

Є. П. Нелін

ГЕОМЕТРІЯ

Дворівневий підручник для 10 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Академічний і профільний рівні

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2010

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист № 1/11-7523 від 9.08.2010 р.)

Рецензенти:

- В. П. Горох, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
провідний спеціаліст відділу наукового забезпечення
Українського центру оцінювання якості освіти
- Л. Г. Стадник, учитель-методист Харківської СШ № 17,
учитель вищої категорії, керівник районного методоб'єднання
вчителів математики м. Харкова

Нелін Є. П.

Н49 Геометрія : дворівн. підруч. для 10 кл. загальноосвіт.
навч. закладів : академ. і профільн. рівні / Є. П. Нелін. —
Х. : Гімназія, 2010. — 240 с. : іл.
ISBN 978-966-474-099-6.

УДК 373:513
ББК 22.151.я721

Передмова для учнів

Дорогі друзі!

Мета даного підручника — допомогти вам вивчити розділ геометрії, який називають стереометрією. У попередніх класах ви вивчали в основному властивості плоских фігур, тепер приступаєте до вивчення просторових об'єктів. У процесі вивчення стереометрії ви вдосконалюватимете свої навички логічного мислення, розвиватимете просторові уявлення, уміння в думках моделювати нові геометричні фігури і будувати їх графічні зображення.

Засвоюючи стереометрію, ви будете ознайомлюватися з новими геометричними поняттями і закономірностями, багато з яких упродовж сторіч люди застосовують у виробничій діяльності, використовують в архітектурі й живописі. Одержані знання допоможуть вам зрозуміти, чому геометричні властивості викликають незмінний інтерес творців прекрасного. Наприклад, теоретик мистецтва Ранняго Відродження, італійський учений Леон Батіст Альберті (1404–1472) підкреслював значення геометрії в живописі, а геніальний французький архітектор ХХ ст. Шарль Едуар Ле Корбюзьє (1887–1965) відзначав, що навколишній світ є світом геометрії і своїми художніми враженнями людина зобов'язана саме геометрії. Твори художників епохи Високого Відродження Леонардо да Вінчі (1452–1519) і Альбрехта Дюрера (1471–1528), величні споруди архітекторів старовини та сучасності переконливо свідчать про те, що геометрія була і залишається законодавицею моди в питаннях гармонії та краси.

Бажаємо, щоб вивчення цього предмета принесло вам задоволення та переконало в правоті видатного французького математика і філософа Блеза Паскаля (1623–1662), який вважав: «...того, хто володіє геометрією, ця наука просуває настільки далеко, що він виявляється озброєним абсолютною новою силою».

Кілька зауважень про те, як користуватися підручником.

Систему навчального матеріалу підручника з кожної теми наведено як двома рівнями.

Основний матеріал міститься в параграфах, номери яких позначено синім кольором. *Додатковий матеріал* (номері параграфів позначено сірим кольором) призначений для оволодіння темою на більш глибокому рівні (наприклад, для виконання складніших завдань з геометрії *людишнього* незалежного оцінювання з математики). Учень може опанувати його як самостійно, так і під керівництвом учителя в разі вивчення геометрії на академічному рівні, а може скористатися ним для систематичного вивчення геометрії на профільному рівні.

На початку багатьох параграфів наведено *довідкові таблиці*, які містять основні означення, ознаки та властивості розглянутих понять теми. Для ознайомлення з основними ідеями щодо розв'язування задач наведено приклади, у яких крім розв'язання міститься також *коментар*, що допоможе скласти план розв'язування аналогічного завдання.

З метою закріплення, контролю і самоконтролю засвоєння навчального матеріалу після кожного параграфа запропоновано систему запитань і вправ. Відповіді на ці запитання і приклади розв'язування аналогічних вправ можна знайти в тексті параграфа. Систему вправ до основного матеріалу подано за трьома рівнями складності. *Задачі середнього рівня* позначено символом «°», децю складніші *задачі достатнього рівня* подано без позначки, а *задачі високого рівня* складності позначено символом «*». У тексті параграфів запропоновано спеціальні орієнтири, що дозволять опанувати методи розв'язування багатьох задач поглибленого рівня. *Відповіді і вказівки* до більшості вправ наведено у відповідному розділі. Про окремі цікаві факти, пов'язані з історією розвитку геометрії, ви дізнаєтеся, прочитавши «Відомості з історії». У кінці підручника в додатку наведено довідковий матеріал зі шкільного курсу планіметрії.

Умовні позначення

	головне в навчальному матеріалі
▶	початок розв'язання задачі
◁	закінчення розв'язання задачі
●	початок обґрунтування твердження
○	закінчення обґрунтування твердження

Передмова для вчителя

Пропонований підручник спрямовано на реалізацію основних положень концепції профільного навчання в старшій школі, на організацію особистісно-орієнтованого навчання математики. Підручник підготовлено відповідно до чинної програми з геометрії академічного та профільного рівнів і програми та змісту зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Як відомо, у навчанні підручник виконує дві основні функції: 1) є джерелом навчальної інформації, що розкриває передбачений освітніми стандартами зміст у доступній для учнів формі; 2) є засобом навчання, за допомогою якого здійснюється організація навчального процесу, у тому числі й самоосвіта учнів.

Відзначимо основні відмінності пропонованого підручника в реалізації цих функцій від інших підручників з геометрії.

Це *дворівневий підручник*, у кожному розділі якого, поряд з параграфами, що призначені для оволодіння учнями стандартом математичної освіти на академічному рівні, є систематичний матеріал для організації індивідуальної чи колективної роботи з учнями, які цікавляться математикою. Запропонований додатковий матеріал можна використовувати і для організації навчання геометрії на профільному рівні.

Основний матеріал, який повинні, у першу чергу, засвоїти учні, структуровано у формі довідкових таблиць, наведених на початку параграфа. Тому під час пояснення нового матеріалу доцільно працювати з підручником за відповідними таблицями та рисунками. Усі потрібні пояснення й обґрунтування теж наведено в підручнику, але кожен учень може обирати власний рівень ознайомлення з цими обґрунтуваннями.

Підкреслимо, що будь-який підручник з геометрії має забезпечити не тільки ознайомлення учнів з основними геометричними поняттями та їх властивостями (тобто дати можливість формувати в учнів знання з геометрії), а й формування способів дій із цими поняттями (тобто дати можливість формувати в учнів відповідні уміння). Так, систему умов, на яку реально спирається учень, виконуючи дії, психологи називають орієнтовною основою дії. Якщо учням пропонують досить загальні орієнтовні основи для розв'язування відповідних завдань у вигляді спеціальних правил та алгоритмів, то кажуть, що їм пропонуються орієнтовні основи другого і третього типів. Зазвичай у підручниках з геометрії для 10 класів учням пропонують тільки зразки розв'язувань завдань. Учні розв'язують ці завдання самостійно, орієнтуючись на ці зразки (тобто їм пропонують орієнтовні основи першого типу). Таке навчання передбачає, що учень самостійно виконає систематизацію та узагальнення способів дій, орієнтуючись на зразки, і виділить для себе орієнтовну основу

розв'язування розглянутих завдань. Як правило, у такому разі орієнтовна основа, що створюється в учня, є неповною і, крім того, часто не усвідомленою ним: учень не може пояснити, чому, розв'язуючи завдання, він виконував саме такі додаткові побудови чи обчислення, а не інші.

Із цієї причини одним з принципів побудови пропонованого підручника було виділення для учнів орієнтовних основ відповідної діяльності а розв'язування геометричних завдань безпосередньо в підручнику. Тому важливою складовою роботи за пропонованим підручником є обговорення вибору відповідних орієнтирів та планів розв'язування завдань. Пояснення методів розв'язування ведуть за такою схемою:

Розв'язання

Коментар

Як можна записати розв'язання задачі

Як можна міркувати під час розв'язування задачі

За такої подачі навчального матеріалу коментар, у якому пояснюється розв'язання, не заважає сприйняттю основної ідеї та плану розв'язування завдань певного типу. Це дає змогу учневі, який уже засвоїв спосіб розв'язування, за допомогою наведеного прикладу згадати, як розв'язувати завдання, а учневі, якому потрібна консультація з розв'язування, — отримати детальну консультацію, що міститься в коментарі.

Завдяки виділенню певних орієнтирів роботи з практичними завданнями курсу, вдається частину «нестандартних» (з точки зору традиційних підручників) завдань перевести в розряд «стандартних» (наприклад, задачі зі знаходження відстаней між мимобіжними прямими). Це дозволяє, зокрема, ознайомити учнів з методами розв'язування складніших геометричних завдань, які пропонують у зовнішньому незалежному оцінюванні з математики, та з оформленням їх розв'язання.



Розділ 1

СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ТА УЗАГАЛЬНЕННЯ ФАКТІВ І МЕТОДІВ ПЛАНІМЕТРІЇ

- § 1. Логічна побудова шкільного курсу планіметрії. Методи розв'язування геометричних задач
- § 2. Приклади застосування координат і векторів для розв'язування планіметричних задач

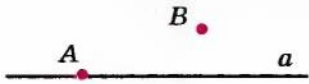
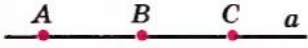
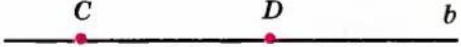
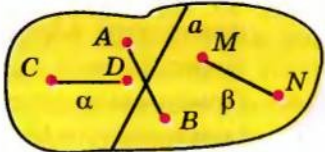
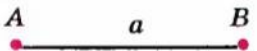

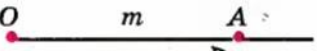
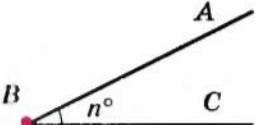
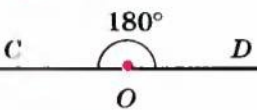
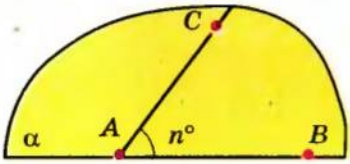
Опановуючи запропонований матеріал, ви зможете:
ознайомитися з логічною побудовою шкільного курсу планіметрії;
систематизувати та узагальнити методи розв'язування планіметричних задач;
згадати основні поняття й аксіоми планіметрії.

§ 1

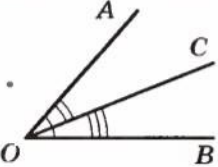
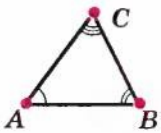
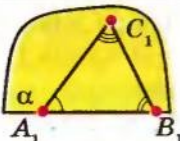
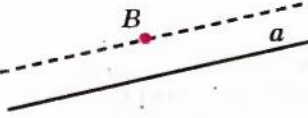
ЛОГІЧНА ПОБУДОВА ШКІЛЬНОГО КУРСУ ПЛАНІМЕТРІЇ.
МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

1.1. Логічна побудова шкільного курсу планіметрії

Таблиця 1

1. АКсіОМИ ПЛАНІМЕТРІЇ	
<p>I. АксіОми належності</p>  <p>$A \in a, B \notin a$</p>	<p>II. АксіОми взаємного розміщення точок на прямій і площині</p>  <p>Точка B лежить між точками A і C.</p>
 <p>Через точки C і D проходить єдина пряма b.</p>	 <p>Пряма a розбиває площину на дві півплощини α і β. Точки A і B лежать у різних півплощинах; точки C і D (або M і N) лежать в одній півплощині.</p>
III. АксіОми вимірювання та відкладання відрізків і кутів	
 <p>$AB = a > 0$</p>  <p>$AC = AB + BC$</p>	 <p>Відрізок $OA = m$ — єдиний.</p>
 <p>$\angle ABC = n^\circ > 0^\circ$</p>  <p>$\angle COD = 180^\circ$</p>	 <p>$\angle CAB = n^\circ$ — єдиний ($0^\circ < n < 180^\circ$).</p>

Продовження табл. 1

	$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$
IV. Аксиома існування трикутника, що дорівнює даному	
	 $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$
V. Аксиома про паралельні прями	
	$B \notin a$ Через точку B можна провести на площині не більш як одну пряму, паралельну даній.
2. ОЗНАЧЕННЯ, ОЗНАКИ ТА ВЛАСТИВОСТІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР І ВІДНОШЕНЬ	
<p style="text-align: center;">ОЗНАЧЕННЯ</p> <p>включає в себе характеристичні властивості фігури</p>	<p style="text-align: center;">ОЗНАКА</p> <p>дозволяє довести, що фігури, які розглядаються, є такими, що потрібні або зв'язані необхідним співвідношенням (рівність, подібність тощо)</p>
<p>ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ АБО ВІДНОШЕННЯ (рівність, подібність, паралельність, перпендикулярність тощо)</p>	
<p>ВЛАСТИВОСТІ</p>	

Пояснення й обґрунтування

1. Логічна побудова шкільного курсу планіметрії. Аксиоми планіметрії. Шкільний курс геометрії дає уявлення про логічний (дедуктивний) метод побудови наукової теорії. Логічно строгий курс геометрії будують таким чином: перелічують основні геометричні поняття, які вводять без означень, але ∞ властивості виражають в аксіомах; використовуючи основні поняття й аксиоми, дають означення нових понять, формулюють та доводять теореми і таким чином розглядають властивості геометричних фігур. Основні означення та властивості фігур на площині, які вивчали в курсі геометрії 7–9 класів (у так званому курсі планіметрії) наведено в табл. 1–16 додатку.

У шкільних підручниках, як правило, на початку курсу наводять три основних поняття планіметрії: «точка», «пряма», «відстань». Для більшості понять, що розглядаються далі в курсі планіметрії («коло», «круг», «відрізок», «промінь» тощо), дають означення. Але часто наводять не всі аксиоми, необхідні для побудови планіметрії, — для спрощення викладу деякі з аксіом не формулюють, хоча автори їх і використовують.

Наведемо одну з можливих систем аксіом планіметрії. Її запропонував для шкільного курсу геометрії український академік О. В. Погорелов.

Запропоновані аксиоми¹ можна розподілити на п'ять груп (див. також пункт 1 табл. 1).

I. Аксиоми належності.

I₁. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, які не належать їй (рис. 1.1).

I₂. Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну (рис. 1.2).

II. Аксиоми взаємного розміщення точок на прямій і площині (аксиоми порядку).

II₁. Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими (рис. 1.3).

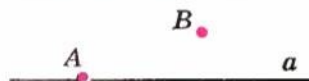


Рис. 1.1



Рис. 1.2

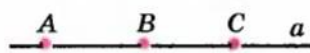


Рис. 1.3

Вираз «точка B лежить між точками A і C » означає те саме, що й вирази: «точки A і C лежать по різні боки від точки B » або «точки B і C лежать по один бік від точки A ». За допомогою прийменника «між» для точок прямої вводять поняття відрізка прямої та півпрямої (променя).

¹ Наведені аксиоми не призначені для запам'ятовування. Учням достатньо орієнтуватися в їх змісті. Більш повну систему аксіом планіметрії наведено на с. 21.

Нагадаємо, що *відрізком* AB називається частина прямої, що лежить між точками A і B (які називають *кінцями відрізка*). *Півпрямую*, або *променем*, називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать по один бік від даної її точки. Ця точка називається *початковою точкою* півпрямой. Різні півпрямі однієї й тієї самої прямої зі спільною початковою точкою називаються *доповняльними*.

Олексій Васильович Погорелов — видатний вітчизняний математик, учений зі світовим ім'ям, академік Національної академії наук України, академік Російської академії наук, заслужений діяч науки і техніки України.

О. В. Погорелов народився 3 березня 1919 р. в селищі Короча Белгородської області (Росія), закінчив Харківський державний університет у 1941 р. і Військово-повітряну академію ім. М. Є. Жуковського (Москва) в 1945 р., навчався в аспірантурі при Московському державному університеті ім. М. В. Ломоносова, працював у великих наукових центрах Радянського Союзу та України. Рідкісне поєднання математичного та інженерного талантів визначило круг наукових інтересів О. В. Погорелова. Його праці відносяться до геометрії «в цілому», основ геометрії, теорії диференціальних рівнянь у часткових похідних, теорії стійкості пружних оболонок, питань кріогенного електромашинобудування.

Погорелов — автор підручників з усіх основних розділів геометрії для вищих навчальних закладів, що вирізняються оригінальністю викладу матеріалу та математичною строгістю. Багато й успішно він працював також над питаннями вдосконалення шкільної математичної освіти. Створений ним підручник геометрії спрямовано на розвиток логічного мислення та здібностей учнів.

На будівлі Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, де навчався і працював О. В. Погорелов, встановлено меморіальну дошку.



II₂. Пряма розбиває площину на дві півплощини.

Це розбиття має такі властивості. Якщо кінці якогось відрізка належать одній півплощині, то відрізок не перетинає пряму.

Якщо кінці відрізка належать різним півплощинам (і не належать даній прямій — границі півплощин, яка входить і до однієї півплощини, і до другої), то відрізок перетинає пряму (рис. 1.4).

III. Аксиоми вимірювання та відкладання відрізків і кутів.

III₁. Кожний відрізок (рис. 1.5, а) має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин (рис. 1.5, б), на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.

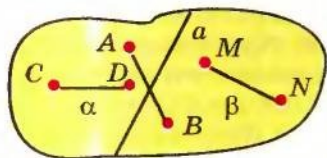


Рис. 1.4

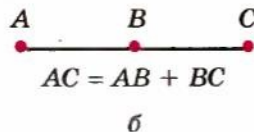
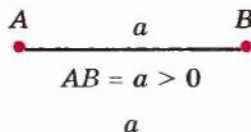


Рис. 1.5

III₂. На будь-якій півпрямій від її початкової точки (рис. 1.6) можна відкласти відрізок даної довжини ($OA = m$), і до того ж тільки один.

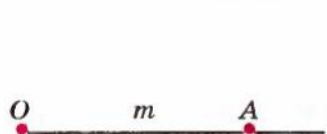


Рис. 1.6

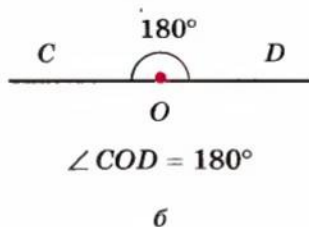
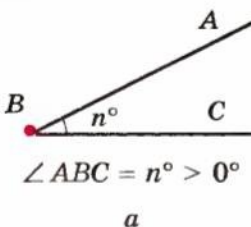


Рис. 1.7

III₃. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля (рис. 1.7, а). Розгорнутий кут дорівнює 180° (рис. 1.7, б). Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами (рис. 1.8).

III₄. Від будь-якої прямої в дану півплощину можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою за 180° , і до того ж тільки один (рис. 1.9).

Аксиоми III₁ і III₂ дозволяють увести поняття координати точки на прямій, тобто поставити у відповідність кожній точці прямої дійсне число так, що коли x_A і x_B — координати точок A і B, то довжина відрізка AB дорівнює $|x_B - x_A|$ (рис. 1.10).

IV. Аксиома існування трикутника, що дорівнює даному.

IV₁. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому, в даному розміщенні відносно даної півпрямой (рис. 1.11).

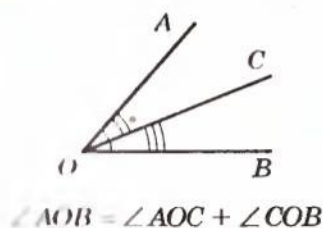


Рис. 1.8

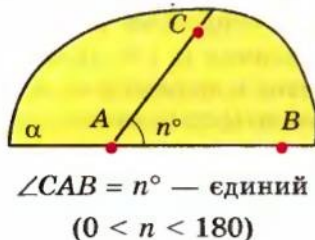


Рис. 1.9

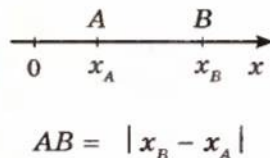
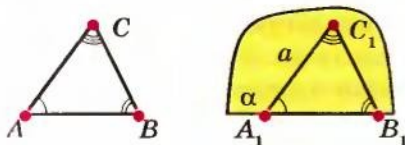


Рис. 1.10

V. Аксиома паралельних прямих.

V₁. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більш як одну пряму, паралельну даній (рис. 1.12).



$$\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$$

Рис. 1.11

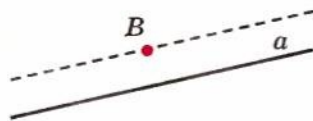


Рис. 1.12

Зазначимо, що для побудови геометрії можна використовувати різні системи аксіом. Наприклад, замість аксіоми паралельних прямих взяти як аксіому твердження: «Сума кутів трикутника дорівнює 180° ». Тоді твердження: «Через точку, що не лежить на даній прямій, на площині можна провести не більш як одну пряму, паралельну даній» доводять як теорему.

У багатьох підручниках планіметрії в ході доведення ознак рівності трикутників використовують не аксіому існування трикутника, рівного даному, а накладання одного даного трикутника на другий. Інакше кажучи, як одне з основних використовують поняття «накладання» і фігури вважають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням. Щоб таке доведення було коректним, потрібно зафіксувати в спеціальних аксіомах властивості накладання. Це можна зробити, якщо, наприклад, розуміти накладання фігур як певну відповідність¹ між точками двох фігур. При цьому не тільки точкам даної фігури, а й будь-якій точці площини ставиться у відповідність певна точка цієї площини, яка задовольняє таким аксіомам:

1. Якщо при накладанні суміщаються кінці двох відрізків, то суміщаються і самі відрізки.

¹ Нагадаємо, що, установлюючи відповідність між двома фігурами, кожній точці однієї фігури ставлять у відповідність єдину точку другої фігури.

2. Довільний кут зі сторонами a і b можна накласти на рівний йому кут зі сторонами a_1 і b_1 двома способами: 1) так, що промінь a суміститься з променем a_1 , а промінь b — з променем b_1 ; 2) так, що промінь a суміститься з променем b_1 , а промінь b — з променем a_1 .
3. Будь-яка фігура дорівнює сама собі.
4. Якщо фігура F дорівнює фігурі F_1 , то фігура F_1 дорівнює фігурі F .
5. Якщо фігура F_1 дорівнює фігурі F_2 , а фігура F_2 дорівнює фігурі F_3 , то фігура F_1 дорівнює фігурі F_3 .

Як бачимо, ці аксіоми відповідають нашим наочним уявленням про накладання і рівність фігур.

Нагадаємо, що після введення поняття *руху як перетворення однієї фігури в іншу, при якому зберігаються відстані між відповідними точками*, давалося загальне означення рівності фігур, яке і використовувалося в подальшому курсі планіметрії (див. табл. 5 додатку). *Дві фігури називаються рівними, якщо вони переводяться рухом одна в одну* (тобто дві фігури називаються рівними, якщо існує відповідність між їх точками, при якій відстані між парами відповідних точок фігур рівні).

2. Означення, ознаки та властивості геометричних фігур і відношень. У пункті 2 табл. 1 показано зв'язки між поняттями «означення», «ознака», «властивість» у вигляді схеми (стрілками позначено можливі напрямки використання відповідних тверджень).

Розглянемо, наприклад, означення, ознаку і властивість паралелограма (див. табл. 7 додатку).

<i>Означення</i>	Паралелограм — це чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні
<i>Ознака</i>	Якщо в чотирикутнику діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм
<i>Властивість</i>	У паралелограма діагоналі точкою перетину діляться навпіл

Ураховуючи зміст понять «означення», «ознака» та «властивість» і зв'язки між ними, одержуємо таке. Якщо нам відомо, наприклад, що даний чотирикутник — паралелограм, ми маємо право скористатися його властивостями, які зафіксовані або в означенні (протилежні сторони паралельні), або в спеціальних теоремах (діагоналі в точці перетину діляться навпіл) тощо. А якщо потрібно довести, що даний чотирикутник є паралелограмом, то користуватися його властивостями ми не маємо права. У цьому разі слід звернутися або до означення (довести, що у розглянутого чотирикутника протилежні сторони попарно паралельні), або до

ованки (наприклад, довести, що у даного чотирикутника діагоналі в точці перетину діляться навпіл).

д. **Теорема та її види.** Як уже зазначалося вище, після введення основних понять планіметрії та аксіом, які фіксують властивості цих понять, властивості інших фігур установлювалися доведенням відповідних теорем. Доведення проводилися строго логічним шляхом на основі аксіом і раніше доведених теорем. Таким чином було одержано геометричну систему тверджень, пов'язаних низкою логічних залежностей. Відомості, які використовують для розв'язування планіметричних задач, наведено в додатку «Система опорних фактів курсу планіметрії».

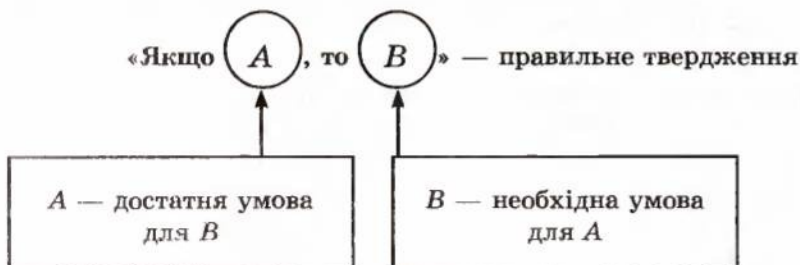
Зазначимо, що практично кожному теорему курсу планіметрії можна сформулювати у вигляді умовного твердження «Якщо A , то B », де літерою A позначено *умову теореми*, а B — її *висновок*. Наприклад, якщо в прямокутному трикутнику позначити довжину гіпотенузи через c , а довжини катетів — через a і b , то *теорему Піфагора* можна сформулювати так: «Якщо трикутник ABC прямокутний з прямим кутом C , то $c^2 = a^2 + b^2$ ». Умовою A цієї теореми є «трикутник ABC прямокутний з прямим кутом C », а висновком B — « $c^2 = a^2 + b^2$ » (квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів).

Якщо поміняти місцями умову і висновок теореми, тобто розглянути твердження «Якщо B , то A », і це твердження буде правильним, то отримуємо так звану *теорему, обернену* до даної. Наприклад, для теореми Піфагора обернене твердження: «Якщо в трикутнику ABC зі сторонами a, b, c $c^2 = a^2 + b^2$, то цей трикутник прямокутний з прямим кутом C » теж правильне. Тому останнє твердження є формулюванням теореми, оберненої до теореми Піфагора. Нагадаємо, що не кожна теорема має обернену. Наприклад, для теореми про суміжні кути: «Якщо два кути суміжні, то їх сума дорівнює 180° » (умова A — «два кути суміжні», висновок B — «їх сума дорівнює 180° ») сформулюємо обернене твердження («Якщо B , то A): «Якщо сума двох кутів дорівнює 180° , то ці кути суміжні»). Це твердження неправильне, тому що, наприклад, сума двох вертикальних прямих кутів дорівнює 180° , але ці кути не є суміжними. Отже, для теореми про суміжні кути не існує оберненої теореми.

4. Необхідна і достатня умови¹. Деякі математичні твердження іноді формулюють з використанням понять «необхідна умова» і «достатня умова». Пояснимо ці терміни.

У випадку, коли умовне твердження «Якщо A , то B » правильне, умову A називають достатньою для умови B , а умову B — необхідною для умови A (див. схему).

¹ Цей матеріал є обов'язковим тільки для класів, які навчаються за програмою профільного рівня.



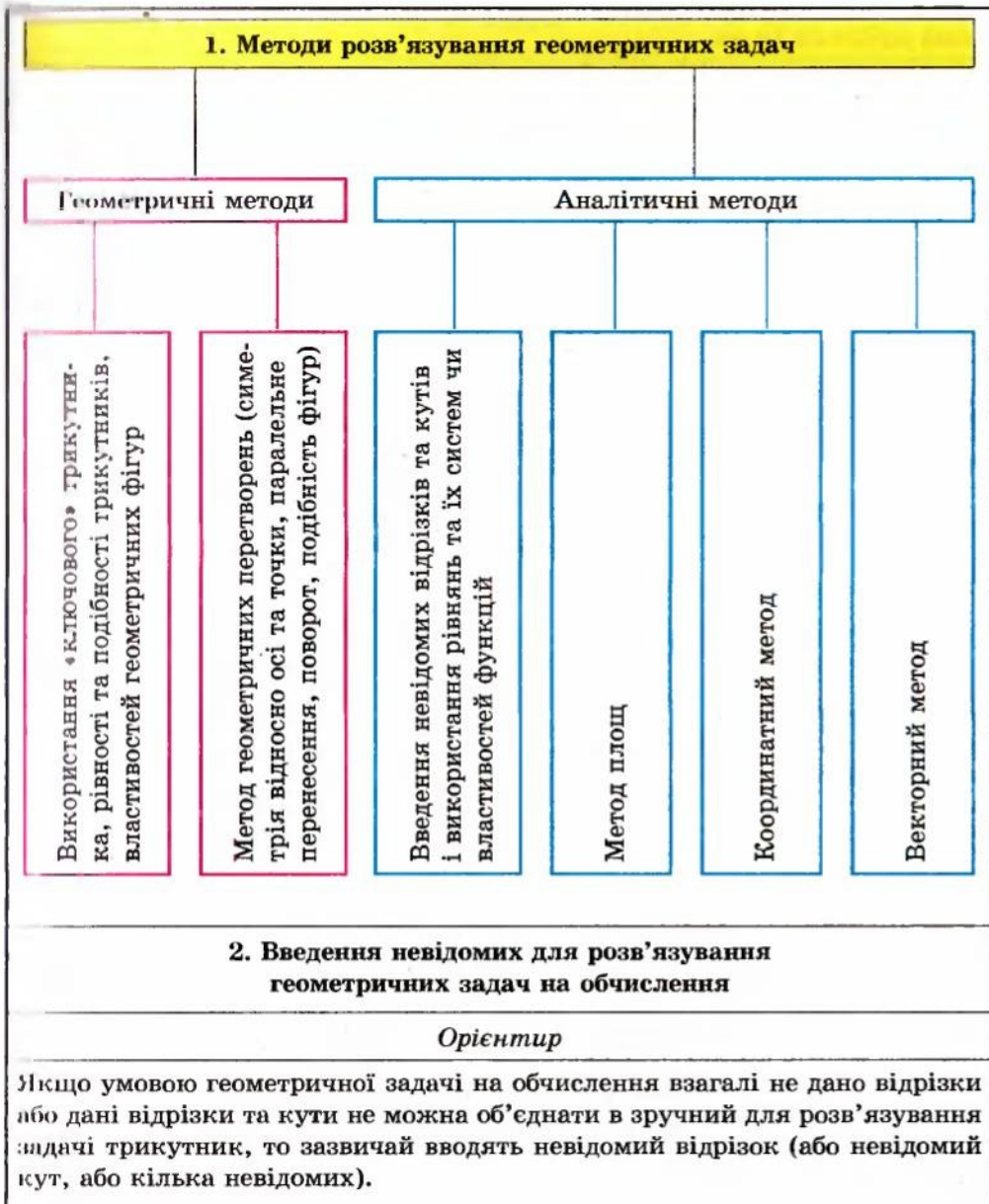
Наприклад, властивість суміжних кутів: «Якщо кути суміжні, то їх сума дорівнює 180° » містить два твердження: «кути суміжні» — твердження A і «їх сума дорівнює 180° » — твердження B . Тоді наведену властивість можна сформулювати так: «Для того щоб кути були суміжні (твердження A), необхідно, щоб їх сума дорівнювала 180° » (твердження B) або так: «Для того щоб сума двох кутів дорівнювала 180° (твердження B), достатньо, щоб ці кути були суміжні» (твердження A).

У випадку, коли правильними є і пряме твердження «Якщо A , то B », і обернене «Якщо B , то A », кожен з умов A і B називають *необхідною і достатньою* для другої. Наприклад, пряму теорему Піфагора і обернену можна сформулювати у вигляді одного твердження: «Для того щоб трикутник був прямокутний, необхідно і достатньо, щоб квадрат однієї сторони дорівнював сумі квадратів двох інших сторін». Іноді замість терміна «необхідно і достатньо» використовують також словосполучення «тоді і тільки тоді». У цьому разі останнє твердження буде сформульовано так: «Трикутник буде прямокутним тоді і тільки тоді, коли квадрат однієї сторони дорівнює сумі квадратів двох інших сторін».

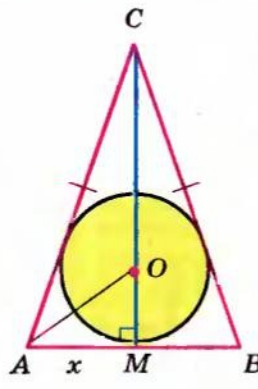
Таким чином, наявність у формулюванні теореми (чи завдання) словосполучення «тоді і тільки тоді» вимагає доведення як прямої, так і оберненої теорем.

1.2. Методи розв'язування планіметричних задач

Таблиця 2

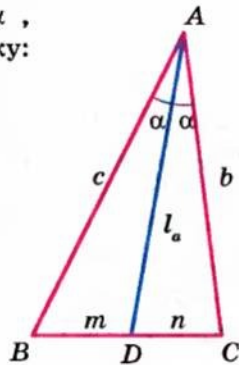


Продовження табл. 2

Приклад	
У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, дорівнює 25 см. Обчисліть площу цього трикутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює 10 см.	
План	Розв'язання і коментар
1. Позначимо якоюсь буквою, наприклад x , невідомий відрізок (або кут, або кілька невідомих).	<p>Нехай у рівнобедреному трикутнику ABC ($AC = CB$) медіана $CM = 25$ см (яка є і бісектрисою, і висотою) та радіус вписаного кола $OM = 10$ см. Ці відрізки не є сторонами одного трикутника. Тому для розв'язання задачі виберемо який-небудь відрізок як невідомий. Необхідно, щоб вибраний відрізок разом із даними відрізками утворював зручні для розв'язування трикутники.</p> <p>Нехай $AM = x$, де $x > 0$. Цей відрізок можна об'єднати в прямокутні трикутники і з медіаною CM, і з радіусом OM.</p> 
2. Спробуємо скласти рівняння (чи систему) з уведеним невідомим.	<p>Із $\triangle AMC$: $AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{x^2 + 25^2} = \sqrt{x^2 + 625}$. Щоб скласти рівняння, скористаємось тим, що центр вписаного кола лежить у точці перетину бісектрис: AO — бісектриса кута BAC. Тоді AO є також і бісектрисою $\triangle AMC$. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника (див. пункт 3 табл. 2) $\frac{AC}{AM} = \frac{CO}{OM}$, тобто $\frac{\sqrt{x^2 + 625}}{x} = \frac{15}{10}$.</p>
3. Розв'язуємо одержане рівняння (чи систему рівнянь) або перетворюємо його (її) таким чином, щоб дістати відповідь на запитання задачі). З одержаних розв'язків вибираємо ті, які задовольняють умові геометричної задачі.	<p>Підносячи обидві частини одержаного рівняння до квадрата та розв'язуючи останнє рівняння, отримуємо: $x^2 = 500$. Звідси</p> $x = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}.$ <p>(Оскільки $x > 0$, то другий корінь одержаного рівняння $x = -\sqrt{500} = -10\sqrt{5}$ не задовольняє умові задачі, і його не записують до розв'язання).</p>

Закінчення табл. 2

5. Користуючись знайденою величиною, даємо відповідь на запитання задачі.	Тоді $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CM = AM \cdot CM = 25x = 250\sqrt{5}$ (см ²). Відповідь. $250\sqrt{5}$ см ² .
3. Використання методу площ для розв'язування геометричних задач	
<i>Зміст деяких варіантів методу площ</i>	
<i>Розбити даний многокутник на частини і записати окремо площу всього многокутника і окремо суму площ його частин та порівняти одержані величини.</i>	
<i>Щоб знайти відношення відрізків, розміщених на одній прямій, іноді буває корисним замінити відношення відрізків відношенням площ трикутників зі спільною вершиною, основами яких є розглядувані відрізки.</i>	
Приклад	
Доведіть, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, довжини яких пропорційні довжинам прилеглих сторін трикутника.	
<i>План</i>	<i>Розв'язання</i>
Щоб знайти відношення відрізків BD і DC , спробуємо знайти відношення площ трикутників ABD і ACD зі спільною вершиною A , основами яких є дані відрізки (тоді, і висота цих трикутників, проведена з вершини A , буде спільною).	<p>Нехай $AD = l_a$ — бісектриса трикутника ABC зі сторонами $AB = c$, $AC = b$ і $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$, $BD = m$, $DC = n$. Тоді, з одного боку:</p> $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} cl_a \sin \alpha, \quad S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} bl_a \sin \alpha$ $\text{і } \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} cl_a \sin \alpha}{\frac{1}{2} bl_a \sin \alpha} = \frac{c}{b}. \quad (1)$ <p>З іншого боку: $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} mh_a$,</p> $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} nh_a \quad \text{і} \quad \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} mh_a}{\frac{1}{2} nh_a} = \frac{m}{n}. \quad (2)$ <p>Прирівнюючи праві частини виразів (1) і (2), одержуємо $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$, що і потрібно було довести.</p>



Пояснення й обґрунтування

У курсі планіметрії 7–9 класів ви розглянули значну кількість геометричних задач та їх розв'язань різними методами. Дамо короткий огляд розглянутих типів задач та методів їх розв'язування.

За вимогою геометричної задачі їх можна поділити на такі типи: на доведення, на обчислення, на побудову, на дослідження. Задачі кожного із цих типів розв'язують різними методами, які умовно поділяють на геометричні та аналітичні (див. пункт 1 табл. 2).

Нагадаємо, що значна частина теорем курсу планіметрії стосувалася геометрії трикутника. Це не випадково, оскільки розв'язування багатьох задач зводиться до розгляду одного чи декількох трикутників. Тому, говорячи про геометричні методи розв'язування планіметричних задач, можна умовно виділити метод «ключового» трикутника. За цим методом у даній фігурі потрібно знайти трикутник (або декілька трикутників), до дослідження якого (яких) зводиться розв'язування задачі. Інколи з цією

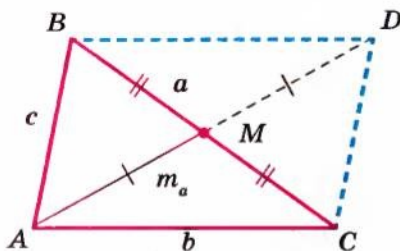


Рис. 1.13

метою спочатку слід виконати якусь додаткову побудову, наприклад у чотирикутнику провести діагональ. Деякі з часто використовуваних додаткових побудов корисно пам'ятати. Зокрема, якщо в умові задачі фігурує медіана трикутника, то буває зручним продовжити цю медіану за сторону на таку саму відстань і доповнити рисунок до паралелограма. Наприклад, у трикутнику ABC зі сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (рис. 1.13) продовжимо медіану AM за сторону BC на відстань ($MD = AM = m_a$) та з'єднаємо відрізками точку D з точками B і C . Тоді отримаємо паралелограм $ABDC$, оскільки його діагоналі в точці перетину діляться навпіл (табл. 7 додатку). Але сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін:

$$AD^2 + BC^2 = 2(AC^2 + AB^2), \text{ або } (2m_a)^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2).$$

Звідси

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Іноді додаткові побудови здійснюють, використовуючи певні геометричні перетворення (див. табл. 5 додатку). Наприклад, розв'язуючи задачі, пов'язані з трапецією, часто буває зручним використати паралельне перенесення її бічної сторони або діагоналі (див. у табл. 10 додатку другу і третю додаткові побудови).

Розв'язуючи геометричні задачі на доведення, слід пам'ятати, що твердження деяких з них доводять *методом від супротивного*. Нагадаємо його зміст:

1. *Робимо припущення, протилежне тому, що потрібно довести.*
2. *Спираючись на аксіоми та теореми, отримуємо з припущення наслідок, який суперечить умові або відомій властивості.*
3. *Робимо висновок, що наше припущення неправильне, а правильне твердження, що потрібно довести.*

Використовуючи метод доведення від супротивного, як правило, рисунки виконують до тієї геометричної ситуації, яка впливає з припущення. Наприклад, розв'язання задачі «Доведіть, що на площині *пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає і другу пряму*» може бути таким.

● 1) Нехай прямі a і b паралельні. Припустимо, що пряма c , що перетинає пряму a в точці A , не перетинає пряму b (рис. 1.14).

2) Отже, пряма c паралельна прямій b . Але тоді через точку A проходять дві прямі a і c , паралельні прямій b , що суперечить аксіомі паралельних.

3) Таким чином, наше припущення неправильне, і пряма c обов'язково перетне і пряму b . ●



Рис. 1.14

Пристаюючи до розв'язування геометричної задачі, слід ураховувати, що майже кожна геометрична задача потребує індивідуального підходу, винахідливості та інтуїції. Проте можна дати деякі загальні рекомендації, що будуть корисні під час розв'язування багатьох задач.

Розв'язування практично будь-якої геометричної задачі починають з рисунка. Він повинен бути досить лаконічним. *Слід зображати лише «функціонуючі» частини геометричних фігур*. Так, наприклад, якщо в задачі розглядають радіус описаного кола, то часто можна не зображати коло (а зобразити тільки його центр і радіус). Але якщо в умові задачі йдеться про точку кола, то його зображення може бути корисним для розв'язання. *Необхідно уникати надмірного ускладнення рисунка*. Для цього можна, наприклад, виконати виносні рисунки, що зображають фрагменти даної конфігурації. З іншого боку, корисно безпосередньо на рисунку вказувати числові чи буквені значення лінійних або куткових величин. Зазначимо, що є такі задачі, у процесі розв'язування яких доводиться уточнювати особливості конфігурації, що розглядається, та переробляти початковий рисунок таким чином, що остаточного вигляду він набуває лише одночасно із закінченням розв'язування.

Розв'язуючи геометричну задачу, треба спиратися не лише на рисунок. Він може «підказати», що якісь точки лежать на одній прямій чи на одному колі. Проте в процесі розв'язування ці особливості розміщення точок повинні бути обґрунтовані без посилань на рисунок. Інколи рисунок може стати причиною неповного розв'язування задачі, оскільки ті співвідношення, які виконують на ньому і здаються очевидними, насправді потребують спеціального обґрунтування. Тому завжди намагайтеся зобразити всі можливі конфігурації, а потім за допомогою міркувань відкинути зайві (якщо ці зайві дійсно є). Нагадаємо, що додаткові побудови на початковому рисунку, якими вводять нові відрізки та кути, іноді полегшують розв'язування задачі.

У задачах на обчислення має сенс спочатку, не проводячи обчислень, визначити, які взагалі відрізки та кути можна знайти, виходячи з даних величин. Як тільки до цього переліку потрапить потрібний відрізок чи кут, можна легко скласти ланцюжок послідовних обчислень, що приведе до визначення шуканої величини. Іноді такий «прямий пошук» корисно доповнити пошуком плану розв'язування задачі «від шуканого», тобто виходячи з вимоги задачі (наприклад, «щоб знайти площу вписаного круга, достатньо знайти його радіус»).

Проте ці способи не завжди вдається застосувати. У таких випадках дуже часто допомагає алгебраїчний метод розв'язування геометричних задач на обчислення, пов'язаний із введенням невідомих та складанням рівняння або системи рівнянь. У пункті 2 табл. 2 наведено орієнтир, який дає змогу розпізнавати ситуації, коли потрібно вводити невідомі відрізки та кути, а також приклад відповідного розв'язання. Використовуючи цей метод для складання рівняння до задачі, часто поряд з вираженням даних елементів через невідомі зручно величину якогось елемента з розглядуваної конфігурації виразити двічі через введені невідомі. Крім того, не завжди, склавши рівняння чи систему рівнянь до геометричної задачі, доцільно прагнути повністю їх розв'язати. З одержаного рівняння чи системи, у першу чергу, слід знаходити ті невідомі (чи їх комбінацію), які дозволять дати відповідь на запитання задачі (див. розв'язання задачі 2 на с. 23).

У табл. 2 (пункт 3) показано можливість використання методу площ для розв'язування планіметричних задач. Зміст та приклади застосування координатного та векторного методів для розв'язування геометричних задач розглянуто в § 2.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. У рівнобічній трапеції висота дорівнює 8 см, основи дорівнюють 21 см і 9 см. Знайдіть радіус описаного навколо трапеції кола.

Розв'язання

► Нехай у трапеції $ABCD$ (рис. 1.15) $AB = CD$, $AD = 21$ см, $BC = 9$ см, $BK = 8$ см ($BK \perp AD$). Якщо коло проходить через чотири точки A, B, C, D , то воно також проходить через будь-які три із цих точок і тому збігається з колом, описаним навколо трикутника ABD .

Знайдемо радіус кола, описаного навколо трикутника ABD . Якщо CM — друга висота даної рівнобічної трапеції, то, ураховуючи рівність прямокутних трикутників ABK та DCM і те, що $AD \parallel BC$ і $BCMK$ — прямокутник, одержуємо:

$$AK = MD = \frac{21-9}{2} = 6 \text{ (см)}.$$

Тоді з $\triangle ABK$:

$$AB = \sqrt{AK^2 + BK^2} = 10 \text{ (см)}.$$

З прямокутного трикутника BKD :

$$BD = \sqrt{BK^2 + KD^2} = 17 \text{ (см)}.$$

Таким чином, радіус кола, описаного навколо трикутника ABD (а отже, і навколо трапеції $ABCD$), дорівнює

$$R = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4S_{\triangle ABD}} = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4 \cdot \frac{1}{2} AD \cdot BK} = 10,625 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 10,625 см. ◀

Коментар

Спробуємо виділити «ключовий» трикутник для розв'язування задачі. Для цього проведемо діагональ BD трапеції і згадаємо, що коло, яке проходить через вершини трикутника ABD , є описаним навколо трикутника. Обчислити його радіус можна за кількома формулами (табл. 11 додатку), зокрема:

$$R = \frac{a}{2\sin A} \text{ та } R = \frac{abc}{4S_{\triangle}}.$$

Із цих формул вибираємо ту, для якої легко знайти всі величини, що входять до її запису: $R = \frac{abc}{4S_{\triangle}}$. (Одну сторону трикутника ABD дано за умовою, а дві інші легко визначити з відповідних прямокутних трикутників.)

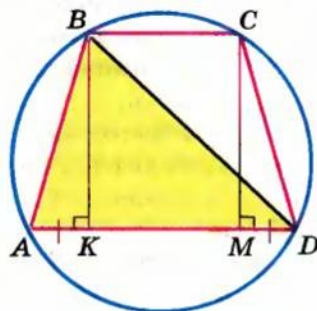


Рис. 1.15

Задача 2. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 24 см, а його площа — 24 см². Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

Розв'язання

► Нехай у прямокутному трикутнику ABC (рис. 1.16): $\angle C = 90^\circ$, $r = 24$ см, $S = 24$ см².

Коментар

Оскільки в умові цієї геометричної задачі на обчислення не дано жодного відрізка, для розв'язування такої

Позначимо $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$).

Записуючи дані периметр і площу та теорему Піфагора, одержуємо систему

$$\begin{cases} a + b + c = 24, \\ \frac{1}{2}ab = 24, \\ a^2 + b^2 = c^2. \end{cases}$$

З першого рівняння $a + b = 24 - c$.
Тоді

$$(a + b)^2 = (24 - c)^2$$

або

$$a^2 + b^2 + 2ab = 24^2 - 48c + c^2.$$

Підставляючи в цю рівність з другого рівняння $ab = 48$ і з третього рівняння $a^2 + b^2 = c^2$, одержуємо

$$c^2 + 96 = 576 - 48c + c^2,$$

звідки $c = 10$ (см). Оскільки радіус описаного кола прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то $R = 5$ см.

Відповідь: 5 см. ◀

задачі доведеться ввести невідомий відрізок (або декілька невідомих відрізків). Щоб записати периметр трикутника, потрібно мати всі його сторони, тому введемо як невідомі всі сторони трикутника: a , b , c . Для складання рівнянь використаємо теорему Піфагора та дані периметр і площу (записавши їх через невідомі). Оскільки в прямокутному трикутнику радіус описаного кола дорівнює половині гіпотенузи (табл. 11 додатку), то, щоб одержати відповідь, достатньо знайти із системи гіпотенузу c , а для цього з першого рівняння системи знайти суму $a + b$, піднести її до квадрата і використати друге та третє рівняння.

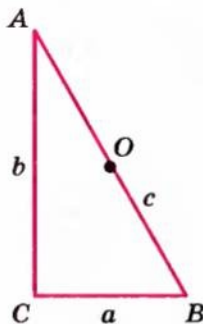


Рис. 1.16

Запитання для контролю

1. Назвіть основні поняття планіметрії.
2. Скільки прямих можна провести через дві різні точки площини? Наведіть відповідну аксіому.
3. Чи завжди через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині пряму, паралельну даній? Скільки таких прямих можна провести? Наведіть відповідну аксіому.
4. Поясніть зміст поняття «обернена теорема» і наведіть приклади прямої та оберненої теорем. Наведіть приклад теореми, яка не має оберненої, та поясніть, чому її немає.

- 5*. На прикладі твердження: «Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм» поясніть зміст понять «необхідна умова», «достатня умова». Сформулюйте дане твердження, використовуючи терміни: а) «необхідно»; б) «достатньо». Чи можна поєднати умову і висновок наведеного твердження терміном «необхідно і достатньо»? Якщо можна, то поясніть чому.
6. У яких випадках для розв'язування геометричної задачі на обчислення зручно вводити невідомі? Поясніть це на прикладі.
7. Поясніть, як можна використовувати метод площ для розв'язування геометричної задачі. Наведіть приклад.

Вправи

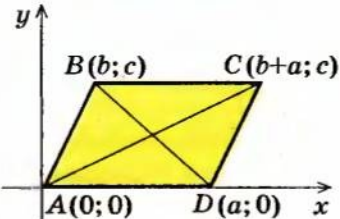
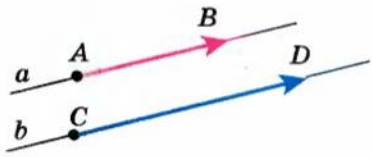
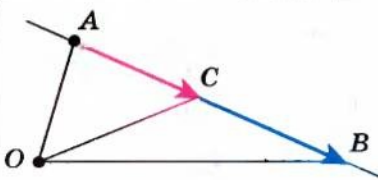
- 1°. У табл. 4 додатку (с. 210) символічно зафіксовано наслідки теореми косинусів. Сформулюйте ці наслідки словесно.
- 2°. Визначте вид (за кутами) трикутника зі сторонами 6 см, 8 см і 11 см.
- 3°. Дано два рівнобедрених трикутники зі спільною основою. Доведіть, що їх медіани до основи лежать на одній прямій.
4. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 12, а кут, протилежний до основи, — 120° . Знайдіть висоти трикутника.
- 5°. У рівнобедреному трикутнику основа і висота, проведена до основи, дорівнюють 4 см. Знайдіть площу круга, описаного навколо цього трикутника.
6. У прямокутному трикутнику висота, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки 9 і 16. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей трикутник.
7. У трикутнику ABC зі сторонами 4 і 6 та кутом між ними 120° знайдіть довжину медіани, проведеної з вершини тупого кута.
8. У трикутнику ABC зі сторонами a і b медіани, проведені до цих сторін, взаємно перпендикулярні. Знайдіть довжину третьої сторони трикутника.
- 9°. Діагональ ромба завдовжки 10 см дорівнює його стороні. Знайдіть другу діагональ і кути ромба.
10. У паралелограмі $ABCD$ проведено бісектрису кута A , яка перетинає сторону BC в точці K . Знайдіть довжину відрізка BK , якщо $DC = 10$ см.
11. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки 5 см і 12 см. Знайдіть катети трикутника.
12. У трапеції паралельні сторони дорівнюють 25 см і 4 см, а бічні сторони — 20 см і 13 см. Знайдіть площу трапеції.

13. Навколо кола описано рівнобічну трапецію, у якої бічна сторона ділиться точкою дотику на відрізки 4 см і 9 см. Знайдіть площу трапеції.
14. У рівнобічну трапецію з бічною стороною 17 см вписано коло, діаметр якого 15 см. Знайдіть основи трапеції.
- 15°. У трапеції, основи якої дорівнюють a і b , через точку перетину діагоналей проведена пряма, паралельна основам. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, який відтинають бічні сторони трапеції.
16. Три кола попарно дотикаються зовнішнім чином. Знайдіть радіуси кіл, якщо відстані між їх центрами дорівнюють 5 см, 7 см і 8 см.
17. У трикутнику ABC зі сторонами $AC = 10$ см, $CB = 20$ см і кутом ACB , рівним 135° , проведено медіану CD . Знайдіть площу трикутника ACD .
18. У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) діагоналі перетинаються в точці O . Доведіть, що площі трикутників ABO і COD рівні (тобто ці трикутники рівновеликі).
19. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, висота якої дорівнює 10 см, а діагоналі взаємно перпендикулярні.
- 20°. Доведіть, що сума відстаней від точки, узятої всередині правильного трикутника, до його сторін дорівнює висоті цього трикутника.
21. У трикутнику ABC кут A прямий, кут B дорівнює 30° . У трикутник вписано коло, радіус якого дорівнює $\sqrt{3}$. Знайдіть відстань від вершини C до точки N дотику цього кола з катетом AB .
22. Середня лінія трапеції дорівнює 10 і ділить площу трапеції у відношенні 3 : 5. Знайдіть довжину основи цієї трапеції.
23. У рівнобедреній трапеції основи дорівнюють 42 і 18, а висота — 16. Знайдіть довжину описаного навколо трапеції кола.
24. У трапеції $ABCD$ з основами AB і CD діагоналі перетинаються в точці E . Знайдіть площу трикутника BCE , якщо $AB = 30$, $DC = 24$, $AD = 3$ і $\angle DAB = 60^\circ$.
25. У трапецію $ABCD$ з основами AD і BC вписано коло із центром O . Знайдіть площу трапеції, якщо $\angle DAB = 90^\circ$, $OC = 2$ і $OD = 4$.
26. Одна з діагоналей паралелограма розбиває його на два рівносторонніх трикутники зі стороною a . Знайдіть довжину другої діагоналі.
27. Знайдіть площу паралелограма, якщо його діагоналі дорівнюють 3 і 5, а гострий кут паралелограма дорівнює 60° .
28. Висота ромба дорівнює 12, а одна з його діагоналей — 15. Знайдіть площу ромба.
29. На площині розміщено квадрат $ABCD$ і точку O . Відомо, що $OB = OD = 13$, $OC = 5\sqrt{2}$ і площа квадрата більша за 225. Знайдіть сторону квадрата і з'ясуйте, де розміщена точка O — усередині квадрата чи поза ним.
30. Квадрат зі стороною 3 см зрізали по кутах так, що утворився правильний восьмикутник. Знайдіть сторону восьмикутника.

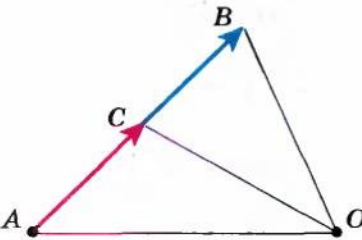
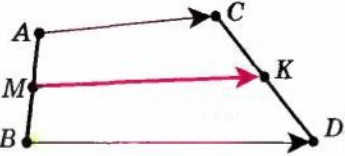
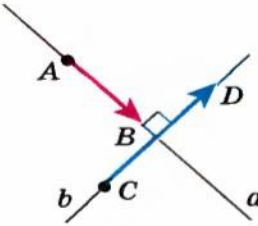
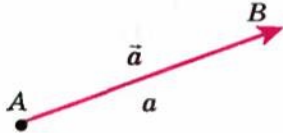
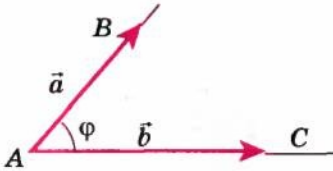
§ 2

ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТ І ВЕКТОРІВ
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Таблиця 3

ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТ І ВЕКТОРІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ			
1. Використання координат для розв'язування геометричних задач			
<p>Приклад 1. Доведіть, що в паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.</p> <p style="text-align: center;"><i>Розв'язання</i></p> <p>Уведемо систему координат так, як її зображено на рисунку. Точка A має координати $(0; 0)$. Якщо позначити координати точки $B(b; c)$, а координати точки $D(a; 0)$, то координати точки C будуть $(b + a; c)$ (поясніть чому). Запишемо в координатах суму квадратів діагоналей і суму квадратів усіх сторін:</p> $AC^2 + BD^2 = (b + a)^2 + c^2 + (b - a)^2 + c^2 = 2b^2 + 2a^2 + 2c^2;$ $2AB^2 + 2AD^2 = 2(b^2 + c^2) + 2a^2 = 2b^2 + 2c^2 + 2a^2.$ <p>Як бачимо, $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$, що і потрібно було довести.</p>			
			
2. Переклад геометричних фактів на векторну мову і векторних співвідношень на геометричну мову			
№ з/п	Рисунок	Твердження геометричною мовою	Твердження векторною мовою
1		Прямі паралельні $a \parallel b$ (прямі a і b не збігаються)	Вектори колінеарні $\overline{AB} = \lambda \overline{CD}$ $\left(\frac{CD}{AB} = \lambda\right)$
2		$C \in \overline{AB}$ $\left(\frac{AB}{AC} = \lambda\right)$	Вектори колінеарні $\overline{AB} = \lambda \overline{AC}$ або $\overline{OC} = p \overline{OA} + (1 - p) \cdot \overline{OB}$

Продовження табл. 3

№ з/п	Рисунок	Твердження геометричною мовою	Твердження векторною мовою
3		$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$	а) $\overline{AC} = \frac{m}{n} \overline{CB}$;
		<p>Точка C — середина AB ($\frac{AC}{CB} = 1$)</p>	б) $\overline{OC} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$
4		Точка M — середина AB , точка K — середина CD	$\overline{MK} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})$
5		$a \perp b$	$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$ $(\overline{AB} \neq \vec{0}, \overline{CD} \neq \vec{0})$
6		$AB = a$	$\bar{a}^2 = \bar{a} ^2,$ <p>де $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{a} = a$. У координатах: $\bar{a} = \sqrt{x_a^2 + y_a^2},$ $\bar{a} = (x_a; y_a)$</p>
7		$\angle BAC = \varphi$	$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{ \bar{a} \cdot \bar{b} }$ <p>де $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AC} = \bar{b}$, φ — кут між векторами \bar{a} і \bar{b}</p>

Закінчення табл. 3

3. Схема розв'язування геометричних задач векторним методом

1. Перекласти вимогу задачі на векторну мову (для цього можна користуватися співвідношеннями, наведеними на с. 27–28).
2. Увести прямокутну систему координат або вибрати два неколінеарних вектори на площині як основні (базисні).
3. Знайти координати векторів, виділених у пункті 1, або виразити ці вектори через основні.
4. Довести або знайти виділене у пункті 1 співвідношення і перекласти результат на геометричну мову (для перекладу знову скористаємося співвідношеннями, наведеними на с. 27–28).

4. Використання векторів (у координатній формі)
для розв'язування геометричних задач

Приклад 2. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Доведіть, що медіани, проведені з вершин A і C , взаємно перпендикулярні.

Розв'язання

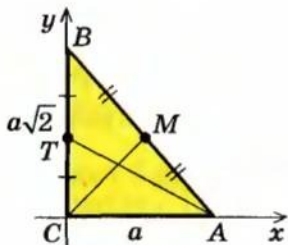
1. Якщо AT і CM — медіани даного прямокутного трикутника, то для доведення їх перпендикулярності достатньо довести, що скалярний добуток відповідних векторів дорівнює нулю, тобто довести, що $\overline{AT} \cdot \overline{CM} = 0$.
2. Уведемо систему координат так, як зображено на рисунку. Тоді точки A , C , B , T , M (T — середина CB , M — середина AB) мають координати: $A(a; 0)$, $C(0; 0)$, $B(0; a\sqrt{2})$, $T(0; \frac{a\sqrt{2}}{2})$, $M(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2})$.
3. Запишемо координати векторів, виділених у пункті 1:

$$\overline{AT} = \left(-a; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right), \quad \overline{CM} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right).$$

4. Знайдемо скалярний добуток цих векторів:

$$\overline{AT} \cdot \overline{CM} = -a \cdot \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0.$$

Але ця рівність і означає, що вектори \overline{AT} і \overline{CM} перпендикулярні, тобто медіани AT і CM взаємно перпендикулярні.



Пояснення й обґрунтування

Уведення координат та векторів для розв'язування геометричних задач дозволяє скласти аналітичну модель даної задачі й використати потужний потенціал курсу алгебри для дослідження цієї моделі. Як правило, це дає змогу уникнути специфічних додаткових побудов, які часто доводиться виконувати, розв'язуючи задачі геометричними методами.

Для розв'язання геометричної задачі координатним методом:

- 1) уводимо прямокутну систему координат;
- 2) записуємо координати даних точок;
- 3) записуємо в координатах дані та шукані співвідношення, які пов'язані з умовою і вимогою задачі, та аналізуємо одержані співвідношення з метою отримання відповіді на запитання задачі.

Приклад застосування координат до розв'язування геометричної задачі наведено в пункті 1 табл. 3.

Слід урахувати, що координатний чи векторний методи зручно використовувати тоді, коли після введення системи координат або основних векторів (так званих *базисних векторів*, через які виражають усі інші вектори) легко записати всі геометричні співвідношення, дані умовою та вимогою задачі. Частина таких співвідношень у координатній та векторній формах наведено в табл. 13 додатку, а частину — у пункті 2 табл. 3. У пункті 3 цієї таблиці наведено схему розв'язування геометричної задачі векторним (чи векторно-координатним) методом, а в пункті 4 — застосування запропонованої схеми.

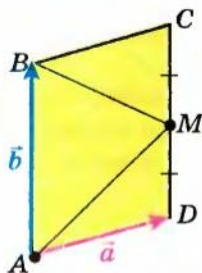


Рис. 2.1

Приклади розв'язання задач

Задача. У паралелограмі $ABCD$ (рис. 2.1) $AB = 2BC$ і точка M — середина сторони CD . Довести, що відрізки AM і BM перпендикулярні.

Розв'язання

► Щоб довести, що відрізки AM і BM перпендикулярні, достатньо довести, що скалярний добуток векторів \overline{AM} і \overline{BM} дорівнює нулю. Виберемо основні вектори:

$$\overline{AD} = \vec{a} \text{ і } \overline{AB} = \vec{b}.$$

Виразимо потрібні нам вектори \overline{AM}

Коментар

Спробуємо розв'язати цю задачу векторним методом (без уведення системи координат). Для цього використаємо схему розв'язування, наведену в пункті 3 табл. 3:

- 1) *перекласти вимогу задачі на векторну мову* (враховуючи співвідношення 5, наведені в

і \overline{BM} через основні. Оскільки точка M — середина DC , то $\overline{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$$\text{і } \overline{BM} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Знайдемо скалярний добуток векторів \overline{AM} і \overline{BM} .

$$\overline{AM} \cdot \overline{BM} = \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \frac{1}{4}\vec{b}^2.$$

Але $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2$. Ураховуючи, що за умовою $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$, одержуємо: $\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$, отже, відрізки AM і BM перпендикулярні. \triangleleft

пункті 2 табл. 3, достатньо довести, що $\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$);

- 2) вибрати два неколінеарних вектори на площині як основні (найчастіше вибирають такі, що виходять з однієї точки);
- 3) виразити вектори, виділені в пункті 1, через основні;
- 4) довести або знайти виділене в пункті 1 співвідношення і перекласти результат на геометричну мову (для перекладу знову скористатися співвідношеннями пункту 2 табл. 3).

Запитання для контролю

1. Укажіть основні етапи розв'язування геометричної задачі координатним та векторним методами.
2. Наведіть приклади розв'язування геометричної задачі координатним і векторним методами.

Вправи

- 1°. На рисунку 2.2 зображено прямокутний трикутник з катетами a і b ($a > b$). Виберіть систему координат так, щоб початок координат розміщувався у вершині прямого кута, а дві інші вершини — на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника. Запишіть координати середин його сторін.

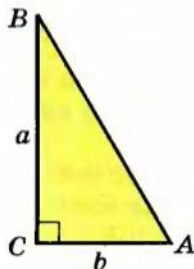


Рис. 2.2

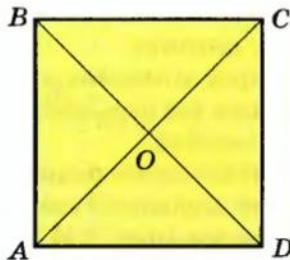


Рис. 2.3

2. На рисунку 2.3 зображено квадрат зі стороною a . Виберіть систему координат так, щоб: 1° три вершини квадрата розміщувалися на

осях координат; 2) усі вершини квадрата розміщувалися на осях координат. Запишіть координати вершин квадрата і точки перетину його діагоналей.

3. На рисунку 2.4 зображено рівнобедрений трикутник з основою $2a$ і висотою b . Виберіть систему координат так, щоб усі його вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати вершин трикутника і середин його сторін.
4. На рисунку 2.5 зображено прямокутник зі сторонами a і b . Виберіть систему координат так, щоб три його вершини розміщувалися на осях координат. Запишіть координати вершин прямокутника і точки перетину його діагоналей.
5. На рисунку 2.6 зображено ромб з діагоналями $2a$ і $2b$. Виберіть систему координат так, щоб початок координат розміщувався в точці перетину діагоналей, а всі вершини — на осях координат. Запишіть координати вершин ромба.

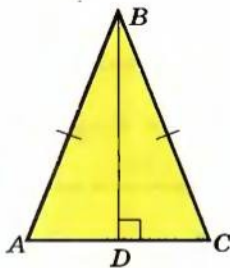


Рис. 2.4

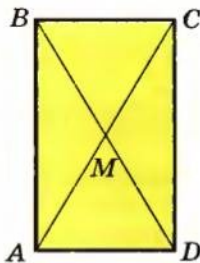


Рис. 2.5

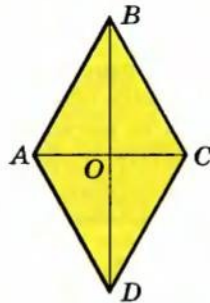


Рис. 2.6

6. За допомогою координат доведіть, що середина гіпотенузи прямокутного трикутника рівновіддалена від усіх його вершин.
7. За допомогою координат доведіть, що сума квадратів відстаней від точки, узятої на діаметрі кола, до кінців будь-якої паралельної йому хорди, постійна.
8. У квадрат зі стороною 2 вписано коло. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки кола до всіх вершин квадрата є величина постійна.
- 9*. За допомогою координат доведіть, що в трапеції сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів бічних сторін плюс подвоєний добуток основ (рис. 2.7).
- 10*. (Теорема Ейлера.) За допомогою координат доведіть, що сума квадратів довжин сторін чотирикутника дорівнює сумі квадратів його діагоналей плюс почотверений квадрат відстані між серединами діагоналей.

- 11*. Обґрунтуйте справедливість співвідношень, наведених у пункті 2 табл. 3.
12. За допомогою векторів доведіть теорему про середню лінію трикутника.
- 13*. За допомогою векторів доведіть теорему про середню лінію трапеції.
14. За допомогою векторів доведіть, що діагоналі ромба перпендикулярні.
15. У прямокутнику $ABCD$ зі сторонами $AD = BC = 4$ і $AB = CD = 5$ на сторонах AD і BC вибрано відповідно точки K і M так, що $AK = 1$ і $BM = 3$. За допомогою векторів доведіть, що прямі BK і MD паралельні.
16. За допомогою векторів знайдіть кут між гіпотенузою прямокутного трикутника та його медіаною, проведеною до більшого катета, якщо катети дорівнюють 6 см і 4 см.
17. За допомогою векторів доведіть, що середини основ трапеції лежать на одній прямій з точкою перетину продовжень бічних сторін.
- 18*. У квадраті $ABCD$ на діагоналі BD взяли таку точку M , що $\frac{BM}{BD} = \frac{2}{3}$, а на стороні BC — таку точку K , що $\frac{BK}{BC} = \frac{1}{3}$. Доведіть, що кут AMK дорівнює 90° .
- 19*. У трикутнику зі сторонами a , b , c довжини сторін пов'язані співвідношенням $a^2 + b^2 = 5c^2$. Доведіть, що медіани, проведені до сторін a і b , перпендикулярні.

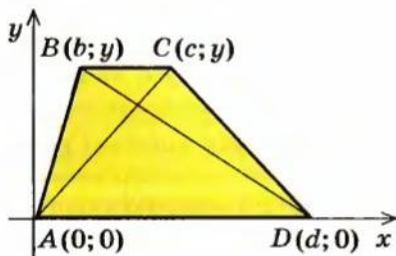


Рис. 2.7



Розділ 2

ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ

ОСНОВНИЙ МАТЕРІАЛ

- § 3. Аксиоми стереометрії та їх найпростіші наслідки
- § 4. Найпростіші задачі на побудову перерізів многогранників

ДОДАТКОВИЙ МАТЕРІАЛ

- § 5. Поняття про аксіоматичний метод у геометрії

В основній частині розділу ви:

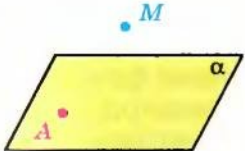
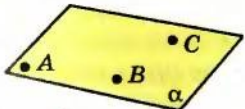
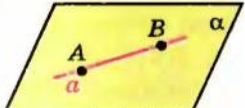
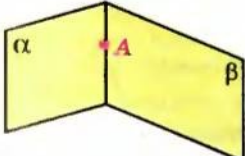
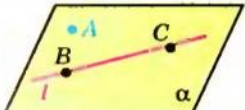
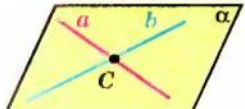
ознайомитеся з основними поняттями й аксіомами стереометрії та наслідками з них;

навчитеся, застосовуючи їх, розв'язувати найпростіші задачі на побудову перерізів куба, прямокутного паралелепіпеда та піраміди.

У додатковій частині розділу ви зможете детальніше ознайомитися із застосуванням у геометрії аксіоматичного методу — одного з методів побудови наукової теорії.

