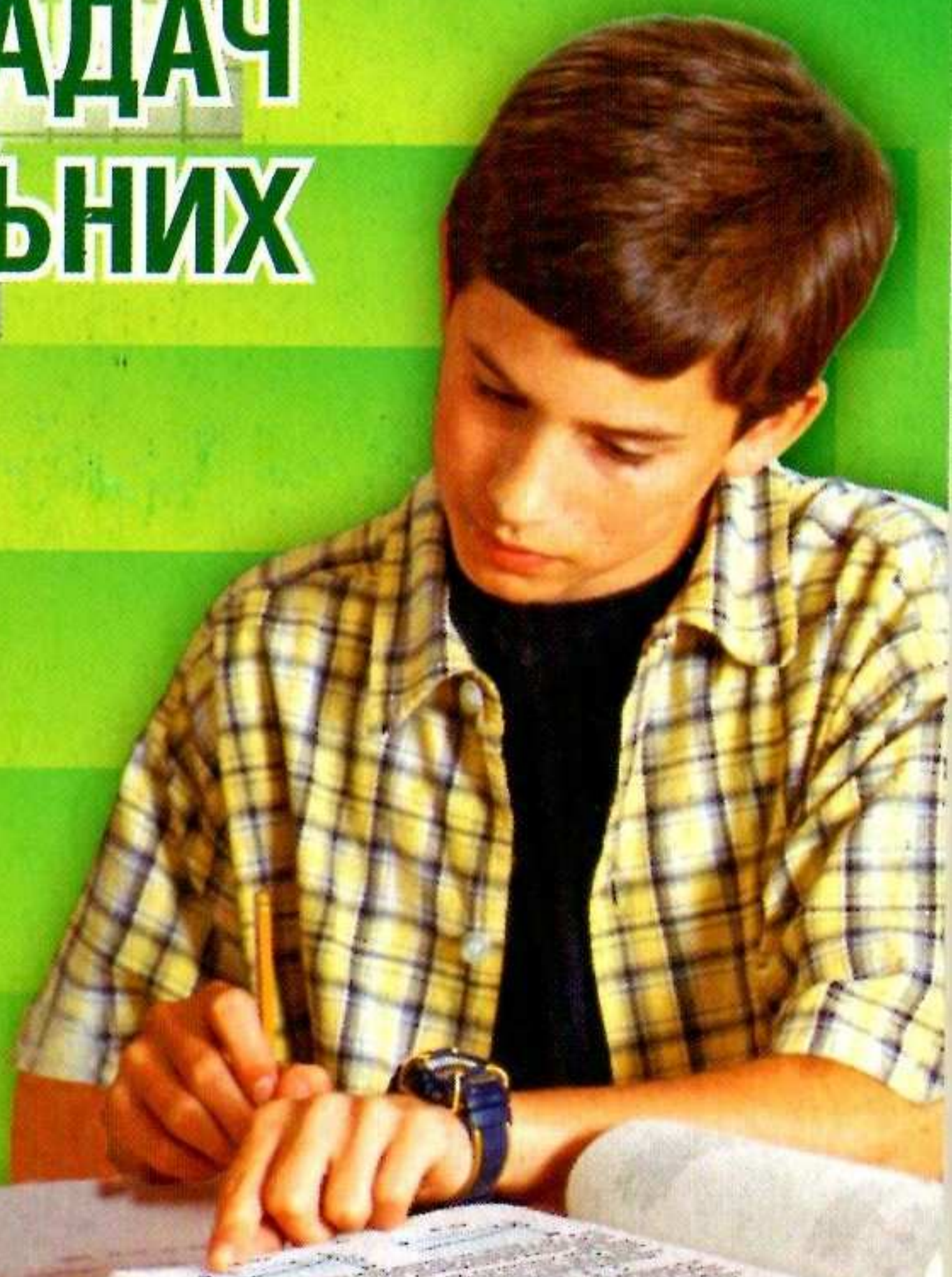


А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонський
Ю.М. Рабінович
М.С. Якір

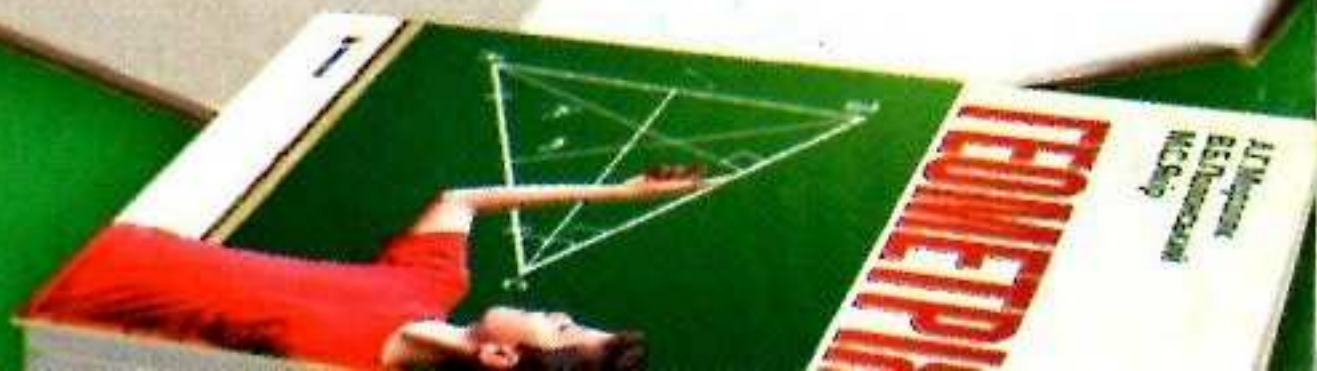
8

ГЕОМЕТРІЯ

ЗБІРНИК ЗАДАЧ
І КОНТРОЛЬНИХ
РОБІТ



 ГІМНАЗІЯ



А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонський
Ю.М. Рабінович
М.С. Якір

Геометрія

8 клас

Збірник задач і контрольних робіт

*Схвалено Міністерством освіти і науки України
для використання у загальноосвітніх навчальних закладах*

Харків
«Гімназія»
2011

УДК 373:512
ББК 22.151я721
М52

*Схвалено Міністерством освіти і науки України
для використання у загальноосвітніх навчальних закладах*

Мерзляк А. Г.

М52 Геометрія. 8 кл. : збірник задач і контрольних робіт /
А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. —
Х. : Гімназія, 2011. — 112 с. : іл.

ISBN 978-966-8319-62-4.

Посібник є дидактичним матеріалом з геометрії для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Він містить понад 1000 задач. Першу частину «Тренувальні вправи» поділено на три однотипних варіанти по 337 задач у кожному. Друга частина містить контрольні роботи (два варіанти) для оцінювання навчальних досягнень учнів за 12-бальною шкалою відповідно до чинної державної програми з математики.

Для вчителів загальноосвітніх навчальних закладів та учнів 8 класів.

УДК 373:512
ББК 22.151я721

© А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський,
Ю. М. Рабінович, М. С. Якір, 2008

ISBN 978-966-8319-62-4

© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет, 2008

ВІД АВТОРІВ

Учням

Любі діти! У цьому році ви продовжите захоплюючу подорож по чарівній країні Геометрія. Ми впевнені, що подолання перешкод, які стануть на вашому шляху, не тільки допоможе вам зміцнити, а й принесе радість від одержаних перемог.

Учителю

Ми дуже сподіваємося, що, придбавши цю книжку не тільки для себе, а й «на клас», Ви не пошкодуєте. Навіть тоді, коли Вам пощастило і Ви працюєте за підручником, який подобається, все одно задач, як і грошей, буває або мало, або зовсім мало. Ми маємо надію, що цей посібник допоможе ліквідувати «задачний дефіцит».

Першу частину — «Тренувальні вправи» — поділено на три однотипних варіанти по 337 задач у кожному. На стор.4 наведено таблицю тематичного розподілу тренувальних вправ.

Друга частина посібника містить 6 контрольних робіт (два варіанти). Зміст завдань для контрольних робіт поділимо умовно на дві частини. Перша відповідає початковому і середньому рівням навчальних досягнень учнів. Завдання цієї частини позначено символом n° (n — номер завдання). Друга частина відповідає достатньому і високому рівням. Завдання кожного з цих рівнів позначено символами n^{\bullet} і $n^{\bullet\bullet}$ відповідно. Виконання першої частини максимально оцінюється у 6 балів. Правильно розв'язані задачі рівня n^{\bullet} додають ще 4 бали, тобто учень має можливість отримати відмінну оцінку 10 балів. Якщо учневі вдалося ще розв'язати задачу $n^{\bullet\bullet}$, то він отримує оцінку 12 балів.

Тематичний розподіл тренувальних вправ

Тема	Номери вправ
Чотирикутник та його елементи	1 – 4
Паралелограм. Властивості паралелограма	5 – 22
Ознаки паралелограма	23 – 30
Прямокутник	31 – 45
Ромб	46 – 60
Квадрат	61 – 69
Середня лінія трикутника	70 – 81
Трапеція	82 – 102
Середня лінія трапеції	103 – 111
Центральні і вписані кути	112 – 129
Вписані і описані чотирикутники	130 – 137
Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки	138 – 158
Подібні трикутники	159 – 168
Перша ознака подібності трикутників	169 – 181
Друга і третя ознаки подібності трикутників	182 – 189
Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику	190 – 197
Теорема Піфагора	198 – 229
Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника	230 – 238
Розв'язування прямокутних трикутників	239 – 252
Многокутники	253 – 261
Поняття площі многокутника. Площа прямокутника	262 – 276
Площа паралелограма	277 – 286
Площа трикутника	287 – 317
Площа трапеції	318 – 337

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

Варіант 1

Чотирикутник та його елементи

1. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 1) $AB = BC$, $AD = DC$. Доведіть, що кути A і C рівні.

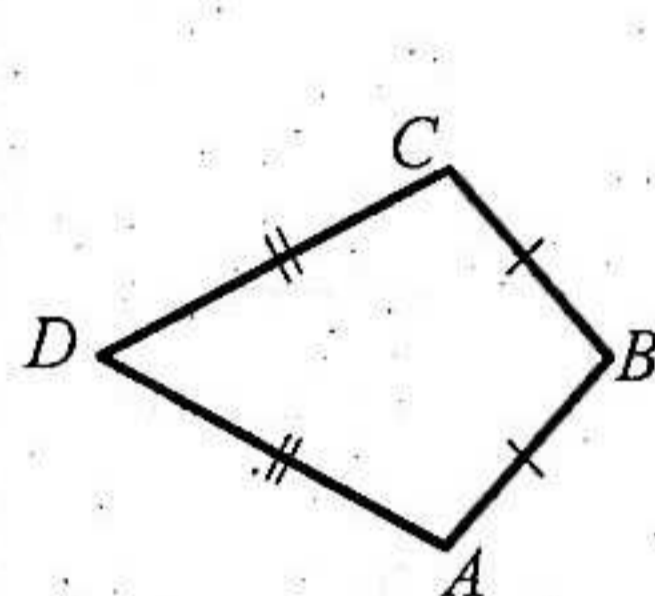


Рис. 1

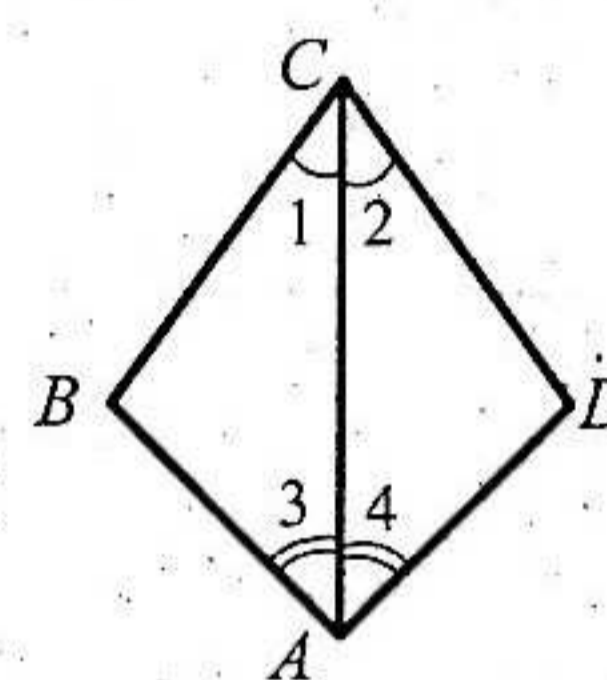


Рис. 2

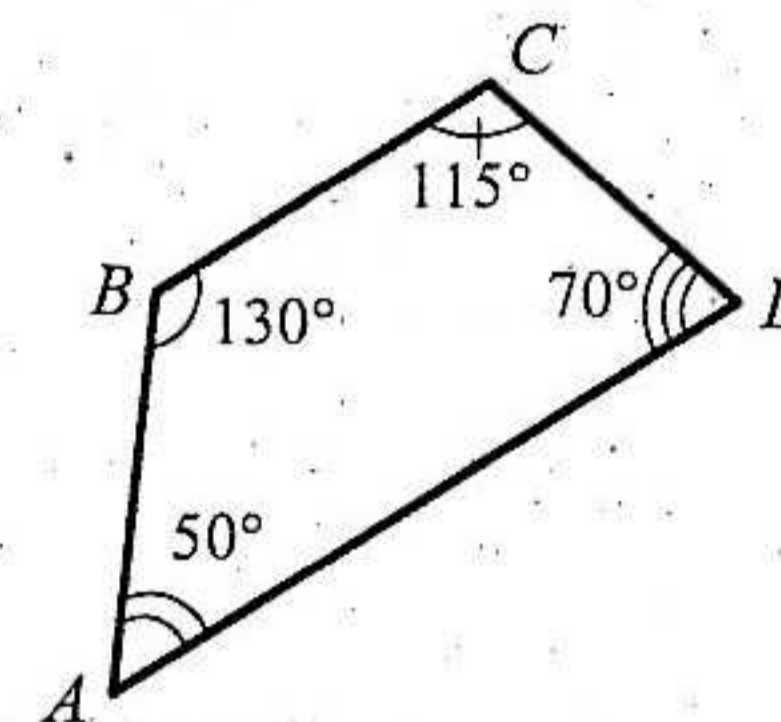


Рис. 3

2. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 2) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Доведіть, що $AB = AD$ і $CB = CD$.
3. Чи можна накреслити опуклий чотирикутник, у якого три кути прямі, а четвертий — гострий?
4. У чотирикутнику $ABCD$ сторони BC і AD паралельні (рис. 3). Чи правильно визначено його кути?

Паралелограм. Властивості паралелограма

5. Знайдіть кути паралелограма, якщо:
- 1) один з його кутів дорівнює 46° ;
 - 2) сума двох його кутів дорівнює 186° ;
 - 3) один з його кутів на 56° більший за другий;
 - 4) один з його кутів у 3 рази менший від другого;
 - 5) два кути паралелограма відносяться як 5 : 7.
6. Знайдіть кути паралелограма $ABCD$ (рис. 4).
7. Дано паралелограм $ABCD$ і трикутник PEF . Чи можуть одночасно виконуватися рівності: $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$? Відповідь обґрунтуйте.

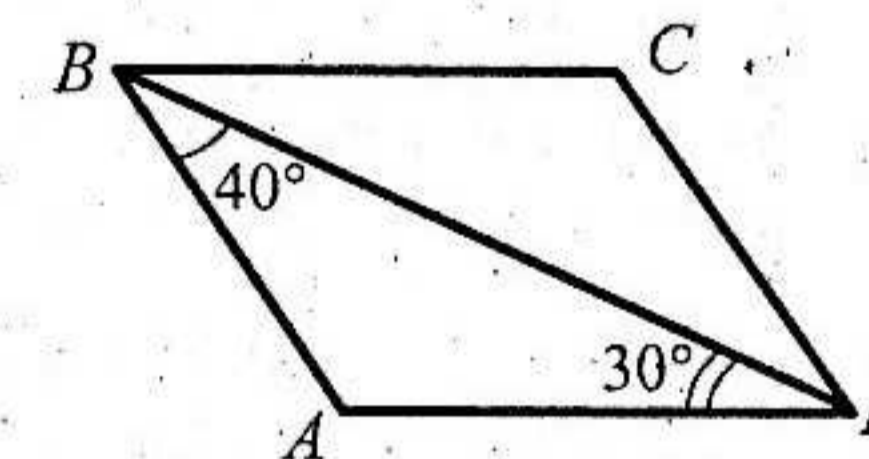


Рис. 4

8. Периметр паралелограма дорівнює 56 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо одна з них на 6 см більша за другу.
9. Периметр паралелограма дорівнює 126 см. Знайдіть його сторони, якщо дві з них відносяться як 4 : 5.
10. Які помилки допущено в зображенні паралелограма $ABCD$ на рисунку 5?

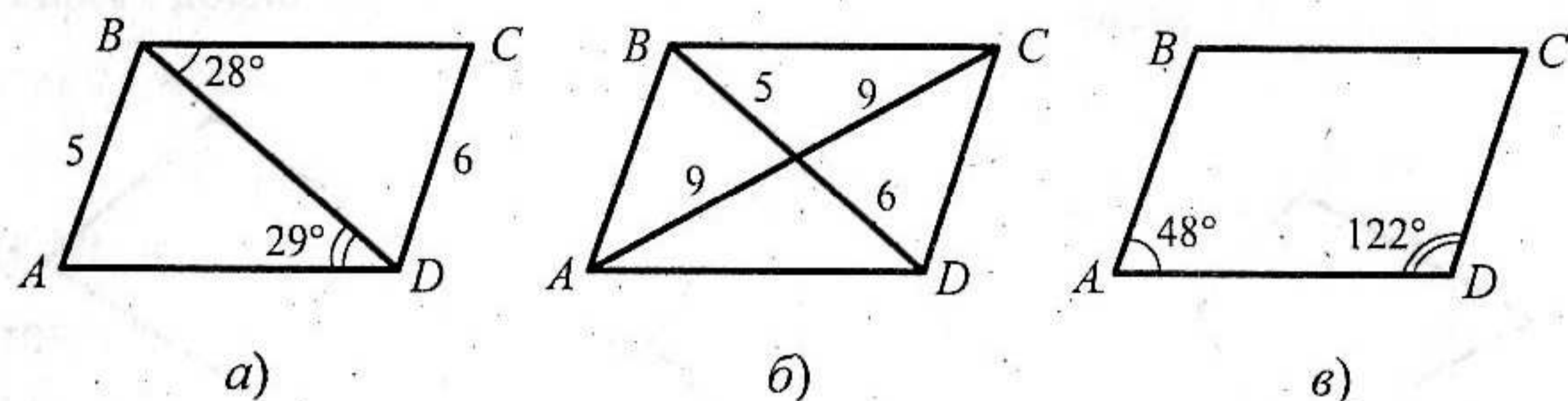


Рис. 5

11. Доведіть, що бісектриси кутів паралелограма, що прилягають до однієї сторони, перетинаються під прямим кутом.
12. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 7$ см, $AD = 12$ см. Бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці E . Знайдіть відрізки BE і EC .
13. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні 1 : 3, рахуючи від вершини тупого кута. Периметр паралелограма дорівнює 84 см. Знайдіть його сторони.
14. У паралелограмі $ABCD$ кут A дорівнює 60° . Висота BE поділяє сторону AD на дві рівні частини. Знайдіть довжину діагоналі BD , якщо периметр паралелограма дорівнює 48 см.
15. У паралелограмі $ABCD$ з вершини тупого кута B проведено висоти BM і BK . Доведіть, що кути MBK і BAD рівні.
16. Два кути паралелограма відносяться як 1 : 5. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини: 1) тупого кута; 2) гострого кута.
17. Через точку O перетину діагоналей паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає сторони AB і CD у точках E і F відповідно. Доведіть, що $OE = OF$.
18. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 6 см. На основі трикутника взято довільну точку і через неї проведено дві прямі, паралельні бічним сторонам трикутника. Знайдіть периметр отриманого паралелограма.

19. Побудуйте паралелограм:
- за двома сторонами і кутом між ними;
 - за стороною і двома діагоналями.
20. Дано відрізок DE і точку M , яка не лежить на прямій DE . Побудуйте паралелограм так, щоб однією з його сторін був відрізок DE , а точка M була точкою перетину його діагоналей.
21. Через точку всередині кута проведіть пряму так, щоб відрізок цієї прямої, який лежить між сторонами кута, ділився цією точкою навпіл.
22. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони.

Ознаки паралелограма

23. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 6) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

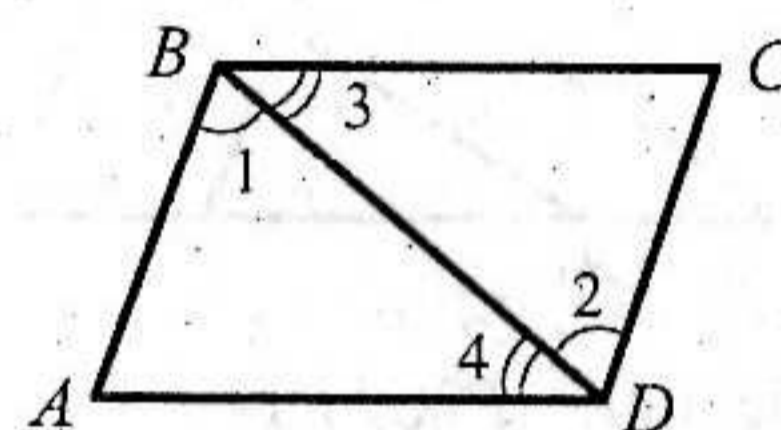


Рис. 6

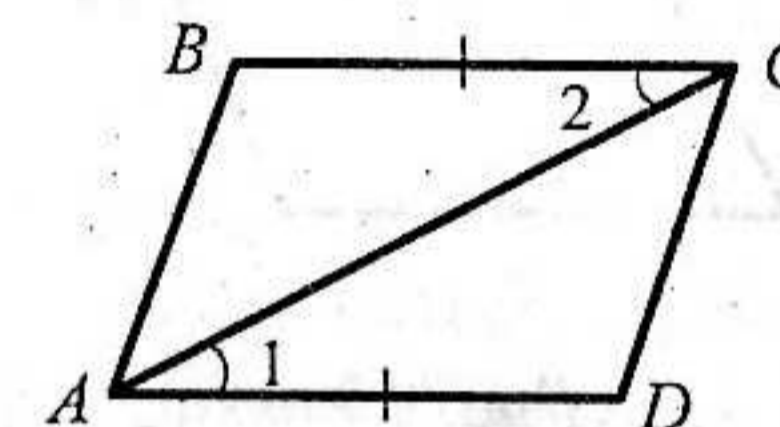


Рис. 7

24. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 7) $AD = BC$, $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.
25. На сторонах BC і AD паралелограма $ABCD$ позначили точки K і E такі, що $\angle AKC = \angle AEC$ (рис. 8). Доведіть, що чотирикутник $AKCE$ — паралелограм.

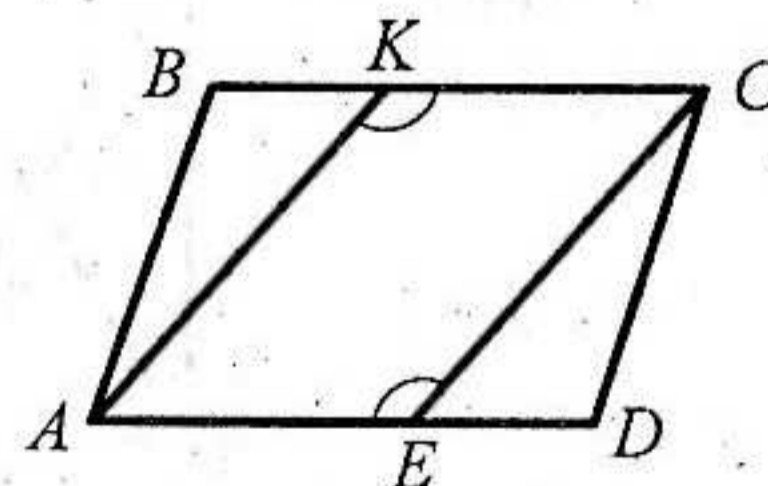


Рис. 8

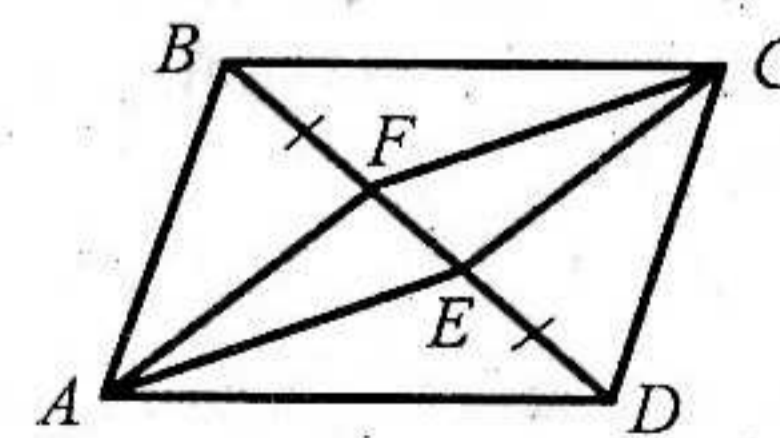


Рис. 9

26. На діагоналі BD паралелограма $ABCD$ відкладено рівні відрізки BF і DE (рис. 9). Доведіть, що чотирикутник $AFCE$ — паралелограм.

27. У паралелограмі $ABCD$ бісектриси кутів B і D перетинають діагональ AC у точках K і P відповідно (рис. 10). Доведіть, що чотирикутник $BPDK$ — паралелограм.

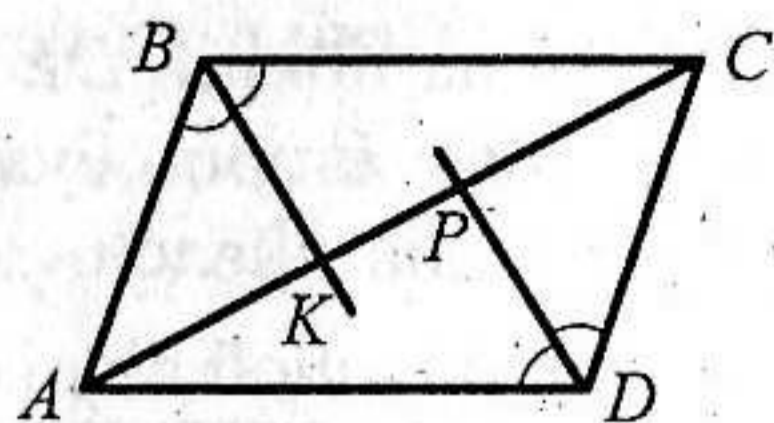


Рис. 10

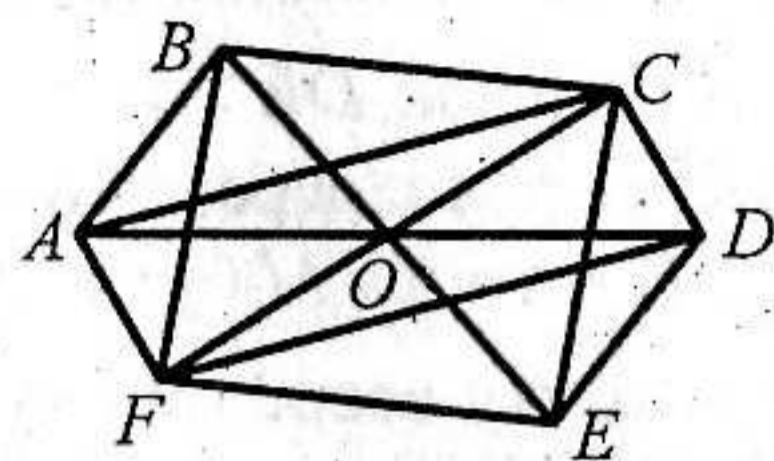


Рис. 11

28. На рисунку 11 точка O — спільна середина відрізків AD , BE і CF . Які з чотирикутників на цьому рисунку є паралелограмами?

29. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 12) $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = 180^\circ$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

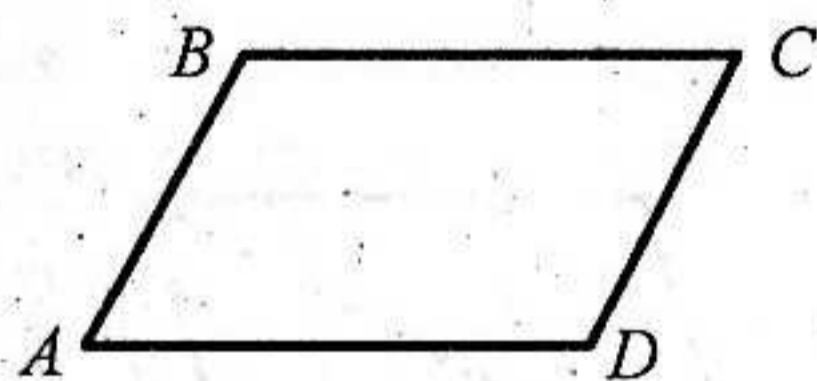


Рис. 12

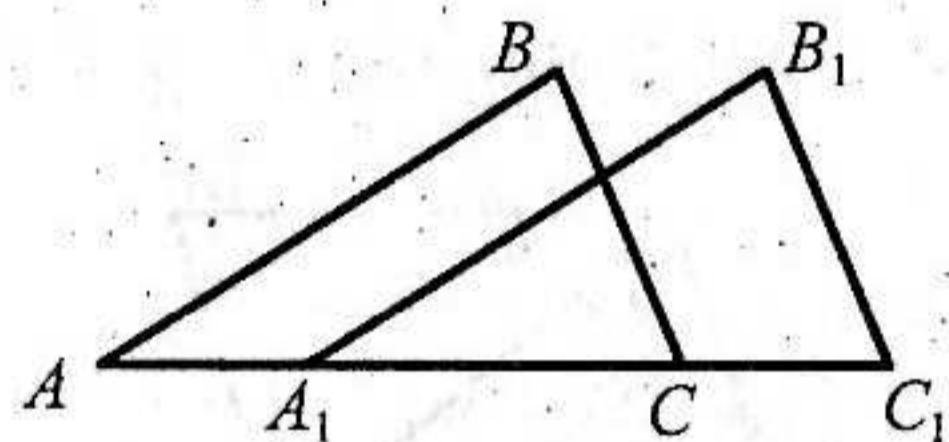


Рис. 13

30. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні (рис. 13), $AC_1 = 18$ см, $A_1C = 10$ см. Знайдіть відстань між точками B і B_1 .

Прямокутник

31. Відомо, що жоден з кутів паралелограма не є гострим. Що можна сказати про вид цього паралелограма?

32. У прямокутнику $ABCD$ (рис. 14) O — точка перетину діагоналей, $\angle AOD = 70^\circ$. Знайдіть кут OCD .

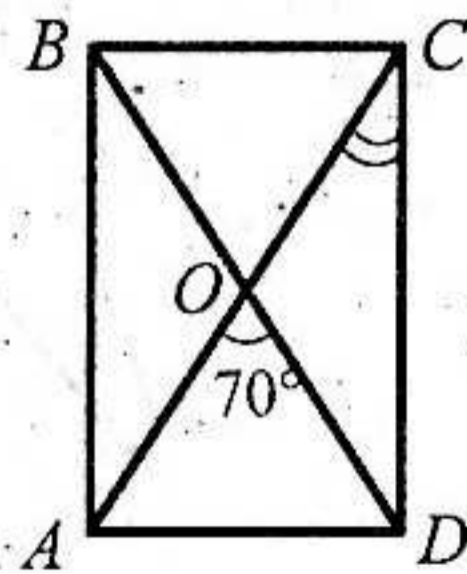


Рис. 14

33. У прямокутнику діагональ утворює з більшою стороною кут, що дорівнює 32° . Знайдіть кут між діагоналями прямокутника, який лежить проти його меншої сторони.

34. Знайдіть кут між меншою стороною і діагоналлю прямокутника, якщо він на 30° менший від кута між діагоналями, який лежить проти меншої сторони.

35. У колі з центром O проведено діаметри AC і BD (рис. 15). Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — прямокутник.

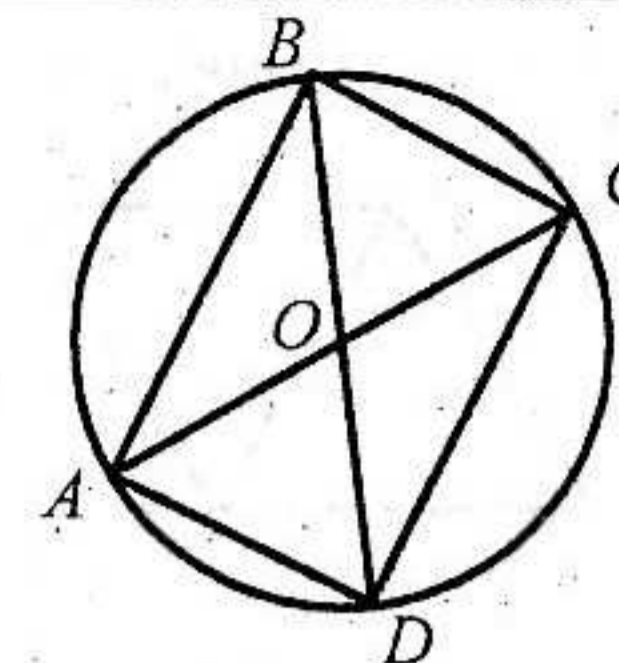


Рис. 15

36. У прямокутнику $ABCD$ точка K — середина сторони AD . Точки M і N належать сторонам AB і CD відповідно, причому $BM = CN$. Доведіть, що $KM = KN$.

37. Діагоналі паралелограма утворюють рівні кути з однією з його сторін. Доведіть, що цей паралелограм — прямокутник.

38. У прямокутнику $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону CD у точці E — середині CD . Доведіть, що промінь BE — бісектриса кута B .

39. Перпендикуляри, проведені з точки перетину діагоналей прямокутника до двох його сусідніх сторін, дорівнюють 5 см і 7 см. Визначте периметр прямокутника.

40. Відстань від точки перетину діагоналей прямокутника до його більшої сторони на 5 см менша, ніж до меншої сторони. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 44 см.

41. У прямокутнику $ABCD$ точка K — середина сторони AB , кут CKD дорівнює 90° . Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 36 см.

42. Доведіть, що в прямокутному трикутнику медіана, проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи.

43. Гіпотенуза AB прямокутного трикутника ABC дорівнює 8 см. Через точку K , яка є серединою гіпотенузи, проведено прями, які паралельні катетам трикутника і перетинають їх у точках D і E . Визначте довжину відрізка DE .

44. У рівнобедрений прямокутний трикутник, катет якого дорівнює 12 см, вписано прямокутник, який має з трикутником спільний прямий кут. Знайдіть периметр прямокутника.

45. Перпендикуляр, опущений з вершини прямокутника на його діагональ, поділяє її у відношенні 3 : 1. Знайдіть діагоналі прямокутника, якщо точка їх перетину віддалена від більшої сторони на 6 см.

Ромб

46. У паралелограмі $ABCD$ діагональ AC поділяє кут A навпіл. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — ромб.

47. На рисунку 16 чотирикутник $ABCD$ — ромб. Знайдіть кут α .

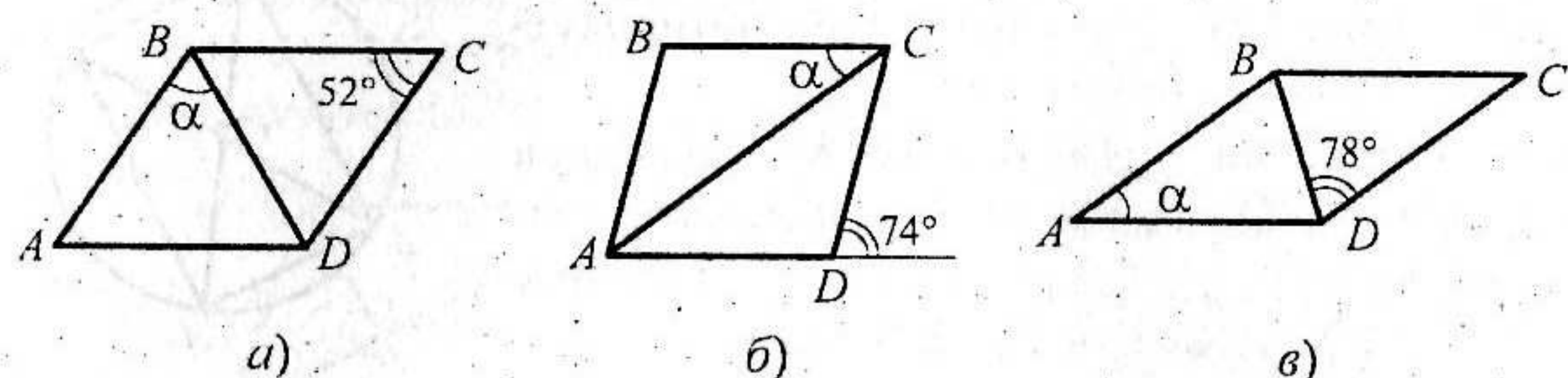


Рис. 16

48. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює 20° .

49. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, які відносяться як $2 : 7$.

50. Відрізки BF і DE — висоти ромба $ABCD$ (рис. 17). Доведіть, що $BF = DE$.

51. Висоти, проведені з вершини тупого кута ромба, утворюють кут 48° . Знайдіть кути, які утворюють діагоналі ромба з його сторонами.

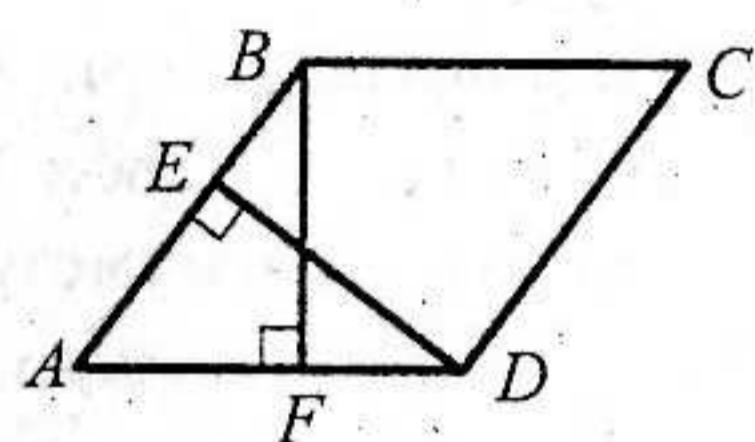


Рис. 17

52. У ромбі $ABCD$ точки E і F — середини сторін BC і CD відповідно. Доведіть, що $AE = AF$.

53. На сторонах AB і AD ромба $ABCD$ відкладено рівні відрізки AE і AF відповідно. Доведіть, що відрізки EF і AC перпендикулярні.

54. Кут між висотою і діагоналлю ромба, проведеними з однієї вершини, дорівнює 42° . Знайдіть кути ромба.

55. Висота, проведена з вершини тупого кута ромба, поділяє його сторону навпіл. Знайдіть: 1) кути ромба; 2) сторону ромба, якщо його менша діагональ дорівнює 16 см.

56. Два рівних ромба розміщено так, як показано на рисунку 18. Визначте вид чотирикутника $OMCT$.

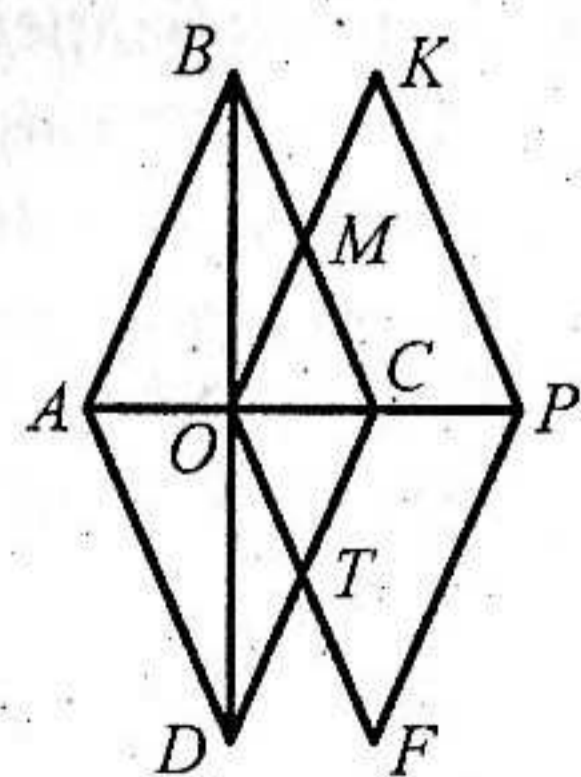


Рис. 18

57. У паралелограмі $ABCD$ бісектриси кутів A і B перетинають сторони BC і AD у точках E і F відповідно. Доведіть, що чотирикутник $ABEF$ — ромб.

58. У трикутнику ABC через середину його бісектриси AK проведено пряму, перпендикулярну до неї. Ця пряма перетинає сторо-

ни AB і AC у точках E і F відповідно. Доведіть, що чотирикутник $AЕКF$ — ромб.

59. Побудуйте ромб:

- 1) за стороною і діагоналлю;
- 2) за висотою і діагоналлю.

60. Користуючись тільки лінійкою з паралельними краями, проведіть через середину відрізка AB пряму, яка перпендикулярна до нього.

Квадрат

61. Доведіть, що прямокутник, діагоналі якого перпендикулярні, є квадратом.

62. Периметр квадрата дорівнює 36 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до його сторін.

63. На діагоналі AC квадрата $ABCD$ вибрано точки K і M так, що $AK = CM$ (рис. 19). Доведіть, що чотирикутник $BMDK$ — ромб.

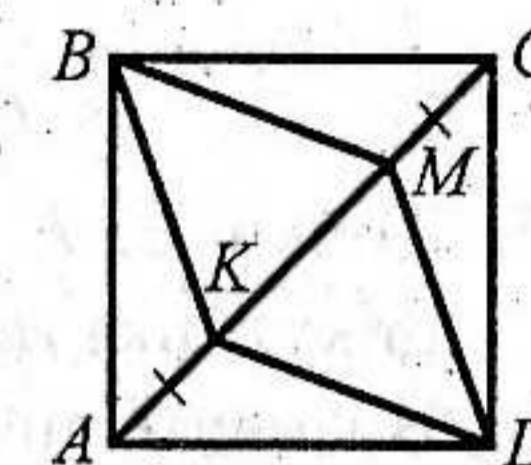


Рис. 19

64. Діагональ квадрата дорівнює 4 см. Його сторона є діагоналлю другого квадрата. Знайдіть сторону другого квадрата.

65. У рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою 18 см вписано квадрат, дві вершини якого лежать на гіпотенузі трикутника, а дві інші — на катетах. Знайдіть периметр квадрата.

66. У прямокутнику $ABCD$ бісектриси кутів A і B перетинають сторони BC і AD в точках E і K відповідно. Доведіть, що чотирикутник $ABEK$ — квадрат.

67. На продовженні сторони AD квадрата $ABCD$ за точку D взяли точку E таку, що промінь BE поділяє кут ABC у відношенні $1 : 2$. Знайдіть периметр квадрата, якщо $BE = 6$ см.

68. Побудуйте квадрат за його периметром.

69. Побудуйте квадрат за різницею його діагоналі та сторони.

Середня лінія трикутника

70. Знайдіть сторони трикутника, якщо його середні лінії дорівнюють 6 см, 7 см і 9 см.

71. Периметр трикутника дорівнює 18 см. Знайдіть периметр трикутника, вершини якого — середини сторін даного трикутника.

72. Сторони трикутника відносяться як $3 : 5 : 7$, а його периметр дорівнює 60 см. Знайдіть периметр і сторони трикутника, вершини якого — середини сторін даного трикутника.

73. Визначте вид трикутника, якщо дві його середні лінії рівні між собою.
74. Сторони паралелограма $ABCD$ дорівнюють 4 см і 6 см. Точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 — середини відрізків OA , OB , OC і OD відповідно (рис. 20), де точка O — точка перетину діагоналей паралелограма. Визначте вид чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$ і обчисліть його периметр.

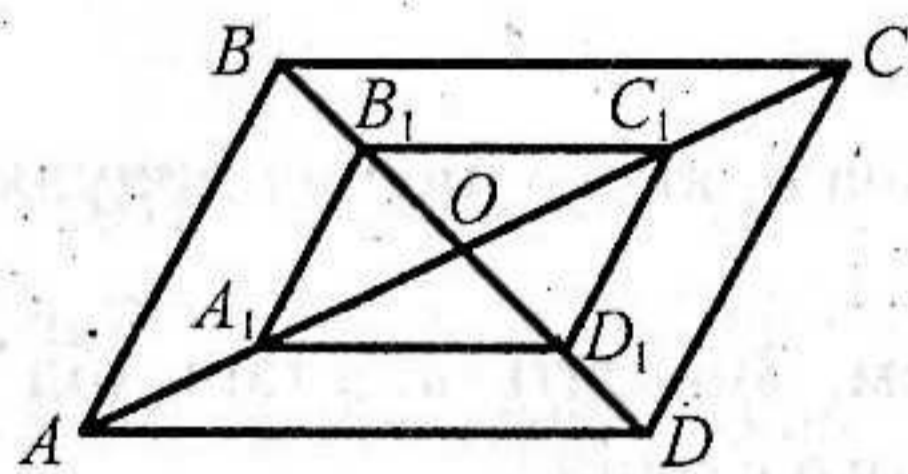


Рис. 20

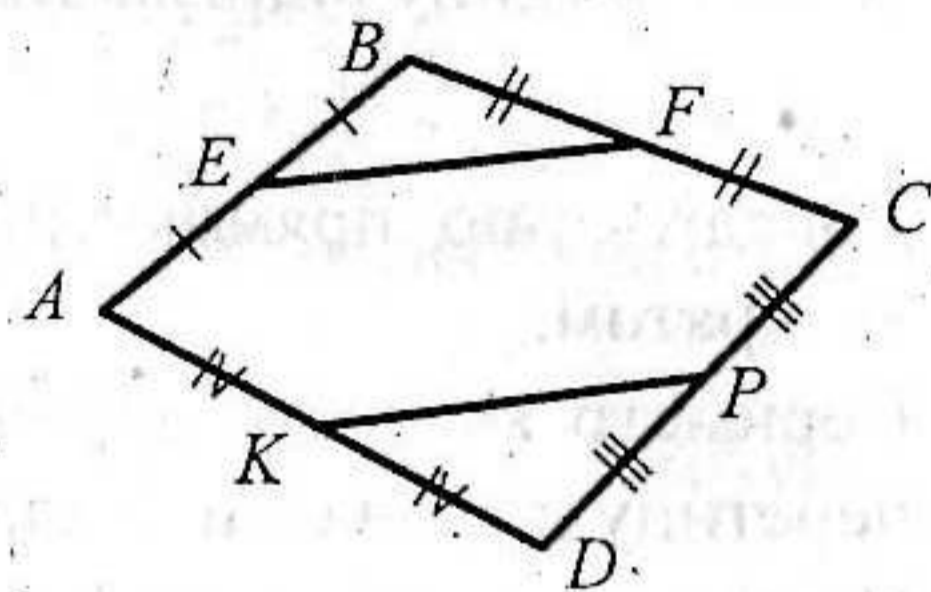


Рис. 21

75. Точки E , F , P і K — середини сторін AB , BC , CD і AD чотирикутника $ABCD$ відповідно (рис. 21). Доведіть, що $EF \parallel KP$.
76. Визначте вид чотирикутника, вершинами якого є середини сторін:
1) довільного чотирикутника;
2) чотирикутника, у якого діагоналі рівні.
77. Діагоналі чотирикутника дорівнюють 2 см і 5 см, а кут між ними — 42° . Знайдіть сторони і кути чотирикутника, вершини якого є серединами сторін даного.
78. Менша сторона прямокутника дорівнює 16 см і утворює з діагоналлю кут, який дорівнює 60° . Середини сторін прямокутника послідовно сполучено. Визначте вид утвореного чотирикутника і знайдіть його периметр.
79. Через вершини трикутника ABC проведено прямі, паралельні його сторонам. Ці прямі перетинаються в точках A_1 , B_1 і C_1 . Доведіть, що сторони трикутника $A_1B_1C_1$ поділяються точками A , B , C навпіл.
80. Побудуйте трикутник за трьома точками — серединами його сторін.
81. Через точку A , задану всередині кута COD , проведіть пряму, відрізок якої, що лежить між сторонами кута, поділяється цією точкою навпіл.

Трапеція

82. Два кути трапеції дорівнюють 32° і 143° . Знайдіть два інших її кути.

83. Чи існує трапеція, у якої два протилежні кути гострі? Якщо відповідь позитивна, зробіть рисунок.
84. Чи існує трапеція, у якої два протилежні кути рівні? Якщо відповідь позитивна, зробіть рисунок.
85. Чи можуть кути трапеції, взяті послідовно, відноситись як $7 : 3 : 5 : 2$?
86. Бічна сторона рівнобічної трапеції і висота, проведена з вершини тупого кута, утворюють кут 17° . Знайдіть кути трапеції.
87. У прямокутній трапеції тупий кут більший за гострий у 5 разів. Знайдіть кути трапеції.
88. Діагональ рівнобічної трапеції утворює з основою кут 32° , а її бічна сторона дорівнює меншій основі. Знайдіть кути трапеції.
89. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо різниця її протилежних кутів дорівнює 86° .
90. Бісектриси кутів A і B трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 22). Доведіть, що $\angle AOB = 90^\circ$.
91. Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони, а гострий кут, що лежить проти цієї діагоналі, дорівнює 52° . Знайдіть інші кути трапеції, якщо її менша основа дорівнює другій бічній стороні.
92. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює бічній стороні, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін. Знайдіть кути трапеції.
93. Діагоналі трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 23). Відрізки OA і OD рівні. Доведіть, що $AB = CD$.
94. Доведіть, що висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини тупого кута, поділяє більшу сторону на відрізки, один з яких дорівнює півсумі її основ, а другий — їх піврізниці.
95. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини тупого кута, поділяє більшу основу трапеції на відрізки завдовжки 3 см і 11 см. Знайдіть основи трапеції.
96. У рівнобічній трапеції гострий кут дорівнює 60° , а бічна сторона — 16 см. Знайдіть основи трапеції, якщо їх сума дорівнює 38 см.

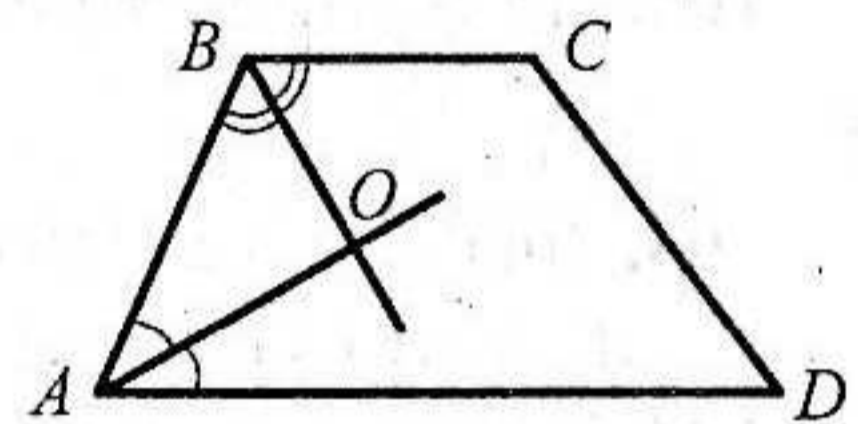


Рис. 22

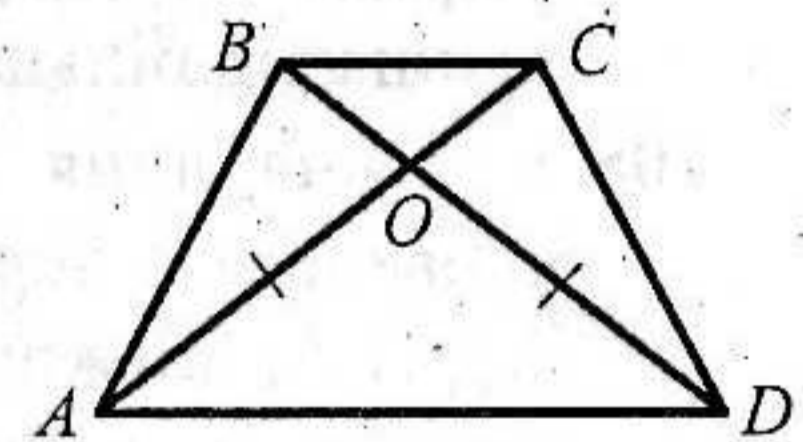


Рис. 23

97. У рівнобічній трапеції бісектриса тупого кута паралельна бічній стороні. Знайдіть основи трапеції, якщо її периметр дорівнює 60 см, а бічна сторона — 14 см.
98. Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 18 см, а її діагональ є бісектрисою гострого кута трапеції. Знайдіть меншу основу трапеції, якщо її периметр дорівнює 54 см.
99. У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) через вершину B проведено пряму, яка перетинає основу AD і паралельна CD . Периметр отриманого трикутника дорівнює 16 см. Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша основа BC дорівнює 7 см.
100. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 10 см і 16 см, а її діагоналі перпендикулярні. Знайдіть висоту трапеції.
101. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута, а її основи дорівнюють 8 см і 14 см. Знайдіть периметр трапеції.
102. Побудуйте трапецію за чотирма її сторонами.

Середня лінія трапеції

103. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її основи дорівнюють:
1) 6 см і 11 см; 2) $3a$ і $4a$.
104. Знайдіть основу трапеції, якщо її друга основа і середня лінія відповідно дорівнюють: 1) 7 см і 11 см; 2) a і $5a$.
105. Чи може середня лінія трапеції бути меншою від меншої з основ? Відповідь обґрунтуйте.
106. Середня лінія трапеції дорівнює 19 см, а одна з основ менша від другої на 6 см. Знайдіть основи трапеції.
107. Середня лінія трапеції у 2 рази більша за меншу основу і на 8 см менша від більшої основи. Знайдіть основи трапеції.
108. Середня лінія прямокутної трапеції дорівнює 12 см, а висота, проведена з вершини тупого кута трапеції, поділяє її основу на відрізки, довжини яких відносяться як 3 : 2, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть основи трапеції.
109. У рівнобічній трапеції діагональ поділяє гострий кут навпіл, а її основи відносяться як 3 : 5. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її периметр дорівнює 168 см.
110. Діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні. Доведіть, що її висота дорівнює середній лінії трапеції.
111. Діагональ AC трапеції $ABCD$ перпендикулярна до її основ. Довжина більшої основи AD дорівнює 14 см, $\angle BAD = 120^\circ$, $AB = 6$ см. Знайдіть середню лінію трапеції.

