А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Підручник для 10 класу
з поглибленим вивченням математики

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2010

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]
ББК 22.141я721.6
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(лист від 09.08.2010 № 1/11-7525)

Мерзляк А. Г.

М52 Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2010. — 415 с.: іл.

ISBN 978-966-474-103-0.

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]
ББК 22.141я721.6

ISBN 978-966-474-103-0

Від авторів

ЛЮБІ ДЕСЯТИКЛАСНИКИ!

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — алгебру і початки аналізу.

Цей предмет надзвичайно важливий. Мабуть, немає сьогодні такої галузі науки, де б не застосовувалися досягнення цього розділу математики. Фізики та хіміки, астрономи та біологи, географи та економісти, навіть мовознавці та історики використовують «математичний інструмент».

Алгебра і початки аналізу — корисний і дуже цікавий предмет, який розвиває аналітичне і логічне мислення, дослідницькі навички, математичну культуру, кмітливість.

Ми маємо надію, що ви не розчарувалися, обравши нелегкий шлях навчатися в математичному класі. У цьому навчальному році ви продовжите вивчати математику за поглибленою програмою. Це не просто. Потрібно бути наполегливим і завзятим, уважним і акуратним, при цьому найголовніше — не бути байдужим до математики, а любити цю красиву науку. Сподіваємося, що ви з інтересом будете засвоювати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник розділено на шість параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання. До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено зірочкою (*)).

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете знати більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Крім того, у підручнику ви зможете прочитати оповідання з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків. Назви цих оповідань надруковано синім кольором.

Дерзайте! Бажаємо успіху!

ШАНОВНІ КОЛЕГИ!

Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з поглибленим вивченням математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає великих зусиль учителя, який формує навчальний матеріал по крихтах, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

Умовні позначення

n° завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

задачі, у яких отримано результат, що може бути використаний при розв'язуванні інших задач;

закінчення доведення теореми;

закінчення розв'язування прикладу;

рубрика «Коли зроблено уроки».

§ 1. ПОВТОРЕННЯ Й СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ АЛГЕБРИ 8–9 КЛАСІВ

1. Задачі на повторення курсу алгебри 8–9 класів

Вправи

Перетворення раціональних виразів

1.1. Спростіть вираз $\left(\frac{ab}{a-b}+a\right)\left(\frac{ab}{a+b}-a\right):\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}$.

1.2. Спростіть вираз $\left(\frac{a+5}{(a-9)(a+9)}+\frac{a+7}{(a-9)^2}\right)\left(\frac{a-9}{a+3}\right)^2+\frac{7+a}{9+a}$.

1.3. Спростіть вираз $x^2y^2\left(\frac{1}{(x+y)^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{2}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right)$.

1.4. Спростіть вираз $\frac{a^2-1}{b^2+b}\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{b}}\right)\frac{1+b-b^3-b^4}{1-a^2}$.

1.5. Доведіть тотожність

$$\frac{(x-y)^2+xy}{(x+y)^2-xy}\left(\frac{x^5+y^5+x^3y^2+x^2y^3}{(x^3-y^3)(x^3+y^3+x^2y+xy^2)}\right)^{-1}=x-y.$$

1.6. Доведіть тотожність

$$\left(a^2-b^2-\frac{4a^2b-4ab^2}{a+b}\right)\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)^{-1}=(a-b)^2.$$

1.7. Доведіть тотожність $\dfrac{3xyz}{xy+yz+zx}+\dfrac{\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{1-y}{y}+\dfrac{1-z}{z}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}=1.$

1.8. Спростіть вираз $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\dfrac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}.$

1.9. Спростіть вираз $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+\dfrac{2x(x-1)^2}{x^4+x^2+1}+\dfrac{2x^2(x^2-1)^2}{x^8+x^4+1}.$

1.10. Спростіть вираз

$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}+\frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

1.11. Доведіть тотожність

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

1.12. Спростіть вираз $\dfrac{1}{1-b}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{2}{1+b^2}+\dfrac{4}{1+b^4}+\ldots+\dfrac{2^n}{1+b^{2^n}}.$

1.13. Відомо, що $a^2-a-1=0$. Доведіть, що

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)\ldots\left(a^{2^{n-1}}+\frac{1}{a^{2^{n-1}}}\right)=a^{2^n}-\frac{1}{a^{2^n}}.$$

1.14. Доведіть, що коли $a+b+c=1$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$, то

$$a^2+b^2+c^2=1.$$

1.15. Доведіть, що коли $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ і $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$, то

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

1.16. Розкладіть на множники вираз

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y).$$

1.17. Розкладіть на множники вираз

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2).$$

1.18. Попарно різні числа a, b, c такі, що $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{a}$. Доведіть, що $|abc|=1$.

Перетворення виразів, які містять квадратні корені

1.19. Знайдіть значення виразу $(\sqrt{28}-\sqrt{12})\cdot\sqrt{10+\sqrt{84}}$.

1.20. Знайдіть значення виразу $\left(\dfrac{15}{\sqrt{6}+1}+\dfrac{4}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot(\sqrt{6}+11).$

1.21. Знайдіть значення виразу $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}}-\frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$.

1.22. Знайдіть значення виразу $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}}$.

1.23. Знайдіть значення виразу $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

1.24. Знайдіть значення виразу $\sqrt{17+6\sqrt{4-\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$.

1.25. Знайдіть значення виразу $2\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{13-4\sqrt{3}}$.

1.26. Знайдіть значення виразу $(2-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}$.

1.27. Доведіть, що $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$.

1.28. Доведіть, що $\sqrt{3-\sqrt{5}}\,(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})=8$.

1.29. Доведіть, що $\frac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$.

1.30. Доведіть, що $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\,(5+2\sqrt{6})(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}=1$.

1.31. Знайдіть значення виразу

$$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

1.32. Знайдіть значення виразу $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{ab}}{a-b}$.

1.33. Знайдіть значення виразу

$$\left(\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\right):\left(3a^2+3b\sqrt{ab}\right)+\frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}.$$

1.34. Спростіть вираз $\left(\sqrt{a^3-2a^2+a}+\frac{4a\sqrt{a}}{\sqrt{(1-a)^2}}\right):\left(\frac{\sqrt{a^3}}{a-1}-\left(\frac{1-a}{\sqrt{a}}\right)^{-1}\right)$.

1.35. Спростіть вираз $\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\frac{x^2-1}{2}+1$.

1.36. Знайдіть значення виразу

$$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^{-2}-1}-\frac{1}{x}\right),\text{ якщо } 0<x<1.$$

1.37. Спростіть вираз $\left(\frac{(\sqrt{a^3}-\sqrt{8})(\sqrt{a}+\sqrt{2})}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{(a^2+2)^2-8a^2}$.

1.38. Знайдіть значення виразу $\dfrac{\dfrac{\sqrt{b^2-2b+1}}{b}+b\sqrt{b^2-2b+1}+2-\dfrac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\dfrac{1}{b}}}$, якщо $0<b<1$.

1.39. Спростіть вираз

$$\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{b}{b-\sqrt{ab}}+\frac{a}{\sqrt{ab}+a}\right)-\frac{\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}}{2}.$$

1.40. Спростіть вираз $\dfrac{1+\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^2\left(b+\sqrt{b^2-1}\right)^2}{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\left(b+\sqrt{b^2-1}\right)}$.

1.41. Спростіть вираз $\dfrac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\sqrt{\dfrac{b+2}{b-2}}$ при $b>2$.

1.42. Знайдіть значення виразу

$$\sqrt{\frac{a-2\sqrt{a-1}}{a+2\sqrt{a-1}}}+\sqrt{\frac{a+2\sqrt{a-1}}{a-2\sqrt{a-1}}}-\frac{4}{\sqrt{a^2-4a+4}}.$$

1.43. Спростіть вираз $\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\dfrac{8}{x}+\dfrac{16}{x^2}}}$.

Раціональні рівняння і нерівності

1.44. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{5}{x^2-4x+4}-\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x+2}=0;$

2) $1+\dfrac{2x}{x+4}+\dfrac{27}{2x^2+7x-4}=\dfrac{6}{2x-1};$

3) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x-3}{x+3}+\dfrac{x+4}{x-4}=4;$

4) $\dfrac{x^2+4x+4}{x+4}-\dfrac{2x+6}{x+2}=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}-\dfrac{2x+9}{x+3};$

5) $|x+2|+|x-3|=5;$

6) $|2x+5|=|x|+2;$

7) $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4.$

1.45. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{3x}{x^3-1}-\dfrac{5}{4x^2+4x+4}=\dfrac{1}{2(1-x)};$

2) $\dfrac{x}{2x^2+12x+10}+\dfrac{3x+1}{4x^2+16x-20}-\dfrac{x+34}{x^3+5x^2-x-5}=0;$

3) $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{x-7}{x-1}+4;$

4) $\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3};$

5) $\frac{|x-3|}{|x-2|-1}=1;$

6) $||3-x|-x+1|+x=6.$

1.46. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4}{x-3}-\frac{a}{2}=2;$ 2) $\frac{2x}{2x+a}-\frac{a-2}{2x-a}-\frac{4a-2a^2}{4x^2-a^2}=0.$

1.47. Розв'яжіть рівняння $\frac{6}{x^2-16}-\frac{1}{x-4}=\frac{3a}{4+x}.$

1.48. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2-6x+5)(3x-1)^2>0;$

2) $(x^2-6x+5)(3x-1)^2\leqslant 0;$

3) $(x^2-x-2)(x^2-4x+3)\geqslant 0;$

4) $\frac{(x+1)(x-2)^4(x+3)}{(x-7)(1-3x)}>0;$

5) $\frac{x^3+x^2+3x+3}{x^2-6x+7}\leqslant 0;$

6) $\frac{|x|(x-2)^3}{|x+3|(x-4)}\geqslant 0;$

7) $(x+7)\sqrt{x+x^2-20}>0;$

8) $\frac{x-1}{x+1}<x;$

9) $\frac{14x}{x+1}-\frac{9x-30}{x-4}<0;$

10) $\frac{4}{x+1}+\frac{2}{1-x}<1;$

11) $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)\geqslant 5;$

12) $(x^2+3x)(2x+3)-16\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x}\geqslant 0;$

13) $\frac{3x+|x-1|}{x-2}>1;$

14) $\frac{(1+x)(2+x)}{x^2-|x|-2}\geqslant -3x;$

15) $|x^2-3x|+x-2<0;$

16) $|x^2+3x|\geqslant 2-x^2.$

1.49. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2 - 10x + 9)(4x + 1)^2 > 0$;

2) $(x^2 - 10x + 9)(4x + 1)^2 \leqslant 0$;

3) $(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 4) \geqslant 0$;

4) $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 5x + 10}{x^2 - x - 6} \leqslant 0$;

5) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{2}{x+2}$;

6) $(x^2 - x - 1)(x^2 - x - 7) < -5$;

7) $(x^2 - 2x)(2x - 9) - 9 \cdot \dfrac{2x-2}{x^2 - 2x} \leqslant 0$;

8) $\dfrac{2x + |x + 1|}{x - 2} > 1$;

9) $\dfrac{4}{|x+3| - 1} \geqslant |x + 2|$;

10) $\dfrac{(1-x)(2-x)}{x^2 + |x| - 2} \geqslant -2x$;

11) $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$;

12) $|x^2 + 4x + 3| > x + 3$.

1.50. При яких значеннях параметра a рівняння

$$(a + 4)x^2 + (a + 4)x + 3 = 0$$

має корені?

1.51. При яких значеннях параметра a рівняння

$$(a + 3)x^2 + (a^2 + 3a)x + 1 = 0$$

має один корінь?

1.52. Знайдіть значення параметра a, при яких сума коренів рівняння $x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a - 2 = 0$ дорівнює нулю.

1.53. При яких значеннях параметра a різниця коренів рівняння $(a - 2)x^2 - (a - 4)x - 2 = 0$ дорівнює 3?

1.54. При яких значеннях параметра a різниця коренів рівняння $2x^2 - (a + 1)x + a - 1 = 0$ дорівнює їх добутку?

1.55. При яких значеннях параметра a нерівність $(a + 4)x^2 - 2ax + 2a - 6 < 0$ виконується при всіх значеннях x?

1.56. При яких значеннях параметра a нерівність $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$ виконується для будь-якого значення x?

1.57. При яких значеннях параметра a нерівність $(a - 3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$ виконується при всіх значеннях x?

1.58. При яких значеннях параметра a один з коренів рівняння $3ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$ більший за 1, а другий менший від 1?

1.59. При яких значеннях параметра a корені x_1 і x_2 рівняння $2x^2 - 2(2a + 1)x + a(a + 1) = 0$ задовольняють умову $x_1 < a < x_2$?

1.60. При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ належать проміжку $[-2; 6]$?

1.61. При яких значеннях параметра a нерівність $ax^2 - 4x + 4a > 0$ виконується для всіх додатних значень x?

1.62. При яких значеннях параметра a нерівність $x^2 + ax - 7a < 0$ виконується для всіх x з проміжку $(1; 2)$?

1.63. При яких значеннях параметра a всі розв'язки нерівності $ax^2 - 2x - a(a^2 + 2) < 0$ задовольняють нерівність $x^2 \leqslant 9$?

1.64. При яких значеннях параметра a нерівність $\left|\frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3$ виконується для будь-якого значення x?

1.65. Знайдіть усі значення параметра q такі, що для будь-якого значення параметра p рівняння $x^2 + px + q = 0$ має розв'язок.

1.66. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$;
2) $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2 = 0$;
3) $(x - 2)^4 + (x + 2)^4 = 82$;
4) $x^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x} - x = 4$;
5) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 + \frac{x+1}{x-4} = 12 \cdot \left(\frac{x-2}{x-4}\right)^2$;
6) $\frac{4x}{x^2 + x + 3} + \frac{5x}{x^2 - 5x + 3} = -\frac{3}{2}$;
7) $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$.

1.67. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 1$;
2) $5(x^2 + 2x)^2 - 11(x^2 + 2x)(x^2 + x + 1) + 6(x^2 + x + 1)^2 = 0$;
3) $x(x + 3)(x + 5)(x + 8) + 36 = 0$;
4) $(x^2 + x + 1)^2 = x^2(3x^2 + x + 1)$;
5) $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 16$.

Властивості функцій

1.68. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}}$;

2) $y=\sqrt{12x^2-4x^3-9x}-\sqrt{2-|x|}$.

1.69. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{\dfrac{7-x}{\sqrt{4x^2-19x+12}}}$;

2) $y=\sqrt{|x-1|(3x-6)}+\dfrac{3}{x^2+4x-21}$.

1.70. Знайдіть область значень функції:

1) $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$;

2) $y=x+\dfrac{1}{x}$;

3) $y=\sqrt{x^2+2x+2}$;

4) $y=5-\sqrt{x^2-6x+10}$.

1.71. Знайдіть область значень функції:

1) $y=\dfrac{3x-1}{2x+4}$;

2) $y=x+\dfrac{1}{4x}$;

3) $y=\sqrt{4x-x^2}$;

4) $y=3-\sqrt{x^2-2x+2}$.

1.72. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$y=\frac{1}{x^2-4x+10}.$$

1.73. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$y=\frac{2}{x^2-6x+11}.$$

1.74. Знайдіть:

1) $\max\limits_{\mathbb{R}}\dfrac{1}{x^2+2}$;

2) $\min\limits_{M}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$, де $M=(-\infty;\,-1)\cup(1;\,+\infty)$.

1.75. Знайдіть:

1) $\min\limits_{\mathbb{R}}\dfrac{1}{-x^2+2x-3}$;

2) $\max\limits_{M}\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+1}\right)$, де $M=[-1;\,2]$.

1.76. Для кожного значення параметра a знайдіть найбільше і найменше значення функції f на множині M:

1) $f(x)=x^2+4x+5a$, $M=[-1;\,1]$;

2) $f(x)=x^2-4x$, $M=[-1;\,a]$, де $a>-1$.

1.77. Для кожного значення параметра a знайдіть найбільше і найменше значення функції f на множині M:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 2a$, $M = [0; 4]$;

2) $f(x) = 2x - x^2$, $M = [a; 2]$, де $a < 2$.

1.78. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x} + 2\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 8$.

1.79. Розв'яжіть рівняння $3x^2 + \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x+2} = 17$.

1.80. Розв'яжіть рівняння $|x| + |x-2| + \sqrt{x-1} = 2$.

1.81. Розв'яжіть рівняння $2x\sqrt{4x - x^2} = x^2 + 4$.

1.82. Дослідіть на парність функцію:

1) $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x+3} - \frac{x^3 + 2x^2}{x-3}$;

2) $y = \frac{|2x-1| - |2x+1|}{x^2 - 4}$;

3) $y = \frac{x^3 - x}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}$;

4) $y = \frac{x^2 - 3|x| - 5}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}$.

1.83. Дослідіть на парність функцію:

1) $y = \frac{x^5}{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}$;

2) $y = \frac{1}{(4x-2)^5} + \frac{1}{(4x+2)^5}$;

3) $y = \frac{2x+1}{x^2 - 3x + 1} - \frac{2x-1}{x^2 + 3x + 1}$.

1.84. Відомо, що $D(f) = \mathbb{R}$. Доведіть, що функції $y = f(x) + f(-x)$ і $y = f(x) \cdot f(-x)$ є парними, а функція $y = f(x) - f(-x)$ — непарною.

1.85. Побудуйте графік функції:

1) $y = (|x| - 1)^2$;

2) $y = \sqrt{1 - |x|}$;

3) $y = \sqrt{|1 - x|}$;

4) $y = \sqrt{|x+2| - 1}$;

5) $y = \left|\sqrt{|x| - 2} - 1\right|$;

6) $y = \left|\sqrt{2x-1} - 2\right|$.

1.86. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{|x| - 2}$;

2) $y = \left|\frac{1}{x-4}\right|$;

3) $y = \frac{1}{|x+1| - 2}$;

4) $y = (|x - 2| + 1)^2$;

5) $y = \left|\frac{1}{|x| - 1} - 2\right|$;

6) $y = \left|\sqrt{2x+1} - 2\right|$.

1.87. На рисунку 1.1 зображено графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначте знаки коефіцієнтів a, b і c.

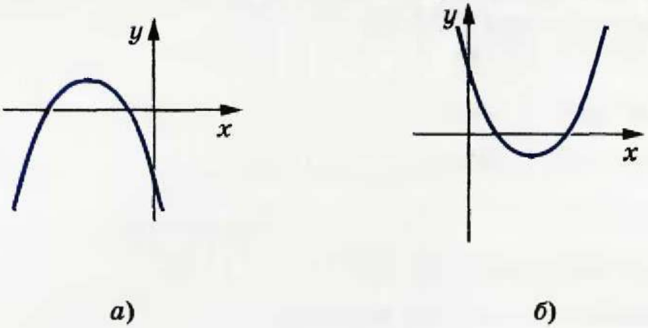


Рис 1.1

1.88. На рисунку 1.2 зображено графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначте знаки коефіцієнтів a, b і c.

1.89. Установіть, скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $\left| x^2 - 6|x| + 8 \right| = a$.

1.90. Установіть, скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $\left| x^2 + 2|x - 2| - 4 \right| = a$.

1.91. Чи є правильним твердження, що на рисунку 1.3 зображено параболу $y = ax^2 + bx + c$ і пряму $y = bx + c$?

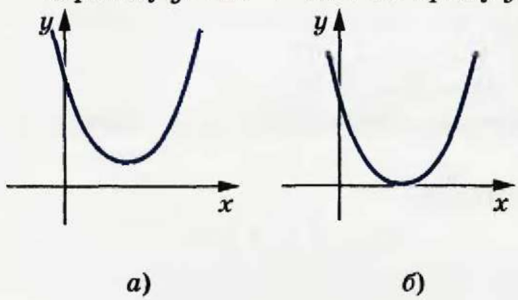


Рис 1.2

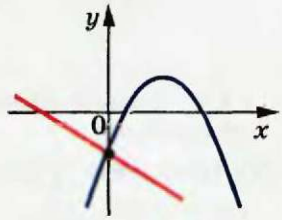


Рис 1.3

1.92. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$y = \frac{4x^4}{(x^4+1)^2} - \frac{24x^2}{x^4+1} + 1.$$

Рівняння і нерівності з двома змінними

1.93. Розв'яжіть рівняння:

1) $13x^2 - 12xy + 4y^2 - 4x + 1 = 0$; 2) $|y| + 2 = \sqrt{4 - x^2}$.

1.94. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 25y^2 - 6xy - 24y + 9 = 0$; 2) $9 - x^2 = \sqrt{3 + |y|}$.

1.95. Побудуйте графік рівняння:

1) $(x - 3)^2 = (y + 5)^2$;
2) $x^2 y = |y|$;
3) $x + 2 = \sqrt{|y| - 1}$;
4) $|y - 1| = \sqrt{x}$;
5) $|y - 3| + |x| = 1$;
6) $|x| - 3 = \sqrt{9 - y^2}$;
7) $\frac{y - x^2}{1 - x^2} = 1$.

1.96. Побудуйте графік рівняння:

1) $(x - 1)^2 = (x + 2y)^2$;
2) $x|y| = x^2$;
3) $x + 2 = \sqrt{|y - 1|}$;
4) $|y| - 1 = \sqrt{x}$;
5) $|y + 1| + |x - 2| = 2$;
6) $(|x| - 1)^2 + (|y| - 3)^2 = 4$;
7) $\frac{(x^2 - 4)(x + y)}{y^2 - 1} = 0$.

1.97. Побудуйте графік нерівності:

1) $x > |y + 2| - 2$;
2) $|x| \leqslant |y^2 - 2y|$;
3) $(x + y)|y| \geqslant 0$;
4) $(x^2 + y^2 - 1)y^2 \leqslant 0$.

1.98. Побудуйте графік нерівності:

1) $y \leqslant |x - 3| + 1$;
2) $|x - 2| - |y + 1| > 2$;
3) $(x - y)|x| < 0$;
4) $\frac{x^2 + y^2 - 1}{y^2} \geqslant 0$.

1.99. Зобразіть на координатній площині xy множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x + 2y > 1, \\ x - y \leqslant 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ (x + 1)^2 + y^2 \leqslant 1. \end{cases}$

1.100. Зобразіть на координатній площині xy множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} y + x - 2 > 0, \\ x - 3y \leqslant 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ y \geqslant |x| + 1. \end{cases}$

1.101. Побудуйте графік нерівності:

1) $\sqrt{x - 2y} > \sqrt{x + y}$; 2) $x < \frac{6}{y}$.

1.102. Побудуйте графік нерівності:

1) $\sqrt{2x - y} < \sqrt{x - y}$; 2) $y > -\frac{12}{x}$.

Метод математичної індукції

1.103. Доведіть, що

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

1.104. Доведіть, що $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\ldots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}.$

1.105. Доведіть, що

$$\left(1-\frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot 4}\right)\left(1-\frac{2}{4\cdot 5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{n+3}{3(n+1)}.$$

1.106. Доведіть, що $5^{n+2}+6^{2n+1} \,\vdots\, 31$, $n \in \mathbb{N}$.

1.107. Доведіть, що $7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^n \,\vdots\, 19$, $n \in \mathbb{N}$.

1.108. Доведіть, що $14\cdot 3^n+9\cdot 7^{2n} \,\vdots\, 23$, $n \in \mathbb{N}$.

1.109. Доведіть нерівність $2^n > 2n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

1.110. Доведіть нерівність $2^{n+4} > (n+4)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

1.111. Доведіть нерівність $3^n > n^3$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$.

§ 2. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

2. Висловлення та операції над ними

У фізиці, хімії, біології, економіці, соціології тощо про істинність висновків можна судити, ґрунтуючись на результатах спостережень та експериментів. У цьому аспекті математика — наука іншого роду. Наприклад, те, що сума кутів трикутника дорівнює 180°, неможливо встановити лабораторним шляхом. Істинність математичних тверджень може бути доведена лише в результаті логічно бездоганних міркувань.

Науку, яка вивчає такі математичні доведення (логічно бездоганні міркування), називають **математичною логікою.** Отже, математична логіка вчить, як треба міркувати, щоб отримувати правильні висновки.

Міркуючи, ми формулюємо свої думки у вигляді тверджень.

Розглянемо приклади.

1. Якщо трикутник рівносторонній, то центри його вписаного і описаного кіл збігаються.
2. Новела М. Коцюбинського «*Intermezzo*» надто складна для сприйняття.
3. Число π є раціональним.
4. Леонід Каденюк — перший космонавт незалежної України.
5. Число n є простим.

Твердження 1 і 4 є **істинними**, твердження 3 — **хибним.** Твердження 2 і 5 не можна віднести ні до істинних, ні до хибних.

Будь-яке твердження, відносно якого має сенс говорити, що воно істинне або хибне, називають **висловленням.**

Отже, твердження 1, 3, 4 є висловленнями, а твердження 2 і 5 висловленнями не є.

Висловлення позначають великими літерами латинського алфавіту: A, B, C, D тощо.

Наприклад, пишуть:
$A \equiv$ {Київ — столиця України};
$B \equiv \{5 > 7\}$;
$C \equiv$ {число 2 просте}.

Будь-яке висловлення є або істинним, або хибним. Якщо висловлення A є істинним, то говоритимемо, що йому поставлено у відповідність число 1, якщо висловлення A хибне — то число 0.

Таким чином, якщо задано деяку множину висловлень, то можна розглядати функцію f, областю визначення якої є ця множина, а областю значень — двоелементна множина $\{0, 1\}$. Таку функцію f будемо називати **функцією істинності**. Наприклад, якщо $A \equiv \{10 \vdots 5\}$, то $f(A) = 1$.

За допомогою логічних зв'язок, а саме слів «і», «або», «якщо ..., то», «тоді і тільки тоді, коли...» тощо з наявних висловлень можна будувати більш складні висловлення.

Наприклад, якщо задано два висловлення

$$A \equiv \{5 > 3\},\ B \equiv \{5 = 3\},$$

то висловлення $C \equiv \{5 \geqslant 3\}$ утворено з висловлень A і B за допомогою сполучника «або».

Ще один приклад.
$M \equiv$ {У Галини Василівни у городі росте бузина},
$N \equiv$ {У Галини Василівни в Києві живе дядько}.

Утворимо висловлення виду «якщо M, то N».

Маємо: {якщо у Галини Василівни у городі росте бузина, то у неї в Києві живе дядько}.

Цей приклад показує, що нові висловлення можна утворювати з таких висловлень, які не зв'язані між собою за змістом.

Розглянемо висловлення $C \equiv \{10 \vdots 5$ і $10 \vdots 2\}$. Воно складене з двох висловлень: $A \equiv \{10 \vdots 5\}$ і $B \equiv \{10 \vdots 2\}$ за допомогою сполучника «і». Висловлення C називають **кон'юнкцією** висловлень A і B.

Означення. Кон'юнкцією (або **логічним добутком**) **двох висловлень A і B називають висловлення, яке є істинним, коли кожне з висловлень A і B істинне, і є хибним, коли хоча б одне з них хибне.**

Кон'юнкцію висловлень A і B позначають так: $A \wedge B$ (читають: «A і B» або «A кон'юнкція B»).

Повертаючись до прикладу, розглянутого вище, можна сказати, що висловлення C є висловленням $A \wedge B$.

Також говорять, що висловлення C отримано з висловлень A і B у результаті **логічної операції** кон'юнкції.

Зрозуміло, що істинність або хибність висловлення $A \wedge B$ залежить від істинності або хибності висловлень A і B. Цю залежність зручно представити у вигляді таблиці, яку називають **таблицею істинності**. Так, таблиця істинності для логічної операції кон'юнкції має такий вигляд:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Функцію, яка впорядкованим наборам з чисел 0 і 1 ставить у відповідність число множини {0, 1}, називають **булевою функцією**. Таблиця істинності задає булеву функцію.

Кон'юнкція відповідає логічній зв'язці «і». Визначимо низку інших логічних операцій, які відповідають найбільш вживаним способам утворення висловлень у звичайній мові.

Джордж Буль (1815–1864) — англійський математик, засновник математичної логіки

Означення. Диз'юнкцією (або логічною сумою) двох висловлень A і B називають висловлення, яке є істинним, коли хоча б одне з висловлень A або B істинне, і є хибним, коли вони обидва хибні.

Диз'юнкцію висловлень A і B позначають так: $A \vee B$ (читають: «A або B» або «A диз'юнкція B»).

Нехай $A \equiv$ {у понеділок першим уроком в розкладі є фізика}, $B \equiv$ {у понеділок першим уроком в розкладі є математика}.

Тоді $A \vee B \equiv$ {у понеділок першим уроком в розкладі є фізика або математика}.

Наведемо таблицю істинності для диз'юнкції:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Більшість теорем мають таку логічну структуру:

якщо виконуються деякі умови, *то* можна зробити певний висновок.

Логічну зв'язку «якщо..., то» вживають і в інших науках, а також у повсякденному житті. Визначимо відповідну логічну операцію.

Означення. Імплікацією (або логічним слідуванням) двох висловлень A і B називають таке висловлення $A \Rightarrow B$ (читають: «якщо A, то B»), яке є хибним за умови, що висловлення A істинне, а висловлення B хибне, а в усіх інших випадках воно істинне.

В імплікації $A \Rightarrow B$ висловлення A називають **умовою**, а висловлення B — **висновком**.

Наведемо таблицю істинності для імплікації:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Зауважимо, що перші два рядки цієї таблиці повністю відповідають нашому побутовому розумінню слова «слідує» («випливає»): якщо з істини слідує істина, то це правильно (перший рядок таблиці); якщо з істини слідує хибність, то це неправильно (другий рядок таблиці).

Третій і четвертий рядки показують, що імплікація не повністю відповідає логіці, якої ми дотримуємось у побутовій розмовній мові. Навряд чи у повсякденному житті ми керуємося таким: «якщо з брехні випливає істина або з брехні випливає брехня, то такі висловлення істинні».

Наприклад, у силу означення імплікації кожне з висловлень

{якщо $2 \times 2 = 5$, то Дніпро впадає в Чорне море}

і

{якщо $2 \times 2 = 5$, то Дніпро впадає в Біле море}

є істинним.

Разом з тим зрозуміти доцільність прийнятого означення імплікації допомагає такий приклад.

Твердження «Якщо $x \vdots 10$, то $x \vdots 5$» безумовно істинне в усіх випадках.

Якщо підставити $x = 1$, то отримаємо істинне висловлення: «Якщо $1 \vdots 10$, то $1 \vdots 5$», яке ілюструє четвертий рядок таблиці.

- Якщо підставити $x = 5$, то отримаємо істинне висловлення: «Якщо $5 \vdots 10$, то $5 \vdots 5$», яке ілюструє третій рядок таблиці.

Означення. Еквівалентністю (або **подвійною імплікацією**) **двох висловлень A і B називають висловлення, яке є істинним, коли обидва висловлення A і B істинні або обидва хибні, і є хибним, коли одне з них істинне, а інше хибне.**

Еквівалентність висловлень A і B позначають так: $A \Leftrightarrow B$ (читають: «A еквівалентне B» або «A тоді і тільки тоді, коли B»).

Наведемо таблицю істинності для еквівалентності:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Розглянемо два висловлення:

$$A \equiv \{2 = 5\} \text{ і } B \equiv \{2 > 5\}.$$

Еквівалентність $A \Leftrightarrow B \equiv \{2 = 5 \text{ тоді і тільки тоді, коли } 2 > 5\}$ є істинним висловленням, оскільки обидва висловлення A і B є хибними.

Розглянемо логічну операцію, яка відповідає частці «ні» у звичайній мові.

Означення. Запереченням висловлення A називають висловлення, яке є істинним, коли висловлення A хибне, і є хибним, коли висловлення A істинне.

Заперечення висловлення A позначають так: $\overline{A}$ (читають: «не A» або «неправильно, що A»).

Наведемо таблицю істинності для заперечення:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Комбінуючи між собою логічні операції, можна отримати **логічні вирази.**

Записи $A \wedge B$, $(A \vee B) \wedge C$, $\overline{A \Rightarrow B}$, $A \Leftrightarrow \overline{B}$ є прикладами логічних виразів.

ПРИКЛАД. Складіть таблицю істинності для виразу $(A \wedge B) \vee C$.

Розв'язання. Маємо:

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

●

Означення. **Висловлення A і B називають *логічно еквівалентними*, якщо вони або обидва істинні, або обидва хибні.**

Пишуть $A = B$.

Іншими словами: $A = B$ тоді і тільки тоді, коли $A \Leftrightarrow B$ є істинним висловленням.

Покажемо, наприклад, що $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$ для будь-яких висловлень A і B. Для цього складемо таблицю істинності для виразу $\overline{A} \vee B$ і порівняємо її з таблицею істинності для імплікації $A \Rightarrow B$:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Стовпці, які відповідають логічним виразам $A \Rightarrow B$ і $\overline{A} \vee B$, збігаються. Це означає, що ці висловлення логічно еквівалентні.

Ви знаєте, що деякі властивості операцій над множинами багато в чому аналогічні властивостям арифметичних дій. Наприклад,

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad\qquad$ $a + b = b + a$

$$A \cap B = B \cap A \qquad ab = ba$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad a(b + c) = ab + ac$$

Також можна помітити певну аналогію при вивченні властивостей логічних операцій. Наприклад, висловлення $A \vee B$ і $B \vee A$ є логічно еквівалентними, тобто

$$A \vee B = B \vee A.$$

У цьому легко переконатися, порівнявши таблиці істинності для виразів $A \vee B$ і $B \vee A$.

Також нескладно встановити, що, наприклад,

$$A \wedge B = B \wedge A,$$
$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C).$$

З іншими властивостями логічних операцій ви ознайомитесь, розв'язуючи вправу 2.13.

Властивості логічних операцій дають змогу одне істинне висловлення замінити іншим висловленням, йому логічно еквівалентним. Це дозволяє будувати загальні схеми правильних логічних міркувань, що, власне, і складає предмет математичної логіки.

Зазначимо, що математична логіка, як правило, не займається з'ясуванням істинності одного окремо взятого висловлення (наприклад, визначити, чи впадає Дніпро в Чорне море — справа географії, а не логіки). Водночас питання про істинність різноманітних логічних виразів посідає важливе місце в цій науці. Тому в математичній логіці особливу роль відіграють ті логічні вирази, які завжди є істинними, незалежно від істинності висловлень, з яких вони утворені. Такі логічні вирази називають **тотожно істинними** або **тавтологіями**.

Розглянемо вираз $A \vee \overline{A}$ і складемо для нього таблицю істинності:

A	$\overline{A}$	$A \vee \overline{A}$
1	0	1
0	1	1

Третій стовпець таблиці показує, що коли f — функція істинності, то при будь-якому A має місце рівність $f(A \vee \overline{A}) = 1$.

Отже, вираз $A \vee \overline{A}$ є тавтологією, яку називають **законом виключення третього**. Цей закон є цілком зрозумілим з точки зору повсякденного досвіду. Він стверджує те, що одне з двох висловлень, A або $\overline{A}$, є істинним.

З іншими тавтологіями ви ознайомитесь, розв'язуючи вправу 2.14.

Наголосимо, що тавтології дозволяють нам будувати істинні висловлення, тому вони найбільш цікаві для логіки.

Вправи

2.1.° Які з даних речень є висловленнями:

1) $5 > 5$;

2) $x < 5$;

3) що більше, $\sin 30°$ або $\cos 45°$?

4) якщо чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом, то $AB = CD$;

5) число 1 не є простим і не є складеним;

6) неправильно, що 5 є дійсним числом;

7) усі кішки сірі;

8) функція g є парною?

2.2.° Нехай f — функція істинності. Знайдіть $f(A)$, якщо:

1) $A \equiv \{$число 2 — просте$\}$;

2) $A \equiv \{$рівняння $x^2 + x - 1 = 0$ не має коренів$\}$;

3) $A \equiv \{$Нью-Йорк — столиця США$\}$;

4) $A \equiv \left\{\sqrt{5} \in \mathbb{Q}\right\}$;

5) $A \equiv \{\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}\}$;

6) $A \equiv \{$функція $y = [x]$ є парною$\}$;

7) $A \equiv \{$функція $y = \frac{1}{x}$ є спадною$\}$.

2.3.° Дано два висловлення:

$$A \equiv \{5 < 6\},\ B \equiv \{6 \text{ — просте число}\}.$$

Визначте, істинним чи хибним є висловлення:

1) $A \wedge B$; 3) $A \Rightarrow B$; 5) $\overline{A}$;

2) $A \vee B$; 4) $A \Leftrightarrow B$; 6) $\overline{B}$.

2.4.° Дано два висловлення:

$$A \equiv \{2 = 3\},\ B \equiv \{2 \text{ — просте число}\}.$$

Визначте, істинним чи хибним є висловлення:

1) $A \wedge B$; 3) $A \Rightarrow B$; 5) $\overline{A}$;

2) $A \vee B$; 4) $A \Leftrightarrow B$; 6) $\overline{B}$.

2.5.$^{\bullet}$ Нехай f — функція істинності, A і B — деякі висловлення, причому $f(A) = 1$. Знайдіть, де це можливо, значення функції f:

1) $f(A \wedge B)$; 3) $f(A \Rightarrow B)$; 5) $f(\overline{A})$.

2) $f(A \vee B)$; 4) $f(A \Leftrightarrow B)$;

2.6.$^{\bullet}$ Нехай f — функція істинності, A і B — деякі висловлення, причому $f(\overline{A}) = 1$. Знайдіть, де це можливо, значення функції f:

1) $f(A \wedge B)$; 2) $f(A \vee B)$; 3) $f(A \Rightarrow B)$; 4) $f(A \Leftrightarrow B)$.

2.7.$^{\bullet}$ Нехай f — функція істинності, A і B — деякі висловлення. Знайдіть $f(B)$, якщо:

1) $f(A \wedge B) = 1$; 3) $f(A \Rightarrow B) = 1$ і $f(A) = 1$;

2) $f(A \vee B) = 1$ і $f(A) = 0$; 4) $f(A \Leftrightarrow B) = 0$ і $f(A) = 0$.

2.8.$^{\bullet}$ Нехай f — функція істинності, A і B — деякі висловлення, причому $f(A \wedge B) = 1$. Знайдіть:

1) $f(\overline{A} \vee B)$; 2) $f(A \Rightarrow \overline{B})$; 3) $f(\overline{A} \Leftrightarrow \overline{B})$; 4) $f(\overline{B} \Rightarrow A)$.

2.9.$^{\bullet}$ Складіть таблицю істинності для логічного виразу:

1) $\overline{A} \Rightarrow B$; 3) $(A \wedge B) \Rightarrow C$; 5) $(A \wedge \overline{C}) \Rightarrow B$.

2) $(A \vee B) \wedge C$; 4) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \vee C)$;

2.10.$^{\bullet}$ Складіть таблицю істинності для логічного виразу:

1) $\overline{A} \vee B$; 3) $(B \wedge C) \Rightarrow \overline{A}$;

2) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$; 4) $(\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge (B \vee C)$.

2.11.$^{\bullet}$ Електричний ланцюг між точками M і N складений за схемою, зображеною на рисунку 2.1. Розглянемо висловлення:

$A \equiv$ {елемент m ланцюга функціонує нормально};

$B \equiv$ {елемент n ланцюга функціонує нормально}.

Визначте, чи є ланцюг замкненим, якщо відомо значення функції істинності f:

1) $f(A \wedge B) = 1$; 3) $f(A \vee B) = 0$; 5) $f(\overline{A} \vee B) = 0$.

2) $f(A \wedge B) = 0$; 4) $f(\overline{A} \wedge B) = 1$;

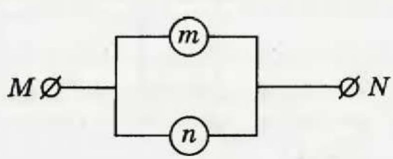


Рис 2.1

2.12.$^{\bullet}$ Електричний ланцюг між точками M і N складений за схемою, зображеною на рисунку 2.2. Розглянемо висловлення:

$A \equiv$ {елемент m ланцюга функціонує нормально};

$B \equiv$ {елемент n ланцюга функціонує нормально}.

Визначте, чи є ланцюг замкненим, якщо відомо значення функції істинності f:

1) $f\left(\overline{A} \wedge \overline{B}\right)=1$; 2) $f\left(\overline{A} \vee B\right)=0$; 3) $f(A \wedge B) = 1$.

Рис 2.2

2.13.$^{\bullet}$ Доведіть, що:

1) $\overline{\overline{A}} = A$;

2) $A \wedge A = A$;

3) $A \vee A = A$;

4) $A \vee B = B \vee A$;

5) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$;

6) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;

7) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;

8) $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$;

9) $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$;

10) $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$;

11) $A \Leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee \left(\overline{A} \wedge \overline{B}\right)$.

2.14.$^{\bullet}$ Доведіть, що логічний вираз є тавтологією:

1) $A \Rightarrow A$;

2) $\overline{A \wedge \overline{A}}$;

3) $A \wedge \overline{A} \Rightarrow B$;

4) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;

5) $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$;

6) $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$;

7) $\overline{B} \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow \overline{A}$;

8) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

2.15.$^{\bullet\bullet}$ Через операції кон'юнкції та заперечення виразіть операцію:

1) диз'юнкції; 2) імплікації.

2.16.$^{\bullet\bullet}$ Виразіть операцію кон'юнкції через операції диз'юнкції та заперечення.

2.17.* Деяка логічна операція * має таку таблицю істинності:

A	B	$A * B$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Виразіть операцію * через операції $\vee$, $\wedge$ та операцію заперечення.

2.18.* Деяка логічна операція * має таку таблицю істинності:

A	B	$A * B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Виразіть операцію * через операції $\vee$, $\wedge$ та операцію заперечення.

2.19.* Деяка логічна операція $\downarrow$ має таку таблицю істинності:

A	B	$A \downarrow B$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Покажіть, що через операцію $\downarrow$ можна виразити диз'юнкцію, кон'юнкцію та заперечення.

2.20.* Деяка логічна операція $\uparrow$ має таку таблицю істинності.

A	B	$A \uparrow B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Покажіть, що через операцію $\uparrow$ можна виразити диз'юнкцію, кон'юнкцію та заперечення.

Про комп'ютери, електричні схеми та теорему Поста

Цікаво відзначити, що математична логіка зіграла істотну роль у створенні комп'ютерів.

Напевно ви чули, що сучасні комп'ютери у своїй роботі спираються не на десяткову систему числення, до якої ми звикли, а на так звану двійкову систему числення, коли кожне число кодується послідовністю нулів та одиниць[1]. Керування робо-

[1] Технічно реалізувати таке кодування досить просто: подана на дріт напруга означає одиницю, а відсутність напруги — нуль.

тою комп'ютера здійснюється за допомогою команд, що також кодуються нулями та одиницями. Апарат математичної логіки виявився надзвичайно зручним, бо кожне логічне висловлення також характеризується нулем або одиницею.

Для реалізації операцій над висловленнями у перших комп'ютерах використовувалися електричні схеми. Наприклад, для операцій диз'юнкції та кон'юнкції можна використовувати електричні схеми, описані в задачах 2.11 та 2.12 (у сучасних комп'ютерах електричні схеми замінені на напівпровідникові мікросхеми). Які ж електричні схеми відповідають іншим логічним виразам, наприклад імплікації? Чи існують такі схеми взагалі? І якщо існують, то як їх віднайти?

Виявляється, для побудови електричних аналогів будь-яких (навіть найскладніших) логічних виразів можна обійтися лише схемами для диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення.

Для обґрунтування цього твердження перекладемо його математичною мовою.

Кожний логічний вираз має свою таблицю істинності, яка й описує його логічний зміст. Покажемо, що для довільної таблиці істинності можна віднайти логічний вираз, що використовує лише операції диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення.

Розглянемо, наприклад, деякий логічний вираз F, що залежить від трьох висловлень A, B, C і має таку таблицю істинності:

A	B	C	F
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

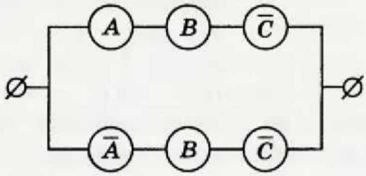
Бачимо, що серед значень логічного виразу F є дві одиниці (синій та червоний рядки таблиці), а решта нулі. Побудуємо логічний вираз, рівний F, використовуючи лише операції диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення.

Еміль Леон Пост
(1897–1954)

Для отримання одиниці при комбінації аргументів 1, 1, 0 (синій рядок) запишемо вираз: $A \wedge B \wedge \overline{C}$. Цей вираз набуває істинного значення лише тоді, коли A і B — істинні висловлення, а C — хибне, тобто якраз при комбінації аргументів 1, 1, 0. Аналогічно для отримання другої одиниці (червоний рядок) запишемо вираз: $\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}$. Тепер зрозуміло, що F можна подати як диз'юнкцію цих двох виразів:

$$F = \left(A \wedge B \wedge \overline{C}\right) \vee \left(\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}\right).$$

Міркуючи таким самим способом, можна відшукати потрібні формули для найскладніших таблиць істинності. Комбінуючи відповідним чином електричні схеми для диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення, можна побудувати схему, яка відповідає довільному логічному виразу. Наприклад, для виразу F маємо:



На завершення цієї розповіді зазначимо, що математик Еміль Леон Пост знайшов прості загальні умови, які дозволяють дати відповідь на питання, чи можна довільну таблицю істинності виразити через набір даних логічних виразів. З цією чудовою теоремою ви ознайомитесь, якщо продовжите вивчати математику в університеті.

3. Предикати. Операції над предикатами

Розглянемо кілька тверджень:
- n — просте число;
- число a ділиться націло на 5;
- $|y| \leqslant 2$;
- $x + y = 1$.

Кожне з них не є висловленням, оскільки неможливо сказати, є воно істинним чи хибним. При одних значеннях змінних ці твердження перетворюються на істинні висловлення, при інших — на хибні.

Говорять, що такі твердження залежать від змінних. Їх називають **предикатами**.

Позначимо предикати, що розглядаються, відповідно так:

$A\ (n) \equiv \{n$ — просте число$\}$;

$B\ (a) \equiv \{$число a ділиться націло на $5\}$;

$C\ (y) \equiv \{|\ y\ | \leqslant 2\ \}$;

$D\ (x;\ y) \equiv \{x + y = 1\}$.

У круглих дужках вказано змінні, від яких залежить предикат.

Якщо в предикат замість змінної підставити яке-небудь її значення, то буде отримано висловлення. Наприклад:

- $A\ (2)$ — істинне висловлення;
- $B\ (4)$ — хибне висловлення;
- $C\ (5)$ — хибне висловлення;
- $D\ (0;\ 1)$ — істинне висловлення.

Розглянемо множину M і деякий предикат $P\ (x)$, де $x \in M$. У цьому разі говорять, що предикат $P\ (x)$ **задано на множині** M або множина M є **областю визначення** предиката $P\ (x)$.

Повертаючись до розглянутих вище прикладів, можна сказати, що областю визначення предиката $A\ (n)$ є множина $\mathbb{N}$, предиката $B\ (a)$ — множина $\mathbb{Z}$, предиката $C\ (y)$ — множина $\mathbb{R}$, предиката $D\ (x;\ y)$ — множина всіх упорядкованих пар дійсних чисел.

У множині M, на якій задано предикат $P\ (x)$, виділимо таку підмножину, яка містить всі ті і тільки ті елементи, для яких предикат $P\ (x)$ перетворюється на істинне висловлення. Цю множину називають **областю істинності** предиката $P\ (x)$ і позначають відповідно буквою P.

Наприклад, областю істинності предиката $A\ (n)$ є множина A, яка складається з усіх простих чисел. Для предиката $C\ (y)$ маємо: $C = [-2;\ 2]$.

Якщо область істинності предиката збігається з його областю визначення, то такий предикат називають **тотожно істинним**, а якщо область істинності — порожня множина, то предикат називають **тотожно хибним**. Наприклад, $P\ (x) \equiv \{x - x = 0\}$ — тотожно істинний, а $Q\ (x) \equiv \{x^2 + 1 = 0\}$ — тотожно хибний предикати, які визначено на множині $\mathbb{R}$.

Предикати існують не тільки в математиці. Наприклад, речення «футболіст x команди «Динамо» (Київ) у сезоні 2009–2010 рр. забив 17 голів» є предикатом, заданим на множині футболістів команди «Динамо» (Київ), які грали в зазначеному сезоні. Областю істинності цього предиката є одноелементна множина {Артем Мілевський}.

Нехай предикати $A(x)$ і $B(x)$ задані на множині M і їх області істинності дорівнюють відповідно A і B.

Означення. Предикати $A(x)$ і $B(x)$ називають рівносильними, якщо їх області істинності збігаються, тобто $A = B$.

Пишуть $A(x) \equiv B(x)$.

Наприклад, якщо $A(x) \equiv \left\{\sqrt[3]{x} \geqslant 0\right\}$ і $B(x) \equiv \{|x| = x\}$, то $A(x) \equiv$ $\equiv B(x)$. Справді, тут $A = B = [0; +\infty)$.

Логічні операції над висловленнями природним чином поширюються на предикати. Розглянемо деякі логічні операції над предикатами.

Означення. Кон'юнкцією предикатів $A(x)$ і $B(x)$ називають предикат, область істинності якого дорівнює $A \cap B$.

Кон'юнкцію предикатів $A(x)$ і $B(x)$ позначають так:

$$A(x) \wedge B(x).$$

Наприклад, якщо $A(x) \equiv \{x > 5\}$, $B(x) \equiv \{x \leqslant 7\}$, то кон'юнкція цих предикатів являє собою систему

$$\begin{cases} x > 5, \\ x \leqslant 7, \end{cases}$$

множина розв'язків якої, проміжок $(5; 7]$, є областю істинності предиката $A(x) \wedge B(x)$. Також можна записати $A(x) \wedge B(x) \equiv \{5 < x \leqslant 7\}$.

Означення. Диз'юнкцією предикатів $A(x)$ і $B(x)$ називають предикат, область істинності якого дорівнює $A \cup B$.

Диз'юнкцію предикатів $A(x)$ і $B(x)$ позначають так:

$$A(x) \vee B(x).$$

Наприклад, якщо $A(x) \equiv \{x < -5\}$, $B(x) \equiv \{x > 5\}$, то диз'юнкція цих предикатів являє собою сукупність

$$\left[\begin{array}{l} x < -5, \\ x > 5, \end{array}\right.$$

множина розв'язків якої, $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$, є областю істинності предиката $A(x) \vee B(x)$. Також можна записати $A(x) \vee B(x) \equiv$ $\equiv \{|x| > 5\}$.

Означення. Імплікацією предикатів $A(x)$ і $B(x)$ називають предикат, який перетворюється в хибне висловлення для тих і тільки тих елементів множини M, для яких предикат $A(x)$ стає істинним висловленням, а предикат $B(x)$ — хибним.

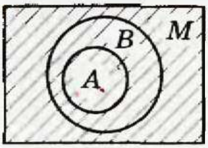


Рис. 3.1

Імплікацію предикатів $A(x)$ і $B(x)$ позначають так:

$$A(x) \Rightarrow B(x).$$

Наприклад, якщо $A(x) \equiv \{x > 5\}$, $B(x) \equiv \equiv \{x > 3\}$, то областю істинності предиката $A(x) \Rightarrow B(x)$ є множина $\mathbb{R}$.

Узагалі, якщо $A \subset B$, то областю істинності предиката $A(x) \Rightarrow B(x)$ є множина M. Справді, у множині M немає елементів, які належать множині A, але не належать множині B (рис. 3.1).

Означення. Еквівалентністю предикатів $A(x)$ і $B(x)$ називають предикат, який перетворюється в істинне висловлення для тих і тільки тих елементів множини M, для яких обидва предикати $A(x)$ і $B(x)$ стають істинними висловленнями або обидва стають хибними висловленнями.

Еквівалентність предикатів $A(x)$ і $B(x)$ позначають так:

$$A(x) \Leftrightarrow B(x).$$

Наприклад, якщо

$$A(x) \equiv \{x^2 - x - 2 = 0\},$$
$$B(x) \equiv \{(x + 1)(x - 2)(x^2 + 1) = 0\},$$

то областю істинності предиката $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ є множина $\mathbb{R}$.

Означення. Запереченням предиката $A(x)$ називають предикат, областю істинності якого є множина $M \setminus A$.

Заперечення предиката $A(x)$ позначають так:

$$\overline{A(x)}.$$

Наприклад, якщо $A(x) \equiv \{x > 5\}$, то $\overline{A(x)} \equiv \{x \leqslant 5\}$.

Логічні операції над предикатами мають властивості, аналогічні властивостям логічних операцій над висловленнями.

Наприклад,

$$A(x) \wedge B(x) \equiv B(x) \wedge A(x),$$
$$A(x) \vee B(x) \equiv B(x) \vee A(x).$$

Справедливість цих властивостей випливає з рівностей $A \cap B = = B \cap A$ і $A \cup B = B \cup A$.

Зокрема, ці властивості дозволяють стверджувати, що коли в системі або сукупності рівнянь (нерівностей), визначених на $\mathbb{R}$, поміняти порядок їх слідування, то отримаємо систему або сукупність, рівносильну даній.

Оскільки для множин A, B і C справедлива рівність $A \cap (B \cup C) = = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, то для відповідних предикатів виконується властивість

$$A(x) \wedge (B(x) \vee C(x)) \equiv (A(x) \wedge B(x)) \vee (A(x) \wedge C(x)).$$

Наприклад, система $\begin{cases} x > 5, \\ \left[\begin{array}{l} x < 7, \\ x > 11 \end{array}\right. \end{cases}$ рівносильна сукупності $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 5, \\ x < 7, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 5, \\ x > 11. \end{cases} \end{array}\right.$

Нехай предикат $A(x)$ задано на множині M. Розглянемо два твердження, які часто зустрічаються.

- Предикат $A(x)$ перетворюється на істинне висловлення *для всіх* елементів x множини M.
- Предикат $A(x)$ перетворюється на істинне висловлення *хоча б для одного* елемента x множини M.

Перше твердження прийнято коротко записувати так:

$$(\forall x \in M)\, A(x).$$

Друге твердження коротко записують так:

$$(\exists x \in M)\, A(x).$$

Символ $\forall$ (перегорнута перша буква англійського слова *All* — кожний) називають **квантором загальності**. Він заміняє у словесних формулюваннях словосполучення: *для довільного, для будь-якого, для кожного*.

Символ $\exists$ (перегорнута перша буква англійського слова *Exist* — існувати) називають **квантором існування**. Він заміняє у словесних формулюваннях слова: *існує, знайдеться, хоча б для одного*.

Наприклад, якщо на предикат $A(x) \equiv \{|x| > 0\}$, який задано на множині $\mathbb{R}$, «навісити» квантори, то отримаємо:

$(\forall x \in \mathbb{R})\, A(x) \equiv$ {для всіх дійсних чисел $|x| > 0$} — хибне висловлення;

$(\exists x \in \mathbb{R})\, A(x) \equiv$ {існує дійсне число, для якого $|x| > 0$} — істинне висловлення.

Отже, поява кванторів загальності або існування перед предикатом перетворює його на висловлення.

За допомогою введених в цьому пункті понять цілу низку математичних тверджень можна сформулювати компактно.

Покажемо, як можна сформулювати принцип математичної індукції.

Нехай предикат $A(n)$ задано на множині $\mathbb{N}$. Тоді висловлення $(\forall n \in \mathbb{N})\, A(n)$ логічно еквівалентне висловленню $A(1) \wedge ((\forall k \in \mathbb{N})\, A(k) \Rightarrow A(k+1))$, тобто принцип математичної індукції можна сформулювати так:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\, A(n) \equiv A(1) \wedge ((\forall k \in \mathbb{N})\, A(k) \Rightarrow A(k+1)).$$

Більшість теорем, які вивчають у школі, можуть бути сформульовані так:

для будь-якого елемента x множини M з твердження $A(x)$ випливає твердження $B(x)$.

Іншими словами, теорема являє собою істинне висловлення виду

$$(\forall x \in M)\ A(x) \Rightarrow B(x).$$

Наприклад, розглянемо таку теорему.

Якщо натуральне число n ділиться націло на 6, то воно ділиться націло на 3.

У цій теоремі розглядаються два предикати, задані на множині $\mathbb{N}$:

$$A(n) \equiv \{n \,\vdots\, 6\};$$

$$B(n) \equiv \{n \,\vdots\, 3\}.$$

Цю теорему можна подати у вигляді такого висловлення:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ A(n) \Rightarrow B(n).$$

У формулюванні теореми, яке має структуру

$$(\forall x \in M)\ A(x) \Rightarrow B(x),$$

предикат $A(x)$ називають **умовою теореми**, предикат $B(x)$ — **висновком теореми**. Опис елементів множини M — це роз'яснювальна частина теореми.

Часто заради стислості формулювання роз'яснювальну частину теореми опускають. Наприклад, теорему Піфагора формулюють так: *якщо в трикутнику ABC $\angle C = 90°$, то $AB^2 = AC^2 + CB^2$.*

Покажемо, як теорему Піфагора можна сформулювати у формі, описаній вище.

Нехай T — множина всіх трикутників. Розглянемо два предикати, задані на множині T:

$$P(\Delta ABC) \equiv \{\angle C = 90°\};$$

$$Q(\Delta ABC) \equiv \{AB^2 = AC^2 + CB^2\}.$$

Тоді найбільш повне формулювання теореми Піфагора — це висловлення

$$(\forall \Delta ABC \in T)\ P(\Delta ABC) \Rightarrow Q(\Delta ABC),$$

яке можна прочитати так: для будь-якого трикутника ABC, у якому $\angle C = 90°$, виконується рівність $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

Нехай предикати $A(x)$ і $B(x)$, задані на множині M, мають області істинності A і B відповідно. Ми знаємо, що з умови $A \subset B$ випливає, що областю істинності імплікації $A(x) \Rightarrow B(x)$ є множина M. Отже, умова $A \subset B$ забезпечує істинність теореми $(\forall x \in M)\ A(x) \Rightarrow B(x)$.

Наприклад, множина чисел, які кратні 6, є підмножиною множини чисел, кратних 3. Тому є правильною розглянута вище теорема $(\forall n \in \mathbb{N})\ A(n) \Rightarrow B(n)$.

Означення 1. Теореми

$$(\forall x \in M)\ A(x) \Rightarrow B(x) \text{ і}$$
$$(\forall x \in M)\ B(x) \Rightarrow A(x)$$

називають взаємно оберненими.

Інколи одну з цих теорем називають **прямою**, тоді іншу називають **оберненою.**

З взаємно оберненими теоремами ви нерідко зустрічалися в курсі планіметрії 7–9 класів.

У теоремі $(\forall x \in M)\ A(x) \Rightarrow B(x)$ предикат $A(x)$ називають **достатньою умовою** для $B(x)$, а предикат $B(x)$ — **необхідною умовою** для $A(x)$.

У взаємно обернених теоремах кожний з предикатів $A(x)$ і $B(x)$ є необхідною і достатньою умовою для іншого. У цьому разі висловлення

$$(\forall x \in M)\ A(x) \Leftrightarrow B(x)$$

є істинним. Цю теорему читають: «для всіх елементів множини M умова $A(x)$ є необхідною і достатньою для умови $B(x)$» або «для всіх елементів множини M умова $A(x)$ виконується тоді і тільки тоді, коли виконується умова $B(x)$». Теореми такого виду називають **критеріями.**

Наприклад:

- для того щоб довільний чотирикутник був паралелограмом, необхідно і достатньо, щоб його діагоналі точкою перетину ділилися навпіл;
- будь-яке натуральне число n кратне трьом тоді і тільки тоді, коли сума його цифр кратна трьом.

Означення 2. **Теорему** $(\forall x \in M)\ \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$ **називають протилежною теоремі** $(\forall x \in M)\ A(x) \Rightarrow B(x)$.

Розглянемо теорему, яку вважатимемо прямою:

у будь-якому трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути.

Побудуємо за допомогою цієї теореми ще три нові теореми.

Обернена теорема: *у будь-якому трикутнику проти рівних кутів лежать рівні сторони.*

Протилежна теорема: *у будь-якому трикутнику проти нерівних сторін лежать нерівні кути.*

Теорема, обернена до протилежної: ***у будь-якому трикутнику проти нерівних кутів лежать нерівні сторони.***

З попереднього пункту ви знаєте, що висловлення $A \Rightarrow B$ і $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ є логічно еквівалентними (див. вправу 2.13 (10)), тобто $(A \Rightarrow B) = (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$. Звідси логічно еквівалентними є висловлення, які являють собою пряму теорему і обернену до протилежної, тобто

$$(\forall x \in M)\, A(x) \Rightarrow B(x) = (\forall x \in M)\, \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}.$$

Цим фактом ми нерідко користувалися. Відомий метод доведення від супротивного саме і полягає в тому, що замість вихідної теореми доводять обернену до протилежної.

Вправи

3.1.° Серед даних тверджень укажіть предикати:

1) число $(n + 1)^2 - 1$ — складене, $n \in \mathbb{N}$;
2) для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $x^2 + x + 1 = 0$;
3) модуль дійсного числа x більший за нуль;
4) неправильно, що $n \,\vdots\, 5$, $n \in \mathbb{N}$;
5) квадрат будь-якого натурального числа n при діленні на 3 дає в остачі 0 або 1;
6) існує таке ціле число x, що одиниця є його дільником;
7) ціла частина дійсного числа x дорівнює числу x.

3.2.° На множині $[-2; 3)$ задано предикат

$$A(x) \equiv \{x \text{ — ціле число}\}.$$

Укажіть область істинності цього предиката.

3.3.° На множині $[0; +\infty)$ задано предикат

$$P(x) \equiv \{x^3 - x = 0\}.$$

Укажіть область істинності цього предиката.

3.4.° На множині всіх упорядкованих пар дійсних чисел задано предикат

$$R(x; y) \equiv \{x^2 + y^2 = 1\}.$$

Зобразіть на координатній площині xy множину точок, координати яких складають область істинності даного предиката.

3.5.° Укажіть область істинності предиката

$$A(x) \equiv \{[x] \geqslant x\},$$

заданого на множині $\mathbb{R}$.

3.6.° Зобразіть на координатній площині xy область істинності предиката

$$B(x; y) \equiv \left\{\sqrt{x^2y^2} = xy\right\},$$

заданого на множині всіх упорядкованих пар дійсних чисел.

3.7.• На множині $\mathbb{R}$ задано предикати $P(x) \equiv \{x - 5 = 0\}$, $Q(x) \equiv \{x + 2 = 0\}$. Знайдіть рівняння, що задає предикат:

1) $P(x) \wedge Q(x)$; 2) $P(x) \vee Q(x)$.

3.8.• На множині $\mathbb{R}$ задано предикати

$$P(x) \equiv \{x \neq 5\},\ Q(x) \equiv \{x \neq -2\}.$$

Укажіть область істинності предиката:

1) $P(x) \wedge Q(x)$; 2) $P(x) \vee Q(x)$.

3.9.• Предикати $A(n) \equiv \{n \,\vdots\, 10\}$, $B(n) \equiv \{n \,\vdots\, 5\}$ задано на множині $\mathbb{N}$. Укажіть область істинності предиката $A(n) \Rightarrow B(n)$.

3.10.• Предикати $P(x) \equiv \{|x| = -1\}$, $S(x) \equiv \{x + 3 = 0\}$ задано на множині $\mathbb{R}$. Укажіть область істинності предиката $P(x) \Rightarrow S(x)$.

3.11.• На множині $\mathbb{R}$ задано предикати $P(x) \equiv \{x > 2\}$, $Q(x) \equiv \{x > 5\}$. Укажіть область істинності предиката:

1) $P(x) \Rightarrow Q(x)$; 2) $Q(x) \Rightarrow P(x)$.

3.12.• На множині $\mathbb{R}$ задано предикати $P(x) \equiv \{x \geqslant 2\}$, $Q(x) \equiv \{x < 5\}$. Укажіть область істинності предиката:

1) $P(x) \Rightarrow Q(x)$; 2) $Q(x) \Rightarrow P(x)$.

3.13.• Множини A і B — області істинності предикатів $A(x)$ і $B(x)$, заданих на множині M (рис. 3.2). Заштрихуйте область істинності предиката:

1) $A(x) \wedge B(x)$; 2) $A(x) \vee B(x)$; 3) $A(x) \Rightarrow B(x)$.

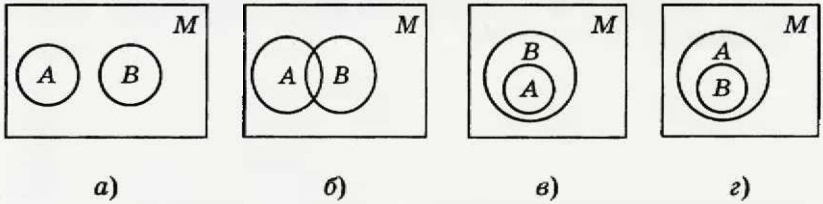


Рис. 3.2

3.14.° Серед предикатів, заданих на множині $\mathbb{R}$, укажіть рівносильні:

$A(x) \equiv \{-x^2 = 2\}$; $C(x) \equiv \{[x] > x\}$;
$B(x) \equiv \{(x-3)^2 > 0\}$; $D(x) \equiv \{\operatorname{sgn}(x^2 - 6x + 9) = 1\}$.

3.15.° Серед предикатів, заданих на множині всіх упорядкованих пар дійсних чисел, укажіть рівносильні:

$A(a;\ b) \equiv \left\{\sqrt{a^2b^2} = |ab|\right\}$; $C(a;\ b) \equiv \{|ab| = ab\}$;
$B(a;\ b) \equiv \{ab \geqslant 0\}$; $D(a;\ b) \equiv \{ab > 0\}$.

3.16.° Предикати $A(x)$, $B(x)$ і $C(x)$ задано на множині M. Доведіть, що:

1) $(A(x) \wedge B(x)) \wedge C(x) \equiv A(x) \wedge (B(x) \wedge C(x))$;
2) $(A(x) \vee B(x)) \vee C(x) \equiv A(x) \vee (B(x) \vee C(x))$;
3) $A(x) \vee (B(x) \wedge C(x)) \equiv (A(x) \vee B(x)) \wedge (A(x) \vee C(x))$;
4) $\overline{A(x) \wedge B(x)} \equiv \overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$;
5) $\overline{A(x) \vee B(x)} \equiv \overline{A(x)} \wedge \overline{B(x)}$.

3.17.° Укажіть істинні висловлення:

1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ |x| > x$;
2) $(\exists x \in \mathbb{R})\ |x| \leqslant 0$;
3) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \leqslant n^2$;
4) $(\forall n \in \mathbb{N})\ (n^3 - n) \,\vdots\, 6$;
5) $(\exists x \in \mathbb{R})\ \sin 2x = 2\sin x$.

3.18.° Предикат $A(p) \equiv \{p$ — непарне число$\}$ задано на множині простих чисел P. Укажіть істинне висловлення:

1) $(\forall p \in P)\ A(p)$; 2) $\overline{(\forall p \in P)\ A(p)}$; 3) $(\exists p \in P)\ \overline{A(p)}$.

3.19.° При яких значеннях x є істинним висловлення:
$x \in \mathbb{N} \wedge x > 1 \wedge (\forall y \in \mathbb{N})\ ((x \,\vdots\, y) \Rightarrow (y = 1 \vee y = x))$?

3.20.° Для теореми «якщо деяке натуральне число ділиться націло на 5, то його квадрат ділиться націло на 25» сформулюйте обернену теорему, протилежну теорему, обернену до протилежної.

3.21.° Для теореми «якщо в довільному опуклому чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло» сформулюйте обернену теорему, протилежну теорему, обернену до протилежної.

§ 3. СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

4. Степенева функція з натуральним показником

Властивості і графіки функцій $y = x$ і $y = x^2$ добре знайомі вам з попередніх класів. Ці функції є окремими випадками функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, яку називають **степеневою функцією з натуральним показником.**

Оскільки вираз x^n, $n \in \mathbb{N}$, має зміст при будь-якому x, то *областю визначення степеневої функції з натуральним показником є множина* $\mathbb{R}$.

Очевидно, що розглядувана *функція має єдиний нуль* $x = 0$.

Подальше дослідження властивостей функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

- **Перший випадок: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.**

Зазначимо, що при $k = 1$ отримуємо функцію $y = x^2$, властивості і графік якої були розглянуті у 8 класі.

Оскільки при будь-якому x вираз x^{2k} набуває тільки невід'ємних значень, то область значень розглядуваної функції не містить жодного від'ємного числа.

Можна показати, що для будь-якого $a \geqslant 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{2k} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^n$, *де n — парне натуральне число, є множина* $[0; +\infty)$.

Якщо $x \neq 0$, то $x^{2k} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^n$, *де n — парне натуральне число.*

Функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є парною. Справді, для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Звідси $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

Отже, *функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, спадає на проміжку* $(-\infty; 0]$. Аналогічно можна показати, що ця функція *зростає на проміжку* $[0; +\infty)$.

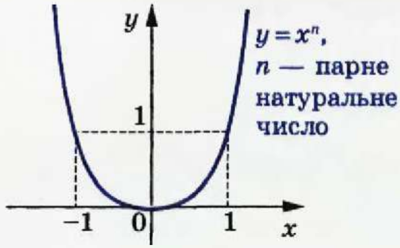


Рис. 4.1

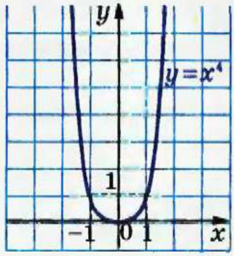


Рис. 4.2

Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число (рис. 4.1). Зокрема, графік функції $y = x^4$ зображено на рисунку 4.2.

- **Другий випадок: n — непарне натуральне число.**

Зазначимо, що при $n = 1$ отримуємо функцію $y = x$, властивості і графік якої були розглянуті в 7 класі.

Тепер нехай $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Можна показати, що для будь-якого a існує таке значення аргументу x, що $x^{2k+1} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є множина* $\mathbb{R}$.

Якщо $x < 0$, то $x^{2k+1} < 0$; якщо $x > 0$, то $x^{2k+1} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число.*

Функція $y = x^n$, *де n — непарне натуральне число, є непарною.* Справді, для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 < x_2$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$.

Отже, *функція $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є зростаючою.*

Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, $n > 1$ (рис. 4.3). Зокрема, графіки функцій $y = x^3$ і $y = x^5$ зображено на рисунку 4.4.

Рис. 4.3

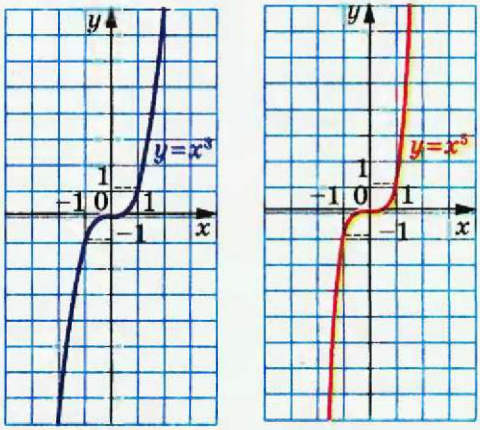


Рис. 4.4

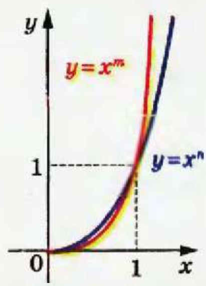
Дослідимо взаємне розміщення графіків функцій $y = x^m$ і $y = x^n$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > n$, на проміжку $[0; +\infty)$. Очевидно, що ці графіки мають дві спільні точки: (0; 0) і (1; 1).

Розглянемо різницю $x^m - x^n = x^n (x^{m-n} - 1)$. Оскільки $m > n$, то $(m - n) \in \mathbb{N}$.

Якщо $0 < x < 1$, то $x^n > 0$ і $x^{m-n} < 1$. Звідси $x^n (x^{m-n} - 1) < 0$.

Якщо $x > 1$, то $x^n > 0$ і $x^{m-n} > 1$. Звідси $x^n (x^{m-n} - 1) > 0$.

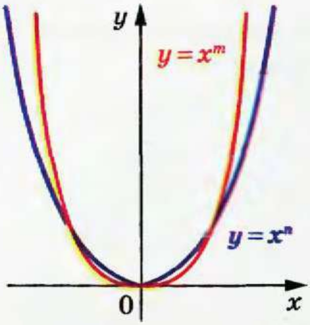
Отже, на проміжку (0; 1) графік функції $y = x^m$ знаходиться нижче від графіка функції $y = x^n$, а на проміжку $(1; +\infty)$ — вище (рис. 4.5).



$m > n > 1$,
$x \geqslant 0$

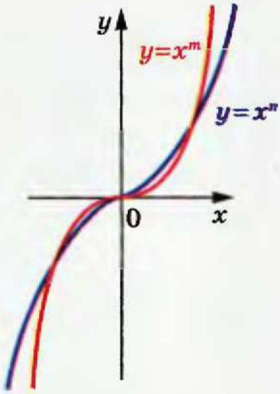
Рис. 4.5

Якщо m і n — парні натуральні числа, то, відобразивши графік, зображений на рисунку 4.5, симетрично відносно осі ординат, отримаємо рисунок 4.6. Для непарних m і n застосуємо симетрію відносно початку координат (рис. 4.7).



m і n — парні натуральні числа, $m > n$

Рис. 4.6



m і n — непарні натуральні числа, $m > n > 1$

Рис. 4.7

У таблиці наведено властивості функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, установлені в цьому пункті.

	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число
Область визначення	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значень	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання / спадання	Спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$	Зростаюча

Вправи

4.1.° При яких значеннях a графік функції $y = ax^4$ проходить через точку: 1) $A\ (2; -12)$; 2) $B\ (-3; -3)$?

4.2.° При яких значеннях a графік функції $y = ax^3$ проходить через точку: 1) $C\ (3; -18)$; 2) $D\ (-2; 64)$?

4.3.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{19}$. Порівняйте:

1) $f(1{,}4)$ і $f(1{,}8)$;
2) $f(-7{,}6)$ і $f(-8{,}5)$;
3) $f(-6{,}9)$ і $f(6{,}9)$;
4) $f(0{,}2)$ і $f(-12)$.

4.4.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{21}$. Порівняйте:

1) $f(20)$ і $f(17)$; 2) $f(-44)$ і $f(1{,}5)$; 3) $f(-52)$ і $f(-45)$.

4.5.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{20}$. Порівняйте:

1) $f(3{,}6)$ і $f(4{,}2)$;
2) $f(-6{,}7)$ і $f(-5{,}8)$;
3) $f(-2{,}4)$ і $f(2{,}4)$;
4) $f(-15)$ і $f(2)$.

4.6.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{50}$. Порівняйте:

1) $f(9{,}2)$ і $f(8{,}5)$;
2) $f(-1{,}1)$ і $f(-1{,}2)$;
3) $f(19)$ і $f(-19)$;
4) $f(-7)$ і $f(9)$.

4.7.° Скільки коренів має рівняння $x^n = 1600$, якщо:

1) n — парне натуральне число;
2) n — непарне натуральне число?

4.8.° Чи має дане рівняння від'ємний корінь:

1) $x^6 = 2$; 2) $x^5 = -3$; 3) $x^7 = 9$; 4) $x^6 = -10$?

4.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^5 = 32$; 2) $x^3 = -\frac{8}{27}$; 3) $x^4 = 81$; 4) $x^4 = -16$.

4.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 = -27$; 2) $x^5 = 0{,}00032$; 3) $x^6 = 64$; 4) $x^8 = -1$.

4.11.° Знайдіть точки перетину графіків функцій:

1) $y = x^6$ і $y = 2x^4$;
2) $y = x^4$ і $y = -27x$.

4.12.° Знайдіть точки перетину графіків функцій $y = x^5$ і $y = x^3$.

4.13.° Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $x^8 = x + 1$;
2) $x^5 = 3 - 2x$;
3) $x^4 = 0{,}5x - 2$;
4) $x^3 = x^2 - 3$.

4.14.° Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^6, \\ 2x - y - 3 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^5, \\ y = 2 - 0{,}5\,x^2. \end{cases}$

4.15.° Чи випливає з рівності $x_1^n = x_2^n$, що $x_1 = x_2$, коли: 1) n — парне; 2) n — непарне?

4.16.° Чи випливає з нерівності $x_1^n > x_2^n$, що $x_1 > x_2$, коли: 1) n — парне; 2) n — непарне?

4.17.° Чи випливає з нерівності $x_1 > x_2$, що $x_1^n > x_2^n$, коли: 1) n — парне; 2) n — непарне?

4.18.° Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння:

1) $x^{12} = a - 6$; 2) $x^{24} = a^2 + 7a - 8$?

4.19.° Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $x^8 = 9a - a^3$?

4.20.° Чи існує парна функція f, визначена на $\mathbb{R}$, яка задовольняє умовам: $f(0) = 0$, $f(-1) = 1$, $f(2) = 1024$?

4.21.° Чи існує непарна функція f, визначена на $\mathbb{R}$, яка задовольняє умовам: $f(0) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(3) = 243$?

4.22.° Побудуйте графік функції:

1) $y = x^3 - 1$; 4) $y = (x - 1)^4$; 7) $y = -\frac{1}{2}x^4$;
2) $y = (x + 2)^3$; 5) $y = (x + 1)^4 - 1$; 8) $y = |x^3|$;
3) $y = x^4 - 4$; 6) $y = -x^3$; 9) $y = (|x| + 1)^4$.

4.23.° Побудуйте графік функції:

1) $y = x^3 + 3$; 4) $y = (x + 1)^4$; 7) $y = -x^4$;
2) $y = (x - 3)^3$; 5) $y = (x - 1)^3 + 2$; 8) $y = (|x| - 2)^3$;
3) $y = x^4 + 2$; 6) $y = \frac{1}{4}x^3$; 9) $y = |x + 1|^3$.

4.24.° Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \begin{cases} x^4, \text{ якщо } x < 0, \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x \geqslant 0; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x^5, & \text{якщо } x < -1, \\ -x - 2, & \text{якщо } x \geqslant -1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

4.25.• Побудуйте графік функції $f(x)=\begin{cases}x^3, & \text{якщо } x<0,\\ -\sqrt{x}, & \text{якщо } x\geqslant 0.\end{cases}$

• Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

4.26.• Побудуйте графік функції:

1) $y = |x|\, x^4$; 2) $y = |x|\, x^4 + x^5$.

4.27.• Побудуйте графік функції:

1) $y = |x|\, x^3$; 2) $y = |x|\, x^4 - x^5$.

4.28.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^8$ на проміжку:

1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-1; 1]$; 4) $(-\infty; -2]$; 5) $(-2; 1)$.

4.29.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^6$ на проміжку:

1) $[-13; -1]$; 2) $[-2; 1]$; 3) $[1; +\infty)$; 4) $(1; +\infty)$.

4.30.• Парним чи непарним натуральним числом є показник степеня n функції $f(x) = x^n$, якщо:

1) $f(-4) > f(-2)$; 4) $f(4) > f(2)$;
2) $f(-4) < f(2)$; 5) $f(-4) > f(2)$;
3) $f(-4) < f(-2)$; 6) $f(4) > f(-2)$?

4.31.•• Знайдіть усі функції f такі, що рівність $f(x^3) = x^{21}$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$.

4.32.•• Знайдіть усі непарні функції f такі, що рівність $f(x^6) = x^{24}$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$.

4.33.•• Знайдіть усі парні функції f такі, що рівність $f(x^4) = x^{20}$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$.

4.34.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{11} + x^3 = 2$; 2) $2x^4 + x^{10} = 3$.

4.35.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $4x^3 + x^7 = -5$; 2) $x^6 + 3x^8 = 4$.

4.36.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^8$ на проміжку $[-1; a]$, де $a > -1$.

4.37.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^6$ на проміжку $[a; 2]$, де $a < 2$.

4.38.* Розв'яжіть рівняння $5x^{17} - 3x^8 = 2$.

4.39.* Розв'яжіть рівняння $11x^{15} + 2x^4 = -9$.

4.40.* Наведіть приклад такої послідовності визначених на $\mathbb{R}$ різних функцій $f_1, f_2, \ldots$, що для всіх $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f_k(f_n(x)) = f_{kn}(x)$.

4.41.* Наведіть приклад такої послідовності визначених на $\mathbb{R}$ різних функцій $f_1, f_2, \ldots$, що для всіх $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f_k(x) \cdot f_n(x) = f_{k+n}(x)$.

Функціональний підхід Коші

Вам часто доводиться розв'язувати рівняння, тобто шукати такі значення змінної, при підстановці яких у рівняння отримуємо правильну рівність. Такі рівняння можна було б назвати числовими, оскільки їх розв'язками є числа. У математиці вивчають й інші рівняння, розв'язками яких є не числа, а функції. Природно, що їх називають **функціональними рівняннями**.

З функціональними рівняннями ви зустрічалися раніше. Наприклад, рівність

$$f(x) = f(-x),\ x \in D(f),$$

яка задає парні функції, можна розглядати як функціональне рівняння. Розв'язком цього рівняння є будь-яка парна функція.

Ось ще два приклади функціональних рівнянь:

$$f(x + y) = f(y) + x,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}; \quad (1)$$

$$f(x + y) = 2f(y) + x - y,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Розв'яжемо функціональне рівняння (1).

Якщо в рівність $f(x + y) = f(y) + x$ підставити значення змінної $y = 0$, то отримаємо таке:

$$f(x) = f(0) + x.$$

Оскільки $f(0)$ — деяка стала, то тим самим доведено, що розв'язками рівняння (1) можуть бути лише лінійні функції виду $f(x) = x + c$, де c — стала.

Водночас зауважимо, що наведені міркування не гарантують того, що кожна лінійна функція виду $f(x) = x + c$ задовольняє функціональне рівняння (1). Тому треба зробити перевірку.

Підставивши функцію $f(x) = x + c$ у функціональне рівняння (1), отримаємо очевидну тотожність:

$$(x + y) + c = (y + c) + x.$$

Відповідь: $f(x) = x + c$, де c — будь-яка стала.

Зауважимо, що останній етап розв'язування задачі — перевірка — є важливою частиною розв'язування, оскільки на ньому можуть бути «відсіяні» сторонні розв'язки.

Проілюструємо це на прикладі розв'язування функціонального рівняння (2).

Міркуючи аналогічно попередній задачі, підставимо $y = 0$. Тоді

$$f(x) = 2f(0) + x.$$

Отже, розв'язками функціонального рівняння (2) знову можуть бути лише лінійні функції виду $f(x) = x + c$, де c — стала.

Проведемо перевірку отриманих функцій. Підставляючи функцію $f(x) = x + c$ у рівняння (2), отримаємо

$$x + y + c = 2(y + c) + x - y;$$
$$c = 0.$$

Бачимо, що серед всіх лінійних функцій $f(x) = x + c$ функціональне рівняння (2) задовольняє лише одна: $f(x) = x$.

Відповідь: $f(x) = x$.

Функціональні рівняння грають в математиці важливу роль. Оскільки кожне функціональне рівняння задає певну властивість функцій, то за допомогою функціональних рівнянь можна визначати конкретні класи функцій. Такий спосіб визначення функцій через опис їх характерних властивостей у вигляді функціональних рівнянь запровадив відомий французький математик О. Коші. Його ім'я носять такі функціональні рівняння:

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$
$$f(xy) = f(x) + f(y),$$
$$f(x + y) = f(x)\,f(y),$$
$$f(xy) = f(x)\,f(y).$$

Огюстен Луї Коші (1789–1857)

Огюстен Луї Коші — французький математик. Опублікував понад 800 робіт з арифметики, теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теоретичної і небесної механіки, математичної фізики; займався також дослідженнями з тригонометрії, теорії пружності, оптики, астрономії. Був членом Паризької академії наук, Лондонського королівського товариства і майже всіх академій наук світу.

Використовуючи рівняння Коші, можна, наприклад, визначити степеневу функцію $f(x) = x^5$.

Розглянемо задачу: знайти всі функції f, визначені на $\mathbb{R}$, які одночасно задовольняють такі умови:

1) f — непарна зростаюча функція;

2) $f(2) = 32$;

3) $f(xy) = f(x) f(y)$ для всіх значень $x > 0$, $y > 0$.

На заняттях математичного гуртка ви зможете розглянути доведення того, що даний перелік умов задовольняє лише степенева функція $f(x) = x^5$.

Вправи

4.42. Знайдіть усі функції f, які для всіх $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ задовольняють умову $f(x) + f(y) = x + y$.

4.43. Знайдіть усі функції f, які для всіх $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ задовольняють умову $f(xy + 1) = f(x) + 1$.

4.44. Знайдіть усі функції f, які для всіх $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ задовольняють умову $f(y + f(x)) = (x - 1) f(y)$.

4.45. Чи існує функція f, визначена на $\mathbb{R}$ і відмінна від $f(x) = x^5$, яка одночасно задовольняє такі умови:

1) $f(2) = 32$;

2) $f(xy) = f(x) f(y)$ для всіх $x > 0$, $y > 0$?

4.46. Знайдіть усі функції f, які для всіх $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ задовольняють умову $f(2x - 3y) + 12xy = f(2x) + f(3y)$.

5. Степенева функція з цілим показником

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^n$, де $n \in \mathbb{Z}$, називають **степеневою функцією з цілим показником.**

Властивості цієї функції для натурального показника було розглянуто в попередньому пункті. Тут ми розглянемо випадки, коли показник n є цілим від'ємним числом або нулем.

Областю визначення функції $y = x^0$ є множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, областю значень — одноелементна множина $\{1\}$. Графік цієї функції зображено на рисунку 5.1.

Розглянемо функцію $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbb{N}$.

З окремим випадком цієї функції, коли $n = 1$, тобто з функцією $y = \frac{1}{x}$, ви знайомі з курсу алгебри 8 класу.

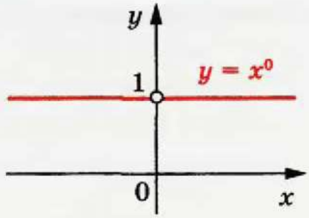


Рис. 5.1

Запишемо функцію $y = x^{-n}$ у вигляді $y = \frac{1}{x^n}$. Зрозуміло, що *областю визначення функції* $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, *є множина* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Очевидно, що ця функція нулів не має.

Подальші дослідження властивостей функції $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

- **Перший випадок: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.**

Маємо: $x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}$. Оскільки вираз $\frac{1}{x^{2k}}$ набуває тільки додатних значень, то до області значень розглядуваної функції не входять від'ємні числа, а також число 0.

Можна показати, що для будь-якого $a > 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{-2k} = a$.

- Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^{-n}$, *де* n *— парне натуральне число, є множина* $(0; +\infty)$.
- Очевидно, що *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^{-n}$, *де* n *— парне натуральне число.*
- *Функція* $y = x^{-n}$, *де* n *— парне натуральне число, є парною.* Справді, для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{-2k} = \frac{1}{(-x)^{2k}} = \frac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 > 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо $0 < -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$. Звідси $\left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k}$; $\frac{1}{x_1^{2k}} < \frac{1}{x_2^{2k}}$; $x_1^{-2k} < x_2^{-2k}$.

Отже, *функція $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число, зростає на проміжку* $(-\infty; 0)$.

Аналогічно можна показати, що *функція $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число, спадає на проміжку* $(0; +\infty)$.

Зауважимо, що зі збільшенням модуля x значення виразу $\frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, стає все меншим і меншим. Тому відстань від точки графіка функції $y = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, до осі абсцис зменшується і може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Аналогічно можна встановити, що зі збільшенням модуля ординати відстань від точки графіка до осі ординат зменшується і може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число (рис. 5.2). Зокрема, графік функції $y = \frac{1}{x^2}$ зображено на рисунку 5.3.

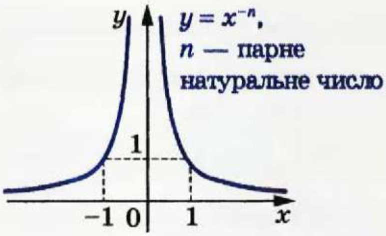


Рис. 5.2

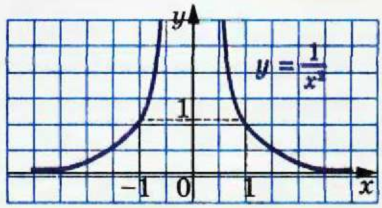


Рис. 5.3

- **Другий випадок: $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.**

Можна показати, що для будь-якого $a \neq 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{-(2k-1)} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число, є множина* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Якщо $x < 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$; якщо $x > 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число.*

Функція $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число, є непарною.

Справді, для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{-x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 > 0$. Скориставшись властивостями числових нерівностей, отримуємо $-\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$; $\left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k-1}$; $-\frac{1}{x_1^{2k-1}} < -\frac{1}{x_2^{2k-1}}$; $\frac{1}{x_1^{2k-1}} > \frac{1}{x_2^{2k-1}}$. Отже, розглядувана функція спадає на проміжку $(-\infty; 0)$. Аналогічно можна показати, що ця функція спадає і на проміжку $(0; +\infty)$.

Отже, *функція* $y = x^{-n}$, *де* n — *непарне натуральне число, спадає на кожному з проміжків* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$.

Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число (рис. 5.4). Зокрема, графік функції $y = \frac{1}{x^3}$ зображено на рисунку 5.5.

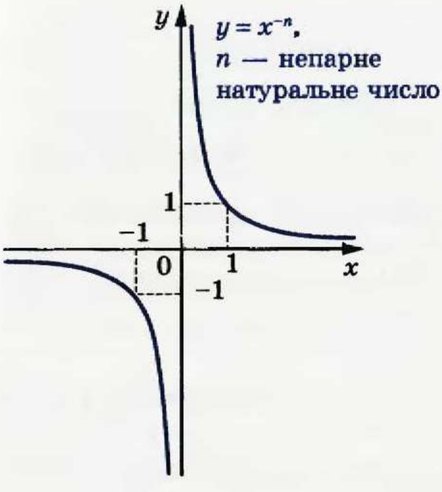


Рис. 5.4

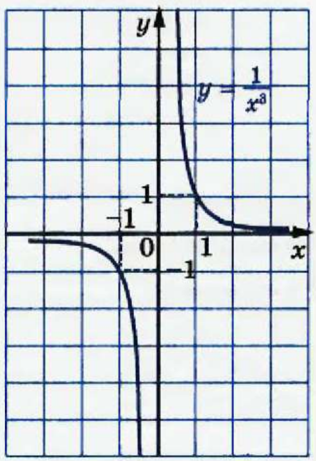
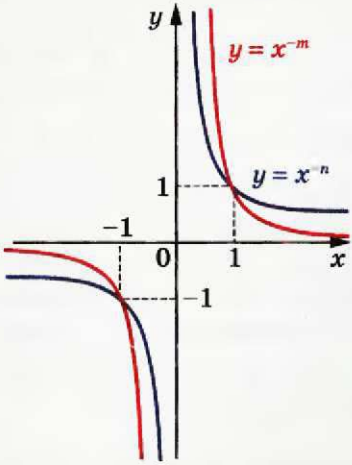


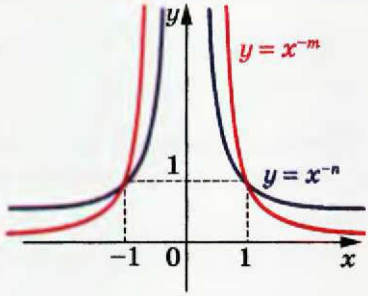
Рис. 5.5

У попередньому пункті було проведено дослідження взаємного розміщення графіків функцій $y = x^m$ і $y = x^n$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > n$. Міркуючи аналогічно, можна показати, що схематичне розміщення графіків функцій $y = x^{-m}$ і $y = x^{-n}$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > n$, є таким, як показано на рисунках 5.6, 5.7.



m і n — непарні,
$m > n$

Рис. 5.6



m і n — парні,
$m > n$

Рис. 5.7

У таблиці наведено властивості функції $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, вивчені в цьому пункті.

	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число
Область визначення	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Область значень	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Нулі функції	–	–
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання / спадання	Зростає на проміжку $(-\infty; 0)$, спадає на проміжку $(0; +\infty)$	Спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$

Вправи

5.1.° Чи проходить графік функції $y = x^{-4}$ через точку:

1) $A\left(2; \frac{1}{16}\right)$; 2) $B\left(-2; \frac{1}{8}\right)$; 3) $C\left(\frac{1}{3}; 81\right)$; 4) $D\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{4}\right)$?

5.2.° Чи проходить графік функції $y = x^{-5}$ через точку:

1) $A\ (0;\ 0)$; 2) $B\ (-1;\ -1)$; 3) $C\left(\frac{1}{2}; 32\right)$; 4) $D\left(-3; -\frac{1}{243}\right)$?

5.3.° При яких значеннях a графік функції $y = ax^{-3}$ проходить через точку: 1) $A\ (-5;\ 20)$; 2) $B\left(2; \frac{1}{24}\right)$?

5.4.° При яких значеннях a графік функції $y = ax^{-4}$ проходить через точку: 1) $A\ (3;\ -3)$; 2) $B\left(-2; \frac{1}{2}\right)$?

5.5.° Дано функцію $f\ (x) = x^{-19}$. Порівняйте:

1) $f\ (1{,}6)$ і $f\ (2)$;
2) $f\ (-5{,}6)$ і $f\ (-6{,}5)$;
3) $f\ (-9{,}6)$ і $f\ (9{,}6)$;
4) $f\ (0{,}1)$ і $f\ (-10)$.

5.6.° Дано функцію $f\ (x) = x^{-25}$. Порівняйте:

1) $f\ (18)$ і $f\ (16)$; 2) $f\ (-42)$ і $f\ (2{,}5)$; 3) $f\ (-32)$ і $f\ (-28)$.

5.7.° Функцію задано формулою $f\ (x) = x^{-16}$. Порівняйте:

1) $f\ (1{,}6)$ і $f\ (2{,}2)$;
2) $f\ (-4{,}5)$ і $f\ (-3{,}6)$;
3) $f\ (-3{,}4)$ і $f\ (3{,}4)$;
4) $f\ (-18)$ і $f\ (3)$.

5.8.° Функцію задано формулою $f\ (x) = x^{-40}$. Порівняйте:

1) $f\ (6{,}2)$ і $f\ (5{,}5)$;
2) $f\ (-1{,}6)$ і $f\ (-1{,}7)$;
3) $f\ (24)$ і $f\ (-24)$;
4) $f\ (-8)$ і $f\ (6)$.

5.9.° Скільки коренів має рівняння $x^{-n} = 2500$, якщо:

1) n — парне натуральне число;
2) n — непарне натуральне число?

5.10.° Чи має дане рівняння від'ємний корінь:

1) $x^{-6} = 2$; 2) $x^{-5} = 0{,}3$; 3) $x^{-7} = -3$; 4) $x^{-8} = -2$?

5.11.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = (x^{-1})^{-1}$; 2) $y = ((x-2)^{-2})^{-2}$.

5.12.° Побудуйте графік функції:

1) $y = (x-2)^0$; 2) $y = (x^2 - 4x + 3)^0$; 3) $y = \left(\frac{1}{x+1}\right)^{-1}$.

5.13.° Побудуйте графік рівняння:

1) $(y+2)^0 = x - 2$; 2) $(y-2)^0 = (x+1)^0$.

5.14.° Знайдіть точки перетину графіків функцій:

1) $y = x$ і $y = x^{-3}$; 2) $y = x^{-2}$ і $y = \frac{1}{8}x$.

5.15.° Знайдіть точки перетину графіків функцій $y = x^{-7}$ і $y = x^{-4}$.

5.16.• Побудуйте графік функції:

1) $y = x^{-2} + 2$; 4) $y = x^{-3} - 1$; 7) $y = |x^{-3}|$;
2) $y = (x - 3)^{-2}$; 5) $y = (x - 1)^{-3}$; 8) $y = |x - 1|^{-3}$;
3) $y = -\frac{1}{2}x^{-2}$; 6) $y = 3x^{-3}$; 9) $y = \frac{1}{x|x|}$.

5.17.• Побудуйте графік функції:

1) $y = x^{-5} - 3$; 3) $y = (x + 1)^{-4}$; 5) $y = |x^{-5}|$;
2) $y = 4x^{-5}$; 4) $y = -x^{-4}$; 6) $y = \frac{1}{x^2|x|}$.

5.18.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-6}$ на проміжку:

1) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; 2) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$; 3) $[1; +\infty)$; 4) $[-1; 0)$.

5.19.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-3}$ на проміжку:

1) $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $(-\infty; -3]$; 4) $(0; 2]$.

5.20.• Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^{-6}, \\ y = 4 - x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = x^3 + 3. \end{cases}$

5.21.• Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = \frac{1}{8}x^2 - 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^{-2}, \\ y = x^2 - 2. \end{cases}$

5.22.• Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^{-2}, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ x^2, \text{ якщо } x > -1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, установіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

5.23.• Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^{-3}, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ -x^2, \text{ якщо } -1 < x \leqslant 1, \\ x^{-3}, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, установіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

5.24.* Парним чи непарним є натуральне число n у показнику степеня функції $f(x) = x^{-n}$, якщо:

1) $f(-2) > f(-1)$;
2) $f(-2) < f(1)$;
3) $f(-2) < f(-1)$;
4) $f(2) < f(1)$?

5.25.** Знайдіть усі визначені на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ функції f такі, що рівність $f\left(\frac{1}{x^5}\right) = x^{45}$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

5.26.** Знайдіть усі непарні та визначені на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ функції f такі, що рівність $f(x^4) = x^{-16}$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

5.27.** Знайдіть усі парні та визначені на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ функції f такі, що рівність $\frac{1}{f(x^6)} = x^{30}$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

5.28.* Знайдіть усі визначені на $\mathbb{R}$ функції f такі, що рівність $f(x^{-4}) = x^{28}$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

6. Означення кореня n-го степеня

Ви знаєте, що квадратним коренем (коренем другого степеня) з числа a називають таке число, квадрат якого дорівнює a. Аналогічно дають означення кореня n-го степеня з числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Означення. Коренем n-го степеня з числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке число, n-й степінь якого дорівнює a.

Наприклад, коренем п'ятого степеня з числа 32 є число 2, оскільки $2^5 = 32$; коренем третього степеня з числа -64 є число -4, оскільки $(-4)^3 = -64$; коренями четвертого степеня з числа 81 є числа 3 і -3, оскільки $3^4 = 81$ і $(-3)^4 = 81$.

З означення випливає, що будь-який корінь рівняння $x^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є коренем n-го степеня з числа a і навпаки, корінь n-го степеня з числа a є коренем розглядуваного рівняння.

Якщо n — непарне натуральне число, то функція $y = x^n$ є зростаючою і, оскільки її областю значень є множина $\mathbb{R}$, то рівняння $x^n = a$ має єдиний корінь при будь-якому a.

Рисунок 6.1 ілюструє останнє твердження: при будь-якому значенні a графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ мають одну спільну точку.

Тоді можна зробити такий висновок:

якщо n — непарне натуральне число, більше за 1, то корінь n-го степеня з будь-якого числа існує, причому тільки один.

Корінь непарного степеня n, $n > 1$, з числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$ (читають: «корінь n-го степеня з a»). Знак $\sqrt[n]{\ }$ називають **знаком кореня n-го степеня** або **радикалом**. Вираз, який стоїть під радикалом, називають **підкореневим виразом**.

Наприклад, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[3]{-64} = -4$, $\sqrt[7]{0} = 0$.

Корінь третього степеня також прийнято називати **кубічним коренем**. Наприклад, запис $\sqrt[3]{2}$ читають: «корінь кубічний з числа 2».

Наголосимо, що вираз $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$, існує при будь-якому a.

З означення кореня n-го степеня випливає, що ***при будь-якому a виконується рівність***

$$\boxed{\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a}$$

Наприклад, $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$, $\left(\sqrt[7]{-0{,}1}\right)^7 = -0{,}1$.

Розглянемо рівняння $x^n = a$, де n — парне натуральне число.

Оскільки областю значень функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є множина $[0; +\infty)$, то при $a < 0$ дане рівняння не має розв'язків.

Очевидно, що при $a = 0$ рівняння має єдиний корінь $x = 0$.

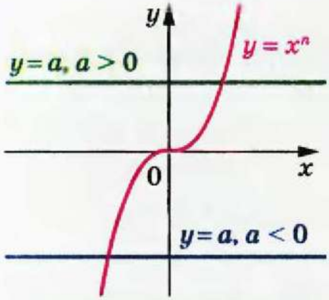
Функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, зростає на проміжку $[0; +\infty)$ і набуває всіх додатних значень. Отже, при $a \geqslant 0$ рівняння $x^n = a$, де n — парне натуральне число, на проміжку $[0; +\infty)$ має єдиний корінь.

Оскільки розглядувана функція є парною, то при $a > 0$ дане рівняння має два корені, які є протилежними числами.

Наведені твердження мають просту геометричну інтерпретацію (рис. 6.2). Якщо $a < 0$, то графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ не мають спільних точок; якщо $a = 0$, то розглядувані графіки мають одну спільну точку; якщо $a > 0$, то спільних точок дві, причому їх абсциси — протилежні числа.

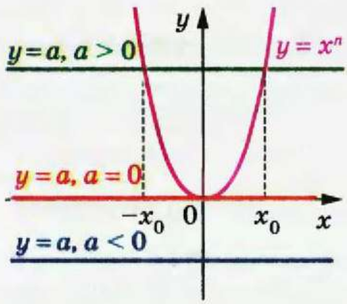
Тепер можна зробити такий висновок:

якщо n — парне натуральне число, то при $a < 0$ корінь n-го степеня з числа a не існує; при $a = 0$ корінь n-го степеня з числа a дорівнює 0; при $a > 0$ існують два протилежні числа, які є коренями n-го степеня з числа a.



n — непарне
натуральне число, $n > 1$

Рис. 6.1



n — парне
натуральне число

Рис. 6.2

Вище було встановлено, що рівняння $x^n = a$ при $a \geqslant 0$ обов'язково має один невід'ємний корінь. Його називають **арифметичним коренем n-го степеня з числа a.**

Означення. Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.

Арифметичний корінь n-го степеня з невід'ємного числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$.

Наприклад, $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3 \geqslant 0$ і $3^4 = 81$;

$\sqrt[6]{64} = 2$, оскільки $2 \geqslant 0$ і $2^6 = 64$;

$\sqrt[10]{0} = 0$, оскільки $0 \geqslant 0$ і $0^{10} = 0$.

Узагалі, якщо $b \geqslant 0$ і $b^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{a} = b$.

Звернемо увагу на те, що для позначення арифметичного кореня n-го степеня з невід'ємного числа a і кореня непарного степеня n з числа a використовують один і той самий запис: $\sqrt[n]{a}$. Запис $\sqrt[2k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$, використовують тільки для позначення арифметичного кореня. Зазначимо, що корінь парного степеня з числа a не має позначення.

За допомогою знака кореня n-го степеня можна записувати розв'язки рівняння $x^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

- Якщо n — непарне натуральне число, то при будь-якому значенні a розглядуване рівняння має єдиний корінь $x = \sqrt[n]{a}$.
- Якщо n — парне натуральне число і $a > 0$, то рівняння має два корені: $x_1 = \sqrt[n]{a}$, $x_2 = -\sqrt[n]{a}$.

Якщо $a = 0$, то $x = 0$.

Наприклад, коренем рівняння $x^3 = 7$ є число $\sqrt[3]{7}$; коренями рівняння $x^4 = 5$ є два числа: $-\sqrt[4]{5}$ і $\sqrt[4]{5}$.

З означення арифметичного кореня n-го степеня випливає, що для будь-якого невід'ємного числа a має місце таке:

$$\sqrt[n]{a} \geqslant 0 \textit{ і виконується рівність } \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Наприклад, $\left(\sqrt[6]{7}\right)^6 = 7.$

Покажемо, що при будь-якому a і $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}}$$

Для того щоб довести рівність $\sqrt[2k+1]{x} = y$, потрібно показати, що $y^{2k+1} = x$.

Маємо: $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a.$

Доведена властивість дозволяє корінь непарного степеня з від'ємного числа виразити через арифметичний корінь.

Наприклад, $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{-12} = -\sqrt[5]{12}$.

Вправи

6.1.° Чи є правильною рівність (відповідь обґрунтуйте):

1) $\sqrt[3]{27} = 3$; 3) $\sqrt[3]{-27} = -3$; 5) $\sqrt[4]{-16} = -2$;
2) $\sqrt[8]{1} = 1$; 4) $\sqrt[4]{16} = 2$; 6) $\sqrt[5]{-32} = 2$?

6.2.° Доведіть, що:

1) число 2 є арифметичним кубічним коренем з числа 8;
2) число 3 є арифметичним коренем четвертого степеня з числа 81;
3) число −3 не є арифметичним коренем четвертого степеня з числа 81;
4) число 10 не є арифметичним коренем п'ятого степеня з числа 10 000.

6.3.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{0{,}25}$; 3) $\sqrt[4]{0{,}0016}$; 5) $\sqrt[4]{3\frac{13}{81}}$; 7) $4\sqrt[3]{0{,}125}$; 9) $\sqrt[4]{9^2}$;
2) $\sqrt[3]{216}$; 4) $\sqrt[5]{-0{,}00001}$; 6) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; 8) $\frac{1}{3}\sqrt[5]{-243}$; 10) $\sqrt[6]{8^2}$.

6.4.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt[3]{343}$; 3) $0{,}5\sqrt[3]{-64}$; 5) $\sqrt[6]{27^2}$;

2) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$; 4) $-8\sqrt[5]{-\frac{1}{1024}}$; 6) $\sqrt[100]{49^{50}}$?

