1]$, зростає на проміжку $[1;$ набуває додатних значень на проміжку $[-2; 0)$ і від'ємних проміжку $(0; 6]$.

899. На рисунку 157 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Користуючись графіком, установіть:

1) скільки коренів має рівняння $f(x) = 0$;
2) при яких значеннях a рівняння $f(x) = a$ має хоча б один корінь;
3) при яких значеннях a рівняння $f(x) = a$ має рівно два корені;
4) при яких значеннях a рівняння $f(x) = a$ має рівно один корінь.

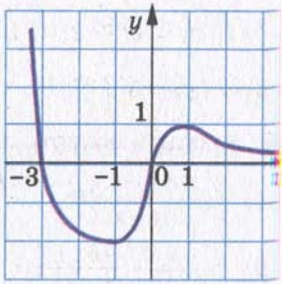


Рис. 157

900. Чи є парною або непарною функція, задана формулою:

1) $f(x) = 7x^6$;
2) $f(x) = 3x^5 - 2x^7$;
3) $f(x)=\dfrac{x^2+6}{x^2-5}$;
4) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$;
5) $f(x) = x^2 - x + 1$;
6) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-x}$;
7) $f(x) = (x-2)^4 - (x+2)^4$;
8) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{2x+6}$;
9) $f(x) = -x^3\,|x|$;
10) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^3-4x}$?

901. Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 3x + 9$;
2) $y=\dfrac{4}{x-6}$;
3) $y=\sqrt[5]{1-2x}$;
4) $y=2-\sqrt{x-4}$;
5) $y = x^2$, $x \in [1; +\infty)$;
6) $y = x^6$, $x \in (-\infty; -2]$.

902. Чи є правильним твердження:

1) якщо кожна пряма, паралельна осі абсцис, перетинає гра функції не більш ніж в одній точці, то дана функція оборот
2) якщо функція є непарною, то вона оборотна;
3) якщо функція є парною, то вона оборотна;
4) якщо оборотна функція є непарною, то обернена до функція теж непарна;
5) функції $y = x^3$ і $y=\sqrt[3]{x}$ є взаємно оберненими;
6) функції $y = x^4$ і $y=\sqrt[4]{x}$ є взаємно оберненими?

903. Розв'яжіть нерівність:

1) $(2x-3)(3x+2)(x-9)\leqslant 0$;

2) $(6+x)(x+2)(4-x)>0$;

3) $(x+4{,}8)(1-x)(5-x)\leqslant 0$;

4) $\frac{x-1{,}2}{x-8{,}4}\geqslant 0$;

5) $\frac{5-x}{x-2}\geqslant 0$;

6) $\frac{2x+1{,}6}{2-5x}\leqslant 0$;

7) $\frac{(x+11)(x+4)}{x-10}\geqslant 0$;

8) $\frac{x-2{,}5}{(x+6)(x-8)}\leqslant 0$.

904. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\frac{x^2-5x+4}{x^2+6x+8}>0$;

2) $\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-9}<0$;

3) $x+\frac{1}{x}\geqslant\frac{5}{2}$;

4) $\frac{3x+1}{x}\leqslant 1$;

5) $\frac{5x-1}{x}\geqslant 2$;

6) $\frac{x^3-8}{x^3-1}\leqslant\frac{x-2}{x-1}$;

7) $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}<4$;

8) $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+2}\geqslant 2$.

905. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{(x+3)^2}{(x+2)(x-5)}<0$;

2) $\frac{(x+3)^2}{(x+2)(x-5)}\leqslant 0$;

3) $\frac{(x+2)(x-5)}{(x-3)^2}\leqslant 0$;

4) $\frac{x-5}{(x+2)(x-3)^2}<0$;

5) $\frac{(2x+1)^2(x-2)}{x^5(x+1)^4}\geqslant 0$;

6) $\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-5x+6}>0$.

906. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\frac{(x^2-9)\sqrt{2-x}}{2x+3}\geqslant 0$;

2) $\frac{(x+1)^2\sqrt{x+3}}{16-x^2}\leqslant 0$.

3. Степенева функція

907. Знайдіть значення виразу:

1) $4\left(-\sqrt[7]{5}\right)^7-0{,}6\sqrt[3]{1000}+\left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{640}\right)^4$;

2) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}\cdot\sqrt[5]{-\frac{32}{243}}+\left(-3\sqrt[3]{6}\right)^3$;

3) $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{486}}+\sqrt[6]{3^4\cdot 7}\cdot\sqrt[6]{3^2\cdot 7^5}$;

4) $\sqrt[3]{10+\sqrt{73}}\cdot\sqrt[3]{10-\sqrt{73}}$;

5) $\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}$;

6) $\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt[4]{12}}\cdot\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{12}+\sqrt{2}}$.

908. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt[4]{3x-5}$; 2) $y=\sqrt[6]{-x}$; 3) $y=\sqrt[5]{x-4}$; 4) $y=\sqrt[8]{6x-x^2}$.

909. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{a^6}$, якщо $a \geqslant 0$;
2) $\sqrt[4]{b^4}$, якщо $b \leqslant 0$;
3) $\sqrt[7]{c^7}$;
4) $\sqrt[4]{81m^8n^{20}p^4}$, якщо $n \leqslant 0$, $p \geqslant 0$;
5) $1{,}4x\sqrt[8]{256x^{24}}$, якщо $x \leqslant 0$;
6) $\dfrac{\sqrt[12]{a^{12}b^{24}c^{36}}}{abc}$, якщо $a < 0$, $c < 0$.

910. Побудуйте графік функції:

1) $y=\left(\sqrt[7]{x-2}\right)^7$;
2) $y=\sqrt[7]{(x-2)^7}$;
3) $y=\left(\sqrt[8]{x-2}\right)^8$;
4) $y=\sqrt[8]{(x-2)^8}$.

911. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{\left(2-\sqrt{7}\right)^4}-\sqrt{7}$;
2) $\sqrt[5]{\left(7-\sqrt{35}\right)^5}-\sqrt[6]{\left(\sqrt{35}-6\right)^6}$.

912. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{a^{11}}$;
2) $\sqrt[3]{-b^{16}}$;
3) $\sqrt[4]{162m^{10}n^7}$;
4) $\sqrt[5]{96x^{12}y^{16}}$;
5) $\sqrt[4]{-243y^5}$;
6) $\sqrt[6]{a^{14}b^9}$.

913. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{4}}$;
2) $\dfrac{12}{\sqrt[4]{27}}$;
3) $\dfrac{6}{\sqrt[5]{8}}$;
4) $\dfrac{14}{\sqrt[3]{-49}}$;
5) $\dfrac{9}{4-\sqrt{7}}$;
6) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$;
7) $\dfrac{6}{2-\sqrt[3]{5}}$;
8) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}$.

914. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a\sqrt{a}}$; 2) $\sqrt[3]{b\sqrt[3]{b^2}}$; 3) $\sqrt[5]{c\sqrt[3]{c}}$; 4) $\sqrt[12]{8}$; 5) $\sqrt[4]{9\sqrt[3]{9}}$; 6) $\sqrt[6]{2\sqrt[5]{2}}$.

915. Порівняйте числа:

1) $\sqrt[6]{80}$ і $\sqrt[3]{9}$; 2) $\sqrt[3]{6}$ і $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt[4]{15}$ і $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt[4]{27}$ і $\sqrt[3]{9}$.

916. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[6]{a}-2}{\sqrt[3]{a}-4}$; 3) $\dfrac{m-\sqrt[4]{m^3}}{\sqrt{m}-\sqrt[4]{m}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9}{x-27}$.

917. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=x^{\frac{5}{6}}$; 2) $y=x^{-0{,}3}$; 3) $y=(x+6)^{2{,}6}$; 4) $y=(x^2-6x-7)^{-\frac{1}{8}}$.

918. Обчисліть значення виразу:

1) $3^{1{,}2}\cdot 3^{-0{,}7}\cdot 3^{1{,}5}$;
2) $11^{-\frac{4}{3}}\cdot 11^{-\frac{3}{4}}\cdot 11^{\frac{1}{12}}$;

3) $36^{0,7}\cdot 6^{-0,4}$;

4) $\dfrac{27^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}$;

5) $0,125^{-\frac{1}{3}}+0,81^{-\frac{1}{2}}-0,216^{-\frac{2}{3}}$;

6) $\left(0,027^{\frac{4}{3}}\right)^{-0,25}+256^{0,75}-\left(\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{3}\right)^{-1}$;

7) $625^{0,25}-\left(\operatorname{ctg}^2\dfrac{\pi}{4}\right)^{-\frac{3}{7}}+\left(\sqrt[7]{100}\right)^{3,5}$;

8) $\left(\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}+9^{-\frac{1}{4}}\right)\left(\left(\sqrt{32}\right)^{-\frac{2}{5}}-\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)$;

9) $\left(9^{\frac{1}{4}}-\left(0,5\sqrt[3]{0,5}\right)^{-0,75}\right)\left(81^{0,125}+\left(\cos^2\dfrac{\pi}{4}\right)^{-1}\right)$;

10) $\left(4^{0,25}+\left(\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^{-1,5}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\left(4^{\frac{1}{4}}-\left(2\sqrt{2}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)$.

919. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{81a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}{16c^{-\frac{4}{3}}}\right)^{-\frac{3}{4}}$;

2) $\left(\dfrac{125a^{-\frac{3}{2}}b^{-\frac{3}{2}}}{64c^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}$;

3) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}\right)^{-6}$;

4) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}\right)^{-4}$.

920. Доведіть тотожність:

1) $\left(\dfrac{m-n}{m^{\frac{3}{4}}+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\left(\dfrac{n}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}=m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{4}}$;

2) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}=b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}$;

3) $\left(\dfrac{9}{a+8}-\dfrac{a^{\frac{1}{3}}+2}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+4}\right)\cdot\dfrac{a^{\frac{4}{3}}+8a^{\frac{1}{3}}}{1-a^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{5-a^{\frac{2}{3}}}{1+a^{\frac{1}{3}}}=5$;

4) $\left(\dfrac{m^{\frac{3}{4}}-n}{m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{3}}}-3\sqrt[12]{m^3n^4}\right):\left(\dfrac{m^{\frac{3}{4}}+n}{m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{3}}}-n^{\frac{2}{3}}\right)^2=\dfrac{1}{m^{\frac{1}{2}}}$.

921. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{4x+20}=x+2$;
2) $\sqrt{6-x}=3x-4$;
3) $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$;
4) $\sqrt{2x^2-14x+13}=5-x$;
5) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$;
6) $\sqrt{x+11}-\sqrt{3x+7}=2$;
7) $\sqrt{1-2x}-3=\sqrt{16+x}$;
8) $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}=1$;
9) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{3-x}=4$.

922. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}-5=0$;
2) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}=18$;
3) $\sqrt[3]{x^2-4x+4}+2\sqrt[3]{x-2}-3=0$;
4) $\dfrac{4-x}{2+\sqrt{x}}=8-x$;
5) $\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}-6\sqrt{\dfrac{x-3}{x+3}}+1=0$;
6) $\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=\dfrac{5}{2}$;
7) $x^2-4x-\sqrt{x^2-4x-1}=3$;
8) $5\sqrt{x^2+3x-1}=2x^2+6x+1$.

4. Тригонометричні функції

923. При яких значеннях a можлива рівність:

1) $\cos x = a + 4$;
2) $\sin x = 6a - a^2 - 10$?

924. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin 168° \cos 126°$; 2) $\operatorname{tg} 206° \cos(-223°)$; 3) $\cos 4 \operatorname{tg} 3$.

925. Знайдіть значення виразу:

1) $\sin 780°$;
2) $\operatorname{tg} 900°$;
3) $\cos 1200°$;
4) $\operatorname{ctg}(-585°)$;
5) $\cos\dfrac{11\pi}{6}$;
6) $\sin\left(-\dfrac{17\pi}{3}\right)$.

926. Покажіть, що число $T=-\dfrac{\pi}{2}$ не є періодом функції $f(x) = \operatorname{tg} x$.

927. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin x + 2$;
2) $y = \cos x - 1$;
3) $y = \sin 3x$;
4) $y=\cos\dfrac{x}{2}$;
5) $y=-\dfrac{1}{2}\sin x$;
6) $y = 1{,}5 \cos x$.

928. Обчисліть:

1) $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha=-\dfrac{5}{\sqrt{34}}$, $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

2) $\sin\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

929. Спростіть вираз:

1) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha \operatorname{tg} \alpha$;
3) $(\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg} \alpha$;
2) $\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin^4 \alpha$;
4) $\dfrac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}$.

930. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $2\cos^2 \alpha - 3\sin^2 \alpha$;
2) $4\cos^2 \alpha - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha$.

931. Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)$;

2) $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos(2\pi-\alpha)$;

3) $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(2\pi+\alpha)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}$;

4) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha-3\pi)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2(5\pi-\alpha)-1}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$.

932. Дано: $\sin\alpha = -0{,}8$, $\cos\beta = 0{,}6$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$. Знайдіть $\cos(\alpha+\beta)$.

933. Доведіть тотожність:

1) $\sin\alpha\sin\beta(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)=\sin(\alpha+\beta)$;

2) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$;

3) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{2}\sin\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

934. Знайдіть найбільше значення виразу:

1) $\cos\alpha+\sin\alpha$;
2) $10\sin\alpha-7\cos\alpha$.

935. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$;
4) $\cos^4\alpha-\sin^2\alpha-\cos 2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
2) $\dfrac{1-\cos 6\alpha-\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{2\sin\alpha\cos 2\alpha}$;
5) $\dfrac{2\cos^2 2\alpha+\sin 2\alpha-1}{\sin 2\alpha-\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha}$;
3) $\sin 6\alpha \operatorname{tg} 3\alpha + 2\cos^2 3\alpha$;
6) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-2\alpha\right)+2\sin^2\left(2\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)-1}{2\cos 3\alpha}$;

7) $\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha}\right)\cdot\dfrac{\cos 2\alpha-\cos 6\alpha}{\sin 5\alpha-\sin\alpha}$; 8) $\dfrac{\sin^2\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)}$.

5. Тригонометричні рівняння і нерівності

936. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sin\left(\dfrac{x}{6}+\dfrac{\pi}{12}\right)+2=0$; 3) $3+\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$;

2) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{x}{2}\right)+\sqrt{3}=0$; 4) $4\operatorname{ctg}(3x-9)-8=0$.

937. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$.

938. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

939. Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=-1$ належить проміжку $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$?

940. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\cos^2 x=3\sin x+2$;
2) $\cos 2x+\sin x=0$;
3) $2\cos 2x-3\cos x+2=0$;
4) $2\sin 2x=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$;
5) $3\operatorname{tg}^2 x-8\cos^2 x+1=0$;
6) $2\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x=5$;
7) $\sin x+2\cos x=0$;
8) $3\sin^2 x+\sin x\cos x=2\cos^2 x$;
9) $2{,}5\sin 2x-\sin^2 x=2$;
10) $\cos^2\dfrac{x}{2}-1{,}5\sin x=1$;
11) $5\sin 2x-2\sin x=0$;
12) $\sin 2x=\cos^4\dfrac{x}{2}-\sin^4\dfrac{x}{2}$;
13) $\sin x+\sin 5x=0$;
14) $2\sin^2 x+\sin 3x-\sin x=1$;
15) $\cos 2x+\cos 6x=3\cos 4x$;
16) $\cos x-\cos 3x=\sqrt{2}\sin 2x$;
17) $\sin^2 x+\cos^2 2x+\sin^2 3x=\dfrac{3}{2}$;
18) $\cos^2 x+\cos^2 4x=\cos^2 2x+\cos^2 3x$.

941. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}(5\cos x)=0$.

942. Знайдіть корені рівняння $|\sin x|=2\sin x+\cos x$, які належать проміжку $[0;2\pi]$.

943. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin 3x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\cos\dfrac{x}{2}\leqslant\dfrac{1}{2}$; 4) $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\geqslant-\dfrac{1}{2}$; 6) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{2x}{5}-\dfrac{\pi}{5}\right)\geqslant-1$.

944. **Обчисліть значення виразу:**

1) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
2) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}\right)$;
3) $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$;
4) $\operatorname{ctg}\left(3\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

945. **Знайдіть область визначення функції:**

1) $y = \arcsin(x-5)$;
2) $y = \arccos(x^2-15)$;
3) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x+2}$.

946. **Знайдіть область значень функції:**

1) $y=2\arcsin x-\frac{\pi}{4}$;
2) $y = 5 - 3\operatorname{arcctg} 2x$.

947. **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\arcsin x=-\frac{\pi}{4}$;
2) $\arcsin x=\frac{5\pi}{6}$;
3) $\arccos(x-1)=\frac{2\pi}{3}$;
4) $\operatorname{arctg}\left(3x+\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{6}$.

ВІДОМОСТІ З КУРСУ АЛГЕБРИ 7–9 КЛАСІВ

Вирази та їх перетворення

1. Степінь з натуральним показником

Степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a. При цьому кожний з множників називають основою степеня, кількість множників — показником степеня.

Степінь з основою a і показником n позначають a^n і читають: «a в n-му степені». Степені з показниками 2 і 3 можна прочитати інакше: запис a^2 читають «a у квадраті», запис a^3 — «a в кубі».

Степенем числа a з показником 1 називають саме це число. Це дає змогу будь-яке число вважати степенем з показником 1.

З наведених означень випливає, що

$$a^n = \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ множників}}, \text{ де } n > 1,$$

$$a^1 = a.$$

2. Степінь з цілим від'ємним показником

Для будь-якого числа a, яке не дорівнює нулю, і натурального числа n

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Для будь-якого числа a, яке не дорівнює нулю, $a^0 = 1$.

Вираз 0^n при цілих n, які менші або дорівнюють нулю, не має змісту.

При будь-якому $a \neq 0$ і цілому n числа a^n і a^{-n} є взаємно оберненими.

3. Властивості степеня з цілим показником

Для будь-якого $a \neq 0$ і будь-яких цілих m і n виконуються рівності:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Для будь-яких $a \neq 0$ і $b \neq 0$ та будь-якого цілого n виконуються рівності:

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

4. Стандартний вигляд числа

Стандартним виглядом додатного числа називають його запис у вигляді добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a < 10$ і n — ціле число. Число n називають порядком числа, записаного в стандартному вигляді.

5. Добуток різниці і суми двох виразів

Добуток різниці двох виразів та їх суми дорівнює різниці квадратів цих виразів:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

6. Різниця квадратів двох виразів

Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів та їх суми:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

7. Квадрат суми і квадрат різниці двох виразів

Квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток першого й другого виразів плюс квадрат другого виразу:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток першого й другого виразів плюс квадрат другого виразу:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

8. Перетворення многочлена у квадрат суми або різниці двох виразів

Формули

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

дають змогу «згорнути» тричлен у квадрат двочлена.

Тричлен, який можна подати у вигляді квадрата двочлена, називають повним квадратом.

9. Сума і різниця кубів двох виразів

Многочлен $a^2 - ab + b^2$ називають неповним квадратом різниці.

Сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їх різниці:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Многочлен $a^2 + ab + b^2$ називають неповним квадратом суми.

Різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їх суми:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Квадратні корені

10. Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь

Квадратним коренем з числа a називають число, квадрат якого дорівнює a.

Арифметичним квадратним коренем з числа a називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a.

Арифметичний квадратний корінь з числа a позначають $\sqrt{a}$. Знак «$\sqrt{\ }$» називають знаком квадратного кореня або радикалом (від латинського слова *radix* — корінь).

Запис $\sqrt{a}$ читають «квадратний корінь з a», опускаючи при читанні слово «арифметичний».

Вираз, який стоїть під знаком радикала, називають підкореневим виразом. З означення арифметичного квадратного кореня випливає, що підкореневий вираз може набувати тільки невід'ємних значень.

Дію знаходження арифметичного кореня з числа називають добуванням квадратного кореня.

Якщо $\sqrt{a}=b$, то $b \geqslant 0$ і $b^2 = a$.

Для будь-якого невід'ємного числа a справедливо, що $\sqrt{a} \geqslant 0$ і $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

11. Властивості арифметичного квадратного кореня

Для будь-якого дійсного числа a виконується рівність

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Для будь-яких дійсного числа a і натурального числа n виконується рівність

$$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|.$$

Для будь-яких дійсних чисел a і b таких, що $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, виконується рівність

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Для будь-яких дійсних чисел a і b таких, що $a \geqslant 0$ і $b > 0$, виконується рівність

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Для будь-яких невід'ємних чисел a_1 і a_2 таких, що $a_1 > a_2$, виконується нерівність

$$\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}.$$

12. Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені

Перетворимо вираз $\sqrt{48}$:

$$\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

Вираз $\sqrt{48}$ ми подали у вигляді добутку раціонального числа 4 та ірраціонального числа $\sqrt{3}$. Таке перетворення називають винесенням множника з-під знака кореня. У даному випадку було винесено з-під кореня множник 4.

Розглянемо виконане перетворення у зворотному порядку:

$$4\sqrt{3}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{48}.$$

Таке перетворення називають внесенням множника під знак кореня.

Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу означає перетворити дріб так, щоб його знаменник не містив квадратного кореня.

Рівняння

13. Корінь рівняння

Коренем рівняння називають значення змінної, при якому рівняння стає правильною числовою рівністю.

Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або переконатися, що їх взагалі немає.

14. Рівносильні рівняння

Два рівняння називають рівносильними, якщо вони мають одні й ті самі корені або кожне з рівнянь коренів не має.

15. Властивості рівнянь

Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, яке рівносильне даному.

Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, яке рівносильне даному.

Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, яке рівносильне даному.

16. Лінійне рівняння з однією змінною

Рівняння виду $ax=b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Якщо $a \neq 0$, то, поділивши обидві частини рівняння $ax = b$ на a, отримаємо $x = \frac{b}{a}$. Отже, якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ має єдиний корінь, який дорівнює $\frac{b}{a}$.

Якщо $a = 0$, то лінійне рівняння набуває такого вигляду: $0x = b$. Тут можливі два випадки: $b = 0$ або $b \neq 0$.

У першому випадку отримуємо рівняння $0x = 0$. Звідси, якщо $a = 0$ і $b = 0$, то рівняння $ax = b$ має безліч коренів: будь-яке число є його коренем.

У другому випадку, коли $b \neq 0$, при будь-якому значенні x маємо хибну рівність $0x = b$. Звідси, якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то рівняння $ax = b$ коренів не має.

Рівняння $ax = b$	$a \neq 0$	$a = 0,\ b = 0$	$a = 0,\ b \neq 0$
	$x = \frac{b}{a}$	x — будь-яке число	немає коренів

17. Квадратні рівняння

Квадратним рівнянням називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$.

Числа a, b і c називають коефіцієнтами квадратного рівняння. Число a називають першим, або старшим, коефіцієнтом, число b — другим коефіцієнтом, число c — вільним членом.

Квадратне рівняння, перший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають зведеним.

Якщо в квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один з коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то таке рівняння називають неповним квадратним рівнянням.

Існування коренів квадратного рівняння та їх кількість залежить від знака значення виразу $b^2 - 4ac$. Цей вираз називають дискримінантом квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ і позначають буквою D, тобто $D = b^2 - 4ac$.

Якщо $D < 0$, то квадратне рівняння коренів не має.

Якщо $D = 0$, то квадратне рівняння має один корінь $x = -\frac{b}{2a}$.

Якщо $D > 0$, то квадратне рівняння має два корені x_1 і x_2:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},\ \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Також застосовують коротку форму запису:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Цей запис називають формулою коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Якщо другий коефіцієнт квадратного рівняння подати у вигляді $2k$, то можна користуватися формулою $x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$, де $D_1 = k^2 - ac$.

18. Теорема Вієта

Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \; x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Якщо x_1 і x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -b,$$
$$x_1 x_2 = c,$$

тобто сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену.

19. Теорема, обернена до теореми Вієта

Якщо числа α і β такі, що $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ і $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, то ці числа є коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Якщо числа α і β такі, що $\alpha + \beta = -b$ і $\alpha\beta = c$, то ці числа є коренями зведеного квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$.

20. Квадратний тричлен

Квадратним тричленом називають многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$.

Коренем квадратного тричлена називають значення змінної, при якому значення квадратного тричлена дорівнює нулю.

Щоб знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, треба розв'язати відповідне квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Число $D = b^2 - 4ac$ називають дискримінантом квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$.

Якщо $D < 0$, то квадратний тричлен коренів не має. Якщо $D = 0$, то квадратний тричлен має один корінь, якщо $D > 0$ — то два корені.

Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ додатний, то даний тричлен можна розкласти на лінійні множники:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена.

Якщо дискримінант квадратного тричлена дорівнює нулю, то вважають, що квадратний тричлен має два рівні корені, тобто $x_1 = x_2$. У цьому випадку розклад квадратного тричлена на множники має такий вигляд:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Якщо дискримінант квадратного тричлена від'ємний, то даний тричлен не можна розкласти на лінійні множники.

21. Раціональні рівняння

Рівняння, ліва і права частини якого є раціональними виразами, називають раціональним.