Центральні і вписані кути

112. Скільки градусів містить центральний кут кола, який спирається на дугу, що становить: 1) $\frac{1}{4}$ кола; 2) $\frac{5}{6}$ кола; 3) $\frac{7}{12}$ кола?
113. Знайдіть градусні міри двох дуг кола, на які його поділяють дві точки, якщо градусна міра однієї з дуг на 100° більша за градусну міру другої.
114. Знайдіть вписаний кут, якщо градусна міра дуги, на яку він спирається, дорівнює: 1) 48° ; 2) 126° ; 3) 180° ; 4) 254° ; 5) α .
115. Точка B кола і його центр O лежать по різні сторони від хорди AC . Знайдіть: 1) кут ABC , якщо $\angle AOC = 124^\circ$; 2) кут AOC , якщо $\angle ABC = 94^\circ$.
116. Точки B і D лежать на колі по одну сторону від хорди AC , $\angle ABC = 42^\circ$. Знайдіть кут ADC .
117. Точки B і D лежать на колі по різні сторони від хорди AC , $\angle ABC = 78^\circ$. Знайдіть кут ADC .
118. Навколо трикутника ABC описано коло з центром у точці O . Знайдіть кут BOC , якщо: 1) $\angle A = 78^\circ$; 2) $\angle A = 128^\circ$.
119. У трикутнику ABC $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = 78^\circ$, точка O — центр описаного кола. Знайдіть $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle AOC$.
120. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, вписаного в коло, бічна сторона якого стягує дугу, градусна міра якої 38° .
121. Кінці хорди поділяють коло на дві дуги, градусні міри яких відносяться як 5 : 7. Знайдіть вписані кути, які спираються на цю хорду.
122. Кінці хорди MN поділяють коло на дві дуги. Градусна міра меншої з них дорівнює 140° , а більша поділяється точкою K у відношенні 5 : 6, рахуючи від точки M . Знайдіть $\angle NMK$.
123. Точки A , B і C поділяють коло на три дуги так, що $\cup AB : \cup BC : \cup AC = 3 : 5 : 7$. Знайдіть кути трикутника ABC .
124. Точки C і D кола лежать по одну сторону від діаметра AB (рис. 24). Знайдіть кут DCB , якщо $\angle ACD = 41^\circ$.

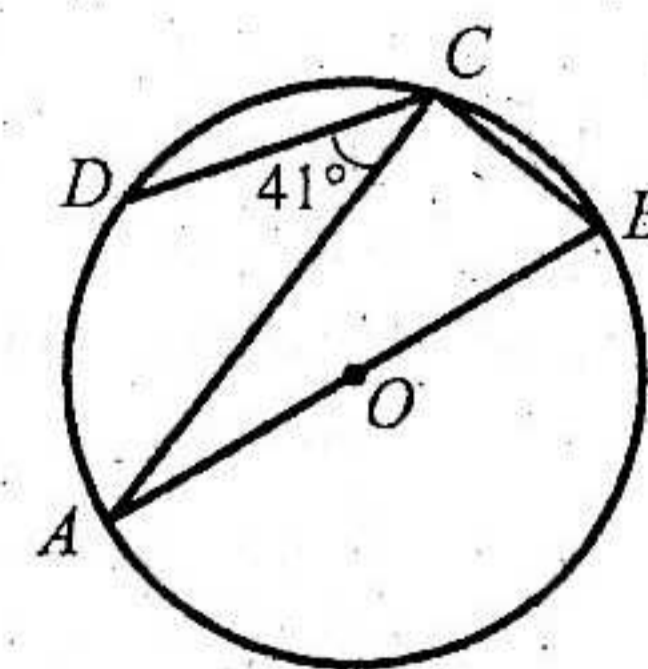


Рис. 24

125. Точки M і K кола лежать по одну сторону від діаметра CD (рис. 25). Знайдіть кут CDK , якщо $\angle DMK = 53^\circ$.

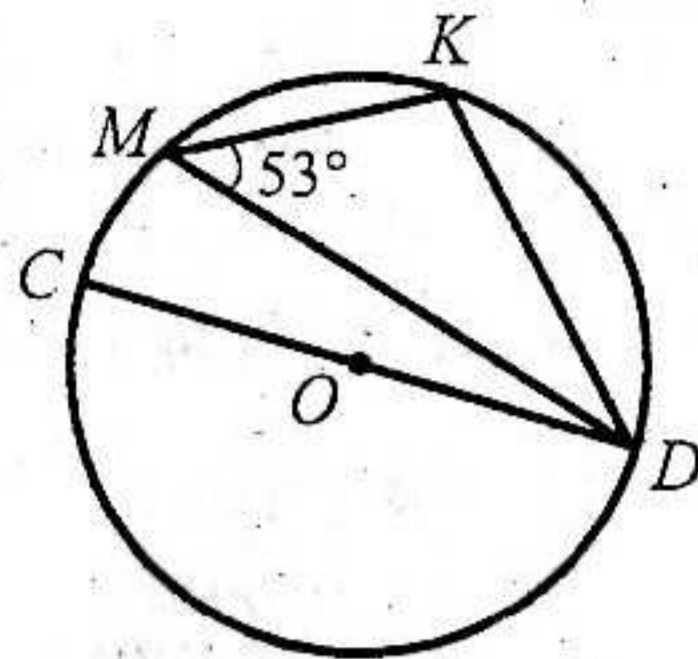


Рис. 25

126. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 78° . Півколо, побудоване на бічній стороні трикутника як на діаметрі, поділяється іншими сторонами на три дуги. Знайдіть градусні міри цих дуг.

127. Продовження висоти CD трикутника ABC перетинає коло, описане навколо цього трикутника, у точці E . Цю точку з'єднано з точкою F , діаметрально протилежною точці C . Доведіть, що $EF \parallel AB$.

128. Два кола перетинаються в точках A і B . Через точку A проведено діаметри AD і AC . Доведіть, що точки B , C і D лежать на одній прямій.

129. Точка O — центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника ABC . Знайдіть кути трикутника ABC , якщо $\angle AOB = 128^\circ$. Скільки розв'язків має задача?

Вписані і описані чотирикутники

130. Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо:

- 1) $\angle A = 33^\circ$, $\angle C = 137^\circ$; 2) $\angle B = 69^\circ$, $\angle D = 111^\circ$?

131. Знайдіть кути C і D чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle A = 119^\circ$, $\angle B = 84^\circ$.

132. Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, кути якого A , B , C і D відповідно пропорційні числам:

- 1) 5, 7, 8, 4; 2) 3, 5, 8, 6?

133. Три кути чотирикутника, вписаного в коло, взяті у порядку слідування, відносяться як 2 : 6 : 7. Знайдіть кути чотирикутника.

134. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. Діагональ AC цього чотирикутника є діаметром кола. Знайдіть кут між діагоналями чотирикутника, який лежить проти сторони AD , якщо $\angle BAC = 23^\circ$, $\angle DAC = 52^\circ$.

135. Рівнобічну трапецію, один з кутів якої дорівнює 54° , вписано в коло. Кут між діагоналями трапеції, що лежить проти бічної сторони, дорівнює 36° . Знайдіть положення центра кола, описаного навколо трапеції, відносно трапеції.

136. Основи трапеції, у яку можна вписати коло, дорівнюють 7 см і 9 см. Знайдіть периметр трапеції.

137. Коло, вписане в рівнобічну трапецію, поділяє точкою дотику бічну сторону на відрізки, довжина більшого з яких дорівнює 8 см. Знайдіть меншу основу трапеції, якщо її периметр дорівнює 60 см.

Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки

138. Поділіть даний відрізок на сім рівних частин.

139. Точки M і N — середини сторін AD і BC паралелограма $ABCD$ (рис. 26). Відрізки BM і DN перетинають діагональ AC у точках E і F . Доведіть, що точки E і F поділяють відрізок AC на три рівні частини.

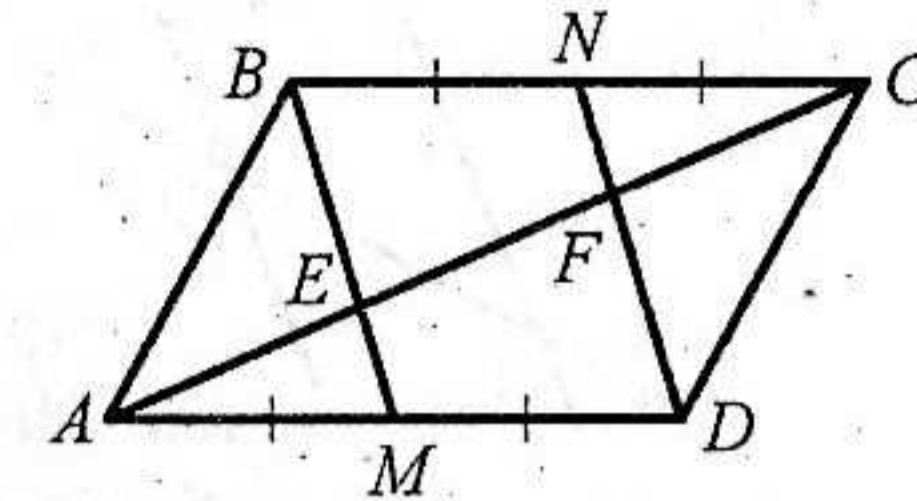


Рис. 26

140. Точки A і B лежать по різні сторони від прямої l на відстані 5 см і 9 см від неї відповідно. Знайдіть відстань від середини C відрізка AB до прямої l .

141. Точка M — середина катета AC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC , гіпотенуза якого AB дорівнює 12 см. Знайдіть відстань від точки M до прямої AB .

142. У трапеції $ABCD$ (рис. 27) відрізок EF паралельний стороні CD , а точка E — середина AB . Доведіть, що $EF = \frac{1}{2}CD$.

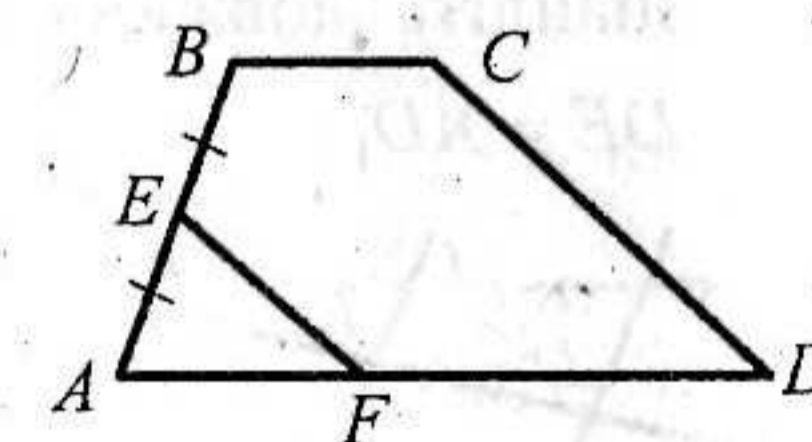


Рис. 27

143. Основи трапеції дорівнюють 10 см і 6 см. Її бічну сторону поділено на 4 рівні частини і через точки поділу проведено прямі, паралельні основам. Знайдіть довжини відрізків цих прямих, які містяться між сторонами трапеції.

144. Сторона AB трикутника ABC дорівнює 12 см. Сторону BC поділено на 3 рівні частини і через точки поділу проведено прямі, паралельні стороні AB . Знайдіть довжини відрізків цих прямих, які містяться між сторонами трикутника.

145. Діагональ трапеції поділяє її середню лінію на відрізки завдовжки 8 см і 15 см. Знайдіть основи трапеції.

146. Знайдіть основи трапеції, якщо її середня лінія завдовжки 15 см поділяється діагоналлю на відрізки, різниця яких дорівнює 3 см.

147. Основи трапеції дорівнюють 8 см і 12 см. Знайдіть довжину відрізка середньої лінії, який міститься між діагоналями трапеції.

148. Діагоналі рівнобічної трапеції є бісектрисами її тупих кутів, а одна з діагоналей поділяє середню лінію трапеції на відрізки завдовжки 7 см і 9 см. Знайдіть периметр трапеції.

149. Паралельні прямі a і b перетинають сторони кута AOF (рис. 28). Знайдіть довжину відрізка OD , якщо $OC = 4$ см, $BC = 6$ см, $DE = 9$ см.

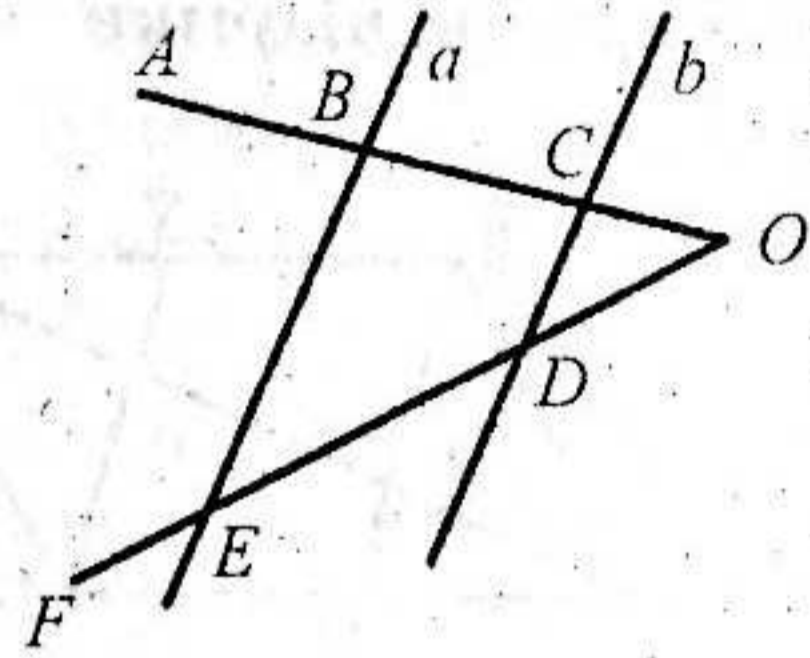


Рис. 28

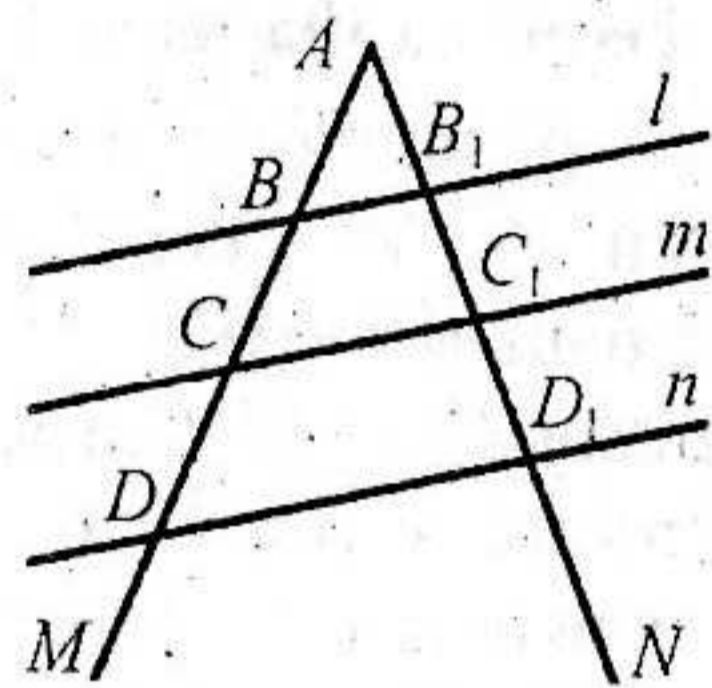


Рис. 29

150. Паралельні прямі l , m і n перетинають сторони кута MAN (рис. 29). Знайдіть довжини відрізків AB_1 і BD , якщо $AB = 4$ см, $CD = 8$ см, $B_1C_1 = 5$ см, $C_1D_1 = 6$ см.

151. Паралельні прямі c і d перетинають сторони кута BAC (рис. 30). Знайдіть довжину відрізка DE , якщо $AD = 4$ см, $D_1E_1 = 16$ см і $DE = AD_1$.

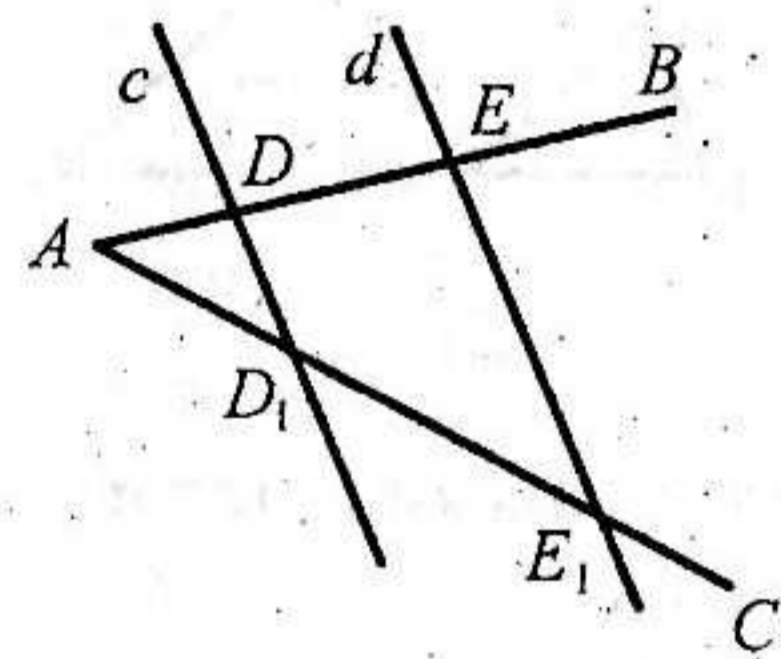


Рис. 30

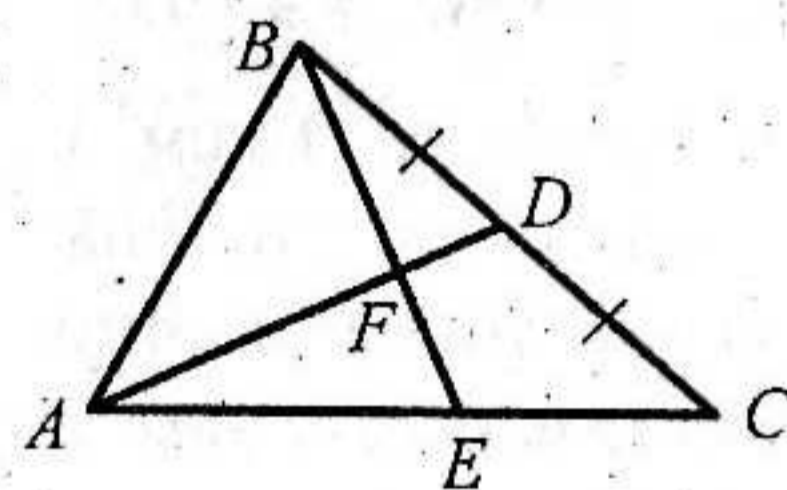


Рис. 31

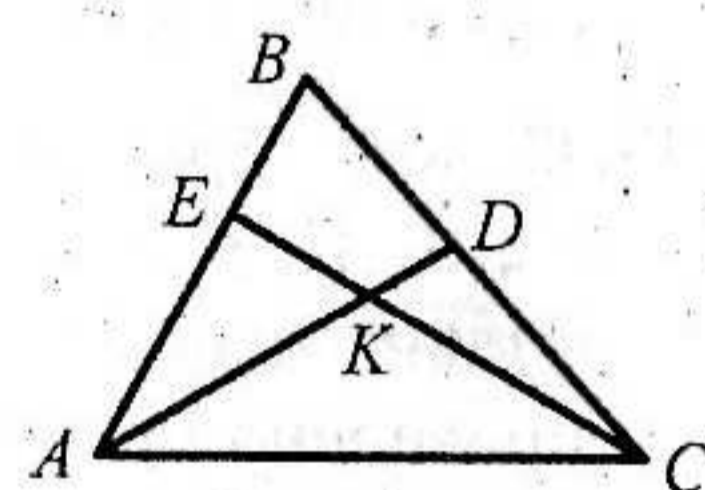


Рис. 32

152. Точка D — середина сторони BC трикутника ABC , а відрізок BE поділяє відрізок AD у відношенні $8 : 3$, рахуючи від точки A (рис. 31). Знайдіть відношення відрізків AE і EC .

153. На рисунку 32 $BE : EA = 4 : 5$, $BD : DC = 6 : 7$. Знайдіть відношення $CK : KE$.

154. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) точка M перетину медіан віддалена від основи на 4 см. Знайдіть відстань від точки M до вершини B .

155. Середина бічної сторони рівнобедреного трикутника віддалена від його основи на 6 см. Знайдіть відстань від точки перетину медіан трикутника до його основи.

156. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC . Знайдіть:

- 1) відрізки AD і DC , якщо $AB = 8$ см, $BC = 14$ см, $AC = 11$ см;
- 2) сторону AC , якщо $AB : BC = 2 : 3$, $CD - AD = 3$ см;
- 3) сторони AB , BC і AC , якщо $AB + BC = 56$ см, $AD = 9$ см, $DC = 15$ см.

157. У трикутник ABC вписано ромб $ADEF$ так, що кут A у них спільний, а вершина E належить стороні BC . Знайдіть довжини відрізків BE і EC , якщо $AB = 21$ см, $BC = 18$ см, $AC = 15$ см.

158. У трикутнику, сторони якого дорівнюють 13 см, 18 см і 21 см, проведено півколо, центр якого належить меншій стороні трикутника і яке дотикається двох інших сторін. На які відрізки центр півкола поділяє меншу сторону трикутника?

Подібні трикутники

159. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні, причому сторонам AB і BC відповідають сторони A_1B_1 і B_1C_1 (рис. 33). Знайдіть невідомі сторони цих трикутників (розміри сторін дано в сантиметрах).

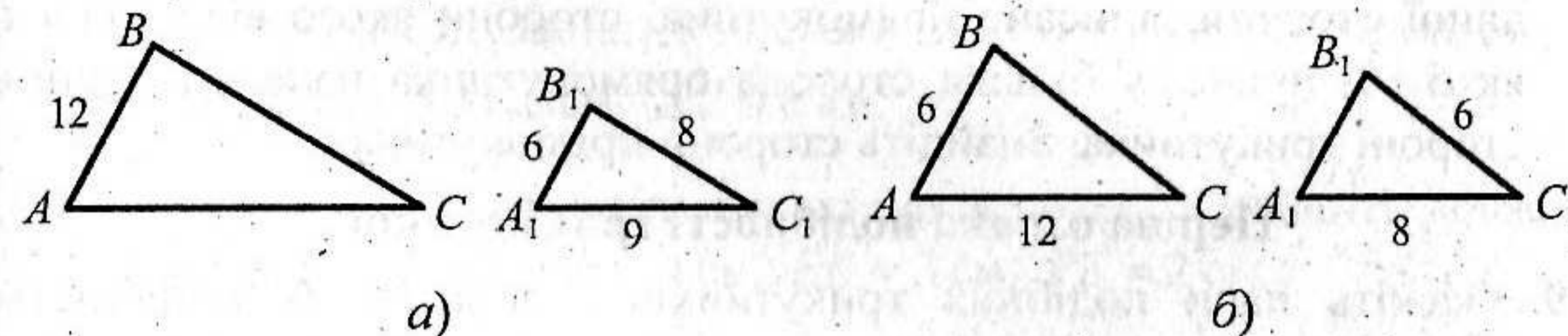


Рис. 33

160. Сторони трикутника відносяться як $7 : 6 : 3$. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, якщо в нього:

- 1) периметр дорівнює 8 см;
- 2) менша сторона дорівнює 6 см;
- 3) більша сторона дорівнює 28 см;
- 4) різниця більшої і меншої сторін дорівнює 20 см.

161. Сторони трикутника відносяться як $4 : 6 : 7$, а середня за довжиною сторона подібного йому трикутника дорівнює 18 см. Знайдіть інші сторони другого трикутника.

162. Периметри подібних трикутників відносяться як $7 : 5$, а сума їх менших сторін дорівнює 36 см. Знайдіть сторони обох трикутників, якщо сторони одного з них відносяться як $3 : 7 : 8$.

163. На рисунку 34 $BD \parallel CE$. Запишіть пропорції, які починаються з відношення: 1) $\frac{AC}{CE}$; 2) $\frac{BD}{CE}$; 3) $\frac{AE}{AD}$; 4) $\frac{AB}{BC}$.

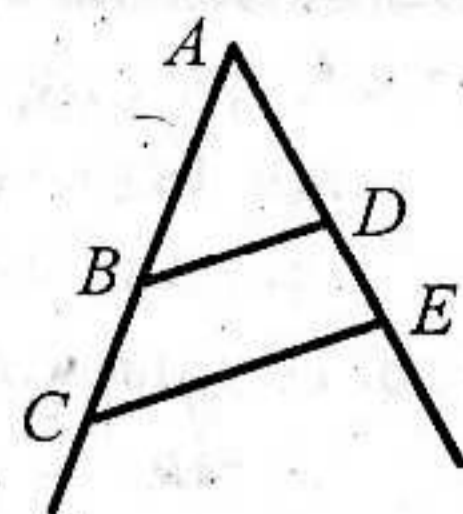


Рис. 34

164. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці E . Більша основа AD трапеції дорівнює 12 см, $AE = 15$ см, $BE = 5$ см. Знайдіть меншу основу трапеції.
165. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці F . Знайдіть AB , якщо $AF = 10$ см і $BC : AD = 2 : 5$.

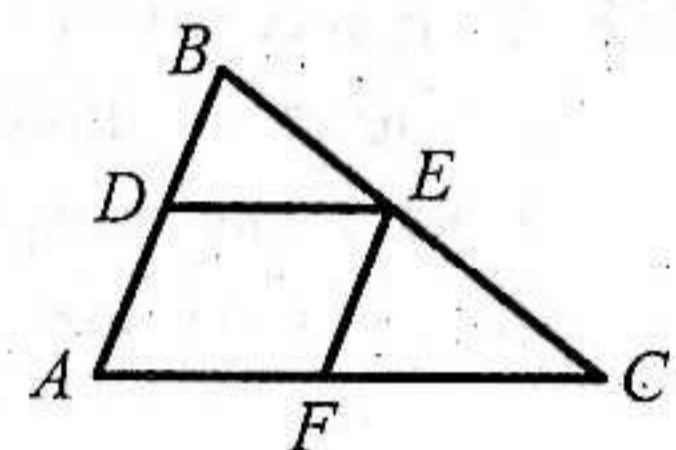
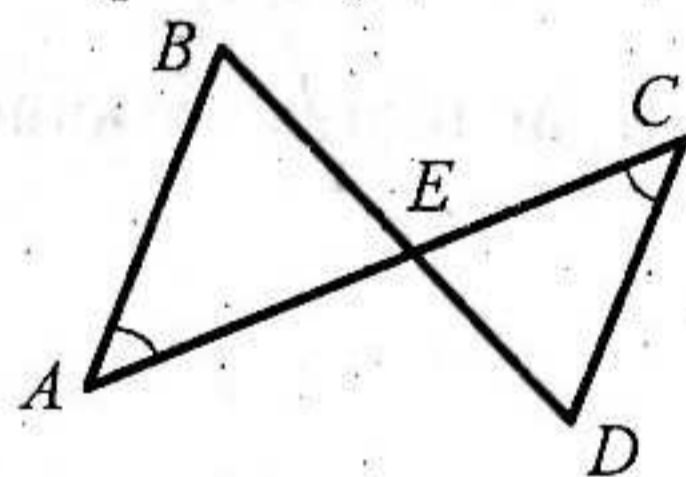


Рис. 35

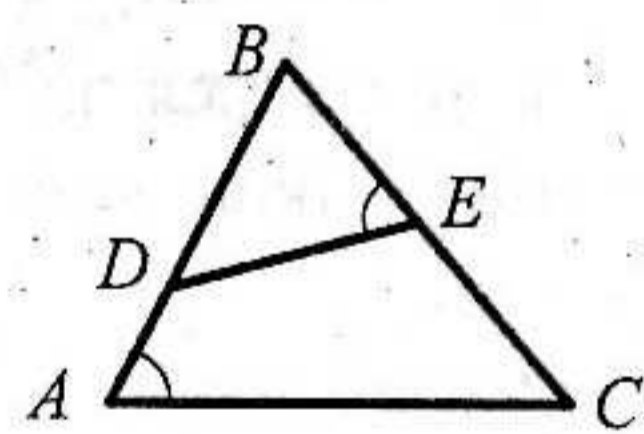
166. У трикутник ABC вписано паралелограм $ADEF$ (рис. 35). Знайдіть AC , якщо $AB = 16$ см, $AD = 12$ см, $DE = 5$ см.
167. У трикутник ABC вписано ромб $AKPE$ так, що кут A в них спільний, а вершина P належить стороні BC . Знайдіть сторону ромба, якщо $AB = 6$ см, $AC = 3$ см.
168. У трикутник зі стороною 12 см і висотою 4 см, проведеною до даної сторони, вписано прямокутник, сторони якого відносяться як 5 : 9, причому більша сторона прямокутника належить даній стороні трикутника. Знайдіть сторони прямокутника.

Перша ознака подібності трикутників

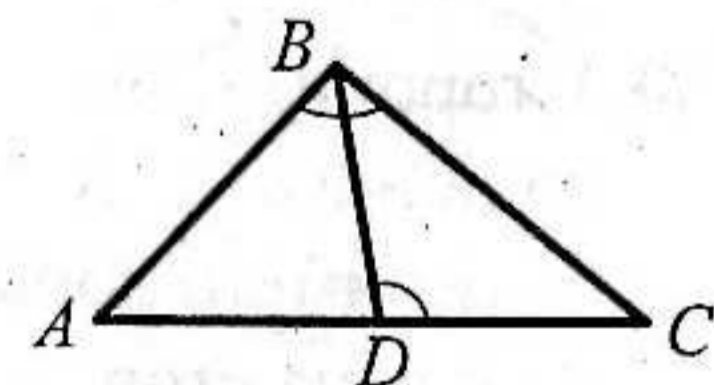
169. Укажіть пари подібних трикутників і доведіть їх подібність (рис. 36).



а)



б)



в)

Рис. 36

170. Доведіть, що рівнобедрені трикутники подібні, якщо рівні їх кути при вершині.
171. Кути одного трикутника відносяться як 3 : 5 : 7, а в другому трикутнику один з кутів на 24° більший за другий і на 24° менший від третього кута. Чи подібні ці трикутники?

172. У паралелограмі $ABCD$ проведено висоти BE і BF (рис. 37). Доведіть подібність трикутників ABE і CBF .

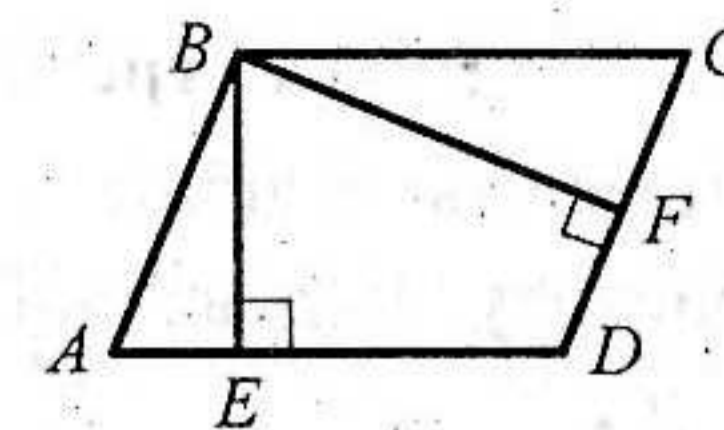


Рис. 37

173. Сторони паралелограма дорівнюють 15 см і 30 см, а відстань між меншими сторонами дорівнює 20 см. Знайдіть відстань між більшими сторонами паралелограма.
174. Периметр паралелограма дорівнює 70 см, а його висоти — 3 см і 4 см. Знайдіть сторони паралелограма.
175. Одна з діагоналей трапеції дорівнює 28 см і поділяє другу діагональ на відрізки завдовжки 5 см і 9 см. Знайдіть більшу основу трапеції і відрізки, на які точка перетину діагоналей поділяє першу діагональ, якщо менша основа дорівнює 6 см.
176. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) O — точка перетину діагоналей, $AO : OC = 5 : 2$, а середня лінія трапеції дорівнює 7 см. Знайдіть основи трапеції.
177. На стороні AC трикутника ABC позначено точку D так, що $\angle ABD = \angle BCA$. Знайдіть відрізки, на які точка D поділяє сторону AC , якщо $AB = 3$ см, $AC = 6$ см.

178. Хорди MK і PF кола перетинаються в точці E . Знайдіть довжину відрізка EF , якщо $ME = 4$ см, $EK = 3$ см, $PE = 2$ см.
179. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці M , яка поділяє хорду AB на відрізки завдовжки 2 см і 9 см. На які відрізки поділяє точка M хорду CD , якщо один з них більший за другий у 2 рази?

180. Через точку A проведено до кола дотичну AK (K — точка дотику) і січну, яка перетинає коло в точках E і F (рис. 38). Знайдіть AF , якщо $AK = 4$ см, $AE = 8$ см.

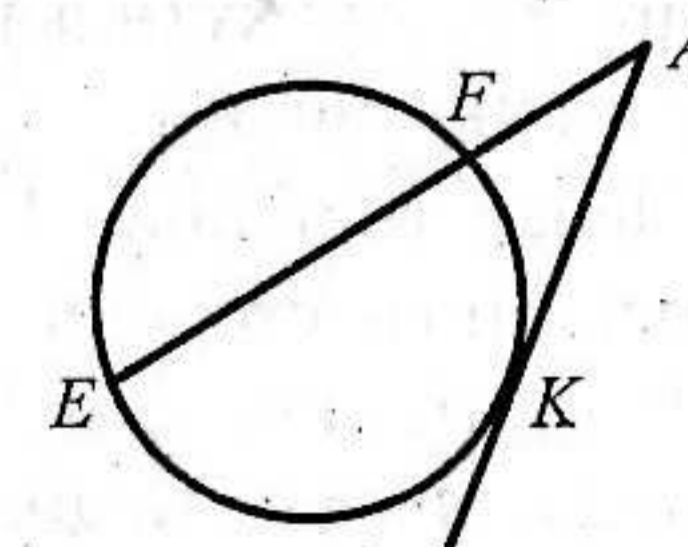


Рис. 38

181. Через точку M проведено до кола дотичну MA (A — точка дотику) і січну, яка перетинає коло в точках B і C (точка B лежить між точками M і C). Знайдіть MB , якщо $BC = 5$ см, $AM = 6$ см.

Друга і третя ознаки подібності трикутників

182. Доведіть подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, зображених на рисунку 39 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

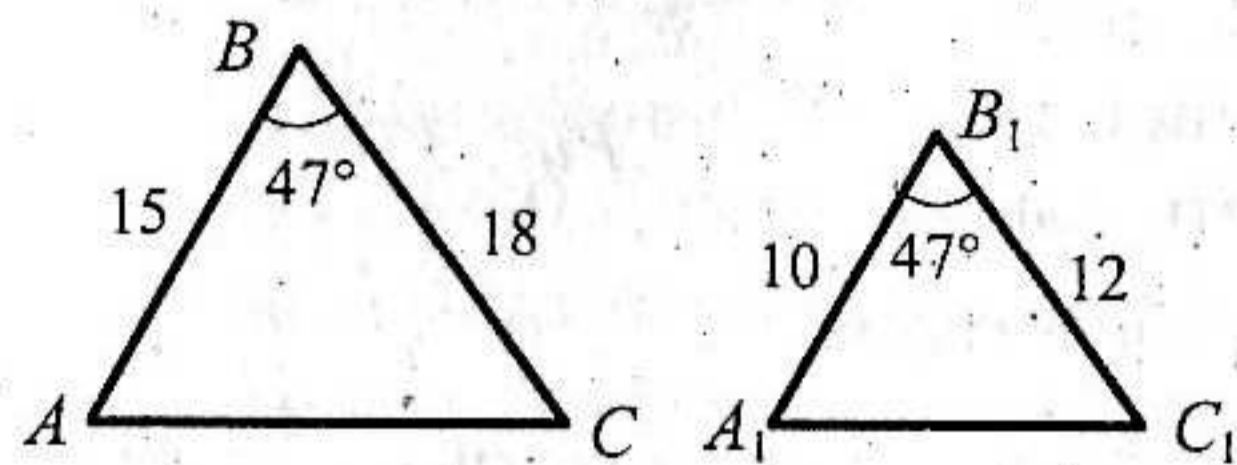


Рис. 39

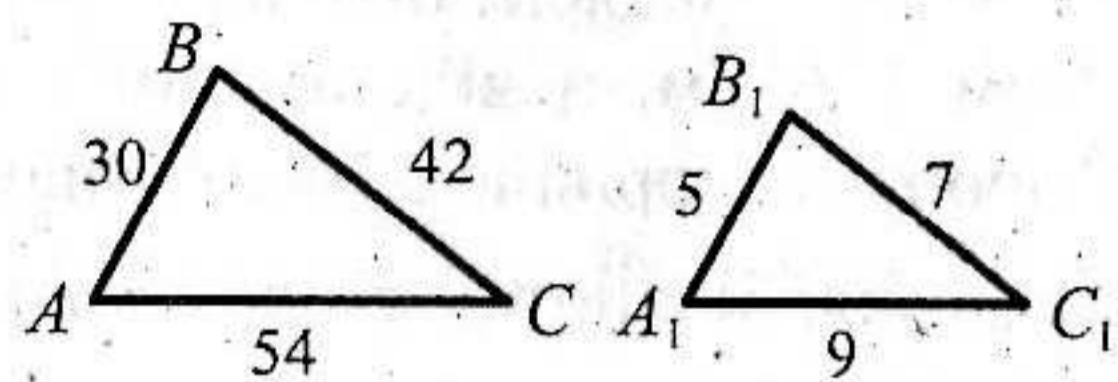


Рис. 40

183. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, а сторони трикутника ABC , які утворюють кут A , у 3,5 раза більші за сторони, які утворюють кут A_1 . Знайдіть сторони BC і B_1C_1 , якщо їх сума дорівнює 18 см.

184. У трикутнику ABC $AB = 16$ см, $AC = 20$ см. На стороні AB відклали відрізок $AD = 12$ см, а на стороні AC — відрізок $AE = 15$ см. Чи подібні трикутники ABC і ADE ?

185. Доведіть, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, зображені на рисунку 40, подібні (довжини відрізків дано в сантиметрах).

186. Чи подібні трикутники ABC і ADC , зображені на рисунку 41 (довжини відрізків дано в сантиметрах)?

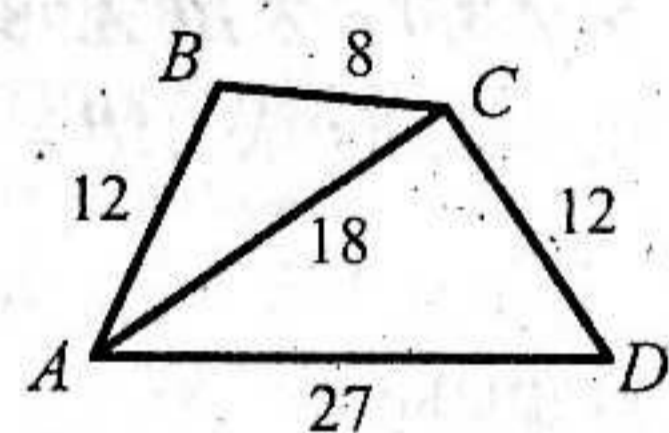


Рис. 41

187. Визначте, чи подібні трикутники, якщо їх сторони дорівнюють:

- 1) 5 см, 8 см, 9 см і 15 см, 24 см, 27 см;
- 2) 2 см, 5 см, 6 см і 8 см, 18 см, 20 см.

188. Сторони одного трикутника відносяться як 5 : 7 : 9, а сторони другого трикутника дорівнюють 25 см, 35 см і 45 см. Чи подібні ці трикутники?

189. Через вершини A і B трикутника ABC проведено коло, яке перетинає сторони AC і BC трикутника в точках D і E відповідно. Доведіть, що трикутники ABC і EDC подібні. Знайдіть CD і CE , якщо $AC = 5$ см, $BC = 6$ см, $AB = 8$ см, $DE = 2$ см.

Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику

190. Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену з вершини прямого кута, якщо вона поділяє гіпотенузу на відрізки завдовжки 4 см і 16 см.

191. Катет прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а його проекція на гіпотенузу — 4 см. Знайдіть гіпотенузу.

192. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, поділяє її на відрізки завдовжки 18 см і 32 см. Знайдіть катети трикутника.

193. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 4 см, а проекція другого катета на гіпотенузу — 6 см. Знайдіть другий катет і гіпотенузу.

194. Знайдіть висоту і бічну сторону рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 5 см і 13 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.

195. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони і дорівнює $3\sqrt{5}$ см, а проекція бічної сторони на більшу основу дорівнює 4 см. Знайдіть основи трапеції та її бічну сторону.

196. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, поділяє її на відрізки завдовжки 3 см і 12 см. Знайдіть діагоналі ромба.

197. Коло, вписане в рівнобічну трапецію, поділяє точкою дотику бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 18 см. Знайдіть основи трапеції і радіус вписаного кола.

Теорема Піфагора

198. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: 1) 6 см і 8 см; 2) 4 см і 7 см.

199. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза і другий катет відповідно дорівнюють: 1) 15 см і 9 см; 2) 8 см і 4 см.

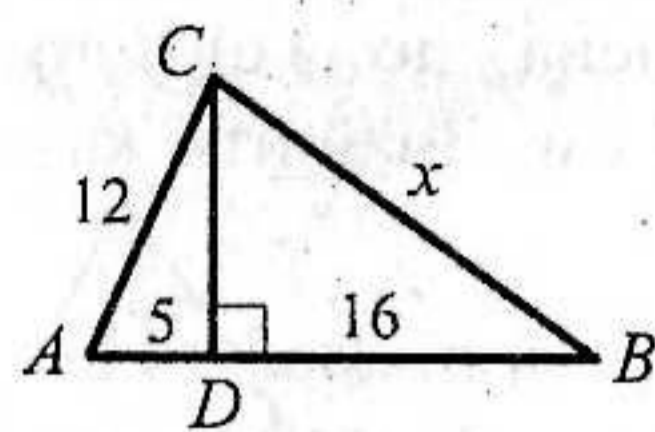
200. Сторона квадрата дорівнює 5 см. Знайдіть його діагональ.

201. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB = BC = 7$ см, $AC = 6$ см. Знайдіть висоту BD трикутника.

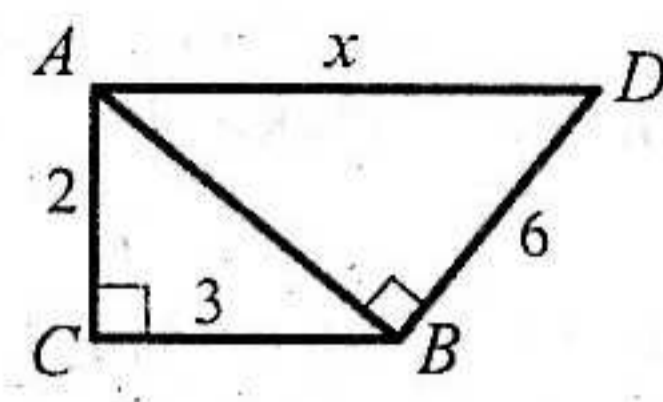
202. Сторона ромба дорівнює 13 см, а одна з його діагоналей — 10 см. Знайдіть другу діагональ ромба.

203. Дві сторони прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 8 см. Знайдіть третю сторону трикутника. Розгляньте всі можливі випадки.

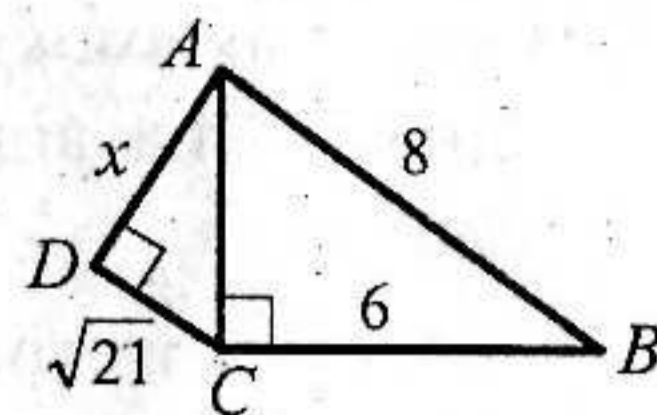
204. Знайдіть довжину невідомого відрізка x на рисунку 42 (довжини відрізків дано в сантиметрах).



a)



б)



в)

Рис. 42

205. Катети прямокутного трикутника відносяться як 3 : 4, а його гіпотенуза дорівнює 20 см. Знайдіть катети трикутника.
206. Різниця між гіпотенузою і катетом прямокутного трикутника дорівнює 2 см, а довжина другого катета — 6 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.
207. Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а медіана, проведена до нього, — 5 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.
208. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 13 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 60 см.
209. У гострокутному трикутнику ABC $AB = 10$ см, $BC = 15$ см, а висота $BD = 8$ см. Знайдіть сторону AC .
210. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки завдовжки 4 см і 16 см, рахуючи від вершини кута при основі. Знайдіть основу трикутника.
211. Відношення бічної сторони до основи рівнобедреного трикутника дорівнює 5 : 6, а висота трикутника, проведена до основи, дорівнює 12 см. Знайдіть сторони трикутника.
212. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 54 см, а висота, проведена до основи, — 9 см.
213. З точки до прямої проведено дві похилі. Довжина однієї з них дорівнює 25 см, а довжина її проекції на цю пряму — 15 см. Знайдіть довжину другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут 30° .
214. З точки, яка знаходиться на відстані 5 см від прямої, проведено до неї дві похилі. Довжина однієї з них дорівнює 13 см, а друга утворює з прямою кут 45° . Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки розв'язків має задача?

215. З точки до прямої проведено дві похилі, проекції яких на цю пряму дорівнюють 5 см і 9 см. Знайдіть довжини похилих, якщо їх різниця дорівнює 2 см.
216. З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 10 см і 6 см, а довжини їх проекцій на цю пряму відносяться як 5 : 2. Знайдіть відстань від точки до даної прямої.
217. У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику поділяє один з катетів на відрізки завдовжки 3 см і 9 см, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть другий катет і гіпотенузу трикутника.
218. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 17 см, а медіана, проведена до одного з катетів, — 15 см. Знайдіть катети трикутника.
219. Висота рівностороннього трикутника на 4 см менша від його сторони. Знайдіть сторону трикутника.
220. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника поділяє гіпотенузу на відрізки завдовжки 15 см і 20 см. Знайдіть катети трикутника.
221. Бічна сторона рівнобедреного трикутника менша від основи на 9 см, а відрізки, на які бісектриса кута при основі поділяє висоту, проведену до основи, відносяться як 5 : 4. Знайдіть висоту трикутника, проведену до основи.
222. Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, якщо його основа дорівнює 24 см, а медіана, проведена до бічної сторони, — 30 см.
223. У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює 17 см, а висота трапеції — 8 см. Знайдіть середню лінію трапеції.
224. Висота BE поділяє основу AD рівнобічної трапеції $ABCD$ на відрізки завдовжки 5 см і 16 см, а бічна сторона трапеції дорівнює 13 см. Знайдіть діагоналі трапеції.
225. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до його середньої сторони.
226. У рівнобічну трапецію вписано коло, радіус якого дорівнює 12 см. Знайдіть основи трапеції, якщо бічна сторона дорівнює 25 см.
227. У колі з центром O і радіусом 10 см проведено хорду AB завдовжки 16 см. Радіус OF перпендикулярний до даної хорди і перетинає її в точці E . Знайдіть відрізок EF .

228. Радіуси двох кіл дорівнюють 8 см і 3 см, а відстань між їх центрами — 13 см. Знайдіть довжину їх спільної зовнішньої дотичної.
229. Точки M і N лежать по різні сторони від прямої a на відстані 2 см і 3 см від неї відповідно. Знайдіть відстань між проекціями цих точок на пряму a , якщо $MN = 13$ см.

Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника

230. Побудуйте кут, косинус якого дорівнює: 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{6}{7}$.
231. Побудуйте кут, тангенс якого дорівнює: 1) $\frac{4}{7}$; 2) 3.
232. Побудуйте кут, синус якого дорівнює: 1) $\frac{2}{3}$; 2) 0,3.
233. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 5 см і 13 см. Знайдіть:
- 1) синус гострого кута, який лежить проти меншого катета;
 - 2) косинус гострого кута, який прилягає до більшого катета;
 - 3) тангенс гострого кута, який лежить проти меншого катета.
234. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 3 см і 8 см. Знайдіть:
- 1) тангенс гострого кута, який лежить проти меншого катета;
 - 2) синус гострого кута, який прилягає до більшого катета;
 - 3) косинус гострого кута, який лежить проти більшого катета.

235. Знайдіть $\sin \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{1}{4}$.

236. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sin^2 45^\circ - \cos 60^\circ$;
- 2) $2 \sin^2 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$.

237. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 6 см, а бічна сторона — 5 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута при основі трикутника.

238. У рівнобічній трапеції $ABCD$ $AB = CD = 4$ см, $BC = 6$ см, $AD = 10$ см. Знайдіть кути трапеції.

Розв'язування прямокутних трикутників

239. Знайдіть невідомі сторони прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), якщо:

- 1) $BC = 2$ см, $\cos B = \frac{2}{3}$;
- 2) $AC = 3$ см, $\sin B = \frac{1}{4}$;
- 3) $AC = 4$ см, $\operatorname{tg} B = 2$;
- 4) $AB = 8$ см, $\cos A = \frac{5}{8}$;

- 5) $AC = 2$ см, $\sin A = \frac{3}{5}$;
- 6) $AB = 6$ см, $\operatorname{tg} A = \frac{12}{13}$.

240. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) за відомими елементами:

- 1) $AB = 10$ см, $\angle A = 47^\circ$;
- 2) $AC = 9$ см, $\angle A = 43^\circ$;
- 3) $BC = 7$ см, $\angle A = 37^\circ$;
- 4) $AB = 8$ см, $AC = 5$ см;
- 5) $AC = 8$ см, $BC = 5$ см.

241. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB = BC = 6$ см, $\angle A = 58^\circ$.

Знайдіть сторону AC і висоту BD трикутника.

242. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) $AB = 8$ см, $\angle B = 46^\circ$. Знайдіть сторону AC і висоту BD трикутника.

243. З точки, що знаходиться на відстані 12 см від прямої, проведено до неї дві похилі, які утворюють з прямою кути 45° і 60° . Знайдіть довжини похилих і їх проекцій на пряму.

244. З точки, що знаходиться на відстані 8 см від прямої, проведено до неї дві похилі, які утворюють з прямою кути 30° і 45° . Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки розв'язків має задача?

245. Знайдіть невідомі сторони прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), якщо:

- 1) $AB = c$, $\angle A = \alpha$;
- 2) $AC = b$, $\angle B = \beta$;
- 3) $BC = a$, $\angle B = \beta$.

246. За рисунком 43 знайдіть відрізки AD і CD .

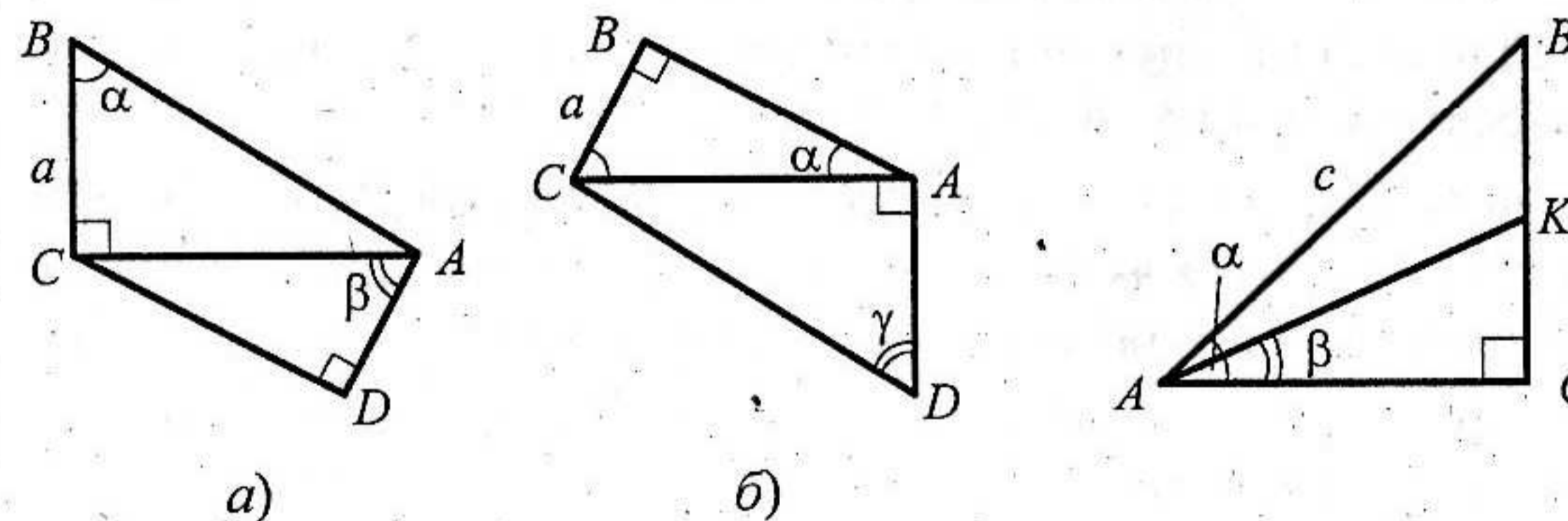


Рис. 43

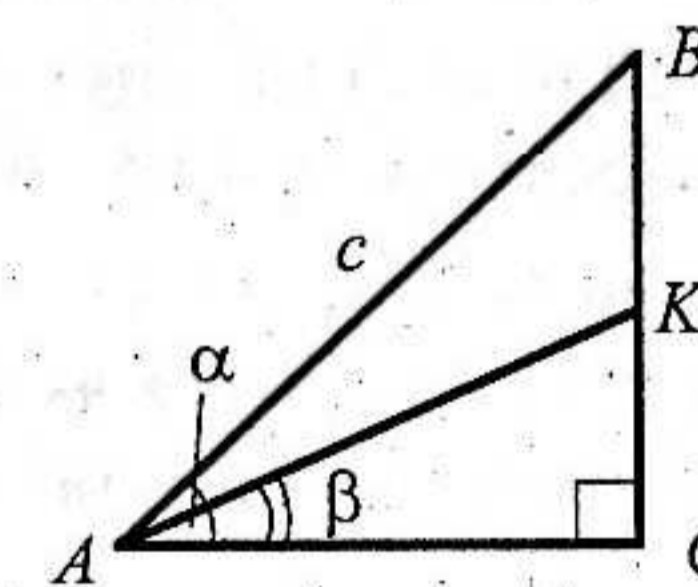


Рис. 44

247. У прямокутному трикутнику ABC (рис. 44) $AB = c$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle KAC = \beta$. Знайдіть відрізок BK .