6.5.° Обчисліть:

1) $\left(\sqrt{11}\right)^2$; 3) $\left(-\sqrt[4]{7}\right)^4$; 5) $-\sqrt[4]{7^4}$; 7) $\left(-3\sqrt[4]{10}\right)^4$; 9) $\frac{1}{2}\sqrt[6]{48^6}$.

2) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$; 4) $\left(-\sqrt[7]{2}\right)^7$; 6) $\left(5\sqrt[3]{3}\right)^3$; 8) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{48}\right)^6$;

6.6.° Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\sqrt[8]{18}\right)^8$; 3) $\left(-\sqrt[6]{11}\right)^6$; 5) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{45^3}$;

2) $\left(-\sqrt[9]{9}\right)^9$; 4) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{45}\right)^3$; 6) $\left(-2\sqrt[5]{-5}\right)^5$.

6.7.° Обчисліть:

1) $0{,}3\sqrt[3]{1000}-5\sqrt[8]{256}+6\cdot\left(-\sqrt[10]{6}\right)^{10}$;

2) $\sqrt[5]{14^5}+\left(-2\sqrt{10}\right)^2-\sqrt[7]{-128}$;

3) $\sqrt[4]{2\frac{113}{256}}\cdot\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}+\frac{1}{16}\cdot\sqrt[3]{14^3}-\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{-5}\right)^3$.

6.8.° Обчисліть:

1) $200\sqrt[3]{0{,}001}-\sqrt[5]{-0{,}00032}-\left(-4\sqrt{2}\right)^2$;

2) $\sqrt[3]{8000}\cdot\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}-\left(-\sqrt[5]{8}\right)^5+\sqrt[7]{17^7}$.

6.9.° При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\sqrt[8]{x+6}$; 3) $\sqrt[4]{y(y-1)}$; 5) $\sqrt[6]{-x^2}$;

2) $\sqrt[9]{a-10}$; 4) $\sqrt[6]{-x}$; 6) $\sqrt[10]{x^2+2x-8}$?

6.10.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt[4]{x-2}$; 2) $y=\sqrt[7]{4-x}$; 3) $y=\sqrt[12]{2x-x^2}$; 4) $y=\frac{1}{\sqrt[8]{x^2-4x+4}}$.

6.11. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3=27$; 4) $x^4=16$; 7) $27x^3-1=0$;
2) $x^5=9$; 5) $x^6=5$; 8) $(x-2)^3=125$;
3) $x^7=-2$; 6) $x^4=-81$; 9) $(x+5)^4=10\,000$.

6.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^9=1$; 4) $x^{18}=0$; 7) $64x^5+2=0$;
2) $x^8=12$; 5) $x^5=-32$; 8) $(2x+1)^3=8$;
3) $x^{10}=1$; 6) $x^6=-64$; 9) $(x-3)^6=729$.

6.13.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}=9$; 4) $\sqrt[3]{x}=-6$; 7) $\sqrt[3]{2x}+7=0$;

2) $\sqrt[3]{x}=\frac{4}{5}$; 5) $\sqrt[6]{x}=-2$; 8) $\sqrt[3]{2x+7}=0$;

3) $\sqrt[4]{x}=3$; 6) $\sqrt[8]{x}=0$; 9) $\sqrt[3]{2x+7}=7$.

6.14.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{x}=-2$; 3) $\sqrt[5]{x}=-2$; 5) $\sqrt[4]{3x-2}=0$;

2) $\sqrt[4]{x}=-2$; 4) $\sqrt[4]{3x}-2=0$; 6) $\sqrt[4]{3x-2}=2$.

6.15.° Побудуйте графік функції:

1) $y=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3$; 2) $y=\left(\sqrt[4]{x}\right)^4$.

6.16.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^8-82x^4+81=0$; 2) $x^6+x^3-56=0$; 3) $x^{12}+x^6-12=0$.

6.17.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^6-25x^3-54=0$; 2) $x^8+13x^4-48=0$.

6.18.• Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt[4]{\frac{|x|-1}{x^2-9}}$; 2) $\sqrt[8]{6-|x|}+\frac{1}{\sqrt[4]{3-x}}$.

6.19.• Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt[6]{\frac{|x|-4}{x^2-36}}$; 2) $\sqrt[10]{|x|-3}-\frac{1}{\sqrt[4]{x+4}}$.

6.20.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2-4)\sqrt[4]{x+1}=0$; 2) $(x-1)\sqrt[10]{x^2-2x-3}=0$.

6.21.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(|x|-3\right)\sqrt[6]{2-x}=0$; 2) $(x+2)\sqrt[6]{x^2+2x-3}=0$.

6.22.• Побудуйте графік функції:

1) $y=\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4+\left(\sqrt[4]{1-x}\right)^4+1$; 2) $y=\left(\sqrt[6]{x}\right)^6+\left(\sqrt[6]{1-x}\right)^6$.

6.23.• Побудуйте графік функції:

1) $y=x\left(\sqrt[4]{x}\right)^4$; 2) $y=\left(\sqrt[8]{2+x}\right)^8+\left(\sqrt[6]{2-x}\right)^6$.

6.24.•• Доведіть, що є ірраціональним число: 1) $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[6]{6}$.

6.25.•• Доведіть, що є ірраціональним число: 1) $\sqrt[3]{7}$; 2) $\sqrt[4]{12}$.

6.26.•• Залежно від значення параметра a визначте кількість коренів рівняння:

1) $(x-a)\sqrt[4]{x+1}=0$; 2) $(x-a)\left(\sqrt[4]{x}+1\right)=0$; 3) $(x-a)\left(\sqrt[4]{x}-1\right)=0$.

6.27.** Залежно від значення параметра a визначте кількість коренів рівняння:

1) $(x+1)\sqrt[4]{x-a}=0$; 2) $(x-1)\left(\sqrt[4]{x}-a\right)=0$.

7. Властивості кореня n-го степеня

Розглянемо теореми, які виражають властивості кореня n-го степеня.

Теорема 7.1 (корінь із степеня). ***Для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ і $k \in \mathbb{N}$ виконуються рівності:***

$$\boxed{\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a}$$

$$\boxed{\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|}$$

Доведення. Для того щоб довести рівність $\sqrt[2k+1]{x}=y$, достатньо показати, що $y^{2k+1}=x$. Тоді перша з рівностей, що доводяться, є очевидною.

Для того щоб довести рівність $\sqrt[2k]{x}=y$, достатньо показати, що $y \geqslant 0$ і $y^{2k}=x$. Маємо: $|a| \geqslant 0$ і $(|a|)^{2k}=a^{2k}$. ▲

Теорема 7.2 (корінь з добутку). ***Якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n>1$, то***

$$\boxed{\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$$

Доведення. Для того щоб довести рівність $\sqrt[n]{x}=y$, де $x \geqslant 0$, достатньо показати, що $y \geqslant 0$ і $y^n=x$.

Маємо: $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ і $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Тоді $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Крім того,

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=ab. \ ▲$$

Зауважимо, що коли $a \leqslant 0$ і $b \leqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n>1$, то $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{-a}\cdot\sqrt[n]{-b}$.

Теорема 7.3 (корінь з дробу). ***Якщо $a \geqslant 0$ і $b>0$, $n \in \mathbb{N}$, $n>1$, то***

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Доведіть цю теорему самостійно.

Зауважимо, що коли $a \leqslant 0$ і $b<0$, $n \in \mathbb{N}$, $n>1$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{-a}}{\sqrt[n]{-b}}$.

Теорема 7.4 (степінь кореня). ***Якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то***

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}}$$

Доведення. Якщо $k = 1$, то рівність, що доводиться, є очевидною.

Нехай $k > 1$. Маємо: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ множників}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множників}}} = \sqrt[n]{a^k}$. ▲

Теорема 7.5 (корінь з кореня). ***Якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, то***

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}}$$

Доведення. Маємо: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geqslant 0$.

Крім того, $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$. ▲

Теорема 7.6. ***Якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то***

$$\boxed{\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}}$$

Доведення. Якщо $k = 1$, то рівність, що доводиться, є очевидною.

Нехай $k > 1$. Маємо: $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}} = \sqrt[n]{a}$. ▲

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу: 1) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}}$.

Розв'язання

1) Замінивши добуток коренів коренем з добутку, дістанемо:

$$\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{16 \cdot 2} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

2) Замінивши частку коренів коренем з частки (дробу), матимемо:

$$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}} = \sqrt[3]{\frac{24}{375}} = \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}. \quad \bullet$$

ПРИКЛАД 2 Спростіть вираз: 1) $\sqrt[12]{a^3}$; 2) $\sqrt[4]{a^{12}}$; 3) $\sqrt[6]{a^2}$; 4) $\sqrt[6]{x^6y^6}$, якщо $x \geqslant 0$ і $y \leqslant 0$.

Розв'язання. Застосуємо теореми 7.5 і 7.1.

1) З умови випливає, що $a \geqslant 0$. Тоді $\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a}$.

2) $\sqrt[4]{a^{12}} = \sqrt[4]{(a^3)^4} = |a^3|$.

3) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[3]{|a|}$.

4) Ураховуючи, що $x \geqslant 0$ і $y \leqslant 0$, можна записати:

$$\sqrt[6]{x^6y^6} = \sqrt[6]{(xy)^6} = |xy| = |x||y| = x(-y) = -xy.$$

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік функції

$$y = \sqrt[6]{x^6} + x.$$

Розв'язання. Оскільки $\sqrt[6]{x^6} = |x|$, то $y = |x| + x$.

Якщо $x \geqslant 0$, то $y = x + x = 2x$.

Якщо $x < 0$, то $y = -x + x = 0$.

Отже, $y = \begin{cases} 2x, \text{ якщо } x \geqslant 0, \\ 0, \quad \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

Графік функції зображено на рисунку 7.1.

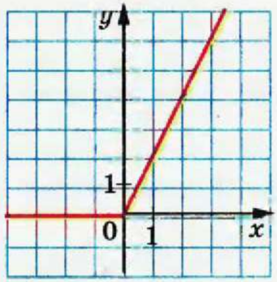


Рис. 7.1

Вправи

7.1.° Знайдіть:

1) $\sqrt[3]{64 \cdot 125}$;
2) $\sqrt[4]{0{,}0625 \cdot 81}$;
3) $\sqrt[5]{2^{10} \cdot 7^5}$;
4) $\sqrt[6]{3^{18} \cdot 10^{24}}$;
5) $\sqrt[4]{\dfrac{3^{12} \cdot 11^4}{5^8 \cdot 2^{16}}}$.

7.2.° Обчисліть:

1) $\sqrt[3]{0{,}064 \cdot 343}$;
2) $\sqrt[4]{0{,}0081 \cdot 11^4}$;
3) $\sqrt[5]{\dfrac{7^5}{2^{10}}}$;
4) $\sqrt[8]{\dfrac{2^{24} \cdot 3^{16}}{5^{16}}}$.

7.3.° Знайдіть:

1) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$;
2) $\sqrt[3]{0{,}054} \cdot \sqrt[3]{4}$;
3) $\dfrac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}$;
4) $\dfrac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{128}}$;
5) $\sqrt[6]{3^4 \cdot 5^2} \cdot \sqrt[6]{3^8 \cdot 5^4}$;
6) $\dfrac{\sqrt[8]{2^{30} \cdot 7^{12}}}{\sqrt[8]{2^6 \cdot 7^4}}$;
7) $\sqrt[4]{11 - \sqrt{40}} \cdot \sqrt[4]{11 + \sqrt{40}}$;
8) $\sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$;
9) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[3]{-9}$;
10) $\dfrac{\sqrt[4]{28} \cdot \sqrt[4]{20}}{\sqrt[4]{35}}$.

7.4.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}$;
2) $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$;
3) $\sqrt[7]{2^{15}\cdot5^{3}}\cdot\sqrt[7]{2^{6}\cdot5^{4}}$;
4) $\dfrac{\sqrt[6]{3^{10}\cdot10^{2}}}{\sqrt[6]{10^{8}\cdot3^{4}}}$;
5) $\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}$;
6) $\sqrt[5]{2\sqrt{17}+10}\cdot\sqrt[5]{2\sqrt{17}-10}$;
7) $\dfrac{\sqrt[3]{256}\cdot\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{12}}$;
8) $\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{80}$?

7.5.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt[4]{(-13)^4}$; 2) $\sqrt[5]{(-9)^5}$; 3) $\sqrt[6]{(-8)^6}$?

7.6.° Подайте вираз у вигляді одночлена, якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$:

1) $\sqrt{25a^2}$;
2) $\sqrt[3]{27b^9}$;
3) $\sqrt[4]{625a^{12}b^4}$;
4) $\sqrt[6]{729a^{54}b^{18}}$.

7.7.° Подайте вираз у вигляді одночлена, якщо $m \geqslant 0$ і $n \geqslant 0$:

1) $\sqrt{49m^2}$;
2) $\sqrt[3]{125n^{15}}$;
3) $\sqrt[6]{0{,}000064m^{30}n^{42}}$;
4) $\sqrt[8]{m^{72}n^{24}}$.

7.8.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\sqrt[5]{a}}$;
2) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$;
3) $\sqrt[27]{b^9}$;
4) $\sqrt[15]{c^6}$;
5) $\sqrt[18]{a^8b^{24}}$;
6) $\sqrt[6]{16}$;
7) $\sqrt[12]{81}$;
8) $\dfrac{\sqrt[10]{x^7}}{\sqrt[10]{x^2}}$;
9) $\dfrac{\sqrt[4]{m^7n^9}}{\sqrt[4]{m^5n^3}}$.

7.9.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{\sqrt{x}}$;
2) $\sqrt{\sqrt{y}}$;
3) $\sqrt[12]{a^3}$;
4) $\sqrt[9]{b^6}$;
5) $\sqrt[21]{a^{14}b^7}$;
6) $\sqrt[6]{27}$;
7) $\sqrt[9]{64}$;
8) $\dfrac{\sqrt[4]{c^3}}{\sqrt[4]{c}}$.

7.10.° Подайте вираз $\sqrt{a}$ у вигляді кореня:

1) четвертого степеня;
2) шостого степеня;
3) десятого степеня;
4) вісімнадцятого степеня.

7.11.° Подайте вираз $\sqrt[3]{b}$, $b \geqslant 0$, у вигляді кореня:

1) шостого степеня;
2) дев'ятого степеня;
3) п'ятнадцятого степеня;
4) тридцятого степеня.

7.12.° При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{a^4}=a$;
2) $\sqrt[4]{a^4}=-a$;
3) $\sqrt[3]{a^3}=a$;
4) $\sqrt[3]{a^3}=-a$;
5) $\sqrt[4]{(a-5)^3}=\left(\sqrt[4]{a-5}\right)^3$;
6) $\sqrt[3]{(a-5)^4}=\left(\sqrt[3]{a-5}\right)^4$;
7) $\sqrt[4]{(a-2)^4}=\left(\sqrt[4]{a-2}\right)^4$;
8) $\sqrt[6]{a(a-1)}=\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[6]{(1-a)}$;
9) $\sqrt[10]{a-4}\cdot\sqrt[10]{(a-4)^9}=a-4$;
10) $\dfrac{\sqrt[12]{a-2}}{\sqrt[12]{3-a}}=\sqrt[12]{\dfrac{2-a}{a-3}}$?

7.13.° При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt[6]{a^{30}}=a^5$; 2) $\sqrt[6]{a^{30}}=-a^5$; 3) $\sqrt[4]{a^4}=\left(\sqrt[4]{a}\right)^4$; 4) $\sqrt[4]{a^4}=\left(\sqrt[4]{-a}\right)^4$?

7.14.° При яких значеннях a і b виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{ab}=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{b}$;
2) $\sqrt[4]{ab}=\sqrt[4]{-a}\cdot\sqrt[4]{-b}$;
3) $\sqrt[4]{-ab}=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{-b}$;
4) $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{b}$;
5) $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{-a}\cdot\sqrt[5]{-b}$?

7.15.° При яких значеннях x виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{x^2-4}=\sqrt[4]{x-2}\cdot\sqrt[4]{x+2}$;
2) $\sqrt[8]{(x-3)(7-x)}=\sqrt[8]{x-3}\cdot\sqrt[8]{7-x}$;
3) $\sqrt[3]{(x-6)(x-10)}=\sqrt[3]{x-6}\cdot\sqrt[3]{x-10}$;
4) $\sqrt[6]{(x+1)(x+2)(x+3)}=\sqrt[6]{x+1}\cdot\sqrt[6]{x+2}\cdot\sqrt[6]{x+3}$?

7.16.° Замініть вираз тотожно рівним виразом, який не містить знака кореня:

1) $\sqrt[4]{b^4}$;
2) $-0{,}4\sqrt[6]{c^6}$;
3) $\sqrt[3]{a^{18}}$;
4) $\sqrt[6]{a^{18}}$;
5) $\sqrt[8]{m^{16}}$;
6) $\sqrt[12]{(x-5)^{12}}$.

7.17.° Замініть вираз тотожно рівним виразом, який не містить знака кореня:

1) $1{,}2\sqrt[10]{x^{10}}$; 2) $\sqrt[6]{y^{12}}$; 3) $\sqrt[12]{n^{36}}$; 4) $\sqrt[14]{(8-y)^{14}}$.

7.18.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{m^6}$, якщо $m\geqslant 0$;
2) $\sqrt[4]{n^4}$, якщо $n\leqslant 0$;
3) $\sqrt[4]{16p^4}$, якщо $p\geqslant 0$;
4) $\sqrt[8]{256k^8}$, якщо $k\leqslant 0$;
5) $\sqrt[6]{c^{24}}$;
6) $\sqrt{0{,}25b^{14}}$, якщо $b\leqslant 0$;
7) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$, якщо $y\geqslant 0$;
8) $\sqrt{0{,}01a^6b^{10}}$, якщо $a\leqslant 0$, $b\geqslant 0$;
9) $-1{,}2x\sqrt[6]{64x^{30}}$, якщо $x\leqslant 0$;
10) $\dfrac{\sqrt[4]{a^{12}b^{28}c^{32}}}{a^4b^8c^{10}}$, якщо $a>0$, $b<0$.

7.19. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{625a^{24}}$;
2) $\sqrt[4]{0{,}0001b^{20}}$, якщо $b \geqslant 0$;
3) $-5\sqrt{4x^2}$, якщо $x \leqslant 0$;
4) $\sqrt[10]{p^{30}q^{40}}$, якщо $p \geqslant 0$;
5) $-0{,}1\sqrt[6]{1\,000\,000z^{42}}$, якщо $z \geqslant 0$;
6) $\sqrt[12]{m^{36}n^{60}}$, якщо $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$;
7) $ab^2\sqrt[4]{a^{48}b^{36}c^{44}}$, якщо $b \geqslant 0$, $c \leqslant 0$;
8) $-\frac{8m^3p^4}{k^2}\sqrt[4]{\frac{k^{60}p^{40}}{256m^{12}}}$, якщо $m < 0$, $k > 0$.

7.20. При яких значеннях a виконується нерівність:

1) $\sqrt[3]{a^3} \geqslant \sqrt[4]{a^4}$;
2) $\sqrt[5]{a^5} \leqslant \sqrt[6]{a^6}$?

7.21. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{a^4} + a$, якщо $a > 0$;
2) $\sqrt[6]{a^6} + \sqrt[3]{a^3}$, якщо $a < 0$;
3) $\sqrt[5]{a^5} + \sqrt[4]{a^4}$;
4) $\sqrt{a^2} - \sqrt[7]{a^7}$.

7.22. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{(x+4)^4} = x + 4$;
2) $\sqrt[4]{(1-3x)^8} = (1-3x)^2$;
3) $\sqrt[6]{(x^2-2x-3)^6} = 3 + 2x - x^2$.

7.23. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{\left(\sqrt{6}-2\right)^3}$; 2) $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$; 3) $\sqrt[9]{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^3}$; 4) $\sqrt[6]{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$.

7.24. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[8]{\left(\sqrt{5}-2\right)^4}$; 2) $\sqrt[10]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}$; 3) $\sqrt[12]{\left(\sqrt{11}-3\right)^3}$; 4) $\sqrt[15]{\left(\sqrt{7}-3\right)^3}$.

7.25. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt[4]{x^4} - x$;
2) $y = 2x + \sqrt[6]{x^6}$;
3) $y = \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}$;
4) $y = \sqrt[8]{(x-2)^8}$;
5) $y = \sqrt[4]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^2}$;
6) $y = \frac{x^3}{\sqrt[6]{x^6}} + 2$;
7) $y = \sqrt[6]{x^3} \cdot \sqrt[6]{x^9}$.

7.26. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt[8]{x^8} - 2x$; 2) $y = \sqrt[4]{-x} \cdot \sqrt[4]{-x^3}$; 3) $y = \frac{\sqrt[6]{x^6}}{x}$.

7.27. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[6]{x^6} = x - 4$; 2) $\sqrt[10]{x^{10}} = 6 - x$; 3) $2\sqrt[4]{x^4} = x + 3$.

7.28. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[8]{x^8} = x + 8$;
2) $\sqrt[12]{x^{12}} = 6x - 10$.

7.29. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{(x-3)^4} + \sqrt[6]{(5-x)^6} = 2$.

7.30. Побудуйте графік функції $y = \sqrt[8]{(x+1)^8} + \sqrt{(x-3)^2}$.

8. Тотожні перетворення виразів, які містять корені n-го степеня

Користуючись теоремою про корінь з добутку, перетворимо вираз $\sqrt[4]{48}$:

$$\sqrt[4]{48}=\sqrt[4]{16\cdot 3}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{3}=2\sqrt[4]{3}.$$

Отже, вираз $\sqrt[4]{48}$ подано у вигляді добутку раціонального числа 2 та ірраціонального числа $\sqrt[4]{3}$. Таке перетворення називають ***винесенням множника з-під знака кореня.*** У даному випадку було винесено з-під кореня множник 2.

Розглянемо виконане перетворення у зворотному порядку:

$$2\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{16\cdot 3}=\sqrt[4]{48}.$$

Таке перетворення називають ***внесенням множника під знак кореня.***

ПРИКЛАД 1 Винесіть множник з-під знака кореня: 1) $\sqrt[3]{250}$; 2) $\sqrt[4]{162a^8}$; 3) $\sqrt[8]{b^{43}}$; 4) $\sqrt[8]{-b^{43}}$; 5) $\sqrt[6]{a^6b^7}$, якщо $a<0$.

Розв'язання

1) Подамо число, яке стоїть під знаком кореня, у вигляді добутку двох чисел, одне з яких є кубом раціонального числа:

$$\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{125\cdot 2}=5\sqrt[3]{2}.$$

2) $\sqrt[4]{162a^8}=\sqrt[4]{81a^8\cdot 2}=3a^2\cdot\sqrt[4]{2}.$

3) З умови випливає, що $b\geqslant 0$. Тоді

$$\sqrt[8]{b^{43}}=\sqrt[8]{b^{40}b^3}=|\,b^5\,|\sqrt[8]{b^3}=b^5\cdot\sqrt[8]{b^3}.$$

4) З умови випливає, що $b\leqslant 0$. Тоді

$$\sqrt[8]{-b^{43}}=\sqrt[8]{b^{40}(-b)^3}=|\,b^5\,|\sqrt[8]{-b^3}=-b^5\cdot\sqrt[8]{-b^3}.$$

5) З умови випливає, що $b\geqslant 0$. Тоді

$$\sqrt[6]{a^6b^7}=\sqrt[6]{a^6b^6b}=|\,a\,||\,b\,|\sqrt[6]{b}=-ab\sqrt[6]{b}.\ \bullet$$

ПРИКЛАД 2 Внесіть множник під знак кореня: 1) $-2\sqrt[6]{3}$; 2) $a\sqrt[4]{7}$; 3) $c\sqrt[10]{c^7}$; 4) $3b\sqrt[4]{-\frac{b}{3}}$.

Розв'язання

1) $-2\sqrt[6]{3}=-\sqrt[6]{64}\cdot\sqrt[6]{3}=-\sqrt[6]{192}.$

2) Якщо $a\geqslant 0$, то $a\sqrt[4]{7}=\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{7}=\sqrt[4]{7a^4}$; якщо $a<0$, то $a\sqrt[4]{7}=-\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{7}=-\sqrt[4]{7a^4}.$

3) З умови випливає, що $c \geqslant 0$. Тоді $c\sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{10}} \cdot \sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{17}}$.

4) З умови випливає, що $b \leqslant 0$. Тоді

$$3b\sqrt[4]{-\frac{b}{3}} = -\sqrt[4]{81b^4} \cdot \sqrt[4]{-\frac{b}{3}} = -\sqrt[4]{81b^4 \cdot \left(-\frac{b}{3}\right)} = -\sqrt[4]{-27b^5}. \bullet$$

ПРИКЛАД 3 Спростіть вираз: 1) $\sqrt[3]{54a} + \sqrt[3]{16a} - \sqrt[3]{2000a}$; 2) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}$;
3) $\sqrt{4-\sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23+8\sqrt{7}}$.

Розв'язання

1) Маємо:

$$\sqrt[3]{54a} + \sqrt[3]{16a} - \sqrt[3]{2000a} = \sqrt[3]{27 \cdot 2a} + \sqrt[3]{8 \cdot 2a} - \sqrt[3]{1000 \cdot 2a} =$$
$$= 3\sqrt[3]{2a} + 2\sqrt[3]{2a} - 10\sqrt[3]{2a} = -5\sqrt[3]{2a}.$$

2) Внесемо множник 4 під знак кубічного кореня, а потім скористаємося теоремою про корінь з кореня:

$$\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{4^3 \cdot 4}} = \sqrt[12]{4^4}.$$

Далі, використовуючи теорему 7.6, остаточно отримуємо:

$$\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[3]{4}.$$

3) $\sqrt{4-\sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23+8\sqrt{7}} = \sqrt[4]{\left(4-\sqrt{7}\right)^2} \cdot \sqrt[4]{23+8\sqrt{7}} =$

$$= \sqrt[4]{16-8\sqrt{7}+7} \cdot \sqrt[4]{23+8\sqrt{7}} = \sqrt[4]{\left(23-8\sqrt{7}\right)\left(23+8\sqrt{7}\right)} =$$
$$= \sqrt[4]{23^2 - \left(8\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt[4]{529-448} = \sqrt[4]{81} = 3. \bullet$$

ПРИКЛАД 4 Скоротіть дріб: 1) $\dfrac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1}$; 2) $\dfrac{2-3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}$.

Розв'язання

1) Розклавши чисельник даного дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1} = \frac{\left(\sqrt[6]{b}\right)^2-1}{\sqrt[6]{b}+1} = \frac{\left(\sqrt[6]{b}-1\right)\left(\sqrt[6]{b}+1\right)}{\sqrt[6]{b}+1} = \sqrt[6]{b}-1.$$

2) $\dfrac{2-3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{\left(\sqrt[4]{2}\right)^4-3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{\sqrt[4]{2}\left(\sqrt[4]{2^3}-3\right)}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{8}-3.$

3) Розклавши чисельник і знаменник даного дробу на множники, маємо:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}} = \frac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2} = \frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}. \bullet$$

ПРИКЛАД 5 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу: 1) $\frac{15}{2\sqrt[3]{3}}$; 2) $\frac{5}{2-\sqrt[3]{3}}$.

Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу означає перетворити дріб так, щоб його знаменник не містив знака кореня n-го степеня.

Розв'язання. 1) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на $\sqrt[3]{3^2}$, отримуємо:

$$\frac{15}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{15\sqrt[3]{3^2}}{2\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}}=\frac{15\sqrt[3]{9}}{2\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}=\frac{15\sqrt[3]{9}}{2\cdot 3}=\frac{5\sqrt[3]{9}}{2}.$$

2) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на неповний квадрат суми чисел 2 і $\sqrt[3]{3}$, отримуємо:

$$\frac{5}{2-\sqrt[3]{3}}=\frac{5\left(4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}{\left(2-\sqrt[3]{3}\right)\left(4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}=\frac{5\left(4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}{2^3-\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}=$$

$$=\frac{5\left(4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}{8-3}=4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}.$$ ●

ПРИКЛАД 6 Доведіть тотожність

$$\left(\frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}+\frac{\sqrt[8]{b}}{\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}}-\frac{2\sqrt[8]{ab}}{\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}}\right)\cdot\left(\sqrt[8]{a}-\frac{\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}\right)=\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}.$$

Розв'язання. $\left(\frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}+\frac{\sqrt[8]{b}}{\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}}-\frac{2\sqrt[8]{ab}}{\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}}\right)\cdot\left(\sqrt[8]{a}-\frac{\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}\right)=$

$$=\frac{\sqrt[8]{a}\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)+\sqrt[8]{b}\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)+2\sqrt[8]{ab}}{\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)}\cdot\left(\sqrt[8]{a}-\frac{\sqrt[8]{b}\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[8]{ab}+\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b}+2\sqrt[8]{ab}}{\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)}\cdot\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)=\frac{\sqrt[4]{a}+2\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}=\frac{\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)^2}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}=$$

$$=\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}.$$ ●

ПРИКЛАД 7 Скоротіть дріб $\frac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}$.

Розв'язання. З умови випливає, що числа a і b однакового знака. Розглянемо два випадки.

Перший випадок: $a>0$ і $b>0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}=\frac{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[10]{b}+\sqrt[10]{b}\cdot\sqrt[10]{b}}{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[10]{b}}=\frac{\sqrt[10]{b}\left(\sqrt[10]{a}+\sqrt[10]{b}\right)}{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[10]{b}}=\frac{\sqrt[10]{a}+\sqrt[10]{b}}{\sqrt[10]{a}}.$$

Другий випадок: $a < 0$, $b < 0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}=\frac{\sqrt[10]{-a}\cdot\sqrt[10]{-b}-\left(\sqrt[10]{-b}\right)^2}{\sqrt[10]{-a}\cdot\sqrt[10]{-b}}=\frac{\sqrt[10]{-b}\left(\sqrt[10]{-a}-\sqrt[10]{-b}\right)}{\sqrt[10]{-a}\cdot\sqrt[10]{-b}}=\frac{\sqrt[10]{-a}-\sqrt[10]{-b}}{\sqrt[10]{-a}}.$$

Випадок, коли $a < 0$ і $b < 0$, можна розглянути інакше. Нехай $a = -x$, $b = -y$, де $x > 0$, $y > 0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}=\frac{\sqrt[10]{xy}+\sqrt[5]{-y}}{\sqrt[10]{xy}}=\frac{\sqrt[10]{x}\cdot\sqrt[10]{y}-\sqrt[10]{y}\cdot\sqrt[10]{y}}{\sqrt[10]{xy}}=\frac{\sqrt[10]{y}\left(\sqrt[10]{x}-\sqrt[10]{y}\right)}{\sqrt[10]{x}\cdot\sqrt[10]{y}}=$$

$$=\frac{\sqrt[10]{x}-\sqrt[10]{y}}{\sqrt[10]{x}}=\frac{\sqrt[10]{-a}-\sqrt[10]{-b}}{\sqrt[10]{-a}}. \quad ●$$

ПРИКЛАД 8 Доведіть, що $\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[12]{49-20\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Розв'язання. Маємо: $\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[12]{49-20\sqrt{6}}=$

$$=\sqrt[6]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[12]{49-20\sqrt{6}}=$$

$$=\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[12]{49-20\sqrt{6}}=$$

$$=\sqrt[6]{\left(5-2\sqrt{6}\right)^2}\cdot\sqrt[12]{49-20\sqrt{6}}=\sqrt[6]{49-20\sqrt{6}}\cdot\sqrt[12]{49-20\sqrt{6}}=$$

$$=\sqrt[12]{\left(49-20\sqrt{6}\right)^2}\cdot\sqrt[12]{49-20\sqrt{6}}=\sqrt[12]{(49-20\sqrt{6})^3}=\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}=$$

$$=\sqrt[4]{\left(5-2\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}. \quad ●$$

ПРИКЛАД 9 Доведіть, що $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=x$. Скористаємося тим, що $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

Маємо:

$$x^3=9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\cdot\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right).$$

Звідси $x^3 = 18 + 3x$; $x^3 - 3x - 18 = 0$.

Розглянувши дільники числа 18, нескладно установити, що $x = 3$ є коренем даного рівняння. Поділивши многочлен $x^3 - 3x - 18$ на двочлен $x - 3$, отримуємо $x^2 + 3x + 6$.

Маємо: $(x - 3)(x^2 + 3x + 6) = 0$.

Це рівняння має єдиний корінь $x = 3$. ●

Вправи

8.1.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[3]{16}$; 3) $\sqrt[3]{250}$; 5) $\sqrt[3]{40a^5}$; 7) $\sqrt[3]{-54a^5b^9}$;

2) $\sqrt[4]{162}$; 4) $\sqrt[6]{7290}$; 6) $\sqrt[3]{-a^7}$; 8) $\sqrt[3]{-108a^7b^{10}}$.

8.2.° Спростіть вираз:

1) $-\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}$; 2) $\frac{1}{8}\sqrt[7]{640}$; 3) $\frac{3}{7}\sqrt[3]{686}$; 4) $-1{,}2\sqrt[5]{96}$.

8.3.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{80}$; 3) $\sqrt[3]{432}$; 5) $\sqrt[3]{54y^8}$;

2) $\sqrt[4]{486}$; 4) $\sqrt[7]{30\,000\,000}$; 6) $\sqrt[4]{243b^9c^{18}}$.

8.4.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $2\sqrt{3}$; 3) $-10\sqrt[4]{0{,}271}$; 5) $5\sqrt[3]{0{,}04x}$; 7) $b\sqrt[5]{3b^3}$;

2) $4\sqrt[3]{5}$; 4) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}$; 6) $2\sqrt[5]{6y}$; 8) $c\sqrt[3]{\frac{5}{c^2}}$.

8.5.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{320}$; 2) $2\sqrt[4]{7}$; 3) $5\sqrt[4]{4a}$; 4) $0{,}3\sqrt[3]{100c^2}$; 5) $2x^3\sqrt[5]{\frac{x^3}{8}}$.

8.6.° Замініть вираз на тотожно рівний йому:

1) $\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{320}-\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}$;

2) $\sqrt[3]{56m}+\sqrt[3]{-189m}-\sqrt[3]{-81n}-1{,}5\sqrt[3]{24n}+\sqrt[3]{448m}$.

8.7.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{2000}$;

2) $\sqrt[4]{625a}+3\sqrt[4]{16a}-2\sqrt[4]{81a}+4\sqrt[4]{1296a}$.

8.8.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{2\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$; 5) $\sqrt[8]{x^3\sqrt[3]{x^7}}$;

2) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}}$; 4) $\sqrt[5]{b\sqrt[6]{b}}$; 6) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

8.9.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a\sqrt{a}}$; 3) $\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 5) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[6]{x^{13}}}$;

2) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt[9]{c^2\sqrt[4]{c}}$; 6) $\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}$.

8.10.° Спростіть вираз:

1) $\left(1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)\left(1-\sqrt[3]{a}\right)$; 2) $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)$.

8.11.° Спростіть вираз:

1) $(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})(\sqrt[8]{m}+\sqrt[8]{n})(\sqrt[8]{m}-\sqrt[8]{n})$;

2) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})$.

8.12.° Подайте у вигляді кореня вираз:

1) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a}$;
4) $\dfrac{\sqrt[12]{a^5}}{\sqrt[4]{a}}$;
7) $\dfrac{\sqrt[6]{3\sqrt[7]{3^5}}}{\sqrt[14]{9}}$;

2) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[6]{b}$;
5) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{6}}$;
8) $\sqrt[4]{a^2b}\cdot\sqrt[6]{ab^2}\cdot\sqrt[12]{a^8b}$;

3) $\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[12]{n}$;
6) $\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a}}\cdot\sqrt[5]{a}$;
9) $\dfrac{\sqrt[6]{a^3b^2\sqrt[3]{ab^2}}}{\sqrt{ab}}$.

8.13.° Подайте у вигляді кореня вираз:

1) $\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[3]{x}$;
3) $a\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a}$;
5) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}$;

2) $\sqrt[5]{y^2}\cdot\sqrt[15]{y^4}$;
4) $\dfrac{\sqrt[9]{a^8}}{\sqrt[6]{a^5}}$;
6) $\sqrt[5]{a^2b}\cdot\sqrt[10]{a^2b}\cdot\sqrt[15]{ab^3}$.

8.14.° Обчисліть значення виразу:

1) $(5\sqrt[3]{4}+0{,}5\sqrt[3]{108}-\sqrt[3]{500})\sqrt[3]{2}$;
4) $\dfrac{\sqrt[3]{9}-6\sqrt[3]{72}+2\sqrt[3]{1125}}{\sqrt[3]{9}}$;

2) $\sqrt[3]{0{,}25}\,(\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{32}-2\sqrt[3]{108})$;
5) $\dfrac{(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8})^2}{4+3\sqrt{2}}$.

3) $(2\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{100})(\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})$;

8.15.° Обчисліть значення виразу:

1) $\left(4\sqrt[3]{72}-3\sqrt[3]{9}+5\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}\right)\sqrt[3]{3}$;
3) $\dfrac{(\sqrt[4]{24}-\sqrt[4]{6})^2}{4\sqrt{3}-3\sqrt{6}}$.

2) $\dfrac{5\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}$;

8.16.° Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$;
3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$;
5) $\dfrac{10}{\sqrt[4]{8}}$;
7) $\dfrac{n^4}{\sqrt[8]{n^5}}$;
9) $\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{x^4}}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$;
4) $\dfrac{12}{\sqrt[5]{-3}}$;
6) $\dfrac{18}{\sqrt[5]{8}}$;
8) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{6}}$;
10) $\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$.

8.17.° Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{12}{\sqrt[3]{3}}$; 3) $\frac{4}{\sqrt[4]{2}}$; 5) $\frac{10}{\sqrt[3]{10}}$; 7) $\frac{a}{\sqrt[3]{a}}$;

2) $\frac{20}{\sqrt[3]{25}}$; 4) $\frac{15}{\sqrt[4]{27}}$; 6) $\frac{24}{\sqrt[5]{16}}$; 8) $\frac{m^5}{\sqrt[7]{m^3}}$.

8.18.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 5) $\frac{\sqrt[8]{ab^2}-\sqrt[8]{a^2b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$; 9) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}$;

2) $\frac{\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$; 6) $\frac{\sqrt[6]{a}+\sqrt[12]{ab}}{\sqrt[12]{ab}+\sqrt[6]{b}}$; 10) $\frac{2-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$;

3) $\frac{\sqrt[6]{x}-9}{\sqrt[12]{x}+3}$; 7) $\frac{a\sqrt[3]{b^2}-b\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2b^2}}$; 11) $\frac{\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{2}}$;

4) $\frac{\sqrt{m}+\sqrt[4]{m}}{m-\sqrt[4]{m^3}}$; 8) $\frac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{x-64}$; 12) $\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}+\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}$.

8.19.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{\sqrt[6]{a}+1}{\sqrt[3]{a}-1}$; 3) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; 5) $\frac{\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{a^2b}}$;

2) $\frac{\sqrt{m}-\sqrt[4]{mn}}{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}$; 4) $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$; 6) $\frac{3+\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}}$.

8.20.• Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$; 3) $\frac{15}{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{6}+1}$; 5) $\frac{5}{2+\sqrt[3]{2}}$.

2) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}$; 4) $\frac{7}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}}$;

8.21.• Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; 3) $\frac{27}{\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{10}+1}$;

2) $\frac{2}{\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{63}+\sqrt[3]{49}}$; 4) $\frac{11}{3-\sqrt[3]{5}}$.

8.22.• Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу

$$\frac{1}{\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{32}}.$$

8.23.• Доведіть, що значення виразу є цілим числом:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{999^2}+\sqrt[3]{999\cdot 1000}+\sqrt[3]{1000^2}}.$$

8.24.* При яких значеннях a і b є правильною рівність:

1) $\sqrt[4]{a^5b^5}=ab\sqrt[4]{ab}$; 2) $\sqrt[4]{a^4b}=a\sqrt[4]{b}$; 3) $\sqrt[4]{a^4b}=-a\sqrt[4]{b}$?

8.25.* Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{-m^9}$;
2) $\sqrt[4]{a^8b^{13}}$, якщо $a>0$;
3) $\sqrt[6]{x^6y^7}$, якщо $x\neq 0$;
4) $\sqrt[4]{32m^{18}n^{17}}$;
5) $\sqrt[4]{162a^4b^8c^{12}}$, якщо $a>0$, $c<0$;
6) $\sqrt[4]{a^{15}b^{15}}$;
7) $\sqrt[8]{-a^{25}b^{50}}$.

8.26.* Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{32a^6}$, якщо $a\leqslant 0$;
2) $\sqrt[4]{-625a^5}$;
3) $\sqrt[6]{a^7b^7}$, якщо $a<0$, $b<0$;
4) $\sqrt[6]{a^{20}b^{19}}$, якщо $a>0$.

8.27.* Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt[4]{2}$, якщо $a\geqslant 0$;
2) $ab\sqrt[6]{\dfrac{6}{a^3b^2}}$, якщо $a>0$, $b<0$;
3) $mn\sqrt[4]{\dfrac{1}{m^3n^3}}$;
4) $b\sqrt[6]{6}$;
5) $a\sqrt[6]{-a}$;
6) $ab\sqrt[4]{ab^2}$, якщо $b\leqslant 0$.

8.28.* Внесіть множник під знак кореня:

1) $c\sqrt[8]{3}$, якщо $c\leqslant 0$;
2) $a\sqrt[6]{a}$;
3) $-ab\sqrt[4]{6}$, якщо $a\leqslant 0$, $b\geqslant 0$;
4) $ab\sqrt[8]{\dfrac{3}{a^4b^5}}$, якщо $a<0$;
5) $a\sqrt[4]{-a^3}$.

8.29.* Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{10}-3}\cdot\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}}$;
2) $\sqrt[4]{24-8\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2\sqrt{5}+2}$;
3) $\sqrt[6]{\sqrt{15}+4}\cdot\sqrt[12]{31-8\sqrt{15}}$;
4) $\sqrt{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{6-4\sqrt{2}}$;
5) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}$.

8.30.* Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{2\sqrt{6}-1}\cdot\sqrt[4]{25+4\sqrt{6}}$.

8.31.* Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-1}-\dfrac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt{a}}\right):\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a}+1}$;

2) $\left(\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}-\frac{4\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}$;

3) $\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}+1\right)$;

4) $\frac{\sqrt{a}+27}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}\cdot\left(\frac{\sqrt[6]{a}-3}{\sqrt[3]{a}-3\sqrt[6]{a}+9}-\frac{\sqrt[6]{ab}-9}{\sqrt{a}+27}\right)$;

5) $\left(\frac{\sqrt[3]{bc^2}+\sqrt[3]{b^2c}}{\sqrt[3]{b^2}+2\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}}+\frac{b-c}{\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{c^2}}-2\sqrt[3]{c}\right):\left(\sqrt[6]{b}+\sqrt[6]{c}\right)$;

6) $\frac{a-b}{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}}:\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}+\frac{1}{\sqrt[4]{b}}\right)$;

7) $\frac{\sqrt[3]{2a+2\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}+\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}+2}}$.

8.32.° **Доведіть тотожність:**

1) $\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}+1}-\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}\right):\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+1}=\frac{\sqrt[6]{x}+1}{x}$;

2) $\frac{\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}+\frac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$;

3) $\left(\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}-\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\frac{\left(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}\right)^2}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}\right):\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}=\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$;

4) $\frac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}}\cdot\frac{m-4\sqrt{m-4}}{m-8}=1$.

8.33.•• **Доведіть, що значення виразу є числом раціональним:**

1) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$.

8.34.•• **Доведіть, що** $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

8.35.•• **Наведіть приклад такого многочлена з цілими коефіцієнтами, що число** $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ **є його коренем.**

8.36.•• **Наведіть приклад такого многочлена з цілими коефіцієнтами, що число** $\sqrt[3]{2}+3$ **є його коренем.**

8.37.** Доведіть, що є ірраціональним число:

1) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}$; 2) $\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}$.

8.38.** Доведіть, що є ірраціональним число:

1) $\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$.

8.39.** Спростіть вираз $\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\sqrt[16]{2}+1\right)\left(\sqrt[8]{2}+1\right)\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$.

8.40.** Спростіть вираз $\left(\sqrt[64]{a}+1\right)\left(\sqrt[32]{a}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{a}+1\right)$.

8.41.** Спростіть вираз $\sqrt[15]{3^{14}}+\sqrt[15]{3^{13}\cdot 2}+\sqrt[15]{3^{12}\cdot 2^2}+\ldots+\sqrt[15]{2^{14}}$.

8.42.** Спростіть вираз $\sqrt[17]{3^{16}}-\sqrt[17]{3^{15}\cdot 2}+\sqrt[17]{3^{14}\cdot 2^2}-\ldots+\sqrt[17]{2^{16}}$.

8.43.** Доведіть рівність

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{6}}}}}}_{10\text{ радикалів}}=\sqrt[1024]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[1024]{2-\sqrt{3}}.$$

8.44.** Доведіть рівність

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{14}}}}}}=\sqrt[64]{6+\sqrt{35}}+\sqrt[64]{6-\sqrt{35}}.$$

8.45.* Доведіть тотожність Рамануджана[1] $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}$.

9. Обернена функція

На рисунках 9.1, 9.2 зображено графіки функцій f і g.

Будь-яка горизонтальна пряма перетинає графік функції f не більше ніж в одній точці. Це означає, що кожному числу $y_0 \in E(f)$ відповідає єдине число $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$. Функція g такої властивості не має. Справді, з рисунка 9.2 видно, що значенню y_0 відповідають два значення аргументу x_1 і x_2 такі, що $y_0 = g(x_1)$ і $y_0 = g(x_2)$.

Означення. **Функцію $y = f(x)$ називають оборотною, якщо для будь-якого $y_0 \in E(f)$ існує єдине $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$.**

Функція f (рис. 9.1) є оборотною. Функція g (рис. 9.2) не є оборотною.

---

[1] Рамануджан Срініваса Айєнгар (1887–1920) — індійський математик, член Лондонського королівського товариства.

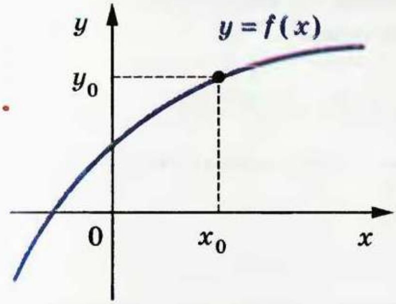


Рис. 9.1

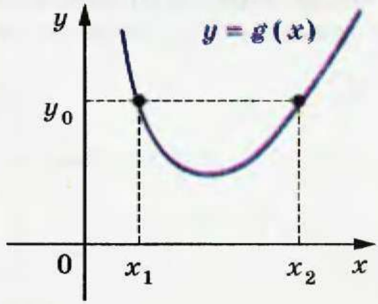


Рис. 9.2

Функції $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ є прикладами оборотних функцій (рис. 9.3).

Функція $y = x^2$ не є оборотною. Наприклад, значенню функції, яке дорівнює 4, відповідають два значення аргументу $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$.

Теорема 9.1. ***Якщо функція є зростаючою (спадною), то вона є оборотною.***

Доведення. Припустимо, що існує зростаюча функція f, яка не є оборотною. Тоді знайдеться $y_0 \in E(f)$, для якого існують x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$) такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Разом з тим функція f — зростаюча, і з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) < f(x_2)$. Отримали суперечність.

Аналогічно розглядається випадок, коли функція f є спадною. ▲

Зазначимо, що обернена теорема не є правильною, тобто не будь-яка оборотна функція є зростаючою (спадною).

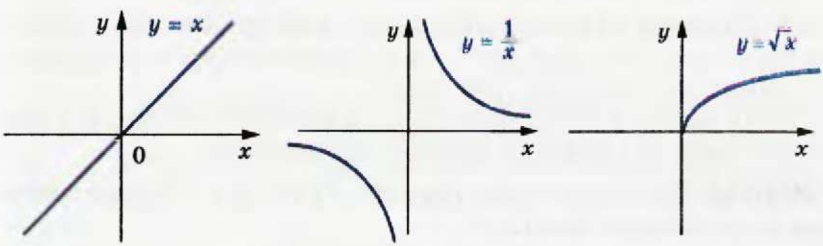


Рис. 9.3

Наприклад, на рисунку 9.4 зображено графік оборотної функції, яка не є ні зростаючою, ні спадною.

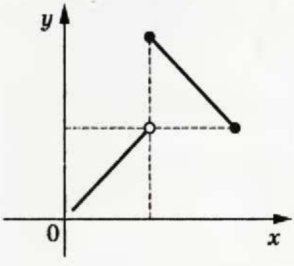


Рис. 9.4

Розглянемо функцію $y = f(x)$, задану таблично:

x	5	6	7
y	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

Функція f є оборотною.

Поміняємо рядки таблиці місцями і розглянемо функцію $y = g(x)$, задану отриманою таблицею:

x	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$
y	5	6	7

Функції f і g зв'язані такими властивостями:

1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;

2) $f(5) = \sqrt{5},\ \ g\left(\sqrt{5}\right) = 5;$

$f(6) = \sqrt{6},\ \ g\left(\sqrt{6}\right) = 6;$

$f(7) = \sqrt{7},\ \ g\left(\sqrt{7}\right) = 7.$

Ці рівності означають, що коли $f(x_0) = y_0$, то $g(y_0) = x_0$.

У таких випадках говорять, що функція g є **оберненою** до функції f, а функція f — **оберненою** до функції g. Такі функції f і g називають **взаємно оберненими**.

Означення. **Функції f і g називають взаємно оберненими, якщо:**

1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;

2) для будь-якого $x_0 \in D(f)$ з рівності $f(x_0) = y_0$ випливає, що $g(y_0) = x_0$, тобто $g(f(x_0)) = x_0$.

Можна показати, що другу умову в означенні можна замінити на таке: для будь-якого $x_0 \in D(g)$ з рівності $g(x_0) = y_0$ випливає, що $f(y_0) = x_0$, тобто $f(g(x_0)) = x_0$.

Коли функція f не є оборотною, то не існує функції, оберненої до неї. Будь-яка оборотна функція має обернену.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що функція $f(x) = 2x - 1$ є оборотною. Знайдіть обернену функцію.

Розв'язання. Функція $f(x) = 2x - 1$ є зростаючою. Отже, вона є оборотною.

Щоб задати обернену функцію, потрібно вказати правило, яке дає змогу за кожним значенням змінної y знайти відповідне значення змінної x таке, що $y = 2x - 1$.

• Маємо: $2x = y + 1$; $x = \frac{y+1}{2}$.

Отримана рівність задає функцію з аргументом y і залежною змінною x.

Традиційно незалежну змінну позначають буквою x, а залежну — буквою y. Дотримуючись таких позначень, можна сказати, що ми отримали функцію, яка задається формулою $y = \frac{x+1}{2}$.

Покажемо, що функції $g(x) = \frac{x+1}{2}$ і $f(x) = 2x - 1$ є взаємно оберненими.

Маємо: $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$, $E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = 2x_0 - 1$. Доведемо, що $g(y_0) = x_0$.

Маємо: $g(y_0) = \frac{y_0+1}{2} = \frac{2x_0 - 1 + 1}{2} = x_0$. ●

Функція $y = x^2$ не є оборотною. Разом з тим ця функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Отже, функція $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, є оборотною. Також прийнято говорити, що функція $y = x^2$ є **оборотною на множині** $[0; +\infty)$. Знайдемо обернену функцію.

Маємо: $y = x^2$, де $x \in [0; +\infty)$. Звідси $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$.

Скориставшись традиційними позначеннями, отримаємо функцію $y = \sqrt{x}$.

Покажемо, що функції $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, і $g(x) = \sqrt{x}$ є взаємно оберненими.

Маємо: $D(f) = E(g) = [0; +\infty)$, $E(f) = D(g) = [0; +\infty)$.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = x_0^2$, де $x_0 \geqslant 0$. Запишемо $g(y_0) = \sqrt{y_0} = \sqrt{x_0^2} = |x_0| = x_0$.

Теорема 9.2. ***Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.***

Доведення. Нехай точка $M(a; b)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Тоді $b = f(a)$. Якщо функція g обернена до функції f, то $g(b) = a$, тобто точка $N(b; a)$ належить графіку функції $y = g(x)$.

Покажемо, що точки M і N є симетричними відносно прямої $y = x$.

Якщо $a = b$, то точки M і N збігаються і належать прямій $y = x$.

При $a \neq b$ маємо (рис. 9.5): $ON = \sqrt{a^2 + b^2}$, $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$, тобто точка O рівновіддалена від кінців відрізка MN, а отже, належить серединному перпендикуляру відрізка MN. Середина K відрізка MN має координати $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$, тобто належить прямій $y = x$. Отже, пряма $y = x$ і є серединним перпендикуляром відрізка MN. ▲

Рис. 9.5

Доведену теорему ілюструють графіки взаємно обернених функцій, що розглядалися вище (рис. 9.6).

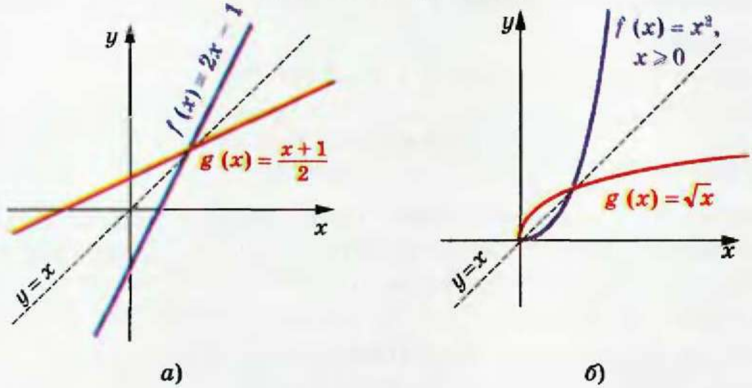


Рис. 9.6

Теорема 9.3. ***Якщо функція f є зростаючою (спадною), то обернена функція g є також зростаючою (спадною).***

Доведення. Припустимо, що функція f — зростаюча і при цьому обернена до неї функція g не є зростаючою. Тоді знайдуться такі $y_1 \in D(g)$ і $y_2 \in D(g)$, що з нерівності $y_1 < y_2$ випливатиме нерівність $g(y_1) \geqslant g(y_2)$. Нехай $g(y_1) = x_1$, $g(y_2) = x_2$. Отримуємо, що $x_1 \geqslant x_2$. Оскільки функція f — зростаюча, то $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, тобто $y_1 \geqslant y_2$. Отримали суперечність.

Для спадної функції міркуємо аналогічно. ▲

Теорема 9.4. ***Спільні точки графіків зростаючих взаємно обернених функцій лежать на прямій y = x.***

Доведення. Нехай $M(a; b)$ — спільна точка графіків взаємно обернених зростаючих функцій f і g. Доведемо, що $a = b$.

Будемо міркувати від супротивного. Припустимо, наприклад, що $a < b$. Оскільки графіки взаємно обернених функцій

f і g симетричні відносно прямої $y = x$, то точка N $(b; a)$ є для них спільною. У силу зростання функції f можна записати: $f(a) < f(b)$. Але $f(a) = b$, $f(b) = a$. Отримали $b < a$, що суперечить припущенню $a < b$. Аналогічно розглядається випадок, коли $a > b$. Таким чином, $a = b$. ▲

Зауваження. Звернемо увагу на те, що умова зростання у формулюванні теореми 9.4 є обов'язковою. Наприклад, функції $f(x) = -x$ і $g(x) = -x$ є взаємно оберненими, проте їх спільні точки, наприклад $A(-1; 1)$ і $B(1; -1)$, не належать прямій $y = x$.

Наслідок. ***Якщо функції f і g — взаємно обернені і зростаючі, то рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне кожному з рівнянь $f(x) = x$ або $g(x) = x$.***

Доведіть цю теорему самостійно.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\sqrt{x}+5} = x - 5$.

Розв'язання. Зробимо заміну $\sqrt{x} = t$. Отримуємо $\sqrt{t+5} = t^2 - 5$. Розглянемо функції $f(t) = \sqrt{t+5}$ і $g(t) = t^2 - 5$, $D(g) = [0; +\infty)$. Ці функції є взаємно оберненими і зростаючими. Тоді з наслідку теореми 9.4 випливає, що рівняння $\sqrt{t+5} = t^2 - 5$ рівносильне системі $\begin{cases} t^2 - 5 = t, \\ t \geqslant 0. \end{cases}$ Звідси $t = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$. Тепер можна записати

$\sqrt{x} = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$; $x = \frac{22+2\sqrt{21}}{4} = \frac{11+\sqrt{21}}{2}$.

Відповідь: $\frac{11+\sqrt{21}}{2}$.

Вправи

9.1.° Які з функцій, графіки яких зображено на рисунку 9.7, є оборотними?

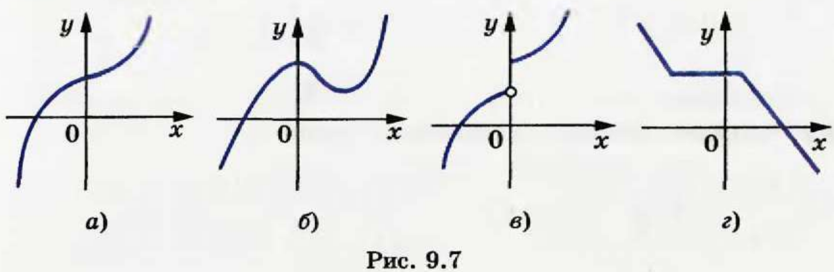


Рис. 9.7

9.2.° Які з функцій, графіки яких зображено на рисунку 9.8, є оборотними?

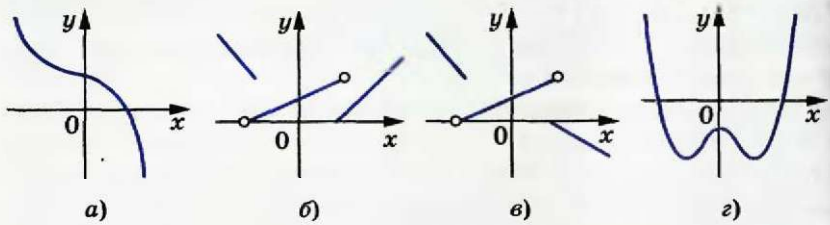


Рис. 9.8

9.3.° Доведіть, що дана функція не є оборотною:

1) $y = |x|$; 2) $y = \frac{1}{x^4}$; 3) $y = 5$; 4) $y = [x]$.

9.4.° Доведіть, що функції f і g є взаємно оберненими:

1) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$, $g(x) = 3x - 1$;

2) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x}$;

3) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = x^2 - 2$, $D(g) = [0; +\infty)$.

9.5.° Доведіть, що функції f і g є взаємно оберненими:

1) $f(x) = 4x + 2$, $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$;

2) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \frac{x}{1-x}$;

3) $f(x) = (x-3)^2$, $D(f) = [3; +\infty)$, $g(x) = \sqrt{x} + 3$.

9.6.° Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 3x - 1$;

2) $y = \frac{1}{x}$;

3) $y = \frac{1}{2x+1}$;

4) $y = \frac{1}{3}x + 4$.

9.7.° Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 0{,}2x + 3$;

2) $y = \frac{1}{x-1}$;

3) $y = \frac{4}{x+2}$;

4) $y = 4x - 5$.

9.8.• Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = \frac{x}{x-1}$;

2) $y = \sqrt{2x-1}$;

3) $y = 2\sqrt{x} - 1$;

4) $y = x^2$, $D(y) = (-\infty; 0]$;

5) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$;

6) $y=\begin{cases}\sqrt{x-2}, \text{ якщо } x\geqslant 3,\\ 2x-5, \text{ якщо } x<3.\end{cases}$

9.9.° Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y=\dfrac{x+2}{x}$;

2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

3) $y=\sqrt{x^2-4}$, $D(y)=[2;+\infty)$;

4) $y=\begin{cases}2-x^2, \text{ якщо } x\geqslant 1,\\ 2-x, \text{ якщо } x<1.\end{cases}$

9.10.° Побудуйте в одній системі координат графік даної функції і графік функції, оберненої до неї:

1) $y=-0{,}5x+2$;

2) $y=\sqrt{x+1}$;

3) $y=\begin{cases}x, \text{ якщо } x\geqslant 0,\\ 2x, \text{ якщо } x<0.\end{cases}$

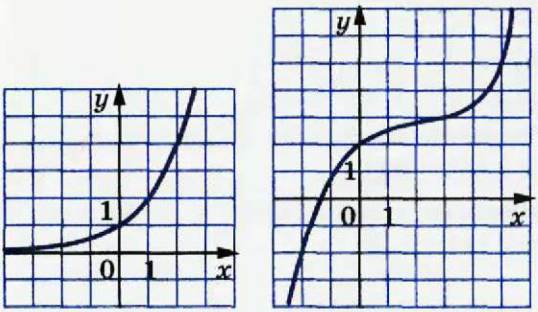
9.11.° Побудуйте в одній системі координат графік даної функції і графік функції, оберненої до неї:

1) $y=3x-1$;

2) $y=x^2-4$, якщо $x\geqslant 0$;

3) $y=\begin{cases}\sqrt{x}, \text{ якщо } x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}x, \text{ якщо } x<0.\end{cases}$

9.12.° Користуючись графіком функції $y=f(x)$, зображеним на рисунку 9.9, побудуйте графік функції, оберненої до функції f.



а) *б)*

Рис. 9.9

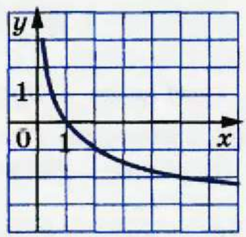


Рис. 9.10

9.13.° Користуючись графіком функції $y=f(x)$, зображеним на рисунку 9.10, побудуйте графік функції, оберненої до функції f.

9.14.° Доведіть, що функція $y=\begin{cases}x^2+1, \text{ якщо } 0\leqslant x<1,\\ \sqrt{x-1}, \text{ якщо } 1\leqslant x<2\end{cases}$ збігається з оберненою до неї функцією.

9.15.• Доведіть, що функція, обернена до лінійної функції $y = kx + b$ при $k \neq 0$, теж є лінійною.

9.16.•• При яких значеннях параметрів k і b функція $y = kx + b$, де $k \neq 0$, буде збігатися з оберненою до неї функцією?

9.17.•• При яких значеннях параметрів a і b функція $y = \frac{1}{ax+b}$, де $a \neq 0$, буде збігатися з оберненою до неї функцією?

9.18.•• Доведіть, що функція, обернена до непарної функції, теж є непарною.

9.19.•• Нехай g — функція, обернена до функції $f(x) = x^5 + 6x^3$.
1) Знайдіть $g(7)$.
2) Розв'яжіть рівняння $g(x) = -1$.
3) Скільки коренів має рівняння $g(x) = c$ залежно від значення параметра c?

9.20.•• Нехай g — функція, обернена до функції $f(x) = x^3 + \sqrt{x-2}$.
1) Знайдіть $g(28)$.
2) Розв'яжіть рівняння $g(x) = 1$.
3) Чи існує таке значення c, що рівняння $g(x) = c$ має два корені?

9.21.•• Функція g є оберненою до функції $f(x) = x^3 + x - 3$. Розв'яжіть рівняння $g(x) = x^3 + x + 3$.

9.22.•• Функція g є оберненою до функції $f(x) = x^3 + x + 12$. Розв'яжіть рівняння $g(x) = x^3 + x - 12$.

9.23.•• Функція g є оберненою до функції $f(x) = x^5 + x - 1$. Розв'яжіть рівняння $f(x) = g(x)$.

9.24.•• Функція f є оберненою до функції $g(x) = x^3 + x - 8$. Розв'яжіть рівняння $f(x) = g(x)$.

9.25.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x - \frac{1}{8}} = x^2 + \frac{1}{8}$.

9.26.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1 + \sqrt{x}} = x - 1$.

9.27.•• Знайдіть функцію g, обернену до функції $f(x) = x^2$, $D(f) = (-1; 0] \cup [3; 4)$.

9.28.•• Знайдіть функцію g, обернену до функції $f(x) = -x^2$, $D(f) = [-3; -2) \cup [0; 1)$.

9.29.•• Функція f є такою, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(f(x)) = x$. Доведіть, що f — оборотна функція.

9.30.** Функція f і оборотна функція g такі, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(f(x)) = g(x)$. Доведіть, що f — оборотна функція.

9.31.** Чи існує оборотна функція f така, що $D(f) = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $E(f) = \mathbb{N}$?

9.32.** Чи існує оборотна функція f така, що $D(f) = \mathbb{Z}$, $E(f) = \mathbb{N}$?

9.33.* Чи існує оборотна функція f така, що $D(f) = \mathbb{Q}$, $E(f) = \mathbb{N}$?

9.34.* Чи існує оборотна функція f така, що $D(f) = [0; 1]$, $E(f) = [0; 1)$?

9.35.* Чи існує оборотна функція f така, що $D(f) = [0; 1]$, $E(f) = \mathbb{N}$?

9.36.* Чи існують такі взаємно обернені функції f і g, що при всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x) = 2g(x)$?

9.37.* Наведіть приклад таких взаємно обернених функцій f і g, що при всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x) - g(x) = x$.

9.38.* Функція f має обернену функцію g. Відомо, що нерівність $\frac{1}{2}x - 1 < f(x) < \frac{1}{2}x + 1$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$, а рівняння $g(x) = 10 - 2x^2$ має один додатний корінь. Знайдіть цей корінь наближено з абсолютною похибкою[1] 0,25.

9.39.* Функція f має обернену функцію g. Відомо, що нерівність $2x - 8 < f(x) < 2x - 6$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$, а рівняння $g(x) = 2x^2 - 3$ має один додатний корінь. Знайдіть цей корінь наближено з абсолютною похибкою 0,1.

9.40.* Функція g є оберненою до зростаючої функції f такої, що $D(f) = [0; 1]$, $E(f) = [0; 1]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Доведіть нерівність

$$f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{2}{10}\right) + \ldots + f\left(\frac{9}{10}\right) + g\left(\frac{1}{10}\right) + g\left(\frac{2}{10}\right) + \ldots + g\left(\frac{9}{10}\right) \leqslant \frac{99}{10}.$$

9.41.* Функція g є оберненою до зростаючої функції f такої, що $D(f) = [0; 1]$, $E(f) = [0; 1]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ доведіть нерівність

$$f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n}\right) + g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + g\left(\frac{n}{n}\right) \geqslant \frac{n^2 + 1}{n}.$$

---

[1] **Абсолютною похибкою** називають модуль різниці між наближеним і точним значенням величини.

9.42.* Знайдіть усі функції f такі, що для будь-яких $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$xf(f(x) - 2y) = 9x(x - y) + yf(x).$$

9.43.* Знайдіть усі функції f такі, що для будь-яких $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$yf(f(y) - 2x) = y(x + y) - xf(y).$$

Львівська математична школа

Підручник Банаха «Курс функціонального аналізу»

Ви тримаєте в руках підручник «Алгебра і початки аналізу». У назві з'явилося нове словосполучення — «початки аналізу». Що ж приховано за цією назвою? Відповідь дуже проста — математичний аналіз вивчає функції. З цього року ви починаєте знайомство з елементами аналізу; вам доведеться розглядати все нові й нові класи функцій, вивчати їх властивості, опановувати методи дослідження функцій.

У першій половині XX ст. при вивченні певних класів функцій з'явилася нова математична дисципліна, вершина сучасної математики — «функціональний аналіз». Важливу, фактично головну роль у створенні цієї дисципліни відіграли науковці Львівської математичної школи.

У 20–30-х рр. XX ст. місто Львів було справжньою світовою математичною столицею. У той час у його закладах працювали такі легендарні математики, як Казимир Куратовський, Станіслав Мазур, Владислав Орліч, Вацлав Серпінський, Станіслав Улам, Юліуш Шаудер, Гуґо Штейнгауз та ін. Кваліфікація науковців Львова була настільки високою, що всесвітньо відомий математик, автор видатних теорем у математичній логіці та теорії множин Альфред Тарський не пройшов за конкурсом на вакантну посаду професора Львівського університету.

Математики Львова створили міцний науковий колектив, відомий як «львівська математична школа». Її керівником вважають геніального математика Стефана Банаха.

Стефан Банах
(1892–1945)

Вручення гусака

Сьогодні С. Банаха в усьому світі з цілковитою підставою вважають засновником функціонального аналізу. Один з перших у світі підручників з цієї дисципліни написано самим С. Банахом. Багато результатів С. Банаха та введених ним понять стали класичними. Наприклад, досліджені ним множини одержали назву «простори Банаха» і зараз входять до необхідного мінімуму знань кожного студента-математика, фізика, кібернетика тощо.

Розповідають, що багато теорем львівські математики доводили... у кав'ярні. С. Банах з учнями облюбували «Шкотську (шотландську) кав'ярню», де маленькі столики мали мармурове покриття — дуже зручне для запису математичних формул і теорем. Господар кав'ярні був незадоволений таким свавіллям науковців, але ситуацію врятувала дружина С. Банаха, яка придбала великий зошит для записів. Так з'явилася знаменита «Шкотська книга» — збірка математичних проблем, над якими працювала група С. Банаха. Як винагороду за розв'язання складних задач автори з гумором пропонували коли кухлі пива, коли вечерю в ресторані. Так, одна з проблем, за яку автор пообіцяв живого гусака (1936 р.), була розв'язана лише в 1972 р., тоді ж і було вручено винагороду.

Проблеми, поставлені в «Шкотській книзі», є настільки важливими і складними, що кожний, кому вдасться розв'язати хоча б одну з них, одразу дістає світового визнання. Сама ж «Шкотська книга» є однією з найвідоміших і найцінніших реліквій світової науки.

10. Функція $y = \sqrt[n]{x}$

- У пункті 6 було встановлено, що корінь непарного степеня з будь-якого числа існує і набуває тільки одного значення. Тому кожному числу $x \in \mathbb{R}$ можна поставити у відповідність єдине число y таке, що $y = \sqrt[2k+1]{x}$. Тим самим для всіх $k \in \mathbb{N}$ задано функцію $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ з областю визначення $\mathbb{R}$.

Покажемо, що функція f є оберненою до функції $g(x) = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Оскільки рівняння $\sqrt[2k+1]{x} = a$ при будь-якому a має корінь $x = a^{2k+1}$, то областю значень функції f є множина $\mathbb{R}$.

Маємо: $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$,

$E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\sqrt[2k+1]{x^{2k+1}} = x$. Іншими словами, $f(g(x)) = x$ для всіх $x \in D(g)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Використовуючи графік функції $y = x^{2k+1}$ і теорему 9.2, можна побудувати графік функції $y = \sqrt[2k+1]{x}$ (рис. 10.1). Зокрема, на рисунку 10.2 зображено графіки функцій $y = \sqrt[3]{x}$ і $y = \sqrt[5]{x}$.

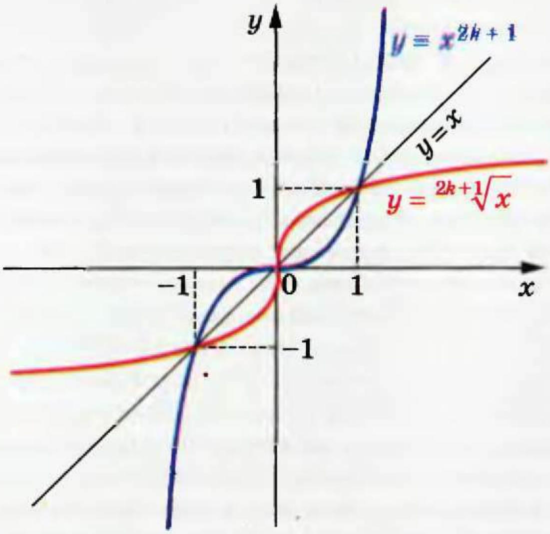


Рис. 10.1

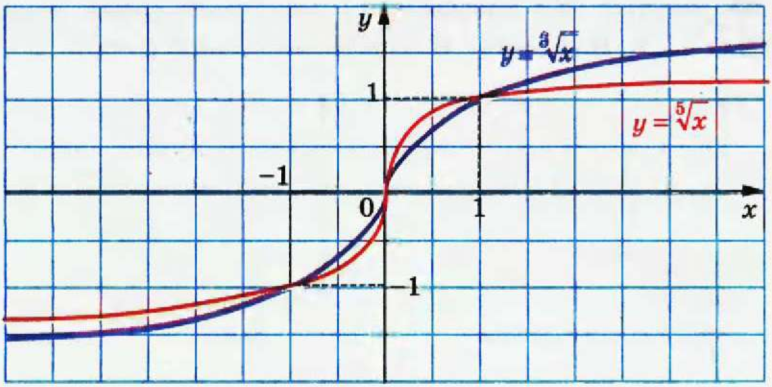


Рис. 10.2

Оскільки функція $g(x) = x^{2k+1}$ є зростаючою, то за теоремою 9.3 функція $f(x)=\sqrt[2k+1]{x}$ також є зростаючою.

Функція $f(x)=\sqrt[2k+1]{x}$ має єдиний нуль $x = 0$.

Якщо $x < 0$, то $f(x) < 0$; якщо $x > 0$, то $f(x) > 0$. Отже, проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції f.

Для будь-якого x з області визначення функції f виконується рівність $f(-x)=\sqrt[2k+1]{-x} = -\sqrt[2k+1]{x}=-f(x)$. Отже, функція f є непарною.

- У пункті 6 було встановлено, що арифметичний корінь парного степеня з будь-якого невід'ємного числа існує і набуває тільки одного значення. Тому кожному числу x з проміжку $[0; +\infty)$ можна поставити у відповідність єдине число y таке, що $y=\sqrt[2k]{x}$. Тим самим задано функцію $f(x)=\sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, з областю визначення $[0; +\infty)$.

Покажемо, що функція f є оберненою до функції $g(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, з областю визначення $[0; +\infty)$.

Оскільки рівняння $\sqrt[2k]{x}=a$ при будь-якому $a \geqslant 0$ має корінь $x = a^{2k}$ і при будь-якому $a < 0$ не має коренів, то областю значень функції f є проміжок $[0; +\infty)$.

Маємо: $D(f) = E(g) = [0; +\infty)$,
$E(f) = D(g) = [0; +\infty)$.

Для будь-якого $x \in [0; +\infty)$ виконується рівність $\sqrt[2k]{x^{2k}}=x$. Іншими словами, $f(g(x)) = x$ для всіх $x \in D(g)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

На рисунку 10.3 показано, як побудувати графік функції $y=\sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$. На рисунку 10.4 зображено графік функції $y=\sqrt[4]{x}$.

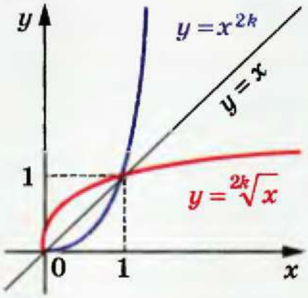


Рис. 10.3

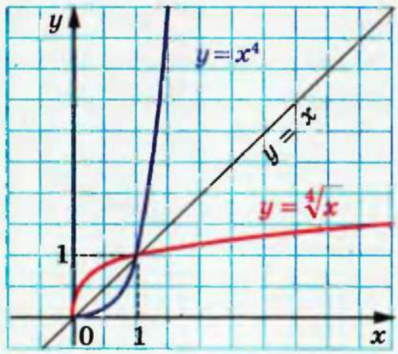


Рис. 10.4

Оскільки функція $g(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, $D(g) = [0; +\infty)$, є зростаючою, то функція $f(x)=\sqrt[2k]{x}$ також є зростаючою.

Функція f має єдиний корінь $x = 0$.

Якщо $x > 0$, то $f(x) > 0$. Отже, проміжок $(0; +\infty)$ є проміжком знакосталості функції f.

Оскільки область визначення функції f не є симетричною відносно початку координат, то функція f не є ні парною, ні непарною.

У таблиці наведено властивості функції $y=\sqrt[n]{x}$, вивчені в цьому пункті.

	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число, $n > 1$
Область визначення	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Область значень	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Не є ні парною, ні непарною	Непарна
Зростання / спадання	Зростаюча	Зростаюча

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність: 1) $\sqrt[3]{x}<2$; 2) $\sqrt[4]{x-2}<1$; 3) $\sqrt[6]{x^2-4}>\sqrt[6]{3x}$.

Розв'язання

1) Дана нерівність рівносильна такій: $\sqrt[3]{x}<\sqrt[3]{8}$. Оскільки функція $y=\sqrt[3]{x}$ є зростаючою, то можна зробити висновок, що $x<8$.

Відповідь: $(-\infty; 8)$.

2) Маємо: $\sqrt[4]{x-2}<\sqrt[4]{1}$. Оскільки функція $y=\sqrt[4]{t}$ є зростаючою з областю визначення $[0; +\infty)$, то дана нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} x-2<1, \\ x-2\geqslant 0. \end{cases}$$

Звідси $2\leqslant x<3$.

Відповідь: $[2; 3)$.

3) Дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x^2-4>3x, \\ 3x\geqslant 0. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} x^2-3x-4>0, \\ x\geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ x>4, \end{array}\right. \\ x\geqslant 0. \end{cases}$ Звідси отримуємо, що $x>4$.

Відповідь: $(4; +\infty)$.

ПРИКЛАД 2 Порівняйте $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[4]{2}$.

Розв'язання. Маємо: $\sqrt[3]{2}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[12]{16}$; $\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[12]{8}$. Оскільки функція $y=\sqrt[12]{x}$ є зростаючою, то $\sqrt[12]{16}>\sqrt[12]{8}$.

Відповідь: $\sqrt[3]{2}>\sqrt[4]{2}$.

Вправи

10.1.° Через які з даних точок проходить графік функції $y=\sqrt[4]{x}$:

$A\,(2; 16)$; $B\,(16; 2)$; $C\,(-1; 1)$; $D\left(\frac{1}{81}; 3\right)$; $E\,(81; 3)$; $F\,(0{,}001; 0{,}1)$; $G\,(10\,000; 10)$?

10.2.° Через які з даних точок проходить графік функції $y=\sqrt[3]{x}$:

$A\,(-8; -2)$; $B\left(\frac{1}{125}; \frac{1}{5}\right)$; $C\,(3; 27)$; $D\,(0{,}64; 0{,}4)$; $E\,(-216; 6)$; $F\,(-1000; -10)$?

10.3.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt[3]{x-1}$; 3) $y=\sqrt[5]{\frac{x-1}{x+2}}$; 5) $y=\sqrt[4]{|x|-1}$;

2) $y=\sqrt[6]{x+1}$; 4) $y=\sqrt[4]{x^2-x-2}$; 6) $y=\sqrt[6]{x^2(x-3)}$.

10.4.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt[5]{x+2}$; 3) $y=\sqrt[9]{\frac{x+1}{x-3}}$; 5) $y=\sqrt[8]{3-|x|}$;

2) $y=\sqrt[4]{x-2}$; 4) $y=\sqrt[6]{x^2-4x+3}$; 6) $y=\sqrt[10]{|x|(x-6)}$.

10.5.° Знайдіть область значень функції:

1) $y=\sqrt[4]{x}+1$; 3) $y=\sqrt[3]{x}-3$; 5) $y=|\sqrt[5]{x}+2|$.

2) $y=\sqrt[6]{x}-2$; 4) $y=|\sqrt[8]{x}-1|$;

10.6.° Знайдіть область значень функції:

1) $y=\sqrt[8]{x}+2$; 3) $y=\sqrt[5]{x}-2$; 5) $y=|\sqrt[7]{x}+1|$.

2) $y=\sqrt[4]{x}-4$; 4) $y=|\sqrt[6]{x}-2|$;

10.7.° Знайдіть область значень функції:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $D(f)=[-27; 8]$; 3) $f(x)=\sqrt[5]{x}$, $D(f)=\left[-\frac{1}{32}; 32\right]$.

2) $f(x)=\sqrt[4]{x}$, $D(f)=\left[\frac{1}{16}; 10\,000\right]$;

10.8.° Оцініть значення виразу $\sqrt[3]{x}$, якщо:

1) $1 \leqslant x \leqslant 216$; 2) $-729 < x < 8$.

10.9.° Оцініть значення виразу $\sqrt[4]{x}$, якщо:

1) $0 \leqslant x \leqslant 256$; 2) $16 < x < 10\,000$.

10.10.° Порівняйте:

1) $\sqrt[3]{1{,}6}$ і $\sqrt[3]{1{,}4}$; 4) $\sqrt[3]{5}$ і $\sqrt[6]{28}$; 7) $4\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ і $5\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$;

2) $\sqrt[5]{-23}$ і $\sqrt[5]{-26}$; 5) $\sqrt[15]{60}$ і $\sqrt[5]{4}$; 8) $6\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ і $4\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$.

3) 2 і $\sqrt[4]{17}$; 6) $2\sqrt[3]{3}$ і $3\sqrt[3]{2}$;

10.11.° Порівняйте:

1) $\sqrt{5}$ і $\sqrt[6]{80}$; 3) $3\sqrt[3]{4}$ і $4\sqrt[3]{2}$;

2) $\sqrt[6]{2}$ і $\sqrt[24]{18}$; 4) $5\sqrt[4]{0{,}2}$ і $10\sqrt[4]{0{,}012}$.

10.12.° Між якими двома послідовними цілими числами знаходиться на координатній прямій число:

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[3]{3}$; 3) $\sqrt[4]{21}$; 4) $\sqrt[3]{100}$; 5) $-\sqrt[5]{30}$; 6) $-\sqrt[3]{81}$?

10.13.° Між якими двома послідовними цілими числами знаходиться на координатній прямій число:

1) $\sqrt[3]{18}$; 2) $\sqrt[4]{139}$; 3) $-\sqrt[3]{212}$?

10.14.° Укажіть усі цілі числа, які розташовані на координатній прямій між числами:

1) 4 і $\sqrt[3]{140}$; 2) $\sqrt[5]{-35}$ і $\sqrt[4]{640}$.

10.15.° Укажіть усі цілі числа, які розташовані на координатній прямій між числами $-\sqrt[4]{1300}$ і $\sqrt[3]{40}$.

10.16.° Порівняйте:

1) $\sqrt[3]{6}$ і $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt[6]{2\sqrt{7}}$; 5) $\sqrt{3}$ і $\sqrt[3]{\sqrt{28}}$; 7) $\sqrt[5]{2}$ і $\sqrt[4]{2}$;

2) $\sqrt[9]{12}$ і $\sqrt[6]{5}$; 4) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$ і $\sqrt[4]{4}$; 6) $\sqrt[5]{\sqrt{32}}$ і $\sqrt[6]{8}$; 8) $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ і $\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$.

10.17.° Порівняйте:

1) $\sqrt{5}$ і $\sqrt[3]{10}$; 3) $\sqrt[10]{7}$ і $\sqrt[5]{2\sqrt{2}}$;

2) $\sqrt[8]{16}$ і $\sqrt[5]{\sqrt{33}}$; 4) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ і $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$.

10.18.° Розташуйте в порядку зростання числа:

1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ і $\sqrt[5]{4}$; 3) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ і $\sqrt[4]{7}$;

2) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[15]{30}$; 4) $\sqrt[15]{125}$, $\sqrt[5]{6}$ і $\sqrt[6]{4\sqrt[5]{4}}$.

10.19.° Розташуйте в порядку спадання числа:

1) $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[3]{4}$ і $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[6]{30}$ і $\sqrt[4]{10}$.

10.20.• Побудуйте графік функції:

1) $y=-\sqrt[3]{x}$; 4) $y=\sqrt[3]{2-x}$; 7) $y=\sqrt[3]{|x|-1}$;

2) $y=\sqrt[3]{x}-2$; 5) $y=\sqrt[3]{x-2}-2$; 8) $y=\sqrt[3]{|x-1|}$;

3) $y=\sqrt[3]{x-2}$; 6) $y=\sqrt[3]{|x|}$; 9) $y=\left|\sqrt[3]{x+1}-2\right|$.

10.21.• Побудуйте графік функції:

1) $y=-\sqrt[4]{x}$; 4) $y=\sqrt[4]{x+3}$; 7) $y=\sqrt[4]{|x|+1}$;

2) $y=\sqrt[4]{-x}$; 5) $y=\sqrt[4]{x+3}+1$; 8) $y=\sqrt[4]{|x+1|}$;

3) $y=\sqrt[4]{x}+3$; 6) $y=\sqrt[4]{|x|}$; 9) $y=\left|\sqrt[4]{x+2}-2\right|$.

10.22.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)=\sqrt[4]{|x|}$ на проміжку:

1) $[1;\ 2]$; 3) $[-1;\ 1]$; 5) $[-3;\ +\infty)$;

2) $[-3;\ -1]$; 4) $[-1;\ 2]$; 6) $(-\infty;\ -1]$.

10.23.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)=\sqrt[3]{|x|}$ на проміжку:

1) $[2;\ 3]$;
2) $[-1;\ 0]$;
3) $[-2;\ 2]$;
4) $[-2;\ 1]$;
5) $[-1;\ +\infty)$;
6) $(-\infty;\ 2)$.

10.24.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[6]{x-1}>2$;
2) $\sqrt[3]{3x+1}<4$;
3) $\sqrt[8]{4x+1}\leqslant 1$;
4) $\sqrt[4]{x^2-8}>\sqrt[4]{2x}$;
5) $\sqrt[6]{x^2+2x}\geqslant\sqrt[6]{x^2-x-6}$.

10.25.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[10]{x+2}>1$;
2) $\sqrt[5]{3x+2}<2$;
3) $\sqrt[4]{5x+1}<3$;
4) $\sqrt[8]{x^2-|x|+1}>\sqrt[8]{5-|x|}$.

10.26.•• Скільки коренів має рівняння залежно від значення параметра a:

1) $\sqrt[3]{x}=a-x$;
2) $\sqrt[4]{x}=a-x$?

10.27.•• Скільки коренів має рівняння $\left|\sqrt[6]{x}-1\right|=a$ залежно від значення параметра a?

10.28.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x-26}+\sqrt[3]{x}=4$.

10.29.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x-9}+\sqrt[4]{x+6}=3$.

10.30.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+\sqrt[6]{x}=y+\sqrt[6]{y}, \\ x^2+xy+y^2=27. \end{cases}$

10.31.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+\sqrt[5]{x}=y+\sqrt[5]{y}, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$

10.32.•• Знайдіть усі функції f такі, що рівність $f\left(\sqrt[7]{x}\right)=\sqrt[3]{x}$ виконується для всіх $x\in\mathbb{R}$.

10.33.•• Знайдіть усі парні функції f такі, що рівність $f(x^{30})=x^3$ виконується для всіх $x\in[0;\ +\infty)$.

10.34.•• Знайдіть усі непарні функції f такі, що рівність $f\left(\sqrt[8]{x}\right)=\sqrt[5]{x}$ виконується для всіх $x\in[0;\ +\infty)$.

10.35.•• Знайдіть усі визначені на $\mathbb{R}$ функції f такі, що рівність $f(x^4)=\sqrt[3]{x}$ виконується для всіх $x\in\mathbb{R}$.

10.36.* Знайдіть усі визначені на $\mathbb{R}$ функції f такі, що рівність $f(x^8)=x^2$ виконується для всіх $x\in\mathbb{R}$.

10.37.* Знайдіть цілу частину числа $\underbrace{\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{\ldots+\sqrt[3]{24}}}}}_{100\text{ радикалів}}$.

10.38.* Знайдіть цілу частину числа $\underbrace{\sqrt[4]{12+\sqrt[4]{12+\sqrt[4]{\ldots+\sqrt[4]{12}}}}}_{200\text{ радикалів}}$.

10.39.* Розв'яжіть рівняння $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

10.40.* Розв'яжіть рівняння $x^3+2=3\sqrt[3]{3x-2}$.

10.41.* Розв'яжіть рівняння $a^5+x=\sqrt[5]{a-x}$.

10.42.* Нехай $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. Обчисліть значення виразу

$$\underbrace{f\ (f\ (f\ (\ldots f}_{999\text{ разів}}\ (2)))).$$

10.43.* Для $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$, $k>1$ позначимо $X=\left[\sqrt[k]{1}\right]+\left[\sqrt[k]{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt[k]{n^k}\right]$, $Y=1^k+2^k+\ldots+n^k$. Доведіть, що $X+Y=n^{k+1}+n$.

10.44.* Для невід'ємних чисел a, b і c доведіть нерівність $\sqrt{a+\sqrt[3]{b+\sqrt[4]{c}}}\geqslant\sqrt[32]{abc}$.

11. Означення та властивості степеня з раціональним показником

Нагадаємо означення степеня з натуральним показником:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ множників}},\ n\in\mathbb{N},\ n>1;$$

$$a^1=a.$$

Ви знаєте, що степінь з натуральним показником має такі властивості:

1. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;
2. $a^m:a^n=a^{m-n}$, $a\neq 0$, $m>n$;
3. $(a^m)^n=a^{mn}$;
4. $(ab)^n=a^nb^n$;
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$, $b\neq 0$.

Пізніше ви ознайомилися з означеннями степеня з нульовим показником і степеня з від'ємним цілим показником:

$$a^0 = 1,\ a \neq 0;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Ці означення дуже вдалі: при такому підході всі п'ять властивостей степеня з натуральним показником залишилися справедливими і для степеня з цілим показником.

Введемо поняття степеня з дробовим показником, тобто степеня a^r, показник якого є раціональним числом виду $r = \frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Бажано зробити це так, щоб степеню з дробовим показником залишилися притаманні всі властивості степеня з цілим показником. Підказкою для такого означення може слугувати такий приклад.

Якщо через x позначити шукане значення степеня $2^{\frac{2}{3}}$, то, ураховуючи властивість $(a^m)^n = a^{mn}$, можна отримати рівності $x^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2^2$. Отже, x — це кубічний корінь з числа 2^2, тобто $x = \sqrt[3]{2^2}$ або $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Ці міркування підказують таке означення.

Означення. Степенем додатного числа a з раціональним показником r, поданим у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають число $\sqrt[n]{a^m}$, тобто

$$\boxed{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Наприклад, $5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3}$, $3^{-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{-1}{5}} = \sqrt[5]{3^{-1}}$, $0{,}4^{0{,}3} = 0{,}4^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{0{,}4^3}$.

Зауважимо, що значення степеня a^r, де r — раціональне число, не залежить від дробу, у вигляді якого подано число r. Це можна показати, використовуючи рівності $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ і $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Степінь з основою, яка дорівнює нулю, означають тільки для додатного раціонального показника.

Означення. $0^{\frac{m}{n}} = 0$, **де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.**

Зазначимо, що, наприклад, запис $0^{-\frac{1}{2}}$ не має змісту.

Зауважимо, що в означенні не йдеться про степінь $a^{\frac{m}{n}}$ для $a < 0$, наприклад, вираз $(-2)^{\frac{1}{3}}$ залишився невизначеним. Разом з тим вираз $\sqrt[3]{-2}$ має зміст. Виникає природне запитання: чому б не вважати, що $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}}$? Покажемо, що така домовленість привела б до суперечності:

$$\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}.$$

Отримали, що від'ємне число $\sqrt[3]{-2}$ дорівнює додатному числу $\sqrt[6]{4}$.

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, називають **степеневою функцією з раціональним показником**.

Якщо нескоротний дріб $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є числом додатним, то областю визначення функції $y = x^{\frac{m}{n}}$ є проміжок $[0; +\infty)$, а якщо цей дріб — від'ємне число, то — проміжок $(0; +\infty)$.

Властивості функції $y = x^r$ для цілого показника було вивчено в п. 4 і 5. Випадок, коли показник r не є цілим числом, буде розглянуто в 11 класі. Зараз зазначимо таке.

Функція $y = x^{\frac{1}{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, нічим не відрізняється від функції $y = \sqrt[2k]{x}$. Функції $y = x^{\frac{1}{2k+1}}$ і $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, мають різні області визначення. Так, на проміжку $[0; +\infty)$ обидві ці функції не відрізняються, але на проміжку $(-\infty; 0)$ визначена лише функція $y = \sqrt[2k+1]{x}$.

На рисунку 11.1 зображено графіки функцій $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{4}}$.

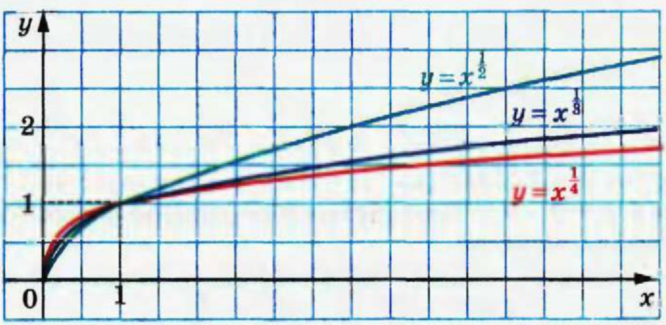


Рис. 11.1

Покажемо, що властивості степеня з цілим показником залишаються справедливими і для степеня з довільним раціональним показником.

Теорема 11.1 (добуток степенів). ***Для будь-якого $a > 0$ і будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність***

$$\boxed{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$$

Доведення. Запишемо раціональні числа p і q у вигляді дробів з однаковими знаменниками: $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Маємо:

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{n}} = a^{p+q}. \ \blacktriangle$$

Наслідок. ***Для будь-якого $a > 0$ і будь-якого раціонального числа p виконується рівність***

$$\boxed{a^{-p} = \frac{1}{a^p}}$$

Доведення. Застосовуючи теорему 11.1, запишемо: $a^{-p} \cdot a^p = a^{-p+p} = a^0 = 1$. Звідси $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. $\blacktriangle$

Теорема 11.2 (частка степенів). ***Для будь-якого $a > 0$ і будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність***

$$\boxed{a^p : a^q = a^{p-q}}$$

Доведення. Застосовуючи теорему 11.1, запишемо: $a^q \cdot a^{p-q} = a^{q+p-q} = a^p$. Звідси $a^{p-q} = a^p : a^q$. $\blacktriangle$

Теорема 11.3 (степінь степеня). ***Для будь-якого $a > 0$ і будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність***

$$\boxed{(a^p)^q = a^{pq}}$$

Доведення. Нехай $p = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, та $q = \frac{s}{k}$, $s \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Маємо:

$$(a^p)^q = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{s}{k}} = \sqrt[k]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^s} = \sqrt[k]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^s} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{ms}}} = \sqrt[kn]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{kn}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{s}{k}} = a^{pq}. \ \blacktriangle$$

Теорема 11.4 (степінь добутку і степінь дробу). ***Для будь-яких $a > 0$ і $b > 0$ та будь-якого раціонального числа p виконуються рівності***

$$\boxed{(ab)^p = a^p b^p} \qquad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}}$$

Доведіть цю теорему самостійно.

ПРИКЛАД Побудуйте графік функції

$$f(x) = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}.$$

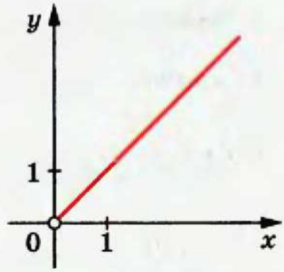


Рис. 11.2

• *Розв'язання.* Областю визначення функції f є множина $(0; +\infty)$. Дану функцію можна задати такими умовами: $f(x) = x$, $D(f) = (0; +\infty)$. Графік функції зображено на рисунку 11.2. ●

Вправи

11.1.° Подайте степінь з дробовим показником у вигляді кореня:

1) $5^{\frac{1}{3}}$; 3) $b^{-\frac{1}{7}}$; 5) $(ab)^{\frac{4}{7}}$; 7) $(m+n)^{2,5}$;

2) $a^{\frac{3}{5}}$; 4) $10^{-\frac{5}{6}}$; 6) $ab^{\frac{4}{7}}$; 8) $(x-3y)^{1\frac{1}{3}}$.

11.2.° Замініть степінь з дробовим показником коренем:

1) $13^{\frac{1}{2}}$; 3) $c^{0,2}$; 5) $3m^{1,25}n^{0,75}$;

2) $3^{-\frac{1}{9}}$; 4) $x^{\frac{6}{7}}$; 6) $(a-2b)^{\frac{9}{16}}$.

11.3.° Подайте корінь у вигляді степеня з дробовим показником:

1) $\sqrt{x}$; 3) $\sqrt[7]{6^5}$; 5) $\sqrt[5]{2^{-2}}$; 7) $\sqrt[8]{(a-b)^7}$;

2) $\sqrt[4]{a^3}$; 4) $\sqrt[3]{3a}$; 6) $\sqrt[11]{49}$; 8) $\sqrt[8]{a^7-b^7}$.

11.4.° Замініть корінь степенем з дробовим показником:

1) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt[14]{m^{-9}}$; 5) $\sqrt[4]{x+y}$;

2) $\sqrt[7]{a^3}$; 4) $\sqrt[6]{5a^5}$; 6) $\sqrt[13]{0,3^8}$.

11.5.° Знайдіть значення виразу:

1) $4^{\frac{1}{2}}$; 3) $3 \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$; 5) $0,216^{-\frac{1}{3}}$; 7) $27^{\frac{4}{3}}$;

2) $25^{-\frac{1}{2}}$; 4) $-5 \cdot 0,01^{-\frac{3}{2}}$; 6) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 8) $32^{-0,2}$.

11.6.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 3) $0,0081^{-0,25}$; 5) $0,125^{-\frac{2}{3}}$;

2) $10\,000^{\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$; 6) $\left(11\frac{25}{64}\right)^{\frac{5}{6}}$?

11.7.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=x^{\frac{5}{6}}$;
2) $y=x^{-1{,}4}$;
3) $y=(x-3)^{2{,}6}$;
4) $y=(x^2-6x-7)^{-\frac{1}{9}}$.

11.8.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=x^{-\frac{2}{3}}$;
2) $y=x^{3{,}2}$;
3) $y=(x+1)^{-\frac{7}{12}}$;
4) $y=(x^2-x-30)^{\frac{4}{15}}$.

11.9.° Спростіть вираз:

1) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}$;
2) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$;
3) $a^{\frac{1}{2}}:a^{\frac{1}{3}}$;
4) $a^{-0{,}6}a^{1{,}5}$;
5) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-6}$;
6) $\sqrt[3]{a}\cdot a^{\frac{1}{4}}$;
7) $a^{\frac{2}{3}}:\sqrt[5]{a^2}$;
8) $(a^{-2{,}4})^{-3}$;
9) $a^{\frac{7}{8}}:a^{-\frac{3}{4}}$;
10) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{6}}a^{-\frac{1}{3}}$;
11) $(a^{0{,}4})^{0{,}8}a^{0{,}18}$;
12) $\dfrac{a^{\frac{1}{6}}a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{4}}}$;
13) $\left(a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{14}{27}}\right)^{\frac{3}{7}}$;
14) $a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{8}}a^{\frac{5}{3}}a^{\frac{1}{8}}$;
15) $\dfrac{a^{-\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{12}}}{a^{-\frac{17}{4}}b^{\frac{1}{3}}}$;
16) $\left(a^{\frac{5}{9}}\right)^{1{,}8}\left(a^{-\frac{3}{8}}\right)^{2{,}4}$.

11.10.° Спростіть вираз:

1) $b^{3{,}5}b^{-4{,}2}$;
2) $b^{\frac{-3}{7}}b^{\frac{3}{7}}$;
3) $b:b^{\frac{2}{3}}$;
4) $b:b^{-\frac{1}{4}}$;
5) $\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{6}}$;
6) $b^{-\frac{1}{2}}:\sqrt{b}$;
7) $\sqrt[4]{b}:b^{-\frac{1}{6}}$;
8) $\dfrac{b^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}}}{b^{-\frac{4}{3}}}$;
9) $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{7}{12}}a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{2}{3}}$;
10) $\dfrac{a^{\frac{7}{4}}b^{\frac{5}{24}}}{a^{\frac{5}{16}}b^{-\frac{1}{8}}}$;
11) $\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{-3}$;
12) $\left(a^{-\frac{4}{5}}b^{\frac{1}{6}}\right)^{-\frac{3}{4}}$;
13) $b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}}$;
14) $(b^{0{,}6})^{0{,}5}b^{-0{,}4}$;
15) $(b^{-0{,}3})^{1{,}2}(b^{0{,}8})^{0{,}4}$;
16) $(b^4)^{-0{,}7}:(b^{-0{,}8})^{-5}$.

11.11.° Знайдіть значення виразу:

1) $3^{1{,}8}\cdot 3^{-2{,}6}\cdot 3^{2{,}8}$;
2) $(5^{-0{,}8})^6\cdot 5^{4{,}8}$;
3) $\left(25^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}$;
4) $\left(\dfrac{1}{49}\right)^{-1{,}5}$;
5) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{4{,}5}\cdot 1{,}2^{4{,}5}$;
6) $\left(\dfrac{7}{10}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(\dfrac{1}{700}\right)^{-\frac{1}{3}}$;
7) $\dfrac{8^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$;
8) $36^{0{,}4}\cdot 6^{1{,}2}$;
9) $\left(4^{-\frac{1}{8}}\right)^{1{,}6}\cdot 16^{0{,}6}$.

11.12.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $5^{3,4}\cdot 5^{-1,8}\cdot 5^{-2,6}$;
2) $(7^{-0,7})^{8} : 7^{-7,6}$;
3) $\left(9^{\frac{3}{7}}\right)^{4\frac{2}{3}}$;
4) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25}$;
5) $\left(2\frac{6}{7}\right)^{2,5}\cdot 1,4^{2,5}$;
6) $\frac{81^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}$;
7) $8^{0,4}\cdot 2^{1,8}$;
8) $(6^{-1,8})^{\frac{1}{3}}\cdot 216^{0,2}$?

11.13.° Відомо, що a — додатне число. Подайте a у вигляді:

1) квадрата;
2) куба;
3) шостого степеня;
4) восьмого степеня.

11.14.° Відомо, що m — додатне число. Подайте у вигляді квадрата вираз:

1) m^{4};
2) m^{-6};
3) m^{3};
4) $m^{\frac{1}{2}}$;
5) $m^{\frac{1}{3}}$;
6) $m^{\frac{5}{6}}$;
7) $m^{-1,2}$;
8) $m^{\frac{2}{7}}$.

11.15.° Відомо, що b — додатне число. Подайте у вигляді куба вираз:

1) b^{6};
2) b^{-15};
3) b^{2};
4) $b^{\frac{1}{2}}$;
5) $b^{\frac{1}{3}}$;
6) $b^{\frac{4}{5}}$;
7) $b^{-1,8}$;
8) $b^{\frac{7}{11}}$.

11.16.• При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\left((a-2)^{\frac{1}{3}}\right)^{3}=a-2$;
2) $\left((a-2)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}=a-2$?

11.17.• Побудуйте графік функції:

1) $y=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{3}$;
2) $y=\left((x-2)^{\frac{1}{4}}\right)^{4}$;
3) $y=x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{6}}$.

11.18.• Обчисліть значення виразу:

1) $12^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{2}{3}}\cdot (0,5)^{\frac{1}{3}}$;
2) $25^{1,5}+(0,25)^{-0,5}-81^{0,75}$;
3) $0,008^{-\frac{2}{3}}+0,064^{-\frac{1}{3}}-0,0625^{-\frac{3}{4}}$;
4) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot (0,81)^{-0,5}$;
5) $16^{\frac{1}{8}}\cdot 8^{-\frac{5}{6}}\cdot 4^{1,5}$;
6) $\frac{10\,000^{0,4}\cdot 10^{0,5}}{100^{0,3}\cdot 1000^{\frac{1}{6}}}$;
7) $\frac{5^{\frac{3}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{12}}}{9^{\frac{1}{6}}}\cdot\frac{8^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{5}{2}}\cdot 9^{\frac{1}{3}}}$;
8) $\left(72^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{4}{3}}:36^{-\frac{1}{6}}$;

9) $\left(12^{-\frac{1}{3}} \cdot 18^{-\frac{4}{3}} \cdot 6^{3,5}\right)^4 - 5^{\frac{1}{4}} \cdot 25^{\frac{3}{8}}$; 11) $\left(\dfrac{128^{\frac{3}{28}} \cdot 27^{-\frac{4}{9}}}{3^{\frac{1}{6}} \cdot 16^{\frac{1}{8}}}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{16^{\frac{3}{2}} \cdot 81^{\frac{9}{8}}}{9^3 \cdot 4^{-\frac{3}{8}}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

10) $\left(\dfrac{3^{-\frac{5}{6}} \cdot 7^{-\frac{5}{6}}}{21^{-1} \cdot 5^{\frac{1}{3}}}\right)^{-6}$;

11.19.° Знайдіть значення виразу:

1) $\left(343^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{3}}$;

2) $10^{\frac{1}{4}} \cdot 40^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$;

3) $0,0016^{-\frac{3}{4}} - 0,04^{-\frac{1}{2}} + 0,216^{-\frac{2}{3}}$;

4) $625^{-1,25} \cdot 25^{1,5} \cdot 125^{\frac{2}{3}}$;

5) $\dfrac{32^{0,24} \cdot 4^{0,7}}{64^{0,6} \cdot 16^{0,25}}$;

6) $\dfrac{12^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{6}}} \cdot \dfrac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{5}{3}}}{8^{\frac{1}{2}}}$;

7) $\left(\dfrac{5^{-\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{15^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{16}{3}}}\right)^{-1,5}$;

8) $\left(\dfrac{81^{\frac{4}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{9}}}{9^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}}}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{2^{\frac{11}{9}} \cdot 27^{\frac{14}{5}}}{3^{-\frac{18}{5}} \cdot 128^{-\frac{1}{9}}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

11.20.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{-\frac{2}{3}} = 0,04$; 2) $(x-2)^{\frac{5}{2}} = 32$; 3) $(x^2 - 2x)^{-\frac{1}{4}} = -1$.

