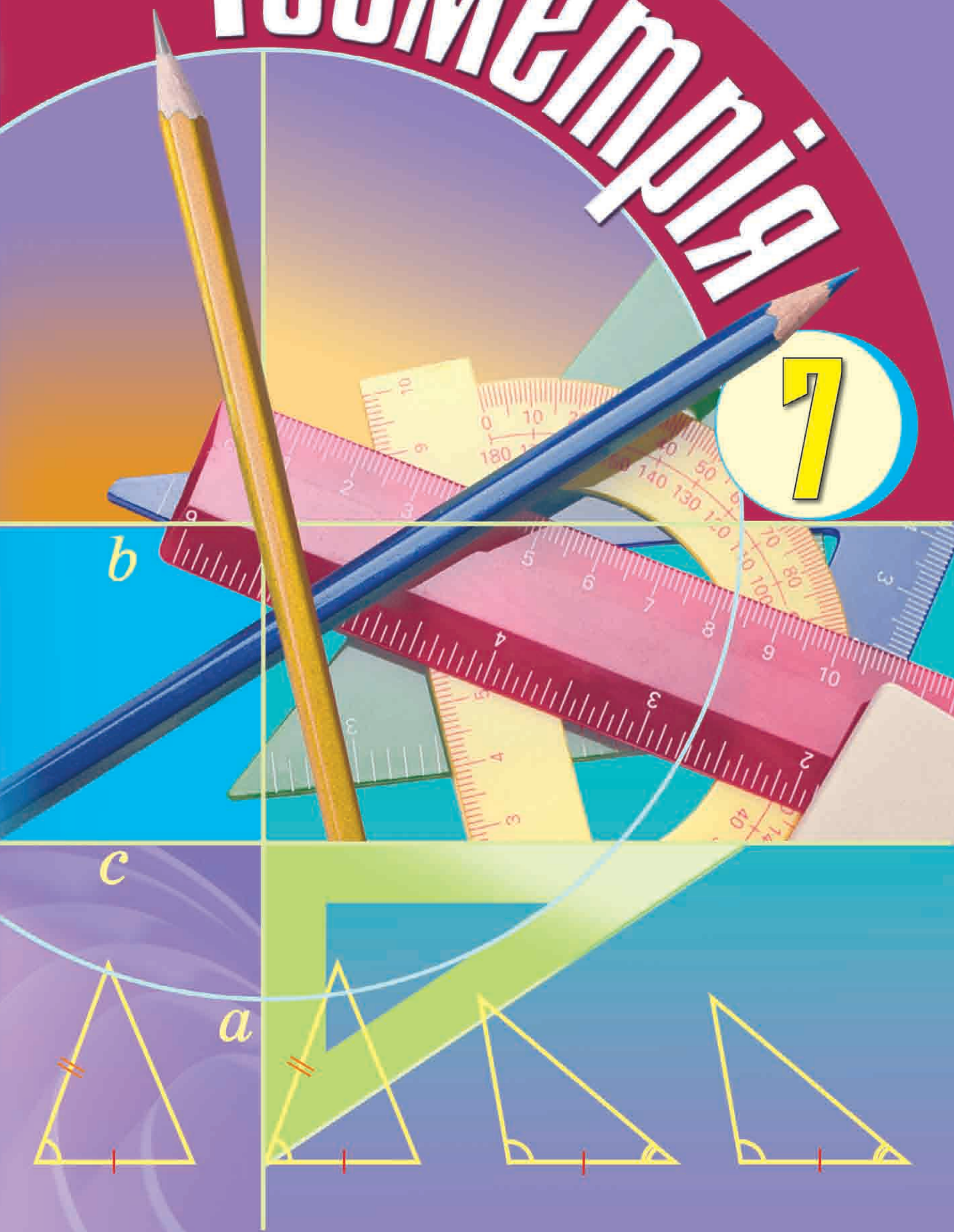
О. С. Істер

ВИДАВНИЦТВО ОСВІТА

Геометрія

7



О. С. Істер

Геометрія

ПІДРУЧНИК ДЛЯ 7 КЛАСУ
ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

КИЇВ
«ОСВІТА»
2007

ББК 22.151я721
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(Рішення колегії Міністерства освіти і науки України,
Протокол № 5/1—19 від 12.04.07, Лист № 1/11—2183 від 28.04.07)

Істер О. С.

І-89 Геометрія: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл.— К.: Освіта, 2007.— 159 с.

ISBN 978-966-04-0678-0.

ББК 22.151я721

ISBN 978-966-04-0678-0

Юні друзі!

Ви починаєте вивчати одну з найдавніших і найцікавіших наук — геометрію. У перекладі з грецької слово *геометрія* означає *землемірство* (*гео* — земля, *метрео* — міряти). Ще давні єгиптяни та греки близько 3000 років тому вміли виконувати різні вимірювальні роботи, необхідні для розмітки ділянок, спорудження будівель, прокладання доріг тощо. У процесі практичної діяльності землемірів, будівельників, астрономів, мореплавців, художників поступово складалися правила геометричних вимірювань, побудов та обчислень.

Отже, геометрія виникла на основі практичної діяльності людей. Спочатку вона використовувалася суто практично, але в подальшому сформувалася як самостійна математична наука.

Оволодіти матеріалом курсу вам допоможе цей підручник. Він складається з чотирьох розділів, що містять 27 параграфів. Під час вивчення теоретичного матеріалу зверніть увагу на текст, надрукований жирним шрифтом. Його треба запам'ятати.

У підручнику ви побачите умовні позначення. Ось що вони означають:

— важливі геометричні твердження (означення, аксіоми, властивості);

— запитання до теоретичного матеріалу, на які необхідно дати відповідь після його вивчення;

— вправи для повторення;

— «ключова» задача, висновки якої використовуються під час розв'язування інших задач;

2 — задача для розв'язування у класі;

3 — задача для розв'язування вдома.

Усі вправи мають позначення залежно від рівня навчальних досягнень, якому вони відповідають:

① — вправа початкового рівня;

② — вправа середнього рівня;

③ — вправа достатнього рівня;

④ — вправа високого рівня;

* — вправа підвищеної складності.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання ви зможете, якщо виконаєте «Завдання для перевірки знань». Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника — «Завдання для перевірки знань за курс геометрії 7 класу» та «Задачі підвищеної складності».

Шановні вчителі!

Матеріал підручника розбито на уроки, що, на думку автора, полегшує роботу з ним. Водночас автор не виключає можливості, що ви дещо інакше розподілите навчальні години. Кількість вправ у більшості уроків подано «із запасом», тож обирайте їх для виконання на уроках та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня індивідуалізації навчання тощо.

Більшість параграфів складається з кількох уроків. Отже, темою кожного уроку, що входить до параграфа, є назва (або частина назви) параграфа.

Шановні батьки!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, підручник чітко вас зорієнтує — матеріал якого уроку (чи уроків) треба опрацювати вдома, які вправи розв'язати.

Крім того, ви можете запропонувати дитині додатково розв'язати вдома вправи, які не були розв'язані на уроці. Це сприятиме кращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати «Завдання для перевірки знань», подані в підручнику. Це допоможе їй пригадати основні типи вправ та підготуватися до тематичного оцінювання.

Автор

Розділ I

НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Урок 1

§ 1. ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ. ТОЧКА, ПРЯМА, ПРОМІНЬ

З уроків математики вам уже відомі деякі геометричні фігури: точка, пряма, відрізок, промінь, кут (мал. 1), трикутник, прямокутник, коло (мал. 2). На уроках геометрії ви розширите й поглибите знання про ці фігури, ознайомитеся з новими важливими фігурами та їх властивостями.

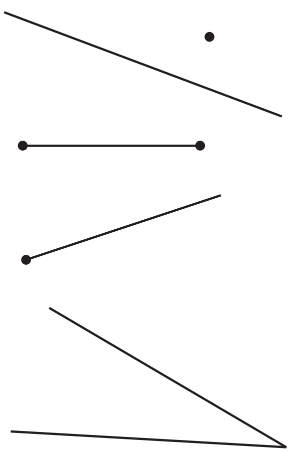
Геометрія — це наука про властивості геометричних фігур.

Найпростішою геометричною фігурою є ***точка***.

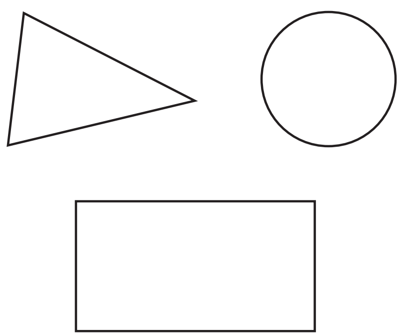
З точок складаються всі інші геометричні фігури. Отже, будь-яка множина точок є ***геометричною фігурою***.

Частина геометричної фігури теж є геометричною фігурою. Геометричною фігурою є й об'єднання кількох геометричних фігур. На малюнку 3 фігура складається з прямокутника та двох трикутників.

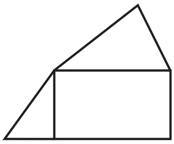
Однією з основних геометричних фігур є ***площина***. Уявлення про частину площини дає поверхня стола, шибки, стелі



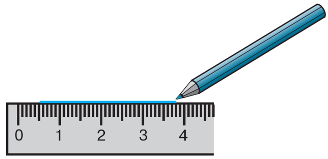
Мал. 1



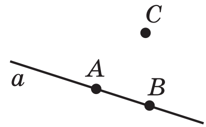
Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4



Мал. 5

тощо. Площину в геометрії вважають рівною та необмеженою; вона не має краю та не має товщини. У 7—9 класах ви вивчатимете частину шкільного курсу геометрії, яка називається ***планіметрією***. Планіметрія вивчає властивості фігур на площині.

Основними геометричними фігурами на площині є ***точка*** і ***пряма***. Прямі можна проводити за допомогою лінійки (мал. 4). При цьому зображуємо частину прямої, а всю пряму уявляємо нескінченною в обидва боки. Прямі найчастіше позначають малими латинськими буквами a, b, c, d, ..., а точки — великими латинськими буквами A, B, C, D...

На малюнку 5 зображено пряму a і точки A, B, C. Точки A і B *лежать* на прямій a; говорять також, що точки A і B *належать прямій* a, або, що пряма a *проходить через точки* A і B. Точка C *не лежить* на прямій a; інакше кажучи, точка C *не належить* прямій a, або пряма a *не проходить через точку* C.

! ***Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.***

Для зручності замість слів «точка A належить прямій a» користуються записом $A \in a$, а замість слів «точка C не належить прямій a» — записом $C \notin a$.

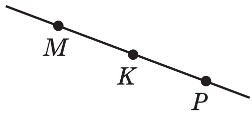
Зауважимо, що через точки A і B не можна провести іншу пряму, яка не збігається з прямою a.

! ***Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.***

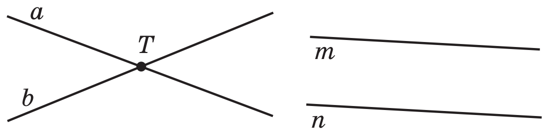
Тут і далі, говорячи про «дві точки», «дві прямі» вважатимемо, що ці точки, прямі — різні.

Пряму, на якій позначено дві точки, наприклад A і B, можна записати двома буквами: AB або BA. На малюнку 5 точка C не належить прямій AB (це записують так $C \notin AB$), говорять також, що *точки A, B і C не лежать на одній прямій*.

Точки M, K і P лежать на одній прямій (мал. 6), причому точка K лежить між точками M і P.



Мал. 6



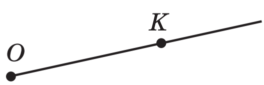
Мал. 7

З трьох точок на прямій одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.

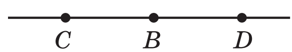
Якщо дві прямі мають спільну точку, то кажуть, що вони *перетинаються* в цій точці. На малюнку 7 прямі a і b перетинаються в точці T, а прямі m і n не перетинаються.

Проведемо пряму та позначимо на ній точку A (мал. 8). Ця точка ділить пряму на дві частини, кожну з яких разом з точкою A називають ***променем***, що виходить з точки A. Точка A називається ***початком*** кожного з променів. Промені позначають двома великими латинськими буквами, перша з яких означає початок променя, а друга — деяку точку на промені (наприклад, промінь OK на малюнку 9).

Мал. 8



Мал. 9

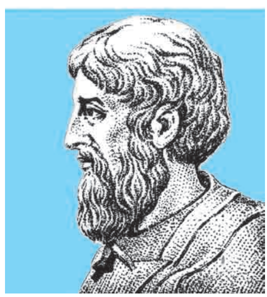


Мал. 10

Два промені, що мають спільний початок та доповнюють один одного до прямої, називають ***доповняльними***. На малюнку 10 промінь BC є доповняльним для променя BD, і навпаки, промінь BD є доповняльним для променя BC.

Історичні відомості

Перші відомості про властивості геометричних фігур люди діставали з практичної діяльності та спостережень за навколишнім світом. Перший твір, що містить найпростіші геометричні відомості про знаходження площ деяких фігур та об’ємів тіл, дійшов до нас із Стародавнього Єгипту. Він датується XVII ст. до н. д. Описані у цьому творі правила обчислення площ та об’ємів були отримані з практики. Ніяких логічних доведень їх справедливості не наводилося. Самі ж значення площ та об’ємів, обчислені за такими правилами, були приблизними.



Фалес
(бл. 625–548 до н. д.)

Піфагор
(бл. 580—500 до н. д.)

Становлення геометрії як математичної науки відбулося пізніше у Стародавній Греції. Грецькі геометри *Фалес*, *Піфагор*, *Демокріт* (бл. 460—370 до н. д.) та інші збагатили науку численними теоремами. Також ці вчені зробили кроки до строгого обґрунтування геометричних фактів та теорем.

Що вивчає геометрія? • Наведіть приклади геометричних фігур. • Назвіть основні геометричні фігури на площині. • Як позначають прямі та очки? • Скільки прямих можна провести через дві точки? • Що таке промінь? • Як позначають промені? • Які промені називають доповняльними?

1①. Назвіть на малюнку 11:

1) точки, що належать прямій a;
2) точки, що належать прямій b;
3) точку, що належить і прямій a, і прямій b;
4) точки, що належать прямій a і не належать прямій b;
5) точки, що не належать ні прямій a, ні прямій b.

2①. Позначте в зошиті точки M і N і проведіть через них пряму. Назвіть цю пряму. Позначте точку K, що належить побудованій прямій, та точку L, яка їй не належить. Зробіть відповідні записи.

3①. Проведіть пряму a. Позначте дві точки, що належать цій прямій, і дві точки, які їй не належать. Назвіть точки та запишіть взаємне розміщення прямої і точок, використовуючи символи $\in$ і $\notin$.

4②. На малюнку 12 прямі MN та KL перетинає пряма AB в точках C і D. Запишіть:

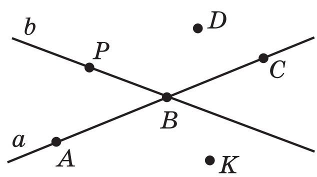
1) усі промені з початком у точці C;

2) пари доповняльних променів, початок яких — точка D.

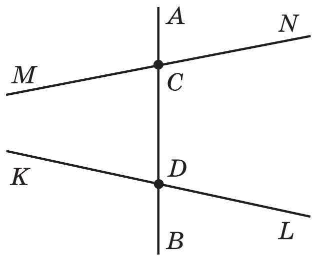
5②. 1) Запишіть усі промені, зображені на малюнку 13.

2) Чи є серед записаних променів пари доповняльних променів?

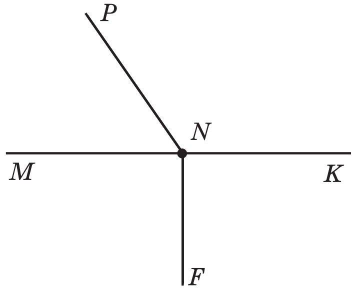
6③. Позначте в зошиті точки M, N, F так, щоб через них можна було провести пряму. Запишіть усі можливі назви цієї прямої.



Мал. 11



Мал. 12



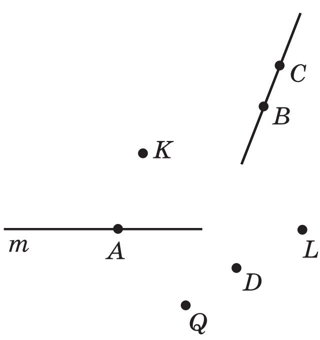
Мал. 13

7③. Позначте в зошиті точки *B, C* і *D* так, щоб записи *CD* і *CB* позначали одну й ту саму пряму. Як ще можна назвати цю пряму?

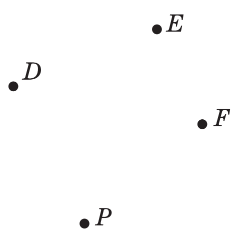
8③. Використовуючи малюнок 14:
1) визначте, чи перетинаються прямі *m* і *CB*;
2) запишіть усі точки, які належать прямій *m*;
3) запишіть усі точки, які належать прямій *BC*;
4) запишіть точки, які не належать ні прямій *m*, ні прямій *BC*.

9④. Позначте в зошиті чотири точки *D, E, F, P* (мал. 15).
1) Через кожні дві точки проведіть пряму. Запишіть усі утворені прямі.
2) Скільки всього прямих утворилося?
3) На скільки частин розбивають ці прямі площину?

10④. Точка *A* ділить пряму *m* на два промені. За якої умови точки *B* і *C* цієї прямої належать одному променю; різним променям?



Мал. 14



Мал. 15

Урок 2

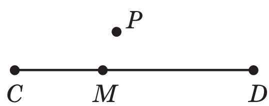
§ 2. ВІДРІЗОК. ВИМІРЮВАННЯ ВІДРІЗКІВ. ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ

! ***Відрізком* називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома її точками, разом з цими точками. Ці точки називають *кінцями відрізка*.**

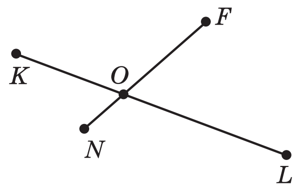
На малюнку 16 зображено відрізок AB; точки A і B — його кінці. На малюнку 17 точка M належить відрізку CD, а точка P йому не належить.

На малюнку 18 відрізки KL і FN мають єдину спільну точку O. Кажуть, що відрізки KL і FN *перетинаються* в точці O.

Мал. 16



Мал. 17



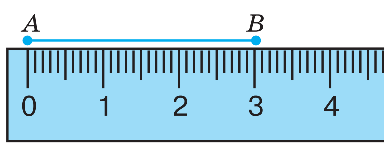
Мал. 18

На практиці часто доводиться вимірювати відрізки, тобто знаходити їх довжини. Для цього необхідно мати ***одиничний відрізок*** (одиницю вимірювання). Одиницями вимірювання довжини є 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

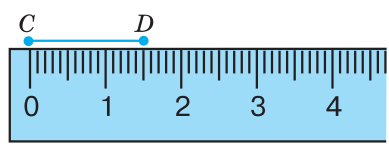
Для вимірювання відрізків використовують різні вимірювальні інструменти. Одним з таких інструментів є лінійка з поділками. На малюнку 19 довжина відрізка AB дорівнює 3 см, а на малюнку 20 довжина відрізка CD — 1 см 5 мм, або 1,5 см, або 15 мм. Записують це так: $AB = 3$ см, $CD = 1{,}5$ см $= 15$ мм.

! ***Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля.***

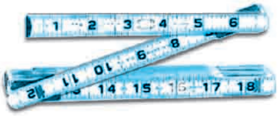
Іншими інструментами, якими можна вимірювати довжини відрізків, є складаний метр (мал. 21), рулетка (мал. 22), клейончастий сантиметр (мал. 23).



Мал. 19



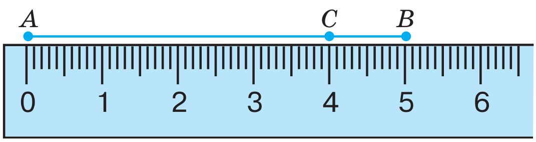
Мал. 20



Мал. 21

Мал. 22

Мал. 23



Мал. 24

На малюнку 24 зображено відрізок AB. Точка C ділить його на два відрізки: AC і CB. Бачимо, що $AC = 4$ см, $CB = 1$ см, $AB = 5$ см. Таким чином, $AC + CB = AB$.

! ***Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.***

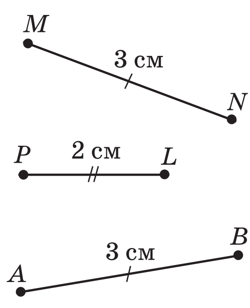
Довжину відрізка називають також ***відстанню між його кінцями***. На малюнку 24 відстань між точками A і C дорівнює 4 см.

! **Два відрізки називають *рівними*, якщо рівні їх довжини.**

З двох відрізків більшим вважають той, довжина якого більша. На малюнку 25 довжина відрізка MN дорівнює довжині відрізка AB, тому ці відрізки рівні. Можна записати: $MN = AB$. На цьому ж малюнку довжина відрізка MN більша за довжину відрізка PL. Кажуть, що відрізок MN більший за відрізок PL, записують так: $MN > PL$.

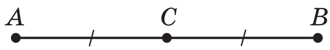
На малюнках рівні відрізки прийнято позначати однаковою кількістю рисочок, а нерівні — різною кількістю рисочок.

Точку відрізка, яка ділить його навпіл, тобто на два рівні відрізки, називають ***серединою відрізка***.



Мал. 25

На малюнку 26 $AC = 2$ см, $CB = 2$ см, тому C — середина відрізка AB.

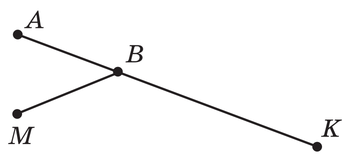


Мал. 26

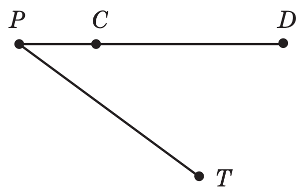
Що називають відрізком? • Що таке кінці відрізка? • Які вам відомі одиниці вимірювання довжини? • Якими інструментами вимірюють відрізки? • Що називають відстанню між двома точками? • Які відрізки називають рівними? • Яку точку називають серединою відрізка?

11①. Назвіть усі відрізки, зображені на малюнку 27. Виміряйте довжини деяких двох із них.

12①. Запишіть всі відрізки, зображені на малюнку 28, та виміряйте довжини двох із них.



Мал. 27



Мал. 28

13①. Позначте у зошиті точки C і D та знайдіть відстань між ними.

14②. Накресліть відрізки AB та MN так, щоб $AB = 7$ см 2 мм, $MN = 6$ см 3 мм. Порівняйте відрізки AB і MN.

15②. Накресліть відрізки KL та FP так, щоб $KL = 5$ см 9 мм, $FP = 6$ см 8 мм. Порівняйте відрізки KL і FP.

16②. Точка C лежить між точками A і B (мал. 29). Знайдіть:

1) AB, якщо $AC = 5$ см, $CB = 2$ см;

2) BC, якщо $AB = 12$ дм, $AC = 9$ дм.

17②. Точка K лежить між точками P і Q (мал. 30). Знайдіть:

1) PQ, якщо $PK = 3$ дм, $KQ = 7$ дм;

2) PK, якщо $PQ = 8$ см, $KQ = 6$ см.

18③. Які з точок, позначених на малюнку 31, лежать між двома іншими? Запишіть відповідні рівності.

Мал. 29

Мал. 30

Мал. 31

19③. На прямій позначено точки P, L і M, причому $PL = 42$ мм, $PM = 3$ см 2 мм, $LM = 74$ мм. Яка з точок лежить між двома іншими? Відповідь обґрунтуйте.

***20*③.** Чи можуть точки A, B і C лежати на одній прямій, якщо $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 9$ см?

21④. Точка C належить відрізку AB, довжина якого 7,6 дм. Визначте довжини відрізків AC і BC, якщо AC менший за BC у 3 рази.

***22*④.** Точка M належить відрізку CD, довжина якого 8,4 см. Визначте довжини відрізків CM і DM, якщо CM більший за DM на 0,6 см.

23④. Точки C, D і M лежать на одній прямій. Знайдіть відстань між точками C і D, якщо відстань між точками C і M дорівнює 5,2 см, а відстань між точками D і M — 4,9 см. Скільки розв'язків має задача?

Урок 3

§ 3. КУТ. ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ. БІСЕКТРИСА КУТА

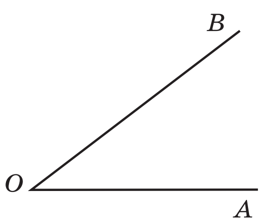
! ***Кут*** **— це геометрична фігура, яка складається з точки і двох променів, що виходять з цієї точки.**

Промені називаються ***сторонами кута***, а їх спільний початок — ***вершиною кута***.

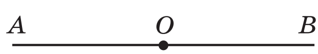
На малюнку 32 зображено кут з вершиною O і сторонами OA і OB. Такий кут можна назвати по-різному: кутом O, або кутом AOB, або кутом BOA. У другому та третьому варіанті назви кута буква O, що позначає його вершину, ставиться посередині. Слово «кут» можна замінити знаком $\angle$, записавши кут так: $\angle O$, або $\angle AOB$, або $\angle BOA$.

Розгорнутий кут — це кут, сторони якого є доповняльними променями (мал. 33).

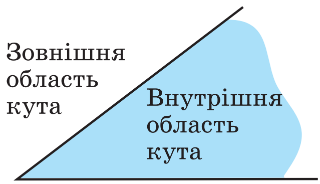
Будь-який кут розділяє площину на дві частини. Якщо кут не є розгорнутим, то одну з частин називають ***внутрішньою***, а



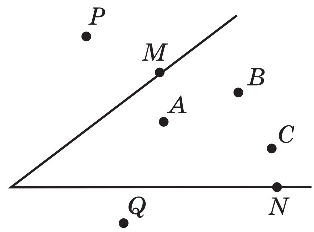
Мал. 32



Мал. 33



Мал. 34



Мал. 35

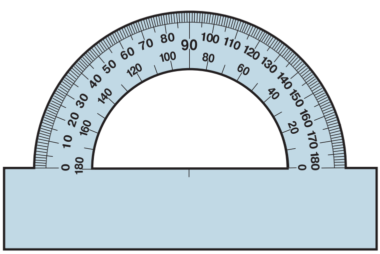
другу — ***зовнішньою областю*** цього кута (мал. 34). На малюнку 35 точки A, B і C належать внутрішній області кута (лежать всередині кута), точки M і N належать сторонам кута, а точки P і Q належать зовнішній області кута (лежать поза кутом). Якщо кут є розгорнутим (дорівнює 180°), то будь-яку з двох частин, на які він розділяє площину, можна вважати внутрішньою областю кута. За одиницю вимірювання кутів приймають ***градус*** — кут, який становить $\frac{1}{180}$ розгорнутого кута. Позначають градус знаком $^\circ$. Для вимірювання кутів використовують *транспортир* (мал. 36).

На малюнку 37 градусна міра кута AOB дорівнює 50°, а кута COD — 110°. Коротко кажуть: «кут AOB дорівнює 50°, кут COD дорівнює 110°»; записують так: $\angle AOB = 50^\circ$, $\angle COD = 110^\circ$.

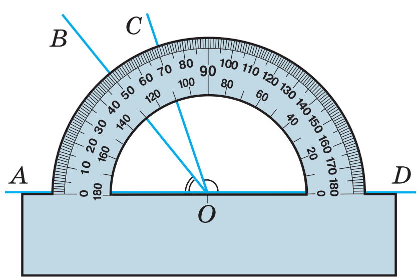
Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює $\mathbf{180^\circ}$.

Дуже малі кути вимірюють у мінутах і секундах. *Мінута* — це $\frac{1}{60}$ частина градуса, *секунда* — $\frac{1}{60}$ частина мінути. Мінути позначають знаком $'$, секунди — знаком $''$. Отже, $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

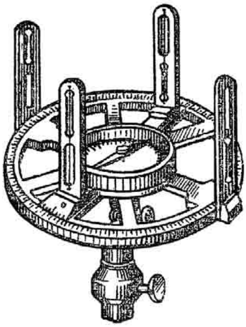
На місцевості кути вимірюють *астролябією* (мал. 38).



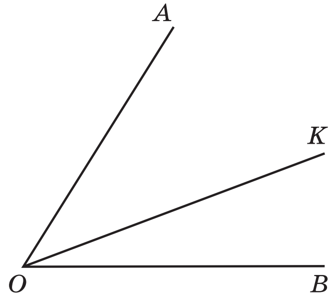
Мал. 36



Мал. 37

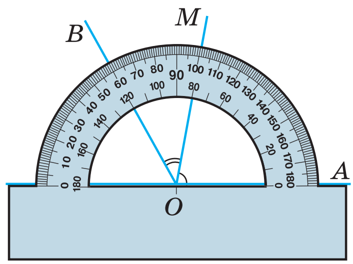


Мал. 38



Мал. 39

На малюнку 39 промінь OK виходить з вершини кута AOB і лежить у його внутрішній області, тобто промінь OK проходить між сторонами кута AOB.



Мал. 40

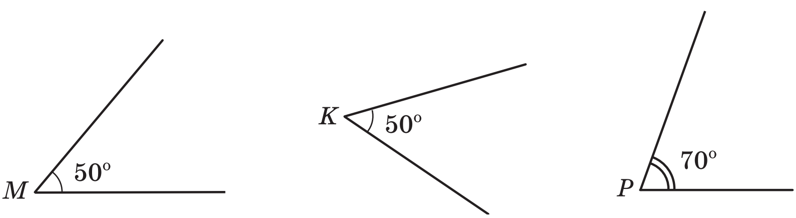
На малюнку 40 промінь OM ділить кут AOB на два кути: BOM і MOA. Бачимо, що $\angle BOM = 40^\circ$, $\angle MOA = 80^\circ$, $\angle AOB = 120^\circ$. Таким чином,

$$\angle AOB = \angle BOM + \angle MOA.$$

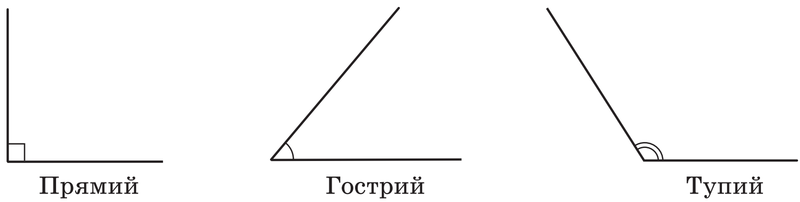
Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

Два кути називаються *рівними*, якщо їх градусні міри рівні.

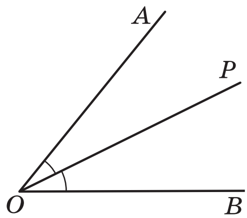
З двох кутів більшим вважають той, градусна міра якого більша. На малюнку 41 градусна міра кута M дорівнює 50°, градусна міра кута K також дорівнює 50°. Тому ці кути рівні. Можна записати: $\angle M = \angle K$. На цьому самому малюнку градусна міра кута P дорівнює 70°, тому кут P більший за кут M.



Мал. 41



Мал. 42



Мал. 43

Записують це так: $\angle P > \angle M$. На малюнках рівні кути прийнято позначати однаковою кількістю дужок, нерівні — різною кількістю дужок.

Кут називається ***прямим***, якщо його градусна міра дорівнює 90°, ***гострим*** — якщо він менший від прямого, ***тупим*** — якщо він більший від прямого, але менший від розгорнутого (мал. 42). Прямий кут на малюнках позначають значком ⏋.

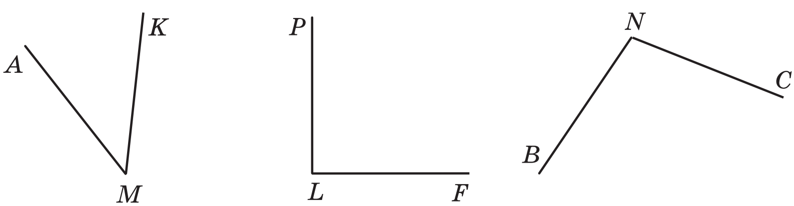
! ***Бісектрисою кута*** **називають промінь, який виходить з вершини кута, проходить між його сторонами і ділить його на два рівних кути.**

На малюнку 43 промінь *OP* — бісектриса кута *AOB*.

? Яку фігуру називають кутом? • Як позначають кут? • Що таке вершина кута; сторона кута? • Який кут називають розгорнутим? • Якими інструментами вимірюють кути? • В яких одиницях вимірюють кути? • Що означає вираз: «Промінь проходить між сторонами кута»? • Які кути називають рівними? • Який кут називають прямим; гострим; тупим? • Який промінь називають бісектрисою кута?

24①**.** Назвіть вершини і сторони кутів, зображених на малюнку 44.

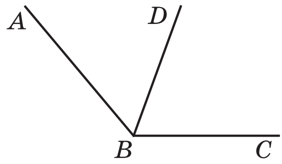
25①**.** Запишіть вершини і сторони кутів: 1) $\angle MOP$; 2) $\angle BLK$.



Мал. 44

26①. Який з даних кутів гострий, тупий, прямий, розгорнутий:

1) $\angle A = 39^\circ$; 2) $\angle B = 90^\circ$;
3) $\angle C = 91^\circ$; 4) $\angle D = 170^\circ$;
5) $\angle M = 180^\circ$; 6) $\angle Q = 79^\circ$;
7) $\angle P = 1^\circ 3'$; 8) $\angle F = 173^\circ 12'$?



Мал. 45

27②. 1) Запишіть всі кути, зображені на малюнку 45.
2) Користуючись транспортиром, знайдіть градусні міри деяких двох кутів (мал. 45) та градусну міру третього кута за допомогою обчислень.

***28*②.** Користуючись транспортиром, знайдіть градусні міри кутів, зображених на малюнку 44. Визначте вид кожного кута.

29②. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює:
1) 30°; 2) 90°; 3) 115°.

***30*②.** Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює:
1) 65°; 2) 110°.

31②. Виконайте дії: 1) $7^\circ 13' + 12^\circ 49'$; 2) $52^\circ 17' - 45^\circ 27'$.

***32*②.** 1) Виразіть у мінутах: 4°; $2^\circ 15'$;
2) Виразіть у секундах: $5'$; 2°; $1^\circ 3'$.

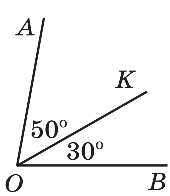
Урок 4

33①. (Усно.) Чи є промінь OK бісектрисою кута AOB (мал. 46—48)?

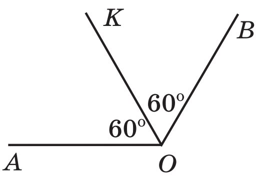
34②. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює 140°, та проведіть його бісектрису.

***35*②.** Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює 50°, та проведіть його бісектрису.

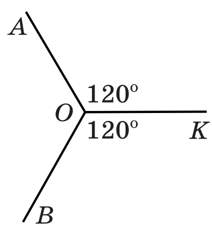
36②. Промінь OK проходить між сторонами кута BOC. Знайдіть градусну міру кута BOC, якщо $\angle BOK = 38^\circ$, $\angle KOC = 42^\circ$. Виконайте малюнок.



Мал. 46



Мал. 47



Мал. 48

37②. Промінь PC проходить між сторонами кута APB. Знайдіть градусну міру кута CPB, якщо $\angle APB = 108^\circ$, $\angle APC = 68^\circ$. Виконайте малюнок.

38③. Чи проходить промінь BK між сторонами кута ABC, якщо $\angle ABC = 52^\circ$, $\angle ABK = 57^\circ$? Відповідь обґрунтуйте.

39③. Знайдіть градусні міри кутів, утворених стрілками годинника:

1) о 18 год; 2) о 3 год; 3) о 1 год; 4) о 20 год.

40③. Знайдіть градусні міри кутів, утворених стрілками годинника:

1) о 21 год; 2) о 6 год; 3) о 19 год; 4) о 2 год.

41③. Промінь OC ділить кут AOB на два кути. Знайдіть градусну міру кута COB, якщо $\angle AOB = 60^\circ$, а кут AOC становить $\frac{2}{3}$ кута AOB.

42③. Промінь AB ділить кут MAK на два кути. Знайдіть градусну міру кута MAK, якщо $\angle MAB = 70^\circ$, а кут BAK становить 60% кута MAB.

43④. Кут MQB дорівнює 120°. Між сторонами кута проходить промінь QP, такий, що кут PQB у 4 рази менший за кут MQP. Знайдіть кути PQB і MQP.

44④. Промінь AC проходить між сторонами кута MAN, який дорівнює 86°. Знайдіть кути MAC і CAN, якщо кут MAC більший за кут CAN на 14°.

45④. Розгорнутий кут AOB поділено променями OK і OL на три частини. $\angle AOK = 140^\circ$; $\angle BOL = 100^\circ$. Знайдіть градусну міру кута LOK.

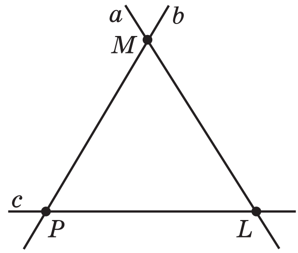
Вправи для повторення розділу I

До § 1

46①. (Мал. 49.) 1) Яка точка є точкою перетину прямих a і b?

2) Які точки належать прямій c?

3) Чи належить точка M прямій PL?



Мал. 49

47②. Побудуйте промені OK, OM і ON так, щоб промінь OM був доповняльним для променя ON.

48③. Побудуйте точки A, B і C так, щоб записи AB і AC позначали дві різні прямі.

49③. Одна з двох прямих, що перетинаються, проходить через точку M, що належить другій прямій. Що можна сказати про точку M і про точку перетину даних прямих?

50④. Точки A і B належать прямій l. Пряма m відмінна від прямої l і проходить через точку A. Чи може точка B належати прямій l? Відповідь обґрунтуйте.

До § 2

51①. Позначте у зошиті точки A, B і C та знайдіть відстані між кожною парою точок.

52②. Накресліть відрізок KL, довжина якого 6 см 8 мм. Позначте на ньому точку P так, що KP = 43 мм. Знайдіть довжину відрізка LP за допомогою обчислень.

53②. Сумою яких двох відрізків є відрізок MN (мал. 50)? Запишіть усі можливі варіанти.

Мал. 50

54③. Відрізок AB перетинають три прямі. На скільки частин вони можуть поділити відрізок?

55③. Точка C — середина відрізка AB, точка D — середина відрізка AC. Знайдіть:

1) AC, CB, AD і DB, якщо $AB = 20$ см;

2) AB, AC, AD і DB, якщо $BC = 12$ дм.

56④. Точки M і N належать відрізку CD. CD = 15 см, CM = 12 см, DN = 11 см. Знайдіть довжину відрізка NM.

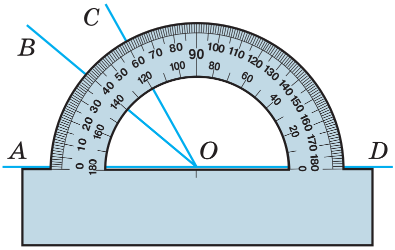
57④. Точка P належить відрізку AB. На прямій AB позначте таку точку C, що $BC = \dfrac{AP}{2}$. Скільки розв'язків має задача?

58*. Точка K належить відрізку CD, довжина якого a см. Знайдіть відстань між серединами відрізків CK і KD.

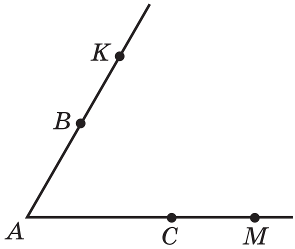
До § 3

59①. Знайдіть градусні міри кутів, зображених на малюнку 51.

60①. Два учні накреслили кути по 70°. Один з учнів сказав, що у нього кут більший, бо сторони кута довші. Чи правий цей учень?



Мал. 51



Мал. 52

61②. Випишіть всі можливі назви кута з вершиною A (мал. 52): KAC, BAM, CAM, KMA, BAC, AKM, ABC, MAK, KAM, CAK.

62②. Накресліть один гострий і один тупий кути. Побудуйте бісектриси цих кутів за допомогою транспортира.

63③. 1) На який кут повертається хвилинна стрілка годинника протягом 15 хв; 7 хв; 23 хв?

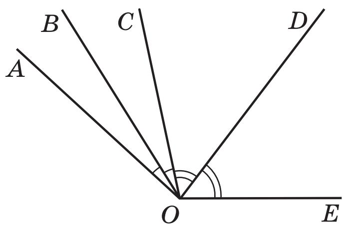
2) На який кут повертається годинна стрілка годинника протягом 1 хв; 5 хв; 45 хв?

64③. OK — бісектриса кута AOB; OL — бісектриса кута KOB. Знайдіть:

1) $\angle KOL$, якщо $\angle AOB = 120^\circ$; 2) $\angle AOB$, якщо $\angle LOB = 37^\circ$.

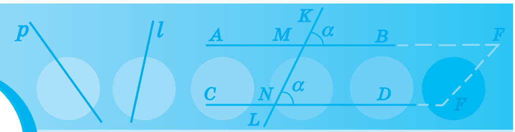
65④. Відомо, що $\angle AOB = \angle BOC$, $\angle COD = \angle DOE$ (мал. 53). Знайдіть:

1) $\angle BOD$, якщо $\angle AOE = 140^\circ$; 2) $\angle AOE$, якщо $\angle BOD = 73^\circ$.



Мал. 53

66④. Промінь OM проходить між сторонами кута AOB, який дорівнює 168°. Відомо, що $\angle AOM : \angle MOB = 3 : 4$. Знайдіть кути AOM і MOB.



Розділ II. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

Урок 5 § 4. АКСІОМИ, ОЗНАЧЕННЯ, ТЕОРЕМИ

Аксіоми геометрії — це твердження про основні властивості найпростіших геометричних фігур, прийняті як вихідні положення.

У перекладі з грецької слово «аксіома» означає «прийняте положення».

Нагадаємо деякі вже відомі вам аксіоми.

!

I. ***Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.***

II. ***Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.***

III. ***З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.***

IV. ***Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля.***

V. ***Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.***

VI. ***Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°.***

VII. ***Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.***

Твердження, в якому пояснюється зміст того чи іншого поняття (назва), називають ***означенням***. Вам уже відомі деякі означення, наприклад означення відрізка, кута, бісектриси кута.

Математичне твердження, справедливість якого встановлюється за допомогою міркувань, називають ***теоремою***, саме міркування називають *доведенням теореми*.

Кожна теорема містить ***умову*** (те, що дано) і ***висновок*** (те, що необхідно довести). Умову теореми прийнято записувати після слова «дано», а висновок — після слова «довести». Доводячи теорему, можна користуватися аксіомами, а також раніше доведеними теоремами. Ніякі інші властивості геометричних фігур (навіть якщо вони здаються нам очевидними) використовувати не можна.

Історичні відомості

Евклід
(III ст. до н. д.)

Давньогрецький учений Евклід у своїй видатній праці «Начала» зібрав і узагальнив багаторічний досвід грецьких учених. Головним здобутком Евкліда було те, що він запропонував і розвинув аксіоматичний підхід до побудови курсу геометрії. Цей підхід полягає в тому, що спочатку формулюються основні положення (аксіоми), а потім на основі цих аксіом за допомогою логічних міркувань доводять інші твердження (теореми). Такий підхід до побудови курсу геометрії використовують і тепер, формулюючи деякі з аксіом Евкліда у більш сучасному вигляді.