§ 3 АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ ТА ЇХ НАЙПРОСТІШІ НАСЛІДКИ

Таблиця 4

АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ	
Ілюстрація	Формулювання
	<p>Якщо не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.</p> <p>$A \in \alpha$; $M \notin \alpha$.</p>
	<p>Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.</p>
	<p>Якщо дві різні точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.</p> <p>Якщо $A \in \alpha$ і $B \in \alpha$, то $AB \subset \alpha$.</p>
	<p>Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.</p>
<p>Відстань між будь-якими двома точками простору одна і та сама на всіх площинах, що містять ці точки.</p>	
<p>Наслідки аксіом</p>	
	<p>Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.</p>
	<p>Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.</p>

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття про стереометрію. Курс геометрії включає планіметрію і стереометрію. На уроках геометрії в 7–9 класах ви вивчали в основному планіметрію, тобто геометрію на площині. Усі фігури, які розглядають у планіметрії, наприклад трикутник, паралелограм, коло лежать в одній і тій самій площині. Усі точки кожної із цих фігур належать площині. Тому такі фігури називають *плоскими*.

Цього року ми вивчатимемо геометрію в просторі — стереометрію (грецьке слово «стерео» означає просторовий). Таким чином, *стереометрію* називається розділ геометрії, що вивчає просторові фігури та їх властивості. Просторові фігури можуть бути неплоскими (наприклад, куб чи сфера) або плоскими. Усю сукупність точок, які розглядають у стереометрії, називають *простором*. *Фігурою* (або фігурою в просторі) називатимемо довільну множину точок, розташованих у просторі. Зокрема, це всі фігури, розміщені в якій-небудь площині, у тому числі і сама ця площина. Отже, плоскі фігури також є просторовими фігурами. Тому основними властивостями плоских фігур, відомими з курсу планіметрії, ми користуватимемося і в стереометрії.

Проте в стереометрії найважливішими є просторові фігури, що не лежать цілком ні в одній площині, *неплоскі* фігури.

З деякими простими неплоскими фігурами ви ознайомилися в курсі геометрії 9 класу. До них відносять (рис. 3.1): куб (*a*); прямокутний паралелепіпед (*b*); призму (*в*); піраміду (*г-г*); конус (*д*); циліндр (*e*); кулю (*ε*).

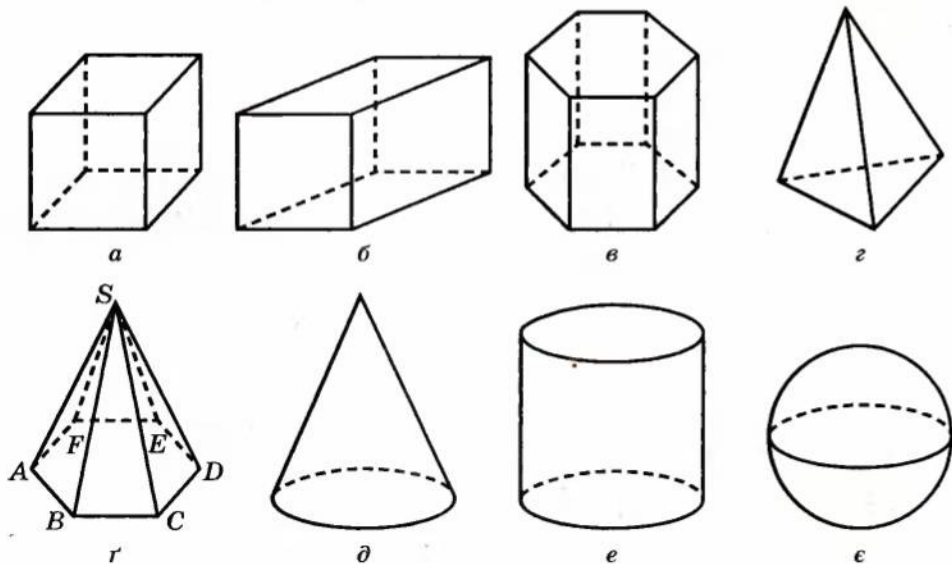


Рис. 3.1

Деякі фігури в просторі ще називають *тілами*¹. Наочно геометричне тіло можна уявити собі як частину простору, що займає фізичне тіло, обмежене деякою поверхнею. Наприклад, поверхня кулі — *сфера* — складається з усіх точок простору, віддалених від однієї точки — центра — на відстань, що *дорівнює радіусу*. Ця поверхня обмежує кулю, яка складається з усіх точок простору, які віддалені від однієї точки — центра — на відстань, що *не перевищує радіуса*.

Куб, паралелепіпед, призма і піраміда є многогранниками. Строге означення многогранника дамо в 11 класі. Проте оскільки ми почнемо працювати з деякими видами многогранників у 10 класі, то нагадаємо означення, відомі вам з курсу геометрії 9 класу, що спираються на наочно-інтуїтивні уявлення.

Многогранником називатимемо обмежене тіло, поверхня якого складається зі скінченного числа плоских многокутників. Кожний із цих многокутників називають *гранню многогранника*, сторони многокутників — *ребрами многогранника* (рис. 3.2). *Вершинами многогранника* називають вершини його граней. Відрізок, що сполучає вершини многогранника, які не належать одній грані, називають *діагоналлю многогранника*.

Нагадаємо, що всі грані куба — квадрати, а всі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники.

Многогранник, дві грані якого — рівні n -кутники, а всі інші n граней — паралелограми, називають *n -кутною призмою*. Рівні n -кутники називають *основами призми*, а паралелограми — *бічними гранями*. Куб і прямокутний паралелепіпед є частковими випадками чотирикутної призми.

Пірамідою називається многогранник, одна з граней якого плоский многокутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину (див. рис. 3.1, $g-r$). Трикутні грані називаються *бічними гранями піраміди*, спільна вершина бічних граней — *вершиною піраміди*, а многокутник — *основаю піраміди*. Відрізки, що сполучають вершину піраміди з вершинами її основи, називаються *бічними ребрами піраміди*. Піраміда називається *n -кутною*, якщо її основою є n -кутник. Піраміда називається *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а всі бічні ребра рівні. Наприклад, якщо в піраміді $SAB CDEF$ (див. рис. 3.1, r) $ABCDEF$ — правильний шестикутник і $SA = SB = SC = SD = SE = SF$, то це правильна шестикутна піраміда.

Трикутну піраміду іноді називають *тетраедром* (див. рис. 3.1, g). Тетраедр, усі грані якого — правильні трикутники, називається *правильним*.

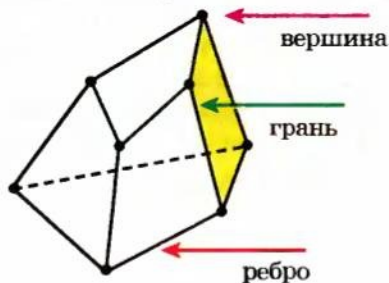


Рис. 3.2

¹ Строге означення тіла та його поверхні буде дано в курсі геометрії 11 класу.

2. Основні поняття стереометрії. Основними фігурами в просторі є точка, пряма і площина. Як і в курсі планіметрії, точки в просторі будемо позначати великими латинськими буквами A, B, C, D, \dots , а прямі — малими латинськими буквами — a, b, c, \dots (або двома точками, що лежать на прямій). Площини позначатимемо малими грецькими буквами — $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, а зображатимемо у вигляді паралелограмів або довільних замкнутих областей



Рис. 3.3

(рис. 3.3). Ці способи зображення відповідають наочному уявленню про площину як про гладеньку поверхню стола, озера¹ (рис. 3.4) тощо. При цьому площину уявляють необмеженою в усі боки, ідеально рівною, що не має ніякої товщини.



Рис. 3.4

Якщо A — точка площини α , кажуть, що *точка A лежить у площині α* , а *площина α проходить через точку A* . Це можна записати так: $A \in \alpha$. Якщо точка M не належить площині α , то це записують так: $M \notin \alpha$ (рис. 3.5).

Якщо кожна точка прямої a належить площині α , то кажуть, що *пряма a лежить у площині α* , а *площина α проходить через пряму a* (рис. 3.6). Це можна позначати так: $a \subset \alpha$. Якщо пряма b не належить площині α , то це позначають так: $b \not\subset \alpha$.

Якщо пряма a і площина α мають тільки одну спільну точку A , то кажуть, що вони *перетинаються в точці A* , і записують так²: $a \cap \alpha = A$. На відповідному рисунку частину прямої, яка «закрита» зображенням площини, вважають невидимою і зображають штриховою лінією (рис. 3.7).

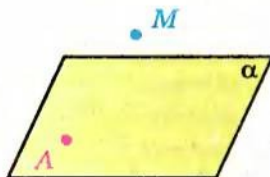


Рис. 3.5

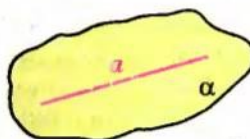


Рис. 3.6

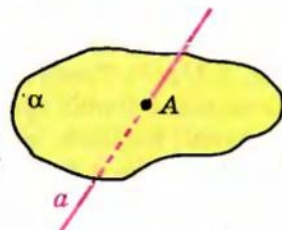


Рис. 3.7

¹ Озеро Синевир у Карпатах.

² У наведеному записі літерою A позначено геометричну фігуру — множину точок, яка складається з однієї точки.

3. Аксиоми стереометрії. У стереометрії, як і в планіметрії, властивості геометричних фігур установлюють шляхом доведення відповідних теорем. Але на початку курсу, коли нам не відомо жодної властивості фігур у просторі, доводиться якісь властивості основних фігур приймати без доведення. Як і в планіметрії, ті властивості основних геометричних фігур, які приймають без доведення, називають *аксіомами*. Нагадаємо, що основними фігурами в просторі є точка, пряма і площина. Аксиоми виражають інтуїтивно зрозумілі властивості площин та їх зв'язок з іншими основними фігурами — точками і прямими.

Аксиома 1. *Якби не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.*

Аксиома 2. *Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.*

Аксиома 3. *Якщо дві різні точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.*

Аксиома 4. *Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку (рис. 3.8).*

Аксиома 5. *Відстань між будь-якими двома точками простору одна і та сама на всіх площинах, що містять ці точки.*

У курсі стереометрії ми будемо також вважати, що для будь-якої площини в просторі мають місце всі основні означення, теореми і аксиоми планіметрії.

Зокрема, на кожній площині між двома вибраними точками є певна відстань — довжина відрізка, що їх сполучає. Хоча дві точки можуть належати одночасно різним площинам, але за аксіомою 5 відстань між ними на кожній із цих площин буде одна і та сама. Після того як вибрано одиничний відрізок, довжину кожного відрізка можна виразити додатним числом. До цього числа приписують назву одиничного відрізка: 2 см, 1,5 км тощо. Якщо одиничний відрізок не має назви, а довжина відрізка AB дорівнює, наприклад, 5 одиницям довжини, то пишемо: $AB = 5$, що є скороченням запису $AB = 5$ одиниць.

Аксиома про відстані дозволяє порівнювати фігури, розміщені на різних площинах, зокрема, застосовувати до них теореми про рівність і подібність трикутників.

Користуючись поняттям відстані, можна означити рівність і подібність фігур у просторі абсолютно так само, як це було зроблено в планіметрії. Зокрема,

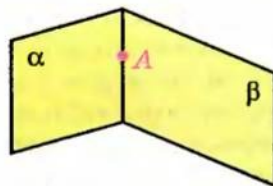


Рис. 3.8

дві фігури називаються *рівними*, якщо існує відповідність¹ між їх точками, при якій відстані між парами відповідних точок рівні².

Так само, як і на площині,

дві фігури називаються *подібними*, якщо існує відповідність між їх точками, при якій відстані між відповідними точками змінюються в одне і те саме число разів.

Інакше кажучи, для двох довільних точок X і Y першої фігури і точок X' і Y' другої фігури, які їм відповідають, справедлива рівність $X'Y' = k \cdot XY$.

Надалі аксіому 5 ми, як правило, будемо використовувати неявно, тобто не посилаючись на неї, на відміну від перших чотирьох аксіом.

4. Наслідки аксіом стереометрії. Використовуючи аксіоми стереометрії, за допомогою логічних міркувань установлюють справедливості інших властивостей. Розглянемо деякі з них.

Теорема 3.1. Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

● *Доведення.* Нехай точка A не лежить на прямій l . Виберемо на прямій l довільні точки B і C (рис. 3.9). Через точки A, B, C , які не лежать на одній прямій l , за аксіомою 2 проходить єдина площина α . За аксіомою 3 пряма l лежить у площині α . Отже, площина α проходить через пряму l і точку A .

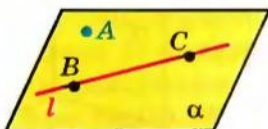


Рис. 3.9

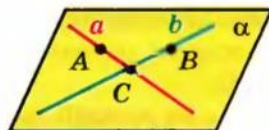


Рис. 3.10

Покажемо, що ця площина єдина. Дійсно, будь-яка інша площина, що проходить через пряму l і точку A , проходитиме також через точки A, B, C . За аксіомою 2 вона повинна збігатися з площиною α . ●

Теорема 3.2. Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

● *Доведення.* Нехай прямі a і b перетинаються в точці C (рис. 3.10). Виберемо на прямій a довільну точку A , а на прямій b — точку B , від-

¹ Нагадаємо, що при встановленні відповідності між двома фігурами кожній точці однієї фігури ставиться у відповідність єдина точка другої фігури.

² Як і на площині, відповідність між двома фігурами, при якій зберігаються відстані між відповідними точками цих фігур, називають *переміщенням*, або *рухом*. Детальніше рух буде розглянуто в курсі геометрії 11 класу.

мінні від точки C . Через точки A, B, C , які не лежать на одній прямій, за аксіомою 2 проходить єдина площина α . За аксіомою 3 пряма a лежить у площині α і пряма b лежить у площині α . Отже, площина α проходить через прямі a і b .

Покажемо, що ця площина єдина. Дійсно, будь-яка інша площина, що проходить через прямі a і b , проходила б також через точки A, B, C . За аксіомою 2 вона повинна збігатися з площиною α . \bullet

Зауваження. Оскільки три точки A, B, C , які не лежать на одній прямій, однозначно визначають деяку площину, то іноді площину, що проходить через ці точки, позначають так: (ABC) .

Вираз «площина ABC » записують також скорочено: «пл. ABC ». Іноколи, щоб підкреслити, що розглядувані чотири або більше точок лежать в одній площині, використовують скорочені записи «площина $ABCD$ » або «пл. $ABCD$ », які означають, що площина проходить через точки A, B, C, D .

З аксіоми 2 та доведених теорем випливає, що площину можна задати:

- 1) трьома точками, які не лежать на одній прямій;
- 2) прямою і точкою, яка не лежить на ній;
- 3) двома прямими, які перетинаються.

Ми домовилися, що для будь-якої площини в просторі мають місце всі основні означення, теореми і аксіоми планіметрії. Тому в нашому викладі система аксіом стереометрії фактично складається з групи аксіом 1–5 стереометрії і з групи аксіом планіметрії (одну з можливих аксіоматик шкільного курсу планіметрії наведено в § 1). Але в планіметрії ми мали одну площину, на якій розміщались усі фігури, що розглядаються. У стереометрії багато, навіть нескінченно багато, площин. Через це розуміння деяких аксіом планіметрії як аксіом стереометрії потребує уточнення.

Наприклад, у будь-якому підручнику планіметрії використовують аксіому I_1 : *якщо b не була прямою, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.*

У планіметрії вона стверджує існування точок поза даною прямою на тій площині, на якій лежить пряма (і всі розглядувані фігури), і саме в такому розумінні застосовувалась у процесі побудови геометрії на площині. У стереометрії ця аксіома набуває іншого змісту. Вона стверджує взагалі існування точок, які не лежать на даній прямій. З неї безпосередньо не випливає, що існують точки поза даною прямою на іншій площині, на якій лежить пряма. Це потребує спеціального доведення. (Таке доведення, а також уточнені формулювання інших аксіом планіметрії див. у § 5.)

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Дано чотири точки, що не лежать в одній площині. Чи можуть три з них лежати на одній прямій?

Розв'язання

► Нехай дано чотири точки A, B, C, D , які не лежать в одній площині. Припустимо, що три з даних точок, наприклад A, B, C , лежать на одній прямій a (а четверта точка D не лежить на цій прямій).

Тоді через три точки A, B, D , які не лежать на одній прямій, за аксіомою 2 можна провести площину α (рис. 3.11). Але за аксіомою 3, якщо дві різні точки A і B прямої a лежать у площині α , то і вся пряма лежить у цій площині, а отже, і точка C теж лежить у площині α . Таким чином, усі чотири точки лежать в одній площині α , що суперечить умові.

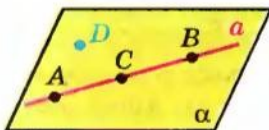


Рис. 3.11

Отже, наше припущення неправильне, і якщо чотири точки не лежать в одній площині, то жодні три з них не лежать на одній прямій. ◀

Задача 2*. Доведіть, що через будь-які дві різні точки простору можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Розв'язання

► Нехай A і B — дві різні точки простору. Виберемо точку C , яка не лежить на одній прямій з точками A і B (за відповідною аксіомою планіметрії).

Коментар

На запитання «Чи може виконуватися дане твердження?» можна дати відповідь:

«Так», і тоді достатньо навести хоча б один приклад, коли це твердження виконується;

«Ні», і тоді потрібно довести, що це твердження ніколи не виконується (найчастіше це доводять методом від супротивного).

Використовуючи метод від супротивного, потрібно:

- 1) зробити припущення, протилежне тому, що ми хочемо довести;
- 2) спираючись на аксіоми та вже доведені теореми, отримати суперечність з умовою або з відомою властивістю;
- 3) зробити висновок, що наше припущення неправильне, а правильне те, що потрібно було довести.

Коментар

У планіметрії твердження «Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну» було аксіомою (див. §1). Проте в стереометрії ця аксіома

Через точки A, B, C , які не лежать на одній прямій, за аксіомою 2 проведемо площину α . У площині α за відповідною аксіомою планіметрії через точки A і B можна провести пряму a . Припустимо, що в просторі через точки A і B можна провести ще одну пряму a_1 , відмінну від прямої a . За аксіомою 3 пряма a_1 лежить у площині α (оскільки дві її точки A і B лежать у площині α). Тоді в площині α через дві різні точки A і B проведено дві різні прямі a і a_1 , що суперечить відповідній аксіомі планіметрії. Отже, через дві різні точки в просторі можна провести тільки одну пряму. \triangleleft

стверджує тільки те, що в розглядуваній площині через дві різні точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Відповідний факт у просторі потребує доведення. Для цього слід використати додатково таку аксіому планіметрії: «Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, які не належать їй».

Ця аксіома і в просторі гарантує існування точок, які не належать даній прямій.

Задача 3. Дано пряму і точку, що не лежить на ній. Доведіть, що всі прямі, які перетинають дану пряму і проходять через дану точку, лежать в одній площині.

Розв'язання

► Нехай дано пряму a в просторі і точку B , яка не лежить на ній. Через пряму a і точку B проведемо площину α (за теоремою 3.1 ця площина єдина). Нехай довільна пряма b проходить через точку B і перетинає пряму a в точці A (рис. 3.12). Тоді точки A і B прямої b належать площині α , отже, за аксіомою 3 і вся пряма b лежить у площині α . Таким чином, усі прямі, які перетинають дану пряму a і проходять через дану точку B , що не лежить на ній, лежать в одній площині α . \triangleleft

Коментар

Спочатку побудуємо площину, яка проходить через дану пряму і точку. Потім доведемо, що всі прямі, які перетинають дану пряму і проходять через дану точку, лежать у цій площині.

Для коректного доведення слід також упевнитися, що побудована площина єдина.

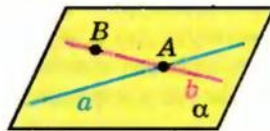


Рис. 3.12

Запитання для контролю

1. Наведіть приклади просторових фігур, плоских фігур, неплоских фігур. Яке мінімальне число точок може містити неплоска фігура?
2. Назвіть основні поняття стереометрії. Сформулюйте аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них.
- 3*. Дайте означення рівності та подібності фігур у просторі.
- 4*. Доведіть, що через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
- 5*. Доведіть, що через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Вправи

- 1°. Поясніть, чому стіл, який має три ніжки, обов'язково стійкий, а про стіл із чотирма ніжками цього стверджувати не можна.
- 2°. (*Жарт.*) Три мухи одночасно злетіли з кришки стола. Чи можуть вони знову опинитися в одній площині?
- 3°. Як можна перевірити якість виготовлення лінійки, якщо є гарно оброблена плоска плита? На який теоретичний факт спирається ця перевірка?
- 4°. Чи можна провести площину через три точки, які лежать на одній прямій? Відповідь поясніть, спираючись на відповідні аксіоми чи наслідки з них.
- 5°. Скільки площин може проходити через три дані точки?
6. Доведіть, що площина і пряма, яка не лежить на ній, або не перетинаються, або перетинаються в одній точці.
7. Доведіть, що існує пряма, яка перетинає дану площину.
8. Точка M належить площині α , а точка N не належить їй. Чи належить площині α середина відрізка MN ? Поясніть відповідь, спираючись на відповідні аксіоми чи наслідки з них.
9. Чи правильно, що можна провести площину через будь-які: 1) дві точки; 2) три точки; 3) чотири точки? Поясніть відповідь, спираючись на відповідні аксіоми чи наслідки з них.
- 10°. Скільки площин можна провести через одну пряму? Обґрунтуйте свою відповідь.
- 11°. Чи можуть дві площини мати: 1) тільки одну спільну точку; 2) тільки дві спільні точки?
- 12°. Чи можуть дві різні площини мати дві різні спільні прямі?
- 13°. Столяр за допомогою двох ниток перевіряє, чи буде стійко стояти на полу виготовлений стіл, який має чотири ніжки. Як потрібно натягнути ці нитки?
14. Як розташовані дві площини, якщо в кожній із них лежить один і той самий трикутник?

15. Доведіть, що існує площина, яка перетинає дану площину.
16. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі AC і BD не перетинаються.
17. Дано площину α і квадрат $ABCD$. Чи може площині α належати: 1) тільки одна вершина квадрата; 2) тільки дві його вершини; 3) тільки три вершини?
- 18*. Дві вершини трикутника належать площині α . Чи належить цій площині третя вершина, якщо відомо, що даній площині належить: 1) точка перетину медіан трикутника; 2) центр вписаного в трикутник кола?
- 19*. Чи кожна точка кола належить площині, якщо відомо, що цій площині належать: 1) дві точки кола; 2) три точки кола?
- 20*. Чи правильно, що через три прямі, які попарно перетинаються, проходить єдина площина?
21. Із прямих і площин, що проходять через вершини куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 3.13), назвіть:
- 1) пари прямих, що перетинаються;
 - 2) трійки прямих, які перетинаються в одній точці;
 - 3) пари площин, що перетинаються;
 - 4) трійки площин, які перетинаються в одній точці.
- 22*. Дано дві прямі, які перетинаються. Доведіть, що всі прямі, що перетинають обидві дані прямі і не проходять через їх точку перетину, лежать в одній площині.
- 23*. Три площини мають спільну точку. Чи правильне твердження, що всі ці площини мають спільну пряму? Скільки прямих можна отримати у разі попарного перетину цих площин?
- 24*. Дано три різні площини, які попарно перетинаються. Доведіть, що коли дві з прямих перетину цих площин перетинаються, то третя пряма проходить через точку їх перетину.
25. Дано чотири точки. Відомо, що пряма, яка проходить через будь-які дві із цих точок, не перетинається з прямою, яка проходить через інші дві точки. Доведіть, що дані чотири точки не лежать в одній площині.
26. Чи лежать в одній площині прямі a, b і c , якщо будь-які дві з них перетинаються, але не існує точки, що належить всім трьом прямим? Виконайте рисунок.
27. Прямі a, b і c , що лежать в одній площині, перетинаються в точці O . Доведіть, що існує площина, яка не проходить через точку O та перетинає три дані прямі a, b і c .

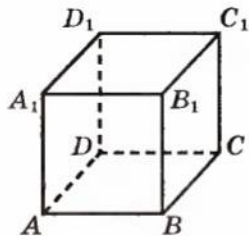
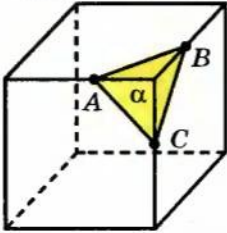
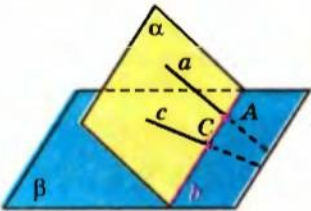
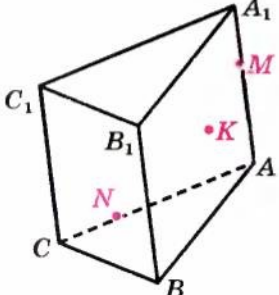


Рис. 3.13

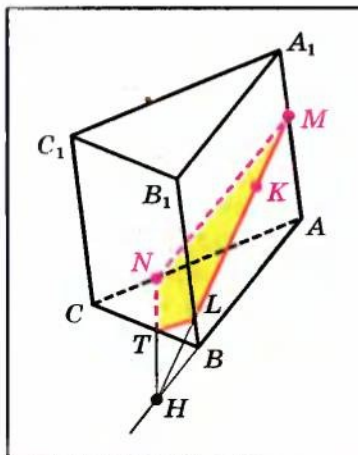
§ 4

НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ
ПЕРЕРІЗІВ МНОГОГРАННИКІВ

Таблиця 5

ПЕРЕРІЗ МНОГОГРАННИКА ПЛОЩИНОЮ	
Означення і зміст побудови	Приклад
<p><i>Перерізом</i> многогранника площиною називається многокутник, який є спільною частиною многогранника і цієї площини.</p> <p>Для побудови перерізу достатньо побудувати відрізки перетину січної площини з відповідними гранями многогранника, а для цього потрібно побудувати точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (або з їх продовженнями).</p>	 <p>Перерізом куба площиною α, яка проходить через точки A, B, C на ребрах куба, що виходять з однієї вершини, є трикутник ABC.</p>
ПОБУДОВА ПЕРЕРІЗІВ МЕТОДОМ СЛІДІВ	
Основні поняття	
 <p>Якщо площина α перетинає площину β по прямій b, то пряма b називається <i>слідом площини α на площині β</i>.</p> <p>Для того щоб отримати слід площини α на площині β (тобто пряму b), достатньо знайти точки перетину двох прямих площини α з площиною β.</p>	
Приклад	
<p>Побудуйте переріз призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через точки K, M, N, де $M \in AA_1$, $N \in AC$ і точка K лежить у грані AA_1B_1B.</p>	
	<p><i>Розв'язання</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Розглянемо допоміжну площину AA_1B_1B. Слід цієї площини на площині основи — пряма AB. 2. У допоміжній площині розглянемо пряму MK, яка лежить у площині перерізу. Її точка перетину з площиною ABC лежить на прямій AB — це точка H (а точка перетину з ребром BB_1 — точка L).

Продовження табл. 5



3. Тоді точка H лежить і в площині перерізу, і в площині ABC . За умовою точка N теж лежить і в площині перерізу, і в площині ABC . Отже, площина перерізу перетинає площину основи по прямій HN (слід січної площини на площині ABC), яка перетинається з прямою BC у точці T .
4. Сполучаючи відрізками точки перетину січної площини з ребрами призми, одержуємо чотирикутник $MNTL$ — шуканий переріз. \triangleleft

Пояснення й обґрунтування

1. Зміст задач на побудову в стереометрії. У планіметрії задачі на побудову найчастіше розв'язували з використанням циркуля і лінійки. За їх допомогою можна будувати відповідні фігури площини (прямі, кола, трикутники тощо). Але не існують креслярські інструменти, які дозволяли б у просторі будувати неплоскі фігури. Із цієї причини завдання на побудову в стереометрії за своїм змістом суттєво відрізняються від конструктивних завдань планіметрії. Стереометричні побудови виконують, у першу чергу, у думках. Вони є більше завданнями на доведення існування фігури, що задовольняє дані умови. Це доведення повинно спиратися на відповідні аксіоми та властивості стереометричних фігур.

Задачі на побудову в стереометрії можна умовно поділити на дві групи: задачі на уявлювані побудови (типу: провести площину через пряму і точку поза нею) і задачі на зображеннях просторових тіл — так звані задачі на проєкційному рисунку. Розв'язання стереометричних задач на побудову зазвичай супроводжують рисунками, що можуть бути двох принципово різних типів. Для задач на уявлювані побудови це, як правило, ескізний рисунок, що ілюструє основні етапи побудови. Під час його виконання допускається певна довільність, якщо вона не приводить до суперечностей з умовою задачі (це, наприклад, рисунки 3.3 та 3.5–3.12). Другий тип рисунка до задачі — це плоске зображення на проєкційному рисунку, виконане з використанням властивостей паралельного проєктування¹. Побудови на проєкційному рисунку однозначно відповідають просторовим побудовам зображуваної фігури в оригіналі.

¹ Властивості паралельного проєктування буде розглянуто в § 9.

2. Задачі на побудову перерізів многогранників. Метод слідів. Під час розв'язування деяких стереометричних задач, пов'язаних із многогранником, доводиться будувати фігуру, що є перетином многогранника з площиною. Якщо такою фігурою є многокутник, то його називають перерізом¹ многогранника. Інакше кажучи,

перерізом многогранника площиною називається многокутник, який є спільною частиною многогранника і площини.

Цю площину ще називають *січною площиною*. У таких задачах зазвичай дано многогранник (тобто зображення многогранника) і потрібно побудувати переріз (тобто зображення перерізу) площиною, яка задана певним чином, найчастіше трьома точками. Для побудови перерізу достатньо побудувати відрізки перетину січної площини з відповідними гранями многогранника. Для цього потрібно побудувати точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (або з їх продовженнями).

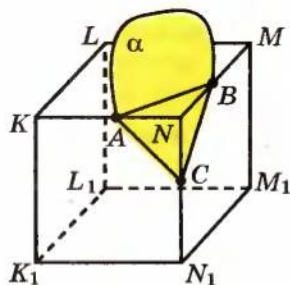


Рис. 4.1

Наприклад, дано зображення куба і три точки A, B, C , які належать ребрам, що виходять з однієї вершини (рис. 4.1). Для побудови перерізу куба площиною α , яка проходить через ці точки, достатньо сполучити їх відрізками.

Дійсно, площина α має з площиною KNN_1K_1 передньої грані куба дві спільні точки A і C . Отже, AC — пряма перетину цих площин, а значить, площина α перетинає передню грань — квадрат KNN_1K_1 по відрізку AC . Аналогічно дана площина α перетинає верхню грань по відрізку AB , а бічну грань — по відрізку BC . Отже, трикутник ABC і є шуканим зображенням перерізу куба.

У складніших випадках, для того щоб побудувати переріз многогранника, часто буває зручним побудувати спочатку *пряму перетину січної площини з площиною якоїсь грані* (так званий «слід» січної площини на цій грані), а потім знайти точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (чи з їх продовженнями). Іноді доводиться розглядати певні допоміжні площини, для яких також будують слід січної площини (або слід допоміжної площини на площині якоїсь грані). Цей метод побудови перерізів часто називають *методом слідів*.

Для того щоб отримати слід (тобто пряму b) площини α на площині β (рис. 4.2), достатньо знайти точки перетину двох *прямих* площини α з площиною β (оскільки

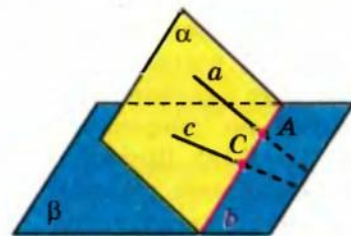


Рис. 4.2

¹ Детальніше побудову перерізів многогранників див. у § 12.

дві точки, наприклад, A і C однозначно визначають пряму b). Відзначимо також, що *точка перетину будь-якої прямої a площини α з площиною β завжди належить сліду площини α на площині β (тобто прямій b)*.

Приклад застосування методу слідів для побудови перерізу призми наведено в табл. 5, а методу слідів і допоміжних площин для побудови перерізу піраміди наведено нижче.

Приклад розв'язання задач

Задача*. Побудуйте переріз піраміди $ABCD$ площиною, що проходить через точки K, L, M (рис. 4.3, а), де $L \in AC$, а точки K і M лежать у гранях ABD і BCD відповідно.

Розв'язання¹

▶ Відразу побудувати «слід» площини перерізу на якійсь із граней не можливо. Розглянемо допоміжну площину DKM . Спочатку знайдемо слід цієї площини на площині основи ABC . Для цього знайдемо точки перетину з площиною основи двох прямих DK і DM з допоміжної площини. Оскільки точка K лежить у площині ABD , то пряма DK перетинає пряму AB (а значить, і площину ABC) у деякій точці E (рис. 4.3, б). Аналогічно точка F перетину прямої DM з прямою BC є точкою перетину прямої DM з площиною основи. Отже, слід допоміжної площини на площині основи — це пряма EF .

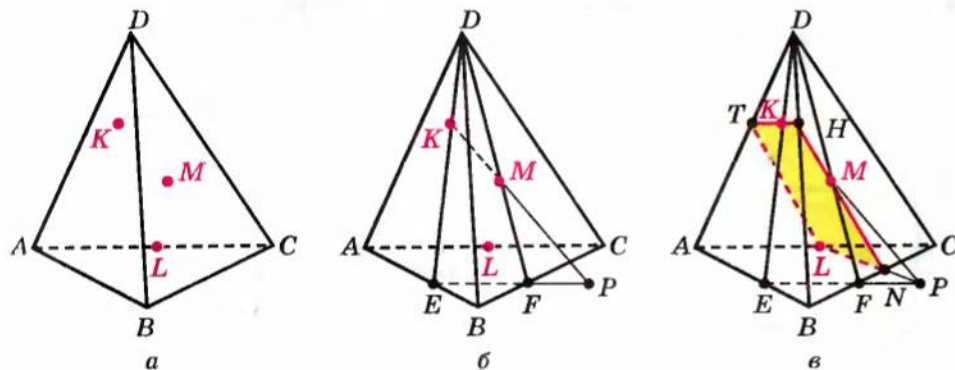


Рис. 4.3

Далі розглянемо в допоміжній площині DKM пряму KM . Оскільки точка перетину прямої KM з площиною основи лежить на прямій EF (на сліді допоміжної площини), то знаходимо точку P перетину прямих KM і EF . Це і буде точка перетину прямої KM з площиною основи ABC .

Точка P лежить у площині перерізу і в площині ABC . Але в цій самій площині лежить і точка L . Отже, площина перерізу перетинає площину

¹ Коментар включено в запис розв'язання.

основи по прямій LP (рис. 4.3, *е*), що перетинається з прямою BC в точці N . Тепер можемо послідовно знайти точки перетину площини перерізу з іншими ребрами піраміди. Точки N і M лежать у площині перерізу та в грані BCD . Тоді пряма NM перетинає ребро BD у точці H — це і буде наступна вершина многокутника перерізу. Аналогічно в площині ABD проводимо пряму HK , яка перетинає ребро AD у точці T , і сполучаємо відрізком точки T і L . Чотирикутник $LNHT$ — шуканий переріз. \triangleleft

Заяпитання для контролю

1. Поясніть, що називають перерізом многогранника площиною. Якою фігурою є переріз многогранника?
2. Поясніть, що називають слідом площини α на площині β . Як можна одержати цей слід, маючи декілька прямих у площині α ?
3. Поясніть на прикладі, як можна побудувати переріз многогранника методом слідів.

Вправи

- 1°. Користуючись зображенням куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, наведеним на рисунку 4.4, назвіть: 1) точку перетину прямої MC ($M \in AA_1$) із площиною $B_1 BC_1$; 2) лінію перетину площин $MC_1 C$ і BCB_1 .
- 2°. За зображенням піраміди, наведеним на рисунку 4.5, назвіть: 1) точку перетину прямої MD ($M \in BD$) і площини ABC ; 2) лінію перетину площин MBC і BEC ($E \in AC$).

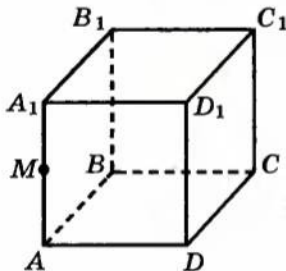


Рис. 4.4

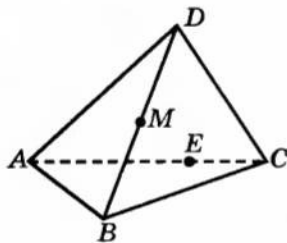


Рис. 4.5

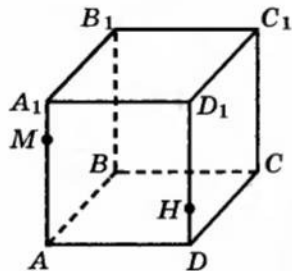


Рис. 4.6

- 3°. Нарисуйте в зошиті зображення куба, наведене на рисунку 4.6, і побудуйте: 1) точку перетину прямої MH з площиною ABC ; 2) лінію перетину площин MHC і ADC .
- 4°. Нарисуйте в зошиті зображення піраміди, наведене на рисунку 4.7, і побудуйте: 1) точку перетину прямої MH з площиною ABC ; 2) лінію перетину площин MHB і ABC .
- 5°. Побудуйте переріз куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через: 1) точки A_1 , B і C_1 ; 2) точки B , D і середину ребра CC_1 .

- 6°. Побудуйте переріз піраміди $ABCD$ площиною, що проходить через:
 1) точки C і D та середину ребра AB ; 2) точку C та середини ребер AD і BD .
- 7°. Користуючись рисунком 4.8, опишіть побудову перерізу трикутної піраміди $SKLM$ площиною, що проходить через точки A, B, C ($A \in KM, B \in SK, C \in SL$), та поясніть правильність її виконання, спираючись на відповідні аксіоми і теореми.

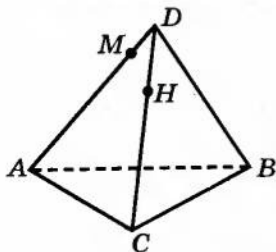


Рис. 4.7

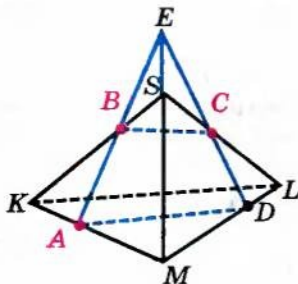


Рис. 4.8

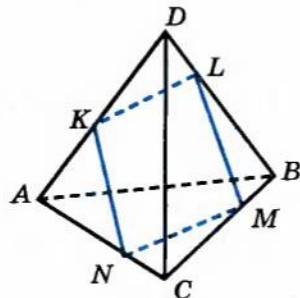


Рис. 4.9

8. Чи може в перерізі тетраедра $ABCD$ площиною бути чотирикутник $KLMN$, зображений на рисунку 4.9?
9. Нарисуйте в зошиті зображення прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 4.10) і побудуйте: 1) точку перетину прямої $D_1 M$ з площиною основи $ABCD$ ($M \in CC_1$ і $CM = \frac{1}{4} CC_1$); 2) точку перетину прямої $D_1 K$ з площиною основи $ABCD$ ($K \in AA_1$ і $AK = \frac{1}{5} AA_1$); 3) слід площини $D_1 K M$ на площині основи $ABCD$; 4) переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через точки D_1, K і M .

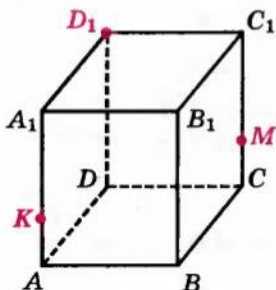


Рис. 4.10

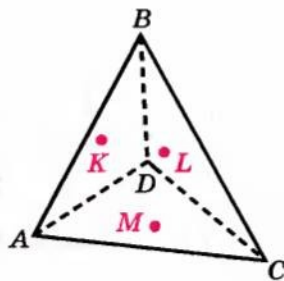


Рис. 4.11

- 10*. Нарисуйте в зошиті зображення піраміди $ABCD$ (рис. 4.11) і побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через точки K , L і M , які знаходяться на гранях ABD , BCD і ACD відповідно.
11. У кубі $ABCA_1B_1C_1D_1$ з ребром a O — точка перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$, точка K — середина ребра DC ; точка M лежить на промені BB_1 , $B_1M = 2a$. Побудуйте переріз куба площиною OKM .
12. Побудуйте переріз піраміди $ABCD$ площиною, яка проходить через точки K , M , N , де K і M — середини ребер DC і BC , а N — точка ребра AB , така, що $AN = \frac{1}{3}AB$.
13. Побудуйте переріз куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через середини M , N , K його ребер AD , DC , BB_1 .
14. Побудуйте переріз куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через середини K , L , M його ребер AA_1 , CC_1 , DC .
15. На рисунках 4.12–4.23 вказано точки M , P і R , які лежать або на ребрах, або на гранях куба. Побудуйте переріз куба площиною MRP для кожного із даних розміщень точок.

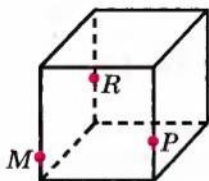


Рис. 4.12

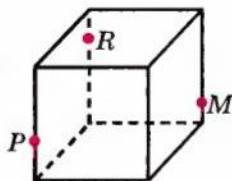


Рис. 4.13

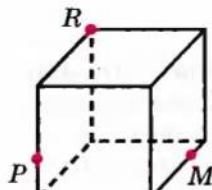


Рис. 4.14

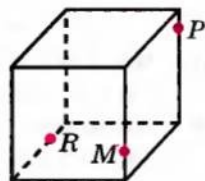


Рис. 4.15

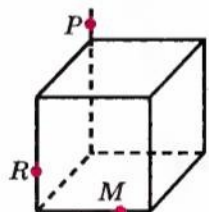


Рис. 4.16

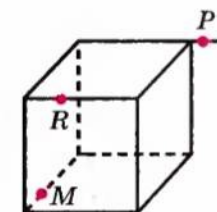


Рис. 4.17

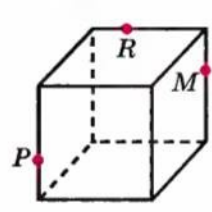


Рис. 4.18

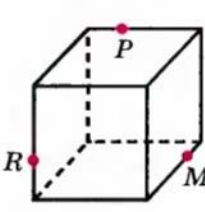


Рис. 4.19

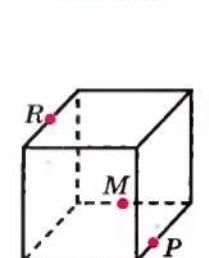


Рис. 4.20

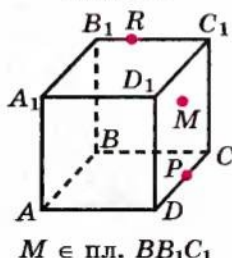


Рис. 4.21

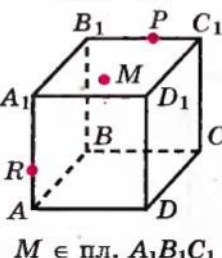


Рис. 4.22

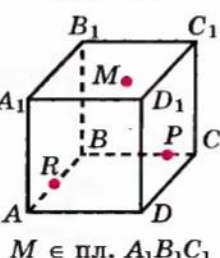


Рис. 4.23

 $M \in \text{пл. } BB_1C_1$ $M \in \text{пл. } A_1B_1C_1$ $M \in \text{пл. } A_1B_1C_1$

§ 5 ПОНЯТТЯ ПРО АКсіОМАТИЧНИЙ МЕТОД У ГЕОМЕТРІЇ

Аксіоматична побудова геометрії. Курс планіметрії, який ви вивчали в 7–9 класах, і запропонований курс стереометрії значною мірою спираються на певні наочні уявлення про геометричні фігури. Разом з тим геометрія як наукова теорія про властивості фігур, розташованих у просторі, може бути побудована логічним (дедуктивним) методом на основі системи аксіом.

Пояснимо суть аксіоматичного методу побудови геометрії. Вводять основні (*неозначувані*) поняття — «фігури» і формулюють основні положення (*аксіоми*), у яких виражені основні співвідношення між основними поняттями¹. Далі, використовуючи основні поняття і основні співвідношення між ними, визначають нові поняття — «фігури», формулюють і доводять нові твердження — *теореми* про властивості введених понять. При цьому доводять теореми строго логічним шляхом, спираючись на аксіоми і раніше доведені теореми. Таким чином одержують геометричну систему тверджень, пов'язаних низкою логічних залежностей.

До системи аксіом висувають такі вимоги. Вона повинна бути:

- 1) *несуперечливою*, тобто такою, щоб із цієї системи аксіом неможливо було одержати логічним шляхом два твердження, які суперечать одне одному, — деяке твердження та його заперечення;
- 2) *незалежною*, тобто такою, щоб жодна з аксіом даної системи не була логічним наслідком інших її аксіом;
- 3) *повною*, тобто такою, щоб за допомогою аксіом тільки цієї системи, не додаючи нових аксіом, можна було довести (або спростувати) строго логічним шляхом будь-яке твердження про властивості фігур даної геометрії.

У шкільних курсах геометрії найчастіше реалізується тільки перша вимога — несуперечливість системи аксіом. Через прагнення досягти більшої наочності і простоти доведень застосовують систему аксіом, яка не є незалежною і, як правило, не є повною². Тому для строгішого і докладнішого викладення матеріалу потрібно доповнити та уточнити запропоновану систему аксіом і обґрунтувати певні властивості, які необхідні для розгляду подальшого матеріалу курсу стереометрії.

Дамо уточнені формулювання³ деяких аксіом планіметрії (які наведено в § 1) для їх використання в стереометрії.

¹ Зауважимо, що крім чисто геометричних у планіметрії та стереометрії використовують деякі основні (неозначувані) поняття, загальні і для інших розділів математики, наприклад, поняття «множина».

² Повна система аксіом евклідової геометрії наведена на с. 59.

³ У наведених формулюваннях уточнення виділено курсивом.

- Пряма, яка належить площині, розбиває цю площину на дві півплощини.
- Від півпрямой на площині, яка містить її, у дану півплощину можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою за 180° , і тільки один.
- На площині через дану точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більше як одну пряму, паралельну даній.

Як уже зазначалося в § 1, аксіома планіметрії I_1 :

яка b не була прямою, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй, у стереометрії набуває дещо іншого змісту. У планіметрії ця аксіома стверджувала існування точок поза даною прямою на тій площині, на якій лежить пряма (і всі розглядувані фігури). Тепер ця аксіома стверджує взагалі існування точок, що не лежать на даній прямій. З неї безпосередньо не випливає, що існують точки поза даною прямою на іншій площині, на якій лежить пряма. Це потребує спеціального доведення.

● Нехай дано площину α і a — пряму в цій площині (рис. 5.1). Доведемо існування точок у площині α , що не лежать на прямій a .

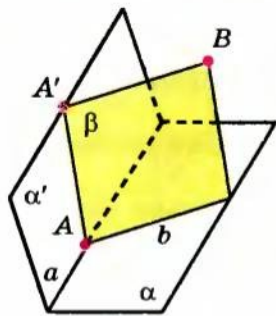


Рис. 5.1

Позначимо точку A на прямій a і точку A' поза площиною α . Через пряму a і точку A' проведемо площину α' . Візьмемо точку B поза площиною α' та проведемо через пряму AA' і точку B площину β . Площини α і β перетинаються по прямій b , яка проходить через точку A і відмінна від прямої a . Точки цієї прямої, відмінні від точки A , лежать у площині α поза прямою a , що й потрібно було довести. ●

Для розгляду деяких стереометричних понять корисно ввести також поняття «розбиття простору на частини кожною з площин».

Пригадаємо, що кожна з прямих на площині розбиває її на дві півплощини (рис. 5.2), що мають такі властивості:



Рис. 5.2

- 1) півплощина, обмежена прямою a , містить цю пряму, але не збігається з нею;
- 2) якщо кінці A і B відрізка AB лежать в одній півплощині (але не належать прямій a), то відрізок AB не перетинає пряму a (рис. 5.2, а);

3) якщо ж кінці A і B відрізка AB належать різним півплощинам (але не належать прямій a), то відрізок AB перетинає пряму a (рис. 5.2, б).

Аналогічно означають і частину простору, обмежену даною площиною, — *півпростір*.

Площина, яка обмежує півпростір, називається його *границею*.

Теорема 5.1. Площина розбиває простір на два півпростори. Якщо точки A і B належать одному півпростору, то відрізок AB не перетинає площину (рис. 5.3, а). Якщо ж точки A і B належать різним півпросторам, то відрізок AB перетинає площину (рис. 5.3, б).

● *Доведення.* Нехай α — дана площина. Позначимо точку D , яка не лежить на площині α . Така точка існує за аксіомою 1 стереометрії. Розіб'ємо всі точки простору, які не лежать на площині α , на два півпростори таким чином. Точку A віднесемо до одного півпростору, якщо відрізок AD не перетинає площину α , і до другого півпростору, якщо відрізок AD перетинає площину α . Покажемо, що це розбиття простору має властивості, названі в теоремі.



Рис. 5.3

Нехай точки A і B належать першому півпростору. Проведемо через точки A , B і D площину α' . Якщо площина α' не перетинає площину α , то відрізок AB теж не перетинає цю площину. Припустимо, що площина α' перетинає площину α (рис. 5.4). Оскільки площини різні, то їх перетин відбувається по деякій прямій a . Пряма a розбиває площину α' на дві півплощини. Точки A і B належать одній півплощині, а саме тій, у якій лежить точка D . Тому відрізок AB не перетинає пряму a , а отже, і площину α .

Якщо точки A і B належать другому півпростору, то площина α' перетинає площину α , оскільки відрізок AD перетинає площину α . Точки A і B належать одній півплощині розбиття площини α' прямою a . Звідси випливає, що відрізок AB не перетинає пряму a , а отже, і площину α .

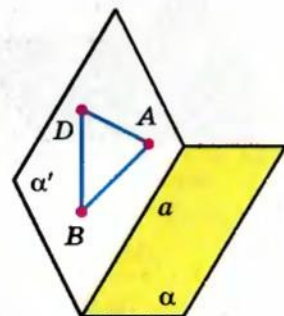


Рис. 5.4

Якщо, нарешті, точка A належить одному півпростору, а точка B — іншому, то площина α' перетинає площину α , а точки A і B лежать у різних півплощинах площини α' відносно прямої a . Тому відрізок AB перетинає пряму a , а отже, і площину α . \bullet

Необхідно зазначити, що в стереометрії існує декілька рівносильних систем аксіом, одну з яких ми і обрали. Якби ми обрали іншу систему, деякі з аксіом, наведених у § 1 і 3, перетворилися б на теореми, а деякі теореми стали б аксіомами.

На виняткове значення властивості про розбиття площиною простору на два півпростори чи не вперше звернув увагу всесвітньо відомий український математик Михайло Васильович Остроградський. Він написав підручник з елементарної геометрії, який справляв величезний вплив на викладання геометрії впродовж усього XIX ст.

Народився М. В. Остроградський у селі Пашенній Кобеляцького повіту Полтавської губернії (тепер це Козельщинський район Полтавської області) в сім'ї дрібного поміщика. З діда-прадіда Остроградські належали до козацької старшини, а сам рід, за легендою, походив від знаменитих волинських державників і просвітителів князів Острозьких; звідси і прізвище — Остроградські. Михайло Остроградський навчався спочатку в Полтавській гімназії, а потім — у щойно відкритому Харківському університеті. Після закінчення університету Остроградський у 1822 р. їде до Парижа, де слухає лекції таких

корифеїв математичної науки, як Лаплас, Пуассон, Ампер, Фур'є, Штурм, Коші, Пуансо та ін. У 1826 р. Огюстен Коші в одній зі своїх праць дуже схвально відгукнувся про успіхи молодого Остроградського. Такий відгук цінився тоді більше від будь-якого диплома. Тож, коли невдовзі Остроградський переїхав до Петербурга, за ним прибула і слава першого математика Росії. Подальшими своїми дослідженнями він неодноразово підтверджував цей почесний статус.

М. В. Остроградський створив велику наукову школу, традиції якої ще й досі помітні в проблематиці математичних досліджень вітчизняних учених. Він був обраний академіком багатьох академій, почесним членом університетів і наукових товариств. Поховали його на батьківщині. У Полтавському педагогічному інституті відкрито музей М. В. Остро-



Михайло Васильович
Остроградський

(1801–1861)

градського. 200-річчя з дня народження видатного українського математика занесено до календаря пам'ятних дат ЮНЕСКО.

У нашому курсі система аксіом (так само, як і в інших підручниках для школи) не є повною. Так, зокрема, із наведеної системи аксіом не випливає, що між двома даними точками прямої обов'язково лежить ще точка цієї прямої. Це здається очевидним, оскільки пряма, за нашими уявленнями, суцільна, неперервна, без «дірок». Але таке уявлення повинне одержати точне означення у вигляді властивості прямої. Аксіоми, які задають цю властивість, — це аксіоми неперервності¹. Ми не наводимо їх, оскільки це утруднило б виклад, тому доводиться частково поступитися строгістю заради наочності і простоти доведення.

Запитання для контролю

1. Поясніть суть аксіоматичного методу побудови геометрії.
2. Які вимоги висувають до системи аксіом? Поясніть суть кожної з вимог.
3. Поясніть, що називається півпростором, який визначається даною площиною α .
4. Сформулюйте теорему про розбиття простору площиною. Поясніть її зміст.
- 5*. Доведіть теорему про розбиття простору площиною.

Вправи

1. На яке найбільше число частин можуть розбивати простір: 1) дві площини; 2) три площини; 3) чотири площини?
2. Поясніть, чому весь простір не може бути півпростором, що визначається деякою площиною α .
3. Чи може площина, що перетинає площину α , бути повністю розташованою в одному з півпросторів, які визначає площина α ?
4. Що можна сказати про взаємне розташування двох півпросторів та їх границь α і β , якщо: 1) перетином² цих півпросторів є площина α ; 2) перетин цих півпросторів збігається з їх об'єднанням?
5. У результаті перетину скількох півпросторів можна отримати: 1) куб; 2) трикутну піраміду?
6. Кінці ламаної, яка складається з двох ланок, лежать по різні боки від площини α . Доведіть, що ламана перетинає площину α .
7. Поясніть, звідки випливає, що в кожному півпросторі лежить нескінченна множина: 1) точок; 2) прямих.
8. Дано $n > 4$ точок, кожні чотири з яких лежать в одній площині. Доведіть, що всі ці n точок лежать в одній площині.

¹ Формулювання аксіом неперервності див. на с. 60.

² Під перетином півпросторів розуміємо фігуру, яка складається з усіх спільних точок цих півпросторів.

9. Дано $n > 3$ прямих, кожні дві з яких перетинаються. Доведіть, що всі n прямих лежать в одній площині або всі проходять через одну точку.
10. Скільки різних площин можуть визначати 5 точок? Дайте всі можливі відповіді. Наведіть відповідні рисунки.
11. Площини α і β перетинаються по прямої a . Через точку A прямої a проведено площину γ , що не містить прямої a . Доведіть, що площина γ перетинає площини α і β по двох різних прямих.
12. Дано площину α та три прямі AB , BC і AC , які перетинають її відповідно в точках A_1 , B_1 і C_1 . Доведіть, що точки A_1 , B_1 і C_1 належать одній прямій.
- 13*. Ребро правильного тетраедра $MABC$ дорівнює 18. Точки P і K є відповідно серединами ребер AM і BM , а точка T ділить ребро MC у відношенні $MT : TC = 4 : 1$. Знайдіть відстань від вершини C до прямої перетину площин TPK і ABC .
- 14*. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ довжина ребра дорівнює 4. Точка M належить ребру AA_1 , $AM = 3$, точка P належить ребру CC_1 і $PC_1 = 1$, точка K ділить ребро DD_1 у відношенні $1 : 3$, починаючи від точки D . Знайдіть відстань від вершини B до прямої перетину площин KMP і ADC .

Відомості з історії

Ідею дедуктивного методу побудови геометрії висунув ще давньогрецький філософ, учень Сократа (469–399 рр. до н. е.), Платон (422–347 рр. до н. е.). Проте дійсним родоначальником наукової теорії логічного виведення вважають учня Платона, давньогрецького мислителя Аристотеля (384–322 рр. до н. е.).

Стосовно геометрії ідеї Аристотеля реалізував давньогрецький математик Евклід (III ст. до н. е.) у своєму трактаті з геометрії «Начала». Протягом 2000 років це творіння Евкліда служило єдиним керівництвом, за яким навчали геометрії; від нього йшли й усі задуми подальшого доконалішого обґрунтування геометрії. Слід зазначити, що система сформульованих Евклідом аксіом (постулатів) потребувала вдосконалення, оскільки була неповною, а тому доведення нерідко «грішили» зверненням до наочності.

Кропітка праця багатьох поколінь математиків світу дозволила створити науковий аксіоматичний метод побудови геометрії. Велика роль у цьому належить відомим німецьким математикам Феліксу Клейну (1849–1925) і Давиду Гільберту (1862–1943). У 1899 р. з'явилося видання «Основ геометрії» Гільберта, де він сконструював аксіоматику таким чином, що логічна структура геометрії стала абсолютно прозорою.

Аксіоматика евклідової геометрії. Сучасна система аксіом евклідової геометрії складається з п'яти груп і спирається на шість основних (неозначуваних) понять. Це — об'єкти трьох видів: точки, прямі та площини і три види відношень між ними, які виражаються словами «належить», «лежить між», «рух».

I. Аксіоми належності.

- I_1 . Через кожні дві точки можна провести пряму, і причому тільки одну.
- I_2 . На кожній прямій лежать принаймні дві точки. Існують хоча б три точки, які не лежать на одній прямій.
- I_3 . Через кожні три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і причому тільки одну.
- I_4 . На кожній площині лежать принаймні три точки та існують хоча б чотири точки, які не лежать в одній площині.
- I_5 . Якщо дві точки даної прямої лежать на даній площині, то і сама пряма лежить на цій площині.
- I_6 . Якщо дві площини мають спільну точку, то вони мають ще одну спільну точку (а отже, і спільну пряму).

II. Аксіоми порядку.

- II_1 . Якщо точка B лежить між точками A і C , то всі три точки лежать на одній прямій.
- II_2 . Для будь-яких точок A і B існує така точка C , що B лежить між A і C .
- II_3 . Із трьох точок прямої тільки одна лежить між двома іншими.
- II_4 . (Аксіома Паша.) Якщо пряма l перетинає одну сторону трикутника (рис. 5.5), то вона перетинає ще й іншу його сторону або проходить через його вершину (відрізок AB означають як множину точок, які лежать між точками A і B ; відповідно означають і сторони трикутника).

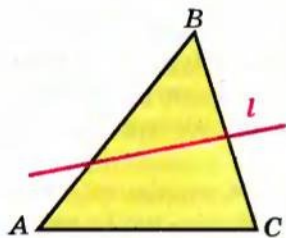


Рис. 5.5

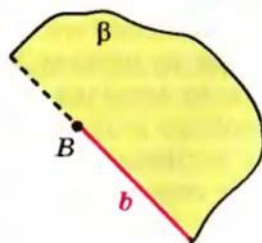
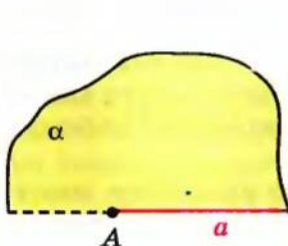


Рис. 5.6

III. Аксіоми руху.

- III_1 . Рух ставить у відповідність точкам точки, прямим — прямі, площинам — площини, зберігаючи належність точок прямим і площинам.
- III_2 . Два послідовних рухи дають знову рух, і для всякого руху є обернений рух.

III₃. Якщо дано точки A, B і півплощини α та β , що обмежені продовженими півпрямими a, b , які виходять з точок A, B (рис. 5.6), то існує рух, і причому єдиний, який переводить точку A , півпряму a , півплощину α відповідно в точку B , пряму b , півплощину β (півпряма і півплощина легко означаються на основі понять належності та порядку).

IV. Аксиоми неперервності.

IV₁. (Аксиома Архімеда.) Усякий відрізок AB можна перекрити меншим відрізком AA_1 , відкладаючи його на AB достатнє число разів: $AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_nA_{n+1}$ (рис. 5.7); відкладання відрізка здійснюється рухом.



Рис. 5.7

IV₂. (Аксиома Кантора.) Для послідовності вкладених відрізків A_nB_n (рис. 5.8), довжини яких прямують до нуля, існує, і притому єдина, точка C , що належить усім відрізкам A_nB_n .

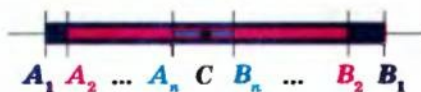


Рис. 5.8

V. Аксиома паралельності.

V₁. Через дану точку поза даною прямою можна провести на площині не більш як одну пряму, що не перетинає дану, тобто не більш як одну пряму, паралельну даній.

У наведеній системі аксіом III група містить аксіоми руху, які запропонував на початку XX ст. німецький математик Ф. Шур. Д. Гільберт до числа основних понять замість руху ввів поняття «конгруентність». Відповідно до цього в системі аксіом Гільберта III група містить п'ять аксіом конгруентності фігур.

За допомогою основних визначають решту понять евклідової геометрії. Усі твердження про властивості геометричних фігур, що їх не містять аксіоми, повинні бути доведені чисто логічним виведенням із цих аксіом. Наведена система аксіом евклідової геометрії має властивості повноти і несуперечності.

Якщо в аксіоматиці евклідової геометрії замінити аксіому паралельності (через дану точку поза даною прямою можна провести на площині не більш як одну пряму, що не перетинає дану, тобто паралельну даній) на твердження, що через точку, що не лежить на даній прямій, проходять хоча б дві прямі, які лежать з даною в одній площині,

ні і не перетинають її, то одержимо іншу систему аксіом. Це система аксіом геометрії Лобачевського, що є теж несуперечливою. У ній аксіома паралельності не залежить від решти аксіом евклідової геометрії.

Здавалося б, нова аксіома суперечить звичайним уявленням. Проте при належному розумінні як ця аксіома, так і вся геометрія Лобачевського мають цілком реальний сенс. Її створив і розвинув російський учений М. І. Лобачевський, який уперше повідомив про неї в 1826 р. Деяко пізніше з тією ж теорією виступив угорський учений Я. Больяї; тому геометрію Лобачевського називають іноді геометрією Лобачевського—Больяї. Її називають також неевклідовою геометрією, хоча термін «неевклідова геометрія» має ширше розуміння, включаючи й інші теорії, що виникли слідом за геометрією Лобачевського і засновані також на зміні аксіом евклідової геометрії.

Геометрія Лобачевського являє собою теорію, багату на зміст, яку застосовують як у математиці, так і у фізиці. Історичне значення геометрії Лобачевського полягає в тому, що її автор показав можливість існування геометрії, відмінної від евклідової. Це ознаменувало нову епоху в розвитку геометрії та математики взагалі.

Як уже відзначалося, у зв'язку з аксіоматичною побудовою геометрії природно виникають три питання:

1. Чи не суперечлива прийнята нами система аксіом, тобто чи не можуть з неї бути виведені шляхом логічних міркувань два наслідки, які суперечать один одному?
2. Чи повна система аксіом, тобто чи не можна її поповнити новими аксіомами, які не суперечили б уже прийнятим і не впливали б із них?
3. Чи незалежні прийняті аксіоми, тобто чи не впливають деякі аксіоми з інших?

Розв'язання цих питань тісно пов'язане з побудовою реалізацій системи аксіом. Реалізація полягає в указанні об'єктів трьох видів довільної природи, що умовно називаються «точками», «прямими» і «площинами». Відношення між ними умовно називають такими словами, як «належить», «лежить між», «рух», для яких у силу їх конкретного змісту виконуються аксіоми.

Справа в тому, що основні поняття геометрії не означають і все, що нам про них відомо, виражається аксіомами. Тому наші висновки відносяться до об'єктів довільної природи, аби тільки для них і відношень між ними виконувалися аксіоми.

Доведення несуперечності системи аксіом зводиться до доведення існування хоча б однієї її реалізації. Доведення незалежності даної аксіоми зводиться до вказівки такої реалізації, у якій виконуються всі аксіоми, окрім цієї. Нарешті, доведення повноти системи аксіом зводиться

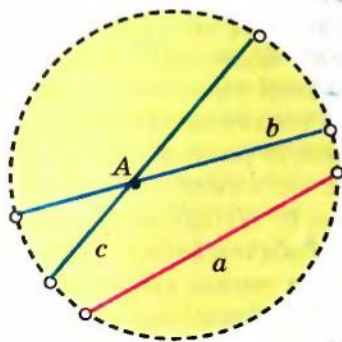


Рис. 5.9

до доведення того, що для всіх реалізацій можна встановити таку взаємно однозначну відповідність між точками, прямими і площинами, при якій відповідні елементи знаходяться в однакових відношеннях.

Наприклад, для геометрії Лобачевського на площині може бути запропонована така реалізація всередині круга на звичайній (евклідовій) площині.

Внутрішню частину якогось круга (тобто круг за винятком кола, що його обмежує) назвемо «площиною». Точкою «площини» буде точка всередині круга (рис. 5.9).

«Прямою» назвемо будь-яку хорду з вилученими кінцями (оскільки коло круга вилучене з «площини»); «рухом» назвемо будь-яке перетворення круга в себе, яке переводить хорди в хорди.

Рівними назвемо відповідно фігури всередині круга, що переводяться одна в іншу такими перетвореннями.

Тоді будь-який геометричний факт, описаний такою мовою, є теоремою або аксіомою геометрії Лобачевського.

Іншими словами, усяке твердження геометрії Лобачевського на площині є не що інше, як твердження евклідової геометрії, що відноситься до фігур усередині круга, лише переформульоване в указаних термінах. Евклідова аксіома про паралельні прямі тут явно не виконується, оскільки через точку A , яка не лежить на даній хорді a (тобто на «прямій» a), проходить скільки завгодно хорд («прямих»), які її не перетинають.

Аналогічно реалізацією геометрії Лобачевського в просторі може бути геометрія всередині кулі, виражена у відповідних термінах («прямі» — хорди, «площини» — плоскі перерізи внутрішньої частини кулі, «рівні» фігури — такі, які переводяться одна в іншу перетвореннями, що переводять кулю в себе і хорди в хорди).

Таким чином, геометрія Лобачевського має абсолютно реальний сенс і така ж несуперечлива, як і геометрія Евкліда.

Розділ 3

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРИ

ОСНОВНИЙ МАТЕРІАЛ

- § 6. Розміщення двох прямих у просторі: прямі, що перетинаються, паралельні прямі, мимобіжні прямі
- § 7. Паралельність прямої та площини
- § 8. Паралельність двох площин
- § 9. Паралельне проектування. Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії

ДОДАТКОВИЙ МАТЕРІАЛ

- § 10. Властивості зображень деяких многокутників у паралельній проекції
- § 11. Центральне проектування. Зображення просторових фігур
- § 12. Методи побудови перерізів многогранників

В основній частині розділу ви:

ознайомитеся з паралельністю прямих і площин у просторі, поняттям і властивостями паралельного проектування;

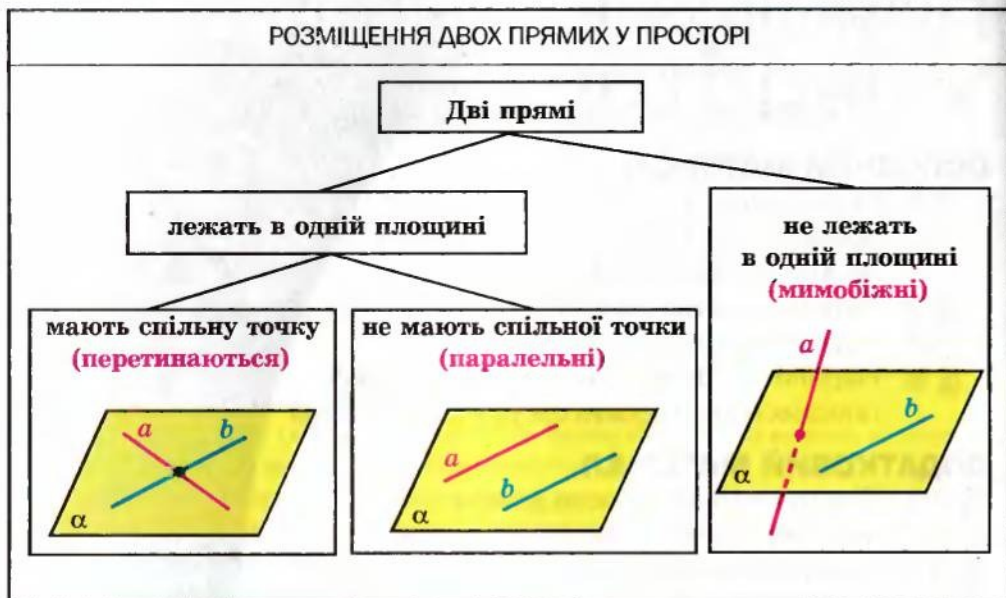
навчитеся застосовувати властивості паралельності прямих і площин для розв'язування задач та будувати зображення просторових фігур на площині за допомогою паралельного проектування.

У додатковій частині розділу ви зможете ознайомитися з центральним проектуванням та його властивостями, навчитеся розв'язувати складніші задачі на побудову перерізів призми та піраміди.

§ 6

РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ У ПРОСТОРИ:
ПРЯМІ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ,
ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ, МИМОБІЖНІ ПРЯМІ

Таблиця 6



Пояснення й обґрунтування

1. **Мимобіжні прямі.** Якщо дві прямі лежать в одній площині, то, як відомо з курсу планіметрії, вони або перетинаються, або паралельні (див. відповідні рисунки в табл. 6). У стереометрії можливий ще один випадок — прямі не лежать в одній площині і не перетинаються (див. рисунок в табл. 6 та рис. 6.1).

Означення. Дві прямі в просторі називаються *мимобіжними*, якщо вони не лежать в одній площині.

Будемо казати також, що два відрізки мимобіжні, якщо вони лежать на мимобіжних прямих. Наприклад, у кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 6.2) ребра DD_1 і $B_1 C_1$ мимобіжні.

Наступну теорему називають *ознакою мимобіжних прямих*, оскільки вона визначає достатні умови для того, щоб прямі були мимобіжні.