11.21.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{-1,5} = 27$; 2) $(x-1)^{-\frac{2}{5}} = 100$; 3) $(x-5)^{\frac{3}{7}} = 0$.

12. Перетворення виразів, які містять степені з раціональним показником

Розглянемо приклади, у яких виконуються тотожні перетворення виразів, що містять степені з раціональним показником.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз:

1) $(3a^{0,3} + b^{0,2})(a^{0,3} - 4b^{0,2}) - (a^{0,3} + 2b^{0,2})(a^{0,3} - 2b^{0,2})$;

2) $\left(a^{\frac{1}{12}} - b^{\frac{1}{12}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{12}} + b^{\frac{1}{6}}\right) + \left(a^{\frac{1}{8}} + b^{\frac{1}{8}}\right)^2$.

Розв'язання

1) Розкриємо дужки, використовуючи правило множення многочленів, формулу різниці квадратів, а потім зведемо подібні доданки:

$$(3a^{0,3}+b^{0,2})(a^{0,3}-4b^{0,2})-(a^{0,3}+2b^{0,2})(a^{0,3}-2b^{0,2})=$$
$$=\underline{3a^{0,6}}-\underline{\underline{12a^{0,3}b^{0,2}}}+\underline{\underline{a^{0,3}b^{0,2}}}-4b^{0,4}-\underline{a^{0,6}}+4b^{0,4}=2a^{0,6}-11a^{0,3}b^{0,2}.$$

2) Маємо: $\left(a^{\frac{1}{12}}-b^{\frac{1}{12}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{12}}+b^{\frac{1}{6}}\right)+\left(a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{8}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{12}}\right)^3-\left(b^{\frac{1}{12}}\right)^3+$

$+\left(a^{\frac{1}{8}}\right)^2+2a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}+\left(b^{\frac{1}{8}}\right)^2=a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{4}}+2a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{4}}=2a^{\frac{1}{4}}+2a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}.$ ●

ПРИКЛАД 2 Розкладіть на множники вираз $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{4}}$, використовуючи формулу: 1) різниці квадратів; 2) різниці кубів.

Розв'язання

1) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{4}}=\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(b^{\frac{3}{8}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{3}{8}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{3}{8}}\right).$

2) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{4}}=\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^3-\left(b^{\frac{1}{4}}\right)^3=\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}\right).$ ●

ПРИКЛАД 3 Скоротіть дріб: 1) $\dfrac{4a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{3}}}$; 2) $\dfrac{b^{\frac{5}{6}}+3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}}-9c^{\frac{1}{2}}}$; 3) $\dfrac{32^{\frac{1}{3}}-16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}$.

Розв'язання

1) Розкладемо знаменник дробу на множники, винісши за дужки спільний множник, і скоротимо дріб:

$$\frac{4a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{3}}}=\frac{4a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{6}}-1\right)}=\frac{4}{a^{\frac{1}{6}}-1}.$$

2) Розклавши чисельник і знаменник дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{b^{\frac{5}{6}}+3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}}-9c^{\frac{1}{2}}}=\frac{b^{\frac{1}{2}}\left(b^{\frac{1}{3}}+3c^{\frac{1}{4}}\right)}{\left(b^{\frac{1}{3}}-3c^{\frac{1}{4}}\right)\left(b^{\frac{1}{3}}+3c^{\frac{1}{4}}\right)}=\frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}-3c^{\frac{1}{4}}}.$$

3) Маємо: $\dfrac{32^{\frac{1}{3}}-16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{16^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)}{2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)}=\dfrac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}=\left(\dfrac{16}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=2.$ ●

ПРИКЛАД 4 Спростіть вираз $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+2}{x^{\frac{1}{3}}-2}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-2}{x^{\frac{1}{3}}+2}-\dfrac{16}{x^{\frac{2}{3}}-4}$.

Розв'язання. Зробимо заміну $x^{\frac{1}{3}} = y$. Тоді даний вираз набуває вигляду:

$$\frac{y+2}{y-2} - \frac{y-2}{y+2} - \frac{16}{y^2-4}.$$

Цей вираз легко спростити. Завершіть розв'язування самостійно.

Відповідь: $\frac{8}{x^{\frac{1}{3}}+2}$.

Вправи

12.1.° Розкрийте дужки:

1) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$;

2) $2a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-4\right)+8a^{\frac{1}{2}}$;

3) $(a^{0,5}-3b^{0,3})(2a^{0,5}+b^{0,3})$;

4) $\left(m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{4}}\right)\left(m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}\right)$;

5) $\left(3b^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{3}{2}}\right)\left(3b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{3}{2}}\right)$;

6) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^2$;

7) $\left(4n^{-\frac{5}{6}}+3n^{\frac{5}{6}}\right)^2$;

8) $\left(a^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}a^{-\frac{1}{6}}\right)^2$;

9) $(b^{0,4}+3)^2-6b^{0,4}$;

10) $\left(c^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(c^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{1}{3}}+1\right)$;

11) $\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{5}{6}}+a\right)$;

12) $a^{\frac{1}{6}}\left(a^{\frac{1}{6}}+10\right)-\left(a^{\frac{1}{6}}+5\right)^2$;

13) $\left(b^{\frac{3}{5}}-2b^{\frac{1}{3}}\right)^2+4b^{\frac{1}{6}}\left(b^{\frac{23}{30}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$;

14) $\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)$;

15) $\left(x^{\frac{2}{9}}-1\right)\left(x^{\frac{4}{9}}+x^{\frac{2}{9}}+1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)$.

12.2.° Розкрийте дужки:

1) $(5a^{0,4}+b^{0,2})(3a^{0,4}-4b^{0,2})$;

2) $(m^{0,5}+n^{0,5})(m^{0,5}-n^{0,5})$;

3) $\left(a^{\frac{1}{3}}-5b^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+5b^{-\frac{1}{4}}\right)$;

4) $\left(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

5) $\left(b^{\frac{4}{3}}-b^{-\frac{2}{3}}\right)^2$;

6) $\left(x^{\frac{1}{6}}+2\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+4\right)$;

7) $(y^{1,5}-4y^{0,5})^2+8y^2$;

8) $\left(c^{\frac{2}{3}}+3c^{\frac{1}{6}}\right)^2-3c^{\frac{1}{12}}\left(3c^{\frac{1}{4}}+2c^{\frac{3}{4}}\right)$;

9) $\left(a^{\frac{1}{8}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{8}}+1\right)$;

10) $\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$.

12.3.° Подайте даний вираз у вигляді різниці квадратів і розкладіть його на множники (змінні набувають тільки невід'ємних значень):

1) $a - b$;
2) $a^3 - b^3$;
3) $m^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{2}{5}}$;
4) $x^{\frac{1}{2}} - 3$;
5) $x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{7}}$;
6) $4x^{0,4} - 9y^{0,7}$.

12.4.° Розкладіть на множники, використовуючи формулу різниці квадратів (змінні набувають тільки невід'ємних значень):

1) $a^5 - b^5$;
2) $m^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$;
3) $x^{\frac{1}{6}} - y^{\frac{1}{6}}$;
4) $x^{\frac{1}{4}} - 2$;
5) $5 - c$;
6) $16x^{0,3} - 25y^{\frac{2}{9}}$.

12.5.° Подайте даний вираз у вигляді суми кубів і розкладіть його на множники (змінні набувають тільки невід'ємних значень):

1) $a + b$;
2) $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{3}}$;
3) $a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}$;
4) $a^{\frac{3}{2}} + 27$;
5) $a^{1,2} + 2$;
6) $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$.

12.6.° Розкладіть на множники, використовуючи формулу різниці кубів (змінні набувають тільки невід'ємних значень):

1) $a - b$;
2) $a^{1,5} - b^{1,5}$;
3) $m^{0,6} - 8n^{1,8}$;
4) $x^{\frac{6}{7}} - 6$.

12.7.° Винесіть за дужки спільний множник:

1) $a + 3a^{\frac{1}{2}}$;
2) $b^{\frac{1}{2}} - 4b^{\frac{1}{4}}$;
3) $ab^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b$;
4) $c^{\frac{3}{4}} - c^{\frac{1}{2}}$;
5) $m^{\frac{3}{5}} - m^{\frac{1}{5}}$;
6) $6^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{1}{4}}$;
7) $2 - 2^{\frac{1}{7}}$;
8) $x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{1}{3}}$.

12.8.° Винесіть за дужки спільний множник:

1) $x - 5x^{\frac{2}{3}}$;
2) $a^{\frac{1}{2}} + 6a^{\frac{1}{3}}$;
3) $p^{\frac{4}{9}} - p^{\frac{7}{9}}$;
4) $3b - b^{0,5}c^{0,5}$;
5) $ab^{\frac{2}{5}} - a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{10}}$;
6) $m^{\frac{3}{2}}n^{\frac{1}{2}} + mn + m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{3}{2}}$;
7) $8^{\frac{1}{12}} - 4^{\frac{1}{12}}$;
8) $10 + 10^{\frac{5}{8}}$.

12.9.° Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a - 5a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - 5}$;
2) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{3}} + a^{\frac{2}{3}}}$;
3) $\dfrac{b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}} + c^{\frac{1}{4}}}$;
4) $\dfrac{a - 4b}{a^{0,5} + 2b^{0,5}}$;
5) $\dfrac{a - b}{ab^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b}$;
6) $\dfrac{a + 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}$;
7) $\dfrac{4c^{\frac{2}{3}} - 12c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}} + 9d^{\frac{2}{3}}}{2c^{\frac{1}{3}} - 3d^{\frac{1}{3}}}$;
8) $\dfrac{a + b}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}$;
9) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}}$;

10) $\dfrac{x-6x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{7}{6}}-6x^{\frac{1}{3}}}$; 11) $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}+7a^{\frac{1}{2}}}{a-49a^{\frac{1}{2}}}$; 12) $\dfrac{30^{\frac{1}{5}}-6^{\frac{1}{5}}}{10^{\frac{1}{5}}-2^{\frac{1}{5}}}$.

12.10.° Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a+2a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+2}$; 4) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$; 7) $\dfrac{a-125}{a^{\frac{2}{3}}-25}$;

2) $\dfrac{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{1}{4}}-m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{5}{4}}}{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{5}{4}}}$; 5) $\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a-b}$; 8) $\dfrac{m^{\frac{7}{6}}-36m^{\frac{5}{6}}}{m^{\frac{1}{2}}-6m^{\frac{1}{3}}}$;

3) $\dfrac{a-b^{2}}{a-a^{\frac{1}{2}}b}$; 6) $\dfrac{x^{3,5}y^{2,5}-x^{2,5}y^{3,5}}{x+2x^{0,5}y^{0,5}+y}$; 9) $\dfrac{24^{\frac{1}{4}}-8^{\frac{1}{4}}}{6^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}}$.

12.11.° Знайдіть значення виразу:

1) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\dfrac{1}{2^{-1,5}}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-\left(2\sqrt{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)$;

2) $\left(\dfrac{5^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{6}}+3^{\frac{1}{6}}}\right)^{6}+\left(\dfrac{3^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{4}}}\right)^{6}$.

12.12.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a-b}{a^{0,5}-b^{0,5}}-\dfrac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a-b}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{5}{6}}-a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{7}{6}}}\cdot\dfrac{a-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}}$;

2) $\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}+\dfrac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}-b^{0,5}}$; 5) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^{2}-ab)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}$.

3) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}-1}{b^{\frac{1}{10}}-1}+\left(1-b^{\frac{1}{30}}\right)\left(1+b^{\frac{1}{30}}+b^{\frac{1}{15}}\right)$;

12.13.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{m-n}{m^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}}$; 3) $\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right):\left(\dfrac{b^{\frac{5}{4}}}{a}-\dfrac{b}{a^{\frac{3}{4}}}\right)$;

2) $\left(1-a^{\frac{1}{36}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{36}}+a^{\frac{1}{18}}\right)+\dfrac{4-a^{\frac{1}{6}}}{2-a^{\frac{1}{12}}}$; 4) $\dfrac{m^{\frac{5}{2}}-m^{\frac{3}{2}}}{m^{3}-m^{\frac{5}{2}}}-\dfrac{m^{\frac{1}{2}}+m}{m^{2}+m^{\frac{3}{2}}}$.

12.14.• Доведіть тотожність:

1) $\left(\dfrac{m^2+n^2}{m^{\frac{3}{2}}+mn^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{m}{n}=n^{\frac{1}{2}}-m^{\frac{1}{2}};$

2) $\left(\dfrac{a^{0,5}+2}{a+2a^{0,5}+1}-\dfrac{a^{0,5}-2}{a-1}\right):\dfrac{a^{0,5}}{a^{0,5}+1}=\dfrac{2}{a-1};$

3) $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}{a^{-1}-b^{-1}}-\dfrac{1}{a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}}\right):\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}};$

4) $\dfrac{(a-b)^2}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{a^2-b^2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}=2a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}}.$

12.15.• Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right):\dfrac{2x+2y}{\sqrt{xy}};$

2) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{6}}+3y^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{x^{\frac{1}{6}}-3y^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}\right):\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+3y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}}.$

12.16.• Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{\left(z^{\frac{2}{p}}+z^{\frac{2}{q}}\right)^2-4z^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}}}{\left(z^{\frac{1}{p}}-z^{\frac{1}{q}}\right)^2+4z^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}\right)^{\frac{1}{2}};$

2) $\dfrac{a^{\frac{7}{3}}-2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}-ab^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b}:a^{\frac{1}{3}};$

3) $\dfrac{\left(x^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(\sqrt[3]{x^4}-8y\sqrt[3]{x}\right):\sqrt[3]{xy}}\cdot\left(2-\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}\right).$

12.17.• Спростіть вираз:

1) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}};$

2) $\dfrac{m^{\frac{4}{3}}-27m^{\frac{1}{3}}n}{m^{\frac{2}{3}}+3\sqrt[3]{mn}+9n^{\frac{2}{3}}}:\left(1-3\sqrt[3]{\dfrac{n}{m}}\right)-\sqrt[3]{m^2};$

3) $\left(\dfrac{x-9}{x+3x^{\frac{1}{2}}+9}:\dfrac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27}\right)^{0,5}-x^{0,5}.$

12.18.• Обчисліть добуток $x^{1,2} \cdot x^{1,3} \cdot x^{1,4} \cdot x^{1,5} \cdot \ldots \cdot x^{8,8}$, якщо $x = \sqrt[5]{2}$.

12.19.• Обчисліть добуток $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}} \cdot \ldots \cdot x^{\frac{1}{64}}$, якщо $x = 2^{-\frac{64}{9}}$.

12.20.•• Спростіть вираз $(a^{0,125} + b^{0,75})(a^{0,25} + b^{1,5})(a^{0,5} + b^3)(a + b^6)$.

12.21.•• Спростіть вираз $a^{0,2} + a^{0,5} + a^{0,8} + a^{1,1} + \ldots + a^{7,1}$.

12.22.•• Спростіть вираз $b^{12,7} - b^{12,6} + b^{12,5} - b^{12,4} + \ldots + b^{3,3}$.

12.23.•• Спростіть вираз $\dfrac{a^4 - b^{20}}{a^{3,8} + a^{3,6}b + a^{3,4}b^2 + a^{3,2}b^3 + \ldots + a^{0,2}b^{18} + b^{19}}$.

12.24.•• Спростіть вираз

$$\frac{x^{7,2} - x^6y^{0,3} + x^{4,8}y^{0,6} - x^{3,6}y^{0,9} + x^{2,4}y^{1,2} - x^{1,2}y^{1,5} + y^{1,8}}{x^{8,4} + y^{2,1}}.$$

13. Ірраціональні рівняння

Розглянемо функцію $y = x^3$. Вона є зростаючою, а отже, оборотною. Тому функція $y = x^3$ кожного свого значення набуває тільки один раз. Іншими словами: з рівності $x_1^3 = x_2^3$ випливає, що $x_1 = x_2$. А оскільки з рівності $x_1 = x_2$ випливає, що $x_1^3 = x_2^3$, то можна стверджувати, що *коли обидві частини рівняння піднести до куба, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.*

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{2x+1} = -3$.

Розв'язання. Підносячи обидві частини рівняння до куба, отримаємо рівняння, рівносильне даному. Маємо:

$$\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^3 = (-3)^3;$$
$$2x + 1 = -27;$$
$$x = -14.$$

Відповідь: -14.

Оскільки функція $y = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, є оборотною, то міркування, використані при розв'язуванні прикладу 1, можна узагальнити у вигляді такої теореми.

Теорема 13.1. ***Якщо обидві частини рівняння піднести до непарного степеня, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Доведення. Покажемо, що рівняння

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

і

$$(f(x))^{2k-1} = (g(x))^{2k-1},\ k \in \mathbb{N} \qquad (2)$$

є рівносильними.

Нехай число α — корінь рівняння (1). Тоді маємо правильну числову рівність $f(\alpha) = g(\alpha)$. Звідси можна записати:

$$(f(\alpha))^{2k-1} = (g(\alpha))^{2k-1}.$$

Це означає, що число α є коренем рівняння (2).

Нехай число β — корінь рівняння (2). Тоді отримуємо, що $(f(\beta))^{2k-1} = (g(\beta))^{2k-1}$. Оскільки функція $y = x^{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, є оборотною, то $f(\beta) = g(\beta)$. Отже, число β — корінь рівняння (1).

Ми показали, що кожний корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2) і навпаки, кожний корінь рівняння (2) є коренем рівняння (1). Це означає, що рівняння (1) і (2) рівносильні. ▲

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt[7]{x^2-2} = \sqrt[7]{x}$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини даного рівняння до сьомого степеня. Отримаємо рівносильне рівняння:

$$\left(\sqrt[7]{x^2-2}\right)^7 = \left(\sqrt[7]{x}\right)^7;$$

$$x^2 - 2 = x;\ x^2 - x - 2 = 0;$$

$$x_1 = -1,\ x_2 = 2.$$

Відповідь: -1; 2.

Рівняння, які ми розглянули в прикладах 1 і 2, містять змінну під знаком кореня. Такі рівняння називають **ірраціональними**.

Ось ще приклади ірраціональних рівнянь:

$$\sqrt{x-3} = 2;\ \ \sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x} + 1 = 0;\ \ \sqrt{3-x} = \sqrt[3]{2+x}.$$

При розв'язуванні прикладів 1 і 2 нам довелося спрощувати вирази виду $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n$, де n — непарне натуральне число. Розглянемо випадок, коли n — парне натуральне число.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = \left(\sqrt{x-2}\right)^2$. (3)

Розв'язання. Природно замінити це рівняння на таке:

$$3x + 4 = x - 2. \qquad (4)$$

Звідси $x = -3$.

Але перевірка показує, що число -3 не є коренем початкового рівняння. Отже, рівняння (3) не має коренів. Причина появи стороннього кореня полягає в тому, що застосування формули $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ призводить до розширення області визначення рівняння. Тому рівняння (4) є наслідком рівняння (3). ●

Ще однією причиною появи сторонніх коренів при розв'язуванні ірраціональних рівнянь є необоротність функції $y = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Це означає, що з рівності $x_1^{2k} = x_2^{2k}$ не обов'язково випливає, що $x_1 = x_2$. Наприклад, $(-2)^4 = 2^4$, але $-2 \neq 2$. Водночас із рівності $x_1 = x_2$ випливає рівність $x_1^{2k} = x_2^{2k}$.

Наведені міркування підказують, що справедливою є така теорема.

Теорема 13.2. ***При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня отримане рівняння є наслідком даного.***

Доведення. Покажемо, що рівняння

$$(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k},\ k \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

є наслідком рівняння

$$f(x) = g(x). \tag{6}$$

Нехай число α — корінь рівняння (6), тобто $f(\alpha) = g(\alpha)$. Тоді $(f(\alpha))^{2k} = (g(\alpha))^{2k}$. Отже, число α є коренем рівняння (5).

Ми показали, що кожний корінь рівняння (6) є коренем рівняння (5). Це означає, що рівняння (5) є наслідком рівняння (6). ▲

Зауважимо, що коли число β — корінь рівняння (5), то з рівності $(f(\beta))^{2k} = (g(\beta))^{2k}$ не обов'язково випливає, що $f(\beta) = g(\beta)$. Тому в результаті переходу від рівняння $f(x) = g(x)$ до його наслідку $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$ можуть з'явитися сторонні корені, які можна виявити за допомогою перевірки.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4+3x} = x$.

Розв'язання. Підносячи обидві частини рівняння до квадрата, отримаємо рівняння, яке є наслідком даного:

$$4 + 3x = x^2;$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0;\ x_1 = -1,\ x_2 = 4.$$

Перевірка показує, що число -1 є стороннім коренем, а число 4 задовольняє дане рівняння.

Відповідь: 4.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини даного рівняння до квадрата:

$$2x - 3 + 2\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1} + 4x + 1 = 16.$$

Звідси $\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1} = 9 - 3x$.

Переходячи до рівняння-наслідку, отримуємо:

$$8x^2 - 10x - 3 = 81 - 54x + 9x^2;$$

$$x^2 - 44x + 84 = 0;\ x_1 = 42,\ x_2 = 2.$$

Перевірка показує, що число 42 є стороннім коренем, а число 2 задовольняє дане рівняння.

Відповідь: 2.

Вправи

13.1.° Поясніть, чому не має коренів рівняння:

1) $\sqrt{x-2}+1=0$;
2) $\sqrt[6]{x}+\sqrt[8]{x-1}=-2$;
3) $\sqrt{x-4}+\sqrt{1-x}=5$;
4) $\sqrt[4]{x-6}+\sqrt{6-x}=1$;
5) $\sqrt{26+\sqrt{x+1}}=5$.

13.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{2x-2}=2$;
2) $\sqrt[3]{x-4}=2$;
3) $\sqrt[5]{x-6}=-3$;
4) $\sqrt[3]{x^3-2x+3}=x$;
5) $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}}=3$;
6) $\sqrt[3]{x^2+15}=2\sqrt[3]{x+1}$.

13.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-3}=4$;
2) $\sqrt{3x^2-x-15}=3$;
3) $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}=3$.

13.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[7]{2x-1}=\sqrt[7]{3-x}$;
2) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{1-2x}$;
3) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-3}$;
4) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x^2+4x-16}$.

13.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{x+3}=\sqrt[4]{2x-3}$;
2) $\sqrt{4x-5}=\sqrt{1-x}$;
3) $\sqrt[5]{x^2-25}=\sqrt[5]{2x+10}$;
4) $\sqrt{x^2-36}=\sqrt{2x-1}$.

13.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2-x}=x$;
2) $\sqrt{x+1}=x-1$;
3) $\sqrt{3x-2}=x$;
4) $\sqrt{2x^2-3x-10}=x$;
5) $2\sqrt{x+5}=x+2$;
6) $\sqrt{15-3x}-1=x$;
7) $x-\sqrt{2x^2+x-21}=3$;
8) $x+2+\sqrt{8-3x-x^2}=0$.

13.7.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{10-3x}=-x$;
2) $x=\sqrt{x+5}+1$;
3) $\sqrt{2x^2+5x+4}=2x+2$;
4) $3\sqrt{x+10}-11=2x$;
5) $x-\sqrt{3x^2-11x-20}=5$.

13.8.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{(2x+3)(x-4)}=x-4$;
2) $\sqrt{(x-2)(2x-5)}+2=x$;
3) $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12$;
4) $(x+1)\sqrt{x^2-5x+5}=x+1$.

13.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{(3x-1)(4x+3)}=3x-1$;
2) $(x-1)\sqrt{x^2-3x-3}=5x-5$.

13.10.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$;
2) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1$.

13.11.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$;
2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=1$;
3) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$;
4) $2\sqrt{2-x}-\sqrt{7-x}=1$.

13.12.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{3x-5}=2$;
2) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}=2$.

13.13.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3$;
2) $\sqrt{x-7}+\sqrt{x-1}=4$;
3) $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=1$;
4) $\sqrt{13-4x}+\sqrt{x+3}=5$.

13.14.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}=3$;
2) $\sqrt{5x+1}+\sqrt{7-x}=6$;
3) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+5}=3$.

13.15.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$;
2) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-1}$;
3) $2\sqrt{3x-1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x-9}$.

13.16.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+7}=\sqrt{8-x}$;
2) $\sqrt{6x-11}-\sqrt{x-2}=\sqrt{x+3}$.

13.17.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}=6$;
2) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;
3) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}=4$.

13.18.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=6$;
2) $\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}-\sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}}=2$.

13.19.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=a-x.$$

13.20.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння

$$2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}=a-x.$$

13.21.** При яких значеннях параметра a рівняння $ax-1=\sqrt{8x-x^2-15}$ має єдиний розв'язок?

13.22.** При яких значеннях параметра a рівняння $\sqrt{4x-x^2-3}=x-a$ має єдиний розв'язок?

14. Метод рівносильних перетворень при розв'язуванні ірраціональних рівнянь

Ви знаєте, що сторонні корені рівняння можна виявити в результаті перевірки.

Коли йдеться про перевірку як про етап розв'язування рівняння, неможливо уникнути проблеми її технічної реалізації. Наприклад, число $\frac{-2+6\sqrt{11}}{7}$ є коренем рівняння $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}$. Щоб у цьому переконатися, потрібно провести значну обчислювальну роботу.

Для подібних ситуацій можливий інший шлях розв'язування — метод рівносильних перетворень.

Теорема 14.1. ***Рівняння виду $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ рівносильне системі***

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\geqslant 0. \end{cases}$$

Доведення. Нехай число α є коренем даного рівняння. Тоді $\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{g(\alpha)}$. Звідси $f(\alpha)\geqslant 0$. Обидві частини числової рівності піднесемо до квадрата. Отримаємо правильну числову рівність $f(\alpha)=g(\alpha)$. Таким чином, число α є розв'язком системи.

Нехай число β є розв'язком системи, тобто

$$\begin{cases} f(\beta)=g(\beta), \\ f(\beta)\geqslant 0. \end{cases}$$

Звідси отримуємо, що $g(\beta)\geqslant 0$. З того, що невід'ємні числа $f(\beta)$ і $g(\beta)$ рівні, випливає, що $\sqrt{f(\beta)}=\sqrt{g(\beta)}$. Отже, число β є коренем даного рівняння.

Таким чином, кожний розв'язок даного рівняння є розв'язком системи, і навпаки, кожний розв'язок системи є розв'язком даного рівняння. Отже, множини розв'язків рівняння і системи рівні. ▲

Зауваження. Зрозуміло, що рівняння $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ також рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Вибір відповідної системи, як правило, пов'язаний з тим, яку з нерівностей, $f(x) \geqslant 0$ чи $g(x) \geqslant 0$, розв'язати легше.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{x-1}$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - 3x = x - 1, \\ x \geqslant 1. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{3}, \\ x = 2 - \sqrt{3}, \end{array}\right. \\ x \geqslant 1; \end{cases} \quad x = 2 + \sqrt{3}.$$

Відповідь: $2 + \sqrt{3}$.

Теорема 14.2. ***Рівняння виду $\sqrt{f(x)} = g(x)$ рівносильне системі***

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Скориставшись ідеєю доведення теореми 14.1, доведіть цю теорему самостійно.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+7} = x - 3$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x + 7 = (x-3)^2, \\ x - 3 \geqslant 0. \end{cases}$$

$$\text{Звідси} \begin{cases} x^2 - 7x + 2 = 0, \\ x \geqslant 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7 + \sqrt{41}}{2}, \\ x = \dfrac{7 - \sqrt{41}}{2}, \end{array}\right. \\ x \geqslant 3; \end{cases} \quad x = \frac{7 + \sqrt{41}}{2}.$$

Відповідь: $\dfrac{7 + \sqrt{41}}{2}$.

Теореми 14.1 і 14.2 можна узагальнити, керуючись таким очевидним твердженням: якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то з рівності $a^{2k} = b^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, випливає, що $a = b$.

Теорема 14.3. ***Якщо для будь-якого $x \in M$ виконуються нерівності $f(x) \geqslant 0$ і $g(x) \geqslant 0$, то рівняння $f(x) = g(x)$ і $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, рівносильні на множині M.***

Скориставшись ідеєю доведення теореми 14.1, доведіть цю теорему самостійно.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4.$

Розв'язання. Областю визначення цього рівняння є множина $M=\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$. На цій множині обидві частини даного рівняння набувають невід'ємних значень. Тому дане рівняння на множині M рівносильне рівнянню

$$\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}\right)^2=4^2.$$

Звідси $2x-3+2\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1}+4x+1=16;$ $\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1}=9-3x.$

Ліва частина останнього рівняння на множині $M=\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$ набуває невід'ємних значень. Тому права частина, тобто $9-3x$, має також бути невід'ємною. Звідси $9-3x\geqslant 0;$ $x\leqslant 3$. Тоді на множині $M_1=\left[\frac{3}{2};3\right]$ обидві частини рівняння $\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1}=9-3x$ набувають невід'ємних значень. Отже, за теоремою 14.3 це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}(2x-3)(4x+1)=(9-3x)^2,\\ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-44x+84=0,\\ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3;\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=42,\end{array}\right.\\ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3;\end{cases}\qquad x=2.$$

Рівняння $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$ можна розв'язувати й інакше. Розглянемо функції $f(x)=\sqrt{2x-3}$ і $g(x)=\sqrt{4x+1}$. Легко переконатися (зробіть це самостійно), що ці функції є зростаючими. Тоді функція $y=\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}$ є зростаючою на множині $M=\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$. Отже, дане рівняння має не більше ніж один корінь. Нескладно помітити, що $x=2$ є коренем розглядуваного рівняння.

Відповідь: 2.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}.$

Розв'язання. Областю визначення даного рівняння є множина $M=\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$. Обидві частини даного рівняння на цій множині набувають невід'ємних значень. Тому дане рівняння на множині M рівносильне рівнянню $\left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}\right)^2=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2$. Звідси $2\sqrt{2x-5}\,\sqrt{x+2}=4-x$.

Скориставшись теоремою 14.3, отримуємо:

$$\begin{cases}4(2x-5)(x+2)=(4-x)^2,\\ \frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

Звідси $\begin{cases}7x^2+4x-56=0,\\ \frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 4;\end{cases}$ $\quad\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{-2-6\sqrt{11}}{7},\\ x=\frac{-2+6\sqrt{11}}{7},\end{array}\right.\\ \frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$

Відповідь: $\frac{-2+6\sqrt{11}}{7}$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}.$$

Розв'язання. Вигідно розкласти квадратні тричлени, які стоять під радикалами, на множники:

$$\sqrt{(x+1)(4x+5)}-\sqrt{(x+1)(2x-1)}=\sqrt{(x-1)(x+1)}.$$

Тепер важливо не зробити поширену помилку, а саме: застосувати теорему про корінь з добутку в такому вигляді: $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$. Насправді записана формула справедлива лише для $a\geqslant 0$ і $b\geqslant 0$, а якщо $a\leqslant 0$ і $b\leqslant 0$, то $\sqrt{ab}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$.

Оскільки областю визначення даного рівняння є множина $\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right]\cup[1;+\infty)\cup\{-1\}$ (рис. 14.1), то дане рівняння рівносильне сукупності двох систем і одного рівняння.

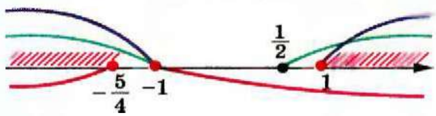


Рис. 14.1

1) $\begin{cases}x\geqslant 1,\\ \sqrt{x+1}\,\sqrt{4x+5}-\sqrt{x+1}\,\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1};\end{cases}$

$\begin{cases}x\geqslant 1,\\ \sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+5};\end{cases}$ $\begin{cases}x\geqslant 1,\\ 2\sqrt{2x-1}\,\sqrt{x-1}=x+7;\end{cases}$

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 4(2x-1)(x-1) = x^2 + 14x + 49; \end{cases} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ 7x^2 - 26x - 45 = 0; \end{cases} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -\dfrac{9}{7}; \end{array} \right. \end{cases} \quad x = 5.$$

2) $$\begin{cases} x \leqslant -\dfrac{5}{4}, \\ \sqrt{-x-1}\,\sqrt{-4x-5} - \sqrt{-x-1}\,\sqrt{-2x+1} = \sqrt{-x+1}\,\sqrt{-x-1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant -\dfrac{5}{4}, \\ \sqrt{-2x+1} + \sqrt{-x+1} = \sqrt{-4x-5}; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leqslant -\dfrac{5}{4}, \\ 2\sqrt{-2x+1}\,\sqrt{-x+1} = -x-7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant -7, \\ 4(2x-1)(x-1) = x^2 + 14x + 49; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leqslant -7, \\ 7x^2 - 26x - 45 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leqslant -7, \\ \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -\dfrac{9}{7}. \end{array} \right. \end{cases}$$

Зрозуміло, що ця система розв'язків не має.

3) $x + 1 = 0$; $x = -1$.

Відповідь: -1; 5.

Вправи

14.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+4} = 6$;

2) $\sqrt{2x+3}\,\sqrt{x-2} = 3$;

3) $\sqrt{x+1}\,\sqrt{x+2} = 4$;

4) $\sqrt{x}\,\sqrt{1-x} = x$;

5) $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-7}} = \sqrt{x-4}$;

6) $\sqrt{x-9} + \sqrt{x} = \dfrac{36}{\sqrt{x-9}}$;

7) $\sqrt{7-x} + \dfrac{12}{\sqrt{7-x}} = 2\sqrt{5x+37}$.

14.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+2}\,\sqrt{x+8} = 4$;

2) $x - 1 = \sqrt{2x-5}\,\sqrt{x+1}$;

3) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{3x+1}$;

4) $\dfrac{12}{\sqrt{x+10}} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{x+10}$.

14.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$; 3) $\sqrt{x^2+8}=2x+1$; 5) $\sqrt{x}=x-1$;

2) $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$; 4) $\sqrt{2x^2-7x+5}=1-x$; 6) $\sqrt{x^2-1}=3-2x$.

14.4.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2-4x+13}=\frac{1}{2}x+2$; 3) $\sqrt{x+2}=1-x$.

2) $\sqrt{2x^2+8x+7}-2=x$;

14.5.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+1}=2$; 5) $\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}=4$;

2) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$; 6) $\sqrt{3x-1}+\sqrt{x+3}=2$;

3) $\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}=1$; 7) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.

4) $\sqrt{2x+5}=8-\sqrt{x-1}$;

14.6.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$; 3) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{16-3x}=5$.

2) $\sqrt{x+11}-\sqrt{2x+1}=2$;

14.7.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$.

14.8.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}=0$; 2) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-1}$.

14.9.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2+2x-8}=\sqrt{x^2-6x+8}$;

2) $\sqrt{2x^2+5x+2}-\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{3x+6}$.

14.10.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-6x+8}=\sqrt{x^2-11x+18}$;

2) $\sqrt{x^2-3x-10}+\sqrt{x^2+3x+2}=\sqrt{x^2+8x+12}$.

15. Різні прийоми розв'язування ірраціональних рівнянь та їх систем

У попередніх пунктах ви ознайомилися з методами розв'язування ірраціональних рівнянь, заснованими на піднесенні обох частин рівняння до одного й того самого степеня.

Розширимо арсенал прийомів розв'язування ірраціональних рівнянь.

Насамперед звернемося до методу заміни змінної.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x^2+3x-6}=t$. Тоді $x^2+3x-18=t^2-12$, і дане рівняння набуває вигляду $t^2-12+4t=0$. Звідси

$$\left[\begin{array}{l} t=-6, \\ t=2. \end{array}\right.$$

Оскільки $t \geqslant 0$, то підходить лише $t=2$. Отже, дане рівняння рівносильне такому:

$\sqrt{x^2+3x-6}=2$. Звідси $x^2+3x-6=4$; $x=-5$ або $x=2$.

Відповідь: -5; 2.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2x+2\sqrt{x^2-16}-12.$$

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=t$. Тоді, підносячи до квадрата обидві частини останньої рівності, отримаємо

$$2x+2\sqrt{x^2-16}=t^2.$$

Дане рівняння набуває вигляду $t=t^2-12$. Звідси $t=4$ або $t=-3$.

Очевидно, що рівняння $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=-3$ не має розв'язків. Отже, початкове рівняння рівносильне такому: $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=4$. Далі,

$$\begin{cases} x \geqslant 4, \\ 2x+2\sqrt{x^2-16}=16; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 4, \\ \sqrt{x^2-16}=8-x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \leqslant x \leqslant 8, \\ x^2-16=64-16x+x^2; \end{cases} \qquad x=5.$$

Відповідь: 5.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $2(x+1)-x\sqrt{x+1}-x^2=0$.

Розв'язання. Оскільки число 0 не є коренем даного рівняння, то рівняння $\frac{2(x+1)}{x^2}-\frac{\sqrt{x+1}}{x}-1=0$ рівносильне даному.

Нехай $\frac{\sqrt{x+1}}{x}=t$, тоді $2t^2-t-1=0$. Звідси $t=1$ або $t=-\frac{1}{2}$.

Маємо: $\left[\begin{array}{l}\frac{\sqrt{x+1}}{x}=1,\\ \frac{\sqrt{x+1}}{x}=-\frac{1}{2};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ x+1=x^2,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ 4x+4=x^2;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\\ x=2-2\sqrt{2}.\end{array}\right.$

Відповідь: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $2-2\sqrt{2}$.

Метод заміни змінних є ефективним і для розв'язування систем ірраціональних рівнянь.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{xy+22}=5,\\ \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{xy+22}=3.\end{cases}$

Розв'язання. Нехай $\sqrt[4]{x+y}=a$, $\sqrt[4]{xy+22}=b$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$. Тоді дана система набуває вигляду $\begin{cases}a^2+b^2=5,\\ a+b=3.\end{cases}$ Далі маємо:

$$\begin{cases}(a+b)^2-2ab=5,\\ a+b=3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}ab=2,\\ a+b=3.\end{cases}$$

Звідси $\begin{cases}a=1,\\ b=2\end{cases}$ або $\begin{cases}a=2,\\ b=1.\end{cases}$

Отже, дана система рівносильна сукупності двох систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}=1,\\ \sqrt[4]{xy+22}=2,\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[4]{x+y}=2,\\ \sqrt[4]{xy+22}=1,\end{cases}\end{array}\right. \text{ звідси } \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=1,\\ xy=-6,\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=16,\\ xy=-21.\end{cases}\end{array}\right.$$

Розв'язавши останні дві системи, отримуємо відповідь.

Відповідь: $(3;\ -2)$, $(-2;\ 3)$, $\left(8+\sqrt{85};\ 8-\sqrt{85}\right)$, $\left(8-\sqrt{85};\ 8+\sqrt{85}\right)$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3.$$

Розв'язання. Нехай $\sqrt[3]{2-x}=a$, $\sqrt[3]{7+x}=b$. Тоді

$$\begin{cases}a^2+b^2-ab=3,\\a^3+b^3=9;\end{cases}\quad \begin{cases}a^2+b^2-ab=3,\\(a+b)(a^2+b^2-ab)=9;\end{cases}\quad \begin{cases}(a+b)^2-3ab=3,\\a+b=3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}ab=2,\\a+b=3;\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1,\\b=2;\end{cases}\\ \begin{cases}a=2,\\b=1.\end{cases}\end{array}\right.$$ Тепер можна записати $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[3]{2-x}=1,\\\sqrt[3]{7+x}=2;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[3]{2-x}=2,\\\sqrt[3]{7+x}=1;\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=1,\\x=-6.\end{array}\right.$$

Відповідь: 1; −6.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x.$

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на вираз $\sqrt{1+x}-1$. Отримаємо рівняння-наслідок:

$$x\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x\left(\sqrt{1+x}-1\right).$$

Це рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l}x=0,\\\sqrt{1+x}+2x-5=\sqrt{1+x}-1.\end{array}\right.$$

Розв'яжемо друге рівняння сукупності. Його наслідком буде рівняння $2x-5=-1$. Звідси $x=2$.

Залишилося виконати перевірку. Легко переконатися, що число 2 є коренем рівняння, а число 0 — ні.

Відповідь: 2.

Вправи

15.1.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}-3=0;$
2) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-6=0;$
3) $2x-7\sqrt{x}-15=0;$
4) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}=4;$
5) $2\sqrt{x+1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x+1}};$
6) $x^2-x+9+\sqrt{x^2-x+9}=12;$
7) $\sqrt[3]{x^2-4x+4}-2\sqrt[3]{x-2}-3=0;$
8) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-1}+\dfrac{3}{\sqrt[4]{x}+1}=2;$
9) $\sqrt{\dfrac{x+5}{x-1}}+7\sqrt{\dfrac{x-1}{x+5}}=8;$
10) $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4.$

15.2.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x-\sqrt{x}-12=0$;
2) $\sqrt[3]{x^2}+8=9\sqrt[3]{x}$;
3) $\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=1$;
4) $\sqrt{x+5}-3\sqrt[4]{x+5}+2=0$;
5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}+3}=1$;
6) $\sqrt[6]{9-6x+x^2}+2\sqrt[6]{3-x}-8=0$;
7) $x^2-x+\sqrt{x^2-x+4}=2$;
8) $\sqrt{\frac{3x+2}{2x-3}}+\sqrt{\frac{2x-3}{3x+2}}=2{,}5$.

15.3.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x^2-5x+16-3\sqrt{x^2-5x+20}=0$;
2) $x^2+4-5\sqrt{x^2-2}=0$;
3) $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$;
4) $\sqrt{3x^2-9x-26}=12+3x-x^2$;
5) $2x^2+6x-3\sqrt{x^2+3x-3}=5$;
6) $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}+\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=72$.

15.4.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x^2-4x-3\sqrt{x^2-4x+20}+10=0$;
2) $2\sqrt{x^2-3x+11}=4+3x-x^2$;
3) $\sqrt{2x^2-6x+40}=x^2-3x+8$;
4) $5x^2+10x+\sqrt{x^2+2x-15}=123$.

15.5.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ x+y+4\sqrt{xy}=37;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}=1,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=7;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\\ xy=8;\end{cases}$

4) $\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4,\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8;\end{cases}$

5) $\begin{cases}\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\frac{2x}{3x-2y}}=2,\\ x^2-8y^2=18-18y;\end{cases}$

6) $\begin{cases}\sqrt{4-x+y}+\sqrt{9-2x+y}=7,\\ 2y-3x=12.\end{cases}$

15.6.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2,\\ xy=27;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2},\\ x+y=5.\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3,\\ 2x+y=7.\end{cases}$

15.7.** Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x.$$

15.8.** Розв'яжіть рівняння

$$x+\sqrt{(x+6)(x-2)}=2+\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}.$$

15.9.** Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16.$$

15.10.** Розв'яжіть рівняння $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+5}}+\sqrt{2x+5}=2x.$

15.11.** Розв'яжіть рівняння $4x^2+12x\sqrt{1+x}=27(1+x).$

15.12.** Розв'яжіть рівняння $6x^2-5x\sqrt{x+3}+x+3=0.$

15.13.** Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt[3]{(x+3)^2}+\sqrt[3]{(6-x)^2}-\sqrt[3]{(x+3)(6-x)}=3.$$

15.14.** Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt[3]{(x+4)^2}+\sqrt[3]{(x-5)^2}+\sqrt[3]{(x+4)(x-5)}=3.$$

15.15.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2.$

15.16.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4.$

15.17.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x-1}=5.$

15.18.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}.$

15.19.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2-\sqrt{2-x}}=x.$

15.20.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{6-\sqrt{6-x}}=x.$

15.21.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x;$

2) $\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+10}-4\right)=x.$

15.22.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-x+1}=4x-3;$

2) $\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+x^2+x-7\right)=x.$

16. Ірраціональні нерівності

Розглянемо теореми, за допомогою яких розв'язують основні типи ірраціональних нерівностей. Доведення цих теорем аналогічні доведенню теореми 14.1.

Теорема 16.1. ***Нерівність виду*** $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ ***рівносильна системі***

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2 - 3x + 1} \geqslant \sqrt{3x - 4}$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 \geqslant 3x - 4, \\ 3x - 4 \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geqslant 0, \\ x \geqslant \frac{4}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 5, \\ x \leqslant 1, \end{array}\right. \\ x \geqslant \frac{4}{3}; \end{cases} \qquad x \geqslant 5.$$

Відповідь: $[5; +\infty)$.

Теорема 16.2. ***Нерівність виду*** $\sqrt{f(x)} < g(x)$ ***рівносильна системі***

$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 < (x-1)^2, \\ x - 1 > 0, \\ 2x^2 - 3x - 5 \geqslant 0. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} -2 < x < 3, \\ x > 1, \\ x \leqslant -1 \text{ або } x \geqslant 2{,}5. \end{cases}$$

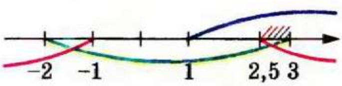


Рис. 16.1

Розв'язування цієї системи проілюстровано на рисунку 16.1.

Отримуємо $2{,}5 \leqslant x < 3$.

Відповідь: $[2{,}5; 3)$.

Теорема 16.3. ***Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > g(x)$ рівносильна сукупності двох систем***

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0,\\ f(x)\geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)\geqslant 0,\\ f(x)>(g(x))^2.\end{cases}\end{array}\right.$$

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2+7x+12} > 6-x$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем.

1) $\begin{cases}6-x<0,\\ x^2+7x+12\geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>6,\\ \left[\begin{array}{l}x\leqslant -4,\\ x\geqslant -3;\end{array}\right.\end{cases}$ $x>6$.

2) $\begin{cases}6-x\geqslant 0,\\ x^2+7x+12>(6-x)^2;\end{cases}$ $\begin{cases}x\leqslant 6,\\ x>\frac{24}{19};\end{cases}$ $\frac{24}{19}<x\leqslant 6$.

Відповідь: $\left(\frac{24}{19};+\infty\right)$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $(x-3)\sqrt{x^2+4}\leqslant x^2-9$.

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність у такому вигляді:

$$(x-3)\left(\sqrt{x^2+4}-x-3\right)\leqslant 0.$$

Ця нерівність рівносильна сукупності двох систем.

1) $\begin{cases}x-3\geqslant 0,\\ \sqrt{x^2+4}\leqslant x+3;\end{cases}$ $\begin{cases}x\geqslant 3,\\ x^2+4\leqslant x^2+6x+9;\end{cases}$ $\begin{cases}x\geqslant 3,\\ x\geqslant -\frac{5}{6};\end{cases}$ $x\geqslant 3$.

2) $\begin{cases}x-3\leqslant 0,\\ \sqrt{x^2+4}\geqslant x+3.\end{cases}$ Друга нерівність системи рівносильна сукупності $\left[\begin{array}{l}x+3<0,\\ \begin{cases}x+3\geqslant 0,\\ x^2+4\geqslant (x+3)^2.\end{cases}\end{array}\right.$ Звідси $\left[\begin{array}{l}x<-3,\\ -3\leqslant x\leqslant -\frac{5}{6};\end{array}\right.$ $x\leqslant -\frac{5}{6}$. Тоді маємо: $\begin{cases}x\leqslant 3,\\ x\leqslant -\frac{5}{6};\end{cases}$ $x\leqslant -\frac{5}{6}$.

Відповідь: $\left(-\infty;-\frac{5}{6}\right]\cup[3;+\infty)$.

Нерівність прикладу 4 можна розв'язати інакше, використовуючи метод інтервалів. Справді, розв'язавши рівняння $(x-3)\left(\sqrt{x^2+4}-x-3\right)=0$, отримуємо два корені $x = 3$, $x=-\frac{5}{6}$. Розв'язування даної нерівності проілюстровано на рисунку 16.2.

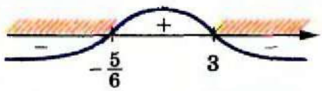


Рис. 16.2

При розв'язуванні ірраціональних нерівностей можна користуватися більш загальною теоремою.

Теорема 16.4. ***Якщо для будь-якого $x \in M$ виконуються нерівності $f(x) \geqslant 0$ і $g(x) \geqslant 0$, то нерівності $f(x) > g(x)$ і $(f(x))^{2k} > (g(x))^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, рівносильні на множині M.***

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}\leqslant 2\sqrt{x}$.

Розв'язання. Обидві частини даної нерівності набувають невід'ємних значень на множині $M = [3; +\infty)$, яка є областю визначення цієї нерівності. Тому дана нерівність на множині M рівносильна нерівності

$$\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}\right)^2 \leqslant \left(2\sqrt{x}\right)^2.$$

Звідси $2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3}\leqslant x+2$.

На множині $M = [3; +\infty)$ обидві частини останньої нерівності набувають невід'ємних значень. Тому за теоремою 16.4 отримуємо:

$$\begin{cases} 4(2x+1)(x-3)\leqslant(x+2)^2, \\ x\geqslant 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x^2-24x-16\leqslant 0, \\ x\geqslant 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{4}{7}\leqslant x\leqslant 4, \\ x\geqslant 3; \end{cases}$$

$$3 \leqslant x \leqslant 4.$$

Відповідь: [3; 4].

Вправи

16.1.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x-1}>4$; 2) $\sqrt{x-1}<4$; 3) $\sqrt{x-1}>-4$; 4) $\sqrt{x-1}<-4$.

16.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2x-4} \geqslant \sqrt{5-x}$;
2) $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$;
3) $\sqrt{x^2+x} < \sqrt{x^2+1}$;
4) $\sqrt{x^2-3x+1} > \sqrt{2x-3}$;
5) $\sqrt{8-5x} \geqslant \sqrt{x^2-16}$;
6) $\sqrt{x^2-3x+2} < \sqrt{2x^2-3x+1}$.

16.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{3x-2} < \sqrt{x+6}$;
2) $\sqrt{2x^2+6x-3} \geqslant \sqrt{x^2+4x}$;
3) $\sqrt{x^2+3x-10} < \sqrt{x-2}$.

16.4.• Розв'яжіть нерівність:

1) $x > \sqrt{24-5x}$;
2) $\sqrt{2x+7} \leqslant x+2$;
3) $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$;
4) $3-x > 3\sqrt{1-x^2}$;
5) $\sqrt{x^2+3x+3} < 2x+1$;
6) $\sqrt{7x-x^2-6} < 2x+3$.

16.5.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{9x-20} < x$;
2) $\sqrt{x+61} < x+5$;
3) $2\sqrt{4-x^2} \leqslant x+4$;
4) $\sqrt{x^2+4x-5} < x-3$.

16.6.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2-x} > x$;
2) $\sqrt{x+7} \geqslant x+1$;
3) $\sqrt{x^2-1} > x$;
4) $\sqrt{x^2-2x} \geqslant 4-x$;
5) $\sqrt{x^2+x-2} > x$;
6) $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.

16.7.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x+2} > x$;
2) $\sqrt{2x+14} > x+3$;
3) $\sqrt{x^2-5x-24} \geqslant x+2$;
4) $\sqrt{x^2+4x-5} > x-3$.

16.8.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+10)\sqrt{x-4} \leqslant 0$;
2) $(x+2)\sqrt{(4-x)(5-x)} \geqslant 0$;
3) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4} \leqslant 0$.

16.9.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-12)\sqrt{x-3} \leqslant 0$;
2) $(x-3)\sqrt{x^2+x-2} \geqslant 0$;
3) $(x^2-9)\sqrt{16-x^2} \geqslant 0$.

16.10.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x-2} < 1$;
2) $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$;
3) $\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leqslant \dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$;
4) $\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}-3x+16}{6-x} > 1$.

16.11.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+1)\sqrt{x^2+1} > x^2-1$;

2) $\dfrac{\sqrt{x+20}}{x} - 1 < 0$;

3) $\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7} \leqslant \dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}$;

4) $\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5} \leqslant 1$.

16.12.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $3\sqrt{x} - \sqrt{x+3} > 1$;

2) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-x^2} < 2$;

3) $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$.

16.13.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x-6} - \sqrt{x+10} \leqslant 1$;

2) $2\sqrt{x} + \sqrt{5-x} > \sqrt{x+21}$.

16.14.•• Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{x^3+x+6} \geqslant 4$.

16.15.•• Розв'яжіть нерівність $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x^3+8} < 4$.

16.16.•• При яких значеннях параметра a множиною розв'язків нерівності $\sqrt{1-(x+2a)^2} \geqslant \dfrac{4}{3}x$ є проміжок завдовжки $\dfrac{9}{5}$?

16.17.•• При яких значеннях параметра a множиною розв'язків нерівності $\sqrt{1-x^2} \geqslant \dfrac{4}{3}(x-a)$ є проміжок завдовжки $\dfrac{9}{5}$?

§ 4. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

17. Радіанне вимірювання кутів

Досі для вимірювання кутів ви використовували градуси або частини градуса — мінути і секунди.

У багатьох випадках зручно користуватися іншою одиницею вимірювання кутів. Її називають **радіаном.**

Означення. Кутом в один радіан називають центральний кут кола, який спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола.

На рисунку 17.1 зображено центральний кут AOB, величина якого дорівнює одному радіану. Пишуть: $\angle AOB = 1$ рад. Також говорять, що радіанна міра дуги AB дорівнює одному радіану. Пишуть: $\cup AB = 1$ рад.

Радіанна міра кута (дуги) не залежить від радіуса кола. Справді, розглянемо два кола зі спільним центром O і радіусами R і r $(R > r)$ (рис. 17.2). Сектор AOB гомотетичний сектору A_1OB_1 з центром O і коефіцієнтом $\frac{R}{r}$. Тоді, якщо довжина дуги AB дорівнює радіусу R, то довжина дуги A_1B_1 дорівнює радіусу r.

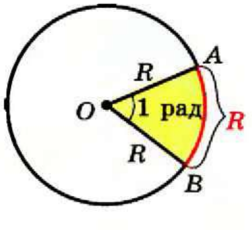


Рис. 17.1

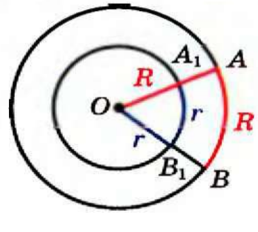


Рис. 17.2

На рисунку 17.3 зображено коло радіуса R і дугу MN, довжина якої дорівнює $\frac{3}{2}R$. Тоді радіанна міра кута MON (дуги MN) дорівнює $\frac{3}{2}$ рад. Узагалі, якщо центральний кут кола радіуса R спирається на дугу кола довжини αR, то кажуть, що **радіанна міра цього центрального кута дорівнює α рад.**

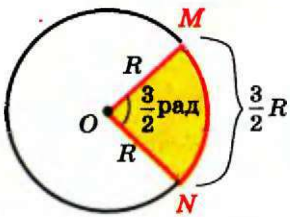


Рис. 17.3

Довжина півкола дорівнює πR. Отже, радіанна міра півкола дорівнює π рад, а його градусна міра становить 180°.

Це дозволяє встановити зв'язок між радіанною та градусною мірами, а саме:

$$\pi \text{ рад} = 180°. \qquad (1)$$

Звідси

$$\boxed{1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}}$$

Поділивши 180 на 3,14 (нагадаємо, що $\pi \approx 3{,}14$), можна установити: 1 рад $\approx 57°$.

Рівність (1) дозволяє також записати, що

$$\boxed{1° = \frac{\pi}{180} \text{ рад}} \qquad (2)$$

З цієї формули легко встановити, що, наприклад,

$$15° = 15 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{12} \text{ рад}, \quad 90° = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{2} \text{ рад},$$

$$135° = 135 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{3\pi}{4} \text{ рад}.$$

Зазвичай при записі радіанної міри кута позначення «рад» опускають. Наприклад, пишуть $135° = \frac{3\pi}{4}$.

У таблиці наведено градусну і радіанну міри кутів, які часто зустрічаються:

Градусна міра кута	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Радіанна міра кута	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Використовуючи радіанну міру кута, можна отримати зручну формулу для обчислення довжини дуги кола. Оскільки центральний кут в 1 рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу R, то кут в α рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює αR. Якщо довжину дуги, яка містить α рад, позначити l, то можна записати

$$\boxed{l = \alpha R}$$

На координатній площині розглянемо коло одиничного радіуса з центром у початку координат. Таке коло називають **одиничним.**

Нехай точка P, починаючи рух від точки $P_0(1;\ 0)$, переміщується по одиничному колу проти годинникової стрілки. У певний момент часу вона займе положення, при якому $\angle P_0OP = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (рис. 17.4).

Будемо говорити, що **точку P отримано з точки P_0 у результаті повороту навколо початку координат** на кут $\frac{2\pi}{3}$ (на кут 120°).

Пишуть: $P = R_O^{\frac{2\pi}{3}}(P_0)$.

Нехай тепер точка P перемістилася по одиничному колу за годинниковою стрілкою і зайняла положення, при якому $\angle POP_0 = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (рис. 17.5). Говоритимемо, що точку P отримано з точки P_0 у результаті повороту навколо початку координат на кут $-\frac{2\pi}{3}$ (на кут $-120°$). Пишуть: $P = R_O^{-\frac{2\pi}{3}}(P_0)$.

Узагалі, коли розглядають рух точки по колу проти годинникової стрілки, то кут повороту вважають додатним, а за годинниковою стрілкою — від'ємним.

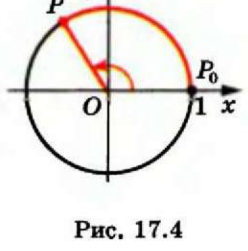


Рис. 17.4

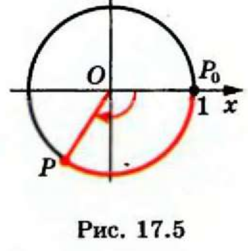


Рис. 17.5

Розглянемо ще кілька прикладів. Звернемося до рисунку 17.6. Можна говорити, що точку A отримано з точки P_0 у результаті повороту навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{2}$ (на кут 90°) або на кут $-\frac{3\pi}{2}$ (на кут −270°), тобто $A = R_O^{\frac{\pi}{2}}(P_0)$, $A = R_O^{-\frac{3\pi}{2}}(P_0)$. Точку B отримано з точки P_0 у результаті повороту на кут π (на кут 180°) або на кут $-\pi$ (на кут −180°), тобто $B = R_O^{\pi}(P_0)$, $B = R_O^{-\pi}(P_0)$. Точку C отримано з точки P_0 у результаті повороту на кут $\frac{3\pi}{2}$ (на кут 270°) або на кут $-\frac{\pi}{2}$ (на кут −90°), тобто $C = R_O^{\frac{3\pi}{2}}(P_0)$, $C = R_O^{-\frac{\pi}{2}}(P_0)$.

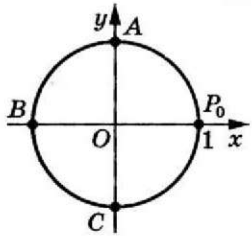


Рис. 17.6

Якщо точка P, рухаючись по одиничному колу, зробить повний оберт, то можна говорити, що кут повороту дорівнює 2π (тобто 360°) або -2π (тобто −360°).

Якщо точка P зробить півтора оберти проти годинникової стрілки, то природно вважати, що кут повороту дорівнює 3π (тобто 540°), якщо за годинниковою стрілкою — то -3π (тобто −540°).

Зрозуміло, що кут повороту як у радіанах, так і в градусах може виражатися будь-яким дійсним числом.

Кут повороту однозначно визначає положення точки P на одиничному колі. Проте будь-якому положенню точки P на колі відповідає безліч кутів повороту. Наприклад, точці P (рис. 17.7) відповідають такі кути повороту: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}+2\pi$, $\frac{\pi}{4}+4\pi$, $\frac{\pi}{4}+6\pi$ і т. д., а також $\frac{\pi}{4}-2\pi$, $\frac{\pi}{4}-4\pi$, $\frac{\pi}{4}-6\pi$ і т. д.

Кожному дійсному числу α поставимо у відповідність точку P одиничного кола таку, що $P = R_O^{\alpha}(P_0)$. Тим самим ми задали відображення множини дійсних чисел на множину точок одиничного кола. Зауважимо, що це відображення не є взаємно однозначним: кожній точці одиничного кола відповідає безліч дійсних чисел. Наприклад, точці P (рис. 17.7) відповідають усі дійсні числа виду

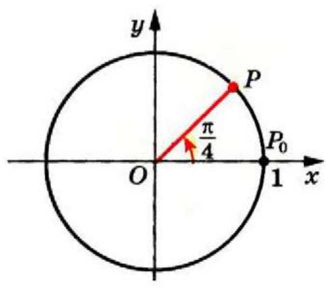


Рис. 17.7

$\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Зауважимо, що множину чисел виду $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, можна задати й інакше. Наприклад: $\frac{9\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, або $-\frac{7\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.

Вправи

17.1.° Знайдіть радіанну міру кута, який дорівнює:

1) 25°; 2) 40°; 3) 100°; 4) 160°; 5) 210°; 6) 300°.

17.2.° Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:

1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) $1{,}2\pi$; 5) 3π; 6) $2{,}5\pi$.

17.3.° Заповніть таблицю:

Градусна міра кута		12°	36°			105°	225°			240°
Радіанна міра кута	$\frac{\pi}{18}$			$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{5}$			4π	$1{,}8\pi$	

17.4.° Чому дорівнює довжина дуги кола, радіус якого дорівнює 12 см, якщо радіанна міра дуги становить:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 2; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) 2π?

17.5.° Обчисліть довжину дуги кола, якщо відомо її радіанну міру α і радіус R кола:

1) $\alpha=3$, $R=5$ см; 2) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, $R=6$ см; 3) $\alpha=0{,}4\pi$, $R=2$ см.

17.6.° Порівняйте величини кутів, заданих у радіанах:

1) $\frac{\pi}{2}$ і 1,5; 2) $-\frac{\pi}{2}$ і -2; 3) $\frac{\pi}{3}$ і 1; 4) $\frac{3\pi}{2}$ і 4,8.

17.7.° Порівняйте величини кутів, заданих у радіанах:

1) $\frac{\pi}{4}$ і 1; 2) $-\frac{1}{2}$ і $-\frac{\pi}{6}$.

17.8.° Позначте на одиничному колі точку, яку отримаємо при повороті точки $P_0(1;\ 0)$ на кут:

1) 45°; 3) 150°; 5) $\frac{5\pi}{3}$; 7) $-120°$; 9) 450°; 11) $-\frac{5\pi}{2}$;

2) $\frac{\pi}{3}$; 4) 210°; 6) $-45°$; 8) $-300°$; 10) $-480°$; 12) $-\frac{7\pi}{3}$.

17.9.° Позначте на одиничному колі точку, яку отримаємо при повороті точки P_0 (1; 0) на кут:

1) 225°; 3) $\frac{\pi}{6}$; 5) 420°; 7) $\frac{2\pi}{3}$; 9) 6π;

2) –60°; 4) 320°; 6) –315°; 8) $-\frac{5\pi}{6}$; 10) –720°.

17.10.° У якій чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана при повороті точки P_0 (1; 0) на кут:

1) 127°; 5) –240°; 9) –470°; 13) $\frac{-7\pi}{6}$; 17) 3;

2) 89°; 6) 400°; 10) $\frac{\pi}{5}$; 14) $-1{,}8\pi$; 18) 6;

3) 276°; 7) 750°; 11) $\frac{4\pi}{3}$; 15) $2{,}6\pi$; 19) –2;

4) –130°; 8) –24°; 12) $\frac{5\pi}{6}$; 16) $-\frac{17}{4}$; 20) 7?

17.11.° У якій чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана при повороті точки P_0 (1; 0) на кут:

1) 94°; 4) –100°; 7) –800°; 10) $-\frac{7\pi}{3}$; 13) 1;

2) 176°; 5) –380°; 8) $\frac{3\pi}{4}$; 11) $5{,}5\pi$; 14) –3;

3) 200°; 6) 700°; 9) $-\frac{3\pi}{4}$; 12) $-\frac{11\pi}{6}$; 15) 5?

17.12.° Знайдіть координати точки одиничного кола, отриманої при повороті точки P_0 (1; 0) на кут:

1) $\frac{\pi}{2}$; 3) –90°; 5) $\frac{5\pi}{2}$; 7) 450°;

2) π; 4) –180°; 6) $-\frac{3\pi}{2}$; 8) -2π.

17.13.° Які координати має точка одиничного кола, отримана при повороті точки P_0 (1; 0) на кут:

1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) 3π; 3) $-\frac{\pi}{2}$; 4) 180°; 5) –270°; 6) –540°?

17.14.° Кути трикутника відносяться як 2 : 3 : 5. Знайдіть радіанні міри його кутів.

17.15.° Кути чотирикутника відносяться як 1 : 3 : 4 : 7. Знайдіть радіанні міри його кутів.

17.16.° Скільки сторін має правильний многокутник, кут якого дорівнює $\frac{13\pi}{15}$?

17.17.° Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 36°. Знайдіть радіанні міри кутів цього трикутника.

17.18.° Укажіть найменший додатний і найбільший від'ємний кути, при повороті на які точки P_0 (1; 0) буде отримано точку з координатами:

1) (0; 1); 2) (−1; 0); 3) (0; −1); 4) (1; 0).

17.19.° Укажіть усі дійсні числа, які відповідають точці P одиничного кола (рис. 17.8).

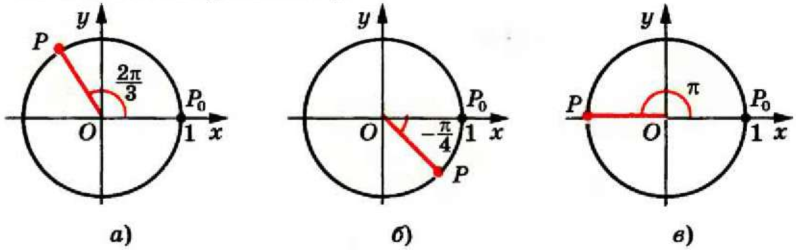


Рис. 17.8

17.20.° Укажіть усі дійсні числа, які відповідають точці P одиничного кола (рис. 17.9).

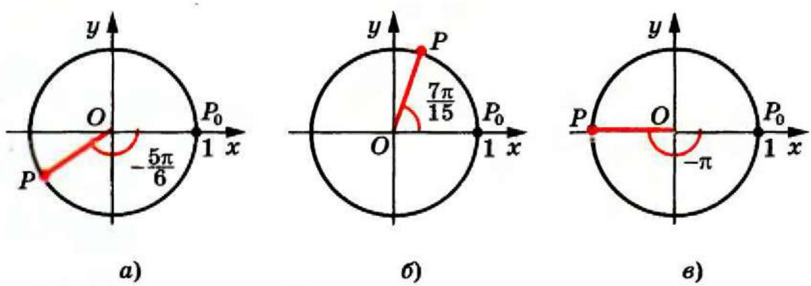


Рис. 17.9

17.21.° Серед кутів 400°, 510°, 870°, 1230°, −150°, −320°, −210°, −680°, −1040° укажіть ті, при повороті на які точка P_0 (1; 0) займе те саме положення, як при повороті на кут: 1) 40°; 2) 150°.

17.22.° Знайдіть кут α, $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$, при повороті на який точка P_0 (1; 0) займе те саме положення, як при повороті на кут: 1) 440°; 2) −170°; 3) −315°; 4) 1000°.

17.23.° Знайдіть координати точок одиничного кола, отриманих при повороті точки P_0 (1; 0) на кути:

1) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 5) $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

2) $-\frac{\pi}{2}+4\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 4) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

17.24.° Побудуйте на одиничному колі точки, яким відповідає така множина чисел:

1) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
2) $\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
3) $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
4) $\frac{\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

17.25.° Знайдіть усі кути, на які потрібно повернути точку $P_0\ (1;\ 0)$, щоб отримати точку:

1) $P_1(0; 1)$;
2) $P_2(-1; 0)$;
3) $P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$;
4) $P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

17.26.° Знайдіть усі кути, на які потрібно повернути точку $P_0\ (1;\ 0)$, щоб отримати точку:

1) $P_1(0;\ -1)$;
2) $P_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
3) $P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

17.27.° Спростіть:

1) $\{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$;
2) $\{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cap \{\pi + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$;
3) $\left\{\frac{\pi n}{20} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4}+\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$;
4) $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$;
5) $\left\{(-1)^n \cdot \frac{\pi}{4}+\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^n \cdot \frac{5\pi}{4}+\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$;
6) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cap \left\{\frac{3\pi n}{10} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

17.28.° Спростіть:

1) $\{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$;
2) $\{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cap \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$;
3) $\left\{\pm\frac{\pi}{2}+\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$;
4) $\left\{\frac{\pi n}{12} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cap \left\{\frac{\pi}{3}+\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$;
5) $\{(-1)^n \pi + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$;
6) $\left\{\frac{\pi(3n+1)}{5} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cap \left\{\frac{\pi(2n+1)}{3} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

17.29.° Доведіть, що площу сектора, який містить дугу в α рад, можна обчислити за формулою $S=\frac{\alpha R^2}{2}$, де R — радіус кола.

18. Тригонометричні функції числового аргументу

Поняття «синус», «косинус» і «тангенс» кутів від 0° до 180° знайомі вам з курсу геометрії 9 класу. Узагальнимо ці поняття для довільного кута повороту α.

Означаючи тригонометричні функції кутів від 0° до 180°, ми користувалися одиничним півколом. Для довільних кутів повороту природно звернутися до одиничного кола.

Означення. Косинусом і синусом кута повороту α називають відповідно абсцису x і ординату y точки $P(x; y)$ одиничного кола такої, що $P = R_O^{\alpha}(P_0)$ (рис. 18.1).

Пишуть: $\cos \alpha = x$, $\sin \alpha = y$.

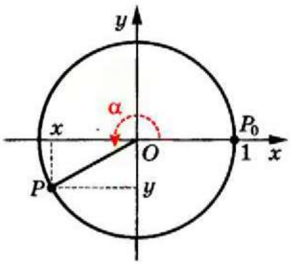


Рис. 18.1

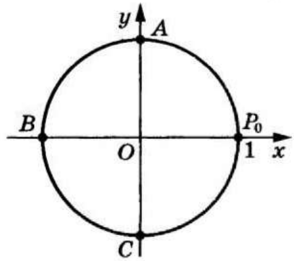


Рис. 18.2

Точки P_0, A, B і C (рис. 18.2) мають відповідно такі координати: (1; 0), (0; 1), (−1; 0), (0; −1). Вони отримані з точки P_0 (1; 0) у результаті повороту відповідно на такі кути: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. Тому, користуючись даним означенням, можна скласти таблицю:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	−1
$\cos x$	1	0	−1	0

ПРИКЛАД 1 Знайдіть усі кути повороту α, при яких: 1) $\sin \alpha = 0$; 2) $\cos \alpha = 0$.

Розв'язання

1) Ординату, яка дорівнює нулю, мають тільки дві точки одиничного кола: P_0 і B (рис. 18.2). Ці точки отримано з точки P_0 у результаті поворотів на такі кути:

$$0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \dots \text{ або}$$
$$-\pi,\ -2\pi,\ -3\pi,\ \dots$$

Отже, $\sin\alpha = 0$ при $\alpha = \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

2) Абсцису, яка дорівнює нулю, мають тільки дві точки одиничного кола: A і C (рис. 18.2). Ці точки отримано з точки P_0 у результаті поворотів на такі кути:

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+\pi,\ \frac{\pi}{2}+2\pi,\ \frac{\pi}{2}+3\pi,\ \dots \text{ або}$$
$$\frac{\pi}{2}-\pi,\ \frac{\pi}{2}-2\pi,\ \frac{\pi}{2}-3\pi,\ \dots$$

Отже, $\cos\alpha = 0$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. ●

Означення. Тангенсом кута повороту α називають відношення синуса цього кута до його косинуса:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Означення. Котангенсом кута повороту α називають відношення косинуса цього кута до його синуса:

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Наприклад, $\operatorname{tg}\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = 0$, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 0$,

$$\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = \frac{\cos\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{3\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1.$$

З означення тангенса випливає, що тангенс визначено для тих кутів повороту α, для яких $\cos\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

З означення котангенса випливає, що котангенс визначено для тих кутів повороту α, для яких $\sin\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ви знаєте, що кожному куту повороту α відповідає *єдина* точка одиничного кола. Отже, кожному значенню кута α відповідає єдине число, яке є значенням синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, котангенса для $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) кута α. Тому залежність значень синуса (косинуса, тангенса, котангенса) від величини кута повороту є функціональною.

Функції $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $p(\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, які відповідають цим функціональним залежностям, називають тригонометричними функціями кута повороту α.

Кожному дійсному числу α поставимо у відповідність кут α рад. Це дозволяє розглядати тригонометричні функції числового аргументу.

Наприклад, запис $\sin 2$ означає синус кута 2 радіана.

З означення синуса і косинуса випливає, що областю визначення функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є множина $\mathbb{R}$.

Оскільки абсциси і ординати точок одиничного кола набувають усіх значень від -1 до 1 включно, то областю значень функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є проміжок $[-1; 1]$.

Кутам повороту α і $\alpha + 2\pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$, відповідає одна й та сама точка одиничного кола. Тому

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z} \\ \cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

Областю визначення функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Областю визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$ є множина

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Щоб знайти області значень цих функцій, звернемося до такої геометричної інтерпретації.

Проведемо пряму $x = 1$. Вона проходить через точку $P_0(1; 0)$ і дотикається до одиничного кола (рис. 18.3).

Нехай точка P отримана з точки $P_0(1; 0)$ у результаті повороту на кут α і розміщена так, як показано на рисунку 18.3. Пряма OP перетинає пряму $x = 1$ у точці M. Проведемо $PN \perp OP_0$.

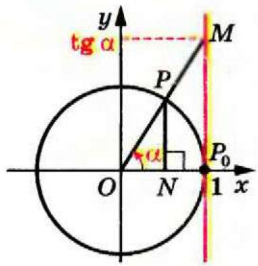


Рис. 18.3

З подібності трикутників OPN і OMP_0 випливає, що $\frac{PN}{ON} = \frac{MP_0}{OP_0}$.

Оскільки $PN = \sin\alpha$, $ON = \cos\alpha$, $OP_0 = 1$, то $MP_0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Отже, ордината точки M дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$.

Можна показати, що і при будь-якому іншому положенні точки P на одиничному колі виконується таке: якщо пряма OP перетинає пряму $x = 1$, то ордината точки перетину дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$. Тому пряму $x = 1$ називають **віссю тангенсів**.

Зрозуміло, що при зміні положення точки P на одиничному колі (рис. 18.4) точка M може зайняти довільне положення на прямій $x = 1$. Це означає, що областю значень функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина $\mathbb{R}$.

Нехай точка P отримана з точки P_0 (1; 0) у результаті повороту на кут α і розміщена так, як показано на рисунку 18.5. Можна показати, що коли пряма OP перетинає пряму $y = 1$, то абсциса точки перетину дорівнює $\operatorname{ctg} \alpha$ (рис. 18.5). Тому пряму $y = 1$ називають **віссю котангенсів**.

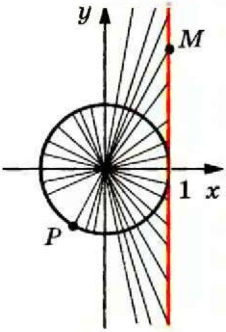


Рис. 18.4

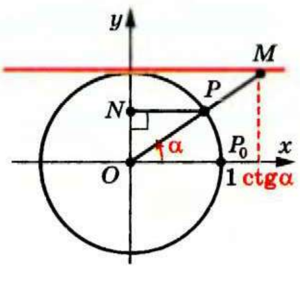


Рис. 18.5

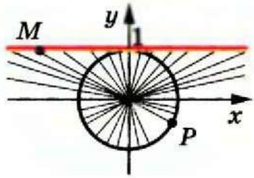


Рис. 18.6

З рисунка 18.6 зрозуміло, що областю значень функції $y = \operatorname{ctg} x$ є множина $\mathbb{R}$.

Якщо точки P_1, O і P_2 лежать на одній прямій, то прямі OP_1 і OP_2 перетинають вісь тангенсів (котангенсів) в одній і тій самій точці M (рис. 18.7, 18.8). Це означає, що тангенси (котангенси) кутів, які відрізняються на π, 2π, 3π і т. д., рівні. Звідси

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha + \pi n),\ n \in \mathbb{Z}$$
$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} (\alpha + \pi n),\ n \in \mathbb{Z}$$

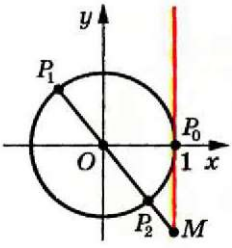


Рис. 18.7

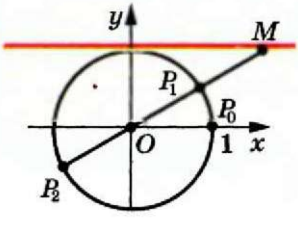


Рис. 18.8

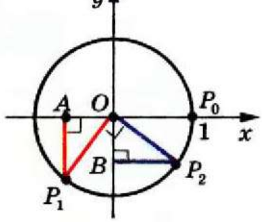


Рис. 18.9

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Нехай точки P_1 і P_2 отримано з точки P_0 у результаті поворотів на кути α і $\alpha + \frac{\pi}{2}$ відповідно. Опустимо перпендикуляри P_1A і P_2B на осі x і y відповідно (рис. 18.9). Оскільки $\angle P_1OP_2 = \frac{\pi}{2}$, то можна встановити, що $\Delta OP_1A = \Delta OP_2B$. Звідси $OA = OB$. Отже, абсциса точки P_1 дорівнює ординаті точки P_2, тобто $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

Випадки розміщення точок P_1 і P_2 в інших координатних чвертях розглядаються аналогічно.

Розгляньте самостійно випадки, коли точки P_1 і P_2 лежать на координатних осях. ●

ПРИКЛАД 3 Знайдіть найбільше і найменше значення виразу: 1) $1 - 4\cos\alpha$; 2) $\frac{(2-\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha}$.

Розв'язання. 1) Оскільки $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, то $-4 \leqslant -4\cos\alpha \leqslant 4$, $-3 \leqslant 1 - 4\cos\alpha \leqslant 5$. Отже, найменше значення даного виразу дорівнює -3; вираз набуває його при $\cos\alpha = 1$. Найбільше значення дорівнює 5; вираз набуває його при $\cos\alpha = -1$.

Відповідь: 5; -3.

2) Маємо: $\frac{(2-\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2 - \sin\alpha$. Зрозуміло, що вираз $2 - \sin\alpha$ набуває всіх значень від 1 до 3. Найменше значення виразу $2 - \sin\alpha$, яке дорівнює 1, досягається лише при $\sin\alpha = 1$, проте при цьому $\cos\alpha = 0$ і вираз $\frac{(2-\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha}$ не визначений. Отже, найменшого значення не існує.

Аналогічно, найбільшого значення вираз $2 - \sin\alpha$ набуває лише при $\sin\alpha = -1$, проте при цьому також $\cos\alpha = 0$. Отже, і найбільшого значення не існує.

Відповідь: не існують.

ПРИКЛАД 4 Знайдіть область значень виразу: 1) $\frac{1}{2-\cos 2x}$; 2) $\frac{1}{3\sin x - 2}$.

Розв'язання. 1) Маємо: $-1 \leqslant \cos 2x \leqslant 1$; $1 \leqslant 2 - \cos 2x \leqslant 3$; $1 \geqslant \frac{1}{2-\cos 2x} \geqslant \frac{1}{3}$. Зрозуміло, що коли значення $\cos 2x$ змінюється від -1 до 1 включно, то значення виразу $\frac{1}{2-\cos 2x}$ змінюється від $\frac{1}{3}$ до 1 включно.

Відповідь: $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$.

2) Маємо: $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; $-3 \leqslant 3\sin x \leqslant 3$; $-5 \leqslant 3\sin x - 2 \leqslant 1$.

При $0 < 3\sin x - 2 \leqslant 1$ отримуємо, що $\frac{1}{3\sin x - 2} \geqslant 1$, причому рівність досягається при $\sin x = 1$.

При $-5 \leqslant 3\sin x - 2 < 0$ отримуємо, що $\frac{1}{3\sin x - 2} \leqslant -\frac{1}{5}$, причому рівність досягається при $\sin x = -1$. Отже, область значень даного виразу — множина $\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty)$. ●

Вправи

18.1.° Обчисліть значення виразу:

1) $2\cos 0° + 3\sin 90°$;
2) $4\operatorname{tg} 180° - 2\operatorname{ctg} 90°$;
3) $\sin 45° + \cos 45°$;
4) $\sin^2 60° + \cos^2 30°$;
5) $\sin 45° \cos 60° \operatorname{ctg} 30°$;
6) $\sin 0 + \operatorname{tg} \pi - \sin\frac{3\pi}{2}$;
7) $5\cos \pi + 4\cos\frac{3\pi}{2} + 2\cos 2\pi$;
8) $6\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - 7\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;
9) $2\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{6}$;
10) $\sin\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.

18.2.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sin 270° - 3\cos 180°$;
2) $\cos 60° + \sin 30°$;
3) $7\operatorname{tg}^2 45° - 3\operatorname{ctg} 45°$;
4) $\sin 180° \cos 120° \operatorname{tg} 60°$;
5) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{6}}$;
6) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$;
7) $\cos\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} + \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}$;
8) $6\cos 0 + 4\sin 2\pi + 4\sin^2\frac{2\pi}{3}$?

18.3.° Відомо, що $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Знайдіть і порівняйте значення виразів:

1) $\sin 2\alpha$ і $2\sin\alpha$; 2) $\cos 3\alpha$ і $3\cos\alpha$.

18.4.° Відомо, що $\beta = \frac{\pi}{4}$. Знайдіть і порівняйте значення виразів:

1) $\sin 4\beta$ і $4\sin\beta$; 2) $\operatorname{tg} 4\beta$ і $4\operatorname{tg}\beta$.

18.5.° Чи можлива рівність:

1) $\cos\alpha = \frac{4}{7}$; 4) $\cos\alpha = \frac{\pi}{3}$; 7) $\operatorname{tg}\alpha = -4$;

2) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; 5) $\cos\alpha = \frac{\pi}{4}$; 8) $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{26}$?

3) $\sin\alpha = -\sqrt[3]{1{,}2}$; 6) $\sin\alpha = \frac{9}{8}$;

18.6.° Чи може дорівнювати числу $\frac{\sqrt{5}}{2}$ значення:

1) $\sin\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$;

2) $\cos\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha$?

18.7.° Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) + 3\operatorname{tg}\alpha}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$;

3) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 - (\sin\alpha - \sin\beta)^2$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$.

18.8.° Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{\sqrt{3}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

2) $\dfrac{\sin 3\beta - \sin\beta\operatorname{tg}\alpha}{\cos 3\alpha - 3\sin(3\alpha + 3\beta)}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$.

18.9.° Укажіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $3\sin\alpha$; 3) $2 - \sin\alpha$; 5) $\sin^2\alpha$;

2) $4 + \cos\alpha$; 4) $6 - 2\cos\alpha$; 6) $2\cos^2\alpha - 3$.

18.10.° Укажіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $-5\cos\alpha$; 2) $\cos\alpha - 2$; 3) $5 + \sin^2\alpha$; 4) $7 - 3\sin\alpha$.

18.11.° Знайдіть усі значення x, при яких виконується рівність:

1) $\sin x = 1$; 2) $\sin x = -1$.

18.12.° Знайдіть усі значення x, при яких виконується рівність:

1) $\cos x = 1$; 2) $\cos x = -1$.

18.13.° Чи існує таке значення $x \in \mathbb{R}$, при якому обидві функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ не визначені?

18.14.° При яких значеннях a можлива рівність:

1) $\cos x = a + 3$; 3) $\cos x = a^2 - 1$; 5) $\cos x = a^2 - 5a + 5$;

2) $\sin x = a^2 + 1$; 4) $\sin x = a^2 - a - 1$; 6) $\operatorname{tg} x = \frac{a+2}{a-2}$?

18.15.° При яких значеннях a можлива рівність:

1) $\sin x = a - 2$; 3) $\cos x = a^2 - 3$;

2) $\cos x = a^2 + 2$; 4) $\sin x = 2a - a^2 - 2$?

18.16.° Порівняйте значення виразів $2\sin\alpha$ і $\sin^2\alpha$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

18.17.° Порівняйте:

1) $\cos 10°$ і $\cos 10° \cos 20°$; 2) $\sin 40°$ і $\sin^2 40°$.

18.18.° Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $\frac{1}{1+\sin\alpha}$; 3) $\frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$;

2) $\frac{\cos^3\alpha}{\cos\alpha}$; 4) $2\cos\alpha + 3\sin\alpha - \frac{2\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$.

18.19.° Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $\frac{1}{\cos\alpha - 2}$; 2) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 3) $\sin\alpha + \cos\alpha - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}$.

18.20.° Знайдіть область значень виразу:

1) $\frac{1}{2+\sin x}$; 2) $\frac{1}{1-\cos x}$; 3) $\frac{2}{4\sin x - 3}$.

18.21.° Знайдіть область значень функції:

1) $y = \frac{2}{3-\cos x}$; 2) $y = \frac{1}{\sin x + 1}$; 3) $y = \frac{1}{1-2\cos x}$.

18.22.° Доведіть, що $\sin\alpha = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

18.23.° Доведіть, що $\cos\alpha = -\cos(\pi + \alpha)$.

Ставай Остроградським!

Видатний український математик Михайло Васильович Остроградський народився в селі Пашенівка на Полтавщині. У 1816–1820 рр. він навчався в Харківському університеті, а потім удосконалював математичну освіту, навчаючись у таких великих учених, як П'єр Симон Лаплас (1749–1827), Симеон Дені Пуассон (1781–1840), Огюстен Луї Коші (1789–1857), Жан Батіст Жозеф Фур'є (1768–1830).

Михайло Васильович Остроградський (1801–1862)

Серед величезної наукової спадщини, яку залишив нам Михайло Остроградський, значну роль відіграють роботи, пов'язані з дослідженням тригонометричних рядів і коливань. Багато важливих математичних теорем сьогодні носять ім'я Остроградського.

Крім наукових досліджень, Остроградський написав низку чудових підручників для молоді, зокрема «Програму і конспект тригонометрії». Сам Остроградський надавав питанню викладання тригонометрії такого значення, що це стало предметом доповіді в Академії наук.

Науковий авторитет Остроградського був настільки високим, що в ті часи, відправляючи молодь на навчання, казали: «Ставай Остроградським!» Це побажання актуальне і сьогодні, тому:

«Ставай Остроградським!»

19. Знаки значень тригонометричних функцій. Парність і непарність тригонометричних функцій

Нехай точку P отримано з точки P_0 (1; 0) у результаті повороту навколо початку координат на кут α. Якщо точка P належить I чверті, то говорять, що кут α є **кутом I чверті**. Аналогічно можна говорити про кути II, III і IV чвертей.

Наприклад, $\frac{\pi}{7}$ і $-300°$ — кути I чверті, $\frac{2\pi}{3}$ і $-185°$ — кути II чверті, $\frac{5\pi}{4}$ і $-96°$ — кути III чверті, $355°$ і $-\frac{\pi}{8}$ — кути IV чверті.

Кути виду $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, не відносять до жодної чверті.

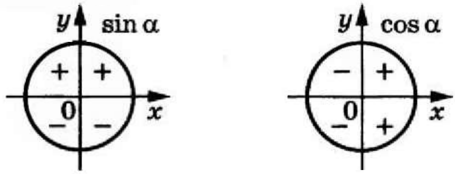
Точки, розміщені в I чверті, мають додатні абсцису і ординату. Отже, якщо α — кут I чверті, то $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$.

Зрозуміло, що коли α — кут II чверті, то $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$.

Якщо α — кут III чверті, то $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$.

Якщо α — кут IV чверті, то $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$.

Знаки значень синуса і косинуса схематично показано на рисунку 19.1.



а) б)

Рис. 19.1

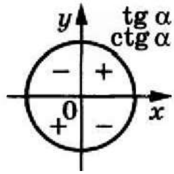


Рис. 19.2

Оскільки $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, то тангенси і котангенси кутів I і III чвертей є додатними, а кутів II і IV чвертей — від'ємними (рис. 19.2).

Нехай точки P_1 і P_2 отримано в результаті повороту точки P_0 (1; 0) на кути α і $-\alpha$ відповідно (рис. 19.3).

Для будь-якого α точки P_1 і P_2 мають рівні абсциси і протилежні ординати. Тоді з означень синуса і косинуса випливає, що для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$

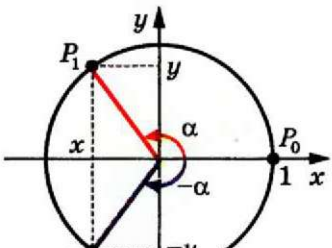


Рис. 19.3

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \end{aligned}}$$

Це означає, що *функція косинус є парною, а функція синус — непарною.*

Області визначення функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ симетричні відносно початку координат (перевірте це самостійно). Крім того:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Отже, *функції тангенс і котангенс є непарними.*

ПРИКЛАД 1 Який знак має: 1) $\sin 280°$; 2) $\mathrm{tg}\,(-140°)$; 3) $\mathrm{tg}\,2$?

Розв'язання. 1) $\sin 280° < 0$, оскільки кут $280°$ є кутом IV чверті;

2) $\mathrm{tg}\,(-140°) > 0$, оскільки кут $-140°$ є кутом III чверті;

3) оскільки $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, то кут 2 рад є кутом II чверті. Отже, $\mathrm{tg}\,2 < 0$. ●

ПРИКЛАД 2 Визначте знак виразу $\cos 123°\ \mathrm{tg}\,231°\ \sin 312°$.

Розв'язання. Оскільки $123°$ — кут II чверті, $231°$ — кут III чверті, $312°$ — кут IV чверті, то $\cos 123° < 0$, $\mathrm{tg}\,231° > 0$, $\sin 312° < 0$ і їх добуток більший за 0. ●

ПРИКЛАД 3 Порівняйте $\sin 200°$ і $\sin(-200°)$.

Розв'язання. Оскільки кут $200°$ — кут III чверті, кут $-200°$ — кут II чверті, то $\sin 200° < 0$, $\sin(-200°) > 0$. Отже, $\sin 200° < \sin(-200°)$. ●

ПРИКЛАД 4 Дослідіть на парність функцію: 1) $f(x) = \frac{1+\cos x}{x^2}$;
2) $f(x) = 1 + \sin x$; 3) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$; 4) $f(x) = \frac{\cos x}{x-1}$.

Розв'язання. 1) Область визначення даної функції $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ є симетричною відносно початку координат. Маємо:

$$f(-x) = \frac{1+\cos(-x)}{(-x)^2} = \frac{1+\cos x}{x^2} = f(x).$$

Отже, дана функція є парною.

2) Область визначення даної функції $D(f) = (-\infty; +\infty)$ є симетричною відносно початку координат. Маємо:

$$f(-x) = 1 + \sin(-x) = 1 - \sin x.$$

Тоді $f(-x) \neq f(x)$; $f(-x) \neq -f(x)$. Отже, дана функція не є ні парною, ні непарною.

3) Область визначення даної функції — усі дійсні числа, крім чисел виду $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, — є симетричною відносно початку координат. Маємо:

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos^2(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} = -f(x).$$

Отже, дана функція є непарною.

4) Область визначення даної функції $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ не є симетричною відносно початку координат. Отже, дана функція не є ні парною, ні непарною. ●

Вправи

19.1.° Кутом якої чверті є кут:

1) $38°$; 3) $302°$; 5) $-98°$; 7) $\frac{3\pi}{5}$; 9) $-\frac{2\pi}{3}$;

2) $119°$; 4) $217°$; 6) $-285°$; 8) $\frac{7\pi}{6}$; 10) $-\frac{5\pi}{4}$?

19.2.° Додатним чи від'ємним числом є значення тригонометричної функції:

1) $\sin 110°$; 4) $\sin(-280°)$; 7) $\sin(-130°)$; 10) $\operatorname{tg} 1$;

2) $\cos 200°$; 5) $\cos 340°$; 8) $\cos 2$; 11) $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}$;

3) $\operatorname{tg} 160°$; 6) $\operatorname{tg}(-75°)$; 9) $\sin(-3)$; 12) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$?

19.3.° Який знак має:

1) $\sin 186°$; 3) $\operatorname{ctg} 340°$; 5) $\operatorname{ctg}(-291°)$; 7) $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{8}$;

2) $\operatorname{tg} 104°$; 4) $\cos(-78°)$; 6) $\sin\frac{3\pi}{7}$; 8) $\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$?

19.4.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sin(-30°)$; 2) $\operatorname{tg}(-60°)$; 3) $\operatorname{ctg}(-45°)$; 4) $\cos(-30°)$.

19.5.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\cos(-60°) + \operatorname{tg}(-45°)$; 2) $\operatorname{ctg}(-60°)\sin(-45°)\cos(-45°)$?

19.6.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sin(-30°) - 2\operatorname{tg}(-45°) + \cos(-45°)$;

2) $5\operatorname{tg} 0 + 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 3\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\cos(-\pi) + 4\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

4) $\dfrac{1{,}5 + \sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

19.7.° Знайдіть значення виразу:

1) $3\sin(-45°) + \cos(-45°) + 2\sin(-30°) + 6\cos(-60°)$;

2) $\sin^2(-60°) + \cos^2(-30°)$;

3) $2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

19.8.° Визначте знак виразу:

1) $\sin 100° \sin 132°$;
2) $\cos 210° \sin 115°$;
3) $\cos 285° \cos(-316°)$;
4) $\operatorname{tg} 112° \sin 165°$;
5) $\cos 318° \operatorname{tg}(-214°)$;
6) $\operatorname{ctg} 300° \sin 220°$;
7) $\sin 1 \cos 2$;
8) $\sin 5 \operatorname{tg} 5$;
9) $\sin 3 \cos 4 \operatorname{tg} 5$;
10) $\sin(-118°) \cos 118° \operatorname{tg} 118°$.

19.9.° Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin 102° \cos 350°$;
2) $\sin 134° \cos 131°$;
3) $\dfrac{\sin 157°}{\cos 256°}$;
4) $\dfrac{\cos 142°}{\sin 72°}$;
5) $\sin 112° \cos(-128°) \operatorname{tg} 198°$;
6) $\sin(-245°) \operatorname{tg} 183° \operatorname{ctg}(-190°)$.

19.10.° Відомо, що $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$;
2) $\dfrac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$;
3) $\dfrac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha}$;
4) $\sin \alpha - \cos \alpha$.

19.11.° Відомо, що $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin \beta \cos \beta$;
2) $\dfrac{\sin \beta}{\cos^2 \beta}$;
3) $\dfrac{\operatorname{tg}^3 \beta}{\sin \beta}$;
4) $\sin \beta + \cos \beta$.

19.12.° Порівняйте:

1) $\operatorname{tg} 130°$ і $\operatorname{tg}(-130°)$;
2) $\operatorname{tg} 110°$ і $\operatorname{tg} 193°$;
3) $\cos 80°$ і $\sin 330°$;
4) $\sin 60°$ і $\sin \frac{8\pi}{7}$;
5) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3}$ і $\cos 280°$;
6) $\operatorname{ctg} 6$ і $\operatorname{ctg} 6°$.

19.13.° Порівняйте:

1) $\sin 200°$ і $\sin(-250°)$;
2) $\operatorname{ctg} 100°$ і $\operatorname{ctg} 80°$;
3) $\cos 250°$ і $\cos 290°$;
4) $\cos 6{,}2$ і $\sin 5$.

19.14.° Відомо, що α — кут III чверті. Спростіть вираз:

1) $\sin \alpha - |\sin \alpha|$;
2) $|\cos \alpha| - \cos \alpha$;
3) $|\operatorname{tg} \alpha| - \operatorname{tg} \alpha$.

19.15.° Відомо, що β — кут IV чверті. Спростіть вираз:

1) $|\sin \beta| + \sin \beta$;
2) $\cos \beta - |\cos \beta|$;
3) $|\operatorname{ctg} \beta| - \operatorname{ctg} \beta$.

19.16.° Кутом якої чверті є кут α, якщо:

1) $\sin \alpha > 0$ і $\cos \alpha < 0$;
2) $\sin \alpha < 0$ і $\operatorname{tg} \alpha > 0$;
3) $|\sin \alpha| = \sin \alpha$ і $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;
4) $\operatorname{ctg} \alpha + |\operatorname{ctg} \alpha| = 0$ і $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$?

19.17.° Кутом якої чверті є кут α, якщо:

1) $\cos\alpha > 0$ і $\operatorname{tg}\alpha > 0$;
2) $\sin\alpha < 0$ і $\operatorname{ctg}\alpha < 0$;
3) $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$ і $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;
4) $|\operatorname{tg}\alpha| - \operatorname{tg}\alpha = 0$ і $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$?

19.18.° Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = \sin^2 x$;
2) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$;
3) $f(x) = \operatorname{tg} x + \cos x$;
4) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$;
5) $f(x) = x^3 + \cos x$;
6) $f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$;
7) $f(x) = \frac{(x-1)\cos x}{x-1}$;
8) $f(x) = \frac{x^3 \sin x}{x}$.

19.19.° Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
2) $f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\sin x - \operatorname{tg} x}$;
3) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2 - 1}$;
4) $f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^3 - 1}$;
5) $f(x) = \cos x + \frac{\pi}{3}$;
6) $f(x) = \frac{(x^2 - 1)\operatorname{ctg} x}{x^2 - 1}$.

20. Періодичні функції

Багато процесів і подій, які відбуваються в навколишньому світі, повторюються через рівні проміжки часу. Наприклад, через 27,3 доби повторюється значення відстані від Землі до Місяця; якщо сьогодні субота, то через 7 діб знову настане субота.

Подібні явища і процеси називають **періодичними**, а функції, які є їх математичними моделями, — **періодичними функціями**.

Ви знаєте, що для будь-якого числа x виконуються рівності

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi);$$
$$\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi).$$

Це означає, що значення функцій синус і косинус періодично повторюються при зміні аргументу на 2π. Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є прикладами періодичних функцій.

Означення. **Функцію f називають періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x з області визначення функції f виконуються рівності**

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Число T називають періодом функції f.

Виконання записаних рівностей для будь-якого $x \in D(f)$ означає, що область визначення періодичної функції f має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $(x_0 - T) \in D(f)$ і $(x_0 + T) \in D(f)$.

Ви знаєте, що для будь-якого x з області визначення функції $y = \operatorname{tg} x$ виконуються рівності

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi).$$

Також для будь-якого x з області визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$ виконуються рівності:

$$\operatorname{ctg}(x - \pi) = \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi).$$

Тоді з означення періодичної функції випливає, що тангенс і котангенс є періодичними з періодом π.

Періодичною є функція дробова частина числа $y = \{x\}$. Її періодом є будь-яке ціле число, відмінне від нуля. Справді, для будь-яких $x \in \mathbb{R}$ і $k \in \mathbb{Z}$ виконується рівність $\{x + k\} = \{x\}$.

Розглянемо деякі властивості періодичних функцій.

Теорема 20.1. ***Якщо число T є періодом функції f, то і число $-T$ також є періодом функції f.***

Справедливість цієї теореми випливає з означення періодичної функції.

Теорема 20.2. ***Якщо числа T_1 і T_2 є періодами функції f, причому $T_1 + T_2 \neq 0$, то число $T_1 + T_2$ також є періодом функції f.***

Доведення. Для будь-якого $x \in D(f)$ можна записати:

$$f(x) = f(x + T_1) = f((x + T_1) + T_2) = f(x + (T_1 + T_2));$$

$$f(x) = f(x - T_1) = f((x - T_1) - T_2) = f(x - (T_1 + T_2)).$$

Звідси для будь-якого $x \in D(f)$ виконуються рівності:

$$f(x - (T_1 + T_2)) = f(x) = f(x + (T_1 + T_2)).$$

Отже, число $T_1 + T_2$ є періодом функції f. ▲

Наслідок. ***Якщо число T є періодом функції f, то будь-яке число виду nT, де $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, також є її періодом.***

Доведіть цей факт самостійно.

Остання властивість означає, що кожна періодична функція має безліч періодів.

Наприклад, будь-яке число виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, є періодом функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$; будь-яке число виду πn, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, є періодом функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$.

Теорема 20.3. ***Якщо число T є періодом функції $y = f(x)$, то число $\frac{T}{k}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$.***

Доведення. Для будь-якого x з області визначення функції $y = f(kx + b)$ можна записати:

$$f(kx+b) = f((kx+b)+T) = f\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)+b\right);$$

$$f(kx+b) = f((kx+b)-T) = f\left(k\left(x-\frac{T}{k}\right)+b\right).$$

Звідси для будь-якого x з області визначення функції $y = f(kx + b)$ виконуються рівності:

$$f\left(k\left(x-\frac{T}{k}\right)+b\right) = f(kx+b) = f\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)+b\right).$$

Отже, число $\frac{T}{k}$ є періодом функції $y = f(kx + b)$. ▲

Якщо серед усіх періодів функції f існує найменший додатний період, то його називають **головним періодом** функції f.

Наприклад, головним періодом функції $y = \{x\}$ є число 1.

Теорема 20.4. ***Головним періодом функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є число 2π; головним періодом функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ є число π.***

Доведення. Проведемо доведення для функції $y = \sin x$ (решту тверджень теореми доводять аналогічно).

Якщо число T є періодом функції $y = \sin x$, то рівність $\sin(x + T) = \sin x$ виконується при будь-якому дійсному значенні x, зокрема при $x = -\frac{T}{2}$. Тоді маємо:

$$\sin\left(-\frac{T}{2}+T\right) = \sin\left(-\frac{T}{2}\right);\quad \sin\frac{T}{2} = -\sin\frac{T}{2};\quad \sin\frac{T}{2} = 0.$$

Звідси $\frac{T}{2} = \pi k$, $T = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. З останньої рівності випливає, що будь-який період функції $y = \sin x$ має вигляд $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Найменшим додатним числом виду $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, є число 2π, яке є періодом функції $y = \sin x$.

Отже, число 2π — головний період функції $y = \sin x$. ▲

Застосовуючи теореми 20.3 і 20.4 до функцій $y = \sin(kx + b)$ і $y = \cos(kx + b)$, де $k \neq 0$, отримуємо, що число $\frac{2\pi}{k}$ є періодом, а число $\frac{2\pi}{|k|}$ є головним періодом цих функцій.

Головним періодом функцій $y = \operatorname{tg}(kx + b)$ і $y = \operatorname{ctg}(kx + b)$, де $k \neq 0$, є число $\frac{\pi}{|k|}$.

Зазначимо, що не будь-яка періодична функція має головний період. Наприклад, функція $y = c$, де c — деяке число, є періодичною. Очевидно, що будь-яке дійсне число, відмінне від нуля, є її періодом. Отже, ця функція не має головного періоду.

Існують періодичні функції, відмінні від константи, які теж не мають головного періоду.

Наприклад, розглянемо функцію Діріхле[1] $y = \mathfrak{D}(x)$. Ця функція є періодичною, причому будь-яке раціональне число, відмінне від нуля, є її періодом. Це випливає з того, що сума двох раціональних чисел — число раціональне, а сума раціонального і ірраціонального чисел — число ірраціональне. Отже, функція Діріхле не має головного періоду.

Теорема 20.5. ***Якщо T — головний період функції f, то будь-який період функції f має вигляд nT, де $n \in \mathbb{Z}$ і $n \neq 0$.***

Доведення. Нехай T_1 — період виду, відмінного від указаного. Тоді можна підібрати таке ціле n і таке дійсне $\alpha \in (0; 1)$, що $T_1 = nT + \alpha T$. Маємо: $f(x) = f(x + T_1) = f(x + nT + \alpha T) = f(x + \alpha T)$, $f(x) = f(x - T_1) = f(x - nT - \alpha T) = f(x - \alpha T)$. Отже, αT — період. Проте $0 < \alpha T < T$. Отримали суперечність (адже T — головний період). ▲

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу: 1) $\sin 660°$; 2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$; 3) $\operatorname{tg} 135°$.

Розв'язання. 1) $\sin 660° = \sin(720° - 60°) = \sin(-60° + 360° \cdot 2) = \sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = -\sin\frac{13\pi}{3} = -\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg}(-45° + 180°) = \operatorname{tg}(-45°) = -1$. ●

[1] Нагадаємо, що $\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, \text{ якщо } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

На рисунку 20.1 зображено графік деякої періодичної функції f з періодом T, $D(f) = \mathbb{R}$.

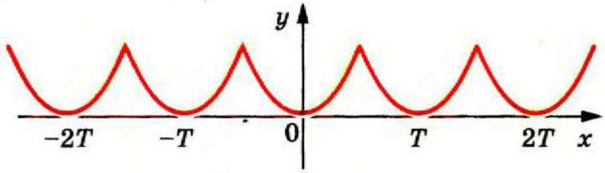


Рис. 20.1

Очевидно, що фрагменти графіка цієї функції на проміжках $[0; T]$, $[T; 2T]$, $[2T; 3T]$ і т. д., а також на проміжках $[-T; 0]$, $[-2T; -T]$, $[-3T; -2T]$ і т. д. є рівними фігурами, причому будь-яка з цих фігур може бути отримана з будь-якої іншої паралельним перенесенням на вектор з координатами $(nT; 0)$, де n — деяке ціле число.

Узагалі, якщо проміжки $[a; b]$ і $[c; d]$ є такими, що $c = a + Tn$, $d = b + Tn$, $n \in \mathbb{Z}$, то частини графіка функції f на цих проміжках є рівними фігурами (рис. 20.2).

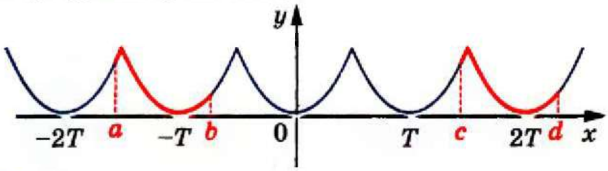


Рис. 20.2

ПРИКЛАД 2 На рисунку 20.3 зображено фрагмент графіка періодичної функції, період якої дорівнює T. Побудуйте графік цієї функції на проміжку $\left[-\frac{3T}{2}; \frac{5T}{2}\right]$.