Саму геометрію, викладену у «Началах», називають *евклідовою геометрією*.

Значний внесок у подальший розвиток геометрії зробили інші давньогрецькі вчені, зокрема *Архімед* (бл. 287—212 до н. д.) та *Аполлоній* (III ст. до н. д.).

Які твердження називають аксіомами? • Наведіть приклади аксіом. • Що таке означення? • Що таке теорема; доведення теореми?

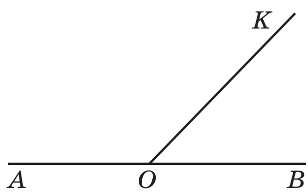
§ 5. СУМІЖНІ КУТИ

Два кути називаються *суміжними*, якщо одна сторона у них спільна, а дві інші сторони цих кутів є доповняльними променями.

На малюнку 54 кути AOK і KOB — суміжні, сторона OK у них — спільна, а OA і OB є доповняльними променями.

Теорема (властивість суміжних кутів). ***Сума суміжних кутів дорівнює* 180°.**

Доведення. Нехай $\angle AOK$ і $\angle KOB$ — суміжні кути (мал. 54). Оскільки промені OA і OB утворюють розгорнутий кут, то $\angle AOK + \angle KOB = \angle AOB = 180^\circ$. Отже, сума суміжних кутів дорівнює 180°. Теорему доведено.



Мал. 54

Твердження, які випливають безпосередньо з аксіом чи теорем, називають ***наслідками***.

Н а с л і д о к 1. ***Кут, суміжний з прямим кутом,— прямий.***

Н а с л і д о к 2. ***Кут, суміжний з гострим кутом,— тупий, а суміжний з тупим кутом,— гострий.***

Задача. Знайти міри суміжних кутів, якщо один з них на 56° більший за другий.

Р о з в' я з а н н я. Позначимо градусну міру меншого кута через x, тоді градусна міра більшого кута буде $x + 56^\circ$. Оскільки сума суміжних кутів дорівнює 180°, то можна скласти рівняння $x + x + 56^\circ = 180^\circ$. Розв'язавши його, отримаємо $x = 62^\circ$. Отже, один із шуканих кутів дорівнює 62°, а другий $62^\circ + 56^\circ = 118^\circ$.

В і д п о в і д ь. 62° і 118°.

Які кути називаються суміжними? • Чому дорівнює сума суміжних кутів?

67①. (Усно.) На яких з малюнків 55—58 кути 1 і 2 є суміжними?

68①. Чи можуть два суміжних кути дорівнювати:
1) 42° і 148°; 2) 90° і 90°; 3) 166° і 14°; 4) 23° і 156°?

69①. Чи можуть два суміжних кути дорівнювати:
1) 13° і 167°; 2) 5° і 165°; 3) 11° і 179°; 4) 91° і 89°?

70①. Знайдіть кут, суміжний з кутом: 1) 15°; 2) 113°.

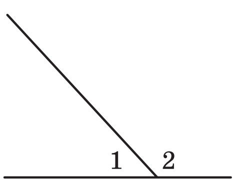
71①. Знайдіть кут, суміжний з кутом: 1) 127°; 2) 39°.

72②. Накресліть два нерівних суміжних кути так, щоб їх спільна сторона була вертикальною.

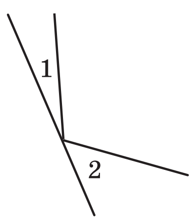
73②. Накресліть два нерівних суміжних кути так, щоб їх спільна сторона була горизонтальною.

74②. Якщо суміжні кути рівні, то вони прямі. Доведіть.

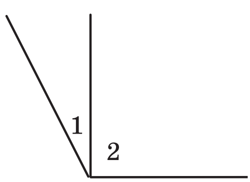
75②. Якщо кути рівні, то й суміжні з ними кути рівні. Доведіть.



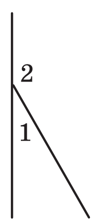
Мал. 55



Мал. 56



Мал. 57



Мал. 58

Урок 6

76②. Накресліть за допомогою транспортира $\angle MON = 50^\circ$. Побудуйте кут, суміжний з кутом MON зі спільною стороною ON. Обчисліть його градусну міру.

77②. Накресліть за допомогою транспортира $\angle APB = 115^\circ$. Побудуйте кут, суміжний з кутом APB зі спільною стороною AP. Обчисліть його градусну міру.

78②. Промінь, що проходить між сторонами кута, ділить його на кути, що дорівнюють 15° і 72°. Знайдіть градусну міру кута, суміжного з даним.

79②. Бісектриса кута M утворює з його стороною кут, що дорівнює 36°. Знайдіть градусну міру кута, суміжного з кутом M.

80③. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них на 18° менший за другий.

81③. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них у 3 рази більший за другий.

82③. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них становить $\frac{3}{7}$ другого.

83③. Дано тупий кут A і гострий кут B, градусні міри яких відносяться, як 4 : 3. Знайдіть градусні міри цих кутів, якщо кут, суміжний з одним із них, дорівнює 80°.

84④. Знайдіть кут між бісектрисами суміжних кутів.

85④. Два кути відносяться, як 1 : 2, а суміжні з ними,— як 7 : 5. Знайдіть ці кути.

86*. Один із суміжних кутів удвічі більший за різницю цих кутів. Знайдіть ці кути.

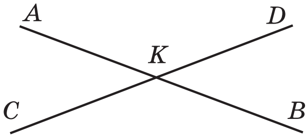
Урок 7

§ 6. ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ. КУТ МІЖ ДВОМА ПРЯМИМИ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ

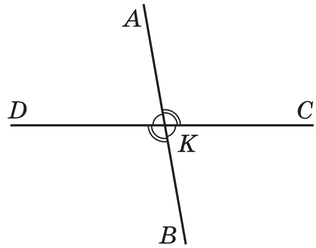
! **Два кути називаються *вертикальними*, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого.**

На малюнку 59 прямі AB і CD перетинаються у точці K. Кути AKC і DKB — вертикальні, кути AKD і CKB теж вертикальні.

Теорема (властивість вертикальних кутів). ***Вертикальні кути рівні.***



Мал. 59



Мал. 60

Д о в е д е н н я. Нехай AKC і DKB вертикальні кути (мал. 59). Оскільки кути AKC і AKD суміжні, то $\angle AKC + \angle AKD = 180^\circ$. Також суміжні кути AKD і DKB, тому $\angle AKD + \angle DKB = 180^\circ$. Маємо:

$\angle AKC = 180^\circ - \angle AKD$ і $\angle DKB = 180^\circ - \angle AKD$.

Праві частини цих рівностей рівні, тому рівними є й ліві частини. Отже, $\angle AKC = \angle DKB$. Теорему доведено.

Задача. Два з чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, відносяться, як 4 : 5. Знайти градусну міру кожного з кутів, що утворилися.

Р о з в' я з а н н я. Два кути, які утворилися в результаті перетину двох прямих, або суміжні, або вертикальні (мал. 60). Оскільки вертикальні кути рівні: $\angle AKD = \angle CKB$, $\angle AKC = \angle BKD$, то кути, про які йде мова у задачі,— це суміжні кути. Наприклад, $\angle AKD$ і $\angle AKC$. Оскільки $\angle AKD : \angle AKC = 4 : 5$, то можемо позначити $\angle AKD = 4x$, $\angle AKC = 5x$. За властивістю суміжних кутів: $4x + 5x = 180^\circ$. Звідси $x = 20^\circ$. Тоді $\angle AKD = 4 \cdot 20^\circ = 80^\circ$, $\angle AKC = 5 \cdot 20^\circ = 100^\circ$. Далі: $\angle CKB = \angle AKD = 80^\circ$, $\angle BKD = \angle AKC = 100^\circ$.

В і д п о в і д ь. 80°; 100°; 80°; 100°.

! ***Кутом між прямими, що перетинаються,* називають менший з кутів, що утворилися при перетині цих прямих.**

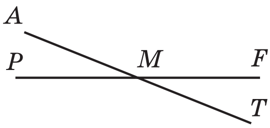
Наприклад, кут між прямими AB і DC з попередньої задачі дорівнює 80°. Кут між прямими не може перевищувати 90°.

? Які кути називають вертикальними? • Яку властивість мають вертикальні кути? • Що називають кутом між двома прямими?

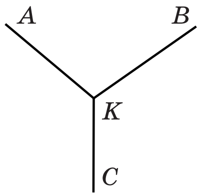
87①. (Усно.) Назвіть пари вертикальних кутів на малюнку 61.

88①. (Усно.) Чи є вертикальні кути на малюнку 62?

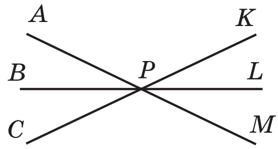
89①. Один з вертикальних кутів дорівнює: 1) 15°; 2) 129°. Знайдіть другий кут.



Мал. 61



Мал. 62



Мал. 63

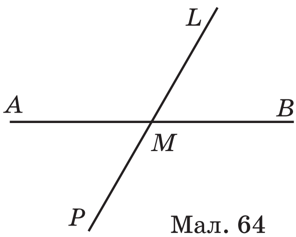
90①. Один з вертикальних кутів дорівнює: 1) 42°; 2) 139°. Знайдіть другий кут.

91②. Знайдіть усі пари вертикальних кутів на малюнку 63.

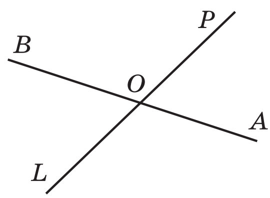
92②. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 40°. Знайдіть інші кути.

93②. На малюнку 64 кут AML дорівнює 120°. Знайдіть кути AMP, PMB і BML.

94②. Прямі AB і PL перетинаються в точці O (мал. 65). $\angle POB = 118^\circ$. Чому дорівнює кут між прямими AB і PL?



Мал. 64



Мал. 65

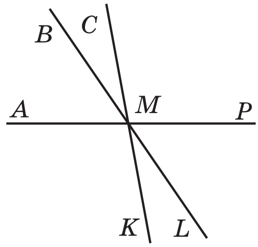
95②. Накресліть дві прямі, які перетинаються, та знайдіть за допомогою транспортира кут між ними.

Урок 8

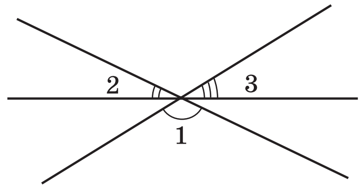
96②. (Усно.) Учень накреслив дві прямі, які перетинаються, та виміряв транспортиром один з утворених кутів. Виявилося, що кут дорівнює 130°. Чи можна стверджувати, що кут між прямими дорівнює 130°? Чому дорівнює кут між прямими?

97②. Накресліть кут MON, що дорівнює 110°. Побудуйте доповняльні промені OL і OK відповідно до його сторін OM і ON. Знайдіть за допомогою обчислень градусні міри трьох утворених нерозгорнутих кутів. Перевірте обчислення за допомогою вимірювань.

98②. Накресліть кут AOB, що дорівнює 30°. Побудуйте доповняльні промені OP і OD відповідно до його сторін OA і OB. Знайдіть за допомогою обчислень градусні міри трьох утворених нерозгорнутих кутів. Перевірте обчислення за допомогою вимірювань.



Мал. 66



Мал. 67

99②. Знайдіть міру кожного з кутів, які утворилися при перетині двох прямих, якщо:
1) всі кути рівні між собою;
2) сума двох із них дорівнює 178°.

100②. Знайдіть міру кожного з кутів, які утворилися при перетині двох прямих, якщо:
1) сума двох із них дорівнює 16°;
2) три з чотирьох кутів рівні між собою.

101③. Знайдіть кут між прямими, що перетинаються, якщо:
1) різниця двох з утворених кутів дорівнює 18°;
2) сума трьох з утворених кутів дорівнює 293°.

102③. Знайдіть кут між прямими, що перетинаються, якщо один з утворених кутів удвічі менший за другий.

103④. На малюнку 66 $\angle BMC = 20^\circ$, $\angle LMP = 60^\circ$. Знайдіть кут AMK.

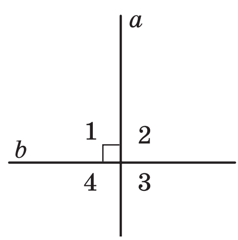
104④. На малюнку 67 зображено три прямі, які перетинаються в одній точці. Знайдіть суму кутів 1, 2 і 3.

105*. Доведіть, що бісектриси вертикальних кутів є доповняльними променями одна до одної.

Урок 9

§ 7. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ. ПЕРПЕНДИКУЛЯР. ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ

Нехай при перетині двох прямих a і b один з утворених кутів дорівнює 90° (кут 1 на мал. 68). Тоді $\angle 3 = 90^\circ$ (як вертикальний з кутом 1). Кут 2 є суміжним з кутом 1, тоді $\angle 2 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Кут 4 вертикальний з кутом 2, тому $\angle 4 = \angle 2 = 90^\circ$.



Мал. 68

Отже, якщо один з чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 90°, то решта цих кутів також прямі. В цьому випадку говорять, що прямі перетинаються під прямим кутом, або що вони перпендикулярні.

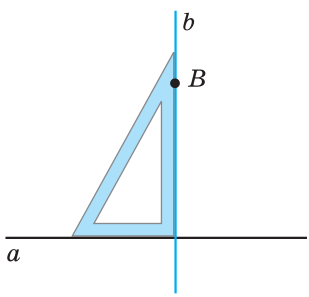
Дві прямі називають *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

На малюнку 68 прямі a і b перпендикулярні. Перпендикулярність прямих можна записати за допомогою знака $\perp$. Запис $a \perp b$ читаємо так: «пряма a перпендикулярна до прямої b».

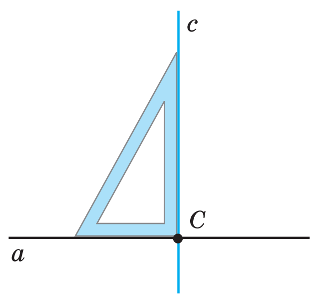
Для побудови перпендикулярних прямих використовують креслярський кутник (косинець). На малюнку 69 через точку B, яка не належить прямій a, проведено пряму b, перпендикулярну до прямої a. На малюнку 70 проведено пряму c, перпендикулярну до прямої a, через точку C, яка належить прямій a. В обох випадках побудовано єдину пряму, яка проходить через задану точку і є перпендикулярною до прямої a.

Відрізки або *промені* називають ***перпендикулярними***, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих. На малюнку 71 відрізок AB перпендикулярний до відрізка CD, на малюнку 72 промінь KL перпендикулярний до відрізка MN, а на малюнку 73 промінь PQ перпендикулярний до променя OS. Для запису перпендикулярності відрізків променів також використовують знак $\perp$.

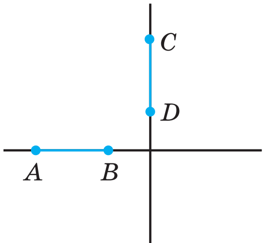
***Перпендикуляром до прямої*, проведеним із даної точки, називають відрізок прямої, перпендикулярної до даної, один з кінців якого — дана точка, а другий — точка перетину прямих. Довжину цього відрізка називають *відстанню від точки до прямої*.**



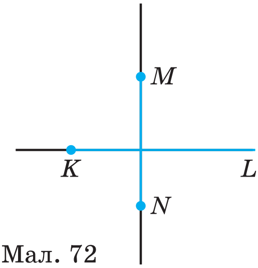
Мал. 69



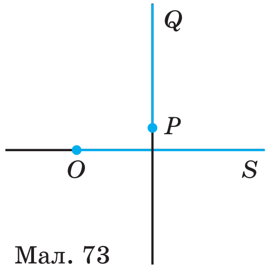
Мал. 70



Мал. 71

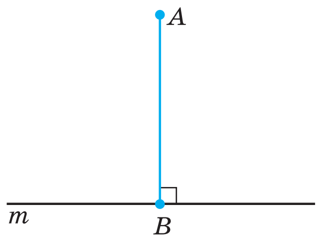


Мал. 72



Мал. 73

На малюнку 74 з точки A проведено перпендикуляр AB до прямої m. Точку B називають ***основою перпендикуляра***. Довжина відрізка AB — відстань від точки A до прямої m.



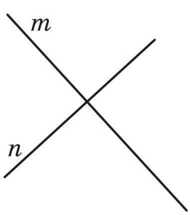
Мал. 74

Які прямі називають перпендикулярними? • Як побудувати пряму, перпендикулярну до даної прямої? • Що називають перпендикуляром до прямої, проведеним із даної точки? • Що називають відстанню від точки до прямої?

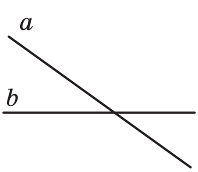
106①. На яких з малюнків 75—78 зображено перпендикулярні прямі? В разі необхідності використайте косинець. Виконайте відповідні записи.

107①. Накресліть пряму c та позначте точку A, що належить прямій c, та точку B, що цій прямій не належить. Проведіть за допомогою косинця прямі через точки A і B так, щоб кожна з них була перпендикулярна до прямої c.

***108*①.** Перемалюйте малюнки 79 і 80 у зошит та проведіть для кожного випадку за допомогою косинця пряму b, що проходить через точку B перпендикулярно до прямої a.

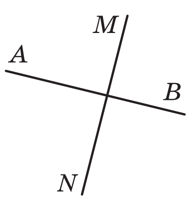


Мал. 75

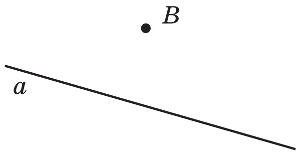


Мал. 76

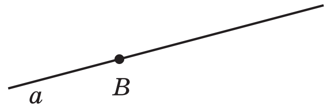
Мал. 77



Мал. 78



Мал. 79



Мал. 80

109②. Накресліть пряму a, позначте точку A, що знаходиться на відстані 2,5 см від прямої a, та точку B, що знаходиться на відстані 4 см від прямої a.

110②. Проведіть пряму m, позначте точку P, що знаходиться на відстані 3 см від прямої m, та точку K, що знаходиться на відстані 1,5 см від прямої m.

111②. Накресліть відрізки AB і CD так, щоб вони були перпендикулярні і не перетиналися.

112②. Накресліть промені MN і KL так, щоб вони були перпендикулярні і перетиналися.

113③. (Усно.) Чи правильне означення: «Перпендикуляр до прямої — це будь-який відрізок, перпендикулярний до даної прямої»? Чому?

114③. Прямі AB, CD і MN перетинаються в точці O, причому $AB \perp CD$ (мал. 81). Знайдіть:

1) $\angle MOD$, якщо $\angle NOB = 25^\circ$;

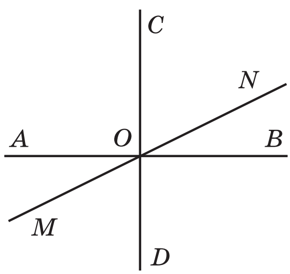
2) $\angle CON$, якщо $\angle MOB = 150^\circ$.

115③. Прямі KL, MN і PF перетинаються в точці O, причому $KL \perp MN$ (мал. 82). Знайдіть:

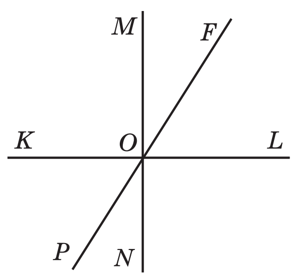
1) $\angle KOP$, якщо $\angle NOF = 140^\circ$;

2) $\angle KOF$, якщо $\angle PON = 37^\circ$.

116③. Кути ABC і CBM прямі. Доведіть, що точки A, B і M лежать на одній прямій.



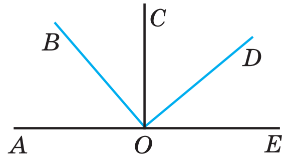
Мал. 81



Мал. 82

117③. Два суміжних кути, що утворилися в результаті перетину двох прямих, рівні. Доведіть, що прямі перпендикулярні.

118④. На малюнку 83 $\angle AOB = \angle COD$, $\angle BOC = \angle DOE$. Доведіть, що $OC \perp AE$ і $BO \perp OD$.



Мал. 83

119④. Доведіть, що промінь, проведений через вершину кута перпендикулярно до його бісектриси, є бісектрисою кута, суміжного з даним.

Урок 10

§ 8. ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються.

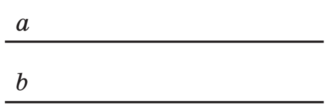
На малюнку 84 прямі a і b паралельні. Паралельність прямих записують за допомогою знака $\parallel$. Запис $a \parallel b$ читають так: «пряма a паралельна прямій b».

Для побудови паралельних прямих використовують креслярський кутник та лінійку. На малюнку 85 через точку B, яка не належить прямій a, проведено пряму b, паралельну прямій a.

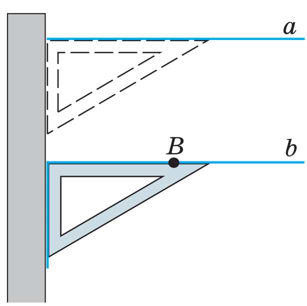
Здавна істинною вважають таку аксіому, що виражає *основну властивість паралельних прямих*.

VIII. ***Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.***

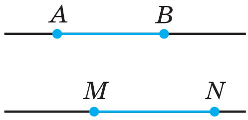
Цю аксіому називають *аксіомою паралельності прямих* або *аксіомою Евкліда*. Саме цей учений перший запропонував її як п'ятий постулат. (Постулат — припущення, вихідне положення, яке приймають без доведення; аксіома.)



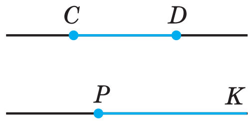
Мал. 84



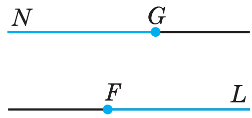
Мал. 85



Мал. 86



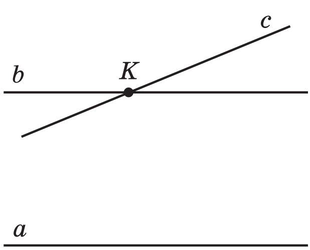
Мал. 87



Мал. 88

Відрізки або *промені* називаються ***паралельними***, якщо вони лежать на паралельних прямих. На малюнку 86 відрізок AB паралельний відрізку MN, на малюнку 87 відрізок CD паралельний променю PK, а на малюнку 88 промінь GN паралельний променю FL. Для запису паралельності відрізків і променів також використовують знак $\|$.

Задача. Довести, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму.



Мал. 89

Доведення. Нехай a і b — паралельні прямі і пряма c перетинає пряму b у точці K (мал. 89).

Припустимо, що пряма c не перетинає пряму a, тобто є паралельною a. Тоді виходить, що через точку K проходять дві прямі c і b, паралельні a. Це суперечить аксіомі паралельності прямих.

Наше припущення неправильне (хибне), тому пряма c перетинає пряму a. Твердження доведено.

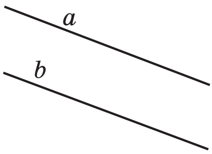
Зауважимо, що спосіб міркувань, яким ми довели твердження попередньої задачі, називається *доведенням від супротивного*. Щоб довести, що прямі a і c перетинаються, ми припустили протилежне тому, що треба довести, тобто припустили, що a і c не перетинаються. Виходячи з цього припущення, у процесі міркувань ми прийшли до суперечності з аксіомою паралельності прямих. Це означає, що наше припущення неправильне і тому c перетинає a.

Які прямі називають паралельними? • Якими інструментами користуються для побудови паралельних прямих? • Сформулюйте аксіому паралельності прямих. • Поясніть, у чому полягає спосіб доведення від супротивного.

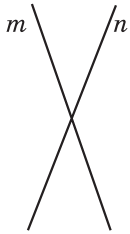
120①. Запишіть з використанням символів:

1) пряма a паралельна прямій m;

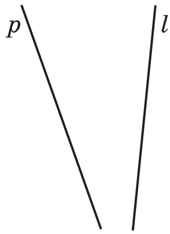
2) пряма CD паралельна прямій PK.



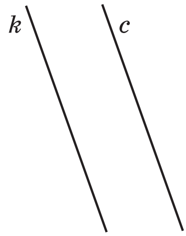
Мал. 90



Мал. 91



Мал. 92



Мал. 93

121①. На яких з малюнків 90—93 зображено паралельні прямі?

***122*①.** Назвіть пари паралельних прямих на малюнку 94.

123①. 1) Дано пряму b і точку K, що не лежить на ній (мал. 95). Скільки можна провести прямих, паралельних прямій b, через точку K?

2) Скільки взагалі можна провести прямих, паралельних прямій b?

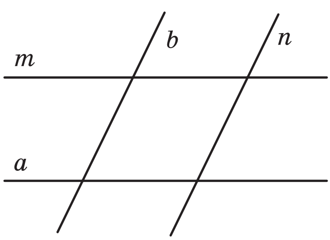
124②. Проведіть пряму l і позначте точку A, що не належить їй. За допомогою косинця і лінійки через точку A проведіть пряму, паралельну прямій l.

***125*②.** Позначте точку P і проведіть пряму a, що не проходить через цю точку. За допомогою косинця і лінійки через точку P проведіть пряму, паралельну прямій a.

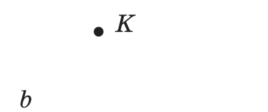
126②. Накресліть відрізки AB і CD та промінь KL так, щоб відрізок AB був паралельний променю KL і перпендикулярний до відрізка CD.

***127*②.** Накресліть промені MN і KL та відрізок AB так, щоб промінь MN був паралельний променю KL і перпендикулярний до відрізка AB.

128③. Прямі a і b перетинаються. Пряма m паралельна прямій a. Доведіть, що прямі m і b перетинаються.



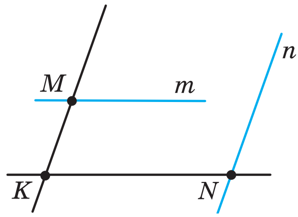
Мал. 94



Мал. 95

129③. Прямі a і b паралельні. Пряма l не перетинає пряму a. Доведіть, що пряма l не перетинає пряму b.

130④. Прямі KM і KN (мал. 96) перетинаються. Через точку M проведено пряму m, паралельну прямій KN, а через точку N проведено пряму n, паралельну прямій KM. Доведіть, що прямі m і n перетинаються.



Мал. 96

131④. Прямі a і b — паралельні, прямі b і c також паралельні. Пряма l перетинає пряму a. Доведіть, що пряма l перетинає прямі b і c.

Урок 11

§ 9. КУТИ, УТВОРЕНІ ПРИ ПЕРЕТИНІ ДВОХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ. ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

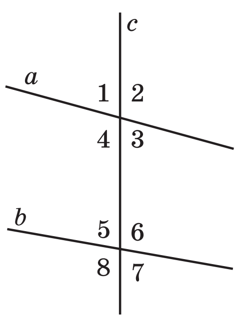
Пряма c називається ***січною*** відносно прямих a і b, якщо вона перетинає їх у двох точках (мал. 97).

При перетині прямих a і b січною c утворилося вісім кутів, позначених на малюнку 97. Деякі пари цих кутів мають спеціальні назви:

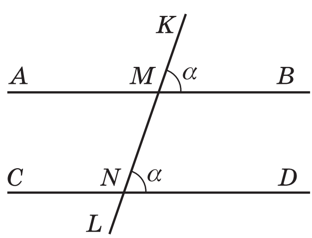
внутрішні односторонні кути: 4 і 5; 3 і 6;
внутрішні різносторонні кути: 4 і 6; 3 і 5;
відповідні кути: 1 і 5; 2 і 6; 3 і 7; 4 і 8.

Розглянемо *ознаки* паралельності прямих.

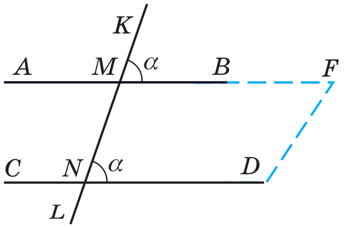
Ознака (у геометрії) — це теорема, яка стверджує, що при виконанні певних умов можна встановити паралельність прямих, рівність фігур, належність фігур до певного класу тощо.



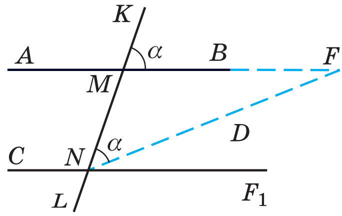
Мал. 97



Мал. 98



Мал. 99



Мал. 100

Т е о р е м а (ознака паралельності прямих). ***Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.***

Д о в е д е н н я. Нехай при перетині прямих AB і CD січною KL утворилися рівні відповідні кути $\angle KMB = \angle MND = \alpha$ (мал. 98).

Припустимо, що дані прямі AB і CD не паралельні, а перетинаються в деякій точці F (мал. 99). Не змінюючи міри кута KMB, перенесемо його так, щоб вершина кута — точка M — збіглася з точкою N, промінь MK збігся з променем NM, а промінь MB зайняв положення променя NF_1 (мал. 100). Тоді $\angle MNF_1 = \angle KMF = \alpha$. Оскільки промінь NF_1 не збігається з променем NF, бо $F \notin NF_1$, то $\angle MNF_1 \neq \angle MNF$. Але ж ми встановили, що $\angle MNF = \alpha$ і $\angle MNF_1 = \alpha$.

Прийшли до суперечності. Тому наше припущення про те, що прямі AB і CD не паралельні,— неправильне. Отже, прямі AB і CD паралельні, що й треба було довести.

Далі розглянемо *наслідки* з доведеної теореми. ***Наслідок*** — це твердження, яке випливає безпосередньо з теореми.

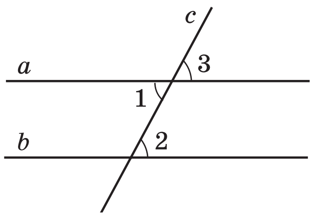
Н а с л і д о к 1. ***Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні.***

Д о в е д е н н я. Нехай при перетині прямих a і b січною c внутрішні різносторонні кути рівні, наприклад $\angle 1 = \angle 2$ (мал. 101).

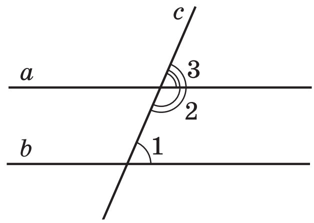
Оскільки кути 1 і 3 — вертикальні, то вони рівні: $\angle 1 = \angle 3$. Отже, $\angle 2 = \angle 3$. Ці кути — відповідні, тому за ознакою паралельності прямих маємо: $a \parallel b$.

Н а с л і д о к 2. ***Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.***

Д о в е д е н н я. Нехай при перетині прямих a і b січною c сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, наприклад $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (мал. 102). Кути 2 і 3 — суміжні, тому $\angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$.



Мал. 101



Мал. 102

З цих двох рівностей випливає, що $\angle 1 = \angle 3$. Ці кути є відповідними, а тому прямі a і b — паралельні за ознакою паралельності прямих.

Н а с л і д о к 3. ***Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.***

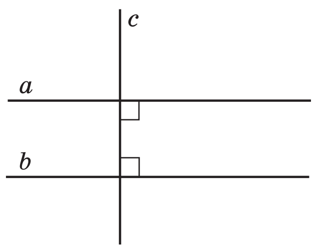
На малюнку 103: $a \perp c$ і $b \perp c$. Враховуючи наслідок 2, маємо: $a \parallel b$.

Зауважимо, що наслідки 1—3 можна також розглядати як ознаки паралельності прямих.

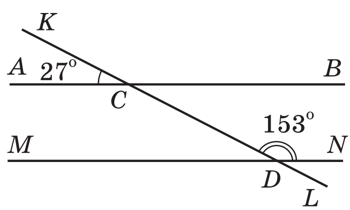
Задача. Чи є паралельними прямі AB і MN на малюнку 104?

Р о з в' я з а н н я. $\angle BCD = \angle ACK$ (як вертикальні). $\angle BCD = 27^\circ$. Оскільки $27^\circ + 153^\circ = 180^\circ$, то сума внутрішніх односторонніх кутів BCD і CDN дорівнює 180°. Тому, за наслідком 2, $AB \parallel MN$.

В і д п о в і д ь. Так.



Мал. 103



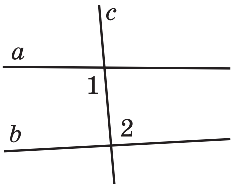
Мал. 104

Що таке січна? • За малюнком 97 назвіть пари внутрішніх односторонніх кутів, внутрішніх різносторонніх кутів, відповідних кутів. • Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямих та наслідки з неї.

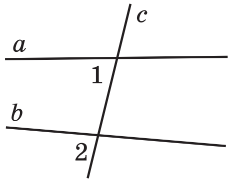
132①. (Усно.) Як називаються кути 1 і 2 на малюнках 105—107?

***133*①.** Як називаються кути 1 і 2 на малюнках 108—110?

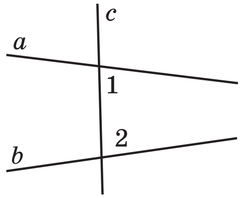
134①. Запишіть всі пари внутрішніх односторонніх кутів, внутрішніх різносторонніх кутів, відповідних кутів (мал. 111).



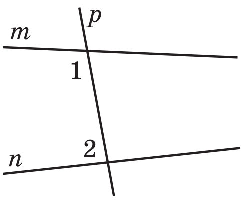
Мал. 105



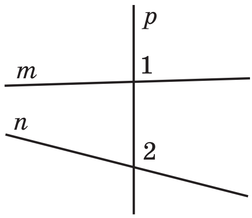
Мал. 106



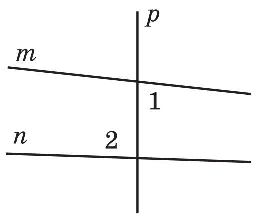
Мал. 107



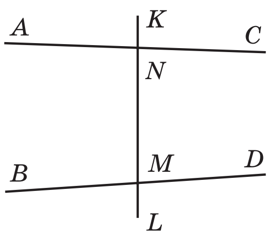
Мал. 108



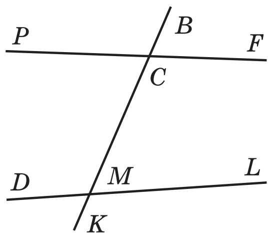
Мал. 109



Мал. 110



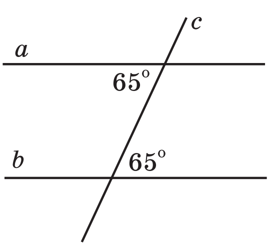
Мал. 111



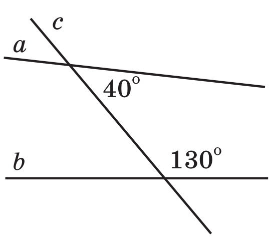
Мал. 112

135①. Запишіть усі пари внутрішніх односторонніх кутів, внутрішніх різносторонніх кутів, відповідних кутів (мал. 112).

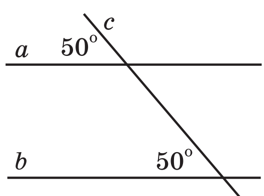
136②. Якими є прямі *a* і *b* (паралельними чи прямими, що перетинаються) на малюнках 113—118?



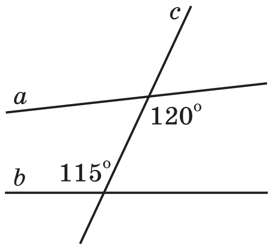
Мал. 113



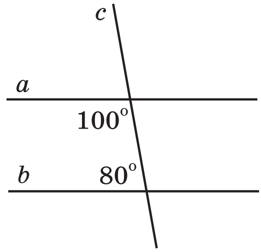
Мал. 114



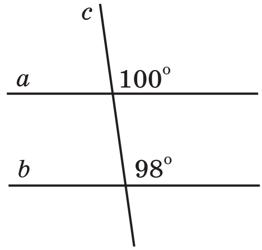
Мал. 115



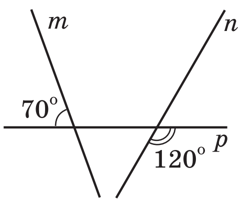
Мал. 116



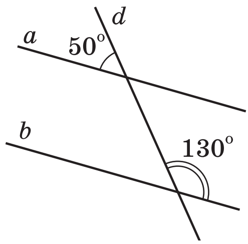
Мал. 117



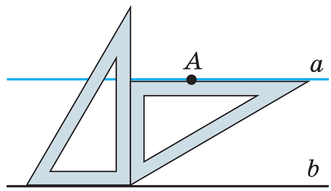
Мал. 118



Мал. 119



Мал. 120



Мал. 121

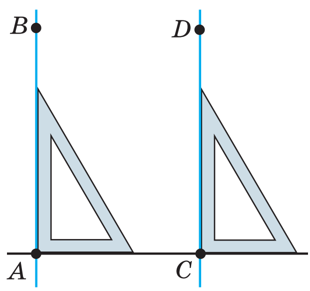
137②. На малюнку 119 визначено міри двох кутів, що утворилися при перетині прямих m і n січною p. Обчисліть міри всіх інших кутів, що утворилися. Чи паралельні прямі m і n?

138②. На малюнку 120 визначено міри двох кутів, що утворилися при перетині прямих a і b січною d. Обчисліть міри всіх інших кутів, що утворилися. Чи паралельні прямі a і b?

139③. Через точку A за допомогою двох креслярських кутників провели пряму a (мал. 121). Чи паралельні прямі a і b? Відповідь обґрунтуйте.

Урок 12

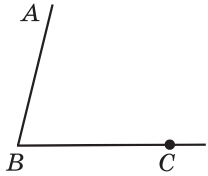
140②. (Усно.) Чи паралельні прямі AB і CD на малюнку 122? Чому?



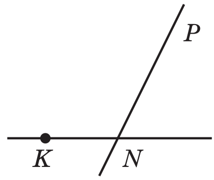
Мал. 122

141②. Доповніть малюнок 123: проведіть пряму CM так, щоб кути ABC і BCM були внутрішніми різносторонніми кутами для прямих AB і CM та січної BC. Як розмістяться точки A і M відносно прямої BC?

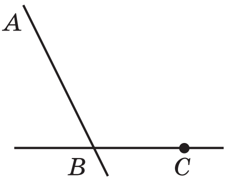
142②. Доповніть малюнок 124: проведіть пряму KA так, щоб кути AKN і KNP були внутрішніми од-



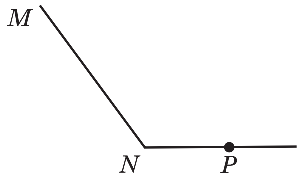
Мал. 123



Мал. 124



Мал. 125



Мал. 126

носторонніми кутами для прямих AK і PN та січної KN. Як розмістяться точки A і P відносно прямої KN?

143③. 1) Виміряйте кут ABC (мал. 125).

2) Побудуйте кут PCK, що дорівнює куту ABC і є відповідним з ним.

3) Назвіть паралельні прямі, які утворилися. Обґрунтуйте їх паралельність.

***144*③.** 1) Виміряйте кут MNP (мал. 126).

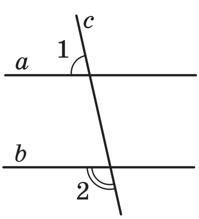
2) Побудуйте кут APB, що дорівнює куту MNP і є відповідним з ним.

3) Назвіть паралельні прямі, які утворилися. Обґрунтуйте їх паралельність.

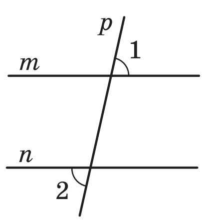
145③. Пряма AB перетинає пряму CD у точці A, а пряму MN у точці B. $\angle CAB = 90^\circ$, $\angle ABN = 90^\circ$. Чи паралельні прямі CD і MN?

146③. На малюнку 127 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Доведіть, що прямі a і b паралельні.

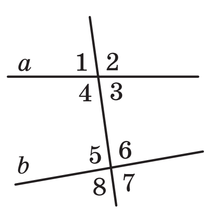
***147*③.** На малюнку 128 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що прямі m і n паралельні.



Мал. 127



Мал. 128



Мал. 129

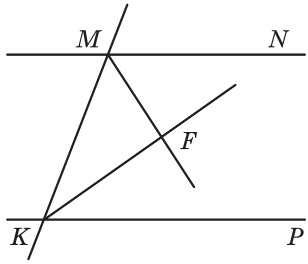
148③. На малюнку 129 $\angle 4 + \angle 5 = 190^\circ$. Знайдіть:

1) $\angle 2 + \angle 7$; 2) $\angle 1 + \angle 8$;

3) $\angle 3 + \angle 6$.

149③. Кут ABC дорівнює 70°, а кут BCD — 100°. Чи можуть прямі AB і CD бути паралельними? Відповідь обґрунтуйте.

***150*③.** Кут MNP дорівнює 60°, а кут NPK — 120°. Чи можуть прямі MN і KP бути паралельними? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 130

151④. На малюнку 130: MF — бісектриса кута KMN, KF — бісектриса кута MKP. $\angle MKF + \angle FMK = 90^\circ$. Доведіть, що $MN \parallel KP$.

152④. Прямі a і b перпендикулярні до прямої m. Пряма c перетинає пряму a. Чи перетинаються прямі b і c? Відповідь обґрунтуйте.

Урок 13

§ 10. ВЛАСТИВІСТЬ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ. ВЛАСТИВОСТІ КУТІВ, УТВОРЕНИХ ПРИ ПЕРЕТИНІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ

Розглянемо властивість паралельних прямих.

Теорема 1 (властивість паралельних прямих). ***Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні одна одній.***

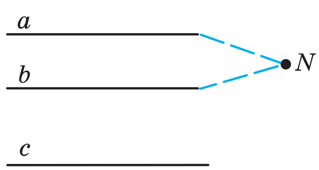
Доведення. Нехай прямі a і b паралельні прямій c. Доведемо, що $a \parallel b$.

Застосуємо доведення від супротивного. Припустимо, що прямі a і b не паралельні, а перетинаються у деякій точці N (мал. 131). Отже, через точку N проходять дві прямі a і b, паралельні c. Це суперечить аксіомі паралельності прямих. Отже, наше припущення неправильне. Тому $a \parallel b$. Теорему доведено.

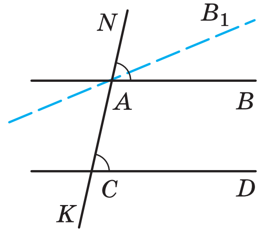
Далі розглянемо властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною.

Теорема 2 (властивість відповідних кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною). ***Відповідні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, рівні.***

Доведення. Нехай паралельні прямі AB і CD перетнуті січною NK (мал. 132). Доведемо, що $\angle NAB = \angle ACD$. Припустимо, що $\angle NAB \neq \angle ACD$. Проведемо пряму AB_1 так, щоб викону-



Мал. 131



Мал. 132

валася рівність $\angle NAB_1 = \angle ACD$. За ознакою паралельності прямих прямі AB_1 і CD паралельні. Але ж за умовою $AB \parallel CD$. Прийшли до того, що через точку A проходять дві прямі AB і AB_1, паралельні CD, що суперечить аксіомі паралельності прямих. Наше припущення неправильне. Тому відповідні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, рівні: $\angle NAB = \angle ACD$.

Теорема про властивість відповідних кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, є *оберненою* до ознаки паралельності прямих.