248. Сторона AB прямокутника $ABCD$ дорівнює a , а діагональ AC утворює зі стороною AD кут α . Знайдіть сторону AD і діагональ AC прямокутника.

249. Більша діагональ ромба дорівнює m , а гострий кут ромба дорівнює α . Знайдіть сторону ромба та його меншу діагональ.

250. У рівнобічній трапеції $ABCD$ основа BC дорівнює 4 см, висота CE — $2\sqrt{3}$ см, а бічна сторона утворює з основою AD кут 60° . Знайдіть основу AD трапеції.

251. У прямокутній трапеції $ABCD$ $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $BC = 8$ см, $CD = 4$ см, $\angle BCD = 135^\circ$. Знайдіть сторони AB і AD трапеції.

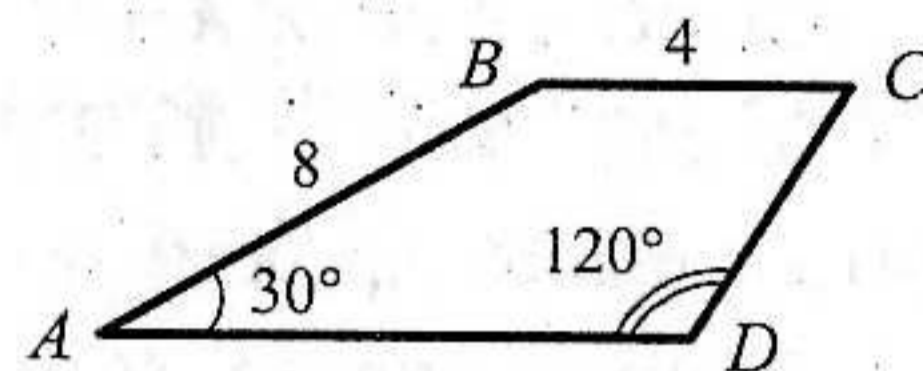


Рис. 45

252. У трапеції $ABCD$ (рис. 45) $AB = 8$ см, $BC = 4$ см, $\angle A = 30^\circ$, $\angle D = 120^\circ$. Знайдіть основу AD трапеції.

Многокутники

253. Скільки діагоналей можна провести з однієї вершини опуклого семикутника? Знайдіть загальну кількість діагоналей опуклого семикутника.

254. Чи можна побудувати опуклий п'ятикутник, усі кути якого прямі?

255. Чи може найменший кут опуклого дев'ятикутника дорівнювати 141° ?

256. Як зміниться сума кутів опуклого многокутника, якщо кількість його сторін збільшиться на три?

257. Знайдіть кути опуклого семикутника, якщо їх градусні міри відносяться як $4 : 5 : 6 : 7 : 7 : 8 : 8$.

258. Один з кутів опуклого чотирикутника дорівнює 60° , другий і третій відносяться як $7 : 3$, а четвертий дорівнює півсумі другого і третього. Знайдіть невідомі кути чотирикутника.

259. Чи може один з кутів опуклого п'ятикутника бути більшим за суму чотирьох інших?

260. В опуклому многокутнику сума кутів дорівнює 1620° . Знайдіть кількість його сторін і діагоналей.

261. В опуклому многокутнику 77 діагоналей. Знайдіть кількість його сторін і суму кутів.

Поняття площі многокутника. Площа прямокутника

262. Знайдіть площу квадрата, діагональ якого дорівнює: 1) 4 см; 2) m .

263. Сторона прямокутника дорівнює 8 см і утворює з діагоналлю кут 30° . Знайдіть площу прямокутника.

264. Знайдіть сторони прямокутника, якщо вони відносяться як $4 : 7$, а площа прямокутника дорівнює 112 см^2 .

265. Площа прямокутника дорівнює 21 см^2 . Знайдіть сторони прямокутника, якщо одна з них на 4 см більша за другу.

266. Квадрат і прямокутник рівновеликі. Сторона квадрата дорівнює 8 см, а одна із сторін прямокутника — 16 см. Знайдіть другу сторону прямокутника.

267. Знайдіть площу квадрата, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює R .

268. Чотирикутник $ABCD$ — квадрат (рис. 46). Відрізки MK і PE паралельні його сторонам. Користуючись рисунком, доведіть формулу:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

269. Чи можуть два нерівних квадрати мати рівні площі?

270. Як зміниться площа квадрата, якщо його сторону:

- 1) зменшити у 4 рази;
- 2) збільшити у m разів?

271. Як зміниться площа квадрата, якщо його діагональ збільшити у 4 рази? Як зміниться при цьому периметр квадрата?

272. Як зміниться площа прямокутника, якщо:

- 1) одну з його сторін збільшити у 3 рази;
- 2) одну з його сторін зменшити у 5 разів;
- 3) обидві сторони збільшити у 7 разів;
- 4) одну сторону збільшити у 4 рази, а другу — у 6 разів;
- 5) одну сторону збільшити у 8 разів, а другу зменшити у 2 рази?

273. Відношення площ двох квадратів дорівнює 3. Знайдіть відношення їх периметрів.

274. У прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписано квадрат $MKPC$ (рис. 47). Знайдіть площу квадрата, якщо $AC = 6$ см, $BC = 4$ см.

275. Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює сумі площ двох даних квадратів.

276. Сторони прямокутника дорівнюють a і b . Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює площі даного прямокутника.

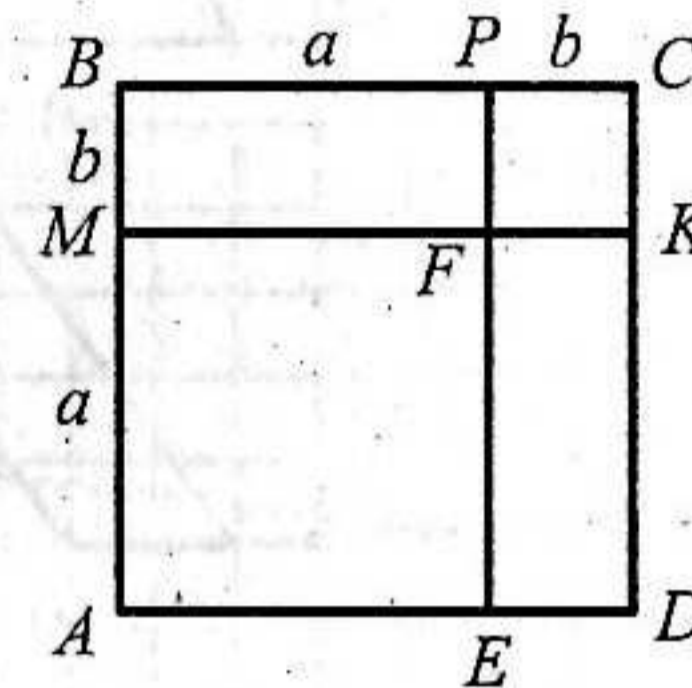


Рис. 46

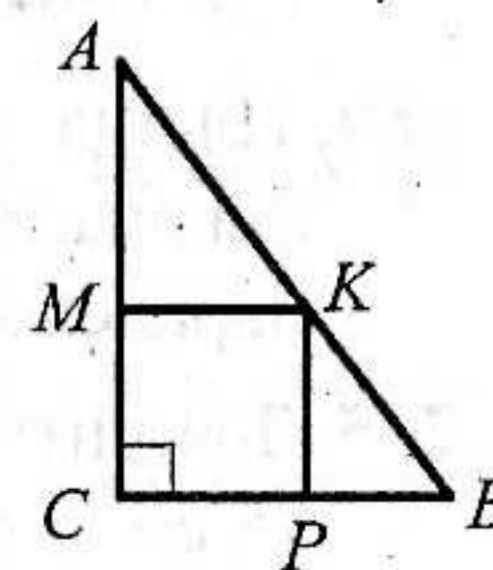


Рис. 47

Площа паралелограма

277. Знайдіть площу паралелограма, сторона якого дорівнює 18 см, а висота, проведена до неї, — 7 см.
278. Які з паралелограмів, зображених на рисунку 48, рівновеликі?

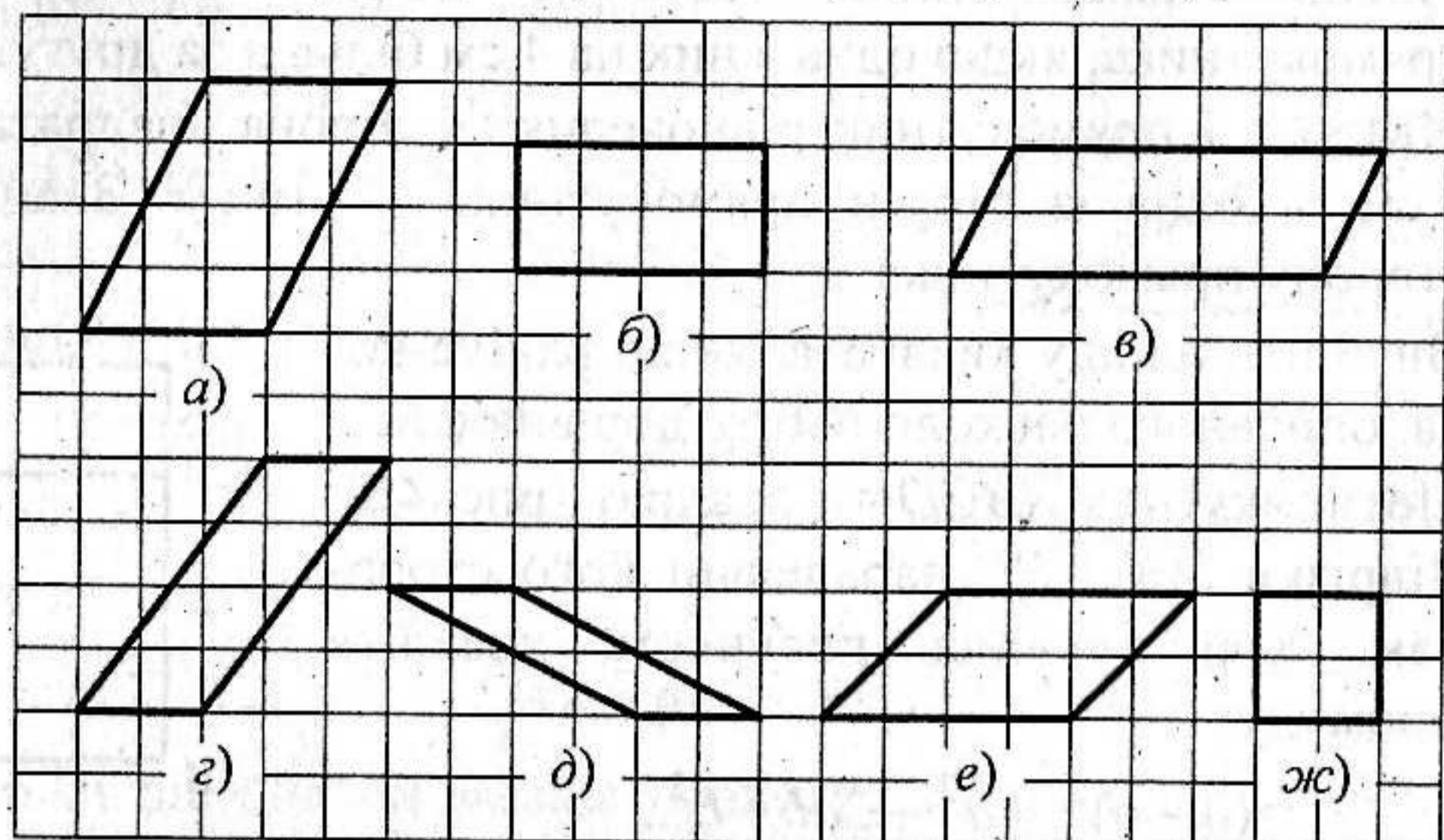


Рис. 48

279. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 9 см і 12 см, а кут між ними — 60° .
280. Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює $5\sqrt{3}$ см, а один з кутів — 120° .
281. Площа паралелограма дорівнює 48 см^2 . Знайдіть відстань між сторонами паралелограма, довжини яких 6 см.
282. Одна із сторін паралелограма дорівнює 4 см, а висота, проведена до другої сторони, — 8 см. Знайдіть невідомі сторону і висоту паралелограма, якщо його площа дорівнює 96 см^2 .
283. Сторони паралелограма дорівнюють 9 см і 12 см, а одна з висот — 4 см. Знайдіть другу висоту паралелограма. Скільки розв'язків має задача?
284. Площа паралелограма дорівнює 54 см^2 , а його висота на 3 см більша за сторону, до якої вона проведена. Знайдіть цю сторону паралелограма та висоту, проведenu до неї.
285. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 9 см і 15 см, а одна з діагоналей перпендикулярна до його сторони.
286. Доведіть, що пряма, яка проходить через точку перетину діагоналей паралелограма, поділяє його на дві рівновеликі фігури.

Площа трикутника

287. Сторона трикутника дорівнює 8 см, а висота, проведена до неї, — 4,5 см. Знайдіть площу трикутника.
288. Площа трикутника дорівнює 84 см^2 , а одна із сторін — 8 см. Знайдіть висоту трикутника, проведenu до цієї сторони.
289. Знайдіть площу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 6 см і 9 см.
290. Які з трикутників, зображених на рисунку 49, рівновеликі?

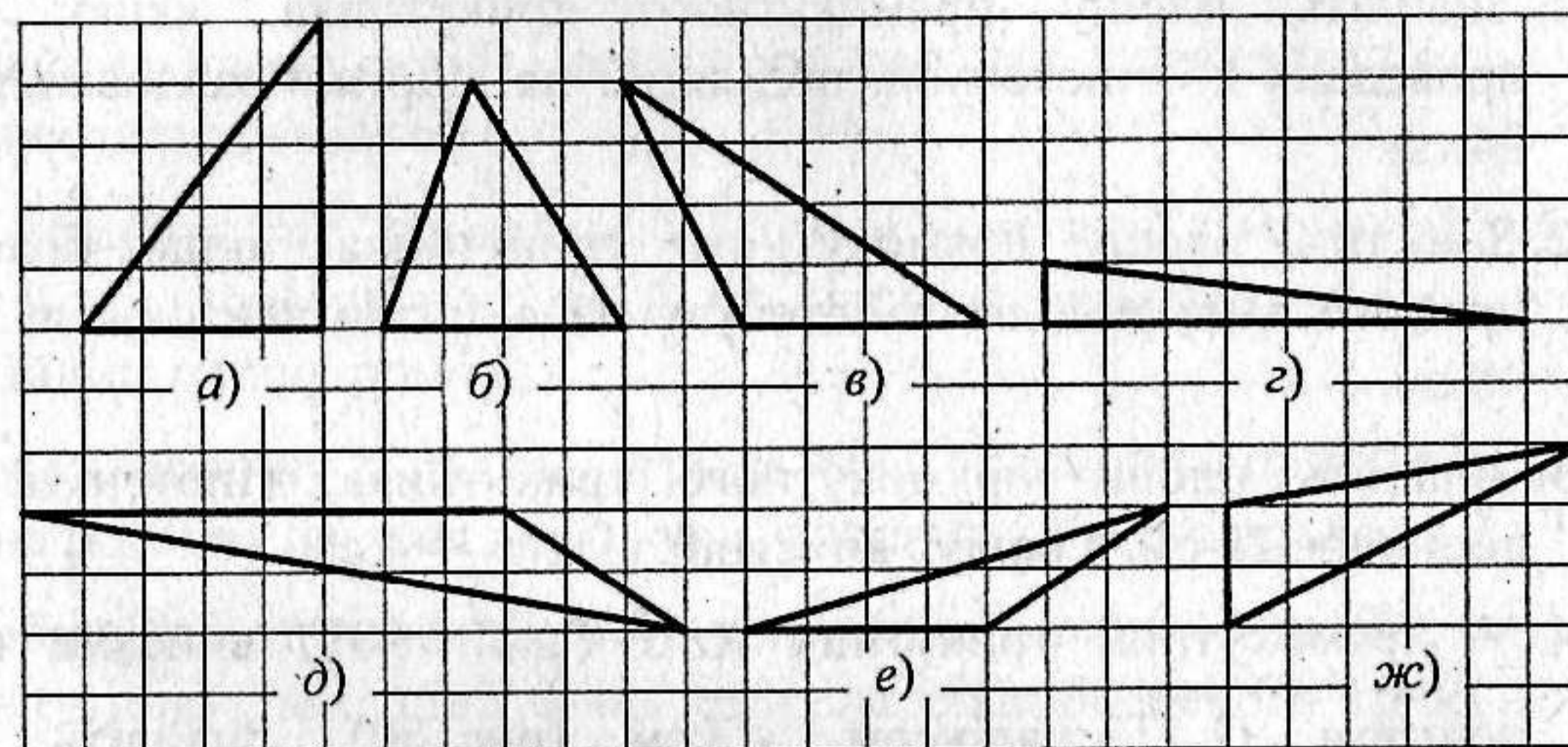


Рис. 49

291. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 4 см і 7 см, а кут між ними: 1) 30° ; 2) 120° .
292. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 6 см, а бічна сторона — 5 см.
293. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 9 см і 12 см. Знайдіть висоту трикутника, проведenu до гіпотенузи.
294. У трикутнику ABC $AB : BC = 2 : 3$. Знайдіть відношення висот трикутника, проведених з вершин C і A .
295. Доведіть, що більшій стороні трикутника відповідає менша висота.
296. Доведіть, що медіана трикутника розбиває його на два рівновеликих трикутники.
297. Діагоналі трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) перетинаються в точці O . Доведіть, що трикутники AOB і COD рівновеликі.

298. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки завдовжки 8 см і 5 см, рахуючи від вершини кута при основі. Знайдіть площу трикутника.
299. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 12 см. Знайдіть площу трикутника, якщо відношення його бічної сторони до основи дорівнює $\frac{5}{6}$.
300. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 26 см, а різниця катетів — 14 см.
301. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо висота, проведена до гіпотенузи, поділяє її на відрізки завдовжки 6 см і 24 см.
302. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса прямого кута поділяє гіпотенузу на відрізки завдовжки 30 см і 40 см.
303. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 26 см, а радіус вписаного кола — 4 см.
304. У прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписано коло з центром O і радіусом $\sqrt{3}$ см (рис. 50). Знайдіть площу трикутника, якщо $\angle OBC = 30^\circ$.

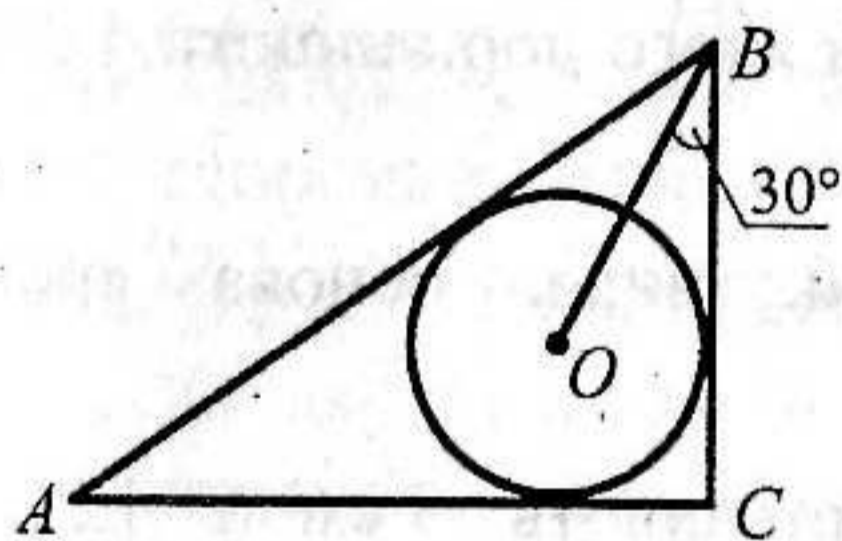


Рис. 50

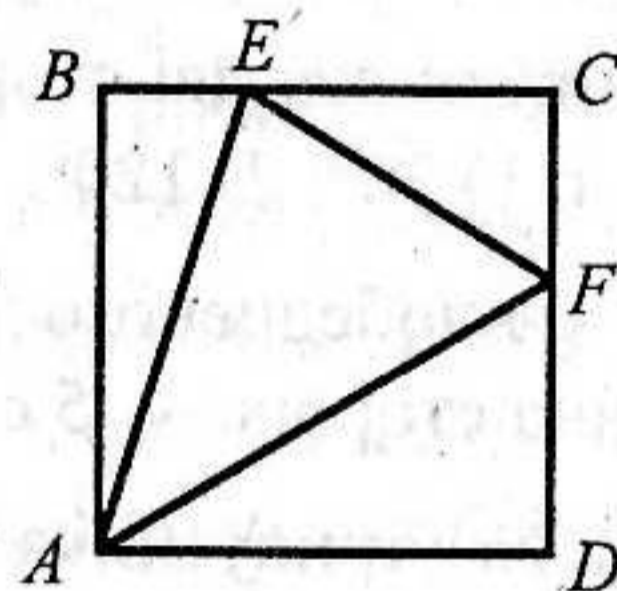


Рис. 51

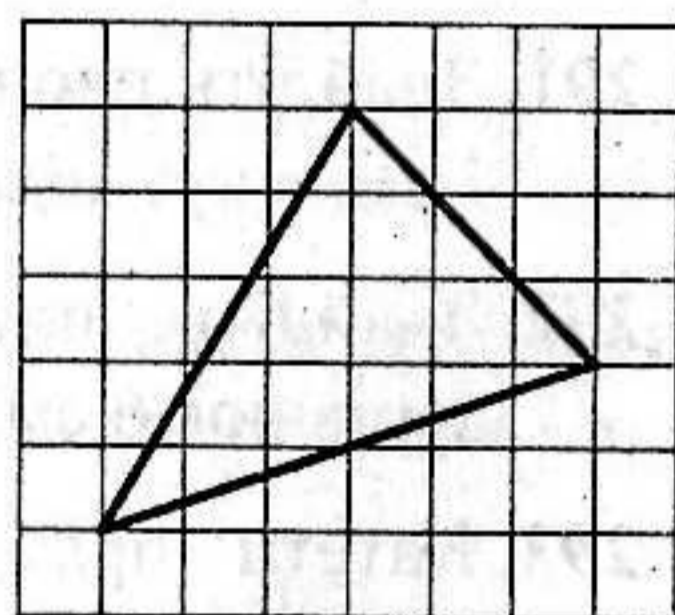


Рис. 52

305. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 14 см. На сторонах BC і CD взято такі точки E і F відповідно, що $BE = 4$ см, $DF = 9$ см (рис. 51). Знайдіть площу трикутника AEF .
306. Знайдіть площу трикутника, зображеного на рисунку 52, якщо сторона клітинки дорівнює 1 см.
307. Площа трикутника ABC дорівнює 28 см^2 . Точка D поділяє сторону BC у відношенні $3 : 1$, рахуючи від точки B . Знайдіть площі трикутників ABD і ACD .

308. У трикутнику ABC $AB = 14$ см, $BC = 8$ см, відрізок BK — бісектриса трикутника. Знайдіть відношення площ трикутників ABK і CBK .
309. Через вершину трикутника проведіть пряму так, щоб вона розбила його на два трикутника, площі яких відносяться як: 1) $2 : 1$; 2) $2 : 3$.
310. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 8 см і 5 см.
311. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона дорівнює 15 см, а сума діагоналей — 42 см.
312. Знайдіть площу ромба, якщо його діагоналі відносяться як $5 : 12$, а висота дорівнює 60 см.
313. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, поділяє її на відрізки завдовжки 4 см і 9 см. Знайдіть площу ромба.
314. Через вершину B паралелограма $ABCD$ проведіть пряму так, щоб вона розбила його на дві фігури, площі яких відносяться як $2 : 3$.
315. Побудуйте рівнобедрений трикутник, рівновеликий даному трикутнику, так, щоб бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнювала одній із сторін даного трикутника.
316. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 1 см. На сторонах AB і BC взято такі точки E і F , що трикутник DEF — рівносторонній. Знайдіть його площу.
317. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 26 см, 28 см і 30 см.

Площа трапеції

318. Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 8 см і 11 см, а висота — 4 см.
319. Площа трапеції дорівнює 168 см^2 , одна з її основ — 15 см, а висота — 9 см. Знайдіть другу основу трапеції.
320. Площа трапеції дорівнює 24 см^2 , а її висота — 4 см. Знайдіть основи трапеції, якщо вони відносяться як $1 : 5$.
321. Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 6 см і 12 см, а бічна сторона завдовжки 8 см утворює з меншою основою кут 120° .

322. Знайдіть площу трапеції $ABCD$, зображеної на рисунку 53 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

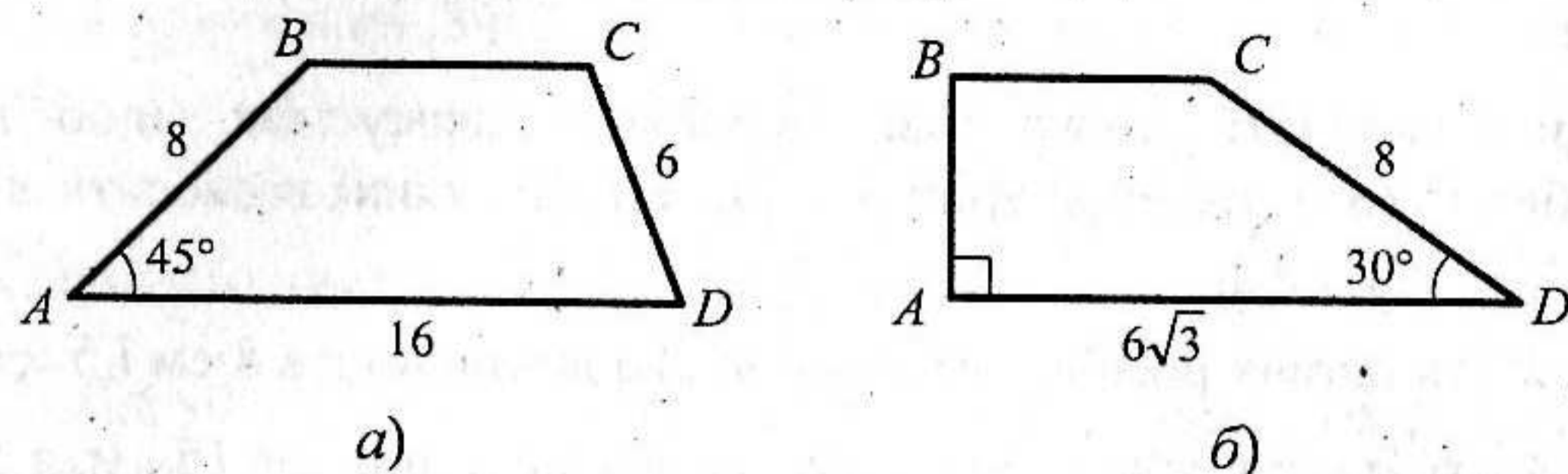


Рис. 53

323. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 27 см, а діагональ — 45 см. Знайдіть площу трапеції.
324. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, більша основа якої дорівнює 9 см, бічна сторона — 8 см, а тупий кут — 135° .
325. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, діагоналі якої перпендикулярні, а основи дорівнюють 14 см і 18 см.
326. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 12 см, а діагоналі ділять її гострі кути навпіл.
327. Менша основа прямокутної трапеції дорівнює 28 см, а різниця основ — 9 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша діагональ ділить прямий кут трапеції навпіл.
328. Знайдіть площу прямокутної трапеції, більша основа якої дорівнює 14 см, більша бічна сторона — 12 см, а гострий кут дорівнює 60° .
329. Різниця основ прямокутної трапеції дорівнює 10 см, а різниця бічних сторін — 2 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її більша діагональ дорівнює 30 см.
330. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 50 см, а гострий кут — 60° . Знайдіть площу трапеції, якщо її діагональ ділить гострий кут трапеції навпіл.
331. Діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні. Знайдіть площу трапеції, якщо проекція діагоналі на більшу основу трапеції дорівнює 6 см.
332. Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 6 см і 8 см, а кути при більшій основі — 30° і 45° .
333. Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 15 см і 29 см, а бічні сторони — 13 см і 15 см.

334. У рівнобічну трапецію вписано коло, точка дотику якого з бічною стороною трапеції поділяє її на відрізки завдовжки 3 см і 12 см. Знайдіть площу трапеції.
335. Радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію, дорівнює 4 см, а гострий кут трапеції — 30° . Знайдіть площу трапеції.
336. Бічні сторони трапеції дорівнюють 20 см і 13 см, а різниця основ — 21 см. Знайдіть площу трапеції, якщо відомо, що в неї можна вписати коло.
337. Периметр трапеції дорівнює 66 см, а точка дотику вписаного кола поділяє бічну сторону на відрізки завдовжки 4 см і 9 см. Знайдіть площу трапеції.

Варіант 2

Чотирикутник та його елементи

1. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 54) $AB = AD$, $\angle BAC = \angle CAD$. Доведіть, що кути B і D рівні.

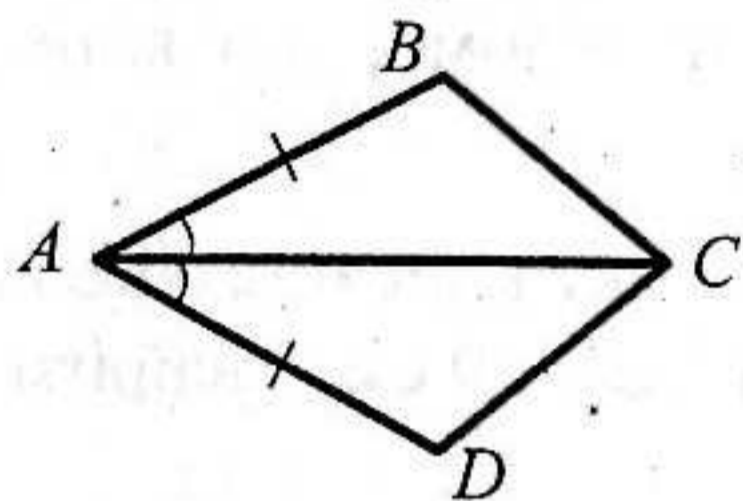


Рис. 54

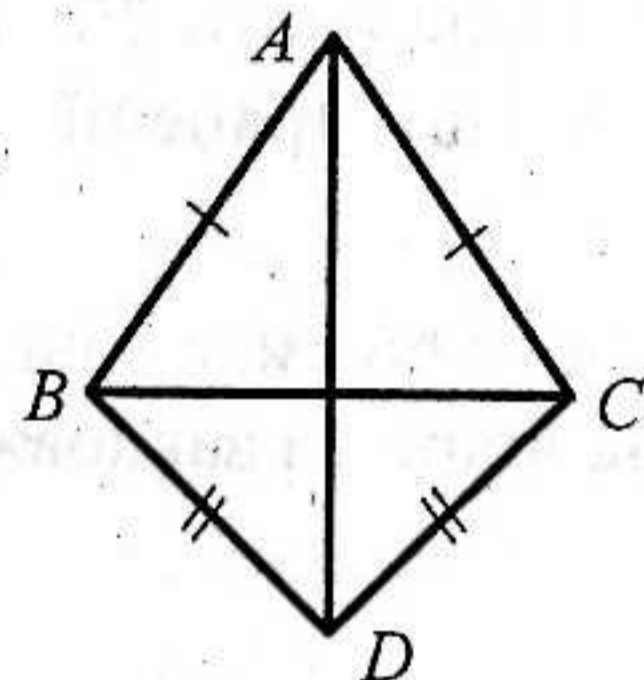


Рис. 55

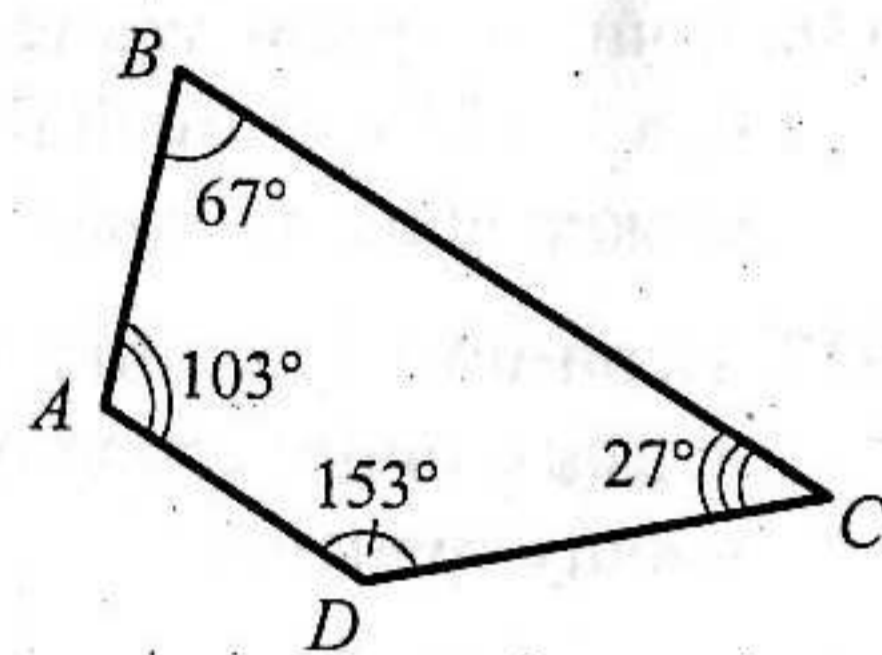


Рис. 56

2. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 55) $AB = AC$, $BD = DC$. Доведіть, що $AD \perp BC$.
3. Чи можна накреслити опуклий чотирикутник, у якого всі кути гострі?
4. У чотирикутнику $ABCD$ сторони BC і AD паралельні (рис. 56). Чи правильно визначено його кути?

Паралелограм. Властивості паралелограма

5. Знайдіть кути паралелограма, якщо:
- 1) один з його кутів дорівнює 52° ;
 - 2) сума двох його кутів дорівнює 174° ;
 - 3) один з його кутів на 28° більший за другий;
 - 4) один з його кутів у 4 рази менший від другого;
 - 5) два кути паралелограма відносяться як 4 : 5.
6. У паралелограмі $ABCD$ (рис. 57) $\angle ABC = 102^\circ$, $\angle BDC = 54^\circ$. Знайдіть кути ADB і BAD .
7. Дано паралелограм $ABCD$ і трикутник MNP . Чи можуть одночасно виконуватися рівності: $\angle A = \angle M$, $\angle D = \angle N$, $\angle C = \angle P$? Відповідь обґрунтуйте.
8. Периметр паралелограма дорівнює 84 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо одна з них на 12 см менша від другої.

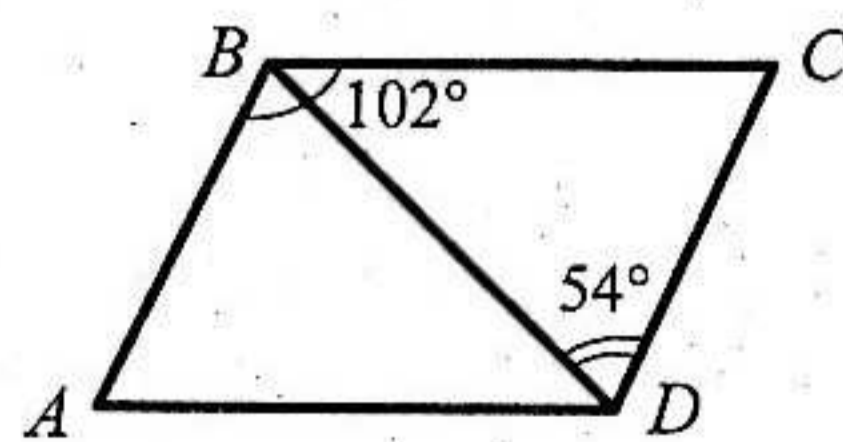
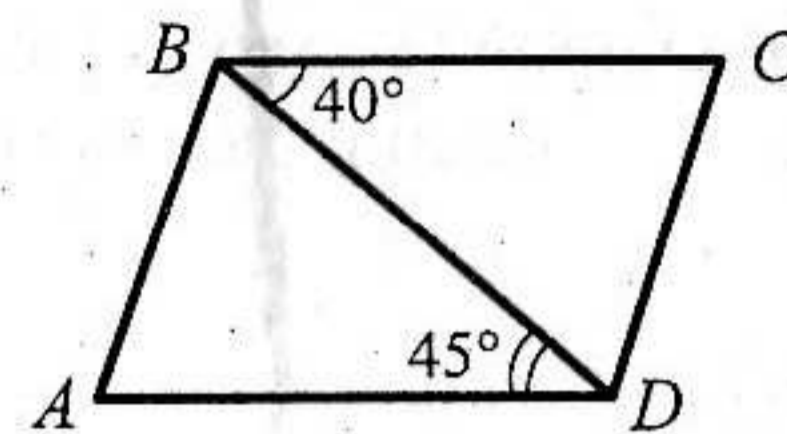
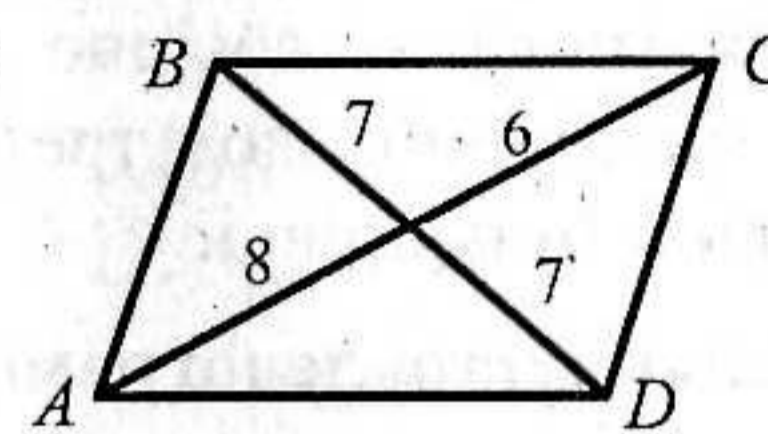


Рис. 57

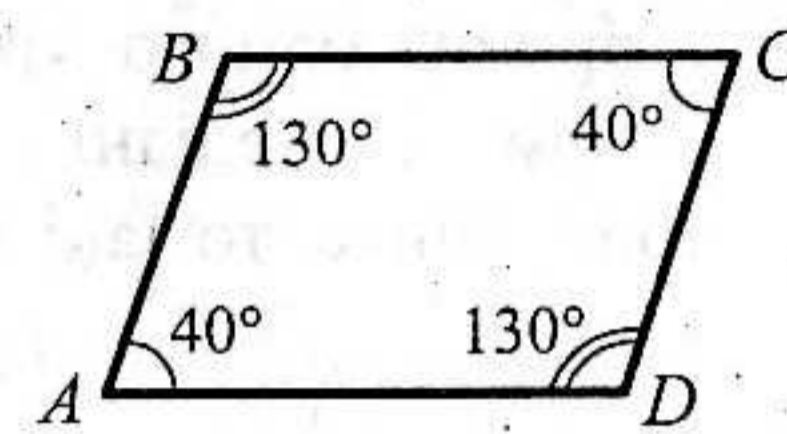
9. Периметр паралелограма дорівнює 90 см. Знайдіть його сторони, якщо дві з них відносяться як 2 : 3.
10. Які помилки допущено в зображенні паралелограма $ABCD$ на рисунку 58?



а)



б)



в)

Рис. 58

11. Доведіть, що бісектриси протилежних кутів паралелограма паралельні або лежать на одній прямій.
12. У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A поділяє сторону BC на відрізки $BK = 4$ см і $KC = 3$ см. Знайдіть периметр паралелограма.
13. Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні 2 : 3, рахуючи від вершини тупого кута. Периметр паралелограма дорівнює 42 см. Знайдіть його сторони.
14. Кути паралелограма відносяться як 1 : 2. Висота, проведена з вершини тупого кута, поділяє сторону паралелограма на відрізки завдовжки 4 см і 7 см, рахуючи від вершини тупого кута. Знайдіть периметр паралелограма.
15. У паралелограмі $ABCD$ з вершини гострого кута A проведено висоти AM і AN . Доведіть, що кути MAN і ADC рівні.
16. Два кути паралелограма відносяться як 3 : 7. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини: 1) гострого кута; 2) тупого кута.
17. Доведіть, що протилежні вершини паралелограма знаходяться на однаковій відстані від діагоналі, яка з'єднує дві інші вершини.
18. На основі рівнобедреного трикутника взято довільну точку, через яку проведено прями, паралельні бічним сторонам. Периметр утвореного паралелограма дорівнює 24 см. Знайдіть периметр даного трикутника, якщо його основа дорівнює 8 см.
19. Побудуйте паралелограм:
- 1) за двома сторонами і діагоналлю;
 - 2) за стороною, діагоналлю і кутом між ними.
20. Дано точки A , B і C , які не лежать на одній прямій. Побудуйте паралелограм, для якого дані точки були б у вказаному порядку послідовними вершинами.

21. Дано кут і точку всередині нього. Побудуйте паралелограм, дві сторони якого лежать на сторонах даного кута, а точка перетину діагоналей збігається з даною точкою.
22. Доведіть, що коли дві сторони і медіана, проведена до третьої сторони, одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і медіані, проведеної до третьої сторони, другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Ознаки паралелограма

23. Діагональ AC поділяє чотирикутник $ABCD$ на рівні трикутники ABC і CDA (рис. 59). Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

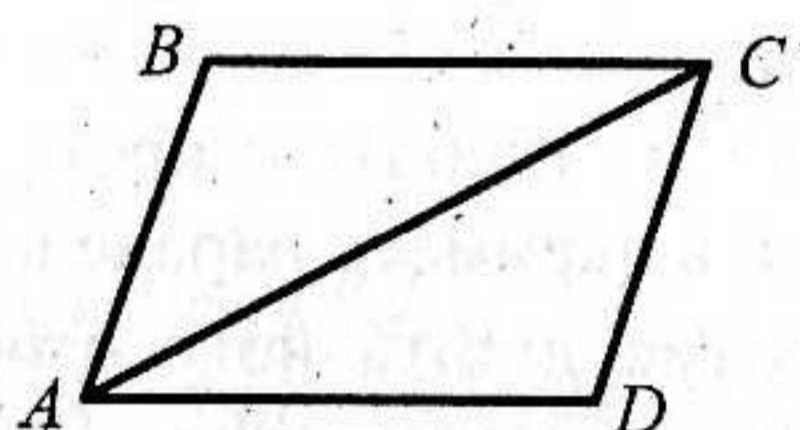


Рис. 59

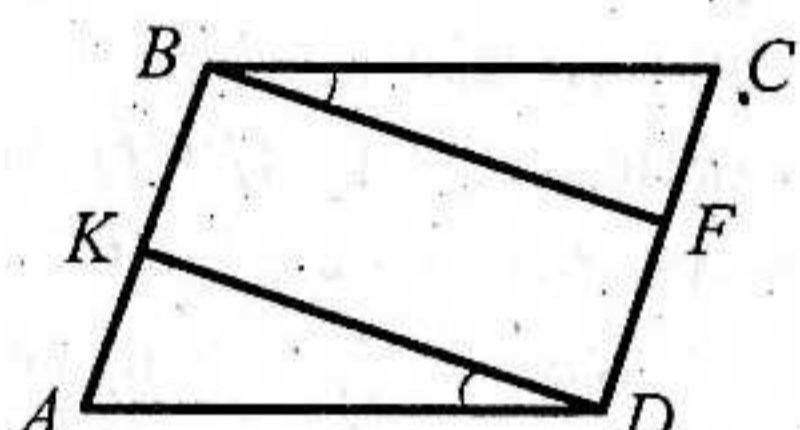


Рис. 60

24. На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ (рис. 60) позначено точки K і F такі, що $\angle ADK = \angle CBF$. Доведіть, що чотирикутник $KBFD$ — паралелограм.
25. На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ відкладено рівні відрізки MB і DN (рис. 61). Доведіть, що чотирикутник $AMCN$ — паралелограм.

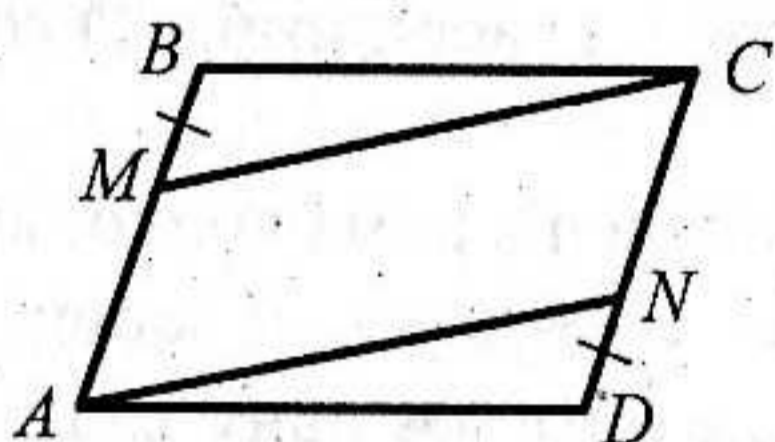


Рис. 61

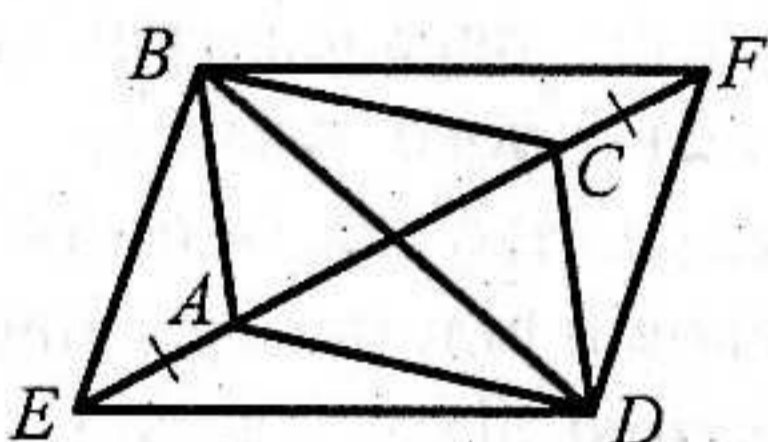


Рис. 62

26. На прямій AC , яка містить діагональ паралелограма $ABCD$, відкладено рівні відрізки AE і FC (рис. 62). Доведіть, що чотирикутник $EBFD$ — паралелограм.
27. У паралелограмі $ABCD$ $BK \perp AC$ і $DP \perp AC$ (рис. 63). Доведіть, що чотирикутник $KBPD$ — паралелограм.

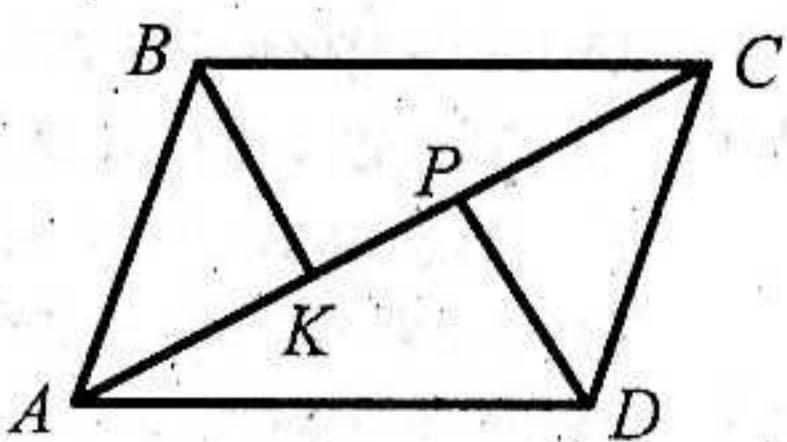


Рис. 63

28. Через точку перетину діагоналей паралелограма $ABCD$ проведено відрізок EF так, що $EO = OF$ (рис. 64). Які з чотирикутників на цьому рисунку є паралелограмами?
29. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 65) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

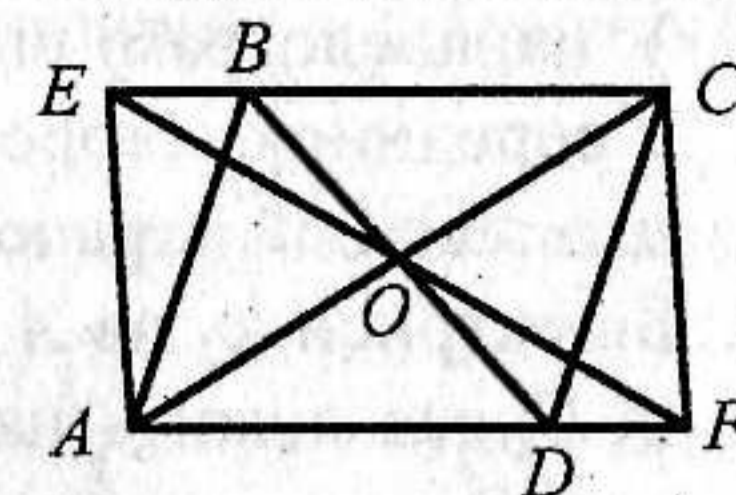


Рис. 64

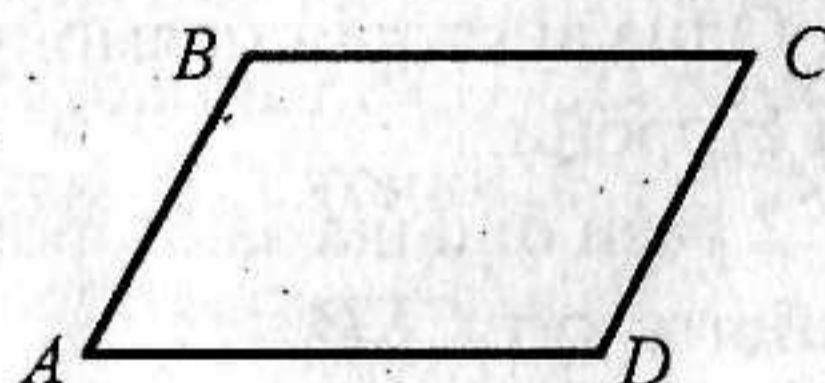


Рис. 65

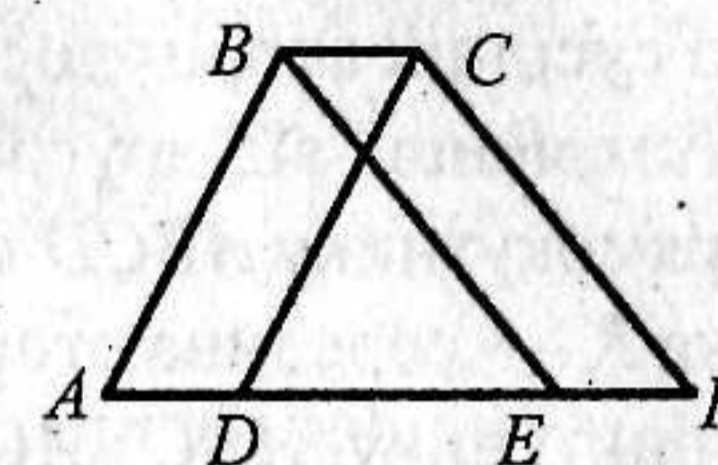


Рис. 66

30. Чотирикутники $ABCD$ і $BCFE$ — паралелограми (рис. 66). Доведіть, що $\triangle ABE = \triangle DCF$.

Прямокутник

31. Відомо, що жоден з кутів паралелограма не є тупим. Що можна сказати про вид цього паралелограма?
32. У прямокутнику $ABCD$ (рис. 67) O — точка перетину діагоналей, $\angle AOD = 140^\circ$. Знайдіть кут ACD .
33. У прямокутнику діагональ утворює з меншою стороною кут, що дорівнює 46° . Знайдіть кут між діагоналями прямокутника, який лежить проти його більшої сторони.
34. Знайдіть кут між більшою стороною і діагоналлю прямокутника, якщо він на 20° менший від кута між діагоналями, який лежить проти його більшої сторони.
35. У колі з центром O проведено діаметр AC і рівні хорди AD і BC (рис. 68). Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — прямокутник.
36. У прямокутнику $ABCD$ на сторонах AB і CD взято відповідно точки M і N так, що $BM = CN$. Доведіть, що $AN = DM$.