Розв'язання. Побудуємо образи зображеної фігури при паралельних перенесеннях на вектори з координатами $(T; 0)$, $(2T; 0)$ і $(-T; 0)$. Об'єднання даної фігури та отриманих образів — шуканий графік (рис. 20.4). ●

Рис. 20.3

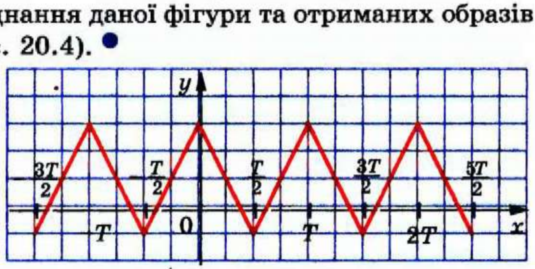


Рис. 20.4

ПРИКЛАД 3 Покажіть, що число $T = \pi$ є періодом функції $f(x)=\sqrt{-\cos^2 x}$.

Розв'язання. Областю визначення функції f є множина значень змінної x, при яких $\cos x = 0$, тобто $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Тоді якщо $x \in D(f)$, то $(x + \pi) \in D(f)$ і $(x - \pi) \in D(f)$.

Оскільки $E(f) = \{0\}$, то $f(x - \pi) = f(x) = f(x + \pi) = 0$. ●

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що функція $f(x)=\frac{1}{x-2}$ не є періодичною.

Розв'язання. Зауважимо, що $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Припустимо, що функція f є періодичною з періодом $T \neq 0$. Очевидно, що $x_0 = 2 - T \in D(f)$, тоді $x_0 + T = 2 - T + T \in D(f)$, тобто $2 \in D(f)$ — отримали суперечність. ●

Означення. Додатні числа a і b називають сумірними (спільномірними), якщо $\frac{a}{b}$ — раціональне число. Якщо $\frac{a}{b}$ — ірраціональне число, то числа a і b є несумірними.

Наприклад, числа в парах 3 і 5, $\sqrt{2}$ і $\sqrt{32}$ є сумірними, а числа 1 і $\sqrt{3}$ є несумірними.

Означення. Число T, яке є як періодом функції f, так і періодом функції g, називають спільним періодом функцій f і g.

Наприклад, число $T = 2\pi$ є спільним періодом функцій $y = \sin x$ і $y = \operatorname{tg} x$.

Теорема 20.6. ***Якщо існують період T_f функції f і період T_g функції g такі, що числа T_f і T_g є сумірними, то функції f і g мають спільний період.***

Доведення. Оскільки періоди T_f і T_g є сумірними, то $\frac{T_f}{T_g} = \frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Звідси $T_f \cdot n = T_g \cdot m$. Тоді за наслідком з теореми 20.2 число $T = T_f \cdot n = T_g \cdot m$ є періодом як функції f, так і функції g. ▲

Доведення цієї теореми показує, як можна знаходити спільний період двох функцій.

ПРИКЛАД 5 Знайдіть період функції $y = \cos\frac{6x}{5} + \mathrm{tg}\,\frac{6x}{7}$.

Розв'язання. Якщо ми знайдемо спільний період функцій $f(x) = \cos\frac{6x}{5}$ і $g(x) = \mathrm{tg}\,\frac{6x}{7}$, то цим самим знайдемо період даної функції.

Скориставшись теоремою 20.3, запишемо:

$$T_f = 2\pi : \frac{6}{5} = \frac{5\pi}{3},\quad T_g = \pi : \frac{6}{7} = \frac{7\pi}{6}.$$

Тоді $\frac{T_f}{T_g} = \frac{10}{7}$. Отже, періоди T_f і T_g сумірні, а тому функції f і g мають спільний період T. Він дорівнює $7T_f$ або $10T_g$, тобто $T = \frac{35\pi}{3}$.

Відповідь: $\frac{35\pi}{3}$.

ПРИКЛАД 6 Знайдіть період функції

$$y = \sin 2x - 3\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 4\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}.$$

Розв'язання. Розглянемо функції $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = -3\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, $h(x) = 4\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$. Для розв'язання задачі достатньо знайти їх спільний період.

Це можна зробити, наприклад, так: спочатку знайти період функції $\varphi(x) = f(x) + g(x)$, а потім знайти спільний період функцій φ і h.

Проте існує більш ефективний метод.

Маємо: $T_f = \pi$, $T_g = \frac{4\pi}{3}$, $T_h = 2\pi$.

Запишемо ці періоди в такому вигляді:

$$T_f = \frac{1}{1}\cdot\pi,\quad T_g = \frac{4}{3}\cdot\pi,\quad T_h = \frac{2}{1}\cdot\pi.$$

Розглянемо число $T = \frac{\text{НСК}(1; 4; 2)}{\text{НСД}(1; 3; 1)}\cdot\pi = 4\pi$.

Оскільки $T = 4T_f$, $T = 3T_g$ і $T = 2T_h$, то число T є спільним періодом функцій f, g і h.

Відповідь: 4π.

Зауважимо, що алгоритм знаходження спільного періоду трьох функцій, запропонований у розв'язанні прикладу 6, поширюється

на будь-яку скінченну кількість функцій f_1, f_2, ..., f_k, періоди яких можна відповідно подати у вигляді

$\frac{m_1}{n_1} \cdot t$, $\frac{m_2}{n_2} \cdot t$, ..., $\frac{m_k}{n_k} \cdot t$, де m_1, m_2, ..., m_k, n_1, n_2, ..., n_k — натуральні числа, $t \neq 0$.

Вправи

20.1.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sin 390°$;
2) $\cos 420°$;
3) $\operatorname{tg} 780°$;
4) $\operatorname{ctg} 405°$;
5) $\cos(-750°)$;
6) $\sin(-390°)$;
7) $\operatorname{tg}(-210°)$;
8) $\operatorname{ctg} 225°$;
9) $\cos 300°$;
10) $\operatorname{tg} 150°$;
11) $\cos \frac{11\pi}{6}$;
12) $\sin \frac{23\pi}{4}$;
13) $\sin \frac{5\pi}{3}$;
14) $\cos \frac{7\pi}{4}$;
15) $\operatorname{tg}\left(-\frac{19\pi}{3}\right)$.

20.2.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sin 420°$;
2) $\cos 405°$;
3) $\operatorname{tg}(-315°)$;
4) $\sin 1110°$;
5) $\operatorname{tg} 765°$;
6) $\cos \frac{7\pi}{3}$;
7) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4}$;
8) $\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$;
9) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$.

20.3.° На рисунку 20.5 зображено частину графіка періодичної функції, період якої дорівнює T. Побудуйте графік цієї функції на проміжку $[-2T; 3T]$.

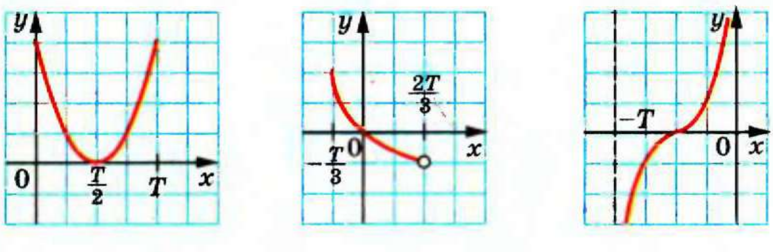


Рис. 20.5

20.4.° На рисунку 20.6 зображено частину графіка періодичної функції, період якої дорівнює T. Побудуйте графік цієї функції на проміжку $[-2T;\ 2T]$.

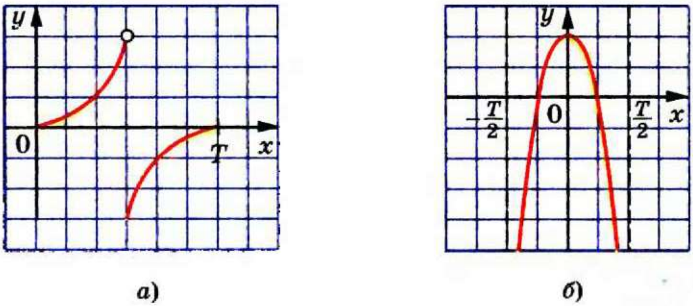


Рис. 20.6

20.5.° Доведіть, що число T є періодом функції f:

1) $f(x)=\cos\frac{x}{4}$, $T=8\pi$;
2) $f(x)=\operatorname{tg} 3x$, $T=-\frac{2\pi}{3}$;
3) $f(x)=\operatorname{ctg} \pi x$, $T=3$;
4) $f(x)=\sin(5x-2)$, $T=\frac{4\pi}{5}$.

20.6.° Доведіть, що числа $\frac{2\pi}{3}$ і -4π є періодами функції $f(x)=\cos 3x$.

20.7.° Знайдіть головний період функції:

1) $f(x)=\cos(3x+1)$;
2) $f(x)=\operatorname{tg}(2x+1)$;
3) $f(x)=\operatorname{ctg}(-7x+2)$;
4) $f(x)=\sin 2\pi x$;
5) $f(x)=\cos\sqrt{3}x$;
6) $f(x)=\operatorname{tg}(4\pi x-3)$;
7) $f(x)=\left\{6x+\frac{5}{8}\right\}$;
8) $f(x)=\left\{-\sqrt{2}x\right\}$;
9) $f(x)=\left\{\pi x+\frac{1}{\pi}\right\}$.

20.8.° Знайдіть головний період функції:

1) $f(x)=\sin(3x-1)$;
2) $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}+2\right)$;
3) $f(x)=\operatorname{tg}(-x+1)$;
4) $f(x)=\cos \pi x$;
5) $f(x)=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}+4\right)$;
6) $f(x)=\left\{\frac{x}{4}-2\right\}$.

20.9.° Функція f така, що $D(f)\cap[-1;\ 1]\neq\varnothing$. Доведіть, що є періодичною функція:

1) $y=f(\cos x)$;
2) $y=f(\sin x)$.

20.10.° Для довільної функції f доведіть періодичність функції:

1) $y=f(\operatorname{tg} x)$;
2) $y=f(\operatorname{ctg} x)$.

20.11.$^\bullet$ Доведіть, що число π є періодом функції $y=\sqrt{-\sin^2 x}$.

20.12.$^\bullet$ Знайдіть головний період функції $f(x)=\sqrt{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}$.

20.13.$^\bullet$ Знайдіть головний період функції $f(x)=\sqrt{1-\dfrac{1}{\sin^2 x}}$.

20.14.$^\bullet$ Доведіть, що функція $f(x)=\sin\left(\sqrt{x}\right)^2$ — неперіодична.

20.15.$^\bullet$ Доведіть, що функція $f(x)=\cos\left(\sqrt{x}\right)^2$ не є періодичною.

20.16.$^\bullet$ Доведіть, що коли функція є зростаючою (спадною), то вона є неперіодичною.

20.17.$^\bullet$ Знайдіть період функції:

1) $f(x)=\sin\dfrac{3x}{2}+\operatorname{tg}7x$;

2) $f(x)=\sin 3x+\cos\dfrac{3x}{4}+\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{9x}{5}$;

3) $f(x)=\sin\pi x-2\cos\dfrac{\pi x}{3}$;

4) $f(x)=\sin\pi x+\left\{3x-\dfrac{1}{2}\right\}$.

20.18.$^\bullet$ Знайдіть період функції:

1) $f(x)=\cos x+2\sin\left(\dfrac{3x}{5}+\dfrac{\pi}{6}\right)$;

2) $f(x)=\cos\dfrac{5x}{8}+5\operatorname{tg}\left(\dfrac{7x}{11}-\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin(6x-3)$;

3) $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{4\pi x}{9}+\operatorname{ctg}\dfrac{9\pi x}{4}$;

4) $f(x)=2\sin 5\pi x+\dfrac{1}{3}\{2x\}-\operatorname{ctg}\dfrac{13\pi x}{7}$.

20.19.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях параметра a число π є періодом функції $f(x)=\dfrac{\sin x}{a-\cos x}$?

20.20.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях параметра a число $\dfrac{\pi}{2}$ є періодом функції $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{3a+\sin 2x}$?

20.21.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі раціональні значення параметра a, при яких функції $f(x)=\cos\dfrac{2x}{\sqrt{5+a^2}}$ і $g(x)=\operatorname{tg}\dfrac{x}{\sqrt{125}-4a+1}$ мають спільний період.

20.22.•• При яких значеннях параметра a, де $a \in \mathbb{Q}$, серед періодів функцій $f(x) = \sin \frac{2ax}{a^2 + \sqrt{12}}$ і $g(x) = \operatorname{tg} \frac{2x}{1 - 2a + \sqrt{108}}$ знайдуться однакові?

20.23.•• При яких цілих значеннях n число 5π є періодом функції $f(x) = \cos nx \sin \frac{15x}{n^2}$?

20.24.•• При яких цілих значеннях n число 3π є періодом функції $f(x) = \cos 8nx \cos \frac{12x}{n^2}$?

20.25.•• Функцію f задано формулою

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{101}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{101}\right) + \ldots + \sin\left(x + \frac{202\pi}{101}\right).$$

Чи має функція f додатний період, менший від 2π?

20.26.•• Функцію f задано формулою

$$f(x) = \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{41}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{41}\right) + \ldots + \cos\left(x + \frac{80\pi}{41}\right).$$

Чи має функція f додатний період, менший від 2π?

20.27.•• Чи існує функція, для якої кожне ірраціональне число є її періодом, проте не існує раціонального числа, яке було б її періодом?

20.28.•• Відомо, що функція $y = (f(x))^3 + f(x)$ є періодичною. Доведіть, що функція f також є періодичною.

20.29.•• Функція f є такою, що функція $y = (f(x))^2 + f(x)$ є періодичною. Чи обов'язково функція f також є періодичною?

20.30.* Періодична функція f така, що серед чисел $f(1)$, $f(2)$, ... є нескінченна кількість різних. Доведіть, що кожний період функції f — число ірраціональне.

20.31.* Чи існує періодична функція f така, що $f(n) = n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$?

20.32.* Неперіодичні функції f і g визначені на $\mathbb{R}$. Чи може функція $y = f(g(x))$ бути періодичною?

20.33.* Функція f є такою, що $f(0) = 1$ і при всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x+2) = \frac{f(x)}{5f(x) - 1}$. Знайдіть $f(100)$.

20.34.* Функція f є такою, що при всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x+1) = \frac{f(x) - 1}{f(x) + 1}$. Доведіть, що f — періодична функція.

20.35.* Функція f є такою, що при всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}\,f(x)$. Доведіть, що f — періодична функція.

20.36.* Періодична функція f є такою, що при всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(2x) = 2f(x)$. Доведіть, що функція f не має головного періоду.

20.37.* Періодична функція f є такою, що при всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}f(x)$. Доведіть, що функція f не має головного періоду.

20.38.* Доведіть:

1) періодичність функції

$$f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{5}\right]+\left[x+\frac{2}{5}\right]+\left[x+\frac{3}{5}\right]+\left[x+\frac{4}{5}\right]-[5x];$$

2) рівність $[x]+\left[x+\frac{1}{5}\right]+\left[x+\frac{2}{5}\right]+\left[x+\frac{3}{5}\right]+\left[x+\frac{4}{5}\right]=[5x]$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Про суму періодичних функцій

Функції $f(x)=\cos\frac{6x}{5}$ і $g(x)=\operatorname{tg}\frac{6x}{7}$ є періодичними. У прикладі 5 п. 20 ми з'ясували, що функція $y = f(x) + g(x)$ також є періодичною.

Виникає природне запитання: «Чи завжди сума двох періодичних функцій є періодичною функцією?»

Розглянемо функції $f(x)=\sqrt{-\sin^2 x}$ і $g(x)=\sqrt{-\cos^2 x}$. Ці функції є періодичними (див. приклад 3 і задачу 20.11 п. 20). При цьому $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $D(g)=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Очевидно, що $D(f) \cap D(g) = \varnothing$. Отже, функція $y = f(x) + g(x)$ не визначена при жодному значенні x.

Спробуємо підкорегувати запитання. Нехай періодичні функції f і g такі, що $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$. Чи завжди функція $y = f(x) + g(x)$ є періодичною?

Якщо існують сумірні періоди T_f і T_g функцій f і g відповідно, то в силу теореми 20.6 функції f і g мають спільний період, а отже, функція $y = f(x) + g(x)$ є періодичною.

Залишається розглянути випадок, коли будь-який додатний період функції f є несумірним з будь-яким додатним періодом функції g.

Наприклад, розглянемо функції $f(x) = \cos x$ і $g(x) = \cos(\sqrt{2}x)$.

Очевидно, що функції f і g не мають сумірних періодів.

Доведемо, що функція $y = \cos x + \cos(\sqrt{2}x)$ є неперіодичною.

Припустимо супротивне. Нехай число $T \neq 0$ є періодом цієї функції. Тоді для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\cos(x+T) + \cos\left(\sqrt{2}(x+T)\right) = \cos x + \cos\left(\sqrt{2}x\right).$$

При $x = 0$ ця рівність набуває такого вигляду:

$$\cos T + \cos\left(\sqrt{2}T\right) = 2.$$

Оскільки $\cos T \leqslant 1$ і $\cos\left(\sqrt{2}T\right) \leqslant 1$, то доходимо висновку, що

$$\begin{cases} \cos T = 1, \\ \cos\left(\sqrt{2}T\right) = 1. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо, що $T = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, з другого — $T = \frac{2\pi n}{\sqrt{2}}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Це означає, що для деяких цілих m і n має виконуватись рівність

$$2\pi m = \frac{2\pi n}{\sqrt{2}}.$$

Звідси $m = \frac{n}{\sqrt{2}}$.

Але з огляду на ірраціональність числа $\sqrt{2}$ остання рівність можлива лише при $m = n = 0$, що суперечить умові $T \neq 0$.

Після цього прикладу може скластися враження, що коли періодичні функції f і g не мають сумірних періодів і $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$, то функція $y = f(x) + g(x)$ завжди є неперіодичною. Проте це не так.

Розглянемо функції

$$f(x) = \begin{cases} b, \text{ якщо } x = a + b\sqrt{2}, \\ 0, \text{ якщо } x \neq a + b\sqrt{2} \end{cases} \text{ і } g(x) = \begin{cases} a, \text{ якщо } x = a + b\sqrt{2}, \\ 0, \text{ якщо } x \neq a + b\sqrt{2}, \end{cases}$$

де a і b — довільні цілі числа.

Наприклад, $f\left(3 + 2\sqrt{2}\right) = 2$, $g\left(3 + 2\sqrt{2}\right) = 3$,

$$f\left(\sqrt{8}\right) = f\left(0 + 2\sqrt{2}\right) = 2, \quad g\left(\sqrt{8}\right) = g\left(0 + 2\sqrt{2}\right) = 0,$$

$f(\sqrt{3})=0$, $g(\sqrt{3})=0$, оскільки число $\sqrt{3}$ неможливо подати у вигляді $a+b\sqrt{2}$ з цілими a і b.

Множину чисел виду $a+b\sqrt{2}$, де a і b — цілі числа, позначатимемо $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$. Зауважимо, що кожне число $x\in\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ однозначно задає відповідні числа a і b.

Неважко переконатися, що $T = 1$ є періодом функції f. Покажемо, що це число є головним періодом.

Припустимо, що функція f має період $T_1 \in (0; 1)$. Розглянемо два випадки.

1) $T_1\in\mathbb{Z}(\sqrt{2})$, тобто $T_1=a+b\sqrt{2}$, де a і b — деякі цілі числа. Зазначимо, що $b \neq 0$, інакше T_1 — ціле і $T_1 \notin (0; 1)$. Тоді рівність $f(x) = f(x + T_1)$ не виконується, наприклад, при $x = 0$. Справді, $f(0) = 0$, а $f(T_1)=f(a+b\sqrt{2})=b$.

2) $T_1\notin\mathbb{Z}(\sqrt{2})$. Тоді рівність $f(x) = f(x + T_1)$ не виконується, наприклад, при $x=\sqrt{2}$. Справді, $f(\sqrt{2})=1$, а $f(\sqrt{2}+T_1)=0$, оскільки $\sqrt{2}+T_1\notin\mathbb{Z}(\sqrt{2})$.

Аналогічно можна показати, що головним періодом функції g є число $\sqrt{2}$.

Отже, в силу теореми 20.5 періодами функції f є лише цілі числа n, де $n \neq 0$, а періодами функції g — лише числа виду $\sqrt{2}k$, де $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Тоді зрозуміло, що жодні два періоди функцій f і g не є сумірними.

Функція $y = f(x) + g(x)$ визначається так:

$$y=\begin{cases}a+b, & \text{якщо } x=a+b\sqrt{2},\\ 0, & \text{якщо } x\neq a+b\sqrt{2},\end{cases}$$

де a і b — довільні цілі числа.

Легко перевірити, що число $T=\sqrt{2}-1$ є періодом цієї функції.

Отже, ми показали, що коли будь-які додатні періоди функцій f і g несумірні і $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$, то функція $y = f(x) + g(x)$ може бути як неперіодичною, так і періодичною.

Проте можна довести такий факт: якщо неперервні на $\mathbb{R}$ періодичні функції f і g не мають сумірних періодів, то функція $y = f(x) + g(x)$ є неперіодичною.

Вправи

20.39. Доведіть, що коли функція $f(x) = \sin x + \cos bx$ періодична, то b — раціональне число.

20.40. Доведіть, що коли функція $f(x) = \cos x + \cos bx$ періодична, то b — раціональне число.

20.41. Доведіть, що функція $f(x) = \{x\} + \sin^2 x$ не є періодичною.

20.42. Доведіть, що функція $f(x) = \mathfrak{D}(x) + \cos x$ не є періодичною.

20.43. При яких значеннях параметра a рівняння $2\cos ax - 3\operatorname{tg}^2 x - 2 = 0$ має єдиний розв'язок?

20.44. При яких значеннях параметра a рівняння $1 + \sin^2 ax = \cos x$ має єдиний розв'язок?

20.45. Чи можна функцію $y = x^2$ подати у вигляді суми двох періодичних функцій?

21. Властивості і графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$

Періодичність тригонометричних функцій дозволяє досліджувати їх властивості та будувати графіки за такою схемою.

1) Розглянути проміжок виду $[a; a + T]$, тобто довільний проміжок завдовжки в період T $\left(\text{найчастіше обирають проміжок } [0; T] \text{ або проміжок } \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]\right)$.
2) Дослідити властивості функції на вибраному проміжку.
3) Побудувати графік функції на цьому проміжку.
4) Здійснити паралельне перенесення отриманої фігури на вектори з координатами $(nT; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$.

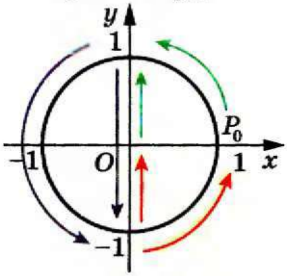


Рис. 21.1

Розглянемо функцію $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$, тобто на проміжку завдовжки в період цієї функції.

При повороті точки $P_0(1; 0)$ навколо початку координат на кути від 0 до $\frac{\pi}{2}$ ордината точки одиничного кола збільшується від 0 до 1 (рис. 21.1). Це означає, що функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

При повороті точки P_0 (1; 0) на кути від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ ордината точки одиничного кола зменшується від 1 до −1 (рис. 21.1). Отже, функція $y = \sin x$ спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

При повороті точки P_0 (1; 0) на кути від $\frac{3\pi}{2}$ до 2π ордината точки одиничного кола збільшується від −1 до 0 (рис. 21.1). Отже, функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Функція $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ має три нулі: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Якщо $x \in (0; \pi)$, то $\sin x > 0$; якщо $x \in (\pi; 2\pi)$, то $\sin x < 0$.

Функція $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ досягає свого найбільшого значення, яке дорівнює 1, при $x = \frac{\pi}{2}$ і найменшого значення, яке дорівнює −1, при $x = \frac{3\pi}{2}$.

Отримані властивості функції $y = \sin x$ дозволяють побудувати її графік на проміжку $[0; 2\pi]$ (рис. 21.2). Графік можна побудувати точніше, якщо скористатися даними таблиці значень функції $y = \sin x$, наведеної на форзаці 3.

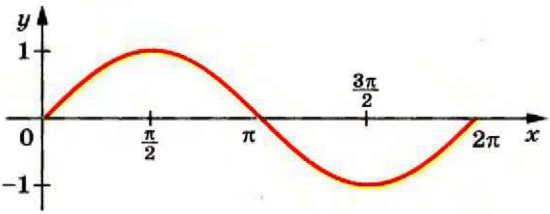


Рис. 21.2

На всій області визначення графік функції $y = \sin x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(2\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 21.3).

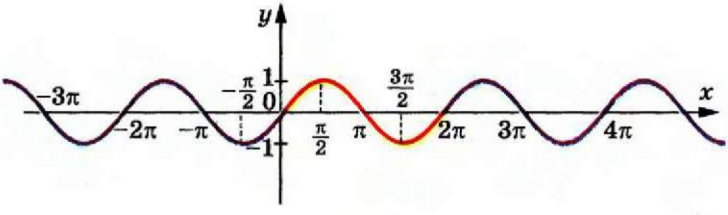


Рис. 21.3

Графік функції $y = \sin x$ називають **синусоїдою**.

У таблиці наведено основні властивості функції $y = \sin x$.

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$[-1; 1]$
Періодичність	Періодична з головним періодом, який дорівнює 2π
Нулі функції	Числа виду πn, $n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\sin x > 0$ на кожному з проміжків виду $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$ $\sin x < 0$ на кожному з проміжків виду $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
Парність	Непарна
Зростання/ спадання	Зростає на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ Спадає на кожному з проміжків виду $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$
Найбільше і найменше значення	Найбільшого значення, яке дорівнює 1, набуває в точках виду $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ Найменшого значення, яке дорівнює -1, набуває в точках виду $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Розглянемо функцію $y = \cos x$ на проміжку $[0; 2\pi]$.

Розглядаючи повороти точки $P_0\ (1; 0)$ навколо початку координат, можна дійти такого висновку: функція $y = \cos x$ спадає на проміжку $[0; \pi]$ і зростає на проміжку $[\pi; 2\pi]$.

Функція $y = \cos x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ має два нулі: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

Якщо $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, то $\cos x > 0$; якщо $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, то $\cos x < 0$.

Функція $y = \cos x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ досягає свого найбільшого значення, яке дорівнює 1, при $x = 0$ або $x = 2\pi$ і найменшого значення, яке дорівнює -1, при $x = \pi$.

Графік функції $y = \cos x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$ зображено на рисунку 21.4.

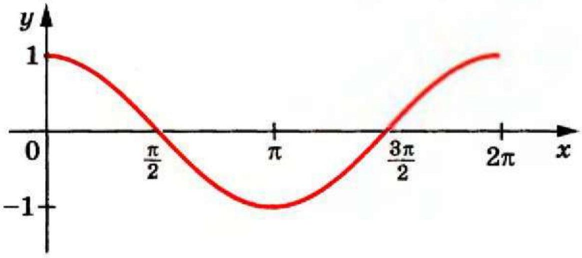


Рис. 21.4

На всій області визначення графік функції $y = \cos x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(2\pi n;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 21.5).

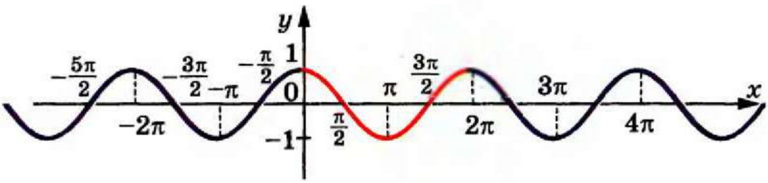


Рис. 21.5

Графік функції $y = \cos x$ називають косинусоїдою.

Якщо скористатися формулою $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (див. приклад 2 п. 18), то зрозуміло, що графік функції $y = \cos x$ можна отримати як результат паралельного перенесення графіка функції $y = \sin x$ на вектор з координатами $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ (рис. 21.6). Це означає, що графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ — рівні фігури.

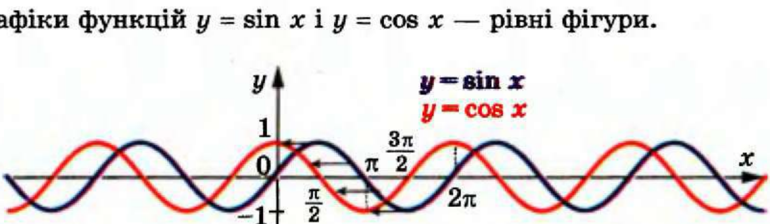


Рис. 21.6

У таблиці наведено основні властивості функції $y = \cos x$.

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$[-1; 1]$
Періодичність	Періодична з головним періодом, який дорівнює 2π
Нулі функції	Числа виду $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\cos x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$ $\cos x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$
Парність	Парна
Зростання/спадання	Зростає на кожному з проміжків виду $[\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n],\ n \in \mathbb{Z}$ Спадає на кожному з проміжків виду $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n],\ n \in \mathbb{Z}$
Найбільше і найменше значення	Найбільшого значення, яке дорівнює 1, набуває в точках виду $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ Найменшого значення, яке дорівнює -1, набуває в точках виду $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

ПРИКЛАД 1 Порівняйте: 1) $\sin 0{,}7\pi$ і $\sin 0{,}71\pi$; 2) $\cos 324°$ і $\cos 340°$.

Розв'язання. 1) Оскільки числа $0{,}7\pi$ і $0{,}71\pi$ належать проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, на якому функція $y = \sin x$ спадає, і $0{,}7\pi < 0{,}71\pi$, то $\sin 0{,}7\pi > \sin 0{,}71\pi$.

2) Оскільки 324° і 340° належать проміжку [180°; 360°], на якому функція $y = \cos x$ зростає, і $324° < 340°$, то $\cos 324° < \cos 340°$. •

ПРИКЛАД 2 Порівняйте $\sin 40°$ і $\cos 40°$.

Розв'язання. Оскільки $\sin 40° < \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 40° > \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos 40° > \sin 40°$. •

ПРИКЛАД 3 Чи можлива рівність $\sin\alpha = 2\sin 31°$?

Розв'язання. Оскільки $\sin 31° > \sin 30° = \frac{1}{2}$, то $2\sin 31° > 1$. Отже, дана рівність неможлива. ●

ПРИКЛАД 4 Побудуйте графік функції $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. Шуканий графік отримуємо з графіка функції $y = \sin x$ у результаті його паралельного перенесення вздовж осі абсцис у від'ємному напрямі на $\frac{\pi}{3}$ одиниць (рис. 21.7). ●

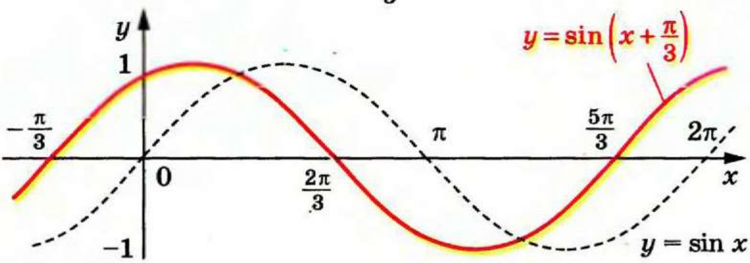


Рис. 21.7

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Розв'язання. Стиснемо графік функції $y = \sin x$ до осі ординат у 2 рази, тобто зменшимо у 2 рази відстані від кожної точки графіка функції $y = \sin x$ до осі ординат. Отримаємо графік функції $y = \sin 2x$. Потім цей графік стиснемо у 2 рази до осі абсцис. Це і буде шуканий графік (рис. 21.8). ●

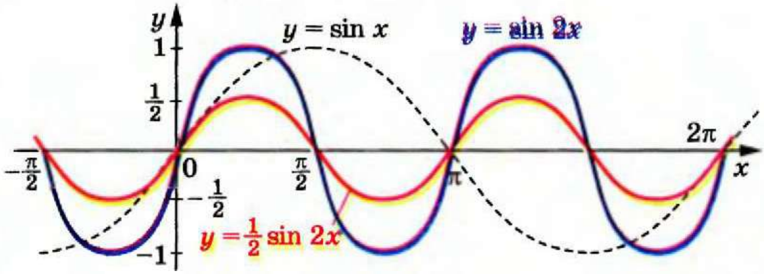


Рис. 21.8

ПРИКЛАД 6 Побудуйте графік функції $y = \sin\left|2x - \frac{\pi}{3}\right|$.

Розв'язання. Проведемо такі перетворення:

1) $y = \sin x \rightarrow y = \sin|x|$ — симетрія відносно осі ординат частини графіка, яка лежить у півплощині $x \geqslant 0$;

2) $y = \sin|x| \rightarrow y = \sin|2x|$ — стиск до осі ординат у 2 рази;

3) $y=\sin|2x| \rightarrow y=\sin\left|2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right|$ — паралельне перенесення вздовж осі абсцис у додатному напрямі на $\frac{\pi}{6}$ одиниць (рис. 21.9). ●

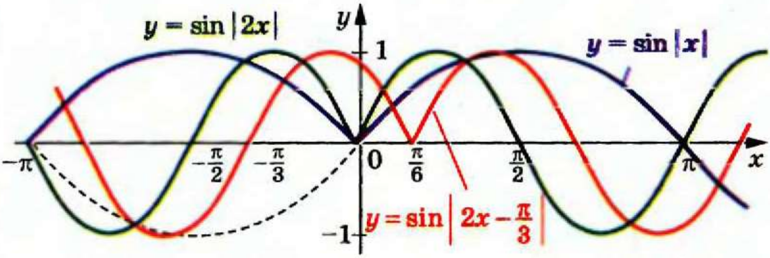


Рис. 21.9

ПРИКЛАД 7 Побудуйте графік функції $y=\sin\left(2|x|-\frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. Проведемо такі перетворення:

1) $y = \sin x \rightarrow y = \sin 2x$ — стиск до осі ординат у 2 рази;

2) $y=\sin 2x \rightarrow y=\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ — паралельне перенесення вздовж осі абсцис у додатному напрямі на $\frac{\pi}{6}$ одиниць;

3) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow y=\sin\left(2|x|-\frac{\pi}{3}\right)$ — симетрія відносно осі ординат частини графіка, яка лежить у півплощині $x \geqslant 0$. Шуканий графік складається з двох симетричних частин (рис. 21.10). ●

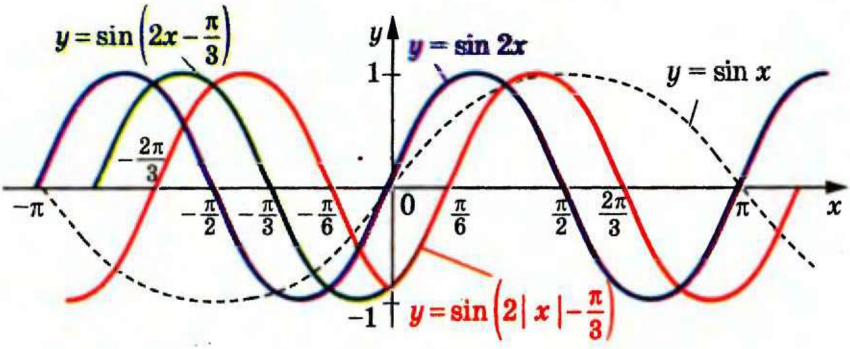


Рис. 21.10

ПРИКЛАД 8 Побудуйте графік рівняння $\cos x + \cos y = 2$.

Розв'язання. Оскільки $|\cos x| \leqslant 1$ і $|\cos y| \leqslant 1$, то дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos y = 1. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ y = 2\pi m, \ m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Шуканий графік — це множина точок, зображених на рисунку 21.11. ●

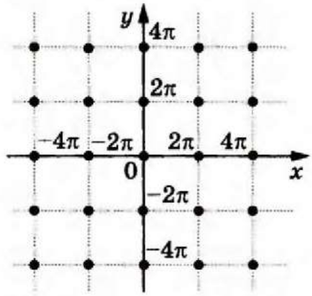


Рис. 21.11

Вправи

21.1.° Серед чисел -3π, $-\frac{5\pi}{2}$, -2π, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{9\pi}{2}$, 6π, 7π укажіть:
1) нулі функції $y = \sin x$;
2) значення аргументу, при яких функція $y = \sin x$ набуває найбільшого значення;
3) значення аргументу, при яких функція $y = \sin x$ набуває найменшого значення.

21.2.° Серед чисел $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, 5π, 8π укажіть:
1) нулі функції $y = \cos x$;
2) значення аргументу, при яких функція $y = \cos x$ набуває найбільшого значення;
3) значення аргументу, при яких функція $y = \cos x$ набуває найменшого значення.

21.3.° На яких з наведених проміжків функція $y = \sin x$ зростає:

1) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 3) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$?

21.4.° На яких з наведених проміжків функція $y = \sin x$ спадає:

1) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $[-\pi; 0]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$?

21.5.° Серед наведених проміжків укажіть проміжки спадання функції $y = \cos x$:

1) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $[-2\pi; -\pi]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $[6\pi; 7\pi]$.

21.6. Серед наведених проміжків укажіть проміжки зростання функції $y = \cos x$:

1) $[-3\pi; -2\pi]$; 2) $[0; \pi]$; 3) $[-\pi; \pi]$; 4) $[3\pi; 4\pi]$.

21.7. Порівняйте:

1) $\cos 1{,}6\pi$ і $\cos 1{,}68\pi$;
2) $\sin 20°$ і $\sin 21°$;
3) $\cos 20°$ і $\cos 21°$;
4) $\sin\frac{10\pi}{9}$ і $\sin\frac{25\pi}{18}$;
5) $\cos\frac{10\pi}{9}$ і $\cos\frac{25\pi}{18}$;
6) $\cos 5{,}1$ і $\cos 5$;
7) $\sin 2$ і $\sin 2{,}1$.

21.8. Порівняйте:

1) $\cos\frac{\pi}{9}$ і $\cos\frac{4\pi}{9}$;
2) $\sin\frac{5\pi}{9}$ і $\sin\frac{17\pi}{18}$;
3) $\sin\left(-\frac{7\pi}{30}\right)$ і $\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$;
4) $\cos\frac{10\pi}{7}$ і $\cos\frac{11\pi}{9}$.

21.9. Розташуйте числа в порядку зростання:

1) $\sin 3{,}2$, $\sin 4$, $\sin 3{,}6$, $\sin 2{,}4$, $\sin 1{,}8$;
2) $\cos 3{,}5$, $\cos 4{,}8$, $\cos 6{,}1$, $\cos 5{,}6$, $\cos 4{,}2$.

21.10. Розташуйте числа в порядку спадання:

1) $\sin(-0{,}2)$, $\sin 0{,}2$, $\sin 1{,}5$, $\sin 1$, $\sin 0{,}9$;
2) $\cos 0{,}1$, $\cos 1{,}4$, $\cos 2{,}4$, $\cos 3{,}1$, $\cos 1{,}8$.

21.11. Порівняйте:

1) $\sin 58°$ і $\cos 58°$; 2) $\sin 18°$ і $\cos 18°$; 3) $\cos 80°$ і $\sin 70°$.

21.12. Чи можлива рівність:

1) $\cos\alpha = 2\sin 25°$; 2) $\sin\alpha = \sqrt{2}\cos 35°$?

21.13. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$; 2) $y = -\frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

21.14. Побудуйте графік функції:

1) $y = -3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$; 2) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$.

21.15. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin\left|x + \frac{\pi}{4}\right|$; 2) $y = 2\cos\left|x - \frac{\pi}{3}\right|$.

21.16. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\sin\left|x + \frac{\pi}{6}\right|$; 2) $y = -\cos\left|x - \frac{\pi}{4}\right|$.

21.17.• Побудуйте графік функції, укажіть область значень даної функції, її нулі, проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання, якого найбільшого і найменшого значення може набувати функція і при яких значеннях аргументу:

1) $y = \sin x + 1$;
2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
3) $y = \sin 2x$;
4) $y = -\frac{1}{2}\sin x$.

21.18.• Побудуйте графік функції, укажіть область значення даної функції, її нулі, проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання, якого найбільшого і найменшого значення може набувати функція і при яких значеннях аргументу:

1) $y = \cos x - 1$; 2) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 3) $y = \cos\frac{x}{2}$; 4) $y = 3\cos x$.

21.19.• Побудуйте графік функції $y = \sin\left(|x| - \frac{\pi}{4}\right)$.

21.20.• Побудуйте графік функції $y = 2\cos\left(|x| - \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

21.21.• Побудуйте графік функції $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

21.22.• Побудуйте графік функції $y = -3\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 2$.

21.23.• Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\cos|3x + 2|$;
2) $y = -2\sin\left(\frac{1}{2}|x| - 1\right)$.

21.24.• Побудуйте графік функції:

1) $y = 3\sin|2x - 1|$;
2) $y = \frac{1}{2}\cos\left(2|x| + \frac{\pi}{3}\right)$.

21.25.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\sin\left|\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right|\right|$;
2) $y = \left|\cos\left|2x - \frac{\pi}{3}\right|\right|$.

21.26.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\cos\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right)\right|$;
2) $y = \left|\sin\left(\frac{1}{2}|x| + \frac{\pi}{6}\right)\right|$.

21.27.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt{\sin x}\right)^2$;
2) $y = \sin x + \sin|x|$;
3) $y = \cos x + \sqrt{\cos^2 x}$;
4) $y = \sqrt{-\sin^2 x}$;
5) $y = \sqrt{\cos x - 1}$;
6) $y = \frac{\sin|x|}{\sin x}$;
7) $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$;
8) $y = \operatorname{tg} x \cos x$;
9) $y = \operatorname{tg} x\,|\cos x|$;
10) $y = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\sin^2 x}}$.

21.28.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\left(\sqrt{\cos x}\right)^2$;
2) $y=\sin x-\sqrt{\sin^2 x}$;
3) $y=\sqrt{-\cos^2 x}$;
4) $y=\sqrt{\sin x-1}$;
5) $y=\dfrac{|\cos x|}{\cos x}$;
6) $y = \operatorname{ctg} x \sin x$;
7) $y = \operatorname{ctg} x\,|\sin x|$;
8) $y=\dfrac{\sin|x|}{|\sin x|}$.

21.29.•• Скільки коренів має рівняння $\sin x=\dfrac{x}{10\pi}$?

21.30.•• Скільки коренів має рівняння $\cos x=\dfrac{|x|}{4\pi}$?

21.31.•• Побудуйте графік рівняння:

1) $\sin \pi (x^2 + y^2) = 0$;
2) $\sin x + \sin y = 2$.

21.32.•• Побудуйте графік рівняння:

1) $\cos \pi (x^2 + y^2) = 1$;
2) $\cos x + \cos y = -2$.

21.33.•• Побудуйте графік рівняння:

1) $\sin x = 0$;
2) $y \sin x = 0$;
3) $x^2 + \sin^2 x = 0$;
4) $|y| = \sin x$.

21.34.•• Побудуйте графік рівняння:

1) $\sin y = 0$;
2) $x \sin y = 0$;
3) $y^2 + \cos^2 x = 0$;
4) $|y| = \cos x$.

21.35.•• Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $\cos\sqrt{a^2-x^2}=1$ має рівно вісім коренів.

21.36.* Чи існує визначена на проміжку $[-1; 1]$ функція f така, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $|f(\cos x) + \sin x| < 1$?

22. Властивості і графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$

Розглянемо функцію $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тобто на проміжку завдовжки в період цієї функції (нагадаємо, що функція $y = \operatorname{tg} x$ в точках $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$ не визначена).

З рисунка 22.1 видно, що при зміні аргументу x від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ значення функції $y = \text{tg}\, x$ збільшується від $-\infty$ до $+\infty$. Це означає, що функція $y = \text{tg}\, x$ зростає на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

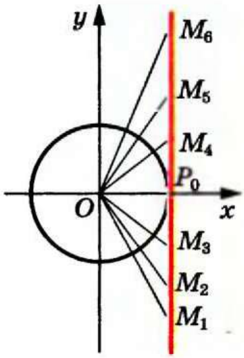


Рис. 22.1

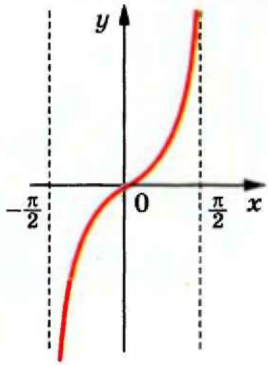


Рис. 22.2

Функція $y = \text{tg}\, x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ має один нуль: $x = 0$.

Якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то $\text{tg}\, x < 0$; якщо $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\text{tg}\, x > 0$.

Отримані властивості функції $y = \text{tg}\, x$ дозволяють побудувати її графік на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 22.2). Графік можна побудувати точніше, якщо скористатися даними таблиці значень функції $y = \text{tg}\, x$, наведеної на форзаці 3.

На всій області визначення графік функції $y = \text{tg}\, x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 22.3).

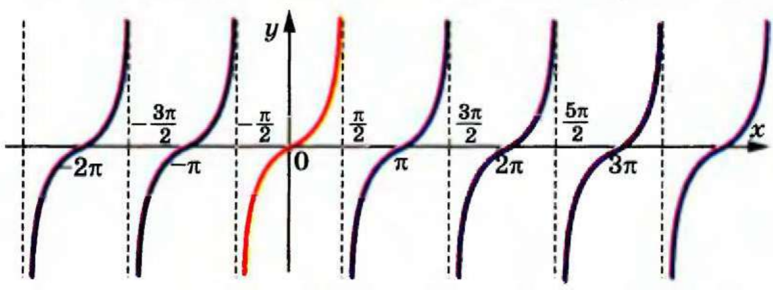


Рис. 22.3

У таблиці наведено основні властивості функції $y = \operatorname{tg} x$.

Область визначення	$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\right\}$
Область значень	$\mathbb{R}$
Періодичність	Періодична з головним періодом, який дорівнює π
Нулі функції	Числа виду πn, $n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\operatorname{tg} x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{tg} x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$
Парність	Непарна
Зростання/спадання	Зростає на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$
Найбільше і найменше значення	Найбільшого і найменшого значень не набуває

Розглянемо функцію $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$, тобто на проміжку завдовжки в період (нагадаємо, що функція $y = \operatorname{ctg} x$ не визначена в точках 0 і π).

З рисунка 22.4 видно, що при зміні аргументу x від 0 до π значення функції $y = \operatorname{ctg} x$ зменшується від $+\infty$ до $-\infty$. Це означає, що функція $y = \operatorname{ctg} x$ спадає на проміжку $(0; \pi)$.

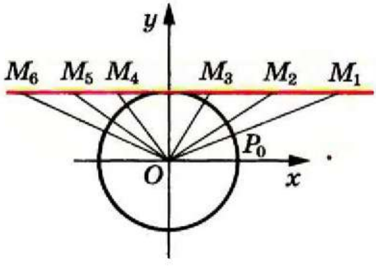


Рис. 22.4

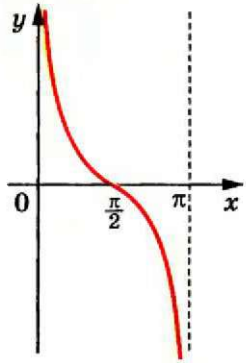


Рис. 22.5

Функція $y = \mathrm{ctg}\, x$ на проміжку $(0; \pi)$ має один нуль: $x = \frac{\pi}{2}$.

Якщо $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\mathrm{ctg}\, x > 0$; якщо $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то $\mathrm{ctg}\, x < 0$.

Графік функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ на проміжку $(0; \pi)$ зображено на рисунку 22.5.

На всій області визначення графік функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 22.6).

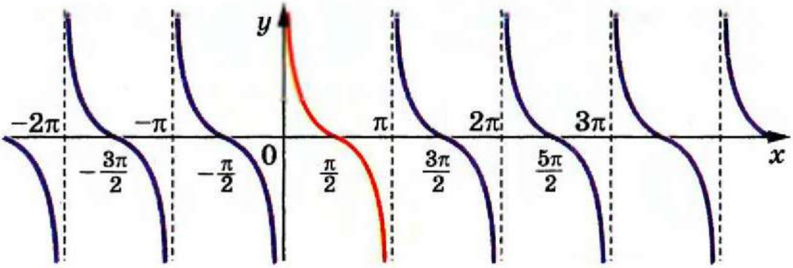


Рис. 22.6

У таблиці наведено основні властивості функції $y = \mathrm{ctg}\, x$.

Область визначення	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$
Область значень	$\mathbb{R}$
Періодичність	Періодична з головним періодом, який дорівнює π
Нулі функції	Числа виду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\mathrm{ctg}\, x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ $\mathrm{ctg}\, x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$
Парність	Непарна
Зростання/спадання	Спадає на кожному з проміжків виду $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
Найбільше і найменше значення	Найбільшого і найменшого значень не набуває

ПРИКЛАД Побудуйте графік функції $y = |\operatorname{ctg} x| \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є всі дійсні числа, крім чисел виду $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, тобто

$$D(y) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Якщо $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\operatorname{ctg} x > 0$ і $y = 1$.

Якщо $\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\operatorname{ctg} x < 0$ і $y = -1$.

Шуканий графік складається з окремих відрізків з «виколотими» кінцями (рис. 22.7). ●

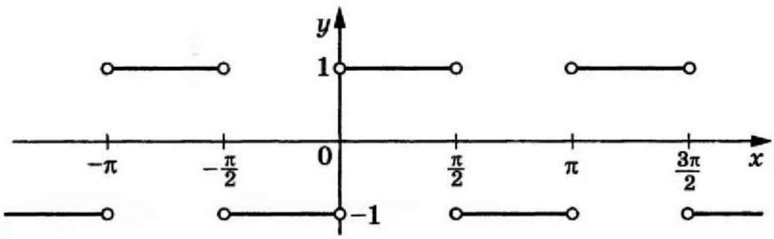


Рис. 22.7

Вправи

22.1.° Чи проходить графік функції $y = \operatorname{tg} x$ через точку:

1) $A\left(-\frac{\pi}{4}; 1\right)$; 2) $B\left(-\frac{\pi}{3}; -\sqrt{3}\right)$; 3) $C\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$; 4) $D\left(\frac{7\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$?

22.2.° Чи проходить графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ через точку:

1) $A\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$; 2) $B\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$; 3) $C(\pi; 1)$; 4) $D\left(\frac{4\pi}{3}; \sqrt{3}\right)$?

22.3.° Які з чисел $\frac{\pi}{2}$, 0, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, 2π, $-\frac{5\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$:

1) є нулями функції $y = \operatorname{ctg} x$;

2) не належать області визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$?

22.4.° Які з чисел $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, 3π:

1) є нулями функції $y = \operatorname{tg} x$;

2) не належать області визначення функції $y = \operatorname{tg} x$?

22.5.° Порівняйте:

1) $\mathrm{tg}\,(-38°)$ і $\mathrm{tg}\,(-42°)$; 4) $\mathrm{tg}\,0{,}9\pi$ і $\mathrm{tg}\,1{,}2\pi$; 7) $\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{7}$ і $\mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{7}$;

2) $\mathrm{tg}\frac{2\pi}{5}$ і $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{15}$; 5) $\mathrm{tg}\,1$ і $\mathrm{tg}\,1{,}5$; 8) $\mathrm{ctg}\,(-40°)$ і $\mathrm{ctg}\,(-60°)$;

3) $\mathrm{tg}\,130°$ і $\mathrm{tg}\,150°$; 6) $\mathrm{ctg}\,24°$ і $\mathrm{ctg}\,28°$; 9) $\mathrm{ctg}\,2$ і $\mathrm{ctg}\,3$.

22.6.° Порівняйте:

1) $\mathrm{tg}\,100°$ і $\mathrm{tg}\,92°$; 3) $\mathrm{tg}\frac{2\pi}{9}$ і $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{18}$; 5) $\mathrm{tg}\,(-1)$ і $\mathrm{tg}\,(-1{,}2)$;

2) $\mathrm{ctg}\,100°$ і $\mathrm{ctg}\,92°$; 4) $\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{8}$ і $\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{12}$; 6) $\mathrm{ctg}\,(-3)$ і $\mathrm{ctg}\,(-3{,}1)$.

22.7.° Розташуйте в порядку спадання:

1) $\mathrm{tg}\,0{,}5$, $\mathrm{tg}\,1{,}2$, $\mathrm{tg}\,(-0{,}4)$, $\mathrm{tg}\,0{,}9$;

2) $\mathrm{ctg}\,3{,}2$, $\mathrm{ctg}\,4{,}6$, $\mathrm{ctg}\,6$, $\mathrm{ctg}\,5{,}3$.

22.8.° Розташуйте в порядку зростання:

1) $\mathrm{tg}\,1{,}6$, $\mathrm{tg}\,4{,}1$, $\mathrm{tg}\,3{,}6$, $\mathrm{tg}\,2{,}5$;

2) $\mathrm{ctg}\,(-0{,}7)$, $\mathrm{ctg}\,(-2{,}4)$, $\mathrm{ctg}\,(-2{,}8)$, $\mathrm{ctg}\,(-1{,}4)$.

22.9.° Побудуйте графік функції:

1) $y = -\mathrm{tg}\,x$; 2) $y = \mathrm{tg}\,x + 2$; 3) $y = \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y = \mathrm{tg}\,3x$.

22.10.° Побудуйте графік функції:

1) $y = -\mathrm{ctg}\,x$; 2) $y = \mathrm{ctg}\,x - 1$; 3) $y = \mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $y = \mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}$.

22.11.• Чи можлива рівність:

1) $\sin\alpha = \frac{2}{3}\,\mathrm{tg}\,80°$; 2) $\cos\alpha = \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{18}$; 3) $\cos\alpha = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{9}$?

22.12.• Порівняйте:

1) $\sin 78°$ і $\mathrm{tg}\,78°$; 2) $\sin 40°$ і $\mathrm{ctg}\,20°$.

22.13.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$; 2) $y = \mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

22.14.• Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\,\mathrm{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$; 2) $y = \mathrm{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{12}\right)$.

22.15.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt{\mathrm{ctg}\,x}\right)^2$; 4) $y = \frac{\mathrm{ctg}\,x}{|\,\mathrm{ctg}\,x\,|}$; 7) $y = \frac{1}{\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{ctg}\,x}$;

2) $y = \mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,|\,x\,|$; 5) $y = \mathrm{ctg}\,x - \sqrt{\mathrm{ctg}^2 x}$; 8) $y = |\,\mathrm{tg}\,x\,|\,\mathrm{ctg}\,x$.

3) $y = \sqrt{-\mathrm{tg}^2 x}$; 6) $y = |\,\mathrm{tg}\,x\,|$;

22.16.• Побудуйте графік функції:

1) $y=\left(\sqrt{\operatorname{tg} x}\right)^2$;
2) $y = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} |x|$;
3) $y=\sqrt{-\operatorname{ctg}^2 x}$;
4) $y=\frac{|\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x}$;
5) $y=\operatorname{tg} x+\sqrt{\operatorname{tg}^2 x}$;
6) $y = |\operatorname{ctg} x|$;
7) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

22.17.• Побудуйте графік рівняння:

1) $y \operatorname{tg} x = 0$;
2) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 0$;
3) $\operatorname{tg} \pi (x^2 - y) = 0$;
4) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 0$;
5) $\operatorname{tg}(\pi(2|x|+|y|)) = 0$.

22.18.• Побудуйте графік рівняння:

1) $x \operatorname{tg} y = 0$;
2) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}=0$;
3) $\operatorname{tg} \pi (x - y) = 1$;
4) $x^2 + \operatorname{tg}^2 y = 0$;
5) $\operatorname{ctg}(|y| - |x|) = 0$.

23. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

У цьому пункті встановимо тотожності, які пов'язують значення тригонометричних функцій одного й того самого аргументу.

Координати будь-якої точки $P(x; y)$ одиничного кола задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$. Оскільки $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$, де α — кут повороту, у результаті якого з точки $P_0(1; 0)$ було отримано точку P, то

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \qquad (1)$$

Звернемо увагу на те, що точку P обрано довільно. Тому тотожність (1) справедлива для будь-якого α. Її називають **основною тригонометричною тотожністю**.

Використовуючи основну тригонометричну тотожність, знайдемо залежності між тангенсом і косинусом, а також між котангенсом і синусом.

Припустивши, що $\cos \alpha \neq 0$, поділимо обидві частини рівності (1) на $\cos^2 \alpha$. Отримаємо:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$\boxed{1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

Ця тотожність є правильною для всіх α, при яких $\cos\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Припустивши, що $\sin\alpha \neq 0$, поділимо обидві частини рівності (1) на $\sin^2\alpha$. Отримаємо:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\boxed{1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

Ця тотожність є правильною для всіх α, при яких $\sin\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Зв'язок між тангенсом і котангенсом можна встановити за допомогою означень цих функцій. Маємо: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Звідси

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{ctg}\,\alpha = 1} \qquad (2)$$

Ця тотожність є правильною для всіх α, при яких $\sin\alpha \neq 0$ і $\cos\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi k$ і $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Зазначимо, що

$$\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \pi k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Тому тотожність (2) є правильною для всіх α таких, що $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз:

1) $\sin^2 t + \cos^2 t + \mathrm{tg}^2\,x$; 2) $\frac{1}{\cos^2\varphi} - \mathrm{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi$; 3) $\frac{\sin^2\alpha}{1 + \cos\alpha}$.

Розв'язання. 1) $\sin^2 t + \cos^2 t + \mathrm{tg}^2\,x = 1 + \mathrm{tg}^2\,x = \frac{1}{\cos^2 x}$;

2) $\frac{1}{\cos^2\varphi} - \mathrm{tg}^2\,\varphi - \sin^2\varphi = 1 + \mathrm{tg}^2\,\varphi - \mathrm{tg}^2\,\varphi - \sin^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = \cos^2\varphi$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos^2\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)}{1 + \cos\alpha} = 1 - \cos\alpha$. ●

ПРИКЛАД 2 Доведіть тотожність:

1) $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta}{\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta} = \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta$;

2) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\,\sin^2\beta + \sin^2\alpha\,\cos^2\beta = 1$;

3) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha.$

Розв'язання. 1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\left(\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right):\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\operatorname{tg}\beta\right)=$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+1}{\operatorname{tg}\beta}:\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta.$$

2) $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha(\sin^2\beta+$ $+\cos^2\beta)=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$

3) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-1}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\cos\alpha}=$

$$=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha-1}{\cos\alpha\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cdot\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha.$$ ●

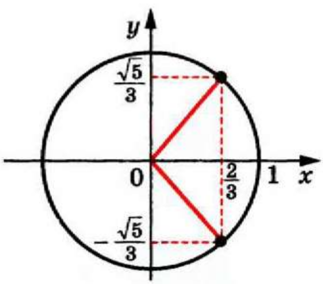


Рис. 23.1

ПРИКЛАД 3 Відомо, що $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$. Обчисліть $\sin\alpha$.

Розв'язання. Маємо:

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$. Звідси $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ або $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Рисунок 23.1 ілюструє цей приклад. ●

ПРИКЛАД 4 Знайдіть $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha=-\dfrac{7}{25}$ і $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(-\frac{7}{25}\right)^2=1-\frac{49}{625}=\frac{576}{625}.$$

Оскільки $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha<0$, отже, $\cos\alpha=-\sqrt{\dfrac{576}{625}}=-\dfrac{24}{25}$.

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{7}{25}:\left(-\dfrac{24}{25}\right)=\dfrac{7}{24}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{24}{7}$. ●

ПРИКЛАД 5 Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{16}{63}$, $90° < \alpha < 270°$. Знайдіть $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

Розв'язання. Маємо: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{63}{16}$.

$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 + \frac{256}{3969} = \frac{4225}{3969}$; $\sin^2\alpha = \frac{3969}{4225} = \left(\frac{63}{65}\right)^2$.

Оскільки $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ і $90° < \alpha < 270°$, то $180° < \alpha < 270°$. Отже, $\sin\alpha < 0$. Тоді $\sin\alpha = -\frac{63}{65}$.

Маємо: $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \sin\alpha = \frac{16}{63} \cdot \left(-\frac{63}{65}\right) = -\frac{16}{65}$. ●

ПРИКЛАД 6 Спростіть вираз $\sqrt{\sin^2\alpha(1 - \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^2\alpha(1 - \operatorname{tg}\alpha)}$, якщо $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Розв'язання. $\sqrt{\sin^2\alpha(1 - \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^2\alpha(1 - \operatorname{tg}\alpha)} =$

$$= \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cos\alpha\sin\alpha} =$$

$$= \sqrt{\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha} = \sqrt{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2} = |\sin\alpha - \cos\alpha|.$$

Оскільки $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, то $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$. Тому $\sin\alpha - \cos\alpha < 0$. Отже, $|\sin\alpha - \cos\alpha| = \cos\alpha - \sin\alpha$.

Відповідь: $\cos\alpha - \sin\alpha$.

Вправи

23.1.° Спростіть вираз:

1) $\sin^2\beta - 1$;
2) $1 - \sin^2 3\alpha - \cos^2 3\alpha$;
3) $\frac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha}$;
4) $\cos\alpha \operatorname{tg}\alpha$;
5) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$;
6) $1 - \sin^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha \sin^2\alpha$;
7) $\cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha}$;
8) $\frac{\sin^2\beta}{1 - \sin^2\beta} \cdot \operatorname{ctg}^2\beta$;
9) $\left(1 + \sin\frac{x}{2}\right)\left(1 - \sin\frac{x}{2}\right)$;
10) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

23.2.° Спростіть вираз:

1) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \operatorname{ctg}^2 5\alpha$;
2) $\sin\frac{\alpha}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{3}$;
3) $1-\frac{1}{\sin^2\gamma}$;
4) $\frac{\sin^2\alpha-1}{\cos^2\alpha-1}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;
5) $(\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha)^2 + (\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha)^2$;
6) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha(\cos^2\alpha-1)}$;
7) $\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\right)$;
8) $(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta)^2 - (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{ctg}\beta)^2$.

23.3.° Чи можуть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ одночасно дорівнювати нулю?

23.4.° Чи можуть $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ за модулем бути: 1) обидва більші за 1; 2) обидва менші від 1?

23.5.° Спростіть вираз:

1) $(1 + \operatorname{tg}\alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg}\alpha)^2$;
2) $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;
3) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$;
4) $\operatorname{ctg}x+\frac{\sin x}{1+\cos x}$;
5) $\frac{1-\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}$;
6) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;
7) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$;
8) $\frac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha-1}\cdot\frac{1-\operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg}3\alpha}$;
9) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$;
10) $\frac{1-\operatorname{ctg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\gamma}$;
11) $\cos^4\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$;
12) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$;
13) $\cos(-\alpha) + \cos\alpha\operatorname{tg}^2(-\alpha)$;
14) $\frac{1+\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)}-\operatorname{tg}(-\beta)$.

23.6.° Спростіть вираз:

1) $(1 + \operatorname{ctg}\beta)^2 + (1 - \operatorname{ctg}\beta)^2$;
2) $\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2)$;
3) $\frac{\cos\beta}{1+\sin\beta}+\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}$;
4) $\operatorname{tg}x+\frac{\cos x}{1+\sin x}$;
5) $\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}+\frac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$;
6) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$;
7) $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$;
8) $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \cos^2\alpha - 1$;
9) $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;
10) $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}\alpha + \sin^2(-\alpha)$.

23.7.° Знайдіть значення тригонометричних функцій аргументу α, якщо:

1) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$;
2) $\sin\alpha = 0{,}6$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
3) $\operatorname{tg}\alpha = 2$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

23.8.° Знайдіть значення тригонометричних функцій аргументу α, якщо:

1) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
2) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
3) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha = -7$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

23.9.° Чи можуть одночасно виконуватися рівності:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ і $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$;
2) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}5$ і $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}6$;
3) $\cos\alpha = \frac{5}{7}$ і $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$?

23.10.° Чи можуть одночасно виконуватися рівності:

1) $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ і $\cos\alpha = \frac{3}{5}$;
2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{9}$ і $\operatorname{ctg}\alpha = 1\frac{1}{4}$;
3) $\sin\alpha = -\frac{1}{6}$ і $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{37}$?

23.11.• Доведіть тотожність:

1) $\frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1 + \sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$;
2) $\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;
3) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$;
4) $\frac{\sqrt{3} - 2\sin\alpha}{2\cos\alpha - 1} = \frac{1 + 2\cos\alpha}{2\sin\alpha + \sqrt{3}}$;
5) $\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha} = -\operatorname{ctg}^6\alpha$;
6) $\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;
7) $1 + (\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha$;
8) $\frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^4\alpha$.

23.12.° Доведіть тотожність:

1) $\sin^4 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$;

2) $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha$;

3) $(\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha) \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1$.

23.13.° Доведіть тотожність:

1) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$;

2) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1$.

23.14.° Доведіть тотожність $2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) = -1$.

23.15.° Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$;

2) $\frac{2\cos^2\alpha - 7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha}$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha = -2$;

3) $\frac{8\sin\alpha - 3\cos\alpha}{\sin^3\alpha + 5\sin^2\alpha\cos\alpha - 8\cos^3\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -3$.

23.16.° Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{5\cos\alpha + 6\sin\alpha}{3\sin\alpha - 7\cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$;

2) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$;

3) $\frac{2\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha}{5\sin\alpha - \cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -4$.

23.17.°° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\cos^2\beta(1 + \operatorname{tg}\beta) + \sin^2\beta(1 + \operatorname{ctg}\beta)}$, якщо $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;

2) $\frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha\cos^2\beta}}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\alpha}$, якщо $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$;

3) $\sqrt{\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}}$, якщо $90° < \alpha < 180°$;

4) $\sqrt{2 - 2\cos^2\beta} + \sqrt{2\sin^2\beta - 2\sqrt{2}\sin\beta + 1}$, якщо $\frac{3\pi}{4} \leqslant \beta \leqslant \pi$.

23.18.°° Спростіть вираз:

1) $\sin\alpha - \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha}$, якщо $180° < \alpha < 360°$;

2) $\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$, якщо $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\sqrt{4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1} - \sqrt{4 - 4\sin^2\alpha}$, якщо $\frac{2\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

23.19.** Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = b$. Знайдіть:

1) $\sin\alpha\cos\alpha$;
2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$;
3) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$;
4) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$;
5) $\frac{1}{\sin^4\alpha} + \frac{1}{\cos^4\alpha}$.

23.20.** Дано: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = b$. Знайдіть:

1) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$;
2) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$;
3) $\operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha$;
4) $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2$.

23.21.** Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $2\cos^2\alpha - 3\sin\alpha$;
2) $\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}$;
3) $1 - \sqrt{\cos^2\alpha} - 2\sin^2\alpha$;
4) $3\cos^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

23.22.** Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $3\sin^2\alpha + 2\cos\alpha$;
2) $1 + \sqrt{\sin^2\alpha} + 2\cos^2\alpha$;
3) $2\sin^2\alpha + 3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

23.23.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin^2\sqrt{1-x^2} + \cos^2\sqrt{1-x^2}$;
2) $y = \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}$.

23.24.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x}$;
2) $y = \frac{1}{\sin^2 x} - \operatorname{ctg}^2 x$.

23.25.* Знайдіть найбільше значення функції

$$f(x) = \sin^{14} x + \cos^{14} x.$$

23.26.* Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = \sin^{10} x + \cos^{13} x.$$

24. Формули додавання

Формулами додавання називають формули, які виражають $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin(\alpha \pm \beta)$ і $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ через тригонометричні функції кутів α і β.

Доведемо, що

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Нехай точки P_1 і P_2 отримано в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кути α і β відповідно.

Розглянемо випадок, коли

$$0 \leqslant \alpha - \beta \leqslant \pi.$$

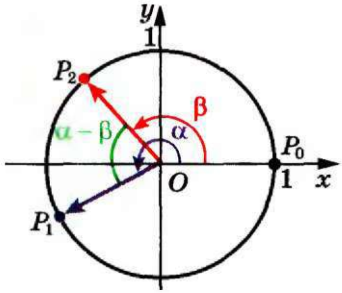


Рис. 24.1

Тоді кут між векторами $\overrightarrow{OP_1}$ і $\overrightarrow{OP_2}$ дорівнює $\alpha - \beta$ (рис. 24.1). Координати точок P_1 і P_2 відповідно дорівнюють $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ і $(\cos\beta; \sin\beta)$. Тоді вектор $\overrightarrow{OP_1}$ має координати $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, а вектор $\overrightarrow{OP_2}$ — $(\cos\beta; \sin\beta)$.

Виразимо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{OP_1}$ і $\overrightarrow{OP_2}$ через їх координати:

$$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Водночас за означенням скалярного добутку векторів можна записати

$$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = \left|\overrightarrow{OP_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OP_2}\right| \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta).$$

Звідси отримуємо формулу, яку називають **косинус різниці**:

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \qquad (1)$$

Покажемо, що доведення не зміниться при будь-якому виборі кутів α і β, зокрема, коли $(\alpha - \beta) \notin [0; \pi]$.

Кути поворотів α і β для точок P_1 і P_2 відповідно можна подати в такому вигляді:

$\alpha = \alpha_1 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_1 \in [0; 2\pi]$;

$\beta = \beta_1 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\beta_1 \in [0; 2\pi]$.

Тоді кут між векторами $\overrightarrow{OP_1}$ і $\overrightarrow{OP_2}$ набуває одного з чотирьох значень: $\alpha_1 - \beta_1$ (рис. 24.2); $\beta_1 - \alpha_1$ (рис. 24.3); $2\pi - (\alpha_1 - \beta_1)$ (рис. 24.4); $2\pi - (\beta_1 - \alpha_1)$ (рис. 24.5).

Тоді косинус кута між векторами $\overrightarrow{OP_1}$ і $\overrightarrow{OP_2}$ дорівнює $\cos(\alpha - \beta)$. Далі залишається лише повторити наведені вище міркування для випадку, коли $(\alpha - \beta) \in [0; \pi]$.

Доведемо формулу **косинуса суми**:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

Маємо: $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) =$

$= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$

Доведемо формули **синуса суми і синуса різниці:**

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

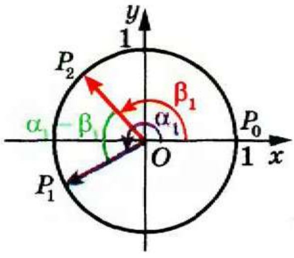


Рис. 24.2

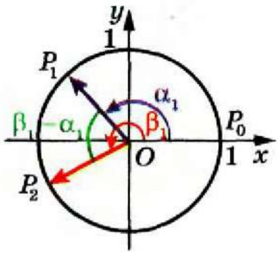


Рис. 24.3

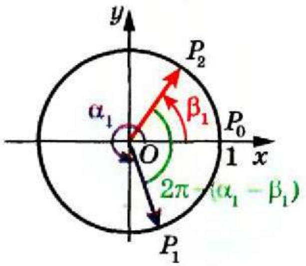


Рис. 24.4

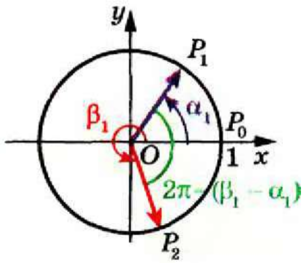


Рис. 24.5

За допомогою формули (1) доведемо, що

$$\boxed{\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

Маємо: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=\sin\alpha.$

Тепер доведемо, що

$$\boxed{\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

Маємо: $\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$

Тоді $\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$

$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Формули **тангенса суми і тангенса різниці** мають вигляд:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}} \qquad (2)$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}} \qquad (3)$$

Доведемо формулу (2). Маємо:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Припустивши, що $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$, отриманий дріб можна переписати так:

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Формулу тангенса різниці (3) доведіть самостійно.

Тотожність (2) є правильною для всіх α і β, при яких $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$, $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$.

Тотожність (3) є правильною для всіх α і β, при яких $\cos(\alpha-\beta)\neq 0$, $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos(60^\circ+\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}$.

Розв'язання. Маємо: $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos(60^\circ+\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+2(\cos 60^\circ\cos\alpha-\sin 60^\circ\sin\alpha)}{2(\sin 60^\circ\cos\alpha+\cos 60^\circ\sin\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha. \bullet$$

ПРИКЛАД 2 Доведіть тотожність: 1) $\sin\alpha-\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;
2) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

Розв'язання. 1) $\sin\alpha-\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha-\dfrac{\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

2) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$. ●

ПРИКЛАД 3 Знайдіть значення виразу $\frac{1-\operatorname{tg}70^\circ\operatorname{tg}65^\circ}{\operatorname{tg}70^\circ+\operatorname{tg}65^\circ}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу тангенса суми кутів 70° і 65°, маємо: $\frac{1-\operatorname{tg}70^\circ\operatorname{tg}65^\circ}{\operatorname{tg}70^\circ+\operatorname{tg}65^\circ}=\frac{1}{\operatorname{tg}(70^\circ+65^\circ)}=\frac{1}{\operatorname{tg}135^\circ}=\operatorname{ctg}135^\circ=$

$=\operatorname{ctg}(180^\circ-45^\circ)=-\operatorname{ctg}45^\circ=-1$. ●

ПРИКЛАД 4 Знайдіть $\cos 15^\circ$.

Розв'язання. Маємо: $\cos 15^\circ=\cos(60^\circ-45^\circ)=$

$=\cos 60^\circ\cos 45^\circ+\sin 60^\circ\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. ●

ПРИКЛАД 5 Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$.

Розв'язання. Представимо даний вираз у вигляді синуса суми. Для цього помножимо і поділимо даний вираз на 2:

$$\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right).$$

Ураховуючи, що $\frac{1}{2}=\sin 30^\circ$, $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ$, отримуємо:

$\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=2(\sin 30^\circ\cos\alpha+\cos 30^\circ\sin\alpha)=2\sin(30^\circ+\alpha)$.

Отже, найбільше значення даного виразу дорівнює 2 (його вираз набуває при $\sin(30^\circ+\alpha)=1$), найменше значення дорівнює -2 (його вираз набуває при $\sin(30^\circ+\alpha)=-1$). ●

ПРИКЛАД 6 Дано: $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$. Знайдіть $\alpha+\beta$.

Розв'язання. Оскільки $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$, то $0^\circ<\alpha+\beta<180^\circ$. На проміжку $(0^\circ; 180^\circ)$ косинус набуває кожного свого значення з проміжку $(-1; 1)$ один раз. Отже, знайшовши $\cos(\alpha+\beta)$, можна визначити і значення $\alpha+\beta$. Маємо:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Тоді $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{5}{\sqrt{50}} = -\frac{5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Беручи до уваги, що $0° < \alpha + \beta < 180°$, отримуємо $\alpha + \beta = 135°$. ●

Вправи

24.1.° Спростіть вираз:

1) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$;
2) $\sin(30° + \alpha) - \cos(60° + \alpha)$;
3) $\sqrt{2}\sin(\alpha - 45°) - \sin\alpha + \cos\alpha$;
4) $2\cos(60° - \alpha) - \sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$.

24.2.° Спростіть вираз:

1) $\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)$;
2) $\sin(30° - \alpha) + \cos(60° - \alpha)$;
3) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\alpha - \sin\alpha$.

24.3.° Спростіть вираз:

1) $\sin\alpha\cos4\alpha + \cos\alpha\sin4\alpha$;
2) $\cos17°\cos43° - \sin17°\sin43°$;
3) $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$;
4) $\sin\alpha\sin(\alpha + \beta) + \cos\alpha\cos(\alpha + \beta)$;
5) $\sin53°\cos7° - \cos53°\sin(-7°)$;
6) $\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta)$;
7) $(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2$;
8) $\frac{\sin20°\cos5° - \cos20°\sin5°}{\cos10°\cos5° - \sin10°\sin5°}$;
9) $\cos(\alpha + \beta) + 2\sin\alpha\sin\beta$.

24.4.° Спростіть вираз:

1) $\cos6\alpha\cos2\alpha - \sin6\alpha\sin2\alpha$;
2) $\sin12°\cos18° + \sin18°\cos12°$;
3) $\sin(-15°)\cos75° + \cos15°\sin75°$;
4) $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$;
5) $\frac{\cos64°\cos4° + \sin64°\sin4°}{\sin19°\cos41° + \sin41°\cos19°}$;
6) $\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha\sin\beta$.

24.5.° Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{4}$. Знайдіть значення виразу $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

24.6.° Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\operatorname{tg}\beta = 5$. Знайдіть значення виразу $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

24.7.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}13° + \operatorname{tg}47°}{1 - \operatorname{tg}13° \operatorname{tg}47°}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}1° - \operatorname{tg}46°}{1 + \operatorname{tg}1° \operatorname{tg}46°}$;

3) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}27° \operatorname{tg}33°}{\operatorname{tg}27° + \operatorname{tg}33°}$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{9} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{36}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{9}\ \operatorname{tg}\frac{5\pi}{36}}$.

24.8.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}24° + \operatorname{tg}36°}{1 - \operatorname{tg}24° \operatorname{tg}36°}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}5\alpha - \operatorname{tg}3\alpha}{1 + \operatorname{tg}5\alpha \operatorname{tg}3\alpha}$.

24.9.° Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta) - \sin\alpha\sin\beta} = 1$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$;

3) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos(45°+\alpha)}{2\sin(45°+\alpha) - \sqrt{2}\sin\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

4) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg}2\alpha$;

5) $\dfrac{\sin(45°+\alpha) - \cos(45°+\alpha)}{\sin(45°+\alpha) + \cos(45°+\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$;

6) $\dfrac{\sin\alpha + 2\sin(60°-\alpha)}{2\cos(30°-\alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$.

24.10.° Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) - \sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta) + \sin\beta\cos\alpha} = 1$;

2) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin(45°-\alpha)}{2\sin(60°+\alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{2}$;

3) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

24.11.° Дано: $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, $90° < \alpha < 180°$. Знайдіть $\sin(\alpha + 45°)$.

24.12.° Дано: $\cos\alpha = -0{,}6$, $180° < \alpha < 270°$. Знайдіть $\cos(60° - \alpha)$.

24.13.° Знайдіть cos (α + β), якщо $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ і $\cos\beta = -\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

24.14.° Знайдіть sin (α − β), якщо $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ і $\cos\beta = \frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

24.15.° Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\beta = \frac{3}{5}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Знайдіть tg (α + β).

24.16.° Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$. Знайдіть tg (45° + α).

24.17.° Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

24.18.° Доведіть тотожність $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

24.19.° Спростіть вираз:

1) $\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{\alpha}{2}$; 3) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}$;

2) ctg α − ctg 2α; 4) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$.

24.20.° Спростіть вираз:

1) cos 2α + sin 2α tg α; 2) cos 4α − sin 4α ctg 2α.

24.21.• Користуючись формулами додавання, знайдіть:

1) sin 15°; 2) sin 105°; 3) ctg 105°.

24.22.• Користуючись формулами додавання, знайдіть:

1) cos 75°; 2) sin 75°.

24.23.• Спростіть вираз:

1) $\operatorname{tg}10° + \operatorname{tg}50° + \sqrt{3}\operatorname{tg}10°\operatorname{tg}50°$; 2) $\operatorname{tg}70° - \operatorname{tg}25° - \operatorname{tg}70°\operatorname{tg}25°$.

24.24.• Спростіть вираз:

1) $\operatorname{tg}80° - \operatorname{tg}20° - \sqrt{3}\operatorname{tg}80°\operatorname{tg}20°$; 2) $\operatorname{tg}35° + \operatorname{tg}10° + \operatorname{tg}35°\operatorname{tg}10°$.

24.25.• Доведіть тотожність:

1) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;

2) $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 - 2 = 2\cos(\alpha + \beta)$;

3) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$;

4) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} + 2\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{2}{\cos^2\alpha}$.

24.26. Доведіть тотожність:

1) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

2) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=0$.

24.27. Знайдіть найбільше значення виразу:

1) $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$;

2) $4\sin\alpha+5\cos\alpha$;

3) $\sin\alpha+\cos\alpha$;

4) $2\sin\alpha-\cos\alpha$.

24.28. Знайдіть найбільше значення виразу:

1) $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha$; 2) $\sqrt{5}\cos\alpha-2\sqrt{5}\sin\alpha$; 3) $3\sin\alpha+\cos\alpha$.

24.29. Дано: $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=-\frac{2}{5}$, $\frac{5\pi}{6}<\alpha<\frac{4\pi}{3}$. Знайдіть $\sin\alpha$.

24.30. Дано: $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Знайдіть $\sin\alpha$.

24.31. Дано: $\cos(5°+\alpha)=0{,}6$, $0°<\alpha<55°$. Знайдіть $\operatorname{tg}(35°+\alpha)$.

24.32. Дано: $\sin(40°+\alpha)=b$, $0°<\alpha<45°$. Знайдіть $\cos(70°+\alpha)$.

24.33. Дано: $\sin 10°=b$. Знайдіть $\sin 35°$.

24.34. Дано: $\operatorname{tg}(\alpha-45°)=3$. Знайдіть $\operatorname{tg}\alpha$.

24.35. Дано: $\operatorname{tg}(5°+\alpha)=\frac{1}{3}$, $0°<\alpha<40°$. Знайдіть $\cos(50°+\alpha)$.

24.36. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{5}{3}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$. Знайдіть $\alpha-\beta$.

24.37. Дано: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{21}}{14}$, $0°<\alpha<90°$, $0°<\beta<90°$. Знайдіть $\alpha+\beta$.

24.38. Дано: $\cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin\beta=\frac{5\sqrt{7}}{14}$, $0°<\alpha<90°$, $0°<\beta<90°$. Знайдіть $\alpha+\beta$.

24.39. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=5$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{2}{3}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$. Доведіть, що $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.

24.40. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, $0°<\alpha<90°$, $0°<\beta<90°$. Знайдіть $\alpha+\beta$.

24.41. Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}x}$;

2) $y=\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}$.

24.42. Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}x}$;

2) $y=\frac{\operatorname{tg}x-1}{\operatorname{tg}x+1}$.

24.43.•• Доведіть, що коли α, β, γ — кути непрямокутного трикутника, то $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

24.44.•• Доведіть, що коли α, β, γ — кути трикутника, то

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1.$$

24.45.•• Обчисліть $(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\beta)$, якщо $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

24.46.•• Обчисліть $(1 + \operatorname{ctg}\alpha)(1 + \operatorname{ctg}\beta)$, якщо $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

24.47.•• Доведіть нерівність $\sin(\alpha + \beta) < \cos\alpha + \cos\beta$, де $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

24.48.•• Доведіть нерівність $\cos(\alpha - \beta) < \cos\alpha + \sin\beta$, де $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

24.49.* Відомо, що $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\geqslant\sqrt{5}$. Доведіть, що

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant 2.$$

24.50.* Доведіть нерівність $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geqslant 1$, де α, β, γ — кути трикутника.

24.51.* Доведіть нерівність $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\geqslant\sqrt{3}$, де α, β, γ — кути трикутника.

24.52.* Знайдіть усі функції f, визначені на $\mathbb{R}$, такі, що для всіх $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f(x + y) = f(x)\cos y + f(y)\cos x.$$

24.53.* Знайдіть усі функції f, визначені на проміжку $[-1; 1]$, такі, що для всіх $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f(\cos x)\, f(\cos y) + f(\sin x)\, f(\sin y) = \cos(x - y).$$

24.54.* Знайдіть усі функції f, визначені на проміжку $[-1; 1]$, такі, що для всіх $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f(\sin x)\, f(\cos y) + f(\sin y)\, f(\cos x) = \sin(x + y).$$

25. Формули зведення

Періодичність тригонометричних функцій дозволяє зводити обчислення значень синуса і косинуса до випадку, коли значення аргументу належить проміжку $[0; 2\pi]$, а значень тангенса і котангенса — до випадку, коли значення аргументу належить проміжку $[0; \pi]$. У цьому пункті ми розглянемо формули, які дозволяють у таких обчисленнях обмежитись лише кутами від 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Кожний кут у межах від 0 до 2π можна подати у вигляді $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, або $\pi \pm \alpha$, або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, де $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Наприклад, $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$.

Обчислення синусів і косинусів кутів виду $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ можна звести до обчислення синуса або косинуса кута α. Наприклад:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = -\sin\alpha;$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = \sin\alpha.$$

Застосовуючи формули додавання, аналогічно можна отримати:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$$

Ці шість формул називають **формулами зведення для синуса.**

Наступні шість формул називають **формулами зведення для косинуса:**

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha \qquad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$$

Ці тотожності теж легко отримати, застосувавши формули додавання.

Обчислення тангенсів і котангенсів кутів виду $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ можна звести до обчислення тангенса або котангенса кута α. Наприклад:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Аналогічно можна отримати:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$$

Ці чотири формули називають **формулами зведення для тангенса і котангенса.**

Проаналізувавши записані 16 формул зведення, можна помітити закономірності, які роблять заучування цих формул не обов'язковим.

Для того щоб записати будь-яку з них, можна керуватися такими правилами.

1. ***У правій частині рівності ставлять той знак, який має ліва частина за умови, що $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.***

2. ***Якщо в лівій частині формули аргумент має вигляд $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ або $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, то синус міняють на косинус, тангенс — на котангенс, і навпаки. Якщо аргумент має вигляд $\pi \pm \alpha$, то зміни функції не відбувається.***

Покажемо, як працюють ці правила для виразу $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

Припустивши, що $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, доходимо висновку: $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ є кутом III чверті. Тоді $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)<0$. За першим правилом у правій частині рівності має стояти знак «$-$».

Оскільки аргумент має вигляд $\frac{3\pi}{2}-\alpha$, то за другим правилом слід замінити синус на косинус.

Отже, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

ПРИКЛАД 1 Зведіть до тригонометричної функції кута α: 1) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 2) $\operatorname{ctg}(\alpha-90°)$.

Розв'язання. 1) Маємо: $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2=$

$$=(-\sin\alpha)^2=\sin^2\alpha.$$

2) $\operatorname{ctg}(\alpha-90°)=-\operatorname{ctg}(90°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha.$ ●

ПРИКЛАД 2 Замініть значення тригонометричної функції значенням функції гострого кута: 1) $\cos\frac{9\pi}{10}$; 2) $\cos\frac{8\pi}{7}$; 3) $\operatorname{tg}(-125°)$.

Розв'язання. 1) $\cos\frac{9\pi}{10}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{10}\right)=-\cos\frac{\pi}{10}$;

2) $\cos\frac{8\pi}{7}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)=-\cos\frac{\pi}{7}$;

3) $\operatorname{tg}(-125°)=-\operatorname{tg}125°=-\operatorname{tg}(90°+35°)=-(-\operatorname{ctg}35°)=\operatorname{ctg}35°.$ ●

ПРИКЛАД 3 Обчисліть: 1) $\sin 930°$; 2) $\cos(-480°)$.

Розв'язання. 1) $\sin 930°=\sin(360°\cdot 2+210°)=\sin 210°=$

$$=\sin(180°+30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2};$$

2) $\cos(-480°)=\cos 480°=\cos(360°+120°)=\cos 120°=$

$$=\cos(90°+30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}.$$ ●

ПРИКЛАД 4 Обчисліть $\operatorname{tg}41°\operatorname{tg}42°\operatorname{tg}43°\operatorname{tg}44°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}49°$.

Розв'язання. Маємо: $\operatorname{tg}49°=\operatorname{ctg}41°$, $\operatorname{tg}48°=\operatorname{ctg}42°$ і т. д. Тоді, об'єднавши попарно множники, які рівновіддалені від кінців добутку, отримаємо чотири добутки, кожний з яких дорівнює 1:

$$\operatorname{tg}41°\operatorname{tg}49°=\operatorname{tg}42°\operatorname{tg}48°=\operatorname{tg}43°\operatorname{tg}47°=\operatorname{tg}44°\operatorname{tg}46°=1.$$

Ще один множник даного добутку $\operatorname{tg}45°=1$. Отже,

$$\operatorname{tg}41°\operatorname{tg}42°\operatorname{tg}43°\operatorname{tg}44°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}49°=1.$$ ●

ПРИКЛАД 5 Спростіть вираз:

$$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\alpha-\pi).$$

Розв'язання. Маємо: $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

Оскільки $\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\pi}{2}$, то $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. Отже,

$$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\alpha-\pi)=$$

$$=\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\cdot\left(-\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)+\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)=$$

$$=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\left(-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)-\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha.$$ ●

Вправи

25.1.° Зведіть до тригонометричної функції кута α:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;
2) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;
3) $\sin(\pi-\alpha)$;
4) $\cos(-\alpha+270°)$;
5) $\cos(\alpha-180°)$;
6) $\cos^2(3\pi-\alpha)$;
7) $\operatorname{ctg}^2(90°+\alpha)$;
8) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;
9) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

25.2.° Зведіть до тригонометричної функції кута α:

1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;
2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;
3) $\cos(\pi-\alpha)$;
4) $\operatorname{ctg}(\alpha-270°)$;
5) $\sin(180°+\alpha)$;
6) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$.

25.3.° Зведіть до тригонометричної функції найменшого додатного аргументу:

1) $\cos 123°$; 2) $\sin 216°$; 3) $\cos(-218°)$; 4) $\cos\frac{5\pi}{9}$.

25.4.° Зведіть до тригонометричної функції найменшого додатного аргументу:

1) $\operatorname{tg} 124°$; 2) $\sin(-305°)$; 3) $\operatorname{ctg}(-0,7\pi)$; 4) $\sin\frac{14\pi}{15}$.

25.5.° Обчисліть:

1) $\cos 225°$; 2) $\sin 240°$; 3) $\cos\frac{5\pi}{4}$; 4) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

25.6.° Обчисліть:

1) $\operatorname{tg} 210°$; 2) $\operatorname{ctg} 315°$; 3) $\cos(-150°)$; 4) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$.

25.7.° Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)$;

2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

3) $\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;

4) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$;

5) $\cos^2(\pi+\alpha)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

6) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

25.8.° Спростіть вираз:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)$;

2) $\sin(270°-\alpha)+\cos(270°+\alpha)$;

3) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)$;

4) $\sin^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

25.9.° Обчисліть:

1) $3\operatorname{tg} 135° - 2\sin 150° + \operatorname{tg} 300° - 2\sin 240°$;

2) $\dfrac{\sin^2 315°\cos 300°+\operatorname{tg}(-315°)}{\sin(-120°)\cos 150°}$;

3) $\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{6}\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$;

4) $\dfrac{\sin 20°\cos 10°+\cos 160°\cos 100°}{\sin 21°\cos 9°+\cos 159°\cos 99°}$;

5) $\dfrac{\cos 66°\cos 6°+\cos 84°\cos 24°}{\cos 65°\cos 5°+\cos 85°\cos 25°}$.

25.10.° Знайдіть значення виразу:

1) $4\cos 225° - 6\cos 120° + 3\operatorname{ctg} 300° + \operatorname{tg} 240°$;

2) $\dfrac{6\cos^2(-240°)\operatorname{ctg} 210°}{\sin(-300°)\cos^2 180°}$;

3) $\sin\frac{7\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}$;

4) $\dfrac{\cos 64°\cos 4°-\cos 86°\cos 26°}{\cos 71°\cos 41°-\cos 49°\cos 19°}$.

25.11.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha)}$;

2) $\sin(\pi-\beta)\cos\left(\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)\cos(\pi-\beta)$;

3) $\sin(90^\circ+\alpha)\sin(180^\circ-\alpha)(\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}(270^\circ-\alpha))$;

4) $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)-\sin^2(\alpha-\pi)\sin^2(\alpha+\pi)-\cos^2(\alpha+\pi)\cos^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)$;

5) $\sin^2(\pi-x)+\operatorname{tg}^2(\pi-x)\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\cos(x-2\pi)$;

6) $\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi-x)\right)^2+\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)+\cos(2\pi-x)\right)^2$;

7) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-x)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)}{\cos(\pi+x)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)}$;

8) $\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)}{\operatorname{ctg}^2(x-2\pi)}+\dfrac{\sin^2(-x)}{\operatorname{ctg}^2\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)}$;

9) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\left(\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi+\alpha)\right)}{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)(\cos(2\pi+\alpha)-\sin(2\pi-\alpha))}$;

10) $(\operatorname{ctg}(6{,}5\pi-\alpha)\cos(-\alpha)+\cos(\pi-\alpha))^2+\dfrac{2\sin^2(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha-\pi)}$;

11) $\sqrt[3]{\dfrac{\sin^{-1}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos^{-1}\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}}$.

25.12.° Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\sin(\alpha+2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}=-\cos\alpha$;

2) $\sin(\pi+x)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\cos(2\pi+x)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=-1$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}=1$;

4) $\sin(2\pi-\varphi)\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\varphi\right)-\cos(\varphi-\pi)-\sin(\varphi-\pi)=\sin\varphi$;

5) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\sin\alpha;$

6) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}-\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-1;$

7) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=-1;$

8) $\sqrt{\sin^{-2}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\cos^{-2}\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)}=\dfrac{1}{|\sin\alpha\cos\alpha|}.$

25.13.** Обчисліть:

1) $\operatorname{ctg}5^\circ\operatorname{ctg}15^\circ\operatorname{ctg}25^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{ctg}75^\circ\operatorname{ctg}85^\circ;$

2) $\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{tg}60^\circ+\ldots+\operatorname{tg}160^\circ+\operatorname{tg}180^\circ;$

3) $\sin0^\circ+\sin1^\circ+\sin2^\circ+\ldots+\sin359^\circ+\sin360^\circ.$

25.14.** Обчисліть:

1) $\sin110^\circ+\sin130^\circ+\sin150^\circ+\ldots+\sin230^\circ+\sin250^\circ+\sin270^\circ;$

2) $\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}^\circ30^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}70^\circ\operatorname{tg}80^\circ;$

3) $\operatorname{ctg}15^\circ+\operatorname{ctg}30^\circ+\operatorname{ctg}45^\circ+\ldots+\operatorname{ctg}165^\circ.$

25.15.** Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=1;$

2) $\dfrac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin^4\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)-1}=-\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha;$

3) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)(\operatorname{tg}^2\alpha-1)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)\sin^{-2}\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)=2.$

25.16.** Знайдіть значення виразу

$$\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{11}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{22}.$$

25.17.** Спростіть вираз:

1) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi+\alpha);$

2) $\dfrac{\cos^2(20^\circ-\alpha)}{\sin^2(70^\circ+\alpha)}+\operatorname{tg}(\alpha+10^\circ)\operatorname{ctg}(80^\circ-\alpha).$

25.18.* Чи існує така функція f, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність:
1) $f(\cos x) = \sin x$; 2) $f(\sin x) = \cos x$?

25.19.* Чи існує така функція f, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(\sin x) = \sin 100x$?

25.20.* Сума додатних чисел α, β, γ дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Доведіть, що

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma.$$

25.21.* Сума додатних чисел α, β, γ менша від $\frac{\pi}{2}$. Доведіть, що

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma > \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma.$$

26. Формули подвійного, потрійного і половинного аргументів

Формули, які виражають тригонометричні функції аргументу 2α через тригонометричні функції аргументу α, називають **формулами подвійного аргументу**.

У формулах додавання

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

покладемо $\beta = \alpha$.
Отримаємо:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Ці формули відповідно називають **формулами косинуса, синуса і тангенса подвійного аргументу.**

Оскільки $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ і $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, то з формули $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ отримуємо ще дві формули:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Інколи ці формули зручно використовувати в такому вигляді:

$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

або в такому вигляді:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Дві останні формули називають **формулами пониження степеня.**

ПРИКЛАД 1 Виразіть дану тригонометричну функцію через функції вдвічі меншого аргументу: 1) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$.

Розв'язання. 1) Маємо: $\frac{\alpha}{2} = 2\cdot\frac{\alpha}{4}$. Тоді $\cos\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{4} - \sin^2\frac{\alpha}{4}$;

2) Маємо: $\frac{\pi}{3}+\alpha = 2\cdot\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)$. Тоді $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \dfrac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)}$. ●

ПРИКЛАД 2 Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}$; 3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$; 5) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$;

2) $\dfrac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; 4) $1 - 8\sin^2\beta\cos^2\beta$; 6) $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи формулу косинуса подвійного аргументу $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ і формулу різниці квадратів, отримуємо:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}} = -\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

2) Застосовуючи формулу синуса подвійного аргументу для кута $\frac{\alpha}{2}$, отримуємо:

$$\frac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \cos 2\alpha.$

4) $1 - 8\sin^2\beta\cos^2\beta = 1 - 2\cdot 4\sin^2\beta\cos^2\beta = 1 - 2\sin^2 2\beta = \cos 4\beta.$

5) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} =$

$$= -\frac{2\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = -\frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -2\operatorname{ctg} 2\alpha.$$

6) Оскільки сума аргументів $\frac{\pi}{4} - \alpha$ і $\frac{\pi}{4} + \alpha$ дорівнює $\frac{\pi}{2}$, то $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$. Тоді

$$\frac{2\cos^2\alpha - 1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \frac{2\cos^2\alpha - 1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{2\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}.$$

Застосувавши формулу синуса подвійного аргументу до кута $\frac{\pi}{4} - \alpha$, отримуємо:

$$\frac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 1. \quad \bullet$$

ПРИКЛАД 3 Обчисліть $\frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу тангенса подвійного аргументу, отримуємо: $\frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}} = 2\cdot\frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}} = \frac{2}{\operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = 2.$ ●

ПРИКЛАД 4 Подайте у вигляді добутку вираз: 1) $1 + \cos 4\alpha$; 2) $1 - \cos 6\alpha$; 3) $1 - \sin\alpha$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи формулу $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, отримуємо: $1 + \cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha$.

2) Застосовуючи формулу $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, отримуємо:

$$1 - \cos 6\alpha = 2\sin^2 3\alpha.$$

3) За допомогою формули зведення замінимо синус на косинус і застосуємо формулу $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$:

$$1-\sin\alpha = 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right). \bullet$$

ПРИКЛАД 5 Спростіть вираз $2\sin^2(45^\circ - \alpha) + \sin 2\alpha$.

Розв'язання. Застосуємо формулу пониження степеня для синуса, а потім формулу зведення. Отримуємо:

$$2\sin^2(45^\circ - \alpha) + \sin 2\alpha = 1 - \cos(90^\circ - 2\alpha) + \sin 2\alpha =$$
$$= 1 - \sin 2\alpha + \sin 2\alpha = 1. \bullet$$

ПРИКЛАД 6 Доведіть тотожність $\dfrac{1+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}} = -\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{4}$.

Розв'язання. Маємо: $\dfrac{1+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\cos^2\frac{\alpha}{4}-2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}{2\sin^2\frac{\alpha}{4}-2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}} =$

$$= \frac{2\cos\frac{\alpha}{4}\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{4}\left(\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\right)} = -\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}. \bullet$$

ПРИКЛАД 7 Доведіть тотожність

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha = \frac{\sin 32\alpha}{32\sin\alpha}.$$

Розв'язання. Помножимо і поділимо ліву частину даної рівності на $\sin\alpha$ та багаторазово застосуємо формулу синуса подвійного аргументу:

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\sin 4\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{4\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 8\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{8\sin\alpha} = \frac{\sin 16\alpha\cos 16\alpha}{16\sin\alpha} = \frac{\sin 32\alpha}{32\sin\alpha}. \bullet$$

Формули, які виражають тригонометричні функції аргументу 3α через тригонометричні функції аргументу α, називають формулами потрійного аргументу.

Маємо: $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha =$ $= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha =$ $= 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha =$ $= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

Отже,

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$$

Цю формулу називають **формулою синуса потрійного аргументу.**

Маємо: $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha =$ $= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha\sin\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha(1 -$ $- \cos^2\alpha) = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

Отже,

$$\boxed{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$$

Цю формулу називають **формулою косинуса потрійного аргументу.**

Задача. Доведіть тотожність $4\cos\alpha\cos(60° - \alpha)\cos(60° + \alpha) = \cos 3\alpha$.

Розв'язання. Застосувавши формули косинуса різниці і косинуса суми, отримуємо:

$$4\cos\alpha\cos(60° - \alpha)\cos(60° + \alpha) =$$
$$= 4\cos\alpha(\cos 60°\cos\alpha + \sin 60°\sin\alpha)(\cos 60°\cos\alpha - \sin 60°\sin\alpha) =$$
$$= 4\cos\alpha(\cos^2 60°\cos^2\alpha - \sin^2 60°\sin^2\alpha) = 4\cos\alpha\left(\frac{1}{4}\cos^2\alpha - \frac{3}{4}\sin^2\alpha\right) =$$
$$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) =$$
$$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha.$$

ПРИКЛАД 8 Доведіть рівність $16\cos 20°\cos 40°\cos 60°\cos 80° = 1$.

Розв'язання. Маємо: $16\cos 20°\cos 40°\cos 60°\cos 80° =$

$$= 16\cdot\frac{1}{2}\cos 20°\cos 40°\cos 80° = 8\cos 20°\cos 40°\cos 80°.$$

Оскільки $40° = 60° - 20°$, $80° = 60° + 20°$, то можна застосувати тотожність, доведену в ключовій задачі цього пункту (при $\alpha = 20°$):

$$8\cos 20°\cos 40°\cos 80° = 2\cos(3\cdot 20°) = 1.$$

Інше доведення можна отримати, міркуючи так само, як при розв'язуванні прикладу 7:

$$16\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{8\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{4\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = 1.$$

Формули, які виражають тригонометричні функції аргументу $\frac{\alpha}{2}$ через тригонометричні функції аргументу α, називають **формулами половинного аргументу.**

Замінивши у формулах пониження степеня α на $\frac{\alpha}{2}$, отримуємо:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

Почленне ділення першої рівності на другу призводить до формули

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Тепер можна записати

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Ці формули називають відповідно **формулами синуса, косинуса і тангенса половинного аргументу.**

ПРИКЛАД 9 Дано: $\operatorname{tg} 3\alpha = 3\frac{3}{7}$, $60^\circ < \alpha < 90^\circ$. Знайдіть $\sin\frac{3\alpha}{2}$, $\cos\frac{3\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{1}{\cos^2 3\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 3\alpha = 1 + \left(\frac{24}{7}\right)^2 = \frac{625}{49}$;

$\cos^2 3\alpha = \frac{49}{625}$.

Оскільки $60° < \alpha < 90°$, то $180° < 3\alpha < 270°$. Отже, $\cos 3\alpha < 0$. Тоді $\cos 3\alpha = -\frac{7}{25}$.

Оскільки $90° < \frac{3\alpha}{2} < 135°$, то $\sin\frac{3\alpha}{2} > 0$, а $\cos\frac{3\alpha}{2} < 0$. Тоді:

$$\sin\frac{3\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 3\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{7}{25}\right)} = \frac{4}{5},$$

$$\cos\frac{3\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos 3\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{7}{25}\right)} = -\frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{\cos\frac{3\alpha}{2}} = -\frac{4}{3}. \bullet$$

ПРИКЛАД 10 Знайдіть $\sin 22°30'$ і $\cos 22°30'$.

Розв'язання. Використовуючи формули половинного аргументу, отримуємо:

$$\sin 22°30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$

$$\cos 22°30' = \sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}. \bullet$$

ПРИКЛАД 11 Спростіть вираз $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.

Розв'язання. Маємо: $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} =$

$$= \left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| + \left|\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right| = \frac{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|} + \frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|^2 + \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|^2}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} =$$

$$= \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{2}{\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{2}{|\sin\alpha|}. \bullet$$

За допомогою формул подвійного аргументу можна виразити $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Маємо: $\sin\alpha = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Припустивши, що $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$, поділимо чисельник і знаменник отриманого дробу на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha = \frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Отже,

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}$$

Маємо: $\cos\alpha = \dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Припустивши, що $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$, поділимо чисельник і знаменник отриманого дробу на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$:

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Отже,

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}$$

ПРИКЛАД 12 Дано: $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = 3$. Знайдіть $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Розв'язання. Маємо: $\sin\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\cdot 3}{1+9} = 0{,}6;$

$\cos\alpha = \dfrac{1-\text{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\text{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{1-9}{1+9} = -0{,}8.$ Тоді $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}6 - 0{,}8 = -0{,}2.$ ●

ПРИКЛАД 13 Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $2\,\text{ctg}^2\,\alpha + 7\,\text{ctg}\,\alpha + 3 = 0$ і $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < \dfrac{7\pi}{4}$.

Розв'язання. Розглянемо дану рівність як квадратне рівняння відносно $\text{ctg}\,\alpha$. Знаходимо $\text{ctg}\,\alpha = -\dfrac{1}{2}$ або $\text{ctg}\,\alpha = -3$.

Оскільки $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < \dfrac{7\pi}{4}$, то $\text{ctg}\,\alpha > \text{ctg}\dfrac{7\pi}{4} = -1$ (нагадаємо, що коли α і β – кути IV чверті і $\alpha < \beta$, то $\text{ctg}\,\alpha > \text{ctg}\,\beta$). Отже, у даному випадку $\text{ctg}\,\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $\text{tg}\,\alpha = -2$. Тоді $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha} = \dfrac{1-4}{1+4} = -\dfrac{3}{5}.$ ●

Вправи

26.1.° Виразіть дані тригонометричні функції через функції вдвічі меншого аргументу:

1) $\cos\alpha$; 2) $\sin 3\alpha$; 3) $\text{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$; 4) $\cos 8\alpha$; 5) $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$; 6) $\text{tg}\,7\alpha$.

26.2.° Виразіть дані тригонометричні функції через функції вдвічі меншого аргументу:

1) $\sin 10\alpha$;
2) $\sin(\alpha - \beta)$;
3) $\cos\dfrac{\alpha}{4}$;
4) $\cos\left(\dfrac{x}{2} - 20^\circ\right)$;
5) $\text{tg}\,3$;
6) $\text{tg}\,12\alpha$.