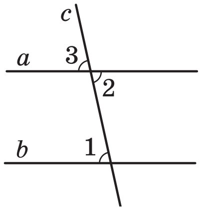
Пояснимо, як це слід розуміти. Кожна теорема містить умову і висновок. Якщо поміняти місцями умову і висновок теореми, то дістанемо нове твердження (правильне чи неправильне), умовою якого буде висновок даної теореми, а висновком — умова даної теореми. Якщо одержане при цьому твердження є істинним, його називають теоремою, оберненою до даної.

У теоремі, яка виражає ознаку паралельності прямих, умовою є перша частина твердження: «при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні» (це дано), а висновком — друга частина: «прямі паралельні» (це треба довести). Легко побачити, що остання розглянута нами теорема і є оберненою до ознаки паралельності прямих. Умова цієї теореми: «прямі паралельні» (це дано), а висновок — «відповідні кути, утворені при перетині прямих січною, рівні» (це треба довести).

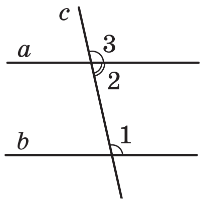
Не кожна теорема має обернену. Наприклад, теорема про вертикальні кути: «вертикальні кути рівні» не має оберненої теореми. Твердження: «якщо два кути рівні, то вони вертикальні» — неправильне.

Розглянемо далі наслідки з теореми 2.

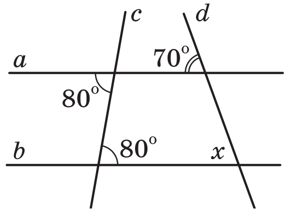
Н а с л і д о к 1 (властивість внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною). ***Внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, рівні.***



Мал. 133



Мал. 134



Мал. 135

Д о в е д е н н я. Нехай паралельні прямі a і b перетнуті січною c (мал. 133). Доведемо, що внутрішні різносторонні кути, наприклад 1 і 2, рівні. Оскільки $a \parallel b$, то відповідні кути 1 і 3 рівні. Кути 2 і 3 рівні, як вертикальні. З рівностей $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 3$ випливає, що $\angle 1 = \angle 2$.

Н а с л і д о к 2 (властивість внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною). ***Сума внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, дорівнює* 180°.**

Д о в е д е н н я. Нехай паралельні прямі a і b перетнуті січною c (мал. 134). Доведемо, що сума внутрішніх односторонніх кутів, наприклад 1 і 2, дорівнює 180°. Оскільки $a \parallel b$, то відповідні кути 1 і 3 рівні. Кути 2 і 3 — суміжні, тому $\angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$, але ж $\angle 1 = \angle 3$. Тому $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.

Теорему 2 та її наслідки 1 та 2 можна також розглядати, як властивості паралельних прямих.

Задача. Знайти невідомий кут x за малюнком 135.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині січною c прямих a і b, рівні (обидва по 80°), то $a \parallel b$. Відповідні кути, утворені при перетині січною d паралельних прямих a і b, рівні. Тому $x = 70^\circ$.

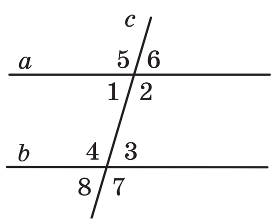
? Сформулюйте та доведіть властивість паралельних прямих. • Сформулюйте та доведіть теорему про властивість відповідних кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, та наслідки з неї. • Поясніть, що таке теорема, обернена до даної.

153①**.** (Усно.) На малюнку 136 прямі a і b паралельні, c — січна.

1) Чи рівні кути 5 і 4; 2 і 7?

2) Чи рівні кути 1 і 3?

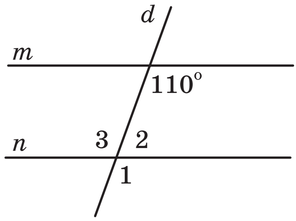
3) Чому дорівнює сума кутів 1 і 4?



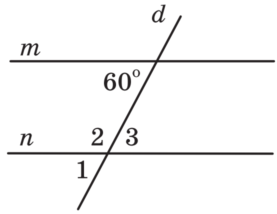
Мал. 136

154①**.** На малюнку 136 прямі a і b паралельні, c — січна.

1) Чи рівні кути 1 і 8; 6 і 3?



Мал. 137



Мал. 138

2) Чи рівні кути 2 і 4?

3) Чому дорівнює сума кутів 2 і 3?

155①. На малюнку 137 прямі m і n — паралельні, d — січна. Чому дорівнюють кути 1, 2, 3?

156①. На малюнку 138 прямі m і n — паралельні, d — січна. Чому дорівнюють кути 1, 2, 3?

157②. Градусна міра одного з кутів, утворених при перетині січною двох паралельних прямих, дорівнює 140°. Знайдіть градусні міри решти семи кутів.

158②. Один з кутів, які утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 50°. Знайдіть інші сім кутів.

159②. Один з кутів, які утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 37°. Чи може один з решти семи кутів дорівнювати:

1) 133°; 2) 143°; 3) 153°?

160②. Дано паралельні прямі a і b та точку M, що не належить жодній з прямих. Через точку M проведено пряму m, паралельну a. Чи паралельні прямі b і m?

161②. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, якщо їх сума дорівнює 240°.

162②. Сума відповідних кутів, які утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 108°. Знайдіть ці кути.

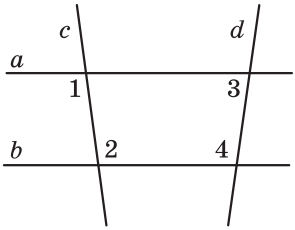
Урок 14

163②. На малюнку 139 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$.

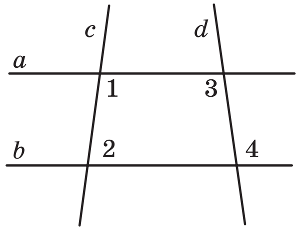
164②. На малюнку 140 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Доведіть, що $\angle 3 = \angle 4$.

165②. На малюнку 141 $\angle 1 = \angle 2$, $c \perp a$. Доведіть, що $c \perp b$.

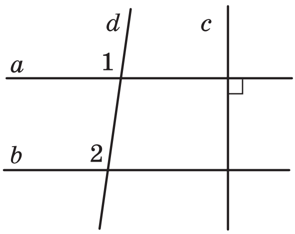
166②. На малюнку 142 $a \perp d$, $b \perp d$. Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.



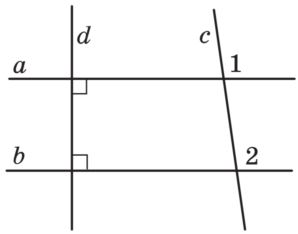
Мал. 139



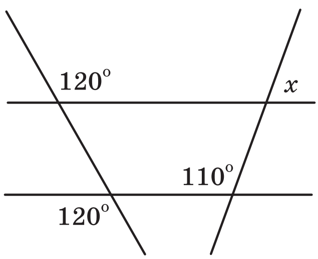
Мал. 140



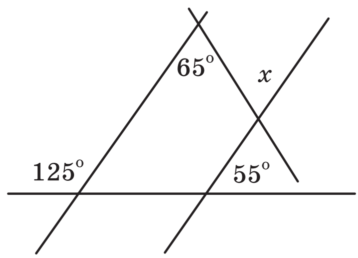
Мал. 141



Мал. 142



Мал. 143



Мал. 144

167③. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:

1) один з них на 16° більший від другого;

2) один з них у 3 рази менший від другого;

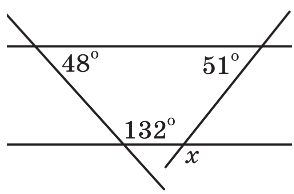
3) їх градусні міри відносяться, як 5 : 7.

168③. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:

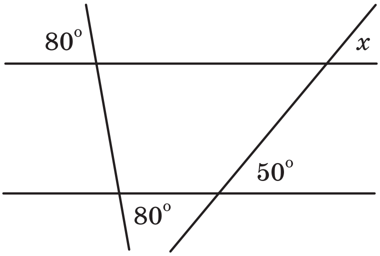
1) один з них на 8° менший від другого;

2) один з них у 4 рази більший від другого;

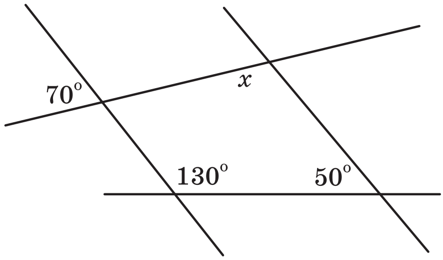
3) їх градусні міри відносяться, як 5 : 4.



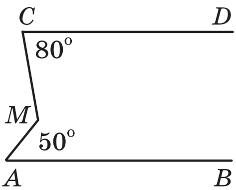
Мал. 145



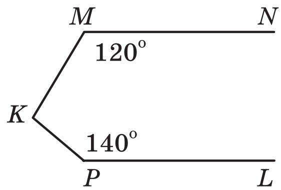
Мал. 146



Мал. 147



Мал. 148



Мал. 149

169③. Знайдіть градусні міри кутів x, зображених на малюнках 143—145.

170③. Знайдіть градусні міри кутів x, зображених на малюнках 146, 147.

171③. Прямі a і b не паралельні прямій m. Чи можна зробити висновок, що прямі a і b не паралельні між собою?

172③. Сума градусних мір трьох з восьми кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих a і b січною c, дорівнює 120°. Знайдіть градусні міри кожного з восьми кутів.

173③. Сума градусних мір чотирьох з восьми кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих a і b січною c, дорівнює 128°. Знайдіть градусні міри кожного з восьми кутів.

174④. На малюнку 148 $AB \parallel CD$. Знайдіть градусну міру кута CMA.

175④. На малюнку 149 $MN \parallel PK$. Знайдіть градусну міру кута MKP.

176④. Доведіть, що бісектриса внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

177④. Доведіть, що бісектриси відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

Урок 15

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ З ТЕМИ «НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ»

1①. Назвіть точки, що належать прямій a, та точки, що їй не належать (мал. 150). Зробіть відповідні записи.

2①. Назвіть пари вертикальних кутів на малюнку 151.

3①. На якому з малюнків 152—154 зображено паралельні прямі, а на якому — перпендикулярні? Зробіть відповідні записи.

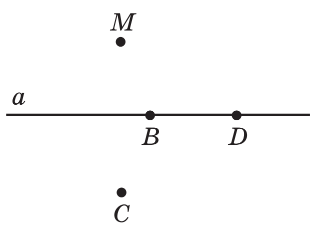
4②. Точка C належить відрізку MN. Знайдіть довжину відрізка CM, якщо $MN = 7{,}2$ см, $CN = 3{,}4$ см.

5②. За допомогою транспортира накресліть кут, градусна міра якого дорівнює 70°, та проведіть його бісектрису.

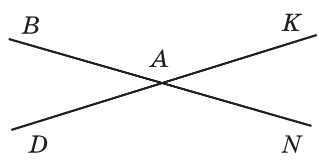
6②. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 78°. Знайдіть інші сім кутів.

7③. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них на 12° менший за другий.

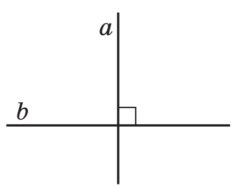
8③. Прямі AB, CD і KL перетинаються в точці O, причому $AB \perp CD$ (мал. 155). Знайдіть градусну міру кута AOK, якщо $\angle DOL = 38^\circ$.



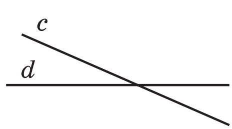
Мал. 150



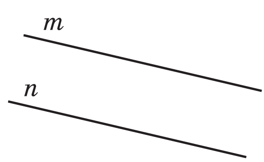
Мал. 151



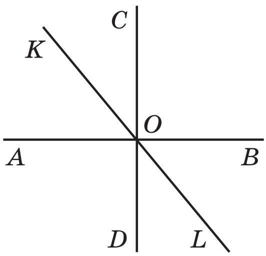
Мал. 152



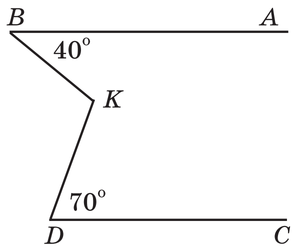
Мал. 153



Мал. 154



Мал. 155



Мал. 156

9④. Точки A, B і K лежать на одній прямій. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $AK = 9{,}3$ см, $KB = 3{,}7$ см. Скільки розв'язків має задача?

Додаткові завдання

10④. Два кути відносяться, як 1 : 3, а суміжні з ними — як 7 : 3. Знайдіть ці кути.

11④. На малюнку 156 $AB \parallel CD$. Знайдіть градусну міру кута BKD.

Урок 16 Резервний час.

Вправи для повторення розділу II

До § 5

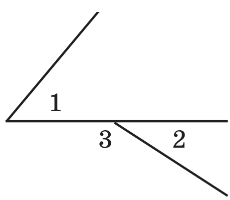
178①. Серед кутів, зображених на малюнках 157—159, назвіть суміжні.

179②. 1) Чи можна лише за допомогою лінійки побудувати кут, суміжний із даним?

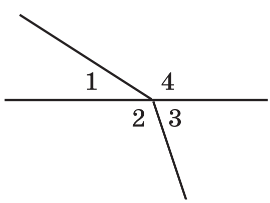
2) Скільки таких кутів можна побудувати?

180②. Кут ABC менший за кут MNP. Якому з кутів відповідає більший суміжний кут? Відповідь обґрунтуйте.

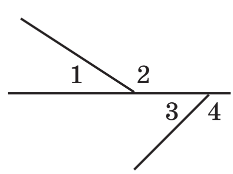
181③. Знайдіть суміжні кути, якщо їх градусні міри відносяться, як 3 : 7.



Мал. 157



Мал. 158



Мал. 159

182③. Один із суміжних кутів становить 20% другого. Знайдіть ці кути.

183④. Один із суміжних кутів на 20% менший за другий. Знайдіть ці кути.

184④. Бісектриса кута ABC утворює зі стороною кут, удвічі більший від кута, суміжного з кутом ABC. Знайдіть градусну міру кута ABC.

До § 6

185①. Який предмет домашнього побуту дає уявлення про вертикальні кути?

186①. Чи є кути 1 і 2 вертикальними (мал. 160—164)?

187②. Чи правильні твердження:

1) якщо два кути рівні, то вони вертикальні;

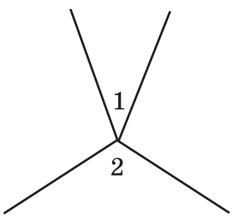
2) якщо два кути зі спільною вершиною рівні, то вони вертикальні;

3) для кожного кута, меншого від розгорнутого, можна побудувати тільки один вертикальний кут;

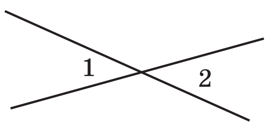
4) для кожного кута, меншого від розгорнутого, можна побудувати тільки один суміжний кут?

188②. При перетині двох прямих утворилося чотири кути. Чи можуть деякі два з них дорівнювати:

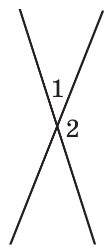
1) 5° і 175; 2) 15° і 19°; 3) 27° і 154°; 4) 3° і 3°?



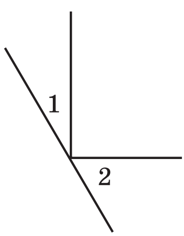
Мал. 160



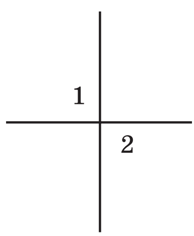
Мал. 161



Мал. 162



Мал. 163



Мал. 164

189③. Один з кутів, які утворилися при перетині двох прямих, на 48° більший за другий. Знайдіть кут між прямими.

190③. Один з кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює сумі двох суміжних з ним. Знайдіть цей кут.

191④. Знайдіть градусну міру кожного з чотирьох кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо сума двох із цих кутів:

1) менша від суми двох інших у 4 рази;

2) більша від суми двох інших на 160°.

192*. Знайдіть кут між прямими, які перетинаються, якщо один з утворених кутів у 8 раз менший від суми трьох інших кутів.

До § 7

193①. Накресліть пряму a та позначте точку M, що не належить цій прямій. Накресліть за допомогою лінійки та косинця перпендикуляр з точки M до прямої a. Виміряйте відстань від точки M до прямої a.

194②. Накресліть гострий кут KAM, позначте на стороні AK точку B. Побудуйте за допомогою косинця і лінійки пряму, що проходить через точку B перпендикулярно до AK.

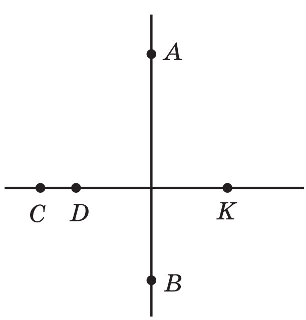
195②. Накресліть промінь AB і відрізок KP так, щоб вони були перпендикулярні і не перетиналися.

196③. Назвіть всі пари перпендикулярних відрізків на малюнку 165.

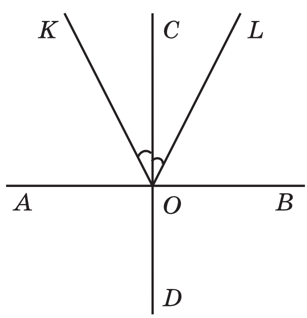
197③. На малюнку 166 $AB \perp CD$, $\angle KOC = \angle COL$.

1) Чи правильно, що $\angle AOK = \angle LOB$, $\angle AOL = \angle KOB$?

2) Порівняйте кути KOB і AOK.



Мал. 165



Мал. 166

198③. 1) Чи можуть два гострих кути бути рівними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші перпендикулярні між собою?

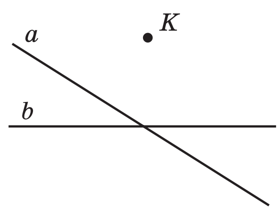
2) Чи можуть два тупих кути бути рівними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші перпендикулярні між собою?

199④. Як, використовуючи шаблон кута в 6°, побудувати перпендикулярні прямі?

200*. Доведіть, що коли бісектриси кутів ABC і CBD перпендикулярні, то точки A, B і D лежать на одній прямій.

До § 8

201①. Накресліть відрізки AB і CD так, щоб вони були паралельними.



Мал. 167

202②. На малюнку 167 зображено дві прямі a і b, що перетинаються, та точка K, що не належить жодній з них. Проведіть через точку K прямі, паралельні прямим a і b.

203②. 1) Прямі a і b не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони паралельні?

2) Відрізки AB і CD не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони паралельні?

3) Промені MN і KL не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони паралельні?

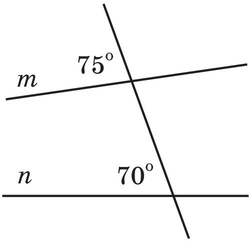
204③. Дано пряму a і точку K, що їй не належить. Через точку K провели дві прямі b і c. Як можуть бути розміщені ці прямі відносно прямої a? Розгляньте всі випадки та зробіть малюнки до кожного з них.

205④. Прямі a і b — паралельні, а прямі b і n — перетинаються. Пряма c паралельна прямій b. Доведіть, що пряма c перетинає пряму n і паралельна прямій a.

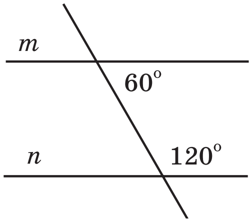
До § 9

206①. Накресліть дві прямі і січну. Пронумеруйте утворені кути числами від 1 до 8. Які з утворених кутів будуть внутрішніми односторонніми, які — внутрішніми різносторонніми, а які — відповідними?

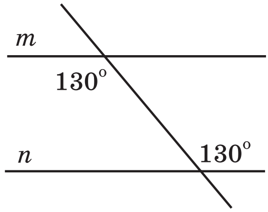
207②. Чи паралельні прямі m і n на малюнках 168—171?



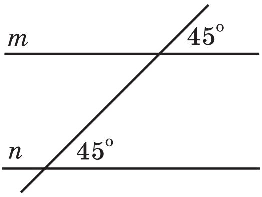
Мал. 168



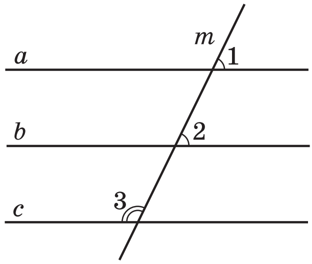
Мал. 169



Мал. 170



Мал. 171



Мал. 172

208③. При перетині прямих a і b січною c утворилися два рівних гострих кути. Чи можна сказати, що $a \parallel b$?

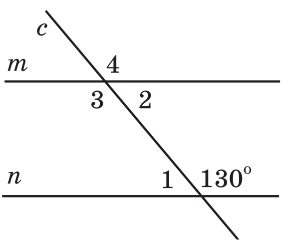
209④. На малюнку 172 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. Чи паралельні прямі a і c?

До § 10

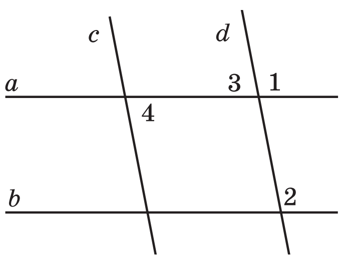
210①. На малюнку 173 прямі m і n — паралельні, c — січна. Знайдіть градусні міри кутів 1, 2, 3, 4.

211②. Дано: $a \parallel b$, $b \parallel c$, $c \parallel d$. Доведіть, що $a \parallel d$.

212③. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один з них становить 80% другого.



Мал. 173

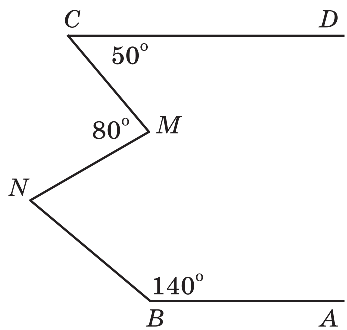


Мал. 174

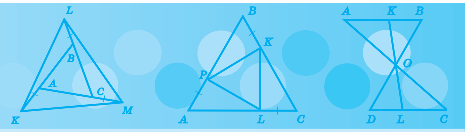
213③. На малюнку 174: $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 1 = 100^\circ$. Знайдіть градусні міри кутів 2, 3, 4.

214④. Один з внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 72°. Знайдіть кут між бісектрисами внутрішніх односторонніх кутів.

215*. Прямі AB і CD паралельні (мал. 175). Знайдіть градусну міру кута MNB.



Мал. 175



Розділ III. ТРИКУТНИКИ

Урок 17

§ 11. ТРИКУТНИК І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ

Трикутником називають фігуру, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки.

Точки називаються ***вершинами*** трикутника, а відрізки — його ***сторонами***. На малюнку 176 зображено трикутник ABC. Його вершинами є точки A, B і C, а сторонами — відрізки AB, BC і CA. Запис зі знаком $\triangle$, а саме $\triangle ABC$ читається так: «трикутник ABC».

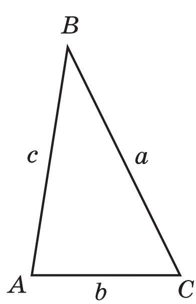
Кутами трикутника ABC називають кути BAC, ABC і BCA. Часто їх позначають однією буквою $\angle A$, $\angle B$ і $\angle C$. Сторони трикутника також можна позначати малими буквами латинського алфавіту a, b і c відповідно до позначення протилежних кутів. Кожний трикутник має три вершини, три сторони і три кути.

Суму довжин усіх сторін трикутника називають його ***периметром***. Периметр позначають буквою P, наприклад, периметр трикутника ABC можна позначити так: $P_{\triangle ABC}$. Маємо: $P_{\triangle ABC} = AB + BC + CA$.

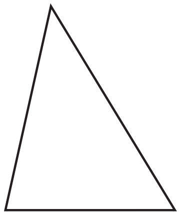
Задача. Одна із сторін трикутника на 7 см менша за другу і у 2 рази менша за третю. Знайти сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 47 см.

Р о з в' я з а н н я. Позначимо довжину однієї сторони трикутника — x см, тоді довжина другої дорівнюватиме $(x + 7)$ см, а третьої — $2x$ см. За умовою $x + (x + 7) + 2x = 47$. Розв'язавши це рівняння, дістанемо $x = 10$ (см). Отже, довжина однієї сторони трикутника дорівнює 10 см, другої — 17 см, третьої — 20 см.

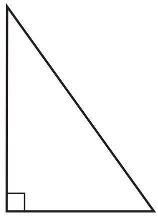
В і д п о в і д ь. 10 см, 17 см, 20 см.



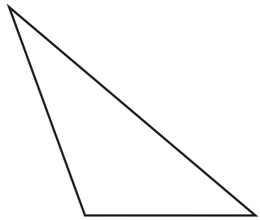
Мал. 176



Мал. 177



Мал. 178



Мал. 179

Залежно від кутів розрізняють такі *види трикутників*: ***гострокутні, прямокутні, тупокутні***. У гострокутного трикутника усі кути гострі (мал. 177), прямокутний трикутник має прямий кут (мал. 178), а тупокутний трикутник має тупий кут (мал. 179).

Яку фігуру називають трикутником? • Що називають вершинами трикутника, сторонами трикутника, кутами трикутника? • Що називають периметром трикутника? • Які види трикутників розрізняють залежно від кутів?

216①. (Усно.) Знайдіть периметр $\triangle KLM$ (мал. 180).

217①. (Усно.) На якому з малюнків 181—183 три точки можуть бути вершинами трикутника, а на якому — ні?

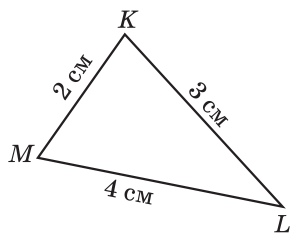
218①. Накресліть трикутник і позначте його вершини буквами A, M і N. Запишіть сторони та кути цього трикутника.

***219*①.** Накресліть трикутник PKL. Запишіть вершини, сторони та кути цього трикутника.

220②. Знайдіть периметр трикутника, сторони якого дорівнюють 25 мм; 3,2 см; 0,4 дм.

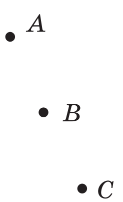
***221*②.** Знайдіть периметр трикутника, сторони якого дорівнюють 4,3 см; 29 мм; 0,3 дм.

222②. Накресліть гострокутний трикутник ABC. Виміряйте його сторони та знайдіть периметр.

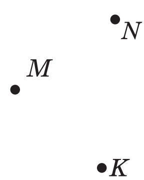


Мал. 180

Мал. 181



Мал. 182



Мал. 183

223②. Накресліть тупокутний трикутник, вершини якого — точки P, L і K. Виміряйте сторони цього трикутника та знайдіть його периметр.

224③. Одна сторона трикутника у 3 рази менша за другу і на 7 см менша за третю. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 32 см.

225③. Одна сторона трикутника на 2 дм більша за другу сторону і в 1,5 раза менша за третю сторону. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 30 дм.

226③. Побудуйте за допомогою лінійки з поділками та транспортира трикутник ABC, у якого $\angle A = 60^\circ$, $AB = 3$ см, $AC = 7$ см.

227③. Побудуйте за допомогою лінійки з поділками та косинця трикутник PKL, у якого $\angle P = 90^\circ$, $PK = 3$ см, $PL = 4$ см. Як називається такий трикутник? Виміряйте довжину сторони KL.

228④. Знайдіть сторони трикутника, якщо вони пропорційні числам 3, 4 і 6, а периметр трикутника дорівнює 52 дм.

229④. Периметр трикутника дорівнює 72 см. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3 і 4.

230④. Позначте шістьма різними способами трикутник із вершинами в точках M, N і K.

231②. Накресліть відрізок AB, довжина якого 2 см 7 мм. Накресліть відрізок PL, що дорівнює відрізку AB.

232③. Який кут утворює бісектриса кута 78° з продовженням однієї з його сторін?

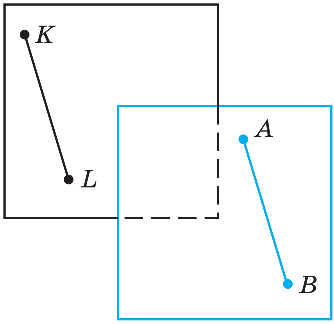
Урок 18 § 12. РІВНІСТЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

Нагадаємо, що два відрізки називаються рівними, якщо рівні їх довжини, а два кути називаються рівними, якщо рівні їх градусні міри.

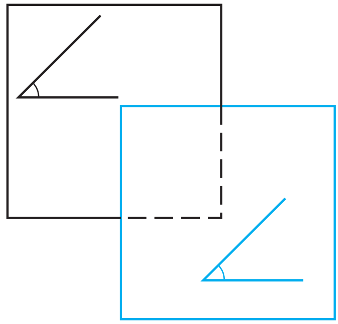
Розглянемо два рівних відрізки AB та KL, довжина кожного з яких 2 см (мал. 184). Уявімо собі, що, наприклад, відрізок AB накреслено на прозорій плівці. Переміщуючи плівку, відрізок AB можна сумістити з відрізком KL. Отже, рівні відрізки AB і KL можна *сумістити накладанням*.

Так само можна сумістити накладанням два рівних кути (мал. 185). Таким чином приходимо до загального означення рівних фігур:

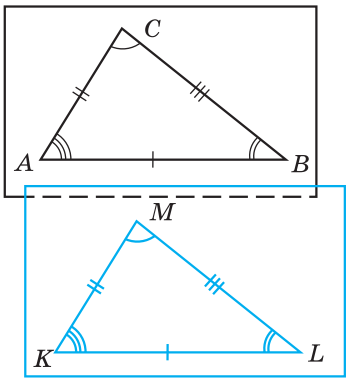
дві геометричні фігури називають *рівними*, якщо їх можна сумістити накладанням.



Мал. 184



Мал. 185



Мал. 186

Зауважимо, що це означення не суперечить означенням рівних відрізків та рівних кутів, які ви вже знаєте.

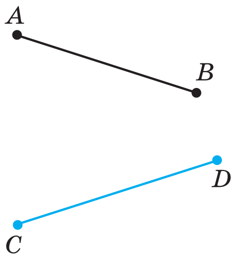
Розглянемо питання рівності трикутників. На малюнку 186 зображено рівні трикутники ABC і KLM. Кожний з них можна накласти на інший так, що вони повністю сумістяться. При цьому попарно сумістяться їх вершини A і K, B і L, C і M, а отже, і сторони цих трикутників AB і KL, AC і KM, BC і LM та кути A і K, B і L, C і M. Таким чином, якщо трикутники рівні, то елементи (тобто сторони і кути) одного трикутника відповідно дорівнюють елементам другого трикутника: $AB = KL$, $AC = KM$, $BC = ML$, $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle L$, $\angle C = \angle M$.

Для позначення рівності трикутників використовують звичайний знак рівності: $\triangle ABC = \triangle KLM$. Зауважимо, що має значення порядок запису вершин трикутника. Запис $\triangle ABC = \triangle KLM$ означає, що $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle L$, $\angle C = \angle M$, а запис $\triangle ABC = \triangle LKM$ інше: $\angle A = \angle L$, $\angle B = \angle K$, $\angle C = \angle M$.

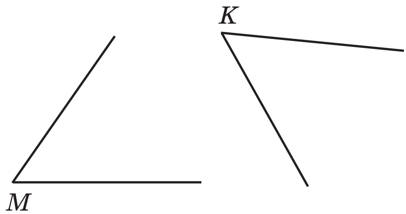
Коли дві геометричні фігури називають рівними? • Рівність яких елементів можна встановити, виходячи з умови $\triangle ABC = \triangle KLM$?

233①. 1) Виміряйте довжини відрізків AB і CD на малюнку 187 та встановіть, чи рівні вони.

2) Виміряйте кути M і K на малюнку 188 та встановіть, чи рівні вони.



Мал. 187



Мал. 188

234①. 1) Виміряйте довжини відрізків MN та PK на малюнку 189 та встановіть, чи рівні вони.

2) Виміряйте кути A і B на малюнку 190 та встановіть, чи рівні вони.

235①. (Усно.) 1) Чи можна сумістити накладанням відрізки AK і MF, якщо $AK = 1{,}5$ см, а $MF = 15$ мм?

2) Чи можна сумістити накладанням кути, градусні міри яких 25° і 32°?

236①. Дано: $\triangle ABC = \triangle MPL$. Доповніть записи:

1) $\angle A = \dots$; 2) $\angle B = \dots$; 3) $\angle C = \dots$.

237①. Дано: $\triangle MPT = \triangle DCK$. Доповніть записи:

1) $MP = \dots$; 2) $PT = \dots$; 3) $MT = \dots$.

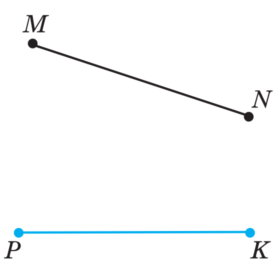
238②. На малюнку 191 зображено рівні трикутники. Доповніть записи рівності трикутників:

1) $\triangle AKM = \dots$; 2) $\triangle MAK = \dots$.

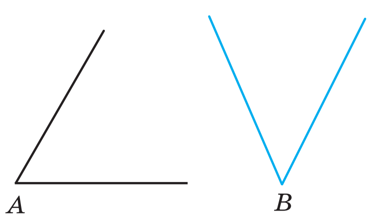
239②. На малюнку 192 зображено рівні трикутники. Доповніть записи рівності трикутників:

1) $\triangle ABC = \dots$; 2) $\triangle CAB = \dots$.

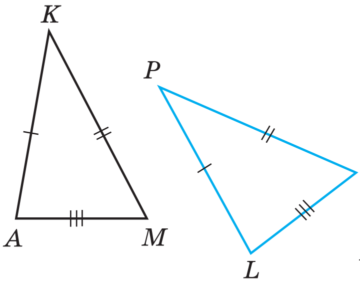
240②. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle KLP$; $AB = 5$ см, $LP = 9$ см, $AC = 8$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутників ABC і KLP.



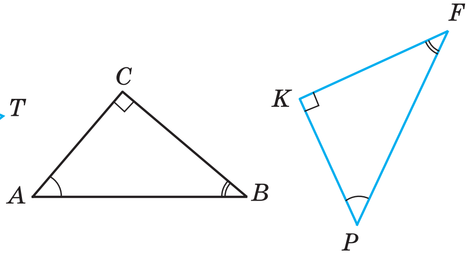
Мал. 189



Мал. 190



Мал. 191



Мал. 192

241②. Відомо, що $\triangle PMT = \triangle DCF$, $\angle P = 42^\circ$, $\angle C = 91^\circ$, $\angle T = 47^\circ$. Знайдіть невідомі кути трикутників PMT і DCF.

242③. 1) Периметри двох трикутників рівні. Чи рівні ці трикутники?

2) Периметр одного трикутника більший від периметра другого. Чи можуть ці трикутники бути рівними?

243③. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle CBA$. Чи є у трикутника ABC рівні сторони?

244③. Відомо, що $\triangle MNK = \triangle MKN$. Чи є у трикутника MNK рівні кути?

245④. Дано: $\triangle ABC = \triangle BCA$. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $AB = 5$ см.

246④. Дано: $\triangle PKL = \triangle KLP$. Знайдіть PK, якщо периметр трикутника PKL дорівнює 24 см.

247③. 1) На прямій позначено 10 точок так, що відстань між кожними двома сусідніми точками дорівнює 5 см. Знайдіть відстань між крайніми точками.

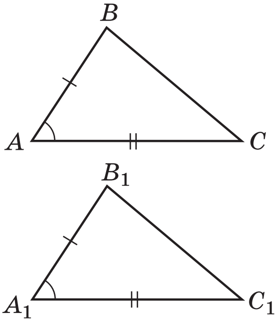
2) На прямій позначили 8 точок на однаковій відстані між кожними двома сусідніми. Відстань між крайніми точками дорівнює 112 см. Знайдіть відстань між двома сусідніми точками.

248③. Розгорнутий кут поділено променями на три кути, один з яких удвічі менший за другий і утричі менший за третій. Визначте градусні міри цих кутів.

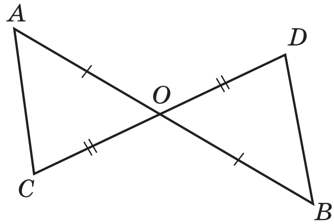
Урок 19

§ 13. ПЕРША ТА ДРУГА ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Рівність двох трикутників можна встановити, не накладаючи один трикутник на другий, а порівнюючи лише деякі їх елементи. Це важливо для практики, наприклад для встанов-



Мал. 193



Мал. 194

лення рівності двох земельних ділянок трикутної форми, які не можна накласти одна на одну.

Під час розв'язування багатьох теоретичних і практичних задач зручно використовувати *ознаки рівності трикутників*.

Т е о р е м а 1 (перша ознака рівності трикутників). ***Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ і $\angle A = \angle A_1$ (мал. 193).

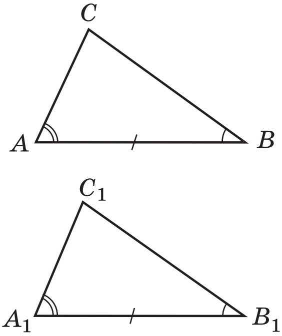
Оскільки $\angle A = \angle A_1$, то трикутник ABC можна накласти на трикутник $A_1B_1C_1$ так, що вершина A суміститься з вершиною A_1, сторона AB накладеться на промінь A_1B_1, а сторона AC — на промінь A_1C_1. Оскільки $AB = A_1B_1$ і $AC = A_1C_1$, то сумістяться точки B і B_1, C і C_1. У результаті три вершини трикутника ABC сумістилися з відповідними вершинами трикутника $A_1B_1C_1$. Отже, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ повністю сумістилися. Тому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Теорему доведено.

Задача 1. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що точка O є серединою кожного з них. Довести рівність трикутників AOC і BOD.

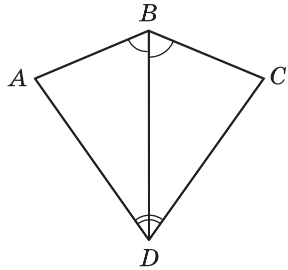
Д о в е д е н н я (мал. 194). За умовою задачі $AO = OB$ і $CO = OD$. Крім того, $\angle AOC = \angle BOD$ (як вертикальні). Тому за першою ознакою рівності трикутників $\triangle AOC = \triangle BOD$.

Т е о р е м а 2 (друга ознака рівності трикутників). ***Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$ (мал. 195).



Мал. 195



Мал. 196

Оскільки $AB = A_1B_1$, то трикутник ABC можна накласти на трикутник $A_1B_1C_1$ так, що вершина A суміститься з вершиною A_1, вершина B — з вершиною B_1, а вершини C і C_1 опиняться по один бік від прямої A_1B_1. $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$, тому при цьому накладанні промінь AC накладеться на промінь A_1C_1, а промінь BC — на промінь B_1C_1. Тоді точка C — спільна точка променів AC і BC — суміститься з точкою C_1 — спільною точкою променів A_1C_1 і B_1C_1. Отже, три вершини трикутника ABC сумістилися з відповідними вершинами трикутника $A_1B_1C_1$; трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ повністю сумістилися. Тому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Теорему доведено.

Задача 2. Довести рівність кутів A і C (мал. 196), якщо $\angle ADB = \angle CDB$ і $\angle ABD = \angle CBD$.

Д о в е д е н н я. Сторона BD є спільною стороною трикутників ABD і CBD. За умовою $\angle ADB = \angle CDB$ і $\angle ABD = \angle CBD$. Тому за другою ознакою рівності трикутників $\triangle ABD = \triangle CBD$. Рівними є всі відповідні елементи цих трикутників. Отже, $\angle A = \angle C$.

? Сформулюйте і доведіть першу ознаку рівності трикутників. • Сформулюйте і доведіть другу ознаку рівності трикутників.

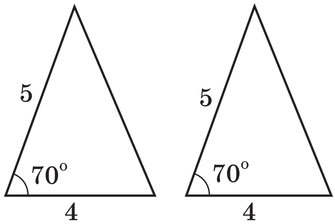
249①. (Усно.) Трикутники на малюнках 197, 198 рівні. За якою ознакою?

250①. Трикутники на малюнках 199, 200 рівні. За якою ознакою?

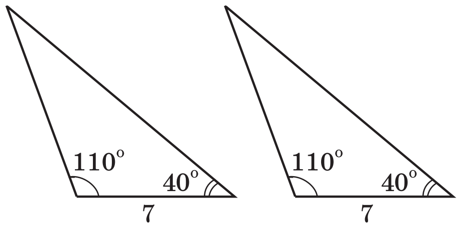
251①. Назвіть спільний елемент трикутників ABC і CDA (мал. 201) та трикутників KML і KNP (мал. 202).

252②. Доведіть рівність трикутників ABC і ADC, зображених на малюнку 203, якщо $BC = CD$ і $\angle ACB = \angle ACD$.

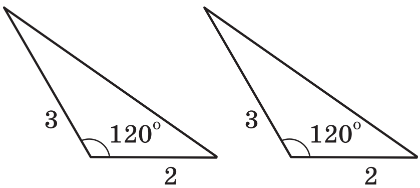
253②. Доведіть рівність трикутників ABK і CBK, зображених на малюнку 204, якщо $AB = BC$ і $BK \perp AC$.



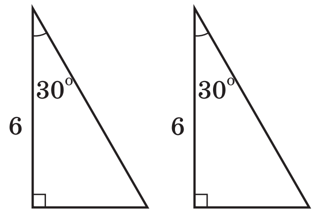
Мал. 197



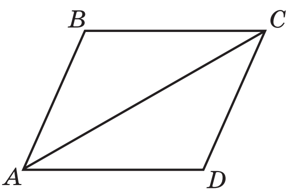
Мал. 198



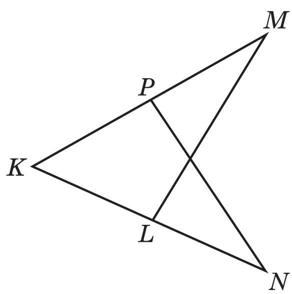
Мал. 199



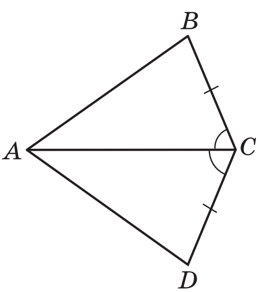
Мал. 200



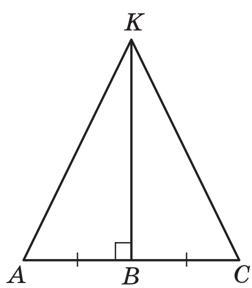
Мал. 201



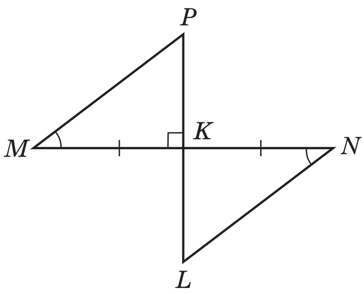
Мал. 202



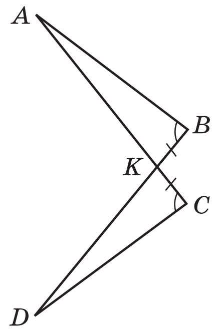
Мал. 203



Мал. 204



Мал. 205



Мал. 206

254②. Доведіть рівність трикутників MKP і NKL, зображених на малюнку 205, якщо $MK = KN$ і $PL \perp MN$.

