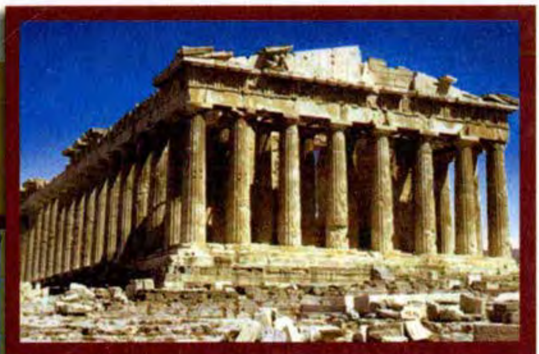
О.М. АФАНАСЬЄВА, Я.С. БРОДСЬКИЙ, О.Л. ПАВЛОВ, А.К. СЛІПЕНКО

МАТЕМАТИКА



клас 10

Богдан

ББК 22.1я72
74.262.21
А94

Наукову експертизу проводив Інститут математики НАН України.
Психолого-педагогічну експертизу проводив Інститут педагогіки НАПН України.

Експерти:

Вдовенко В.В.	доцент, кандидат педагогічних наук Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка
Дорошенко Т.М.	учитель Смілянської загальноосвітньої школи I-III ст. №7 Черкаської обл.
Калашник О.А.	завідувач методичного кабінету відділу освіти Добровеличківської районної державної адміністрації Кіровоградської обл.
Каліберда К.В.	методист методичного кабінету відділу освіти Іванівської райдержадміністрації Херсонської обл.
Читаєва О.В.	учитель-методист Луганської спеціалізованої школи №57

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України №177 від 03.03.2010 р.)

Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К.
А94 Математика. 10 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2010. — 480 с.

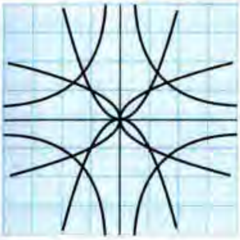
ISBN 978-966-10-1272-0

Пропонований підручник відповідає програмі з математики для 10-го класу рівня стандарту, рекомендований Міністерством освіти і науки України й передбачає готовність учнів до широкого і свідомого застосування математики. Цю орієнтацію забезпечують зміст курсу, характер викладення навчального матеріалу, добір ілюстрацій і приклади застосувань, система вправ і контрольних запитань.

Для учнів і вчителів загальноосвітніх навчальних закладів.

ББК 22.1я72

ISBN 978-966-10-1272-0



Звернення до читача

Дорогий юний друже!

Перед Вами підручник з предмета «Математика». Його головне призначення — допомогти Вам систематизувати, розширити й поглибити знання і вміння, які необхідні для математичного моделювання і дослідження процесів і явищ за допомогою функцій, рівнянь та інших математичних об'єктів, опанувати суміжними предметами (фізика, хімія, біологія тощо). І тим самим упевнитись у могутності математичних методів для пізнання навколишнього світу, у розв'язанні різних проблем.

Підручник для 10 класу складається з чотирьох розділів. Кожному розділу передує матеріал, що вивчався раніше і необхідний для вивчення цього розділу. Його подано у вигляді таблиць. Для забезпечення готовності до вивчення матеріалу розділу наводиться діагностичний тест.

Розділи підручника поділено на параграфи, які, в свою чергу, розчленовані на пункти. До кожного пункту подано контрольні запитання, що мають забезпечити активне засвоєння основних понять і фактів у їхньому взаємозв'язку.

Викладення навчального матеріалу у кожному пункті структуроване за рівнями. На першому рівні (його позначено літерою **Б**) викладаються найголовніші поняття, основні факти теми, хоча, найчастіше, без формальних доведень. Цей матеріал є базою для подальшого вивчення теми, більш ґрунтовного і повного.

На другому рівні (його позначено літерою **О**) наводиться більш повне обґрунтування попереднього матеріалу, його розширення, наводяться приклади його застосування. Матеріал на цих двох рівнях повністю забезпечує оволодіння предметом згідно з вимогами програми на рівні стандарту.

Виклад теоретичного матеріалу супроводжується розв'язанням типових задач відповідного рівня. Початок і кінець доведень тверджень та розв'язань прикладів позначено знаками □ і ■.

Система задач, вправ і контрольних запитань, наведених у підручнику, має три рівні складності: перший рівень складності позначено символом «°», другий не має позначень, третій позначено символом «*».

До загальної системи задач включено вправи на повторення, що мають сприяти готовності опанування наступним матеріалом, збереженню вмінь і навичок, сформованих при вивченні попередніх розділів.

Кожний розділ завершується матеріалом для підготовки до тематичного оцінювання, який складається із запитань для самоконтролю (з відповідями) та зразка тематичної контрольної роботи. Для повторення і систематизації навчального матеріалу розділу наведено відповідні таблиці.

Підручник містить вказівки і відповіді до задач, а також предметний покажчик.

Читання книги не є легкою справою. Деякі фрагменти доведень залишені для самостійного опрацювання. Не минайте їх!

Щиро бажаємо успіхів!

Колектив авторів

Позначення для орієнтування в навчальному матеріалі

Б, О — дві сходинки засвоєння навчального матеріалу

! — зверніть увагу

□ — початок розв'язання задачі, доведення теореми

■ — кінець розв'язання задачі, доведення теореми

° — задачі першого рівня складності

* — задачі третього рівня складності

✓ — контрольні запитання

— графічні вправи; задачі

— вправи для повторення

? — завдання для самоконтролю

— тест для діагностики

— межі для різних типів задач

$\exists$ — існує об'єкт

$\exists!$ — існує єдиний об'єкт

$\Rightarrow$ — знак логічного слідування: якщо ..., то

$\Leftrightarrow$ — рівносильність: тоді і тільки тоді

Вступ

Розвиток суспільства і математика

Однією з характерних особливостей нашого часу є широке застосування математики у різних галузях діяльності людини. Без математики не обійтися при проектуванні та будівництві споруд, виробництві приладів та їхніх деталей, важливу роль відіграє ця наука у плануванні господарчої діяльності, керуванні технологічними процесами, роботою підприємств тощо.

Суттєве прискорення процесу математизації науки, техніки, господарської діяльності розпочалося в середині XX ст. Воно пов'язане зі створенням електронно-обчислювальних машин, автоматизацією процесів виробництва, новітніми технологіями, істотними змінами у характері праці людини.

Математика стала універсальним засобом моделювання та дослідження навколишнього світу, надійним знаряддям розв'язування практичних задач. Тому вивчення математики, її застосувань є невід'ємною складовою формування світогляду людини та підготовки сучасного фахівця — кваліфікованого робітника, техніка, інженера, економіста тощо.

Практика — основне джерело розвитку математики

Очевидно, математика виникла на ранній стадії розвитку людства під впливом потреб практики. Розвиток ремесла, землеробства, торгівлі й обміну, навігації, управління державою потребував удосконалення вимірювань і розрахунків.

Неможливо точно відповісти на питання, коли саме було сформовано перші математичні поняття. Однак є переконливі писемні свідчення (папіруси, глиняні таблички), які підтверджують високий рівень математичних знань у могутніх цивілізацій Стародавнього Сходу — Єгипті та Вавилоні — за три-дві тисячі років до н. е. Тогочасна математика мала яскраво виражений конкретний характер. Її досягнення дійшли до нас у вигляді задач, більшість з яких належить до розряду господарських, і їхніх розв'язків. У них йдеться про вимірювання площ і об'ємів, про підрахунки врожаю і величини податку, про обчислення, пов'язані зі сплатою боргів та ін.

Приблизно у VII ст. до н. е. виникла грецька цивілізація, яка відрізнялась від країн Стародавнього Сходу політичним ладом і економікою. Розквіт науки і мистецтва у Стародавній Греції супроводжувався плідними теоретичними дослідженнями. Намагання стародавніх греків зрозуміти будову Всесвіту, визначити роль і місце людини у природі та суспільстві привели до утвердження нових форм раціонального мислення. У математиці ця форма мислення виявлялась у прагненні довести всі твердження, виходячи з невеликої кількості початкових тверджень. До тих часів математика мала «рецептурний» характер. Тож обґрунтування узвичаєних практичних «рецептів» стало одним з основних завдань грецьких математиків. Уже в III ст. до н. е. Евклід створив книгу «Начала», в якій у дедуктивній формі виклав основи тогочасної математики. Упродовж двох тисячоліть «Начала» Евкліда вважалися взірцем строгості й істотно впливали на розвиток математики. Втім, аксіоматичний метод, за допомогою якого Евклід виклав основи геометрії, є загальновизнаним при побудові наук, і не тільки математичних.

У Стародавній Греції були зроблені відкриття, які на багато століть визначили напрямки розвитку математики. Поряд із досягненнями теоретичного характеру тогочасні вчені мали багато суто практичних здобутків. Найвидатнішим представником прикладної математики того часу історики вважають Архімеда (приблизно 287–212 рр. до н. е.). Він був не тільки математиком, а й талановитим інженером. Його праці з обчислення площ і об'ємів стали передвісниками найпотужніших сучасних методів математики.

Останній період розвитку античного суспільства пов'язаний із впливом Римської імперії, де, на відміну від Греції, математикою цікавились мало. Після прийняття християнства у V ст. н.е. римський імператор Юстиніан навіть заборонив заняття математикою під загрозою смерті.

Після занепаду Римської імперії центр математичних досліджень перемістився на Схід. Найбільш значними досягненнями середньовічної математики є запровадження в Індії сучасної десяткової позиційної системи запису чисел, введення від'ємних чисел і нуля, створення арабськими математиками (аль-Караджі, аль-Біруні, аль-Хайамі та ін.) основ алгебри, яка згодом виділилась у самостійний розділ математики. Математичні дослідження на Сході мали арифметико-алгебраїчний характер і були більш прикладними, ніж за часи античності. Арабські математики істотно розвинули тригонометрію з огляду на необхідність астрономічних досліджень та потреб навігації.

У той час, як Схід продовжував розвиватись, Західна Європа поступово занепадала. Феодальні чвари, низький рівень культури і виробництва аж ніяк не сприяли розвитку науки. Вивчення математики в культурних центрах того часу — монастирях — обмежувалось студіюванням арифметики.

На початку XII ст. економічне життя Заходу активізується, встановлюються торговельні зв'язки зі Сходом. Через арабів Європа знайомиться з працями грецьких вчених, в європейських країнах пожвавлюється інтерес до математики.

Кінець середньовіччя (XV-XVI ст.) у Західній Європі характеризується бурхливими змінами, пов'язаними з розпадом феодального суспільства і формуванням ринкових відносин. Розвиток промисловості, торгівлі, мореплавства, друкарської справи привів до розквіту культури, мистецтва і науки. Математика стає важливим засобом наукового Відродження. В процесі активних занять нею вчені створили сучасну алгебраїчну символіку.

Уже в епоху Відродження почалося використання різних машин і механізмів на мануфактурах, у будівництві, гірничій справі тощо. Відтак з'явилися передумови для розвитку теоретичної механіки та вивчення механічного руху. Вчені мусили подбати про створення відповідного математичного апарату. На початку XVII ст. Рене Декарт (1596 – 1650) ввів у науковий обіг поняття змінної величини. Відтоді основним об'єктом математики стало поняття функції. Зусиллями Ньютона, Лейбніца, їхніх учнів і послідовників для вивчення функціональної залежності було розроблено новий математичний апарат. Його застосування при розв'язуванні задач механіки, астрономії та інших наук надовго визначило подальші шляхи розвитку математики.

Розвиток ринкових відносин у XVIII і XIX століттях супроводжувався перебудовою виробництва з застосуванням парових машин, інших технічних засобів. Розвиток математики у той час був тісно пов'язаний з технічною революцією, вимогами практики. Створення геометричних теорій, розвиток поняття про число, вивчення функцій стимулювалися необхідністю вирішення науково-технічних проблем в царині кораблебудівництва і мореплавства, балістики, гідротехніки, геодезії і картографії, астрономії.

З часом безпосередній вплив практики на розвиток математики дещо зменшувався. Однак становлення різних природничих і технічних наук, передусім – фізики, було тісно пов'язане з удосконаленням математичних методів, розширенням сфери їхнього застосування.

Таким чином, зв'язок математики з практикою найчастіше здійснюється через природничі і технічні науки.

Важливим джерелом розвитку математики є її внутрішні потреби, спрямовані на систематизацію теорій, їхнє узагальнення, вдосконалення наукових методів і т.ін.

Розвиток математики в XIX ст. визначався як її внутрішніми потребами, так і потребами практики. Яскраві результати були одержані і на тому, і на іншому шляху. Нерідко абстрактні математичні теорії з часом ставали прикладними. Так, наприклад, неевклідова геометрія, творцями якої були німець К. Ф. Гаусс (1777 – 1855), угорець Я. Больяй (1802 – 1860) та росіянин М. І. Лобачевський (1792 – 1856), постала на ґрунті намагань удосконалити «Начала» Евкліда. На початку XX ст. це відкриття стало невід'ємною частиною сучасних фізичних теорій.

Ще більшу роль у вивченні навколишнього світу та у суспільстві загалом відіграє математика в XX ст. Її можливості істотно зросли внаслідок створення електронно-обчислювальних машин. Сучасний етап розвитку суспільства характеризується значним ростом сфер застосування математики.

Чим же пояснюється розмаїття застосувань математики й універсальність її методів? По-перше, математика послуговується досить загальними і чіткими об'єктами для описання навколишніх явищ (геометричні фігури, числа, рівняння, вектори і т. д.).

А, по-друге, вченими розроблено низку потужних методів дослідження математичних об'єктів: метод координат, алгебраїчні методи, методи математичного аналізу й ін.

Таким чином, математика є зручним і ефективним засобом для описання і дослідження закономірностей реальності.

Математичне моделювання

Застосування математики для описання і дослідження процесів та явищ дійсності ставить нас перед необхідністю знайти відповідь на питання: «А в чому полягає сутність розв'язання прикладної задачі за допомогою математики?». Власне, про це ми і поговоримо.

Усім вам доводилось застосовувати математичні знання для розрахунку швидкості заповнення басейну, часу виконання роботи та ін. Ці застосування передбачають заміну реальних об'єктів і відношень між ними математичними об'єктами і відношеннями між ними (функціями, рівняннями, геометричними фігурами).

Для цього необхідно передусім виділити суттєві характеристики реальних об'єктів і відношень між ними, проігнорувавши несуттєві, а тоді — саме їх замінити математичними об'єктами і зв'язками між ними. Процес такого заміщення називають ***математичним моделюванням***.

Математичними моделями звичайно називають наближені описання якогось класу явищ зовнішнього світу, виражені за допомогою математичних понять і відношень між ними.

Розглянемо задачу, яка ілюструє застосування методу математичного моделювання на практиці.

По один бік від шосе знаходяться два населених пункти. Де варто збудувати автобусну зупинку?

Розв'язання цієї задачі починається із з'ясування того, чим визначається вибір місця для побудови зупинки. Якщо немає ніяких обмежень, то природно шосе зобразити прямою l, населені пункти — точками A і B (рис. 1). Залишилось з'ясувати критерій, за яким вибирається місце для зупинки, яке будемо зображати точкою C на прямій l. Якщо не враховувати чисельності населення в пунктах A і B, то зупинка повинна бути розміщеною так, щоб сума відстаней від пунктів A і B до зупинки C була найменшою. Тоді витрати часу на шлях до зупинки будуть найменшими. Таким чином, математичною моделлю даного завдання буде така математична задача.

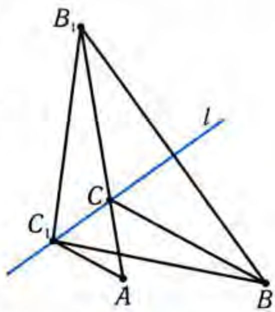


Рис. 1

Нехай дано дві точки A і B по один бік від прямої l. Знайти на прямій таку точку C, щоб сума відстаней від A до C і від B до C була найменшою.

Ця задача міститься у багатьох посібниках з геометрії. Вважають, що її автором є відомий математик античності Герон Александрійський. Тому цю задачу називають задачею Герона. Її розв'язання ґрунтується на ідеї симетрії.

Побудуємо точку B_1, симетричну точці B відносно прямої l. З'єднаємо точки B_1 і A. Тоді точка перетину прямої AB_1 з прямою l буде шуканою. Зверніть увагу на те, що ця точка існує!

Дійсно, для довільної точки C_1, яка відрізняється від C, має місце нерівність

$$AC_1 + C_1B = AC_1 + C_1B_1 > AB_1 = AC + CB_1 = AC + CB.$$

Для її доведення ми скористались властивостями симетрії, з яких випливають рівності $C_1B = C_1B_1$, $CB = CB_1$, а також нерівністю трикутника. Отримана нерівність свідчить про те, що точка C є шуканою.

Нам залишилось з'ясувати, в якій мірі розв'язок математичної задачі, яка є моделлю даної задачі, є її розв'язком. Для цього слід уточнити декілька питань. Чи можна реалізувати розв'язок практично? Якщо відстані незначні, то за допомогою топографічних приладів це зробити неважко. У тому випадку, коли це неможливо зробити, слід продовжити дослідження математичної задачі і навчитись характеризувати точку C іншими засобами.

Але ще важливішими і складнішими є уточнення розв'язку в зв'язку з тим, що чисельність населення в пунктах A і B різна. Врахування цього фактора значно ускладнює задачу. Ще складнішою стає ситуація, якщо враховувати й інші природні умови, наприклад, коли навпростець іти неможливо. Врахування всіх факторів майже неможливе у загальному випадку. Але за конкретних умов математик завжди побудує математичну модель для цієї задачі і запропонує придатний варіант її розв'язання.

Підбиваючи підсумки, можна стверджувати, що процес математичного моделювання загалом складається з трьох етапів:

1) ***вибір чи побудова математичної моделі для описання даної задачі;***

2) ***дослідження побудованої моделі, тобто розв'язування математичної задачі;***

3) ***тлумачення результатів дослідження, встановлення відповідності одержаного результату цілям досліджень.***

При необхідності уточнюється сама математична модель і результати, які з неї випливають.

Побудова математичної моделі ґрунтується на абстрагуванні від усіх властивостей об'єкта пізнання, крім кількісних і просторових. При побудові математичної моделі завжди виникає необхідність нехтувати тими чи іншими сторонами реальності. Про якість побудованої моделі можна судити лише за результатами порівняння дійсності з інформацією, отриманою шляхом дослідження моделі. Таким чином, метод математичного моделювання виходить з практики, створюючи математичні моделі явищ і процесів, і повертається до неї, щоб обґрунтувати доцільність створення моделі.

Підсумок

Основою застосування математики, як уже зазначалось, є процес математичного моделювання. До цієї діяльності Ви готувались, вивчаючи курс математики в основній школі. Там створювався запас математичних моделей, формувались навички їхньої побудови та дослідження.

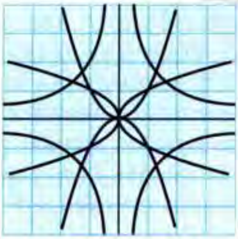
У даному курсі передбачається систематизація, поглиблення і розширення знань, одержаних в основній школі, а також удосконалення навичок моделювання. Для моделювання реальних об'єктів і відношень, з якими Ви матимете справу при вивченні інших дисциплін, в майбутній професійній діяльності, необхідно суттєво розширити засоби математичного моделювання і дослідження математичних моделей, за рахунок уведення нових класів функцій та математичних методів. Дана книга допоможе Вам у досягненні цих цілей.

Розділ 1.

ФУНКЦІЇ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

Кожній людині постійно доводиться мати справу з різними залежностями між величинами. У відповідності з цим вивчення залежностей є основним змістом її навчання в школі, а також у вищому навчальному закладі. Щоб переконатись у цьому, досить погортати сторінки підручників з фізики, хімії, технічних чи суспільних дисциплін, науково-популярних журналів та інших видань. Із закінченням навчання не зникає потреба враховувати, розглядати і досліджувати різні залежності. Для будівельників важливою є залежність вартості будівництва від його тривалості, залежність якості виконаних робіт від якості будівельних матеріалів. Для підприємств автомобільного транспорту викликає інтерес залежність витрат палива від якості доріг. Перелік таких прикладів із господарства, побуту, політики тощо можна продовжити.

Починаючи з XVII ст. вивчення найважливіших типів залежностей стало основним завданням математики. В математику міцно увійшли поняття змінної величини та функції, які стали і залишаються до цього часу потужними засобами моделювання реальних процесів, а тому й одними з головних об'єктів дослідження. У даному розділі закладено основи для вивчення функціональних залежностей між змінними величинами, виділено деякі найважливіші класи функцій, вивчаються елементарні методи дослідження функцій, а також продовжується вивчення однієї з найбільш застосовних функцій — степеневої.



Готуємось до вивчення теми «Функції, їхні властивості та графіки»

Вивчення теми «Функції, їхні властивості та графіки» базується практично на усьому алгебраїчному матеріалі, який вивчався в попередніх класах. Головне призначення цієї теми якраз і полягає у його повторенні, систематизації і поглибленні. Тому для підготовки до вивчення теми наведено найважливіший матеріал у вигляді таблиць.

Числа та обчислення

Таблиця 1

Тема	Зміст	Приклади
Звичайні дроби	Додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками: $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$; $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$. Щоб додати або відняти дроби з різними знаменниками, їх спочатку зводять до спільного знаменника, а потім виконують дію за правилом додавання або віднімання дробів з однаковими знаменниками. Множення: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. Ділення: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.	$\frac{3}{5}+\frac{5}{6}=\frac{18}{30}+\frac{25}{30}=$ $=\frac{43}{30}=1\frac{13}{30}$.

Тема	Зміст
Відсотки і пропорції	$1\% = 0{,}01$. $p\%$ від числа a дорівнюють $\frac{ap}{100}$. Якщо $p\%$ від числа a дорівнюють b, то $a = \frac{b}{p} \cdot 100$. Відсоткове відношення чисел a і b дорівнює $\frac{a}{b} \cdot 100\%$. Головна властивість пропорції $a : b = c : d$ — $ad = bc$.

Вирази та їхні перетворення

Таблиця 2

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b), \qquad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

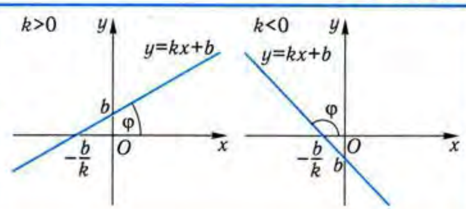
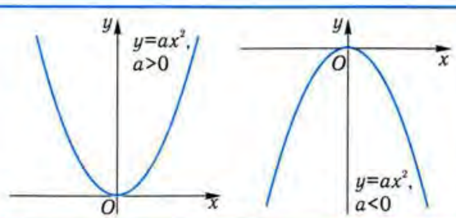
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3, \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2),$$

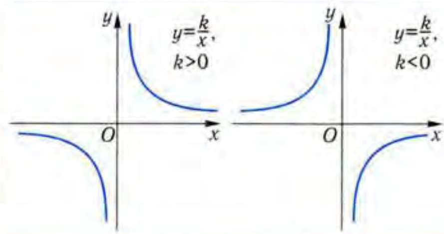
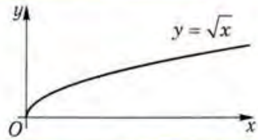
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2), \qquad ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

де x_1 і x_2 – корені рівняння $ax^2+bx+c = 0$, $a \neq 0$.

Функції і графіки

Таблиця 3

1. ***Лінійна функція $y = kx + b$.*** Графік — пряма, не паралельна осі y. Коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до осі x: $k = \mathrm{tg}\varphi$.	
2. ***Квадратична функція $y = ax^2$, $a \neq 0$.*** Графік — парабола, вітки якої спрямовані вгору, якщо $a > 0$, і вниз, якщо $a < 0$.	

3. ***Обернена пропорційність*** $y=\frac{k}{x}$, $\boldsymbol{k \neq 0}$. Графік — гіпербола, яка при $k>0$ розташована у I і III чвертях, а при $k<0$ — у II і IV чвертях.	
4. *Функція* $y=\sqrt{x}$. Визначена на проміжку $[0; +\infty)$.	

Рівняння

Таблиця 4

Тип рівняння	Розв'язання
Лінійне рівняння $\boldsymbol{ax=b}$	Якщо $a \neq 0$, то $x=\frac{b}{a}$.
	Якщо $a=0$, $b \neq 0$, то рівняння не має коренів.
	Якщо $a=0$, $b=0$, то будь-яке x є коренем рівняння.
Квадратне рівняння $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$, $\boldsymbol{a \neq 0}$, $D=b^2-4ac$ — його дискримінант	Якщо $D<0$, то рівняння не має коренів. Якщо $D=0$, то рівняння має один корінь $x=-\frac{b}{2a}$. Якщо $D>0$, то рівняння має два корені $x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.
Неповне квадратне рівняння (один з коефіцієнтів b або c дорівнює 0)	$ax^2+bx=0$ або $x(ax+b)=0$, тоді $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$. $ax^2+c=0$ або $x^2=-\frac{c}{a}$. Якщо $-\frac{c}{a}>0$, то $x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Якщо $-\frac{c}{a}<0$, то рівняння не має коренів.

Означення степеня з цілим показником

Таблиця 5

Степінь з натуральним показником	$n \in N, n > 1 \Rightarrow a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}.\ \ a^1 = a.$
Степінь з нульовим показником	$a^0 = 1,\ a \neq 0.$
Степінь з цілим від'ємним показником	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n},\ a \neq 0,\ n \in N.$

Властивості степеня з цілим показником

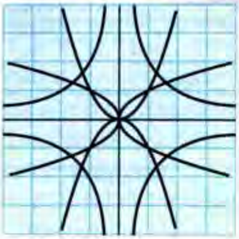
Таблиця 6

Добуток степенів з однаковими основами	$a^x \cdot a^y = a^{x+y},\ x, y \in Z.$
Частка від ділення степенів з однаковими основами	$a^x : a^y = a^{x-y},\ x, y \in Z.$
Піднесення степеня до степеня	$\left(a^x\right)^y = a^{xy},\ x, y \in Z.$
Степінь добутку	$(ab)^x = a^x \cdot b^x,\ x \in Z.$
Степінь частки	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x},\ x \in Z.$

Арифметичний квадратний корінь та його властивості

Таблиця 7

Означення	$a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \geq 0, \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$
Арифметичний квадратний корінь з добутку	$a \geq 0,\ b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$
Арифметичний квадратний корінь з дробу	$a \geq 0,\ b > 0 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$
Арифметичний квадратний корінь з квадрата	$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert.$



Тест для діагностики готовності до вивчення теми «Функції, їхні властивості та графіки»

1. Обчисліть: $\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$.

   А. $-\frac{27}{8}$. **Б.** $\frac{8}{27}$. **В.** $-\frac{8}{27}$. **Г.** $\frac{27}{8}$.

2. Порівняйте без обчислювальних засобів числа $a=\frac{4}{5}$ і $b=\frac{5}{6}$.

   А. $a<b$. **Б.** $a=b$. **В.** $a>b$.
   Г. Порівняти неможливо.

3. Після підвищення цін на 10% ціна товару дорівнювала 220 грн. Якою була початкова ціна цього товару ?

   А. 242 грн. **Б.** 200 грн. **В.** 198 грн. **Г.** 180 грн.

4. Обчисліть значення виразу $\frac{x-x^3}{2}$ при $x=-\sqrt{5}$.

   А. $-3\sqrt{5}$. **Б.** $-2\sqrt{5}$. **В.** $2\sqrt{5}$. **Г.** $3\sqrt{5}$.

5. Скоротіть дріб $\frac{a-2}{a^2-4}$.

   А. $\frac{1}{a+2}$. **Б.** $\frac{1}{a-2}$. **В.** $a-2$. **Г.** $\frac{1}{2-a}$.

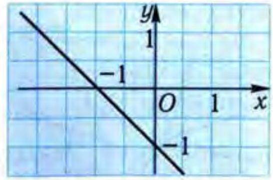
6. Подайте вираз $\left(\frac{a^6}{a^2}\right)^5$ у вигляді степеня числа a.

   А. a^{15}. **Б.** a^{20}. **В.** a^8. **Г.** a^9.

7. Серед наведених точок укажіть точку, через яку проходить графік функції $y=-\frac{2}{x}$.

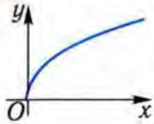
   А. $(-1; -2)$. **Б.** $(-1; 2)$. **В.** $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$. **Г.** $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$.

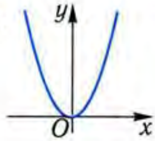
8. На рисунку зображено графік функції …

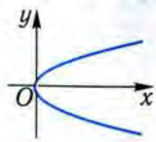


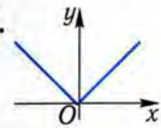
А. $y = x + 1$. **Б.** $y = x - 1$.
В. $y = -x - 1$. **Г.** $y = -x + 1$.

9. Графік функції $y = x^2$ зображено на рисунку …

А.


Б.


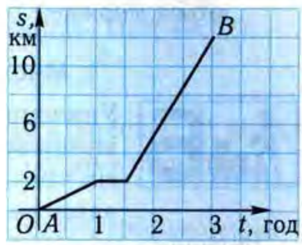
В.


Г.


10. Яка з наведених функцій є оберненою пропорційністю?

А. $y = 2x$. **Б.** $y = x^2$. **В.** $y = \dfrac{2}{x}$. **Г.** $y = \sqrt{x}$.

11. На рисунку представлено графік руху туриста з пункту A в пункт B, де s — відстань від пункту A до туриста у момент часу t. Скільки часу рухався турист до привалу?



А. 2 год. **Б.** 3 год.
В. 1,5 год. **Г.** 1 год.

12. Із формули $s = \dfrac{vt}{2} + 1$ виразіть залежність часу $t > 0$ від шляху s.

А. $t = \dfrac{v}{2s-2}$. **Б.** $t = \dfrac{2s-2}{v}$. **В.** $t = \dfrac{2s+2}{v}$. **Г.** $t = \dfrac{2s-1}{v}$.

13. Скільки коренів має рівняння $3x^2 - 5x + 2 = 0$?
А. Жодного. **Б.** Один. **В.** Два. **Г.** Більше від двох.

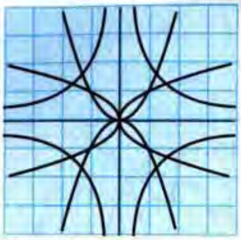
14. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 2x + 1 \ge 0, \\ 1 - x > 0. \end{cases}$

А. $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right)$. **Б.** $\left[-\dfrac{1}{2}; 1\right)$. **В.** $\left(-1; \dfrac{1}{2}\right]$. **Г.** $(1; +\infty)$.

15. Знайдіть область визначення виразу $\sqrt{1 - 2x}$.

А. $x \ge \dfrac{1}{2}$. **Б.** $x \le \dfrac{1}{2}$. **В.** $x \ge 2$. **Г.** $x \le 2$.

16. Розв'яжіть нерівність: $x^2 < 4$.
А. $(2; +\infty)$. **Б.** $(-2; 2)$.
В. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. **Г.** $(-\infty; 2)$.



§1. Числові множини

Поняття числа є основним для всієї математики. Із її розвитком розвивалось та збагачувалось і поняття числа.

У цьому параграфі зроблено огляд основних числових систем, які вивчались раніше, докладніше розглядаються множини раціональних і дійсних чисел.

1. Множина раціональних чисел

Уявлення про числа формувались поступово під впливом вимог практичної діяльності. З давніх часів числа вживались: а) при лічбі; б) при вимірюванні величин.

Вивчення математики ви починали з ***натуральних чисел***, тобто з чисел 1, 2, 3, 4, 5, ..., які використовувались при лічбі. При додаванні і множенні натуральних чисел завжди отримують натуральні числа. Але різниця і частка від ділення натуральних чисел можуть не бути натуральними числами.

Якщо приєднати до натуральних чисел від'ємні числа і нуль, то множина натуральних чисел розширюється до ***множини цілих чисел***. Від'ємні цілі числа разом з натуральними дозволяють характеризувати зміну численності множини без вказівки на напрямок зміни. Наприклад, якщо кількість виробів, виготовлених робітником за зміну, змінилась на +20, то це означає, що вона збільшилась на 20, а якщо на –20, то — зменшилась. Те саме стосується запису розміру прибутку і збитку, температури повітря, швидкості руху за течією і проти течії річки тощо. Для будь-яких цілих чисел їхня різниця є цілим числом. Однак частка від ділення двох цілих чисел може не бути цілим числом.

Дробові числа з'явились як результат вимірювання. Нехай потрібно виміряти довжину класної дошки. Припустимо, що метр у довжині класної дошки уклався один раз і залишилася остача, менша від метра. У такому разі поділяємо метр, наприклад, на 10 рівних частин, вимірюємо остачу десятими долями метра і знаходимо, що остача містить 7 десятих частин метра. Отримали дробове число $1\frac{7}{10}$. Цілі числа разом з дробовими утворюють ***множину раціональних чисел***. При виконанні чотирьох арифметичних дій (окрім ділення на 0) над раціональними числами завжди отримують раціональні числа. Кожне раціональне число можна подати у вигляді звичайного дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, n — натуральне.

Множину натуральних чисел зазвичай позначають літерою **N**, множину цілих чисел — **Z**, множину раціональних чисел — **Q**.

Кожне раціональне число можна подати також у вигляді десяткового дробу, скінченного або нескінченного. Наприклад,

$$\frac{1}{8} = 0{,}125; \quad 2\frac{7}{25} = 2\frac{28}{100} = 2{,}28; \quad \frac{1}{9} = 0{,}1111\ldots .$$

Останній десятковий дріб є періодичним з періодом 1 і його записують так: 0,(1), читається: «нуль цілих і один у періоді».

Різні нескінченні десяткові дроби зображають різні раціональні числа. Виняток складають дроби з періодом 9, які можна вважати іншим записом дробів з періодом 0: 1,(9) = 1,999... = 2,000... = 2; 0,3(9) = 0,3999... = = 0,4000... = 0,4. Для нескінченних десяткових дробів з періодом 9, як правило, застосовують запис дробами з періодом 0. Якщо ототожнити періодичні дроби з періодом 9 з відповідними періодичними дробами з періодом 0, то між раціональними числами і десятковими періодичними дробами існуватиме взаємно однозначна відповідність.

Теорема 1. Кожне раціональне число $\frac{m}{n}$ можна зобразити у вигляді десяткового періодичного дробу.

□ Твердження випливає з того, що в процесі ділення чисельника m на знаменник n після виділення цілої частини кожна з остач буде меншою від n, тобто остача може дорівнювати одному з чисел 0, 1, 2, ..., $n - 1$. Тому не пізніше, ніж після n-го кроку, якась з остач повториться, і відтак у частці буде повторюватись та сама група цифр. ■

Якщо при діленні «куточком» отримують скінченний десятковий дріб, то його завжди можна записати у вигляді періодичного з періодом, що дорівнює нулю, приписавши справа як десяткові знаки безліч нулів.

Приклад 1. Записати числа $\frac{9}{40}$ і $\frac{3}{25}$ у вигляді десяткового періодичного дробу.

□ Маємо: $\frac{9}{40} = 0{,}225 = 0{,}225000... = 0{,}225(0)$, $\frac{3}{25} = 0{,}12 = 0{,}12000... = 0{,}12(0)$. ■

Відповідь. 0,225(0); 0,12(0).

Зауважимо, що знаменники дробів, що розглядались у прикладі 1, своїми простими множниками мають лише числа 2 і 5: $40 = 2^3 \cdot 5$, $25 = 5^2$. Виявляється, що і взагалі, коли знаменник дробу має своїми простими множниками лише числа 2 і 5, то такий дріб перетворюється у скінченний десятковий дріб.

Дроби, знаменники яких у своїх розкладах на прості множники містять числа, що відрізняються від 2 і 5, перетворюються на нескінченні десяткові дроби.

Приклад 2. Записати числа $\frac{5}{3}$, $\frac{9}{56}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{8}{35}$ у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу.

□ $\frac{5}{3} = 1{,}6666... = 1{,}(6)$; $\frac{9}{56} = 0{,}160714285714285... = 0{,}160(714285)$;

$\frac{5}{6} = 0{,}8333... = 0{,}8(3)$; $\frac{2}{11} = 0{,}18181818... = 0{,}(18)$;

$\frac{8}{35} = 0{,}2285714285714... = 0{,}2(285714)$. ■

Якщо x — від'ємне раціональне число, то у вигляді нескінченного десяткового дробу подають йому протилежне число і перед одержаним числом ставлять знак «мінус».

Правильним є і твердження, обернене до теореми 1.

Теорема 2. Кожен десятковий періодичний дріб зображає певне раціональне число.

Якщо десятковий дріб має своїм періодом число 0, то це твердження є очевидним. Наприклад, $2,73(0) = 2,73000... = 2,73 = \frac{273}{100}$.

У загальному випадку можна скористатися формулою суми нескінченної спадної геометричної прогресії:

$$S = \frac{a_1}{1-q},$$

де a_1 — перший член геометричної прогресії, q — її знаменник ($|q| < 1$).

Приклад 3. Записати у вигляді звичайного дробу періодичний дріб: 1) 3,(7); 2) 1,5(38).

☐ 1) Запишемо періодичний десятковий дріб без дужок: 3,7777... . Подамо одержаний дріб у вигляді суми цілої частини, десятих, сотих і т. д. часток:

$$3,7777... = 3 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ... \ .$$

Доданки суми $\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ...$ є членами нескінченної спадної геометричної прогресії з першим членом $a_1 = \frac{7}{10}$ і знаменником $q = \frac{1}{10}$ ($|q| < 1$).

За формулою суми нескінченної спадної геометричної прогресії, маємо:

$$\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ... = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}.$$

Отже, $3,(7) = 3\frac{7}{9}$.

2) $1,5(38) = 1,5383838... = 1 + \frac{5}{10} + \frac{38}{1000} + \frac{38}{100000} + ... = 1 + \frac{5}{10} + \frac{0,038}{1 - 0,01} = 1 + \frac{5}{10} + \frac{38}{990} = 1 + \frac{5 \cdot 99 + 38}{990} = 1\frac{433}{990}$. ■

Відповідь. 1) $3\frac{7}{9}$; 2) $1\frac{433}{990}$.

✓ Контрольні запитання

1°. Чи правильно, що:
а) кожне ціле число є натуральним;
б) кожне ціле число є раціональним?

2°. Яка множина доповнює множину цілих чисел до множини раціональних чисел?

3°. Чому дорівнює період десяткового дробу 49,35727272...?

4°. Які з наступних звичайних дробів перетворюються у скінченні десяткові дроби: $\frac{3}{16}, \frac{7}{49}, \frac{5}{6}, \frac{7}{50}, \frac{11}{15}, \frac{3}{25}, \frac{21}{80}, \frac{2}{21}, \frac{7}{125}$?

5. Скільки цифр має період зображення раціонального числа $\frac{3}{11}$ у вигляді нескінченного десяткового дробу?

2. Множина дійсних чисел

Для точного вимірювання довжин відрізків раціональних чисел не вистачає. Наприклад, не існує раціонального числа, яке б дорівнювало довжині гіпотенузи рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо довжина його катета є одиницею виміру ($\sqrt{2}$ не є раціональним числом!).

У множині раціональних чисел не будь-яке рівняння виду $x^2 = a$ має розв'язок. Наприклад, рівняння $x^2 = 2$ у множині раціональних чисел не має розв'язків, бо не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2. Потрібно розширити множину раціональних чисел.

Нові числа можна ввести, розглядаючи нескінченні неперіодичні десяткові дроби.

У попередньому пункті було показано, що будь-яке раціональне число можна записати у вигляді періодичного десяткового дробу і кожен десятковий періодичний дріб є раціональним числом. Якщо ж нескінченний десятковий дріб не є періодичним, то він не є раціональним числом. Наприклад, дріб 0,12345678910111213..., у якому після коми стоять усі натуральні числа, — неперіодичний, а тому він не зображає жодного раціонального числа. Даний дріб є ірраціональним числом.

Ірраціональним числом називається нескінченний десятковий неперіодичний дріб.

Приклади ірраціональних чисел: 0,35355355535555... (після першої трійки — одна п'ятірка, після другої — дві і т. д.), $\sqrt{2} = 1,41421356...$, $\pi = 3,1415926535...$ (відношення довжини кола до діаметра).

Ірраціональні числа x і y, записані у вигляді нескінченних десяткових дробів, порівнюються за тими самими правилами, що і скінченні десяткові дроби: якщо ціла частина числа x менша від цілої частини числа y, то $x < y$. Якщо цілі частини двох чисел рівні, то для їхнього порівняння доводиться звертатись до їхніх дробових частин. Наприклад, $12,72241... < 12,72250...$, оскільки у цих чисел рівні цілі частини і перші три десяткові знаки після коми, а четвертий знак після коми у лівого числа менший: $4 < 5$.

Раціональні та ірраціональні числа утворюють множину ***дійсних чисел***. Цю множину позначають буквою **R**. Кожне дійсне число зображається у вигляді десяткового дробу (скінченного чи нескінченного).

Дійсні числа можна додавати, віднімати, множити і ділити (за умови, що дільник відмінний від нуля), причому дії над дійсними числами мають ті самі властивості, що і дії над раціональними числами. У прикладних задачах при виконанні дій над дійсними числами їх замінюють раціональними наближеними значеннями.

Приклад 4. Дві матеріальні точки обертаються по колах з радіусами 3 м і 4 м. Кожна з них за 1 с робить один оберт. Яку загальну відстань вони разом подолають за 1 с? Обчислення виконати з точністю до 1 м.

□ Загальна відстань дорівнює сумі довжин двох кіл, описаних даними матеріальними точками за 1 с. Оскільки довжина кола обчислюється за формулою $l = 2\pi R$, де R — радіус кола, l — його довжина, то можна обчислити довжину кожного кола (при обчисленні зберігаємо один додатковий десятковий знак): $l_1 = 2\pi \cdot 3 = 6\pi \approx 6 \cdot 3,1 = 18,6$ (м), $l_2 = 2\pi \cdot 4 = 8\pi \approx 8 \cdot 3,1 = 24,8$ (м). Загальна ж відстань дорівнює $l_1 + l_2 \approx 18,6 + 24,8 = 43,4$ (м). Округливши результат до 1 м, дістанемо: $l_1 + l_2 \approx 43$ (м). ■

Відповідь. 43 м.

Геометрично дійсні числа зображаються за допомогою точок ***координатної прямої***, тобто прямої з вибраними початком координат, додатним напрямом відліку та одиницею масштабу.

Основна властивість дійсних чисел.

Кожному дійсному числу відповідає єдина точка координатної прямої, і навпаки, кожній точці координатної прямої відповідає єдине дійсне число.

Враховуючи цю відповідність, часто не відрізняють число та точку, що його зображає. Наприклад, кажуть «точка 5», «точка 2», «точка x» і позначають відповідну точку координатної прямої числом «5», «2», «x». Координатну пряму називають також ***числовою віссю.*** Те, що точка A має координату x, записують: $A(x)$.

Зазвичай координатну пряму розміщують горизонтально, додатний напрям обирають зліва направо, початок координат позначають буквою O. При цьому, якщо $a < b$, то точка a міститься на числовій осі лівіше від точки b (рис. 2, а); якщо ж $a > b$, то точка a міститься правіше від точки b (рис. 2, б).

а) б)

Рис. 2

Приклад 5. На координатній прямій зобразити точки за їхніми координатами: $A(-2); B\left(\frac{2}{3}\right); C\left(-\frac{1}{2}\right); D(0,3); E\left(\sqrt{2}\right)$.

□ Точку $A(-2)$ отримаємо, якщо на координатній прямій відкладемо у від'ємному напрямі дві одиниці масштабу (рис. 3). Точку $B\left(\frac{2}{3}\right)$ можна побудувати, якщо поділити одиницю масштабу на три рівні частини. Точки $C\left(-\frac{1}{2}\right); D(0,3)$ будуються аналогічно (одиниця масштабу поділяється відповідно на дві і десять рівних частин). Для зображення точки $E\left(\sqrt{2}\right)$ можна скористатись наближеним значенням $\sqrt{2}$, наприклад, 1,4. ■

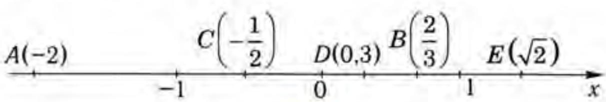


Рис. 3

Геометричне тлумачення дійсних чисел дозволяє наочно ввести поняття модуля числа.

Відстань від початку координат O до точки x називається модулем числа x і позначається $|x|$.

З означення випливає, що при $x \geq 0$ відстань від O до x дорівнює x, тобто ***модулем невід'ємного числа є саме це число.*** Якщо ж $x < 0$, то відстань від O до x дорівнює $-x$, тобто ***модулем від'ємного числа є протилежне до нього число***. Отже, $|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$ тобто вираз для модуля дійсного числа збігається з означенням модуля раціонального числа. Наприклад, $|3| = 3, |-5| = 5, \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1, |x-1| = \begin{cases} x-1, \text{ якщо } x \geq 1, \\ 1-x, \text{ якщо } x < 1. \end{cases}$

На координатній прямій також зображають числові проміжки: відрізки, інтервали, напівінтервали. Далі наведено їхній запис за допомогою дужок, нерівностей, а на рис. 4 — їхнє зображення на координатній прямій.

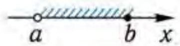
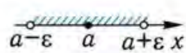
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$		(відрізок)
$(a; b]$	$a < x \leq b$		(напівінтервал)
$(a; b)$	$a < x < b$		(інтервал)
$(-\infty; a)$	$-\infty < x < a$		(нескінченний інтервал)
$(-\infty; a]$	$-\infty < x \leq a$		(нескінченний напівінтервал)
$[a; +\infty)$	$a \leq x < +\infty$		(нескінченний напівінтервал)
$(a; +\infty)$	$a < x < +\infty$		(нескінченний інтервал)
$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$	$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$		(окіл точки a з радіусом ε)

Рис. 4

Належність кінцевої точки проміжку позначається на координатній прямій замальованим кружечком. Незамальований кружечок означає, що точка не належить проміжку, тобто є «виколотою». Число $b - a$ є ***довжиною*** кожного з проміжків $[a; b]$, $(a; b)$,

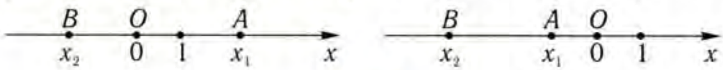
$(a; b]$, $(a; b)$. Проміжок $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ називається ***околом*** точки a з радіусом $\varepsilon > 0$. Точка a є серединою цього проміжку, його довжина дорівнює 2ε.

Поняття модуля дійсного числа, його геометричне тлумачення широко застосовується при розв'язанні різноманітних задач.

Теорема 3. Відстань між точками координатної прямої дорівнює модулю різниці чисел, що відповідають їм.

□ Нехай дано точки $A(x_1)$, $B(x_2)$. Треба довести, що $AB = |x_1 - x_2|$. Доведення теореми зводиться до розгляду різних випадків розміщення точок $A(x_1)$ і $B(x_2)$ на координатній прямій. Якщо $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, (рис. 5, а), то $AB = AO + OB = x_1 + (-x_2) = x_1 - x_2 = |x_1 - x_2|$. Якщо $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, $|x_1| < |x_2|$, тобто точка A розташована ближче до точки O, ніж точка B (рис. 5, б), то $AB = BO - OA = -x_2 - (-x_1) = x_1 - x_2 = |x_1 - x_2|$. Аналогічно розглядаються інші випадки. Ми довели, що *модуль різниці двох чисел дорівнює відстані між точками, якими зображаються дані числа.* ■

Користуючись поняттям модуля, легко записати деякі геоме-



а) б)

Рис. 5

тричні твердження в алгебраїчній формі. Наприклад, «відстань від точки x до точки 1 дорівнює 2» означає, що $|x - 1| = 2$, а «відстань від точки x до точки -1 менша ніж 3» — $|x + 1| < 3$.

Геометричним змістом модуля зручно користуватись при розв'язанні найпростіших рівнянь та нерівностей, які містять вирази з модулями.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $|x + 2| = 1$.

□ Перепишемо дане рівняння у вигляді $|x - (-2)| = 1$. Геометрично воно означає, що відстань від шуканої точки x до точки -2 дорівнює 1. Відкладаючи на коорди-

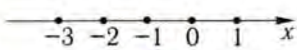


Рис. 6

натній прямій (рис. 6) від точки -2 по обидва боки від неї відрізки завдовжки 1, одержимо: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$. ■

Відповідь. -3; -1.

Приклад 7. Розв'язати нерівність: 1) $|x-5| \leq 3$; 2) $|x+2| > 1$.

□ 1) Геометричний зміст завдання полягає у тому, щоб знайти множину точок x, які віддалені від точки 5 на відстань, не більшу, ніж 3. Зобразимо ці точки на рисунку (рис. 7). Запишемо відмічені точки у вигляді проміжку: $[2; 8]$. Розв'язком нерівності є точки відрізка $[2; 8]$.

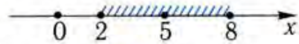


Рис. 7

2) Нерівність можна переписати у такому вигляді: $|x-(-2)| > 1$. Потрібно знайти множину точок x, які віддалені від точки -2 на відстань, що перевищує 1. Зобразимо ці точки на рисунку (рис. 8).

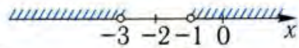


Рис. 8

Розв'язком нерівності є точки множини $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$. ■

Відповідь. 1) $[2; 8]$; 2) $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$.

✓ Контрольні запитання

1°. Серед наведених чисел вкажіть натуральні, цілі, раціональні, ірраціональні: $(-3)^3$; $(-3)^2$; 3,14; π; $\sqrt{64}$; $\sqrt{50}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{9}{3}$; 1,0(56).

2°. Які числа задовольняють рівняння:
а) $|x| = 4$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = -4$?

3°. Які з наступних чисел можна подати у вигляді періодичних десяткових дробів, а які — у вигляді нескінченних неперіодичних десяткових дробів: $\frac{2}{11}$; $\sqrt{3}$; $\frac{3}{8}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{25}$; $-\frac{12}{17}$; $-\sqrt{6}$?

4°. Чи може добуток раціональних чисел бути ірраціональним числом?

5. Чи може добуток ірраціональних чисел бути раціональним числом?

6. Яка з рівностей $|x| = x$ чи $|x| = -x$ є правильною, якщо:

1) $x = \sqrt{2} - 1$; 2) $x = \sqrt{3} - 2$;
3) $x = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}$; 4) $x = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$?

Задачі

1°. Подайте число у вигляді нескінченного десяткового дробу:

1) 5; 2) $\frac{7}{3}$; 3) $-\frac{3}{7}$; 4) $\frac{7}{5}$.

2. Подайте число у вигляді звичайного дробу:

1°) $0,27$; 2) $0,2222...$; 3) $2,(31)$; 4) $3,4(52)$.

3°. Порівняйте числа:

1°) $\frac{11}{315}$ і $\frac{11}{305}$; 2°) $-\frac{6}{7}$ і $\frac{5}{7}$; 3) $\frac{3}{4}$ і $\frac{5}{6}$; 4) $0,58$ і $\frac{7}{12}$.

4. Виконайте дії і запишіть результат у вигляді скінченного або нескінченного десяткового дробу:

1) $\frac{5}{6}+\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{9}+0,25$; 3) $\frac{5}{21}\cdot 3,15$; 4) $\frac{2}{15}:3,2$.

5. Дано два раціональних числа:

1) $0,53$ і $0,64$; 2) $-0,03$ і $0,03$; 3) $0,3462$ і $0,3463$; 4) $\frac{1}{3}$ і $\frac{2}{7}$.

Вкажіть принаймні одне раціональне число, яке міститься поміж ними.

6. Назвіть декілька додатних значень змінної a, при яких значення виразу $\sqrt{a}$ є:

1) ірраціональним числом; 2) раціональним числом.

7°. На рис. 9 зображено числові множини. Запишіть задані множини у вигляді числових проміжків.

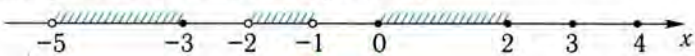


Рис. 9

8°. Зобразіть на координатній прямій числові множини:

1) $(3; 4)$; 2) $[-2; 1)$; 3) $[-2; -1]$; 4) $(-\infty; -2]$; 5) $[1; +\infty)$.

9°. Зобразіть на координатній прямій множину точок, координати яких задовольняють умову:

1) $1 < x < 2$; 2) $1 \le x \le 3$; 3) $-1 < x \le 1$; 4) $x > 4$; 5) $x \le -3$.

10°. Як записати у вигляді нерівності з модулем нерівність:

1) $-2 \le x \le 2$; 2) $-1 \le x \le 3$; 3) $-5 \le x \le 3$?

11. Дано точки $A(3)$ і $B(5)$. Знайдіть координати точки:

1) симетричної точці A відносно B;

2) симетричної середині відрізка AB відносно точки B.

12. Для кожного з наступних інтервалів укажіть його довжину і координату його середини:

1) (1,3; 2,56); 2) $(-\pi; 2\pi)$; 3) (–2,13; 2,15).

13. Зобразіть на координатній прямій множину точок, координати яких задовольняють умову:

1) $|x| = 3$; 2) $|x| \le 3$; 3) $|x| > 3$; 4) $|x| > -3$; 5) $|x| < -3$.

14. Знайдіть $|x|$, якщо:

1) $x = \frac{7}{8} - \frac{8}{9}$; 2) $x = 3 - \sqrt{8}$;

3) $x = 4 - 3\sqrt{2}$; 4) $x = 2,(251) - 2,25(1)$.

---

15. Обчисліть значення виразу: 1) $|-a| - 2|b|$, якщо $a = -1, b = -2$;

2) $\frac{-1 - |-3a| + 4|b|}{2|a| + |b|}$, якщо $a = -4, b = 0$.

16. Розв'яжіть рівняння:

1) $|2x + 1| = 3$; 2) $|2 - 4x| = 1$; 3) $|2x - 5| = -2$; 4) $|x + 2| = x + 2$.

17. Розв'яжіть нерівність:

1) $|x + 3| > 2$; 2) $|4x - 1| < 1$; 3) $|x - 2| < 1 - \sqrt{2}$.

18*. Порівняйте значення виразів:

1) $|a|$ і a; 2) $-|a|$ і a; 3) $|a^2|$ і a^2.

Вправи для повторення

19. Запишіть у вигляді звичайного дробу:

1) 6%; 2) 18%; 3) $\frac{2}{3}$%;

4) $3\frac{3}{4}$%; 5) $112\frac{1}{2}$%; 6) 350%.

20. Виразіть у відсотках:

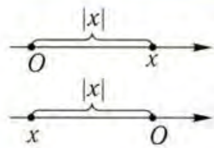
1) 0,08; 2) 0,6; 3) 2; 4) 3,2; 5) 0,0043.

21. На скільки відсотків збільшиться площа круга, якщо його радіус збільшити на 20%?

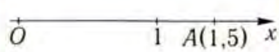
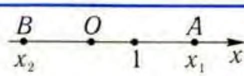
22. Богдан і Грицько грали в одній баскетбольній команді. Богдан за гру 20 разів кидав м'яч у кошик, при цьому 15 разів його кидки були влучними. Гриць зробив 25 кидків, з яких 18 виявились влучними. Хто з них був влучнішим у цій грі?

Підсумок

Основні поняття

Означення	Геометрична інтерпретація, приклади	Застосування
Ірраціональним числом називається нескінченний десятковий неперіодичний дріб.	0,35355355535555..., $\sqrt{2} = 1{,}41421356...$, $\pi = 3{,}1415926535...$.	Ірраціональні числа дають можливість вимірювати довжини відрізків, несумірних з одиничним відрізком.
Відстань від початку координат O до точки x називається модулем числа x і позначається $\|x\|$.		Поняття модуля числа дозволяє записувати за допомогою виразів взаємне розміщення точок на координатній прямій.

Головні твердження

Зміст твердження	Приклади
Кожне раціональне число $\frac{m}{n}$ можна зобразити у вигляді десяткового періодичного дробу.	$\frac{5}{3} = 1{,}6666... = 1{,}(6).$
Кожен десятковий періодичний дріб зображає певне раціональне число.	$3{,}(7) = 3\frac{7}{9}.$
Кожному дійсному числу відповідає єдина точка координатної прямої, і навпаки, кожній точці координатної прямої відповідає єдине дійсне число.	
Відстань між точками координатної прямої дорівнює модулю різниці чисел, що відповідають їм.	 $AB = \|x_1 - x_2\|.$

§2. Обчислення і розрахунки

Одним з головних завдань курсу математики є формування міцних обчислювальних навичок. Даний параграф присвячено їхньому збереженню і вдосконаленню.

1. Обчислення з дійсними числами

У молодших класах ви виконували обчислення усно, письмово, за допомогою обчислювальних засобів. Значне місце займали обчислення за формулами. Такі обчислення виконувались як на уроках алгебри, так і на уроках геометрії, фізики та інших предметів. Подібна робота буде продовжуватись і розширюватись у старших класах, тому нагадаємо деякі рекомендації, які сприяють спрощенню обчислень, дають змогу уникнути помилок.

1. *Не зловживайте калькулятором.* Доцільно деякі обчислення не доручати калькуляторам, а виконувати усно чи письмово, що заощаджує час на їхнє виконання. Це стосується дій над звичайними дробами, деяких дій над арифметичними значеннями квадратного кореня тощо.

Приклад 1. Обчислити $\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$.

☐ Застосування калькулятора приведе до наближеного результату 0,99999999 і потребує біля 10 операцій. Нескладні перетворення швидко приводять до результату:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)=\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)=1. \blacksquare$$

2. *Застосовуйте різноманітні окремі прийоми усних обчислень, закони арифметичних дій, різні формули з алгебри тощо.*

Приклад 2.

1) $56\,128 \cdot 25 = 5\,612\,800 : 4 = 1\,403\,200$, бо $a \cdot 25 = (a \cdot 100) : 4$.

2) $26\frac{3}{4} \cdot 8 = \left(26 + \frac{3}{4}\right) \cdot 8 = 26 \cdot 8 + \frac{3}{4} \cdot 8 = 208 + 6 = 214.$

3) $240\frac{6}{7} : 15 = \left(240 + \frac{6}{7}\right) : 15 = 240 : 15 + \left(\frac{6}{7} : 3\right) : 5 = 16 + \frac{2}{7} : 5 = 16\frac{2}{35}.$

4) $61^2 = (60 + 1)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2 = 3600 + 120 + 1 = 3721.$

5) $38^2 = (40 - 2)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2 = 1600 - 160 + 4 = 1444.$

6) $68 \cdot 52 = (60 + 8) \cdot (60 - 8) = 60^2 - 8^2 = 3600 - 64 = 3536.$

7) $39^2 - 36^2 = (39 + 36) \cdot (39 - 36) = 75 \cdot 3 = 225.$

8) $49\frac{4}{7} \cdot 50\frac{3}{7} = \left(50 - \frac{3}{7}\right)\left(50 + \frac{3}{7}\right) = 50^2 - \left(\frac{3}{7}\right)^2 = 2500 - \frac{9}{49} = 2499\frac{40}{49}.$

9) $\frac{67^3 + 53^3}{120} - 67 \cdot 53 = \frac{(67 + 53)(67^2 - 67 \cdot 53 + 53^2)}{120} - 67 \cdot 53 =$
$= (67 - 53)^2 = 196.$

3. *Прогнозуйте наближене значення результату обчислень.*

Обчислення бажано починати з грубого наближеного оцінювання шуканого результату, округлюючи усі дані і виконуючи дії усно чи письмово.

Приклад 3. Обчислити наближене значення виразу

$$\sqrt{0{,}0045 \cdot 7{,}5132 : (2{,}0719 \cdot 0{,}864)}.$$

□ Знайдемо наближене значення виразу, скориставшись законами арифметичних дій:

$$\sqrt{0{,}004 \cdot 8 : (2 \cdot 0{,}9)} = \sqrt{0{,}016 : 0{,}9} = \sqrt{0{,}16 : 9} = 0{,}4 : 3 \approx 0{,}13.$$

Потім за допомогою калькулятора можна отримати більш точний результат 0,137. ■

Подібна «прикидка» суттєво попереджує грубі похибки обчислень. Іноді її достатньо для розв'язання задачі. Отже, обчислення за допомогою калькуляторів слід поєднувати з усними або письмовими обчисленнями.

4. *Дотримуйтесь порядку виконання дій.* При виконанні обчислень слід бути уважними до порядку виконання дій. Порушення встановленого порядку може призвести до помилок.

Приклад 4. Обчислити значення виразу $\sqrt{72^2 + 30^2}$.

☐ Іноді помилково добувають квадратний корінь з числа 72^2, потім — з числа 30^2, додають отримані числа 72 і 30 і одержують неправильний результат 102. Насправді маємо: $\sqrt{72^2+30^2}=$ $=\sqrt{5184+900}=\sqrt{6084}=78$. Підкореневий вираз слід сприймати як вираз, що стоїть у дужках. А у дужках спочатку виконують (якщо ці дії є) дії третього ступеня (піднесення до квадрата, добування квадратного кореня), далі дії другого ступеня (множення та ділення) і, нарешті, – першого ступеня (додавання і віднімання). Після цього з отриманого результату добувають квадратний корінь. ■

У розглянутих прикладах ми стикаємось з такою проблемою: скільки знаків залишати в остаточному результаті, щоб точність результату відповідала точності вихідних даних? Відповідь на це запитання потребує розгляду обчислень з наближеними даними. Деякі з цих питань ви розглядали у молодших класах, наприклад, округлення цілих чисел і десяткових дробів. Нагадаємо їх.

Якщо десятковий дріб округлюють до певного розряду, то всі цифри, записані за цим розрядом, замінюють нулями або відкидають, якщо вони стоять після коми. Якщо першою цифрою за цим розрядом є 0, 1, 2, 3 або 4, то останню залишену цифру не змінюють. Якщо ж першою цифрою за цим розрядом є 5, 6, 7, 8 або 9, то останню залишену цифру збільшують на 1.

Проводячи за цим правилом округлення числа 217,541 до сотих, десятих, одиниць, дістанемо: 217,54; 217,5; 218.

При округленні натуральних чисел до деякого розряду або десяткових дробів до десятків, сотень і т. д. замість наступних за цим розрядом цифр пишуть нулі. Наприклад, $547 \approx 550$ (округлення до десятків), $3542 \approx 3500$ (округлення до сотень), $217{,}541 \approx 220$ (округлення до десятків), $217{,}541 \approx 200$ (округлення до сотень). В останніх прикладах за записом наближених чисел неможливо встановити, чи нулі, що стоять наприкінці числа, показують відсутність одиниць відповідного розряду, чи вони є результатом округлення. Щоб позбавитись такої неоднозначності, домовимось записувати результати округлення за допомогою степенів: $220 = 2{,}2 \cdot 10^2$; $200 =$ $= 2 \cdot 10^2$. Відтак, запис 200 показує, що число 200 є точним, в ньому кількість одиниць у розрядах одиниць і десятків дорівнює нулю, а запис $2 \cdot 10^2$ — це число є результатом округлення деякого числа до сотень.

Ми розглянули один із способів округлення наближених значень. Він є найбільш уживаним. Як у математиці, так і в її застосуваннях використовують три способи округлення: ***округлення з надлишком, округлення з недостачею та округлення з найменшою похибкою.***

При округленні з надлишком цифру останнього розряду, що зберігається в числі, завжди збільшують на одиницю. Наприклад, при округленні числа 34,27 з надлишком до десятих, одиниць, десятків дістаємо, відповідно, 34,3; 35; 40.

Іноді виникають ситуації, коли округлення можна зробити тільки з надлишком. Наприклад, якщо хлібина коштує 3 грн. 45 коп., то при продажі її половини ціну 1 грн. 72,5 коп. округлюють з надлишком. Таким чином, покупець втрачає 0,5 коп. При округленні з недостачею магазин міг би зазнати значних збитків.

При округленні з недостачею цифра останнього розряду, який зберігається в числі, залишається незмінною. Так, округлення з недостачею до десятих, одиниць, десятків числа 34,27 відповідно дорівнюють 34,2; 34; 30.

Наприклад, вимірюючи розміри віконних рам перед склінням, отримані показники варто округляти з недостачею, оскільки при округленні з надлишком шибка може виявитись завеликою.

Округлення тільки з недостачею та тільки з надлишком використовують нечасто. Той спосіб округлення, який розглядався вище (іноді називають його правилом «п'ятірки»), можна сформулювати тепер так:

якщо цифра першого відкинутого розряду менша від 5, то округлюють з недостачею, якщо ж більша або дорівнює 5 — з надлишком.

Цей спосіб є способом округлення з ***найбільшою точністю***.

А як оцінити точність наближеного числа, зокрема, точність округлення? Природно точність оцінювати за допомогою відстані між двома числами (точним і наближеним) на координатній прямій, яка дорівнює, як відомо, модулю різниці цих чисел.

Число a є наближенням до числа x з точністю h, якщо $|x-a| \le h$ або $a-h \le x \le a+h$.

У розглянутих прикладах можна вважати, що результати округлення з надлишком 34,3; 35; 40 числа 34,27 мають відповідно точність 0,05; 1; 6, оскільки $|34{,}27 - 34{,}3| = 0{,}03 < 0{,}05$; $|34{,}27 - 35| = 0{,}73 < 1$; $|34{,}27 - 40| = 5{,}73 < 6$. Водночас точність результатів округлення 34,2; 34; 30 з недостачею можна вважати такими, що дорівнюють 0,1; 0,5; 5, бо $|34{,}27 - 34{,}2| = 0{,}07 < 0{,}1$; $|34{,}27 - 34| = 0{,}27 < 0{,}5$; $|34{,}27 - 30| = 4{,}27 < 5$.

Якщо знайдено точність h наближення числа a до числа x, то це іноді записують так:

$$x = a \pm h.$$

Наприклад, запис $x = 5{,}984 \pm 0{,}002$ означає, що x дорівнює 5,984 з точністю до 0,002, тобто $5{,}984 - 0.002 \le x \le 5{,}984 + 0{,}002$, або $5{,}982 \le x \le 5{,}986$.

Приклад 5. У кімнатному термометрі верхній кінець стовпчика рідини знаходиться між позначками 18°C і 19°C. За наближене значення температури взяли число 18,5. Оцініть точність наближення.

☐ Стосовно результатів вимірювання кімнатної температури t можна стверджувати, що

$$18 \le t \le 19.$$

Віднімаючи від обох частин цієї подвійної нерівності наближене значення 18,5, дістанемо: $-0{,}5 \le t - 18{,}5 \le 0{,}5$, тобто $|t - 18{,}5| \le 0{,}5$.

Таким чином, можна вважати, що точність вимірювання температури дорівнює 0,5: $h \le 0{,}5$. ■

Відповідь. $h \le 0{,}5$.

Якщо узагальнити розглянутий приклад 5, то можна дійти висновку, що точність вимірювального приладу встановлюється за ціною поділки шкали. Наприклад, якщо омметр проградуйований через 10 кОм, то за допомогою такого приладу можна виміряти опір з точністю до 5 кОм.

✓ Контрольні запитання

1. Як скористатися розподільним законом множення відносно додавання для усного обчислення добутку: а) $26 \cdot 23$; б) $47 \cdot 32$?
2. Як використати тотожність $(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) + bc$ при $a + b = 10$ для обчислення добутку: а) $82 \cdot 88$; б) $9993 \cdot 9997$?
3. Як скористатися тотожністю $(10 + a)(10 + b) = 100 + 10(a + b) + ab$ для усного обчислення добутку: а) $17 \cdot 14$; б) $19 \cdot 13$?
4. Як скористатися формулою для різниці квадратів двох чисел для обчислення значення виразу: а) $\sqrt{53^2 - 28^2}$; б) $\sqrt{85^2 - 36^2}$?
5. Як скористатися формулою квадрата двочлена для обчислення: а) 87^2; б) 92^2?
6. Нехай $x = 7{,}7 \pm 0{,}3$. Чи може точне значення x дорівнювати: а) 7,9; б) 8,01; в) 7,89; г) 8; ґ) 8,3?
7. Яке наближення числа $\pi \approx 3{,}1416$ точніше: 3,14 чи 3,15?
8. Як записати, що 17,31 є наближеним значенням числа x з точністю до 0,04?
9. Чи є число 8 наближеним значенням числа 8,7 з точністю до: а) 0,5; б) 0,1; в) 0,8; г) 0,75; ґ) 0,6?
10. З якою точністю можна виміряти силу струму за допомогою амперметра, проградуйованого через 2 А?

2. Відсоткові розрахунки

Слово «процент», або «відсоток», походить від латинського виразу *procentum*, що означає «замість ста», або «зі ста». Тому цілком природним є означення відсотка, яке відоме ще з 5-го класу.

Відсотком будь-якого числа називається сота частина цього числа.

Із означення відсотка випливає, що це поняття є лише окремим способом зображення дробів, знаменник яких дорівнює 100.

З відсотками пов'язані два типи перетворень, про які йдеться нижче.

1. *Подати у вигляді дробу задане число відсотків.*

Завдання розв'язується приписуванням знаменника 100 до даного числа відсотків, число відсотків є чисельником. Наприклад,

$$68\% = \frac{68}{100} = 0{,}68;\ \ 5\frac{3}{4}\% = \frac{5\frac{3}{4}}{100} = \frac{23}{400}.$$

2. *Виразити у відсотках звичайний дріб .*

Для цього звичайний дріб слід перетворити у десятковий з точністю до 0,01; цей дріб, помножений на 100, дорівнює кількості відсотків. Наприклад, $\frac{3}{7} \approx 0,43 = 43\%$.

Сталий знаменник суттєво полегшує можливість порівняння як результатів змінювання різних величин, так і відносної величини тих чи інших чисел. Тому відсоткові обчислення широко застосовуються в реальному житті.

На виробництві у відсотках звітують про виконання завдання чи замовлення, виражають зміну продуктивності праці; при обчисленні складу різних сплавів або розчинів надають відсотковий вміст речовин-компонентів; у метеорології у відсотках виражають вологість повітря. При розробці корисних копалин вміст чистого металу в руді виражається у відсотках від кількості руди; при випічці хліба у відсотках вказують припічку, яку одержують під час випікання, і т. ін. Особливо часто відсотками послуговуються при грошових розрахунках.

У практичній діяльності розрізняють три типи задач на відсотки: знаходження відсотків від даного числа, знаходження числа за його відсотком, знаходження відсоткового відношення двох чисел.

1. Знайти $p\%$ від числа a.

Задача зводиться до знаходження дробу $\frac{p}{100}$ від числа a і розв'язується множенням a на цей дріб: $x = \frac{a \cdot p}{100}$.

2. Знайти число, якщо $p\%$ від нього дорівнює b.

Задача зводиться до знаходження числа за даною величиною b його дробу $\frac{p}{100}$. Задача розв'язується діленням на цей дріб: $x = \frac{b \cdot 100}{p}$.

3. Знайти, скільки відсотків складає число b від числа a.

Необхідно виразити у відсотках відношення числа b до a: $x = \frac{b \cdot 100}{a}\%$.

Як зазначалося вище, особливе місце займають задачі на відсотки, пов'язані з фінансовими операціями. У таких задачах можуть розглядатися такі величини:

1) початковий капітал (a);

2) відсоткова ставка (p%), або плата за використання грошових коштів;

3) час (t) використання коштів;

4) відсоткові гроші (P), або прибуток від інвестиції;

5) нарощений капітал (A): $A = a + P$.

Розрізняють прості і складні відсоткові ставки. Відсотки називаються ***простими***, якщо відсотки на відсотки не нараховуються. В іншому випадку відсотки називають ***складними***.

Можна виділити такі чотири типи задач на відсоткові обчислення, пов'язані з фінансовими операціями:

1) задачі на знаходження нарахованих відсоткових грошей;

2) задачі на знаходження відсоткової ставки;

3) задачі на знаходження часу використання коштів;

4) задачі на знаходження початкового капіталу.

Знайдемо загальну формулу для відсоткових обчислень, пов'язаних з фінансовими операціями при простих відсотках, скориставшись наведеними вище позначеннями.

За означенням, відсоткова ставка показує, що за одиницю часу (рік, місяць тощо) відсоткові гроші складають $\dfrac{p}{100}$ від початкового капіталу. Отже, початковий капітал a грн. дає за певну одиницю часу $a \cdot \dfrac{p}{100}$ (грн.) відсоткових грошей. За t одиниць часу відсоткові гроші, нараховані на той самий капітал і при тій самій відсотковій ставці, зростуть у t разів. Таким чином,

$$P = \frac{a \cdot p \cdot t}{100}.$$

Користуючись цією загальною формулою простих відсотків, можна знайти значення будь-якої з чотирьох величин за даними значеннями трьох інших. Замінивши P у формулі $A = a + P$ через його значення $\dfrac{apt}{100}$, дістанемо:

$$A = a + \frac{apt}{100}, \quad A = a\left(1 + \frac{pt}{100}\right).$$

Аналогічні задачі виникають і в інших сферах діяльності людини.

Приклад 6. Продуктивність праці збільшилась на 25%. На скільки відсотків зменшився час, необхідний для виробництва деталі?

☐ Позначимо початкові продуктивність праці і час, необхідний для виробництва деталі, відповідно через a і b. Обсяг роботи дорівнює ab. Після підвищення продуктивність праці склала $1{,}25a$. Щоб знайти час x, потрібний для виробництва деталі із збільшеною продуктивністю праці, необхідно обсяг роботи ab поділити на продуктивність праці $1{,}25a$. Одержимо: $x = \dfrac{ab}{1{,}25a} = 0{,}8b$, що складає 80% від початкового часу. Отже, час, необхідний для виробництва деталі, зменшився на 20%. ■

Відповідь. На 20%.

Щоб уникнути помилок при розв'язанні задач на відсотки, необхідно з'ясувати в кожному окремому випадку, що береться за ціле, за 100%.

Приклад 7. Спочатку заробітну платню підвищили на 20%, потім — на 10%. На скільки відсотків підвищилась заробітна платня у порівнянні з початковою?

☐ За 100% береться початкова заробітна платня, позначимо її через a. Після першого підвищення вона зросла на 20% і становила $a + 0{,}2a = 1{,}2a$. Друге підвищення склало 10% від підвищеної платні, тобто 10% від $1{,}2a$. Обчислюємо 10% від цієї величини: $\dfrac{1{,}2a \cdot 10}{100} = 0{,}12a$. Отже, після другого підвищення заробітна платня дорівнювала $1{,}2a + 0{,}12a = 1{,}32a$. У порівнянні з початковою вона зросла на $0{,}32a$, що від початкової заробітної платні складає $\dfrac{0{,}32a}{a} \cdot 100\% = 32\%$. ■

Відповідь. На 32%.

Приклад 8. Яку суму потрібно інвестувати під прості відсотки при ставці 12% річних, щоб за 5 років накопичити 10 000 грн.?

☐ Маємо: $a = \dfrac{A}{1 + \dfrac{pt}{100}} = \dfrac{10000}{1 + 0{,}12 \cdot 5} = \dfrac{10000}{1{,}6} = 6250$ (грн.). ■

Відповідь. 6250 грн.

Нехай банк сплачує прості відсотки за ставкою $p\%$ за рік, причому, ця ставка діє протягом двох років. Вкладник у початковий час $t = 0$ відкриває рахунок з початковим вкладом a грн., який можна поповнити або закрити у будь-який час. Якщо вкладник закриє рахунок через рік, то, згідно з формулою простих відсотків, він отримує суму $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ грн. Якщо вкладник цю суму покладе ще на один рік, то наприкінці другого року він отримує $a\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)=$ $=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = a\left(1+\frac{2p}{100}+\left(\frac{p}{100}\right)^2\right)$ грн. Якщо ж він не буде через рік забирати суму, яка належить йому, то через два роки після відкриття рахунку він отримує $a\left(1+\frac{2p}{100}\right)$ грн., тобто на $a\left(\frac{p}{100}\right)^2$ грн. менше, ніж у випадку, описаному вище. Додаткова сума $a\left(\frac{p}{100}\right)^2$ є відсотками, які нараховані на відсотки $a\cdot\frac{p}{100}$ за другий рік. Щоб уникнути зайвого переоформлення внесків і заохотити клієнтів робити довгострокові внески, у комерційній практиці прийнято сплачувати так звані складні відсотки.

Нехай вкладник поклав на свій рахунок до банку a грн. Банк нараховує щорічно за схемою складних відсотків $p\%$. Через рік на рахунку цього вкладника буде $a+a\cdot\frac{p}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ грн. Через два роки — $a\left(1+\frac{p}{100}\right)+a\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{p}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ грн. Так само можна з'ясувати, що через три роки на рахунку вкладника буде $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$ грн. Через t років на рахунку вкладника буде $A_t=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$ грн.

Приклад 9. Вкладник вніс на свій банківський рахунок 1000 грн. Щорічно банк нараховує своїм вкладникам 10% за схемою складних відсотків. Якою буде сума на рахунку вкладника через три роки?

□ За отриманою формулою, шукана сума становить $1000\left(1+\frac{10}{100}\right)^3 = 1000\cdot 1{,}1^3 = 1000\cdot 1{,}331 = 1331.$ ■

Відповідь. 1331 грн.

Контрольні запитання

1°. У класі 35 учнів. Спортом займаються 80% школярів. Скільки учнів не займаються спортом?

2°. На уроці відсутні 4 учні, що складає 12,5% від кількості учнів цього класу. Скільки всього учнів у класі?

3°. При випіканні хліба на 5 кг борошна припадає 2 кг припічки. Скільки відсотків складає припічка: а) від маси борошна; б) від маси хліба?

4. Кредит видано на 1 рік під 20% річних. Через рік потрібно повернути 3000 грн. Яку суму видано в кредит?

5. Сторону правильного трикутника збільшили на 20%. На скільки відсотків зросла його площа?

Задачі

23°. Обчисліть значення виразу без калькулятора. Результат перевірте за допомогою калькулятора.

1) $2\frac{1}{3}+3\frac{2}{3}\cdot 3-6\frac{1}{6}$;
2) $\left(3\frac{1}{4}-3\frac{5}{8}\right):2\frac{1}{4}+1\frac{1}{5}$;

3) $\dfrac{12{,}8:0{,}64+3{,}05:0{,}05}{3\frac{2}{3}:1\frac{2}{9}-2}$;
4) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$;

5) $\left(3\sqrt{18}-5\sqrt{2}\right)^2$;
6) $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

24. Обчисліть без обчислювальних засобів:

1°) $87\cdot 93$;
2°) 71^2;
3°) 48^2;
4°) $\sqrt{34^2-30^2}$;

5°) $29\frac{4}{11}\cdot 30\frac{7}{11}$;
6) $\dfrac{47^3+33^3}{80}-47\cdot 33$;

7) $\dfrac{47^3+33^3}{240}+47\cdot 33$;
8) $\sqrt{84^2+35^2}$.

25. Для фарбування підлоги з розмірами 12,0 м × 4,0 м витратили 5,28 кг фарби. Скільки фарби потрібно для фарбування підлоги кімнати з розмірами 5,2 м × 4,6 м? Обчислення проведіть з точністю до 0,1 кг.

26. Довжина футбольного поля дорівнює 110 м, ширина — 75 м. Якою є найбільша відстань між кутовими прапорцями? Обчислення проведіть з точністю до 1 м.

27°. Запишіть у вигляді подвійної нерівності:
1) $x = 15 \pm 0{,}3$;	2) $x = 14{,}7 \pm 0{,}2$;
3) $x = 100 \pm 5$;	4) $x = 5{,}2 \pm 0{,}1$.

28°. У відділі технічного контролю (ВТК) заводу вимірюють діаметр вала з точністю до 0,1 мм. Згідно з таблицею допусків, діаметр вала повинен задовольняти умову 167,8 мм $\le d \le$ 168 мм. Чи забракує ВТК вал, якщо за результатами вимірювань його діаметр дорівнює:
1) 168,1 мм; 2) 167,6 мм; 3) 168,0 мм; 4) 168,4 мм?

29°. Округліть із заданою точністю:
1) температуру плавлення міді 1083° С до десятків;
2) температуру плавлення вольфраму 3370° С до сотень;
3) питому теплоємність спирту 2,42 кДж/(кг · К) до десятих.

30. Маємо числа: $\frac{2}{7}$; $3\frac{2}{11}$; $\frac{8}{13}$. Запишіть їх у вигляді десяткових дробів з точністю до 0,001.

31. Доведіть, що кожне з чисел 0,11 і 0,12 є наближеним значенням числа $\frac{1}{9}$ з точністю до 0,01. Яке з них є наближеним значенням числа $\frac{1}{9}$ з точністю до 0,005?

32°. Ціна товару підвищилась на 20%, потім нова ціна зменшилась на 17%. Як у підсумку змінилась ціна відносно початкової?

33°. Три літри 30%-го розчину спирту змішали з 5 літрами 20%-го розчину спирту. Яким стала відсоткова концентрація спирту в утвореному розчині?

34°. Щоб отримати розчин формаліну для консервування препаратів до 0,5 л 40%-го розчину формаліну додали 9,5 л води. Визначте міцність розчину.

35. Сплавили 180 г золота 920-ї проби із 100 г 752-ї проби. Якої проби отримали сплав?

36. У місті з населенням 57 100 осіб було проведено медичне обстеження з метою визначення частки людей з певною групою крові. Виявилось, що 18 786, 20 442, 13 247, 4 625 осіб мають відповідно I, II, III, IV групи крові. Який відсоток мешканців міста мають I, II, III, IV групи крові?

37. Маса курячого яйця дорівнює 58 г. Білок складає 55,8% від загальної маси, жовток — 31,9%, шкаралупа — 12,3%. Якою є маса кожної з цих складових?

38. Заробітна платня підвищувалась двічі, причому відсоток підвищення другого разу був удвічі вищий, ніж першого разу. В результаті вона підвищилась в 1,32 разів. На скільки відсотків підвищувалась заробітна платня кожного разу?

39. Ціна на товар була підвищена на 25%. На скільки відсотків слід її знизити, щоб одержати початкову ціну?

40. Руда містить 40% домішок, а метал, виплавлений з неї, — 4% домішок. Скільки вийде металу з 24 тонн руди?

41*. Договір передбачає таку схему нарахування простих відсотків за наданий кредит: за перший квартал — 10% щомісяця, за другий і третій квартали — 15% щомісяця, за четвертий квартал — 20% щомісяця. На скільки відсотків зросте борг за рік?

42*. Населення міста щорічно зростає на 3% у порівнянні з попереднім роком. На скільки відсотків зросте населення цього міста за 15 років?

Вправи для повторення

43. Функцію задано формулою: $y=\frac{1}{2}x-4$.

1) Побудуйте її графік.
2) Знайдіть точки його перетину з осями координат.
3) Знайдіть значення функції при x, що дорівнює: –4; 0; 12.
4) При якому значенні x значення функції дорівнює: 1; 0; – 7?

44. Побудуйте графіки функцій $y=0{,}8x-0{,}7$ і $y=-1{,}5x+4{,}4$. Знайдіть за рисунком координати точок перетину графіків.

45. У яких координатних чвертях міститься графік функції $y=kx$, якщо $k<0$; $k>0$?

Підсумок

Основні поняття

Означення	Геометрична інтерпретація, приклади	Застосування
Число a є наближенням до числа x з точністю h, якщо $\lvert x-a\rvert \le h$ або $a-h \le x \le a+h$.	 Будь-яке число із заштрихованого проміжку є наближеним значенням до x з точністю до h.	Оцінювання точності округлень, порівняння різних наближень однієї величини.
Відсотком будь-якого числа називається сота частина цього числа.	$1\% = 0{,}01$.	Для оцінювання зміни різних величин; вмісту складових у різних предметах, колективах; при грошових розрахунках тощо.

Головні твердження

Якщо цифра першого відкинутого розряду менша від 5, то округлюють з недостачею, якщо ж більша або дорівнює 5 — з надлишком.	$35{,}43 \approx 35{,}4$. $35{,}47 \approx 35{,}5$.
Формула складних відсотків	$A_t = a\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^t$, a — початкове значення величини, p — відсоток, на який збільшується значення величини за одиницю часу, t — кількість одиниць часу, A_t – значення величини через t одиниць часу.

§3. Функціональні залежності

Функціональні залежності між величинами можуть задаватися по-різному: за допомогою формул, графіків, таблиць, словесних описів. Вдосконаленню вмінь користуватися ними, добувати необхідну інформацію присвячено даний параграф.

1. Поняття функції, способи її задання

Характерною особливістю функціональних залежностей є те, що для кожного допустимого значення однієї зі змінних вони однозначно визначають значення другої змінної. Так, для кожного значення t за формулою $s = 3t - 1$ можна знайти ***лише одне*** значення s. Узагальнимо спочатку те, що вивчалося про функціональні залежності раніше.

Нехай задано дві змінні x і y, і D — множина значень змінної x.

Залежність між змінними x і y, яка для кожного значення x із D визначає єдине значення y, називається функціональною залежністю y від x з областю визначення D.

Змінну x у таких залежностях називатимемо ***незалежною змінною або аргументом***, змінну y — ***залежною змінною.*** Функціональні залежності зазвичай називають ***функціями*** і позначають латинськими (іноді грецькими) літерами — f, g, F, φ тощо.

Функція — від латинського function — дія, виконання.

Область визначення функції f часто позначають $D(f)$. Значення змінної y, яке відповідає x, називають ***значенням функції f у точці x*** і позначають $f(x)$. Запис «$y = f(x)$» означає, що задано функцію f. Функціональну залежність змінної y від x іноді записують так: $y = y(x)$.

Множину значень, яких набуває залежна змінна y, якщо x пробігає область визначення функції f, називають ***множиною значень цієї функції*** і позначають $E(f)$.

! Фраза «задати функцію y від x» означає сформулювати правило, за допомогою якого для кожного допустимого значення змінної x можна знайти відповідне йому значення змінної y.

Існують різні способи задання функції. У математиці функціональна залежність найчастіше задається ***формулами***.

Як відомо, ***лінійна функція*** задається формулою: $y = kx + b$, де k і b – деякі числа, x – аргумент. Наприклад, функції $y = 2x - 3$ (тут $k = 2$, $b = -3$), $y = -0,5x + 2$ (тут $k = -0,5$, $b = 2$), $y = 4x$ (тут $k = 4$, $b = 0$), $y = 5$ (тут $k = 0$, $b = 5$) є лінійними.

Квадратична функція задається формулою: $y = ax^2 + bx + c$, де a, b, c – деякі числа, $a \neq 0$, x – аргумент. Наприклад, функції $y = x^2$, $y = 3x^2 + 1$, $y = 2x^2 + x - 4$ є квадратичними. (Вкажіть для кожної з цих функцій, чому дорівнюють коефіцієнти a, b, c.)

Обернена пропорційність задається формулою $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$ — деяке число, x — аргумент.

Такий спосіб задання функції називається ***аналітичним.***

Зауважимо, що не кожна залежність між змінними є функціональною залежністю. Наприклад, залежність між змінними y і x, яка задається рівнянням $x^2 + y^2 = 1$, не є функціональною, бо, наприклад, значенню $x = 0$ відповідають значення $y_1 = -1$, $y_2 = 1$.

! Якщо функція задана формулою, то при відсутності додаткових зауважень чи умов вважають, що її областю визначення є всі значення незалежної змінної, при яких ця формула має зміст. Її іноді називають *природною областю визначення функції.*

Так, лінійна функція $y = kx + b$, квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ визначені при всіх значеннях x, тобто $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Обернена пропорційність $y = \frac{k}{x}$ визначена при всіх значеннях x, окрім $x = 0$, тобто $D(y) = (-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. Природною областю визначення функції $y = \sqrt{x}$ є проміжок $[0; +\infty)$, оскільки добування квадратного кореня з від'ємних чисел неможливе.

Приклад 1. Дано функцію $y = \frac{3}{x^2 - 1}$. Знайти:

1) область визначення функції;
2) значення функції в точці $x = -2$;
3) значення аргументу, за яких функція набуває значення 1.

☐ 1) Функція визначена при всіх значеннях x, для яких знаменник дробу не дорівнює нулю, тобто при всіх x, окрім ± 1. Отже, $D(f) = (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

2) Значення функції в точці $x = -2$ дорівнює: $y(-2) = \frac{3}{(-2)^2 - 1} = \frac{3}{4-1} = 1$.

3) Щоб знайти значення аргументу, за яких функція набуває значення 1, розв'яжемо рівняння $1 = \frac{3}{x^2 - 1}$. Одержимо: $x^2 - 1 = 3$, $x^2 = 4$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Отже, у цих точках функція набуває значення 1. ■

Відповідь. 1) $(-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$; 2) 1; 3) -2; 2.

При розв'язуванні багатьох прикладних задач область визначення функції встановлюють, виходячи з фізичного чи геометричного змісту задачі. Наприклад, якщо розглядати залежність площі квадрата від довжини його сторони x, то областю визначення цієї функції буде інтервал $(0; +\infty)$, оскільки довжина сторони квадрата може виражатися тільки додатним числом. У такому разі інколи пишуть: $y = x^2$, $x > 0$.

! **Зверніть увагу на те, що функції $y = x^2$ і $y = x^2$, $x > 0$, є різними функціями. У них не тільки не збігаються області визначення, вони також мають різні властивості, у чому переконаємося згодом.**

У математиці та її застосуваннях дуже поширений ***графічний спосіб задання функції***. Існує багато самописних приладів, які викреслюють криві, встановлюючи тим самим залежність між досліджуваними величинами. Так, сейсмограф записує графік коливання земної кори. За цим графіком можна, наприклад, вивчати силу і характер поштовхів при землетрусі.

За допомогою лінії, зображеної на рис. 10, можна для кожного моменту часу $0 \le t \le 12$ вказати єдине значення температури середовища T, тобто ця лінія задає функціональну залежність між змінними t і T.

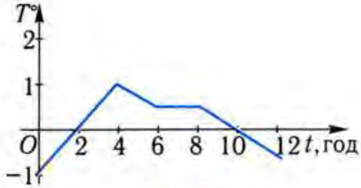


Рис. 10

Не завжди лінія на координатній площині визначає деяку функцію. Щоб деяка лінія визначала функціональну залежність y від x, необхідно і достатньо, аби кожна пряма, паралельна осі y, перетинала цю лінію щонайбільше в одній точці. Так, лінії на рис. 11 визначають функціональні залежності y від x. На рис. 12 є вертикальні прямі, які перетинають лінію в двох точках. Тому відповідні лінії не визначають функцію y від x.

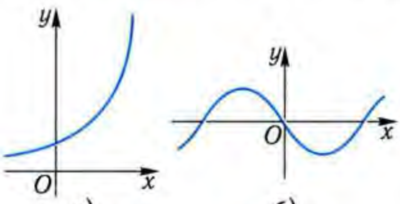


Рис. 11

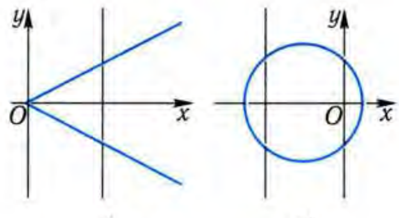


Рис. 12

Приклад 2. Функцію $y = f(x)$ задано графічно (рис. 13). Вкажіть:

1) її область визначення;
2) її множину значень;
3) значення функції при $x = 5$;
4) значення аргументу x, при якому функція набуває значення 3.

☐ 1) Областю визначення функції є відрізок $[-2; 5]$.

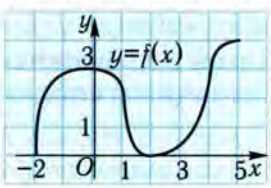


Рис. 13

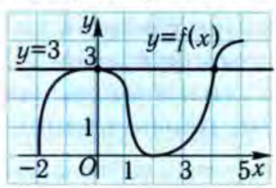


Рис. 14

2) Множиною значень функції є відрізок [0; 4].

3) $f(5) = 4$.

4) Проведемо пряму $y = 3$ і знайдемо її точки перетину з графіком функції $y = f(x)$ (рис. 14). Це точки з координатами (0; 3) і (4; 3). Отже, значення 3 функція набуває при $x = 0$ і при $x = 4$. ■

Відповідь. 1) [–2; 5]; 2) [0; 4]; 3) 4; 4) 0; 4.

Приклад 3. На рис. 15 зображено залежність $N(t)$ кількості деталей, які виготовив робітник, від часу, де t у днях.

1) Скільки деталей виготовив робітник за перші 10 днів?
2) За які 10 днів — перші чи останні — робітник виготовив більше деталей?
3) За скільки днів робітник виготовив 50 деталей?

□ 1) Знайдемо значення функції $N(t)$ при $t = 10$. Зверніть увагу на масштаб по осі t і осі N. Маємо: $N(10) = 40$, тобто за перші 10 днів виготовлено 40 деталей.

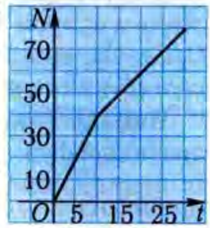


Рис. 15

2) За останні десять днів виготовлено $N(30) - N(20) = 80 - 60 = 20$ деталей, тобто менше, ніж за перші 10 днів.

3) Потрібно знайти значення аргументу, за якого функція набуває значення 50. Проведемо пряму $N = 50$ до перетину з графіком функції $N = N(t)$. Одержимо, що 50 деталей робітник виготовив за 15 днів. ■

Відповідь. 1) 40; 2) за перші; 3) 15.

! У розглянутому прикладі функція $N(t)$ визначена для натуральних значень аргументу. Її графік є скінченною сукупністю точок. Для наочності вони сполучені відрізками. Такий прийом зображень залежностей будемо використовувати і в подальшому.

Крім аналітичного і графічного способів задання функцій, застосовується також ***табличний*** спосіб. У фізиці та техніці часто залежності між змінними фіксуються на шкалах вимірювальних приладів. У таких випадках функцію задають у вигляді таблиці, у першому рядку якої містяться всі значення незалежної змінної x_1, x_2, x_3 ..., у другому — відповідні їм значення функції. Найзручнішими є таблиці зі сталими різницями $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, ..., причому значення різниці називається ***кроком таблиці***. Для таких таблиць незалежна змінна набуває значень x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$, ..., де

h — крок таблиці. Так, наведена нижче таблиця показує динаміку зміни обсягу пасажирських перевезень (у млн. людей) у нашій країні, починаючи з 2000 року.

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
1,16	1,29	1,77	2,37	3,23	3,81	4,35	4,87	6,17

Функціональні залежності широко використовуються на практиці. Багато процесів і явищ описуються лінійною функцією. Наприклад, при рівномірному русі пройдений шлях прямо пропорційний часу, тиск газу p при сталому об'ємі прямо пропорційний його температурі T: $p = cT$ (закон Шарля); напруга U в електричному колі зі сталим опором R прямо пропорційна силі струму I : $U = RI$ (закон Ома). Залежність сили F, яка діє на пружину, від величини її розтягування має вигляд: $F = -kx$ (закон Гука).

Чимало фізичних залежностей виражається за допомогою квадратичної функції. Наприклад, закон рух тіла вздовж координатної прямої під дією сталої сили можна подати у вигляді: $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, залежність кінетичної енергії тіла W, маса якого дорівнює m, від швидкості v виражається формулою: $W = \frac{mv^2}{2}$. Тіла, які кинули горизонтально чи під кутом до горизонту, рухатимуться по параболічній траєкторії під дією сили тяжіння (рис. 16, 17).

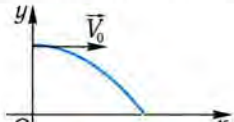


Рис. 16

Рис. 17

Обернено пропорційними є:

— залежність часу, який витрачається на подолання даного шляху, від швидкості;

— залежність між сторонами прямокутника при заданій площі;

— залежність між тиском газу та його об'ємом при сталій температурі.

Приклад 4. При вільному падінні тіла з початковою швидкістю v_0 = 10 м/с залежність пройденого шляху від часу виражається формулою: $s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$, де s — шлях, м; t — час, с; $g \approx 10$ м/с^2 — прискорення вільного падіння.

1) Який шлях пройде тіло за перші 2 с?
2) За який час тіло пройде 15 м?

☐ 1) Щоб відповісти на перше запитання, потрібно обчислити значення функції s при $t = 2$:

$$s(2) \approx 10 \cdot 2 + \frac{10 \cdot 2^2}{2} = 40 \text{ (м)}.$$

2) Щоб відповісти на друге запитання, треба розв'язати квадратне рівняння: $10t + 5t^2 = 15$. Воно має два корені: –3 і 1, але умову задачі задовольняє тільки значення $t = 1$. Отже, тіло подолає 15 м приблизно за 1 с. ■

Відповідь. 1) 40 м; 2) ≈ 1 с.

Приклад 5. Деяка маса газу при температурі 20°C мала об'єм 107 см^3, а при 40°C об'єм дорівнював 114 см^3.

1) Виходячи із закону Гей-Люссака, знайти функціональну залежність об'єму газу від температури.
2) Яким буде об'єм газу при 0°C?

☐ 1) Згідно із законом Гей-Люссака, об'єм газу V лінійно залежить від температури t: $V = a + bt$, де a і b – деякі числа. Знайдемо ці числа, користуючись умовою задачі. Оскільки $V(20) = 107$, $V(40) = 114$, то маємо систему рівнянь відносно a і b: $\begin{cases} 107 = a + 20b, \\ 114 = a + 40b. \end{cases}$ Звідси: $b = 0{,}35$, $a = 100$. Отже, $V = 100 + 0{,}35t$.

2) $V(0) = 100 + 0{,}35 \cdot 0 = 100$ (см^3). ■

Відповідь. 1) $V = 100 + 0{,}35t$; 2) 100 см^3.

✓ Контрольні запитання

1°. Які з наступних залежностей є функціональними:
а) кожному двоцифровому числу ставиться у відповідність сума його цифр;
б) кожному числу, яке не дорівнює нулеві, ставиться у відповідність обернене до нього число;
в) кожному числу ставиться у відповідність ціле число, менше від нього?

2°. Яка з ліній, зображених на рис. 18, а) – г), не визначає функцію y від x?

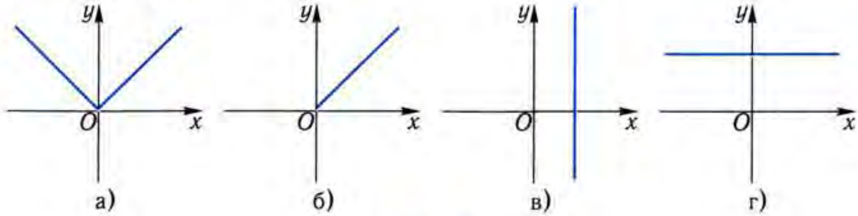


Рис. 18

3. Яким є значення функції $y = \frac{x}{2x-1}$ у точці $x = -1$; $x = 0$?

4. У скількох точках функція $y = x^2 - 2x$ набуває значення 0; –1; –2?

5. Для якої з наступних функцій: 1) $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = \sqrt{x}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

4) $y = x^2$ областю визначення є проміжок $(0; +\infty)$?

6. Дано функції: 1) $y = \frac{1-x}{2}$; 2) $y = \frac{2}{x}$; 3) $y = (1-x)^2$; 4) $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$.

а) Яка з них є лінійною; квадратичною; оберненою пропорційністю?

б) У яких точках квадратична функція набуває значення 1?

в) Яка з функцій не набуває значення 0?

7. Для графічно заданої функції $y = f(x)$ (рис. 19) знайдіть:

а) область визначення;

б) множину значень;

в) значення функції в точці $x = 0$; $x = 4$;

г) нулі функції, тобто точки, в яких функція набуває значення 0.

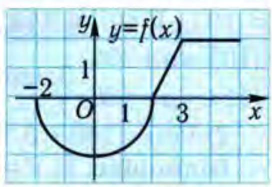


Рис. 19

2. Графік функції

Графічний спосіб задання функції більш наочний у порівнянні з аналітичним. За графіком легко охарактеризувати досліджувану величину. Наприклад, за графіком, зображеним на рис. 10, можна сказати, що температура протягом 12 годин змінювалась від –1° до + 1°. За графіком видно також, коли температура збільшувалась, коли зменшувалась, а коли залишалась незмінною.

Тому часто аналітичне задання функції супроводжують графіком. У даному пункті розглядаються графіки вже відомих вам функцій і деякі способи побудови графіків.

Графік функції $y = f(x)$ — це множина точок координатної площини з координатами $(x; f(x))$, де x — довільне число з області визначення функції.

Для побудови графіка функції $y = f(x)$ на площині вводять прямокутну систему координат і будують точки з координатами $(x; f(x))$.

! Абсолютно точно побудувати графік функції неможливо, тому що неможливо точно зобразити навіть одну точку $(x_0; f(x_0))$ на координатній площині, а тим більше, якщо їх безліч. Тому під побудовою графіка функції розуміють побудову рисунка (найчастіше лінії), що відображає головні особливості ідеального графіка. Такі рисунки називають ескізами графіків. Отже, побудувати графік функції — означає побудувати ескіз графіка, тобто відобразити графічно всі основні властивості функції.

Графіком лінійної функції $y = kx + b$ є, як вам вже відомо, пряма лінія. Для її побудови досить знайти дві точки графіка і через них провести пряму. Наприклад, для побудови графіка функції $y = 2x + 1$ візьмемо точки перетину прямої з осями координат, тобто точки $A(0; 1)$ і $B\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ і проведемо через них пряму (рис. 20).

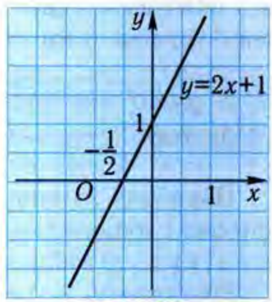


Рис. 20

Число k дорівнює тангенсу кута φ нахилу прямої $y = kx + b$ до осі x і називається її ***кутовим коефіцієнтом***.

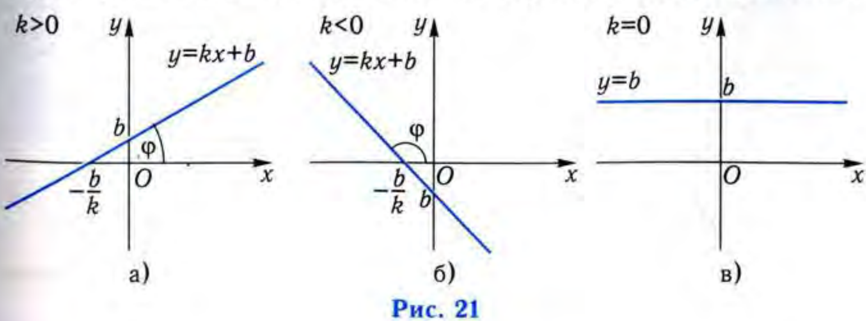


Рис. 21

На рис. 21, а), б) зображені графіки лінійних функцій залежно від знака k. Якщо $k = 0$, то маємо сталу функцію $y = b$, графік якої зображено на рис. 21, в).

Приклад 6. Побудувати графік функції $y = |x|$.

□ Оскільки

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -x, \text{ якщо } x < 0, \end{cases}$$

то для невід'ємних значень x графік функції $y = |x|$ збігається з графіком функції $y = x$, а для від'ємних — з графіком функції $y = -x$ (рис. 22). ■

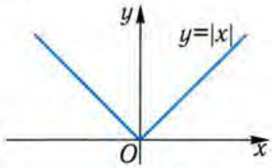


Рис. 22

Графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ є ***парабола***. Її розміщення на координатній площині залежить від коефіцієнтів a, b, c. Напрям її віток визначається знаком числа a: при $a > 0$ вони спрямовані вгору, при $a < 0$ — вниз. Вершина її знаходиться у точці з абсцисою $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. Парабола може не мати спільних точок з віссю x, а може мати з нею одну чи дві спільні точки. Це залежить від кількості коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Парабола — грецьке παραβολη (parabole) від παραβολλειν (parabollein) — прикладаю, порівнюю.

Параболу зазвичай будують за її характерними точками: вершиною і точками перетину з осями координат. Графіки функцій $y = x^2$ і $y = -x^2$ зображено на рис. 23, 24.

Розглянемо на конкретних прикладах побудову графіків квадратичної функції.

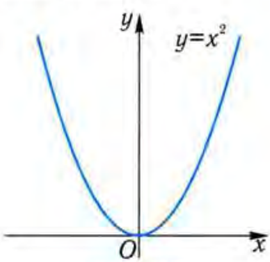


Рис. 23

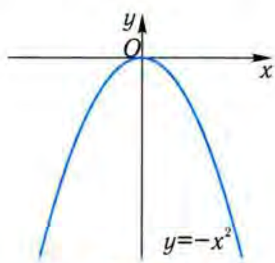


Рис. 24

Приклад 7. Побудувати графік функції:

1) $y = x^2 + 6x + 8$; 2) $y = -x^2 + 2x + 3$; 3) $y = 2x^2 - 4x + 3$.

□ 1) Знайдемо абсцису вершини параболи за формулою $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$: $x_0 = -\dfrac{6}{2} = -3$. Ордината вершини знаходиться обчисленням значення квадратичної функції при $x_0 = -3$: $y_0 = y(-3) = 9 - 18 + 8 = -1$. Отже, координати вершини — $(-3; -1)$. Знайдемо абсциси точок перетину графіка з віссю абсцис. Для цього розв'яжемо рівняння: $x^2 + 6x + 8 = 0$. Одержимо: $x_1 = -4$; $x_2 = -2$. Знайдемо точку перетину графіка з віссю y. Для цього обчислимо значення функції $y = x^2 + 6x + 8$ при $x = 0$: $y(0) = 8$. Графік перетинає вісь y в точці $(0; 8)$. Вітки параболи спрямовані вгору, адже коефіцієнт при x^2 є додатним. Побудуємо графік, враховуючи отримані результати (рис. 25).

2) Вершина параболи знаходиться у точці з координатами $(1; 4)$. Точки перетину параболи з віссю абсцис мають координати $(-1; 0)$ і $(3; 0)$. Графік функції перетинає вісь y в точці з координатами $(0; 3)$. Вітки параболи спрямовані вниз. Графік зображено на рис. 26.

3) Вершина параболи знаходиться у точці з координатами $(1; 1)$. Парабола не перетинає вісь x, оскільки рівняння $2x^2 - 4x + 3 = 0$ не має коренів. Парабола перетинає вісь y в точці з координатами $(0; 3)$. Для уточнення положення графіка обчислимо значення функції в точці $x = 2$: $y(2) = 3$, тобто парабола проходить через точку A з координатами $(2; 3)$. Графік зображено на рис. 27. ■

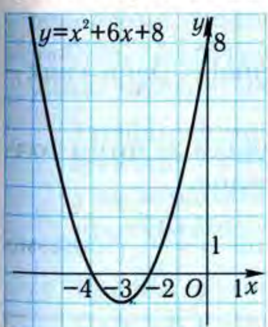


Рис. 25

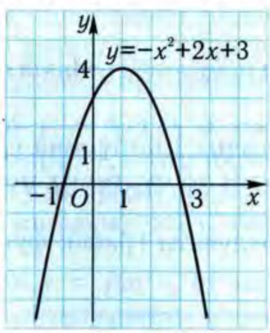


Рис. 26

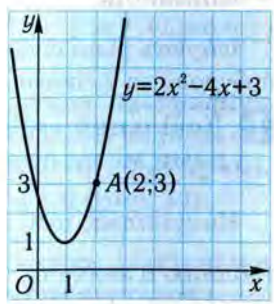


Рис. 27

Графіком оберненої пропорційності $y = \dfrac{k}{x}$ є ***гіпербола***, розміщення якої залежить від знака k (рис. 28, 29).

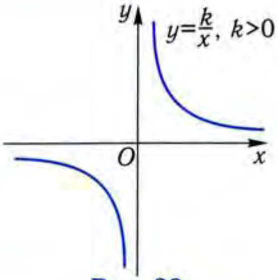


Рис. 28

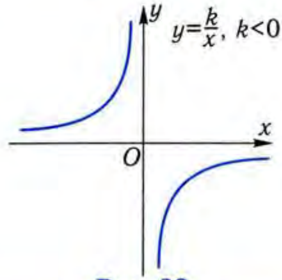


Рис. 29

Гіпербола (грецькою νπερβολη — hyperbole) — надлишок, перебільшення.

Приклад 8. На рис. 30 зображено графік оберненої пропорційності. Задати цю залежність формулою.

☐ Обернена пропорційність задається формулою $y=\frac{k}{x}$. Необхідно знайти число k. Графік функції проходить через точку з координатами (–1; 2), тобто справджується рівність: $2=\frac{k}{-1}$. Звідси $k=-2$. ■

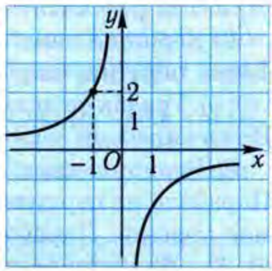


Рис. 30

Відповідь. $y=-\frac{2}{x}$.

Існують різні способи побудови графіків функцій. Один з них – побудова за точками.

! Довільний вибір точок і побудова графіка за цими точками може привести до суттєвих помилок.

Наприклад, щоб побудувати графік функції $y=\frac{1}{x}$, складемо таблицю її значень.

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Тепер зобразимо відповідні точки на координатній площині і з'єднаємо їх відрізками. Одержимо лінію, зображену на рис. 31. Однак вона зовсім не схожа на справжній графік $y = \frac{1}{x}$. Ви його добре знаєте — це гіпербола (див. рис. 28). У чому ж ми припустились помилок? А у тому, що графік функції потрібно будувати не за довільно обраними точками, а за ***характерними*** точками для даної функції.

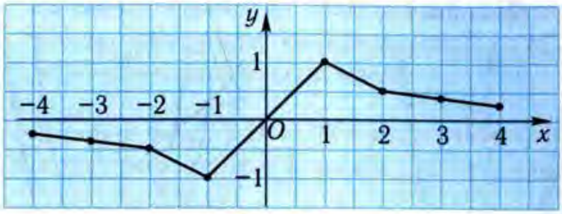


Рис. 31

Найпростіше побудувати графік лінійної функції. Для цього достатньо знайти дві точки, які належать графіку, і через них провести пряму. Характерними точками для квадратичної функції є абсциса вершини параболи і абсциси точок перетину параболи з осями координат. А для оберненої пропорційності характерною є точка $x = 0$, у якій її графік «розривається». У подальшому ви познайомитесь із загальними методами знаходження характерних точок.

Іншим способом побудови графіка функції є ***геометричні перетворення графіка***. Так, знаючи графік функції $y = f(x)$, можна побудувати графіки функцій $y = f(x) + a$ і $y = f(x + b)$, де a і b – деякі числа, за наступними правилами.

Графік функції $y = f(x) + a$ одержують із графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням уздовж осі y на $|a|$ одиниць: у напрямі осі y, якщо $a > 0$, і у напрямі, протилежному напряму осі y, якщо $a < 0$ (рис. 32).

Графік функції $y = f(x + b)$ одержують із графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням уздовж осі x на $|b|$ одиниць: у напрямі осі x, якщо $b < 0$, і у напрямі, протилежному осі x, якщо $b > 0$ (рис. 33).

Наприклад, графік функції $y = x^2 - 1$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y = x^2$ на 1 одиницю у

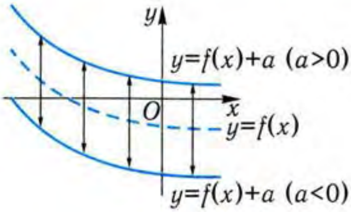


Рис. 32

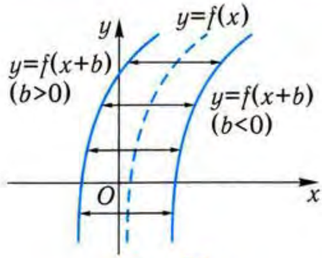


Рис. 33

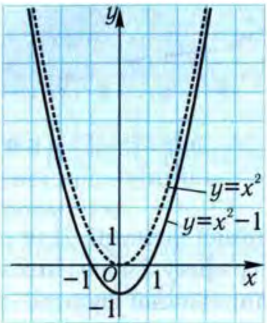


Рис. 34

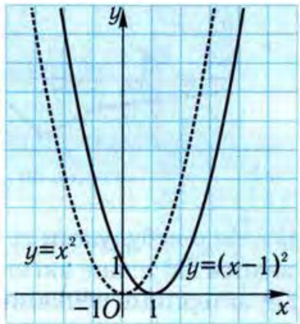


Рис. 35

напрямі, протилежному напряму осі y (рис. 34). Графік функції $y = (x - 1)^2$ можна одержати із графіка функції $y = x^2$ паралельним перенесенням останнього на 1 одиницю у напрямі осі x (рис. 35).