26.3.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$;
2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$;
3) $\cos 2\alpha + \sin^2\alpha$;
4) $\dfrac{\sin 50^\circ}{2\cos 25^\circ}$;
5) $\dfrac{\cos 44^\circ + \sin^2 22^\circ}{\cos^2 22^\circ}$;
6) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$;
7) $1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{4}$;
8) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha\,\text{tg}\,\alpha}$;
9) $\dfrac{\sin^2\alpha\,\text{ctg}\,\alpha}{\sin 2\alpha}$;
10) $(\sin\varphi - \cos\varphi)^2 + \sin 2\varphi$;

11) $\left(\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\right)$; 14) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha}$;

12) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$; 15) $\frac{\operatorname{tg}(45°+\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(45°+\alpha)}$;

13) $\cos^4\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 16) $4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha$.

26.4.° Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 80°}{\cos 40°}$;

2) $2\cos^2\frac{11\alpha}{2}-1$;

3) $\cos 4\beta+\sin^2 2\beta$;

4) $2\sin 20°\cos 20°$;

5) $\cos^2 10\varphi-\sin^2 10\varphi$;

6) $\cos 6\alpha+2\sin^2 3\alpha$;

7) $\frac{\cos 70°}{\cos 35°+\sin 35°}$;

8) $\frac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$;

9) $\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$;

10) $\frac{\sin 4\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}$;

11) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

12) $\sin^2(\beta-45°)-\cos^2(\beta-45°)$;

13) $4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)\sin(270°-\alpha)$;

14) $\frac{2\operatorname{tg}1{,}5\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 1{,}5\alpha}$.

26.5.° Обчисліть:

1) $2\sin 75°\cos 75°$;

2) $\cos^2 15°-\sin^2 15°$;

3) $1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$;

4) $\sin 22°30'\cos 22°30'$;

5) $\frac{2\operatorname{tg}165°}{1-\operatorname{tg}^2 165°}$;

6) $\frac{1-\operatorname{tg}^2 15°}{\operatorname{tg}15°}$.

26.6.° Обчисліть:

1) $\cos^2 22°30'-\sin^2 22°30'$;

2) $\frac{2\operatorname{tg}75°}{1-\operatorname{tg}^2 75°}$;

3) $2\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}$;

4) $1-2\cos^2\frac{\pi}{12}$.

26.7.° Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\sin\alpha=-0{,}6$ і $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

26.8.° Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ і $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

26.9.° Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

26.10.° Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\sin\alpha=-\frac{1}{4}$.

26.11.° Знайдіть tg 2α, якщо:

1) $\operatorname{tg}\alpha = 4$;
2) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

26.12.° Знайдіть tg 2α, якщо:

1) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$;
2) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

26.13.° Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $1 - \cos 4\alpha$; 2) $1 + \cos\frac{\alpha}{3}$; 3) $1 - \cos 50°$; 4) $1 + \sin 2\alpha$.

26.14.° Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $1 - \cos\frac{5\alpha}{6}$; 2) $1 + \cos 12\alpha$; 3) $1 + \cos 40°$; 4) $1 - \sin\frac{\alpha}{2}$.

26.15.° Понизьте степінь виразу:

1) $\cos^2 8x$; 2) $\sin^2\frac{x}{2}$; 3) $\sin^2(2x - 15°)$; 4) $\cos^2\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$.

26.16.° Понизьте степінь виразу:

1) $\sin^2 5x$; 2) $\cos^2\frac{x}{6}$; 3) $\cos^2(4x + 10°)$; 4) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$.

26.17.° Доведіть тотожність:

1) $2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha = 1$;
2) $\operatorname{ctg} 3\alpha\,(1 - \cos 6\alpha) = \sin 6\alpha$;
3) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2\alpha} = 2$;
4) $\frac{1 - \cos 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^2 2\alpha$.

26.18.° Спростіть вираз:

1) $2\sin^2(135° - \alpha) - \sin 2\alpha$; 2) $\frac{1 + \cos 8\alpha}{\sin 8\alpha}$.

26.19.° Знайдіть $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 5$.

26.20.° Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -3$.

26.21.° Дано: $\cos 2\alpha = -0{,}6$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$.

26.22.° Дано: $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Знайдіть $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ і $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

26.23.° Знайдіть:

1) $\sin 15°$;
2) $\cos 15°$;
3) $\operatorname{tg} 75°$;
4) $\cos 75°$;
5) $\operatorname{tg} 112°30'$;
6) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

26.24.° Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$;
2) $\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$;

3) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$;

4) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$;

5) $\dfrac{4\operatorname{tg}\alpha\,(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2}$;

6) $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$;

7) $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$;

8) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

26.25.• Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\cos 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\dfrac{\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha}$;

2) $\dfrac{2\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$;

4) $\left(\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)\sin 2\alpha$;

5) $(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha)\sin 2\alpha$;

6) $\dfrac{\cos 2\alpha+1-\cos^2\alpha}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)}$.

26.26.• Доведіть тотожність:

1) $\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4}-2\alpha\right)-\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4}+2\alpha\right)=\sin 4\alpha$;

2) $1+2\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=4\cos^2\alpha\cos 2\alpha$;

3) $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2}2\alpha-1}+\dfrac{1+\cos 4\alpha}{\sin^{-2}2\alpha-1}=2$;

4) $\dfrac{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

5) $\dfrac{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}{1-8\sin^2\alpha-\cos 4\alpha}=\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^4\alpha$;

6) $\dfrac{\cos\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+2\alpha\right)}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha$;

7) $\dfrac{\cos 4\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{2}\sin 4\alpha$;

8) $\dfrac{2\cos 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha+\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}^2(45^\circ-\alpha)$.

26.27.• Доведіть тотожність:

1) $\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{4}-4\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{4}+4\alpha\right)=-\sin 8\alpha$;

2) $1-2\cos 3\alpha+\cos 6\alpha=-4\sin^2\dfrac{3\alpha}{2}\cos 3\alpha$;

3) $\dfrac{\sin^2\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}=-\frac{1}{4}\sin 8\alpha;$

4) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}.$

26.28.° Доведіть, що $\operatorname{tg} 15° + \operatorname{ctg} 15° = 4$.

26.29.° Доведіть, що $\operatorname{tg} 75° - \operatorname{ctg} 75° = 2\sqrt{3}$.

26.30.° Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=3;$ 2) $\dfrac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$

26.31.° Доведіть тотожність $\dfrac{\sin 3\alpha+4\sin^3\alpha}{\cos 3\alpha-4\cos^3\alpha}=\dfrac{\cos 3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin 3\alpha+\sin^3\alpha}.$

26.32.° Дано: $\sin 2\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $135° < \alpha < 180°$. Знайдіть $\sin\alpha$.

26.33.° Дано: $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $90° < \dfrac{\alpha}{2} < 135°$. Знайдіть $\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

26.34.° Дано: $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=6$. Знайдіть $\sin\alpha - \cos\alpha$.

26.35.° Обчисліть $2-13\cos 2\alpha+\dfrac{1}{\sin 2\alpha}$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{1}{5}$.

26.36.° Обчисліть $1+5\sin 2\alpha-\dfrac{3}{\cos 2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

26.37.° Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$.

26.38.° Знайдіть $\sin\alpha$, якщо $\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

26.39.° Спростіть вираз:

1) $\cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha;$

2) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin 2\alpha};$

3) $\dfrac{2\sin 4\alpha\,(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)}{1+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)};$

4) $\dfrac{\sin^2 2\alpha+4\sin^4\alpha-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4-\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha};$

5) $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)};$

6) $\dfrac{2\sin^2 4\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)}.$

26.40.• Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha\,(\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin^2 3\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{\cos^2 3\alpha}{\cos^2\alpha}$;

3) $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

4) $\dfrac{\sin^2(\alpha-\pi)-4\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{2}\right)-4+4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}$;

5) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin 3\alpha\cos\alpha-\cos 3\alpha\sin\alpha}$;

6) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}-4\alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{4}+4\alpha\right)}{1-2\cos^2 4\alpha}$.

26.41.•• Доведіть, що:

1) $\sin 18^\circ\cos 36^\circ=\dfrac{1}{4}$;

2) $8\cos\dfrac{\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9}=1$;

3) $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{5\pi}{7}=\dfrac{1}{8}$;

4) $\sin 6^\circ\sin 42^\circ\cos 12^\circ\cos 24^\circ=\dfrac{1}{16}$;

5) $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha\cos 32\alpha=\dfrac{\sin 64\alpha}{64\sin\alpha}$.

26.42.•• Доведіть, що:

1) $\sin 54^\circ\cos 72^\circ=\dfrac{1}{4}$;

2) $8\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}=-1$;

3) $\cos 3\alpha\cos 6\alpha\cos 12\alpha=\dfrac{\sin 24\alpha}{8\sin 3\alpha}$;

4) $\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{3\pi}{15}\cdot\ldots\cdot\cos\dfrac{7\pi}{15}=\dfrac{1}{128}$.

26.43.•• Виразіть через $\cos 4\alpha$:

1) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$;

2) $\sin^8\alpha+\cos^8\alpha$.

26.44.•• Обчисліть $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$, якщо $\alpha=\dfrac{\pi}{24}$.

26.45.•• Доведіть тотожність:

1) $3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha=8\cos^4 2\alpha$;

2) $\dfrac{\cos^2(4\alpha-3\pi)-4\cos^2(2\alpha-\pi)+3}{\cos^2(4\alpha+3\pi)+4\cos^2(2\alpha+\pi)-1}=\operatorname{tg}^4 2\alpha$;

3) $\dfrac{4\sin^4\left(2\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}{\sin^4\left(2\alpha-\dfrac{9\pi}{2}\right)+\cos^4\left(\dfrac{5\pi}{2}-2\alpha\right)-1}=-2\operatorname{ctg}^2 2\alpha$.

26.46.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{3+4\cos\alpha+\cos 2\alpha}{3-4\cos\alpha+\cos 2\alpha}$;

2) $\dfrac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)+\sin^4\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)-1}$;

3) $\dfrac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha-\cos^2\alpha}{2(\cos\alpha-1)}$.

26.47.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha)\cos 2\alpha}\cdot\operatorname{tg}2\alpha$, якщо $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$;

2) $\sqrt{\dfrac{\sin 4\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}}\cdot\dfrac{1}{\sin 2\alpha}+1$, якщо $\dfrac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$.

26.48.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)\,2\operatorname{ctg}2\alpha}\cdot\operatorname{tg}2\alpha+2$, якщо $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3\pi}{4}$;

2) $\sqrt{\dfrac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}}$, якщо $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3\pi}{4}$.

26.49.** Доведіть тотожність:

1) $4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=\sin 3\alpha$;

2) $16\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=3$;

3) $\dfrac{4\sin 20^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ}{\sin 80^\circ}=1$.

26.50.** Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha$;

2) $\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ=\sqrt{3}$.

26.51.** Доведіть тотожність

$$\sin 3\alpha\sin^3\alpha+\cos 3\alpha\cos^3\alpha=\cos^3 2\alpha.$$

26.52.** Доведіть тотожність

$$\sin^3 2\alpha\cos 6\alpha+\cos^3 2\alpha\sin 6\alpha=\frac{3}{4}\sin 8\alpha.$$

26.53.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{0{,}5+0{,}5\sqrt{0{,}5+0{,}5\cos\alpha}}$, якщо $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$;

2) $\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos 2\alpha}}-\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos 2\alpha}}$, якщо $0^\circ<\alpha<90^\circ$;

3) $\dfrac{\sin\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1-\sin\alpha}}-\dfrac{\sin\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1+\sin\alpha}}$, якщо $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

26.54.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\alpha}}$, якщо $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$;

2) $\sqrt{0{,}5+0{,}5\sqrt{0{,}5+0{,}5\sqrt{0{,}5+0{,}5\cos\alpha}}}$, якщо $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$;

3) $\sqrt{1+\sin\varphi}-\sqrt{1-\sin\varphi}$, якщо $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

26.55.•• Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - 7\,\mathrm{tg}\,\alpha + 3 = 0$ і $\frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

26.56.•• Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{5}$. Знайдіть $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

26.57.* Обчисліть $\sin 18°$.

26.58.* Доведіть, що $\sin 10°$ — ірраціональне число.

26.59.* Доведіть, що $\cos 20°$ — ірраціональне число.

26.60.* Доведіть рівність $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}}_{n\ \text{радикалів}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

27. Формули для перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток

Спочатку розглянемо формули, які дозволяють перетворити суму та різницю синусів (косинусів) у добуток.

Запишемо формули додавання для синуса:

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y, \tag{1}$$

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y. \tag{2}$$

Додаючи почленно ліві і праві частини цих рівностей, отримаємо:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y. \tag{3}$$

Введемо позначення:

$$x + y = \alpha,$$

$$x - y = \beta.$$

Звідси $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Зазначимо, що α і β можуть набувати будь-яких значень.

Тоді рівність (3) можна переписати так:

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Цю тотожність називають **формулою суми синусів**.

Віднімемо почленно від рівності (1) рівність (2):

$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\,\sin y.$$

Якщо скористатися раніше введеними позначеннями, то отримаємо рівність, яку називають **формулою різниці синусів**:

$$\boxed{\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Запишемо формули додавання для косинуса:

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$

Додаючи і віднімаючи почленно ці рівності, відповідно отримуємо:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y; \qquad (4)$$
$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y. \qquad (5)$$

Звідси, ввівши позначення $x+y=\alpha$ і $x-y=\beta$, отримаємо відповідно **формули суми і різниці косинусів**:

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$
$$\boxed{\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Перетворимо у добуток вираз $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$.

Маємо:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Рівність

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

називають **формулою суми тангенсів.**

Аналогічно можна довести такі три рівності:

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$
$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Їх називають формулами відповідно **різниці тангенсів, суми котангенсів, різниці котангенсів.**

ПРИКЛАД 1 Перетворіть у добуток: 1) $1 + \operatorname{tg}\alpha$; 2) $\sqrt{3} - 2\sin\alpha$.

Розв'язання

1) $$1+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\alpha};$$

2) $$\sqrt{3}-2\sin\alpha=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\right)=$$

$$=2\cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{3}-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}+\alpha}{2}=4\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right).$$ ●

ПРИКЛАД 2 Перетворіть у добуток вираз $\sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha$.

Розв'язання. Перетворимо суму $\sin 3\alpha + \sin 7\alpha$ у добуток. Маємо:

$$\sin 3\alpha+\sin 7\alpha+\sin 5\alpha=2\sin 5\alpha\cos 2\alpha+\sin 5\alpha=2\sin 5\alpha\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right).$$

Подамо $\frac{1}{2}$ як $\cos\frac{\pi}{3}$. Маємо:

$$2\sin 5\alpha\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right)=2\sin 5\alpha\left(\cos 2\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=2\sin 5\alpha\cdot 2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=4\sin 5\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$ ●

ПРИКЛАД 3 Доведіть тотожність $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta$.

Розв'язання. Застосуємо формули пониження степеня, потім перетворимо отриману різницю косинусів:

$$\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=\frac{1-\cos(2\alpha+2\beta)}{2}-\frac{1-\cos(2\alpha-2\beta)}{2}=$$

$$=\frac{1-\cos(2\alpha+2\beta)-1+\cos(2\alpha-2\beta)}{2}=\frac{\cos(2\alpha-2\beta)-\cos(2\alpha+2\beta)}{2}=$$

$$=-\sin\frac{2\alpha-2\beta+2\alpha+2\beta}{2}\sin\frac{2\alpha-2\beta-2\alpha-2\beta}{2}=\sin 2\alpha\sin 2\beta.$$ ●

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що коли $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Розв'язання. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\beta}{2}+\sin^2\gamma=$

$$=1-\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}+\sin^2\gamma=1-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+1-\cos^2\gamma=$$

$= 2 - \cos(\pi - \gamma)\cos(\alpha - \beta) - \cos^2\gamma = 2 + \cos\gamma\cos(\alpha - \beta) - \cos^2\gamma =$
$= 2 + \cos\gamma(\cos(\alpha - \beta) - \cos\gamma) = 2 + \cos\gamma(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\pi - (\alpha + \beta))) =$
$= 2 + \cos\gamma(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) = 2 + 2\cos\gamma\cos\alpha\cos\beta.$ ●

ПРИКЛАД 5 Обчисліть суму:

$$S = \frac{1}{\cos 1\cos 2} + \frac{1}{\cos 2\cos 3} + \ldots + \frac{1}{\cos(n-1)\cos n},\ n > 1.$$

Розв'язання. Використаємо тотожність

$$\operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k-1) = \frac{\sin 1}{\cos(k-1)\cos k} \text{ або}$$

$$\frac{1}{\cos(k-1)\cos k} = \frac{-\operatorname{tg}(k-1) + \operatorname{tg} k}{\sin 1}.$$

Скориставшись отриманим результатом, запишемо такі рівності:

$$\frac{1}{\cos 1\cos 2} = \frac{-\operatorname{tg} 1 + \operatorname{tg} 2}{\sin 1};$$
$$\frac{1}{\cos 2\cos 3} = \frac{-\operatorname{tg} 2 + \operatorname{tg} 3}{\sin 1};$$
$$\frac{1}{\cos 3\cos 4} = \frac{-\operatorname{tg} 3 + \operatorname{tg} 4}{\sin 1};$$
$$\ldots$$
$$\frac{1}{\cos(n-1)\cos n} = \frac{-\operatorname{tg}(n-1) + \operatorname{tg} n}{\sin 1}.$$

Додавши дані рівності, отримаємо:

$$S = \frac{-\operatorname{tg} 1 + \operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 2 + \operatorname{tg} 3 - \operatorname{tg} 3 + \operatorname{tg} 4 - \ldots - \operatorname{tg}(n-1) + \operatorname{tg} n}{\sin 1} = \frac{-\operatorname{tg} 1 + \operatorname{tg} n}{\sin 1}.$$

Відповідь: $S = \dfrac{\operatorname{tg} n - \operatorname{tg} 1}{\sin 1}$.

Вправи

27.1.° Перетворіть у добуток:

1) $\cos 2\alpha - \cos 4\alpha$;
2) $\sin\beta + \sin 4\beta$;
3) $\cos\frac{\pi}{18} + \cos\frac{\pi}{12}$;
4) $\operatorname{ctg} 5\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$;
5) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$;
6) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(\alpha - 30°)$;
7) $\operatorname{ctg}(45° - \alpha) - \operatorname{ctg}(45° + \alpha)$.

27.2. Перетворіть у добуток:

1) $\cos 16° - \cos 36°$;
2) $\sin 28° + \sin 12°$;
3) $\cos 3\alpha + \cos 5\alpha$;
4) $\operatorname{ctg} 55° - \operatorname{ctg} 15°$;
5) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$;
6) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;
7) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

27.3. Перетворіть у добуток:

1) $\sin 20° + \cos 20°$;
2) $\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}$;
3) $\sin\alpha - \cos\alpha$;
4) $\sin\alpha - \cos(\alpha - 60°)$.

27.4. Перетворіть у добуток:

1) $\sin 25° + \cos 55°$;
2) $\cos 22° - \sin 66°$;
3) $\sin\alpha + \cos\beta$.

27.5. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 8\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 2\alpha}$; 2) $\frac{\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\cos 5\alpha-\cos\alpha}$; 3) $\frac{\cos 74°-\cos 14°}{\sin 74°+\sin 14°}$.

27.6. Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos 6\alpha+\cos 4\alpha}{\cos\alpha+\cos 9\alpha}$; 2) $\frac{\cos\alpha-\cos 11\alpha}{\sin 11\alpha-\sin\alpha}$; 3) $\frac{\cos 58°+\cos 32°}{\sin 58°+\sin 32°}$.

27.7. Перетворіть у добуток:

1) $1 - 2\cos\alpha$;
2) $\sqrt{3}+2\cos\alpha$;
3) $1-\sqrt{2}\sin\alpha$;
4) $\sqrt{3}+\operatorname{ctg}\alpha$.

27.8. Перетворіть у добуток:

1) $1 - 2\sin\alpha$;
2) $\sqrt{3}-2\cos\alpha$;
3) $\sqrt{2}+2\cos\alpha$;
4) $\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha$.

27.9. Доведіть тотожність:

1) $\cos 3\alpha-\cos 4\alpha-\cos 5\alpha+\cos 6\alpha=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{9\alpha}{2}$;
2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)=4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha$;
3) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)$;
4) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}=\operatorname{tg} 4\alpha$;

5) $\dfrac{2(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha}$;

6) $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=2\cos\alpha$;

7) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

8) $\dfrac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-1+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

9) $\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}\right)\cdot\dfrac{\cos\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha}=-4\sin 3\alpha$;

10) $\dfrac{(\cos\alpha-\cos 3\alpha)(\sin\alpha+\sin 3\alpha)}{1-\cos 4\alpha}=\sin 2\alpha$;

11) $\dfrac{\sin(2\alpha+2\pi)+2\sin(4\alpha-\pi)+\sin(6\alpha+4\pi)}{\cos(6\pi-2\alpha)+2\cos(4\alpha-\pi)+\cos(6\alpha-4\pi)}=\operatorname{tg}4\alpha$.

27.10.• Доведіть тотожність:

1) $\sin 5\alpha+\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\dfrac{13\alpha}{2}$;

2) $\sin\alpha+\sin 3\alpha-\sin 2\alpha=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\dfrac{3\alpha}{2}$;

3) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

4) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;

5) $\dfrac{\cos\alpha-\cos 2\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin\alpha-\sin 2\alpha-\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}=\operatorname{ctg}3\alpha$;

6) $\dfrac{\sin\alpha-\sin 3\alpha-\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}=-\operatorname{tg}2\alpha$;

7) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

8) $\dfrac{\sin 2\alpha\cos 4\alpha(1+\cos 2\alpha)}{(\sin 3\alpha+\sin\alpha)(\cos 3\alpha+\cos 5\alpha)}=\dfrac{1}{2}$;

9) $\left(\dfrac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 4\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\dfrac{1}{\sin 3\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)=4\operatorname{ctg}\alpha$.

27.11.• Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{ctg}6\alpha-\operatorname{ctg}4\alpha+\operatorname{tg}2\alpha=-\operatorname{ctg}6\alpha\operatorname{ctg}4\alpha\operatorname{tg}2\alpha$;

2) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}3\alpha+\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{\operatorname{ctg}3\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{ctg}4\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}3\alpha+\operatorname{ctg}3\alpha=\dfrac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}$.

27.12.• Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha$;

2) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} 5\alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \sin 2\alpha$.

27.13.• Доведіть тотожність:

1) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha = 2\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

2) $\dfrac{1 + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos\left(4\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)}{1 + \cos(4\alpha + \pi) + \cos\left(4\alpha + \dfrac{3\pi}{2}\right)} = \operatorname{ctg} 2\alpha$;

3) $\sin^2\left(\dfrac{15\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\dfrac{17\pi}{8} - 2\alpha\right) = -\dfrac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}$;

4) $\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\dfrac{15\pi}{8} + \alpha\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha$.

27.14.• Доведіть тотожність:

1) $1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha = -4\cos\alpha\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$;

2) $1 - \sin\alpha - \cos\alpha = 2\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} - 45^\circ\right)$;

3) $\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\dfrac{17\pi}{8} - \alpha\right) = \dfrac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$.

27.15.•• Доведіть рівність $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \dfrac{8\cos 20^\circ}{\sqrt{3}}$.

27.16.•• Доведіть, що коли $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то має місце тотожність:

1) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$;

2) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

3) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$;

4) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

5) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

27.17.•• Доведіть, що коли $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то має місце тотожність:

1) $\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma = -4\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$;

2) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}$;

3) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

27.18.** Доведіть, що коли $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, то має місце тотожність:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

27.19.* Обчисліть суму

$$S=\frac{1}{\sin\alpha\sin2\alpha}+\frac{1}{\sin2\alpha\sin3\alpha}+\ldots+\frac{1}{\sin(n-1)\alpha\sin n\alpha}.$$

27.20.* Обчисліть суму

$$S=\frac{1}{\sin1\sin3}+\frac{1}{\sin3\sin5}+\ldots+\frac{1}{\sin(2n-1)\sin(2n+1)}.$$

27.21.* Обчисліть суму

$$S=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{tg}\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{1}{2^n}.$$

27.22.* Доведіть існування такого многочлена P степеня n, що для всіх $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність $\cos nx=P(\cos x)$.

27.23.* Доведіть існування такого многочлена P степеня $2n-1$, $n\in\mathbb{N}$, що для всіх $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність $\sin(2n-1)x=P(\sin x)$.

27.24.* Відомо, що числа $\sin2\alpha$, $\sin5\alpha$ і $\sin7\alpha$ є раціональними. Доведіть, що $\sin12\alpha$ — також раціональне число.

28. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

У п. 27 під час доведення формул суми та різниці синусів (косинусів) було отримано тотожності:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y;$$
$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y;$$
$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y.$$

Перепишемо їх так:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin x\cos y&=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))\\ \cos x\cos y&=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))\\ \sin x\sin y&=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))\end{aligned}}$$

Ці тотожності називають **формулами перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.**

ПРИКЛАД 1 Перетворіть добуток у суму:

1) $\sin 15° \cos 10°$; 3) $\cos \alpha \cos 3\alpha$; 5) $2 \sin 2\alpha \cos 5\alpha$.

2) $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{8}$; 4) $2 \sin (\alpha+\beta) \cos (\alpha-\beta)$;

Розв'язання

1) $\sin 15° \cos 10° = \frac{1}{2}(\sin (15° - 10°) + \sin (15° + 10°)) = \frac{1}{2}(\sin 5° + \sin 25°)$;

2) $$\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{8}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}\right) - \cos\frac{5\pi}{24}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} - \cos\frac{5\pi}{24}\right);$$

3) $\cos\alpha\cos 3\alpha = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - 3\alpha) + \cos(\alpha + 3\alpha)) = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$;

4) $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = 2\cdot\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta-\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta+\alpha-\beta)) =$

$= \sin 2\beta + \sin 2\alpha$;

5) $2\sin 2\alpha\cos 5\alpha = 2\cdot\frac{1}{2}(\sin(2\alpha - 5\alpha) + \sin(2\alpha + 5\alpha)) =$

$$= \sin(-3\alpha) + \sin 7\alpha = \sin 7\alpha - \sin 3\alpha. \bullet$$

ПРИКЛАД 2 Доведіть тотожність[1]:

$$4 \cos \alpha \cos (60° - \alpha) \cos (60° + \alpha) = \cos 3\alpha.$$

Розв'язання. Двічі застосовуючи формулу перетворення добутку косинусів у суму, отримуємо: $4 \cos \alpha \cos (60° - \alpha) \cos (60° + \alpha) =$

$$= 2 \cos \alpha (\cos (60° - \alpha - 60° - \alpha) + \cos (60° - \alpha + 60° + \alpha)) =$$

$$= 2\cos\alpha(\cos 2\alpha + \cos 120°) = 2\cos\alpha\left(\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2 \cos \alpha \cos 2\alpha - \cos \alpha = \cos \alpha + \cos 3\alpha - \cos \alpha = \cos 3\alpha. \bullet$$

ПРИКЛАД 3 Доведіть тотожність $\sin^2 2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right)\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$.

Розв'язання. Застосуємо формули пониження степеня і перетворення добутку в суму:

$$\sin^2 2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right)\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) =$$

---

[1] Іншим способом ця тотожність була доведена в п. 26.

$$=\frac{1-\cos 4\alpha}{2}-\frac{1}{2}\left(\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)+\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\cos 4\alpha-\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\cos 4\alpha+\cos 4\alpha-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$ ●

ПРИКЛАД 4 Доведіть рівність

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}.$$

Розв'язання. Помножимо і поділимо ліву частину даної рівності на $2\sin\frac{\pi}{11}$. Отримуємо:

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{\pi}{11}+2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}+2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}+2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{7\pi}{11}+2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{9\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}.$$

Застосуємо формулу $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$:

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{11}-\sin\frac{2\pi}{11}+\sin\frac{4\pi}{11}-\sin\frac{4\pi}{11}+\sin\frac{6\pi}{11}-\sin\frac{6\pi}{11}+\sin\frac{8\pi}{11}-\sin\frac{8\pi}{11}+\sin\frac{10\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{10\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}=\frac{\sin\frac{\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}=\frac{1}{2}.$$ ●

ПРИКЛАД 5 Доведіть нерівність $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}$, де $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Розв'язання. За умовою $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$. Тоді

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

Отже, $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}$. ●

Вправи

28.1.° Перетворіть добуток у суму:

1) $\cos 15° \cos 5°$;
2) $2 \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)$;
3) $\sin 6\alpha \cos 4\alpha$;
4) $\sin 48° \sin 74°$;
5) $\sin (60° + \alpha) \sin (60° - \alpha)$.

28.2.° Перетворіть добуток у суму:

1) $2\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{5}$;
2) $\sin 28° \sin 24°$;
3) $\sin 5\alpha \cos 3\alpha$;
4) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

28.3.° Спростіть вираз:

1) $2 \cos 20° \cos 40° - \cos 20°$;
2) $\sin \alpha (1 + 2 \cos 2\alpha)$;
3) $2 \cos \alpha \cos 2\alpha - \cos 3\alpha$;
4) $\cos 2\alpha + 2 \sin (\alpha + 30°) \sin (\alpha - 30°)$.

28.4.° Спростіть вираз:

1) $2 \sin 2\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha$;
2) $\sin\alpha - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$.

28.5.• Доведіть тотожність:

1) $\sin \alpha \sin 3\alpha + \sin 4\alpha \sin 8\alpha = \sin 7\alpha \sin 5\alpha$;
2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+5\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-6\alpha\right)=\sin 4\alpha\cos\alpha$.

28.6.• Доведіть тотожність:

1) $\cos 3\alpha \cos 6\alpha - \cos 4\alpha \cos 7\alpha = \sin 10\alpha \sin \alpha$;
2) $2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{4}+15°\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}-15°\right)=\sin\left(45°+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(45°-\frac{3\alpha}{4}\right)$.

28.7.• Спростіть вираз:

1) $\sin^2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;
2) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)$;
3) $\cos^2 (45° + \alpha) - \cos^2 (30° - \alpha) + \sin 15° \sin (75° - 2\alpha)$.

28.8.• Спростіть вираз:

1) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)$;
2) $\cos^2 (45° - \alpha) - \cos^2 (60° + \alpha) - \sin (75° - 2\alpha) \cos 75°$.

28.9.•• Доведіть рівність:

1) $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$;
2) $\sin 10°+\sin 20°+\ldots+\sin 50°=\frac{\sin 25°}{2\sin 5°}$.

28.10.** Доведіть рівність $\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+\ldots+\cos\frac{17\pi}{19}=\frac{1}{2}$.

28.11.* Доведіть рівність:

$$\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+\cos\frac{2\pi n}{n}=0;$$

28.12.* Доведіть рівність $\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{3\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{n}=0$.

28.13.* Обчисліть суму:

1) $S = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha$;

2) $S = \sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha$;

3) $S = \sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \ldots + \sin^2 n\alpha$.

28.14.* Обчисліть суму:

1) $S = \cos\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos(2n-1)\alpha$;

2) $S = \sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \ldots + \sin 2n\alpha$;

3) $S = \cos^2\alpha + \cos^2 3\alpha + \ldots + \cos^2(2n-1)\alpha$.

28.15.* Доведіть нерівність $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqslant\frac{1}{8}$, де α, β, γ — кути трикутника.

29. Гармонічні коливання

У попередніх пунктах ви ознайомилися з тригонометричними функціями $y = \sin x$, $y = \cos x$ та їх властивостями. Розглядаючи графіки цих функцій, можна згадати, що в повсякденному житті ви бачили схожі криві та поверхні. Наприклад, хвилі на морі мають форму, що нагадує синусоїду. І це не випадково. Багато фізичних величин періодично змінюються і можуть бути описані за допомогою тригонометричних функцій $y = A\sin(kx + \alpha)$ або $y = A\cos(kx + \alpha)$, де A, k, α — задані числа, $A \neq 0$, $k \neq 0$. У такому випадку говорять, що фізична величина здійснює **гармонічне коливання**, а відповідну тригонометричну функцію називають **функцією гармонічного коливання**.

Розглянемо рух точки зі сталою ненульовою швидкістю v по одиничному колу (рис. 29.1). Нехай початкове положення точки задається кутом α, тобто в початковий момент часу точка має координати M_0 ($\cos\alpha$; $\sin\alpha$). За час t точка пройде по дузі кола відстань vt. З означення радіанної міри кута випливає, що довжина дуги одиничного кола, по якій перемістилася точка,

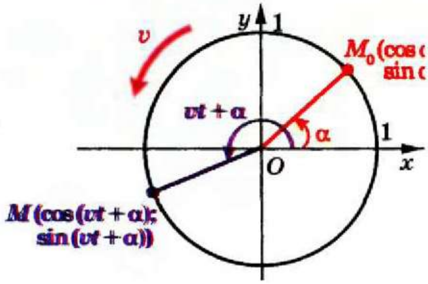


Рис. 29.1

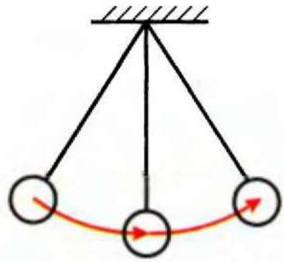


Рис. 29.2

дорівнює куту повороту початкової точки M_0. Тому через час t положення точки визначатиметься кутом $vt + \alpha$, а отже, точка матиме координати M $(\cos(vt + \alpha); \sin(vt + \alpha))$. Бачимо, що кожна координата точки, яка рухається колом, визначає функцію гармонічного коливання:

$$x = \cos(vt + \alpha),\ y = \sin(vt + \alpha).$$

У 8 класі в курсі фізики ви вивчали коливальний рух, зокрема рух математичного маятника (рис. 29.2). На уроках фізики буде встановлено, що відхилення маятника від положення рівноваги визначається функцією $y = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$, де A — величина відхилення маятника від вертикалі у початковий момент часу, g — стала прискорення вільного падіння, l — довжина нитки маятника, t — час. Таким чином, коливання математичного маятника — приклад гармонічного коливання.

Гармонічні коливання також можна спостерігати при коливанні гирьки з пружиною; слухаючи музику, адже при цьому в повітрі утворюються звукові хвилі; граючи на гітарі, бо струна набуває форми, близької до синусоїди; вивчаючи роботу електроприладів, оскільки змінний електричний струм також описується тригонометричними функціями, та в багатьох інших випадках.

Якщо у функції гармонічного коливання $y = A\sin(kx + \alpha)$ або $y = A\cos(kx + \alpha)$ числа A і k є додатними, то число A називають **амплітудою** гармонічного коливання, а число k — **циклічною частотою** гармонічного коливання.

Оскільки тригонометричні функції $y = A\sin(kx + \alpha)$, $y = A\cos(kx + \alpha)$, де A — додатне число, набувають значень з проміжку $[-A; A]$, то амплітуда гармонічного коливання показує найбільше значення функції гармонічного коливання.

Оскільки головний період функцій $y = A\sin(kx + \alpha)$, $y = A\cos(kx + \alpha)$, де k — додатне число, дорівнює $\frac{2\pi}{k}$, що в k разів відрізняється від головного періоду функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$, то циклічна частота k показує кількість головних періодів функції гармонічного коливання в одному періоді функції $y = \sin x$ або $y = \cos x$.

Гармонічні коливання грають значну роль при вивченні багатьох процесів. При цьому намагаються подати функцію складного періодичного процесу як суму кількох функцій гармонічних коливань, які вважаються простішими. Наприклад, функцію, що описує складний музичний акорд, можна подати як суму функцій гармонічних коливань окремих нот, що складають цей акорд. На цьому принципі працюють багато технічних пристроїв. Так, деякі типи радіопередавачів кодують інформацію у вигляді окремих гармонічних коливань, випромінюючи у простір хвилю, що є їх сумою. В іншому місці радіоприймач виконує зворотний процес — подає отриманий сигнал як суму окремих гармонічних коливань, що дозволяє відтворити передану інформацію.

Розділ математики, який вивчає гармонічні коливання, називають «Гармонічний аналіз». Якщо ви пов'яжете своє майбутнє з математикою, фізикою, технікою, то зможете ознайомитися з цим розділом у вищому навчальному закладі.

ПРИКЛАД 1 Укажіть амплітуду A і циклічну частоту k гармонічного коливання, яке задається функцією: 1) $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right)$; 2) $y = -6\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right)$.

Розв'язання

1) Можна записати:

$$y = -3\sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) = 3\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Отже, $A = 3$, $k = 4$.

2) Маємо:

$$-6\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right) = 6\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2} + \pi\right) = 6\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{9\pi}{8}\right).$$

Отже, $A = 6$, $k = \frac{1}{2}$. ●

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що функція $y = 3 \sin 2x + 4 \cos 2x$ є функцією гармонічного коливання.

Розв'язання. Запишемо вираз $3 \sin 2x + 4 \cos 2x$ у вигляді

$$\sqrt{3^2+4^2}\left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin 2x+\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos 2x\right)=5\left(\frac{3}{5}\sin 2x+\frac{4}{5}\cos 2x\right).$$

Оскільки $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$, то існує такий кут α, що $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ (рис. 29.3). Тоді маємо:

$$y = 5\,(\sin 2x \cos \alpha + \cos 2x \sin \alpha) =$$
$$= 5 \sin\,(2x + \alpha).$$

Отже, дана функція є функцією гармонічного коливання, амплітуда якого дорівнює 5, а циклічна частота коливання — 2. ●

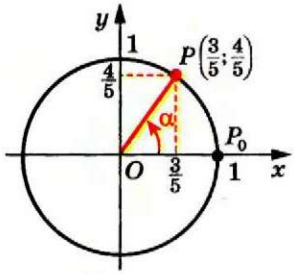


Рис. 29.3

Вправи

29.1.° Укажіть амплітуду і циклічну частоту гармонічного коливання:

1) $y = 2{,}6 \sin 3\pi x$;　　2) $y=4\cos\left(\frac{x}{3}-1\right)$.

29.2.° Укажіть амплітуду і циклічну частоту гармонічного коливання:

1) $y = 0{,}6 \cos\,(2\pi x - 3)$;　　2) $y=8\sin\left(7x+\frac{\pi}{12}\right)$.

29.3.• Укажіть амплітуду і циклічну частоту гармонічного коливання:

1) $y=-2\sin\left(6-\frac{\pi x}{2}\right)$;　　2) $y=-1{,}5\cos\left(-5x-\frac{\pi}{6}\right)$.

29.4.• Укажіть амплітуду і циклічну частоту гармонічного коливання:

1) $y=-3\sin\left(-\pi x-\frac{\pi}{3}\right)$;　　2) $y=-\frac{1}{3}\cos\left(-7x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

29.5.•• Доведіть, що функція $y = 2 \sin 3x - \cos 3x$ є функцією гармонічного коливання. Укажіть амплітуду і циклічну частоту цього коливання.

29.6.** Доведіть, що функція $y = 5\sin\frac{x}{4} + 12\cos\frac{x}{4}$ є функцією гармонічного коливання. Укажіть амплітуду і циклічну частоту цього коливання.

Полярна система координат

Вивчаючи математику, ви часто стикаєтесь з декартовими координатами на площині. Проте в математиці, фізиці, географії, астрономії тощо розглядають багато інших способів задання положення точки. Один з таких способів отримав назву **полярна система координат.**

Нехай точка A на площині має декартові координати $A\,(x;\,y)$. У полярній системі положення точки A також визначають два числа — її полярні координати $(r;\,\varphi)$, але числа r і φ мають інший геометричний зміст. Число r дорівнює відстані від точки A до початку координат, число φ — величині найменшого невід'ємного кута повороту, при якому додатний промінь осі абсцис перейде в промінь OA (рис. 29.4).

Число r називають **полярним радіусом,** а число φ — **полярним кутом.**

Зрозуміло, що полярний радіус r — невід'ємне число, а полярний кут φ задовольняє нерівність $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

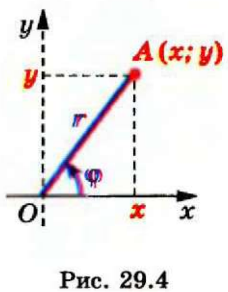


Рис. 29.4

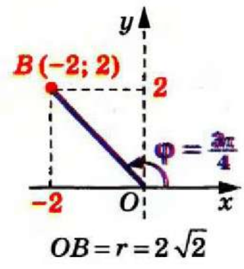


Рис. 29.5

Наприклад, якщо точка B має декартові координати $B\,(-2;\,2)$, то в полярних координатах її положення визначатимуть числа $r = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ (рис. 29.5).

Початок координат — точку $O\,(0;\,0)$ — у полярній системі координат задають рівністю $r = 0$, полярний кут φ для неї не визначають.

ПРИКЛАД 1 У декартовій системі координат зобразіть точки, полярні координати яких задовольняють умову:

1) $\begin{cases} r = 2, \\ \varphi = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ 2) $r > 3$; 3) $\varphi = \frac{4\pi}{3}$.

Розв'язання. 1) Умова $r = 2$ означає, що шукані точки лежать на колі радіуса $r = 2$ з центром у початку координат. На цьому колі існує лише одна точка X з полярним кутом $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (рис. 29.6).

2) Умова $r > 3$ означає, що відстань від точки до початку координат більша за 3. Тому шуканими будуть усі ті точки площини, які не належать кругу радіуса $r = 3$ з центром у початку координат (рис. 29.7).

3) Розглянемо промінь OA, який утворює з додатним променем осі абсцис кут $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ (рис. 29.8). Усі точки цього променя, крім початку координат, задовольняють умову $\varphi = \frac{4\pi}{3}$. Зрозуміло, що жодна інша точка площини не задовольняє умову $\varphi = \frac{4\pi}{3}$. ●

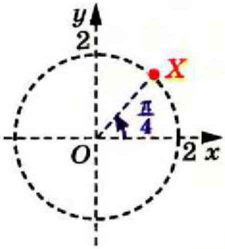


Рис. 29.6

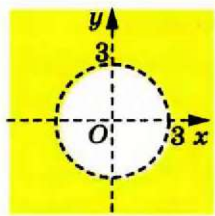


Рис. 29.7

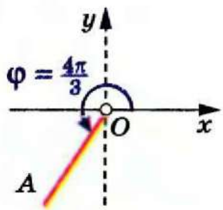


Рис. 29.8

Використовуючи тригонометричні функції, можна знайти формули, що дозволяють переходити від полярних до декартових координат. Розглянемо точку $P(x_1; y_1)$ одиничного кола, яку отримано з точки $P_0(1; 0)$ у результаті повороту навколо початку координат на кут φ. Використовуючи означення тригонометричних функцій, маємо

$$\begin{cases} x_1 = \cos\varphi; \\ y_1 = \sin\varphi. \end{cases}$$

Тоді декартові координати точки $Q(x; y)$, яка лежить на колі радіуса r і промені OP (рис. 29.9), задовольняють рівності

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (1)$$

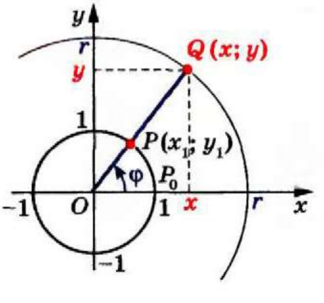


Рис. 29.9

Отже, формули (1) дозволяють знайти декартові координати $(x; y)$ точки Q, відмінної від початку координат, якщо задано її полярні координати $(r; \varphi)$.

Обчислити полярні координати точки за її декартовими координатами допомагають формули:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Справді, з формул (1) маємо

$$x^2 + y^2 = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2;$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi.$$

ПРИКЛАД 2 Коло з центром в точці $M(1; 0)$ і радіусом $R = 1$ у декартових координатах має рівняння $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Задайте це коло в полярних координатах.

Розв'язання. Використовуючи формули (1), маємо

$$(r\cos\varphi - 1)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 1,$$

$$(r^2\cos^2\varphi - 2r\cos\varphi + 1) + r^2\sin^2\varphi = 1,$$

$$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi) = 2r\cos\varphi,$$

$$r^2 = 2r\cos\varphi.$$

Звідси отримуємо, що дане коло в полярних координатах задає сукупність $\left[\begin{array}{l} r = 0, \\ r = 2\cos\varphi. \end{array}\right.$ Зауважимо, що перше рівняння сукупності $r = 0$ задає лише одну точку кола — початок координат. Усі інші точки кола визначаються другим рівнянням $r = 2\cos\varphi$.

Також зазначимо, що рівняння $r = 2\cos\varphi$ можна було отримати геометрично з прямокутного трикутника OAB (рис. 29.10). ●

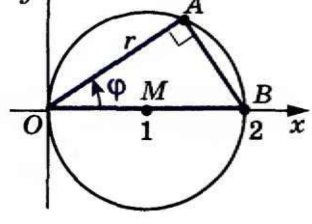


Рис. 29.10

З полярними координатами ви могли зустрічатися на уроках географії, визначаючи положення предмета за відстанню та азимутом. В астрономії для визначення положення небесних тіл використовують системи координат, близькі до полярної.

Цікаво зазначити, що полярну систему фактично використовували ще стародавні греки (Диностраст, IV ст. до н. е.) на дві тисячі років раніше, ніж Рене Декарт винайшов звичну прямокутну систему. Проте термін «полярна система координат» з'явився лише в XIX ст. Можливо, найпростіше рівняння в полярній системі координат $r = \varphi$ вивчав Архімед (III ст. до н. е.). Криву, що визначається цим рівнянням, називають спіраллю Архімеда (рис. 29.11).

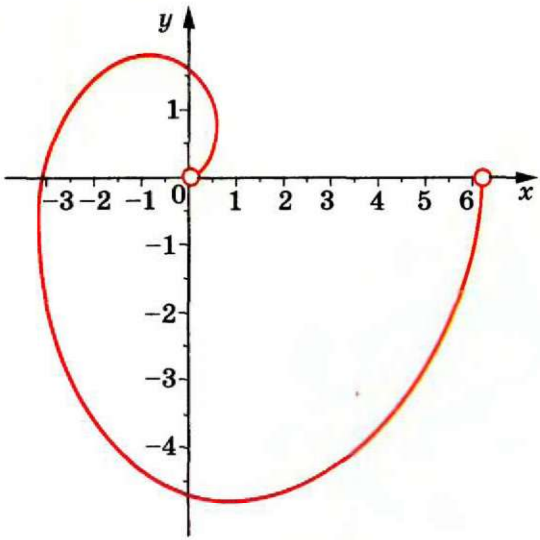


Рис. 29.11

Вправи

29.7. Знайдіть декартові координати точки за її полярними координатами:

1) $\begin{cases} r = 1, \\ \varphi = \pi; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} r = 5, \\ \varphi = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} r = 3, \\ \varphi = \dfrac{2\pi}{3}. \end{cases}$

29.8. Знайдіть полярні координати $(r; \varphi)$ точки за її декартовими координатами:

1) $A\ (0;\ 1)$; 2) $B\left(1; \sqrt{3}\right)$; 3) $C\ (\cos \alpha;\ \sin \alpha)$, $\alpha \in [0;\ 2\pi)$.

29.9. Задайте в полярних координатах криву, яка в декартових координатах має рівняння:

1) $x^2 + y^2 = 5$; 2) $y = x$; 3) $y = x^2$; 4) $y = \cos x$.

29.10. Зобразіть фігуру, що задана в полярних координатах:

1) $9\varphi^2 - 15\pi\varphi + 4\pi^2 = 0$;
2) $\varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$;
3) $1 < r \leqslant 3$;
4) $r \cos \varphi = 1$;
5) $r \sin \varphi \geqslant -2$;
6) $r = \cos \varphi$.

29.11. Схематично зобразіть криву, яка в полярних координатах має рівняння:

1) $r = \sqrt{\varphi}$;
2) $r = \frac{1}{\varphi}$ (гіперболічна спіраль);
3) $r = 1 + \cos \varphi$ (кардіоїда);
4) $r = \sin 3\varphi$ (трипелюсткова троянда).

§ 5. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

30. Рівняння $\cos x = b$

Оскільки областю значень функції $y = \cos x$ є проміжок $[-1; 1]$, то при $|b| > 1$ рівняння $\cos x = b$ не має розв'язків. Разом з тим при будь-якому b такому, що $|b| \leqslant 1$, це рівняння має корені, більш того, їх безліч.

Сказане легко зрозуміти, звернувшись до графічної інтерпретації: графіки функцій $y = \cos x$ і $y = b$, де $|b| \leqslant 1$, мають безліч спільних точок (рис. 30.1).

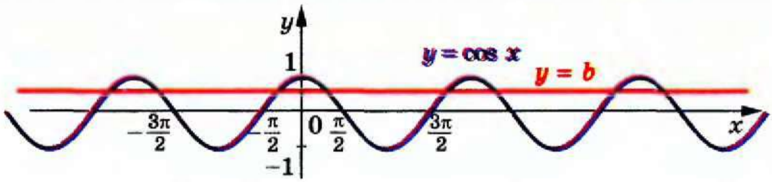


Рис. 30.1

Зрозуміти, як розв'язувати рівняння $\cos x = b$ у загальному випадку, допоможе розгляд окремого випадку. Наприклад, розв'яжемо рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$.

На рисунку 30.2 зображено графіки функцій $y = \cos x$ і $y = \frac{1}{2}$.

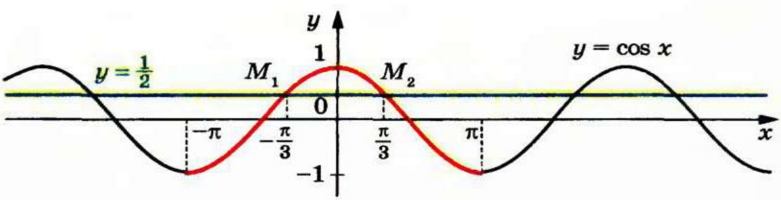


Рис. 30.2

Розглянемо функцію $y = \cos x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції (червона крива на рисунку 30.2). Пряма $y = \frac{1}{2}$ перетинає графік функції $y = \cos x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ у двох точках M_1 і M_2, абсциси яких є протилежними числами. Отже, рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ має два корені. Оскільки $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, то цими коренями є числа $-\frac{\pi}{3}$ і $\frac{\pi}{3}$.

Функція $y = \cos x$ є періодичною з періодом 2π. Тоді кожен з інших коренів рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$ відрізняється від одного із знайдених коренів $-\frac{\pi}{3}$ або $\frac{\pi}{3}$ на число виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отже, корені розглядуваного рівняння задаються формулами $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ і $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Як правило, ці дві формули замінюють одним записом:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Повернемося до рівняння $\cos x = b$, де $|b| \leqslant 1$ (рис. 30.3). На проміжку $[-\pi; \pi]$ це рівняння має два корені α і $-\alpha$, де $\alpha \in [0; \pi]$ (при $b = 1$ ці корені збігаються).

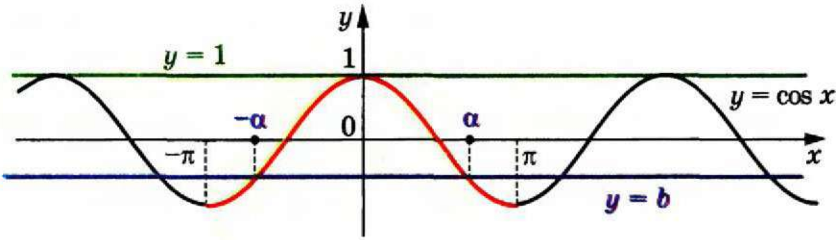


Рис. 30.3

Зрозуміло, що всі корені рівняння $\cos x = b$ мають вигляд

$$x = \pm\alpha + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ця формула показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння $\cos x = b$. Корінь α має спеціальну назву — арккосинус.

Означення. Арккосинусом числа b, де $|b| \leqslant 1$, називають таке число α з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює b.

Для арккосинуса числа b використовують позначення $\arccos b$. Наприклад,

$$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{3}\in[0;\pi] \text{ і } \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}, \text{ оскільки } \frac{3\pi}{4}\in[0;\pi] \text{ і } \cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\arccos 0=\frac{\pi}{2}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{2}\in[0;\pi] \text{ і } \cos\frac{\pi}{2}=0;$$

$$\arccos(-1)=\pi, \text{ оскільки } \pi\in[0;\pi] \text{ і } \cos\pi=-1.$$

Узагалі, $\arccos b = \alpha$, ***якщо*** $\alpha \in [0; \pi]$ ***і*** $\cos \alpha = b$.

Зазначимо, що, наприклад, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$. Проте $\arccos\frac{1}{2}\neq-\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3}\notin[0;\pi]$.

Тепер формулу коренів рівняння $\cos x = b$, $|b| \leqslant 1$, можна записати так:

$$\boxed{x = \pm\arccos b + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}} \qquad (1)$$

Зазначимо, що окремі випадки рівняння $\cos x = b$ (для $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) було розглянуто раніше (див. п. 18). Нагадаємо отримані результати:

$\cos x = 1$	$\cos x = 0$	$\cos x = -1$
$x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Такі самі відповіді можна отримати, використовуючи формулу (1). Ці три рівняння зустрічатимуться часто. Тому радимо запам'ятати отримані результати.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння: 1) $\cos 4x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{5}-7x\right)=0$; 4) $\cos \pi x^2 = 1$.

Розв'язання. 1) Використовуючи формулу (1), можемо записати:

$$4x=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Далі отримуємо:

$$4x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\quad x=\pm\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}.$$

Відповідь: $\pm\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

2) Маємо:

$$\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z};$$

$$\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \ \frac{x}{3}=\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2\pi n;$$

$$x=\pm\pi-\frac{3\pi}{4}+6\pi n.$$

Відповідь: $\pm\pi-\frac{3\pi}{4}+6\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

3) Перепишемо дане рівняння у вигляді $\cos\left(7x-\frac{\pi}{5}\right)=0$. Маємо:

$$7x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

Тоді $7x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}+\pi n;\ \ 7x=\frac{7\pi}{10}+\pi n;\ \ x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{7}.$

Відповідь: $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{7},\ n\in\mathbb{Z}.$

4) Маємо: $\pi x^2=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$

$$x^2=2n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Оскільки $x^2\geqslant 0$, то $2n\geqslant 0$, тобто $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Тепер можна записати $x=\sqrt{2n}$ або $x=-\sqrt{2n}$, де $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Відповідь: $\sqrt{2n},\ -\sqrt{2n},\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$

ПРИКЛАД 2 Визначте кількість коренів рівняння $\cos x=b$ на проміжку $\left[0;\frac{5\pi}{4}\right)$ залежно від значень параметра b.

Розв'язання. Зобразимо графік функції $y=\cos x$ на проміжку $\left[0;\frac{5\pi}{4}\right)$ (рис. 30.4). Кількість коренів визначається кількістю точок перетину прямої $y=b$ з виділеною червоною частиною графіка функції $y=\cos x$.

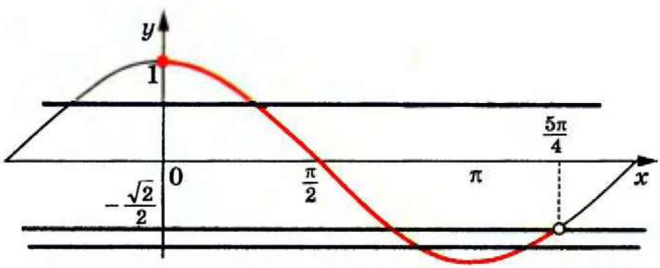


Рис. 30.4

Звернемо увагу на те, що точка $(0;\ 1)$ належить виділеній кривій, а точка $\left(\frac{5\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — не належить.

Розглядаючи різні положення прямої $y = b$, отримуємо такі результати:

якщо $b < -1$, то коренів немає;

якщо $b = -1$, то один корінь;

якщо $-1 < b < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то 2 корені;

якщо $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant b \leqslant 1$, то один корінь;

якщо $b > 1$, то коренів немає.

Відповідь: якщо $b < -1$ або $b > 1$, то коренів немає;
якщо $b = -1$ або $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant b \leqslant 1$, то один корінь;
якщо $-1 < b < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то 2 корені.

Вправи

30.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$;
2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
4) $\cos x = \frac{1}{3}$;
5) $\cos x = \frac{\pi}{3}$;
6) $\cos x = \frac{\pi}{4}$.

30.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
2) $\cos x = -\frac{1}{2}$;
3) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$;
5) $\cos x = \frac{4}{7}$.

30.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$;
2) $\cos \frac{5}{6}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\cos 6x = 1$;
4) $\cos \frac{2\pi x}{3} = 0$;
5) $\cos 9x = -\frac{1}{5}$;
6) $\cos\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

30.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$;
2) $\cos \frac{x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\cos \frac{3x}{4} = -1$.

30.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\cos\left(\frac{x}{6}-2\right)=-1$;

4) $2\cos\left(\frac{\pi}{8}-3x\right)+1=0$.

30.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{9}-4x\right)=1$;

2) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+3\right)+1=0$.

30.7.° Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

30.8.° Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\cos\frac{x}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

30.9.• Скільки коренів рівняння $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$?

30.10.• Знайдіть усі корені рівняння $\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{1}{2}$, які задовольняють нерівність $-\frac{\pi}{6}<x<4\pi$.

30.11.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\frac{2\pi}{x}=1$;

2) $\cos\pi\sqrt{x}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\cos(\cos x)=\frac{1}{2}$.

30.12.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\frac{2\pi}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos(\cos x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

30.13.• При яких значеннях параметра a рівняння $\cos 2x = -4a^2+4a-2$ має розв'язки?

30.14.• При яких значеннях параметра a рівняння $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-a^2-1$ має розв'язки?

30.15.•• При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $(a^2-4)\cos x=a+2$?

30.16.•• При яких значеннях параметра a рівняння $3a\cos x = 2a+2$ має розв'язки?

30.17.•• При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{\cos x-a}{\sqrt{\cos x-3a+1}}=0$ має розв'язки?

30.18.** При яких значеннях параметра a рівняння $\dfrac{\cos x - a}{\cos x + \dfrac{1}{3}} = 0$ має розв'язки?

30.19.** При яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить не менше ніж 3 корені рівняння $\cos x = \dfrac{1}{2}$?

30.20.** При яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить не менше ніж 3 корені рівняння $\cos x = -\dfrac{1}{2}$?

30.21.** Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = a$ на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{11\pi}{6}\right]$ залежно від значень параметра a.

30.22.** Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $\cos x = a$ на проміжку $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{3}\right]$?

30.23.** Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = a$ на проміжку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$ залежно від значень параметра a.

30.24.** При яких значеннях параметра a рівняння $(x - a)\left(\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ має єдиний корінь на проміжку $\left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$?

30.25.** При яких значеннях параметра a рівняння $(x + a)\left(\cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ має єдиний корінь на проміжку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$?

31. Рівняння $\sin x = b$

Оскільки областю значень функції $y = \sin x$ є проміжок $[-1; 1]$, то при $|b| > 1$ рівняння $\sin x = b$ не має розв'язків. Разом з тим при будь-якому b такому, що $|b| \leqslant 1$, це рівняння має корені, більш того, їх безліч.

Зазначимо, що окремі випадки рівняння $\sin x = b$ (для $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) було розглянуто раніше (див. п. 18). Нагадаємо отримані результати:

$\sin x = 1$	$\sin x = 0$	$\sin x = -1$
$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Для того щоб отримати загальну формулу коренів рівняння $\sin x = b$, де $|b| \leqslant 1$, звернемося до графічної інтерпретації.

На рисунку 31.1 зображено графіки функцій $y = \sin x$ і $y = b$, $|b| \leqslant 1$.

Розглянемо функцію $y = \sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції (червона лінія на рисунку 31.1). На цьому проміжку рівняння $\sin x = b$ має два корені. Позначимо корінь, який належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, через α. Оскільки $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, то другий корінь дорівнює $\pi - \alpha$. Зауважимо, що при $b = 1$ корені α і $\pi - \alpha$ збігаються.

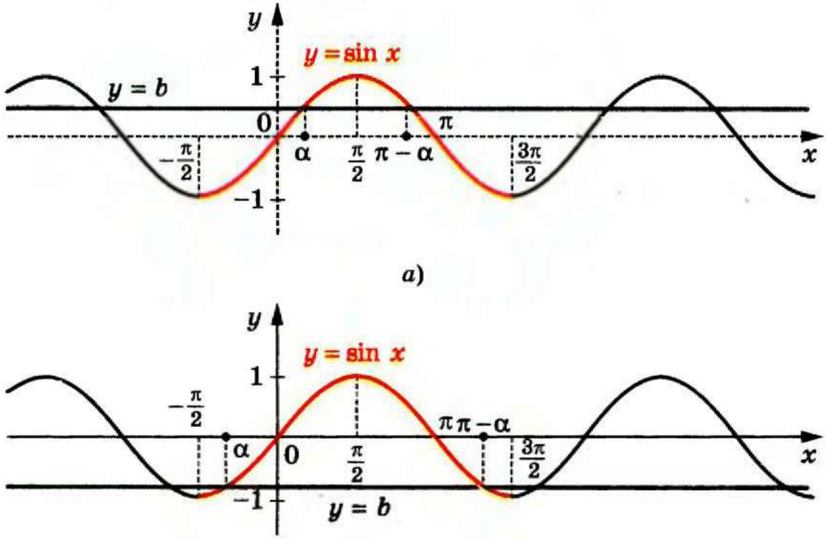


Рис. 31.1

Оскільки функція $y = \sin x$ є періодичною з періодом 2π, то кожен з інших коренів рівняння $\sin x = b$ відрізняється від одного із знайдених коренів на число виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тоді корені розглядуваного рівняння задаються формулами

$$x = \alpha + 2\pi n \quad \text{і} \quad x = \pi - \alpha + 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Ці дві формули можна замінити одним записом:

$$x = (-1)^k \alpha + \pi k, \; k \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Справді, якщо k — парне число, тобто $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, то отримуємо $x = \alpha + 2\pi n$; якщо k — непарне число, тобто $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, то отримуємо $x = -\alpha + \pi + 2\pi n = \pi - \alpha + 2\pi n$.

• Формула (1) показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння $\sin x = b$. Корінь α має спеціальну назву — арксинус.

Означення. Арксинусом числа b, де $|b| \leqslant 1$, називають таке число α з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює b.

Для арксинуса числа b використовують позначення: $\arcsin b$. Наприклад,

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ і } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \text{ оскільки } -\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ і } \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\arcsin 0 = 0, \text{ оскільки } 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ і } \sin 0 = 0;$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \text{ оскільки } -\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ і } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Узагалі, **$\arcsin b = \alpha$, *якщо* $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *і* $\sin \alpha = b$.**

Зазначимо, що, наприклад, $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Проте $\arcsin \frac{1}{2} \neq \frac{5\pi}{6}$, оскільки $\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Тепер формулу коренів рівняння $\sin x = b$, $|b| \leqslant 1$, можна записати або у вигляді сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin b + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin b + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \end{array}\right.$$

або одним записом:

$$\boxed{x = (-1)^k \arcsin b + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}} \qquad (2)$$

Узагалі, при розв'язуванні тригонометричних рівнянь одна й та сама правильна відповідь може бути подана в різних формах запису.

Зрозуміло, що формула (2) застосовна і для окремих випадків: $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$. Проте рівняння $\sin x = 1$, $\sin x = 0$, $\sin x = -1$ зустрічатимуться часто. Тому радимо запам'ятати формули їх коренів, які записано на початку пункту.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння: 1) $\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin\left(t+\frac{\pi}{10}\right)=-1$.

Розв'язання. 1) Використовуючи формулу (2), можемо записати:

$$\frac{x}{2}=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Далі отримуємо:

$$\frac{x}{2}=(-1)^n\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n;\qquad \frac{x}{2}=-(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n;$$

$$\frac{x}{2}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n;\qquad x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+2\pi n.$$

Відповідь: $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

2) Перепишемо дане рівняння у вигляді $-\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тоді $\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$3x-\frac{\pi}{3}=(-1)^n\cdot\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$$

$$3x-\frac{\pi}{3}=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \ 3x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\pi n;$$

$$x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}.$$

Відповідь: $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}$.

3) За формулою коренів рівняння $\sin x=-1$ можемо записати:

$$t+\frac{\pi}{10}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Далі маємо: $t=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}+2\pi n$; $t=-\frac{3\pi}{5}+2\pi n$.

Відповідь: $-\frac{3\pi}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2$.

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=1.$$

Оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$, а $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$, то можна записати:

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\sin x=1.$$

Використовуючи формулу синуса суми $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$, отримаємо:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=1.$$

Звідси $\frac{\pi}{3}+x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Відповідь: $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Зауважимо, що при розв'язуванні рівняння прикладу 2 можна було скористатися і формулою косинуса різниці $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$. Справді, оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$, а $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, то

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x=1;$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1.$$

Звідси отримуємо таку саму відповідь: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

ПРИКЛАД 3 Скільки коренів залежно від значень параметра b має рівняння $(\sin x-b)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0$ на проміжку $[0;\ 2\pi)$?

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=b,\\ \cos x=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Друге рівняння цієї сукупності на проміжку $[0;\ 2\pi)$ має 2 корені: $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{5\pi}{3}$.

При $|b|>1$ рівняння $\sin x = b$ коренів не має. Тоді дане в умові рівняння має 2 корені.

Якщо $b = 1$ або $b = -1$, то рівняння $\sin x = b$ на проміжку $[0;\ 2\pi)$ має один корінь. Це відповідно числа $\frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{2}$. Тому при $|b| = 1$ дане в умові рівняння має 3 корені.

Якщо $|b| < 1$, то рівняння $\sin x = b$ на проміжку $[0;\ 2\pi)$ має 2 корені. Тому може здатися, що задане в умові рівняння в цьому випадку матиме 4 корені. Насправді один з коренів рівняння $\sin x = b$ може збігатися з числом $\frac{\pi}{3}$ або з числом $\frac{5\pi}{3}$.

Знайдемо значення параметра b, при яких числа $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{5\pi}{3}$ є коренями рівняння $\sin x = b$. Маємо:

1) $\sin\frac{\pi}{3}=b;\ \ b=\frac{\sqrt{3}}{2};$

2) $\sin\frac{5\pi}{3}=b;\ \ b=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

При $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ рівняння $\sin x = b$ на проміжку $[0;\ 2\pi)$ має корені $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{2\pi}{3}$, а дане в умові рівняння має 3 корені: $\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}.$

При $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ аналогічно отримуємо, що дане в умові рівняння має 3 корені: $\frac{\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}.$

Відповідь: Якщо $b < -1$ або $b > 1$, то 2 корені; якщо $b = -1$, або $b = 1$, або $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, то 3 корені; якщо $-1<b<-\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $-\frac{\sqrt{3}}{2}<b<\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $\frac{\sqrt{3}}{2}<b<1$, то 4 корені.

Вправи

31.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2};$ 2) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2};$ 3) $\sin x=\frac{1}{4};$ 4) $\sin x=\sqrt{2}.$

31.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x=\frac{1}{2};$ 2) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2};$ 3) $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{3};$ 4) $\sin x = 1{,}5.$

31.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\frac{x}{6}=-\frac{1}{2};$ 2) $\sin\frac{4x}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2};$ 3) $\sin 5x = 1;$ 4) $\sin(-8x)=\frac{2}{9}.$

31.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2};$ 2) $\sin\frac{x}{7}=0;$ 3) $\sin\frac{2x}{5}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

31.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{8}-x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2};$

3) $\sin\left(\frac{x}{3}+1\right)=-1;$

4) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}-3x\right)-1=0.$

31.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{18} - 8x\right) = 1;$ 2) $2\sin\left(\frac{x}{5} - 4\right) + 1 = 0.$

31.7.° Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

31.8.° Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння $\sin\left(3x - \frac{\pi}{15}\right) = -1.$

31.9.° Знайдіть усі корені рівняння $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, які належать проміжку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

31.10.° Скільки коренів рівняння $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ належать проміжку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?

31.11.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2;$ 3) $3\sin\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 3.$

2) $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 1;$

31.12.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1;$ 2) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}.$

31.13.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\frac{2}{x} = 0;$ 2) $\sin\pi\sqrt{x} = -1;$ 3) $\sin(\cos x) = 0{,}5.$

31.14.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\frac{3\pi}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$ 2) $\cos(\pi\sin x) = 0.$

31.15.•• При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $(a^2 - 1)\sin x = a + 1$?

31.16.•• При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $(a + 4)\sin^2 2x = a^2 - 16$?

31.17.•• При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{\sin x - a}{\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}} = 0$ має розв'язки?

31.18.•• При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{\sin x + a}{\sin x - 2a + 1} = 0$ має розв'язки?

31.19.** При яких додатних значеннях параметра a проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$ містить не менше ніж 4 корені рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$?

31.20.** При яких від'ємних значеннях параметра a проміжок $[a;\ 0]$ містить не менше ніж 3 корені рівняння $\sin x = -\frac{1}{2}$?

31.21.** Визначте кількість коренів рівняння на даному проміжку залежно від значень параметра a:

1) $\sin x = a$, $\left[0; \frac{11\pi}{6}\right]$; 2) $\sin x = a$, $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

31.22.** Визначте кількість коренів рівняння $\sin x = a$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$ залежно від значень параметра a.

31.23.** Визначте кількість коренів рівняння $\sin x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$ залежно від значень параметра a.

31.24.** Визначте кількість коренів рівняння $\sin x = a$ на проміжку $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$ залежно від значень параметра a.

31.25.** Скільки коренів залежно від значень параметра a має рівняння $\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sin x - a) = 0$ на проміжку $[0;\ 2\pi)$?

31.26.** Скільки коренів залежно від значень параметра a має рівняння $(\cos x - a)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0$ на проміжку $(0;\ 2\pi]$?

32. Рівняння $\operatorname{tg} x = b$ і $\operatorname{ctg} x = b$

Оскільки областю значень функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина $\mathbb{R}$, то рівняння $\operatorname{tg} x = b$ має розв'язки при будь-якому значенні b.

Для того щоб отримати формулу коренів рівняння $\operatorname{tg} x = b$, звернемося до графічної інтерпретації.

На рисунку 32.1 зображено графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = b$.

Розглянемо функцію $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції (червона крива на рис. 32.1). На цьому проміжку рівняння $\operatorname{tg} x = b$ при будь-якому b має один корінь α.

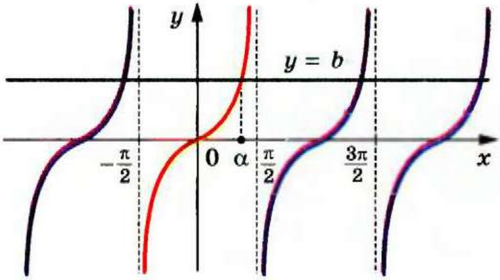


Рис. 32.1

Оскільки функція $y = \mathrm{tg}\, x$ є періодичною з періодом π, то кожен з інших коренів рівняння $\mathrm{tg}\, x = b$ відрізняється від знайденого кореня на число виду πn, $n \in \mathbb{Z}$.

Тоді множина коренів рівняння $\mathrm{tg}\, x = b$ задається формулою

$$x = \alpha + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Отримана формула показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння $\mathrm{tg}\, x = b$. Корінь α має спеціальну назву — арктангенс.

Означення. Арктангенсом числа b називають таке число α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює b.

Для арктангенса числа b використовують позначення $\mathrm{arctg}\, b$. Наприклад,

$$\mathrm{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},\ \text{оскільки}\ \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\ \text{і}\ \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3};$$

$$\mathrm{arctg}\,(-1) = -\frac{\pi}{4},\ \text{оскільки}\ -\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\ \text{і}\ \mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1;$$

$$\mathrm{arctg}\ 0 = 0,\ \text{оскільки}\ 0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\ \text{і}\ \mathrm{tg}\ 0 = 0.$$

Узагалі, $\mathrm{arctg}\, b = \alpha$, *якщо* $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ *і* $\mathrm{tg}\, \alpha = b$.

Зазначимо, що, наприклад, $\mathrm{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$. Проте $\mathrm{arctg}\, 1 \neq -\frac{3\pi}{4}$, оскільки $-\frac{3\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Тепер формулу коренів рівняння $\mathrm{tg}\, x = b$ можна записати так:

$$\boxed{x = \mathrm{arctg}\, b + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$$

Оскільки областю значень функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ є множина $\mathbb{R}$, то рівняння $\mathrm{ctg}\, x = b$ має розв'язки при будь-якому значенні b.

На рисунку 32.2 зображено графіки функцій $y = \text{ctg}\, x$ і $y = b$.

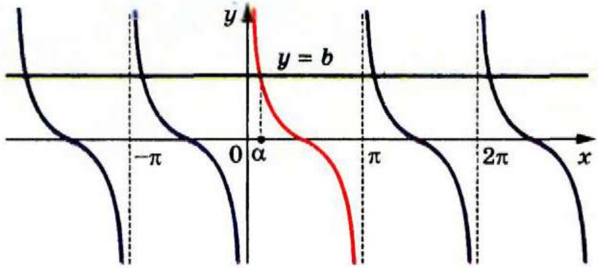


Рис. 32.2

Розглянемо функцію $y = \text{ctg}\, x$ на проміжку $(0; \pi)$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції (червона крива на рис. 32.2). На цьому проміжку рівняння $\text{ctg}\, x = b$ при будь-якому b має один корінь α.

Оскільки функція $y = \text{ctg}\, x$ є періодичною з періодом π, то кожен з інших коренів рівняння $\text{ctg}\, x = b$ відрізняється від знайденого кореня на число виду πn, $n \in \mathbb{Z}$.

Тоді множина коренів рівняння $\text{ctg}\, x = b$ задається формулою

$$x = \alpha + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Корінь α має спеціальну назву — арккотангенс.

Означення. Арккотангенсом числа b називають таке число α з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює b.

Для арккотангенса числа b використовують позначення $\text{arcctg}\, b$.

Наприклад,

$\text{arcctg}\, \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$, оскільки $\frac{\pi}{3} \in (0; \pi)$ і $\text{ctg}\, \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\text{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$, оскільки $\frac{5\pi}{6} \in (0; \pi)$ і $\text{ctg}\, \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$;

$\text{arcctg}\, 0 = \frac{\pi}{2}$, оскільки $\frac{\pi}{2} \in (0; \pi)$ і $\text{ctg}\, \frac{\pi}{2} = 0$.

Узагалі, $\textbf{arcctg}\, \boldsymbol{b} = \alpha$, ***якщо*** $\alpha \in (0; \pi)$ ***і*** $\textbf{ctg}\, \alpha = \boldsymbol{b}$.

Зазначимо, що, наприклад, $\text{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Проте $\text{arcctg}\,(-1) \neq -\frac{\pi}{4}$, оскільки $-\frac{\pi}{4} \notin (0; \pi)$.

Тепер формулу коренів рівняння $\text{ctg}\, x = b$ можна записати так:

$$\boxed{x = \text{arcctg}\, b + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$$

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння:

$$1)\ \operatorname{tg}\frac{2x}{3} = -\sqrt{3};\quad 2)\ \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = -1.$$

Розв'язання. 1) Маємо: $\frac{2x}{3} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};$

$$\frac{2}{3}x = -\frac{\pi}{3} + \pi k;\quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

2) Маємо: $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1;$

$$x - \frac{2\pi}{3} = \operatorname{arcctg} 1 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};$$

$$x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \pi k;\quad x = \frac{11}{12}\pi + \pi k.$$

Відповідь: $\frac{11}{12}\pi + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

ПРИКЛАД 2 Визначте, при яких значеннях параметра b рівняння $(x - b)\operatorname{tg} x = 0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ має єдиний корінь.

Розв'язання. Множина коренів рівняння $\operatorname{tg} x = 0$ визначається формулою $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Розглядуваному проміжку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ належить лише один корінь $x = 0$.

Рівняння $x - b = 0$ має єдиний корінь $x = b$.

Якщо $b = 0$, то початкове рівняння має єдиний корінь $x = 0$.

Якщо $b \in \left[-\frac{\pi}{6}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то початкове рівняння на заданому проміжку має два корені $x = 0$ і $x = b$.

Зрозуміло, що умова $b \notin \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ забезпечить існування у початкового рівняння тільки одного кореня.

Відповідь: $b = 0$, або $b < -\frac{\pi}{6}$, або $b \geqslant \frac{\pi}{2}$.

Вправи

32.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;
2) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
3) $\operatorname{tg} x = -1$;
4) $\operatorname{tg} x = 5$;
5) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
6) $\operatorname{ctg} x = -1$;
7) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$;
8) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{7}$;
9) $\operatorname{ctg} x = 0$.

32.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} x = 1$; 3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; 5) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; 7) $\operatorname{tg} x = 0$.

2) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\operatorname{tg} x = -2$; 6) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

32.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} 2x = 1$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7x}{4}\right) = \sqrt{3}$; 5) $\operatorname{ctg} 6x = \frac{6}{11}$;

2) $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = \frac{1}{3}$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 0$; 6) $\operatorname{ctg}(-9x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

32.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} \frac{3}{5}x = 0$; 2) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{ctg} \frac{3}{2}x = 5$.

32.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$;

2) $\operatorname{tg}(3 - 2x) = 2$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

32.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; 2) $\operatorname{ctg}(4 - 3x) = 2$; 3) $3\operatorname{tg}(3x + 1) - \sqrt{3} = 0$.

32.7.° Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg} 4x = 1$ належать проміжку $[0; \pi]$?

32.8.° Скільки коренів рівняння $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$?

32.9.° Знайдіть суму коренів рівняння $\operatorname{ctg} 2x = -\sqrt{3}$, які належать проміжку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

32.10.° Знайдіть суму коренів рівняння $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$, які належать проміжку $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

32.11.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{x} = 0$; 2) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\sqrt{x}} = 1$; 3) $\operatorname{tg}(\pi \sin x) = \sqrt{3}$.

32.12.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{5x} = 1$; 2) $\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{x}} = -1$; 3) $\operatorname{ctg}(\pi \cos x) = 1$.

32.13.•• При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} x - a}{\operatorname{ctg} x + 3} = 0$; 2) $\dfrac{\sin x - a}{3\operatorname{tg}^2 x - 1} = 0$?

32.14.•• При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння:

1) $\dfrac{\operatorname{ctg} x + a}{\operatorname{tg} x - 2} = 0$; 2) $\dfrac{\cos x - a}{\operatorname{ctg}^2 x - 3} = 0$?

32.15.•• При яких значеннях параметра a рівняння $(x + a)\left(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\right) = 0$ на проміжку $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ має єдиний корінь?

32.16.•• При яких значеннях параметра a рівняння $(x - a)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$ на проміжку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$ має єдиний корінь?

33. Функції $y = \arccos x$ і $y = \arcsin x$

Для будь-якого $a \in [-1; 1]$ рівняння $\cos x = a$ на проміжку $[0; \pi]$ має єдиний корінь, який дорівнює $\arccos a$ (рис. 33.1). Тому кожному числу x з проміжку $[-1; 1]$ можна поставити у відповідність єдине число y з проміжку $[0; \pi]$ таке, що $y = \arccos x$.

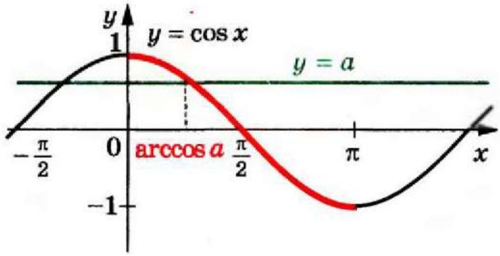


Рис. 33.1

Тим самим задано функцію $f(x) = \arccos x$ з областю визначення $D(f) = [-1; 1]$ і областю значень $E(f) = [0; \pi]$.

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \cos x$ з областю визначення $D(g) = [0; \pi]$.

Дійсно, $D(f) = E(g) = [-1; 1]$;

$E(f) = D(g) = [0; \pi]$.

З означення арккосинуса випливає, що для всіх x з проміжку $[-1; 1]$ виконується рівність

$$\boxed{\cos(\arccos x) = x}$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Властивості взаємно обернених функцій, розглянуті в п. 9, дозволяють визначити деякі властивості функції $f(x) = \arccos x$.

Оскільки функція $g(x) = \cos x$, $D(g) = [0; \pi]$, є спадною, то з теореми 9.3 випливає, що функція $f(x) = \arccos x$ також є спадною.

Для будь-якого $x \in D(g)$ маємо $f(g(x)) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in [0; \pi]$ виконується рівність

$$\boxed{\arccos(\cos x) = x}$$

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Це дозволяє побудувати графік функції $f(x) = \arccos x$ (рис. 33.2).

Відзначимо ще одну властивість функції $y = \arccos x$:
для будь-якого $x \in [-1; 1]$ виконується рівність

$$\boxed{\arccos(-x) = \pi - \arccos x} \qquad (1)$$

Наприклад, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$

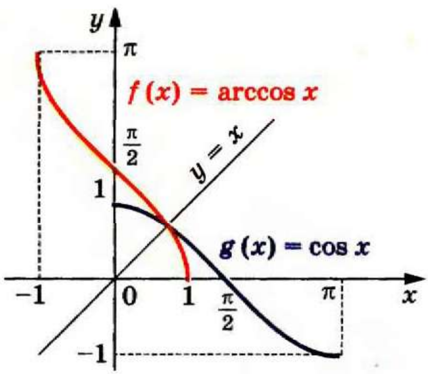


Рис. 33.2

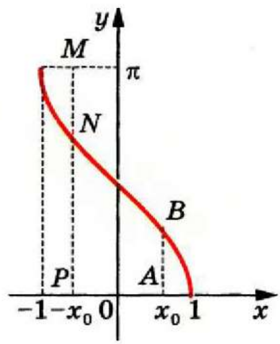


Рис. 33.3

Ця властивість має просту графічну ілюстрацію. На рисунку 33.3 $AB = MN = \arccos x_0$, $NP = \arccos(-x_0)$, а $MN + NP = \pi$.

Доведемо рівність (1). Нехай $\arccos(-x) = \alpha_1$, $\pi - \arccos x = \alpha_2$. Зауважимо, що $\alpha_1 \in [0; \pi]$, $\alpha_2 \in [0; \pi]$. Функція $y = \cos x$ є спадною на проміжку $[0; \pi]$, отже, на цьому проміжку кожного свого значення вона набуває тільки один раз. Тому, показавши, що $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$, тим самим доведемо рівність $\alpha_1 = \alpha_2$.

Маємо: $\cos \alpha_1 = \cos(\arccos(-x)) = -x$;
$\cos \alpha_2 = \cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$.

Для будь-якого $a \in [-1; 1]$ рівняння $\sin x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ має єдиний корінь, який дорівнює $\arcsin a$ (рис. 33.4).

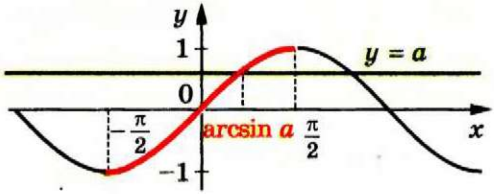


Рис. 33.4

Тому кожному числу x з проміжку $[-1; 1]$ можна поставити у відповідність єдине число y з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ таке, що $y = \arcsin x$.

Тим самим задано функцію $f(x) = \arcsin x$ з областю визначення $D(f) = [-1; 1]$ і областю значень $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \sin x$ з областю визначення $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Справді, $D(f) = E(g) = [-1; 1]$;

$$E(f) = D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

З означення арксинуса випливає, що для всіх $x \in [-1; 1]$ виконується рівність

$$\boxed{\sin(\arcsin x) = x}$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Визначимо деякі властивості функції $f(x) = \arcsin x$.

Оскільки функція $g(x) = \sin x$, $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, є непарною, то функція $f(x) = \arcsin x$ також є непарною (див. ключову задачу № 9.18). Іншими словами, для будь-якого $x \in [-1; 1]$ виконується рівність

$$\boxed{\arcsin(-x) = -\arcsin x}$$

Наприклад, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{3}.$

Функція $g(x)=\sin x$, $D(g)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, є зростаючою. Отже, функція $f(x)=\arcsin x$ також є зростаючою (див. теорему 9.3).

Для будь-якого $x\in D(g)$ маємо $f(g(x))=x$. Це означає, що для будь-якого $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ виконується рівність

$$\boxed{\arcsin(\sin x)=x}$$

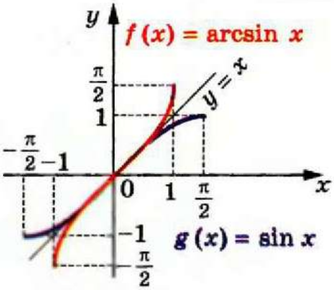


Рис. 33.5

Знову скористаємося тим, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y=x$.

На рисунку 33.5 показано, як за допомогою графіка функції $g(x)=\sin x$, $D(g)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, побудувати графік функції $f(x)=\arcsin x$.

Доведемо, що для будь-якого $x\in[-1;1]$ виконується рівність

$$\boxed{\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}}$$

Для цього покажемо, що

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x.$$

Маємо: $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$. Крім того, $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$. Тому

$$-\pi\leqslant-\arccos x\leqslant 0;\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\arccos x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Отже, значення виразів $\arcsin x$ і $\frac{\pi}{2}-\arccos x$ належать проміжку зростання функції $y=\sin x$. Тому достатньо показати, що $\sin(\arcsin x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)$. Маємо: $\sin(\arcsin x)=x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)=\cos(\arccos x)=x.$

У таблиці наведено властивості функцій $y = \arccos x$ і $y = \arcsin x$.

	$y = \arccos x$	$y = \arcsin x$
Область визначення	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Область значень	$[0; \pi]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
Нулі функції	$x = 1$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in [-1; 1)$, то $\arccos x > 0$	Якщо $x \in [-1; 0)$, то $\arcsin x < 0$; якщо $x \in (0; 1]$, то $\arcsin x > 0$
Парність	Не є ні парною, ні непарною	Непарна
Зростання / спадання	Спадна	Зростаюча

ПРИКЛАД 1 Знайдіть область визначення функції

$$y = \arccos (x^2 - 3).$$

Розв'язання. Областю визначення $D(y)$ даної функції є множина розв'язків нерівності $-1 \leqslant x^2 - 3 \leqslant 1$.

Маємо: $\begin{cases} x^2 \leqslant 4, \\ x^2 \geqslant 2; \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -\sqrt{2}, \\ x \geqslant \sqrt{2}; \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} -2 \leqslant x \leqslant -\sqrt{2}, \\ \sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2. \end{array}\right.$

Отже, $D(y) = \left[-2; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; 2\right]$. ●

ПРИКЛАД 2 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 4 - \arccos 3x$.

Розв'язання. Оскільки $0 \leqslant \arccos 3x \leqslant \pi$, то $-\pi \leqslant -\arccos 3x \leqslant 0$ і $4 - \pi \leqslant 4 - \arccos 3x \leqslant 4$.

Зазначимо, що $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 4 - \pi$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 4$.

Відповідь: найменше значення дорівнює $4 - \pi$, найбільше значення дорівнює 4.

ПРИКЛАД 3 Обчисліть $\arccos\left(\cos\frac{1}{3}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи формулу $\arccos(\cos x) = x$, де $x \in [0; \pi]$, маємо $\arccos\left(\cos\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

ПРИКЛАД 4 Обчисліть arcsin (sin 6).

Розв'язання. Здавалося б, відповідь можна отримати одразу, зважаючи на рівність $\arcsin(\sin x) = x$. Проте число $x = 6$ не належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а отже, не може дорівнювати значенню арксинуса.

Правильне міркування має бути таким:

$\arcsin(\sin 6) = \arcsin(\sin(6 - 2\pi))$. Оскільки $6-2\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin(\sin 6) = 6 - 2\pi$.

Відповідь: $6 - 2\pi$.

ПРИКЛАД 5 Обчисліть arccos (sin 10).

Розв'язання. Маємо: $\arccos(\sin 10) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - 10\right)\right)$.

Зауважимо, що число $\frac{\pi}{2} - 10$ не належить проміжку $[0; \pi]$. Тому слід виконати такі перетворення:

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - 10\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(10 - \frac{\pi}{2} - 2\pi\right)\right) = 10 - \frac{5\pi}{2}.$$

Відповідь: $10 - \frac{5\pi}{2}$.

ПРИКЛАД 6 Обчисліть $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$;

Розв'язання. Нехай $\arccos\frac{3}{5} = \alpha$, тоді $\alpha \in [0; \pi]$ і $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Задача звелася до пошуку значення $\sin\alpha$.

Урахуємо, що коли $\alpha \in [0; \pi]$, то $\sin\alpha \geqslant 0$. Тоді отримуємо:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Відповідь: $\frac{4}{5}$.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $\arcsin\frac{x-1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$\arcsin\frac{x-1}{2} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Оскільки функція $y = \arcsin x$ є зростаючою, отже, кожного свого значення набуває один раз, то рівність $\arcsin x_1 = \arcsin x_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$, $x_1 \in [-1; 1]$ і $x_2 \in [-1; 1]$.

Тому дане рівняння рівносильне такому: $\frac{x-1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь: $\sqrt{3} + 1$.

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть нерівність $\arccos(2x-1) > \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність у такому вигляді:

$$\arccos(2x-1) > \arccos\frac{1}{2}.$$

Оскільки функція арккосинус є спадною, то дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} 2x-1 < \frac{1}{2}, \\ 2x-1 \geqslant -1. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} x < \frac{3}{4}, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

Відповідь: $\left[0; \frac{3}{4}\right)$.

ПРИКЛАД 9 Побудуйте графік функції $y = \arcsin(\sin x)$.

Розв'язання. Нагадаємо, що $\arcsin(\sin x) = x$ лише за умови $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тому думка, що шуканим графіком є пряма $y = x$,— помилкова.

Дана функція є періодичною з періодом $T = 2\pi$. Тому достатньо побудувати її графік на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ довжиною в період.

Якщо $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin x) = x$. Тому на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ шуканий графік — це відрізок прямої $y = x$.

Якщо $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}$, отже, $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$. Тому на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ шуканий графік — це відрізок прямої $y = \pi - x$.

Графік функції $y = \arcsin(\sin x)$ зображено на рисунку 33.6. ●

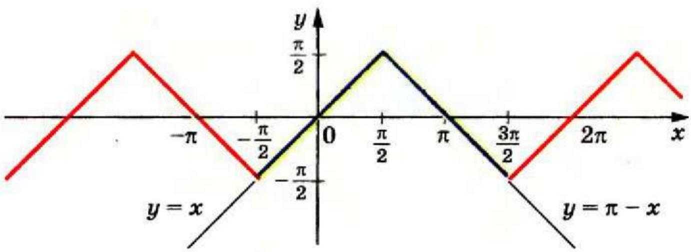


Рис. 33.6

Вправи

33.1.° Чи є правильною рівність:

1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi;$

2) $\arccos^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{25\pi^2}{36};$

3) $\arcsin 1+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6};$

4) $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{2};$

5) $\arcsin 1\cdot\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{12};$

6) $\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{16}?$

33.2.° Чи є правильною рівність:

1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2};$

2) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{12};$

3) $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=0;$

4) $\arcsin 0+\arcsin\frac{1}{2}=\frac{7\pi}{6};$

5) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{36}?$

33.3.° Обчисліть:

1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right);$

2) $\cos\left(2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$

3) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$

4) $\cos\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right).$

33.4.° Обчисліть:

1) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$

2) $\operatorname{tg}\,(2\arccos(-1));$

3) $\sin\left(3\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right);$

4) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

33.5.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\arcsin(x-1);$ 2) $y=\arccos\sqrt{x};$ 3) $y=\arccos\frac{\pi}{x+4}.$

33.6.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\arcsin\left(x+\frac{\pi}{2}\right);$ 2) $y=\arccos\sqrt{3-x};$ 3) $y=\arccos\frac{2}{3x}.$

33.7.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y=\arcsin x+\frac{\pi}{2};$ 2) $y=\arccos x+2.$

33.8.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y=\arccos x+\pi;$ 2) $y=\arcsin x+1.$

33.9.° Обчисліть: 1) $\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin\frac{\pi}{6}\right)$.

33.10.• Обчисліть: 1) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos\frac{\pi}{4}\right)$.

33.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin x = -\frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos x = \frac{1}{2}$; 3) $\arcsin x = \frac{5\pi}{6}$.

33.12.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos x = -\frac{\pi}{6}$; 3) $\arccos(2x-3) = \frac{\pi}{2}$.

33.13.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\arcsin x > -\frac{\pi}{2}$; 4) $\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$; 7) $\arccos x > 0$;

2) $\arcsin x \leqslant -\frac{\pi}{2}$; 5) $\arcsin x > \frac{\pi}{2}$; 8) $\arccos x < \pi$.

3) $\arcsin x \geqslant -\frac{\pi}{2}$; 6) $\arccos x \leqslant 0$;

33.14.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\arccos x \geqslant \pi$; 3) $\arccos x \geqslant 0$; 5) $\arccos x > \pi$.

2) $\arcsin x < \frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos x \leqslant \pi$;

33.15.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\pi - \arccos x}$; 3) $y = \sqrt{-\arccos x}$; 5) $y = \arccos(-1 - x^2)$.

2) $y = \sqrt{\arccos x - \pi}$; 4) $y = \arcsin\left(\sqrt{x} + 1\right)$;

33.16.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}$; 3) $y = \sqrt{\arccos x}$; 5) $y = \arccos\frac{x^2+1}{2x}$.

2) $y = \sqrt{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}$; 4) $y = \arccos(x^2 - 2x + 2)$;

33.17.• Знайдіть область значень функції:

1) $y = \arcsin\sqrt{x} + 4$; 3) $y = \frac{1}{\arcsin x}$;

2) $y = \sqrt{-\arccos x}$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt{\arccos x}}$.

33.18.• Знайдіть область значень функції:

1) $y = \arccos\sqrt{x} + 2$; 3) $y = \frac{1}{\arccos x}$;

2) $y = \sqrt{\arcsin x}$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt{\arcsin x}}$.

33.19.° Доведіть, що при $|x| \leqslant 1$ виконується рівність

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

33.20.° Доведіть, що при $|x| \leqslant 1$ виконується рівність

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

33.21.° Обчисліть:

1) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$;

2) $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

3) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5} - \arccos\frac{5}{13}\right)$;

4) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$.

33.22.° Обчисліть:

1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$;

2) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3} + \arccos\frac{2}{3}\right)$;

3) $\cos\left(2\arccos\frac{4}{5}\right)$;

4) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right)$.

33.23.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos(\arccos(4x - 9)) = x^2 - 5x + 5$;

2) $\sin(\arcsin(x + 2)) = x + 2$.

33.24.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos(\arccos(4x - 1)) = 3x^2$; 2) $\cos(\arccos(x - 1)) = x - 1$.

33.25.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin(3x - 2) = \arcsin(-x + 2)$;

2) $\arccos(3x - 16) = \arccos(x^2 - 26)$.

33.26.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos(3x + 2) = \arccos(5x + 3)$;

2) $\arcsin(x^2 - 4) = \arcsin(2x + 4)$.

33.27.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\arccos(2x - 1) > \frac{\pi}{3}$; 2) $\arcsin 2x > \frac{\pi}{6}$; 3) $\arcsin(5 - 3x) < -\frac{\pi}{3}$.

33.28.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\arccos(4x - 1) > \frac{3\pi}{4}$;

2) $\arcsin(2 - 3x) < \frac{\pi}{4}$;

3) $\arccos(4 - 7x) < \frac{5\pi}{6}$.

33.29.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\arcsin(3x - 2) > \arcsin(5x - 3)$; 2) $\arccos(2x - 1) < \arccos\frac{1}{x}$.

33.30.* Розв'яжіть нерівність:

1) $\arcsin(x^2 - x) > \arcsin(3x - 4)$; 2) $\arccos(1-2x) < \arccos\dfrac{1}{x-1}$.

33.31.* Побудуйте графік функції:

1) $y = \arcsin|x - 1|$; 2) $y = \arccos|2x + 1|$.

33.32.* Побудуйте графік функції:

1) $y = \arccos(|x| + 1)$; 2) $y = \arcsin\left(\dfrac{1}{2}|x|-1\right)$.

33.33.** Побудуйте графік функції $y = \dfrac{|\arcsin x|}{\arcsin|x|}$.

33.34.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin(\arcsin x)$; 3) $y = \cos(2\arcsin x)$;

2) $y = \cos(\arcsin x)$; 4) $y = \sin(\arcsin x + \arccos x)$.

33.35.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \cos(\arccos x)$; 3) $y = \cos(2\arccos x)$;

2) $y = \sin(\arccos x)$; 4) $y = \cos(\arcsin x + \arccos x)$.

33.36.** Побудуйте графік функції $y = \arccos(\cos x)$.

33.37.** Обчисліть:

1) $\arcsin\left(\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$; 3) $\arcsin(\sin 3)$;

2) $\arcsin\left(\sin\dfrac{4\pi}{7}\right)$; 4) $\arcsin(\cos 8)$.

33.38.** Обчисліть:

1) $\arccos\left(\cos\dfrac{2\pi}{9}\right)$; 3) $\arccos(\cos 6{,}28)$; 5) $\arccos(\sin 12)$.

2) $\arccos\left(\cos\dfrac{11\pi}{9}\right)$; 4) $\arcsin\left(\cos\dfrac{\pi}{8}\right)$;

33.39.** Розв'яжіть рівняння $(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \dfrac{5\pi^2}{36}$.

33.40.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(\arcsin x)^2 - (\arccos x)^2 = \dfrac{\pi^2}{12}$; 2) $\arcsin x \cdot \arccos x = -\dfrac{3\pi^2}{16}$.

33.41.** Доведіть, що $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ при $|x| < 1$.

33.42.** Доведіть, що $\operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ при $|x| \leqslant 1$ і $x \neq 0$.

33.43.•• Доведіть, що $\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{5}{13}=\arcsin\frac{56}{65}$.

33.44.•• Доведіть, що $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{12}{13}=\frac{\pi}{2}$.

33.45.•• Доведіть, що $\arcsin x=\begin{cases}\arccos\sqrt{1-x^2}, & \text{якщо } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\arccos\sqrt{1-x^2}, & \text{якщо } -1\leqslant x<0.\end{cases}$

33.46.•• Доведіть, що $\arccos x=\begin{cases}\arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{якщо } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{якщо } -1\leqslant x<0.\end{cases}$

33.47.•• Розв'яжіть рівняння $\arcsin 2x+\arcsin x=\frac{\pi}{3}$.

33.48.•• Розв'яжіть рівняння $\arcsin x+\arcsin\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}$.

34. Функції $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$

Для будь-якого a рівняння $\operatorname{tg} x = a$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ має єдиний корінь, який дорівнює $\operatorname{arctg} a$ (рис. 34.1). Тому будь-якому числу x можна поставити у відповідність єдине число y з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ таке, що $y = \operatorname{arctg} x$.

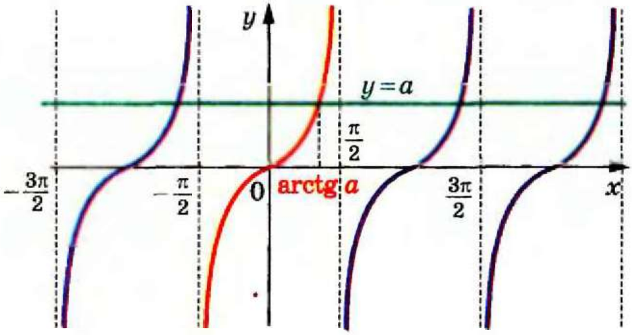


Рис. 34.1

Тим самим задано функцію $f(x) = \operatorname{arctg} x$ з областю визначення $D(f) = \mathbb{R}$ і областю значень $E(f)=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \operatorname{tg} x$ з областю визначення $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Дійсно, $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$;

$$E(f) = D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

З означення арктангенса випливає, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\boxed{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x}$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Властивості взаємно обернених функцій, розглянуті в п. 9, дозволяють визначити деякі властивості функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Оскільки функція $g(x) = \operatorname{tg} x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, є зростаючою, то з теореми 9.3 випливає, що функція $f(x) = \operatorname{arctg} x$ також є зростаючою.

Оскільки функція $g(x) = \operatorname{tg} x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, є непарною, то функція $f(x) = \operatorname{arctg} x$ також є непарною (див. ключову задачу № 9.18). Іншими словами, для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x}$$

Наприклад, $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Для будь-якого $x \in D(g)$ маємо $f(g(x)) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується рівність

$$\boxed{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x}$$

Нагадаємо, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. На рисунку 34.2 показано, як за допомогою графіка функції $g(x) = \operatorname{tg} x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, побудувати графік функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

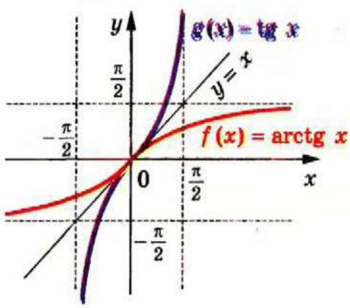


Рис. 34.2

Для будь-якого a рівняння $\text{ctg}\, x = a$ на проміжку $(0; \pi)$ має єдиний корінь, який дорівнює $\text{arcctg}\, a$ (рис. 34.3). Тому будь-якому числу x можна поставити у відповідність єдине число y з проміжку $(0; \pi)$ таке, що $y = \text{arcctg}\, x$.

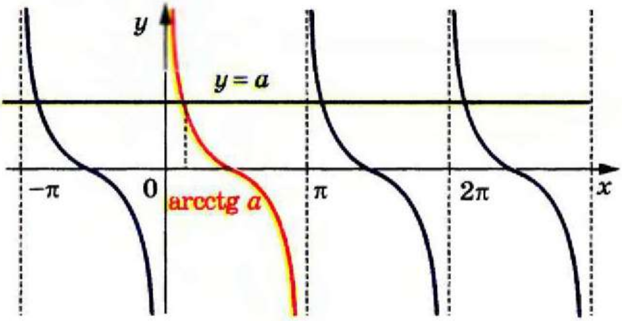


Рис. 34.3

Тим самим задано функцію $f(x) = \text{arcctg}\, x$ з областю визначення $D(f) = \mathbb{R}$ і областю значень $E(f) = (0; \pi)$.

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \text{ctg}\, x$ з областю визначення $D(g) = (0; \pi)$.

Справді, $E(g) = \mathbb{R}$. Таким чином,

$$D(f) = E(g) = \mathbb{R};$$
$$E(f) = D(g) = (0; \pi).$$

З означення арккотангенса випливає, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\boxed{\text{ctg}\,(\text{arcctg}\, x) = x}$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Визначимо деякі властивості функції $f(x) = \text{arcctg}\, x$.

Оскільки функція $g(x) = \text{ctg}\, x$, $D(g) = (0; \pi)$, є спадною, то функція $f(x) = \text{arcctg}\, x$ також є спадною.

Для будь-якого $x \in D(g)$ маємо $f(g(x)) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in (0; \pi)$ виконується рівність

$$\boxed{\text{arcctg}\,(\text{ctg}\, x) = x}$$

На рисунку 34.4 показано, як за допомогою графіка функції $g(x) = \text{ctg}\, x$, $D(g) = (0; \pi)$, побудувати графік функції $f(x) = \text{arcctg}\, x$.

Відзначимо ще одну властивість функції арккотангенс: для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\boxed{\text{arcctg}\,(-x) = \pi - \text{arcctg}\, x}$$

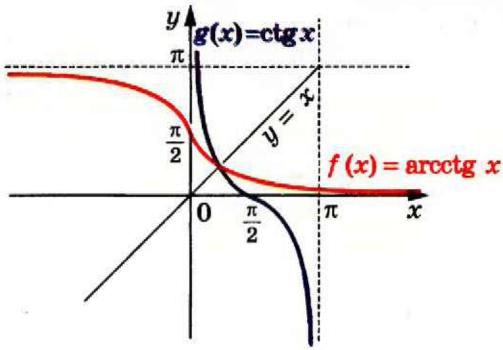


Рис. 34.4

Наприклад, $\mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \mathrm{arcctg}\,\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$

Доведемо цю властивість.

Нехай $\mathrm{arcctg}\ (-x) = \alpha_1$ і $\pi - \mathrm{arcctg}\ x = \alpha_2$. Зауважимо, що $\alpha_1 \in (0;\ \pi)$, $\alpha_2 \in (0;\ \pi)$.

Функція $y = \mathrm{ctg}\ x$ спадає на проміжку $(0;\ \pi)$, отже, на цьому проміжку кожного свого значення вона набуває тільки один раз. Тому, показавши, що $\mathrm{ctg}\ \alpha_1 = \mathrm{ctg}\ \alpha_2$, тим самим доведемо рівність $\alpha_1 = \alpha_2$.

Маємо: $\mathrm{ctg}\ \alpha_1 = \mathrm{ctg}\ (\mathrm{arcctg}\ (-x)) = -x$;

$$\mathrm{ctg}\ \alpha_2 = \mathrm{ctg}\ (\pi - \mathrm{arcctg}\ x) = -\mathrm{ctg}\ (\mathrm{arcctg}\ x) = -x.$$

Отже, $\mathrm{ctg}\ \alpha_1 = \mathrm{ctg}\ \alpha_2$.

Покажемо, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\boxed{\mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arcctg}\,x = \frac{\pi}{2}}$$

Достатньо показати, що $\mathrm{arctg}\,x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arcctg}\,x.$

Маємо: $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}\,x < \frac{\pi}{2}$, $0 < \mathrm{arcctg}\ x < \pi$;

$$-\pi < -\mathrm{arcctg}\ x < 0;\ -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \mathrm{arcctg}\,x < \frac{\pi}{2}.$$

Отже, значення виразів $\mathrm{arctg}\,x$ і $\frac{\pi}{2} - \mathrm{arcctg}\,x$ належать проміжку зростання функції $y = \mathrm{tg}\,x$. Тому достатньо показати, що $\mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\,x) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arcctg}\,x\right)$.