255②. Доведіть рівність трикутників ABK і DCK, зображених на малюнку 206, якщо $KB = KC$ і $\angle ABK = \angle DCK$.

256③. 1) Чи можна стверджувати, що коли дві сторони і кут одного трикутника дорівнюють двом сторонам і куту другого трикутника, то такі трикутники рівні?

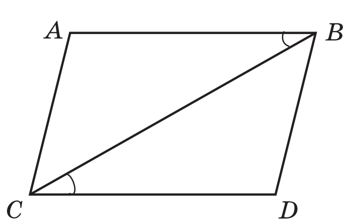
2) Накресліть два нерівних трикутники так, щоб дві сторони і кут одного трикутника дорівнювали двом сторонам і куту другого трикутника.

257③. 1) Чи можна стверджувати, що коли сторона і два кути одного трикутника дорівнюють стороні і двом кутам другого, то такі трикутники рівні?

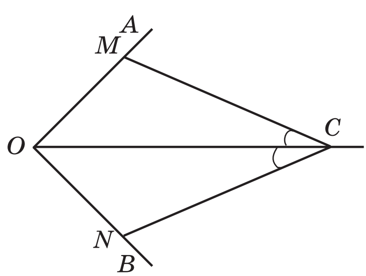
2) Накресліть два нерівних трикутники так, щоб сторона і два кути одного трикутника дорівнювали стороні і двом кутам другого.

Урок 20

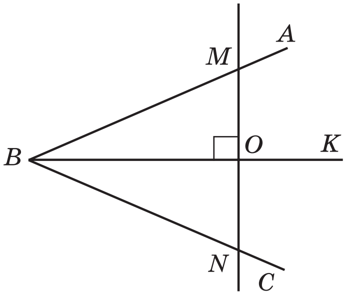
258②. Доведіть рівність трикутників ABC і DCB (мал. 207), якщо $AB = CD$ і $\angle ABC = \angle BCD$.



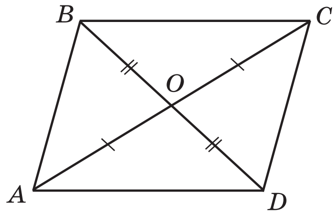
Мал. 207



Мал. 208



Мал. 209



Мал. 210

259②. Промінь OC — бісектриса кута AOB (мал. 208), $\angle OCM = \angle OCN$. Доведіть, що $\triangle OMC = \triangle ONC$.

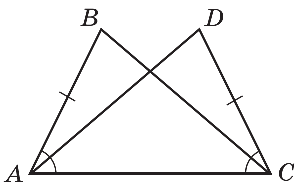
260③. Промінь BK — бісектриса кута ABC (мал. 209), $MN \perp BK$. Доведіть, що $MO = ON$.

261③. На малюнку 210 $AO = OC$, $BO = OD$. Доведіть, що $AB = CD$ і $BC = AD$.

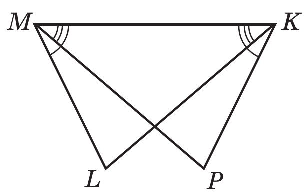
262③. Доведіть рівність трикутників ABC і CDA, зображених на малюнку 211, якщо $AB = CD$ і $\angle BAC = \angle DCA$.

263③. Доведіть рівність трикутників MKL і KMP, зображених на малюнку 212, якщо $\angle LMK = \angle PKM$ і $\angle LKM = \angle PMK$.

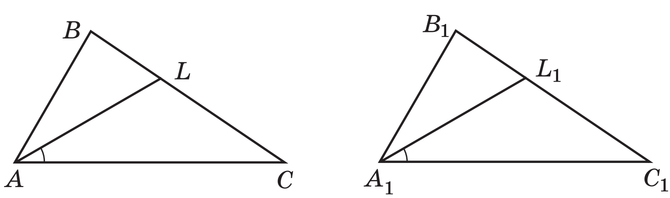
264③. На сторонах BC і B_1C_1 рівних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ позначено відповідно точки L і L_1 такі, що $\angle LAC = \angle L_1A_1C_1$ (мал. 213). Доведіть, що $\triangle ALC = \triangle A_1L_1C_1$.



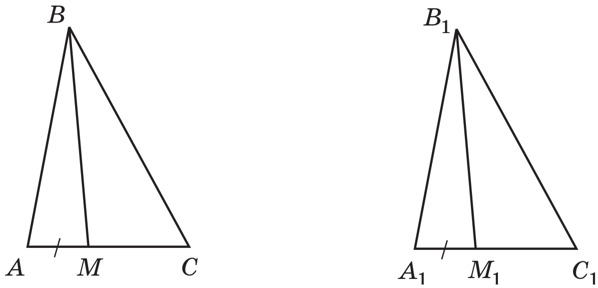
Мал. 211



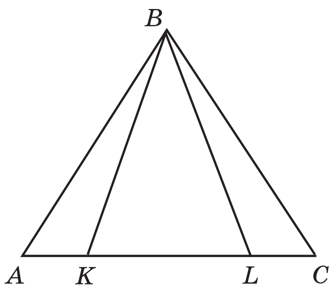
Мал. 212



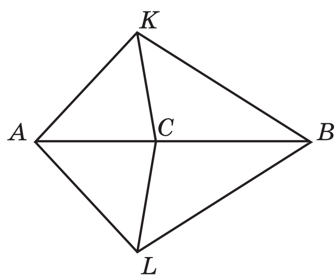
Мал. 213



Мал. 214



Мал. 215



Мал. 216

265③. На сторонах AC і A_1C_1 рівних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ позначено відповідно точки M і M_1 такі, що $AM = A_1M_1$ (мал. 214). Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$.

266④. На малюнку 215 $\triangle ABK = \triangle CBL$. Доведіть, що $\triangle ABL = \triangle CBK$.

267④. На малюнку 216 $\triangle AKC = \triangle ALC$. Доведіть, що $\triangle BKC = \triangle BLC$.

268*. На бісектрисі кута A позначили точку B, а на сторонах кута такі точки M і N, що $\angle ABM = \angle ABN$. Доведіть, що $MN \perp AB$.

269③. Одна сторона трикутника дорівнює 4 дм, що на 13 см менше за другу сторону і у 2 рази більше за третю. Знайдіть периметр трикутника.

270④. Сума трьох із восьми нерозгорнутих кутів, утворених при перетині паралельних прямих a і b січною c, дорівнює 270°. Чи перпендикулярні прямі a і c; b і c?

Урок 21 § 14. РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК

Трикутник називають *рівнобедреним*, якщо в нього дві сторони рівні.

Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають ***бічними сторонами***, а його третю сторону — ***основою***. На малюнку 217 зображено рівнобедрений трикутник ABC, AB — його основа, AC і BC — бічні сторони.

Трикутник, всі сторони якого мають різні довжини, називають *різностороннім*.
Трикутник, всі сторони якого рівні, називають *рівностороннім*.

На малюнку 218 зображено різносторонній трикутник KLM, а на малюнку 219 — рівносторонній трикутник EFT.

Отже, залежно від сторін, розрізняють такі види трикутників: ***різносторонні, рівнобедрені, рівносторонні***.

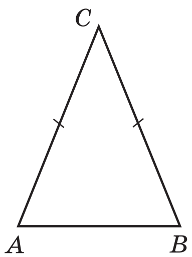
Розглянемо властивості та ознаки рівнобедреного трикутника.

Т е о р е м а 1 (властивість кутів рівнобедреного трикутника). ***У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.***

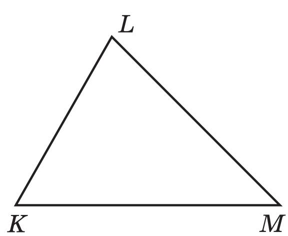
Д о в е д е н н я. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник з основою AB (мал. 217). Доведемо, що в нього $\angle A = \angle B$.

$\triangle ACB = \triangle BCA$ (за першою ознакою), оскільки $AC = BC$, $CB = CA$ і $\angle C$ — спільний для трикутників ACB і BCA. З рівності трикутників випливає, що $\angle A = \angle B$. Теорему доведено.

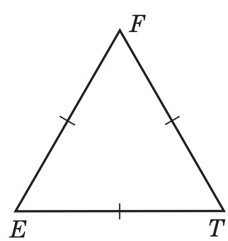
Н а с л і д о к. ***У рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.***



Мал. 217



Мал. 218



Мал. 219

Д о в е д е н н я. Розглянемо рівносторонній трикутник EFT (мал. 219), у якого $EF = FT = ET$. Оскільки $EF = FT$, то його можна вважати рівнобедреним з основою ET. Тому $\angle E = \angle T$. Аналогічно (вважаючи основою FT), маємо, що $\angle F = \angle T$. Отже, $\angle E = \angle T = \angle F$.

Задача 1. На малюнку 220 $AB = BC$; $AD = EC$. Довести, що $\angle BDE = \angle BED$.

Д о в е д е н н я. 1) Оскільки $AB = BC$, то $\triangle ABC$ — рівнобедрений з основою AC. Тому $\angle BAC = \angle BCA$.

2) $\triangle BAD = \triangle BCE$ (за першою ознакою). Тому $BD = BE$.

3) Отже, $\triangle BDE$ — рівнобедрений з основою DE. Тому $\angle BDE = \angle BED$, що й треба було довести.

Т е о р е м а 2 (ознака рівнобедреного трикутника). ***Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.***

Д о в е д е н н я. Нехай ABC — трикутник, у якого $\angle A = \angle B$ (мал. 221). Доведемо, що він рівнобедрений з основою AB.

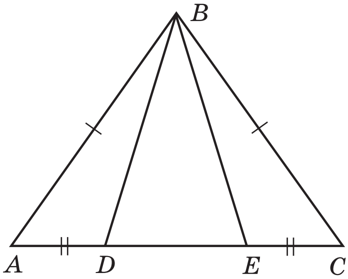
$\triangle ACB = \triangle BCA$ (за другою ознакою), оскільки $\angle A = \angle B$, $\angle B = \angle A$ і AB — спільна сторона для трикутників ACB і BCA. З рівності трикутників випливає, що $AC = BC$. Тому $\triangle ABC$ — рівнобедрений з основою AB. Теорему доведено.

Зауважимо, що розглянута теорема є оберненою до теореми про властивість кутів рівнобедреного трикутника.

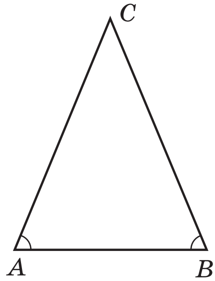
Н а с л і д о к. ***Якщо у трикутнику всі кути рівні, то він рівносторонній.***

Д о в е д е н н я. Нехай $\triangle ABC$ такий, що $\angle A = \angle B = \angle C$. Оскільки $\angle A = \angle B$, то $AC = BC$. Оскільки $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$. Отже, $AC = BC = AB$, таким чином трикутник ABC — рівносторонній.

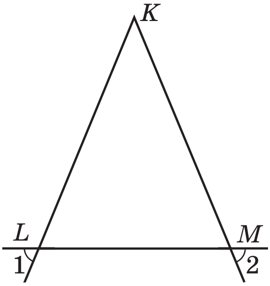
Задача 2. На малюнку 222 $\angle 1 = \angle 2$. Довести, що $\triangle KLM$ — рівнобедрений.



Мал. 220



Мал. 221

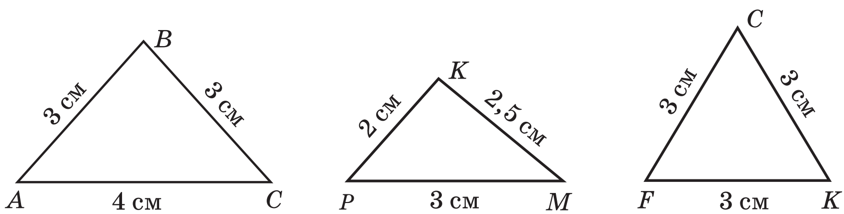


Мал. 222

Д о в е д е н н я. $\angle KLM = \angle 1$ (як вертикальні), $\angle KML = \angle 2$ (як вертикальні). Але за умовою $\angle 1 = \angle 2$. Тому $\angle KLM = \angle KML$. Отже, за ознакою рівнобедреного трикутника, $\triangle KLM$ — рівнобедрений.

Який трикутник називають рівнобедреним; різностороннім; рівностороннім? • Сформулюйте та доведіть теорему про властивість кутів рівнобедреного трикутника та наслідок з неї. • Сформулюйте та доведіть ознаку рівнобедреного трикутника та наслідок з неї.

271①. (Усно). Який з трикутників, зображених на малюнку 223, є рівнобедреним, який рівностороннім, а який — різностороннім? Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, зображеного на цьому малюнку.



Мал. 223

272①. Вкажіть основу та бічні сторони $\triangle DTP$ (мал. 224). Якими є кути T і P цього трикутника?

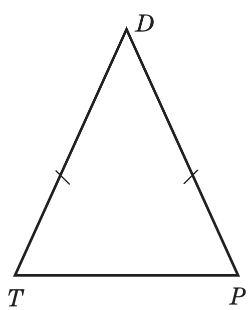
273①. Один з кутів при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 50°. Чому дорівнює другий кут при основі цього трикутника?

274①. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, друга сторона — 7 см. Яка довжина третьої сторони?

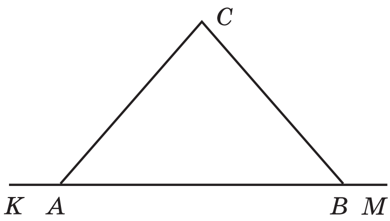
275①. Трикутник ABC — рівносторонній. $AB = 10$ см. Знайдіть периметр трикутника ABC.

276①. Периметр рівностороннього трикутника ABC дорівнює 15 см. Знайдіть довжину сторони BC цього трикутника.

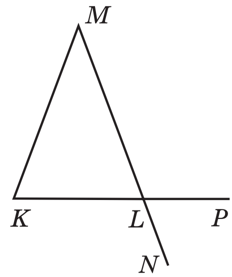
277②. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 9 см, а основа на 2 см менша від бічної сторони.



Мал. 224



Мал. 225



Мал. 226

278②. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 10 см, а бічна сторона на 4 см більша від основи.

279②. (Усно.) Чи може бути рівнобедреним трикутник, всі кути якого різні?

280②. Дано: $\triangle ABC$ — рівнобедрений з основою AB (мал. 225). Доведіть, що $\angle KAC = \angle MBC$.

281②. Дано: $\triangle KLM$ — рівнобедрений з основою KL (мал. 226). Доведіть, що $\angle MKL = \angle PLN$.

Урок 22

282②. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а бічна сторона — 7 см. Знайдіть основу трикутника.

283②. Периметр рівнобедреного трикутника AMN з основою MN дорівнює 18 дм. Знайдіть довжину основи MN, якщо $AM = 7$ дм.

284②. Периметр рівнобедреного трикутника ACD з бічними сторонами AC і AD дорівнює 30 дм. Знайдіть довжину бічної сторони, якщо $CD = 12$ дм.

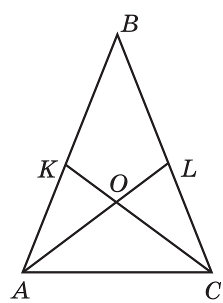
285②. Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 17 см, а основа — 5 см.

286②. Чи правильні твердження:

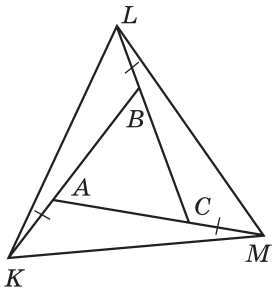
1) будь-який рівносторонній трикутник є рівнобедреним;

2) будь-який рівнобедрений трикутник є рівностороннім?

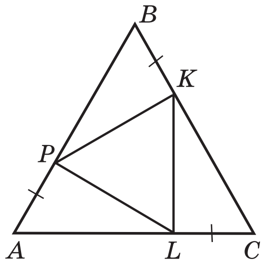
287③. На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC узято точки K і L такі, що $AK = LC$ (мал. 227). Доведіть, що відрізки AL і KC рівні.



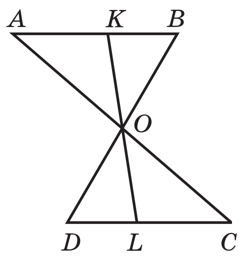
Мал. 227



Мал. 228



Мал. 229



Мал. 230

288③. На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC узято точки K і L такі, що $\angle KCA = \angle LAC$ (мал. 227). Доведіть, що відрізки AK і CL рівні.

289③. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр 44 см, а бічна сторона на 4 см більша за основу.

290③. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр 35 дм, а основа у 2 рази менша за бічну сторону.

291③. Знайдіть довжини сторін рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 14 см і він більший від суми двох бічних сторін на 6 см.

292④. Сторони рівностороннього трикутника ABC продовжено на рівні відрізки AK, BL і CM (мал. 228). Доведіть, що трикутник KLM — рівносторонній.

293④. На сторонах рівностороннього трикутника ABC відкладено рівні відрізки AP, BK і CL (мал. 229). Доведіть, що трикутник PKL — рівносторонній.

294③. Доведіть, що з двох суміжних кутів хоча б один не більший за 90°.

295③. Відрізки AC і BD перетинаються в точці O так, що $\triangle AOB = \triangle COD$ (мал. 230). Точка K належить відрізку AB, а точка L — відрізку DC, причому KL проходить через точку O. Доведіть, що:

1) $KO = OL$; 2) $KB = DL$.

296④. На відрізку AB завдовжки 48 см позначено точку K так, що $5AK = 7BK$. Знайдіть довжини відрізків AK і BK.

Урок 23

§ 15. МЕДІАНА, БІСЕКТРИСА І ВИСОТА ТРИКУТНИКА. ВЛАСТИВІСТЬ БІСЕКТРИСИ РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

У кожного трикутника є кілька відрізків, які мають спеціальні назви.

Медіаною трикутника називають відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

На малюнку 231 відрізок AM_1 — медіана трикутника ABC. Точку M_1 називають основою медіани AM_1. Будь-який трикутник має три медіани. На малюнку 232 відрізки AM_1, BM_2, CM_3 — медіани трикутника ABC. Медіани трикутника мають цікаву властивість.

У будь-якому трикутнику медіани перетинаються в одній точці (вона називається ***центроїдом*** *трикутника) і в цій точці поділяються у відношенні* 2:1, *починаючи від вершини.*

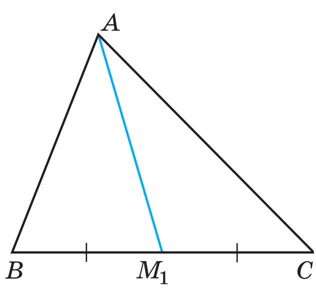
На малюнку 232 точка M — центроїд трикутника.

Цю властивість буде доведено у старших класах.

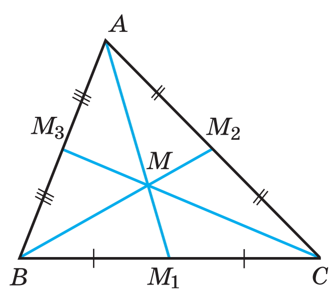
Бісектрисою трикутника називають відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.

На малюнку 233 відрізок AL_1 — бісектриса трикутника ABC. Точку L_1 називають основою бісектриси AL_1. Будь-який трикутник має три бісектриси. На малюнку 234 відрізки AL_1, BL_2, CL_3 — бісектриси трикутника.

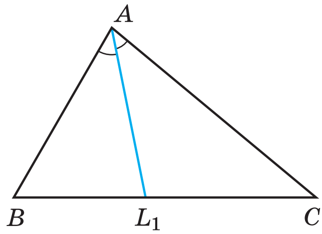
У § 23 ми доведемо, що *у будь-якому трикутнику бісектриси перетинаються в одній точці* (вона називається ***інцентром***).



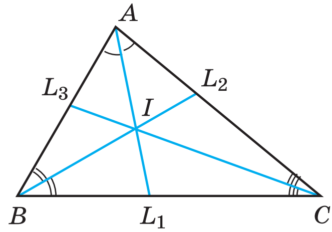
Мал. 231



Мал. 232



Мал. 233

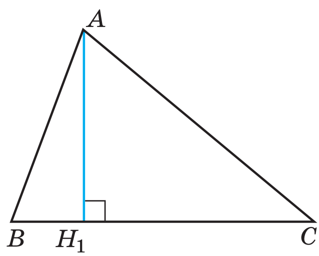


Мал. 234

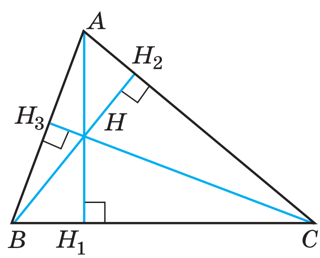
На малюнку 234 точка I — інцентр трикутника.

Висотою трикутника **називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.**

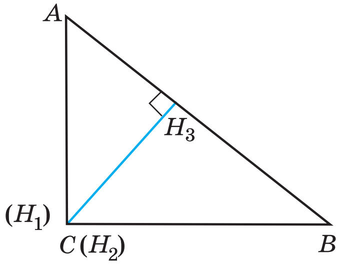
На малюнку 235 відрізок AH_1 — висота трикутника ABC. Точку H_1 називають основою висоти AH_1. Будь-який трикутник має три висоти. На малюнку 236 відрізки AH_1, BH_2, CH_3 — висоти гострокутного трикутника ABC, на малюнку 237 ці відрізки — висоти прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C, а на малюнку 238 ці відрізки — висоти тупокутного трикутника ABC з тупим кутом A.



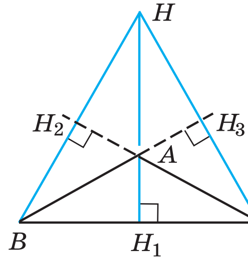
Мал. 235



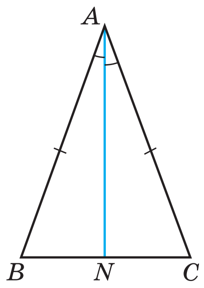
Мал. 236



Мал. 237



Мал. 238



Мал. 239

У старших класах буде доведено, що *у будь-якому трикутнику три висоти або їх продовження перетинаються в одній точці* (вона називається ***ортоцентром*** трикутника). На малюнках 236 і 238 точка H — ортоцентр трикутника, на малюнку 237 ортоцентр трикутника збігається з точкою C — вершиною прямого кута трикутника ABC.

Розглянемо ще одну важливу властивість рівнобедреного трикутника.

Т е о р е м а (властивість бісектриси рівнобедреного трикутника). ***У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.***

Д о в е д е н н я. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник з основою BC, AN — його бісектриса (мал. 239). Доведемо, що AN є також медіаною і висотою.

1) Оскільки $\angle BAN = \angle NAC$, $AB = AC$, а відрізок AN — спільна сторона трикутників ABN і CAN, то ці трикутники рівні за першою ознакою.

2) Тому $BN = NC$. Отже, AN — медіана трикутника.

3) Також маємо $\angle BNA = \angle CNA$. Оскільки ці кути суміжні і рівні, то $\angle BNA = \angle CNA = 90^\circ$. Отже, AN є також висотою.

Теорему доведено.

Оскільки бісектриса, медіана і висота рівнобедреного трикутника, проведені до основи, збігаються, то справедливі такі наслідки з теореми.

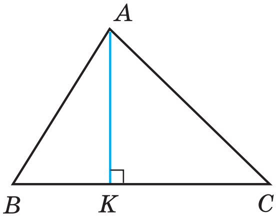
Н а с л і д о к 1. ***Медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є висотою і бісектрисою.***

Н а с л і д о к 2. ***Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є медіаною і бісектрисою.***

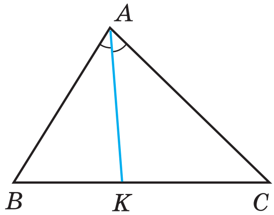
? Який відрізок називають медіаною трикутника? • Скільки медіан має трикутник? • Який відрізок називають бісектрисою трикутника? • Скільки бісектрис має трикутник? • Який відрізок називають висотою трикутника? • Скільки висот має трикутник? • Сформулюйте і доведіть теорему про властивість бісектриси рівнобедреного трикутника. Сформулюйте наслідки з цієї теореми.

297①. (Усно.) Як називається відрізок AK у трикутнику ABC (мал. 240—242)?

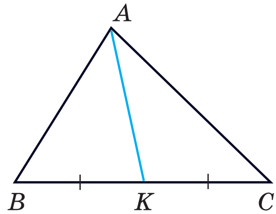
298①. 1) Як називається у $\triangle ABC$ відрізок AT (мал. 243), якщо він є перпендикуляром до прямої BC?



Мал. 240



Мал. 241

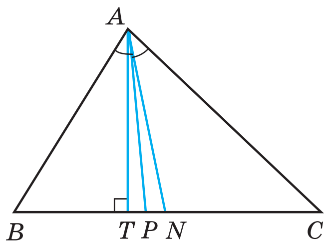


Мал. 242

2) Як називається у $\triangle ABC$ відрізок AN, якщо $BN = NC$?

3) Як називається у $\triangle ABC$ відрізок AP, якщо $\angle BAP = \angle PAC$?

299①**.** У трикутнику ABC відрізок AK — висота (мал. 240). Чому дорівнюють кути BKA і CKA?



Мал. 243

300①**.** У трикутнику ABC відрізок AK — бісектриса (мал. 241). Кут BAK дорівнює 35°. Чому дорівнює кут BAC?

301①**.** У трикутнику ABC відрізок AK — медіана (мал. 242). BC = 10 см. Знайдіть довжини відрізків BK і KC.

302②**.** Накресліть трикутник. За допомогою лінійки з поділками проведіть медіани цього трикутника.

303②**.** Накресліть трикутник. За допомогою транспортира і лінійки проведіть бісектриси цього трикутника.

304②**.** Накресліть тупокутний трикутник. За допомогою креслярського косинця проведіть висоти цього трикутника.

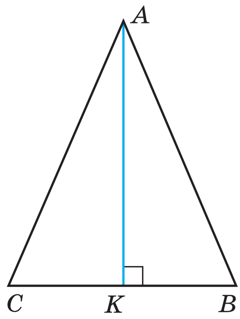
305②**.** Накресліть гострокутний трикутник. За допомогою креслярського косинця проведіть висоти цього трикутника.

306③**.** (Усно.) Які елементи (частини) трикутника сумістяться, якщо його перегнути по: 1) бісектрисі; 2) висоті?

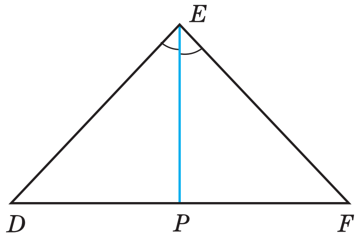
Урок 24

307②**.** На малюнку 244 відрізок AK — висота рівнобедреного трикутника ABC з основою BC. Запишіть три пари рівних кутів і дві пари рівних відрізків, зображених на цьому малюнку.

308②**.** На малюнку 245 відрізок EP — бісектриса рівнобедреного трикутника DEF з основою DF. Запишіть три пари рівних кутів і дві пари рівних відрізків, зображених на цьому малюнку.



Мал. 244



Мал. 245

309②. (Усно.) Чому не можна стверджувати, що три висоти трикутника завжди перетинаються в одній точці?

310②. У трикутнику ABC кути B і C — рівні. Бісектриса якої із сторін є одночасно медіаною і висотою?

311③. Доведіть, що коли бісектриса трикутника є його висотою, то трикутник рівнобедрений.

312③. Доведіть, що коли медіана трикутника є його висотою, то трикутник рівнобедрений.

П р и м і т к а. Твердження задач 311—312 можна вважати ознаками рівнобедреного трикутника.

313③. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, рівні.

314③. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені до бічних сторін, рівні.

315③. AD і A_1D_1 — відповідно бісектриси рівних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Доведіть, що трикутники ADC і $A_1D_1C_1$ рівні.

316④. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено висоту BD. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $BD = 10$ см, а периметр трикутника ABD дорівнює 40 см.

317④. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB проведено медіану CK. Знайдіть її довжину, якщо периметр трикутника ACK дорівнює 12 см, а периметр трикутника ABC — 16 см.

318*. Доведіть, що коли медіана трикутника є його бісектрисою, то трикутник рівнобедрений.

П р и м і т к а. Твердження задачі 318 можна вважати ознакою рівнобедреного трикутника.

319②. Два з восьми кутів, що утворилися при перетині прямих a і b січною c, дорівнюють 30° і 140°. Чи можуть прямі a і b бути паралельними?

320②. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює 12 см. На його стороні побудували рівнобедрений трикутник, периметр якого 18 см. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника.

321③. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника з периметром 69 см, якщо його основа становить 30 % бічної сторони.

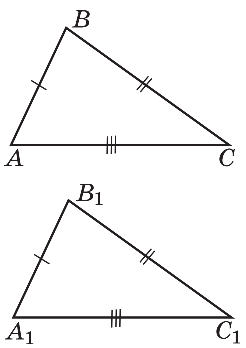
Урок 25

§ 16. ТРЕТЯ ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

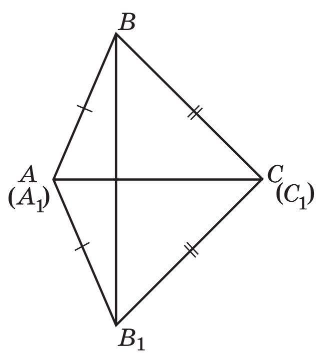
Теорема (третя ознака рівності трикутників). ***Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два трикутники, у яких $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ (мал. 246). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Прикладемо трикутник $A_1B_1C_1$ до трикутника ABC так, щоб вершина A_1 сумістилася з вершиною A, вершина C_1 — з вершиною C, а вершина B_1 і B були по різні боки від прямої AC. Можливі три випадки: промінь BB_1 проходить всередині кута ABC (мал. 247), промінь BB_1 збігається з однією із сторін цього кута (мал. 248), промінь BB_1 проходить поза кутом ABC (мал. 249). Розглянемо перший випадок (інші випадки розгляньте самостійно). Оскільки за умовою $AB = A_1B_1$ і $BC = B_1C_1$, то трикутники ABB_1 і CBB_1 — рівнобедрені з основою BB_1. Тоді $\angle ABB_1 = \angle AB_1B$ і $\angle CBB_1 = \angle CB_1B$. Тому $\angle ABC = \angle AB_1C$.

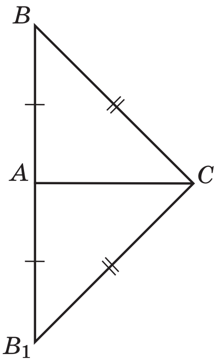
Отже, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Тому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників. Теорему доведено.



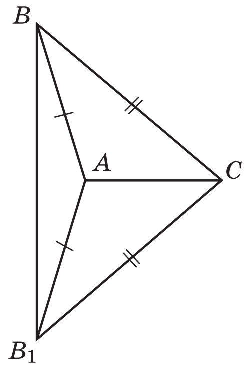
Мал. 246



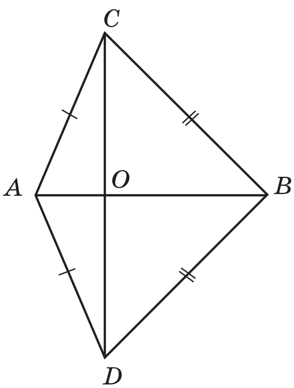
Мал. 247



Мал. 248



Мал. 249



Мал. 250

Задача. На малюнку 250 $AC = AD$ і $BC = BD$. Доведіть, що $CO = OD$.

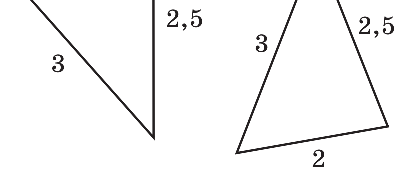
Д о в е д е н н я. 1) У трикутників ABC і ABD сторона AB — спільна і $AC = AD$, $BC = BD$. Тому ці трикутники рівні за третьою ознакою рівності трикутників.

2) Тоді $\angle CAB = \angle DAB$, AB — бісектриса кута CAD.

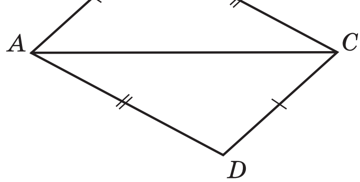
3) Тому AO — бісектриса рівнобедреного трикутника ACD, проведена до основи. Ця бісектриса є також медіаною. Отже, $CO = OD$, що і треба було довести.

? Сформулюйте і доведіть третю ознаку рівності трикутників.

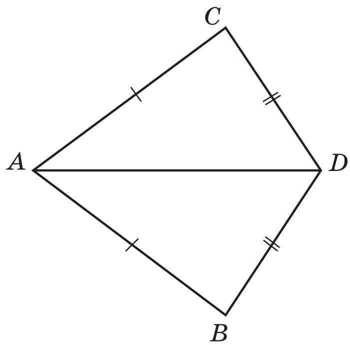
322①. (Усно.) Чи рівні трикутники, зображені на малюнку 251? За якою ознакою?



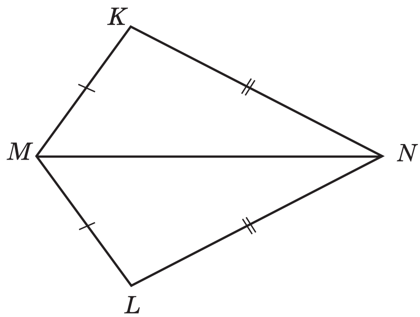
Мал. 251



Мал. 252



Мал. 253



Мал. 254

323②. Доведіть рівність трикутників ABC і CDA, зображених на малюнку 252, якщо $AB = DC$ і $BC = CD$.

324②. Доведіть рівність трикутників ACD і ABD, зображених на малюнку 253, якщо $AC = AB$ і $DC = DB$.

325②. На малюнку 254 $MK = ML$, $KN = NL$. Доведіть, що $\angle K = \angle L$.

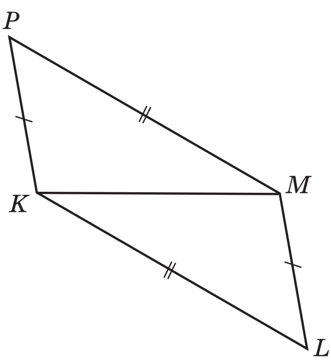
326②. На малюнку 255 $PK = ML$, $PM = KL$. Доведіть, що $\angle PKM = \angle LMK$.

327③. На малюнку 256 $AB = BC$, $AK = KC$. Доведіть, що BK — бісектриса кута ABC.

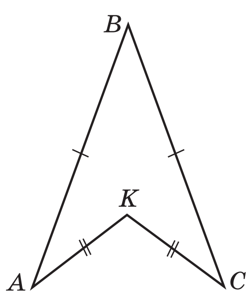
328③. На малюнку 257 $MP = MK$, $PL = KL$. Доведіть, що ML — бісектриса кута PMK.

329③. Дано: $AB = CD$, $AC = BD$ (мал. 258). Доведіть: $\triangle AOD$ — рівнобедрений.

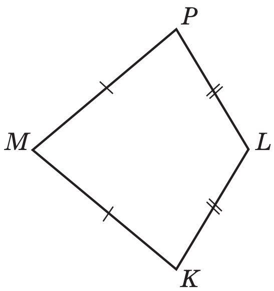
330③. Дано: $AO = OB$, $CO = OD$ (мал. 259). Доведіть: $\triangle ABC = \triangle BAD$.



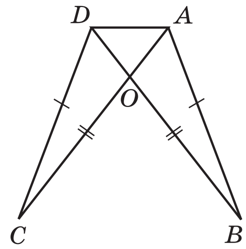
Мал. 255



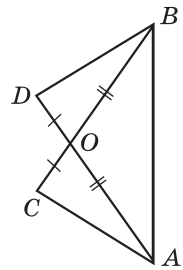
Мал. 256



Мал. 257



Мал. 258



Мал. 259

331③. Для трикутників ABC і MNP виконується: $AB \neq MN$, $BC \neq NP$, $AC \neq MP$. Чи можуть бути рівними такі трикутники?

332③. Трикутники ABC і MNP — рівнобедрені. Причому $AB = MN = 5$ см, а $BC = NP = 7$ см. Чи можна стверджувати, що ці трикутники рівні?

333④. Всередині рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$) взято точку K так, що $BK = KC$. Доведіть, що пряма AK перпендикулярна до BC.

334④. Всередині рівнобедреного трикутника DMN ($DM = DN$) взято точку P так, що $MP = PN$. Доведіть, що промінь DP — бісектриса кута MDN.

335③. Як, використовуючи шаблон кута у 10°, побудувати перпендикулярні прямі?

336④. Промінь AK проходить між сторонами кута BAC, що дорівнює 126°. Відомо, що $4 \cdot \angle BAK = 5 \cdot \angle KAC$. Знайдіть градусні міри кутів BAK і KAC.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ З ТЕМИ «ТРИКУТНИКИ. ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ. РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ»

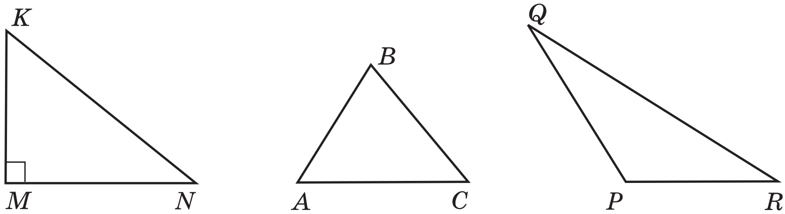
Урок 26

1①. Накресліть трикутник MNK. Запишіть вершини, сторони та кути цього трикутника.

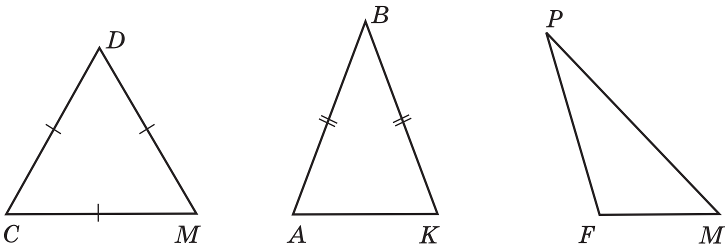
2①. Який із зображених на малюнку 260 трикутників гострокутний, який — прямокутний, а який — тупокутний?

3①. Який із зображених на малюнку 261 трикутників рівнобедрений, який — рівносторонній, а який — різносторонній?

4②. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle KMF$; $AB = 5$ см, $BC = 4$ см; $KF = 7$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутників ABC і KMF.



Мал. 260



Мал. 261

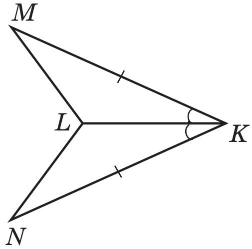
5②. На малюнку 262 $MK = KN$; $\angle LKM = \angle LKN$. Доведіть рівність трикутників MKL і NKL.

6②. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 12 см, а бічна сторона на 3 см більша за основу.

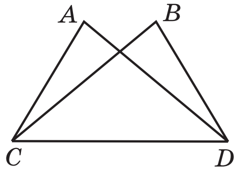
7③. На малюнку 263 $AC = BD$, $BC = AD$. Доведіть, що $\angle BCD = \angle ADC$.

8③. Одна сторона трикутника у два рази менша за другу і на 3 см менша за третю. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 23 см.

9④. У рівнобедреному трикутнику KLM з основою KL проведено медіану MP. Знайдіть периметр трикутника KML, якщо $MP = 8$ дм, а периметр трикутника MKP дорівнює 24 дм.



Мал. 262

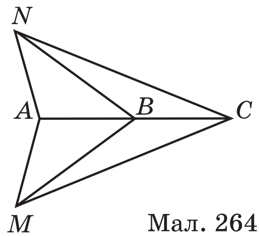


Мал. 263

Додаткові завдання

10④. На малюнку 264 $\triangle ANB = \triangle AMB$. Доведіть, що $\triangle ANC = = \triangle AMC$.

11④. Відомо, що $\triangle MKL = \triangle KLM$. Знайдіть периметр трикутника MKL, якщо він на 10 см більший за сторону MK.

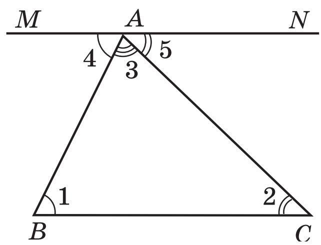


Мал. 264

Урок 27 § 17. СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА

Доведемо одну з найважливіших теорем геометрії.

Теорема (про суму кутів трикутника). ***Сума кутів трикутника дорівнює*** **180°.**



Мал. 265

Доведення. Розглянемо трикутник ABC і доведемо, що $\angle A + + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

1) Проведемо через вершину A пряму MN, паралельну BC (мал. 265). Позначимо $\angle B = \angle 1$, $\angle C = \angle 2$, $\angle BAC = \angle 3$, утворені кути $\angle MAB = = \angle 4$, $\angle NAC = \angle 5$. Кути 1 і 4 — внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих BC і MN січною AB, а кути 2 і 5 — внутрішні різносторонні кути при перетині тих самих прямих січною AC. Тому $\angle 1 = \angle 4$ і $\angle 2 = \angle 5$.

2) Кути 3, 4 і 5 в сумі дорівнюють розгорнутому:

$$\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ.$$

Тоді, враховуючи, що $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 5$, маємо

$$\angle 3 + \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ, \text{ або}$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ, \text{ що і треба було довести.}$$

Наслідок. ***У будь-якому трикутнику принаймні два кути гострі; трикутник не може мати більше одного прямого або тупого кута.***

Доведення. Припустимо, що у трикутника тільки один гострий кут. Тоді сума двох інших кутів (не гострих) не менша за 180°. Це суперечить доведеній теоремі. Наше припущення неправильне. Отже, у кожного трикутника принаймні два кути гострі, а тому трикутник не може мати більше одного прямого або тупого кута.

Враховуючи цей наслідок, можна сказати, що гострокутний трикутник має три гострих кути; прямокутний трикутник має один прямий і два гострих кути; тупокутний трикутник має один тупий і два гострих кути.

Задача 1. Нехай бісектриси кутів B і C перетнулися в точці I. Довести, що $\angle BIC = 90^\circ + \dfrac{\angle A}{2}$.

Доведення. $\angle ICB = \dfrac{\angle ACB}{2}$; $\angle IBC = \dfrac{\angle ABC}{2}$ (мал. 266). Тоді $\angle BIC = 180^\circ - (\angle ICB + \angle IBC) = 180^\circ - \left(\dfrac{\angle ACB}{2} + \dfrac{\angle ABC}{2}\right) = 180^\circ - \dfrac{\angle ACB + \angle ABC}{2} = 180^\circ - \dfrac{180^\circ - \angle A}{2} = 180^\circ - 90^\circ + \dfrac{\angle A}{2} = 90^\circ + \dfrac{\angle A}{2}$ (скористалися тим, що сума кутів кожного з трикутників BCI і ABC дорівнює 180°), що і треба було довести.

Задача 2. Нехай висоти BH_2 і CH_3 гострокутного трикутника ABC перетнулися в точці H. $\angle A = \alpha$ (мал. 267). Знайти $\angle BHC$.