Теорема 6.1. Якщо одна пряма лежить у даній площині, а друга пряма перетинає цю площину в точці, яка не належить першій прямій, то ці прямі мимобіжні.

● **Доведення.** Нехай пряма b лежить у площині α , а пряма a перетинає площину α в точці A , яка не належить прямій b (рис. 6.1). Якщо припустити, що прямі a і b лежать в одній площині, то в цій площині лежить і точка A (яка належить прямій a). Але через пряму b і точку A проходить єдина площина, тому розглядуваною площиною буде площина α . Тоді пряма a повинна лежати в площині α , що суперечить умові. Отже, прямі a і b не лежать в одній площині, тобто вони мимобіжні. ●

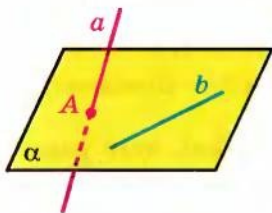


Рис. 6.1

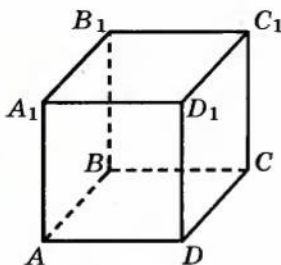


Рис. 6.2

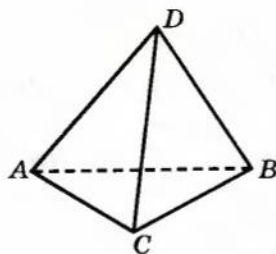


Рис. 6.3

Наприклад, у піраміді $ABCD$ (рис. 6.3) ребра AD і BC мимобіжні, оскільки пряма BC лежить у площині ABC , а пряма AD перетинає цю площину в точці A , яка не належить прямій BC .

2. Паралельні прямі в просторі. Нагадаємо, що дві прямі на площині називаються паралельними, якщо вони не перетинаються. Для паралельності прямих у просторі потрібно, щоб вони не тільки не перетиналися, але ще й лежали в одній площині.

Означення. Дві прямі в просторі називаються паралельними, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються.

Як і на площині, будемо казати, що два відрізки паралельні, якщо вони лежать на паралельних прямих. Наприклад, у кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребра AD і $A_1 D_1$ паралельні (рис. 6.2).

Як відомо, на площині через точку поза даною прямою можна провести єдину пряму, паралельну цій прямій (аксіома паралельних). Аналогічне твердження має місце і в просторі, тільки тут його вже потрібно доводити.

Теорема 6.2. Через точку в просторі, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

● *Доведення.* Нехай точка B не належить прямій a . Проведемо через цю пряму і точку B площину α (рис. 6.4). Ця площина — єдина. У площині α через точку B проходить єдина пряма, назовемо її b , яка паралельна прямій a . Вона і буде єдиною шуканою прямою, яка паралельна даній. ○

З означення паралельності прямих у просторі й теорему 6.2 впливає, що *через дві різні паралельні прямі в просторі можна провести площину, і до того ж тільки одну*. Отже, до відомих з § 1 способів задавання площини можна додати ще один: *площину можна задати двома паралельними прямими*.

Як і на площині, має місце так звана *властивість транзитивності*¹ паралельності прямих, яка виражає також ознаку паралельності прямих.

Теорема 6.3. Дві прямі, які паралельні третій прямій, паралельні.

● *Доведення.* Нехай прямі b і c паралельні прямій a . Доведемо, що прямі b і c паралельні.

Випадок, коли прямі a , b , c лежать в одній площині, було розглянуто в планіметрії. Тому припустимо, що наші прямі не лежать в одній площині. Нехай паралельні прямі a і c лежать у площині α , а паралельні прямі a і b — у площині β . Площини α і β різні (рис. 6.5).

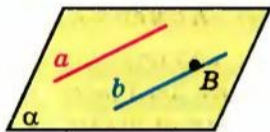


Рис. 6.4

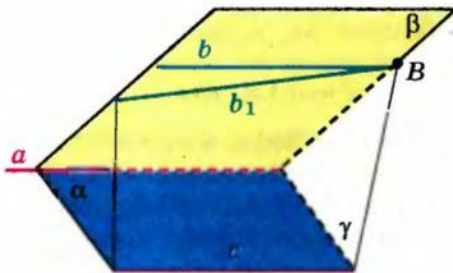


Рис. 6.5

Візьмемо на прямій b довільну точку B і проведемо площину γ через пряму c і точку B . Вона перетне площину β по деякій прямій b_1 . Пряма b_1 не перетинає площину α (а значить, і пряму c). Дійсно, якщо припустити, що пряма b_1 перетинає площину α , то точка перетину повинна

¹ Транзитивність (від лат. *transitivus* — перехідний) — одна з властивостей логічного відношення величин. Для паралельності прямих транзитивність означає: «Якщо пряма a паралельна прямій b , а пряма b паралельна прямій c , то пряма a паралельна прямій c ».

належати прямій a , оскільки пряма b_1 лежить у площині β . З іншого боку, вона повинна лежати на прямій c , оскільки пряма b_1 лежить у площині γ . Але прямі a і c паралельні і не перетинаються. Тоді пряма b_1 лежить у площині β і не перетинає пряму a . Тому вона паралельна прямій a , а значить, збігається з прямою b за аксіомою паралельних. Таким чином, пряма b , що збігається з прямою b_1 , лежить в одній площині з прямою c (у площині γ) і не перетинає її. Отже, прямі b і c паралельні. \bullet

Наприклад, у кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 6.6) ребра AB і $D_1 C_1$ паралельні, оскільки кожне з них паралельне ребру DC .

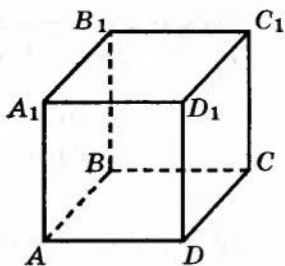


Рис. 6.6

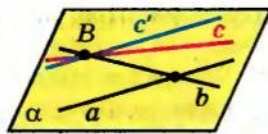


Рис. 6.7

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Прямі a і b перетинаються. Доведіть, що всі прямі, які паралельні прямій a і перетинають пряму b , лежать в одній площині.

Розв'язання

► Оскільки прямі a і b перетинаються, через них можна провести єдину площину α . Нехай деяка пряма c паралельна прямій a і перетинає пряму b в точці B (рис. 6.7). Проведемо в площині α через точку B пряму $c' \parallel a$. Але за теоремою 6.2 через точку B проходить єдина пряма, паралельна прямій a . Отже, пряма c збігається з прямою c' , тобто пряма c лежить у площині α . \triangleleft

Коментар

Спочатку, користуючись властивістю, що через дві прямі, які перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну, побудуємо площину, яка проходить через дані прямі.

Потім доведемо, що будь-яка пряма, яка перетинає одну пряму і паралельна другій, лежить у цій площині.

Зауваження. Одержаний результат можна коротко сформулювати так: усі прямі, які паралельні між собою і перетинають дану пряму, лежать в одній площині.

Задача 2. Через кінці відрізка AB і його середину M проведено паралельні прямі, що перетинають деяку площину в точках A_1 , B_1 і M_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка MM_1 , якщо відрізок AB не перетинає площину і $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 6$ см.

Розв'язання

► Оскільки паралельні прямі AA_1 , BB_1 , MM_1 , які перетинають пряму AB , лежать в одній площині, то точки A_1 , M_1 і B_1 лежать на одній прямій (рис. 6.8, б), і ми одержуємо плоский чотирикутник ABB_1A_1 , який є трапецією ($AA_1 \parallel BB_1$).

За умовою точка M — середина відрізка AB і $MM_1 \parallel AA_1$. Тоді за теоремою Філеса точка M_1 — середина A_1B_1 . Отже, MM_1 — середня лінія трапеції і

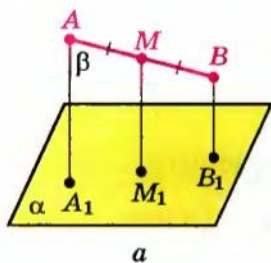
$$MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{8 + 6}{2} = 7 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 7 см. ◁

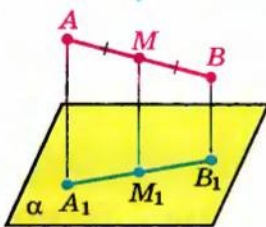
Коментар

Для побудови рисунка до задачі потрібно використати результат задачі 1. Оскільки пряма AA_1 перетинає пряму AB , а прямі MM_1 і BB_1 паралельні прямій AA_1 , то всі вони лежать в одній площині β (рис. 6.8, а). Тоді площина β перетинає дану площину α по прямій A_1B_1 , на якій лежать усі спільні точки цих площин, зокрема і точка M_1 .

Отже, на рисунку точки A_1 , M_1 і B_1 повинні лежати на одній прямій (рис. 6.8, б). Фактично після побудови правильного рисунка одержуємо планіметричну задачу в площині β .



а



б

Рис. 6.8

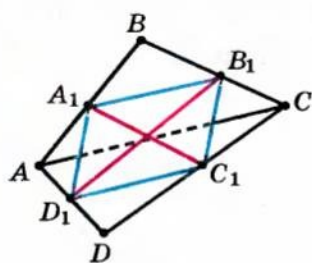


Рис. 6.9

Задача 3*. Доведіть, що відрізки, які сполучають середини мимобіжних сторін просторового чотирикутника, перетинаються і точкою перетину діляться навпіл (вершини просторового чотирикутника не лежать в одній площині)

Розв'язання

► Нехай $ABCD$ — даний просторовий чотирикутник, а точки A_1 , B_1 , C_1 і D_1 — середини його сторін (рис. 6.9). Тоді A_1B_1 — середня лінія трикутника ABC , отже, $A_1B_1 \parallel AC$ і

$$A_1B_1 = \frac{1}{2}AC. \quad \text{Аналогічно} \quad C_1D_1 = \frac{1}{2}AC.$$

Коментар

Для того щоб скласти план розв'язування, достатньо згадати, що коли два відрізки перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то їх кінці є вершинами паралелограма (для якого ці відрізки є діагоналями).

середня лінія трикутника ACD , отже, $C_1D_1 \parallel AC$ і $C_1D_1 = \frac{1}{2}AC$. Тоді за теоремою 6.3 $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ (і тому A_1B_1 і C_1D_1 лежать в одній площині) і, крім того, $A_1B_1 = C_1D_1$. Таким чином, чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ лежить в одній площині і дві його протилежні сторони паралельні і рівні. Отже, це паралелограм, а тому його діагоналі A_1C_1 і B_1D_1 перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. \triangleleft

Тому для доведення твердження задачі достатньо довести, що кінці даного відрізка є вершинами паралелограма, а потім використати властивість діагоналей паралелограма.

Запитання для контролю

1. Які прямі в просторі називаються паралельними?
2. Які прямі називаються мимобіжними?
3. Поясніть, які дві прямі в просторі будуть непаралельними.
4. Сформулюйте ознаку мимобіжних прямих.
- 5*. Доведіть ознаку мимобіжних прямих.
6. Доведіть, що через точку поза даною прямою в просторі можна провести пряму, паралельну цій прямій, і до того ж тільки одну.
- 7*. Доведіть ознаку паралельності прямих.

Вправи

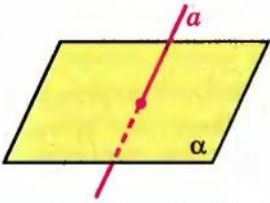

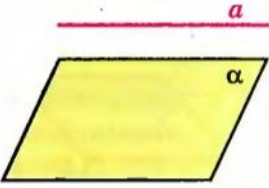
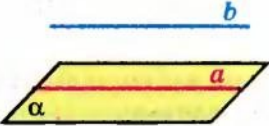

- 1°. Запишіть пари мимобіжних ребер: 1) у прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; 2) у призмі $ABCA_1 B_1 C_1$; 3) у піраміді $SABCD$.
- 2°. Дано дві площини, які перетинаються. У кожній з них лежить пряма, що перетинає лінію перетину площин. Як можуть бути розташовані ці дві прямі одна відносно одної?
- 3°. Чи правильним є твердження, що завжди, коли дві прямі лежать у різних площинах, вони мимобіжні?
4. Пряма a мимобіжна з прямою b , а пряма b мимобіжна з прямою c . Чи впливає звідси, що завжди прямі a і c мимобіжні?
5. Точка A не належить прямій a . Проведіть через точку A пряму b так, щоб прямі a і b були мимобіжними.
6. Доведіть, що коли прямі AC і BD мимобіжні, то прямі AB і CD теж мимобіжні.
7. Доведіть, що площина, яка проходить через одну з двох мимобіжних прямих і точку на другій прямій, перетинає другу пряму.
8. Через дану точку простору проведіть пряму, яка перетинає кожную з двох даних мимобіжних прямих. Чи завжди це можливо?

9. Скільки пар мимобіжних прямих визначається різними парами з: 1) чотирьох точок; 2) п'яти точок; 3) n точок, ніякі чотири з яких не належать одній площині?
- 10°. Запишіть пари паралельних ребер: 1) у прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; 2) у призмі $ABCA_1 B_1 C_1$; 3) у правильній піраміді $SABCD$.
11. Доведіть, що через дві паралельні прямі проходить єдина площина.
12. Доведіть, що всі прямі, які перетинають дві дані паралельні прямі, лежать в одній площині.
13. Відомо, що в площині пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає і другу. Чи буде це твердження правильне і для простору?
14. Доведіть, що коли площина перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму.
- 15°. Прямі a і b не лежать в одній площині. Чи можна провести пряму c , яка паралельна і прямій a , і прямій b ?
16. Паралелограми $ABCD$ і $ABC_1 D_1$ лежать у різних площинах. Доведіть, що чотирикутник $CDD_1 C_1$ — також паралелограм.
17. Через кінці відрізка CD і його середину N проведено паралельні прямі, що перетинають деяку площину в точках C_1 , D_1 і N_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка NN_1 , якщо відрізок CD не перетинає площину α : 1) $CC_1 = 3$ м, $DD_1 = 5$ м; 2) $CC_1 = 2,5$ дм, $DD_1 = 3,5$ дм; 3) $CC_1 = a$, $DD_1 = b$.
- 18°. Розв'яжіть задачу 17 за умови, що відрізок CD перетинає площину.
19. Через кінець A відрізка AB проведено площину α . Через кінець B і точку C цього відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1 і C_1 . Знайдіть довжину відрізка BB_1 , якщо $AC = 6$ см, $BC = 4$ см, $CC_1 = 3$ см.
20. Доведіть, що середини сторін просторового чотирикутника є вершинами паралелограма (вершини просторового чотирикутника не лежать в одній площині).
21. Дано $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, точка O — центр грані $ABCD$, а точка O_1 — центр грані $A_1 B_1 C_1 D_1$. Доведіть, що пряма OO_1 паралельна прямій AA_1 .
- 22°. Дано паралелограм $ABCD$ і площину, яка не перетинає його, O — точка перетину діагоналей цього паралелограма. Через вершини паралелограма і точку O проведено паралельні прямі, які перетинають дану площину в точках A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , O_1 . Доведіть, що $AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 = 4OO_1$.
- 23°. Три площини попарно перетинаються. Доведіть, що лінії їх перетину або перетинаються в одній точці, або паралельні.

§ 7

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Таблиця 7

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ В ПРОСТОРИ	
Пряма та площина	
мають спільні точки	не мають спільних точок (паралельні)
<p>мають тільки одну спільну точку (перетинаються)</p> 	<p>мають більше ніж одну спільну точку (пряма лежить у площині)</p> 
ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ	
 <p style="text-align: center;">$a \parallel \alpha$</p>	<p>Пряма та площина називаються паралельними, якщо вони не мають жодної спільної точки.</p>
Ознака	Властивість
<p>Якщо $b \parallel a$ (a лежить у площині α), то $b \parallel \alpha$.</p> 	<p>Якщо $a \parallel \alpha$, β проходить через a, β перетинає α по b, то $a \parallel b$.</p> 

Пояснення й обґрунтування

Згадаємо, як можуть розміщуватися пряма і площина одна відносно одної.

Пряма може лежати в площині, тобто всі точки прямої належать площині. Пряма може перетинати площину, тобто мати з площиною тільки одну спільну точку. Нарешті, пряма може не перетинати площину, тобто не мати з площиною жодної спільної точки (див. схему в табл. 7).

Означення. Пряма і площина називаються *паралельними*, якщо вони не мають жодної спільної точки.

Будемо вважати також, що відрізок паралельний площині, якщо він лежить на прямій, паралельній площині.

Наступна теорема пов'язує поняття паралельності прямої та площини з поняттям паралельності двох прямих і визначає достатню умову паралельності прямої та площини.

Теорема 7.1 (ознака паралельності прямої та площини).

Якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині

● **Доведення.** Нехай пряма b не лежить у площині α і паралельна прямій a , яка лежить у цій площині (рис. 7.1). Доведемо, що пряма b паралельна площині α . Припустимо протилежне, тобто що пряма b перетинає площину α в деякій точці M . Розглянемо площину β , яка проходить через паралельні прямі a і b ($a \parallel b$ за умовою). Точка M лежить як у площині α , так і в площині β , а тому належить лінії їх перетину — прямій a , тобто прямі a і b перетинаються, що суперечить умові. Отже, наше припущення неправильне і пряма b паралельна площині α . ●

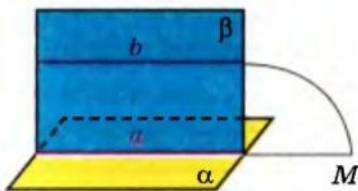


Рис. 7.1

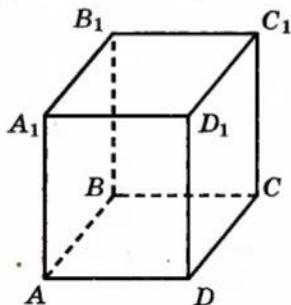


Рис. 7.2

Наприклад, у прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ кожне бічне ребро паралельне площинам бічних граней, які не проходять через це ребро (рис. 7.2). Дійсно, бічними гранями прямокутного паралелепіпеда є прямокутники. Тому, наприклад, бічне ребро AA_1 паралельне

прямій DD_1 бічної грані DD_1C_1C , а значить, за ознакою паралельності прямої і площини, ребро AA_1 паралельне площині DD_1C_1C . Аналогічно ребро AA_1 паралельне площині BB_1C_1C .

Зауваження. Будемо казати, що ребро многогранника паралельне його грані, якщо воно лежить на прямій, паралельній площині цієї грані.

Наступна теорема дає ще одну ознаку паралельності двох прямих у просторі.

Теорема 7.2 (ознака паралельності двох прямих).

Якщо площина проходить через пряму, паралельну іншій площині, і перетинає цю площину, то пряма їх перетину паралельна даній прямій.

● **Доведення.** Нехай площина β проходить через пряму b , паралельну площині α , і пряма a є лінією перетину цих площин (рис. 7.3). Доведемо, що прямі a і b паралельні.

Дійсно, вони лежать в одній площині β . Крім цього, пряма a лежить у площині α , а пряма b не перетинається із цією площиною. Отже, пряма b не може перетинатися з прямою a . Таким чином, прямі a і b лежать в одній площині і не перетинаються. Тому вони паралельні. ●

Зазначимо, що з доведення теореми 7.2 випливає така властивість: *якщо пряма b паралельна площині α , то в площині завжди знайдеться пряма a , яка паралельна цій прямій b .*

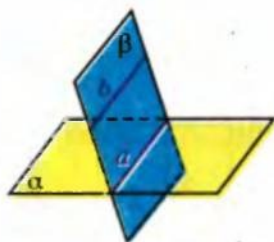


Рис. 7.3

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Чи правильне твердження: «Пряма, яка паралельна площині, паралельна будь-якій прямій, що лежить у цій площині»?

Розв'язання

► Твердження неправильне, оскільки, наприклад, у кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 7.4) пряма DC паралельна площині $AA_1 B_1 B$, але не паралельна прямій AA_1 , яка лежить у цій площині (прямі DC і AA_1 мимобіжні). ◀

Коментар

Якщо якесь твердження не виконується, то, для того щоб його спростувати, достатньо навести хоча б один приклад, коли умова твердження виконується, а висновок — ні (так званий «контрприклад»).

Для такого прикладу можна використати відомі геометричні фігури, зокрема, многогранники.

Задача 2. Дано трикутник ABC . Площина, паралельна прямій AB , перетинає сторону AC цього трикутника в точці A_1 , а сторону BC — у точці B_1 . Знайдіть довжину відрізка $A_1 B_1$, якщо $AB = 10$ см, $AA_1 : A_1 C = 2 : 3$.

Розв'язання

► Позначимо дану площину через α (рис. 7.5). Оскільки $AB \parallel \alpha$ і площина ABC перетинає α по A_1B_1 , то $A_1B_1 \parallel AB$. Тоді $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$.

Отже, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C}{AC}$, тобто $\frac{A_1B_1}{10} = \frac{3}{5}$.

Таким чином, $A_1B_1 = 6$ (см).

Відповідь: 6 см. ◀

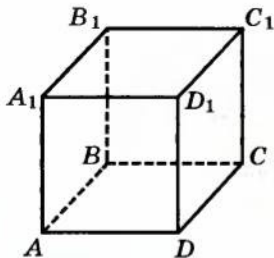


Рис. 7.4

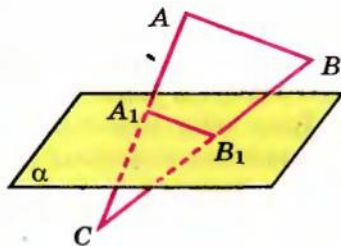


Рис. 7.5



Рис. 7.6, а

Задача 3. Дано дві мимобіжні прямі (рис. 7.6, а). Проведіть через одну з них площину, паралельну другій.

Розв'язання

► Нехай дано дві мимобіжні прямі a і b .

1. Виберемо на прямій b довільну точку B (рис. 7.6, б) і проведемо через точку B пряму a' , паралельну прямій a (це завжди можна зробити за теоремою 6.2).

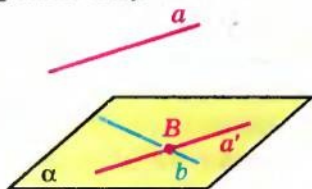


Рис. 7.6, б

Коментар

Для того щоб скласти план розв'язування, спочатку необхідно врахувати твердження теореми 7.2: якщо площина проходить через пряму, паралельну іншій площині, і перетинає цю площину, то пряма їх перетину паралельна даній прямій. Далі слід обґрунтувати, що пряма A_1B_1 паралельна прямій AB . Потім можна використати відомий із планіметрії опорний факт: пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає трикутник, подібний даному.

Коментар

Це задача на уявлювану побудову, і тому головним у ході її розв'язування є доведення існування фігури, що задовольняє дані умови (див. с. 47).

Доведення повинно спиратися на відповідні властивості стереометричних фігур. Зокрема, для того щоб отримати площину, паралельну даній прямій, достатньо використати ознаку паралельності прямої та площини і забезпечити наявність у побудованій площині прямої, паралельної даній.

2. Через прямі a' і b , які перетинаються, проведемо площину α . Це і є шукана площина.

Дійсно, оскільки за побудовою $a \parallel a'$, де пряма a' лежить у площині α , то ця ознакою паралельності прямої і площини $a \parallel \alpha$ (і площина α проведена через пряму b). \triangleleft

Це дозволяє скласти *план побудови*: провести через довільну точку однієї з прямих пряму, паралельну другій, а потім через дві прямі, що перетинаються, провести площину. Слід також довести, що в результаті побудови дійсно отримали шукану фігуру.

Запитання для контролю

1. Назвіть усі випадки взаємного розміщення прямої і площини в просторі.
2. Дайте означення паралельності прямої і площини.
3. Сформулюйте ознаку паралельності прямої і площини.
- 4*. Доведіть ознаку паралельності прямої і площини.
5. Сформулюйте властивість паралельних прямої і площини (ознаку паралельності прямих у просторі).
- 6*. Доведіть ознаку паралельності прямих у просторі.

Вправи

- 1°. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ укажіть, яким граням паралельне ребро: 1) AB ; 2) $A_1 D_1$; 3) CC_1 . Обґрунтуйте відповідь.
2. Основа AB трапеції $ABCD$ лежить у площині α , яка не збігається з площиною трапеції. Як розташована решта сторін трапеції відносно площини α ? Відповідь поясніть.
3. Дано паралелограм $ABCD$. Через сторону AD проведена площина α , яка не збігається з площиною паралелограма. Доведіть, що $BC \parallel \alpha$.
4. Чи правильне твердження, що дві прямі, які паралельні одній і тій самій площині, паралельні між собою?
5. Одна з двох паралельних прямих паралельна площині. Чи правильне твердження, що і друга пряма паралельна цій площині?
6. Площина проходить через середини двох сторін трикутника і не збігається з площиною цього трикутника. Доведіть, що дана площина паралельна третій стороні трикутника.
7. Дано пряму, паралельну деякій площині. Доведіть, що в цій площині через будь-яку її точку проходить пряма, паралельна даній прямій.

8. Доведіть, що через точку, яка не належить даній площині, проходить пряма, паралельна цій площині. Скільки таких прямих можна провести?
9. Доведіть, що якщо дві прямі паралельні, то через одну з них проходить площина, паралельна другій площині. Скільки існує таких площин?
10. Доведіть, що через кожну з двох мимобіжних прямих проходить єдина площина, паралельна другій прямій.
11. Доведіть, що ребра однієї основи призми паралельні другій основі цієї призми.
12. Через дану точку проведіть пряму, паралельну кожній із двох даних площин, які перетинаються.
13. Дано трикутник BCD . Площина, паралельна прямій BC , перетинає сторону BD цього трикутника в точці B_1 , а сторону CD — у точці C_1 . Знайдіть довжину відрізка B_1C_1 , якщо: 1) $BC = 20$ см, $BB_1 : BD = 2 : 5$; 2) $BC = 14$ см, $CC_1 : C_1D = 5 : 2$; 3) $B_1D = 6$ см, $BC : BD = 2 : 3$.
14. Доведіть, що переріз трикутної піраміди $ABCD$ площиною, яка паралельна двом мимобіжним ребрам AC і BD , завжди є паралелограмом (рис. 7.7).
- 15*. Доведіть, що пряма, паралельна кожній із двох площин, які перетинаються, паралельна і прямій їх перетину.
- 16*. Доведіть, що коли дві площини, які перетинаються по прямій a , перетинають площину α по паралельних прямих, то пряма a паралельна площині α .
17. Дано $AB_1C_1D_1$ — куб. Доведіть, що пряма BD паралельна площині AB_1D_1 .
18. Дано $AB_1C_1D_1$ — куб, O — центр грані $ABCD$. Доведіть, що пряма OC_1 паралельна площині AB_1D_1 .
19. Площини α , β і γ попарно перетинаються, але не мають спільних точок для трьох площин. Чи існують в просторі прямі, які паралельні всім трьом площинам?
- 20*. Дано куб $AB_1C_1D_1$; точки P і Q — середини ребер AB і BC відповідно. Побудуйте переріз цього куба площиною, яка проходить через точки P і Q паралельно діагоналі BD_1 куба.
- 21*. Дано куб $AB_1C_1D_1$; точка P — середина ребра AA_1 . Побудуйте переріз цього куба площиною, яка проходить через точки P та D_1 паралельно діагоналі AC грані $ABCD$ куба.

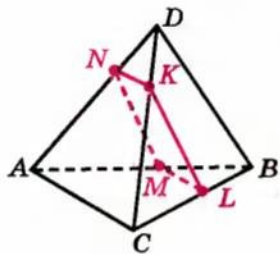
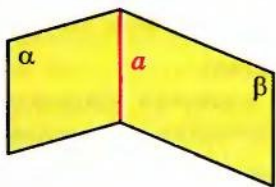
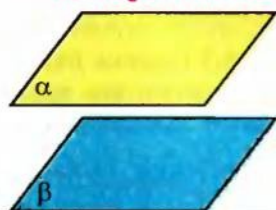
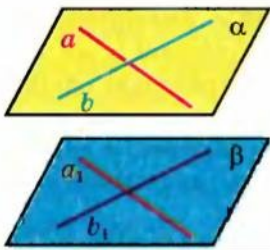
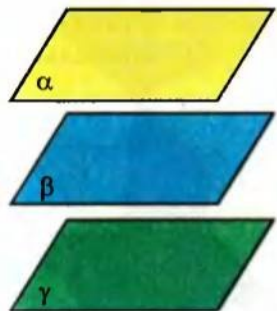
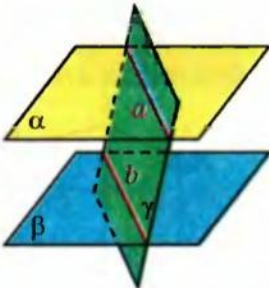
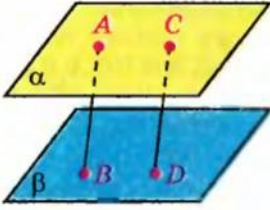


Рис. 7.7

§ 8 ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ДВОХ ПЛОЩИН

Таблиця 8

РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПЛОЩИН У ПРОСТОРИ		
Дві площини		
<p>мають спільну точку (перетинаються по прямій)</p> 	<p>не мають спільних точок (паралельні, тобто не перетинаються)</p> 	
ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПЛОЩИН		
Означення	Ознака	
<p>Дві площини називаються <i>паралельними</i>, якщо вони не перетинаються.</p>		<p>Якщо $a \parallel a_1, b \parallel b_1$ (a і b лежать в α і перетинаються, a_1 і b_1 лежать у β), то $\alpha \parallel \beta$.</p>
Властивості паралельних площин		
 <p>Якщо $\beta \parallel \alpha$ і $\gamma \parallel \alpha$, то $\beta \parallel \gamma$.</p>	 <p>Якщо $\alpha \parallel \beta$ і γ перетинає α по a, γ перетинає β по b, то $a \parallel b$.</p>	 <p>Якщо $AB \parallel CD$ і $\alpha \parallel \beta$ ($A \in \alpha, C \in \alpha$, $B \in \beta, D \in \beta$), то $AB = CD$.</p>

Пояснення й обґрунтування

Розглянемо питання про взаємне розміщення двох площин. Як відомо, якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку. Звідси випливає, що дві площини або перетинаються по прямій, або не перетинаються, тобто не мають жодної спільної точки (див. схему в табл. 8).

Означення. Дві площини називаються *паралельними*, якщо вони не перетинаються.

Наступна теорема пов'язує поняття паралельності двох площин з поняттям паралельності прямих і визначає достатню умову паралельності площин.

Теорема 8.1 (ознака паралельності двох площин).

Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.

● **Доведення.** Нехай прямі a_1 і a_2 площини α паралельні відповідно прямим b_1 і b_2 площини β . Доведемо, що площини α і β паралельні. Припустимо протилежне: площини α та β перетинаються і c — пряма їх перетину (рис. 8.1). За ознакою паралельності прямої і площини, пряма a_1 паралельна площині β , а за властивістю паралельності прямої і площини, вона паралельна прямій c . Аналогічно пряма a_2 також паралельна прямій c . Таким чином, у площині α ми маємо дві різні прямі (які проходять через одну точку), паралельні одній прямій c , що неможливо. Одержана суперечність показує, що наше припущення неправильне, отже, площини α і β не перетинаються, а паралельні. ●

Будемо казати, що дві *грані многогранника паралельні*, якщо вони лежать у паралельних площинах.

Наприклад, *основи призми паралельні*. Дійсно, бічними гранями призми є паралелограми. Тому два суміжних ребра однієї основи призми паралельні відповідно двом суміжним ребрам другої її основи. Отже, основи призми паралельні. Так, на рисунку 8.2 зображена п'ятикутна призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, у якій основи $ABCDE$ і $A_1B_1C_1D_1E_1$ паралельні.

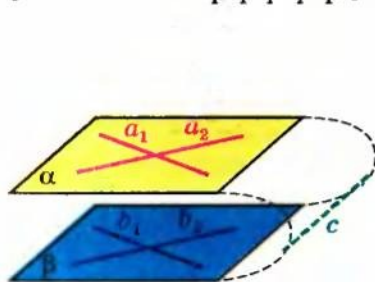


Рис. 8.1

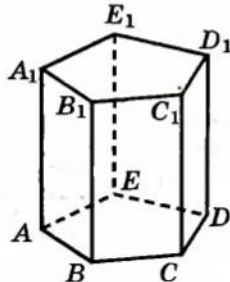


Рис. 8.2



Рис. 8.3

Наступна теорема пов'язує поняття паралельності двох площин з поняттям паралельності двох прямих.

Теорема 8.2. Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою, то прямі перетину паралельні.

● *Доведення.* Нехай площина γ перетинає паралельні площини α і β по прямих a і b відповідно (рис. 8.3). Доведемо, що прямі a і b паралельні. Дійсно, вони лежать в одній площині — площині γ . Крім того, вони лежать у площинах α і β , які не перетинаються, отже, і прямі a і b не перетинаються. Значить, вони паралельні. ●

Розглядаючи означення і ознаку паралельності площин та властивість паралельних площин, ми припускали існування таких площин. Доведемо це.

Теорема 8.3. Через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

● *Доведення.* Проведемо в даній площині α які-небудь дві прямі a і b , що перетинаються (рис. 8.4). Через дану точку A проведемо паралельні їм прямі a_1 і b_1 . Площина β , що проходить через прямі a_1 і b_1 , за ознакою паралельності площин паралельна площині α . Доведемо, що така площина — єдина. Припустимо, що через точку A проходить інша площина β_1 , яка теж паралельна площині α (рис. 8.5). Проведемо площину γ через пряму a площини α і дану точку A , яка не лежить на цій прямій. Площина γ перетне площину α по прямій a , а площини β і β_1 по прямих a_1 і a_2 відповідно. Оскільки площини β і β_1 паралельні площині α , то за теоремою 8.2 $a_1 \parallel a$ і $a_2 \parallel a$. Але в площині γ через точку A можна провести тільки одну пряму, паралельну прямій a . Одержана суперечність означає, що наше припущення неправильне і площина β єдина. ●

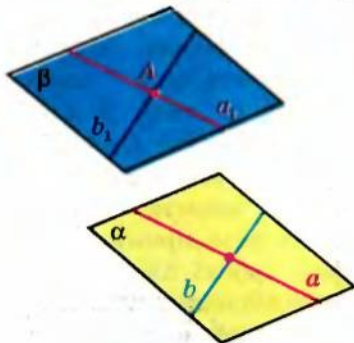


Рис. 8.4

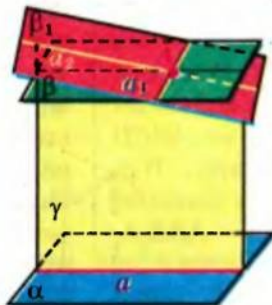


Рис. 8.5

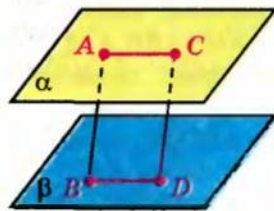


Рис. 8.6

Розглянемо ще одну властивість паралельних площин, пов'язану з паралельними прямими.

Теорема 8.4. Відрізки паралельних прямих, які містяться між двома паралельними площинами, рівні.

● *Доведення.* Нехай α і β — паралельні площини, AB і CD — паралельні прямі, що їх перетинають, A, C, B, D — точки перетину прямих з площинами α і β відповідно (рис. 8.6). Доведемо, що відрізки AB і CD рівні.

Проведемо через дані паралельні прямі площину, яка перетне площини α і β по паралельних прямих AC і BD . Тоді чотирикутник $ACDB$ — паралелограм, оскільки в нього протилежні сторони паралельні. У паралелограма протилежні сторони рівні, отже, $AB = CD$. ●

Теорема 8.5. Якщо дві різні площини паралельні третій, то вони паралельні між собою.

● *Доведення.* Нехай площини α і β паралельні площині γ (див. рисунок у пункті «Властивості» табл. 8). Площини α і β не можуть перетинатися. Якби площини α і β мали спільну точку, то через цю точку проходили б дві площини (α і β), паралельні площині γ , а це суперечить теоремі 8.3. Отже, площини α і β не мають спільних точок, тобто паралельні. ●

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Доведіть, що в прямокутному паралелепіпеді протилежні грані попарно паралельні.

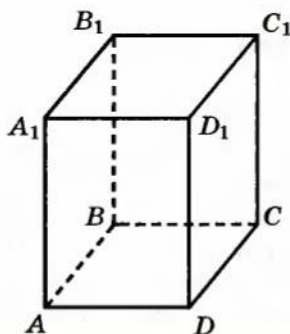


Рис. 8.7

Розв'язання

► Нехай дано прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 8.7). Доведемо, наприклад, паралельність граней $ABB_1 A_1$ і $DCC_1 D_1$. Оскільки всі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники, то $ABCD$ та $ADD_1 A_1$ — прямокутники. Тоді $AB \parallel DC$ та $AA_1 \parallel DD_1$ і за ознакою паралельності площини $ABB_1 A_1$ і $DCC_1 D_1$ паралельні.

Аналогічно обґрунтовують паралельність і інших протилежних граней. ◀

Коментар

Для того щоб довести паралельність граней паралелепіпеда, достатньо довести паралельність площин, у яких лежать ці грані. А для доведення паралельності площин достатньо використати ознаку їх паралельності і довести відповідну паралельність двох прямих, що перетинаються, однієї площини двом прямим другої площини.

Нагадаємо, що всі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники (а в прямокутнику протилежні сторони попарно паралельні).

Задача 2. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, яка проходить через точки K, M, N , де $M \in AA_1$, $N \in BB_1$, і точка K лежить у грані $DCC_1 D_1$ (рис. 8.8, а).

Розв'язання

- 1. Точки M і N лежать і в січній площині, і в грані $ABB_1 A_1$, тому січна площина перетинає цю грань по відрізку MN (рис. 8.8, б).
2. Оскільки $DCC_1 D_1 \parallel ABB_1 A_1$, то січна площина перетинає грань $DCC_1 D_1$ по прямій, яка проходить через точку K і паралельна прямій MN . Проводимо через точку K відрізок $TE \parallel MN$ ($T \in DD_1$, $E \in CC_1$).
3. Сполучаючи відрізками точки перетину січної площини з ребрами призми, одержуємо чотирикутник $MNET$ — шуканий переріз. ◀

Коментар

Для складання плану побудови достатньо згадати, що в прямокутному паралелепіпеді протилежні грані попарно паралельні, отже, $ABB_1 A_1 \parallel DCC_1 D_1$. Січна площина, яку задано трьома точками K, M, N , перетинає площину $ABB_1 A_1$ по прямій MN . Тому паралельну їй площину $DCC_1 D_1$ вона перетинатиме по прямій, яка паралельна прямій MN і проходить через точку K .

Для того щоб виконати побудову, слід урахувати також, що пряма MN паралельна площині $DCC_1 D_1$ і в цій площині через точку K проходить пряма, паралельна даній прямій.

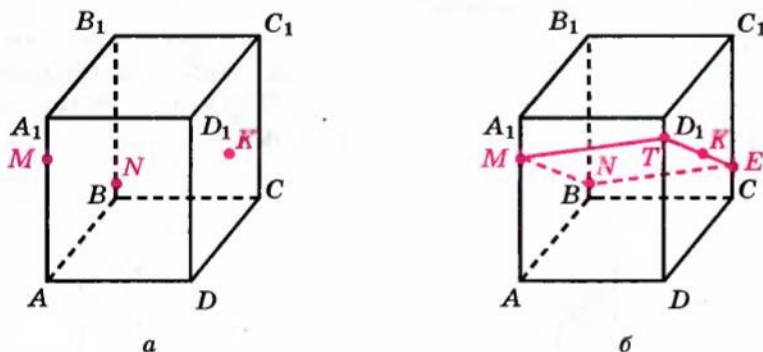


Рис. 8.8

Зауваження. З паралельності протилежних граней паралелепіпеда одержуємо, що в побудованому перерізі протилежні сторони попарно паралельні. Отже, чотирикутник $MNET$ — паралелограм. Це іноді доводиться використовувати під час розв'язування задач, пов'язаних з аналогічним перерізом прямокутного паралелепіпеда.

Задача 3. У піраміді $ABCD$ через дану точку M на ребрі AD (рис. 8.9, а) проведіть площину, паралельну площині грані DBC .

Розв'язання

► 1. *Аналіз.* Припустимо, що задача розв'язана і відповідний переріз MKT (рис. 8.9, б) побудовано. Оскільки пл. $MKT \parallel$ пл. DBC , то грані ADC і ADB перетинають паралельні площини по паралельних прямих. Отже, $MK \parallel DB$ і $MT \parallel DC$. Це дає змогу виконати побудову.

2. *Побудова.* Проведемо через точку M у площині ADC пряму $MT \parallel DC$ ($T \in AC$), а в площині ADB — пряму $MK \parallel DB$ ($K \in AB$) і сполучимо відрізком точки T і K . Тоді MKT — шуканий переріз.

3. *Доведення.* За побудовою $MT \parallel DC$ і $MK \parallel DB$, тоді пл. $MKT \parallel$ пл. DBC (за ознакою паралельності площин).

4. *Дослідження.* Задача завжди має єдиний розв'язок (оскільки кожен крок розв'язання можна виконати однозначно). ◀

Коментар

У задачах на побудову в стереометрії іноді зручно використовувати схему розв'язування, відому з курсу планіметрії: 1) *аналіз*; 2) *побудова*; 3) *доведення*; 4) *дослідження*.

На етапі аналізу припускаємо, що задачу вже розв'язано, виконуємо відповідний рисунок і, спираючись на відомі властивості прямих і площин, складаємо план побудови.

На етапі побудови описуємо її за планом, деталізуючи до елементарних побудов у зображених площинах.

На етапі доведення обґрунтовуємо, що в результаті побудови дійсно отримали фігуру із заданими властивостями.

На етапі дослідження розглядаємо кожен крок побудови і відповідаємо на два запитання: 1) Чи завжди можна виконати цей крок? 2) Скільки фігур одержимо в результаті?

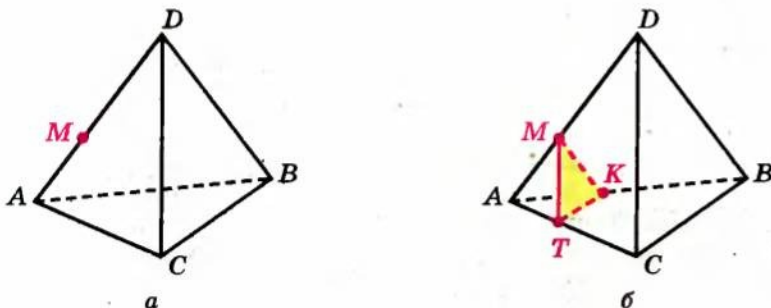


Рис. 8.9

Задача 4*. Доведіть, що через дві мимобіжні прямі проходить єдина пара паралельних площин.

Розв'язання

► Нехай дано дві мимобіжні прямі a і b , на яких виберемо довільні точки A і B відповідно (рис. 8.10) і проведемо через точку B пряму a' , паралельну прямій a , а через точку A — пряму b' , паралельну прямій b . Через прямі a і b' , які перетинаються, проведемо площину α , а через прямі a' і b , які також перетинаються, — площину β . За ознакою паралельності площин $\alpha \parallel \beta$.

Припустимо, що через прямі a і b проходить ще одна пара паралельних площин α' і β' (рис. 8.11). Проведемо через пряму a і точку B , яка не лежить на ній ($B \in b$), площину γ . Ця площина перетинає паралельні площини α і β по паралельних прямих a і a_1 , а паралельні площини α' і β' — по паралельних прямих a і a_2 . Отримуємо, що через точку B у площині γ проведено дві різні прямі a_1 і a_2 , паралельні прямій a , що неможливо. Отже, пара паралельних площин, які проходять через дані мимобіжні прямі, — єдина. ◁

Коментар

Для доведення існування фігур достатньо побудувати ці фігури. Тому проведемо через дані прямі паралельні площини.

Для цього достатньо, використовуючи ознаку паралельності площин, отримати відповідну паралельність двох прямих, що перетинаються, однієї площини двом прямим другої площини. (Нагадаємо, що дві прямі, що перетинаються, однозначно задають площину.)

Єдиність побудованих площин доведемо методом від супротивного. Щоб отримати суперечність, побудуємо додаткову площину, яка перетинає побудовані паралельні площини (за теоремою 8.2 ця площина перетинає паралельні площини по паралельних прямих).

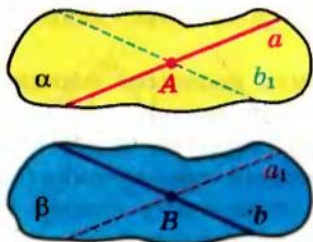


Рис. 8.10

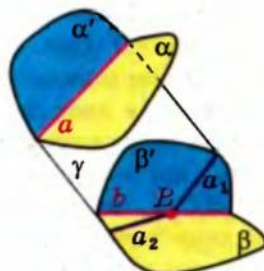


Рис. 8.11

Запитання для контролю

1. Назвіть можливі випадки взаємного розміщення двох площин.
2. Дайте означення паралельності площин.
3. Сформулюйте ознаку паралельності площин.
4. Доведіть ознаку паралельності площин.
5. Доведіть, що через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній, і до того ж тільки одну.
6. Сформулюйте властивості прямих і площин, пов'язані з паралельними площинами.
7. Доведіть, що коли дві паралельні площини перетинаються третьою, то прямі перетину паралельні.
8. Доведіть, що відрізки паралельних прямих, які містяться між двома паралельними площинами, рівні.
9. Доведіть, що коли дві різні площини паралельні третій, то вони паралельні між собою.

Вправи

- 1°. Укажіть паралельні грані: 1) паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; 2) призми $ABCA_1 B_1 C_1$.
- 2°. Чи має паралельні грані (якщо має, то скільки пар): 1) тетраедр; 2) куб?
- 3°. Чи правильне твердження: «Якщо пряма, яка лежить в одній площині, паралельна прямій, що лежить у другій площині, то ці площини паралельні»?
- 4°. Чи правильне твердження: «Якщо дві прямі, які лежать в одній площині, паралельні двом прямим, що лежать у другій площині, то ці площини паралельні»?
- 5°. Чи можуть бути паралельними дві площини, що проходять через непаралельні прямі?
- 6°. Чи можуть перетинатися площини, паралельні одній і тій самій прямій?
- 7°. Чи через будь-яку пряму можна провести площину, паралельну даній площині? При якому взаємному розміщенні даних прямої та площини це можна зробити?
- 8°. Через кожну з двох паралельних прямих проведено площину. Чи правильне твердження, що ці площини паралельні?
9. Доведіть, що площина, проведена через вершини A , D і A_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, паралельна площині, проведеній через вершини C , B_1 і C_1 .
10. Через дану точку проведіть площину, паралельну кожній із двох прямих, які перетинаються. Чи завжди це можливо?
11. Доведіть, що пряма, яка лежить в одній із двох паралельних площин, паралельна другій площині.

12. Для того щоб перевірити горизонтальність установки лімба кутівимірювальних інструментів, користуються двома рівнями, розташованими в одній площині (рис. 8.12). Чому рівні розміщують на діаметрах?

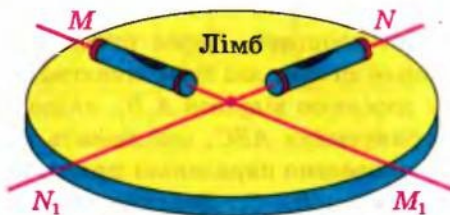


Рис. 8.12

13. Доведіть, що всі прямі, які проходять через дану точку паралельно даній площині, лежать в одній площині.
14. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає й другу.
15. Які можливі випадки взаємного розміщення трьох площин у просторі, якщо дві з них паралельні?
16. Доведіть, що коли площина перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає й другу.
17. Які можливі випадки взаємного розміщення трьох площин у просторі, якщо вони попарно перетинаються?
18. Дві площини α і β перетинаються. Доведіть, що будь-яка третя площина γ перетинає хоча б одну з площин α і β .
19. Нарисуйте в зошиті зображення піраміди, наведене на рисунку 8.13, і побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точку M і паралельна грані ABC .
- 20*. Нарисуйте в зошиті зображення куба, наведене на рисунку 8.14, і побудуйте переріз куба: 1) площиною, яка проходить через точки M, B, C ; 2) площиною, що проходить через точки M, B_1, C .

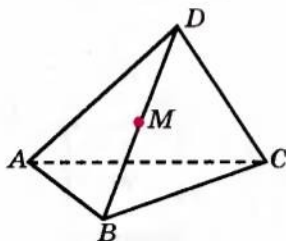


Рис. 8.13

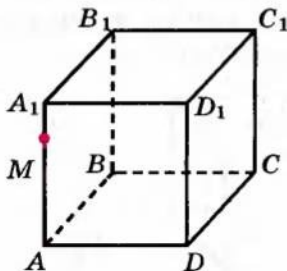


Рис. 8.14

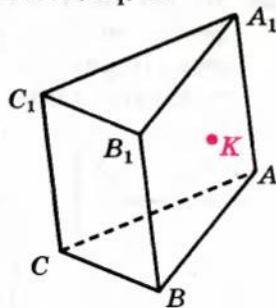


Рис. 8.15

- 21*. Нарисуйте в зошиті зображення трикутної призми, наведене на рисунку 8.15 (точка K лежить у грані ABB_1A_1), і побудуйте переріз призми: 1) площиною, яка проходить через точку K паралельно основі $A_1B_1C_1$; 2) площиною, що проходить через точку K паралельно грані BCC_1B_1 .
22. Дано дві паралельні площини. Через точки A і B однієї з площин проведено паралельні прямі, які перетинають другу площину в точках A_1 і B_1 . Чому дорівнює відрізок A_1B_1 , якщо $AB = a$?
23. Через вершини трикутника ABC , що лежить в одній із двох паралельних площин, проведено паралельні прямі, які перетинають другу площину в точках A_1 , B_1 , C_1 . Доведіть рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.
- 24*. Три прямі, які проходять через одну точку S , перетинають дану площину α в точках A , B , C , а паралельну їй площину β — у точках A_1 , B_1 , C_1 . Доведіть подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 8.16).
25. Дано куб $ABCA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що площина BDC_1 паралельна площині AB_1D_1 .
- 26*. У кубі $ABCA_1B_1C_1D_1$ проведено площини BDC_1 і AB_1D_1 . Доведіть, що вони ділять діагональ A_1C на рівні частини.
- 27*. Прямі a і b перетинають три дані паралельні площини в точках A_1, A_2, A_3 і B_1, B_2, B_3 відповідно (точка A_2 лежить між точками A_1 і A_3 , а точка B_2 — між точками B_1 і B_3). Відомо, що $A_1A_2 = 12$ см, $B_2B_3 = 27$ см і $A_2A_3 = B_1B_2$. Знайдіть довжини відрізків A_1A_3 і B_1B_3 .
- 28*. Три паралельні площини перетинають дві мимобіжні прямі в точках A_1, A_2, A_3 і B_1, B_2, B_3 відповідно (точка A_2 лежить між точками A_1 і A_3 , а точка B_2 — між точками B_1 і B_3). Відомо, що $A_2A_3 = 8$ см, $B_1B_2 = 18$ см і $A_1A_2 + B_2B_3 = 24$ см. Знайдіть довжини відрізків A_1A_3 і B_1B_3 .
29. На рисунках 8.17–8.31 вказано точки M , P і R , які лежать або на ребрах, або на гранях куба. Скориставшись властивостями паралельних прямих і площин, побудуйте переріз куба площиною MRP для кожного з даних розташувань точок.

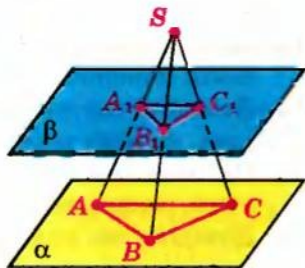


Рис. 8.16

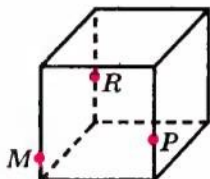


Рис. 8.17

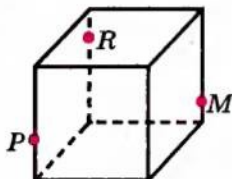


Рис. 8.18

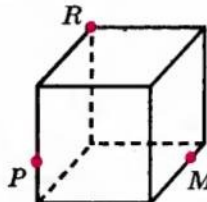


Рис. 8.19

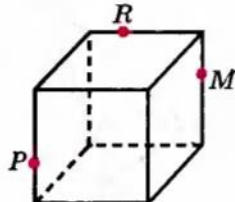


Рис. 8.20

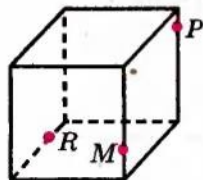


Рис. 8.21

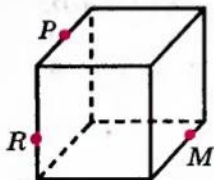


Рис. 8.22

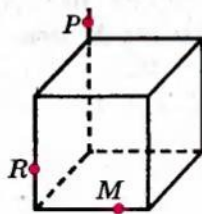


Рис. 8.23

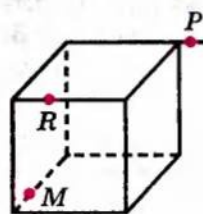


Рис. 8.24

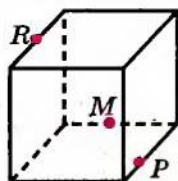


Рис. 8.25

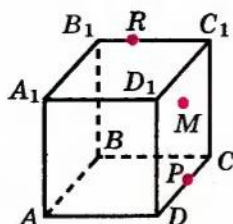

 $M \in \text{пл. } BB_1C_1$

Рис. 8.26

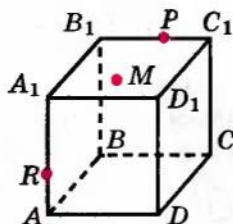

 $M \in \text{пл. } A_1B_1C_1$

Рис. 8.27

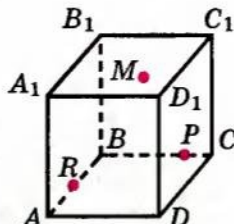

 $M \in \text{пл. } A_1B_1C_1$

Рис. 8.28

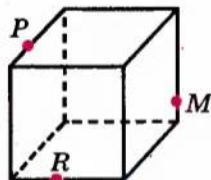


Рис. 8.29

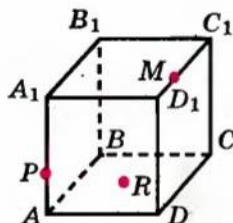

 $R \in \text{пл. } ABC$

Рис. 8.30

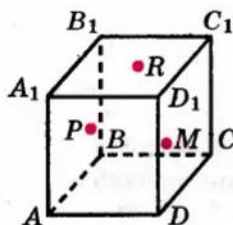

 $P \in \text{пл. } AA_1B_1$
 $R \in \text{пл. } A_1B_1C_1$
 $M \in \text{пл. } DD_1C_1$

Рис. 8.31

§ 9

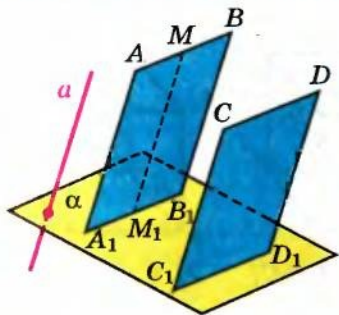
ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЄКТУВАННЯ. ЗОБРАЖЕННЯ
ПЛОСКИХ І ПРОСТОРОВИХ ФІГУР У СТЕРЕОМЕТРІЇ

Таблиця 9

ЗОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ФІГУР НА ПЛОЩИНІ

Для зображення просторових фігур на площині, як правило, використовують *паралельне проєктування*.

Візьмемо довільну пряму a , яка перетинає площину α . Через довільну точку A даної фігури проводимо пряму AA_1 , яка перетинає площину α в точці A_1 .



Точка A проєктується в точку A_1 на площині α :

$$A \rightarrow A_1.$$

Аналогічно $B \rightarrow B_1$, $AB \rightarrow A_1B_1$

$$(BB_1 \parallel AA_1 \parallel a).$$

1. **Відрізок проєктується у відрізок**, пряма проєктується в пряму (або в точку).
2. Якщо $AB \parallel CD$ ($AB \rightarrow A_1B_1$, $CD \rightarrow C_1D_1$), то $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ (або збігаються).

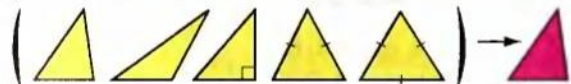
$$3. \frac{AM}{MB} = \frac{A_1M_1}{M_1B_1}$$

Наслідок. Якщо точка M — середина AB ,

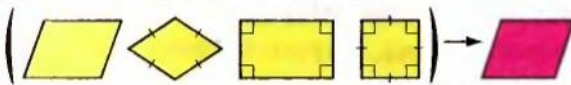
$$AB \rightarrow A_1B_1, M \rightarrow M_1$$

то точка M_1 — середина A_1B_1 .

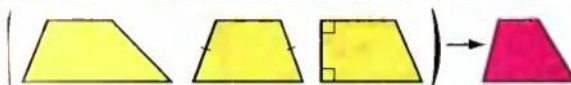
4. Якщо плоска фігура F лежить у площині, паралельній площині проєктування, то її проєкція F' на цю площину дорівнює фігурі F .

ПАРАЛЕЛЬНІ ПРОЄКЦІЇ ДЕЯКИХ ПЛОСКИХ ФІГУР¹

Проекція трикутника —
трикутник
будь-якої форми.



Проекція паралелограма —
паралелограм
будь-якої форми.



Проекція трапеції —
трапеція
будь-якої форми.



Проекція кола — *еліпс*
будь-якої форми.

¹ Площина фігури не паралельна напрямку проєктування.

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття та властивості паралельного проектування. Для зображення просторових фігур на площині, як правило, використовують паралельне проектування. Розглянемо цей спосіб зображення фігур.

Нехай дано площину α і пряму a , яка її перетинає. Візьмемо в просторі довільну точку A . У тому випадку, коли точка A не лежить на прямій a , через точку A проводимо пряму $a' \parallel a$ (рис. 9.1). Пряма a' перетинає площину α в деякій точці A' . Ця точка називається **проекцією¹ точки A** (на площину² α) **під час проектування паралельно прямій a** , або **паралельною проекцією точки A на площину α** . Якщо ж точка A лежить на прямій a , то її паралельною проекцією A' називається точка, у якій пряма a перетинає площину α . Про пряму a кажуть, що вона задає **напрямок проектування**. Якщо пряму a замінити будь-якою іншою прямою l , паралельною прямій a , то результат проектування залишається той самий, незалежно від того, як проводять прямі — паралельно прямій a або прямій l .

Якщо таким чином побудувати проекцію кожної точки фігури, то одержимо **проекцію самої фігури**. Паралельною проекцією реальної фігури є, наприклад, її тінь, що падає на плоску поверхню у разі сонячного освітлення, оскільки сонячні промені можна вважати паралельними (рис. 9.2). Так, дивлячись на власну тінь на поверхні землі, ви бачите свою паралельну проекцію.

Наведемо деякі властивості паралельного проектування, які впливають з описаного способу побудови проекцій.

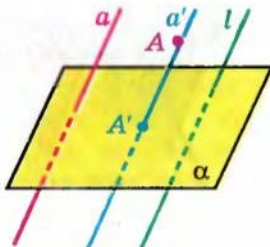


Рис. 9.1



Рис. 9.2

¹ Іноді буває зручним той факт, що точка A' є проекцією точки A (тобто точка A проектується в точку A'), записувати так: $A \rightarrow A'$ (знак \leftrightarrow в наведеному записі означає: «проектується в»; див., наприклад, записи в табл. 9).

² Площину α часто називають площиною проекції.

Властивість 1. Якщо пряма паралельна прямій a або збігається з прямою a , то її проекцією в напрямі цієї прямої є точка. Якщо пряма не паралельна прямій a і не збігається з прямою a , то її проекцією є пряма.

● **Доведення.** Нехай пряма b не паралельна прямій a і не збігається з прямою a (рис. 9.3). Тоді всі прямі, які проектують точки прямої b на площину α , лежать в одній площині β , що перетинає площину α по прямій b' . Довільна точка B прямої b зображується точкою B' прямої b' . Отже, пряма b' є проекцією прямої b на площину α . ●

Властивість 2. Проекцією відрізка під час паралельного проектування є точка або відрізок, залежно від того, на якій прямій він лежить — на прямій, що паралельна прямій a або збігається з прямою a , чи навпаки. Відношення довжин відрізків, які лежать на одній прямій, зберігається під час паралельного проектування. Зокрема, середина відрізка під час паралельного проектування переходить у середину відповідного відрізка.

● **Доведення.** Розглянемо відрізок AC , який не паралельний напрямку проектування (тобто не паралельний прямій a і не лежить на ній), та точку B , яка належить відріжку AC (рис. 9.4). Нехай пряма $A'C'$ є проекцією прямої AC на площину α , а точки A' , B' , C' — відповідно проекціями точок A , B , C . Оскільки $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, то прямі AA' , BB' і CC' лежать в одній площині β і за узагальненою теоремою Фалеса з планіметрії одержуємо $AB : BC = A'B' : B'C'$. Зокрема, якщо точка B — середина відрізка AC , то точка B' — середина відрізка $A'C'$. ●

Зауважимо, що під час паралельного проектування зберігається не тільки відношення довжин відрізків, які лежать на одній прямій, а й відношення довжин відрізків, які лежать на паралельних прямих (обґрунтуйте самостійно).

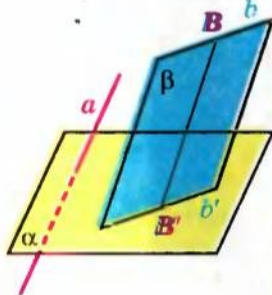


Рис. 9.3

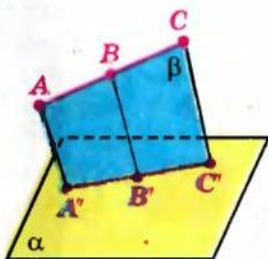


Рис. 9.4

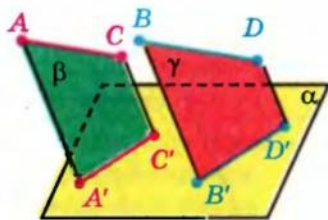


Рис. 9.5

Властивість 3. Якщо дві прямі паралельні і не паралельні прямій a , то їх проекції в напрямі a теж будуть паралельними прямими (або однією прямою).

● **Доведення.** Нехай прямі AC і BD паралельні (і не паралельні напрямку проектування). Аналогічно доведенню властивості 1 розглянемо

проекції $A'C'$ і $B'D'$ даних прямих як прями перетину площини α з площинами β і γ відповідно (рис. 9.5).

Якщо площини β і γ збігаються, то проекції прямих AC і BD також збігаються. Якщо ж ці площини різні, то вони паралельні між собою за ознакою паралельності двох площин (пряма AC паралельна прямій BD , пряма AA' паралельна прямій BB'). Тоді за властивістю паралельних площин лінії перетину цих площин із площиною α паралельні. Отже, $A'C' \parallel B'D'$. ◉

Властивість 4. Якщо плоска фігура F лежить у площині, паралельній площині проекції, то її проекція F' на цю площину дорівнює фігурі F .

● **Доведення.** Задамо відповідність між точками фігури F і точками фігури F' , ставлячи кожній точці фігури F у відповідність її проекцію. То ж якщо A і B — точки фігури F , а точки A' і B' — їх проекції, то $ABB'A'$ — паралелограм (рис. 9.6). Отже, $A'B' = AB$. Таким чином, ця відповідність зберігає відстань між точками, а тому фігури F і F' рівні. ◉

З наведеного доведення властивості 4 випливає ще одна властивість паралельного проектування: якщо пряма паралельна площині проекції, то вона проектується в пряму, паралельну даній прямій ($AB \parallel \alpha$, $A'B'$ — проекція AB , тоді $A'B' \parallel AB$).

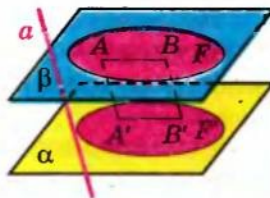


Рис. 9.6

2. Паралельні проекції деяких плоских фігур¹. Якщо фігура F лежить у площині, не паралельній площині проектування α , то її проекція F' , узагалі кажучи, не дорівнює фігурі F .

Із властивостей паралельного проектування випливає, що паралельною проекцією многокутника є або многокутник з тим самим числом сторін, або відрізок (якщо площина многокутника паралельна напрямку проектування). Причому якщо в многокутнику які-небудь дві сторони паралельні, то їх проекції також будуть паралельні (якщо вони не лежать на одній прямій). Проте оскільки при паралельному проектуванні довжини відрізків і кути, як правило, не зберігаються, то проекцією, наприклад, рівностороннього чи прямокутного трикутника може бути трикутник будь-якої форми. Аналогічно, хоча проекцією паралелограма є паралелограм, проекцією прямокутника може бути не прямокутник, проекцією ромба — не обов'язково ромб, проекцією правильного многокутника — неправильний многокутник.

Найпростішим многокутником є трикутник. Як впливає з властивостей паралельного проектування, паралельною проекцією трикутника є трикутник або відрізок. При цьому, якщо площина трикутника на-

¹ Детальніше паралельні проекції плоских фігур та задачі, пов'язані з ними, розглянуто в § 10.

паралельна площині проєкції, то, як ми з'ясували, його проєкцією буде трикутник, рівний даному.

Покажемо, що в загальному випадку трикутник будь-якої форми може служити паралельною проєкцією рівностороннього трикутника.

● Дійсно, нехай дано довільний трикутник ABC в площині α (рис. 9.7). Побудуємо на одній з його сторін, наприклад AC , рівносторонній трикутник AB_1C так, щоб точка B_1 не належала площині α . Позначимо через a пряму, що проходить через точки B_1 і B . Тоді трикутник ABC є паралельною проєкцією трикутника AB_1C на площину α в напрямі прямої a . ●

З'ясуємо, яка фігура є паралельною проєкцією кола.

Нехай фігура F — коло в просторі, а фігура F' — його проєкція на площину α в напрямі прямої a . Якщо пряма a паралельна площині кола або лежить у ній, то проєкцією кола є відрізок, що дорівнює його діаметру.

Розглянемо випадок, коли пряма a перетинає площину кола.

Нехай AB — діаметр кола, паралельний площині α , і $A'B'$ — його проєкція на цю площину (рис. 9.8). Тоді $AB = A'B'$. Візьмемо який-небудь інший діаметр CD , і нехай $C'D'$ буде його проєкцією. Позначимо відношення $C'D' : CD$ через k . Оскільки під час виконання паралельного проєктування зберігаються паралельність і відношення довжин паралельних відрізків, то для довільної хорди C_1D_1 , паралельної діаметру CD , її проєкція $C_1'D_1'$ буде паралельна $C'D'$ і відношення $C_1'D_1' : C_1D_1$ дорівнюватиме k (якщо $CD : C_1D_1 = C'D' : C_1'D_1'$, то $C'D' : C_1D_1 = C'D' : CD = k$).

Таким чином, проєкцію кола одержують стискуванням або розтягуванням його в напрямі якого-небудь діаметра в одне і те саме число разів. Таку фігуру на площині називають *еліпсом*.

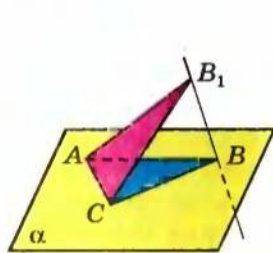


Рис. 9.7

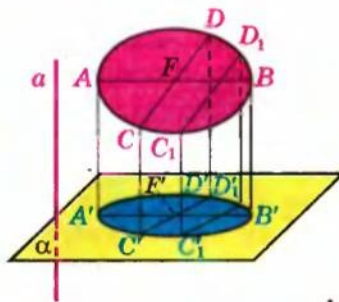


Рис. 9.8

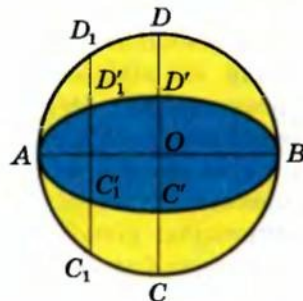


Рис. 9.9

Наприклад, на рисунку 9.9 зображено еліпс, одержаний стискуванням кола в напрямі діаметра CD у два рази.

3. Зображення деяких просторових фігур на площині. Як ми вже відзначали, для зображення просторових фігур використовують зазвичай паралельне проєктування. Усі рисунки просторових фігур, розглянуті

нами раніше, було виконано в паралельній проекції. Площина, на яку проектується фігура, називається *площиною зображення*, а проекція фігури — *зображенням*. Зображенням даної фігури називають також і будь-яку фігуру, подібну до проекції даної фігури.

Розглянемо приклади зображень просторових фігур — многогранників. Зображення многогранника складається із зображення його ребер, одержаних за допомогою паралельного проектування. При цьому всі ребра діляться на два типи: видимі і невидимі. (Уявіть собі, що паралельно напрямку проектування йдуть промені світла. У результаті поверхня многогранника розіб'ється на дві частини: освітлену і неосвітлену. Видимими є ребра, які розміщені на освітленій частині.) Видимі ребра зображають суцільними лініями, а невидимі — штриховими.

Зображуючи куб, площину зображень зазвичай вибирають паралельною одній з його граней. У цьому випадку дві грані куба (передня і задня), паралельні площині зображень, зображують рівними квадратами, решту граней — паралелограмами (рис. 9.10). Аналогічним чином зображують прямокутний паралелепіпед (рис. 9.11).

Якщо не дотримуватися правила, що площина зображень має бути паралельною одній із граней, то в одержаному зображенні зберігатиметься тільки паралельність та рівність протилежних сторін квадрата чи прямокутника (всі грані — паралелограми). Тоді зображення куба чи прямокутного паралелепіпеда може мати вигляд, наведений на рисунку 9.12. Але таке зображення недостатньо наочне і може утруднювати розв'язування задач, пов'язаних із цими тілами. Тому ми не будемо користуватися ними (але ще раз підкреслимо, що такі зображення — правильні).