Приклад 9. Скільки коренів має рівняння $x^2 = -\dfrac{1}{x+2}$?

□ Рівняння має стільки коренів, скільки спільних точок мають графіки функцій $y = x^2$ і $y = -\dfrac{1}{x+2}$. Зобразимо графіки цих функ-

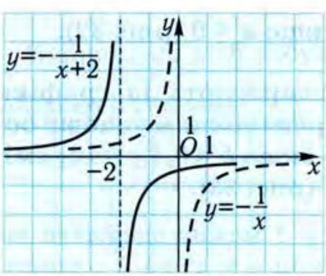


Рис. 36

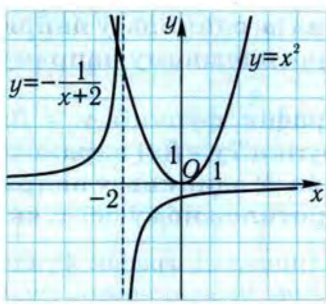


Рис. 37

цій в одній системі координат. Графік функції $y=-\dfrac{1}{x+2}$ можна отримати із графіка функції $y=-\dfrac{1}{x}$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі x на 2 одиниці вліво (рис. 36). Тоді із рис. 37 видно, що рівняння має один корінь. ■

Відповідь. Один корінь.

Тепер нагадаємо, як знаючи графік функції $y = f(x)$, можна побудувати графіки функцій $y = kf(x)$ і $y = f(\omega x)$, де k і ω — деякі додатні числа.

Графік функції $y = kf(x)$ ($k > 0$) одержують із графіка функції $y = f(x)$ розтягом в k разів від осі x при $k > 1$ (рис. 38) і стиском у $\dfrac{1}{k}$ разів до осі x при $0 < k < 1$ (рис. 39).

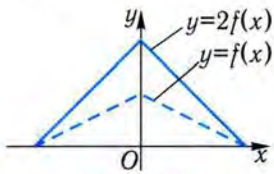


Рис. 38

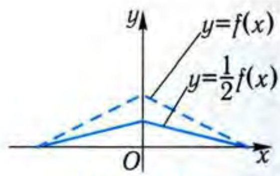


Рис. 39

Приклад 10. Побудувати графіки функцій $y = 1{,}5x^2$, $y = 0{,}5x^2$.

□ Графік функції $y = 1{,}5x^2$ одержимо з графіка функції $y = x^2$ розтягом від осі x в 1,5 рази (рис. 40). Графік функції $y = 0{,}5x^2$ одержимо з графіка $y = x^2$ стиском його до осі x в 2 рази (рис. 41). ■

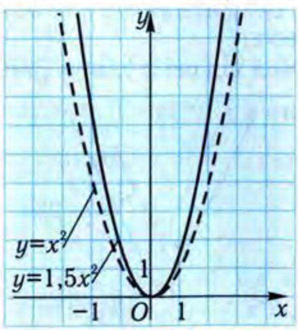


Рис. 40

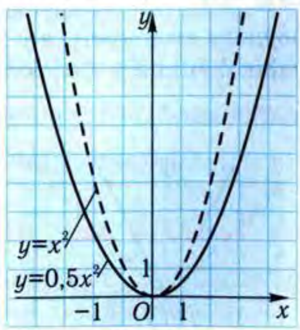


Рис. 41

Графік функції $y = f(\omega x)$ $(\omega > 0)$ одержують із графіка функції $y = f(x)$ стиском його до осі y в ω разів при $\omega > 1$ (рис. 42) і розтягом в $\frac{1}{\omega}$ разів від осі y при $0 < \omega < 1$ (рис. 43).

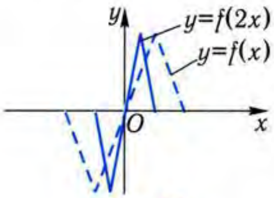


Рис. 42

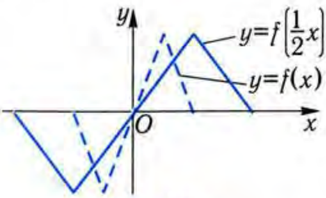


Рис. 43

Наприклад, графік функції $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$ можна побудувати, розтягнувши графік функції $y = \sqrt{x}$ від осі y в 3 рази (рис. 44). Графік функції $y = \sqrt{3x}$ одержимо з графіка функції $y = \sqrt{x}$, стиснувши його до осі y утричі (рис. 45).

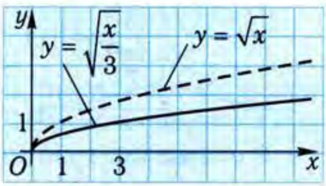


Рис. 44

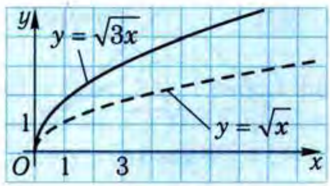


Рис. 45

При побудові графіка функції іноді доводиться виконувати декілька геометричних перетворень.

Приклад 11. Побудувати графік функції $y = 2|x| - 1$.

☐ Побудова виконується у два етапи:

1) графік функції $y = |x|$ розтягується від осі x удвічі (рис. 46);

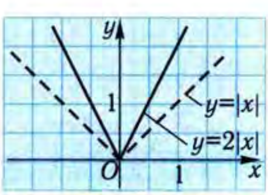


Рис. 46

Рис. 47

2) одержаний графік паралельно переноситься на 1 одиницю у від'ємному напрямі осі y (рис. 47). ■

✓ Контрольні запитання

1°. Чи проходить графік функції $y = 5x + 2$ через точку:
а) $A(0; 5)$; б) $B(0; 2)$; в) $C(-1; -2)$; г) $D(-1; 3)$?

2°. В яких точках пряма $y = 1 - 4x$ перетинає осі координат?

3°. Вкажіть декілька точок, через які проходить графік лінійної функції $y = -2$.

4°. Які знаки мають числа k і b, якщо графік лінійної функції $y = kx + b$ зображено на рис. 48?

5°. В яких з наступних парабол вітки напрямлені вгору:
а) $y = 1 - x + 2x^2$; б) $y = 5x - 3x^2 - 1$; в) $y = 1 - x^2$?

6°. Якою є абсциса вершини параболи:
а) $y = 1 - 3x + 2x^2$; б) $y = -5x^2 + x - 2$; в) $y = (x + 5)(x - 1)$?

7°. Якою є обернена пропорційність, графік якої зображено на рис. 49?

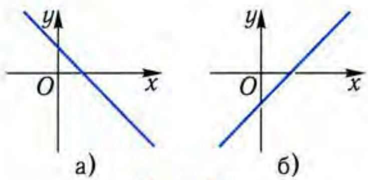


Рис. 48

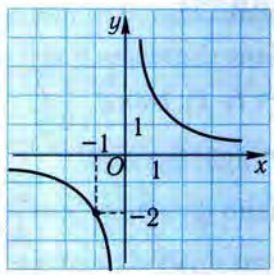


Рис. 49

8°. У скількох точках перетинаються графіки функцій:
а) $y = \frac{2}{x}$, $y = x$; б) $y = \frac{2}{x}$, $y = -x$; в) $y = -\frac{2}{x}$, $y = x^2$?

9°. На скільки одиниць і в якому напрямі слід паралельно перенести гіперболу $y = \frac{1}{x}$, щоб отримати гіперболу:
а) $y = \frac{1}{x+4}$; б) $y = \frac{1}{x} + 4$?

10°. На скільки одиниць і в якому напрямі слід паралельно перенести параболу $y = x^2$, щоб її вершина опинилась у точці з координатами: а) $(-2; 0)$; б) $(0; 2)$?

11°. Якою формулою може бути задана функція, графік якої зображено на рис. 50, якщо його отримано за допомогою геометричних перетворень із графіка функції $y = \sqrt{x}$?

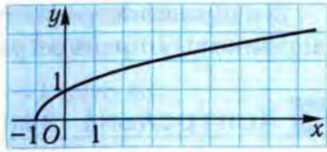


Рис. 50

12. Для кожної з функцій $y = |x + 3|$, $y = |x| + 3$, $y = 3|x|$ підберіть відповідний графік на рис.51, а)–в).

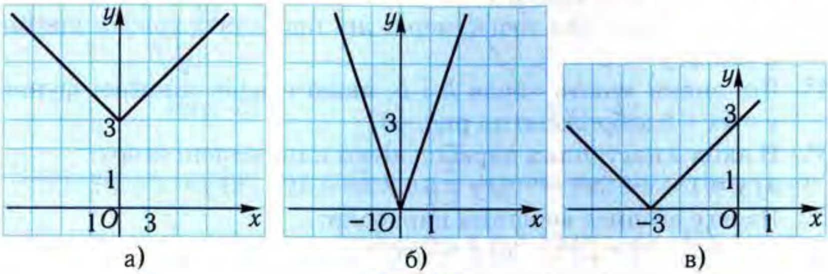


Рис. 51

Задачі

46. Дано функцію $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Знайдіть:

1°) $f(-2), f(3), \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$;

2°) нулі функції; 3) корені рівняння $f(x) = f(0)$.

47°. Дано функцію $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Знайдіть значення аргументу, за яких функція набуває значення: 1) –2; 2) 2; 3) 3.

48. Знайдіть область визначення функції:

1°) $y = \frac{5x+1}{x^2+4}$; 2°) $y = \frac{5x+1}{x^2-4}$; 3°) $y = \frac{1}{2-|x|}$;

4°) $y = \sqrt{3-2x}$; 5) $y = \frac{x}{x+3} + \sqrt{2-x}$; 6) $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

49. Функцію $y = f(x)$ задано графічно (рис. 52).

1°) Якою є її область визначення?

2°) Якою є множина значень функції?

3°) Скільки нулів має функція?

4°) За яких значень x функція набуває додатних (від'ємних) значень?

5°) Чи є функція парною? Непарною?

6) Чому дорівнює найбільше (найменше) значення функції?

7) Скільки коренів має рівняння $f(x) = 0,5$?

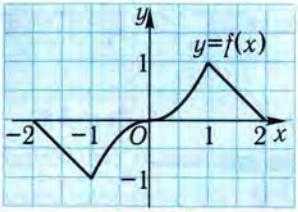


Рис. 52

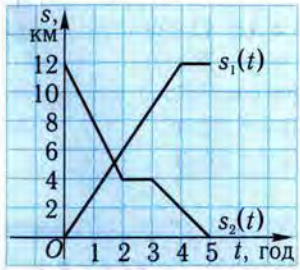


Рис. 53

50. На рис. 53 зображено графіки рухів двох пішоходів назустріч один одному по шосе, яке з'єднує пункти A і B; $s_1(t)$ і $s_2(t)$ — відстані від A, відповідно, до першого та другого пішоходів у момент часу t.

1°) Якою є відстань між пунктами?

2°) Скільки кілометрів пройшов перший пішохід за перші дві години?

3) Який з пішоходів до моменту зустрічі подолав більшу відстань?

4) Який з пішоходів прийшов у пункт призначення першим?

51. На рис. 54 наведено графік залежності часу t, який витрачається на шлях з пункту A в пункт B, від швидкості руху v, що представляє собою обернену пропорційність. З якою швидкістю треба рухатися, щоб дістатися з A в B менш ніж за 2 години?

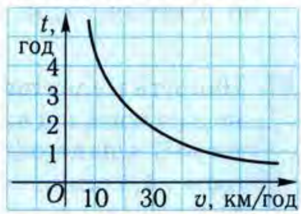


Рис. 54

52°. Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{x-3}{2}$; 2) $y = -3$; 3) $y = -\dfrac{2}{x}$; 4) $y = x^2 - 5x + 4$;

5) $y = -3x^2 - 2x + 1$; 6) $y = x^2 - 4x + 4$; 7) $y = (x+2)(x-4)$.

53. Побудуйте графік функції за допомогою геометричних перетворень:

1°) $y = (x - 0,5)^2$; 2°) $y = x^2 - 0,5$; 3) $y = \dfrac{x^2}{2}$; 4°) $y = \sqrt{x+2}$;

5°) $y=\sqrt{x}-2$; 6°) $y=\dfrac{1}{x-3}$; 7°) $y=\dfrac{1}{x}+3$; 8°) $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$.

54. На рис. 55 зображено графік функції $y=f(x)$. Побудуйте графік функції:
1°) $y=f(x-1)$;
2°) $y=f(x)-1$;
3) $y=f(2x)$;
4) $y=2f(x)$.

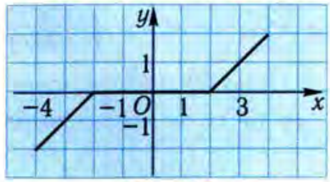


Рис. 55

55. Знайдіть лінійну функцію, якщо:
1°) її графік проходить через точки $A(1; -1)$ і $B(2; -1)$;
2) її графік складає кут 135° з віссю x і проходить через точку $A(0; 2)$.

56°. Задайте за допомогою формули функції, графіки яких зображено на рис. 56, а)–в).

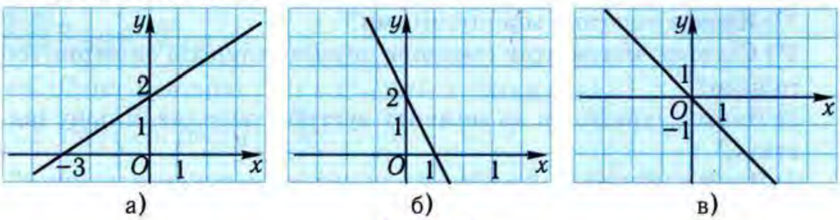


Рис. 56

57. Напруга в електричному колі рівномірно зростає, тобто лінійно залежить від часу. На початку досліду напруга дорівнювала 10 В, а наприкінці досліду, що тривав 5 с, напруга збільшилася у 1,5 разів.
1) Виразіть залежність напруги від часу і побудуйте графік цієї функції.
2) Якою була напруга через 3 с після початку досліду?

58°. Знайдіть обернену пропорційність, якщо відомо, що її графік проходить через точку $A(-1; 3)$. Побудуйте її графік.

59. Згідно із законом Бойля–Маріотта, тиск p і об'єм газу V пов'язані формулою $p=\dfrac{c}{V}$, де c — деяке число, стале для даної маси і температури газу. Побудуйте графік цієї залежності, якщо при тиску $p=10$ Па об'єм газу дорівнює 0,5 л.

Вправи для повторення

60. Які з наступних пар точок симетричні відносно осі y, а які — відносно початку координат:
1) $A(0; 1)$, $B(1; 0)$; 2) $A(0; 1)$, $B(0; -1)$;
3) $A(1; 2)$, $B(-1; 2)$; 4) $A(1; 2)$, $B(-1; -2)$?

61. Вкажіть функції, графіки яких симетричні відносно осі y, а яких — відносно початку координат:

1) $y = x$; 2) $y = -x + 1$; 3) $y = x^2$; 4) $y = x^3$; 5) $y = \frac{1}{x}$.

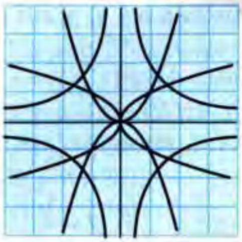
62. Доведіть, що більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції: 1) $y = 2x + 1$; 2) $y = \sqrt{x}$.

63. Чому дорівнює відстань між точками:
1) $A(x)$ і $B(2)$; 2) $A(a)$ і $B(-3)$;
3) $A(a)$ і $B(b)$; 4) $A(a)$ і $B(-b)$?

Підсумок

Основні поняття

Означення	Геометрична інтерпретація, приклади
Залежність між змінними x і y, яка для кожного значення x із D визначає єдине значення y, називається функціональною залежністю y від x з областю визначення D.	Наприклад, висота від літака до поверхні землі є функцією часу його перебування в польоті.
Графік функції $y = f(x)$ — це множина точок координатної площини з координатами $(x; f(x))$, де x — довільне число з області визначення функції.	Часто графіком функції є деяка лінія на площині, але не будь-яка лінія є графіком деякої функції.



§4. Основні властивості функцій

Вивчення реальних процесів часто зводиться до дослідження залежностей, які описують ці процеси. Дослідити функціональну залежність — означає виявити її характерні особливості. Характерними особливостями функції є, наприклад, її зростання чи спадання, парність чи непарність, неперервність. Розгляду цих властивостей і присвячено даний параграф.

1. Спадання і зростання функцій

Розглянемо функції, графіки яких зображено на рис. 57.

Характерною ознакою цих функцій є те, що більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Такі функції називають ***зростаючими***.

Зростаючі функції описують процеси і явища, в яких залежна величина збільшується зі зростанням незалежної. Наприклад, температура води з часом збільшується при її нагріванні до моменту кипіння. Також збільшується з часом швидкість тіла при вільному падінні до моменту падіння.

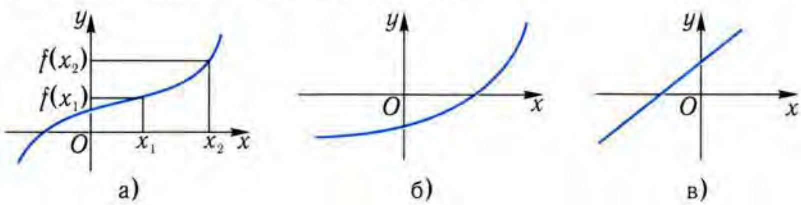
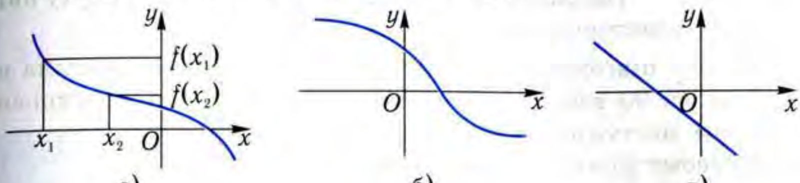


Рис. 57

Якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, то таку функцію називають ***спадною*** (рис. 58).

Процеси і явища, в яких залежна величина зменшується при зростанні незалежної, описуються спадними функціями. Наприклад, зменшується атмосферний тиск при зростанні висоти над рівнем моря, швидкість тіла при гальмуванні.



а) б) в)

Рис. 58

Зростаючі чи спадні функції називають ***монотонними.***

Монотонний — грецькою μονοτονοζ (monotonos), від μονοζ (monos) — один, і τονοζ (tonos) — натягування, напруження — однотонний, однозвучний, одноманітний.

Багато функцій не є монотонними. Наприклад, квадратична функція $y = x^2$ (див. рис. 23) чи обернена пропорційність (див. рис. 28, 29). Однак, якщо розглядати функцію $y = x^2$ тільки на проміжку $(-\infty; 0]$, то вона спадає. На проміжку $[0; +\infty)$ ця функція зростає.

Функція $y = f(x)$ називається зростаючою на деякому проміжку, якщо для довільних точок цього проміжку x_1 і x_2, таких, що $x_1 < x_2$, справджується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Функція $y = f(x)$ називається спадною на деякому проміжку, якщо для довільних точок цього проміжку x_1 і x_2, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Встановлення проміжків, на яких функція зростає чи спадає, є важливим завданням у дослідженні цієї функції. Це завдання називають ***знаходженням проміжків монотонності функції.*** Для функцій, заданих графічно, воно розв'язується досить легко.

Приклад 1. На рис. 59 зображено графік функції $y = f(x)$. З'ясувати, чи є ця функція монотонною. Вказати проміжки зростання і спадання функції. Знайти проміжок, на якому функція набуває сталого значення.

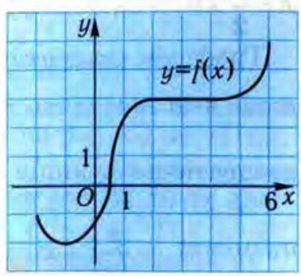


Рис. 59

☐ Функція не є монотонною. Вона спадає на проміжку [–2; –1] і зростає на кожному з проміжків [–1; 2] і [4; 6]. Функція зберігає стале значення, що дорівнює 3, на проміжку [2; 4]. ■

Приклад 2. На рис. 60 зображено графік швидкості руху автомобіля. Охарактеризувати його рух.

☐ Перші півгодини швидкість руху автомобіля зростала від 0 км/год до 90 км/год, тобто автомобіль рухався прискорено. Протягом наступних двох годин (на часовому проміжку [0,5; 2,5]) він рухався зі сталою швидкістю 90 км/год, тобто рівномірно. Після цього швидкість почала зменшуватись, і через годину автомобіль зупинився. Всього він рухався 3,5 год. ■

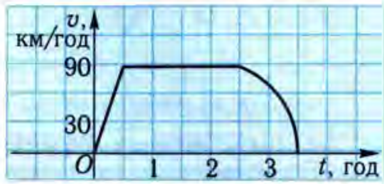


Рис. 60

Для функцій, заданих аналітично, знаходити проміжки зростання і спадання досить важко. Розв'яжемо цю проблему для вже знайомих вам функцій: для лінійної, квадратичної і оберненої пропорційності.

У лінійної функції $y = kx + b$ коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута нахилу її графіка (прямої) до осі x. Якщо $k > 0$, то $\operatorname{tg}\varphi > 0$ і $0° < \varphi < 90°$. Отже, кут нахилу прямої до осі x є гострим, і лінійна функція зростає (див. рис. 21, а). Якщо $k = \operatorname{tg}\varphi < 0$, то $90° < \varphi < 180°$. Відтак кут нахилу прямої до осі x є тупим, і лінійна функція спадає (див. рис. 21, б).

Наприклад, лінійна функція $y = \frac{x-1}{2}$ є зростаючою, оскільки $k = \frac{1}{2} > 0$, а лінійна функція $y = \frac{1-x}{2}$ є спадною, бо $k = -\frac{1}{2} < 0$.

Графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола, вершина якої знаходиться у точці з абсцисою $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Якщо $a > 0$, то квадратична функція спадає на проміжку $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ і зростає на проміжку $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ (рис. 61).

Якщо $a < 0$, то квадратична функція зростає на проміжку $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ і спадає на проміжку $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ (рис. 62).

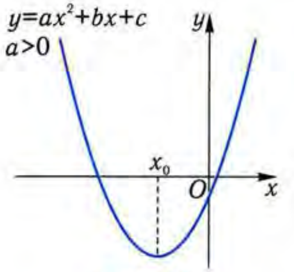


Рис. 61

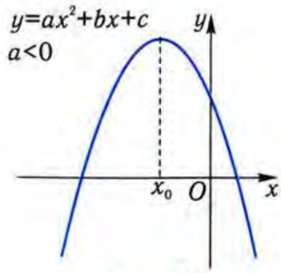


Рис. 62

Наприклад, вершина параболи $y = x^2 + 2x - 3$ знаходиться у точці з абсцисою $x_0 = -\frac{2}{2} = -1$ і $a = 1 > 0$. Тому квадратична функція $y = x^2 + 2x - 3$ спадає на проміжку $(-\infty; -1]$ і зростає на проміжку $[-1; +\infty)$.

! Розглянемо тепер обернену пропорційність. Зверніть увагу на те, що функція $y = \frac{1}{x}$ не є спадною у своїй області визначення $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Порівняємо, наприклад, значення цієї функції в точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$: $y(1) = 1 > y(-1) = -1$, тобто більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Однак, вона спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Згадайте графік функції $y = \sqrt{x}$ і поміркуйте, чи є вона монотонною.

✓ Контрольні запитання

1°. Яка з функцій, графіки яких зображено на рис. 63, а)–г), є: 1) зростаючою; 2) спадною?

2°. Які з функцій, графіки яких зображені на рис. 63, а)–г), мають проміжки сталості?

3°. Які з функцій, графіки яких зображені на рис. 64, а)–г), зростають на проміжку [0; 1]?

4°. Які з наступних лінійних функцій є зростаючими (спадними):
а) $y = 1 - x$; б) $y = x - 1$; в) $y = -1$; г) $y = -2(x + 1)$?

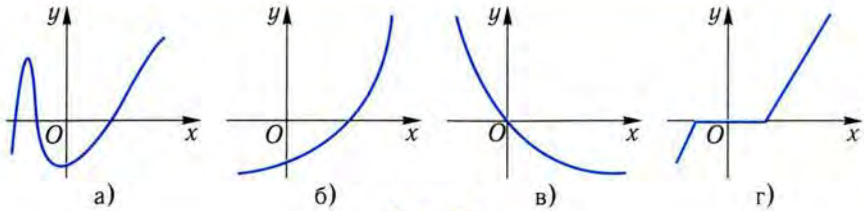


Рис. 63

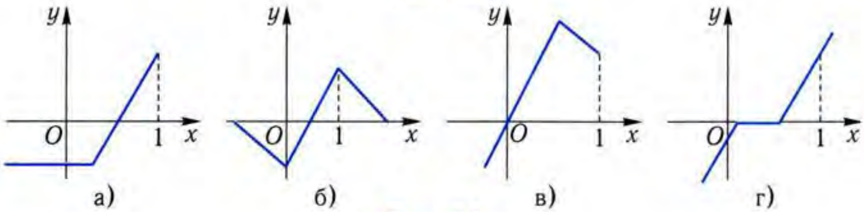


Рис. 64

5. Відомо, що $f(-1) = 2$, $f(0) = 1$, $f(1) = 3$. Чи може функція $y = f(x)$ бути монотонною?

6°. Функція $y = f(x)$ спадає на проміжку $[-2; 2]$. Порівняйте, якщо це можливо, числа $f(-0{,}5)$ і $f(-1)$.

7. Яким є проміжок спадання функції:

а) $y = -\dfrac{x^2}{3}$; б) $y = x^2 - 1$; в) $y = (x-1)^2$?

8°. Яка з наведених функцій зростає на проміжку $(0; +\infty)$:

а) $y = \dfrac{3}{x}$; б) $y = \dfrac{1}{3x}$; в) $y = \dfrac{1}{-3x}$; г) $y = -\dfrac{x}{3}$?

2. Парність і непарність функцій

Б

Розглядаючи графіки функцій $y = x^2$ і $y = |x|$ (рис. 65, 66), ми помічаємо, що вони симетричні відносно осі y.

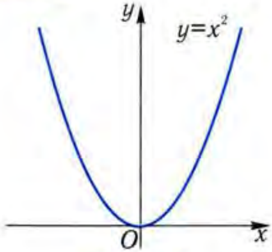


Рис. 65

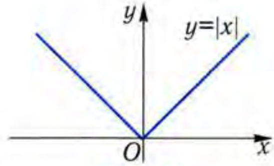


Рис. 66

Функцію, графік якої симетричний відносно осі y, називають ***парною***. Якщо функція $y = f(x)$ є парною, то її область визначення симетрична відносно початку координат, і в точках x і $-x$, симетричних відносно початку координат, функція набуває того самого значення: $f(-x) = f(x)$. Тому можна дати наступне означення парної функції.

Функція $y = f(x)$ називається парною, якщо:
1) її область визначення разом з кожною точкою x містить і точку $-x$;
2) для кожного x із області визначення функції виконується рівність:

$$f(-x) = f(x).$$

Із даного означення і попередніх міркувань випливає твердження:
функція є парною тоді і тільки тоді, коли її графік симетричний відносно осі ординат.

Графік функції $y = \frac{1}{x}$ (рис. 67) симетричний відносно початку координат. Такі функції називають ***непарними***. Якщо функція є непарною, то її область визначення симетрична відносно початку координат, і в точках x і $-x$, симетричних відносно початку координат, функція набуває протилежних значень: $f(-x) = -f(x)$.

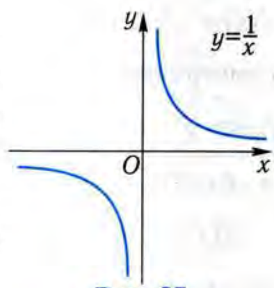


Рис. 67

Функція $y = f(x)$ називається непарною, якщо:
1) її область визначення разом з кожною точкою x містить і точку $-x$;
2) для кожного x із області визначення функції виконується рівність:

$$f(-x) = -f(x).$$

Із даного означення і попередніх міркувань випливає твердження:
функція є непарною тоді і тільки тоді, коли її графік симетричний відносно початку координат.

Виявлення парності чи непарності функції полегшує побудову графіка, зменшує обсяг необхідних досліджень: можна досліджувати поведінку функції і будувати її графік тільки для невід'ємних значень аргументу, а для від'ємних – скористатись згаданою вище симетрією. Зокрема, якщо парна функція зростає на проміжку $[a; b]$, $a > 0$, то на проміжку $[-b; -a]$ вона спадає, і навпаки.

Дослідження функції на парність чи непарність проводять встановленням відповідних ознак. ***Якщо хоча б одна з цих ознак не справджується в кожному означенні, то функція не є ні парною, ані непарною.***

Приклад 3. Дослідити на парність і непарність функцію:

1) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2-3}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^3}{x-3}$.

☐ 1) Перевіримо, чи є симетричною область визначення функції відносно початку координат. Область визначення функції $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$ містить усі дійсні числа, відмінні від $\pm\sqrt{3}$, тобто вона симетрична відносно початку координат. Знайдемо вираз для $f(-x)$: $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-3}=-\dfrac{x^3}{x^2-3}$. Порівняємо його з $f(x)$: $f(-x) = -f(x)$. Отже, $f(x)$ — непарна функція.

2) Область визначення функції $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2-3}$ збігається з областю визначення функції з попереднього завдання. Справджується рівність: $f(-x)=\dfrac{(-x)^4}{(-x)^2-3}=\dfrac{x^4}{x^2-3}=f(x)$. Тому дана функція є парною.

3) Функція $f(x)=\dfrac{x^3}{x-3}$ не є ні парною, ані непарною, оскільки її область визначення не є симетричною відносно початку координат: –3 входить в область визначення, а 3 — не входить. ■

Для доведення того, що функція не є парною чи непарною, доцільно діяти наступним чином.

1) Перевірити, чи симетрична область визначення функції відносно початку координат. Якщо вона не

симетрична (див. приклад 3. 3)), то функція не є ні парною, ні непарною. Якщо вона симетрична, то продовжувати дослідження.

2) Підібрати дві точки, симетричні відносно початку координат і такі, що $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$. Це і доводить потрібне твердження.

Приклад 4. Довести, що функція $f(x) = x^2 + x$ не є ні парною, ані непарною.

□ Її область визначення симетрична відносно початку координат, але в симетричних точках 1 і –1 вона набуває значень 2 і 0, які не є ані рівними, ані протилежними числами. Тому не справджується ні рівність $f(-x) = f(x)$, ні рівність $f(-x) = -f(x)$ для всіх x із області визначення. Звідси випливає, що функція не є ні парною, ані непарною.■

✓ Контрольні запитання

1°. Яка з функцій, графіки яких зображено на рис. 68, а)–г), може бути: 1) парною; 2) непарною?

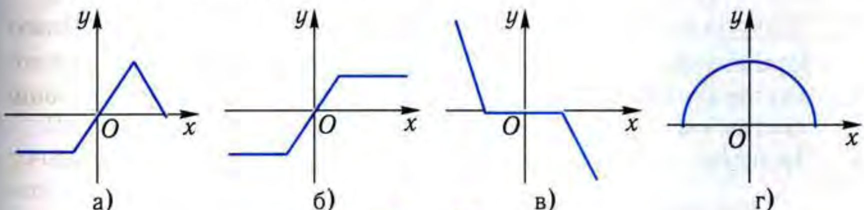


Рис. 68

2. Яку властивість мають усі функції, графіки яких зображено на рис. 69, і не має жодна із функцій, графіки яких зображено на рис. 70?

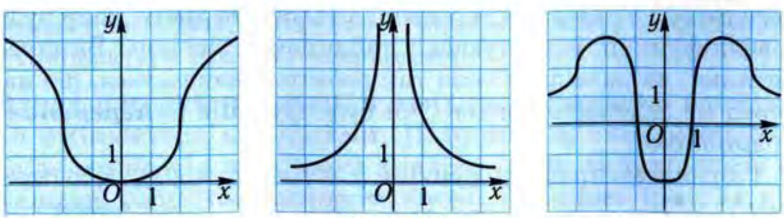


Рис. 69

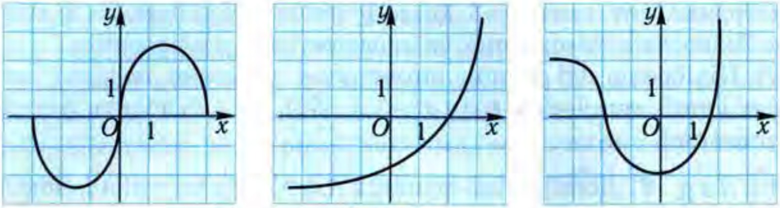


Рис. 70

3°. Графіки яких функцій симетричні відносно осі y:

а) $y = 3x + 1$; б) $y = -x^2$; в) $y = x^3$;

г) $y = |x|$; ґ) $y = 1$; д) $y = \dfrac{x-1}{x-1}$?

4°. Графіки яких функцій симетричні відносно початку координат:

а°) $y = 3x$; б°) $y = x^2 + 1$; в°) $y = x^3$; г) $y = \dfrac{|x|}{x}$?

5. Відомо, що функція $y = f(x)$ є парною і $f(2) = 1$. Чому дорівнює $f(-2)$?

6. Відомо, що функція $y = f(x)$ є непарною і $f(-3) = 2$. Чому дорівнює $f(3)$?

7. Областю визначення парної функції є проміжок $[a; 4]$. Чому дорівнює число a?

8. Функція $y = f(x)$ є парною і зростає на проміжку $[1; 2]$. Чи є вона зростаючою на проміжку $[-2; -1]$?

9. Чи може зростаюча функція бути: а) парною; б) непарною?

3. Неперервність і точки розриву функцій

Б

Познайомимось ще з однією важливою властивістю функції — ***неперервністю***. Цією властивістю ми вже неодноразово користувались. Так, деколи при побудові графіка функції ми знаходили декілька його точок і з'єднували їх лінією. Аналогічно діють, коли будують графік функції, користуючись таблицею її значень. Виникає запитання, чи завжди можна так робити. Виявляється, що насамперед це залежить від того, чи буде функція ***неперервною*** або ***розривною***.

Розглянемо графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$, зображені на рис. 71 і 72.

Графік функції $y = f(x)$ є нерозривною лінією, тобто такою, яку можна накреслити, не відриваючи олівця від аркушу паперу. Графік функції $y = g(x)$ такої властивості не має. Він розірваний у точці з абсцисою $x = -0{,}5$. Незамальованим кружечком позначено точку, яка не належить графіку функції $y = g(x)$. Тобто точка з координатами $(-0{,}5;\ 1{,}5)$ не належить цьому графіку. Водночас графіку функції $y = g(x)$ належить точка з координатами $(-0{,}5;\ 2)$: $g(-0{,}5) = 2$. Зверніть увагу на те, що дві точки з однаковими абсцисами не можуть одночасно належати графіку функції y від x.

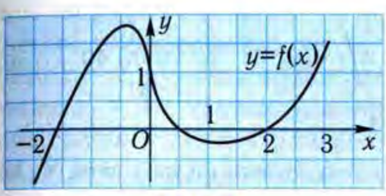


Рис. 71

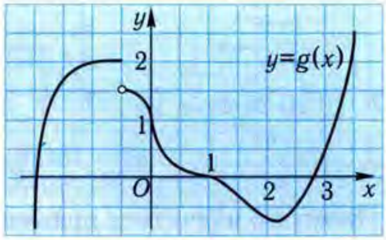


Рис. 72

Якщо функцію задано на деякому проміжку та її графік на ньому є нерозривною лінією, то функцію називають ***неперервною*** на цьому проміжку.

Функція $y = f(x)$ (рис. 71) неперервна на проміжку $[-2;\ 3]$. Неперервні у своїх областях визначення лінійні і квадратичні функції.

Про функцію $y = g(x)$ (рис. 72) кажуть, що точка $x = -0{,}5$ є її ***точкою розриву***. Наприклад, точка $x = 0$ є точкою розриву функцій $y = \dfrac{1}{x}$ (див. рис. 67) і $y = \dfrac{|x|}{x}$ (рис. 73).

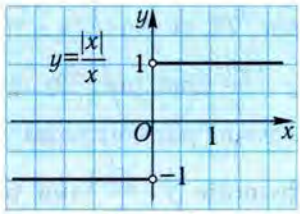


Рис. 73

Неперервна функція описує процеси, які відбуваються плавно, без «стрибків», тобто коли досліджувана величина за малий проміжок часу змінюється мало. Саме так у звичайних умовах змінюється довжина шляху, пройденого тілом, швидкість механічного руху, температура тіла при охолодженні.

! **Однак існують процеси, в яких досліджувана величина змінюється стрибками. Наприклад, так змінюється залежно від часу маса товару *m*, що залишається в машині, якщо його розвантажують ящиками (рис. 74, а); сума грошей на банківському рахунку залежно від часу, якщо цей рахунок поповнюється, але гроші з цього рахунку не знімаються (рис. 74, б); висота трави**

на газоні залежно від часу за умови регулярного її підстригання за допомогою газонокосарки (рис. 74, в) тощо.

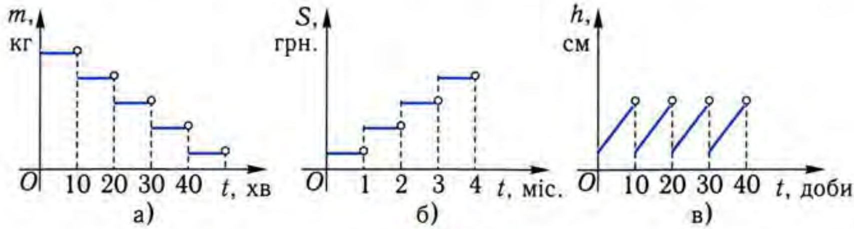


Рис. 74

Важливо навчитися працювати з подібними функціями.

Поведінка функції в околі точок розриву може бути різною. По-перше, точка розриву може належати області визначення функції, а може і не належати. Так, функція $y = g(x)$, графік якої зображено на рис. 72, визначена в точці розриву $x = -0{,}5$: $g(-0{,}5) = 2$. Функція $y = \frac{|x|}{x}$ (див. рис. 73) не визначена в точці $x = 0$. По-друге, функція в точці розриву може мати скінченний стрибок, як, наприклад, функція $y = \frac{|x|}{x}$ (див. рис. 73), а може мати «нескінченний» стрибок, як це у функції $y = \frac{1}{x}$ (див. рис. 67).

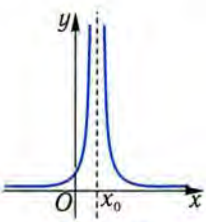


Рис. 75

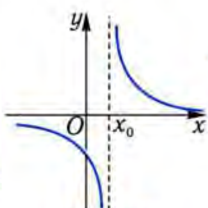


Рис. 76

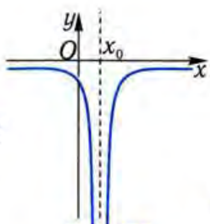


Рис. 77

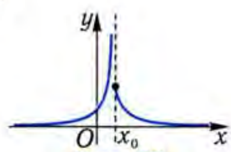


Рис. 78

На рис. 75–78 зображено різні випадки «нескінченних» стрибків. Ми бачимо, що точки графіків функцій наближаються до прямої $x = x_0$, коли аргумент наближається до x_0. Пряму $x = x_0$ у таких випадках називають ***вертикальною асимптотою*** графіка. Таким чином, гіпербола $y=\frac{1}{x}$ має вертикальну асимптоту $x = 0$.

> *Асимптота (грецькою ασιμπτωτος (asymptotos)) — така, що не збігається.*

Розглянемо функцію $y = f(x)$, графік якої зображено на рис. 79. Ця функція має дві точки розриву: $x_1 = 2$ і $x_2 = 3$. У точці $x_1 = 2$ функція визначена і $f(2) = 3$. Точка $x_2 = 3$ є точкою розриву функції, хоча графік у цій точці не робить «стрибка». У цій точці функція не визначена.

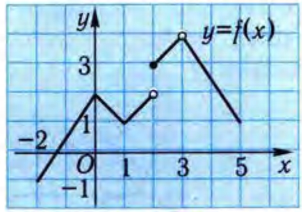


Рис. 79

✓ Контрольні запитання

На рис. 80 зображено графік функції $y = g(x)$. Які з наступних тверджень є правильними?

1) Функція $y = g(x)$ є неперервною.
2) Функція має три точки розриву.
3) Функція не визначена в точках розриву.
4) $g(0) = 3$. 5) $g(4) = 2$.

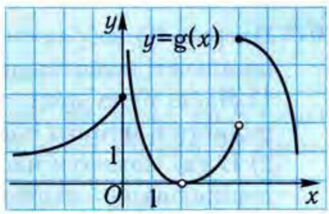


Рис. 80

Задачі

64°. Дослідіть функцію на парність і непарність:

1) $y=5x^3-x$; 2) $y=x^2-3$; 3) $y=\frac{x^2}{x^4-1}$; 4) $y=\sqrt{x}+1$;

5) $y=|x|+x^2-4$; 6) $y=3$; 7) $y=\frac{x^3}{2x^2-1}$; 8) $y=\frac{x^3}{2x-1}$.

65. Доведіть, що функція $y = f(x)$ не є ні парною, ні непарною, якщо:

1) $f(x)=x^3-3x^2+x-1$; 2) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$.

66°. На рис. 81, 82 зображено графіки функцій $y = g(x)$ і $y = f(x)$. Знайдіть для кожної функції:

1) область її визначення;
2) множину її значень;
3) нулі функції та проміжки знакосталості;
4) проміжки зростання, спадання функції.

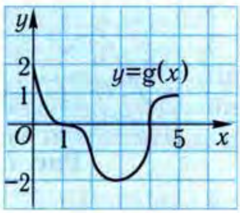


Рис. 81

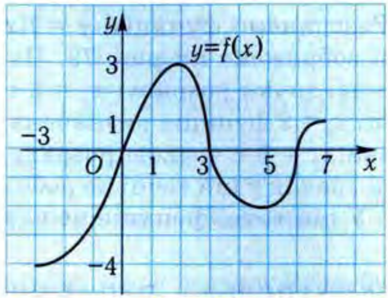


Рис. 82

67°. На рис. 83 зображено залежність швидкості велосипедиста від часу.

1) Якою була швидкість велосипедиста в момент часу $t = 18$ хв?
2) В які моменти часу швидкість дорівнювала 5 км/год?
3) Вкажіть проміжки часу, протягом яких швидкість велосипедиста зростала, спадала, була сталою.
4) Якою була найбільша швидкість велосипедиста?

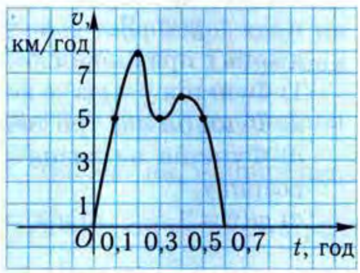


Рис. 83

68°. На рис. 84 зображено залежність об'єму води від її температури. Вкажіть на характерні особливості цієї залежності.

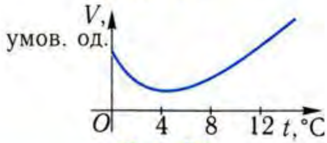


Рис. 84

69. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $y = -x^2 + 4x$; 2) $y = 3x^2 - 6x + 4$; 3) $y = (x+1)(x-2)$;

4) $y = \sqrt{x+1}$; 5) $y = \dfrac{1}{x+2}$; 6) $y = \dfrac{1}{x} - 2$.

70. Побудуйте графік функції $y = f(x)$, яка задовольняє умови:
1°) функція визначена і зростає на проміжку $[-2; 2]$, $f(-2) = -1$, $f(2) = 1$;
2°) функція зростає на проміжку $(-\infty; 2]$ і спадає на проміжку $[2; +\infty)$;
3) функція парна і спадає на проміжку $[-3; 0]$;
4) функція визначена на проміжку $[-4; 4]$, непарна і зростаюча.

71. На рис. 85, а)–в) зображено графіки деяких функцій. Добудуйте кожний з них (якщо це можливо) до графіка: 1) парної функції; 2) непарної функції.

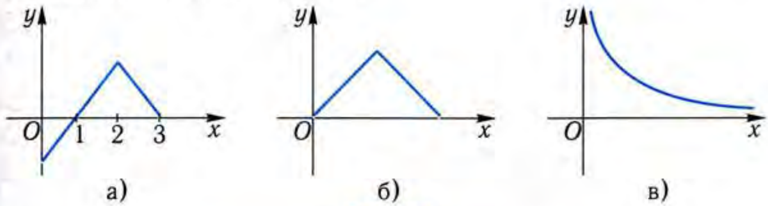


Рис. 85

72*. Розподіліть графіки, зображені на рис. 86, а)–в), на 2 класи за їхніми характерними ознаками. Опишіть ознаки, за якими класифікація запропонована.

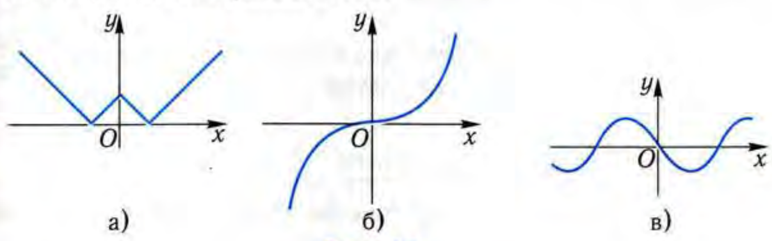


Рис. 86

73*. Розподіліть усі функції, графіки яких зображені на рис. 87, а)–д), на 3 класи за деякою властивістю. Опишіть властивості, спільні для функцій кожного класу.

74°. На рис. 88 зображено графік функції $y = g(x)$.
1) Чи є ця функція неперервною? Якщо ні, то вкажіть її точки розриву.

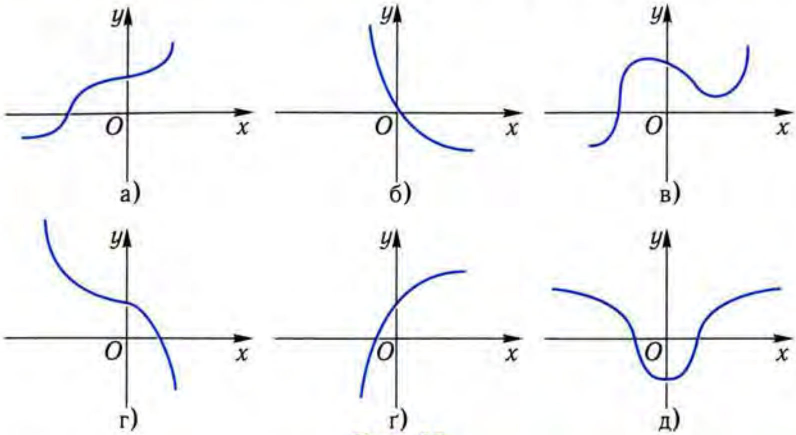


Рис. 87

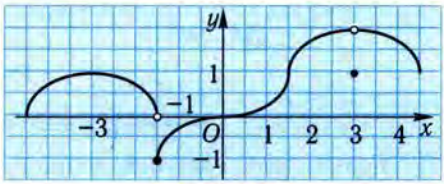


Рис. 88

2) Чи визначена функція в точках розриву?

3) Укажіть значення функції в тих точках розриву, в яких вона визначена.

4) Скільки нулів має функція?

75. Побудуйте графік деякої функції, яка:

1) в точці $x = 1$ має розрив, але визначена в цій точці;

2) в точці $x = 1$ має розрив і невизначена в цій точці.

Вправи для повторення

76. Скільки існує квадратних коренів з числа: 1) 36; 2) 0; 3) –36?

77. Чи має зміст вираз: 1) $\sqrt{-49}$; 2) $\sqrt{(-7)^2}$; 3) $\sqrt{(-7)^3}$?

78. Обчисліть: 1) $\sqrt{(-3)^2}+\left(\sqrt{5}\right)^2$; 2) $\sqrt{3\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{1\frac{1}{5}}$; 3) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$.

79. Винесіть множник з-під знака кореня: 1) $\sqrt{490}$; 2) $\sqrt{12a^2}$, $a < 0$.

80. Спростіть вираз: 1) $\sqrt{48}-\sqrt{300}+\sqrt{75}$; 2) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+2\sqrt{ab}$.

81. Дано функцію $f(x)=\sqrt{x+3}$.

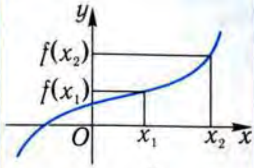
1) Побудуйте графік функції.

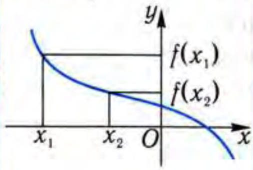
2) Скільки коренів має рівняння: $f(x) = 1$; $f(x) = -1$; $f(x) = x$?

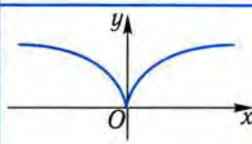
Підсумок

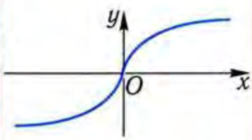
Основні поняття

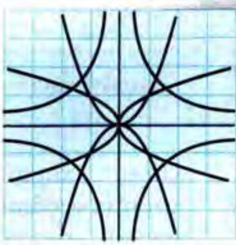
<table>
<tr><th>Означення</th><th>Геометрична інтерпретація, приклади</th><th>Застосування</th></tr>
<tr><td>Функція $y = f(x)$ називається зростаючою на деякому проміжку, якщо для довільних точок цього проміжку x_1 і x_2, таких, що $x_1 < x_2$, справджується нерівність: $f(x_1) < f(x_2)$.

Функція $y = f(x)$ називається спадною на деякому проміжку, якщо для довільних точок цього проміжку x_1 і x_2, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність: $f(x_1) > f(x_2)$.</td><td>


</td><td>Опис характерних особливостей реальних процесів і явищ; порівняння значень величин.</td></tr>
<tr><td>Функція $y = f(x)$ називається парною, якщо:
1) її область визначення разом з кожною точкою x містить і точку $-x$;
2) для кожного x із області визначення функції виконується рівність $f(-x) = f(x)$.

Функція $y = f(x)$ називається непарною, якщо:
1) її область визначення разом з кожною точкою x містить і точку $-x$;
2) для кожного x із області визначення функції виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.</td><td>


</td><td>Спрощення побудови графіків і дослідження функцій.</td></tr>
</table>



§5. Корені n-го степеня

У курсі алгебри розглядалось поняття квадратного кореня з невід'ємного числа. У даному параграфі узагальнимо це поняття, визначивши поняття кореня з довільним натуральним показником, більшим від 1.

1. Степеневі функції з натуральними показниками

Б

Раніше ми розглядали функцію $y = x^2$. Її аргументом є основа степеня, значення функції при кожному значенні аргументу є другим степенем аргументу. Таку функцію називають ***степеневою***. Показник степеня у даному випадку дорівнює 2. Можна розглядати степеневі функції з показниками, відмінними від 2.

Степеневою функцією з натуральним показником будемо називати функцію $y = x^n$, де n — натуральне число.

Розглянемо спочатку степеневі функції з парними натуральними показниками, тобто функції виду $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, ... Усі функції зазначеного виду мають ті самі властивості, що і функція $y = x^2$, графік якої зображено на рис. 89. Вони визначені на множині дійсних чисел. Ці функції є парними. Наприклад, для функції $y = x^4$ маємо: $y(-x) = (-x)^4 = x^4 = y(x)$. Аналогічні обґрунтування можна навести для довільної зазначеної функції. Графіки цих функцій симетричні відносно осі ординат.

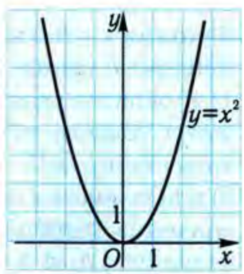


Рис. 89

Степеневі функції з парними натуральними показниками набувають невід'ємних значень і мають лише один нуль: $x = 0$. Тому їхні графіки лежать у верхній півплощині і проходять через початок координат. Крім того, графіки усіх зазначених функцій проходять через точку з координатами (1; 1).

Функції $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, ... зростають на проміжку $[0; +\infty)$ і спадають на проміжку $(-\infty; 0]$. Їхні графіки схожі на графік, зображений на рис. 89.

Розглянемо тепер степеневі функції з непарними натуральними показниками, відмінними від 1, тобто функції виду $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$, ... Областю визначення цих функцій є множина дійсних чисел. Вони є непарними. Наприклад, для функції $y = x^5$ маємо: $y(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -y(x)$. Графіки цих функцій симетричні відносно початку координат.

Степеневі функції з непарними натуральними показниками є зростаючими. Вони мають лише один нуль: $x = 0$. Їхні графіки проходять через точку з координатами (1; 1) і схожі на графік, зображений на рис. 90.

Зокрема, функцію $y = x^3$ називають ***кубічною***, а її графік – ***кубічною параболою***.

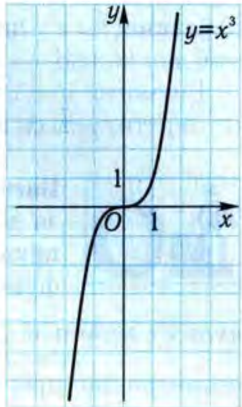


Рис. 90

Приклад 1. Графік функції $f(x) = x^4 + a$ проходить через точку $A(2; 17)$.

1) Знайти цю функцію, тобто число a.
2) Побудувати її графік.
3) Скільки коренів має рівняння $f(x) = 2$; $f(x) = -2$?

□ 1) Оскільки графік функції проходить через точку $A(2; 17)$, то координати цієї точки мають задовольняти рівняння $f(x) = x^4 + a$,

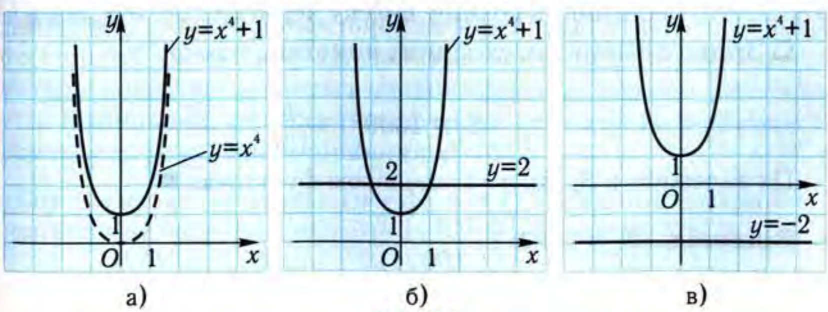


Рис. 91

тобто має справджуватись рівність $17 = 2^4 + a$. Звідси одержимо $a = 1$. Отже, маємо функцію $y = x^4 + 1$.

2) Графік функції $y = x^4 + 1$ можна одержати із графіка функції $y = x^4$ паралельним перенесенням його на 1 одиницю у додатному напрямі осі ординат (рис. 91, а).

3) Необхідно встановити, у скількох точках функція набуває значення 2. Перетнемо графік функції прямою $y = 2$. Графік перетинається у двох точках (рис. 91, б). Отже, рівняння $x^4 + 1 = 2$ має два корені.

Рівняння $x^4 + 1 = -2$ коренів не має, бо графік функції $y = x^4 + 1$ не перетинається прямою $y = -2$ (рис. 91, в). ■

Багато залежностей між величинами описуються за допомогою степеневих функцій з натуральними показниками. Наприклад, об'єм куба V є степеневою функцією від довжини його ребра a: $V = a^3$; об'єм кулі V є кубічною функцією її радіуса R: $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$; п'ятий член геометричної прогресії є степеневою функцією від знаменника q: $b_5 = b_1 \cdot q^4$.

В останніх двох прикладах залежність має вигляд: $y = ax^n$, де x — аргумент, n — натуральне число, a — деяке дійсне число. Такі функції зазвичай теж називають степеневими, як і функції виду $y = a(x - b)^n$.

Розглянемо декілька задач на застосування степеневих функцій.

Приклад 2. Вкладник поклав на свій рахунок до банку 1000 грн. Банк нараховує щорічно за схемою складних відсотків p%. Знайти залежність розміру внеску через три роки S_3 від p.

□ Згідно з формулою складних відсотків, маємо:

$$S_3 = 1000\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3.$$

Ця залежність S_3 від p є степеневою функцією. ■

Відповідь. $S_3 = 1000\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$.

Приклад 3. Скільки коренів має рівняння $x^5 + x - 1 = 0$?

☐ Переписавши рівняння у вигляді $x^5 = 1 - x$, розв'яжемо задачу графічним методом. В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = x^5$ і $y = 1 - x$. Корені рівняння – це абсциси спільних точок графіків функцій. Графіки перетинаються в одній точці (рис. 92). Отже, рівняння має один корінь.■

Відповідь. Один.

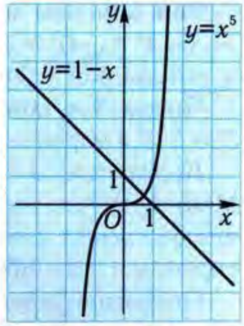


Рис. 92

✓ Контрольні запитання

1°. Чи перетинає графік функції $y = x^6$ пряма:
а) $x = 0$; б) $x = 100$; в) $x = -1000$; г) $y = 10$; ґ) $y = -1$?

2°. Чи перетинає графік функції $y = x^5$ пряма:
а) $x = 0$; б) $x = 100$; в) $x = -1000$; г) $y = 10$; ґ) $y = -1$?

3. Які властивості функцій $y = x^4$ і $y = x^5$ є спільними?

4. Скільки коренів має рівняння:
а) $x^4 = 2$; б) $x^2 = -3$; в) $x^5 = -7$; г) $x^{11} = 11$?

5. Дано функції $f(x) = x^5$ і $g(x) = x^{10}$. Що більше: нуль чи число:
а) $f(-5) \cdot f(-7)$; б) $f(-10) - f(-20)$; в) $g(-10) - g(-20)$?

6. Порівняйте числа:
а) $\left(\frac{5}{6}\right)^7$ і $\left(\frac{4}{5}\right)^7$; б) $\left(\frac{6}{5}\right)^7$ і $\left(\frac{5}{4}\right)^7$; в) $\left(\frac{5}{6}\right)^6$ і $\left(\frac{4}{5}\right)^6$; г) $\left(\frac{5}{6}\right)^6$ і $\left(-\frac{4}{5}\right)^6$.

2. Поняття кореня n-го степеня

Як відомо, квадратним коренем з числа a називають число, квадрат якого дорівнює a. Аналогічно визначається поняття кореня довільного натурального степеня n з числа a. Це поняття необхідне для розв'язання багатьох задач, що зводяться до знаходження коренів рівняння $x^n = a$. Наприклад, знаходження сторони куба x за його об'ємом V зводиться до розв'язання рівняння $x^3 = V$.

Коренем n-го степеня ($n \in \mathrm{N}$, $n > 1$) з числа a називається число, n-ий степінь якого дорівнює a.

Так, коренем четвертого степеня з числа 256 є число 4, а також –4, бо $4^4 = (-4)^4 = 256$; коренем п'ятого степеня з числа 243 є число 3, оскільки $3^5 = 243$.

Число 5 є коренем третього степеня з числа 125, оскільки $5^3 = 125$, і коренем четвертого степеня з числа 625, бо $5^4 = 625$.

Корінь третього степеня називають ще ***кубічним коренем.*** Мабуть, це пов'язано з тим, що об'єм V куба за його стороною x обчислюється за формулою $V = x^3$. Довжина сторони куба є кубічним коренем з його об'єму.

Операцію знаходження кореня n-го степеня з числа a називають ***добуванням кореня n-го степеня з числа a***. Корінь n-го степеня визначено лише для натуральних $n \geq 2$.

! Зрозуміло, що кореня парного степеня з від'ємного числа не існує, бо парний степінь будь-якого дійсного числа є додатним числом.

Розглянемо функцію $y = x^3$. Будь-яка пряма $y = a$ перетинає графік цієї функції в єдиній точці (рис. 93). А це означає, що для будь-якого дійсного числа a існує єдине значення x, третій степінь якого дорівнює a. Інакше кажучи, для будь-якого дійсного числа a існує єдине значення кореня третього степеня з цього числа.

Рис. 93

Аналогічно можна дійти загального висновку. Для довільного дійсного числа a і непарного числа n існує єдине значення x, n-ий степінь якого дорівнює a. Це значення є коренем n-го степеня з числа a. При непарному n його позначають через $\sqrt[n]{a}$ (читають: ***корінь n-го степеня з числа a***).

Наприклад, запис $\sqrt[3]{-27}$ означає кубічний корінь з числа –27. З означення кореня випливає, що $\sqrt[3]{-27} = -3$, бо $(-3)^3 = -27$. Запис $\sqrt[5]{0{,}03125}$ означає корінь п'ятого степеня з числа 0,03125. Його значення дорівнює 0,5, оскільки $(0{,}5)^5 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}03125$.

За означенням, ***для довільного числа a*** справджується рівність:

$$\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a.$$

Зауважимо, що при будь-якому натуральному значенні k число $2k+1$ є непарним.

Розглянемо тепер функцію $y = x^4$. Будь-яка пряма $y = a$ при $a > 0$ перетинає графік цієї функції у двох точках (рис. 94), тобто для будь-якого додатного числа a існують два значення x, четвертий степінь яких дорівнює a. Інакше кажучи, для будь-якого додатного числа a існують два значення кореня четвертого степеня з цього числа.

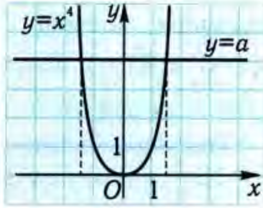


Рис. 94

Аналогічно можна дійти загального висновку. Для довільного $a > 0$ і парного числа n існують два протилежних числа, n-ий степінь яких дорівнює a. При $a = 0$ таке число єдине, $x = 0$. При $a < 0$ таких чисел не існує. При парному n знаком $\sqrt[n]{a}$ позначають ***невід'ємний корінь*** n-го степеня з числа a. Від'ємний корінь n-го степеня із додатного числа a записується так: $-\sqrt[n]{a}$.

За означенням, для ***довільного невід'ємного числа a*** справджується рівність:

$$\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a.$$

Наприклад, запис $\sqrt[6]{729}$ означає невід'ємний корінь шостого степеня із 729. Маємо: $\sqrt[6]{729} = 3$, бо число 3 є невід'ємним і $3^6 = 729$.

Приклад 4. Обчислити: $\dfrac{\left(\sqrt{22}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{-2}\right)^3}{2\sqrt[5]{32}}$.

□ Згідно з означенням кореня n-го степеня, маємо:

$$\frac{\left(\sqrt{22}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{-2}\right)^3}{2\sqrt[5]{32}} = \frac{22-2}{2\cdot 2} = \frac{20}{4} = 5. \blacksquare$$

Відповідь. 5.

Як відомо, для квадратного кореня знаком $\sqrt{a}$ позначався невід'ємний корінь з невід'ємного числа a. Тому $\sqrt{a^2} = |a|$: адже число $|a|$ є невід'ємним і його квадрат дорівнює a^2.

Так само при довільному парному показнику кореня, що дорівнює $2k$, знаком $\sqrt[2k]{a}$ ми позначили невід'ємний корінь $2k$-го степеня з числа a. Тому $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$.

Справді, число $|a|$ є невід'ємним і його $2k$-ий степінь дорівнює a^{2k}.

У цій формулі не можна випускати знак модуля, інакше для від'ємних значень a одержимо неправильні результати. Так, $\sqrt[4]{(-1)^4} = \sqrt[4]{1} = 1$. Якщо ж скористатися зазначеною формулою і випустити знак модуля, одержимо помилковий результат $\sqrt[4]{(-1)^4} = -1$.

Розглянемо тепер корені непарного степеня. При непарному $n = 2k+1$ єдине значення кореня з довільного числа a ми позначали через $\sqrt[2k+1]{a}$. Згідно з означенням, $\sqrt[3]{5^3} = 5$, $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$, $\sqrt[3]{a^3} = a$, $\sqrt[5]{a^5} = a$ і т. д. для будь-якого числа a. Таким чином, для коренів непарного степеня справджується формула:

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a.$$

Наприклад, $\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-2\right)^3} = \sqrt{3}-2$, але $\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}-2\right)^4} = \left|\sqrt{3}-2\right| = 2-\sqrt{3}$, бо $\sqrt{3} < 2$.

Приклад 5. Спростити вираз $\sqrt[6]{x^6} + \sqrt[5]{x^5}$.

☐ Згідно з наведеними вище формулами, маємо: $\sqrt[6]{x^6} + \sqrt[5]{x^5} = |x| + x$. Якщо $x \geq 0$, то $|x| = x$ і $|x| + x = x + x = 2x$. Якщо ж $x < 0$, то $|x| = -x$ і $|x| + x = -x + x = 0$. ■

Відповідь. $2x$, якщо $x \geq 0$; 0, якщо $x < 0$.

Приклад 6. Побудувати графік функції $y = \sqrt[4]{(x-2)^4}$.

☐ Оскільки $\sqrt[4]{(x-2)^4} = |x-2|$, то маємо функцію $y = |x-2|$, графік якої можна одержати із графіка функції $y = |x|$ паралельним перенесенням останнього на 2 одиниці у додатному напрямі осі абсцис (рис. 95). ■

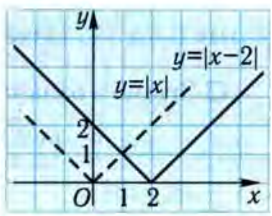


Рис. 95

✓ Контрольні запитання

1°. Чи правильно, що число −3 є коренем четвертого степеня з числа 81?

2°. Чи правильно, що корінь четвертого степеня з числа 81 дорівнює −3?

3°. Скільки існує коренів п'ятого степеня з числа −1024?

4°. Скільки існує коренів четвертого степеня з числа 625?

5°. Які з даних виразів не мають змісту: $\sqrt{-16}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[6]{(-2)^2}$; $\sqrt[6]{(-2)^3}$; $\sqrt[5]{(-2)^3 \cdot (-3)^2}$; $\sqrt[4]{(-2)^3 \cdot (-3)^2}$?

6. Відомо, що об'єм V кулі обчислюється за формулою $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, де R — радіус кулі. Кубічним коренем з якого числа є радіус кулі, якщо $V = 4{,}5$?

7. Чому дорівнює: а) $\sqrt[4]{7^4}$; б) $\sqrt[6]{(-7)^6}$; в) $\sqrt[5]{(-7)^5}$?

8*. Між якими двома послідовними цілими числами міститься число $\sqrt[3]{15}$?

3. Арифметичний корінь n-го степеня та його властивості

Вище зазначалось, якщо n — непарне число, то вираз $\sqrt[n]{a}$ має зміст при будь-якому значенні a; якщо n — парне число, то вираз $\sqrt[n]{a}$ має зміст лише при $a \geq 0$ і набуває тільки невід'ємного значення.

Вираз $\sqrt[n]{a}$ при $a \geq 0$ має зміст як при парному n, так і при непарному n, і значення цього виразу є невід'ємним числом. Його називають *арифметичним коренем* n-го степеня з числа a. Число a називається *підкореневим виразом*, n — *показником кореня*.

Арифметичним коренем n-го степеня із невід'ємного числа a називають невід'ємне число, n-ий степінь якого дорівнює a.

Корінь непарного степеня із від'ємного числа можна виразити через арифметичний корінь. Наприклад, $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$, оскільки, згідно з означенням, $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$, $-\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$. Взагалі, при довільному додатному a і при непарному n справджується рівність $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Нам уже відомі властивості арифметичного квадратного кореня. Аналогічні властивості має арифметичний корінь n-го степеня і при $n \geq 2$.

Властивість 1. Якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Арифметичний корінь n-го степеня з добутку двох невід'ємних чисел дорівнює добутку арифметичних коренів n-го степеня з цих чисел.

В л а с т и в і с т ь 2. Якщо $a \geq 0$ і $b > 0$, то $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Арифметичний корінь n-го степеня з дробу, чисельник якого невід'ємний, а знаменник додатний, дорівнює арифметичному кореню n-го степеня із чисельника, поділеному на арифметичний корінь n-го степеня зі знаменника.

Приклад 7. Обчислити: 1) $\sqrt[6]{64 \cdot 729}$; 2) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}$; 3) $\sqrt[4]{3\dfrac{13}{81}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$.

□ 1) Згідно з властивістю 1, $\sqrt[6]{64 \cdot 729} = \sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{729} = 2 \cdot 3 = 6$.

2) Застосовуючи властивість 1, матимемо: $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{8 \cdot 4} = \sqrt[5]{32} = 2$.

3) Застосовуючи властивість 2, одержимо $\sqrt[4]{3\dfrac{13}{81}} = \sqrt[4]{\dfrac{256}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{256}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{4}{3} = 1\dfrac{1}{3}$.

4) Застосовуючи властивість 2, матимемо: $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{243}{3}} = \sqrt[4]{81} = 3$. ■

Відповідь. 1) 6; 2) 2; 3) $1\dfrac{1}{3}$; 4) 3.

Приклад 8. Порівняти значення виразів $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$ і $\sqrt[6]{729}$.

□ Застосовуючи означення кореня, послідовно матимемо: $\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt{9} = 3$, $\sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$. Ми бачимо, що значення цих виразів дорівнюють одне одному, тобто $\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729}$. ■

Відповідь. $\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729}$.

Аналізуючи останній приклад, можна висловити наступні припущення.

В л а с т и в і с т ь 3. Якщо $a \geq 0$, то для натуральних n і k, більших від 1, справджується рівність $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Властивість 4. Якщо $a \geq 0$, то для натуральних n, m і k, $n > 1$, справджується рівність $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Властивість 4 іноді називають ***головною властивістю кореня.*** Її можна сформулювати так:

якщо показник кореня і показник степеня підкореневого виразу помножити або поділити на те саме натуральне число, то значення кореня не зміниться.

Наприклад, $\sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$; $\sqrt[8]{3^6} = \sqrt[4]{3^3}$.

Властивості 1–4 дають змогу вносити множник під знак арифметичного кореня і виносити множник з-під знака кореня.

Наприклад, розкладаючи підкореневий вираз числа $\sqrt[4]{48}$ на прості множники і застосовуючи означення кореня і властивість 1, можна винести множник з-під знака кореня: $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3}$. Виконуючи ці перетворення у зворотному порядку, можна внести множник під знак кореня: $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$.

Приклад 9. Спростити вираз:

1) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[4]{48} - 3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[4]{3}$; 2) $\sqrt{27} \cdot \sqrt[4]{9}$; 3) $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}$.

□ 1) Виносячи множники з-під перших двох коренів, матимемо:
$\sqrt[3]{54} + \sqrt[4]{48} - 3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[4]{3} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} + \sqrt[4]{16 \cdot 3} - 3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[4]{3} =$
$= \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{3} - 3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[4]{3} = 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{3} - 3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{3}$.

2) Скориставшись головною властивістю кореня і властивістю 1, одержимо: $\sqrt{27} \cdot \sqrt[4]{9} = \sqrt{27} \cdot \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{27} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{27 \cdot 3} = \sqrt{81} = 9$.

3) Внесемо множник 3 під знак арифметичного кореня третього степеня: $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^4}}$. Згідно із властивістю 3, $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^4}} = \sqrt[12]{3^4}$. Застосовуючи головну властивість кореня, дістанемо: $\sqrt[12]{3^4} = \sqrt[3]{3}$. Отже, $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{3}$. ■

Відповідь. 1) $-\sqrt[4]{3}$; 2) 9; 3) $\sqrt[3]{3}$.

Якщо потрібно перемножити або поділити корені з додатних чисел з однаковими показниками, то, згідно із властивостями 1 і 2, достатньо перемножити або поділити їхні підкореневі вирази і записати добуток або частку під знаком кореня з тим самим показником.

! Якщо ж показники коренів, що перемножуються або діляться, різні, то необхідно їх привести до спільного показника. Це робиться на підставі головної властивості кореня, тобто кожний показник кореня множиться на підібраний додатковий множник одночасно з піднесенням підкореневого виразу до того самого степеня. За спільний показник слід взяти найменше спільне кратне показників коренів, що перемножуються або діляться.

Приклад 10. Подати вираз у вигляді кореня з деякого числа: 1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{5}$; 2) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$.

☐ 1) Оскільки множники є коренями різних степенів, то приведемо їх до спільного показника. Найменшим спільним кратним показників 3 і 4 є число 12. Показники коренів слід помножити на додаткові множники: 12 : 3 = 4, 12 : 4 = 3. Згідно з головною властивістю кореня, маємо:

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{5}=\sqrt[3\cdot4]{2^4}\cdot\sqrt[4\cdot3]{5^3}=\sqrt[12]{2^4}\cdot\sqrt[12]{5^3}.$$

Користуючись властивістю 1, перемножимо отримані корені з однаковими показниками: $\sqrt[12]{2^4}\cdot\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{2^4\cdot5^3}=\sqrt[12]{2000}$.

2) Враховуючи те, що найменшим спільним кратним показників коренів, тобто чисел 3 і 6, є число 6, то, згідно із головною властивістю кореня, матимемо:

$$\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}=\frac{\sqrt[6]{9^2}}{\sqrt[6]{3}}=\sqrt[6]{\frac{9^2}{3}}=\sqrt[6]{27}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt{3}.\ \blacksquare$$

Відповідь. 1) $\sqrt[12]{2000}$; 2) $\sqrt{3}$.

Використовувати властивості 1–4 при перетворенні виразів з коренями слід дуже обережно, обов'язково перевіряючи виконання умов, за яких вони справджуються. У супротивному випадку можна одержати неправильний результат. Наприклад $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt{a}$ лише при $a\ge0$. При від'ємних значеннях a ця рівність є неправильною. Щоб переконатись у цьому, підставте, наприклад, $a=-1$, і подивіться, якого вигляду набуде права частина рівності.

Якщо $a<0$, то для застосування властивості 4 необхідно спочатку перетворити корінь: $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt[4]{(-a)^2}$. Оскільки $-a>0$, то до останнього кореня можна застосувати властивість 4: $\sqrt[4]{a^2} =$ $= \sqrt[4]{(-a)^2} = \sqrt{-a}$.

Приклад 11. Винести множник з-під знака арифметичного кореня: 1) $\sqrt[4]{6a^{13}b^6}$ $(a > 0, b > 0)$; 2) $\sqrt[4]{6a^{13}b^6}$ $(a > 0, b < 0)$.

□ 1) $\sqrt[4]{6a^{13}b^6} = \sqrt[4]{6a^{12} \cdot a \cdot b^4 \cdot b^2} = \sqrt[4]{a^{12}} \cdot \sqrt[4]{b^4} \cdot \sqrt[4]{6ab^2} = |a|^3 |b| \sqrt[4]{6ab^2} =$ $= a^3 b \sqrt[4]{6ab^2}$, оскільки $a > 0, b > 0$.

2) $\sqrt[4]{6a^{13}b^6} = \sqrt[4]{a^{12}} \cdot \sqrt[4]{b^4} \cdot \sqrt[4]{6ab^2} = |a|^3 |b| \sqrt[4]{6ab^2} = -a^3 b \sqrt[4]{6ab^2}$, оскільки $a > 0, b < 0$. ■

Відповідь. 1) $a^3 b \sqrt[4]{6ab^2}$; 2) $-a^3 b \sqrt[4]{6ab^2}$.

Приклад 12. У виразі $b\sqrt[4]{a}$ внести множник під знак кореня, якщо $b < 0$.

□ Оскільки $b < 0$ і $|b| = \sqrt[4]{b^4}$, то $-b = \sqrt[4]{b^4}$. Таким чином, $b\sqrt[4]{a} =$ $= -\sqrt[4]{b^4} \cdot \sqrt[4]{a} = -\sqrt[4]{b^4 a}$, згідно із властивістю 2. ■

Відповідь. $-\sqrt[4]{b^4 a}$.

✓ Контрольні запитання

1°. Які з наступних чисел є арифметичними коренями відповідного степеня:

а) $\sqrt[3]{-25}$; б) $\sqrt[5]{25}$; в) $\sqrt[4]{23}$; г) $\sqrt[4]{(-7)^2}$?

2°. Як записати корінь n-го степеня з від'ємного числа через арифметичний корінь того самого степеня:

а) $\sqrt[3]{-15}$; б) $\sqrt[5]{-37}$; в) $\sqrt[7]{-23}$; г) $\sqrt[9]{-7}$?

3. Чому дорівнює значення виразу:

а°) $\left(\sqrt[3]{-15}\right)^3$; б°) $\sqrt[4]{7^4}$; в) $\sqrt[5]{(-37)^5}$; г) $\sqrt[10]{(-5)^{10}}$?

4°. Чому дорівнює значення виразу:

а) $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 125}$; б) $\sqrt[3]{1000 \cdot \frac{1}{27} \cdot 64}$; в) $\sqrt[4]{16 \cdot 81 \cdot 10000}$;

г) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$; ґ) $\sqrt[3]{\frac{1000}{216}}$; д) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$; е) $\sqrt[4]{\frac{81}{0{,}0256}}$?

5°. До якого спільного показника слід звести корені при множенні або діленні:

а) $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[6]{3}$; б) $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[4]{3}$; в) $\sqrt[4]{2}$ і $\sqrt[6]{3}$; г) $\sqrt[10]{2}$ і $\sqrt[15]{3}$?

6. За яких значень букв, що входять до виразів, справджується рівність:

а) $\sqrt[4]{a^4}=a$; б) $\sqrt[4]{a^4}=-a$; в) $\sqrt[3]{a^3}=a$; г) $\sqrt{ab}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$?

7*. Чи правильною є рівність:

а) $\sqrt{a^3b}=a\sqrt{ab}$; б) $\sqrt[3]{a^4b}=a\sqrt[3]{ab}$; в) $\sqrt{a^3b^2}=ab\sqrt{a}$?

Задачі

82°. Вкажіть проміжки, на яких зростає і на яких спадає функція:

1) $y=x^3$; 2) $y=x^4$; 3) $y=-x^3$;
4) $y=-x^4$; 5) $y=(1-x)^6$; 6) $y=(x+2)^5$.

83. Дослідіть на парність і непарність функцію:

1°) $y=x^4+2$; 2°) $y=-x^5+2x^3-x$;
3°) $y=\dfrac{4x^5}{x-1}$; 4) $y=x^3+x^2+x+1$.

84. Побудуйте графік функції:

1°) $y=(x-2)^3$; 2°) $y=x^3-2$; 3) $y=(x-3)^4+2$.

85. Скільки розв'язків має рівняння:

1°) $x^3=3-x$; 2°) $\sqrt{x}=x^4$; 3°) $x^5+1=\dfrac{1}{x}$; 4) $x^3=|x|$?

86. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3=64$; 2) $x^3=-64$; 3) $x^4=625$; 4) $x^4=-625$.

87°. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}$; 2) $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}$; 3) $\sqrt[3]{-1\dfrac{91}{125}}$; 4) $\sqrt[3]{3^6\cdot4^9}$;
5) $\sqrt[5]{\dfrac{7^{10}}{3^5}}$; 6) $\sqrt[3]{0{,}027\cdot3^6}$; 7) $\sqrt[4]{48\cdot27}$; 8) $\sqrt[5]{162\cdot48}$.

88°. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$; 2) $\sqrt[3]{\dfrac{64}{15}}$; 3) $\sqrt[4]{\dfrac{5}{81}}$; 4) $\sqrt[4]{\dfrac{625}{256}}$; 5) $\sqrt[5]{\dfrac{6}{a^5}}$.

89°. Обчисліть:

1) $\sqrt[3]{243}:\sqrt[3]{9}$; 2) $\sqrt[3]{256}:\sqrt[3]{4}$; 3) $\sqrt[3]{250}:\sqrt[3]{2}$; 4) $\sqrt[3]{48}:\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$.

90. Подайте вираз у вигляді кореня з деякого числа:

1°) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{5}}$; 2°) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{10}}$; 3°) $\sqrt[3]{\sqrt{4}}$; 4°) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{12}}$; 5) $\sqrt[3]{2\sqrt{5}}$; 6) $\sqrt[5]{4\sqrt[3]{3}}$.

91. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{x}-0{,}2=0$; 2) $\sqrt[8]{x}+3=0$; 3) $\sqrt[3]{x}-2=0$; 4) $\sqrt[3]{x}+3=0$.

92. Спростіть вираз:

1°) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}b^3}$; 2°) $\sqrt[5]{243d^{15}}$; 3) $\sqrt[4]{16a^4}, a>0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}c^4}, c<0$.

93. Скоротіть дріб:

1°) $\frac{7+\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1}$; 2°) $\frac{a-1}{\sqrt{a}+1}$; 3) $\frac{a-81b}{\sqrt{a}-9\sqrt{b}}$; 4) $\frac{8a-1}{4\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+1}$.

94. Винесіть множник з-під знака кореня:

1°) $\sqrt[3]{250}$; 2°) $\sqrt[4]{405}$; 3) $\sqrt[3]{54a^7}$; 4) $\sqrt[4]{32b^6}$;

5) $\sqrt[4]{5a^6}, a<0$; 6) $\sqrt[3]{m^8n^2}$; 7) $\sqrt[4]{16a^3b^{11}}$.

95. Внесіть множник під знак кореня:

1°) $-5\sqrt[5]{5}$; 2) $b\sqrt[6]{2}, b\le 0$; 3) $ab\sqrt[4]{2}, a\ge 0, b\le 0$; 4) $b\sqrt[4]{-b}$.

96. Спростіть вираз:

1°) $2\sqrt{5}-2\sqrt{45}+2\sqrt{20}$; 2°) $\sqrt[3]{40}+\sqrt[4]{162}-3\sqrt[4]{2}-2\sqrt[3]{5}$;

3°) $4\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{384}-\sqrt[3]{40}$; 4°) $\left(\sqrt{12}+\sqrt{75}+\sqrt{27}\right):\sqrt{15}$;

5) $\left(\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{8}+9\sqrt[3]{4}\right)$; 6) $\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}\right)$;

7) $\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)^2-4\sqrt{3}$; 8) $\left(7\sqrt{6\sqrt{6}}-6\sqrt[4]{216}\right)^4$.

97. Знайдіть область визначення функції:

1°) $y=\sqrt[4]{5x-15}$; 2°) $y=\sqrt[3]{x^2-1}$; 3°) $y=\sqrt{x^2-1}$; 4) $y=\sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}$.

98. Потік рідини через поперечний переріз труби обчислюється за формулою: $Q=\frac{\pi R^4}{8\eta}\cdot\frac{p_1-p_2}{l}$, де Q — потік, R — радіус труби, l — довжина труби, p_1-p_2 — різниця тисків на кінцях труби, η — в'язкість рідини. Виразіть радіус труби R через інші змінні.

99. Перший член геометричної прогресії дорівнює 2. Чому дорівнює її знаменник, якщо:

1) сьомий її член дорівнює 1458;

2) добуток її шести перших членів дорівнює 728;

3*) добуток її перших n членів дорівнює P_n?

Вправи для повторення

100. Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{3}{x+2}$; 2) $y=3\sqrt{x-2}$; 3) $y=x^5+2$; 4*) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

101. Знайдіть множини значень функцій, заданих у задачі 100.

102. В яких точках графіки функцій, перелічених у задачі 100, перетинають осі координат?

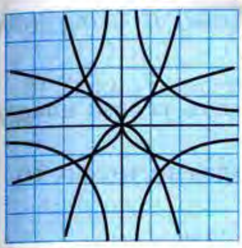
Підсумок

Основні поняття

Означення	Приклади	Застосування
Коренем n-го степеня ($n \in \mathbf{N}$, $n > 1$) з числа a називається число, n-ий степінь якого дорівнює a.	$\sqrt[3]{-27}=-3$ Корінь четвертого степеня з числа 81 дорівнює 3 або –3.	Операція добування кореня n-го степеня є оберненою для операції піднесення до n-го степеня.
Арифметичним коренем n-го степеня із невід'ємного числа a називають невід'ємне число, n-ий степінь якого дорівнює a.	$\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}=\dfrac{1}{2}$, $\sqrt[4]{81}=3$.	Поняття арифметичного кореня приводить до однозначності знаходження невід'ємного кореня з невід'ємного числа.

Головні твердження

Арифметичний корінь n-го степеня з добутку двох невід'ємних чисел дорівнює добутку арифметичних коренів n-го степеня з цих чисел.	$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, $a\ge 0$, $b\ge 0$.
Арифметичний корінь n-го степеня з дробу, чисельник якого невід'ємний, а знаменник — додатний, дорівнює арифметичному кореню n-го степеня із чисельника, поділеному на арифметичний корінь n-го степеня зі знаменника.	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a\ge 0$, $b>0$.
Якщо показник кореня і показник степеня підкореневого виразу помножити або поділити на те саме натуральне число, то значення кореня не зміниться.	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$, $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$, $a\ge 0$.



§6. Степеневі функції з раціональними показниками

У цьому параграфі розглядається степінь з дробовим показником. Це дає змогу досліджувати степеневі функції з довільними раціональними показниками, які знаходять широке застосування.

1. Степінь з раціональним показником та його властивості

Б

Із означення арифметичного кореня випливає, що коли m — ціле число, n — натуральне і m ділиться на n, то при $a > 0$ справджується рівність: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Наприклад, $\sqrt[5]{3^{35}} = 3^7$, бо $\left(3^7\right)^5 = 3^{35}$. З іншого боку, $3^7 = 3^{\frac{35}{5}}$. Отже, $\sqrt[5]{3^{35}} = 3^{\frac{35}{5}}$.

Цілком природним є бажання формулу $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ взяти за означення степеня з раціональним показником, тобто для довільних цілих m і натуральних $n > 1$.

Степенем додатного числа a з раціональним показником $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, n — натуральне, більше від одиниці, називається число $\sqrt[n]{a^m}$.

Позначення степеня додатного числа a з раціональним показником $\frac{m}{n}$ звичайне: $a^{\frac{m}{n}}$. За означенням, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Так, $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$; $27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^2}} = \frac{1}{9}$.

! **Умова $a > 0$ викликана тим, що степені з раціональними показниками визначені за допомогою операції добування кореня, яка не завжди виконується для від'ємних чисел.**

Степінь з основою, що дорівнює нулю, визначається лише для додатного дробового показника. За означенням, $0^{\frac{m}{n}}=0$, де m, $n \in \mathbf{N}$: $0^{\frac{2}{3}}=0^{0,5}=0$.

Степені з раціональними показниками мають ті самі властивості, що й степені з цілими показниками.

Якщо p і q — раціональні числа і a — додатне число, то справджуються співвідношення:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \text{ (властивість 1);}$$

$$a^p : a^q = a^{p-q} \text{ (властивість 2);}$$

$$\left(a^p\right)^q = a^{pq} \text{ (властивість 3).}$$

Якщо p — раціональне число, a і b — додатні числа, то справджуються співвідношення:

$$(ab)^p = a^p \cdot b^p \text{ (властивість 4);}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \text{ (властивість 5).}$$

Із властивості 1 випливає, що для $a>0$ і $p \in \mathbf{Q}$ виконується рівність:

$$a^{-p}=\frac{1}{a^p}.$$

Справді, $a^p \cdot a^{-p}=a^{p+(-p)}=a^0=1$.

Із властивості 3 випливає, що для $a>0$, $p \in \mathbf{Q}$, $n \in \mathbf{N}$, $n>1$ виконується рівність:

$$\sqrt[n]{a^p}=a^{\frac{p}{n}}.$$

За допомогою вказаних властивостей здійснюють обчислення і перетворення виразів, які містять степені з раціональними показниками.

Наприклад, $81^{\frac{3}{4}}:81^{\frac{4}{5}}=81^{\frac{3}{4}-\frac{4}{5}}=81^{-\frac{1}{20}}=\left(3^4\right)^{-\frac{1}{20}}=3^{-\frac{1}{5}}=\frac{1}{3^{\frac{1}{5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$.

Приклад 1. Обчислити:

1) $\sqrt[4]{250}\cdot 5^{\frac{1}{4}}:2^{-\frac{3}{4}}$; 2) $\dfrac{12^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{1}{3}}}{9^{\frac{1}{3}}}$; 3) $\left(1+2^{0,5}\right)^2-2^{1,5}$.

□ 1) Скористаємось означенням степеня з дробовим показником і властивостями 1 і 2:

$$\sqrt[4]{250}\cdot 5^{\frac{1}{4}} : 2^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2\cdot 5^3}\cdot 5^{\frac{1}{4}} : 2^{-\frac{3}{4}} = \frac{2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{3}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}}{2^{-\frac{3}{4}}} = 2^{\frac{1}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)}\cdot 5^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 2^1\cdot 5^1 = 10.$$

2) Згідно із властивостями 4 і 5 степеня з дробовим показником:

$$\frac{12^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{1}{3}}}{9^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{12\cdot 6}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2.$$

3) Скориставшись формулою квадрата суми двох виразів і властивостями 1 і 3 степеня з дробовим показником, одержимо:

$$\left(1+2^{0,5}\right)^2 - 2^{1,5} = 1+2\cdot 2^{0,5} + \left(2^{0,5}\right)^2 - 2^{1,5} = 1 + 2^{1+0,5} + 2^{2\cdot 0,5} - 2^{1,5} =$$

$$1 + 2^{1,5} + 2 - 2^{1,5} = 3.$$ ■

Відповідь. 1) 10; 2) 2; 3) 3.

Обчислення степенів із раціональними показниками зручно виконувати за допомогою калькулятора.

Приклад 2. Населення міста нараховує 225 тисяч мешканців і зростає щорічно на 3% у порівнянні з попереднім роком. Яким стане населення міста через 5 років?

□ Населення міста щорічно збільшується в 1,03 рази, і через рік воно нараховуватиме $225\cdot 1,03$ тисяч чоловік. За наступний рік воно знову збільшиться в 1,03 рази і дорівнюватиме $225\cdot 1,03\cdot 1,03 = 225\cdot(1,03)^2$ тисяч чоловік. Міркуючи аналогічно, дістанемо, що населення міста через 5 років збільшиться до $225\cdot(1,03)^5 \approx 261$ тисячі чоловік. Для обчислень ми скористались калькулятором. ■

Відповідь. ≈ 261 тис.

Приклад 3. Швидкість проникнення води у ґрунт обчислюється за допомогою експериментально встановленої формули:

$$v = 15 + 5t^{-\frac{1}{2}},$$

де v — швидкість проникнення води у ґрунт, мм/год; t — час, год. Знайдіть значення v при $t = 0,1$; 0,2; 0,5; 1,0; 2,0; 5,0.

□ Для обчислень можна скористатися калькулятором. В результаті дістанемо:

t	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0
v	30,8	26,2	22,1	20,0	18,5	17,3

■

✓ Контрольні запитання

1. Як подати степінь з дробовим показником у вигляді кореня:
а) $5^{\frac{3}{4}}$; $7^{\frac{3}{2}}$; $4^{-\frac{2}{3}}$; $3^{0,5}$; $10^{-0,2}$; б) $a^{\frac{2}{3}}$; $b^{-\frac{5}{2}}$; $c^{0,8}$; $d^{-1,4}$; $m^{1\frac{2}{5}}$?

2. Як записати у вигляді степеня з раціональним показником вираз:
а) $\sqrt[4]{7^3}$; б) $\sqrt[6]{3^2}$; в) $\sqrt[3]{0,1}$; г) $\sqrt[7]{a^3}, a \geq 0$; ґ) $\sqrt[4]{a^{-3}}$?

3°. Які з виразів не мають змісту:
а) 0^3; б) 3^0; в) $(-3)^0$; г) $(-3)^{\frac{1}{5}}$; ґ) $\sqrt[4]{(-2)^2}$?

4°. Як подати у вигляді степеня вираз:
а) $a^{\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$; б) $a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{3}{4}}$; в) $\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$; г) $a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$?

5. При яких значеннях x має зміст вираз:
а) $\sqrt[3]{x}$; б) $\sqrt{x}$; в) $x^{\frac{1}{3}}$; г) $x^{-\frac{1}{3}}$; ґ) x^{-3}; д) $\sqrt[4]{x^{-3}}$?

6. Як обчислити значення $157^{\frac{1}{4}}$ на калькуляторі, який виконує тільки чотири арифметичні дії і добування квадратного кореня?

2. Властивості і графіки степеневих функцій з раціональними показниками

Б Властивості і графіки степеневих функцій $y = x^{\alpha}$, де α — деяке раціональне число, залежать від значень показника степеня α. У § 5 розглядались властивості і графіки степеневих функцій з натуральними показниками. Розглянемо тепер степеневі функції з цілими від'ємними показниками, тобто функції виду $y = x^{-1}$, $y = x^{-2}$, $y = x^{-3}$, $y = x^{-4}$ і т. д. Спочатку дослідимо функції з непарними від'ємними показниками $y = x^{-1}$, $y = x^{-3}$, $y = x^{-5}$, … .

Функція $y = x^{-1}$, або $y = \frac{1}{x}$, вже вивчалась раніше (див. § 3). Вона визначена для всіх x, крім 0, є непарною, спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Її графіком є гіпербола (див. рис. 67).

Функції $y = x^{-3}$, $y = x^{-5}$, ... мають аналогічні властивості, їхні графіки мають вигляд, подібний до графіка функції $y = \frac{1}{x}$.

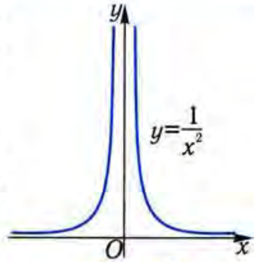


Рис. 96

Тепер розглянемо степеневі функції з парними від'ємними показниками, тобто функції виду $y = x^{-2}$, $y = x^{-4}$, ... Функція $y = x^{-2}$, або $y = \frac{1}{x^2}$, визначена для всіх x, крім 0. Вона є парною, оскільки $y(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = y(x)$. Функція набуває додатних значень, тобто її графік лежить у верхній півплощині. Графік функції не перетинає вісь ординат, бо при $x = 0$ функція не визначена. Якщо аргумент набуває додатних значень і зростає, то знаменник дробу $\frac{1}{x^2}$ зростає, а сам дріб спадає. Отже, функція $y = x^{-2}$ спадає на проміжку $(0; +\infty)$. Оскільки ця функція є парною, то вона зростає на проміжку $(-\infty; 0)$. Її графік зображено на рис. 96. Функції $y = x^{-4}$, $y = x^{-6}$, ... мають подібні властивості і графіки.

Приклад 4. Дано функцію $f(x) = (x-2)^{-2}$.

1) Вказати її область визначення.
2) Побудувати її графік.
3) Чи проходить графік цієї функції через точку $A\left(5; \frac{1}{9}\right)$?
4) Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
5) Скільки коренів має рівняння $f(x) = 7$?

□ 1) Функція $y = (x-2)^{-2} = \frac{1}{(x-2)^2}$ не визначена в точці $x = 2$, тобто її областю визначення є множина $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

2) Графік функції можна побудувати із графіка функції $y = \frac{1}{x^2}$ паралельним перенесенням останнього на 2 одиниці у додатному напрямі осі абсцис (рис. 97).

3) Щоб перевірити, чи проходить графік функції через точку $A\left(5; \frac{1}{9}\right)$, зна-

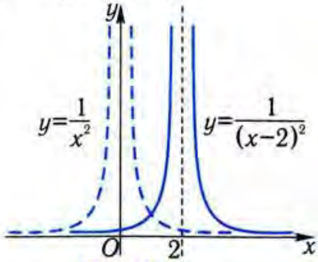


Рис. 97

йдемо значення функції в точці $x = 5$: $f(5) = (5-2)^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$. Отже, графік функції проходить через точку A.

4) Вісь абсцис графік не перетинає, оскільки дріб $\frac{1}{(x-2)^2}$ не дорівнює нулю при жодному значенні x. Щоб знайти точку перетину графіка з віссю y, знайдемо значення функції при $x = 0$: $f(0) = (0-2)^{-2} = (-2)^{-2} = \frac{1}{4}$. Отже, графік функції перетинає вісь y в точці з координатами $\left(0; \frac{1}{4}\right)$.

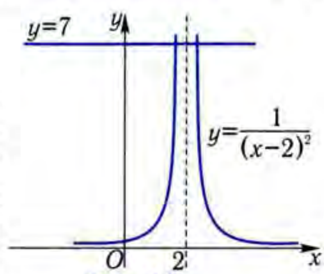


Рис. 98

5) Для відповіді на запитання потрібно встановити, у скількох точках функція набуває значення 7. Пряма $y = 7$ перетинає графік функції у двох точках (рис. 98). Відтак у двох точках функція набуває значення 7. Рівняння має два корені. ■

Вище вже відмічалося, що за допомогою степеневих функцій описуються різні процеси і явища. У деяких випадках показник степеня α не є цілим числом. Наприклад, період T коливання математичного маятника є пропорційним довжині маятника l у степені $\frac{1}{2}$, а саме: $T = 2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$, де g – прискорення вільного падіння. Якщо газ розширюється або стискається без теплообміну з навколишнім середовищем, то його тиск P і об'єм V пов'язані формулою: $V = \frac{C}{P^{\alpha}}$, де C — деяка стала. Зокрема, для повітря ця формула набуває вигляду: $V = \frac{C}{P^{-1,4}}$. Тому корисно знати властивості степеневих функцій $y = x^{\alpha}$, коли показник степеня α не є цілим числом.

Залежно від властивостей функції виділяють три випадки: $0 < \alpha < 1$, $\alpha > 1$ і $\alpha < 0$.

Нехай $0 < \alpha < 1$. Це, наприклад, функція $y = x^{\frac{1}{2}}$. За означенням степеня, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$. Властивості і графік функції $y = \sqrt{x}$ розглядались у молодших класах. Оскільки вирази $x^{\frac{1}{2}}$ і $\sqrt{x}$ визначені при тих самих значеннях x, а саме при $x \geq 0$, і набувають при однакових значеннях x однакових значень, то можна стверджувати, що функції $y = x^{\frac{1}{2}}$ і $y = \sqrt{x}$ є рівними. Тому функція $y = x^{\frac{1}{2}}$ має ті самі властивості, що і функція $y = \sqrt{x}$, а саме, вона:

1) визначена на проміжку $[0; +\infty)$;
2) набуває будь-яких невід'ємних значень;
3) має єдиний нуль $x = 0$;
4) зростає;
5) є неперервною.

Її графік проходить через точки з координатами (0; 0) і (1; 1) і має вигляд, як на рис. 99. Функції $y = x^{\alpha}$ з будь-яким показником $0 < \alpha < 1$ мають аналогічні властивості і подібні графіки.

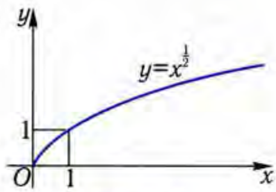


Рис. 99

Нехай $\alpha > 1$. Нагадаємо, що α не є цілим числом. Розглянемо, наприклад, функцію $y = x^{\frac{3}{2}}$. Згідно з означенням степеня, вона задана на проміжку $[0; +\infty)$. Розглядаючи таблицю значень функції, можна помітити, що більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Можна припустити, що функція є зростаючою. Це насправді є так, хоча доведення ми не наводимо у зв'язку з його складністю.

x	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9
y	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{8}$	1	8	27

Графік функції проходить через точки з координатами (0; 0) і (1; 1) і має вигляд, як на рис. 100. Такі самі властивості і подібний графік мають усі степеневі функції з показником, більшим від 1, і таким, що не є цілим числом.

І, нарешті, типовий графік степеневої функції з від'ємним показником, який не є цілим числом, зображено на рис. 101. Опишіть за графіком основні властивості цих функцій.

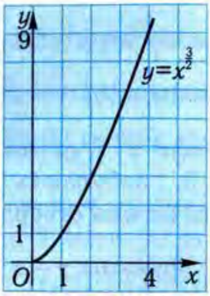


Рис. 100

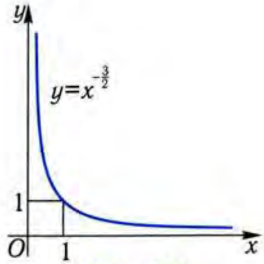


Рис. 101

Приклад 5. Дано функцію $y = (x-2)^{1,4}$.

1) Вказати її область визначення.
2) Побудувати її графік.
3) Визначити кількість коренів рівняння $(x-2)^{1,4} = x^{-0,4}$.

□ 1) Область визначення функції знаходиться з нерівності $x - 2 \geq 0$, тобто $D(y) = [2; +\infty)$.

2) Графік даної функції можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y = x^{1,4}$ на 2 одиниці у додатному напрямі осі x (рис. 102).

3) Побудуємо на одному рисунку графіки функцій $y = (x-2)^{1,4}$ і $y = x^{-0,4}$ (рис. 103). Графіки мають одну спільну точку, рівняння має один корінь. ■

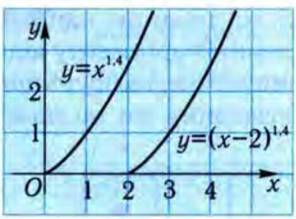


Рис. 102

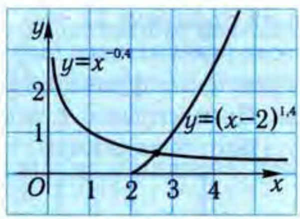


Рис. 103

Приклад 6. Залежність максимальної інтенсивності опадів від їхньої тривалості в деякій місцевості описана за допомогою формули:

$$I = 13{,}1 \cdot t^{-0{,}56},$$

де I — максимальна інтенсивність опадів, мм/год; t — тривалість опадів, год. Знайти:

1) максимальну інтенсивність опадів при їхній тривалості: 0,5 год; 1 год; 2 год;
2) при якій тривалості опадів максимальна інтенсивність дорівнюватиме 3,6 мм/год;
3) при якій тривалості опадів вища максимальна інтенсивність: при $t_1 = \frac{2}{3}$ год чи при $t_2 = \frac{3}{4}$ год.

☐ 1) $I(0{,}5) = 13{,}1 \cdot 0{,}5^{-0{,}56} \approx 19{,}3$; $I(1) = 13{,}1 \cdot 1^{-0{,}56} = 13{,}1$; $I(2) = 13{,}1 \cdot 2^{-0{,}56} \approx 8{,}89$.

2) Запишемо рівняння, яке необхідно розв'язати для відповіді на запитання: $13{,}1t^{-0{,}56} = 3{,}6$. Знайдемо значення виразу з лівої частини, який містить невідому величину: $\frac{13{,}1}{t^{0{,}56}} = 3{,}6$; $t^{0{,}56} = \frac{13{,}1}{3{,}6} \approx 3{,}64$; $t^{\frac{14}{25}} \approx 3{,}64$. Оскільки $\left(t^{\frac{14}{25}}\right)^{\frac{25}{14}} = t^{\frac{14}{25} \cdot \frac{25}{14}} = t$, обидві частини останньої рівності піднесемо до степеня $\frac{25}{14}$: $t \approx (3{,}64)^{\frac{25}{14}} \approx 10{,}0$. Отже, тривалість опадів становить приблизно 10 год.

3) Оскільки функція $y = x^p$ спадна при $p < 0$ і $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$, то $I\left(\frac{2}{3}\right) > I\left(\frac{3}{4}\right)$. ■

Відповідь. 1) $\approx 19{,}3$; $13{,}1$; $\approx 8{,}89$; 2) ≈ 10 год.; 3) при $t = \frac{2}{3}$ інтенсивність вища.

✓ Контрольні запитання

1°. Які з наведених функцій невизначені при $x = 0$ і є парними:
а) $y = x^{-3}$; б) $y = x^2$; в) $y = x^{-2}$; г) $y = \sqrt{x}$; ґ) $y = |x|$?

2°. Які з наведених функцій зростають на проміжку $(0; +\infty)$:
а) $y = x^{-5}$; б) $y = x^{-4}$; в) $y = x^3$; г) $y = x^2$; ґ) $y = -\frac{1}{x}$?

3°. На якому з рис. 104, а)–г) зображено графік функції:
а) $y = (x+1)^{-3}$; б) $y = x^{-6} + 1$?

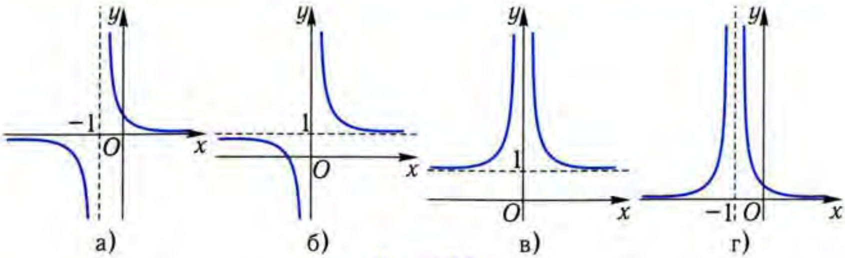


Рис. 104

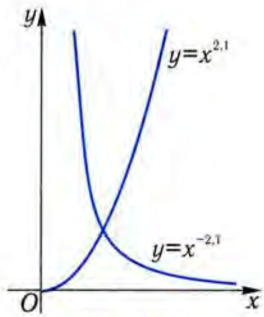


Рис. 105

4. На рис. 105 зображено графіки функцій $f(x) = x^{2,1}$ і $g(x) = x^{-2,1}$. Скільки коренів має рівняння $f(x) = g(x)$?

5°. Яке з чисел більше:

а) $(-15)^{-4}$ чи $(-12)^{-4}$;

б) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-3}$ чи $\left(\frac{6}{5}\right)^{-3}$;

в) $\left(\frac{5}{6}\right)^{3}$ чи $\left(\frac{6}{5}\right)^{3}$?

6. Чи перетинає графік функції $y = x^{\frac{3}{4}}$ пряма:

а) $y = 0$; б) $y = 1$; в) $y = -1$; г) $x = 0$; ґ) $x = 1$; д) $x = -1$?

7. Чи перетинає графік функції $y = x^{-\frac{3}{2}}$ пряма:

а) $y = 0$; б) $y = 1$; в) $y = -1$; г) $x = 0$; ґ) $x = 1$; д) $x = -1$?

8. Яких з наступних значень може набувати функція $y = x^{\frac{3}{5}}$: 0; 100; –2?

9. Яке з чисел більше:

а) $\left(\frac{7}{8}\right)^{2,5}$ чи $\left(\frac{7}{9}\right)^{2,5}$; б) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2,5}$ чи $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2,5}$;

в) $(0,292)^{-0,5}$ чи $(0,293)^{-0,5}$?

10. Чи є функція $y = x^p$ зростаючою, або ж спадною, якщо:

а) $p = 1,6$; б) $p = 0,9$; в) $p = -0,7$?

11. Скільки розв'язків має рівняння:

а) $x^{\frac{5}{3}} = x^{-\frac{3}{4}}$; б) $x^{\frac{2}{3}} = x^{-\frac{7}{5}}$?

12. Якою є множина значень функції:

а) $y = x^{\frac{5}{3}}$; б) $y = x^{-\frac{3}{4}}$; в) $y = x^{\frac{2}{3}}$; г) $y = x^{-\frac{7}{5}}$?

Задачі

103°. Обчисліть без використання обчислювальних засобів:

1) $81^{\frac{3}{4}}$; 2) $32^{\frac{3}{5}}$; 3) $16^{0,25}\cdot 0,125^{-3}$;

4) $5^{-\frac{3}{4}}:5^{-0,25}$; 5) $\left(2^{-\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$.

104. Зобразіть у вигляді степеня:

1°) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$; 2°) $y^{-0,2}:y^{0,4}$; 3°) $\left(x^{-1\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}$; 4°) $\left(\sqrt[5]{a^3}\right)^{15}$;

5) $\left(b^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{9}}\cdot b^{\frac{7}{12}}$; 6) $a^{\frac{5}{6}}:\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{8}}$; 7) $\left(\sqrt[11]{b^6}\right)^{0}\cdot\left(\sqrt[6]{b^5}\right)^{-3}\cdot b^{\frac{1}{2}}$.

105. Спростіть вираз:

1°) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{-\frac{1}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right)}{1-a}$; 2°) $\left(x^{\frac{3}{2}}-1\right)\left(x^{\frac{3}{2}}+1\right)+1$;

3°) $\dfrac{4a-b}{2a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$; 4) $a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\right)$;

5) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$; 6) $\left(c^{-\frac{3}{7}}y^{-0.4}\right)^{3}\cdot c^{\frac{2}{7}}\cdot y^{0,2}$.

106. Обчисліть за допомогою калькулятора:

1) $3^{0,082}$; 2) $2,19^{\frac{3}{7}}$; 3) $0,67^{1,83}$; 4) $15,7^{\frac{1}{5}}$; 5) $\sqrt[3]{8,345}$.

---

107. Чи проходить графік функції $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ через точку з координатами:

1) (8; 4); 2) (4; 8); 3) $\left(2\sqrt{2};\,2\right)$; 4) $\left(2;\,2\sqrt{2}\right)$?

108. Знайдіть точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з осями координат, якщо:

1°) $y=(x+2)^{-1}$; 2°) $y=x^{-5}-1$; 3) $f(x)=(x-1)^{\frac{4}{3}}$;

4) $f(x)=(x+2)^{\frac{4}{3}}$; 5) $f(x)=(x+1)^{-\frac{4}{3}}$; 6) $f(x)=(x-2)^{-\frac{4}{3}}$.

109. Знайдіть область визначення функції:

1°) $y = (x-3)^5$; 2°) $y = (x-3)^{-5}$; 3) $y=(x+3)^{\frac{1}{5}}$;

4) $y=(x+3)^{-\frac{1}{5}}$; 5) $y=(3-x)^{-\frac{1}{4}}$; 6) $y=(5-x)^{\frac{7}{5}}$.

110. Дано функцію $y=x^{\frac{1}{3}}$.

1) Знайдіть значення функції в точках $x_1=\frac{27}{8}$, $x_2=(0,5)^{-3}$.

2) Чи проходить графік функції через точку $A\left(16;2\sqrt[3]{2}\right)$; точку $B\left(5^{-3};5\right)$; точку $C\left(5^{-3};5^{-1}\right)$?

3) Чи набуває функція значення 2; –2; 0?

4) Побудуйте графік функції і по ньому опишіть її головні властивості. Вкажіть область визначення і множину значень. Чи є функція монотонною, парною, непарною, неперервною?

5) Скільки коренів має рівняння $x^{1/3}=-1$; $x^{1/3}=3$; $x^{1/3}=2-x$?

6) Порівняйте числа $\sqrt[3]{0,5}$ і $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$.

7) Вкажіть найбільше значення функції на проміжку [8; 27].

111. Побудуйте схематично графік функції:

1°) $y=(x+1)^{-2}$; 2°) $y=x^{-3}+1$; 3°) $y=2x^{-1}+2$; 4) $y=x^{-4}-2$;

5°) $y=x^{\frac{3}{2}}$; 6°) $y=x^{-\frac{3}{2}}$; 7°) $y=x^{0,1}$; 8) $y=(x+1)^{\frac{5}{3}}$;

9) $y=x^{-\frac{3}{4}}-2$; 10) $y=(x-2)^{\frac{2}{3}}$; 11) $y=x^{-\frac{7}{5}}+1$.

112. Розмістіть за зростанням числа:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{0,6}, \left(\frac{1}{5}\right)^{0,6}, \left(\frac{2}{5}\right)^{0,6}$; 2) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-\frac{1}{7}}, \left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{1}{7}}, 1$.

113. Скільки коренів має рівняння:

1) $x^2+1=x^{-0,2}$; 2) $x^3=(x+1)^{\frac{1}{2}}$; 3*) $x^{\frac{1}{6}}\cdot x^{-\frac{5}{6}}=2x+3$?

114. Знайдіть степеневу функцію $y=ax^{\frac{1}{5}}$, якщо її графік проходить через точку $A(32; 1)$. На одному рисунку зобразіть графік знайденої функції і графік функції $y=x^{\frac{1}{5}}$.

115. Дано функцію $y=\sqrt[3]{x}$.

1) Вкажіть її область визначення.

2) Дослідіть її на парність і непарність.

3) Побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = x^{\frac{1}{3}}$.