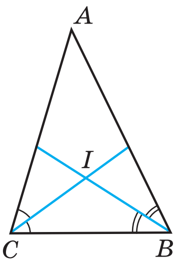
Розв'язання. Розглянемо трикутник H_2BC. $\angle H_2BC = 180^\circ - (90^\circ + \angle ACB) = 90^\circ - \angle ACB$. У $\triangle H_3CB$: $\angle H_3CB = 180^\circ - (90^\circ + \angle ABC) = 90^\circ - \angle ABC$. Тоді у $\triangle HCB$: $\angle BHC = 180^\circ - (\angle HBC + \angle HCB) = 180^\circ - (90^\circ - \angle ACB + 90^\circ - \angle ABC) = \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - \alpha$.

Отже, $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$.

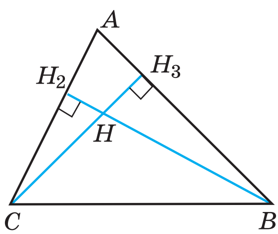
Відповідь. $180^\circ - \alpha$.

Задача 3. Медіана CN трикутника ABC дорівнює половині сторони AB. Довести, що трикутник ABC — прямокутний з прямим кутом C.

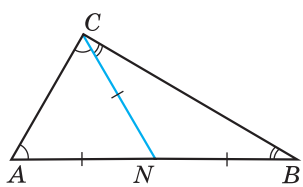
Доведення (мал. 268). Оскільки $CN = \dfrac{AB}{2}$ і N — середина відрізка AB, то $CN = AN = BN$. Отже, трикутники ANC і CNB — рівнобедрені. Тому $\angle A = \angle ACN$; $\angle B = \angle BCN$. Таким чином,



Мал. 266



Мал. 267



Мал. 268

$\angle C = \angle A + \angle B$. Але ж $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. Тому $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$. Отже, $\angle C = 180^\circ - \angle C$. Звідси $\angle C = 90^\circ$. Трикутник ABC — прямокутний з прямим кутом C, що й треба було довести.

Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів трикутника. • Сформулюйте і доведіть наслідок з цієї теореми.

337①. (Усно.) Дано: $\triangle\ PLK$. Чому дорівнює сума кутів: $\angle P + \angle L + \angle K$?

338①. Чи існує трикутник з кутами:

1) 40°, 50° і 70°; 2) 80°, 30° і 70°?

339①. Чи існує трикутник з кутами:

1) 20°, 100° і 80°; 2) 40°, 50° і 90°?

340①. Знайдіть третій кут трикутника, якщо два його кути дорівнюють: 1) 42° і 54°; 2) 7° і 95°; 3) 89° і 87°.

341①. Знайдіть третій кут трикутника, якщо два його кути дорівнюють: 1) 14° і 39°; 2) 29° і 106°; 3) 5° і 92°.

342②. Сума двох кутів трикутника дорівнює 125°. Знайдіть третій кут трикутника.

343②. У трикутнику ABC $\angle A + \angle B = 94^\circ$. Знайдіть градусну міру кута C.

344②. Один з кутів трикутника дорівнює 62°. Знайдіть суму градусних мір двох інших кутів.

345②. Доведіть, що кожний кут рівностороннього трикутника дорівнює 60°.

346②. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 70°. Знайдіть кут при вершині.

347②. Знайдіть кут при вершині рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі дорівнює 45°.

348②. Знайдіть кути при основі рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині дорівнює 80°.

349②. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 50°. Знайдіть кути при основі.

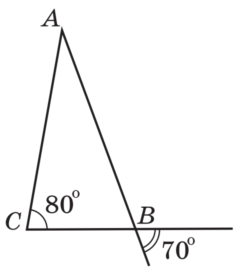
Урок 28

350②. (Усно.) Закінчіть речення:

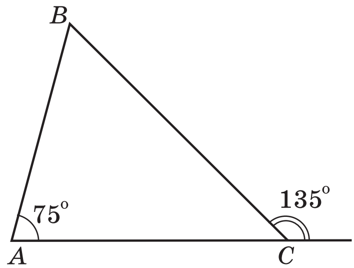
1) якщо один кут трикутника тупий, то інші... ;

2) якщо один кут трикутника прямий, то інші... .

351②. Знайдіть невідомі кути трикутника ABC на малюнках 269, 270.



Мал. 269



Мал. 270

352②. Знайдіть невідомі кути трикутника MNL на малюнках 271, 272.

353②. У трикутнику ABC проведено бісектрису CP (мал. 273). Знайдіть градусну міру кута PCB, якщо $\angle A = 50^\circ$; $\angle B = 70^\circ$.

354②. У трикутнику ABC проведено бісектрису CP (мал. 273). Знайдіть градусну міру кута A, якщо $\angle B = 65^\circ$; $\angle ACP = 40^\circ$.

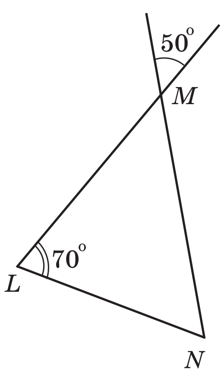
355③. Доведіть, що в кожному трикутнику є кут, не менший за 60°.

356③. Доведіть, що в кожному трикутнику є кут, не більший за 60°.

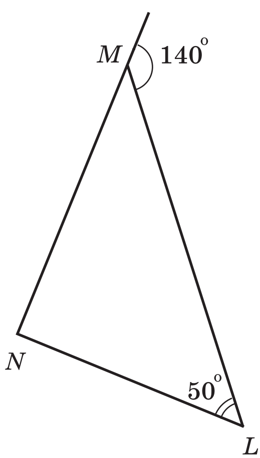
357③. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5$.

358③. Знайдіть градусні міри кутів трикутника, якщо вони відносяться, як 2:3:5.

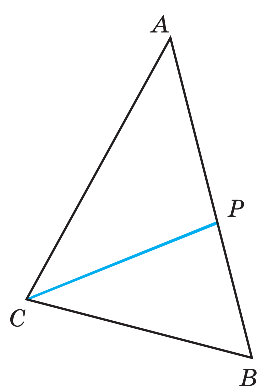
359③. Знайдіть градусні міри кутів рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі на 15° більший за кут при вершині.



Мал. 271



Мал. 272



Мал. 273

360③. Знайдіть градусні міри кутів рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині на 24° більший за кут при основі.

361③. Доведіть, що кути при основі рівнобедреного трикутника гострі.

Урок 29

362②. Знайдіть кути трикутника MNL, якщо $\angle M + \angle N = 120^\circ$, $\angle M + \angle L = 140^\circ$.

363②. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle A + \angle B = 100^\circ$, $\angle A + \angle C = 130^\circ$.

364③. Якщо один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 60°, то він є рівностороннім. Доведіть. (Розгляньте два випадки.)

365③. Один з кутів трикутника дорівнює 80°, а другий на 14° більший за третій. Знайдіть невідомі кути трикутника.

366③. Один з кутів трикутника удвічі більший за другий. Знайдіть ці кути, якщо третій кут дорівнює 36°.

367③. На малюнку 274 $AB = DC$, $\angle B = \angle C$. Доведіть, що $\triangle AOB = \triangle DOC$.

368③. Доведіть рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, якщо $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

369③. У трикутнику два кути дорівнюють 46° і 64°. Знайдіть кут між прямими, яким належать бісектриси цих кутів.

370③. У трикутнику два кути дорівнюють 70° і 80°. Знайдіть кут між прямими, яким належать висоти цих кутів.

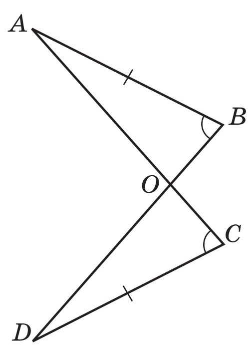
371③. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з його кутів дорівнює: 1) 12°; 2) 92°.

372③. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з його кутів дорівнює: 1) 28°; 2) 106°.

373④. Доведіть, що бісектриси двох внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній перетинаються під прямим кутом.

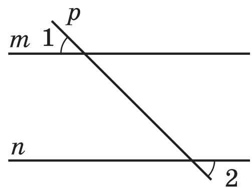
374④. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них на 15° більший за другий. Скільки випадків слід розглянути?

375④. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них удвічі більший за другий. Скільки випадків слід розглянути?



Мал. 274

376④. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 72°. Бісектриса кута при основі цього трикутника дорівнює 5 см. Знайдіть основу трикутника.



Мал. 275

377②. Точка K лежить між точками P і L. Знайдіть PK, якщо $PL = 56$ мм, а $KL = 3$ см 4 мм.

378③. $\angle AOB = 40^\circ$; $\angle AOC = 60^\circ$. Чому дорівнює градусна міра кута BOC? Скільки випадків слід розглянути?

379③. Дано: $\angle 1 = \angle 2$ (мал. 275). Доведіть, що $m \parallel n$.

380④. Трикутники ABC і ABD — рівносторонні. Доведіть, що $AB \perp CD$.

Урок 30

§ 18. ЗОВНІШНІЙ КУТ ТРИКУТНИКА ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Зовнішнім кутом трикутника **називають кут, суміжний з кутом цього трикутника.**

На малюнку 276 кут BAK — зовнішній кут трикутника ABC.

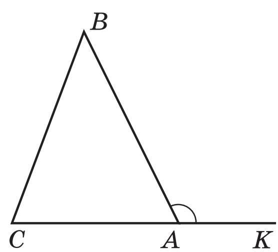
Щоб не плутати кут трикутника із зовнішнім кутом, його іноді називають *внутрішнім кутом*.

Теорема 1 (властивість зовнішнього кута трикутника). ***Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.***

Доведення. Нехай $\angle BAK$ — зовнішній кут трикутника ABC (мал. 276). Враховуючи властивість суміжних кутів, дістаємо: $\angle BAK = 180^\circ - \angle BAC$.

З іншого боку, врахувавши теорему про суму кутів трикутника, $\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle BAC$. Тому $\angle BAK = \angle B + \angle C$, що й треба було довести.

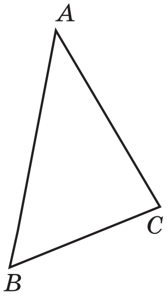
Наслідок. ***Зовнішній кут трикутника більший від будь-якого внутрішнього кута, не суміжного з ним.***



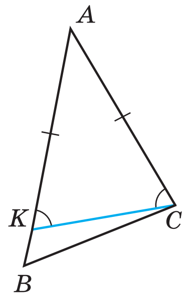
Мал. 276

Задача. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 120°. Знайти внутрішні кути, не суміжні з ним, якщо вони відносяться, як 3:5.

Розв'язання. Нехай $\angle BAK$ — зовнішній кут $\triangle ABC$ (мал. 276),



Мал. 277



Мал. 278

$\angle BAK = 120^\circ$. Оскільки $\angle B : \angle C = 3 : 5$, то можемо позначити $\angle B = 3x$, $\angle C = 5x$. Використовуючи теорему про зовнішній кут трикутника, маємо: $3x + 5x = 120^\circ$, звідки $x = 15^\circ$. Тоді $\angle B = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$, $\angle C = 5 \cdot 15^\circ = 75^\circ$.

Розглянемо ще одну важливу властивість трикутника.

Теорема 2 (про співвідношення між сторонами і кутами трикутника). ***У трикутнику:*** **1)** ***проти більшої сторони лежить більший кут;*** **2)** ***проти більшого кута лежить більша сторона.***

Доведення. 1) Нехай у трикутнику ABC сторона AB більша за сторону AC (мал. 277). Доведемо, що $\angle C > \angle B$. Відкладемо на стороні AB відрізок AK, що дорівнює відрізку AC (мал. 278). Оскільки $AB > AC$, то точка K належить відрізку AB. Тому кут ACK є частиною кута ACB і $\angle ACK < \angle ACB$.

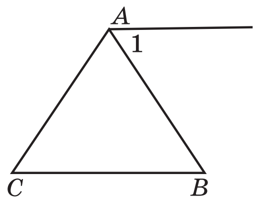
Трикутник AKC — рівнобедрений, тому $\angle AKC = \angle ACK$. Але кут AKC — зовнішній кут $\triangle KBC$. Тому $\angle AKC > \angle B$. Отже, і $\angle ACK > \angle B$, а тому $\angle ACB > \angle B$.

2) Нехай у трикутнику ABC $\angle C > \angle B$ (мал. 277). Доведемо, що $AB > AC$. Припустимо протилежне, тобто що $AB = AC$ або $AB < AC$. Якщо $AB = AC$, то $\triangle ABC$ — рівнобедрений, і тоді $\angle C = \angle B$. Це суперечить умові. Якщо ж припустити, що $AB < AC$, то за першою частиною цієї теореми отримаємо, що $\angle C < \angle B$, що також суперечить умові. Наше припущення неправильне. Отже, $AB > AC$.

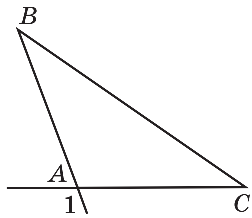
Теорему доведено.

? Що таке зовнішній кут трикутника? • Сформулюйте і доведіть теорему про властивість зовнішнього кута трикутника. • Сформулюйте наслідок з цієї теореми. • Сформулюйте теорему про співвідношення між сторонами і кутами трикутника.

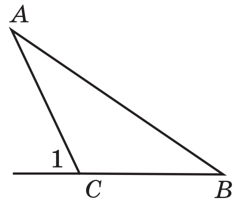
381①. (Усно.) На яких з малюнків 279—281 кут 1 є зовнішнім кутом $\triangle ABC$?



Мал. 279



Мал. 280



Мал. 281

382①. Накресліть трикутник ABC та його зовнішній кут при вершині A.

383①. Накресліть трикутник DMN та його зовнішній кут при вершині D.

384①. (Усно.) Чому дорівнює сума внутрішнього кута трикутника і його зовнішнього кута при тій самій вершині?

385①. Зовнішній кут при вершині C трикутника ABC дорівнює 70° (мал. 281). Чому дорівнює сума внутрішніх кутів A і B цього трикутника?

386①. Сума внутрішніх кутів A і B трикутника ABC дорівнює 75° (мал. 281). Чому дорівнює зовнішній кут цього трикутника при вершині C?

387①. (Усно.) У $\triangle PLK$ $PL < LK$ (мал. 282). Порівняйте кути P і K цього трикутника.

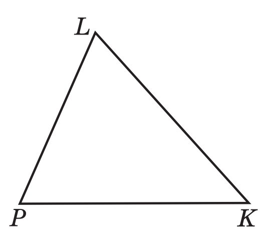
388①. У $\triangle PLK$ $\angle L > \angle K$ (мал. 282). Порівняйте сторони PK і PL цього трикутника.

389②. Два кути трикутника дорівнюють 61° і 38°. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута при третій вершині.

390②. У трикутнику ABC $\angle A = 42^\circ$, $\angle B = 101^\circ$. Знайдіть градусну міру кута ACD — зовнішнього кута при вершині C.

391②. Зовнішній кут при вершині A трикутника ABC дорівнює 105°. Знайдіть градусну міру кута трикутника при вершині B, якщо градусна міра кута трикутника при вершині C дорівнює 45°.

392②. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 120°. Знайдіть внутрішній кут трикутника, не суміжний з ним, якщо другий внутрішній кут трикутника, не суміжний з ним, дорівнює 18°.



Мал. 282

Урок 31

393②. (Усно.) Скільки гострих кутів може бути серед зовнішніх кутів трикутника?

394②. Зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 100°. Знайдіть кут при основі трикутника.

395②. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 55°. Знайдіть зовнішній кут при вершині кута між бічними сторонами.

396②. Внутрішні кути трикутника дорівнюють 45° і 70°. Знайдіть градусну міру зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при трьох його вершинах.

397②. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника відповідно дорівнюють 110° і 140°. Знайдіть градусну міру кожного із трьох внутрішніх кутів трикутника.

398③. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 140°. Знайдіть внутрішні кути, не суміжні з ним, якщо:

1) один з них на 30° більший за другий;

2) один з них у 4 рази більший за другий.

399③. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 120°. Знайдіть внутрішні кути, не суміжні з ним, якщо:

1) один з них на 20° менший за другий;

2) один з них у 3 рази менший за другий.

400③. Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 118°. Знайдіть градусні міри внутрішніх кутів трикутника. Скільки розв'язків має задача?

401③. Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 42°. Знайдіть градусні міри внутрішніх кутів трикутника. Скільки розв'язків має задача?

402④. Доведіть, що сума зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній вершині, для будь-якого трикутника дорівнює 360°.

403④. Зовнішні кути трикутника відносяться, як 3:5:4. Знайдіть відношення внутрішніх кутів трикутника.

404④. Внутрішні кути трикутника відносяться, як 7:8:9. Знайдіть відношення зовнішніх кутів трикутника, не знаходячи їх величин.

405④. Доведіть, що бісектриси зовнішнього і внутрішнього кутів трикутника, взяті при одній вершині, перпендикулярні.

406③. Промінь, що проходить між сторонами прямого кута, ділить його на два кути, різниця яких дорівнює $\frac{1}{3}$ від їх суми. Знайдіть градусні міри цих кутів.

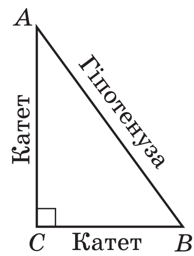
407④. Відрізок AB, довжина якого 22,8 см, поділено на три частини. Дві з них відносяться, як 1:2, а третя — на 1,8 см більша за більшу з двох перших частин. Знайдіть довжини частин відрізка.

Урок 32

§ 19. ПРЯМОКУТНІ ТРИКУТНИКИ. ВЛАСТИВОСТІ ТА ОЗНАКИ РІВНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

Нагадаємо, що *трикутник* називають *прямокутним*, якщо один з його кутів прямий. На малюнку 283 прямокутний трикутник ABC, у нього $\angle C = 90^\circ$. Сторону прямокутного трикутника, яка лежить проти прямого кута, називають ***гіпотенузою***, а дві інші сторони — ***катетами***.

Розглянемо властивості прямокутних трикутників.



Мал. 283

1. ***Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.***

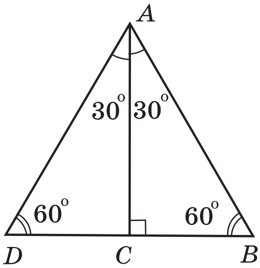
Справді, сума кутів трикутника дорівнює 180°, прямий кут становить 90°. Тому сума двох гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює: $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

2. ***Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за будь-який його катет.***

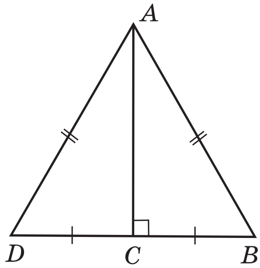
Ця властивість є наслідком теореми про співвідношення між сторонами і кутами трикутника, оскільки прямий кут більший за гострий.

3. ***Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.***

Д о в е д е н н я. Розглянемо прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C і кутом A, що дорівнює 30° (мал. 284). Прикладемо до трикутника ABC трикутник ACD, що йому дорівнює. Тоді $\angle B = \angle D = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ і $\angle DAB = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$. Отже, $\triangle ABD$ — рівносторонній. Тому $DB = AB$. Оскільки $BC = \frac{1}{2} BD$, то $BC = \frac{1}{2} AB$, що і треба було довести.



Мал. 284



Мал. 285

4. ***Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює*** **30°.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо прямокутний трикутник ABC, у якого катет BC дорівнює половині гіпотенузи AB (мал. 285). Прикладемо до трикутника ABC трикутник ACD, що йому дорівнює. Оскільки $BC = \frac{1}{2}AB$, то $BD = AB = AD$. Маємо рівносторонній трикутник ABD, тому $\angle B = 60^\circ$. У $\triangle ABC$ $\angle BAC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, що і треба було довести.

Розглянемо *ознаки рівності прямокутних трикутників*.

З першої ознаки рівності трикутників випливає:

якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні.

З другої ознаки рівності трикутників випливає:

якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього куту другого, то такі трикутники рівні.

Якщо у двох прямокутних трикутників є одна пара рівних гострих кутів, то інша пара гострих кутів — також рівні кути (це випливає з властивості 1 прямокутних трикутників). Тому маємо ще дві ознаки рівності прямокутних трикутників:

якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі і гострому куту другого, то такі трикутники рівні;

якщо катет і протилежний кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному куту другого, то такі трикутники рівні.

Теорема (ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і гіпотенузою). ***Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гіпотенузі другого, то такі трикутники рівні.***

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких кути C і C_1 — прямі і $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ (мал. 286). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

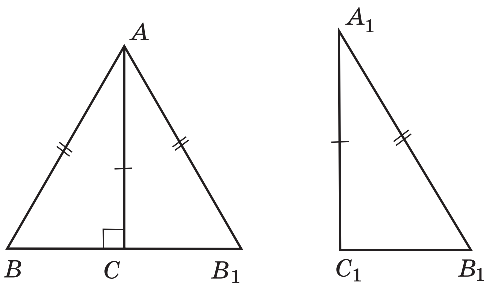
Прикладемо $\triangle ABC$ до $\triangle A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, а вершина C — з вершиною C_1 (мал. 286, зліва). $\triangle ABB_1$ — рівнобедрений, оскільки $AB = AB_1$. AC — висота цього рівнобедреного трикутника, проведена до основи. Звідси AC є також медіаною, тому $BC = CB_1$. Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за третьою ознакою рівності трикутників.

Теорему доведено.

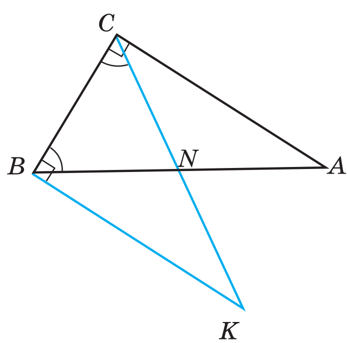
Розглянемо тепер ще одну властивість прямокутного трикутника.

5. ***У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.***

Доведення. З точки B проведемо перпендикуляр BK до сторони BC так, що $BK = CA$ (мал. 287). Тоді $\triangle ABC$ і $\triangle KCB$ — прямокутні, до того ж BC — спільний катет цих трикутників і $AC = BK$ (за побудовою). Тому $\triangle ABC = \triangle KCB$ (за двома катетами), тоді $\angle ABC = \angle KCB$. Отже, $\triangle NBC$ — рівнобедрений і $BN = CN$. Аналогічно можна довести, що $CN = AN$. Таким чином, $BN = CN = AN$. Тому CN — медіана і $CN = \frac{AB}{2}$, що і треба було довести.



Мал. 286



Мал. 287

Який трикутник називається прямокутним? • Що називають гіпотенузою і що катетом прямокутного трикутника? • Сформулюйте і доведіть властивості прямокутних трикутників. • Сформулюйте і доведіть ознаки рівності прямокутних трикутників.

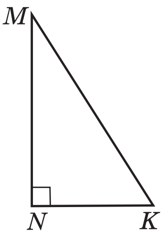
408①. (Усно.) 1) Як називається трикутник, зображений на малюнку 288?

2) Назвіть гіпотенузу та катети цього трикутника.

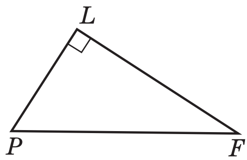
3) Яка сторона цього трикутника найдовша?

409①. 1) Назвіть гіпотенузу та катети прямокутного трикутника PFL (мал. 289).

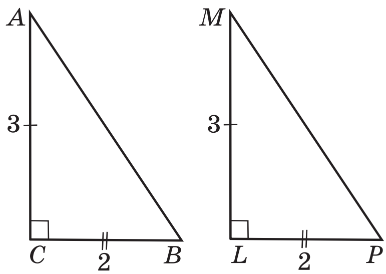
2) Яка сторона довша: PL або PF; LF або PF?



Мал. 288



Мал. 289



Мал. 290

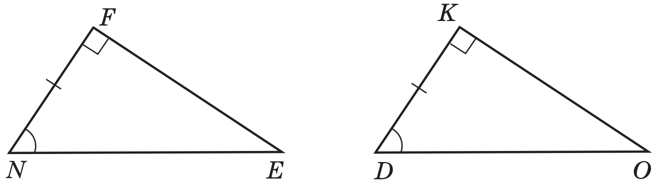
410①. За якими елементами рівні прямокутні трикутники на малюнках 290 і 291? Запишіть відповідні рівності.

411①. За якими елементами прямокутні трикутники на малюнках 292 і 293 рівні? Запишіть відповідні рівності.

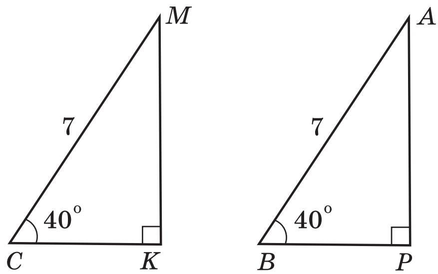
412①. Знайдіть другий гострий кут прямокутного трикутника, якщо перший дорівнює: 1) 17°; 2) 83°.

413①. Знайдіть другий гострий кут прямокутного трикутника, якщо перший дорівнює: 1) 79°; 2) 27°.

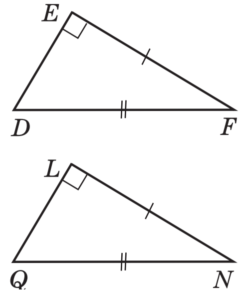
414②. Знайдіть кути рівнобедреного прямокутного трикутника.



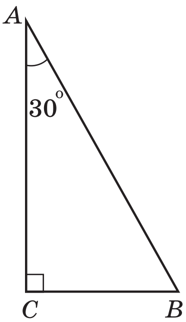
Мал. 291



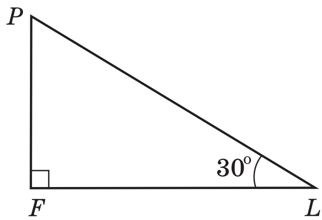
Мал. 292



Мал. 293



Мал. 294



Мал. 295

415②. У рівнобедреному трикутнику один з кутів при основі дорівнює 45°. Чи можна стверджувати, що цей трикутник прямокутний?

416②. Кут A прямокутного трикутника ABC дорівнює 30° (мал. 294). Знайдіть:

1) BC, якщо $AB = 12$ см;

2) AB, якщо $BC = 3$ дм.

417②. Кут L прямокутного трикутника PFL дорівнює 30° (мал. 295). Знайдіть:

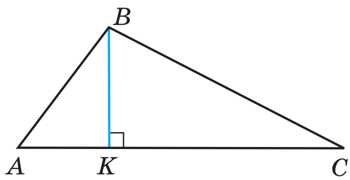
1) PF, якщо $PL = 16$ дм;

2) PL, якщо $PF = 5$ см.

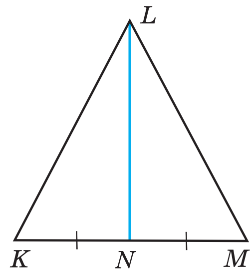
Урок 33

418②. На малюнку 296 BK — висота трикутника ABC. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle ABK = 37^\circ$, $\angle KBC = 62^\circ$.

419②. На малюнку 297 LN — медіана рівнобедреного трикутника KLM з основою KM. Знайдіть кути трикутника KLM, якщо $\angle KLN = 28^\circ$.



Мал. 296



Мал. 297

420②. На малюнку 298 $AB \perp AC$, $KL \perp CK$, $BC = CL$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle KLC$.

421②. На малюнку 299 $MK \perp PL$, $\angle PMK = \angle LMK$. Доведіть, що $\triangle MPK = \triangle MLK$.

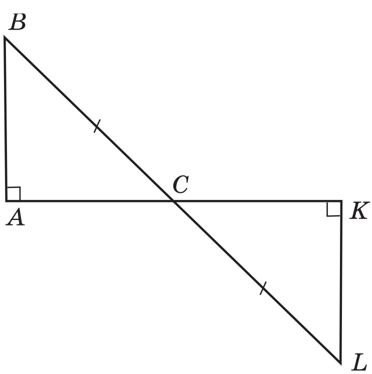
422③. Один з гострих кутів прямокутного трикутника на 28° більший за другий. Знайдіть ці кути.

423③. Один з гострих кутів прямокутного трикутника у 4 рази більший за другий. Знайдіть ці кути.

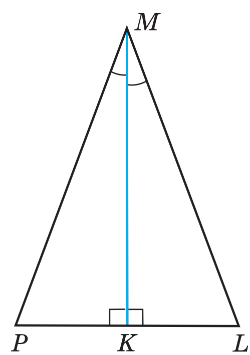
424③. Знайдіть менший кут між бісектрисою прямого кута трикутника і гіпотенузою, якщо один з гострих кутів трикутника дорівнює 26°.

425③. Знайдіть більший кут між бісектрисою прямого кута трикутника і гіпотенузою, якщо один з гострих кутів трикутника дорівнює 64°.

426③. Доведіть, що точка, розміщена всередині кута і рівновіддалена від його сторін, належить бісектрисі цього кута.



Мал. 298



Мал. 299

427③. Висота прямокутного трикутника, опущена на гіпотенузу, утворює з одним із катетів кут, що дорівнює 32°. Знайдіть гострі кути трикутника.

428③. Один з кутів, утворених при перетині бісектрис прямого і гострого кутів трикутника, дорівнює 115°. Знайдіть гострі кути даного трикутника.

429④. Доведіть, що два рівнобедрених трикутники рівні, якщо відповідно рівні їх бічні сторони і висоти, проведені до основ.

430④. У прямокутному трикутнику один з кутів дорівнює 60°, а сума гіпотенузи та меншого катета 30 см. Знайдіть довжину гіпотенузи та медіани, проведеної до неї.

431④. У прямокутному трикутнику гострий кут дорівнює 60°, а бісектриса цього кута — 4 см. Знайдіть довжину катета, який лежить проти цього кута.

432④. Різниця градусних мір двох зовнішніх кутів при вершинах гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 20°. Знайдіть гострі кути трикутника.

433④. Знайдіть градусні міри гострих кутів прямокутного трикутника, якщо градусні міри зовнішніх кутів при цих вершинах відносяться, як 2:3.

434③. Доведіть, що коли медіана трикутника ділить його на два трикутники з рівними периметрами, то хоча б два кути трикутника рівні.

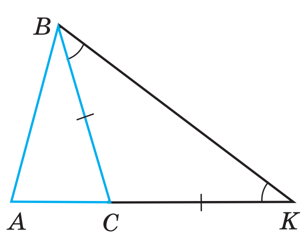
435③. Один з кутів трикутника на 20° менший від другого і у 3 рази менший від третього. Знайдіть кути трикутника.

436④. У рівнобедреному трикутнику основа більша за бічну сторону на 3 см, але менша від суми бічних сторін на 4 см. Знайдіть периметр цього трикутника.

Урок 34 § 20. НЕРІВНІСТЬ ТРИКУТНИКА

Т е о р е м а (нерівність трикутника). ***Кожна сторона трикутника менша за суму двох інших сторін.***

Д о в е д е н н я. Розглянемо довільний трикутник ABC і доведемо, що сторона трикутника, наприклад AB, менша за суму двох інших сторін AC і CB.



Мал. 300

1) Відкладемо на продовженні сторони AC відрізок CK, що дорівнює стороні BC (мал. 300). У рівнобедреному трикутнику BCK $\angle CBK = \angle CKB$.

2) $\angle ABK > \angle CBK$, тому $\angle ABK > \angle AKB$. Оскільки у трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона, то $AB < AK$. Але ж $AK = AC + CK = AC + BC$. Отже,

$$AB < AC + BC.$$

Аналогічно можна довести, що $AC < AB + BC$, $BC < AB + AC$. Теорему доведено.

Н а с л і д о к. ***Кожна сторона трикутника більша за різницю двох інших сторін.***

Д о в е д е н н я. Віднявши від обох частин нерівності $AB < AC + BC$, наприклад AC, матимемо $AB - AC < BC$. Отже, $BC > AB - AC$. Аналогічно маємо: $AC > BC - AB$, $AB > BC - AC$.

Оскільки, наприклад, $BC > AB - AC$ і $BC > AC - AB$, то, узагальнюючи, отримаємо $BC > |AB - AC|$.

З теореми про нерівність трикутника та наслідка з неї дістаємо важливе співвідношення між сторонами трикутника:

! ***кожна сторона трикутника менша за суму двох інших сторін, але більша від модуля їх різниці.***

Наприклад, $|AB - AC| < BC < AB + AC$.

Задача 1. Дві сторони трикутника дорівнюють 0,7 см і 1,7 см. Якою є довжина третьої сторони, якщо вона вимірюється цілим числом сантиметрів?

Р о з в' я з а н н я. Нехай невідома сторона трикутника дорівнює a см. Тоді $1{,}7 - 0{,}7 < a < 1{,}7 + 0{,}7$ або $1 < a < 2{,}4$. Оскільки a — ціле число, то $a = 2$ (см).

В і д п о в і д ь. 2 см.

Задача 2. Периметр рівнобедреного трикутника 60 см, а дві його сторони відносяться, як 2:5. Знайти сторони трикутника.

Р о з в' я з а н н я. Позначимо сторони трикутника, відношення яких 2:5, $2x$ см і $5x$ см. Оскільки невідомо, яка з них є основою, а яка бічною стороною, то розглянемо два випадки.

1. Основа дорівнює $5x$ см, а бічна сторона — $2x$ см. Тоді друга бічна сторона також дорівнює $2x$ см. Але в цьому випадку не виконується нерівність трикутника. Справді, $2x + 2x < 5x$. Цей випадок неможливий.

2. Основа дорівнює $2x$ см, а бічна сторона — $5x$ см. Тоді друга бічна сторона також дорівнює $5x$ см. У цьому випадку нерівність трикутника виконується.

Отже, за умовою задачі маємо рівняння: $2x + 5x + 5x = 60$, $x = 5$ (см). Основа трикутника дорівнює $2 \cdot 5 = 10$ (см), а бічна сторона: $5 \cdot 5 = 25$ (см).

В і д п о в і д ь. 10 см; 25 см; 25 см.

Сформулюйте теорему про нерівність трикутника та наслідок з неї. • Яке існує важливе співвідношення між сторонами трикутника?

437①. Чи існує трикутник зі сторонами:

1) 1 см, 2 см і 4 см; 2) 7 дм, 6 дм і 5 дм; 3) 3 см, 4 см і 7 см?

***438*①.** Чи існує трикутник зі сторонами:

1) 2 дм, 5 дм і 7 дм; 2) 2 см, 3 см і 6 см; 3) 5 дм, 2 дм і 4 дм?

439②. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,9 см і 8,3 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

***440*②.** Дві сторони трикутника дорівнюють 2,9 см і 4,5 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

441②. Чи можуть сторони трикутника бути пропорційними числам:

1) 2; 3; 4; 2) 7; 8; 15; 3) 5; 3; 7?

***442*②.** Чи можуть сторони трикутника бути пропорційними числам:

1) 5; 1; 4; 2) 5; 6; 7; 3) 8; 2; 11?

443③. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см. Чи може бічна сторона цього трикутника дорівнювати 3 см?

***444*③.** Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 5 см і 11 см. Знайдіть периметр цього трикутника.

445③. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,5 см і 1,2 см. Яким може бути периметр трикутника, якщо третя сторона трикутника вимірюється цілим числом сантиметрів?

446③. Периметр трикутника дорівнює 30 см. Чи може одна з його сторін дорівнювати:

1) 14 см; 2) 15 см; 3) 16 см?

***447*③.** Периметр трикутника дорівнює 40 дм. Чи може одна з його сторін дорівнювати:

1) 21 дм; 2) 20 дм; 3) 19 дм?

448④. Чи існує трикутник з периметром 20 см, одна сторона якого на 2 см більша за другу і на 4 см менша за третю?

***449*④.** Чи існує трикутник, одна сторона якого на 6 см менша за другу і на 1 см більша за третю, а периметр дорівнює 23 см?

450③. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо кут A у 3 рази менший за кут B і на 15° більший за кут C.

451③. Доведіть, що два прямокутні трикутники рівні, якщо висота, проведена до гіпотенузи, і катет одного трикутника дорівнюють відповідно висоті, проведеній до гіпотенузи, і катету другого трикутника.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ З ТЕМИ «СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА. ЗОВНІШНІЙ КУТ ТРИКУТНИКА. ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК. НЕРІВНІСТЬ ТРИКУТНИКА»

Урок 35

1①. Знайдіть третій кут трикутника, якщо два його кути дорівнюють 30° і 80°.

2①. Накресліть трикутник PLK та його зовнішній кут при вершині P.

3①. За якими елементами прямокутні трикутники, зображені на малюнку 301, рівні? Запишіть відповідні рівності.

4②. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 71°. Знайдіть кут при вершині цього трикутника.

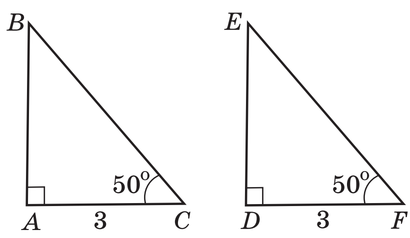
5②. На малюнку 302 BP — висота трикутника ABC, $\angle ABP = 32^\circ$, $\angle PBC = 67^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC.

6②. Дві сторони трикутника дорівнюють 5,2 см і 6,3 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

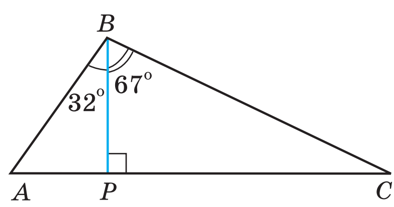
7③. Один з кутів трикутника удвічі менший за другий і на 16° більший за третій. Знайдіть кути трикутника.

8③. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 112°. Знайдіть внутрішні кути, не суміжні з ним, якщо вони відносяться, як 3:5.

9④. У прямокутному трикутнику BCD $\angle C = 90^\circ$, BM — бісектриса трикутника, $\angle CBD = 60^\circ$. Знайдіть довжину катета CD, якщо $CM = 8$ см.



Мал. 301



Мал. 302

Додаткові задачі

10④. Зовнішні кути трикутника відносяться, як 4:5:6. Знайдіть відношення внутрішніх кутів трикутника.

11④. Чи існує трикутник, одна сторона якого на 3 см більша за другу і на 5 см менша за третю, а периметр становить 23 см?

Вправи для повторення розділу III

До § 11

452①. Накресліть прямокутний трикутник KLP. Запишіть вершини, сторони та кути цього трикутника.

453②. Одна сторона трикутника дорівнює 18 см, друга сторона на 6 см більша за першу, а третя сторона у два рази менша за другу. Знайдіть периметр трикутника.

454③. За допомогою транспортира і лінійки з поділками накресліть трикутник MLP, у якого $ML = 5$ см, $\angle M = 40^\circ$, $\angle L = 80^\circ$.

455④. Одна сторона трикутника удвічі менша за другу, а третя становить 80 % другої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 46 см.

456*. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $AB + AC = 12$ см, $AC + CB = 15$ см, $AB + BC = 13$ см.

До § 12

457①. 1) Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 7 см і 8 см. Знайдіть сторони трикутника, що йому дорівнює.

2) Кути трикутника дорівнюють 40°, 60° і 80°. Знайдіть кути трикутника, що йому дорівнює.

458②. Чи можна сумістити накладанням вертикальні кути?

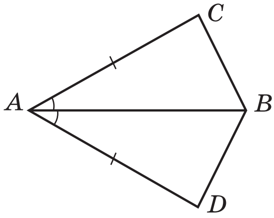
459③. Чи можуть бути рівними трикутники, найбільші сторони яких не рівні?

460④. Дано: $\triangle ABC = \triangle ACB$. Обчисліть периметр $\triangle ABC$, якщо $AB = 7$ см, $BC = 4$ см.

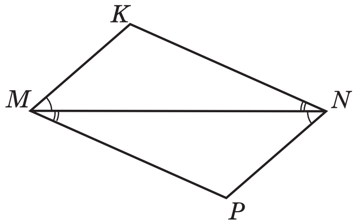
До § 13

461①. Назвіть спільний елемент трикутників, зображених на малюнках 303 та 304 і ознаку, за якою ці трикутники рівні.

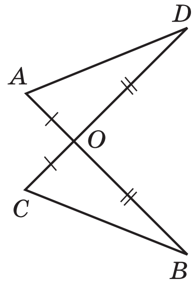
462②. Доведіть, що $\triangle AOD = \triangle COB$ (мал. 305), якщо $AO = CO$, $DO = OB$.



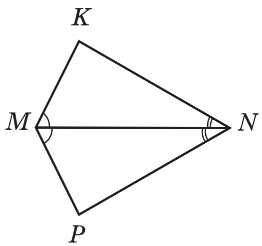
Мал. 303



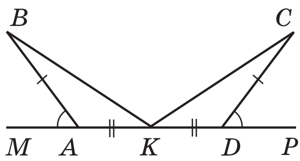
Мал. 304



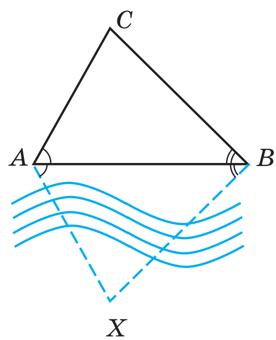
Мал. 305



Мал. 306



Мал. 307

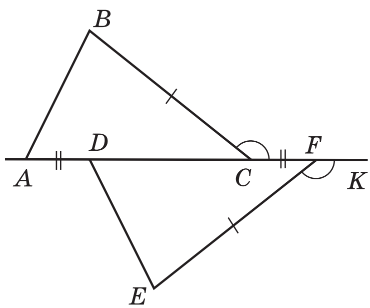


Мал. 308

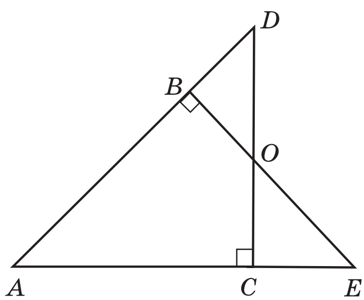
463②. Доведіть, що $\triangle MKN = \triangle MPN$ (мал. 306), якщо $\angle KMN =$ $= \angle PMN$ і $\angle KNM = \angle PNM$.

464③. На малюнку 307 $\angle MAB = \angle PDC$, $BA = CD$, $AK = KD$. Доведіть, що $BK = KC$.

465③. Щоб знайти відстань від пункту A до пункту X (мал. 308) на березі позначають точки B і C так, щоб $\angle XAB = \angle CAB$ і $\angle XBA = \angle CBA$. Тоді $AX = AC$. Чому?



Мал. 309



Мал. 310

466④. На малюнку 309 зображено фігуру, у якої $BC = EF$, $AD = CF$, $\angle BCF = \angle KFE$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DEF$.

467*. На сторонах кута A позначено точки B і C так, що $AB = AC$. $DC \perp AE$, $BE \perp AD$ (мал. 310). Доведіть, що: 1) $BD = CE$; 2) AO — бісектриса кута A.

До § 14

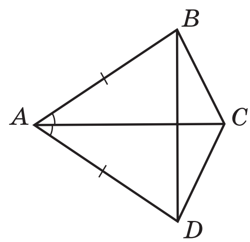
468①. AK — основа рівнобедреного трикутника AKP.

1) $AP = 5$ см. Чому дорівнює довжина сторони PK?

2) $\angle A = 70^\circ$. Чому дорівнює градусна міра кута K?