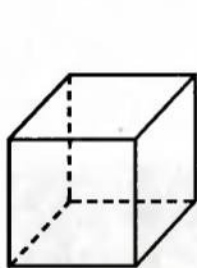


Рис. 9.10

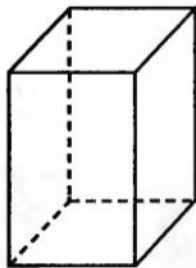


Рис. 9.11

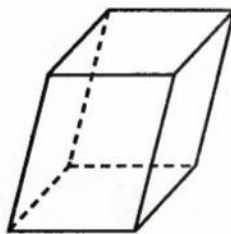


Рис. 9.12

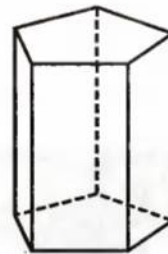


Рис. 9.13

Для побудови зображення призми достатньо побудувати многокутник, що зображає її основу. Потім з вершин многокутника слід провести прямі, паралельні деякій фіксованій прямій, і відкласти на них рівні відрізки. Сполучивши кінці цих відрізків, одержимо многокутник, що є зображенням другої основи призми (рис. 9.13).

Щоб побудувати зображення піраміди, досить побудувати многокутник, що зображає її основу. Потім потрібно вибрати яку-небудь точку,

лка зображатиме вершину піраміди, і сполучити її відрізками з вершинами многокутника (рис. 9.14). Одержані відрізки зображатимуть бічні ребра піраміди.

Зауважимо, що, наприклад, рисунок 9.14 є зображенням піраміди тільки у випадку, коли з тексту, який супроводить цей рисунок, ми знаємо, що розглядається піраміда. Якщо ж такого пояснення немає, то можна вважати також, що на рисунку 9.14 зображено плоску фігуру — чотирикутник $SABC$ з діагоналлю SB , усередині якого взято точку D , що сполучена штриховими лініями з точками S , A і C .

Звернемо увагу на той факт, що плоске зображення, підпорядковується певним законам, здатне передати уявлення про тривимірний предмет. Проте при цьому можуть виникати ілюзії. Наприклад, на рисунку 9.15 зображено фігуру, яку неможливо скласти з дерев'яних прямолинійних олівців (пояснить чому).

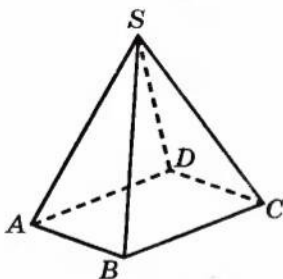


Рис. 9.14



Рис. 9.15

У живописі існує напрям, який називають «імпробілізм» (від англ. *impossibility* — неможливість) — зображення неможливих фігур, парадоксів. Відомий голландський художник М. Ешер у гравюрах «Бельведер» (рис. 9.16), «Підіймаючись і опускаючись» (рис. 9.17), «Водоспад» (рис. 9.18) тощо зобразив неможливі об'єкти.



Рис. 9.16



Рис. 9.17



Рис. 9.18

Сучасний шведський архітектор О. Рутерсвард присвятив неможливим об'єктам серію своїх художніх робіт. Деякі з них наведено на рисунках 9.19–9.21.

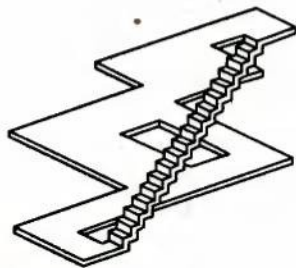


Рис. 9.19

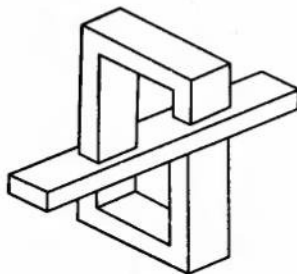


Рис. 9.20

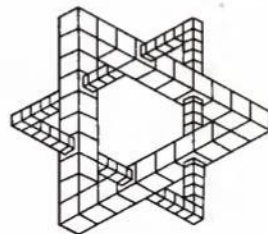


Рис. 9.21

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Чи може паралельною проекцією трапеції бути паралелограм?

Розв'язання

► Ні, не може, оскільки в трапеції прямі, на яких лежать бічні сторони, перетинаються. Отже, точка перетину цих прямих повинна проектуватися в точку перетину їх проекцій, тобто в точку перетину прямих, на яких лежать протилежні сторони паралелограма-проекції. Але це неможливо, оскільки протилежні сторони паралелограма лежать на паралельних прямих, що не перетинаються. ◀

Коментар

Щоб спростувати дане твердження, використаємо метод доведення від супротивного.

Припустимо, що паралельною проекцією трапеції є паралелограм. Спираючись на властивості паралельного проектування та властивості трапеції і паралелограма, одержимо суперечність з якоюсь із цих властивостей.

Задача 2*. На зображенні $A_1B_1C_1$ (рис. 9.22, а) рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) побудуйте зображення квадрата, який лежить у площині трикутника, якщо стороною квадрата служить гіпотенуза трикутника (і вершина прямого кута знаходиться всередині квадрата).

Розв'язання

► Нехай на гіпотенузі AB рівнобедреного прямокутного трикутника ABC побудовано квадрат $ABDE$ так, що вершина C знаходиться всередині

Коментар

На етапі аналізу умови задачі розглядаємо фігури-оригінали та виділяємо такі їх властивості, які зберігаються під час паралельного

квадрата (рис. 9.22, б). Тоді точка C є точкою перетину його діагоналей (оскільки діагоналі квадрата, а також катети AC та BC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC утворюють кути по 45° зі стороною AB). Отже, точка C — середина діагоналей BE і AD .

Однак під час проектування середина відрізка проектується в середину відрізка проєкції. Тому продовжимо сторони A_1C_1 і B_1C_1 за точку C_1 та відкладемо $C_1D_1 = A_1C_1$ і $C_1E_1 = C_1B_1$. Послідовно сполучаючи точки A_1, E_1, D_1, B_1 відрізками, одержуємо чотирикутник $A_1B_1D_1E_1$ (рис. 9.22, в) — шукане зображення квадрата $ABDE$. \triangleleft

проектування (паралельність прямих і відношення відрізків однієї прямої чи паралельних прямих).

Зокрема, після з'ясування того, що у квадраті $ABDE$ (рис. 9.22, б) точка C — середина відрізків BE і AD , складаємо *план побудови*:

продовжити сторони A_1C_1 і B_1C_1 за точку C_1 і відкласти відрізки, що дорівнюють відповідним сторонам даного трикутника, так, щоб точка C_1 була серединою діагоналей A_1D_1 і B_1E_1 побудованого чотирикутника $A_1B_1D_1E_1$.

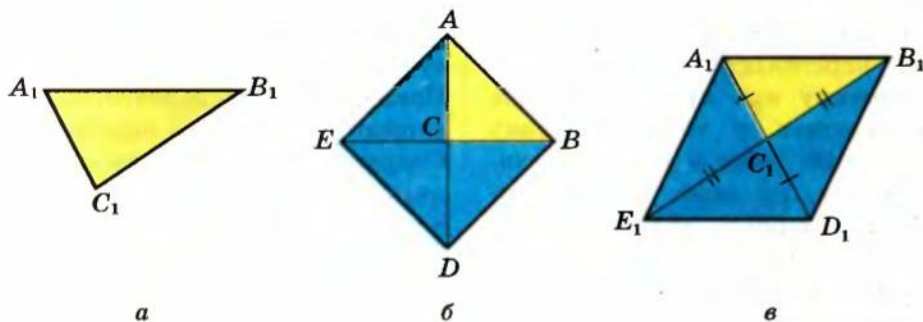


Рис. 9.22

Запитання для контролю

1. Поясніть, що називається паралельною проєкцією точки та фігури на дану площину.
2. Сформулюйте властивості паралельного проектування.
3. Доведіть властивості паралельного проектування.
4. Якою фігурою може бути паралельна проєкція трикутника, паралелограма, трапеції, кола, якщо площина фігури не паралельна напрямку проектування?
5. На прикладі зображення прямокутного паралелепіпеда поясніть, як виконують зображення многогранника.

Вправи

- 1°. Які фігури можуть служити паралельними проекціями трикутника?
- 2°. Чи може паралельною проекцією правильного трикутника бути:
1) прямокутний трикутник; 2) рівнобедрений трикутник; 3) різносторонній трикутник?
- 3°. Якою фігурою може бути паралельна проекція: 1) прямокутника; 2) паралелограма; 3) трапеції?
- 4°. Чи може паралельною проекцією прямокутника бути: 1) квадрат; 2) паралелограм; 3) ромб; 4) трапеція?
- 5°. Чи правильно, що проекцією ромба, якщо він не проектується у відрізок, завжди буде ромб? Коли це твердження виконується?
- 6°. Чи правильно, що під час паралельного проектування трикутника завжди: 1) медіани проектуються в медіани; 2) висоти проектуються у висоти; 3) бісектриси проектуються в бісектриси?
- 7°. Дано паралельну проекцію трикутника. Як побудувати проекції медіан цього трикутника?
- 8°. Дано паралельну проекцію трикутника. Як побудувати проекції середніх ліній цього трикутника?
9. Чи може проекцією трапеції з основами 4 см і 8 см бути трапеція з основами 2 см і 6 см? Відповідь поясніть.
10. Чи може паралельною проекцією двох непаралельних прямих бути пара паралельних прямих? Якщо може, то наведіть приклад таких прямих.
11. Побудуйте довільний паралелограм $A_1B_1C_1D_1$, прийнявши його за паралельну проекцію квадрата $ABCD$, побудуйте проекцію: 1) центра кола, описаного навколо квадрата $ABCD$; 2) перпендикуляра OM , опущеного із центра O квадрата $ABCD$ на сторону AD .
12. Побудуйте довільний трикутник $A_1B_1C_1$, прийнявши його за паралельну проекцію трикутника ABC із сторонами $AB = 2$ см, $BC = 6$ см, $AC = 5$ см, побудуйте зображення бісектриси трикутника, проведеної з вершини B .
13. На зображенні рівнобедреного прямокутного трикутника побудуйте зображення квадрата, який лежить у площині трикутника, якщо стороною квадрата служить катет даного трикутника.
- 14*. Зобразіть еліпси, одержані з даного кола: 1) стискуванням; 2) розтягуванням у 3 рази.
- 15*. Трикутник $A_1B_1C_1$ є паралельною проекцією трикутника ABC . Відстані між відповідними вершинами цих трикутників дорівнюють: 1) 4 см, 6 см, 8 см; 2) a , b , c . Знайдіть відстань між точками перетину медіан цих трикутників.
16. Чи можна паралелограм $ABCD$ перегнути по діагоналі AC так, щоб проекцією трикутника ABC на площину ADC був трикутник ADC ?

17. Точки A , B і C лежать на одній прямій і проєктуються на площину α в точки A_1 , B_1 , C_1 відповідно. Знайдіть A_1B_1 , якщо $AB = 7$, $AC = 3$, а $B_1C_1 = 5$.
18. Доведіть, що паралельною проєкцією центрально-симетричної фігури також є центрально-симетрична фігура.
19. Дано мимобіжні прямі a і b . Проведіть площину α так, щоб у випадку довільного вибору проєктуючої прямої паралельні проєкції прямих a і b на площину α перетиналися.
20. Дано мимобіжні прямі a і b та площину проєкції α . Проведіть проєктуючу пряму l так, щоб паралельні проєкції прямих a і b на площину α були паралельні. Чи завжди має розв'язок ця задача?

§ 10

ВЛАСТИВОСТІ ЗОБРАЖЕНЬ ДЕЯКИХ МНОГОКУТНИКІВ У ПАРАЛЕЛЬНІЙ ПРОЄКЦІЇ

Як відзначалося § 9, для зображення просторових фігур на площині часто використовують паралельне проєктування.

Зображенням фігури називають або паралельну проєкцію фігури, або будь-яку фігуру, подібну до проєкції даної фігури.

З властивостей паралельного проєктування випливає (див. § 9), що паралельною проєкцією многокутника є або многокутник із таким самим числом сторін, або відрізок. Причому якщо в многокутнику будь-які дві сторони паралельні, то їх проєкції також будуть паралельні (у разі, коли вони не лежать на одній прямій).

Розглянемо детальніше зображення трикутника, паралелограма, трапеції та правильного шестикутника. У разі, коли площина многокутника паралельна площині проєкції, його проєкцією буде многокутник, рівний даному. Тому розглянемо випадки, коли площина многокутника не паралельна площині проєкції (і не паралельна напряму проєктування).

1. Трикутник. Оскільки під час паралельного проєктування довжини відрізків і кути, узагалі кажучи, не зберігаються, то паралельною проєкцією, наприклад, рівностороннього трикутника може служити трикутник будь-якої форми (с. 92). Тому зображенням даного трикутника може бути довільний трикутник.

● Нехай дано трикутник ABC (який будемо вважати оригіналом) і довільний трикутник $A_0B_0C_0$. Покажемо, що трикутник $A_0B_0C_0$ можна вважати зображенням трикутника ABC під час деякого паралельного проєктування. Розглянемо площину α , яка не збігається з площиною трикутника ABC і проходить через його сторону AC (рис. 10.1). Побуду-

емо в площині α трикутник AB_1C , подібний до трикутника $A_0B_0C_0$ (з коефіцієнтом подібності $k = \frac{AC}{A_0C_0}$). Позначимо через a пряму, що проходить через точки B і B_1 . Тоді трикутник AB_1C є паралельною проекцією трикутника ABC на площину α в напрямі прямої a , а значить, подібний йому трикутник $A_0B_0C_0$ є зображенням трикутника ABC . ●

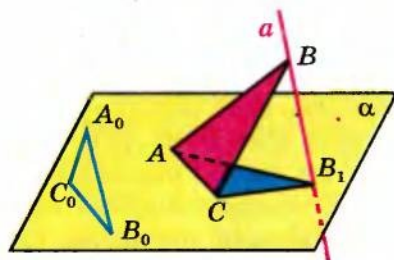


Рис. 10.1

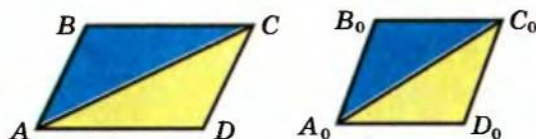


Рис. 10.2

2. Паралелограм. Зображенням будь-якого паралелограма (зокрема, прямокутника, ромба, квадрата) може бути довільний паралелограм.

● Дійсно, нехай $ABCD$ і $A_0B_0C_0D_0$ — два довільних паралелограми (рис. 10.2). Проведемо в цих паралелограмах діагоналі AC і A_0C_0 відповідно. За попередньою властивістю зображень трикутник $A_0B_0C_0$ можна вважати зображенням трикутника ABC . Оскільки під час паралельного проектування паралельність прямих зберігається, зображенням паралелограма $ABCD$ (оригіналу) буде паралелограм $A_0B_0C_0D_0$. ●

3. Трапеція. Зображенням будь-якої трапеції може бути довільна трапеція, у якій відношення основ дорівнює відношенню відповідних основ оригіналу.

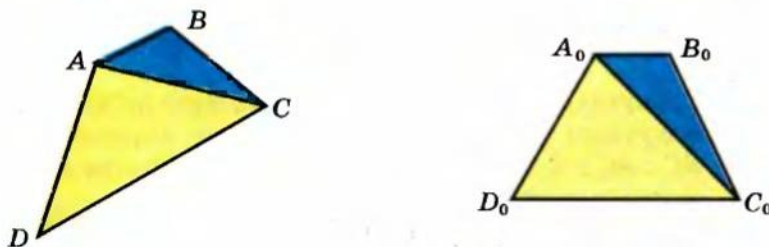


Рис. 10.3

● Дійсно, нехай $ABCD$ і $A_0B_0C_0D_0$ — дві довільні трапеції, у яких $\frac{CD}{AB} = \frac{C_0D_0}{A_0B_0}$ (рис. 10.3). Проведемо в цих трапеціях діагоналі AC і A_0C_0

відповідно. Трикутник $A_0B_0C_0$ можна вважати зображенням трикутника ABC . Оскільки під час паралельного проектування паралельність прямих зберігається, то зображенням прямої CD , паралельної прямій AB , буде пряма C_0D_0 , паралельна прямій A_0B_0 . Крім того, під час паралельного проектування зберігається відношення довжин відрізків, які лежать на паралельних прямих. Отже, зображенням трапеції $ABCD$ (оригіналу) буде трапеція $A_0B_0C_0D_0$. ◉

4. Правильний шестикутник. Розглянемо тепер паралельну проекцію правильного шестикутника $ABCDEF$ із центром у точці O (рис. 10.4, а).

● Проведемо через точку O діагоналі. Виберемо який-небудь трикутник, наприклад AOB . Його проекцією може бути довільний трикутник $A_0O'B_0$ на площині проекції. Беручи до уваги, що під час паралельного проектування середина відрізка проектується в середину відрізка проекції, відкладемо $O'D_0 = A_0O'$ і $O'E_0 = B_0O'$. А враховуючи, що під час паралельного проектування зберігається паралельність прямих, проведемо через точки A_0 і D_0 прями, паралельні прямій B_0O' ; через точки B_0 і E_0 — прями, паралельні прямій A_0O' . Точки перетину відповідних прямих позначимо F_0 і C_0 . Шестикутник $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ (рис. 10.4, б) і буде шуканою проекцією правильного шестикутника $ABCDEF$. ◉

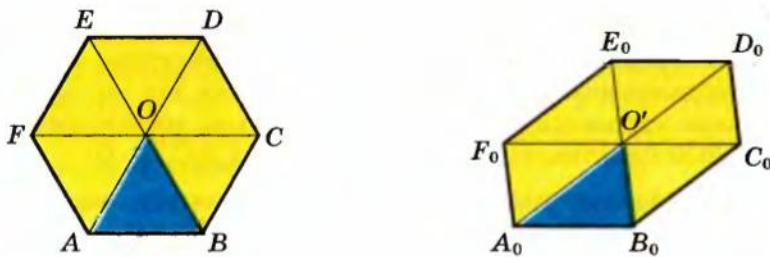


Рис. 10.4

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 10.5, а) служить зображенням прямокутного трикутника ABC , у якого відношення катетів $BC : AC = 3 : 4$. Побудуйте зображення центра кола, вписаного в трикутник ABC .

Розв'язання

► Розглянемо трикутник-оригінал ABC (рис. 10.5, б). За умовою катети трикутника пропорційні числам 3 і 4. Якщо позначити коефіцієнт

Коментар

На етапі аналізу умови задачі розглядаємо фігуру-оригінал і пробуємо визначити такі її властивості, які зберігаються під час паралельного

пропорційності через k , то $BC = 3k$, $AC = 4k$. Тоді за теоремою Піфагора $AB = 5k$.

Центр O вписаного кола є точкою перетину бісектрис CE і AD трикутника ABC . За властивістю бісектриси трикутника маємо:

$$\frac{BE}{AE} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}, \quad \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}.$$

Під час паралельного проектування зберігається відношення відрізків однієї прямої. Тому якщо E_1 і D_1 — проекції точок E і D відповідно, то

$$\frac{B_1E_1}{A_1E_1} = \frac{BE}{AE} = \frac{3}{4} \quad \text{і} \quad \frac{C_1D_1}{B_1D_1} = \frac{CD}{BD} = \frac{4}{5}.$$

Отже, будуємо точки E_1 і D_1 , які відповідно ділять дані відрізки A_1B_1 і B_1C_1 у вказаних відношеннях (рис. 10.5, а). Сполучивши точки C_1 і E_1 та A_1 і D_1 відрізками, дістаємо зображення C_1E_1 і A_1D_1 бісектрис трикутника ABC і точку O_1 їх перетину — шукане зображення центра кола, вписаного в трикутник ABC . \triangleleft

проектування (паралельність прямих та відношення відрізків однієї прямої чи паралельних прямих).

Центр вписаного кола знаходиться в точці перетину бісектрис, а бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим сторонам. Тому для побудови бісектрис достатньо знайти відношення відповідних сторін даного прямокутного трикутника.

Одержуємо *план побудови*: крім даного відношення катетів, знайти відношення катета і гіпотенузи та побудувати бісектриси, ураховуючи, що відношення відрізків однієї прямої під час паралельного проектування зберігається.

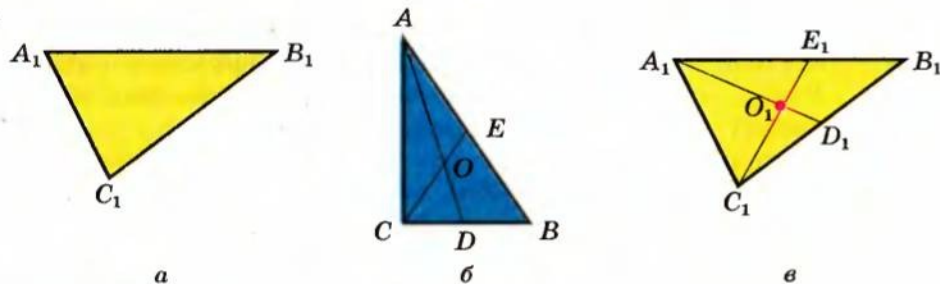


Рис. 10.5

Задача 2. На зображенні кола (рис. 10.6, а) побудуйте зображення перпендикулярних діаметрів.

Розв'язання

► Нехай в даному колі (рис. 10.6, б) діаметри AB і CD перпендикулярні

Коментар

На етапі аналізу умови задачі розглядаємо фігуру-оригінал і пробуємо

(перетинаються в центрі O , який є серединою кожного з них).

Проведемо дві хорди KM і ET перпендикулярно до діаметра AB (тоді $ET \parallel KM \parallel CD$). Ураховуючи, що діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл, дістаємо точки L і N , що є серединами хорд ET і KM відповідно. Оскільки під час проектування зберігається паралельність прямих і проекцією середини відрізка є середина відрізка проекції, одержуємо таку побудову.

1. На зображенні кола проводимо дві довільні паралельні хорди E_1T_1 і K_1M_1 (рис. 10.6, *в*).

2. Через середини L_1 і N_1 цих хорд проводимо хорду A_1B_1 , — шукаємо зображення діаметра AB кола.

Через середину O_1 хорди A_1B_1 проводимо хорду C_1D_1 , яка і є зображенням діаметра CD , перпендикулярного до діаметра AB . \triangleleft

виділимо такі її властивості, які зберігаються під час паралельного проектування (паралельність прямих та відношення відрізків однієї чи паралельних прямих). На цьому і ґрунтується план розв'язування (іноді для його складання доводиться виконувати на оригіналі якісь додаткові побудови).

Оскільки на рисунку 10.6, *а* немає навіть зображення центра кола, то для його отримання достатньо побудувати зображення довільного діаметра (серединою якого і буде зображення центра).

Розглядаючи коло-оригінал на рисунку 10.6, *б*, згадаємо такі властивості діаметра, які можна використати під час проектування. Зокрема, діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить її (а отже, і паралельну їй хорду) навпіл.

Складаємо *план побудови*: на зображенні кола провести довільні паралельні хорди; через їх середини провести зображення діаметра; через середину одержаного відрізка провести хорду, паралельну першим двом хордам.

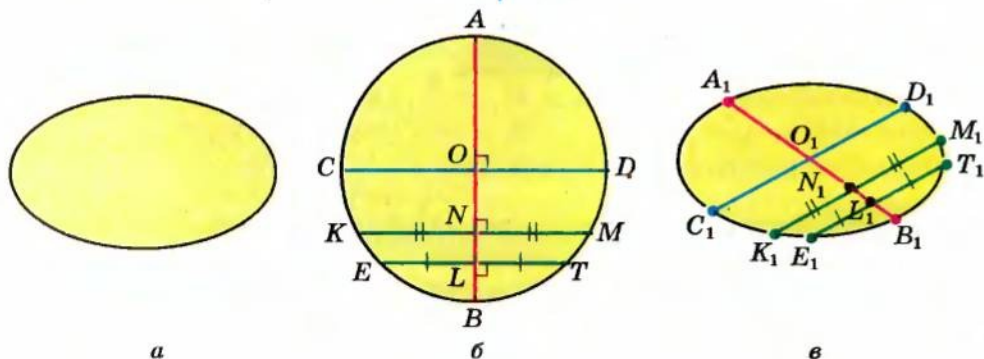


Рис. 10.6

Запитання для контролю

1. Якою фігурою може бути паралельна проекція трикутника, паралелограма, трапеції, кола, якщо площина фігури не паралельна напрямку проектування?
2. Доведіть, що зображенням даного трикутника може бути довільний трикутник.
3. Доведіть, що зображенням будь-якого паралелограма може бути довільний паралелограм.
4. Доведіть, що зображенням будь-якої трапеції може бути довільна трапеція, у якої відношення основ дорівнює відношенню відповідних основ оригіналу.
5. Поясніть, як можна побудувати проекцію правильного шестикутника.

Вправи

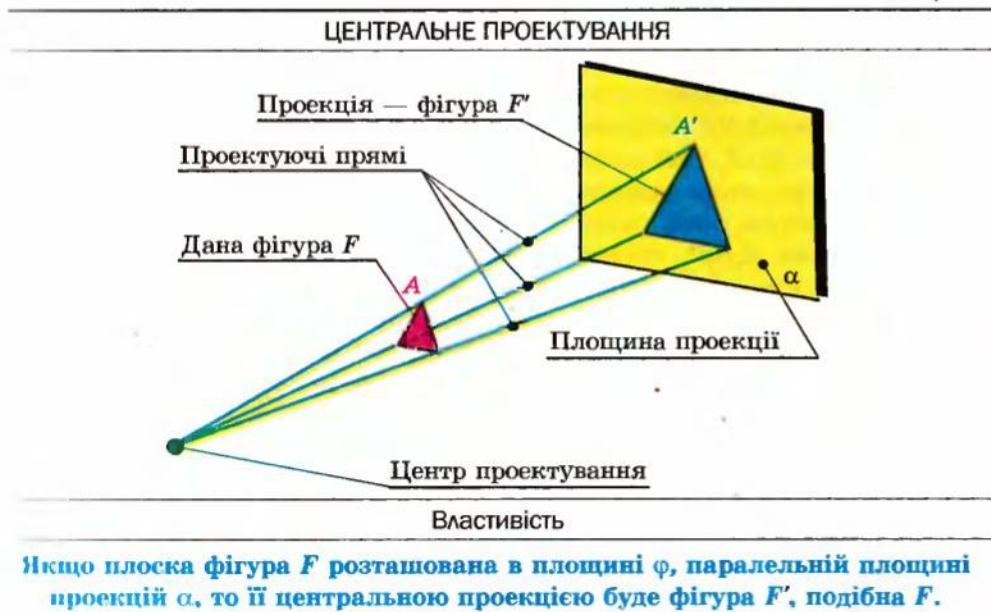
1. Які з властивостей ромба залишаються правильними для зображення цього ромба? Які можуть не зберегтися?
2. Які властивості прямокутника залишаються правильними для його проекції?
3. Доведіть, що паралельна проекція центрально-симетричної фігури теж є центрально-симетричною фігурою.
4. Дано зображення рівнобедреного трикутника у вигляді різностороннього трикутника. На цьому зображенні побудуйте: 1) зображення бісектриси кута, протилежного основі; 2) зображення перпендикуляра до основи, проведеного через середину бічної сторони.
5. Трикутник $A_1B_1C_1$ служить зображенням трикутника ABC , у якого $AB : BC = 2 : 3$. Побудуйте зображення бісектриси кута B .
6. Дано зображення трикутника і двох його висот. Побудуйте зображення центра кола, описаного навколо трикутника-оригіналу.
7. Трикутник $A_1B_1C_1$ служить зображенням прямокутного трикутника ABC , у якого відношення катета до гіпотенузи $BC : AB = 5 : 12$. Побудуйте зображення центра кола, вписаного в трикутник ABC .
8. На зображенні правильного шестикутника побудуйте зображення: 1) бісектриси одного з його зовнішніх кутів; 2) перпендикуляра, опущеного із центра на одну з менших діагоналей.
9. Побудуйте на зображенні ромба зображення його висоти, якщо гострий кут ромба дорівнює 45° .
10. Використовуючи зображення кола в паралельній проекції, побудуйте зображення вписаного в нього квадрата.
11. Побудуйте зображення прямокутного трикутника, вписаного в коло.

12. Використовуючи зображення кола в паралельній проекції, побудуйте зображення дотичної: 1) яка паралельна даній хорді; 2) яка проходить через дану точку на зображенні кола.
13. Зобразіть паралельну проекцію квадрата: 1) з вписаним у нього колом; 2) з описаним навколо нього колом.
14. Дано зображення кола. Побудуйте зображення правильного трикутника: 1) вписаного в дане коло; 2) описаного навколо нього.
15. Дано зображення $A_1B_1C_1D_1$ рівнобічної трапеції $ABCD$ з основами AB і CD , кути при основі якої дорівнюють 45° . Побудуйте зображення центра кола, описаного навколо трапеції.
- 16'. Знаючи, що в трапецію $ABCD$ з основами AB і CD можна вписати коло, а кути при її основі дорівнюють 90° і 60° , побудуйте зображення центра вписаного кола на зображенні $A_1B_1C_1D_1$ даної трапеції.
17. Дано зображення ромба, у якого одна з діагоналей дорівнює стороні. Зобразіть проекції висот ромба, що проходять через точку перетину діагоналей.
- 18'. Дано зображення рівнобічної трапеції, у яку можна вписати коло. Позначте точки дотику цього кола до сторін трапеції.

§ 11

ЦЕНТРАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ. ЗОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ФІГУР ПІД ЧАС ЦЕНТРАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

Таблиця 10



Пояснення й обґрунтування

1. Центральне проектування. Разом із паралельним проектуванням, що використовують у геометрії для зображення просторових фігур, велике значення має так зване центральне проектування, яке застосовують у живописі, фотографії і т. п. Сприйняття людиною навколишніх предметів за допомогою зору здійснюється за законами центрального проектування.

Нехай α — деяка площина, а точка S , що не належить їй, — центр проектування (рис. 11.1). Для точки A простору проведемо пряму a через точки S і A . Точка перетину цієї прямої з площиною α називається *центральною проекцією точки A на площину α* . Позначимо її A' .

Відповідність, при якій точкам A простору ставлять у відповідність їх центральні проекції A' , називається центральним проектуванням¹.

Центральна проекція не означена для точок, які лежать у площині, що проходить через центр проектування і паралельна площині проектування (оскільки в цьому випадку пряма SA буде паралельна площині α).

Якщо F — фігура в просторі, то центральні проекції всіх її точок на площину α утворюють фігуру F' , яка називається центральною проекцією фігури F на площину α .

На рисунку 11.2 показано центральне проектування у випадку, коли площина проектування α розташована між фігурою F і центром проектування S . Якщо центр проектування уявляти собі як око спостерігача, то сприйняття зображенням буде таким же, як і від самої фігури F . Тому центральне проектування дає найбільш наочне зображення просторових фігур.

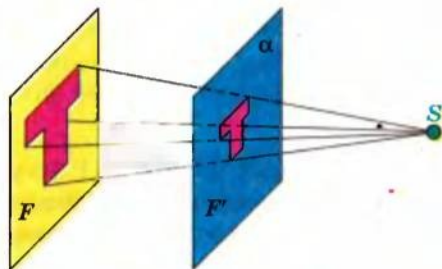


Рис. 11.2

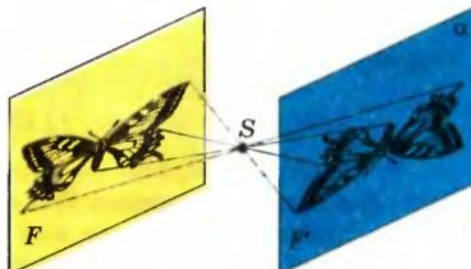


Рис. 11.3

На рисунку 11.3 показано центральне проектування у випадку, коли центр проектування розташований між фігурою F і площиною проєк-

¹ Часто центральне проектування ще називають перспективою.

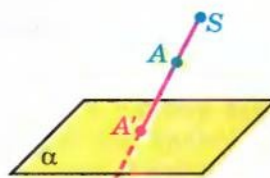


Рис. 11.1

цій. Таке перевернуте зображення одержуємо на плівці фотоапарата, об'єктив якого поміщено в центр проектування (рис. 11.4).



Рис. 11.4

На рисунку 11.5 показано центральне проектування у випадку, коли фігура розміщена між площиною проектування і центром проектування. Прикладами таких проєкцій служать тіні предметів від близько розташованого точкового джерела світла. Центральні проєкції одержують на екрані, коли демонструють кінофільми, діафільми тощо.

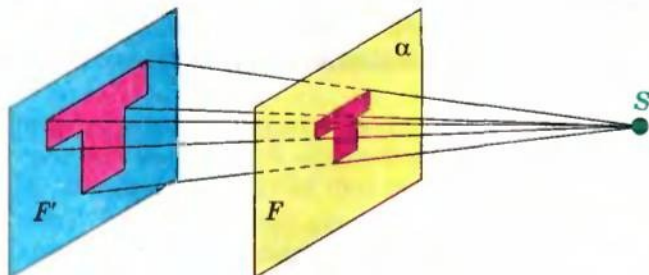


Рис. 11.5

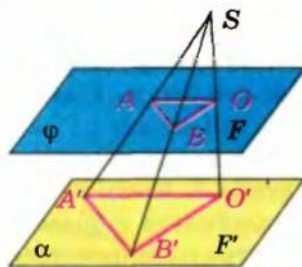


Рис. 11.6

Теорема 11.1. Якщо плоска фігура F розташована в площині φ , паралельній площині проєкцій α , то її центральною проєкцією буде фігура F' , подібна¹ фігурі F (рис. 11.6).

● *Доведення.* Задамо відповідність між точками фігури F і фігури F' . Для цього поставимо у відповідність кожній точці фігури F її центральну проєкцію. Для точок A, B і O фігури F на площині φ розглянемо їх центральні проєкції A', B' і O' . Оскільки площини α і φ паралельні, то площини SAB і SAO перетинають їх по паралельних прямих ($AB \parallel A'B'$,

¹ Після введення поняття «відстань від точки до площини» можна легко обґрунтувати, що коефіцієнт подібності фігури та її проєкції дорівнює відношенню відстаней від центра S до площин α і φ .

$AO \parallel A'O'$). Тоді трикутники SAB і $SA'B'$, а також трикутники SAO і $SA'O$ подібні зі спільним коефіцієнтом подібності $k = \frac{SA'}{SA}$. Таким чином, задана відповідність між точками фігур F і F' змінює відстань між ними в одне і те саме число разів. Отже, фігури F і F' подібні (з коефіцієнтом $k = \frac{SA'}{SA} = \frac{SO'}{SO}$). ◉

2. Зображення просторових фігур у центральній проекції. З'ясуємо, у яку фігуру під час центрального проектування переходить пряма.

Нехай пряма a перетинає площину проектування α і центр проектування S не належить прямій a . Знайдемо проекцію цієї прямої на площину α . Для цього через пряму a і центр проектування S проведемо площину β і пряму її перетину з площиною α позначимо a' (рис. 11.7). У площині β через точку S проведемо пряму, паралельну прямій a , і точку її перетину з прямою a' позначимо S' . Легко бачити, що **пряма a' без точки S' і є шуканою проекцією прямої a на площину α .**

Як відомо, під час паралельного проектування паралельні прямі проектуються або в паралельні прямі, або в одну пряму, або у дві точки, залежно від розташування цих прямих. Під час центрального проектування паралельні прямі теж можуть проектуватися або в паралельні прямі, або в одну пряму (наведіть приклади). Виявляється, що паралельні прямі можуть проектуватися і в прямі, що перетинаються. Покажемо це.

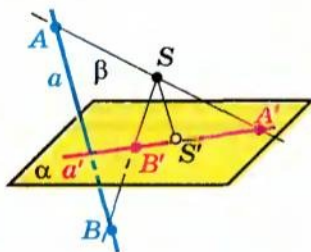


Рис. 11.7

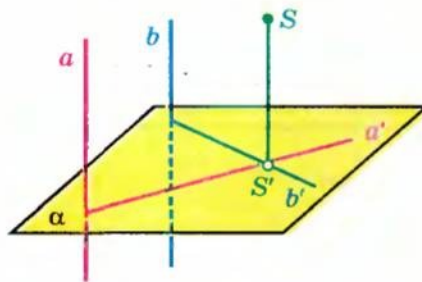


Рис. 11.8

● Нехай прямі a і b паралельні та перетинають площину α , а центр проектування S не належить площині цих прямих (рис. 11.8). Тоді, виконуючи попередні побудови для прямих a і b , одержимо, що їх проекціями будуть прямі a' і b' (які перетинаються), за винятком їх спільної точки S' .

Враження, що паралельні прямі перетинаються, виникає, коли ми дивимося на дорогу, що йде вдаль, на залізничні рейки і т. п. ◉

Наведемо приклади зображення куба в центральній проекції.

На рисунку 11.9 зображено куб у центральній проекції на площину, паралельну грані ABB_1A_1 . (Поясніть, чому в цьому разі зображення AD , BC , B_1C_1 , A_1D паралельних прямих перетинаються в одній точці.)

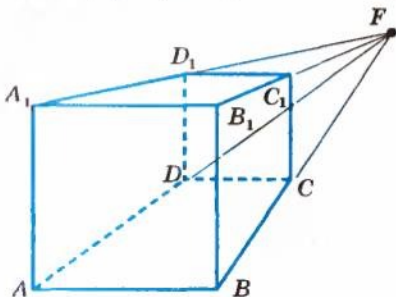


Рис. 11.9

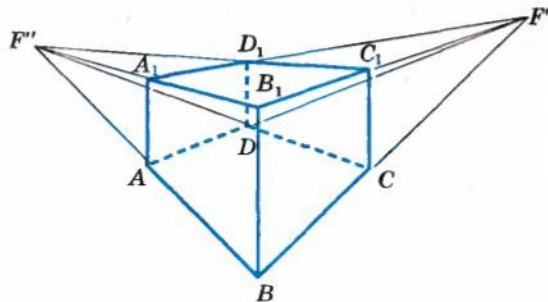


Рис. 11.10

На рисунку 11.10 зображено куб у центральній проекції на площину, паралельну ребру BB_1 , але не паралельну його граням.

Запитання для контролю

1. Поясніть, що називається центральною проекцією точки та фігури на дану площину.
2. Сформулюйте властивості центрального проектування.
- 3*. Доведіть властивості центрального проектування.
4. Якою фігурою може бути центральна проекція прямої?
5. Покажіть, що під час центрального проектування паралельні прямі можуть проектуватися в прямі, що перетинаються.
6. Наведіть приклад зображення куба в центральній проекції на площину, паралельну одній із граней куба, і поясніть його побудову.

Вправи

1. Чи для всіх точок простору існує центральна проекція? Якщо ні, то для яких точок вона не існує?
2. Чи можуть паралельні прямі під час центрального проектування перейти в прямі, які перетинаються?
3. У якому випадку центральною проекцією двох прямих будуть дві паралельні прямі?
4. Яке зображення фігури одержимо під час центрального проектування, якщо площина проектування розташована між фігурою і центром проектування?
5. Яке зображення фігури одержують під час центрального проектування, якщо центр проектування розташований між фігурою і площиною проектування? Де використовується таке зображення?

6. Яке зображення фігури одержують під час центрального проектування, якщо фігура розташована між площиною проектування і центром проектування? Де використовується таке зображення?
7. Що можна сказати про центральну проекцію плоскої фігури, яка розташована в площині, паралельній площині проектування?
8. Зробіть рисунки, аналогічні рисункам 11.2, 11.3, 11.5, для центральних проекцій фігури, зображеної на рисунку 11.11.
9. Нехай пряма перетинає площину проектування і не проходить через центр проектування. Визначте, куди під час центрального проектування переходить частина цієї прямої, розташована: а) вище за площину проектування; б) нижче за площину проектування.
- 10*. Побудуйте центральну проекцію куба, аналогічну зображеній на рисунку 11.9, так, щоб точка F лежала всередині зображення грані ABB_1A_1 .
- 11*. Побудуйте центральну проекцію правильної чотирикутної піраміди на площину, яка не паралельна її основі.



Рис. 11.11

§ 12 МЕТОДИ ПОБУДОВИ ПЕРЕРІЗІВ МНОГОГРАННИКІВ

1. Використання властивостей паралельних прямих і площин. Якщо даний многогранник містить паралельні грані, які перетинає площина перерізу, то за теоремою 6.2 прями перетину січної площини із цими гранями будуть паралельні.

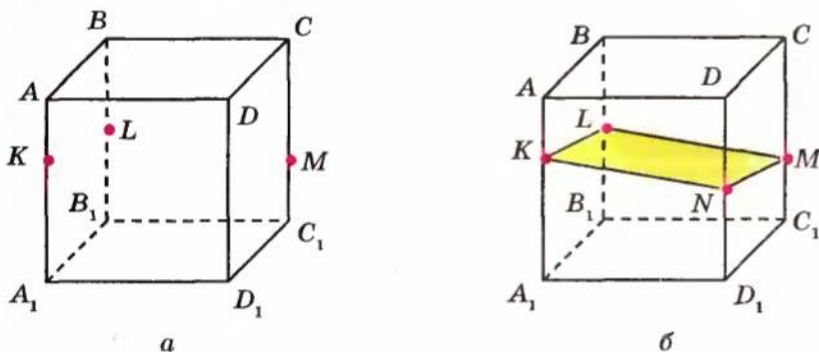


Рис. 12.1

Наприклад, побудуємо переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCD_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.1, а) площиною, яка проходить через точки K , L , M на його ребрах ($K \in AA_1$, $L \in BB_1$, $M \in CC_1$). Спочатку сполучаємо відрізками пари точок, що лежать в одній грані, і одержуємо відрізки KL і LM (рис. 12.1, б), по яких площина перерізу перетинає грані ABB_1A_1

і BCC_1B_1 відповідно. Потім урахуємо, що протилежні грані паралелепіпеда попарно паралельні, наприклад, пл. $AA_1D_1D \parallel$ пл. BCC_1B_1 . Отже, площина перерізу перетинає грань AA_1D_1D по прямій KN , паралельній LM (проводимо $KN \parallel LM$, $N \in D_1D$ і сполучаємо відрізками точки N і M). Чотирикутник $KLMN$ — шуканий переріз.

Іноді використання властивостей паралельних прямих і площин поєднують з іншими методами побудови перерізів многогранників.

2. Метод слідів. Як відмічалось в § 2, для побудови складніших перерізів многогранників часто буває зручним застосовувати метод слідів. Використовуючи його, спочатку будують пряму перетину січної площини з площиною якоїсь грані (слід січної площини на цій грані), а потім уже знаходять точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (чи з їх продовженнями). Іноді потрібно розглядати певні допоміжні площини, для яких також будують слід січної площини (або слід цієї допоміжної площини на площині якоїсь грані). Нагадаємо, що для отримання сліду (прямої b) площини β на площині α (рис. 12.2) достатньо знайти точки перетину двох прямих площини α з площиною β (оскільки дві точки, наприклад A і C , однозначно визначають пряму b). Точка перетину будь-якої прямої a площини β з площиною α завжди лежить на сліді площини β на площині α (на прямій b).

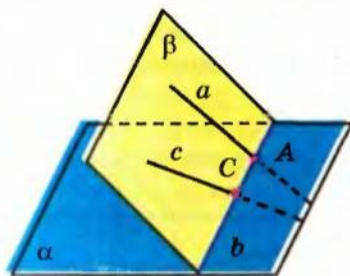


Рис. 12.2

Після розгляду паралельного та центрального проектування ми можемо уточнити зміст методу слідів, пов'язаного з використанням відповідних проекцій. Якщо розглядати слід січної площини на площині проекції, то разом з кожною точкою можна розглядати і її проекцію на цю площину. Тоді для побудови відповідного сліду січної площини доводиться двічі знаходити точки перетину прямої і площини за двома даними точками цієї прямої та їх проекціями на площину.

Наприклад, нехай пряма a проходить через точки A , B і відомо паралельні (рис. 12.3, *a*) чи центральні (рис. 12.3, *б*) проекції A' , B' цих точок на площину α . Тоді точка M перетину прямої a з її проекцією — прямою a' (яка проходить через точки A' , B') і буде шуканим перетином прямої a з площиною α . Отже,

щоб знайти точку перетину прямої з площиною проекції, достатньо знайти точку перетину прямої з її проекцією на цю площину.

Таким чином, для побудови перерізів многогранників методом слідів ми можемо використовувати паралельне проектування (у зада-

чах, пов'язаних із призмами) чи центральне проектування (у задачах, пов'язаних із пірамідами). Часто як площину проекції вибирають площину основи многогранника (як центр проектування — вершину піраміди, протилежну до основи).

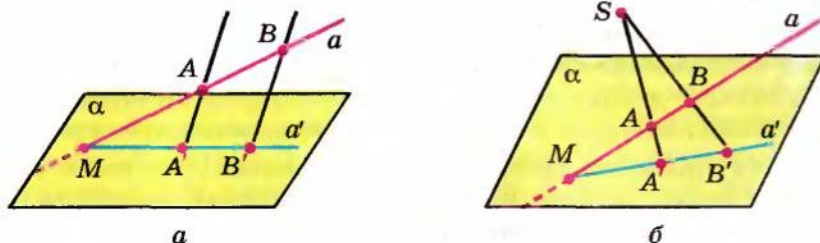


Рис. 12.3

Використовуючи метод слідів, побудуємо переріз куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через три точки K, L, M , які лежать на парно мимобіжних ребрах куба (рис. 12.4).

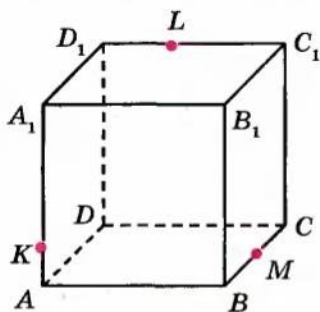


Рис. 12.4

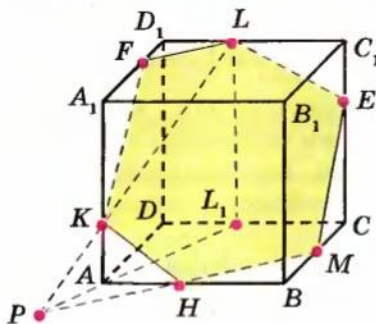


Рис. 12.5

Розглянемо паралельне проектування даних точок на площину основи $ABCD$ в напрямку бічного ребра куба. Тоді проекціями точок K, M, L будуть відповідно точки A, M, L_1 , де $LL_1 \parallel D_1D$ (рис. 12.5).

Знайдемо точку перетину прямої LK , яка лежить у площині перерізу, з площиною основи куба. Перетин прямої LK з її проекцією L_1A і буде шуканою точкою P . Вона належить площині перерізу і площині основи куба. Отже, площина перерізу перетинає основу куба по прямій MP (це і є слід січної площини на площині основи куба). Точка H перетину цієї прямої з ребром AB є ще однією точкою перерізу куба. Сполучаємо точки K і H , H і M відрізками.

Далі використаємо паралельність протилежних граней куба, які січна площина перетинає по паралельних прямих. Через точку L проведемо пряму, паралельну KH , і точку її перетину з ребром CC_1 позначимо

E . Сполучимо точки E і M відрізком. Через точку L проведемо також пряму, паралельну HM , і точку її перетину з ребром A_1D_1 позначимо F . Сполучимо точки L і F , K і F відрізками. Шестикутник $KHMELF$ і буде шуканим перерізом куба даною площиною.

Іноді метод слідів достатньо складно реалізувати на практиці, якщо точка перетину прямої, що лежить у січній площині, та її проекції знаходяться поза межами аркуша, на якому виконують побудову перерізу. У цьому випадку використовують інший метод, який дозволяє виконувати всі необхідні побудови в межах зображення даного многогранника.

3. Метод внутрішнього проектування. Розглянемо суть цього способу. Маючи три точки, які визначають площину перерізу, знаходять їх проекції на деяку площину (найчастіше на площину основи многогранника). Також знаходять проекцію якоїсь, ще не побудованої, точки перерізу. (Цю невідому точку перерізу, як правило, вибирають на бічному ребрі многогранника таким чином, щоб будь-які два відрізки, які сполучають чотири точки-проекції, перетиналися у внутрішній точці цих відрізків.) За трьома даними точками і чотирма проекціями знаходять четверту точку, що належить площині перерізу. Якщо потрібно, так само одержують п'яту, шосту і т. д. точки, які належать площині перерізу і ребрам многогранника, тобто одержують переріз.

Використовуючи метод внутрішнього проектування, ще раз розв'яжемо попередню задачу та побудуємо переріз куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через три точки K, L, M , які лежать на попарно мимобіжних ребрах (рис. 12.6).

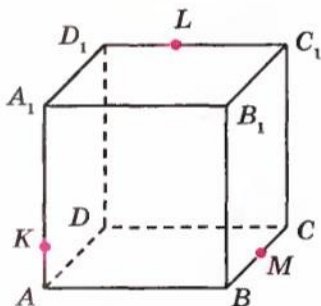


Рис. 12.6

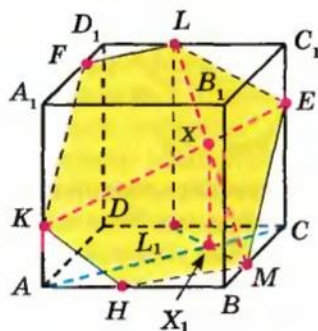


Рис. 12.7

Розглянемо паралельне проектування даних точок на площину основи $ABCD$ в напрямку бічного ребра куба. Тоді проекціями точок K, M, L будуть відповідно точки A, M, L_1 , де $LL_1 \parallel D_1D$ (рис. 12.7). Шукатимемо точку E перетину січної площини з ребром CC_1 . Проекцією точки E на площину основи є точка C . Сполучимо чотири одержані точки-проекції двома відрізками AC і L_1M , які перетинаються в точці X_1 . Точка X_1 є

проекцією деякої точки X січної площини, у якій перетинається пряма LM з поки що не повністю визначеною прямою KE . Проводячи через точку X_1 пряму, паралельну напрямку проектування ($X_1X \parallel L_1L$), у перетині її з прямою LM одержуємо точку X . Тепер проводимо пряму KX до перетину її з ребром CC_1 у точці E . Сполучаючи одержану точку E з даними точками L і M відрізками, дістаємо дві сторони шуканого перерізу.

Подальші побудови, як і при першому способі розв'язування, спираються на паралельність протилежних граней куба, які січна площина перетинає по паралельних прямих. Через точку K проведемо пряму, паралельну LE , і точку її перетину з ребром AB позначимо H . Сполучаємо точки H і M відрізком. Через точку K проведемо також пряму, паралельну ME , і точку її перетину з ребром A_1D_1 куба позначимо F . Сполучаємо точки L і F відрізком. Шестикутник $KHMELF$ і буде шуканим перерізом куба даною площиною.

Заяпитання для контролю

1. Наведіть приклад використання властивостей паралельних прямих і площин для побудови перерізу многогранника.
2. Поясніть, як можна знайти слід прямої на площині, використовуючи проекцію прямої на цю площину.
3. Поясніть зміст методу внутрішнього проектування для побудови перерізів многогранників.

Вправи

1. Чи можна в перерізі куба площиною одержати: 1) трикутник; 2) правильний трикутник; 3) рівнобедрений трикутник; 4) прямокутний трикутник; 5) тупокутний трикутник? Якщо можна, то проілюструйте, як це зробити; якщо — ні, то обґрунтуйте чому.
2. Чи можна в перерізі куба площиною одержати: 1) квадрат; 2) ромб; 3) прямокутник; 4) трапецію; 5) паралелограм; 6) прямокутну трапецію?
3. Чи можна в перерізі куба площиною одержати: 1) п'ятикутник; 2) правильний п'ятикутник?
4. Чи можна в перерізі куба площиною одержати: 1) шестикутник; 2) правильний шестикутник; в) многокутник із числом сторін більше шести?
5. Якою фігурою є переріз куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через вершини A_1 , C і точку K — середину ребра DD_1 ?
6. Побудуйте переріз куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через точки M , N , K — середини відповідно ребер $A_1 D_1$, $C_1 D_1$, AB . Визначте форму перерізу.

7. Побудуйте переріз куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через точки K, L, M , розташовані так, як показано на рисунку 12.8. Визначте форму перерізу.
8. Побудуйте переріз куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, яка проходить через вершини B, D і точку M , узятую на ребрі $C_1 D_1$. Визначте форму перерізу.

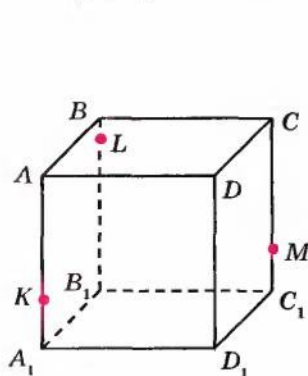


Рис. 12.8

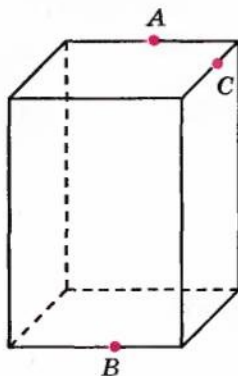


Рис. 12.9

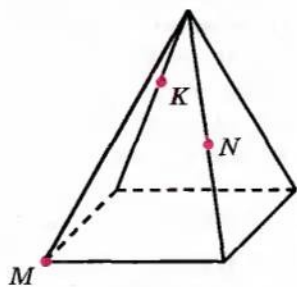


Рис. 12.10

9. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда площиною, що проходить через три точки, розташовані так, як показано на рисунку 12.9.
10. Побудуйте переріз правильної чотирикутної піраміди площиною, що проходить через точки, зображені на рисунку 12.10.
11. Побудуйте переріз правильної чотирикутної піраміди площиною, що проходить через середину бічного ребра паралельно бічній грані.
12. Які багатокутники можна одержати в перерізі чотирикутної піраміди площиною?
- 13*. Чи можна в перерізі правильного тетраедра площиною одержати квадрат?
14. Побудуйте переріз правильної шестикутної призми площиною, яка проходить через точки, зображені на рисунку 12.11.

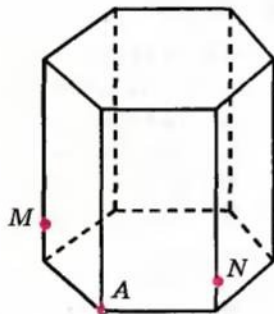


Рис. 12.11

15. У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ побудуйте переріз площиною, що проходить через вершини C і D_1 та точку K відрізка $B_1 C_1$.
16. У тетраедрі $ABCD$ побудуйте переріз площиною, що проходить через середину ребра DC та вершину B і паралельна прямій AC .
17. У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ побудуйте переріз площиною, що проходить через середину ребра $A_1 D_1$ та вершини D і C_1 .

18. У тетраедрі $DABC$ побудуйте переріз площиною, що проходить через вершину A та точку M ребра DB і паралельна прямій BC .
19. У тетраедрі $DABC$ точки E, P, M належать відповідно ребрам AD, DB, BC , причому прямі EP і AB не паралельні. Побудуйте переріз тетраедра площиною EPM .
20. У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка E належить ребру CD . Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через цю точку і паралельна площині $BC_1 D$.
21. У тетраедрі $DABC$ точки E, K, P належать ребрам AB, DB і DC відповідно, причому PK не паралельна BC . Побудуйте переріз тетраедра площиною EKP .
22. У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка H належить ребру CD . Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через цю точку і паралельна площині ACD_1 .
23. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ з ребром a . Побудуйте переріз куба площиною і знайдіть площу перерізу, якщо площина перерізу проходить через: 1) вершини A і D_1 та середину ребра BB_1 ; 2) вершину A і паралельна площині DVC_1 ; 3) середини ребер AB_1, BB_1 і $B_1 C_1$.

ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

Центральне проектування, або перспектива, як спосіб зображення просторових тіл виникло ще в Стародавній Греції. Перші згадки про перспективу містяться в роботах Есхіла (525–456 рр. до н. е.). Значне місце зображенню просторових фігур з використанням перспективи приділив у трактаті «Про геометрію» відомий мислитель і вчений Демокрит (бл. 460–370 рр. до н. е.).

Наступну згадку про перспективу знаходимо в роботах Евкліда. Крім своїх знаменитих «Начал», він написав багато інших творів. Зокрема, у роботі «Оптика» Евклід з позицій геометрії детально виклав природу людського зору, того, як одержується зображення різних предметів на сітківці ока. Евклід писав, що ми відчуваємо предмети, коли прямолінійні промені, які йдуть від них, сходяться в нашому оці. Тому всю систему променів зору можна уявити собі у вигляді піраміди, вершина якої знаходиться в оці, а її основою служить предмет, що розглядається нами. Евклід увів також постулат про те, що видимі розміри предмета залежать від кута, під яким його розглядають.

Найвизначнішими роботами з перспективи старогрецького періоду вважають твори римського архітектора й інженера Марка Вітрувія Полліона (точні дати його життя не встановлено, гадають, що бл. 25 р. до н. е.). Способи побудови зображень у перспективі вчений виклав у праці «Про архітектуру», що складається з десяти книг.

Подальшим важливим етапом у розвитку теорії перспективи стала епоха Відродження. Теоретиком перспективи вважають італійського архітектора Філіппо Брунеллескі (1377–1446). На практиці теоретичні досягнення втілили у своїх полотнах великі художники Леонардо да Вінчі (1452–1519), Альбрехт Дюрер (1471–1528) і багато інших.

А. Дюрер запропонував у своїх книгах декілька пристроїв, що дають змогу одержувати перспективу, деякі з них він зобразив на гравюрах. Наприклад, на одній (рис. 12.12) показав, що для отримання перспективного зображення предмета між оком спостерігача і предметом поміщається рамка, розділена на невеликі квадрати сіткою. За допомогою натягнутої нитки спочатку копіюють контури моделі, а потім одержане зображення переносять на папір.

Леонардо да Вінчі у своєму творі «Трактат про живопис» ділить перспективу на три основних види.

1. Лінійна перспектива, яка вивчає закони побудови зменшення фігур у міру віддалення їх від спостерігача.
2. Повітряна та колірна перспектива, яка трактує зміну кольору предметів залежно від їх відстані до спостерігача і впливу шару повітря на насиченість і локальність кольору.
3. Перспектива чіткості контура предмета, яка визначає ступінь виразності меж фігур і контрасту світла та тіні на них у міру віддалення їх у глибину простору, що зображають на картині.

Два останніх види перспективи не набули подальшого теоретичного розвитку через складність дослідження проблеми. Дослідження першого виду дозволили розвинути галузь точної науки — лінійну перспективу, яка пізніше ввійшла як складова до нарисної геометрії.

Засновником цього розділу геометрії вважають французького вченого, геометра, інженера й активного громадського діяча Великої французької революції Гаспара Монжа (1746–1818). Його книга «Нарисна геометрія», видана в 1795 р., була першим систематизованим викладом методів зображення просторових фігур на площині.



Рис. 12.12

Розділ 4

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРИ

ОСНОВНИЙ МАТЕРІАЛ

- § 13. Кут між прямими в просторі.
Перпендикулярні прямі
- § 14. Перпендикулярність прямої та площини
- § 15. Перпендикуляр і похила.
Теорема про три перпендикуляри
- § 16. Кут між прямою та площиною
- § 17. Двогранний кут. Кут між площинами
- § 18. Перпендикулярність площин
- § 19. Відстані між точками, прямими та площинами
- § 20. Ортогональне проектування

ДОДАТКОВИЙ МАТЕРІАЛ

- § 21. Відстані між фігурами в просторі. Знаходження відстані між мимобіжними прямими
- § 22. Геометричні місця точок у просторі

В основній частині розділу ви:

ознайомитеся з основними поняттями та властивостями перпендикулярності прямих і площин у просторі, кутами в просторі;

навчитеся застосовувати ці поняття і властивості для розв'язування геометричних задач на доведення та обчислення відстаней і кутів у просторі.

У додатковій частині розділу ви:

зможете ознайомитися з узагальненням понять відстані в геометрії та геометричного місця точок, відомих вам з курсу планіметрії;

навчитеся розв'язувати складніші задачі, пов'язані з перпендикулярністю прямих і площин у просторі.



Пояснення й обґрунтування

Як відзначалося в розділі 2, дві прямі в просторі можуть лежати в одній площині (коли вони перетинаються або паралельні) або не лежати в одній площині (тоді вони мимобіжні). Дамо означення кута між прямими в просторі в кожному із цих випадків.

Дві прямі, які перетинаються, утворюють суміжні і вертикальні кути. Вертикальні кути рівні, а суміжні кути доповнюють один одного до 180° .

Означення. *Кутом між двома прямими, що перетинаються, називається найменший із кутів, утворених променями цих прямих з вершиною в точці їх перетину.*

Як і на площині, дві прямі в просторі, що перетинаються, називаються *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом. Кут між двома паралельними прямими (чи прямими, що збігаються) вважають рівним нулю.

Також вважатимемо, що два відрізки перпендикулярні, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

Якщо позначити кут між прямими, які лежать в одній площині, через φ , то з наведеного означення випливає, що $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Наприклад, у кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 13.1) ребра, що перетинаються, перпендикулярні, діагональ $A_1 B$ грані куба утворює з її ребрами кути по 45° .

Використовуючи властивості паралельного проектування, доведемо таку теорему.

Теорема 13.1. *Кут між прямими, що перетинаються, дорівнює куту між прямими, які перетинаються і паралельні даним прямим.*

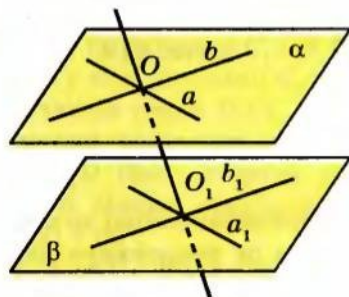


Рис. 13.2

● **Доведення.** Випадок, коли прямі лежать в одній площині, розглядався в планіметрії. Нехай прямі a і b перетинаються в точці O і лежать у площині α , а відповідно паралельні їм прямі a_1 і b_1 ($a_1 \parallel a$ і $b_1 \parallel b$) перетинаються в точці O_1 і лежать у площині β (рис. 13.2). За ознакою паралельності площини α і β паралельні.

Розглянемо паралельне проектування в напрямі прямої OO_1 на площину β . Оскільки площина, яка проходить через

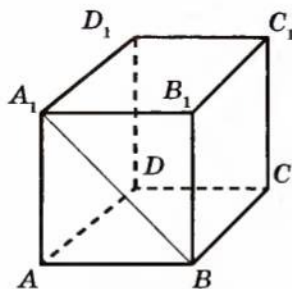
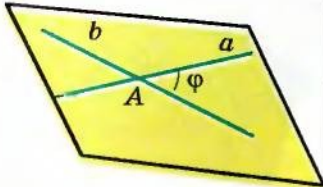
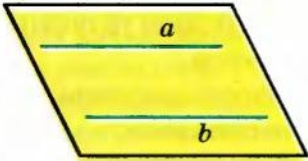
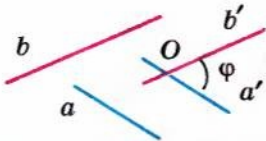
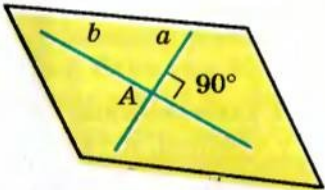
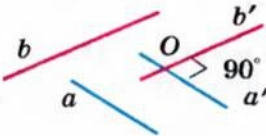


Рис. 13.1

§ 13

КУТ МІЖ ПРЯМИМИ В ПРОСТОРИ.
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ

Таблиця 11

КУТИ МІЖ ПРЯМИМИ В ПРОСТОРИ		
Прямі лежать в одній площині		Прямі не лежать в одній площині
<p><i>Прямі перетинаються</i></p>  <p>φ — найменший¹ з утворених кутів</p> <p>$\angle (a; b) = \varphi$ $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$</p>	<p><i>Прямі паралельні</i></p>  <p>$\angle (a; b) = 0^\circ$ $\varphi = 0^\circ$</p>	<p><i>Прямі мимобіжні (не лежать в одній площині)</i></p>  <p>$a' \parallel a$, $b' \parallel b$</p> <p>$\angle (a; b) = \angle (a'; b') = \varphi$ $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$</p>
Перпендикулярні прямі ($a \perp b$)		
 <p>$\angle (a; b) = 90^\circ$</p>	 <p>$\angle (a; b) = 90^\circ$</p>	

¹ Якщо при перетині прямих утворюються рівні кути (по 90°), то як кут між прямими вибирають будь-який із них.

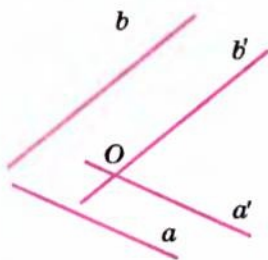


Рис. 13.3

прямі a і OO_1 , перетинає площину β по прямій a_1 , а площина, що проходить через прямі b і OO_1 , — по прямій b_1 (поясніть чому), то проєкціями прямих a і b на площину β є прямі a_1 і b_1 відповідно. Але за властивостями паралельного проєктування, якщо плоска фігура F (наприклад, менший із кутів, утворених променями прямих a і b , з вершиною в точці O) лежить у площині α , паралельній площині проєктування β , то її проєкція на площину β дорівнює фігурі F .

Отже, кут між прямими a і b дорівнює куту між прямими a_1 і b_1 . \bullet

Означимо тепер поняття «кут між мимобіжними прямими».

Нехай прямі a і b — мимобіжні (рис. 13.3). Розглянемо яку-небудь точку O в просторі та проведемо через неї прямі a' і b' , які паралельні прямим a і b відповідно. Кут між прямими a' і b' приймають за кут між мимобіжними прямими a і b .

Означення. *Кутом між мимобіжними прямими називається кут між прямими, які перетинаються і паралельні даним мимобіжним прямим.*

Оскільки за теоремою 13.1 кути, утворені прямими з відповідно паралельними сторонами, рівні, то це означення не залежить від вибору точки O . Зокрема, точка O може належати також прямій a або b . У цьому випадку як пряму a' або b' слід узяти саму пряму a або b відповідно.

Якщо позначити кут між мимобіжними прямими через φ , то з наведеного означення випливає, що $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$.

Дві мимобіжні прямі називаються перпендикулярними, якщо кут між ними прямий.

Наприклад, у кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 13.4) мимобіжні ребра AA_1 і BC перпендикулярні, оскільки $BB_1 \parallel AA_1$ ($ABB_1 A_1$ — квадрат). Отже, $\angle(AA_1; BC) = \angle(BB_1; BC) = \angle B_1 BC = 90^\circ$, тобто $AA_1 \perp BC$.

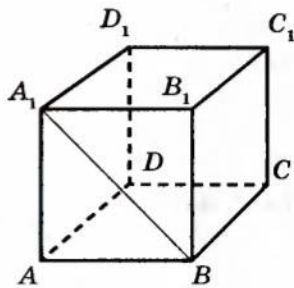


Рис. 13.4

Приклади розв'язання задач

Задача 1. З планіметрії відомо, що дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні. Чи правильне це твердження для стереометрії?

Розв'язання

► Ні, це твердження неправильне, якщо прямі не лежать в одній площині.

Наприклад, у кубі $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$ (рис. 13.4) прямі AA_1 і BC перпендикулярні до прямої AB , але не паралельні (вони мимобіжні, оскільки не лежать в одній площині). ◀

Коментар

На питання «Чи правильне твердження?» може бути відповідь «Так», і тоді потрібно довести це твердження для всіх можливих випадків. Якщо відповідь «Ні», то доцільно навести хоча б один приклад, коли це твердження не виконується (так званий контрприклад для даного твердження). Цей приклад можна сконструювати самому або знайти його серед елементів відомих фігур.

Задача 2. У кубі $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$ (рис. 13.5) знайдіть кут між прямими A_1C_1 і B_1C .

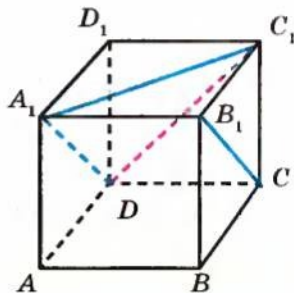


Рис. 13.5

Розв'язання

► Розглянемо площину, яка проходить через паралельні ребра куба A_1B_1 і DC та перетинає паралельні грані куба AA_1D_1D і BB_1C_1C по паралельних прямих A_1D і B_1C . Отже, $A_1D \parallel B_1C$, але тоді кут між мимобіжними прямими A_1C_1 і B_1C дорівнює куту між прямими C_1A_1 і A_1D . Сполучаючи точки D і C_1 відрізком, отримуємо рівносторонній трикутник A_1C_1D (його сторони рівні як діагоналі рівних квадратів). Звідси $\angle C_1A_1D = 60^\circ$.

Отже, $\angle (A_1C_1; B_1C) = 60^\circ$.

Відповідь: 60° . ◀

Коментар

Прямі A_1C_1 і B_1C — мимобіжні. Щоб знайти кут між ними, можна провести через довільну точку простору паралельні їм прямі або (що роблять частіше) через точку однієї прямої — пряму, паралельну другій прямій.

Відповідну паралельну пряму можна побудувати в просторі (але тоді її потрібно якось поєднувати з елементами куба, що не завжди просто). Також цю пряму можна одержати як елемент даного многогранника.

Для цього достатньо згадати, що довільна площина перетинає паралельні грані куба по паралельних прямим.

Запитання для контролю

1. Дайте означення кутів між прямими в просторі (між прямими, що перетинаються; між паралельними прямими; між мимобіжними прямими).
2. Сформулюйте властивість кутів, утворених відповідно паралельними прямими.
3. Доведіть властивість кутів, утворених відповідно паралельними прямими.
4. Які прямі в просторі називаються перпендикулярними? Наведіть приклади таких прямих, користуючись моделлю прямокутного паралелепіпеда.