116. Швидкість різання і стійкість різця пов'язані залежністю: $V = \frac{350}{T^{0,2}}$, де V — швидкість різання, м/хв; T — стійкість різця (час між двома переточками), хв.

1) Знайдіть швидкість різання при $T = 40$ хв.

2) Якою буде стійкість різця при швидкості різання 400 м/хв?

3*) Знайдіть залежність стійкості різця від швидкості різання.

4*) Чи існує оптимальна швидкість різання, тобто швидкість, для якої стійкість різця найбільша?

117. Об'єм куба дорівнює V. Користуючись степенем з дробовим показником, виразіть через об'єм V:

1) довжину ребра куба;

2*) площу S грані куба;

3*) площу поверхні P куба.

Підсумок

Основне поняття

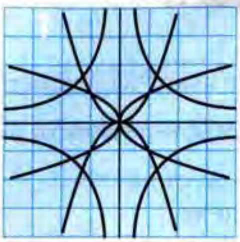
Означення	Геометрична інтерпретація, приклади	Застосування
Степенем додатного числа a з раціональним показником $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, n — натуральне, більше від одиниці, називається число $\sqrt[n]{a^m}$.	$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2;$ $27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^2}} = \frac{1}{9}.$	Узагальнення поняття степеня дає можливість розширити запас функцій для моделювання реальних процесів.

Головні твердження

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q},\ a > 0. \qquad a^p : a^q = a^{p-q},\ a > 0.$$

$$\left(a^p\right)^q = a^{pq},\ a > 0. \qquad (ab)^p = a^p \cdot b^p.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p},\ a > 0,\ b > 0.$$



Готуємось до тематичного оцінювання з теми «Функції, їхні властивості та графіки»

Завдання для самоконтролю

1°. Відомо, що крива проходить через точки $A(1;\ 0)$ і $B(1;\ 1)$. Чи може ця крива бути графіком деякої функції?

2°. Чи проходить графік функції $y=\sqrt{x}$ через точку з координатами $(4;\ -2)$?

3°. Якими є точки перетину графіка функції $y=\dfrac{x-1}{3x+2}$ з осями координат?

4. Якою є область визначення функції:

а°) $y=\dfrac{x+2}{x^2+1}$; б°) $y=\dfrac{x+2}{x^2-1}$; в) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$?

5°. Яка з наступних функцій є парною (непарною):

а) $y=x^2+x$; б) $y=x^2-1$;
в) $y=x^3+1$; г) $y=x^3+x$?

6. На рис. 106 зображено графік функції $y=f(x)$.

а°) Якою є область її визначення?
б°) Чи є функція парною? Непарною?
в°) Скільки нулів має функція?
г°) За яких значень x функція набуває додатних (від'ємних) значень?
ґ) Чому дорівнює сума довжин усіх проміжків спадання функції?
д°) Якою є множина значень функції?
е°) Чому дорівнює найбільше (найменше) значення функції?
є) Скільки коренів має рівняння $f(x)=1$?

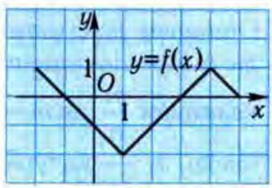


Рис. 106

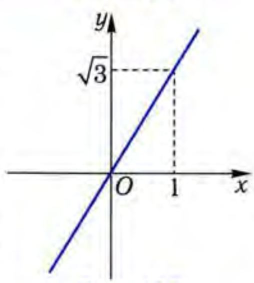
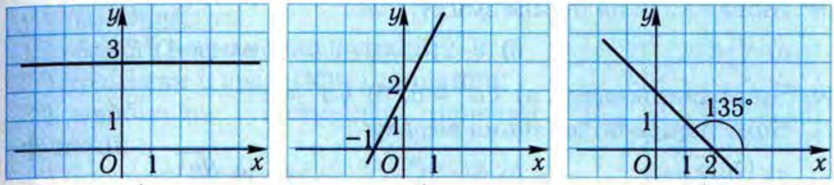


Рис. 107

7. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт прямої, зображеної на рис. 107?

8. Яким є рівняння прямої, зображеної на: а°) рис. 108, а); б°) рис. 108, б); в) рис. 108, в)?



а) б) в)

Рис. 108

9°. Зростає чи спадає лінійна функція $y = -2(1 - 3x)$?

10°. Скільки нулів має функція:

а) $y = 0{,}5x^2 - x + 1$; б) $y = 0{,}5x^2 + x - 1$; в) $y = 0{,}5x^2 - 2x + 2$?

11°. Якими є координати вершини параболи:

а) $y = -(x + 2)^2$; б) $y = x^2 - 4x + 3$?

12. Яким є найбільший проміжок, на якому зростає функція:

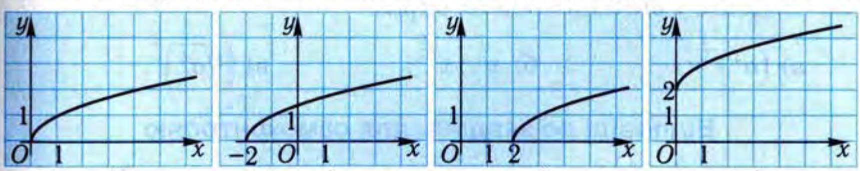
а) $y = 2x^2 - 3x + 4$; б) $y = -x^2 + 4x - 1$?

13. Яким є найменше значення функції $y = 2x^2 - 8x + 1$: а) в області її визначення; б) на проміжку $[0; 1]$?

14. Якою є множина значень функції:

а) $y = 3x^2 - 6x + 2$; б) $y = -3x^2 - 6x + 2$?

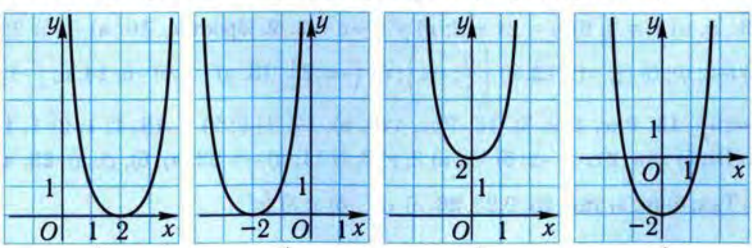
15°. На якому з рис. 109, а)–г) зображено графік функції $y = \sqrt{x + 2}$?



а) б) в) г)

Рис. 109

16°. На якому з рис. 110, а)–г) зображено графік функції $y = x^4 + 2$?



а) б) в) г)

Рис. 110

17°. Скільки коренів четвертого степеня має число: а) 3; б) –3?

18°. Скільки коренів п'ятого степеня має число: а) 3; б) –3?

19°. Який з виразів не має змісту:

а) $\sqrt[3]{-2}$; б) $\sqrt[4]{-2}$; в) $\sqrt[4]{(-1)^2}$?

20. Чи правильно, що: а) $\sqrt[4]{a^4}=a$; б) $\sqrt[3]{a^3}=a$?

21. Чому дорівнює значення виразу:

а) $\left(\sqrt[3]{-2}\right)^3$; б) $\sqrt[3]{(-2)^3}$; в) $\sqrt[4]{3^4}$;

г) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^4$; ґ) $\sqrt[3]{121}\cdot\sqrt[3]{11}$; д) $\left(-2\sqrt[5]{\frac{1}{4}}\right)^5$?

22. Які з наступних чисел є ірраціональними:

а) $\sqrt[3]{16}$; б) $\sqrt[3]{9}$; в) $\sqrt[3]{64}$; г) $\sqrt[4]{16}$; ґ) $\sqrt[4]{125}$; д) $\sqrt[4]{27}$?

23. Які з наступних функцій є спадними:

а) $y=x^{-\frac{5}{3}}$; б) $y=x^{-\frac{3}{5}}$; в) $y=x^{\frac{5}{3}}$; г) $y=x^{\frac{3}{5}}$?

24. Чи є правильною нерівність:

а) $(0,5)^{2,5}>(0,2)^{2,5}$; б) $(0,5)^{-2,5}>(0,2)^{-2,5}$; в) $(0,5)^{0,4}>(0,2)^{0,4}$?

25°. Обчисліть: $36^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$.

26. Подайте у вигляді степеня вираз:

а) $\left(a^4\right)^{-\frac{1}{2}}$; б) $x^{\frac{1}{3}}:x^{-\frac{2}{3}}$; в) $\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Відповіді до завдань для самоконтролю

1. Ні. **2.** Ні. **3.** $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$; $(1;0)$. **4.** а) R; б) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$; в) $1\le x\le 2$. **5.** Парна: б); непарна: г). **6.** а) $[-2; 5]$; б) ні парною, ні непарною; в) 3; г) $f(x)>0$ при $x\in(-2;-1)\cup(3;5)$; $f(x)<0$ при $x\in(-1;3)$; ґ) 4; д) $[-2; 1]$; е) 1 і –2; є) 2. **7.** $\sqrt{3}$. **8.** а) $y=3$; б) $y=2x+2$; в) $y=-x+2$. **9.** Зростає. **10.** а) 0; б) 2; в) 1. **11.** а) $(-2; 0)$; б) $(2; -1)$. **12.** а) $\left[\frac{3}{4};+\infty\right)$; б) $(-\infty;2]$. **13.** а) –7; б) –5. **14.** а) $[-1;+\infty)$; б) $(-\infty;5]$. **15.** Рис. 109, б). **16.** Рис. 110, в). **17.** 1) 2; 2) 0. **18.** 1) 1; 2) 1. **19.** б). **20.** а) Ні; б) так. **21.** а) –2; б) –2; в) 3; г) 3; ґ) 11; д) –8. **22.** а), б), ґ), д). **23.** а) і б). **24.** а) Так; б) ні; в) так. **25.** 0,25. **26.** а) a^{-2}; б) x; в) $|a|^{\frac{1}{5}}$.

Зразок контрольної роботи № 1

1. На рис. 111 зображено графік функції $y = f(x)$. Знайдіть:

1°) область визначення функції;

2°) проміжки її зростання і спадання;

3°) найбільше і найменше значення функції;

4°) множину її значень;

5°) кількість коренів рівняння $f(x) = 0{,}5$;

6) нулі функції $y = f(2x)$.

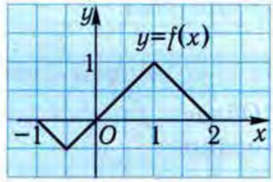


Рис. 111

2. Дано функцію $f(x) = (x-1)^{-3}$.

1°) Знайдіть область визначення функції.

2°) Яким є її значення в точці $x = \sqrt[3]{2} + 1$?

3°) Знайдіть точки перетину графіка функції з осями координат.

4°) Побудуйте її графік.

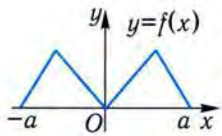
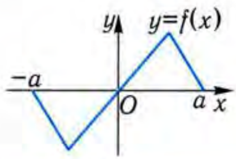
5) Скільки коренів має рівняння $f(x) = x^2$?

3. Обчисліть:

1°) $8^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^3$; 2) $\sqrt{1\frac{7}{9}} + \sqrt{\frac{2}{27}} \cdot \sqrt{6}$; 3) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[6]{16}$.

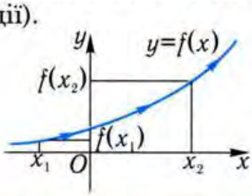
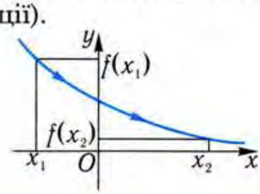
Найпростіші властивості функцій
Парні і непарні функції

Таблиця 8

Парні функції	Непарні функції
Область визначення функції симетрична відносно початку координат	
$f(-x) = f(x)$ для будь-якого x із області визначення функції.	$f(-x) = -f(x)$ для будь-якого x із області визначення функції.
Графік функції симетричний відносно осі y.  	Графік функції симетричний відносно початку координат. 

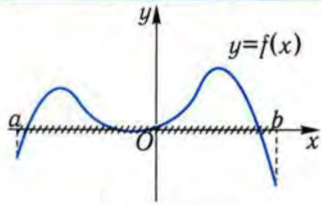
Монотонність функцій

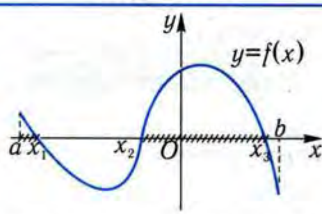
Таблиця 9

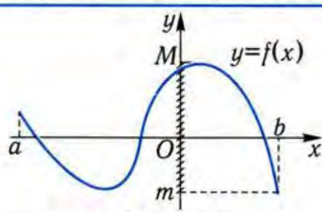
Монотонні функції	
Зростаюча	**Спадна**
Зростаюча функція: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ (більшому значенню аргументу із області визначення функції відповідає більше значення функції).  	***Спадна функція:*** $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$. (більшому значенню аргументу із області визначення функції відповідає менше значення функції). 

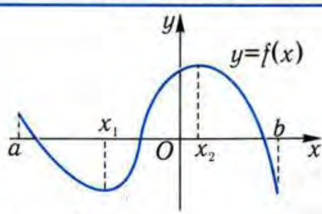
Читання графіка функції

Таблиця 10

<table>
<tr>
<td>Область визначення функції — проекція графіка на вісь x.</td>
<td>

$D(f) = [a; b]$</td>
</tr>
<tr>
<td>Нулі функції — абсциси точок перетину графіка функції з віссю x.
Проміжки знакосталості функції — проміжки, де функція набуває додатних або від'ємних значень.</td>
<td>

x_1, x_2, x_3 – нулі функції
$f(x) > 0$ $x \in [a; x_1) \cup (x_2; x_3)$
$f(x) < 0$ $x \in (x_1; x_2) \cup (x_3; b]$</td>
</tr>
<tr>
<td>Множина значень функції — проекція графіка на вісь y.</td>
<td>

$E(f) = [m; M]$</td>
</tr>
<tr>
<td>Проміжки монотонності функції.</td>
<td>

$f(x) \nearrow x \in [x_1, x_2]$
$f(x) \searrow x \in [a, x_1], x \in [x_2, b]$</td>
</tr>
</table>

Означення степеня

Таблиця 11

Степінь з натуральним показником	$n \in N, n > 1 \Rightarrow a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}} \cdot \Rightarrow a^1 = a.$
Степінь з нульовим показником	$a^0 = 1, a \neq 0.$
Степінь з цілим від'ємним показником	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, a \neq 0, \ n \in N$.
Степінь з дробовим показником	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \ a > 0, m \in Z, n \in N, n > 1.$

Властивості степеня з раціональним показником

Таблиця 12

Добуток степенів з однаковими основами	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, x, y \in Q, a > 0.$
Частка від ділення степенів з однаковими основами	$a^x : a^y = a^{x-y}, x, y \in Q, a > 0.$
Піднесення степеня до степеня	$\left(a^x\right)^y = a^{xy}, x, y \in Q, a > 0$.
Степінь добутку	$(ab)^x = a^x \cdot b^x, x \in Q, a, b > 0$.
Степінь частки	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}, x \in Q, a, b > 0$.

Арифметичний корінь *n*-го степеня та його властивості

Таблиця 13

Означення	$a \geq 0, n \in N, n > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} \geq 0, \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$
Арифметичний корінь з добутку	$a \geq 0, \ b \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$
Арифметичний корінь з дробу	$a \geq 0, \ b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$
Арифметичний корінь з арифметичного кореня	$a \geq 0, \ n, \ k \in N, \ n, \ k > 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$
Головна властивість арифметичного кореня	$a \geq 0, \ n, \ m, \ k \in N, \ n, \ m, \ k > 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}.$

Розділ 2.

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

Ми починаємо вивчення геометрії простору, або стереометрії (від грецьких «στερεοζ» — просторовий, «μετρεα» — вимірюю). Виникнувши з потреб практики, постійно розвиваючись, геометрія є однією з найважливіших математичних наук для описання навколишнього світу. Знання планіметрії, тобто геометрії площини, недостатньо для моделювання реальних об'єктів. Разом з тим, при вивченні стереометрії ми будемо спиратись на планіметрію, використовуючи її поняття, факти, методи. Так, метод побудови стереометрії — аксіоматичний — уже використовувався в планіметрії. Як і в планіметрії, основними об'єктами вивчення будуть геометричні фігури — ідеалізовані образи реальних фізичних об'єктів. Деякі з цих фігур (такі, як точка, пряма, трикутник тощо) вже вивчались у геометрії, хоча раніше вони розглядались на площині. З іншими «неплоскими» фігурами — такими, як куб, паралелепіпед, куля — ми зустрічались і в математиці, і в інших науках, і у практичній діяльності. Стереометрія вивчає властивості просторових фігур та відношення між ними.

У цьому розділі ми розглянемо варіанти взаємного розміщення прямих, прямої і площини, двох площин. Особлива увага буде приділена відношенню паралельності між прямими і площинами, яке має важливе теоретичне і прикладне значення.

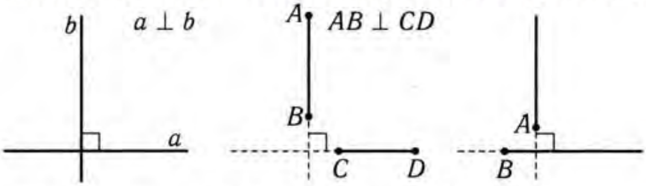
Будуть також розглянуті основні правила та закони зображення фігур, які дають змогу розпізнати просторову фігуру і виявити її властивості за рисунком.

Готуємось до вивчення теми «Паралельність прямих і площин»

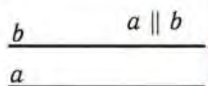
Таблиця 14

Паралельність і перпендикулярність прямих на площині

Дві прямі називаються ***перпендикулярними***, якщо вони перетинаються під прямим кутом. Відрізки, промені — перпендикулярні, якщо вони належать перпендикулярним прямим.

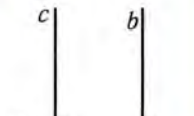


Дві прямі на площині, які не мають спільних точок, називаються ***паралельними***. Відповідно і промені, відрізки називаються паралельними, якщо вони лежать на паралельних прямих.



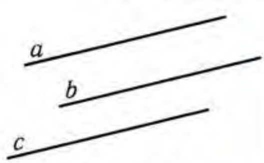
Ознаки паралельності прямих

Дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні між собою.



$a \perp b,\ a \perp c \Rightarrow b \parallel c$

Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою.



$a \parallel b,\ c \parallel b \Rightarrow a \parallel c$

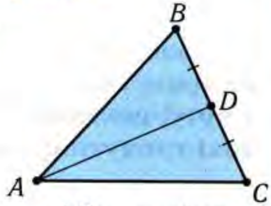
Таблиця 15

Трикутник, його елементи і види

Трикутником називається частина площини, обмежена трьома відрізками, які з'єднують три точки площини, що не лежать на одній прямій.

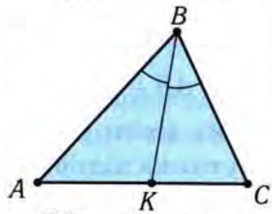
Найважливіші відрізки трикутника

Медіана трикутника — відрізок, який з'єднує вершину трикутника із серединою протилежної сторони.



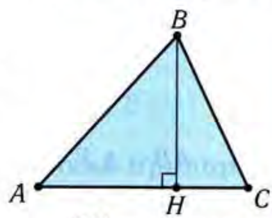
AD — медіана

Бісектриса трикутника — відрізок бісектриси кута (променя, що виходить з вершини кута і поділяє його навпіл) трикутника, який з'єднує вершину трикутника з точкою на протилежній стороні трикутника.



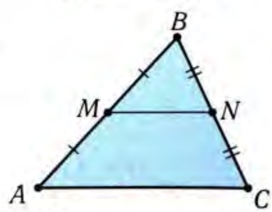
BK — бісектриса

Висота трикутника — перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, яка містить його протилежну сторону.



BH — висота

Середня лінія трикутника — відрізок, що з'єднує середини двох сторін трикутника.



MN — середня лінія

Таблиця 16

Рівність трикутників

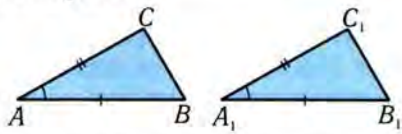
Трикутники називаються рівними між собою, якщо їх можна сумістити переміщенням (рухом).

Позначається рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ так:

$$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1.$$

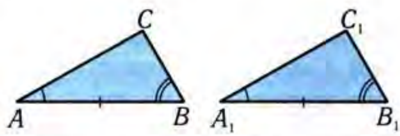
Ознаки рівності трикутників

1. **Якщо дві сторони і кут, що лежить між ними, одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту, що лежить між ними, другого трикутника, то такі трикутники рівні.**



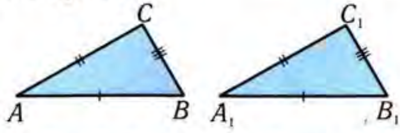
$$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1,\ \angle A = \angle A_1 \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$

2. **Якщо сторона і два прилеглі до неї кути одного трикутника відповідно дорівнюють стороні і двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.**



$$AB = A_1B_1,\ \angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1 \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$

3. **Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.**



$$AB = A_1B_1,\ BC = B_1C_1,\ AC = A_1C_1 \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$

Таблиця 17

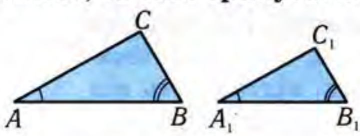
Подібність трикутників

Два трикутники називаються подібними, якщо в них відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні.

Позначається подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ так: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

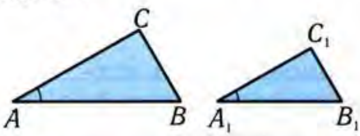
Ознаки подібності трикутників

1. Якщо два кути одного трикутника рівні двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.



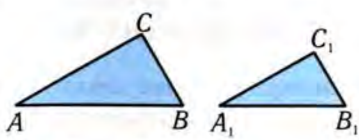
$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1 \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$$

2. Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого і кути між ними рівні, то такі трикутники подібні.



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1},\ \angle A = \angle A_1 \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$$

3. Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого, то такі трикутники подібні.



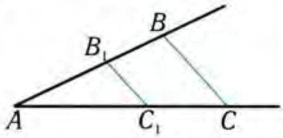
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$$

Таблиця 18

Пропорційні відрізки

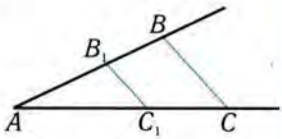
Теорема Фалеса.
Якщо на одній із двох прямих відкласти послідовно декілька рівних відрізків і через їхні кінці провести паралельні прямі, що перетинають другу пряму, то вони відтинають на другій прямій рівні між собою відрізки.

Теорема про пропорційні відрізки.
Паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають від сторін кута пропорційні відрізки.



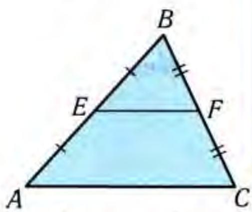
$$BC \parallel B_1C_1 \Rightarrow \frac{AC_1}{C_1C} = \frac{AB_1}{B_1B}$$

Теорема, обернена до теореми про пропорційні відрізки.
Якщо прямі, що перетинають сторони кута, відтинають від сторін кута пропорційні відрізки, то ці прямі — паралельні.



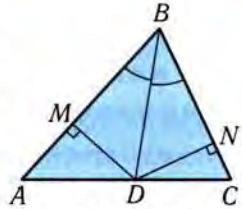
$$\frac{AC_1}{C_1C} = \frac{AB_1}{B_1B} \Rightarrow BC \parallel B_1C_1$$

Середня лінія трикутника паралельна одній із його сторін, а її довжина дорівнює половині довжини цієї сторони.



$$AE = \frac{1}{2}AB,\ CF = \frac{1}{2}BC \Rightarrow$$
$$\Rightarrow EF \parallel AC,\ EF = \frac{1}{2}AC$$

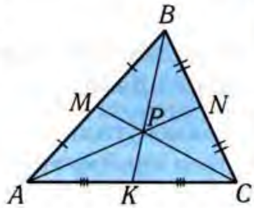
Бісектриса внутрішнього кута трикутника поділяє протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим сторонам, а її точки рівновіддалені від сторін кута.



$\angle ABD = \angle DBC \Rightarrow$

$\Rightarrow DM = DN,\ \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC}$

Медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка поділяє кожну медіану у відношенні 2:1, рахуючи від вершини.



$AM = MB,\ BN = NC,$

$CK = KA \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AP}{PN} = \dfrac{BP}{PK} = \dfrac{CP}{PM} = \dfrac{2}{1}$

Таблиця 19

Рівнобедрений трикутник

Трикутник називається рівнобедреним, якщо він має дві рівні сторони. Ці сторони називаються бічними, їхня спільна вершина — вершиною рівнобедреного трикутника, третя сторона — його основою.

Властивості

1. Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні між собою.

2. Медіана, бісектриса, висота, проведені з вершини рівнобедреного трикутника, збігаються.

3. Бісектриси кутів при основі рівнобедреного трикутника рівні між собою.

4. Медіани, проведені до рівних сторін рівнобедреного трикутника, рівні між собою.

5. Висоти, проведені до рівних сторін рівнобедреного трикутника, рівні між собою.

Таблиця 20

Геометрія чотирикутників

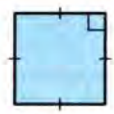
Означення

Паралелограмом називається чотирикутник, протилежні сторони якого паралельні.

Якщо в паралелограмі рівні суміжні сторони, то він називається ***ромбом***.

Паралелограм з прямими кутами називається ***прямокутником***.

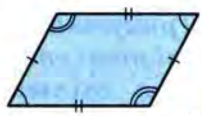
Прямокутник з рівними сторонами називається ***квадратом***.



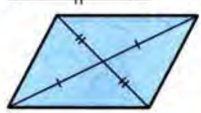
Трапецією називають чотирикутник, у якого тільки дві сторони (основи) є паралельними. Інші дві сторони називають бічними. Відрізок, що з'єднує середини бічних сторін, називають ***середньою лінією*** трапеції.

Властивості

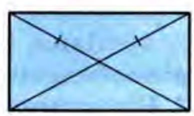
У паралелограма протилежні сторони рівні між собою, як рівними є і протилежні кути.



Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.



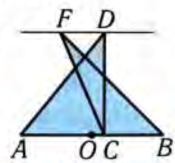
Діагоналі прямокутника рівні між собою.



Діагоналі ромба — перпендикулярні. Вони є бісектрисами кутів ромба.

Тест для діагностики готовності до вивчення теми "Паралельність прямих і площин"

1. Кути трикутника відносяться, як 2 : 3 : 5. Цей трикутник ...
   А. може бути будь-яким; **Б.** є гострокутним;
   В. є тупокутним; **Г.** є прямокутним.
2. Сторони трикутника виражаються різними цілими числами; одна сторона дорівнює 3 м, друга — 2 м. Третя сторона може дорівнювати ...
   А. 1 м; **Б.** 4 м; **В.** 5 м; **Г.** 2 м.
3. З однієї точки, яка розташована поза прямою, проведено до цієї прямої перпендикуляр завдовжки 8 см і похилу, проекція якої на пряму дорівнює 6 см. Довжина похилої дорівнює ...
   А. $\sqrt{28}$ см; **Б.** 9 см;
   В. 10 см; **Г.** величині, яка відрізняється від наведених.
4. У прямокутному трикутнику один із кутів дорівнює 60°, а гіпотенуза — 20 см. Чому дорівнює менший катет?
   А. $10\sqrt{3}$ см. **Б.** $8\sqrt{3}$ см. **В.** 10 см. **Г.** 8 см.
5. Точка O — середина відрізка AB, $FD \parallel AB$. Порівняйте площі трикутників ADC і FCB, які дорівнюють S і S_1 відповідно.
   А. $S < S_1$. **Б.** $S > S_1$. **В.** $S = S_1$.
   Г. Порівняти неможливо.



6. У рівнобедреному трикутнику висота, яка проведена до його основи, і бічна сторона дорівнюють, відповідно, 12 см і 13 см. Основа дорівнює ...
   А. 5 см; **Б.** 10 см; **В.** $\sqrt{313}$ см; **Г.** 2 см.
7. Тупий кут паралелограма дорівнює 140°. Кут між висотами паралелограма дорівнює ...
   А. 80°; **Б.** 20°; **В.** 40°; **Г.** 160°.
8. Площа паралелограма $ABCD$ дорівнює S, а M — середина сторони BC. Чому дорівнює площа трикутника ABM?
   А. $\frac{2}{3}S$. **Б.** $\frac{1}{2}S$. **В.** $\frac{3}{4}S$. **Г.** $\frac{1}{4}S$.

9. Бісектриса кута C в паралелограмі $ABCD$ поділяє сторону AB на відрізки 7 см і 14 см (рахуючи від вершини B). Периметр паралелограма дорівнює …
А. 56 см; **Б.** 70 см; **В.** 42 см; **Г.** 35 см.

10. Два нерівних відрізки точкою перетину діляться навпіл. Їхні кінці послідовно з'єднано. Отриманий чотирикутник є …
А. паралелограмом; **Б.** ромбом;
В. прямокутником; **Г.** квадратом.

11. Сторона ромба дорівнює 10 см, одна з діагоналей — 16 см. Друга діагональ дорівнює ...
А. 6 см; **Б.** $\sqrt{156}$ см; **В.** $\sqrt{356}$ см; **Г.** 12 см.

12. Через точку даного кола проведено діаметр і хорду, яка дорівнює радіусу. Кут між ними дорівнює ...
А. 30°; **Б.** 45°; **В.** 60°;
Г. величині, яка відрізняється від наведених.

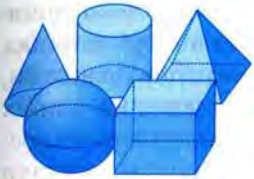
13. Через точку, яка лежить зовні кола, проведено до нього дві взаємно перпендикулярні дотичні. Довжини відрізків дотичних від даної точки до точок дотику дорівнюють 8 см. Радіус кола дорівнює …
А. $4\sqrt{2}$ см; **Б.** 8 см; **В.** 4 см;
Г. величині, яка відрізняється від наведених.

14. Найбільша і найменша відстані від точки поза колом до точок цього кола дорівнюють 8 см і 2 см. Радіус кола дорівнює ...
А. 3 см; **Б.** 6 см; **В.** 10 см; **Г.** 5 см.

15. Геометричне місце точок, рівновіддалених від вершин трикутника, є точкою перетину ...
А. висот трикутника;
Б. медіан трикутника;
В. бісектрис трикутника;
Г. серединних перпендикулярів до сторін трикутника.

16. Внутрішній діаметр труби дорівнює 80 мм, а товщина стінки — 4 мм. Зовнішній діаметр її дорівнює ...
А. 84 мм; **Б.** 88 мм; **В.** 76 мм; **Г.** 72 мм.

17. Бічна сторона і основа рівнобедреного трикутника не можуть бути пропорційними числам ...
А. 3 і 5; **Б.** 3 і 4; **В.** 2 і 3; **Г.** 1 і 2.



§7. Основні поняття й аксіоми стереометрії

Розглядаються основні фігури стереометрії, відношення між ними, їхні властивості.

Ви вже знайомі з одним із розділів геометрії — планіметрією. У ньому вивчаються властивості плоских геометричних фігур і відношень між ними. Але ми живемо у просторі, в якому — три виміри, на відміну від площини. Для його сприйняття і дослідження, для розв'язання життєвих задач знань планіметрії недостатньо. Знайомство з геометрією простору вкрай необхідно людині для її загального розвитку і професійного становлення.

Геометрія простору — це математична наука про просторові геометричні фігури і відношення між ними, а також про їхні властивості. Називають її стереометрією.

Геометрія *— грецьке* γηωμετρια *(geometria) — землевпорядкування (землеміряння), від* γῆ *(ge) або* γῆα *(gea) — земля і* μετρεω *(metreo) — міряю, вимірюю.*

Планіметрія *— від латинського planum — плоска поверхня, площина і грецького* μετρεω *— міряю, вимірюю.*

Стереометрія *— від грецьких* στερεος *(stereos) — просторовий і* μετρεω *— міряю, вимірюю.*

Виникнувши з практики, постійно звертаючись до неї в процесі свого розвитку, геометрія стала однією з найважливіших математичних наук для опису навколишнього світу. Основні «діючі особи» в геометрії — геометричні фігури. Вони є абстракціями об'єктів реального світу, в яких відображається лише їхня форма і розміри. Інакше кажучи, геометричні фігури є математичними моделями об'єктів навколишнього середовища. Так, наприклад, точку у просторі можна розглядати як математичну ідеалізацію реальних об'єктів — зірок на небі, сліду голки на папері, кінчика олівця тощо. Точка в геометрії не має звичних розмірів (довжини, ширини, висоти). Вона застосовується для моделювання різних фізичних тіл маленьких розмірів. Безумовно, маленьких відносно інших тіл (у деяких випадках футбольний м'яч можна вважати точкою, наприклад, на футбольному полі).

Один і той самий предмет може моделюватися різними фігурами в залежності від мети, якою ми при цьому керуємось. Наприклад, можна вважати, що кришка даного стола має форму прямокутного паралелепіпеда, якщо нам необхідно знайти її масу, користуючись густиною деревини. Але цю саму кришку можна уявляти у формі прямокутника, якщо нам необхідно придбати скатертину.

Геометричні фігури розрізняються за своїми властивостями, вони знаходяться у різних відношеннях між собою: належності, рівності, подібності, паралельності тощо.

Як і будь-яка наука, геометрія складається з понять і тверджень, в яких встановлюються зв'язки між поняттями. Нові математичні поняття визначають через уже відомі, а твердження доводять на основі раніше доведених. При цьому неминуче виникає запитання: «А з чого ж починається побудова математичної теорії?». Відповідь на це запитання знайдено давно. Ще Евклідом, який жив приблизно у III ст. до н.е., створено спеціальний метод розв'язання даної проблеми. Цей метод називають ***аксіоматичним***. Його сутність полягає в тому, що деякі основні поняття вважають неозначуваними, тобто такими, яким не даються означення. В той же час зміст цих понять відображають у твердженнях про ці поняття, які вважають істинними. Ці твердження називають ***аксіомами***. За яких причин визнається істинність цих тверджень, врешті несуттєво для побудови теорії, яку називають ***аксіоматичною теорією***. Як правило, ***«довіра» до аксіом викликана досвідом їхнього використання в практичній або науковій діяльності.***

Аксіома — *від грецького αξιωμα (axioma) — буквально гідність, повага, авторитет — у переносному розумінні означає те, що внаслідок свого авторитету не підлягає сумніву, незаперечне.*

Маючи вихідний набір первісних, неозначуваних понять, можна розпочинати побудову аксіоматичної теорії. Таким чином, аксіоматична побудова теорії здійснюється за такою схемою:

- ✓ перелічуються неозначувані поняття;
- ✓ формулюються аксіоми;
- ✓ визначаються нові поняття за допомогою неозначуваних і раніше означених;
- ✓ доводяться твердження на основі аксіом і раніше доведених тверджень.

Твердження, які доводять в аксіоматичній теорії, називають ***теоремами***. На практиці, для зручності роботи з ними, теоремам надають різних назв, які відображають сутність теорем або їхню роль: властивість, ознака, формула, лема, наслідок тощо.

Теорема *— від грецького* θεωρημα *(theorema), від* θεωρεω *(theoreo) — придивляюсь, спостерігаю — твердження, правдивість якого обґрунтовують за допомогою логічних міркувань, що спираються на аксіоми або на раніше доведені твердження, або на ті і другі.*

Корисно аксіоматичну побудову математичної теорії уявляти собі як деяку інтелектуальну гру, схожу, наприклад, з грою в шахи. Шахи як гра визначається вибором дошки, складом фігур і правилами гри. При цьому жодного значення не мають розміри дошки, форма фігур, їхня назва, а тим більше, з чого вони зроблені. До речі, в шахи можна грати, фіксуючи ходи на папері або в пам'яті комп'ютера. Безглуздо говорити про означення пішака чи короля самих по собі. Їхня сутність виявляється в діях по відношенню до інших фігур. Приблизно так само сутність неозначуваних понять в аксіоматичній теорії виявляється в аксіомах. Аксіоми теорії, як і правила гри, — це умовні погодження. Доцільність вибору тієї чи іншої аксіоми може бути підтверджена використанням аксіоматичної теорії у розв'язанні тих чи інших практичних задач.

Щоб закласти фундамент для вивчення стереометрії, нам слід ввести основні (неозначувані) фігури стереометрії. Зміст відповідних їм понять виражатимуть властивості, які характеризують відношення між фігурами. Ці властивості приймаються без доведення, тобто вони є ***аксіомами*** стереометрії. На основі аксіом ми зможемо довести нові твердження, які розвивають і доповнюють базові властивості фігур.

Основними неозначуваними фігурами стереометрії є ***точка***, ***пряма***, ***площина***. Уявлення про них ви отримали, вивчаючи планіметрію, а зміст відповідних їм понять буде розкрито в аксіомах.

Насамперед домовимося відносно позначень і зображень основних фігур. Точка і пряма зображаються і позначаються так само, як і в планіметрії. Площину частіше зображають за допомогою паралелограма (рис. 112, а), бо саме так виглядають найпоширеніші фізичні моделі площин: аркуш паперу, кришка стола, класна дошка та ін. Щоб підкреслити безмежність площини, її іноді зображають як ділянку «неправильної» форми (рис. 112, б). Площини позначають малими грецькими буквами: α, β, γ тощо.

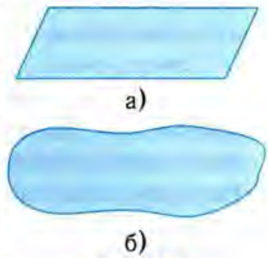


Рис. 112

Поряд з основними неозначуваними поняттями стереометрії будемо вважати відомим з планіметрії зміст таких понять, як ***відрізок і його довжина***, ***промінь***, ***кут і його величина*** і т.ін., а також понять, що характеризують взаємне розміщення точок, прямих і площин: ***точка A належить прямій l і площині*** β, ***пряма l лежить у площині*** α, ***площина*** α ***проходить через точку A*** та ін.

Відношення належності точок часто позначають знаком $\in$: $M \in l$; $M \in \alpha$, а відношення належності прямих — знаком $\subset$: $l \subset \alpha$. Запис $M \notin \alpha$ означає, точка M не належить площині α. Аналогічний зміст має запис $l \not\subset \alpha$.

Зображення фігур повинні враховувати їхнє взаємне розміщення. Наприклад, рис. 113 має унаочнювати те, що точка M не належить площині α, відрізок AB лежить у площині α, а прямі a і b не лежать у цій площині. Частину прямої b на рис. 113, закритої зображенням площини α, позначено штриховою лінією.

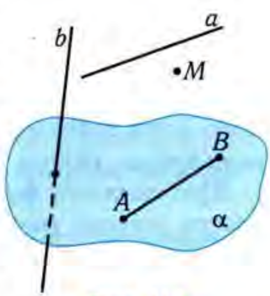


Рис. 113

Уся сукупність точок, що розглядаються у стереометрії, утворює простір. Будь-яку частину простору, тобто деяку сукупність його точок, називають ***фігурою***.

Фігура *— від латинського figura — образ, вигляд.*

Фігура називається ***плоскою***, якщо всі її точки розміщені в одній площині. З багатьма плоскими фігурами ви вже ознайомилися, вивчаючи планіметрію. Деякі неплоскі фігури — куб, куля, циліндр — також відомі вам.

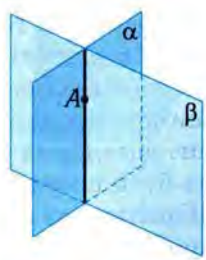
Якщо різні фігури мають спільні точки, то кажуть, що вони ***перетинаються***. Тому вираз «площини перетинаються» означає, що у цих площин є спільні точки. Перетин, тобто спільну частину фігур, позначають знаком $\cap$: $l \cap \alpha$, $\alpha \cap \beta$.

! **Будемо виходити з того, що простір у стереометрії містить нескінченну кількість площин. Тобто за межами кожної площини існує нескінченна кількість площин, а разом з цим і точок, і прямих.**

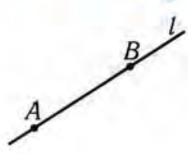
Розглянемо основні властивості, які характеризують неозначуване поняття площини і його зв'язки з іншими основними поняттями.

C_1. **Якщо пряма проходить через дві точки даної площини, то вона повністю лежить у цій площині.**

C_2. **Через три точки, що не лежать на одній прямій, проходить одна і тільки одна площина.**



C_3. **Якщо дві різні площини мають спільну точку, то їхнім перетином є пряма, що проходить через цю точку.**



C_4. **Через дві довільні точки простору можна провести одну і тільки одну пряму.**

Ці властивості, з урахуванням зроблених вище припущень, і візьмемо за систему аксіом нашого курсу стереометрії.

Зміст аксіом добре узгоджується з властивостями фізичних об'єктів і величин, які моделюються за допомогою основних геометричних понять. Справді, спробуйте притиснути до стола кінці добре натягнутої нитки і побачите, що вона щільно прилягає до поверхні стола, зливається з нею. Саме таку властивість моделює аксіома $\mathbf{C_1}$.

На трьох ніжках стіл стоїть, не хитаючись, навіть якщо вони мають різну висоту. Стійкість такого стола пояснюється тим, що кінці трьох його ніжок завжди розміщуються у площині підлоги і навіть визначають її (аксіома $\mathbf{C_2}$). Натомість стіл з чотирма ніжками іноді може хитатися. Аксіома $\mathbf{C_2}$ вказує на один із способів задання площини. Зрозуміло, що площину однозначно визначають пряма і точка, яка лежить поза цією прямою, дві прямі, що перетинаються. Обґрунтування цих тверджень буде наведено далі. Рівносильність вказаних способів задання площин природна: маючи три точки, що не лежать на одній прямій, можна побудувати перетинні прямі (навіть три пари перетинних прямих), дві перетинні прямі дозволяють вибрати три точки, що не лежать на одній прямій, і т. д.

Нас оточують численні прояви аксіоми $\mathbf{C_3}$: по прямій перетинається багато плоских об'єктів (стіни кімнати, деталі ящика тощо).

Легко знайти і фізичні аналоги аксіоми $\mathbf{C_4}$. Адже, наприклад, дві натягнуті нитки зливаються, якщо їхні кінці співпадають.

Вивчаючи стереометрію, будемо широко використовувати відповідність між об'єктами реального світу, відношеннями між ними та їхніми геометричними образами і відношеннями між ними. Ця відповідність буде слугувати не тільки ілюстрацією геометричних понять і фактів, а навіть і неформальним обґрунтуванням їхньої змістовності. При цьому слід мати на увазі, що строгі доведення тверджень існують і при певних зусиллях можуть бути побудовані.

Відмітимо також, що стереометрія має багато аналогій у планіметрії. Зокрема, подібно до того, як пряма на площині розбиває її на дві півплощини,

! простір розбивається кожною площиною на два півпростори, причому точки *A*, *B* належать одному пів-

простору тоді і лише тоді, коли відрізок *AB* не перетинає дану площину.
Вважатимемо також, що на кожній площині простору можна користуватись відомими поняттями і фактами планіметрії.

Поняття точки, прямої, площини, відрізка тощо відносяться до основних у стереометрії, бо з них починається її побудова. Але ж головною метою стереометрії є вивчення суто просторових фігур. Тому, щоб зробити побудову стереометрії змістовнішою, ми з самого початку будемо використовувати деякі прості просторові фігури — куб, паралелепіпед, піраміду, кулю та ін. (рис. 114), відклавши їхнє детальне вивчення на майбутнє. Ці фігури ви вже неодноразово розглядали, починаючи з молодших класів.

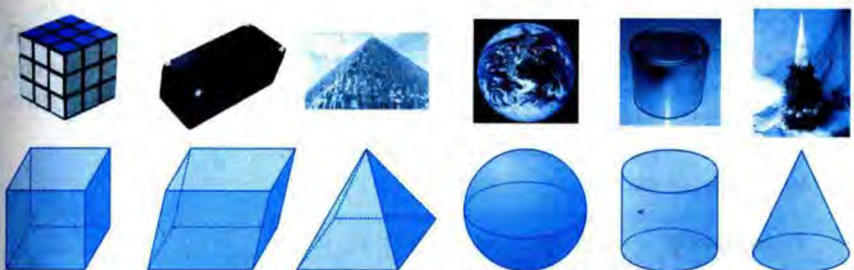


Рис. 114

Згадаємо, насамперед, про деякі ***многогранники***, що являють собою частини простору, обмежені многокутниками. Многокутники, що обмежують многогранник, називають його ***гранями***, їхні сторони — ***ребрами***, а вершини — ***вершинами*** многогранника.

Куб — це многогранник, який має 6 граней і всі вони є квадратами. У нього 8 вершин і 12 ребер (рис. 115).

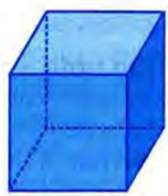


Рис. 115

***Куб** — від грецького χυβοζ (kibos) — гральна кістка, тіла однакової з нею форми були названі кубами.*

Паралелепіпед — це многогранник, який має 6 граней, і всі вони — паралелограми, і таку ж кількість вершин і ребер, як куб (рис. 116, а). Паралелепіпед, усі грані якого є прямокутниками, називається ***прямокутним*** паралелепіпедом (рис. 116, б).

а)

б)

Рис. 116

Куб є окремим випадком прямокутного паралелепіпеда. Його грані не тільки прямокутники, а навіть квадрати.

> ***Паралелепіпед*** — *від грецьких παραλληλοζ (parallelos) — паралельний і επιπεδοζ (epipedos) — рівне, плоске — шестигранник, обмежений шістьма попарно паралельними площинами.*

Тетраедр — це многогранник, який має 4 грані, що є трикутниками (рис. 117). Якщо всі грані тетраедра є правильними трикутниками, то тетраедр називається ***правильним*** тетраедром.

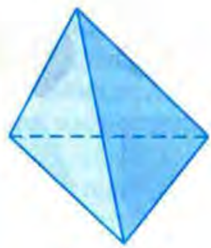


Рис. 117

> ***Тетраедр*** — *від грецьких τετραζ (tetras) — чотири, у складних словах τετρα- (tetra-) і εζρα (hedra) — основа, поверхня, сторона — чотиригранник, усі грані якого — трикутники.*

Піраміда — це многогранник, у якого одна грань — довільний многокутник, а решта граней — трикутники із спільною вершиною (рис. 118). Перша грань називається ***основою***, а інші — ***бічними*** гранями, їхня спільна вершина — ***вершиною*** піраміди. Ребра, які сходяться у вершині піраміди, називають ***бічними***. Тетраедр є окремим випадком піраміди. Кожна його грань може слугувати основою.

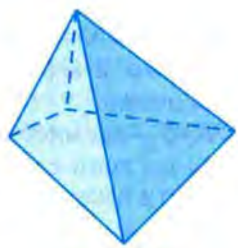


Рис. 118

***Піраміда** — від грецького πυραμις (pyramis), мабуть, від єгипетського peremus — діагональ основи.*

Якщо основою піраміди є n-кутник, то вона називається ***n*-кутною**. Трикутна піраміда — це тетраедр. Якщо основою піраміди є правильний n-кутник, а бічні грані є рівними рівнобедреними трикутниками з вершинами у вершині піраміди, то піраміда називається ***правильною n-кутною***. Зображається вона при $n = 5$ так, як показано на рис. 119. Правильний тетраедр є окремим випадком правильної трикутної піраміди.

Рис. 119

Куля з центром у точці O з радіусом R — це множина точок простору, які знаходяться від точки O на відстані, що не перевищує R (рис. 120).

Рис. 120

Отже, маємо низку основних понять і аксіом стереометрії. Побудову теорії почнемо з доведення твердження, рівнозначного за змістом аксіомі C_2. Ця аксіома визначає один із способів задання площини у просторі, що, до речі, дозволяє площину, яка визначається точками A, B, C, називати площиною ABC. Проте за допомогою точок і прямих площину можна задати інакше. Досвід підказує, що площина однозначно визначається прямою і точкою поза нею або ж двома прямими, які перетинаються. Згідно з правилами побудови стереометрії на аксіоматичній основі, ці твердження необхідно довести, виходячи з аксіом.

Теорема 1 *(про площину, яка проходить через пряму і точку).*
Через пряму і точку, що не лежить на цій прямій, проходить площина і до того ж лише одна.

□ Нехай дано пряму a і точку A, яка не лежить на цій прямій. Візьмемо на прямій a дві точки B і C (рис. 121). Згідно з аксіомою C_4, пряма a — єдина пряма, що проходить через точки B і C.

Оскільки точка A, за умовою теореми, не належить прямій a, то точки A, B і C не можуть лежати на одній прямій.

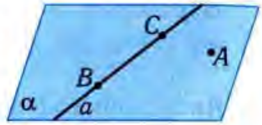


Рис. 121

Згідно з аксіомою C_2, існує площина α, яка містить точки A, B, C, і, відповідно до аксіоми C_1, ця площина містить пряму a. Отже, шукана площина існує.

Будь-яка інша площина β, яка проходить через пряму a і точку A, містить точки B і C. Оскільки через точки A, B, C можна провести лише одну площину (аксіома C_2), то площина β збігається з площиною α. А це означає, що шукана площина — єдина. ■

Аналізуючи доведення теореми, неважко дійти висновку, що через кожну пряму проходить нескінченна кількість площин. Розташування кожної з них визначається деякою точкою, що не лежить на даній прямій. Це можна проілюструвати, наприклад, обертаючи двері відносно нерухомих завіс. Ще один спосіб задання площини сформульовано в наступній теоремі.

Теорема 2 *(про площину, яка проходить через дві прямі, що перетинаються).*

Через дві прямі, що перетинаються, проходить площина і до того ж лише одна.

□ Нехай прямі a і b мають одну спільну точку O. Візьмемо на цих прямих довільні точки A і B, відмінні від O (рис. 122). Точки A, O, B не лежать на одній прямій, тому існує площина α, яка містить ці точки (аксіома C_2). Площина α містить прямі a і b (аксіома C_1). Отже, через дані прямі проходить площина.

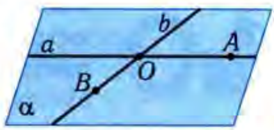


Рис. 122

Кожна інша площина β, що проходить через прямі a і b, містить точки A, O, B, і, згідно з аксіомою C_2, повинна збігатися з площиною α, оскільки ці точки не лежать на одній прямій. ■

Наступна задача містить твердження, яке буде широко використовуватися при подальшому вивченні стереометрії.

Задача 1. Довести, що у просторі існують чотири точки, які не лежать в одній площині.

□ Необхідно довести існування чотирьох точок, які не можна помістити у площину, тобто, що не існує площини, яка проходить через ці чотири точки.

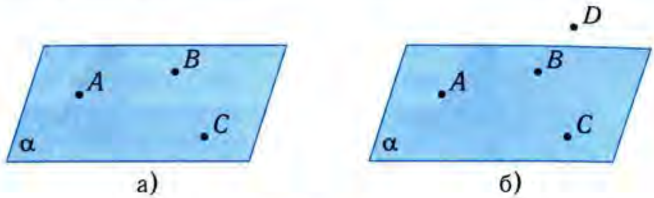


Рис. 123

Візьмемо довільну площину α і в ній виберемо три точки A, B, C, які не лежать на одній прямій (рис. 123, а). Оскільки поза площиною α існують точки простору, то виберемо з них довільну точку D (рис. 123, б). Не існує площини β, яка б містила точки A, B, C, D. У супротивному випадку площини α і β співпадали би, за аксіомою C_2, і точка D належала б площині α. ■

У наведених аксіомах і теоремах йшлося про прямі і площини, які задавались тим чи іншим способом. Нам і далі доведеться будувати у просторі різні фігури, спираючись на їхні властивості. Задачі на побудову в стереометрії аналогічні задачам на побудову в планіметрії. Однак, у стереометрії немає інструментарію для побудови площини. Та й зображення просторових побудов на плоскому рисунку не завжди адекватно відтворює реальність. Тому у стереометрії під побудовою розуміють доведення можливості всіх кроків процесу побудови. При цьому вважається, що площина побудована, якщо визначені три точки, які не лежать на одній прямій, або пряма і точка поза прямою, або дві прямі, що перетинаються, або ж інші елементи, що визначають площину. Для побудови прямої досить мати дві її точки.

Природно вважати, що ***на кожній площині можливі всі побудови, відомі з планіметрії***.

Приклад 1. Сторона AB трикутника ABC лежить у площині α, а вершина C — поза нею. Точка M ділить відрізок CB у відношенні 3 : 4, а точка N ділить відрізок CA у відношенні 1 : 4, рахуючи від C. Побудувати точку перетину прямої MN з площиною α.

□ Умовам прикладу відповідає рис. 124, а). Пряма MN лежить у площині ABC. Перетином цієї площини з площиною α є пряма AB. Тому шукана точка перетину розміщена на прямій AB. Прямі AB і MN лежать у площині ABC і, як це випливає з умови, перетинаються. Знайдемо їхню точку перетину, продовживши відрізки

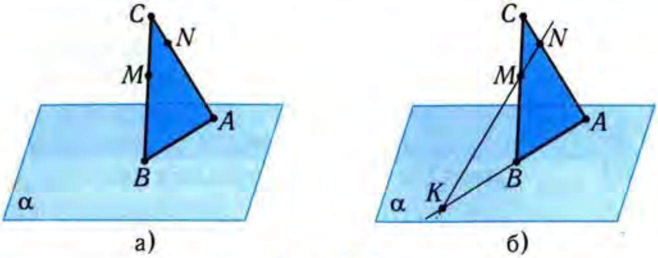


Рис. 124

AB і MN до перетину в точці K (рис. 124, б). Це і є шукана точка перетину прямої MN і площини α. ■

Приклад 2. Побудувати лінію перетину площини, що проходить через вершини A_1, C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і середину K ребра BB_1, з площиною грані $ABCD$.

□ Щоб побудувати шукану пряму перетину, досить знайти дві її точки. Для знаходження цих точок скористаємось розв'язанням прикладу 1. Оскільки пряма C_1K лежить у площині грані BCC_1B_1, то точка M перетину прямих C_1K і CB є однією з точок шуканої прямої перетину (рис. 125), а друга точка N є точкою перетину прямих AB і A_1K у площині грані ABB_1A_1. Пряма MN є шуканою. ■

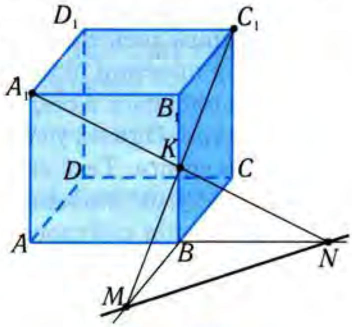


Рис. 125

Для введення геометричних фігур, як плоских, так і просторових, можна застосовувати конструктивний підхід. Цей підхід передбачає побудову фігур з відрізків. Продемонструємо його на наступних прикладах.

Нехай у деякій площині α маємо відрізок BC і точку A, що лежить поза прямою BC (рис. 126, а). З'єднаємо відрізками всі точки відрізка BC з точкою A (рис. 126, б). Фігура, що складається з точок усіх побудованих відрізків, є трикутником.

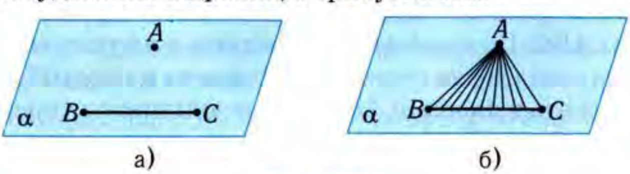


Рис. 126

Якщо ж маємо відрізок BC і по один бік від прямої BC відкладемо рівні і паралельні між собою відрізки (рис. 127), то кінці цих відрізків утворюють відрізок AD (доведіть!), а фігура, що утворена з усіх точок цих відрізків, є паралелограмом.

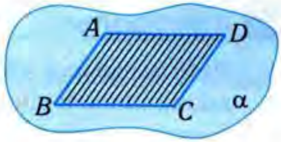


Рис. 127

Тепер зрозуміло, як у просторі можна конструктивно ввести деякі фігури, наприклад, піраміди, зокрема тетраедри.

Візьмемо чотирикутник $ABCD$ в площині α, а також точку S поза площиною α. Сполучимо точку S з усіма точками чотирикутника $ABCD$ (рис. 128).

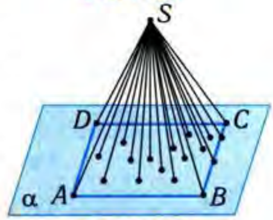


Рис. 128

Сукупність усіх точок відрізків, які сполучають точку S з точками чотирикутника $ABCD$, утворює фігуру, яка є ***чотирикутною пірамідою***. Зазвичай чотирикутну піраміду зображають, як це зроблено на рис. 129.

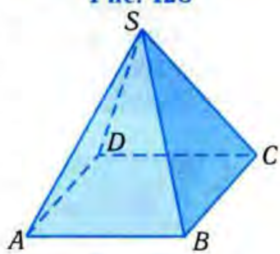


Рис. 129

Аналогічно будують піраміди, основами яких є многокутники з довільним числом сторін.

Для вивчення просторових фігур доцільно розглядати перетин цих фігур з площинами. Такі перетини називаються ***перерізами***, якщо по обидві сторони від площини перетину — ***січної площини*** — є точки фігури.

Неважко переконатися в тому, що перерізами паралелепіпеда чи піраміди є многокутники. Справді, з аксіоми C_3 випливає, що перетином січної площини і грані фігури є відрізок.

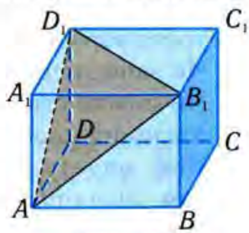


Рис. 130

Таким чином, при перетині даних фігур з площиною дістанемо обмежені відрізками фігури на площині, тобто многокутники. Так, перерізом куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 130) площиною, що проходить через вершини A, B_1, D_1 є трикутник AB_1D_1 , а перерізом піраміди $SABCD$ площиною, що проходить через вершину S і діагональ основи AC є трикутник ASC (рис. 131).

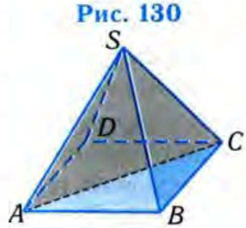


Рис. 131

Контрольні запитання

1. Якими трьома точками, вказаними на рис. 132, площина α визначається однозначно?
2. Через які три точки, вказані на рис. 133, можна провести ще одну площину, відмінну від площини α?

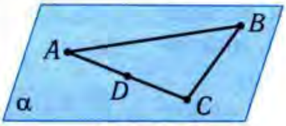


Рис. 132

Рис. 133

3. Яка з точок D, E, F на рис. 134 може бути точкою перетину прямої AB і площини β?
4. Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Яка з точок L, M, N на рис. 135 може бути точкою перетину прямої BK з площиною α?

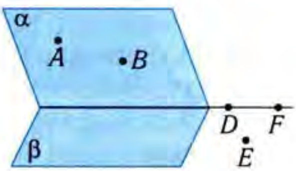


Рис. 134

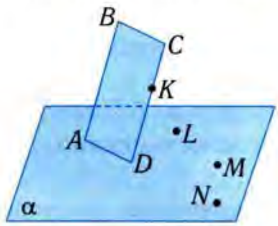
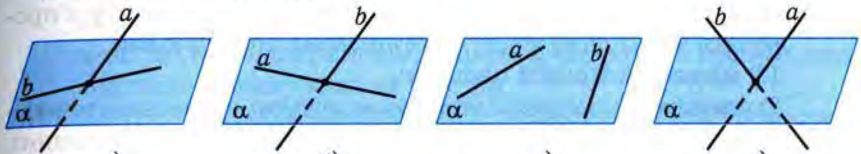


Рис. 135

5. Дві вершини трикутника належать площині. Чи належить їй третя вершина?
6. Чи завжди через три точки можна провести єдину площину?
7. Чи можна стверджувати, що один з діаметрів кола належить площині, якщо дві точки кола належать цій площині?
8. Щоб надати стійкості геодезичним інструментам (теодолітам, нівелірам тощо), їх зазвичай закріплюють на триногах. Чому?
9. На скільки частин поділяють простір три площини, якщо вони мають рівно одну спільну точку?
10. Чи завжди через чотири точки можна провести площину?
11. Столяр за допомогою лінійки перевіряє, чи добре відшліфована поверхня. Як він це робить?
12. Чи можна торт розрізати на вісім частин, провівши лише три перерізи?

Графічні вправи

1. Вкажіть взаємне розміщення прямих a, b і площини α, зображених на рис. 136, а)–г).



а) б) в) г)

Рис. 136

2. На рис. 137 пряма AB не належить площині COD.

1) Скільки спільних точок мають площини AOB і COD?

2) Яка фігура є перетином площин AOC і BOD?

3) Скільки площин можна провести через точки A, B, C?

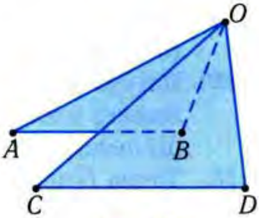


Рис. 137

3. На рис. 138 зображено прямокутний паралелепіпед.

1) Скільки площин можна провести через вершини A, D_1, C?

2) Скільки площин можна провести через вершини A, C і середину відрізка BD?

3) Яка фігура є перетином площин ABC і C_1D_1D?

4) Скільки спільних точок мають площини BCD і ACB_1?

4. Які з наступних пар точок X і Y, X і Z, Y і T; Z і T не лежать в одній грані тетраедра, зображеного на рис. 139?

5. На рис. 140 зображено площини AED і AFB.

1) Яка фігура є їхнім перетином?

2) Скільки площин можна провести через точки F, C, E?

3) Скільки площин можна провести через точки A, E, F?

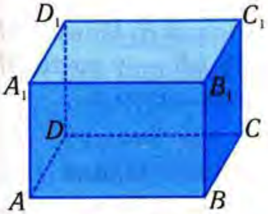


Рис. 138

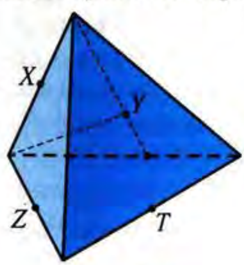


Рис. 139

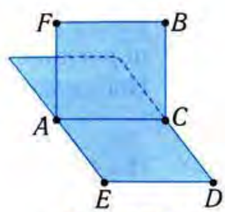


Рис. 140

Задачі

118. Доведіть, що через кожну пряму можна провести:
1°) дві різні площини; 2) безліч різних площин.

119. Доведіть, що всі прямі, які перетинають дану пряму і проходять через дану точку, розташовану поза прямою,
1°) містяться в одній площині;
2) утворюють площину з вилученою прямою, окрім даної точки.

120°. Доведіть, що коли чотири точки не лежать в одній площині, то жодні дві прямі, які попарно сполучають ці точки, не перетинаються.

121°. Доведіть, що коли чотири точки не лежать в одній площині, то жодні три з них не лежать на одній прямій.

122°. Дві суміжні вершини і точка перетину діагоналей трапеції лежать у площині α. Доведіть, що й інші дві вершини трапеції лежать у площині α.

123. Точка D знаходиться поза площиною трикутника ABC, N — середина відрізка DC. Доведіть, що прямі BN і AC не мають спільних точок.

---

124. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і точка M на ребрі BB_1, яка не співпадає з його кінцями. На якій прямій лежить точка перетину прямої:
1°) MC з площиною $A_1B_1D_1$; 2°) AM з площиною $B_1C_1D_1$;
3°) MA_1 з площиною ABD; 4°) A_1M з площиною BCD;
5) MD_1 з площиною ABC; 6) DM з площиною $A_1C_1D_1$?

125. Площини α і β перетинаються по прямій c. Відрізок AB лежить у площині α і не є паралельним прямій c. Побудуйте точку перетину прямої AB з площиною β.

126. Площини α і β перетинаються по прямій l. Точки A і C лежать у площині α, причому пряма AC не паралельна прямій l, а точка B лежить у площині β. Побудуйте лінії перетину площини ABC з площинами α *і* β.

127. Точки A, L, K лежать по один бік від площини α. Пряма AL перетинає площину α в точці B, а пряма LK — у точці M. Побудуйте точку перетину прямої AK з площиною α.

---

128. Дві площини α і β перетинаються по прямій m. Пряма a лежить в площині α, пряма b — в площині β. Ці прямі перетинаються в точці A. Доведіть, що точка A лежить на прямій m.

129. Площина γ перетинає площини α і β по прямих a і b відповідно. Доведіть, що якщо прямі a і b перетинаються, то точка їхнього перетину лежить на лінії перетину площин α і β.

130*. Дано дві прямі, які не лежать в одній площині. Через кожну з них проведена площина, яка перетинає іншу пряму. Доведіть, що проведені площини перетинаються по прямій, яка перетинає кожну з даних прямих.

131*. Фігура складається не менш ніж з двох точок і має таку властивість, що пряма, яка з'єднує дві її довільні точки, цілком належить цій фігурі. Доведіть, що дана фігура може бути лише прямою, площиною або простором.

132. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через:
1°) пряму A_1C_1 і точку B;
2°) точки B, D, C_1;
3°) прямі A_1K і BK, де K — середина ребра B_1C_1;
4) через точки A_1, D і центр грані DCC_1D_1;
5) через точку A і центри граней ABB_1A_1 і ADD_1A_1.

133. Побудуйте переріз правильного тетраедра $SABC$ площиною, що проходить через:
1°) середини ребер AB, BC і SB;
2°) середини ребер AB, BC і центр грані SBC;
3) середину ребра BC і центри граней SBC, SAB;
4) центри граней SBC, SAB, SAC.

Вправи для повторення

134. Дано паралелограм $ABCD$, точки M, N, P, Q — середини відповідно сторін AB, BC, CD, DA.
1) Установіть розміщення прямих:
а) MN і PQ; б) MP і BC; в) AB і PQ; г) MQ і BD.
2) Установіть вид чотирикутника $MNPQ$.
3) Знайдіть його периметр і площу, якщо довжини діагоналей паралелограма $ABCD$ дорівнюють 6 см і 8 см, а кут між ними 60°.

135. За даними на рис. 141 визначте, чи паралельні прямі AB і EF.

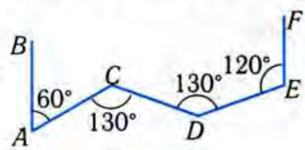
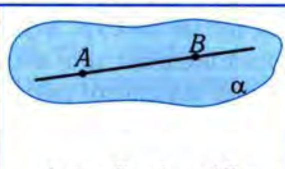
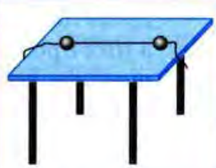
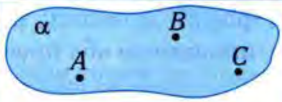
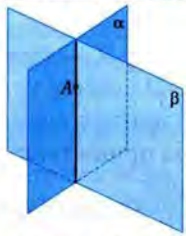
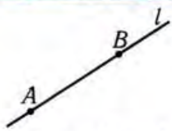
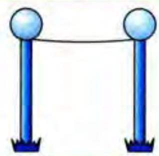


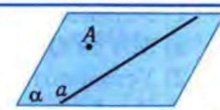
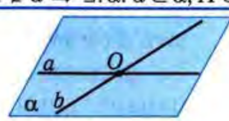
Рис. 141

Підсумок

Аксіоми стереометрії

C_1. Якщо пряма проходить через дві точки даної площини, то вона повністю лежить у цій площині.	 $A \in \alpha, B \in \beta \Rightarrow AB \subset \alpha$	
C_2. Через три точки, що не лежать на одній прямій, проходить одна і тільки одна площина.	 A, B, C не лежать на одній прямій $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exists! \alpha: A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha$	
C_3. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то їхнім перетином є пряма, що проходить через цю точку.	 $A \in \alpha \cap \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = b, A \in b$	
C_4. Через дві довільні точки простору можна провести одну і тільки одну пряму.	 $\exists! l: A \in l, B \in l$	

Головні твердження

Теорема про площину, яка проходить через пряму і точку	Через пряму і точку, що не лежить на цій прямій, проходить площина і до того ж лише одна.	 $A \notin a \Rightarrow \exists! \alpha: a \subset \alpha, A \in \alpha$
Теорема про площину, яка проходить через дві прямі, що перетинаються	Через дві прямі, що перетинаються, проходить площина і до того ж тільки одна.	 $a \cap b = \{O\} \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists! \alpha: a \subset \alpha, b \subset \alpha$

§8. Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Розглядаються різні варіанти взаємного розміщення прямих, встановлюються ознаки, за якими можна розрізняти ці варіанти, властивості важливого в стереометрії відношення прямих — паралельності.

Як відомо з планіметрії, на площині дві прямі можуть збігатися, перетинатися або ж бути паралельними. Ілюстрацією цього можуть бути траєкторії руху двох пароплавів (рис. 142). Перехід від площини до простору збільшує кількість варіантів взаємного розміщення двох прямих. Наприклад, спробуйте уявити траєкторії руху двох літаків, які летять на різних висотах, і один з них рухається з півночі на південь, а другий — із заходу на схід (рис. 143). Як вони розміщені? Яскравою ілюстрацією можливостей взаємного розміщення прямих є розміщення поперечних рей на корабельних щоглах (рис. 144) тощо.

Класифікація взаємного розміщення двох прямих у просторі і розгляд способів встановлення цього розміщення є головною метою даного параграфа.

Розглядаючи прямі у просторі як геометричні образи траєкторій прямолінійного руху, ми можемо описати можливі варіанти взаємного розміщення двох прямих у просторі.

Рис. 142

Рис. 143

Рис. 144

Прямі можуть ***збігатися***. Для цього достатньо, щоб вони мали дві спільні точки (аксіома C_4).

Прямі можуть ***перетинатися***, тобто мати тільки одну спільну точку. Такі прямі визначають певну площину, якій вони належать (теорема 2 §7). І в кожній площині через довільну точку можна провести безліч прямих, що перетинаються.

Прямі можуть не мати спільних точок. Проте назвати їх паралельними (як у планіметрії) можна не завжди. Розгляд траєкторій польоту літаків, як і багато інших подібних прикладів (розміщення тунелів метро, лінії електропередач, що перехрещуються, тощо), наводить на думку, що йдеться про два принципово різних способи розміщення прямих. Відмінність між цими способами полягає у тому, що для одних прямих, які не перетинаються, існує площина, де вони лежать (рис. 145, а), а для інших — такої площини не існує (рис. 145, б).

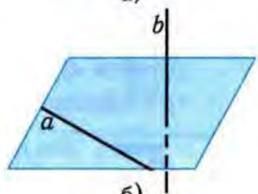


Рис. 145

Насамперед, дамо означення паралельності прямих.

Дві прямі простору називаються паралельними, якщо вони лежать в одній площині і не мають спільних точок.

Таким чином, паралельність прямих a і b у просторі зводиться до їхньої паралельності на деякій площині. Зберігається і позначення паралельності: $a \parallel b$.

Паралельний — *від грецького παραλληλος (parallelos) — той, що йде поруч.*

Існування паралельних прямих не викликає сумніву. В кожній площині можна провести безліч пар паралельних прямих.

Тепер охарактеризуємо інший спосіб розміщення прямих у просторі, які не перетинаються.

Дві прямі простору, які не лежать в одній площині, називаються ***мимобіжними***.

Мимобіжність прямих a і b позначається так: $a \dot{-} b$.

! **Надалі, кажучи, що «*фігури не лежать в одній площині*», ми розумітимемо те, що *не існує такої площини, в якій знаходяться дані фігури (точки, прямі та ін.).***

Зрозуміло, що ***мимобіжні прямі не мають спільних точок***. Інакше вони збігались би, якби спільних точок було принаймні дві, чи перетинались би в одній точці. А це означає, що прямі лежать в одній площині.

Насамперед належить довести, що мимобіжні прямі існують (ілюстрації, які ми навели раніше, не можуть замінити математичного доведення). Нехай чотири точки A, B, C, D не лежать в одній площині (рис. 146). Їхнє існування є наслідком того, що за межами кожної площини існують точки простору. Звідси випливає, що прямі AB і CD є мимобіжними. Інакше б вони, як і точки A, B, C, D, які їм належать, знаходились би в одній площині.

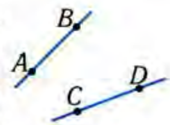


Рис. 146

Наведені міркування можна виразити таким чином.

Теорема 1 *(ознака мимобіжності прямих).*

Якщо дві прямі містять чотири точки, що не лежать в одній площині, то вони — мимобіжні.

Отже, прямі у просторі можуть:

1) ***збігатися***, якщо вони мають щонайменше дві спільні точки;

2) ***перетинатися***, якщо вони мають тільки одну спільну точку;

3) ***бути паралельними***, якщо вони не мають спільних точок і лежать в одній площині;

4) ***бути мимобіжними***, якщо вони не лежать в одній площині.

Подібна класифікація ґрунтується на визначенні кількості спільних точок у прямих, хоча прямі, що не мають спільних точок, довелося поділити на два класи за іншою ознакою – належністю одній площині.

! Поняття паралельності прямих переноситься і на відрізки та промені: *паралельними вважають такі два відрізки, промені, які містяться на паралельних прямих.* Аналогічні домовленості стосуються і мимобіжності відрізків, променів.

Приклад 1. На рис. 147 паралелограми $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у різних площинах. Встановити взаємне розміщення прямих, які визначаються вершинами цих паралелограмів.

□ Встановлення взаємного розміщення двох прямих, які визначаються вершинами одного з паралелограмів, не викликає

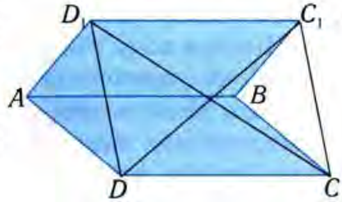


Рис. 147

труднощів. Це суто планіметрична задача. На основі наведеної ознаки мимобіжності прямих можна стверджувати, що мимобіжними є, наприклад, прямі D_1C і BD, D_1C і AB, D_1C і AD, C_1D і AC (скільки ще таких пар?). А чи є серед вказаних прямих паралельні прямі, окрім тих, які лежать у площині одного з паралелограмів? Природно очікувати, що паралельними є прямі DC і D_1C_1, C_1C і D_1D. Обґрунтування цього припущення потребує, як і в планіметрії, відповідних ознак. ■

Ознакою паралельності прямих у просторі може слугувати наступне твердження, аналог якого добре знайомий з планіметрії.

Теорема 2 *(ознака паралельності прямих).*

Якщо дві прямі простору паралельні третій прямій, то вони паралельні між собою.

Доведення наведеної ознаки паралельності прямих буде подано пізніше. Її застосування негайно вирішує питання про паралельність прямих DC і D_1C_1 з прикладу 1. Адже $DC \parallel AB$ і $D_1C_1 \parallel AB$. Тому, за наведеною ознакою, $DC \parallel D_1C_1$. З паралельності прямих DC і D_1C_1 випливає, що точки D, C, C_1, D_1 лежать в одній площині. А це дозволяє завершити розгляд усіх випадків з прикладу 1. Наприклад, прямі DD_1 і CC_1 — паралельні, бо чотирикутник DD_1C_1C є паралелограмом ($DC \parallel D_1C_1$, $DC = AB = D_1C_1$). А тоді прямі CD_1 і DC_1 (вони містять діагоналі паралелограма) перетинаються. На цьому завершується розгляд взаємного розміщення усіх пар прямих, які визначаються вершинами паралелограмів, зображених на рис. 147.

За означенням, паралельні прямі лежать в одній площині. Чи єдина така площина? Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 3 *(про єдиність площини, яка містить паралельні прямі).*

Через дві паралельні прямі можна провести єдину площину.

□ Існування такої площини випливає з означення паралельності прямих. Якби існували дві різні площини, які проходять через дані паралельні прямі, то це означало б, що через одну з паралельних прямих і через точку другої прямої проходять дві різні площини, а це суперечить теоремі 1 §7. ■

Зрозуміло, що теоремою 3 можна скористатися для *задання площини за допомогою двох паралельних прямих.*

Приклад 2. На рис. 148 точки D, E, F, G — середини відповідно ребер AS, SC, BC, AB тетраедра $ABCS$.

1) Встановити взаємне розміщення прямих AS і GE, DE і GF, DG і EF.
2) Знайти периметр чотирикутника $DEFG$, якщо BS = 8 см, AC = 16 см.

☐ 1) Прямі AS і GE — мимобіжні, за ознакою мимобіжності (теорема 1), оскільки точки A, S, E, G не лежать в одній площині. Якби це було не так, то й точки A, B, C, S мали лежати в одній площині, адже точка B належить прямій AG, а точка C — прямій SE.

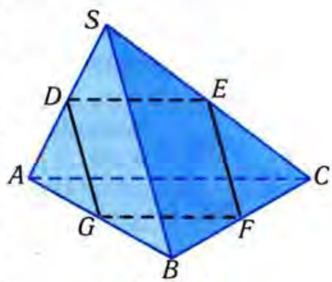


Рис. 148

Прямі DE і GF — паралельні, за ознакою паралельності прямих (теорема 2). Справді, відрізки DE і GF паралельні відрізку AC як середні лінії трикутників ASC і ABC. Аналогічно встановлюється паралельність прямих DG і EF.

2) З паралельності відрізків DG і EF, DE і GF випливає, що чотирикутник $DEFG$ є паралелограмом. Довжини його сторін можна знайти, користуючись тим, що його сторони — середні лінії відповідних трикутників. Маємо: $DG = \frac{1}{2}SB = 4$ (см), $DE = \frac{1}{2}AC =$ $= 8$ (см).

Шуканий периметр дорівнює $2DE + 2DG = 16 + 8 = 24$ (см). ■

Відповідь. 1) $AS \dot{-} GE$, $DE \parallel GF$, $DG \parallel EF$; 2) 24 см.

Наступна задача цікава тим, що вона дозволяє подати конкретну площину у вигляді паралельних прямих, які задовольняють певну умову. Таке подання знадобиться при розв'язанні багатьох задач стереометрії.

Задача 1. Прямі a і b перетинаються. Довести, що всі прямі, які паралельні прямій a і перетинають пряму b, разом з прямою a утворюють площину.

□ Нехай прямі a і b перетинаються в точці A. Вони однозначно визначають площину α, що містить їх (рис. 149, а). Через довільну точку B прямої b, відмінну від точки A, можна провести пряму c, паралельну прямій a (рис. 149, б). Зрозуміло, що всі ці прямі разом з прямою a утворюють площину α.

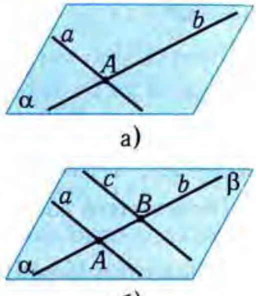


Рис. 149

Кожна пряма c, яка паралельна прямій a і перетинає пряму b, належить площині α. Справді, через паралельні прямі a і c можна провести єдину площину β, за теоремою 3. Тоді площини α і β містять пряму a і точку B, яка не лежить на цій прямій. Тому площини α і β співпадають. ■

Наведена вище ознака паралельності прямих (теорема 2) потребує обґрунтування. Це і буде зроблено далі. Окрім того, розглянемо корисні властивості, пов'язані з паралельністю прямих, наявність яких підказана геометрією площини. Але спочатку наведемо другу ознаку мимобіжності прямих, яка в деяких випадках зручніша.

Теорема 4 *(друга ознака мимобіжності прямих).*

Прямі a і b є мимобіжними, якщо існує площина, яка містить пряму a і яку пряма b перетинає в точці, що не належить прямій a.

□ Нехай точки A і B належать прямій a і пряма b перетинає відповідну площину в точці C (рис. 150). Тоді інша точка D прямої b і точки A, B, C не лежать в одній площині, оскільки в такому разі це була б площина ABC і пряма b належала б їй, а не перетинала. Тому прямі AB і CD , тобто a і b, — мимобіжні. ■

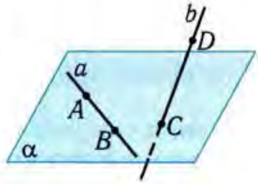


Рис. 150

Тепер перейдемо до розгляду тверджень, які стосуються паралельних прямих.

Теорема 5 *(існування і єдиність прямої, паралельної даній).* **Через будь-яку точку простору, що не лежить на даній прямій, проходить пряма, паралельна даній, і до того ж тільки одна.**

□ Нехай дано пряму a і точку B, що не лежить на цій прямій. Тоді існує єдина площина α, якій належать ці пряма і точка (теорема 1 §7). З планіметрії відомо, що в площині через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести єдину пряму, паралельну даній (рис. 151).

Будь-яка пряма, яка проходить через точку B і перетинає площину α, є мимобіжною з прямою a (рис. 152), за теоремою 4. Тому існує лише одна пряма, паралельна даній, що проходить через точку, яка не лежить на ній. ■

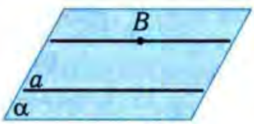


Рис. 151

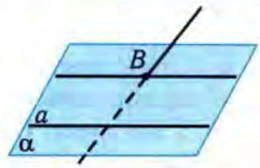


Рис. 152

З планіметрії відомо, що якщо одна з двох паралельних прямих на площині перетинає пряму, то і друга пряма перетинає цю пряму. У просторі це не завжди так (наведіть приклади!). Аналогом вказаної властивості паралельних прямих на площині можна вважати наступну теорему.

Теорема 6 *(про перетин площини паралельними прямими).* **Якщо одна з двох паралельних прямих перетинає дану площину, то і друга пряма перетинає цю площину.**

□ Нехай прямі a і b — паралельні, і точка A є точкою перетину прямої a з площиною α. Тоді площина β, в якій лежать паралельні прямі, перетинає площину α по прямій c, що проходить через точку A (рис. 153). Оскільки пряма c лежить в площині β і перетинає пряму a в точці A, то і паралельну до неї пряму b вона перетне в деякій точці B. Точка B і є шуканою точкою перетину прямої b з площиною α, бо $B \in c$, а $c \subset \alpha$. ■

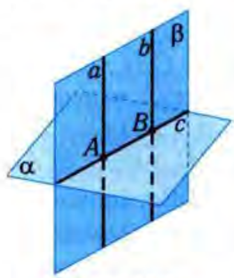


Рис. 153

Тепер у нас є все необхідне, щоб довести ознаку паралельності прямих, сформульовану у теоремі 2.

Дано: $a_1 \parallel a_3$, $a_2 \parallel a_3$. **Довести:** $a_1 \parallel a_2$.

□ Необхідно довести, що прямі не мають спільних точок і лежать в одній площині. Прямі a_1 і a_2 не мають спільних точок, інакше б через одну точку проходило дві прямі, паралельні прямій a_3, що суперечить теоремі про існування і єдиність прямої, паралельної даній (теорема 5).

Проведемо через пряму a_1 і довільну точку M прямої a_2 площину α (рис. 154). Пряма a_2 не може перетинати площину α, адже тоді, згідно з теоремою 6, її перетинали б паралельна до неї пряма a_3 і паралельна прямій a_3 пряма a_1. Однак пряма a_1 лежить у площині α. Отже, пряма a_2 має, окрім точки M, інші спільні точки з площиною α, а тому, згідно з аксіомою C_1, вона належить площині α. Таким чином, прямі a_1 і a_2 лежать в одній площині і не мають спільних точок, тобто вони є паралельними. ■

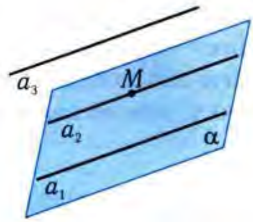


Рис. 154

Розглянута ознака паралельності прямих є одночасно і властивістю відношення паралельності, яку зазвичай називають ***транзитивністю*** цього відношення.

> ***Транзитивність*** *— від латинського transeo — переходжу, transitus — перехід, проходження.*

Приклад 3. На рис. 155 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки O, O_1 — центри граней $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, K — середина ребра AB. Установити взаємне розміщення прямих: 1) AB і D_1C_1; 2) AD_1 і BC_1; 3) AA_1 і OO_1; 4) AD_1 і KC_1; 5) AD і KC_1.

□ Встановлення взаємного розміщення прямих складається з формулювання гіпотези про їхнє розміщення на основі аналізу рисунка та її обґрунтування за допомогою означень, властивостей і ознак.

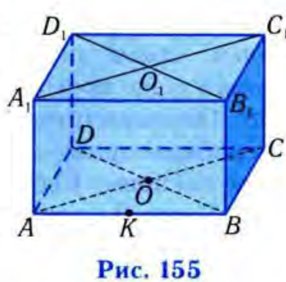


Рис. 155

1) Прямі AB і D_1C_1 — паралельні, за ознакою паралельності прямих (теорема 2), оскільки $AB \parallel DC$ і $D_1C_1 \parallel DC$ (грані паралелепіпеда — прямокутники!).

2) Прямі AD_1 і BC_1 — паралельні. Це випливає з того, що чотирикутник AD_1C_1B є паралелограмом. Справді, за доведеним в 1), $AB \parallel D_1C_1$. Крім того, $AB = D_1C_1$, бо $AB = DC$, $D_1C_1 = DC$ (протилежні сторони прямокутника рівні!).

3) Прямі AA_1 і OO_1 — паралельні. Застосувавши попередні міркування, можна довести, що чотирикутник AA_1C_1C є паралелограмом. Точки O, O_1 — середини протилежних сторін паралелограма. Тому пряма, яка через них проходить, паралельна сторонам AA_1 і CC_1.

4) Прямі AD_1 і KC_1 перетинаються. Чотирикутник AD_1C_1K є трапецією з основами AK і D_1C_1 (рис. 156), оскільки $AK \parallel D_1C_1$, $AK \neq D_1C_1$. А у трапеції прямі, що містять бічні сторони AD_1 і KC_1, перетинаються.

5) Прямі AD і KC_1 — мимобіжні, за ознакою мимобіжності прямих (теорема 1), оскільки точки A, D, C_1, K не лежать в одній площині. ■

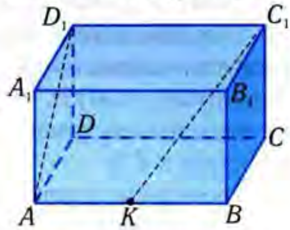


Рис. 156

Відповідь. 1) $AB \parallel D_1C_1$; 2) $AD_1 \parallel BC_1$; 3) $AA_1 \parallel OO_1$; 4) $AD_1 \times KC_1$; 5) $AD \,\dot{-}\, KC_1$.

Задачі на побудову в курсі планіметрії займають важливе місце. Це пояснюється насамперед їхньою прикладною спрямованістю. За допомогою рисунків на аркуші паперу можна досить точно відобразити відношення між геометричними об'єктами. Тому плоскі фігури просто ототожнюють з їхніми зображеннями, як і побудову на рисунках з побудовами на абстрактних фігурах геометрії.

Не менш важливу роль рисунки фігур відіграють у стереометрії, хоча, звичайно, вони не можуть відображати всі їхні властивості, відношення між їхніми елементами. Тому повного ототожнення геометричних фігур з їхніми зображеннями робити не можна, і **розв'язання задач на побудову в стереометрії зводиться до доведення можливості побудови, спираючись на аксіоми та вже доведені теореми**.

Відмітимо ще, що прагнення побудови рисунків, які найповніше відображають властивості просторових фігур, вимагає уточнення поняття зображення, розробки правил побудови на зображеннях, про що йтиметься далі.

Розв'язання задач на побудову в стереометрії пов'язане з доведенням певних тверджень, зокрема таких, в яких площини визначаються за допомогою прямих, що задовольняють певні умови. Приклад такого твердження складає задача 1. Розглянемо її аналогічну.

Задача 2. Прямі a і b — мимобіжні. Довести, що всі прямі, які паралельні прямій a і перетинають пряму b, лежать в одній площині і навіть утворюють цю площину.

□ Нехай дані прямі a і b є мимобіжними. Проведемо через довільну точку B прямої b пряму a_1, паралельну a (рис. 157). Згідно з теоремою 4, ця побудова виконується однозначно. Прямі a_1 і b перетинаються (чому?). Тому вони однозначно визначають площину β, що містить їх (теорема 2 §7).

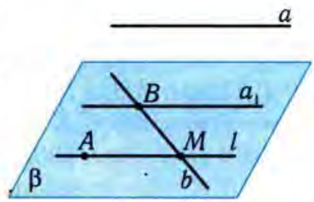


Рис. 157

Проведемо в площині β через довільну точку M прямої b, відмінну від B, пряму l, паралельну прямій a_1. Ця пряма, згідно з ознакою паралельності прямих (теорема 2), паралельна прямій a. Оскільки через дану точку простору можна провести лише одну пряму, паралельну даній, то множина всіх прямих, які паралельні прямій a і перетинають пряму b, лежить в площині β і навіть утворює її, оскільки через довільну точку A площини β проходить пряма l, яка перетинає b і паралельна a_1 (тому і a) або співпадає з нею. ■

✓ Контрольні запитання

1. На рис. 158, а)–г) зображено два паралелограми, які лежать у різних площинах, і прямі a, b. Як розміщені прямі a і b на кожному з рисунків?

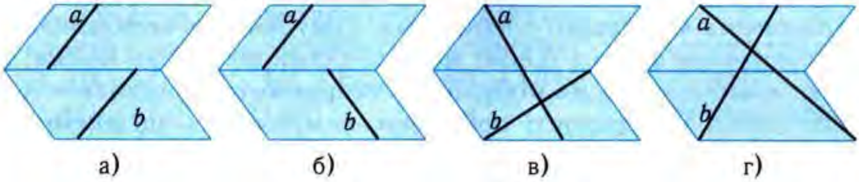


Рис. 158

2. На рис. 159, а)–г) зображено точки A, B, C, D, що не лежать в одній площині, точки M, K — середини відповідних відріз-

ків, на яких вони лежать. Як розміщені прямі AC і MK на кожному з рисунків?

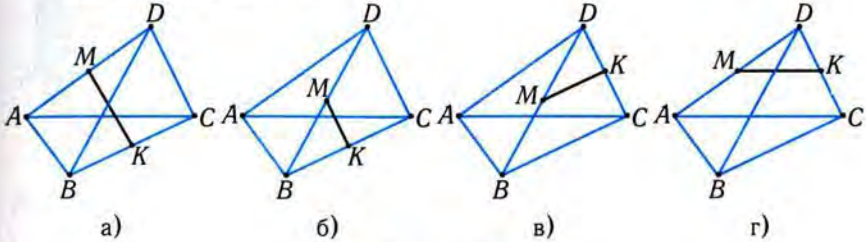


Рис. 159

3. Чи завжди можна провести площину через чотири точки?
4. Чи існують дві прямі у просторі, через які не можна провести площину?
5. Чи можуть дві паралельні прямі простору не лежати в одній площині?
6. Як можуть бути розміщені прямі AB і CD, якщо прямі AC і BD мимобіжні?
7. Чи належить коло площині, якщо дві хорди кола належать цій площині?
8. Чи завжди пряма простору, яка перетинає кожну з двох прямих, що перетинаються, лежить з ними в одній площині?
9. Чи однаковий зміст мають твердження: «Прямі a і b лежать у різних площинах» і «Прямі a і b не лежать в одній площині»?

Графічні вправи

1. На рис. 160, а)–г) зображено тетраедр $ABCD$ і точки M і N на його ребрах. Вкажіть пряму, на якій лежить точка перетину прямої MN з площиною ABC на кожному з рисунків.

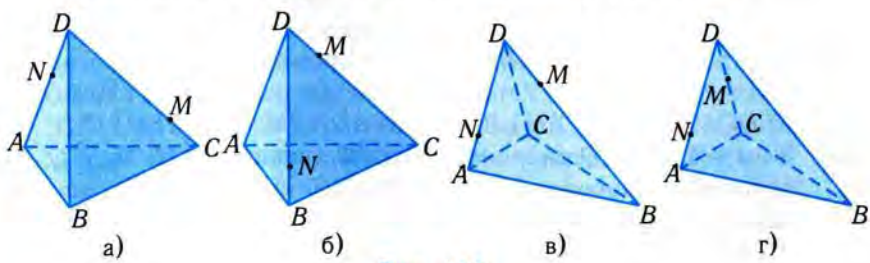


Рис. 160

2. На рис. 161 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки M, N, P, K — середини відповідно ребер B_1C_1, C_1D_1, CD, AA_1, точка O — центр грані $ABCD$. Заповніть таблицю, вказавши розміщення прямих a, b (× — перетинаються, $\dot{-}$ — мимобіжні, $\parallel$ — паралельні) за наведеним зразком.

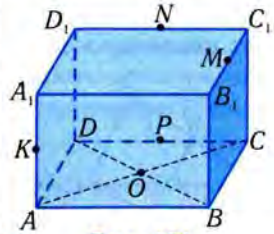


Рис. 161

a і b / Взаємне розміщення	NP і AA_1	MN і AA_1	PK і NA_1	C_1O і AA_1	MN і BD	NO_1 і MB	NO_1 і BC_1
$a \times b$							
$a \dot{-} b$							
$a \parallel b$	+						

3. На рис. 162 зображено два прямокутники $ABCD$ і ABC_1D_1, що не лежать в одній площині. Точки M, N, P, Q — середини відповідно сторін BC, CD, AD_1, BC_1. Встановіть взаємне розміщення прямих: 1) PN і QM; 2) PQ і MN; 3) DQ і MP; 4) PQ і CD; 5) DQ і CP; 6) PD і QC.

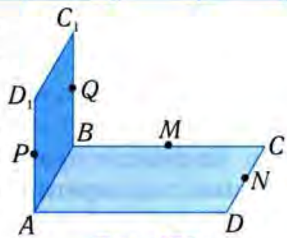


Рис. 162

Задачі

136°. Два рівнобедрених трикутники ABC і ABC_1 зі спільною основою AB лежать у різних площинах. Установіть взаємне розміщення прямих, які містять:

1) сторони AC і BC_1; 2) сторони AC і AC_1;

3) середні лінії трикутників, які не перетинаються з AB;

4) висоти трикутників, що проходять через вершини C і C_1.

137°. Дві трапеції $ABCD$ і ABC_1D_1 мають спільну основу AB і лежать у різних площинах. Установіть взаємне розміщення прямих:

1) DC і D_1C_1; 2) AD і BC; 3) AD_1 і DC; 4) D_1C і C_1D.

138. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині, а M, N, P, Q — середини відрізків AB, BC, AD, DC, відповідно. Визначте взаємне розміщення прямих:

1°) PQ і MN; 2°) QM і PN; 3) AD і BC.

139. Дано площину α і відрізок AB, який не перетинається з нею. Через кінці відрізка AB проведено паралельні прямі, що перетинають дану площину в точках A_1 і B_1 відповідно.
1°) Побудуйте точку перетину прямої AB з площиною α.
2°) Проведіть через середину C відрізка AB пряму, паралельну прямій AA_1, і знайдіть точку її перетину C_1 з площиною α.
3) Знайдіть довжину відрізка CC_1, якщо $AA_1 = 3$ см, $BB_1 = 4$ см.

140. Через кінець A відрізка AB проведено площину α, а через кінець B пряму, яка перетинає площину α в точці B_1. Точка C лежить поміж точок A і B на відрізку AB.
1°) Побудуйте точку перетину C_1 площини α з прямою, яка проходить через точку C паралельно прямій BB_1.
2) Знайдіть довжину відрізка BB_1, якщо $AB = 6$ см; $AC:CC_1 = 2:5$.

141. Площина α не збігається з площиною трикутника ABC і проходить через сторону AB. На продовженні сторони AC взяли точку C_1 так, що C лежить поміж A і C_1.
1°) Побудуйте точку перетину B_1 площини α з прямою, яка проходить через точку C_1 паралельно прямій CB.
2) Знайдіть довжину відрізка BB_1, якщо $AC:AB = 3:2$ і $CC_1 = 9$ см.

142. Площина α проходить через бічну сторону AD трапеції $ABCD$, площина якої не збігається з α.
1°) Побудуйте точку перетину K прямої CB з площиною α.
2) Знайдіть довжину відрізка KD, якщо $CD:AB = 2:3$, а $DA = 2$ см.

143. Нехай точка D не лежить у площині трикутника ABC; M і N, відповідно, є точками перетину медіан трикутників ABC і DBC.
1°) Визначте взаємне розміщення прямих AD і BC, DM і AN, AD і MN.
2) Побудуйте точку перетину прямої DM з площиною, яка проходить через пряму AB і середину відрізка CD.
3*) У якому відношенні пряма AN поділяє відрізок DM?

144. Побудуйте три прямі, дві з яких перетинаються, а третя — мимобіжна:
1) з кожною із двох перетинних прямих;
2) тільки з першою з них.

145. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через:
1°) вершини A_1, B_1, D;
2°) ребра A_1B_1 і CD;
3) вершини A, A_1 і центр грані DD_1C_1C;
4) прямі BD_1 і D_1C_1;
5*) центри граней A_1D_1DA, DD_1C_1C, $A_1B_1C_1D_1$.

146. Побудуйте переріз тетраедра $SABC$ площиною, що проходить через:
1°) ребро SA та точку M на ребрі BC;
2°) вершину S та точки M і N, що лежать на ребрах AB та BC, відповідно;
3) вершину C та точки M і N, що лежать, відповідно, на гранях ABC та ASC;
4*) точки M, N та P, що лежать, відповідно, на прямих SA, SC та BC.

147. Доведіть, що всі прямі, які перетинають дві паралельні прямі:
1°) лежать в одній площині; 2) утворюють площину.

148. Нехай A, B, C — точки кола, яке лежить у площині α, а точка D знаходиться поза площиною. Доведіть, що прямі DA, DB, DC не лежать в одній площині.

149. Пряма c перетинає кожну з мимобіжних прямих a і b. Доведіть, що будь-яка пряма, яка паралельна прямій c, мимобіжна з a або з b.

150*. Дано три попарно мимобіжні прямі a, b і c. Побудуйте пряму, яка:
1) перетинає a і b та паралельна c;
2) перетинає всі три прямі.

Вправи для повторення

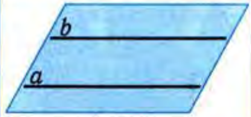
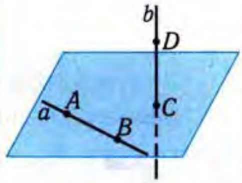
151. Нехай дві прямі — паралельні, а дві інші прямі перетинають їх у точках A, B, C, D. Чи рівні трикутники ABC і DCB?

152. Діагоналі паралелограма дорівнюють 17 см і 19 см, а сторони відносяться, як 2 : 3. Визначте довжини сторін.

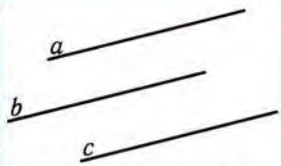
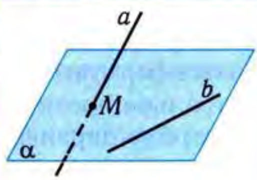
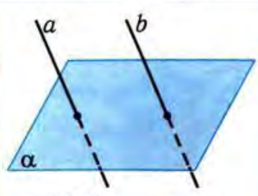
153. Два подібні паралелограми мають спільну сторону завдовжки 3 см. Периметр одного з них дорівнює 8 см. Знайдіть периметр другого.

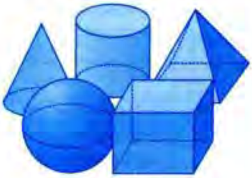
Підсумок

Головні означення

Дві прямі в просторі називаються ***паралельними***, якщо вони лежать в одній площині і не мають спільних точок.		 $a \parallel b$
Дві прямі в просторі, які не лежать в одній площині, називаються ***мимобіжними.***		 $a \,\dot{-}\, b$

Головні твердження

Ознака паралельності прямих у просторі	Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні між собою.	 $a \parallel b,\ b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$
Ознака мимобіжності прямих	Прямі a і b є мимобіжними, якщо існує площина, яка містить пряму b і яку пряма a перетинає в точці, що не належить прямій b.	 $a \cap \alpha = \{M\},\ b \subset \alpha,$ $M \notin b \Rightarrow a \,\dot{-}\, b$
Теорема про перетин площини паралельними прямими	Якщо одна з двох паралельних прямих перетинає дану площину, то і друга пряма перетинає цю площину.	 $a \parallel b,\ b \times \alpha \Rightarrow a \times \alpha$



§9. Паралельне проектування

Розглядається основний спосіб побудови рисунків у стереометрії — паралельне проектування, його властивості.

При вивченні стереометрії одним із найважливіших є питання про зображення просторових фігур на площині. Складність полягає у тому, що плоскі зображення не можуть повною мірою дати уявлення про всі особливості просторової фігури. Йдеться загалом про побудову таких ***зображень, які б відображали властивості оригіналу й уможливлювали достатньо просте, наочне і однозначне ознайомлення з ним.***

Спосіб побудови зображення фігури підказують нам тіні, що падають від її просторової моделі. При цьому можливі два випадки. У першому з них промені виходять з точкового джерела світла (лампи, ліхтаря), розміщеного поблизу моделі (рис. 163). Цій ситуації відповідає ***центральне проектування***. За його законами формується зображення предметів на сітківці ока. Проте центральне проектування спотворює одне з основних відношень геометрії — паралельність (приміром, нам здається, що паралельні залізничні колії збігаються на горизонті) (рис. 164). Крім того, створення такого зображення є досить складною справою.

Рис. 163

Рис. 164

Рис. 165

Інший спосіб зображення просторових фігур пов'язаний з освітленням моделі паралельними променями. Такими, наприклад, можна вважати сонячні промені (рис. 165). Відповідний метод зображення називається методом ***паралельного проектування***. Він достатньою мірою задовольняє згадані умови. Метод паралельного проектування широко використовується не тільки в геометрії, а й у кресленні. По суті, ми вже користувались ним при побудові рисунків. Опишемо цей спосіб зображення.

Нехай дано площину α і пряму a, яка її перетинає. Візьмемо довільну точку простору M, що не належить їм. Проведемо через точку M пряму m, паралельну прямій a (рис. 166). Пряма m перетне площину α в деякій точці M_1 (чому?). Ця точка називається паралельною проекцією точки M на площину α при проектуванні паралельно прямій a. Паралельними проекціями точок прямої a є точка її перетину з площиною α, а проекціями точок площини α є самі ці точки.

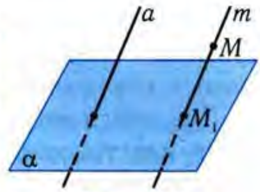


Рис. 166

Проекція — *від латинського projection — кидання вперед.*

Іноді, коли зрозуміло, на яку площину проектується точка і паралельно якій прямій виконується проектування, писатимемо коротше: ***паралельна проекція точки M,*** або ***проекція точки M.***

Отже, якщо задані площина α і пряма a, що її перетинає, то для кожної точки простору існує її паралельна проекція на площину α при проектуванні паралельно прямій a. Ця проекція визначається однозначно, оскільки через дану точку, що не лежить на даній прямій, проходить єдина пряма, паралельна даній. Площина α називається ***площиною проекцій***. При заміні прямої a на довільну паралельну до неї пряму проекції точок простору не змінюються. Це випливає з транзитивності відношення паралельності прямих (теорема 2 §8, ознака паралельності прямих). Тому кажуть, що пряма a визначає ***напрям проектування.*** Всі прямі, паралельні прямій a, визначають однаковий напрям проектування і разом з прямою a називаються ***проектуючими прямими.***

Якщо спроектуємо на площину всі точки деякої просторової фігури F, то дістанемо фігуру F_1 у площині проекцій (рис. 167).

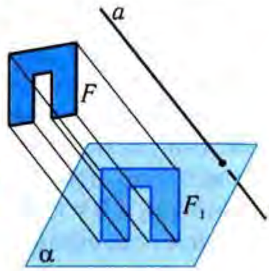


Рис. 167

Паралельною проекцією фігури називається фігура, складена з паралельних проекцій усіх точок даної фігури.

Домовимося далі позначати площину проекцій через α, пряму, що задає напрям проектування, — через a, а проекцію точки, прямої тощо — тією самою літерою, що й дану фігуру, але з індексом $_1$.

Для побудови паралельних проекцій фігур і відтворення за ними властивостей фігур слід знати властивості паралельного проектування.

Зрозуміло, що ***проекцією кожної проектуючої прямої є точка.***

! **Далі, у теоремах 1–3, йтиметься про *проектування прямих і відрізків, що не лежать на проектуючих прямих.***

Одна з найважливіших властивостей паралельного проектування добре ілюструється утворенням прямолінійної тіні від нитки чи дроту.

Теорема 1 *(властивість паралельної проекції прямої і відрізка).*

Паралельною проекцією прямої є пряма, а проекцією відрізка — відрізок.

На рис. 168, а) пряма l проектується на пряму l_1. Її відрізок AB проектується на відрізок A_1B_1 (рис. 168, б).

Площину, яка утворена сукупністю проектуючих прямих, що перетинають дану пряму l, називатимемо ***проектуючою площиною*** для прямої l. Проекція прямої l є перетином площини проекцій з проектуючою площиною для цієї прямої.

Наступну властивість паралельного проектування можна вважати обґрунтуванням відомого факту: сонячні тіні від паралельних стовпів — паралельні.

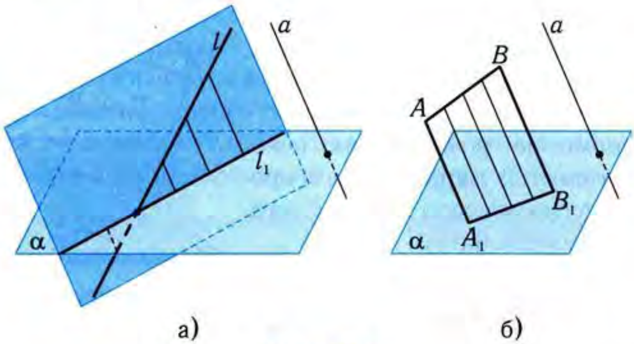


Рис. 168

Теорема 2 *(властивість проекції паралельних прямих).*

Проекції паралельних прямих — паралельні або ж збігаються.

На рис. 169, а) паралельні прямі l, m проектуються на паралельні прямі l_1, m_1, а для прямих p і q на рис. 169, б) проектуючі прямі — спільні, тому вони проектуються на одну пряму $p_1 = q_1$.

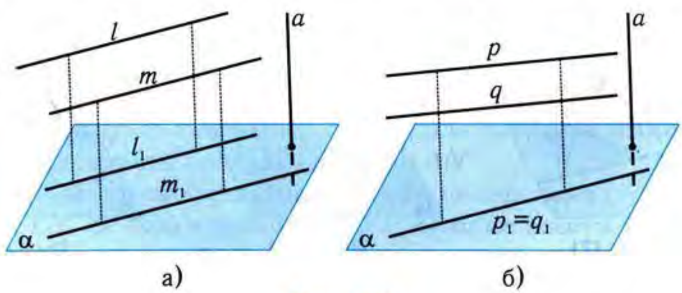


Рис. 169

При паралельному проектуванні довжини відрізків, взагалі кажучи, змінюються. Тінь від вертикального стовпа може бути і коротшою, і довшою від стовпа, залежно від положення Сонця над горизонтом. Разом з тим, можна спостерігати пропорційну залежність між довжинами паралельних стовпів і їхніх тіней.

Теорема 3 *(про відношення довжин проекцій паралельних відрізків).*

Відношення довжин проекцій двох відрізків, які лежать на одній прямій чи на паралельних прямих, дорівнює відношенню довжин цих відрізків.

На рис. 170 відрізки AB і CD — паралельні. Якщо $AB : CD = m : n$, то для їхніх паралельних проекцій $A_1B_1 : C_1D_1 = m : n$.

За допомогою розглянутих основних властивостей паралельного проектування легко описати проекції найпростіших плоских фігур.

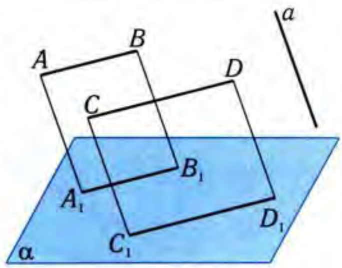


Рис. 170

! **Йдеться про випадок, коли *проектуюча пряма перетинає фігуру не більш ніж в одній точці.***

Теорема 4 *(властивості паралельних проекцій плоских фігур).*

1. **Проекцією кута є кут** (рис. 171).
2. **Проекцією трикутника є трикутник** (рис. 172).
3. **Проекцією паралелограма є паралелограм** (рис. 173).
4. **Проекцією трапеції є трапеція** (рис. 174).
5. **Проекцією *n*-кутника є *n*-кутник** (рис. 175).

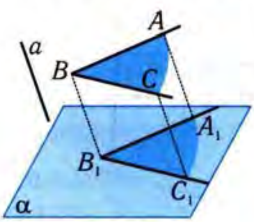


Рис. 171

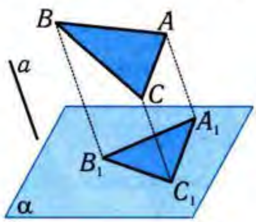


Рис. 172

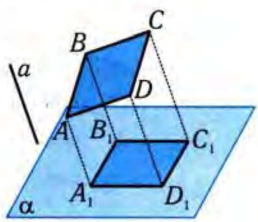


Рис. 173

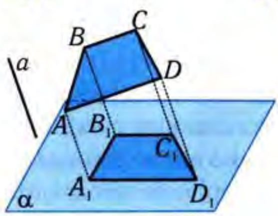


Рис. 174

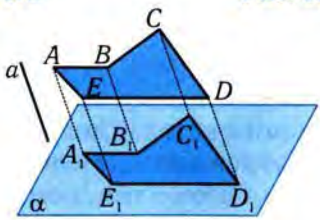


Рис. 175

! **Коли ж проектуюча пряма перетинає плоску фігуру більше ніж в одній точці, то проекцією фігури є відрізок чи інша множина точок прямої.**

Зрозуміло, що паралельна проекція плоскої фігури зберігає далеко не всі властивості оригіналу. Насамперед це стосується властивостей, пов'язаних з вимірюваннями. У загальному випадку при паралельному проектуванні не зберігаються не тільки довжини, а й величини кутів. Проте водночас паралельна проекція фігури містить багато інформації про фігуру.

Приклад 1. Дано паралельну проекцію рівнобедреного трикутника. Побудувати проекцію:

1) медіани, проведеної до однієї з бічних сторін;
2) висоти, опущеної на основу трикутника.

□ Нехай маємо рівнобедрений трикутник ABC з основою BC (рис. 176, а) і його паралельну проекцію — трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 176, б).

1) Якщо CM — медіана до бічної сторони AB, то M — середина відрізка AB (рис. 176, в). Тоді проекція M_1 точки M, згідно з теоремою про відношення довжин проекцій паралельних відрізків, є серединою проекції A_1B_1 сторони AB. Тому відрізок C_1M_1 — проекція медіани CM.

Побудова. Будуємо проекцію точки M, це середина M_1 відрізка A_1B_1 (рис. 176, г). Відрізок C_1M_1 є проекцією медіани, проведеної до однієї з бічних сторін, за теоремою 1.

2) Враховуючи те, що висота, опущена на основу рівнобедреного трикутника, є одночасно і медіаною, для побудови її проекції достатньо побудувати проекцію медіани AN.

Побудова. Будуємо проекцію точки N, це середина N_1 відрізка B_1C_1 (рис. 176, г). Тоді відрізок A_1N_1 є проекцією висоти, опущеної на основу трикутника. ■

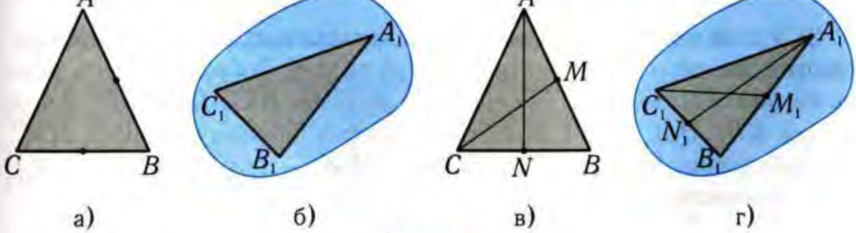


Рис. 176

Щоб відрізняти оригінал і його проекцію, будемо зображати проекцію на зображенні площини проекцій (див. рис. 176, б, г).

Приклад 2. Точки A і B знаходяться по один бік від площини α; A_1, B_1 — їхні паралельні проекції на цю площину, $AA_1 > BB_1$.