469①. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 5 см, а бічна сторона — 4 см. Знайдіть периметр цього трикутника.

470②. На малюнку 311 $AB = AD$, $\angle BAC = \angle CAD$. Доведіть, що $\triangle BCD$ — рівнобедрений.



Мал. 311

471③. Основа і прилеглий до неї кут одного рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють основі і прилеглому до неї куту другого рівнобедреного трикутника. Чи рівні ці трикутники?

472③. Основа і бічна сторона рівнобедреного трикутника відносяться, як 3:4. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо його периметр 88 см.

473④. Дано два рівнобедрених трикутники ABC і ABD із спільною основою AB. Точки C і D лежать по різні боки від прямої AB. Доведіть, що $\triangle ACD = \triangle BCD$.

До § 15

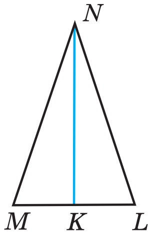
474①. Як називається у трикутнику:

1) відрізок, що сполучає його вершину з серединою протилежної сторони;

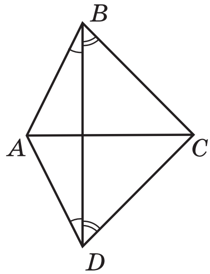
2) перпендикуляр, проведений з його вершини до прямої, що містить протилежну сторону;

3) відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони?

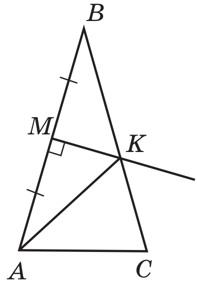
475①. Бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 5 см. Чому дорівнює висота цього трикутника, проведена до основи; медіана цього трикутника, проведена до основи?



Мал. 312



Мал. 313



Мал. 314

476②. На малюнку 312 відрізок NK — медіана рівнобедреного трикутника MNL з основою ML. Запишіть три пари рівних кутів і дві пари рівних відрізків, зображених на цьому малюнку.

477③. AM і A_1M_1 — відповідно медіани рівних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Доведіть, що трикутники ABM і $A_1B_1M_1$ рівні.

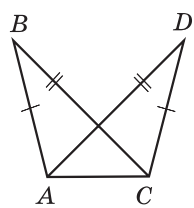
478③. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику будь-яка точка висоти, проведеної до основи, рівновіддалена від кінців основи трикутника.

479④. На малюнку 313 $\angle ABD = \angle ADB$, $\angle CDB = \angle CBD$. Доведіть, що $BD \perp AC$.

480④. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB = BC = a$ см. З точки M — середини AB проведено перпендикуляр до AB, який перетинає BC в точці K (мал. 314). Знайдіть довжину сторони AC та периметр трикутника ABC, якщо периметр трикутника AKC дорівнює b см ($b > a$).

До § 16

481②. Доведіть рівність трикутників ABC і CDA, зображених на малюнку 315, якщо $AB = CD$, $BC = AD$.



Мал. 315

482③. Сторона одного рівностороннього трикутника дорівнює стороні другого рівностороннього трикутника. Чи можна стверджувати, що трикутники рівні?

483④. Доведіть рівність трикутників за двома сторонами та медіаною, проведеною до однієї з них.

До § 17

484①. Знайдіть кут C трикутника ABC, якщо:

1) $\angle A = 65^\circ$; $\angle B = 29^\circ$;

2) $\angle A = 37^\circ$; $\angle B = 116^\circ$.

485②. На малюнку 316 CK — бісектриса рівнобедреного трикутника ABC з основою CB. Знайдіть градусну міру:

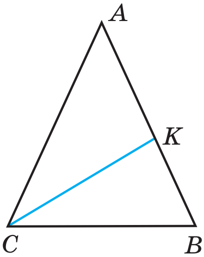
1) кута A, якщо $\angle KCB = 32^\circ$;

2) кута ACK, якщо $\angle A = 56^\circ$.

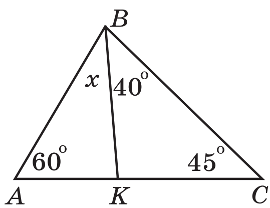
486②. Визначте вид трикутника ABC за сторонами, якщо $\angle A = 76^\circ$; $\angle B = 28^\circ$.

487③. Один з кутів трикутника дорівнює 60°, а два інших відносяться, як 2:3. Знайдіть ці кути.

488③. За малюнком 317 знайдіть градусну міру кута x.



Мал. 316



Мал. 317

489③. Знайдіть кут між двома медіанами рівностороннього трикутника.

490④. Бісектриса одного з кутів трикутника утворює з висотою, проведеною з тієї самої вершини, кут 16°, а менший з двох інших кутів трикутника дорівнює 50°. Знайдіть невідомі кути трикутника.

491④. Знайдіть градусну міру кута трикутника, якщо він:

1) дорівнює $\frac{1}{5}$ суми градусних мір двох інших кутів;

2) на 40° менший від суми двох інших кутів.

492④. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB проведено бісектрису AK. Знайдіть:

1) кут B, якщо $\angle AKB = 60^\circ$;

2) кут C, якщо $\angle AKC = 111^\circ$.

До § 18

493①. Накресліть трикутник MNK та по одному зовнішньому куту цього трикутника при кожній вершині.

494②. Зовнішній кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 150°. Знайдіть внутрішні кути трикутника.

495②. Один з кутів трикутника дорівнює 80°. Чи може зовнішній кут трикутника, не суміжний з ним, дорівнювати:

1) 102°; 2) 80°; 3) 75°?

496③. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника дорівнюють 115° і 137°. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута при третій вершині.

497③. Один з кутів трикутника дорівнює половині зовнішнього кута, не суміжного з ним. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

498③. Два внутрішніх кути трикутника відносяться, як 2:5, а зовнішній кут третього кута дорівнює 140°. Знайдіть кути трикутника.

499④. Сума внутрішніх кутів рівнобедреного трикутника разом з одним із зовнішніх дорівнює 260°. Знайдіть градусні міри внутрішніх кутів трикутника.

500④. Доведіть, що не існує трикутника, у якому зовнішні кути при всіх вершинах більші від 120°.

501*. Внутрішній кут трикутника дорівнює різниці зовнішніх кутів, не суміжних з ним. Доведіть, що даний трикутник прямокутний.

До § 19

502①. З яких наведених умов випливає рівність прямокутних трикутників:

1) катет одного трикутника дорівнює катету другого трикутника;

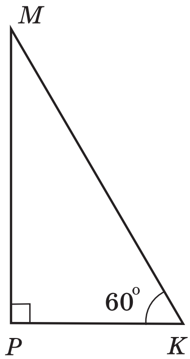
2) катет і прилеглий до нього кут одного трикутника дорівнює катету і прилеглому до нього куту другого трикутника;

3) два гострі кути одного трикутника дорівнюють двом гострим кутам другого;

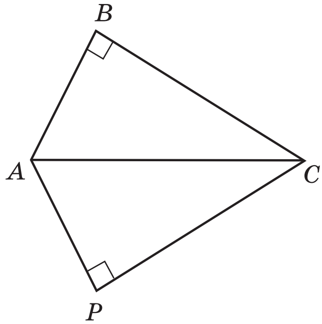
4) катет і гіпотенуза одного трикутника дорівнюють катету і гіпотенузі другого?

503②. На малюнку 318 прямокутний трикутник MKP, у якого $\angle K = 60^\circ$. Знайдіть:

1) $\angle M$;



Мал. 318



Мал. 319

2) PK, якщо $MK = 24$ см; 3) MK, якщо $PK = 30$ мм.

504②. На малюнку 319 $\angle B = \angle P = 90^\circ$, CA — бісектриса кута C. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle APC$.

505③. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо їх градусні міри відносяться, як 7:3.

506③. З вершини прямого кута прямокутного трикутника проведені бісектриса і висота, кут між якими 15°. Знайдіть гострі кути трикутника.

507③. У прямокутному трикутнику ABC $AC = BC$. Знайдіть довжину гіпотенузи, якщо висота, проведена до неї, дорівнює 5 см.

508③. Знайдіть кут між бісектрисами гострих кутів прямокутного трикутника.

509④. У прямокутному трикутнику катет довжиною 24 см прилягає до кута 30°. Знайдіть бісектрису другого гострого кута трикутника.

510④. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120°, а висота, проведена до бічної сторони,— a см. Знайдіть основу трикутника.

511④. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 10 см і ділить прямий кут у відношенні 1:2. Знайдіть гіпотенузу та менший катет трикутника.

512*. Доведіть, що у нерівнобедреному прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута ділить кут між висотою і медіаною, проведеними з тієї самої вершини, навпіл.

До § 20

513①. Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 8 см. Чи може третя сторона трикутника дорівнювати:

1) 2 см; 2) 3 см; 3) 6 см; 4) 10 см; 5) 13 см; 6) 15 см?

514②. Дві сторони трикутника дорівнюють 5,2 см і 8,7 см. Якому найменшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

515③. На сторонах AB і AC трикутника ABC позначено точки D і E, причому точка D — середина AB. $AE = 6$ см, $DE = 4$ см. Чи може довжина сторони AB дорівнювати 21 см?

516③. Знайдіть сторону рівнобедреного трикутника, якщо дві інші сторони дорівнюють: 1) 4 см і 7 см; 2) 5 см і 2 см; 3) 12 см і 6 см.

517④. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 51 см, а дві його сторони відносяться, як 3:7. Знайдіть сторони трикутника.

Розділ IV КОЛО І КРУГ. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ

Урок 36

§ 21. КОЛО. КРУГ

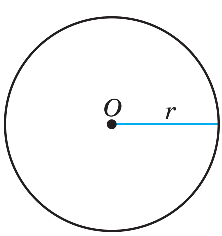
! ***Колом*** **називають геометричну фігуру, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. Цю точку називають** ***центром кола*****.**

Відрізок, що сполучає центр з будь-якою точкою кола, називають ***радіусом***.

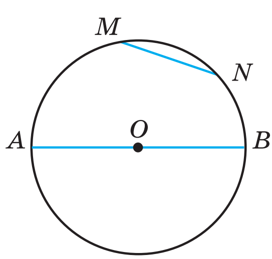
На малюнку 320 зображено коло з центром у точці O і радіусом OK. З означення кола випливає, що всі радіуси мають одну й ту саму довжину. Радіус кола часто позначають буквою r.

Відрізок, що сполучає дві точки кола, називають ***хордою***. Хорду, що проходить через центр кола, називають ***діаметром***. На малюнку 321 відрізок MN є хордою кола, а відрізок AB — його діаметром. Оскільки діаметр кола складається з двох радіусів (наприклад, діаметр AB складається з радіусів OA і OB), то його довжина удвічі більша за довжину радіуса. Крім того, центр кола є серединою будь-якого діаметра.

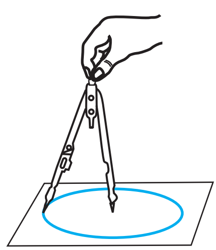
Коло на папері зображують за допомогою циркуля (мал. 322). На місцевості для побудови кола можна використати мотузку (мал. 323).

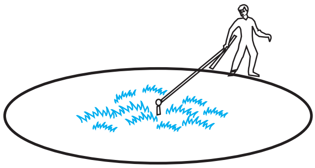


Мал. 320

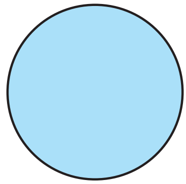


Мал. 321


Мал. 322



Мал. 323



Мал. 324

Частину площини, обмежену колом, разом із самим колом, називають *кругом* (мал. 324).
***Центром, радіусом, діаметром, хордою круга* називають відповідно центр, радіус, діаметр, хорду кола, яке є межею даного круга.**

Розглянемо деякі властивості елементів кола.

Теорема 1 (про порівняння діаметра і хорди). ***Діаметр є найбільшою з хорд.***

Доведення. Нехай AB — довільний діаметр кола, радіус якого дорівнює r, а MN — хорда кола, відмінна від діаметра (мал. 325). Доведемо, що $AB > MN$.

$AB = 2r$. У трикутнику MON, використовуючи нерівність трикутника, маємо $MN < MO + ON$. Отже, $MN < 2r$. Тому $AB > MN$. Теорему доведено.

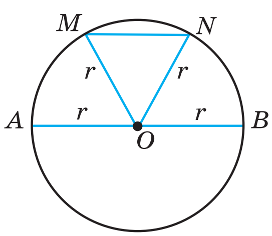
Теорема 2 (про кут, під яким видно діаметр з точки кола). ***Діаметр з будь-якої точки кола видно під прямим кутом.***

Доведення. Нехай AB — діаметр кола, а P — довільна точка кола (мал. 326). Доведемо, що $\angle APB = 90^\circ$.

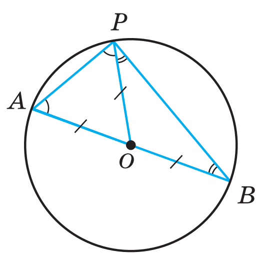
1) У трикутнику AOP $AO = PO$ (як радіуси). Тому $\triangle AOP$ — рівнобедрений і $\angle OAP = \angle OPA$.

2) Аналогічно $\angle OPB = \angle OBP$.

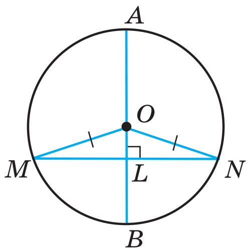
3) Отже, $\angle APB = \angle A + \angle B$. Але ж у $\triangle APB$: $\angle APB + \angle A + \angle B = 180^\circ$. Тому $\angle APB + \angle APB = 180^\circ$; $2 \cdot \angle APB = 180^\circ$; $\angle APB = 90^\circ$. Теорему доведено.



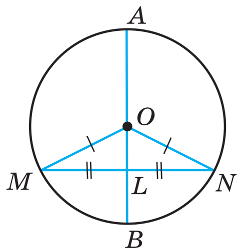
Мал. 325



Мал. 326



Мал. 327



Мал. 328

Т е о р е м а 3 (властивість діаметра кола, перпендикулярного до хорди). ***Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.***

Д о в е д е н н я. Нехай діаметр AB кола перпендикулярний до хорди MN, яка відмінна від діаметра (мал. 327). Доведемо, що $ML = LN$, де L — точка перетину AB і MN.

$\triangle MON$ — рівнобедрений, бо $MO = ON$ (як радіуси). OL — висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи. Тому OL є також медіаною. Отже, $ML = LN$.

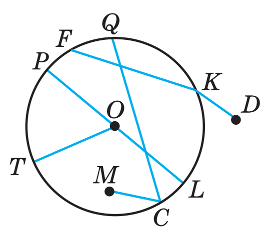
Якщо MN є діаметром кола, до твердження теореми очевидне. Теорему доведено.

Т е о р е м а 4 (властивість діаметра кола, що проходить через середину хорди). ***Діаметр кола, що проходить через середину хорди, яка не є іншим діаметром, перпендикулярний до цієї хорди.***

Д о в е д е н н я. Нехай діаметр AB проходить через точку L — середину хорди MN, яка не є іншим діаметром кола (мал. 328). Доведемо, що $AB \perp MN$.

$\triangle MON$ — рівнобедрений, бо $MO = NO$ (як радіус). OL — медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи. Тому OL є також висотою. Отже, $OL \perp MN$, а тому і $AB \perp MN$. Теорему доведено.

? Що називають колом; центром кола; радіусом кола? • Який відрізок називають хордою кола, а який — діаметром кола? • Що називають кругом? • Сформулюйте і доведіть теореми про властивості елементів кола.



Мал. 329

518①**.** (Усно.) Які з відрізків, зображених на малюнку 329, є: 1) хордами кола; 2) діаметрами кола; 3) радіусами кола?

519①**.** Знайдіть на малюнку 329 хорду, що проходить через центр кола. Як називають таку хорду?

520①**.** Обчисліть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює: 1) 5 см; 2) 4,7 дм.

521①. Знайдіть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює:

1) 8 мм; 2) 3,8 см.

522①. Знайдіть радіус кола, якщо його діаметр дорівнює:

1) 6 дм; 2) 2,4 см.

523①. Обчисліть радіус кола, якщо його діаметр дорівнює:

1) 10 см; 2) 5,6 дм.

524②. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 4 см. Проведіть у ньому діаметр MN та хорду MK. Чому дорівнює кут NKM?

525②. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3,6 см. Проведіть у ньому діаметр AB та хорду BD. Перевірте за допомогою косинця або транспортира, що кут BDA — прямий.

526②. Всередині кола взято довільну точку, відмінну від центра. Скільки діаметрів і скільки хорд можна провести через цю точку?

527②. На колі взято довільну точку. Скільки діаметрів і скільки хорд можна через неї провести?

Урок 37

528②. Радіус кола дорівнює 5 см. Чи може хорда цього кола дорівнювати:

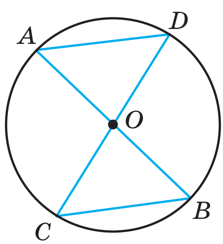
1) 2 см; 2) 5 см; 3) 7 см; 4) 9,8 см; 5) 10,2 см?

529②. Радіус кола дорівнює 4 дм. Чи може хорда цього кола дорівнювати:

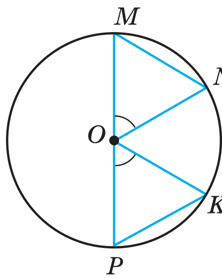
1) 1 дм; 2) 4 дм; 3) 6,7 дм; 4) 7,95 дм; 5) 8,3 дм?

530②. У колі проведено діаметри AB і CD (мал. 330). Доведіть, що $\triangle AOD = \triangle BOC$.

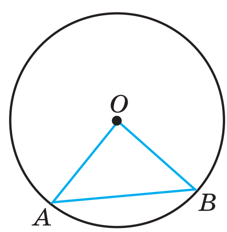
531②. У колі з центром O MN і PK — хорди, PM — діаметр. $\angle POK = \angle MON$ (мал. 331). Доведіть, що $\triangle MON = \triangle POK$.



Мал. 330



Мал. 331



Мал. 332

532②. На малюнку 332 точка O — центр кола. Знайдіть градусну міру:

1) кута O, якщо $\angle A = 52^\circ$; 2) кута B, якщо $\angle O = 94^\circ$.

533②. На малюнку 332 точка O — центр кола. Знайдіть градусну міру:

1) кута O, якщо $\angle B = 48^\circ$; 2) кута A, якщо $\angle O = 102^\circ$.

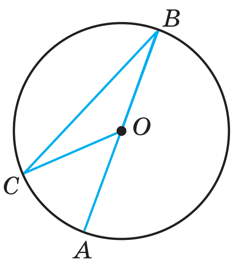
534③. На малюнку 333 точка O — центр кола, $\angle COA = 32^\circ$. Знайдіть кут CBA.

535③. На малюнку 333 точка O — центр кола, $\angle BCO = 18^\circ$. Знайдіть кут AOC.

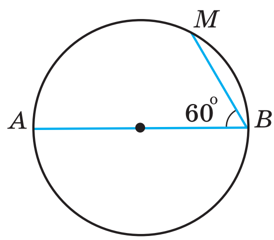
536③. У колі, радіус якого 5 см, проведіть хорду, довжина якої 6 см. Скільки таких хорд можна провести?

537③. У колі на малюнку 334 AB — діаметр, $\angle ABM = 60^\circ$, $BM = 5$ см. Знайдіть діаметр кола.

538③. У колі на малюнку 334 AB — діаметр, $\angle ABM = 60^\circ$, $AB = 18$ см. Знайдіть довжину хорди MB.



Мал. 333



Мал. 334

539④. Доведіть, що коли хорди рівновіддалені від центра кола, то вони рівні.

540④. Доведіть, що рівні хорди кола рівновіддалені від його центра.

541④. Хорда кола перетинає його діаметр під кутом 30° і ділиться діаметром на відрізки 4 см і 7 см. Знайдіть відстань від кінців хорди до прямої, що містить діаметр кола.

542②. Побудуйте пряму a, точку M, що знаходиться на відстані 3 см від прямої, та точку N, що знаходиться на відстані 2 см від прямої, так, щоб відрізок MN перетинав пряму.

543③. Два тупих кути мають спільну сторону, а дві інші сторони взаємно перпендикулярні. Знайдіть градусну міру тупого кута.

544④. Доведіть рівність двох рівнобедрених трикутників за основою і висотою, проведеною до бічної сторони.

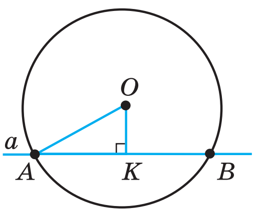
Урок 38 § 22. ДОТИЧНА ДО КОЛА, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Пряма і коло можуть мати дві спільні точки (мал. 335), одну спільну точку (мал. 336), або не мати спільних точок (мал. 337).

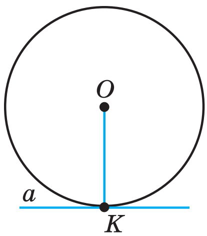
Пряму, яка має дві спільні точки з колом, називають ***січною***. На малюнку 335 *OK* — відстань від центра кола — точки *O* — до січної. У прямокутному трикутнику *OKA* сторона *OK* є катетом, а *AO* — гіпотенузою. Тому $OK < OA$. Отже, *відстань від центра кола до січної менша за радіус.*

! ***Дотичною*** **до кола називають пряму, яка має одну спільну точку з колом. Цю точку називають *точкою дотику*.**

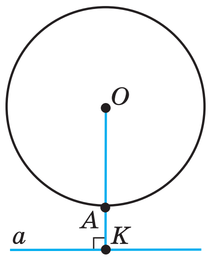
На малюнку 336 пряма *a* — дотична до кола, точка *K* — точка дотику.



Мал. 335



Мал. 336



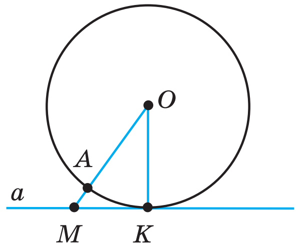
Мал. 337

Якщо пряма і коло не мають спільних точок, то відстань *OK* більша за радіус кола *OA* (мал. 337). *Відстань від центра кола до прямої, яка не перетинає це коло, більша за радіус.*

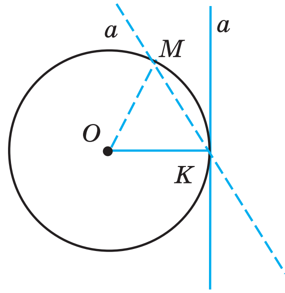
Т е о р е м а 1 (властивість дотичної). ***Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.***

Д о в е д е н н я. Нехай пряма *a* дотична до кола з центром у точці *O*, точка *K* — точка дотику (мал. 338). Доведемо, що пряма *a* перпендикулярна до *OK*.

Припустимо, що пряма *a* не є перпендикулярною до *OK*. Проведемо з точки *O* перпендикуляр *OM* до прямої *a*. Оскільки у прямої і кола лише одна спільна точка *K*, то точка *M*, що належить прямій, лежить поза колом. Тому довжина відрізка *OM* більша за довжину відрізка *OA*, який є радіусом кола. Оскільки $OA = OK$ (як радіуси), то $OM > OK$. Але ж, за припущенням, *OM* — катет прямокутного трикутника *KOM*, а *OK* — його гіпотенуза. Прийшли до протиріччя з властивістю прямокутного трикутника (див. § 19, властивість 2).



Мал. 338



Мал. 339

Наше припущення неправильне. Отже, $a \perp OK$. Теорему доведено.

Н а с л і д о к. ***Відстань від центра кола до дотичної до цього кола дорівнює радіусу кола.***

Т е о р е м а 2 (обернена до теореми про властивість дотичної). ***Якщо пряма проходить через кінець радіуса, що лежить на колі, і перпендикулярна до цього радіуса, то вона є дотичною.***

Д о в е д е н н я. Нехай OK — радіус кола із центром у точці O. Пряма a проходить через точку K так, що $a \perp OK$ (мал. 339). Доведемо, що OK — дотична до кола.

Припустимо, що пряма a має з колом ще одну спільну точку — точку M. Тоді $OK = OM$ (як радіуси) і трикутник OMK — рівнобедрений. $\angle OMK = \angle OKM = 90^\circ$. Тому $\angle OMK + \angle OKM = 180^\circ$, що суперечить теоремі про суму кутів трикутника.

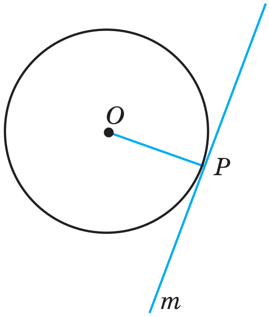
Наше припущення неправильне. Пряма a не має інших спільних точок з колом окрім точки K. Тому пряма a — дотична до кола. Теорему доведено.

Задача. Через дану точку P кола з центром O провести дотичну до цього кола (мал. 340).

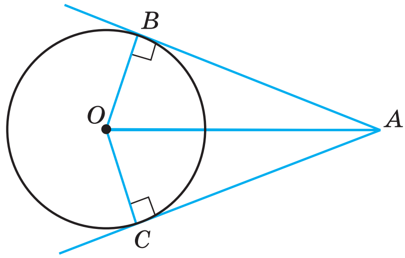
Р о з в' я з а н н я. Проведемо радіус OP, а потім побудуємо пряму m, перпендикулярну до радіуса (наприклад, за допомогою косинця). За теоремою 2 пряма m є дотичною до кола.

Розглянемо дві дотичні до кола з центром у точці O, які проходять через точку A і дотикаються до кола в точках B і C (мал. 341). Відрізки AB і AC називають *відрізками дотичних, проведеними з точки A*.

Т е о р е м а 3 (властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки). ***Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні між собою.***



Мал. 340



Мал. 341

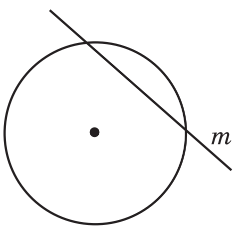
Д о в е д е н н я. На малюнку 341 трикутники OBA і OCA — прямокутні, $OB = OC$ (як радіуси), OA — спільна сторона цих трикутників. $\triangle OBA = \triangle OCA$ (за катетом і гіпотенузою). Тому $AB = AC$. Теорему доведено.

Яким може бути взаємне розміщення кола і прямої? • Яку пряму називають січною по відношенню до кола? • Що більше: відстань від центра кола до січної чи радіус кола? • Що більше: відстань від центра кола до прямої, яка не перетинає коло, чи радіус? • Яку пряму називають дотичною до кола? • Сформулюйте і доведіть властивість дотичної. • Сформулюйте і доведіть властивість, обернену до теореми про властивість дотичної. • Сформулюйте і доведіть теорему про властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки.

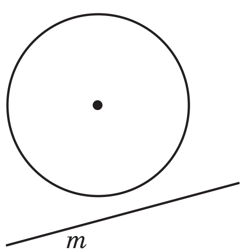
545①. (Усно.) На якому з малюнків 342—344 пряма m є дотичною до кола, а на якому — січною?

546①. (Усно.) Скільки різних дотичних можна провести до кола через точку, що лежить:

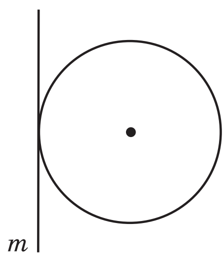
1) на колі; 2) поза колом; 3) всередині кола?



Мал. 342



Мал. 343



Мал. 344

547②. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3 см, позначте на ньому точку P. За допомогою косинця проведіть дотичну до кола, що проходить через точку P.

548②. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 4,5 см, позначте на ньому точку M. За допомогою косинця або транспортира проведіть дотичну до кола, що проходить через точку M.

549②. Радіус кола дорівнює 8 см. Як розміщені пряма a і коло, якщо відстань від центра кола до прямої дорівнює:

1) 5 см; 2) 8 см; 3) 9 см?

550②. Радіус кола дорівнює 2 дм. Як розміщені пряма b і коло, якщо відстань від центра кола до прямої дорівнює:

1) 2,7 дм; 2) 2 дм; 3) 1,8 дм?

551②. На малюнку 345 KP — дотична до кола. Знайдіть:

1) $\angle OMN$, якщо $\angle NMP = 35^\circ$;

2) $\angle KMN$, якщо $\angle OMN = 50^\circ$.

552②. На малюнку 345 KP — дотична до кола. Знайдіть:

1) $\angle NMP$, якщо $\angle OMN = 52^\circ$;

2) $\angle OMN$, якщо $\angle KMN = 128^\circ$.

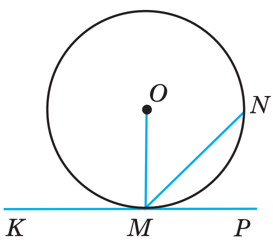
553③. З точки A до кола з центром у точці O проведено дві дотичні AB і AC (B і C — точки дотику). Доведіть, що промінь OA — бісектриса кута BOC.

554③. З точки P до кола з центром у точці Q проведено дотичні PM і PN. Доведіть, що промінь PQ — бісектриса кута MPN.

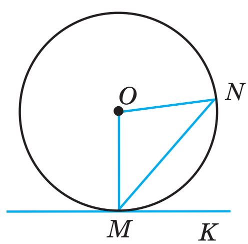
555③. Пряма MK — дотична до кола з центром у точці O (мал. 346). Знайдіть кут NMK, якщо $\angle MON = 82^\circ$.

556③. Пряма MK — дотична до кола з центром у точці O (мал. 346). Знайдіть кут NOM, якщо $\angle KMN = 53^\circ$.

557④. З точки M, що лежить поза колом, проведено дві дотичні. Відстань від точки M до центра кола удвічі більша за радіус кола. Знайдіть кут між дотичними.

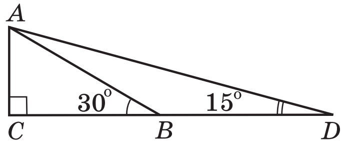


Мал. 345



Мал. 346

558④. Прямі MN і MK дотикаються до кола з центром O в точках N і K. Знайдіть NK, якщо $\angle OMN = 30^\circ$, $MN = 7$ см.



Мал. 347

559③. Один з кутів трикутника дорівнює половині зовнішнього кута, не суміжного з ним. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

560④. На малюнку 347 $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle ADB = 15^\circ$, $AC = 6$ см. Знайдіть BD.

Урок 39 § 23. КОЛО, ВПИСАНЕ В ТРИКУТНИК

Розглянемо важливу властивість бісектриси кута.

Т е о р е м а 1 (властивість бісектриси кута). ***Будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута.***

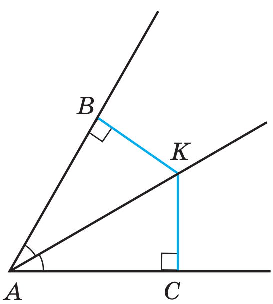
Д о в е д е н н я. Нехай AK — бісектриса кута A, KB і KC — перпендикуляри, проведені з точки K до сторін кута (мал. 348). Доведемо, що $KB = KC$.

Оскільки $\angle BAK = \angle KAC$ і AK — спільна сторона прямокутних трикутників ABK і ACK, то $\triangle ABK = \triangle ACK$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Тому $KB = KC$. Теорему доведено.

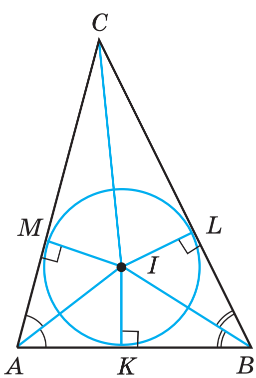
Коло **називають** ***вписаним у трикутник*****, якщо воно дотикається до всіх його сторін.**

При цьому трикутник називається *описаним навколо кола*.

Т е о р е м а 2 (про коло, вписане у трикутник). ***У будь-який трикутник можна вписати коло.***



Мал. 348



Мал. 349

Д о в е д е н н я. Розглянемо довільний трикутник ABC. Нехай бісектриси кутів A і B цього трикутника перетинаються в точці I (мал. 349). Доведемо, що ця точка є центром вписаного у трикутник кола.

1) Оскільки точка I належить бісектрисі кута A, то вона рівновіддалена від сторін AB і AC: $IM = IK$, де M і K — основи перпендикулярів, опущених з точки I на сторони AC і AB відповідно.

2) Аналогічно, $IK = IL$, де L — основа перпендикуляра, опущеного з точки I на сторону BC.

3) Отже, $IM = IK = IL$. Тому коло з центром у точці I і радіусом IM проходить через точки M, K і L. Сторони трикутника ABC дотикаються до цього кола у точках M, K і L, оскільки вони перпендикулярні до радіусів OM, OK і OL.

4) Тому коло з центром у точці I і радіусом IM є вписаним у трикутник ABC. Теорему доведено.

Н а с л і д о к 1. ***Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.***

Д о в е д е н н я. За доведенням попередньої теореми точка I — точка перетину бісектрис кутів A і B трикутника ABC. Доведемо, що бісектриса кута C також проходить через точку I. Розглянемо прямокутні трикутники CMI і CLI (мал. 349). Оскільки $IM = IL$, а CI — спільна сторона цих трикутників, то $\triangle CMI = \triangle CLI$ (за катетом і гіпотенузою). Тому $\angle MCI = \angle LCI$, CI — бісектриса кута C трикутника ABC. Отже, бісектриси всіх трьох кутів трикутника проходять через точку I, а тому всі три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці I. Наслідок доведено.

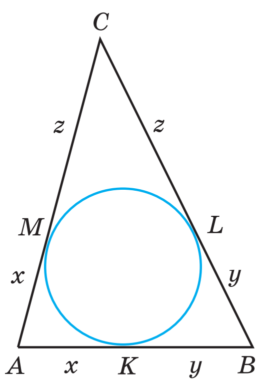
Нагадаємо, що точку перетину бісектрис трикутника називають *інцентром*.

Н а с л і д о к 2. ***Центром кола, вписаного у трикутник, є точка перетину бісектрис цього трикутника.***

Задача. Коло, вписане у трикутник ABC, дотикається до сторони AB у точці K, до сторони BC у точці L, а до сторони CA у точці M. Довести, що:

$$AK = AM = p - BC; \quad BK = BL = p - AC;$$

$CM = CL = p - AB$, де $p = \frac{AB+AC+BC}{2}$ — півпериметр трикутника ABC.



Мал. 350

Д о в е д е н н я. Використовуючи властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки, маємо $AM = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$ (мал. 350). Позначимо $AM = AK = x$, $BK = BL = y$, $CL = CM = z$.

Тоді периметр трикутника $P = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z)$, тому $p = x + y + z$. Отже, $x = p - (y + z)$; $x = p - BC$. Маємо $AM = AK = p - BC$.

Аналогічно доводять, що $BK = BL = p - AC$, $CM = CL = p - AB$.

Сформулюйте і доведіть властивість бісектриси кута. • Яке коло називають описаним навколо трикутника? • Сформулюйте і доведіть теорему про коло, вписане в трикутник, та наслідок 1 з неї. • Сформулюйте наслідок 2.

561①. (Усно.) На якому з малюнків 351—354 зображено коло, вписане у трикутник?

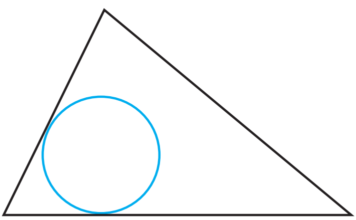
562②. Накресліть гострокутний трикутник. За допомогою транспортира, циркуля та лінійки побудуйте коло, вписане у цей трикутник.

563②. Накресліть прямокутний трикутник. За допомогою транспортира, циркуля та лінійки побудуйте коло, вписане у цей трикутник.

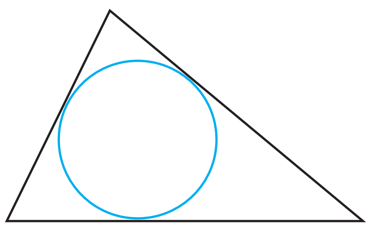
564③. На малюнку 349 точка I — центр кола, вписаного у трикутник ABC; M, K і L — точки дотику. Знайдіть пари рівних трикутників на цьому малюнку.

565③. Доведіть, що центр кола, яке дотикається до сторін кута, належить бісектрисі цього кута.

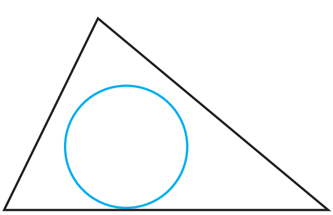
566③. Накресліть кут, міра якого 110°. За допомогою циркуля, кутника та транспортира впишіть в нього коло довільного радіуса.



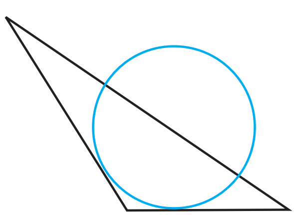
Мал. 351



Мал. 352



Мал. 353



Мал. 354

567③. Накресліть кут, міра якого 70°. За допомогою циркуля, кутника та транспортира впишіть в нього коло довільного радіуса.

568③. У трикутнику центр вписаного кола лежить на медіані. Доведіть, що цей трикутник рівнобедрений.

569③. У трикутнику центр вписаного кола лежить на висоті. Доведіть, що цей трикутник рівнобедрений.

570④. У трикутник ABC вписано коло, яке дотикається до сторін AB, AC і BC відповідно в точках P, F і M. Знайдіть довжини відрізків AP, PB, BM, MC, CF і FA, якщо $AB = 8$ см, $BC = 6$ см, $AC = 12$ см.

571④. Знайдіть довжини сторін трикутника, якщо точки дотику кола, вписаного в цей трикутник, ділять його сторони на відрізки, три з яких дорівнюють 4 см, 6 см і 8 см.

572④. Коло, вписане у рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 3 см і 4 см, починаючи від основи. Знайдіть периметр трикутника.

573④. Коло, вписане у рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 5 см і 7 см, починаючи від вершини, протилежної основі. Знайдіть периметр трикутника.

574③. Доведіть, що висоти гострокутного рівнобедреного трикутника, проведені до його бічних сторін, рівні.

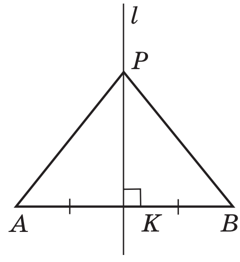
575④. Гострі кути прямокутного трикутника відносяться, як 2:3. Знайдіть кут між бісектрисою і висотою, проведеними з вершини прямого кута.

Урок 40

§ 24. КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА

Серединним перпендикуляром до відрізка **називають пряму, яка проходить через середину відрізка і перпендикулярна до нього.**

На малюнку 355 пряма l — серединний перпендикуляр до відрізка AB.



Мал. 355

Т е о р е м а 1 (властивість серединного перпендикуляра до відрізка). ***Кожна точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.***

Д о в е д е н н я. Нехай пряма l — серединний перпендикуляр до відрізка AB, K — середина цього відрізка (мал. 355). Розглянемо довільну точку P серединного перпендикуляра і доведемо, що $PA = PB$.

Якщо точка P збігається з K, то рівність $PA = PB$ очевидна. Якщо точка P відмінна від K, то прямокутні трикутники PKA і PKB рівні за двома катетами. Тому $PA = PB$. Теорему доведено.

***Коло* називають *описаним навколо трикутника*, якщо воно проходить через усі вершини трикутника.**

При цьому трикутник називають *вписаним у коло*.

Т е о р е м а 2 (про коло, описане навколо трикутника). ***Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.***

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутник ABC. Нехай серединні перпендикуляри до сторін AB і AC цього трикутника перетнулися у точці O (мал. 356). Доведемо, що ця точка є центром описаного навколо трикутника кола.

1) Оскільки точка O належить серединному перпендикуляру до сторони AB, то вона рівновіддалена від вершин A і B: $OA = OB$.

2) Аналогічно, $OA = OC$, оскільки точка O належить серединному перпендикуляру до сторони AC.

3) $OA = OB = OC$. Тому коло з центром у точці O і радіусом OA проходить через вершини A, B і C трикутника ABC. Отже, це коло є описаним навколо трикутника ABC. Теорему доведено.

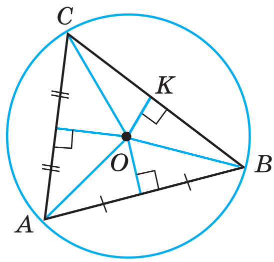
Н а с л і д о к 1. ***Серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці.***

Д о в е д е н н я. Опустимо з точки O перпендикуляр OK на сторону BC (мал. 356). Цей перпендикуляр є висотою рівнобедреного трикутника OBC, що проведена до основи BC. Тому він є також медіаною. OK належить серединному перпендикуляру до сторони BC. Отже, всі три серединні перпендикуляри трикутника перетинаються в одній точці O. Наслідок доведено.

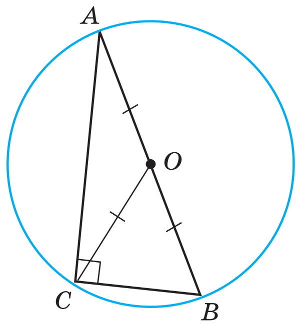
Н а с л і д о к 2. ***Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін.***

Задача. Довести, що центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи, а радіус кола дорівнює половині гіпотенузи.

Д о в е д е н н я. Нехай $\triangle ABC$ — прямокутний ($\angle C = 90^\circ$), CO — його медіана (мал. 357). Оскільки медіана прямокутного трикутника, що проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи (див. § 19, властивість 5), то $CO = \frac{AB}{2}$. Але $AO = OB$.



Мал. 356



Мал. 357

Тому $AO = BO = CO$. Отже, точка O рівновіддалена від вершин трикутника ABC. Тому коло, центр якого точка O, а радіус OA, проходить через всі вершини трикутника ABC. Отже, коло, центр якого середина гіпотенузи, а радіус дорівнює половині гіпотенузи, є описаним навколо прямокутного трикутника ABC.

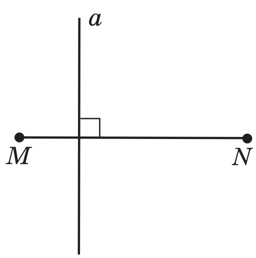
? Що називають серединним перпендикуляром до відрізка? • Сформулюйте і доведіть властивість серединного перпендикуляра до відрізка. • Яке коло називають описаним навколо трикутника? Сформулюйте і доведіть теорему про коло, описане навколо трикутника.

576①. (Усно.) На якому з малюнків 358—360 пряма a є серединним перпендикуляром до відрізка MN?

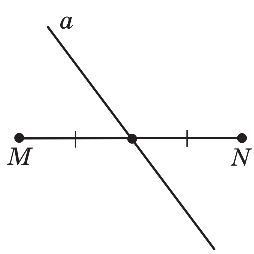
577①. На якому з малюнків 361—364 зображено коло, описане навколо трикутника?

578②. На малюнку 365 точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Знайдіть рівні трикутники на цьому малюнку.

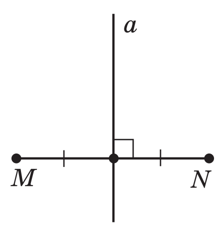
579②. 1) Накресліть відрізок MN, довжина якого 5,6 см. За допомогою лінійки з поділками та кутника проведіть серединний перпендикуляр до відрізка MN.