Вправи

- 1°. Чому дорівнює кут між ребрами, які перетинаються: 1) куба; 2) правильного тетраедра?
- 2°. Знайдіть кут між діагоналлю грані куба і ребром, що перетинає її.
- 3°. Знайдіть кут між діагоналями, які перетинаються, двох різних граней куба.
- 4°. Дано пряму в просторі, і на ній узято точку. Скільки можна побудувати прямих, що проходять через цю точку і перпендикулярних до даної прямої? Відповідь проілюструйте на моделі.
- 5°. Дано пряму і точку поза нею. Скільки можна побудувати прямих, що проходять через цю точку і перпендикулярних до даної прямої?
- 6°. Дано площину і паралельну їй пряму. Скільки прямих, перпендикулярних до цієї прямої, можна провести в даній площині?
7. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ доведіть перпендикулярність прямих: 1) BC і $C_1 D_1$; 2) BD і $A_1 C_1$; 3) BD і AA_1 .
8. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ знайдіть кути, які утворюють прямі: 1) AA_1 і $B_1 C_1$; 2) AA_1 і CC_1 ; 3) BB_1 і CD .
9. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ знайдіть кути між мимобіжними прямими: 1) AB і $B_1 D_1$; 2) AB_1 і BC_1 .
10. У правильній чотирикутній піраміді зі стороною основи, що дорівнює бічному ребру, знайдіть кут між стороною основи і бічним ребром, яке мимобіжне до неї.
11. A, B, C — точки на попарно перпендикулярних променях OA, OB, OC . Знайдіть кути трикутника ABC , якщо відомо, що $OA = OB = OC$.

12. Прямі AB , AC і AD попарно перпендикулярні (рис. 13.6). Знайдіть відрізок CD , якщо: 1) $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1,5$ см; 2) $BD = 9$ см, $BC = 16$ см, $AD = 5$ см; 3) $AB = b$, $BC = a$, $AD = d$.

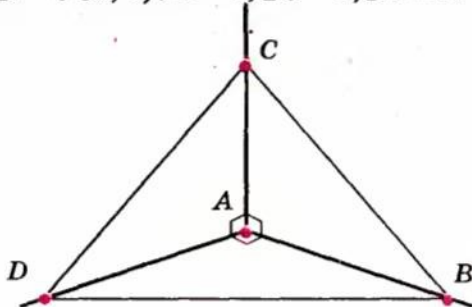
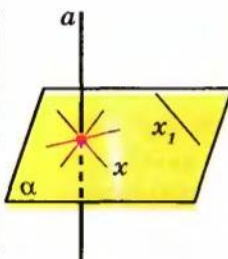
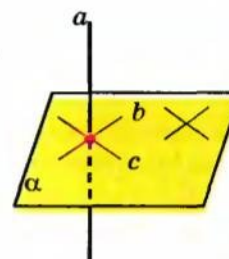
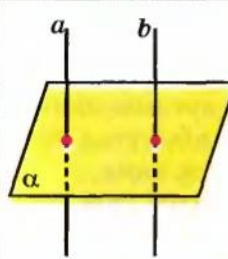
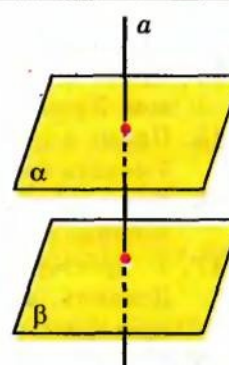


Рис. 13.6

- 13*. Діагональ прямокутного паралелепіпеда, основою якого є квадрат, удвічі більше сторони основи. Знайдіть кути між діагоналями паралелепіпеда.
14. Прямі a і b паралельні. Прямі a і c перетинаються під прямим кутом. Укажіть взаємне розташування прямих b і c та кут між ними.
15. Прямі a і b паралельні. Прямі a і c перетинаються під кутом 30° . Укажіть взаємне розташування прямих b і c та кут між ними.
16. Якщо дві прямі, які перетинаються, паралельні відповідно двом перпендикулярним прямим, то вони теж перпендикулярні. Доведіть.
- 17*. У просторовому чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і CD рівні. Доведіть, що прямі AB і CD утворюють рівні кути з прямою, яка проходить через середини відрізків BC і AD .
- 18*. Усі грані чотирикутної призми — ромби з кутом 60° . Знайдіть кут між мимобіжними меншими діагоналями двох суміжних граней призми.
19. Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої. Доведіть.
20. Точки K і M — середини ребер AB і DC трикутної піраміди $DABC$, кожне ребро якої дорівнює a . Доведіть, що $KM \perp AB$. Знайдіть довжину відрізка KM .
- 21*. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Доведіть, що пряма BD перпендикулярна до прямої BB_1 .
22. Знайдіть довжину діагоналі AC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, якщо його ребро дорівнює a .
- 23*. Знайдіть кут між мимобіжними діагоналями грані куба і діагоналлю куба.

§ 14 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Таблиця 12

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ	
Означення	Ознака
 <p>$a \perp \alpha \Leftrightarrow a \perp x$ x — будь-яка пряма площини α</p> <p>$a \perp x_1$</p>	<p>Якщо $a \perp b$ і $a \perp c$ (b і c лежать у площині α і перетина- ються), то $a \perp \alpha$.</p> 
ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ ПАРАЛЕЛЬНІСТЮ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЮ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН	
 <p>Якщо $a \parallel b$ і $a \perp \alpha$, то $a \perp b$.</p> <p>Якщо $a \perp \alpha$ і $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$.</p>	 <p>Якщо $\alpha \parallel \beta$ і $a \perp \alpha$, то $a \perp \beta$.</p> <p>Якщо $\alpha \perp a$ і $\beta \perp a$, то $\alpha \parallel \beta$.</p>

Пояснення й обґрунтування

1. Перпендикулярність прямої та площини. У попередньому параграфі ми розглянули перпендикулярність прямих у просторі.

Означення. Пряма називається *перпендикулярною до площини*, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині.

Відрізок називатимемо перпендикулярним до площини, якщо він лежить на прямій, перпендикулярній до цієї площини.

Позначають перпендикулярність прямої a і площини α так: $a \perp \alpha$ або $\alpha \perp a$. Отже, за означенням, якщо $a \perp \alpha$ і довільна пряма x лежить у площині α , то $a \perp x$ (рис. 14.1, а, б).

Відзначимо, що пряма, перпендикулярна до площини, обов'язково перетинає цю площину. Дійсно, якби пряма лежала в площині або була

їй паралельна, то в цій площині знайшлася б пряма, паралельна даній, а отже, дана пряма не перпендикулярна до даної площини.

Теорема 14.1 (ознака перпендикулярності прямої та площини). **Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих площини, які перетинаються, то вона перпендикулярна до цієї площини.**

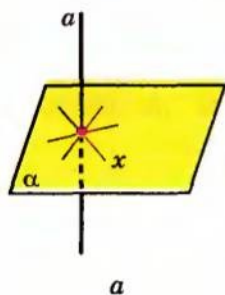


Рис. 14.1

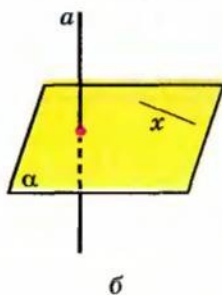
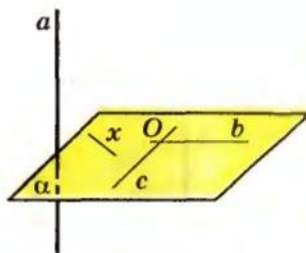


Рис. 14.2



● **Доведення.** Нехай пряма a перпендикулярна до прямих b і c площини α , які перетинаються в точці O (рис. 14.2). Розглянемо довільну пряму x площини α . Доведемо, що пряма a перпендикулярна до прямої x .

Оскільки подальші міркування пов'язані з додатковими побудовами та розглядом п'яти пар рівних трикутників, наведемо далі доведення разом з його планом.

План	Продовження доведення
<p>I. Виконати додаткові побудови, щоб:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) одержати кути між даними прямими, якщо вони мимобіжні (як показано на рисунку); 2) поєднати дані й одержані елементи в трикутники. 	<p>Проведемо через точку O прямі a' і x', паралельні відповідно прямим a і x (рис. 14.3). Для доведення перпендикулярності прямих a і x достатньо довести перпендикулярність прямих a' і x'. Для цього в площині α проведемо пряму, що не проходить через точку O і перетинає прямі b, x', c у точках B, X, C відповідно. Відкладемо на прямій a' від точки O рівні відрізки $OA = OD$ і сполучимо точки A і D з точками B, X, C відрізками.</p>
<p>II. Послідовно обґрунтувати рівність трикутників:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) $\triangle AOC = \triangle DOC$; 2) $\triangle AOB = \triangle DOB$; 3) $\triangle ABC = \triangle DBC$; 	<p>Прямокутні трикутники AOC і DOC рівні (за двома катетами). Отже, $AC = DC$. Аналогічно з рівності прямокутних трикутників AOB і DOB одержуємо $AB = BD$. Тоді трикутники ABC і DBC рівні (за трьома сторонами). Отже, $\angle ABC = \angle DBC$.</p>

<p>4) $\triangle ABX = \triangle DBX$; 5) $\triangle AOX = \triangle DOX$.</p>	<p>Трикутники ABX і DBX рівні (за двома сторонами і кутом між ними). Звідси одержуємо $AX = DX$. Трикутники AOX і DOX рівні (за трьома сторонами), отже, $\angle AOX = \angle DOX = 90^\circ$.</p>
<p>III. Зробити висновок про перпендикулярність прямих a' і x', a і x та прямої a і площини α.</p>	<p>Таким чином, прямі a' і x' перпендикулярні. Але тоді перпендикулярні і прямі a та x, а це означає, що і пряма a перпендикулярна до площини α. \odot</p>

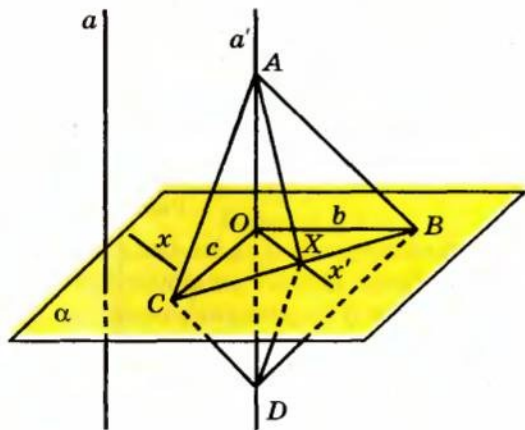


Рис. 14.3

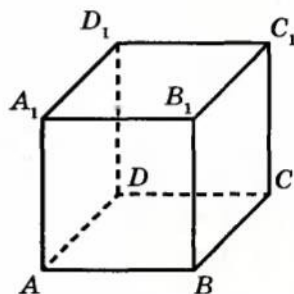


Рис. 14.4

Наприклад, у кубі $ABCA_1B_1C_1D_1$ (рис. 14.4) бічне ребро AA_1 перпендикулярне до прямих AB і AD площини основи $ABCD$. Отже, за ознакою перпендикулярності прямої і площини це бічне ребро перпендикулярне до площини основи $ABCD$.

2. Залежність між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин.

Теорема 14.2. Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то і друга пряма перпендикулярна до цієї площини.

\odot *Доведення.* Нехай прямі a і m паралельні ($m \parallel a$) та пряма a перпендикулярна до площини α (рис. 14.5). Доведемо, що $m \perp \alpha$.

Виберемо в площині α дві довільні прямі b і c , які перетинаються. Оскільки $a \perp \alpha$, то за означенням перпендикулярності прямої і площини $a \perp b$ та $a \perp c$. Якщо $m \parallel a$, то $m \perp b$ і $m \perp c$ (оскільки за означенням кута між мимобіжними прямими $\angle(a; b) = \angle(m; b)$ і $\angle(a; c) = \angle(m; c)$). Тоді за ознакою перпендикулярності прямої і площини $m \perp \alpha$. \odot

Теорема 14.3. Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.

● *Доведення.* Нехай прямі a і b перпендикулярні до площини α (рис. 14.6). Доведемо, що $a \parallel b$, методом від супротивного. Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Виберемо на прямій b яку-небудь точку M і проведемо через неї пряму b_1 , паралельну a . Оскільки $a \perp \alpha$, то $b_1 \perp \alpha$ за теоремою 14.2. Якщо точки B і C — відповідно точки перетину прямих b і b_1 із площиною α , то в трикутнику MBC дістаємо два прямих кути, що неможливо. Отже, наше припущення неправильне і прямі a та b паралельні. ○

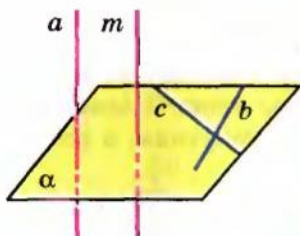


Рис. 14.5

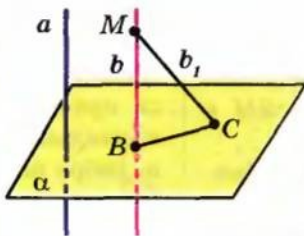


Рис. 14.6

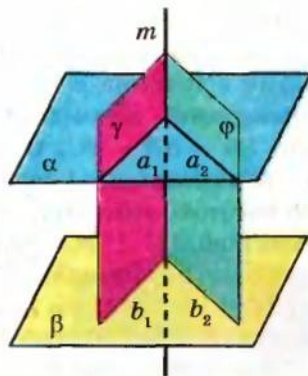


Рис. 14.7

Теорема 14.4. Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, то вона перпендикулярна й до другої площини.

● *Доведення.* Нехай площини α і β паралельні ($\alpha \parallel \beta$), а пряма m перпендикулярна до площини α ($m \perp \alpha$) (рис. 14.7). Доведемо, що $m \perp \beta$.

Проведемо через пряму m дві різні площини γ і ϕ , які перетинають площину α по прямих a_1 і a_2 , а площину β — по прямих b_1 і b_2 відповідно. Оскільки $\alpha \parallel \beta$, то $a_1 \parallel b_1$ і $a_2 \parallel b_2$. За умовою $m \perp \alpha$, тоді $m \perp a_1$ і $m \perp a_2$. У кожній із площин γ і ϕ пряма m перпендикулярна до однієї з паралельних прямих, отже, перпендикулярна і до другої, тобто $m \perp b_1$ і $m \perp b_2$. Але тоді $m \perp \beta$. ○

Теорема 14.5 (ознака паралельності площин). Дві різні площини, перпендикулярні до однієї і тієї самої прямої, паралельні.

● *Доведення.* Нехай площини α і β перпендикулярні до прямої m (рис. 14.7). Доведемо, що $\alpha \parallel \beta$. Проведемо через пряму m дві різні площини γ і ϕ , які перетинають площину α по прямих a_1 і a_2 , а площину β — по прямих b_1 і b_2 відповідно. Оскільки за умовою $m \perp \alpha$, то $m \perp a_1$ і $m \perp a_2$; також за умовою $m \perp \beta$, тоді $m \perp b_1$ і $m \perp b_2$. У кожній із пло-

щин γ і φ одержуємо по дві прямі, які перпендикулярні до однієї прямої m . Отже, $a_1 \parallel b_1$ і $a_2 \parallel b_2$, тобто дві прямі, що перетинаються, площини α паралельні відповідно двом прямим площини β . Таким чином, $\alpha \parallel \beta$. \odot

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Доведіть, що в правильній трикутній піраміді мимобіжні ребра перпендикулярні.

Розв'язання

► Нехай $SABC$ — правильна піраміда (рис. 14.8). Візьмемо точку M — середину BC і сполучимо її відрізками з точками S і A . Оскільки в правильній піраміді бічні ребра рівні: $SA = SB = SC$, то трикутник SBC рівнобедрений і медіана SM є його висотою, тобто $SM \perp BC$.

Аналогічно $AM \perp BC$, оскільки трикутник ABC — правильний.

Тоді $BC \perp$ пл. SAM (за ознакою перпендикулярності прямої та площини). Отже, $BC \perp SA$ (за означенням перпендикулярності прямої і площини). \triangleleft

Коментар

Щоб довести перпендикулярність двох мимобіжних прямих SA і BC , можна довести перпендикулярність однієї з них до площини, у якій лежить друга пряма.

Нагадаємо, що піраміда називається правильною, якщо її основою є правильний багатокутник, а всі бічні ребра рівні.

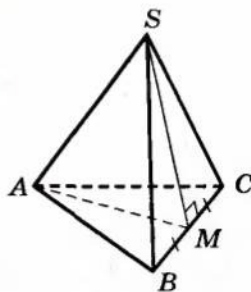


Рис. 14.8

Задача 2. Доведіть, що через дану точку прямої можна провести одну і тільки одну перпендикулярну до неї площину.

Розв'язання

► Нехай a — дана пряма і A — точка на ній (рис. 14.9). Проведемо через пряму дві площини, а в них — через точку A прямі b і c , перпендикулярні до прямої a . Площина α , яка проходить через прямі, перпендикулярна до прямої a за ознакою перпендикулярності прямої і площини (теорема 14.1).

Коментар

Щоб одержати площину, перпендикулярну до даної прямої, можна використати ознаку перпендикулярності прямої та площини і побудувати дві прямі, що перетинаються і перпендикулярні до даної прямої. Але будувати перпендикулярні прямі зручно в площині. Тому доцільно

Доведемо, що ця площина єдина. Припустимо, що крім площини α існує інша площина α' , яка проходить через точку A і перпендикулярна до прямої a (рис. 14.10).

Нехай B — точка площини α' , яка не лежить у площині α . Проведемо через точку B і пряму a площину γ . Вона перетне площини α і α' по різних прямих b і b' , перпендикулярних до прямої a . А це, як ми знаємо, неможливо, оскільки в площині γ через дану точку прямої проходить тільки одна перпендикулярна до неї пряма. Отже, площина, яка проходить через точку A і перпендикулярна до прямої a , єдина. \triangleleft

побудувати спочатку дві різні площини, які проходять через дану пряму, а потім у кожній з них провести пряму, перпендикулярну до даної прямої.

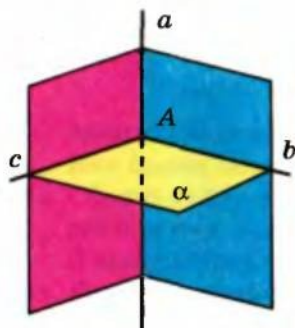


Рис. 14.9

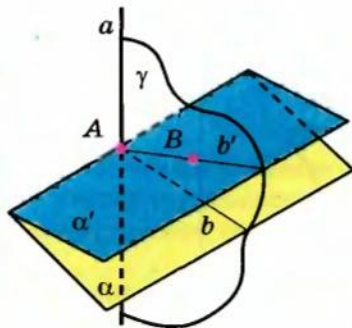


Рис. 14.10

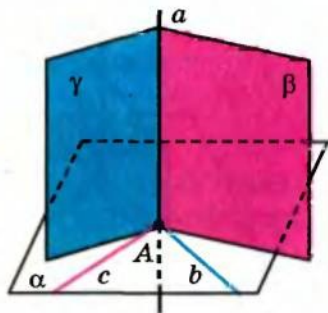


Рис. 14.11

Задача 3. Доведіть, що через дану точку площини можна провести одну і тільки одну перпендикулярну до неї пряму.

Розв'язання

► Нехай α — дана площина і A — точка на ній (рис. 14.11). Проведемо в площині α через точку A дві прями b і c . Проведемо через точку A перпендикулярні до них площини ($\gamma \perp b$ і $\beta \perp c$). Вони перетнуться по деякій прямій a , перпендикулярній до прямих b і c . Отже, пряма a перпендикулярна до площини α

Коментар

Для побудови шуканої прямої можна використати результат попередньої задачі і отримати цю пряму як перетин двох площин, кожна з яких буде перпендикулярною до якоїсь прямої даної площини. Тому зручно спочатку провести в даній площині дві прями, які перетинаються в даній точці, а потім виконати вказані побудови.

за ознакою перпендикулярності прямої і площини.

Доведемо, що ця пряма єдина. Припустимо, що, крім прямої a , існує інша пряма a' , яка проходить через точку A і перпендикулярна до площини α (рис. 14.12). Проведемо через прямі a і a' площину φ . Вона перетне площину α по деякій прямій b , перпендикулярній до прямих a і a' , а це неможливо.

Отже, пряма, яка проходить через дану точку площини і перпендикулярна до цієї площини, єдина. ◀

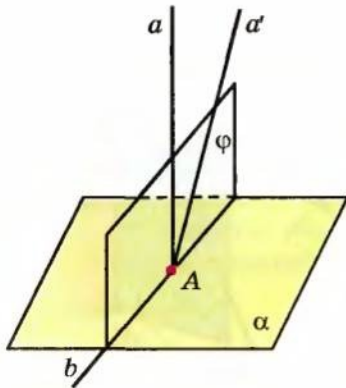


Рис. 14.12

Задача 4. Через точки A і B проведено прямі, перпендикулярні до площини α , які перетинають її в точках C і D відповідно. Знайдіть відстань між точками A і B , якщо $AC = 3$ м, $BD = 2$ м, $CD = 2,4$ м і відрізок AB не перетинає площину α .

Розв'язання

► Оскільки дві прямі, перпендикулярні до площини α , паралельні, то $AC \parallel BD$, отже, $ABDC$ — трапеція (рис. 14.13, а). За умовою $AC \perp \alpha$, тоді $AC \perp CD$, тобто трапеція $ABDC$ — прямокутна.

Коментар

Для того щоб обґрунтувати перпендикулярність прямої (a) перетину побудованих площин до проведених прямих (b і c), потрібно використати означення перпендикулярності прямої і площини ($b \perp \gamma$, отже, $b \perp a$ і $c \perp \beta$, таким чином, $c \perp a$).

Єдиність побудованої прямої доводимо методом від супротивного. Після припущення про існування ще однієї прямої, яка проходить через дану точку перпендикулярно до даної площини, розглядаємо ще одну площину, у якій отримуємо суперечність з відомим фактом планіметрії.

За зображенням просторової конфігурації (рис. 14.13) ми не можемо визначити, чи лежить чотирикутник $ABDC$ в одній площині (а значить, не знаємо, чи можна до його елементів застосовувати відомі з планіметрії

Проведемо в трапеції $ABDC$ з точки B перпендикуляр BK до сторони AC (рис. 14.13, б). Одержали $BKCD$ — прямокутник (оскільки у нього всі кути прямі), отже, $CK = BD = 2$ м і $KB = CD = 2,4$ м. Тоді $AK = AC - CK = 3 - 2 = 1$ (м).

Із прямокутного трикутника AKB :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{AK^2 + BK^2} = \sqrt{1^2 + 2,4^2} = \\ &= \sqrt{6,76} = 2,6 \text{ (м)}. \end{aligned}$$

Відповідь: 2,6 м. \triangleleft

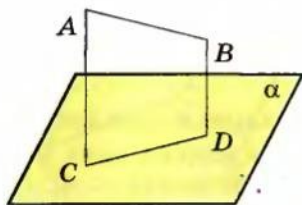


Рис. 14.13, а

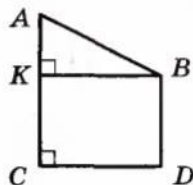


Рис. 14.13, б

співвідношення). Оскільки паралельні прямі лежать в одній площині, то для обґрунтування того, що цей чотирикутник плоский, достатньо довести паралельність двох його сторін. Слід також урахувати, що для розв'язання багатьох стереометричних задач, часто доцільно виконувати виносні рисунки розглядуваних плоских фігур (рис. 14.13, б), на яких зручно здійснювати певні побудови, обчислення та обґрунтування.

Заяпитання для контролю

1. Яка пряма називається перпендикулярною до площини?
2. Сформулюйте ознаку перпендикулярності прямої і площини. Використовуючи модель прямокутного паралелепіпеда, наведіть приклад її використання.
- 3°. Доведіть ознаку перпендикулярності прямої і площини.
4. Сформулюйте властивості прямих і площин, які виражають залежність між їх паралельністю та перпендикулярністю.
- 5°. Доведіть властивості прямих і площин, які виражають залежність між їх паралельністю та перпендикулярністю.

Вправи

- 1°. Чи правильно, що коли пряма перпендикулярна до яких-небудь двох прямих площини, то вона перпендикулярна до цієї площини?
- 2°. У разі якого взаємного розташування двох прямих через одну з них можна провести площину, перпендикулярну до другої?
- 3°. Як розташована відносно площини трикутника пряма, перпендикулярна до двох його сторін?
- 4°. Чи правильно, що пряма, яка перетинає круг в центрі і перпендикулярна до: 1) його діаметра; 2) двох його діаметрів, перпендикулярна до площини круга?

5°. Пряма MN перетинає площину α . У площині α розташований трикутник ABC ; MN перпендикулярна до AB і MN перпендикулярна до BC . Яке взаємне розташування прямих MN і AC ?

6°. Щоб розпил дерев'яного бруска (рис. 14.14) був перпендикулярний до його ребра, через точку A ребра проводять перпендикулярно до ребра прями AB і AC . Потім пиляють так, щоб розпил йшов по цих прямих. Чи правильно це?

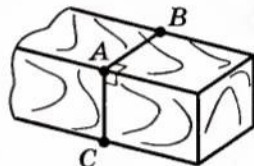


Рис. 14.14

7°. Пряма паралельна площині. Чи може вона бути перпендикулярна до якої-небудь прямої, що лежить у цій площині?

8. Доведіть, що в прямокутному паралелепіпеді бічне ребро перпендикулярне до площини основи.
9. Доведіть, що в прямокутному паралелепіпеді діагональ основи перпендикулярна до кожного бічного ребра.
10. Доведіть, що в кубі кожне ребро перпендикулярне до двох його граней.
11. Два прямокутних трикутники ABC і DBC , площини яких не збігаються, мають спільний катет, а через два інші катети — AC і CD — проведено площину α . Доведіть, що спільний катет перпендикулярний до будь-якої прямої s площини α .
12. На зображенні правильного тетраедра $ABCD$ (рис. 14.15) проведіть площину, перпендикулярну до його ребра AD .
13. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ доведіть перпендикулярність прямих BD_1 і AC .
- 14*. Доведіть, що через будь-яку точку простору можна провести єдину пряму, перпендикулярну до даної площини.
- 15*. Доведіть, що через будь-яку точку простору можна провести єдину площину, перпендикулярну до даної прямої.
- 16*. Через точку A прямої a проведено перпендикулярні до неї площину α і пряму b . Доведіть, що пряма b лежить у площині α .
17. Через вершину квадрата $ABCD$ проведено пряму BM , перпендикулярну до його площини. Доведіть, що: 1) пряма AD перпендикулярна до площини прямих AB і BM ; 2) пряма CD перпендикулярна до площини прямих BC і BM .
18. Через точки M і N проведено прями, перпендикулярні до площини β , які перетинають її в точках T і E відповідно. Знайдіть відстань між точками M і N , якщо $MT = 2$ м, $NE = 5$ м, $TE = 4$ м і відрізок MN не перетинає площину β .
19. Верхні кінці двох вертикальних стовпів, які знаходяться на відстані 6,8 м один від одного, з'єднано поперечкою. Висота одного стовпа 11,6 м, а другого — 7,8 м. Знайдіть довжину поперечки.

20. Телефонний дріт завдовжки 15 м протягнуто від телефонного стовпа, де він закріплений на висоті 8 м від поверхні землі, до будинку, де його закріпили на висоті 20 м. Знайдіть відстань між будинком і стовпом, вважаючи, що дріт не провисає.
- 21*. З вершини квадрата проведено перпендикуляр до його площини. Відстані від кінця цього перпендикуляра до решти вершин квадрата дорівнюють a і b ($a < b$). Знайдіть довжину перпендикуляра і сторону квадрата (рис. 14.16).

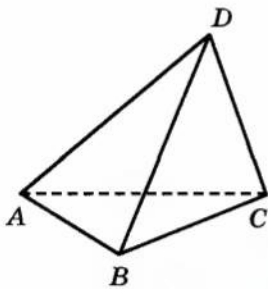


Рис. 14.15

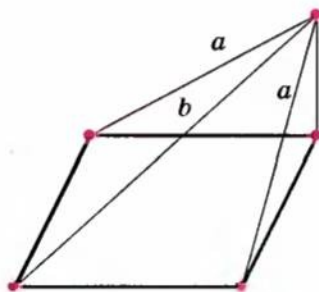


Рис. 14.16

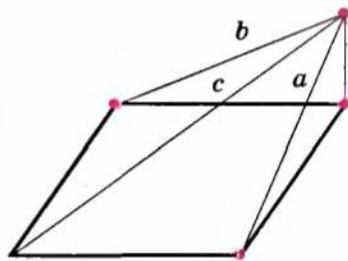


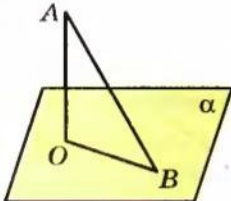
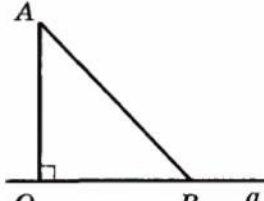
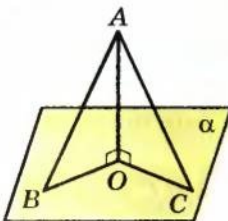
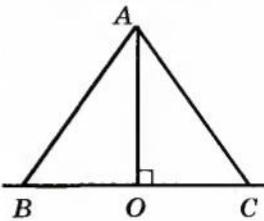
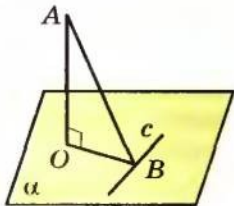
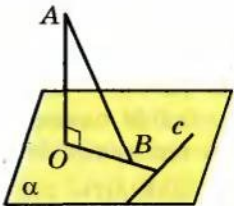
Рис. 14.17

- 22*. З вершини прямокутника проведено перпендикуляр до його площини. Відстані від кінця цього перпендикуляра до решти вершин прямокутника дорівнюють a , b , c ($a < c$, $b < c$). Знайдіть довжину перпендикуляра і сторони прямокутника (рис. 14.17).
23. Ребро куба дорівнює a . Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей однієї з граней до вершин протилежної грані.
24. Діагональ BD_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дорівнює a , діагональ AD_1 — b . Знайдіть AB .
25. Пряма CD перпендикулярна до площини правильного трикутника ABC . Через центр O цього трикутника проведено пряму OK , паралельну прямій CD . Відомо, що $AB = 16\sqrt{3}$ см, $OK = 12$ см, $CD = 16$ см. Знайдіть відстань від точок D і K до вершин A і B трикутника.
26. $ABCD$ — прямокутник, O — точка перетину його діагоналей, точка M однаково віддалена від усіх вершин прямокутника. Доведіть, що пряма MO перпендикулярна до площини прямокутника.
27. Доведіть, що суми відстаней від протилежних вершин паралелограма до площини, яка не перетинає його, рівні.
- 28*. Відстані вершин A , B , C паралелограма $ABCD$ до деякої площини дорівнюють 11 см, 29 см і 13 см відповідно. Знайдіть відстань від цієї площини до четвертої вершини.

§ 15

ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА. ТЕОРЕМА ПРО ТРИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ

Таблиця 13

ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА		
У просторі	На площині	
AO — перпендикуляр		
 <p>AO — відстань від точки A до площини α</p> <p>$AO \perp \alpha$ $O \in \alpha$</p> <p>OB — проекція похилої AB на площину α</p>	 <p>AO — відстань від точки A до прямої a</p> <p>$AO \perp a$ $O \in a$</p> <p>OB — проекція похилої AB на пряму a</p>	
 <p>AB — похила $AO < AB$ (перпендикуляр є коротшим за похилу)</p> <p>$AB = AC \Leftrightarrow BO = OC$</p> <p>$AB > AC \Leftrightarrow BO > OC$</p>		
ТЕОРЕМА ПРО ТРИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ		
	<p>OB — проекція AB на площину α; c — пряма на площині α, $OB \perp c$</p> <p>$\Leftrightarrow AB \perp c$</p>	

Пояснення й обґрунтування

Поняття перпендикуляра і похилої в просторі вводять аналогічно до відповідних понять на площині (табл. 13).

Нехай дано площину α і точку A , яка не належить площині. Проведемо пряму a , що проходить через цю точку і перпендикулярна до площини α . Точку перетину прямої a з площиною α позначимо через O (рис. 15.1). Відрізок AO називається **перпендикуляром**, опущеним із точки A на площину α , точка O — **основою перпендикуляра**.

Означення. Відстанню від точки до площини називається довжина перпендикуляра, опущеного із цієї точки на площину.

Похилою до площини називається пряма, що перетинає площину і не перпендикулярна до неї. **Похилою** називають також відрізок, який сполучає точку, що не належить площині, з точкою площини, якщо цей відрізок не є перпендикуляром до площини. Кінець цього відрізка, що лежить у площині, називається **основою похилої**. Відрізок, який сполучає основи перпендикуляра і похилої, проведених з однієї точки, називається **проекцією¹ похилої**.

На рисунку 15.2 з точки A проведено до площини α перпендикуляр AO і похилу AB . Точка O — основа перпендикуляра, точка B — основа похилої, OB — проекція похилої AB на площину α .

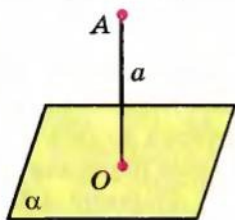


Рис. 15.1

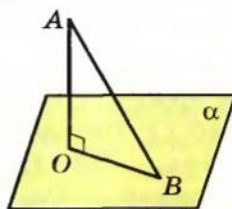


Рис. 15.2

Властивості перпендикуляра і похилої в просторі аналогічні відповідним властивостям на площині.

Теорема 15.1. Якщо з однієї точки, узятій поза площиною, проведено до цієї площини перпендикуляр і декілька похилих, то:

- 1) перпендикуляр коротший за будь-яку похилу, проведenu з тієї самої точки до тієї ж площини;
- 2) рівні похилі мають рівні проекції, і навпаки, похилі, які мають рівні проекції, рівні;
- 3) більша (за довжиною) похила має більшу проекцію, і навпаки, з двох похилих більша та, у якої проекція більша.

¹ Точніше цей відрізок називається ортогональною, або прямокутною, проекцією похилої (коли всі проєктуючі прямі перпендикулярні до площини проєкції). Далі, говорячи про проєкції, ми будемо мати на увазі ортогональні проєкції.

● *Доведення.* Нехай AO — перпендикуляр, опущений на площину α , AB і AC — похилі до цієї площини, а OB і OC — відповідно їх проекції на площину α (рис. 15.3).

- 1) Оскільки $AO \perp \alpha$, то $AO \perp OB$. Тоді трикутник AOB прямокутний, AB — гіпотенуза, AO — катет. Отже, $AO < AB$.
- 2) Якщо виконується рівність похилих: $AB = AC$ (або відповідно їх проекцій $OB = OC$), то прямокутні трикутники AOB і AOC рівні за катетом і гіпотенузою (або за двома катетами). Отже, одержуємо потрібну рівність проекцій: $OB = OC$ (або самих похилих: $AB = AC$).
- 3) Оскільки за теоремою Піфагора з прямокутних трикутників AOB і AOC : $AB^2 = AO^2 + OB^2$ і $AC^2 = AO^2 + OC^2$, то нерівність $AB > AC$ виконується тоді і тільки тоді, коли виконується нерівність $OB > OC$.

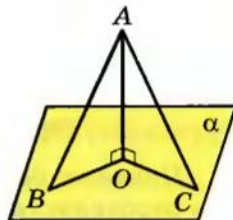
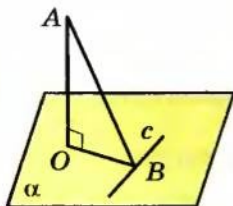


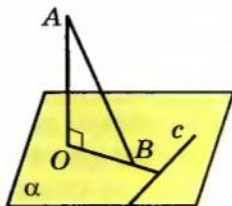
Рис. 15.3

Теорема 15.2 (про три перпендикуляри). Якщо пряма на площині перпендикулярна до проекції похилої на цю площину, то вона перпендикулярна і до похилої. І навпаки: якщо пряма на площині, перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.

● *Доведення.* Нехай пряма c площини α (рис. 15.4, а, б) перпендикулярна до проекції OB похилої AB (або до самої похилої AB). Оскільки $AO \perp \alpha$, то $AO \perp c$. Тоді пряма c буде перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, — OB і AO (чи AB і AO). За ознакою перпендикулярності прямої і площини, пряма c перпендикулярна до площини AOB , а отже, вона буде перпендикулярна і до похилої AB (чи до її проекції OB). ●



а



б

Рис. 15.4

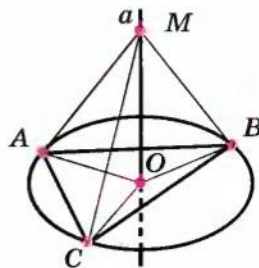


Рис. 15.5

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Через центр описаного навколо трикутника кола проведемо пряму, перпендикулярну до площини трикутника. Доведіть, що кожна точка цієї прямої рівновіддалена від вершин трикутника.

Розв'язання

► Нехай у трикутнику ABC через центр O описаного кола проведено пряму a , перпендикулярну до площини ABC (рис. 15.5). Розглянемо довільну точку $M \in a$. Сполучаємо точку M з точками A, B, C відрізками. Похилі MA, MB і MC мають рівні проекції ($AO = BO = CO$ як радіуси описаного кола), отже, ці похилі рівні: $MA = MB = MC$, а значить, точка M рівновіддалена від вершин трикутника. ◀

Коментар

У даній конфігурації фактично з точки M , вибраній на даній прямій, проведено до площини трикутника перпендикуляр та похилі (рис. 15.5). Тому доцільно використати відповідні властивості, які пов'язують довжини похилих, проведених з однієї точки до однієї площини, та їх проекцій.

Задача 2. Відстань від даної точки до площини ромба дорівнює 8 м, а до кожної з його сторін — 10 м. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей ромб.

Розв'язання

► Нехай дано ромб $ABCD$ і точку S , яка знаходиться поза площиною ромба. Проведемо з точки S перпендикуляр SO на площину $ABCD$ та перпендикуляри SK, SM, SN, SL на сторони ромба (рис. 15.6). Тоді за умовою $SO = 8$ м і $SK = SM = SN = SL = 10$ м.

Коментар

Оскільки відстань від точки до площини вимірюють по перпендикуляру, то ми маємо фактично перпендикуляр та похилі до площини і можемо використати відповідні властивості, які пов'язують довжини похилих, проведених з однієї точки до однієї площини, та їх проекцій.

Щоб обґрунтувати, що одержані проекції похилих є саме радіусами вписаного в ромб кола, зручно використати теорему про три перпендикуляри.

Для обґрунтування того, що трикутник SOK є прямокутним, достатньо використати означення перпендикулярності прямої SO і площини $ABCD$ (тоді пряма SO перпендикулярна до будь-якої прямої площини $ABCD$, зокрема до прямої OK).

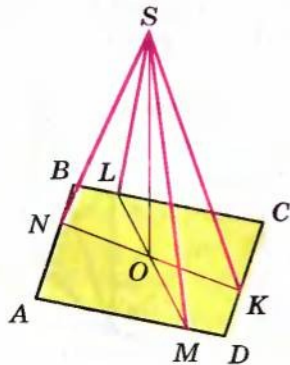


Рис. 15.6

Беручи до уваги, що рівні похилі, проведені з однієї точки до однієї

площини, мають рівні проекції, дістаємо: $OK = OM = ON = OL$. Оскільки $SK \perp DC$, то $OK \perp DC$ за теоремою про три перпендикуляри. Аналогічно $OM \perp AD$, $ON \perp AB$, $OL \perp BC$. Тоді точка O рівновіддалена від усіх сторін ромба і є центром кола, вписаного в ромб¹, а OK — радіус цього кола. Із прямокутного трикутника SOK ($SO \perp$ пл. $ABCD$, отже, $SO \perp OK$):

$$OK = \sqrt{SK^2 - SO^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ (м)}.$$

Відповідь: 6 м. \triangleleft

Задача 3. Доведіть, що діагональ куба перпендикулярна до площини, що проходить через кінці трьох ребер куба, які виходять з тієї самої вершини, що й діагональ.

Розв'язання

► Розглянемо в кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 15.7) діагональ BD_1 . Оскільки $D_1 D \perp$ пл. $ABCD$, то BD — проекція похилої BD_1 на пл. $ABCD$. Але $AC \perp DB$ (як діагоналі квадрата $ABCD$), отже, $AC \perp B D_1$.

Аналогічно $D_1 C_1 \perp$ пл. $BB_1 C_1 C$. Тоді BC_1 — проекція похилої BD_1 на пл. $BB_1 C_1 C$. Але $B_1 C \perp BC_1$ (як діагоналі квадрата $BB_1 C_1 C$), отже, $B_1 C \perp B D_1$. Таким чином, пряма BD_1 перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, площини $AB_1 C$. Отже, $BD_1 \perp$ пл. $AB_1 C$ за ознакою перпендикулярності прямої і площини. \triangleleft

Коментар

Для того щоб довести перпендикулярність прямої і площини, використаємо відповідну ознаку перпендикулярності: доведемо, що пряма BD_1 перпендикулярна до двох прямих, які перетинаються, площини $AB_1 C$. Для обґрунтування цих перпендикулярностей зручно використати теорему про три перпендикуляри, послідовно проєктуючи діагональ BD_1 на дві різні грані куба.

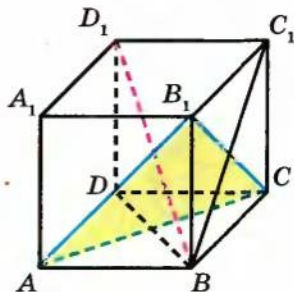


Рис. 15.7

¹ Точка O є точкою перетину діагоналей ромба, відрізки OL та OM лежать на одній прямій, LM — висота ромба (аналогічно NK — теж висота ромба).

Запитання для контролю

1. Поясніть, як вводять поняття перпендикуляра і похилої до площини та проєкції похилої на площину.
2. Сформулюйте властивості перпендикуляра і похилої до площини.
- 3*. Доведіть властивості перпендикуляра і похилої до площини.
4. Сформулюйте теорему про три перпендикуляри.
- 5*. Доведіть теорему про три перпендикуляри.

Вправи

- 1°. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 15.8) знайдіть проєкції діагоналі $A_1 C$ на всі грані куба.
- 2°. Основа піраміди $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Ребро SA перпендикулярне до площини основи. Порівняйте попарно довжини відрізків SA , SB , SC і SD . Обґрунтуйте результати.
3. Основа піраміди $SABCD$ — прямокутник $ABCD$, $AB < BC$. Ребро SD перпендикулярне до площини основи. Серед відрізків SA , SB , SC і SD укажіть найменший і найбільший. Обґрунтуйте свій вибір.
- 4°. Із точки A до даної площини проведено перпендикуляр і похилу, що перетинають площину відповідно в точках B і C . Знайдіть довжину проєкції похилої AC , якщо $AC = 50$ см, $AB = 30$ см.
5. Із точки A до даної площини проведено перпендикуляр і похилу, що перетинають площину відповідно в точках B і C . Знайдіть відрізок AC , якщо $AB = 8$ см і $\angle BAC = 60^\circ$.
6. Відрізки двох похилих, проведених з однієї точки до площини, дорівнюють 15 см і 20 см. Проєкція одного із цих відрізків дорівнює 16 см. Знайдіть проєкцію другого відрізка.
7. Відрізок BC завдовжки 12 см є проєкцією відрізка AC на площину α . Точка D належить відрізку AC і $AD : DC = 2 : 3$. Знайдіть відрізок AD і його проєкцію на площину α , якщо відомо, що $AB = 9$ см.
8. Із точки S поза площиною α проведено до неї три рівні похилі SA , SB , SC і перпендикуляр SO . Доведіть, що основа перпендикуляра O є центром кола, описаного навколо трикутника ABC .

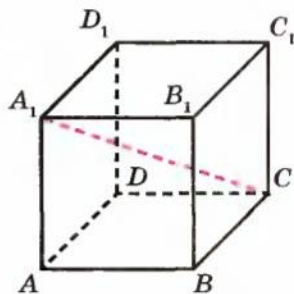


Рис. 15.8

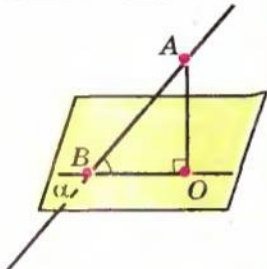
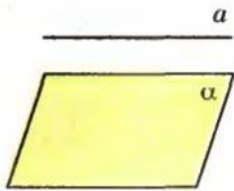
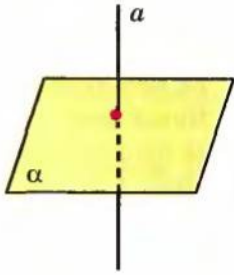
9. Точка A знаходиться на відстані a від вершин рівностороннього трикутника зі стороною a . Знайдіть відстань від точки A до площини трикутника.
- 10*. У рівнобедреному трикутнику основа і висота дорівнюють 4 м. Дана точка розміщена на відстані 6 м від площини трикутника і на однаковій відстані від його вершин. Знайдіть відстань від даної точки до вершин трикутника.
11. Відстані від точки A до вершин квадрата дорівнюють a . Знайдіть відстань від точки A до площини квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює b .
12. Із точки до площини проведено дві похилі, які дорівнюють 10 см і 17 см. Різниця проєкцій цих похилих становить 9 см. Знайдіть проєкції похилих.
13. Із точки до площини проведено дві похилі. Знайдіть довжини похилих, якщо: 1) одна з них на 26 см більша від другої, а проєкції похилих дорівнюють 12 см і 40 см; 2) похилі відносяться як 1 : 2, а проєкції похилих дорівнюють 1 см і 7 см.
14. Із точки до площини проведено дві похилі, які дорівнюють 23 см і 33 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини, якщо проєкції похилих відносяться як 2 : 3.
- 15*. На даному зображенні куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведіть перпендикуляр із вершини B_1 на площину ABD_1 . Укажіть проєкцію відрізка AB_1 на цю площину.
- 16*. Дано прямокутний трикутник ABC , катети якого AC і BC рівні відповідно 20 см і 15 см. Через вершину A проведено площину α , паралельну прямій BC . Проєкція одного з катетів на цю площину дорівнює 12 см. Знайдіть проєкцію гіпотенузи на цю площину.
- 17*. Сторона ромба дорівнює 10 см, гострий кут — 60° . Через одну зі сторін ромба проведено площину. Проєкція другої сторони на площину дорівнює 8 см. Знайдіть проєкції діагоналей ромба на цю площину.
18. Чи залишиться справедливою теорема про три перпендикуляри, якщо в її формулюванні слова «пряма на площині» замінити словами «пряма, паралельна площині»?
19. Пряма a перетинає площину α і не перпендикулярна до цієї площини. Чи існують у площині α прямі, перпендикулярні до прямої a ? Якщо існують, то як їх можна побудувати?
- 20*. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ доведіть перпендикулярність прямих AC_1 і BD .

- 21*. На даному зображенні куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведіть перпендикуляр із вершини B_1 на площину ACD_1 . Укажіть основу цього перпендикуляра.
22. Через вершину A прямокутника $ABCD$ проведено пряму AK , перпендикулярну до його площини. Знайдіть відрізок AK , якщо $BK = 6$ см, $DK = 7$ см, $CK = 9$ см.
23. Якщо через центр кола, описаного навколо многокутника, проведено пряму, перпендикулярну до площини многокутника, то кожна точка цієї прямої рівновіддалена від вершин многокутника. Доведіть.
24. Якщо деяка точка рівновіддалена від вершин многокутника, то основа перпендикуляра, опущеного з даної точки на площину многокутника, збігається із центром кола, описаного навколо многокутника. Доведіть.
- 25*. У рівнобедреному трикутнику кут при вершині дорівнює 120° , а бічні сторони — по 10 см. Поза площиною трикутника дано точку, яка віддалена від кожної із вершин на 26 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини трикутника.
- 26*. У трикутнику ABC $\angle A = 45^\circ$, $BC = 12$ см. Точка S знаходиться від його площини на відстані 6 см і на однаковій відстані від кожної вершини трикутника. Знайдіть відстань від точки S до вершин трикутника.
- 27*. Трапеція вписана в коло, причому менша основа, яка дорівнює 16 см, стягує дугу 60° . На відстані 12 см від площини трапеції знаходиться точка, рівновіддалена від кожної її вершини. Знайдіть відстань від цієї точки до вершини трапеції.
28. У трикутнику ABC сторони $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см. Із вершини A проведено до його площини перпендикуляр AD завдовжки 5 см. Знайдіть відстань від точки D до сторони BC .
- 29*. До площини ромба $ABCD$, у якого $\angle A = 45^\circ$, $AB = 8$ см, проведено перпендикуляр MC завдовжки 7 см. Знайдіть відстань від точки M до прямих, які містять сторони ромба.
30. Якщо через центр кола, вписаного в многокутник, проведено перпендикуляр до площини многокутника, то кожна точка перпендикуляра рівновіддалена від сторін многокутника. Доведіть.
- 31*. Якщо точка рівновіддалена від сторін многокутника і основа перпендикуляра, опущеного з даної точки до його площини, лежить усередині многокутника, то основа перпендикуляра є центром кола, вписаного в многокутник. Доведіть.

§ 16

КУТ МІЖ ПРЯМОЮ ТА ПЛОЩИНОЮ

Таблиця 14

КУТ МІЖ ПРЯМОЮ ТА ПЛОЩИНОЮ		
	ОСОБЛИВІ ВИПАДКИ	
 <p>BO — проекція AB на площину α, $AO \perp \alpha$; $\angle ABO$ — кут між прямою AB і площиною α</p>		
	$\frac{a \parallel \alpha}{a \text{ лежить в } \alpha} \Leftrightarrow \angle(a; \alpha) = 0^\circ$	$a \perp \alpha \Leftrightarrow \angle(a; \alpha) = 90^\circ$

Пояснення й обґрунтування

Дамо означення кута між прямою і площиною.

Означення. *Кутом між похилою¹ і площиною називається кут між цією похилою та її проекцією на площину. Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між нею і площиною вважають рівним 90° , а якщо пряма паралельна площині або лежить у площині, то рівним 0° .*

З наведеного означення випливає: якщо φ — кут між прямою і площиною, то $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, а якщо γ — кут між похилою і площиною, то $0^\circ < \gamma < 90^\circ$.

Наприклад, у кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 16.1) проекцією діагоналі $A_1 B$ бічної грані куба на площину його основи $ABCD$ є відрізок AB (оскільки $A_1 A \perp$ пл. $ABCD$). Отже, кутом між $A_1 B$ і площиною $ABCD$ є кут $A_1 B A$, який дорівнює 45° .

Теорема 16.1. *Кут між похилою і площиною є найменшим з усіх кутів між цією похилою і прямими, що лежать у даній площині.*

¹ Термін «похила» може означати як пряму, так і відрізок, тобто кутом між відрізком і площиною будемо вважати кут між прямою, що містить даний відрізок, і цією площиною.

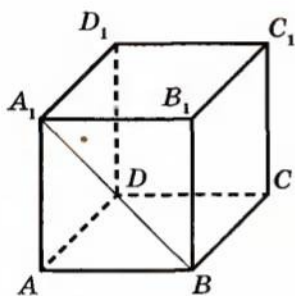


Рис. 16.1

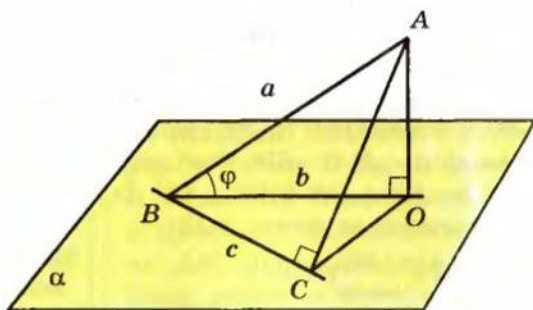


Рис. 16.2

● **Доведення.** Нехай a — похила до площини α , B — точка перетину похилої з площиною, b — проекція похилої, c — пряма в площині α , що проходить через точку B (рис. 16.2). Потрібно довести, що кут φ між прямими a і b менше кута між прямими a і c .

Якщо $c \perp b$, то гострий кут φ менший за прямий кут між прямими a і c .

Якщо прямі c і b не перпендикулярні, то візьмемо на прямій a точку A , відмінну від B , та її проекцію O (тоді $AO \perp \alpha$). Проведемо в площині α перпендикуляр OC до прямої c та сполучаємо точки A і C відрізком. За теоремою про три перпендикуляри $AC \perp c$. Із прямокутних трикутників ABO і ABC :

$$\sin \varphi = \frac{AO}{AB}, \quad \sin \angle ABC = \frac{AC}{AB}.$$

Оскільки $AO < AC$, то $\sin \varphi < \sin \angle ABC$. Ураховуючи, що ці кути гострі, одержуємо $\varphi < \angle ABC$. ●

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Із точки, яка віддалена від площини на відстань a , проведено дві похилі, які утворюють із площиною кути 45° і 30° , а між собою — прямий кут. Знайдіть відстань між основами похилих.

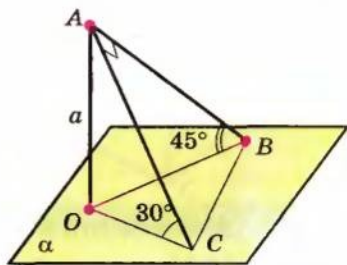


Рис. 16.3

Розв'язання

► Нехай дано точку A , з якої до площини α проведено дві похилі AB і AC (рис. 16.3). Опустимо з точки A перпендикуляр AO на площину α . За умовою $AO = a$. Оскільки проекціями похилих AB і AC є відповідно

Коментар

Оскільки відстанню від точки до площини є довжина перпендикуляра, опущеного із цієї точки на площину, то на рисунку до задачі слід зобразити крім похилих перпендикуляр, проведений з даної точки

відрізки OB і OC , то $\angle ABO$ — кут між похилою AB і площиною α , а $\angle ACO$ — кут між похилою AC і площиною α . За умовою $\angle ABO = 45^\circ$ і $\angle ACO = 30^\circ$. Оскільки $AO \perp \alpha$, то $AO \perp OB$ і $AO \perp OC$. Із прямокутного трикутника AOB :

$$AB = \frac{AO}{\sin 45^\circ} = a\sqrt{2}.$$

Із прямокутного трикутника AOC :

$$AC = \frac{AO}{\sin 30^\circ} = 2a. \quad \text{Із прямокутного}$$

трикутника ABC ($AB \perp AC$ за умовою):

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2a^2 + 4a^2} = a\sqrt{6}.$$

Відповідь: $a\sqrt{6}$. \triangleleft

Задача 2*. Знайдіть кут¹ між ребром правильного тетраедра і площиною грані, яка не містить цього ребра.

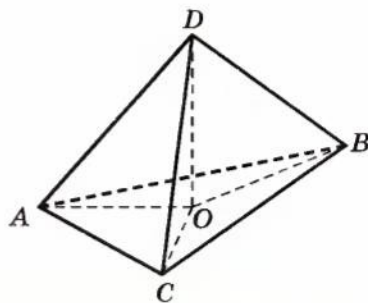


Рис. 16.4

Розв'язання

► Нехай $ABCD$ — даний правильний тетраедр. Опустимо перпендикуляр DO на площину ABC (рис. 16.4). Тоді AO — проекція ребра AD на площину ABC , отже, $\angle DAO$ — кут між ребром AD і площиною ABC . Оскільки в правильному

Коментар

Нагадаємо, що в правильному тетраедрі всі грані є правильними трикутниками, тому всі його ребра рівні між собою. Оскільки кутом між похилою і площиною називається кут між цією похилою та її проекцією на площину, то для побудови кута

¹ Нагадаємо, що задачу на знаходження кута вважають розв'язаною, якщо знайдено величину кута або будь-яку його тригонометричну функцію.

на дану площину (рис. 16.3). Перш ніж проводити обчислення в розв'язанні необхідно обґрунтувати, що дану відстань (від точки до площини) і дані кути (між похилими і площиною) позначено правильно. У процесі обчислення слід указувати, з якого трикутника визначаємо елементи, і, якщо він прямокутний, пояснювати чому.

План обчислювальної частини розв'язання може бути таким:

- 1) із прямокутного трикутника AOB знайти AB ;
- 2) із прямокутного трикутника ABC знайти AC ;
- 3) із прямокутного трикутника ABC знайти BC .

тетраедрі всі ребра рівні між собою (нехай $DA = DB = DC = AB = BC = AC = x$), то похилі DA, DB, DC рівні, а значить, рівні і їх проєкції: $AO = BO = CO$. Це означає, що точка O є центром кола, описаного навколо правильного трикутника ABC , а відрізок AO — його радіусом. Тоді

$$AO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Із прямокутного трикутника ADO ($DO \perp AO$, оскільки $DO \perp$ пл. ABC):

$$\cos \angle DAO = \frac{AO}{AD} = \frac{\frac{x}{\sqrt{3}}}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Відповідь: $\cos \angle DAO = \frac{1}{\sqrt{3}}$. \triangleleft

Зауваження. Для правильної побудови рисунка до цієї задачі необхідно зважити на те, що трикутник ABC є зображенням правильного трикутника, а точка O — зображенням його центра (який збігається із центром описаного кола). Оскільки центр правильного трикутника лежить у точці перетину висот, бісектрис і медіан, а медіани проєктуються в медіани трикутника проєкції, то на рисунку точка O повинна знаходитися в точці перетину медіан AM і BK трикутника ABC (рис. 16.5).

між ребром AD (рис. 16.4) і площиною ABC достатньо побудувати проєкцію AD на площину. Для цього потрібно опустити перпендикуляр із точки D на площину ABC . В отриманій конфігурації з точки D проведено до площини трикутника ABC перпендикуляр та похилі. Тому доцільно використати відповідні властивості, які пов'язують довжини похилих, проведених з однієї точки до однієї площини, та їх проєкцій.

Слід також урахувати, що в цій задачі на обчислення не дано жодного відрізка, і тому для її розв'язання зручно ввести невідомий відрізок.

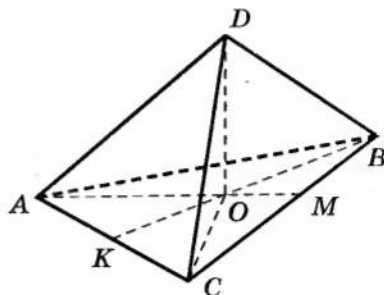


Рис. 16.5

Запитання для контролю

1. Що називається кутом між похилою і площиною?
2. Чому дорівнює кут між прямою і площиною, якщо: 1) пряма перпендикулярна до площини; 2) пряма паралельна площині; 3) пряма лежить у площині?
- 3*. Доведіть, що кут між похилою і площиною є найменшим з усіх кутів між цією похилою і прямими, які лежать у даній площині.

Вправи

- У кубі $ABCD_1B_1C_1D_1$ (рис. 16.6) укажіть кути між даними похилою і площиною:
 - AB_1 і пл. $ABCD$; 2) AB_1 і пл. $A_1B_1C_1D_1$;
 - AB_1 і пл. AA_1D_1D ; 4) AB_1 і пл. BB_1C_1C ;
 - BD_1 і пл. $ABCD$; 6) BD_1 і пл. BB_1C_1C ;
 - B_1C і пл. $ABCD$; 8) B_1C і пл. CDD_1C_1 .
- Похила дорівнює a . Чому дорівнює проекція цієї похилої на площину, якщо похила утворює з площиною кут, що дорівнює:
 - 45° ; 2) 60° ; 3) 30° ?
- Точка A віддалена від площини на відстань d . Знайдіть довжини похилих, проведених із цієї точки під такими кутами до площини:
 - 30° ; 2) 45° ; 3) 60° .
- Доведіть, що рівні похилі, проведені до площини з точки, яка не належить площині, утворюють із площиною рівні кути.
- Яку фігуру на площині α утворюють основи всіх похилих, що проведені до площини α з точки, яка не належить площині, і утворюють рівні кути з площиною α ?
- Доведіть, що проекція (ортогональна) похилої дорівнює добутку цієї похилої на косинус кута, який вона утворює з площиною проектування.
- Чи може катет рівнобедреного прямокутного трикутника утворювати з площиною, що проходить через гіпотенузу, кут 60° ? Який найбільший кут між катетом і цією площиною?
- Доведіть, що пряма, яка перетинає паралельні площини, перетинає їх під однаковими кутами.
- Доведіть, що площина, яка перетинає паралельні прямі, перетинає їх під однаковими кутами.
- Прямі a і b утворюють із площиною α рівні кути. Чи будуть прямі a і b паралельні?
- Дві різні площини утворюють із даною прямою рівні кути. Як розміщені площини одна відносно другої?
- Одна з двох мимобіжних прямих перетинає площину під кутом 60° , а друга перпендикулярна до цієї площини. Знайдіть кут між даними мимобіжними прямими.
- Відрізок завдовжки 10 м перетинає площину; кінці його знаходяться на відстанях 2 м і 3 м від площини. Знайдіть кут між даним відрізком і площиною.

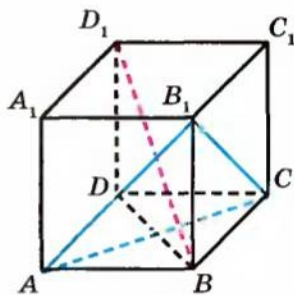


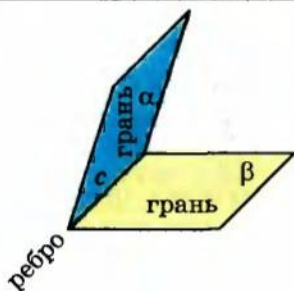
Рис. 16.6

14. У кубі знайдіть кут між діагоналлю куба і площиною основи.
15. Дано трикутник ABC і точку K , яка не належить його площині. KD , KE , KF — перпендикуляри, опущені з точки K на сторони трикутника. Ці перпендикуляри однаково нахилені до площини трикутника. Доведіть, що точка K проектується в центр кола, вписаного в трикутник.
- 16*. Через сторону квадрата проведено площину, яка утворює з діагоналлю квадрата кут 30° . Знайдіть кути, які утворюють із цією площиною сторони квадрата, що є похилими до неї.
17. Через катет рівнобедреного прямокутного трикутника проведено площину під кутом 45° до другого катета. Знайдіть кут між гіпотенузою і площиною.
18. Із точки, віддаленої від площини на відстань a , проведено дві похилі, які утворюють із площиною кути 45° , а між собою — кут 60° . Знайдіть відстань між кінцями похилих.
19. Із точки, віддаленої від площини на відстань a , проведено дві похилі під кутом 30° до площини, причому їх проекції утворюють кут 120° . Знайдіть відстань між кінцями похилих.
- 20*. Із вершини A квадрата $ABCD$ перпендикулярно до його площини проведено відрізок AK , що дорівнює 3 . Із точки K опущено перпендикуляри на сторони BC і CD , перпендикуляр із точки K до сторони BC дорівнює 6 . Знайдіть кути, які утворюють ці перпендикуляри з площиною квадрата.
- 21*. Основа рівнобедреного трикутника лежить у площині α (площина трикутника не збігається з площиною α). Який із кутів більший: кут нахилу бічної сторони до площини α чи кут нахилу висоти, опущеної на основу трикутника, до площини α ?
- 22*. Кут між прямою a і площиною α дорівнює 45° . Через точку їх перетину в площині α проведено пряму b . Кут між прямими a і b дорівнює 60° . Доведіть, що кут між прямою b і проекцією прямої a на площину α дорівнює 45° .
- 23*. Через сторону AC рівностороннього трикутника ABC проведено площину α . Кут між висотою BD трикутника і цією площиною дорівнює β . Знайдіть кут φ між прямою AB та площиною α .
24. Доведіть, що якщо всі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи рівні кути, то основою піраміди є багатокутник, навколо якого можна описати коло, і вершина піраміди проектується в центр цього кола.

§ 17 ДВОГРАННИЙ КУТ. КУТ МІЖ ПЛОЩИНАМИ

Таблиця 15

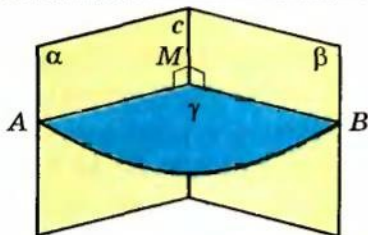
ДВОГРАННИЙ КУТ



Двогранний кут — фігура, утворена двома півплощинами α і β зі спільною прямою c , що їх обмежує.

Півплощини α і β — *грані* двогранного кута, а пряма c — *ребро* двогранного кута.

Лінійний кут двогранного кута

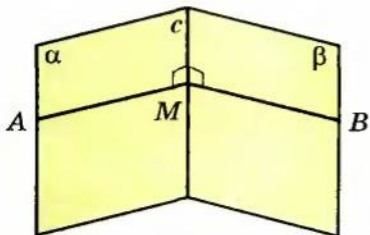


$\angle AMB$ — лінійний кут

($\gamma \perp c$, γ перетинає α по променю MA ,
 γ перетинає β по променю MB)

Якщо φ — лінійний кут,
то $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$.

Практичні способи побудови лінійного кута

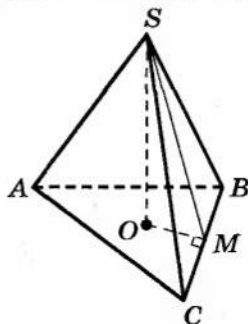


$M \in c$,

$MA \perp c$ (у грані α),

$MB \perp c$ (у грані β),

$\angle AMB$ — лінійний

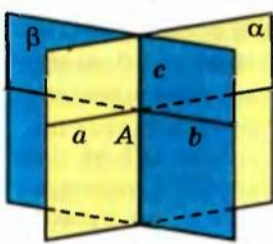


$SO \perp$ пл. ABC , $OM \perp BC$.

Тоді $SM \perp BC$ (за теоремою про три перпендикуляри), $\angle SMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC .

Продовження табл. 15

Кут між площинами

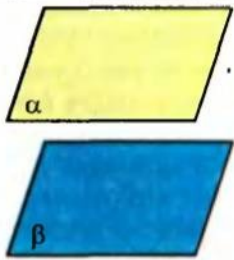


Кут між площинами — найменший¹ із двогранних кутів, утворених відповідними півплощинами.

Якщо площини α і β перетинаються по прямій c і через точку A на цій прямій у даних площинах проведено прямі $a \perp c$, $b \perp c$,

то $\angle(\alpha; \beta) = \angle(a; b)$.

$0^\circ \leq \angle(\alpha; \beta) \leq 90^\circ$



$\frac{\alpha \parallel \beta}{\alpha = \beta} \Leftrightarrow \angle(\alpha; \beta) = 0^\circ$

Пояснення й обґрунтування

1. Двогранний кут. Півплощину в просторі можна вважати просторовим аналогом променя. Тоді аналогом кута між променями на площині буде кут між півплощинами.

Означення. *Двогранним кутом* називається фігура, утворена двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує (рис. 17.1).

Півплощини називаються *гранями* двогранного кута, а пряма, що їх обмежує, — *ребром* двогранного кута.

Площина, перпендикулярна до ребра двогранного кута, перетинає його грані по двох променях. Кут, утворений цими променями, називається *лінійним кутом* двогранного кута.

● Нехай дано двогранний кут, утворений півплощинами α і β зі спільною прямою c (рис. 17.2), і площина γ , перпендикулярна до прямої c , перетинає півплощини α і β по променях a і b відповідно. Кут між променями a та b і є лінійним кутом цього двогранного кута.

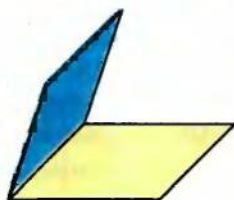


Рис. 17.1

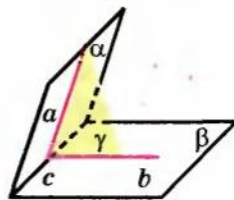


Рис. 17.2

¹ Якщо при перетині площин усі утворені двогранні кути рівні (усі кути прями), то як кут між площинами вибирають будь-який з них.

За міру двогранного кута приймають міру відповідного йому лінійного кута: $\angle(\alpha; \beta) = \angle(a; b)$.

Доведемо, що величина лінійного кута не залежить від вибору площини γ .

Нехай γ і γ' — площини, перпендикулярні до прямої c , які проходять через точки O і O' на прямій c та перетинають півплощини α і β по променях a і a' та b і b' відповідно (рис. 17.3). Оскільки дві різні площини, перпендикулярні до однієї і тієї самої прямої, паралельні, то $\gamma \parallel \gamma'$.

Розглянемо паралельне проектування в напрямі прямої OO' на площину γ . Оскільки півплощина α проходить через пряму OO' і перетинає площину γ по променю a , а площину γ' — по променю a' , то промінь a' є проекцією променя a на площину γ . Аналогічно промінь b' є проекцією променя b на площину γ . Але за властивостями паралельного проектування, якщо плоска фігура F (наприклад, кут між променями a і b) лежить у площині γ , паралельній площині проектування γ' , то її проекція на площину γ дорівнює фігурі F . Отже, кут між променями a і b дорівнює куту між променями a' і b' . ●

Якщо позначити лінійний кут двогранного кута через φ , то з означення випливає, що $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$.

Двогранний кут називається прямим, якщо його лінійний кут прямий.

Кутом між двома сусідніми гранями многогранника називатимемо двогранний кут між відповідними півплощинами.

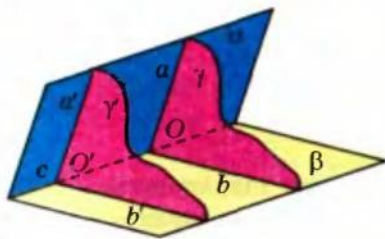


Рис. 17.3

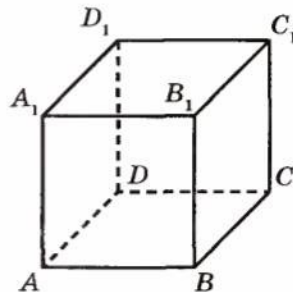


Рис. 17.4

Наприклад, у кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 17.4) кут між гранями $ABCD$ і $BB_1 C_1 C$ прямий, оскільки відповідний лінійний кут ABB_1 дорівнює 90° (площина $ABB_1 A_1$ перпендикулярна до ребра BC і перетинає відповідні півплощини по променях AB і BB_1 , отже, $\angle ABB_1$ — лінійний кут двогранного кута з ребром BC).