1) Побудувати точку перетину K прямої AB з площиною α.

2) Знайти відстань між серединою відрізка KB і її проекцією на площину α, якщо $KB_1 : B_1A_1 = 3:1$ і $AA_1 = 8$ см.

□ 1) Побудуємо рисунок, який відповідає умові прикладу (рис. 177, а), користуючись означенням паралельної проекції. Прямі AA_1 і BB_1 — паралельні, а тому лежать у площині AA_1B_1. Площина AA_1B_1 перетинає площину α по прямій A_1B_1. Пряма AB лежить у площині AA_1B_1. Оскільки $AA_1 > BB_1$ і $AA_1 \parallel BB_1$ (чотирикутник AA_1B_1B — трапеція з основами AA_1 і BB_1), то пряма AB перетинає пряму A_1B_1 у деякій точці. Ця точка і є точкою перетину прямої AB з площиною α, адже пряма A_1B_1 лежить у площині α.

Побудова. Проводимо прямі AB і A_1B_1, знаходимо точку K їхнього перетину (рис. 177, б).

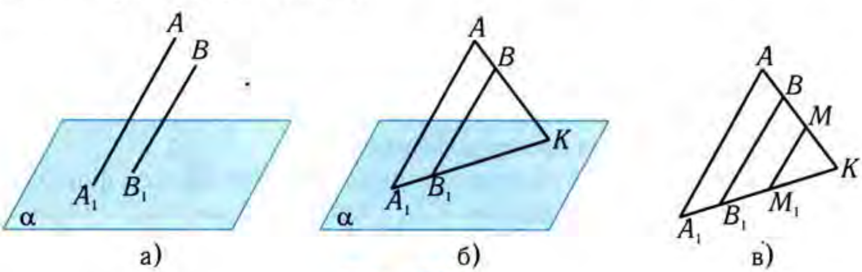


Рис. 177

2) З розв'язання попереднього завдання випливає, що дане завдання зводиться до планіметричної задачі. Зобразимо його умову на рис. 177, в), де M — середина відрізка BK, $MM_1 \parallel BB_1$, $AA_1 = 8$ см, $KB_1 : B_1A_1 = 3 : 1$. Необхідно знайти довжину відрізка MM_1. За побудовою, трикутники MM_1K і AA_1K — подібні ($AA_1 \parallel MM_1$). Тому справджується рівність:

$$\frac{MM_1}{AA_1} = \frac{KM_1}{KA_1}.$$

Оскільки $AA_1 = 8$ см, то для знаходження MM_1 залишилося знайти відношення $KM_1 : KA_1$ або $KA_1 : KM_1$. За умовою, $B_1A_1 = \frac{1}{3}KB_1$. Тому

$$\frac{KA_1}{KM_1} = \frac{KB_1 + B_1A_1}{KM_1} = \frac{4}{3}, \quad \frac{KB_1}{KM_1} = \frac{8}{3}.$$

Таким чином, $MM_1 = AA_1 \cdot \frac{KM_1}{KA_1} = 8 \cdot \frac{3}{8} = 3$ (см). ■

Відповідь. 2) 3 см.

Говорячи про паралельні проекції основних плоских фігур, не можна обминути кола. Уявлення про форму паралельної проекції круга і відповідного йому кола можна отримати, експериментуючи з тінню картонного круга. Цей експеримент можна змоделювати за допомогою циліндричної склянки з рідиною. Якщо її нахилити (рис. 178), то поверхню рідини можна розглядати як паралельну проекцію дна склянки, яке має форму круга. Зрозуміло, що напрям проектування паралельний осі симетрії склянки, а площина проекції — площина поверхні рідини. Таку саму форму мають ковбасні зрізи (рис. 179). Їх можна вважати паралельними проекціями поперечних перерізів (кругів) уздовж ковбасного батона. Врешті, ці міркування дозволяють сформулювати означення.

Рис. 178

Рис. 179

Паралельна проекція кола називається еліпсом.

На площині еліпс зображають у вигляді овала (рис. 180). Ця фігура відіграє помітну роль у математиці та природознавстві. Досить сказати, що траєкторії руху Землі та інших планет навколо Сонця — еліптичні.

Рис. 180

Еліпс має багато чудових властивостей. Деякі з них можна обирати у якості його означення. Наприклад, *еліпс є витягнуте (чи стиснене) коло від (до) його діаметра.*

***Еліпс** — від грецького ελλειψιζ (elleipsis) — упущення, недолік, недостача.*

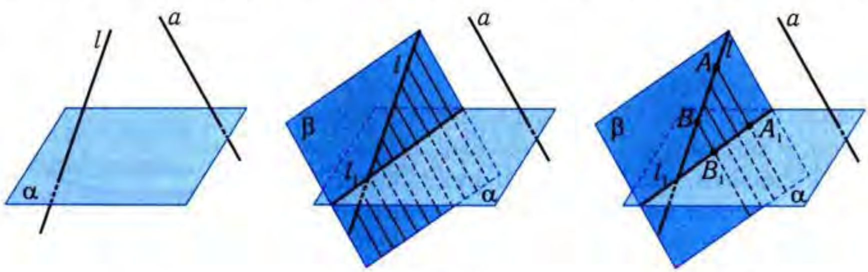
Зрозуміло, що паралельною проекцією круга є частина площини, обмежена еліпсом.

Наведемо доведення властивостей паралельного проектування, поданих вище.

Доведення теореми 1 про паралельну проекцію прямої і відрізка.

□ Нехай маємо площину проекцій α, напрям проектування, заданий прямою a, і пряму l, $l \nparallel a$ (рис. 181, а). Аби побудувати проекцію прямої l, треба через усі її точки провести прямі, паралельні прямій a, і розглянути точки перетину їх з площиною α. Із задач 1, 2 §8 випливає, що сукупність проведених прямих утворює площину β. Пряма l_1 перетину площин α і β (рис. 181, б) і є паралельною проекцією прямої l на площину α при проектуванні паралельно прямій a.

Справді, кожна точка прямої l_1 є точкою перетину площини α з проектуючою прямою, що проходить через деяку точку прямої l, тобто є паралельною проекцією деякої точки прямої l. І навпаки, кожна проектуюча пряма, що перетинає пряму l, лежить у площині β. Таким чином, проекція кожної точки прямої l належить прямій l_1. Якщо на прямій l задано відрізок AB, то проекції його точок розміщені на проекції прямої l, тобто на l_1. З побудови проекцій точок прямої l випливає, що проекції точок, що містяться між точками A і B, розміщені між проекціями A_1 і B_1 точок A і B



а) б) в)

Рис. 181

(рис. 181, в), і навпаки. Таким чином, проекцією відрізка є відрізок. ■

Доведення теореми 2 про проекції паралельних прямих.

□ Нехай дано площину проекцій α, пряму a, яка визначає напрям проектування, і паралельні прямі b і c.

Якщо деяка проектуюча пряма перетинає обидві прямі b і c, то проектуючі площини для цих прямих збігаються з площиною β, що проходить через паралельні прямі b і c (рис. 182). Така площина визначається прямими b і c однозначно (теорема 5 §8), а проекції прямих b і c збігаються з перетином спільної проектуючої площини з площиною α.

Якщо ж не існує проектуючої прямої, яка перетинає обидві прямі b і c, то проекції b_1 і c_1 цих прямих є паралельними. Справді, припустимо, що у прямих b_1 і c_1 є спільна точка M (рис. 183). Тоді проектуюча пряма, що проходить через точку M, перетинатиме і пряму b, і пряму c. Тобто спільна проектуючи пряма існує. Ця суперечність доводить паралельність проекцій b_1 і c_1 .■

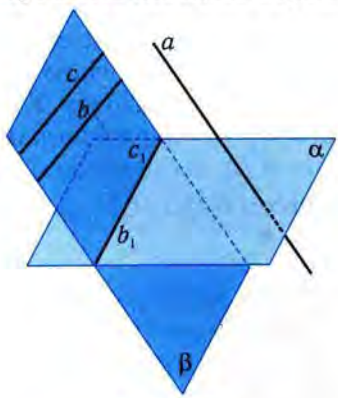


Рис. 182

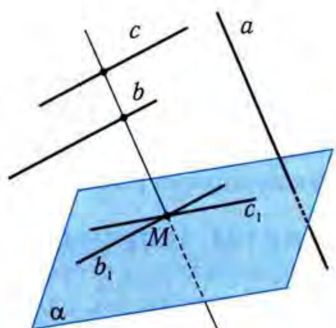


Рис. 183

Доведення теореми 3 про відношення довжин проекцій паралельних відрізків.

□ Спочатку розглянемо випадок, коли дані відрізки AB і BC лежать на одній прямій і мають спільний кінець B (рис. 184). Проектуючі прямі AA_1, BB_1, CC_1 — попарно паралельні і лежать в одній проектуючій площині разом з даними відрізками AB, BC і їхніми проекціями A_1B_1 і B_1C_1. Проведемо у цій площині через точку B пря-

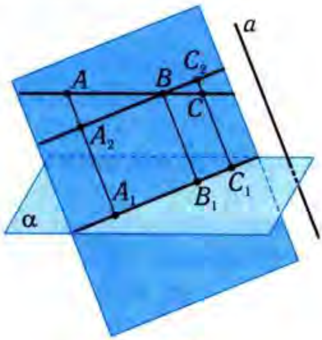


Рис. 184

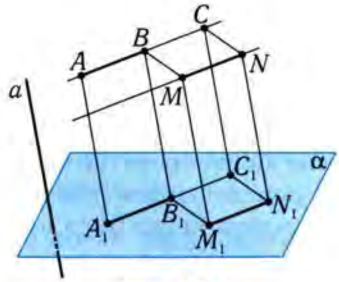


Рис. 185

му A_2C_2, паралельну прямій A_1C_1, де $A_2 \in AA_1$, $C_2 \in CC_1$. Трикутники ABA_2 і CBC_2 — подібні (чому?). Із подібності цих трикутників і рівностей $A_1B_1 = A_2B$, $B_1C_1 = BC_2$ маємо: $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$.

Випадок, коли дані відрізки AB і MN розміщені на паралельних прямих, зводиться до попереднього. Для цього потрібно один з відрізків (наприклад, MN) відкласти на прямій AB від точки B (рис. 185) і скористатись тим, що паралельні відрізки, які рівні між собою, мають рівні між собою проекції. Справді, чотирикутник $BMNC$ є паралелограмом ($BC \parallel MN$ і $BC = MN$). Згідно з теоремою 2, прямі B_1C_1 і M_1N_1 — паралельні або ж збігаються. У першому випадку чотирикутник $B_1M_1N_1C_1$ є паралелограмом ($B_1C_1 \parallel M_1N_1$, $B_1M_1 \parallel C_1N_1$). Тому $B_1C_1 = M_1N_1$, тобто проекції рівних відрізків — рівні. А випадок, коли прямі B_1C_1 і M_1N_1 збігаються, рекомендуємо розглянути самостійно. ■

Доведення теореми 4 про проекції плоских фігур.

□ Користуючись теоремами 1–3, неважко довести теорему 4. Доведемо, наприклад, що проекцією трапеції є трапеція. Трапеція — це чотирикутник, у якого дві сторони паралельні і нерівні. Проекцією чотирикутника є чотирикутник (ми домовились про те, що проектуюча пряма не перетинає плоску фігуру більш ніж в одній точці). Проекціями відрізків є відрізки, за теоремою 1, а проекцією паралельних відрізків — основ трапеції — є паралельні відрізки, за теоремою 2 (накладатися вони не можуть згідно з домовленістю). Залишилося застосувати теорему 3. Відношення проекцій основ не дорівнює одиниці. Таким чином, проекцією трапеції є трапеція.

Аналогічно доводяться інші твердження теореми 4 (доведіть їх самостійно). ■

Задача 1. Дано три точки, що не лежать на одній прямій і містяться по один бік від площини проекцій, і їхні паралельні проекції. Побудувати лінію перетину площини проекції з площиною, яка проходить через дані точки.

□ Нехай A, B, C — дані точки, α — площина проекцій, A_1, B_1, C_1 — проекції даних точок (рис. 186).

Щоб побудувати лінію перетину площин, досить знайти дві її точки. Шукана пряма повинна містити точки перетину прямих AB і BC з площиною α (чому?). Для побудови точки M перетину прямої AB з площиною α проведемо площину, яка проходить через паралельні проектуючі прямі AA_1 і BB_1. Ця площина є проектуючою для прямої AB, і шукана точка M міститься в цій площині (чому?). Для побудови точки M досить знайти точку перетину прямих AB і A_1B_1 (рис. 187). Аналогічно будуємо точку перетину N прямої BC з площиною α. Пряма MN — шукана. Цю пряму називають ***слідом*** площини ABC на площині проекцій α.

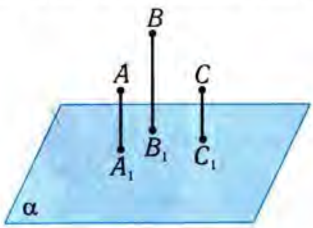


Рис. 186

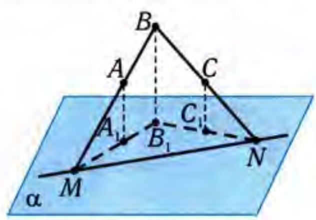


Рис. 187

Аналізуючи наведену побудову, можна виявити умови існування сліду площини ABC на площині проекцій α. Прямі AB і A_1B_1 перетинаються тоді і тільки тоді, коли довжини відрізків AA_1 і BB_1 різні (чому?). Аналогічний висновок стосується прямих BC і B_1C_1, AC і A_1C_1. Таким чином, якщо довжини відрізків AA_1, BB_1, CC_1 рівні, то неможливо побудувати слід площини ABC на площині проекцій α, тобто ці площини не перетинаються. Якщо хоча б два з цих відрізків мають різні довжини, то така побудова можлива. ■

! **З наведених міркувань можна зробити висновок, корисний для побудови сліду площини ABC. Якщо довжини відрізків AA_1, BB_1, CC_1 відрізняються мало, то слід площини ABC на площині проекцій α буде дуже відда-**

лений від проекцій точок *A*, *B*, *C*. Тому при виконанні побудови сліду на аркуші паперу виникають труднощі: слід може не поміститись на рисунку.

Приклад 3. Побудувати на площині грані ABC тетраедра $ABCD$ слід площини α, яка поділяє ребро AD навпіл, а ребра BD і CD у відношенні $2:1$ і $1:2$ відповідно, рахуючи від точки D.

□ Нехай площина α перетинає ребра AD, BD, CD тетраедра $ABCD$ у точках K, M, L відповідно (рис. 188, а). Задача полягає у побудові сліду площини KML на площині ABC. Для цього достатньо побудувати дві точки лінії перетину цих площин.

Прямі KM і AB лежать в одній площині і перетинаються. Це випливає з того, що точки K і M поділяють сторони трикутника ABD у різних відношеннях (згадайте теорему Фалеса!). Позначимо точку перетину прямих KM і AB через X (рис. 188, б).

Аналогічно обґрунтовується те, що прямі LM і CB перетинаються, і будується друга точка Y — точка перетину прямих LM і BC (рис. 188, в). Отже, слідом площини α на площині ABC є пряма XY. ■

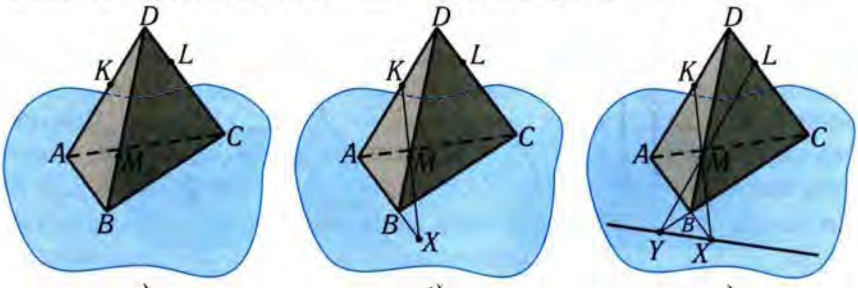


Рис. 188

✓ Контрольні запитання

1. На рис. 189 зображено площину проекції α, напрям проектування a і точку A. Яка з точок M, N, P може бути паралельною проекцією точки A?
2. Котрий з рис. 190, а)–г) не може бути зображенням паралельних проекцій прямих a і b на дану площину, якщо прямі a і b: 1) паралельні; 2) перетинаються; 3) мимобіжні?

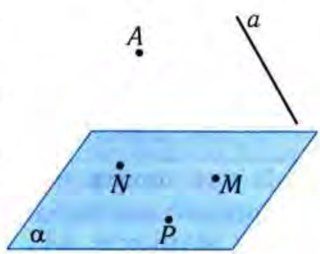


Рис. 189

а) б) в) г)

Рис. 190

3. Котрий з рис. 191, а)–ґ) не може бути зображенням паралельної проекції кута на площину, якщо кут є: 1) гострим; 2) тупим; 3) прямим?

а) б) в) г) ґ)

Рис. 191

4. На котрому з рис. 192, а)–ґ) може бути зображена паралельна проекція трикутника на дану площину, якщо він є: 1) рівностороннім; 2) рівнобедреним; 3) прямокутним?

а) б) в) г) ґ)

Рис. 192

5. На котрому з рис. 193, а)–ґ) може бути зображена паралельна проекція чотирикутника на дану площину, якщо він є: 1) паралелограмом; 2) квадратом; 3) прямокутником; 4) трапецією; 5) рівнобічною трапецією?

а) б) в) г) ґ)

Рис. 193

6. На котрому з рисунків 194, 195 представлені тіні від стовпчиків при їхньому освітленні Сонцем, а на котрому — ліхтариком?

Рис. 194

Рис. 195

7. Чи може паралельною проекцією прямої бути промінь?
8. Чи завжди паралельною проекцією прямої є пряма?
9. Чи можуть проекції двох прямих, що перетинаються, бути паралельними?
10. Чи перетинаються прямі, якщо їхні проекції перетинаються?
11. Чи правильним є твердження, що проекція середини відрізка є серединою його проекції?
12. Чи може паралелограм бути паралельною проекцією трапеції?
13. Чи може паралельна проекція висоти трикутника бути медіаною його проекції?
14. Чи правильно, що фігура є відрізком, якщо її паралельна проекція — відрізок?

Графічні вправи

1. На рис. 196 зображено точки A, B та їхні паралельні проекції на площину α. Яка з точок M, N, P може бути зображенням проекції точки C, яка належить відрізку AB?
2. На рис. 197 зображено точки A, B та їхні паралельні проекції на площину α. Яка з точок M, N, P може бути точкою перетину відрізка AB з площиною α?

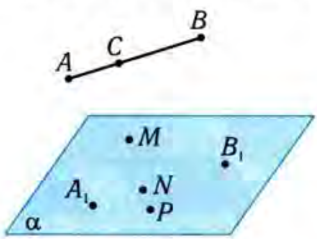


Рис. 196

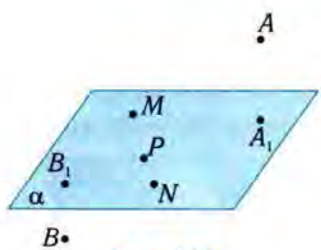


Рис. 197

3. Побудуйте рисунок, який відповідає наведеним даним.
1) Дано паралельну проекцію $A_1B_1C_1$ трикутника ABC і відрізок B_1M_1 — проекцію медіани BM.
2) Прямокутник $ABCD$ не має спільних точок з площиною α. Через точки A, B, C, D проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1, D_1.
3) Дано паралельну проекцію прямокутника і точки перетину його осей симетрії.

4) Дано паралельні проекції квадрата, центра кола, вписаного в квадрат, і точок дотику кола до сторін квадрата.

4. Маємо трикутну піраміду та її паралельні проекції (рис. 198, а–ґ). Для кожного випадку опишіть площини проекцій та напрями проектування.

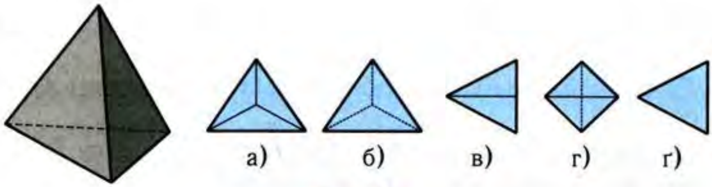


Рис. 198

5. Побудуйте паралельну проекцію куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на площину грані ADD_1A_1, якщо напрям проектування паралельний прямій: 1) CD; 2) CA; 3) CA_1; 4) C_1O, де O — центр грані $ABCD$.

6. Побудуйте слід площини MNP на площині нижньої грані прямокутного паралелепіпеда на рис. 199, а)–г).

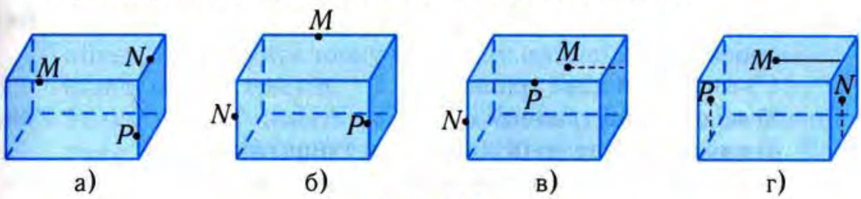


Рис. 199

7. Побудуйте слід площини MNP на площині основи піраміди на рис. 200, а)–г).

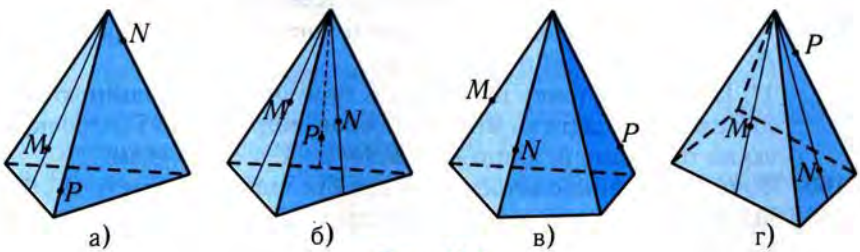


Рис. 200

Задачі

154°. Дано паралельні проекції ромба $ABCD$ і точки M на стороні BC. Побудуйте:

1) проекцію перпендикуляра, проведеного з точки M до діагоналі BD;

2) проекцію точки, яка поділяє діагональ BD у відношенні 1:3, якщо рахувати від точки B.

155°. Дано паралельну проекцію рівнобічної трапеції $ABCD$. Побудуйте:

1) проекцію точки M, яка поділяє меншу основу DC у відношенні 1:3, якщо рахувати від точки D;

2) проекцію перпендикуляра, проведеного з точки M до основи AB.

156. Дано паралельну проекцію рівностороннього трикутника ABC. Побудуйте проекцію:

1°) медіани, проведеної з вершини B;

2°) бісектриси кута A;

3°) висоти, проведеної з вершини C;

4) центра кола, вписаного в трикутник ABC.

157. Дано паралельну проекцію рівнобічної трапеції. Побудуйте проекцію:

1°) середньої лінії трапеції;

2) осі симетрії трапеції;

3) висоти, проведеної з вершини тупого кута.

158. Дано еліпс, що є паралельною проекцією кола. Зобразіть проекції:

1) центра кола;

2) вписаного в коло рівнобедреного прямокутного трикутника;

3) вписаного в коло квадрата.

---

159. Точки A і B знаходяться по різні боки від площини β, а A_1, B_1 — їхні проекції на площину.

1°) Побудуйте точку перетину K прямої AB з площиною β.

2) Знайдіть відстань між серединою відрізка AB і її проекцією на площину β, якщо $AK : KB = 2 : 1$, а $BB_1 = 8$ см.

160. Точки A, B знаходяться по один бік від площини α; A_1, B_1, відповідно, — їхні паралельні проекції на α, а M — середина відрізка BB_1.

1°) Побудуйте точку перетину K прямої AM з площиною α.

2) Знайдіть довжину відрізка B_1K, якщо $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 4$ см, $A_1B_1 = 6$ см.

161. Відрізок AB перетинає площину проекції в точці M, B_1 — проекція точки B.
1°) Побудуйте проекцію точки A.
2) Знайдіть довжину проекції відрізка AB, якщо $MB_1 = 6$ см і $AM : MB = 2 : 3$.

162. Паралелограм $ABCD$ не має спільних точок з площиною α. Через точки A, B, C, D проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно в точках A_1, B_1, C_1, D_1.
1) Чим є чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ для паралелограма $ABCD$?
2) Визначте форму чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$.
3) Побудуйте проекцію центра паралелограма $ABCD$ на площину α, якщо напрям проектування визначає пряма AA_1.

163. Точки A і B лежать на несуміжних бічних ребрах чотирикутної піраміди. Побудуйте перетин прямої AB з площиною основи піраміди.

164. Точка A лежить на бічній грані паралелепіпеда, а точка B — на нижній основі. Побудуйте точку перетину прямої AB з площиною верхньої основи.

165. Точки A і B лежать на суміжних бічних гранях паралелепіпеда. Побудуйте точку перетину прямої AB з площинами інших бічних граней.

166*. Точки A, B, C лежать на різних бічних гранях паралелепіпеда. Побудуйте слід площини ABC на площині основи. Користуючись слідом, побудуйте переріз паралелепіпеда площиною ABC.

167*. Побудуйте слід площини, що проходить через точку на одній бічній грані трикутної піраміди і пряму, яка знаходиться в площині іншої бічної грані, на площині основи піраміди. Користуючись слідом, побудуйте переріз піраміди вказаною площиною.

168. Побудуйте проекцію правильного шестикутника $ABCDEF$, якщо відомі проекції вершин A, B, D.

169. Дано проекцію п'ятикутника на площину і розміщення трьох його вершин. Знайдіть розміщення решти вершин п'ятикутника.

170. Дано п'ятикутник і проекції трьох точок, що лежать на його сторонах. Знайдіть проекцію всього п'ятикутника.

171*. Побудуйте паралельну проекцію куба на площину однієї з граней, якщо напрям проектування паралельний деякій діагоналі куба.

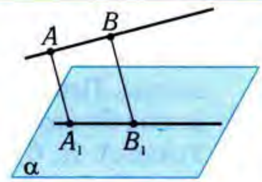
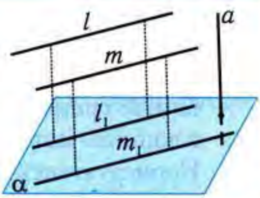
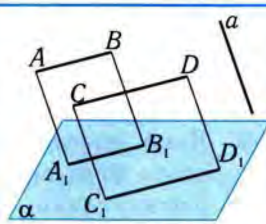
Вправи для повторення

172. Дано трикутник ABC. Пряма, паралельна прямій AB, перетинає сторону AC у точці A_1, а сторону BC — у точці B_1. Знайдіть довжину відрізка A_1B_1, якщо:
1) $AB = 15$ см, $AA_1 : AC = 2 : 3$;
2) $AB = 8$ см, $AA_1 : A_1C = 5 : 3$;
3) $B_1C = 10$ см, $AB : BC = 4 : 5$;
4) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$.

173. Що являє собою множина точок перетину всіх прямих, які проходять через точки бічної сторони трапеції паралельно її основам, з прямою, що проходить через іншу бічну сторону?

Підсумок

Головні властивості паралельного проектування

Паралельною проекцією прямої є пряма, а проекцією відрізка — відрізок.		
Проекції паралельних прямих — паралельні або ж збігаються.		
Відношення довжин проекцій двох відрізків, які лежать на одній прямій чи на паралельних прямих, дорівнює відношенню довжин цих відрізків.		 $\frac{AB}{DC} = \frac{A_1B_1}{D_1C_1}$

§10. Зображення фігур у стереометрії

Розглядаються особливості побудови зображень фігур, насамперед плоских, задачі на побудову на зображеннях.

Б При вивченні питання про зображення фігур у стереометрії основну увагу зосередимо на зображенні плоских фігур. І це зрозуміло, оскільки дивлячись на реальний фізичний об'єкт (будинок, гральний кубик, книжку та ін.), ми бачимо поверхню, яка у багатьох випадках складається з плоских частин (рис. 201 – 203). На рисунках і технічних кресленнях передусім намагаються зобразити поверхню об'єкта, а наш життєвий досвід дає змогу за деталями поверхні побачити предмет у цілому.

Оскільки основна плоска фігура — це трикутник, з'ясуємо, яка фігура може бути зображенням трикутника. А відтак ми зможемо обговорити питання про зображення інших многокутників, відомих з планіметрії. Крім того, мова йтиме і про зображення найпростіших просторових фігур.

За геометричну основу зображення візьмемо паралельне проектування. Передусім треба уточнити зміст поняття «зображення», адже розуміти під зображенням фігури безпосередньо її паралельну проекцію — доволі незручно. Фігуру великих розмірів

Рис. 201

Рис. 202

Рис. 203

просто неможливо спроектувати на аркуш паперу — для того, щоб зображення помістилося, паралельну проекцію фігури потрібно пропорційно зменшити (або збільшити в інших ситуаціях).

Зображенням просторової фігури називається фігура, яка подібна паралельній проекції даної фігури на деяку площину.

Дане означення вимагає доповнення. Зрозуміло, що зображення повинно містити якомога більше інформації про фігуру. Навряд чи паралельна проекція куба на рис 204, а) доволі повно відображає особливості цієї фігури. Тому на зображенні многогранників зображають їхні вершини і ребра, видимі й невидимі. Як вже зазначалося, невидимі лінії зображають штриховими лініями. Таким чином, зображення куба на рис. 204, б) більш повно дає інформацію про куб.

а)

б)

Рис. 204

На зображенні просторової фігури виділяють також зображення її важливих елементів (наприклад, діагоналей, перерізів тощо).

Зазначимо, що в означенні не фіксується ні площина проекцій, ні напрям проектування. Це і зрозуміло, оскільки зручну для розгляду позицію можна обирати вільно.

Тепер відповімо на запитання: яка фігура може бути зображенням трикутника? Випадок, коли трикутник лежить у проектуючій площині, не розглядатимемо. У цьому разі він проектується на відрізок (рис. 205).

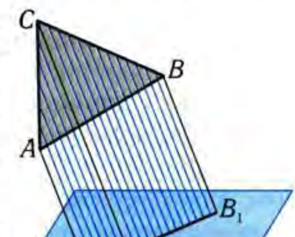


Рис. 205

Оскільки паралельною проекцією трикутника є трикутник (окрім зазначеного вище випадку), то і зображенням трикутника має бути трикутник. Водночас виникає запитання: «А який трикутник можна вважати зображенням даного трикутника?». Як відомо, при паралельному проектуванні змінюються довжини відрізків, міри кутів. Зрозуміло, що паралельною проекцією рівнобедреного трикутника є, взагалі кажучи, різносторонній трикутник, проекцією тупокутного трикутника може бути гострокутний і т. д.

Проведення простих експериментів з картонними моделями трикутників при отриманні їхньої тіні від Сонця чи від віддаленої лампи показує, що форма паралельних проекцій трикутника може бути різною. Більше того, можна переконатись у тому, що за рахунок відповідного розміщення моделі можна отримати як проекцію трикутник заданої форми. Таким чином, розглядаючи різні тіні одного трикутника, можна дійти наступного висновку.

Зображенням даного трикутника може бути довільний трикутник.

Математичне обґрунтування цього факту буде зроблено нижче. Користуючись ним, можна зробити певні висновки щодо зображення деяких чотирикутників.

Із властивостей паралельного проектування випливає, що зображенням паралелограма є довільний паралелограм. Справді, паралелограм діагоналлю розбивається на два рівні трикутники (рис. 206, а). Зображенням трикутника ABD може бути довільний трикутник $A_1B_1D_1$. Добудувавши трикутник $A_1B_1D_1$ до паралелограма (рис. 206, б), який однозначно визначається цим трикутником, отримаємо наступний висновок.

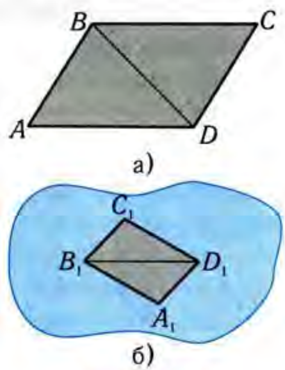


Рис. 206

Зображенням даного паралелограма може бути довільний паралелограм.

Щодо трапецій, то подібного висновку про їхні зображення зробити не можна, оскільки при паралельному проектуванні має зберігатись відношення довжин паралельних основ. Якщо, наприклад, одна з основ удвічі менша від другої, то і на зображенні це співвідношення має зберігатись. Хоча, звичайно, зображенням трапеції має бути трапеція (але не довільна!).

Щодо зображення інших многокутників, то можна вибрати три їхні точки, що не лежать на одній прямій (наприклад, три вершини). Ці точки визначають трикутник, який може зображатись довільним трикутником. Далі, користуючись властивостями паралельного проектування (вони є і властивостями зображень), можна у деяких випадках будувати зображення всього многокутника.

Навчившись зображати деякі плоскі фігури, розміщені у просторі, можемо приступити до зображення найпростіших просторових фігур.

Зображення прямокутного паралелепіпеда чи куба нічим не відрізняються від зображень довільного паралелепіпеда, бо зображеннями квадратів та прямокутників можуть бути довільні паралелограми. Найчастіше куб зображають так, як це зроблено на рис. 207, а). На рис. 207, б–г) теж подано зображення куба. Однак, на відміну від рис. 207, а), за цими зображеннями важко скласти уявлення про властивості куба. На рис. 207, б), в) зображення прості й правильні, тобто виконані за законами паралельного проектування. Проте вони не є наочними. Сказане не означає, що у деяких випадках нам не знадобиться кожне з наведених зображень.


а) б) в) г)

Рис. 207

Розглянемо докладніше побудову зображення паралелепіпеда. У §8 паралелепіпед розглядався як многогранник, гранями якого є шість паралелограмів. У тому самому параграфі розглядався підхід до побудови фігур з відрізків. Скористаємось ним.

У даній площині α побудуємо паралелограм $ABCD$ і через усі його вершини проведемо паралельні прямі, які перетинають площину α (рис. 208). На цих прямих по один бік від площини α відкладемо відрізки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 однакової довжини. Неважко довести, що точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежать в одній площині і є вершинами паралелограма $A_1B_1C_1D_1$. Справді, оскільки AA_1D_1D, $ABCD$ і BB_1C_1C — паралелограми, то $A_1D_1 \parallel AD$, $AD \parallel BC$, $BC \parallel B_1C_1$ і, згідно з ознакою паралельності прямих (теорема 2 §8), $A_1D_1 \parallel B_1C_1$. Це, зокрема, дає нам змогу стверджувати, що точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежать у одній площині.

Аналогічно маємо, що $A_1B_1 \parallel D_1C_1$, тобто чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ є паралелограмом.

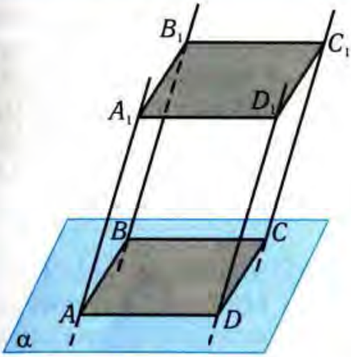


Рис. 208

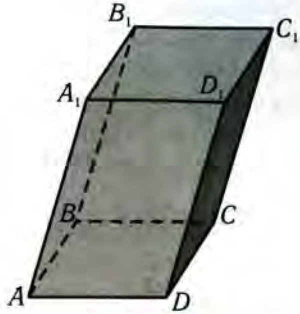


Рис. 209

Сукупність усіх точок відрізків, що сполучають точки паралелограмів $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, утворюють фігуру, яка є ***паралелепіпедом*** (рис. 209). Зрозуміло, що під час побудови паралелепіпедів можна обійтись паралельними відрізками, що сполучають відповідні точки паралелограмів. Зображення виконано, як і на рис. 208, тільки з урахуванням того, що паралелепіпед «заповнений» точками, і деякі лінії невидимі для спостерігача. Як і в кресленні, їх зображають штриховими лініями. Позначають паралелепіпед за його вершинами: $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

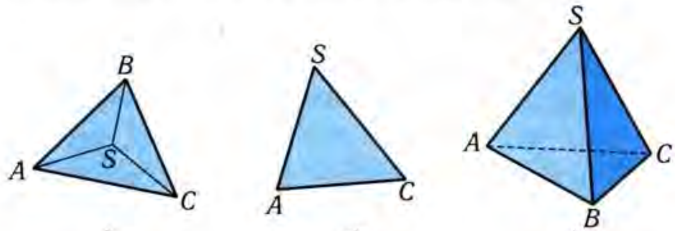
Дві грані паралелепіпеда, що мають спільне ребро, називаються ***суміжними***, а ті, що не мають спільних ребер,— ***протилежними***. Дві вершини, які не належать до однієї грані, називаються ***протилежними***. Відрізок, що сполучає протилежні вершини, називається ***діагоналлю паралелепіпеда***.

Зображення пірамід, зокрема тетраедрів, було розглянуто у §8 у зв'язку з їхньою побудовою з відрізків.

! **Розгляд зображень плоских і просторових фігур дозволяє *сформулювати вимоги до зображень:***
1) зображення має бути правильним, тобто задовольняти певні правила;
2) зображення має бути наочним;
3) зображення має бути простим для виконання.

Правильність зображення забезпечується дотриманням правил побудови паралельних проекцій. Наочність і простота забезпечуються вибором напрямку проектування, тобто «кута зору» на фігуру та розміщенням площини проекції. Так, зображення тетраедра

SABC на рис. 210, а), б) не можна вважати вдалими. У першому випадку використано паралельне проектування на площину грані *ABC*, а у другому — напрям проектування визначається прямою *AB*. В обох цих випадках втрачена об'ємність фігури. У загальному випадку використовують третє зображення (рис. 210, в). Воно є плоским чотирикутником *ABCS*, у якому проведені діагоналі *AC* і *SB*. Невидиме ребро *AC* зображено штриховою лінією.



а) б) в)

Рис. 210

Важливим засобом забезпечення наочності зображення є зображення елементів фігури (медіан, бісектрис, середніх ліній, діагоналей тощо), а також найпростіших перерізів.

Побудова зображень різних фігур є невід'ємною складовою розв'язання задач стереометрії.

Часто-густо при розв'язуванні задач необхідно виконати певні побудови на зображенні (провести медіану, вказати центр вписаного кола, побудувати переріз тощо). Ці побудови зазвичай виконуються за властивостями паралельного проектування.

Приклад 1. На довільному зображенні прямокутного рівнобедреного трикутника *ABC* побудувати зображення:
1) центра *O* описаного кола;
2) вписаного квадрата, дві сторони якого лежать на катетах трикутника, а одна з вершин — на гіпотенузі *BA*.

☐ Нехай зображенням прямокутного рівнобедреного трикутника *ABC* (рис. 211, а) є трикутник $A_1B_1C_1$ (рис 211, б).

1) Центр описаного навколо прямокутного трикутника кола є серединою гіпотенузи. Тому його зображення є серединою зображення гіпотенузи.

Побудова. Розділимо відрізок A_1B_1 навпіл, точка поділу O_1 і є шуканою (рис. 211, в).

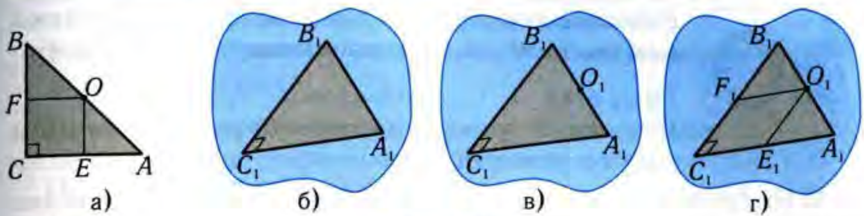


Рис. 211

2) Якщо із середини O гіпотенузи AB провести перпендикуляри до катетів (див. рис. 211, а), то отримаємо квадрат, який задовольняє умову завдання. Проведені перпендикуляри паралельні катетам. Саме цим скористуємось для побудови шуканого зображення.

Побудова. З точки O_1 проводимо відрізки O_1E_1 і O_1F_1, паралельні C_1B_1 і C_1A_1 відповідно (рис. 211, г). Чотирикутник $C_1E_1O_1F_1$ є шуканим. ■

Приклад 2. На зображенні куба побудувати його переріз площиною, що проходить через середини трьох паралельних ребер.

☐ На рис. 212 середини ребер AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено відповідно через A_2, B_2, C_2, D_2. Зображення цих точок лежать на серединах зображень відповідних відрізків (чому?). Нехай січна площина проходить через точки A_2, B_2, D_2. Оскільки всі грані куба — квадрати, то відрізок A_2B_2, який проходить через середини протилежних сторін квадрата AA_1B_1B, дорівнює стороні квадрата AB (або ж ребру куба) і паралельний цій стороні.

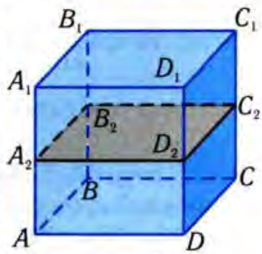


Рис. 212

Аналогічно $D_2C_2 \parallel DC$ і $D_2C_2 = DC$. Оскільки і $AB \parallel DC$, то, згідно з транзитивністю відношення паралельності, $A_2B_2 \parallel D_2C_2$. Через паралельні прямі A_2B_2, D_2C_2 проходить єдина площина. У цій площині лежать точки A_2, B_2, D_2, тому дана площина є шуканою січною. Січна площина перетинає грані куба по рівних відрізках A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2 і D_2A_2. Отже, чотирикутник $A_2B_2C_2D_2$, що є шуканим перерізом, має форму ромба. Неважко помітити, що діагоналі B_2D_2 і A_2C_2 цього ромба рівні між собою. Тобто, чотирикутник $A_2B_2C_2D_2$ — квадрат. Ми не тільки побудували переріз, а й встановили його форму. ■

Розглянемо обґрунтування наведених вище висновків стосовно зображення основних плоских фігур.

Теорема 1 *(про зображення трикутника).* **Будь-який трикутник може бути зображенням даного трикутника.**

□ Нехай дано трикутник ABC. Візьмемо довільний трикутник KMN. Він може бути зображенням трикутника ABC, якщо існують площина проекцій і напрям проектування, притому такі, що паралельна проекція трикутника ABC подібна трикутнику KMN.

Виберемо площину проекцій α так, щоб вона перетинала площину трикутника ABC по прямій AC (рис. 213). Нам треба вибрати напрям проектування так, щоб проекцією трикутника ABC на площину α був трикутник, подібний трикутнику KMN. Для цього побудуємо у площині α трикутник CAE, подібний трикутнику KMN з коефіцієнтом подібності $\frac{AC}{MK}$. Тоді пряма BE задає потрібний напрям проектування. Оскільки трикутник CAE є паралельною проекцією трикутника ABC, а трикутники CAE і KMN — подібні, то трикутник KMN є зображенням трикутника ABC. ■

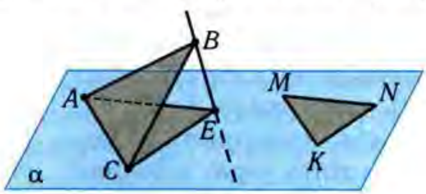


Рис. 213

Ця теорема відкриває широкі можливості для вибору зображень даного трикутника, хоча, звісно, не варто використовувати зображення із властивостями, яких не має оригінал. Наприклад, недоцільно зображати довільний трикутник у вигляді прямокутного.

Переходячи до зображень інших многокутників, зауважимо, що для них, як правило, теореми, аналогічні теоремі 1, не справджуються, хоча окремі їхні властивості зберігаються при зображенні. Передусім йтиметься про паралельність сторін (чому?). У зв'язку з цим наведемо ще одну важливу теорему.

Теорема 2 *(про зображення паралелограма).*

Будь-який паралелограм може бути зображенням даного паралелограма.

Довести цю теорему можна, розбивши паралелограми діагоналями на трикутники і скориставшись теоремою 1 (див. рис. 206, а, б).

Ми вже зустрічались з ситуаціями, коли планіметричні факти мають аналоги у просторі. І такі випадки зустрічатимуться й далі. Найпростішій просторовій фігурі — тетраедру — відповідає на площині трикутник. За теоремою 1, будь-який трикутник може бути зображенням даного трикутника. З іншого боку, тетраедр проектується в чотирикутник, який після проведення в ньому діагоналей стає зображенням тетраедра. Виникає запитання: чи довільний чотирикутник може бути зображенням даного тетраедра? Ствердну відповідь на нього дає теорема німецьких математиків Польке К. (1810–1877) і Шварца Г. (1843–1921). Виходячи з неї, можна будувати зображення многогранників. Для цього треба вибрати чотири вершини, що не лежать в одній площині. Вони є вершинами якогось тетраедра. Потім задати довільним чином зображення цих точок. А вже тоді добудовувати зображення всієї фігури, користуючись властивостями проектування.

Приклад 3. Побудувати зображення правильного шестикутника.

□ Розглянемо правильний шестикутник *ABCDEF* (рис. 214, а). Він має властивості, які повинні зберігатись у його зображеннях. Сторони шестикутника попарно паралельні *(AB* ∥ *ED, BC* ∥ *FE, CD* ∥ *AF).* Він має центр симетрії *O*, а відрізки, що сполучають точку *O* з вершинами шестикутника, рівні між собою і дорівнюють його стороні. Тепер неважко помітити, що досить побудувати зображення паралелограма (навіть ромба) *ABCO,* аби потім добудувати до нього зображення всього шестикутника.

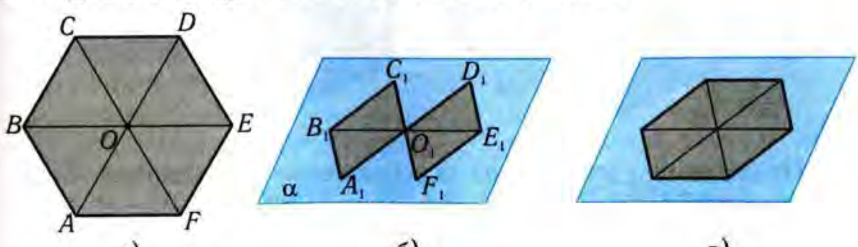


Рис. 214

Нехай паралелограм $A_1B_1C_1O_1$ є зображенням паралелограма $ABCO$ (це може бути довільний паралелограм!). Продовживши A_1O_1 і C_1O_1 за точку O_1 так, щоб $O_1D_1 = A_1O_1$, $O_1F_1 = C_1O_1$, побудуємо паралелограм $F_1O_1D_1E_1$ (рис. 214, б). По суті, побудовано паралелограм, центрально-симетричний до паралелограма $A_1B_1C_1O_1$ відносно його вершини O_1. Сполучивши точки A_1 і F_1, C_1 і D_1, дістанемо зображення правильного шестикутника (рис. 214, в). ■

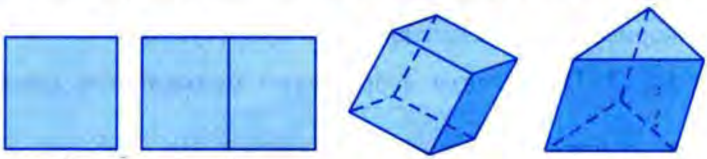
✓ Контрольні запитання

1. Котра з фігур на рис. 215, а)–г) не є зображенням квадрата?

а) б) в) г)

Рис. 215

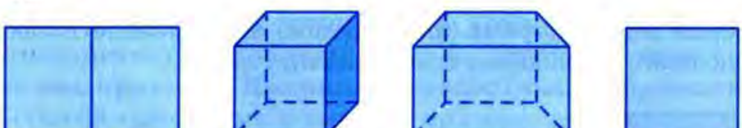
2. Котра з фігур на рис. 216, а)–г) не є зображенням куба?



а) б) в) г)

Рис. 216

3. На котрому з рис. 217, а)–г) зображення куба не є правильним?



а) б) в) г)

Рис. 217

4. На котрому з рис. 218, а)–г) зображення тетраедра не є правильним?
5. Чи є паралельна проекція фігури її зображенням?

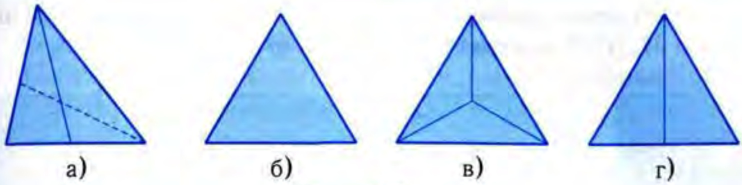


Рис. 218

6. Чи можна прямокутний трикутник вважати зображенням рівнобедреного трикутника?
7. Чи правильно, що зображенням середньої лінії трикутника є середня лінія його зображення?
8. Чи може паралелограм бути зображенням трапеції?
9. Чи може трикутник бути зображенням тетраедра?
10. Чи можна тетраедр зобразити так, щоб тільки одна його грань була невидимою?
11. Яка найменша кількість ребер куба може бути видимою при зображенні? А найбільша?
12. Якою фігурою є зображення: а) відрізка; б) трикутника; в) трапеції; г) паралелограма; ґ) n-кутника?

Графічні вправи

1. Встановіть, яким граням тетраедра $ABCD$, зображеного на рис. 219, належать точки P, K, M?
2. Які пари точок з точок X, Y, Z, T, вказаних на зображенні тетраедра на рис. 220, не лежать в одній грані?

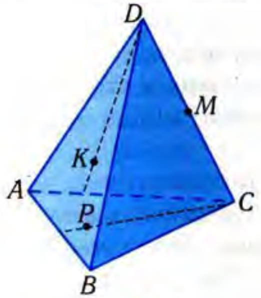


Рис. 219

Рис. 220

3. Якою фігурою є переріз куба площиною, що проходить через точки M, N, P, вказані на рис. 221, а)–г)?

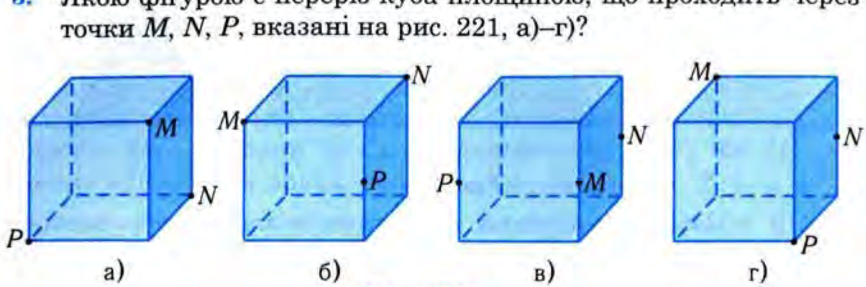


Рис. 221

Задачі

174°. Дано зображення рівнобедреного трикутника у вигляді різностороннього трикутника. На цьому зображенні побудуйте зображення:

1) бісектриси кута при вершині;

2) перпендикуляра до основи, проведеного через середину бічної сторони;

3) ромба, дві суміжні сторони якого збігаються з бічними сторонами трикутника.

175. На зображенні рівнобедреного прямокутного трикутника побудуйте зображення квадрата, що лежить у площині трикутника, якщо стороною квадрата є:

1°) катет даного трикутника;

2) гіпотенуза даного трикутника.

176. На довільному зображенні рівностороннього трикутника ABC побудуйте зображення:

1°) точки перетину висот трикутника;

2°) «описаного» прямокутника, одна зі сторін якого збігається з деякою стороною трикутника, а інша містить протилежну вершину;

3) бісектриси зовнішнього кута трикутника.

177. Дано зображення трикутника і двох його висот. Побудуйте зображення центра кола, описаного навколо цього трикутника.

178. На зображенні прямокутного трикутника, один із гострих кутів якого дорівнює 60°, побудуйте зображення:

1) бісектриси цього кута;

2) висоти, що проведена до гіпотенузи;

3) центра вписаного кола.

179°. Побудуйте зображення ромба і його висоти, проведеної з вершини кута, величина якого становить 120°.

180. Побудуйте зображення квадрата, маючи зображення точки перетину його діагоналей і двох:
1°) сусідніх вершин;
2*) протилежних вершин.

181. На довільному зображенні рівнобічної трапеції, бічна сторона якої дорівнює меншій основі, побудуйте зображення:
1°) осі симетрії трапеції;
2) вписаного прямокутника, дві вершини якого лежать на більшій основі й одна зі сторін збігається з меншою основою;
3) центра кола, дотичного до бічних сторін і меншої основи трапеції.

182. Дано зображення рівнобічної трапеції, кути при основі якої дорівнюють 45°. Побудуйте зображення:
1) центра кола, описаного навколо трапеції;
2*) центра кола, дотичного до меншої основи і бічних сторін.

183. Дано зображення кола і одного з його діаметрів. Побудуйте зображення радіусів кола, перпендикулярних до цього діаметра.

184. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
1°) Побудуйте лінію перетину площин DA_1C_1 і B_1D_1D.
2) Знайдіть довжину відрізка цієї лінії, який міститься в кубі, якщо ребро куба дорівнює a.
3) Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через центри трьох попарно суміжних його граней.

185. Дано зображення тетраедра $ABCD$, точки K, M і P — середини DC, AD і BD, відповідно.
1°) Побудуйте лінію перетину площин ACP і BMK.
2) Знайдіть довжину відрізка цієї лінії, який міститься в тетраедрі, якщо довжини всіх його ребер дорівнюють a.
3) Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки перетину медіан трьох його граней.

186. Побудуйте переріз тетраедра $SABC$ площиною, що проходить через:
1°) середини ребер SA, SC і BC;

2) точку M на AS ($AM : AS = 1 : 2$), точку N на SC ($CN : NS = 1 : 2$) і точку P на BC ($CP : PB = 1 : 2$);
3) середини ребер AS, AB та центр грані SBC;
4*) центри граней ASB, ABC і BSC.

187. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через:
1) ребро CD і центр грані AA_1B_1B;
2) діагональ A_1D і центр грані BCC_1B_1;
3*) середини ребер AD, CD і точку B;
4*) центри граней CDD_1C_1, CBB_1C_1 і точку A.

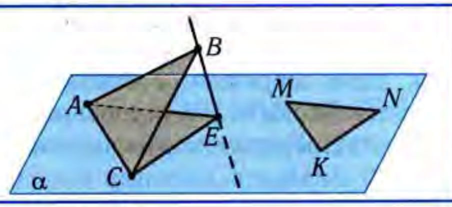
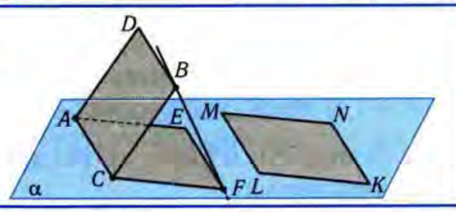
Вправи для повторення

188. Дві паралельні прямі перетято третьою прямою. Один з восьми утворених кутів дорівнює 50°. Чому дорівнює кожен з решти кутів?

189. Маємо куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
1) Вкажіть усі ребра, паралельні ребру AA_1.
2) Доведіть, що ребро DC паралельне лінії перетину площин ABC_1 і A_1B_1D.
3) Чи існує в площині ABC_1 пряма, паралельна прямій A_1D_1?
4) Нехай a — довільний відрізок в грані куба. Побудуйте відрізок, паралельний відрізку a, в несуміжній грані куба.

Підсумок

Головні твердження

<table>
<tr><td>Будь-який трикутник може бути зображенням даного трикутника.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Будь-який паралелограм може бути зображенням даного паралелограма.</td><td>
</td></tr>
</table>

§11. Паралельність прямих і площин

Розглядається одне з важливіших відношень у стереометрії — паралельність прямої і площини, його властивості і застосування.

У попередніх параграфах було розглянуто відношення паралельності прямих у просторі та його застосування. Не менш важливим як з теоретичного, так і з практичного погляду є відношення паралельності між прямими і площинами.

Навколо себе ми бачимо безліч прикладів, які ілюструють взаємне розміщення прямих і площин (наприклад, взаємне розміщення стін, стелі, підлоги в кімнаті та ліній їхнього перетину, перекладини футбольних воріт і поверхні землі, ручки й аркуша паперу тощо, рис. 222 – 224).

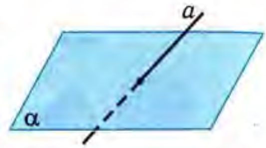
Рис. 222

Рис. 223

Рис. 224

Аналіз випадків взаємного розміщення прямої і площини з погляду наявності у них спільних точок дає такі варіанти розміщень.

1. Пряма і площина мають принаймні дві спільні точки. Тоді, згідно з аксіомою C_1, ***пряма належить площині.***



2. Пряма і площина мають єдину спільну точку. Можливість такого розміщення прямих і площин забезпечується тим, що поза площиною є точки простору. Довільна точка на площині і точка поза площиною визначають пряму, що має з площиною одну спільну точку, тобто ***перетинає*** її.

3. Пряма і площина не мають спільних точок. У цьому разі їх називають ***паралельними***.

Пряма і площина, які не мають спільних точок, називаються паралельними.

Паралельність прямої a і площини α позначають звичним символом паралельності: $a \parallel \alpha$ або $\alpha \parallel a$.

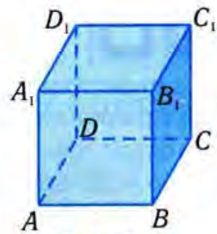


Рис. 225

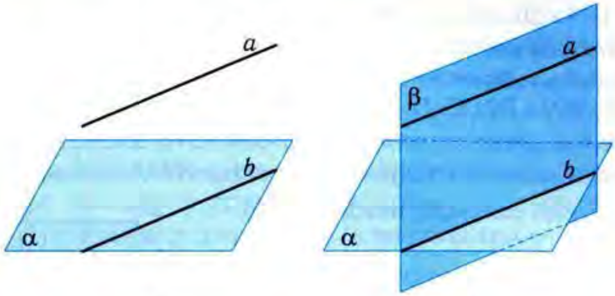
Користуючись означенням, можна встановити паралельність прямих і площин, пов'язаних з вершинами куба. Нехай дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 225). Пряма A_1B_1 паралельна площині $ABCD$. Справді, ця пряма лежить у площині ABB_1A_1. І якби вона перетинала площину $ABCD$, то це було б у точці, яка є спільною для площин $ABCD$ і ABB_1A_1. Але ж спільні точки цих площин утворюють пряму AB, яка паралельна прямій A_1B_1. Таким чином, пряма A_1B_1 не має спільних точок з площиною $ABCD$, тобто вона паралельна площині $ABCD$. Цей висновок стосується кожної прямої, яка містить ребро куба, і площини, яка містить грань куба, що не має спільних точок з цим ребром (B_1C_1 і ADD_1A_1, C_1D_1 і ABB_1A_1 тощо).

Розглянутий спосіб обґрунтування паралельності прямої і площини можна узагальнити у такому твердженні.

Теорема 1 *(ознака паралельності прямої і площини).*

Якщо пряма, що не лежить у даній площині, паралельна деякій прямій площини, то вона паралельна самій площині.

☐ Нехай пряма a не лежить у площині α і паралельна прямій b цієї площини (рис. 226, а). Проведемо через прямі a і b площину β (рис. 226, б) (чому це можна зробити?). Площини α і β перети-



а) б)

Рис. 226

наються по прямій b (збігатися вони не можуть за умовою). Тоді, якщо пряма a має спільну точку з площиною α , то ця точка знаходиться на прямій b. Але це суперечить умові, адже прямі a і b — паралельні. Тому пряма a не має спільних точок з площиною α, тобто пряма a і площина α — паралельні. ■

Задача 1. Через дану точку M, що не лежить в площині α, провести пряму, паралельну α.

□ Візьмемо в площині α довільну пряму l. Пряма l і точка M визначають деяку площину β. Проведемо у площині β через точку M пряму a, паралельну прямій l (рис. 227). Згідно з ознакою паралельності прямої і площини, пряма a і площина α — паралельні. ■

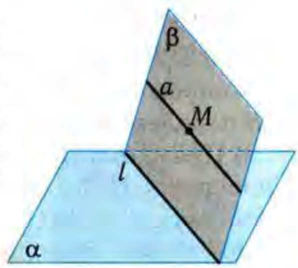


Рис. 227

Зауважимо, що через точку M, що лежить поза площиною α, можна провести нескінченну кількість прямих, паралельних даній площині. Це випливає, наприклад, з довільності вибору прямої l у розв'язанні задачі.

До речі, для довільної прямої a, паралельної площині α, існує нескінченна кількість прямих у площині α, які паралельні a.

! Надалі під паралельністю відрізка, променя площині (чи відрізка, променя — многокутнику тощо) розумітимемо паралельність відповідних прямих і площин, які визначаються даними фігурами.

Приклад 1. Два паралелограми $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у різних площинах, N, M і K — середини сторін AB, CD і AD_1 відповідно.
1) Визначити взаємне розміщення прямих і площин:
C_1D_1 і ABC; KN і DD_1C; D_1B і MKN.
2) Побудувати точку перетину L прямої KN з площиною BCC_1.
3) Обчислити довжину відрізка KL, якщо KN дорівнює 2 см.

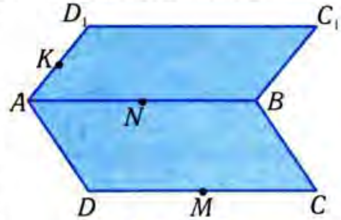


Рис. 228

□ Побудуємо рисунок, який відповідає умові (рис. 228).

1) Пряма C_1D_1 і площина ABC — паралельні, за ознакою паралельності прямої і площини (теорема 1), адже прямі C_1D_1 і AB — паралельні, за умовою, пряма AB належить площині ABC, пряма C_1D_1 їй не належить.

Пряма KN перетинає площину DD_1C. Справді, прямі CD і C_1D_1 — паралельні, за ознакою паралельності прямих (теорема 2 §8). Тому пряма C_1D_1 належить площині DD_1C (чому?). У площині ABC_1D_1 прямі KN і C_1D_1 перетинаються. Таким чином, пряма KN має спільну точку з площиною DD_1C.

Пряма D_1B паралельна площині MKN. Справді, відрізок KN є середньою лінією трикутника AD_1B. Тому пряма KN паралельна прямій D_1B. Оскільки пряма D_1B не лежить у площині MKN, то, за ознакою паралельності прямої і площини (теорема 1), пряма D_1B паралельна площині MKN.

2) Пряма KN лежить у площині ABC_1. Тому точка її перетину з площиною BCC_1 лежить на лінії перетину площин ABC_1 і BCC_1, тобто на прямій BC_1.

Побудова. Знаходимо точку перетину прямих KN і BC_1 у площині ABC_1, це і є шукана точка L (рис. 229).

3) Для обчислення довжини відрізка KL зобразимо побудову на площині ABC_1D_1 (рис. 230). Розглянемо трикутники AKN і BLN. Вони рівні, за ознакою рівності трикутників: $AN = BN$, за умовою,

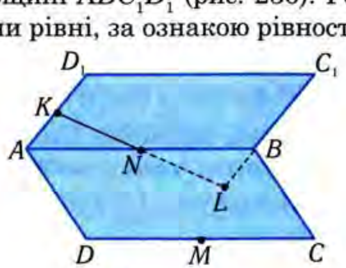


Рис. 229

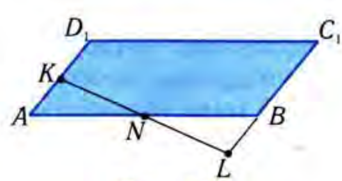


Рис. 230

$\angle AKN = \angle BLN$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних AK і BL та січній KL, $\angle KNA = \angle BNL$ як вертикальні кути. Звідси $NL = KN = 2$ (см). Тому $KL = KN + NL = 4$ (см). ■

Відповідь. 3) 4 см.

Розглянемо твердження, обернене до ознаки паралельності прямої і площини. Для цього необхідно поміняти умову і висновок цієї теореми.

Теорема 2 *(обернена до ознаки паралельності прямої і площини).*

Якщо пряма паралельна площині, то в цій площині існує пряма, яка паралельна даній прямій.

Ця теорема є властивістю відношення паралельності прямої і площини. Наочно правильність наведеного твердження очевидна. Логічна її обґрунтованість випливає з наступної теореми, яка і сама корисна при розв'язуванні багатьох задач.

Теорема 3 *(про лінію перетину площин, одна з яких проходить через пряму, паралельну другій).*

Якщо площина проходить через пряму, паралельну іншій площині, і перетинає цю площину, то лінія їхнього перетину паралельна даній прямій.

□ Нехай пряма a паралельна площині α, а площина β містить пряму a і перетинає площину α по прямій b (рис. 231). Прямі a і b лежать в одній площині, за побудовою. Вони не мають спільних точок, бо тоді пряма a мала б спільні точки з площиною α. А, за умовою, пряма a паралельна площині α. Тому прямі a і b — паралельні. ■

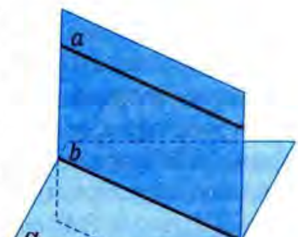


Рис. 231

Тепер зрозуміло, як довести теорему 2. Через дану пряму, паралельну площині α, слід провести площину, яка перетинає площину α. Для цього достатньо взяти в площині α довільну точку і через пряму a та обрану точку провести площину.

Задача 2. Провести через одну з двох мимобіжних прямих площину, паралельну іншій прямій.

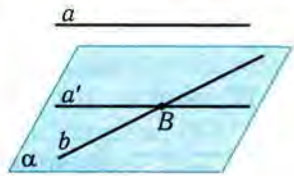


Рис. 232

□ Нехай a і b — мимобіжні прямі. Проведемо через довільну точку B прямої b пряму a', паралельну прямій a (рис. 232). Прямі a' і b визначають площину α, яка, за ознакою паралельності прямої і площини, паралельна прямій a. ■

Приклад 2. У правильному тетраедрі $DABC$, усі ребра якого дорівнюють 6 см, точка K лежить на ребрі DB, і $DK = 2$ см. Точка M лежить на ребрі BC, і $BM = 4$ см. Точка P — середина AB.
1) Довести, що пряма KM паралельна площині ADC.
2) Довести, що пряма PM перетинає площину ADC.
3) Провести через точку P пряму, паралельну площині ADC, яка перетинає медіану BL трикутника BDC.
4) Побудувати переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки P і K паралельно прямій AC.
5) Провести через центр грані BDC пряму, паралельну площинам ABD і ACD, і знайти довжину найбільшого відрізка цієї прямої, який належить тетраедру.

□ Побудуємо рисунок, який відображає умову завдання (рис. 233).

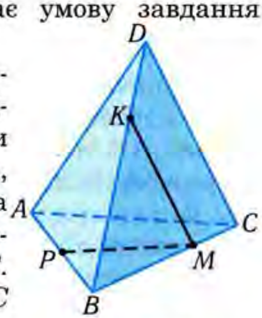


Рис. 233

1) З умови випливає, що точки K і M поділяють сторони BD і BC трикутника BDC в однаковому відношенні, рахуючи від вершини B. За теоремою, оберненою до теореми Фалеса, пряма KM паралельна прямій DC. А тоді, за ознакою паралельності прямої і площини (теорема 1), пряма KM паралельна площині ADC.

2) Точки P і M поділяють сторони BA і BC трикутника ABC у різних відношеннях, рахуючи від вершини B. З теореми Фалеса випливає, що пряма PM перетинає пряму AC. А це означає, що вона перетинає і площину ADC.

3) Розглянемо трикутник ABL (рис. 234), де L — середина CD. Точка P є серединою сторони AB, а точка E — серединою сторони BL, відрізок PE є середньою лінією трикутника ABL. Тому пряма PE паралельна прямій AL, яка лежить у площині ADC. За

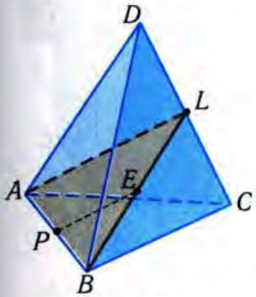


Рис. 234

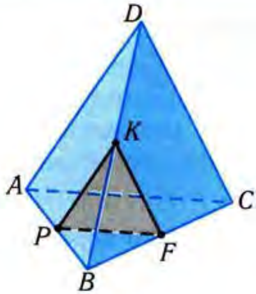


Рис. 235

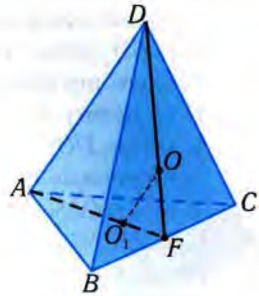


Рис. 236

ознакою паралельності прямої і площини (теорема 1), пряма PE паралельна площині ADC і перетинає медіану BL трикутника BDC.

4) Проведемо через точку P пряму, паралельну прямій AC, і позначимо її точку перетину зі стороною BC через F (рис. 235). Трикутник PKF є шуканим перерізом.

5) Нехай O — центр грані BDC (рис. 236). У трикутнику ADF, де F — середина BC, проведемо пряму OO_1, паралельну прямій AD. Тоді пряма OO_1 буде паралельною площинам ABD і ACD, за ознакою паралельності прямої і площини. Трикутники ADF і OO_1F — подібні. Тому $\frac{OO_1}{AD} = \frac{OF}{FD}$. З умови маємо: $AD = 6$ см, $DF = 3\sqrt{3}$ см, $OF = \frac{1}{3}DF = \sqrt{3}$ см. Звідси: $OO_1 = 2$ см. ■

Відповідь. 5) 2 см.

✓ Контрольні запитання

1. На рис. 237 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
1) У площинах яких граней паралелепіпеда лежить пряма CC_1?
2) З площинами яких граней паралелепіпеда перетинається пряма A_1D?
3) Площинам яких граней паралелепіпеда паралельна пряма BC?
4) Як розміщені діагоналі грані $A_1B_1C_1D_1$ відносно площини $ABCD$?

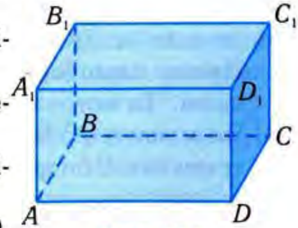


Рис. 237

2. Скільки існує площин, паралельних ребру BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 238) і таких, що проходять через:
1) вершину D;
2) ребро DC;
3) діагональ грані AC;
4) діагональ куба A_1C?

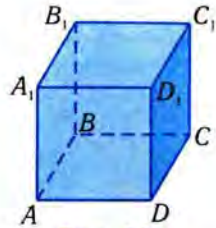


Рис. 238

3. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 239) перетинається площиною, що проходить через середини M, N ребер AB і BC паралельно ребру DD_1.
1) Який многокутник отримано у перерізі?
2) Чому дорівнює периметр перерізу, якщо ребро куба дорівнює a?

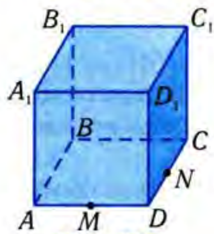


Рис. 239

4. У правильному тетраедрі $SABC$ (рис. 240) площина α проходить через середину M ребра AS паралельно прямій CS. Чи може переріз тетраедра площиною α бути:
1) трикутником;
2) правильним трикутником;
3) чотирикутником;
4) ромбом?

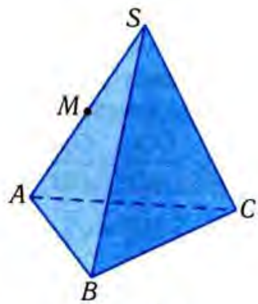


Рис. 240

5. Відомо, що пряма паралельна площині. Чи паралельна вона кожній прямій цієї площини?

6. Чи правильно, що діагональ грані куба паралельна протилежній грані куба?

7. Чи можуть перетинатися площини, паралельні одній і тій самій прямій?

8. Чи правильно, що через точку поза площиною можна провести лише одну пряму, паралельну даній площині?

9. Пряма мимобіжна з деякою прямою, що лежить у даній площині. Чи може вона бути паралельною цій площині?

10. Чи може площина, що проходить через середини двох сторін трикутника, перетинати його третю сторону?

Графічні вправи

1. На рис. 241 зображено тетраедр $ABCD$, точки K, F, M, N — середини відповідних ребер. Заповніть за наведеним зразком таблицю, вибравши необхідне розміщення прямих l і площин α.

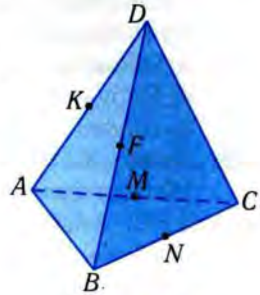


Рис. 241

Взаємне розміщення \ l і α	DB і AMN	MN і ABC	KC і DMN	MN і ABD	KF і DMN	CF і ADN
$l \times \alpha$	+					
$l \parallel \alpha$						
$l \subset \alpha$						

2. Побудуйте рисунок за наведеними даними.
1) Пряма AB паралельна площині α, а площина ABC перетинає площину α по прямій CD.
2) Пряма a паралельна кожній з площин α і β, що перетинаються.
3) Площина проходить через вершини B, D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралельно ребру CD.

Задачі

190. Трикутник ABC і паралелограм $ABFD$ лежать у різних площинах, M, N, K — середини сторін AC, BC, BF відповідно.
1°) Визначте взаємне розміщення прямих і площин: DF і ABC; AB і MNK; AC і DBF; MK і BCD.
2°) Побудуйте точку P перетину прямої BD з площиною ACF.
3) Обчисліть довжину відрізка PK, якщо $MN = 3$ см.
4) Побудуйте пряму, паралельну площинам трикутника і паралелограма.

191. Ромб $ABCD$ і прямокутник $DBEF$ лежать у різних площинах; M, N, K — середини сторін AD, AB, EF відповідно.

1°) Визначте взаємне розміщення прямих і площин: EF і ABC; MC і DEF; MN і CFE; BE і ADF.

2°) Побудуйте точку P перетину прямої MN з площиною BCE.

3) Обчисліть довжину відрізка EF, якщо $MN = 4$ см.

4) Побудуйте пряму, паралельну площинам ромба і прямокутника.

192. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1°) Визначте взаємне розміщення прямої CD і площин ABC, ABB_1, AA_1D.

2°) Доведіть, що пряма AB_1 паралельна площині CDD_1.

3) Через середину ребра A_1D_1 проведіть пряму, паралельну площинам AA_1B і CC_1B_1.

4°) Побудуйте пряму, що перетинає площини тільки чотирьох граней куба.

5) Побудуйте лінію перетину площин ADC_1 і A_1D_1C.

6) Знайдіть кут між прямими A_1B і B_1C.

193. Дано чотирикутну піраміду $SABCD$, в основі якої лежить трапеція $ABCD$, $BC \parallel AD$.

1°) Визначте взаємне розміщення прямої AD і площини BCS.

2) Через середину ребра AS проведіть пряму, паралельну площинам ABC і BCS.

3°) Побудуйте пряму, що перетинає площини тільки двох бічних граней.

4*) Побудуйте лінію перетину площин, які містять протилежні бічні грані, що проходять через основи трапеції.

194. Точка B лежить у площині α, а відрізок CD завдовжки 12 см паралельний цій площині. Точка A лежить на відрізку BC і $BA : AC = 4 : 3$.

1°) Побудуйте точку P перетину прямої AD з площиною α.

2°) Визначте взаємне розміщення прямих BP і CD.

3) Знайдіть довжину відрізка BP.

195. Трапеція $ABCD$ лежить у площині α. Її основа BC дорівнює 12 см. Точка M лежить поза площиною α, а точка K — середина відрізка BM.

1) Побудуйте точку N перетину площини ADK і відрізка MC.

2) Визначте взаємне розміщення прямої KN і площини α.

3) Знайдіть довжину відрізка KN.

196. Точка M не лежить у площині прямокутника $ABCD$. Доведіть, що пряма CD паралельна площині трикутника ABM.

197. Площина α паралельна стороні BC трикутника ABC і проходить через середину сторони AB. Доведіть, що площина α проходить через середину сторони AC.

198. Доведіть, що дві площини перетинаються, якщо:
1) через точку, яка не належить цим площинам, можна провести лише одну пряму, паралельну даним площинам;
2) одна із площин перетинає пряму, паралельну другій площині.

199. Побудуйте пряму, яка проходить через дану точку і паралельна двом даним площинам, що перетинаються.

200. Проведіть через дану точку простору площину, паралельну двом даним мимобіжним прямим.

201. Дано трикутну піраміду $SABC$. Побудуйте точку перетину площини ABC з прямою MN, якщо:
1°) точки M і N лежать на ребрах SC і SB;
2) точка M лежить на ребрі AS, а точка N — на грані BSC;
3*) точка M лежить на грані ABS, а точка N — на грані ASC.

202. Через центр грані AA_1D_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено дві прямі, паралельні прямим D_1D і B_1C відповідно.
1) Знайдіть кут між цими прямими.
2) Визначте взаємне розміщення побудованих прямих і площин BB_1C_1C та DD_1C_1C.

203. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через:
1°) вершини A, B, C_1;
2°) вершини B, D і середину ребра AA_1;
3°) середину ребра CD паралельно площині ADC_1;
4°) центр грані CDD_1C_1 паралельно площині ADD_1;
5) вершину A і середини ребер CC_1 і C_1D_1;
6*) відрізок, який з'єднує середини ребер AA_1 і B_1C_1, паралельно площині AB_1C.

204. Дано тетраедр $SABC$ і точку F на ребрі AB, яка поділяє відрізок AB у відношенні 3:1 ($AF : FB$).
1) Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через вершину C, середину ребра AS і паралельна прямій BS.
2*) У якому відношенні побудований переріз ділить відрізок, що з'єднує точку F і середину відрізка AC?

Вправи для повторення

205. Маємо паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Вкажіть дві прямі, паралельні площині ABC, що проходять через одну точку.

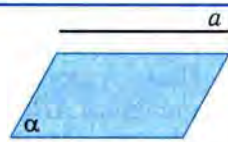
2) Побудуйте площину, яка перетинає площину ABC і містить нескінченну кількість прямих, паралельних площині ABC.

3*) Чи можуть перетинатися площини ABC і $A_1B_1C_1$?

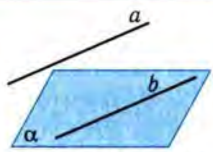
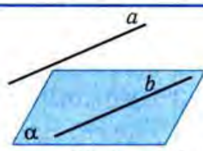
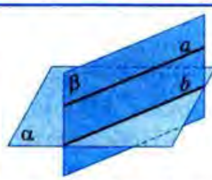
206. Нехай прямі a і b перетинаються. Побудуйте площину, що проходить через дану точку простору паралельно як прямій a, так і прямій b.

Підсумок

Головне означення

Пряма і площина, які не мають спільних точок, називаються ***паралельними.***		 $a \parallel \alpha$.

Головні твердження

Ознака паралельності прямої і площини	Якщо пряма, що не лежить у даній площині, паралельна деякій прямій площини, то вона паралельна самій площині.	 $b \subset \alpha, a \parallel b \Rightarrow a \parallel \alpha$
Теорема, обернена до ознаки паралельності прямої і площини	Якщо пряма паралельна площині, то в цій площині існує пряма, яка паралельна даній прямій.	 $a \parallel \alpha \Rightarrow \exists b\colon b \subset \alpha,\ b \parallel \alpha$
Теорема про лінію перетину площин, одна з яких проходить через пряму, паралельну другій	Якщо площина проходить через пряму, паралельну іншій площині і перетинає цю площину, то лінія перетину паралельна даній прямій.	 $a \parallel \alpha, a \subset \beta, b = \alpha \cap \beta \Rightarrow a \parallel b$

§12. Паралельність площин

Розглядається важливе для стереометрії відношення — паралельність площин, його властивості і застосування.

Б

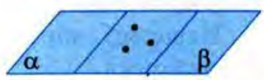
Наочне уявлення про розміщення двох площин дає моделювання за допомогою площин поверхонь суміжних стін, стелі і підлоги кімнати, двоярусних ліжок, двох скріплених аркушів паперу тощо (рис. 242–244).

Рис. 242

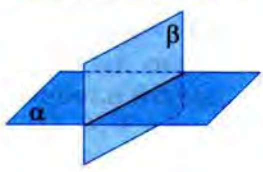
Рис. 243

Рис. 244

Хоч існує безліч варіантів взаємного розміщення різних площин, для виявлення і характеристики яких у подальшому будуть застосовані вимірювання кутів та відстаней, ми зупинимось на таких, де в основу класифікації (як і прямих з площинами) покладена кількість їхніх спільних точок.



1. Дві площини мають не менш ніж три спільні точки, що не лежать на одній прямій. Тоді площини ***збігаються*** (аксіома C_2, §7).



2. Спільні точки двох площин розміщені на одній прямій, яка є лінією перетину цих площин (аксіома C_3, §7). Тоді площини ***перетинаються***.

3. Дві площини не мають спільних точок. У цьому разі їх називають ***паралельними***.

Дві площини називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Паралельність площин позначається знаком $\parallel$: $\alpha \parallel \beta$.

Як завжди, при введенні геометричних понять постає проблема їхнього існування. Існування площин, які перетинаються, є характерною ознакою простору. І цим ми вже багато разів користувались. Менш очевидним є існування паралельних площин. Жодного сумніву немає, що, наприклад, площини протилежних граней куба є паралельними, тобто не перетинаються. Але безпосередньо, за означенням, це встановити неможливо. Для розв'язання поставленого питання, а також інших питань, пов'язаних з паралельністю площин, необхідно мати ознаку паралельності.

Для пошуку ознаки доцільно розглядати площину, «зіткану» з прямих. Очевидно, що кожна пряма однієї з паралельних площин має бути паралельною до другої. У протилежному випадку площини матимуть спільну точку. А чи достатньо паралельності площині β однієї прямої площини α для того, аби площини α і β були паралельними? Безумовно, ні (обґрунтуйте це!). Практичний досвід свідчить, що двох таких прямих, які перетинаються, достатньо. Щоб закріпити на щоглі паралельну до землі площадку, досить покласти її на дві прикріплені до щогли балки, паралельні до землі (рис. 245). Можна навести ще багато прикладів застосування цього прийому забезпечення паралельності плоских поверхонь реальних об'єктів (спробуйте це зробити!).

Рис. 245

Наведені міркування дозволяють сформулювати наступне твердження.

Теорема 1 *(ознака паралельності площин).*

Якщо дві перетинні прямі однієї площини паралельні другій площині, то ці площини є паралельними.

□ Нехай перетинні прямі a і b площини α паралельні площині β. Доведемо, що площини α і β є паралельними методом від супротивного. Для цього припустимо, що площини α і β перетинаються по прямій m (рис. 246). Прямі a і b перетинати пряму m не можуть, за умовою. Однак тоді в площині α через одну точку проведено дві прямі, що не перетинаються з прямою m, тобто паралельні їй. Ця суперечність і завершує доведення теореми. ■

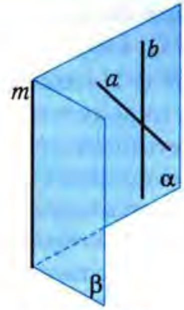


Рис. 246

Ознакою паралельності площин користуються при горизонтальному розміщенні плоских конструкцій (бетонних плит, підлоги, диска кутомірних приладів тощо) за допомогою двох рівнів, розміщених у площині конструкції на прямих, що перетинаються. За цією ознакою можна виконати побудову площини, паралельної даній.

Задача 1. Через точку, що міститься поза даною площиною, провести площину, паралельну даній.

□ Нехай дано площину β і точку M поза площиною (рис. 247, а). Проведемо через точку M дві перетинні прямі a і b, паралельні площині β. Для цього треба взяти в площині β дві прямі c і d, що перетинаються (рис. 247, б). Потім через точку M провести прямі a і b, паралельні прямим c і d відповідно (рис. 247, в).

Прямі a і b, що перетинаються, паралельні площині β, за ознакою паралельності прямої і площини (теорема 1 §11). Вони визначають однозначно площину α. Згідно з доведеною ознакою, $\alpha \parallel \beta$. ■

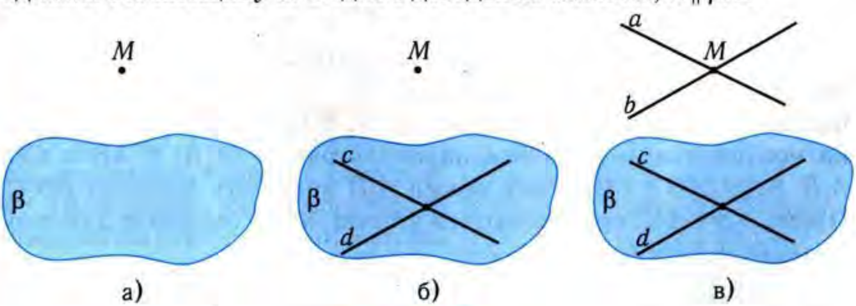


Рис. 247

Приклад 1. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки M, N, P є серединами ребер BC, B_1C_1, A_1D_1 відповідно. Встановити взаємне розміщення площин: 1) ABB_1 і PNM; 2) NMA і A_1C_1C; 3) A_1NM і PC_1C; 4) MAD_1 і DB_1C.

☐ 1) Площини ABB_1 і PNM (рис. 248) — паралельні, за ознакою паралельності площин (теорема 1). Справді, прямі PN і NM перетинаються і паралельні площині ABB_1, за ознакою паралельності прямої і площини (теорема 1 §11), адже відрізки PN і NM з'єднують середини протилежних сторін квадратів, тому вони паралельні сторонам квадратів: $PN \parallel A_1B_1$, $NM \parallel B_1B$.

2) Площини NMA і A_1C_1C перетинаються по прямій AA_1 (рис. 249). Справді, прямі AA_1 і CC_1 — паралельні, за ознакою паралельності прямих ($AA_1 \parallel BB_1$, $BB_1 \parallel CC_1$). Тому пряма AA_1 лежить у площині A_1C_1C. Аналогічно обґрунтовується належність прямої AA_1 площині NMA.

3) Площини A_1NM і PC_1C (рис. 250) — паралельні, за ознакою паралельності площин. Справді, $NM \parallel C_1C$. Тому пряма NM паралельна площині PC_1C. Відрізки PC_1 і A_1N також паралельні, оскільки чотирикутник PC_1NA_1 є паралелограмом ($A_1P \parallel NC_1$, $A_1P = NC_1$). Таким чином, пряма A_1N паралельна площині PC_1C. Прямі A_1N і NM перетинаються.

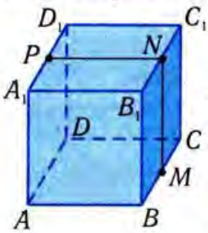


Рис. 248

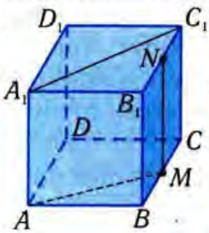


Рис. 249

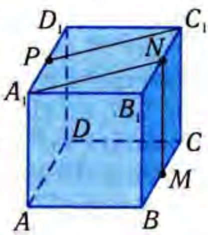


Рис. 250

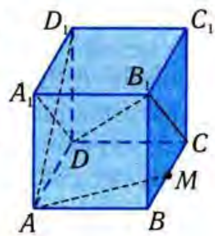


Рис. 251

4) Площини MAD_1 і DB_1C перетинаються (рис. 251). Хоча лінію їхнього перетину побудувати непросто, але вказати одну точку цієї лінії неважко. Справді, прямі A_1D і B_1C — паралельні, оскільки чотирикутник A_1B_1CD є паралелограмом ($A_1B_1 = AB = CD$, $A_1B_1 \parallel AB$, $AB \parallel CD$). Тому пряма A_1D належить площині DB_1C. Прямі A_1D і AD_1 перетинаються в точці, яка є спільною для площин MAD_1 і DB_1C. ■

Наведену ознаку паралельності площин іноді зручніше використовувати у дещо іншій формі.

Теорема 1′ *(ознака паралельності площин).*

Якщо дві перетинні прямі однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.

Користуючись ознакою паралельності прямої і площини (теорема 1 §11), неважко встановити, що з умови теореми 1′ випливає умова теореми 1.Застосування теореми, оберненої до ознаки паралельності прямої і площини (теорема 2 §11) завершує обґрунтування еквівалентності умов теорем 1 і 1′.

Природно, постає питання про однозначність наведеної у задачі 1 побудови. Оскільки нам доведеться не раз скористатися цією властивістю, то виділимо її як окрему теорему. Проте спершу розглянемо інше твердження.

Теорема 2 *(про перетин двох паралельних площин третьою).*

Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою площиною, то лінії перетину площин є паралельними.

□ Нехай дано паралельні площини α, β і площину γ, що їх перетинає (рис. 252). Позначимо лінії перетину через a і b. Ці прямі лежать у площині γ і не перетинаються, оскільки площини α і β не мають спільних точок. Тому прямі a і b — паралельні. ■

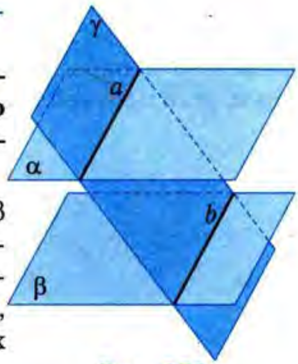


Рис. 252

Теорема 3 *(про існування та єдиність площини, паралельної даній).*

Через точку, розміщену поза даною площиною, можна провести єдину площину, паралельну даній.

□ Побудову такої площини виконано у задачі 1. Однозначність побудови доведемо методом від супротивного. Припустимо, що через точку M проведено дві різні площини α і γ, паралельні площині β (рис. 253), і пряма m — лінія їхнього перетину. Проведемо через точку M площину δ, яка перетинається з прямою m і площиною β (як це можна зробити?). Позначимо

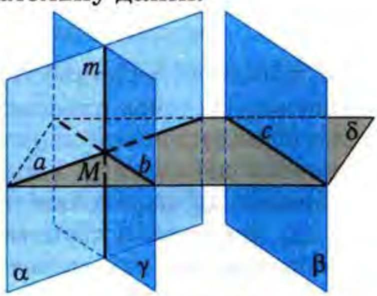


Рис. 253

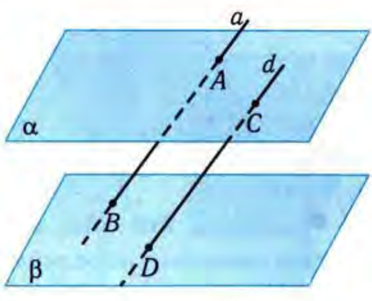
через a і b лінії перетину площини δ з площинами α і γ, а через c — лінію перетину площин δ і β (рис. 253). Згідно з теоремою 2, $a \| c$ і $b \| c$. Тобто в площині δ через точку M проходять дві прямі, паралельні прямій c. Суперечність свідчить про неправильність припущення. ■

Відношення паралельності площин має ряд властивостей, які мають аналоги в планіметрії.

Теорема 4 *(про відрізки паралельних прямих між паралельними площинами).*

Відрізки паралельних прямих, що відтинаються паралельними площинами, рівні між собою.

□ Нехай дано дві паралельні площини α і β і відрізки AB і CD паралельних прямих a і d, які відтинаються цими площинами (рис. 254, а). Проведемо через прямі a і d площину γ (рис. 254, б). Вона перетинає площини α і β по прямих AC і BD, які, згідно з теоремою 2, паралельні. Тому чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, його протилежні сторони AC і BD — рівні. ■



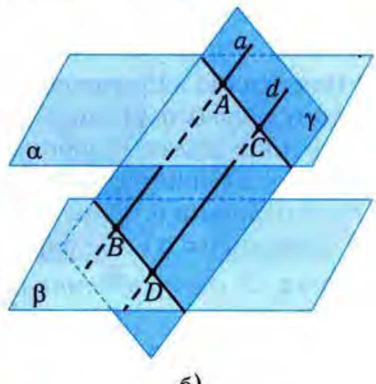


Рис. 254

З наведеної властивості випливає, що якщо від усіх точок площини відкласти по один бік від площини паралельні відрізки однакової довжини, то кінці цих відрізків утворюють дві паралельні площини. Саме на цій властивості ґрунтується побудова паралелепіпеда за допомогою відкладення відрізків (рис. 255).

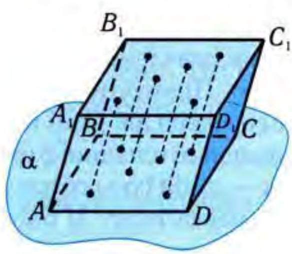


Рис. 255

Теорема 5 *(про транзитивність відношення паралельності площин).*

Якщо кожна з двох площин паралельна третій, то дані дві площини паралельні між собою.

□ Нехай площини α і β паралельні площині γ. Припустимо, що α і β — не паралельні. Тоді площини α і β мають спільну точку. І через цю точку проходять дві різні площини, паралельні площині γ, що суперечить теоремі 3. Тому площини α і β не мають спільних точок, тобто вони паралельні.■

Теорема 5 є ще однією ознакою паралельності площин. Вона широко застосовується як у геометрії, так і у практичній діяльності. Наприклад, у багатоповерховій будівлі паралельність площин підлоги і стелі на одному поверсі гарантує їхню паралельність і на різних поверхах.

Задача 2. Довести, що коли пряма a перетинає площину α, то вона перетинає також кожну площину, паралельну площині α.

□ Нехай площини α і β — паралельні, а пряма a перетинає площину α в точці A. Доведемо, що вона перетинає і площину β. Припустимо, що це не так. Тоді пряма a паралельна площині β. Проведемо площину γ через пряму a і довільну точку площини β (рис. 256).

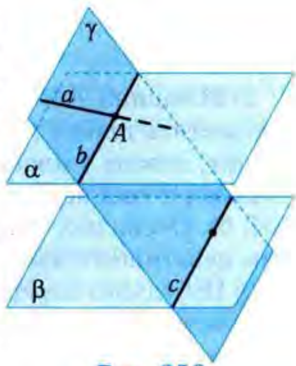


Рис. 256

Ця площина перетинає паралельні площини α і β по прямих b і c. Згідно з теоремою 2, $b \parallel c$, тобто в площині γ через точку A проходять дві прямі a і b, паралельні прямій c. Ця суперечність і доводить твердження. ■

Спробуйте довести самостійно, що коли площина α перетинає площину β, вона перетинає також кожну площину, паралельну площині β.

Приклад 2. У тетраедрі $ABCD$ точки K, F, E — середини ребер DA, DC, DB, а M і P — центри мас граней ABD і BCD відповідно.
1) Визначити взаємне розміщення площин KEF і ABC; DEF і ABC.
2) Побудувати лінію перетину площин AFB і KEC.
3) Знайти площу перерізу тетраедра площиною, яка паралельна площині ABD і проходить через точку P, якщо всі ребра тетраедра дорівнюють a.

☐ Побудуємо рисунок, який відповідає умові (рис. 257, а).

1) Площини KEF і ABC — паралельні, за ознакою паралельності площин (теорема 1′): перетинні прямі KE і KF площини KEF паралельні перетинним прямим AB і AC площини ABC (на них лежать середні лінії відповідних трикутників).

Площини DEF і ABC перетинаються по прямій BC, бо пряма BC належить обом площинам, а співпадати вони не можуть — точки A, B, C, D не лежать в одній площині.

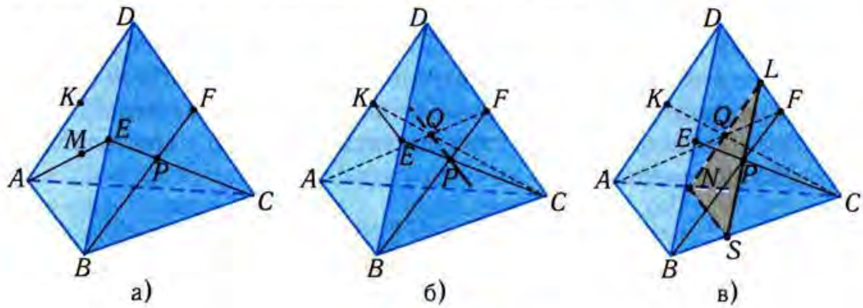


Рис. 257

2) Площина AFB перетинається з площиною KEC по прямій, яка містить точку P, тому що прямі CE і BF, які лежать у цих площинах, лежать у площині BCD і перетинаються в точці P. Другою точкою є точка перетину Q прямих AF і CK у площині ACD (рис. 257, б). Очевидно, що ця точка є центром мас грані ACD. Шуканим перетином є пряма PQ.

3) Побудуємо переріз, вказаний в умові, користуючись ознакою паралельності площин. Проведемо через точки P і Q прямі, паралельні прямим DB і DA відповідно (рис. 257, в). Ці прямі перетинають відрізок CD у точці L. Останнє випливає з властивості центра мас трикутника — він поділяє медіани трикутника у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини. Залишилось застосувати теорему Фалеса. Таким чином, площини PLQ і BDA — паралельні. Шуканим перерізом є трикутник LSN.

За побудовою, трикутники BCD і SCL — подібні з коефіцієнтом подібності $\frac{CE}{CP}=\frac{3}{2}$. Тому $LS=\frac{2}{3}BD$. Аналогічно встановлюються рівності: $LN=\frac{2}{3}AD$, $NS=\frac{2}{3}AB$. Звідси випливає, що трикутники LSN і ABD — подібні з коефіцієнтом подібності $\frac{2}{3}$. За властивостями площ подібних трикутників, $S_{LNS} = \frac{4}{9} S_{ABD}$. Залишилось знайти площу трикутника ABD. Оскільки, за умовою, всі ребра тетраедра дорівнюють a, то $S_{ABD} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$. Шукана площа дорівнює $\frac{1}{3\sqrt{3}} a^2$.

Доречно звернути увагу на те, що відповідь залежить лише від площі грані ABD. Тому рівність усіх ребер є лише засобом знайти цю площу. Таким чином, дану задачу можна суттєво узагальнити. ■

Відповідь. 1) $KEF \parallel ABC$; 3) $\frac{1}{3\sqrt{3}} a^2$.

✓ Контрольні запитання

1. Чи правильно, що дві площини паралельні, якщо кожна пряма, яка лежить в одній площині, паралельна другій площині?
2. Площини α і β — паралельні. Чи існують мимобіжні прямі, які лежать у цих площинах?
3. Дві сторони трикутника паралельні деякій площині. Чи паралельна цій площині третя сторона трикутника?
4. Дві сторони паралелограма паралельні деякій площині. Чи правильно, що площина паралелограма паралельна даній площині?
5. Чи можуть бути нерівними відрізки двох прямих, які відтинаються паралельними площинами?
6. Чи може перерізом куба бути рівнобічна трапеція?
7*. Чи може перерізом куба бути правильний п'ятикутник?
8. Чи правильно, що дві площини, які паралельні одній і тій самій прямій, паралельні між собою?
9. Лінії перетину площин α і β площиною γ паралельні між собою. Чи паралельні площини α і β?
10. Чи можуть три грані куба бути паралельними одній площині?

Графічні вправи

1. На рис. 258 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки M, N, K, L, P є серединами відповідних ребер. Заповніть за наведеним зразком таблицю, вибравши необхідне розміщення площин α і β.

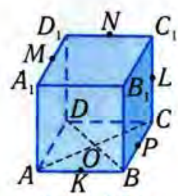


Рис. 258

Взаємне розміщення \ α і β	$A_1B_1C_1$ і ADC	MPK і BB_1D	MNK і MNP	D_1KP і BMN
$\alpha \times \beta$				
$\alpha \parallel \beta$	+			
$\alpha = \beta$				
	MNK і PLN	B_1KP і DMN	A_1DC_1 і AB_1C	A_1C_1C і MKP
$\alpha \times \beta$				
$\alpha \parallel \beta$				
$\alpha = \beta$				

2. На рис. 259 зображено тетраедр $ABCD$, точки K, F, M, N, Q — середини відповідних ребер. Укажіть:
1) площину, що проходить через точку K паралельно площині ABC;
2) площину, що проходить через пряму BD паралельно площині MNQ.

3. Визначте, чим є переріз фігури площиною, що проходить через дані три точки, зображені на рисунках 260, а)–ґ) і 261, а)–г).

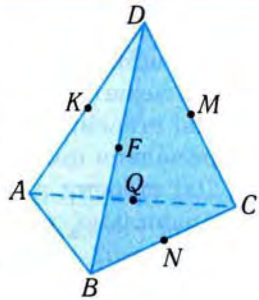
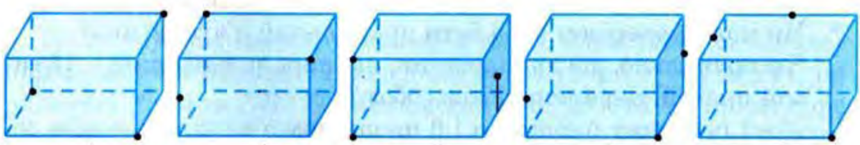
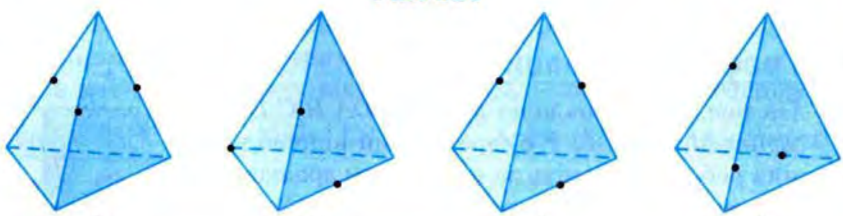


Рис. 259



а) б) в) г) ґ)

Рис. 260



а) б) в) г)

Рис. 261

4. Побудуйте рисунок за наведеними даними.
1) З вершин паралелограма $ABCD$, що лежить в одній з двох паралельних площин, проведено паралельні прямі, які перетинають другу площину відповідно в точках A_1, B_1, C_1, D_1.
2) Трикутник $A_1B_1C_1$ є проекцією трикутника ABC на паралельну йому площину α. Точка M — середина BC, M_1 — проекція точки M на площину α.

Задачі

207. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки O, O_1 — центри граней $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ відповідно, M — середина ребра AB.
1°) Визначте взаємне розміщення площин MO_1O і ADD_1; ABD_1 і CO_1C_1.
2°) Побудуйте точку перетину площини DCC_1 і прямої MO_1 та лінію перетину площин MCC_1 і $A_1D_1C_1$.
3) Знайдіть площу перерізу куба площиною, яка паралельна площині AD_1C_1 і проходить через точку O_1, якщо ребро куба дорівнює a.

208. У тетраедрі $ABCD$ точки K, L, P — центри мас граней ABD, BDC, ABC відповідно, а M — середина ребра AD.
1°) Визначте взаємне розміщення площин ACD і KLP; MLK і ABC.
2°) Побудуйте точку перетину площини ABC і прямої ML та лінію перетину площин MKL і ABC.
3) Знайдіть площу перерізу тетраедра площиною, яка проходить через точки K, L і M паралельно прямій AD, якщо всі ребра тетраедра дорівнюють a.

209. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки L, M, M_1 — середини ребер AB, AD і A_1D_1 відповідно.
1°) Визначте взаємне розміщення площин B_1D_1D і LMM_1.
2) Побудуйте площину, що проходить через точку M паралельно площині ACC_1.
3) Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точку M_1 паралельно площині CDD_1.
4) Визначте взаємне розміщення площин MA_1B_1 і CDM_1.
5) Побудуйте площину, що проходить через пряму C_1D_1, паралельну площині CDM_1.

210. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ усі ребра рівні між собою. Точки L, M і N — середини ребер AS, BS, CS відповідно.
1°) Визначте взаємне розміщення: прямих LM і BC; прямої LN і площини ABD; площин LMN і BDC.

2°) Доведіть, що трикутники ABC і LMN — подібні.

3) Побудуйте переріз піраміди площиною AMN; площиною LMN; площиною LBC.

4*) Який з перерізів піраміди, що проходить через вершину S, має найбільшу площу?

211. У тетраедрі $SABC$ всі грані — правильні трикутники. Точки L, M і N — середини ребер AS, BS, CS відповідно.

1°) Визначте взаємне розміщення прямих LM і BC.

2°) Визначте взаємне розміщення прямої LN і площини ABC.

3) Доведіть. що трикутники LMN і ABC — подібні.

212. З вершин паралелограма $ABCD$, що лежить в одній з двох паралельних площин, проведені попарно паралельні прямі, які перетинають другу площину відповідно в точках A_1, B_1, C_1, D_1.

1°) Доведіть, що чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ є паралелограмом.

2°) Доведіть, що паралелограми $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ рівні між собою.

3°) Визначте взаємне розміщення площин ABB_1 і DD_1C_1.

4) Проведіть через середину відрізка AA_1 площину так, щоб вона перетинала дані прямі в точках, що є вершинами паралелограма, який є рівним паралелограму $ABCD$.

213. Дано дві паралельні площини і точка O, яка не належить жодній з цих площин і не лежить між ними. З точки O проведено три промені, які перетинають площини відповідно у точках A, B, C та A_1, B_1, C_1 і не лежать в одній площині.

1°) Визначте взаємне розміщення даних площин і площини, що проходить через середини відрізків AA_1, BB_1, CC_1.

2) Знайдіть периметр трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $OA = m$, $AA_1 = n$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

214. Трикутник $A_1B_1C_1$ є проекцією трикутника ABC на паралельну йому площину α. Точка M — середина сторони BC; M_1 — проекція точки M на площину α. Точка N поділяє сторону AB у відношенні 1: 2.

1) Побудуйте точку перетину N_1 площини M_1MN і прямої A_1B_1.

2) Визначте форму чотирикутника M_1N_1NM.

215. Точка M лежить поза площиною трапеції $ABCD$ з основами AD і BC. Побудуйте лінію перетину площин:

1°) ABM і CDM; 2) CBM і ADM.

216. Побудуйте переріз куба, який є: 1°) рівностороннім трикутником; 2) п'ятикутником.

217. Побудуйте переріз тетраедра, який є паралелограмом.

218°. Доведіть, що протилежні грані паралелепіпеда — паралельні.

219. Доведіть, що множина всіх прямих, які проходять через дану точку і паралельні даній площині, утворює площину, паралельну даній.

220. Дано чотири точки A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Доведіть, що кожна площина, паралельна прямим AB і CD, перетинає прямі AC, AD, BD, BC у вершинах паралелограма.

221. Доведіть, що площина і пряма, яка не належить цій площині, паралельні між собою, якщо обидві вони паралельні одній і тій самій площині.

222. Через точку O перетину діагоналей куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину паралельно грані $ABCD$. Ця площина перетинає ребра BB_1 та CC_1 у точках M і N відповідно. Доведіть, що кут MON — прямий.

223. Доведіть, що дві площини паралельні між собою тоді і лише тоді, коли кожна пряма, яка перетинає одну з площин, перетинає і другу.

224*. У трикутній піраміді $SABC$ через відрізки AD і CE, де D — середина SB, а E — середина SA, проведіть перерізи піраміди, паралельні між собою.

225. Знайдіть геометричні місця:

1) середин усіх відрізків з кінцями на двох даних паралельних площинах;

2*) середин відрізків з кінцями на двох даних мимобіжних прямих.

226*. Сторона AB трикутника ABC, що лежить у площині α, паралельна площині β. Рівносторонній трикутник $A_1B_1C_1$ є паралельною проекцією трикутника ABC на площину β; $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 9$.

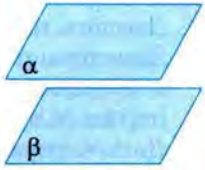
1) Визначте взаємне розміщення прямих AB і A_1B_1, BC і B_1C_1, A_1C_1 і AC.

2) Знайдіть площу трикутника $A_1B_1C_1$.

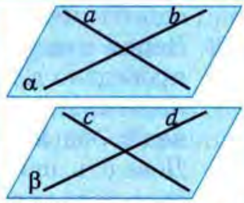
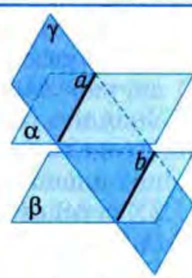
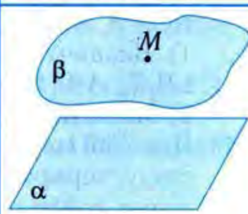
227*. Дано дві мимобіжні прямі. Вкажіть множину всіх точок простору, через які можна провести пряму, що перетинає кожну з двох даних прямих.

Підсумок

Головне означення

Дві площини називаються ***паралельними,*** якщо вони не мають спільних точок.		 $\alpha \parallel \beta$.

Головні твердження

Ознака паралельності площин	Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини — паралельні.	 $a \subset \alpha, b \subset \alpha, a \times b, c \subset \beta,$ $d \subset \beta, a \parallel c, b \parallel d \Rightarrow \alpha \parallel \beta$
Теорема про перетин двох паралельних площин третьою	Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою площиною, то лінії перетину площин є паралельними.	 $\alpha \parallel \beta, a = \gamma \cap \alpha,$ $b = \gamma \cap \beta \Rightarrow a \parallel b$
Теорема про існування та єдиність площини, паралельної даній	Через точку, розміщену поза даною площиною, можна провести єдину площину, паралельну даній.	 $M \notin \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists!\, \beta: \alpha \parallel \beta, M \in \beta$

Готуємось до тематичного оцінювання з теми «Паралельність прямих і площин»

? Завдання для самоконтролю

1. Чотири точки не належать одній площині. Чи можуть деякі три з них лежати на одній прямій?
2. Чи можуть три різні площини мати рівно дві спільні точки?
3. Чи можуть дві мимобіжні прямі бути одночасно паралельними третій прямій?
4. Чи правильно, що прямі a і b не паралельні, якщо не існує прямої c, паралельної a і b?
5. Чи можуть рівні відрізки мати нерівні проекції?
6. Чи може промінь бути паралельною проекцією прямої?
7. Чи може квадрат бути зображенням куба?
8. Чи правильно, що через дану точку простору можна провести тільки одну площину, паралельну даній прямій?
9. Чи завжди через дану точку можна провести пряму, яка паралельна двом даним площинам, що не містять цю точку?
10. Чи можна через дві мимобіжні прямі провести паралельні площини?

Відповіді до завдань для самоконтролю

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ні	Ні	Ні	Так	Так	Ні	Так	Ні	Так	Так

Зразок контрольної роботи

Два паралелограми $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у різних площинах.

1°) Визначте взаємне розміщення прямих CD і C_1D_1.

2°) Визначте взаємне розміщення прямої C_1D_1 і площини ABC.

3°) Побудуйте лінію перетину площин DD_1C_1 і BCC_1.

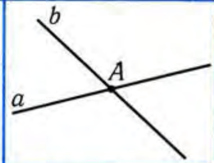
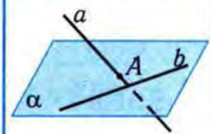
4°) Визначте взаємне розміщення площин ADD_1 і BCC_1.

5) Через точку M, яка поділяє відрізок AB у відношенні 2 :1, рахуючи від точки A, проведіть площину α, паралельну площині C_1BC.

6) Побудуйте точку перетину прямої AC з площиною α і знайдіть відношення, в якому ця точка поділяє відрізок AC.

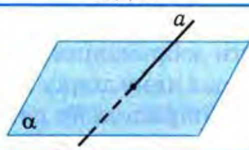
Взаємне розміщення прямих у просторі

Таблиця 21

Кількість спільних точок			
Не менше двох	Одна	Немає	
		лежать в одній площині	не лежать в одній площині
			
a і b співпадають ($a = b$)	a і b перетинаються ($a \times b$)	a і b — паралельні ($a \parallel b$)	a і b — мимобіжні ($a \dot{-} b$)

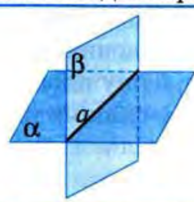
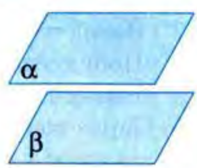
Взаємне розміщення прямих і площин у просторі

Таблиця 22

Кількість спільних точок		
Не менше двох	Одна	Відсутні
		
a лежить в α ($a \subset \alpha$)	a перетинає α ($a \times \alpha$)	a і α — паралельні ($a \parallel \alpha$)

Взаємне розміщення площин у просторі

Таблиця 23

Кількість спільних точок		
Не менше трьох, що не лежать на одній прямій	Не менше однієї, але немає спільних точок, які не лежать на одній прямій	Відсутні
		
α і β співпадають ($\alpha = \beta$)	α і β перетинаються ($\alpha \times \beta$)	α і β — паралельні ($\alpha \parallel \beta$)

Розділ 3.