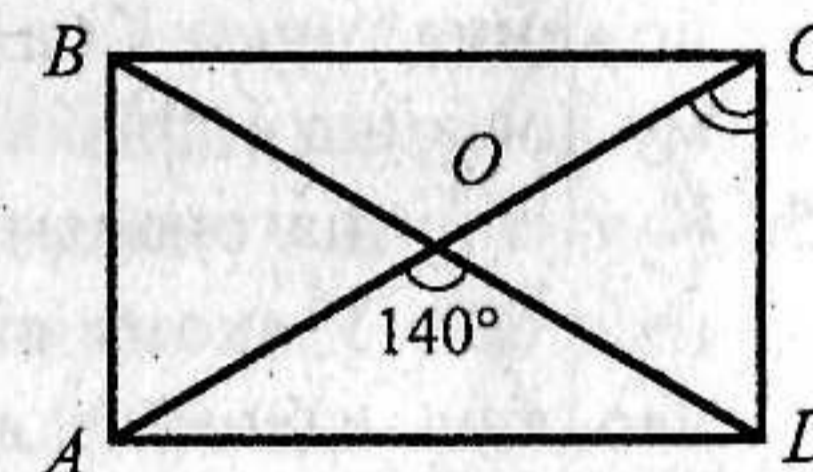


Рис. 67

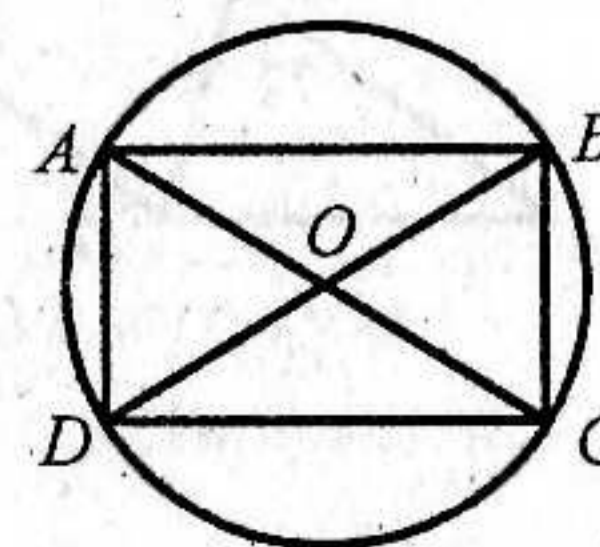


Рис. 68

37. У паралелограмі відрізок, який з'єднує точку перетину діагоналей з серединою сторони, перпендикулярний до цієї сторони. Доведіть, що цей паралелограм є прямокутником.
38. Бісектриси кутів A і B прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці E , яка лежить на стороні CD . Доведіть, що точка E — середина CD .
39. Сторони прямокутника дорівнюють 12 см і 8 см. Знайдіть відстані від точки перетину діагоналей до сусідніх сторін прямокутника.
40. Сума відстаней від точки перетину діагоналей прямокутника до його сусідніх сторін дорівнює 24 см. Одна зі сторін прямокутника на 6 см менша від другої. Знайдіть ці сторони.
41. У прямокутнику $ABCD$ сторона AB у 2 рази більша за сторону AD , точка K — середина сторони AB . Знайдіть кут CKD .
42. У трикутнику ABC $AC = 10$ см, $\angle A = 20^\circ$, $\angle C = 70^\circ$. Знайдіть медіану трикутника, проведену з вершини B .
43. У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC = 8$ см. Через точку D , яка лежить на гіпотенузі трикутника, проведено прями, паралельні його катетам. Знайдіть периметр чотирикутника, який при цьому утворився.
44. У прямокутний трикутник ABC вписано прямокутник $CMXN$ (рис. 69). Знайдіть положення точки X на гіпотенузі AB , при якому довжина відрізка MN буде найменшою.
45. Кут між діагоналями прямокутника дорівнює 60° . У якому відношенні перпендикуляр, проведений з вершини прямокутника на його діагональ, поділяє цю діагональ?

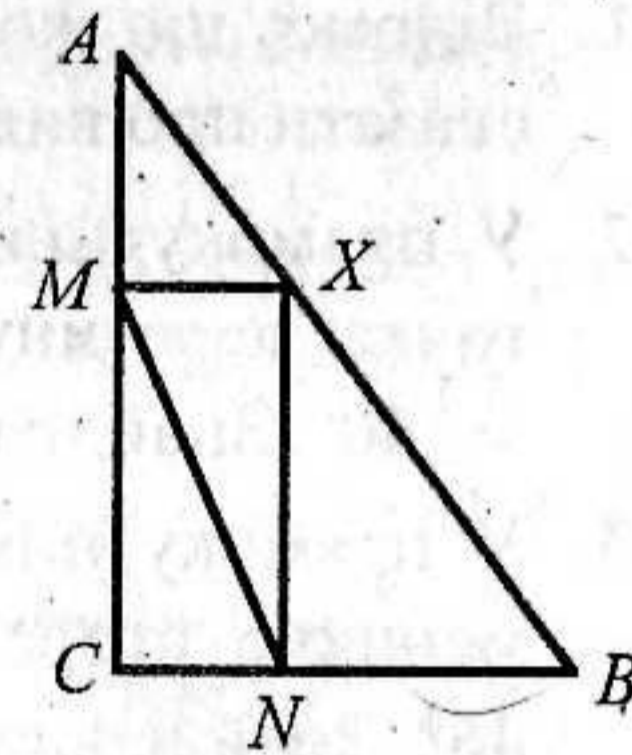


Рис. 69

Ромб

46. У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD є бісектрисами його кутів. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — ромб.
47. На рисунку 70 чотирикутник $ABCD$ — ромб. Знайдіть кут α .

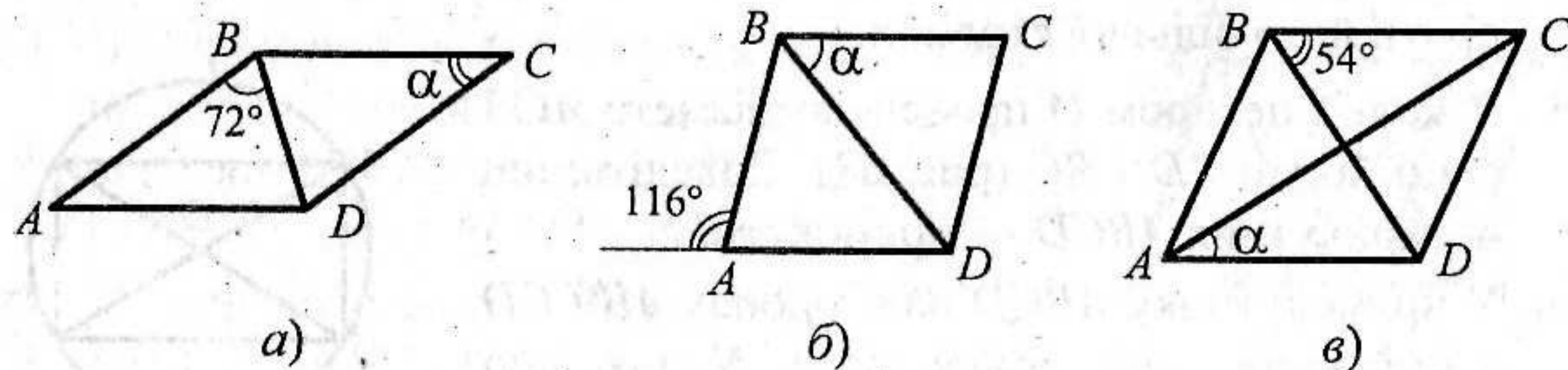


Рис. 70

48. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює 30° .
49. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, які відносяться як 3 : 7.
50. Відрізки CM і CN — висоти ромба $ABCD$ (рис. 71). Доведіть, що $BM = DN$.
51. Кут між висотами, проведеними з вершини гострого кута ромба, дорівнює 140° . Знайдіть кути ромба.
52. На сторонах BC і CD ромба $ABCD$ вибрано відповідно точки E і F так, що $BE = DF$. Доведіть, що $AE = AF$.
53. На сторонах AB і BC ромба $ABCD$ вибрано відповідно точки K і E так, що $BK = BE$. Доведіть, що відрізок KE паралельний діагоналі AC .
54. Кут між продовженням висоти ромба, проведеної з вершини гострого кута, і продовженням діагоналі, що сполучає вершини тупих кутів, дорівнює 34° . Знайдіть кути ромба.
55. Знайдіть кути ромба, висота якого дорівнює 2 см, а периметр — 16 см.

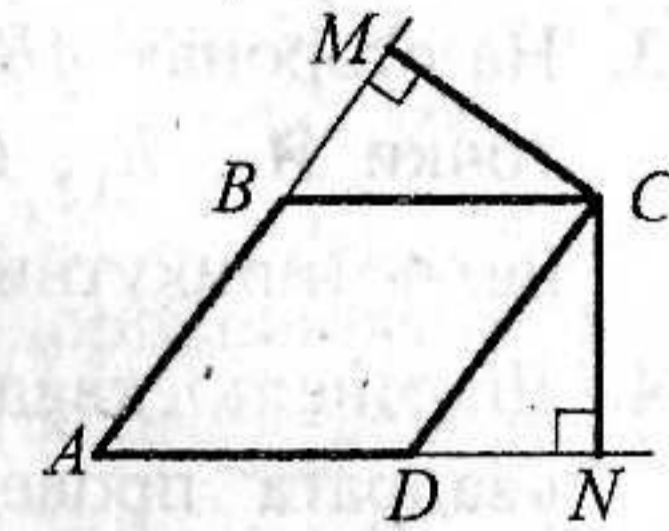


Рис. 71

56. Два рівних ромба розміщено так, як показано на рисунку 72. Визначте вид чотирикутника $OEBF$.
57. У паралелограмі $ABCD$ через точку перетину діагоналей проведено пряму, перпендикулярну діагоналі AC , яка перетинає сторони BC і AD у точках E і F відповідно. Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — ромб.
58. Відрізок AE — бісектриса трикутника ABC . Через точку E проведено прями, які паралельні сторонам AB і AC і перетинають сторони AC і AB у точках K і M відповідно. Доведіть, що чотирикутник $AKEM$ — ромб.
59. Побудуйте ромб:
1) за двома діагоналями;
2) за кутом і діагоналлю, яка виходить з вершини цього кута.
60. Побудуйте ромб, якщо задано три точки, які є серединами його сторін.

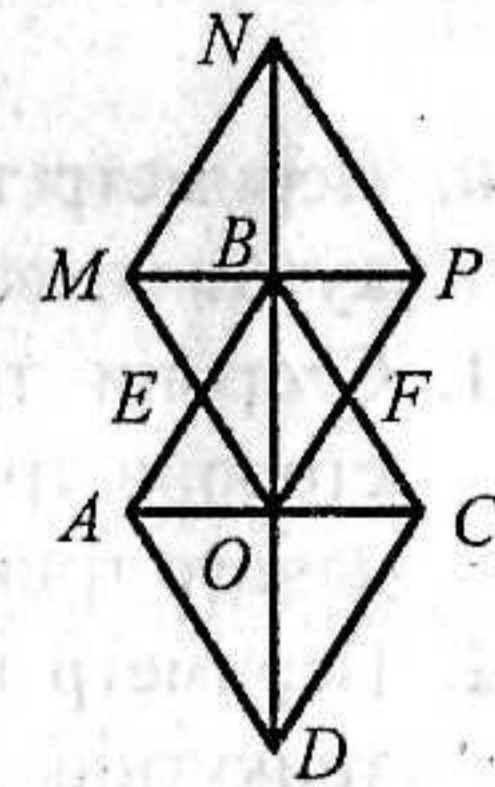


Рис. 72

Квадрат

61. Доведіть, що ромб, діагоналі якого рівні, є квадратом.
62. Точка перетину діагоналей квадрата віддалена від його сторони на 8 см. Знайдіть периметр квадрата.
63. На сторонах AB , BC , CD , AD квадрата $ABCD$ вибрано відповідно точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 так, що $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Доведіть, що чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат.
64. Діагональ квадрата дорівнює 8 см. Через кожну з вершин квадрата проведено пряму, паралельну відповідній діагоналі. Визначте периметр і вид утвореного чотирикутника.
65. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат, що має з ним спільний кут. Знайдіть периметр квадрата, якщо катет трикутника дорівнює 4 см.
66. Доведіть, що точки перетину бісектрис кутів прямокутника є вершинами квадрата.
67. У квадраті $ABCD$ на продовженні сторони BC за точку C вибрано точку K так, що $\angle KAD = 2\angle CAK$. Знайдіть периметр квадрата, якщо $AK = 8$ см.
68. Побудуйте квадрат за його діагоналлю.
69. Побудуйте квадрат за сумою довжин діагоналі та сторони.

Середня лінія трикутника

70. Периметр трикутника, утвореного середніми лініями даного трикутника, дорівнює 12 см. Знайдіть периметр даного трикутника.
71. Сторони трикутника дорівнюють 16 см, 8 см, 12 см. Знайдіть сторони трикутника, вершини якого є серединами середніх ліній даного трикутника.
72. Периметр трикутника, вершини якого — середини сторін даного трикутника, дорівнює 54 см, а сторони даного трикутника відносяться як 3 : 7 : 8. Знайдіть сторони даного трикутника.
73. Визначте вид трикутника, якщо дві його середні лінії перпендикулярні і рівні.
74. Сторони прямокутника $ABCD$ дорівнюють 56 см і 8 см. Точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 — середини відрізків OA , OB , OC і OD відповідно, де точка O — точка перетину діагоналей прямокутника (рис. 73). Визначте вид чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$ і обчисліть його периметр.

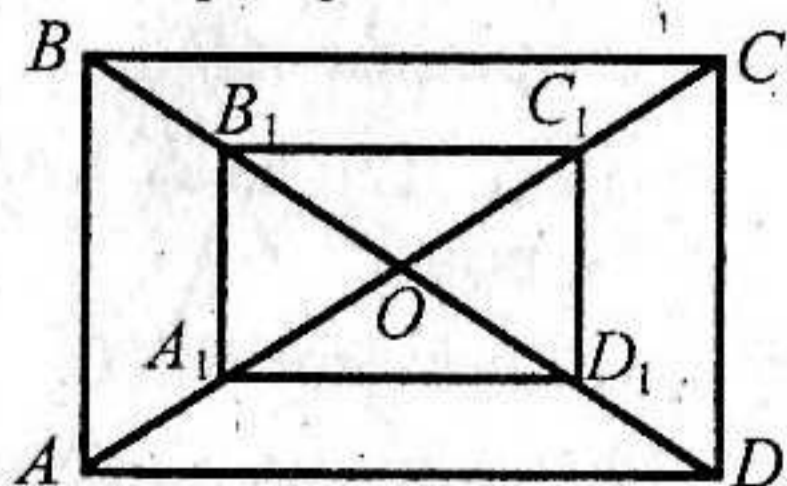


Рис. 73

75. У ромбі $ABCD$ точки E , F , K — середини сторін AB , BC і CD відповідно (рис. 74). Доведіть, що $EF \perp FK$.
76. Визначте вид чотирикутника, вершинами якого є середини сторін:
 - 1) прямокутника;
 - 2) ромба.

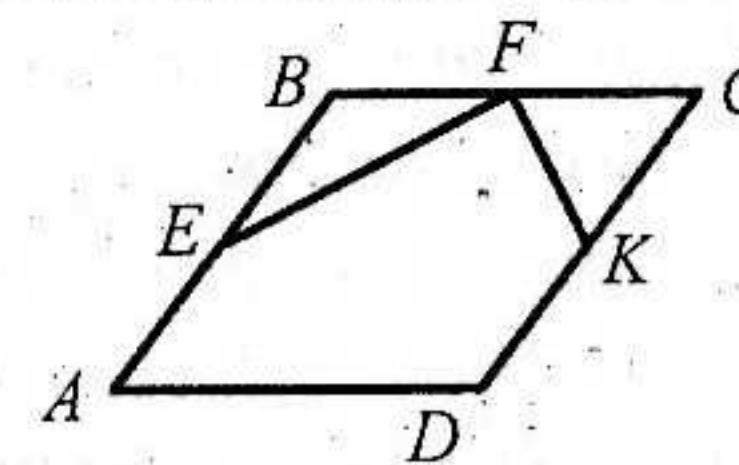


Рис. 74

77. Діагоналі чотирикутника перпендикулярні і дорівнюють по 8 см. Знайдіть периметр чотирикутника, вершини якого є серединами сторін даного чотирикутника, і визначте його вид.
78. Менша сторона прямокутника дорівнює 6 см, а периметр чотирикутника, вершини якого — середини сторін даного прямокутника, дорівнює 24 см. Визначте вид утвореного чотирикутника і знайдіть кут, який утворює діагональ прямокутника з більшою стороною.
79. Через вершини трикутника ABC проведено прями, паралельні протилежним сторонам. Ці прями при перетині утворили трикутник $A_1B_1C_1$. Доведіть, що висоти трикутника ABC є середніми перпендикулярами сторін трикутника $A_1B_1C_1$.
80. Побудуйте трикутник за двома точками — серединами двох сторін трикутника і кутами, які утворюють ці сторони з третьою стороною трикутника.
81. Побудуйте ромб, серединами двох сусідніх сторін якого є дві дані точки і діагональ якого належить даній прямій, причому ця пряма не перетинає відрізок, що з'єднує дані точки.

Трапеція

82. Два кути трапеції дорівнюють 37° і 126° . Знайдіть два інших її кути.
83. Чи існує трапеція, у якої два протилежні кути тупі? Якщо відповідь позитивна, зробіть рисунок.
84. Чи існує трапеція, у якої три кути прямі? Якщо відповідь позитивна, зробіть рисунок.
85. Чи можуть кути трапеції, взяті послідовно, відноситись як 5 : 4 : 6 : 3?
86. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини гострого кута, утворює з бічною стороною кут 24° . Знайдіть кути трапеції.
87. У прямокутній трапеції гострий кут у 4 рази менший від тупого. Знайдіть кути трапеції.

88. У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює більшій основі і утворює з нею кут 38° . Знайдіть кути трапеції.
89. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо її протилежні кути відносяться як $1 : 3$.
90. У середині трапеції $ABCD$ позначено точку O , рівновіддалену від основ трапеції і бічної сторони AB . Доведіть, що кут AOB дорівнює 90° .
91. У рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює меншій основі, а кут між діагоналями, протилежний основі, — 110° . Знайдіть кути трапеції.
92. У рівнобічній трапеції діагональ перпендикулярна до бічної сторони і є бісектрисою гострого кута. Знайдіть кути трапеції.
93. Діагоналі рівнобічної трапеції $ABCD$ ($AB = CD$) перетинаються в точці O . Доведіть, що $AO = OD$.
94. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 15 см. Знайдіть відрізки, на які поділяє більшу основу висота, проведена з вершини тупого кута.
95. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює 5 см. Висота, проведена з вершини тупого кута, поділяє більшу основу на відрізки, один з яких дорівнює 2 см. Знайдіть більшу основу трапеції.
96. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 12 см, а бічна сторона — 4 см. Гострий кут трапеції дорівнює 60° . Знайдіть меншу основу трапеції.
97. У рівнобічній трапеції з тупим кутом 120° через вершину тупого кута проведено пряму, яка паралельна бічній стороні і відтинає від більшої основи відрізок завдовжки 12 см. Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює 16 см.
98. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою кута при більшій основі. Більша основа трапеції дорівнює 26 см, а периметр — 50 см. Знайдіть меншу основу трапеції.
99. Периметр трапеції дорівнює 36 см, а її менша основа — 5 см. Через вершину тупого кута трапеції проведено пряму, яка перетинає більшу основу і паралельна бічній стороні. Знайдіть периметр трикутника, який ця пряма відтинає від даної трапеції.
100. У рівнобічній трапеції діагоналі перпендикулярні. Висота трапеції дорівнює 8 см. Знайдіть периметр трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 12 см.

101. У прямокутній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута. Основи трапеції дорівнюють 18 см і 12 см. Знайдіть периметр трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 30° .
102. Побудуйте трапецію за основами і діагоналями.

Середня лінія трапеції

103. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її основи дорівнюють:
1) 7 см і 9 см; 2) a і $7a$.
104. Знайдіть основу трапеції, якщо її друга основа і середня лінія відповідно дорівнюють: 1) 9 см і 5 см; 2) a і b .
105. Чи може середня лінія трапеції дорівнювати одній з основ? Відповідь обґрунтуйте.
106. Середня лінія трапеції дорівнює 24 см, а її основи відносяться як $3 : 5$. Знайдіть основи трапеції.
107. Відрізки, на які діагональ трапеції поділяє середню лінію, відносяться як $5 : 9$, а їх різниця дорівнює 12 см. Знайдіть основи трапеції.
108. Висота прямокутної трапеції, проведена з вершини тупого кута, поділяє її основу на відрізки, перший з яких, рахуючи від вершини прямого кута, на 4 см більший за другий. Знайдіть основи трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 13 см.
109. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута, а одна з основ на 6 см більша за іншу. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її периметр дорівнює 74 см.
110. Середня лінія рівнобічної трапеції дорівнює її висоті. Доведіть, що діагоналі цієї трапеції перпендикулярні.
111. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 18 см, а більша основа — 32 см. Кут між ними дорівнює 60° . Знайдіть середню лінію трапеції.

Центральні і вписані кути

112. Скільки градусів містить центральний кут кола, який спирається на дугу, що становить: 1) $\frac{1}{3}$ кола; 2) $\frac{7}{9}$ кола; 3) $\frac{5}{18}$ кола?
113. Знайдіть градусні міри двох дуг кола, на які його поділяють дві точки, якщо градусна міра однієї з дуг у 4 рази більша за градусну міру другої.
114. Знайдіть вписаний кут, якщо градусна міра дуги, на яку він спирається, дорівнює: 1) 32° ; 2) 134° ; 3) 270° ; 4) 320° ; 5) 2β .

115. Точка A кола і його центр O лежать по різні сторони від хорди MN . Знайдіть: 1) кут MAN , якщо $\angle MON = 136^\circ$; 2) кут MON , якщо $\angle MAN = 129^\circ$.
116. Точки K і D лежать на колі по одну сторону від хорди AB . Знайдіть кут AKB , якщо $\angle ADB = 129^\circ$.
117. Точки K і D лежать на колі по різні сторони від хорди AB , $\angle AKB = 107^\circ$. Знайдіть кут ADB .
118. Навколо трикутника DEF описано коло з центром у точці O . Знайдіть кут DOF , якщо: 1) $\angle E = 38^\circ$; 2) $\angle E = 148^\circ$.
119. Хорди CD і CE лежать по різні сторони від центра O кола, $\angle ECD = 84^\circ$, $\angle COE : \angle DOE = 9 : 14$. Знайдіть кути COE і DOE .
120. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, вписаного в коло, основа якого стягує дугу, градусна міра якої 192° .
121. Кінці хорди поділяють коло на дві дуги, градусні міри яких відносяться як $8 : 7$. Знайдіть вписані кути, які спираються на цю хорду.
122. У колі проведено хорду AB . Через точку A проведено пряму, яка перпендикулярна до хорди AB і поділяє більшу з дуг кола у відношенні $5 : 2$. Знайдіть градусні міри дуг, на які точки A і B поділяють коло.
123. Точки A, B, C і D поділяють коло на 4 дуги так, що $\cup AB : \cup BC : \cup CD : \cup AD = 3 : 5 : 7 : 9$. Знайдіть кути чотирикутника $ABCD$.
124. Точки D і B кола лежать по одну сторону від діаметра AC (рис. 75). Знайдіть кут ABD , якщо $\angle DAC = 52^\circ$.

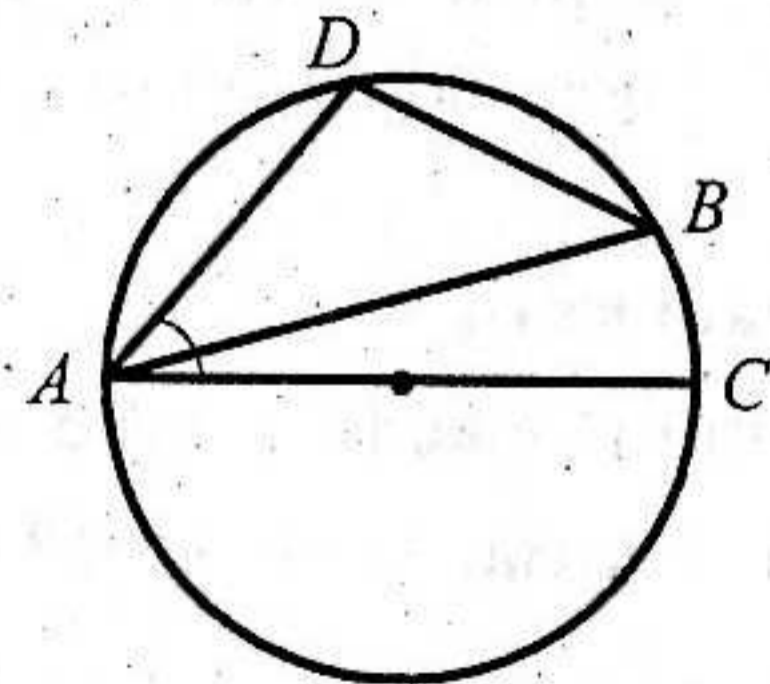


Рис. 75

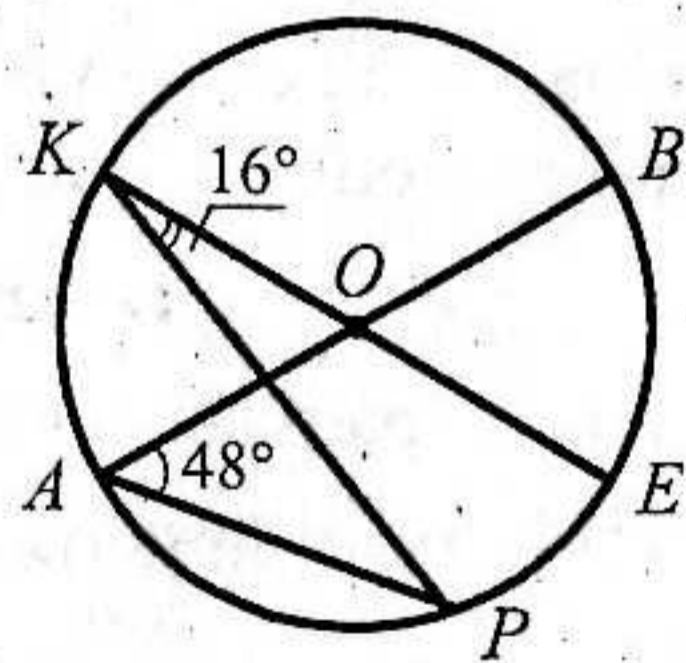


Рис. 76

125. У колі з центром O проведено діаметри AB і KE . Точки P і E кола лежать по одну сторону від діаметра AB (рис. 76). Знайдіть кут ABE , якщо $\angle PKE = 16^\circ$, $\angle BAP = 48^\circ$.

126. На основі AB рівнобедреного трикутника ABC як на діаметрі побудовано півколо з центром O , яке перетинає сторони AC і BC у точках D і E відповідно. Знайдіть градусні міри дуг AD , DE і BE , якщо $\angle ACB = 86^\circ$.
127. Продовження висоти BD гострокутного трикутника ABC перетинає коло, описане навколо цього трикутника, у точці F , H — точка перетину висот трикутника. Доведіть, що $HD = DF$.
128. Два кола перетинаються в точках D і C . Через точку D проведено січну, яка перетинає кола в точках E і F . Доведіть, що величина кута FCE є сталою для кожної січної, що проходить через точку D .
129. Точка O — центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника DEF . Знайдіть кути трикутника DEF , якщо $\angle DOE = 116^\circ$. Скільки розв'язків має задача?

Вписані і описані чотирикутники

130. Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо:
1) $\angle B = 82^\circ$, $\angle D = 108^\circ$; 2) $\angle A = 64^\circ$, $\angle B = 116^\circ$?
131. Знайдіть кути A і B чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle C = 37^\circ$, $\angle D = 106^\circ$.
132. Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, кути якого A, B, C і D відповідно пропорційні числам:
1) 3, 7, 6, 2; 2) 5, 9, 10, 7?
133. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. Кут A більший за кут B на 58° і у 4 рази більший за кут C . Знайдіть кути чотирикутника.
134. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle BAD = 74^\circ$, $\angle BCD = 106^\circ$, $\angle ABD = 47^\circ$, $\angle CBD = 58^\circ$. Знайдіть кут між діагоналями чотирикутника, який лежить проти сторони BC .
135. Діагоналі рівнобічної трапеції перетинаються під прямим кутом. Знайдіть положення центра кола, описаного навколо трапеції, відносно трапеції.
136. Бічна сторона рівнобічної трапеції, у яку можна вписати коло, дорівнює 12 см. Знайдіть периметр трапеції.
137. Коло, вписане в прямокутну трапецію, поділяє точкою дотику більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 6 см і 14 см. Знайдіть висоту трапеції, якщо її периметр дорівнює 64 см.

Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки

138. Поділіть даний відрізок на п'ять рівних частин.

139. На стороні AB паралелограма $ABCD$ (рис. 77) позначили точки M і N , а на стороні CD — точки E і F так, що $BN = NM = MA = CE = EF = FD$. Відрізки BE , NF , MD перетинають діагональ AC у точках R , Q , P відповідно. Доведіть, що $AP = PQ = QR = RC$.

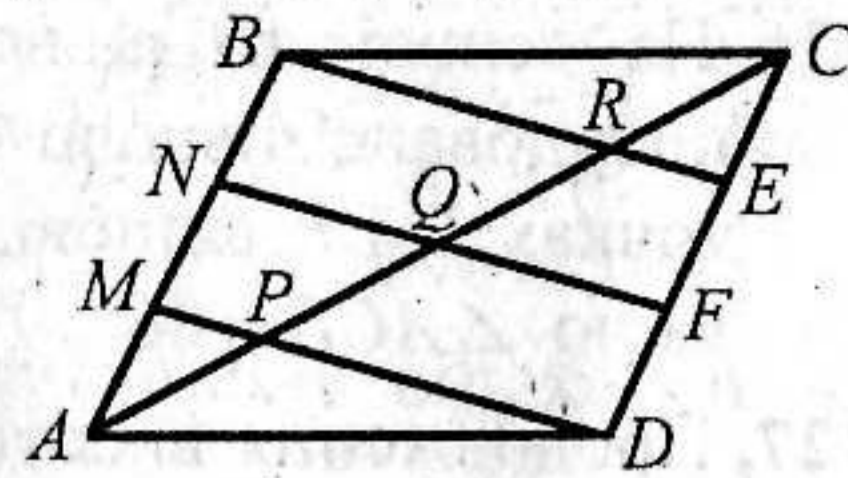


Рис. 77

140. Точки A і B лежать по різні сторони від прямої l , точка M — середина відрізка AB . Точки A і M віддалені від прямої l на 6 см і 1 см відповідно. Знайдіть відстань від точки B до прямої l .
141. Точка K — середина катета BC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$). Відстань від точки K до гіпотенузи AB дорівнює 3 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

142. Точка K — середина бічної сторони AB рівнобічної трапеції $ABCD$ (рис. 78), відрізки KP і KE паралельні діагоналям AC і BD трапеції відповідно. Доведіть, що $KP = KE$.

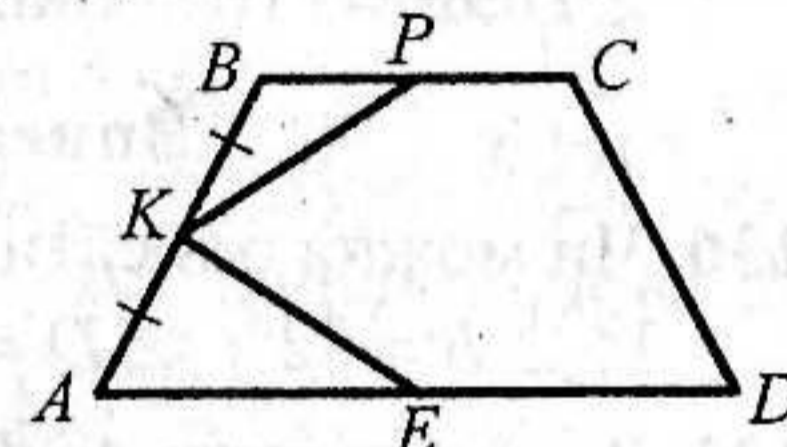


Рис. 78

143. Бічну сторону трапеції поділено на 4 рівні частини. Через точки поділу проведено прямі, паралельні основам. Два перших відрізки цих прямих, рахуючи від меншої основи, розміщені між бічними сторонами трапеції, відповідно дорівнюють 4 см і 7 см. Знайдіть основи трапеції.
144. Сторону AB трикутника ABC поділено на три рівні частини. Через точки поділу проведено прямі, паралельні стороні BC . Найменший з відрізків цих прямих, які містяться між сторонами трикутника, дорівнює 3 см. Знайдіть сторону BC .
145. Основи трапеції дорівнюють 8 см і 14 см. Знайдіть відрізки, на які діагональ поділяє середню лінію трапеції.
146. Діагональ трапеції поділяє середню лінію на відрізки, один з яких на 5 см більший за інший. Знайдіть більшу основу трапеції, якщо менша дорівнює 6 см.
147. Діагоналі трапеції поділяють її середню лінію на три рівні частини. Знайдіть більшу основу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 6 см.
148. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і поділяє середню лінію трапеції на відрізки завдовжки 6 см і 8 см. Знайдіть периметр трапеції.

149. Паралельні прямі m і n перетинають сторони кута ABC (рис. 79). Знайдіть довжину відрізка MN , якщо $BE = 4$ см, $EF = 12$ см, $BM = 5$ см.

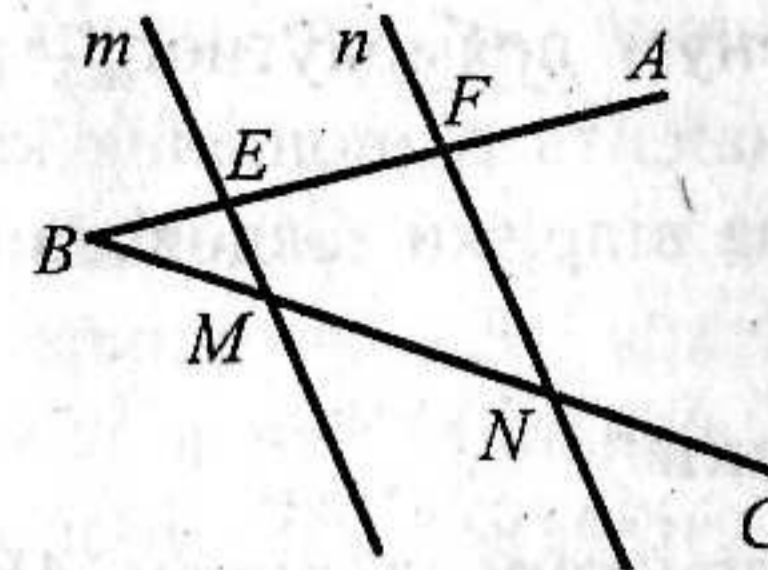


Рис. 79

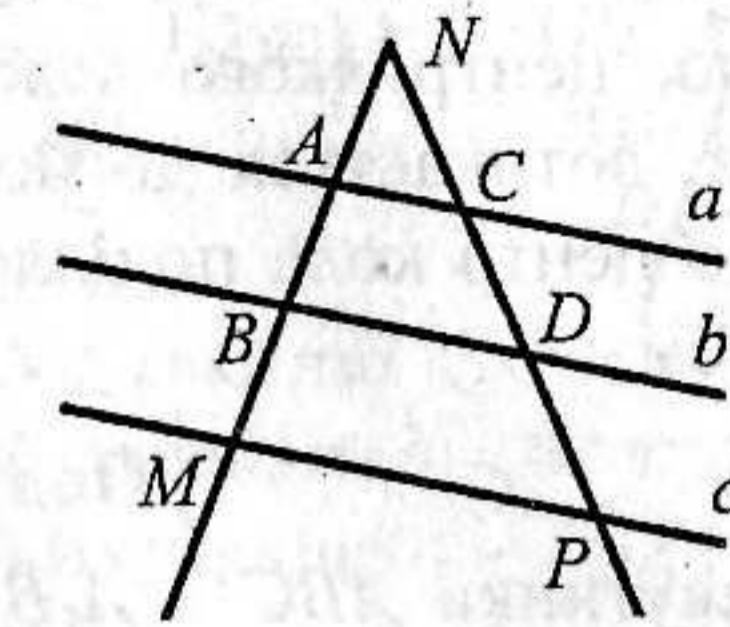


Рис. 80

150. Паралельні прямі a , b і c перетинають сторони кута MNP (рис. 80). Знайдіть довжини відрізків CD і MB , якщо $AN = 2$ см, $NC = 3$ см, $DP = 9$ см, $AB = 4$ см.
151. Паралельні прямі c і d перетинають сторони кута ABC (рис. 81). Знайдіть довжину відрізка EF , якщо $BE = 4$ см, $MN = 9$ см, $BN = EF$.

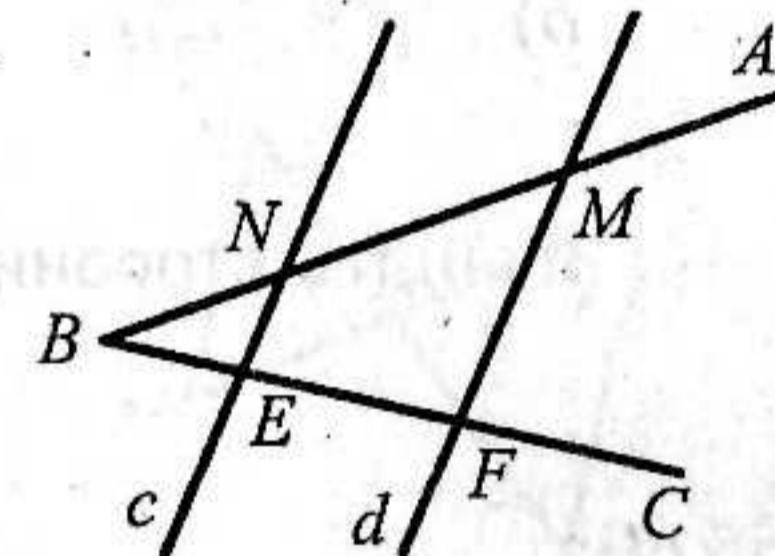


Рис. 81

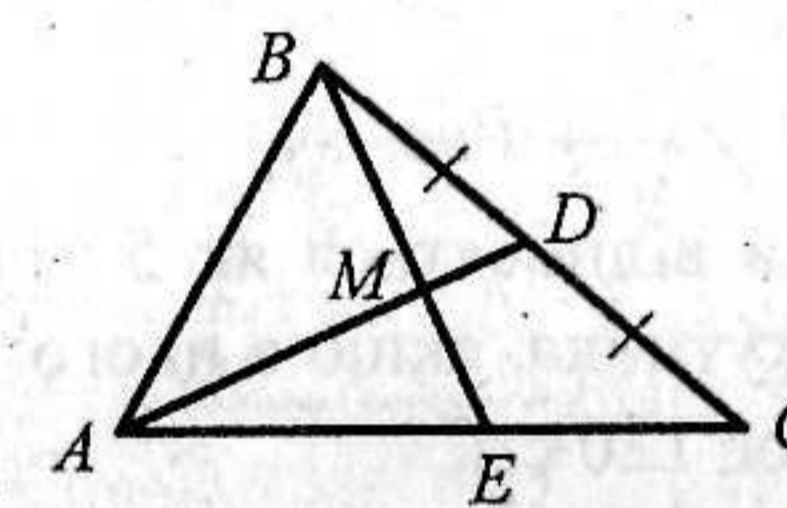


Рис. 82

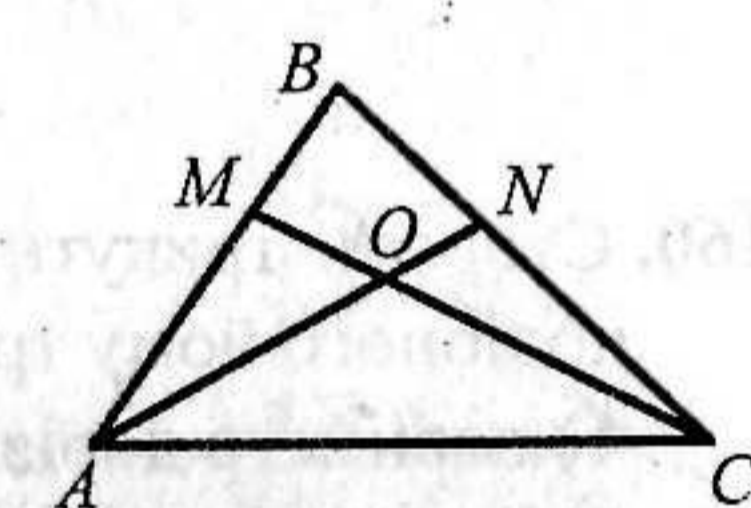


Рис. 83

152. На стороні AC трикутника ABC взято точку E так, що $AE : EC = 5 : 4$ (рис. 82). У якому відношенні відрізок BE поділяє медіану AD ?
153. На рисунку 83 $BN : NC = 5 : 9$, $CO : OM = 3 : 1$. Знайдіть відношення $AM : MB$.
154. Медіана рівностороннього трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть відстань від точки перетину медіан до сторін трикутника.
155. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) точка M перетину медіан віддалена від вершини B на 4 см. Знайдіть відстань від середини бічної сторони трикутника до його основи.
156. Відрізок AK — бісектриса трикутника ABC . Знайдіть:
- 1) відрізки BK і KC , якщо $AB = 8$ см, $AC = 12$ см, $BC = 10$ см;
 - 2) сторону AB , якщо $BK : KC = 3 : 7$, $AC = 28$ см;
 - 3) сторони AB і AC , якщо $AC - AB = 9$ см, $BK : KC = 4 : 7$.

157. У прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписано квадрат $MKDC$ так, що точка K лежить на гіпотенузі AB . Знайдіть довжини відрізків AK і BK , якщо $AC = 21$ см, $BC = 28$ см, $AB = 35$ см.

158. Коло, центр якого лежить на гіпотенузі прямокутного трикутника, дотикається до його катетів. Знайдіть відношення катетів, якщо центр кола поділяє гіпотенузу на відрізки завдовжки 15 см і 20 см.

Подібні трикутники

159. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні, причому сторонам AB і BC відповідають сторони A_1B_1 і B_1C_1 (рис. 84). Знайдіть невідомі сторони цих трикутників (розміри сторін дано в сантиметрах).

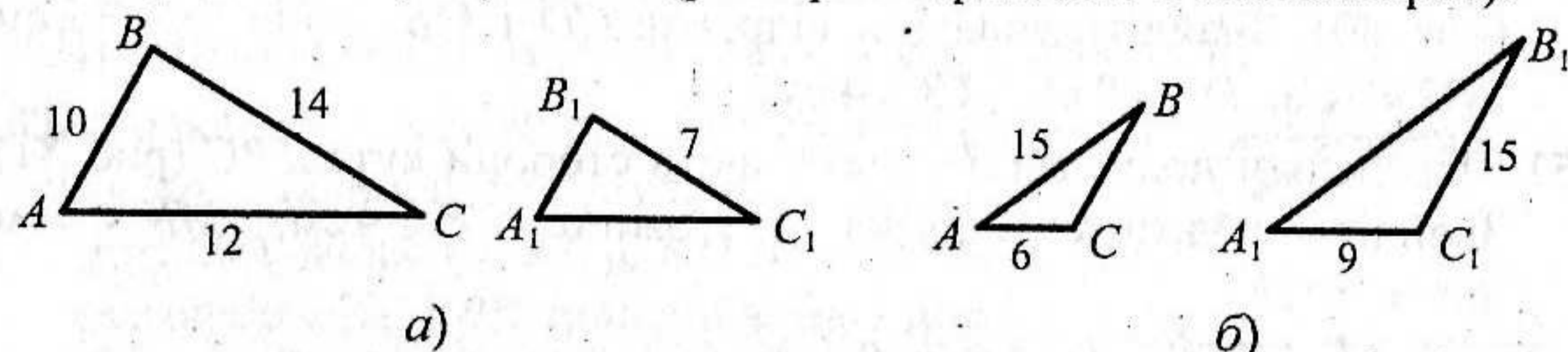


Рис. 84

160. Сторони трикутника відносяться як $5 : 11 : 14$. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, якщо в нього:

- 1) периметр дорівнює 120 см;
- 2) середня за величиною сторона дорівнює 55 см;
- 3) менша сторона дорівнює 15 см;
- 4) сума більшої і середньої за величиною сторін дорівнює 50 см.

161. Сторони трикутника відносяться як $5 : 9 : 12$, а більша сторона подібного йому трикутника дорівнює 48 см. Знайдіть інші сторони другого трикутника.

162. Периметри подібних трикутників відносяться як $3 : 4$, а сума їх середніх за величиною сторін дорівнює 112 см. Знайдіть сторони обох трикутників, якщо сторони одного з них відносяться як $4 : 8 : 7$.

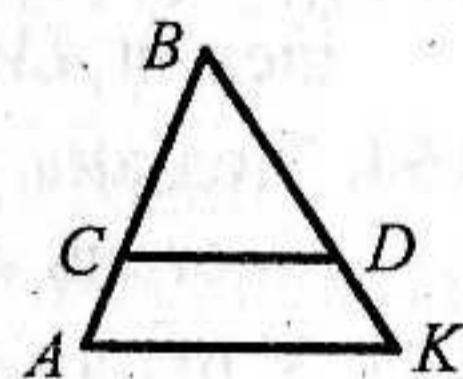


Рис. 85

163. На рисунку 85 $CD \parallel AK$. Запишіть пропорції, які починаються з відношення: 1) $\frac{BC}{BA}$; 2) $\frac{AK}{CD}$; 3) $\frac{BC}{CD}$; 4) $\frac{AB}{BK}$.

164. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M . Більша основа AD трапеції дорівнює 26 см, $MC = 9$ см, $CD = 4$ см. Знайдіть меншу основу трапеції.

165. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці N , $DN = 36$ см. Знайдіть CD , якщо $AB : BN = 5 : 7$ і $AD > BC$.

166. У трикутник ABC вписано паралелограм $DQCM$ (рис. 86), $AC = 10$ см, $MC = 4$ см, $QC = 9$ см. Знайдіть BC .

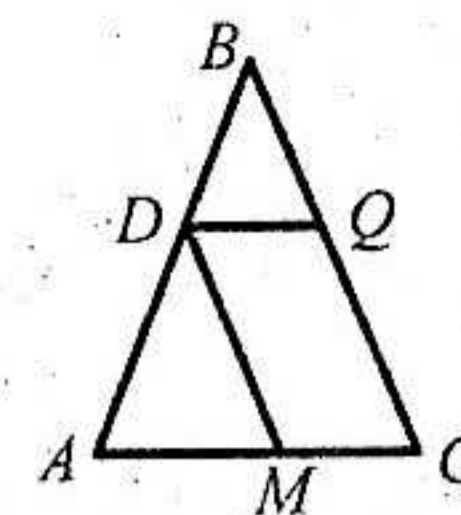


Рис. 86

167. У трикутник ABC вписано ромб $DMNA$ так, що кут A в них спільний, а вершина M належить стороні BC . Знайдіть сторону ромба, якщо $CM = 6$ см, $BM = 4$ см, $AB = 20$ см.

168. У трикутник зі стороною 12 см вписано прямокутник, сторони якого дорівнюють 8 см і 5 см. Більша сторона прямокутника належить даній стороні. Знайдіть висоту трикутника, проведену до даної сторони.

Перша ознака подібності трикутників

169. Укажіть пари подібних трикутників і доведіть їх подібність (рис. 87).

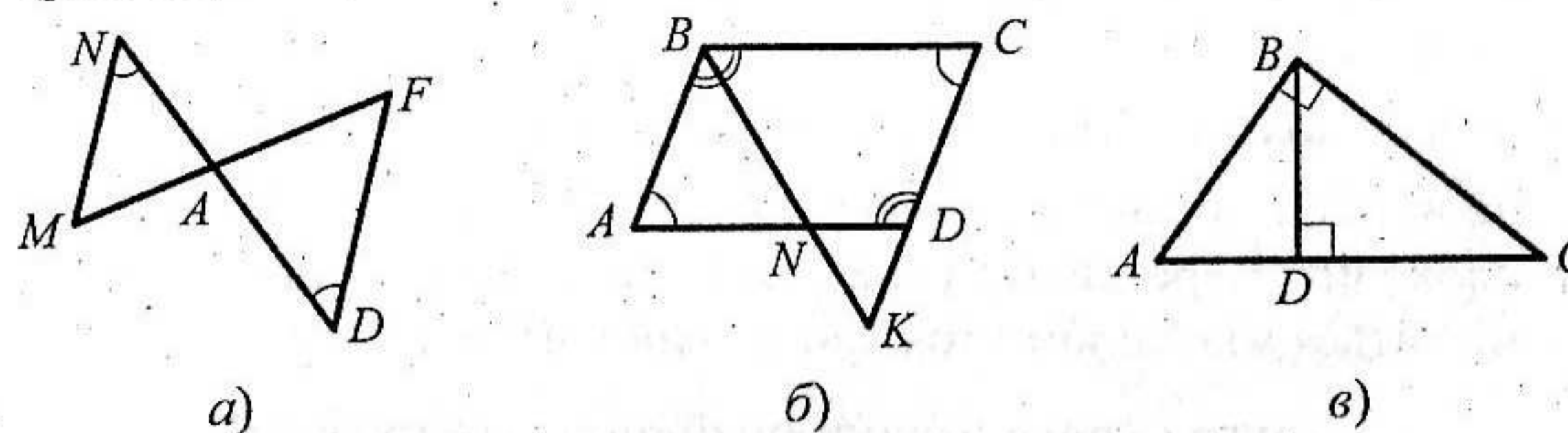


Рис. 87

170. Доведіть, що будь-які два рівносторонніх трикутники подібні.

171. Кути одного трикутника відносяться як $1 : 3 : 5$, а в другому трикутнику один з кутів на 40° більший за другий і на 40° менший від третього кута. Чи подібні ці трикутники?

172. У паралелограмі $ABCD$ проведено висоти BM і CN (рис. 88). Доведіть подібність трикутників ABM і BCN .

173. Висоти паралелограма дорівнюють 12 см і 18 см, а менша сторона паралелограма дорівнює 6 см. Знайдіть його більшу сторону.

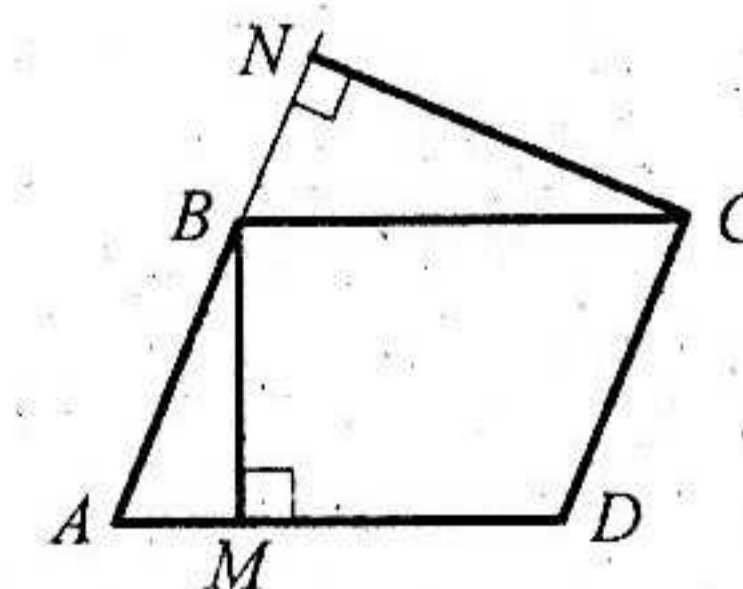


Рис. 88

174. Периметр паралелограма дорівнює 64 см, а його висоти — 7 см і 9 см. Знайдіть сторони паралелограма.

175. Точка перетину діагоналей трапеції поділяє одну з діагоналей на відрізки завдовжки 7 см і 11 см. Знайдіть основи трапеції, якщо їх різниця дорівнює 16 см.
176. У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) K — точка перетину діагоналей, $AK : KC = 9 : 4$, а $KD - BK = 10$ см. Знайдіть BD .
177. На стороні AB трикутника ABC позначено точку M так, що $\angle ACM = \angle ABC$, $AM = 9$ см, $BM = 7$ см. Знайдіть AC .
178. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці K . Знайдіть довжину відрізка AK , якщо $KB = 8$ см, $CK = 6$ см, $KD = 4$ см.
179. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці E , яка поділяє хорду AB на відрізки завдовжки 4 см і 9 см. На які відрізки поділяє точка E хорду CD , якщо один з них у 4 рази менший від другого?

180. Через точку M проведено до кола дотичну ME (E — точка дотику) і січну MK , відрізок DM якої, що лежить поза колом, дорівнює 4 см (рис. 89). Знайдіть довжину відрізка січної, що міститься всередині кола, якщо $ME = 6$ см.

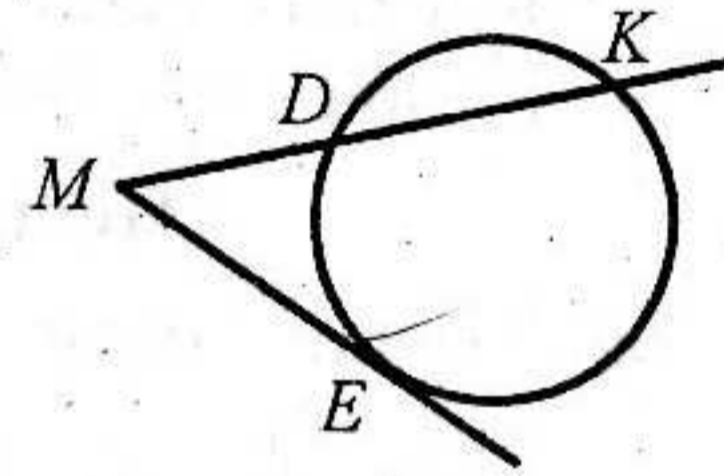


Рис. 89

181. Радіус кола дорівнює 10 см. Через точку A проведено до нього дотичну AB (B — точка дотику) і січну, яка проходить через центр кола. Знайдіть довжину відрізка січної, що міститься між колом і точкою A , якщо $AB = 24$ см.

Друга і третя ознаки подібності трикутників

182. Доведіть подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, зображених на рисунку 90 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

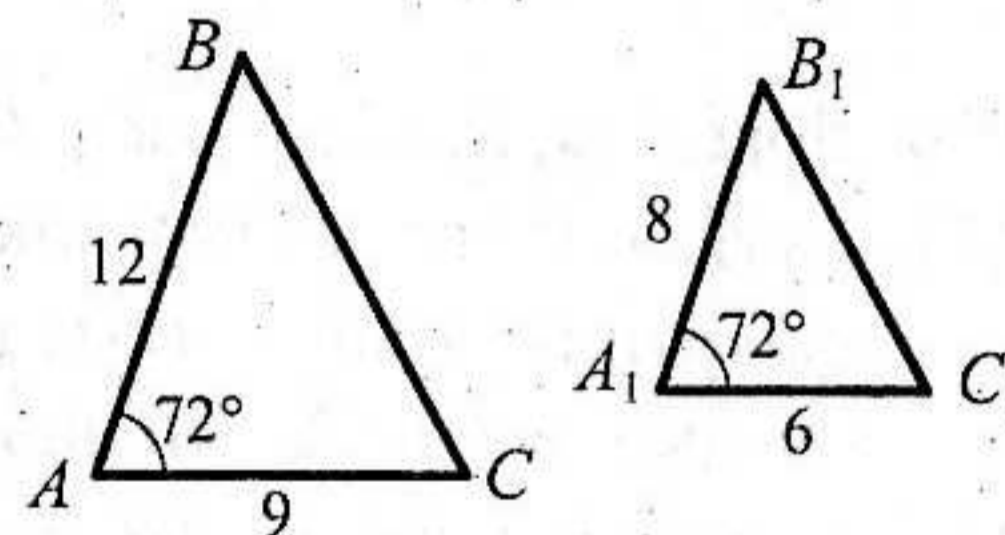


Рис. 90

183. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, а сторони трикутника ABC , які утворюють кут C , у 1,5 раза більші за сторони, які утворюють кут C_1 . Знайдіть сторони AB і A_1B_1 , якщо їх різниця дорівнює 3 см.
184. У трикутнику ABC $AC = 54$ см, $BC = 42$ см. На стороні CB відклали відрізок $BD = 35$ см, а на стороні AC — відрізок $CN = 9$ см. Чи подібні трикутники ABC і NDC ?