Практичні способи побудови лінійного кута двогранного кута

У задачах, для розв'язування яких доводиться застосовувати лінійні кути, не завжди зручно користуватися означенням лінійного кута. Тому доцільно пам'ятати деякі практичні способи, які полегшують побудову лінійних кутів.

Спосіб 1. Якщо з точки M , узятої на ребрі двогранного кута, провести в його гранях перпендикуляри MA і MB до ребра, то кут між перпендикулярами буде лінійним кутом двогранного кута (рис. 17.5).

● За побудовою $MA \perp c$ і $MB \perp c$, тоді за ознакою перпендикулярності прямої і площини площина MAB перпендикулярна до ребра c і перетинає грані двогранного кута по променях MA і MB . Отже, за означенням кут AMB дійсно є лінійним кутом двогранного кута. ●

Наприклад, щоб у кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 17.4) отримати лінійний кут двогранного кута з ребром BC , достатньо помітити, що в грані $ABCD$ $AB \perp BC$, а в грані $BB_1 C_1 C$ $BB_1 \perp BC$, отже, $\angle ABB_1$ — лінійний (і $\angle ABB_1 = 90^\circ$ як кут квадрата $ABB_1 A_1$).

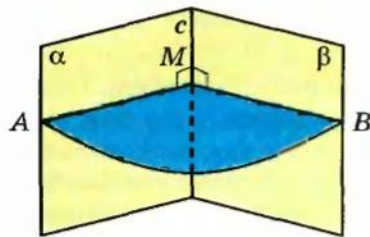


Рис. 17.5

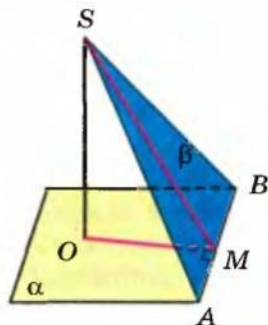


Рис. 17.6

Спосіб 2. Якщо з точки S , яка лежить в одній із граней двогранного кута, опущено перпендикуляр SO на його другу грань, то, для того щоб побудувати відповідний лінійний кут, достатньо з основи даного перпендикуляра (точки O) опустити перпендикуляр на ребро двогранного кута і сполучити відрізком одержану на ребрі точку з точкою S .

● Нехай дано двогранний кут з ребром AB і гранями α і β (рис. 17.6). Із точки $S \in \beta$ опущено перпендикуляр на площину α ($SO \perp \alpha$). Із точки O проведемо в грані α перпендикуляр: $OM \perp AB$ і сполучимо точки S і M відрізком. За теоремою про три перпендикуляри $SM \perp AB$. Тоді з точки M на ребрі двогранного кута проведено в його гранях два перпендикуляри до ребра. Отже, як обґрунтовано в способі 1, кут SMO дійсно є лінійним кутом даного двогранного кута. ●

Зауваження. Під час запису розв'язань задач, пов'язаних з двогранними кутами, результат, обґрунтований в практичному способі 1, можна використовувати як відомий опорний факт. Але обґрунтування, наведені в способі 2, доводиться повторювати в розв'язанні кожної задачі, у якому використовують цей спосіб побудови лінійного кута. (Можливий варіант запису такого обґрунтування наведено в табл. 15.)

2. Кут між площинами. Дано означення кута між площинами.

Означення. *Кутом між площинами, що перетинаються, називається найменший¹ із двограних кутів, утворених відповідними півплощинами². Кут між паралельними площинами чи площинами, які збігаються, вважають рівним нулю.*

Якщо позначити кут між площинами через φ , то з наведеного означення випливає, що $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$. Покажемо, що для того щоб знайти величину кута між площинами, що перетинаються, достатньо через довільну точку на прямій їх перетину провести в кожній площині пряму, перпендикулярну до прямої їх перетину. Величина кута між цими прямими і дорівнює величині кута між даними площинами.

● Дійсно, нехай дві площини α і β перетинаються по прямій c (рис. 17.7). Виберемо точку A на прямій c і проведемо в площині α пряму $a \perp c$, а в площині β — пряму $b \perp c$. Площина γ , яка проходить через прямі a і b (що перетинаються в точці A) перпендикулярна до прямої c (за ознакою перпендикулярності прямої і площини). Вона перетинає ці площини по прямих a і b . За означенням, кути між відповідними променями прямих a і b є лінійними кутами двограних кутів, утворених півплощинами площин α і β (із спільною прямою c). Тоді найменший із двограних кутів, утворених відповідними півплощинами, дорівнює найменшому з кутів, утворених відповідними променями прямих a і b , тобто куту між цими прямими. Отже, $\angle(\alpha; \beta) = \angle(a; b)$. ●

Наприклад, у кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 17.8) кут між площинами $ABCD$ і $A_1 B_1 C_1 D_1$ дорівнює куту між прямими AB і $A_1 B_1$, які лежать у розглянутих площинах і перпендикулярні до прямої їх перетину BC (оскільки $BC \perp$ пл. $ABB_1 A_1$). Отже, кут між площинами $ABCD$ і $A_1 B_1 C_1 D_1$ дорівнює 45° .

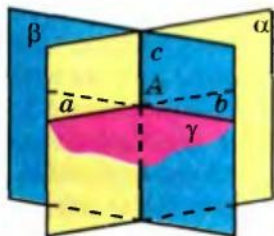


Рис. 17.7

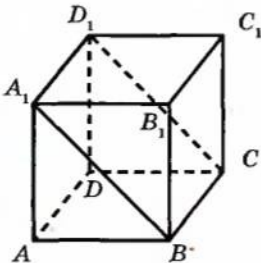


Рис. 17.8

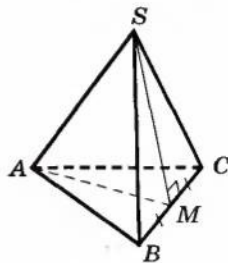


Рис. 17.9

¹ Якщо при перетині площин усі утворені двограни куті рівні (тобто всі кути прями), то як кут між площинами вибирають будь-який з них.

² Маються на увазі двограни куті, гранями кожного з яких є одна півплощина площини α і одна півплощина площини β , а ребром — пряма перетину даних площин.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Знайдіть кут між гранями правильного тетраедра.

Розв'язання

► Нехай $SABC$ — правильний тетраедр (рис. 17.9). Візьмемо точку M — середину ребра BC і сполучимо її відрізками з точками S і A .

У правильному тетраедрі всі ребра рівні (нехай $SA = SB = SC = AC = BC = AB = x$). Отже, трикутники SBC і ABC — правильні, а їх медіани SM та AM є відповідно і їх висотами, тобто $SM \perp BC$ та $AM \perp BC$. Тоді $\angle SMA$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC (нехай $\angle SMA = \varphi$). Оскільки $SM = AM = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

(як висоти правильних трикутників), то за теоремою косинусів із трикутника SMA :

$$SA^2 = AM^2 + SM^2 - 2AM \cdot SM \cdot \cos \varphi,$$

$$\text{тобто } x^2 = \frac{3x^2}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{3x^2}{2} \cdot \cos \varphi.$$

$$\text{Звідси } \cos \varphi = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Відповідь: } \cos \varphi = \frac{1}{3}. \triangleleft$$

Задача 2. Через гіпотенузу $AB = c$ рівнобедреного прямокутного трикутника ABC (кут C дорівнює 90°) проведено площину α , яка утворює з площиною трикутника кут 60° . Знайдіть відстань від вершини C до площини α .

Розв'язання

► Опустимо перпендикуляр CO з точки C на площину α , тоді CO — відстань від точки C до площини α (рис. 17.10). У площині α проведемо $OM \perp AB$ і сполучимо відрізком точки C і M .

Коментар

Нагадаємо, що в правильному тетраедрі всі грані є правильними трикутниками, тому всі його ребра рівні між собою. Для побудови лінійного кута двогранного кута при ребрі BC зручно використати практичний спосіб 1 і отримати в гранях двогранного кута два перпендикуляри до ребра, проведені з однієї точки M (рис. 17.9).

Слід мати на увазі, що, опускаючи перпендикуляри з точок S і A на пряму BC , потрібно буде доводити, що їх основи знаходяться в одній точці. Щоб уникнути цього, зручно взяти середину відрізка BC , сполучити відрізками цю точку з точками S і A , а потім довести, що дійсно отримано перпендикуляри до BC .

Необхідно також урахувати, що в запропонованій задачі на обчислення не дано жодного відрізка. Тому для її розв'язання зручно ввести невідомий відрізок (і, крім того, позначити шуканий кут через φ).

Коментар

Для того щоб знайти відстань від точки C до площини α (рис. 17.10), необхідно провести перпендикуляр до площини α ($CO \perp \alpha$). Тому побудову кута між площиною трикутника і площиною α зручно виконати

Тоді $CM \perp AB$ за теоремою про три перпендикуляри, тобто $\angle CMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі AB , отже, $\angle CMO = 60^\circ$.

У рівнобедреному прямокутному трикутнику висота CM є одночасно і медіаною, тому $AM = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$.

Тоді з прямокутного трикутника

$$\triangle ACM: CM = \frac{c}{2}.$$

Із прямокутного трикутника CMO ($CO \perp OM$, оскільки $CO \perp \alpha$):

$$CO = CM \cdot \sin 60^\circ = \frac{c\sqrt{3}}{4}.$$

Відповідь: $\frac{c\sqrt{3}}{4}$. \triangleleft

способом 2 побудови лінійного кута. У цей спосіб ми завжди отримуємо лінійний кут двогранного кута як гострий кут прямокутного трикутника. Отже, величина одержаного гострого лінійного кута завжди дорівнює величині кута між площинами, у яких лежать грані розглядуваного двогранного кута.

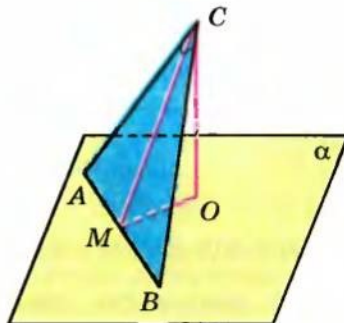


Рис. 17.10

Запитання для контролю

1. Поясніть, яка фігура називається двограним кутом (ребром кута, гранню кута).
2. Поясніть, як означають лінійний кут двогранного кута.
3. Доведіть, що міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута.
4. Поясніть, користуючись моделлю двогранного кута, як практично можна побудувати лінійний кут двогранного кута.
- 5*. Доведіть, що в результаті використання практичних способів дійсно отримують лінійні кути.
6. Дайте означення кута між площинами.
- 7*. Доведіть, що коли через довільну точку на прямій перетину площин провести в кожній площині пряму, перпендикулярну до прямої їх перетину, то величина кута між цими прямими дорівнює величині кута між даними площинами.

Вправи

- 1°. Який кут утворює ребро двогранного кута з будь-якою прямою, яка лежить у площині його лінійного кута?
- 2°. На рисунку 17.11 зображено двогранний кут з ребром BC . Укажіть лінійний кут цього двогранного кута, якщо $AP \perp$ пл. ABC і в трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$.

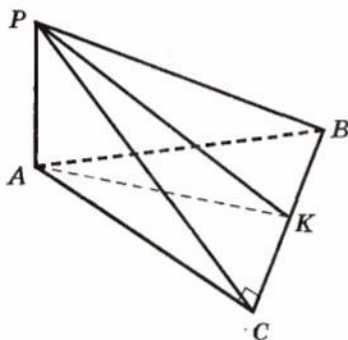


Рис. 17.11

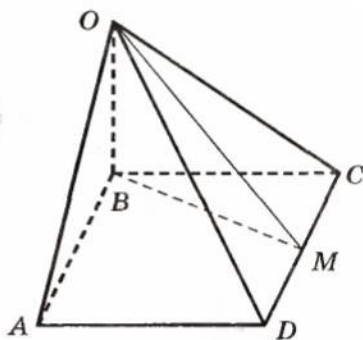


Рис. 17.12

- 3°. В основі піраміди $OABCD$ (рис. 17.12) лежить квадрат $ABCD$. Бічне ребро OB перпендикулярне до площини основи. Укажіть лінійний кут двогранного кута з ребром CD .
- 4°. Півплощини, у яких лежать два рівнобедрених трикутники зі спільною основою, утворюють двогранний кут. Чи правильне твердження, що медіани, проведені до спільної основи трикутників, утворюють лінійний кут двогранного кута?
5. Трикутник MAB і квадрат $ABCD$ розміщені таким чином, що MB — перпендикуляр до площини квадрата. Величину якого кута можна вважати кутом між площинами AMD і ABC ?
6. Дві площини перетинаються під кутом 30° . Точка A , яка лежить в одній із цих площин, віддалена від другої площини на відстань a . Знайдіть відстань від цієї точки до прямої перетину площин.
7. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ знайдіть кут нахилу площини ADC_1 до площини ABC .
8. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 м і 24 м. Знайдіть відстань від вершини прямого кута до площини, яка проходить через гіпотенузу і утворює з площиною трикутника кут 30° .
9. Через сторону AB трикутника ABC проведено площину α під кутом 60° до площини трикутника. Висота CD трикутника ABC дорівнює a . Знайдіть відстань від вершини C трикутника до площини α .
10. Через катет $BC = a$ рівнобедреного прямокутного трикутника ABC (кут C дорівнює 90°) проведено площину α , яка утворює з площиною трикутника кут 30° . Знайдіть відстань від вершини A до площини α .

- 11°. Доведіть, що площина, яка перетинає паралельні площини, перетинає їх під однаковими кутами.
12. Знайдіть кут між площинами, якщо точка, яка лежить на одній із них, віддалена від прямої перетину площин удвічі далі, ніж від другої площини.
13. Рівнобедрені трикутники ABC і ABD зі спільною основою AB лежать у різних площинах, кут між якими дорівнює α . Знайдіть $\cos \alpha$, якщо:
1) $AB = 24$ см, $AC = 13$ см, $AD = 37$ см, $CD = 35$ см; 2) $AB = 32$ м, $AC = 65$ м, $AD = 20$ м, $CD = 63$ м.
14. Два рівнобедрених трикутники мають спільну основу, а їх площини утворюють кут 60° . Спільна основа дорівнює 16 м, бічна сторона одного трикутника — 17 м, а бічні сторони другого перпендикулярні. Знайдіть відстань між вершинами трикутників, протилежними до спільної основи.
- 15°. У квадраті $ABCD$ через вершину D паралельно діагоналі AC проведено площину α , яка утворює з діагоналлю BD кут 60° . Чому дорівнює кут між площиною квадрата і площиною α ?
- 16°. Із точок A і B , які лежать на різних гранях двогранного кута, опущено перпендикуляри AA_1 і BB_1 на ребро кута. Знайдіть: 1) відрізок AB , якщо $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ і двогранний кут дорівнює α ; 2) двогранний кут α , якщо $AA_1 = 3$, $BB_1 = 4$, $A_1B_1 = 6$, $AB = 7$.
- 17°. Ребро куба дорівнює a . Знайдіть площу перерізу куба площиною, що проходить через сторону основи, якщо кут між цією площиною і площиною основи дорівнює: 1) 30° ; 2) 60° .
18. Через центр O правильного трикутника ABC проведено до його площини перпендикуляр MO , $AB = a\sqrt{3}$. Кут між прямою MA і площиною трикутника дорівнює 45° . Знайдіть кут між площинами: 1) AMO і BMO ; 2) BMC і ABC .
- 19°. Усі ребра правильної трикутної призми рівні між собою. Знайдіть кут між площиною основи призми і площиною, яка проходить через протилежні вершини бічної грані і середину ребра, протилежного до цієї грані.
- 20°. Доведіть, що якщо всі двогранні кути при основі піраміди рівні між собою, то основою піраміди є многокутник, у який можна вписати коло, і вершина піраміди проектується в центр цього кола.

§ 18 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПЛОЩИН

Таблиця 16

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ДВОХ ПЛОЩИН	
Означення	
Дві площини, що перетинаються, називаються <i>перпендикулярними</i> , якщо кут між ними дорівнює 90° .	
Зміст	
	$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \text{ перетинає } \beta \text{ по прямій } c, \\ \gamma \perp c, \\ \gamma \text{ перетинає } \alpha \text{ по прямій } a, \\ \gamma \text{ перетинає } \beta \text{ по прямій } b, \\ a \perp b \end{cases} \Leftrightarrow \angle(\alpha; \beta) = 90^\circ$
Ознака	Властивість
<p>Якщо $b \perp \alpha$ і β проходить через b, то $\beta \perp \alpha$.</p>	<p>Якщо $\beta \perp \alpha$, β перетинає α по a і $b \perp a$ (b лежить у β), то $b \perp \alpha$.</p>

Пояснення й обґрунтування

Поняття кута між площинами дозволяє означити перпендикулярність площин.

Означення. Дві площини, що перетинаються, називаються *перпендикулярними*, якщо кут між ними дорівнює 90° .

Теорема 18.1 (ознака перпендикулярності площин). Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.

● *Доведення.* Нехай α — дана площина, b — пряма, перпендикулярна до цієї площини ($b \perp \alpha$), β — площина, яка проходить через пряму b , і c — пряма, по якій перетинаються площини α і β (рис. 18.1). Доведемо, що площини α і β перпендикулярні.

Проведемо в площині α через точку A перетину прямої b з площиною α (а отже, і з прямою c) пряму a , перпендикулярну до прямої c . Оскільки $b \perp \alpha$, то $b \perp c$ і $b \perp a$. Тоді, як було показано в § 17, величина кута між площинами α і β дорівнює величині кута між прямими a і b , які лежать у цих площинах і перпендикулярні до прямої c їх перетину. Ураховуючи, що $b \perp a$, одержуємо $\angle(\alpha; \beta) = \angle(a; b) = 90^\circ$. Отже, площини α і β перпендикулярні. ●

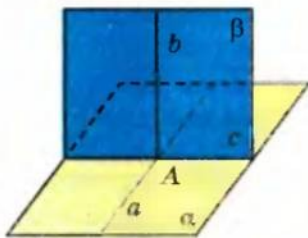


Рис. 18.1

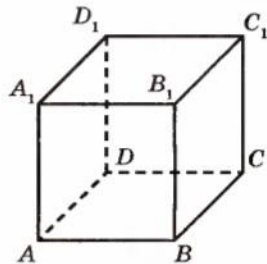


Рис. 18.2

Зокрема, у кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 18.2) грані, які перетинаються, попарно перпендикулярні, оскільки, як було показано раніше, кожне ребро куба (наприклад, AA_1) перпендикулярне до грані, яку воно перетинає (наприклад, до грані $ABCD$). Отже, площина, яка проходить через це ребро (наприклад, площина ADD_1A_1) за ознакою перпендикулярності площин перпендикулярна до другої площини (до пл. $ABCD$).

Розглянемо ще одну властивість, яка пов'язує перпендикулярність двох площин і перпендикулярність прямої та площини.

Теорема 18.2. Пряма, проведена в одній із двох перпендикулярних площин перпендикулярно до прямої їх перетину, перпендикулярна до другої площини.

● *Доведення.* Нехай перпендикулярні площини α і β перетинаються по прямої c і в площині β проведено пряму b перпендикулярно до прямої c (рис. 18.1). Доведемо, що $b \perp \alpha$.

Проведемо в площині α через точку A перетину прямих b і c пряму a , перпендикулярну до прямої c . Тоді величина кута між прямими a і b

дорівнює величині кута між площинами α і β , тобто 90° . Отже, пряма b перпендикулярна до прямих a і c площини α , які перетинаються. За ознакою перпендикулярності прямої і площини $b \perp \alpha$. \bullet

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Дано пряму a і площину α . Проведіть через пряму a площину, перпендикулярну до площини α .

Розв'язання

► Якщо $a \perp \alpha$, то візьмемо довільну точку B , яка не лежить на прямій a , і через пряму та точку поза нею проведемо площину γ (рис. 18.3, а). За ознакою перпендикулярності площин $\gamma \perp \alpha$.

Якщо дана пряма не перпендикулярна до площини α , то візьмемо довільну точку A прямої a і проведемо через неї пряму b (рис. 18.3, б), перпендикулярну до площини α .

Через прямі a і b проводимо площину β . За ознакою перпендикулярності прямої і площини $\beta \perp \alpha$. \triangleleft

Коментар

Це задача на уявлювану побудову, яка фактично є завданням на доведення існування фігури, що задовольняє даним умовам. Як зазначалося в § 4, це доведення повинно спиратися на відповідні аксіоми та властивості стереометричних фігур. Зокрема, слід використати результати, розглянуті в § 14: *через довільну точку простору завжди можна провести єдину пряму, перпендикулярну до даної площини*.

Для того щоб довести перпендикулярність даної і побудованої площин, можна скористатися ознакою перпендикулярності площин (для цього достатньо з'ясувати, що побудована площина проходить через пряму, перпендикулярну до даної площини).

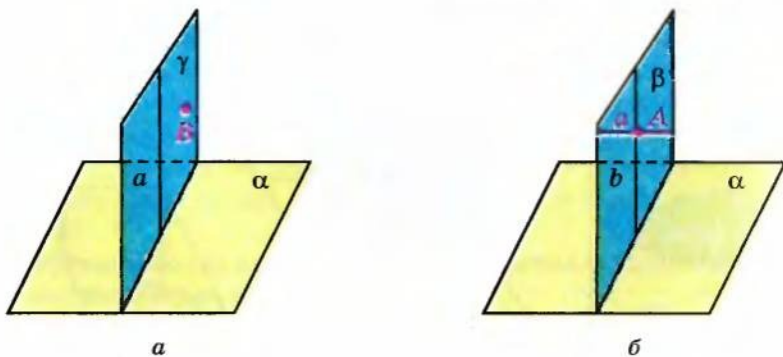


Рис. 18.3

Задача 2. Доведіть, що площина лінійного кута перпендикулярна до кожної грані двогранного кута.

Розв'язання

► За означенням лінійного кута його площина γ перпендикулярна до ребра c (рис. 18.4). Але кожна грань (α і β) двогранного кута проходить через пряму c , перпендикулярну до площини γ . Отже, за ознакою перпендикулярності площин $\gamma \perp \alpha$ і $\gamma \perp \beta$.

Коментар

Для доведення перпендикулярності двох площин можна використати ознаку перпендикулярності площин, а для цього достатньо з'ясувати, що одна з площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини.

Задача 3. Доведіть, що коли з точки, яка лежить в одній з перпендикулярних площин, опустити перпендикуляр на другу площину, то цей перпендикуляр лежатиме в першій площині.

Розв'язання

► Нехай площини α і β перпендикулярні ($\beta \perp \alpha$) і перетинаються по прямої c (рис. 18.5). Опустимо з деякої точки $A \in \beta$ перпендикуляр AO на площину α ($AO \perp \alpha$). Припустимо, що AO не лежить у площині β . Проведемо в площині β через точку A перпендикуляр до прямої c ($AO_1 \perp c$). Тоді за теоремою 18.2 $AO_1 \perp \alpha$. Одержали, що через точку A проходять дві прямі, перпендикулярні до площини α , а це неможливо. Отже, AO лежить у площині β . ◀

Коментар

Для доведення використаємо метод від супротивного: припустимо, що перпендикуляр не лежить у першій площині, і, використовуючи теорему 18.2, побудуємо ще один перпендикуляр з даної точки до площини. Це призведе до суперечності з єдиністю такого перпендикуляра.

Таким чином, наше припущення виявиться неправильним, а отже, перпендикуляр повинен лежати в першій площині.

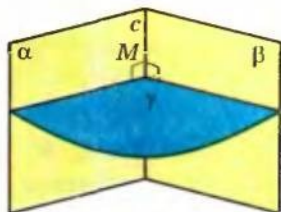


Рис. 18.4

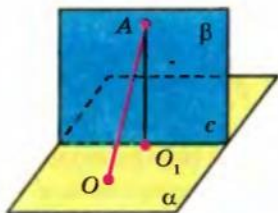


Рис. 18.5

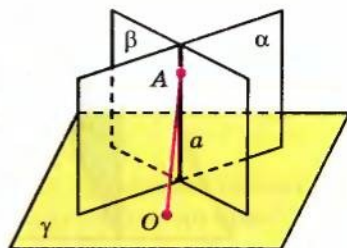


Рис. 18.6

Задача 4. Доведіть, що коли дві площини, які перетинаються, перпендикулярні до третьої площини, то пряма їх перетину перпендикулярна до цієї (третьої) площини.

Розв'язання

► Нехай площини α і β перетинаються по прямій a (рис. 18.6) і перпендикулярні до площини γ ($\alpha \perp \gamma$ і $\beta \perp \gamma$). Візьмемо довільну точку A на прямій a і проведемо через неї пряму, перпендикулярну до площини γ ($AO \perp \gamma$). За попередньою властивістю ця пряма лежить і в площині α , і в площині β , тобто вона збігається з прямою a . Тоді ця пряма перпендикулярна до площини γ . ◀

Коментар

Спробуємо застосувати результат, обґрунтований у попередньому прикладі, до точки, узятої на прямій перетину перших двох площин, і врахувати, що дві різні площини можуть мати тільки одну спільну пряму — пряму їх перетину.

Запитання для контролю

1. Дайте означення перпендикулярності двох площин.
2. Сформулюйте ознаку перпендикулярності двох площин.
- 3*. Доведіть ознаку перпендикулярності двох площин.
4. Сформулюйте властивість, яка пов'язує перпендикулярність двох площин та перпендикулярність прямої і площини.
- 5*. Доведіть властивість, яка пов'язує перпендикулярність двох площин і перпендикулярність прямої та площини.

Вправи

- 1°. Площина α перпендикулярна до площини β . Чи буде довільна пряма площини α перпендикулярна до площини β ? (Проілюструйте відповідь на моделі перпендикулярних площин.)
- 2°. Дві площини перпендикулярні. Укажіть усі можливі випадки розташування прямої, яка лежить в одній площині, відносно прямої, що лежить у другій площині. (Проілюструйте свою відповідь на моделі.)
- 3°. Чи правильно, що площина, яка проходить через похилу до іншої площини, завжди не перпендикулярна до цієї площини?
- 4°. Чи правильно, що дві площини, перпендикулярні до третьої, паралельні?
- 5°. Чи правильно, що пряма і площина, перпендикулярні до іншої площини, паралельні між собою?
- 6°. Площина і пряма паралельні. Чи правильне твердження, що площина, перпендикулярна до цієї площини, перпендикулярна і до цієї прямої?

7. Площина і пряма паралельні. Чи буде правильним твердження, що площина, перпендикулярна до прямої, перпендикулярна до цієї площини?
8. Скільки площин, перпендикулярних до даної площини, можна провести через дану пряму?
9. Доведіть, що грані прямокутного паралелепіпеда, які перетинаються, попарно перпендикулярні.
10. Доведіть, що в кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перерізи $AA_1 C_1 C$ і $BB_1 D_1 D$ перпендикулярні. (Оскільки ці перерізи проходять через діагоналі граней куба, то їх називають *діагональними перерізами*.)
11. Доведіть, що через будь-яку точку простору можна провести площину, перпендикулярну до даної площини. Скільки таких площин можна провести через дану точку?
- 12°. Вертикальність стіни під час будівництва перевіряють за допомогою виска (шнура з тягарцем). Якщо шнур щільно прилягає до поверхні стіни, то вважають, що вертикальність витримано. На чому ґрунтується такий спосіб перевірки?
13. Рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) перегнули по висоті CH таким чином, що площини ACH і BCH утворили прями кут. Знайдіть кути: 1) AHB ; 2) ACB .
14. Чи існує трикутна піраміда, у якій три грані попарно перпендикулярні?
15. Чи існує чотирикутна піраміда, у якій дві протилежні бічні грані перпендикулярні до основи?
16. Чи існує піраміда, у якій три бічні грані перпендикулярні до основи?
- 17°. Дано пряму a і площину α , не перпендикулярну до прямої. Доведіть, що всі прямі, які перпендикулярні до площини α і перетинають пряму a , лежать в одній площині, перпендикулярній до площини α .
18. Із точок A і B , які лежать у двох перпендикулярних площинах, опущено перпендикуляри AC і BD на пряму перетину площин. Знайдіть довжину відрізка AB , якщо: 1) $AC = 6$ м, $BD = 7$ м, $CD = 6$ м; 2) $AC = 3$ м, $BD = 4$ м, $CD = 12$ м; 3) $AD = 4$ м, $BC = 7$ м, $CD = 1$ м; 4) $AD = BC = 5$ м, $CD = 1$ м; 5) $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$; 6) $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$.
19. Точка знаходиться на відстанях a і b від двох перпендикулярних площин. Знайдіть відстань від цієї точки до прямої перетину площин (рис. 18.7).
- 20°. Площини α і β перпендикулярні. У площині α взято точку A , відстань від якої до прямої c (лінії перетину площин) дорівнює 0,5 м. У площині β проведено пряму b , яка паралельна прямій c і віддалена від неї на 1,2 м. Знайдіть відстань від точки A до прямої b .

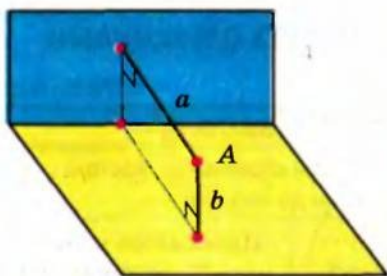


Рис. 18.7

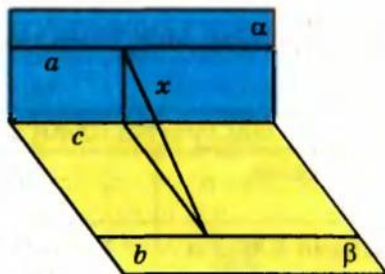
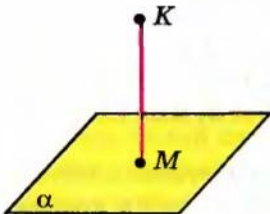
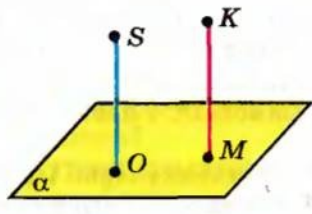
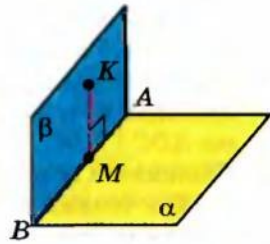
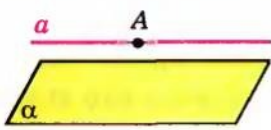
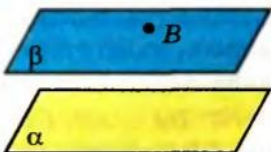
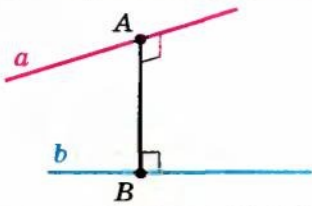


Рис. 18.8

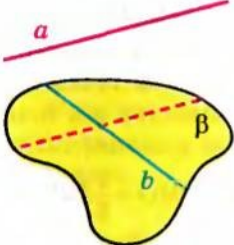
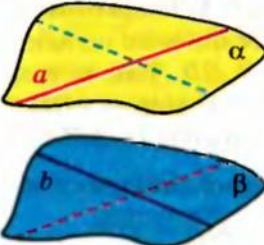
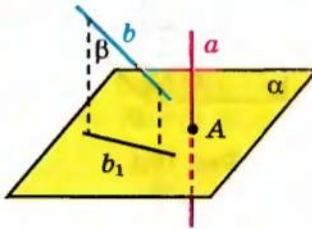
- 21*. Перпендикулярні площини α і β перетинаються по прямій c . У площині α проведено пряму $a \parallel c$, а в площині β — пряму $b \parallel c$. Знайдіть відстань між прямими a і b , якщо відстань між прямими a і c дорівнює 1,5 м, а між прямими b і c — 0,8 м (рис. 18.8).
- 22*. Площини рівносторонніх трикутників ABC і ABD перпендикулярні. Знайдіть кут: 1) між прямою DC і площиною ABC ; 2) між площинами ADC і BDC .
- 23*. Площини α і β взаємно перпендикулярні. Пряма l перетинає площини α і β в точках A та B відповідно, утворюючи при цьому з кожною з площин кути, рівні φ . Знайдіть довжину відрізка, кінцями якого є проєкції точок A і B на лінію перетину даних площин, якщо довжина відрізка AB дорівнює a .
24. Площини рівнобедреного трикутника ABF і квадрата $ABCD$ перпендикулярні. Знайдіть відстань: 1) від точки F до прямої CD ; 2) від точки F до центра кола, що проходить через точки A , B і центр O квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює 32 і $AF = BF = 20$.
25. Площини ABC і ABD утворюють кут 45° . Відомо, що $AD = 3$, $AB = 5$, $BC = \sqrt{2}$; $DA \perp AB$, $CB \perp AB$. Знайдіть: 1) відрізок CD ; 2) кут між прямою CD і площиною ABC .
26. Прямокутники $ABCD$ і $ABMK$ лежать у взаємно перпендикулярних площинах. Чи правильно, що: 1) $AC \perp AK$; 2) $AM \perp AD$; 3) $AC \perp AM$?
- 27*. Дано $PABC$ — правильний тетраедр з ребром 8. Через вершину C проведено площину α , яка перпендикулярна до ребра AP . Знайдіть периметр і площу трикутника, вершинами якого служать точки перетину площини α з ребрами даного тетраедра.
- 28*. Зобразіть куб $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$ і побудуйте його переріз площиною, що проходить через: 1) ребро BB_1 перпендикулярно до площини ACC_1 ; 2) ребро AB перпендикулярно до площини AB_1C_1 ; 3) ребро BC перпендикулярно до площини AB_1C_1 .

§ 19 ВІДСТАНІ МІЖ ТОЧКАМИ, ПРЯМИМИ ТА ПЛОЩИНАМИ

Таблиця 17

ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПЛОЩИНИ (ρ – ВІДСТАНЬ ¹)	
Означення	Практичні прийоми отримання відстані від точки до площини
<p>Проводимо $KM \perp \alpha$ ($M \in \alpha$)</p>  <p>$KM = \rho(K; \alpha)$</p>	<p>$SO \perp \alpha$. Проводимо $KM \parallel SO$. Тоді $KM \perp \alpha$.</p>  <p>$KM = \rho(K; \alpha)$</p> <p>Проводимо через точку K площину $\beta \perp \alpha$ (β перетинає α по AB). Проводимо $KM \perp AB$. Тоді $KM \perp \alpha$.</p>  <p>$KM = \rho(K; \alpha)$</p>
ВІДСТАНЬ (ρ) МІЖ ПАРАЛЕЛЬНИМИ ПРЯМОЮ І ПЛОЩИНОЮ	ВІДСТАНЬ (ρ) МІЖ ПАРАЛЕЛЬНИМИ ПЛОЩИНАМИ
 <p>$a \parallel \alpha, A \in a$ $\rho(a; \alpha) = \rho(A; \alpha)$</p>	 <p>$\beta \parallel \alpha, B \in \beta$ $\rho(\beta; \alpha) = \rho(B; \alpha)$</p>
ВІДСТАНЬ (ρ) МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ	
	<p>Відстанню між тимобіжними прямими називається довжина їх спільного перпендикуляра.</p> <p>Прямі a і b — тимобіжні. $AB \perp a, AB \perp b$ $\rho(a; b) = AB$</p>
<p>¹ Позначення відстані між точкою A і площиною α (та між іншими фігурами) у вигляді $\rho(A; \alpha)$ не є загальноприйнятим, але іноді ми будемо його використовувати для скорочення записів.</p>	

Продовження табл. 1

СПОСОБИ ОБЧИСЛЕННЯ ВІДСТАНІ (ρ) МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ		
<p>Проводимо через пряму b площину $\beta \parallel a$.</p>  <p>$\rho(a; b) = \rho(a; \beta)$</p>	<p>Проводимо через прямі a і b паралельні площини $\alpha \parallel \beta$.</p>  <p>$\rho(a; b) = \rho(\alpha; \beta)$</p>	<p>Проводимо площину $\alpha \perp a$ і проєкуємо прямі a і b на цю площину: $a \rightarrow A, b \rightarrow b_1$</p>  <p>$\rho(a; b) = \rho(A; b_1)$</p>

Пояснення й обґрунтування

Нагадаємо, що в планіметрії відстанню між прямою і точкою, що не належить їй, називається довжина перпендикуляра, опущеного з точки на пряму. Відстанню між двома паралельними прямими називається відстань від будь-якої точки однієї прямої до іншої прямої (оскільки всі відстані від точок однієї з паралельних прямих до другої прямої однакові).

Оскільки в просторі пряма і точка, що не належить їй, а також дві паралельні прямі лежать в одній площині, то ці означення відстаней між точкою і прямою, а також між двома паралельними прямими можна використовувати і для простору. Нагадаємо також (див. § 15), що **відстанню від точки до площини називається довжина перпендикуляра, опущеного із цієї точки на площину.**

З властивостей перпендикуляра і похилої випливає, що відстань між точкою і площиною є найменшою з усіх можливих відстаней від цієї точки до точок площини.

Значимо, що в деяких задачах буває важливим указати на зображенні просторової фігури основу перпендикуляра, опущеного із заданої точки на площину. Тоді доводиться використовувати практичні прийоми отримання відстані від точки до площини, які наведено в табл. 17.

Прийом 1. Якщо в якомусь місці в даній конфігурації вже маємо перпендикуляр до даної площини, то достатньо через дану точку провести пряму, паралельну цьому перпендикуляру, і визначити точку перетину цієї прямої з даною площиною.

Дійсно, якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то і друга пряма перпендикулярна до цієї площини.

Нехай у кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ з ребром a (рис. 19.1) потрібно знайти відстань від середини діагоналі куба BD_1 — точки M — до площини основи $ABCD$. Для цього достатньо згадати, що всі бічні ребра куба перпендикулярні до площини основи, зокрема $D_1 D \perp$ пл. $ABCD$, і провести через точку M пряму $MO \parallel D_1 D$. Оскільки площина $D_1 D B$ перетинає площину $ABCD$ по прямій DB , то основою шуканого перпендикуляра є точка $O \in BD$. Тоді за теоремою Фалеса точка O — середина¹ відрізка BD . Отже, відстань від точки M до площини $ABCD$ дорівнює довжині MO —

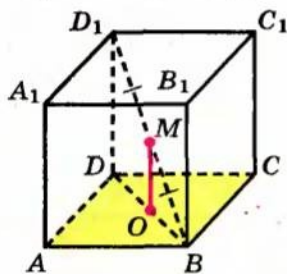


Рис. 19.1

середньої лінії трикутника $D_1 D B$: $MO = \frac{1}{2} D D_1 = \frac{a}{2}$.

Прийом 2. Для того щоб отримати відстань від точки до площини, можна через дану точку провести площину, перпендикулярну до даної площини, а потім в побудованій площині провести перпендикуляр з даної точки на пряму перетину розглядуваних площин.

Дійсно, за теоремою 18.2 проведений відрізок буде перпендикулярним до даної площини, тобто він і є відстанню від даної точки до цієї площини.

Наприклад, щоб розв'язати попередню задачу — у кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ з ребром a (рис. 19.1) знайти відстань від середини діагоналі куба BD_1 — точки M — до площини $ABCD$, достатньо помітити, що площина $BD_1 D$ перпендикулярна до площини $ABCD$ (оскільки вона проходить через ребро $D_1 D \perp$ пл. $ABCD$). Далі слід опустити з точки M перпендикуляр MO на пряму BD перетину розглядуваних площин (якщо пл. $BD_1 D \perp$ пл. $ABCD$ і $MO \perp BD$, то $MO \perp$ пл. $ABCD$). Це і буде відстань від точки M до площини $ABCD$. Оскільки $MO \parallel D_1 D$ (як прямі, перпендикулярні до однієї площини), подальше розв'язування таке саме, що і наведене вище.

Означимо тепер поняття відстані між паралельними прямою і площиною, відстані між паралельними площинами та відстані між мимобіжними прямими.

Означення. Відстанню між паралельними прямою і площиною називається відстань від будь-якої точки прямої до площини.

Означення. Відстанню між двома паралельними площинами називається відстань від будь-якої точки однієї площини до другої площини.

¹ Будуючи зображення, слід урахувувати, що діагоналі квадрата точкою перетину діляться навпіл і під час проектування середина відрізка проектується в середину відрізка проекції, тому на зображенні точка O фактично повинна бути точкою перетину діагоналей BD і AC .

Доведемо, що відстань між паралельними прямою і площиною чи між двома паралельними площинами не залежить від вибору точки.

● Нехай дано паралельні пряма a і площина β та точки A_1 і A_2 на прямій a (рис. 19.2) або дві паралельні площини α і β та точки A_1 і A_2 в площині α (рис. 19.3).

Опустимо з точок A_1 і A_2 перпендикуляри A_1B_1 і A_2B_2 на площину β . Тоді відстань від точки A_1 до площини β дорівнює A_1B_1 , а відстань від точки A_2 до площини β — A_2B_2 . Чотирикутник $A_1A_2B_2B_1$ — прямокутник (обґрунтуйте самостійно), отже, $A_1B_1 = A_2B_2$. ●

Відзначимо, що з поняттями відстані від точки до площини та відстані між паралельними площинами пов'язані поняття висоти піраміди та призми.

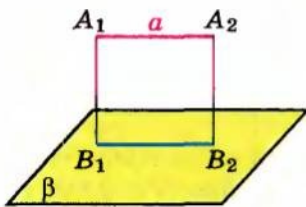


Рис. 19.2

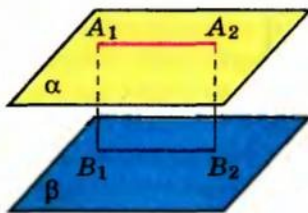


Рис. 19.3

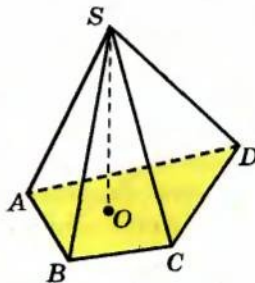


Рис. 19.4

Означення. *Висотою піраміди називається перпендикуляр, опущений із вершини піраміди на площину її основи.* Довжину цього перпендикуляра також називають висотою піраміди.

Наприклад, якщо в піраміді $SABCD$ (рис. 19.4) $SO \perp$ пл. $ABCD$, то SO — висота піраміди, тобто висотою піраміди є відстань від її вершини до площини основи.

Означення. *Висотою призми називається перпендикуляр, опущений із точки однієї основи призми на площину другої її основи.* Довжину цього перпендикуляра також називають висотою призми.

Наприклад, якщо в призмі $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 19.5) $A_1M \perp$ пл. $ABCDE$, то A_1M — висота призми. Оскільки в призмі площини основ паралельні, то висотою призми є відстань між площинами її основ.

Призма називається прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площин основ.

Зокрема, прямими призмами є куб і прямокутний паралелепіпед.

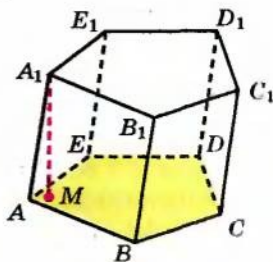


Рис. 19.5

З означення прямої призми випливає, що в **прямій призмі висотою призми є бічне ребро**. Наприклад, якщо $ABCA_1B_1C_1$ — пряма призма (рис. 19.6), то її висотою є будь-яке бічне ребро, наприклад AA_1 (оскільки $AA_1 \perp$ пл. ABC).

Дамо також означення поняття відстані між мимобіжними прямими.

Означення 1. *Спільним перпендикуляром до двох мимобіжних прямих називається відрізок з кінцями на цих прямих, перпендикулярний до кожної з них.*

Означення 2. *Відстанню між мимобіжними прямими називають довжину їх спільного перпендикуляра.*

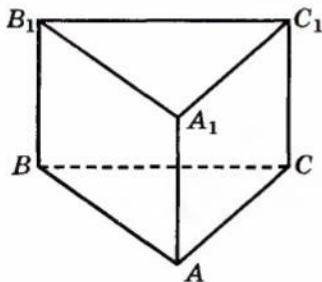


Рис. 19.6

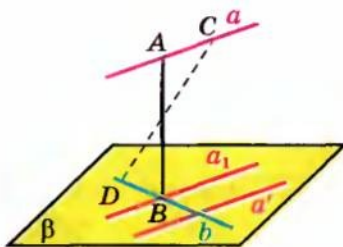


Рис. 19.7

Теорема 19.1. *Спільний перпендикуляр до двох мимобіжних прямих існує, і до того ж єдиний.*

● **Доведення.** Нехай a і b — мимобіжні прямі. Через одну з них, наприклад b , проведемо площину β , паралельну прямій a . Це можна зробити, провівши пряму a' , яка паралельна прямій a і перетинає пряму b (рис. 19.7). Тоді прямі a' і b , які перетинаються, визначатимуть площину β , паралельну прямій a . Розглянемо ортогональну проекцію a_1 прямої a на площину β . Вона буде перетинати пряму b в деякій точці B , яка є ортогональною проекцією деякої точки A прямої a . Відрізок AB і буде шуканим. Дійсно, він перпендикулярний до площини β , а отже, і до прямих b та a' . Таким чином, $AB \perp b$ і $AB \perp a'$, а враховуючи, що $a' \parallel a$, одержуємо $AB \perp a$, тобто відрізок AB — спільний перпендикуляр до прямих a і b .

Доведемо, що цей спільний перпендикуляр єдиний. Припустимо, що прямі a і b мають ще один спільний перпендикуляр: $CD \perp b$ і $CD \perp a$. Оскільки $a \parallel a'$, то $CD \perp a'$. Тоді $CD \perp \beta$. Одержали, що прямі AB і CD перпендикулярні до однієї площини β , отже, вони паралельні. Але паралельні прямі лежать в одній площині, тоді і точки A, B, C, D лежать в одній площині. Звідси випливає, що прямі a і b лежать в одній площині, а це неможливо (оскільки за умовою вони мимобіжні). Отже, наше

припущення неправильне і прямі a та b мають тільки один спільний перпендикуляр. ◉

Наприклад, у кубі $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$ з ребром 1 (рис. 19.8) відстань між мимобіжними прямими A_1B_1 і BC дорівнює довжині їх спільного перпендикуляра $BB_1 = 1$.

Зауважимо, що з теореми 19.1 випливає, що, для того щоб знайти відстань між мимобіжними прямими, можна через одну з даних прямих провести площину, паралельну другій прямій, і знайти відстань від прямої до паралельної їй площини (див. останній пункт табл. 17).

Також можна через дані мимобіжні прямі провести паралельні площини і знайти відстань між ними. (Цей спосіб відрізняється від попереднього лише тим, що через кожен з даних прямих проводять площину, паралельну другій прямій.)

Крім того, для того щоб знайти відстань між мимобіжними прямими a і b , можна провести площину α , перпендикулярну до однієї з них (наприклад, на рисунку 19.9 $\alpha \perp a$), і ортогонально спроектувати дані прямі на цю площину. Тоді відстань між мимобіжними прямими дорівнюватиме відстані між їх ортогональними проєкціями на площину, перпендикулярну до однієї з них (обґрунтування цієї властивості наведено в § 21).

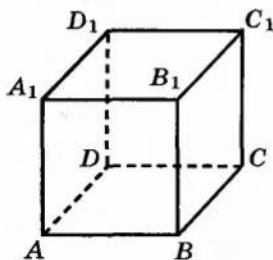


Рис. 19.8

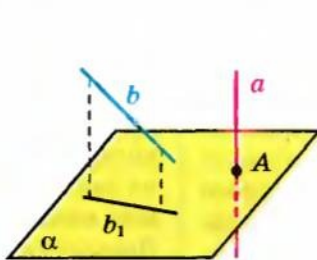


Рис. 19.9

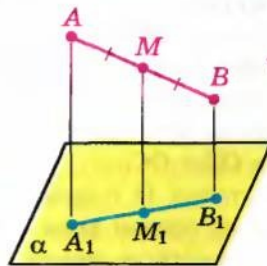


Рис. 19.10

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Кінці даного відрізка, який не перетинає площину, віддалені від неї на 2,7 м і 6,3 м. Як віддалена від площини середина цього відрізка?

Розв'язання

► Нехай дано відрізок AB , який не перетинає площину α , і точка M — його середина (рис. 19.10). Опустимо з точок A , B , M перпендикуляри на площину α (відповідно AA_1 , BB_1 , MM_1).

Коментар

Ще до побудови рисунка до задачі слід згадати, що відстань від точки до площини вимірюють по перпендикуляру, опущеному з даної точки на площину, а також те, що прямі, перпендикулярні до однієї площини,

Оскільки прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні між собою, то $AA_1 \parallel BB_1 \parallel MM_1$. Тоді одержуємо проекцію (ортогональну) відрізка AB на площину α . Оскільки точка M — середина AB , то точка M_1 — середина A_1B_1 . Отже, MM_1 — середня лінія трапеції AA_1B_1B ($AA_1 \parallel BB_1$), тому

$$MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{2,7 + 6,3}{2} = 4,5 \text{ (м)}.$$

Відповідь: 4,5 м. ◁

паралельні між собою. Тоді, розглядаючи дані точки та основи відповідних перпендикулярів, ми фактично одержимо паралельну (точніше ортогональну) проекцію даного відрізка на площину. А оскільки проекцією відрізка є відрізок (а проекцією його середини — середина відрізка проекції), то на відповідному рисунку (рис. 19.10) основи перпендикулярів будуть розміщені на одній прямій.

Задача 2. Доведіть, що в правильній піраміді висота проходить через центр основи.

Розв'язання

► Нехай $SABC$ — правильна піраміда (рис. 19.11) і SO — її висота ($SO \perp$ пл. ABC).

Оскільки в правильній піраміді бічні ребра рівні $SA = SB = SC$, то їх проекції на площину ABC теж рівні: $OA = OB = OC$.

Тоді точка O є центром описаного навколо основи кола, який збігається із центром правильного многокутника. ◁

Коментар

Нагадаємо, що піраміда називається правильною, якщо її основою є правильний многокутник, а всі бічні ребра рівні. Центр правильного многокутника одночасно є і центром описаного навколо цього многокутника кола. Тому для доведення твердження задачі достатньо довести, що основою висоти є центр описаного кола. Доведення достатньо провести для трикутної піраміди, оскільки для n -кутної піраміди воно аналогічне.

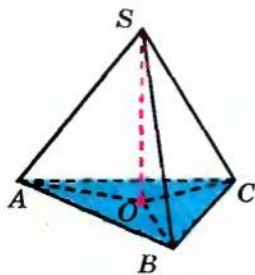


Рис. 19.11

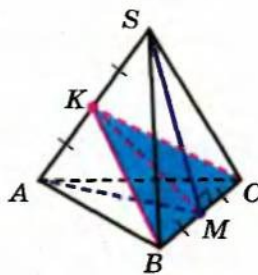


Рис. 19.12

Задача 3*. Ребро правильного тетраедра дорівнює a . Знайдіть відстань між його мимобіжними ребрами.

Розв'язання

► Нехай $SABC$ — правильний тетраедр (рис. 19.12). Візьмемо середини M і K мимобіжних ребер BC і SA відповідно і сполучимо відрізками точку M з точками S , A і K , а точку K — також з точками B і C . Оскільки в правильному тетраедрі всі грані є рівними правильними трикутниками, то $BK = KC$ і $SM = AM$ (як медіани рівних трикутників).

Ураховуючи, що в рівнобедреному трикутнику SAM медіана MK є і висотою, одержуємо, що $MK \perp SA$. Крім того, $MK \perp BC$ (як медіана і висота рівнобедреного трикутника BKC).

Таким чином, MK — спільний перпендикуляр до мимобіжних ребер SA і BC , а отже, це і є відстань між ними.

Якщо ребро правильного тетраедра дорівнює a (наприклад, $SA = a$), то

$SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (як висота правильного трикутника зі стороною a).

Із прямокутного трикутника SKM

$$\left(SK = \frac{a}{2} \right): MK = \sqrt{SM^2 - SK^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. ◀

Коментар

Нагадаємо, що в правильному тетраедрі всі бічні грані — рівні правильні трикутники (і за умовою всі ребра дорівнюють a).

Щоб одержати відстань між мимобіжними прямими SA та BC , розглянемо площину SAM (де точка M — середина ребра BC). Вона буде перпендикулярною до BC (і проходить через другу пряму SA). Тоді, щоб отримати спільний перпендикуляр до двох даних прямих, достатньо в побудованій площині SAM з точки M провести перпендикуляр до другої прямої. Ураховуючи, що цей перпендикуляр в рівнобедреному трикутнику SAM ($SM = AM$) буде і медіаною, можна скласти такий план додаткових побудов:

- 1) сполучити середини двох мимобіжних ребер даного правильного тетраедра відрізком;
- 2) використовуючи відповідні рівнобедрені трикутники, у кожній із площин, які проходять через побудований відрізок і одне з ребер, довести, що цей відрізок є спільним перпендикуляром до розглядуваних мимобіжних ребер.

Запитання для контролю

1. Дайте означення відстані: 1) від точки до площини; 2) між паралельними прямою і площиною; 3) між паралельними площинами; 4) між мимобіжними прямими.
2. Поясніть, як практично можна отримати відстань від точки до площини. Проілюструйте ці практичні способи на каркасній моделі куба.

3. Дайте означення висоти: 1) піраміди; 2) призми. Укажіть на моделі висоту прямокутного паралелепіпеда.
4. Поясніть, яка призма називається прямою. На моделі прямої призми вкажіть її висоту.
5. Дайте означення спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих. Проілюструйте його на моделі.
- 6*. Доведіть, що спільний перпендикуляр до двох мимобіжних прямих існує, і до того ж єдиний.

Вправи

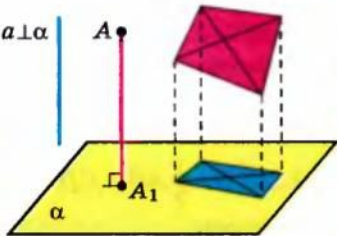
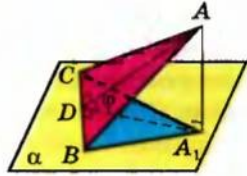
- 1°. Із точки A , яка не належить площині α , проведена похила до цієї площини. Визначте кут між цією похилою і площиною α , якщо відстань від точки A до площини α u два рази менша за саму похилу.
2. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ з ребром a знайдіть відстань між вершиною A і: 1) ребром $B_1 C_1$; 2) діагоналлю $B_1 D_1$ грані $A_1 B_1 C_1 D_1$; 3*) діагоналлю куба $A_1 C$.
- 3°. Чому дорівнює відстань між паралельними гранями в кубі з ребром a ?
4. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ з ребром a знайдіть відстань: 1°) від вершини A_1 до площини ABC ; 2) від вершини B до площини $AA_1 C$.
5. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ з ребром a знайдіть відстань між вершиною C і площиною $AB_1 D_1$.
6. Відстань між двома паралельними площинами дорівнює a . Відрізок довжиною b кінцями упирається в ці площини. Знайдіть довжину проєкції відрізка на кожну з площин.
7. Знайдіть відстань від середини відрізка AB до площини, яка не перетинає цей відрізок, якщо відстані від точок A і B до площини дорівнюють: 1) 3,2 см і 5,3 см; 2) 7,4 см і 6,1 см; 3) a і b .
- 8*. Розв'яжіть задачу 7 за умови, що відрізок AB перетинає дану площину.
9. Через середину відрізка проведено площину. Доведіть, що кінці відрізка знаходяться на однаковій відстані від цієї площини.
10. Через вершину прямого кута C прямокутного трикутника ABC проведено площину, паралельну гіпотенузі, на відстані 1 м від неї. Проєкції катетів на цю площину дорівнюють 3 м і 5 м. Знайдіть гіпотенузу.
11. Через сторону паралелограма проведено площину на відстані a від протилежної сторони. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей паралелограма до цієї площини.

12. Через одну сторону ромба проведено площину на відстані 4 м від протилежної сторони. Проекції діагоналей на цю площину дорівнюють 8 м і 2 м. Знайдіть проекції сторін.
13. Два відрізки завдовжки a і b упираються кінцями у дві паралельні площини. Проекція першого відрізка (довжиною a) на площину дорівнює c . Знайдіть проекцію другого відрізка.
- 14°. Дано зображення правильної піраміди $SABCD$ з основою $ABCD$. Побудуйте зображення її висоти.
15. Дано зображення правильної піраміди $SABC$ з основою ABC . Побудуйте зображення її висоти.
- 16°. Доведіть, що в правильній чотирикутній піраміді діагональ основи перпендикулярна до бічного ребра, яке мимобіжне до неї.
17. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ з ребром a знайдіть відстань між мимобіжними прямими: 1° AA_1 і CD ; 2) $A_1 C$ і BB_1 ; 3) AB і $B_1 D_1$; 4) AC і $B_1 D_1$; 5) BD і CC_1 ; 6) AC_1 і BD .
18. У прямій чотирикутній призмі, в основі якої ромб зі стороною a і гострим кутом α , знайдіть відстань між протилежними бічними гранями.
- 19°. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від двох паралельних площин.
- 20°. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює a , висота — h . Знайдіть бічне ребро піраміди.
21. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a , бічне ребро — b . Знайдіть висоту піраміди.
22. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a , бічне ребро — b . Знайдіть кут нахилу бічного ребра до площини основи.
- 23°. Дано площину α і дві точки A та B по один бік від неї. Знайдіть точку C на площині α , щоб сума відстаней $AC + CB$ була найменшою.
24. Із даної точки до площини проведено дві рівні похилі довжиною 2 м. Знайдіть відстань від точки до площини, якщо похилі утворюють між собою кут 60° , а їх проекції перпендикулярні.
25. Із точки, віддаленої від площини на 1 м, проведено дві рівні похилі. Знайдіть відстань між основами похилих, коли відомо, що похилі перпендикулярні й утворюють з перпендикуляром до площини кути, які дорівнюють 60° .
26. Через кінець A відрізка AB завдовжки b проведено площину, перпендикулярну до відрізка, і в цій площині проведено пряму. Знайдіть відстань від точки B до прямої, якщо відстань від точки A до прямої дорівнює a .

27. Відстані від точки A до всіх сторін квадрата дорівнюють a . Знайдіть відстань від точки A до площини квадрата, якщо діагональ квадрата дорівнює d .
- 28*. Основою висоти чотирикутної піраміди є точка перетину діагоналей основи піраміди. Чи правильне твердження, що двогранні кути, утворені бічними гранями піраміди з площиною основи, рівні, якщо основою піраміди є: 1) квадрат; 2) довільний паралелограм; 3) ромб (відмінний від квадрата); 4) рівнобедрена трапеція?
- 29*. Доведіть, що коли основою висоти піраміди є центр вписаного в основу кола, то двогранні кути, утворені бічними гранями піраміди з площиною основи, рівні.
30. Із вершин A і B рівностороннього трикутника ABC проведено перпендикуляри AA_1 і BB_1 до площини трикутника. Знайдіть відстань від вершини C до середини відрізка A_1B_1 , якщо $AB = 2$ м, $CA_1 = 3$ м, $CB_1 = 7$ м і відрізок A_1B_1 не перетинає площину трикутника.
31. Відстань від точки до кожної з двох паралельних площин дорівнює 5. Знайдіть відстань між даними паралельними площинами.
32. Відстані від точки до двох паралельних площин дорівнюють 2 і 7. Знайдіть відстань між даними паралельними площинами.
- 33*. Точка M знаходиться на однаковій відстані від кожної з прямих, що містять сторони ромба $ABCD$, і рівновіддалена від кожної його вершини. Знайдіть кути ромба.
34. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведено переріз через вершини A_1 , C і B_1 . Відстань від вершини B до площини перерізу дорівнює 8. Знайдіть відстані до площини перерізу від вершин A , C_1 , D_1 .
- 35*. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведено переріз через вершини A_1 , C_1 і B . Відстань від вершини B_1 до площини перерізу дорівнює 4. Знайдіть відстані до площини перерізу від вершин A , C , D_1 , D .
- 36*. Площини α і β паралельні. Пряма a лежить у площині α , а прямі KM і KT — у площині β . Відстань між прямими a і KM дорівнює 5, а між прямими a і KT — 8. Визначте: 1) взаємне розміщення прямих a і KM ; 2) взаємне розміщення прямих a і KT , 3) відстань між площинами α і β .
37. Площини квадрата $ABEF$ і ромба $ABCD$ перпендикулярні; $CD = 6$, $\angle BCD = 60^\circ$. Знайдіть відстань між прямими: 1) EF і CD ; 2) AF і BC .

§ 20 ОРТОГОНАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ

Таблиця 18

ОЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВІСТЬ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ	
Означення	Властивість
	 <p> $S_{\text{проекції}} = S_{\text{фігури}} \cdot \cos \varphi$, де φ — кут між площиною фігури і площиною проекції </p>

Пояснення й обґрунтування

1. Означення та найпростіші властивості ортогонального проектування.

Означення. Паралельне проектування в напрямі прямої, перпендикулярної до площини проектування, називається **ортогональним проектуванням**.

Якщо пряма a , яка задає напрям проектування, перпендикулярна до площини α (див. рисунок у табл. 18), то проєктуючі прямі (наприклад, $AA_1 \parallel a$) теж будуть перпендикулярні до площини α . Інакше кажучи, проєкцією точки буде основа перпендикуляра, опущеного з даної точки на площину (звичайно, якщо точка лежить на площині проєкції, то вона збігається зі своєю проєкцією). Якщо вказаним чином побудувати проєкцію кожної точки фігури, то одержимо проєкцію самої фігури. Наприклад, якщо площина даного n -кутника і площина проєкції не перпендикулярні, то проєкцією n -кутника є n -кутник (див. приклади, наведені в табл. 18).

Оскільки ортогональне проектування є окремим випадком паралельного проектування, то воно має всі його властивості, обґрунтовані в § 9. Нагадаємо їх.

Ортогональною проєкцією прямої a , яка не перпендикулярна до площини проєкції, є деяка пряма a' . Якщо пряма a паралельна площині проєкції, то її проєкція a' паралельна прямій a .

Проєкцією паралельних прямих є паралельні прямі (якщо прямі не перпендикулярні до площини проєкції і площина даних прямих не перпендикулярна до площини проєкції).

Відношення довжин відрізків, які лежать на одній прямій (або на паралельних прямих), зберігається під час паралельного проектування.

Якщо плоска фігура F лежить у площині, паралельній площині проектування, то її проєкція F' на цю площину дорівнює фігурі F .

2. Площа ортогональної проекції многокутника.

Теорема 20.1. Площа ортогональної проекції многокутника на площину дорівнює добутку його площі на косинус кута між площиною многокутника і площиною проекції.

● *Доведення.* Розглянемо спочатку трикутник і його проекцію на площину, яка проходить через одну з його сторін (рис. 20.1). Проекцією трикутника ABC є трикутник ABC_1 у площині α ($CC_1 \perp \alpha$). Проведемо висоту CD трикутника ABC . За теоремою про три перпендикуляри $C_1D \perp AB$, тобто відрізок C_1D — висота трикутника ABC_1 . Кут CDC_1 дорівнює куту φ між площиною трикутника ABC і площиною проекції α . Маємо: $C_1D = CD \cos \varphi$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$, $S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot C_1D = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \cos \varphi$. Отже, $S_{\triangle ABC_1} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos \varphi$, що і потрібно було довести.

Теорема справедлива і для випадку, якщо замість площини α взято будь-яку паралельну їй площину, оскільки проекцією трикутника ABC_1 на площину, паралельну його площині, є рівний йому трикутник.

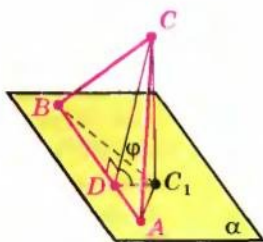


Рис. 20.1

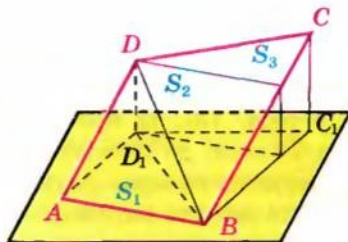


Рис. 20.2

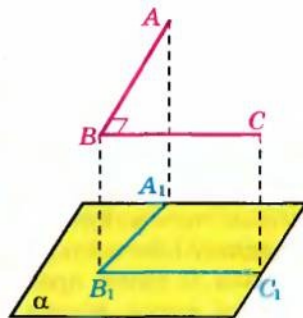


Рис. 20.3

Розглянемо тепер загальний випадок. Розіб'ємо даний многокутник на трикутники. Кожний трикутник, який не мав сторони, паралельної площині проекції, розіб'ємо на два трикутники зі спільною стороною, паралельною площині проекції, як це показано, наприклад, для трикутника BCD в чотирикутнику $ABCD$ на рисунку 20.2.

Площа S_k ($k = 1, 2, \dots, n$) кожного з трикутників нашого розбиття і площа S'_k кожної з проекцій пов'язані рівністю $S'_k = S_k \cdot \cos \varphi$. Інакше кажучи $S'_1 = S_1 \cdot \cos \varphi$, $S'_2 = S_2 \cdot \cos \varphi$, ..., $S'_n = S_n \cdot \cos \varphi$. Додамо почленно всі ці рівності:

$$S'_1 + S'_2 + \dots + S'_n = (S_1 + S_2 + \dots + S_n) \cdot \cos \varphi.$$

Тоді в лівій частині рівності одержимо площу проекції многокутника, а в правій — площу самого многокутника, помножену на $\cos \varphi$.

Отже, і в цьому випадку

$$S_{\text{проекції}} = S_{\text{фігури}} \cdot \cos \varphi. \quad (1)$$

Твердження теореми справедливе також для довільної плоскої фігури, площу якої можна наблизити площами вписаних багатокутників з будь-якою точністю.

Теорема виконується і у випадку, коли площина фігури паралельна площині проекції (або фігура лежить у площині проекції). У цьому разі дана фігура та її проекція рівні, отже, вони мають рівні площі. Такий самий результат отримуємо за формулою (1), оскільки кут між двома паралельними площинами (або площинами, що збігаються) дорівнює 0° ($\cos 0^\circ = 1$), і тоді

$$S_{\text{проекції}} = S_{\text{фігури}} \cdot \cos 0^\circ = S_{\text{фігури}}.$$

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Проекцією прямокутника зі сторонами 6 см і 8 см на деяку площину є ромб з діагоналями 6 см і 8 см. Знайдіть кут між площинами прямокутника і ромба.

Розв'язання

► Позначимо кут між площинами прямокутника і ромба через φ . Оскільки $S_{\text{прямокутника}} = 6 \cdot 8 = 48 \text{ (см}^2\text{)}$, $S_{\text{ромба}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ (см}^2\text{)}$, то за формулою площі ортогональної проекції $S_{\text{проекції}} = S_{\text{фігури}} \cdot \cos \varphi$, одержуємо: $S_{\text{ромба}} = S_{\text{прямокутника}} \cdot \cos \varphi$, тобто $24 = 48 \cdot \cos \varphi$. Звідси $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, отже, $\varphi = 60^\circ$. ◁

Коментар

Як уже було зазначено, для знаходження кута достатньо знайти будь-яку його тригонометричну функцію, а для цього використати співвідношення між площами фігури та її ортогональної проекції ($S_{\text{проекції}} = S_{\text{фігури}} \cdot \cos \varphi$). Для того щоб знайти площу ромба, слід пам'ятати, що вона дорівнює півдобутку діагоналей.

Задача 2*. Доведіть, що коли одна зі сторін прямого кута паралельна площині проекції, а друга не перпендикулярна до цієї площини, то ортогональною проекцією прямого кута також є прямий кут.

Розв'язання

► Нехай дано прямий кут ABC , розміщений так, що пряма BC паралельна площині проекцій α , і $A_1B_1C_1$ — ортогональну проекцію кута ABC на площину α (рис. 20.3).

Коментар

Розглядаючи даний прямий кут ABC та його проекцію $A_1B_1C_1$ (рис. 20.3), слід звернути увагу на те, що для доведення перпендикулярності прямих B_1C_1 і A_1B_1 можна довести

Якщо $BC \parallel \alpha$, то $B_1C_1 \parallel BC$. Тоді за означенням кута між мимобіжними прямими $\angle (B_1C_1; AB) = \angle (BC; AB) = \angle ABC = 90^\circ$, тобто $B_1C_1 \perp AB$. Оскільки проектування ортогональне, то $BB_1 \perp \alpha$, отже, $BB_1 \perp B_1C_1$.

За ознакою перпендикулярності прямої і площини одержуємо

$$B_1C_1 \perp \text{пл. } A_1B_1BA.$$

Таким чином, $B_1C_1 \perp A_1B_1$, тобто $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$, що і потрібно було довести. \triangleleft

перпендикулярність прямої B_1C_1 до площини A_1B_1B . При цьому корисно врахувати властивість паралельного (а отже, і ортогонального) проектування: *пряма, паралельна площині проєкції, проєктується в паралельну їй пряму (якщо $BC \parallel \alpha$, то $BC \parallel B_1C_1$).*

Запитання для контролю

1. Поясніть, як отримують ортогональну проєкцію точки, фігури.
2. Сформулюйте основні властивості ортогональної проєкції.
3. Сформулюйте властивість площі ортогональної проєкції многокутника на площину.
У якому випадку площа фігури дорівнює площі ортогональної проєкції цієї фігури?
- 4*. Доведіть властивість площі ортогональної проєкції многокутника на площину.

Вправи

- 1°. Чи правильно, що ортогональною проєкцією прямокутного трикутника завжди є прямокутний трикутник?
- 2°. Наведіть приклад фігури в просторі, ортогональними проєкціями якої на дві взаємно перпендикулярні площини є круги однакового радіуса.
- 3°. Знайдіть ортогональну проєкцію ромба, одна з діагоналей якого перпендикулярна до площини проєкції.
4. Чи може площа ортогональної проєкції фігури бути: 1) більше; 2) менше; 3) рівною площі цієї фігури?
- 5°. Знайдіть довжину ортогональної проєкції відрізка AB на площину α , якщо $AB = a$, а пряма AB нахилена до площини α під кутом 30° .
6. Чи може ортогональна проєкція відрізка бути: 1) менше відрізка; 2) рівною відрізку; 3) більше відрізка?
- 7°. Чи може ортогональною проєкцією трикутника бути: 1) відрізок; 2) квадрат?
- 8°. Кожна з ортогональних проєкцій фігури F на дві взаємно перпендикулярні площини — квадрат. Чи впливає із цього, що фігура F — куб?