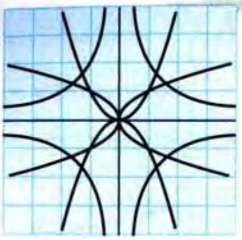
ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Із тригонометричними функціями ви вже мали справу на уроках з геометрії. Досі їхні застосування, в основному, обмежувалися розв'язуванням трикутників, тобто йшлося про знаходження одних елементів трикутника за іншими. З історії математики відомо, що виникнення тригонометрії пов'язане з вимірюванням довжин і кутів. Однак, тепер сфера її застосувань є набагато ширшою, ніж в давнину.

Слово «тригонометрія» походить від грецьких τριγωνον (trigonon) — трикутник і μετρεω (metreo) — міряю, вимірюю. Буквально воно означає вимірювання трикутників.

У цьому розділі систематизується уже відомий вам з курсу геометрії матеріал, продовжується подальше вивчення тригонометричних функцій та їхніх застосувань для характеристики періодичних процесів, зокрема, обертального руху, коливальних процесів тощо.

Більшість застосувань тригонометрії стосується саме періодичних процесів, тобто процесів, які через рівні проміжки часу повторюються. Схід і захід Сонця, зміни пір року, обертання колеса — це найпростіші приклади таких процесів. Механічні й електромагнітні коливання є також важливими прикладами періодичних процесів. Тому дослідження періодичних процесів є важливим завданням. І роль математики в його розв'язанні є визначальною.

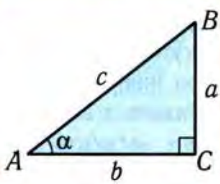


Готуємось до вивчення теми «Тригонометричні функції»

Вивчення теми «Тригонометричні функції» доцільно розпочати з повторення означень і властивостей тригонометричних функцій кутів трикутників та їхніх застосувань для розв'язування як прямокутних, так і довільних трикутників.

Синус, косинус, тангенс, котангенс кутів прямокутного трикутника

Таблиця 24



Синусом гострого кута називають відношення протилежного катета до гіпотенузи:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Косинусом гострого кута називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Тангенсом гострого кута називають відношення протилежного катета до прилеглого:

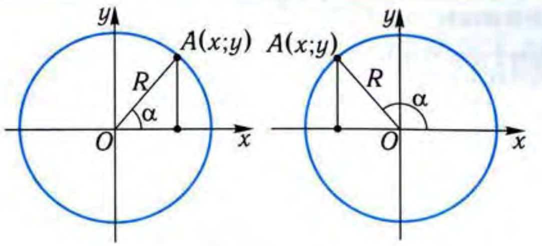
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Котангенсом гострого кута називають відношення прилеглого катета до протилежного:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Синус, косинус, тангенс, котангенс кутів від 0° до 180°

Таблиця 25



$$\sin\alpha=\frac{y}{R};\ \cos\alpha=\frac{x}{R};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{y}{x};\ \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{x}{y}.$$

$(x; y)$ — координати точки A, розміщеної на верхньому півколі, α — кут, утворений радіусом OA кола з віссю x.

Значення синуса, косинуса, тангенса, котангенса деяких кутів

Таблиця 26

Кут t / Функція	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
$\mathrm{tg}\, t$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0
$\mathrm{ctg}\, t$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не існує

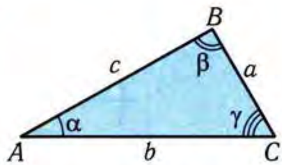
Розв'язання довільних трикутників

Таблиця 27

Теорема синусів

Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$



Теорема косинусів

Квадрат довільної сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta,$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

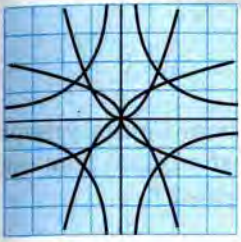
Площа трикутника **дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними:**

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Основні тригонометричні тотожності

Таблиця 28

$0° \le \alpha \le 180°$	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
$0° \le \alpha \le 180°,\ \alpha \ne 90°$	$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$
$0° < \alpha < 180°$	$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$
$0° \le \alpha \le 90°$	$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha,\quad \cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$
$0° < \alpha < 90°$	$\mathrm{tg}(90°-\alpha)=\mathrm{ctg}\,\alpha,\quad \mathrm{ctg}(90°-\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha$
$0° \le \alpha \le 180°$	$\sin(180°-\alpha)=\cos\alpha,\quad \cos(180°-\alpha)=-\sin\alpha$
$0° \le \alpha \le 180°,\ \alpha \ne 90°$	$\mathrm{tg}(180°-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha$



Тест для діагностики готовності до вивчення теми «Тригонометричні функції»

1. Дано трикутник ABC, $\angle C = 90°$, $BC = \sqrt{3}$, $AB = 2$. Чому дорівнює $\angle B$?

А. 30°. **Б.** 45°. **В.** 60°.

Г. Неможливо обчислити без обчислювальних засобів.

2. Дано трикутник ABC, $\angle C = 90°$, $BC = 3$, $\angle B = 60°$. Чому дорівнює AB?

А. $3\sqrt{3}$. **Б.** 6. **В.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **Г.** $\sqrt{3}$.

3. За даними сторонами прямокутного трикутника знайдіть косинус меншого його кута: $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

А. 0,8. **Б.** 0,75. **В.** 0,6. **Г.** 1,25.

4. Якого з поданих значень не може набувати косинус гострого кута?

А. $\left(\frac{7}{8}\right)^{-1}$. **Б.** $\frac{7}{8}$. **В.** $\left(\frac{7}{8}\right)^{2}$. **Г.** $\sqrt{\frac{7}{8}}$.

5. Порівняйте суму синусів гострих кутів довільного прямокутного трикутника (позначимо її через A) з одиницею.

А. $A < 1$. **Б.** $A = 1$.

В. $A > 1$. **Г.** Порівняти неможливо.

6. Розмістіть за зростанням числа: $a = \sin 30°$, $b = \cos 30°$, $c = \operatorname{tg} 30°$.

А. $a < b < c$. **Б.** $a < c < b$. **В.** $c < a < b$. **Г.** $b < a < c$.

7. Порівняйте без обчислювальних засобів гострі кути α і β, якщо: $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$.

А. $\alpha < \beta$. **Б.** $\alpha = \beta$.

В. $\alpha > \beta$. **Г.** Порівняти неможливо.

8. Для яких гострих кутів синус менший від косинуса?

А. Для всіх. **Б.** Для менших від 45°.

В. Для більших від 45°. **Г.** Для жодних.

9. Чому дорівнює cos α, якщо α — гострий кут прямокутного трикутника і $\sin\alpha = \frac{5}{13}$?

А. $\frac{5}{13}$. **Б.** $\frac{5}{12}$. **В.** $\frac{12}{13}$. **Г.** $\frac{8}{13}$.

10. Довжина тіні дерева дорівнює 15 м. Промені Сонця утворюють кут 30° з поверхнею Землі . Чому наближено дорівнює висота дерева? Виберіть найточніший результат.

А. 8 м. **Б.** 13 м. **В.** 7м. **Г.** 26 м.

11. Чому дорівнює значення виразу $\sqrt{1-x^2}$ при $x = -0{,}8$?

А. 0,6. **Б.** –0,6. **В.** 0,8. **Г.** ≈1,34.

12. Із формули $a^2 + b^2 = 4$ виразіть $b < 0$ через a.

А. $b = \sqrt{4-a^2}$. **Б.** $b = \sqrt{a^2-4}$.

В. $b = -\sqrt{a^2-4}$. **Г.** $b = -\sqrt{4-a^2}$.

13. Точка A розташована у III чверті на відстані 3 від осі x і на відстані $\sqrt{10}$ від початку координат. Які координати має точка A?

А. (1; 3). **Б.** (–1; 3). **В.** (–1; –3). **Г.** (–3; –1).

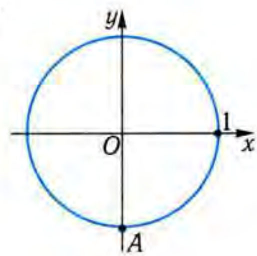
14. Яка з наступних точок не належить колу $x^2 + y^2 = 1$?

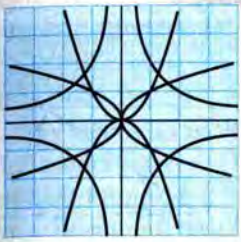
А. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **Б.** (0,5; 0,5). **В.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **Г.** (0,6; –0,8).

15. Укажіть координати точки A, яка лежить на колі з радіусом 1 (див. рис.).

А. (–1; 0). **Б.** (1; 0).

В. (0; – 1). **Г.** (0; 1).





§13. Тригонометричні функції числового аргументу

У цьому параграфі будуть визначені тригонометричні функції для довільного числового аргументу. Часто положення рухомих об'єктів, наприклад, небесних тіл, визначають за допомогою кутів, зокрема, кутів обертання. Тому функції, що описують їхній рух, нерідко своїм аргументом мають міру кута. Отже, доцільно узагальнити поняття кута та докладніше обговорити питання про його вимірювання.

1. Радіанне вимірювання кутів

Відомо, що у планіметрії розглядають кути, градусна міра яких знаходиться у проміжку від 0° до 180°. Але на практиці доводиться розглядати кути, міра яких більша від 180°.

Наприклад, літак з пункту *A* має перелетіти у пункт *B*. Курс літака визначають за допомогою кута між напрямом лінії польоту і напрямом меридіана «південь – північ», який відлічують проти руху годинникової стрілки (рис. 262).

Рис. 262

Отже, при розв'язуванні таких задач доводиться вже розглядати кути в проміжку від 0° до 360°.

У геометрії кути розглядаються як фігури, утворені за допомогою двох променів, що мають спільний початок. Промені називаються сторонами кута, їхня спільна точка – вершиною кута.

Тепер, розглядаючи кут, покажемо, як ця фігура утворилася: один з променів будемо розглядати як нерухомий, а другий промінь — як такий, що рухався від початкового положення, в якому він суміщався з нерухомою стороною. Цю другу сторону ми називатимемо рухомою і вважатимемо, що кут утворюється обертанням рухомого променя навколо вершини кута. Одержані при цьому кути називають ***кутами обертання***.

На рис. 263 зображено кут, утворений обертанням рухомого променя OA_1 навколо точки O, з нерухомим променем OA. Траєкторією руху точки A_1 променя OA_1 є лінія AA_1. Вона є дугою кола з центром у точці O і з радіусом OA_1 (або OA). Отже, точка рухається по дузі кола з радіусом $R = OA$.

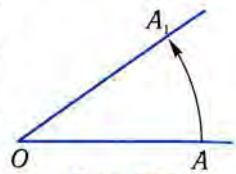


Рис. 263

Зазвичай кути в геометрії вимірюють в градусах: 1 градус (1°) — це $\frac{1}{90}$ частина міри прямого кута, або $\frac{1}{180}$ частина міри розгорнутого кута. Кути обертання теж можна вимірювати в градусах. Але деколи більш зручною є інша міра.

При обертанні фіксована точка рухомого променя описує дугу кола з центром у вершині кута (рис. 264). Вимірювання кутів обертання можна замінити вимірюванням довжини дуги кола. Щоб виключити вплив величини радіуса, мірою кута вважають не довжину дуги l, а відношення цієї довжини до радіуса R. Така міра називається ***радіанною***.

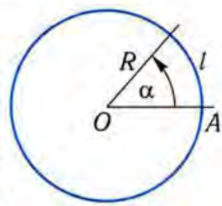


Рис. 264

! Відношення шляху, пройденого точкою A, до радіуса R не залежить від радіуса. Тому це відношення може бути прийнято за міру кута обертання.

Радіанною мірою кута обертання називається відношення шляху, пройденого від початкового положення фіксованою точкою рухомого променя, до відстані від цієї точки до початку променя.

Чисельно радіанна міра кута обертання дорівнює шляху, яке пройде точка рухомого променя, що знаходиться на одиничній відстані від вершини.

За одиницю при радіанному вимірюванні кута обертання приймають міру кута, що спи-

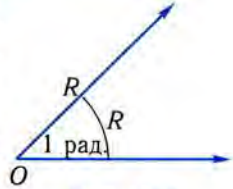


Рис. 265

рається на дугу, довжина якої дорівнює довжині радіуса (рис. 265). Ця одиниця називається ***радіаном***.

Термін "радіан" походить від латинського radius — радіус.

Рух точки по колу багато у чому схожий з рухом точки по прямій. Щоб визначити положення точки на прямій, недостатньо знати шлях, пройдений нею від початкової точки, — потрібно вказати ще напрям руху. Зазвичай на прямій фіксують додатний напрям, а положення точки визначається одним числом, додатним чи від'ємним.

Обертання рухомого променя навколо вершини кута можливе в двох протилежних напрямах. Геометрично два кути на рис. 266–267 є рівними, але як кути обертання їх слід вважати за різні.

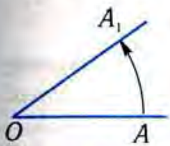


Рис. 266

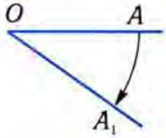


Рис. 267

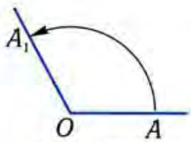


Рис. 268

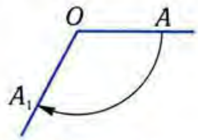


Рис. 269

При обертанні на площині будемо вважати додатним напрямом обертання напрям проти руху годинникової стрілки (рис. 268). Обертання за годинниковою стрілкою будемо вважати від'ємним (рис. 269). Відповідно, кути, що утворюються такими обертаннями, будемо вимірювати додатними і від'ємними числами.

Наприклад, годинник на рис. 270 показує 10 хвилин на одинадцяту, або 50 хвилин до одинадцятої години. Тут обертання хвилинної стрілки вимірюється або від'ємним кутом (за годинниковою стрілкою), або додатним, тільки вибір напряму ми позначаємо не знаком мінус чи плюс, а словами «10 хвилин *на одинадцяту*» і «50 хвилин *до одинадцятої*».

Рис. 270

Кут в 90° одержимо, якщо промінь OA_1 здійснить чверть повного оберту навколо точки O проти годинникової стрілки (рис. 271, а); результатом півоберту променя OA_1 проти годинникової стрілки є кут 180° (рис. 271, б). Кут (–150°) — це $\frac{150}{360} = \frac{5}{12}$ повного оберту променя OA_1 навколо точки O за годинниковою стрілкою (рис. 272, а).

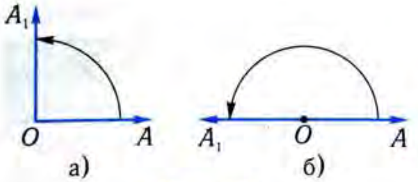


Рис. 271

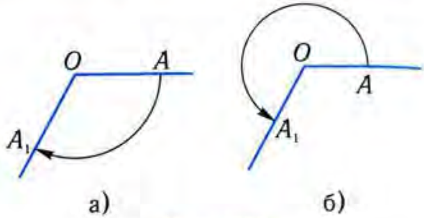


Рис. 272

Кути обертання мають важливу особливість: їхні кутові міри можуть перевищувати $180°$. Рухомий промінь з початком у фіксованій точці може знаходитись у будь-якому положенні на площині (рис. 272, б).

Якщо кутова міра кута становить α радіан, $\alpha > 0$, то це означає, що довжина відповідної дуги кола l з радіусом R дорівнює αR, тобто $l = \alpha R$.

Звідси випливає, що ***довжина дуги одиничного кола чисельно збігається з радіанною мірою відповідного кута.*** Власне, саме ця обставина і робить радіанну міру кута зручною.

Коло радіуса R має довжину $2\pi R$. Розглянемо дугу, довжина якої дорівнює радіусу R. Її довжина в 2π разів менша від довжини кола. Тому кут, що дорівнює 1 радіану (скорочено: рад), становить $\frac{1}{2\pi}$ частини повного оберту: $1 \text{ рад} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°17'45''$.

Оскільки радіанна міра кута $360°$ становить 2π рад, то $1°$ відповідає $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017$ рад.

Цим самим встановлено зв'язок між радіанною і градусною мірами кута, який, до речі, свідчить про незалежність радіанної міри кута від вибору фіксованої точки рухомого променя.

Приклад 1. Виразити кути:

1) $30°$, $45°$, $60°$, $-150°$ у радіанній мірі;

2) $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{4\pi}{3}$ у градусній мірі.

☐ 1) Оскільки $1° = \frac{\pi}{180}$, то $30° = \frac{\pi}{180} \cdot 30 = \frac{\pi}{6}$; $45° = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4}$;

$60° = \frac{\pi}{180} \cdot 60 = \frac{\pi}{3}$; $-150° = \frac{\pi}{180} \cdot (-150) = -\frac{5\pi}{6}$.

2) Оскільки 1 рад $= \frac{180^\circ}{\pi}$, то $\frac{2\pi}{3} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$; $\frac{3\pi}{4} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4} =$ $= 135^\circ$; $\frac{5\pi}{6} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = 150^\circ$; $-\frac{4\pi}{3} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -240^\circ$. ■

Відповідь. 1) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{6}$; 2) 120°, 135°, 150°, –240°.

Радіанною мірою дуги кола зазвичай називають радіанну міру відповідного центрального кута. Так, радіанні міри дуг AA_1, зображених на рис. 272, а), б), відповідно дорівнюють $\frac{\pi}{2}$, π.

Радіанна міра одиничного кола дорівнює його довжині, тобто числу 2π, радіанна міра одиничного півкола дорівнює числу π; радіанна міра чверті одиничного кола становить $\frac{\pi}{2}$.

Слово «радіан» часто пропускають і кажуть «кут π». Так, записи $\alpha = 1{,}12$; $\alpha = 0{,}39$; $\alpha = 15{,}7$ означають, що кут α виміряний у радіанах. Водночас позначення градусів не прийнято пропускати в записах.

Введення радіанної міри кута обертання дає змогу встановити простий зв'язок між кутовою і лінійною швидкостями точки, яка перебуває у рівномірному обертальному русі. Кутова швидкість при рівномірному обертанні — це кут, на який повертається точка за одиницю часу. Вона зазвичай вимірюється в радіанах за секунду (рад/с). Лінійна швидкість точки при рівномірному русі — це відстань, на яку переміщується точка по траєкторії руху за одиницю часу.

Приклад 2. Точка рівномірно рухається по колу, радіус якого $R = 40$ см, з лінійною швидкістю $v = 80$ см/с. Знайти кутову швидкість точки.

□ За одну секунду точка проходить шлях, що дорівнює 80 см. Треба знайти міру кута, на який обертається точка за 1 с. Із визначення радіана випливає, що куту в 1 рад відповідає дуга, довжина якої дорівнює довжині радіуса. Оскільки довжина шляху, який проходить точка за 1 с, вдвічі більша від радіуса, то відповідна дуга кола відповідає куту в 2 рад. ■

Відповідь. 2 рад/с.

Використовуючи від'ємні міри кутів, можна модуль міри будь-якого кута, в межах повного оберту, звести до числа, що не перевищує півоберту. Наприклад, при градусному вимірюванні кутів замість проміжку $0° \le \alpha \le 360°$ можна завжди розглядати кути в проміжку $-180° \le \alpha \le 180°$, при радіанному вимірюванні замість проміжку $0 \le \alpha \le 2\pi$ — розглядати проміжок $-\pi \le \alpha \le \pi$. Так, замість кута 225° можна розглядати кут $-(360° - 225°) = -135°$; замість кута $\frac{5\pi}{3}$ — кут $-\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

В географії, астрономії, де застосовується градусна система вимірювання кутів, послуговуються також меншими одиницями вимірювання: $\frac{1°}{60} = 1'$ (кутова мінута), $\frac{1'}{60} = 1''$ (кутова секунда). Градусною мірою кута послуговуються в оптичних приладах.

> ***Мінута** — від латинського minuta — зменшена (частка), від minuo — зменшую, розбиваю на дрібні частини.*
> ***Секунда** — від латинських secunda (division gradi) — друге (ділення градуса), secundus — наступний.*

У техніці за одиницю вимірювання кутів приймають ***повний оберт***, у військовій справі — ***«тисячну»***, тобто $\frac{1}{3000}$ частину розгорнутого кута, чи ***велику поділку кутоміра***, яка дорівнює 100 «тисячним». У мореплавстві одиницею вимірювання є ***румб***, що дорівнює $\frac{1}{32}$ частині повного оберту.

✓ Контрольні запитання

1°. Чи можна здійснити поворот годинникової стрілки на: а) 270°; б) 360°; в) 450°; г) –60°; ґ) –290°; д) –512°?

2°. Чому дорівнюють у радіанах величини кутів: а) правильного трикутника; б) прямокутного рівнобедреного трикутника?

3°. Чому дорівнює радіанна міра кута AOB, зображеного на рис. 273, якщо довжина дуги MN дорівнює $0{,}5ON$?

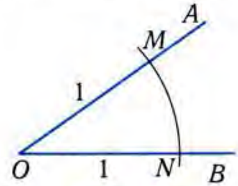


Рис. 273

4. Чому дорівнює у градусній мірі кут оберту маховика, що зробив за годинниковою стрілкою: 1) 1 оберт; 2) 1,5 оберту?
5. Які кути описують хвилинна і годинна стрілки за: 1) 20 хв; 2) 5 год?
6. Чому дорівнюють наближено градусні і радіанні міри кутів обертання, позначених стрілками на рис. 274.

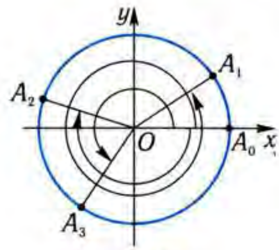


Рис. 274

2. Тригонометричне коло

Як відомо, між дійсними числами і точками координатної прямої існує взаємно однозначна відповідність. Уявімо собі, що точка рухається по координатній прямій від початку координат. Якщо вона рухається у додатному напрямі і пройде відстань, що дорівнює трьом одиницям виміру довжини, то вона потрапить у точку $A(3)$ (рис. 275). Якщо ж вона рухається у напрямі, протилежному до напряму координатної прямої, і пройде ту саму відстань, то вона потрапить у точку $B(-3)$ (див. рис. 275). Зверніть увагу на те, що в обох випадках відстань, пройдена точкою, дорівнює модулю координати точки, в яку вона потрапляє.

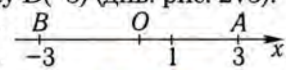


Рис. 275

Взагалі, нехай маємо довільне число t. Вважатимемо, що точка рухається вздовж прямої, причому в додатному напрямі, якщо $t > 0$, і у від'ємному напрямі, якщо $t < 0$. Коли пройдена відстань дорівнюватиме $|t|$, точка потрапить у положення, що відповідає числу t. Таким чином, кожному дійсному числу відповідає одна і тільки одна точка P_t координатної прямої (рис. 276 а, б). Відтак ми можемо не розрізняти число t і точку P_t.

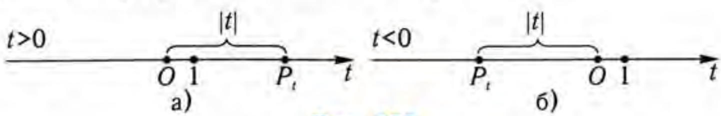


Рис. 276

Так само ми можемо не розрізняти міру кута обертання t і число t. Це дає змогу побудувати відповідність між дійсними числами і точками одиничного кола, користуючись вимірюванням відстані вздовж кола. Для цього на координатній площині розглянемо одиничне коло (тобто коло з радіусом 1) з центром у початку координат (рис. 277, а) — його називають ***тригонометричним колом***. Точку A з координатами (1; 0) називають ***початком відліку*** (на колі!). Довільне число t можна зобразити точкою на тригонометричному колі.

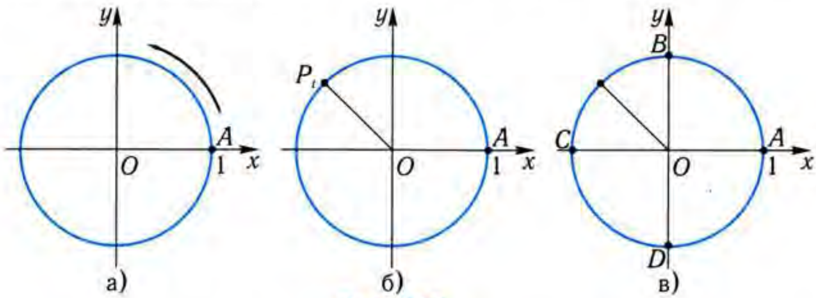


Рис. 277

Нехай задано число t. Уявімо собі, що деяка точка рухається по тригонометричному колу. Свій рух вона починає з положення A. Вважатимемо, що вона рухається проти годинникової стрілки, тобто в додатному напрямі, якщо $t > 0$, і за годинниковою стрілкою, тобто у від'ємному напрямі, якщо $t < 0$. Якщо $t = 0$, то точка знаходиться в точці A. Коли пройдена відстань дорівнюватиме $|t|$, точка потрапить у положення, що відповідає числу t. Позначимо точку, в яку вона потрапляє, через P_t (рис. 277, б). Зрозуміло, що точка P_0 збігається з точкою A.

Таким чином, кожному дійсному числу t на тригонометричному колі відповідає точка P_t. За побудовою, точку P_t одержують з точки A за допомогою повороту її навколо початку координат на t радіан, оскільки на одиничному колі довжина пройденого шляху дорівнює модулю радіанної міри кута повороту.

Користуючись наведеною побудовою, неважко вказати точки тригонометричного кола, які відповідають числам $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \pi, -\pi, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, 2\pi, -2\pi, \frac{\pi}{2}+2\pi$ тощо. Справді, шлях довжиною $\frac{\pi}{2}$ вздовж кола дорівнює $\frac{1}{4}$ довжини кола, адже довжина одиничного кола дорівнює 2π. Точка $P_{\frac{\pi}{2}}$ збігається з точкою B (рис. 277, в). В точку P_π можна потрапити, якщо пройти в додатному напрямі відстань

π, тобто довжину одиничного півкола. Точка P_π збігається з точкою C. У точку $P_{-\frac{\pi}{2}}$ можна потрапити, подолавши у від'ємному напрямі четверту частину одиничного кола. Точка $P_{-\frac{\pi}{2}}$ збігається з точкою D. Аналогічно, точки $P_{\frac{3\pi}{2}}$, $P_{-\pi}$ збігатимуться відповідно з точками D, C.

! Продовжуючи ці побудови, дійдемо висновку, що *різним числам може відповідати та сама точка тригонометричного кола.*

Ця неоднозначність нагадує таку реальну ситуацію: *велотрек має довжину 350 м, велосипедист знаходиться на відстані 150 м від фінішу. Який шлях він проїхав*?

Якщо він тільки розпочав змагання, то він проїхав 350 – 150 = = 200 м, якщо вже проїхав один круг, то — (200 + 350·1) м = 550 м, два круги — (200 + 350·2) м = 900 м; якщо проїхав n кругів, то шлях дорівнюватиме (200 + 350·n) м. Тому однозначної відповіді на поставлене запитання дати неможливо.

Приклад 3. Зобразити на тригонометричному колі точки, що відповідають числам $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}$.

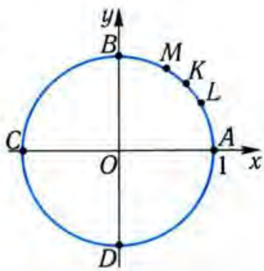


Рис. 278

☐ Поділимо дугу AB, довжина якої дорівнює $\frac{\pi}{2}$, навпіл точкою K, на три рівні частини — точками L і M (рис. 278). Тоді довжини дуг AL, AK, AM відповідно дорівнюють $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}$. Відтак, числу $\frac{\pi}{6}$ відповідає точка L, числу $\frac{\pi}{4}$ — точка K, числу $\frac{\pi}{3}$ — точка M. Ці точки можна відповідно позначити через $P_{\frac{\pi}{6}}$, $P_{\frac{\pi}{4}}$, $P_{\frac{\pi}{3}}$. ■

Для точок, побудованих у прикладі 3, неважко вказати прямокутні координати, користуючись співвідношеннями між сторонами і кутами прямокутних трикутників.

Приклад 4. Знайти прямокутні координати точок $P_{\frac{\pi}{6}}, P_{\frac{\pi}{4}}, P_{\frac{\pi}{3}}$.

□ Для точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ розв'язання зводиться до знаходження катетів прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 1, а один з гострих кутів становить $\frac{\pi}{6} = 30°$ (рис. 279). Катет, що лежить навпроти кута 30°, дорівнює $\frac{1}{2}$, а прилеглий катет дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отже,

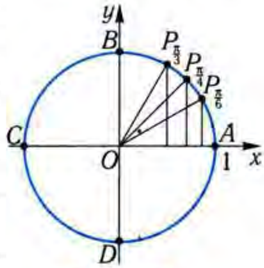


Рис. 279

координати точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ — $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Аналогічно знаходяться координати $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ точки $P_{\frac{\pi}{3}}$. Знаходження координат точки $P_{\frac{\pi}{4}}$ зводиться до знаходження катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 1. Його катети дорівнюють $\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отже, $P_{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ■

Відповідь. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Користуючись результатом розв'язання прикладу 3, можна знаходити на тригонометричному колі точки, які відповідають числам, виражених у долях числа π.

Приклад 5. Зобразити на тригонометричному колі точки, що відповідають числам $\frac{3\pi}{4}; -\frac{5\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}; \frac{25\pi}{6}$.

□ Побудову виконуватимемо, користуючись рис. 278. Відкладемо тричі від точки A дугу AK (точки K, L, M визначені у прикладі 3) у додатному напрямі (її довжина дорівнює $\frac{\pi}{4}$). Одержимо точку E – середину дуги BC (рис. 280). Вона і відповідатиме числу

$3 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Відклавши дугу AL (її довжина дорівнює $\frac{\pi}{6}$) від точки A у від'ємному напрямі 5 разів, матимемо точку F, яка відділяє третю частину дуги CD. Ця точка і відповідає числу $5 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6}$. Далі, відклавши дугу AM (її довжина дорівнює $\frac{\pi}{3}$) від точки A у додатному напрямі 4 рази, одержимо точку N, яка відділяє дві третини дуги CD. Ця точка і відповідає числу $\frac{4\pi}{3}$. Нарешті, беручи до уваги, що $\frac{25\pi}{6} = \frac{24\pi + \pi}{6} = 4\pi + \frac{\pi}{6}$, дійдемо висновку, що числу $\frac{25\pi}{6}$ відповідає точка L. Якби ми відклали від точки A у додатному напрямі 25 разів дугу AL, то мали б той самий результат. ■

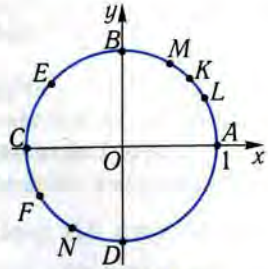


Рис. 280

Координати точок, побудованих у прикладі 4, дозволяють знаходити координати точок тригонометричного кола, які відповідають числам, вираженим у долях числа π.

Приклад 6. Знайти прямокутні координати точок $P_{\frac{5\pi}{6}}, P_{\frac{7\pi}{4}}, P_{\frac{4\pi}{3}}$.

□ Побудуємо дані точки (рис. 281). Їхні координати за модулем збігаються відповідно з координатами точок $P_{\frac{\pi}{6}}, P_{\frac{\pi}{4}}, P_{\frac{\pi}{3}}$, які знайдено у прикладі 4. Слід лише визначити їхні знаки. Точка $P_{\frac{5\pi}{6}}$ знаходиться у другій координатній чверті, тому її абсциса від'ємна, а ордината — додатна. Відтак, $P_{\frac{5\pi}{6}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

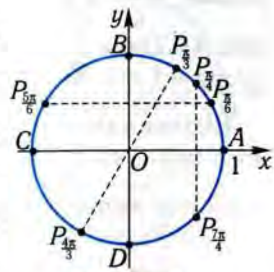


Рис. 281

Аналогічно одержуємо: $P_{\frac{7\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_{\frac{4\pi}{3}}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ■

Відповідь. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Наближено можна зображати точки тригонометричного кола, які відповідають довільним числам.

Приклад 7. Зобразити на тригонометричному колі точки, що відповідають числам 1, – 2, 3, – 5.

☐ Числу 1 відповідає точка P_1, яка розміщена на дузі AB ближче до точки B, бо довжина дуги AB дорівнює $\frac{\pi}{2}$ або приблизно 1,5. Щоб уточнити її положення, відкладемо від точки A у додатному напрямі кут в 1 рад, який наближено дорівнює $\frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$ (рис. 282). Його можна побудувати за допомогою транспортира. Для побудови точки P_{-2}, що відповідає числу –2, відкладемо від точки A у від'ємному напрямі дугу в 2 рад. Відповідний кут наближено дорівнює $\frac{180°}{\pi} \cdot 2 \approx 115°$ (див. рис. 282). Ця точка знаходиться на дузі CD ближче до точки D. Аналогічно будується точка P_3, що відповідає числу 3. Вона знаходиться на дузі BC ближче до точки C (нагадаємо, що точка C відповідає числу $\pi \approx 3{,}14$). Числу – 5 відповідає та сама точка, що й числу $-5 + 2\pi \approx 1{,}28$. Щоб її побудувати, відкладемо від точки A у додатному напрямі дугу в 1,28 рад. Відповідний кут наближено дорівнює $\frac{180°}{\pi} \cdot 1{,}28 \approx 73°$ (див. рис. 282). Точка P_{-5} знаходиться на дузі AB ближче до точки B (нагадаємо, що точка B відповідає числу $\pi/2 \approx 1{,}57$). ■

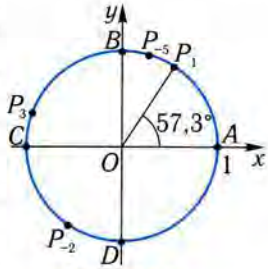


Рис. 282

Відповідність між дійсними числами і точками тригонометричного кола, як відмічалось вище, не є взаємно однозначною. Наприклад, якщо розглянути числа $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $t_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi$, $t_2 = \frac{\pi}{2} + 4\pi$, ..., $t_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, ..., то положення точки P_{t_n} для $n = 0, 1, 2, \ldots$ одне й те саме — точка $P_{\frac{\pi}{2}}$, тобто точка $P_{\frac{\pi}{2}}$ відповідає нескінченній кількості чисел $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi, \ldots$. Це саме положення мають і точки, які відповідають числам $\frac{\pi}{2} - 2\pi$, $\frac{\pi}{2} - 4\pi$, ... Таким чином, точка $P_{\frac{\pi}{2}}$ відповідає числам $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, де $n \in Z$.

За прямокутними координатами точки на тригонометричному колі можна деколи записати числа, яким вони відповідають.

Приклад 8. Знайти на тригонометричному колі точки і записати, яким числам вони відповідають, якщо вони мають: 1) ординату $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) абсцису $-\frac{1}{2}$.

☐ 1) Пряма $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ перетинає тригонометричне коло в точках P і Q (рис. 283). Точка P відповідає числу $\frac{\pi}{4}$ (див. приклад 4), а відтак усім числам $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$. Точка Q відповідає числу $\frac{3\pi}{4}$, а відтак усім числам $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$.

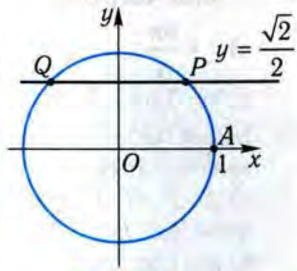


Рис. 283

2) Пряма $x = -\frac{1}{2}$ перетинає тригонометричне коло в точках E і F (рис. 284). Точка E відповідає числу $\frac{4\pi}{3}$ (див. приклад 6), а відтак усім числам $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$. Точка F відповідає числу $\frac{2\pi}{3}$, а відтак усім числам $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$. ■

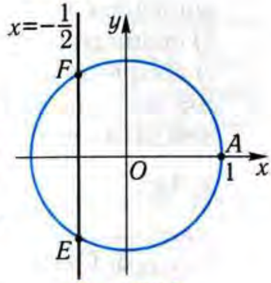


Рис. 284

Відповідь. 1) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$, $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$;

2) $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Контрольні запитання

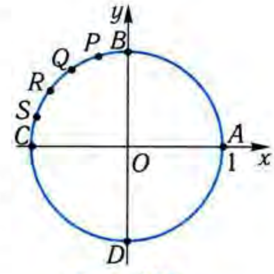


Рис. 285

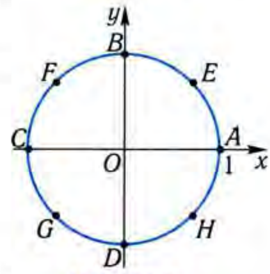


Рис. 286

1°. Яким числам відповідають на рис. 285:
а) середини дуг CD і DA;
б) точки P, Q, R, S, які поділяють дугу BC на п'ять рівних частин?

2°. На якій із дуг AB, BC, CD, DA тригонометричного кола (див. рис. 285) знаходиться точка, що відповідає числу $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$?

3°. Чому дорівнює довжина дуги AD на рис. 285?

4. У якій чверті міститься точка P_t, якщо:
а) $t = \frac{5\pi}{4}$; б) $t = -\frac{5\pi}{6}$;
в) $t = 5{,}3\pi$; г) $t = -2{,}9\pi$?

5°. Яким числам відповідають на тригонометричному колі (рис. 286) точки:
а) E, F, G, H, що поділяють відповідно дуги AB, BC, CD, DA навпіл;
б) що поділяють дуги AB, BC, CD, DA на три рівні частини?

6. Знайдіть числа з проміжку $[0;\ 2\pi]$, яким на одиничному колі відповідає точка з:
а) ординатою 1; б) ординатою 0; в) ординатою -1;
г) абсцисою 0; ґ) абсцисою 1; д) абсцисою -1.

7. Які координати мають точки тригонометричного кола, що відповідають числам:
а) 3π; б) $\frac{19\pi}{2}$; в) $-\frac{\pi}{2}$; г) 2π?

3. Означення тригонометричних функцій

Б Узагальнимо поняття синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута на кути обертання чи на довільні числа, які ми домовились не розрізняти.

Нехай задано довільне число t, яке визначає точку P_t на тригонометричному колі. Позначимо через $(x;\ y)$ координати точки P_t (рис. 287, а).

Синусом числа t називається ордината точки P_t.

$$\sin t = y.$$

Косинусом числа t називається абсциса точки P_t.

$$\cos t = x.$$

Тангенсом числа t називається відношення синуса числа t до його косинуса.

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

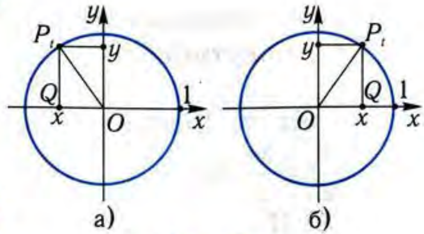


Рис. 287

Котангенсом числа t називається відношення косинуса числа t до його синуса.

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

***Косинус** — від латинського complementi sinus: complementus — доповнення, a sinus — западина, заглиблення; буквально: доповнення заглибини.*

***Тангенс** — від латинського tangens — той, що дотикається, tango — дотикаюсь.*
***Котангенс** — від латинського complementi tangens.*

Кожному числу t відповідає єдина точка P_t тригонометричного кола, а отже, єдині абсциса та ордината цієї точки. Власне, саме тому $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$ є функціями змінної t, яка набуває значень з множини дійсних чисел. Їх називають ***тригонометричними функціями.***

! **Для кутів, які розглядаються в геометрії, наведені означення збігаються з означеннями відповідних величин у геометрії. Якщо кут t лежить у першій координатній чверті, то абсциса і ордината точки P_t є довжинами катетів прямокутного трикутника OP_tQ** (рис. 287, б). **У цьому випадку означення тригонометричних функцій є тими самими, якими вони були для гострих кутів прямокутного трикутника. В інших чвертях значення тригонометричних функцій також можуть бути знайдені з прямокутних трикутників, тільки при цьому слід враховувати**

знаки координат точки P_t і зв'язок кута t з гострим кутом трикутника.

Приклад 9. Знайти значення тригонометричних функцій чисел $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$.

☐ Для розв'язання задачі потрібно знайти прямокутні координати точок тригонометричного кола, які відповідають зазначеним числам, тобто точок $A = P_0 = P_{2\pi}$, $B = P_{\frac{\pi}{2}}, C = P_{\pi}, D = P_{\frac{3\pi}{2}}$ (рис. 288). Враховуючи, що радіус тригонометричного кола дорівнює 1, маємо: $P_0(1;\ 0)$, $P_{\frac{\pi}{2}}(0;1), P_{\pi}(-1;0), P_{\frac{3\pi}{2}}(0;-1)$.

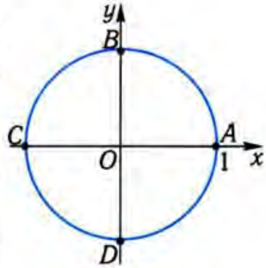


Рис. 288

Отже, $\sin 0 = \sin 2\pi = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\mathrm{tg}0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0 = \mathrm{tg}\pi = \mathrm{tg}2\pi$. $\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}, \mathrm{tg}\frac{3\pi}{2}$ не існують.

Аналогічно, $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0 = \mathrm{ctg}\frac{3\pi}{2}$; $\mathrm{ctg}\,0$, $\mathrm{ctg}\,\pi$, $\mathrm{ctg}\,2\pi$ не існують, бо на нуль ділити неможливо. ■

Приклад 10. Знайти значення тригонометричних функцій числа $\frac{2\pi}{3}$.

☐ Треба спочатку знайти прямокутні координати точки $P_{\frac{2\pi}{3}}$. За модулем вони збігаються з відповідними координатами точки $P_{\frac{\pi}{3}}$ (рис. 289). Застосовуючи співвідношення між сторонами і кутами прямокутного три-

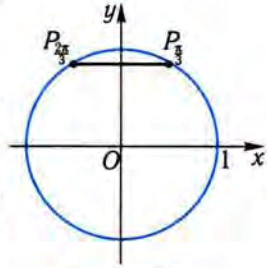


Рис. 289

кутника, маємо, що $P_{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_{\frac{2\pi}{3}}\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (див. приклад 4, п. 2). Тому, враховуючи означення тригонометричних функцій довільного числа, одержимо: $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}} = -\sqrt{3}$;

$$\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} = \frac{\cos\frac{2\pi}{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}} = = -\frac{1}{\sqrt{3}}.\ \blacksquare$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -\sqrt{3}; -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Знаки значень тригонометричних функцій числа t визначаються положенням точки P_t на тригонометричному колі.

Приклад 11. Визначити знаки чисел: $\sin 20°$; $\cos 130°$; $\operatorname{tg} 214°$; $\operatorname{ctg} 356°$.

☐ Побудуємо на тригонометричному колі точки, які відповідають кутам обертання на 20°; 130°; 214°; 356° (рис. 290). Далі, скориставшись означеннями тригонометричних функцій, матимемо: $\sin 20° > 0$, $\cos 130° < 0$, $\operatorname{tg} 214° = \frac{\sin 214°}{\cos 214°} > 0$, $\operatorname{ctg} 356° = \frac{\cos 356°}{\sin 356°} < 0$. ■

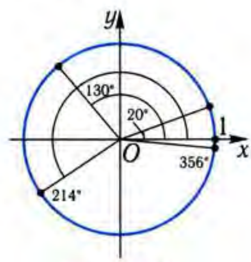


Рис. 290

При обчисленні значень тригонометричних функцій числа (або ж те саме, що міри кута обертання, заданого в радіанній мірі) за допомогою калькулятора перемикач встановлюють у положення P (радіан). Це саме роблять при знаходженні значення аргументу за заданим значенням тригонометричної функції.

Приклад 12. Скласти таблицю значень функції $h = t + \sin t$ для таких значень t: 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1.

☐ Щоб виконати завдання, скористаємось калькулятором.

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
h	0	0,200	0,399	0,596	0,789	0,979	1,16	1,34	1,52	1,68	1,84

■

Синус і косинус довільного числа ми визначили геометрично. Натомість тангенс і котангенс ввели як деякі відношення синуса і косинуса. Проте їх також можна охарактеризувати геометрично.

***Пряма, що проходить через точку з координатами* (1; 0) *перпендикулярно до осі абсцис, називається лінією тангенсів* (рис. 291).**

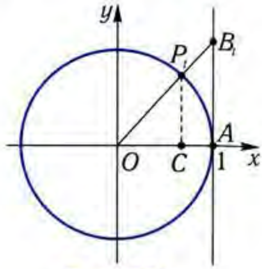


Рис. 291

Лінія тангенсів має рівняння $x = 1$, її можна вважати координатною прямою з напрямом і масштабом осі y і з початком у точці A.

Кожному числу $t \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z$, можна поставити у відповідність точку B_t на лінії тангенсів, яка є точкою перетину прямої OP_t з лінією тангенсів.

Доведемо, що ордината точки B_t дорівнює tg t, якщо точка P_t знаходиться у першій чверті.

З подібності трикутників OP_tC і OB_tA маємо: $\frac{P_tC}{OC} = \frac{AB_t}{OA}$, або

$$\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{AB_t}{1}, \ \ \mathrm{tg}\, t = AB_t.$$

Цей висновок є правильним і тоді, коли точка P_t міститься не у першій чверті тригонометричного кола. Пропонуємо переконатись у цьому самостійно.

***Пряма, що проходить через точку з координатами (0; 1) перпендикулярно до осі ординат, називається лінією котангенсів* (рис. 292).**

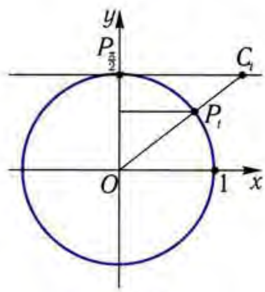


Рис. 292

Лінія котангенсів має рівняння $y = 1$, її також можна вважати координатною прямою з напрямом і масштабом осі x і з початком у точці $P_{\frac{\pi}{2}}$.

Доведіть самостійно, що абсциса точки C_t перетину прямої OP_t з лінією котангенсів дорівнює ctg t.

Приклад 13. Зобразити на тригонометричному колі точки P_t, якщо: 1) tg $t = 2$; 2) tg$t = -0{,}5$; 3) ctg$t = 1{,}5$.

□ 1) Відкладемо на лінії тангенсів у додатному напрямі відрізок, що дорівнює 2 (нагадаємо, що радіус кола дорівнює 1). Через отриману точку і центр тригонометричного кола проведемо пряму. Точки F і F_1 перетину цієї прямої з колом і будуть шуканими (рис. 293, а).

2) У від'ємному напрямі лінії тангенсів відкладемо відрізок завдовжки 0,5. Далі задача розв'язується аналогічно попередній. Точки G і G_1 є шуканими (див. рис. 293, а).

3) Відрізок завдовжки 1,5 відкладаємо у додатному напрямі лінії котангенсів. Далі задача розв'язується аналогічно попередній. Точки H і H_1 є шуканими (рис. 293, б). ■

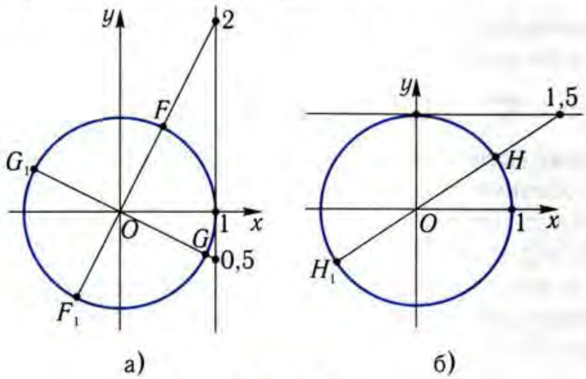


Рис. 293

✓ Контрольні запитання

1°. Дано точку $P_t(-0{,}8; 0{,}6)$ на тригонометричному колі. Чому дорівнює: а) sin$t$; б) cos t; в) tg t; г) ctg t?

2°. Чи може синус деякого числа дорівнювати $\frac{7}{8}; \frac{8}{7}; -\frac{7}{8}; -\frac{8}{7}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}$?

3. Скільки чисел t, що задовольняють умову cos $t = 1$, містяться у проміжку $[0; 4\pi]$?

4. Чи завжди існує на проміжку $[0; \pi]$ число, яке задовольняє умову tg $t = a$, де a — довільне дійсне число?

5. Скільки чисел t, що задовольняють умову sin $t = 0{,}4$, містяться у проміжку $[0; 2\pi]$?

6. Чи правильно, що числам $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{5\pi}{4}$ відповідає та сама точка на лінії тангенсів?
7. Чи існують на проміжку $[0;\ \pi]$ числа t, для яких $\sin t = -0{,}1$?

Задачі

228°. Запишіть у радіанній мірі значення кутів:
1) $120°$; 2) $54°$; 3) $210°$; 4) $165°$;
5) $-330°$; 6) $27°$; 7) $127°12'$.

229°. Запишіть у градусній мірі значення кутів:
1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $-\frac{5\pi}{6}$; 3) 2; 4) 3π; 5) $\frac{5\pi}{4}$; 6) $-\frac{5\pi}{3}$; 7) $\frac{3\pi}{2}$.

230. Зобразіть на тригонометричному колі кути обертання, радіанні міри яких дорівнюють:
1°) $\frac{3\pi}{2}$; 2°) $-\frac{\pi}{2}$; 3) 2; 4) -3; 5) $0{,}5$; 6) -6.

231. Зубчасте колесо має 40 зубців. Виразіть у градусах кут, на який обернеться колесо при повороті на 1 зубець; 15 зубців; 80 зубців; 150 зубців.

232. Серед мір кутів обертання $-310°$, $-220°$, $-50°$, $770°$ укажіть такі, в яких положення рухомого променя збігається з положенням рухомого променя кута, градусна міра якого дорівнює: 1) $50°$; 2) $140°$.

233. Серед мір кутів обертання $-\frac{18\pi}{7}, -\frac{10\pi}{7}, -\frac{13\pi}{7}, -\frac{3\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}$ укажіть такі, в яких положення рухомого променя збігається з положенням рухомого променя кута, радіанна міра якого дорівнює: 1) $\frac{\pi}{7}$; 2) $\frac{4\pi}{7}$.

234. Знайдіть довжину дуги, якщо відомі її радіанна міра α і радіус R кола, що містить її:
1) $\alpha = 3$, $R = 1$ см; 2) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $R = 3$ см; 3) $\alpha = \frac{4\pi}{5}$, $R = 5$ м.

235. Колесо за 10 с повернулося на 5π рад. З якою кутовою швидкістю воно обертається?

236. Шків швидкісного електродвигуна робить 90 000 обертів за хвилину. Знайдіть кутову швидкість обертання цього шківа: 1) у град/с; 2) у рад/с.

237. Кліть шахтного підйомника піднімається на 100 м за 40 повних обертів вала підйомника у додатному напрямі. Визначте у радіанах кут повороту вала підйомника, якщо кліть піднялась на 13,75 м; спустилась на 21 м.

238. Точка рухається рівномірно по колу радіуса $R = 60$ см з кутовою швидкістю $\omega = 4\pi$ рад/с. Знайдіть її лінійну швидкість.

239. Точка рухається рівномірно по колу радіуса $R = 30$ см з лінійною швидкістю 75 см/с. Знайдіть її кутову швидкість.

240. Яку лінійну швидкість має точка диска, що обертається, коли вона віддалена на 18 см від осі обертання, а кутова швидкість диска дорівнює $\frac{\pi}{3}$ рад/с? Якої довжини дугу опише ця точка за 45 с?

---

241. Зобразіть на тригонометричному колі точки, що відповідають числам:

1°) $-\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$; 2) 1,5; 2,3; 3) 5π; $-\frac{27\pi}{4}$.

242. Знайдіть прямокутні координати точок:

1°) $P_{\frac{7\pi}{6}}, P_{\frac{3\pi}{4}}, P_{\frac{5\pi}{3}}$; 2°) $P_{-\frac{5\pi}{6}}, P_{-\frac{\pi}{4}}, P_{-\frac{2\pi}{3}}$;

3) $P_{\frac{11\pi}{6}}, P_{-\frac{5\pi}{4}}, P_{-\frac{4\pi}{3}}$; 4) $P_{-\frac{\pi}{6}}, P_{-\frac{7\pi}{4}}, P_{\frac{2\pi}{3}}$.

243. Знайдіть координати точки тригонометричного кола, яку одержимо при обертанні точки (1; 0) на кут:

1°) 3π; 2°) -2π; 3°) $4{,}5\pi$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) $225°$.

244. Знайдіть кути, на які потрібно повернути точку (1; 0) навколо початку координат, щоб одержати точку з координатами:

1°) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

245. Зобразіть на тригонометричному колі точки і запишіть, яким числам вони відповідають, якщо вони мають:

1) ординату $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) абсцису $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

246. Для кожного з наведених значень t $\left(t=\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{5}{6}\pi; \pi; \frac{4}{3}\pi; \frac{3}{2}\pi; \frac{11}{6}\pi\right)$ вкажіть таке значення t', щоб точки P_t і $P_{t'}$ стали симетричними відносно: 1) початку координат; 2) осі абсцис; 3) осі ординат; 4*) прямої $y=x$; 5*) прямої $y=-x$.

247*. Числа задані формулою: 1) $t=\frac{\pi}{2}\cdot k$; 2) $t=\pi\cdot k$; 3) $t=\frac{\pi}{4}\cdot k$; 4) $t=\frac{\pi}{2}\cdot(2k+1)$, де $k=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$. Зобразіть на координатній прямій і на тригонометричному колі точки, які відповідають цим числам. Скільки таких точок буде на координатній прямій і скільки — на тригонометричному колі?

248°. Дано координати точки P_t на тригонометричному колі. Обчисліть $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$:

1) $\left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$; 2) $\left(-\frac{5}{13}; \frac{12}{13}\right)$; 3) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 4) $\left(\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$.

249°. Обчисліть значення тригонометричних функцій чисел:

1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{5\pi}{4}$; 4) $\frac{7\pi}{6}$.

250°. Визначте знаки тригонометричних функцій $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$ для t, що дорівнює:

1) $\frac{7\pi}{6}$; 2) $-\frac{5\pi}{3}$; 3) $\frac{12\pi}{7}$; 4) $-\frac{7\pi}{6}$; 5) $\frac{7\pi}{9}$; 6) $\frac{13\pi}{6}$.

251°. Обчисліть:

1) $\sin\frac{\pi}{2}+\cos\pi-2\operatorname{tg}2\pi+\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}$;

2) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2\operatorname{tg}3\pi+\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$.

252. Зобразіть на тригонометричному колі точки P_t, якщо:

1) $\operatorname{ctg} t=1$; 2) $\operatorname{ctg} t=2$; 3) $\operatorname{ctg} t=-0{,}5$; 4) $\operatorname{tg} t=1{,}5$; 5) $\operatorname{tg} t=-1$.

253. Знайдіть усі числа з проміжку $[0; 2\pi]$, які задовольняють умову:

1) $\sin t=0$; 2) $\cos t=1$; 3) $\cos t=-1$; 4) $\operatorname{ctg} t=0$; 5) $\sin t=-1$.

Вправи для повторення

254. Відомо, $\sin\alpha = a$. Знайдіть $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, якщо α:
1) гострий кут прямокутного трикутника;
2) тупий кут трикутника.

255. Відношення катетів прямокутного трикутника дорівнює 4:3. Знайдіть синуси і косинуси гострих кутів трикутника.

256. Доведіть, що точка з координатами ($\cos\alpha$; $\sin\alpha$) лежить на колі з радіусом 1 і з центром у початку координат.

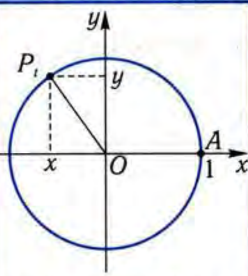
257. Із заданої рівності виразіть x через y та y через x:

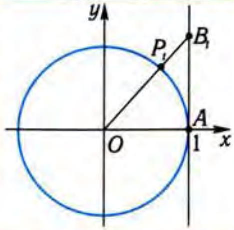
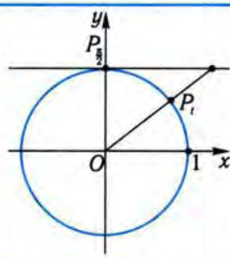
1) $x^2 + y^2 = 4$, якщо $x > 0$, $y > 0$; 2) $1 - \frac{1}{x^2} = y^2$, якщо $x < 0$, $y < 0$.

258. Дано кути: 30°; 64°; 10°; α; $45° + \alpha$; $\frac{\pi}{8}$. Знайдіть кути: 1) які доповнюють їх до прямих; 2) суміжні з ними.

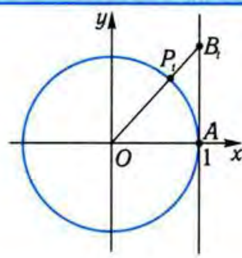
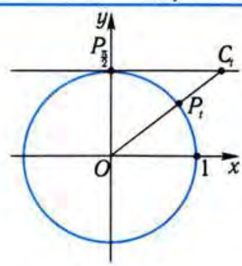
Підсумок

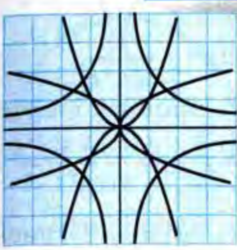
Основні поняття

Означення	Геометрична інтерпретація	Застосування
Синус числа t — ордината точки P_t. Косинус числа t — абсциса точки P_t. Тангенс числа t — відношення синуса числа t до його косинуса. Котангенс числа t — відношення косинуса числа t до його синуса.	 $\sin t = y$; $\cos t = x$ $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$	Тригонометричні функції застосовуються для розв'язування трикутників, дослідження обертального руху тощо.

Означення	Геометрична інтерпретація	Застосування
Лінія тангенсів — пряма, що проходить через точку (1; 0) перпендикулярно до осі абсцис, тобто пряма $x = 1$.		Геометрична інтерпретація тангенса
Лінія котангенсів — пряма, що проходить через точку (0; 1) перпендикулярно до осі ординат, тобто пряма $y = 1$.		Геометрична інтерпретація котангенса

Головні твердження

Формулювання	Геометрична інтерпретація
Ордината точки B_t перетину прямої OP_t, яка з'єднує центр тригонометричного кола з точкою P_t, з лінією тангенсів дорівнює tg t.	 $\text{tg}\, t = y_{B_t}$
Абсциса точки C_t перетину прямої OP_t, яка з'єднує центр тригонометричного кола з точкою P_t, з лінією котангенсів дорівнює ctg t.	 $\text{ctg}\, t = x_{C_t}$



§14. Основні співвідношення між тригонометричними функціями

У даному параграфі встановлюються співвідношення між тригонометричними функціями, які дозволяють за значенням однієї з функцій за певних умов знаходити значення всіх інших. Розглядаються також формули, які зводять обчислення значень тригонометричних функцій у довільній точці до обчислення їхніх значень для аргументу з проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Основна тригонометрична тотожність та наслідки з неї

Знайдемо зв'язок між синусом і косинусом того самого аргументу. Нехай $P_t(x(t); y(t))$ — точка тригонометричного кола, яка відповідає числу t (рис. 294). Тоді, за означенням синуса і косинуса, маємо такі рівності:

$$x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t.$$

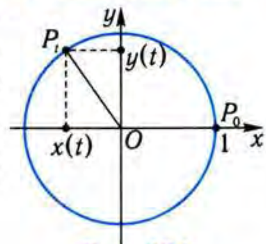


Рис. 294

Оскільки точка P_t належить тригонометричному колу, то її координати задовольняють рівняння кола $x^2 + y^2 = 1$. Отже, для довільного t справджується рівність:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Ця рівність називається ***основною тригонометричною тотожністю***.

До основних співвідношень між тригонометричними функціями одного аргументу відносять також рівності:

$$\text{tg}\,t = \frac{\sin t}{\cos t};\ \text{ctg}\,t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

З наведених вище рівностей випливають інші залежності між тригонометричними функціями одного і того самого аргументу:

$$\mathrm{tg}\,t\cdot\mathrm{ctg}\,t=1,\qquad 1+\mathrm{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t},\qquad 1+\mathrm{ctg}^2 t=\frac{1}{\sin^2 t}.$$

Перша з них є простим наслідком означень тангенса і котангенса. Доведемо другу. Маємо: $1+\mathrm{tg}^2 t=1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}=$ $=\frac{1}{\cos^2 t}$. Третє співвідношення виводиться аналогічно. Рекомендуємо зробити це самостійно.

! **Наведені співвідношення дозволяють за значенням однієї з тригонометричних функцій числа t обчислювати *квадрати* значень інших. Наприклад, якщо $\cos t=\frac{1}{3}$, то $\sin^2 t=1-\cos^2 t=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$. Для знаходження самих значень потрібна додаткова інформація, яка б надавала можливість встановлювати їхні знаки.**

У попередньому параграфі розглядались приклади, де доводилось за означеннями тригонометричних функцій визначати знаки їхніх значень. Узагальнимо ці міркування, з'ясувавши, при яких значеннях аргументу тригонометричні функції набувають додатних значень, а при яких — від'ємних.

Синус числа t — це ордината точки P_t (див. рис. 294). Додатними є ординати тих точок, які розміщені над віссю абсцис, тобто знаходяться у першій чи у другій чверті. Якщо точка P_t розташована під віссю абсцис, тобто в третій або у четвертій чверті, то її ордината є від'ємною (рис. 295).

Властивість 1. Синус набуває додатних значень у першій і другій чвертях, а від'ємних — у третій і четвертій.

Далі міркуємо аналогічно. Косинус числа t — це абсциса точки P_t. Додатними є абсциси тих точок, які розміщені правіше від осі ординат, тобто знаходяться у першій чи у четвертій чверті. Якщо точка P_t розташована лівіше від осі ординат, тобто в другій або у третій чверті, то її абсциса є від'ємною (рис. 296).

Знаки синуса

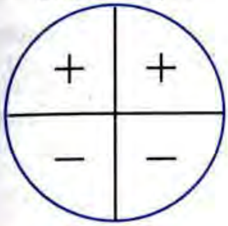


Рис. 295

Знаки косинуса

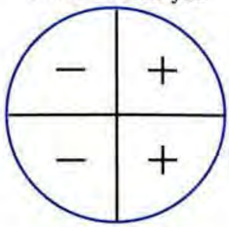


Рис. 296

Знаки тангенса і котангенса

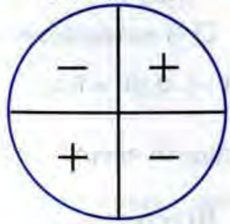


Рис. 297

Властивість 2. Косинус набуває додатних значень у першій і четвертій чвертях, а від'ємних — у другій і третій.

Згідно з означенням, $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$, $\operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$, тому $\operatorname{tg} t$ і $\operatorname{ctg} t$ набувають додатних значень, якщо $\sin t$ і $\cos t$ мають однакові знаки. Відповідно, $\operatorname{tg} t$ і $\operatorname{ctg} t$ набувають від'ємних значень, якщо $\sin t$ і $\cos t$ мають різні знаки (рис. 297).

Властивість 3. Тангенс і котангенс набувають додатних значень у першій і третій чвертях, а від'ємних — у другій і четвертій.

Приклад 1. Визначити знаки чисел: 1) $\cos 230°$; 2) $\sin\dfrac{7\pi}{9}$; 3) $\operatorname{tg}\dfrac{9\pi}{5}$.

☐ 1) Визначимо, в якій чверті знаходиться точка тригонометричного кола, яка визначає положення кута 230°. Маємо: $180° < 230° < 270°$. Тому зазначена точка лежить у третій чверті. Косинус у третій чверті набуває від'ємних значень. Тому $\cos 230° < 0$.

2) Визначимо спочатку, в якій чверті знаходиться точка тригонометричного кола, що відповідає числу $\dfrac{7\pi}{9}$. Оскільки $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{7\pi}{9} < \pi$, то числу $\dfrac{7\pi}{9}$ відповідає точка, яка знаходиться у другій чверті. Тому $\sin\dfrac{7\pi}{9} > 0$.

3) Оскільки $\dfrac{3\pi}{2} < \dfrac{9\pi}{5} < 2\pi$, то точка $P_{\frac{9\pi}{5}}$ розміщена у четвертій чверті і $\operatorname{tg}\dfrac{9\pi}{5} < 0$. ■

Відповідь. 1) $\cos 230° < 0$; 2) $\sin\dfrac{7\pi}{9} > 0$; 3) $\operatorname{tg}\dfrac{9\pi}{5} < 0$.

Приклад 2. Відомо, що $\cos t = -0{,}6$ і $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Знайти $\sin t$, $\operatorname{tg} t$.

□ З тотожності $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ знаходимо: $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - (-0{,}6)^2 = 0{,}64$. Оскільки $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, то точка P_t розміщена у другій чверті і $\sin t > 0$. Тому $\sin t = 0{,}8$; $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = -\frac{4}{3}$. ■

Відповідь. $0{,}8$; $-\frac{4}{3}$.

Приклад 3. Спростити вираз $\cos^2\alpha - \left(\operatorname{ctg}^2\alpha + 1\right)\sin^2\alpha$.

□ Застосовуючи послідовно рівність $1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}$ і основну тригонометричну тотожність, матимемо: $\cos^2\alpha - \left(\operatorname{ctg}^2\alpha + 1\right)\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$. ■

Відповідь. $-\sin^2\alpha$.

При перетворенні тригонометричних виразів, як і алгебраїчних, області їхнього визначення можуть змінюватись. Так, у прикладі 3 даний вираз визначений при всіх дійсних значеннях α, окрім $\alpha = \pi n$, $n \in Z$. Спрощений вираз визначений при всіх дійсних значеннях α. Щоб не ускладнювати запис, зазвичай домовляються, що рівність даного виразу і спрощеного, отриманого за допомогою перетворень, справджується для всіх значень змінних, при яких визначені обидва вирази.

Розглянемо складніші приклади на застосування основних тригонометричних співвідношень.

Приклад 4. Визначити знаки чисел: $\sin 2$; $\cos 3$; $\operatorname{tg} 4$; $\operatorname{ctg} 5$.

□ Відмітимо на тригонометричному колі точки P_2, P_3, P_4, P_5 (рис. 298). Враховуючи, що $\sin 2$ — це ордината точки P_2, дійдемо висновку, що $\sin 2 > 0$. Оскільки $\cos 3$ – це абсциса точки P_3, то $\cos 3 < 0$. Знаки $\operatorname{tg} 4$ і $\operatorname{ctg} 5$ визначимо, користуючись означеннями тангенса

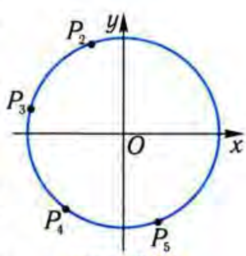


Рис. 298

і котангенса: $\operatorname{tg}4 = \dfrac{\sin 4}{\cos 4} > 0$, бо $\sin 4 < 0$, $\cos 4 < 0$, $\operatorname{ctg}5 = \dfrac{\cos 5}{\sin 5} < 0$, бо $\sin 5 < 0$, $\cos 4 > 0$. ■

Відповідь. $\sin 2 > 0$; $\cos 3 < 0$; $\operatorname{tg} 4 > 0$; $\operatorname{ctg} 5 < 0$.

Приклад 5. Довести, що

$$\sin^3\alpha(1-\operatorname{ctg}\alpha)-\cos^3\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)=\sin\alpha-\cos\alpha.$$

□ Скориставшись означеннями $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ та основною тригонометричною тотожністю, одержимо:

$$\sin^3\alpha(1-\operatorname{ctg}\alpha)-\cos^3\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)=\sin^3\alpha\left(1-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)-\cos^3\alpha\left(1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=$$

$$=\sin^3\alpha\left(\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)-\cos^3\alpha\left(\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=\sin^2\alpha\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)-$$

$$-\cos^2\alpha\left(\cos\alpha-\sin\alpha\right)=\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=\sin\alpha-\cos\alpha. \ ■$$

Зверніть увагу на те, що у прикладі 5 вирази, що стоять у лівій і правій частинах рівності, мають різні області визначення, але їхні значення на спільній частині областей визначення співпадають.

✓ Контрольні запитання

1°. Яке рівняння задовольняють координати всіх точок тригонометричного кола?

2°. Чи можуть синус і косинус одного й того самого аргументу дорівнювати відповідно: а) 0 і 0; б) 1 і 0; в) 1 і –1; г) 0,6 і 0,8; ґ) 0,5 і 0,5?

3. Чи правильно, що $\cos t = \dfrac{3}{5}$, якщо $\sin t = \dfrac{4}{5}$?

4. Чи можуть тангенс і котангенс одного й того самого аргументу дорівнювати відповідно: а°) 1 і 0; б°) 1 і 1; в°) 1 і –1; г) $\sqrt{3}$ і $\dfrac{1}{3}$; ґ) $2+\sqrt{3}$ і $2-\sqrt{3}$; д) $1+\sqrt{2}$ і $1-\sqrt{2}$?

5. Для яких точок P_t тригонометричного кола мають різні знаки: а) $\sin t$ і $\cos t$; б) $\sin t$ і $\operatorname{tg} t$?

6. Де розміщена точка P_t на тригонометричному колі, якщо:
а°) $\sin t > 0$; б°) $\operatorname{tg} t < 0$; в) $\cos 2t < 0$;
г) $\sin t \cos t < 0$; ґ) $|\sin t| = -\sin t$?

2. Формули зведення

Існують формули, які зводять обчислення значень тригонометричних функцій для довільного аргументу до обчислення їхніх значень на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ці формули називають ***формулами зведення.***

Формули зведення ґрунтуються на означеннях тригонометричних функцій і властивостях геометричних перетворень – поворотів. Розглянемо на тригонометричному колі точку P_t (рис. 299). Точку $P_{\pi+t}$ можна одержати з точки P_t за допомогою повороту на кут π. Тому точки P_t і $P_{\pi+t}$ симетричні відносно початку координат. Їхні координати — протилежні числа. Отже, мають місце наступні формули:

$$\cos(\pi+t)=-\cos t; \quad \sin(\pi+t)=-\sin t.$$

Точки P_t, $P_{\pi-t}$ симетричні відносно осі ординат (рис. 300). Вони мають однакові ординати і протилежні абсциси. Це випливає з того, що точки P_t і P_{-t} симетричні відносно осі абсцис, а точки P_{-t} і $P_{\pi-t}$ симетричні відносно початку координат. Тому справджуються наступні формули:

$$\cos(\pi-t)=-\cos t; \quad \sin(\pi-t)=\sin t.$$

Точки P_{-t} і $P_{2\pi-t}$ збігаються (2π — повний оберт!) (рис. 301), тому точки P_t і $P_{2\pi-t}$ симетричні відносно осі абсцис, у них однакові абсциси і протилежні ординати. Відповідні формули мають такий вигляд:

$$\cos(2\pi-t)=\cos t; \quad \sin(2\pi-t)=-\sin t.$$

Оскільки точки P_t і $P_{2\pi+t}$ збігаються, то справджуються наступні формули:

$$\cos(2\pi+t)=\cos t; \quad \sin(2\pi+t)=\sin t.$$

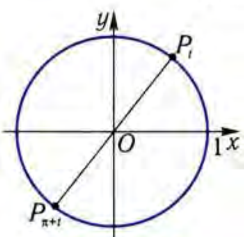


Рис. 299

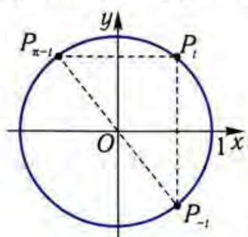


Рис. 300

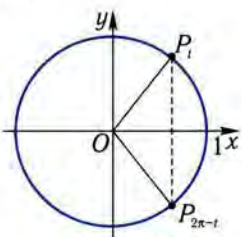


Рис. 301

Головною особливістю наведеної групи формул є те, що вони стосуються лише однієї тригонометричної функції. Існує ще одна група формул зведення для синуса і косинуса. Вона відрізняється тим, що в кожній формулі містяться обидві тригонометричні функції.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos t,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\sin t;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=-\cos t,\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=-\sin t;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)=-\cos t,\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)=\sin t.$$

Обґрунтуємо наведені формули пізніше.

Формули зведення для тангенса і котангенса випливають із означень цих функцій і відповідних формул для синуса і косинуса.

Наприклад, $\mathrm{tg}(\pi+t)=\dfrac{\sin(\pi+t)}{\cos(\pi+t)}=\dfrac{-\sin t}{-\cos t}=\mathrm{tg}t;$

$$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}=\frac{-\sin t}{\cos t}=-\mathrm{tg}t.$$

Узагальнено формули зведення подані у таблиці 29.

Таблиця 29

Аргумент / Функція	$\frac{\pi}{2}-t$	$\frac{\pi}{2}+t$	$\pi-t$	$\pi+t$	$\frac{3\pi}{2}-t$	$\frac{3\pi}{2}+t$	$2\pi-t$	$2\pi+t$
sin	cos t	cos t	sin t	–sin t	–cos t	–cos t	–sin t	**sin t**
cos	sin t	–sin t	–cos t	–cos t	–sin t	sin t	cos t	**cos t**
tg	ctg t	–ctg t	–tg t	tg t	ctg t	–ctg t	–tg t	**tg t**
ctg	tg t	–tg t	–ctg t	ctg t	tg t	–tg t	–ctg t	ctg t

Аналізуючи таблицю, можна сформулювати так зване мнемонічне правило, яке дозволяє краще запам'ятати формули зведення.

1) У формулі зведення функція не змінюється, якщо до аргументу додавати $\pm\pi$ або ж $\pm 2\pi$, і змінюється (синус на косинус, тангенс на котангенс, косинус на синус, котангенс на тангенс), якщо додавати числа $\pm\frac{\pi}{2}$ чи $\pm\frac{3\pi}{2}$.

2) Одержана функція у правій частині рівності береться з тим самим знаком, який має початкова функція, якщо вважати, що $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Приклад 6. Знайти $\cos(270° - \alpha)$.

□ Насамперед, помічаємо, що вираз містить кут 270° або $\frac{\pi}{2}$ рад. Тому функція змінюється, і у правій частині рівності має стояти $\sin\alpha$. Щоб визначити знак перед $\sin\alpha$, припускаємо, що кут α — гострий. Тоді точка $P_{270°-\alpha}$ лежить у третій чверті тригонометричного кола. Але косинус у третій чверті — від'ємний. Тому перед $\sin\alpha$ слід поставити знак «–». Отже, $\cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha$. ■

Відповідь. $-\sin\alpha$.

Приклад 7. Обчислити: 1) $\sin\frac{11\pi}{6}$; 2) $\cos\frac{5\pi}{4}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}$; 4) $\sin 1020°$.

□ Для розв'язання перших трьох завдань подамо число, яке стоїть під знаком тригонометричної функції, у вигляді суми або різниці чисел π або 2π і деякого числа, яке менше від $\frac{\pi}{2}$, і застосуємо відповідну формулу зведення. Необхідні пояснення наведені при розв'язанні прикладу 6:

1) $\sin\frac{11\pi}{6} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$;

2) $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

В останньому завданні виділимо з наведеного кута обертання повні оберти, міри яких кратні 360°, їх можна відкинути. Далі застосовуємо формулу зведення.

4) $\sin 1020° = \sin(2 \cdot 360° + 300°) = \sin 300° = \sin(360° - 60°) =$
$= -\sin 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ■

Відповідь. 1) $-\dfrac{1}{2}$; 2) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Тепер обґрунтуємо формули, в яких до аргументу додаються $\dfrac{\pi}{2}$ або $\dfrac{3\pi}{2}$.

Візьмемо дві точки P_0 і $P_{\frac{\pi}{2}}$ (рис. 302). Вони симетричні одна одній відносно бісектриси першого і третього координатних кутів. Щоб побудувати точку P_t, потрібно рухатись по колу від точки P_0 на відстань $|t|$ у певному напрямі. Щоб побудувати точку $P_{\frac{\pi}{2}-t}$, треба на таку саму відстань рухатись по колу від точки $P_{\frac{\pi}{2}}$, але у протилежному напрямі. При цьому точки P_t і $P_{\frac{\pi}{2}-t}$ при будь-якому t залишатимуться симетричними відносно зазначеної прямої ($y = x$).

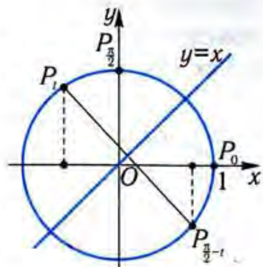


Рис. 302

Звідси випливає, що ордината першої точки збігається з абсцисою другої, а її абсциса — з ординатою другої, тобто

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t;\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t.$$

Усі інші формули обґрунтовуються за допомогою цих і раніше отриманих формул:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\cos\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=-\sin t;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=\sin\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=-\cos t;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=\cos\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=-\sin t.$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)=\sin\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\cos t;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)=\cos\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\sin t.$$

Для тангенса і котангенса кількість формул зведення можна зменшити. Справа в тім, що тангенс і котангенс довільного аргументу можна звести до цих функцій аргументу з проміжку $[0;\pi]$. Справді, кожній точці на лінії тангенсів чи лінії котангенсів відповідає безліч чисел $t+\pi n$, $n\in Z$, тому тангенс і котангенс для $t+\pi n$ при всіх $n\in Z$ набувають того самого значення:

$$\operatorname{tg}(t+\pi n)=\operatorname{tg} t,\ \operatorname{ctg}(t+\pi n)=\operatorname{ctg} t.$$

Послуговуючись цим висновком, для переходу до тангенса чи котангенса гострого кута достатньо знати формули тангенса і котангенса для $\frac{\pi}{2}\pm t, \pi-t\ \ (90^\circ\pm t, 180^\circ-t)$.

Приклад 8. Обчислити: 1) $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{6}$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{4}$.

☐ Виділимо з аргументу цілу кількість значень π.

1) $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(2\pi+\frac{5\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{4}=\operatorname{ctg}\left(2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{ctg}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=-1$. ■

Відповідь. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; -1.

✓ Контрольні запитання

1. Як розміщені на тригонометричному колі одна відносно другої точки: а°) $P_{\pi+t}$ і P_t; б°) $P_{\pi-t}$ і P_t; в) P_t і $P_{\frac{\pi}{2}-t}$; г) P_t і $P_{\frac{3\pi}{2}-t}$?
2°. Яка точка симетрична точці P_t тригонометричного кола відносно: а) початку координат; б) осі ординат; в) осі абсцис?
3. Які координати має точка тригонометричного кола, симетрична точці $P\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ відносно: а°) початку координат; б°) осі ординат; в°) осі абсцис; г) прямої $y=x$; ґ) прямої $y=-x$?

4. Як можна представити кут 112°, щоб скориставшись формулами зведення обчислити cos 112°?
5. Чому дорівнює вираз:

а) $\sin(\pi+1)+\sin 1$; б) $\sin(\pi+1)+\sin(\pi-1)$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+1\right)+\sin 1$?

6. Чи правильним є твердження, що косинус суми двох кутів трикутника дорівнює косинусу третього кута?
7. Чому дорівнює тангенс тупого кута паралелограма, якщо тангенс гострого кута дорівнює $\frac{2}{3}$?

Задачі

259. Визначте знак виразу:

1°) $\sin 65°$; 2°) $\operatorname{tg} 147° \sin 269°$; 3°) $\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{9\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}$;

4) $\sin(-2)\cdot\cos 2\cdot\operatorname{tg}(-3)$; 5*) $\sin\frac{3\pi}{5}\operatorname{tg}\frac{7\pi}{9}\cos t$.

260. Нехай $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Визначте знак виразу:

1°) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 2°) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 3) $\sin(2\alpha-\pi)$;

4) $\operatorname{tg}(\alpha-\pi)$; 5) $\cos(\pi-\alpha)$; 6) $\operatorname{ctg}\left(2\pi-\frac{\alpha}{2}\right)$.

261. Обчисліть значення кожної з тригонометричних функцій, якщо:

1°) $\sin t=-0{,}8$; $\frac{3\pi}{2}<t<2\pi$; 2°) $\cos t=-\frac{12}{13}$; $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$;

3) $\operatorname{tg} t=-2{,}4$; $\frac{\pi}{2}<t<\pi$; 4) $\operatorname{ctg} t=3$; $0<t<\frac{\pi}{2}$;

5°) $\sin t=0{,}6$; $\frac{\pi}{2}<t<\frac{3\pi}{2}$; 6°) $\cos t=-\frac{5}{13}$; $\pi<t<2\pi$.

262. Знайдіть координати точки P_t на тригонометричному колі, якщо:

1) $\operatorname{ctg} t=-\frac{5}{12}$; 2) $\operatorname{tg} t=-\frac{4}{3}$;

3*) $\operatorname{ctg} t=2+\sqrt{3}$; 4*) $\operatorname{tg} t=1+\sqrt{2}$.

263. Обчисліть:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\cos\alpha}$, якщо $\sin\alpha = -\dfrac{2}{3}$ і $\operatorname{ctg}\alpha > 0$;

2) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\sin\alpha}$, якщо $\cos\alpha = -\dfrac{3}{4}$ і $\operatorname{ctg}\alpha < 0$.

264. Спростіть вираз:

1°) $\dfrac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$; 2) $\dfrac{\cos^2\alpha-1}{1-\sin^2\alpha}$;

3°) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha$; 4°) $\cos\alpha-\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

5°) $\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+\sin^2\alpha$; 6°) $\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+\sin^2\alpha$;

7) $1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; 8) $1+\operatorname{tg}^2\alpha+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

9) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; 10) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

11) $\sin^2\alpha-\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$; 12) $\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$;

13) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$;

14) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)$;

15*) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$; 16*) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$.

265. Доведіть тотожність:

1°) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$;

2) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$;

3°) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=1-2\sin^2\alpha$; 4°) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=1-2\cos^2\alpha$;

5) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$; 6) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

7) $\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

8) $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

266°. Обчисліть значення тригонометричних функцій для наступних кутів:

1) 120°; 2) 135°; 3) 150°; 4) 210°; 5) 225°;
6) 240°; 7) 300°; 8) 315°; 9) 330°; 10) 390°.

267°. Користуючись формулами зведення, обчисліть:

1) $\sin\frac{19\pi}{6}$; 2) $\cos\frac{11\pi}{3}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{4}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{31\pi}{6}$;

5) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 6) $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; 7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

268°. Обчисліть значення виразу:

1) $\cos 990° - \sin 780° - \operatorname{ctg} 945°$;

2) $\operatorname{tg} 1080° - \sin 855° + \cos 1305°$;

3) $3\cos 1860° + \sin(-1920°) + \cos(-630°)$;

4) $\cos 2850° - \cos(-765°) + \operatorname{tg} 1035°$.

269. Зведіть до тригонометричних функцій додатного аргументу, меншого від π:

1) $\sin\frac{28\pi}{9}$; 2) $\cos\frac{35\pi}{9}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{35\pi}{12}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{18\pi}{5}$.

270. Зведіть до значення тригонометричної функції для числа з відрізка $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$:

1) $\sin\frac{4\pi}{3}$; 2) $\cos\frac{7\pi}{4}$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$.

271. Обчисліть:

1) $(\sin 10° + \sin 20° + \sin 30°) - (\cos 60° + \cos 70° + \cos 80°)$;

2*) $\operatorname{ctg} 31° \cdot \operatorname{ctg} 32° \cdot \operatorname{ctg} 33° \cdot \ldots \cdot \operatorname{ctg} 57° \cdot \operatorname{ctg} 58° \cdot \operatorname{ctg} 59°$.

272. Обчисліть суму:

1) $\sin 0° + \sin 1° + \sin 2° + \ldots + \sin 359° + \sin 360°$;

2) $\operatorname{tg} 20° + \operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg} 60° + \ldots + \operatorname{tg} 160° + \operatorname{tg} 180°$.

273. Спростіть вираз:

1) $\left(\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+\left(\cos(2\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2$;

2) $\frac{\sin\alpha}{\sin(\pi+\alpha)}-\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}+\frac{\cos\alpha}{\cos(\pi-\alpha)}$;

3) $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}$;

4) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)} \cdot \dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$.

274. Доведіть тотожність:

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=0$; 2) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

275. Косинус одного зі суміжних кутів дорівнює $-\dfrac{12}{13}$. Знайдіть синус другого суміжного кута.

276. Косинус одного з кутів паралелограма дорівнює $-\dfrac{5}{13}$. Знайдіть синус другого з його кутів.

277. Сума косинусів гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює m. Знайдіть:

1) суму квадратів синусів цих кутів;

2*) добуток синусів цих кутів.

Вправи для повторення

278. Виберіть серед кутів:

1) 205°; 335°; 385°; 695°; 745°; –25°; –205°; –335° такі, синус яких дорівнює sin 25°;

2) $\dfrac{\pi}{5}; \dfrac{4\pi}{5}; \dfrac{6\pi}{5}; \dfrac{11\pi}{5}; \dfrac{21\pi}{5}; -\dfrac{4\pi}{5}; -\dfrac{9\pi}{5}; -\dfrac{19\pi}{5}$ такі, косинус яких дорівнює $\cos\dfrac{\pi}{5}$.

279. На рис. 303 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині усіх дійсних чисел. Яким буде графік функції:

1) $y = f(x - 1)$; 2) $y = f(x + 1)$; 3) $y = f(x - 2)$?

280. Дано графіки функцій, визначених на відрізку [–1; 0] (рис. 304). Добудуйте кожний з них (якщо це можливо) до графіка: 1) парної функції; 2) непарної функції.

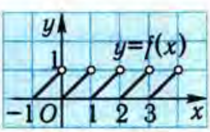


Рис. 303

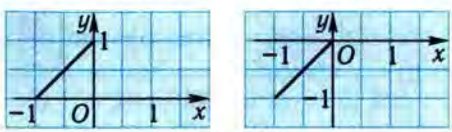
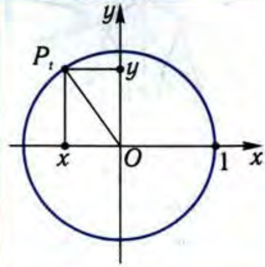
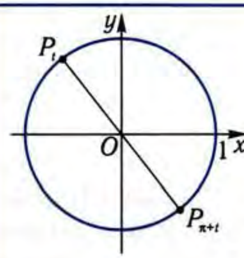
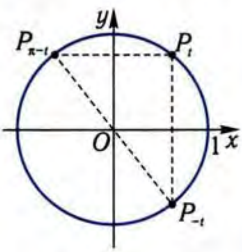


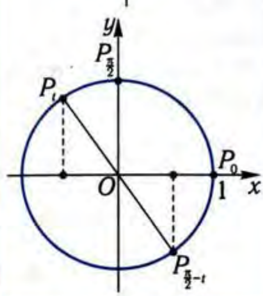
Рис. 304

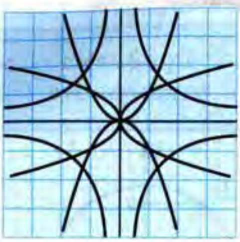
Підсумок

Головні твердження

<table>
<tr><th>Назва твердження або словесне формулювання</th><th>Зміст твердження</th><th>Графічна ілюстрація</th></tr>
<tr><td>Основна тригонометрична тотожність і наслідки з неї</td><td>$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$,
$1+\mathrm{tg}^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$,
$1+\mathrm{ctg}^2 t = \dfrac{1}{\sin^2 t}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Функція не змінюється, якщо до аргументу t додати $\pm\pi$ або ж $\pm 2\pi$, і змінюється (синус на косинус, тангенс на котангенс, косинус на синус, котангенс на тангенс), якщо додати числа $\pm\dfrac{\pi}{2}$ чи $\pm\dfrac{3\pi}{2}$. Знак у правій частині рівності збігається зі знаком у лівій частині, якщо t задовольняє умову: $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$.</td><td>$\sin(\pi+t) = -\sin t$
$\cos(\pi+t) = -\cos t$
$\sin(\pi-t) = \sin t$
$\cos(\pi-t) = -\cos t$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right) = \cos t$;
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right) = \sin t$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right) = \cos t$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right) = -\sin t$
$\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-t\right) = -\cos t$
$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-t\right) = -\sin t$
$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+t\right) = \sin t$
$\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+t\right) = -\cos t$</td><td>




</td></tr>
</table>



§15. Властивості і графіки тригонометричних функцій

У цьому параграфі буде розглянуто властивості тригонометричних функцій, побудовано їхні графіки. Розглядатиметься специфічна властивість цих функцій — періодичність. Періодичні функції описують різні ситуації (астрономічні явища, життєдіяльність організму тощо), які періодично повторюються. Розглядаються гармонічні коливання, які описуються періодичними функціями.

1. Періодичні функції

При введенні тригонометричних функцій аргумент позначався буквою t, оскільки букви x і y використовувались для позначення координат точки P_t. Тепер повернемось до звичних позначень: x — незалежна змінна, y — залежна змінна, тобто $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$.

Оскільки числам x, $x \pm 2\pi$ на тригонометричному колі відповідає одна й та сама точка P_x, то мають місце рівності:

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x .$$

Цю властивість функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ називають ***періодичністю.*** Вона полягає у тому, що значення функції повторюються через рівні проміжки зміни аргументу. Точний зміст поняття періодичності функції міститься у наступному означенні.

Функція $y = f(x)$ називається періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, що область визначення функції разом з кожною точкою x містить точки $x \pm T$ і при цьому виконується рівність $f(x \pm T) = f(x)$. Число T називається періодом функції.

Звертаємо увагу на те, що рівність $f(x \pm T) = f(x)$ має справджуватись для всіх значень x із області визначення функції. Для окремих функцій можна вказати числа, додавання яких до одного значення аргументу не змінює значення функції, водночас додавання до іншого значення аргументу — змінює. Такі числа не є періодами функції.

Наприклад, $\sin 0 = \sin(0 + \pi) = 0$, але вже $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$, в той час коли $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Отже, число π не є періодом функції $y = \sin x$.

Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є періодичними з періодом 2π. Цей факт використовувався у § 14 при обчисленні значень синуса і косинуса.

Періодом тангенса і котангенса є число π, що випливає з формул зведення: $\mathrm{tg}(t + \pi) = \mathrm{tg}(t - \pi) = \mathrm{tg}\, t$.

Якщо число T є періодом функції $y = f(x)$, то числа $2T$, $3T$, ... і взагалі nT, $n \in Z$, $n \neq 0$, також є її періодами. Справді, наприклад, $f(x + 2T) = f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x)$. Звідси випливає, що періодами функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є числа 4π, 6π, ... , а періодами функцій $y = \mathrm{tg}\, x$ і $y = \mathrm{ctg}\, x$ є числа 2π, 3π, 4π ... .

На графіку функції її періодичність з періодом T відображається наступним чином.

Якщо графік періодичної функції з періодом T паралельно перенести на T одиниць уздовж осі абсцис у додатному чи від'ємному напрямах, то він перейде сам у себе.

На рис. 305 зображено графік періодичної функції з періодом l.

Для побудови графіка періодичної функції з періодом T достатньо побудувати його на відрізку завдовжки T (рис. 306), а потім

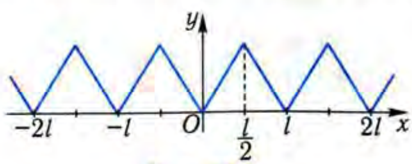


Рис. 305

Рис. 306

побудований графік паралельно перенести вздовж осі абсцис в обох напрямах на відстані T, $2T$, $3T$ і т. д. (рис. 307).

Стала функція, що визначена на всій числовій осі, є періодичною. Її період — будь-яке число, відмінне від нуля. Справді, для сталої функції $y = c$ справджується очевидне співвідношення: $y(x + T) = c = y(x)$ для будь-якого дійсного x при будь-якому $T \neq 0$ (рис. 308).

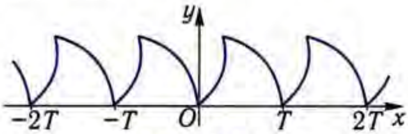


Рис. 307

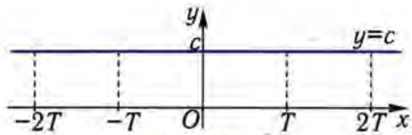


Рис. 308

Періодичними функціями описуються різні фізичні процеси: малі коливання маятника, обертання планет навколо Сонця, сила змінного струму тощо. Найпростішим приладом для ілюстрації періодичних процесів є годинник. Положення кінців стрілок повторюються через рівні проміжки часу. Для секундної стрілки цей проміжок складає 60 с, для хвилинної — 60 хв, для годинної — 12 год.

Приклад 1. Нехай функція $y = f(x)$ є періодичною з періодом 3 і $f(1) = 2$. Чому дорівнює $f(-8)$?

□ По-перше, зазначимо, що функція $y = f(x)$ визначена при $x = -8$, бо, за означенням періодичної функції, область визначення даної функції разом з точкою $x = 1$ містить точки: $1 - 3 = -2$, $-2 - 3 = -5$, $-5 - 3 = -8$. По-друге, $f(-8) = f(-8 + 3) = f(-5) = f(-5 + 3) = f(-2) = f(-2 + 3) = f(1) = 2$. ■

Відповідь. 2.

Приклад 2. Довести, що періодом функції $y = \sin 2x$ є число π.

□ Функція $y = \sin 2x$ визначена на всій числовій осі. Тому її область визначення разом з кожною точкою x містить точки $x \pm \pi$. Підставимо замість x у вираз для цієї функції $x + \pi$: $\sin\left(2\left(x+\pi\right)\right) = \sin\left(2x + 2\pi\right) = \sin 2x$. Той самий результат одержимо, якщо замість x у вираз для цієї функції підставити $x - \pi$. За означенням, число π є періодом функції $y = \sin 2x$. ■

З того, що кожній точці на тригонометричному колі відповідає безліч чисел, які відрізняються одне від одного на $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, випливає, що тригонометричні функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ для чисел $x + 2\pi k$ при всіх $k \in \boldsymbol{Z}$ набувають того самого значення: $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$, тобто періодами функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є числа $2\pi k$, $k \neq 0$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Усі ці періоди кратні 2π. Природно виникає запитання: «Чи існують інші додатні періоди цих функцій, менші від 2π?» Відповідь на нього дає наступне твердження.

Теорема 1. **Найменший додатний період функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ дорівнює 2π.**

□ Покажемо, що інших періодів, окрім чисел $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \neq 0$, ці функції не можуть мати. Справді, якщо T — період функції $y = \sin x$, то $\sin(x+T) = \sin x$ для будь-якого x, зокрема для $x = 0$, тобто $\sin T = \sin 0 = 0$. Але $\sin T$ перетворюється на нуль при $T = 0$; $T = \pi$; $T = 2\pi$ і, взагалі, при $T = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, і тільки при цих значеннях. Число π не є періодом розглядуваної функції. Справді, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$, тобто існує значення x із області визначення функції, таке, що $\sin(x+\pi) \neq \sin x$. Отже, найменшим додатним періодом функції $y = \sin x$ є число 2π.

Доведення того, що 2π — найменший додатний період косинуса, аналогічне. ■

Подібне твердження справджується для функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$.

Теорема 2. **Найменший додатний період функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ дорівнює π.**

□ Із формул зведення випливає, що числа πk, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \neq 0$, є періодами функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$. Оскільки $\operatorname{tg} x$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ перетворюється на нуль при $x = 0$ або при $x = \pi$ і тільки в цих точках, то не існує додатного числа, меншого від π, яке б могло бути періодом тангенса. Отже, найменшим додатним періодом функції $y = \operatorname{tg} x$ є число π. Доведення того, що π — найменший додатний період котангенса, аналогічне. Рекомендуємо провести його самостійно. ■

Найменший додатний період періодичної функції називають ***основним періодом*** цієї функції. Всі інші її періоди кратні основному періоду. Для функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ основний період дорівнює 2π, а для функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ основний період дорівнює π. Найпростішим прикладом періодичної функції, яка не має основного періоду, є стала функція, визначена на всій числовій осі.

Приклад 3. Знайти основний період функції $y = \sin 3x$.

☐ Областю визначення даної функції є числова вісь. Числа $\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$, — періоди для функції $y = \sin 3x$:

$$\sin 3\left(x + \frac{2\pi n}{3}\right) = \sin(3x + 2\pi n) = \sin 3x\,.$$

Якщо T — довільний додатний період для $\sin 3x$, то $\sin 3(x + T) = \sin 3x$ при кожному x, оскільки число $3T$ теж є періодом даної функції. Беручи $x = \frac{\pi}{6}$, матимемо: $\sin 3\left(\frac{\pi}{6} + T\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, або $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3T\right) = 1$. Проте синус дорівнює одиниці лише при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Тому $\frac{\pi}{2} + 3T = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ 3T = 2\pi n,\ T = \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$.

Серед чисел $\frac{2\pi n}{3}$ найменшим додатним числом є число $\frac{2\pi}{3}$, тобто основний період функції $\sin 3x$ дорівнює $\frac{2\pi}{3}$. ■

Відповідь. $\frac{2\pi}{3}$.

Аналіз прикладу 3 підказує наступну властивість періодичних функцій і містить ідею її доведення.

Теорема 3. **Якщо функція *f* є періодичною з основним періодом *T*, то функція $y = Af(kx + b) + l$, де A, $k \neq 0$, b, l — деякі числа, також є періодичною, причому її основний період дорівнює $\frac{T}{|k|}$.**

Результат розв'язання прикладу 3 узгоджується зі сформульованою властивістю: основний період функції $y = \sin 3x$ дорівнює $\frac{2\pi}{3}$. Із цієї властивості випливає, що основні періоди функцій $y = \sin 4x$, $y = \cos\frac{x}{2}$, $y = \text{tg } 2x$ відповідно дорівнюють $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, $2\pi : \frac{1}{2} = 4\pi$, $\frac{\pi}{2}$.

✓ Контрольні запитання

1°. Чи є правильним твердження: якщо періодична функція в якійсь точці набуває значення 1, то цього значення вона набуває у безлічі точок?

2°. Чи є число 3π періодом функції $y = \sin x$?

3°. Чи є число 5π періодом функції $y = \text{tg } x$?

4. Який основний період має функція: а) $\sin 5x$; б) $\cos\frac{x}{3}$; в) $\sin \pi x$?

5. Чому дорівнює $f(-9)$, якщо функція $y = f(x)$ є періодичною з періодом 5 і $f(1) = 0$?

6*. Чи є функція $y = \cos\sqrt{x}$ періодичною?

7. Чи може бути періодичною функція, яка зростає на всій області визначення?

2. Властивості та графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$

Розглянемо найпростіші властивості функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$, користуючись означеннями синуса і косинуса, і побудуємо їхні графіки.

Властивість 1. **Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ визначені на всій числовій осі.**

□ Справді, кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність точку тригонометричного кола. Абсциса цієї точки є косинусом числа x, а ордината – синусом числа x. ■

Властивість 2. **Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ — періодичні з найменшим додатним періодом 2π.**

Цю властивість доведено у попередньому пункті.

Властивість 3. **Нулями функції $y = \sin x$ є числа πn, $n \in Z$, а нулями функції $y = \cos x$ — числа $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.**

☐ Нулі функції $y = \sin x$ – це числа, яким відповідають точки на тригонометричному колі з ординатою 0, а саме: ..., -3π, -2π, $-\pi$, 0, π, 2π, 3π, ... і взагалі числа πn, $n \in Z$. Аналогічно нулі функції $y = \cos x$ — це числа, яким відповідають точки на тригонометричному колі з абсцисою 0, а саме: ..., $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2},...$ і взагалі числа $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. ■

Властивість 4. **Функція $y = \sin x$ — непарна, а функція $y = \cos x$ — парна, тобто для кожного x**

$$\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x.$$

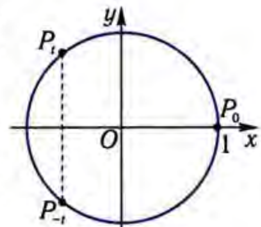


Рис. 309

☐ За побудовою, точки P_t і P_{-t} симетричні відносно осі абсцис (рис. 309). Їхні абсциси збігаються, а ординати протилежні. Тому при $t = x$:

$$\sin(-x) = -\sin x; \quad \cos(-x) = \cos x. \ ■$$

Властивість 5. **Функція $y = \sin x$ додатна на інтервалі $(0; \pi)$ і від'ємна на інтервалі $(\pi; 2\pi)$; функція $y = \cos x$ додатна на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і від'ємна на інтервалі $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.**

Цю властивість обґрунтовано у § 14.

Властивість 6. **Функція $y = \sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ зростає, а на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ спадає. Функція $y = \cos x$ спадає на проміжку $[0; \pi]$ і зростає на проміжку $[\pi; 2\pi]$.**

☐ Ця властивість випливає з геометричного змісту синуса і косинуса. Якщо t зростає від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то ордината точки P_t зростає від -1 до 1 (рис. 310). Якщо ж t зростає від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, то ордината точки P_t спадає від 1 до -1 (див. рис. 310). Якщо t зростає від 0 до π, то

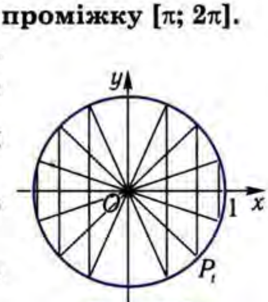


Рис. 310

абсциса точки P_t спадає від 1 до −1. Якщо ж t зростає від π до 2π, абсциса точки P_t зростає від −1 до 1 (див. рис. 310). ■

Властивість 7. **Множиною значень функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є відрізок [−1; 1].**

□ За означенням синуса, $|\sin x| \le 1$. Для довільного числа a з проміжку [−1; 1] існує щонайменше одна точка тригонометричного кола, ордината якої дорівнює a. Це означає, що функція $y = \sin x$ набуває всіх значень з проміжку [−1; 1]. Аналогічно обґрунтовується ця властивість для функції $y = \cos x$. ■

Властивість 8. **Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ неперервні на всій числовій осі.**

□ Справді, при неперервній зміні значення x точка P_x неперервно переміщується по тригонометричному колу, а тому її координати $\cos x$ і $\sin x$ змінюються неперервно. ■

Побудуємо графік функції $y = \sin x$ з використанням розглянутих властивостей синуса. Оскільки ця функція періодична з періодом 2π, то достатньо побудувати графік на відрізку $[0; 2\pi]$, довжина якого дорівнює періоду синуса.

Спочатку побудуємо графік на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. На цьому відрізку функція $y = \sin x$ зростає, $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Для знаходження декількох точок графіка розіб'ємо відрізок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, наприклад, на 4 рівні частини. Візьмемо одиничне коло з центром у довільній точці осі абсцис (для зручності змістимо коло вліво (рис. 311)). Для побудови точки з абсцисою t знайдемо на колі точку P_t і через неї проведемо пряму, паралельну осі абсцис, до пере-

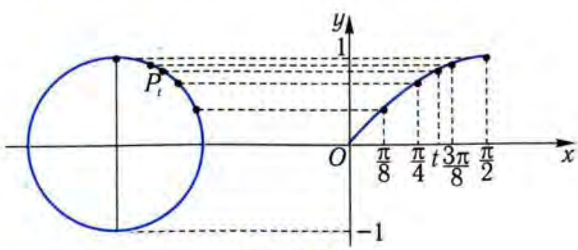


Рис. 311

тину з прямою $x = t$. Точка перетину належатиме графіку функції $y = \sin x$, оскільки її ордината збігається з ординатою точки P_t і дорівнює $\sin t$.

Побудувавши таким чином усі 4 точки графіка і сполучивши їх, враховуючи зростання і неперервність функції, неперервною кривою, одержимо ескіз графіка функції на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (див. рис. 311).

Оскільки, за формулами зведення, $\sin(\pi - t) = \sin t$, тобто ординати точок t і $\pi - t$, симетричних відносно прямої $x = \frac{\pi}{2}$, дорівнюють одна одній, то на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ точки графіка функції $y = \sin x$ розміщуються симетрично відносно точок графіка з проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ відносно прямої $x = \frac{\pi}{2}$ (рис. 312).

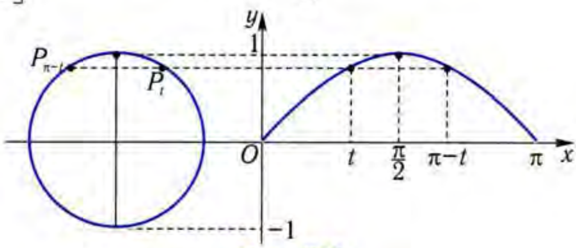


Рис. 312

Оскільки, за формулами зведення, $\sin(2\pi - t) = -\sin t$, тобто ординати точок t і $2\pi - t$ протилежні одна одній, то на проміжку $[\pi; 2\pi]$ точки графіка функції $y = \sin x$ розміщуються симетрично до точок графіка з проміжку $[0; \pi]$ відносно точки $(\pi; 0)$ (рис. 313).

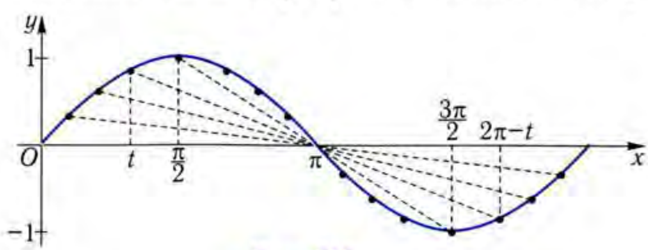


Рис. 313

Користуючись правилом побудови графіка періодичної функції, за допомогою паралельних перенесень продовжимо графік на 2π, 4π, 6π, ... вправо і вліво вздовж осі абсцис (рис. 314). Одержимо графік функції $y = \sin x$. Він називається ***синусоїдою.***

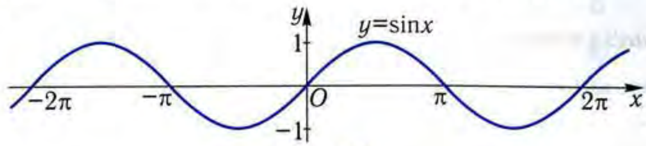


Рис. 314

Оскільки $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, то графік функції $y = \cos x$ можна побудувати паралельним перенесенням графіка функції $y = \sin x$ у від'ємному напрямі вздовж осі x на відстань $\frac{\pi}{2}$ (рис. 315).

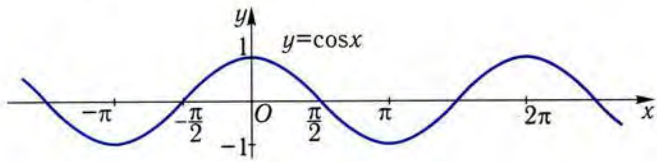


Рис. 315

Приклад 4. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \cos x$ на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

☐ Побудуємо графік функції $y = \cos x$, відмітивши на осі абсцис точки з абсцисами $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{3\pi}{2}$ (рис. 316). Знайдемо на проміжку

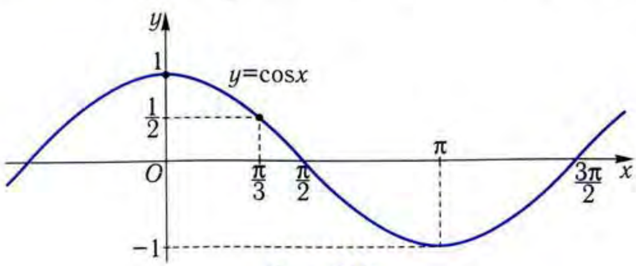


Рис. 316

$\left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]$ найвищу і найнижчу точки графіка. Це відповідно точки з абсцисами $\frac{\pi}{3}$ і π. Ординати цих точок $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ і $y(\pi) = \cos\pi = -1$ є найбільшим і найменшим значеннями функції на даному проміжку, які вона набуває відповідно у точках $\frac{\pi}{3}$ і π. ■

Відповідь. $\frac{1}{2}$; -1.

Властивості та графіки синуса і косинуса дозволяють розв'язувати різноманітні завдання, пов'язані з цими функціями, а саме: «читати» графіки, порівнювати значення цих функцій, розв'язувати рівняння, нерівності тощо.

Приклад 5. Розв'язати рівняння: $\sin x = x - \pi$.

□ В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = x - \pi$, $y = \sin x$. Вони перетинаються в одній точці (рис. 317), як видно з графіків. Абсциса π точки перетину є розв'язком даного рівняння. ■

Відповідь. $x = \pi$.

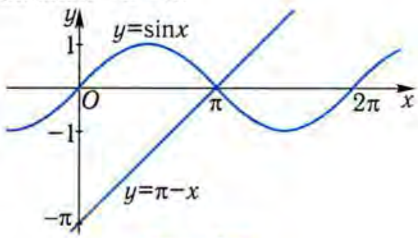


Рис. 317

Приклад 6. Порівняти числа: 1) sin 2 і sin 3; 2) cos 5 і cos 6; 3) $\cos\frac{\pi}{7}$ і $\sin\frac{3\pi}{8}$.

□ 1) Оскільки $\frac{\pi}{2} < 2 < 3 < \pi$, а на відрізку $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ функція $y = \sin x$ спадає, то $\sin 2 > \sin 3$.

2) Оскільки $\frac{3\pi}{2} < 5 < 6 < 2\pi$, а на відрізку $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ функція $y = \cos x$ зростає, то $\cos 5 < \cos 6$.

3) За формулою зведення, $\sin\frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$. Числа $\frac{\pi}{8}$ і $\frac{\pi}{7}$ належать відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, на якому функція $y = \cos x$ спадає. Оскільки $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{7}$, то $\cos\frac{\pi}{8} > \cos\frac{\pi}{7}$, тобто $\sin\frac{3\pi}{8} > \cos\frac{\pi}{7}$. ■

Відповідь. 1) $\sin 2 > \sin 3$; 2) $\cos 5 < \cos 6$; 3) $\sin\frac{3\pi}{8} > \cos\frac{\pi}{7}$.

Застосуємо до тригонометричних функцій перетворення графіків функцій, які розглядались вище, а саме: паралельне перенесення графіка вздовж координатних осей, стиск і розтяг графіка, симетричне відображення відносно координатних осей.

Приклад 7. Побудувати графіки функцій: 1) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 2\sin x$; 3) $y = \sin 3x$.

□ 1) Графік функції $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ можна одержати з графіка $y = \sin x$ паралельним перенесенням уздовж осі x на $\frac{\pi}{4}$ вліво (рис. 318).

2) Графік функції $y = 2\sin x$ побудуємо із графіка $y = \sin x$ розтягом його від осі абсцис удвічі (див. рис. 318).

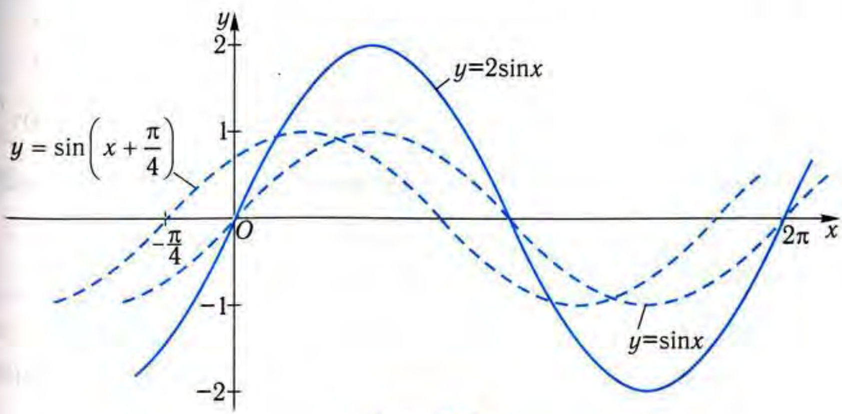


Рис. 318

3) Графік функції $y = \sin 3x$ є результатом стиску графіка $y = \sin x$ до осі ординат утричі (рис. 319). ■

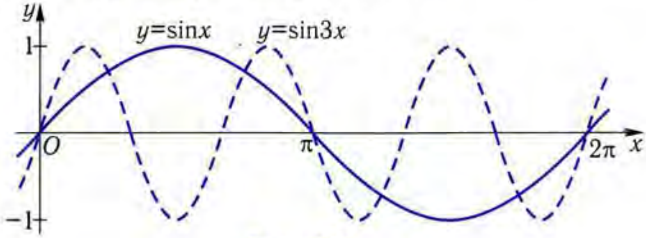


Рис. 319

✓ Контрольні запитання

1°. Чи має зміст запис: sin 2011?