185. Доведіть, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, зображені на рисунку 91, подібні (довжини відрізків дано в сантиметрах).

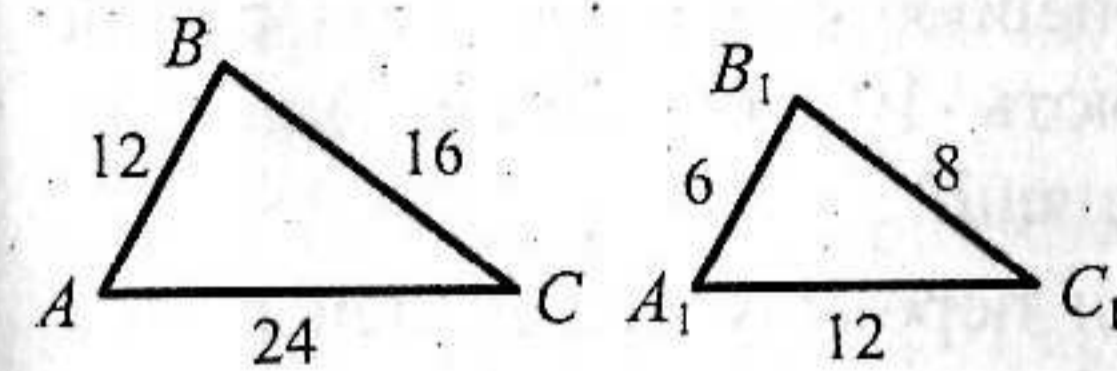


Рис. 91

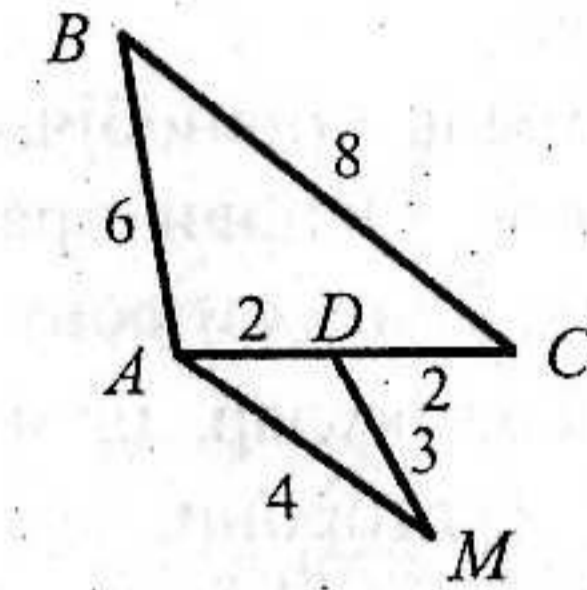


Рис. 92

186. Чи подібні трикутники ABC і ADM , зображені на рисунку 92 (довжини відрізків дано в сантиметрах)?
187. Визначте, чи подібні трикутники, якщо їх сторони дорівнюють:
1) 9 см, 10 см, 14 см і 36 см, 40 см, 56 см;
2) 7 см, 11 см, 13 см і 22 см, 33 см, 39 см.
188. Сторони одного трикутника дорівнюють 27 см, 33 см і 48 см, а сторони другого трикутника відносяться як 9 : 11 : 16. Чи подібні ці трикутники?
189. Два кола перетинаються в точках A і B . Через точки перетину кіл проведено прямі, які перетинаються в точці C і перетинають кола в точках M , K , P і E (рис. 93). Доведіть, що трикутники $СКР$ і $СМЕ$ подібні. Знайдіть $СК$ і $СР$, якщо $ME = 9$ см, $KP = 6$ см, $CM = 12$ см, $CE = 15$ см.

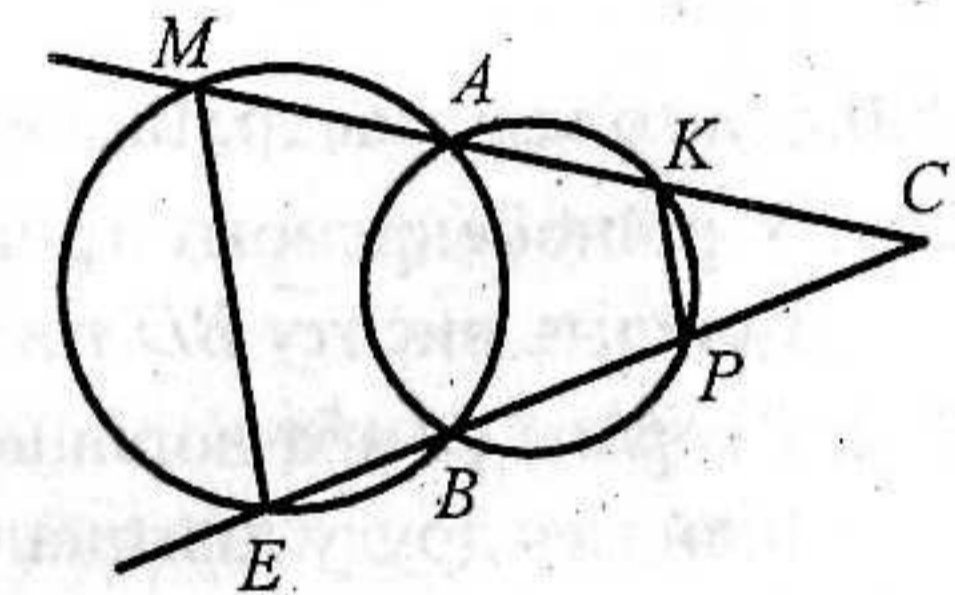


Рис. 93

Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику

190. Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену з вершини прямого кута, якщо вона поділяє гіпотенузу на відрізки завдовжки 12 см і 27 см.
191. Катет прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а його проекція на гіпотенузу — 9 см. Знайдіть гіпотенузу.
192. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, поділяє її на відрізки завдовжки 40 см і 10 см. Знайдіть катети трикутника.
193. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 18 см, а проекція другого катета на гіпотенузу — 9 см. Знайдіть другий катет і гіпотенузу.

194. Знайдіть висоту і бічну сторону рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 8 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.
195. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Основи трапеції дорівнюють 10 см і 26 см. Знайдіть висоту, бічну сторону і діагональ трапеції.
196. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, поділяє її на відрізки завдовжки 4 см і 25 см. Знайдіть діагоналі ромба.
197. Точка дотику кола, вписаного в рівнобічну трапецію, поділяє її бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 2 см. Знайдіть радіус вписаного кола та основи трапеції.

Теорема Піфагора

198. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: 1) 5 см і 12 см; 2) 25 см і 60 см.
199. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза і другий катет відповідно дорівнюють: 1) 17 см і 15 см; 2) 9 см і 5 см.
200. Діагональ квадрата дорівнює $2\sqrt{2}$ см. Знайдіть його сторону.
201. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB = BC = 37$ см, $AC = 24$ см. Знайдіть висоту BD трикутника.
202. Сторона ромба дорівнює 41 см, а одна з його діагоналей — 18 см. Знайдіть другу діагональ ромба.
203. Дві сторони прямокутного трикутника дорівнюють 4 см і 7 см. Знайдіть третю сторону трикутника. Розгляньте всі можливі випадки.
204. Знайдіть довжину невідомого відрізка x на рисунку 94 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

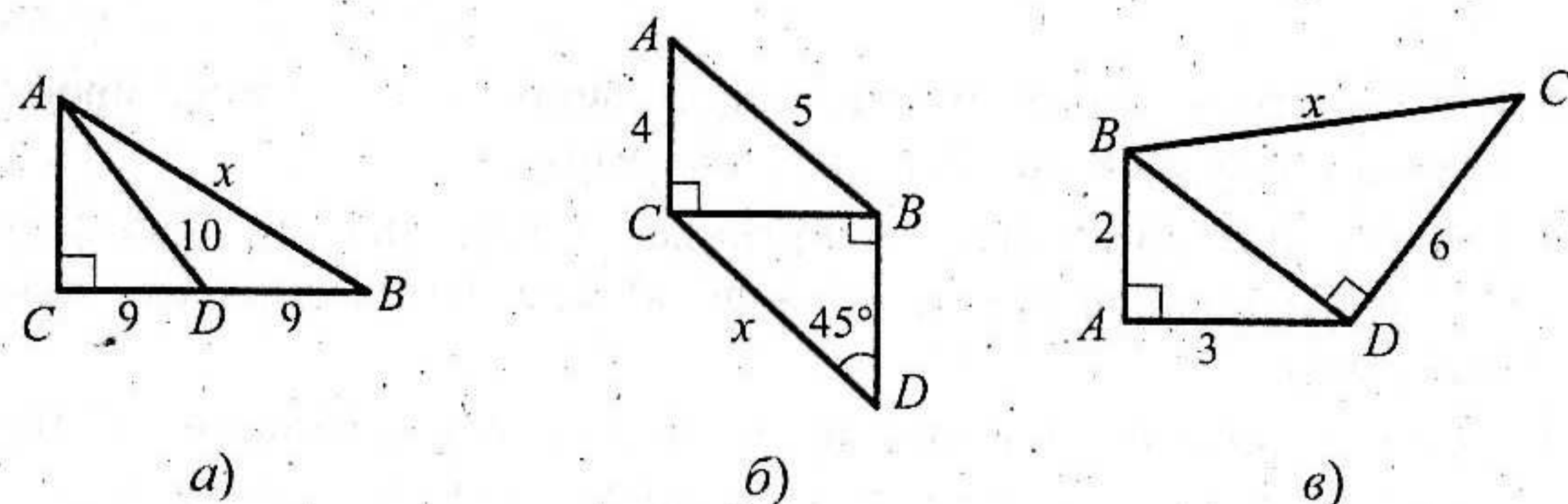


Рис. 94

205. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 80 см, а катети відносяться як 8 : 15. Знайдіть сторони трикутника.
206. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а другий менший від гіпотенузи на 4 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.
207. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) катет AC дорівнює 5 см, а медіана AM — 13 см. Знайдіть гіпотенузу AB .
208. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 75 см, а катети відносяться як 3 : 4. Знайдіть периметр трикутника.
209. У трикутнику ABC кут C тупий, $AC = 13$ см, $AB = 15$ см, а висота AE дорівнює 12 см. Знайдіть сторону BC .
210. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) висота AD дорівнює 8 см. Знайдіть бічну сторону трикутника, якщо $BD - DC = 2$ см.
211. Основа рівнобедреного трикутника на 2 см більша за бічну сторону. Знайдіть сторони трикутника, якщо його висота, проведена до основи, дорівнює 8 см.
212. Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до основи як 5 : 8. Периметр трикутника дорівнює 36 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до основи.
213. З точки до прямої проведено дві похилі. Довжина однієї з них дорівнює 15 см, а її проекція на цю пряму — 12 см. Знайдіть довжину другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут 45° .
214. З точки, яка знаходиться на відстані 10 см від прямої, проведено до неї дві похилі, довжини яких дорівнюють 26 см і 20 см. Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки розв'язків має задача?
215. З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 5 см і 7 см, а різниця їх проекцій на цю пряму — 4 см. Знайдіть відстань від точки до даної прямої.
216. З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких відносяться як 2 : 3, а довжини їх проекцій на цю пряму дорівнюють 2 см і 7 см. Знайдіть довжини похилих.
217. У прямокутний трикутник вписано коло радіусом 4 см. Точка дотику поділяє гіпотенузу на відрізки, довжини яких відносяться як 10 : 3. Знайдіть сторони трикутника.

218. У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику поділяє один з катетів на відрізки завдовжки 3 см і 5 см, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть гіпотенузу і другий катет трикутника.
219. Знайдіть діагональ квадрата, якщо вона більша за його сторону на 3 см.
220. Катети прямокутного трикутника відносяться як 3 : 4, а різниця відрізків, на які поділяє гіпотенузу бісектриса прямого кута, дорівнює 10 см. Знайдіть периметр трикутника.
221. Відношення бічної сторони до основи рівнобедреного трикутника дорівнює 5 : 6, а різниця відрізків, на які бісектриса кута при основі поділяє висоту, проведену до основи, дорівнює 6 см. Знайдіть сторони трикутника.
222. У трикутнику ABC $AB = BC = \sqrt{97}$ см. Точка перетину медіан віддалена від вершини B на 6 см. Знайдіть медіану даного трикутника, проведену до бічної сторони.
223. Висота рівнобічної трапеції дорівнює 9 см, а бічна сторона — 15 см. Чому дорівнює різниця основ трапеції?
224. У паралелограмі $ABCD$ сторона AB дорівнює 17 см, а висота BE поділяє сторону AD на відрізки $AE = 8$ см і $ED = 20$ см. Знайдіть діагональ BD паралелограма.
225. Основи трапеції дорівнюють 9 см і 11 см, а діагоналі — 12 см і 16 см. Знайдіть висоту трапеції.
226. Основи рівнобічної трапеції відносяться як 1 : 5, а радіус кола, вписаного в трапецію, дорівнює 7,5 см. Знайдіть сторони трапеції.
227. Хорда AB кола перпендикулярна радіусу ON (точка O — центр кола) і поділяє його на відрізки $OM = 9$ см і $MN = 6$ см. Знайдіть довжину хорди AB .
228. Радіуси двох кіл, які мають зовнішній дотик, дорівнюють 2 см і 8 см. Знайдіть довжину їх спільної зовнішньої дотичної.
229. Точки A і B лежать по одну сторону від прямої a на відстані 3 см і 9 см від неї відповідно. Знайдіть відстань між проекціями цих точок на пряму a , якщо $AB = 10$ см.

Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника

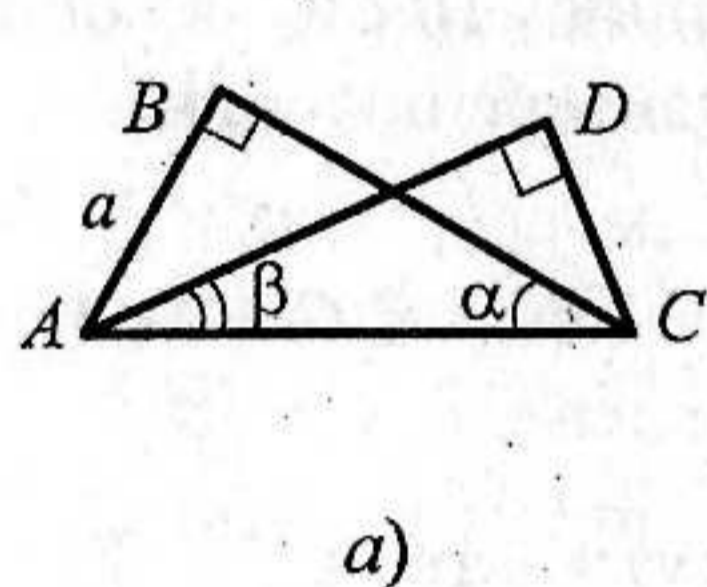
230. Побудуйте кут, косинус якого дорівнює: 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{3}{5}$.
231. Побудуйте кут, тангенс якого дорівнює: 1) $\frac{3}{5}$; 2) 2.

232. Побудуйте кут, синус якого дорівнює: 1) $\frac{2}{9}$; 2) 0,5.
233. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 6 см і 10 см. Знайдіть:
- 1) синус гострого кута, який лежить проти більшого катета;
 - 2) косинус гострого кута, прилеглого до меншого катета;
 - 3) тангенс гострого кута, який лежить проти більшого катета.
234. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 5 см і 12 см. Знайдіть:
- 1) тангенс гострого кута, який лежить проти більшого катета;
 - 2) косинус гострого кута, протилежного меншому катету;
 - 3) синус гострого кута, прилеглого до більшого катета.
235. Знайдіть $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{1}{6}$.
236. Знайдіть значення виразу:
- 1) $\operatorname{tg}^2 60^\circ + \sin 30^\circ$;
 - 2) $4 \sin^2 45^\circ + \cos 60^\circ$.
237. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а бічна сторона — 13 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс половини кута при вершині рівнобедреного трикутника.
238. У рівнобічній трапеції $ABCD$ $AB = CD = 2$ см, $BC = 6\sqrt{2}$ см, $AD = 8\sqrt{2}$ см. Знайдіть кути трапеції.

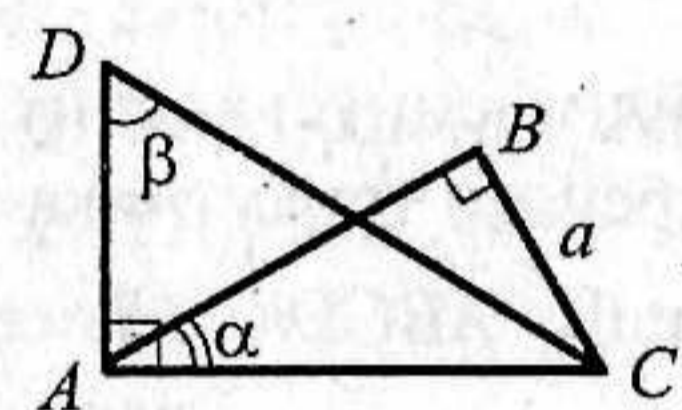
Розв'язування прямокутних трикутників

239. Знайдіть невідомі сторони прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), якщо:
- 1) $AC = 3$ см, $\cos A = \frac{1}{4}$;
 - 2) $BC = 5$ см, $\sin A = \frac{2}{3}$;
 - 3) $AC = 8$ см, $\operatorname{tg} B = 3$;
 - 4) $AB = 12$ см, $\cos B = \frac{4}{5}$;
 - 5) $AC = 6$ см, $\cos B = \frac{1}{3}$;
 - 6) $AB = 8$ см, $\operatorname{tg} B = \frac{6}{7}$.
240. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) за відомими елементами:
- 1) $AB = 12$ см, $\angle B = 53^\circ$;
 - 2) $BC = 6$ см, $\angle B = 64^\circ$;
 - 3) $AC = 10$ см, $\angle B = 73^\circ$;
 - 4) $AB = 14$ см, $BC = 6$ см;
 - 5) $BC = 9$ см, $AC = 12$ см.
241. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) висота BD дорівнює 6 см, $\angle A = 24^\circ$. Знайдіть бічну сторону і основу трикутника.

242. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) $AC = 12$ см, $\angle B = 64^\circ$. Знайдіть його бічну сторону і висоту, проведену до основи.
243. З точки, що знаходиться на відстані 8 см від прямої, проведено до неї дві похилі, які утворюють з прямою кути 30° і 45° . Знайдіть довжини похилих та їх проєкцій на дану пряму.
244. З точки, що знаходиться на відстані 10 см від прямої, проведено до неї дві похилі, які утворюють з прямою кути 30° і 60° . Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки розв'язків має задача?
245. Знайдіть невідомі сторони прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), якщо:
- 1) $AB = c$, $\angle B = \beta$;
 - 2) $AC = b$, $\angle A = \alpha$;
 - 3) $BC = a$, $\angle A = \alpha$.
246. За рисунком 95 знайдіть відрізки AD і CD .



a)



б)

Рис. 95

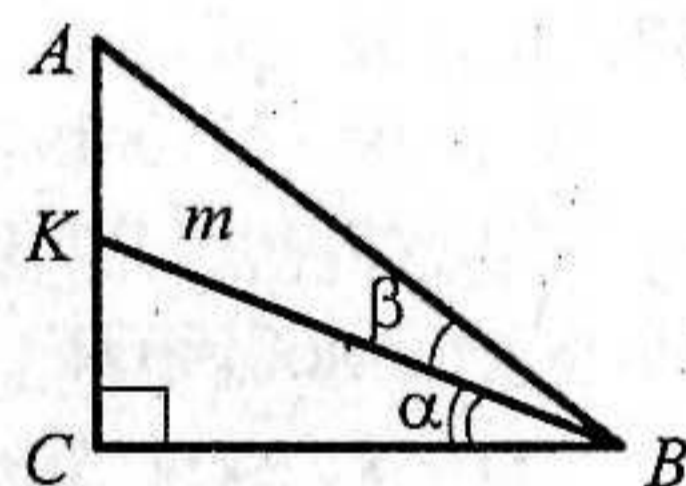


Рис. 96

247. У прямокутному трикутнику ABC (рис. 96) $\angle C = 90^\circ$, $BK = m$, $\angle CBK = \alpha$, $\angle ABK = \beta$. Знайдіть відрізок AK .
248. Діагональ прямокутника $ABCD$ дорівнює d . Діагональ BD утворює зі стороною CD кут β . Знайдіть сторони прямокутника.
249. Сторона ромба дорівнює a , а один з кутів дорівнює α . Знайдіть діагоналі ромба.
250. У рівнобічній трапеції $ABCD$ основи AD і BC відповідно дорівнюють 18 см і 12 см, а бічна сторона утворює кут 30° з основою. Знайдіть діагональ трапеції.
251. У прямокутній трапеції $ABCD$ $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $\angle BCD = 135^\circ$. Знайдіть сторони AD і CD трапеції.

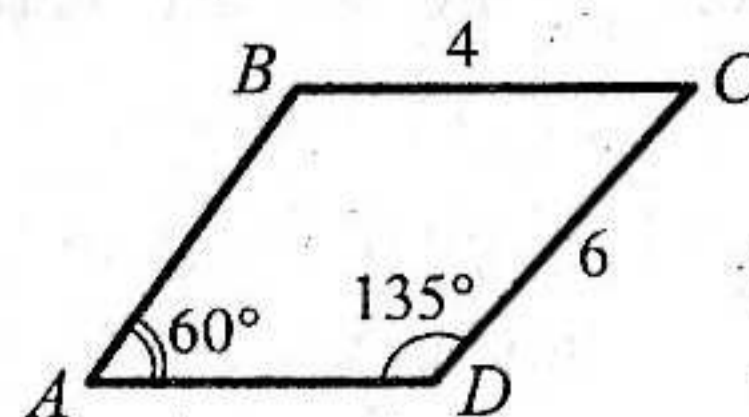


Рис. 97

252. У трапеції $ABCD$ (рис. 97) $BC = 4$ см, $CD = 6$ см, $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle ADC = 135^\circ$. Знайдіть основу AD трапеції.

Многокутники

253. Скільки діагоналей можна провести з однієї вершини опуклого дев'ятикутника? Знайдіть загальну кількість діагоналей опуклого дев'ятикутника.
254. Чи існує шестикутник, усі сторони якого рівні, а кути різні?
255. Чи може найбільший кут опуклого шестикутника дорівнювати 119° ?
256. Як зміниться сума кутів опуклого многокутника, якщо кількість його сторін збільшиться на 7?
257. Знайдіть кути опуклого дев'ятикутника, якщо їх градусні міри відносяться як $5 : 6 : 7 : 8 : 8 : 9 : 9 : 9 : 9$.
258. Один з кутів опуклого п'ятикутника дорівнює 115° , другий, третій і четвертий відносяться як $7 : 5 : 3$, а п'ятий дорівнює піврізниці другого і четвертого кутів. Знайдіть невідомі кути п'ятикутника.
259. Чи може сума двох кутів опуклого шестикутника бути більшою за суму чотирьох інших?
260. В опуклому многокутнику сума кутів дорівнює 2340° . Знайдіть кількість його сторін і діагоналей.
261. В опуклому многокутнику 54 діагоналі. Знайдіть кількість його сторін і суму кутів.

Поняття площі многокутника. Площа прямокутника

262. Знайдіть площу квадрата, діагональ якого дорівнює: 1) 6 см; 2) $a\sqrt{2}$.
263. Діагональ прямокутника дорівнює $12\sqrt{3}$ см і утворює зі стороною кут 60° . Знайдіть площу прямокутника.
264. Площа прямокутника дорівнює 144 см². Знайдіть його сторони, якщо одна з них у 8 разів більша за другу.
265. Площа прямокутника дорівнює 48 см². Знайдіть його сторони, якщо їх півсума дорівнює 7 см.
266. Площа квадрата у 2 рази більша за площу прямокутника. Сторона квадрата дорівнює 6 см, а одна із сторін прямокутника — 9 см. Знайдіть другу сторону прямокутника.
267. Знайдіть площу квадрата, якщо радіус кола, вписаного в нього, дорівнює r .

268. Чотирикутник $ABCD$ — квадрат (рис. 98). Відрізки MP і EF паралельні його сторонам, $AB = a$, $CP = CE = b$. Користуючись рисунком, доведіть формулу:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

269. Чи можуть квадрати, які мають рівні площі, бути нерівними?

270. Як зміниться площа квадрата, якщо його сторону:

- 1) збільшити у $\sqrt{3}$ разів;
- 2) збільшити у n разів?

271. Як зміниться площа квадрата, якщо його діагональ зменшити у 9 разів? Як при цьому зміниться периметр квадрата?

272. Як зміниться площа прямокутника, якщо:

- 1) одну з його сторін збільшити у 8 разів;
- 2) одну з його сторін зменшити у 3 рази;
- 3) обидві сторони зменшити у $\sqrt{5}$ разів;
- 4) одну сторону зменшити в 11 разів, а другу — у 10 разів;
- 5) одну сторону збільшити у $\sqrt{8}$ разів, а другу зменшити у $\sqrt{2}$ разів?

273. Відношення периметрів двох квадратів дорівнює 8. Знайдіть відношення їх площ.

274. У трикутник ABC , сторона AC якого дорівнює 6 см, а висота, проведена до неї, — 3 см, вписано квадрат $KDEF$ (рис. 99). Знайдіть площу квадрата.

275. Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює різниці площ двох даних квадратів.

276. Побудуйте квадрат, площа якого у 2 рази більша за площу даного прямокутника.

Площа паралелограма

277. Знайдіть площу паралелограма, сторона якого дорівнює 16 см, а висота, проведена до неї, — 9 см.

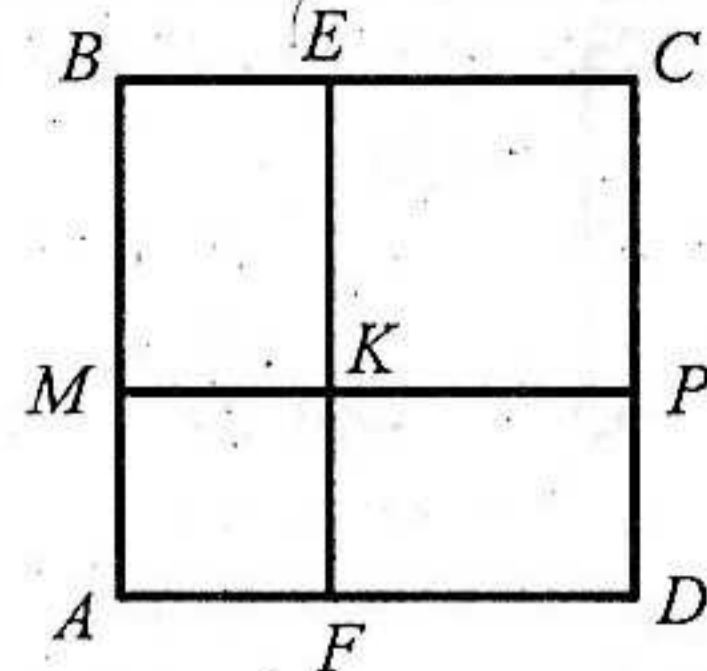


Рис. 98

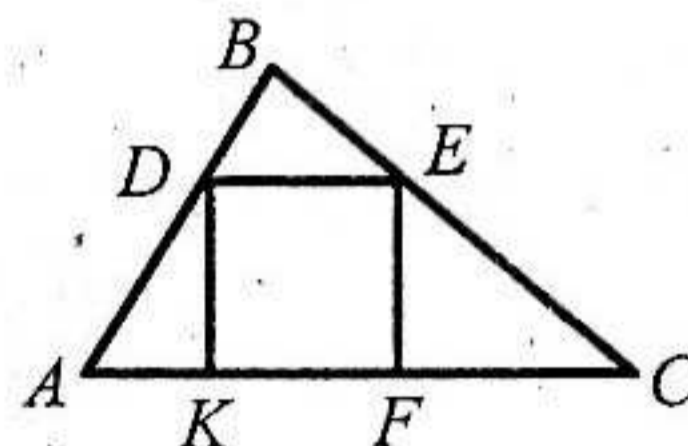


Рис. 99

278. Які з паралелограмів, зображених на рисунку 100, рівновеликі?

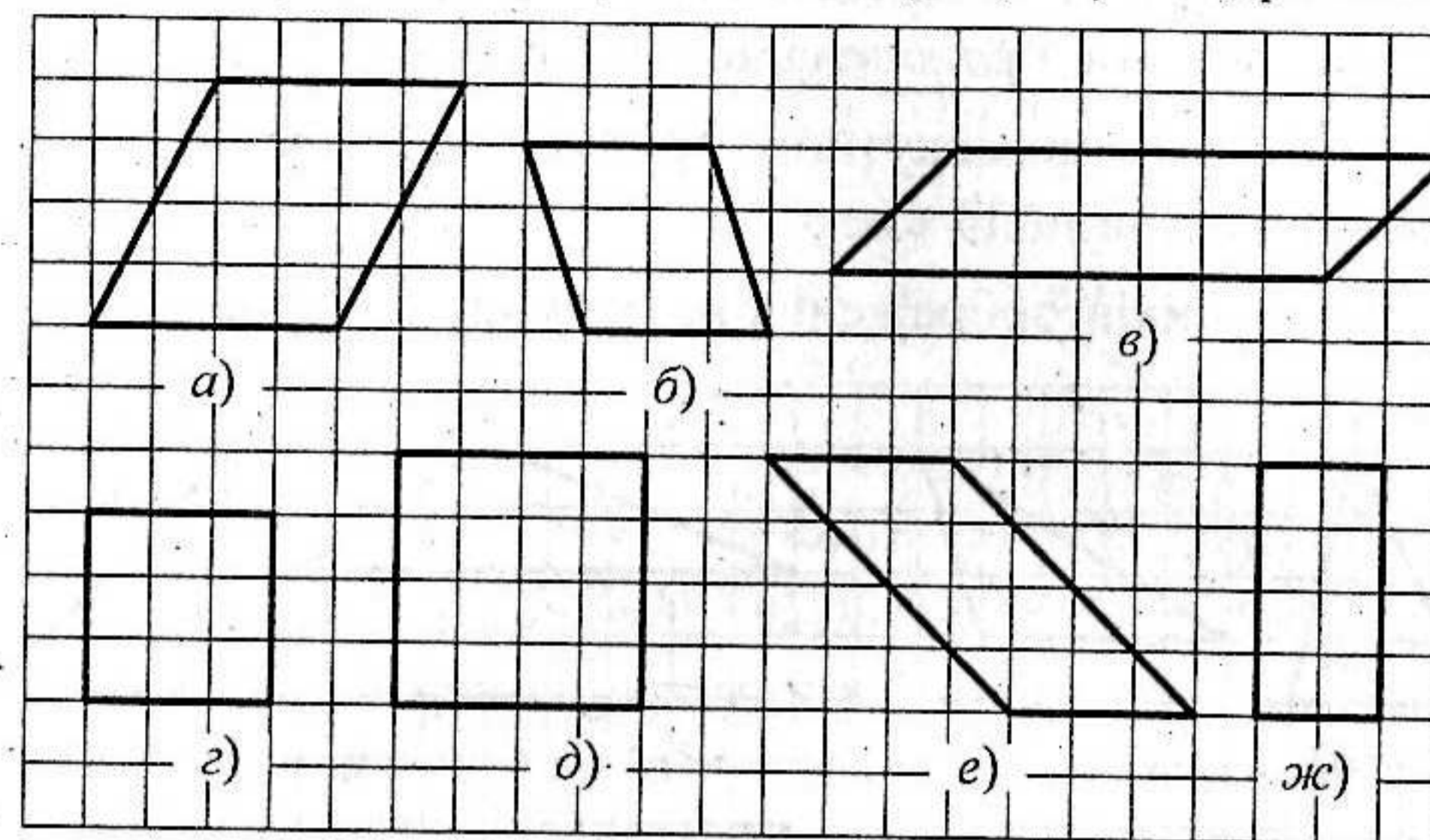


Рис. 100

279. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 8 см і 14 см, а кут між ними — 150° .

280. Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює $9\sqrt{2}$ см, а один з кутів — 45° .

281. Площа паралелограма дорівнює 56 см^2 , а відстань між двома протилежними сторонами — 14 см. Знайдіть ці сторони.

282. Площа паралелограма дорівнює 120 см^2 , а дві його сторони — 15 см і 10 см. Знайдіть висоти паралелограма.

283. Кут між сторонами паралелограма дорівнює 60° , одна із сторін — 8 см, а площа паралелограма — 56 см^2 . Знайдіть другу сторону паралелограма.

284. Площа паралелограма дорівнює 112 см^2 , а його висота у 7 разів менша від сторони, до якої її проведено. Знайдіть цю сторону паралелограма та висоту, проведену до неї.

285. Знайдіть площу паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 16 см і 20 см, а одна з діагоналей перпендикулярна до його сторони.

286. Доведіть, що у паралелограма з двох висот, проведених з однієї вершини, більша та, яка проведена до меншої сторони.

Площа трикутника

287. Сторона трикутника дорівнює 12 см, а висота, проведена до неї, — 2,5 см. Знайдіть площу трикутника.

288. Площа трикутника дорівнює 98 см^2 . Знайдіть сторону трикутника, якщо висота, проведена до неї, дорівнює 14 см .
289. Знайдіть площу прямокутного трикутника, катет якого дорівнює 8 см , а гіпотенуза — 17 см .
290. Які з трикутників, зображених на рисунку 101, рівновеликі?

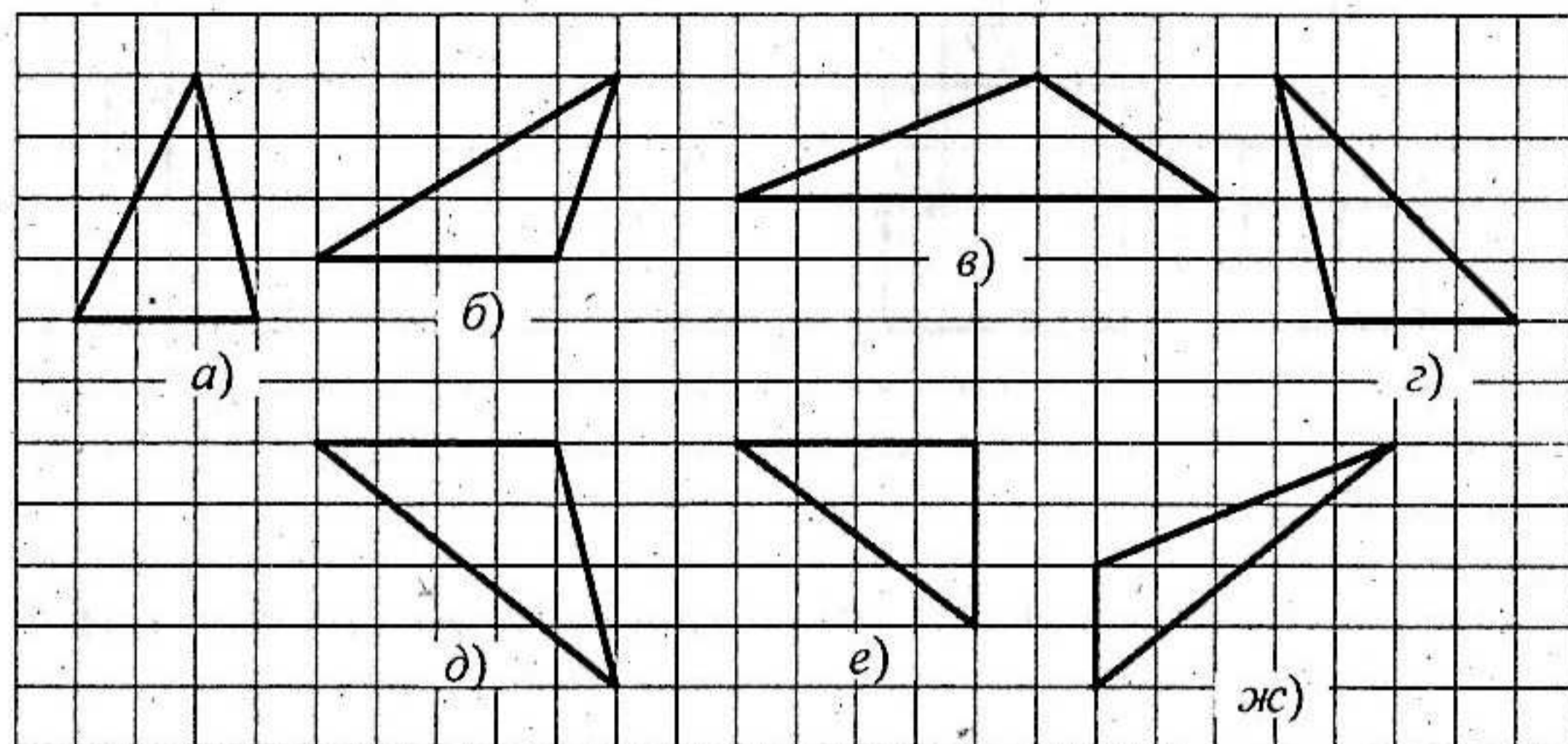


Рис. 101

291. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 9 см і $3\sqrt{2} \text{ см}$, а кут між ними: 1) 45° ; 2) 150° .
292. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 17 см , а висота, проведена до основи, — 5 см .
293. Катет прямокутного трикутника дорівнює 10 см , а гіпотенуза — 26 см . Знайдіть висоту трикутника, проведenu до гіпотенузи.
294. У трикутнику ABC відношення висот, проведених з вершин A і B , дорівнює $\frac{7}{9}$. Знайдіть відношення сторін BC і AC .
295. Доведіть, що сторони трикутника обернено пропорційні відповідним висотам.
296. Точка K — середина медіани CM трикутника ABC . Доведіть, що трикутники ACK , BCK , AKM і BKM рівновеликі.
297. Доведіть, що діагоналі паралелограма поділяють його на чотири рівновеликих трикутники.
298. Перпендикуляр, проведений з середини основи рівнобедреного трикутника до бічної сторони, поділяє її на відрізки завдовжки 8 см і 18 см , рахуючи від вершини кута при основі. Знайдіть площу трикутника.

299. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 50 см , а основа трикутника в $1,5$ раза більша за висоту, проведenu до неї. Знайдіть площу трикутника.
300. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 16 см , а другий менший від гіпотенузи на 4 см . Знайдіть площу трикутника.
301. Різниця відрізків, на які висота прямокутного трикутника поділяє гіпотенузу, дорівнює 10 см . Знайдіть площу трикутника, якщо його висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 12 см .
302. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса гострого кута поділяє протилежний катет на відрізки завдовжки 24 см і 51 см .
303. Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, поділяє гіпотенузу на відрізки завдовжки 10 см і 24 см . Знайдіть площу трикутника.
304. У прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписано коло з центром O (рис. 102). Знайдіть площу трикутника ABC , якщо $OA = 8 \text{ см}$, $\angle ABO = 15^\circ$.

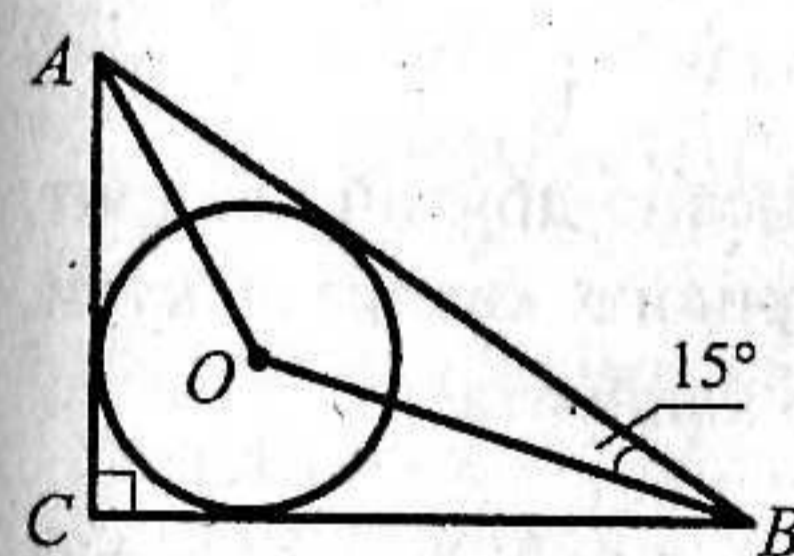


Рис. 102

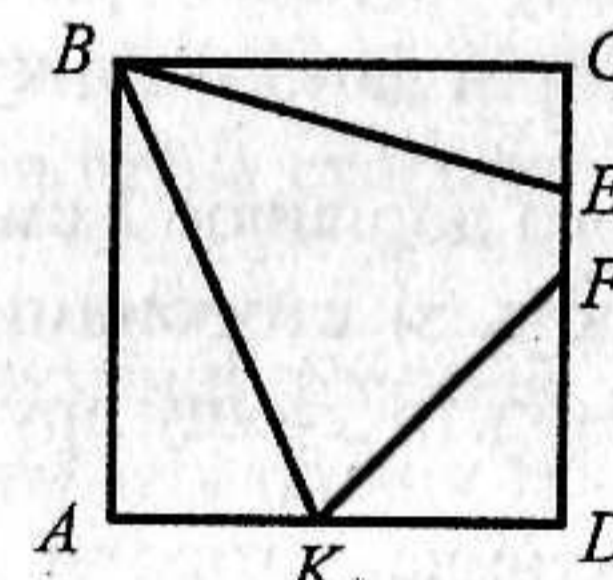


Рис. 103

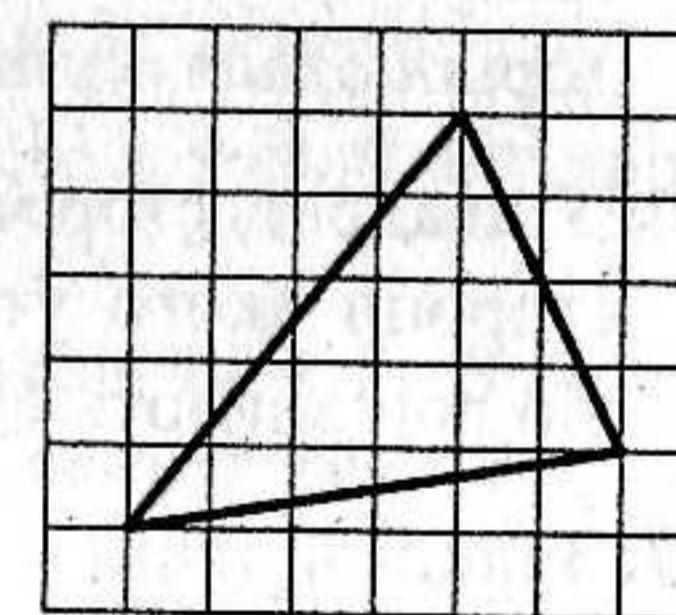


Рис. 104

305. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 9 см , $AK = 4 \text{ см}$, $CE = 3 \text{ см}$, $FD = 5 \text{ см}$ (рис. 103). Знайдіть площу чотирикутника $BEFK$.
306. Знайдіть площу трикутника, зображеного на рисунку 104, якщо сторона клітинки дорівнює 1 см .
307. Площа трикутника ABC дорівнює 98 см^2 . Точка K поділяє його медіану BM у відношенні $4 : 3$, рахуючи від точки B . Знайдіть площі трикутників ABK , BKC , CKM і AKM .
308. Бісектриса кута A трикутника ABC розбиває його на два трикутники, площі яких відносяться як $4 : 7$. Знайдіть відношення сторін AB і AC трикутника.

309. Через вершину трикутника проведіть пряму так, щоб вона розбила його на два трикутника, площі яких відносяться як:
1) 1 : 3; 2) 4 : 5.
310. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють $5\sqrt{2}$ см і 4 см.
311. Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює 25 см, а різниця діагоналей — 10 см.
312. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона відноситься до однієї з діагоналей як 5 : 8, а діаметр кола, вписаного в ромб, дорівнює 24 см.
313. Перпендикуляр, проведений з вершини тупого кута ромба, поділяє сторону на відрізки завдовжки 7 см і 9 см, рахуючи від вершини тупого кута. Знайдіть площу ромба.
314. Через вершину B паралелограма $ABCD$ проведіть пряму так, щоб вона розбила його на дві фігури, площі яких відносяться як 3 : 5.
315. Побудуйте рівнобедрений трикутник, рівновеликий даному трикутнику, так, щоб основа рівнобедреного трикутника дорівнювала одній із сторін даного трикутника.
316. У квадрат, сторона якого дорівнює 1 см, вписано другий квадрат, сторони якого утворюють зі сторонами першого квадрата кути, що дорівнюють 60° . Знайдіть площу другого квадрата.
317. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см.

Площа трапеції

318. Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 12 см і 15 см, а висота — 6 см.
319. Основи трапеції дорівнюють 9 см і 11 см, а її площа — 150 см^2 . Знайдіть висоту трапеції.
320. Площа трапеції дорівнює 92 см^2 , а її висота — 8 см. Знайдіть основи трапеції, якщо їх різниця дорівнює 9 см.
321. Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 8 см і 14 см, а діагональ завдовжки $8\sqrt{3}$ см утворює з більшою основою кут 30° .

322. Знайдіть площу трапеції $ABCD$, зображеної на рисунку 105 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

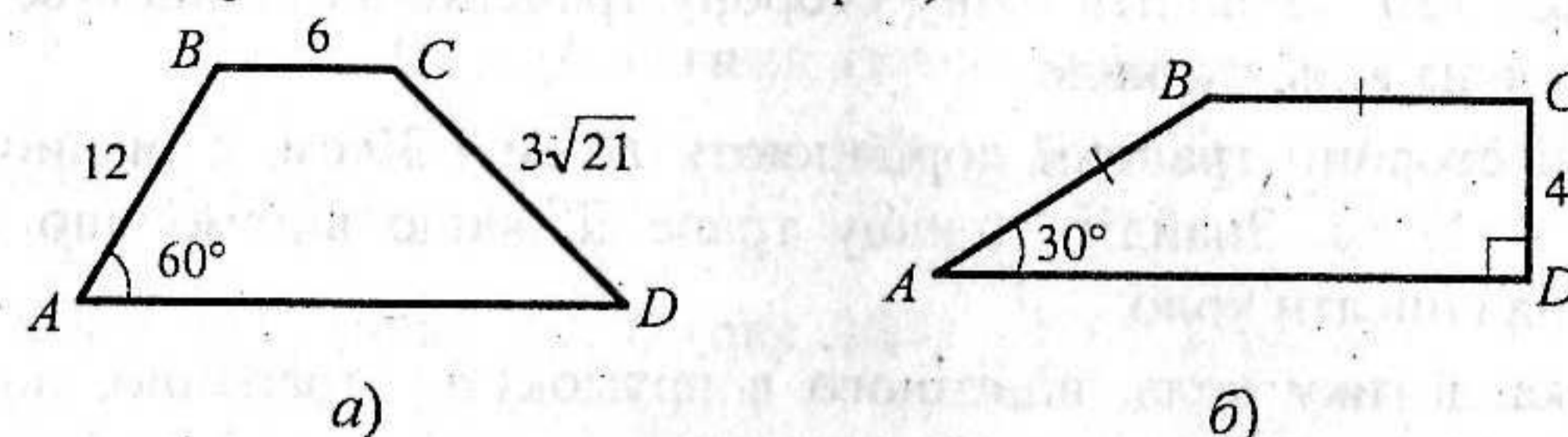


Рис. 105

323. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 18 см, а бічна сторона — 17 см. Знайдіть площу трапеції.
324. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, менша основа якої дорівнює 10 см, бічна сторона — 6 см, а тупий кут — 120° .
325. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 7 см і 25 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.
326. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 22 см і 50 см, а діагоналі ділять її тупі кути навпіл.
327. Різниця основ прямокутної трапеції дорівнює 14 см, а більша основа — 50 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її більша діагональ ділить прямий кут трапеції навпіл.
328. Знайдіть площу прямокутної трапеції, менша основа якої дорівнює $5\sqrt{3}$ см, більша бічна сторона — 18 см, а тупий кут дорівнює 150° .
329. Різниця основ прямокутної трапеції дорівнює 9 см, а її менша діагональ — 13 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічні сторони відносяться як 4 : 5.
330. Висота рівнобічної трапеції дорівнює $4\sqrt{3}$ см, а тупий кут дорівнює 120° . Знайдіть площу трапеції, якщо її діагональ ділить гострий кут трапеції навпіл.
331. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, діагоналі якої перпендикулярні, а середня лінія дорівнює 8 см.
332. Знайдіть площу трапеції, менша основа якої дорівнює 4 см, висота — 6 см, а кути при меншій основі — 120° і 135° .
333. Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 15 см і 36 см, а бічні сторони — 13 см і 20 см.
334. Радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію, дорівнює 8 см, а один з відрізків, на які точка дотику вписаного кола поділяє бічну сторону, — 4 см. Знайдіть площу трапеції.

335. Площа рівнобічної трапеції дорівнює $64\sqrt{3}$ см², а тупий кут дорівнює 120° . Знайдіть бічну сторону трапеції, якщо відомо, що в неї можна вписати коло.
336. Бічні сторони трапеції дорівнюють 26 см і 30 см, а різниця основ — 28 см. Знайдіть площу трапеції, якщо відомо, що в неї можна вписати коло.
337. Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, поділяє більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 3 см і 12 см. Знайдіть площу трапеції.

Варіант 3

Чотирикутник та його елементи

- У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 106) $AB = CD$, $AD = BC$. Доведіть, що $\angle A = \angle C$ і $\angle B = \angle D$.
- У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 107) $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$. Доведіть, що $\angle 5 = \angle 6$ і $\angle 7 = \angle 8$.

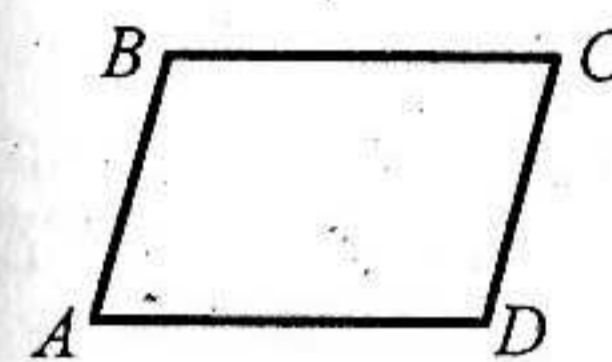


Рис. 106

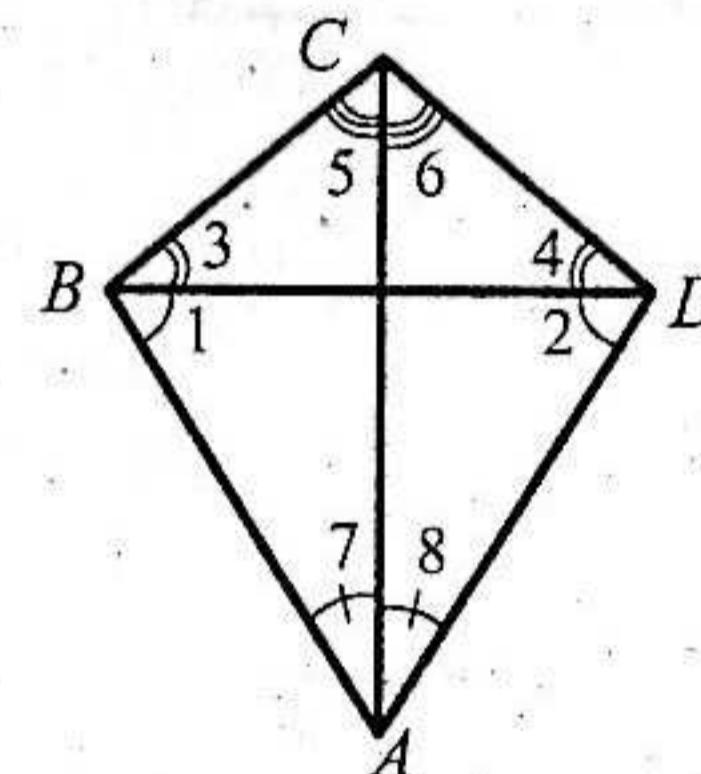


Рис. 107

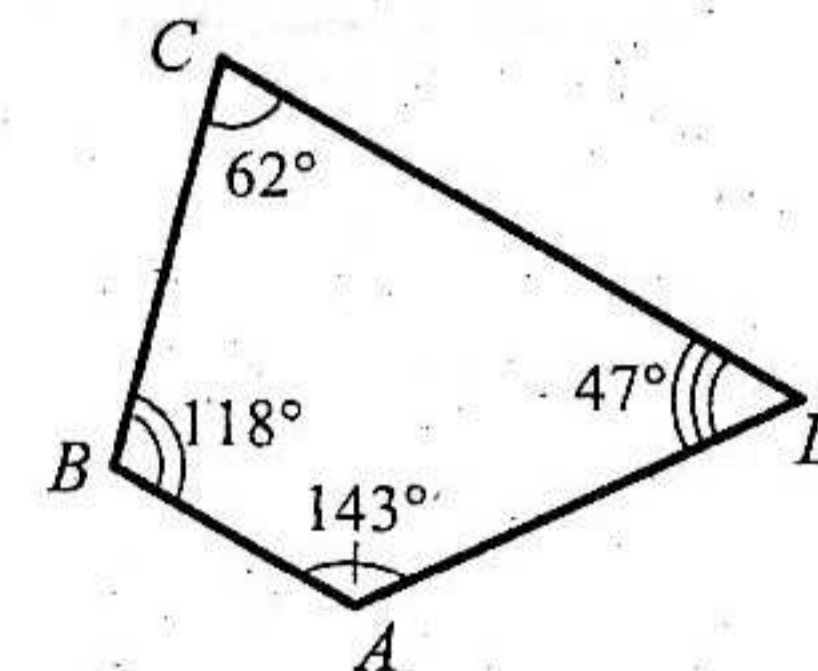


Рис. 108

- Чи можна накреслити опуклий чотирикутник, у якого два кути прямі, а два інших — гострі?
- У чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і CD паралельні (рис. 108). Чи правильно визначено його кути?