Оскільки дріб дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля, то для того, щоб розв'язати рівняння виду $\frac{A}{B}=0$, де A і B — многочлени, треба вимагати одночасного виконання двох умов: $A = 0$ і $B \neq 0$. Це означає, що при розв'язуванні рівнянь вказаного виду слід керуватися таким алгоритмом:

- розв'язати рівняння $A = 0$;
- перевірити, які із знайдених коренів задовольняють умову $B \neq 0$;
- корені, які задовольняють умову $B \neq 0$, включити до відповіді.

22. Біквадратні рівняння

Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають біквадратним рівнянням.

Заміною $x^2 = t$ біквадратне рівняння зводиться до квадратного рівняння $at^2 + bt + c = 0$. Такий спосіб розв'язування рівнянь називають методом заміни змінної.

Нерівності

23. Властивості числових нерівностей

Якщо до обох частин правильної нерівності додати або від обох частин правильної нерівності відняти одне й те саме число, то отримаємо правильну нерівність.

Якщо будь-який доданок перенести з однієї частини правильної нерівності в другу, замінивши знак доданка на протилежний, то отримаємо правильну нерівність.

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то отримаємо правильну нерівність.

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число і замінити знак нерівності на протилежний, то отримаємо правильну нерівність.

Якщо $ab > 0$ і $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

При почленному додаванні правильних нерівностей однакового знака результатом є правильна нерівність того самого знака.

При почленному множенні правильних нерівностей однакового знака, у яких ліві та праві частини — додатні числа, результатом є правильна нерівність того самого знака.

Якщо $a > b$ і a, b — додатні числа, то $a^n > b^n$, де n — натуральне число.

24. Розв'язування нерівностей. Рівносильні нерівності

Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює її в правильну числову нерівність.

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Усі розв'язки нерівності утворюють множину розв'язків нерівності. Якщо нерівність розв'язків не має, то кажуть, що множиною її розв'язків є порожня множина. Порожню множину позначають символом $\varnothing$.

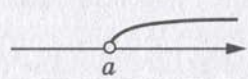
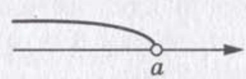
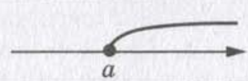
Нерівності називають рівносильними, якщо вони мають одну й ту саму множину розв'язків.

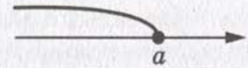
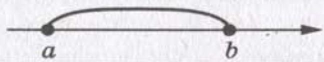
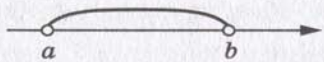
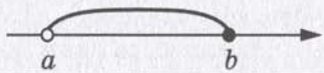
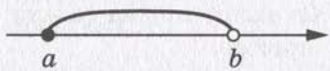
Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини нерівності в іншу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

25. Числові проміжки

Нерівність	Проміжок	Зображення
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \geqslant a$	$[a; +\infty)$	

Нерівність	Проміжок	Зображення
$x \leqslant a$	$(-\infty; a]$	
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$	
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a < x \leqslant b$	$(a; b]$	
$a \leqslant x < b$	$[a; b)$	

26. Системи нерівностей з однією змінною

Якщо треба знайти всі спільні розв'язки двох або кількох нерівностей, то говорять, що треба розв'язати систему нерівностей.

Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює кожну нерівність системи в правильну числову нерівність.

Розв'язати систему нерівностей означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Усі розв'язки системи нерівностей утворюють множину розв'язків системи нерівностей. Якщо система розв'язків не має, то кажуть, що множиною її розв'язків є порожня множина.

Щоб розв'язати систему нерівностей, треба знайти перетин множин розв'язків нерівностей, які складають систему.

Функції

27. Функція. Область визначення і область значень функції

Нехай X — множина значень незалежної змінної. Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної.

Зазвичай незалежну змінну позначають буквою x, залежну — буквою y, функцію (правило) — буквою f. Кажуть, що змінна y функціонально залежить від змінної x. Цей факт позначають так: $y = f(x)$.

Незалежну змінну ще називають аргументом функції.

Множину всіх значень, яких набуває аргумент, називають областю визначення функції і позначають $D(f)$ або $D(y)$.

У функціональній залежності кожному значенню аргументу x відповідає певне значення залежної змінної y. Значення залежної змінної ще називають значенням функції і для функції f позначають $f(x)$. Множину всіх значень, яких набуває залежна змінна, називають областю значень функції і позначають $E(f)$ або $E(y)$. Так, областю значень функції $y=\sqrt{x}$ є проміжок $[0; +\infty)$.

28. Способи задання функції

Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення і правило, за яким можна за кожним значенням незалежної змінної знайти значення залежної змінної.

Функцію можна задати одним з таких способів:

- описово;
- за допомогою формули;
- за допомогою таблиці;
- графічно.

Найчастіше функцію задають за допомогою формули. Такий спосіб задання функції називають аналітичним. Якщо при цьому не вказано область визначення, то вважають, що областю визначення функції є область визначення виразу, який входить до формули.

29. Графік функції

Графіком функції f називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f.

Коли якась фігура є графіком функції f, то виконуються дві умови:

1) якщо x_0 — деяке значення аргументу, а $f(x_0)$ — відповідне значення функції, то точка з координатами $(x_0; f(x_0))$ обов'язково належить графіку;
2) якщо $(x_0; y_0)$ — координати довільної точки графіка, то x_0 і y_0 — відповідні значення незалежної і залежної змінних функції f, тобто $y_0 = f(x_0)$.

Фігура, зображена на координатній площині, не може слугувати графіком деякої функції, якщо існує значення аргументу x, за яким значення змінної y знаходиться неоднозначно.

Фігура може бути графіком деякої функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має з цією фігурою не більше однієї спільної точки.

30. Властивості функції

Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають нулем функції.

Кожний з проміжків, на якому функція набуває значень однакового знака, називають проміжком знакосталості функції f.

Під час пошуку проміжків знакосталості функції прийнято вказувати проміжки максимальної довжини.

Функцію f називають зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2 з цього проміжку таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.

Функцію f називають спадною на деякому проміжку, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2 з цього проміжку таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

Часто використовують коротше формулювання.

Функцію називають зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких значень аргументу з цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Функцію називають спадною на деякому проміжку, якщо для будь-яких значень аргументу з цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають зростаючою. Якщо функція спадає на всій області визначення, то її називають спадною.

У задачах на пошук проміжків зростання і спадання функції прийнято вказувати проміжки максимальної довжини.

31. Лінійна функція, її графік і властивості

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа, x — незалежна змінна, називають лінійною.

Графіком лінійної функції, область визначення якої — усі числа, є пряма.

Лінійну функцію, яку задають формулою $y = kx$, де $k \neq 0$, називають прямою пропорційністю.

Пряма пропорційність є окремим випадком лінійної функції.

Графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат.

Якщо у формулі $y = kx + b$ покласти $k = 0$, то отримаємо $y = b$. У цьому разі значення функції залишатимуться незмінними при будь-яких змінах значень аргументу. Графіком такої функції є пряма, яка паралельна осі абсцис.

32. Функції $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$ та їх графіки

У таблиці наведено властивості функції $y = x^2$.

Область визначення	Усі числа
Область значень	Усі невід'ємні числа
Графік	Парабола

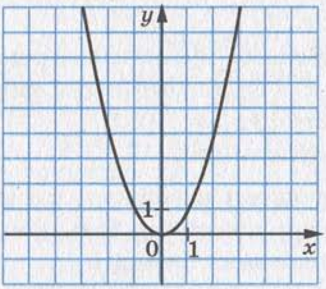


Рис. 158

Точка з координатами (0; 0) поділяє параболу (рис. 158) на дві рівні частини, кожну з яких називають віткою параболи, а саму точку — вершиною параболи.

Оскільки у виразі $\sqrt{x}$ допустимими значеннями змінної x є всі невід'ємні числа, то областю визначення функції $y = \sqrt{x}$ також є всі невід'ємні числа. Областю значень функції $y = \sqrt{x}$ є всі невід'ємні числа.

Графіком функції $y = \sqrt{x}$ є фігура, зображена на рисунку 159. Вона дорівнює вітці параболи $y = x^2$.

Більшому значенню аргументу функції $y = \sqrt{x}$ відповідає більше значення функції, і навпаки, більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, тобто якщо $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, то $x_1 < x_2$ (рис. 160).

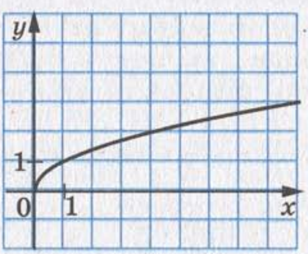


Рис. 159

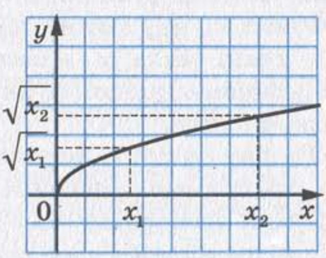


Рис. 160

33. Функція $y=\frac{k}{x}$ та її графік

Функцію, яку можна задати формулою виду $y=\frac{k}{x}$, де x — незалежна змінна, k — деяке число, $k \neq 0$, називають оберненою пропорційністю.

У таблиці наведено властивості функції $y=\frac{k}{x}$.

Область визначення	Усі числа, крім 0
Область значень	Усі числа, крім 0
Графік	Гіпербола

Якщо $k > 0$, то вітки гіперболи розміщені в I і III чвертях (рис. 161), а якщо $k < 0$ – то у II і IV чвертях (рис. 162).

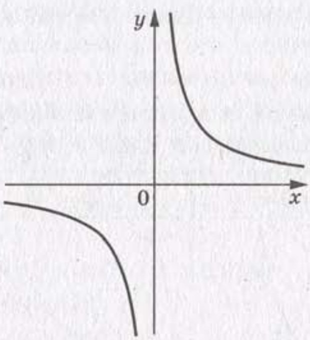


Рис. 161

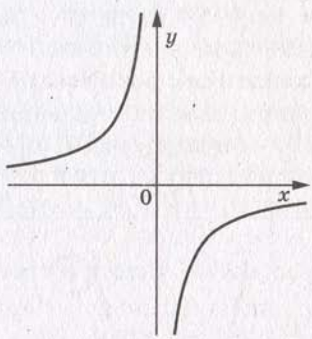


Рис. 162

34. Квадратична функція

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = ax^2 + bx + c$, де x — незалежна змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають квадратичною.

Графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола з вершиною в точці $(x_0; y_0)$, де $x_0=-\frac{b}{2a}$, $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$, яка дорівнює параболі $y = ax^2$. Якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору, якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз.

Графік квадратичної функції можна побудувати за такою схемою:

1) знайти абсцису вершини параболи за формулою $x_0=-\frac{b}{2a}$;

2) знайти ординату вершини параболи за формулою $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}=-\frac{D}{4a}$, де D — дискримінант квадратного тричлена

$ax^2 + bx + c$, і позначити на координатній площині вершину параболи (формулу $y_0 = -\frac{D}{4a}$ запам'ятовувати необов'язково, достатньо обчислити значення функції $y = ax^2 + bx + c$ у точці з абсцисою $x_0 = -\frac{b}{2a}$);

3) визначити напрям віток параболи;

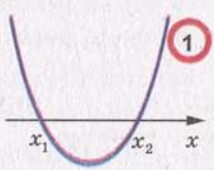
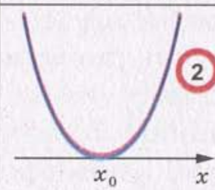
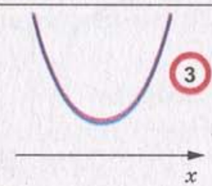
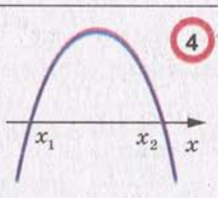
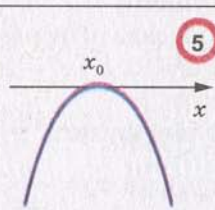
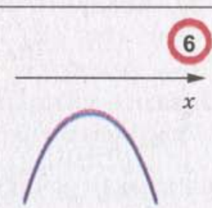
4) знайти координати ще кількох точок, які належать шуканому графіку (зокрема, координати точки перетину параболи з віссю y та нулі функції, якщо вони існують);

5) позначити на координатній площині знайдені точки і сполучити їх плавною лінією.

35. Квадратні нерівності

Нерівності виду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, $a \neq 0$, називають квадратними.

Схематичне розміщення параболи $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис залежно від знаків чисел a і D відображено в таблиці (x_1 і x_2 — нулі функції, x_0 — абсциса вершини параболи):

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$	 	 	
$a < 0$	 	 	

Пояснимо, як цю таблицю використовувати для розв'язування квадратних нерівностей.