2°. Чи може синус числа x дорівнювати: а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{6}{7}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{6}$?

3°. Чи є парними такі функції:
а) $y = -\cos x$; б) $y = \sin^2 t$; в) $y = \cos^3 t$?

4°. Яке з чисел: cos 1°, cos 2°, cos 3°, ..., cos 100° є найбільшим?

5. За допомогою яких перетворень з графіка функції $y = \sin x$ можна одержати графік функції:
а) $y = \sin(x + 3)$; б) $y = \sin 3x$; в) $y = 3\sin x$; г) $y = \sin x + 3$?

6. Графік якої функції одержимо з графіка функції $y = \cos x$:
а) паралельним перенесенням на 2 одиниці у додатному напрямі вздовж осі абсцис;
б) паралельним перенесенням на 2 одиниці у від'ємному напрямі вздовж осі ординат;
в) стиском до осі абсцис удвічі;
г) розтягом від осі абсцис удвічі;
ґ) симетричним відображенням відносно початку координат;
д) симетричним відображенням відносно осі ординат?

7. Якою є область визначення і множина значень функції:
а) $y = \sin(x - 1)$; б) $y = \cos x - 1$; в) $y = \cos 2x$;
г) $y = 3\sin x$; ґ) $y = \cos(-x)$; д) $y = -\sin x$?

8. Що більше:
а) $\sin\frac{\pi}{6}$ чи $\sin\frac{\pi}{8}$; б) cos 40° чи cos 75°?

9. Зростає чи спадає функція $y = \cos x$ на відрізку:
а) $[\pi; 2\pi]$; б) $[0; \pi]$; в) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$; г) $[-2; -1]$?

10*. Чому дорівнюють найбільше і найменше значення функції $y = \sin x$ на проміжку:

а) $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$; б) $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$?

3. Властивості та графіки функцій $y = \text{tg}\, x$ і $y = \text{ctg}\, x$

Розглянемо найпростіші властивості функцій $y = \text{tg}\, x$ і $y = \text{ctg}\, x$, користуючись їхніми означеннями, і побудуємо їхні графіки.

Властивість 1. Функція $y = \text{tg}\, x$ визначена при всіх дійсних значеннях x, крім $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$, а функція $y = \text{ctg}\, x$ визначена при всіх дійсних значеннях x, крім $x = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

□ Справді, функція $y = \text{tg}x$ визначена при всіх значеннях x, крім тих, при яких знаменник виразу $\text{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ дорівнює нулю. А умову $\cos x = 0$ якраз і задовольняють значення $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. Аналогічно доводиться друга частина властивості. ■

Властивість 2. Функції $y = \text{tg}\, x$ і $y = \text{ctg}\, x$ періодичні з найменшим додатним періодом π.

Цю властивість обґрунтовано у п. 1.

Властивість 3. Нулями функції $y = \text{tg}\, x$ є числа $\pi k,\ k \in Z$, а нулями функції $y = \text{ctg}\, x$ — числа $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

□ Справді, нулі функції $y = \text{tg}\, x$ збігаються з нулями функції $y = \sin x$, а нулі функції $y = \text{ctg}\, x$ – з нулями функції $y = \cos x$ (див. п. 2). ■

Властивість 4. Функції $y = \text{tg}\, x$ і $y = \text{ctg}\, x$ — непарні.

□ Справді, $\text{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\text{tg}\, x$. Графік функції $y = \text{tg}\, x$ симетричний відносно початку координат. Так само доводиться ця властивість для функції $y = \text{ctg}\, x$. ■

Властивість 5. Функції $y = \text{tg}\, x$ і $y = \text{ctg}\, x$ додатні на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ і від'ємні на інтервалі $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Цю властивість обгрунтовано у § 14.

Властивість 6. Функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, а функція $y = \operatorname{ctg} x$ спадає на проміжку $(0; \pi)$.

□ Ця властивість випливає з означень тангенса і котангенса. Якщо x зростає від 0 до $\frac{\pi}{2}$, то чисельник дробу $\operatorname{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$ зростає, а знаменник спадає, тому функція $y = \operatorname{tg}x$ зростає на проміжку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$. Зростання функції на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};0\right]$ випливає з непарності цієї функції. Властивість для функції $y = \operatorname{ctg} x$ випливає з доведеного і рівності $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$. ■

Властивість 7. Множиною значень функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ є множина всіх дійсних чисел.

Властивість 8. Функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ неперервні відповідно на проміжках $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ і $\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Властивості 7 і 8 будуть обґрунтовані пізніше.

Розглянуті властивості функції $y = \operatorname{tg}x$ дозволяють побудувати її графік, як і для функції $y = \sin x$, у три етапи. На першому етапі побудуємо графік на проміжку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$. Для цього достатньо визначити декілька точок графіка і з'єднати їх неперервною лінією. Як

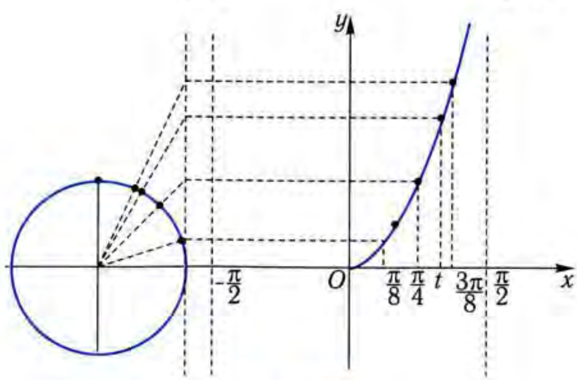


Рис. 320

і при побудові синусоїди, розіб'ємо проміжок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ на чотири рівні частини. Скориставшись лінією тангенсів, побудуємо чотири точки (рис. 320), які належать графіку функції $y = \mathrm{tg}x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Сполучивши точки (зважаючи на зростання і неперервність функції) неперервною кривою, будемо мати ескіз графіка функції на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

На другому етапі побудуємо графік на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ за допомогою перетворення симетрії, скориставшись непарністю тангенса (рис. 321).

Тим самим одержали графік функції $y = \mathrm{tg}\, x$ на проміжку, довжина якого дорівнює найменшому додатному періоду тангенса π.

Оскільки функція тангенс є періодичною, то на третьому етапі її повний графік можна побудувати за допомогою паралельного перенесення одержаного графіка вздовж осі x на $\pm\pi$; $\pm 2\pi$ і т. д. (рис. 322). Графік функції $\mathrm{tg}x$ називають ***тангенсоїдою***.

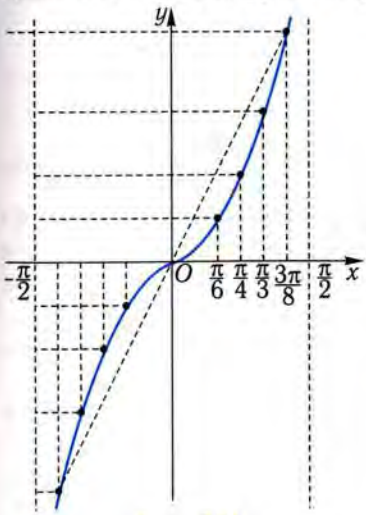


Рис. 321

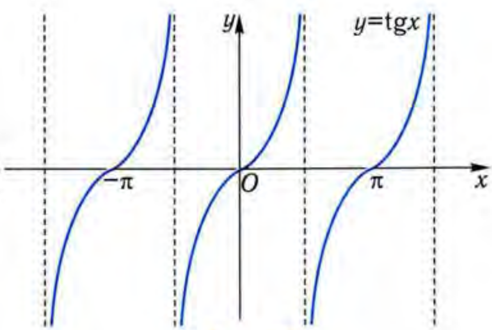


Рис. 322

Графік функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ можна одержати з графіка функції $y = \mathrm{tg}\, x$. Для цього, згідно з формулою зведення $\mathrm{ctg}x = -\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, достатньо графік функції $y = \mathrm{tg}\, x$ паралельно перенести у від'ємному напрямі осі x на $\frac{\pi}{2}$, а потім відобразити одержаний графік симетрично відносно осі абсцис. На рис. 323 тангенсоїду зображено тонкою лінією, зсунуту тангенсоїду — штриховою, графік функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ — жирною.

В остаточному вигляді графік функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ зображено на рис. 324.

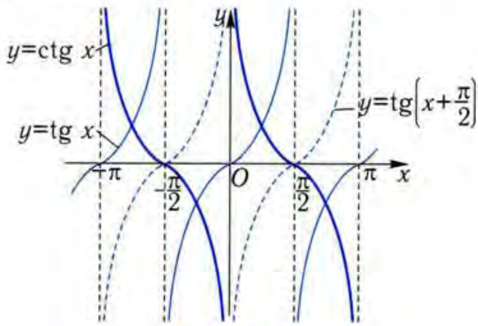


Рис. 323

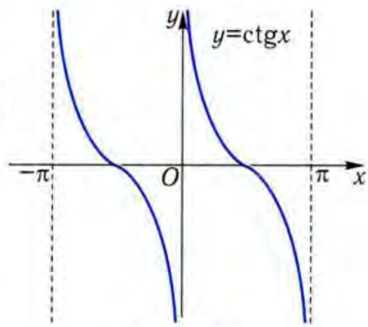


Рис. 324

Приклад 8. Знайти абсциси точок перетину графіка функції $y = \mathrm{tg}\, x$ з прямою $y = \sqrt{3}$.

☐ Побудувавши графіки функцій $y = \mathrm{tg}\, x$ і $y = \sqrt{3}$ (рис. 325), побачимо, що та вітка графіка тангенса, яка відповідає проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, перетинає пряму $y = \sqrt{3}$ у точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{3}$. Інші точки перетину мають абсциси $x_0 + \pi$; $x_0 - \pi$, $x_0 + 2\pi$, $x_0 - 2\pi$ і т. д. Отже, $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$. ■

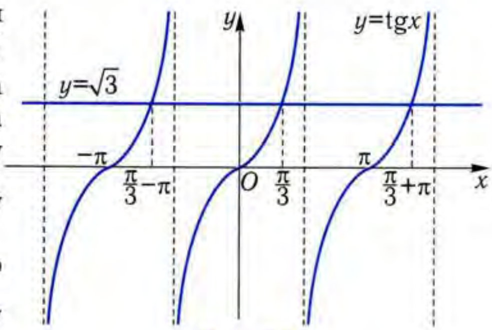


Рис. 325

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Властивість 6 про монотонність функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ має просту геометричну інтерпретацію. Якщо x зростає від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} x$, тобто координата точки B_x, яка є точкою перетину прямої OP_x з лінією тангенсів, зростає від $-\infty$ до $+\infty$ (рис. 326). Інакше кажучи, якщо $x = 0$, то $\operatorname{tg} x = 0$, а коли x наближається до $\frac{\pi}{2}$, залишаючись меншим від $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x$ зростає і може набувати як завгодно великих значень.

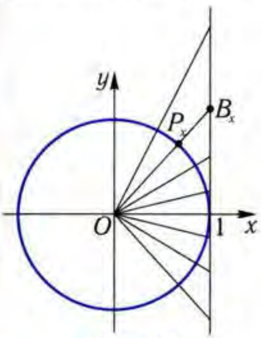


Рис. 326

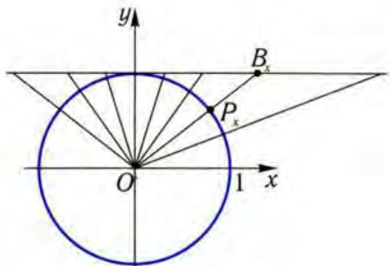


Рис. 327

Аналогічно, з геометричного змісту котангенса випливає, що коли x зростає від 0 до π, координата точки C_x на лінії котангенсів, яка є точкою перетину прямої OP_x з лінією котангенсів і дорівнює $\operatorname{ctg} x$, спадає від $+\infty$ до $-\infty$ (рис. 327). Інакше кажучи, якщо $x = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{ctg} x = 0$, а коли x наближається до 0, залишаючись більшим від 0, значення $\operatorname{ctg} x$ зростає і може набути як завгодно великих значень.

Обґрунтуємо властивість 7 про множину значень функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$.

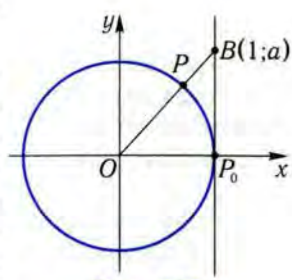


Рис. 328

□ Доведемо, що довільне дійсне число a може бути значенням тангенса деякого числа. Розглянемо тригонометричне коло і проведемо лінію тангенсів (рис. 328), позначивши на ній точку $B(1; a)$. Сполучимо точки O і B та позначимо літерою P точку перетину прямої OB з колом. Точка P відповідає деякому числу x, що належить проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, її координати — $(\cos x; \sin x)$. Тому $P_0B = \operatorname{tg} x = a$.

Аналогічно властивість доводиться для $y = \operatorname{ctg} x$. ■

Властивість 8, тобто неперервність, зокрема, функції $y = \operatorname{tg} x$, випливає з того, що якщо дві точки на тригонометричному колі зближуються (відстань між ними стає як завгодно малою), то відповідні точки на осі тангенсів також зближуються (рис. 329). Аналогічно обґрунтовується ця властивість для функції $y = \operatorname{ctg} x$. Нагадаємо, що неперервна функція описує процеси, які відбуваються плавно, тобто коли досліджувана величина за малий проміжок часу змінюється мало (див. § 4).

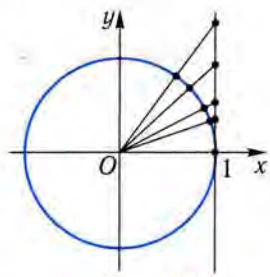


Рис. 329

Застосуємо до графіків функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ перетворення графіків функцій, які розглядались вище, а саме: паралельне перенесення графіка вздовж координатних осей, стиск і розтяг графіка, симетричне відображення відносно координатних осей.

Приклад 9. Побудувати графік функції: 1) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{ctg} x - 1$; 3) $y = 2\operatorname{ctg} x$.

□ 1) Графік функції $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ можна одержати з графіка функції $y = \operatorname{ctg}x$ паралельним перенесенням його вздовж осі абсцис у від'ємному напрямі осі x на $\frac{\pi}{4}$ (рис. 330).

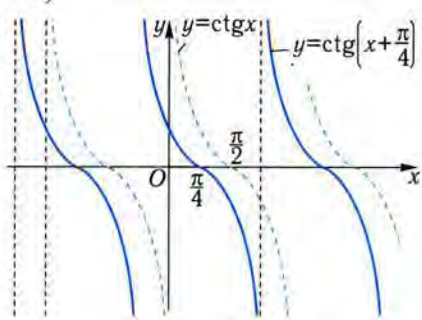


Рис. 330

2) Графік функції $y = \operatorname{ctg} x - 1$ можна отримати з графіка функції $y = \operatorname{ctg} x$ паралельним перенесенням його вздовж осі ординат у від'ємному напрямі осі y на 1 (рис. 331).

3) Графік функції $y = 2\operatorname{ctg} x$ можна одержати з графіка функції $y = \operatorname{ctg} x$ розтягом його від осі абсцис удвічі (рис. 332).

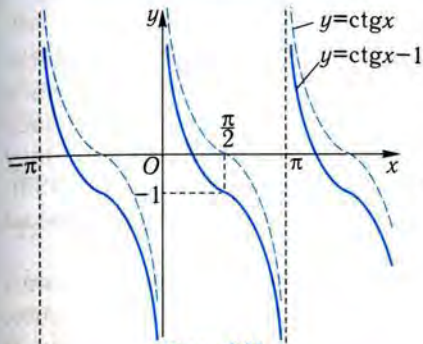


Рис. 331

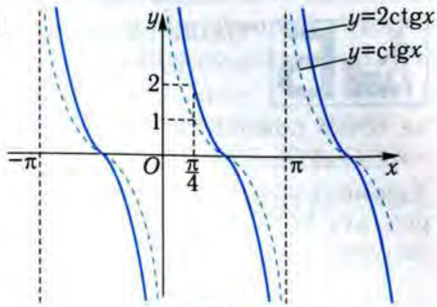


Рис. 332

Контрольні запитання

1°. Чи має зміст запис: а) tg 2011; б) ctg 2011π?

2°. Чи є функція $y = \operatorname{tg} x$ зростаючою на проміжку:

а) $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$; б) $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$; в) $[0; \pi]$; г) $(3; 3{,}1)$?

3°. Чи справджується нерівність $\operatorname{ctg} x < 0$ в усіх точках проміжку:

а) $\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$; в) $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right)$; г) $(2; 2{,}5)$?

4°. В яких точках функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ дорівнюють нулю?

5. Яку область визначення має функція:

а) $y = \operatorname{tg} x + 1$; б) $y = \operatorname{tg}(x - 1)$; в) $\operatorname{ctg}(x - 2)$;
г) $y = \operatorname{ctg} x + 2$; ґ) $y = \operatorname{ctg} 3x$?

6. Чи можуть функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ набувати значень 0,0000001; 2011; 10^{-20}; 10^{20}?

7. Якою є множина значень функції:

а) $y = \operatorname{tg}(x + 1)$; б) $y = \operatorname{ctg} x - 1$?

8. Чи можна стверджувати, що котангенс спадає:

а) на всій своїй області визначення;
б) на кожному інтервалі, який повністю лежить у його області визначення?

9: Чому дорівнює найменший додатний період функції:

а) $y = \operatorname{tg} 2x$; б) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{3}$?

4. Гармонічні коливання

Нехай по колу з радіусом A рухається точка зі сталою кутовою швидкістю ω, тобто за одиницю часу точка повертається на кут ω рад. За t одиниць часу ця точка повернеться на кут ωt рад. У початковий момент часу точка займає положення M_0, кут BOM_0 дорівнює α рад (рис. 333). У момент часу t точка займе положення M, кут M_0OM дорівнює ωt рад, кут BOM дорівнює $(\omega t + \alpha)$ рад.

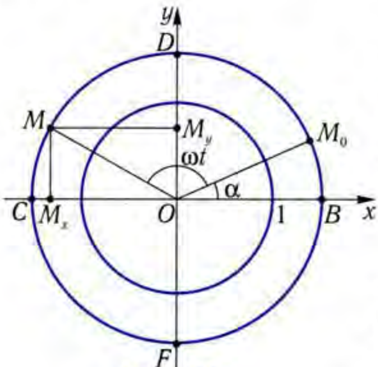


Рис. 333

Позначимо через M_x і M_y проекції точки M на осі x і y відповідно. Під час руху точки M по колу її проекція M_x на вісь x коливається вздовж горизонтального діаметра BC завдовжки $2A$, досягаючи то крайнього правого положення B, то крайнього лівого положення C.

Так само і її проекція M_y на вісь y коливається вздовж вертикального діаметра DF, теж досягаючи то найвищого положення D, то найнижчого положення F. Встановимо закони руху точок M_x та M_y.

Побудуємо одиничне коло з центром в точці O і позначимо через T точку перетину променя OM з цим колом. Координати точки $T = P_{\omega t+\alpha}$ дорівнюють $\cos(\omega t + \alpha)$ і $\sin(\omega t + \alpha)$, а тому, із міркувань подібності, координати точки M визначаються формулами:

$$x = A\cos(\omega t + \alpha),\ y = A\sin(\omega t + \alpha).$$

Ці формули описують відхилення точок M_x і M_y від точки O – центра кола. Вони задають закони руху точок M_x і M_y, які називаються ***гармонічними коливаннями.***

Зазначимо, що при $A = 1$, $\omega = 1$, $\alpha = 0$ одержимо відповідно функції $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$.

Коливальні рухи широко розповсюджені в навколишньому середовищі. Уявлення про них дають і океанські хвилі, і маятникові годинники, і гойдалки, і нервові імпульси. З ними пов'язане поширення звуку і світла. Багато з цих явищ можна описати за допомогою гармонічних коливань.

Введемо деякі поняття, пов'язані з гармонічними коливаннями проекцій на координатні осі точки, що рівномірно рухається по колу з центром у початку координат. Точку O — середину відрізка, вздовж якого проходить гармонічне коливання, — називають ***положенням рівноваги,*** число A — ***амплітудою коливання.*** Амплітуда характеризує величину найбільшого відхилення від положення рівноваги.

Число ω, як відомо, є кутовою швидкістю обертання точки. За 2π одиниць часу точка повернеться на кут $2\pi\omega$ рад, при цьому її проекції на вісь x і на вісь y виконають $\frac{2\pi\omega}{2\pi} = \omega$ повних коливань. Число ω, тобто кількість повних коливань за 2π одиниць часу, називається ще ***круговою частотою коливань.***

Число α, яке характеризує початкове положення точки на колі, називається ***початковою фазою*** коливання, $\omega t + \alpha$ — фазою коливання.

Час T, протягом якого точка M робить повний оберт, називається ***періодом гармонічного коливання.*** За період T проекція M_x точки M на вісь x двічі пройде всі свої можливі положення і повернеться в початкове положення. Винятком є лише граничні положення B і C (див. рис. 333), кожне з яких точка пройде один раз.

Оскільки за 2π одиниць часу координата точки робить ω повних коливань, то одне повне коливання вона робить за $\frac{2\pi}{\omega}$ одиниць часу, тобто $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Величина, обернена до періоду коливання,

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},$$

називається ***частотою коливання***. Вона показує, скільки повних коливань здійснює координата точки за одиницю часу.

Графік закону гармонічного коливання $y = A\sin(\omega t + \alpha) = A\sin\omega\left(t + \frac{\alpha}{\omega}\right)$ можна побудувати з графіка функції $y(t) = \sin t$ паралельним перенесенням уздовж осі абсцис на $\left|\frac{\alpha}{\omega}\right|$ одиниць у додатному напрямі осі, якщо $\frac{\alpha}{\omega} < 0$, і у від'ємному, якщо $\frac{\alpha}{\omega} > 0$; розтягом від осі ординат в $\frac{1}{\omega}$ разів при $0 < \omega < 1$ або стиском до осі ординат у ω разів при $\omega > 1$;

розтягом від осі абсцис у A разів, якщо $A > 1$, або стиском до осі абсцис в $\frac{1}{A}$ разів.

Функцію $x = A\cos(\omega t + \alpha)$ можна одержати з функції $y = A\sin(\omega t + \alpha)$, замінивши α на $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Приклад 10. Побудувати графік закону гармонічного коливання $y = 5\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$.

☐ Подамо вираз для закону гармонічного коливання у вигляді: $y = 5\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) = 5\sin 2\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$. Графік будуємо у такій послідовності: спочатку будуємо графік функції $y = \sin t$ (рис. 334), далі $y = \sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$ (паралельним перенесенням попереднього графіка вздовж осі абсцис на $\frac{\pi}{6}$ одиниць у від'ємному напрямі осі) (див. рис. 334), потім $y = \sin 2\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$ (стиском попереднього графіка до осі ординат удвічі) (рис. 335) і, нарешті, $y = 5\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ (розтягом попереднього графіка від осі абсцис у 5 разів) (рис. 336). ■

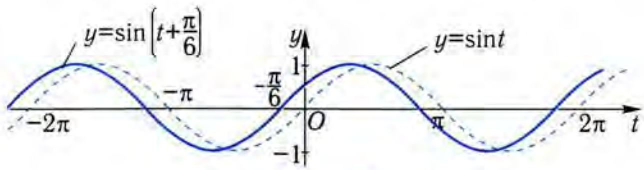


Рис. 334

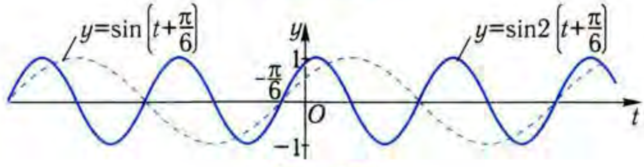


Рис. 335

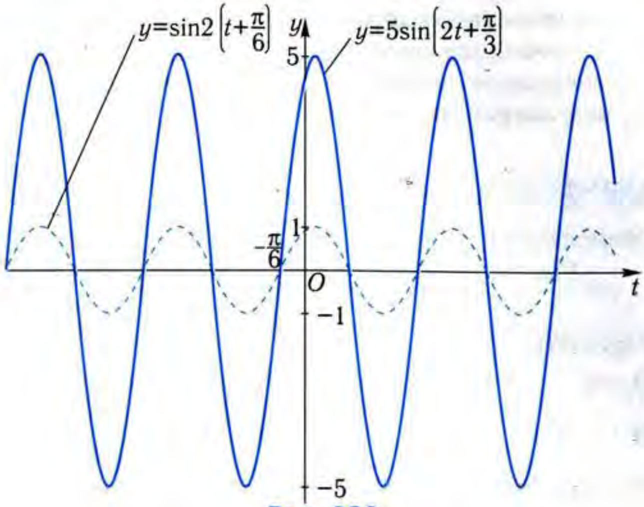


Рис. 336

✓ Контрольні запитання

1°. Чому дорівнює амплітуда гармонічного коливання проекції на вісь x точки, що рівномірно рухається по колу з діаметром 10 см з центром у початку координат?

2°. Чому дорівнює кругова частота гармонічного коливання проекції на вісь y точки, що рівномірно рухається по колу з центром у початку координат з кутовою швидкістю 5 рад/с?

3°. Чому дорівнює період гармонічного коливання проекції на вісь x точки, що рівномірно рухається по колу з центром у початку координат з кутовою швидкістю 5 рад/с?

4°. Чому дорівнює кутова швидкість руху точки по колу, якщо період відповідного гармонічного коливання її проекції на вісь y дорівнює 4?

5°. Чому дорівнює лінійна швидкість рівномірного руху точки по колу радіуса 2, якщо період відповідного гармонічного коливання її проекції на вісь x дорівнює 4?

6. Відомо, що проекція точки, що рухається по колу з центром у початку координат, на вертикальний діаметр здійснює гармонічне коливання, яке визначається формулою $y=3\sin\left(5t-\frac{\pi}{6}\right)$. За яким законом змінюється проекція цієї точки на горизонтальний діаметр?

7°. Чому дорівнює початкова фаза гармонічного коливання проекції на вісь x точки, що рівномірно рухається по колу з центром у початку координат , якщо її положення на колі в початковий момент часу збігається з верхнім кінцем вертикального діаметра?

Задачі

281°. Обчисліть:

1) $\cos\dfrac{17\pi}{3}$; 2) tg 3360°; 3) $\sin\left(-\dfrac{123\pi}{4}\right)$; 4) ctg (–1950°).

282°. Спростіть:

1) $\sin^2(\alpha+4\pi)+\cos^2(\alpha+6\pi)$; 2) $\mathrm{tg}(\alpha+3\pi)\cdot\mathrm{ctg}(\alpha-5\pi)$;

3) $1+\mathrm{ctg}^2(\alpha-7\pi)$; 4) $\dfrac{1}{\cos^2(2\alpha-8\pi)}-1$.

283°. Доведіть рівність:

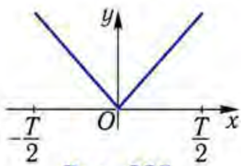


Рис. 337

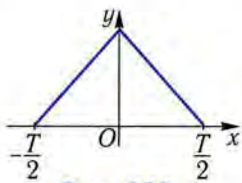


Рис. 338

1) $\cos(t-\pi)=\cos(t+\pi)$; 2) $\mathrm{tg}\left(2t-\dfrac{\pi}{3}\right)=\mathrm{tg}\left(2t+\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

284. На рис. 337, 338 зображено частини графіків функцій з періодом T. Побудуйте графіки цих функцій на проміжку $[-2T; 2T]$.

285. Доведіть, що число T є періодом функції $y=f(x)$, якщо:

1) $y=\cos\dfrac{x}{2}$, $T=4\pi$; 2) $y=\sin 2x$, $T=\pi$; 3) $y=\mathrm{ctg}\pi x$, $T=1$.

286. Доведіть, що функція f є періодичною, якщо:

1) $f(x)=1+\cos x$; 2) $f(x)=\mathrm{ctg}\,2x$.

287. Знайдіть найменший додатний період, якщо він існує, для функції:

1) $y=2\sin\dfrac{x}{3}$; 2) $y=3\mathrm{ctg}\dfrac{3x}{2}$; 3) $y=\sin^2x+\cos^2x$.

288. Побудуйте графік функції $y = \sin x,\ x \in [-\pi; 2\pi]$ і вкажіть на ньому точки, для яких:

1°) $\sin x = 1$; 2°) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3°) $\sin x = \frac{1}{3}$;

4) $\sin x < 0$; 5) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\sin x < -\frac{1}{2}$.

289. Побудуйте графік функції $y = \cos x,\ x \in [-2\pi; \pi]$ і вкажіть на ньому точки, для яких:

1°) $\cos x = -1$; 2°) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3°) $\cos x = \frac{2}{5}$;

4) $\cos x > 0$; 5) $\cos x < \frac{1}{2}$; 6) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

290. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x = \frac{2}{\pi}x$; 2) $\cos x = -\frac{2}{\pi}x + 1$.

---

291. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{2\sin x - 3}{2}$; 2°) $y = \frac{1}{\cos^2 x + 3}$; 3) $y = \frac{1}{\sin x - 1}$;

4) $y = \frac{1}{\cos x}$; 5*) $y = \sqrt{\sin x}$; 6*) $y = \sqrt{\frac{1}{\cos x}}$.

292. Які з функцій є парними, які — непарними, а які — ні парними, ані непарними:

1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \frac{1 + \cos x}{x^2}$; 3) $y = x + \sin x$;

4) $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$; 5) $y = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin^2 x}$; 6) $y = 1 + \sin x$?

293. Розбийте даний відрізок на два проміжки так, щоб на одному з них функція $y = \sin x$ спадала, а на другому — зростала:

1) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$; 2) $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

294. Розбийте даний відрізок на два проміжки так, щоб на одному з них функція $y = \cos x$ набувала невід'ємних значень, а на другому — недодатних:

1) $[0; \pi]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 3) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

295. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1°) $y = 2\cos x$;

2°) $y = \sin x - 3$;

3) $y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$;

4) $y = 1 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$;

5) $y = 0{,}5\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$;

6) $y = 1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

296. Порівняйте числа:

1°) $\sin 37°$ і $\sin 86°$;

2°) $\sin 220°$ і $\sin 260°$;

3°) $\cos 200°$ і $\cos 230°$;

4) $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ і $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$;

5*) $\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ і $\sin\frac{4\pi}{7}$;

6) $\sin(-3)$ і $\sin(-2)$;

7) $\cos\frac{\pi}{7}$ і $\sin\frac{\pi}{7}$;

8*) $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ і $\sin\frac{3\pi}{8}$.

297. Знайдіть множину значень функції:

1°) $y = \sin 3x$; 2°) $y = 3\sin x$; 3°) $y = 3\cos x - 1$; 4) $y = \cos^2 x$;

5) $y = \frac{1}{2}\sin^2 x - 1$; 6) $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$; 7) $y = 3\cos 2x - \frac{\pi}{6}$.

298. Побудуйте графік функції:

1°) $y = 2\cos x$;

2°) $y = \sin 3x$;

3) $y = \cos\frac{x}{2} - 1$;

4*) $y = 3\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$.

299. Побудуйте графік залежності моментів заходу Сонця на перше число місяця в залежності від місяця, взявши за вісь абсцис середній час заходу Сонця — 18 годин, з'єднайте отримані точки плавною неперервною лінією (ці дані можна взяти з відривних календарів за різні роки або знайти в Інтернеті).

1) Чи є ця залежність функціональною?

2) Графік якої функції вам нагадує побудований графік?

3) Чим ви пояснюєте таку схожість?

4) Як можна уточнити побудований графік?

5) Чим ви пояснюєте відмінності побудованого графіка від графіка відомої вам функції?

6) Надайте змістовну інтерпретацію області визначення, множині значень, проміжкам монотонності, нулям, найбіль-

шому і найменшому значенням, точкам екстремуму, періодичності функції, графік якої побудовано.

300. Знайдіть область визначення функції:

1°) $y = \mathrm{tg}3x$; 2°) $y = \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = \frac{1}{\mathrm{ctg}x}$; 4) $y = \frac{1}{\mathrm{tg}x + 1}$.

301. Які з функцій є парними, які — непарними, а які — ні парними, ані непарними:

1°) $y = \mathrm{tg}x \cos 2x$; 2°) $y = \mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x$; 3°) $y = \mathrm{tg}\;2x \sin x$;

4°) $y = \frac{\sin x + \mathrm{tg}x}{x^2}$; 5) $y = \mathrm{ctg}x + \cos x$; 6) $y = \frac{x + \sin x}{\mathrm{tg}^3 x}$?

302. Порівняйте числа:

1) tg (–80°) і tg (–50°); 2) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{5}$ і $\mathrm{tg}\frac{4\pi}{5}$;

3) tg 1 і tg 1,6; 4) tg (–2) і tg (–3); 5) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ і $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{9}$;

6) ctg 95° і ctg 117°; 7) ctg 2 і ctg 3; 8) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}$ і $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}$.

303. Вкажіть проміжки зростання і спадання функції:

1°) $y = \mathrm{ctg}\;2x$; 2°) $y = \mathrm{ctg}\;x - 1$; 3) $y = 2\mathrm{tg}\;x$;

4) $y = \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 5*) $y = \mathrm{tg}^2 x$; 6*) $y = \mathrm{ctg}^2 x$;

7*) $y = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$; 8*) $y = 2 + \mathrm{ctg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$.

304. Знайдіть множину значень функції:

1°) $y = \mathrm{tg}(x + 1)$; 2°) $y = \mathrm{ctg}x - 1$;

3) $y = \mathrm{ctg}\,x,\ 0 < x < \frac{\pi}{4}$; 4) $y = \mathrm{tg}^2 x$;

5) $y = \mathrm{tg}\;x \cdot \mathrm{ctg}\;x$; 6) $y = \mathrm{ctg}^3 x$; 7) $y = -\mathrm{ctg}^2 x$.

305. Вкажіть найбільше і найменше значення функції:

1°) $y = \mathrm{tg}x,\ -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$; 2) $y = \mathrm{ctg}\frac{x}{2},\ \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$;

3) $y = \sin x + \mathrm{tg}x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

306. Побудуйте графік функції:

1°) $y = \mathrm{tg}x, x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$; 2°) $y = \mathrm{ctg}x, x \in (-\pi; 0)$;

3°) $y = \mathrm{ctg}x - 1$; 4°) $y = \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

5) $y = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$; 6*) $y = \begin{cases} \mathrm{tg}x \text{ при } x \le \frac{\pi}{4}, \\ \mathrm{ctg}x \text{ при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

307°. Знайдіть амплітуду, період і початкову фазу гармонічного коливання, яке задано формулою:

1) $y = 3\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \frac{1}{2}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = 2\sin\left(\frac{t}{2} + 1\right)$;

4) $y = 3 \sin 4t$; 5) $y = \sin (t - 1)$.

308°. Дано закон, за яким змінюється координата (яка вимірюється в сантиметрах) тіла, що рухається. Знайдіть амплітуду, період, кругову частоту коливання. Обчисліть координату тіла в момент часу t_0, якщо:

1) $x(t) = 2{,}5\cos 3\pi t, t_0 = \frac{1}{9}$ с;

2) $x(t) = 7\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right), t_0 = 2{,}5$ с;

3) $x(t) = 2\cos 2\pi t, t_0 = 0{,}25$ с;

4) $x(t) = 1{,}5\cos\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{6}\right), t_0 = 3{,}5$ с.

309. Дано закон, за яким змінюється з часом сила змінного струму: $I(t) = 5\sin 10\pi t$, I — сила струму, А; t — час, с.

1°) Знайдіть амплітуду, період, кругову частоту коливань сили струму.

2°) Чому дорівнює сила струму в момент часу $t = 0{,}05$ с?

3) В які моменти часу сила струму набуває найбільшого значення?

310. Дано закон, за яким змінюється з часом напруга: $U(t) = 220\cos 60\pi t$, U — напруга, В; t — час, с.

1°) Знайдіть амплітуду, період, частоту коливань напруги.

2°) Чому дорівнює напруга у момент часу $t = 0{,}5$ с?

3) В які моменти часу напруга набуває найбільшого значення?

311. Точка виконує гармонічне коливання за законом: $y = 3\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$.

1) Знайдіть амплітуду, період і початкову фазу цього коливання.
2) Вкажіть, які перетворення слід виконати над синусоїдою $y = \sin t$, щоб одержати графік даного коливання.
3) Побудуйте схематично графік гармонічного коливання.

312. Ордината точки, що обертається по колу, виконує гармонічне коливання за законом: $y = 2\sin\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)$. Знайдіть моменти часу, в які точка розташована у крайньому положенні:
1) верхньому; 2) лівому;
3) нижньому; 4) правому.

313. Напишіть рівняння гармонічного коливання, якщо:
1) амплітуда дорівнює 1, період 0,2 с, початкова фаза $\frac{\pi}{6}$;
2) за 1 хв здійснюється 180 коливань з амплітудою 7 см, а початкова фаза коливань дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Вправи для повторення

314. Який знак має скалярний добуток векторів, якщо кут між ними є: 1) гострим; 2) тупим? Чи справджуються обернені твердження?

315. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ і кут між ними дорівнює: 1) 60°; 2) 135°; 3) 90°; 4) 0°; 5) 180°.

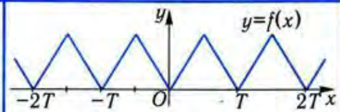
316. Чому дорівнює скалярний добуток векторів: 1) $(a; 0)$ і $(b; 0)$; 2) $(a; 0)$ і $(0; b)$; 3) $(a; b)$ і $(a; b)$; 4) $(a; b)$ і $(-a; -b)$?

317. Дано вектори $\vec{a} = (1; 2), \vec{b} = (-2; 3)$. Обчисліть:

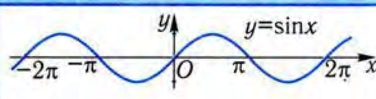
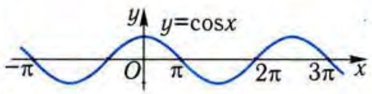
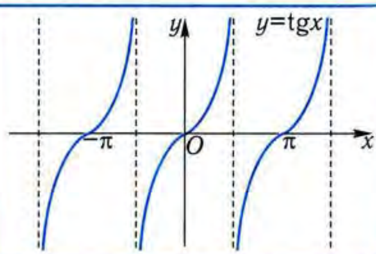
1) $2\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $\vec{a} \cdot (-3\vec{b})$; 3) $\left(-\frac{1}{2}\vec{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{b}\right)$;
4) $\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$; 5) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 6) $(\vec{a} - \vec{b})^2$;
7) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

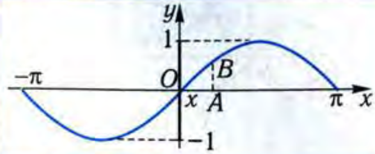
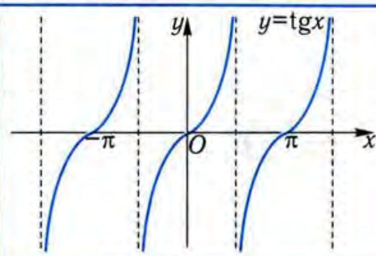
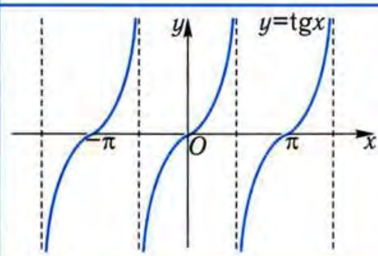
Підсумок

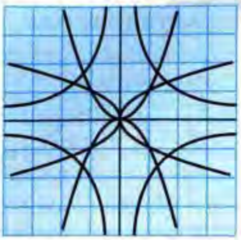
Основне поняття

Означення	Геометрична ілюстрація	Застосування
Функція $y = f(x)$ називається періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, що область визначення функції разом з кожною точкою x містить точки $x \pm T$ і при цьому виконується рівність $f(x \pm T) = f(x)$. Число T називається періодом функції.		Періодичні функції описують різні ситуації (астрономічні явища, життєдіяльність організму, гармонічні коливання тощо), які періодично повторюються.

Головні твердження

Словесне формулювання	Запис за допомогою формул, пояснення	Графічна ілюстрація, коментарі, пояснення
Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ — періодичні з найменшим додатним періодом 2π.	$\sin(x+2\pi) = \sin x$ $\cos(x+2\pi) = \cos x$	
Функція $y = \mathrm{tg}\, x$ періодична з найменшим додатним періодом π.	$\mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg} x$	

Словесне формулювання	Запис за допомогою формул, пояснення	Графічна ілюстрація, коментарі, пояснення
Множиною значень функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є відрізок $[-1; 1]$.	$E(y) = [-1; 1]$	
Функція $y = \sin x$ — непарна, а функція $y = \cos x$ — парна	$\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$	Графік функції $y = \sin x$ симетричний відносно початку координат, графік функції $y = \cos x$ симетричний відносно осі ординат
Функція $y = \text{tg}\, x$ неперервна при всіх значеннях аргументу, крім $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.	Функція $y = \text{tg}\, x$ має розрив у точках, де знаменник виразу $\text{tg}\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ перетворюється в нуль.	
Множиною значень функції $y = \text{tg}\, x$ є множина всіх дійсних чисел.	$E(y) = R$	
Функція $y = \text{tg}\, x$ — непарна.	$\text{tg}(-x) = -\text{tg}\, x$	Графік функції $y = \text{tg}\, x$ симетричний відносно початку координат.



§16. Тригонометричні формули додавання та наслідки з них

У даному параграфі розглянемо велику групу формул, пов'язаних з тим, що поворот на кут $\alpha + \beta$ можна реалізувати в результаті двох послідовних поворотів — на кут α і на кут β, та їхні застосування.

1. Формули додавання

Формули зведення дозволяють вважати, що кути α і β належать проміжку $[0; \pi]$. Розглянемо на тригонометричному колі точки P_α і P_β, маючи на увазі, що вектори $\overrightarrow{OP_\alpha}$ і $\overrightarrow{OP_\beta}$ утворюють кути α і β з віссю абсцис. Кут між векторами $\overrightarrow{OP_\alpha}$ і $\overrightarrow{OP_\beta}$ може дорівнювати $\alpha - \beta$, якщо $\alpha \geq \beta$ (рис. 339), $\beta - \alpha$, якщо $\beta > \alpha$ (рис. 340). У будь-якому з цих випадків косинус цього кута дорівнює $\cos(\alpha - \beta)$.

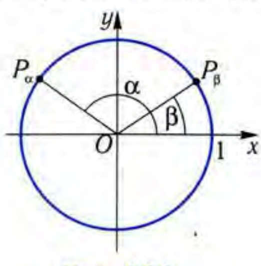


Рис. 339

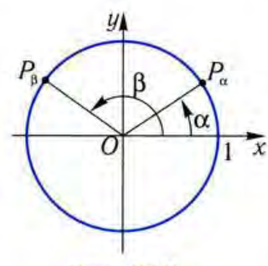


Рис. 340

Точки P_α і P_β мають відповідно координати $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ і $(\cos\beta; \sin\beta)$. Такі самі координати мають і вектори $\overrightarrow{OP_\alpha}$ і $\overrightarrow{OP_\beta}$. За означенням скалярного добутку, $\overrightarrow{OP_\alpha} \cdot \overrightarrow{OP_\beta} = \left|\overrightarrow{OP_\alpha}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OP_\beta}\right| \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta)$, оскільки $\left|\overrightarrow{OP_\alpha}\right| = \left|\overrightarrow{OP_\beta}\right| = 1$.

Оскільки скалярний добуток векторів $\vec{a} = (x_1; y_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2)$ виражається через їхні координати за формулою: $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$, то маємо:

$$\overrightarrow{OP_\alpha} \cdot \overrightarrow{OP_\beta} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Порівнявши одержані результати, матимемо:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Косинус різниці двох кутів дорівнює сумі добутків косинусів та синусів цих кутів.

Як наслідок, отримуємо формулу косинуса суми кутів:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta).$$

З урахуванням парності косинуса і непарності синуса, одержимо:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Косинус суми двох кутів дорівнює різниці добутків косинусів та синусів цих кутів.

Виведемо тепер формули синуса суми двох кутів. Скориставшись формулами зведення і косинуса різниці двох кутів, матимемо:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Отже,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Синус суми двох кутів дорівнює добутку синуса першого кута на косинус другого плюс добуток косинуса першого кута на синус другого.

Для синуса різниці маємо:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$$

$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Таким чином,

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Синус різниці двох кутів дорівнює добутку синуса першого кута на косинус другого мінус добуток косинуса першого кута на синус другого.

Приклад 1. Не користуючись обчислювальними засобами, знайти sin 15°.

□ Представимо 15° у вигляді різниці 45° – 30°. Тоді, користуючись формулою синуса різниці двох кутів, знайдемо: $\sin 15°=\sin(45°-30°)=$ $=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$. ■

Відповідь. $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$.

Приклад 2. Обчислити cos (α – β), якщо $\cos\alpha=-0{,}8,\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi,$ $\sin\beta=-\frac{12}{13},\ \pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

□ З формули косинуса різниці двох кутів випливає, що для розв'язання задачі необхідно знайти sin α і cos β. З основної тригонометричної тотожності можна знайти $\sin^2\alpha$: $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-0{,}64=$ $=0{,}36$. Оскільки $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, то $\sin\alpha>0$, тому $\sin\alpha=\sqrt{0{,}36}=0{,}6$. Аналогічно обчислимо cos β. З основної тригонометричної тотожності маємо: $\cos^2\beta=1-\sin^2\beta=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169}$. Оскільки $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$, то $\cos\beta<0$ і $\cos\beta=-\sqrt{\frac{25}{169}}=-\frac{5}{13}$. Тепер можна обчислити cos (α – β), за формулою косинуса різниці двох кутів: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+$ $+\sin\alpha\sin\beta=-0{,}8\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)+\left(-\frac{12}{13}\right)0{,}6=-\frac{16}{65}$. ■

Відповідь. $-\frac{16}{65}$.

Використовуючи одержані формули синуса і косинуса суми двох аргументів, можна вивести формули додавання для тангенса:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta},\quad \mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}.$$

□ Справді,

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Припускаючи, що $\cos\alpha\neq 0, \cos\beta\neq 0$, і поділивши на $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ чисельник і знаменник останнього дробу, матимемо:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}.$$

Отже, справджується твердження:

тангенс суми двох аргументів дорівнює сумі тангенсів доданків, поділеній на різницю між одиницею і добутком цих тангенсів.

Замінюючи β на $(-\beta)$ і використовуючи непарність тангенса, одержимо формулу для тангенса різниці.

Тангенс різниці двох аргументів дорівнює різниці тангенсів зменшуваного і від'ємника, поділеній на суму одиниці і добутку цих тангенсів. ■

Аналогічно можуть бути виведені формули котангенса суми і різниці двох аргументів, але вони вживаються дуже рідко. За необхідністю їх можна вивести самостійно.

Приклад 3. Обчислити tg 105°.

□ Представимо 105° у вигляді суми 45° + 60°. Тоді, користуючись формулою тангенса суми двох кутів, знайдемо: $\mathrm{tg}\,105°=\mathrm{tg}\,(45°+60°)=$

$$=\frac{\mathrm{tg}45°+\mathrm{tg}60°}{1-\mathrm{tg}45°\cdot\mathrm{tg}60°}=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}.\ ■$$

Відповідь. $-2-\sqrt{3}$.

Контрольні запитання

1°. Чому дорівнює значення виразу $\sin 22^\circ \cos 23^\circ + \cos 22^\circ \sin 23^\circ$?

2. Чому дорівнює значення виразу $\dfrac{\operatorname{tg} 86^\circ - \operatorname{tg} 26^\circ}{1 + \operatorname{tg} 86^\circ \cdot \operatorname{tg} 26^\circ}$?

3. Як за допомогою формули для тангенса суми двох кутів обчислити $\operatorname{tg} 75^\circ$?

4°. Чи можна стверджувати що:

а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{4}$;

б) $\sin 63^\circ \cos 12^\circ + \cos 63^\circ \sin 12^\circ = \sin 32^\circ \cos 43^\circ + \sin 43^\circ \cos 32^\circ$?

5. Чи можна з формули для косинуса суми двох кутів вивести формулу для косинуса різниці двох кутів?

6. Чи можна обчислити:

1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$, якщо відомо, що $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$;

2) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$, якщо відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$;

3) $\sin(\alpha - \beta)$, якщо відомо, що $\sin\alpha = -\dfrac{15}{17}$, $\cos\beta = \dfrac{4}{5}$;

4) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, якщо відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{6}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{7}{10}$?

7*. За яких умов не має змісту формула тангенса різниці двох кутів?

8*. Чи можна за допомогою формул додавання обчислити значення $\operatorname{tg}\alpha$, якщо відоме значення $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$?

2. Тригонометричні функції подвійного і половинного аргументів

Як наслідок формул додавання при $\alpha = \beta$ одержимо формули подвійного кута:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Отже,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Приклад 4. Знайти значення $\cos 2\alpha$, якщо $\sin\alpha = -0{,}8$.

☐ За формулою косинуса подвійного кута маємо:
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot(-0{,}8)^2 =$
$= -0{,}28$. ■

Відповідь. $-0{,}28$.

Приклад 5. Спростити вираз: $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$.

☐ Застосовуючи послідовно основну тригонометричну тотожність, формулу синуса подвійного кута, формулу косинуса подвійного кута і означення котангенса, дістанемо:

$$\frac{2\cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = 2\operatorname{ctg} 2\alpha\,.$$ ■

Відповідь. $2\operatorname{ctg} 2\alpha$.

З формул подвійного кута можна вивести формули для синуса і косинуса половинного кута. Фактично ми це почали реалізовувати при розв'язанні прикладів 4 і 5. Справді,

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1,$$

або

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Ці рівності часто записують у такому вигляді:

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha, \quad 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha.$$

Оскільки

$$\cos\alpha = \cos 2\cdot\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1, \quad \cos\alpha = \cos 2\cdot\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

то

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}, \ \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}.$$

Ці формули називаються ***формулами половинного аргументу***, чи ***формулами зниження степеня***.

Як наслідок формули додавання для тангенса при $\alpha = \beta$ одержимо формулу тангенса подвійного кута:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Отже, $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Приклад 6. Знайти значення tg 2α, якщо tg $\alpha = -0{,}5$.

□ За формулою тангенса подвійного кута, маємо:

$\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{2\cdot(-0{,}5)}{1-(-0{,}5)^2} = -\dfrac{4}{3}$. ■

Відповідь. $-\dfrac{4}{3}$.

Формули половинного аргументу можна записати у вигляді:

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \qquad \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

! Звернемо увагу на те, що знаючи тільки $\cos\alpha$, неможливо без додаткових умов однозначно знайти $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ або $\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

З останніх двох формул випливає формула для тангенса половинного кута:

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Приклад 7. Обчислити $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, якщо $\cos\alpha = -\dfrac{3}{4}$, $\pi \le \alpha \le 2\pi$.

□ Оскільки $\dfrac{\pi}{2} \le \dfrac{\alpha}{2} \le \pi$, то $\cos\dfrac{\alpha}{2} < 0$, $\cos\dfrac{\alpha}{2} = -\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\dfrac{1-\frac{3}{4}}{2}} =$

$= -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. ■

Відповідь. $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Приклад 8. Не користуючись обчислювальними засобами, знайти sin 15°.

□ Один спосіб розв'язання цього завдання, який ґрунтувався на застосуванні формули косинуса різниці двох кутів, було наведено у п. 1 (приклад 1). Тут розглянемо інший спосіб.

Скориставшись формулою синуса половинного аргументу, враховуючи, що sin 15° > 0, одержимо:

$$\sin 15^\circ = \sin\frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(4-2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1-2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1). \blacksquare$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$.

Важливу роль у тригонометрії та її застосуваннях відіграє тангенс половинного кута. Через нього можна виразити всі інші тригонометричні функції:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

(чисельник і знаменник поділили на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$).

Аналогічно,

$$\cos\alpha = \frac{\cos 2\cdot\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Одержані формули називаються ***формулами універсальної підстановки.*** Вони дозволяють звести доведення будь-якої тригонометричної тотожності чи розв'язання рівняння, в обох частинах яких стоять раціональні вирази відносно $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, до доведення алгебраїчної тотожності чи розв'язання алгебраїчного рівняння з однією змінною. Для цього достатньо виразити $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ і позначити $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через t.

✓ Контрольні запитання

1. Чому дорівнює: а°) $\sin 15°\cdot\cos 15°$; б°) $\cos^2 22{,}5° - \sin^2 22{,}5°$; в) $\dfrac{2\mathrm{tg}75°}{1-\mathrm{tg}^2 75°}$?
2. Чому дорівнює: а°) $\sin 50°$, якщо $\sin 25° = a$; б) $\mathrm{tg}\ 70°$, якщо $\mathrm{tg}\ 35° = a$?
3°. Чи існує такий кут α, що $\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}65$?
4. Чи потрібно знати, в якій чверті знаходиться точка P_α, щоб за значенням $\cos\alpha$ або $\sin\alpha$ обчислити: а) $\cos 2\alpha$; б) $\sin 2\alpha$?
5. У якій чверті тригонометричного кола знаходиться точка P_t, якщо $\sin t > 0$, $\sin 2t < 0$?
6. Якою є множина значень функції $y = \sin^2 x - \cos^2 x$?
7. Чи завжди можна стверджувати, що $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$?
8*. Чи можна стверджувати, що знак $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$ збігається зі знаком $\sin x$ для всіх допустимих значень x?

3. Перетворення суми тригонометричних функцій на добуток

При розв'язуванні тригонометричних рівнянь або нерівностей корисно вміти подавати суму і різницю синусів або косинусів у вигляді добутку тригонометричних функцій. Такі формули широко застосовуються у різних перетвореннях тригонометричних виразів.

Формули, на яких ґрунтуються перетворення суми тригонометричних функцій на добуток, можна одержати з формул додавання.

Нехай необхідно перетворити суму $\sin\alpha + \sin\beta$ на добуток. Запишемо α і β у вигляді $\alpha = \dfrac{\alpha+\beta}{2} + \dfrac{\alpha-\beta}{2}$, $\beta = \dfrac{\alpha+\beta}{2} - \dfrac{\alpha-\beta}{2}$. Тоді

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$
$$= \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} -$$
$$-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Таким чином,

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Одержали ***формулу суми синусів*** двох кутів.

Сума синусів двох кутів дорівнює подвоєному добутку синуса півсуми цих кутів на косинус їхньої піврізниці.

Аналогічно виводяться ***формули різниці синусів, суми і різниці косинусів***. Формула різниці синусів:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Різниця синусів двох кутів дорівнює подвоєному добутку синуса піврізниці цих кутів на косинус їхньої півсуми.

Формула суми косинусів:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Сума косинусів двох кутів дорівнює подвоєному добутку косинуса півсуми цих кутів на косинус їхньої піврізниці.

Формула різниці косинусів:

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Різниця косинусів двох кутів дорівнює взятому із знаком “мінус” подвоєному добутку синуса півсуми цих кутів на синус їхньої піврізниці.

Рекомендуємо вивести формули різниці синусів, суми і різниці косинусів самостійно.

Приклад 9. Обчислити без обчислювальних засобів:

1) $\cos 75^\circ-\cos 15^\circ$; 2) $\cos\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}$.

☐ 1) Скористаємось формулою різниці косинусів двох аргументів: $\cos75^\circ-\cos15^\circ=-2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cdot\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=-2\sin45^\circ\sin30^\circ=$

$=-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

$$2)\ \cos\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}=2\cos\frac{\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}}{2}=2\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.\ \blacksquare$$

Відповідь. 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток дозволяють розв'язувати різноманітні задачі.

Приклад 10. Довести тотожність: $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

$\square$ Скориставшись формулами зведення, замінимо $\cos\alpha$ на $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, застосуємо формулу різниці косинусів двох кутів і непарність синуса:

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\cos\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-2\sin\frac{\alpha+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2}\sin\frac{\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2}=$$

$$=-2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

Останнє перетворення здійснено за допомогою формули зведення: $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. $\blacksquare$

З формул додавання можна одержати формули для суми і різниці тангенсів двох кутів:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\quad \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Сума тангенсів двох кутів дорівнює відношенню синуса суми цих кутів до добутку косинусів тих самих кутів.

Різниця тангенсів двох кутів дорівнює відношенню синуса різниці цих кутів до добутку косинусів тих самих кутів.

Доведемо, наприклад, першу з наведених формул.

□ $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

Друга формула доводиться аналогічно. Рекомендуємо зробити це самостійно. ■

Формули перетворення різниці однойменних функцій двох аргументів у добуток дозволяють одержати умови, за яких функції двох аргументів дорівнюють одна одній.

Приклад 11. Знайти умову, за якої синуси двох кутів дорівнюють один одному.

□ Нехай $\sin x = \sin y$. Тоді $\sin x - \sin y = 0$, або $2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2} = 0$. Остання рівність справджується тоді, і тільки тоді, коли принаймні один із співмножників дорівнює нулю. Якщо $\sin\dfrac{x-y}{2} = 0$, то $\dfrac{x-y}{2} = \pi n$ (див. § 15), або $x - y = 2\pi n$, або $x = y + 2\pi n$, $n \in Z$. Якщо ж $\cos\dfrac{x+y}{2} = 0$, то $\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $x + y = \pi + 2\pi n$, $x = -y + \pi(2n+1)$, $n \in Z$. Відтак, якщо синуси двох кутів x і y дорівнюють один одному, то справджується одне із співвідношень $x = y + 2\pi n$, або $x = -y + \pi(2n+1)$, $n \in Z$.

З іншого боку, якщо справджується одне із зазначених співвідношень $x = y + 2\pi n$, або $x = -y + \pi(2n+1)$, $n \in Z$, то $\sin x = \sin(y + 2\pi n) = \sin y$, або $\sin x = \sin(-y + 2\pi n + \pi) = \sin(\pi - y) = \sin y$.

Співвідношення $x = y + 2\pi n$, $x = -y + \pi(2n+1)$, $n \in Z$, можна записати за допомогою однієї рівності: $x = (-1)^k y + \pi k$, $k \in Z$. Справді, якщо $k = 2n$, то маємо перше співвідношення, при $k = 2n + 1$ — друге. ■

Відповідь. $x = (-1)^k y + \pi k$, $k \in Z$.

Аналогічно можна одержати умову рівності двох косинусів, двох тангенсів. Радимо зробити це самостійно.

Контрольні запитання

1°. Чому дорівнює значення виразу:
а) $\sin 124° + \sin 236°$; б) $\cos 137° + \cos 43°$?

2°. Як можна вивести формулу суми косинусів, використовуючи формулу суми синусів і формули зведення?

3. Як порівняти $\cos 3$ і $\cos 3{,}2$, користуючись формулою різниці косинусів двох аргументів?

4. Що більше: $\operatorname{tg} 3$ чи $\operatorname{tg} 4{,}8$?

5. Як перетворити суму синуса і косинуса двох аргументів на добуток?

Задачі

318°. Скориставшись формулами додавання, доведіть такі формули зведення:
1) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; 2) $\cos(270° + \alpha) = \sin\alpha$;
3) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$; 4) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$.

319. Скориставшись формулами додавання, обчисліть:
1) $\cos 75°$; 2) $\cos 105°$; 3) $\sin 15°$; 4) $\sin 75°$; 5) $\cos 165°$.

320. Обчисліть:
1°) $\sin 68°\cos 8° - \sin 8°\cos 68°$;
2°) $\cos 10°\cos 35° - \sin 10°\sin 35°$;
3) $\sin 54°\sin 24° - \sin 66°\cos 126°$;
4) $\cos 21°\cos 24° - \cos 69°\cos 66°$.

321°. Знайдіть:

1) $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, якщо $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$; $\cos\beta = \frac{24}{25}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

2) $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, якшо $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$; $\cos\beta = \frac{1}{3}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$;

3) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{5}$.

4) $\operatorname{tg}(45° - \alpha)$, якщо $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $180° < \alpha < 270°$.

322°. Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$; 2) $\cos\dfrac{3\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}+\sin\dfrac{3\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{8}$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$; 4) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$.

5) $\sin 15°+\operatorname{tg}30°\cos 15°$; 6) $\sin\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha\cos\alpha$.

323. Доведіть тотожність:

1°) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$;

2°) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cdot\cos\alpha$;

3) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

4) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

324*. Доведіть, що:

1) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2}{5}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{3}{7}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$;

2) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\operatorname{ctg}\beta=-2$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$.

325. Доведіть нерівність:

1) $\cos 75°+\cos 15°>1$; 2) $\cos 15°-\cos 45°<0{,}3$.

326. Доведіть:

1) якщо α і β — кути гострокутного трикутника, то $\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta>1$;

2) якщо α і β — гострі кути тупокутного трикутника, то $\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta<1$.

327. Синуси двох гострих кутів трикутника дорівнюють, відповідно, $\dfrac{20}{29}$ і $\dfrac{3}{5}$. Знайдіть косинус зовнішнього кута трикутника, що не є суміжним з двома даними кутами.

328. Тангенси трьох гострих кутів дорівнюють, відповідно, $\dfrac{3}{5}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{8}{19}$. Доведіть, що сума перших двох кутів на 45° перевищує третій кут.

329. Знайдіть найменший додатний період і побудуйте графік функції:

1) $y=\sin x\sin 2x-\cos x\cos 2x$;

2) $y=\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x$;

3) $y = 2\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin 2x + \cos\frac{\pi}{4}\cos 2x\right)$.

330. Знайдіть:

1°) $\sin 2\alpha$; $\cos 2\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2°) $\sin 50°$, якщо $\sin 25° = a$;

3°) $\cos\frac{\pi}{9}$, якщо $\cos\frac{\pi}{18} = a$;
4) $\mathrm{tg}\frac{2\pi}{9}$, якщо $\mathrm{tg}\frac{\pi}{9} = a$.

331. Знайдіть: $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, якщо:

1) $\cos\alpha = 0{,}6$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
2) $\sin\alpha = 0{,}6$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

332. Спростіть вираз:

1°) $\sin 10° \cos 10°$;
2°) $\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha$;

3°) $\cos^2\alpha - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$;
4) $\frac{\mathrm{tg}(45° - \alpha)}{1 - \mathrm{tg}^2(45° - \alpha)}$;

5°) $2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$;
6°) $\cos^4(45° - \alpha) - \sin^4(45° - \alpha)$;

7) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$;
8) $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$;

9) $\frac{1 - \cos 2\gamma}{1 + \cos 2\gamma}$;
10) $\frac{1 - \sin 2\gamma}{1 + \sin 2\gamma}$.

333. Спростіть вираз:

1) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin 2\alpha$;
2) $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta + (\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta) \cdot \mathrm{ctg}(\alpha + \beta)$;

3) $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$;
4) $\frac{1}{1 - \mathrm{tg}\alpha} - \frac{1}{1 + \mathrm{tg}\alpha}$;

5) $\frac{1}{1 + \mathrm{ctg}\alpha} - \frac{1}{1 - \mathrm{ctg}\alpha}$;
6) $\sin\alpha(1 + 2\cos 2\alpha)$;

7) $1 - 8\sin^2\beta \cdot \cos^2\beta$;
8) $0{,}125 - \cos^2 x + \cos^4 x$;

9) $\frac{\mathrm{tg}2\alpha \cdot \mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}2\alpha - \mathrm{tg}\alpha}$;
10) $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}2\alpha - \mathrm{tg}\alpha}$;
11) $\frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$;

12*) $\sqrt{2\sin 2\alpha + 2}$;
13) $\sqrt{2(1 + \cos 2\alpha)}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

14*) $\sqrt{1-\sin\alpha}-\sqrt{1+\sin\alpha},\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

334. Доведіть, що:

1) $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos\alpha=1$; 2) $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha=1$;

3) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 4) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

5) $\sin 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$; 6) $(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)\sin 2\alpha=2\cos 2\alpha$;

7) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$; 8) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

335*. Обчисліть:

1) $\cos\dfrac{\pi}{5}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{5}$; 2) $\cos 20°\cdot\cos 40°\cdot\cos 60°\cdot\cos 80°$;

3) $\cos\dfrac{\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{7}$; 4) $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{18}}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\dfrac{\pi}{18}}$.

336. Дано функцію:

1) $y=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+(\sin x-\cos x)^2$;

2) $y=2\cos 2x+\sin^2 x$.

Знайдіть її найменше і найбільше значення, найменший додатний період, побудуйте її графік.

337*. 1) Косинус кута при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 0,8. Знайдіть синус і косинус кута при вершині цього трикутника.

2) Косинус кута при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює $\dfrac{7}{9}$. Знайдіть синус і косинус кута при основі цього трикутника.

3) Знайдіть найменше значення площі прямокутного трикутника, в якого висота, що проведена до гіпотенузи, дорівнює h.

338. Дано функцію:

1) $y=\sin x\cos x$; 2*) $y=2\sin^2 2x+\cos^2 2x$;

3*) $y=\sin 2x(\operatorname{ctg} x-2\operatorname{ctg} 2x)$.

Знайдіть найбільше і найменше значення функції та її найменший додатний період. Побудуйте її графік.

339°. Обчисліть, не користуючись обчислювальними засобами:

1) $\sin\frac{7\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}$; 2) $\sin\frac{11\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{12}$; 3) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$;

4) $\cos\frac{7\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}$; 5) $\cos 75°\cdot\cos 105°$; 6) $\sin 75°\cdot\sin 15°$.

340. Спростіть вираз:

1°) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}$; 2°) $\frac{2(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}$;

3*) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$; 4) $\cos^2\alpha-\sin^2 2\alpha$.

341. Доведіть, що:

1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin 2\alpha=\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 3\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha-\cos 3\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha$;

3) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

4) $(\sin 2\alpha+\sin 4\alpha)^2+(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)^2=4\cos^2\alpha$;

5) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=2\operatorname{tg}\alpha$; 6) $\frac{1+\operatorname{ctg}2\alpha}{1-\operatorname{ctg}2\alpha}=\frac{\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}$.

---

342. Подайте даний вираз у вигляді добутку або частки:

1) $\sqrt{2}+2\cos\alpha$; 2) $\sqrt{3}-2\cos\alpha$; 3) $\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha$; 4) $1+\operatorname{tg}\alpha$.

343. Зменшіть степінь тригонометричної функції у виразі:

1°) $2\cos^2 x$; 2) $2\cos^2 x\cos 2x$; 3°) $2\sin^2 2x$; 4°) $\cos^2 4x$.

344*. Знайдіть умову, за якої дорівнюють один одному:

1) косинуси двох кутів α і β; 2) тангенси двох кутів α і β.

345. Доведіть, що:

1) $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$; 2) $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$;

3) $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}=2\cos\frac{x}{2}$, якщо $0\le x\le\frac{\pi}{2}$;

4) $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=2\sin\frac{x}{2}$, якщо $0\le x\le\frac{\pi}{2}$;

5) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$; 6) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

346*. Доведіть тотожність, що коли α, β, γ — кути трикутника, то:

1) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

2) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\alpha = 1$;

3) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$;

4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

347*. Тангенси двох кутів трикутника дорівнюють, відповідно, 1,5 і 5. Знайдіть третій кут трикутника.

348*. Дано функцію:

1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin x - \cos x$.

Знайдіть найбільше і найменше значення функції та її найменший додатний період. Побудуйте її графік.

Вправи для повторення

349. Знайдіть значення виразу $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$, якщо α набуває таких значень: $0, \frac{\pi}{2}, -\pi, -\frac{3\pi}{2}$.

350. Знайдіть основний період функції:

1) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}x + 2$; 2) $y = -3\sin 5x$; 3) $y = 3\cos\frac{x}{4}$.

351. Знайдіть множину значень функції:

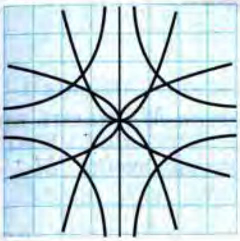
1) $y = 0{,}1\operatorname{tg} 10x$; 2) $y = 10\sin 0{,}1x$.

352. Розв'яжіть нерівність:

1) $x\operatorname{tg} 3 < \operatorname{ctg} 6$; 2) $x\operatorname{tg} 4 > \operatorname{ctg} 5$.

Підсумок

Назва формули	Формули
Формули додавання	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$ $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta};\ \mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$
Формули подвійного аргументу	$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$ $\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$
Формули зниження степеня	$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2};\ \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}.$
Формули половинного аргументу	$\left\|\cos\frac{\alpha}{2}\right\|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\ \left\|\sin\frac{\alpha}{2}\right\|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$ $\left\|\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right\|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$
Формули універсальної підстановки	$\sin\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\ \cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$ $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$
Формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$ $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\ \mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$



§17. Найпростіші тригонометричні рівняння і нерівності

Найпростішими тригонометричними рівняннями називають рівняння: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Окремі з них розв'язувались у попередніх параграфах. Головною особливістю тригонометричних рівнянь є те, що вони можуть мати безліч коренів, з чим пов'язані певні труднощі в пошуку і навіть у запису їхніх розв'язків. Навчити подоланню цих труднощів є важливим завданням даного параграфа.

1. Рівняння $\sin x = a$

Рівняння $\sin x = a$ будемо розв'язувати, користуючись тригонометричним колом або графіком функції $y = \sin x$. Сутність першого способу, пов'язаного з тригонометричним колом, полягає у тому, щоб записати всі числа, яким відповідають точки тригонометричного кола з ординатою a. Розглянемо наступний приклад.

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

☐ Знайдемо спочатку на тригонометричному колі точки з ординатою $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Таких точок, очевидно, дві: M_1 і M_2 (рис. 341). Вони симетричні відносно осі ординат. Знайдемо числа, яким відповідають ці точки. Оскільки $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то числу $\frac{\pi}{3}$ відповідає точка M_1, а

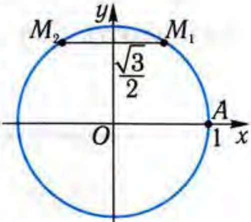


Рис. 341

числу $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ — точка M_2, їй симетрична відносно осі ординат.

Справді, $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Таким чином, усі числа, яким відповідає точка M_1, мають вигляд $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$, а всі числа, яким відповідає точка M_2, — $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. Тобто множина розв'язків даного рівняння складається з двох серій чисел: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. ■

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Другий спосіб розв'язування тригонометричного рівняння $\sin x = a$ базується на застосуванні графіка функції $y = \sin x$. Проілюструємо його на тому самому прикладі.

□ Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 342). Вони перетинаються у безлічі точок. Завдання полягає в тому, щоб знайти абсциси цих точок. На проміжку, довжина якого дорівнює найменшому додатному періоду функції $y = \sin x$, тобто числу 2π, функція набуває усіх своїх значень. Значення $\frac{\sqrt{3}}{2}$ на відрізку $[0; 2\pi]$ вона набуває у двох точках: $x = \frac{\pi}{3}$ і $x = \frac{2\pi}{3}$, оскільки $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Отже, враховуючи, що періоди синуса дорівнюють $2\pi n$, $n \in Z$, $n \neq 0$, множину розв'язків даного

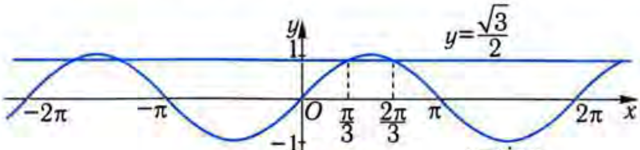


Рис. 342

рівняння можна записати у вигляді двох серій чисел: $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$. ■

Наведені способи розв'язання рівняння $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ відрізняються лише геометричним тлумаченням коренів цього рівняння.

Запис усіх розв'язків рівняння $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ став можливим, оскільки нам вдалось вказати два корені цього рівняння, яким відповідають на тригонометричному колі (чи на графіку) дві різні точки. Якщо розв'язувати рівняння $\sin x=0{,}3$, то ми поки що не можемо цього зробити, оскільки не знаємо способу запису чисел, синус яких дорівнює 0,3. Таким чином, для розв'язування рівняння $\sin x = a$ ($|a| < 1$) потрібно навчитись знаходити принаймні два числа, синус яких дорівнює a, і яким відповідають на тригонометричному колі дві різні точки.

Розглянемо геометричну ілюстрацію розв'язків рівняння $\sin x = a$. Для цього побудуємо графіки функцій $y = \sin x$, $y = a$ (рис. 343). Якщо $|a| > 1$, то ці графіки не перетинаються, тобто дане рівняння не має розв'язків. Якщо $|a| \le 1$, то пряма $y = a$ безліч разів перетинає графік функції $y = \sin x$, тобто рівняння $\sin x = a$ має безліч розв'язків. Зокрема, якщо $a = 1$, то точки перетину мають вигляд $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$; при $a = -1$ графіки перетинаються в точках $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

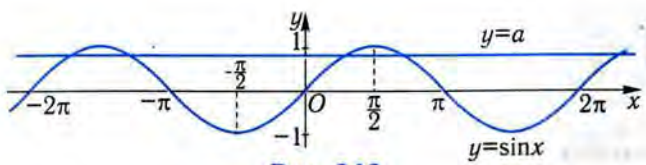


Рис. 343

Нехай $|a|\le 1$. **На відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ функція $y = \sin x$ зростає і набуває усіх значень від –1 до 1.** При кожному $a\in[-1, 1]$ пряма $y = a$ перетинає на цьому відрізку графік функції $y = \sin x$ лише в одній точці, тому рівняння $\sin x = a$ має на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

один корінь. Цей корінь називають ***арксинусом числа a*** і позначають так: $x = \arcsin a$.

Арксинусом числа a називається таке число з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a.

Таким чином, запис $x = \arcsin a$ означає: 1) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ і 2) $\sin x = a$.

Звертаємо увагу на те, що $\arcsin a$ визначено тільки для $-1 \le a \le 1$.

Арксинуси довільних конкретних чисел із проміжку $[-1; 1]$ можна знаходити наближено за допомогою математичних таблиць чи калькуляторів.

Приклад 2. Обчислити: 1) $\arcsin\frac{1}{2}$; 2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\arcsin 0{,}6$.

□ 1) Оскільки $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ і $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Підкреслимо, що хоча $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, але $\arcsin\frac{1}{2} \ne \frac{5\pi}{6}$, бо $\frac{5\pi}{6}$ міститься поза межами проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Оскільки $-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ і $-\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

Зверніть увагу на те, що $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Послуговуючись калькулятором, знайдемо: $\arcsin 0{,}6 \approx 0{,}644$. ■

Відповідь. 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $-\frac{\pi}{4}$; 3) $\approx 0{,}644$.

Запишемо у загальному вигляді розв'язок рівняння $\sin x = a$, $-1 < a < 1$. На тригонометричному колі містяться дві точки з ординатою a (рис. 344, 345). Одним з чисел, якому відповідає точка M_1, є число $\arcsin a$, а числу $(\pi - \arcsin a)$ відповідає точка M_2. Таким

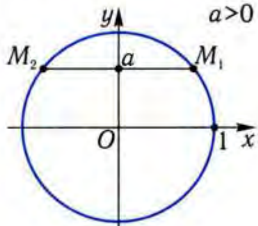


Рис. 344

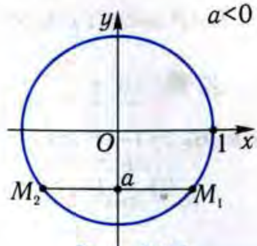


Рис. 345

чином, враховуючи, що числа $2\pi n$, $n \in Z$, $n \neq 0$, є періодами функції $y = \sin x$, розв'язки рівняння $\sin x = a$ при $|a| < 1$ мають такий вигляд:

$$x = \arcsin a + 2\pi n,\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Обидві ці формули можна записати у скороченій формі:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z.$$

Одержана формула дає ті самі значення x, що і дві попередні формули, якщо розглянути випадки $k = 2n$, $k = 2n + 1$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Справді, при $k = 2n$ маємо: $x = \left(-1\right)^{2n} \arcsin a + \pi \cdot 2n = \arcsin a + 2\pi n$; при $k = 2n + 1$ маємо: $x = (-1)^{2n+1} \arcsin a + \pi \cdot (2n + 1) = (-1)^{2n} \cdot (-1) \cdot \arcsin a + 2\pi n + \pi = \pi - \arcsin a + 2\pi n$.

Повернемось до розв' язків рівняння $\sin x = 0{,}3$. Їх можна записати так:

$$x = \arcsin 0{,}3 + 2\pi k,\ \ k \in Z\ ,$$

$$x = \pi - \arcsin 0{,}3 + 2\pi k\ , k \in Z$$

$$\text{або}\ \ x = (-1)^k \arcsin 0{,}3\ \ + \pi k,\ k \in Z.$$

Розв'язки рівнянь $\sin x = 1$ і $\sin x = -1$ було знайдено вище, а саме:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z\ .$$

Знайдена загальна формула дає ті самі результати, тобто застосовна і при $|a| = 1$.

Розв'язки рівняння $\sin x = 0$, за вказаною формулою, набувають вигляду: $x = \pi n$, $n \in Z$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння: 1) $\sin x = 0{,}7$; 2) $\sin 2x = -0{,}8$.

□ 1) Розв'язок має вигляд: $x = (-1)^n \arcsin 0{,}7 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

2) $2x = (-1)^n \arcsin(-0{,}8) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\ x = \frac{1}{2}\cdot(-1)^n \arcsin(-0{,}8) + $
$+ \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$. ■

Відповідь. 1) $(-1)^n \arcsin 0{,}7 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\frac{1}{2}\cdot(-1)^n \arcsin(-0{,}8) + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Число $\arcsin a$ має наступні важливі властивості.

Властивість 1. $\sin(\arcsin a) = a$.

Ця рівність випливає безпосередньо з означення арксинуса.

Властивість 2. $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

□ Для його доведення, згідно з означенням арксинуса, слід показати:

1) $\sin(-\arcsin a) = -a$;

2) $-\frac{\pi}{2} \le -\arcsin a \le \frac{\pi}{2}$.

Перша рівність є наслідком непарності синуса і означення арксинуса. Друге співвідношення безпосередньо випливає із означення арксинуса. ■

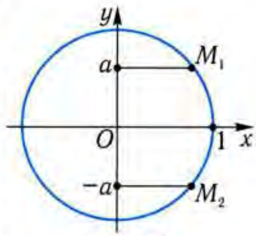


Рис. 346

Тепер розв'язки рівняння $\sin 2x = -0{,}8$ з прикладу 3 можна записати у вигляді $x = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}\arcsin 0{,}8 + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Властивість 2 має просту геометричну інтерпретацію (рис. 346). Точки M_1 і M_2 відповідають числам $\arcsin a$ і $\arcsin(-a)$. Ці числа є протилежними, оскільки відповідні дуги симетричні відносно осі абсцис.

Практично важливим є вміння виділяти ті розв'язки тригонометричного рівняння, які задовольняють певну умову.

Приклад 4. Дано рівняння $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Знайти:

1) усі розв'язки рівняння;
2) його найбільший від'ємний корінь;
3) розв'язки, які належать проміжку $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$;
4) розв'язки, які належать проміжку $(-\pi; 4\pi)$;
5) розв'язки, які задовольняють умову $\cos x > 0$.

☐ 1) Усі розв'язки рівняння мають вигляд:

$$x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k = (-1)^{k+1} \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k =$$

$$= (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$$

2) Усі розв'язки рівняння можна також записати у вигляді двох серій чисел: $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$ (рис. 347). Найбільший від'ємний корінь можна одержати при $n = -1$. Відповідно маємо: $x = \frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$. Більшим із них є число $-\frac{\pi}{4}$.

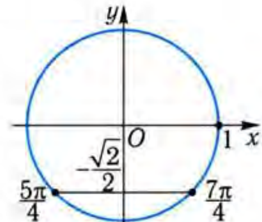


Рис. 347

3) Проміжку $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ належить корінь $\frac{5\pi}{4}$.

4) Щоб знайти ті розв'язки рівняння, які належать проміжку $(-\pi; 4\pi)$, необхідно розв'язати відносно n нерівності: $-\pi < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n < 4\pi$, $-\pi < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n < 4\pi$. Послідовно матимемо: $-\frac{9\pi}{4} < 2\pi n < \frac{11\pi}{4}$, $-\frac{11\pi}{4} < 2\pi n < \frac{9\pi}{4}$, звідси $-\frac{9}{8} < n < \frac{11}{8}$, $-\frac{11}{8} < n < \frac{9}{8}, n \in Z$.

Отже, для обох серій n може набувати значень -1, 0, 1 і тільки цих значень. Тому шукані розв'язки знайдемо, якщо підставимо ці значення n у вирази для загальних розв'язків рівняння. Матимемо: $-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$.

5) Умову $\cos x > 0$ задовольняє лише друга серія: $x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$, оскільки лише ці числа відповідають точкам тригонометричного кола з додатними абсцисами. ■

Відповідь. 1) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$; 2) $-\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{5\pi}{4}$;

4) $-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$; 5) $\frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$.

Розв'язання складніших тригонометричних рівнянь зводиться до найпростіших за допомогою замін змінних, алгебраїчних перетворень, тригонометричних формул.

Приклад 5. Розв'язати рівняння: $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$.

□ Це рівняння є квадратним відносно $\sin x$. Увівши заміну $\sin x = t$, дістанемо рівняння:

$$3t^2 - 5t - 2 = 0.$$

Корені цього рівняння $t = 2$ і $t = -\frac{1}{3}$. Рівняння $\sin x = 2$ розв'язків не має. Розв'язки рівняння $\sin x = -\frac{1}{3}$ мають такий вигляд:

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in \mathrm{Z}. ■$$

Відповідь. $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in \mathrm{Z}$.

✓ Контрольні запитання

1°. Чому дорівнює:
а) $\arcsin 0{,}5$; б) $\arcsin(-0{,}5)$; в) $\arcsin 1$?

2°. Чи має зміст запис:
а) $\arcsin 0{,}3$; б) $\arcsin(-0{,}3)$; в) $\arcsin 1{,}3$;
г) $\arcsin(-1{,}5)$; ґ) $\arcsin \pi$; д) $\arcsin \sqrt{2}$?

3°. Чи можна з рівності $\sin \pi = 0$ зробити висновок, що $\arcsin 0 = \pi$?

4°. Чи може рівняння $\sin x = a$ мати:
а) тільки один розв'язок; б) тільки два розв'язки?

5°. Чи може $\arcsin a$ набувати значень:
а) $\frac{\pi}{6}$; б) $-\pi$; в) $-\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$; ґ) $\sqrt{2}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) 1,5?

6. При яких значеннях a справджується рівність $\sin(\arcsin a) = a$?

7. Скільки розв'язків рівняння $\sin x = \dfrac{1}{2}$ міститься на відрізку $[0; 8\pi]$?

8. Як із загального розв'язку $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in Z$, рівняння $\sin x = \dfrac{1}{2}$ знайти найменший додатний корінь цього рівняння?

2. Рівняння $\cos x = a$

Рівняння $\cos x = a$, так само як і рівняння $\sin x = a$, будемо розв'язувати, користуючись тригонометричним колом або графіком функції $y = \cos x$. Потрібно навчитись записувати всі розв'язки цього рівняння. Необхідні міркування аналогічні тим, що проводились при розв'язанні рівняння $\sin x = a$, тому наведемо їх стисло.

Якщо $|a| > 1$, то рівняння $\cos x = a$ не має розв'язків. При $a = 1$ пряма $y = a$ перетинає графік функції $y = \cos x$ в точках $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. При $a = -1$ пряма $y = a$ перетинає графік функції $y = \cos x$ в точках $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. При $|a| < 1$ рівняння $\cos x = a$ також має нескінченну кількість розв'язків.

На відрізку $[0, \pi]$ функція $y = \cos x$ спадає і набуває всіх значень від 1 до –1 (рис. 348). При довільному $a \in [-1; 1]$ пряма $y = a$ перетинає на цьому відрізку графік функції $y = \cos x$ в одній і тільки одній точці, тому рівняння $\cos x = a$ має на відрізку $[0, \pi]$ тільки один корінь. Цей корінь називають ***арккосинусом числа a*** і позначають так: $x = \arccos a$.

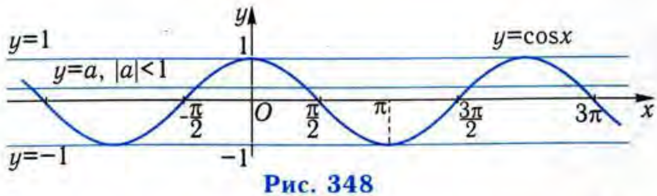


Рис. 348

Арккосинусом числа a називається таке число з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює a.

Таким чином, запис $x = \arccos a$ означає: 1) $0 \le x \le \pi$ і 2) $\cos x = a$. Як і $\arcsin a$, $\arccos a$ визначено тільки для $-1 \le a \le 1$.

Приклад 6. Обчислити: 1) $\arccos\frac{1}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) arccos (–0,2).

□ 1) $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, оскільки $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ і $0\le\frac{\pi}{3}\le\pi$.

2) Зі співвідношень $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ і $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ маємо: $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, тобто $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$, бо $0\le\frac{5\pi}{6}\le\pi$.

! **Зверніть увагу на те, що** $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Послуговуючись калькулятором, маємо: arccos(–0,2) ≈ 1,77. ■

Відповідь. 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{5\pi}{6}$; 3) ≈ 1,77.

Запишемо у загальному вигляді розв'язки рівняння $\cos x = a$, $-1<a<1$. На тригонометричному колі є дві точки M_1 і M_2 з абсцисою a (рис. 349, 350). Одним із чисел, яким відповідає точка M_1, є число $\arccos a$, а одним із чисел, яким відповідає точка M_2, є число $-\arccos a$. Усі числа, яким відповідають точки M_1 і M_2, мають вигляд:

$$\arccos a + 2\pi n \text{ і } -\arccos a + 2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

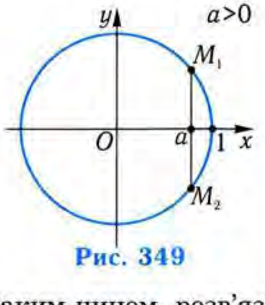


Рис. 349

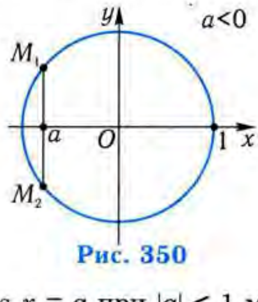


Рис. 350

Таким чином, розв'язки рівняння $\cos x = a$ при $|a|<1$ можна знайти за формулою:

$$x=\pm\arccos a + 2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

Розв'язки рівнянь $\cos x = 1$ і $\cos x = -1$ були знайдені вище, а саме:

$$x = 2\pi n, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Загальна формула дає такі самі результати при $|a| = 1$.

Розв'язки рівняння $\cos x = 0$ за вказаною формулою набувають вигляду: $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. Але їх можна записати простіше: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; адже числам, записаним двома останніми формулами, відповідають ті самі дві точки $P_{\frac{\pi}{2}}$ і $P_{-\frac{\pi}{2}}$ тригонометричного кола (рис. 351).

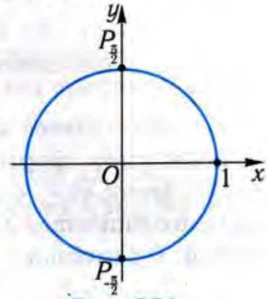


Рис. 351

Приклад 7. Розв'язати рівняння: 1) $\cos x = 0{,}8$; 2) $\cos 3x = -0{,}5$.

□ 1) Розв'язок має вигляд:

$$x = \pm \arccos 0{,}8 + 2\pi n, \; n \in Z.$$

2) Оскільки $\cos\frac{2\pi}{3} = -0{,}5$, $0 \le \frac{2\pi}{3} \le \pi$, то $\arccos(-0{,}5) = \frac{2\pi}{3}$, і $3x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$, або $x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \boldsymbol{Z}$. ■

Відповідь. 1) $\arccos 0{,}8 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \boldsymbol{Z}$.

Скориставшись результатами розв'язування прикладів 2, 6, 7, наведемо таблицю значень $\arcsin x$ і $\arccos x$ для найбільш вживаних значень аргументу.

Таблиця 30

Вираз \ Значення x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Число arccos a має наступні важливі властивості.

Властивість 1. $\cos(\arccos a) = a$.

Ця рівність випливає безпосередньо з означення арккосинуса.

Властивість 2. $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

□ Для її доведення, згідно з означенням арккосинуса, слід показати:

1) $\cos(\pi - \arccos a) = -a$; 2) $0 \le \pi - \arccos a \le \pi$. Перша рівність є наслідком формул зведення і означення арккосинуса: $\cos(\pi - \arccos a) = -\cos(\arccos a) = -a$. Друге співвідношення безпосередньо випливає з означення арккосинуса і властивостей нерівностей: $0 \le \arccos a \le \pi$, $-\pi \le -\arccos a \le 0$, $0 \le \pi - \arccos a \le \pi$. ■

Властивість 2 має просту геометричну інтерпретацію (рис. 352). Точки M_1 і M_2 відповідають числам $\arccos a$ і $\arccos(-a)$, ці точки симетричні відносно осі ординат, радіанні міри відповідних дуг доповнюють одна одну до π, тому $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

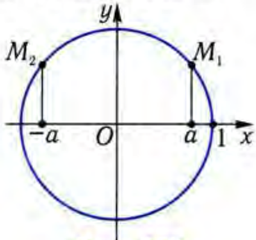


Рис. 352

Приклад 8. Розв'язати рівняння: $\dfrac{2\cos x + 1}{\sqrt{\sin x}} = 0$.

□ Рівняння рівносильне системі $\begin{cases} 2\cos x + 1 = 0, \\ \sin x > 0. \end{cases}$ Розв'яжемо рівняння $2\cos x + 1 = 0$ або $\cos x = -\dfrac{1}{2}$. Застосовуючи властивість 2, матимемо: $x = \pm\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm\left(\pi - \arccos\dfrac{1}{2}\right) + 2\pi n =$

$= \pm\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2\pi n = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Тепер із цих розв'язків відберемо ті, що задовольняють нерівність $\sin x > 0$. Скористаємось тригонометричним колом. Розв'язки рівняння зображаються двома точками тригонометричного кола (рис. 353). Але лише одній із них (тій, що лежить у другій чверті)

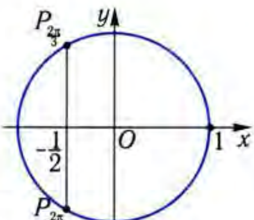


Рис. 353

відповідають числа x, для яких $\sin x > 0$, а саме, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. ■

Відповідь. $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Застосування розглянутих у § 16 тригонометричних формул дає змогу звести розв'язання більш складних тригонометричних рівнянь до розв'язання найпростіших.

Приклад 9. Розв'язати рівняння: $\cos x + \cos 3x = 4 \cos 2x$.

□ Перетворивши ліву частину згідно з формулою суми косинусів, дістанемо

$$2 \cos 2x \cos x = 4 \cos 2x.$$

Звідси

$$\cos 2x (\cos x - 2) = 0.$$

Тоді $\cos 2x = 0$ чи $\cos x = 2$. Друге рівняння розв'язків не має, а розв'язки першого мають такий вигляд:

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathrm{Z}. \ ■$$

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathrm{Z}.$

✓ Контрольні запитання

1°. Чому дорівнює:

а) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) arcos (–1); г) arcos 0?

2°. Чи має зміст запис:

а) arccos 0,3; б) arccos (–0,3); в) arccos 1,3;

г) arccos (–1,5); ґ) arccos π; д) arccos $\sqrt{2}$?

3°. Який знак має число arccos(–0,3)?

4°. Чи може arccos a набувати значень:

а) $-\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) $\frac{4\pi}{3}$; ґ) $\sqrt{3}$; д) –1; е) 3,5?

5. При яких значеннях a справджується рівність $\cos(\arccos a) = a$?

6. Скільки розв'язків рівняння $\cos x = \dfrac{1}{2}$ міститься на відрізку $[0; 7\pi]$?

7. Як із загального розв'язку $x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, рівняння $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ одержати найбільший від'ємний корінь цього рівняння?

8. Якою заміною: $\sin x = z$ чи $\cos x = z$ — зручніше розв'язувати рівняння:

а) $2\sin^2 x - \cos^2 x + 3\sin x = 0$; б) $2\sin^2 x - \cos^2 x + 3\cos x = 0$?

3. Рівняння tg $x = a$ і ctg $x = a$

Розглянемо рівняння tg $x = a$. Оскільки множиною значень тангенса є множина всіх дійсних чисел, то це рівняння при кожному a має розв'язок. Пряма $y = a$ перетинає графік функції $y = \operatorname{tg} x$ безліч разів (рис. 354).

На проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає і набуває кожного свого значення лише один раз. Тому рівняння tg $x = a$ на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ має тільки один корінь. Цей корінь називають ***арктангенсом числа a*** і позначають так: $x = \operatorname{arctg} a$.

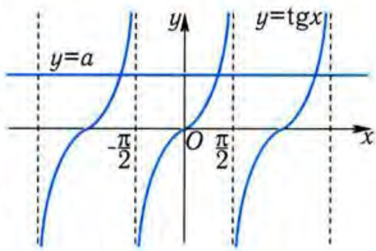


Рис. 354

Арктангенсом числа a **називається таке число з проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a.**

Таким чином, запис $x = \operatorname{arctg} a$ означає: 1) $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ і 2) $\operatorname{tg} x = a$.

! **Звертаємо увагу на те, що arctg a визначено для всіх дійсних a.**

Оскільки функція $y = \operatorname{tg} x$ періодична з періодами $\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\ n \neq 0$, то всі корені рівняння tg $x = a$ знаходять за формулою:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Приклад 10. Обчислити: 1) $\mathrm{arctg}\sqrt{3}$; 2) $\mathrm{arctg}(-1)$.

□ 1) Оскільки $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ і $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$; то $\mathrm{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

2) Оскільки $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = -1$ і $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, то $\mathrm{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. ■

Відповідь. 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $-\frac{\pi}{4}$.

! Зверніть увагу на те, що $\mathrm{arctg}(-1) = -\mathrm{arctg}1$.

Приклад 11. Розв'язати рівняння: 1) $\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = -2$;
3) $\mathrm{ctg}\,x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

□ 1) $x = \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n$, або $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$.

2) $\frac{x}{2} = \mathrm{arctg}(-2) + \pi n$, $n \in Z$, $x = 2\,\mathrm{arctg}(-2) + 2\pi n$, $n \in Z$.

3) Якщо $\mathrm{ctg}\,x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $\mathrm{tg}\,x = -\sqrt{3}$, і навпаки. Тому ці рівняння — рівносильні. Звідси $x = \mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n =$
$= -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$, бо $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$ і $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$. ■

Відповідь. 1) $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$; 2) $2\,\mathrm{arctg}(-2) + 2\pi n$, $n \in Z$; 3) $-\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$.

Розв'язання рівняння ctg $x = a$ можна звести до розв'язання рівняння $\mathrm{tg}x = \frac{1}{a}$ при $a \neq 0$, а можна скористатися спеціальною формулою.

Розглянемо рівняння ctg $x = a$. Оскільки множиною значень котангенса є множина всіх дійсних чисел, то це рівняння при кожному a має розв'язок. Пряма $y = a$ перетинає графік функції $y = \mathrm{ctg}\,x$ безліч разів (рис. 355).

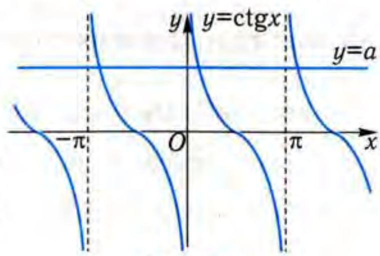


Рис. 355

На проміжку (0; π) функція $y = \text{ctg}\, x$ спадає і набуває кожного свого значення один раз. Тому рівняння $\text{ctg}\, x = a$ при кожному a на проміжку (0; π) має лише один корінь. Цей корінь називають ***арккотангенсом числа a*** і позначають так: $x = \text{arcctg}\, a$.

***Арккотангенсом числа a* називається таке число з проміжку (0; π), котангенс якого дорівнює *a*.**

Таким чином, запис $x = \text{arcctg}\, a$ означає: 1) $0 < x < \pi$ і 2) $\text{ctg}\, x = a$.

! Звертаємо увагу на те, що arcctg *a* визначено для всіх дійсних *a*.

Оскільки функція $y = \text{ctg}\, x$ періодична з періодами πn, $n \in Z$, $n \neq 0$, то всі корені рівняння $\text{ctg}\, x = a$ знаходять за формулою:

$$x = \text{arcctg}\, a + \pi n,\ n \in Z.$$

Приклад 12. Розв'язати рівняння: 1)$\text{ctg}\, x = -1$;
2) $(\text{tg}\, x + 2)(\sqrt{3}\,\text{ctg}\, x - 1) = 0$.

□ 1) Оскільки $\text{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1$ і $0 < \frac{3\pi}{4} < \pi$, то $\text{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$. Тому $x = \text{arcctg}(-1) + \pi n = \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

! Звертаємо увагу на те, що $\text{arcctg}(-1) = \pi - \text{arcctg}\, 1$.

2) Наслідком даного рівняння є сукупність рівнянь: $\text{tg}x + 2 = 0$ і $\sqrt{3}\,\text{ctg}\, x - 1 = 0$. Розв'яжемо перше рівняння сукупності: $\text{tg}x = -2$; $x = \text{arctg}(-2) + \pi n$, $n \in Z$. Встановимо, чи є знайдені числа коренями даного рівняння. Оскільки при цих значеннях x вираз у других дужках має зміст (адже з рівності $\text{tg}\, x = -2$ випливає, що $\text{ctg}\, x = -\frac{1}{2}$), то знайдені значення x є коренями даного рівняння. Розв'яжемо друге рівняння сукупності: $\text{ctg}\, x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \text{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$. При цих значеннях x вираз у перших дужках має зміст, тому знайдені значення x є коренями даного рівняння. ■

Відповідь. 1) $\frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; 2) $\text{arctg}\,(-2) + \pi n$; $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Скориставшись результатами розв'язування прикладів 10 – 12 й ін., складемо таблицю значень arctg x і arcctg x для найбільш уживаних значень аргументу.

Таблиця 31

Значення x / Вираз	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$
arctg x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$
arcctg x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

Числа arctg a і arcctg a мають наступні важливі властивості.

Властивість 1. $\mathbf{tg\,(arctg\,}a) = a$; $\mathbf{ctg\,(arcctg\,}a) = a$.

Ці рівності випливають безпосередньо з означень арктангенса і арккотангенса.

Властивість 2. $\mathbf{arctg\,}(-a) = -\mathbf{arctg\,}a$; $\mathbf{arcctg\,}(-a) = \pi - \mathbf{arcctg\,}a$.

□ Доведемо другу з цих рівностей. Для цього, згідно з означенням арккотангенса, слід показати:

1) $\mathrm{ctg}(\pi - \mathrm{arcctg}\,a) = -a$;

2) $0 < \pi - \mathrm{arc}\,ctga < \pi$.

Перша рівність є наслідком формул зведення і означення арккотангенса: $\mathrm{ctg}(\pi - \mathrm{arcctg}\,a) = -\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\,a) = -a$. Друге співвідношення безпосередньо випливає з означення арккотангенса і властивостей нерівностей: $0 < \mathrm{arcctg}a < \pi$, $-\pi < -\mathrm{arcctg}a < 0$, $0 < \pi - \mathrm{arcctg}a < \pi$.

Перша рівність доводиться аналогічно. ■

Наведені рівності мають просту геометричну інтерпретацію. Точки M_1 і M_2 на лінії тангенсів (рис. 356) відповідають числам arctg a і arctg $(-a)$. Ці числа є протилежними, оскільки відповідні дуги на тригонометричному колі симетричні відносно осі абсцис.

Точки M_1 і M_2 на лінії котангенсів (рис. 357) відповідають числам arcctg a і arcctg $(-a)$. Ці точки симетричні відносно осі ординат, радіанні міри відповідних дуг на тригонометричному колі доповнюють одна одну до π, тому arcctg $(-a) = \pi -$ arcctg a.

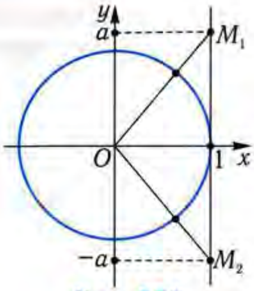


Рис. 356

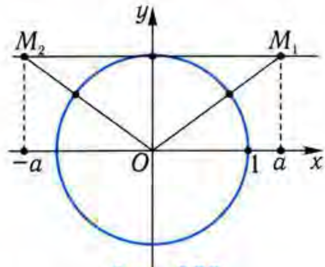


Рис. 357

Приклад 13. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x-1}\text{ctg}x = 0.$

☐ Область визначення даного рівняння визначається співвідношенням: $x - 1 \geq 0$, $x \neq \pi n, n \in Z$. Його наслідком є сукупність рівнянь: $\sqrt{x-1} = 0, \text{ctg}x = 0$, розв'язками яких є відповідно числа: $x = 1, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. Остання серія розв'язків належить області визначення рівняння, тобто задовольняє умову $x \geq 1$, лише при цілих невід'ємних значеннях n. ■

Відповідь. $x = 1, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n = 0,1,2,\ldots$.

Приклад 14. Розв'язати рівняння: $\text{tg}\,x + 3\text{ctg}\,x = 2\sqrt{3}$.

☐ Позначимо tg x через y. Тоді $\text{ctg}\,x = \frac{1}{\text{tg}\,x} = \frac{1}{y}$, і рівняння набуває вигляду: $y + \frac{3}{y} = 2\sqrt{3}$ або $y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$.

Знайдене рівняння має один корінь $\sqrt{3}$. Розв'язком рівняння $\text{tg}\,x = \sqrt{3}$ є $x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ \ n \in Z$. ■

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ \ n \in Z$.

У рівнянні

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$

кожен доданок має степінь 2. Таке рівняння називається ***однорідним рівнянням*** другого степеня відносно sin x і cos x. Взагалі, ***рівняння з невідомими u і v, в якому кожен з доданків має один і той самий степінь відносно невідомих, називається однорідним відносно u і v.***

Такі рівняння розв'язуються діленням на старший степінь косинуса чи синуса.

Приклад 15. Розв'язати рівняння:

$$4\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 10\cos^2 x = 3.$$

□ Замінимо 3 на $3(\sin^2 x + \cos^2 x)$:

$$\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 7\cos^2 x = 0.$$

Дістали однорідне рівняння другого степеня. Розділимо обидві його частини на $\cos^2 x$.

! Втрати розв'язків при цьому не буде, оскільки cos x і sin x не можуть одночасно дорівнювати нулю.

Отже,

$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 8\frac{\sin x}{\cos x} + 7 = 0$, $\mathrm{tg}^2 x - 8\mathrm{tg}\, x + 7 = 0$; $\mathrm{tg}\, x = 1$ або $\mathrm{tg}\, x = 7$;

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ x = \mathrm{arctg}\, 7 + n\pi,\ n \in \mathrm{Z}. \ ■$$

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + n\pi$, $\mathrm{arctg}\, 7 + n\pi$, $n \in \mathrm{Z}$.

✓ Контрольні запитання

1°. Чому дорівнює:

а) arctg 1; б) arctg (–1); в) $\mathrm{arcctg}\sqrt{3}$;

г) $\mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$; ґ) arctg 0; д) arcctg 0?

2°. Чи можна з рівності tg π = 0 зробити висновок, що arctg 0 = π?

3°. Який знак має число:

а) arctg(–2,3); б) arcctg(–2,3)?

4°. Чи може arctg a набувати значень:

а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $-\pi$; г) $-\frac{\pi}{3}$; ґ) $\sqrt{2}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) 1,5?

5°. Чи може arcctg a набувати значень:

а) $\frac{\pi}{2}$; б) 0; в) $-\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{3\pi}{4}$; ґ) 4; д) –1; е) π?

6. При яких значеннях a справджується рівність:

а) tg (arctg a) = a; б) arctg (tg a) = a?

7. Чи може рівняння $\text{ctg}\, x = a$:
   а) мати рівно один розв'язок;
   б) мати рівно два розв'язки;
   в) не мати жодного розв'язку?
8. Скільки розв'язків рівняння $\text{tg}\, x = 1$ міститься на відрізку $[0; 5\pi]$?
9. Чому дорівнює найменший додатний корінь рівняння $\text{tg}\, x = -2$?
10. Чи однорідні відносно $\sin x$ і $\cos x$ такі рівняння:
    а) $\sin x + 3\cos x = 0$; б) $\sin^2 x - 2\cos^2 x + 3\sin x\cos x = 0$;
    в) $\sin^2 x + 2\sin x - \cos^2 x = 0$; г) $\sin^3 x - 3\sin^2 x\cos x + \cos^3 x = 0$;
    ґ) $4\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 10\cos^2 x = 3$?

4. Найпростіші тригонометричні нерівності

Б Найпростіші тригонометричні нерівності, як і найпростіші тригонометричні рівняння, можна розв'язувати за допомогою графіків тригонометричних функцій та тригонометричного кола. Розглянемо на прикладах загальні підходи до їхнього розв'язання.

Приклад 16. Розв'язати нерівність: $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

☐ Оскільки синус — періодична функція з періодом 2π, то досить знайти розв'язки нерівності на довільному проміжку завдовжки 2π, наприклад, на відрізку $[0, 2\pi]$.

Розглянемо графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ на відрізку $[0, 2\pi]$ (рис. 358). На цьому відрізку рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ має два

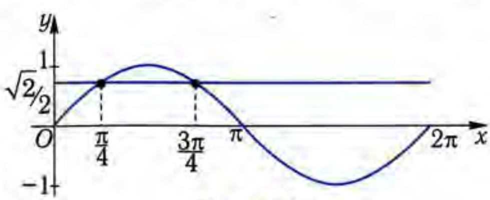


Рис. 358

розв'язки: $x = \frac{\pi}{4}$ і $x = \frac{3\pi}{4}$, тому всі розв'язки даної нерівності на відрізку $[0, 2\pi]$ визначаються співвідношенням $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$. Враховуючи періодичність функції $y = \sin x$, паралельним перенесенням проміжку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ вправо і вліво на 2π, 4π, ... , одержимо: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \le x \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$ Цей запис означає, що множина розв'язків нерівності є об'єднанням проміжків: ..., $\left[-\frac{15\pi}{4}; -\frac{13\pi}{4}\right]$, $\left[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right], \left[\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right], \left[\frac{17\pi}{4}; \frac{19\pi}{4}\right], \ldots .$

Скорочено це об'єднання проміжків будемо записувати так: $\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right],\ n \in Z.$ ■

Розв'яжемо ту саму нерівність за допомогою тригонометричного кола.

□ Позначимо на тригонометричному колі точки, ординати яких дорівнюють $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 359). Для цього через точку на осі ординат з ординатою $\frac{\sqrt{2}}{2}$ проведемо пряму, паралельну осі x, яка перетинає тригонометричне коло в точках $P_{\frac{\pi}{4}}$ і $P_{\frac{3\pi}{4}}$. Ординати всіх точок дуги $P_{\frac{\pi}{4}}BP_{\frac{3\pi}{4}}$ є більшими від $\frac{\sqrt{2}}{2}$ або дорівнюють $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тому на відрізку $[0, 2\pi]$ дану нерівність задовольняють всі значення x, для яких

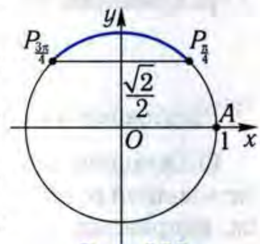


Рис. 359

$$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}.$$

З урахуванням періодичності функції $y = \sin x$ маємо той самий результат: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \le x \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$ ■

Відповідь. $\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right],\ n \in Z.$

Приклад 17. Розв'язати нерівність: $\cos x > -\frac{1}{2}$.

☐ Через точку на осі абсцис з абсцисою $-\frac{1}{2}$ (рис. 360) проведемо пряму, паралельну осі y. Ця пряма перетинає тригонометричне коло в точках $P_{\frac{2\pi}{3}}$ і $P_{-\frac{2\pi}{3}}$. Всі точки дуги $P_{-\frac{2\pi}{3}}AP_{\frac{2\pi}{3}}$, окрім її кінців, мають абсцису більшу, ніж $-\frac{1}{2}$. Тому на відрізку $[-\pi; \pi]$ розв'язки даної нерівності визначаються співвідношенням

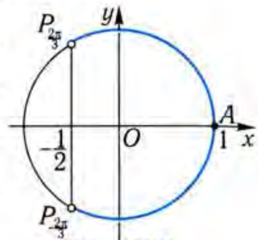


Рис. 360

$$-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}.$$

З урахуванням періодичності функції $y = \cos x$ матимемо:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.\ ■$$

Розв'яжемо цю нерівність за допомогою графіка функції $y = \cos x$.

☐ Оскільки косинус — періодична функція з періодом 2π, то досить знайти розв'язки нерівності на довільному проміжку завдовжки 2π, наприклад, на відрізку $[-\pi; \pi]$. Зручність вибору саме цього відрізку стане зрозумілою далі.

Розглянемо графіки функцій $y = \cos x$ і $y = -\frac{1}{2}$ на відрізку $[-\pi; \pi]$ (рис. 361). На ньому рівняння $\cos x = -\frac{1}{2}$ має два розв'язки: $x = -\frac{2\pi}{3}$ і $x = \frac{2\pi}{3}$. Потрібно знайти всі ті значення x, для яких відповідні точки графіка функції $y = \cos x$ містяться вище прямої $y = -\frac{1}{2}$. На від-

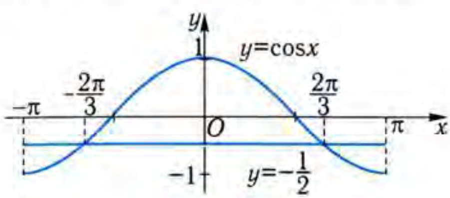


Рис. 361

різку $[-\pi; \pi]$ всі розв'язки даної нерівності визначаються співвідношенням $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$. З урахуванням періодичності функції $y = \cos x$ множину розв'язків нерівності можна записати так: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Якби ми вибрали відрізок $[0, 2\pi]$, то розв'язки даної нерівності на цьому відрізку не утворювали б суцільний проміжок, а складались з двох інтервалів: $\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$ і $\left(\frac{4\pi}{3}; 2\pi\right)$. Усі розв'язки даної нерівності складали б об'єднання двох сукупностей проміжків: $\left(2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$ і $\left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right),\ n \in Z.$. Як бачимо, вибір відрізка $[-\pi; \pi]$ привів до більш зручного запису розв'язку. ■

Відповідь. $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \in Z.$

Приклад 18. Розв'язати нерівність: $\operatorname{tg} x \geq -1$.

□ Оскільки тангенс — періодична функція з періодами $\pi n, n \in Z, n \neq 0$, то досить знайти розв'язки нерівності на довільному проміжку завдовжки π, наприклад, на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

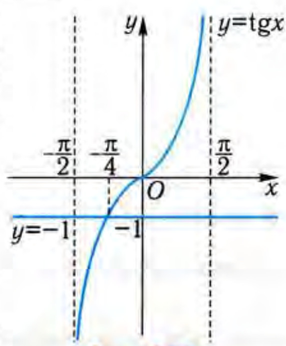


Рис. 362

Розглянемо графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = -1$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 362). На цьому проміжку рівняння $\operatorname{tg} x = -1$ має один розв'язок $x = -\frac{\pi}{4}$. Для розв'язання нерівності потрібно знайти всі ті значення x, для яких відповідні точки графіка $y = \operatorname{tg} x$ розташовані вище прямої $y = -1$ або ж належать цій прямій. На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ всі розв'язки даної нерівності визначаються умовою: $-\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$. Оскільки періодами тангенса є числа πn,

$n \in \mathrm{Z}$, $n \neq 0$, то множину розв'язків даної нерівності можна записати так: $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$. ■

Відповідь. $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathrm{Z}$.

Найпростіші тригонометричні нерівності, пов'язані з тангенсом і котангенсом, можна також розв'язувати за допомогою ліній тангенсів і котангенсів на тригонометричному колі. Покажемо їхнє застосування до нерівності, розглянутої у прикладі 18.