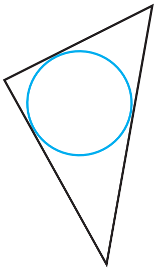
Мал. 358



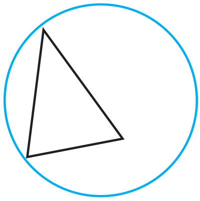
Мал. 359



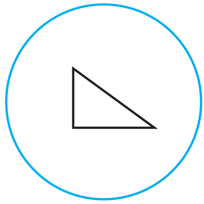
Мал. 360



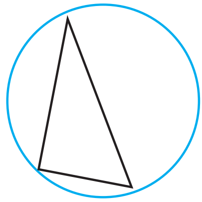
Мал. 361



Мал. 362

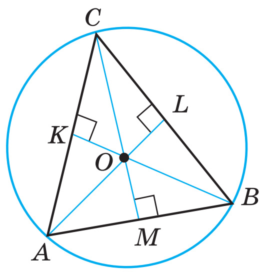


Мал. 363



Мал. 364

2) Позначте деяку точку P, що належить серединному перпендикуляру, і переконайтеся, що $PM = PN$.



Мал. 365

580②. 1) Накресліть відрізок AB, завдовжки 4,8 см. За допомогою лінійки з поділками та кутника проведіть серединний перпендикуляр до відрізка AB.

2) Позначте деяку точку C, що належить серединному перпендикуляру і переконайтеся, що $CA = CB$.

581③. 1) Накресліть гострокутний трикутник. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

2) Де розміщено центр кола (поза трикутником, усередині трикутника, на одній з його сторін)?

582③. Накресліть трикутник, два кути якого дорівнюють 60° і 70°. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

583③. 1) Накресліть тупокутний трикутник. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

2) Де розміщено центр кола (поза трикутником, усередині трикутника, на одній з його сторін)?

584③. Накресліть рівнобедрений трикутник з кутом 120° при вершині. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

585④. У трикутнику центр описаного кола лежить на медіані. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

586④. У трикутнику центр описаного кола лежить на висоті. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

587④. Доведіть, що радіус кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, удвічі більший від радіуса кола, вписаного в нього.

588③. Хорди KL і KM — рівні, LM — діаметр кола. Знайдіть кути трикутника KLM.

589④. I — точка перетину бісектрис AM і BN рівнобедреного трикутника ABC з основою AB. Доведіть, що $IN = IM$.

Урок 41

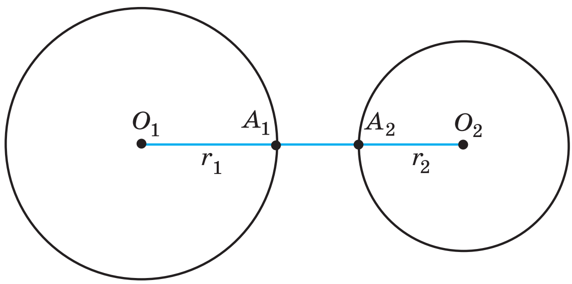
§ 25. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ КІЛ

Розглянемо взаємне розміщення двох кіл, центри яких точки O_1 і O_2, а радіуси відповідно r_1 і r_2.

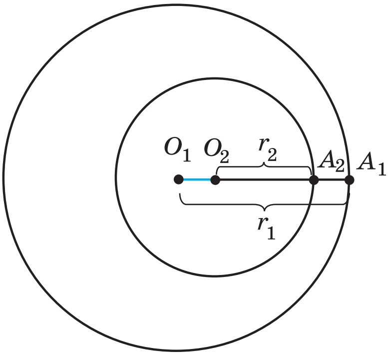
I. *Два кола не перетинаються*, тобто не мають спільних точок (мал. 366 і 367). Можливі два випадки розміщення:

1. (Мал. 366). Відстань між центрами кіл $O_1O_2 = O_1A_1 + A_1A_2 + A_2O_2 = r_1 + A_1A_2 + r_2 > r_1 + r_2$. Отже, $O_1O_2 > r_1 + r_2$;

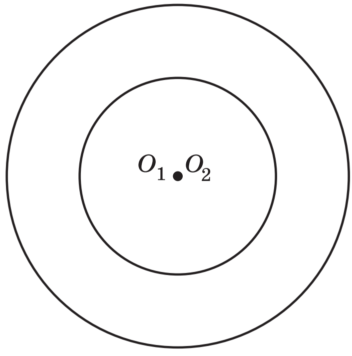
2. (Мал. 367). $O_1A_1 = O_1O_2 + O_2A_2 + A_2A_1$;



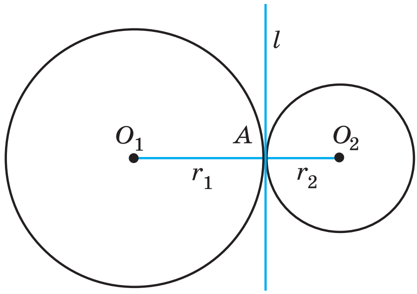
Мал. 366



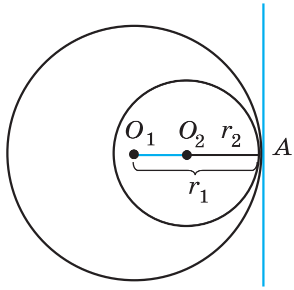
Мал. 367



Мал. 368



Мал. 369



Мал. 370

$r_1 = O_1O_2 + r_2 + A_2A_1$. Тому $O_1O_2 = (r_1 - r_2) - A_2A_1 < r_1 - r_2$. Отже, $O_1O_2 < r_1 - r_2$, де $r_1 > r_2$.

Два кола називають ***концентричними***, якщо вони мають спільний центр (мал. 368). У цьому випадку $O_1O_2 = 0$.

II. *Два кола мають одну спільну точку* (мал. 369 і 370). У цьому випадку кажуть, що кола *дотикаються,* а спільну точку називають *точкою дотику кіл*. Можливі два випадки розміщення:

1. (Мал. 369). Дотик двох кіл називають *зовнішнім*, якщо центри кіл лежать по різні боки від спільної точки. У цьому випадку:

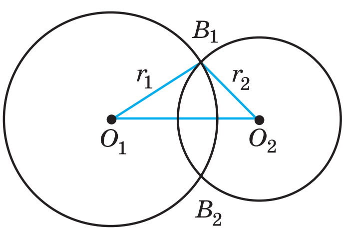
1) $O_1O_2 = O_1A + AO_2 = r_1 + r_2$;
2) у точці A існує спільна дотична l до двох кіл;
3) $l \perp O_1O_2$.

2. (Мал. 370). Дотик двох кіл називають *внутрішнім*, якщо центри кіл лежать по один бік від спільної точки. У цьому випадку:

1) $O_1O_2 = O_1A - O_2A = r_1 - r_2$, де $r_1 > r_2$;
2) у точці A існує спільна дотична l до двох кіл;
3) $l \perp O_1O_2$.

III. *Два кола мають дві спільні точки* (мал. 371). У цьому випадку кажуть, що кола *перетинаються*. Застосовуючи у трикутнику $O_1B_1O_2$ нерівність трикутника та наслідок з неї, матимемо:

$$r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2, \text{ де } r_1 \geq r_2.$$



Мал. 371

Задача. Відстань між центрами двох кіл O_1O_2 = 10 см. Визначити взаємне розміщення цих кіл, якщо їх радіуси дорівнюють:

1) $r_1 = 6$ см, $r_2 = 4$ см;
2) $r_1 = 8$ см, $r_2 = 4$ см;
3) $r_1 = 5$ см, $r_2 = 3$ см.

Розв'язання: 1) $10 = 6 + 4$, $O_1O_2 = r_1 + r_2$; зовнішній дотик кіл;

2) $8 - 4 < 10 < 8 + 4$, $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$; кола перетинаються;

3) $10 > 5 + 3$, $O_1O_2 > r_1 + r_2$; кола не перетинаються.

Що означає: два кола не перетинаються? • Що означає: кола дотикаються? • Який дотик кіл називають зовнішнім, а який — внутрішнім? • Що означає: два кола перетинаються?

590①. Що можна сказати про кола, зображені на малюнках 372—374?

591①. Накресліть два кола, які:

1) мають внутрішній дотик; 2) перетинаються.

592①. Накресліть два кола, які:

1) мають зовнішній дотик; 2) не перетинаються.

593②. Накресліть відрізок завдовжки 6 см. Побудуйте два кола, що мають зовнішній дотик, центрами яких є кінці цього відрізка.

594②. Накресліть відрізок завдовжки 3 см. Побудуйте два кола, що мають внутрішній дотик, центрами яких є кінці цього відрізка.

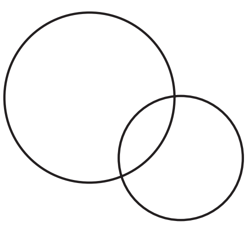
595②. Радіуси двох кіл дорівнюють 7 см і 5 см. Знайдіть відстань між їх центрами, якщо кола мають:

1) внутрішній дотик; 2) зовнішній дотик.

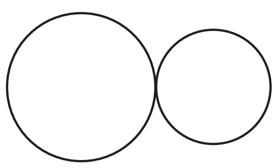
596②. Радіуси двох кіл дорівнюють 3 см і 8 см. Знайдіть відстань між їх центрами, якщо кола мають:

1) внутрішній дотик; 2) зовнішній дотик.

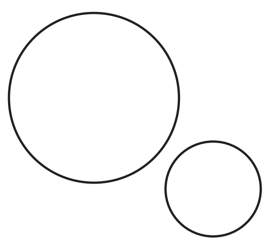
597③. Два кола мають зовнішній дотик. Відстань між їх центрами 15 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо вони відносяться, як 2:3.



Мал. 372



Мал. 373



Мал. 374

598③. Два кола мають внутрішній дотик. Відстань між їх центрами 12 дм. Знайдіть радіуси кіл, якщо вони відносяться, як 2:5.

599③. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 12 см. Визначте взаємне розміщення цих кіл, якщо їх радіуси дорівнюють:

1) 9 см і 3 см; 2) 5 см і 2 см;
3) 13 см і 1 см; 4) 9 см і 7 см.

600③. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 14 см. Визначте взаємне розміщення цих кіл, якщо їх радіуси дорівнюють:

1) 7 см і 5 см; 2) 16 см і 2 см;
3) 10 см і 5 см; 4) 7 см і 7 см.

601③. Два кола перетинаються в точках A і B. Точки O_1 і O_2 — центри цих кіл. Доведіть, що $O_1O_2 \perp AB$.

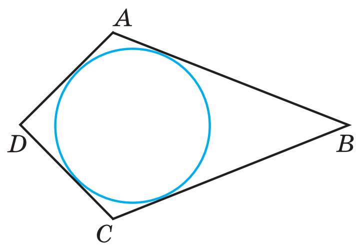
602③. Два кола перетинаються в точках C і D. Точки O_1 і O_2 — центри кіл. Доведіть, що промінь O_1O_2 — бісектриса кута CO_1D.

603④. Три кола попарно дотикаються зовні. Відрізки, що сполучають їх центри, утворюють трикутник зі сторонами 5 см, 7 см і 8 см. Знайдіть радіуси цих кіл.

604④. Три кола з радіусами 5 см, 6 см і 9 см попарно дотикаються зовні. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є центри цих кіл.

605③. У прямокутному трикутнику ABC гіпотенуза AB дорівнює 20 см, $\angle B = 60^\circ$. Який з катетів можна знайти? Чому він дорівнює?

606④. На малюнку 375 коло вписано у чотирикутник $ABCD$ (дотикається до всіх його сторін). Доведіть, що $AB + CD = AD + BC$.



Мал. 375

Урок 42 § 26. ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Під час вивчення курсу геометрії ми неодноразово виконували різні геометричні побудови: проводили прямі, відкладали відрізки, що дорівнюють даним, будували кути тощо. При цьому використовували лінійку з поділками, транспортир, креслярський кутник, циркуль. Тепер розглянемо побудови фігур, які можна здійснити за допомогою «класичних» інструментів:

лінійки без поділок і циркуля. Цими інструментами користувалися ще в Стародавній Греції.

Що можна робити за допомогою двох зазначених інструментів? Лінійка дає змогу провести довільну пряму, побудувати пряму, що проходить через задану точку, і пряму, що проходить через дві задані точки. За допомогою циркуля можна провести коло довільного радіуса, коло з центром у даній точці і радіусом, що дорівнює даному відрізку. В деяких випадках замість кола нам потрібна буде деяка його частина (дуга кола). Зауважимо, що ніяких інших побудов у задачах на побудову виконувати не дозволяється. Наприклад, за допомогою лінійки (навіть із поділками) не дозволяється відкладати відрізок заданої довжини, не можна використовувати косинець для побудови перпендикулярних прямих.

Розв'язати задачу на побудову означає вказати послідовність найпростіших побудов, після виконання яких отримаємо задану фігуру; далі — довести, що побудована фігура має властивості, передбачені умовою, тобто є шуканою фігурою.

Розглянемо найпростіші задачі на побудову.

Побудова відрізка, що дорівнює даному

Задача 1. На даному промені від його початку відкласти відрізок, що дорівнює даному.

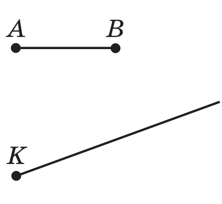
Р о з в' я з а н н я. Зобразимо фігури, задані умовою задачі: відрізок AB та промінь з початком у точці K (мал. 376). Побудуємо циркулем коло з центром у точці K та радіусом AB (мал. 377). Це коло перетне промінь у деякій точці D. Очевидно, що $KD = AB$. Тому KD — шуканий відрізок.

Зауважимо, що замість кола, можна було провести деяку його частину (дугу), яка б напевне перетинала промінь (мал. 378).

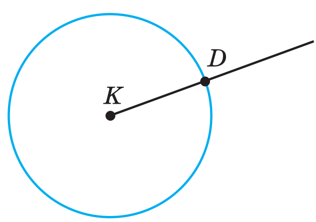
Побудова трикутника за трьома сторонами

Задача 2. Побудувати трикутник із заданими сторонами a, b і c.

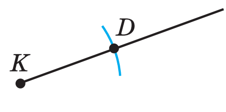
Р о з в' я з а н н я. Нехай задано три відрізки a, b і c (мал. 379).



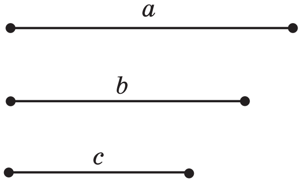
Мал. 376



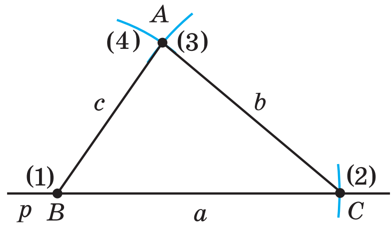
Мал. 377



Мал. 378



Мал. 379



Мал. 380

1) За допомогою лінійки проведемо довільну пряму p і позначимо на ній довільну точку B ((1) на мал. 380).

2) За допомогою циркуля відкладемо на прямій p відрізок $BC = a$ (дуга (2) на мал. 380).

3) Розхилом циркуля, що дорівнює b, опишемо дугу (3) кола з центром у точці C (мал. 380).

4) Розхилом циркуля, що дорівнює c, опишемо дугу (4) кола з центром у точці B (мал. 380).

5) Точка A — точка перетину дуг (3) і (4). Трикутник ABC — шуканий.

Доведення цього факту є очевидним, оскільки сторони трикутника ABC дорівнюють заданим відрізкам a, b і c: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

З а у в а ж е н н я. Якби побудовані дуги (3) і (4) не перетнулися, то трикутник побудувати було б неможливо. За нерівністю трикутника: кожна із сторін повинна бути меншою за суму двох інших.

? Які інструменти використовують для розв'язування задач на побудову? • Які побудови можна виконати за допомогою лінійки без поділок? • Які побудови можна зробити за допомогою циркуля? • Що означає: розв'язати задачу на побудову? • Як побудувати відрізок, що дорівнює даному? • Як побудувати трикутник за трьома сторонами?

607①. Проведіть довільну пряму та відкладіть на ній відрізок, що дорівнює даному (мал. 381).

608①. Проведіть довільний промінь та відкладіть від його початку відрізок, що дорівнює даному (мал. 382).

609①. Проведіть довільну пряму m, виберіть на ній точку M і опишіть коло з центром у точці M і радіусом, що дорівнює


Мал. 381


Мал. 382


Мал. 383

відрізку, зображеному на малюнку 383. У скількох точках коло перетнуло пряму?

***610*①.** Накресліть довільний відрізок MN та коло з центром у точці M, радіус якого дорівнює MN.

Надалі для задання умов задачі (наприклад, довжини відрізка чи градусної міри кута) використовуємо лінійку з поділками і транспортир, а для розв'язування задачі — лише лінійку без поділок і циркуль.

611②. Побудуйте трикутник зі сторонами a, b і c, якщо $a = 8$ см, $b = 7$ см, $c = 5$ см.

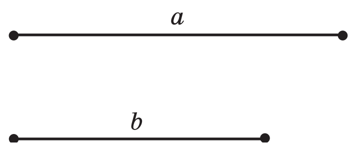
***612*②.** Побудуйте трикутник ABC, якщо $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $CA = 7$ см.

613②. Накресліть довільний трикутник ABC і побудуйте трикутник ABD, що дорівнює даному.

***614*②.** Накресліть довільний трикутник і побудуйте трикутник, що дорівнює даному.

615②. Накресліть довільний відрізок AB. Побудуйте рівносторонній трикутник ABC.

***616*②.** Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого основа дорівнює відрізку a, а бічна сторона — відрізку b (мал. 384).



Мал. 384

617③. На даній прямій a знайдіть точки, віддалені від даної точки A: 1) на 4 см; 2) на відстань більшу, ніж 4 см; 3) на відстань меншу, ніж 4 см.

***618*③.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і радіусом описаного кола.

619④. Побудуйте трикутник за двома нерівними сторонами і радіусом описаного кола. Скільки розв'язків має задача?

Урок 43

Побудова кута, що дорівнює даному

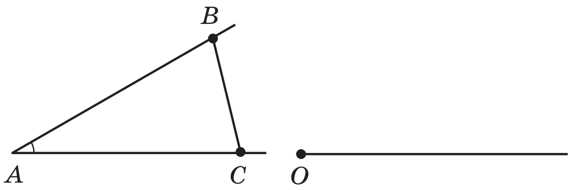
Задача 3. Відкласти від даного променя кут, що дорівнює даному.

Р о з в' я з а н н я. Нехай задано кут A і промінь з початком у точці O (мал. 385). Треба побудувати кут, що дорівнює куту A, так, щоб одна з його сторін збігалася з променем.

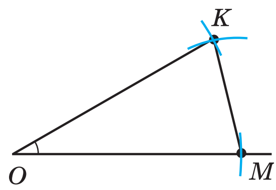
1) Візьмемо на сторонах кута A довільні точки B і C (мал. 385).

2) Побудуємо трикутник OKM, що дорівнює трикутнику ABC, так, щоб $AB = OK$, $AC = OM$, $BC = KM$ (мал. 386).

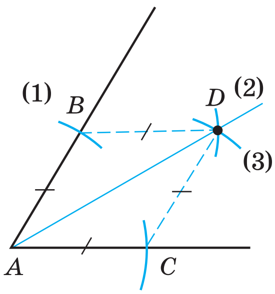
3) Тоді $\angle KOM = \angle BAC$.



Мал. 385



Мал. 386



Мал. 387

4) Отже, $\angle KOM$ — шуканий.

Доведення цього випливає з побудови, бо $\triangle OKM = \triangle ABC$, а тому $\angle KOM = \angle A$.

Побудова бісектриси даного кута

Задача 4. Побудувати бісектрису даного кута.

Р о з в' я з а н н я. Нехай задано кут A, необхідно побудувати його бісектрису (мал. 387).

1) Проведемо дугу кола довільного радіуса з центром у точці A (дуга (1) на мал. 387), яка перетинає сторони кута в точках B і C.

2) Із точок B і C опишемо дуги такими самими радіусами (дуги (2) і (3)) до їх перетину всередині кута (точка D).

3) Промінь AD — шукана бісектриса кута A.

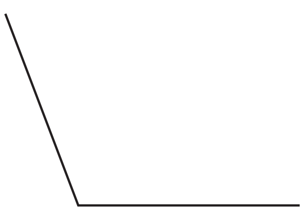
Д о в е д е н н я. $\triangle ABD = \triangle ACD$ (за трьома сторонами), а тому $\angle BAD = \angle CAD$, отже AD — бісектриса A.

? Як побудувати кут, що дорівнює даному? • Як побудувати бісектрису даного кута?

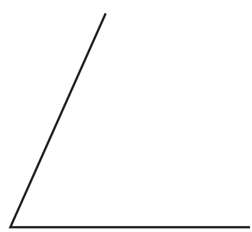
620②. Побудуйте кут, що дорівнює даному (мал. 388).

621②. Побудуйте кут, що дорівнює даному (мал. 389).

622②. Побудуйте за допомогою транспортира кут, що дорівнює 70°, та без транспортира — його бісектрису.



Мал. 388



Мал. 389

623②. Побудуйте за допомогою транспортира кут, що дорівнює 110°, та без транспортира — його бісектрису.

624③. Побудуйте трикутник ABC, якщо $AB = 3$ см, $AC = 5$ см, $\angle A = 105^\circ$.

625③. Побудуйте трикутник KLM, якщо $KL = 6$ см, KM 4 см, $\angle K = 80^\circ$.

626③. Побудуйте трикутник DEF, якщо $DE = 6$ см, $\angle D = 40^\circ$, $\angle F = 80^\circ$.

627③. Побудуйте трикутник NPT, якщо $NP = 7$ см, $\angle N = 50^\circ$, $\angle T = 100^\circ$.

628③. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого 6 см, а кут при основі 70°.

629③. Побудуйте рівносторонній трикутник зі стороною 4 см і впишіть у нього коло.

630④. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і бісектрисою, проведеною з вершини цього кута.

631④. Побудуйте трикутник ABC, якщо $AB = 4$ см, $\angle A = 40^\circ$, $\angle C = 105^\circ$.

Урок 44

Поділ даного відрізка навпіл

Задача 5. Побудувати середину даного відрізка.

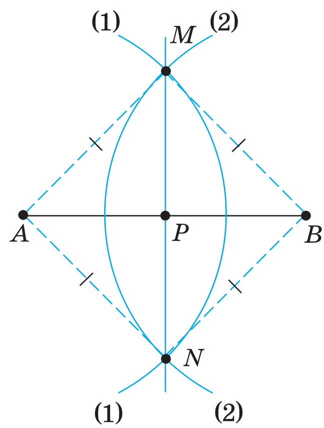
Р о з в' я з а н н я. Нехай AB — заданий відрізок, необхідно побудувати його середину (мал. 390).

1) Із точки A розхилом циркуля, більшим за половину відрізка AB, опишемо дугу (1) (мал. 390).

2) Із точки B таким самим розхилом циркуля опишемо дугу (2) до перетину з дугою (1) в точках M і N.

3) MN перетинає AB в точці P. P — шукана точка.

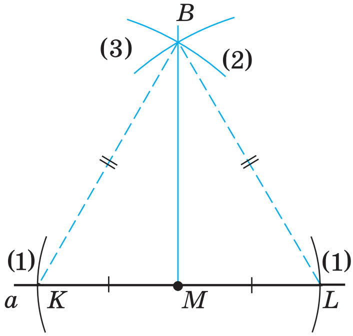
Д о в е д е н н я. $\triangle AMN = \triangle BMN$ (за трьома сторонами). Тому $\angle AMP = \angle BMP$. MP — бісектриса рівнобедреного трикутника AMB з основою AB, тому вона є також медіаною. Отже, P — середина AB.



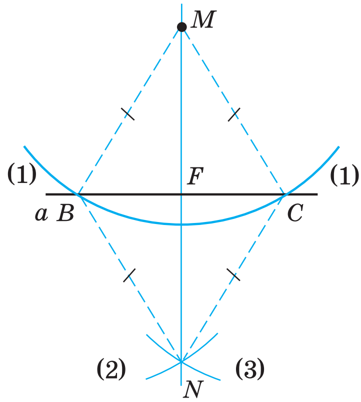
Мал. 390

Побудова прямої, перпендикулярної до даної прямої

Задача 6. Через дану точку M провести пряму, перпендикулярну до даної прямої a.



Мал. 391



Мал. 392

Р о з в’ я з а н н я. Можливі два випадки:

1. Точка M належить прямій a:

1) на даній прямій a довільним розхилом циркуля відкладемо від точки M два рівних відрізки $MK = ML$ (дуги (1) на мал. 391);

2) із центрів K і L розхилом циркуля, що дорівнює KL, опишемо дуги (2) і (3) до їх перетину в точці B;

3) пряма BM перпендикулярна до прямої a.

Д о в е д е н н я. BM — медіана рівностороннього трикутника BKL, тому вона є також висотою. Отже, $BM \perp a$.

2. Точка M не належить прямій a:

1) з точки M довільним радіусом (більшим за відстань від точки M до прямої a) проведемо дугу (1), яка перетинає пряму a в точках B і C (мал. 392);

2) із центрів B і C цим самим розхилом циркуля опишемо дуги (2) і (3) до їх перетину в точці N (відмінної від точки M);

3) пряма MN перпендикулярна до прямої a.

Д о в е д е н н я. Нехай точка F — точка перетину прямих BC і MN. $\triangle BMN = \triangle CMN$ (за трьома сторонами). Тому $\angle BMN = \angle CMN$. MF — бісектриса рівнобедреного трикутника BMC, проведена до його основи. Тому MF є також висотою. Отже, $MF \perp BC$, а тому $MN \perp a$.

? Як поділити даний відрізок навпіл? • Як побудувати пряму, перпендикулярну до даної?

632②. Побудуйте відрізок, що дорівнює даному (мал. 393) та поділіть його навпіл.

633②. Побудуйте відрізок, що дорівнює даному (мал. 394), та поділіть його навпіл.

Мал. 393

Мал. 394

634②. Накресліть пряму b та точку M, що не належить цій прямій. Проведіть пряму MN, перпендикулярну до b.

635②. Накресліть пряму m та точку P, що належить цій прямій. Проведіть пряму PK, перпендикулярну до прямої m.

636②. Побудуйте прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 5 см і 3 см.

637②. Накресліть гострокутний трикутник ABC та побудуйте його медіану CP.

638③. Побудуйте трикутник та опишіть навколо нього коло.

639③. Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого основа дорівнює 6 см, а висота, проведена до основи — 4 см.

640③. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою.

641③. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і бісектрисою прямого кута.

642③. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.

643④. Побудуйте без транспортира кути 30° і 60°.

644④. Побудуйте без транспортира кут, що дорівнює 15°.

Урок 45

645②. Накресліть прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$), його медіану CM та бісектрису AB.

646②. Накресліть прямокутний трикутник KLM ($\angle K = 90^\circ$), його бісектрису KP та медіану LT.

647②. Накресліть довільний відрізок. Побудуйте відрізок, що дорівнює $\frac{3}{4}$ накресленого відрізка.

648②. Накресліть довільний відрізок. Побудуйте відрізок, що дорівнює $\frac{1}{4}$ накресленого відрізка.

649③. Опишіть коло, радіус якого 4 см, позначте деяку точку A цього кола та проведіть дотичну до кола b, що проходить через точку A.

650③. Побудуйте без транспортира $\triangle ABC$, у якого $AB = 5$ см, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$.

***651*③.** Побудуйте без транспортира $\triangle KMP$, у якого $KM = 4$ см, $\angle K = 30^\circ$, $\angle M = 45^\circ$.

652③. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом та медіаною, проведеною до другого катета.

***653*③.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом та медіаною, проведеною до нього.

654③. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом та радіусом описаного кола.

655④. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого 4 см, а кут при вершині 80°.

***656*④.** Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого 6 см, а кут при вершині 100°.

657④. Побудуйте рівносторонній трикутник за його медіаною.

658③. Дано кут 30°. Коло, радіус якого 5 см, дотикається сторони кута і має центр на його іншій стороні. Обчисліть відстань від центра кола до вершини кута.

659③. Один з кутів трикутника дорівнює 15°, а два інших відносяться, як 7:8. Знайдіть найменший із зовнішніх кутів трикутника.

660③. Доведіть, що в рівних трикутниках бісектриси, проведені з вершин рівних кутів, є рівними.

661④. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 30°, а гіпотенуза дорівнює 60 см. Знайдіть відрізки, на які ділить гіпотенузу висота, проведена до неї.

Урок 46

§ 27. ГЕОМЕТРИЧНЕ МІСЦЕ ТОЧОК. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНИХ МІСЦЬ

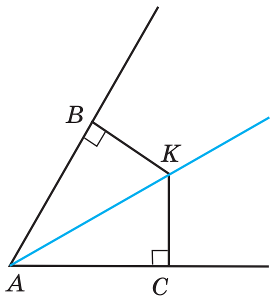
Одним з методів розв'язування складніших задач на побудову є *метод геометричних місць*.

Геометричним місцем точок називають фігуру, що складається з усіх точок площини, які мають певну властивість.

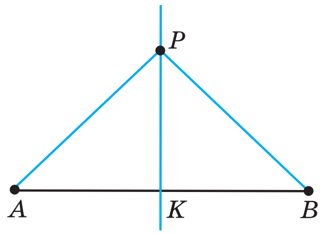
Розглянемо декілька геометричних місць точок площини.

1. *Геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки на задану відстань*,— коло, радіус якого дорівнює заданій відстані.

2. *Геометричне місце точок, відстань від яких до даної*



Мал. 395



Мал. 396

точки не перевищує заданої відстані,— круг, радіус якого дорівнює заданій відстані.

3. *Геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута,—* бісектриса цього кута.

Д о в е д е н н я. 1) Нехай точка K рівновіддалена від сторін AB і AC кута A (мал. 395). Тобто перпендикуляри KB і KC, опущені з цієї точки на сторони кута — рівні. Тоді $\triangle ABK = \triangle ACK$ (за катетом і гіпотенузою).

Тому $\angle BAK = \angle CAK$. Отже, AK — бісектриса кута.

2) Нехай точка K належить бісектрисі кута. За властивістю бісектриси кута (див. § 23, теорема 1): $KB = KC$.

Отже, довели, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута, є бісектриса цього кута.

4. *Геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців відрізка* — серединний перпендикуляр до даного відрізка.

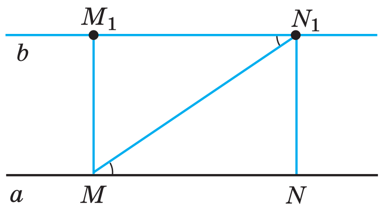
Д о в е д е н н я. 1) Нехай точка P рівновіддалена від кінців відрізка AB, тобто $PA = PB$ (мал. 396). Тоді $\triangle ABP$ — рівнобедрений з основою AB, а тому медіана цього трикутника PK є його висотою. Отже, $AK = KB$ і $PK \perp AB$. Тому PK — серединний перпендикуляр до відрізка AB.

2) Нехай точка P належить серединному перпендикуляру до відрізка AB. За властивістю серединного перпендикуляра (див. § 24, теорема 1): $PA = PB$.

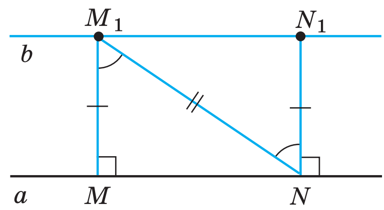
Отже, довели, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр до цього відрізка.

5. *Геометричне місце точок, що віддалені від даної прямої на задану відстань,—* дві прямі, паралельні даній прямій, кожна точка яких знаходиться на заданій відстані від прямої.

Д о в е д е н н я. 1) Доведемо, що коли пряма b паралельна прямій a, то дві довільні точки прямої b рівновіддалені від прямої a.



Мал. 397



Мал. 398

Нехай M_1 і N_1 — довільні точки прямої b. Опустимо перпендикуляри M_1M і N_1N на пряму a (мал. 397). $\angle M_1MN = \angle N_1NM = 90^\circ$. Оскільки $a \parallel b$, то $\angle MM_1N_1 = \angle NN_1M_1 = 90^\circ$. Проведемо січну MN_1. Тоді $\angle N_1MN = \angle M_1N_1M$ (як внутрішні різносторонні). Тому $\triangle MM_1N_1 = \triangle N_1NM$ (за гіпотенузою і гострим кутом), звідси $M_1M = N_1N$, тобто точки M_1 і N_1 прямої b рівновіддалені від прямої a.

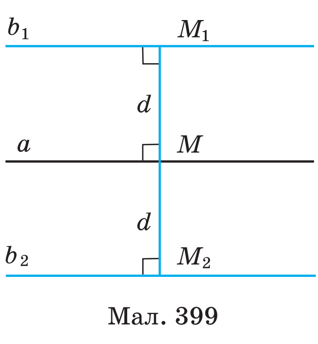
2) Доведемо, що коли дві довільні точки M_1 і N_1 прямої b лежать на однаковій відстані від прямої a і по один бік від неї, то пряма b паралельна прямій a (мал. 398).

Нехай M_1M і N_1N — перпендикуляри до прямої a. За умовою $M_1M = N_1N$.

Оскільки $\angle M_1MN = \angle N_1NK$, то $MM_1 \parallel NN_1$. Тому $\angle MM_1N = \angle N_1NM_1$ (внутрішні різносторонні кути). Отже, $\triangle MM_1N = \triangle N_1NM_1$ (за I ознакою). Тому $\angle M_1N_1N = \angle M_1MN = 90^\circ$. Але кути M_1N_1N і N_1NK — внутрішні різносторонні для прямих a і b. Тому $a \parallel b$.

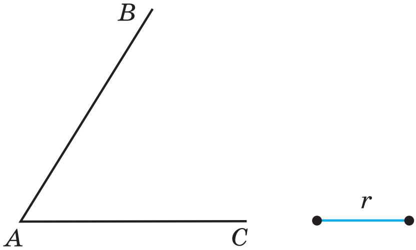
Таким чином, геометричним місцем точок, віддалених від даної прямої на задану відстань d, є дві прямі, паралельні даній, кожна точка яких знаходиться на заданій відстані від прямої.

На малюнку 399: $b_1 \parallel a$, $b_2 \parallel a$, $M_1M = M_2M = d$. Відстань d також називають *відстанню між паралельними прямими* (наприклад, b_1 і a).

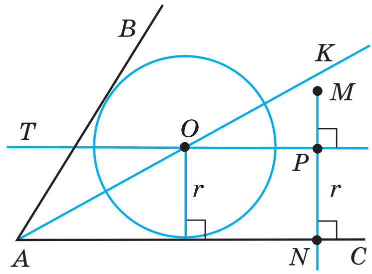


Мал. 399

Суть методу геометричних місць у задачах на побудову полягає в наступному. Нехай, необхідно побудувати точку A, що задовольняє дві умови. Будуємо геометричне місце точок, що задовольняє першу умову — фігура F_1, і геометричне місце точок, що задовольняє другу



Мал. 400



Мал. 401

умову — фігура F_2. Шукана точка A належить як F_1, так і F_2, а тому є точкою їх перетину.

Задача. У даний кут вписати коло даного радіуса.

Р о з в' я з а н н я. Нехай дано кут A (мал. 400), в який треба вписати коло радіуса r (тобто таке коло радіуса r, яке дотикається сторін кута).

Спочатку знайдемо центр цього кола — точку O. Ця точка задовольняє дві умови: 1) належить бісектрисі кута (бо є рівновіддаленою від сторін кута); 2) знаходиться на відстані r, наприклад від сторони кута AC.

Звідси побудова:

1) будуємо бісектрису кута A — промінь AK (мал. 401);

2) будуємо пряму, перпендикулярну до прямої AC, що проходить через деяку точку M, яка лежить всередині кута;

3) визначаємо на побудованій прямій точку P, що знаходиться на відстані r від прямої AC;

4) проводимо через P пряму PT, перпендикулярну до прямої PN; тоді прямі PT і AC — паралельні, кожна точка прямої PT знаходиться на відстані r від прямої AC;

5) пряма PT перетинає промінь AK в точці O. Ця точка і є центром кола, вписаного в кут A, що має радіус r;

6) описуємо коло радіуса r з центром у точці O, воно дотикається сторін кута.

Д о в е д е н н я цього випливає з побудови.

Що називають геометричним місцем точок? • Що являє собою геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки, відстань від яких до даної точки не перевищує заданої відстані; рівновіддалених від сторін кута; рівновіддалених від кінців відрізка; віддалених від даної точки на дану відстань? • У чому суть методу геометричних місць?

662②. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від даної точки на відстань:

1) 2 см; 2) не більше за 2 см.

***663*②.** Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від даної точки на:

1) дану відстань *a* см;

2) не більшу за дану відстань *a* см.

664②. Накресліть довільний відрізок *AB* та знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

***665*②.** Побудуйте відрізок *MN* завдовжки 4 см та геометричне місце точок, рівновіддалених від його кінців.

666②. Побудуйте тупий кут та геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін цього кута.

***667*②.** Побудуйте гострий кут та геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін цього кута.

668③. Позначте точку *P* і *F*, відстань між якими 6 см. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від кожної з даних точок на відстань 5 см.

Урок 47

669③. Побудуйте геометричне місце точок, що знаходяться на відстані даного відрізка *a* від заданої прямої.

***670*③.** Побудуйте геометричне місце точок, що знаходяться на відстані 4 см від заданої прямої.

671③. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що проходять через точку *P* і мають радіус *r*.

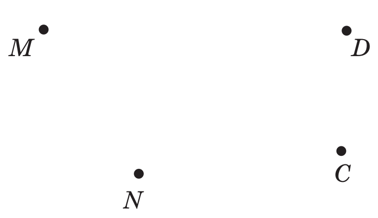
***672*③.** Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що дотикаються до даної прямої у даній точці *M*.

673③. Знайдіть геометричне місце вершин рівнобедреного трикутника із заданою основою — відрізком *AB*.

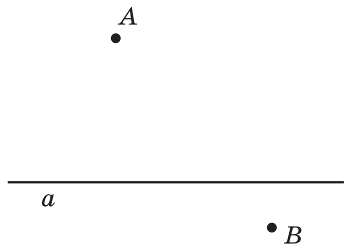
***674*③.** Знайдіть геометричне місце точок центрів кіл, що проходять через дві задані точки — *P* і *L*.

675③. Побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від двох заданих паралельних прямих.

676④. Дано пряму *a* і точку *A*. Знайдіть геометричне місце точок, які віддалені від прямої *a* на 4 см, а від точки *A* на 3 см. Скільки розв’язків може мати задача залежно від розміщення точки *A* і прямої *a*?



Мал. 402



Мал. 403

677④. Скопіюйте малюнок 402 в зошит. Побудуйте таку точку A, щоб $AM = AN$ і $AC = AD$.

678④. Побудуйте коло даного радіуса, яке дотикається двох даних кіл.

679④. Побудуйте коло даного радіуса, яке дотикається даної прямої і даного кола.

680④. Два населених пункти A і B розташовані по різні боки від річки a (мал. 403). В якому місці необхідно побудувати міст через річку, щоб він був рівновіддалений від пунктів A і B?

681④. Побудуйте трикутник за двома сторонами та висотою, що проведена до однієї з них. Скільки розв'язків має задача?

682④. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом та висотою, що проведена до цієї сторони.

683③. Периметр рівнобедреного трикутника на 18 см більший за основу трикутника. Чи можна знайти довжину бічної сторони?

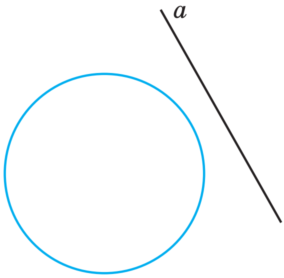
684④. Один із зовнішніх кутів прямокутного трикутника дорівнює 120°. Знайдіть відношення меншого катета до гіпотенузи.

685④. Два кола з центрами в точках O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B, кожне з них проходить через центр іншого. Знайдіть кути O_1AO_2 і AO_1B.

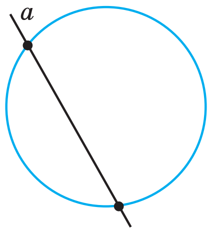
ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ З ТЕМИ «КОЛО І КРУГ. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ»

Урок 48

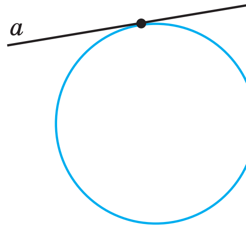
1①. Знайдіть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює 26 мм.



Мал. 404



Мал. 405



Мал. 406

2①. На якому з малюнків 404—406 пряма *a* є дотичною до кола, а на якому — січною?

3①. На якому з малюнків 407—409 зображено коло, описане навколо трикутника, а на якому — вписане у трикутник?

4②. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 4 см. Проведіть у ньому діаметр MN та хорду KL. Проведіть за допомогою косинця дотичну до кола, що проходить через точку M.

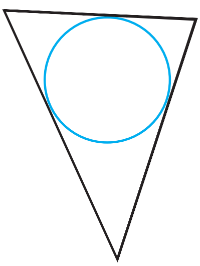
5②. Побудуйте трикутник ABC, якщо $AB = 7$ см, $BC = 6$ см, $AC = 4$ см.

6②. Накресліть відрізок FP завдовжки 5 см. Побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від його кінців.

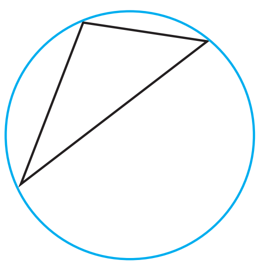
7③. Два кола мають зовнішній дотик. Відстань між їх центрами 20 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо один з них у 3 рази більший за другий.

8③. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого 55 мм, а кут при основі дорівнює 65°.

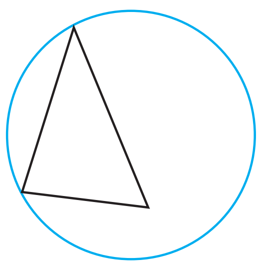
9④. Коло, вписане у рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 5 см і 2 см, починаючи від вершини, протилежної основі. Знайдіть периметр трикутника.



Мал. 407



Мал. 408



Мал. 409

Додаткові задачі

10④. З точки A, що лежить поза колом, проведено дві дотичні AB і AC, $\angle BAC = 60^\circ$. Знайдіть радіус кола, якщо відстань від точки A до центра кола дорівнює 10 см.

11④. Побудуйте без транспортира кут, що дорівнює 120°.

Вправи для повторення розділу IV

До § 21

686①. Накресліть коло. Проведіть його радіус, діаметр та хорду.

687②. Дано коло з центром у точці O. Скільки спільних точок має коло з: 1) променем OK; 2) прямою OK?

688②. У колі з центром O проведено хорди AB і BC (мал. 410). Відомо, що $\angle AOB = \angle BOC$. Доведіть, що $AB = BC$.

689③. У колі з центром O проведено діаметр AB і хорди AK і KB (мал. 411). Знайдіть кути трикутника AKB, якщо $\angle KOB = 130^\circ$.

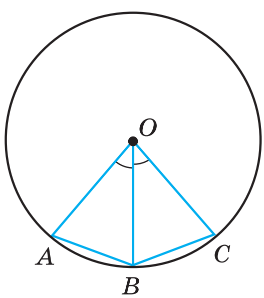
690③. Усі радіуси кола продовжили удвічі у бік, протилежний центру. Яку лінію утворять їх кінці?

691③. Розділіть хорду навпіл за допомогою одного креслярського кутника, якщо центр кола відомий.