Наприклад, нехай потрібно розв'язати нерівність $ax^2 + bx + c > 0$, де $a < 0$ і $D > 0$. Цим умовам відповідає клітинка 4 таблиці. Тоді зрозуміло, що відповіддю буде проміжок $(x_1; x_2)$, на якому графік відповідної квадратичної функції розміщено над віссю абсцис.

Системи рівнянь з двома змінними

36. Рівняння з двома змінними

Пару значень змінних, яка перетворює рівняння з двома змінними на правильну рівність, називають розв'язком рівняння з двома змінними.

Той факт, що пара $x = a$, $y = b$ є розв'язком рівняння, прийнято записувати так: $(a; b)$ є розв'язком рівняння. У дужках на першому місці пишуть значення змінної x, а на другому — значення змінної y. Якщо змінні в рівнянні позначено буквами, відмінними від x і y, то, записуючи розв'язок у вигляді пари, потрібно домовитися, значення якої змінної ставиться на перше місце в парі, а якої — на друге. Зазвичай береться до уваги порядок букв латинського алфавіту.

Розв'язати рівняння з двома змінними — означає знайти всі його розв'язки або показати, що воно не має розв'язків.

Властивості рівнянь з двома змінними аналогічні властивостям рівнянь з однією змінною (див. п. 15 на с. 318).

Графіком рівняння з двома змінними називають геометричну фігуру, що складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, координати яких (пари чисел) є розв'язками даного рівняння.

Коли якась фігура є графіком рівняння, то виконуються дві умови:

1) усі розв'язки рівняння є координатами точок, які належать графіку;
2) координати будь-якої точки, що належить графіку, — це пара чисел, яка є розв'язком даного рівняння.

37. Системи рівнянь з двома змінними

Якщо треба знайти усі спільні розв'язки кількох рівнянь, то говорять, що треба розв'язати систему рівнянь.

Систему рівнянь записують за допомогою фігурної дужки.

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називають пару значень змінних, які перетворюють кожне рівняння на правильну рівність.

Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

38. Графічний метод розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними

Графічний метод розв'язування системи рівнянь полягає в наступному:

- побудувати на одній координатній площині графіки рівнянь, що входять у систему;

- знайти координати всіх точок перетину побудованих графіків;
- отримані пари чисел і будуть шуканими розв'язками.

Графічний метод є ефективним тоді, коли треба визначити кількість розв'язків системи.

Якщо графіками рівнянь, що входять в систему лінійних рівнянь, є прямі, то кількість розв'язків цієї системи залежить від взаємного розміщення двох прямих на площині:

- якщо прямі перетинаються, то система має єдиний розв'язок;
- якщо прямі збігаються, то система має безліч розв'язків;
- якщо прямі паралельні, то система розв'язків не має.

39. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом підстановки

Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь методом підстановки, треба:

1) виразити з будь-якого рівняння системи одну змінну через другу;
2) підставити в друге рівняння системи замість цієї змінної вираз, отриманий на першому кроці;
3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;
4) підставити знайдене значення змінної у вираз, отриманий на першому кроці;
5) обчислити значення другої змінної;
6) записати відповідь.

40. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом додавання

Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь методом додавання, треба:

1) дібравши «вигідні» множники, перетворити одне або обидва рівняння системи так, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами;
2) додати почленно ліві й праві частини рівнянь, отриманих на першому кроці;
3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;
4) підставити знайдене на третьому кроці значення змінної у будь-яке з рівнянь вихідної системи;
5) обчислити значення другої змінної;
6) записати відповідь.

Модуль числа

41. Модуль числа

Модулем числа a називають відстань від початку відліку до точки, яка зображує це число на координатній прямій.

Модуль числа a позначають так: $|a|$ (читають «модуль a»).

Модуль додатного числа дорівнює цьому числу, модуль від'ємного числа дорівнює числу, яке протилежне даному, $|0| = 0$.

За допомогою фігурної дужки властивість модуля числа a можна записати так:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Модуль числа набуває тільки невід'ємних значень.

Модулі протилежних чисел рівні: $|a| = |-a|$.

Відсотки

42. Знаходження відсотків від числа

Щоб знайти відсотки від числа, можна подати відсотки у вигляді дробу і помножити число на цей дріб.

43. Знаходження числа за його відсотками

Щоб знайти число за його відсотками, можна подати відсотки у вигляді дробу і поділити значення відсотків на цей дріб.

44. Відсоткове відношення двох чисел

Відсоткове відношення двох чисел — це їх відношення, виражене у відсотках. Воно показує, скільки відсотків одне число становить від другого.

Щоб знайти відсоткове відношення двох чисел, треба їх відношення помножити на 100 і до результату дописати знак відсотка.

45. Формула складних відсотків

$$a_n = a_0\left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$$

Класичне означення ймовірності

46. Класичне означення ймовірності

Якщо випробування закінчується одним з n рівноможливих результатів, з яких m призводять до настання події A, то ймовірністю події A називають відношення $\frac{m}{n}$:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Числові послідовності

47. Числові послідовності

Об'єкти, які пронумеровано поспіль натуральними числами 1, 2, 3, ..., n, ..., утворюють послідовності.

Об'єкти, які утворюють послідовність, називають членами послідовності.

Якщо членами послідовності є числа, то таку послідовність називають числовою.

Послідовності бувають скінченними і нескінченними.

Послідовність вважають заданою, якщо кожний її член можна визначити за його номером.

Формулу, яка виражає член послідовності через один або кілька попередніх членів, називають рекурентною формулою. Умови, які визначають перший або кілька перших членів, називають початковими умовами.

48. Арифметична прогресія

Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додано одне й те саме число.

Число, яке дорівнює різниці між будь-яким членом, починаючи з другого, і попереднім членом, називають різницею арифметичної прогресії і позначають буквою d.

Формула n-го члена арифметичної прогресії має вигляд:

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1).$$

Суму n перших членів арифметичної прогресії можна обчислити за формулами:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ або } S_n = \frac{2a_1 + d\,(n-1)}{2} \cdot n.$$

49. Геометрична прогресія

Геометричною прогресією називають послідовність із відмінним від нуля першим членом, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число.

Число, яке дорівнює відношенню наступного і попереднього членів послідовності, називають знаменником геометричної прогресії і позначають буквою q.

Формула n-го члена геометричної прогресії має вигляд:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Суму n перших членів геометричної прогресії можна обчислити за формулою

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

Сума нескінченної геометричної прогресії

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \ |q| < 1.$$

Синус, косинус і тангенс кутів від 0° до 180°

50. Одиничне півколо

Півколо, розташоване у верхній півплощині координатної площини з центром у початку координат, радіус якого дорівнює 1, називають одиничним.

51. Синус, косинус і тангенс кутів від 0° до 180°

Косинусом і синусом кута α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) називають відповідно абсцису x і ординату y точки M одиничного півкола, яка відповідає куту α (рис. 163).

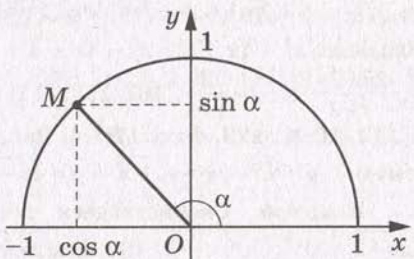


Рис. 163

Тангенсом кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ і $\alpha \neq 90°$, називають відношення $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, тобто

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Оскільки $\cos 90° = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha$ не визначений для $\alpha = 90°$.

52. Для кутів α таких, що $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, справедливі тотожності:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

38. 2) Множина всіх натуральних чисел, крім 1; 3) множина, яка складається з усіх непарних чисел і числа 2. **43.** 2) -1; 3) -5; 4) коренів немає. **44.** 3) $(0; 2]$; 4) $(-5; -3]$. **45.** 8) $[6; 8) \cup (8; +\infty)$; 9) $[-1; 4]$; 10) $(-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$; 11) $(-\infty; -7) \cup [2; 7) \cup (7; +\infty)$; 12) $(-5; 2)$. **69.** 1) $[0; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; 3) $\left[\frac{2}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$; 4) $[-1{,}5; 3) \cup (3; 5]$; 5) $[7; +\infty)$; 6) $\mathbb{R}$. **70.** 1) $[-1; 4) \cup \cup (4; +\infty)$; 2) $[-2; -1) \cup (-1; +\infty)$; 3) $(-2; 0]$; 4) $(-\infty; 0) \cup (0; 6)$. **71.** 3) $\{-6\}$; 4) $[-3; +\infty)$; 5) $\{0\}$; 6) $\{0\}$; 7) $[4; +\infty)$; 8) $(-\infty; 6]$. **72.** 1) $(-\infty; 4]$; 2) $[-9; +\infty)$. **82.** 1) $a < -8$ або $a > 12$; 2) $a < 4$ або $a > 10$. **83.** 1) $-1 \leqslant a \leqslant 0{,}6$; 2) $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$. **87.** $m = 3$. **88.** $k < -6$. **89.** $b \leqslant 18$. **90.** $b \leqslant -8$. **91.** $c = -133$. **92.** $c = 15$. **101.** Ні. **104.** 1) 16; 2) 32. **105.** 2500 м^2. **106.** *Вказівка*. Нехай x_1 і x_2 — протилежні числа, $x_1 < 0 < x_2$. Тоді $f(x_1) = f(x_2)$. Отже, жодна з нерівностей $f(x_1) < f(x_2)$ і $f(x_1) > f(x_2)$ не є правильною. **113.** Необов'язково. **127.** 0. **129.** 0. **130.** 0. **138.** Спадна. **139.** Зростаюча. **140.** 2; 5. **141.** -3; -1. **142.** 1) $(-1; -4)$, $(-3; -18)$; 2) $(9; -1)$, $(-1; 9)$; 3) $(-3; 6)$, $(6; -3)$, $\left(-9+\sqrt{78}; -9-\sqrt{78}\right)$, $\left(-9-\sqrt{78}; -9+\sqrt{78}\right)$. **143.** 10 км/год, 12 км/год. **156.** 1) *Вказівка*. $x^2 - 4x + 6 = x^2 - 4x + 4 + 2 = (x - 2)^2 + 2$. **157.** 3) *Вказівка*. $y = \frac{-2x+2-2}{x-1} = -2 - \frac{2}{x-1}$. **167.** 1) 2; 2) 1; 3) 1; 4. **168.** 1) 2; 2) 4. **171.** На 20 %. **172.** 10 %. **173.** 4 кг. **179.** 4) Рис. 164. *Вказівка*. Скористайтеся схемою: $y = \sqrt{x} \to y = \sqrt{1+x} \to y = \sqrt{1-x} \to y = \sqrt{1-|x|}$. **180.** 3) Рис. 165. *Вказівка*. Скористайтеся схемою: $y = \sqrt{x} \to \to y = \sqrt{x+2} \to y = \sqrt{|x|+2} \to y = \sqrt{|x-1|+2}$. **193.** *Вказівка*. Нехай функція f — непарна, функція g — до неї обернена. Маємо: $f(x_0) = y_0$, $g(y_0) = x_0$. Тоді $g(-y_0) = g(-f(x_0)) = g(f(-x_0)) = -x_0 = -g(y_0)$. **195.** 11 год. **196.** 24 год, 12 год. **197.** 60 год, 84 год. **208.** 3) Може звузитися на число -1, тобто може бути загублено корінь $x = -1$; 4) може розширитися на число -1. **214.** 6) $\left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$. **215.** 6) $(-\infty; -5) \cup \cup \left(-\frac{3}{5}; 0\right) \cup \left(\frac{3}{4}; 2\right)$. **218.** 3) $(-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [3; +\infty)$; 5) $(-\infty; -3) \cup (-2; 2) \cup$