□ Відмітимо на лінії тангенсів точку $B(1; -1)$ (рис. 363). Зверніть увагу на те, що абсцисою точки B є абсциса точки P_0 (усі точки на лінії тангенсів мають ту саму абсцису, що дорівнює 1), через яку проходить лінія тангенсів, а ординатою — число, яке стоїть у правій частині нерівності. Сполучимо точку B відрізком прямої з центром кола. Цей відрізок перетинає коло у точці $P_{-\frac{\pi}{4}}$, що відповідає

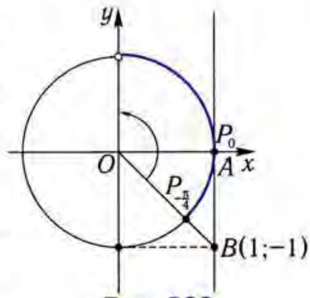


Рис. 363

числу $-\frac{\pi}{4}$, тангенс якого дорівнює -1. Для розв'язання нерівності потрібно знайти всі ті значення x, для яких відповідні точки лінії тангенса розташовані не нижче точки B. На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ всі розв'язки даної нерівності визначаються умовою: $-\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$. З урахуванням періодичності функції $y = \mathrm{tg}\, x$ одержали ту саму відповідь, що і раніше. ■

Приклад 19. Розв'язати нерівність: $\mathrm{ctg}\, x < \sqrt{3}$.

□ Відмітимо на лінії котангенсів точку $B\left(\sqrt{3}; 1\right)$ (рис. 364). Знову звертаємо вашу увагу на те, що ординатою точки є число 1 — ордината точки $P_{\frac{\pi}{2}}$, через яку проходить лінія котангенсів, а абсцисою — число, що стоїть у правій частині розв'язуваної нерівності. Сполучимо точку B відрізком прямої з центром кола. Цей відрізок перетинає коло у точці $P_{\frac{\pi}{6}}$, відповідній числу $\frac{\pi}{6}$, котангенс якого дорівнює $\sqrt{3}$. Для розв'язання нерівності потрібно знайти всі ті значення x, для яких відповідні точки лінії котангенсів розташовані лівіше від точки A. На проміжку $(0; \pi)$ всі розв'язки даної нерівності

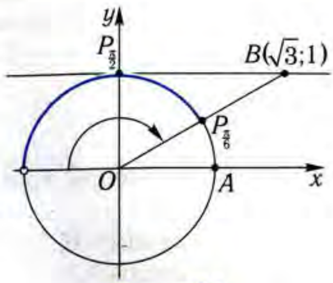


Рис. 364

визначаються умовою: $\frac{\pi}{6} < x < \pi$. Отже, з урахуванням періодичності функції $y = \operatorname{ctg} x$ маємо: $\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \pi + \pi n,\ n \in Z$. ■

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \pi + \pi n\right),\ n \in Z.$

✓ Контрольні запитання

1°. Чи можна розв'язки нерівності $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ записати у вигляді $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$?

2°. Чи можна розв'язки нерівності $\cos x > -\frac{1}{2}$ записати у вигляді $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{8\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$?

3°. Чи має розв'язок нерівність:
а) $\sin x \leq -1$; б) $\cos x > 1$; в) $\cos x \geq 1$?

4. Чи збігаються множини розв'язків нерівностей $\operatorname{tg} x \geq -1$ і $\operatorname{ctg} x \leq -1$?

5*. При яких значеннях a всі дійсні числа задовольняють нерівність:
а) $\sin x > a$; б) $\sin x \geq a$; в) $\sin x < a$; г) $\sin x \leq a$?

6*. При яких значеннях a не має розв'язків нерівність:
а) $\cos x > a$; б) $\cos x \geq a$; в) $\cos x < a$; г) $\cos x \leq a$?

7*. Чи існує значення a, при якому всі дійсні числа задовольняють нерівність:
а) $\operatorname{tg} x > a$; б) $\operatorname{tg} x \geq a$; в) $\operatorname{tg} x < a$?

8*. Чи може не мати розв'язків нерівність:

а) $\operatorname{tg} x < a$; б) $\cos x \geq a$; в) $\operatorname{ctg} x > a$?

Задачі

353°. У якій чверті тригонометричного кола лежить точка P_t, якщо:

1) $t = \arcsin 0{,}6$; 2) $t = \arcsin(-0{,}8)$;
3) $t = \arccos 0{,}8$; 4) $t = \arccos(-0{,}6)$?

354. Обчисліть:

1°) $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; 2°) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

3°) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$; 4°) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;

5) $\sin(\arccos 0{,}6)$; 6) $\cos(\arcsin(-0{,}8))$.

355°. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$; 4) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\sin\frac{x}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$; 6) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 4 - \sqrt{7}$;

7) $\sqrt{2}\sin\frac{x}{3} = -1$; 8) $4\sin^2 x = 3$;

9) $9\sin^2 x = -1$; 10) $(2\sin x + 1)(1 + \cos x) = 0$;

11) $(1 - \sqrt{2}\cos x)(3 - 2\sin x) = 0$; 12) $\cos 2x = -0{,}6$;

13) $\sin\frac{x}{3} = 0{,}2$; 14) $\cos(x + 0{,}5) = 0{,}9$.

356. Знайдіть нулі функції:

1) $y = 2\sin x + 1$; 2) $y = \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{4}$; 3) $y = 2\cos x + \sqrt{2}$.

357. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\sin x}{1+\cos x} = 0$; 2) $\frac{\sin x}{\sin 3x} = 0$; 3) $\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x} = 0$.

358. Укажіть всі нулі функції:

1) $y = \sin x\sqrt{\cos x}$; 2) $y = \cos x \cdot \operatorname{tg} x + 1$;

3) $y = \sin\frac{1}{x}$; 4) $y = \cos x\sqrt{\sin x}$.

359*. Знайдіть розв'язки рівняння, які належать указаному проміжку:

1) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; 2) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [0; 6\pi]$;

3) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-\pi; 3\pi]$.

360. Знайдіть розв'язки рівняння, які задовольняють наведену умову:

1) $\cos 2x = 0, \cos x < 0$; 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 2x < 0$.

361. Знайдіть:

1) величину кутів ромба, якщо відношення його периметра до однієї з діагоналей дорівнює 3;

2) величину гострих кутів прямокутного трикутника, якщо його висота поділяє гіпотенузу у відношенні 1:3.

362. Виразіть:

1) гострі кути прямокутного трикутника через його гіпотенузу c і площу S;

2) периметр сектора через його радіус R і радіус r кола, вписаного в нього.

363°. У якій чверті тригонометричного кола лежить точка P_t, якщо:

1) $t = \operatorname{arctg} 0{,}4$; 2) $t = \operatorname{arctg} (-0{,}4)$;

3) $t = \operatorname{arcctg} 1{,}8$; 4) $t = \operatorname{arcctg} (-1{,}6)$?

364°. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$;

3) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}(-1)\right)$.

365°. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=-1$; 3) $\operatorname{tg}2x=3$;

4) $\operatorname{ctg}x=3-\sqrt{2}$; 5) $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=1$; 6) $\operatorname{ctg}^2x=3$;

7) $\operatorname{ctg}3x=-0{,}3$; 8) $\sqrt{3}-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=0$;

9) $(\operatorname{ctg}x+3)(\operatorname{tg}^2x+1)=0$;

10) $\left(2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1\right)(2\operatorname{ctg}x+1)=0$.

366°. Знайдіть нулі функції:

1) $y=\operatorname{tg}x+1$; 2) $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}x-\frac{\sqrt{3}}{6}$; 3) $y=2\operatorname{ctg}x+\frac{6}{\sqrt{3}}$.

367. Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\pi x=\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{x-1}\operatorname{ctg}x=0$; 3) $\operatorname{tg}|x|=1$.

368. Знайдіть розв'язки рівняння, які задовольняють наведену умову:

1) $\operatorname{ctg}x=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}<0$; 2) $\operatorname{tg}2x=0,\ \cos x<0$;

3) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{3},\ \sin\frac{x}{3}>0$.

369. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння:

1) $\operatorname{tg}(3x+75°)=1$; 2) $(\operatorname{ctg}x+1)(\sqrt{3}+\operatorname{tg}x)=0$;

3) $\operatorname{tg}(5x+2)=0$.

370*. Знайдіть розв'язки рівняння, що належать даному проміжку:

1) $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3},\ x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $\operatorname{ctg}2x=1,\ x\in\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$;

3) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3},\ x\in[0;6\pi]$; 4) $\operatorname{ctg}\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-1,\ x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right]$.

371. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sin^2x-3\sin x+1=0$; 2) $4\cos^2x+\sin x=1$;

3) $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+3\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)-4=0$;

4) $\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} x = 6$; 5) $\dfrac{2\cos^2 x}{7\cos x - 3} = 1$.

372. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2}\sin^3 x - \sin^2 x = 0$; 2) $\cos 5x(1+\cos x) = 0$;

3) $\operatorname{ctg} x - \cos x = 1 - \sin x$; 4) $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = 0$.

373. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 3x = \cos 3x$; 2) $\sin^2 3x = 3\cos^2 3x$;

3) $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$;

4) $3\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 1$;

5) $-4\sin^2 x\cos^2 x - 9\cos^4 x = 0$; 6) $1 - 3\cos^2 x = \sin 2x$;

7) $\cos 2x + \cos^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x = 0$.

374. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 2x + \sin x = 0$; 2) $\sin 3x = \sin 2x + \sin x$;

3) $\sin x + \sin 3x + \cos x + \cos 3x = 0$;

4) $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$; 5) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$;

6) $\cos x - \sin x = 1$; 7) $1 - \cos 2x = 4\sin x$;

8) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \dfrac{3}{2}$.

375. Знайдіть величину кутів ромба, якщо відношення довжин його діагоналей дорівнює 2.

376*. Виразіть:

1) кути рівнобедреного трикутника через його основу c і площу S;

2) кути рівнобічної трапеції через її основи a і b ($a > b$) і площу S.

377*. 1) Висота рівнобедреного трикутника поділяється висотою, проведеною до бічної сторони, у відношенні 1:3, рахуючи від основи. Знайдіть кути трикутника.

2) Коло, вписане у рівнобедрений трикутник, проходить через точку перетину його висот (ортоцентр трикутника). Знайдіть кути трикутника.

378. Сума двох рівних висот рівнобедреного трикутника дорівнює третій висоті. Знайдіть кути трикутника.

379. У прямокутному трикутнику проекція одного з катетів на гіпотенузу вдвічі більша від другого катета. Знайдіть кути трикутника.

380°. Запишіть за допомогою нерівності множину всіх чисел x (рис. 365), яким відповідають точки дуги:

1) BmA_1;
2) A_1nB_1;
3) BA_1B_1;
4) A_1B_1A.

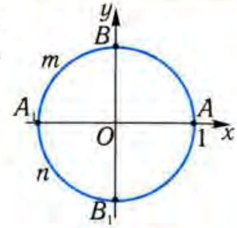


Рис. 365

381°. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin x \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sin x \le -\frac{1}{2}$;

5) $\cos x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $\cos x < \frac{1}{2}$; 8) $\cos x \le -\frac{1}{2}$;

9) $\mathrm{tg}\, x \ge -\sqrt{3}$; 10) $\mathrm{tg}\, x > \frac{1}{\sqrt{3}}$; 11) $\mathrm{tg}\, x \le 1$; 12) $\mathrm{tg}\, x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

13) $\mathrm{ctg}\, x > -1$; 14) $\mathrm{ctg}\, x < \sqrt{3}$; 15) $\sin x < 0$.

382. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 1$;

3) $\mathrm{tg}\left(-\frac{x}{2}\right) < -1$; 4) $\mathrm{ctg}\,\frac{2x}{3} > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

383. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x = |\cos x|$; 2) $|\sin x| = -\sin x$; 3) $\mathrm{tg}\, x = |\mathrm{tg}\, x|$.

384. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{2\sin x + 1}$; 2) $y = \sqrt{1 - \sqrt{2}\cos x}$; 3) $y = \sqrt{\frac{1}{1 + \mathrm{tg}\, x}}$.

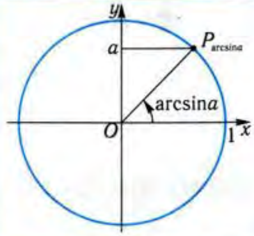
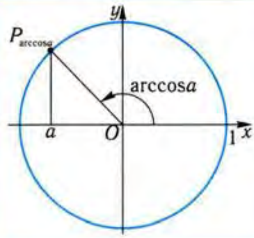
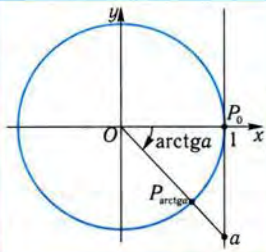
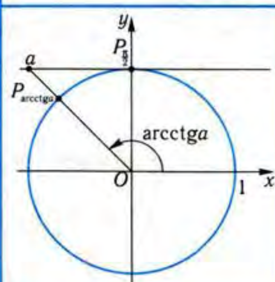
385*. Точка здійснює гармонічні коливання за законом $y = 6\sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right)$. В які проміжки часу вона буде віддалена від точки рівноваги на відстань, що не перевищує 3?

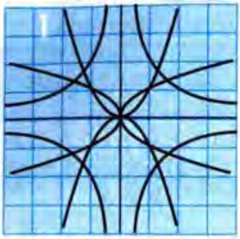
386*. 1) У круговий сектор вписано коло. Яким має бути центральний кут сектора α, щоб радіус вписаного кола не перевищував третини радіуса сектора?

2) Яким має бути більший гострий кут α прямокутного трикутника, щоб довжина гіпотенузи більше ніж удвічі перевищувала довжину меншого з катетів?

Підсумок

Основні поняття

Означення	Геометрична ілюстрація	Застосування
Арксинус числа $a \in [-1; 1]$ — таке число α, що: $\sin \alpha = a$; $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.		$\sin x = a$, $-1 \le a \le 1$. $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
Арккосинус числа $a \in [-1; 1]$ — таке число α з відрізка $[0; \pi]$, що $\cos \alpha = a$.		$\cos x = a$, $-1 \le a \le 1$. $x = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
Арктангенс числа a — таке число α, що: $\operatorname{tg} \alpha = a$; $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.		$\operatorname{tg} x = a$. $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
Арккотангенс числа a — таке число α, що: $\operatorname{ctg} \alpha = a$; $0 < \alpha < \pi$.		$\operatorname{ctg} x = a$. $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.



Готуємось до тематичного оцінювання з теми «Тригонометричні функції»

? Завдання для самоконтролю

1. У якій чверті міститься точка P_t, якщо t дорівнює:

   а) $\frac{2\pi}{9}$; б) $\frac{8\pi}{9}$; в) 4; г) $-\frac{17\pi}{9}$; ґ) $5{,}7\,\pi$?

2. Яким числам з проміжку $(0;\ 3\pi)$ на тригонометричному колі відповідає точка P_t з:

   а) ординатою 0; 1; –1; б) абсцисою 0; 1; –1?

3. Чому дорівнюють координати точки P_t на тригонометричному колі, якщо t дорівнює:

   а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{3\pi}{2}$; г) π; ґ) $-\frac{\pi}{2}$?

4. На який кут повернеться за 5 с точка на околі колеса машини при рівномірному русі, якщо за 2 с колесо робить 6 обертів?

5. Скільки існує точок P_t на тригонометричному колі, якщо для відповідних значень t:

   а) $\cos t = 1$; б) $\sin t = 0{,}7$; в) $\sin t = -1$; г) $\cos t = -0{,}6$?

6. На який кут слід повернути хвилинну стрілку годинника, щоб перевести годинник вперед:

   а) на 10 хв; б) на 20 хв; в) на 1 год; г) на 2 год 40 хв?

7. Які знаки мають синус, косинус, тангенс числа t, якщо t дорівнює:

   а) 3; б) $\frac{16\pi}{9}$; в) 7?

8. Які з наведених далі точок належать тригонометричному колу:

   а) $A(0{,}3;\ 0{,}7)$; б) $B(-0{,}8;\ -0{,}6)$; в) $C\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; г) $E(0;\ 0)$?

9. Чи можуть синус і косинус того самого аргументу одночасно дорівнювати:

а) $\frac{3}{5}$ і $\frac{4}{5}$; б) 1 і 0; в) 0,9 і 0,1; г) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ і $-\sqrt{\frac{2}{3}}$?

10. Чи можуть тангенс і котангенс того самого аргументу дорівнювати:

а) $\frac{1}{2}$ і 2; б) 0,6 і 0,8; в) $\sqrt{2}+1$ і $\sqrt{2}-1$; г) 5 і $-\frac{1}{5}$?

11. Які з наведених функцій є парними; непарними; ні парними, ні непарними:

а) $y=\cos x$; б) $y=x+\cos x$; в) $y=x^2\cos x$;
г) $y=\sin^2 x$; ґ) $y=\sin x\cos x$; д) $y=\sin x+\cos x$?

12. Зростаючою чи спадною є функція $y=\sin x$ на проміжку:

а) $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$; б) $[2;3]$; в) $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$;
г) $[0;\pi]$; ґ) $[0;1]$; д) $[\pi;2\pi]$?

13. Що більше:

а) $\sin\frac{\pi}{9}$ чи $\sin\frac{4\pi}{9}$; б) $\cos\frac{2\pi}{9}$ чи $\cos\frac{\pi}{3}$;
в) $\sin 1$ чи $\sin 2$; г) $\cos 2$ чи $\cos 3$?

14. Які з поданих чисел є періодами функції $y=\cos x$:

а) π; б) 2π; в) 3π; г) $\frac{\pi}{2}$;
ґ) 4π; д) 5π; е) 6π?

15. Чому дорівнює на проміжку $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$ найбільше значення функції:

а) $y=\mathrm{tg}x$; б) $y=\mathrm{ctg}x$?

16. Яке з чисел більше:

а) $\mathrm{tg}\frac{3\pi}{5}$ чи $\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8}$; б) $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}$ чи $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{5}$?

17. Який найменший додатний період має функція:

а) $y=\sin 3x$; б) $y=\cos\frac{x}{2}$; в) $y=\mathrm{tg}\frac{x}{3}$; г) $y=\mathrm{ctg}2x$?

18. Знайдіть множину значень функції:

а) $y=\frac{1}{2}\cos 2x$; б) $y=\cos x-2$; в) $y=\cos(1-x)$.

19. Якого найбільшого і якого найменшого значень набуває функція:

а) $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$; б) $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$?

20. Відомо, що $\sin 25° = a$. Чому дорівнює $\sin 50°$?

21. Чи може не мати розв'язків рівняння:

а) $\sin x = a$; б) $\cos x = a$?

22. Скільки розв'язків на проміжку $[0; 7\pi]$ має рівняння:

а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$?

23. Яких із наступних значень: $-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}; -1; 0; 5; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; 4$ не може набувати $\arccos a$?

24. Яких із наступних значень: $-\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{4}; 0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{9}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; 3{,}2; 3{,}5; \frac{5\pi}{6}; \pi$ не може набувати $\operatorname{arcctg} a$?

25. Чому дорівнює:

а) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; б) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$?

26. Які з наведених нижче рівнянь є однорідними відносно $\sin x$ і $\cos x$:

а) $\sin x + 3\cos x = 0$; б) $\sin x + \cos x = 1$;

в) $\sin^2 x + 2\cos x - 3\cos^2 x = 0$;

г) $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$;

ґ) $\sin^2 x + \cos^2 2x = 0$; д) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x = 0$?

27. Чи має розв'язки нерівність:

а) $\cos x < 1$; б) $\sin x \geq 1$; в) $\sin x > 1$?

28. Знайдіть усі розв'язки нерівності:

а) $\cos x \leq -1$; б) $\cos x \geq 1$; в) $\sin x \leq -1$; г) $\sin x \geq 1$.

29. Знайдіть усі розв'язки нерівності:

а) $-1 \leq \sin x \leq 1$; б) $-1 < \cos x < 1$.

30. При яких значеннях x виконується рівність:

а) $|\cos x| = \cos x$; б) $|\sin x + 1| = -\sin x - 1$;

в) $|\cos x - 1| = \cos x - 1$; г) $|\sin x| = -\sin x$?

31. При яких значеннях x має зміст вираз $\sqrt{\sin 2x - 1}$?

Відповіді до завдань для самоконтролю

1. а) У першій; б) у другій; в) у третій; г) у першій; ґ) у четвертій. **2.** а) π, 2π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$, 2π, π. **3.** а) (1; 0); б) (0; 1); в) (0; – 1); г) (–1; 0); ґ) (0; – 1). **4.** 5400°. **5.** а) 1; б) 2; в) 1; г) 2. **6.** а) 60°; б) 120°; в) 360°; г) 960°. **7.** а) +, –, –; б) –, +, –; в) +, +, +. **8.** *B*, *C*, *D*. **9.** а) Так; б) так; в) ні; г) так. **10.** а) Так; б) ні; в) так; г) ні. **11.** Парні: а), в) г); непарна: ґ); ані парні, ані непарні: б), д). **12.** а) Зростаюча; б) спадна; в) спадна; г) не є монотонною; ґ) зростаюча; д) не є монотонною. **13.** а) $\sin\frac{4\pi}{9}$; б) $\cos\frac{2\pi}{9}$; в) $\sin 2$; г) $\cos 2$. **14.** б), д), е). **15.** а) Не існує; б) 1. **16.** а) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$; б) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$. **17.** а) $\frac{2\pi}{3}$; б) 4π; в) 3π; г) $\frac{\pi}{2}$. **18.** а) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$; б) $[-3; -1]$; в) $[-1; 1]$. **19.** а) 2 і –2; б) 3 і –3. **20.** $2a\sqrt{1-a^2}$. **21.** а) Так; б) так. **22.** а) 8; б) 6; в) 7; г) 7. **23.** $-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \ -\frac{\pi}{3}; -1; \frac{7\pi}{6}, 4$. **24.** $-\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{4}; 3{,}2; 3{,}5; \pi$. **25.** а) $-\frac{1}{2}$; б) 0. **26.** а), г), д). **27.** а) Так; б) так; в) ні. **28.** а) $\pi+2\pi n, n\in Z$; б) $2\pi n, n\in Z$; в) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$; г) $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$. **29.** а) $x \in R$; б) $x\in(2\pi n;\pi+2\pi n)\cup(\pi+2\pi n;2\pi+2\pi n), n\in Z$. **30.** а) $x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n\in Z$; б) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$; в) $x=2\pi n, n\in Z$; г) $x\in[\pi+2\pi n;2\pi+2\pi n], n\in Z$. **31.** $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$.

Зразок контрольної роботи №3

1. Дано функцію $y=f(x)$, де $f(x)=2\cos(2\pi-x)$.

1°) З'ясуйте, чи є функція $y=f(x)$ парною або непарною.

2°) Чи є функція $y=f(x)$ періодичною? Якщо так, то знайдіть її основний період.

3°) Побудуйте її графік на проміжку $[-\pi; \pi]$.

4) Знайдіть множину значень функції $y=f(x)$.

5) Знайдіть координати точок перетину графіка функції $y=f(x)$:

а°) з прямою $x=\frac{2\pi}{3}$; б) з прямою $y=-1$.

2. Дано рівняння: $\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

а°) Розв'яжіть його.

б°) Знайдіть його найменший додатний корінь.

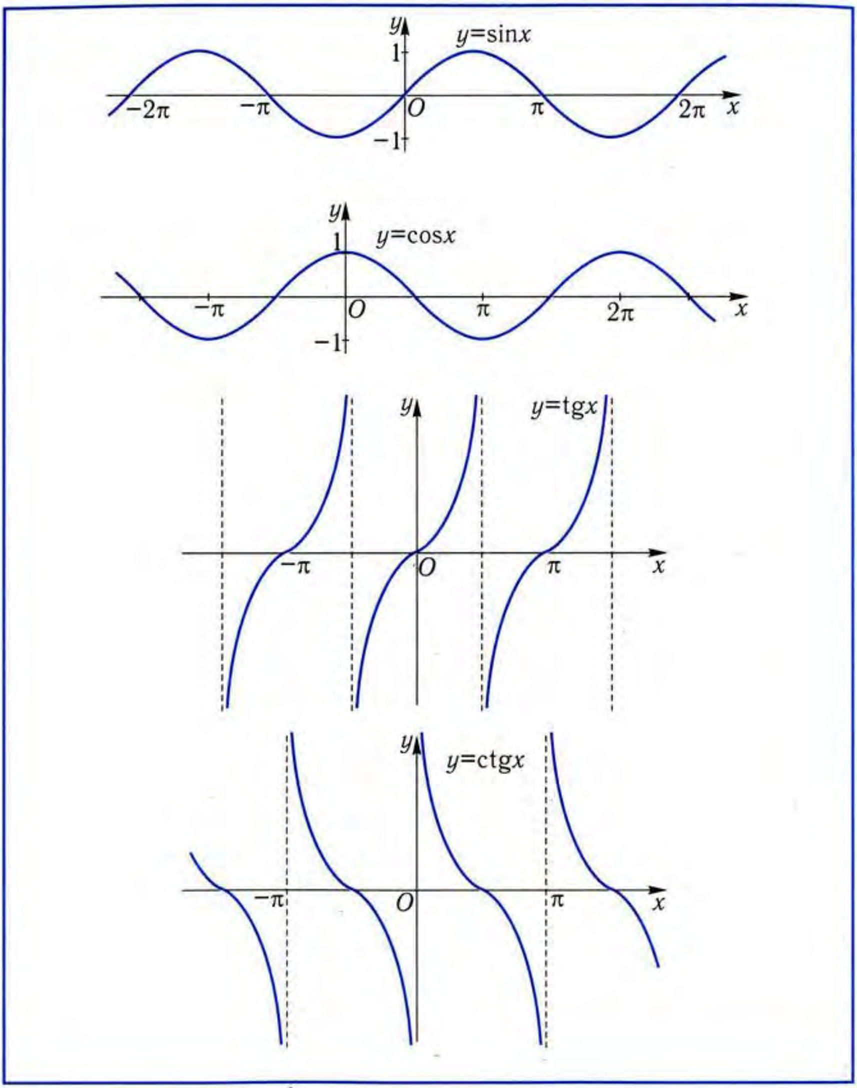
в) Знайдіть ті його розв'язки, які належать проміжку $[2\pi; 3\pi]$.

г) Знайдіть ті його розв'язки, які задовольняють умову: $\operatorname{tg}x\le 0$.

ґ) При яких значеннях x функція $y=\sin 2x$ набуває значень, менших від $\frac{\sqrt{2}}{2}$?

Графіки тригонометричних функцій

Таблиця 32



Властивості тригонометричних функцій

Таблиця 33

	$y = \sin x$	$y = \cos x$
Область визначення	R	R
Нулі	$\pi n,\ n \in Z$	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
Основний період	2π	2π
Парність і непарність	Непарна	Парна
Множина значень	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Найбільше і найменше значення	$y_{\text{найб}} = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $y_{\text{найм}} = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$	$y_{\text{найб}} = 1$ при $x = 2\pi k$ $y_{\text{найм}} = -1$ при $x = \pi(2k+1)$, $k \in Z$
Неперервність	Неперервна	Неперервна
	$y = \mathrm{tg}\, x$	$y = \mathrm{ctg} x$
Область визначення	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$	$x \neq \pi k,\ k \in Z$
Нулі	$\pi n,\ n \in Z$	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
Основний період	π	π
Парність і непарність	Непарна	Непарна
Множина значень	R	R
Найбільше і найменше значення	Найбільше і найменше значення не існують	Найбільше і найменше значення не існують
Неперервність	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ — точки розриву	$x = \pi k,\ k \in Z$ — точки розриву

Деякі тригонометричні формули

Таблиця 34

№ п/п	Формула	Множина значень аргументів, за яких має зміст ліва частина	Множина значень аргументів, за яких має зміст права частина
1	$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$	$\alpha\neq\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$
2	$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$	$\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$	$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$ $\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$ $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$
3	$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$	$\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$	$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$ $\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$ $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$
4	$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$	$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$ $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z$
5	$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$	$\alpha\in R$	$\alpha\neq\pi+2k\pi,\ k\in Z$
6	$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$	$\alpha\in R$	$\alpha\neq\pi+2k\pi,\ k\in Z$

Розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь

Таблиця 35

Тип рівняння	Розв'язок
$\sin x = a$	Якщо $\lvert a\rvert > 1$, то рівняння не має розв'язків. Якщо $\lvert a\rvert \le 1$, то $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$.
Окремі випадки	
$\sin x = 0$	$x = \pi n,\ n \in Z$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$
$\cos x = a$	Якщо $\lvert a\rvert > 1$, то рівняння не має розв'язків. Якщо $\lvert a\rvert \le 1$, то $x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.
Окремі випадки	
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n,\ n \in Z$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$
$\mathrm{tg}\, x = a$	$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\mathrm{ctg}\, x = a$	$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Зміст чисел arcsin a, arccos a, arctg a, arcctg a

Таблиця 36

Число	Зміст
$x = \arcsin a$	1) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$; 2) $\sin x = a$.
$x = \arccos a$	1) $0 \le x \le \pi$; 2) $\cos x = a$.
$x = \mathrm{arctg}\, a$	1) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; 2) $\mathrm{tg}\, x = a$.
$x = \mathrm{arcctg}\, a$	1) $0 < x < \pi$; 2) $\mathrm{ctg}\, x = a$.

Розділ 4.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

У розділі «Паралельність прямих і площин» розглянуто різні випадки взаємного розміщення прямих і площин у просторі. Зокрема, грунтовно вивчалось відношення паралельності. Однак численні застосування геометрії пов'язані, насамперед, з вимірюванням геометричних величин (відстаней, кутів тощо). Предметом багатьох вимірювань є прямі та площини, які перетинаються. Тому необхідно більш детально дослідити взаємне розміщення прямих і площин, виявити величини, які характеризують це розміщення.

Окремим випадком розміщення прямої і площини, що мають одну спільну точку, є перпендикулярність, яка моделює відношення вертикальності між фізичними тілами та інші подібні відношення (наприклад, цвях, забитий у стіну). Скориставшись поняттям перпендикулярності, ми зможемо вимірювати відстань від точки до площини, від прямої до паралельної їй площини, відстань між паралельними площинами. На цих вимірюваннях ґрунтується вимірювання відстані між довільними реальними об'єктами.

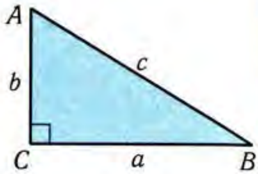
Не менш важливим є введення кількісних характеристик взаємного розміщення прямих і площин, що перетинаються, — кута між прямою і площиною, кута між площинами. Ці поняття споріднені з планіметричним поняттям кута між прямими (та й визначаються за його допомогою).

Готуємось до вивчення теми «Перпендикулярність прямих і площин»

Таблиця 37

Прямокутний трикутник

Теорема Піфагора і співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника

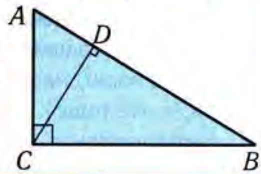


$$c^2 = a^2 + b^2, \ \sin A = \frac{a}{c} = \cos B,$$

$$\sin B = \frac{b}{c} = \cos A, \ \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \ \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}.$$

Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику

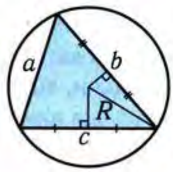
Висота, опущена на гіпотенузу прямокутного трикутника, поділяє цей трикутник на два подібних даному і подібних між собою трикутники.



Таблиця 38

Вписане та описане коло

Навколо будь-якого трикутника можна описати коло і при цьому лише одне. Центр описаного кола збігається з точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника.



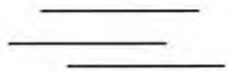
У будь-який трикутник можна вписати коло і при цьому лише одне. Центр вписаного кола лежить на перетині бісектрис кутів трикутника.

Таблиця 39

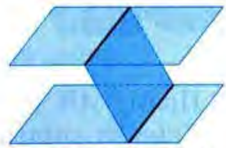
Паралельність прямих і площин

Для встановлення паралельності двох прямих у просторі достатньо перевірити:

чи знайдеться пряма, паралельна кожній із даних прямих;

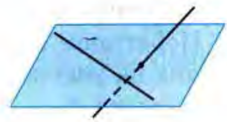


чи будуть дані прямі лініями перетину двох паралельних площин третьою.



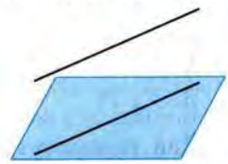
Для встановлення мимобіжності двох прямих у просторі достатньо перевірити:

чи знайдеться площина, в якій лежить одна з даних прямих і яку перетинає друга пряма у точці, що не належить першій прямій.



Для встановлення паралельності прямої, що не лежить у даній площині, і цієї площини достатньо перевірити:

чи знайдеться в площині пряма, паралельна даній прямій.



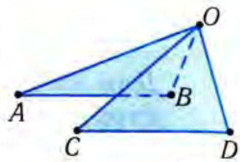
Для встановлення паралельності двох площин достатньо перевірити:

чи знайдуться в одній із площин дві прямі, що перетинаються і відповідно паралельні двом прямим другої площини;

чи знайдеться площина, паралельна кожній із даних площин.

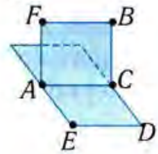
Тест для діагностики готовності до вивчення теми «Перпендикулярність прямих і площин»

1. Пряма AB не належить площині COD. Скільки спільних точок мають площини AOB і COD, зображені на рисунку?



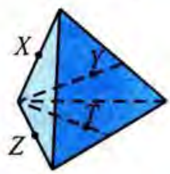
А. Одну. **Б.** Дві. **В.** Безліч.
Г. Відповідь відрізняється від наведених.

2. Перетином площин AED і AFB, зображених на рисунку, є …



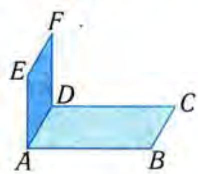
А. точка A; **Б.** відрізок AC;
В. сукупність двох точок $\{A; C\}$;
Г. пряма AC.

3. На зображенні тетраедра в одній грані не лежать точки …



А. X і Y; **Б.** X і Z;
В. Y і T; **Г.** Z і T.

4. Два прямокутники $ABCD$ і $AEFD$ лежать у різних площинах. Прямі BC і EF …



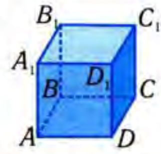
А. перетинаються; **Б.** паралельні;
В. мимобіжні;
Г. можуть бути розміщені по-різному в залежності від розміщення площин.

5. Проекцією двох паралельних прямих не може бути …
А. одна пряма; **Б.** одна точка; **В.** дві прямі; **Г.** дві точки.

6. Проекцією квадрата не може бути …
А. відрізок; **Б.** ромб;
В. прямокутник; **Г.** трапеція.

7. Якщо d — довжина відрізка, d_1 — довжина його паралельної проекції на площину, то …
А. $d > d_1$; **Б.** $d < d_1$; **В.** $d = d_1$;
Г. жодне з наведених співвідношень не є правильним.

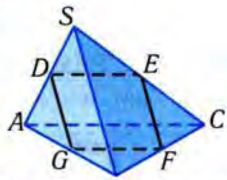
8. Скільки існує площин, паралельних ребру BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і таких, що проходять через вершину D?



А. Жодної. Б. Одна.
В. Дві. Г. Безліч.

9. Скільки площин можна провести через вершину трикутника, паралельних його стороні, що не містить цю вершину?
А. Жодної. Б. Одну.
В. Безліч. Г. Не більш однієї.

10. На рисунку точки D, E, F, G — середини ребер AS, SC, BC, AB. Знайдіть периметр чотирикутника $DEFG$, якщо DG = 4 см, AC = 16 см.



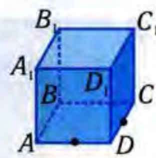
А. 24 см. Б. 16 см.
В. 32 см. Г. 40 см.

11. Відомо, що прямі a і b паралельні площині α. Як розміщені прямі a і b?
А. Паралельні. Б. Перетинаються.
В. Збігаються. Г. Можуть бути розміщені по-різному.

12. Якщо діагоналі трапеції паралельні площині α, то основи трапеції ...
А. лежать у площині α; Б. паралельні α;
В. перетинають α;
Г. можуть перетинати α, а можуть і бути їй паралельними.

13. Якщо лінії перетину площин α і β площиною γ паралельні, то площини α і β ...
А. паралельні; Б. перетинаються;
В. паралельні чи збігаються;
Г. можуть бути паралельними або перетинатися.

14. Периметр многокутника, отриманого в перерізі куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a площиною, що проходить через середини ребер AB і BC паралельно ребру DD_1, дорівнює ...



А. $2a$; Б. $2\sqrt{2}a$;
В. $2(a+\sqrt{2}a)$; Г. $2a+\sqrt{2}a$.

15. Перерізом правильного тетраедра площиною не може бути ...
А. трапеція; Б. рівносторонній трикутник;
В. ромб; Г. правильний шестикутник.

§18. Перпендикулярність прямої і площини

Розглядається взаємне розміщення прямої і площини, яке моделює, зокрема, відношення вертикальності.

Можна навести багато прикладів взаємного розміщення фізичних об'єктів, які характеризуються математичним поняттям перпендикулярності прямої і площини: вертикальна колона перпендикулярна до поверхні землі (рис. 366), ніжки стола перпендикулярні до підлоги (рис. 367), шнур, на якому висить лампа, — до стелі (рис. 368), траєкторія тіла, що вільно падає, — до поверхні Землі тощо.

У наведених прикладах розміщення тіл моделюється таким взаємним розміщенням прямої і площини, при якому пряма, що перетинає площину, не має нахилу в жодному напрямі на площині. У зв'язку з цим необхідно узагальнити поняття перпендикулярності прямих на випадок простору, оскільки перпендикулярність прямих якраз і характеризує відсутність нахилу.

Дві прямі простору називаються перпендикулярними, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

Рис. 366

Рис. 367

Рис. 368

Як і в планіметрії, перпендикулярність прямих позначається знаком $\perp$ (наприклад, $a \perp b$), перпендикулярність відрізків означає перпендикулярність прямих, які їх містять.

Поняття перпендикулярності прямих у просторі врешті зводиться до перпендикулярності прямих на площині. Дві прямі, що перетинаються, визначають площину, і поняття кута між такими прямими береться із планіметрії. Тому, звичайно, шукаючи приклади перпендикулярності прямих, звертаються до певних площин. Наприклад, в кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 369) кожна грань — квадрат — визначає площину і в ній перпендикулярними є прямі, що проходять через суміжні ребра (AA_1 і AB, CC_1 і C_1D_1 тощо), діагоналі (BC_1 і CB_1 та ін.). Цікаво, що $AA_1 \perp AB$ і $AA_1 \perp AD$, тобто у просторі через точку A прямої AA_1 проходить не одна пряма, перпендикулярна до прямої AA_1. Такого на площині не буває. Більше того, є впевненість, що пряма AA_1 перпендикулярна до прямої AC і, взагалі, до довільної прямої грані $ABCD$, що проходить через точку A, адже вона однаково нахилена до всіх цих прямих. Якщо мати на увазі, що площина $ABCD$ складається зі всіх прямих площини, що проходять через точку A, то відсутність нахилу прямої до жодного напряму на площині (рис. 370) можна сформулювати у вигляді наступного означення.

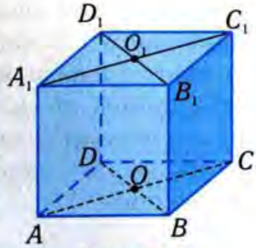


Рис. 369

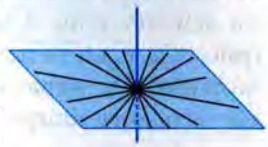


Рис. 370

Пряма називається перпендикулярною до площини, якщо вона перетинає цю площину і перпендикулярна до кожної прямої площини, що проходить через точку перетину даної прямої і площини.

Для позначення перпендикулярності прямої l та площини α також використовують знак $\perp$: $l \perp \alpha$.

Звичайно, користуючись тільки означенням, виявити перпендикулярність прямої до площини неможливо, адже це зводилось би до проведення безлічі перевірок. Але приклад з кубом показує, що перпендикулярність ребра AA_1 до грані $ABCD$ є наслідком перпендикулярності його до двох суміжних ребер цієї грані.

У практичній діяльності вертикальність веж, опор, стовпів та інших конструкцій теж звіряють по їхній вертикальності двом напрямам. Вертикальність корінця напіврозкритої книги, що стоїть на столі, забезпечує його перпендикулярність до двох країв обкладинки, на які спирається книга і які лежать у площині стола. Іншими словами, для встановлення перпендикулярності прямої a до площини α досить перевірити перпендикулярність цієї прямої до двох перетинних прямих b і c площини α (рис. 371). Маємо просту і зручну ознаку перпендикулярності прямої та площини.

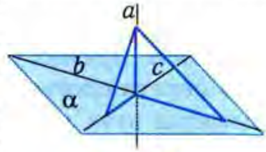


Рис. 371

Теорема 1 *(ознака перпендикулярності прямої і площини).* **Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються і належать даній площині, то вона перпендикулярна до цієї площини.**

У тому, що перпендикулярності даної прямої до однієї прямої площини не вистачає для її перпендикулярності до площини, можна переконатися за допомогою наступного прикладу. Ручка швабри перпендикулярна до перекладини, яка лежить на підлозі (рис. 372, а), але цього недостатньо, щоб ручка була розміщена вертикально. Але якщо ручку обертати навколо перекладини (рис. 372, б, в), то можна знайти положення, коли вона буде вертикальною. Це якраз буде тоді, коли вона буде перпендикулярною ще до одного напряму на підлозі.

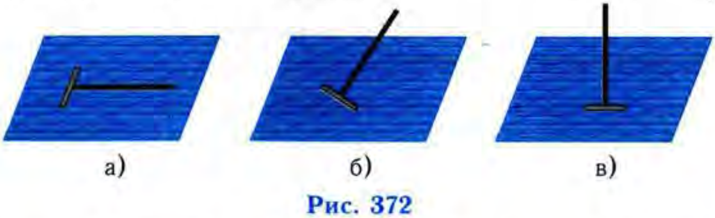

а) б) в)

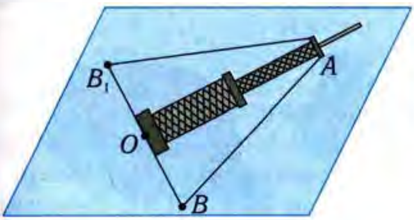
Рис. 372

Теорему 1 можна використати для побудови вертикальних конструкцій.

Задача 1. Встановити щоглу вертикально за допомогою розтяжок, закріплених на щоглі на певному рівні.

☐ Зазвичай для встановлення щогли досить мати чотири розтяжки однакової довжини. Зрозуміло, що довжина розтяжок повинна бути більшою, ніж віддаль від землі до місця їхнього закріплення на щоглі.

Розмістимо основу щогли у даній точці O на поверхні землі, закріпимо вільні кінці двох розтяжок у точках B і B_1, які розміщені на однаковій відстані від точки O і лежать на прямій, що проходить через точку O (рис. 373, а). Це забезпечує перпендикулярність щогли до прямої BB_1. За допомогою двох інших розтяжок щоглу піднімають, обертаючи її навколо осі BB_1. Потім фіксують те положення щогли, в якому вільні кінці розтяжок закріплюються у точках C і C_1 , центрально-симетричних відносно точки O (рис. 373, б). Щогла стоїть вертикально, бо, за побудовою, $AO \perp BB_1$ і $AO \perp CC_1$. ■



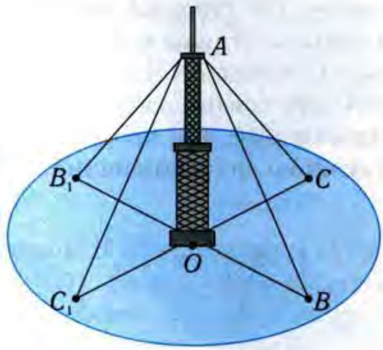


Рис. 373

Існують і інші способи встановлення щогли. Наприклад, можна зменшити кількість розтяжок, брати розтяжки різної довжини, закріплювати їх на різних рівнях щогли. Але всі ці випадки вимагають забезпечення стійкої вертикальності щогли у двох напрямах.

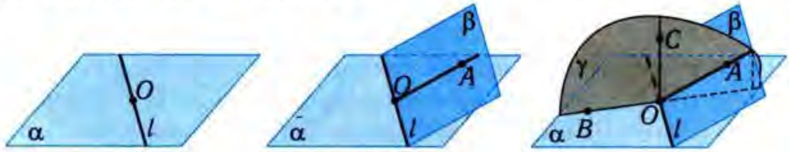
Розв'язування завдання, сформульованого у задачі 1, звелося з позицій геометрії до побудови прямої, яка проходить через точку площини перпендикулярно до цієї площини. Саме у цьому полягає наступна задача.

Задача 2. Через дану точку площини провести пряму, перпендикулярну до цієї площини.

□ Можливість побудови такої прямої фактично обґрунтовано у задачі 1. Залишилось лише перекласти це обгрунтування на математичну мову.

Нехай дано площину α і точку O на ній. Проведемо в площині α через точку O пряму l (рис. 374, а) і візьмемо деяку площину β, яка перетинає площину α по прямій l (як вибрати таку площину?). У цій площині побудуємо пряму AO, перпендикулярну до прямої l (рис. 374, б). У площині це завжди можна зробити однозначно.

Залишилося тільки повернути пряму OA навколо прямої l так, щоб вона стала перпендикулярною до площини α. Для цього в площині α через точку O проведемо пряму OB, перпендикулярну до прямої l. А потім через прямі OA і OB проведемо площину γ (рис. 374, в). Нарешті, проведемо у площині γ пряму OC перпендикулярно до прямої OB. Вона і є шуканою. Справді, вона перпендикулярна до двох прямих площини α — до прямої OB, за побудовою, і до прямої l, за означенням перпендикулярності прямої і площини. Справа в тім, що $l \perp \gamma$, за ознакою перпендикулярності прямої і площини ($l \perp OA$, $l \perp OB$, $OA \cap OB = \{O\}$). Таким чином, двічі застосована ознака завершує доведення можливості проведення прямої, яка проходить через дану точку площини перпендикулярно до цієї площини. ■



а) б) в)

Рис. 374

Побудова прямої, перпендикулярної до даної площини, яка проходить через дану точку, відноситься до основних побудов. У подальшому будемо замість опису побудови писати: «Проведемо пряму, перпендикулярну до площини».

Приклад 1. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a; O — точка перетину діагоналей грані $ABCD$.

1) До яких ребер куба перпендикулярна пряма AC?
2) Визначити взаємне розміщення прямих D_1O і AC.
3) Довести, що пряма A_1C_1 перпендикулярна до площини BB_1D_1.
4) Через точку M на ребрі AB провести пряму, перпендикулярну до діагоналі AC.

☐ Зобразимо умову прикладу на рис. 375.

1) Пряма AC перпендикулярна до ребер AA_1 і CC_1. Це випливає з того, що вказані ребра перпендикулярні до площини грані, в якій лежить пряма AC, за ознакою перпендикулярності прямої і площини (теорема 1): $AA_1 \perp AB$, $AA_1 \perp AD$; $CC_1 \perp CB$, $CC_1 \perp CD$.

2) Прямі D_1O і AC — перпендикулярні. Розглянемо трикутник AD_1C (рис. 376). Він рівнобедрений: $AD_1 = D_1C$, як діагоналі рівних квадратів. Відрізок D_1O є медіаною цього трикутника, проведеною до основи. А тому він є і висотою. Таким чином, прямі D_1O і AC перетинаються під прямим кутом.

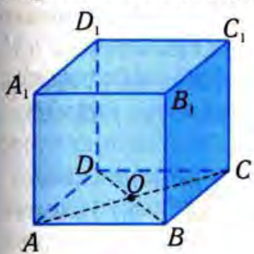


Рис. 375

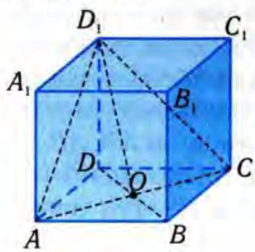


Рис. 376

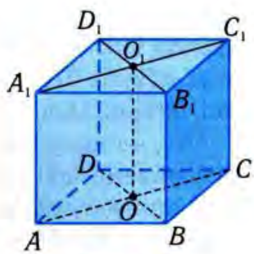


Рис. 377

3) Пряма A_1C_1 перетинається з прямою B_1D_1 під прямим кутом у центрі O_1 квадрата $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 377). Залишилося довести, що пряма A_1C_1 перпендикулярна до прямої O_1O, яка лежить у площині BB_1D_1. Але це випливає з того, що чотирикутник ACC_1A_1 є прямокутником: $AA_1 \parallel CC_1$, $AA_1 = CC_1$, за властивістю транзитивності відношень паралельності і рівності, $AA_1 \perp AC$, $CC_1 \perp AC$ (див. розв'язання завдання 1)). За ознакою перпендикулярності прямої і площини, пряма A_1C_1 перпендикулярна до площини BB_1D_1, бо вона перпендикулярна до прямих B_1D_1 і O_1O цієї площини.

4) Пряма, що проходить через точку M перпендикулярно до діагоналі AC, паралельна прямій BD, оскільки BD також перпендикулярна до AC і всі ці прямі лежать в одній площині (рис. 378). Побудова полягає у проведенні через точку M прямої MN, паралельної прямій BD. ■

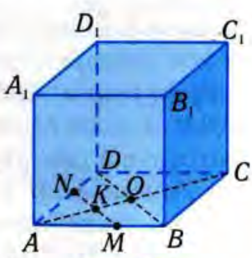


Рис. 378

Розглянуті задачі 1 і 2 полегшують сприйняття доведення ознаки перпендикулярності прямої і площини (теорема 1). Запишемо цю теорему у знако-символьній формі і доведемо її.

Теорема 1. **Дано:** $a \perp b$, $a \perp c$, $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$, $b \cap c = \{O\}$.
Довести: $a \perp \alpha$.

□ Відомо, що пряма a перпендикулярна до двох прямих b і c, які належать площині α (рис. 379, а). Зрозуміло, пряма a проходить через точку перетину O прямих b і c (обґрунтуйте цей висновок). Візьмемо на прямій a довільну точку A і сполучимо її з кінцями рівних відрізків OB, OB_1, OC, OC_1, відкладених від точки O на прямих b і c (рис. 379, б). Тоді прямокутні трикутники AOB, AOB_1, AOC, AOC_1 рівні, бо вони мають один спільний катет AO і рівні катети OB, OB_1, OC, OC_1, а тому рівні і гіпотенузи AB, AB_1, AC, AC_1.

Покажемо, що пряма a перпендикулярна до довільної прямої m площини α, що проходить через точку O (рис. 379, в). Позначимо через M і M_1 точки перетину прямої m зі сторонами чотирикутника BCB_1C_1. Оскільки BCB_1C_1 — паралелограм (доведіть!), то точка O перетину його діагоналей є центром симетрії чотирикутника. Точки M, M_1 — центрально-симетричні відносно точки O, тому $OM = OM_1$ і AO — медіана трикутника AMM_1.

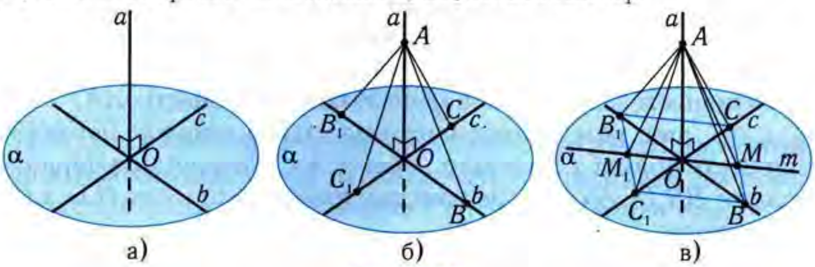


Рис. 379

Трикутники ABC і AB_1C_1 рівні за трьома сторонами, тому $\angle ABM = \angle AB_1M_1$, а оскільки $BM = B_1M_1$ (хоча б з міркувань центральної симетричності цих відрізків відносно точки O), то і трикутники ABM та AB_1M_1 рівні. Звідси $AM = AM_1$, трикутник MAM_1 — рівнобедрений з основою MM_1, його медіана AO є одночасно і висотою. Тобто $a \perp m$. ■

Поняття перпендикулярності прямої та площини пов'язане з симетричністю розміщення перпендикулярної до площини прямої відносно самої цієї площини. Симетричність виявляється в тому, що при повороті на довільний кут навколо прямої перпендикулярна до неї площина відобразиться сама на себе.

Сказане вище вимагає уточнення. Нехай дано пряму l. Визначимо ***перетворення повороту навколо цієї прямої на кут*** φ ***точок простору***. Для цього візьмемо довільну точку M, яка не лежить на даній прямій, і проведемо через неї площину α, перпендикулярну до прямої l (рис. 380). Ця площина перетинає пряму l в деякій точці O. Повернемо точку M в площині α на кут φ навколо точки O до положення M_1. Кажуть, що точку M_1 дістали з точки M поворотом навколо осі l на кут φ. Точки прямої l при повороті навколо неї не змінюють свого положення.

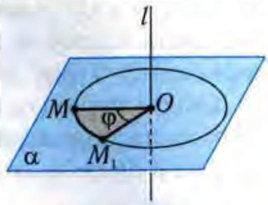


Рис. 380

Із означення повороту навколо осі випливає, що точки площини, перпендикулярної до осі, переходять у точки цієї самої площини, причому дане перетворення площини є не що інше, як поворот навколо точки перетину осі з площиною на кут φ.

Поворот навколо прямої на кут $180°$ є ***симетрією відносно цієї прямої***. Це перетворення аналогічне симетрії відносно прямої на площині. Справді, при повороті навколо прямої l на $180°$ кожна точка A, яка не належить прямій l, переходить у таку точку A_1, що пряма l перпендикулярна до відрізка AA_1 і перетинає його посередині (рис. 381). Таке перетворення називають ***осьовою симетрією***. У кожній площині, що проходить через пряму l, це перетворення є осьовою симетрією в цій площині.

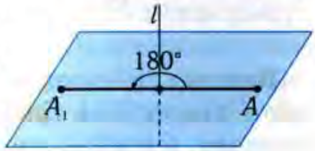


Рис. 381

Усі попередні результати стосувалися перпендикулярності прямої до площини. Якщо пряма a перпендикулярна до площини α, то кажуть також, що площина α перпендикулярна до прямої a. Наступна задача пов'язана з побудовою площини, перпендикулярної до даної прямої.

Задача 3. Через дану точку в просторі провести площину, перпендикулярну до даної прямої.

☐ Розв'язання задачі потребує розгляду двох випадків:

1) дана точка не належить даній прямій;

2) дана точка належить даній прямій.

Нехай дана точка O не належить даній прямій a. Шукана площина може бути задана двома прямими, які перетинаються. Згідно з доведеною ознакою перпендикулярності прямої до площини, достатньо перпендикулярності цих прямих до прямої a. Отже, задача зводиться до побудови двох прямих, що перетинаються, перпендикулярних до прямої a, одна з яких проходить через точку O. Для цього через точку O і пряму a проведемо площину α і в ній побудуємо пряму m, що перпендикулярна до прямої a і проходить через точку O (рис. 382, а). Потім через пряму a проведемо площину β, відмінну від α, і в цій площині через точку перетину прямих a і m проведемо перпендикулярну до a пряму n (рис. 382, б). Прямі m та n визначають шукану площину γ.

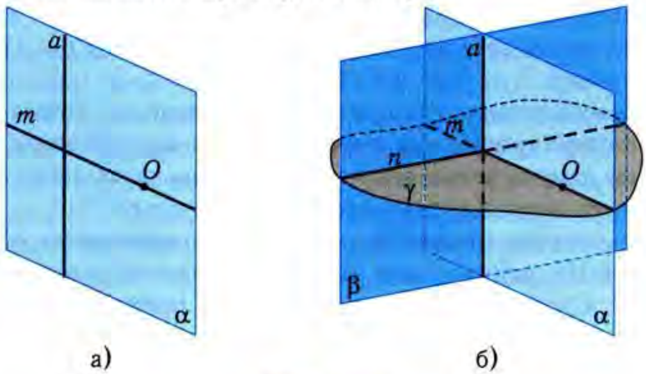


Рис. 382

Випадок, коли дана точка лежить на даній прямій, розглядають аналогічно. Для цього через пряму a проводять довільну площину, а в ній — пряму m, яка перпендикулярна до прямої a і проходить через точку O. А далі все будується так само, як і в першому випадку. ■

Побудована в задачі 3 площина складається з прямих, які проходять через точку даної прямої і перпендикулярні до цієї прямої.

Приклад 2. Дано правильну чотирикутну піраміду $SABCD$, точка O є центром основи $ABCD$.

1) Довести, що $SO \perp ABC$; $AC \perp DBS$.

2) Через точку B провести площину, перпендикулярну до прямої SC.

3) Побудувати переріз піраміди площиною, яка проходить через середину ребра AS перпендикулярно до прямої: а) BD; б) AB.

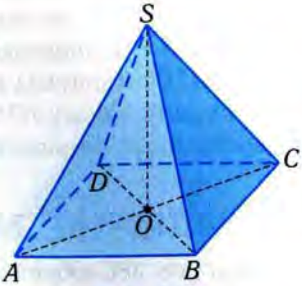


Рис. 383

☐ 1) Нехай $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда, точка O — центр її основи (рис. 383). Оскільки трикутник ASC є рівнобедреним ($AS = SC$), то його медіана SO є і висотою. Отже, $SO \perp AC$. Аналогічно, $SO \perp BD$. Тому, за ознакою перпендикулярності прямої і площини, $SO \perp ABC$. Далі, $BD \perp AC$, як діагоналі квадрата, і $SO \perp AC$, тому, за тією ж ознакою, $AC \perp DBS$.

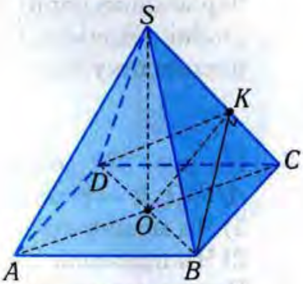


Рис. 384

2) Скористаємось побудовою, виконаною в задачі 3. Для цього в трикутнику BSC проведемо $BK \perp SC$ (рис. 384). Оскільки $\Delta BCK = \Delta DCK$ (за двома сторонами і кутом між ними), то $\angle DKC = \angle BKC = 90°$. Отже, $SC \perp BK$, $SC \perp DK$, тому $DBK \perp SC$, за ознакою перпендикулярності прямої і площини.

Наведена конструкція характерна для правильної піраміди. Ця сама площина визначається прямими DB і OK, де $OK \perp SC$, або ж є розв'язком задачі: через точку O (чи діагональ основи BD) провести площину, перпендикулярну до ребра SC.

3) а) Нехай M — середина ребра AS. Пряма BD перпендикулярна до площини ACS, яка містить точку M. Це встановлюється аналогічно доведенню перпендикулярності прямої AC до площини DBS. Тому шуканим перерізом є трикутник ASC (рис. 385, а).

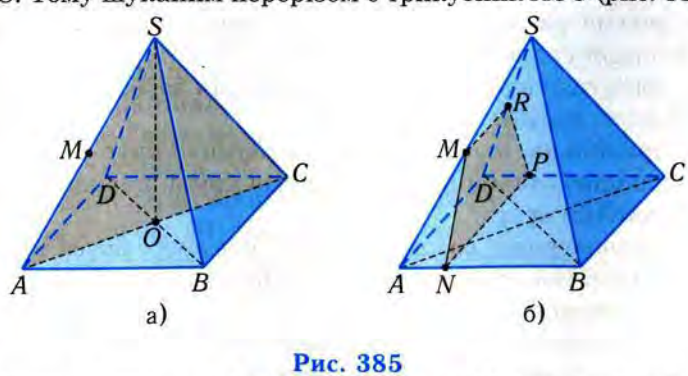


Рис. 385

б) Якщо в площині SAB через точку M провести перпендикуляр MN до AB і в площині ABC — перпендикуляр NP до AB

(рис. 385, б), то площина MNP перпендикулярна до прямої AB, тобто вона є площиною шуканого перерізу. Оскільки $NP \parallel AD$, то $NP \parallel SAD$, і площина перерізу перетинає грань SAD по відрізку MR, паралельному NP. Отже, перерізом є трапеція $NMRP$ (легко довести, що вона рівнобічна, спробуйте це зробити). ■

✓ Контрольні запитання

1. На рис. 386 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
   1) Які з прямих CD, C_1D, D_1D, B_1B, C_1B, A_1B перпендикулярні до прямої BD?
   2) Які з прямих CD, AB, A_1C, D_1C_1, AC_1, C_1D перпендикулярні до площини грані ADD_1A_1?

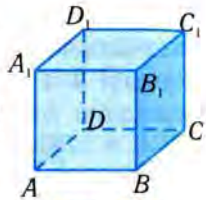


Рис. 386

2. На рис. 387 зображено правильний тетраедр $ABCD$, K — середина ребра BC.
   1) Чи можна стверджувати, що $DK \perp ABC$?
   2) Чи правильно, що $BC \perp AKD$?

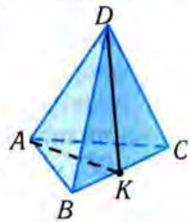


Рис. 387

3. Чи правильно, що через точку на прямій у просторі можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної прямої?
4. Чи перпендикулярні дві прямі, що перетинаються, якщо через одну з них можна провести площину, перпендикулярну до іншої прямої?
5. Чи правильно, що пряма, яка перпендикулярна до двох сторін трикутника, перпендикулярна до його площини?
6. Чи можна за допомогою двох косинців визначити напрям, перпендикулярний до площини стола?
7. Чи достатньо однієї пари розтяжок для забезпечення вертикальності щогли?
8. Чи правильно, що пряма, яка перетинає круг у його центрі і перпендикулярна до двох радіусів круга, перпендикулярна до площини круга?
9. При поперечному розпилюванні дерев'яного бруса тесля тримає пилку так, щоб можна було бачити дві суміжні грані бруса. З якою метою він це робить?
10. Як перевірити перпендикулярність осі свердла до площини стола, на якому закріплюють деталь?

Графічні вправи

1. На рис. 388 зображено квадрат $ABCD$, O — його центр, M — середина сторони BC, відрізок OS перпендикулярний до площини квадрата.
   1) Як розміщені пряма BD і площина ACS?
   2) Яка площина перпендикулярна до прямої AC?
   3) Як розміщені пряма BC і площина MOS?

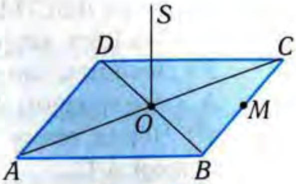


Рис. 388

2. На рис. 389 зображено прямокутний трикутник ABC з прямим кутом A, відрізок AP перпендикулярний до площини трикутника.
   1) Як розміщені прямі AP і AC?
   2) Як розміщені площина PAB і пряма AC?
   3) Яка пряма перпендикулярна до площини PAC?

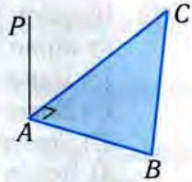


Рис. 389

3. На рис. 390 зображено прямокутник $ABCD$, відрізок DM перпендикулярний до площини прямокутника.
   1) Як розміщені прямі MD і DC?
   2) Як розміщені площина MDA і пряма CD?

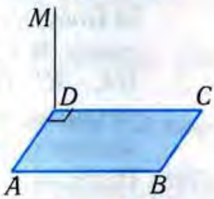


Рис. 390

4. На рис. 391 зображено два прямокутники $ABCD$ і ABC_1D_1.
   1) Чи правильно, що $AB \perp ADD_1$?
   2) Яка пряма перпендикулярна до площини BCC_1?

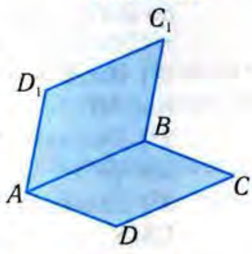


Рис. 391

5. Побудуйте рисунок за наведеними даними.
   1) Пряма OS проходить через точку O перетину діагоналей квадрата $ABCD$ і перпендикулярна до його площини. Через середину відрізка SC проведено пряму, перпендикулярну до цієї самої площини.
   2) Через точку M діагоналі AC основи правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ проведено площину перпендикулярно до цієї діагоналі.

Задачі

387. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1°) Знайдіть усі ребра куба, перпендикулярні до ребра AA_1.

2°) Доведіть, що пряма, яка проходить через вершину куба A_1 і центр грані $ABCD$, перпендикулярна до прямої BD.

3°) Через точку B проведіть пряму, перпендикулярну до прямої A_1C_1.

4) Доведіть, що кожна пряма, яка проходить через середину відрізка A_1C_1 і перетинає відрізок BD, перпендикулярна до прямої A_1C_1.

388. Відрізок OS проведено з центра O квадрата $ABCD$ перпендикулярно до його площини, точка M — середина відрізка BC.

1°) Вкажіть прямі, перпендикулярні до прямої BD.

2°) Визначте взаємне розміщення площини ASC і прямої BD.

3°) Доведіть, що пряма AD перпендикулярна до площини SOM.

4) Через точку O проведіть площину, перпендикулярну до прямої AB.

5) Побудуйте точки перетину площини, яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої BD, з прямими BS, BA, BC. Обчисліть площу трикутника, утвореного цими точками, якщо довжина сторони квадрата дорівнює 6 см, а відрізка OS — 4 см.

389. Відрізок CS проведено через вершину прямого кута C рівнобедреного прямокутного трикутника ABC перпендикулярно до його катетів. Точка M — середина гіпотенузи AB, $CB = CS = CA = a$.

1°) Вкажіть прямі, перпендикулярні до прямої CS і прямої MC.

2°) Визначте взаємне розміщення площини SCA і прямої BC.

3°) Доведіть, що пряма AB перпендикулярна до площини CMS.

4) Через точку M проведіть площину, перпендикулярну до прямої AC.

5) Обчисліть площу трикутника, площина якого перпендикулярна до прямої MS, одна із вершин — середина катета CB, а дві інші — точки перетину площини трикутника з прямими CA і MS.

390. На зображенні куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ побудуйте:
1°) пряму, що проходить через точку A_1 перпендикулярно до площини BB_1D;
2°) площину, що проходить через точку A_1 перпендикулярно до прямої B_1D_1;
3°) пряму, що проходить через середину ребра AB перпендикулярно до площини CDD_1;
4°) площину, що проходить через середину ребра AA_1 перпендикулярно до прямої DD_1;
5) пряму, що проходить через середину ребра AB перпендикулярно до площини A_1C_1C;
6) площину, що проходить через точку A перпендикулярно до прямої CD_1;
7*) пряму, що проходить через точку A_1 перпендикулярно до площини AB_1D_1.

391. Точка S розміщена на однаковій відстані від усіх вершин квадрата $ABCD$ і не належить його площині. Побудуйте:
1) пряму, що проходить через точку S, перпендикулярну до площини ABC;
2) площину, що проходить через середину K сторони AD, перпендикулярну до прямої AD;
3*) пряму, що проходить через середину M сторони CD, перпендикулярну до площини ABS;
4*) площину, що проходить через точку K перпендикулярно до прямої DS.

392. Кімната має довжину 6 м, ширину 5 м і висоту 3 м. Знайдіть відстань від світильника, який розміщено в центрі стелі, до нижніх кутів кімнати.

393°. Доведіть, що через будь-яку точку простору можна провести пряму, перпендикулярну до даної прямої. Дослідіть, коли таку пряму можна провести лише одну.

394°. Доведіть, що пряма, яка проходить через центри протилежних граней куба, перпендикулярна до цих граней.

395. Доведіть, що прямі, які проходять через дану точку прямої і перпендикулярні до неї, утворюють площину, перпендикулярну до цієї прямої.

396°. Пряма a перпендикулярна до площини α і перпендикулярна до прямої b, що не лежить у площині α. Доведіть, що пряма b і площина α — паралельні.

397. Доведіть, що через точку, яка лежить за межами площини, можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до цієї площини.

398. Два відрізки AB і CD, які лежать у площині α, точкою перетину E поділяються навпіл. Точка K знаходиться поза площиною α, причому $KA = KB$ і $KC = KD$. Доведіть, що пряма KE перпендикулярна до площини α.

399. Доведіть, що прямі a і b — паралельні, якщо вони мають дві спільні перпендикулярні прямі.

400*. Доведіть, що прямі, які перпендикулярні до даної площини і перетинають дану пряму, лежать в одній площині.

401*. Знайдіть множину всіх точок простору, рівновіддалених від двох даних точок A і B.

402. Побудуйте переріз куба площиною:

1°) що проходить через середину ребра перпендикулярно до цього ребра;

2) що проходить через середину діагоналі грані куба перпендикулярно до цієї діагоналі.

403. У правильному тетраедрі $SABC$ точка K — середина ребра SC.

1°) Доведіть, що площина AKB перпендикулярна до прямої SC.

2) Зобразіть перерізи тетраедра площинами, що проходять через вершину A перпендикулярно до прямих BC і SB. Знайдіть лінію перетину цих перерізів.

404*. Дано три мимобіжні прямі.

1) Побудуйте паралелепіпед, три ребра якого лежать на цих прямих.

2) Доведіть, що можливе існування лише одного такого паралелепіпеда.

3) За яких умов побудований паралелепіпед буде прямим; прямокутним?

Вправи для повторення

405. Знайдіть периметр фігури, в якої сторони перпендикулярні, за даними, поданими на рис. 392.

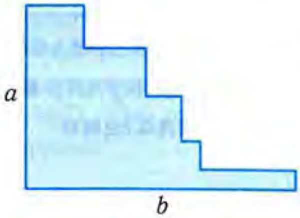


Рис. 392

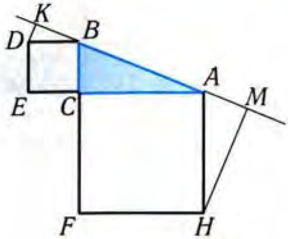
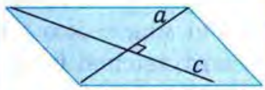
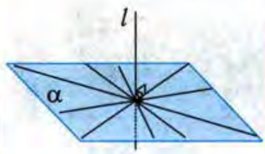


Рис. 393

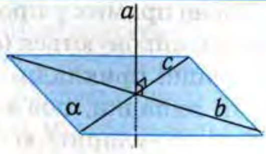
406. На катетах прямокутного трикутника ABC побудовано квадрати (рис. 393). З їхніх вершин до прямої AB проведено перпендикуляри DK і HM. Доведіть, що трикутник ABC можна скласти з трикутників BDK і AHM.

Підсумок

Головні означення

Дві прямі простору називаються ***перпендикулярними***, якщо вони перетинаються під прямим кутом.		 $a \perp c$
Пряма називається перпендикулярною до площини, якщо вона перетинає цю площину і перпендикулярна до кожної прямої площини, що проходить через точку перетину даної прямої і площини.		 $l \perp \alpha$

Головне твердження

Ознака перпендикулярності прямої і площини	Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються і належать даній площині, то вона перпендикулярна до цієї площини.	 $a \perp b, a \perp c, b \subset \alpha,$ $c \subset \alpha \Rightarrow a \perp \alpha$

§19. Зв'язок між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин

Даний параграф присвячено встановленню зв'язків між паралельністю і перпендикулярністю прямих і площин, які широко застосовуються в геометрії.

Про існування зв'язків між паралельністю та перпендикулярністю у просторі свідчить наш досвід. Справді, стовпи, встановлені вертикально, паралельні між собою (рис. 394); паралельними є вертикально спрямовані льодові бурульки (рис. 395), вертикальні колони, якими прикрашені споруди (рис. 396) тощо.

Рис. 394

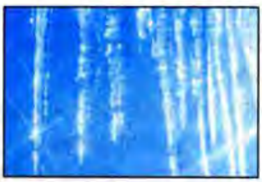


Рис. 395

Рис. 396

Добре відомий зміст аналогічних зв'язків у планіметрії: два перпендикуляри до однієї прямої є паралельними між собою, і навпаки, пряма, яка перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, перпендикулярна і до другої. Однак стосовно прямих у просторі ці твердження не завжди виконуються (спробуйте самі навести відповідні приклади). Натомість можемо вивчати випадки, пов'язані з паралельністю і перпендикулярністю прямих та площин.

Рис. 397

Розглянемо детальніше зв'язок між паралельністю прямих і перпендикулярністю їх до площини. Ці зв'язки відображають відношення між реальними об'єктами, якими ми користуємось у повсякденному житті. Справді, якщо одну дошку паркану приладнано вертикально до поверхні землі, то другу дошку достатньо розмістити паралельно першій, щоб вона також була вертикальною (рис. 397). Цей спосіб побудови паркану ґрунтується на наступній теоремі.

Теорема 1 *(про дві паралельні прямі, одна з яких перпендикулярна до площини).*

Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то й друга пряма перпендикулярна до цієї площини.

Наведена теорема є ознакою перпендикулярності прямої і площини, тобто за її допомогою встановлюють перпендикулярність прямої і площини. Її широко використовують не тільки в геометрії, а й у практичній діяльності. Спорудження будівлі з використанням виска є яскравою ілюстрацією застосування цієї ознаки перпендикулярності прямої і площини. Справді, нитка виска розміщена вертикально, і якщо ріг споруди паралельний нитці, то він також вертикальний (рис. 398).

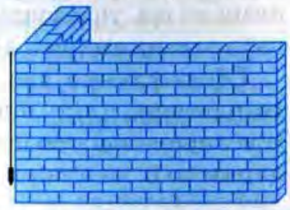


Рис. 398

Розгляд теореми 1 природно породжує запитання: чи будуть паралельними дві прямі, які перпендикулярні до однієї площини? Відповідь на нього нам підказує досвід (два вертикально встановлених стовпи — паралельні!) і він підтверджується наступною теоремою, яка є оберненою до теореми 1.

Теорема 2 *(про паралельність прямих, перпендикулярних до площини).*

Якщо дві прямі перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, то вони — паралельні.

Наведена теорема також є ознакою. За її допомогою встановлюють паралельність прямих у просторових конструкціях. Адже вертикальність чи перпендикулярність до площини іноді легше перевірити (особливо на громіздких об'єктах), ніж паралельність. Йдеться, наприклад, про розміщення поперечних балок при спорудженні стелі будівлі, розпізнавання паралельності прямих у геометричних конфігураціях та ін.

Не менш важливими в геометрії та її застосуваннях є зв'язки між паралельністю площин та їхньою перпендикулярністю до прямої. Йдеться про дві площини і одну пряму. Якщо дві площини паралельні і одна з них перпендикулярна до прямої, то як буде розміщена друга площина по відношенню до цієї прямої? Як розміщені дві площини, якщо вони обидві перпендикулярні до прямої? Відповіді на ці питання також нам підказує досвід практичної діяльності. Якщо вбити цвях у дошку перпендикулярно до однієї сторони дошки, то він буде перпендикулярним і до протилежної (рис. 399). Якщо на вісь колісної пари насадити колеса з обох боків так, щоб їхні площини були перпендикулярними до осі, то площини цих коліс будуть паралельними (рис. 400).

Рис. 399

Рис. 400

Сформулюємо два взаємно обернених твердження, які відображають зв'язок між паралельністю площин і перпендикулярністю їх до прямої.

Теорема 3 *(про паралельні площини, одна з яких перпендикулярна до прямої).*

Якщо одна з двох паралельних площин перпендикулярна до прямої, то і друга площина перпендикулярна до цієї самої прямої.

Теорема 4 *(про дві площини, перпендикулярні до прямої).*

Якщо дві площини перпендикулярні до однієї прямої, то вони — паралельні.

Привертає увагу спорідненість наведених двох пар теорем. Кожну з них можна сформулювати, замінивши термін «пряма» на «площину», і навпаки.

Теореми 3 і 4 також є ознаками.

Ознака перпендикулярності прямої і площини (теорема 3) пов'язана з розміщенням опорних колон відносно підлоги і стелі. Якщо площини стелі і підлоги паралельні, то колону досить поставити перпендикулярно до підлоги, щоб вона була перпендикулярною і до стелі (рис. 401).

Рис. 401

Практичну цінність ознаки, вираженої в теоремі 4, ілюструє транспортування залізобетонної плити в горизонтальному положенні за допомогою крана. Для цього використовують чотири однакових троси, кінці яких закріплено в точках A_1, A_2, A_3, A_4 плити і до гака S (рис. 402). Оскільки плита висить вільно, то трос, на якому закріплено гак, перпендикулярний до поверхні землі і розміщений на прямій, що проходить через центр мас плити (для однорідної плити). Якщо знехтувати товщиною плити, то її центр міститься на перетині діагоналей прямокутника $A_1A_2A_3A_4$. Оскільки $SA_1 = SA_2 = SA_3 = SA_4$, то пряма, яка сполучає точку S з точкою перетину діагоналей, перпендикулярна до площини плити (задача 1 §18). Тому, згідно з теоремою 4, плита розміщена горизонтально.

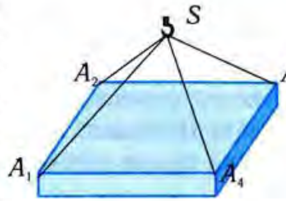


Рис. 402

Наведені приклади не вичерпують усього різноманіття застосувань розглянутих ознак при вирішенні практичних завдань. Важливими є дані ознаки і для подальшого поглиблення геометричних знань.

Задача 1. Через дану точку провести пряму, перпендикулярну до даної площини.

□ Випадок, коли дана точка A лежить в даній площині α, ми розглядали у попередньому параграфі. Нехай тепер точка A міститься поза площиною α. Через довільну точку B площини α проведемо пряму b, перпендикулярну до площини α (рис. 403). Потім через точку A проведемо пряму, паралельну прямій b (як це зробити?). Вона і буде шуканою, оскільки її перпендикулярність до площини α обумовлена теоремою 1. ■

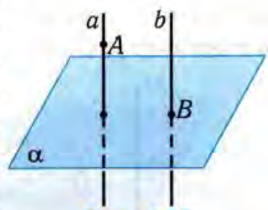


Рис. 403

Приклад 1. З вершини A квадрата $ABCD$ проведено відрізок AM, перпендикулярний до площини ABC. Побудувати:

1) площину, яка проходить через точку M перпендикулярно до прямої AC;

2) пряму, що проходить через середину відрізка MC перпендикулярно до площини ABC.

☐ Зобразимо умову прикладу на рис. 404, а.

1) Розглянемо площину *MAC*. За умовою, пряма *MA* перпендикулярна до прямої *AC*. Для побудови шуканої площини достатньо провести через точку *A* ще одну пряму, перпендикулярну до прямої *AC*. Оскільки пряма *BD* перпендикулярна до прямої *AC*, то шукана пряма має бути паралельною прямій *BD*.

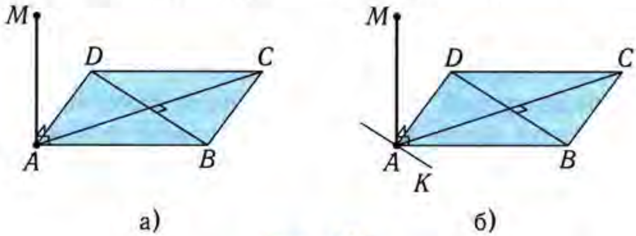


Рис. 404

Побудова. Через точку *A* проводимо пряму *AK*, паралельну прямій *BD* (рис. 404, б). Вона перпендикулярна до прямої *AC*. Площина *MAK* перпендикулярна до прямої *AC*, за ознакою перпендикулярності прямої і площини (теорема 1 § 18).

2) Нехай *N* — середина відрізка *MC* (рис. 405, а). Шукана пряма паралельна прямій *MA*, за теоремою про паралельність прямих, перпендикулярних до площини (теорема 2). Це — необхідна умова. Вона є й достатньою, за теоремою про дві паралельні прямі, одна з яких перпендикулярна до площини (теорема 1).

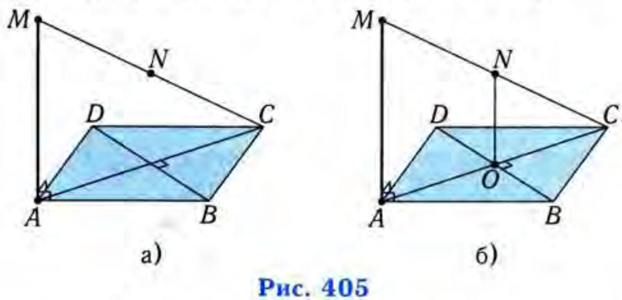


Рис. 405

Побудова. Через точку *N* проводимо пряму, паралельну прямій *MA* (рис. 405, б). Точка її перетину *O* з площиною квадрата є центром квадрата, оскільки пряма *NO* лежить у площині *MAC* і проходить через середину відрізка *AC* (за теоремою Фалеса). ■

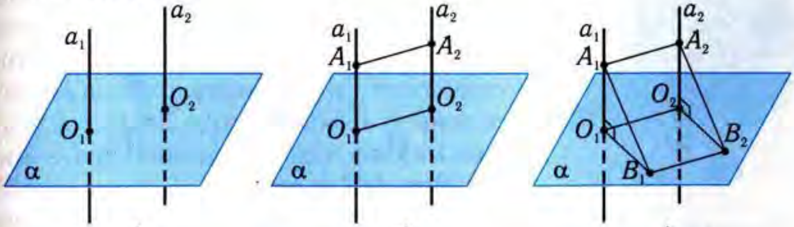
Розглянемо доведення наведених теорем про зв'язки між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин. Вказаний зв'язок між двома парами теорем і між собою в парах дає змогу сподіватись, що доведення однієї з теорем полегшить доведення інших. Почнемо з теореми 1. Запишемо її у знакосимвольній формі.

Теорема 1. **Дано:** $a_1 \parallel a_2$, $a_1 \perp \alpha$.
Довести: $a_2 \perp \alpha$.

□ Для доведення теореми скористаємось ознакою перпендикулярності прямої і площини.

Позначимо через O_1 точку перетину прямої a_1 і площини α. Згідно з теоремою про перетин площини паралельними прямими (теорема 6 § 8), пряма a_2, що паралельна прямій a_1, теж перетинає площину α в деякій точці O_2 (рис. 406, а).

Візьмемо на прямих a_1 і a_2 точки A_1 і A_2 по один бік від площини α так, щоб відрізки O_1A_1 і O_2A_2 були рівними. Побудований чотирикутник $O_1A_1A_2O_2$ (рис. 406, б) є паралелограмом, тому що $O_1A_1 \parallel O_2A_2$, $O_1A_1 = O_2A_2$. Аналогічно будуємо паралелограм $O_1B_1B_2O_2$ для довільного напряму в площині α. Для цього через точки O_1 і O_2 в площині α проведемо довільні паралельні прямі, на яких вибираємо точки B_1 і B_2 аналогічно вибору точок A_1 і A_2 (рис. 406, в).



а) б) в)

Рис. 406

З наведених побудов випливає, що чотирикутник $A_1B_1B_2A_2$ є паралелограмом. Справді, відрізки A_1A_2 і B_1B_2 — паралельні і рівні, за властивостями транзитивності паралельності прямих і рівності довжин ($A_1A_2 \parallel O_1O_2$, $O_1O_2 \parallel B_1B_2$, $A_1A_2 = O_1O_2$, $O_1O_2 = B_1B_2$).

А тепер розглянемо трикутники $A_1O_1B_1$ і $A_2O_2B_2$. Вони рівні за трьома сторонами: $A_1O_1 = A_2O_2$, $O_1B_1 = O_2B_2$, за побудовою, $A_1B_1 = A_2B_2$ як протилежні сторони паралелограма. Тому рівні відповідні кути цих трикутників, зокрема, $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$. Але ж кут $A_1O_1B_1$, за умовою, — прямий. Тому прямим є і кут $A_2O_2B_2$. А це означає, що пряма a_2 перпендикулярна до кожної прямої площини α, яка проходить через точку O_2. За означенням, вона перпендикулярна до площини α. ■

Теорема 2. **Дано:** $a_1 \perp \alpha$, $a_2 \perp \alpha$.
Довести: $a_1 \parallel a_2$.

□ Нехай прямі a_1 і a_2 перпендикулярні до площини α, O_1, O_2 — точки перетину їх з площиною α (рис. 407, а). Через точку O_2 проведемо пряму b, паралельну прямій a_1 (рис. 407, б). За попередньою теоремою, $b \perp \alpha$. Якщо пряма b не збігається з прямою a_2, то через них можна провести площину β, яка перетинає площину α по прямій c (рис. 407, в). Прямі a_2 і b перпендикулярні до прямої c, за означенням перпендикулярності прямої і площини. Однак у площині через дану точку можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної прямої. Отримана суперечність означає, що прямі a_2 і b збігаються, тобто $a_1 \parallel a_2$. ■

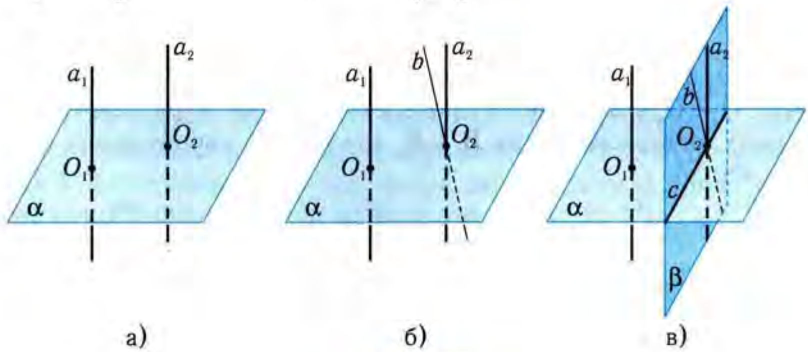


Рис. 407

Доведення теорем 3 і 4 проводиться за такою самою схемою, що і доведення теорем 1 і 2 відповідно. Зробіть це самостійно, користуючись вказівкою. наведеною після формулювань теорем 3 і 4.

Важливість розглянутих теорем для стереометрії та її застосувань, як вже наголошувалось, пов'язана з тим, що кожна з них є ознакою: перша і третя — ознаки перпендикулярності прямої і площини, друга — ознака паралельності прямих, четверта — ознака паралельності площин. Цим самим розширюються наші можливості при вивченні взаємного розміщення прямих і площин, проведенні побудов.

Узагальненням результату задачі 1 є наступна теорема.

Теорема 5 *(про пряму, перпендикулярну до даної площини).*
Через будь-яку точку простору проходить пряма, перпендикулярна до даної площини, і до того ж тільки одна.

□ Перша частина теореми про існування такої прямої обґрунтована у розв'язанні задачі 1. Для доведення єдиності такої прямої припустимо супротивне, а саме: через деяку точку A проведено дві різні прямі a_1 і a_2, перпендикулярні до площини α (рис. 408). За теоремою 2, вони — паралельні, тобто не мають спільних точок. Ця суперечність і доводить твердження. ■

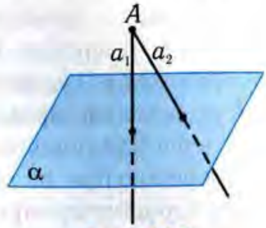


Рис. 408

Аналогічне узагальнення має і результат задачі 2 попереднього параграфа.

Теорема 6 *(про площину, перпендикулярну до даної прямої).*
Через будь-яку точку простору проходить площина, перпендикулярна до даної прямої, і до того ж тільки одна.

□ Існування такої площини обґрунтовано у розв'язанні задачі 3 попереднього параграфа. Залишилося довести єдиність площини, яка задовольняє умови теореми. Як зазвичай у таких випадках, припустимо супротивне, а саме: через дану точку A проходять дві різні площини α_1 і α_2, перпендикулярні до прямої a (рис. 409). За теоремою 4, вони — паралельні. Але ці площини мають спільну точку A. Отримана суперечність і доводить твердження. ■

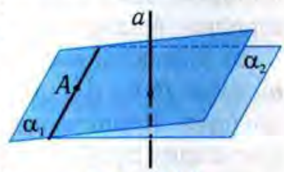


Рис. 409

Приклад 2. З вершини A квадрата $ABCD$ проведено пряму, перпендикулярну до площини квадрата, і на ній взято точку S. Побудувати:

1) пряму, що проходить через центр O квадрата перпендикулярно до його площини;

2) площину, що проходить через середину P відрізка AS перпендикулярно до нього;

3) площину, що проходить через точку A перпендикулярно до прямої BD;

4) пряму, що проходить через точку A перпендикулярно до площини SBD.

□ 1) За умовою, пряма AS перпендикулярна до площини квадрата. Будь-яка інша пряма, перпендикулярна до цієї площини, буде паралельна прямій AS, за теоремою 2, тобто паралельність прямій AS є необхідною умовою перпендикулярності шуканої прямої до площини. Вона є і достатньою умовою, за теоремою 1.

Побудова. Через точку O проводимо пряму OE паралельно прямій AS (рис. 410). Пряма OE перпендикулярна до площини квадрата, за теоремою про дві паралельні прямі, одна з яких перпендикулярна до площини.

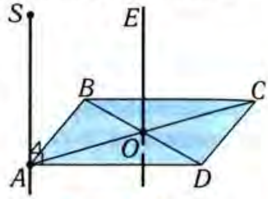


Рис. 410

2) За умовою, пряма AS перпендикулярна до площини $ABCD$. Будь-яка інша площина, перпендикулярна до прямої AS, буде паралельною площині $ABCD$, за теоремою 4. Паралельність шуканої площини площині $ABCD$ є і достатньою умовою, за теоремою 3.

Побудова. Проведемо через точку P площину, паралельну площині $ABCD$. Для цього через точку P проведемо прямі PK і PL, паралельні прямим AD і AB відповідно (рис. 411). Площина PKL паралельна площині $ABCD$, за ознакою паралельності площин, а тому є шуканою.

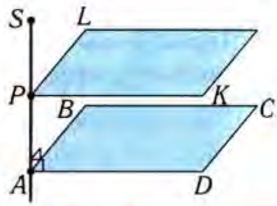


Рис. 411

3) Діагоналі квадрата — перпендикулярні, тобто $BO \perp AO$ (див. рис. 410). Тому пряма AO лежить у шуканій площині. Якщо через точку O провести ще одну пряму OE, перпендикулярну до BO, то пряма BO буде перпендикулярною до площини AOE, за ознакою перпендикулярності прямої і площини (теорема 1 § 18). Ця площина містить точку A.

Побудова. Проведемо через точку O пряму OE, паралельну прямій AS. Вона буде перпендикулярною до площини $ABCD$ (рис. 412). Пряма OE перпендикулярна до прямої BO, за означенням перпендикулярності прямої і площини. Площина AOE є шуканою.

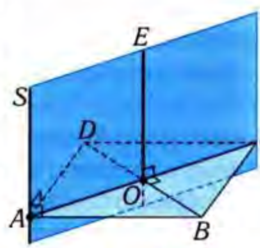


Рис. 412

4) Розглянемо трикутники ABD і SBD (рис. 413, а). Вони є рівнобедреними, бо $AD = AB$, за умовою, а рівність $SB = SD$ ви-

пливає з рівності прямокутних трикутників ASD і ASB. Їхні медіани SO і AO є висотами, а тому пряма BD перпендикулярна до площини AOS, за ознакою перпендикулярності прямої і площини (теорема 1). У прямокутному трикутнику AOS з вершини прямого кута A проведемо висоту AE (рис. 413, б). Пряма AE є шуканою. Справді, проведемо в площині SBD через точку E пряму EF паралельно прямій BD. Ця пряма буде перпендикулярною до площини AOS, за теоремою 1. А це означає, що вона перпендикулярна до прямої AE. За ознакою перпендикулярності прямої і площини(теорема 1 § 18), пряма AE перпендикулярна до площини SBD. ■

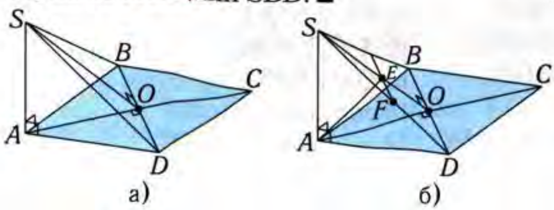


Рис. 413

✓ Контрольні запитання

1. Чи правильно, що дві прямі, перпендикулярні до деякої площини, лежать в одній площині?
2. Чи можуть два бічних ребра піраміди бути перпендикулярними до площини основи піраміди?
3. Чи можна провести пряму перпендикулярно до двох площин, що перетинаються?
4. Чи існує взаємозв'язок між розміщенням ніжок стола відносно його поверхні і підлоги, на якій він стоїть?
5. Чи існує переріз куба площиною, яка перпендикулярна рівно до двох його ребер?
6. Чи можна провести площину, яка перпендикулярна одночасно до двох мимобіжних прямих?
7. Чому льодові бурульки, які звисають з даху навесні, можна вважати паралельними між собою (нехтуючи їхньою товщиною)?
8. На стелі закріплено гак. За допомогою канатів необхідно підвісити до нього платформу так, щоб її площина була горизонтальною. Як це зробити?
9. Чи можна через дану точку простору провести три взаємно перпендикулярні прямі? А чотири?
10. Скільки різних площин визначають чотири прямі, перпендикулярні до однієї площини?

Графічні вправи

1. На рис. 414 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з квадратною основою $ABCD$, точки M, N, P, Q — середини відповідно ребер BC, B_1C_1, AB, D_1C_1, точки O, O_1 — центри граней $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Встановіть взаємне розміщення вказаних прямої і площини:
1) OO_1 і ABC; 2) OM і ADD_1;
3) OC і DBB_1; 4) CC_1 і NQO_1;
5) B_1C і BAD_1; 6) A_1C_1 і MNQ;
7) PM і BDD_1; 8) QN і NPM.

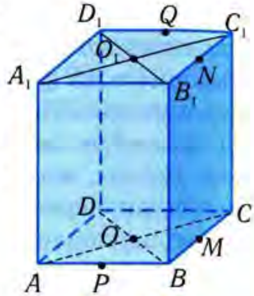


Рис. 414

2. На рис. 415 зображено правильний трикутник ABC, O — його центр, OS — відрізок, перпендикулярний до площини трикутника, точки M, N — відповідно середини сторін AB, BC. Встановіть взаємне розміщення:
1) прямої AB і площини SOC;
2) прямої MN і площини SOB;
3) прямої AC і площини MNS.

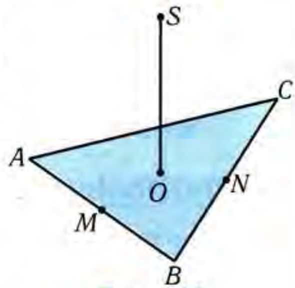


Рис. 415

3. На рис. 416 зображено круг з центром O, AB і CD — його перпендикулярні діаметри, MB — дотична до круга, OK, BL — рівні відрізки, перпендикулярні до площини круга. Встановіть взаємне розміщення:
1) прямої BL і площини AOC;
2) прямої BM і площини LOK;
3) прямої BM і площини COK;
4) прямої KL і площини DOK;
5) площин DOK і MBL;
6) прямої BK і площини CLD.

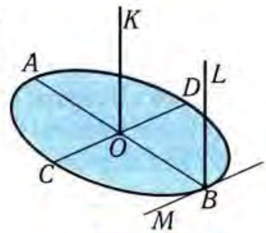


Рис. 416

4. Побудуйте рисунок за наведеними даними.
1) Площина, що проходить через ребро основи AB правильного тетраедра $SABC$, перпендикулярна до бічного ребра SC.
2) Через точку M, що лежить на діагоналі основи AC правильної чотирикутної піраміди $SABCD$, проходить площина, перпендикулярна до AC.

Задачі

407. З вершини прямого кута C рівнобедреного прямокутного трикутника ABC проведено пряму, перпендикулярну до площини цього трикутника, і на ній взято точку S. Побудуйте:

1°) площину, яка проходить через точку S перпендикулярно до прямої AB;

2°) пряму, що проходить через середину відрізка AS перпендикулярно до площини ABC;

3°) площину, яка проходить через точку A паралельно площині BCS;

4) пряму, яка проходить через точку C перпендикулярно до площини ABS, якщо $AC = \frac{2}{\sqrt{3}} CS$.

408. Із середини K гіпотенузи BC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC проведено пряму, перпендикулярну до площини цього трикутника, і на ній взято точку M. Побудуйте:

1°) площину, яка проходить через точку M перпендикулярно до прямої AC;

2°) пряму, що проходить через середину відрізка AM перпендикулярно до площини ABC;

3°) площину, яка проходить через точку A паралельно площині BCM;

4) площину, яка проходить через точку K перпендикулярно до прямої AM, якщо $MK = CK$.

409. З центра O правильного трикутника ABC проведено пряму, перпендикулярну до площини трикутника, і на ній взято точку S. Побудуйте:

1°) площину, що проходить через точку O, перпендикулярну до прямої BC;

2°) пряму, що проходить через середину відрізка AS, перпендикулярну до площини ABC;

3) площину, що проходить через середину відрізка AS, перпендикулярну до прямої OS;

4*) пряму. що проходить через точку A, перпендикулярну до площини BCS.

410. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте:

1°) пряму, що проходить через центр грані $A_1B_1C_1D_1$, перпендикулярну до протилежної грані;

2°) площину, що проходить через вершину A, перпендикулярну до діагоналі BD;
3) пряму, що проходить, через центр грані AA_1B_1B перпендикулярно до площини BDD_1;
4*) площину, що проходить через точку D перпендикулярно до прямої BD_1.

411. У тетраедрі $SABC$ всі грані — правильні трикутники, точка O — центр основи ABC, D — середина ребра BC, точка N належить бічному ребру SA.
1°) Визначте взаємне розміщення прямої SO і площини ABC.
2°) Визначте взаємне розміщення прямої BC і площини ASD.
3) Проведіть через точку N пряму, перпендикулярну до основи.
4*) Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точку N перпендикулярно до прямої OS.

412°. Два електричні дроти необхідно протягнути від стовпа висотою 7 м до будівлі висотою 4 м. Скільки потрібно мати дроту, якщо відстань від будівлі до стовпа дорівнює 10 м і на провисання дроту треба додати 3% від розрахункової довжини?

413. Сторожова вежа для охорони ділянки прямокутної форми встановлена в одній з вершин прямокутника. Відстані від спостерігача, що стоїть на вежі, до решти вершин прямокутника дорівнюють a, b, c, причому $a > b > c$. Чому дорівнює висота вежі?

---

414. Три паралельні прямі a, b, c не лежать в одній площині. Через точку M, що лежить на прямій a, проведено перпендикуляри до прямих b і c, які перетинають їх, відповідно, в точках P і Q. Доведіть, що пряма PQ перпендикулярна до прямих b і c.

415. Через точку O, що знаходиться на висоті CD трикутника ABC, проведено перпендикуляр OM до його площини. Доведіть, що площина, яка проходить через прямі CD і OM, перпендикулярна до прямої AB.

416*. Дано площину α і пряму a, яка перетинає площину в точці M і не перпендикулярна до α. Доведіть, що в площині α через точку M проходить пряма, перпендикулярна до прямої a, і до того ж лише одна.

417. На прямій, перпендикулярній до площини α, взято дві точки A і B, які не лежать у площині α, а в площині α взято дві точки X і Y. Відомо, що $XA > XB$. Порівняйте відрізки YA і YB.

Вправи для повторення

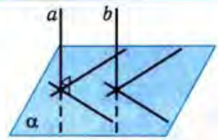
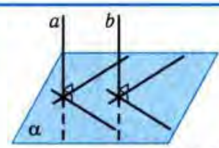
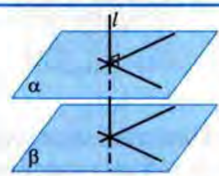
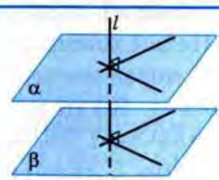
418. Доведіть, що всі прямі площини, перпендикулярні до даної прямої площини, утворюють цю площину.

419. Як поділити відрізок навпіл, користуючись лише шаблоном: а) прямого кута; б) гострого кута?

420. Сторони паралелограма дорівнюють 2 м і 16 дм; відстань між більшими сторонами — 8 дм. Визначте відстань між меншими сторонами.

Підсумок

Головні твердження

Теорема про дві паралельні прямі, одна з яких перпендикулярна до площини	Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то і друга пряма перпендикулярна до цієї площини.	 $a \parallel b,\ a \perp \alpha \Rightarrow b \perp \alpha$
Теорема про паралельність прямих, перпендикулярних до площини	Якщо дві прямі перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, то вони — паралельні.	 $a \perp \alpha,\ b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$
Теорема про паралельні площини, одна з яких перпендикулярна до прямої	Якщо одна з двох паралельних площин перпендикулярна до прямої, то і друга площина перпендикулярна до цієї самої прямої.	 $\alpha \parallel \beta,\ \alpha \perp l \Rightarrow \beta \perp l$
Теорема про дві площини, перпендикулярні до прямої	Якщо дві площини перпендикулярні до однієї прямої, то вони — паралельні.	 $\alpha \perp l, \beta \perp l \Rightarrow \alpha \parallel \beta$

§20. Перпендикулярність площин

Розглядається відношення перпендикулярності площин — одне з найважливіших і найзастосовніших у геометрії простору та її застосуваннях.

Б Із усього розмаїття взаємних розміщень двох площин на особливу увагу і вивчення заслуговують ті, при яких площини перпендикулярні одна до одної (наприклад, суміжні стіни кімнати, паркан і ділянка землі, двері і підлога тощо) (рис. 417, а–в).

а) б) в)

Рис. 417

Наведені приклади дають змогу побачити одну з основних властивостей відношення, яке ми маємо вивчати, — симетричність розміщення кожної з площин відносно до іншої. Симетрія забезпечується тим, що площини начебто «зіткані» з перпендикулярів. Спробуємо уточнити ці спостереження.

Нехай маємо площину α і пряму c на ній (рис. 418, а). Проведемо через кожну точку прямої c прямі, перпендикулярні до площини α. Всі ці прямі паралельні між собою (чому?) і складають, за задачею 1 § 8, деяку площину β (рис. 418, б). Природно назвати площину β ***перпендикулярною*** до площини α.

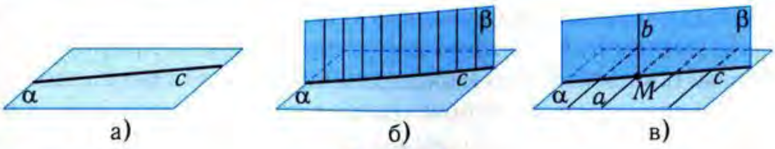


Рис. 418

У свою чергу, всі прямі, які лежать у площині α і перпендикулярні до прямої c, складають площину α і перпендикулярні до площини β (рис. 418, в). Справді, якщо a — довільна така пряма, то вона перетинає пряму c у деякій точці M. Через точку M проходить у площині β перпендикулярна до α пряма b, тому $b \perp a$. Отже, $a \perp c$, $a \perp b$, тому $a \perp \beta$. Виходить, що площина α перпендикулярна до площини β, а пряма c є лінією їхнього перетину.

Дві площини називаються перпендикулярними, якщо кожна з них утворена прямими, що перпендикулярні до другої площини і проходять через точки перетину цих площин.

Перпендикулярність площин α і β позначається звичним уже знаком $\perp$: $\alpha \perp \beta$.

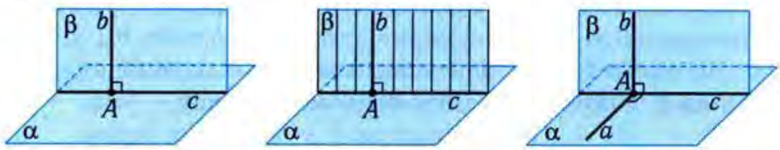
Одну з ілюстрацій цього означення можна уявити, якщо розглянути фрагмент кімнати дачного будинку (рис. 419). На ньому підлога і стіна складені з дошок, перпендикулярних до стіни і підлоги. Тому вони — перпендикулярні. На практиці це означає, що підлога горизонтальна, а стіна вертикальна.

Рис. 419

Наведене означення важко використати при фактичній перевірці перпендикулярності площин. Але якщо уважно проаналізувати міркування, які привели до цього означення, то бачимо, що перпендикулярність площин α і β забезпечила наявність у площині β прямої b, перпендикулярної до площини α (див. рис. 418, в). Ми дійшли ознаки перпендикулярності двох площин, яка найчастіше застосовується на практиці.

Теорема 1 *(ознака перпендикулярності площин).*
Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини є перпендикулярними.

□ Нехай площина β проходить через пряму b, перпендикулярну до площини α, і c — лінія перетину площин α і β (рис. 420, а). Всі прямі площини β, які паралельні прямій b і перетинають пряму c разом з прямою b, утворюють площину β. За теоремою про дві паралельні прямі, одна з яких перпендикулярна до площини (теорема 1 § 19), всі вони разом з прямою b перпендикулярні до площини α. Тобто площина β складається із прямих, які проходять через лінію перетину площин α і β і перпендикулярні до площини α (рис. 420, б).



а) б) в)

Рис. 420

Тепер у площині α через точку A перетину прямих b і c проведемо пряму a, перпендикулярну до прямої c (рис. 420, в). Пряма a перпендикулярна до площини β, за ознакою перпендикулярності прямої і площини ($a \perp c$, за побудовою, $a \perp b$, бо $b \perp \alpha$). Повторивши попередні міркування, одержимо, що площина α складається із прямих, перпендикулярних до площини β, які проходять через лінію перетину площин. Згідно з означенням, площини α і β — перпендикулярні. ■

Наведена ознака дає змогу встановлювати перпендикулярність площин або ж забезпечувати її.

Приклад 1. Приладнати щит до стовпа так, щоб він був розміщений вертикально.

□ Якщо стовп стоїть вертикально, то досить довільно припасувати щит до стовпа і закріпити його (рис. 421, а). Згідно з розгля-

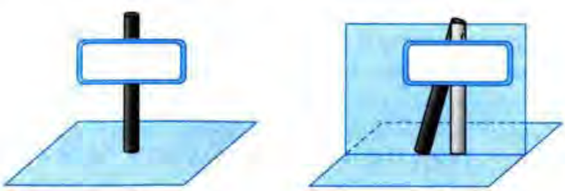

а) б)

Рис. 421

нутою вище ознакою, площина щита буде перпендикулярною до поверхні землі. У цьому випадку задача має безліч розв'язків.

Якщо ж стовп стоїть похило до землі, то досить до стовпа приладнати вертикальну рейку (рис. 421, б), а потім щит припасувати і до рейки, і до стовпа. У цьому випадку положення щита є цілком певним, оскільки стовп і вертикаль визначають єдину площину. ■

У попередньому прикладі «технічне» завдання звелось до математичної задачі проведення через дану пряму площини, перпендикулярної до іншої площини.

Приклад 2. З вершини A квадрата $ABCD$ проведено перпендикулярний до його площини відрізок AK, $AB = AK = a$.
1) Визначити взаємне розміщення площин AKC і ABD, AKD і ABK.
2) Побудувати площину, яка проходить через пряму BD перпендикулярно до площини ABC.
3) Провести через середину F відрізка KC площину, перпендикулярну до площини KAC.
4) Знайти площу трикутника BDF.

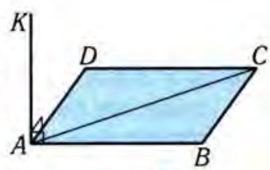


Рис. 422

□ Побудуємо рисунок, який відповідає умові прикладу (рис. 422).

1) Площини AKC і ABD — перпендикулярні, за ознакою перпендикулярності площин (теорема 1): $AK \perp ABD$, за умовою. Площини AKD і ABK також перпендикулярні, за ознакою перпендикулярності площин (теорема 1). Справді, пряма AB, через яку проходить площина ABK, перпендикулярна до площини AKD, за ознакою перпендикулярності прямої і площини (теорема 1 § 18): $AB \perp AD$, як суміжні сторони квадрата; $AB \perp AK$, бо $AK \perp ABD$.

2) За ознакою перпендикулярності площин, для шуканої побудови достатньо через деяку точку прямої BD провести пряму, перпендикулярну до площини ABC. А для цього достатньо через цю точку провести пряму, паралельну прямій AK. Справді, за умовою, пряма AK перпендикулярна до площини ABC і тому, згідно з теоремою про дві паралельні прямі, одна з яких перпендикулярна до площини (теорема 1 § 19), побудована пряма буде перпендикулярною до площини ABC.

Побудова. Через точку B проводимо пряму BE, паралельну прямій AK (рис. 423). Площина BDE є шуканою.

3) Нехай F — середина відрізка KC. Проведемо через точку F пряму, перпендикулярну до площини ABC. Цією прямою буде пряма FO, де O — центр квадрата $ABCD$ (рис. 424). Справді, $FO \parallel AK$, як середня лінія трикутника AKC. Оскільки пряма AK перпендикулярна до площини ABC, то й пряма FO буде до неї перпендикулярна, за теоремою про дві паралельні прямі, одна з яких перпендикулярна до площини (теорема 1 § 19). Тому $FO \perp DB$. А оскільки $AC \perp DB$, то $DB \perp AOF$ (або KAC). Площина BDF проходить через перпендикулярну пряму до площини KAC, тобто вона є шуканою.

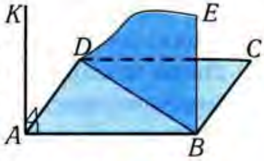


Рис. 423

4) У трикутнику BDF відрізок FO — висота, що проведена до сторони BD (див. рис. 424). Маємо: $BD = \sqrt{2}a$, як діагональ квадрата; $FO = \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}a$, за властивістю середньої лінії трикутника. Таким чином, $S = \frac{1}{2}BD \cdot FO = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{2\sqrt{2}}a^2$. ■

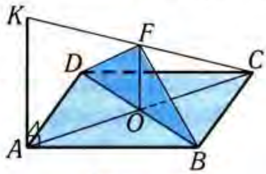


Рис. 424

Відповідь. 4) $\frac{1}{2\sqrt{2}}a^2$.

Дослідження властивостей відношення перпендикулярності площин та його застосувань почнемо з простої, але дуже корисної теореми.

Теорема 2 *(про перпендикуляр до лінії перетину перпендикулярних площин).*

Якщо дві площини перпендикулярні, то пряма, що належить одній площині і перпендикулярна до лінії перетину цих площин, перпендикулярна до другої площини.

□ Нехай перпендикулярні площини α і β перетинаються по прямій c, а пряма b у площині β перпендикулярна до прямої c і перетинає її в точці B (рис. 425). За означенням перпендикулярності площин, у площині β через точку B проходить пряма b_1, перпендикулярна до площини α. Зрозуміло, що вона перпендикулярна до прямої c. Але ж через точку прямої в площині можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної прямої.

Тому прямі b і b_1 збігаються. А це означає, що пряма однієї площини, яка перпендикулярна до лінії перетину двох перпендикулярних площин, перпендикулярна до другої площини. ■

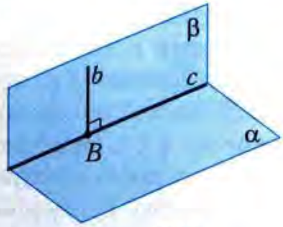


Рис. 425

Застосуємо розглянуту теорему до обґрунтування ще однієї ознаки перпендикулярності площин, яка є важливою з огляду подальшого вивчення взаємного розміщення двох площин.

Нехай площини α і β — перпендикулярні, пряма c — лінія їхнього перетину. Через довільну точку A прямої c проведемо в площинах α і β прямі a і b, перпендикулярні до прямої c (рис. 426). За теоремою 2, прямі a і b перпендикулярні відповідно до площин β і α, тому вони перпендикулярні між собою: $a \perp b$. Прямі a і b визначають деяку площину γ. Лінія перетину c площин α і β перпендикулярна до площини γ, за ознакою перпендикулярності прямої і площини (теорема 1 § 18): $c \perp a$, $c \perp b$, $a \subset \gamma$, $b \subset \gamma$. Якщо врахувати довільність вибору точки A на прямій c і той факт, що через точку A прямої c проходить єдина площина, яка перпендикулярна до неї, то можна зробити наступний висновок.

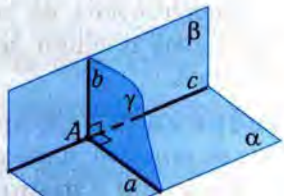


Рис. 426

Теорема 3 *(про площину, перпендикулярну до лінії перетину перпендикулярних площин).*

Площина, перпендикулярна до лінії перетину двох перпендикулярних площин, перетинає ці площини по перпендикулярних прямих.