Маємо: $\mathrm{tg}\ (\mathrm{arctg}\,x) = x$, $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arcctg}\,x\right) = \mathrm{ctg}\,(\mathrm{arcctg}\,x) = x.$

У таблиці наведено властивості функцій $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$.

	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
Область визначення	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значень	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$(0; \pi)$
Нулі функції	$x = 0$	–
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in (-\infty; 0)$, то $\operatorname{arctg} x < 0$; якщо $x \in (0; +\infty)$, то $\operatorname{arctg} x > 0$	$\operatorname{arcctg} x > 0$ при всіх x
Парність	Непарна	Не є ні парною, ні непарною
Зростання / спадання	Зростаюча	Спадна

ПРИКЛАД 1 Обчисліть $\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Розв'язання. Нехай $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) = \alpha$, тоді $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$. Запишемо:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad \cos^2\alpha = \frac{9}{10}.$$

Звідси $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{9}{10} - 1 = \frac{4}{5}$.

Відповідь: $\frac{4}{5}$.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{arctg} x$ є зростаючою, то можна записати:

$$0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{2} < \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Звідси $0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}$.

Отже, значення виразів, записаних у лівій і правій частинах рівності, яка доводиться, належать проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. На цьому проміжку функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає.

Тоді для доведення достатньо показати, що

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

Маємо: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1;$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

Вправи

34.1.° Обчисліть:

1) $\cos(2\operatorname{arctg}1)$;
2) $\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$;
3) $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6}\right)$;
4) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+2\operatorname{arctg}1\right)$.

34.2.° Знайдіть значення виразу:

1) $\arcsin 1+\arccos(-1)+\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;
2) $\arccos 0+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arctg}(-1)+\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;
3) $4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-3\arccos 1+2\arcsin\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

34.3.° Знайдіть значення виразу:

1) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}0+\operatorname{arcctg}1+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;
2) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-5\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+4\arcsin(-1)$.

34.4.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{\operatorname{arcctg}x}$;
2) $y=\sqrt{\operatorname{arctg}(x-1)}$.

34.5.° Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt{\pi-\operatorname{arcctg}x}$.

34.6.° Знайдіть область значень функції:

1) $y=\operatorname{arctg}x+2$;
2) $y=\sqrt{\operatorname{arctg}x}$.

34.7.° Знайдіть область значень функції:

1) $y = \operatorname{arcctg} x + 4$;
2) $y = \sqrt{-\operatorname{arctg} x}$.

34.8.° Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 4)$;
2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 5)$;
3) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}\right)$;
4) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} \pi)$.

34.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2x) = 5$;
2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(4 - 3x)) = 2$.

34.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$;
2) $\operatorname{arctg} x = 1$;
3) $\operatorname{arctg} x = \frac{3\pi}{4}$;
4) $\operatorname{arctg}(4x + 9) = -\frac{\pi}{6}$.

34.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{arcctg} x = \frac{3\pi}{4}$;
2) $\operatorname{arcctg} x = -1$;
3) $\operatorname{arcctg} x = -\frac{\pi}{4}$;
4) $\operatorname{arcctg}(5 - 8x) = \frac{2\pi}{3}$.

34.12.• Знайдіть область значень функції $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

34.13.• Знайдіть область значень функції $y = \frac{1}{\operatorname{arcctg} x}$.

34.14.• Обчисліть:

1) $\sin(\operatorname{arctg} 2)$;
2) $\cos(\operatorname{arctg} 2)$;
3) $\cos\left(-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{7}{8}\right)\right)$;
4) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \operatorname{arcctg} 3\right)$.

34.15.• Обчисліть:

1) $\sin(\operatorname{arcctg}(-2))$;
2) $\sin(\operatorname{arctg}(-3))$;
3) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \arccos\frac{3}{5}\right)$.

34.16.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{arctg}(5x + 3) > -\frac{\pi}{3}$;
2) $\operatorname{arcctg}(x - 2) < \frac{5\pi}{6}$.

34.17.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{arcctg}(3x - 7) > \frac{2\pi}{3}$;
2) $\operatorname{arctg}(x + 11) < \frac{\pi}{6}$.

34.18.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$; 2) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$.

34.19.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$; 2) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)$.

34.20.° Розв'яжіть рівняння $(\operatorname{arctg} x)^2 + (\operatorname{arcctg} x)^2 = \frac{\pi^2}{8}$.

34.21.° Розв'яжіть рівняння $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x = -\frac{5\pi^2}{18}$.

34.22.•• Побудуйте графік функції $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

34.23.•• Побудуйте графік функції $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$.

34.24.•• Обчисліть:

1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{13}\right)$; 3) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)$; 5) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 17)$.

2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{10\pi}{13}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{21}\right)$;

34.25.•• Обчисліть:

1) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{11}\right)$; 3) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 15)$; 5) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 10)$.

2) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{15\pi}{11}\right)$; 4) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{15\pi}{19}\right)$;

34.26.•• Доведіть, що $\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}, & \text{якщо } x > 0, \\ -\pi + \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

34.27.•• Доведіть, що $\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & \text{якщо } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

34.28.•• Доведіть, що:

1) $\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{якщо } 0 < x \leqslant 1, \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{якщо } -1 \leqslant x < 0; \end{cases}$

2) $\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

34.29.** Доведіть, що:

1) $\arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{якщо } 0 < x \leqslant 1, \\ -\pi + \operatorname{arcctg} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{якщо } -1 \leqslant x < 0; \end{cases}$

2) $\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ \pi - \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

34.30.** Числа x, y такі, що $|xy| < 1$. Доведіть, що

1) $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.

34.31.** Чи існують такі числа x, y, що виконується нерівність

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y > \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}?$$

34.32.** Чи існують такі числа x, y, що виконується нерівність

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}?$$

34.33.** Доведіть рівність $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

34.34.** Доведіть рівність $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} = \operatorname{arctg}\frac{49}{43}$.

34.35.* Обчисліть суму:

1) $S = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}$;

2) $S = \operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arcctg} 7 + \ldots + \operatorname{arcctg} (n^2 + n + 1)$.

34.36.* Обчисліть суму $S = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{2}{11} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{2n}{n^4 + n^2 + 2}$.

34.37.* Про додатні числа x, y, z відомо, що $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z < \pi$. Доведіть, що $x + y + z > xyz$.

34.38.* Про додатні числа x, y, z відомо, що

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z < \frac{\pi}{2}.$$

Доведіть, що $xy + yz + zx < 1$.

35. Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних

У пунктах 30–32 було отримано формули для розв'язування рівнянь виду $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Ці рівняння називають **найпростішими тригонометричними рівняннями.** За допомогою різних прийомів і методів багато тригонометричних рівнянь можна звести до найпростіших.

У цьому пункті розглянемо рівняння, які можна звести до найпростіших, ввівши нову змінну і розв'язавши отримане алгебраїчне рівняння.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\sin x - 3\cos 2x = 2$.

Розв'язання. Використовуючи формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, перетворимо дане рівняння:

$$\sin x - 3(1 - 2\sin^2 x) - 2 = 0;$$

$$6\sin^2 x + \sin x - 5 = 0.$$

Нехай $\sin x = t$. Отримуємо квадратне рівняння $6t^2 + t - 5 = 0$. Звідси $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{5}{6}$.

Отже, дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{5}{6}. \end{array}\right.$$

Маємо: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = (-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $(-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, то дане рівняння можна записати так:

$$\operatorname{tg} x + (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 3.$$

Звідси $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$. Нехай $\operatorname{tg} x = t$. Тоді $t^2 + t - 2 = 0$. Звідси $t_1 = 1$, $t_2 = -2$.

Отримуємо, що дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\text{tg}\, x = 1,\\ \text{tg}\, x = -2.\end{array}\right. \quad \textbf{Звідси} \quad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\\ x = -\text{arctg}\, 2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\text{arctg}\ 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $2 \sin^2 x + \cos 4x - 2 = 0$.

Розв'язання. Можна записати: $1 - \cos 2x + 2 \cos^2 2x - 1 - 2 = 0$. Звідси $2 \cos^2 2x - \cos 2x - 2 = 0$. Зробимо заміну $\cos 2x = t$. Тоді останнє рівняння набуває вигляду $2t^2 - t - 2 = 0$. Розв'язавши його, отримуємо $t_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$, $t_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$.

Оскільки $\frac{1+\sqrt{17}}{4} > 1$, а $\frac{1-\sqrt{17}}{4} \in [-1; 1]$, то дане рівняння рівносильне рівнянню $\cos 2x = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$, звідси

$$x = \pm\frac{1}{2} \arccos \frac{1-\sqrt{17}}{4} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $\pm\frac{1}{2} \arccos \frac{1-\sqrt{17}}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $12 \cos^2 \frac{x}{2} = 9 - 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}$.

Розв'язання. Скориставшись формулами пониження степеня і перетворення добутку в суму, отримуємо:

$$6\,(1 + \cos x) = 9 - 2\,(\cos 2x + \cos x).$$

Звідси $2 \cos 2x + 8 \cos x - 3 = 0$; $2\,(2 \cos^2 x - 1) + 8 \cos x - 3 = 0$; $4 \cos^2 x + 8 \cos x - 5 = 0$.

Використовуючи заміну $\cos x = t$, отримаємо рівняння $4t^2 + 8t - 5 = 0$.

Звідси $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = -\frac{5}{2}$. Далі маємо: $\cos x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння

$$\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x + 3\, \text{tg}\, x + 3\, \text{ctg}\, x + 4 = 0.$$

Розв'язання. Маємо: $\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x + 3\,(\text{tg}\, x + \text{ctg}\, x) + 4 = 0$.

Нехай $\text{tg}\, x + \text{ctg}\, x = y$. Підносячи обидві частини записаної рівності до квадрата, отримуємо: $\text{tg}^2 x + 2 + \text{ctg}^2 x = y^2$; $\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x = y^2 - 2$. Дане в умові рівняння набуває вигляду $y^2 - 2 + 3y + 4 = 0$, тоді $y^2 + 3y + 2 = 0$; $y_1 = -1$, $y_2 = -2$.

Маємо сукупність $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2. \end{array}\right.$ Розв'язуючи рівняння сукупності, знаходимо $\operatorname{tg} x = -1$. Звідси $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Означення. Рівняння виду

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \ldots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0,$$

де a_0, a_1, ..., a_n — дійсні числа, які одночасно не дорівнюють нулю, $n \in \mathbb{N}$, називають однорідним тригонометричним рівнянням n-го степеня відносно $\sin x$ і $\cos x$.

З означення випливає, що суми показників степенів при $\sin x$ і $\cos x$ усіх доданків однорідного тригонометричного рівняння рівні.

Наприклад, рівняння $2\sin x - 3\cos x = 0$ — однорідне тригонометричне рівняння першого степеня, а рівняння $\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$ і $2\sin^2 x - \cos^2 x = 0$ — однорідні тригонометричні рівняння другого степеня.

Для однорідних рівнянь існує ефективний метод розв'язування. Ознайомимося з ним на прикладах.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння

$$7\sin^2 x - 8\sin x \cos x - 15\cos^2 x = 0.$$

Розв'язання. Якщо $\cos x = 0$, то з даного рівняння випливає, що $\sin x = 0$. Але $\sin x$ і $\cos x$ не можуть одночасно бути рівними нулю, оскільки має місце рівність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Отже, множина коренів даного рівняння складається з таких чисел x, при яких $\cos x \neq 0$.

Поділивши обидві частини даного рівняння на $\cos^2 x$, отримаємо рівносильне рівняння:

$$\frac{7\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{8\sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{15\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$

$$7\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x - 15 = 0.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = \frac{15}{7}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = \operatorname{arctg} \frac{15}{7} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} \frac{15}{7} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $3\sin^2 x + \sin 2x = 2$.

Розв'язання. Це рівняння не є однорідним. Проте його можна легко звести до однорідного:

$$3\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x);$$

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0.$$

Отримали однорідне рівняння. Далі, діючи, як у попередньому прикладі, отримуємо рівняння, рівносильне початковому:

$$\mathrm{tg}^2\, x + 2\,\mathrm{tg}\, x - 2 = 0.$$

Завершіть розв'язування самостійно.

Відповідь: $\mathrm{arctg}\left(-1 \pm \sqrt{3}\right) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть рівняння $\sin x - \cos x = 4\sin^3 x$.

Розв'язання. Це рівняння не є однорідним. Перепишемо його інакше: $(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin x - \cos x) = 4\sin^3 x$. Після розкриття дужок і зведення подібних доданків маємо:

$$3\sin^3 x + \sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x + \cos^3 x = 0.$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на $\cos^3 x$ і позначивши $\mathrm{tg}\, x = t$, маємо: $3t^3 + t^2 - t + 1 = 0$. Це рівняння очевидно має корінь $t = -1$. Тому варто зробити такі перетворення: $3t^3 + t^2 - t + 1 = 3t^3 + 3t^2 - 2t^2 - 2t + t + 1 = 3t^2(t + 1) - 2t(t + 1) + (t + 1) = (t + 1)(3t^2 - 2t + 1)$. Оскільки рівняння $3t^2 - 2t + 1 = 0$ не має коренів, то $\mathrm{tg}\, x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 9 Розв'яжіть рівняння $2\sin x - 3\cos x = 2$.

Розв'язання. Скористаємося формулами подвійного аргументу та основною тригонометричною тотожністю:

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 3\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 2\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right);$$

$$\sin^2\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 5\cos^2\frac{x}{2} = 0.$$

Поділимо обидві частини останнього рівняння на $\cos^2\frac{x}{2}$ і зробимо заміну $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$. Отримуємо: $t^2 + 4t - 5 = 0$, звідси $t_1 = 1$, $t_2 = -5$;

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = -2\,\mathrm{arctg}\, 5 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ -2\,\mathrm{arctg}\, 5 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Зауваження. Рівняння прикладу 9 є окремим випадком рівняння виду

$$a \sin x + b \cos x = c, \qquad (1)$$

де a, b, c — деякі числа, відмінні від нуля.

При розв'язуванні таких рівнянь крім методу, розглянутого в прикладі 9, можна використовувати такий прийом. Перепишемо рівняння (1) у вигляді:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Оскільки $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то точка $P\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ належить одиничному колу. Тому існує такий кут φ, що $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Тепер рівняння набуває вигляду

$$\cos\varphi \sin x + \sin\varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Звідси $\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Таким чином, отримали найпростіше тригонометричне рівняння.

ПРИКЛАД 10 При яких значеннях параметра a рівняння $\sin^2 3x - \left(a+\frac{1}{2}\right)\sin 3x + \frac{a}{2} = 0$ має на проміжку $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ рівно: 1) два корені; 2) три корені?

Розв'язання. Розглянемо дане рівняння як квадратне відносно $\sin 3x$. Тоді отримаємо рівносильну сукупність:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x = \frac{1}{2},\\ \sin 3x = a.\end{array}\right.$$

Перше рівняння сукупності має на проміжку $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ рівно два корені. У цьому можна переконатися безпосередньо, знайшовши ці корені, або графічно (рис. 35.1). Тому для задачі 1) треба, щоб друге рівняння сукупності не давало нових коренів на проміжку $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$.

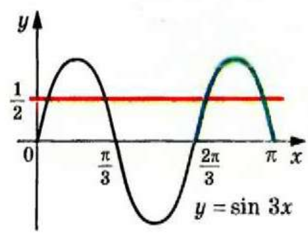


Рис. 35.1

При $a=\frac{1}{2}$ очевидно, що корені рівнянь сукупності збігаються. При $a > 1$ або $a < 0$ рівняння $\sin 3x = a$ не має коренів на проміжку $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$. У цьому знов-таки можна переконатися, наприклад, графічно (рис. 35.1).

Для задачі 2) друге рівняння сукупності на проміжку, що розглядається, повинно додавати до множини всіх коренів тільки один корінь. Зрозуміло, що це буде виконуватися тільки при $a = 1$.

Відповідь: 1) $a > 1$, або $a < 0$, або $a=\frac{1}{2}$; 2) $a = 1$.

Вправи

35.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;
2) $2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0$;
3) $\sin^2 3x + 2 \sin 3x - 3 = 0$;
4) $\mathrm{tg}^2\, x - 2\, \mathrm{tg}\, x - 3 = 0$;
5) $3\, \mathrm{ctg}^2\, 2x + \mathrm{ctg}\, 2x - 4 = 0$;
6) $3 \cos^2 \frac{x}{4} + 5 \cos \frac{x}{4} - 2 = 0$.

35.2.• Розв'яжіть рівняння:

1) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$;
2) $2 \cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$;
3) $4\, \mathrm{tg}^2\, x - \mathrm{tg}\, x - 3 = 0$;
4) $3\, \mathrm{ctg}^2 \frac{x}{3} - \mathrm{ctg} \frac{x}{3} - 2 = 0$.

35.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x - \cos x = 0$;
2) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$;
3) $3 \sin x = 2 \cos x$;
4) $4 \cos 2x - \sin 2x = 0$;
5) $\sin \frac{x}{3} + 5 \cos \frac{x}{3} = 0$;
6) $\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 0$;
7) $\sin^2 \frac{x}{2} - 3 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0$;
8) $3 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

35.4.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x + \cos x = 0$;
2) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$;
3) $2 \sin x + \cos x = 0$;
4) $\cos 4x - 3 \sin 4x = 0$;
5) $\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 0$;
6) $4 \sin^2 x = 3 \sin x \cos x + \cos^2 x$.

35.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $6 \cos^2 x + 5 \sin x - 7 = 0$;
2) $2 \sin^2 x + 7 \cos x + 2 = 0$;
3) $\cos 2x = 1 + 4 \cos x$;
4) $2 \cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0$;
5) $\cos 2x + \sin x = 0$;
6) $\cos \frac{2x}{3} - 5 \cos \frac{x}{3} - 2 = 0$;

7) $\cos 2x - \cos^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0$;
8) $\cos\frac{x}{2} + \cos x = 0$;
9) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$;
10) $8\sin^2 3x + 4\sin^2 6x = 5$;
11) $4\operatorname{tg} 5x + 3\operatorname{ctg} 5x = 7$;
12) $\frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + 3$;
13) $2\operatorname{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$;
14) $\cos 2x - 4\sqrt{2}\cos x + 4 = 0$.

35.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $4\sin^2 x + 8\cos x + 1 = 0$;
2) $2\cos^2 x = 1 + \sin x$;
3) $\cos 2x + 8\sin x = 3$;
4) $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$;
5) $5\sin\frac{x}{6} - \cos\frac{x}{3} + 3 = 0$;
6) $\cos x + \sin\frac{x}{2} = 0$;
7) $2\cos^2 4x - 6\cos^2 2x + 1 = 0$;
8) $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 3$;
9) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = \frac{3}{\cos^2 x}$;
10) $4\sin^2 x + 9\operatorname{ctg}^2 x = 6$.

35.7.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 x + 0{,}5\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$;
2) $\cos^2 5x + 7\sin^2 5x = 4\sin 10x$;
3) $(\cos x + \sin x)^2 = 1 - \cos 2x$;
4) $3\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 14\cos^2 x - 2 = 0$;
5) $5\cos^2 x - 3\sin^2 x - \sin 2x = 2$;
6) $3\sin^2 x + \sin x\cos x + 4\cos^2 x = 3$;
7) $3\sin x\cos x + \cos^2 x = 1$;
8) $\frac{2\cos x + \sin x}{7\sin x - \cos x} = \frac{1}{2}$.

35.8.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 x + 3\cos^2 x - 2\sin 2x = 0$;
2) $5\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 1$;
3) $6\sin^2 x + 2\sin 2x + 4\cos^2 x = 3$;
4) $2\cos^2 x + \sin 2x - 2 = 0$;
5) $3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$;
6) $\frac{2\sin x - \cos x}{5\sin x - 4\cos x} = \frac{1}{3}$.

35.9.° Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння
$$\sin^2 x + \cos x + 1 = 0.$$

35.10.° Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння
$$\sin^2 x + 0{,}5\sin 2x = 1.$$

35.11.° Знайдіть найменший додатний корінь рівняння
$$6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5.$$

35.12.° Знайдіть найменший додатний корінь рівняння

$$\sin x \cos x + \cos^2 x = 0.$$

35.13.° Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \cos x \sin x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;

2) $3 \cos x + 2 \operatorname{tg} x = 0$;

3) $8 \sin^2 x + 4 \sin^2 2x + 8 \cos 2x = 5$;

4) $3 + 5 \cos x = \sin^4 x - \cos^4 x$;

5) $\cos 2x - 9 \cos x + 6 = 4 \sin^2 \frac{x}{2}$.

35.14.° Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \operatorname{ctg} x - 5 \sin x = 0$;

2) $4 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 2 \sin^2 x = 6$;

3) $7 + 2 \sin 2x + 1{,}5 (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0$;

4) $\sin^2 x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$;

5) $2 \cos 4x - 2 \cos^2 x = 3 \cos 2x$.

35.15.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 2x - \frac{1}{4} = \cos 2x \cos 6x$;

2) $\sin 2x \sin x + \cos^2 x = \sin 5x \sin 4x + \cos^2 4x$.

35.16.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin \frac{x}{2} \sin \frac{3}{2} x + \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$; 2) $2 \sin x \cos 3x = \cos^2 4x - \sin 2x + 1$.

35.17.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \sin x - 8 \cos x = 3$; 2) $2 \sin x - 5 \cos x = 3$.

35.18.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \sin x + 5 \cos x = -3$; 2) $3\sqrt{3} \sin x - 5 \cos x = 7$.

35.19.° Скільки коренів рівняння $\cos 2x + \sin x = \cos^2 x$ належать проміжку $[-\pi; \pi]$?

35.20.° Знайдіть суму коренів рівняння $2 \sin^2 x + 7 \cos x + 2 = 0$, які належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

35.21.° Знайдіть усі корені рівняння $2 \cos^2 x = \sin x$, які задовольняють нерівність $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

35.22.° Знайдіть усі корені рівняння $\sin x + \cos x = 1$, які задовольняють нерівність $0 < x < \pi$.

35.23.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$;

2) $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5$.

35.24.• Розв'яжіть рівняння:

1) $4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x$; 2) $\cos^4 3x + \cos^4\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

35.25.•• При яких значеннях параметра a має корені рівняння:

1) $\sin^2 x - (3a - 3)\sin x + a(2a - 3) = 0$;

2) $\cos^2 x + 2\cos x + a^2 - 6a + 10 = 0$?

35.26.•• При яких значеннях параметра a має корені рівняння:

1) $\cos^2 x - \cos x + a - a^2 = 0$;

2) $\sin^2 x - 2a\sin x + 2a^2 - 4a + 4 = 0$?

35.27.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{ctg}^4 x + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = 4$;

2) $18\cos^2 x + 5(3\cos x + \cos^{-1} x) + 2\cos^{-2} x + 5 = 0$.

35.28.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + \mathrm{ctg}^3 x = 4$;

2) $4\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + 4\sin x + \frac{2}{\sin x} = 11$.

35.29.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^3 x \sin x + \cos^2 x \sin^2 x - 3\cos x \sin^3 x - 3\sin^4 x = 0$;

2) $2\cos^2 x + \frac{5}{4}\sin^2 2x + \sin^4 x + \cos 2x = 0$;

3) $\sin^3 x = \sin x + \cos x$.

35.30.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3}\sin^2 x\cos x - 4\sin x\cos^2 x + \sqrt{3}\cos^3 x = 0$;

2) $\sin^3 2x + \cos^3 2x - \sin 2x = 0$.

35.31.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 3x + 2\cos x = 0$; 2) $\sin 6x + 2 = 2\cos 4x$.

35.32.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $3\sin\frac{x}{3} = \sin x$; 2) $\cos 3x - 1 = \cos 2x$.

35.33.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{5 - 2\sin x} = 6\sin x - 1$;

2) $\sqrt{-\cos 2x} = -\sqrt{2}\cos x$;

3) $\sqrt{2 - 3\cos 2x} = \sqrt{\sin x}$.

35.34.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{10-18\cos x}=6\cos x-2$;
2) $\sqrt{3\cos 2x-1}=\sqrt{2}\sin x$;
3) $\sqrt{3+4\cos 2x}=\sqrt{2\cos x}$.

35.35.** При яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0;\ a]$ містить рівно 3 корені рівняння:

1) $2\sin^2 x-\sin x=0$;
2) $2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x=0$?

35.36.** Визначте, при яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0;\ a]$ містить рівно n коренів рівняння:

1) $2\sin^2 x+\sin x=0$, $n=4$;
2) $2\cos^2 x+\cos x=0$, $n=3$.

35.37.** Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння $\cos^2 x-\left(\frac{7}{10}+a\right)\cos x+\frac{7a}{10}=0$ має на проміжку $\left[\frac{\pi}{3};\frac{11\pi}{6}\right]$:

1) один корінь;
2) два корені.

35.38.** Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння $\sin^2 x-\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x+\frac{a\sqrt{2}}{2}=0$ має на проміжку $\left[0;\frac{4\pi}{3}\right]$:

1) два корені;
2) три корені;
3) не менше ніж три корені.

35.39.** Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння $\cos^2 x-\left(a-\frac{1}{3}\right)\cos x-\frac{a}{3}=0$ має на проміжку $\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{3}\right)$:

1) два корені;
2) три корені;
3) не менше ніж три корені.

35.40.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$\cos^2 x+(2a+3)\sin x-a^2=0 \text{ має:}$$

1) один корінь на проміжку $[0;\ \pi]$;
2) один корінь на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right)$;
3) один корінь на проміжку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$;
4) два корені на проміжку $\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$;
5) три корені на проміжку $[0;\ 2\pi)$;
6) чотири корені на проміжку $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{4\pi}{3}\right)$?

35.41.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$\cos 2x+(4a-1)\cos x+2a^2+1=0 \text{ має:}$$

1) два корені на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;
2) три корені на проміжку $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$?

35.42.* При яких значеннях параметра a рівняння $\sin x = 2\sin^2 x$ і $\sin 3x = (a+1)\sin x - 2(a-1)\sin^2 x$ рівносильні?

35.43.* При яких значеннях параметра a рівняння $\sin 2x + a = \sin x + 2a\cos x$ і $2\cos 2x + a^2 = 5a\cos x - 2$ рівносильні?

36. Розв'язування тригонометричних рівнянь методом розкладання на множники

Якщо права частина рівняння дорівнює нулю, а ліву частину вдалося розкласти на множники, то розв'язування цього рівняння можна звести до розв'язування кількох більш простих рівнянь.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\sin 2x + \cos x = 0$.

Розв'язання. Маємо: $2\sin x\cos x + \cos x = 0$;

$$\cos x\,(2\sin x + 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ 2\sin x + 1 = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \sin x = -\dfrac{1}{2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\\ x = (-1)^{n+1}\cdot\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ (-1)^{n+1}\cdot\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$.

Розв'язання. Маємо: $\sin 3x + \sin x - \sin 2x = 0$;

$2\sin 2x\cos x - \sin 2x = 0$; $\sin 2x\,(2\cos x - 1) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ \cos x = \dfrac{1}{2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi n}{2},\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi n}{2},\ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1{,}5$.

Розв'язання. Скориставшись формулами пониження степеня, запишемо:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{3}{2}.$$

Далі маємо: $\cos 4x + (\cos 2x + \cos 6x) = 0$;

$$\cos 4x + 2\cos 4x\cos 2x = 0;\ 2\cos 4x\left(\frac{1}{2} + \cos 2x\right) = 0.$$

Отримуємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l}\cos 4x=0,\\ \cos 2x=-\frac{1}{2}.\end{array}\right. \text{ Звідси } \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\sin 6x\cos 2x=\sin 5x\cos 3x-\sin 2x$.

Розв'язання. Перетворивши добуток тригонометричних функцій у суму, отримуємо:

$$\frac{1}{2}(\sin 8x+\sin 4x)=\frac{1}{2}(\sin 8x+\sin 2x)-\sin 2x;$$

$$\sin 4x+\sin 2x=0;$$

$$2\sin 3x\cos x=0.$$

Перейдемо до сукупності:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x=0,\\ \cos x=0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi n}{3},\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi n}{3},\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $\sin 3x+3\sin 2x=3\sin x$.

Розв'язання. Застосувавши формули синуса подвійного та потрійного аргументів, отримуємо:

$$3\sin x-4\sin^3 x+6\sin x\cos x=3\sin x.$$

Звідси $2\sin x(3\cos x-2\sin^2 x)=0$;

$$2\sin x(3\cos x-2(1-\cos^2 x))=0;$$

$$2\sin x(2\cos^2 x+3\cos x-2)=0.$$

Переходимо до сукупності $\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ 2\cos^2 x+3\cos x-2=0.\end{array}\right.$

Звідси $\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Відповідь: $\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння

$$1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0.$$

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$(1+\cos 2x)+\sin 2x+(\sin x+\cos x)=0.$$

Тепер можна записати: $2\cos^2 x + 2\sin x\cos x + (\sin x + \cos x) = 0$;

$$2\cos x(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x) = 0;$$

$$(2\cos x + 1)(\sin x + \cos x) = 0.$$

Отримуємо сукупність $\left[\begin{array}{l}\cos x = -\dfrac{1}{2},\\ \sin x + \cos x = 0.\end{array}\right.$ Звідси $\left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Відповідь: $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Вправи

36.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x + \cos 3x = 0$;
2) $\sin 5x - \sin x = 0$;
3) $2\sin x\cos 2x - \sin x + 2\cos 2x - 1 = 0$;
4) $2\sin x\,\mathrm{tg}\,x + 2\sqrt{3}\sin x - \mathrm{tg}\,x - \sqrt{3} = 0$.

36.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 7x + \sin x = 0$;
2) $\cos 9x - \cos x = 0$;
3) $\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\,x - 2 = 0$;
4) $\sqrt{2}\cos x\,\mathrm{ctg}\,x - 3\sqrt{2}\cos x + \mathrm{ctg}\,x - 3 = 0$.

36.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 1$;
2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = 1$;
3) $\sin 5x = \cos 4x$;
4) $\sin 10x - \cos 2x = 0$.

36.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{12} + x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 1$;
2) $\cos 5x + \sin 3x = 0$.

36.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 2x + 2\sin x = \cos x + 1$;
2) $1 + \cos 8x = \cos 4x$;
3) $\cos x + \cos 3x + \cos 2x = 0$;
4) $2\sin 2x + \cos 3x - \cos x = 0$;
5) $\cos x - \cos 3x + \sin x = 0$;
6) $\sin 4x + 2\cos^2 x = 1$;
7) $\cos x - \cos 3x = 3\sin^2 x$;
8) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;
9) $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$;
10) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0$.

36.6.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 2x + 2\sin x = 0$;
2) $\sin 2x - \cos x = 2\sin x - 1$;
3) $1 - \cos 8x = \sin 4x$;
4) $\sin 2x + \sin 4x + \cos x = 0$;
5) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;
6) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$;
7) $\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0$;
8) $\sqrt{2}\cos 5x + \sin 3x - \sin 7x = 0$.

36.7.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{3x}{2} = 1$;
2) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1{,}5$;
3) $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$;
4) $1 - \cos x = \operatorname{tg} x - \sin x$;
5) $\sin x + \sin 3x = 4\cos^2 x$;
6) $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$;
7) $\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 5x$;
8) $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x - \sin^2 4x = 0$;
9) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$;
10) $\cos 9x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)$.

36.8.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^2 6x + \cos^2 5x = 1$;
2) $\cos^2 x - \sin^2 2x + \cos^2 3x = \frac{1}{2}$;
3) $\cos 2x - \cos 4x = \sin 6x$;
4) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin x$;
5) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$;
6) $\sin 6x = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right)$.

36.9.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0$;
2) $\sin 3x \cos 2x = \sin 5x$;
3) $2\cos(x + 20°)\cos x = \cos 40°$;
4) $\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x$.

36.10.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sin x \sin 2x + \cos 3x = 0$;
2) $\sin(x + 45°)\sin(x - 15°) = 0{,}5$;
3) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$;
4) $\sin 5x \cos 3x = \sin 9x \cos 7x$.

36.11.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 7x - \sqrt{2}\cos 5x + \sqrt{3}\cos 7x - \sqrt{2}\sin 5x = 0$;
2) $2\sin 3x + \sin x - \cos 2x = \sqrt{3}(\sin 2x - \cos x)$;
3) $\sqrt{3}(2 - \cos x) + 4\sin 2x = \sin x$.

36.12.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 3x - \sin x = -\sqrt{3}(\sin 3x - \cos x)$;

2) $(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$.

36.13.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 3x + \sin x - \sin 2x = 2\cos^2 x - 2\cos x$;

2) $(\cos x - \sin x)^2 - 0{,}5 \sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x$.

36.14.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^3 4x + \cos^3 4x = 1 - 0{,}5 \sin 8x$;

2) $\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2}(\cos^4 2x - \sin^4 2x)$.

36.15.* При яких значеннях α триелементна множина $\{\sin\alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha\}$ збігається з множиною $\{\cos\alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha\}$?

37. Приклади розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\cos x + \sin x + \sin x \cos x = 1$.

Розв'язання. Нехай $\cos x + \sin x = t$. Тоді $\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = t^2$; $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$. Дане в умові рівняння набуває вигляду $t + \frac{t^2 - 1}{2} = 1$, або $t^2 + 2t - 3 = 0$. Звідси $t_1 = -3$, $t_2 = 1$.

З урахуванням заміни отримуємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l}\cos x + \sin x = -3,\\ \cos x + \sin x = 1.\end{array}\right.$$

Оскільки $|\cos x| \leqslant 1$ і $|\sin x| \leqslant 1$, то перше рівняння сукупності коренів не має.

Залишається розв'язати рівняння $\cos x + \sin x = 1$. Маємо:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{array}\right.$$

Відповідь: $2\pi n,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння

$$\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Розв'язання. З формул синуса і косинуса потрійного аргументу знайдемо $\sin^3 x$ і $\cos^3 x$:

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}, \quad \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}.$$

Тоді дане рівняння набуде вигляду:

$$\frac{3\cos x + \cos 3x}{4} \cdot \cos 3x + \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} \cdot \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$(\cos^2 3x - \sin^2 3x) + 3(\cos x \cos 3x + \sin x \sin 3x) = \sqrt{2};$$

$$\cos 6x + 3\cos 2x = \sqrt{2};$$

$$4\cos^3 2x - 3\cos 2x + 3\cos 2x = \sqrt{2};$$

$$\cos^3 2x = \frac{1}{2\sqrt{2}}; \quad \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$x = \pm\frac{\pi}{8} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $\pm\frac{\pi}{8} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $4 \cos x \cos 2x \cos 4x = \cos 7x$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на $\sin x$. Отримаємо рівняння-наслідок:

$$4 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \cos 7x \sin x.$$

Звідси $\sin 8x = 2 \cos 7x \sin x$; $\sin 8x = \sin 8x - \sin 6x$;

$$\sin 6x = 0; \ x = \frac{\pi k}{6}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки корені рівняння $\sin x = 0$ не є коренями заданого в умові рівняння, то з отриманих розв'язків необхідно виключити всі числа виду $x = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Маємо

$$\frac{\pi k}{6} \neq \pi m, \text{ звідси } k \neq 6m.$$

Відповідь: $\frac{\pi k}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 6m$, $m \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\cos\frac{x^2-8x}{5}=x^2+1.$

Розв'язання. Оскільки при будь-якому значенні x виконуються нерівності $\cos\frac{x^2-8x}{5}\leqslant 1$ і $x^2+1\geqslant 1$, то коренями даного рівняння є ті значення змінної, при яких значення його лівої і правої частин одночасно дорівнюють 1. Отже, дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\cos\frac{x^2-8x}{5}=1,\\ x^2+1=1.\end{cases}$

Друге рівняння системи має єдиний корінь $x = 0$. Він також задовольняє перше рівняння системи.

Відповідь: 0.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $x^2-2x\sin\frac{\pi x}{2}+1=0.$

Розв'язання. Розглянемо дане рівняння як квадратне відносно x. Оскільки дискримінант $D=4\sin^2\frac{\pi x}{2}-4$ має бути невід'ємним, то отримуємо $\sin^2\frac{\pi x}{2}\geqslant 1$. Звідси $\sin\frac{\pi x}{2}=1$ або $\sin\frac{\pi x}{2}=-1.$ Тепер зрозуміло, що задане в умові рівняння рівносильне сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{2}=1,\\ x^2-2x+1=0,\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\frac{\pi x}{2}=-1,\\ x^2+2x+1=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: 1; −1.

Вправи

37.1.° Розв'яжіть рівняння $2\sin 2x = 3(\sin x + \cos x)$.

37.2.° Розв'яжіть рівняння $\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) = 0$.

37.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$; 2) $\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}+2\cdot\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=3.$

37.4.° Розв'яжіть рівняння $\sin x + \cos x = 1 + \sin x\cos x$.

37.5.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $3\cos x + 3\sin x + \sin 3x - \cos 3x = 0$;
2) $\cos 4x = \cos^2 3x$;
3) $\sin^3 x \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x = \cos^3 4x$.

37.6.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^3 x + \sin 3x = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2x$;
2) $\cos 6x + 8\cos 2x - 4\cos 4x - 5 = 0$.

37.7.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}$;
2) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = -0{,}5$;
3) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 1\frac{3}{4}$.

37.8.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{8}\cos 15x$;
2) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$;
3) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = -0{,}5$.

37.9.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $2\cos\frac{x^2+2x}{6} = x^2 + 4x + 6$; 2) $3\cos x + 4\sin x = x^2 - 6x + 14$.

37.10.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\frac{\pi x}{4} = x^2 - 4x + 5$; 2) $\frac{2}{\sin x + \cos x} = \sqrt{2 - x^2}$.

37.11.•• Розв'яжіть рівняння $\sin x = x^2 + x + 1$.

37.12.•• Розв'яжіть рівняння $3x^2 = 1 - 2\cos x$.

37.13.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $4y^2 - 4y\cos x + 1 = 0$;
2) $(x + y)^2 + 10(x + y)\cos(\pi xy) + 25 = 0$.

37.14.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 8x\sin(xy) + 16 = 0$; 2) $y^2 - 3\sqrt{2}(\cos x - \sin x)y + 9 = 0$.

37.15.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x + \cos\frac{5x}{2} = 2$; 2) $\sin 6x + \cos\frac{12x}{5} = -2$.

37.16.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\frac{13x}{6}\cos\frac{5x}{6} = 1$; 2) $\sin 2x + \cos\frac{8x}{3} = 2$.

37.17.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^7 x + \sin^4 x = 1$; 2) $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = 1$.

37.18.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^3 x + \cos^9 x = 1$; 2) $\cos^4 x - \sin^7 x = 1$.

37.19.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^4 x$; 2) $\sqrt{2 + \cos^2 2x} = \sin 3x - \cos 3x$.

37.20.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 5x + \sin x = 2 + \cos^2 x$; 2) $\sqrt{5 + \sin^2 3x} = \sin x + 2\cos x$.

37.21.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}} \sin \pi x - \cos \pi x = 2$.

37.22.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x} \cos \pi x + \sin \pi x = \sqrt{2}$.

37.23.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(5 + \frac{3}{\sin^2 x}\right)(2 - \sin^6 x) = 7 + \cos 2y$;

2) $\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y$.

37.24.* Розв'яжіть рівняння:

1) $(\sin (x - y) + 1)(2\cos (2x - y) + 1) = 6$;

2) $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2 (x + y)$.

37.25.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$6a \cos \frac{\pi x}{2} - a^2(1 + 6|x|) + 7 = 0$$

має єдиний корінь?

37.26.* При яких значеннях параметра a рівняння $a^2 \cos \pi x - a(1 + 8x^2) = 6$ має єдиний корінь?

37.27.* При яких значеннях параметра a рівняння $x^2 - 2a \sin (\cos x) + 2 = 0$ має єдиний корінь?

37.28.* При яких значеннях параметра a рівняння $2x^2 - a \operatorname{tg} (\cos x) + a^2 = 0$ має єдиний корінь?

37.29.* Знайдіть множину пар чисел $(a; b)$, для кожної з яких рівність $a(\cos x - 1) + b^2 = \cos (ax + b^2) - 1$ виконується для всіх x.

37.30.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$(a - 1)\sin \frac{x}{8} + \sin x = 1 \quad \text{і} \quad (a - a^2)\cos 2x + \sin x = a$$

мають рівні непорожні множини розв'язків?

38. Про рівносильні переходи при розв'язуванні тригонометричних рівнянь

Рис. 38.1

У попередніх пунктах ви ознайомилися з основними прийомами розв'язування тригонометричних рівнянь. Проте при застосуванні кожного методу є свої тонкощі, нюанси, «підводні рифи».

Очевидно, що поза областю визначення рівняння коренів бути не може (рис. 38.1). Якщо під час перетворень рівняння відбувається розширення області його визначення, то зрозуміло, що це може привести до появи сторонніх коренів. Цю небезпеку слід брати до уваги при розв'язуванні тригонометричних рівнянь.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння

$$\frac{2-2\sin^2 x-\cos x}{6x^2+5\pi x+\pi^2}=0.$$

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}2-2\sin^2 x-\cos x=0,\\ 6x^2+5\pi x+\pi^2\neq 0.\end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases}2\cos^2 x-\cos x=0,\\ x\neq-\dfrac{\pi}{2},\\ x\neq-\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$ Звідси $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z},\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z},\end{array}\right.\\ x\neq-\dfrac{\pi}{2},\\ x\neq-\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

Зауважимо, що при $k=-1$ корінь першого рівняння, а при $n=0$ один із коренів другого рівняння сукупності не задовольняють систему.

Відповідь: $\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi m,\ \dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ n\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z},$
$m\neq 0,\ k\neq-1.$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\frac{\cos^2 x - \cos x}{1 - \sin x} = 0.$

Розв'язання. Перейдемо до рівносильної системи:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \cos x = 1,\end{array}\right.\\ \sin x \neq 1;\end{cases} \qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},\\ x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},\end{array}\right.\\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}.\end{cases}$$

Очевидно, що при парних значеннях k розв'язки першого рівняння сукупності не задовольняють систему. При $k = 2m - 1$, $m \in \mathbb{Z}$, отримуємо $x = \frac{\pi}{2} + \pi(2m - 1) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\frac{\sin 3x - 2\sin x}{\cos 3x} = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x.$

Розв'язання. Застосуємо формули синуса і косинуса потрійного аргументу. Отримаємо: $\frac{3\sin x - 4\sin^3 x - 2\sin x}{4\cos^3 x - 3\cos x} = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x.$

Звідси $\frac{\sin x\,(1 - 4\sin^2 x)}{\cos x\,(1 - 4\sin^2 x)} = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x.$ Останнє рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x,\\ \sin x \neq \pm\frac{1}{2},\end{cases} \quad \text{звідси} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\, x = 0,\\ \mathrm{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3},\end{array}\right.\\ \sin x \neq \pm\frac{1}{2};\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = \pi n, \ n \in \mathbb{Z},\\ x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z},\end{array}\right.\\ \sin x \neq \pm\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Відповідь: πn, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{9 - x^2}\,(2\sin 2\pi x + 5\cos \pi x) = 0.$$

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}9 - x^2 = 0,\\ 2\sin 2\pi x + 5\cos \pi x = 0,\end{array}\right.\\ 9 - x^2 \geqslant 0.\end{cases}$$

Звідси $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2 - 9 = 0,\\ 4\sin \pi x \cos \pi x + 5\cos \pi x = 0,\end{array}\right.\\ x^2 \leqslant 9;\end{cases}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = 9, \\ \cos \pi x (4 \sin \pi x + 5) = 0, \end{array}\right. \\ x^2 \leqslant 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = 9, \\ \cos \pi x = 0, \\ \sin \pi x = -\dfrac{5}{4}, \end{array}\right. \\ x^2 \leqslant 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = 9, \\ \pi x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \end{array}\right. \\ -3 \leqslant x \leqslant 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3, \\ x = \dfrac{1}{2} + k,\ k \in \mathbb{Z}, \end{array}\right. \\ -3 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Розв'язавши відносно k систему $\begin{cases} \dfrac{1}{2} + k \leqslant 3, \\ \dfrac{1}{2} + k \geqslant -3,\ \ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$ отримаємо відповідь.

***Відповідь*: $x = 3$, або $x = -3$, або $x = \dfrac{1}{2} + k$, де $k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$.**

ПРИКЛАД 5 **Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\cos 2x} \cos x = 0$.**

***Розв'язання*. Перейдемо до рівносильної системи:**

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos 2x = 0, \end{array}\right. \\ \cos 2x \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}, \end{array}\right. \\ \cos 2x \geqslant 0. \end{cases}$$

При $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ маємо: $\cos 2x = \cos (\pi + 2\pi k) = -1 < 0$. При $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$ маємо: $\cos 2x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right) = 0 \geqslant 0$.

***Відповідь*: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.**

У деяких тригонометричних тотожностях вирази, які записано в лівих і правих частинах, мають різні області визначення. Наведемо кілька прикладів.

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{\alpha}{2}} \qquad (1)$$

Областю визначення лівої частини цієї тотожності є множина $\mathbb{R}$, а правої — множина $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad (2)$$

Областю визначення лівої частини тотожності (2) є множина $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$; область визначення правої частини — множина $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z},\ \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}\}$.

Застосування цих формул справа наліво призводить до розширення області визначення рівняння, а отже, з'являється загроза появи сторонніх коренів.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння $(1 + \operatorname{tg}^2 x)\sin x + \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x)\sin x = 1 - \operatorname{tg}^2 x.$$

Поділимо обидві частини останнього рівняння на $1 + \operatorname{tg}^2 x$. Зрозуміло, що таке перетворення не порушує рівносильності. Маємо $\sin x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$. Оскільки має місце формула $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, то виникає бажання замінити праву частину останнього рівняння на $\cos 2x$. Проте така заміна розширить його область визначення на множину чисел виду $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Отже, дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \sin x = \cos 2x, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$

Отримуємо $\sin x = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Очевидно, що звуження області визначення рівняння — це загроза втрати коренів. Наприклад, застосування формул (1) і (2) зліва направо може призвести до втрати коренів.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} 2x+\sin 2x=\frac{16}{15}\operatorname{ctg} x$.

Розв'язання. Застосувавши формули

$$\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},\quad \sin 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\quad \text{і}\quad \operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

дане рівняння зручно звести до алгебраїчного рівняння відносно $\operatorname{tg} x$. Проте такі перетворення звужують область визначення рівняння і призводять (у цьому нескладно переконатися) до втрати коренів виду $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Цей факт треба врахувати при записі відповіді.

Розв'язавши рівняння $\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}+\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{16}{15\operatorname{tg} x}$, отримаємо $x=\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)=-1-5\operatorname{ctg} x$.

Розв'язання. Очевидно, що вигідно застосувати тотожність $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\operatorname{tg} x}$. Але при цьому область визначення рівняння звузиться на множину $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Легко переконатися, що числа виду $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, є коренями даного рівняння. Тому запишемо сукупність, рівносильну даному рівнянню:

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\[2mm] \dfrac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\operatorname{tg} x}=-1-\dfrac{5}{\operatorname{tg} x}.\end{array}\right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\[2mm] \dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=-1-\dfrac{5}{\operatorname{tg} x};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\[2mm] \operatorname{tg} x=\frac{5}{3}.\end{array}\right.$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{5}{3}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Вправи

38.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\sin x}{x+2\pi}=0$; 2) $\frac{2-3\sin x-\cos 2x}{6x^2-\pi x-\pi^2}=0$; 3) $\frac{1-5\sin\pi x+2\cos^2\pi x}{6x^2+x-5}=0$.

38.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\sin x-\cos x}{4x-\pi}=0$;

2) $\frac{\cos 2x-2\cos x+1}{12x^2-8\pi x+\pi^2}=0$;

3) $\frac{3\sin^2 2\pi x+7\cos 2\pi x-3}{4x^2-7x+3}=0$.

38.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=0$;

2) $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}=0$;

3) $\frac{\sin^2 x+\sin x}{1+\cos x}=0$;

4) $\frac{\sin 2x\cos 3x-\cos 2x\sin 3x}{1+\cos x}=0$;

5) $\frac{8\sin x\cos x\sin 2x-1}{\sqrt{3}+2\sin 4x}=0$;

6) $\frac{\sin 2x}{1+\sin x}=-2\cos x$.

38.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}=0$;

2) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=0$;

3) $\frac{2\sin^2 x+3\sin x}{1-\cos x}=0$;

4) $\frac{\sin x}{1+\cos x}=1-\cos x$;

5) $\frac{\sin 2x}{1-\cos x}=2\sin x$.

38.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-2}\sin\pi x=0$; 2) $\sqrt{25-4x^2}\,(3\sin 2\pi x+8\sin\pi x)=0$.

38.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3-x}\cos\pi x=0$; 2) $\sqrt{49-4x^2}\left(\sin\pi x+3\cos\frac{\pi x}{2}\right)=0$.

38.7.°° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\cos x-4\sin^2 x\cos x}{\sin 3x+1}=0$;

2) $\frac{1-\cos x-\sin x}{\cos x}=0$;

3) $\frac{\sin x+\cos 4x-2}{2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}}=0$.

38.8.°° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\cos^2 2x-\sin^2 x}{\sin 3x-1}=0$; 2) $\frac{\cos x+\cos 3x+2}{\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}=0$.

38.9.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{\sin x}\cos x=0$;
2) $\sqrt{\operatorname{ctg} x-\sqrt{3}}\cos x=0$;
3) $\sqrt{\cos x}\,(8\sin x+5-2\cos 2x)=0$.

38.10.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{\cos x}\sin x=0$;
2) $\sqrt{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin x=0$;
3) $\sqrt{\sin x}\,(4-5\cos x-2\sin^2 x)=0$.

38.11.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{5\pi}{3}\right)=2\operatorname{ctg} 2x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{6}$;
2) $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}=\dfrac{2\operatorname{ctg} x+3}{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

38.12.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} 2x+\sin 2x=\frac{8}{3}\operatorname{ctg} x$;
2) $\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}+3\operatorname{ctg} 2x$;
3) $2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+5\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=-7$.

39. Приклади розв'язування систем тригонометричних рівнянь

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{3},\\ \sin x+\sin y=1.\end{cases}$

Розв'язання. Перепишемо дану систему у вигляді

$$\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{3},\\ 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1.\end{cases}$$

Підставимо в друге рівняння системи $\frac{\pi}{3}$ замість $x+y$. Маємо:

$$\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{3},\\ 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{x-y}{2}=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x+y=\frac{\pi}{3},\\ \cos\frac{x-y}{2}=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x+y=\frac{\pi}{3},\\ x-y=4\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Далі отримуємо:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ y = \frac{\pi}{6} - 2\pi k. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{6} - 2\pi k\right),\quad k \in \mathbb{Z}.$

ПРИКЛАД 2 **Розв'яжіть систему рівнянь** $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \cos x \sin y = \frac{1}{4}. \end{cases}$

Розв'язання. **Ураховуючи, що** $x - y = \frac{\pi}{6}$, **перетворимо друге рівняння системи:**

$$\frac{1}{2}(\sin(y - x) + \sin(y + x)) = \frac{1}{4};\quad \frac{1}{2}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin(x + y)\right) = \frac{1}{4};$$

$$\sin(x + y) = 1;\ x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Тепер система набуває вигляду $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \end{cases}$

Звідси отримуємо:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \\ y = \frac{\pi}{6} + \pi k. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{3} + \pi k;\ \frac{\pi}{6} + \pi k\right),\quad k \in \mathbb{Z}.$

ПРИКЛАД 3 **Розв'яжіть систему рівнянь** $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$

Розв'язання. **Перетворимо друге рівняння системи:**

$\frac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y} = 1$. **Оскільки** $x + y = \frac{\pi}{4}$, **то маємо:** $\cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y)) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \cos(x - y)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos(x-y)=\sqrt{2};$$

$$\cos(x-y)=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x-y=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Тепер отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x+y=\dfrac{\pi}{4},\\ x-y=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+y=\dfrac{\pi}{4},\\ x-y=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k.\end{array}\right.\end{array}\right. \quad \text{Звідси} \quad \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\\ y=-\pi k,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=\pi k,\\ y=\dfrac{\pi}{4}-\pi k.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ -\pi k\right)$, $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{4}-\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\sin x\cos y=0{,}25,\\ \cos x\sin y=0{,}75.\end{cases}$

Розв'язання. Запишемо систему, рівносильну даній:

$$\begin{cases}\sin x\cos y+\cos x\sin y=1,\\ \sin x\cos y-\cos x\sin y=-0{,}5.\end{cases}$$

Звідси $\begin{cases}\sin(x+y)=1,\\ \sin(x-y)=-0{,}5;\end{cases}$ **(1)**

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ x-y=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x-y=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x-y=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n;\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+\pi(k+n),\\ y=\dfrac{\pi}{3}+\pi(k-n),\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi(k+n),\\ y=\dfrac{2\pi}{3}+\pi(k-n).\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Зауважимо, що, переходячи від системи (1) до системи (2), при записі розв'язків першого рівняння системи ми використовували параметр k, а при записі розв'язків другого рівняння — параметр n. Вживання тільки одного параметра призвело б до втрати розв'язків. Справді, якщо записати систему (2), використовуючи лише параметр k, отримаємо сукупність:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x-y=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x-y=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{звідси} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\\ y=\dfrac{\pi}{3},\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\\ y=\dfrac{2\pi}{3}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Тепер бачимо, що множина розв'язків отриманої сукупності є підмножиною множини розв'язків вихідної системи. Так, наприклад, пара $\left(\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{4\pi}{3}\right)$ є розв'язком системи рівнянь, проте не є розв'язком отриманої сукупності.

Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{6}+\pi(k+n);\ \dfrac{\pi}{3}+\pi(k-n)\right), \left(-\dfrac{\pi}{6}+\pi(k+n);\ \dfrac{2\pi}{3}+\pi(k-n)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=2,\\ 2\cos x\cos y=1.\end{cases}$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{cases}\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=2,\\ \cos x\cos y=0{,}5;\end{cases} \quad \begin{cases}\sin(x+y)=1,\\ \cos x\cos y=0{,}5;\end{cases} \quad \begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ \cos x\cos y=0{,}5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k-x,\\ \cos x\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k-x\right)=0{,}5;\end{cases} \quad \begin{cases}y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k-x,\\ \cos x\sin x=0{,}5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k-x,\\ \sin 2x=1;\end{cases} \quad \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\\ y=\dfrac{\pi}{4}+\pi(2k-n),\ k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{4}+\pi(2k-n)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вправи

39.1.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3}, \\ \cos x+\cos y=\dfrac{3}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=\dfrac{5}{6}\pi, \\ \cos^2 x+\cos^2 y=\dfrac{1}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3}, \\ \cos^2 x-\cos^2 y=-\dfrac{3}{4}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3}, \\ \cos x\cos y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

39.2.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y-x=60^\circ, \\ \cos x+\cos y=1{,}5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4}, \\ \sin^2 x+\sin^2 y=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{3}, \\ \sin \pi x+\sin \pi y=1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3}, \\ \sin x\sin y=0{,}25. \end{cases}$

39.3.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y=\dfrac{2\pi}{3}, \\ \sin x-2\sin y=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=\dfrac{5}{2}\pi, \\ \cos 2x+\sin y=2. \end{cases}$

39.4.° Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x-y=\dfrac{5}{3}\pi, \\ \sin x=2\sin y. \end{cases}$

39.5.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

39.6.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x-y=\dfrac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=-2\sqrt{3}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{6}, \\ \operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y=1. \end{cases}$

39.7.* Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin \pi x \cos \pi y = -\dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} \pi x \operatorname{ctg} \pi y = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2} = 0{,}25, \\ \cos x \cos y = -0{,}5. \end{cases}$

39.8.* Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x \cos y = -0{,}5, \\ \cos x \sin y = 0{,}5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \cos x \cos y = 0{,}25, \\ \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2} = 0{,}5. \end{cases}$

40. Найпростіші тригонометричні нерівності

Нерівності виду $f(x) > a$, $f(x) < a$, де f — одна з чотирьох тригонометричних функцій, називають **найпростішими тригонометричними нерівностями**.

Підґрунтям для розв'язування цих нерівностей є таке наочне міркування: множиною розв'язків нерівності $f(x) > g(x)$ є множина тих значень змінної x, при яких точки графіка функції f розміщені вище за відповідні точки графіка функції g (рис. 40.1). На цьому рисунку проміжок $(a; b)$ — множина розв'язків нерівності $f(x) > g(x)$.

Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей проводитимемо за такою схемою: знайдемо розв'язки на проміжку, довжина якого дорівнює періоду даної функції; усі інші розв'язки відрізняються від знайдених на Tn, де T — період даної функції, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

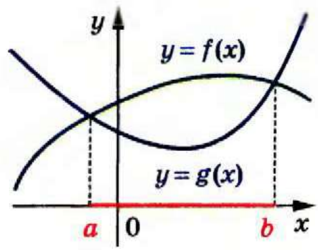


Рис. 40.1

Розглянемо приклади.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$.

Розв'язання. На рисунку 40.2 зображено графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$. Оскільки $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, то графіки перетинаються в точках з абсцисами $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Розв'яжемо цю нерівність на проміжку $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + 2\pi\right]$ завдовжки в період функції $y = \sin x$.

На цьому проміжку графік функції $y = \sin x$ знаходиться вище за графік функції $y = \frac{1}{2}$ при $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ (рис. 40.2).

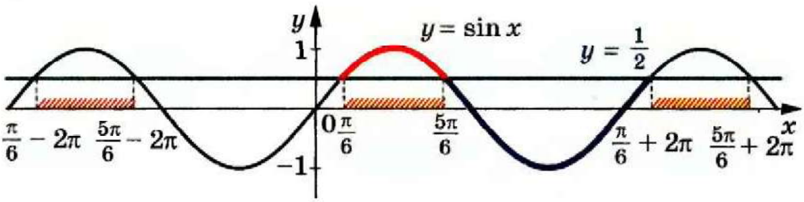


Рис. 40.2

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. Таке об'єднання прийнято позначати так: $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$.

Відповідь записують в один з трьох способів:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{або } \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right), \ n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{або } \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right). \ \bullet$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, то розв'яжемо цю нерівність на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} + 2\pi\right]$, тобто на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$.

На проміжку, що розглядається, графік функції $y = \sin x$ розміщений нижче від графіка функції $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ при $x \in \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right)$ (рис. 40.3).

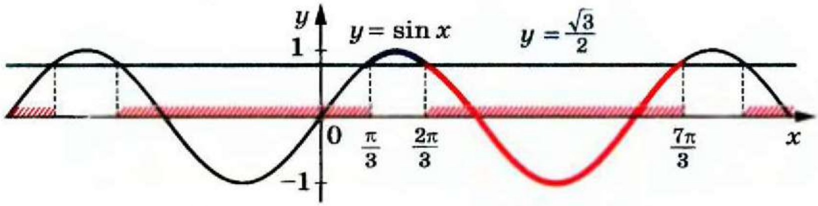


Рис. 40.3

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{7\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

У прикладах 1 і 2, розв'язуючи нерівності виду $\sin x > a$ і $\sin x < a$, ми розглядали проміжок виду $[\arcsin a; \arcsin a + 2\pi]$. Зрозуміло, що розв'язування можна провести, розглядаючи будь-який інший проміжок, довжина якого дорівнює 2π, наприклад проміжок $[-2\pi + \arcsin a; \arcsin a]$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. Маємо: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$. Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $\left[-2\pi + \frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, тобто на проміжку $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

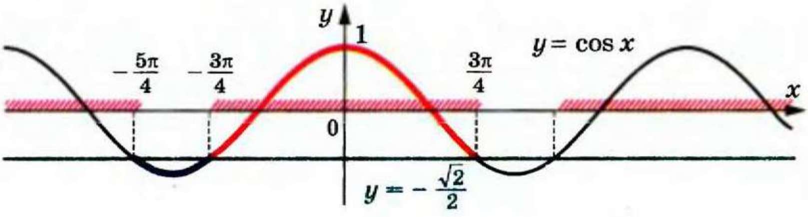


Рис. 40.4

На цьому проміжку графік функції $y = \cos x$ розміщений вище за графік функції $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x \in \left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$ (рис. 40.4).

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg} x < 1$.

Розв'язання. Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Оскільки $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, то на проміжку, що розглядається, графік функції $y = \operatorname{tg} x$ розміщений нижче від графіка функції $y = 1$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ (рис. 40.5).

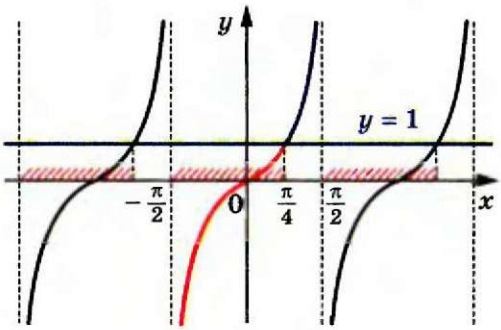


Рис. 40.5

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\operatorname{ctg} x \geqslant -\sqrt{3}$.

Розв'язання. Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $(0; \pi)$.

Оскільки $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$, то на проміжку, що розглядається, графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ розміщений не нижче від графіка функції $y = -\sqrt{3}$ при $x \in \left(0; \frac{5\pi}{6}\right]$ (рис. 40.6).

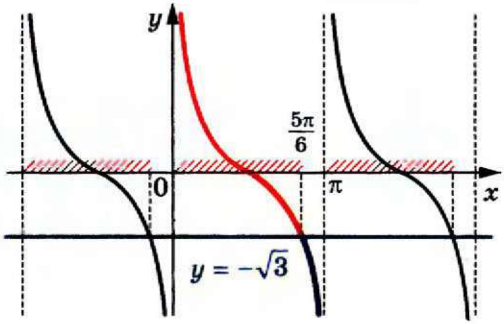


Рис. 40.6

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\pi n < x \leqslant \frac{5\pi}{6}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $\sin x - \cos x > -1$.

Розв'язання. Маємо:

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) > -1;\quad 2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) > -1;$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) > -1;\quad \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Нехай $x-\frac{\pi}{4}=t$. Тоді $\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

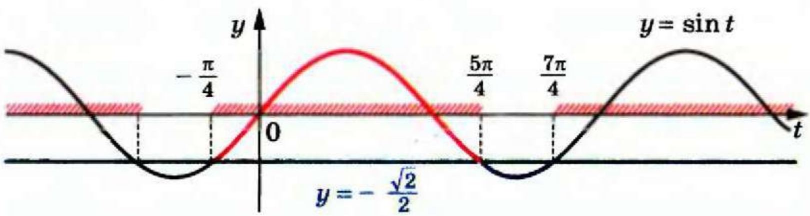


Рис. 40.7

Скориставшись рисунком 40.7, отримуємо:

$$-\frac{\pi}{4}+2\pi n < t < \frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Звідси $-\frac{\pi}{4}+2\pi n < x-\frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}+2\pi n$; $2\pi n < x < \frac{3\pi}{2}+2\pi n$.

Відповідь: $2\pi n < x < \frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей можна інтерпретувати за допомогою одиничного кола.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть нерівність $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \cos x < \frac{1}{2}$.

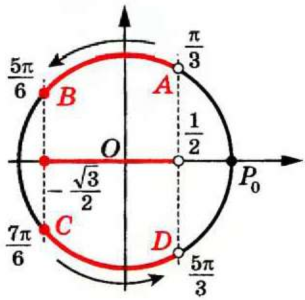


Рис. 40.8

Розв'язання. Виділимо на одиничному колі множину точок, абсциси яких не менші від $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ і менші від $\frac{1}{2}$ (рис. 40.8).

Множина розв'язків даної нерівності — це множина таких чисел x, що точки $P_x = R_O^x(P_0)$ належать дузі AB або дузі CD.

Маємо:

$$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \text{і} \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

Уявімо собі, що ми рухаємося по дугах AB і CD проти годинникової стрілки. Тоді можна записати: $A = R_O^{\frac{\pi}{3}}(P_0)$, $B = R_O^{\frac{5\pi}{6}}(P_0)$, $C = R_O^{\frac{7\pi}{6}}(P_0)$, $D = R_O^{\frac{5\pi}{3}}(P_0)$.

З урахуванням періодичності функції $y = \cos x$ переходимо до сукупності, яка рівносильна даній нерівності:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + 2\pi k < x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \leqslant x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ або $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \leqslant x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Вправи

40.1.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x < \frac{1}{2}$;
2) $\sin x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;
5) $\operatorname{tg} x < -1$;
6) $\operatorname{tg} x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$;
7) $\operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}$;
8) $\operatorname{ctg} x > -1$;
9) $\sin x < \frac{1}{6}$;
10) $\operatorname{tg} x > 3$.

40.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $\operatorname{ctg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 9) $\cos x > \frac{3}{5}$;

2) $\sin x > -\frac{1}{2}$; 5) $\operatorname{tg} x \geqslant -1$; 8) $\operatorname{ctg} x \leqslant 1$; 10) $\operatorname{ctg} x < 2$.

3) $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$; 6) $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$;

40.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{4}\right) < \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{ctg} 5x > 1$; 4) $\cos(-3x) > \frac{1}{3}$.

40.4.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin \frac{x}{3} < \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) > \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} 2x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\cos 4x < \frac{1}{4}$.

40.5.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leqslant \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > \frac{1}{\sqrt{3}}$; 5) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > -\frac{1}{2}$; 4) $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \leqslant \sqrt{3}$; 6) $\sin(1 - 2x) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

40.6.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geqslant \sqrt{3}$; 3) $2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) < 1$; 5) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{1}{2}$;

2) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\sin\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

40.7.° Розв'яжіть нерівність:

1) $-\frac{1}{2} \leqslant \sin x < \frac{1}{4}$; 3) $-2 < \operatorname{tg} x < 3$;

2) $-\frac{1}{2} < \cos x \leqslant \frac{1}{4}$; 4) $-1 \leqslant \operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}$.

40.8.° Розв'яжіть нерівність:

1) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x \leqslant -\frac{1}{2}$; 3) $-4 < \operatorname{ctg} x < 1{,}5$;

2) $\frac{1}{3} \leqslant \sin x < \frac{1}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3} < \operatorname{tg} x < 1$.

41. Приклади розв'язування більш складних тригонометричних нерівностей

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg}^2 x < 3$.

Розв'язання. Маємо: $-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.

На рисунку 41.1 зображено графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}$.

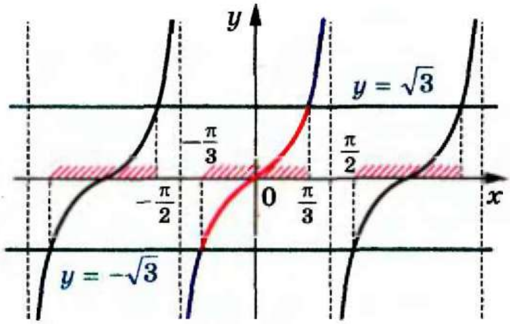


Рис. 41.1

Оскільки $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$, то на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ графік функції $y = \operatorname{tg} x$ розміщений нижче від графіка функції $y = \sqrt{3}$ і вище за графік функції $y = -\sqrt{3}$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$.

Звідси отримуємо відповідь.

Відповідь: $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\sin^4 x + \cos^4 x < \frac{5}{8}$.

Розв'язання. Маємо: $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x < \frac{5}{8}$;

$$1 - \frac{1}{2} \cdot 4\sin^2 x \cos^2 x < \frac{5}{8}; \quad \frac{1}{2}\sin^2 2x > \frac{3}{8}; \quad \sin^2 2x > \frac{3}{4};$$

$$\frac{1 - \cos 4x}{2} > \frac{3}{4}; \quad \cos 4x < -\frac{1}{2}.$$

Нехай $4x = t$. Отримуємо $\cos t < -\frac{1}{2}$.

Звідси $\frac{2\pi}{3}+2\pi n<t<\frac{4\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ (рис. 41.2).

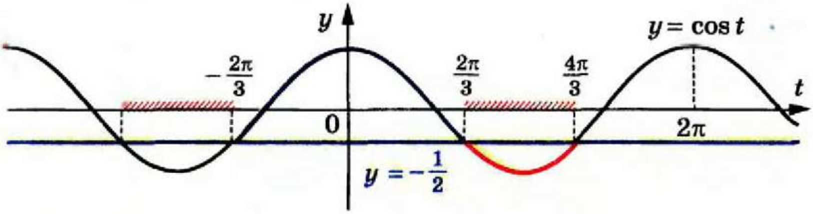


Рис. 41.2

Тоді $\frac{2\pi}{3}+2\pi n<4x<\frac{4\pi}{3}+2\pi n;$

$$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $-5\sin x+\cos 2x<3$.

Розв'язання. Маємо: $-5\sin x+1-2\sin^2 x<3;$

$$2\sin^2 x+5\sin x+2>0.$$

Зробимо заміну $\sin x=t$. Маємо:

$$2t^2+5t+2>0;\ t<-2 \text{ або } t>-\frac{1}{2}.$$

Оскільки $|t|\leqslant 1$, то $\sin x>-\frac{1}{2}$. Звідси

$$-\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{7\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{7\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

У 9 класі ви ознайомились із методом інтервалів для розв'язування раціональних нерівностей. Цей метод можна використовувати і при розв'язуванні тригонометричних нерівностей.

Для розв'язування нерівності виду $f(x)>0$ (або $f(x)<0$), де f — періодична функція, достатньо, користуючись методом інтервалів, знайти розв'язки на проміжку, довжина якого дорівнює періоду функції f. Потім записати відповідь з урахуванням періодичності. В аналогічний спосіб розв'язуються нестрогі нерівності $f(x)\geqslant 0$ і $f(x)\leqslant 0$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\sin 2x+\sin x>0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\sin 2x+\sin x$, $D(f)=\mathbb{R}$, яка є періодичною з періодом 2π.

Знайдемо нулі функції f на проміжку $[-\pi; \pi]$.
Маємо: $\sin 2x + \sin x = 0$;

$$2\sin x\cos x + \sin x = 0;\ 2\sin x\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos x = -\dfrac{1}{2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \pi n,\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

На проміжку $[-\pi; \pi]$ функція f має п'ять нулів: $-\pi$, $-\frac{2\pi}{3}$, 0, $\frac{2\pi}{3}$, π. Ці числа розбивають указаний проміжок на проміжки знакосталості (рис. 41.3).

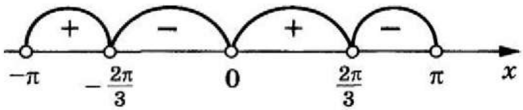


Рис. 41.3

Функція f набуває додатних значень на проміжках $\left(-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right)$ і $\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

З урахуванням періодичності функції f запишемо відповідь.

Відповідь: $-\pi + 2\pi n < x < -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ або $2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\operatorname{tg} x \geqslant 0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\operatorname{tg} x$. Вона є періодичною з періодом 2π (доведіть це самостійно).

Знайдемо нулі функції f на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Маємо: $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\operatorname{tg} x = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{1}{2},\\ \operatorname{tg} x = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\\ x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

На проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функція f має чотири нулі: 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, π.

Функція f на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ не визначена в точках $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{2}$. Ці числа і нулі функції f розбивають проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ на проміжки знакосталості (рис. 41.4).

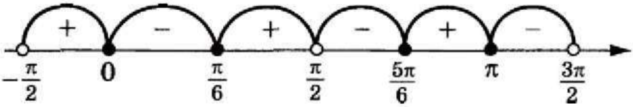


Рис. 41.4

З урахуванням періодичності функції f запишемо відповідь.

Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x \leqslant 2\pi n$, або $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, або $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вправи

41.1.° Розв'яжіть нерівність:

1) $|\cos x| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $|\cos 3x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $|\operatorname{tg} x| < \sqrt{3}$;
4) $|\operatorname{tg} x| > 2$.

41.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $|\cos 2x| \geqslant \frac{1}{2}$;
2) $|\sin 2x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $|\operatorname{ctg} x| < \sqrt{3}$;
4) $|\operatorname{ctg} x| > 5$.

41.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} > \frac{1}{2}$;
2) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \geqslant \sqrt{3}$;
3) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} > \sqrt{3}$.

41.4.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin^6 x + \cos^6 x \geqslant \frac{5}{8}$;
2) $\sin x \geqslant \cos x$;
3) $\cos \pi x + \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

41.5.° Розв'яжіть нерівність:

1) $4\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>\sqrt{3}$; 2) $3+2\sin 3x\sin x>3\cos 2x$.

41.6.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x<\sqrt{3}$; 2) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

41.7.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $2\cos^2 x+3\cos x-2<0$; 3) $2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-3\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)>-1$;

2) $\operatorname{tg}^2 x+\left(2-\sqrt{3}\right)\operatorname{tg} x-2\sqrt{3}<0$; 4) $\operatorname{tg} x\geqslant 2\operatorname{ctg} x$.

41.8.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-3\geqslant 0$; 3) $4\sin^4 x+12\cos^2 x-7<0$;

2) $\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg} x\geqslant 0$; 4) $\frac{2}{\operatorname{tg} x+1}<2-\operatorname{tg} x$.

41.9.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin 2x-\sin 3x>0$; 4) $1-\sin 2x\geqslant\cos x-\sin x$;

2) $\cos 2x\operatorname{tg} x>0$; 5) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x>0$.

3) $1-\sin 3x\leqslant\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$;

41.10.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin 2x+2\sin x>0$;

2) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x<0$;

3) $\sin^2 x+\sin^2 2x-\sin^2 3x>0$;

4) $\cos x\cos 3x<\cos 5x\cos 7x$.

42. Тригонометрична підстановка

Застосування формул скороченого множення, використання відомих нерівностей, зведення тригонометричних рівнянь до алгебраїчних тощо — такі «чисто алгебраїчні» методи ви неодноразово використовували при розв'язуванні тригонометричних задач.

Тут ми розглянемо певною мірою обернений прийом, який полягає в тому, що при розв'язуванні задач деякий алгебраїчний вираз замінюють тригонометричним.

ПРИКЛАД 1 Відомо, що $m^2+n^2=1$, $p^2+q^2=1$, $mp+nq=0$. Обчисліть $mn+pq$.

Розв'язання. Оскільки $m^2+n^2=1$, $p^2+q^2=1$, то існують точки A $(m;\ n)$ і B $(p;\ q)$, які належать одиничному колу. Тоді існують такі α і β, що $m=\cos\alpha$, $n=\sin\alpha$, $p=\cos\beta$, $q=\sin\beta$.

Маємо: $mp + nq = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$. За умовою $mp + nq = 0$. Тоді $\cos(\alpha - \beta) = 0$.

Можна записати $mn + pq = \cos\alpha\sin\alpha + \cos\beta\sin\beta =$

$$= \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) = \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

Оскільки $\cos(\alpha - \beta) = 0$, то $mn + pq = 0$.

Відповідь: 0.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 4xy(2y^2 - 1) = 1. \end{cases}$

Розв'язання. Рівняння $x^2 + y^2 = 1$ дає змогу зробити таку заміну: $x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, де $\alpha \in [0; 2\pi)$. Тоді з другого рівняння системи маємо:

$4\sin\alpha\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) = 1$; $\sin 4\alpha = 1$; $\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Із знайденої множини коренів проміжку $[0; 2\pi)$ належать числа $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{8}$ і $\frac{13\pi}{8}$.

Якщо $\alpha = \frac{\pi}{8}$, то

$$x = \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad y = \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Аналогічно можна знайти й інші три розв'язки.

Відповідь: $\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$.

Зауважимо, що відповідь до прикладу 2 можна подати в тригонометричному вигляді: $\left(\sin\frac{\pi}{8}; \cos\frac{\pi}{8}\right)$, $\left(\sin\frac{5\pi}{8}; \cos\frac{5\pi}{8}\right)$, $\left(\sin\frac{9\pi}{8}; \cos\frac{9\pi}{8}\right)$, $\left(\sin\frac{13\pi}{8}; \cos\frac{13\pi}{8}\right)$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 - 3x$.

Розв'язання. Оскільки має виконуватись умова $1 - x^2 \geqslant 0$, то $|x| \leqslant 1$. Тоді можна зробити заміну $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$.

Тепер дане рівняння можна записати так:

$\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Звідси $|\sin\alpha| = \cos 3\alpha$.

При $\alpha \in [0; \pi]$ $\sin\alpha \geqslant 0$. Маємо: $\sin\alpha = \cos 3\alpha$. Розв'язуючи це рівняння, отримуємо

$$\left[\begin{array}{l}\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

З розв'язків сукупності оберемо ті, які задовольняють умову $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Це числа $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$ і $\frac{3\pi}{4}$.

Відповідь: $\cos\frac{\pi}{8}$; $\cos\frac{5\pi}{8}$; $\cos\frac{3\pi}{4}$.

ПРИКЛАД 4 Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ належать проміжку $[-1; 1]$, причому сума їх кубів дорівнює 0. Доведіть, що $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \frac{n}{3}$.

Розв'язання. Нехай $x_1 = \cos\alpha_1$, $x_2 = \cos\alpha_2$, ..., $x_n = \cos\alpha_n$, де $\alpha_i \in [0; \pi]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

За умовою $\cos^3\alpha_1 + \cos^3\alpha_2 + \ldots + \cos^3\alpha_n = 0$.

Скориставшись рівністю $\cos\alpha = \frac{4\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{3}$, маємо:

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n =$$

$$= \frac{4\cos^3\alpha_1 - \cos 3\alpha_1}{3} + \frac{4\cos^3\alpha_2 - \cos 3\alpha_2}{3} + \ldots + \frac{4\cos^3\alpha_n - \cos 3\alpha_n}{3} =$$

$$= \frac{4}{3}\left(\cos^3\alpha_1 + \cos^3\alpha_2 + \ldots + \cos^3\alpha_n\right) - \frac{1}{3}\left(\cos 3\alpha_1 + \cos 3\alpha_2 + \ldots + \cos 3\alpha_n\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\cos 3\alpha_1 + \cos 3\alpha_2 + \ldots + \cos 3\alpha_n\right) \leqslant \frac{n}{3}.$$ ●

ПРИКЛАД 5 Доведіть, що при будь-яких x, y виконується нерівність $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqslant \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Зробимо заміну:

$x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$, де $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Маємо:

$$\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)} = \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2(\alpha+\beta).$$

Звідси випливає справедливість нерівності, що доводиться. ●

ПРИКЛАД 6 Доведіть, що:

$$\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ac}=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(1+ab)(1+bc)(1+ac)}.$$

Розв'язання. Скористаємося заміною $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\beta$, $c = \operatorname{tg}\gamma$, де α, β, γ належать проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тотожність, що доводиться, стає такою:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}(\beta-\gamma)+\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}(\beta-\gamma)\operatorname{tg}(\gamma-\alpha).$$

Зауважимо, що $\alpha-\beta+\beta-\gamma+\gamma-\alpha=0$. Таким чином, задача звелася до доведення тотожності $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z$ при $x+y+z=0$. Завершіть розв'язування самостійно. ●

ПРИКЛАД 7 Доведіть, що з будь-яких 5 різних чисел завжди можна вибрати такі два числа x і y, що $0<\frac{x-y}{1+xy}<1$.

Розв'язання. Нехай $t_1, t_2, \ldots, t_5$ — довільні числа. Тоді в проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$, що $t_1=\operatorname{tg}\alpha_1$, $t_2=\operatorname{tg}\alpha_2, \ldots, t_5=\operatorname{tg}\alpha_5$.

Розглянемо чотири проміжки: $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$, $\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right]$, $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$, $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. Зрозуміло, що з 5 чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ знайдуться щонайменше два числа α_m і α_n ($\alpha_m>\alpha_n$), які належать одному з цих проміжків. Тоді $0<\alpha_m-\alpha_n<\frac{\pi}{4}$. Звідси $0<\operatorname{tg}(\alpha_m-\alpha_n)<\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; $0<\frac{\operatorname{tg}\alpha_m-\operatorname{tg}\alpha_n}{1+\operatorname{tg}\alpha_m\operatorname{tg}\alpha_n}<1$.

Позначивши $\operatorname{tg}\alpha_m=x$, $\operatorname{tg}\alpha_n=y$, отримаємо $0<\frac{x-y}{1+xy}<1$. ●

ПРИКЛАД 8 Відомо, що $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2$. Доведіть нерівність $\frac{1}{2}\leqslant x^2+xy+y^2\leqslant 3$.

Розв'язання. Позначимо $x^2+y^2=r^2$, де $r>0$. З умови $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$ випливає, що точка $M(x; y)$ належить колу $x^2+y^2=r^2$, де $1\leqslant r\leqslant\sqrt{2}$ (рис. 42.1). Тоді можна записати, що $x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$, де $\alpha\in[0; 2\pi)$.

Маємо $x^2+xy+y^2=r^2\cos^2\alpha+r^2\cos\alpha\sin\alpha+r^2\sin^2\alpha=r^2\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$.

Оскільки $1\leqslant r^2\leqslant 2$ і $\frac{1}{2}\leqslant 1+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\leqslant\frac{3}{2}$, то $\frac{1}{2}\leqslant x^2+xy+y^2\leqslant 3$. ●

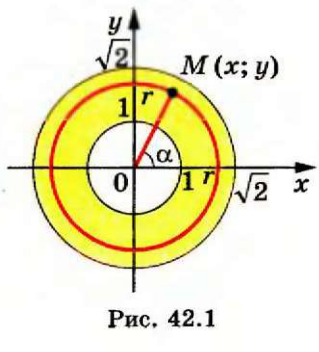


Рис. 42.1

Вправи

42.1. Числа a, b, c, d задовольняють умови $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$. Доведіть, що $|ac - bd| \leqslant 1$.

42.2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\dfrac{1-|x|}{2}} = 2x^2 - 1$.

42.3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$.

42.4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1$.

42.5. Розв'яжіть рівняння $8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$.

42.6. При яких значеннях параметра a система $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy(2x^2 - a^2) = 1 \end{cases}$ має розв'язок?

42.7. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} 2x + x^2 y = y, \\ 2y + y^2 z = z, \\ 2z + z^2 x = x? \end{cases}$

42.8. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $\dfrac{3xy - 4x^2}{x^2 + y^2}$.

42.9. Чи існує 100-елементна множина, яка має таку властивість: разом з кожним числом x вона містить число $2x^2 - 1$?

42.10. Послідовність (x_n) задовольняє умови: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{a + x_n}{1 - ax_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Чи існує таке a, що $x_{101} = \sqrt{3}$?

42.11. Дано функцію $f(x) = 2x^2 - 1$. Розв'яжіть рівняння

$$f(f(f(x))) = x.$$

42.12. Послідовність (a_n) задовольняє умови: $a_1 = a$, $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$, $n \in \mathbb{N}$. Укажіть хоча б одне значення a, при якому $a_{1000} = 0$.

42.13. Послідовність (a_n) задовольняє умови: $a_1 = 0$, $a_2 = a$, $ba_n = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$, де $n \geqslant 2$, a і b — такі числа, що $a^2 + b^2 = 1$. Доведіть, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $|a_n| \leqslant 1$.

§ 6. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

43. Числові послідовності

З поняттям «числова послідовність» ви ознайомилися в 9 класі. Нагадаємо й уточнимо основні відомості.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, областю визначення якої є множина натуральних чисел. Тоді функція f задає нескінченну послідовність $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$. Або говорять так: *нескінченна послідовність — це функція, областю визначення якої є множина* $\mathbb{N}$. Можна сказати, що *нескінченна послідовність — це відображення множини* $\mathbb{N}$ *на деяку непорожню множину.*

Нагадаємо також, що коли областю визначення функції $y = f(x)$ є множина перших n натуральних чисел, то кажуть, що задано *скінченну послідовність.*

Надалі будемо розглядати тільки нескінченні послідовності. Випадки, коли розглядатимуться скінченні послідовності, будуть спеціально обумовлені.

Послідовність $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$ традиційно записують, позначаючи аргументи функції f у вигляді індексів, тобто:

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots .$$

Індекс указує порядковий номер члена послідовності. Для позначення самої послідовності використовують записи (f_n), (a_n), (b_n) тощо. Наприклад, нехай (p_n) — послідовність простих чисел. Тоді $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$ і т. д.

Послідовність вважають заданою, якщо кожний її член можна визначити за його номером.

Повторимо основні способи задання послідовностей.

Розглянемо послідовність, у якої перший член дорівнює 1, а кожний наступний член на 3 більший за попередній. Такий спосіб задання послідовності називають **описовим**. Його можна проілюструвати за допомогою запису з трьома крапками, виписавши кілька перших членів послідовності у порядку зростання номерів:

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ \ldots\ .$$

Цей запис доцільно застосовувати тоді, коли зрозуміло, які числа мають бути записані замість трьох крапок. Наприклад, у послідовності, яку ми розглядаємо, зрозуміло, що після числа 19 має бути записане число 22.

Послідовності можна задавати за допомогою формул. Наприклад, рівність $x_n = 2^n$, де змінна n набуває всіх натуральних значень, задає послідовність (x_n) натуральних степенів числа 2:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots\ .$$

У таких випадках кажуть, що послідовність задано за допомогою **формули *n*-го члена**, або говорять, що послідовність задано **формулою загального члена**.

Розглянемо кілька прикладів.

Формула $a_n = 2n - 1$ задає послідовність непарних натуральних чисел:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots\ .$$

Формула $y_n = (-1)^n$ задає послідовність (y_n), у якій всі члени з непарними номерами дорівнюють -1, а члени з парними номерами дорівнюють 1:

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots\ .$$

Формула $c_n = 7$ задає послідовність (c_n), усі члени якої дорівнюють числу 7:

$$7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ \ldots\ .$$

Послідовність, усі члени якої рівні, називають **стаціонарною**.

Нерідко послідовність задають правилом, яке дозволяє знайти наступний член, знаючи попередній.

Розглянемо послідовність (a_n), перший член якої дорівнює 1, а кожний наступний член послідовності у 3 рази більший за попередній. Маємо:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \ldots\ .$$

Цю послідовність, задану описом, також визначають такі умови:

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Записані рівності вказують перший член послідовності і правило, користуючись яким, за кожним членом послідовності можна знайти наступний член:

$$\begin{gathered} a_1 = 1, \\ a_2 = 3a_1 = 3, \\ a_3 = 3a_2 = 9, \\ a_4 = 3a_3 = 27, \\ \ldots \end{gathered}$$

Формулу, яка виражає член послідовності через один або кілька попередніх членів, називають **рекурентною формулою** (від латин. *recurro* — повертатися). У наведеному прикладі це формула $a_{n+1} = 3a_n$. Умови, які визначають перший або кілька перших членів, називають **початковими умовами**. У розглядуваному прикладі початкова умова — це $a_1 = 1$.

Зауважимо, що знання лише однієї рекурентної формули не дозволяє задати послідовність. Ще мають бути вказані початкові умови.

При **рекурентному способі** задання послідовності перший або кілька перших членів послідовності є заданими, а всі інші обчислюють один за одним. З цієї точки зору спосіб задання послідовності формулою n-го члена видається більш зручним: за його допомогою можна безпосередньо знайти потрібний член послідовності, знаючи лише його номер.

Означення. **Числову послідовність (a_n) називають зростаючою (спадною), якщо для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n < a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$.**

Наприклад, послідовність, яка задана формулою $a_n = n^2$, є зростаючою, а послідовність із загальним членом $a_n = \dfrac{1}{n}$ — спадною.

Означення. **Числову послідовність (a_n) називають неспадною (незростаючою), якщо для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n \leqslant a_{n+1}$ $(a_n \geqslant a_{n+1})$.**

Наприклад, послідовність (a_n) така, що $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ і для всіх $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$ виконується рівність $a_n = 2$, є неспадною.

Виходячи з означення, стаціонарну послідовність можна віднести як до неспадних, так і до незростаючих послідовностей.

Зростаючі, спадні, незростаючі, неспадні послідовності називають **монотонними послідовностями**.

Означення. **Числову послідовність (a_n) називають обмеженою зверху, якщо існує таке число C, що для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n \leqslant C$.**

Означення. **Числову послідовність (a_n) називають обмеженою знизу, якщо існує таке число c, що для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n \geqslant c$.**

Послідовність називають **обмеженою**, якщо вона обмежена і знизу, і зверху.

Наприклад, послідовність, яка задається формулою $a_n = \frac{n}{n+1}$, є обмеженою. Справді, для будь-якого натурального числа n виконується подвійна нерівність $0 < \frac{n}{n+1} < 1$.

Послідовності, задані формулами $b_n = n$, $c_n = -n!$, є прикладами **необмежених** послідовностей.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що послідовність, яку задано формулою $a_n = \frac{n}{2^n}$, є незростаючою.

Розв'язання. Маємо $a_n - a_{n+1} = \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{2n-n-1}{2^{n+1}} = \frac{n-1}{2^{n+1}} \geqslant 0$. Отже, для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n \geqslant a_{n+1}$.

Зауважимо, що коли всі члени послідовності є додатними числами, то для дослідження послідовності на монотонність можна порівняти відношення $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ з одиницею.

У нашому прикладі легко показати (зробіть це самостійно), що $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant 1$. Звідси в силу того, що $a_{n+1} > 0$, отримуємо $a_n \geqslant a_{n+1}$. ●

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що послідовність, яку задано формулою $a_n = \frac{10\sqrt{n}}{n+25}$, є обмеженою.

Розв'язання. Оскільки $a_n > 0$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, то дана послідовність є обмеженою знизу.

Покажемо, що ця послідовність обмежена зверху. Застосувавши нерівність Коші до чисел n і 25, отримуємо:

$$\frac{10\sqrt{n}}{n+25} \leqslant \frac{10\sqrt{n}}{2\sqrt{25n}} = 1.$$

Отже, для будь-якого натурального числа n маємо $a_n \leqslant 1$. ●

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що послідовність, задана формулою $x_n = 5^n - 4^n$, є необмеженою.

Розв'язання. За допомогою методу математичної індукції доведемо, що $5^n - 4^n \geqslant n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

База індукції: при $n = 1$ нерівність є правильною. Дійсно, $5^1 - 4^1 \geqslant 1$.

Індукційний перехід. Нехай при деякому $n = k$ має місце нерівність $5^k - 4^k \geqslant k$. Доведемо, що при $n = k + 1$ виконується нерівність $5^{k+1} - 4^{k+1} \geqslant k + 1$. Маємо:

$$5^{k+1} - 4^{k+1} = 5 \cdot 5^k - 4 \cdot 4^k = 5^k + 4(5^k - 4^k) \geqslant 5^k + 4k > k + 1.$$

За методом математичної індукції нерівність $5^n - 4^n \geqslant n$ встановлено для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Доведена нерівність означає, що послідовність (x_n) необмежена зверху, тобто для будь-якої сталої C нерівність $5^n - 4^n < C$ не виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$. ●

Вправи

43.1.° Доведіть, що послідовність (a_n) є зростаючою, якщо:

1) $a_n = 5n - 12$;
2) $a_n = n^2 + n - 1$;
3) $a_n = 3^n - 2^n$;
4) $a_n = \frac{n}{n+1}$;
5) $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$;
6) $a_n = \frac{3^n}{n+1}$.

43.2.• Доведіть, що послідовність (a_n) є спадною, якщо:

1) $a_n = 11 - 3n$;
2) $a_n = -n^2 + n + 1$;
3) $a_n = \frac{n+1}{n}$;
4) $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$;
5) $a_n = \frac{n}{4^n}$.

43.3.° Доведіть, що послідовність (a_n) не є монотонною, якщо:

1) $a_n = (-1)^n$;
2) $a_n = (n - 4)^2$;
3) $a_n = \sin \frac{\pi n}{2}$;
4) $a_n = n^{(-1)^n}$;
5) $a_n = n + (-1)^n$;
6) $a_n = \sin n°$.

43.4.• Доведіть, що послідовність (a_n) не є монотонною, якщо:

1) $a_n = | n - 3 |$;
2) $a_n = \cos \frac{\pi n}{2}$;
3) $a_n = n - (-1)^n$;
4) $a_n = (1 + (-1)^n)\, n$.

43.5.• Наведіть приклад послідовності (a_n) з найменшим членом a_{15}.

43.6.• Наведіть приклад послідовності (a_n) з найбільшим членом a_{25}.

43.7.• Дослідіть на монотонність послідовність, задану формулою:

1) $a_n = [\sqrt{n}]$;
2) $a_n = \frac{n^3}{2^n}$;
3) $a_n = \frac{100^n}{n!}$.

43.8.• Доведіть, що послідовність (a_n) обмежена зверху:

1) $a_n = 12 - n^2$;
2) $a_n = -n^2 + 2n - 4$;
3) $a_n = \frac{4n}{n^2+1}$;
4) $a_n = \frac{2n+7}{n+2}$;
5) $a_n = \frac{3n^2-1}{n^2+1}$;
6) $a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$.

43.9.• Доведіть, що послідовність (a_n) обмежена знизу:

1) $a_n = n^3 - 8n$;
2) $a_n = \frac{1-2n}{n}$.

43.10.• Доведіть, що послідовність (x_n) є необмеженою:

1) $x_n = (-1)^n n$;
2) $x_n = \frac{n}{n+1+(-1)^n n}$.

43.11.• Чи є обмеженою послідовність (x_n), задана формулою n-го члена:

1) $x_n = n^{(-1)^n}$;
2) $x_n = \frac{n^2}{(n+1)^2+(-1)^n n^2}$?

43.12.• Доведіть, що послідовність (a_n) є обмеженою тоді і тільки тоді, коли існує таке число $M > 0$, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $|a_n| \leqslant M$.

43.13.• Для членів послідовностей (a_n) і (b_n) при кожному $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $a_n \leqslant b_n$. Чи правильне твердження:

1) якщо послідовність (a_n) обмежена знизу, то і послідовність (b_n) обмежена знизу;
2) якщо послідовність (b_n) обмежена знизу, то і послідовність (a_n) обмежена знизу;
3) якщо послідовність (a_n) обмежена зверху, то і послідовність (b_n) обмежена зверху;
4) якщо послідовність (b_n) обмежена зверху, то і послідовність (a_n) обмежена зверху?

43.14.• Послідовності (a_n) і (b_n) обмежені. Чи можна стверджувати, що обмеженою буде послідовність (c_n), задана формулою:

1) $c_n = a_n + b_n$;
2) $c_n = a_n - b_n$;
3) $c_n = a_n b_n$;
4) $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, якщо $b_n \neq 0$?

43.15.• Знайдіть найбільший член послідовності, заданої формулою:

1) $a_n = 3 - \left(n - \frac{7}{3}\right)^2$;
2) $a_n = \frac{6\sqrt{n}}{n+9}$;
3) $a_n = \frac{2n+1}{2n-5}$;
4) $a_n = \frac{20}{n^2-4n+24}$.

43.16.° Знайдіть найменший член послідовності, заданої формулою:

1) $a_n = n^2 - 4n + 1$;
2) $a_n = n + \frac{4}{n}$;
3) $a_n = 2 - \frac{3}{n^2 - 4n + 5}$;
4) $a_n = (n - 1)(n - 2)(n - 4)$;
5) $a_n = n + 3\cos \pi n$;
6) $a_n = \frac{(n+3)(n+12)}{n}$;
7) $a_n = \frac{6n - 11}{3n - 8}$.

43.17.•• Чи існує необмежена послідовність, яка для кожного $k \in \mathbb{N}$ містить k послідовних членів, рівних між собою?

43.18.•• Чи існує послідовність (a_n) натуральних чисел така, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ всі члени послідовності (a_n), крім, можливо, скінченної кількості, діляться націло на k?

43.19.•• Чи є обмеженою послідовність:

1) $x_n = n^4 - 7n^3$;
2) $x_n = 4^n - 3^n$?

43.20.•• Доведіть, що дана послідовність є необмеженою:

1) $x_n = n - n^3$;
2) $x_n = 2^n - 7^n$.

43.21.•• Доведіть, що послідовність (a_n) є обмеженою, якщо:

1) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
2) $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$.

43.22.•• Доведіть, що послідовність (a_n) є обмеженою, якщо:

1) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$;
2) $a_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

43.23.•• Чи обмежена послідовність (τ_n), якщо τ_n — кількість натуральних дільників числа n?

43.24.•• Нехай σ_n — сума всіх натуральних дільників числа n. Доведіть, що послідовність, задана формулою n-го члена $\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}$, є необмеженою.

43.25.•• Чи існує послідовність така, що кожне раціональне число є її деяким членом?

43.26.•• Чи існує послідовність така, що кожний проміжок $(a; b)$ містить нескінченну кількість її членів?

43.27.* Доведіть, що послідовність (a_n) є обмеженою, якщо:

1) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$;
2) $a_n = \underbrace{\sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{\ldots + \sqrt{4}}}}}_{n \text{ радикалів}}$.

43.28.* Нехай $a_n = \frac{n^2}{1{,}01^n}$. Знайдіть найбільший член послідовності (a_n).

43.29.* Чи є обмеженою послідовність, задана формулою
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n ?$$

Як вивести формулу Біне

У підручнику 9-го класу[1] ви читали розповідь про числа Фібоначчі. Нагадаємо, що так називають послідовність цілих чисел, задану рекурентним способом:
$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,\ n \in \mathbb{N},\ u_1 = u_2 = 1. \tag{1}$$
Перші члени цієї послідовності такі: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., тобто кожний наступний член, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх.

Важко повірити, але n-й член послідовності чисел Фібоначчі можна обчислити за формулою
$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \tag{2}$$
Цю формулу отримав французький учений Жак Біне (1786–1856).

Довести формулу Біне (2) неважко, якщо її вже записано. Для цього потрібно лише переконатися, що послідовність (2) задовольняє означення чисел Фібоначчі, тобто перевірити виконання умов (1). Питання в тому, як Жак Біне знайшов таку дивну формулу. Виявляється, що для цілого ряду послідовностей, заданих рекурентним способом, існує метод знаходження таких формул.

Розглянемо цей метод на прикладі послідовності чисел Фібоначчі.

Спочатку зосередимо увагу лише на рекурентному рівнянні (без початкових умов $u_1 = u_2 = 1$):
$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$
Спробуємо знайти формули для бодай якихось послідовностей, що задовольняють співвідношення (3) при всіх значеннях $n \in \mathbb{N}$ (такі послідовності називають **розв'язками рекурентного рівняння** $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$).

---
[1] А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Алгебра: підручн. для 9 кл. з поглибл. вивченням математики.— Х.: Гімназія, 2009. — 384 с.

Природно починати пошук розв'язків рекурентного рівняння (3) серед знайомих послідовностей. Чудовим фактом є те, що розв'язки рівняння (3) можна знайти серед геометричних прогресій. Справді, якщо $u_n = bq^n$ підставити в рівність (3), то отримаємо таке:

$$bq^{n+2} = bq^{n+1} + bq^n.$$

У випадку, коли $b = 0$ або $q = 0$, отримаємо стаціонарну послідовність 0, 0, 0,..., яка, звичайно, задовольняє рівняння (3). Якщо $b \neq 0$, $q \neq 0$, то, скоротивши на bq^n, матимемо квадратне рівняння:

$$q^2 - q - 1 = 0, \qquad (4)$$

корені якого

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Таким чином, доведено, що для довільних сталих b_1 і b_2 послідовності із загальними членами

$$u_n' = b_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ та } u_n'' = b_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

задовольняють рівняння (3), тобто для всіх $n \in \mathbb{N}$ мають місце рівності:

$$u_{n+2}' = u_{n+1}' + u_n',$$

$$u_{n+2}'' = u_{n+1}'' + u_n''.$$

Якщо додати ці дві рівності, то отримаємо:

$$(u_{n+2}' + u_{n+2}'') = (u_{n+1}' + u_{n+1}'') + (u_n' + u_n'').$$

Це означає, що послідовність (u_n) така, що $u_n = u_n' + u_n''$, тобто

$$u_n = b_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \qquad (5)$$

задовольняє рекурентне рівняння (3) при довільних значеннях сталих b_1 і b_2.

Знайдемо такі значення сталих b_1 і b_2, щоб члени послідовності (5) задовольняли початкові умови $u_1 = u_2 = 1$ членів послідовності Фібоначчі. Для цього підставимо у формулу (5) значення $n = 1$ і $n = 2$.

З отриманої системи

$$\begin{cases} b_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + b_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1, \\ b_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + b_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

знаходимо, що $b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $b_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Підставляючи ці значення у рівність (5), одержуємо формулу Біне (2).

Підведемо підсумки нашим міркуванням. Нехай послідовність (u_n) задано рекурентним співвідношенням

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$$

і початковими умовами

$$u_1 = \gamma_1,\ u_2 = \gamma_2,$$

де α, β, γ_1, γ_2 — деякі числа.

Для знаходження формули n-го члена послідовності (u_n) треба:

1) скласти і розв'язати квадратне рівняння (його називають характеристичним рівнянням):

$$q^2 - \alpha q - \beta = 0,$$

q_1 і q_2 — його різні корені[1];

2) використовуючи два знайдені корені q_1 і q_2, записати формулу n-го члена послідовності (u_n) з невідомими коефіцієнтами b_1 і b_2:

$$u_n = b_1 q_1^n + b_2 q_2^n;$$

3) підставляючи в записану формулу значення $n = 1$ і $n = 2$ та використовуючи початкові умови, скласти систему для знаходження невідомих коефіцієнтів b_1 і b_2:

$$\begin{cases} b_1 q_1 + b_2 q_2 = \gamma_1, \\ b_1 q_1^2 + b_2 q_2^2 = \gamma_2; \end{cases}$$

4) розв'язавши систему, знайти b_1 і b_2.

Тоді отримана формула задає послідовність (u_n):

$$u_n = b_1 q_1^n + b_2 q_2^n.$$

ЗАДАЧА. На клітчатому папері намальовано прямокутну смугу розміром $2 \times n$. Скількома способами її можна розрізати на прямокутники розмірами 1×2 (різати дозволяється лише за лініями клітин паперу)?

Розв'язання. Позначимо шукану кількість способів через u_n. У задачі вимагається отримати формулу для обчислення значень u_n для довільного прямокутника $2 \times n$. Наприклад,

при $n = 1$ маємо один спосіб розрізання, тобто $u_1 = 1$;

при $n = 2$ існує два способи розрізання (рис. 43.1), тобто $u_2 = 2$;

при $n = 3$ — три способи (рис. 43.2), тобто $u_3 = 3$.

---

[1] Випадок, коли квадратне рівняння $q^2 - \alpha q - \beta = 0$ має один корінь або не має жодного, ви зможете розглянути на заняттях математичного гуртка.

Рис. 43.1

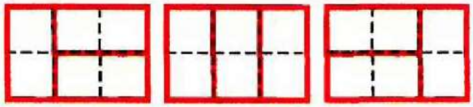


Рис. 43.2

Зі збільшенням n безпосередньо обчислювати значення u_n стає все складніше.

Розглянемо прямокутник $2 \times n$. Зрозуміло, що при будь-якому способі розрізання права верхня клітинка смуги $2 \times n$ буде належати або вертикальному, або горизонтальному прямокутнику 1×2.

У першому випадку (рис. 43.3) залишиться смуга $2 \times (n - 1)$, яку можна розрізати u_{n-1} способом.

Рис. 43.3

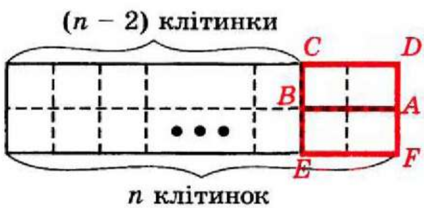


Рис. 43.4

У другому випадку (рис. 43.4) разом з прямокутником $ABCD$ обов'язково має бути відрізаний і прямокутник $ABEF$. При цьому залишиться смуга $2 \times (n - 2)$, для якої існує u_{n-2} способів розрізу.

Це означає, що

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Міркуючи так само, як і при виводі формули Біне, отримаємо

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

44. Границя числової послідовності

Розглянемо послідовність (a_n), задану формулою n-го члена $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Випишемо кілька перших членів цієї послідовності:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7},\ \frac{7}{8},\ \frac{8}{9},\ \dots .$$

Можна помітити, що зі збільшенням номера n члени послідовності **прямують** до числа 1.

Якщо члени цієї послідовності зображати точками на координатній прямій, то ці точки будуть розміщуватися все ближче і ближче до точки з координатою 1 (рис. 44.1).

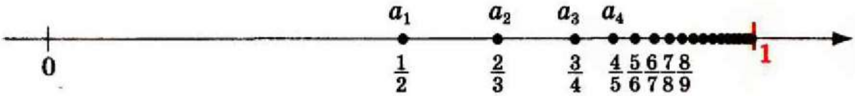


Рис. 44.1

Інакше кажучи, значення виразу $|a_n - 1|$ зі збільшенням номера n стає все меншим і меншим. Маємо:

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Тоді, наприклад, розв'язавши нерівність $\frac{1}{n+1} < 0{,}1$, установлюємо, що $|a_n - 1| < 0{,}1$ при $n \geqslant 10$, а розв'язавши нерівність $\frac{1}{n+1} < 0{,}0001$, установлюємо, що $|a_n - 1| < 0{,}0001$ при $n \geqslant 10\,000$ тощо. Узагалі, починаючи з деякого номера n_0, значення виразу $|a_n - 1|$ стає *меншим від будь-якого наперед заданого додатного числа* ε (читають «епсілон»). Знайти n_0 можна, розв'язавши нерівність $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

У цьому разі говорять, що число 1 є **границею послідовності** a_n.

Розглянемо послідовність (b_n), задану формулою n-го члена $b_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$.