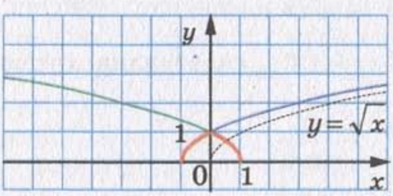


Рис. 164

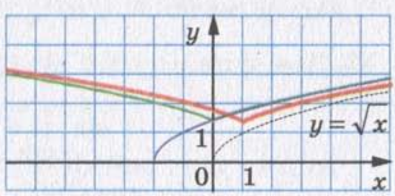


Рис. 165

$\cup (3; +\infty)$; 6) $[0; 1) \cup [3; 7)$; 7) $(-\infty; -1) \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right] \cup (4; +\infty)$; 8) $(-\infty; -5) \cup$ $\cup (-4; 0) \cup (4; 6)$. **219.** 3) $(-6; -3] \cup [4; 6)$; 4) $(-\infty; -1] \cup \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty)$. **220.** 2) $\left(-\frac{5}{3}; 2\right]$; 3) $\left(-\frac{1}{3}; 2\right]$; 4) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (4; +\infty)$. **221.** 1) $\left(-\infty; \frac{5}{6}\right) \cup (2; +\infty)$; 2) $[-6; -5] \cup [-3; +\infty)$. **222.** 1) $(2; 4) \cup (4; 5)$; 2) $[2; 5]$; 3) $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$; 4) $(-\infty; 2] \cup \{4\} \cup [5; +\infty)$; 5) $(-2; 1)$; 6) $[-2; 1] \cup \{3\}$; 7) $(-\infty; -2) \cup$ $\cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$; 8) $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$. **223.** 2) $(-\infty; -1) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \cup (3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$; 5) $(-\infty; -4] \cup \{-3\} \cup$ $\cup [5; +\infty)$. **224.** 2) $(-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$. **225.** 1) $(-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$; 2) $(-\infty; -5] \cup$ $\cup [4; +\infty)$; 3) $(-5; 3) \cup (3; 4)$; 4) $[-5; 3) \cup (3; 4]$; 5) $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$; 6) $(-\infty; -4) \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$; 7) $(-4; 1) \cup (1; 2)$; 8) $(-4; 2)$. **226.** 6) $(-\infty; -1) \cup$ $\cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$; 7) $(0; 1)$; 8) $\left(-3; \frac{3}{4}\right) \cup [2; 6]$. **227.** 1) $(-\infty; -2) \cup [-1; +\infty)$; 2) $[-2; -1)$; 3) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$; 4) $(-3; 1) \cup [5; +\infty)$. **228.** 1) $(-\infty; -6) \cup$ $\cup \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; 2\right]$; 2) $(-\infty; -4) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$; 3) $(-\infty; -5] \cup \{1; 3\}$; 4) $(-\infty; -4) \cup$ $\cup \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; 3)$. **229.** 1) $(1; 2{,}5) \cup (3; +\infty)$; 2) $[1; 2] \cup \{-2\}$; 3) $(-\infty; -5] \cup$ $\cup [-4; 0] \cup \{2\}$. **230.** 1) $(-5; 0) \cup \left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; 8)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{5}; 2\right]$; 3) $(-\infty; -4) \cup (-4; -3] \cup \left[-\frac{2}{5}; 1\right) \cup [3; +\infty)$; 4) $(-\infty; -3] \cup [0; 2)$; 5) $\left[-\frac{3}{4}; -2\right] \cup$ $\cup (3; +\infty)$; 6) $(-\infty; -6] \cup [-4; 6]$. **231.** 1) $[1; 3)$; 2) $(-\infty; -2] \cup \{1\} \cup (5; +\infty)$; 3) $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (4; +\infty)$; 4) $(0; 2] \cup \{3\}$. **232.** 1) $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right] \cup (-1; 0) \cup \left(1; \sqrt{3}\right]$; 2) $[-4; -3) \cup (-2; 2) \cup (3; 4]$. **233.** 1) $(-\infty; 0) \cup (1; 6)$; 2) $(-\infty; -4) \cup (-3; 3) \cup$ $\cup (6; +\infty)$. **234.** 1) $\varnothing$; 2) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; 3) $\{-2; 2\}$; 4) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; 5) $(1; 2)$; 6) $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$; 7) $[1; 2] \cup \{5\}$; 8) $(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [5; +\infty)$. **235.** 1) $(3; 7)$; 2) $[3; 7] \cup \{-2\}$; 3) $(-2; 3)$; 4) $[-2; 3] \cup \{7\}$; 5) $(-4; 4)$; 6) $\varnothing$; 7) $[-4; 4]$; 8) $\{-4; 4\}$. **236.** $(-3; 0] \cup (3; +\infty)$. **237.** $(-4; 1] \cup (4; +\infty)$. **238.** 1) Якщо $a = 3$, то розв'язків немає; якщо $a < 3$, то $a < x < 3$; якщо $a > 3$, то $3 < x < a$; 2) якщо $a \leqslant 3$, то $x > 3$; якщо $a > 3$, то $3 < x < a$ або $x > a$; 3) якщо $a < 3$, то $x \geqslant 3$ або $x = a$; якщо $a \geqslant 3$, то $x \geqslant 3$; 4) якщо $a \leqslant -5$, то $x < a$; якщо $a > -5$, то $x < -5$ або $-5 < x < a$; 5) якщо $a < -5$, то $x \leqslant a$ або $x = -5$; якщо $a \geqslant -5$, то $x \leqslant a$; 6) якщо $a = 5$, то $x < 5$ або $x > 5$; якщо $a < 5$, то $x < a$ або $x \geqslant 5$; якщо $a > 5$, то $x \leqslant 5$ або $x > a$; 7) якщо $a = -1$, то $x > -1$; якщо $a < -1$, то $a \leqslant x < -1$ або $x > -1$; якщо $a > -1$, то $x \geqslant a$; 8) якщо $a = -1$, то $x < -1$; якщо $a < -1$, то $x < a$ або $a < x \leqslant -1$; якщо $a > -1$, то $x \leqslant -1$. **244.** 1) $a = -\frac{3}{4}$; 2) $a = -\frac{1}{27}$. **245.** 1) $a = -\frac{2}{3}$; 2) $a = -8$. **256.** 1) $(0; 0)$, $(\sqrt{2}; 8)$, $(-\sqrt{2}; 8)$; 2) $(0; 0)$, $(-3; 81)$. **257.** $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(-1; -1)$.

260. 4) $\min\limits_{(-\infty;-2]} f(x)=256$; найбільшого значення не існує. **266.** 1) Якщо $a=6$, то один корінь; якщо $a>6$, то 2 корені; якщо $a<6$, то коренів немає; 2) якщо $a=1$ або $a=-8$, то один корінь; якщо $a<-8$ або $a>1$, то 2 корені; якщо $-8<a<1$, то коренів немає. **267.** Якщо $a=0$, або $a=3$, або $a=-3$, то один корінь; якщо $a<-3$ або $0<a<3$, то 2 корені; якщо $-3<a<0$ або $a>3$, то коренів немає. **268.** 1) Парним; 2) непарним; 3) непарним; 4) установити неможливо; 5) парним; 6) установити неможливо. **274.** 1) $a=-2500$; 2) $a=\frac{1}{3}$. **275.** 1) $a=-243$; 2) $a=8$. **281.** 1) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$. **283.** 1) $(1;\ 1)$, $(-1;\ -1)$; 2) $\left(2;\frac{1}{4}\right)$. **284.** $\left(2;\frac{1}{16}\right)$. **287.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} f(x)=64$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} f(x)=1$; 2) $\max\limits_{\left[-1;-\frac{1}{2}\right]} f(x)=64$, $\min\limits_{\left[-1;-\frac{1}{2}\right]} f(x)=1$; 3) $\max\limits_{[1;+\infty)} f(x)=1$, найменшого значення не існує. **288.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{3};2\right]} f(x)=27$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{3};2\right]} f(x)=\frac{1}{8}$; 2) $\max\limits_{[-2;-1]} f(x)=-\frac{1}{8}$, $\min\limits_{[-2;-1]} f(x)=-1$; 3) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{(-\infty;-3]} f(x)=-\frac{1}{27}$. **289.** 1) 4 розв'язки; 2) 2 розв'язки. **290.** 1) 3 розв'язки; 2) 2 розв'язки. **293.** 1) Непарним; 2) установити неможливо; 3) парним; 4) установити неможливо. **296.** 1) $(-\infty;\ 0]$; 2) $(-\infty;\ +\infty)$; 3) $\{0\}$; 4) $[8;\ +\infty)$; 7) $(-\infty;\ 8)\cup(8;\ +\infty)$; 8) $[0;\ 9)\cup(9;\ +\infty)$. **300.** 9) 3; 10) 2. **301.** 5) 3; 6) 7. **304.** 1) 29; 2) 56; 3) $-\frac{3}{8}$. **305.** 1) $-11{,}8$; 2) $58\frac{1}{3}$. **312.** 1) -1; 1; -3; 3; 2) -2; $\sqrt[3]{7}$; 3) $-\sqrt[6]{3}$; $\sqrt[6]{3}$. **313.** 1) $-\sqrt[3]{2}$; 3; 2) $-\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[4]{3}$. **332.** 1) $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$; 2) $a\leqslant 0$, $b\leqslant 0$; 3) $a\geqslant 0$, $b\leqslant 0$; 4) a і b — довільні числа; 5) a і b — довільні числа. **333.** 2) $[3;\ 7]$; 3) $\mathbb{R}$. **336.** 2) $-n$; 5) c^4; 8) $-0{,}1a^3b^5$. **337.** 3) $10x$; 7) $-a^{13}b^{11}c^{11}$. **340.** 1) $x\geqslant -4$; 2) $x\in\mathbb{R}$; 3) $-1\leqslant x\leqslant 3$. **341.** 2) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$. **345.** 1) Коренів немає; 2) 3; 3) -1; 3. **346.** 1) -4; 2) 2. **347.** $x\in[3;\ 5]$. **351.** 4) $11\sqrt{2}$. **355.** 1) 1; 2) 4. **356.** 1) $m^4\sqrt{-m}$; 2) $a^2b^6\sqrt{b}$; 3) $-2x^3\sqrt{y}$; 4) $-3xy^7\sqrt{5x}$. **357.** 2) $-\sqrt{54n^2}$; 3) $\sqrt{p^5}$. **365.** 1) 0; 2) $3\sqrt[3]{7m}$. **366.** 1) $27\sqrt[3]{2}$; 2) $29\sqrt[4]{a}$. **367.** 4) $\sqrt[30]{b^7}$; 5) $\sqrt[3]{x^2}$; 6) $\sqrt[12]{128}$. **368.** 5) $\sqrt[6]{x^5}$; 6) $\sqrt[3]{a}$. **371.** 5) $\sqrt[12]{24}$; 6) $\sqrt[5]{a^3}$; 7) $\sqrt[7]{3}$; 8) $\sqrt[3]{a^4b^2}$; 9) $\sqrt[18]{\frac{a}{b}}$. **372.** 5) $\sqrt[6]{\frac{2}{3}}$; 6) $\sqrt[6]{a^4b^3}$. **373.** 1) 3; 2) 1; 3) 14; 4) -1; 5) 1. **374.** 1) 25; 2) 7; 3) -1. **381.** 1) $ab\geqslant 0$; 2) $b=0$, a — будь-яке число або $b>0$, $a\geqslant 0$; 3) $b=0$, a — будь-яке число або $b>0$, $a\leqslant 0$. **382.** 1) $m^2\sqrt[4]{-m}$; 2) $a^2b^3\sqrt[4]{b}$; 3) $|x|\cdot y\cdot\sqrt[6]{y}$; 4) $2m^4n^4\sqrt[4]{2m^2n}$; 5) $-3ab^2c^3\sqrt[4]{2}$; 6) $a^3b^3\sqrt[4]{a^3b^3}$; 7) $-a^3b^6\sqrt[8]{-ab^2}$. **383.** 1) $-2a\sqrt[4]{2a^2}$; 2) $-5a\sqrt[4]{-a}$; 3) $ab\sqrt[6]{ab}$; 4) $a^3b^3\sqrt[6]{a^2b}$.