Паралелограм. Властивості паралелограма

- Знайдіть кути паралелограма, якщо:
 - один з його кутів дорівнює 63° ;
 - сума двох його кутів дорівнює 134° ;
 - один з його кутів на 44° менший від другого;
 - один з його кутів у 11 разів менший від другого;
 - два кути паралелограма відносяться як 5 : 13.
- Знайдіть кути паралелограма $ABCD$ (рис. 109).
- Дано два паралелограми $ABCD$ і $KMNP$. Чи можуть одночасно виконуватися нерівності: $\angle A > \angle K$ і $\angle B > \angle M$?

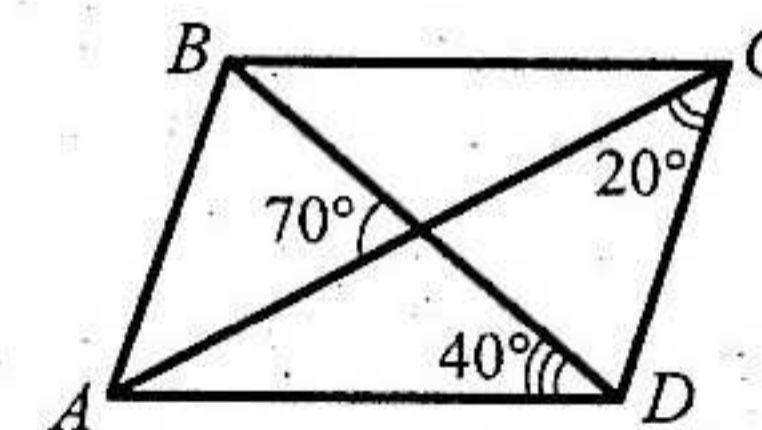


Рис. 109

- Периметр паралелограма дорівнює 80 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо одна з них на 14 см менша від другої.

9. Сторони паралелограма відносяться як 4 : 3. Знайдіть периметр паралелограма, якщо різниця цих сторін дорівнює 4 см.
10. Які помилки допущено в зображенні паралелограма $ABCD$ на рисунку 110?

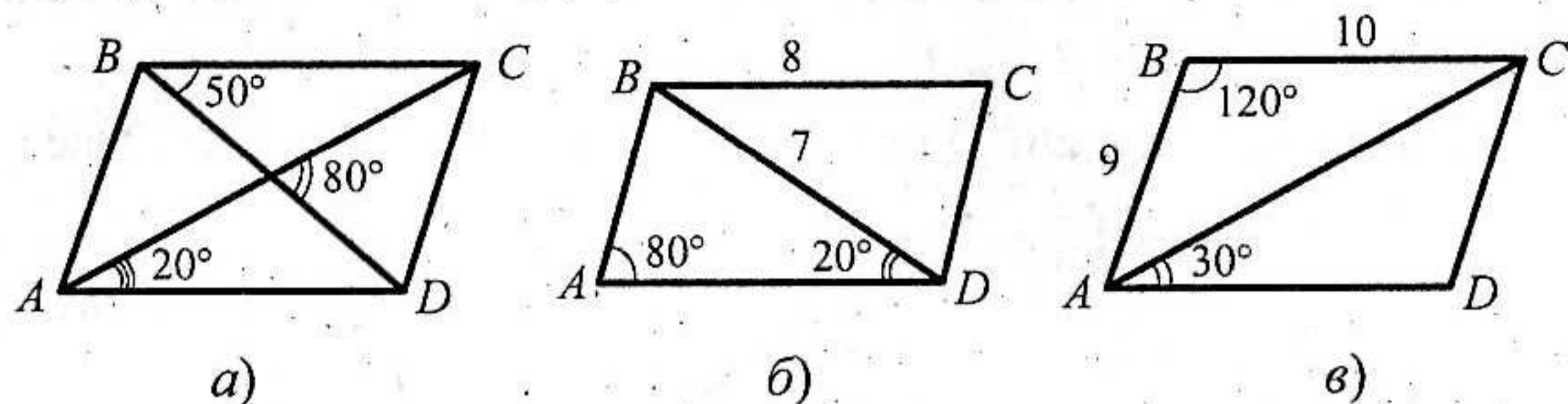


Рис. 110

11. У чотирикутнику $ABCD$ бісектриса кута B перетинає бісектриси кутів A і C під прямим кутом. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.
12. На стороні BC паралелограма $ABCD$ позначили точку E так, що $AB = BE$. Доведіть, що промінь AE — бісектриса кута A .
13. Бісектриси кутів A і D паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці, яка лежить на стороні BC . Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 30 см.
14. У паралелограмі $ABCD$ $\angle B = 120^\circ$. Бісектриса кута ABD поділяє сторону AD навпіл. Знайдіть периметр паралелограма, якщо $BD = 5$ см.
15. У паралелограмі $ABCD$ висоти BM і BN поділяють відповідно сторони AD і CD навпіл. Знайдіть $\angle MBN$.
16. Один з кутів паралелограма на 50° більший за інший. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини: 1) гострого кута; 2) тупого кута.
17. На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ вибрано відповідно точки M і N так, що $AM = CN$. Доведіть, що пряма MN проходить через точку перетину діагоналей паралелограма.
18. На стороні AB рівностороннього трикутника ABC взято довільну точку M . Через точку M проведено відрізки MK і MN , паралельні сторонам BC і AC відповідно, точка K належить стороні AC , точка N — стороні BC . Знайдіть сторону трикутника ABC , якщо периметр паралелограма $MKCN$ дорівнює 60 см.
19. Побудуйте паралелограм:
1) за двома діагоналями та кутом між ними;
2) за діагоналлю і кутами, які вона утворює зі сторонами.

20. Дано відрізок AB і точку C , яка не лежить на прямій AB . Побудуйте паралелограм так, щоб відрізок AB був однією з його сторін, а точка C була вершиною. Скільки розв'язків має задача?
21. На дошці накреслили паралелограм $ABCD$. Потім рисунок витерли, залишивши лише точки M, N, P, K , які є серединами сторін AB, BC, CD і DA відповідно. Відновіть початковий рисунок.
22. Побудуйте трикутник ABC за медіаною AM і кутами MAB і MAC .

Ознаки паралелограма

23. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 111) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

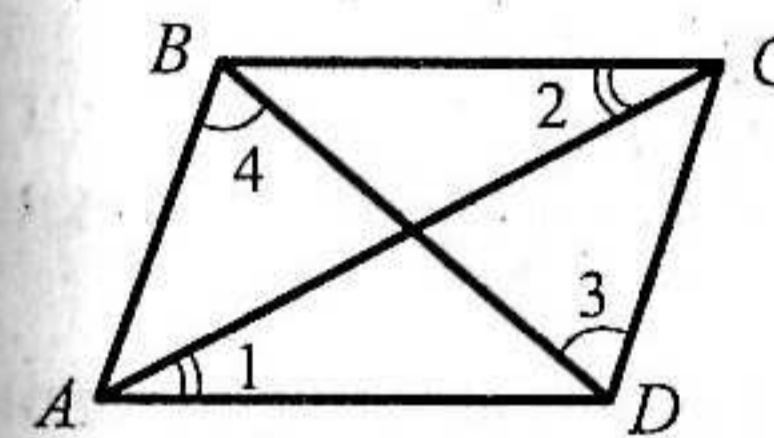


Рис. 111

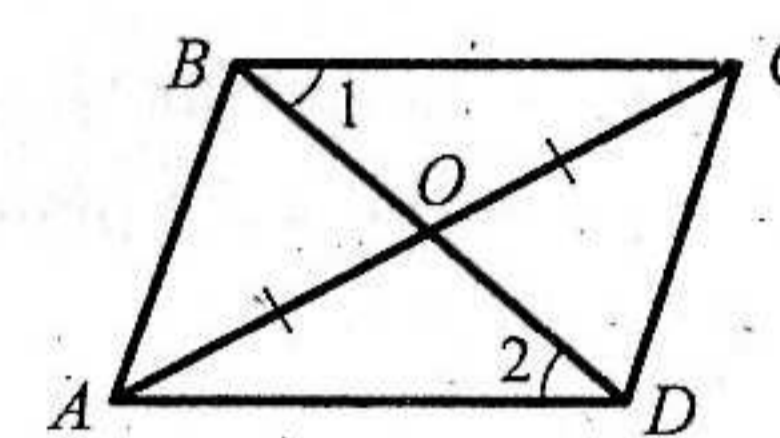


Рис. 112

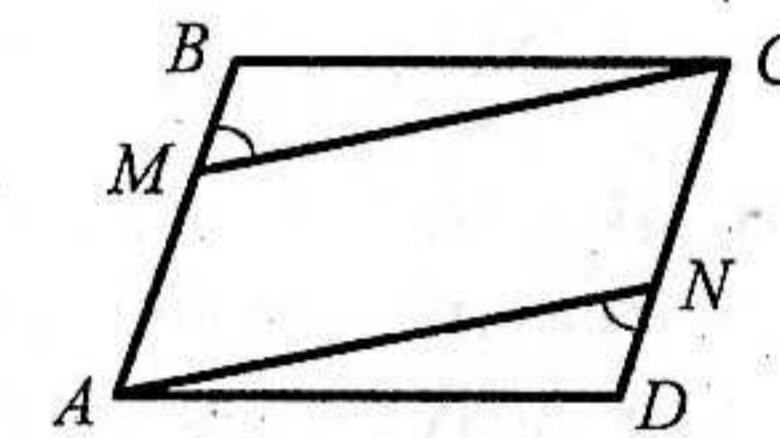


Рис. 113

24. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 112) $\angle 1 = \angle 2$, $AO = OC$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.
25. На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ позначено точки M і N так, що $\angle BMC = \angle AND$ (рис. 113). Доведіть, що чотирикутник $AMCN$ — паралелограм.
26. На діагоналях AC і BD паралелограма $ABCD$ позначено точки N, T, M, P так, що $AN = CT$ і $BP = DM$ (рис. 114). Доведіть, що чотирикутник $MNPT$ — паралелограм.

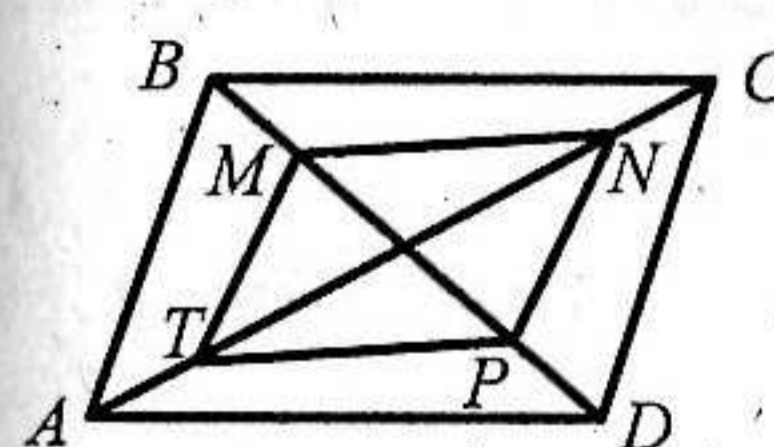


Рис. 114

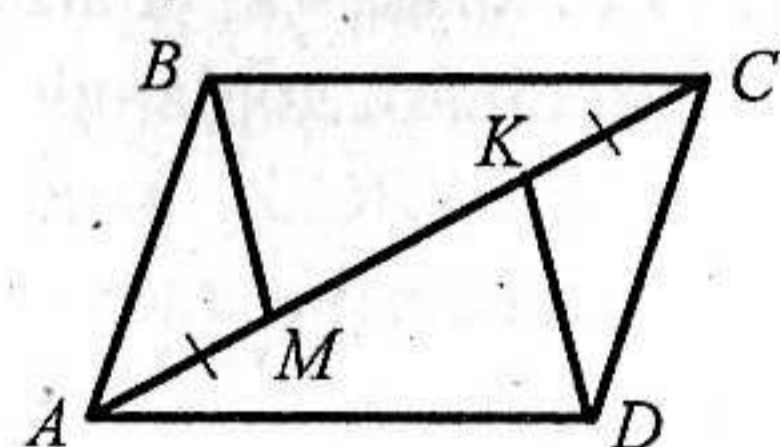


Рис. 115

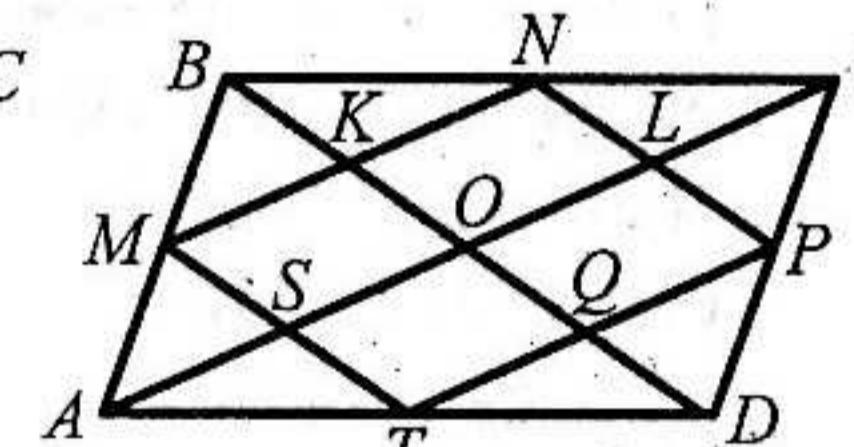


Рис. 116

27. На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ взято точки M і K такі, що $AM = CK$ (рис. 115). Доведіть, що чотирикутник $BMDK$ — паралелограм.
28. На рисунку 116 точки M, N, P, T — середини сторін AB, BC, CD і DA паралелограма $ABCD$. Які з чотирикутників на цьому рисунку є паралелограмами?

29. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 117) $\angle A = \angle C$, $\angle C + \angle B = 180^\circ$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

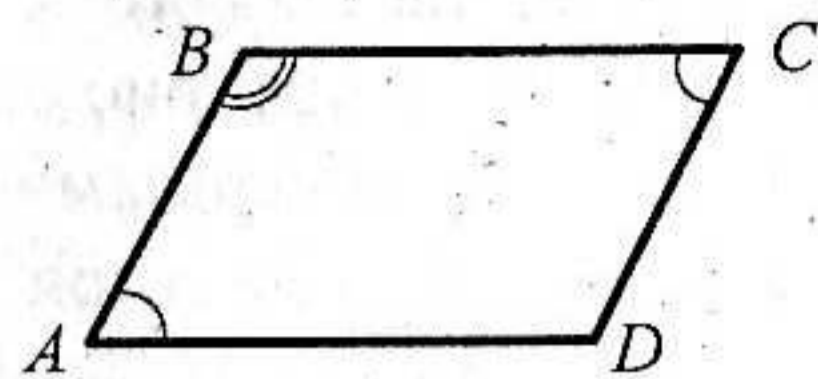


Рис. 117

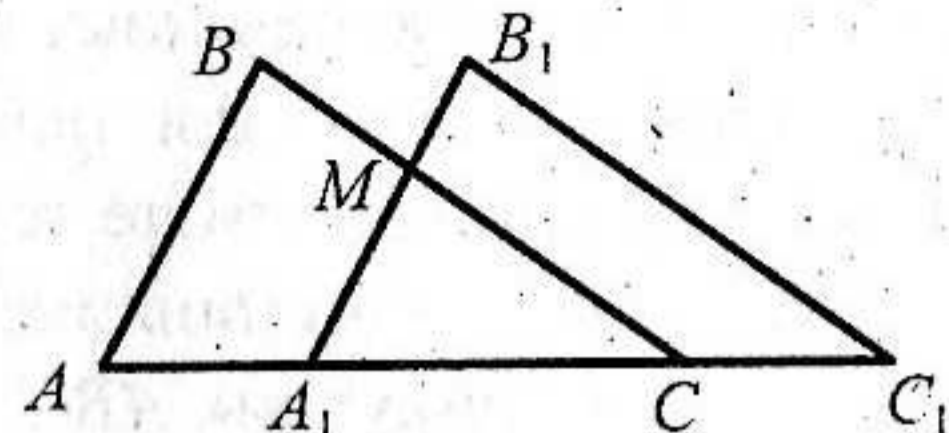


Рис. 118

30. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні (рис. 118), $BB_1 = 7$ см, $A_1C = 8$ см. Знайдіть AC_1 .

Прямокутник

31. Відомо, що у паралелограма три кути рівні між собою. Що можна сказати про вид цього паралелограма?
32. У прямокутнику $ABCD$ (рис. 119) O — точка перетину діагоналей, $\angle ODA = 35^\circ$. Знайдіть кут AOB .

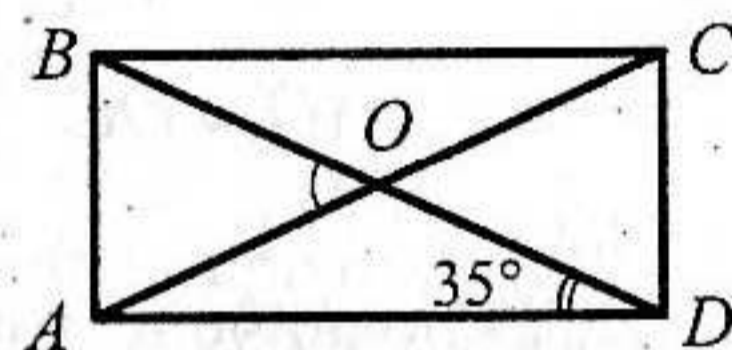


Рис. 119

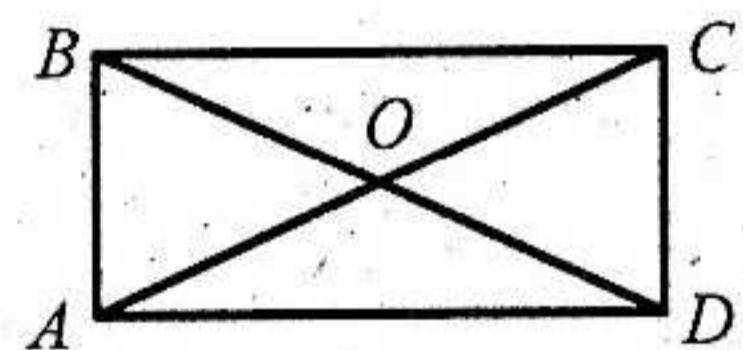


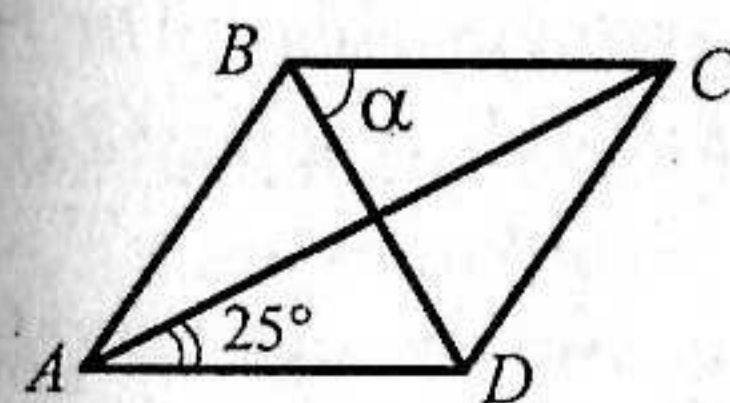
Рис. 120

33. Кут між діагоналями прямокутника дорівнює 82° . Знайдіть кути, які утворюють діагоналі зі сторонами прямокутника.
34. Знайдіть гострий кут між діагоналями прямокутника, якщо різниця між кутами, які утворює діагональ з його меншою і більшою сторонами відповідно, дорівнює 20° .
35. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 120), $AO = OB$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — прямокутник.
36. Точки K і M належать відповідно діагоналям BD і AC прямокутника $ABCD$, причому $BK = \frac{1}{5}BD$ і $CM = \frac{1}{5}AC$. Доведіть, що трикутники ABK і DCM рівні.
37. Доведіть, що коли діагоналі паралелограма $ABCD$ поділяють його на чотири рівнобедрених трикутники, то цей паралелограм є прямокутником.
38. У прямокутнику $ABCD$ $AD = 2AB$. Доведіть, що точка перетину бісектрис кутів B і C належить стороні AD .

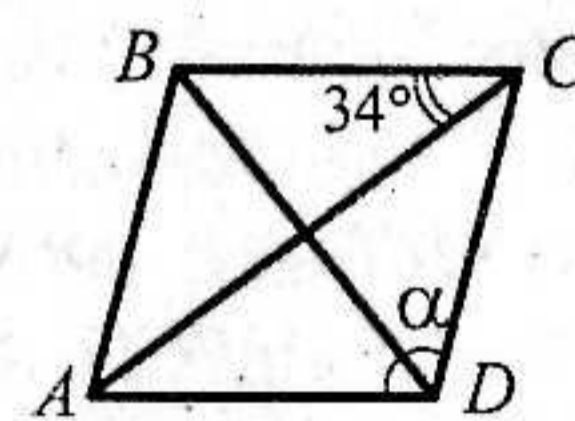
39. Кут між діагоналями прямокутника $ABCD$, який лежить проти меншої сторони прямокутника, дорівнює 60° . Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей до більшої сторони прямокутника, якщо $AC = 8$ см.
40. Периметр прямокутника $ABCD$ дорівнює 36 см. Знайдіть суму довжин діагоналей чотирикутника, вершинами якого є середини сторін прямокутника $ABCD$.
41. Пряма, яку проведено через вершину C прямокутника $ABCD$, перетинає сторону AD у точці K , а продовження сторони BA — у точці M . Відомо, що $AK = \frac{1}{2}AD$ і $BM = BC$. Знайдіть $\angle BKC$.
42. У трикутнику ABC $\angle A = 75^\circ$, $\angle C = 15^\circ$. До сторони AC проведено медіану BK завдовжки 2 см. Знайдіть сторону AC .
43. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle B = 90^\circ$) проведено висоту BD , $AC = 16$ см, $\angle DBC = 60^\circ$. Знайдіть відстань від точки D до середини катета AB .
44. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) медіана BM дорівнює половині сторони AC . З точки M на сторони AB і BC опущено перпендикуляри MK і ME відповідно. Довжина відрізка KE дорівнює 11 см. Знайдіть AC .
45. У прямокутнику $ABCD$ $\angle BAC = 30^\circ$. З вершини D на діагональ AC опущено перпендикуляр DK . Знайдіть відношення $AK : AC$.

Ромб

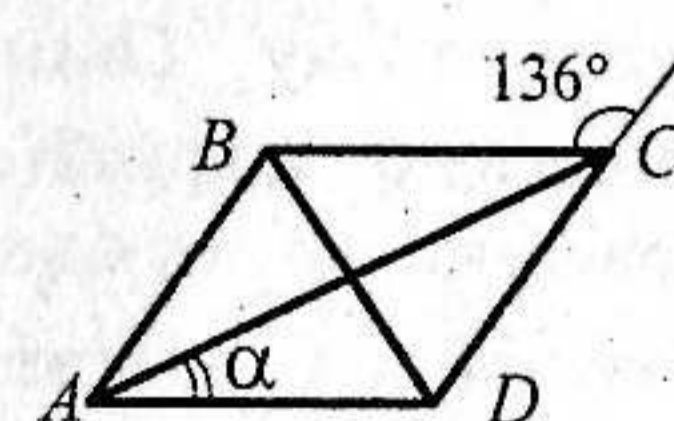
46. У паралелограмі $ABCD$ O — точка перетину діагоналей, $\angle BAO + \angle ABO = 90^\circ$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — ромб.
47. На рисунку 121 чотирикутник $ABCD$ — ромб. Знайдіть кут α .



а)



б)



в)

Рис. 121

48. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює 18° .
49. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, які відносяться як 7 : 8.

50. Відрізки CM і CK — висоти ромба $ABCD$ (рис. 122). Доведіть, що $\angle MCA = \angle KCA$.

51. З вершини B тупого кута ромба проведено висоти BK і BM . Відомо, що $KM = BK$. Знайдіть кути ромба.

52. На сторонах BC і CD ромба $ABCD$ вибрано відповідно точки P і N так, що $\angle PAC = \angle NAC$. Доведіть, що $BP = DN$.

53. З вершини B ромба $ABCD$ проведено висоти BK і BM . Доведіть, що $KM \perp BD$.

54. З вершини B тупого кута ромба $ABCD$ проведено висоти BK і BM , $\angle BMK = 48^\circ$. Знайдіть кути ромба.

55. Чотирикутник $ABCD$ — ромб. Бісектриса BK кута ABD поділяє сторону AD навпіл. Знайдіть: 1) кути ромба; 2) меншу діагональ ромба, якщо його сторона дорівнює 10 см.

56. Два рівних рівнобедрених трикутники розміщено так, як показано на рисунку 123. Визначте вид чотирикутника BMB_1N .

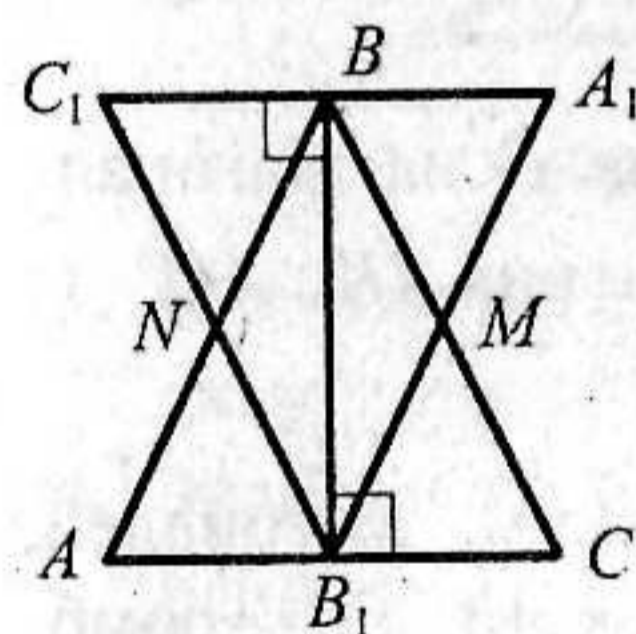


Рис. 123

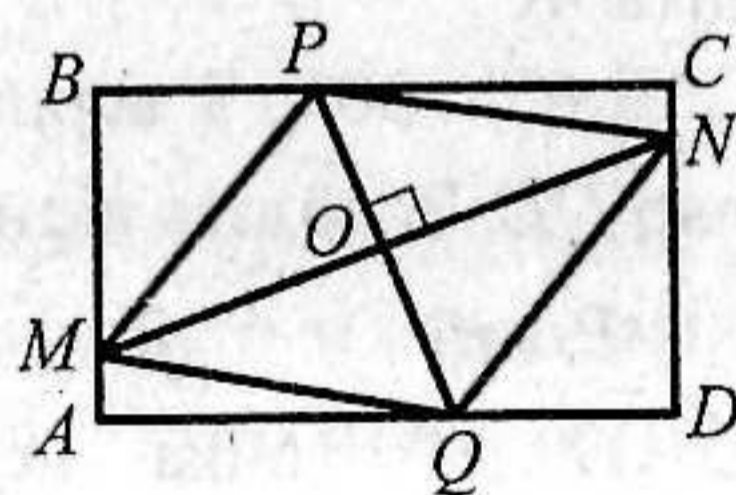


Рис. 124

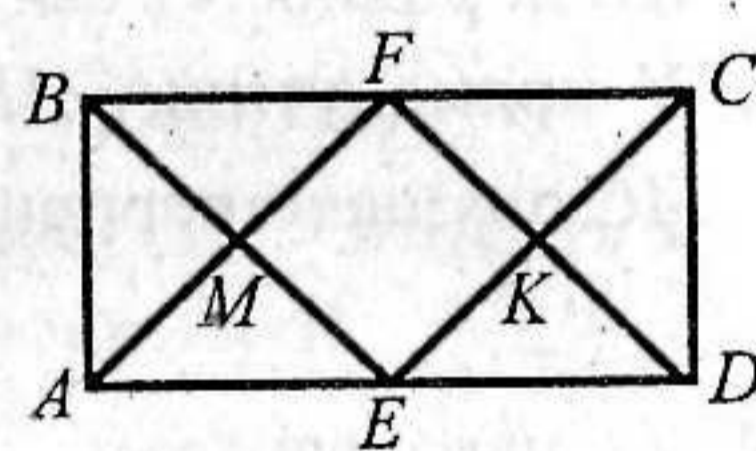


Рис. 125

57. Через точку O перетину діагоналей прямокутника $ABCD$ проведено відрізки MN і PQ так, що $MN \perp PQ$ (рис. 124). Доведіть, що чотирикутник $MPNQ$ — ромб.

58. Точки F і E — середини сторін BC і AD прямокутника $ABCD$ відповідно (рис. 125). Доведіть, що чотирикутник $MFKE$ — ромб.

59. Побудуйте ромб:

- 1) за стороною і висотою, проведеною з вершини тупого кута;
- 2) за кутом і діагоналлю, протилежною даному куту.

60. Користуючись тільки лінійкою з паралельними краями, проведіть пряму, яка перпендикулярна до даної прямої, через дану точку цієї прямої.

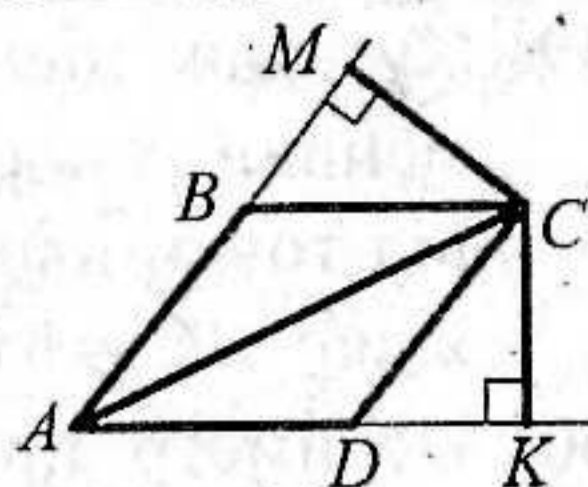


Рис. 122

Квадрат

61. Доведіть, що коли діагоналі прямокутника поділяють його кути навпіл, то цей прямокутник є квадратом.

62. Відрізок, що з'єднує середини протилежних сторін квадрата, дорівнює 5 см. Знайдіть периметр квадрата.

63. Діагоналі квадрата $ABCD$ перетинаються в точці O , точки M, N, P, Q — середини відрізків AO, BO, CO і DO відповідно (рис. 126). Доведіть, що чотирикутник $MNPQ$ — квадрат.

64. Діагональ квадрата дорівнює 6 см. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного квадрата.

65. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ вибрано відповідно точки M, N, P, Q так, що $BM = BN = DP = DQ$. Знайдіть периметр чотирикутника $MNPQ$, якщо діагональ квадрата дорівнює 10 см.

66. У прямокутнику $ABCD$ (рис. 127) $2AB = BC$, точки F і E — середини сторін BC і AD відповідно. Доведіть, що чотирикутник $MFKE$ — квадрат.

67. У квадраті $ABCD$ на продовженні сторони AD за точку A взяли точку K таку, що $\angle BCK = 2\angle ACK$. Периметр квадрата дорівнює 44 см. Знайдіть довжину відрізка KC .

68. Побудуйте квадрат, усі вершини якого лежать на даному колі.

69. Побудуйте квадрат за трьома точками, які є серединами трьох його сторін.

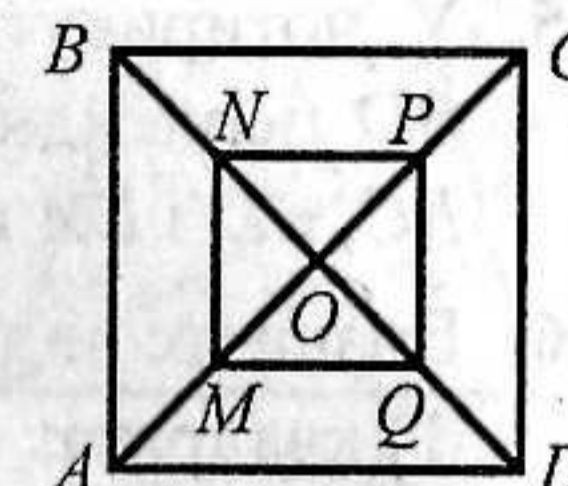


Рис. 126

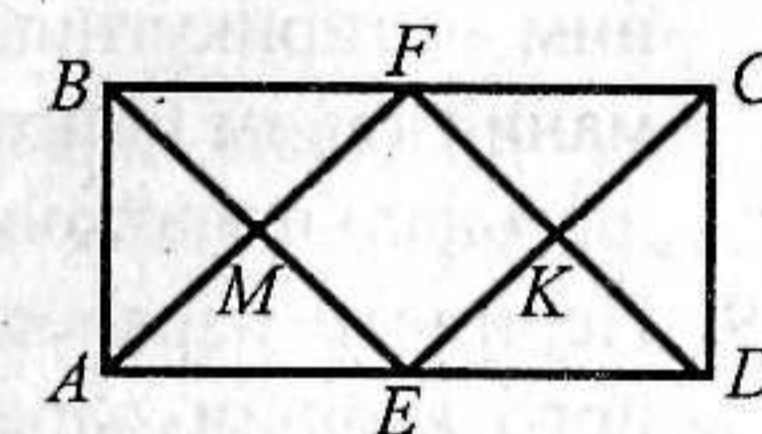


Рис. 127

Середня лінія трикутника

70. Знайдіть сторони трикутника, вершини якого — середини сторін трикутника зі сторонами 8 см, 14 см, 18 см.

71. Точки M, N і K — середини середніх ліній трикутника ABC . Знайдіть периметр трикутника MNK , якщо периметр трикутника ABC дорівнює 48 см.

72. Периметр трикутника дорівнює 68 см, а довжини його середніх ліній відносяться як 4 : 6 : 7. Знайдіть сторони даного трикутника.

73. Відрізки A_1B_1, A_1C_1 і B_1C_1 — середні лінії трикутника ABC . Відомо, що $A_1B_1 \perp A_1C_1$ і $2A_1B_1 = B_1C_1$. Знайдіть кути трикутника ABC .

74. У ромбі $ABCD$ точки F , P і M — середини сторін BC , CD і DA відповідно (рис. 128). Знайдіть суму довжин діагоналей ромба, якщо $AB = 5$ см, а периметр трикутника FPM дорівнює 12 см.

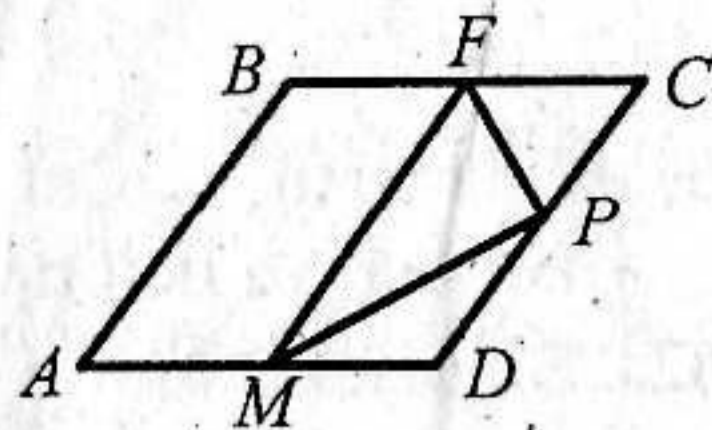


Рис. 128

75. У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD перпендикулярні. Точки M , F , K і P — середини сторін AB , BC , CD і DA відповідно. Доведіть, що $MK = FP$.

76. Визначте вид чотирикутника, вершинами якого є середини сторін:
1) квадрата;
2) чотирикутника з перпендикулярними діагоналями.

77. У чотирикутнику $ABCD$ кут між діагоналями AC і BD дорівнює 60° , $AC = BD = 10$ см. Знайдіть меншу діагональ чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного.

78. У чотирикутнику послідовно з'єднано середини сторін. З утвореним чотирикутником зроблено те ж саме. Виявилось, що отриманий таким чином останній чотирикутник — ромб. Доведіть, що діагоналі початкового чотирикутника перпендикулярні.

79. Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 25 см. Через кожну з його вершин паралельно діагоналям проведено прямі. Знайдіть суму довжин діагоналей отриманого таким чином чотирикутника.

80. Побудуйте паралелограм за точкою перетину його діагоналей і серединами двох сусідніх сторін.

81. Побудуйте ромб за серединами двох його сусідніх сторін і діагоналлю, яка перетинає відрізок, що з'єднує ці точки.

Трапеція

82. Два кути трапеції дорівнюють 36° і 62° . Знайдіть два інших її кути.

83. Чи існує трапеція, у якої два протилежних кути прямі? Якщо відповідь позитивна, зробіть рисунок.

84. Чи існує трапеція, у якої тільки один кут прямий? Якщо відповідь позитивна, зробіть рисунок.

85. Чи можуть кути трапеції, взяті послідовно, відноситись як $1 : 2 : 4 : 8$?

86. У рівнобічній трапеції бічна сторона у 2 рази більша за її висоту. Знайдіть кути трапеції.

87. У прямокутній трапеції тупий кут у 3 рази більший за гострий. Знайдіть кути трапеції.

88. Діагональ рівнобічної трапеції утворює з бічною стороною прямий кут. Відомо, що бічна сторона вдвічі менша від більшої основи. Знайдіть кути трапеції.

89. Визначте вид трапеції, якщо сума її протилежних кутів дорівнює 180° .

90. У трапеції $ABCD$ бісектриси кутів A і B перетинаються в точці M (рис. 129). Знайдіть суму кутів MBC і MAD .

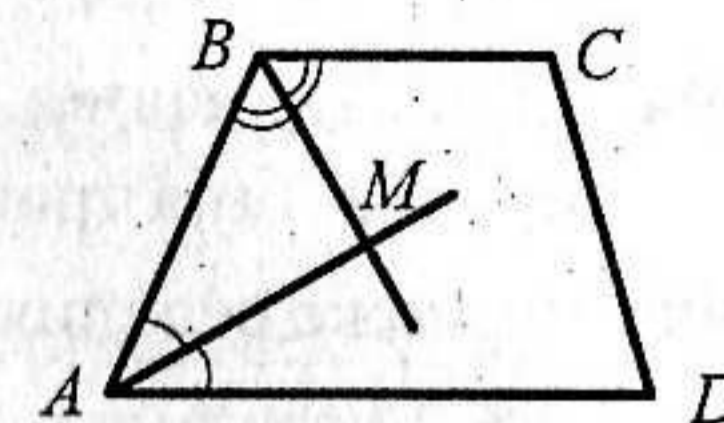


Рис. 129

91. Кут між діагоналями рівнобічної трапеції, протилежний основі, дорівнює 80° , а бічна сторона дорівнює більшій основі. Знайдіть кути трапеції.

92. У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) AC — бісектриса кута BAD , $AC = AD$, $\angle ACD = 70^\circ$. Знайдіть кути трапеції.

93. У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $\angle BCA = \angle BDA$. Доведіть, що $AB = CD$.

94. У рівнобічній трапеції довжини відрізків, на які висота, проведена з вершини тупого кута, поділяє більшу основу, відносяться як $1 : 2$. Знайдіть відношення основ трапеції.

95. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 2 см і 10 см. Знайдіть відрізки, на які висота трапеції, проведена з вершини тупого кута, поділяє більшу основу.

96. У рівнобічній трапеції один з кутів дорівнює 120° , діагональ трапеції утворює з основою кут 30° . Знайдіть основи трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 8 см.

97. У трапеції $ABCD$ ($AB = CD$) кут B — тупий, його бісектриса перетинає основу AD у точці K , $BK = AB = 13$ см. Знайдіть різницю основ трапеції.

98. У рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює більшій основі. Доведіть, що діагональ трапеції ділить її тупий кут навпіл.

99. У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка перетину бісектрис тупих кутів належить більшій основі AD . Відомо, що $AB = 5$ см, $CD = 7$ см. Знайдіть AD .

100. У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) діагоналі перпендикулярні, $BC = 6$ см, $AD = 20$ см. Знайдіть довжину відрізка, який з'єднує середини основ трапеції.

101. У прямокутній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута і вдвічі більша за меншу основу. Знайдіть кути трапеції.

102. Побудуйте трапецію за двома основами та кутами, які діагоналі утворюють з основами трапеції.

Середня лінія трапеції

103. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її основи дорівнюють:
1) 12 см і 14 см; 2) $5b$ і $16b$.

104. Знайдіть основи трапеції, якщо їх довжини відносяться як 5 : 7, а середня лінія трапеції дорівнює 1) 36 см; 2) n .

105. Чи може середня лінія трапеції бути:

- 1) у 2 рази більша за меншу основу;
- 2) у 2 рази менша від більшої основи?

106. Відрізок MN — середня лінія трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Відомо, що $BC : MN = 9 : 11$. Знайдіть основи трапеції, якщо їх різниця дорівнює 12 см.

107. Більша основа трапеції відноситься до середньої лінії як 5 : 4. Середня лінія більша за меншу з основ на 5 см. Знайдіть основи трапеції.

108. Середня лінія трапеції дорівнює 11 см, а висоти, проведені з вершин її тупих кутів, поділяють більшу основу на відрізки, довжини яких відносяться як 2 : 4 : 1. Знайдіть основи трапеції.

109. Діагональ рівнобічної трапеції поділяє тупий кут навпіл, а її основи відносяться як 4 : 5. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її периметр дорівнює 57 см.

110. Діагоналі трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) перпендикулярні. На більшій основі AD позначено точку E таку, що відрізок AE дорівнює середній лінії трапеції. Доведіть, що $CE = AE$.

111. У прямокутній трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) діагональ AC дорівнює 14 см, перпендикулярна до бічної сторони CD і поділяє кут A у відношенні 2 : 1, рахуючи від більшої основи. Знайдіть середню лінію трапеції.

Центральні і вписані кути

112. Скільки градусів містить центральний кут кола, який спирається на дугу, що становить: 1) $\frac{1}{5}$ кола; 2) $\frac{2}{3}$ кола; 3) $\frac{3}{8}$ кола?

113. Знайдіть градусні міри двох дуг кола, на які його поділяють дві точки, якщо градусна міра однієї з дуг на 140° менша від градусної міри другої.

114. Знайдіть вписаний кут, якщо градусна міра дуги, на яку він спирається, дорівнює: 1) 38° ; 2) 142° ; 3) 90° ; 4) 226° ; 5) $\frac{Y}{2}$.

115. Точка M кола і його центр O лежать по різні сторони від хорди AB . Знайдіть: 1) кут AMB , якщо $\angle AOB = 152^\circ$; 2) кут AOB , якщо $\angle AMB = 73^\circ$.

116. Точки M і N лежать на колі по одну сторону від хорди AB . Відомо, що $\angle AMB = 63^\circ$. Знайдіть кут ANB .

117. Точки M і N лежать на колі по різні сторони від хорди AB , $\angle ANB = 82^\circ$. Знайдіть кут AMB .

118. Навколо трикутника ABC описано коло з центром у точці O . Знайдіть кут AOB , якщо: 1) $\angle C = 54^\circ$; 2) $\angle C = 136^\circ$.

119. У трикутнику ABC $\angle A = 48^\circ$, $\angle C = 62^\circ$, точка O — центр описаного кола. Знайдіть $\angle AOB$, $\angle AOC$, $\angle COB$.

120. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, вписаного в коло, основа якого стягує дугу, градусна міра якої дорівнює 100° .

121. Кінці хорди поділяють коло на дві дуги, градусні міри яких відносяться як 5 : 13. Знайдіть вписані кути, які спираються на цю хорду.

122. Кінці хорди AB поділяють коло на дві дуги. Градусна міра більшої з них дорівнює 260° , а менша поділяється точкою M у відношенні 7 : 18, рахуючи від точки B . Знайдіть $\angle MBA$.

123. Точки D , E і F поділяють коло на три дуги так, що $\cup DE : \cup EF : \cup DF = 2 : 9 : 7$. Знайдіть кути трикутника DEF .

124. Точки M і N кола лежать по одну сторону від діаметра AB (рис. 130). Знайдіть кут BMN , якщо $\angle AMN = 110^\circ$.

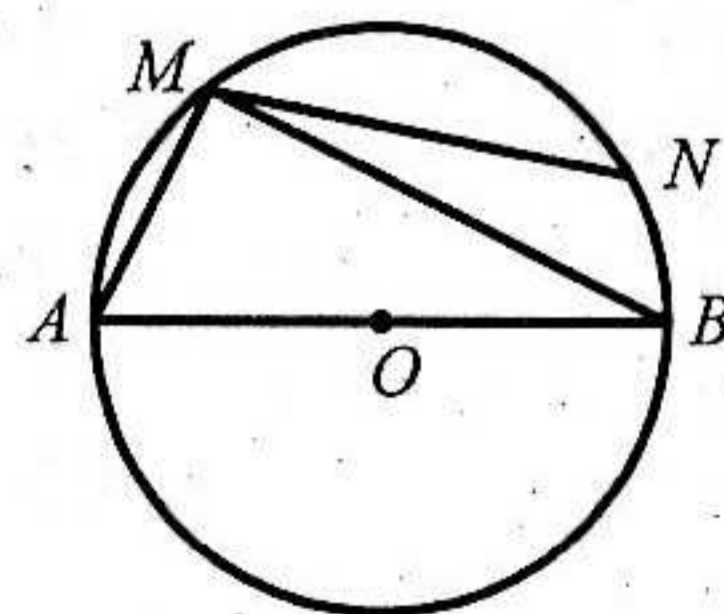


Рис. 130

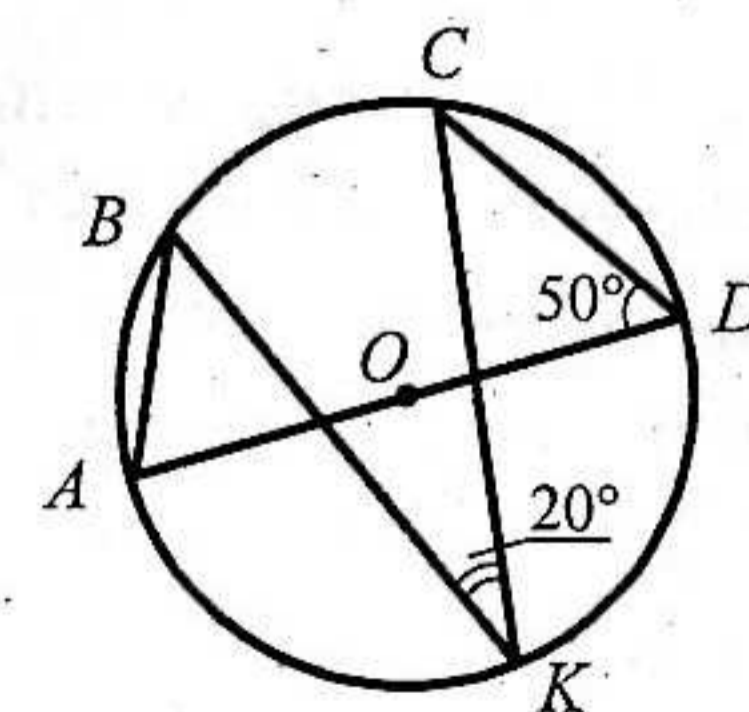


Рис. 131

125. Відрізок AD — діаметр кола з центром O (рис. 131). Знайдіть $\angle BAD$, якщо $\angle CDA = 50^\circ$, $\angle BKC = 20^\circ$.

126. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 62° . Півколо, побудоване на бічній стороні трикутника як на діаметрі, поділяється іншими сторонами трикутника на три дуги. Знайдіть градусні міри цих дуг.
127. Продовження висот гострокутного трикутника ABC , проведених з вершин A , B і C , перетинають описане коло в точках K , F і M відповідно. Доведіть, що $\angle KFB = \angle MFB$.

128. Два кола перетинаються в точках C і D . Через ці точки проведено січні MK і EF відповідно (рис. 132). Доведіть, що $\angle MDK = \angle ECF$.

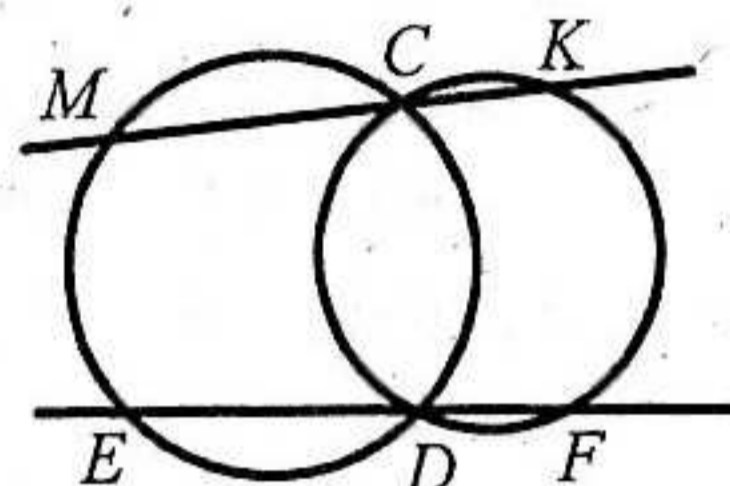


Рис. 132

129. Точка O — центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника ABC . Знайдіть кути трикутника ABC , якщо $\angle BOC = 32^\circ$. Скільки розв'язків має задача?

Вписані і описані чотирикутники

130. Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо:
1) $\angle A = 56^\circ$, $\angle C = 124^\circ$; 2) $\angle B = 64^\circ$, $\angle D = 106^\circ$?
131. Знайдіть кути A і B чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle C = 38^\circ$, $\angle D = 134^\circ$.
132. Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, кути якого A , B , C і D відповідно пропорційні числам:
1) 4, 9, 13, 8; 2) 6, 7, 10, 8?
133. Три кути чотирикутника, вписаного в коло, взяті у порядку слідування, відносяться як 4 : 8 : 11. Знайдіть кути чотирикутника.
134. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. Діагональ AC цього чотирикутника є діаметром кола. Знайдіть $\angle BAC$, якщо $\angle CAD = 35^\circ$, а кут між діагоналями чотирикутника, який лежить проти сторони AD , дорівнює 64° .
135. Рівнобічну трапецію, один з кутів якої дорівнює 130° , вписано в коло. Кут між діагоналями трапеції, що лежить проти бічної сторони, дорівнює 80° . Знайдіть положення центра кола, описаного навколо трапеції, відносно трапеції.

136. Бічні сторони трапеції, у яку можна вписати коло, дорівнюють 5 см і 11 см. Знайдіть периметр трапеції.
137. Коло, вписане в рівнобічну трапецію, поділяє точкою дотику бічну сторону на відрізки, менший з яких дорівнює 5 см. Знайдіть більшу основу трапеції, якщо її периметр дорівнює 56 см.

Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки

138. Поділіть даний відрізок на шість рівних частин.
139. Відрізок BE — медіана трикутника ABC , $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = 24$ см (рис. 133). Відомо, що $MN \parallel AC$, $DK \parallel AC$, $BM = MA$, $MD = DA$. Знайдіть LP .

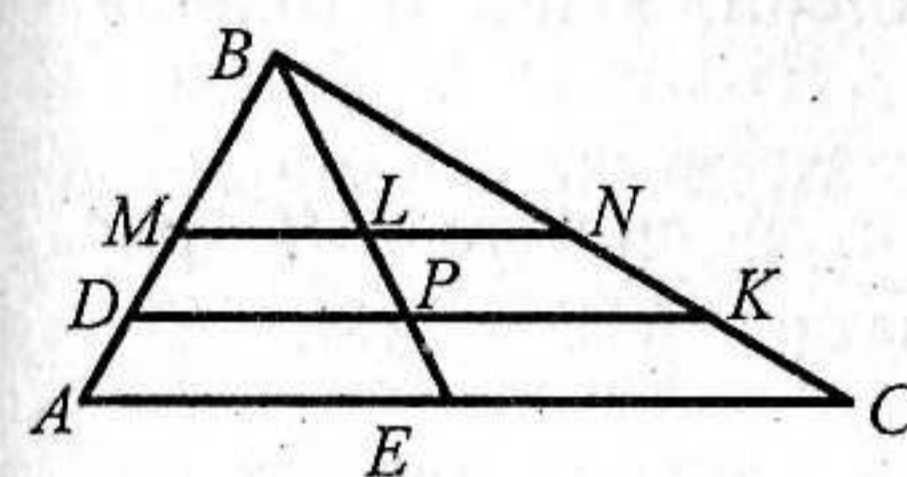


Рис. 133

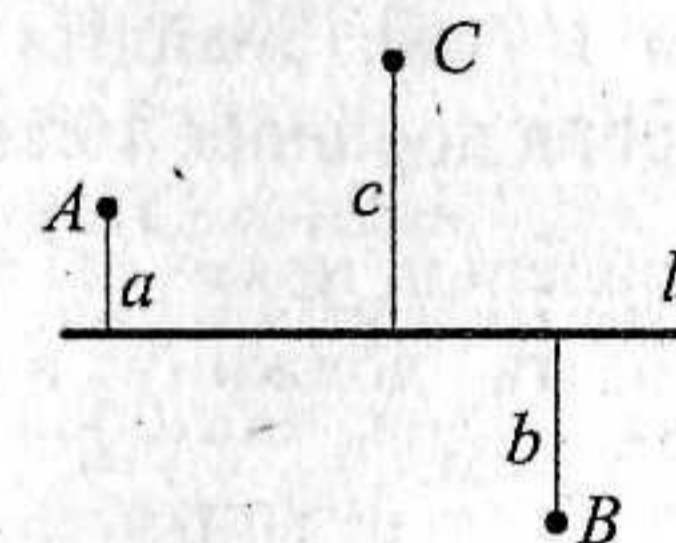


Рис. 134

140. Відстані від точок A , B і C до прямої l (рис. 134) дорівнюють відповідно a , b і c ($a < b < c$). Відомо, що середини відрізків AB і BC рівновіддалені від прямої l . Доведіть, що $2b = a + c$.
141. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle B = 90^\circ$) $\angle BAC = 30^\circ$, $AB = 44$ см. Знайдіть відстань від середини катета BC до гіпотенузи AC .
142. Точка M — середина основи BC трапеції $ABCD$. Через точку M проведено дві паралельні діагоналям трапеції, одна з яких перетинає сторону AB у точці K , а друга — сторону CD у точці E . Знайдіть відстань між точками K і E , якщо $AD = 9$ см, $BC = 7$ см.
143. Бічну сторону трапеції поділено на 6 рівних частин. Через точки поділу проведено дві паралельні основам. Найменший і найбільший з відрізків цих прямих, які містяться між бічними сторонами трапеції, відповідно дорівнюють 4 см і 8 см. Знайдіть основи трапеції.
144. У прямокутному трикутнику ABC гіпотенуза $AC = 18$ см, $\angle C = 60^\circ$. Медіану BM поділено на 3 рівні частини. Через точки поділу паралельно катету BC проведено дві паралельні прямих, які містяться між медіаною BM і гіпотенузою.