Випишемо кілька перших членів цієї послідовності:

$$1,\ 2\frac{1}{2},\ 1\frac{2}{3},\ 2\frac{1}{4},\ 1\frac{4}{5},\ 2\frac{1}{6},\ 1\frac{6}{7},\ \dots .$$

Зі збільшенням номера n члени послідовності прямують до числа 2 (рис. 44.2).

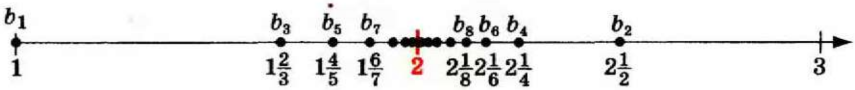


Рис. 44.2

Це означає, що для будь-якого додатного числа ε можна вказати такий номер n_0, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність

$|b_n - 2| < \varepsilon$. Оскільки $|b_n - 2| = \left|2 + \frac{(-1)^n}{n} - 2\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$, то номер n_0 можна знайти, розв'язавши нерівність $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Означення. Число a називають границею послідовності (a_n), якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий номер n_0, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$.

Пишуть $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ (тут *lim* — це початкові літери французького слова *limite* — границя).

Для прикладів, що розглядалися вище, можна записати:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad \lim_{n \to \infty} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 2.$$

Послідовність, яка має границю, називають **збіжною**. Говорять, наприклад, що послідовність (b_n) **збігається до числа** 2.

Поняття границі послідовності має просту геометричну інтерпретацію.

Нерівність виду $|a_n - a| < \varepsilon$ рівносильна подвійній нерівності $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, тобто

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Це означає, що коли $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться номер n_0, починаючи з якого всі члени послідовності належать проміжку $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Іншими словами, яким би малим не був проміжок $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, члени послідовності, яка збігається до числа a, рано чи пізно потраплять в цей проміжок[1] і вже ніколи не вийдуть за його межі, тобто *поза вказаним інтервалом може знаходитися лише скінченна кількість членів послідовності* (a_n).

Використовуючи матеріал пункту 3, означення границі послідовності можна записати в компактній формі:

$$\left(\lim_{n \to \infty} a_n = a\right) = \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\ |a_n - a| < \varepsilon\right).$$

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}$.

Розв'язання. Нехай ε — довільне додатне число. Знайдемо номер n_0 такий, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність

$$\left|\frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon.$$

[1] Проміжки виду $(a; b)$ називають також *інтервалами*.

Маємо: $\left|\dfrac{3n-1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|=\left|\dfrac{-5}{2(2n+1)}\right|=\dfrac{5}{2(2n+1)}$.

З'ясуємо, при яких $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\dfrac{5}{2(2n+1)}<\varepsilon$.

Переходимо до рівносильних нерівностей:

$$5 < 4n\varepsilon + 2\varepsilon;$$
$$4n\varepsilon > 5 - 2\varepsilon;$$
$$n > \frac{5}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}.$$

В якості номера n_0 візьмемо, наприклад, число $\left[\dfrac{5}{4\varepsilon}\right]+1$. Тоді, якщо $n \geqslant n_0$, то $n>\dfrac{5}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}$, і, переходячи до рівносильної нерівності $4n\varepsilon > 5 - 2\varepsilon$, а потім $5 < 4n\varepsilon + 2\varepsilon$, отримаємо врешті, що $\dfrac{5}{2(2n+1)}<\varepsilon$ і $\left|\dfrac{3n-1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$. ●

Послідовність, яка не має границі, називають **розбіжною.**

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що послідовність (a_n), яку задано формулою $a_n = (-1)^n$, є розбіжною.

Розв'язання. Припустимо, що послідовність (a_n) є збіжною і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Тоді для $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $|a_n-a|<\dfrac{1}{2}$.

Отже, при $n = 2n_0$ і $n = 2n_0 + 1$ одночасно мають виконуватися дві нерівності:

$|a_{2n_0}-a|<\dfrac{1}{2}$ і $|a_{2n_0+1}-a|<\dfrac{1}{2}$, тобто

$$|1-a|<\frac{1}{2} \text{ і } |-1-a|<\frac{1}{2}.$$

Легко показати (зробіть це самостійно), що система

$$\begin{cases}|1-a|<\dfrac{1}{2},\\[2mm] |1+a|<\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

не має розв'язків. Отримали суперечність. ●

Вправи

44.1.° Укажіть (без обґрунтування), яке число є границею послідовності (x_n):

1) $x_n = 3+\frac{1}{n}$; 2) $x_n = \frac{7}{\sqrt{n+1}}$; 3) $x_n = \frac{3+\frac{1}{n}}{5-\frac{2}{n}}$; 4) $x_n = \frac{\sin n}{n^5}$.

44.2.° Укажіть (без обґрунтування), яке число є границею послідовності (x_n):

1) $x_n = -\frac{1}{n}+4$;

2) $x_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$;

3) $x_n = \cos n - \cos n$;

4) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$.

44.3.° Відомо, що деяка послідовність, членами якої є тільки цілі числа, є збіжною. Що можна сказати про цю послідовність (обґрунтовувати відповідь необов'язково)?

44.4.° Наведіть приклади трьох послідовностей, що збігаються до числа: 1) 3; 2) $-\sqrt{2}$.

44.5.° Чи для кожного числа a існує послідовність, що збігається до a?

44.6.• Знайдіть принаймні одне число n_0 таке, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність:

1) $\left|\frac{n-1}{n}-1\right| < \frac{1}{20}$.

2) $\left|\sqrt{\frac{n+1}{n}}-1\right| < 0{,}01$.

44.7.• Знайдіть принаймні одне число n_0 таке, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність:

1) $\left|\frac{n-1}{n}-1\right| < 0{,}3$;

2) $\left|\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}-2\right| < \frac{1}{1000}$.

44.8.• Доведіть, що:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+5}{3n} = \frac{2}{3}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 3$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{5n^2-1} = \frac{3}{5}$.

44.9.• Доведіть, що:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n} = 2$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+1}{3n+5} = \frac{4}{3}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}+2} = \frac{1}{2}$.

44.10.° Доведіть, що стаціонарна послідовність є збіжною. Чому дорівнює границя цієї послідовності?

44.11.° Для довільних чисел $c \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ доведіть, що $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{c}{\sqrt[k]{n^m}} = 0$.

44.12.° Нехай при будь-якому $\varepsilon > 0$ в інтервалі $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$ міститься безліч членів послідовності (a_n). Чи правильно, що $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$?

44.13.° Нехай при будь-якому $\varepsilon > 0$ поза інтервалом $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$ міститься скінченна кількість членів послідовності (a_n). Чи правильно, що $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$?

44.14.° Нехай $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. Чи можуть в цій послідовності:

1) бути члени, більші ніж 1 000 000;
2) всі члени бути від'ємними;
3) всі члени бути більшими, ніж 10^{-100}?

44.15.° Зі збіжної послідовності викреслили всі члени, які стоять на парних місцях. Чи буде послідовність, що утворилася, збіжною?

44.16.° У збіжній послідовності змінили 100 перших членів. Чи залишиться послідовність збіжною? Чи може змінитися границя послідовності?

44.17.° Відомо, що границею послідовності (a_n) є число $\frac{1}{10}$. Доведіть, що, починаючи з деякого номера, кожний член послідовності (a_n) буде більшим за $\frac{1}{20}$.

44.18.° Покажіть, що коли в означенні границі замість «для будь-якого $\varepsilon > 0$» сказати «для будь-якого ε», то жодна послідовність не матиме границі.

44.19.° Запропонуємо таке «означення» границі послідовності: число a називають границею послідовності (a_n), якщо для будь-якого $\varepsilon \geqslant 0$ існує такий номер n_0, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| \leqslant \varepsilon$. Які послідовності матимуть границю за такого «означення»?

44.20.° Відомо, що $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n| = 0$. Чи правильно, що $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$?

44.21.° Відомо, що послідовність $(|a_n|)$ є збіжною. Чи правильно, що послідовність (a_n) також є збіжною?

44.22.•• Доведіть, що $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ тоді і лише тоді, коли

$$\lim_{n \to \infty} |a_n - a| = 0.$$

44.23.•• Чи правильно, що коли послідовність (a_n) є збіжною, то послідовність $(|a_n|)$ також є збіжною?

44.24.•• Послідовність $(\sin a_n)$ є збіжною. Чи правильно, що послідовність (a_n) також є збіжною?

44.25.•• Чи правильно, що коли послідовності (a_n) і (b_n) мають одну й ту саму границю, то цю саму границю має й послідовність $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$?

44.26.•• Доведіть, що послідовність із загальним членом $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ є розбіжною.

44.27.•• Доведіть, що послідовність із загальним членом $a_n = n$ є розбіжною.

44.28.•• Нехай (x_n) — розбіжна послідовність. Чи можна стверджувати, що розбіжною є послідовність із загальним членом $y_n = (x_n)^n$?

44.29.•• Нехай (x_n) — розбіжна послідовність. Чи можна стверджувати, що розбіжною є послідовність із загальним членом $y_n = \sqrt[n+1]{|x_n|}$?

44.30.•• Нехай (x_n) — розбіжна послідовність. Чи можна стверджувати, що розбіжною є послідовність із загальним членом $y_n = n^{x_n}$?

44.31.•• Нехай (x_n) — розбіжна послідовність. Чи можна стверджувати, що розбіжною є послідовність із загальним членом $y_n = \frac{1}{n^{x_n}}$?

44.32.* Нехай (x_n) — така послідовність, що всі послідовності виду:

$$x_2, x_4, x_6, \ldots,$$
$$x_3, x_6, x_9, \ldots,$$
$$x_4, x_8, x_{12}, \ldots,$$
$$\ldots$$

є збіжними. Чи можна стверджувати, що (x_n) — збіжна послідовність?

45. Властивості збіжних послідовностей

У цьому пункті розглянемо деякі властивості збіжних послідовностей.

Теорема 45.1. ***Числова послідовність може мати тільки одну границю.***

Доведення. Припустимо, що існує послідовність, яка має дві границі, тобто $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ і $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = b$, де $a \neq b$.

Оскільки $a \neq b$, то можна обрати таке додатне число ε, щоб $(a - \varepsilon; a + \varepsilon) \cap (b - \varepsilon; b + \varepsilon) = \varnothing$ (рис. 45.1).

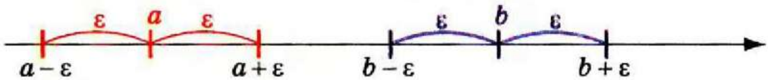


Рис. 45.1

Число a є границею послідовності (a_n), отже, починаючи з деякого номера n_0, усі члени послідовності (a_n) потраплять у проміжок $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, а поза цим проміжком знаходитиметься лише скінченна кількість членів послідовності. Отже, у проміжку $(b - \varepsilon; b + \varepsilon)$ буде знаходитися лише скінченна кількість членів послідовності (a_n). Це суперечить тому, що число b — границя послідовності (a_n). ▲

Теорема 45.2. ***Збіжна послідовність є обмеженою.***

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Тоді, починаючи з деякого номера n_0, усі члени послідовності (a_n) потраплять у проміжок $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, де ε — деяке додатне число. Поза цим проміжком знаходитиметься лише скінченна кількість членів послідовності (a_n). Тому проміжок $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ можна розширити так, щоб новий проміжок (позначимо його $(c; C)$) містив усі члени послідовності. Отже, для будь-якого натурального числа n виконуватиметься нерівність $c < a_n < C$. ▲

З теореми 45.2 випливає, що обмеженість послідовності є необхідною умовою збіжності цієї послідовності. Проте ця умова не є достатньою для збіжності. Наприклад, послідовність із загальним членом $a_n = (-1)^n$ є обмеженою, але, як було показано в прикладі 2 п. 44, вона не є збіжною.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що послідовність (a_n), яка задана формулою $a_n = \frac{n^3 - 6}{3n^2 + n}$, є розбіжною.

Розв'язання. Доведемо, що послідовність (a_n) є необмеженою, а отже, не може бути збіжною. Справді, для всіх $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, має місце нерівність

$$n^3 - 6 > \frac{n^3}{2}.$$

Крім цього, для всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце нерівність

$$3n^2 + n \leqslant 4n^2.$$

Таким чином, для всіх $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, маємо

$$a_n = \frac{n^3 - 6}{3n^2 + n} > \frac{\frac{n^3}{2}}{4n^2} = \frac{n}{8}.$$

Оскільки значення виразу $\frac{n}{8}$, де $n \in \mathbb{N}$, можуть бути як завгодно великими, то послідовність (a_n) не є обмеженою зверху, що доводить розбіжність послідовності (a_n). ●

Теорема 45.3. ***Якщо*** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ ***і*** $a > b$ $(a < b)$, ***то, починаючи з деякого номера*** n_0, ***виконується нерівність*** $a_n > b$ $(a_n < b)$.

Доведення. Розглянемо випадок, коли $a > b$. У якості заданого додатного числа ε візьмемо число $\frac{a-b}{2}$. Тоді, починаючи з деякого номера n_0, усі члени послідовності потраплять у проміжок $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$. Оскільки

$$a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} > b,$$

то проміжок $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$ містить лише числа, більші за b (рис. 45.2).

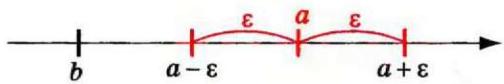


Рис. 45.2

Випадок, коли $a < b$, розглядається аналогічно. ▲

Наслідок. ***Якщо*** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, $a \neq 0$, ***то починаючи з деякого номера*** n_0 ***виконується нерівність*** $|a_n| > r$, ***де*** r ***— деяке додатне число.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

Теорема 45.4. ***Якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $a_n \geqslant b_n$, причому існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $a \geqslant b$.***

Доведення. Припустимо, що $a < b$. Оберемо додатне число ε так, щоб $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon) \cap (b - \varepsilon;\ b + \varepsilon) = \varnothing$ (рис. 45.1). Тоді, починаючи з деякого номера n_0, усі члени послідовності (a_n) потраплять у проміжок $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, а всі члени послідовності (b_n) — у проміжок $(b - \varepsilon;\ b + \varepsilon)$, що суперечить нерівності $a_n \geqslant b_n$ при будь-якому натуральному n. ▲

Теорема 45.5 (про двох конвоїрів). ***Якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується подвійна нерівність $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, причому послідовності (a_n) і (b_n) збігаються до спільної границі, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, то послідовність (c_n) також є збіжною і $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.***

Доведення. Нехай ε — деяке додатне число. Тоді, починаючи з певного номера n_0, усі члени послідовностей (a_n) і (b_n) потраплять у проміжок $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$. Для всіх $n \geqslant n_0$ маємо:

$$a - \varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < a + \varepsilon.$$

Це означає, що для будь-якого додатного числа ε існує номер n_0, починаючи з якого всі члени послідовності (c_n) потраплять у проміжок $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. ▲

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{\sqrt[3]{n^7+5n-2}} = 0$.

Розв'язання. Оскільки для всіх натуральних n має місце нерівність $5n - 2 > 0$, то

$$0 \leqslant \frac{n+3}{\sqrt[3]{n^7+5n-2}} < \frac{n+3}{\sqrt[3]{n^7}} \leqslant \frac{n+3n}{\sqrt[3]{n^7}} = \frac{4n}{n^{\frac{7}{3}}} = \frac{4}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Використовуючи ключову задачу 44.11, маємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{n^{\frac{4}{3}}} = 0$.

Тому за теоремою про двох конвоїрів

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{\sqrt[3]{n^7+5n-2}} = 0. \ \bullet$$

Означення. **Послідовність (a_n) називають *нескінченно малою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.**

Наприклад, послідовності, які задано формулами $a_n = \dfrac{100}{n}$, $b_n = -\dfrac{1}{n^2}$, $c_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$, є нескінченно малими.

З означення границі послідовності випливає, що коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $|\beta_n| < \varepsilon$, то послідовність (β_n) є нескінченно малою.

Теорема 45.6. ***Число a є границею послідовності (a_n) тоді і тільки тоді, коли загальний член цієї послідовності можна подати у вигляді $a_n = a + \beta_n$, де (β_n) — нескінченно мала послідовність.***

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Розглянемо послідовність (β_n) таку, що $\beta_n = a_n - a$. Маємо: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$, тобто $|\beta_n| < \varepsilon$. Звідси отримуємо, що послідовність (β_n) є нескінченно малою.

Нехай тепер виконується рівність $a_n = a + \beta_n$, тобто $a_n - a = \beta_n$, де (β_n) — нескінченно мала послідовність. Маємо: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $|\beta_n| < \varepsilon$, тобто $|a_n - a| < \varepsilon$. Звідси $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. ▲

ПРИКЛАД 3 Знайдіть границю послідовності (a_n) із загальним членом $a_n = \frac{4n+1}{n}$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{4n+1}{n} = \frac{4n}{n} + \frac{1}{n} = 4 + \frac{1}{n}$.

Якщо позначити $\beta_n = \frac{1}{n}$, то послідовність (a_n) можна подати у вигляді $a_n = 4 + \beta_n$. Оскільки послідовність (β_n) є нескінченно малою, то за теоремою 45.6 маємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+1}{n} = 4$. ●

При розв'язанні багатьох задач буває доцільним використовувати таке твердження

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0, \text{ де } a > 1}$$

Ідею доведення цього факту проілюструємо на конкретному прикладі.

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що послідовність (x_n), яку задано формулою $x_n = \frac{n}{1{,}21^n}$, є нескінченно малою.

Розв'язання. Скористаємося нерівністю Бернуллі

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx,$$

яка має місце для всіх $x > -1$ і $n \in \mathbb{N}$. Маємо:

$$1{,}21^n = (1{,}1)^{2n} = ((1 + 0{,}1)^n)^2 \geqslant (1 + n \cdot 0{,}1)^2 > \frac{n^2}{100}.$$

Звідси для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується подвійна нерівність:

$$0<\frac{n}{1{,}21^n}<\frac{100}{n}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{100}{n}=0$, то за теоремою про двох конвоїрів $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{1{,}21^n}=0$. ●

ПРИКЛАД 5 Доведіть, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.[1]

Розв'язання. Доведемо, що для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться номер n_0 такий, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується подвійна нерівність $1-\varepsilon<\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$.

Зазначимо, що $1-\varepsilon<\sqrt[n]{n}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Розглянемо нерівність $\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$. Маємо: $n<(1+\varepsilon)^n$, $\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}<1$.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$ для всіх $a>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}=0$. За теоремою 45.3 існує такий номер n_0, що для всіх $n \geqslant n_0$ має місце нерівність $\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}<1$.

Таким чином, для довільного $\varepsilon>0$ доведено існування такого n_0, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується подвійна нерівність $1-\varepsilon<\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. ●

ПРИКЛАД 6 Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+1}$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою про двох конвоїрів. Маємо

$$\sqrt[n]{3^n+1} \geqslant \sqrt[n]{3^n}=3.$$

Водночас для всіх $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ виконуються нерівності

$$\sqrt[n]{3^n+1} \leqslant \sqrt[n]{3^n+3^n}=\sqrt[n]{2\cdot 3^n}=3\cdot\sqrt[n]{2} \leqslant 3\cdot\sqrt[n]{n}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, то неважко довести (зробіть це самостійно), що $\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot\sqrt[n]{n}=3$.

Тому за теоремою про двох конвоїрів $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+1}=3$. ●

[1] При $n=1$ під записом $\sqrt[n]{a_n}$ тут і далі будемо розуміти a_1.

Теорема 45.7. ***Добуток обмеженої послідовності і нескінченно малої послідовності є нескінченно малою послідовністю.***

Доведення. Нехай послідовність (a_n) є обмеженою, а послідовність (β_n) — нескінченно малою. Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\beta_n = 0$.

У силу ключової задачі 43.12 існує таке число $C > 0$, що для всіх натуральних чисел n виконується нерівність $|a_n| \leqslant C$.

Нехай ε — додатне число. Тоді для додатного числа $\frac{\varepsilon}{C}$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{C}$.

Тоді для всіх $n \geqslant n_0$ можна записати

$$|a_n\beta_n| = |a_n| \cdot |\beta_n| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\beta_n = 0$. ▲

Наслідок. ***Добуток нескінченно малої та збіжної послідовностей є нескінченно малою послідовністю.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

Теорема 45.8. ***Якщо*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, ***де*** $a_n \geqslant 0$, ***то*** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Доведення. Зауважимо, що з умови $a_n \geqslant 0$ і теореми 45.4 випливає нерівність $a \geqslant 0$. Тому вираз $\sqrt{a}$ має зміст.

Розглянемо випадок, коли $a > 0$.

Помножимо і поділимо вираз $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right|$ на двочлен $\sqrt{a_n} + \sqrt{a}$. Маємо:

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a}\right)}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| = |a_n - a| \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}.$$

З умови $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ маємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$ (див. ключову задачу 44.22). Водночас з нерівностей $0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}$ випливає обмеженість послідовності із загальним членом $\frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}$. За теоремою 45.7 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = 0$. Знову використовуючи задачу 44.22, маємо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Розглянемо випадок $a = 0$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Треба довести, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер n_0, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $\left|\sqrt{a_n} - 0\right| < \varepsilon$, тобто $a_n < \varepsilon^2$. Обґрунтувати останню нерівність можна, якщо в означенні границі $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant n_0 \; |a_n - 0| < \varepsilon_1$$

покласти $\varepsilon_1 = \varepsilon^2$. ▲

Міркуючи аналогічним чином, можна довести і таку теорему.

Теорема 45.9 (границя кореня). ***Якщо*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, ***де*** $a_n \geqslant 0$, ***то*** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$, ***де*** $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.

Вправи

45.1.° Доведіть, що границя послідовності (x_n) дорівнює нулю, якщо:

1) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$;
2) $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^3+4}}$;
3) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$;
4) $x_n = \dfrac{-4}{n^4+5n+1}$;
5) $x_n = \dfrac{n^2+2n-1}{3n^3+n-2}$.

45.2.° Доведіть, що границя послідовності (x_n) дорівнює нулю, якщо:

1) $x_n = \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^{10}+7}}$;
2) $x_n = \dfrac{-1}{\sqrt{n}+2\sqrt{n-1}}$;
3) $x_n = \dfrac{n^3+n}{n^5+2n+3}$.

45.3.° Знайдіть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{\sqrt[3]{n}}\right)$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{n}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2}$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n}+1)^2-n}{\sqrt{n}}$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+n}{3^n}$.

45.4.° Знайдіть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{5}{n^2}\right)$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-7n^3}{n^3}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)^2-n^4$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{11n-2^n}{2^n}$.

45.5.$^\bullet$ Для даної збіжної послідовності (a_n) знайдіть таку нескінченно малу послідовність (β_n), що $a_n = a + \beta_n$, де a — границя послідовності (a_n):

$^\bullet$1) $a_n = \frac{1}{n}$; 2) $a_n = \frac{n}{n+1}$; 3) $a_n = \frac{4n-2}{3n+1}$; 4) $a_n = \frac{n^2+(-1)^n}{n^2+1}$.

45.6.$^\bullet$ Для даної збіжної послідовності (a_n) знайдіть таку нескінченно малу послідовність (β_n), що $a_n = a + \beta_n$, де a — границя послідовності (a_n):

1) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $a_n = \frac{n+1}{n}$; 3) $a_n = 2 - \frac{(-1)^n}{n^2+1}$; 4) $a_n = \frac{2n}{n+3}$.

45.7.$^\bullet$ Для членів послідовностей (a_n) і (b_n) при кожному $n \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. Чи правильне твердження:

1) якщо послідовність (b_n) нескінченно мала, то і послідовність (a_n) нескінченно мала;
2) якщо послідовність (a_n) нескінченно мала, то і послідовність (b_n) нескінченно мала?

45.8.$^\bullet$ Чи є послідовність (x_n) збіжною, якщо:

1) $x_n = \frac{n^2+4}{n+3}$; 2) $x_n = \sqrt[3]{n} - \sqrt{n}$; 3) $x_n = n^2 \sin n^\circ$?

45.9.$^\bullet$ Чи є послідовність (x_n) збіжною, якщо:

1) $x_n = \frac{n}{\sqrt{n+3}}$; 2) $x_n = 2^n - \cos n$; 3) $x_n = n^{(-1)^n}$?

45.10.$^{\bullet\bullet}$ Обчисліть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

45.11.$^{\bullet\bullet}$ Обчисліть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n - \sqrt{n^2+3}\right)$.

45.12.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть рівність $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$, де $q \in (-1;\ 1)$.

45.13.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть рівність $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, де $a \geqslant 1$.

45.14.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть границю послідовності (x_n), заданої формулою:

1) $x_n = \frac{\sqrt{n}}{5^n}$; 2) $x_n = \frac{\sqrt[3]{n^2}}{2^n}$; 3) $x_n = \sqrt{\frac{3^n \cdot n}{5^n}}$; 4) $x_n = \frac{n-1}{2^n}$.

45.15.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що є нескінченно малою послідовність (x_n), якщо:

1) $x_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{2^n}$; 2) $x_n = \frac{n}{2^n+1}$; 3) $x_n = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{3^n n^6}{5^n}}}$.

45.16.$^{\bullet\bullet}$ Послідовність (a_n) прямує до нуля. Чи можна стверджувати, що має границю послідовність (S_n), яку задано формулою $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$?

45.17.** Знайдіть границю послідовності (x_n), якщо:

1) $x_n = \sqrt[n]{4^n + n}$;
2) $x_n = \frac{\sin n}{n}$;
3) $x_n = \sqrt[n^2]{n}$;
4) $x_n = \sqrt[n^2]{1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + n^{n-1}}$;
5) $x_n = \frac{5^n}{n!}$.

45.18.** Знайдіть границю послідовності (x_n), якщо:

1) $x_n = \sqrt[n]{5^n + n - 2}$;
2) $x_n = \frac{\cos(n!)}{\sqrt{n}}$;
3) $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^n + 7^n}$;
4) $x_n = \sqrt[n^2]{n!}$;
5) $x_n = \frac{n!}{n^n}$.

45.19.* Побудуйте графік функції $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[2n]{1 + x^{2n}}$.

45.20.* Знайдіть границю послідовності (x_n), якщо

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n^n + 1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{n^n + 2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[n]{n^n + n}}.$$

45.21.* Знайдіть границю послідовності (x_n), якщо

$$x_n = \frac{1^5 + 3^5 + 5^5 + \ldots + (2n-1)^5}{n^7}.$$

45.22.* Наведіть приклад такого $n \in \mathbb{N}$, що $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > 100$, та доведіть необмеженість послідовності (x_n) із загальним членом $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

46. Теореми про арифметичні дії зі збіжними послідовностями

Знаходити границі збіжних послідовностей за допомогою означення границі — задача трудомістка. Полегшити процес пошуку границі дозволяють теореми про границі суми, добутку і частки двох послідовностей.

Теорема 46.1. ***Сума двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.***

Доведення. Нехай (α_n) і (β_n) — нескінченно малі послідовності, тобто $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \lim\limits_{n \to \infty} \beta_n = 0$. Покажемо, що $\lim\limits_{n \to \infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0$.

Нехай ε — задане додатне число. Тоді для додатного числа $\frac{\varepsilon}{2}$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконуються нерівності $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ і $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Тоді для всіх $n \geqslant n_0$ можна записати

$$|\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Це означає, що $\lim\limits_{n \to \infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0.$ ▲

За допомогою метода математичної індукції можна показати, що сума скінченної кількості нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

Теорема 46.2 (границя суми). ***Якщо послідовності (a_n) і (b_n) є збіжними, то послідовність $(a_n + b_n)$ також є збіжною, причому***

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n.$$

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a,$ $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b.$ Тоді в силу теореми 45.6 можна записати

$$a_n = a + \alpha_n,$$
$$b_n = b + \beta_n,$$

де (α_n) і (β_n) — нескінченно малі послідовності.

Звідси $a_n + b_n = a + b + (\alpha_n + \beta_n)$.

За теоремою 46.1 послідовність $(\alpha_n + \beta_n)$ є нескінченно малою. Отже, в силу теореми 45.6 послідовність $(a_n + b_n)$ є збіжною, причому $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b.$ ▲

ПРИКЛАД 1 Знайдіть $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n}.$

Розв'язання. Маємо: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right).$

Послідовність із загальним членом $a_n = \frac{2n+1}{n}$ подано у вигляді суми двох збіжних послідовностей із загальними членами $x_n = 2$ і $y_n = \frac{1}{n}$. Тоді можна записати:

$$\lim_{n \to \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} 2 + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2.$$ ●

Теорема 46.3 (границя добутку). ***Якщо послідовності (a_n) і (b_n) є збіжними, то послідовність (a_nb_n) також є збіжною, причому***

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,$ $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b.$ Тоді в силу теореми 45.6 можна записати

$$a_n=a+\alpha_n,$$
$$b_n=b+\beta_n,$$

де (α_n) і (β_n) — нескінченно малі послідовності.

Звідси $a_nb_n=(a+\alpha_n)(b+\beta_n)=ab+(a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n).$

За теоремою 45.7 послідовності $(a\beta_n)$, $(b\alpha_n)$ і $(\alpha_n\beta_n)$ є нескінченно малими.

Тоді за теоремою 46.1 послідовність $(a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n)$ є нескінченно малою.

Отже, за теоремою 45.6 послідовність (a_nb_n) є збіжною, причому $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=ab.$ ▲

Теорема 46.4 (границя частки). ***Якщо послідовності (a_n) і (b_n) є збіжними, причому $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$, $b_n\neq 0$, то послідовність $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ також є збіжною і***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,$ $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b.$ Оскільки $b\neq 0$, то в силу наслідку з теореми 45.3, починаючи з деякого номера n_0, для членів послідовності (b_n) виконується нерівність $|b_n|>r$, де r — деяке додатне число. Тоді для всіх $n\geqslant n_0$ виконується нерівність $\left|\frac{1}{b_n}\right|<\frac{1}{r}$. Отже, послідовність $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ є обмеженою.

За теоремою 45.6 можна записати

$$a_n=a+\alpha_n,$$
$$b_n=b+\beta_n,$$

де (α_n) і (β_n) — нескінченно малі послідовності.

Розглянемо послідовність (γ_n), яка задається формулою $\gamma_n=\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}.$

Маємо: $\gamma_n=\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}=\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n}-\frac{a}{b}=\frac{b(a+\alpha_n)-a(b+\beta_n)}{(b+\beta_n)b}=\frac{b\alpha_n-a\beta_n}{b_nb}.$

У силу теорем 45.7 і 46.1 послідовність $(b\alpha_n - a\beta_n)$ є нескінченно малою. Послідовність $\left(\frac{1}{b_n b}\right)$ є обмеженою. Отже, послідовність (γ_n) є нескінченно малою.

Тоді за теоремою 45.6 можна записати $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$. ▲

ПРИКЛАД 2 Обчисліть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+3}{11-4n}$.

Розв'язання. Послідовності із загальними членами $a_n = 5n + 3$ і $b_n = 11 - 4n$ є необмеженими, а отже, розбіжними. Тому одразу застосовувати теорему 46.4 не можна. Поділимо чисельник і знаменник дробу $\frac{5n+3}{11-4n}$ на n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{11-4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\frac{11}{n}-4}.$$

У чисельнику і знаменнику отриманого дробу записано загальні члени збіжних послідовностей. Тому можна записати:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\frac{11}{n}-4}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{11}{n}-4\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{11}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}4}=\frac{5+0}{0-4}=-\frac{5}{4}.$$ ●

ПРИКЛАД 3 Обчисліть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-1}{3n^3+n-2}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник і знаменник дробу на n^3. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-1}{3n^3+n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{3+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)}=\frac{0}{3}=0.$$ ●

ПРИКЛАД 4 Обчисліть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)$.

Розв'язання. Послідовності із загальними членами $a_n = \sqrt{4n^2+n}$ і $b_n = 2n$ є розбіжними. Тому одразу застосовувати теорему 46.2 не можна. Проведемо тотожні перетворення:

$$\sqrt{4n^2+n}-2n=\frac{\left(\sqrt{4n^2+n}+2n\right)\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)}{\sqrt{4n^2+n}+2n}=$$

$$=\frac{(4n^2+n)-4n^2}{\sqrt{4n^2+n}+2n}=\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}=\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}.$$

Тепер отримуємо $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}=\frac{1}{4}.$ ●

Вправи

46.1.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+5}{n+4}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000n}{n^2+1}$.

46.2.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n-4}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{100\sqrt{n}}{n+2}$.

46.3.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+15}{2n^2-n+100}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-3n^2+44}{n^2+5n-7}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^5+5n^4+3n-2}{9n^5+n^3-1}$.

46.4.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^2+7n+1}{n^2+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5-n}{n^2+3n-8}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4-n^3-n^2-1}{-3n^4+n^2+12n}$.

46.5.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3-2n}\cdot\frac{n+3}{4n+5}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n(3n-1)(n+4)}{(4+5n)(2n+1)(n+1)}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n-2)(2n+3)}{(4n-1)(n+3)(5n-2)}$.

46.6.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{2n^2-3}$.

46.7.° Обчисліть границю послідовності, заданої формулою:

1) $a_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}$;

2) $x_n=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}}$;

3) $z_n=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}$.

46.8.° Послідовність задано рекурентно: $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=-\frac{x_n}{2}$, $n\in\mathbb{N}$. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$.

46.9.$^\bullet$ Вчитель запропонував обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty} 1$. Учень Василь Заплутайко розв'язав задачу так: $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ доданків}} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\ldots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}_{n \text{ доданків}} = \underbrace{0+0+\ldots+0}_{n \text{ доданків}} = 0.$$

Чи погоджуєтесь Ви з розв'язанням Василя?

46.10.$^\bullet$ Розповідаючи розв'язання домашнього завдання, Василь Заплутайко написав на дошці: $\lim\limits_{n\to\infty} 2 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{2}\right)^n =$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{2}}_{n \text{ множників}} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdot\ldots\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}}_{n \text{ множників}} = \underbrace{1\cdot1\cdot\ldots\cdot1}_{n \text{ множників}} = 1.$$

У чому помилився Василь?

46.11.$^\bullet$ Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{n+3}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2+n^2}}$.

46.12.$^\bullet$ Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt{4n^2+1}}$.

46.13.$^\bullet$ Доведіть рівність $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, де $0 \leqslant a < 1$.

46.14.$^\bullet$ Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Доведіть, що:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = a^2$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = a^k$, де $k \in \mathbb{N}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n^k} = \sqrt[m]{a^k}$, де $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $a_n \geqslant 0$.

46.15.$^\bullet$ Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. Знайдіть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n a_{n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 a_n + a_{n+2}}{(a_n - n)^2 + 1}$.

46.16.$^\bullet$ Послідовність (a_n) прямує до числа 3. Знайдіть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + a_{n+1})(a_n - 2)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+3}-1}{a_n^2+5}$.

46.17.$^\bullet$ Послідовність (a_n) така, що існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} + a_n)$. Чи можна стверджувати, що послідовність (a_n) є збіжною?

46.18.•• З послідовності (x_n) утворили послідовність із загальним членом $y_n = x_n^2 - 5x_n + 6$. Відомо, що (y_n) — збіжна послідовність. Чи завжди збіжна послідовність (x_n)?

46.19.•• За послідовністю (x_n) побудували послідовність (y_n) таку, що $y_n = x_n - x_{n+3}$. Виявилося, що послідовність (y_n) має границю. Чи обов'язково збіжна послідовність (x_n)?

46.20.•• Члени послідовності (x_n) для всіх $n \in \mathbb{N}$ задовольняють умову $x_{n+1} = x_n^2 + 4x_n + 3$. Чи існує таке x_1, що (x_n) — збіжна послідовність?

46.21.•• Доведіть, що послідовність (a_n), члени якої для всіх $n \in \mathbb{N}$ задовольняють рівність $3a_{n+2}(a_{n+1} - 1) = 2a_n - 5$, є розбіжною.

46.22.•• З послідовності (x_n) утворили нову послідовність (S_n) за формулою: $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Виявилося, що (S_n) — збіжна послідовність. Чи обов'язково $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$?

46.23.•• Обчисліть границю $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 - n} - n\right)$.

46.24.•• Обчисліть границю $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 3n}\right)$.

46.25.•• Знайдіть границю $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^{100}}{2^n}$.

46.26.•• Знайдіть границю послідовності (x_n), заданої формулою:

1) $x_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$;

2) $x_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}$;

3) $x_n = \dfrac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!}{(n+1)!}$.

46.27.•• Знайдіть границю послідовності (x_n), заданої формулою:

1) $x_n = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \ldots + \dfrac{n}{(n+1)!}$;

2) $x_n = \dfrac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \dfrac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$;

3) $x_n = \dfrac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^4}$.

46.28.* Побудуйте графік функції $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$.

46.29.* Дослідіть на збіжність послідовність (x_n), якщо:

1) $x_n = \sin 6n$;

2) $x_n = \sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n$.

46.30.* Чи існує границя послідовності із загальним членом $x_n = \cos 7n$?

47. Теорема Веєрштрасса

Важливою ознакою збіжності послідовності є така теорема.

Теорема 47.1 (теорема Веєрштрасса). ***Кожна зростаюча і обмежена зверху (спадна і обмежена знизу) послідовність має границю.***

Твердження цієї теореми має просту геометричну інтерпретацію. Справді, якщо послідовність (x_n) зростає, то кожний наступний її член буде розташований на числовій прямій правіше всіх попередніх членів (рис 47.1). Крім цього, за рахунок обмеженості послідовності (x_n) зверху числом C її члени не можуть необмежено зростати. А отже, існує число x, до якого прямує послідовність (x_n).

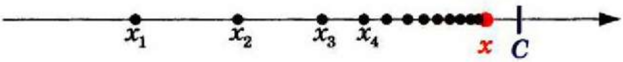


Рис. 47.1

Незважаючи на наочність геометричної інтерпретації, доведення теореми Веєрштрасса вимагає точного розуміння таких складних понять як «числова пряма», «дійсне число» тощо. Пояснимо сказане.

Один з найпоширеніших способів побудови множини дійсних чисел пов'язаний з аксіоматичним описом її властивостей, на кшталт того, як в геометрії за допомогою аксіом було визначено основні властивості точки, прямої, площини. Серед аксіом дійсних чисел є, наприклад, такі:

1) $a + b = b + a$;

2) $(a + b)\,c = ac + bc$;

3) $(ab)\,c = a\,(bc)$;

4) якщо $a \leqslant b$ і $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$.

Повний перелік зазвичай містить більше 10 різних умов[1] і сформований так, щоб описати всі характерні властивості дійсних чисел, тобто дозволити відрізняти множину дійсних чисел від інших множин. Тому серед аксіом дійсних чисел має бути і така умова, яка відрізняє множину дійсних чисел від множини раціональних чисел. Зауважимо, що жодна з аксіом 1)–4) не є та-

[1] З ним ви зможете познайомитися у вищому навчальному закладі або у підручниках з математичного аналізу.

кою умовою, оскільки раціональні числа також задовольняють аксіоми 1)–4).

Чим же принципово відрізняються у своїй будові множини дійсних і раціональних чисел? Говорячи неформально, сукупність раціональних чисел містить «прогалини»; множина ж дійсних чисел є повною, тобто не містить «дірок». Справді, якщо зобразити на прямій множину раціональних чисел, то отримаємо фігуру, яка складається з «окремих точок», в той час як дійсні числа «неперервно» заповнюють усю пряму.

Точного змісту ці глибокі і складні поняття набули лише у другій половині XIX сторіччя у роботах Карла Вейєрштрасса, Ріхарда Дедекінда, Едуарда Гейне, Георга Кантора, Огюстена Коші, Шарля Мере. Ці науковці знайшли кілька різних способів опису відмінностей між раціональними і дійсними числами.

Сформулюємо одну з можливих умов, що відрізняє множину дійсних чисел від раціональних.

Принцип вкладених відрізків[1]. Будь-яка послідовність вкладених відрізків $[a_1;\ b_1] \supset [a_2;\ b_2] \supset [a_3;\ b_3] \supset \ldots$ має непорожній перетин, тобто існує число x_0, яке належить усім відрізкам $[a_k;\ b_k]$.

Наприклад, послідовність вкладених відрізків

$$[-1;\ 1] \supset \left[-1;\ \frac{1}{2}\right] \supset \left[-1;\ \frac{1}{3}\right] \supset \ldots$$

має непорожній перетин — відрізок $[-1;\ 0]$, тобто існує число x_0, наприклад $x_0 = 0$, яке належить усім названим відрізкам.

Розглянемо інший приклад. Як відомо, $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$. Тоді послідовність вкладених відрізків

$$[1;\ 2] \supset [1{,}4;\ 1{,}5] \supset [1{,}41;\ 1{,}42] \supset [1{,}414;\ 1{,}415] \supset \ldots \qquad (1)$$

має непорожній перетин — одноелементну множину $\{\sqrt{2}\}$ (рис. 47.2).

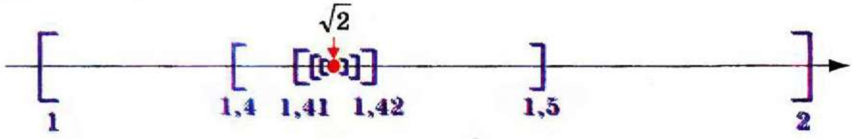


Рис. 47.2

Зауважимо, що для множини раціональних чисел принцип вкладених відрізків не виконується. Наприклад, якщо на множині раціональних чисел розглянути послідовність вкладених відрізків (1), то не знайдеться жодного раціонального числа, яке належить усім цим відрізкам.

[1] Проміжки виду $[a;\ b]$ називають також відрізками.

Німецький математик, член Берлінської академії наук, Паризької академії наук, почесний член Петербурзької академії наук. Його основні роботи присвячені математичному аналізу. Одним з найважливіших його здобутків є система логічного обґрунтування математичного аналізу, заснована на побудованій ним теорії дійсних чисел. Вейєрштрасс приділяв значну увагу застосуванню математики до механіки та фізики і заохочував до цього своїх учнів.

Карл Теодор Вільгельм Вейєрштрасс (1815–1897)

Використовуючи принцип вкладених відрізків, можна довести важливі властивості множини дійсних чисел.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що не існує такої послідовності (x_n), серед членів якої є кожне число відрізка $[0; 1]$.

Розв'язання. Розглянемо довільну послідовність (x_n). Оберемо на $[0; 1]$ такий відрізок $[a_1; b_1]$, який не містить x_1 (зрозуміло, що такий відрізок існує). Далі на відрізку $[a_1; b_1]$ оберемо такий відрізок $[a_2; b_2]$, який не містить x_2. Продовжуючи цей процес, побудуємо послідовність вкладених відрізків

$$[0; 1] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \dots,$$

в якій відрізок $[a_k; b_k]$ не містить x_k, тобто $x_k \notin [a_k; b_k]$. Тому жоден член послідовності (x_n) не може належати перетину побудованих відрізків. Але цей перетин непорожній і містить деяке число $x \in [0; 1]$. Таким чином, доведено, що число x не представлене в послідовності (x_n), тобто доведено, що відрізок $[0; 1]$ — незліченна множина[1]. ●

Використовуючи принцип вкладених відрізків, можна довести теорему Вейєрштрасса.

Доведення. Розглянемо випадок, коли (x_n) — зростаюча і обмежена зверху послідовність (випадок спадної і обмеженої знизу послідовності розглядається аналогічно). Тоді існує таке число C, що $x_n \leqslant C$.

[1] Інше доведення цього твердження можна отримати, спираючись на ідею, викладену на с. 46–47 підручника Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра: Підруч. для 8 кл. з поглибл. вивч. математики.

Побудуємо послідовність вкладених відрізків

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \ldots .$$

Нехай $a_1 = x_1$ і $b_1 = C$. Тоді всі члени послідовності (x_n) належать відрізку $[a_1; b_1]$.

Розіб'ємо відрізок $[a_1; b_1]$ точкою d_1 навпіл. Можливі два випадки.

1) Нерівність $x_n \leqslant d_1$ виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто всі члени послідовності (x_n) не більші за число d_1 (рис. 47.3). У цьому випадку другий відрізок $[a_2; b_2]$ оберемо так: $a_2 = a_1$, $b_2 = d_1$.

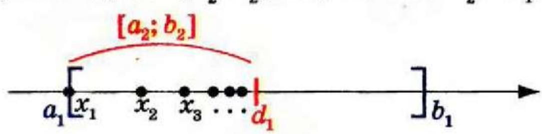


Рис. 47.3

2) Нерівність $x_n \leqslant d_1$ виконується не для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто існують члени послідовності (x_n), більші за число d_1 (рис. 47.4). У цьому випадку відрізок $[a_2; b_2]$ оберемо так: $a_2 = d_1$, $b_2 = b_1$.

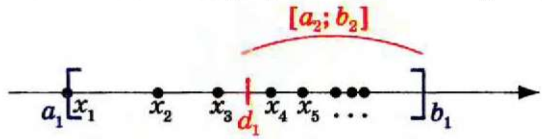


Рис. 47.4

В обох розглянутих випадках відрізок $[a_2; b_2]$ є частиною відрізка $[a_1; b_1]$ і містить деякі члени послідовності (x_n), причому для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $x_n \leqslant b_2$. Оскільки (x_n) — зростаюча послідовність, то поза відрізком $[a_2; b_2]$ знаходиться лише скінченна кількість членів послідовності (x_n).

Для побудови третього відрізка $[a_3; b_3]$ повторимо описану процедуру. Розіб'ємо відрізок $[a_2; b_2]$ точкою d_2 навпіл. Тоді, якщо нерівність $x_n \leqslant d_2$ виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$, то покладемо $a_3 = a_2$, $b_3 = d_2$; в іншому випадку — $a_3 = d_2$, $b_3 = b_2$.

Зрозуміло, що відрізок $[a_3; b_3]$ є частиною відрізка $[a_2; b_2]$ і містить деякі члени послідовності (x_n), причому для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $x_n \leqslant b_3$. Оскільки (x_n) — зростаюча послідовність, то поза відрізком $[a_3; b_3]$ знаходиться лише скінченна кількість членів послідовності (x_n).

Міркуючи аналогічно, побудуємо послідовність вкладених відрізків $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \ldots$. Зауважимо, що поза кожним з цих відрізків знаходиться лише скінченна кількість членів послідовності (x_n). Крім цього, оскільки довжина відрізка

$[a_k; b_k]$ дорівнює $\frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$, то послідовність довжин відрізків $[a_k; b_k]$ прямує до нуля.

. Використовуючи принцип вкладених відрізків, доходимо висновку, що існує число x, яке належить усім побудованим відрізкам.

Доведемо, що $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Справді, для будь-якого $\varepsilon > 0$ інтервал $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ міститиме деякий відрізок $[a_k; b_k]$. Оскільки поза відрізком $[a_k; b_k]$ знаходиться лише скінченна кількість членів послідовності (x_n), то і поза інтервалом $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ також знаходиться лише скінченна кількість членів послідовності (x_n). Отже, доведено, що x — границя послідовності (x_n).

Теорему Вейєрштрасса доведено. ▲

Зазначимо, що твердження теореми Вейєрштрасса можна узагальнити для довільних монотонних послідовностей, тобто ***кожна монотонна і обмежена послідовність має границю*** (доведіть це самостійно).

Зробимо ще одне зауваження. Теорема Вейєрштрасса є прикладом так званої *теореми існування*. Ця теорема вказує умови, за яких існує границя послідовності. Проте ні формулювання, ні доведення теореми не задає скінченний алгоритм, який дозволив би знайти цю границю.

ПРИКЛАД 2 Послідовність (a_n) задано формулою $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$, де (p_n) — послідовність простих чисел. Чи існує границя $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$?

Розв'язання. Оскільки для всіх $n \in \mathbb{N}$ мають місце нерівності $0 < a_n < 1$, то (a_n) — обмежена послідовність. З співвідношень $a_{n+1} = a_n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_{n+1}}\right) < a_n$ випливає, що (a_n) — спадна послідовність.

За теоремою Вейєрштрасса існує границя $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$. ●

ПРИКЛАД 3 Послідовність (a_n) задано рекурентним способом: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Дослідіть послідовність (a_n) на збіжність і у випадку збіжності знайдіть границю.

Розв'язання. Зазначимо, що $a_n > 0$.

Запишемо $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$, $a_{n+2}^2 = 2 + a_{n+1}$. Звідси $a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 = a_{n+1} - a_n$. Очевидно, що $a_2 - a_1 > 0$. Водночас з припущення $a_{n+1} - a_n > 0$ випливає, що $a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 > 0$, тобто $a_{n+2} - a_{n+1} > 0$. За методом математичної індукції отримуємо, що (a_n) — зростаюча послідовність.

Маємо $a_n^2 < a_{n+1}^2 = 2 + a_n$. Звідси $a_n^2 < 2 + a_n$, $-1 < a_n < 2$. Тому (a_n) — обмежена зверху послідовність.

За теоремою Вейєрштрасса існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Знайдемо значення границі a. Скористаємося рівністю $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + a}$, то маємо рівняння $a = \sqrt{2 + a}$. Звідси $a = 2$.

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Вправи

47.1.° Послідовність (a_n) є збіжною. Чи можна стверджувати, що послідовність (a_n) є: 1) монотонною; 2) обмеженою?

47.2.° Послідовність (a_n) задано формулою

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Чи існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

47.3.° Послідовність (a_n) задано формулою $a_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$. Чи існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

47.4.° Чи існує така послідовність вкладених відрізків $[a_1; b_1] \supset \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \ldots$, що їх перетин складається рівно з двох точок?

47.5.° Чи обов'язково послідовність вкладених інтервалів $(a_1; b_1) \supset \supset (a_2; b_2) \supset (a_3; b_3) \supset \ldots$ має непорожній перетин?

47.6.° Послідовність вкладених відрізків $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \supset [a_3; b_3] \supset \ldots$ задовольняє умову $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$. Доведіть, що відрізки $[a_n; b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, містять лише одну спільну точку.

47.7.° Послідовність (a_n) складається з додатних чисел. Доведіть, що коли послідовність (b_n) із загальним членом $b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ є обмеженою, то вона є збіжною.

47.8.°° Доведіть збіжність послідовності (a_n), яку задано формулою:

1) $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{2^n + 1}$;

2) $a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$;

3) $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$;

4) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

47.9.•• Доведіть збіжність послідовності (a_n), яку задано формулою:

1) $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{7} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{3^n - 2}$;

2) $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n}$;

3) $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2}$;

4) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{5n}$.

47.10.•• Послідовність (x_n) задано рекурентним способом: $x_1 = 5$, $x_{n+1} = \sqrt{5 + x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Дослідіть на збіжність послідовність (x_n) і в разі збіжності знайдіть її границю.

47.11.•• Послідовність (x_n) задано рекурентним способом: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + 3x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Дослідіть на збіжність послідовність (x_n) і в разі збіжності знайдіть її границю.

47.12.•• Для $a > 1$ розглянемо послідовність (x_n) із загальним членом $x_n = \frac{n}{a^n}$. Знайдіть рекурентну формулу, що зв'язує x_{n+1} і x_n. Використовуючи знайдену формулу і теорему Веєрштрасса, доведіть, що $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{a^n} = 0$.

47.13.•• Розглянемо послідовність (x_n) із загальним членом $x_n = \frac{a^n}{n!}$, де $a > 0$. Знайдіть рекурентну формулу, що зв'язує x_{n+1} і x_n. Використовуючи знайдену формулу і теорему Веєрштрасса, доведіть, що $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

47.14.•• Послідовність задано рекурентним способом: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Чи є обмеженою послідовність (a_n)?

47.15.•• Послідовність задано рекурентним способом: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{2a_n^2 + 2na_n + 3}{n + a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Чи є обмеженою послідовність (a_n)?

47.16.•• Послідовність задано рекурентним способом: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \sqrt{\frac{a_n^2}{4} + 1}$, $n \in \mathbb{N}$. Чи є обмеженою послідовність (a_n)?

47.17.•• Послідовність (x_n) є обмеженою. Доведіть існування такого числа x, що при кожному $\varepsilon > 0$ проміжок $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ містить нескінченну кількість членів послідовності (x_n).

47.18.* Послідовність (a_n) задано рекурентним способом: $a_1 \in (0; 1)$, $a_{n+1} = a_n - a_n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Покладемо $b_n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$. Доведіть, що послідовність (b_n) збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n < 1$.

47.19.* Послідовності (a_n) і (b_n) задовольняють умови: $a_1 = 1$, $b_1 = 9$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Доведіть, що послідовності (a_n) і (b_n) збігаються і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

47.20.* Доведіть, що послідовність, задана формулою

$$x_n = \sqrt{1 + \sqrt[3]{2 + \sqrt[4]{3 + \sqrt[5]{\ldots + \sqrt[n+1]{n}}}}},$$

має границю.

Число Ейлера

У цьому пункті розглянемо послідовність із загальним членом $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ і доведемо її збіжність. Вибір цієї послідовності не є випадковим. Число, до якого прямує послідовність (x_n), є фундаментальною константою, що грає особливу роль не тільки в математиці, а й у фізиці, хімії, біології, економіці тощо.

Дослідимо властивості послідовностей (x_n) і (y_n), які задано формулами $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $x_n < y_n$.

Справді, $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n$.

Послідовність (x_n) є зростаючою.

Достатньо довести нерівність

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Застосуємо нерівність

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} \geqslant \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}, \quad a_i \geqslant 0,$$

яку називають нерівністю Коші[1] (рівність досягається при $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$).

[1] З доведенням цієї нерівності ви можете ознайомитися в підручнику Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра: Підруч. для 9 кл. з поглибл. вивч. математики. С. 231–232.

Покладемо $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = 1$. Тоді при $k = n + 1$ маємо:

$$\frac{\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{n\text{ доданків}}+1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1}.$$

Звідси $\dfrac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Тоді $\left(\dfrac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$; $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Послідовність (y_n) є спадною.

Доведіть це твердження самостійно, скориставшись нерівністю Коші для $k = n + 2$ і чисел $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n+1} = \frac{n}{n+1}$, $a_{n+2} = 1$.

Послідовності (x_n) і (y_n) є обмеженими.

Цей факт випливає з нерівностей $x_1 \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant y_1$, $n \in \mathbb{N}$.

Отже, доведено, що (x_n) і (y_n) — монотонні і обмежені послідовності. Тому за теоремою Вейєрштрасса існують границі $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b$.

Якщо в рівності $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot x_n$ перейти до границі, то отримаємо

$$b = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty} x_n = 1\cdot a.$$

Таким чином, доведено, що (x_n) і (y_n) — збіжні послідовності, причому $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\left(\text{або границю} \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$ називають **числом Ейлера** і позначають буквою e. Рівність $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ називають **другою чудовою границею.**[1]

Можна довести, що e — число ірраціональне. Зазначимо, що при цьому всі члени послідовності (x_n) — числа раціональні.

Оскільки (x_n) — зростаюча, (y_n) — спадна послідовності, що мають спільну границю, то для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності:

$$x_n < e < y_n.$$

[1] Про першу чудову границю ви дізнаєтесь в 11 класі.

Наведені оцінки дають можливість знайти наближене значення числа Ейлера, обчисливши x_n та y_n при «великих» значеннях n.

Наприклад, $x_{1000} = 2{,}716\ldots$, а $y_{1000} = 2{,}719\ldots$. Це означає, що $e = 2{,}71\ldots$.

ПРИКЛАД Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$.

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$,

$$\text{то } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \sqrt{e}.$$

Відповідь: $\sqrt{e}$.

Вправи

47.21. Знаходячи $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, Василь Заплутайко записав: «Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}1^n = \lim\limits_{n\to\infty}1 = 1$». Де помилився Василь?

47.22. Знайдіть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{5n+2}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

47.23. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)$.

47.24. Доведіть, що $0 < e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$. Для якого значення n треба обчислити $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, щоб отримати наближене значення числа Ейлера з точністю 10^{-4}?

47.25. Доведіть збіжність послідовності (x_n), яку задано формулою

$$x_n = \frac{e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}}{n}.$$

47.26. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ доведіть нерівності $n^n e^{-n+1} \leqslant n! \leqslant n^{n+1}e^{-n+1}$. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Відповіді та вказівки до вправ

1.1. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **1.2.** 1. **1.3.** 1. **1.4.** $-\frac{b^2+b+1}{b}$. **1.8.** 1. **1.9.** $\frac{x^8-x^4+1}{x^8+x^4+1}$. **1.10.** 1. **1.12.** $\frac{2^{n+1}}{1-b^{2^{n+1}}}$. **1.13.** *Вказівка.* З умови випливає, що $a-\frac{1}{a}=1$. Помножте ліву частину даної рівності на вираз $\left(a-\frac{1}{a}\right)$. **1.14.** *Вказівка.* З умови випливає, що $ab + bc + ac = 0$. Далі $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = a^2 + b^2 + c^2$. **1.16.** $(x - y)(z - y)(z - x)$. *Вказівка.* Розглянемо даний вираз як многочлен зі змінною x і параметрами y і z. Покажіть, що цей многочлен має корені y і z. **1.17.** $(x - y)(z - x) \times (y - z)$. **1.18.** *Вказівка.* З умови випливають рівності $a-b=\frac{b-c}{bc}$, $b-c=\frac{c-a}{ca}$, $c-a=\frac{a-b}{ab}$. Перемноживши почленно ліві і праві частини цих рівностей, отримуємо $(a-b)(b-c)(c-a)=\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2b^2c^2}$. **1.19.** 8. **1.20.** -115. **1.21.** 4. **1.22.** 1. **1.23.** $\sqrt{3}+1$. **1.24.** $3+\sqrt{2}$. **1.25.** 3. **1.26.** 0. **1.31.** $\sqrt{10}+\sqrt{2}$. **1.32.** 1. **1.33.** 0. **1.34.** Якщо $a > 1$, то $a + 1$; якщо $0 < a < 1$, то $-a - 1$. **1.35.** $\sqrt{1-x^2}$. **1.36.** -1. **1.37.** Якщо $0 \leqslant a < \sqrt{2}$, то $6 - 4a$; якщо $a \geqslant \sqrt{2}$, то $2(a - 1)^2$. **1.38.** $\frac{b^2-1}{\sqrt{b}}$. **1.39.** Якщо $0 < b < a$, то 0; якщо $0 < a < b$, то $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. **1.40.** $2\left(ab+\sqrt{a^2-1}\sqrt{b^2-1}\right)$. *Вказівка.* Помножте чисельник і знаменник даного дробу на вираз $\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)\left(b-\sqrt{b^2-1}\right)$. **1.41.** $\frac{1-b}{1+b}$. **1.42.** Якщо $a > 2$, то 2; якщо $1 \leqslant a < 2$, то -2. **1.43.** Якщо $4 < x < 8$, то $\frac{4x}{x-4}$; якщо $x \geqslant 8$, то $\frac{2x}{\sqrt{x-4}}$. **1.44.** 1) 7; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{-5-\sqrt{345}}{10}$; $\frac{-5+\sqrt{345}}{10}$; 4) 0; $\frac{-5+\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-5-\sqrt{3}}{2}$; 5) $[-2; 3]$; 6) -7; -1; 7) $\{5\} \cup [1; 2]$. **1.45.** 1) -1; $-\frac{7}{2}$; 2) $\frac{27}{5}$; 3) 5; $-\frac{5}{4}$; 4) $-\frac{5}{2}$; 0; 5) $(3; +\infty)$; 6) -2; 4. **1.46.** 1) Якщо $a \neq -4$, то $x=\frac{20+3a}{4+a}$; якщо $a = -4$, то коренів немає; 2) якщо $a \neq 1$, то $x=\frac{a-2}{2}$; якщо $a = 1$, то коренів немає. **1.47.** Якщо $a\neq-\frac{1}{3}$ і $a\neq-\frac{1}{4}$, то $x=\frac{2+12a}{3a+1}$; якщо $a=-\frac{1}{3}$ або $a=-\frac{1}{4}$, то коренів немає. **1.48.** 1) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3};1\right) \cup (5;+\infty)$; 2) $[1;5] \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$; 3) $(-\infty; -1] \cup [1; 2] \cup [3; +\infty)$; 4) $(-3;-1) \cup \left(\frac{1}{3};2\right) \cup (2;7)$;

5) $(-\infty;-1]\cup\left(3-\sqrt{2};3+\sqrt{2}\right)$; 6) $(-\infty;-3)\cup(-3;2]\cup(4;+\infty)$; 7) $(-7;-5)\cup$ $\cup(4;+\infty)$; 8) $(-1;+\infty)$; 9) $(-1;1)\cup(4;6)$; 10) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; 11) $(-\infty;-4]\cup$ $\cup[-2;-1]\cup[1;+\infty)$; 12) $[-4;-3)\cup\left[-\frac{3}{2};0\right)\cup[1;+\infty)$; 13) $(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$; 14) $\left[\frac{2}{3};1\right]\cup(2;+\infty)$; 15) $\left(1-\sqrt{3};2-\sqrt{2}\right)$; 16) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **1.49.** 1) $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};1\right)\cup(9;+\infty)$; 2) $[1;9]\cup\left\{-\frac{1}{4}\right\}$; 3) $(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)\cup\{2\}$; 4) $(-\infty;-2)\cup(-2;3)$; 5) $\left(-2;\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right]\cup(0;2)\cup\left[\frac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$; 6) $(-2;-1)\cup$ $\cup(2;3)$; 7) $(-\infty;-1]\cup(0;1]\cup(2;3]$; 8) $(2;+\infty)$; 9) $\left[-3-\sqrt{5};-4\right)\cup(-2;0]$; 10) $\left[\frac{-3-\sqrt{17}}{4};-1\right)\cup\left[\frac{-5+\sqrt{41}}{4};+\infty\right)$; 11) $(2;5)$; 12) $(-\infty;-3)\cup(-3;-2)\cup$ $\cup(0;+\infty)$. **1.50.** $a<-4$ або $a\geqslant 8$. **1.51.** $a=1$ або $a=-2$. **1.52.** $a=1$. **1.53.** $a=3$ або $a=\frac{3}{2}$. **1.54.** $a=2$. **1.55.** $a<-6$. **1.56.** $a<-3$ або $a\geqslant 1$. **1.57.** $a>6$. **1.58.** $a>0$. **1.59.** $a<-1$ або $a>0$. **1.60.** $0\leqslant a\leqslant 4$. **1.61.** $a>1$. **1.62.** $a\geqslant\frac{4}{5}$. **1.63.** $1\leqslant a\leqslant 2$. **1.64.** $-5<a<1$. **1.65.** $q\leqslant 0$. **1.66.** 1) -4; 2; 3) 1; -1; 4) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; -1; 2; 5) 3; $\frac{4}{5}$; 6) $\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$; $\frac{-5-\sqrt{13}}{2}$; 7) $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{21}}{2}$. **1.67.** 1) 2; 3; 2) 1; 3) -6; -2; $-4+\sqrt{13}$; $-4-\sqrt{13}$; 4) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; 5) $1+\sqrt{7}$; $1-\sqrt{7}$. **1.68.** 1) $(-3;1]$; 2) $[-2;0]\cup\left\{\frac{3}{2}\right\}$. **1.69.** 1) $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)\cup(4;7]$; 2) $[2;3)\cup(3;+\infty)\cup\{1\}$. **1.70.** 2) $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$; 3) $[1;+\infty)$; 4) $(-\infty;4]$. **1.71.** 3) $[0;2]$; 4) $(-\infty;2]$. **1.72.** Найбільше значення дорівнює $\frac{1}{6}$, найменшого значення не існує. **1.73.** Найбільше значення дорівнює 1, найменшого значення не існує. **1.74.** 2) 2. **1.75.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\sqrt{6}$. **1.76.** 1) $\min\limits_{[-1;1]}f(x)=5a-3$; $\max\limits_{[-1;1]}f(x)=5a+5$; 2) якщо $-1<a\leqslant 2$, то $\max\limits_{[-1;a]}f(x)=5$, $\min\limits_{[-1;a]}f(x)=a^2-4a$; якщо $2<a\leqslant 5$, то $\max\limits_{[-1;a]}f(x)=5$, $\min\limits_{[-1;a]}f(x)=-4$; якщо $a>5$, то $\max\limits_{[-1;a]}f(x)=a^2-4a$, $\min\limits_{[-1;a]}f(x)=-4$. **1.77.** 2) Якщо $a<0$, то $\max\limits_{[a;2]}f(x)=1$, $\min\limits_{[a;2]}f(x)=2a-a^2$; якщо $0\leqslant a\leqslant 1$, то $\max\limits_{[a;2]}f(x)=1$, $\min\limits_{[a;2]}f(x)=0$; якщо $1<a<2$, то $\max\limits_{[a;2]}f(x)=2a-a^2$, $\min\limits_{[a;2]}f(x)=0$. **1.78.** 1. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що функція $y=\sqrt{x}+2\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}$ є зростаючою.

1.79. 2. **1.80.** 1. *Вказівка.* Доведіть, що $|x|+|x-2| \geqslant 2$, а $2-\sqrt{x-1} \leqslant 2$. **1.81.** 2. *Вказівка.* Перепишіть дане рівняння у вигляді $\sqrt{4x-x^2}=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$. **1.82.** 3) Парна; 4) непарна. **1.83.** 3) Парна. **1.85.** Див. рисунки. **1.87.** *а*) $a<0$, $b<0$, $c<0$. **1.88.** *а*) $a>0$, $b<0$, $c>0$. **1.89.** Якщо $a<0$, то коренів немає; якщо $a=0$ або $1<a<8$, то 4 корені; якщо $0<a<1$, то 8 коренів; якщо $a=1$, то 6 коренів; якщо $a=8$, то 3 корені; якщо $a>8$, то 2 корені. **1.90.** Якщо $a<0$, то коренів немає; якщо $a=0$ або $a>1$, то 2 корені; якщо $0<a<1$, то 4 корені; якщо $a=1$, то 3 корені. **1.91.** Ні. **1.92.** $\max y=1$, $\min y=-10$. *Вказівка.* Зробіть заміну $\frac{2x^2}{1+x^4}=t$ і покажіть, що $0 \leqslant t \leqslant 1$. Далі розгляньте функцію $f(t)=t^2-12t+1$, $D(f)=[0;\ 1]$. **1.93.** 1) $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$; 2) $(0;\ 0)$. **1.94.** 1) $\left(\frac{9}{4};\frac{3}{4}\right)$. **1.95.** Див. рисунки.

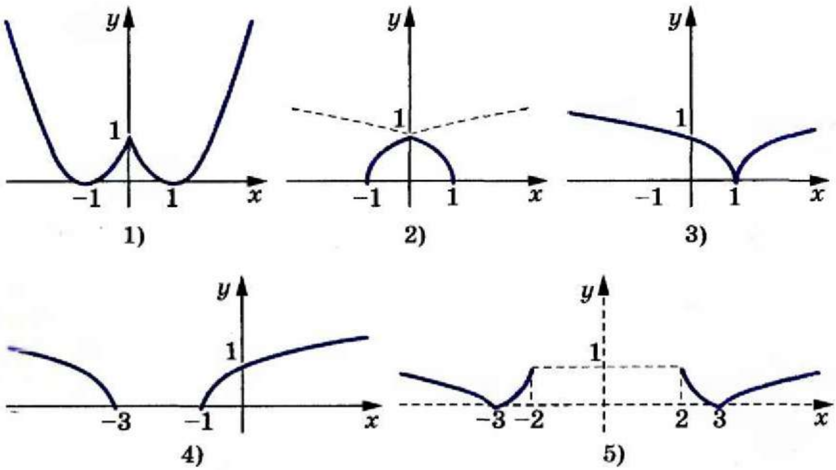


Рис. до задачі 1.85

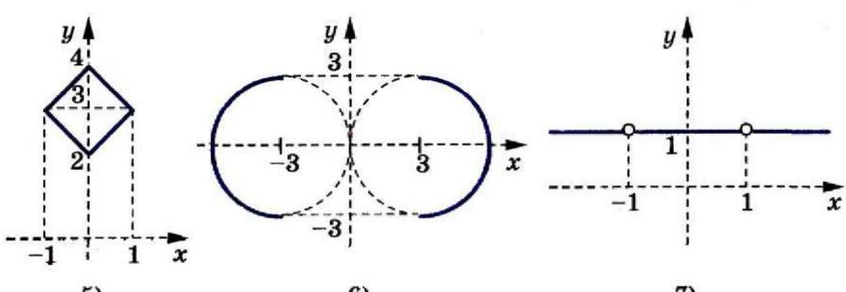


Рис. до задачі 1.95

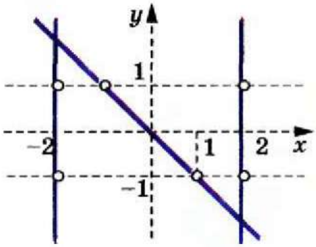


Рис.
до задачі 1.96 (7)

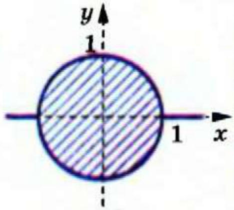


Рис.
до задачі 1.97 (4)

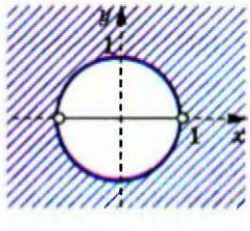


Рис.
до задачі 1.98 (4)

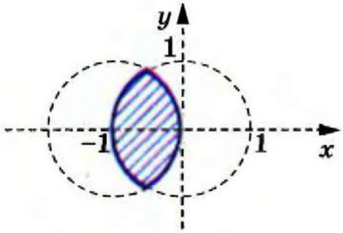


Рис. до задачі 1.99 (2)

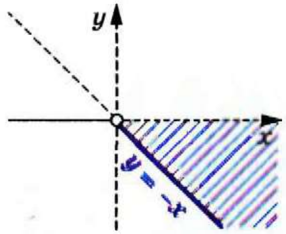


Рис. до задачі 1.101 (1)

1.96. 7) Див. рисунок. **1.97.** 4) Див. рисунок. **1.98.** 4) Див. рисунок. **1.99.** 2) Див. рисунок. **1.101.** 1) Див. рисунок. **2.5.** 1) Визначити неможливо; 2) 1; 3) визначити неможливо; 4) визначити неможливо; 5) 0. **2.6.** 1) 0; 2) визначити неможливо; 3) 1; 4) визначити неможливо. **2.7.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1. **2.8.** 1) 1; 2) 0; 3) 1; 4) 1. **2.11.** 1) Так; 2) визначити неможливо; 3) ні; 4) так; 5) так. **2.12.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **2.15.** 1) $A \vee B = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$; 2) $A \Rightarrow B = \overline{A \wedge \overline{B}}$. **2.16.** $A \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$. **2.17.** Наприклад, $A * B = A \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$. **2.18.** Наприклад, $A * B = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$. **2.19.** $\overline{A} = A \downarrow A$, $A \vee B = (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$, $A \wedge B = (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$. **3.1.** Предикатами є твердження з номерами 1), 3), 4), 7). **3.5.** $\mathbb{Z}$. **3.7.** 1) $(x-5)^2 + (x+2)^2 = 0$; 2) $(x+2)(x-5) = 0$. **3.8.** 1) $\mathbb{R} \setminus \{-2; 5\}$; 2) $\mathbb{R}$. **3.9.** $\mathbb{N}$. **3.10.** $\mathbb{R}$. **3.11.** 1) $(-\infty; 2] \cup (5; +\infty)$; 2) $\mathbb{R}$. **3.12.** 1) $(-\infty; 5)$; 2) $[2; +\infty)$. **3.14.** $A(x) \Leftrightarrow C(x)$, $B(x) \Leftrightarrow D(x)$. **3.15.** $B(a; b) \Leftrightarrow C(a; b)$. **3.19.** x — просте число. **4.1.** 1) $-\frac{3}{4}$; 2) $-\frac{1}{27}$. **4.2.** 1) $-\frac{2}{3}$; 2) -8. **4.11.** 1) $(0; 0)$, $(\sqrt{2}; 8)$, $(-\sqrt{2}; 8)$; 2) $(0; 0)$, $(-3; 81)$. **4.12.** $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(-1; -1)$. **4.13.** 4) 1. **4.14.** 2) 1. **4.18.** 1) Якщо $a = 6$, то один корінь; якщо $a > 6$, то 2 корені; якщо $a < 6$, то коренів немає; 2) якщо $a = 1$ або $a = -8$, то один корінь; якщо $a < -8$ або $a > 1$, то 2 корені; якщо $-8 < a < 1$, то коренів немає. **4.19.** Якщо $a = 0$, або $a = 3$, або $a = -3$, то один корінь; якщо $a < -3$ або $0 < a < 3$, то 2 корені; якщо $-3 < a < 0$ або $a > 3$, то коренів немає. **4.20.** Так. Наприклад, $f(x) = x^{10}$. **4.21.** Так.

Наприклад, $f(x) = x^5$. **4.28.** 4) $\min\limits_{(-\infty;\,-2]} f(x) = 256$, найбільшого значення не існує; 5) $\min\limits_{(-2;\,1)} f(x) = 0$, найбільшого значення не існує. **4.30.** 1) Парним; 2) непарним; 3) непарним; 4) установити неможливо; 5) парним; 6) установити неможливо. **4.31.** $f(x) = x^7$. *Вказівка.* Зробимо заміну $y = x^3$. Оскільки область значень функції $y = x^3$ дорівнює $\mathbb{R}$, то для всіх $y \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(y) = y^7$. **4.32.** $f(x) = x^3|x|$. *Вказівка.* Зробимо заміну $y = x^6$. Оскільки область значень функції $y = x^6$ — проміжок $[0;\ +\infty)$, то для всіх $y \geqslant 0$ виконується рівність $f(y) = y^4$. Оскільки f — непарна функція, що визначена на $[0;\ +\infty)$, то $D(f) = \mathbb{R}$. Крім цього, $f(y) = \begin{cases} y^4, & \text{якщо } y \geqslant 0, \\ -y^4, & \text{якщо } y < 0. \end{cases}$ **4.33.** $f(x) = |x|^5$. **4.34.** 1) 1; 2) -1; 1. *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(x) = 2x^4 + x^{10}$. Вона є парною. Тому досить знайти невід'ємні корені даного рівняння. На проміжку $[0;\ +\infty)$ функція f є зростаючою, отже, рівняння $f(x) = 3$ на цьому проміжку має не більше одного кореня. **4.35.** 1) -1; 2) -1; 1. **4.36.** Якщо $-1 < a \leqslant 0$, то $\min\limits_{[-1;\,a]} f(x) = f(a) = a^8$, $\max\limits_{[-1;\,a]} f(x) = f(-1) = 1$; якщо $0 < a \leqslant 1$, то $\min\limits_{[-1;\,a]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1;\,a]} f(x) = f(-1) = 1$; якщо $a > 1$, то $\min\limits_{[-1;\,a]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1;\,a]} f(x) = f(a) = a^8$. **4.37.** Якщо $a < -2$, то $\min\limits_{[a;\,2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[a;\,2]} f(x) = f(a) = a^6$; якщо $-2 \leqslant a \leqslant 0$, то $\min\limits_{[a;\,2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[a;\,2]} f(x) = f(2) = 64$; якщо $0 < a < 2$, то $\min\limits_{[a;\,2]} f(x) = f(a) = a^6$, $\max\limits_{[a;\,2]} f(x) = f(2) = 64$. **4.38.** 1. *Вказівка.* Перепишіть рівняння у вигляді $\frac{2}{x^{17}} + \frac{3}{x^9} = 5$ і виконайте заміну $\frac{1}{x} = t$. **4.39.** -1. **4.40.** $f_n(x) = x^n$. **4.41.** $f_n(x) = x^n$. **4.42.** $f(x) = x$. *Вказівка.* Підставте $y = 0$. **4.43.** Таких функцій не існує. *Вказівка.* Підставте $y = 0$. **4.44.** $f(x) = 0$. *Вказівка.* Підставте $x = 1$ і зробіть заміну $z = y + f(1)$. **4.45.** Так. Наприклад, $f(x) = \begin{cases} x^5, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$ **4.46.** $f(x) = x^2$. *Вказівка.* Підставте $y = \frac{2}{3}x$ і зробіть заміну $t = 2x$. **5.3.** 1) -2500; 2) $\frac{1}{3}$. **5.4.** 1) -243; 2) 8. **5.11.** 1) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$. **5.14.** 1) $(1;\ 1)$, $(-1;\ -1)$; 2) $\left(2; \frac{1}{4}\right)$. **5.15.** $(1;\ 1)$. **5.18.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};\,1\right]} f(x) = 64$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};\,1\right]} f(x) = 1$; 2) $\max\limits_{\left[-1;\,-\frac{1}{2}\right]} f(x) = 64$, $\min\limits_{\left[-1;\,-\frac{1}{2}\right]} f(x) = 1$; 3) $\max\limits_{[1;\,+\infty)} f(x) = 1$, найменшого значення не існує; 4) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{[-1;\,0)} f(x) = 1$. **5.19.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{3};\,2\right]} f(x) = 27$,

$\min\limits_{\left[\frac{1}{3};2\right]} f(x)=\frac{1}{8}$; 2) $\max\limits_{[-2;-1]} f(x)=-\frac{1}{8}$, $\min\limits_{[-2;-1]} f(x)=-1$; 3) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{(-\infty;-3]} f(x)=-\frac{1}{27}$; 4) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{(0;2]} f(x)=\frac{1}{8}$. **5.20.** 1) 4 розв'язки; 2) 2 розв'язки. **5.21.** 1) 3 розв'язки; 2) 2 розв'язки. **5.24.** 1) Непарним; 2) установити неможливо; 3) парним; 4) установити неможливо. **5.25.** $f(x) = x^{-9}$. **5.26.** $f(x)=\frac{1}{x^3|x|}$. **5.27.** $f(x) = |x|^{-5}$. **5.28.** $f(x)=\begin{cases} x^{-7}, & x>0, \\ g(x), & x\leqslant 0, \end{cases}$ де $g(x)$ — будь-яка функція, що визначена на $(-\infty; 0]$. **6.3.** 9) 3; 10) 2. **6.4.** 5) 3; 6) 7. **6.7.** 1) 29; 2) 56; 3) $-\frac{3}{8}$. **6.8.** 1) $-11{,}8$; 2) $58\frac{1}{3}$. **6.9.** 3) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$; 5) $\{0\}$. **6.16.** 1) -1; 1; -3; 3; 2) -2; $\sqrt[3]{7}$; 3) $-\sqrt[6]{3}$; $\sqrt[6]{3}$. **6.17.** 1) $-\sqrt[3]{2}$; 3; 2) $-\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[4]{3}$. **6.18.** 1) $(-\infty; -3) \cup [-1; 1] \cup (3; +\infty)$; 2) $[-6; 3)$. **6.19.** 1) $(-\infty; -6) \cup [-4; 4] \cup (6; +\infty)$; 2) $(-4; -3] \cup [3; +\infty)$. **6.20.** 1) -1; 2; 2) -1; 3. **6.21.** 1) -3; 2; 2) -3; 1. **6.24.** 1) *Вказівка*. З припущення $\sqrt[3]{2}=\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $\frac{m}{n}$ — нескоротний дріб, маємо рівність $2n^3 = m^3$. Звідки $m \,\vdots\, 2$, тобто $m = 2m_1$, $m_1 \in \mathbb{Z}$. Тоді $n^3 = 4m_1^3$. Отже, $n \,\vdots\, 2$. Отримали суперечність з тим, що $\frac{m}{n}$ — нескоротний дріб. **6.26.** 1) Якщо $a \leqslant -1$, то один корінь; якщо $a > -1$, то 2 корені; 2) якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a \geqslant 0$, то один корінь; 3) якщо $a < 0$ або $a = 1$, то один корінь; якщо $0 \leqslant a < 1$ або $a > 1$, то 2 корені. **6.27.** 1) Якщо $a \geqslant -1$, то один корінь; якщо $a < -1$, то 2 корені; 2) якщо $a < 0$ або $a = 1$, то один корінь; якщо $a \geqslant 0$ і $a \neq 1$, то 2 корені. **7.14.** 1) $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$; 2) $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$; 3) $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$; 4) a і b — довільні числа; 5) a і b — довільні числа. **7.15.** 2) $[3; 7]$; 3) $\mathbb{R}$. **7.16.** 4) $|a^3|$; 5) m^2. **7.18.** 2) $-n$; 5) c^4; 8) $-0{,}1a^3b^5$. **7.19.** 3) $10x$; 7) $-a^{13}b^{11}c^{11}$. **7.22.** 1) $[-4; +\infty)$; 2) $\mathbb{R}$; 3) $[-1; 3]$. **7.23.** 2) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$. **7.27.** 1) Коренів немає; 2) 3; 3) -1; 3. **7.28.** 1) -4; 2) 2. **7.29.** $[3; 5]$. **8.6.** 1) 0; 2) $3\sqrt[3]{7m}$. **8.7.** 1) $27\sqrt[3]{2}$; 2) $29\sqrt[4]{a}$. **8.8.** 4) $\sqrt[30]{b^7}$; 5) $\sqrt[3]{x^2}$; 6) $\sqrt[12]{128}$. **8.9.** 5) $\sqrt[6]{x^5}$; 6) $\sqrt[3]{a}$. **8.12.** 5) $\sqrt[12]{24}$; 6) $\sqrt[5]{a^3}$; 7) $\sqrt[7]{3}$; 8) $\sqrt[3]{a^4b^2}$; 9) $\sqrt[18]{\frac{a}{b}}$. **8.13.** 5) $\sqrt[6]{\frac{2}{3}}$; 6) $\sqrt[6]{a^4b^3}$. **8.14.** 1) 3; 2) 1; 3) 14; 4) -1; 5) 1. **8.15.** 1) 25; 2) 7; 3) -1. **8.22.** $\frac{2-\sqrt[5]{16}}{2}$. *Вказівка*. Скористайтеся формулою $a^n - b^n = (a - b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$. **8.24.** 1) $ab \geqslant 0$; 2) $b = 0$, a — будь-яке число або $b > 0$, $a \geqslant 0$; 3) $b = 0$, a — будь-яке число або $b > 0$, $a \leqslant 0$. **8.25.** 1) $m^2\sqrt[4]{-m}$;

2) $a^2b^3\sqrt[4]{b}$; 3) $|x|\cdot y\sqrt[6]{y}$; 4) $2m^4n^4\sqrt[4]{2m^2n}$; 5) $-3ab^2c^3\sqrt[4]{2}$; 6) $a^3b^3\sqrt[4]{a^3b^3}$; 7) $-a^3b^6\sqrt[8]{-ab^2}$. **8.26.** 1) $-2a\sqrt[4]{2a^2}$; 2) $-5a\sqrt[4]{-a}$; 3) $ab\sqrt[6]{ab}$; 4) $a^3b^3\sqrt[6]{a^2b}$. **8.27.** 1) $\sqrt[4]{2a^4}$; 2) $-\sqrt[6]{6a^3b^4}$; 3) $\sqrt[4]{mn}$; 4) $\sqrt[6]{6b^6}$, якщо $b \geqslant 0$, $-\sqrt[6]{6b^6}$, якщо $b < 0$; 5) $-\sqrt[6]{-a^7}$; 6) $-\sqrt[4]{a^5b^6}$. **8.28.** 1) $-\sqrt[8]{3c^8}$; 2) $\sqrt[6]{a^7}$; 3) $\sqrt[4]{6a^4b^4}$; 4) $-\sqrt[8]{3a^4b^8}$; 5) $-\sqrt[4]{-a^7}$. **8.29.** 1) 1; 2) 4; 3) 1; 4) 2; 5) $-\sqrt[3]{3}$. **8.30.** 1) 1; 2) $\sqrt{23}$. **8.31.** 1) $\frac{\sqrt[4]{a}-1}{a}$; 2) $\sqrt[6]{x}$; 3) $-\sqrt[4]{a}$; 4) $\sqrt[6]{a}$; 5) $\sqrt[6]{b}-\sqrt[6]{c}$; 6) $\sqrt[4]{ab}$; 7) $\sqrt[6]{a^2-1}$. **8.35.** $x^3-9x-12$. *Вказівка.* Піднесіть обидві частини рівності $x=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ до кубу. **8.36.** $(x-3)^3-2$. **8.37.** 1) *Вказівка.* Якщо $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}=x$, де $x\in\mathbb{Q}$, то $x^3=\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}\right)^3$, $x^3=7+3\cdot\sqrt[3]{10}\,x$. Оскільки $x\neq 0$, то маємо, що $\sqrt[3]{10}=\frac{x^3-7}{3x}\in\mathbb{Q}$; 2) *Вказівка.* Якщо $\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}=x$, де $x\in\mathbb{Q}$, то $\left(\sqrt[3]{3}\right)^3=\left(x-\sqrt{2}\right)^3$; $3=x^3-3x^2\sqrt{2}+6x-2\sqrt{2}$; $\sqrt{2}=\frac{x^3+6x-3}{3x^2+2}\in\mathbb{Q}$. **8.39.** $\frac{1}{\sqrt[32]{2}-1}$. **8.40.** Якщо $a=1$, то 2^6; якщо $a\neq 1$, то $\frac{a-1}{\sqrt[64]{a}-1}$. **8.41.** $\frac{1}{\sqrt[15]{3}-\sqrt[15]{2}}$. **8.42.** $\frac{5}{\sqrt[17]{3}+\sqrt[17]{2}}$. **8.43.** *Вказівка.* Використовуючи метод математичної індукції, доведіть рівність $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{6}}}}}}_{n\text{ радикалів}}=\sqrt[2^n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[2^n]{2-\sqrt{3}}$.

8.45. *Вказівка.* Помноживши обидві частини рівності на $\sqrt[3]{2}+1$ і скориставшись формулою суми кубів, маємо: $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}\cdot\left(\sqrt[3]{2}+1\right)$. Далі піднесіть обидві частини останньої рівності до кубу. **9.6.** 3) $y=\frac{1-x}{2x}$. **9.7.** 1) $y=5(x-3)$. **9.8.** 2) $y=\frac{x^2+1}{2}$, $D(y)=[0;+\infty)$. **9.9.** 4) $y=\begin{cases}\sqrt{2-x}, & \text{якщо } x\leqslant 1,\\ 2-x, & \text{якщо } x>1.\end{cases}$ **9.16.** $k=1$, $b=0$ або $k=-1$, b — будь-яке число. *Вказівка.* Обернена функція задається формулою $y=\frac{1}{k}x-\frac{b}{k}$. Звідси $\frac{1}{k}=k$ і $b=-\frac{b}{k}$. **9.17.** При довільному a, відмінному від 0, і $b=0$. *Вказівка.* Обернена функція задається формулою $y=\frac{1-bx}{ax}$. Тоді для всіх x таких, що $x\neq 0$ і $x\neq-\frac{b}{a}$, має виконуватися рівність $\frac{1}{ax+b}=\frac{1-bx}{ax}$, яку можна переписати так: $b(ax^2+bx-1)=0$. Тепер зрозуміло, що підходить тільки $b=0$. **9.18.** *Вказівка.* Нехай функція f — непарна, функція g — до неї обернена. Маємо: $f(x_0)=y_0$, $g(y_0)=x_0$. Тоді $g(-y_0)=g(-f(x_0))=g(f(-x_0))=-x_0=-g(y_0)$. **9.19.** 1) 1;

2) -7; 3) один корінь при будь-якому c. **9.20.** 2) Коренів немає. **9.21.** -1. *Вказівка*. Дане рівняння рівносильне такому: $f\ (g\ (x)) = f\ (x^3 + x + 3)$. **9.22.** 2. **9.23.** 1. *Вказівка*. Скористайтеся наслідком з теореми 9.4. **9.24.** 2. **9.25.** $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$; $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$. *Вказівка*. Функція $f(x)=x^2+\frac{1}{8}$, $D\ (f) = [0;\ +\infty)$, є оберненою до функції $g(x)=\sqrt{x-\frac{1}{8}}$. Крім того, функції f і g є зростаючими. **9.26.** $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. *Вказівка*. Зробіть заміну $\sqrt{x}=t$. Далі розгляньте функції $f(t)=\sqrt{1+t}$, $D\ (f) = [0;\ +\infty)$, і $g\ (t) = t^2 - 1$, $D\ (g) = [1;\ +\infty)$. **9.27.** $g(x)=\begin{cases}-\sqrt{x}, & \text{якщо } x\in[0;1),\\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x\in[9;16).\end{cases}$

9.28. $g(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}, & \text{якщо } x\in[-9;-4),\\ \sqrt{-x}, & \text{якщо } x\in(-1;0].\end{cases}$ **9.29.** *Вказівка*. Скористайтеся методом від супротивного. **9.31.** Так. *Вказівка*. Наприклад, $f\ (n) = n + 1$, де $D\ (f) = \mathbb{N} \cup \{0\}$. **9.32.** Так. *Вказівка*. Наприклад, $f\ (n) = 1 - 2n$ при $n \leqslant 0$, $f\ (n) = 2n$ при $n > 0$, $D\ (f) = \mathbb{Z}$. **9.33.** Так. *Вказівка*. Існування шуканої функції випливає з того, що $\mathbb{Q}$ — зліченна множина (див. п. 7 книги Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 8 кл. з поглибл. вивченням математики. — Х. : Гімназія, 2008). **9.34.** Так. *Вказівка*. $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}$ при $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x$ в інших випадках. **9.35.** Ні. *Вказівка*. Відповідь випливає з того, що проміжок $[0;\ 1]$ — незліченна множина (ідею доведення викладено на с. 46–47 книги Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 8 кл. з поглибл. вивченням математики. — Х. : Гімназія, 2008). **9.36.** Існують. Наведемо два приклади: 1) $f(x)=\sqrt{2}\,x$, $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x$; 2) $f(x)=-\sqrt{2}\,x$, $g(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}x$. *Вказівка*. Розгляньте функцію $f\ (x) = kx$, $k \neq 0$. Тоді $g(x)=\frac{1}{k}x$. **9.37.** Наведемо два приклади: 1) $f(x)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}x$, $g(x)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}x$; 2) $f(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x$, $g(x)=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x$. Див. вказівку до задачі 9.36. **9.38.** $\frac{\sqrt{17}+3}{4}$. *Вказівка*. Графік функції f належить «смузі», обмеженій прямими $y=\frac{1}{2}x-1$ і $y=\frac{1}{2}x+1$ (див. рисунок). Оскільки графіки функцій f і g є симетричними відносно прямої $y = x$, то графік функції g належить «смузі», обмеженій прямими $y = 2x + 2$ і $y = 2x - 2$. Нехай x_1 і x_2 ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$) — абсциси точок перетину параболи $y = 10 - 2x^2$ з цими прямими відповідно. Оскільки корінь рівняння $g\ (x) = 10 - 2x^2$ належить проміжку $(x_1;\ x_2)$

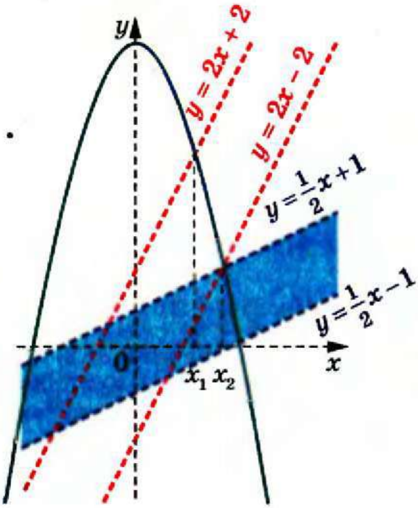


Рис. до задачі 9.38

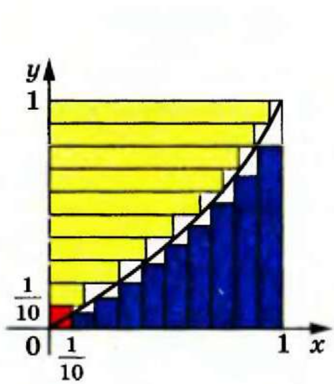


Рис. до задачі 9.40

і $x_2 - x_1 < 0{,}5$, то за відповідь до задачі можна обрати середину проміжку $(x_1;\ x_2)$. **9.39.** $\frac{17+\sqrt{193}}{16}$. **9.40.** *Вказівка.* Перепишемо дану нерівність у вигляді $\frac{1}{10}f\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{10}f\left(\frac{2}{10}\right)+\ldots+\frac{1}{10}f\left(\frac{9}{10}\right)+\frac{1}{10}g\left(\frac{1}{10}\right)+$ $+\frac{1}{10}g\left(\frac{2}{10}\right)+\ldots+\frac{1}{10}g\left(\frac{9}{10}\right)\leqslant\frac{99}{100}$. На рисунку схематично зображено графік функції f. Тоді сума $\frac{1}{10}f\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{10}f\left(\frac{2}{10}\right)+\ldots+\frac{1}{10}f\left(\frac{9}{10}\right)$ дорівнює площі «блакитної» фігури, а сума $\frac{1}{10}g\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{10}g\left(\frac{2}{10}\right)+\ldots+\frac{1}{10}g\left(\frac{9}{10}\right)$ — площі «жовтої» фігури. **9.42.** $f(x) = 3x$. *Вказівка.* При $y = 0$ і $x \neq 0$ отримуємо $f(f(x)) = 9x$. Звідси випливає, що f — оборотна функція (див. задачу 9.30). При $y = x$ і $x \neq 0$ маємо $f(f(x) - 2x) = f(x)$. **9.43.** $f(x) = -x$. **10.3.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $[-1;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ -1] \cup [2;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$; 6) $[3;\ +\infty) \cup \{0\}$. **10.4.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $[2;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ 1] \cup [3;\ +\infty)$; 5) $[-3;\ 3]$; 6) $[6;\ +\infty) \cup \{0\}$. **10.5.** 1) $[1;\ +\infty)$; 2) $[-2;\ +\infty)$; 3) $\mathbb{R}$; 4) $[0;\ +\infty)$; 5) $[0;\ +\infty)$. **10.6.** 1) $[2;\ +\infty)$; 2) $[-4;\ +\infty)$; 3) $\mathbb{R}$; 4) $[0;\ +\infty)$; 5) $[0;\ +\infty)$. **10.7.** 1) $[-3;\ 2]$; 2) $\left[\frac{1}{2};10\right]$; 3) $\left[-\frac{1}{2};2\right]$. **10.10.** 4) $\sqrt[3]{5}<\sqrt[6]{28}$; 8) $6\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=4\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$. **10.12.** 4) 4 і 5; 6) -5 і -4. **10.16.** 2) $\sqrt[9]{12}>\sqrt[6]{5}$; 5) $\sqrt{3}<\sqrt[3]{\sqrt{28}}$. **10.17.** 3) $\sqrt[10]{7}<\sqrt[5]{2\sqrt{2}}$. **10.22.** 1) $\max\limits_{[1;2]} f(x)=\sqrt[4]{2}$, $\min\limits_{[1;2]} f(x)=1$; 2) $\max\limits_{[-3;-1]} f(x)=\sqrt[4]{3}$, $\min\limits_{[-3;-1]} f(x)=1$;

3) $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=1$, $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=0$; 4) $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=\sqrt[4]{2}$, $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=0$; 5) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{[-3;+\infty)} f(x)=0$; 6) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{(-\infty;-1]} f(x)=1$. **10.23.** 3) $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=\sqrt[3]{2}$, $\min\limits_{[-2;2]} f(x)=0$; 5) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{[-1;+\infty)} f(x)=0$; 6) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{(-\infty;2)} f(x)=0$. **10.24.** 1) $(65; +\infty)$; 2) $(-\infty; 21)$; 3) $\left[-\frac{1}{4};0\right]$; 4) $(4; +\infty)$; 5) $[3; +\infty) \cup \{-2\}$. **10.25.** 1) $(-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 10)$; 3) $\left[-\frac{1}{5};16\right]$; 4) $[-5; -2) \cup \cup (2; 5]$. **10.26.** 1) Один корінь при будь-якому значенні a; 2) якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a \geqslant 0$, то один корінь. **10.27.** Якщо $a > 1$ або $a = 0$, то один корінь; якщо $0 < a \leqslant 1$, то 2 корені; якщо $a < 0$, то коренів немає. **10.28.** 27. *Вказівка*. Функція $y=\sqrt[4]{x-26}+\sqrt[3]{x}$ є зростаючою. **10.29.** 10. **10.30.** (3; 3). *Вказівка*. Скористайтеся тим, що функція $f(t)=t+\sqrt[6]{t}$ зростає на $D(f)$. **10.31.** (1; 1), (−1; −1). **10.32.** $f(x)=\sqrt[3]{x^7}$. **10.33.** $f(x)=\sqrt[10]{|x|}$. **10.34.** $f(x)=\sqrt[5]{x|x|^7}$. **10.35.** Таких функцій f не існує. *Вказівка*. При $x = 1$ маємо, що $f(1)=f(1^4)=\sqrt[3]{1}=1$, а при $x = -1$ маємо, що $f(1)=f((-1)^4)=\sqrt[3]{-1}=-1$. **10.36.** $f(x)=\begin{cases}\sqrt[4]{x}, & x\geqslant 0,\\ g(x), & x<0,\end{cases}$ де $g(x)$ — будь-яка функція, що визначена на $(-\infty; 0)$. **10.37.** 2. *Вказівка*. Скористайтеся нерівністю $\sqrt[3]{24}<\sqrt[3]{27}$. **10.38.** 1. **10.39.** 1; $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що функції $f(x)=\frac{x^3+1}{2}$ і $g(x)=\sqrt[3]{2x-1}$ є взаємно оберненими та зростаючими. **10.40.** 1; −2. **10.41.** $a - a^5$. *Вказівка*. Розгляньте зростаючі та взаємно обернені функції $f(a) = a^5 + x$ і $g(a)=\sqrt[5]{a-x}$. Інше розв'язання можна отримати, якщо врахувати зростання функції $\varphi(x) = a^5 + x$ і спадання функції $\psi(x)=\sqrt[5]{a-x}$. **10.42.** 2. *Вказівка*. $f(f(x))= =\frac{1}{\sqrt[3]{1-(f(x))^3}}=\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}$. Тоді $f(f(f(x)))=\sqrt[3]{1-\frac{1}{(f(x))^3}}=x$. **10.43.** *Вказівка*. Розгляньте графік функції $y=\sqrt[k]{x}$, $D(y) = [0; n^k]$ (на рисунку зображено випадок, коли $n = 4$, $k = 2$). Нехай $S_с$, $S_з$ та $S_ж$ — відповідно площі синьої, зеленої та жовтої фігур. Тоді $X = S_с + S_з$, $Y = S_ж + S_з$. Далі врахуйте, що площа прямокутника $OABC$ дорівнює $S_с + S_ж + S_з$. **10.44.** *Вказівка*. Позначимо $A=\sqrt{a+\sqrt[3]{b+\sqrt[4]{c}}}$. Тоді, очевидно, виконуються нерівності $A\geqslant\sqrt{a}$, $A\geqslant\sqrt{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[6]{b}$, $A\geqslant\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{c}}}=\sqrt[24]{c}$. Звідси

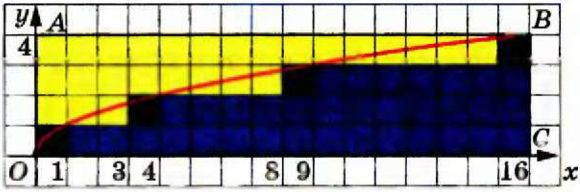


Рис. до задачі 10.43

$A^2 \geqslant a$, $A^6 \geqslant b$, $A^{24} \geqslant c$. Перемноживши почленно три останні нерівності, отримуємо $A^{32} \geqslant abc$. **11.5.** 3) $\frac{3}{4}$; 5) $\frac{5}{3}$; 8) $\frac{1}{2}$. **11.6.** 3) $\frac{10}{3}$; 5) 4; 6) $7\frac{19}{32}$. **11.7.** 3) $[3; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$. **11.9.** 3) $a^{\frac{1}{6}}$; 7) $a^{\frac{4}{15}}$; 11) $a^{\frac{1}{2}}$; 15) $a^{\frac{7}{4}}b^{-\frac{1}{4}}$. **11.10.** 4) $b^{\frac{5}{4}}$; 8) b; 12) $a^{\frac{3}{5}}b^{-\frac{1}{8}}$; 16) $b^{-6,8}$. **11.11.** 3) 125; 6) 10; 9) 4. **11.12.** 2) 49; 5) 32; 8) 1. **11.13.** 4) $\left(\sqrt[8]{a}\right)^8$. **11.14.** 7) $(m^{-0,6})^2$; 8) $\left(\sqrt[7]{m}\right)^2$. **11.16.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $(2; +\infty)$. **11.18.** 1) 6; 2) 100; 3) 19,5; 4) $12\frac{4}{9}$; 5) 2; 6) 10; 7) $\frac{2}{15}$; 8) 3; 9) 571; 10) $\frac{25}{21}$; 11) 12. **11.19.** 1) 7; 2) 10; 3) $122\frac{7}{9}$; 4) 1; 5) $\frac{1}{4}$; 6) 21; 7) $\frac{225}{256}$; 8) $\frac{8}{729}$. **11.20.** 1) 125; 2) 6; 3) коренів немає. **11.21.** 1) $\frac{1}{9}$; 3) 5. **12.9.** 4) $a^{0,5} - 2b^{0,5}$; 8) $a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$; 12) $3^{\frac{1}{5}}$. **12.10.** 3) $1 + \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}}$; 6) $x^{2,5}y^{2,5} \cdot \frac{x^{0,5} - y^{0,5}}{x^{0,5} + y^{0,5}}$; 9) $2^{\frac{1}{2}}$. **12.11.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 441.

12.12. 1) $\frac{a^{0,5}b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}}$; 2) $\frac{2(a+b)}{a-b}$; 3) 2; 4) $\frac{\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{13}{12}}}$; 5) $a^2 + ab + b^2$.

12.13. 1) $2m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$; 2) 3; 3) $-\frac{a}{b}$; 4) $m^{-\frac{1}{2}}$. **12.15.** 1) $\frac{1}{x-y}$; 2) $\frac{2}{x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}}$.

12.16. 1) $\left| z^{\frac{1}{p}} - z^{\frac{1}{q}} \right|$; 2) $a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}$; 3) -1. **12.17.** 1) $\frac{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}}$; 2) 0; 3) $3 - 2\sqrt{x}$, якщо $x \in [0; 9)$; -3, якщо $x \in (9; +\infty)$. **12.18.** 2^{77}. **12.19.** 2^{-7}. **12.21.** 24, якщо $a = 1$; $\frac{a^{7,4} - a^{0,2}}{a^{0,3} - 1}$, якщо $a \in [0; 1) \cup (1; +\infty)$. **12.22.** $\frac{b^{12,8} + b^{3,3}}{b^{0,1} + 1}$.

12.23. $a^{0,2} - b$. **12.24.** $\frac{1}{x^{1,2} + y^{0,3}}$. **13.2.** 5) -1; 1; 6) 1; 7. **13.3.** 3) -1; 1.