384. 1) $\sqrt[4]{2a^4}$; 2) $-\sqrt[6]{6a^3b^4}$; 3) $\sqrt[4]{mn}$; 4) $\sqrt[6]{6b^6}$, якщо $b \geqslant 0$, $-\sqrt[6]{6b^6}$, якщо $b < 0$; 5) $-\sqrt[6]{-a^7}$; 6) $-\sqrt[4]{a^5b^6}$. **385.** 1) $-\sqrt[8]{3c^8}$; 2) $\sqrt[6]{a^7}$; 3) $\sqrt[4]{6a^4b^4}$; 4) $-\sqrt[8]{3a^4b^3}$; 5) $-\sqrt[4]{-a^7}$. **386.** 1) 1; 2) 4; 3) 1; 4) 2. **387.** 1) 1; 2) $\sqrt{23}$. **388.** 1) $\frac{\sqrt[4]{a}-1}{a}$; 2) $\sqrt[6]{x}$; 3) $-\sqrt{a}$; 3) $-\sqrt[4]{a}$; 4) $\sqrt[6]{a}$; 5) $\sqrt[6]{b}-\sqrt[6]{c}$; 6) $\sqrt[4]{ab}$. **390.** 1) *Вказівка*. Нехай $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=a$, $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=b$. Треба показати, що $x=a+b$ — число раціональне. Маємо: $a^3+b^3=7+5\sqrt{2}+7-5\sqrt{2}=14$; $(a+b)(a^2-ab+b^2)=14$; $(a+b)((a+b)^2-3ab)=14$; $x(x^2+3)=14$; $x^3+3x-14=0$. Отримане рівняння має єдиний корінь $x=2$. **395.** 2) $-\sqrt{2}$. **399.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $[-1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1] \cup \cup [2; +\infty)$. **400.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $(-\infty; 2]$; 3) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. **401.** 1) $[1; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2]$; 3) $\mathbb{R}$. **402.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $[-4; +\infty)$; 3) $\mathbb{R}$. **420.** 6) 16. **425.** 3) $\frac{3}{4}$; 5) $\frac{5}{3}$; 8) $\frac{1}{2}$. **426.** 3) $\frac{10}{3}$; 5) 4; 6) $7\frac{19}{32}$. **427.** 3) $[3; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$. **429.** 3) $a^{\frac{1}{6}}$; 7) $a^{\frac{4}{15}}$; 11) $a^{\frac{1}{2}}$; 15) $a^{\frac{7}{4}}b^{-\frac{1}{4}}$. **430.** 4) $b^{\frac{5}{4}}$; 8) b; 12) $a^{\frac{3}{5}}b^{-\frac{1}{8}}$; 16) $b^{-6,8}$. **431.** 3) 125; 6) 10; 9) 4. **432.** 2) 49; 5) 32; 8) 1. **433.** 4) $(\sqrt[8]{a})^8$. **434.** 7) $(m^{-0,6})^2$; 8) $(\sqrt[7]{m})^2$. **436.** 1) 6; 2) 100; 3) 19,5; 4) $12\frac{4}{9}$; 5) 2; 6) 10; 7) $\frac{2}{15}$; 8) 3; 9) 571; 10) $\frac{25}{21}$; 11) 12. **437.** 1) 7; 2) 10; 3) $122\frac{7}{9}$; 4) 1; 5) $\frac{1}{4}$; 6) 21; 7) $\frac{225}{256}$; 8) $\frac{8}{729}$. **438.** 1) 125; 2) 6; 3) коренів немає. **439.** 1) $\frac{1}{9}$; 3) 5. **441.** 3) $\frac{5}{p-5}$; 4) $\frac{16}{16y-y^3}$. **442.** 1) $\frac{12}{3c-1}$; 2) $\frac{1}{a-2b}$; 3) $\frac{a-1}{a}$. **451.** 4) $a^{0,5}-2b^{0,5}$; 8) $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$; 12) $3^{\frac{1}{5}}$. **452.** 3) $1+\frac{b}{a^{\frac{1}{2}}}$; 6) $x^{2,5}y^{2,5}\frac{(x^{0,5}-y^{0,5})}{(x^{0,5}+y^{0,5})}$; 9) $2^{\frac{1}{2}}$. **453.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 441. **454.** 1) $\frac{a^{0,5}b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}$; 2) $\frac{2(a+b)}{a-b}$; 3) 2; 4) $\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{13}{12}}}$; 5) a^2+ab+b^2. **455.** 1) $2m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$; 2) 3; 3) $-\frac{a}{b}$; 4) $m^{-\frac{1}{2}}$. **457.** 1) $\frac{1}{x-y}$; 2) $\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}$. **458.** 1) $\frac{4}{9}$; 2) 0; 3) $\frac{2}{9}$; 4) $\frac{2}{3}$. **461.** 5) -1; 1; 6) 1; 7. **462.** 3) -1; 1. **463.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) коренів немає; 4) 3. **464.** 2) Коренів немає; 3) -5; 7; 4) 7. **465.** 1) 1; 2) 3; 3) 1; 2; 4) 5; 5) 4; 6) 2; 7) 3; 8) -4. **466.** 1) -5; 2) 4; 3) 0; 4) -1; 5) 5. **468.** 1) 1; $-\frac{27}{8}$; 2) 16; 3) 25; 4) 1; 5) 8; 6) 0; 1; 7) 1; 29; 8) 0; 16; 9) $\frac{9}{8}$; 10) 8. **469.** 1) 16; 2) 1; 512; 3) 4; 4) -4; 11; 5) -8; 1; 6) -61; 7) 0; 1; 8) 2,8; -1,1.

470. 1) 6; 2) 2; 3) −1; 3; 4) −2. **471.** 1) 2; 2) 8. **472.** 1) 6; 9; 2) $\frac{137}{16}$; 3) коренів немає; 4) 1; −3. **473.** 1) −5; 4; 2) 3; 7; 3) −1. **474.** 1) 1; 4; 2) $-\sqrt{11}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{11}$; 3) −1; 4; 4) −2; 5; 5) −4; 1; $\frac{-3+\sqrt{22}}{2}$; $\frac{-3-\sqrt{22}}{2}$; 6) 1024. **475.** 1) −1; 5; 2) 1; 2; 3) 1; 2; 4) −6; 4. **477.** $f(x) = -2x + 1$. **478.** $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 3x - 2$. **479.** 1) (0; 1]; 2) [−1; 0] ∪ [1; +∞); 3) (−∞; −6) ∪ ∪ {−4} ∪ (2; +∞). **480.** 1) 5; 2) 3; 3) 0; $\frac{1}{2}$; 4) 8; 5) 25; 6) −1. **481.** 1) 4; 2) 2; 3; 3) −7; 8; 4) −1; 1; 4. **482.** 1) 0; 5; 2) 7. **483.** 1) 4; 2) −1; 3) 2; 4) коренів немає. **485.** 1) (3; 5]; 2) [0; +∞); 3) (−∞; −1] ∪ [0; 1); 4) (4; +∞); 5) [−8; −4]; 6) (−∞; −1) ∪ [2; +∞). **486.** 1) $\left(3; \frac{24}{5}\right]$; 2) [1; +∞); 3) [0; 3]; 4) [−1; 0) ∪ (0,6; 1]; 5) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 6) [1; 6]. **487.** 1) (−∞; 1); 2) [−7; 2]; 3) (−∞; −1]; 4) $\left[\frac{8}{3}; +\infty\right)$; 5) (−∞; −2] ∪ (2; +∞); 6) (3; 5]. **491.** 3) 10π. **492.** 2) $\frac{9\pi}{2}$. **497.** 5) У II чверті; 13) у I чверті; 19) у II чверті. **498.** 4) У III чверті; 8) у II чверті; 15) у IV чверті. **499.** 3) (0; −1); 5) (0; 1); 8) (1; 0). **500.** 2) (−1; 0); 6) (−1; 0). **501.** $\frac{\pi}{5}$; $\frac{3\pi}{10}$; $\frac{\pi}{2}$. **502.** $\frac{2\pi}{15}$; $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{8\pi}{15}$; $\frac{14\pi}{15}$. **503.** 15 сторін. **505.** 3) $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; 4) 2π; −2π. **508.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **509.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **510.** 1) −2; 2) $-\frac{4}{3}$. **511.** 80 000 мешканців. **512.** 1) 5; 3) $\sqrt{2}$; 5) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; 7) −3; 9) $\frac{7}{4}$. **513.** 2) 1; 4) 0; 6) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; 8) 9. **516.** 2) Так; 4) ні; 6) ні; 8) так. **517.** 1) Ні; 3) так. **518.** 1) 3; −3; 3) 3; 1; 5) 1; 0. **519.** 2) −1; −3; 4) 10; 4. **522.** 3) $\sqrt{2}$. **523.** 2) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$. **527.** 1) $-4 \leqslant a \leqslant -2$; 2) $a = 0$; 3) $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$; 4) $-1 \leqslant a \leqslant 0$ або $1 \leqslant a \leqslant 2$; 5) $1 \leqslant a \leqslant 2$ або $3 \leqslant a \leqslant 4$; 6) $a \neq 2$. **528.** 1) $1 \leqslant a \leqslant 3$; 2) таких значень a не існує; 3) $-2 \leqslant a \leqslant -\sqrt{2}$ або $\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 2$; 4) $a = 1$. **531.** 1) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; 2) [0,5; +∞). **532.** 1) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; 2) $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **540.** 1) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **541.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **542.** 1) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$; 2) 2; 3) 4; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **543.** 1) $2-\sqrt{2}$; 2) 1,5; 3) $4\sqrt{3}-3$. **550.** 1) 2 sin α; 2) −2 cos α; 3) 0. **551.** 1) 0; 2) 0; 3) −2 ctg β. **552.** 1) II; 3) I або II.

553. 2) IV; 4) I або III. **554.** 2) Парна; 5) не є ні парною, ні непарною; 8) непарна. **555.** 2) Парна; 4) не є ні парною, ні непарною; 6) непарна. **556.** 1) 7; 2) 2. **557.** 1) $(-\infty; -2) \cup [-1; 6]$; 2) $[-6; 1] \cup (3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3) \cup (-3; -1) \cup (2; +\infty)$; 4) $[-2; 1] \cup \{3\}$. **558.** 6 км/год, 8 км/год. **559.** 3) $\sqrt{3}$; 6) $-\frac{1}{2}$; 9) $\frac{1}{2}$; 12) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 15) $-\sqrt{3}$. **560.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) 1; 6) $\frac{1}{2}$; 8) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **567.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $[-1; +\infty)$; 3) $[3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 4]$. **568.** 1) 7; 2) 3; 3) 1. **569.** 30 км. **578.** 1) $\cos 1{,}6\pi < \cos 1{,}68\pi$; 3) $\cos 20° > \cos 21°$; 5) $\cos\frac{10\pi}{9} < \cos\frac{25\pi}{18}$; 7) $\sin 2 > \sin 2{,}1$. **579.** 2) $\sin\frac{5\pi}{9} > \sin\frac{17\pi}{18}$; 4) $\cos\frac{10\pi}{7} > \cos\frac{11\pi}{9}$. **582.** 1) Плюс; 2) плюс; 3) плюс. **583.** 1) Плюс; 2) мінус. **584.** 1) $\sin 58° > \cos 58°$; 2) $\sin 18° < \cos 18°$; 3) $\cos 80° < \sin 70°$. **585.** 1) Так; 2) ні. **594.** 1) 2; 2) функція не має нулів; 3) 1; 4) −2; 2. **595.** 1) $\frac{1}{5}$; 2) 21. **596.** 40 км. **601.** 2) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5} < \operatorname{tg}\frac{7\pi}{15}$; 5) $\operatorname{tg} 1 < \operatorname{tg} 1{,}5$; 8) $\operatorname{ctg}(-40°) < \operatorname{ctg}(-60°)$. **602.** 1) $\operatorname{tg} 100° > \operatorname{tg} 92°$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8} > \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$; 6) $\operatorname{ctg}(-3) < \operatorname{ctg}(-3{,}1)$. **607.** 1) Ні. *Вказівка.* $\operatorname{tg} 80° > \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$; 2) ні; 3) так. **608.** 2) $\sin 40° < \operatorname{ctg} 20°$. **613.** −2,5; −1; 0,5; 2; 3,5. **614.** 64, 16, 4 або −64, 16, −4. **615.** 18 і 15 деталей. **616.** 8) $2\cos^2\alpha$; 9) $-\sin^2\alpha$; 10) 1; 11) $\sin^2\frac{x}{2}$; 12) 2. **617.** 4) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 5) 1; 6) 1; 7) 1; 8) 4. **622.** 1) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$; 2) 1; 3) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 4) $\frac{1}{\sin x}$; 5) 0; 6) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 7) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$; 8) 1; 9) $\cos^2\alpha$; 10) $-\operatorname{ctg}\gamma$; 11) $\cos^4\alpha$; 12) 1; 13) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 14) $\frac{1}{\cos\beta}$. **623.** 1) $\frac{2}{\sin^2\beta}$; 2) 1; 3) $\frac{2}{\cos\beta}$; 4) $\frac{1}{\cos x}$; 5) $\frac{2}{\cos\beta}$; 6) $\operatorname{tg}^2\alpha$; 7) $\operatorname{tg}\alpha$; 8) −1; 9) 1; 10) $-\cos^2\alpha$. **624.** 2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$; 3) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$. **625.** 1) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$; 4) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{50}}$, $\cos\alpha = -\frac{7}{\sqrt{50}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{7}$. **626.** 2) *Вказівка.* Подайте доданок $2\sin^2\alpha$ у вигляді суми $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha$; 4) *Вказівка.* Розгляньте різницю лівої і правої частин даної рівності і доведіть, що вона дорівнює нулю. **630.** 1) $-\frac{1}{2}$. *Вказівка.* Поділіть чисельник і знаменник даного дробу на $\cos\alpha$; 2) $\frac{1}{4}$. **631.** 1) $-\frac{16}{11}$; 2) $\frac{12}{7}$. **632.** 1) $-\sin\beta - \cos\beta$; 2) $-\sin\alpha\cos\beta$. **633.** $\frac{1}{\sin\alpha}$. **634.** 1) $\frac{b^2-1}{2}$. *Вказівка.* $b^2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$;