9. Чи може ортогональна проекція кута (відмінного від розгорнутого) бути:
1) меншою від цього кута; 2) рівною куту; 3) більшою за цей кут?
- 10°. Чи може ортогональна проекція квадрата бути: 1) прямокутником; 2) паралелограмом; 3) трапецією?
- 11°. Якою фігурою є ортогональна проекція прямокутного паралелепіпеда на площину, паралельну його основі?
12. Діагоналі ромба дорівнюють 10 см і 4 см. Площина ромба утворює з площиною проекції кут 60° . Знайдіть площу проекції ромба.
13. Знайдіть площу проекції фігури F на площину α , яка з площиною даної фігури утворює кут 30° , якщо фігурою F є: 1) квадрат, діагональ якого дорівнює 3 см; 2) правильний трикутник зі стороною a ; 3) ромб, сторона якого дорівнює a , а кут — 45° .
14. Чому дорівнює кут між площиною трикутника і площиною проекції, якщо площа проекції цього трикутника: 1) у два рази менша від площі самого трикутника; 2) дорівнює площі трикутника?
15. Проекцією квадрата зі стороною a на деяку площину є ромб зі стороною b і гострим кутом α . Знайдіть кут між площинами квадрата і ромба.
16. Доведіть, що під час ортогонального проектування рівновеликі трикутники, які лежать в одній площині, мають рівновеликі проекції.
- 17°. S — площа грані правильного тетраедра, а Q — площа її проекції на другу грань. Знайдіть відношення $Q : S$.
- 18°. Доведіть, що проекцією правильного тетраедра на площину, паралельну двом його мимобіжним ребрам, є квадрат. Чи правильне обернене твердження?
- 19°. Якою може бути найбільша площа ортогональної проекції правильного тетраедра з ребром a ?
- 20°. Якою фігурою є ортогональна проекція куба на площину, перпендикулярну до його діагоналі?
- 21°. Знайдіть площу ортогональної проекції куба на площину, перпендикулярну до його діагоналі, якщо відомо, що ребро куба дорівнює a .
- 22°. Доведіть, що площа ортогональної проекції куба на площину буде найбільшою у разі, коли площина проекції перпендикулярна до однієї з діагоналей куба.
- 23°. Ортогональні проекції плоского чотирикутника на дві взаємно перпендикулярні площини є квадратами зі сторонами 1. Знайдіть периметр чотирикутника, якщо відомо, що одна з його сторін має довжину 2.
- 24°. Ортогональні проекції трикутника ABC на дві взаємно перпендикулярні площини є правильними трикутниками зі сторонами, рівними 1. Медіана AD трикутника ABC дорівнює 2. Знайдіть BC .
25. Ребро куба дорівнює a . Знайдіть площу перерізу куба площиною, яка проходить через вершину основи під кутом 30° до цієї основи і перетинає всі бічні ребра.

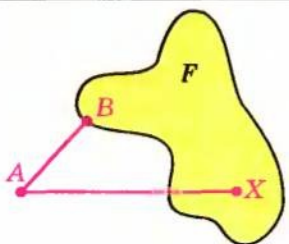
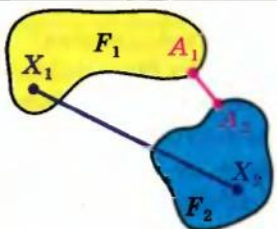
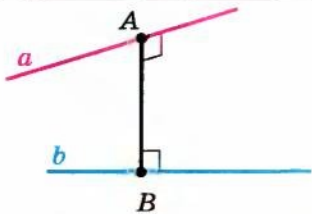
26. Сторони прямокутника дорівнюють 20 см і 25 см. Його проекція на площину подібна йому. Знайдіть периметр проекції прямокутника.
27. Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат зі стороною a . Через середини двох суміжних сторін основи проведено площину, що перетинає три бічних ребра паралелепіпеда і нахилена до площини основи під кутом φ . Знайдіть площу одержаного перерізу.
- 28°. Ортогональною проекцією ромба $ABCD$ на площину, що проходить через вершину A ромба і паралельна його діагоналі BD , є квадрат $AB_1C_1D_1$ зі стороною a . Знайдіть периметр ромба, якщо його діагональ AC дорівнює m .
- 29°. Ортогональною проекцією плоского чотирикутника $ABCD$ є квадрат $A_1B_1C_1D_1$ зі стороною 4, $AA_1 = 3$, $BB_1 = 6$, $CC_1 = 9$. Знайдіть довжину DD_1 , вид, периметр і площу чотирикутника $ABCD$. Точки A , B , C і D лежать по один бік від площини проектування.

§ 21

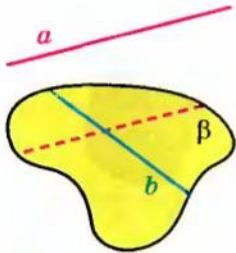
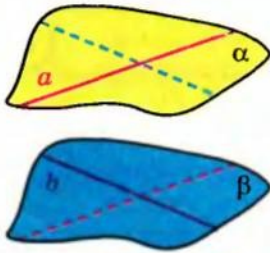
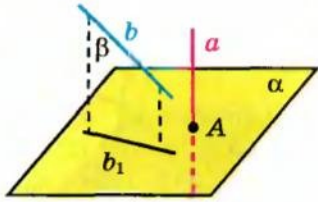
ВІДСТАНИ МІЖ ФІГУРАМИ.

ЗНАХОДЖЕННЯ ВІДСТАНИ МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ

Таблиця 19

1. ВІДСТАНЬ (ρ) МІЖ ФІГУРАМИ	
Відстань від точки до фігури	Відстань між фігурами
 <p>Точка B фігури F — найближча до точки A $\rho(A; F) = AB$</p>	 <p>Точки A_1 і A_2 — найближчі точки фігур F_1 і F_2 $\rho(F_1; F_2) = A_1A_2$</p>
2. ВІДСТАНЬ (ρ) МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ	
	<p>Відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їх спільного перпендикуляра.</p> <p>Прямі a і b — мимобіжні. $AB \perp a$, $AB \perp b$ $\rho(a; b) = AB$</p>

Продовження табл. 19

СПОСОБИ ОБЧИСЛЕННЯ ВІДСТАНІ (ρ) МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ		
<p>Проводимо через пряму b площину $\beta \parallel a$.</p>  <p>$\rho(a; b) = \rho(a; \beta)$</p>	<p>Проводимо через прямі a і b паралельні площини $\alpha \parallel \beta$.</p>  <p>$\rho(a; b) = \rho(\alpha; \beta)$</p>	<p>Проводимо площину $\alpha \perp a$ і проєктуємо прямі a і b на цю площину: $a \rightarrow A, b \rightarrow b_1$.</p>  <p>$\rho(a; b) = \rho(A; b_1)$</p>

Пояснення й обґрунтування

1. Відстань від точки до фігури. Відстань від точки до фігури вимірюють по найкоротшому шляху. Тому відстанню від точки A до фігури F називається відстань від цієї точки до найближчої точки фігури F .

Точка фігури F , найближча до точки A , — це така точка $B \in F$, що для всіх точок X фігури F виконується нерівність $AB \leq AX$ (рис. 21.1).

Інакше кажучи, якщо точка A не належить фігурі F , то відрізок AB — найкоротший з усіх відрізків AX , що сполучають точку A з точками фігури F . (Якщо ж $A \in F$, то точка A є найближчою до самої себе. У цьому разі відстань вважають рівною нулю. Надалі будемо розглядати випадки, коли $A \notin F$.)

Відстань від точки A до фігури F іноді будемо позначати так: $\rho(A; F)$ ¹.

Розглянемо декілька прикладів.

1. Відстань від точки A до прямої a дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з точки A на пряму a .

2. Відстань від точки до площини дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного із цієї точки на площину, або відстані від точки до її ортогональної проєкції на площину.

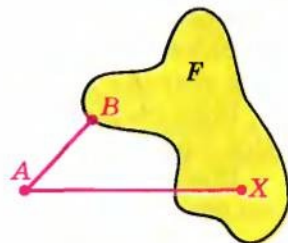


Рис. 21.1

¹ Це позначення не є загальноприйнятим, але іноді користуватися ним досить зручно.

● Ці два твердження впливають з того, що перпендикуляр коротший за похилу. ●

3. Відстань від центра кола до самого кола дорівнює радіусу. Усі точки кола розташовані на одній відстані від центра, отже, усі вони є найближчими до нього.

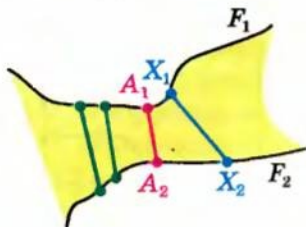


Рис. 21.2

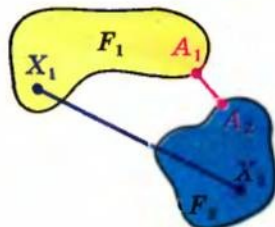


Рис. 21.3

2. Відстань між фігурами. Ми вже визначили відстань від точки до фігури. Але часто потрібно розв'язати загальніше завдання — знайти відстань між двома фігурами, наприклад, визначити відстань між берегами річки (рис. 21.2), щоб побудувати міст. Ясно, що для цього необхідно шукати найближчі точки фігур, тобто найкоротший серед усіх відрізків, що сполучають точки цих фігур.

Точки A_1 і A_2 фігур F_1 і F_2 (рис. 21.2, 21.3) називаються їх *найближчими точками*, якщо для будь-яких точок $X_1 \in F_1$ і $X_2 \in F_2$ виконується нерівність $A_1A_2 \leq X_1X_2$.

Відстанню між двома фігурами називається відстань між найближчими точками цих фігур (якщо такі точки є).

Відстань від точки до фігури є окремим випадком відстані між фігурами, коли одна з фігур — точка.

Відстань між фігурами іноді будемо позначати $\rho(F_1; F_2)$, де F_1 і F_2 — дані фігури.

Розглянемо приклади.

1. Відстань між двома паралельними прямими дорівнює довжині спільного перпендикуляра до цих прямих (і відстані від будь-якої точки однієї прямої до другої прямої).

● Це впливає з того, що всі спільні перпендикуляри AB (чи XX_1) між паралельними прямими a і b рівні (рис. 21.4), а кожний відрізок XU з кінцями на даних прямих ($X \in a$, $U \in b$), який не є їх спільним перпендикуляром, більший за спільний перпендикуляр XX_1 . ●

2. Відстань між паралельною прямою і площиною дорівнює довжині перпендикуляра (спільного), опущеного з будь-якої точки прямої на площину (і відстані від будь-якої точки прямої до площини).

● Нехай пряма a і площина α паралельні. Спроектуємо ортогонально пряму a на площину α . Одержимо пряму a_1 , паралельну прямій

a (рис. 21.5). Кожна з проєктуючих прямих XX_1 буде перпендикулярною до площини α , а отже, перпендикулярною до прямої a_1 та до прямої a (оскільки $a \parallel a_1$). Тоді всі спільні перпендикуляри AB (чи XX_1) між паралельними прямою a і площиною α рівні, а кожний відрізок XU (де $X \in a$, $U \in \alpha$), який не є їх спільним перпендикуляром, більший за спільний перпендикуляр XX_1 (оскільки похила XU до площини α більша за перпендикуляр XX_1). ◉

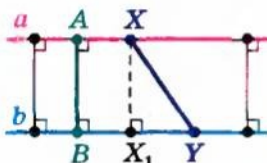


Рис. 21.4

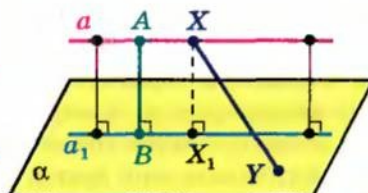


Рис. 21.5

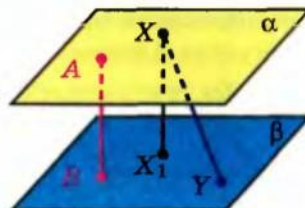


Рис. 21.6

3. Відстань між двома паралельними площинами дорівнює довжині спільного перпендикуляра до цих площин (ї відстані від будь-якої точки однієї площини до другої площини).

◉ Це впливає з того, що всі спільні перпендикуляри AB (чи XX_1) між паралельними площинами α і β рівні (рис. 21.6), а кожний відрізок XU з кінцями на даних площинах ($X \in \alpha$, $U \in \beta$), який не є їх спільним перпендикуляром, більший за спільний перпендикуляр XX_1 . ◉

4. Відстань між двома мимобіжними прямими дорівнює довжині спільного перпендикуляра до цих прямих.

◉ Мимобіжні прямі a і b (рис. 21.7) лежать у паралельних площинах α і β (див. § 8, с. 83). Розглянемо ортогональну проєкцію a' прямої a на площину β . Вона перетинатиме пряму b в деякій точці B , яка є ортогональною проєкцією деякої точки A прямої a . Відрізок AB буде спільним перпендикуляром до прямих a і b , а також спільним перпендикуляром до площин α і β . Візьмемо тепер будь-який інший відрізок XU (де $X \in a$, $U \in b$). Оскільки XU не є спільним перпендикуляром до площин α і β , то $XU > AB$. Отже, спільний перпендикуляр AB до двох мимобіжних прямих a і b дійсно є відстанню між найближчими точками цих прямих, тобто відстанню між прямими a і b : ◉

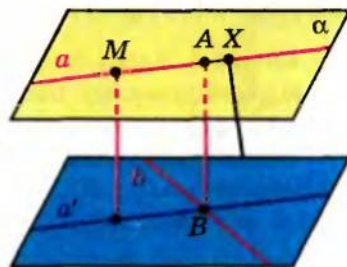


Рис. 21.7

3. Знаходження відстані між мимобіжними прямими. Як зазначалося в § 19, щоб обчислити цю відстань, необов'язково будувати спільний перпендикуляр до мимобіжних прямих a і b . Для цього з будь-якої точки M

прямої a (рис. 21.7) можна опустити перпендикуляр на площину β і знайти його довжину, а можна знайти довжину довільного спільного перпендикуляра до площин α і β . Таким чином, знаходити відстань між мимобіжними прямими можна одним із чотирьох способів, наведених у табл. 19.

Спосіб 1. *Безпосередньо знаходимо спільний перпендикуляр до даних мимобіжних прямих.*

Наприклад, у кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ з ребром a (рис. 21.8) відстань між мимобіжними прямими AA_1 і BC дорівнює довжині їх спільного перпендикуляра $AB = a$.

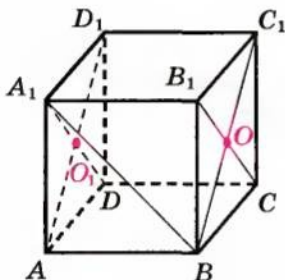


Рис. 21.8

Спосіб 2. *Через одну з даних прямих проводимо площину, паралельну другій прямій. Для цього достатньо через точку однієї прямої провести пряму, паралельну другій прямій. Оскільки відстані між паралельними прямою та площиною скрізь однакові, то цю відстань можна обчислити від будь-якої точки прямої до площини (як показано вище, вона ж дорівнює і відстані між даними мимобіжними прямими).*

Наприклад, якщо в кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 21.8) з ребром a потрібно визначити відстань між мимобіжними діагоналями бічних граней AD_1 і B_1C , то в площині грані BB_1C_1C можна провести ще одну діагональ BC_1 , паралельну AD_1 (оскільки чотирикутник ABC_1D_1 — прямокутник). Площина BB_1C_1C паралельна прямій AD_1 за ознакою паралельності прямої та площини. Через те що відстані між паралельними прямою та площиною всюди однакові, то цю відстань можна обчислити від будь-якої точки прямої AD_1 . Оскільки ребро AB перпендикулярне до площини BB_1C_1C , то відстань від точки A до площини BB_1C_1C дорівнює $AB = a$. Отже, відстань між мимобіжними прямими AD_1 і B_1C дорівнює a .

Спосіб 3. *Через дані прямі проводимо паралельні площини. Цей спосіб відрізняється від попереднього лише тим, що через кожну з даних прямих проводять площину, паралельну другій прямій.*

Застосовуючи цей спосіб для визначення відстані між мимобіжними діагоналями AD_1 і B_1C бічних граней куба (рис. 21.8), можна, крім діагоналі BC_1 грані BB_1C_1C ($BC_1 \parallel AD_1$), провести також діагональ A_1D грані AA_1D_1D . Тоді $A_1D \parallel B_1C$, і тому площини AA_1D_1D і BB_1C_1C паралельні (за ознакою паралельності площин). Отже, відстань між мимобіжними прямими AD_1 і B_1C дорівнює відстані між цими паралельними площинами. Її можна знайти від будь-якої довільно вибраної точки однієї із цих площин, наприклад від точки A площини AA_1D_1D . Ураховуючи, що $AB \perp$ пл. BB_1C_1C , знову одержуємо: шукана відстань дорівнює a .

Зауваження. Способами 2 і 3 можна знаходити також кути між мимобіжними прямими. Коли ми проводимо $BC_1 \parallel AD_1$, то за означенням кут між мимобіжними прямими AD_1 і B_1C дорівнює куту між прямими BC_1 та B_1C , що перетинаються. У нашому випадку цей кут дорівнює 90° як кут між діагоналями квадрата.

Спосіб 4. Проектуємо (ортогонально) обидві прямі на площину, перпендикулярну до однієї з мимобіжних прямих. Тоді відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані між їх ортогональними проєкціями на площину, перпендикулярну до однієї із цих прямих.

● Нехай прямі a і b — мимобіжні і площина α перпендикулярна до прямої a (рис. 21.9), пряма b_1 — ортогональна проєкція прямої b на площину α (якщо A — точка перетину прямої a з площиною α , то A — ортогональна проєкція прямої a на площину α). Площина β , яка утворена проєктуючими прямими, що проходять через пряму b , паралельна прямій a (оскільки пряма a паралельна будь-якій з проєктуючих прямих). За ознакою перпендикулярності площин площини α і β перпендикулярні. Тоді перпендикуляр, проведений з точки A до прямої b_1 у площині α , буде перпендикуляром і до площини β . Отже,

$$\rho(a; b) = \rho(a; \beta) = \rho(A; b_1). \quad \bullet$$

Наприклад, у кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 21.10) з ребром a потрібно визначити відстань між мимобіжними діагоналями двох сусідніх граней — нехай це будуть діагоналі BA_1 і B_1C . Для цього можна спроектувати дані прямі на площину $ABC_1 D_1$, перпендикулярну до прямої B_1C (обґрунтуйте цю перпендикулярність).

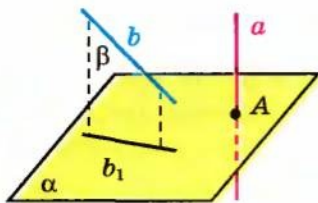


Рис. 21.9

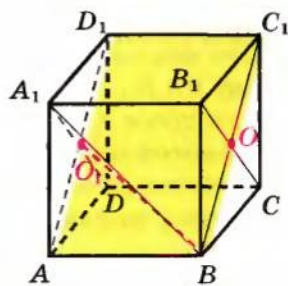


Рис. 21.10

У результаті проєктування¹: $B_1C \rightarrow O$, $B \rightarrow B$, $A_1 \rightarrow O_1$ (точки O і O_1 — центри граней BB_1C_1C і AA_1D_1D відповідно), тому $BA_1 \rightarrow BO_1$. Тоді $\rho(BA_1; B_1C) = \rho(O; BO_1)$.

¹ Нагадаємо, що знак \leftrightarrow в наведених записах означає: «проєктується в» (див. § 9).

Розглянемо виносний рисунок прямокутника ABC_1D_1 (рис. 21.11). За умовою $AB = C_1D_1 = a$. Тоді $BC_1 = AD_1 = a\sqrt{2}$ (як діагоналі квадратів

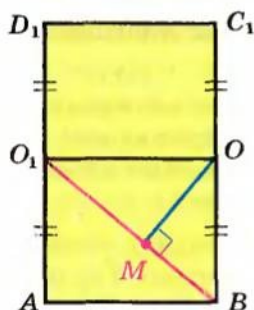


Рис. 21.11

зі стороною a). Нас цікавить відстань від точки O до прямої BO_1 . Проведемо $OM \perp BO_1$ та сполучимо відрізком точки O і O_1 . Тоді OM — висота прямокутного трикутника BOO_1 , у якому $OO_1 = a$,

$$OB = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ і } BO_1 = \sqrt{BO^2 + OO_1^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Знайдемо площу трикутника BOO_1 двома способами: з одного боку, $S_{\Delta BOO_1} = \frac{1}{2}BO \cdot OO_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}a^2$; з іншого боку,

$$S_{\Delta BOO_1} = \frac{1}{2}BO_1 \cdot OM. \text{ Звідси } OM = \frac{2S_{\Delta BOO_1}}{BO_1} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Отже, $\rho(BA_1; B_1C) = \rho(O; BO_1) = OM = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Приклади розв'язання задач

Задача. У прямокутному паралелепіпеді $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$ ребра AB , AD і AA_1 відповідно дорівнюють 1 см, 2 см і 3 см. Знайдіть відстань між прямою BD і площиною AB_1D_1 .

Коментар

Для того щоб знайти відстань між прямою і площиною, спочатку слід з'ясувати їх взаємне розміщення. За ознакою паралельності прямої і площини отримуємо, що $BD \parallel$ пл. AB_1D_1 . Оскільки відстань між паралельними прямою і площиною можна вимірювати від будь-якої точки прямої до площини, то нам потрібно опустити перпендикуляр з деякої точки прямої на площину AB_1D_1 . Для цього можна побудувати площину, перпендикулярну до площини AB_1D_1 , яка перетне BD в деякій точці M , а потім із точки M провести перпендикуляр до прямої перетину цих площин.

Для обчислення необхідних елементів зручно використати виносні рисунки фігур у розглядуваних площинах.

Розв'язання

► Оскільки в прямокутному паралелепіпеді $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$ (рис. 21.12) діагоналі основ BD і B_1D_1 паралельні (як прями перетину паралельних площин площиною BB_1D_1D), то пряма BD і площина AB_1D_1 паралельні. Проведемо перпендикуляр $AM \perp BD$. Оскільки $AA_1 \perp$ пл. $ABCD$, то $AA_1 \perp BD$. Тоді $BD \perp$ пл. MAA_1 . Беручи до уваги, що $B_1D_1 \parallel BD$, одержуємо $B_1D_1 \perp$ пл. MAA_1 .

Площина MAA_1 проходить через пряму AA_1 , паралельну площині BB_1D_1D , отже, пряма MK їх перетину паралельна AA_1 . Площина MAA_1

перетинає також паралельні площини основ по паралельних прямих: $A_1K \parallel AM$. Оскільки $AA_1 \perp$ пл. $ABCD$, то $AA_1 \perp AM$, отже, $AMK A_1$ — прямокутник.

Проведемо з точки M перпендикуляр MT до прямої AK перетину перпендикулярних площин MAA_1 і AB_1D_1 . Тоді $MT \perp$ пл. AB_1D_1 , отже, MT — відстань між прямою BD і площиною AB_1D_1 .

Із прямокутного трикутника ABD (рис. 21.13), у якому $AB = 1$ см, $AD = 2$ см, одержуємо: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{5}$. Тоді

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} BD \cdot AM, \text{ тобто } \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot AM.$$

$$\text{Отже, } AM = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

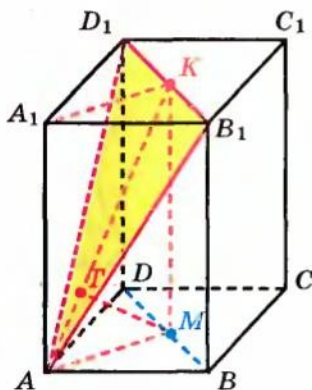


Рис. 21.12

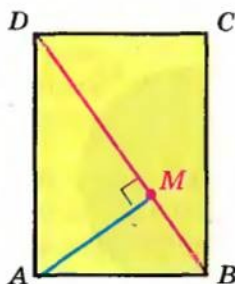


Рис. 21.13

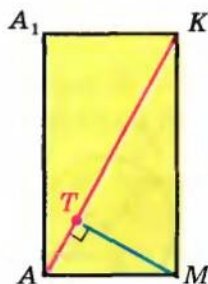


Рис. 21.14

Із прямокутного трикутника AMK (рис. 21.14), у якому $MK = AA_1 = 3$, одержуємо: $AK = \sqrt{AM^2 + MK^2} = \frac{7}{\sqrt{5}}$. Тоді

$$S_{\Delta AKM} = \frac{1}{2} AM \cdot MK = \frac{1}{2} AK \cdot MT, \text{ тобто } \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{\sqrt{5}} \cdot MT.$$

$$\text{Отже, } MT = \frac{6}{7}.$$

Відповідь: $\frac{6}{7}$ см. \triangleleft

Запитання для контролю

- Поясніть, яку точку фігури вважають найближчою до даної точки; які точки двох фігур вважають найближчими.
- Дайте означення відстані:
 - від точки до фігури; 2) між двома фігурами.

3. Дайте означення відстані: 1) від точки до прямої; 2) від точки до площини; 3) між паралельними прямими; 4) між паралельними прямою і площиною; 5) між паралельними площинами; 6) між мимобіжними прямими. Обґрунтуйте, що в кожному із цих випадків як відстань дійсно вибирають відстань між найближчими точками фігур.
4. Поясніть на прикладах різні способи знаходження відстані між мимобіжними прямими.
5. Доведіть ознаку паралельності прямих.

Вправи

1. Користуючись означенням відстані між фігурами, а також рисунками 21.15 і 21.16, доведіть, що: 1) відстань між зображеними кругами (рис. 21.15) дорівнює AB ; 2) відстань між кругом і прямою, яка його не перетинає (рис. 21.16), дорівнює AB .

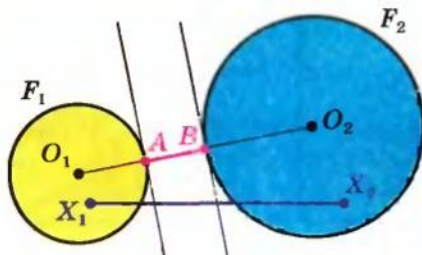


Рис. 21.15

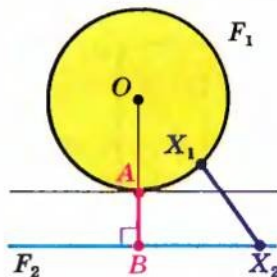


Рис. 21.16

2. Через діагональ паралелограма проведено площину. Доведіть, що кінці другої діагоналі знаходяться на однаковій відстані від цієї площини.
3. Кінці відрізка, який не перетинає площину, віддалені від неї на 0,3 м і 0,5 м. Як віддалена від площини точка, що ділить даний відрізок у відношенні 3 : 7?
- 4*. Розв'яжіть попередню задачу, вважаючи, що відрізок AB перетинає площину.
5. Через основу трапеції проведено площину, віддалену від другої основи на відстань a . Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей трапеції до цієї площини, якщо основи трапеції відносяться як $m : n$ (рис. 21.17).
6. Точка M , яка лежить поза площиною даного прямого кута, віддалена від вершини кута на відстань a , а від його сторін — на відстань b . Знайдіть відстань від точки M до площини кута.

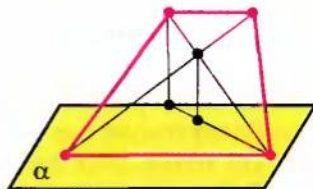


Рис. 21.17

7. Із вершин A і B гострих кутів прямокутного трикутника ABC проведено перпендикуляри AA_1 і BB_1 до площини трикутника. Знайдіть відстань від вершини C до середини відрізка A_1B_1 , якщо $A_1C = 4$ м, $A_1A = 3$ м, $B_1C = 6$ м, $B_1B = 2$ м і відрізок A_1B_1 не перетинає площину трикутника.
8. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ із ребром, яке дорівнює a , знайдіть відстань: 1) від точки A до площини $BB_1 D_1$; 2) від прямої $A_1 C_1$ до площини ABD ; 3) між протилежними гранями куба; 4) між прямими $B_1 C$ і AA_1 ; 5) від точки A до площини $A_1 B D$; 6) між прямими AC і $B_1 D_1$; 7) між площинами $A_1 B C_1$ і ACD_1 .
9. В основі піраміди $SABCD$ лежить квадрат $ABCD$ зі стороною, яка дорівнює 12. Грані SBA і SBC перпендикулярні до площини основи. Висота піраміди дорівнює 5. Знайдіть відстань між прямими BC і SD .
- 10*. Відстань між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба дорівнює 2. Знайдіть ребро куба.
11. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ із ребром, що дорівнює 1, точка M — середина CD , а точка N — середина CC_1 . Знайдіть відстань між прямими AN і BM .
12. В основі прямої призми $ABCA_1 B_1 C_1$ лежить правильний трикутник ABC (така призма називається правильною). Знайдіть відстань між прямими AB_1 і BC , якщо всі ребра даної призми дорівнюють a .
- 13*. На прямій l у просторі послідовно розташовані точки A , B і C такі, що $AB = 18$ і $BC = 14$. Знайдіть відстань між прямими l і m , якщо відстані від точок A , B і C до прямої m дорівнюють 12, 15 і 20 відповідно.

§ 22 ГЕОМЕТРИЧНІ МІСЦЯ ТОЧОК У ПРОСТОРІ

Таблиця 20

ГЕОМЕТРИЧНІ МІСЦЯ ТОЧОК (ГМТ)

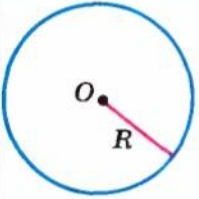
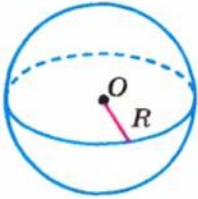
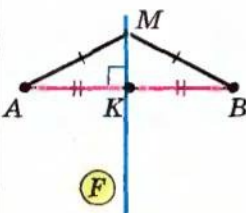
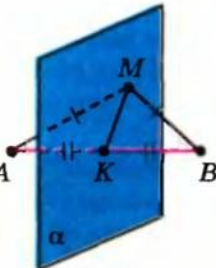
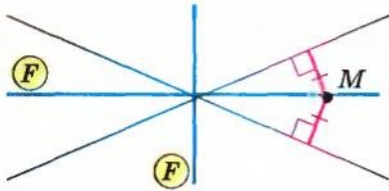
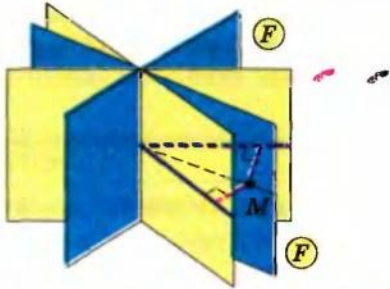
Означення. *Геометричним місцем точок площини (простору) називається фігура, що складається з усіх точок площини (простору), які мають певну властивість.*

Фігура F — ГМТ, які мають дану властивість



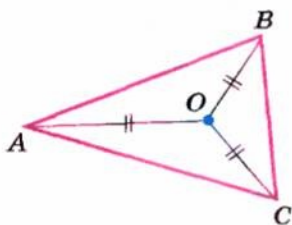
1. Якщо точка $M \in F$, то M має дану властивість.
2. Якщо точка M має дану властивість, то $M \in F$.

Продовження табл. 20

На площині	У просторі
1. ГМТ, що знаходяться на даній відстані R від точки O (рівновіддалені від даної точки)	
 <p data-bbox="343 332 571 430">Фігура F — коло із центром O і радіусом R.</p>	 <p data-bbox="842 332 1071 430">Фігура F — сфера із центром O і радіусом R.</p>
2. ГМТ, рівновіддалених від кінців даного відрізка AB	
 <p data-bbox="367 635 571 763">Фігура F — серединний перпендикуляр до відрізка AB.</p>	 <p data-bbox="860 589 1089 808">Фігура F — площина α, що проходить через середину відрізка AB і перпендикулярна до нього.</p>
3. ГМТ, рівновіддалених від двох прямих, що перетинаються	
 <p data-bbox="120 1239 559 1338">Фігура F складається з бісектрис усіх кутів, утворених при перетині даних прямих.</p>	 <p data-bbox="608 1239 1065 1428">Фігура F складається з бісекторних площин (площин, які ділять двогранні кути навпіл і проходять через ребро двогранних кутів) усіх двогранних кутів, утворених при перетині даних площин.</p>

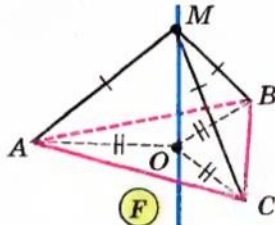
Закінчення табл. 20

4. GMT, рівновіддалених від вершин трикутника



Фігура F — центр описаного навколо трикутника кола.

$$F = O$$



Фігура F — пряма, яка перпендикулярна до площини трикутника і проходить через центр описаного навколо трикутника кола.

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття геометричного місця точок простору. У планіметрії геометричним місцем точок (GMT) називали фігуру, що складається з усіх точок площини, які мають певну властивість. Найпростіші з таких GMT площини наведено в лівому стовпці табл. 20. Нагадаємо їх.

- 1) Геометричним місцем точок, що знаходяться на даній відстані R від даної точки O , є коло радіуса R із центром у точці O .
- 2) Геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох даних точок, є пряма, яка перпендикулярна до відрізка, що сполучає ці точки, і проходить через його середину.
- 3) Геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох прямих, що перетинаються, є пара перпендикулярних прямих, які містять бісектриси кутів, утворених при перетині даних прямих.
- 4) Геометричне місце точок, рівновіддалених від вершин трикутника, складається з однієї точки — центра описаного навколо трикутника кола.

Аналогічно до поняття GMT на площині означають і поняття GMT у просторі.

Геометричним місцем точок простору називається фігура, яка складається з усіх точок простору, які мають певну властивість.

Як і в планіметрії, розв'язання завдання на знаходження геометричного місця точок складається з висування гіпотези про вид шуканої фігури F і обґрунтування двох взаємно обернених тверджень:

- 1) якщо точка M належить фігурі F , то вона має дану властивість;
- 2) якщо точка M має дану властивість, то вона належить фігурі F .

Замість другого твердження можна доводити еквівалентне йому твердження, протилежне до першого: якщо точка не належить фігурі F , то вона не має даної властивості.

2. Основні геометричні місця точок простору. Розглянемо геометричні місця точок простору, які мають ту саму властивість, що і відповідні ГМТ на площині.

З означення сфери випливає, що:

I. Геометричним місцем точок простору, що знаходяться на даній відстані R від даної точки O , є сфера радіуса R із центром у точці O (рис. 22.1).

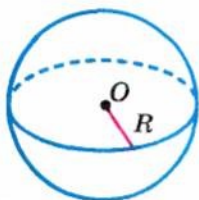


Рис. 22.1

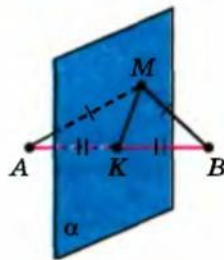


Рис. 22.2

II. Геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від двох даних точок A і B , є площина, яка перпендикулярна до відрізка, що сполучає ці точки, і проходить через його середину.

● Розглянемо площину α , яка перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину — точку K (рис. 22.2).

Нехай точка $M \in \alpha$. У площині α проведемо відрізок MK . Оскільки $AB \perp \alpha$, то $AB \perp MK$. Ураховуючи, що $AK = BK$, одержуємо $AM = BM$, тобто точка M рівновіддалена від точок A і B .

Нехай точка M рівновіддалена від точок A і B , тобто $MA = MB$. Розглянемо площину β , яка проходить через пряму AB і точку M . У площині β точка M рівновіддалена від точок A і B , отже, вона лежить на прямій, що проходить через середину відрізка AB — точку K , перпендикулярно до цього відрізка. Але всі прямі, перпендикулярні до прямої AB , які проходять через точку K , лежать у площині, перпендикулярній до AB . Ураховуючи, що через точку K проходить тільки одна площина α , перпендикулярна до AB , одержуємо $M \in \alpha$.

Таким чином, площина α дійсно є шуканим ГМТ. ●

Для розгляду наступного геометричного місця точок введемо поняття бісекторної півплощини двогранного кута.

Означення. Бісекторною півплощиною двогранного кута називається півплощина, граничною прямою якої є ребро двогранного кута і яка ділить двограний кут навпіл.

Оскільки за міру двогранного кута приймають міру відповідного йому лінійного кута, то бісекторна півплощина проходить через ребро двогранного кута і бісектрису відповідного лінійного кута.

III. Геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох даних площин, що перетинаються, є бісекторні півплощини всіх двогранних кутів, утворених відповідними півплощинами.

● Розглянемо дві площини α і β , які перетинаються по прямої c , і півплощину γ , яка є бісекторною півплощиною двогранного кута, утвореного півплощинами площин α і β (рис. 22.3).

Нехай точка $M \in \gamma$. Опустимо з точки M перпендикуляри на площини α і β ($MA \perp \alpha$ і $MB \perp \beta$). Через прямі MA і MB проведемо площину ϕ . Ця площина перпендикулярна до прямої c (оскільки $MA \perp c$ і $MB \perp c$). Якщо O — точка перетину площини ϕ з прямою c , то $\angle AOB$ — лінійний кут двогранного кута з ребром c , утвореного відповідними півплощинами площин α і β , а OM — бісектриса цього кута. Тоді за властивістю бісектриси кута (у площині ϕ) одержуємо, що $MA = MB$, отже, точка M — рівновіддалена від площин α і β .

Нехай точка M рівновіддалена від площин α і β , тобто $MA = MB$, де $MA \perp \alpha$ і $MB \perp \beta$. Через прямі MA і MB проведемо площину ϕ . Ця площина перпендикулярна до прямої c (оскільки $MA \perp c$ і $MB \perp c$). Якщо O — точка перетину площини ϕ з прямою c , то $\angle AOB$ — лінійний кут двогранного кута (з ребром c), утвореного відповідними півплощинами площин α і β . Оскільки $MA \perp OA$, $MB \perp OB$ і $MA = MB$, то в площині ϕ точка M , яка лежить усередині кута AOB , рівновіддалена від сторін кута. Отже, OM — бісектриса цього кута. Але через бісектрису лінійного кута проходить бісекторна півплощина, тобто $M \in \gamma$. Таким чином, фігура, яка складається із чотирьох бісекторних півплощин, дійсно є шуканим ГМТ. ●

Зауваження. Оскільки площина ϕ перпендикулярна до спільного ребра c всіх двогранних кутів, утворених при перетині площин α і β , то в перетині її з гранями цих кутів отримуємо лінійні кути відповідних двогранних кутів (сторони яких лежать на прямих AO і BO , які перетинаються в точці O). Ураховуючи, що на площині бісектриси вертикальних кутів лежать на одній прямій, а бісектриси суміжних кутів перпендикулярні, одержуємо, що шукане ГМТ, зображене на рисунку 22.3, складається з двох перпендикулярних площин.

IV. Геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від вершин трикутника, є пряма, яка перпендикулярна до площини трикутника і проходить через центр кола, описаного навколо трикутника.

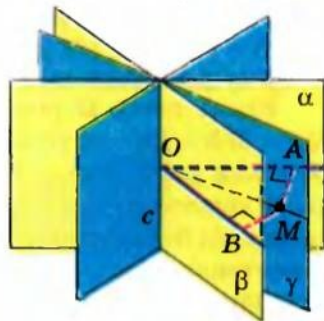


Рис. 22.3

● Розглянемо трикутник ABC і пряму a , яка перпендикулярна до площини трикутника і проходить через точку O — центр описаного кола (рис. 22.4).

Нехай точка $M \in a$. Тоді MO — перпендикуляр до площини ABC ; MA , MB , MC — похилі, а OA , OB , OC — відповідно їх проекції. Оскільки $OA = OB = OC$ (як радіуси описаного кола), то $MA = MB = MC$, тобто точка M рівновіддалена від вершин трикутника ABC .

Нехай точка M рівновіддалена від вершин трикутника ABC , тобто $MA = MB = MC$. Опустимо з точки M перпендикуляр на площину ABC . Оскільки рівні похилі MA , MB , MC мають рівні проекції, то основою цього перпендикуляра буде точка в площині трикутника ABC , рівновіддалена від його вершин, тобто точка O — центр кола, описаного навколо трикутника. Але через точку O проходить тільки одна пряма a , перпендикулярна до площини трикутника ABC . Отже, $M \in a$. Таким чином, пряма a дійсно є шуканим ГМТ. ●

Зазначимо, що в наведених прикладах вид розглядуваного ГМТ уже було задано і ми доводили, що вказана фігура дійсно є шуканим ГМТ.

Іноді доводиться знаходити ГМТ простору за даною його характеристичною властивістю. Як правило, розв'язування таких задач починають з припущення (гіпотези) про вид шуканої фігури. Для цього часто розглядають дану характеристичну властивість у якійсь площині та відомі ГМТ площини. Потім досліджують інші положення площини, що зберігають дану властивість точок, і пробують визначити вид шуканої фігури. Іноді шукане ГМТ є перетином уже відомих ГМТ.

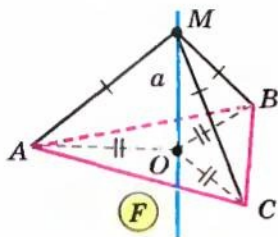


Рис. 22.4

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Знайдіть геометричне місце точок (ГМТ) простору, рівновіддалених від двох даних паралельних прямих.

Коментар

Спочатку розглянемо площину α , у якій лежать дані паралельні прямі (рис. 22.5). ГМТ площини, рівновіддалених від двох паралельних прямих a і b в цій площині, буде пряма t , яка паралельна даним прямим і проходить посередині між ними (тобто ділить відстань AB між даними прямими навпіл: $AK = BK$). Тоді ГМТ відповідних точок простору обов'язково буде включати пряму t .

Згадуючи, що в просторі похилі, які мають рівні проекції, рівні, можна висунути припущення, що відповідне ГМТ простору буде включати також всі перпендикуляри до площини α , проведені з кожної точки прямої t . Але всі такі перпендикуляри лежать у площині, перпендику-

лярній до площини α , яка проходить через пряму m . Це дозволяє висунути гіпотезу, що шуканим ГМТ і буде перпендикулярна площина γ .

Для доведення цієї гіпотези, як завжди, обґрунтуємо два взаємно обернених твердження:

1) якщо точка M належить фігурі F (площині γ), то вона має дану властивість;

2) якщо точка M має дану властивість, то вона належить фігурі F (площині γ).

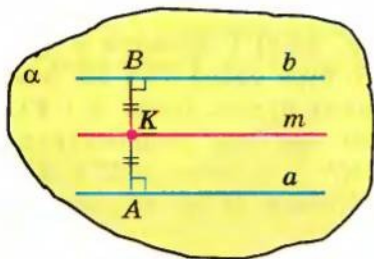


Рис. 22.5

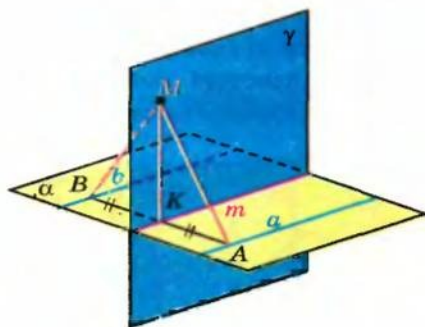


Рис. 22.6

Розв'язання

► Доведемо, що ГМТ простору, рівновіддалених від двох даних паралельних прямих a і b , є площина γ , перпендикулярна до площини α даних прямих, яка ділить навпіл відстань між ними (і містить пряму m площини α , яка паралельна даним прямим і проходить посередині між ними) (рис. 22.6).

1. Нехай точка $M \in \gamma$. У площині γ проведемо перпендикуляр $MK \perp m$. Оскільки $\gamma \perp \alpha$, то $MK \perp \alpha$. Проведемо через точку K в площині α пряму $AB \perp m$ ($A \in a$, $B \in b$). Оскільки $m \parallel a \parallel b$, то $AB \perp a$ і $AB \perp b$. Ураховуючи, що $AK = BK$, маємо рівність відповідних похилих: $AM = BM$. Використовуючи теорему про три перпендикуляри, одержуємо, що $AM \perp a$ і $BM \perp b$, тобто точка M рівновіддалена від прямих a і b .

2. Нехай точка M рівновіддалена від прямих a і b , тобто $MA = MB$ ($MA \perp a$ і $MB \perp b$). Розглянемо площину MAV . Вона перпендикулярна до прямої a ($a \perp MA$ і $a \perp MB$, оскільки $a \parallel b$). Отже, $AB \perp a$, і тоді площина γ проходить через точку K — середину AB . Оскільки $MA = MB$, то точка M також рівновіддалена від кінців відрізка AB . Але всі точки простору, рівновіддалені від кінців відрізка AB , лежать у площині, яка перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину — точку K . Беручи до уваги, що через точку K проходить тільки одна площина γ , перпендикулярна до AB , одержуємо $M \in \gamma$.

Таким чином, площина γ дійсно є шуканим ГМТ. ◁

Задача 2. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від двох даних прямих, які перетинаються.

Коментар

Спочатку розглянемо площину γ , у якій лежать дані прямі, що перетинаються (рис. 22.7). ГМТ площини, рівновіддалених від двох прямих a і b , які лежать у цій площині та перетинаються, є пара перпендикулярних прямих m і n , що містять бісектриси кутів, утворених перетином даних прямих. (Якщо, наприклад, $T \in m$, то $TN = TK$, де $TN \perp b$ і $TK \perp a$, і навпаки.) Тоді ГМТ відповідних точок простору обов'язково буде включати ці прямі m і n .

Якщо в просторі взяти точку M (рис. 22.8) і провести з неї до площини γ перпендикуляр (основою якого буде точка T) і дві похилі (основами яких будуть точки N і K), то за теоремою про три перпендикуляри $MK \perp a$ і $MN \perp b$, тобто MK і MN — відстані від точки M до прямих a і b відповідно.

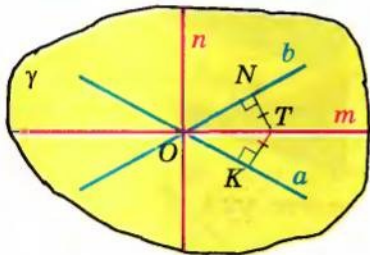


Рис. 22.7

Згадуючи, що в просторі похилі, які мають рівні проєкції, рівні, можна висунути припущення, що відповідне ГМТ простору буде включати також усі перпендикуляри до площини γ , проведені з кожної точки прямих m і n . Але всі

такі перпендикуляри лежать у площинах α і β , перпендикулярних до площини γ , які проходять відповідно через прямі m і n . Це дозволяє висунути гіпотезу, що шуканим ГМТ буде фігура F , яка складається з виділених площин, перпендикулярних до площини γ .

Для доведення гіпотези, як завжди, обґрунтуємо два взаємно обернені твердження: 1) якщо точка M належить фігурі F , то вона має дану властивість; 2) якщо точка M має задану властивість, то вона належить фігурі F .

Розв'язання

► Доведемо, що ГМТ простору, рівновіддалених від двох прямих a і b , які перетинаються, є пара взаємно перпендикулярних площин α і β , які перпендикулярні до площини γ даних прямих і проходять через бісектриси кутів, утворених цими прямими (рис. 22.8).

1. Нехай точка M належить якійсь з указаних площин α чи β , наприклад, $M \in \alpha$. (Площина α проходить через пряму m , яка містить бісектриси двох вертикальних кутів, утворених при перетині прямих a і b .) У площині α проведемо перпендикуляр $MT \perp m$. Оскільки $\alpha \perp \gamma$, то $MT \perp \gamma$. Опустимо з точки T в площині γ перпендикуляри: $TK \perp a$ і $TN \perp b$. За властивістю бісектриси кута $TK = TN$. Тоді

$MK = MN$ (як похилі, що мають рівні проекції). Використовуючи теорему про три перпендикуляри, одержуємо $MK \perp a$ і $MN \perp b$, тобто точка M рівновіддалена від прямих a і b .

2. Нехай точка M рівновіддалена від прямих a і b , тобто $MK = MN$ ($MK \perp a$ і $MN \perp b$). Тоді проекції похилих MK і MN на площину γ теж будуть рівні, а за теоремою про три перпендикуляри ще й перпендикулярні до прямих a і b відповідно. Отже, основа перпендикуляра, опущеного з точки M на площину γ , буде точкою в площині γ , рівновіддаленою від прямих a і b , знаходитиметься на прямій m . Але всі перпендикуляри до площини γ , проведені з точок прямої m , лежать у площині α . Отже, $M \in \alpha$.

Таким чином, пара площин α і β дійсно є шуканим ГМТ.

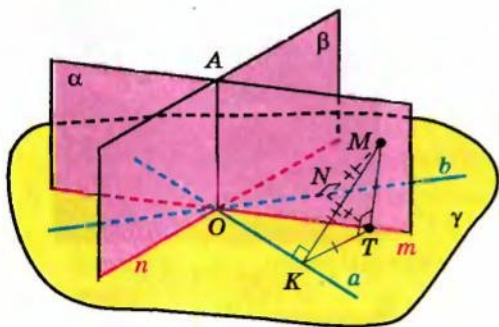


Рис. 22.8

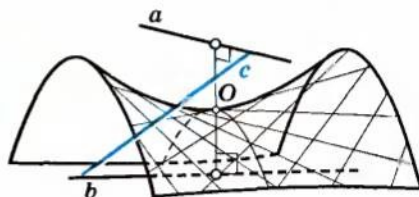


Рис. 22.9

Якщо площини α і β перетинаються по прямій OA (рис. 22.8), то, урахувавши, що $\alpha \perp \gamma$ і $\beta \perp \gamma$, одержуємо $OA \perp \gamma$ (див. § 18, с. 161). Тоді $\angle(\alpha; \beta) = \angle(m; n) = 90^\circ$ (оскільки бісектриси суміжних кутів перпендикулярні), тобто площини α і β дійсно перпендикулярні. \triangleleft

Задача 3. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від двох даних мимобіжних прямих.

Розв'язання

► Розглянемо довільну пряму c , яка перетинає дані мимобіжні прямі a і b (рис. 22.9). Урахувавши результат, отриманий у задачі 2, одержуємо, що геометричним місцем точок простору, кожна з яких рівновіддалена від прямих a і c , є певна пара площин α_1 і β_1 . Аналогічно геометричним місцем точок простору, кожна з яких рівновіддалена від прямих c і b , є певна пара площин α_2 і β_2 . Точки чотирьох прямих перетину площин α_1 і β_1 з площинами α_2 і β_2 належать шуканому ГМТ. Міняючи січну пряму c , одержимо цим шляхом нескінченну множину прямих, кожна точка яких рівновіддалена від даних мимобіжних прямих a і b . Об'єднання всіх прямих цієї множини є сідлоподібною

поверхню, яку називають гіперболічним параболоїдом. Частина його зображено на рисунку 22.9. ◀

Гіперболічний параболоїд вивчають у вищих навчальних закладах. Його поверхню можна отримати переміщенням прямої d (яку називають *твірною* гіперболічного параболоїда) по двох мимобіжних прямих m і n , якщо твірна залишається паралельною деякій площині ϕ (рис. 22.10). Тоді і дані прямі також належать заданому ними гіперболічному параболоїду. (Кожна пряма, що належить гіперболічному параболоїду, називається його твірною, отже, m і n теж є твірними розглянутого гіперболічного параболоїда.)

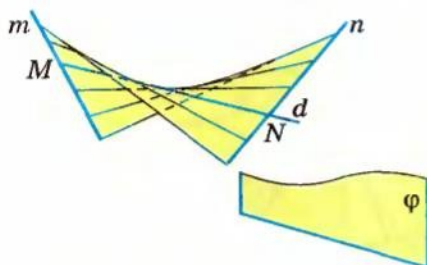


Рис. 22.10



Рис. 22.11

Гіперболічний параболоїд широко застосовують в інженерно-будівельній практиці (там гіперболічний параболоїд часто називають *косою площиною*) для формування поверхонь укосів, насипів залізниць і автомобільних шляхів, набережних, гідротехнічних споруд, покрівель. На рисунку 22.11 зображено оригінальний бетонний павільйон над джерелом мінеральної води «Харківська», побудований за проектом архітектора В. С. Васильєва в м. Харкові.

Запитання для контролю

1. Дайте означення геометричного місця точок простору.
2. Поясніть, як можна обґрунтувати, що фігура F є геометричним місцем точок, які мають певну властивість.
3. Назвіть основні ГМТ простору, які мають такі самі властивості, що й основні ГМТ на площині. Доведіть правильність відповідних тверджень.

Вправи

1. Знайдіть геометричне місце основ похилих даної довжини, проведених з даної точки до площини.

2. Знайдіть геометричне місце точок простору, віддалених від даної площини α на дану відстань h .
3. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від двох даних паралельних площин.
4. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від сторін трикутника.
- 5*. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від прямих, які містять сторони трикутника.
6. Дано площину і точку, що їй не належить. Знайдіть геометричне місце точок простору, які поділяють навпіл усі відрізки, один кінець яких збігається з даною точкою, а другий «пробігає» всі точки даної площини.
7. Знайдіть геометричне місце точок простору, які лежать на прямих, перпендикулярних до даної прямої, і проходять через дану на ній точку.
8. Знайдіть геометричне місце точок простору, які лежать на прямих, перпендикулярних до даної прямої, і проходять через дану точку, яка не лежить на даній прямій.
9. Точка A лежить поза площиною α , X — довільна точка площини α , X' — точка відрізка AX , яка ділить його у відношенні $m : n$. Доведіть, що геометричним місцем точок X' є площина, паралельна площині α .
- 10*. Доведіть, що геометричним місцем середин відрізків з кінцями на двох мимобіжних прямих (рис. 22.12) є площина, паралельна цим прямим (її часто називають *серединною площиною* даних мимобіжних прямих).

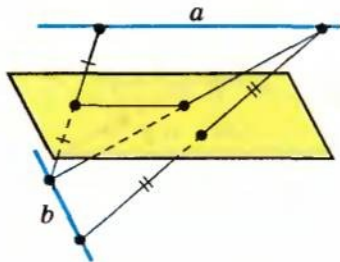


Рис. 22.12

- 11*. Доведіть, що кожна точка бісектрис l і m кутів між ортогональними проекціями двох мимобіжних прямих на їх серединну площину (див. вправу 10) рівновіддалена від даних прямих, тобто належить гіперболічному параболоїду, а самі прямі l і m є його твірними (див. задачу 3 на с. 197).

Вказівка. Нехай AB — спільний перпендикуляр даних мимобіжних прямих a і b , γ — їх серединна площина, l — одна з бісектрис кутів між ортогональними проєкціями a_2 і b_2 прямих a і b на площину γ (рис. 22.13). Проведіть через прямі a і b паралельні площини α і β та обґрунтуйте, що площина γ паралельна цим прямим. Потім через довільну точку $P \in l$ проведіть пряму CD , перпендикулярну до цих площин ($C \in \alpha$, $D \in \beta$), і з точки P опустіть перпендикуляри PE і PF на прямі a і b та обґрунтуйте рівність пар трикутників ACE і BDF та PCE і PDF .

12. Дано площину α та точки A і B , які не належать їй. На площині α знайдіть множини точок, рівновіддалених від точок A і B .
13. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від трьох даних площин, які мають єдину спільну точку.

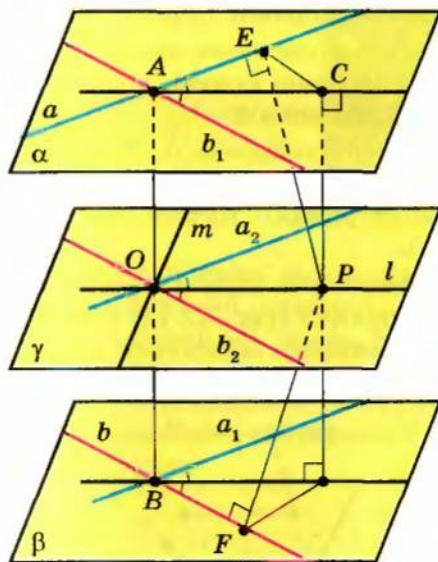
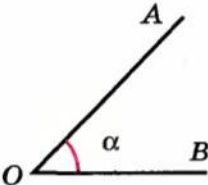
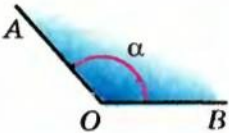
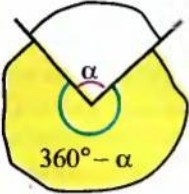
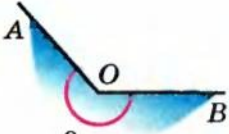
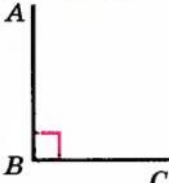
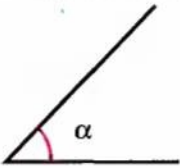
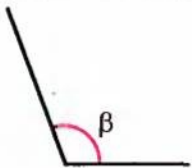
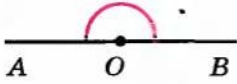
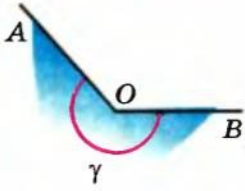


Рис. 22.13

Система опорних фактів курсу планіметрії

Таблиця 1

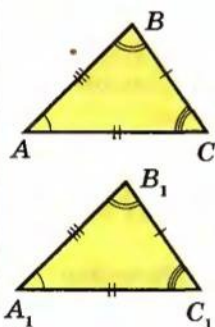
КУТИ		
Поняття кута		
 <p>$\angle AOB = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$)</p>	<p>Кут — фігура, що складається з точки — <i>вершини кута</i> — і двох променів, які виходять із цієї точки, — <i>сторін кута</i>.</p>	 <p>$\angle AOB = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$)</p>
 <p>$360^\circ - \alpha$</p>	<p>Кут (або плоский кут) — частина площини, обмежена двома променями зі спільним початком.</p>	 <p>$\angle AOB = \beta$ ($0^\circ < \beta < 360^\circ$)</p>
Види кутів		
Прямий	Гострий	Тупий
 <p>$\angle ABC = 90^\circ$</p>	 <p>$0^\circ < \alpha < 90^\circ$</p>	 <p>$90^\circ < \beta < 180^\circ$</p>
Розгорнутий		Більший за розгорнутий
<p>Сторони розгорнутого кута — доповняльні промені.</p>  <p>$\angle AOB = 180^\circ$</p>		 <p>$180^\circ < \gamma < 360^\circ$</p>

Продовження табл. 1

Бісектриса кута		
	<p>Бісектриса кута — це промінь, який виходить з вершини кута, лежить у його внутрішній області і ділить кут на два рівних кути.</p> <p>Промінь OD — бісектриса $\angle AOB$, тобто $\angle AOD = \angle BOD$</p>	
Суміжні та вертикальні кути (розглядаються кути, менші за розгорнутий)		
Суміжні кути	Вертикальні кути	
<p>Сума суміжних кутів дорівнює 180°</p> <p>$\angle 1$ і $\angle 2$ — суміжні (одна сторона спільна, а дві інші — доповняльні промені)</p> <p>$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$</p>	<p>Вертикальні кути рівні</p> <p>$\angle 1$ і $\angle 3$ — вертикальні $\angle 2$ і $\angle 4$ — вертикальні (сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого)</p> <p>$\angle 1 = \angle 3, \angle 2 = \angle 4$</p>	
ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ		
<p>a</p> <hr style="border: 1px solid pink;"/> <p>b</p> <hr style="border: 1px solid pink;"/> <p>$a \parallel b$</p>	<p>Дві прямі називають паралельними, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються.</p> <p><i>Через точку поза прямою можна провести єдину пряму, паралельну даній.</i></p>	
	<p>Ознаки паралельності</p> <p>Якщо $\angle 1 = \angle 3$, (внутрішні різносторонні кути), або $\angle 1 = \angle 4$, (відповідні кути), або $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, (сума внутрішніх односторонніх кутів), то $a \parallel b$.</p>	<p>Властивості</p> <p>Якщо $a \parallel b$, то $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.</p>

Таблиця 2

РІВНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ



Дві фігури називають **рівними**, якщо вони рухом переводяться одна в одну.

$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1 \Leftrightarrow$$

$AB = A_1B_1$	$\angle A = \angle A_1$
$AC = A_1C_1$	$\angle B = \angle B_1$
$BC = B_1C_1$	$\angle C = \angle C_1$

Властивості рівних трикутників

1. У рівних трикутників усі відповідні елементи рівні (сторони, кути, медіани, висоти тощо).
2. У рівних трикутників проти рівних сторін лежать рівні кути, а проти рівних кутів лежать рівні сторони.

Ознаки рівності трикутників

Два трикутники рівні, якщо:

- 1) дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника;
- 2) сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні й прилеглим до неї кутам другого трикутника;
- 3) три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника.



1. За двома сторонами і кутом між ними.



2. За стороною і двома прилеглими до неї кутами.

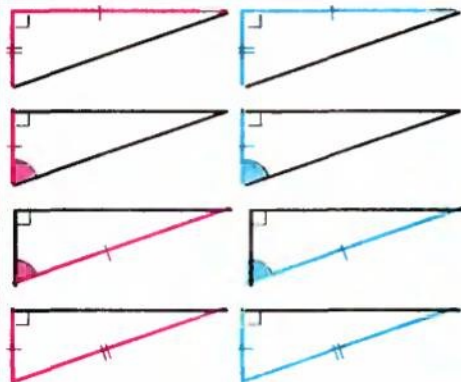


3. За трьома сторонами.

Ознаки рівності прямокутних трикутників

Два прямокутних трикутники рівні, якщо:

- 1) катети одного з них дорівнюють відповідно катетам другого;
- 2) катет і прилеглий гострий кут одного трикутника дорівнюють відповідно катету і прилеглому гострому куту другого;
- 2') катет і протилежний гострий кут одного трикутника дорівнюють відповідно катету і протилежному гострому куту другого;
- 3) гіпотенуза і гострий кут одного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі і гострому куту другого;
- 4) гіпотенуза і катет одного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі і катету другого.



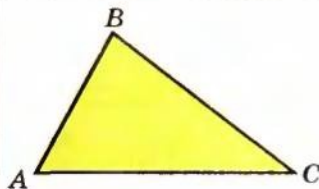
1. За двома катетами.

2. За катетом і гострим кутом.

3. За гіпотенузою і гострим кутом.

4. За гіпотенузою і катетом.

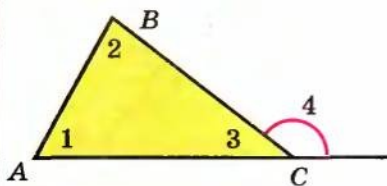
ВЛАСТИВОСТІ СТОРІН І КУТІВ ТРИКУТНИКА



$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

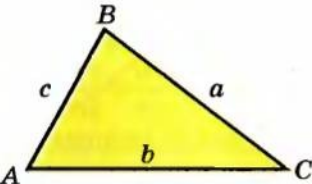
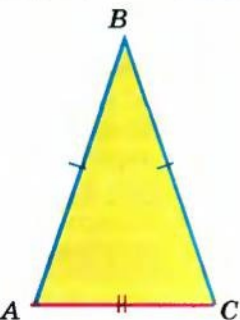
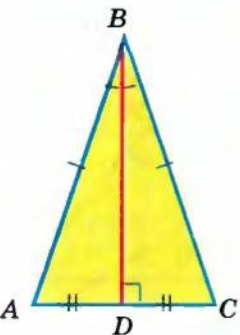
Сума кутів трикутника дорівнює 180° .

Зовнішній кут трикутника



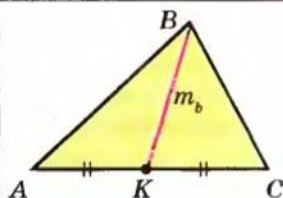
Кут, суміжний із внутрішнім кутом трикутника, називають **зовнішнім кутом трикутника** при даній вершині.

$\angle 4$ — зовнішній (при вершині C)

Властивості					
<p>1. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.</p> $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$					
<p>2. Зовнішній кут трикутника більший від будь-якого внутрішнього кута, не суміжного з ним.</p> $\angle 4 > \angle 1, \angle 4 > \angle 2$					
Нерівність трикутника					
	<p>У довільному трикутнику кожна сторона менша за суму двох інших сторін (і більша від модуля різниці цих сторін).</p> $ b - c < a < b + c$				
Рівнобедрений трикутник					
	<p>Трикутник називають рівнобедреним, якщо в нього дві сторони рівні.</p> $\Delta ABC \text{ — рівнобедрений } (AB = BC)$ <p>AC — основа, AB і BC — бічні сторони</p>				
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Властивості</th> <th>Ознаки</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td> <p>1. Якщо в ΔABC $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$.</p> <p>2. Якщо ΔABC рівнобедрений і BD — медіана, то BD — висота й бісектриса.</p> <p>У рівнобедреному трикутнику висота, медіана і бісектриса, проведені до основи, збігаються.</p> </td> <td> <p>1. Якщо в ΔABC $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$.</p> <p>2. Якщо в трикутнику збігаються:</p> <ul style="list-style-type: none"> а) висота й медіана, або б) висота й бісектриса, або в) медіана й бісектриса, <p>то трикутник рівнобедрений.</p> </td> </tr> </tbody> </table>	Властивості	Ознаки	<p>1. Якщо в ΔABC $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$.</p> <p>2. Якщо ΔABC рівнобедрений і BD — медіана, то BD — висота й бісектриса.</p> <p>У рівнобедреному трикутнику висота, медіана і бісектриса, проведені до основи, збігаються.</p>	<p>1. Якщо в ΔABC $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$.</p> <p>2. Якщо в трикутнику збігаються:</p> <ul style="list-style-type: none"> а) висота й медіана, або б) висота й бісектриса, або в) медіана й бісектриса, <p>то трикутник рівнобедрений.</p>
Властивості	Ознаки				
<p>1. Якщо в ΔABC $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$.</p> <p>2. Якщо ΔABC рівнобедрений і BD — медіана, то BD — висота й бісектриса.</p> <p>У рівнобедреному трикутнику висота, медіана і бісектриса, проведені до основи, збігаються.</p>	<p>1. Якщо в ΔABC $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$.</p> <p>2. Якщо в трикутнику збігаються:</p> <ul style="list-style-type: none"> а) висота й медіана, або б) висота й бісектриса, або в) медіана й бісектриса, <p>то трикутник рівнобедрений.</p>				

ВИСОТА, МЕДІАНА, БІСЕКТРИСА І СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА

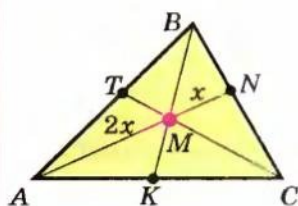
Медіана трикутника



Медіана трикутника — відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

BK — медіана,
 K — середина AC

Властивості

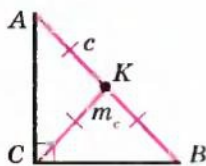


1. *Усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожен медіану у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини.*

M — точка перетину медіан, $\frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MK} = \frac{CM}{MT} = \frac{2}{1}$

Точку перетину медіан трикутника називають центроїдом, або центром мас, трикутника.

2. $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.



3. $m_c = \frac{1}{2}c$ — *у прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.*

Висота трикутника

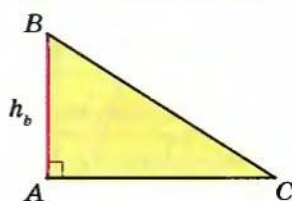
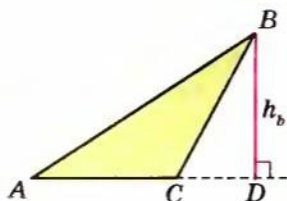
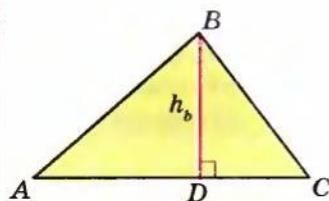
Висота трикутника — перпендикуляр, проведений з вершини до прямої, що містить протилежну сторону трикутника.

BD — висота

$BD \perp AC$

Для прямокутного трикутника:

BA — висота
 $(\angle A = 90^\circ)$



Продовження табл. 3

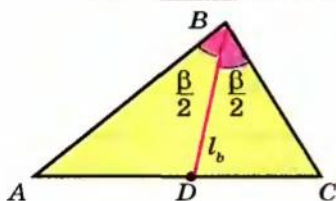
Властивості

1. Прямі, що містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці (точку перетину висот трикутника називають *ортоцентром трикутника*).

$$2. \quad h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

Висоти трикутника обернено пропорційні його сторонам. Зокрема, найбільша висота трикутника проведена до його найменшої сторони, а найменша висота — до найбільшої сторони.

Бісектриса трикутника



Бісектриса трикутника — відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою на протилежній стороні.

BD — бісектриса трикутника

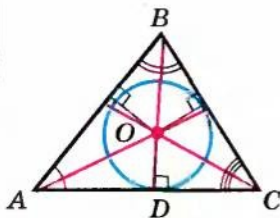
$$\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2} \angle B$$

Властивості

1. $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ *Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам трикутника.*

2. Кожна точка бісектриси кута (меншого за розгорнутий) рівновіддалена від сторін кута (тобто рівновіддалена від прямих, які містять сторони цього кута). І навпаки, якщо точка лежить усередині кута (меншого за розгорнутий) і рівновіддалена від його сторін, то вона лежить на бісектрисі цього кута.

3. Усі три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці, рівновіддаленій від трьох його сторін, — центрі вписаного кола (точку перетину бісектрис трикутника ще називають *інцентром трикутника*).