13.4. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) коренів немає; 4) 3. **13.5.** 2) Коренів немає; 3) -5; 7; 4) 7. **13.6.** 1) 1; 2) 3; 3) 1; 2; 4) 5; 5) 4; 6) 2; 7) 3; 8) -4. **13.7.** 1) -5;

2) 4; 3) 0; 4) −1; 5) 5. **13.8.** 1) 4; 2) 2; 3; 3) −7; 8; 4) −1; 1; 4. **13.9.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 7; −4. **13.10.** 1) 0; 5; 2) 7. **13.11.** 1) 6; 2) 2; 3) −1; 3; 4) −2. **13.12.** 1) 2; 2) 8. **13.13.** 1) 6; 9; 2) $\frac{137}{16}$; 3) коренів немає; 4) 1; −3. **13.14.** 1) −5; 4; 2) 3; 7; 3) −1. **13.15.** 1) 4; 2) 2; 3) коренів немає. **13.16.** 1) −1; 2) 6. **13.17.** 1) 27; 2) [5; 10]; 3) коренів немає. **13.18.** 1) 10; 2) [−4; +∞). **13.19.** При $a<\frac{1}{4}$ коренів немає, при $a\geqslant\frac{1}{4}$ $x=a-\sqrt{a}$. *Вказівка.* $x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}=\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2$. **13.20.** При $a<1$ коренів немає, при $a\geqslant 1$ $x=a-2\sqrt{a}$. **13.21.** $\frac{1}{5}\leqslant a<\frac{1}{3}$ або $a=\frac{8}{15}$. *Вказівка.* Розгляньте графіки функцій $y=ax-1$ та $y=\sqrt{8x-x^2-15}$. **13.22.** $1<a\leqslant 3$ або $a=2-\sqrt{2}$. **14.1.** 3) $\frac{-3+\sqrt{65}}{2}$; 4) 0; $\frac{1}{2}$; 5) 8; 6) 25; 7) −5; $6\frac{3}{7}$. **14.2.** 3) 5; 4) −1. **14.3.** 3) 1; 4) 1; 5) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; 6) $\frac{6-\sqrt{6}}{3}$. **14.4.** 1) 2; 6; 2) −1; 3) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$. **14.5.** 3) $\frac{14+\sqrt{7}}{2}$; 4) 10; 5) 4; −4; 6) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; 7) 5. **14.6.** 1) 20; 2) $22-\sqrt{464}$; 3) 0; 5. **14.7.** 2) 7; 8. **14.8.** 2) 1. **14.9.** 1) 2; $\frac{-2-4\sqrt{13}}{3}$; 2) −2; 1; 13. **14.10.** 1) 0; 2; 2) −2; $\frac{-2+2\sqrt{91}}{3}$. **15.1.** 1) 1; $-\frac{27}{8}$; 2) 16; 3) 25; 4) 1; 5) 8; 6) 0; 1; 7) 1; 29; 8) 0; 16; 9) $\frac{9}{8}$; 10) 8. **15.2.** 1) 16; 2) 1; 512; 3) 4; 4) −4; 11; 5) −8; 1; 6) −61; 7) 0; 1; 8) 2,8; −1,1. **15.3.** 1) 1; 4; 2) $-\sqrt{11}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{11}$; 3) −1; 4; 4) −2; 5; 5) −4; 1; $\frac{-3+\sqrt{22}}{2}$; $\frac{-3-\sqrt{22}}{2}$; 6) 1024. **15.4.** 1) −1; 5; 2) 1; 2; 3) 1; 2; 4) −6; 4. **15.5.** 1) (9; 4), (4; 9); 2) (64; 1); 3) (8; 1), (1; 8); 4) (41; 40); 5) (6; 3), (3; 1,5); 6) (−2; 3), (12; 24). **15.6.** 1) (27; 1), (−1; −27); 2) (4; 1), (1; 4); 3) (2; 3), $\left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}\right)$. **15.7.** 1. *Вказівка.* Скористайтеся заміною $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=t$ або властивостями зростаючих і спадних функцій. **15.8.** 3. *Вказівка.* Заміна $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}=y$. **15.9.** 3. **15.10.** $1+\sqrt{6}$. *Вказівка.* Заміна $\frac{x}{\sqrt{2x+5}}=t$. **15.11.** 3; $\frac{81-9\sqrt{97}}{8}$. *Вказівка.* Поділіть обидві частини рівняння на x^2. **15.12.** 1; $\frac{1+\sqrt{109}}{18}$. **15.13.** −2; 5. *Вказівка.* Нехай $\sqrt[3]{x+3}=a$, $\sqrt[3]{6-x}=b$. Тоді $a^3+b^3=9$. **15.14.** −3; 4. **15.15.** 8. **15.16.** $-\frac{17}{5}$; $\frac{63}{5}$. **15.17.** 10. *Вказівка.* Заміна

$\sqrt[3]{x-2}=a$, $\sqrt{x-1}=b$. Тоді $a^3-b^2=-1$. Інше розв'язання можна отримати, якщо врахувати зростання функції $f(x)=\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x-1}$. **15.18.** 1; 2; 10. **15.19.** 1. *Вказівка.* Нехай $\sqrt{2-x}=y$. Тоді можна отримати систему $\begin{cases}\sqrt{2-x}=y,\\ \sqrt{2-y}=x.\end{cases}$ **15.20.** 2. **15.21.** 1) 4. *Вказівка.* Помноживши обидві частини рівняння на вираз $\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}$, отримаємо $6x=3x\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\right)$. Зазначимо, що $x=0$ не є коренем початкового рівняння. Далі додамо почленно початкове рівняння і рівняння $\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2$; 2) -1. *Вказівка.* Помножте обидві частини рівняння на вираз $\sqrt{x+1}-1$. **15.22.** 1) $\frac{7+\sqrt{13}}{6}$; 2) 2. **16.2.** 1) $[3;\ 5]$; 2) $[0;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -1]\cup[0;\ 1)$; 4) $(4;\ +\infty)$; 5) $[-8;\ -4]$; 6) $(-\infty;\ -1)\cup[2;\ +\infty)$. **16.3.** 1) $\left[\frac{2}{3};4\right)$; 2) $(-\infty;\ -4]\cup[1;\ +\infty)$; 3) $\varnothing$. **16.4.** 1) $\left(3;\frac{24}{5}\right]$; 2) $[1;\ +\infty)$; 3) $[0;\ 3]$; 4) $[-1;\ 0)\cup(0{,}6;\ 1]$; 5) $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$; 6) $[1;\ 6]$. **16.5.** 1) $\left[2\frac{2}{9};4\right)\cup(5;+\infty)$; 2) $(3;\ +\infty)$; 3) $[-2;\ -1{,}6]\cup[0;\ 2]$; 4) $\varnothing$. **16.6.** 1) $(-\infty;\ 1)$; 2) $[-7;\ 2]$; 3) $(-\infty;\ -1]$; 4) $\left[\frac{8}{3};+\infty\right)$; 5) $(-\infty;\ -2]\cup(2;\ +\infty)$; 6) $(3;\ 5]$. **16.7.** 1) $[-2;\ 2)$; 2) $[-7;\ 1)$; 3) $(-\infty;\ -3]$; 4) $(-\infty;\ -5]\cup[1;\ +\infty)$. **16.8.** 1) 4; 2) $[-2;\ 4]\cup[5;\ +\infty)$; 3) -2; 2. **16.9.** 1) $[3;\ 12]$; 2) $\{-2,\ 1\}\cup[3;\ +\infty)$; 3) $[-4;\ -3]\cup[3;\ 4]$. **16.10.** 1) $\left[\frac{1}{2};2\right)\cup(5;+\infty)$; 2) $\left[-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]$; 3) $[-4;\ 1]\cup\{2\}$; 4) $(-\infty;\ -1]\cup[4;\ 6)\cup(8;\ +\infty)$. **16.11.** 1) $(-1;\ +\infty)$; 2) $[-20;\ 0)\cup(5;\ +\infty)$; 3) $\{-4\}\cup[2;\ 3]$; 4) $[-7;\ -5)$. **16.12.** 1) $(1;\ +\infty)$; 2) $\left[-1;-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{15}}{4};1\right]$; 3) $\left(\frac{2\sqrt{21}}{3};+\infty\right)$. **16.13.** 1) $[6;\ +\infty)$; 2) $\left(\frac{16}{5};4\right)$. **16.14.** $[1;\ +\infty)$. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що функція $y=\sqrt{x+3}+$ $+\sqrt[3]{x^3+x+6}$ є зростаючою. **16.15.** $[-2;\ 2)$. **16.16.** $a=\frac{7}{40}$. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що графіком функції $y=\sqrt{1-(x+2a)^2}$ є півколо радіуса 1 з центром у точці $A(-2a;0)$. **16.17.** $a=\frac{7}{20}$. **17.4.** 3) 10π. **17.5.** 2) $\frac{9\pi}{2}$. **17.10.** 5) У II чверті; 10) у I чверті; 15) у II чверті. **17.11.** 4) У III чверті; 8) у II чверті; 15) у IV чверті. **17.12.** 3) $(0;\ -1)$; 5) $(0;\ 1)$; 8) $(1;\ 0)$. **17.13.** 2) $(-1;\ 0)$; 6) $(-1;\ 0)$. **17.14.** $\frac{\pi}{5}$; $\frac{3\pi}{10}$; $\frac{\pi}{2}$. **17.15.** $\frac{2\pi}{15}$; $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{8\pi}{15}$; $\frac{14\pi}{15}$. **17.16.** 15 сторін. **17.18.** 3) $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; 4) 2π; -2π.

17.19. *б)* $-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **17.20.** *б)* $\frac{7\pi}{15}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **17.23.** 1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 2) $(0; -1)$; 3) $(0; 1)$, $(0; -1)$; 4) $(1; 0)$, $(-1; 0)$; 5) $(1; 0)$; 6) $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$. **17.25.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **17.26.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **17.27.** 1) $\{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$; 2) $\varnothing$; 3) $\left\{\frac{\pi n}{20} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$; 4) $\left\{\frac{\pi n}{3} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$; 5) $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$; 6) $\left\{\frac{3\pi}{2}+3\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$. **17.28.** 1) $\{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$; 2) $\{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$; 3) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$; 4) $\left\{\frac{\pi}{3}+\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$; 5) $\{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$; 6) $\{(6n-1)\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$. **18.1.** 1) 5; 3) $\sqrt{2}$; 5) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; 7) -3; 9) $\frac{7}{4}$. **18.2.** 2) 1; 4) 0; 6) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; 8) 9. **18.5.** 2) Так; 4) ні; 6) ні; 8) так. **18.6.** 1) Ні; 3) так. **18.7.** 3) $\sqrt{2}$. **18.8.** 2) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$. **18.9.** 1) 3; -3; 3) 3; 1; 5) 1; 0. **18.10.** 2) -1; -3; 4) 10; 4. **18.14.** 1) $-4 \leqslant a \leqslant -2$; 2) $a = 0$; 3) $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$; 4) $-1 \leqslant a \leqslant 0$ або $1 \leqslant a \leqslant 2$; 5) $1 \leqslant a \leqslant 2$ або $3 \leqslant a \leqslant 4$; 6) $a \neq 2$. **18.15.** 1) $1 \leqslant a \leqslant 3$; 2) таких значень a не існує; 3) $-2 \leqslant a \leqslant -\sqrt{2}$ або $\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 2$; 4) $a = 1$. **18.18.** 1) Найбільшого значення не існує; $\frac{1}{2}$ — найменше; 2) найбільше значення 1; найменшого не існує; 3) найбільшого і найменшого значень не існує; 4) найбільшого і найменшого значень не існує. **18.19.** 1) $-\frac{1}{3}$; -1; 2) найбільшого і найменшого значень не існує; 3) 1; -1. **18.20.** 1) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; 2) $[0{,}5; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; -\frac{2}{7}\right] \cup [2; +\infty)$. **18.21.** 1) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; 2) $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **19.4.** 1) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **19.5.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **19.6.** 1) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$; 2) 2; 3) 4; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **19.7.** 1) $2-\sqrt{2}$; 2) 1,5; 3) $4\sqrt{3}-3$. **19.14.** 1) $2 \sin \alpha$; 2) $-2 \cos \alpha$; 3) 0. **19.15.** 1) 0; 2) 0; 3) $-2 \operatorname{ctg} \beta$. **19.16.** 1) II; 3) I або II. **19.17.** 2) IV; 4) I або III. **19.18.** 2) Парна; 5) не є ні парною, ні непарною; 8) непарна. **19.19.** 2) Парна; 4) не є ні парною, ні непарною; 6) непарна. **20.1.** 3) $\sqrt{3}$; 6) $-\frac{1}{2}$; 9) $\frac{1}{2}$; 12) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 15) $-\sqrt{3}$. **20.2.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) 1; 6) $\frac{1}{2}$; 8) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **20.7.** 4) 1; 5) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; 6) $\frac{1}{4}$; 7) $\frac{1}{6}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 9) $\frac{1}{\pi}$. **20.8.** 2) 4π; 3) π; 6) 4. **20.12.** π. **20.13.** π.

20.14. *Вказівка.* Якщо припустити, що дана функція є періодичною з періодом T, то обов'язково одне з чисел $0 - T$ або $0 + T$ не буде належати області визначення, тоді як $0 \in D(f)$. **20.17.** 1) 4π; 2) $\frac{40\pi}{3}$; 3) 6; 4) 2. **20.18.** 1) 10π; 2) 176π; 3) 36; 4) 14. **20.19.** $a = 0$. **20.20.** $a = 0$. **20.21.** $a = -1$ або $a = \frac{1}{5}$. **20.22.** $a = -1$; 0; $\frac{1}{3}$. **20.23.** 1; −1; 5; −5. *Вказівка.* Рівність $\cos n(x + 5\pi)\sin\frac{15(x + 5\pi)}{n^2} = \cos nx \sin\frac{15x}{n^2}$ має виконуватись при всіх $x \in \mathbb{R}$, а при $x = 0$ маємо $\cos 5\pi n \sin\frac{75\pi}{n^2} = 0$. Оскільки $\cos 5\pi n \neq 0$, то $\sin\frac{75\pi}{n^2} = 0$; $\frac{75\pi}{n^2} = \pi k$; $\frac{75}{n^2} = k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Звідси випливає, що n^2 — дільник числа 75. **20.24.** 1; −1; 3; −3. **20.25.** Так. Наприклад, $T = \frac{2\pi}{101}$. **20.26.** Так. Наприклад, $T = \frac{2\pi}{41}$[1]. **20.27.** Не існує. *Вказівка.* Сума двох ірраціональних чисел може бути раціональним числом. **20.28.** *Вказівка.* Функція $g(t) = t^3 + t$ є зростаючою, а отже, і оборотною. Нехай T — період функції $y = (f(x))^3 + f(x)$. Тоді для будь-якого $x \in D(f)$ виконується рівність $(f(x + T))^3 + f(x + T) = (f(x))^3 + f(x)$. Звідси для будь-якого $x \in D(f)$ виконується рівність $f(x + T) = f(x)$. **20.29.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$ **20.30.** *Вказівка.* Припустимо, що f має додатний раціональний період $T = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді число $nT = m$ — також період функції f. Далі доведіть, що серед чисел $f(1)$, $f(2)$, ... не більше ніж m різних. **20.31.** Існує. *Вказівка.* Наприклад, $f(x) = \begin{cases} n, & \text{якщо } x = n + m\sqrt{2},\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$ **20.32.** Може. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функції $f(x) = x^2$, $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

20.33. 1. *Вказівка.* $f(x+4) = f((x+2)+2) = \frac{f(x+2)}{5f(x+2)-1} = \frac{\frac{f(x)}{5f(x)-1}}{\frac{5f(x)}{5f(x)-1} - 1} = f(x)$.

20.34. *Вказівка.* Доведіть, що $f(x + 4) = f(x)$. **20.35.** *Вказівка.* Замі-

[1] Можна довести, що функція f тотожно дорівнює нулю. Це випливає з того, що числа $\cos x$, $\cos\left(x + \frac{2\pi}{41}\right)$, ..., $\cos\left(x + \frac{80\pi}{41}\right)$ є абсцисами вершин правильного 41-кутника. Аналогічні міркування можливі і при розв'язуванні задачі 20.25.

нивши в даній рівності x на $x + 1$ і на $x - 1$, відповідно отримаємо дві рівності: 1) $f(x+2)+f(x)=\sqrt{2}\,f(x+1)$; 2) $f(x)+f(x-2)=\sqrt{2}\,f(x-1)$. Тепер легко встановити, що $f(x + 2) + f(x - 2) = 0$. Підставимо замість x до останньої рівності $x + 2$. Тоді $f(x + 4) = -f(x)$. Тепер можна записати $f(x + 8) = f((x + 4) + 4) = -f(x + 4) = f(x)$. Отже, число 8 — період даної функції. **20.36.** *Вказівка*. Припустимо, що T — головний період функції f. Тоді при всіх $x \in \mathbb{R}$ виконуються рівності $f(2x + T) = f(2x) = 2f(x)$; $f(2x + T) = f\left(2\left(x+\frac{T}{2}\right)\right)=2f\left(x+\frac{T}{2}\right)$. Звідси $f\left(x+\frac{T}{2}\right)=f(x)$. **20.38.** 1) *Вказівка*. Легко перевірити, що $f\left(x+\frac{1}{5}\right)=f(x)$; 2) *Вказівка*. Доведіть дану рівність для $x\in\left[0;\frac{1}{5}\right)$. Далі скористайтеся періодичністю функції f з попереднього завдання. **20.43.** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Вказівка*. Слід помітити, що $x = 0$ — корінь цього рівняння при будь-якому значенні a. Тоді, якщо a — раціональне число, то функція $y = 2\cos ax - 3\,\mathrm{tg}^2\,x - 2$ є періодичною і дане рівняння має безліч коренів. Далі треба показати, що коли a — ірраціональне число, то дане рівняння не має інших коренів, крім $x = 0$. Для цього перепишемо дане рівняння у вигляді $2\cos ax = 3\,\mathrm{tg}^2\,x + 2$. Оскільки $2\cos ax \leqslant 2$, $3\,\mathrm{tg}^2 x + 2 \geqslant 2$, то це рівняння рівносильне системі $\begin{cases}2\cos ax=2,\\ 3\,\mathrm{tg}^2 x+2=2.\end{cases}$ **20.44.** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **20.45.** Ні. *Вказівка*. Припустимо, що існують такі періодичні функції f і g, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x) + g(x) = x^2$. Нехай T — період функції f. Тоді можна записати $f(x + T) + g(x + T) = (x + T)^2$. Звідси $f(x) + g(x + T) = (x + T)^2$. Отримуємо $g(x + T) - g(x) = 2Tx + T^2$. Проте функція $y = g(x + T) - g(x)$ є періодичною, а функція $y = 2Tx + T^2$ періодичною не є. **21.7.** 1) $\cos 1{,}6\pi < \cos 1{,}68\pi$; 3) $\cos 20° > \cos 21°$; 5) $\cos\frac{10\pi}{9}<\cos\frac{25\pi}{18}$; 7) $\sin 2 > \sin 2{,}1$. **21.8.** 2) $\sin\frac{5\pi}{9}>\sin\frac{17\pi}{18}$; 4) $\cos\frac{10\pi}{7}>\cos\frac{11\pi}{9}$. **21.11.** 1) $\sin 58° > \cos 58°$; 2) $\sin 18° < \cos 18°$; 3) $\cos 80° < \sin 70°$. **21.12.** 1) Так; 2) ні. **21.29.** 19. *Вказівка*. Побудуйте графіки функцій $y = \sin x$, $y=\frac{x}{10\pi}$. **21.30.** 10. **21.31.** 1) Див. рисунок. *Вказівка*. $\pi(x^2 + y^2) = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x^2 + y^2 = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. **21.33.** 3) Графіком рівняння є пряма, яка збігається з віссю ординат; 4) *Вказівка*. Дане рівняння має розв'язок лише за умови $\sin x \geqslant 0$. Тому дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}y=\sin x,\\ y=-\sin x.\end{array}\right.\end{cases}$ Шуканий графік зображено на рисунку.

21.34. 3) Графіком рівняння є множина всіх точок виду $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

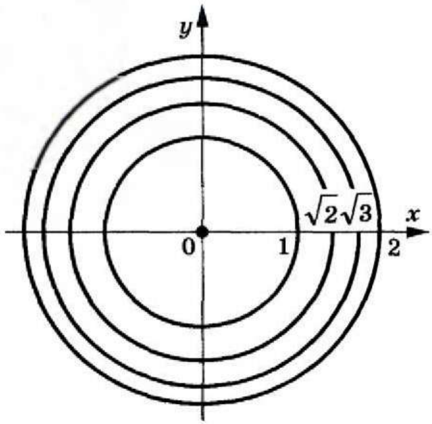


Рис. до задачі 21.31

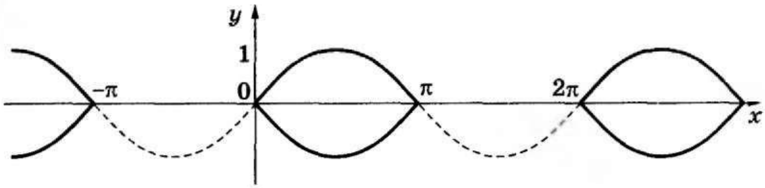


Рис. до задачі 21.33 (4)

21.35. $-8\pi < a < -6\pi$ або $6\pi < a < 8\pi$. **21.36.** Не існує. *Вказівка.* При $x = \frac{\pi}{2}$ і $x = -\frac{\pi}{2}$ отримуємо $|f(0) + 1| < 1$ і $|f(0) - 1| < 1$. Звідси $\begin{cases} -2 < f(0) < 0, \\ 0 < f(0) < 2. \end{cases}$ **22.5.** 2) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5} < \operatorname{tg}\frac{7\pi}{15}$; 5) tg 1 < tg 1,5; 8) ctg (–40°) < < ctg (–60°). **22.6.** 1) tg 100° > tg 92°; 4) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8} > \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$; 6) ctg (–3) < < ctg (–3,1). **22.11.** 1) Ні. *Вказівка.* $\operatorname{tg} 80° > \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$; 2) ні; 3) так. **22.12.** 2) sin 40° < ctg 20°. **22.17.** 1) Графік рівняння — об'єднання множини прямих виду $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, і осі абсцис, з якої «виколото» точки виду $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) множина всіх парабол $y = x^2 + k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) множина всіх точок перетину прямих виду $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, з прямими виду $y = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **22.18.** 2) Множина прямих виду $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, з яких «виколото» точки, ординати яких мають вид $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \operatorname{tg} x = 0, \\ \sin y \neq 0, \\ \cos y \neq 0. \end{cases}$

23.1. 6) $2\cos^2\alpha$; 7) $-\sin^2\alpha$; 8) 1; 9) $\cos^2\frac{x}{2}$; 10) 2. **23.2.** 4) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 5) 1; 6) 1; 7) 1; 8) 4. **23.5.** 1) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$; 2) 1; 3) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 4) $\frac{1}{\sin x}$; 5) 0; 6) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 7) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$; 8) 1; 9) $\cos^2\alpha$; 10) $-\operatorname{ctg}\gamma$; 11) $\sin^4\alpha$; 12) 1; 13) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 14) $\frac{1}{\cos\beta}$. **23.6.** 1) $\frac{2}{\sin^2\beta}$; 2) 1; 3) $\frac{2}{\cos\beta}$; 4) $\frac{1}{\cos x}$; 5) $\frac{2}{\cos\beta}$; 6) $\operatorname{tg}^2\alpha$; 7) $\operatorname{tg}\alpha$; 8) -1; 9) 1; 10) $-\cos^2\alpha$. **23.7.** 2) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$; 3) $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2}$. **23.8.** 1) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{12}{5}$; 4) $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{50}}$, $\cos\alpha=-\frac{7}{\sqrt{50}}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{7}$. **23.11.** 2) *Вказівка.* Подайте доданок $2\sin^2\alpha$ у вигляді суми $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha$; 4) *Вказівка.* Розгляньте різницю лівої і правої частин даної рівності і доведіть, що вона дорівнює нулю. **23.15.** 1) $-\frac{1}{2}$. *Вказівка.* Поділіть чисельник і знаменник даного дробу на $\cos\alpha$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) -27. *Вказівка.* Помножте чисельник даного дробу на $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$. **23.16.** 1) $-\frac{16}{11}$; 2) $\frac{12}{7}$; 3) $\frac{125}{357}$. **23.17.** 1) $-\sin\beta-\cos\beta$; 2) $-\sin\alpha\cos\beta$; 3) $-2\operatorname{tg}\alpha$; 4) 1. **23.18.** 1) $\frac{1}{\sin\alpha}$; 2) $2\operatorname{ctg}\alpha$; 3) -1. *Вказівка.* Оскільки $\frac{2\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\pi$, то $\cos\frac{2\pi}{3}\geqslant\cos\alpha$. **23.19.** 1) $\frac{b^2-1}{2}$. *Вказівка.* $b^2=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\frac{b(3-b^2)}{2}$; 3) $\frac{1+2b^2-b^4}{2}$; 4) $\frac{1+6b^2-3b^4}{4}$; 5) $\frac{8(1+2b^2-b^4)}{(b^2-1)^4}$. **23.20.** 1) b^2-2; 2) $b(b^2-3)$; 3) b^4-4b^2+2; 4) $\frac{b+2}{b}$. *Вказівка.* З умови випливає, що $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=b$. Звідси $2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{b}$. **23.21.** 1) $3\frac{1}{8}$, -3. *Вказівка.* $2\cos^2\alpha-3\sin\alpha=2(1-\sin^2\alpha)-3\sin\alpha=-2\sin^2\alpha-3\sin\alpha+2$. Позначимо $\sin\alpha=t$ і розглянемо функцію $f(t)=-2t^2-3t+2$, визначену на проміжку $[-1;1]$. Це квадратична функція зі старшим від'ємним коефіцієнтом $a=-2$. Вона набуває найбільшого значення в точці $t_0=-\frac{-3}{2\cdot(-2)}=-\frac{3}{4}$, яка належить проміжку $[-1;1]$. Отже, $\max\limits_{[-1;1]}f(t)=f\left(-\frac{3}{4}\right)=-2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2-3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+2=3\frac{1}{8}$. Для знаходження найменшого значення обчислимо значення функції $f(t)$ на кінцях проміжку $[-1;1]$: $f(-1)=-2+3+2=3$, $f(1)=-2-3+2=-3$. Отже,

$\min\limits_{[-1;1]} f(t) = -3$; 2) найбільшого значення не існує, найменше дорівнює -1; 3) 0; $-1\frac{1}{8}$; 4) найбільшого і найменшого значень не існує. **23.22.** 1) $3\frac{1}{3}$; -2; 2) $3\frac{1}{8}$; 2; 3) найбільшого і найменшого значень не існує. **23.23.** 1) Див. рисунок; 2) пряма $y = -1$, з якої «виколото» точки виду $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; -1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **23.24.** 1) Пряма $y = 1$, з якої «виколото» точки виду $\left(\frac{\pi k}{2}; 1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **23.25.** 1. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\sin^{14} x \leqslant \sin^2 x$ і $\cos^{14} x \leqslant \cos^2 x$. **23.26.** 1; -1. **24.1.** 3) 0; 4) 0. **24.2.** 3) 0. **24.3.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\cos \beta$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\sin 2\beta$; 7) 1; 8) $\operatorname{tg} 15°$; 9) $\cos(\alpha - \beta)$. **24.4.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos 2\beta$; 6) $\cos(\alpha + \beta)$. **24.5.** $\frac{6}{7}$. **24.7.** 2) -1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **24.8.** 1) $\sqrt{3}$. **24.11.** $-\frac{31\sqrt{2}}{82}$.

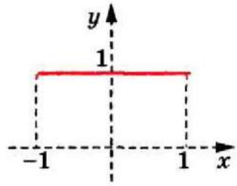


Рис. до задачи 23.23 (1)

24.12. $-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$. **24.13.** $-\frac{24}{25}$. **24.14.** $-\frac{297}{425}$. **24.15.** 2. **24.16.** 5. **24.19.** 1) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$; 2) $\frac{1}{\sin 2\alpha}$; 3) $\cos 2\alpha$; 4) $-\frac{1}{\cos\alpha}$. **24.20.** 1) 1; 2) -1. **24.21.** 1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 3) $\sqrt{3}-2$. **24.22.** 1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **24.23.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 1. **24.24.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 1. **24.27.** 1) 2; 2) $\sqrt{41}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{5}$. **24.28.** 1) 2; 2) 5; 3) $\sqrt{10}$. **24.29.** $\frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{10}$. *Вказівка.* $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\right)$. **24.30.** $-0{,}6$. **24.31.** $\frac{48+25\sqrt{3}}{11}$. **24.32.** $\frac{\sqrt{3(1-b^2)}-b}{2}$. **24.33.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{1-b^2}-b\right)$. **24.34.** -2. **24.35.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **24.36.** $-\frac{\pi}{4}$. **24.37.** 60°. **24.38.** 120°. **24.40.** 45°. **24.41.** 1) З графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ вилучіть точки, абсциси яких дорівнюють $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **24.43.** *Вказівка.* З рівності $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ випливає, що $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) \times$ $\times (1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta)$. Тоді $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\gamma =$ $= \operatorname{tg}(\pi - \gamma)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\gamma(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\gamma +$ $+ \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$. **24.45.** 2. *Вказівка.* З рівності $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ випливає, що $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha \times$

$\times$ tg β). Тоді $(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\beta) = 1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 1 + \operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 1 + 1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 2$. **24.46.** 2. **24.49.** *Вказівка.* Припустимо, що $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > 2$. Тоді $(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 > 4$ і $(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 \geqslant 5$. Почленно додавши дві останні нерівності, отримаємо $3 + 2(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha)) > 9$. **24.50.** *Вказівка.* Скористаємося тотожністю для кутів трикутника (див. задачу 24.44): $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1$. Маємо: $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} - \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2\right) \geqslant 0$. Звідси $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} - 1 \geqslant 0$. **24.51.** *Вказівка.* Розгляньте вираз $\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2$ і скористайтесь результатами задачі 24.50. **24.52.** $f(x) = a\sin x$, де a — довільне дійсне число. *Вказівка.* Підставляючи $y = \frac{\pi}{2}$, $x = t - \frac{\pi}{2}$, отримуємо $f(t) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t$. Перевіркою встановлюємо, що всі функції виду $f(x) = a\sin x$ задовольняють умову задачі. **24.53.** $f(x) = x$ або $f(x) = -x$. *Вказівка.* Підставляючи $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, отримуємо $f(1)f(0) = 0$. Якщо $f(1) = 0$, то, підставляючи в дану рівність $y = \frac{\pi}{2}$, отримуємо $f(\cos x)\ f(0) = \sin x$. Остання рівність неможлива, оскільки функція $g_1(x) = f(\cos x)f(0)$ є парною, а $g_2(x) = \sin x$ — непарною. Якщо $f(0) = 0$ і $f(1) \neq 0$, то, підставляючи в дану рівність $y = 0$, отримуємо $f(\cos x)\ f(1) = \cos x$, тобто $f(\cos x) = a\cos x$. Тоді $f(t) = at$ для всіх $t \in [-1; 1]$. Перевіркою встановлюємо, що $a = 1$ або $a = -1$. **24.54.** $f(x) = x$ або $f(x) = -x$. **25.3.** 3) $-\cos 38°$; 4) $-\sin\frac{\pi}{18}$. **25.4.** 3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$; 4) $\sin\frac{\pi}{15}$. **25.7.** 2) -1; 6) $2\cos\alpha$. **25.8.** 3) 0; 4) 1. **25.9.** 1) -4; 2) $\frac{5}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; 4) 1. *Вказівка.* Зведіть кожну функцію до найменшого додатного аргументу; 5) 1. **25.10.** 1) $3 - 2\sqrt{2}$; 2) 3; 3) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; 4) -1. **25.11.** 1) $-\cos\alpha$; 2) 1; 3) 1; 4) -1; 5) 2; 6) 2; 7) 1; 8) 1; 9) $-\operatorname{tg}^2\alpha$; 10) 1; 11) $\operatorname{tg}\alpha$. **25.13.** 1) 1; 2) 0; 3) 0. **25.14.** 1) -1; 2) 1; 3) 0. **25.16.** 2. *Вказівка.* Оскільки $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{11} + \frac{5\pi}{22} = \frac{\pi}{2}$, то $\cos^2\frac{3\pi}{8} = \sin^2\frac{\pi}{8}$ і $\cos^2\frac{5\pi}{22} = \sin^2\frac{3\pi}{11}$. **25.17.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\frac{1}{\cos^2(\alpha + 10°)}$. **25.18.** 1) Не існує. *Вказівка.* $y = f(\cos x)$ — парна функція, а $y = \sin x$ — непарна функція; 2) не існує. *Вказівка.* Якщо така функція існує, то виконується рівність $f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, тобто $f(\cos x) = \sin x$. **25.19.** Не існує. *Вказівка.* Якщо така функція існує, то виконується рівність $f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\sin 100\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, тобто $f(\cos x) = \sin 100x$. Але функція $y = f(\cos x)$ є парною, а $y = \sin 100x$ — непарною. **25.20.** *Вказівка.* З умови випливає, що $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$. Тоді $\alpha<\frac{\pi}{2}-\beta$; $\cos\alpha>\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta$. Аналогічно доводимо, що $\cos\beta > \sin\gamma$, $\cos\gamma > \sin\alpha$. **26.3.** 1) $2\cos\alpha$; 2) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 3) $\cos^2\alpha$; 4) $\sin 25°$; 5) 1; 6) $\cos\alpha + \sin\alpha$; 7) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 8) 2; 9) $\frac{1}{2}$; 10) 1; 11) $-\cos\frac{\alpha}{2}$; 12) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$; 13) $\sin 2\alpha$; 14) 1; 15) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2\alpha$; 16) $\sin 4\alpha$. **26.4.** 1) $2\sin 40°$; 2) $\cos 11\alpha$; 3) $\cos^2 2\beta$; 4) $\sin 40°$; 5) $\cos 20\varphi$; 6) 1; 7) $\cos 35° - \sin 35°$; 8) 1; 9) $\frac{1}{4}\sin 4\alpha$; 10) $2\sin 2\alpha$; 11) $\frac{1}{2}\cos 2\alpha$; 12) $-\sin 2\beta$; 13) $-\sin 2\alpha$; 14) $\sin 3\alpha$. **26.5.** 1) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; 5) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $2\sqrt{3}$. **26.11.** 2) $-4\sqrt{5}$. **26.12.** 2) $-\frac{24}{7}$. **26.18.** 1) 1; 2) $\operatorname{ctg} 4\alpha$. **26.19.** $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$. **26.20.** $-0{,}8$. **26.21.** $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. **26.22.** $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{14}}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{7}}{7}$. **26.23.** 1) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; 3) $2+\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; 5) $-(1+\sqrt{2})$; 6) $\sqrt{2}-1$. **26.24.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; 3) 2; 4) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 5) $\sin 4\alpha$; 6) $\sin 2\alpha$; 7) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 8) $\cos\alpha$. **26.25.** 1) $2\operatorname{ctg} 4\alpha$; 2) $\sin 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $4\sin\alpha$; 5) 1; 6) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. **26.32.** $\frac{1}{2}$. **26.33.** $-\frac{1}{2}$. **26.34.** $\frac{47}{37}$. **26.35.** $\frac{57}{5}$. **26.36.** 2. **26.37.** $-\frac{8}{9}$. **26.38.** $\frac{3}{4}$. **26.39.** 1) $\cos 4\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha$; 3) $\sin 8\alpha$; 4) $\operatorname{tg}^4\alpha$; 5) 1; 6) -1. **26.40.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $8\cos 2\alpha$; 3) $-\frac{1}{4}\sin^2\alpha$; 4) $\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}$; 5) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2\alpha$; 6) $-\frac{1}{2}$. **26.43.** 1) $\frac{3+\cos 4\alpha}{4}$; 2) $\frac{17+14\cos 4\alpha+\cos^2 4\alpha}{32}$. **26.44.** $\frac{10+3\sqrt{3}}{16}$. **26.46.** 1) $\operatorname{ctg}^4\frac{\alpha}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha$; 3) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **26.47.** 1) -2; 2) 0. **26.48.** 1) 4; 2) $-\frac{1}{2}\sin 2\alpha$. **26.53.** 1) $\cos\frac{\alpha}{4}$; 2) $\sqrt{2}\operatorname{ctg} 2\alpha$; 3) $\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$.

26.54. 1) Якщо $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$, то $2\cos\alpha$; якщо $\frac{\pi}{4} < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $2\sin\alpha$; 2) $\cos\frac{\alpha}{8}$; 3) $2\cos\frac{\varphi}{2}$. **26.55.** $\frac{3}{5}$. **26.56.** 2 або $-\frac{1}{3}$. **26.57.** $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. *Вказівка.* Маємо: $\sin 36° = \cos 54°$. Тоді: $\sin(2\cdot 18°) = \cos(3\cdot 18°)$; $2\sin 18°\cos 18° = 4\cos^3 18° - 3\cos 18°$; $2\sin 18°\cos 18° = \cos 18°(4\cos^2 18° - 3)$; $2\sin 18° = 4\cos^2 18° - 3$; $2\sin 18° = 4(1-\sin^2 18°) - 3$; $2\sin 18° = 4 - 4\sin^2 18° - 3$; $4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0$. Розгляньте останню рівність як квадратне рівняння відносно $\sin 18°$ і врахуйте, що $\sin 18° > 0$. **26.58.** *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $\sin 30° = 3\sin 10° - 4\sin^3 10°$. **26.60.** *Вказівка.* Скористайтеся методом математичної індукції. **27.5.** 1) $\operatorname{tg} 5\alpha$; 2) $-\operatorname{ctg} 3\alpha$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **27.6.** 1) $\frac{\cos\alpha}{\cos 4\alpha}$; 2) $\operatorname{tg} 6\alpha$; 3) 1. **27.7.** 1) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $4\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 3) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}{\sin\alpha}$. **27.8.** 1) $4\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$; 3) $4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\alpha}$. **27.19.** $\frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg} n\alpha}{\sin\alpha}$. *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $\frac{\sin\alpha}{\sin k\alpha \sin(k+1)\alpha} = \operatorname{ctg} k\alpha - \operatorname{ctg}(k+1)\alpha$. **27.20.** $\frac{\operatorname{ctg} 1 - \operatorname{ctg}(2n+1)}{\sin 2}$. **27.21.** $\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{1}{2^n} - \operatorname{ctg} 1$. *Вказівка.* Скористайтеся співвідношенням $\operatorname{tg}\beta - \operatorname{ctg}\beta = -2\operatorname{ctg} 2\beta$. **27.22.** *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos nx\cos x$ і методом математичної індукції. **27.24.** *Вказівка.* Скористайтеся рівностями $\sin 7\alpha - \sin 5\alpha = 2\sin\alpha\cos 6\alpha$, $\sin 7\alpha + \sin 5\alpha = 2\cos\alpha\sin 6\alpha$. **28.1.** 1) $\frac{1}{2}(\cos 20° + \cos 10°)$; 2) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta$; 3) $\frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 10\alpha)$; 4) $\frac{1}{2}(\cos 26° - \cos 122°)$; 5) $\frac{2\cos 2\alpha + 1}{4}$. **28.2.** 1) $\cos\frac{3\pi}{40} + \cos\frac{13\pi}{40}$; 2) $\frac{1}{2}(\cos 4° - \cos 52°)$; 3) $\frac{1}{2}(\sin 8\alpha + \sin 2\alpha)$; 4) $\frac{2\cos 2\alpha - 1}{4}$. **28.3.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\sin 3\alpha$; 3) $\cos\alpha$; 4) 0,5. **28.4.** 1) $\cos\alpha$; 2) $\frac{1}{2}$. **28.7.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 1; 3) $-\sin 2\alpha$. **28.8.** 1) 1; 2) $\sin 2\alpha$. **28.9.** 1) *Вказівка.* Помножте і поділіть ліву частину рівності на $2\sin\frac{\pi}{7}$. **28.11.** *Вказівка.* Помножте і поділіть ліву частину рівності на $2\sin\frac{\pi}{n}$. Зауважимо, що дана задача має і геометричний розв'язок. Розглянемо точки

$A_k\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right); \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right)$, де k набуває всіх натуральних значень від 1 до n. Ці точки є вершинами правильного n-кутника з центром у точці O (0; 0). Сума векторів $\bar{s}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\bar{0}$ (див., наприклад, задачу 23.10 книги Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : підруч. для 9 кл. з поглибл. вивченням математики. — Х. : Гімназія, 2009). Водночас перша координата вектора $\bar{s}$ дорівнює $\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+\cos\frac{2n\pi}{n}$. **28.13.** 1) Якщо $\alpha = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $S=n$; якщо $\alpha \neq 2\pi k$, то $S=\dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. *Вказівка.* При $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, помножте і поділіть дану суму на $2\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) якщо $\alpha=\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $S = 0$; якщо $\alpha \neq \pi k$, то $S=\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}$. *Вказівка.* При $\alpha\neq\pi k$ помножте і поділіть дану суму на $2\sin\alpha$; 3) якщо $\alpha=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, то $S = 0$; якщо $\alpha \neq \pi k$, то $S=\frac{n}{2}-\frac{\sin n\alpha\cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$. *Вказівка.* Скористайтеся формулами пониження степеня. **28.14.** 1) Якщо $\alpha = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $S = n$; якщо $\alpha = \pi + 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, то $S = -n$; якщо $\alpha\neq\pi k$, то $S=\frac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}$. *Вказівка.* Помножте і поділіть ліву частину на $2\sin\alpha$; 2) якщо $\alpha = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $S = 0$; якщо $\alpha \neq \pi k$, то $S=\frac{\sin n\alpha\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$; 3) якщо $\alpha = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $S = n$; якщо $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k$, то $S = 0$; якщо $\alpha\neq\frac{\pi k}{2}$, то $S=\frac{n}{2}+\frac{\sin 4n\alpha}{4\sin 2\alpha}$. **28.15.** *Вказівка.* Перепишемо дану нерівність у вигляді $8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1\leqslant 0$. Перетворимо вираз $8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Маємо: $8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1 = 4(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))\cos\gamma-1 =$ $= 4(\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma)\cos\gamma-1 = 4\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma-4\cos^2\gamma-1 =$ $=(4\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma-4\cos^2\gamma-\cos^2(\alpha-\beta))+\cos^2(\alpha-\beta)-1 = -(\cos(\alpha-\beta)-$ $-2\cos\gamma)^2-\sin^2(\alpha-\beta)$. Тепер нерівність стає очевидною. **29.3.** 2) 1,5; 5. **29.4.** 2) $\frac{1}{3}$; 7. **29.5.** $\sqrt{5}$; 3. **29.6.** 13; $\frac{1}{4}$. **29.7.** 1) (–1; 0); 2) (5; 0); 3) $\left(-\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. **29.8.** 1) $\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$; 3) $(1;\alpha)$. **29.9.** 1) $r=\sqrt{5}$; 2) $\varphi=\frac{\pi}{4}$, або $\varphi=\frac{5\pi}{4}$, або $r = 0$; 3) $\left[\begin{array}{l} r=0, \\ \sin\varphi=r\cos^2\varphi; \end{array}\right.$ 4) $r\sin\varphi=\cos(r\cos\varphi)$.

29.10. Див. рисунки.

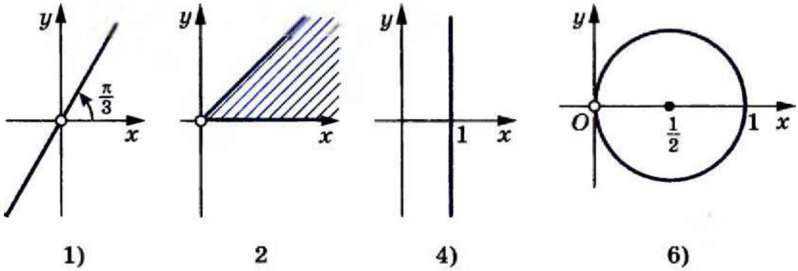


Рис. до задачі 29.10

29.11. Див. рисунки.

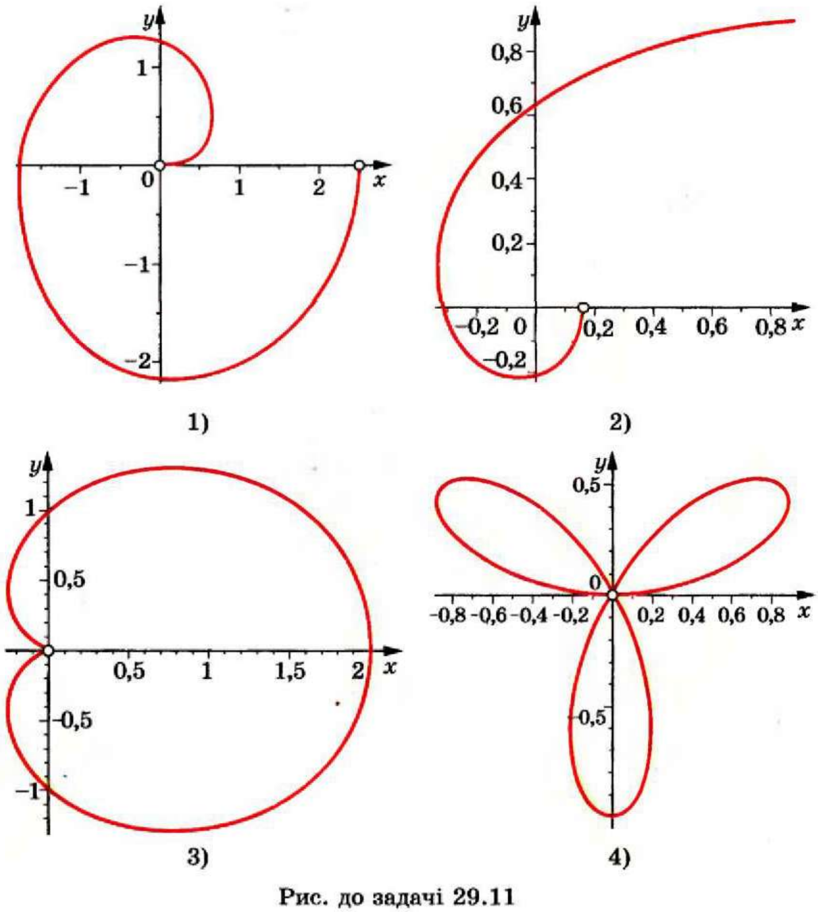


Рис. до задачі 29.11

30.3. 2) $\pm\frac{\pi}{5}+\frac{12\pi n}{5}$, $n\in\mathbb{Z}$; 6) $\pm3\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}+6\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **30.4.** 2) $\pm\frac{25\pi}{6}+10\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{4\pi}{3}+\frac{8\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. **30.5.** 3) $12+6\pi+12\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{24}\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. **30.6.** 2) $\pm\frac{3\pi}{2}-6+4\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **30.7.** $-\frac{\pi}{6}$. **30.8.** 3π. **30.9.** 4 корені. **30.10.** $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{31\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$. **30.11.** 2) $\left(\frac{5}{6}+2k\right)^2$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\left(-\frac{5}{6}+2n\right)^2$, $n\in\mathbb{N}$; 3) розв'язків немає. **30.12.** 1) $\frac{64}{(8k+1)^2}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\frac{64}{(8n-1)^2}$, $n\in\mathbb{N}$; 2) $\pm\arccos\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $\pm\arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **30.13.** $a=\frac{1}{2}$. **30.14.** $a=0$. **30.15.** $a\leqslant1$ або $a\geqslant3$. **30.16.** $a\leqslant-\frac{2}{5}$ або $a\geqslant2$. **30.17.** $-1\leqslant a<\frac{1}{2}$. *Вказівка.* Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\cos x=a,\\ \cos x>3a-1,\end{cases}$ яка має розв'язок тоді, коли $\begin{cases}-1\leqslant a\leqslant1,\\ a>3a-1.\end{cases}$ **30.18.** $-1\leqslant a<-\frac{1}{3}$ або $-\frac{1}{3}<a\leqslant1$. **30.19.** $a\in\left[\frac{7\pi}{3};+\infty\right)$. **30.20.** $a\in\left[\frac{8\pi}{3};+\infty\right)$. **30.21.** Якщо $a<-1$ або $a>1$, то коренів немає; якщо $a=-1$ або $a=1$, то один корінь; якщо $-1<a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1$, то 2 корені; якщо $\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$, то 3 корені. **30.22.** Якщо $\frac{1}{2}\leqslant a<1$, то 2 корені; якщо $-1\leqslant a<\frac{1}{2}$ або $a=1$, то один корінь; якщо $a<-1$ або $a>1$, то коренів немає. **30.23.** Якщо $a<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $a>1$, то коренів немає; якщо $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a<0$ або $a=1$, то один корінь; якщо $0\leqslant a<1$, то 2 корені. **30.24.** $a<\pi$, або $a>\frac{3\pi}{2}$, або $a=\frac{7\pi}{6}$. **30.25.** $a<0$, або $a>\frac{\pi}{2}$, або $a=\frac{\pi}{4}$. **31.3.** 3) $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{(-1)^{n+1}}{8}\arcsin\frac{2}{9}+\frac{\pi n}{8}$, $n\in\mathbb{Z}$. **31.4.** 3) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. **31.5.** 2) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{8}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **31.6.** 2) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{5\pi}{6}+20+5\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **31.7.** $\frac{13\pi}{12}$. **31.8.** $-\frac{13\pi}{90}$. **31.9.** $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$. **31.10.** 6 коренів. **31.11.** 1) $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\pi+4\pi n$, $\frac{\pi}{3}+4\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **31.12.** 1) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;

2) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **31.13.** 2) $\left(2k-\frac{1}{2}\right)^2$, $k \in \mathbb{N}$; 3) $\pm\arccos\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **31.14.** 1) $\frac{81}{(3k+(-1)^{k+1})^2}$, $k \in \mathbb{N}$; 2) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **31.15.** $a \leqslant 0$ або $a \geqslant 2$. **31.16.** $a = -4$ або $4 \leqslant a \leqslant 5$. **31.17.** $\frac{1}{2}<a\leqslant 1$. **31.18.** $-1\leqslant a<\frac{1}{3}$ або $\frac{1}{3}<a\leqslant 1$. **31.19.** $a\geqslant\frac{17\pi}{6}$. **31.20.** $a\leqslant-\frac{13\pi}{6}$. **31.21.** 1) Якщо $a < -1$ або $a > 1$, то коренів немає; якщо $a = -1$, або $-\frac{1}{2}<a<0$, або $a = 1$, то 1 корінь; якщо $-1<a\leqslant-\frac{1}{2}$ або $0 \leqslant a < 1$, то 2 корені; 2) якщо $a < -1$ або $a > 1$, то коренів немає; якщо $a = 1$, або $a = -1$, або $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$, то 1 корінь; якщо $-1<a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$, то 2 корені. **31.22.** Якщо $a\leqslant-\frac{1}{2}$ або $a > 1$, то коренів немає; якщо $-\frac{1}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$ або $a = 1$, то 1 корінь; якщо $\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant a<1$, то 2 корені. **31.23.** Якщо $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant a\leqslant 0$, то 3 корені; якщо $0 < a < 1$ або $-1<a<-\frac{\sqrt{3}}{2}$, то 2 корені; якщо $a = -1$ або $a = 1$, то 1 корінь; якщо $a < -1$ або $a > 1$, то коренів немає. **31.24.** Якщо $-1<a\leqslant-\frac{1}{2}$, то 3 корені; якщо $-\frac{1}{2}<a<1$ або $a = -1$, то 2 корені; якщо $a = 1$, то 1 корінь; якщо $a < -1$ або $a > 1$, то коренів немає. **31.25.** Якщо $-1<a<-\frac{\sqrt{2}}{2}$, або $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$, або $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$, то 4 корені; якщо $a = -1$, або $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, або $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, або $a = 1$, то 3 корені; якщо $a < -1$ або $a > 1$, то 2 корені. **31.26.** Якщо $-1<a<-\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1$, то 4 корені; якщо $a = -1$, або $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $a = 1$, то 3 корені; якщо $a < -1$ або $a > 1$, то 2 корені. **32.3.** 3) $-\frac{4\pi}{21}+\frac{4\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{1}{6}\operatorname{arcctg}\frac{6}{11}+\frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$. **32.4.** 2) $\frac{5\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **32.5.** 2) $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **32.6.** 3) $-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. **32.7.** 4 корені. **32.8.** 1 корінь. **32.9.** $-\frac{\pi}{4}$. **32.10.** $-\frac{2\pi}{3}$. **32.11.** 2) $\frac{16}{(4k+1)^2}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; 3) $(-1)^k \arcsin\frac{1}{3}+\pi k$, $(-1)^k \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **32.12.**

1) $\frac{8}{20k+5}$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{16}{(4\pi k-\pi)^2}$, $k \in \mathbb{N}$; 3) $\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi k$, $\pm\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **32.13.** 1) $a<-\frac{1}{3}$, або $-\frac{1}{3}<a<0$, або $a>0$; 2) $-1<a<-\frac{1}{2}$, або $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$, або $\frac{1}{2}<a<1$. **32.14.** 1) $a<-\frac{1}{2}$, або $-\frac{1}{2}<a<0$, або $a>0$; 2) $-1<a<-\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1$. **32.15.** $a=-\frac{\pi}{3}$, або $a\leqslant-\frac{\pi}{2}$, або $a\geqslant 0$. **32.16.** $a=-\frac{\pi}{4}$, або $a\leqslant-\frac{\pi}{2}$, або $a\geqslant 0$. **33.5.** 1) $[0; 2]$; 2) $[0; 1]$; 3) $(-\infty; -\pi-4] \cup [\pi-4; +\infty)$. **33.6.** 1) $\left[-\frac{\pi}{2}-1; 1-\frac{\pi}{2}\right]$; 2) $[2; 3]$; 3) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **33.7.** 1) π; 0; 2) $2+\pi$; 2. **33.8.** 1) 2π; π; 2) $\frac{\pi}{2}+1$; $-\frac{\pi}{2}+1$. **33.9.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{\pi}{6}$. **33.10.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{\pi}{4}$. **33.11.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\cos\frac{1}{2}$; 3) коренів немає. **33.12.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) коренів немає; 3) $\frac{3}{2}$. **33.13.** 1) $(-1; 1]$; 2) $\{-1\}$; 3) $[-1; 1]$; 4) $[-1; 1]$; 5) розв'язків немає; 6) $\{1\}$; 7) $[-1; 1)$; 8) $(-1; 1]$. **33.14.** 1) $\{-1\}$; 2) $[-1; 1)$; 3) $[-1; 1]$; 4) $[-1; 1]$; 5) розв'язків немає. **33.15.** 1) $[-1;1]$; 2) $\{-1\}$; 3) $\{1\}$; 4) $\{0\}$; 5) $\{0\}$. **33.16.** 1) $[-1; 1]$; 2) $\{1\}$; 3) $[-1; 1]$; 4) $\{1\}$; 5) $\{-1; 1\}$. *Вказівка.* Якщо $x>0$, то $\frac{x^2+1}{2x}\geqslant 1$, причому рівність досягається тільки при $x=1$; якщо $x<0$, то $\frac{x^2+1}{2x}\leqslant -1$, причому рівність досягається тільки при $x=-1$. **33.17.** 1) $\left[4; \frac{\pi}{2}+4\right]$; 2) $\{0\}$. *Вказівка.* Оскільки $-\arccos x \leqslant 0$, то область визначення даної функції складається з однієї точки $x=1$; 3) $\left(-\infty; -\frac{2}{\pi}\right] \cup \left[\frac{2}{\pi}; +\infty\right)$; 4) $\left[\sqrt{\frac{1}{\pi}}; +\infty\right)$. **33.18.** 1) $\left[2; \frac{\pi}{2}+2\right]$; 2) $\left[0; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$; 3) $\left[\frac{1}{\pi}; +\infty\right)$; 4) $\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}; +\infty\right)$. **33.21.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{24}{25}$. *Вказівка.* $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)=2\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; 3) $\frac{56}{65}$; 4) $\frac{3}{4}$. **33.22.** 1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$; 3) $\frac{7}{25}$; 4) $\frac{5}{\sqrt{26}}$. **33.23.** 1) $x=2$. *Вказівка.* $\cos(\arccos(4x-9))=4x-9$ тільки за умови $|4x-9|\leqslant 1$; 2) $[-3; -1]$. *Вказівка.* Множиною коренів цього рівняння є його область визначення. **33.24.** 1) $\frac{1}{3}$. *Вказівка.* Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} |4x-1|\leqslant 1, \\ 4x-1=3x^2; \end{cases}$ 2) $[0; 2]$. **33.25.** 1) 1; 2) 5. **33.26.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) -2.

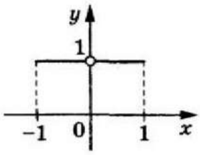


Рис. до задачі 33.33

33.27. 1) $\left[0; \frac{3}{4}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$; 3) $\left(\frac{\sqrt{3}+10}{6}; 2\right]$. **33.28.** 1) $\left[0; \frac{2-\sqrt{2}}{8}\right)$; 2) $\left(\frac{4-\sqrt{2}}{6}; 1\right]$; 3) $\left[\frac{3}{7}; \frac{8+\sqrt{3}}{14}\right)$. **33.29.** 1) $\left[\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right)$; 2) розв'язків немає. **33.30.** 1) $\left[1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$; 2) $\{0\}$. **33.33.** Див. рисунок. *Вказівка.* Якщо $-1 \leqslant x < 0$, то $\arcsin x < 0$ і $|\arcsin x| = -\arcsin x$, $\arcsin |x| = \arcsin(-x) = -\arcsin x$. Тоді $y = 1$. Якщо $0 < x \leqslant 1$, то $\arcsin x > 0$ і $|\arcsin x| = \arcsin x$, $\arcsin |x| = \arcsin x$. Тоді $y = 1$. **33.34.** 3) Див. рисунок. *Вказівка.* Зауважимо, що $D(y) = [-1; 1]$. Запишемо: $\cos(2\arcsin x) = 1 - 2\sin^2(\arcsin x) = 1 - 2x^2$. Отже, шуканим графіком є частина параболи $y = -2x^2 + 1$; 4) *Вказівка.* Оскільки $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, то $y = 1$. Проте шуканий графік — це не пряма $y = 1$, а лише її відрізок, оскільки $D(y) = [-1; 1]$.

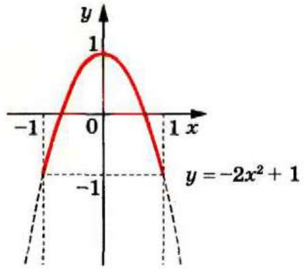


Рис. до задачі 33.34 (3)

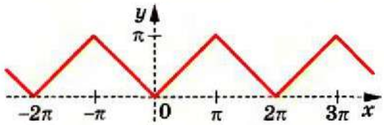


Рис. до задачі 33.36

33.35. 2) *Вказівка.* $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$; 3) *Вказівка.* $\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$ за умови $|x| \leqslant 1$. **33.36.** Див. рисунок. **33.37.** 1) $\frac{\pi}{7}$; 2) $\frac{3\pi}{7}$; 3) $\pi - 3$; 4) $\frac{5\pi}{2} - 8$. **33.38.** 1) $\frac{2\pi}{9}$; 2) $\frac{7\pi}{9}$. *Вказівка.* $\cos\frac{11\pi}{9} = \cos\left(2\pi - \frac{7\pi}{9}\right)$; 3) $2\pi - 6{,}28$; 4) $\frac{3\pi}{8}$; 5) $\frac{9\pi}{2} - 12$. **33.39.** $x = \frac{1}{2}$ або $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. *Вказівка.* Тотожність $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ дає змогу перейти до системи

$$\begin{cases} (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{5\pi^2}{36}, \\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Після очевидної заміни $\arcsin x = t$,

arccos $x = z$ отримуємо: $\begin{cases} t^2 + z^2 = \frac{5\pi^2}{36}, \\ t + z = \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leqslant z \leqslant \pi. \end{cases}$ **33.40.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

33.43. *Вказівка.* Вигідно довести таку рівність: $\arcsin\frac{3}{5} = \arcsin\frac{56}{65} - \arcsin\frac{5}{13}$. Значення виразів, записаних у лівій і правій частинах цієї рівності, належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тобто проміжку, на якому функція $y = \sin x$ зростає, тому достатньо довести, що $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \sin\left(\arcsin\frac{56}{65} - \arcsin\frac{5}{13}\right)$. **33.45.** *Вказівка.* Нехай $\arcsin x = \alpha$. Якщо $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$; $\sin\alpha = x$; $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - x^2}$. Оскільки $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\alpha = \arccos\sqrt{1 - x^2}$. Якщо $-1 \leqslant x < 0$, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha < 0$; $\sin\alpha = x$; $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - x^2}$. Оскільки $0 < -\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ і $\cos(-\alpha) = \sqrt{1 - x^2}$, то $-\alpha = \arccos\sqrt{1 - x^2}$; $\alpha = -\arccos\sqrt{1 - x^2}$. **33.47.** $\sqrt{\frac{3}{28}}$. *Вказівка.* Це рівняння перепишемо так: $\arcsin 2x = \frac{\pi}{3} - \arcsin x$. Його наслідком буде рівняння $\sin(\arcsin 2x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin x\right)$. Звідси $2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2}x$; $5x = \sqrt{3 - 3x^2}$. Це рівняння рівносильне системі $\begin{cases} 25x^2 = 3 - 3x^2, \\ x \geqslant 0, \end{cases}$ розв'язуючи яку отримуємо $x = \sqrt{\frac{3}{28}}$. Крім того, $\sqrt{\frac{3}{28}} < \frac{1}{2}$. Тому $0 < \arcsin 2\sqrt{\frac{3}{28}} < \frac{\pi}{2}$ і $0 < \frac{\pi}{3} - \arcsin\sqrt{\frac{3}{28}} < \frac{\pi}{2}$. **33.48.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **34.1.** 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **34.2.** 1) $\frac{8\pi}{3}$; 3) $\frac{19\pi}{6}$. **34.3.** 2) -2π. **34.4.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $[1; +\infty)$. **34.5.** $\mathbb{R}$. **34.6.** 1) $\left(2 - \frac{\pi}{2}; 2 + \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\left[0; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$. **34.7.** 1) $(4; \pi + 4)$; 2) $\left[0; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$. **34.8.** 1) 4; 2) 5; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) π. **34.9.** 1) $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$. **34.10.** 1) 1; 2) tg 1; 3) коренів немає; 4) $-\frac{27 + \sqrt{3}}{12}$. **34.11.** 1) -1; 2) коренів немає; 3) коренів немає; 4) $\frac{15+\sqrt{3}}{24}$. **34.12.** $\left(-\infty;-\frac{2}{\pi}\right)\cup\left(\frac{2}{\pi};+\infty\right)$. **34.13.** $\left(\frac{1}{\pi};+\infty\right)$. **34.14.** 1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 3) $-\frac{7}{\sqrt{113}}$; 4) $\frac{7}{\sqrt{50}}$. **34.15.** 1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$; 3) $\frac{13}{85}$. **34.16.** 1) $\left(-\frac{3+\sqrt{3}}{5};+\infty\right)$; 2) $(2-\sqrt{3};+\infty)$. **34.17.** 1) $\left(-\infty;\frac{21-\sqrt{3}}{9}\right)$; 2) $\left(-\infty;\frac{\sqrt{3}}{3}-11\right)$. **34.18.** 1) *Вказівка.* $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$ при будь-якому x. **34.19.** 2) *Вказівка.* $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{x}$. **34.20.** 1. *Вказівка.* Скористайтеся тотожністю $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$. **34.21.** $-\sqrt{3}$. **34.24.** 1) $\frac{5\pi}{13}$; 2) $-\frac{3\pi}{13}$; 3) $5-2\pi$; 4) $-\frac{5\pi}{42}$; 5) $\frac{11\pi}{2}-17$. **34.25.** 1) $\frac{4\pi}{11}$; 2) $\frac{4\pi}{11}$; 3) $15-4\pi$; 4) $\frac{27\pi}{38}$; 5) $\frac{7\pi}{2}-10$. **34.26.** *Вказівка.* Нехай $\operatorname{arctg} x=\alpha$. Якщо $x>0$, то $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha=x$. Маємо: $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{x}$. Звідси $\alpha=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$. Якщо $x<0$, то $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ і $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{x}$. Маємо: $\frac{\pi}{2}<\pi+\alpha<\pi$ і $\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\frac{1}{x}$. Тоді $\pi+\alpha=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$; $\alpha=-\pi+\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$. **34.28.** 1) *Вказівка.* Нехай $\arccos x=\alpha$. Якщо $0<x\leqslant 1$, то $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$; $\cos\alpha=x$. Маємо: $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$; $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-x^2}{x^2}$. Ураховуючи обмеження для x і α, запишемо $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Звідси $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Якщо $-1\leqslant x<0$, то $\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi$ і $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-x^2}{x^2}$. Маємо: $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\pi\leqslant 0$. Тоді $\operatorname{tg}^2(\alpha-\pi)=\frac{1-x^2}{x^2}$; $-\operatorname{tg}(\alpha-\pi)=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; $\alpha-\pi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; $\alpha=\pi+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. **34.30.** 1) *Вказівка.* Якщо $x>0$, $y>0$, то нерівність $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y$ є очевидною, а нерівність $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y<\frac{\pi}{2}$ рівносильна нерівності $\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} y$; $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)<\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} y\right)=\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} y)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)}$, тобто $x<\frac{1}{y}$; $xy<1$. Інші випадки розгляньте самостійно. **34.33.** *Вказівка.* Скористайтеся задачею 34.30. **34.35.** 1) $S=\operatorname{arctg}(n+1)-\frac{\pi}{4}$. *Вказівка.* Доведіть, що $\operatorname{arctg}\frac{1}{1+k+k^2}=\operatorname{arctg}\frac{(k+1)-k}{1+(k+1)k}=\operatorname{arctg}(k+1)-$

$-\operatorname{arctg} k$. Тепер можна записати такі рівності: $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=$ $=\operatorname{arctg}\frac{2-1}{1+2\cdot 1}=\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}1$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}=\operatorname{arctg}\frac{3-2}{1+3\cdot 2}=\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2$; ...; $\operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}=\operatorname{arctg}\frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n}=\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}n$. Додавши отримані рівності, маємо: $S=\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}1=\operatorname{arctg}(n+1)-\frac{\pi}{4}$. Інший розв'язок може спиратися на формулу задачі **34.30**. Обчисливши суму декількох перших доданків, можна побачити закономірність і сформулювати припущення $S=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+2}$. Цю рівність можна довести, наприклад, методом математичної індукції. 2) $S=\operatorname{arctg}(n+1)-\frac{\pi}{4}$. *Вказівка*. Скористайтеся задачею **34.27**. **34.36.** $S=\operatorname{arctg}(n^2+n+1)-\frac{\pi}{4}$. *Вказівка*. $\frac{2k}{k^4+k^2+2}=\frac{2k}{1+(k^4+k^2+1)}=\frac{(k^2+k+1)-(k^2-k+1)}{1+(k^2+k+1)(k^2-k+1)}$. **34.37.** *Вказівка*. Нехай $\alpha=\operatorname{arctg}x$, $\beta=\operatorname{arctg}y$, $\gamma=\operatorname{arctg}z$. Тоді $x+y+z-xyz=$ $=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}\gamma(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)=$ $=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\operatorname{tg}\gamma\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\sin\gamma\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}>0.$

35.1. 1) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$; 6) $\pm 4\arccos\frac{1}{3}+8\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **35.2.** 1) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, πn, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{4}+3\pi n$, $3\operatorname{arcctg}\left(-\frac{2}{3}\right)+3\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **35.3.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}4+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$; 5) $-3\operatorname{arctg}5+3\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}4+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 7) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $2\operatorname{arctg}2+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **35.4.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$; 5) $\operatorname{arctg}2+\pi n$, $\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **35.5.** 1) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\pm\arccos(1-\sqrt{2})+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $2\pi n$,

$\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 5) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 6) $\pm2\pi+6\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 7) $\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 8) $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ 2\pi+4\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 9) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 10) $\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}$; 11) $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5},\ \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\frac{\pi n}{5},\ n\in\mathbb{Z}$; 12) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arcctg}2+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 13) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 14) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **35.6.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $(-1)^n\cdot\arcsin\left(2-\sqrt{3}\right)+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 5) $(-1)^{n+1}\pi+$ $+6\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 6) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $\pi+4\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 7) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 9) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 10) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **35.7.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5},\ \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\frac{\pi n}{5},\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $\operatorname{arctg}3+\pi n,\ \operatorname{arctg}4+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 7) $\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **35.8.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка.* $\sin2x=2\sin x\cos x$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **35.9.** $-\pi$. **35.10.** $-\frac{\pi}{2}$. **35.11.** $\frac{\pi}{4}$. **35.12.** $\frac{\pi}{2}$. **35.13.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n\cdot\arcsin\frac{1-\sqrt{10}}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 5) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **35.14.** 1) $\pm\arccos\frac{\sqrt{29}-2}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $\pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 5) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **35.15.** 1) $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{3},\ \frac{\pi}{11}+\frac{2\pi n}{11},\ n\in\mathbb{Z}$. **35.16.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$. **35.17.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ -2\operatorname{arctg}\frac{11}{5}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $2\operatorname{arctg}\left(-1\pm\sqrt{5}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **35.18.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ 2\operatorname{arctg}4+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ 2\operatorname{arctg}2\sqrt{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **35.19.** 4 корені. **35.20.** 2π. **35.21.** $\pi-\arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4}$. **35.22.** $\frac{\pi}{2}$. **35.23.** 1) $\pi n,\ -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) πn,

$n \in \mathbb{Z}$. **35.24.** 1) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ -\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$. **35.25.** 1) $[-1;\ 2]$; 2) 3. **35.26.** 1) $[-1;\ 2]$; 2) таких значень a не існує. **35.27.** 1) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ \pm\left(\pi-\arccos\frac{2}{3}\right)+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка*. $5\left(3\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)+\ +2\left(9\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)+5=0$. Зробіть заміну $3\cos x+\frac{1}{\cos x}=y$, тоді $9\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}=y^2-6$. **35.28.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка*. $(\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x)+(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x)-4=0$. Зробіть заміну $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=y$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ (-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,\ (-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{17}-5}{4}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **35.29.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. *Вказівка*. $2\cos^2 x+5\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x+\cos^2 x-\sin^2 x=0$; $\sin^2 x-3\cos^2 x= =5\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x$. Помножте ліву частину на вираз $\sin^2 x+\cos^2 x$; 3) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **35.30.** 1) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ \frac{\pi}{6}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$. **35.31.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2},\ (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$. **35.32.** 1) $3\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \pm\arccos\frac{1-\sqrt{13}}{4}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **35.33.** 1) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 3) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **35.34.** 1) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **35.35.** 1) $\frac{5\pi}{6}\leqslant a<\pi$; 2) $\frac{3\pi}{2}\leqslant a<\frac{11\pi}{6}$. **35.36.** 1) $\frac{11\pi}{6}\leqslant a<2\pi$; 2) $\frac{4\pi}{3}\leqslant a<\frac{3\pi}{2}$. **35.37.** 1) $a<-1$, або $a=\frac{7}{10}$, або $a>\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{7}{10}<a\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $\frac{1}{2}<a<\frac{7}{10}$, або $a=-1$. **35.38.** 1) $a<-\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, або $a>1$; 2) $a=1$ або $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant a<0$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant 1$ або $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant a<\frac{\sqrt{2}}{2}$. **35.39.** 1) $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$, або $a=-\frac{1}{3}$, або $a<-1$; 2) $\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $a=-1$; 3) $-\frac{1}{3}<a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $-1\leqslant a<-\frac{1}{3}$. **35.40.** 1) 3; 2) $\left(\frac{1-\sqrt{10}}{2};\frac{1+\sqrt{10}}{2}\right)\cup\left\{-\frac{13}{12}\right\}$; 3) $[1;3]\cup\left\{-\frac{13}{12}\right\}$; 4) $\left[\frac{1-\sqrt{10}}{2};-1\right)\cup\left[\frac{1+\sqrt{10}}{2};3\right)$; 5) -1; 6) $\left(-\frac{13}{12};-1\right)$. **35.41.** 1) $\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left\{\frac{1}{8}\right\}$; 2) $\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2};0\right]$. **35.42.** $a<0$, або $a=2$, або $a=3$, або

$a > 4$. *Вказівка.* Покажіть, що друге рівняння рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l}\sin x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = \frac{a-2}{2}.\end{array}\right.$ **35.43.** $a = 2$. *Вказівка.* Зауважимо, що число $\frac{\pi}{3}$ є коренем першого рівняння при всіх значеннях a. Підставляючи $x = \frac{\pi}{3}$ у друге рівняння, отримуємо $2a^2 - 5a + 2 = 0$. Звідси $a = 2$ або $a = \frac{1}{2}$. Залишається перевірити знайдені значення параметра. **36.1.** 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $-\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **36.2.** 1) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2} + \pi n$, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $\operatorname{arcctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **36.3.** 1) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{6}$, $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. **36.4.** 1) $\frac{\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. **36.5.** 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) πn, $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 7) πn, $\pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{2\pi n}{5}$, $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 9) $\frac{\pi n}{5}$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; 10) $\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{21} + \frac{\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$. **36.6.** 1) πn, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $2\pi n$, $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{4}$, $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; 7) $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **36.7.** 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $2\pi n$, $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 7) $\frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{4}$, $-\frac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* $\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} - \frac{1-\cos 6x}{2} - \frac{1-\cos 8x}{2} = 0;$

9) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 10) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. **36.8.** 1) $\frac{\pi}{22}+\frac{\pi n}{11}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **36.9.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $-60° + 180°n$, $40° + 180°n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{10}$, $n \in \mathbb{Z}$. **36.10.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $45° + 180°n$, $-75° + 180°n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{4}$, $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{12}$, $n \in \mathbb{Z}$. **36.11.** 1) $-\frac{\pi}{24}+\pi n$, $\frac{5\pi}{144}+\frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{2\pi}{3}+\pi n$, $(-1)^n \arcsin\frac{1}{4}-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* $4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 2x\right)-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=0$; $2\left(\sin\frac{\pi}{3}+\sin 2x\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$; $4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\times \times\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$; $4\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}\right)=0$. **36.12.** 1) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{12}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{5\pi}{12}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* $4\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)^2-5=$ $=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)\right)$; $4\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-5=0$. **36.13.** 1) $2\pi n$, $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка.* $2\sin 2x\cos x - 2\sin x\cos x - 2\cos x(\cos x - 1) = 0$; $2\cos x(\sin 2x - \sin x - \cos x + 1) = 0$; $2\cos x((1 + \sin 2x) - (\sin x + \cos x)) = 0$; $2\cos x((\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)) = 0$; $2\cos x(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **36.14.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* $(\sin 4x + \cos 4x)(\sin^2 4x + \cos^2 4x - \sin 4x\cos 4x) - (1 - \sin 4x\cos 4x) = 0$; $(\sin 4x + \cos 4x - 1)(1 - \sin 4x\cos 4x) = 0$; 2) $-\frac{\pi}{8}+\pi n$, $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. **36.15.** $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* Якщо α задовольняє умову задачі, то $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$, $\sin 2\alpha(1 + 2\cos\alpha) = \cos 2\alpha(1 + 2\cos\alpha)$, $(1 + 2\cos\alpha)(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha) = 0$.
37.1. $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **37.2.** $(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{29}-5}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **37.3.** 1) $2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* $(\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) = 1$; 2) πn, $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* Зробіть заміну

$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=t$. **37.4.** $2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **37.5.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) πn, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка.* $\cos 4x=\frac{1+\cos 6x}{2}$; $4\cos^2 2x-2=1+$ $+4\cos^3 2x-3\cos 2x$; $4\cos^3 2x-4\cos^2 2x-3\cos 2x+3=0$; $4\cos^2 2x\times$ $\times(\cos 2x-1)-3(\cos 2x-1)=0$; $(4\cos^2 2x-3)(\cos 2x-1)=0$; 3) $\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$. **37.6.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) πn, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **37.7.** 1) $\frac{2\pi k}{15}$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 15p$, $p\in\mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{17}+\frac{2\pi n}{17}$, $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 17m+8$, $m\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{2\pi k}{9}$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 9p$, $p\in\mathbb{Z}$. *Вказівка.* Помножте обидві частини рівності на $2\sin\frac{x}{2}$; 3) $\frac{\pi k}{9}$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 9p$, $p\in\mathbb{Z}$. *Вказівка.* Скористайтеся формулою пониження степеня. **37.8.** 1) $\frac{\pi k}{14}$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 14p$, $p\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{2\pi k}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 3p$, $p\in\mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi k}{9}$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 9p$, $p\in\mathbb{Z}$. **37.9.** 1) -2; 2) коренів немає. **37.10.** 1) 2; 2) коренів немає. **37.11.** Коренів немає. *Вказівка.* Якщо $x>0$ або $x<-1$, то $x^2+x+1>1$. При $x\in[-1;0]$ $\sin x\leqslant 0$, а $x^2+x+1>0$. **37.12.** Коренів немає. **37.13.** 1) $x=2\pi k$, $y=\frac{1}{2}$ або $x=\pi+2\pi k$, $y=-\frac{1}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $x=\frac{-5+\sqrt{25-8k}}{2}$, $y=\frac{-5-\sqrt{25-8k}}{2}$, або $x=\frac{-5-\sqrt{25-8k}}{2}$, $y=\frac{-5+\sqrt{25-8k}}{2}$, або $x=\frac{5+\sqrt{21-8n}}{2}$, $y=\frac{5-\sqrt{21-8n}}{2}$, або $x=\frac{5-\sqrt{21-8n}}{2}$, $y=\frac{5+\sqrt{21-8n}}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\leqslant 3$, $n\leqslant 2$. **37.14.** 1) $x=-4$, $y=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$ або $x=4$, $y=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $y=-3$ або $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $y=3$, $n\in\mathbb{Z}$. **37.15.** 1) $4\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{5\pi}{4}+\frac{5\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. **37.16.** 1) $6\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{9\pi}{4}+3\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **37.17.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. *Вказівка.* Запишемо дві очевидні нерівності: $\cos^7 x\leqslant\cos^2 x$; $\sin^4 x\leqslant$ $\leqslant\sin^2 x$. Додаючи почленно ці нерівності, отримуємо $\cos^7 x+\sin^4 x\leqslant$ $\leqslant 1$. Тепер очевидно, що вихідне рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\cos^7 x=\cos^2 x,\\ \sin^4 x=\sin^2 x;\end{cases}$ 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. *Вказівка.* Покажіть, що при всіх допустимих значеннях x виконуються нерівності $\sqrt{\cos x}\geqslant\cos^2 x$ і $\sqrt{\sin x}\geqslant\sin^2 x$. **37.18.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, πk, $k\in\mathbb{Z}$. **37.19.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. *Вказівка.* Запишемо очевидні нерівності:

$\sin^5 x \leqslant \sin^2 x$; $\cos^5 x \leqslant \cos^2 x$. Звідси $\sin^5 x + \cos^5 x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Разом з тим зрозуміло, що $2 - \sin^4 x \geqslant 1$. Таким чином, вихідне рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \sin^5 x = \sin^2 x, \\ \cos^5 x = \cos^2 x, \\ 2 - \sin^4 x = 1; \end{cases}$ 2) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

37.20. 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) розв'язків немає. *Вказівка*. Покажіть, що $\sin x + 2\cos x \leqslant \sqrt{5}$. **37.21.** $\frac{2}{3} + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. *Вказівка*. Перетворіть рівняння до вигляду $\sqrt{4 - \mathrm{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}} \sin(\pi x - \alpha) = 2$, де $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{4 - \mathrm{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}}$,

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3 - \mathrm{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}}{\sqrt{4 - \mathrm{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}}$. Тепер слід зауважити, що ліва частина отриманого рівняння не більша за 2. **37.22.** $\frac{1}{4} + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. **37.23.** 1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $y = \pi n$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка*. Оцінимо кожний із множників лівої частини даного рівняння. Маємо: $5 + \frac{3}{\sin^2 x} \geqslant 8$ і $2 - \sin^6 x \geqslant 1$. Тоді $\left(5 + \frac{3}{\sin^2 x}\right)(2 - \sin^6 x) \geqslant 8$. З іншого боку, очевидно, що $7 + \cos 2y \leqslant 8$.

Отже, вихідне рівняння рівносильне системі $\begin{cases} 5 + \frac{3}{\sin^2 x} = 8, \\ 2 - \sin^6 x = 1, \\ 7 + \cos 2y = 8, \end{cases}$ звідси $\begin{cases} \sin^2 x = 1, \\ \cos 2y = 1; \end{cases}$ 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка*. Для будь-яких дійсних чисел a і b правильна нерівність $a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{2}(a+b)^2$. Тоді $\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}\left(\sin^2 x + \cos^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 =$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{\sin^2 2x}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}$. **37.24.** 1) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(n-k)$, $y = -\pi + 2\pi(n - 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $y = \frac{\pi}{4} + \pi\left(n - \frac{k}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка*. Скористайтеся нерівністю $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Тоді $\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{tg}^4 y \geqslant 2\,\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{tg}^2 y$ і $\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{tg}^4 y + 2\,\mathrm{ctg}^2 x\,\mathrm{ctg}^2 y \geqslant 2(\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{tg}^2 y + \mathrm{ctg}^2 x\,\mathrm{ctg}^2 y) \geqslant 4$. **37.25.** 7. *Вказівка*. Зауважимо, що коли число x_0 — корінь даного рівняння, то і число $(-x_0)$ — теж корінь цього рівняння. Тоді дане рівняння може мати єдиний корінь лише за умови $x_0 = 0$. **37.26.** 3. **37.27.** $\frac{1}{\sin 1}$. **37.28.** 0; tg 1. **37.29.** (0; 0), (1; 0). *Вказівка.* Підставивши замість x числа 0, 2π і $\frac{\pi}{2}$, можна отримати необхідні умови, яким задовольняють числа a і b. **37.30.** $a = 1$. *Вказівка.* Число 2π є періодом функції $y = (a - a^2)\cos 2x + \sin x - a$. Нехай x_0 — корінь рівняння $(a - a^2)\cos 2x + \sin x = a$. Тоді числа x_0 і $x_0 + 8\pi$ — корені рівняння $(a-1)\sin\frac{x}{8} + \sin x = 1$. Маємо $(a-1)\sin\frac{x_0}{8} + \sin x_0 = 1$ і $-(a-1)\sin\frac{x_0}{8} + \sin x_0 = 1$. Віднімаючи почленно від першої рівності другу, отримуємо $2(a-1)\sin\frac{x_0}{8} = 0$. Звідси $a = 1$ або $x_0 = 8\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Проте жодне з чисел виду $8\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, не є коренем рівняння $(a-1)\sin\frac{x}{8} + \sin x = 1$. **38.1.** 1) πk, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq -2$; 2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $(-1)^k \cdot \frac{1}{6} + k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 1$. **38.2.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$; 2) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$; 3) $\frac{1}{4} + \frac{k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 1$. **38.3.** 1) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 6) $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **38.4.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) πk, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $2\pi k$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 5) $\pi + 2\pi k$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **38.5.** 1) $x = k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$; 2) $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$, $x = \pm\frac{5}{2}$. **38.6.** 1) $x = 3$, $x = \frac{1}{2} + k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \leqslant 2$; 2) $x = \pm\frac{7}{2}$, $x = \pm 3$, $x = \pm 1$. **38.7.** 1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{2} + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos 4x = 1, \\ \cos\frac{x}{2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$ **38.8.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **38.9.** 1) πk, $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **38.10.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, πk, $k \in \mathbb{Z}$. **38.11.** 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $-\operatorname{arctg}\frac{6+\sqrt{3}}{11} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **38.12.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{13}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{3(5-\sqrt{3})}{11}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

39.1. 1) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k; 2\pi k\right)$, $\left(2\pi k; -\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{3}-\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k; \frac{\pi}{2}-\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\left((-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}; (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k; \pi k\right)$, $\left(\pi k; -\frac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **39.2.** 1) $(360°k;\ 60° + 360°k)$, $(-60° + 360°k;\ 360°k)$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{8}-\frac{\pi k}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\left(\frac{1}{6}+2k; \frac{1}{6}-2k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k; \frac{\pi}{6}-\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **39.3.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{6}-\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(2\pi k; \frac{5\pi}{2}-2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **39.4.** $\left(\frac{3\pi}{2}+\pi k; -\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **39.5.** 1) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{4}-\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k; \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\pi k\right)$, $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k; \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **39.6.** 1) $\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n; -\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. **39.7.** 1) $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(n+2k); \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(n-2k)\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(n+2k); \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(n-2k)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(-\frac{1}{4}+\frac{n}{2}-k; \frac{1}{4}+\frac{n}{2}+k\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\left(2\pi k; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(2\pi k; -\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k; 2\pi n\right)$, $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k; 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$. **39.8.** 1) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\left(\frac{n}{2}-k\right); \frac{\pi}{4}+\pi\left(\frac{n}{2}+k\right)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n+k); -\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n-k)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n+k); \frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n-k)\right)$, $\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n+k); -\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n-k)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n+k); \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n-k)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi(k+n); \pi(k-n)\right)$, $\left(\pi(k+n); -\frac{\pi}{4}+\pi(k-n)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k; -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k; -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. **40.1.** 2) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n < x < \frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{6}+\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\pi n < x < \frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 9) $\pi-\arcsin\frac{1}{6}+2\pi n < x < 2\pi+\arcsin\frac{1}{6}+2\pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$. **40.2.** 2) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{7\pi}{6}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{4}+\pi n \leqslant x<\pi+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 10) $\operatorname{arcctg} 2+\pi n<x<\pi+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **40.3.** 1) $\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{5}<x<\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5},\ n \in \mathbb{Z}$. **40.4.** 3) $-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}<x<-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{4}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$. **40.5.** 1) $-\frac{\pi}{6}+\pi n<x \leqslant \frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{5\pi}{12}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{11\pi}{12}+\pi n<x<\frac{5\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$; 5) $\pi+4\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi+4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}+\pi n<x<\frac{3\pi}{8}+\frac{1}{2}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **40.6.** 1) $-\frac{\pi}{6}+\pi n<x \leqslant \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{5\pi}{6}+4\pi n<x<\frac{11\pi}{6}+4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{11\pi}{6}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{9\pi}{4}+3\pi n<x<-\frac{\pi}{4}+3\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{17\pi}{60}+\frac{\pi n}{2} \leqslant x \leqslant \frac{22\pi}{60}+\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$. **40.7.** 1) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k \leqslant x<\arcsin\frac{1}{4}+2\pi k$, $\pi-\arcsin\frac{1}{4}+2\pi k<x \leqslant \frac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n<x \leqslant -\arccos\frac{1}{4}+2\pi n$, $\arccos\frac{1}{4}+2\pi n \leqslant x<\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\operatorname{arctg} 2+\pi k<x<\operatorname{arctg} 3+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **40.8.** 1) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k<x \leqslant -\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi k \leqslant x<\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k \leqslant x<\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi k<x \leqslant \pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $\operatorname{arcctg} 1{,}5+\pi k<x<\pi-\operatorname{arcctg} 4+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **41.1.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{3}+\pi k<x<\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{2}+\pi k<x<-\operatorname{arctg} 2+\pi k$, $\operatorname{arctg} 2+\pi k<x<\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **41.2.** 1) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}<x<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 4) $\pi k<x<\operatorname{arcctg} 5+\pi k$, $\pi-\operatorname{arcctg} 5+\pi k<x<\pi+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **41.3.** 1) $x \neq \frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{5\pi}{12}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **41.4.** 1) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{3}{8}+2k<x<\frac{5}{8}+2k,\ k \in \mathbb{Z}$. **41.5.** 1) $-\frac{\pi}{3}+\pi k<x<\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

2) $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **41.6.** 1) $-\frac{5\pi}{6}+\pi k<x<\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{5\pi}{12}+\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{12}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **41.7.** 1) $\frac{\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\operatorname{arctg} 2+\pi k<x<\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi k \leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi k$, $-\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi k \leqslant x<\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **41.8.** 1) $\frac{\pi}{3}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi k<x \leqslant \frac{\pi}{2}+\pi k$, $\frac{3\pi}{4}+\pi k \leqslant x<\pi+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{3\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{2}+\pi k<x<-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **41.9.** 1) $\frac{\pi}{5}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{5}+2\pi k$, $\pi+2\pi k<x<\frac{7\pi}{5}+2\pi k$, $\frac{9\pi}{5}+2\pi k<x<2\pi+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi k}{2}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}+2\pi k$, $\frac{3\pi}{4}+2\pi k \leqslant x \leqslant \pi+2\pi k$, $\frac{5\pi}{4}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k \leqslant x \leqslant 2\pi k$, $\frac{\pi}{4}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 5) $2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi k<x<\pi+2\pi k$, $\frac{4\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **41.10.** 1) $2\pi k<x<\pi+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{2\pi}{5}+2\pi k<x<2\pi k$, $\frac{2\pi}{5}+2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\frac{4\pi}{5}+2\pi k<x<\pi+2\pi k$, $\frac{6\pi}{5}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\frac{\pi}{2}+\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}<x<\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

42.2. $\cos\frac{\pi}{5}$, $-\cos\frac{\pi}{5}$. **42.3.** $\cos\frac{3\pi}{10}$. **42.4.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **42.5.** $\cos\frac{2\pi}{9}$, $\cos\frac{4\pi}{9}$, $\cos\frac{6\pi}{9}$, $\cos\frac{8\pi}{9}$, $\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7}$. *Вказівка.* Доведіть, що всі корені даного рівняння належать проміжку $(-1; 1)$. Зробіть заміну $x=\cos\alpha$, $\alpha \in (0; \pi)$. **42.6.** $|a| \geqslant \sqrt{2}$. *Вказівка.* Зробіть заміну $x=|a|\cos\alpha$, $y=|a|\sin\alpha$, де $\alpha \in [0; 2\pi)$. **42.7.** 7 розв'язків. *Вказівка.* Якщо покласти $x=\operatorname{tg}\alpha$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то отримаємо $y=\operatorname{tg} 2\alpha$, $z=\operatorname{tg} 4\alpha$, $x=\operatorname{tg} 8\alpha$. Тоді $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg} 8\alpha$ і $\alpha=\frac{\pi n}{7}$. **42.8.** $\frac{1}{2}$; $-\frac{9}{2}$. *Вказівка.* Зробіть заміну $x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$, де $r>0$. **42.9.** Існує. Прикладом такої множини можуть бути числа $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, ..., $\cos 2^{99}\alpha$, де $\alpha=\frac{2\pi}{2^{100}+1}$. **42.10.** Існує. Наприклад, $a=\operatorname{tg}\frac{\pi}{1200}$. **42.11.** 1; $\cos\frac{2\pi}{7}$; $\cos\frac{4\pi}{7}$; $\cos\frac{6\pi}{7}$; $\cos\frac{2\pi}{9}$; $\cos\frac{4\pi}{9}$; $\cos\frac{6\pi}{9}$; $\cos\frac{8\pi}{9}$. *Вказівка.* Легко перевірити, що при

$|x| > 1$ $f(f(f(f(x)))) > f(f(x)) > f(x) > |x| \geqslant x$. Отже, розв'язків, які задовольняють умову $|x| > 1$, рівняння не має. Якщо $|x| \leqslant 1$, то можна зробити заміну $x = \cos t$, де $t \in [0; \pi]$. Отримуємо $\cos 8t = \cos t$. **42.12.** Наприклад, $\cos \frac{\pi}{2^{1000}}$. **42.13.** *Вказівка.* Існує α таке, що $\sin \alpha = a$, $\cos \alpha = b$. Покажіть, що $a_n = \sin (n-1)\alpha$. **43.7.** 1) Неспадна; 2) не є монотонною; 3) не є монотонною. *Вказівка.* Розгляньте відношення $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. **43.8.** 2) *Вказівка.* $a_n = -3 - (n-1)^2$; 3) *Вказівка.* $\frac{4n}{n^2+1} \leqslant \frac{4n}{2\sqrt{n^2}}$; 4) *Вказівка.* $\frac{2n+7}{n+2} = 2 + \frac{3}{n+2} \leqslant 3$; 6) *Вказівка.* $\frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{n}{\sqrt{n^2}}$. **43.14.** 1) Так; 4) ні. **43.15.** 1) $a_2 = \frac{26}{9}$; 2) $a_9 = 1$; 3) $a_3 = 7$; 4) $a_2 = 1$. **43.16.** 1) $a_2 = -3$; 2) $a_2 = 4$; 3) $a_2 = -1$; 4) $a_3 = -2$; 5) $a_1 = -2$; 6) $a_6 = 27$. *Вказівка.* $a_n = \frac{n^2+15n+36}{n} = n + \frac{36}{n} + 15$; 7) $a_2 = -\frac{1}{2}$. **43.17.** Так. Наприклад, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ... **43.18.** Так. Наприклад, $a_n = n!$. **43.19.** 1) Ні; 2) ні. **43.21.** 1) *Вказівка.* $a_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; 2) *Вказівка.* Доведіть, що $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. **43.23.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте τ_n для чисел $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. **43.24.** *Вказівка.* Число n є дільником числа n. Тому $\sigma_n \geqslant n$ і $\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$. **43.25.** Так. *Вказівка.* Оскільки множина раціональних чисел злічена (див., наприклад, п. 7 книги Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 8 кл. з поглибл. вивченням математики), то існує послідовність (r_n), яка містить усі раціональні числа. **43.26.** Так. **43.27.** 1) *Вказівка.* $a_n < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$, $n > 1$; 2) *Вказівка.* Доведіть методом математичної індукції, що $a_n < 3$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. **43.28.** $a_{201} = \frac{201^2}{1{,}01^{201}}$. *Вказівка.* Розв'язавши нерівність $a_{n+1} > a_n$, де $n \in \mathbb{N}$, отримаємо $n \leqslant 200$. **43.29.** Ні. *Вказівка.* Використовуючи нерівність Бернуллі[1] $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$, де $n \in \mathbb{N}$, $x > -1$, маємо $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geqslant 1 + n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$. **44.3.** З деякого номера вона стає стаціонарною. **44.5.** Так. **44.11.** *Вказівка.* Знайдіть n з нерівності $\left|\frac{c}{\sqrt[k]{n^m}}\right| < \varepsilon$. **44.12.** Ні. Наприклад, у будь-якому інтервалі

[1] Див с. 224 книги Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 9 кл. з поглибл. вивченням математики.— Х. : Гімназія, 2009.— 384 с.

$(0 - \varepsilon;\ 0 + \varepsilon)$ міститься безліч членів послідовності 0, 1, 0, 1, 0, 1, ... **44.13.** Так. **44.14.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **44.15.** Так. **44.16.** Послідовність залишиться збіжною; границя не зміниться. **44.18.** *Вказівка.* Розгляньте нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$ для $\varepsilon < 0$. **44.19.** Ті послідовності, які, починаючи з деякого місця, стають стаціонарними. **44.20.** Так. **44.21.** Ні. **44.22.** *Вказівка.* Скористайтеся означенням границі послідовності. **44.23.** Так. **44.24.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, послідовність, задану формулою $a_n = \pi n$. **44.25.** Так. **44.28.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, $x_n = (-1)^n$. **44.29.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, $x_n = (-1)^n$. **44.30.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, $x_n = -n$. **44.31.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, $x_n = n$. **44.32.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте послідовність, у якої $x_{p_k} = 1$, де (p_k) — послідовність простих чисел, а решта членів $x_n = 0$. **45.1.** 2) *Вказівка.* Скористайтеся теоремою про двох конвоїрів і нерівностями $0 \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^3+4}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$; 5) скористайтеся нерівностями $0 \leqslant \frac{n^2+2n-1}{3n^3+n-2} \leqslant \frac{n^2+2n^2}{3n^3+n-2} \leqslant \frac{n^2+2n^2}{n^3} \leqslant \frac{3}{n}$. **45.2.** 2) *Вказівка.* Скористайтеся нерівностями $\frac{-1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{-1}{\sqrt{n}+2\sqrt{n-1}} \leqslant 0$. **45.3.** 1) 1; 2) 3; 5) 1. **45.4.** 3) 2. **45.5.** 1) $\frac{1}{n}$; 2) $-\frac{1}{n+1}$; 3) $-\frac{10}{9n+3}$; 4) $\frac{(-1)^n-1}{n^2+1}$. **45.6.** 1) $\frac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $\frac{1}{n}$; 3) $-\frac{(-1)^n}{n^2+1}$; 4) $-\frac{6}{n+3}$. **45.7.** 1) Так; 2) ні. **45.8.** 2) Ні. *Вказівка.* При $n \geqslant 64$ мають місце нерівності: $|x_n| = \sqrt[3]{n}\cdot(\sqrt[6]{n}-1) \geqslant \sqrt[3]{n}$. Тому (x_n) — необмежена послідовність. **45.9.** 3) Ні. *Вказівка.* При парних значеннях n маємо, що $x_n = n$. **45.10.** 0. *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. **45.11.** 0. **45.12.** *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $nq^n = \frac{n}{\left(\frac{1}{q}\right)^n}$, де $\left|\frac{1}{q}\right| > 1$, $q \neq 0$. **45.13.** *Вказівка.* Починаючи з деякого номера n_0, виконуються нерівності $1 \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{n}$. **45.14.** 1) 0. *Вказівка.* Скористайтеся теоремою про двох конвоїрів і нерівностями $0 \leqslant \frac{\sqrt{n}}{5^n} \leqslant \frac{n}{5^n}$. Інший спосіб розв'язування може спиратися на теорему 45.8 і рівність $x_n = \sqrt{\frac{n}{25^n}}$; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **45.15.** 3) *Вказівка.* Маємо $x_n = \frac{n}{\left(\sqrt[6]{\frac{5}{3}}\right)^n}$. **45.16.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, послідовність 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, ... **45.17.** 1) 4; 2) 0; 3) 1; 4) 1. *Вказівка.* Скористайтеся співвідношеннями $1 \leqslant \sqrt[n^2]{1^{n-1}+2^{n-1}+\ldots+n^{n-1}} \leqslant$ $\leqslant \sqrt[n^2]{\underbrace{n^{n-1}+n^{n-1}+\ldots+n^{n-1}}_{n \text{ доданків}}} = \sqrt[n^2]{n \cdot n^{n-1}} = \sqrt[n^2]{n^n} = \sqrt[n]{n}$; 5) 0. *Вказівка.* Скористайтеся співвідношеннями $\frac{5^n}{n!} = \frac{5^5}{5!} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{n} \leqslant \frac{5^5}{5!} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}$, де $n \geqslant 5$. **45.18.** 1) 5; 2) 0; 3) 7; 4) 1; 5) 0. *Вказівка.* Скористайтеся співвідношеннями $0 \leqslant \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$. **45.19.** *Вказівка.* При $|x| \geqslant 1$ виконуються нерівності $|x| \leqslant \sqrt[2n]{1+x^{2n}} \leqslant \sqrt[2n]{2x^{2n}} = |x| \cdot \sqrt[2n]{2}$. Тому $f(x) = |x|$ при $|x| \geqslant 1$. Розглядаючи випадок $|x| < 1$, отримаємо $f(x) = 1$. **45.20.** 1. *Вказівка.* Мають місце нерівності $x_n \leqslant \frac{n}{\sqrt[n]{n^n+1}} < 1$ та $x_n \geqslant \frac{n}{\sqrt[n]{n^n+n}} \geqslant \frac{n}{\sqrt[n]{n^n+n^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$. Далі скористайтеся теоремою про двох конвоїрів. **45.21.** 0. *Вказівка.* $x_n \leqslant \frac{n \cdot (2n-1)^5}{n^7} \leqslant \frac{n \cdot (2n)^5}{n^7} = \frac{32}{n}$. **45.22.** *Вказівка.* Нехай $n = 2^k$. Згрупуємо доданки таким чином: $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)$. Сума дробів кожної дужки більша за $\frac{1}{2}$, наприклад, $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Тому $x_n > \frac{k}{2}$. Отже, потрібна нерівність досягається, наприклад, при $k = 200$, тобто при $n = 2^{200}$. **46.1.** 1) 2; 2) 1; 3) 0. **46.2.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0. **46.3.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -3; 3) $\frac{4}{9}$. **46.4.** 1) -2; 2) 0; 3) $-\frac{1}{3}$. **46.5.** 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) 0,1. **46.6.** 1) 1; 2) 3. **46.7.** 3) 2. **46.9.** Рівність $\lim\limits_{n \to \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ доданків}} = \underbrace{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} + \ldots + \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n}}_{n \text{ доданків}}$ помилкова, оскільки теорему про границю суми можна використовувати для скінченої (фіксованої) кількості послідовностей. **46.11.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. *Вказівка.* Поділіть чисельник і знаменник дробу на $\sqrt{n}$; 2) 1. **46.12.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. **46.13.** *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$ і задачею 45.13. **46.14.** 1) *Вказівка.* Скористайтеся теоремою про границю добутку.

46.15. 1) 4; 2) 1. **46.16.** 1) 6; 2) $\frac{1}{7}$. **46.17.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, послідовність (a_n) із загальним членом $a_n = (-1)^n$. **46.18.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, послідовність (x_n), задану формулами: $x_{2i} = 2$, $x_{2i-1} = 3$, $i \in \mathbb{N}$. **46.19.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, послідовність (x_n), задану формулою $x_n = n$. **46.20.** Ні. *Вказівка.* Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 + 4x_n + 3 = x^2 + 4x + 3$. Маємо рівняння $x = x^2 + 4x + 3$, яке не має розв'язків. **46.22.** Так. *Вказівка.* $x_n = S_n - S_{n-1}$. **46.23.** $-\frac{1}{2}$. **46.24.** $-\frac{3}{2}$. **46.25.** 0. *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $\frac{n^{100}}{2^n} = \left(\frac{n}{\left(\sqrt[100]{2}\right)^n}\right)^{100}$.

46.26. 1) 1. *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}$; 2) $\frac{1}{3}$. *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; 3) 1. *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $k \cdot k! = (k+1)! - k!$. **46.27.** 1) 1. *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$; 2) $\frac{2}{3}$. *Вказівка.* Скористайтеся рівностями $k^3 - 1 = (k-1)(k^2 + k + 1)$, $(k+1)^3 + 1 = (k+2)\,((k+1)^2 - (k+1) + 1) = (k+2)\,(k^2 + k + 1)$; 3) $\frac{1}{4}$. *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. **46.28.** *Вказівка.* При $|x| > 1$ $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{x^{2n}}+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x^{2n}}+1\right)} = \frac{x}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}} + \lim\limits_{n\to\infty} 1} = \frac{x}{0+1}$. Тому $f(x) = x$ при $|x| > 1$. Розглядаючи інші випадки, маємо $f(x) = 0$ при $|x| < 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$. **46.29.** 1) Розбіжна. *Вказівка.* Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \sin 6n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sin 6(n+1) = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \sin 6(n-1) = a$. Тоді ліва частина рівності $\sin 6(n+1) + \sin 6(n-1) = 2\sin 6n \cdot \cos 6$ прямує до $2a$, а права — до $2a\cos 6$. Отже, $a = 0$. З рівності $\sin 6(n+1) - \sin 6(n-1) = 2\sin 6 \cdot \cos 6n$ знаходимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \cos 6n = 0$. Але тоді $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos^2 6n + \sin^2 6n) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos^2 6n + \lim\limits_{n\to\infty} \sin^2 6n = 0$; 2) розбіжна. *Вказівка.* Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_{n-1}) = a - a = 0$. **46.30.** Ні.

47.1. 1) Ні; 2) так. **47.2.** Так. **47.3.** Так. **47.4.** Ні. *Вказівка.* Якщо кожний з відрізків $[a_k; b_k]$ містить точки x і y ($x < y$), то кожний з відрізків $[a_k; b_k]$ містить відрізок $[x; y]$. **47.5.** Ні. *Вказівка.*

Розгляньте, наприклад, послідовність $(0;1) \supset \left(0;\frac{1}{2}\right) \supset \left(0;\frac{1}{3}\right) \supset \ldots$.
47.8. 1) *Вказівка*. Для доведення обмеженості послідовності (a_n) скористайтеся нерівністю $\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$; 2) *Вказівка*. Доведіть, що $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^n}$ при $n \geqslant 4$; 4) *Вказівка*. Доведіть, що $a_n > a_{n+1}$. **47.9.** 1) *Вказівка*. Скористайтеся нерівністю $\frac{1}{3^n-2} \leqslant \frac{1}{3^{n-1}}$; 3) *Вказівка*. Скористайтеся нерівністю $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2} \leqslant \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-2)^2}+\frac{1}{(2n-1)^2}$.
47.10. $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$. **47.11.** $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$. **47.12.** $x_{n+1}=\frac{n+1}{na}x_n$. **47.13.** $x_{n+1}=\frac{a}{n+1}x_n$.
47.14. Ні. *Вказівка*. Послідовність (a_n) є зростаючою. Якщо (a_n) — обмежена послідовність, то за теоремою Вейєрштрасса існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Переходячи в рекурентній формулі до границі, маємо рівняння $a = a + \frac{1}{a^2}$, яке не має розв'язків. **47.15.** Ні. *Вказівка*. Маємо $a_{n+1} = 2a_n + \frac{3}{n+a_n}$, $a_n \geqslant 0$. Тому послідовність (a_n) є зростаючою. Якщо (a_n) — обмежена послідовність, то за теоремою Вейєрштрасса існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Переходячи в рекурентній формулі до границі, маємо рівняння $a = 2a$, звідки $a = 0$. Але границя зростаючої послідовності невід'ємних чисел не може дорівнювати нулю. **47.16.** Ні.
47.17. *Вказівка*. Нехай $x_n \in [a;\, b]$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Послідовно розбиваючи побудовані відрізки навпіл, отримайте послідовність вкладених відрізків $[a;\, b] \supset [a_1;\, b_1] \supset [a_2;\, b_2] \supset \ldots$, кожний з яких містить нескінченну кількість членів послідовності (x_n). **47.18.** *Вказівка*. Використовуючи метод математичної індукції, неважко показати, що $a_n \in (0;\, 1)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Послідовність (b_n) — зростаюча. Оскільки $a_n^2 = a_n - a_{n+1}$, то $b_n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1} \leqslant a_1$. Отже, (b_n) — обмежена послідовність. За теоремою Вейєрштрасса існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant a_1 < 1$. **47.19.** *Вказівка*. Використовуючи нерівність Коші, покажіть, що $0 < a_n \leqslant b_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Далі доведіть, що $a_n \leqslant a_{n+1}$, $b_{n+1} \leqslant b_n$. Звідси $a_1 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_1$. Отже, (a_n), (b_n) — монотонні і обмежені послідовності. За теоремою Вейєрштрасса існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Переходячи в обох частинах рівності $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ до границі при $n \to \infty$, маємо $b = \frac{a+b}{2}$. Тому $a = b$. **47.20.** *Вказівка*. Доведіть нерівності $\sqrt[n+1]{n} \leqslant 2$, $\sqrt[k]{k+1} \leqslant 2$ і скористайтеся ними. **47.22.** 1) $\sqrt[3]{e}$; 2) e^5; 3) $\frac{1}{e}$. **47.23.** 1. *Вказівка*.

З нерівностей $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$, де $n > 1$, випливає, що $1 < n\left(\sqrt[n]{e}-1\right) < \frac{n}{n-1}$. **47.24.** *Вказівка.* $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{n} < \frac{3}{n}$. **47.25.** *Вказівка.* Доведіть, що $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{ne^{\frac{1}{n+1}}}{n+1} < 1$. Далі скористайтеся теоремою Вейєрштрасса. **47.26.** $\frac{1}{e}$. *Вказівка.* Скористайтеся методом математичної індукції.

Предметний покажчик

ЗМІСТ

Навчальне видання

Мерзляк Аркадій Григорович
Номіровський Дмитро Анатолійович
Полонський Віталій Борисович
Якір Михайло Семенович

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

10 клас

Підручник для класів з поглибленим вивченням математики

Редактор *Г. Ф. Висоцька*
Художник *С. Е. Кулинич*
Коректор *Т. Є. Цента*
Комп'ютерне верстання *О. О. Удалова*

Формат 60×90/16. Гарнітура шкільна. Ум. друк. арк. 26,00.
Тираж 5000 прим. Замовлення №755.

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003