2) $\frac{b(3-b^2)}{2}$; 3) $\frac{1+2b^2-b^4}{2}$. **635.** 1) b^2-2; 2) $b(b^2-3)$. **636.** 2; 1. **637.** 3; −2. **639.** 1) 125; 2) 2. **640.** 7 сторінок, 5,6 сторінки. **641.** 3) 0; 4) 0. **642.** 3) 0. **643.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\cos\beta$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\sin 2\beta$; 7) 1; 8) $\operatorname{tg} 15°$; 9) $\cos(\alpha-\beta)$. **644.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos 2\beta$; 6) $\cos(\alpha+\beta)$. **645.** $\frac{6}{7}$. **647.** 2) −1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **648.** 1) $\sqrt{3}$. **651.** $-\frac{31\sqrt{2}}{82}$. **652.** $-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$. **653.** $-\frac{24}{25}$. **654.** $-\frac{297}{425}$. **655.** 2. **656.** 5. **657.** 1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 3) $\sqrt{3}-2$. **658.** 1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **661.** 1) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$; 2) $\frac{1}{\sin 2\alpha}$; 3) $\cos 2\alpha$; 4) $-\frac{1}{\cos\alpha}$. **662.** 1) 1; 2) −1. **665.** 1) 2; 2) $\sqrt{2}$. **666.** 1) −2; 2) $-2\sqrt{2}$. **667.** При $x = 1$: 9, 6, 3; при $x = 9$: 41, 62, 83. **668.** При $x = 2$: 1, −3, 9; при $x=\frac{4}{3}$: $\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $\frac{25}{3}$. **669.** 18 год, 12 год. **672.** 3) $-\cos 38°$; 4) $-\sin\frac{\pi}{18}$. **673.** 3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$; 4) $\sin\frac{\pi}{15}$. **676.** 2) −1; 6) $2\cos\alpha$. **677.** 3) 0; 4) 1. **678.** 1) −4; 2) $\frac{5}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; 4) 1. *Вказівка.* Зведіть кожну функцію до найменшого додатного аргументу; 5) 1. **679.** 1) $3-2\sqrt{2}$; 2) 3; 3) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; 4) −1. **680.** 1) $-\cos\alpha$; 2) 1; 3) 1; 4) −1; 5) 2; 6) 2; 7) 1; 8) 1. **682.** 1) 1; 2) 0; 3) 0. **683.** 1) 1; 2) 0. **685.** 2. *Вказівка.* Оскільки $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{11}+\frac{5\pi}{22}=\frac{\pi}{2}$, то $\cos^2\frac{3\pi}{8}=\sin^2\frac{\pi}{8}$ і $\cos^2\frac{5\pi}{22}=\sin^2\frac{3\pi}{11}$. **686.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\frac{1}{\cos^2(\alpha+10°)}$. **687.** 1) $[-2; 0) \cup [5; +\infty)$; 2) $[-3; 2) \cup (2; +\infty)$; 3) $\left(\frac{3}{2}; 4\right]$. **688.** 1) 1; 2) 1. **689.** 3 км/год. **692.** 1) $2\cos\alpha$; 2) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 3) $\cos^2\alpha$; 4) $\sin 25°$; 5) 1; 6) $\cos\alpha+\sin\alpha$; 7) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 8) 2; 9) $\frac{1}{2}$; 10) 1; 11) $-\cos\frac{\alpha}{2}$; 12) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$; 13) $\sin 2\alpha$; 14) 1; 15) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2\alpha$; 16) $\sin 4\alpha$. **693.** 1) $2\sin 40°$; 2) $\cos 11\alpha$; 3) $\cos^2 2\beta$; 4) $\sin 40°$; 5) $\cos 20\varphi$; 6) 1; 7) $\cos 35° - \sin 35°$; 8) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 9) 1; 10) $\frac{1}{4}\sin 4\alpha$; 11) $2\sin 2\alpha$; 12) $\frac{1}{2}\cos 2\alpha$; 13) $-\sin 2\beta$; 14) $-\sin 2\alpha$; 15) $\sin 3\alpha$. **694.** 1) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; 5) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $2\sqrt{3}$. **707.** 1) 1; 2) $\operatorname{ctg} 4\alpha$. **708.** $-4\sqrt{5}$. **709.** $-\frac{24}{7}$. **710.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; 3) 2; 4) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 5) $\sin 4\alpha$; 6) $\sin 2\alpha$; 7) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 8) $\cos\alpha$. **711.** 1) $2\operatorname{ctg} 4\alpha$; 2) $\sin 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$;

4) $4\sin\alpha$; 5) 1; 6) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. **716.** $-\frac{8}{9}$. **717.** $\frac{3}{4}$. **718.** 1) $\sin\alpha$; 2) $\cos 4\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\sin 8\alpha$; 5) $\operatorname{tg}^4\alpha$; 6) 1. **719.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $8\cos 2\alpha$; 3) $-\frac{1}{4}\sin^2\alpha$; 4) $\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}$; 5) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}2\alpha$. **723.** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha$. **724.** $\sqrt[3]{a+b}-\sqrt[3]{a-b}$. **726.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{5}$; 3) $\frac{1}{10}$. **727.** $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. **728.** $\frac{1}{2}$. **729.** $-\frac{1}{2}$. **730.** $\frac{1}{2}$.

731. 1) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; 3) $2+\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; 5) $-(1+\sqrt{2})$; 6) $\sqrt{2}-1$. **732.** 1) $\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$; 2) $2\cos\frac{\varphi}{2}$. **735.** 1) $\operatorname{tg}5\alpha$; 2) $-\operatorname{ctg}3\alpha$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

736. 1) $\frac{\cos\alpha}{\cos 4\alpha}$; 2) $\operatorname{tg}6\alpha$; 3) 1. **739.** 1) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $4\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 3) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)$. **740.** 1) $4\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$; 3) $4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

745. 1) 7; 2) −3; 3) −2; 4) 1. **746.** $8\sqrt[3]{2}$. **747.** 4 %. **748.** 1) $\frac{1}{2}(\cos 20^\circ+\cos 10^\circ)$; 2) $\cos\alpha+\cos 5\alpha$; 3) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta$; 4) $\sin\frac{3\pi}{40}+\sin\frac{\pi}{8}$; 5) $\frac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 10\alpha)$; 6) $\frac{1}{2}(\cos 26^\circ-\cos 122^\circ)$; 7) $\cos\alpha-\cos 3\alpha$; 8) $\frac{2\cos 2\alpha+1}{4}$. **749.** 1) $\cos\frac{3\pi}{40}+\cos\frac{13\pi}{40}$; 2) $\frac{1}{2}(\sin 52^\circ+\sin 4^\circ)$; 3) $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha-\cos 8\alpha)$; 4) $\frac{2\cos 2\alpha-1}{4}$.

750. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\sin 3\alpha$; 3) $\cos\alpha$; 4) 0,5. **751.** 1) $\cos\alpha$; 2) $\frac{1}{2}$. **754.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 1; 3) $-\sin 2\alpha$. **755.** 1) 1; 2) $\sin 2\alpha$. **758.** 1) *Вказівка*. Помножте і поділіть ліву частину рівності на $2\sin\frac{\pi}{7}$. **760.** 1) 5; 2) 3; 3) 7; 4) 4.

761. $y=0{,}2x$. **762.** $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$. **765.** 2) 1,5; 5. **766.** 2) $\frac{1}{3}$; 7. **767.** $\sqrt{5}$; 3.

768. 13; $\frac{1}{4}$. **769.** 1) $y=(x-2)^3+1$; 2) $y=\sqrt[5]{x+3}-3$; 3) $y=\frac{1}{x-1}$; 4) $y=x^4+2$, $x\in[0;+\infty)$. **770.** 1) 14; 2) −4; 122. **771.** Зменшилася на 9 %. **774.** 2) $\pm\frac{\pi}{5}+\frac{12\pi n}{5}$, $n\in\mathbb{Z}$; 6) $\pm 3\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}+6\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

775. 2) $\pm\frac{25\pi}{6}+10\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{4\pi}{3}+\frac{8\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. **776.** 3) $12+6\pi+12\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{24}\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. **777.** 2) $\pm\frac{3\pi}{2}-6+4\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **778.** $-\frac{\pi}{6}$.

779. 3π. **780.** 4 корені. **781.** $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{31\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$. **782.** 1) 1; 2) $a^{\frac{1}{4}}-ba^{-\frac{3}{4}}$.

783. 1) $\left[0;\frac{2}{3}\right)\cup(1;+\infty)$; 2) $[-3;-2)\cup(-2;3]$; 3) $(-\infty;-8)\cup(-8;-7]\cup$

$\cup [2; 8) \cup (8; +\infty)$; 4) $[0; 4]$. **786.** 3) $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{(-1)^{n+1}}{8}\arcsin\frac{2}{9}+\frac{\pi n}{8}$, $n \in \mathbb{Z}$. **787.** 3) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **788.** 2) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{8}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **789.** 2) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{5\pi}{6}+20+5\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **790.** $\frac{13\pi}{12}$. **791.** $-\frac{13\pi}{90}$. **792.** 1) $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pi + 4\pi n$, $\frac{\pi}{3}+4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **793.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **794.** $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$. **795.** 6 коренів. **800.** 3) $-\frac{4\pi}{21}+\frac{4\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{1}{6}\operatorname{arcctg}\frac{6}{11}+\frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$. **801.** 2) $\frac{5\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **802.** 2) $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **803.** 3) $-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. **804.** 4 корені. **805.** 1 корінь. **806.** $-\frac{\pi}{4}$. **807.** $-\frac{2\pi}{3}$. **808.** $a=-\frac{\pi}{3}$, або $a \leqslant -\frac{\pi}{2}$, або $a \geqslant 0$. **809.** $a=-\frac{\pi}{4}$, або $a \leqslant -\frac{\pi}{2}$, або $a \geqslant 0$. **811.** 2) $y=-\sqrt{x+1}$. **814.** 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **815.** 5) 0; 7) $\frac{1}{2}$. **818.** 1) $\frac{8\pi}{3}$; 3) $\frac{19\pi}{6}$. **819.** 2) -2π. **820.** 3) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2};+\infty\right)$; 4) $[0; 1]$; 5) $\mathbb{R}$; 6) $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$; 7) $[-2; +\infty)$; 8) $[1; +\infty)$. **821.** 1) $[-3; -1]$; 2) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3};+\infty\right)$; 3) $[0; 1]$; 4) $[3; +\infty)$; 5) $\mathbb{R}$; 6) $(-\infty; -7) \cup (-7; +\infty)$; 7) $[0; 2]$. **822.** 1) π; 0; 2) $2 + \pi$; 2; 4) найбільшого значення не існує, найменше значення $\frac{1}{\pi}$. **823.** 1) 2π; π; 2) $\frac{\pi}{2}-2$; $-\frac{\pi}{2}-2$. **824.** 1) $\frac{\pi}{2}+2$; 2; 2) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; 0. **825.** 1) $\frac{\pi}{2}+4$; 4; 2) $\sqrt{\pi}$; 0. **826.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{\sqrt{15}}{15}$. **827.** 1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{12}{5}$. **828.** 1) $-\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{5}$; 2) 252; 3) $\frac{1}{2}$; -1; 4) $\frac{-1+3\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1-3\sqrt{5}}{2}$. **829.** $g(-1)$, $g(1)$, $f(2)$, $f(-5)$. **830.** 13,5 кг. **831.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\pm 4\arccos\frac{1}{3}+8\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **832.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, πn, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{4}+3\pi n$, $3\operatorname{arcctg}\left(-\frac{2}{3}\right)+3\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **833.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

3) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}4+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$; 5) $-3\operatorname{arctg}5+3\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}4+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 7) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ 2\operatorname{arctg}2+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **834.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{4},\ n\in\mathbb{Z}$; 5) $\operatorname{arctg}2+\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **835.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ (-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $\pm\arccos\left(1-\sqrt{2}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $2\pi n,\ \pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 5) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 6) $\pm2\pi+6\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 7) $\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 8) $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ 2\pi+4\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 9) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 10) $\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}$; 11) $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5},\ \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\frac{\pi n}{5},\ n\in\mathbb{Z}$; 12) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arcctg}2+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 13) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 14) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **836.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $(-1)^n\arcsin\left(2-\sqrt{3}\right)+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 5) $(-1)^{n+1}\pi+6\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 6) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \pi+4\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 7) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 9) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 10) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **837.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5},\ \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\frac{\pi n}{5},\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $\operatorname{arctg}3+\pi n,\ \operatorname{arctg}4+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 7) $\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **838.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка.* $\sin 2x=2\sin x\cos x$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **839.** $-\pi$. **840.** $-\frac{\pi}{2}$. **841.** $\frac{\pi}{4}$. **842.** $\frac{\pi}{2}$. **843.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n\arcsin\frac{1-\sqrt{10}}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 5) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **844.** 1) $\pm\arccos\frac{\sqrt{29}-2}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $\pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 5) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,$