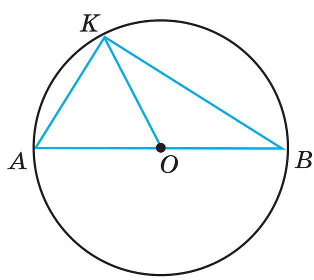
692④. Знайдіть градусну міру кута між двома хордами, що виходять з однієї точки і дорівнюють радіусу.

693④. AB — діаметр кола, K — деяка його точка. Знайдіть кути трикутника ABK, якщо менший його кут у 4 рази менший від середнього за величиною кута.

694④. У колі через середину радіуса OA проведено перпендикулярну до нього хорду MN. Знайдіть кути трикутника MON.



Мал. 410



Мал. 411

695*. Хорда перетинає діаметр під кутом 30° і ділить його на два відрізки довжиною 7 см і 1 см. Знайдіть відстань від центра кола до хорди.

До § 22

696②. Накресліть коло, радіус якого 2,5 см. Позначте на ньому точку L. Проведіть січну LK та дотичну до кола LM, використовуючи косинець.

697②. Нехай OK — відстань від центра кола O до прямої p, а r — радіус кола. Яким є взаємне розміщення прямої і кола, якщо:

1) $OK = 12$ см; $r = 14$ см; 2) $r = 7$ см; $OK = 70$ мм;

3) $OK = 2$ дм; $r = 18$ см; 4) $r = 32$ мм; $OK = 0{,}3$ дм?

698③. Чи перетинаються дотичні, проведені до кола через кінці його діаметра?

699③. Пряма дотикається до кола з центром O в точці A. На дотичній по різні боки від точки A відкладено рівні відрізки AM і AN. Доведіть, що $OM = ON$.

700④. Радіус кола ділить хорду навпіл. Доведіть, що дотична, проведена через кінець даного радіуса, паралельна даній хорді.

До § 23

701②. Накресліть тупокутний трикутник. За допомогою транспортира, циркуля та лінійки побудуйте коло, вписане в цей трикутник.

702③. Накресліть кут, міра якого 80°. За допомогою циркуля, кутника, транспортира та лінійки з поділками впишіть у цей кут коло так, щоб точка дотику до сторін кута знаходилися на відстані 4 см від його вершини.

703④. Центр кола, вписаного у трикутник, лежить на перетині двох медіан трикутника. Доведіть, що трикутник рівносторонній.

704④. Коло, вписане у рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону у відношенні 2:3, починаючи від основи. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 70 см.

До § 24

705②. Накресліть прямокутний трикутник. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

706③. Доведіть, що центр кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, збігається з центром кола, вписаним у цей трикутник.

707④. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику центр описаного кола, належить прямій, що містить висоту трикутника, проведену до основи.

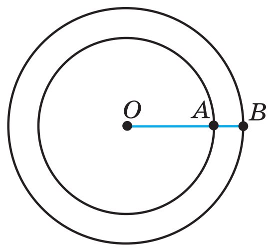
До § 25

708②. Накресліть відрізок завдовжки 5 см. Побудуйте два кола, центрами яких є кінці даного відрізка, які:
1) не перетинаються; 2) перетинаються.

709③. Діаметр більшого з концентричних кіл ділиться меншим колом на три частини, що дорівнюють 3 см, 8 см, 3 см. Знайдіть радіуси кіл.

710③. На малюнку 412 зображено концентричні кола, радіуси яких відносяться, як 10:7. Знайдіть ці радіуси, якщо $AB = 12$ см.

711④. При якому розміщенні двох кіл до них можна провести тільки три спільні дотичні?



Мал. 412

712④. Відстань між центрами двох кіл, що дотикаються, дорівнює 16 см. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо вони відносяться, як 5:3. Скільки випадків слід розглянути?

До § 26

713①. Накресліть довільний кут A і побудуйте коло з центром у вершині кута і радіусом, що дорівнює відрізку, зображеному на малюнку 413. Чи перетинає коло кожну із сторін кута?

714①. Побудуйте відрізок, довжина якого удвічі більша за довжину відрізка, заданого на малюнку 413.


Мал. 413

715②. Накресліть за допомогою транспортира кут, градусна міра якого дорівнює 80°. Побудуйте (без транспортира) кут, що дорівнює даному, та його бісектрису.

716②. Накресліть довільний трикутник та проведіть його бісектриси.

717②. Накресліть гострокутний трикутник та проведіть його медіани. Впевніться в тому, що медіани перетнулися в одній точці.

718②. Накресліть довільний тупий кут. Побудуйте кут, що дорівнює:

1) $\frac{1}{4}$ накресленого кута; 2) $\frac{3}{4}$ накресленого кута.

719③. За двома даними кутами трикутника побудуйте кут, що дорівнює його третьому куту.

720③. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник за його гіпотенузою.

721③. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом та гострим кутом.

722④. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою a та радіусом описаного кола R ($a < 2R$). Скільки розв'язків має задача?

723④. Побудуйте рівнобедрений трикутник за кутом між бічними сторонами і бісектрисою, проведеною з вершини кута про основі.

724④. Побудуйте трикутник за двома сторонами та кутом, що лежить проти меншої з них.

725*. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і сумою другого катета і гіпотенузи.

До § 27

726②. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від даної точки на задану відстань.

727②. Побудуйте прямий кут та геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін цього кута.

728②. Чи буде пряма, яка містить висоту рівнобедреного трикутника, що проведена до основи, геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців основи?

729③. Побудуйте коло радіуса r, що проходить через дві задані точки. Скільки розв'язків має задача?

730③. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від усіх вершин трикутника.

731③. Знайдіть геометричне місце центрів кіл радіуса r, що дотикаються до даної прямої.

732③. Знайдіть на стороні трикутника точку, рівновіддалену від двох інших сторін.

733④. Знайдіть геометричне місце точок, що знаходяться на відстані, яка не перевищує 3 см від заданої прямої.

734④. Побудуйте коло, що проходить через задану точку M і дотикається до прямої a у точці A.

735④. Побудуйте трикутник за кутом, бісектрисою, проведеною з цього кута, і висотою, що проведена до прилеглої до цього кута сторони.

736④. Побудуйте трикутник за радіусом описаного кола, стороною та висотою, що проведена до цієї сторони.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ЗА КУРС ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

1①. Проведіть пряму m, позначте точку A, що належить прямій m і точку B, що прямій m не належить. Зробіть відповідні записи.

2①. Накресліть довільний відрізок MN і коло з центром у точці M, радіус якого дорівнює MN.

3①. У трикутнику CDE кут C — прямий. Як називається сторона DE цього трикутника? Як називаються сторони CD і CE цього трикутника?

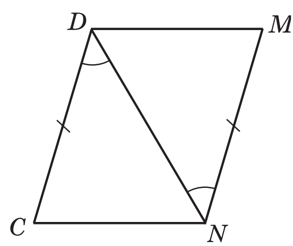
4②. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 119°. Знайдіть решту кутів. Чому дорівнює кут між цими прямими?

5②. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а бічна сторона 9 см. Знайдіть основу трикутника.

6②. Дано: $DC = MN$, $\angle CDN = \angle DNM$ (мал. 414). Довести: $\triangle CDN = \triangle MND$.

7③. Один з кутів трикутника дорівнює 68°, а другий — на 14° більший за третій. Знайдіть невідомі кути трикутника.

8③. Побудуйте $\triangle ABC$, якщо $AB = 6$ см, $\angle B = 50^\circ$, $\angle C = 60^\circ$.



Мал. 414

9④. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо зовнішні кути при вершинах цих кутів відносяться, як 29 : 25.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Розділ I
Найпростіші геометричні фігури та їх властивості

737. Дано відрізок AB. Позначте всі точки K на відрізку AB, для яких виконується співвідношення:

1) $BK = 3\,AK$; 2) $BK \geq 3\,AK$.

738. Градусна міра кута AOB дорівнює 120°. Побудуйте промінь OK, який проходить між сторонами даного кута так, що $3\,\angle AOK - 2\,\angle KOB = 10^\circ$.

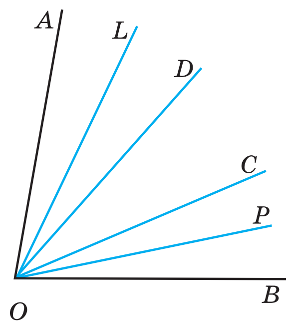
739. Скільки різних прямих можна провести через чотири точки? Розгляньте всі можливі випадки. До кожного зробіть малюнок.

740. Скільки різних точок перетину можуть мати чотири прямі, кожні дві з яких перетинаються? Розгляньте всі можливі випадки. До кожного зробіть малюнок.

741. Точки A, B і C належать прямій a, причому точка B лежить між точками A і C. Відомо, що $AB < AC < 1{,}9\ AB$. Порівняйте довжини відрізків BC і AB.

742. На малюнку 415 $\angle AOC = \angle BOD$. OL і OP — бісектриси кутів AOD і COB. Порівняйте кути:

1) AOL і COP; 2) LOP і AOC.



Мал. 415

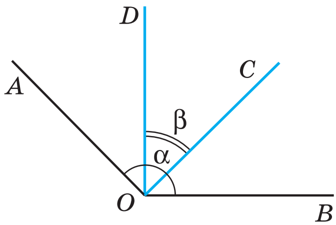
Розділ II
Взаємне розміщення прямих на площині

743. Дано п’ять прямих, кожні дві з яких перетинаються. Відомо, що через точку перетину будь-яких двох прямих проходить принаймні ще одна з даних прямих. Доведіть, що всі ці прямі проходять через одну точку.

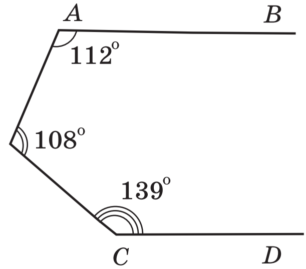
744. Чи можна градусні міри двох суміжних кутів записати:

1) тільки непарними цифрами;

2) тільки парними цифрами?



Мал. 416



Мал. 417

745. Знайдіть суміжні кути, якщо:

1) градусні міри цих кутів відносяться, як $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$;

2) половина одного з кутів становить 40 % другого.

746. В якому з випадків утворюється більше пар вертикальних кутів: при перетині трьох прямих в одній точці чи в трьох точках?

747. Знайдіть кут між двома прямими, що перетинаються, якщо сума $\frac{1}{3}$ одного з утворених кутів і $\frac{5}{6}$ другого становить 90°.

748. Через вершину тупого кута, градусна міра якого дорівнює α, проведено промені, перпендикулярні до сторін кута. Промені утворили гострий кут β. Доведіть, що $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Р о з в' я з а н н я. Нехай дано тупий кут AOB, $\angle AOB = \alpha$ (мал. 416). $OA \perp OC$, $OB \perp OD$, $\angle COD$ — гострий, $\angle COD = \beta$.

1) $\angle AOD = \angle AOC - \angle DOC$; $\angle AOD = 90^\circ - \beta$.

2) $\angle BOC = \angle DOB - \angle DOC$; $\angle BOC = 90^\circ - \beta$.

3) $\angle AOB = \angle AOD + \angle DOC + \angle COB$. Тоді $\alpha = 90^\circ - \beta + \beta + 90^\circ - \beta$, звідси $\alpha + \beta = 180^\circ$, що й треба було довести.

749. Чи є паралельними прямі AB і CD (мал. 417)?

750. Чи можна, використовуючи шаблон кута 27°, побудувати перпендикулярні прямі?

751. Знайдіть градусну міру кожного з кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо один з них у 2,6 раза менший за суму трьох інших.

Розділ III
Трикутники

752. Периметр трикутника на 10 см більший від однієї сторони, на 13 см — від другої і на 9 см — від третьої. Знайдіть периметр трикутника.

Р о з в' я з а н н я. Нехай a см, b см, c см — сторони трикутника, а P см — його периметр. $P = a + b + c$. За умовою $P - a = 10$, $P - b = 13$, $P - c = 9$. Маємо $a + b + c - a = 10$, тобто $b + c = 10$. Аналогічно $a + c = 13$, $a + b = 9$. Маємо систему:

$$\begin{cases} b + c = 10, \\ a + c = 13, \\ a + b = 9. \end{cases}$$

Склавши почленно всі три рівняння, дістанемо $2a + 2b + 2c = 32$; $2(a + b + c) = 32$; $a + b + c = 16$. Отже, периметр трикутника дорівнює 16 см.

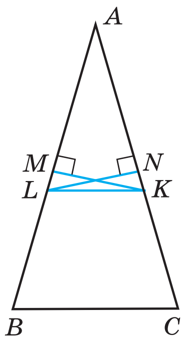
В і д п о в і д ь. 16 см.

753. Точки M і N середини рівних сторін AB і AC трикутника ABC (мал. 418), $MK \perp AB$, $NL \perp AC$. Доведіть, що $\angle NLK = \angle MKL$.

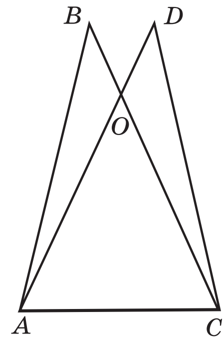
754. Прямі, що містять бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C трикутника ABC, перетинаються в точці O. Знайдіть кут BOC, якщо $\angle A = \alpha$.

755. На малюнку 419 $\triangle ABC = \triangle CDA$, $AB = CD = 40$ см, $BO = DO = 10$ см. Периметр трикутника ABC дорівнює 100 см. Знайдіть периметр трикутника AOC, якщо AO більша за AC на 30 см.

Р о з в' я з а н н я. 1) Оскільки $\triangle ABC = \triangle CAD$, то $BC = AD$.



Мал. 418



Мал. 419

2) $CO = BC - BO$, $AO = AD - DO$. Але $BC = AD$, $BO = DO$, тому $AO = OC$.

3) Позначимо $AO = OC = x$ см, тоді $AC = (x - 30)$ см.

4) Периметр $P_{\triangle ABC} = 100$ см. Маємо:

$$AB + BC + CA = 100,$$
$$AB + BO + OC + CA = 100,$$
$$40 + 10 + x + x - 30 = 100.$$

Звідси $x = 40$ (см).

5) $P_{\triangle AOC} = x + x + x - 30 = 3x - 30 = 3 \cdot 40 - 30 = 90$ (см).

Відповідь. 90 см.

756. Трикутник ABC — рівнобедрений з основою AB. Медіани AA_1 і BB_1 продовжено на відрізки A_1K і B_1L відповідно так, що $A_1K = AA_1$ і $B_1L = BB_1$. Доведіть, що кути ALC і BKC рівні.

757. Доведіть, що з точки перетину бісектрис кожну зі сторін трикутника видно під тупим кутом.

758. Доведіть, що в нерівнобедреному прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута ділить кут між висотою і медіаною, проведеними з цієї ж вершини, навпіл.

759. Дві сторони і медіана, що проведена до третьої сторони одного трикутника, дорівнюють відповідно двом сторонам і медіані, проведеній до третьої сторони другого трикутника. Доведіть, що дані трикутники рівні.

760. Визначте вид трикутника (за кутами), якщо:

1) сума будь-яких двох кутів більша від 90°;

2) кожний кут менший за суму двох інших кутів.

761. У трикутнику ABC кут C — прямий. Сторону AB трикутника продовжено за точку A на відрізок $AP = AC$ і за точку B на відрізок $BT = BC$. Знайдіть суму градусних мір кутів CPT і CTP.

762. У трикутнику ABC $AC = BC$, D — точка перетину бісектрис трикутника, а точка O — центр кола, описаного навколо трикутника. Відрізок OD перетинає сторону AB трикутника в точці P і ділиться цією точкою навпіл. Знайдіть кути трикутника ABC.

763. Відрізки AC і BD перетинаються. Відомо, що $AB > AC$. Доведіть, що $BD > CD$.

764. У $\triangle ABC$ $AB > AC$, AM — медіана. Доведіть, що $\angle CAM > \angle MAB$.

765. Всередині рівностороннього трикутника ABC узято довільну точку K. Доведіть, що $AK < BK + KC$.

766. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів удвічі менший за другий, а сума гіпотенузи та меншого катета дорівнює a см. Знайдіть довжину гіпотенузи.

767. У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 40^\circ$. На сторонах AB і BC позначено точки K і L так, що $\angle LAK = 5^\circ$; $\angle LCK = 10^\circ$. Знайдіть міру кута LKC.

768. У трикутнику ABC висоти AA_1 і BB_1 рівні і $AB_1 = CA_1$. Знайдіть міру кута C.

Розділ IV
Коло і круг. Геометричні побудови

769. Відрізок BD — висота гострокутного трикутника ABC. Від вершини B на прямій BC відкладено відрізки BM і BN, довжини яких дорівнюють довжині сторони AB. На AC від точки D відкладено відрізок DL, що дорівнює DA. Доведіть, що точки A, M, N, L лежать на одному колі.

770. Навколо рівнобедреного трикутника з кутом при вершині 120° і бічною стороною, що дорівнює a см, описано коло. Знайдіть його радіус.

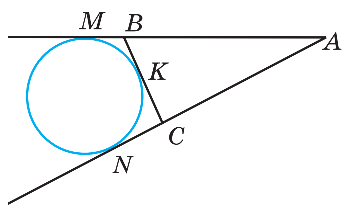
771. AM і AN — дотичні до кола (мал. 420), $AM = m$ см. Пряма BC дотикається до кола у точці K. Знайдіть периметр трикутника ABC.

Р о з в' я з а н н я. За властивістю відрізків дотичних, проведених до кола з однієї точки, маємо $AN = AM = m$ см, $BM = BK$ і $CK = CN$. Нехай P см — периметр трикутника ABC. Тоді

$$P = AB + BC + CA = AB + BK + KC + CA =$$
$$= AB + BM + CN + CA = (AB + BM) + (AC + CN) =$$
$$= AM + AN = m + m = 2m \text{ (см)}.$$

В і д п о в і д ь. $2m$ см.

772. Два рівних кола, що дотикаються між собою, внутрішньо дотикаються третього кола. З'єднавши центри трьох кіл, отримали трикутник з периметром 20 см. Знайдіть радіус більшого кола.



Мал. 420

773. Нехай r — радіус кола, вписаного у прямокутний трикутник з катетами a і b та гіпотенузою c. Доведіть, що $r = \frac{a+b-c}{2}$.

774. Два кола зовнішньо дотикаються у точці P. Точки M_1 і M_2 — точки дотику спільної зовнішньої дотичної до кіл. Доведіть, що $\angle M_1PM_2 = 90^\circ$.

775. За допомогою циркуля і лінійки розділіть кут 54° на три рівні частини.

776. За сумою і різницею двох кутів побудуйте ці кути.

777. Побудуйте трикутник ABC за стороною BC, прилеглим до неї кутом B і сумою двох інших сторін $CA + AB$.

778. Побудуйте трикутник ABC за двома кутами A і B та периметром P.

779. Дано пряму a і відрізок AB, що перетинає цю пряму. Побудуйте на прямій a точку C так, щоб пряма містила бісектрису трикутника ABC.

780. Побудуйте точку, яка лежить на даному колі і рівновіддалена від кінців відрізка. Скільки розв'язків має задача?

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

Розділ I

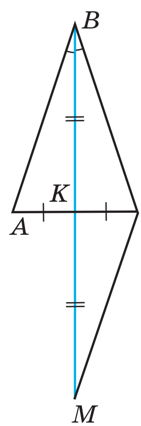
9. 2) 6; 3) 9. **21.** $AC = 1{,}9$ дм; $BC = 5{,}7$ дм. **22.** $DM = 3{,}9$ см; $CM = 4{,}3$ см. **23.** 10,1 см або 0,3 см; два розв'язки. **43.** $\angle PQB = 24^\circ$; $\angle MQP = 96^\circ$. **44.** $\angle CAN = 36^\circ$; $\angle MAC = 50^\circ$. **45.** 60°. **54.** Дві, або три, або чотири. **56.** 8 см. **58.** $\frac{a}{2}$. **65.** 1) 70°; 2) 146°. **66.** $\angle AOM = 72^\circ$, $\angle MOB = 96^\circ$.

Розділ II

80. 81° і 99°. **81.** 45° і 135°. **82.** 54° і 126°. **83.** $\angle A = 100^\circ$; $\angle B = 75^\circ$. **84.** 90°. **85.** 40° і 80°. **86.** 72° і 108° або 60° і 120°. **94.** 62°. **99.** 1) 90°; 90°; 90°; 90°; 2) 89°; 91°; 89°; 91°. **100.** 1) 8°; 172°; 8°; 172°; 2) 90°; 90°; 90°; 90°. **101.** 1) 81°; 2) 67°. **102.** 60°. **103.** 100°. **104.** 180°. **167.** 1) 82° і 98°; 2) 45° і 135°; 3) 75° і 105°. **168.** 1) 86° і 94°; 2) 36° і 144°; 3) 100° і 80°. **169.** $x = 70^\circ$ на малюнку 143; $x = 65^\circ$ на малюнку 144; $x = 129^\circ$ на малюнку 145. **170.** $x = 50^\circ$ на малюнку 146; $x = 130^\circ$ на малюнку 147. **171.** Ні. **172.** Чотири кути по 40° і чотири кути по 140°. **173.** Чотири кути по 32° і чотири кути по 148°. **174.** 130°. **175.** 100°. **181.** 54° і 126°. **182.** 30° і 150°. **183.** 80° і 100°. **184.** 144°. **189.** 66°. **190.** 120°. **191.** 1) 36°; 144°; 36°; 144°; 2) 50°; 130°; 50°; 130°. **192.** 40°. **198.** 1) Так; 2) так. **212.** 80° і 100°. **214.** 90°. **215.** 70°.

Розділ III

224. 5 см; 15 см; 12 см. **225.** 12 дм; 10 дм; 18 дм. **228.** 12 дм; 16 дм; 24 дм. **229.** 18 см; 27 см; 36 см. **243.** Так, $AB = BC$. **244.** Так, $\angle N = \angle K$. **245.** 15 см. **246.** 8 см. **247.** 1) 45 см; 2) 16 см. **248.** 30°; 60°; 90°. **268.** В к а з і в к а. Нехай точка O — точка перетину AB і MN. Доведіть, що $\triangle AOM = \triangle AON$. **296.** $AK = 28$ см; $BK = 20$ см. **316.** 60 см. **317.** 4 см. **318.** В к а з і в к а. Нехай BK — бісектриса і медіана рівнобедреного трикутника ABC з основою AC (мал. 421). Продовжте BK за точку K на відстань відрізка BK ($BK = KM$). Доведіть рівність трикутників ABK і CMK. **321.** 9 см; 30 см; 30 см. **336.** $\angle KAC = 56^\circ$; $\angle BAK = 70^\circ$. **365.** 43°; 57°. **366.** 48°; 96°. **369.** 55°. **370.** 30°. **371.** 1) 12°; 12°; 156° або 12°; 84°; 84°; 2) 92°; 44°; 44°. **372.** 1) 28°; 28°; 124° або 28°, 76°, 76°; 2) 106°, 37°, 37°. **374.** 55°, 55°; 70° або 65°, 65°, 50°.



Мал. 421

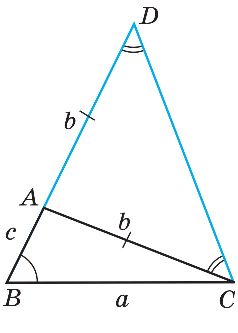
375. 36°, 72°, 72° або 45°, 45°, 90°. **376.** 5 см. **400.** 62°, 62° і 56° або 62°, 59° і 59°. **401.** 138°, 21°, 21°. **403.** 3:1:2. **404.** 17:16:15. **406.** 30° і 60°. **407.** 4,2 см; 8,4 см; 10,2 см. **422.** 31° і 59°. **423.** 18° і 72°. **424.** 71°. **425.** 109°. **427.** 58° і 32°. **428.** 40° і 50°. **430.** 20 см; 10 см. **431.** 6 см. **432.** 35° і 55°. **433.** 72° і 18°. **435.** 32°, 52° і 96°. **436.** 24 см. **443.** Ні. **444.** 27 см. **445.** 5,7 см або 6,7 см. **448.** Ні. **449.** Ні. **455.** 10 см; 20 см; 16 см. **456.** 20 см. **480.** $AC = b - a$, $P = a + b$. **490.** 82°, 48°. **491.** 1) 30°; 2) 70°. **492.** 1) 80°; 2) 32°. **499.** 100°, 40°, 40°. **506.** 30° і 60°. **507.** 10 см. **508.** 45°. **509.** 16 см. **510.** $2a$ см. **511.** 20 см; 10 см. **515.** Ні. **516.** 1) 4 см або 7 см; 2) 5 см; 3) 12 см. **517.** 9 см, 21 см, 21 см.

Розділ IV

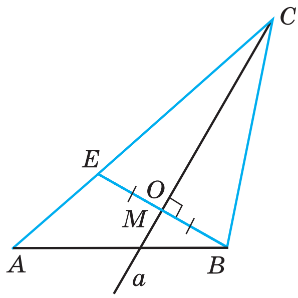
541. 8 см і 14 см. **543.** 135°. **555.** 41°. **556.** 106°. **557.** 60°. **558.** 7 см. **570.** $AP = AF = 1$ см, $BP = BM = 7$ см, $CM = CF = 5$ см. **571.** 10 см; 12 см; 14 см. **572.** 20 см. **575.** 9°. **597.** 6 см і 9 см. **598.** 8 дм і 20 дм. **603.** 2 см, 3 см, 5 см. **604.** 40 см. **643.** Вказівка. Побудуйте прямокутний трикутник, у якого один з катетів удвічі менший за гіпотенузу. **655.** Вказівка. Знайдіть кут при основі трикутника. Для цього побудуйте даний кут, суміжний з ним та поділіть останній навпіл. **656.** Див. вказівку до задачі 655. **658.** 10 см. **661.** 15 см і 45 см. **677.** Вказівка. Шукана точка — точка перетину серединних перпендикулярів до відрізків MN і CD. **678.** Вказівка. Нехай дано кола з центрами O_1 і O_2 та радіусами r_1 і r_2, а необхідно побудувати коло радіуса r, що дотикається до даних. Побудуйте кола з центрами у точках O_1 і O_2 та радіусами $r_1 + r$ та $r_2 + r$, відповідно. **680.** Вказівка. Шукана точка — точка перетину серединного перпендикуляра до AB та прямої a. **683.** Так, вона дорівнює 9 см. **684.** 1 : 2. **685.** $\angle O_1AO_2 = 60^\circ$; $\angle AO_1B = 120^\circ$. **692.** 120°. **693.** 18°, 72°, 90°. **694.** 30°, 30°, 120°. **695.** 1,5 см. **698.** Ні. **704.** 20 см, 25 см, 25 см. **709.** 4 см, 7 см. **710.** 40 см, 28 см. **711.** Зовнішній дотик кіл. **712.** 10 см і 6 см або 40 см і 24 см.

Задачі підвищеної складності

738. Вказівка. $\angle AOK = 50^\circ$. **741.** $BC < AB$. **742.** 1) $\angle AOL = \angle COP$; 2) $\angle LOP = \angle AOC$. **744.** 1) Так, наприклад 1° і 179°; 2) ні. **745.** 1) 108° і 72°; 2) 80° і 100°. **746.** Однаково, по 6. **747.** 60° або $\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ$. **749.** Ні. **750.** Так. **751.** 75°; 105°; 75°; 105°. **754.** $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. **760.** 1) Гострокутний; 2) гострокутний. **761.** 45°. **762.** 36°, 36°, 108°. **765.** Вказівка. Продовжте AK до перетину зі стороною BC у точці D. Тоді один із кутів ADB або ADC — негострий. Нехай, для



Мал. 422



Мал. 423

визначеності це кут ADB. Розгляньте $\triangle ABD$. **766.** $\frac{2a}{3}$ см. **767.** 85°. **768.** $\angle C = 60^\circ$. В к а з і в к а. $\triangle ACA_1 = \triangle BAB_1$ (за двома катетами). **769.** В к а з і в к а. Розгляньте коло з центром у точці B і радіусом BA. **770.** a см. **772.** 10 см. **775.** В к а з і в к а. Оскільки $54^\circ \cdot 3 = 162^\circ$, то можна побудувати кут 18° ($18^\circ = 180^\circ - 162^\circ$). **777.** В к а з і в к а. Побудуйте трикутник BCD, у якого $\angle DBC = \angle B$, $BD = AB + AC$ (мал. 422). Тоді точка A визначається з умови $\angle ADC = \angle ACD$. **778.** В к а з і в к а. Слід розглянути трикутник CMN, у якого $MN = P$, $\angle M = \frac{1}{2} \angle A$, $\angle N = \frac{1}{2} \angle B$. **779.** В к а з і в к а. Нехай пряма a перетинає AB у точці M. Побудуйте відрізок $BE \perp a$, $BO = OE$ (мал. 423). Шукана точка C є точкою перетину прямих a і AE. **780.** Жодного; один або два розв’язки.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аксіома паралельності 31
Аксіоми геометрії 21

Бісектриса кута 16
Бісектриса трикутника 70
Бічні сторони рівнобедреного трикутника 65

Вершина кута 13
Вершина трикутника 53
Взаємне розміщення двох кіл 123
Види трикутників 54, 65
Висновок теореми 21
Висота трикутника 71
Відповідні кути 34
Відрізок 10
Відстань від точки до прямої 28
Відстань між кінцями відрізка 11
Відстань між паралельними прямими 136
Властивість бісектриси кута 116
— — рівнобедреного трикутника 72
— відповідних кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною 40
— відрізків дотичних, проведених з однієї точки 113
— внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною 42
— внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною 41
— дотичної 112
— зовнішнього кута трикутника 85
— кутів рівнобедреного трикутника 65
Властивість паралельних прямих 40
— серединного перпендикуляра до відрізка 119
Властивості елементів кола 108, 109
— прямокутних трикутників 89, 90, 91
Внутрішні односторонні кути 34
— різносторонні кути 34
Внутрішня область кута 13

Геометрична фігура 5
Геометричне місце точок 134
Геометрія 5
Гіпотенуза 89
Градус 14

Діаметр кола 107
— круга 108
Доведення теореми 21
Дотик двох кіл 124
— — — внутрішній 124
— — — зовнішній 124
Дотична 112

Зовнішній кут трикутника 85
Зовнішня область кута 14

Інцентр трикутника 70

Катет 89
Кінці відрізка 10
Кола концентричні 124
Кола, що перетинаються 124
Коло 107
— вписане в трикутник 116
— описане навколо трикутника 120
Круг 108
Кут 13
— гострий 16
— між прямими 25
— прямий 16

— розгорнутий 13
— тупий 16
Кути вертикальні 24
— суміжні 22
— трикутника 53

Медіана трикутника 70
Метод геометричних місць 132
— доведення від супротивного 32
Мінута 14

Наслідок з теореми 35
Нерівність трикутника 95

Одиничний відрізок 10
Ознака 34
Ознака паралельності прямих 35
— рівнобедреного трикутника 66
— рівності трикутників 59
— — — друга 59
— — — перша 59
— — — третя 75
Ознаки рівності прямокутних трикутників 90, 91
Означення 21
Ортоцентр трикутника 72
Основа перпендикуляра 29
— рівнобедреного трикутника 65
Основна властивість паралельних прямих 31

Паралельні відрізки 32
— промені 32
— прямі 31
Периметр трикутника 53
Перпендикуляр 28
Перпендикулярні відрізки 28
— промені 28
— прямі 28
Планіметрія 6
Площина 5
Побудова бісектриси даного кута 130
— відрізка, що дорівнює даному 127
— кута, що дорівнює даному 129
— прямої, перпендикулярної до даної прямої 131
— трикутника за трьома сторонами 127
Поділ відрізка навпіл 131
Початок променя 7
Промені доповняльні 7
Промінь 7
Пряма 6

Радіус кола 107
— круга 108
Рівні відрізки 11
— кути 15
Рівність геометричних фігур 55

Секунда 14
Середина відрізка 11
Серединний перпендикуляр до відрізка 119
Січна 34, 112
Співвідношення між сторонами і кутами трикутника 86
Сторони кута 13
— трикутника 53
Сума кутів трикутника 80

Теорема 21
Точка 6
— дотику 112, 124
Транспортир 14
Трикутник 53
— гострокутний 54
— прямокутний 54, 89
— рівнобедрений 65
— рівносторонній 65
— різносторонній 65
— тупокутний 54

Умова теореми 21

Хорда кола 107
— круга 108

Центр кола 107
— круга 108
Центроїд трикутника 70

ЗМІСТ

Розділ I. Найпростіші геометричні фігури та їх властивості

§ 1. Геометричні фігури. Точка, пряма, промінь (*Урок 1*) 5

§ 2. Відрізок. Вимірювання відрізків. Відстань між двома точками (*Урок 2*) 10

§ 3. Кут. Вимірювання кутів. Бісектриса кута (*Уроки 3, 4*) 13

Вправи для повторення розділу I 18

Розділ II. Взаємне розміщення прямих на площині

§ 4. Аксіоми, означення, теореми (*Урок 5*) 21

§ 5. Суміжні кути (*Уроки 5, 6*) 22

§ 6. Вертикальні кути. Кут між двома прямими, що перетинаються (*Уроки 7, 8*) 24

§ 7. Перпендикулярні прямі. Перпендикуляр. Відстань від точки до прямої (*Урок 9*) 27

§ 8. Паралельні прямі (*Урок 10*) 31

§ 9. Кути, утворені при перетині двох прямих січною. Ознаки паралельності прямих (*Уроки 11, 12*) 34

§ 10. Властивість паралельних прямих. Властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною (*Уроки 13, 14*) 40

Завдання для перевірки знань з теми «Найпростіші геометричні фігури та їх властивості. Взаємне розміщення прямих на площині» (*Урок 15*) 46

Резервний час (*Урок 16*) 47

Вправи для повторення розділу II 47

Розділ III. Трикутники

§ 11. Трикутник і його елементи (*Урок 17*) 53

§ 12. Рівність геометричних фігур (*Урок 18*) 55

§ 13. Перша та друга ознаки рівності трикутників (*Уроки 19, 20*) 58

§ 14. Рівнобедрений трикутник (*Уроки 21, 22*) 65

§ 15. Медіана, бісектриса і висота трикутника. Властивість бісектриси рівнобедреного трикутника (*Уроки 23, 24*) 70

§ 16. Третя ознака рівності трикутників (*Урок 25*) 75

Завдання для перевірки знань з теми «Трикутники. Ознаки рівності трикутників. Рівнобедрений трикутник та його властивості» (*Урок 26*) 78

§ 17. Сума кутів трикутника (*Уроки 27—29*) 80

§ 18. Зовнішній кут трикутника та його властивості (*Уроки 30, 31*) 85

§ 19. Прямокутні трикутники. Властивості та ознаки рівності прямокутних трикутників (*Уроки 32, 33*) 89

§ 20. Нерівність трикутника (*Урок 34*) 95

Завдання для перевірки знань з теми «Сума кутів трикутника. Зовнішній кут трикутника. Прямокутний трикутник. Нерівність трикутника» (*Урок 35*) 98

Вправи для повторення розділу III 99

Розділ IV. Коло і круг. Геометричні побудови

§ 21. Коло. Круг (*Уроки 36, 37*) 107

§ 22. Дотична до кола, її властивості (*Урок 38*) 112

§ 23. Коло, вписане в трикутник (*Урок 39*) 116

§ 24. Коло, описане навколо трикутника (*Урок 40*) 119

§ 25. Взаємне розміщення двох кіл (*Урок 41*) 123

§ 26. Задачі на побудову та їх розв'язування (*Уроки 42—45*) 126

§ 27. Геометричне місце точок. Метод геометричних місць (*Уроки 46—47*) 134

Завдання для перевірки знань з теми «Коло і круг. Геометричні побудови» (*Урок 48*) 139

Вправи для повторення розділу IV 141

Завдання для перевірки знань за курс геометрії 7 класу 146

Задачі підвищеної складності 147

Відповіді та вказівки 153

Предметний покажчик 156

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 7 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Відповідальна за випуск *Є М. Коденко*
Редактор *Г. В. Криволапова*
Художник обкладинки *Л. А. Кузнецова*
Художній редактор *І. В. Бабенцова*
Технічний редактор *Ц. Б. Федосіхіна*
Комп'ютерна верстка *О. М. Білохвост*
Коректори *Р. І. Борисенко, Л. А. Еско*

Підписано до друку 12.06.07. Формат 60×90/16. Папір офс.
Гарнітура шкільна. Друк офс. Ум. друк. арк. 10 + 0,25 форзац.
Ум. фарбовідб. 21,0. Обл.-вид. арк. 7,87 + 0,43 форзац.
Тираж пр. Вид. № 37152. Зам. № .

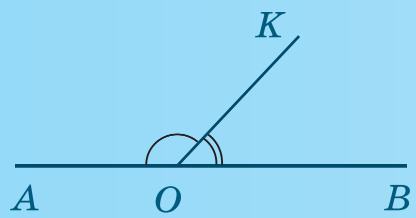
Набір та верстка комп'ютерного центру видавництва «Освіта»

Видавництво «Освіта», 04053, Київ, вул. Юрія Коцюбинського, 5
Свідоцтво ДК № 27 від 31.03.2000 р.

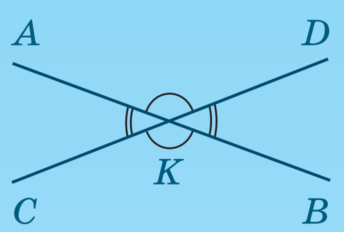
СУМІЖНІ КУТИ

$\angle AOK$ і $\angle KOB$ — суміжні

$\angle AOK + \angle KOB = 180^\circ$



ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ



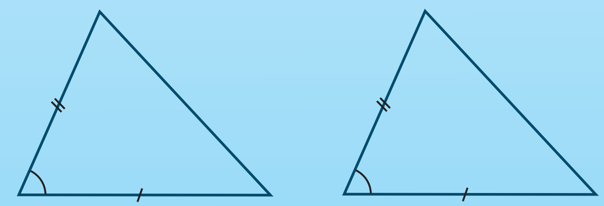
$\angle AKC$ і $\angle DKB$ — вертикальні

$\angle AKD$ і $\angle CKB$ — вертикальні

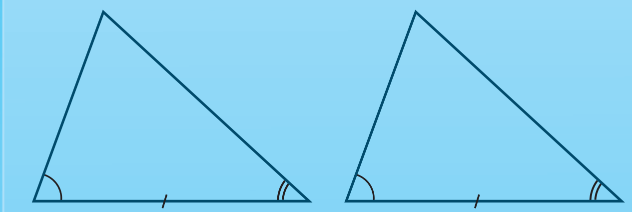
$\angle AKC = \angle DKB$

$\angle AKD = \angle CKB$

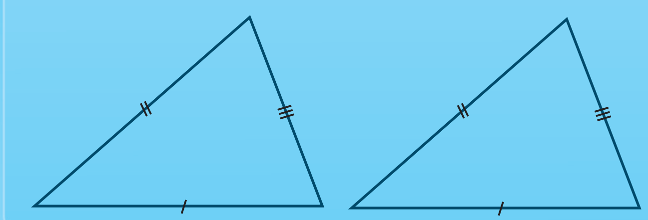
ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ



1. За двома сторонами і кутом між ними



2. За стороною і прилеглими до неї кутами



3. За трьома сторонами

ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

$a \parallel b$, якщо:

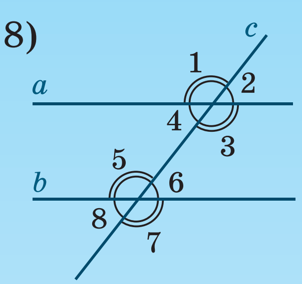
$\angle 1 = \angle 5$ ($\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$)

або

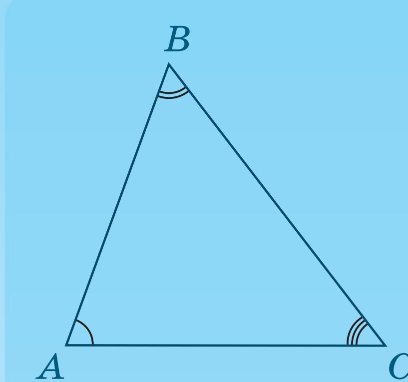
$\angle 3 = \angle 5$ ($\angle 4 = \angle 6$)

або

$\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$ ($\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$)



ТРИКУТНИК



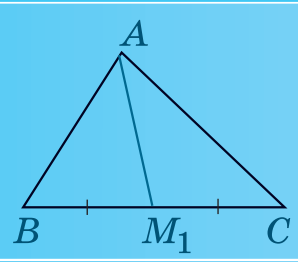
$P = AB + BC + CA$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

$|AB - BC| < AC < AB + BC$

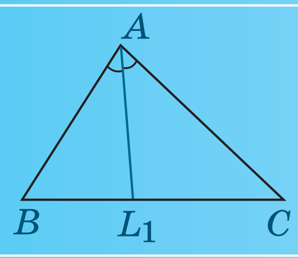
(нерівність трикутника)

МЕДІАНА, БІСЕКТРИСА І ВИСОТА ТРИКУТНИКА



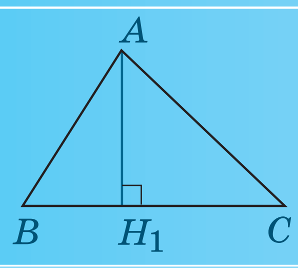
$BM_1 = M_1C$

AM_1 — медіана $\triangle ABC$



$\angle BAL_1 = \angle CAL_1$

AL_1 — бісектриса $\triangle ABC$

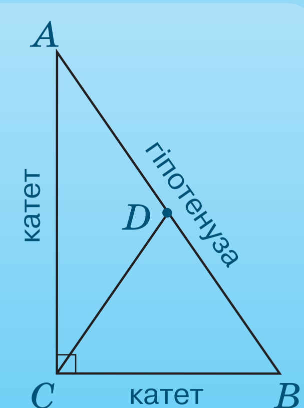


$AH_1 \perp BC$

AH_1 — висота $\triangle ABC$

ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

1. $\angle A + \angle B = 90^\circ$
2. $AB > AC$, $AB > BC$
3. Якщо $\angle A = 30^\circ$, то $BC = \frac{AB}{2}$
4. Якщо $BC = \frac{AB}{2}$, то $\angle A = 30^\circ$
5. Якщо CD — медіана, то $CD = \frac{AB}{2}$



ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

Друковані букви	Рукописні букви	Назва букв	Друковані букви	Рукописні букви	Назва букв
Aa	*Aa*	а	Nn	*Nn*	ен
Bb	*Bb*	бе	Oo	*Oo*	о
Cc	*Cc*	це	Pp	*Pp*	пе
Dd	*Dd*	де	Qq	*Qq*	ку
Ee	*Ee*	е	Rr	*Rr*	ер
Ff	*Ff*	еф	Ss	*Ss*	ес
Gg	*Gg*	же	Tt	*Tt*	те
Hh	*Hh*	аш	Uu	*Uu*	у
Ii	*Ii*	і	Vv	*Vv*	ве
Jj	*Jj*	йот (жі)	Ww	*Ww*	дубль-ве
Kk	*Kk*	ка	Xx	*Xx*	ікс
Ll	*Ll*	ель	Yy	*Yy*	ігрек
Mm	*Mm*	ем	Zz	*Zz*	зет