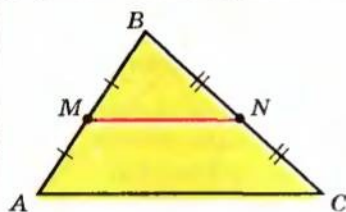


O — точка перетину бісектрис трикутника, центр вписаного кола

$$\begin{aligned} \angle AOC &= 90^\circ + \frac{1}{2} \angle B \\ \angle AOB &= 90^\circ + \frac{1}{2} \angle C \\ \angle BOC &= 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A \end{aligned}$$

Закінчення табл. 3

Середня лінія трикутника



Середньою лінією трикутника називають відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

MN — середня лінія
 M — середина AB
 N — середина BC

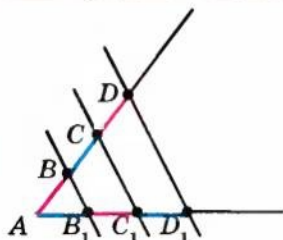
Властивості

$$1. MN \parallel AC$$

$$2. MN = \frac{1}{2} AC$$

Середня лінія трикутника паралельна одній із його сторін і дорівнює половині цієї сторони.

Теорема Фалеса



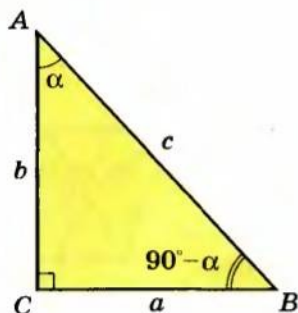
Якщо $AB = BC = CD$ і $BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$,
 то $AB_1 = B_1C_1 = C_1D_1$

Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на другій його стороні.

Таблиця 4

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ І КУТАМИ В ТРИКУТНИКУ

Співвідношення між елементами прямокутного трикутника



$$\begin{aligned} a &= c \sin \alpha \\ b &= c \cos \alpha \\ a &= b \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

$\angle C = 90^\circ$; a, b — катети, c — гіпотенуза; $\angle A = \alpha$.

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{— теорема Піфагора}$$

У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

$$\angle B = 90^\circ - \alpha$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

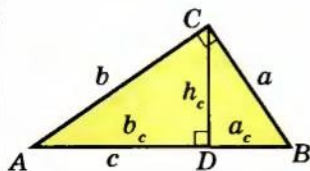
У прямокутному трикутнику:

синус кута α — відношення протилежного катета до гіпотенузи;

косинус кута α — відношення прилеглого катета до гіпотенузи;

тангенс кута α — відношення протилежного катета до прилеглого;

котангенс кута α — відношення прилеглого катета до протилежного.



$$\begin{aligned} \triangle ACD &\sim \triangle ABC \\ \triangle CBD &\sim \triangle ABC \\ \triangle ACD &\sim \triangle CBD \end{aligned}$$

CD — висота

$$\begin{aligned} h_c^2 &= a_c b_c \\ a^2 &= c a_c \\ b^2 &= c b_c \end{aligned}$$

Висота прямокутного трикутника, яка проведена з вершини прямого кута, є середнє пропорційне між проєкціями катетів на гіпотенузу.

Катет прямокутного трикутника є середнє пропорційне між гіпотенузою і проєкцією цього катета на гіпотенузу.

Продовження табл. 4

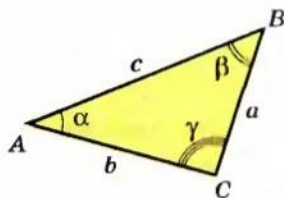
Співвідношення між сторонами і кутами в довільному трикутнику

Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

R — радіус описаного кола

Сторони трикутника пропорційні до синусів протилежних кутів.



Теорема косинусів

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

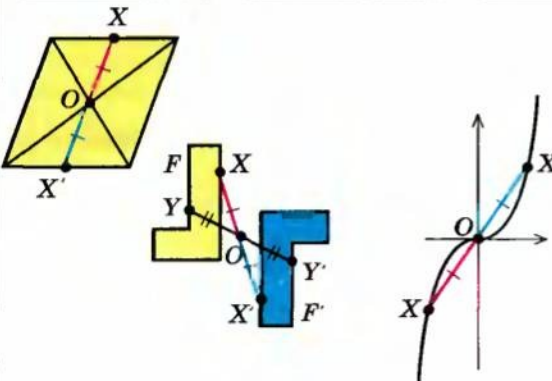
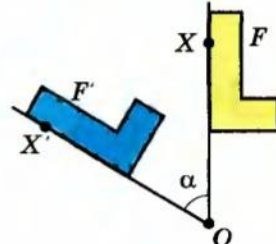
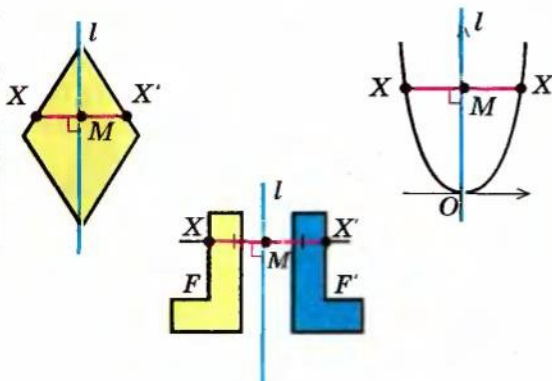
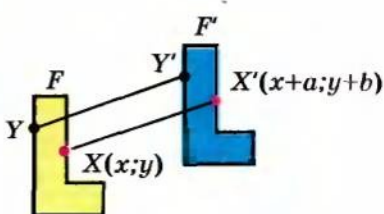
Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін мінус подвоєний добуток цих сторін на косинус кута між ними.

Наслідки теореми косинусів

1. Якщо $c^2 = a^2 + b^2$,
то $\gamma = 90^\circ$, тобто трикутник прямокутний (теорема, обернена до теореми Піфагора).
2. Якщо $c^2 < a^2 + b^2$,
то кут γ — гострий ($\cos \gamma > 0$); якщо c — найбільша сторона, то трикутник гострокутний.
3. Якщо $c^2 > a^2 + b^2$,
то кут γ — тупий ($\cos \gamma < 0$).
4. У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, проти більшого кута лежить більша сторона:

$$a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta.$$

Таблиця 5

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФІГУР	РУХ
<p><i>Рух</i> — це перетворення, при якому зберігаються відстані між точками фігури.</p> <p>Під час руху зберігаються кути між променями.</p> <p>Кожне з перетворень: симетрія відносно точки, симетрія відносно прямої, паралельне перенесення, поворот є рухом</p>	
<p style="text-align: center;">Симетрія відносно точки</p>  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $OX' = OX$ </div>	<p style="text-align: center;">Поворот</p>  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $OX' = OX \quad \angle XO X' = \alpha$ </div>
<p style="text-align: center;">Симетрія відносно прямої</p>  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $XX' \perp l$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $XM = MX'$ </div>	<p style="text-align: center;">Паралельне перенесення</p>  <p>Точки зміщуються вздовж паралельних прямих (або прямих, які збігаються) на одну й ту саму відстань в одному і тому самому напрямку.</p>

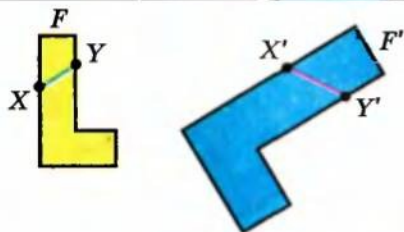
Таблиця 6

ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ

Означення і властивості

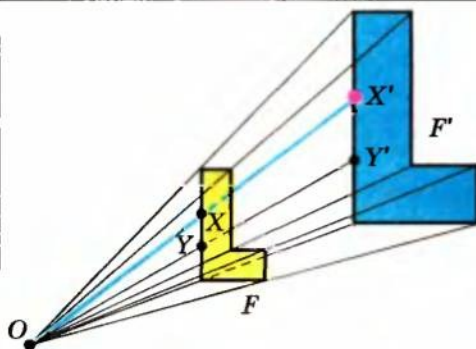
Перетворення, при якому відстані між точками змінюються в одне і те саме число разів, називають **перетворенням подібності**.

1. Перетворення подібності зберігає кути між променями.
2. У подібних фігур відповідні кути рівні, а відповідні відрізки — пропорційні.



$$\frac{X'Y'}{XY} = k \text{ — коефіцієнт подібності}$$

Гомотетія



Якщо точка X відображується в точку X' , то це означає, що:

- 1) точка X' лежить на промені OX ;
- 2) $\frac{OX'}{OX} = k$

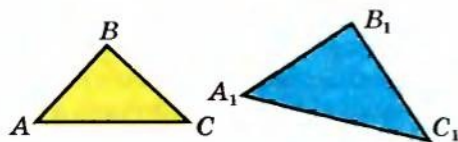
Властивість

При гомотетії відрізок відображається у паралельний йому відрізок (або у відрізок, який лежить із даним відрізком на одній прямій).

$$X'Y' \parallel XY$$

Подібність трикутників

Означення



Два трикутники називаються **подібними**, якщо вони переводяться один в один в одній перетворенням подібності.

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

Продовження табл. 6

Властивості

1. У подібних трикутників відповідні кути рівні, а відповідні відрізки — пропорційні.

$$\angle A = \angle A_1; \angle B = \angle B_1; \angle C = \angle C_1 \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{h}{h_1} = \frac{R}{R_1} = \dots = k$$

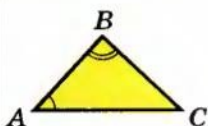
$$2. \frac{P}{P_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = k$$

Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює відношенню відповідних сторін і коефіцієнту подібності.

$$3. \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = k^2$$

Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

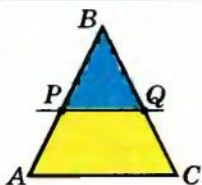
Ознаки подібності трикутників



1. Якщо $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1,$ — за двома рівними кутами
то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

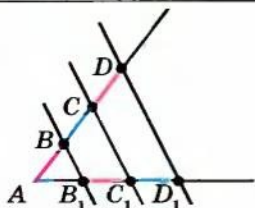
2. Якщо $\angle A = \angle A_1, \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1},$ — за двома пропорційними сторонами і кутом між ними
то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

3. Якщо $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1},$ — за трьома пропорційними сторонами
то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



Якщо $PQ \parallel AC,$ — Пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає три кутник, подібний даному.
то $\Delta PBQ \sim \Delta ABC$

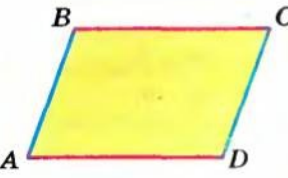
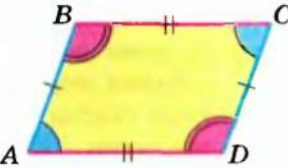
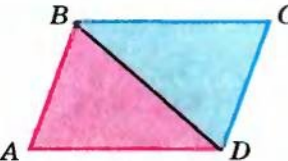
Теорема про пропорційні відрізки



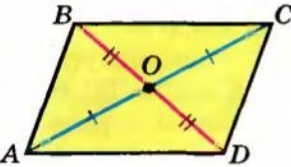
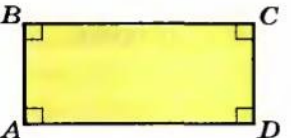
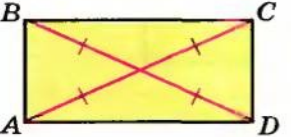
Якщо $BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1,$
то $AB : BC : CD = AB_1 : B_1C_1 : C_1D_1$

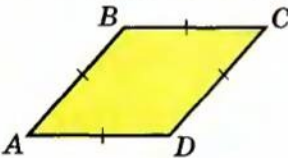
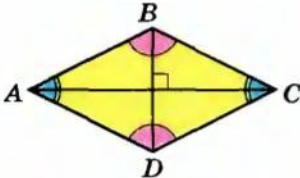
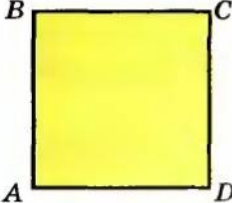
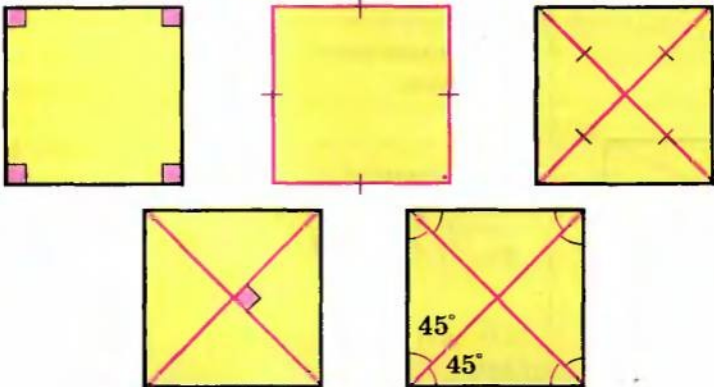
Паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на сторонах кута пропорційні відрізки.

ПАРАЛЕЛОГРАМ ТА ЙОГО ВИДИ

	<p>Чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні, називають паралелограмом.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $ABCD$ — паралелограм </div> \Leftrightarrow <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $AB \parallel CD, BC \parallel AD$ </div>
	<p style="text-align: center;">Властивість</p> <p>1. Якщо $ABCD$ — паралелограм, то $AB = DC; AD = BC;$ $\angle A = \angle C; \angle B = \angle D.$</p> <p><i>У паралелограма протилежні сторони рівні, протилежні кути рівні.</i></p> <p style="text-align: center;">Ознаки</p> <p>1. Якщо $ABCD$ — чотирикутник і $BC \parallel AD, BC = AD,$ то $ABCD$ — паралелограм. <i>Якщо в чотирикутнику дві сторони паралельні й рівні, то він — паралелограм.</i></p> <p>2. Якщо $ABCD$ — чотирикутник і $AB = DC, AD = BC,$ то $ABCD$ — паралелограм.</p> <p><i>Якщо в чотирикутнику протилежні сторони попарно рівні, то він — паралелограм.</i></p>
	<p style="text-align: center;">Властивість</p> <p>2. Якщо $ABCD$ — паралелограм і BD діагональ, то $\triangle ABD = \triangle CDB.$</p> <p><i>Діагональ ділить паралелограм на два рівних трикутники.</i></p>

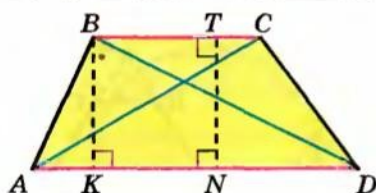
Продовження табл. 7

	Властивість	
	<p>3. Якщо $ABCD$ — паралелограм, AC і BD — діагоналі, то $AO = OC$; $BO = OD$.</p> <p><i>Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.</i></p>	
	Ознака	
	<p>3. Якщо $ABCD$ — чотирикутник і $AO = OC$, $BO = OD$, то $ABCD$ — паралелограм.</p> <p><i>Якщо діагоналі чотирикутника в точці перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм.</i></p>	
Властивість		
<p>4. $AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + AB^2)$</p> <p><i>Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.</i></p>		
Прямокутник		
	<p>Паралелограм, у якого всі кути прямі, називають прямокутником.</p>	
	<p>Властивості</p> <p>1. Усі властивості паралелограма.</p> <p>2. Якщо $ABCD$ — <u>прямокутник</u>, то $AC = BD$</p> <p><i>Діагоналі прямокутника рівні.</i></p>	<p>Ознаки</p> <p>1. Якщо $ABCD$ — паралелограм і $\angle A = 90^\circ$, то $ABCD$ — прямокутник.</p> <p>2. Якщо $ABCD$ — паралелограм і $AC = BD$, то $ABCD$ — прямокутник.</p>

Ромб					
	<p>Паралелограм, у якого всі сторони рівні, називають ромбом.</p>				
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%;">Властивості</th> <th style="width: 50%;">Ознака</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td> <p>1. Усі властивості паралелограма.</p> <p>2. Якщо $ABCD$ — ромб, AC і BD — діагоналі, то: а) $AC \perp BD$ — діагоналі перпендикулярні; б) діагоналі є бісектрисами кутів ромба.</p> </td> <td> <p>Якщо $ABCD$ — чотирикутник і $AB = AD = BC = CD$, то $ABCD$ — ромб.</p> <p><i>Якщо у чотирикутника всі сторони рівні, то цей чотирикутник — ромб.</i></p> </td> </tr> </tbody> </table>	Властивості	Ознака	<p>1. Усі властивості паралелограма.</p> <p>2. Якщо $ABCD$ — ромб, AC і BD — діагоналі, то: а) $AC \perp BD$ — діагоналі перпендикулярні; б) діагоналі є бісектрисами кутів ромба.</p>	<p>Якщо $ABCD$ — чотирикутник і $AB = AD = BC = CD$, то $ABCD$ — ромб.</p> <p><i>Якщо у чотирикутника всі сторони рівні, то цей чотирикутник — ромб.</i></p>
Властивості	Ознака				
<p>1. Усі властивості паралелограма.</p> <p>2. Якщо $ABCD$ — ромб, AC і BD — діагоналі, то: а) $AC \perp BD$ — діагоналі перпендикулярні; б) діагоналі є бісектрисами кутів ромба.</p>	<p>Якщо $ABCD$ — чотирикутник і $AB = AD = BC = CD$, то $ABCD$ — ромб.</p> <p><i>Якщо у чотирикутника всі сторони рівні, то цей чотирикутник — ромб.</i></p>				
Квадрат					
	<p>Прямокутник, у якого всі сторони рівні, називають квадратом.</p> <p>Інше означення. Ромб, у якого всі кути прямі, називають квадратом.</p>				
Властивості					
					

Таблиця 8

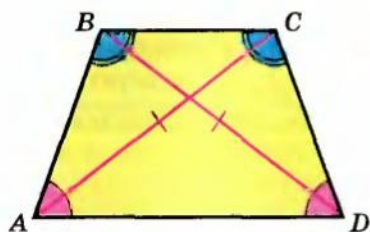
ТРАПЕЦІЯ



Чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші сторони не паралельні, називають **трапецією**.

$ABCD$ — трапеція, AD і BC — основи, AB і CD — бічні сторони, AC і BD — діагоналі, BK і TN — висоти.

Окремі види трапеції



Рівнобедрена трапеція — трапеція з рівними бічними сторонами ($AB = CD$).

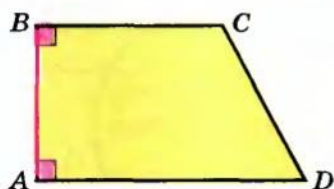
Властивості

$$\angle A = \angle D$$

Кути при основі рівні.

$$AC = BD$$

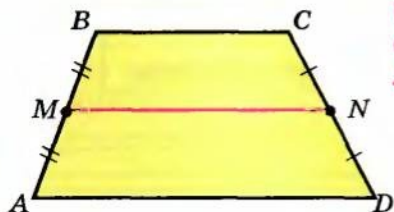
Діагоналі рівні.



Прямокутна трапеція — трапеція, у якій одна бічна сторона перпендикулярна до основ.

$$h_{\text{прямокут. трапеції}} = AB$$

Середня лінія трапеції



Відрізок, який сполучає середини бічних сторін трапеції, називають **середньою лінією трапеції**.

MN — середня лінія

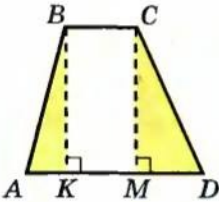
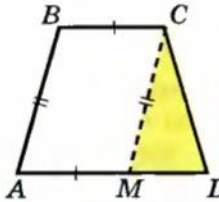
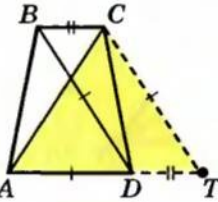
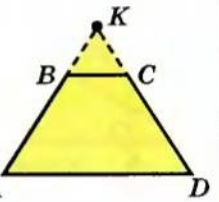
Властивості

$$\begin{aligned} MN &\parallel AD \\ MN &\parallel BC \end{aligned}$$

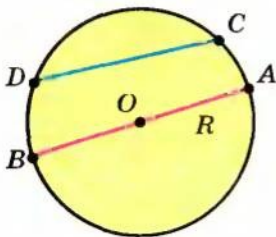
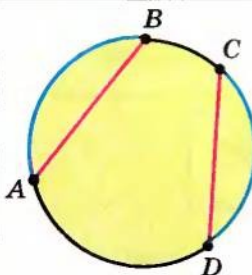
$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.

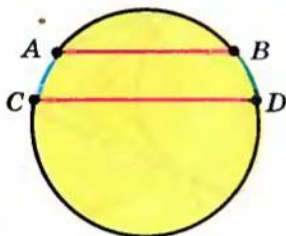
Продовження табл. 8

Типові додаткові побудови для трапеції (зображено штриховими лініями)			
			
$BK \perp AD$ $CM \perp AD$	$CM \parallel BA$	$CT \parallel BD$ T на продовженні AD	AB і DC продовжити до перетину

Таблиця 9

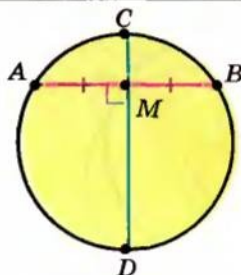
КОЛО, ХОРДИ, ДУГИ, ДОТИЧНІ Й СІЧНІ	
	<p>Коло — фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (центра).</p> <p>O — центр кола; OA — радіус; AB — діаметр; CD — хорда (відрізок, що сполучає дві точки кола).</p>
$\boxed{\text{Найбільша хорда — діаметр}}$	
Властивості дуг і хорд	
	<p>Якщо $\cup AB = \cup CD$, то $AB = CD$ Рівні дуги стягують рівні хорди.</p> <p>Якщо $AB = CD$, то $\cup AB = \cup CD$ Рівні хорди стягують рівні дуги.</p>

Продовження табл. 9



Якщо $AB \parallel CD$,
то $\cup AB = \cup BD$

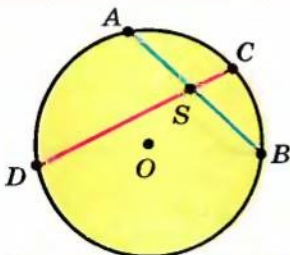
Паралельні хорди відтинають на колі рівні дуги.



Якщо CD — діаметр, AB — хорда, яка відрізняється від діаметра,

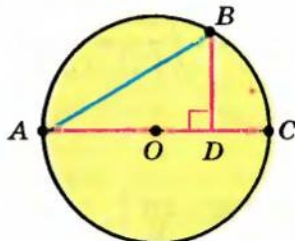
$CD \perp AB,$	$AM = MB,$
то $AM = MB$	то $CD \perp AB.$
(і $\cup AC = \cup CB$).	

Діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду (і дуги, які вона стягує) навпіл (і навпаки).



$$AS \cdot SB = CS \cdot SD$$

де S — точка перетину хорд AB і CD .



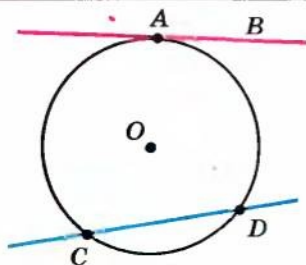
Якщо AB — хорда, AC — діаметр, $BD \perp AC$,

то

$$AB^2 = AD \cdot AC$$

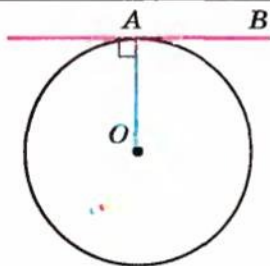
$$BD^2 = AD \cdot DC$$

Властивості дотичних і січних



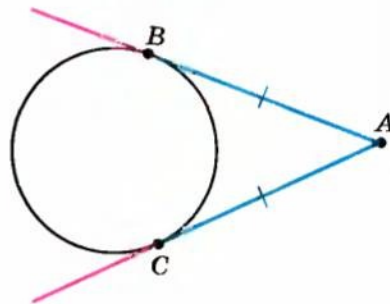
Пряму, що має з колом лише одну спільну точку, називають **дотичною до кола**.

AB — дотична; A — точка дотику;
 CD — січна (пряма, що має з колом дві спільні точки).



$$OA \perp AB$$

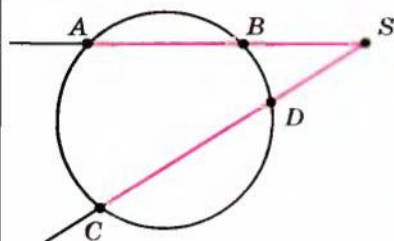
Дотична перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.



$$AB = AC$$

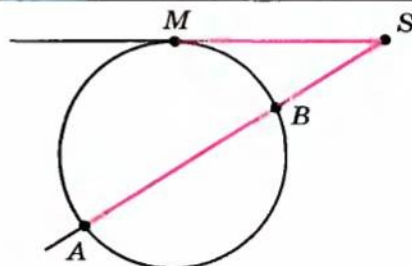
(B і C — точки дотику)

Якщо з однієї точки до одного кола проведено дві дотичні, то відрізки дотичних рівні між собою.



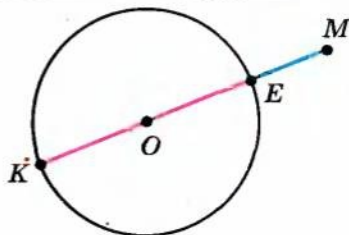
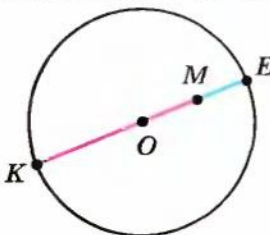
$$SA \cdot SB = SC \cdot SD$$

де SA і SC — дві січні, які перетинають коло відповідно в точках A, B, C, D



$$SA \cdot SB = SM^2$$

де SM — дотична, M — точка дотику; SA — січна, яка перетинає коло в точках A і B



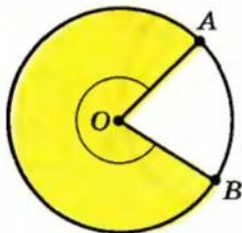
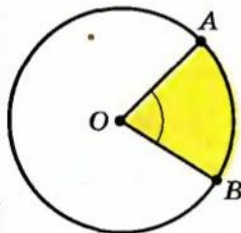
Найбільшу і найменшу відстані від даної точки до точок кола вимірюють по прямій, що проходить через дану точку й центр кола.

ME — найменша відстань від точки M до точок кола;

MK — найбільша відстань від точки M до точок кола.

Таблиця 10

КУТИ У КОЛІ

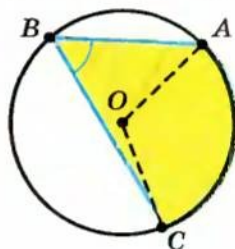


$\angle AOB$ — центральний кут

(його вершина збігається із центром кола)

$$\angle AOB = \cup AB$$

Центральний кут вимірюють дугою, на яку він спирається.

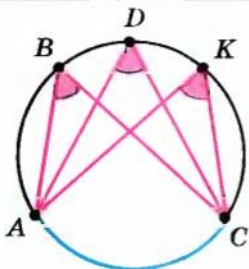


$\angle ABC$ — вписаний кут

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} \angle AOC$$

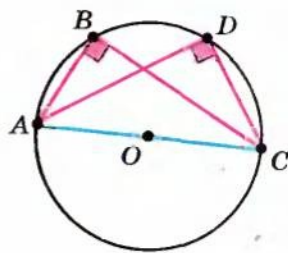
Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається, і дорівнює половині центрального кута, що спирається на цю дугу.

Властивості вписаних кутів



$$\angle ABC = \angle ADC = \angle AKC$$

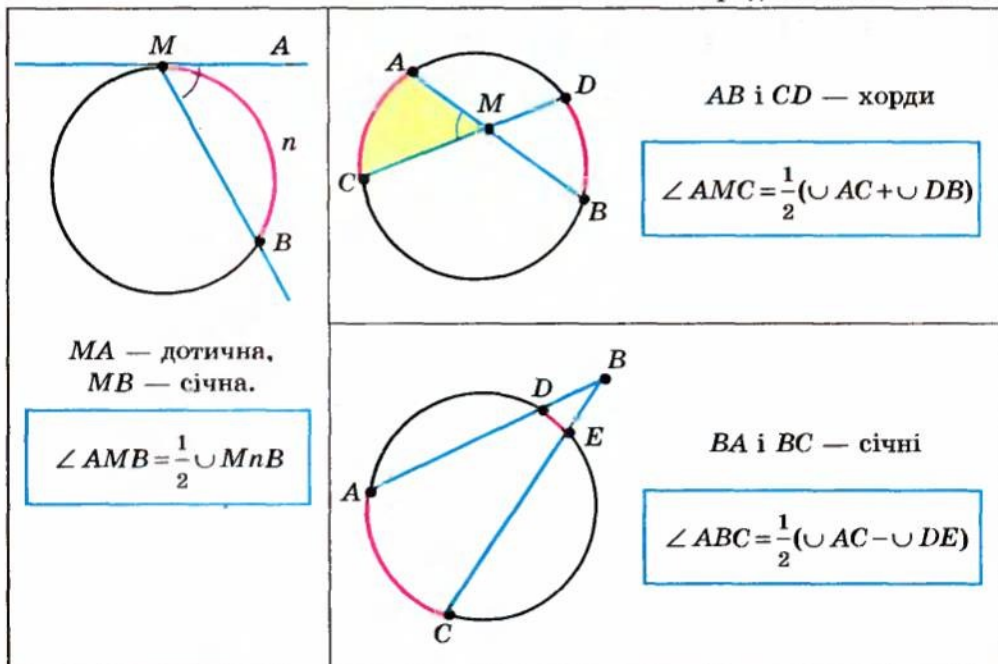
Вписані кути, які спираються на одну і ту саму дугу, рівні між собою.



$$\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$$

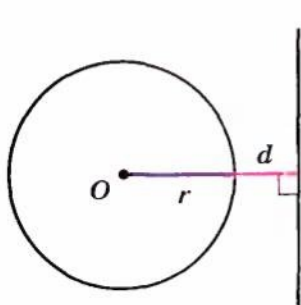
Вписаний кут, що спирається на діаметр, дорівнює 90° .

Продовження табл. 10



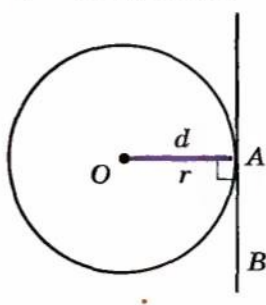
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ ТА КОЛА

Нехай d — відстань від центра кола до прямої,
 r — радіус кола.



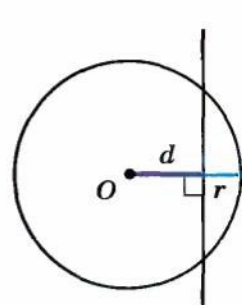
$$d > r$$

Спільних точок немає.



$$d = r$$

Одна спільна точка
(пряма AB — дотична).

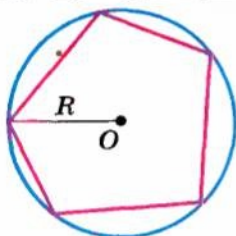


$$d < r$$

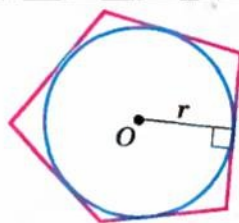
Дві спільні точки
(пряма AB перетинає коло).

Таблиця 11

ВПИСАНІ ТА ОПИСАНІ МНОГОКУТНИКИ (ОПИСАНЕ ТА ВПИСАНЕ КОЛА)



Вписаний многокутник — усі вершини лежать на колі (коло — *описане* навколо многокутника).



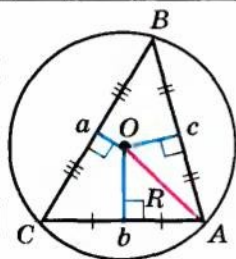
Описаний многокутник — усі сторони є дотичними до кола (коло — *вписане* в многокутник).

$$S_{\text{опис}} = \frac{Pr}{2}$$

де P — периметр, r — радіус вписаного кола.
 Центр O — точка перетину бісектрис внутрішніх кутів многокутника

1. КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА, І КОЛО, ВПИСАНЕ В ТРИКУТНИК

Описане коло



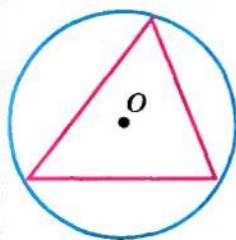
Центр O — точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника
 $OA = OB = OC = R$.

$$R = \frac{a}{2\sin A}$$

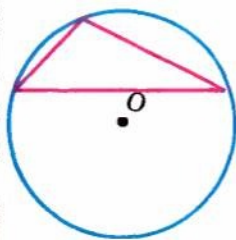
$$R = \frac{abc}{4S}$$

Положення центра описаного кола

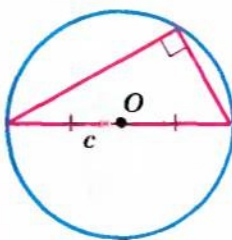
Гострокутний трикутник



Тупокутний трикутник



Прямокутний трикутник

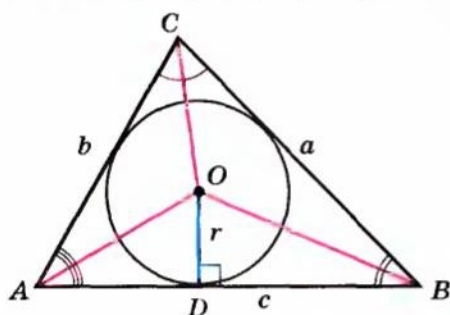


Центр O — середина гіпотенузи

$$R = \frac{c}{2}$$

Продовження табл. 11

Вписане коло

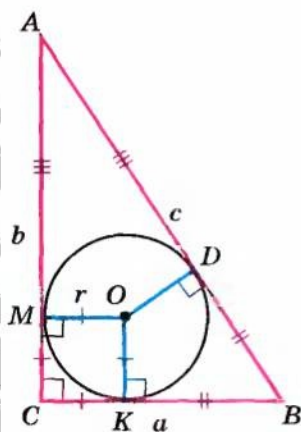


Центр O — точка перетину бісектрис внутрішніх кутів трикутника

$$OD = r; OD \perp AB$$

$$r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{a+b+c}$$

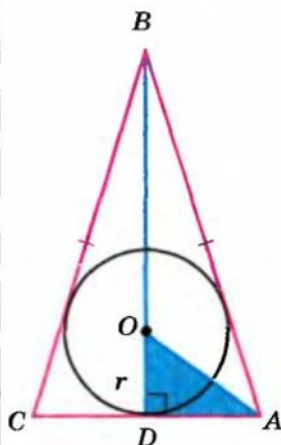
У прямокутному трикутнику



$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

$OK = OM =$
 $= OD = r$
($OKCM$ —
квадрат)

У рівнобедреному трикутнику

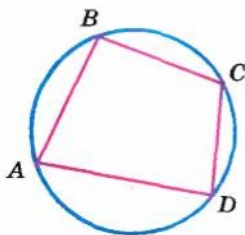


$AB = DC$;
 BD — висота,
медіана
і бісектриса;
 AO —
бісектриса
кута A

$$OD = r$$

2. ВПИСАНИЙ ТА ОПИСАНИЙ ЧОТИРИКУТНИКИ

Вписаний чотирикутник

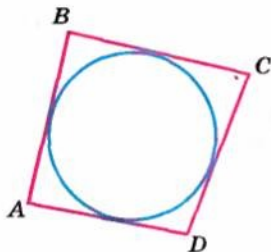


$$\begin{aligned} \angle A + \angle C &= 180^\circ, \\ \angle B + \angle D &= 180^\circ \end{aligned}$$

(сума протилежних кутів дорівнює 180°)
І навпаки: якщо в чотирикутника сума протилежних кутів дорівнює 180° , то навколо нього можна описати коло.

Закінчення табл. 11

Описаний чотирикутник



$$AB + CD = BC + AD$$

(суми довжин протилежних сторін рівні)

І навпаки: якщо в опуклого чотирикутника суми довжин протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло.

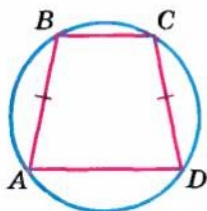
Прямокутник



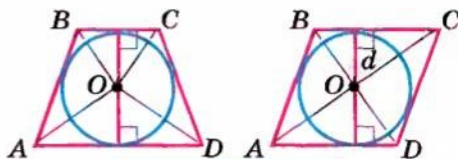
$$R = \frac{1}{2}d$$

1. Якщо паралелограм вписано в коло, то він — прямокутник.
2. Центр кола, описаного навколо прямокутника, — точка перетину його діагоналей.

Трапеція і ромб



Якщо $ABCD$ — вписана трапеція,
то $AB = CD$.

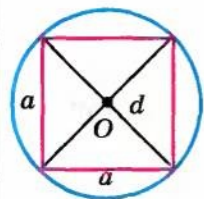


$$d_{\text{впис. кола}} = h$$

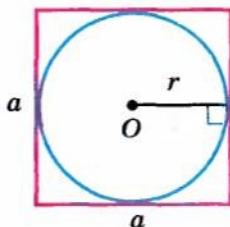
O — точка перетину бісектрис внутрішніх кутів.

$$\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$$

Квадрат



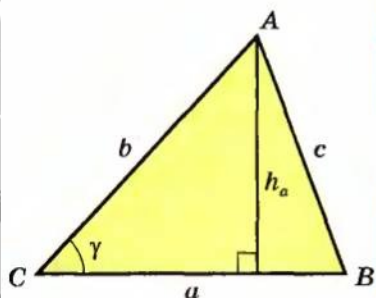
$$R_{\text{опис}} = \frac{1}{2}d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



$$r_{\text{впис}} = \frac{1}{2}a$$

ПЛОЩІ ФІГУР

1. ПЛОЩА ТРИКУТНИКА



$$S = \frac{1}{2} a h_a$$

$$S = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$$

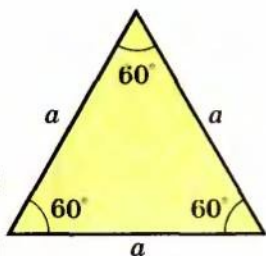
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{— формула Герона}$$

$$\left(p = \frac{a+b+c}{2} \right).$$

$$S = \frac{abc}{4R}, \quad \text{де } R \text{ — радіус описаного кола}$$

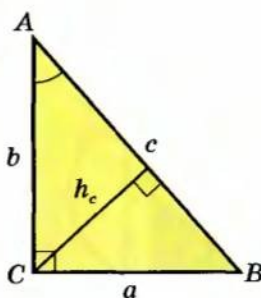
$$S = r p, \quad \text{де } r \text{ — радіус вписаного кола}$$

Правильний трикутник



$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Прямокутний трикутник

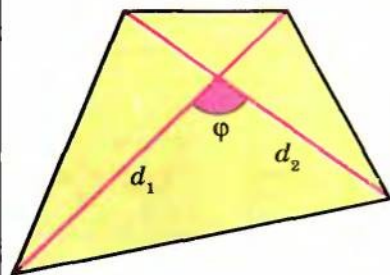


$$S = \frac{1}{2} a b$$

$$S = \frac{1}{2} c h_c$$

$$S = \frac{1}{2} b c \sin A$$

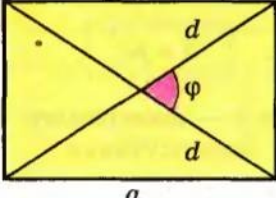
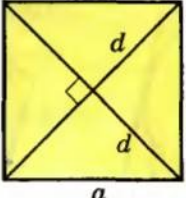
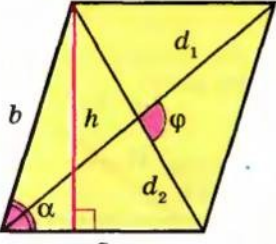
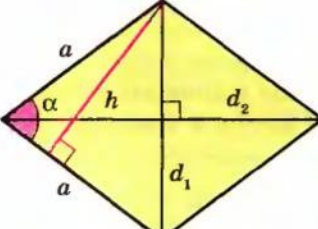
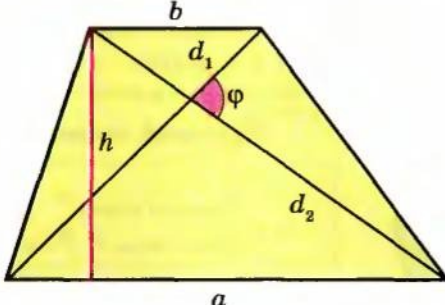
2. ПЛОЩА ЧОТИРИКУТНИКА



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

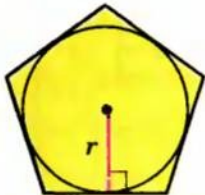
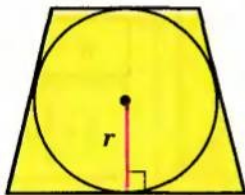
Площа чотирикутника дорівнює половині добутку діагоналей на синус кута між ними.

Продовження табл. 12

Прямокутник		Квадрат	
	$S = ab$ $S = \frac{1}{2}d^2 \sin \varphi$		$S = a^2$ $S = \frac{1}{2}d^2$
Паралелограм			
	$S = ah$ $S = ab \sin \alpha$ $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin \varphi$		
Ромб			
	$S = ah$ $S = a^2 \sin \alpha$ $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$		
Трапеція			
	$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ $S = mh$, <i>m</i> — довжина середньої лінії $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin \varphi$		

Продовження табл. 12

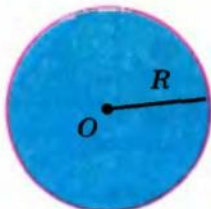
Площа описаного багатокутника



$$S = pr$$

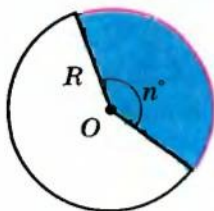
де p — півпериметр
 багатокутника,
 r — радіус вписаного кола

3. ПЛОЩА КРУГА ТА ЙОГО ЧАСТИН. ДОВЖИНА КОЛА ТА ЙОГО ЧАСТИН



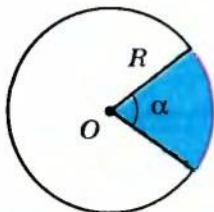
$$S = \pi R^2 \quad \text{— площа круга.}$$

$$C = 2\pi R \quad \text{— довжина кола.}$$



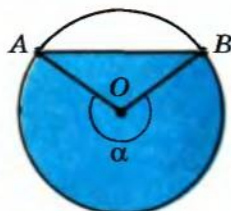
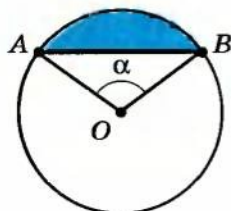
$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ \quad \text{— площа кругового сектора, який відповідає центральному куту в } n \text{ градусів.}$$

$$l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot n^\circ \quad \text{— довжина дуги, що відповідає центральному куту в } n \text{ градусів.}$$



$$S = \frac{\pi R^2}{2\pi} \cdot \alpha = \frac{R^2 \alpha}{2} \quad \text{— площа кругового сектора, який відповідає центральному куту в } \alpha \text{ радіан.}$$

$$l = \frac{2\pi R}{2\pi} \cdot \alpha = R\alpha \quad \text{— довжина дуги, що відповідає центральному куту в } \alpha \text{ радіан.}$$



Круговий сегмент

$$S_{\text{кругового сегмента}} = S_{\text{кругового сектора}} \mp S_{\Delta AOB}$$

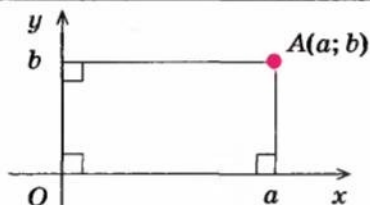
(при $\alpha < 180^\circ$ знак «-»,
 при $\alpha > 180^\circ$ знак «+»)

Таблиця 13

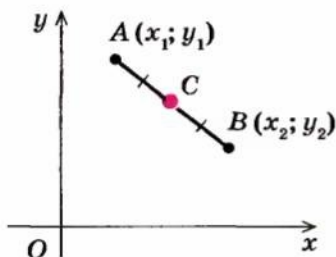
ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

1. ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ

Поняття координат точки



Формули



Координати середини відрізка

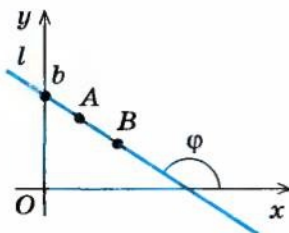
C — середина AB

$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$
-----------------------------	-----------------------------

Відстань між точками

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Рівняння прямої

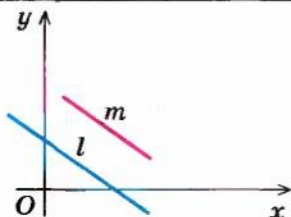
У загальному вигляді $ax + by + c = 0$ З кутовим коефіцієнтом (при $b \neq 0$)

$$y = kx + b \quad \text{— пряма } l$$

$$k = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{— кутовий коефіцієнт}$$

Для прямої AB: $k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Умова паралельності прямих

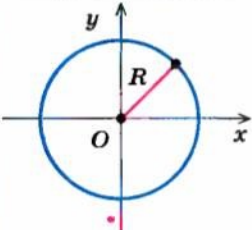
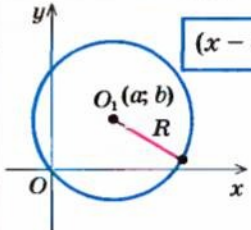
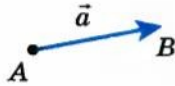

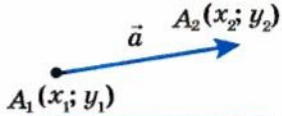
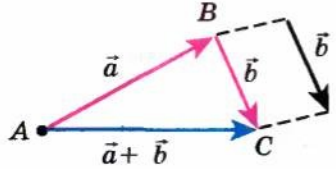
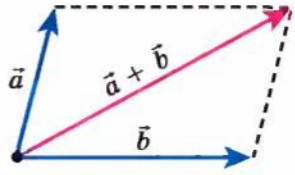


$$y = k_1x + b_1 \quad \text{— пряма } l$$

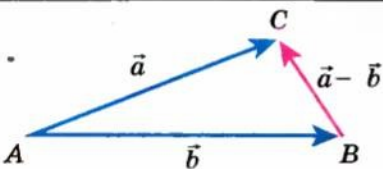
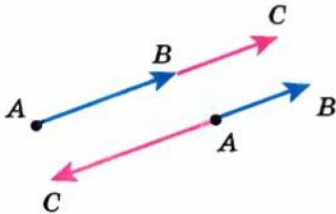
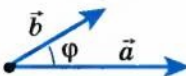
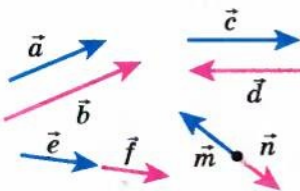
$$y = k_2x + b_2 \quad \text{— пряма } m$$

$$l \parallel m \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$$

Продовження табл. 13

Рівняння кола	
 $x^2 + y^2 = R^2$ <p>Центр кола — початок координат.</p>	 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ <p>Центр кола — точка $O_1(a, b)$.</p>
2. ВЕКТОРИ	
 <p>Вектором називають напрямлений відрізок.</p> $\overline{AB} = \vec{a}$	<p>Довжину цього відрізка називають довжиною (модулем, абсолютною величиною) вектора.</p> $ \vec{a} = AB$
Рівні вектори	Координати вектора
 $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{b} \\ \text{вектори } \vec{a} \text{ і } \vec{b} \text{ однаково напрямлені} \end{cases}$	 $\vec{a}(a_1; a_2),$ <p>де $a_1 = x_2 - x_1,$ $a_2 = y_2 - y_1$</p> $ \vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
3. ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ	
Сума векторів	
Правило трикутника	Правило паралелограма
 $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$	 <p>У координатах</p> $\vec{a}(a_1; a_2) + \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$

Закінчення табл. 13

Різниця векторів	
	<p style="text-align: center;">У координатах</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> $\vec{a}(a_1; a_2) - \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$ </div>
Множення вектора на число	
	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> $\overline{AC} = \lambda \overline{AB}$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> $\lambda \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a}$ </div> </div> <p>При $\lambda > 0$ вектор $\lambda \vec{a}$ і вектор \vec{a} однаково напрямлені ($\vec{a} \neq \vec{0}$).</p> <p>При $\lambda < 0$ вектор $\lambda \vec{a}$ і вектор \vec{a} протилежно напрямлені ($\vec{a} \neq \vec{0}$).</p> <p style="text-align: center;">У координатах</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> $\lambda \cdot (a_1; a_2) = (\lambda a_1; \lambda a_2)$ </div>
Скалярний добуток векторів	
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos \varphi$ </div> <p style="color: red; text-align: center;"><i>Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними.</i></p> <p style="text-align: center;">У координатах</p> <p style="text-align: center;">$\vec{a}(a_1; a_2); \vec{b}(b_1; b_2)$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ </div>
4. КОЛІНЕАРНІ ВЕКТОРИ	
	<p>Ненульові вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.</p> <p><i>Колінеарні вектори або однаково напрямлені, або протилежно напрямлені.</i></p>
<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> $\vec{a} \text{ і } \vec{b} \text{ колінеарні} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$ </div>	<p style="text-align: center;">(відповідні координати пропорційні)</p>

Відповіді до вправ

§ 1

2. Тупокутний. 4. 6; $6\sqrt{3}$; $6\sqrt{3}$. 5. $4,25\pi$ см². 6. 5. 7. $\sqrt{7}$. 8. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{3}}$.
 9. $10\sqrt{3}$; 60° , 120° , 60° , 120° . 10. 10 см. 11. 8 см і 15 см. 12. 87 см².
 13. 156 см². 14. 9 см і 25 см. 15. $\frac{2ab}{a+b}$. 16. 2 см, 3 см і 5 см. 17. $25\sqrt{2}$ см².
 19. 100 см². 23. 42, 5π. 24. $10\sqrt{3}$. 25. 14,4. 26. $a\sqrt{3}$. 27. $4\sqrt{3}$. 28. 150.
 29. 17. Точка *O* знаходиться поза квадратом. 30. $3\sqrt{2}-3$.

§ 2

1. Координати вершин: $(a; 0)$, $(0; b)$, $(0; 0)$. Координати середин від-
 різків: $(\frac{a}{2}; 0)$, $(0; \frac{b}{2})$, $(0; 0)$. 2. 1) Координати вершин: $(a; 0)$, $(0; a)$,
 $(0; 0)$, $(a; a)$, координати точки перетину діагоналей: $(\frac{a}{2}; \frac{a}{2})$; 2) коорди-
 нати вершин: $(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0)$, $(0; \frac{a\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0)$, $(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2})$, координати
 точки перетину діагоналей: $(0; 0)$. 3. Координати вершин: $(-a; 0)$, $(0; b)$,
 $(a; 0)$, координати середин сторін: $(-\frac{a}{2}; \frac{b}{2})$, $(\frac{a}{2}; \frac{b}{2})$, $(0; 0)$. 4. Координати
 вершин: $(a; 0)$, $(0; b)$, $(0; 0)$, $(a; b)$, координати точки перетину діагоналей:
 $(\frac{a}{2}; \frac{b}{2})$. 5. Координати вершин: $(-a; 0)$, $(0; b)$, $(a; 0)$, $(0; -b)$. 16. $\cos \varphi = \frac{17}{5\sqrt{13}}$.

§ 3

2. Так. 4. Так. 5. Одну або безліч. 8. Ні. 9. 1) Так; 2) так; 3) ні.
 10. Безліч. 11. 1) Ні; 2) ні. 12. Ні. 13. Збігаються. 16. 1) Так; 2) так; 3) ні.
 17. 1) Так; 2) так. 18. 1) Ні; 2) так. 19. Ні. 20. 1) AA_1 і AB ; AB і BB_1 і т. д.;
 2) AA_1 , A_1D_1 , A_1B_1 ; A_1B_1 , BB_1 , B_1C_1 і т. д.; 3) площини AA_1B_1B і $A_1B_1C_1D_1$;
 площини $ABCD$ і AA_1B_1B і т. д.; 4) площини ABD , ABB_1 , ADD_1 ; площини
 ABC , ABB , BCC_1 і т. д. 22. Не обов'язково. Три.

§ 4

1. 1) Точка *C*; 2) пряма CC_1 . 2. 1) Точка *B*; 2) пряма BC . 8. Ні.

§ 5

10. 1; 5; 7; 10; безліч. 13. $12\sqrt{3}$. 14. $5\sqrt{2}$.

§ 6

1. 1) AB і A_1D_1 ; AB і CC_1 і т. д. 2) AB і CC_1 ; AB і B_1C_1 і т. д.; 3) AS
 і DC ; SB і DC і т. д.

2. Прямі можуть перетинатися або бути мимобіжними. 3. Ні. 4. Ні.
 8. Не завжди. 9. 1) Три; 2) п'ятнадцять; 3) $3C_n^4$. 10. 1) AB і CD ; AA_1 і BB_1

і т. д.; 2) AB і A_1B_1 ; AA_1 і BB_1 і т. д.; 3) AB і CD ; BC і AD . 13. Ні. 15. Ні.
 17. 1) 4 м; 2) 3 дм; 3) $\frac{a+b}{2}$. 18. 1) 1 м; 2) 0,5 дм; 3) $\left| \frac{a-b}{2} \right|$. 19. 5 см.

§ 7

1) DCC_1D_1 , $A_1B_1C_1D_1$; 2) $ABCD$, BCC_1B_1 ; 3) ADD_1A_1 , ABB_1A_1 . 2. AD і BC мають спільну точку з площиною α ; $DC \parallel \alpha$. 4. Ні. 5. Ні. 8. Безліч. 9. Безліч. 13. 1) 12 см; 2) 4 см; 3) 4 см.

§ 8

1. 1) $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 і DCC_1D_1 і т. д.; 2) ABC і $A_1B_1C_1$.
 2. 1) Ні; 2) так, три пари. 3. Ні. 4. Ні. 5. Так. 6. Так. 7. Ні. Якщо пряма паралельна площині. 8. Ні. 10. Не завжди. 15. Третя площина або перетинає дві дані площини, або паралельна їм. 17. Три площини можуть мати спільну точку, або спільну пряму, або перетинатися по трьох різних прямих. 22. а. 27. 30 см, 45 см. 28. 20 см, 30 см.

§ 9

1. Відрізок або трикутник. 2. 1) Так; 2) так; 3) так. 3. 1) Відрізок або паралелограм; 2) відрізок або паралелограм; 3) відрізок або трапеція.
 4. 1) Так; 2) так; 3) так; 4) ні. 5. Ні. Твердження виконується, якщо площина проекції паралельна площині ромба. 6. 1) Так; 2) ні; 3) ні.
 7. Провести медіани цього трикутника. 8. Провести середні лінії цього трикутника. 8. Ні. 9. Так. 14. 6 см; 2) $\frac{a+b+c}{3}$. 17. 3,5.

§ 10

1. Наприклад, паралельність протилежних сторін зберігається; рівність сусідніх сторін не зберігається. 2. Наприклад, паралельність протилежних сторін зберігається.

§ 11

1. Ні. Для точок, що лежать у площині, яка паралельна площині проекції і проходить через центр проектування.

2. Так.

3. Якщо дві дані прямі паралельні та лежать у площині, яка паралельна площині проекції. Якщо кожна дана пряма і центр проектування визначають площини, що перетинаються по прямій, яка проходить через центр проектування і паралельна площині проекції, то дані прямі проектуються в паралельні прямі.

4. Якщо площина проектування розташована між фігурою і центром проектування, то під час центрального проектування одержимо фігуру, схожу на дану, але зменшену.

5. Якщо центр проектування розташований між фігурою і площиною проектування, то під час центрального проектування одержимо не-ревернуте зображення фігури. Таке зображення використовується під час фотографування.

6. Якщо фігура розташована між площиною проектування і центром проектування, то під час центрального проектування одержимо фігуру, схожу на дану, але збільшену. Таке зображення використовується під час показу кінофільмів.

7. Фігура та її зображення — подібні фігури.

§ 12

1. 1) Так; 2) так; 3, так; 4) ні; 5) ні. 2. 1) Так; 2) так; 3) так; 4) так; 5) ні; 6) ні. 3. 1) Так; 2) ні. 4. 1) Так; 2) так; 3) ні. 5. Ромб. 6. Правильний трикутник. 7. П'ятикутник. 8. Трапеція. 12. Трикутник, чотирикутник, п'ятикутник. 13. Так. 23. 1) $\frac{9a^2}{8}$; 2) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

§ 13

1. 1) 90° ; 2) 60° . 2. 45° . 3. 60° . 4. Безліч. 5. Одну. 6. Безліч. 8. 1) 90° ; 2) 0° ; 3) 90° . 9. 1) 45° ; 2) 60° . 10. 60° . 11. $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$. 12. 1) 6,5 см; 2) 15 см; 3) $\sqrt{a^2 - b^2 + d^2}$. 13. 90° . 14. Прямі b і c мимобіжні або перетинаються, кут між ними дорівнює 90° . 15. Прямі b і c мимобіжні або перетинаються, кут між ними дорівнює 30° . 18. 60° . 20. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. 22. $\sqrt{3}a$.

§ 14

1. Ні. 2. Якщо прямі перпендикулярні (перетинаються або мимобіжні). 3. Пряма перпендикулярна до площини трикутника. 4. 1) Ні; 2) так. 5. Перпендикулярні. 6. Так. 7. Так. 18. 5 м. 19. $\approx 7,8$ м. 20. 9 м. 21. Довжина перпендикуляра $\sqrt{2a^2 - b^2}$, довжина сторони квадрата $\sqrt{b^2 - a^2}$. 22. Довжина перпендикуляра $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$, довжина сторін прямокутника $\sqrt{c^2 - b^2}$ і $\sqrt{c^2 - a^2}$. 23. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$. 24. $\sqrt{a^2 - b^2}$. 25. $KA = KB = 20$ см; $DA = DB = 32$ см. 28. 5 см, 27 см, 31 см, 53 см (залежно від розміщення вершин паралелограма відносно площини).

§ 15

1. Проекція діагоналі A_1C куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на грань $ABCD$ — AC , на грань $ADD_1 A_1$ — $A_1 D$, на грань $AA_1 B_1 B$ — $A_1 B$, на грань $BB_1 C_1 C$ — $B_1 C$, на грань $DD_1 C_1 C$ — $D_1 C$, на грань $A_1 B_1 C_1 D_1$ — $A_1 C_1$. 2. $SA < SB = SD < SC$. 3. Найбільший відрізок SB , найменший — SA . 4. 40 см. 5. 16 см. 6. 9 см. 7. $AD = 6$ см, проекція AD на площину α дорівнює 4,8 см. 9. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. 10. 6,5 м. 11. $\frac{\sqrt{4a^2 - 2b^2}}{2}$. 12. 6 см і 15 см. 13. 1) 15 см і 41 см; 2) 4 см і 8 см. 14. 9 см. 16. $3\sqrt{41}$ см. 17. 8 см і $2\sqrt{66}$ см. 18. Так. 19. Так. 22. 2 см. 25. 24 см. 26. $6\sqrt{3}$ см. 27. 20 см. 28. 13 см. 29. 7 см, 7 см, 9 см, 9 см.

§ 16

1. 1) $\angle B_1AB$; 2) $\angle AB_1A_1$; 3) $\angle D_1AB_1$; 4) $\angle AB_1B$; 5) $\angle D_1BD$; 6) $\angle D_1BB_1$;
 7) $\angle B_1CB$; 8) $\angle B_1CC_1$. 2. 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 3. 1) $2d$; 2) $d\sqrt{2}$; 3) $\frac{2d}{\sqrt{3}}$.
 5. Коло. 7. Ні. 45° . 10. Не обов'язково. 11. Паралельні або перетинаються.
 12. 30° . 13. 30° . 14. $\arctg \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{arccctg } \sqrt{2} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. 16. 45° .
 17. 30° . 18. $a\sqrt{2}$. 19. a . 20. 30° . 21. Кут нахилу висоти, опущеної на
 основу трикутника, до площини α . 23. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \beta$.

§ 17

- Прямий. 2. $\angle ACP$. 3. $\angle OCB$. 4. Так. 5. $\angle MBC$. 6. $2a$. 7. 45° . 8. 3,36 м.
 9. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 10. $\frac{a}{2}$. 12. 30° . 13. 1) $\frac{1}{14}$; 2) $\frac{2}{31}$. 14. 13 м. 15. 60° .
 16. 1) $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha + c^2}$; 2) 60° . 17. 1) $\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$; 2) $2a^2$. 18. 1) 60° ; 2) $\text{tg } \varphi = 2$.
 19. 45° .

§ 18

1. Ні. 2. Перетинаються (зокрема, перпендикулярні), паралельні, мимобіжні (зокрема, перпендикулярні). 3. Ні. 4. Ні. 5. Ні. 6. Ні. 7. Так.
 8. Безліч або одну. 11. Безліч. 13. 1) 90° ; 2) 60° . 14. Так. 15. Так. 16. Ні.
 18. 1) 11 м; 2) 13 м; 3) 8 м; 4) 7 м; 5) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; 6) $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.
 19. $\sqrt{a^2 + b^2}$. 20. 1,3 м. 21. 1,7 м. 22. 1) 45° ; 2) $\cos \varphi = 0,2$. 23. $a\sqrt{\cos 2\varphi}$.
 24. 1) $4\sqrt{73}$; 2) 12. 25. 1) $\sqrt{30}$; 2) $\sin \varphi = \frac{\sqrt{15}}{10}$. 26. 1) Так; 2) так; 3) ні.
 27. $8(1 + \sqrt{3})$ та $16\sqrt{2}$.

§ 19

1. 30° . 2. 1) $a\sqrt{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. 3. a . 4. 1) a ; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 5. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.
 6. $\sqrt{b^2 - a^2}$. 7. 1) 4,25 см; 2) 6,75 см; 3) $\frac{a+b}{2}$. 8. 1) 1,05 см; 2) 0,65 см;
 3) $\left| \frac{a+b}{2} \right|$. 10. 6 м. 11. $\frac{a}{2}$. 12. 5 м і 3 м. 13. $\sqrt{c^2 + b^2 - a^2}$. 17. 1) a ; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$;
 3) a ; 4) a ; 5) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 6) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. 18. $a \sin \alpha$. 19. Пряма, яка паралельна даним
 площинам і лежить між ними на відстані, що дорівнює половині відстані

- між даними площинами. 20. $\frac{\sqrt{4h^2 + 2a^2}}{2}$. 21. $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$. 22. $\arccos \frac{a}{\sqrt{3b}}$.
23. C — точка перетину відрізка AB_1 , де B_1 — точка, яка лежить на промені BO ($BO \perp \alpha$ і $O \in \alpha$) причому $BO = OB_1$. 24. $\sqrt{2}$ м. 25. $2\sqrt{2}$ м.
26. $\sqrt{a^2 + b^2}$. 27. $\sqrt{a^2 - \frac{d^2}{8}}$. 28. 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні. 30. $\sqrt{23}$ м.
31. 10. 32. 5 або 9. 33. 90° . 34. 8, 8, 8. 35. 4, 4, 4, 8. 36. 1) Мимобіжні; 2) паралельні; 3) 5. 37. 1) $3\sqrt{7}$; 2) $3\sqrt{3}$.

§ 20

1. Ні. 2. Куля. 3. Відрізок, що дорівнює другій діагоналі. 4. 1) Ні; 2) так; 3) так. 5. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 6. 1) Так; 2) так; 3) ні. 7. 1) Так; 2) ні. 8. Ні. 9. 1) Ні; 2) так; 3) так. 10. 1) Так; 2) так; 3) ні. 11. Прямокутником, що дорівнює основі. 12. 10 см^2 . 13. 1) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{3a^2}{8}$; 3) $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$. 14. 1) 30° ; 2) 0° .
15. $\arccos \frac{b^2 \sin \alpha}{a^2}$. 17. $\frac{1}{3}$. 19. $\frac{1}{2}a^2$. 20. Правильний шестикутник.
21. $a^2\sqrt{3}$. 25. $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$. 26. 72 см або 90 см. 27. $\frac{7a^2}{8\cos\varphi}$. 28. $2\sqrt{m^2 + 2a^2}$.
29. Ромб; $DD_1 = 6$; $P = 20$; $S = 4\sqrt{34}$.

§ 21

3. 0,36 м або 0,44 м. 4. 0,06 м або 0,26 м. 5. $\frac{an}{m+n}$ або $\frac{am}{m+n}$.
6. $\sqrt{2b^2 - a^2}$. 7. 4 м. 8. 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) a ; 3) a ; 4) a ; 5) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$; 6) a ; 7) $\frac{a}{\sqrt{3}}$. 9. $4\frac{8}{13}$.
10. $2\sqrt{3}$. 12. $\frac{a\sqrt{30}}{8}$. 13. 12.

§ 22

1. Коло. 2. Дві площини, які паралельні даній площині і знаходяться на відстані h від неї. 3. Площина, яка паралельна даним площинам і лежить посередині між ними. 4. Пряма, яка перпендикулярна до площини трикутника і проходить через центр кола, вписаного в даний трикутник. 6. Площина, яка паралельна даній площині і знаходиться від неї на відстані, що дорівнює половині відстані від даної точки до даної площини. 7. Площина, яка перпендикулярна до даної прямої і проходить через дану на ній точку.

Предметний покажчик

- Аксиома** 39
Аксиоматичний метод 53
Аксиоми планіметрії 8
 — стереометрії 35, 39
- Відстань між мимобіжними прямими** 164, 168
 — — — —, способи обчислення 180, 183
 — — точками
 — — точкою та площиною 164, 165
 — — точкою та прямою
 — — паралельними площинами 164, 166
 — — — прямою та площиною 164, 166
 — — фігурами 180, 182
- Геометричне місце точок** 189
 — тіло 37
- Двогранний кут** 148, 149
 — —, грань 148, 149
 — —, ребро 148, 149
Діагональний переріз прямокутного паралелепіпеда
Достатня умова 16
- Зображення фігури** 93, 98
 — — в центральній проєкції 107
- Кут між мимобіжними прямими** 120
 — — площинами 149
 — — похилою та площиною 142
 — — прямими 119
- Лнійний кут двогранного кута** 148, 149
- — — —, практичні способи побудови 148, 150
- Метод площ** 19
 — слідів 46, 48
Методи розв'язування геометричних задач 17
Мимобіжні прямі 64
 — — перпендикулярні 120
Многогранник 37
 —, бічна грань 37
 —, бічне ребро 37
 —, вершина 37
 —, діагональ 37
 —, переріз 46, 48
- Необхідна умова** 16
- Ознака мимобіжних прямих** 65
 — паралельності двох площин 77, 78
 — — — прямих 73
 — — площин 127
 — — прямої та площини 72
 — перпендикулярності площин 157, 158
 — — прямої та площини 125
Ортогональне проєктування 175
- Паралелепіпед прямокутний** 36
Паралельне проєктування 88
 — —, властивості 89
 — —, напрям 89
Паралельні площини 77, 78
 — площина та пряма 71, 72
 — прямі 64, 65
Перпендикуляр 135
 —, основа 135
Перпендикулярні відрізки

- площини 157
- прями 119
- Півпростір 55
- , границя 55
- Піраміда 37
- правильна 37
- , бічна грань 37
- , бічне ребро 37
- , вершина 37
- , висота 37
- , основа 37
- Площа ортогональної проекції
многокутника 175, 176
- Площина зображення 93
- проєкцій
- січна 48
- Подібні фігури 40
- Похила 135
- , основа 135
- Призма 37
- , висота 166
- , основа 37
- Проекція похилої 135
- фігури 89
- Простір 36
- Р**адіус кулі 37
- Рівні фігури 39
- С**ічна площина 48
- Стереометрія 36
- Сфера 37
- Т**еорема про три перпендикуляри
134, 136
- Тетраєдр 37
- правильний 37
- Тіло геометричне 37
- Ф**ігура неплоска 36
- Ц**ентр кулі 37
- Центральне проєкування 104,
105

ЗМІСТ

<i>Передмова для учнів</i>	3
<i>Передмова для вчителя</i>	5
Розділ 1. Систематизація та узагальнення фактів і методів планіметрії	7
§ 1. Логічна побудова шкільного курсу планіметрії. Методи розв'язування геометричних задач	8
1.1. Логічна побудова шкільного курсу планіметрії	8
1.2. Методи розв'язування планіметричних задач.....	17
§ 2. Приклади застосування координат і векторів для розв'язування геометричних задач.....	27
Розділ 2. Вступ до стереометрії	34
§ 3. Аксиоми стереометрії та їх найпростіші наслідки.....	35
§ 4. Найпростіші задачі на побудову перерізів многогранників.....	46
§ 5. Поняття про аксіоматичний метод у геометрії.....	53
<i>Відомості із історії</i>	58
Розділ 3. Паралельність прямих і площин у просторі	63
§ 6. Розміщення двох прямих у просторі: прямі, що перетинаються, паралельні прямі, мимобіжні прямі	64
§ 7. Паралельність прямої та площини	71
§ 8. Паралельність двох площин	77
§ 9. Паралельне проектування. Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії.....	88
§ 10. Властивості зображень деяких многокутників у паралельній проекції.....	98
§ 11. Центральне проектування. Зображення просторових фігур під час центрального проектування	104
§ 12. Методи побудови перерізів многогранників	109
<i>Відомості із історії</i>	115
Розділ 4. Перпендикулярність прямих і площин у просторі	117
§ 13. Кут між прямими в просторі. Перпендикулярні прямі	118
§ 14. Перпендикулярність прямої та площини.....	124
§ 15. Перпендикуляр і похила. Теорема про три перпендикуляри.....	134
§ 16. Кут між прямою та площиною.....	142
§ 17. Двогранний кут. Кут між площинами.....	148
§ 18. Перпендикулярність площин	157
§ 19. Відстані між точками, прямими та площинами	164
§ 20. Ортогональне проектування	175
§ 21. Відстані між фігурами. Знаходження відстані між мимобіжними прямими	180
§ 22. Геометричні місця точок у просторі.....	189
<i>Додаток. Система опорних фактів курсу планіметрії</i>	201
<i>Відповіді до вправ</i>	232
<i>Предметний покажчик</i>	237