145. Менша основа трапеції дорівнює 6 см, а один з відрізків, на які діагональ поділяє її середню лінію, — 5 см. Знайдіть більшу основу трапеції.
146. Довжини відрізків, на які діагональ трапеції поділяє середню лінію, відносяться як 3 : 7. Знайдіть основи трапеції, якщо їх різниця дорівнює 20 см.
147. Діагоналі трапеції поділяють її середню лінію на 3 відрізки, один з яких дорівнює сумі двох інших. Знайдіть відношення основ трапеції.
148. Менша діагональ прямокутної трапеції ділить її прямий кут навпіл, а середню лінію трапеції поділяє на відрізки завдовжки 3 см і 7 см. Знайдіть периметр трапеції, якщо її більша бічна сторона дорівнює 10 см.
149. Паралельні прямі m і n перетинають сторони кута AMC (рис. 135). Знайдіть довжину відрізка MN , якщо $MK = 2$ см, $KL = 4$ см, $MP = 3$ см.

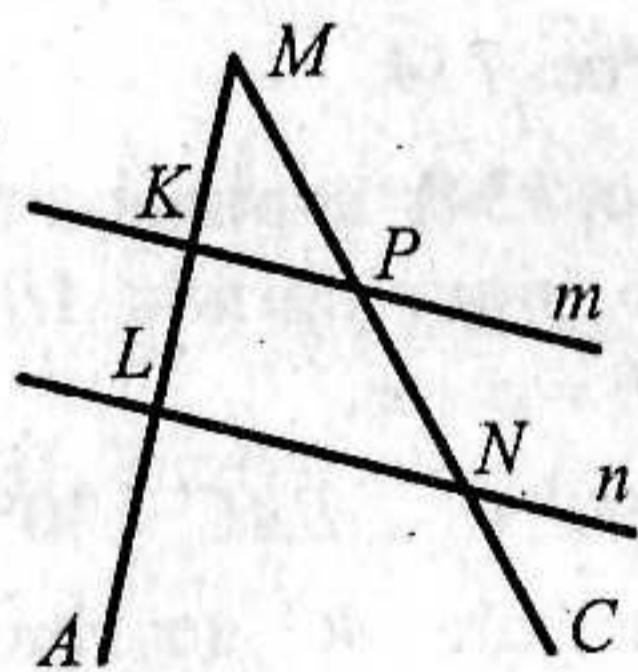


Рис. 135

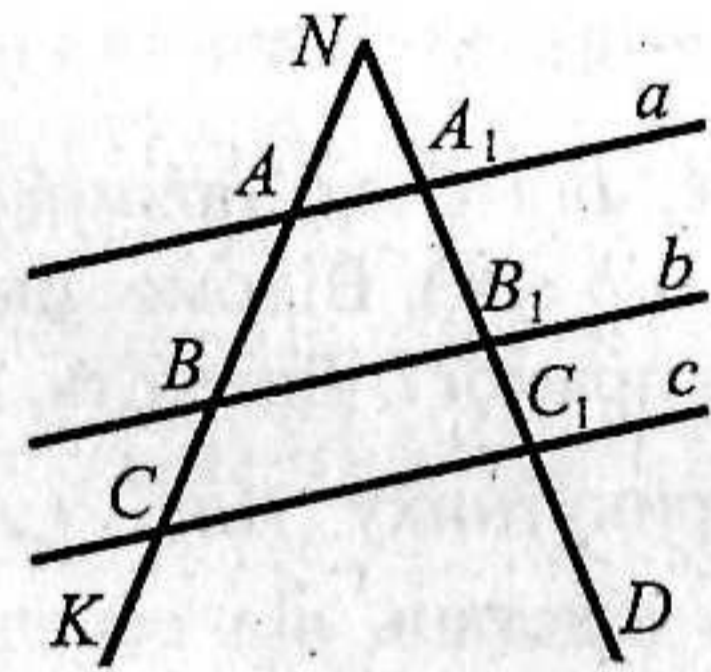


Рис. 136

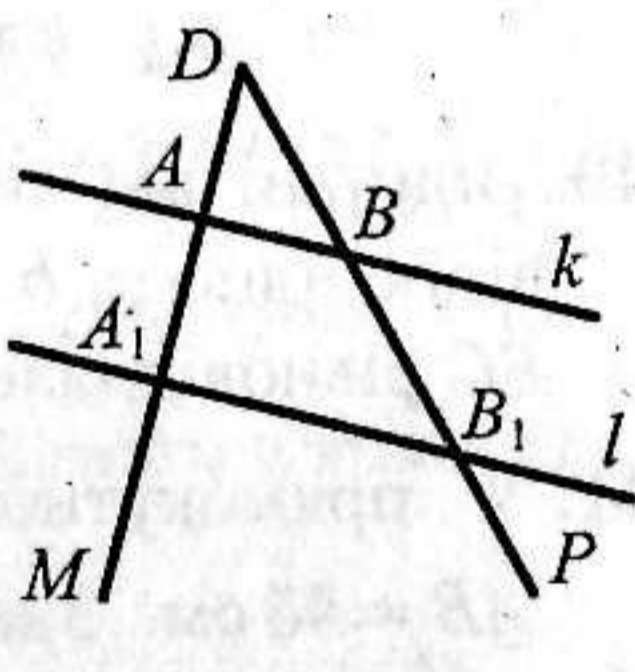


Рис. 137

150. Паралельні прямі a , b , c перетинають сторони кута KND (рис. 136). Знайдіть довжини відрізків NA і BC , якщо $NA_1 = 5$ см, $AB = 8$ см, $A_1B_1 = 6$ см, $B_1C_1 = 3$ см.
151. Паралельні прямі k і l перетинають сторони кута MDP (рис. 137). Знайдіть довжину відрізка AA_1 , якщо $DA = 8$ см, $BB_1 = 9$ см, $AA_1 = 2DB$.

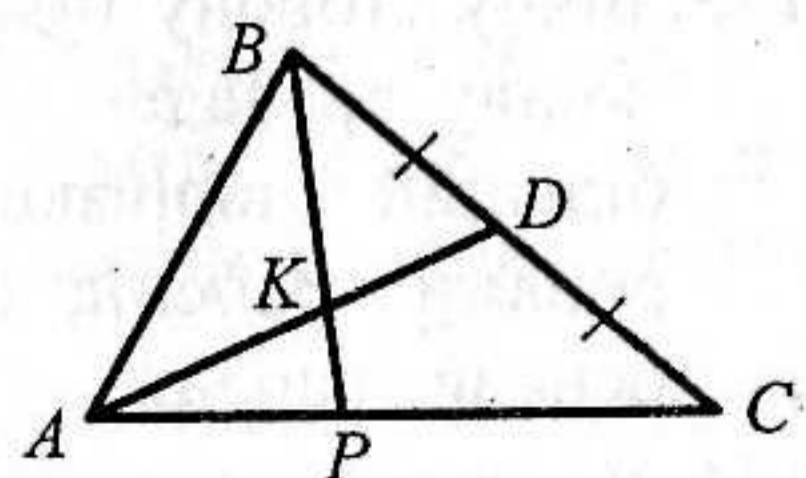


Рис. 138

152. Точка K — середина медіани AD трикутника ABC (рис. 138). Знайдіть відношення $AP : PC$.

153. На рисунку 139 $AM : MA_1 = 1 : 1$, $AB_1 : B_1C = 1 : 2$. Знайдіть відношення $BM : MB_1$.

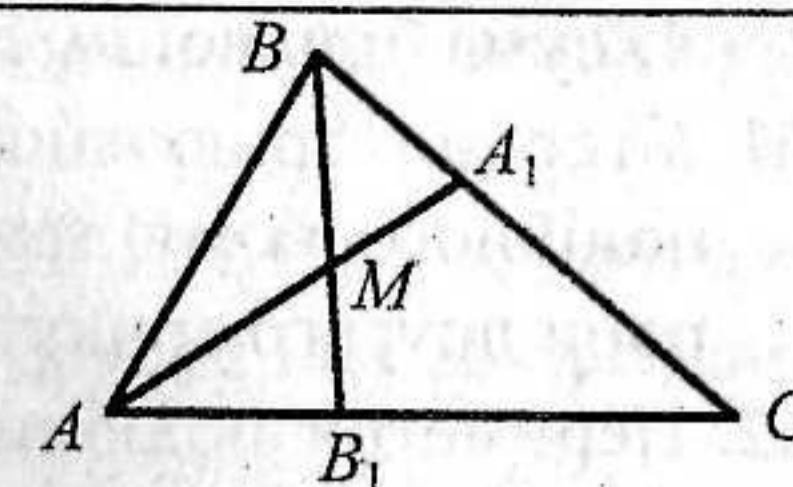


Рис. 139

154. Висота рівностороннього трикутника дорівнює 9 см. На якій відстані від вершин трикутника знаходиться точка перетину його бісектрис?
155. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) M — точка перетину медіан, $BM = 6$ см. Знайдіть відстань від середини бічної сторони до основи трикутника.
156. Відрізок AK — бісектриса трикутника ABC . Знайдіть:
1) відрізки BK і KC , якщо $AB = 10$ см, $AC = 12$ см, $BC = 11$ см;
2) сторону AC , якщо $BK : KC = 4 : 9$, $AB = 16$ см;
3) сторону BC , якщо $AB : AC = 5 : 3$, $BK - KC = 4$ см.
157. У прямокутний трикутник з кутом 60° вписано ромб зі стороною 6 см так, що кут 60° у них спільний і всі вершини ромба лежать на сторонах трикутника. У якому відношенні вершина ромба поділяє більший катет трикутника?
158. У трикутнику, сторони якого дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см, проведено півколо, центр якого належить більшій стороні трикутника і яке дотикається двох інших сторін. На які відрізки центр півкола поділяє більшу сторону трикутника?

Подібні трикутники

159. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні, причому сторонам AB і BC відповідають сторони A_1B_1 і B_1C_1 (рис. 140). Знайдіть невідомі сторони цих трикутників (розміри сторін дано в сантиметрах).

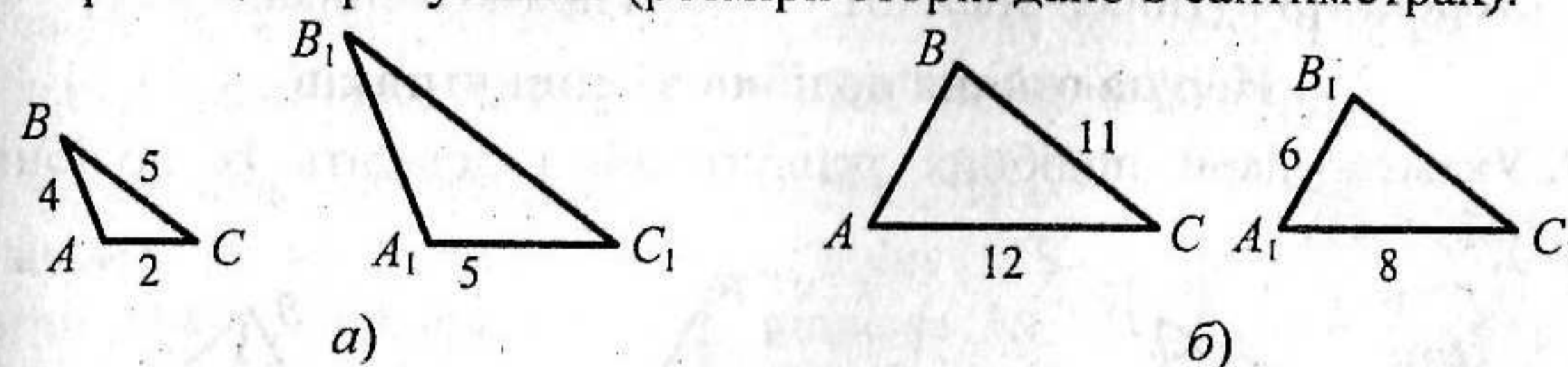


Рис. 140

160. Сторони трикутника відносяться як 7 : 5 : 9. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, якщо в нього:
1) периметр дорівнює 42 см;
2) більша сторона дорівнює 27 см;
3) середня за величиною сторона дорівнює 28 см;

4) сума більшої і меншої сторін дорівнює 84 см.

161. Сторони трикутника відносяться як 4 : 8 : 9, а менша сторона подібного йому трикутника дорівнює 24 см. Знайдіть інші сторони другого трикутника.

162. Периметри подібних трикутників відносяться як 2 : 5, а сума їх більших сторін дорівнює 56 см. Знайдіть сторони трикутників, якщо сторони одного з них відносяться як 2 : 3 : 4.

163. На рисунку 141 $NK \parallel FA$. Запишіть пропорції, які починаються з відношення:

1) $\frac{MK}{MN}$; 2) $\frac{MF}{MN}$; 3) $\frac{FA}{NK}$; 4) $\frac{MA}{FA}$.

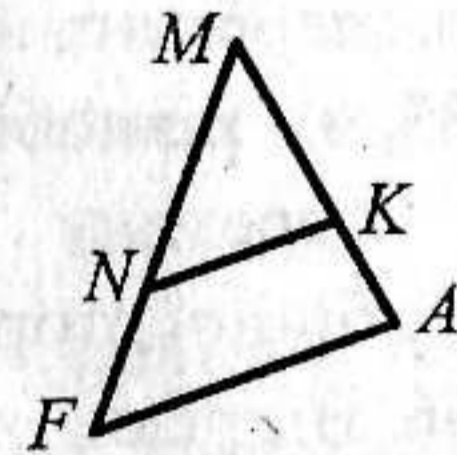


Рис. 141

164. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці L . Менша основа BC трапеції дорівнює 4 см, $LB = 5$ см, $AB = 7$ см. Знайдіть більшу основу трапеції.

165. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M , $AM = 20$ см. Знайдіть AB , якщо $DC : CM = 3 : 2$.

166. У трикутник ABC вписано паралелограм $MNCP$ (рис. 142), $AC = 10$ см, $BC = 12$ см, $MN = 3$ см. Знайдіть MP .

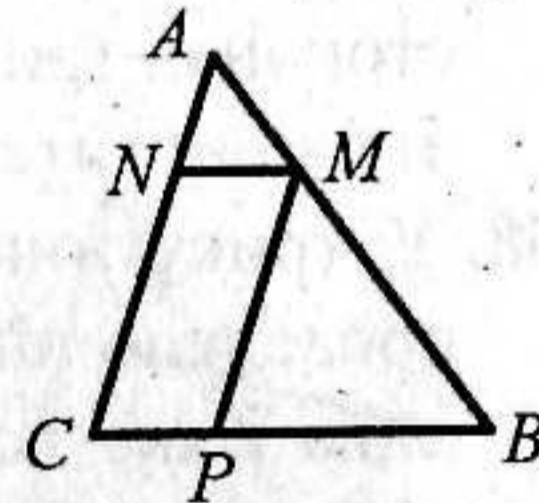


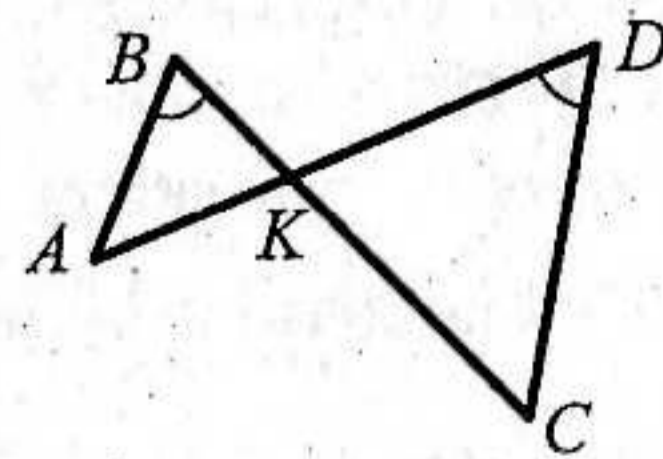
Рис. 142

167. У трикутник ABC вписано ромб $DKFC$ так, що кут C у них спільний, а вершина K належить стороні AB . Сторона ромба дорівнює 4 см, $BF = 3$ см. Знайдіть AC .

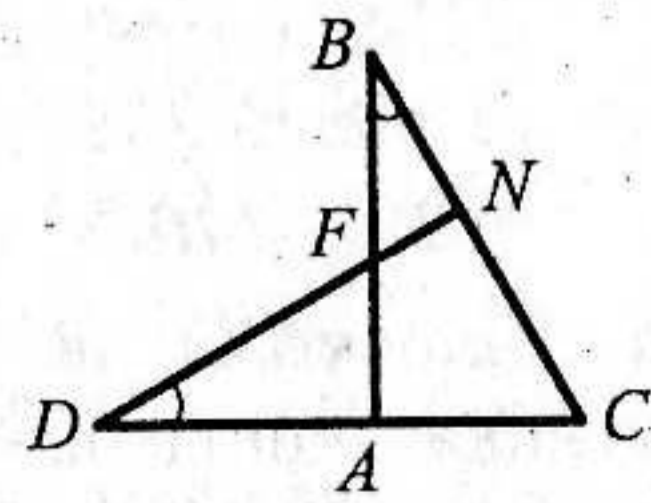
168. У трикутник зі стороною 10 см і висотою 7 см, проведеною до даної сторони, вписано прямокутник, сторони якого відносяться як 4 : 7, причому менша сторона прямокутника належить даній стороні трикутника. Знайдіть сторони прямокутника.

Перша ознака подібності трикутників

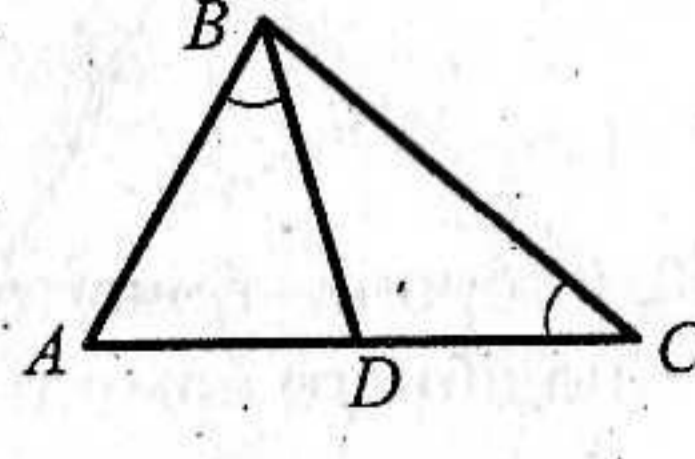
169. Укажіть пари подібних трикутників і доведіть їх подібність (рис. 143).



a)



б)



в)

Рис. 143

170. Доведіть, що рівнобедрені трикутники подібні, якщо рівні їх кути при основі.

171. Кути одного трикутника відносяться як 5 : 12 : 19, а в другому трикутнику один з кутів на 35° більший за другий і на 35° менший від третього кута. Чи подібні ці трикутники?

172. У паралелограмі $ABCD$ проведено висоти BK і CF (рис. 144). Доведіть подібність трикутників CBK і DCF .

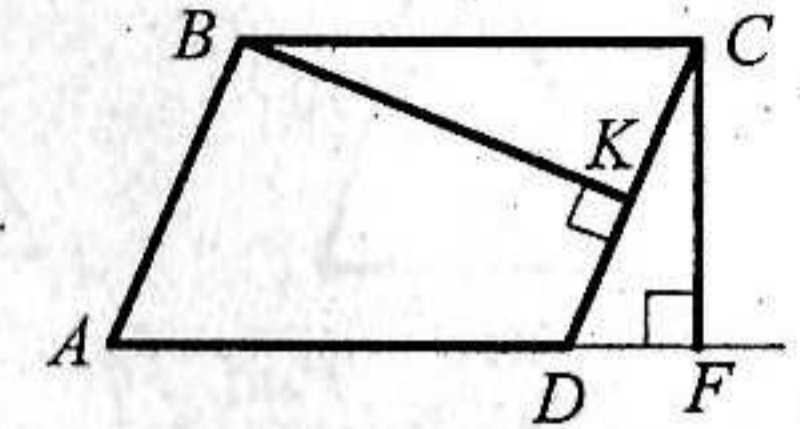


Рис. 144

173. Сторони паралелограма дорівнюють 16 см і 12 см, а відстань між більшими сторонами дорівнює 10 см. Знайдіть відстань між меншими сторонами паралелограма.

174. Периметр паралелограма дорівнює 44 см, а його висоти — 5 см і 6 см. Знайдіть сторони паралелограма.

175. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 14 см, а діагоналі — 15 см і 20 см. Знайдіть відрізки, на які точка перетину діагоналей поділяє кожну діагональ.

176. У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) M — точка перетину діагоналей, $BM : MD = 1 : 3$, а середня лінія трапеції дорівнює 8 см. Знайдіть основи трапеції.

177. На стороні BC трикутника ABC позначено точку K так, що $\angle CAK = \angle ABC$, $CK = 4$ см, $KB = 5$ см. Знайдіть AC .

178. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці M . Знайдіть довжину хорди AB , якщо $AM = 6$ см, $CM = 8$ см, $MD = 9$ см.

179. Дано точку P , яка віддалена на 12 см від центра кола радіуса 15 см. Через цю точку проведено хорду завдовжки 18 см. Знайдіть довжини відрізків, на які точка P поділяє цю хорду.

180. Через точку M проведено до кола дотичну MK (K — точка дотику) і січну ME (рис. 145). Знайдіть довжину відрізка MF січної, якщо $MK = 10$ см, $ME = 12$ см.

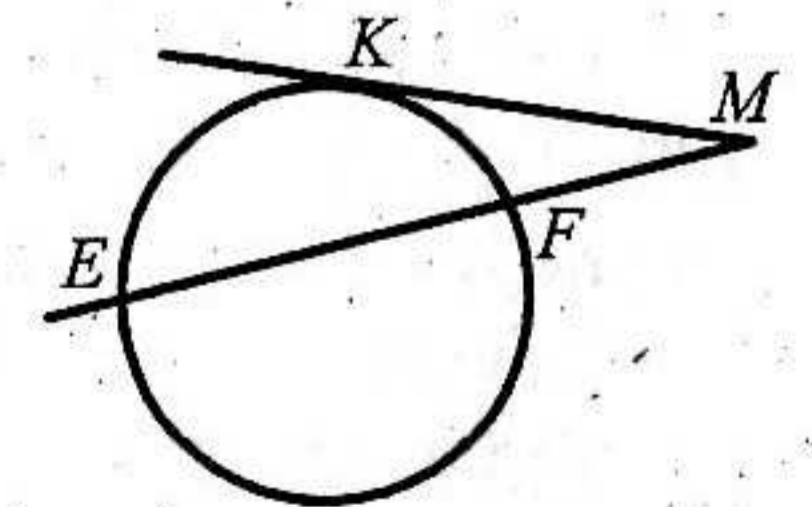


Рис. 145

181. Через точку A , яка лежить поза колом, проведено дві прямі, одна з яких дотикається до кола в точці E , а друга перетинає коло в точках F і K (точка F лежить між точками A і K), $AE = 8$ см, $AF : FK = 1 : 3$. Знайдіть FK .

Друга і третя ознаки подібності трикутників

182. Доведіть подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, зображених на рисунку 146 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

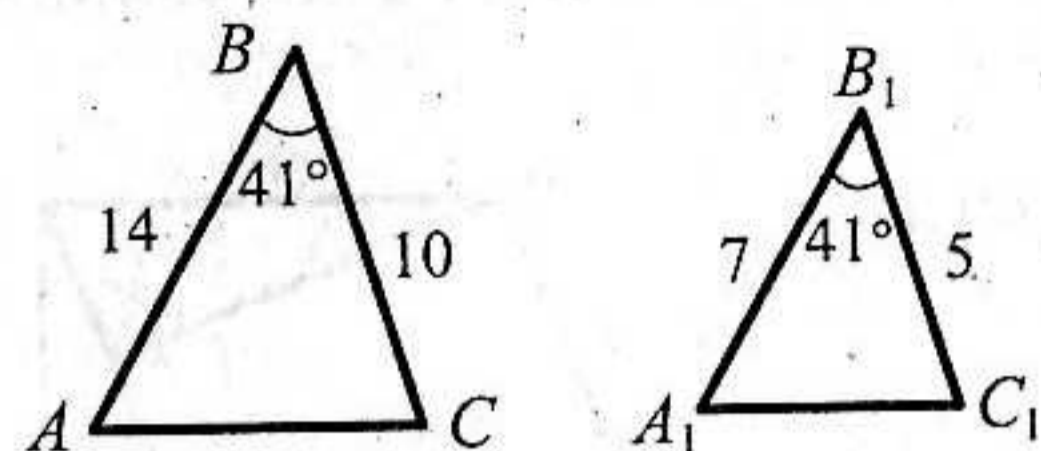


Рис. 146

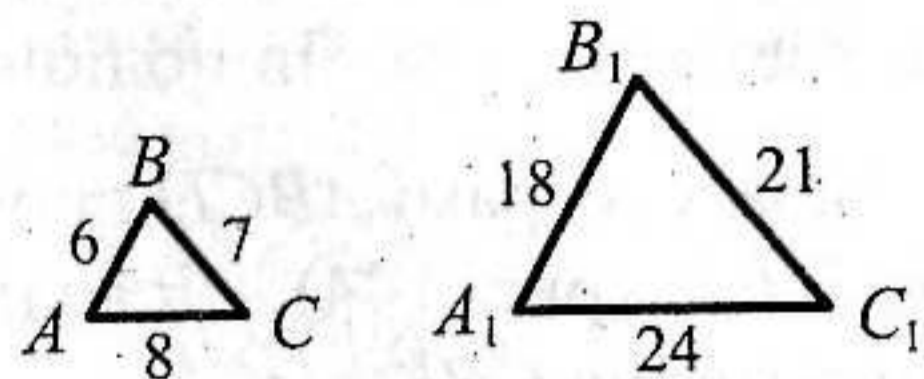


Рис. 147

183. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle B = \angle B_1$, а сторони трикутника ABC , які утворюють кут B , у 2,5 раза менші від сторін, які утворюють кут B_1 . Знайдіть сторони AC і A_1C_1 , якщо їх сума дорівнює 10,5 см.
184. У трикутнику ABC $AB = 24$ см, $BC = 18$ см. На стороні AB відклали відрізок $BK = 16$ см, а на стороні BC — відрізок $CD = 6$ см. Чи подібні трикутники ABC і DBK ?
185. Доведіть, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, зображені на рисунку 147, подібні (довжини відрізків дано в сантиметрах).
186. Чи подібні трикутники ABD і BDC , зображені на рисунку 148 (довжини відрізків дано в сантиметрах)?
187. Визначте, чи подібні трикутники, якщо їх сторони дорівнюють:
- 1) 6 см, 10 см, 7 см і 30 см, 50 см, 35 см;
 - 2) 4 см, 11 см, 12 см і 12 см, 22 см, 26 см.
188. Сторони одного трикутника відносяться як $6 : 8 : 9$, а сторони другого трикутника дорівнюють 24 см, 32 см і 36 см. Чи подібні ці трикутники?
189. Через вершини B і C трикутника ABC проведено коло, яке перетинає сторони AB і AC трикутника в точках M і N відповідно. Доведіть, що трикутники BAC і NAM подібні. Знайдіть AM і AN , якщо $AB = 9$ см, $AC = 10$ см, $BC = 12$ см, $MN = 4$ см.

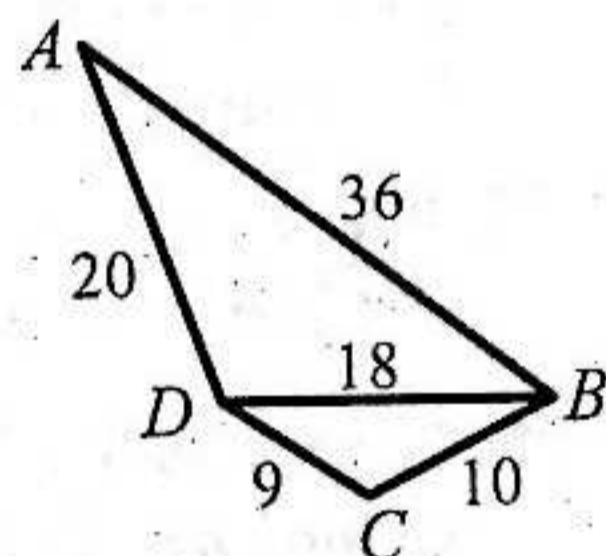


Рис. 148

Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику

190. Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену з вершини прямого кута, якщо вона поділяє гіпотенузу на відрізки завдовжки 9 см і 25 см.

191. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а його проекція на гіпотенузу — 8 см. Знайдіть гіпотенузу.
192. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, поділяє її на відрізки завдовжки 6 см і 24 см. Знайдіть катети трикутника.
193. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а проекція другого катета на гіпотенузу — 5 см. Знайдіть другий катет і гіпотенузу.
194. Знайдіть висоту і бічну сторону рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 12 см і 20 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.
195. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, а проекція цієї діагоналі на більшу основу дорівнює 10 см. Бічна сторона трапеції дорівнює 12 см. Знайдіть висоту і основи трапеції.
196. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, поділяє її на відрізки завдовжки 8 см і 18 см. Знайдіть діагоналі ромба.
197. Коло, вписане в рівнобічну трапецію, поділяє точкою дотику бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 50 см. Знайдіть радіус вписаного кола і основи трапеції.

Теорема Піфагора

198. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: 1) 10 см і 24 см; 2) 3 см і 5 см.
199. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза і другий катет відповідно дорівнюють: 1) 26 см і 10 см; 2) 8 см і 2 см.
200. Діагональ прямокутника дорівнює 34 см. Знайдіть сторони прямокутника, якщо їх довжини відносяться як $15 : 8$.
201. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB = BC = 12$ см, висота $BD = 8$ см. Знайдіть основу AC трикутника.
202. Сторона ромба дорівнює 4 см, а один з кутів — 120° . Знайдіть діагоналі ромба.
203. Дві сторони прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 12 см. Знайдіть третю сторону трикутника. Розгляньте всі можливі випадки.

204. Знайдіть довжину невідомого відрізка x на рисунку 149 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

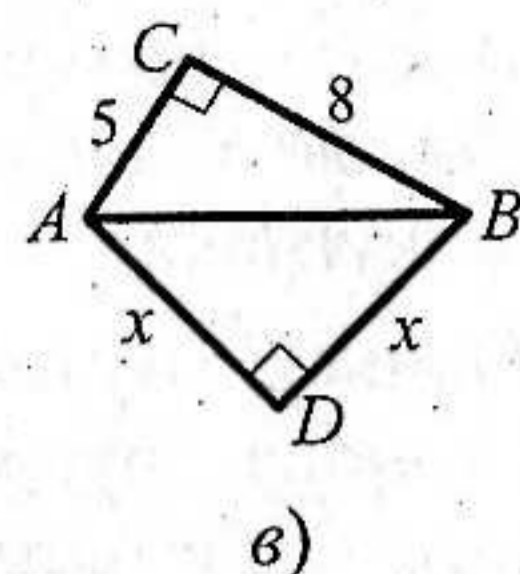
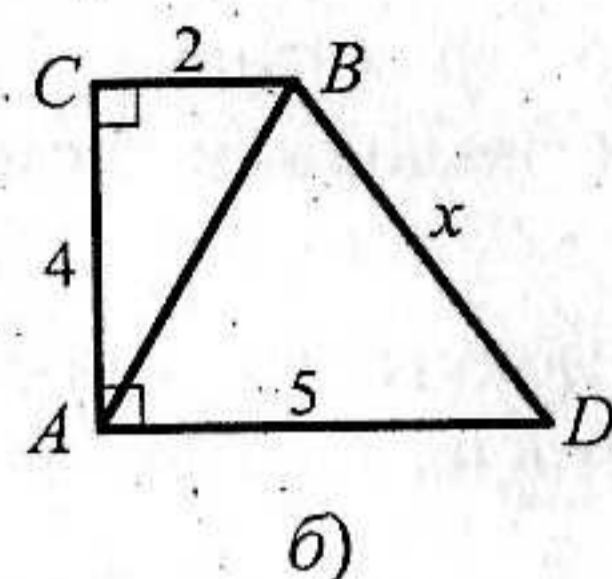
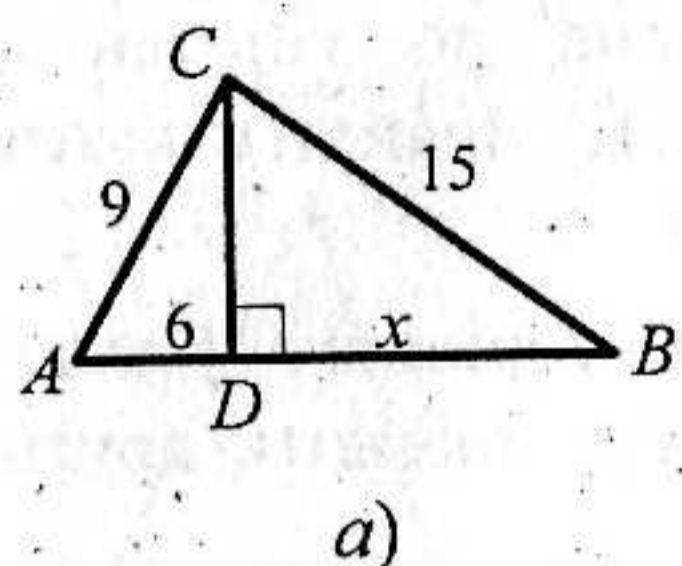


Рис. 149

205. Катети прямокутного трикутника відносяться як $12 : 5$, а гіпотенуза дорівнює 39 см. Знайдіть катети трикутника.
206. Сума катетів прямокутного трикутника дорівнює 17 см, а гіпотенуза — 13 см. Знайдіть катети трикутника.
207. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle B = 90^\circ$) $AC = 52$ см, $AB = 20$ см. Знайдіть медіану AM трикутника.
208. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 10 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо різниця його катетів дорівнює 4 см.
209. У гострокутному трикутнику ABC $AB = 17$ см, $BC = 25$ см, а висота BD поділяє сторону AC на відрізки AD і DC такі, що $AD : DC = 2 : 5$. Знайдіть AC .
210. У гострокутному рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено висоту AD і медіану BK . Знайдіть BK , якщо $AD = 8$ см, $CD = 6$ см.
211. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона більша за висоту, проведено до основи, на 2 см, а основа трикутника дорівнює 16 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.
212. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 72 см, а висота, проведена до основи, — 24 см. Знайдіть сторони трикутника.
213. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює 22 см і утворює з прямою кут 45° . Знайдіть довжину другої похилої, якщо її проекція на цю пряму дорівнює $\sqrt{82}$ см.
214. З точки, яка знаходиться на відстані 8 см від прямої, проведено до неї дві похилі завдовжки 17 см і 10 см. Знайдіть відстань між основами цих похилих. Скільки розв'язків має задача?
215. З точки до прямої проведено дві похилі, проекції яких на цю пряму дорівнюють 5 см і 9 см. Знайдіть довжини похилих, якщо їх сума дорівнює 28 см.

216. З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 15 см і 20 см, а довжини їх проекцій на цю пряму відносяться як $9 : 16$. Знайдіть відстань від точки до даної прямої.
217. У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику поділяє гіпотенузу на відрізки завдовжки 5 см і 12 см. Знайдіть катети трикутника.
218. У прямокутному трикутнику медіани, проведені до катетів, дорівнюють $2\sqrt{73}$ см і $4\sqrt{13}$ см. Знайдіть сторони трикутника.
219. У рівнобедреному прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, на 2 см менша від катета. Знайдіть гіпотенузу.
220. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника поділяє катет на відрізки завдовжки 25 см і 20 см. Знайдіть сторони трикутника.
221. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника поділяє висоту, проведено до основи, на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайдіть сторони трикутника.
222. Знайдіть медіану рівнобедреного трикутника, проведено до бічної сторони, якщо бічна сторона і основа трикутника дорівнюють відповідно 30 см і 48 см.
223. У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює 15 см, а середня лінія — 8 см. Знайдіть висоту трапеції.
224. У рівнобічній трапеції бічна сторона, висота і діагональ дорівнюють відповідно 10 см, 8 см і 17 см. Знайдіть основи трапеції.
225. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 20 см і 15 см. Знайдіть висоту трикутника, проведено до гіпотенузи.
226. У рівнобічну трапецію вписано коло, радіус якого дорівнює 8 см. Різниця основ трапеції дорівнює 24 см. Знайдіть сторони трапеції.
227. У колі з центром у точці O проведено хорду AB , яка перпендикулярна до радіуса OM і перетинає його в точці K , $OK : KM = 8 : 9$, $AB = 90$ см. Знайдіть радіус кола.
228. Радіуси двох кіл дорівнюють 10 см і 2 см, а довжина їх спільної зовнішньої дотичної — 15 см. Знайдіть відстань між центрами кіл.
229. Точки A і B лежать по різні сторони від прямої l на відстані 3 см і 5 см від неї відповідно. Знайдіть AB , якщо відстань між проекціями цих точок на пряму l дорівнює 6 см.

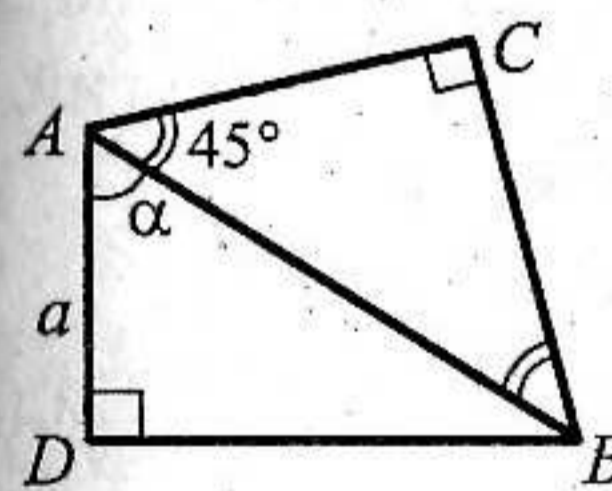
Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника

230. Побудуйте кут, косинус якого дорівнює: 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{4}{5}$.
231. Побудуйте кут, тангенс якого дорівнює: 1) $\frac{3}{8}$; 2) 5.
232. Побудуйте кут, синус якого дорівнює: 1) $\frac{1}{6}$; 2) 0,2.
233. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 12 см і 37 см. Знайдіть:
- 1) синус гострого кута, який лежить проти більшого катета;
 - 2) косинус гострого кута, який лежить проти більшого катета;
 - 3) тангенс гострого кута, який лежить проти меншого катета.
234. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 7 см і 24 см. Знайдіть:
- 1) тангенс гострого кута, який лежить проти більшого катета;
 - 2) синус гострого кута, який лежить проти більшого катета;
 - 3) косинус гострого кута, який лежить проти меншого катета.
235. Знайдіть $\sin \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.
236. Знайдіть значення виразу:
- 1) $\operatorname{tg} 30^\circ + \sin 60^\circ$;
 - 2) $2 \cos^2 45^\circ - \cos^2 30^\circ$.
237. У рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює 25 см, а висота — 7 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс гострого кута трапеції.
238. У рівнобічній трапеції $ABCD$ $AB = CD = 7$ см, $BC = 2$ см, $AD = 8$ см. Знайдіть синус і косинус кута CAD .

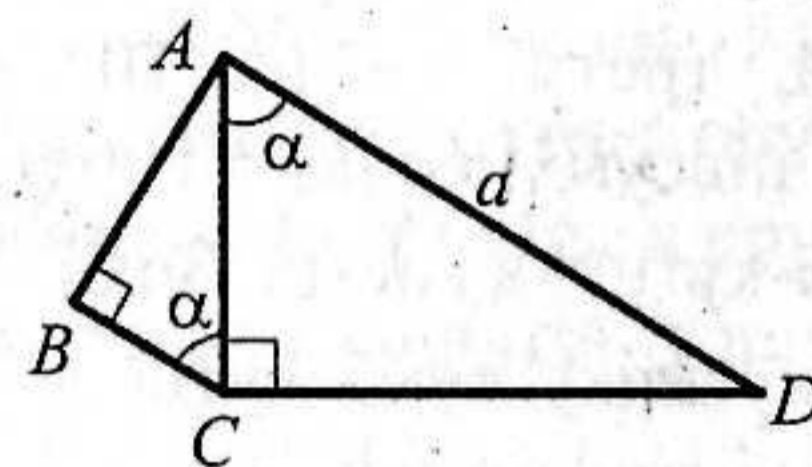
Розв'язування прямокутних трикутників

239. Знайдіть невідомі сторони прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), якщо:
- 1) $AC = 6$ см, $\sin B = \frac{1}{4}$;
 - 2) $BC = 4$ см, $\sin B = \frac{1}{3}$;
 - 3) $AB = 2$ см, $\operatorname{tg} A = 3$;
 - 4) $BC = 3$ см, $\cos A = \frac{3}{5}$;
 - 5) $AC = 5$ см, $\cos A = \frac{3}{7}$;
 - 6) $AB = 10$ см, $\operatorname{tg} B = 2$.

240. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) за відомими елементами:
- 1) $AB = 8$ см, $\angle A = 44^\circ$;
 - 2) $AC = 12$ см, $\angle A = 57^\circ$;
 - 3) $BC = 11$ см, $\angle A = 68^\circ$;
 - 4) $AB = 14$ см, $AC = 8$ см;
 - 5) $AC = 14$ см, $BC = 8$ см.
241. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB = BC = 10$ см, $\angle B = 64^\circ$. Знайдіть сторону AC і висоту BD трикутника.
242. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) $AC = 4$ см, $\angle C = 52^\circ$. Знайдіть сторони AB , BC і висоту CK трикутника.
243. З точки, що знаходиться на відстані 16 см від прямої, проведено до неї дві похилі, які утворюють з прямою кути 30° і 60° . Знайдіть довжини похилих і їх проєкцій на пряму.
244. З точки, що знаходиться на відстані 20 см від прямої, проведено до неї дві похилі, які утворюють з прямою кути 60° і 45° . Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки розв'язків має задача?
245. Знайдіть невідомі сторони прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), якщо:
- 1) $AB = c$, $\angle B = \alpha$;
 - 2) $AC = b$, $\angle A = \beta$;
 - 3) $BC = a$, $\angle A = \varphi$.
246. За рисунком 150 знайдіть відрізки AB і BC .



a)



б)

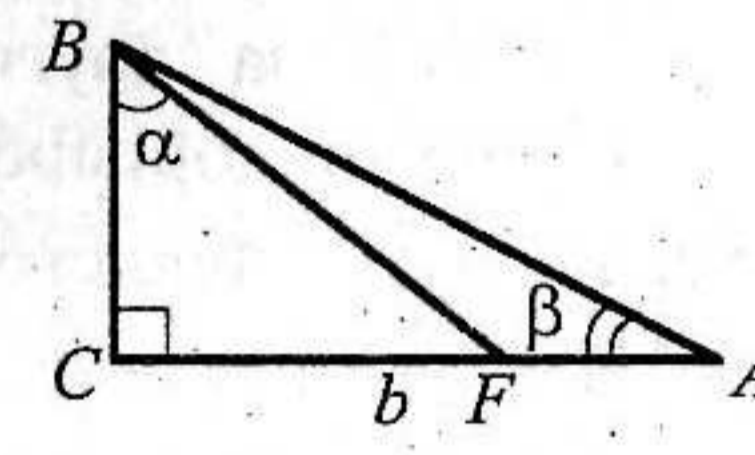


Рис. 151

Рис. 150

247. У прямокутному трикутнику ABC (рис. 151) $AC = b$, $\angle BAC = \beta$, $\angle FBC = \alpha$. Знайдіть відрізок AF .
248. Сторона AD прямокутника $ABCD$ дорівнює m , а кут між діагоналями, протилежний цій стороні, дорівнює α . Знайдіть сторону AB і діагоналі прямокутника.

249. Більша діагональ ромба дорівнює b , а тупий кут ромба дорівнює β . Знайдіть сторону ромба та його меншу діагональ.
250. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 4 см і 6 см, а бічна сторона утворює з більшою основою кут 30° . Знайдіть висоту і бічну сторону трапеції.
251. У прямокутній трапеції $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AB \perp AD$, $BC = CD = 20$ см, $\angle BCD = 120^\circ$. Знайдіть сторони AB , AD і діагоналі трапеції.
252. У трапеції $ABCD$ (рис. 152) $AD = 14$ см, $DC = 2\sqrt{6}$ см, $\angle A = 30^\circ$, $\angle D = 135^\circ$. Знайдіть основу BC трапеції.

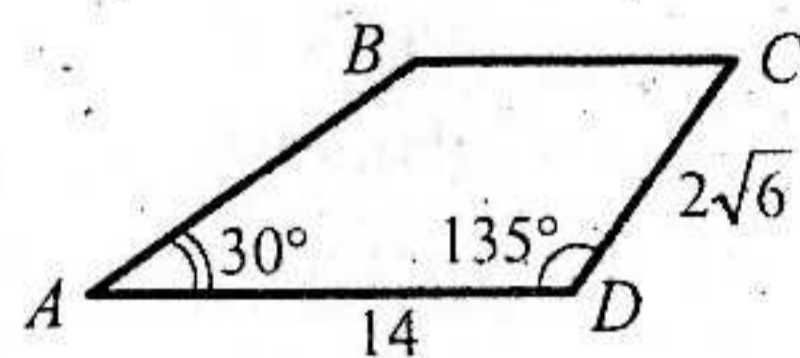


Рис. 152

Многокутники

253. Скільки діагоналей можна провести з однієї вершини опуклого десятикутника? Знайдіть загальну кількість діагоналей опуклого десятикутника.
254. Чи можна побудувати опуклий многокутник, усі кути якого гострі?
255. Чи може найменший кут опуклого семикутника дорівнювати 136° ?
256. Як зміниться сума кутів опуклого многокутника, якщо кількість його сторін збільшиться на два?
257. Знайдіть кути опуклого шестикутника, якщо їх градусні міри відносяться як $3 : 5 : 4 : 5 : 3 : 4$.
258. Знайдіть кути опуклого чотирикутника, якщо один з них на 30° більший за другий, третій — на 10° більший за другий, а четвертий дорівнює півсумі першого і третього кутів.
259. Усі кути опуклого n -кутника гострі. Знайдіть n .
260. В опуклому многокутнику сума кутів дорівнює 2700° . Знайдіть кількість його сторін і діагоналей.
261. В опуклому многокутнику 152 діагоналі. Знайдіть кількість його сторін і суму кутів.

Поняття площі многокутника. Площа прямокутника

262. Знайдіть площу квадрата, діагональ якого дорівнює: 1) 6 см; 2) \sqrt{a} .
263. Сторона прямокутника дорівнює 10 см і утворює з діагоналлю кут 60° . Знайдіть площу прямокутника.

264. Знайдіть сторони прямокутника, якщо вони відносяться як $3 : 8$, а площа прямокутника дорівнює 96 см^2 .
265. Площа прямокутника дорівнює 88 см^2 . Знайдіть сторони прямокутника, якщо одна з них на 3 см менша від другої.
266. Квадрат і прямокутник рівновеликі. Сторона квадрата дорівнює 12 см, а сторони прямокутника відносяться як $4 : 9$. Знайдіть сторони прямокутника.
267. Знайдіть радіус кола, описаного навколо квадрата, якщо площа квадрата дорівнює S .
268. Чотирикутник $ABCD$ — квадрат (рис. 153). Відрізки MF і KE паралельні його сторонам. Користуючись рисунком, доведіть формулу:

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

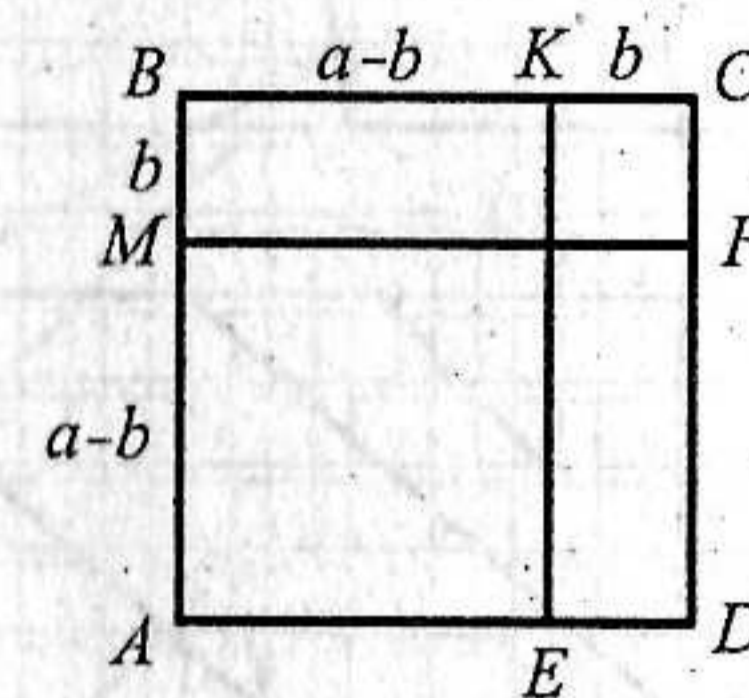


Рис. 153

269. Чи можуть два нерівних прямокутники бути рівновеликими?
270. Як зміниться площа квадрата, якщо його сторону:
- 1) зменшити у 3 рази;
 - 2) збільшити в a разів?
271. Як зміниться площа квадрата, якщо його діагональ зменшити в 2 рази? Як зміниться при цьому периметр квадрата?
272. Як зміниться площа прямокутника, якщо:
- 1) одну з його сторін збільшити у 4 рази;
 - 2) одну з його сторін зменшити у 6 разів;
 - 3) обидві сторони зменшити у 3 рази;
 - 4) одну сторону збільшити у 3 рази, а другу — у 5 разів;
 - 5) одну сторону зменшити у 9 разів, а другу — у 2 рази?
273. Відношення площ двох квадратів дорівнює 5. Знайдіть відношення їх периметрів.

274. У прямокутний трикутник ABC ($\angle B = 90^\circ$) вписано квадрат (рис. 154). Знайдіть площу квадрата, якщо $AB = 12$ см, $BC = 16$ см.

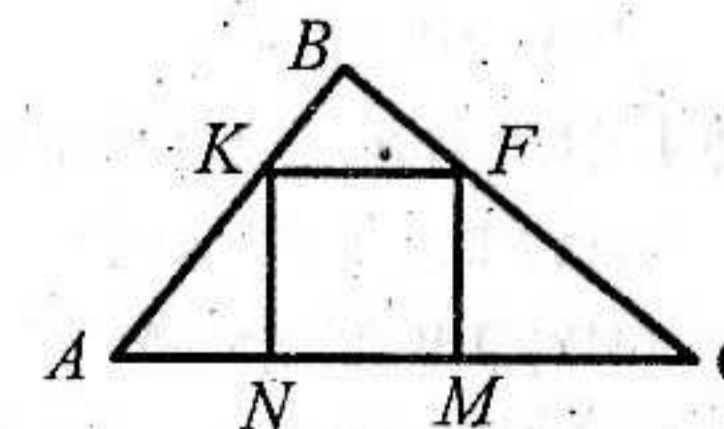


Рис. 154

275. Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює різниці площ двох даних квадратів.
276. Сторони двох квадратів дорівнюють відповідно a і b . Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює ab .

Площа паралелограма

277. Знайдіть площу паралелограма, сторона якого дорівнює 14 см, а висота, проведена до неї, — 8 см.
278. Які з паралелограмів, зображених на рисунку 155, рівновеликі?

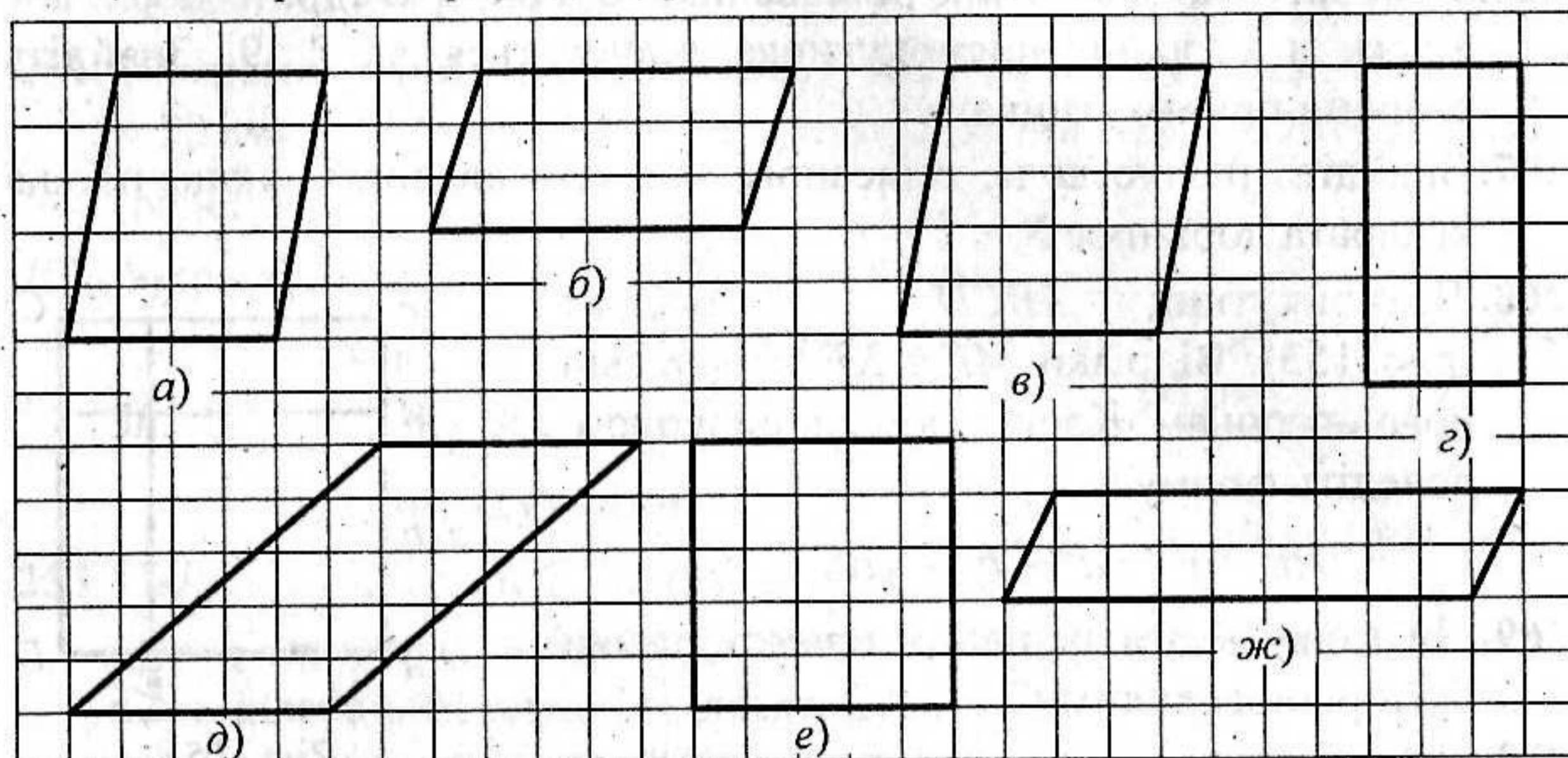


Рис. 155

279. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 8 см і 14 см, а кут між ними — 45° .
280. Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює $7\sqrt{2}$ см, а один з кутів — 135° .
281. Площа паралелограма дорівнює 56 см^2 . Знайдіть відстань між сторонами паралелограма, довжини яких дорівнюють 8 см.
282. Одна із сторін паралелограма дорівнює 5 см, а висота, проведена до другої сторони, — 4 см. Знайдіть невідому сторону і висоту паралелограма, якщо його площа дорівнює 40 см^2 .
283. Сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 10 см, а одна з висот — 6 см. Знайдіть другу висоту паралелограма. Скільки розв'язків має задача?
284. Площа паралелограма дорівнює 45 см^2 , а його висота на 4 см менша від сторони, до якої вона проведена. Знайдіть цю сторону паралелограма та висоту, проведenu до неї.
285. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 25 см і 7 см, а одна з діагоналей перпендикулярна до його сторони.
286. Доведіть, що пряма, яка поділяє паралелограм на дві рівновеликі частини, проходить через точку перетину його діагоналей.