$n \in \mathbb{Z}$. **845.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-2\operatorname{arctg}\frac{11}{5}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $2\operatorname{arctg}\left(-1\pm\sqrt{5}\right)+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **846.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $2\operatorname{arctg}4+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $2\operatorname{arctg}2\sqrt{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **847.** 4 корені. **848.** 2π. **849.** $\pi-\arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4}$. **850.** $\frac{\pi}{2}$. **851.** 1) $-1 \leqslant a \leqslant 2$; 2) $a = 3$. **852.** 1) $-1 \leqslant a \leqslant 2$; 2) таких значень a не існує. **854.** 3) -2; 4) 1. **855.** 40 т, 100 т. **856.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **857.** 1) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n$, $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $\operatorname{arcctg}3+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **858.** 1) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{6}$, $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. **859.** 1) $\frac{\pi}{12}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. **860.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $\pi+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) πn, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 7) πn, $\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{2\pi n}{5}$, $\pi+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 9) $\frac{\pi n}{5}$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; 10) $\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{21}+\frac{\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$. **861.** 1) πn, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $2\pi n$, $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{4}$, $(-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; 7) $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $(-1)^n\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **862.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $2\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 7) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* $\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}-\frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1-\cos 8x}{2}=0$; 8) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 9) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. **863.** 1) $\frac{\pi}{22}+\frac{\pi n}{11}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi n}{2}$,

$n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **864.** 1) $\sqrt[4]{5}$; 2) 1,5. **865.** 1) $\left(-2;-\frac{1}{2}\right] \cup$ $\cup (2;+\infty)$; 2) $\left(-5;-\frac{7}{8}\right] \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **866.** 7 кг, 21 кг. **867.** 1) $2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **868.** 1) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, πn, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **869.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* $(\sin 4x + \cos 4x)(\sin^2 4x + \cos^2 4x - \sin 4x \cos 4x) - (1 - \sin 4x \cos 4x) = 0$; $(\sin 4x + \cos 4x - 1)(1 - \sin 4x \cos 4x) = 0$; 2) $\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{4}$, $-\frac{\pi}{12}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{8}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **870.** 1) -2; 2) 2. **871.** 2) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n < x < \frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{6}+\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\pi n < x < \frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 9) $\pi - \arcsin\frac{1}{6}+2\pi n < x < 2\pi + \arcsin\frac{1}{6}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **872.** 2) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n < x < \frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < -\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{4}+\pi n \leqslant x < \pi + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 10) $\operatorname{arcctg} 2 + \pi n < x < \pi + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **873.** 1) $\frac{\pi}{6}+\pi n < x < \frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{5} < x < \frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$. **874.** 3) $-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2} < x < -\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{4}+\frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **875.** 1) $-\frac{\pi}{6}+\pi n < x \leqslant \frac{2\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi n < x < \frac{5\pi}{12}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{11\pi}{12}+\pi n < x < \frac{5\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\pi + 4\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}+\pi n < x < \frac{3\pi}{8}+\frac{1}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **876.** 1) $-\frac{\pi}{6}+\pi n < x \leqslant \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{5\pi}{6}+4\pi n < x < \frac{11\pi}{6}+4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n < x < \frac{11\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{9\pi}{4}+3\pi n < x < -\frac{\pi}{4}+3\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{17\pi}{60}+\frac{\pi n}{2} \leqslant x \leqslant \frac{22\pi}{60}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **877.** 1) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k \leqslant x < -\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $\frac{\pi}{3}+2\pi k < x \leqslant \frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k \leqslant x < \arcsin\frac{1}{4}+2\pi k$, $\pi - \arcsin\frac{1}{4}+2\pi k < x \leqslant \frac{7\pi}{6}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k < x < \operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **878.** 1) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k < x \leqslant -\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi k \leqslant x < \frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k \leqslant x < \frac{\pi}{6}+2\pi k$,

$\frac{5\pi}{6}+2\pi k<x\leqslant\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $\operatorname{arcctg} 1{,}5+\pi k<x<\pi-$ $-\operatorname{arcctg} 4+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **880.** 1) $[-3;-2)\cup$ $\cup(-2;1]$; 2) $(-\infty;1]\cup(2;4)\cup(4;+\infty)$; 3) $(-4;1]\cup\{3\}$. **881.** $\frac{3}{16}$. **882.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi k\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}<x<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{3}+\pi k<x<\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 4) $\pi k<x<\operatorname{arcctg} 5+\pi k$, $\pi-\operatorname{arcctg} 5+$ $+\pi k<x<\pi+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **883.** 1) $x\neq\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+2\pi k\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{5\pi}{12}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **884.** 1) $-\frac{\pi}{3}+\pi k<x<\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $x\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **885.** 1) $\frac{\pi}{3}+2\pi k<x<$ $<\frac{5\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $-\operatorname{arctg} 2+\pi k<x<\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 4) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi k\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi k$, $-\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi k\leqslant x<\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{5}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{5}+2\pi k$, $\pi+2\pi k<x<\frac{7\pi}{5}+2\pi k$, $\frac{9\pi}{5}+2\pi k<x<2\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **890.** 6. **891.** 16) $(-\infty;-7)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$; 17) $(6;+\infty)$; 18) $(0;3)\cup$ $\cup(3;5)$. **904.** 3) $\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)$; 6) $(-\infty;-3]\cup(1;2]$; 7) $(-\infty;1)\cup\left(\frac{5}{4};2\right)\cup(3;+\infty)$; 8) $\left(-2;-\frac{3}{2}\right]\cup(-1;1]$. **905.** 1) $(-2;5)$; 2) $\{-3\}\cup(-2;5)$; 3) $[-2;3)\cup(3;5]$; 4) $(-2;3)\cup(3;5)$; 5) $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup[2;+\infty)$; 6) $(0;1)\cup(2;3)\cup$ $\cup(3;+\infty)$. **906.** 1) $\left[-3;-\frac{3}{2}\right)\cup\{2\}$; 2) $(4;+\infty)\cup\{-3,-1\}$. **907.** 1) 14; 2) -163; 3) $21\frac{1}{3}$; 4) 3; 5) 3; 6) -2. **911.** 1) -2; 2) 1. **918.** 5) $\frac{1}{3}$; 6) 67; 7) 14; 8) $-\frac{1}{12}$; 9) -1; 10) $1\frac{15}{16}$. **919.** 1) $\frac{8a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}{27c}$; 2) $\frac{256a^2b^2}{625c^{\frac{2}{3}}}$; 3) $\frac{1}{a^2b^2}$; 4) $\frac{a}{b}$. **921.** 1) 4; 2) 2; 3) 3; 4) -2; 5) $\frac{5}{4}$; 6) -2; 7) -12; 8) 2; 3; 9) $\frac{2}{9}$; 2. **922.** 1) 625; 2) 729; 3) 3; -25; 4) 9; 5) 5; 6) $-\frac{4}{3}$; $\frac{1}{3}$; 7) -1; 5; 8) $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$; $\frac{-3\pm\sqrt{22}}{2}$. **923.** 2) $a=3$. **928.** 1) $-\frac{3}{5}$; 2) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **929.** 1) $\sin\alpha$; 2) $\cos^4\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) $2\operatorname{tg}^2\alpha$. **930.** 1) 2; -3; 2) такі значення не існують. **931.** 1) 0; 2) 0; 3) 1; 4) 1. **932.** -1. **934.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{149}$. **935.** 1) $\operatorname{tg}\alpha$; 2) $2\sin 3\alpha$; 3) 2; 4) 0; 5) 1; 6) $\cos\alpha$; 7) 2; 8) $\frac{1}{4}\sin 8\alpha$. **937.** $\frac{\pi}{2}$.

938. $-\frac{\pi}{24}$. **939.** 2 корені. **940.** 3) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 9) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 10) $2\pi k$, $-2 \operatorname{arctg} 3 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 11) πk, $\pm\arccos\frac{1}{5}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 12) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 13) $\frac{\pi k}{3}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 14) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 15) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$; 16) $\frac{\pi k}{2}$, $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 17) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 18) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}$, πk, $k \in \mathbb{Z}$. **941.** $\pm\arccos\frac{\pi k}{5}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \{-1, 0, 1\}$. **942.** $\frac{3\pi}{4}$; $2\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. **944.** 3) $-\sqrt{3}$; 4) 0. **945.** 1) $[4; 6]$; 2) $\left[-4; -\sqrt{14}\right] \cup \left[\sqrt{14}; 4\right]$; 3) $[-2; +\infty)$. **946.** 1) $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$; 2) $(5 - 3\pi; 5)$. **947.** 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) коренів немає; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ У ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ»

Номер завдання	Номер задачі																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	В	В	А	Г	Г	Б	А	Б	А	В	В	А	В	Б	В	Г	Г	Б
2	В	Б	В	Б	Г	Г	В	Б	А	Г	А	В	В	Г	Б	А	Б	В
3	В	Г	Г	Б	Б	А	В	Б	В	А	В	Б	В	В	Г	Б	А	Б
4	В	Б	В	Г	А	Б	В	Б	В	Г	Б	Г	В	А	В	Б	А	Б

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Навчальне видання

Мерзляк Аркадій Григорович
Номіровський Дмитро Анатолійович
Полонський Віталій Борисович
Якір Михайло Семенович

АЛГЕБРА
І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ
10 клас
Академічний рівень

Редактор *Г. Ф. Висоцька*
Художник *С. Е. Кулинич*
Коректор *Т. Є. Цента*
Комп'ютерне верстання *О. О. Удалова*

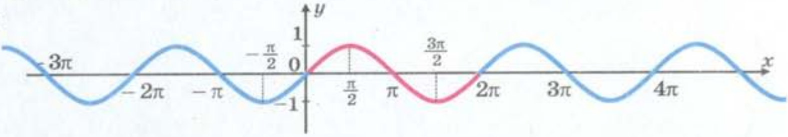
Формат 60×90/16. Гарнітура шкільна. Ум. друк. арк. 22,00.
Тираж 3000 прим. Замовлення № 743

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

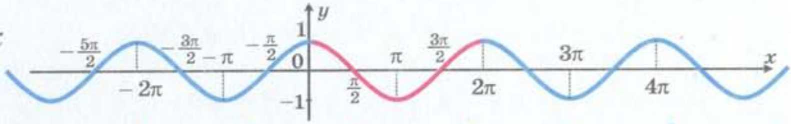
Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003

Графіки тригонометричних функцій

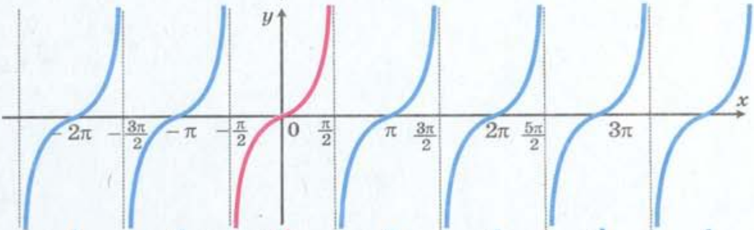
$y = \sin x$



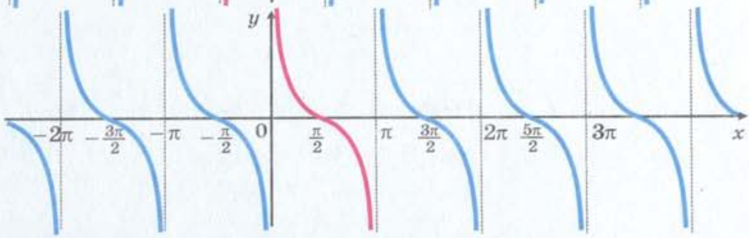
$y = \cos x$



$y = \text{tg}\, x$



$y = \text{ctg}\, x$



Значення тригонометричних функцій деяких кутів

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\text{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–
$\text{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\quad 1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};\quad 1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha};\quad \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1$$

Формули додавання

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$;
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$; $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$;

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta};\quad \mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$$
$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$$

Формули пониження степеня

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Формули суми і різниці синусів (косинусів)

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

Формули перетворення добутку в суму

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta));$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta));$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$

Формули синуса і косинуса потрійного аргументу

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;\qquad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

АЛГЕБРА 10
і початки аналізу клас

Навчально-методичний комплект

Підручник	Книга для вчителя	Збірник задач і контрольних робіт

ДЛЯ ТИХ, ХТО ПРАГНЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

ПІДРУЧНИК ДЛЯ КЛАСІВ З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ

9 789664 740941

ТОВ ТО «Гімназія»
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, 758-83-93, 719-46-80
факс: (057) 758-83-93