Площа трикутника

287. Сторона трикутника дорівнює 10 см, а висота, проведена до неї, — 3,5 см. Знайдіть площу трикутника.
288. Площа трикутника дорівнює 92 см^2 , а одна із сторін — 4 см. Знайдіть висоту трикутника, проведenu до цієї сторони.
289. Знайдіть площу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 5 см і 11 см.
290. Які з трикутників, зображених на рисунку 156, рівновеликі?

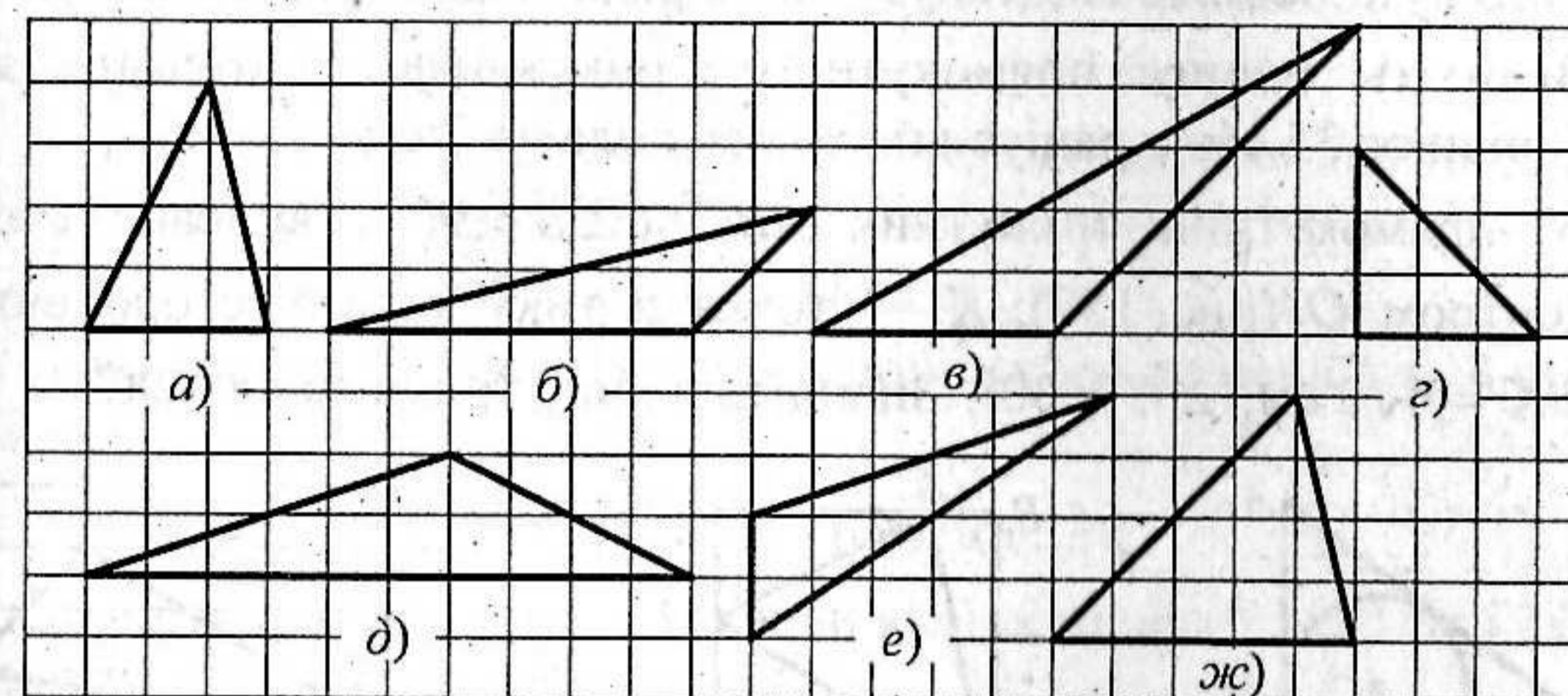


Рис. 156

291. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 6 см і 5 см, а кут між ними: 1) 60° ; 2) 135° .
292. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 16 см, а бічна сторона — 10 см.
293. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 8 см і 15 см. Знайдіть висоту трикутника, проведenu до гіпотенузи.
294. У трикутнику ABC $AC : CB = 2 : 5$. Знайдіть відношення висот трикутника, проведених з вершин A і B .
295. Доведіть, що меншій стороні трикутника відповідає більша висота.
296. Доведіть, що медіани трикутника поділяють його на шість рівновеликих трикутників.
297. Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O . Відомо, що трикутники AOB і COD рівновеликі. Доведіть, що $BC \parallel AD$.
298. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки завдовжки 2 см і 8 см, рахуючи від вершини кута при основі. Знайдіть площу трикутника.

299. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 48 см. Знайдіть площу трикутника, якщо відношення його бічної сторони до основи дорівнює 25 : 14.
300. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 37 см, а сума катетів — 47 см.
301. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо висота, проведена до гіпотенузи, поділяє її на відрізки завдовжки 9 см і 16 см.
302. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса прямого кута поділяє гіпотенузу на відрізки завдовжки 15 см і 20 см.
303. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 35 см, а радіус вписаного кола — 7 см.
304. У прямокутний трикутник ABC ($\angle B = 90^\circ$) вписано коло з центром O (рис. 157), K — точка дотику кола зі стороною AB , $BK = 4\sqrt{3}$ см, $\angle C = 30^\circ$. Знайдіть площу трикутника ABC .

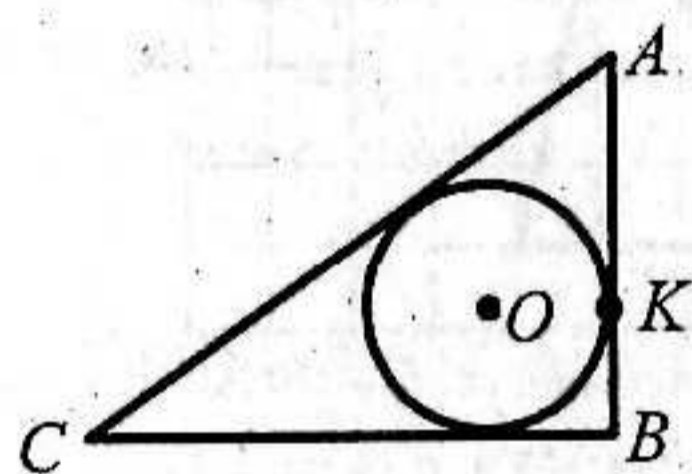


Рис. 157

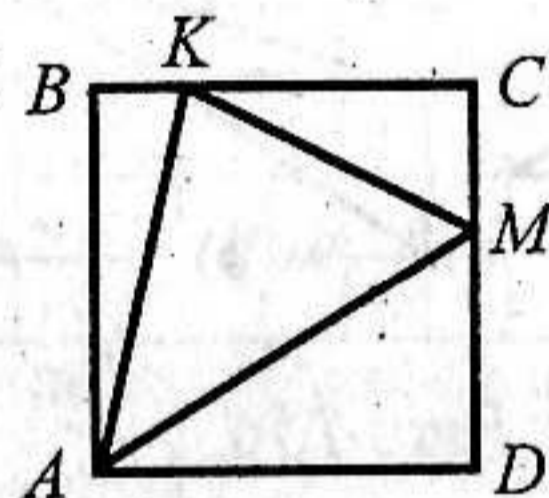


Рис. 158

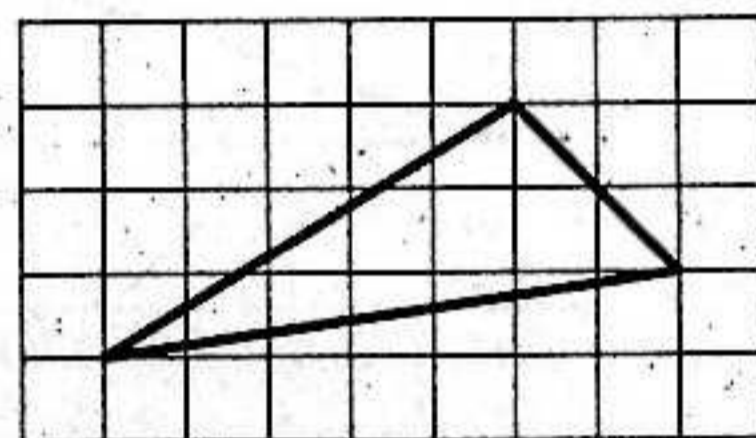


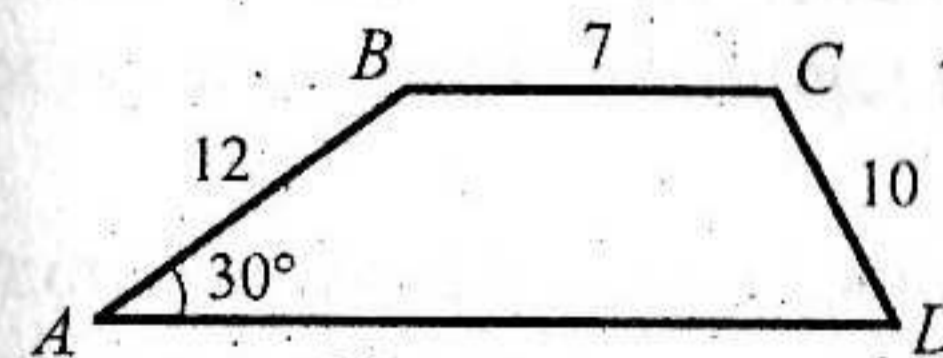
Рис. 159

305. У квадрат $ABCD$ вписано трикутник AKM (рис. 158), $AB = 10$ см, $BK = 2$ см, $DM = 6$ см. Знайдіть площу трикутника AKM .
306. Знайдіть площу трикутника, зображеного на рисунку 159, якщо сторона клітинки дорівнює 1 см.
307. Площа трикутника ABC дорівнює 42 см^2 . Точка K поділяє сторону AC у відношенні 2 : 5, рахуючи від точки A . Знайдіть площі трикутників ABK і KBC .
308. У трикутнику ABC $AC = 10$ см, $CB = 7$ см; відрізок CK — бісектриса трикутника. Знайдіть відношення площ трикутників ACK і BCK .
309. Через вершину трикутника проведіть пряму так, щоб вона розбила його на два трикутника, площі яких відносяться як:
1) 4 : 1; 2) 3 : 4.
310. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 12 см і 7 см.
311. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона дорівнює 20 см, а різниця діагоналей — 8 см.

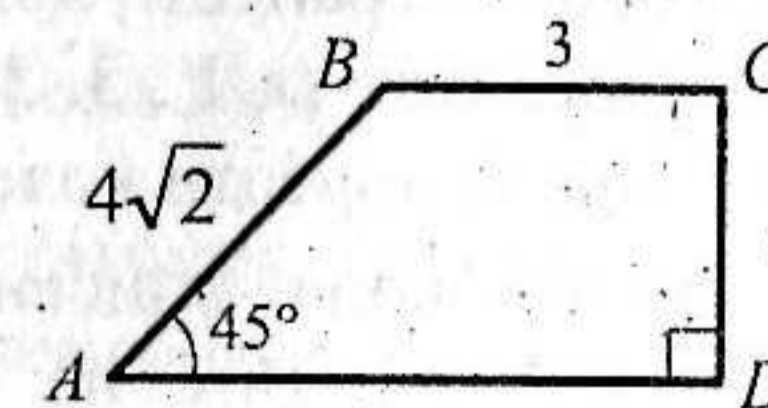
312. Знайдіть площу ромба, якщо його діагоналі відносяться як 12 : 35, а сторона дорівнює 74 см.
313. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, поділяє її на відрізки завдовжки 16 см і 25 см. Знайдіть площу ромба.
314. Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведіть пряму так, щоб вона розбила його на дві фігури, площі яких відносяться як 1 : 4.
315. Побудуйте рівнобедрений трикутник, площа якого відноситься до площі даного трикутника як $1 : \sqrt{3}$, а бічна сторона дорівнює одній із сторін даного трикутника.
316. На сторонах AB і AD квадрата $ABCD$ взято відповідно точки K і M такі, що трикутник CKM — рівносторонній. Знайдіть площу квадрата, якщо сторона трикутника дорівнює 1 см.
317. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 3 см, 7 см і 8 см.

Площа трапеції

318. Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 14 см, а висота — 5 см.
319. Площа трапеції дорівнює 98 см^2 , одна з її основ — 12 см, а висота — 7 см. Знайдіть другу основу трапеції.
320. Площа трапеції дорівнює 50 см^2 , а її висота — 5 см. Знайдіть основи трапеції, якщо вони відносяться як 1 : 4.
321. Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 7 см і 9 см, а бічна сторона завдовжки 6 см утворює з більшою основою кут 45° .
322. Знайдіть площу трапеції $ABCD$, зображеної на рисунку 160 (довжини відрізків дано в сантиметрах).



а)



б)

Рис. 160

323. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 30 см і 40 см, а діагональ — 37 см. Знайдіть площу трапеції.
324. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, менша основа якої дорівнює 7 см, бічна сторона — 10 см, а кут при більшій основі — 60° .

325. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, діагоналі якої перпендикулярні, а основи дорівнюють 12 см і 20 см.
326. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 4 см і 10 см, а діагоналі ділять її тупі кути навпіл.
327. Різниця основ прямокутної трапеції дорівнює 6 см, а менша основа — 12 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша діагональ ділить прямий кут трапеції навпіл.
328. Знайдіть площу прямокутної трапеції, більша основа якої дорівнює 24 см, менша бічна сторона — 10 см, а тупий кут — 135° .
329. Бічні сторони прямокутної трапеції дорівнюють 17 см і 8 см, а її основи відносяться як 2 : 5. Знайдіть площу трапеції.
330. Висота рівнобічної трапеції дорівнює $7\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу трапеції, якщо кут між її діагоналями, протилежний бічній стороні трапеції, дорівнює 60° .
331. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, діагоналі якої перпендикулярні, а висота дорівнює 10 см.
332. Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 8 см і 18 см, а кути при більшій основі — 30° і 60° .
333. Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 8 см і 22 см, а бічні сторони — 26 см і 28 см.
334. Точка дотику кола, вписаного в рівнобічну трапецію, поділяє її бічну сторону на відрізки завдовжки 9 см і 16 см. Знайдіть площу трапеції.
335. Площа рівнобічної трапеції дорівнює $50\sqrt{2}$ см², а гострий кут дорівнює 45° . Знайдіть висоту трапеції, якщо відомо, що в неї можна вписати коло.
336. Бічні сторони трапеції дорівнюють 15 см і 13 см, а довжини основ відносяться як 1 : 3. Знайдіть площу трапеції, якщо відомо, що в неї можна вписати коло.
337. Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, поділяє більшу бічну сторону на відрізки, довжини яких відносяться як 4 : 9. Знайдіть площу трапеції, якщо менша з її бічних сторін дорівнює 24 см.

КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

Варіант 1

Контрольна робота № 1

Тема. Паралелограм та його види

- 1.° У чотирикутнику $ABCD$ проведено діагональ AC (рис. 161), $\angle ACB = \angle CAD$, $\angle ACD = \angle CAB$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

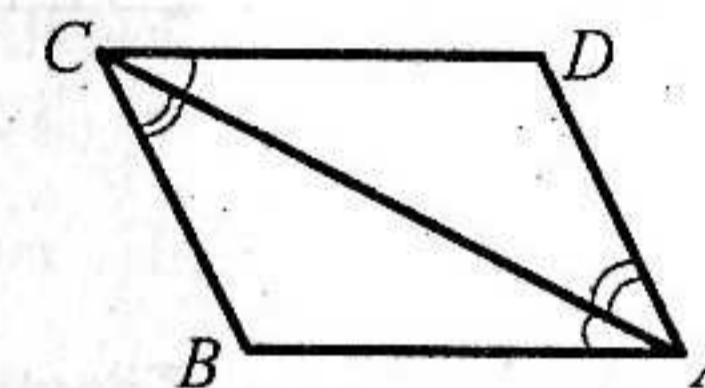


Рис. 161

- 2.° Одна з сторін прямокутника на 6 см більша за другу, а його периметр дорівнює 48 см. Знайдіть сторони прямокутника.
- 3.° Один з кутів ромба дорівнює 72° . Знайдіть кути, які утворює сторона ромба з його діагоналями.
- 4.° У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці E . Відрізок BE більший за відрізок EC у 3 рази. Знайдіть периметр паралелограма, якщо $BC = 12$ см.
- 5.° У ромбі $ABCD$ з вершини тупого кута B проведено висоти BE і BF до сторін AD і DC відповідно. Кут EBF дорівнює 30° . Знайдіть периметр ромба, якщо $BE = 6$ см.
- 6.° Пряма проходить через середину діагоналі AC паралелограма $ABCD$ і перетинає сторони BC і AD у точках M і K відповідно. Доведіть, що чотирикутник $AMCK$ — паралелограм.

Контрольна робота № 2

Тема. Середня лінія трикутника. Трапеція.
Вписані і описані чотирикутники

- 1.° Знайдіть периметр трикутника, якщо його середні лінії дорівнюють 6 см, 9 см і 10 см.
- 2.° Основи трапеції відносяться як 3 : 5, а середня лінія дорівнює 32 см. Знайдіть основи трапеції.
- 3.° Бічні сторони трапеції дорівнюють 7 см і 12 см. Чому дорівнює периметр трапеції, якщо в неї можна вписати коло?

- 4.* Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 3 см і 7 см, а діагональ поділяє тупий кут трапеції навпіл. Знайдіть периметр трапеції.
- 5.* Знайдіть кути чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle ADB = 43^\circ$, $\angle ACD = 37^\circ$, $\angle CAD = 22^\circ$.
- 6.** Доведіть, що коли діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні, то її висота дорівнює середній лінії трапеції.

Контрольна робота № 3

Тема. Теорема Фалеса. Подібність трикутників

- 1.° На рисунку 162 $AB \parallel CD$, $MA = 12$ см, $AC = 4$ см, $BD = 6$ см. Знайдіть MB .
- 2.° Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні, причому сторонам AB і BC відповідають сторони A_1B_1 і B_1C_1 . Знайдіть невідомі сторони цих трикутників, якщо $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $A_1B_1 = 4$ см, $A_1C_1 = 6$ см.

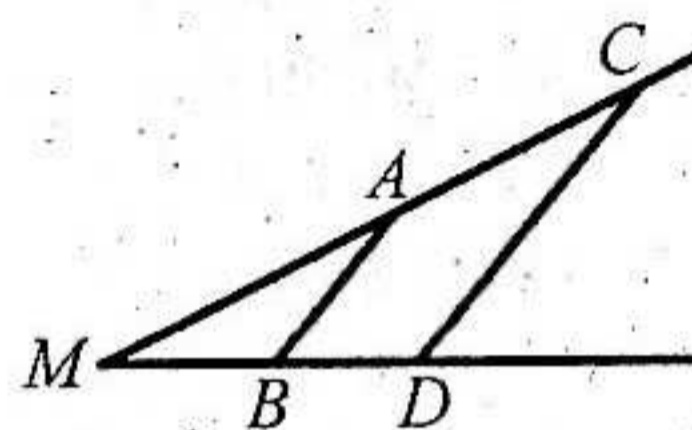


Рис. 162

- 3.° Відрізок AK — бісектриса трикутника ABC , $AB = 12$ см, $BK = 8$ см, $CK = 18$ см. Знайдіть AC .
- 4.* У трапеції $ABCD$ з основами AD і BC діагоналі перетинаються в точці O , $BC : AD = 3 : 5$, $BD = 24$ см. Знайдіть BO і OD .
- 5.* Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 7 см і 8 см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, периметр якого дорівнює 57 см.
- 6.** Через точку M , яка знаходиться на відстані 15 см від центра кола радіусом 17 см, проведено хорду, яка поділяється точкою M на відрізки, довжини яких відносяться як 1 : 4. Знайдіть довжину цієї хорди.

Контрольна робота № 4

Тема. Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику. Теорема Піфагора

- 1.° Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, поділяє її на відрізки завдовжки 9 см і 16 см. Знайдіть катети трикутника.
- 2.° У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 13 см, а один з катетів — 12 см. Знайдіть периметр трикутника.
- 3.° Діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 16 см. Знайдіть сторону ромба.
- 4.* Висота BM рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$) поділяє сторону AC на відрізки $AM = 15$ см і $CM = 2$ см. Знайдіть основу BC трикутника.
- 5.* З точки до прямої проведено дві похилі, проекції яких на пряму дорівнюють 9 см і 16 см. Знайдіть відстань від точки до прямої, якщо одна з похилих на 5 см більша за другу.
- 6.** Коло, вписане в прямокутну трапецію, поділяє точкою дотику більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 4 см і 25 см. Знайдіть висоту трапеції.

Контрольна робота № 5

Тема. Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника. Розв'язування прямокутних трикутників

- 1.° У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $AB = 25$ см, $BC = 20$ см. Знайдіть:
 - 1) $\cos B$;
 - 2) $\operatorname{tg} A$.
- 2.° У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AB = 15$ см, $\sin A = 0,6$. Знайдіть катет BC .
- 3.° Знайдіть значення виразу $\sin^2 16^\circ + \cos^2 16^\circ - \sin^2 60^\circ$.
- 4.* Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а висота, проведена до основи, — 8 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута при основі трикутника.

- 5.° У трикутнику ABC висота BD поділяє сторону AC на відрізки AD і DC , $BC = 6$ см, $\angle A = 30^\circ$, $\angle CBD = 45^\circ$. Знайдіть сторону AC трикутника.
- 6.°° Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони і утворює з основою трапеції кут α . Знайдіть висоту трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює R .

Контрольна робота № 6.

Тема. Многокутники. Площа многокутника

- 1.° Чому дорівнює сума кутів опуклого семикутника?
- 2.° Знайдіть площу паралелограма, сторона якого дорівнює 12 см, а висота, проведена до неї, — 7 см.
- 3.° Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 15 см, а висота, проведена до основи, — 9 см.
- 4.° Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює $10\sqrt{2}$ см і утворює з основою кут 45° . Знайдіть площу трапеції, якщо в неї можна вписати коло.
- 5.° Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює 20 см, а одна з діагоналей на 8 см більша за другу.
- 6.°° Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника поділяє гіпотенузу на відрізки завдовжки 15 см і 20 см. Знайдіть площу трикутника.

КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

Варіант 2

Контрольна робота № 1

Тема. Паралелограм та його види

- 1.° У чотирикутнику $ABCD$ проведено діагональ BD (рис. 163), $\angle CBD = \angle ADB$, $\angle ABD = \angle BDC$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

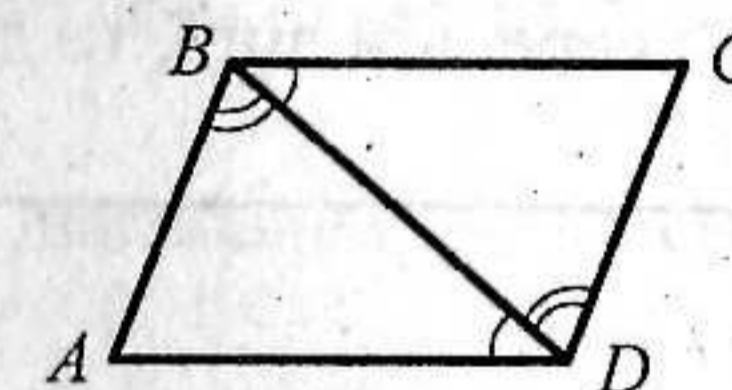


Рис. 163

- 2.° Одна з сторін прямокутника у 5 разів більша за другу, а його периметр дорівнює 36 см. Знайдіть сторони прямокутника.
- 3.° Сторона ромба утворює з однією з його діагоналей кут 68° . Знайдіть кути ромба.
- 4.° У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута D перетинає сторону AB у точці P . Відрізок AP менший від відрізка BP у 6 разів. Знайдіть периметр паралелограма, якщо $AB = 14$ см.
- 5.° З вершини тупого кута B ромба $ABCD$ проведено висоту BK до сторони AD . Кут KBD дорівнює 15° . Знайдіть висоту BK , якщо периметр ромба дорівнює 32 см.
- 6.°° Пряма, яка перетинає діагональ BD паралелограма $ABCD$ у точці E , перетинає його сторони AB і CD у точках M і K відповідно, причому $ME = KE$. Доведіть, що чотирикутник $BKDM$ — паралелограм.

Контрольна робота № 2

Тема. Середня лінія трикутника. Трапеція. Вписані і описані чотирикутники

- 1.° Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 12 см і 14 см. Знайдіть периметр трикутника, вершини якого — середини сторін даного трикутника.
- 2.° Основи трапеції відносяться як 4:7, а середня лінія дорівнює 44 см. Знайдіть основи трапеції.

- 3.° Основи трапеції дорівнюють 6 см і 12 см. Чому дорівнює периметр трапеції, якщо в неї можна вписати коло?
- 4.° Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 10 см, а діагональ поділяє гострий кут трапеції навпіл. Знайдіть периметр трапеції.
- 5.° Знайдіть кути чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle CBD = 48^\circ$, $\angle ACD = 34^\circ$, $\angle BDC = 64^\circ$.
- 6.** Доведіть, що коли висота рівнобічної трапеції дорівнює її середній лінії, то діагоналі трапеції перпендикулярні.

Контрольна робота № 3

Тема. Теорема Фалеса. Подібність трикутників

1.° На рисунку 164 $MN \parallel KP$, $NP = 20$ см, $PO = 8$ см, $MK = 15$ см. Знайдіть KO .

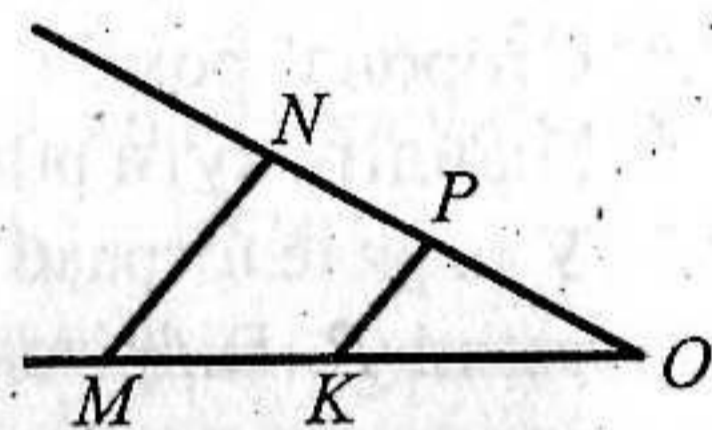


Рис. 164

- 2.° Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні, причому сторонам AB і BC відповідають сторони A_1B_1 і B_1C_1 . Знайдіть невідомі сторони цих трикутників, якщо $BC = 5$ см, $AB = 6$ см, $B_1C_1 = 15$ см, $A_1C_1 = 21$ см.
- 3.° Відрізок CD — бісектриса трикутника ABC , $AC = 12$ см, $BC = 18$ см, $AD = 10$ см. Знайдіть BD .
- 4.° У трапеції $ABCD$ з основами AD і BC діагоналі перетинаються в точці O , $BO : OD = 2 : 3$, $AC = 25$ см. Знайдіть AO і OC .
- 5.° Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 6 см і 8 см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якого сума найбільшої та найменшої сторін дорівнює 22 см.
- 6.** Через точку P , яка лежить всередині кола, проведено хорду, яка поділяється точкою P на відрізки, довжини яких дорівнюють 4 см і 5 см. Знайдіть відстань від точки P до центра кола, якщо його радіус дорівнює 6 см.

Контрольна робота № 4

Тема. Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику. Теорема Піфагора

- 1.° Катет прямокутного трикутника дорівнює 30 см, а його проекція на гіпотенузу — 18 см. Знайдіть гіпотенузу і другий катет трикутника.
- 2.° У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 8 см і 15 см. Знайдіть периметр трикутника.
- 3.° Сторона ромба дорівнює 10 см, а одна з діагоналей — 16 см. Знайдіть другу діагональ ромба.
- 4.° Висота AK гострокутного рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) дорівнює 12 см, а $KB = 9$ см. Знайдіть сторони трикутника ABC .
- 5.° З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 13 см і 15 см. Знайдіть відстань від точки до прямої, якщо різниця проєкцій похилих на цю пряму дорівнює 4 см.
- 6.** Коло, вписане в рівнобічну трапецію, поділяє точкою дотику бічну сторону на відрізки завдовжки 2 см і 32 см. Знайдіть висоту трапеції.

Контрольна робота № 5

Тема. Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника. Розв'язування прямокутних трикутників

- 1.° У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8$ см, $BC = 6$ см. Знайдіть:
 - 1) $\operatorname{tg} B$;
 - 2) $\sin A$.
- 2.° У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AC = 12$ см, $\operatorname{tg} A = 0,8$. Знайдіть катет BC .
- 3.° Знайдіть значення виразу $\cos^2 30^\circ + \sin^2 52^\circ + \cos^2 52^\circ$.
- 4.° Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а бічна сторона — 13 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута між бічною стороною трикутника і висотою, проведеною до його основи.

- 5.° Висота BD трикутника ABC поділяє сторону AC на відрізки AD і DC , $AB = 12$ см, $\angle A = 60^\circ$, $\angle CBD = 45^\circ$. Знайдіть сторону AC трикутника.
- 6.°° Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, а кут між бічною стороною і більшою основою трапеції дорівнює α . Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції, якщо її висота дорівнює h .

Контрольна робота № 6

Тема. Многокутники. Площа многокутника

- 1.° Чому дорівнює сума кутів опуклого восьмикутника?
- 2.° Основи трапеції дорівнюють 8 см і 4 см, а її висота — 3 см. Знайдіть площу трапеції.
- 3.° Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 16 см, а бічна сторона — 17 см. Знайдіть площу трикутника.
- 4.° Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює 60° . Знайдіть площу паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 8 см і 14 см.
- 5.° Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює 50 см, а різниця діагоналей — 20 см.
- 6.°° Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника поділяє катет на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайдіть площу трикутника.

ВІДПОВІДІ І ВКАЗІВКИ
ДО ТРЕНУВАЛЬНИХ ВПРАВ

Варіант 1

12. 7 см, 5 см. 13. 18 см, 24 см. 14. 12 см. 16. 1) 30° ; 2) 150° . 18. 12 см.
21. *Вказівка.* Побудуйте паралелограм, у якого дана точка — точка перетину діагоналей, а дві сторони лежать на сторонах кута. 22. *Вказівка.* Побудуйте трикутник, дві сторони якого — дані, а третя дорівнює подвоєній даній медіані. 30. 4 см. 39. 48 см. 41. 6 см і 12 см. *Вказівка.* Доведіть, що трикутники CBK і DAK — рівнобедрені. 42. *Вказівка.* Нехай CK — медіана трикутника ACB ($\angle ACB = 90^\circ$). На продовженні відрізка CK за точку K відкладіть відрізок $KM = CK$. Доведіть, що чотирикутник $ACBM$ — прямокутник. 43. *Вказівка.* Скористайтесь результатом задачі 42. 44. 24 см. 45. 24 см. *Вказівка.* Доведіть, що кут між діагоналлю прямокутника і його більшою стороною дорівнює 30° .
54. 84° і 96° . 55. 1) 60° і 120° ; 2) 16 см. 57. *Вказівка.* Бісектриси кутів A і B паралелограма $ABCD$ перетинаються під прямим кутом. 60. *Вказівка.* Розташуйте лінійку так, щоб кінці відрізка лежали на її сторонах. Проведіть паралельні прямі через кінці відрізка (рис. 165). Доведіть, що чотирикутник $ACBD$ — ромб. 64. 2 см. 65. 24 см. 67. 12 см. 69. *Вказівка.* Нехай $ABCD$ — квадрат, який треба побудувати (рис. 166). Задача зводиться до побудови прямокутного рівнобедреного трикутника BAD за різницею гіпотенузи BD і катета AD . Відкладіть на промені DA за точку A відрізок $AE = BD - AD$. Трикутник DBE — рівнобедрений ($BD = DE$) і $\angle BED = \angle DBE =$

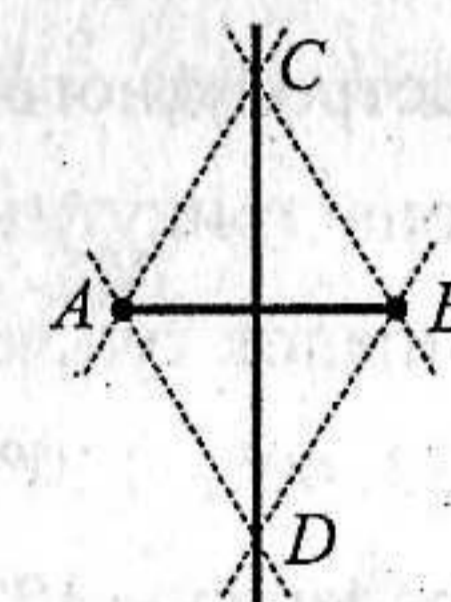


Рис. 165

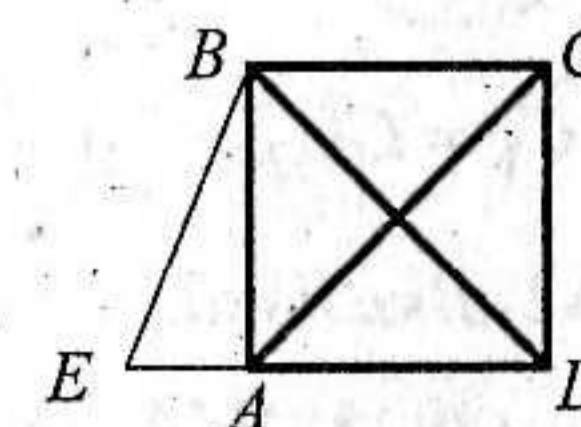


Рис. 166

$= \frac{180^\circ - \angle ADB}{2} = 67,5^\circ$. Тоді трикутник BAE можна побудувати за катетом AE і кутом E . **71.** 9 см. **74.** Паралелограм, 10 см. **78.** Ромб, 64 см. **80.** *Вказівка.* Проведіть через дані точки прямі, паралельні відрізкам, що з'єднують ці точки. **81.** *Вказівка.* Проведіть $AM \parallel OD$, де M — точка перетину AM і OC . Побудуйте на сторонах кута COD трикутник, для якого відрізок AM — середня лінія. **88.** 64° , 64° , 116° , 116° . *Вказівка.* Доведіть, що діагональ трапеції є бісектрисою її гострого кута. **91.** 76° , 104° , 128° . **92.** 60° , 60° , 120° , 120° . **96.** 11 см і 27 см. **97.** 9 см і 23 см. **98.** 12 см. **99.** 30 см. **100.** 13 см. *Вказівка.* Доведіть, що діагональ трапеції утворює з основою кут 45° . **102.** *Вказівка.* Нехай $ABCD$ — трапеція з основами BC і AD , яку треба побудувати. Через вершину C трапеції проведемо $CK \parallel AB$, точка K належить більшій основі AD . Трикутник KCD можна побудувати за трьома сторонами. **111.** 8,5 см. **122.** 60° . **125.** 37° . *Вказівка.* $\angle DCK = \angle DMK = 53^\circ$. **126.** 24° , 78° , 78° . **128.** *Вказівка.* Доведіть, що $\angle ABD = \angle ABC = 90^\circ$. **129.** 64° , 58° , 58° , або 52° , 64° , 64° або 116° , 32° , 32° . *Вказівка.* Для гострокутного трикутника розгляньте випадки, коли AB — бічна сторона трикутника і коли AB — основа трикутника. Розгляньте також випадок тупокутного трикутника. **132.** 1) Ні; 2) так.

133. 40° , 120° , 140° , 60° . **134.** 61° . **135.** Поза трапецією. **137.** 14 см. **139.** *Вказівка.* Доведіть, що $BE \parallel DF$, і скористайтеся теоремою Фалеса.

140. 2 см. *Вказівка.* На рисунку 167

$$CC_1 = CC_2 - C_1C_2 = \frac{BB_2}{2} - C_1C_2. \quad \mathbf{141.} \text{ 3 см.}$$

142. *Вказівка.* Проведіть $BK \parallel CD$. **143.** 7 см, 8 см, 9 см. **144.** 4 см, 8 см. **147.** 2 см. **148.** 68 см.

152. 4 : 3. *Вказівка.* Проведіть через точку D пряму, паралельну BE , яка перетинає AC у точці K . Тоді $AE : EK = AF : FD$ і $EK = KC$.

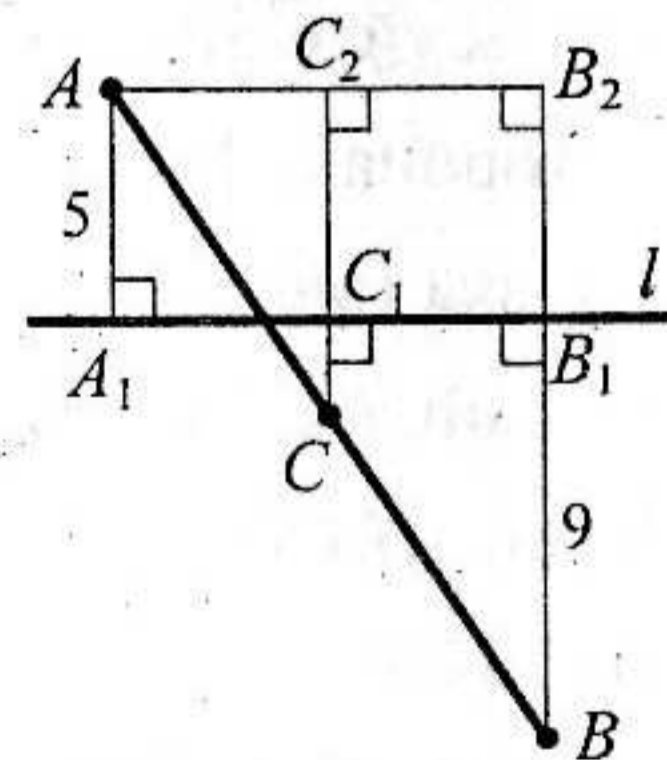


Рис. 167

153. 21 : 10. *Вказівка.* Проведіть через точку E пряму, паралельну AD . **154.** 8 см. **155.** 4 см. *Вказівка.* Шукана відстань дорівнює $\frac{1}{3}$ висоти, проведеної до основи трикутника. **160.** 1) 3,5 см, 3 см, 1,5 см; 2) 14 см, 12 см, 6 см; 3) 28 см, 24 см, 12 см; 4) 35 см, 30 см, 15 см. **162.** 15 см, 35 см, 40 см і 21 см, 49 см, 56 см. **166.** 20 см. **167.** 2 см. **168.** 2,5 см і 4,5 см. **174.** 15 см, 20 см. **177.** 1,5 см і 4,5 см. **178.** 6 см. **179.** 3 см і 6 см. **180.** 2 см. *Вказівка.* $AK^2 = AE \cdot AF$. **181.** 4 см. **189.** 1,5 см, 1,25 см. **194.** 6 см, $2\sqrt{13}$ см. **195.** 9 см, 1 см, 6 см. **197.** 16 см, 36 см, 12 см. **201.** $2\sqrt{10}$ см. **208.** 10 см, 24 см, 26 см. **210.** $4\sqrt{10}$ см. **212.** 15 см, 15 см, 24 см. **214.** 7 см або 17 см. **215.** 13 см і 15 см. **217.** 9 см, 15 см. **220.** 21 см і 28 см. **221.** 9 см. **222.** $12\sqrt{17}$ см. *Вказівка.* Проведіть медіану до основи. Використайте те, що медіани трикутника поділяються точкою перетину у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини. **225.** 12 см. *Вказівка.* Нехай висота поділяє середню сторону на відрізки завдовжки x см і $(14 - x)$ см. Тоді $13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$. **226.** 18 см і 32 см. **228.** 12 см. *Вказівка.* $AB^2 = O_2K^2 = O_1O_2^2 - O_1K^2$ (рис. 168). **229.** 12 см. **247.** $c(\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \beta)$. **249.** $\frac{m}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$; $m \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. **250.** 8 см.

251. $2\sqrt{2}$ см, $(8 + 2\sqrt{2})$ см. **259.** Ні.

260. 11 сторін, 44 діагоналі. **274.** 5,76 см².

275. *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють сторонам даних квадратів. **276.** *Вказівка.*

Побудуйте відрізок $m = \sqrt{ab}$. **293.** 7,2 см.

297. *Вказівка.* $S_{AOB} = S_{ABD} - S_{AOD}$, $S_{COD} = S_{ACD} - S_{AOD}$. **298.** 78 см².

299. 108 см². **300.** 120 см². **301.** 180 см². **303.** 120 см². **304.** $(6\sqrt{3} + 9)$ см².

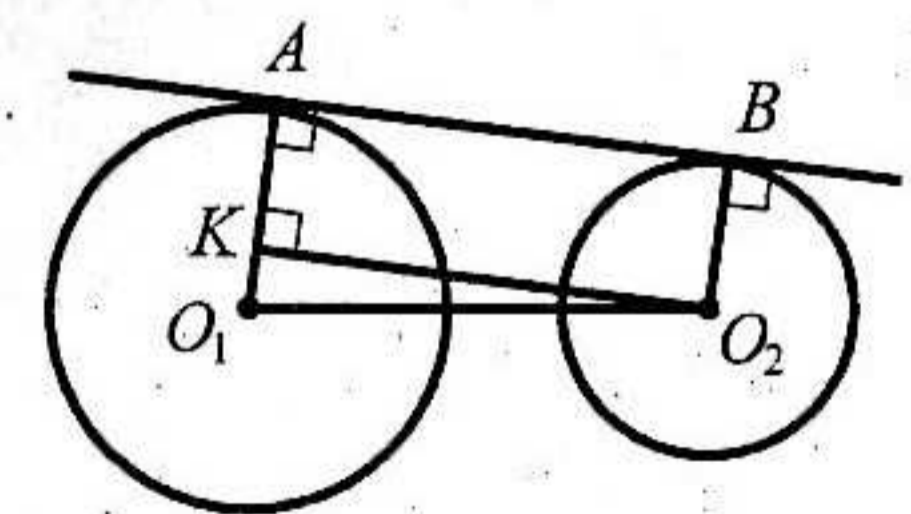


Рис. 168

305. 80 см^2 . 308. $7 : 4$. 311. 216 см^2 . 312. 5070 см^2 . 314. *Вказівка.* Шука-
на пряма BE поділяє сторону AD паралелограма $ABCD$ у відношенні
 $1 : 4$, рахуючи від точки D . 315. *Вказівка.* Висота, проведена до бічної
сторони шуканого трикутника, дорівнює висоті, проведеної до рівної
їй сторони даного трикутника. Побудуйте рівнобедрений трикутник за
бічною стороною і висотою, проведеною до неї. 316. $(2\sqrt{3} - 3) \text{ см}^2$.
320. 2 см і 10 см . 325. 256 см^2 . 329. 312 см^2 . 330. $75\sqrt{3} \text{ см}^2$.
333. 264 см^2 . 334. 180 см^2 . 336. 198 см^2 . 337. 198 см^2 .

ВІДПОВІДІ І ВКАЗІВКИ ДО ТРЕНУВАЛЬНИХ ВПРАВ

Варіант 2

12. 22 см . 13. 6 см , 15 см . 14. 50 см . 16. 1) 126° ; 2) 54° . 18. 32 см .
35. *Вказівка.* Доведіть, що точки D , O і B лежать на одній прямій. Для
цього треба довести рівність трикутників AOD і BOC . 40. 21 см і
 27 см . *Вказівка.* Сума сусідніх сторін прямокутника дорівнює 48 см .
41. 90° . 43. 16 см . 44. *Вказівка.* Точка X — основа перпендикуляра,
опущеного з точки C на сторону AB . 45. $3 : 1$. 54. 68° , 112° . 55. 30° ,
 150° . 65. 8 см . 69. *Вказівка.* Задача зводиться до побудови прямо-
кутного рівнобедреного трикутника ABC за сумою катета і гіпотенузи
(рис. 169). Продовжте катет CB за точку B на
довжину AB . Трикутник ADC можна побу-
дувати ($CD = AB + CB$, $\angle ADB = 22,5^\circ$), звід-
ки отримуємо сторону AC квадрата. 74. Пря-
мокутник, 64 см . 75. *Вказівка.* Доведіть, що
 $EF \parallel AC$ і $FK \parallel BD$. 76. 1) Ромб; 2) прямокут-
ник. 77. 16 см , квадрат. 78. Ромб, 30° .
79. *Вказівка.* Доведіть, що $AC = C_1B = BA_1$
(рис. 170). 80. *Вказівка.* Побудуйте трикут-
ник за стороною, яка дорівнює відстані
між двома даними точками, та двома при-
леглими кутами, рівними даним кутам.
91. 70° , 70° , 110° , 110° . 92. 60° , 60° , 120° ,
 120° . 96. 8 см . 97. 68 см . 98. 8 см . 99. 26 см . 100. 40 см . *Вказівка.*
Доведіть, що висота трапеції дорівнює півсуми основ. 101. 57 см .
108. 10 см , 16 см . 110. *Вказівка.* Доведіть, що висота трапеції, прове-
дена з вершини тупого кута, дорівнює більшому з відрізків, на які

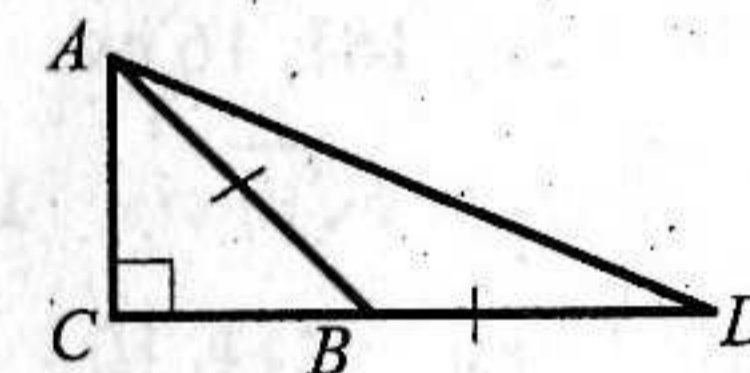


Рис. 169

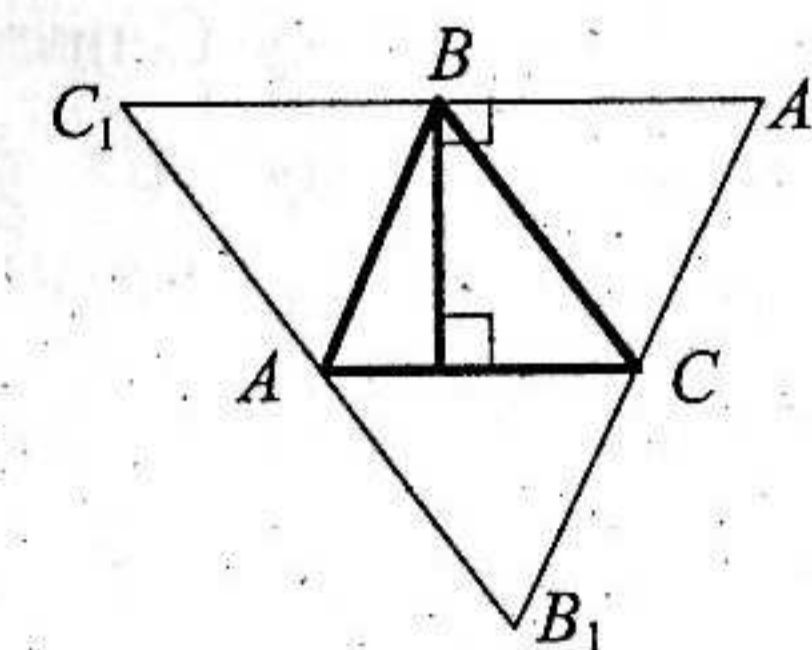


Рис. 170

вона поділяє більшу основу. 122. 252° і 108° . 125. 58° . Вказівка. $\angle PAE = \angle PKE = 16^\circ$. 126. 86° , 8° , 86° . 128. Вказівка. Кути CED і CFD — сталі. 129. 58° , 58° , 64° , або 61° , 61° , 58° або 29° , 29° , 122° . 132. 1) Так; 2) ні. 133. 144° , 86° , 36° , 94° . 134. 63° . 135. Всередині трапеції. 137. 12 см. 141. 12 см. Вказівка. Проведіть $CD \perp AB$, $KP \perp AB$, точки D і P належать AB . Доведіть, що $AB = 4KP$. 143. 1 см, 13 см. 144. 9 см. 147. 12 см. 152. 5 : 2. 153. 3 : 2. Вказівка. Проведіть $MK \parallel AN$, точка K належить BC . $CN : NK = CO : OM = 3 : 1$. Тоді $NK : KB = 3 : 2$. 154. 4 см. 155. 3 см. 160. 1) 20 см, 44 см, 56 см; 2) 25 см, 55 см, 70 см; 3) 15 см, 33 см, 42 см; 4) 10 см, 22 см, 28 см. 162. 32 см, 64 см, 56 см і 24 см, 48 см, 42 см. 166. 15 см. 167. 12 см. 168. 15 см. 174. 14 см, 18 см. 177. 12 см. 178. 3 см. 179. 3 см і 12 см. 180. 5 см. 181. 16 см. 189. 8 см, 10 см. 194. 3 см, $\sqrt{10}$ см. 195. 12 см, $4\sqrt{13}$ см, $6\sqrt{13}$ см. 197. 4 см, 16 см, 4 см. 201. 35 см. 209. 4 см. 210. 10 см. 211. 10 см, 10 см, 12 см. 214. $(24 - 10\sqrt{3})$ см або $(24 + 10\sqrt{3})$ см. 215. $2\sqrt{6}$ см. 217. 10 см, 24 см, 26 см. 220. 168 см. 222. 7,5 см. 225. 9,6 см. Вказівка. Нехай трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$) — дана. Через точку C проведіть пряму, яка паралельна діагоналі BD і перетинає пряму AD у точці E . Тоді чотирикутник $BCED$ — паралелограм, $CE = BD$, $AE = AD + BC$, а задача знаходження висоти трапеції зводиться до знаходження висоти трикутника ACE . 226. $9\sqrt{5}$ см, $9\sqrt{5}$ см, $3\sqrt{5}$ см, $15\sqrt{5}$ см. 228. 8 см. 247. $m(\cos \alpha \operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \sin \alpha)$. 249. $2a \cos \frac{\alpha}{2}$; $2a \sin \frac{\alpha}{2}$. 250. $2\sqrt{57}$ см. 251. 11 см, $5\sqrt{2}$ см. 255. Ні. 259. Ні. 260. 15 сторін; 90 діагоналей. 274. 4 см^2 . 275. Вказівка. Побудуйте прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює стороні більшого квадрата, а один з катетів — стороні меншого. 276. Вказівка. Побудуйте відрізок $m = \sqrt{2ab}$, де

a і b — сторони даного прямокутника. 293. $9\frac{3}{13}$ см. 298. 312 см^2 . 299. 1200 см^2 . 300. 240 см^2 . 301. 156 см^2 . 303. 240 см^2 . 304. $16\sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) \text{ см}^2$. 305. 37 см^2 . 308. 4 : 7. 311. 600 см^2 . 312. 600 см^2 . 314. Вказівка. Шукана пряма BE поділяє сторону AD паралелограма $ABCD$ у відношенні 3 : 1, рахуючи від точки A . 315. Вказівка. Висота шуканого рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює висоті даного трикутника, проведеної до вибраної сторони. 316. $(4 - 2\sqrt{3}) \text{ см}^2$. 320. 7 см і 16 см. 325. 192 см^2 . 329. 114 см^2 . 330. $48\sqrt{3} \text{ см}^2$. 333. 306 см^2 . 334. 320 см^2 . 337. 162 см^2 .

Зміст

Від авторів	3
Тематичний розподіл тренувальних вправ	4
Тренувальні вправи	5
Варіант 1	5
Варіант 2	36
Варіант 3	67
Контрольні роботи	97
Варіант 1	97
Варіант 2	101
Відповіді та вказівки до тренувальних вправ	105
Варіант 1	105
Варіант 2	109

Навчальне видання

Мерзляк Аркадій Григорович, Полонський Віталій Борисович,
Рабінович Юхим Михайлович, Якір Михайло Семенович

Геометрія

8 клас

Збірник задач і контрольних робіт

Редактор Г. Ф. Висоцька. Комп'ютерне верстання О. О. Удалова. Коректор Т. Є. Цента.

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 7,00. Тираж 5000 прим. Зам. № 263

ТОВ ТО «Гімназія»,

вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052

Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія», у друкарні ПП «Модем»

вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052

Тел.: (057) 758-15-80

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003