Таким чином, встановлено ще одну властивість перпендикулярних площин. Ця властивість є характеристичною, тобто якщо вона справджується для деяких двох площин, то площини перпендикулярні між собою. Маємо ще одну ознаку перпендикулярності площин.

Теорема 4 *(друга ознака перпендикулярності площин).*

Якщо прямі перетину двох площин третьою площиною, перпендикулярною до лінії їхнього перетину, перпендикулярні, то дані площини теж перпендикулярні.

☐ Нехай площини α і β перетинаються по прямій c, і площина γ, яка перпендикулярна до прямої c, перетинає площини α і β відповідно по прямих a і b (рис. 427). За умовою, $a \perp b$. Оскільки $\gamma \perp c$, то $a \perp c$. А тому пряма a перпендикулярна до площини β, за ознакою перпендикулярності прямої і площини (теорема 1 § 18). Звідси випливає, що площини α і β — перпендикулярні, за ознакою перпендикулярності площин (теорема 1). ■

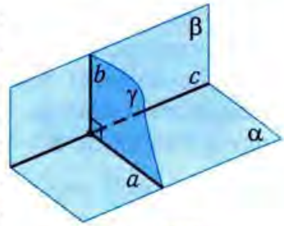


Рис. 427

Заслуговують на увагу і теореми про зв'язки перпендикулярності двох площин до третьої площини з їхнім взаємним розміщенням.

Теорема 5 *(про лінію перетину двох площин, перпендикулярних до третьої площини).*

Якщо дві площини, що перпендикулярні до третьої площини, перетинаються, то лінія їхнього перетину перпендикулярна до цієї площини.

☐ Нехай площини α і β, перпендикулярні до площини γ, перетинаються по прямій a ($a \not\parallel \gamma$, чому?), і A — точка перетину прямої a з площиною γ (рис. 428). Точка A належить лініям перетину площин γ і α, γ і β, а, за умовою, $\alpha \perp \gamma$ і $\beta \perp \gamma$. Тому, за означенням перпендикулярності площин, через точку A можна провести прямі, які лежать у площинах α і β і перпендикулярні до площини γ. Оскільки через точку можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до площини, то побудовані прямі збігаються, одночасно збігаючись з лінією перетину площин α і β. Таким чином, пряма a — лінія перетину площин α і β — перпендикулярна до площини γ. ■

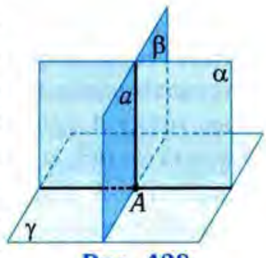


Рис. 428

Розглянемо теорему, яка описує зв'язок між паралельністю і перпендикулярністю площин. Відповідний результат ми вже мали для прямих і площин.

Теорема 6 *(про паралельні площини, перпендикулярні до третьої площини).*

Якщо одна з двох паралельних площин перпендикулярна до третьої, то і друга площина перпендикулярна до неї.

□ Нехай площини α і β — паралельні, а площина γ перпендикулярна до площини α. Оскільки площина γ перетинає площину α , то вона повинна перетинати і паралельну їй площину β. Візьмемо в площині α довільну пряму m, перпендикулярну до площини γ , і проведемо через неї, а також — через довільну точку площини β, площину δ (рис. 429). Площини δ і β перетинаються по прямій n, а оскільки $\alpha \parallel \beta$, то $m \parallel n$ (теорема 2 § 18). Із теореми 1 випливає, що $n \perp \gamma$, а тому перпендикулярною до площини γ буде і площина β, яка проходить через пряму n. ■

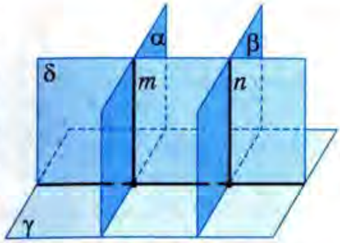


Рис. 429

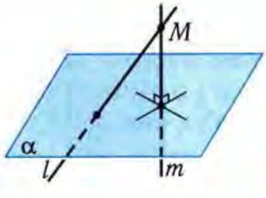
Доведена теорема дає ще одну ознаку перпендикулярності площин.

Далі розглянемо ряд задач на побудову перпендикулярних площин. Через задану точку провести площину, перпендикулярну до даної, можна за допомогою ознаки перпендикулярності площин (теорема 1). Достатньо через цю точку провести пряму, перпендикулярну до даної площини (див. задачу 1 § 19). А потім через побудовану пряму провести площину. Вона буде перпендикулярною до даної площини, за вказаною ознакою. Зрозуміло, що таких площин можна провести безліч.

Більш змістовною є задача про побудову площини, перпендикулярної до даної, за умови, що вона проходить через дану пряму. Зрозуміло, що якщо дана пряма перпендикулярна до даної площини, то таких площин можна побудувати безліч. Залишилося розглянути випадок, коли дана пряма не перпендикулярна до даної площини. Можливість такої побудови обґрунтовано на рівні фізичних моделей прямих і площин у прикладі 1.

Задача 1. Довести, що через довільну пряму, не перпендикулярну до площини, можна провести площину, що перпендикулярна до даної площини.

□ Нехай дано площину α і пряму l, $l \not\perp \alpha$. Візьмемо на прямій l довільну точку M і проведемо через неї пряму m, перпендикулярну до площини α (рис. 430, а). Оскільки, за умовою, l не перпендикулярна до α, то прямі l і m перетинаються. Через ці прямі можна провести площину β (рис. 430, б), яка, згідно з ознакою пер-



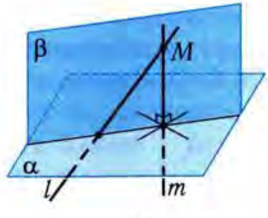


Рис. 430

пендикулярності площин (теорема 1), буде перпендикулярною до площини α. ■

Приклад 3. Через вершину A правильної піраміди $SABC$ з основою ABC провести пряму, перпендикулярну до площини бічної грані SBC.

□ Для розв'язання даної задачі скористаємось теоремою про перпендикуляр до лінії перетину перпендикулярних площин (теорема 2). Нехай K — середина ребра BC (рис. 431). Площини AKS і BCS — перпендикулярні, за ознакою перпендикулярності площин (теорема 1). Справді, $BC \perp SK$ і $BC \perp AK$, як медіани, проведені до основ у рівнобедрених трикутниках. Тому, за ознакою перпендикулярності прямої і площини (теорема 1 § 18), пряма BC перпендикулярна до площини AKS. Площина BCS проходить через пряму, перпендикулярну до площини AKS.

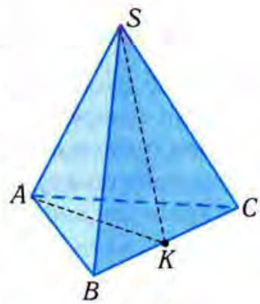


Рис. 431

Побудова. Проведемо в площині AKS з точки A пряму AL, перпендикулярну до прямої KS — лінії перетину площин AKS і BCS (рис. 432). За теоремою про перпендикуляр до лінії перетину перпендикулярних площин (теорема 2), пряма AL перпендикулярна до площини BCS. ■

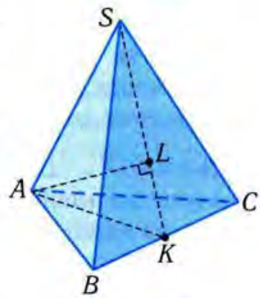


Рис. 432

✓ Контрольні запитання

1. На рис. 433 зображено чотирикутник $ABCD$ — квадрат, пряма MD перпендикулярна до площини $ABCD$. Які з пар площин не є перпендикулярними:
1) MAD і MDC; 2) MBC і MAB; 3) ABC і MDC; 4) MAD і MAB?
2. На рис. 434 зображено правильну чотирикутну піраміду $SABCD$, точки P, M, N — середини ребер AB, BC, BS, O — центр основи $ABCD$. Які з пар площин є перпендикулярними:
1) ACS і BDS; 2) MOS і POS; 3) COS і MNP; 4) MNP і SOB; 5) CND і ABS?
3. На рис. 435 зображено прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C і пряму BP, перпендикулярну до площини ABC. Які з наступних пар площин є перпендикулярними:
1) CBP і ABC; 2) ABP і ABC; 3) PAC і PBC; 4) PAC і PAB?

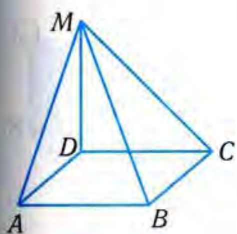


Рис. 433

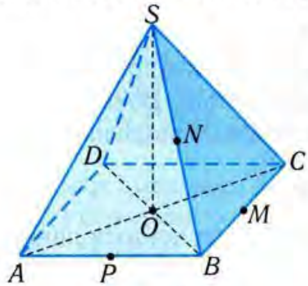


Рис. 434

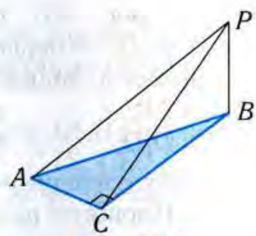


Рис. 435

4. Дві площини — перпендикулярні. Чи можна через довільну точку однієї з них провести пряму в цій площині, яка перпендикулярна до другої площини?
5. У площині α не можна провести пряму, перпендикулярну до площини β. Чи можуть ці площини бути перпендикулярними?
6. Через деяку точку площини α проходить пряма, що лежить у цій площині і перпендикулярна до площини β. Чи правильно, що площини α і β перпендикулярні?
7. Секція паркану приладнана до вертикального стовпа. Чи можна стверджувати, що площина паркану вертикальна?
8. Як до рейки, паралельної до поверхні землі, прикріпити вертикально щит?
9. Чому поверхня дверей, незалежно від того, зачинені вони чи відчинені, розміщена вертикально до підлоги?

10. Чому висок щільно прилягає до вертикальної стіни, а до похилої — не обов'язково?
11. Чи можна до похилого стовпа прикріпити щит так, щоб він був перпендикулярним до поверхні землі?
12. Як на практиці встановити, чи перпендикулярна площина стіни до площини підлоги?

Графічні вправи

1. На рис. 436 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
   1) Вкажіть площини, перпендикулярні до площини BDD_1.
   2) Як розміщені площини A_1B_1C і AD_1C_1?

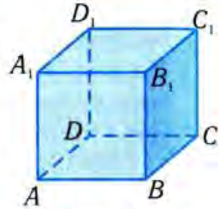


Рис. 436

2. На рис. 437 площини квадратів $ABCD$ і ABC_1D_1 — перпендикулярні. Відстань CC_1 дорівнює b. Знайдіть довжину відрізка:
   1) AB; 2) D_1C;
   3) D_1D; 4) C_1D.

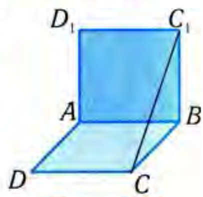


Рис. 437

3. Побудуйте рисунок за наведеними даними.
   1) Площини рівносторонніх трикутників ABC і ABK — перпендикулярні.
   2) Площина ABC перпендикулярна до площин BDC і BEA.
   3) Площини α і β перпендикулярні до площини γ і перетинаються по прямій a, лініями їхнього перетину з площиною γ є прямі b і c.
   4) У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площини AB_1C_1 і BCA_1 є перпендикулярними.

Задачі

421. Відрізок OS проведено з центра O квадрата $ABCD$ перпендикулярно до його площини.
   1°) Визначте взаємне розміщення площин ACS і ABC.
   2°) Визначте взаємне розміщення площин ACS і BDS.
   3) Побудуйте площину, що проходить через пряму OS, перпендикулярну до площини ABS.

4) Побудуйте площину, перпендикулярну до площини ABC, яка проходить через середини сторін AD і CD.

422. З точки перетину O діагоналей ромба $ABCD$ проведено перпендикулярний до площини ромба відрізок OS; $AB = DB = SA = a$.

1°) Визначте взаємне розміщення площин SDB і ABC, SDB і ACS.

2°) Побудуйте площину, яка проходить через пряму BC перпендикулярно до площини ABD.

3) Проведіть через середину F відрізка CS площину, перпендикулярну до площини ABC.

4) Знайдіть площу трикутника BDF.

423. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1°) Визначте взаємне розміщення площин AB_1C_1 і CDD_1.

2°) Визначте взаємне розміщення площин AB_1C_1 і CD_1A_1.

3°) Побудуйте площину, що проходить через точку A перпендикулярно до площини BB_1D_1.

4) Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через середини ребер A_1D_1 і B_1C_1 і перпендикулярна до площини ABC.

5) Визначте взаємне розміщення площини AA_1B і площини, що проходить через середини ребер A_1B_1, C_1D_1, CD.

6) Знайдіть площу перерізу куба площиною, що проходить через ребро BB_1 і середину ребра A_1D_1 ($BB_1 = a$).

7) Побудуйте точку, симетричну точці A відносно площини A_1B_1C.

424. У правильному тетраедрі $ABCD$ з ребром 2 см точка M — середина DB, а точка N — середина AC.

1°) Доведіть, що пряма DB перпендикулярна до площини AMC.

2°) Доведіть, що площина BDN перпендикулярна до площини AMC.

3) Через точку O перетину медіан трикутника ADC проведіть пряму, перпендикулярну до площини AMC.

4) Знайдіть довжину відрізка цієї прямої всередині тетраедра.

5) У якому відношенні ділить цей відрізок площина AMC?

425. Два рівносторонніх трикутники ABC і ADC лежать у перпендикулярних площинах.

1°) Знайдіть довжину відрізка BD, якщо $AC = 1$ см.
2) Доведіть, що площина BKD (K лежить на прямій AC) перпендикулярна до площини кожного із трикутників тоді і тільки тоді, коли K є серединою сторони AC.

426. Прямокутник $ABCD$, сторони якого 3 см і 4 см, перегнули по діагоналі AC так, що трикутники ABC і ADC розмістились в перпендикулярних площинах. Визначте відстань між точками B і D після того, як перегнули прямокутник $ABCD$.

427. Через дану точку проведіть площину, перпендикулярну до кожної з двох даних площин.

428°. Доведіть, що площини суміжних граней куба є перпендикулярними.

429. Площини α і β перпендикулярні між собою. З точки A площини α проведено перпендикулярну до площини β пряму AB. Доведіть, що пряма AB лежить у площині α.

430. Доведіть, що коли площина і пряма, яка не лежить у цій площині, перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, то вони паралельні між собою.

431. Через точки A і B, що лежать на лінії перетину p перпендикулярних між собою площин α і β, проведено перпендикулярні до p прямі AA_1 в α, BB_1 в β. Точка X лежить на прямій AA_1, а точка Y — на BB_1. Доведіть, що пряма BB_1 перпендикулярна до прямої BX, а пряма AA_1 — перпендикулярна до прямої AY.

432*. Через середину кожної сторони трикутника проведено площину, перпендикулярну до цієї сторони. Доведіть, що всі три проведені площини перетинаються по одній прямій, перпендикулярній до площини трикутника.

Вправи для повторення

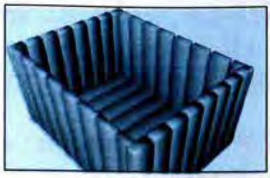
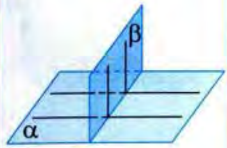
433. У рівносторонньому трикутнику зі стороною b визначте: 1) висоту; 2) радіуси вписаного та описаного кіл.

434. З однієї точки проведено до даної прямої перпендикуляр і дві похилі. Визначте довжину перпендикуляра, якщо похилі дорівнюють 41 см і 50 см, а їхні проекції на дану пряму відносяться, як 3 : 10.

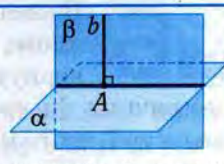
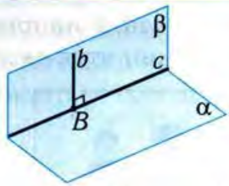
435. Визначте катети прямокутного трикутника, якщо бісектриса прямого кута поділяє гіпотенузу на відрізки 15 см і 20 см.

Підсумок

Головне означення

Дві площини називаються ***перпендикулярними***, якщо кожна з них утворена прямими, що перпендикулярні до другої площини і проходять через точки перетину цих площин.		

Головні твердження

Ознака перпендикулярності двох площин	Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини — перпендикулярні.	 $b \perp \alpha, b \subset \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$
Теорема про перпендикуляр до лінії перетину перпендикулярних площин	Якщо дві площини перпендикулярні, то пряма, що належить одній площині і перпендикулярна до лінії перетину цих площин, перпендикулярна до другої площини.	 $\alpha \perp \beta, b \subset \beta, c = \alpha \cap \beta,$ $b \perp c \Rightarrow b \perp \alpha$

§21. Ортогональне проектування

Розглядається проектування за напрямом, перпендикулярним до площини проекції, та його застосування.

Введення понять перпендикулярності прямої і площини, перпендикулярності площин дає змогу повернутись до питань про зображення просторових геометричних фігур. Як вже відзначалось, якість зображень у стереометрії, тобто можливість за ними отримати найбільш повне уявлення про фігуру, залежить від вибору напряму паралельного проектування. Серед усіх можливих напрямів проектування виділяється напрям, перпендикулярний до площини проекцій. По-перше, такий напрям лише один. По-друге, він найприродніший для сприйняття людиною (рис. 438 – 440).

Рис. 438

Рис. 439

Рис. 440

Таким чином, одним із важливих у геометрії та її застосуваннях окремим випадком паралельного проектування є ***ортогональне проектування***, тобто проектування вздовж прямої, перпендикулярної до площини проекцій.

Ортогональний — від грецьких ορθος *(orthos) — прямий, вертикальний і* γωνια *(gonia) — кут — буквально: прямокутний. Те саме, що й «перпендикулярний».*

Паралельна проекція точки на площину називається її ортогональною проекцією, якщо пряма, що визначає напрям проектування, перпендикулярна до площини проекцій.

З теореми про дві паралельні прямі, одна з яких перпендикулярна до площини (теорема 1 § 19) маємо, що кожна проектуюча пряма при ортогональному проектуванні перпендикулярна до площини проекцій.

Оскільки ортогональне проектування є окремим випадком паралельного проектування, то воно має всі властивості останнього. Зокрема, ортогональною проекцією прямої a на неперпендикулярну до неї площину α є пряма a_1, яку можна вважати перетином площини α з площиною β, складеної з проектуючих прямих (рис. 441). Ці проектуючі прямі перпендикулярні до площини α. Тобто ортогональна проекція прямої на неперпендикулярну до неї площину є перетином перпендикулярних площин.

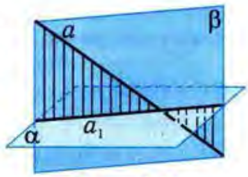


Рис. 441

Ортогональне проектування має ряд особливостей. Ортогональному проектуванню на площину відповідає погляд згори на предмет, що розміщений на горизонтальному майданчику. Тому плоскі фігури, які розміщені паралельно площині проекцій, не спотворюються (рис. 442). Зокрема, не змінюються їхні лінійні

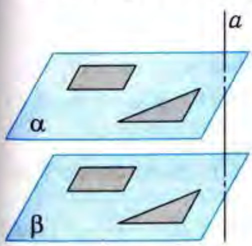


Рис. 442

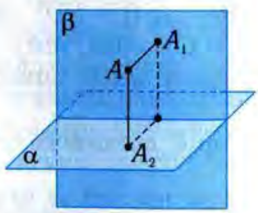


Рис. 443

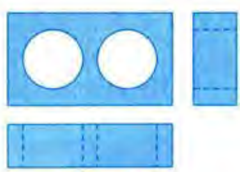


Рис. 444

та кутові розміри, і ця властивість зумовлює широке використання ортогонального проектування у технічному кресленні. Втім, оскільки проектування на одну площину, взагалі кажучи, не дає цілісного уявлення про предмет, то ортогональні проекції виконують принаймні на дві або й на три взаємно перпендикулярні площини (рис. 443, 444). За таким кресленням нескладно відтворити і форму предмета, і його розміри. Так, на рис. 444 представлені фронтальна (вид спереду), горизонтальна (вид зверху) і профільна (вид збоку) проекції деталі (пластини з двома отворами).

Ортогональне проектування, зазвичай, використовують і при зображенні кулі. В результаті зображенням кулі є круг. Якщо ж проектуючі прямі не перпендикулярні до площини проекцій, то проекцією кулі є частина площини, обмежена еліпсом (уявіть собі тінь, яка прямує аж до горизонту, від кулі, що лежить на землі), що не відповідає нашому уявленню про кулю (рис. 445).

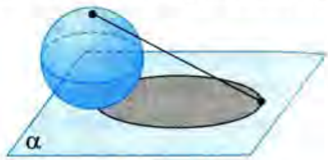


Рис. 445

Приклад 1. Правильна трикутна піраміда $SABC$ з бічним ребром 5 см і стороною основи $3\sqrt{3}$ см ортогонально проектується на площину основи ABC.

1) В яку точку трикутника ABC проектується вершина S?
2) Визначити довжину відрізка, що з'єднує точку S з її проекцією на площину основи.

☐ 1) Нехай при ортогональному проектуванні точка S проектується на точку O, $SO \perp ABC$ (рис. 446). Оскільки $AO \perp SO$, то трикутник SAO — прямокутний з гіпотенузою SA. За теоремою Піфагора, $AO = \sqrt{SA^2 - SO^2}$. Аналогічно з прямокутних трикутників SCO і SBO маємо: $CO = \sqrt{SC^2 - SO^2}$, $BO = \sqrt{SB^2 - SO^2}$. Але в правильній піраміді $AS = CS = BS$, тому $AO = CO = BO$, тобто O — центр кола, описаного навколо основи ABC.

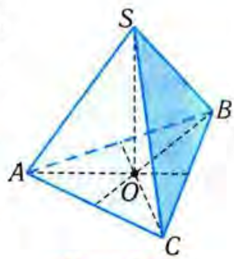


Рис. 446

2) Як відомо, радіус кола R, описаного навколо правильного трикутника із стороною a, обчислюється за формулою: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Тому

$$AO = \frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3} = 3 \text{ (см), а } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ (см).} \blacksquare$$

Відповідь. 2) 4 см.

Поняття перпендикулярності прямої та площини породжує один із найважливіших видів симетрії у просторі, а саме: симетрію відносно площини.

Точки A і A_1 називаються симетричними відносно площини α, якщо відрізок AA_1 перпендикулярний до площини α і точкою O перетину його з α поділяється навпіл* (рис. 447). *Точка площини α вважається симетричною сама собі.

Із цього означення випливає, що $AO = OA_1$, тобто точки A і A_1 — центрально-симетричні відносно точки O.

***Фігури простору F і F_1 називаються симетричними відносно площини α, якщо для кожної точки однієї фігури є симетрична до неї точка в другій фігурі* (рис. 448).**

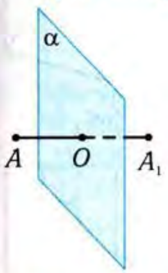


Рис. 447

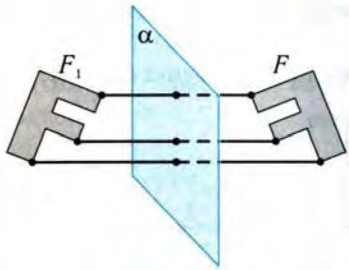


Рис. 448

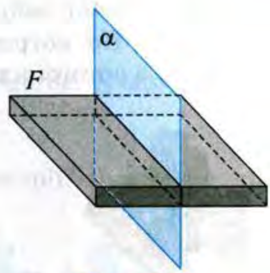


Рис. 449

Якщо ж у цьому означенні $F = F_1$ (йдеться про ту саму фігуру), то F називається *симетричною відносно площини* α (рис. 449).

Прикладами симетричних відносно площин фігур насичені як реальний фізичний простір, так і геометричний. Природа створила симетричними фігури людей і більшості живих істот, симе-

Рис. 450

Рис. 451

Рис. 452

тричною є книга, яку ви тримаєте в руках, столовий посуд, праска і багато-багато ін. (рис. 450 – 452).

Неважко вказати площини, відносно яких симетричні куб, правильна піраміда, куля тощо. Відшукання у геометричної фігури симетрій відносно площин є суттєвим кроком при її вивченні. Це суттєво полегшує знаходження і доведення її властивостей.

✓ Контрольні запитання

1. На рис. 453 зображено конструкцію, зроблену з дроту. Чи однакові її ортогональні проекції на площини нижньої грані і бічної грані каркасного куба?

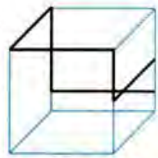


Рис. 453

2. На рис. 454 зображено конструкцію, зроблену з дроту. Порівняйте її ортогональні проекції на площини нижньої, верхньої і бічної граней каркасного куба.

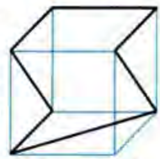
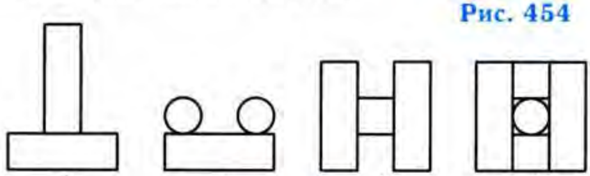


Рис. 454

3. На рис. 455 зображено городошну фігуру «колодязь». На котрому з рис. 456, а)–г) зображено одну з ортогональних проекцій цієї фігури?

Рис. 455



а) б) в) г)

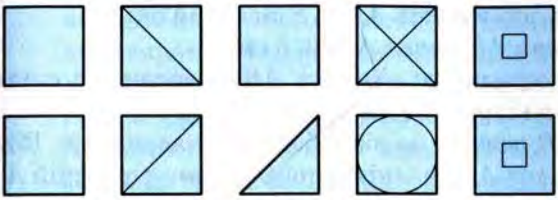
Рис. 456

4. Чи може ортогональною проекцією квадрата бути прямокутник, який не є квадратом? А навпаки?
5. Чи правильно, що ортогональною проекцією довільної прямої є пряма?
6. Чи може відрізок бути ортогональною проекцією трикутника?
7. Чи правильно, що довжина ортогональної проекції відрізка менша або дорівнює довжині самого відрізка?
8. Чи обов'язково ортогональною проекцією квадрата є прямокутник?
9. Який кут може бути ортогональною проекцією прямого кута; гострого кута; тупого кута?
10. Відносно яких площин симетричні: а) точка; б) відрізок; в) пряма; г) площина?

Графічні вправи

1. На кожному з рис. 457, а)–ґ) зображено вид спереду і вид зверху деякої фігури. Для кожної пари вкажіть тіло, яке може так виглядати (відсутність на рисунках штрихових ліній означає, що у відповідної фігури немає невидимих ребер, або вони закриті видимими).

2. Скільки дерев'яних кубиків використано для побудови вежі, якщо з трьох боків вона виглядає, як на рис. 458?



а) б) в) г) ґ)

Рис. 457

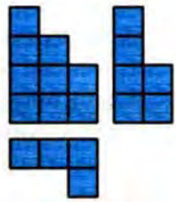
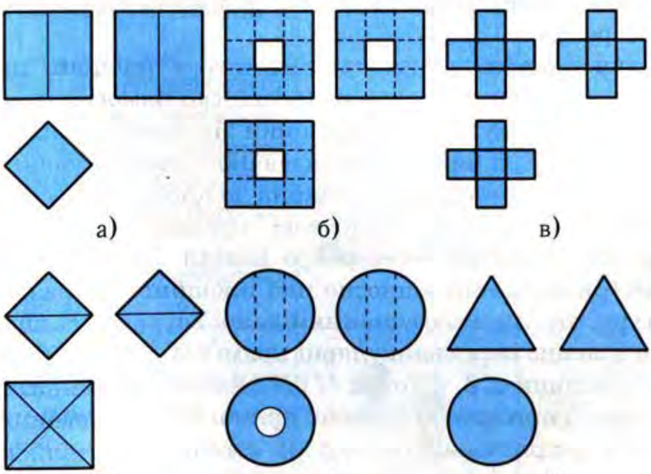


Рис. 458

3. Фігура задана на рис. 459, а)–д) за допомогою трьох ортогональних проекцій.

1) Зобразіть цю фігуру.

2) З'ясуйте, чи має фігура площини симетрії? Якщо має, то скільки?



а) б) в) г) ґ) д)

Рис. 459

4. Побудуйте ортогональну проекцію правильної чотирикутної піраміди на:
1) площину основи;
2) площину, що проходить через ребро основи перпендикулярно до площини основи.

Задачі

436°. Кінці відрізка AB лежать по один бік від площини α. Відстані кінців відрізка AB до їхніх ортогональних проекцій A_1, B_1 на площину α дорівнюють 4 см і 8 см. Знайдіть:
1) довжину відрізка AB, якщо $A_1B_1 = 5$ см;
2) відстань між серединою відрізка AB і серединою симетричного до нього відрізка відносно площини α.

437°. Кінці відрізка AB лежать по різні боки від площини α. Відстані кінців відрізка AB до їхніх ортогональних проекцій A_1, B_1 на площину α дорівнюють 4 см і 8 см. Знайдіть:
1) довжину відрізка AB, якщо $A_1B_1 = 5$ см;
2) відстань між серединою відрізка AB і серединою симетричного до нього відрізка відносно площини α.

438. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ зі стороною основи a відстань між її вершиною S і симетричною до неї точкою S_1 відносно площини $ABCD$ дорівнює b. Знайдіть:
1) довжину бічного ребра піраміди;
2) площу перерізу піраміди, що проходить через протилежні бічні ребра.

439. Тільки одна зі сторін кута лежить у площині проекцій. Доведіть, що ортогональною проекцією прямого кута є прямий кут, гострого кута — кут, менший від проектованого, тупого кута — кут, більший від проектованого, якщо площина, в якій лежить кут, неперпендикулярна до площини проекцій.

440. Площина, паралельна основі правильної чотирикутної піраміди, поділяє бічне ребро навпіл. Зобразіть піраміду, симетричну даній відносно цієї площини. Зобразіть також фігуру, отриману об'єднанням даної і отриманої пірамід?

441. Три взаємно перпендикулярні прямі OX, OY, OZ визначають три площини α, β, γ. Точки M і N лежать у площинах β і γ. Побудуйте ортогональні проекції прямої MN на площини α, β, γ.

442. Балка закріплена кінцями на стінці і на стелі, причому відстані від кінців балки до лінії перетину стелі і стіни дорівнюють, відповідно, 30 см і 40 см. Знайдіть довжину балки, якщо довжина її проекції на лінію перетину стелі і стіни дорівнює 120 см.

Вправи для повторення

443. З точки A проведено до даної прямої дві рівні похилі AB і AC, відстань між основами яких дорівнює 16 см. Визначте довжину проекції кожної похилої на дану пряму.

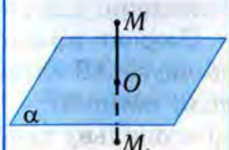
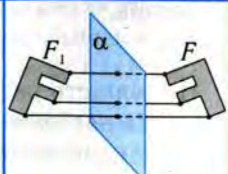
444. У трикутнику проекції бічних сторін на основу дорівнюють 15 м і 27 м, а більша з бічних сторін дорівнює 45 м. На які частини вона поділяється (починаючи від вершини) перпендикуляром до основи, проведеним з її середини.

445. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 13 см і 84 см. Визначте радіус вписаного кола.

446. Довжини трьох сторін прямокутної трапеції дорівнюють 25 см, 25 см, 32 см. Знайдіть довжину четвертої сторони.

Підсумок

Головні означення

Паралельна проекція точки на площину називається її ***ортогональною проекцією,*** якщо пряма, що визначає напрям проектування, перпендикулярна до площини проекцій.		
Точки M і M_1 називаються ***симетричними відносно площини*** α, якщо відрізок MM_1 перпендикулярний до α і точкою O перетину його з α поділяється навпіл. Точка площини α вважається симетричною сама собі.		
Фігури простору F і F_1 називаються ***симетричними відносно площини*** α, якщо для кожної точки однієї фігури є симетрична до неї точка в другій фігурі.		

§22. Перпендикуляр і похила

Розглядаються властивості перпендикуляра і похилої до площини, їхні застосування до вимірювання відстані у просторі.

Б У планіметрії вимірювання відстаней між точкою і прямою (або між паралельними прямими) пов'язане з порівнянням довжин похилих і перпендикулярів. Розглянемо аналогічні поняття у просторі.

Нехай один із кінців A відрізка AB лежить у площині α, а інший — поза площиною (рис. 460). Якщо відрізок і площина не перпендикулярні, то ортогональною проекцією відрізка AB на площину α є відрізок AP, де P — ортогональна проекція точки B на площину α. Маємо площину α і прямокутний трикутник ABP, один з катетів якого лежить у площині, а другий — перпендикулярний до неї.

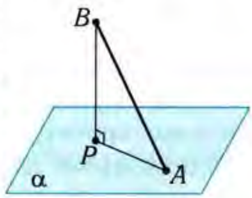


Рис. 460

Сторони прямокутного трикутника ABP мають свої назви: гіпотенуза AB називається ***похилою***, катет BP — ***перпендикуляром***, катет AP — ***проекцією похилої*** (йдеться, звичайно, про ортогональну проекцію). Точку P називають ***основою перпендикуляра BP***, а точку A — ***основою похилої BA***.

Оскільки трикутник ABP прямокутний, то, згідно з теоремою Піфагора,

$$AP^2 + PB^2 = AB^2.$$

Ця рівність разом з іншими властивостями прямокутних трикутників дає змогу сформулювати ряд властивостей перпендикуляра, похилої та її проекції.

Теорема 1 *(властивість перпендикуляра до площини).*

Перпендикуляр, проведений з точки до площини, менший від усякої похилої, проведеної з цієї самої точки до даної площини.

Теорема 2 *(властивість похилих і їхніх проекцій).*

Похилі до площини, які проведені з однієї точки, рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їхні проекції. Якщо дано дві похилі, проведені з однієї точки до площини, то більша похила має більшу проекцію, і навпаки, більшій проекції відповідає більша похила.

Усі ці властивості можна вважати наслідками теореми Піфагора. Їх легко можна проілюструвати прикладами з навколишнього середовища.

Вертикальна підпірка до стовпа з ліхтарем (рис. 461) менша від частини стовпа від землі до місця кріплення підпірки (перпендикуляр менший від похилої).

При запуску повітряного змія чим більше відмотаєш мотузки (рис. 462), тим далі будеш знаходитись від місця, над яким знаходиться змій (більшій похилій відповідає більша проекція).

Рис. 461

Рис. 462

Рис. 463

Під час катання на каруселі (рис. 463) всі знаходяться на однаковій відстані від стовпа, до якого кріпляться кабінки (рівні похилі мають рівні проекції).

Властивості перпендикуляра і похилої широко застосовуються в стереометрії для встановлення взаємного розміщення геометричних фігур, вимірювання відстаней. Варто звернути увагу і на зручність користування термінологією, що сформувалась при цьому. Розглянемо узагальнення результатів прикладу 1 із § 21.

Задача 1. Довести, що ортогональна проекція вершини правильної шестикутної піраміди на площину основи є центром кола, описаного навколо основи піраміди.

☐ Нехай S — вершина піраміди, A_1, A_2, ..., A_6 — вершини основи, а точка O — проекція вершини S на площину основи (рис. 464, а). Бічні ребра SA_i, $i = 1, 2, ..., 6$, можна розглядати як похилі, проведені до площини основи з точки S. Вони рівні між собою, а тому рівними є їхні проекції A_iO на площину основи (рис. 464, б). Отже, кожна з вершин A_i основи розміщена на однаковій відстані від точки O, тобто на колі з центром O і з радіусом OA_i. ■

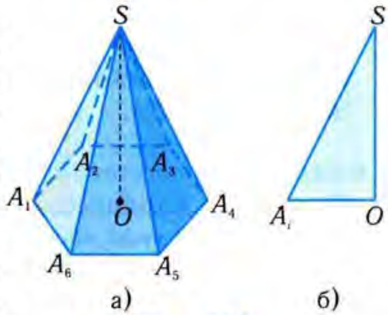


Рис. 464

Легко здогадатись, що задача справджується для довільної правильної n-кутної піраміди з таким самим доведенням.

! Якщо проаналізувати розв'язання задачі 1, то можна дійти висновку, що ортогональна проекція вершини будь-якої n-кутної піраміди, бічні ребра якої є рівними між собою, на площину основи є центром кола, описаного навколо основи піраміди.

Приклад 1. Знайти відстань від вершини C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a до центра O грані $ABCD$.

☐ Побудуємо рис. 465, який відповідає умові прикладу. Відрізок CC_1 — перпендикуляр до площини грані $ABCD$, C_1O — похила, CO — її проекція. За умовою, $CC_1 = a$, а CO дорівнює половині довжини діагоналі квадрата: $CO = \frac{1}{2}CA = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. З прямокутного трикутника COC_1 маємо: $C_1O = \sqrt{CO^2 + CC_1^2} = \sqrt{\frac{2}{4}a^2 + a^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}a$. ■

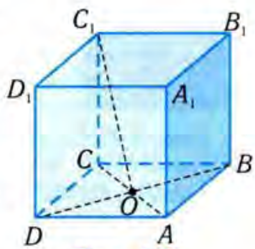


Рис. 465

Відповідь. $\sqrt{\frac{3}{2}}a$.

Насправді це завдання є суто планіметричним, якщо розглянути рівносторонній трикутник DC_1B зі стороною $\sqrt{2}a$.

Розглянемо задачу про вимірювання відстані між точкою і прямою у просторі. Оскільки через пряму і точку, що не лежить на прямій, можна провести єдину площину, то сформульована задача є взагалі планіметричною. Однак у стереометрії ця задача має свої особливості, які можна проілюструвати таким прикладом.

Приклад 2. Знайти відстань від вершини башти до дороги, якщо відомі висота башти h і відстань a від дороги до підніжжя башти.

□ Умову прикладу ілюструє рис. 466, на якому поверхня землі моделюється площиною α, дорога — прямою AB, башта — відрізком OO_1, перпендикулярним до площини α. Шукана відстань дорівнює довжині перпендикуляра OC, проведеного з точки O до прямої AB.

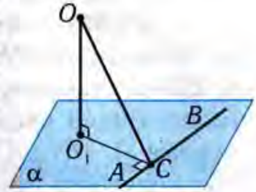


Рис. 466

Проблема полягає в тому, як знайти основу цього перпендикуляра, перебуваючи в площині α. Очевидно, що для цього досить з точки O_1 провести перпендикуляр O_1C до прямої AB (рис. 466). Відрізок OC і є шуканим перпендикуляром. Справді, згідно з властивістю похилих і проекцій (теорема 2), кожен інший відрізок, що сполучає точку O з точкою прямої AB, є довшим від відрізка OC, бо довша його проекція. Обчислення у цій задачі прості. Оскільки трикутник OCO_1 прямокутний і OC — його гіпотенуза, то $OC = \sqrt{CO_1^2 + O_1O^2} = \sqrt{a^2 + h^2}$. ■

У розглянутому прикладі ми дійшли висновку, який широко використовується при вимірюванні відстаней і встановленні перпендикулярності прямих у просторі.

Теорема 3 *(про три перпендикуляри).*

Пряма, що проведена у площині через основу похилої, перпендикулярна до похилої тоді і тільки тоді, коли вона перпендикулярна до її проекції.

Стисле доведення цієї теореми фактично наведено у прикладі 2. Воно ґрунтується на тому, що порівняння довжин похилих, проведених з однієї точки, еквівалентне порівнянню їхніх проекцій.

! **Теорема про три перпендикуляри є ознакою перпендикулярності прямих у просторі, а тому має важливе значення в стереометрії.**

Приклад 3. Площини квадратів $ABCD$ і ABC_1D_1 зі стороною a перпендикулярні. Знайти відстань від середини M сторони C_1D_1 до сторони CD.

☐ Відстань від точки M до прямої CD дорівнює довжині відрізка MN, де N — середина CD (рис. 467). Справді, перпендикуляр MP, проведений до площини $ABCD$, лежить у площині ABC_1D_1, бо ці площини перпендикулярні. Тому $MP \perp AB$. Точка P є серединою відрізка AB, бо $MP \parallel C_1B$ і M — середина C_1D_1. Але тоді проекція PN похилої MN перпендикулярна до прямої CD як відрізок, що з'єднує середини протилежних сторін квадрата. За теоремою про три перпендикуляри (теорема 3), $MN \perp CD$, тобто MN — перпендикуляр до прямої CD. З прямокутного трикутника MPN маємо

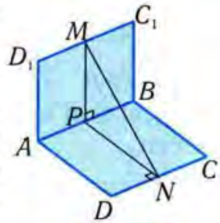


Рис. 467

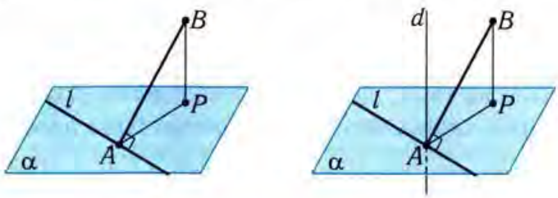
$$MN = \sqrt{MP^2 + PN^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a. \ ■$$

! Порівняйте розв'язання прикладів 2 і 3. Що у них спільного, чим вони відрізняються?

У зв'язку зі значимістю теореми про три перпендикуляри (теорема 3) розглянемо докладніше її доведення. При цьому скористаємось способом, пов'язаним із використання її для встановлення перпендикулярності прямих у просторі.

Дано: AP **— проекція похилої** AB **до площини** α, $l \subset \alpha$, $A \in l$.
Довести: $l \perp AB \Leftrightarrow l \perp AP$.

☐ Доведення теореми складається з двох частин. Нехай спочатку похила AB перпендикулярна до прямої l, що лежить у площині α (рис. 468, а). Доведемо, що її проекція AP також перпендикуляр-



а) б)

Рис. 468

на до прямої l. Проведемо через точку A в площині трикутника ABP пряму d, паралельну перпендикуляру BP (рис. 468, б). Згідно з теоремою про дві паралельні прямі, одна з яких перпендикулярна до площини (теорема 1 § 19), пряма d перпендикулярна до площини α, тому перпендикулярні між собою прямі d та l. За умовою, пряма l перпендикулярна ще і до прямої AB. Отже, пряма l перпендикулярна до двох прямих площини ABP, які перетинаються, а тому перпендикулярна до цієї площини, за ознакою перпендикулярності прямої і площини (теорема 1 § 18). Оскільки проекція AP лежить у площині ABP і перетинає l, то $AP \perp l$.

Доведення оберненого твердження аналогічне наведеному. Для цього досить слово «проекція» замінити словом «похила», і навпаки. ■

! Застосування теореми про три перпендикуляри як ознаки перпендикулярності прямих у просторі зводиться до перевірки правильності одного з наступних тверджень.
1) Чи містить одна із даних прямих проекцію похилої до площини, в якій лежить інша пряма, і чи перпендикулярна похила до неї?
2) Чи містить одна із даних прямих похилу до площини, в якій лежить інша пряма, і чи перпендикулярна проекція похилої до неї?

Приклад 4. Відрізок AP перпендикулярний до площини паралелограма $ABCD$. Доведіть, що:

1) $ABCD$ — прямокутник, якщо пряма PD перпендикулярна до CD;
2) $ABCD$ — ромб, якщо пряма PO, де O — точка перетину діагоналей паралелограма, перпендикулярна до BD.

□ 1) Якщо пряма PD перпендикулярна до прямої CD, що лежить у площині паралелограма α (рис. 469), то, за теоремою про три перпендикуляри (теорема 3), її проекція AD перпендикулярна до прямої DC. Тому паралелограм $ABCD$ є прямокутником.

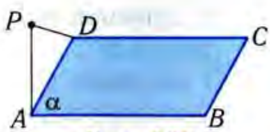


Рис. 469

2) Якщо похила PO перпендикулярна до діагоналі BD (рис. 470), то її проекція AO буде перпендикулярна до прямої BD, за теоремою про три перпендикуляри. Діагоналі паралелограма $ABCD$ — перпендикулярні. Тому він є ромбом. ■

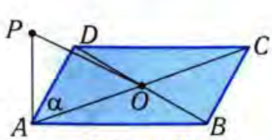


Рис. 470

Приклад 5. З точки M гіпотенузи прямокутного трикутника ABC проведено перпендикуляр MN до площини трикутника. Провести через точку N пряму, перпендикулярну до прямої BC.

□ Побудуємо рис. 471 за умовою прикладу. Скористаємось теоремою про три перпендикуляри. Для цього з точки M проведемо перпендикуляр MK до прямої BC. Відрізок MK є проекцією похилої NK, тому він перпендикулярний до BC разом з MK.

Побудова. Через точку M проведемо пряму MK паралельно прямій AC (рис. 472), де K — точка її перетину з прямою BC. Пряма NK — шукана. ■

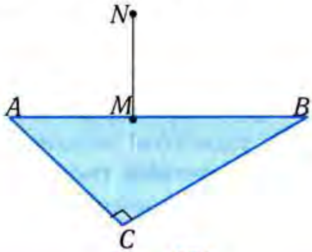


Рис. 471

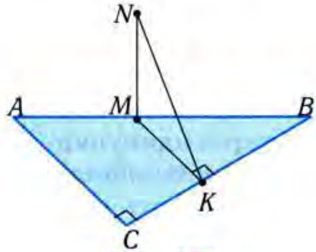


Рис. 472

✓ Контрольні запитання

1. На рис. 473 зображено дві похилі AB і AC та їхні проекції PB і PC на площину α. Яка з цих проекцій більша, якщо:
   1) $AB = 6$, $AC = 4$; 2) $AB = 5$, $AC = 7$?
2. З вершини A прямокутника $ABCD$ ($AB < BC$) проведено перпендикуляр AM до його площини. Точку M з'єднано з точками B, C, D (рис. 474).
   1) Порівняйте довжини відрізків MA, MB, MC, MD.
   2) Довжина якого відрізка дорівнює відстані від точки M до прямої BC?
3. З вершини C прямого кута прямокутного трикутника ABC проведено перпендикуляр CS до його площини (рис. 475).

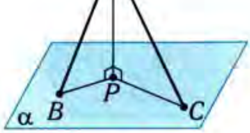


Рис. 473

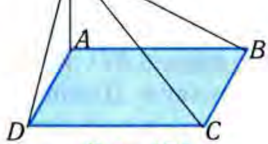


Рис. 474

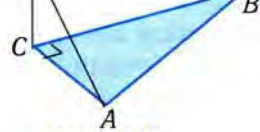


Рис. 475

1) Яка з похилих SA і SB більша, якщо кут A дорівнює 30°?

2) Довжина якого відрізка дорівнює відстані від точки S до прямої, яка проходить через точку B паралельно прямій AC?

4. Яку фігуру утворюють основи усіх рівних похилих, проведених до площини з однієї точки?
5. Пряма проходить через центр кола і перпендикулярна до його площини. Чи рівновіддалені точки прямої від точок кола?
6. Чи правильно, що пряма перпендикулярна до похилої на деяку площину, якщо вона перпендикулярна до її проекції на цю площину?
7. Чи правильно, що пряма, яка перпендикулярна до похилої на площину і до її проекції на цю площину, лежить у цій площині?
8. Дві рівні похилі, проведені з різних точок до площини, мають рівні проекції на цю площину. Чи рівні кути вони утворюють з перпендикулярами, проведеними з цих точок до цієї площини?
9. Пряма перетинає площину. Чи завжди існує в цій площині пряма, перпендикулярна до цієї прямої?
10. Яку фігуру утворюють точки, рівновіддалені від: а) вершин трикутника; б) прямих, що містять сторони трикутника?

Графічні вправи

1. З центра симетрії O паралелограма $ABCD$ проведено перпендикуляр OS до його площини (рис. 476).

   1) Порівняйте довжини похилих SA і SC.

   2) За яких умов довжина похилої SD більша за довжину похилої SA?

   3) Довжині якого відрізка дорівнює відстань від точки S до прямої, яка проходить через точку B паралельно прямій AC?

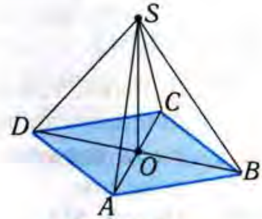


Рис. 476

2. З вершини A прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C проведено перпендикуляр AK до площини трикутника (рис. 477).

   1) Довжина якого відрізка дорівнює відстані від точки K до катета CB?

   2) Порівняйте довжини похилих KB і KC.

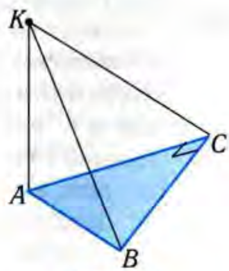


Рис. 477

3. З середини M сторони CD прямокутника $ABCD$ проведено перпендикуляр MS до його площини, N — середина AB (рис. 478).
   1) Порівняйте довжини похилих SC і SB.
   2) Довжина якого відрізка дорівнює відстані від точки S до прямої AB?
   3) За яких умов довжини похилих SC і SN є рівними?

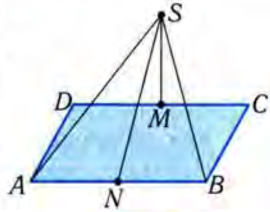


Рис. 478

4. З вершини C ромба $ABCD$ проведено перпендикуляр CK до його площини (рис. 479).
   1) Порівняйте довжини похилих KO і KB.
   2) Довжина якого відрізка дорівнює відстані від точки K до діагоналі BD?

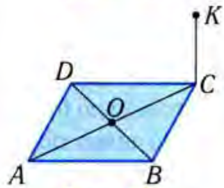


Рис. 479

5. Через середину D сторони AC рівностороннього трикутника ABC проведено перпендикуляр DS. Проведіть у площині трикутника через вершину B пряму, перпендикулярну до похилої SB.
6. Через вершину C правильної трикутної піраміди $SABC$ проведіть пряму, перпендикулярну до прямої SC.
7. На зображенні правильної піраміди $SABC$ з точки M ребра SC проведіть перпендикуляр до сторони основи AB.

Задачі

447°. З деякої точки простору проведено до даної площини перпендикуляр завдовжки 6 см і похилу завдовжки 9 см. Знайдіть довжину проекції похилої і кут, який вона утворює з похилою.

448. Нехай MA — перпендикуляр до площини прямокутника $ABCD$ зі сторонами 15 см і 16 см, $MC = 25$ см. Знайдіть відстані від точки M до інших вершин прямокутника.

449. З деякої точки A до даної площини проведено перпендикуляр AO завдовжки 1 см і дві рівні між собою похилі AB та AC, які утворюють з перпендикуляром кути по 60°, а між собою — прямий кут. Знайдіть відстань між основами похилих.

450. З деякої точки до даної площини проведено дві рівні похилі. Кут між ними дорівнює 60°, кут між їхніми проекціями — 90°. Знайдіть кут між похилою та її проекцією.

451. З даної точки простору до площини проведено дві похилі, різниця довжин яких становить 6 см. Їхні проекції на цю площину дорівнюють 27 см і 15 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини.

452. З точки A проведено до даної площини перпендикуляр AC завдовжки 10 см, а з точки B — похилу BD завдовжки 11 см. Знайдіть AB, якщо $CD = 6$ см і $AB \perp BD$.

453. З точки M, що лежить за межами площини трикутника ABC, проведіть перпендикуляр до прямої AB, якщо:
1) пряма MC перпендикулярна до площини ABC і $AC = BC$;
2) основа O перпендикуляра, проведеного з точки M до площини ABC, поділяє BC навпіл, а кут BAC — прямий;
3) трикутник ABC — рівносторонній, O — середина сторони BC і $MO \perp ABC$.

454. Точка, що лежить поза площиною трикутника зі сторонами 10 см, 8 см, 6 см, віддалена від його вершин на 13 см. Знайдіть відстані від даної точки до сторін трикутника.

455°. З точки перетину діагоналей прямокутника проведено перпендикуляр до його площини. Доведіть, що кожна точка цього перпендикуляра рівновіддалена від вершин прямокутника.

456. З даної точки A, яка не лежить у площині α, проведено похилі AB і AC, які утворюють рівні кути з прямою BC площини α. Доведіть, що проекції цих похилих на площину α рівні між собою.

457. Із середини сторони ромба зі стороною a проведено перпендикуляр до його площини, верхній кінець якого віддалений на $\frac{a}{2}$ від більшої діагоналі завдовжки d. Визначте довжину цього перпендикуляра.

458. Із середини сторони правильного шестикутника зі стороною a проведено перпендикуляр до його площини завдовжки $\frac{a}{4}$. Знайдіть відстані від його верхнього кінця до сторін шестикутника.

459. У правильній чотирикутній піраміді площини двох протилежних бічних граней — перпендикулярні. Чи є перпендикулярними площини двох інших бічних граней?

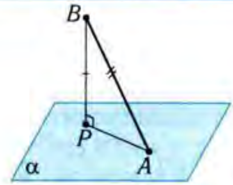
Вправи для повторення

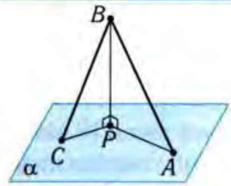
460. Дано прямокутний трикутник ABC, катети якого AC і BC дорівнюють, відповідно, 20 см і 15 см. Через точку A проведено площину α, паралельну прямій BC. Довжина проекції одного з катетів на площину α дорівнює 12 см. Знайдіть проекцію гіпотенузи.

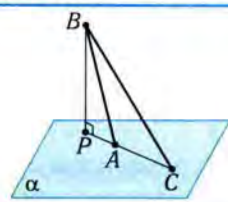
461. Ескалатор метрополітену має 170 східців шириною 40 см і висотою 20 см. Визначте: 1) довжину ескалатора; 2) кут його нахилу до горизонталі; 3) глибину станції.

Підсумок

Властивості перпендикуляра, похилої та її проекції

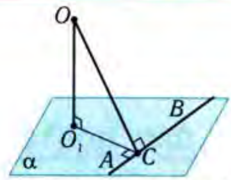
<table>
<tr><td>Перпендикуляр, проведений з точки до площини, менший від усякої похилої, проведеної з цієї самої точки до даної площини.</td><td>

$BP \perp \alpha,\ P \in \alpha,\ A \in \alpha \Rightarrow BP < BA$</td></tr>
<tr><td>Похилі до площини, які проведені з однієї точки, рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їхні проекції.</td><td>

$BP \perp \alpha,\ P \in \alpha,\ BA = BC \Leftrightarrow AP = CP$</td></tr>
<tr><td>Якщо дано дві похилі, проведені з однієї точки до площини, то більша похила має більшу проекцію, і навпаки, — більшій проекції відповідає більша похила.</td><td>

$BP \perp \alpha,\ P \in \alpha,\ BA < BC \Leftrightarrow AP < CP$</td></tr>
</table>

Теорема про три перпендикуляри

<table>
<tr><td>Пряма, що проведена у площині через основу похилої, перпендикулярна до похилої тоді і тільки тоді, коли вона перпендикулярна до її проекції.</td><td>

$AB \subset \alpha,\ C \in AB,\ OO_1 \perp \alpha,\ O_1C \perp AB \Rightarrow OC \perp AB$</td></tr>
</table>

§23. Вимірювання відстаней у просторі

У цьому параграфі розглядається вимірювання відстаней між основними фігурами стереометрії (точкою і площиною, прямою і площиною, площинами).

Б Вимірювання відстаней між різними фізичними об'єктами є одним із найпоширеніших видів математичної діяльності людини. Якщо розмірами об'єктів можна знехтувати, то йдеться про вимірювання відстаней між точками, тобто про визначення довжин відрізків. В інших випадках моделювання даних об'єктів за допомогою точок при вимірюванні відстаней між ними недоцільне чи безглузде, наприклад, коли йдеться про вимірювання відстані між електролампою і столом (рис. 480), якщо першу можна ототожнювати з точкою, то для моделювання стола більш придатна площина чи її частина. Аналогічна ситуація виникає при визначенні відстані між фасадами будівель (рис. 481), що при математичному моделюванні зводиться до визначення відстані між паралельними площинами; при встановленні вертикальної рейки на певній відстані від стіни (рис. 482) (визначення відстані між паралельними прямою і площиною) тощо.

Рис. 480

Рис. 481

Рис. 482

Розглянемо питання про вимірювання відстаней між найпростішими фігурами у просторі. Зміст поняття відстані залишається таким самим, як і в планіметрії. Наприклад, відстань d від точки A до прямої a — це найкоротша відстань між цією точкою і точками прямої (рис. 483), а відстань між паралельними прямими a і b — це довжина d найкоротшого з відрізків, що сполучає точки цих прямих (рис. 484).

Рис. 483

Рис. 484

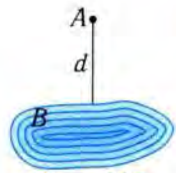


Рис. 485

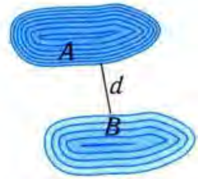


Рис. 486

Такий самий зміст має і загальне поняття відстані між фігурами. Наприклад, вимірювання відстані d від пункту A до озера B (рис. 485), відстані d між озерами A і B (рис. 486) зводиться до вимірювання найкоротшого відрізка, який з'єднує точки цих фігур (точка теж є фігурою).

Узагальнення поняття відстані між фігурами у просторі не викликає труднощів.

Відстанню між фігурами називають довжину найкоротшого з відрізків, який сполучає точки даних фігур.

Якщо фігури перетинаються, то будемо вважати, що відстань між ними дорівнює нулю. Це і зрозуміло, бо фігури в цілому «не віддалені» одна від одної. Для фігур, що не мають спільних точок, відстань між ними є однією з мір їхнього взаємного розміщення.

Зрозуміло, що задача знаходження відстаней між довільними геометричними фігурами є надто загальною, а тому обмежимося детальним розглядом відстаней між найпростішими фігурами простору — точками, прямими, площинами. Як і в планіметрії, ці відстані реалізуються через довжини відповідних перпендикулярів. Окрім того, до вказаних ситуацій часто-густо зводиться задача про вимірювання відстаней між складнішими фігурами.

Теорема 1 *(про відстань від точки до площини).*

Відстань від точки до площини дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної площини.

Ця властивість відстані від точки до площини безпосередньо випливає з властивості похилих і перпендикулярів. Справді, перпендикуляр, проведений з точки до площини, менший від похилих, проведених з тієї самої точки до точок площини (рис. 487).

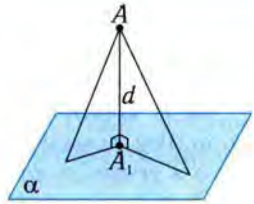


Рис. 487

Теорема 2 *(про відстань між прямою і площиною).*

Відстань між прямою і паралельною їй площиною дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з довільної точки прямої до даної площини.

Обґрунтування цієї властивості про відстань між прямою і площиною спирається на властивості прямої, паралельної площині, і теорему 1 про відстань від точки до площини. Справді, відстань від кожної точки прямої до площини дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини. Для точок прямої, паралельної площині, ці відстані є рівними (рис. 488).

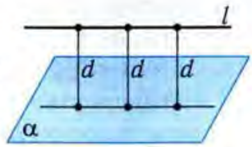


Рис. 488

Теорема 3 *(про відстань між паралельними площинами).*

Відстань між паралельними площинами дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з довільної точки однієї площини до другої площини.

Обґрунтування теореми 3 аналогічне обґрунтуванню теореми 2. Відмінність полягає лише в тому, що перпендикуляри проводяться з усіх точок однієї площини до другої (рис. 489).

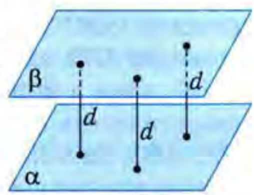


Рис. 489

Наведеними властивостями широко користуються у різних сферах діяльності людини, у побуті. Наприклад, за їхньою допомогою визначають відстані від літака до поверхні землі, від світильника до підлоги, від дроту лінії електропередач до поверхні землі, між стелею і підлогою тощо.

Приклад 1. Площини правильного трикутника ABS і квадрата $ABCD$ зі стороною a — перпендикулярні, точки L, K, M є серединами відповідно сторін DC, AB, AS. Знайти відстань:

1) від точки A до прямої BS;

2) від точки A до площини SBC;
3) від прямої AD до площини SBC;
4) між площинами MKL і SBC.

☐ 1) Відстань від точки A до прямої BS дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з точки A до прямої BS у площині ABS. Оскільки трикутник ABS — правильний, то таким перпендикуляром буде медіана AP цього трикутника (рис. 490). Її довжина дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

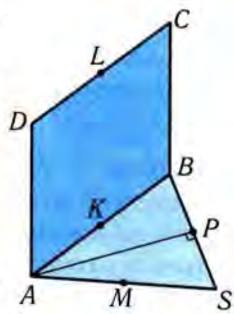


Рис. 490

2) Відстань від точки A до площини SBC дорівнює, за властивістю відстані від точки до площини (теорема 1), довжині перпендикуляра, проведеного з точки A до площини SBC. Цим перпендикуляром буде відрізок AP, де P — середина сторони SB (див. рис. 490). Справді, відрізок AP перпендикулярний до сторони SB трикутника ABS, бо він є медіаною правильного трикутника. Пряма BC перпендикулярна до площини ABS, бо вона лежить в одній з перпендикулярних площин і перпендикулярна до лінії їхнього перетину. Проведемо через точку P пряму PE, паралельну прямій BC (рис. 491). Вона лежить у площині SBC (чому?) і перпендикулярна до площини ABS, за теоремою про дві паралельні прямі, одна з яких перпендикулярна до площини (теорема 1 § 19): $BC \parallel PE$, $BC \perp ABS$. Тому $PE \perp ABS$. За означенням, $PE \perp AP$. За ознакою перпендикулярності прямої і площини (теорема 1 § 18), $AP \perp SBC$. Довжина перпендикуляра AP дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Це і є шукана відстань від точки A до площини SBC.

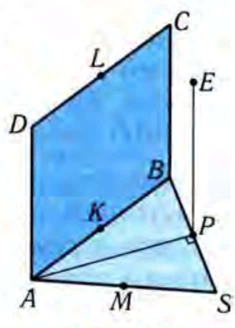


Рис. 491

3) Пряма AD і площина SBC — паралельні, за ознакою паралельності прямої і площини (теорема 1 § 11): $AD \parallel BC$. Тому шукана відстань, за властивістю відстані між прямою і площиною (теорема 2), дорівнює відстані від точки A до площини SBC і, за попереднім завданням, дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

4) Площини MKL і SBC — паралельні, за ознакою паралельності площин (теорема 1, §12): $KM \parallel BC$ (KM — середня лінія трикутника ABS), $KL \parallel BC$ (KL — відрізок, що з'єднує середини паралельних сторін квадрата $ABCD$), тому $MKL \parallel SBC$. Отже, шукана відстань, за властивістю відстані між паралельними площинами (теорема 3), дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з довільної точки площини MKL до площини SBC. Візьмемо точку перетину F відрізків MK і AP (рис. 492). Оскільки AP є перпендикуляром до площини SBC (див. завдання 2), то FP — перпендикуляр до цієї площини. Його довжина дорівнює $\frac{1}{2}AP$, бо середня лінія трикутника поділяє медіану, яку вона перетинає, навпіл (чому?). Шукана відстань дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{4}a$. ■

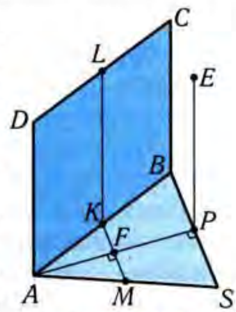


Рис. 492

Відповідь. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

Розглянемо детальніше доведення властивостей відстаней у просторі. Оскільки теорема 1 є прямим наслідком властивостей похилих і перпендикулярів, розглянемо доведення теореми 2.

□ Нехай маємо пряму l і паралельну до неї площину α (рис. 493). Оскільки відстань між прямою l і площиною α — це довжина найкоротшого відрізка, що сполучає їхні точки, то довжина похилої, яка сполучає точки прямої і площини, не може бути шуканою відстанню. Доведемо, що довжини всіх перпендикулярів, проведених із точок прямої l до площини α, рівні між собою. А тому відстань між прямою і площиною дорівнює довжині кожного з таких перпендикулярів.

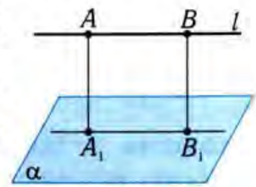


Рис. 493

Проведемо з двох точок A і B прямої l перпендикуляри AA_1 і BB_1 до площини α. Оскільки прямі, що перпендикулярні до однієї площини, паралельні між собою (теорема 2 § 19), то через прямі AA_1 і BB_1 можна провести площину, яка містить l. Пряма A_1B_1 є лінією перетину цієї площини з площиною α (чому?). Однак у цьому випадку $AB \parallel A_1B_1$, тобто чотирикутник AA_1B_1B є паралелограмом (навіть прямокутником). Звідси $AA_1 = BB_1$. ■

Доведення теореми 3 аналогічне доведенню попередньої теореми.

□ Як і в теоремі 2, похила, що з'єднує дві точки паралельних площин, не може визначати відстань між ними. А всі перпендикуляри, проведені з точок однієї з площин до другої, паралельні, за теоремою про паралельність прямих, перпендикулярних до площини (теорема 2 § 19). До речі, вони одночасно перпендикулярні до обох площин, за теоремою про паралельні площини, одна з яких перпендикулярна до прямої (теорема 3 § 19).

Нехай α і β — паралельні площини, а AA_1 і BB_1 — два довільні перпендикуляри, що з'єднують точки цих площин (рис. 494). Вони паралельні, а тому рівні, за теоремою про відрізки паралельних прямих між паралельними площинами (теорема 4 § 12). Можна і безпосередньо довести рівність цих відрізків, розглянувши чотирикутник AA_1B_1B, як це було зроблено при доведенні теореми 2. ■

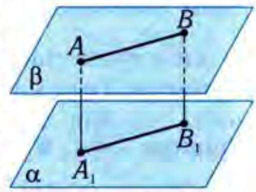


Рис. 494

За допомогою поняття відстані можна характеризувати паралельність прямої і площини, паралельність площин. При цьому справджуються наступні твердження, які є оберненими до теорем 2 і 3.

Теорема 4 *(ознака паралельності прямої і площини).*

Якщо всі точки прямої лежать на однаковій, відмінній від нуля, відстані від площини, то пряма і площина — паралельні.

Теорема 5 *(ознака паралельності площин).*

Якщо всі точки однієї площини лежать на однаковій, відмінній від нуля, відстані від другої площини, то ці площини — паралельні.

Справді, при виконанні умов цих тверджень відповідні фігури не можуть мати спільних точок, інакше б відстань між ними дорівнювала нулю.

Твердження будуть правильними, якщо умови виконуються не для всіх точок, а для кількох. У першому твердженні досить припустити, що умова виконується для двох точок прямої, у другому —

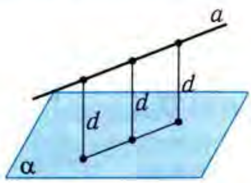


Рис. 495

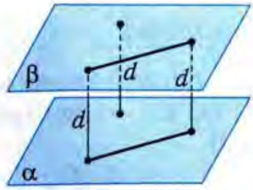


Рис. 496

для трьох точок, які не лежать на одній прямій (рис. 495, 496). Спробуйте довести це самостійно. Наведені твердження широко використовуються у практиці як ознаки паралельності прямої і площини, двох площин. Так, паралельність поверхні стола до підлоги забезпечується однаковою довжиною його ніжок.

Приклад 2. У тетраедрі $SABC$ основа ABC — рівносторонній трикутник зі стороною 6 см, бічні грані SAB, SAC, SBC — рівнобедрені трикутники з бічним ребром 5 см. Знайти відстань від центра O основи до площини бічної грані.

☐ Відстань від точки O до площини SBC дорівнює довжині перпендикуляра OK із точки O на площину SBC (рис. 497). Точка O лежить на перетині медіан (і висот!) трикутника ABC, причому $OD = \frac{1}{3}AD = \frac{6\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \sqrt{3}$. Оскільки в трикутнику SBC медіана SD також є висотою, то $SD \perp BC$, тому $BC \perp ODC$ і $SBC \perp ODC$. Отже, перпендикуляр із точки O на площину BSC збігається з перпендикуляром OK із точки O на пряму SD, яка є лінією перетину площин SAD і SBC. За теоремою Піфагора, $SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см). Оскільки ортогональні проекції бічних ребер на основу — однакові, то S ортогонально проектується в центр описаної навколо трикутника ABC кола, тобто в точку O. Тому трикутник SOD — прямокутний. За теоремою Піфагора, маємо: $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{16 - 3} = \sqrt{13}$ (см). Неважко побачити, що $OK = (SO \cdot OD) : SD = (\sqrt{13} \cdot \sqrt{3}) : 4 = \frac{\sqrt{39}}{4}$ (см). Зрозуміло, з огляду на симетрію, що відстані від точки O до інших бічних граней такі самі. ■

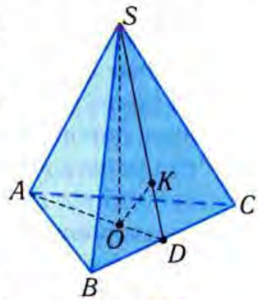


Рис. 497

Відповідь. $\frac{\sqrt{39}}{4}$ см.

Контрольні запитання

1. На рис. 498 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; точки O, O_1 — центри граней $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$.
   1) Яка з точок A_1, O_1, B_1 лежить ближче до нижньої основи куба?
   2) Які з ребер куба найбільш віддалені від площини AA_1B_1B?
   3) Яка з відстаней більша: від прямої AO_1 до площини DCC_1 чи від прямої AD_1 до площини BDC_1?
   4) Чому дорівнює відстань між площинами ADD_1 і BCC_1?

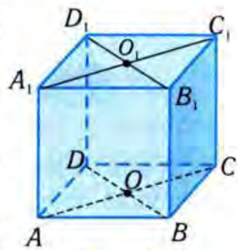


Рис. 498

2. Нехай пряма a паралельна площині α. Чи можуть точки прямої a знаходитись на різних відстанях від точок площини α?
3. Чи правильно, що коли відстань від прямої до площини відмінна від нуля, то пряма і площина — паралельні?
4. Відомо, що відрізок AB віддалений від площини α на 3 см. Чи означає це, що пряма AB віддалена від площини α на 3 см?
5. Чи правильно, що дві площини збігаються, якщо відстань між ними дорівнює нулю?
6. Чи правильно, що відстань від відрізка до площини дорівнює відстані від одного з його кінців до цієї площини?
7. Усі сторони трикутника ABC знаходяться на відстані 3 від площини α. Чи паралельні площини ABC і площина α?
8. Яку фігуру утворюють точки, рівновіддалені від даної площини?
9. Як потрібно закріплювати дріт на стовпах, щоб забезпечити його паралельність до поверхні землі?
10. Як виміряти висоту дерева, не піднімаючись до його верхівки?

Графічні вправи

1. На рис. 499 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a, точки M, M_1 — середини ребер AD_1, A_1D_1 відповідно. Знайдіть відстань:
   1) від точки A_1 до прямої AB;
   2) від точки D_1 до прямої AB;
   3) від точки A_1 до площини BCC_1B_1;
   4) від точки A_1 до площини AB_1C_1D;

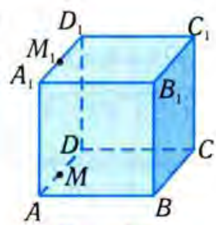


Рис. 499

5) від точки M_1 до площини AB_1C_1D;
6) від прямої A_1D_1 до площини AB_1C_1D;
7) від прямої AD_1 до площини AB_1C_1D;
8) між площинами AA_1D_1 і BB_1C_1.

2. На рис. 500 зображено правильний тетраедр $ABCD$, F — середина BC, O — центр грані ABC. Довжина якого відрізка дорівнює відстані:
1) від точки D до площини ABC;
2) від точки D до прямої BC;
3) від точки C до площини AOB?

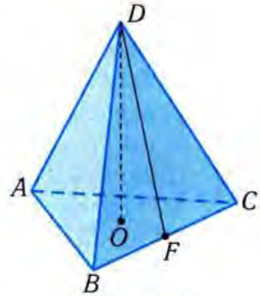


Рис. 500

3. З центра O квадрата $ABCD$ (рис. 501) проведено перпендикуляр OS до площини квадрата. Точка M — середина BC, P — основа висоти трикутника OMS, OK — його медіана. Довжині якого відрізка дорівнює відстань:
1) від точки O до площини BCS;
2) від точки S до площини ABC;
3) від точки C до площини BDS?

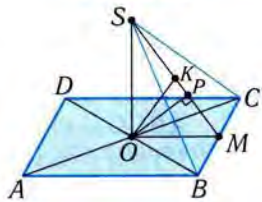


Рис. 501

Задачі

462. Точка D знаходиться на відстані 8 см від вершин рівностороннього трикутника ABC зі стороною 4 см. Знайдіть відстань:
1°) від точки B до площини DOC, де O — центр трикутника ABC;
2°) від точки D до площини ABC;
3) від площини, що проходить через середини відрізків DA, DB, DC, до площини трикутника ABC.

463. Нехай точка O є серединою катета AC прямокутного рівнобедреного трикутника з гіпотенузою $AB = 4$ см; OP — перпендикуляр до площини трикутника завдовжки 2 см. Знайдіть відстань:
1°) від точки В до площини AOP;
2°) від площини, що проходить через середини сторін CB і AB паралельно OP, до площини CPA;
3) від точки O до площини PAB.

464°. З точки K, яка є серединою гіпотенузи AB рівнобедреного прямокутного трикутника ABC, з катетами завдовжки 8 см,

проведено перпендикуляр KS до площини трикутника. Довжина KS становить 6 см. Знайдіть відстань:
1) від точки C до площини AKS;
2) від точки A до площини KCS;
3) від точки S до прямої BC.

465. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a. Знайдіть відстань:
1°) від точки A_1 до площини BDD_1;
2°) від прямої B_1D_1 до площини ABC;
3°) між протилежними гранями куба;
4°) від точки A_1 до прямої BD;
5) між прямими AD_1 і CC_1;
6*) від точки A_1 до площини AB_1D_1;
7*) між площинами CD_1B_1 і DA_1B.

466. Точка M лежить на відстані b від усіх вершин квадрата $ABCD$ зі стороною a і центром в точці O. Знайдіть відстань:
1°) від точки M до площини ABC;
2°) від точки A до площини BMD;
3) від точки O до площини MCD, якщо $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$;
4) від точки M до прямої CD;
5) між прямими OM і AD.

467. Кінці відрізка віддалені від деякої площини на 1 см і 4 см. Знайдіть відстань від середини відрізка до площини.

468. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 16 см і 12 см. На якій відстані від площини трикутника лежить точка, віддалена від кожної вершини трикутника на $10\sqrt{2}$ см?

469. Сторона рівностороннього трикутника дорівнює 6 см. На якій відстані від площини трикутника розміщена точка, яка віддалена на 9 см від:
1) сторін трикутника;
2*) кожної з прямих, що містять сторони трикутника?

470°. Якщо з двох точок, які знаходяться на різних відстанях від площини, провести рівні похилі, то на цій площині більшою буде проекція тієї похилої, що проведена з ближчої до площини точки. Доведіть це.

471. Якщо з точки A, що знаходиться поза площиною α, опустити перпендикуляр на цю площину, а з його основи провести перпендикуляр до прямої BC, яка лежить в площині α, то площина, що проходить через ці перпендикуляри, буде перпендикулярною до прямої BC. Доведіть це.

472*. Плиту прямокутної форми підняли краном так, що три її вершини віддалені від поверхні землі, відповідно, на 2 м, 3 м і 4 м. На якій відстані від землі перебуває четверта вершина?

473*. Точка A віддалена від сторін кута, що дорівнює 60°, на 20 см і 7 см, а від його вершини — на 25 см. Знайдіть відстань від точки A до площини кута.

474*. Точка, що лежить поза площиною прямого кута, знаходиться на відстані 4 см від кожної з його сторін. Знайдіть відстань від точки до вершини кута, якщо точка віддалена від площини кута на $\sqrt{7}$ см.

475. Площини квадрата $ABCD$ і рівностороннього трикутника ABM — взаємно перпендикулярні, $AB = a$. Побудуйте спільний перпендикуляр прямої AC і медіани MO трикутника і визначте довжину цього перпендикуляра.

476. Нехай AB — спільний перпендикуляр до мимобіжних прямих a і b. Точки A і C лежать на прямій a, точки B і D — на прямій b; $AC = BD$. Доведіть, що $\angle ACD = \angle BDC$.

Вправи для повторення

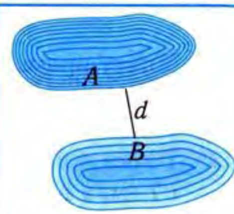
477. В одній півплощині, обмеженій прямою AB, побудовано кути: $\angle BAC = 38°$, $\angle CAD = 68°$, $\angle DAE = 85°$, $\angle EAK = 99°$. Визначте $\angle KAC$.

478. Один із суміжних кутів утричі більший від різниці між ними. Визначте їхню градусну міру.

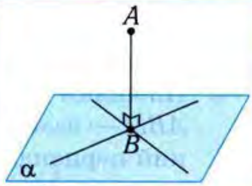
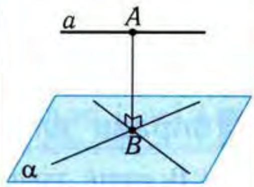
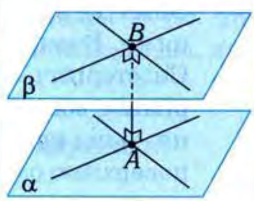
479. Спостерігач, що знаходиться на березі озера на висоті h над рівнем води, бачить хмарку під кутом α, а її відображення — під кутом β до горизонту. Знайдіть висоту хмарки над поверхнею озера при $\alpha = 53°27'$, $\beta = 55°42'$, $h = 76{,}8$ м.

Підсумок

Головне означення

Відстанню між довільними фігурами називають довжину найкоротшого з відрізків, який сполучає точки даних фігур.		

Властивості відстаней

Відстань від точки до площини дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної площини.		
Відстань між прямою і паралельною до неї площиною дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з довільної точки прямої до даної площини.		
Відстань між паралельними площинами дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з довільної точки однієї площини до другої площини.		

§24. Вимірювання кутів у просторі

Розглядаються поняття кута між прямими і площинами, а також між площинами.

Б

Взаємне розміщення прямих, прямих і площин, а також площин характеризують у стереометрії різними способами. Один з них базується на кількості спільних точок цих фігур. Він приводить до важливих відношень між прямими і площинами — відношень паралельності. Уточнення взаємного розміщення вказаних фігур здійснюється за допомогою відношень перпендикулярності. Вони відображають певну симетрію взаємного розміщення фігур. Розгляд відстаней між фігурами дає змогу характеризувати їхнє взаємне розміщення за допомогою чисел. Подальше уточнення взаємного розміщення прямих і площин здійснюється за допомогою вимірювання кутів між цими фігурами. Необхідність таких вимірювань викликана потребами як геометрії, так і практики. Вимірювання кутів необхідні в геометрії, геодезії, мореплавстві, космонавтиці тощо. Їх застосовують і в повсякденному житті (рис. 502 — 504).

Рис. 502

Рис. 503

Рис. 504

Дві прямі простору, що перетинаються, визначають деяку площину. Для числової характеристики їхнього взаємного розміщення використовують, як і у планіметрії, поняття кута між ними. Цією величиною ми вже неодноразово користувалися. Нагадаємо її означення.

Кутом між прямими, що перетинаються, називається величина найменшого з кутів, утворених цими прямими.

За означенням, кут між прямими є величиною, яка змінюється від 0° до 90°. Кут між паралельними прямими вважають рівним 0°, а між перпендикулярними — 90°.

Введемо аналогічну характеристику для прямої і площини, що перетинаються. Практичну необхідність у вимірюванні кута між прямою і площиною можна проілюструвати на прикладах. Такими вимірюваннями здавна користувались мореплавці при визначенні положення корабля (рис. 505, а). Вони необхідні геодезистам, які проводять роботи на місцевості, будівельникам при встановленні конструкцій тощо (рис. 505, б, в).

а) б) в)

Рис. 505

Для вимірювання кута між прямою a і площиною α слід звернутись до вимірювання кутів між даною прямою і прямими, які лежать у площині α і перетинають пряму a. Однак таких прямих у площині α є безліч, і вказані кути різні за величиною. Перевагу має кут між прямою a та її ортогональною проекцією, якщо пряма a не перпендикулярна до площини α. Цей кут визначається однозначно, оскільки ортогональна проекція для кожної прямої визначена однозначно (рис. 506). У практичних застосуваннях відповідну величину легко вимірювати, і вона зручна для характеристики нахилу прямої до площини.

Рис. 506

Кутом між прямою і неперпендикулярною до неї площиною називається кут між прямою і її ортогональною проекцією на цю площину.

Нагадаємо, що кут між прямими, які перетинаються, змінюється у межах від 0° до 90°. Тому і кут між прямою і площиною є величиною, що змінюється у цих межах.

Якщо нахил прямої до площини плавно зменшувати, то граничним положенням рухомої прямої буде пряма, що лежить у площині (рис. 507).

Кут між прямою і площиною, в якій вона лежить, вважають таким, що дорівнює 0°.

Якщо ж нахил прямої до площини плавно збільшувати, то граничним положенням рухомої прямої є пряма, перпендикулярна до площини (див. рис. 507).

Кут між прямою і перпендикулярною до неї площиною вважають таким, що дорівнює 90°.

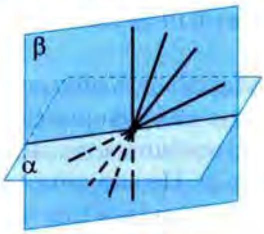


Рис. 507

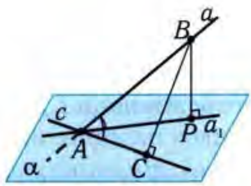


Рис. 508

Звернемо увагу ще на одну особливість кута між прямою, що перетинає площину, та її ортогональною проекцією на цю площину. Цей кут є найменшим з-поміж усіх інших кутів між даною прямою і прямими, які її перетинають і лежать у даній площині (рис. 508).

Справді, нехай пряма a перетинає площину α, BP — перпендикуляр до цієї площини, a_1 — її ортогональна проекція на площину α, c — довільна пряма, яка лежить у площині α і проходить через точку A перетину прямої a і площини α. Кут між прямими a і a_1 дорівнює величині кута BAP прямокутного трикутника ABP, а кут між прямими a і c — величині кута BAC прямокутного трикутника ABC. Прямокутні трикутники ABC і ABP мають спільну гіпотенузу, катет одного трикутника є похилою, а іншого — перпендикуляром до площини. Порівняння кутів BAC і BAP дає змогу дійти вказаного висновку.

Під кутом між відрізком і площиною, між відрізком і плоскою фігурою (наприклад, між діагоналлю куба і його гранню) розуміють кут між відповідними прямою і площиною.

При розв'язуванні задач прямі, які перетинають площину, задаються за допомогою похилих до площини.

Нехай AB — похила до площини α, AP — її проекція (рис. 509). Кут BAP є одним із кутів, утворених прямими AB і AP. Оскільки трикутник ABP — прямокутний, то кут BAP — гострий, тобто його кутова міра дорівнює куту між прямими AB і AP. Отже, ми показали, що кут між похилою та її проекцією дорівнює куту між прямою, яка задана похилою, і площиною. Це дає змогу ототожнювати названі величини при розв'язуванні задач.

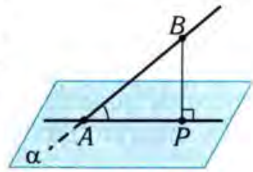


Рис. 509

Ми розглянули поняття кута між площиною і прямою, що її перетинає. Таким чином, ми ввели числову характеристику їхнього взаємного розміщення. Далі розглянемо особливості взаємного розміщення двох площин, які перетинаються. Це завдання пов'язане з практичною діяльністю людини і стане в пригоді при необхідності оцінки нахилу даху до поверхні землі (рис. 510, а), врахування профілю місцевості при будівництві дороги (рис. 510, б), при виготовленні різців з різними властивостями різання (рис. 510, в) тощо. Отже, потрібним є вміння характеризувати взаємне розміщення непаралельних площин за допомогою числа після вибору одиниці вимірювання.

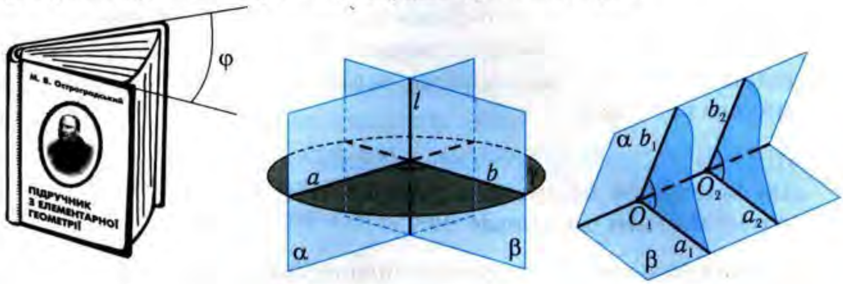

а)


б)


в)

Рис. 510

Як і у випадку визначення кута між прямою і площиною, спробуємо знайти плоский кут, який характеризує взаємне розміщення двох площин. Дивлячись на обкладинки напіврозкритої книги (рис. 511, а), неважко побачити, що мірою взаємного розміщення обкладинок (мірою «розгорнутості» книги) може бути величина кута α, утвореного краями обкладинок. Якщо розглядати площини, в яких розміщені ці обкладинки, то кут α дістають як результат перетину даних двох площин третьою площиною, перпендикулярною до лінії перетину перших двох площин.



а) б) в)

Рис. 511

Кутом між площинами, що перетинаються, називається кут між прямими, які утворюються при перетині даних площин площиною, перпендикулярною до лінії їхнього перетину.

Нехай α і β — дві площини, що перетинаються по прямій l (рис. 511, б). Через довільну точку прямої l проведемо площину γ, перпендикулярну до прямої l. Ця площина перетинає площини α і β по прямих a і b. Кут між цими прямими і є кутом між даними площинами. Залишається лише переконатись, що кут між площинами не залежить від місця проведення січної площини. Для цього розглянемо два різних перетини, які проходять через точки O_1 і O_2 (рис. 511, в). Позначимо через a_1 і a_2 лінії перетину січних площин з площиною α. Ці прямі — паралельні, оскільки в площині α вони перпендикулярні до прямої l. З тих самих міркувань паралельними є і прямі b_1, b_2 — лінії перетину січних площин з площиною β. Таким чином, йдеться про рівність кутів між прямими a_1, b_1 і паралельними даним прямими a_2, b_2. У планіметрії цей факт добре відомий. Він має місце і в стереометрії.

Теорема 1 *(про рівність кутів між відповідно паралельними прямими).*

Якщо дві прямі, які перетинаються, відповідно паралельні двом прямим, що перетинаються, то кути між цими парами прямих рівні.

Доведення цієї теореми буде наведено далі.

Нагадаємо, що кут між прямими змінюється у межах від 0° до 90°. Так само змінюється і кут між площинами. Зокрема, ***кут між площинами, які збігаються, природно вважати таким, що дорівнює 0°. Якщо ж кут між площинами дорівнює 90°, то площини — перпендикулярні,*** за другою ознакою перпендикулярності площин (теорема 3 § 20). Навпаки, кут між перпендикулярними площинами дорівнює 90°. Отже, можна дійти такого висновку.

Теорема 2 *(ознака перпендикулярності площин).*

Дві площини перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли кут між ними дорівнює 90°.

Розгляд вимірювання кутів у просторі завершимо введенням поняття кута між мимобіжними прямими. Кут між прямими, які перетинаються, характеризує нахил однієї прямої до іншої. При заміні прямої на паралельну їй пряму цей нахил не змінюється (рис. 512). Ця властивість кутів між перетинними прямими і лежить в основі означення кута між мимобіжними прямими.

Кутом між мимобіжними прямими називається кут між паралельними до них прямими, що перетинаються.

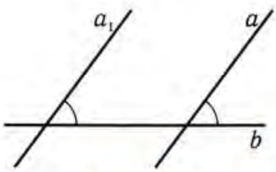


Рис. 512

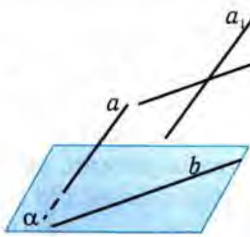


Рис. 513

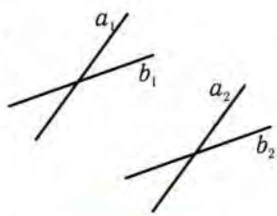


Рис. 514

На рис. 513 маємо, що кут між мимобіжними прямими a і b вимірюється кутом між прямими a_1 і b_1, які перетинаються і відповідно паралельні прямим a і b. Залишається лише обґрунтувати, що ця величина не залежить від вибору прямих a_1 і b_1, паралельних відповідно a і b. Тобто, якщо взяти іншу пару прямих a_2 і b_2, паралельних a і b і таких, що перетинаються, то кут між ними дорівнює куту між прямими a_1 і b_1 (рис. 514). Істинність цього твердження складає зміст теореми 1, наведеної вище.

Приклад 1. Нехай OS — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$ з центром у точці O; $OS = AB = 2$.

1) Знайти кут між прямою CS і площиною ABD.
2) Знайти кут між прямою AS і площиною DBS.
3) Знайти кут між прямою, що проходить через точку S і середину сторони AB, і площиною DBS.

☐ 1) Побудуємо рис. 515, який відповідає умові прикладу. Пряма OC є ортогональною проекцією прямої CS на площину ABD. За означенням кута між прямою і площиною, шуканий кут α дорівнює величині кута OCS. З прямокутного трикутника SOC маємо:

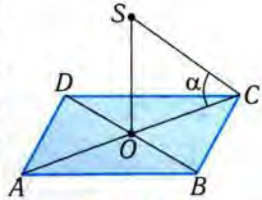


Рис. 515

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{SO}{OC} = \frac{2SO}{AC} = \frac{2\cdot 2}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2}.$$

2) Знайдемо ортогональну проекцію прямої AS на площину DBS (рис. 516). Неважко переконатись у тому, що це пряма SO. Справді, $AO \perp BD$, за властивістю діагоналей квадрата, $AO \perp SO$, оскільки $SO \perp ABC$. Тому, за ознакою перпендикулярності прямої і площини, $AO \perp DBS$ і точка O є основою перпендикуляра AO.

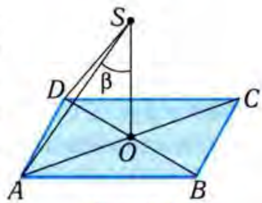


Рис. 516

За означенням кута між прямою і площиною, шуканий кут β дорівнює величині кута ASO. З прямокутного трикутника ASO маємо:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{AO}{SO} = \frac{AC}{2SO} = \frac{\sqrt{2}\cdot 2}{2\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \beta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Цю відповідь можна було отримати, користуючись розв'язанням завдання 1).

Трикутники AOS і COS рівні за трьома сторонами. Тому $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, де $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$. Звідси $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Нехай K — середина сторони AB. Побудуємо ортогональну проекцію прямої KS на площину DBS. Для цього проведемо з точки K пряму KP, паралельну прямій AO (рис. 517), де точка P — середина відрізка OB — є точкою її перетину з площиною DBS. Оскільки AO є перпендикуляром до площи-

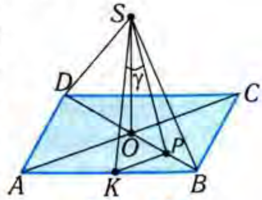


Рис. 517

ни DBS (див. розв'язання завдання 2)), то KP — перпендикуляр до неї, за теоремою про дві паралельні прямі, одна з яких перпендикулярна до площини (теорема 1 § 19). Ортогональною проекцією прямої KS є пряма SP. Шуканий кут γ дорівнює величині кута KSP. З прямокутного трикутника KPS маємо: $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{KP}{SP}$. Відрізок KP є середньою лінією трикутника AOB, тому $KP = \dfrac{1}{2}AO = \dfrac{1}{4}AC = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. З прямокутного трикутника SOP маємо: $SP = \sqrt{SO^2 + OP^2} = \sqrt{4 + \dfrac{1}{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Таким чином, $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\sqrt{2}}{2} : \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3}$, $\gamma = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$. ■

Відповідь. 1) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; 2) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$.

Приклад 2. Антену закріплюють за допомогою чотирьох розтяжок однакової довжини, виготовлених з троса. Відомо, що для надійного кріплення антени розтяжки повинні бути натягнуті під кутом, не більшим від 60° до поверхні землі. Чи вистачить для кріплення 80 м троса, якщо точка кріплення міститься на висоті 15 м над поверхнею землі і на закріплення однієї розтяжки йде до 1 м троса?

□ Встановлену антену схематично зображено на рис. 518. Тут OA — схематичне зображення антени, а A — місце кріплення розтяжок на антені, B, C, B_1, C_1 — точки кріплення розтяжок на землі. За умовою, $AO = 15$ м, $AB = AC = AB_1 = AC_1$. Кути ABO, ACO, AB_1O, AC_1O рівні між собою і не перевищують 60°. Позначимо їхню кутову міру через α. Найбільш економне кріплення відповідає випадку, коли $\alpha = 60°$. З прямокутного трикутника AOB маємо:

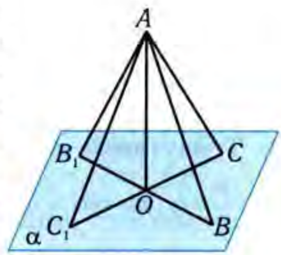


Рис. 518

$$AB = \frac{AO}{\sin 60^\circ} = \frac{2 \cdot 15}{\sqrt{3}} \approx 17{,}4 \text{ (м)}.$$

Таким чином, на виготовлення однієї розтяжки потрібно не менш ніж 18,6 м троса, а на виготовлення чотирьох — 74,4 м. Отже, наявної довжини троса вистачить для встановлення антени. ■

Відповідь. Вистачить.

Важливість відношення паралельності прямих пов'язана з тим, що при заміні прямої на паралельну до неї пряму зберігається багато геометричних відношень і величин. Наприклад, зберігається величина кутів з однаково напрямленими сторонами.

Нехай дано два кути AOB і $A_1O_1B_1$ і відомо, що промінь OA, напрямлений так само, як і промінь O_1A_1, а промінь OB — як промінь O_1B_1. Такі кути називаються ***кутами з однаково напрямленими сторонами***. У цьому означенні поняття однакової напрямленості у просторі аналогічне поняттю однакової напрямленості у площині.

Два промені OA і O_1A_1 у просторі, які не лежать на одній прямій, однаково напрямлені, якщо вони паралельні і належать одній півплощині, що обмежена прямою OO_1. Два промені, які лежать на одній прямій, однаково напрямлені, якщо один з них цілком належить другому.

Як і в планіметрії, справджується наступне твердження.

Теорема 3 (*про кути з однаково напрямленими сторонами*).
Кути з однаково напрямленими сторонами рівні між собою.

□ Проведемо через сторони кута AOB площину α. Якщо кут $A_1O_1B_1$ має з кутом AOB однаково напрямлені сторони, то можливі лише два випадки: прямі O_1A_1 і O_1B_1 не мають спільних точок з площиною α або ж вони обидві лежать у площині α. Справді, паралельні прямі O_1A_1 і O_1B_1 не можуть перетинати площину α, оскільки вони паралельні прямим OA і OB.

Розглянемо перший випадок (рис. 519). Нехай $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$. Тоді чотирикутник OAA_1O_1 — паралелограм (він лежить у площині, яка визначається паралельними прямими OA і O_1A_1, і має рівні протилежні сторони). Аналогічно, чотирикутник O_1B_1BO також є паралелограмом. Оскільки $AA_1 \parallel OO_1$, $OO_1 \parallel BB_1$ і

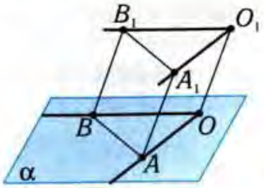


Рис. 519

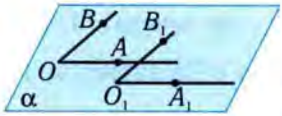


Рис. 520

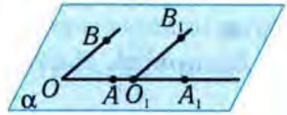


Рис. 521

$AA_1 = BB_1$, то чотирикутник AA_1B_1B — паралелограм і $AB = A_1B_1$. Трикутники AOB і $A_1O_1B_1$ є рівними за трьома сторонами, а тому рівними між собою є кути AOB і $A_1O_1B_1$.

У другому випадку маємо одну площину α.. Якщо сторони кутів не лежать на одній прямій, то доведення аналогічне наведеному вище (рис. 520). Якщо ж сторони кутів (наприклад, OA і O_1A_1) лежать на одній прямій (рис. 521), то треба скористатися властивістю кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих третьою. ■

Повернемось до теореми 1 про рівність кутів між відповідно паралельними прямими.

□ Нехай дано дві пари прямих a_1, a_2 і b_1, b_2, що перетинаються, і $a_1 \parallel b_1$, $a_2 \parallel b_2$. Прямі a_1, a_2 утворюють чотири, попарно рівні між собою, кути, яким відповідають чотири кути з однаково напрямленими сторонами, утворені прямими b_1 і b_2.

Із теореми 4 безпосередньо випливає, що кут між прямими a_1 і a_2 дорівнює куту між прямими b_1 і b_2. Таким чином, теорема 1, якою ми користувались при введенні понять кута між площинами і мимобіжними прямими, доведена. ■

Зазначимо, що у практичних задачах поширенішою є не конструкція з двох перетинних площин, а конструкція двох півплощин, що мають спільну межу (схили даху, обкладинки книги, стінки жолоба тощо).

Фігура, утворена двома півплощинами, що мають спільну межу, називається двогранним кутом. Спільна пряма півплощин називається ребром, а самі півплощини — гранями двогранного кута.

Двогранний кут з ребром AB і точками M, N, що належать різним граням (рис. 522), позначатимемо $M\underline{AB}N$.

Кутова міра двогранного кута може відрізнятись від кута між площинами, які визначаються гранями двогранного кута. Справ-

Рис. 522

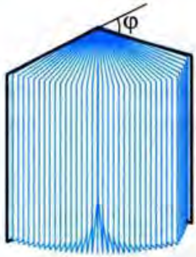


Рис. 523

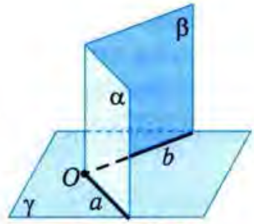


Рис. 524

ді, книга на рис. 523 «розгорнута більше», ніж на рис. 511, а), але кут між площинами-обкладинками на рис. 523 — у даному випадку менший, ніж на рис. 511, а).

Площина γ, яка перпендикулярна до ребра двогранного кута, перетинає його грані по двох півпрямих a і b (рис. 524), що виходять із спільної точки O. Побудований таким чином кут називається ***лінійним кутом двогранного кута.*** Власне, він і визначає кутову міру двогранного кута. Зрозуміло, що лінійний кут двогранного кута як геометрична фігура визначається неоднозначно, але всі лінійні кути даного двогранного кута рівні між собою. Обґрунтування цього факту аналогічні міркуванням про довільність вибору січної площини при вимірюванні кута між площинами.

На відміну від кута між площинами, що змінюється в межах від 0° до 90°, кутова міра двогранного кута змінюється від 0° до 180°. Ця відмінність пов'язана з тим, що у першому випадку, врешті, вимірюється кут між прямими, а у другому — плоский кут, який може бути і гострим, і тупим. Однак, існує простий зв'язок між цими величинами: вони або збігаються, або ж у сумі дорівнюють 180°. Так, на рис. 525 зображено двогранний кут і прямі a та b, що проходять через сторони його лінійного кута. Двогранний кут дорівнює β. Але кут між прямими a і b може дорівнювати α, якщо $\beta > 90°$. Зрозуміло, що $\beta + \alpha = 180°$.

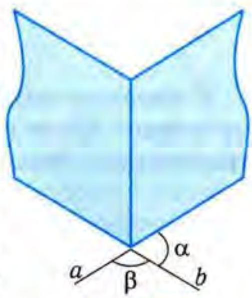


Рис. 525

Для побудови лінійного кута досить взяти точку на ребрі двогранного кута і в кожній грані провести промені, перпендикулярні до ребра.

Деколи при означенні двогранного кута до нього включають і частину простору, що міститься між його гранями.

Поняття кута між площинами дозволяє встановити зв'язок між площею плоскої фігури і площею її ортогональної проекції.

Задача 1. Довести, що площа S_{ABC} трикутника ABC і площа $S_{A_1B_1C_1}$ його ортогональної проекції $A_1B_1C_1$ на площину α пов'язані співвідношенням:

$$S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi,$$

де φ — кут між площинами ABC і α.

□ Можна вважати, що лінія перетину площин ABC і α проходить через одну зі сторін трикутника ABC (наприклад AB, рис. 526, а) або через одну з вершин (наприклад A, рис. 526, б). Цього можна досягти паралельним «зсувом» площини α, в результаті якого проекція не змінюється.

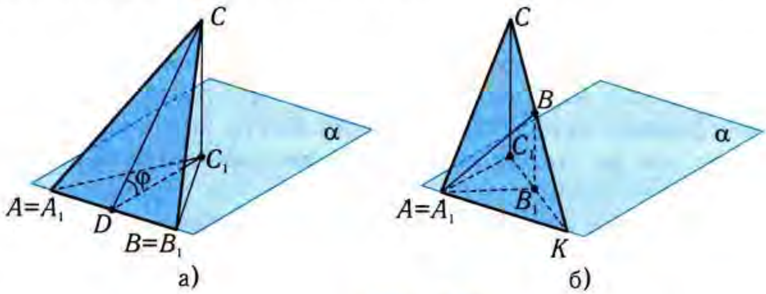


Рис. 526

У першому випадку трикутник і його проекція мають спільну основу AB, а кут φ дорівнює куту CDC_1 між висотами цих трикутників. Оскільки $DC_1 = DC \cdot \cos\varphi$, то

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}AB \cdot DC_1 = \frac{1}{2}AB \cdot DC \cdot \cos\varphi = S_{ABC} \cdot \cos\varphi.$$

У другому випадку розглянемо трикутник ACK, де K — точка перетину прямої BC з лінією перетину площин ABC і α (BC не паралельна α, інакше, змістивши паралельно площину α, ми мали б перший випадок). Трикутник ABC можна отримати, «відрізавши» від трикутника ACK трикутник ABK, основа яких AK лежить на лінії перетину площин ABC і α. Аналогічне співвідношення маємо для проекцій трикутників. Тому

$$S_{A_1B_1C_1} = S_{AC_1K} - S_{AB_1K} = S_{ACK} \cdot \cos\varphi - S_{ABK} \cdot \cos\varphi = S_{ABC} \cdot \cos\varphi. \blacksquare$$

Кожен многокутник можна розбити на трикутники. При цьому площа многокутника дорівнює сумі площ трикутників розбиття. Крім того, розбиттю многокутника на трикутники відповідає розбиття його ортогональної проекції на трикутники, які є ортогональними проекціями трикутників, на які розбито многокутник. З наведених міркувань і задачі 1 випливає наступна теорема.

Теорема 4 *(про площу ортогональної проекції многокутника).*

Площа ортогональної проекції многокутника дорівнює добутку площі цього многокутника на косинус кута між площиною многокутника і площиною проекції.

Насправді теорема справджується для довільної плоскої фігури, для якої визначена площа, адже для неї площу можна визначити з будь-якою точністю за допомогою площ вписаних многокутників.

Приклад 3. Рівнобічну трапецію $ABCD$ з більшою основою AD і висотою 8 см перегнули по прямій, яка проходить через середини M і N сторін AB і CD, так, що вершина B розмістилася від площини AMN на відстані 2 см.

1) Знайти кут між площинами AMD і MBC.

2) Побудувати лінійний кут двогранного кута $A\underline{MN}C$ і знайти його кутову міру, якщо ортогональна проекція точки C на площину чотирикутника $AMND$ лежить за його межами.

3) Знайти відстань від точки B до прямої AD.

4) Знайти відстань від прямої MN до площини ABD.

5) Побудувати лінію перетину площин AMB і DNC.

□ Мовою геометричних перетворень умову прикладу можна тлумачити як поворот частини трапеції $MBCN$ навколо середньої лінії MN даної трапеції (рис. 527, а), при якому кожна точка, зокрема точки B, C та ін., обертаються в площині, що проходить через цю точку і перпендикулярна до MN.

Рис. 527

1) Побудуємо рис. 527, б), в), які відповідають умові. Відстань від точки B до площини AMN визначається довжиною перпендикуляра BP, основа якого P лежить на прямій BE (рис. 527, а), або, те саме, на прямій KE (рис. 527, б), де K — точка перетину висоти BE трапеції $ABCD$ із середньою лінією MN. При цьому точка P може лежати на промені KE (рис. 527, б) або ж на доповнюючому промені до всієї прямої KE (рис. 527, в).

В обох зазначених випадках кут між площинами AMD і MBC дорівнює кутові BKP однойменного прямокутного трикутника, адже площина BKE перпендикулярна до MN і кут BKP — гострий кут прямокутного трикутника. Оскільки $BK = 4$ см, $BP = 2$ см, то

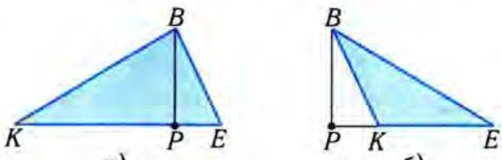
$$\sin \angle BKP = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \angle BKP = 30°.$$

2) Цій умові відповідає рис. 527, в), адже $KP < 4$ см, і коли точка P належить променю KE, то точка P попадає на відрізок KE. А розміщення проекцій точок B і C відносно чотирикутника $AMND$ однакове. Тому лінійним кутом двогранного кута $AMNC$ може бути кут BKE, а його міра дорівнює $180° - 30° = 150°$.

3) Оскільки $BE \perp AD$, то відстань від точки B до прямої AD визначається довжиною сторони BE трикутника BKE. І знову маємо два випадки, коли $\angle BKE = 30°$ і $\angle BKE = 150°$ (рис. 528, а, б), а $KB = KE = 4$ см в обох випадках. Тоді, за теоремою косинусів, $BE = \sqrt{4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 30°} = 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (см) або $BE = 4\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ (см).

4) Відстань від прямої MN до площини ABD визначається довжиною перпендикуляра з точки K до площини ABD. А оскільки площини ABD і KBE — перпендикулярні (чому?), то шуканий перпендикуляр є висотою h трикутника KBE, проведеною з вершини K. І знову маємо два випадки (рис. 528, а, б). В обох з них висоту до сторони BE можна знайти як відношення подвоєної площі $2S = KE \cdot BP = 4 \cdot 2 = 8$ (см²) трикутника KBE до сторони BE.

Тобто $h = \dfrac{8}{4\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ або $h = \dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.



а) б)

Рис. 528

5) Повернемось до рис. 527, б), в). Пряму, по якій перетинаються площини ABM і DCN, можна задати, визначивши дві її точки. Одну з них, точку K, можна отримати як перетин прямих AB і DC цих площин. Причому ці прямі обов'язково перетинаються, оскільки вони проходять через бічні сторони AB і DC. Друга точка L знаходиться як точка перетину прямих AM і DN, що проходять через бічні сторони трапеції $AMND$ (рис. 529). ■

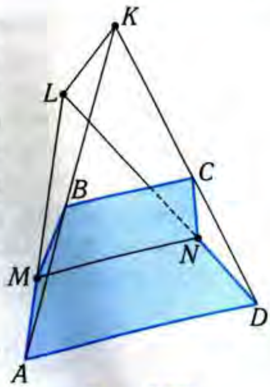


Рис. 529

Відповіді. 1) $30°$; 2) $150°$; 3) $4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ см або $4\sqrt{2+\sqrt{3}}$ см; 4) $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ або $\dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

✓ Контрольні запитання

1. На рис. 530 зображено дві похилі AB і AC та їхні проекції BP і PC на площину α. Яка з похилих утворює менший кут з площиною α, якщо:
   1) $AC = 4$, $AB = 6$;
   2) $AC = 5$, $AB = 3$?

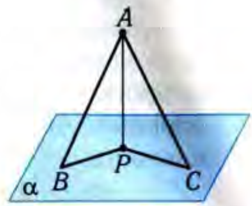


Рис. 530

2. З центра O квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр OS до площини квадрата, точки N, M — середини сторін BC і AD (рис. 531). Величина якого кута є кутом між:
   1) прямою SN і площиною ADC;
   2) прямою OS і площиною BCS;
   3) площинами ASD і ABC;
   4) площинами ASD і BSC;
   5) прямими AS і BC?

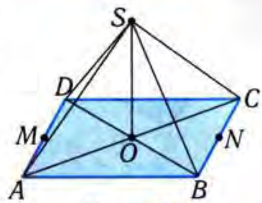


Рис. 531

3. Чи може кут між прямою і площиною дорівнювати $130°$; $-70°$; $20°$?
4. Чи будуть рівними у тетраедрі бічні ребра, якщо вони утворюють рівні кути з площиною основи?
5. Чи правильно, що кут між прямою, перпендикулярною до площини, і довільною прямою цієї площини дорівнює $90°$?
6. Як визначити, користуючись лише рулеткою, кут нахилу стовпа до землі?

7. Як би Ви вимірювали кут, утворений сонячним променем з поверхнею землі?
8. Кутова міра двогранного кута дорівнює 100°. Чому дорівнює кут між площинами граней цього двогранного кута?
9. Що треба виміряти, щоб визначити: а) висоту башти, до основи якої спостерігач може підійти; б) відстань до будинку, висота якого відома, якщо спостерігач не може до нього підійти?
10. Чи може кут між площинами дорівнювати 27°; 135°; 270°? Чи може мати такі значення кутова міра двогранного кута?

Графічні вправи

1. З середини M гіпотенузи прямокутного трикутника ABC проведено перпендикуляр MP до площини трикутника (рис. 532). Порівняйте кути нахилу прямих PA, PB, PC до площини ABC.
2. З вершини прямого кута C прямокутного трикутника ABC проведено перпендикуляр CS до площини ABC (рис. 533). Порівняйте катети AC і BC, якщо кут нахилу похилої SA до площини ABC більший, ніж кут нахилу похилої SB до цієї площини.

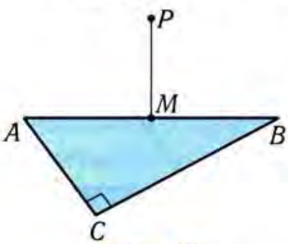


Рис. 532

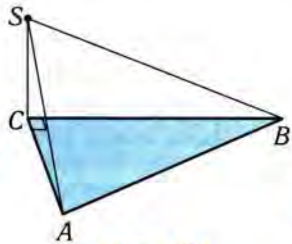


Рис. 533

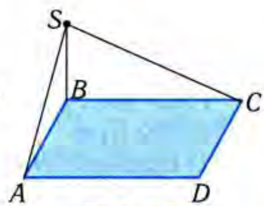


Рис. 534

3. З вершини B квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр BS до площини $ABCD$ (рис. 534). Порівняйте кути α і β між площинами ASD і CSD і площиною ABC.
4. На рис. 535 зображено рівносторонній трикутник ABC, точка O — його центр, D — середина BC, OP — перпендикуляр до площини ABC. Величина якого кута є кутом між площинами:
1) BPC і ABC;
2) APO і BPO?

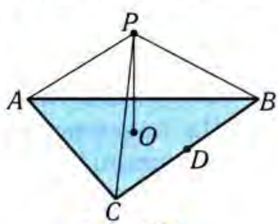


Рис. 535

Задачі

480. Нехай KS — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, де K — середина сторони AD; $KS = \sqrt{3}$, $AB = 3$.
1°) Знайдіть кут між прямою SD і площиною ABC.
2°) Знайдіть кут між прямою BS і площиною ACD.
3°) Визначте взаємне розміщення площин ABD і KCS.
4) Знайдіть кут між прямою, що проходить через точку K і середину сторони BC, та площиною BCS.
5) Знайдіть відстань від точки B до прямої CS.

481. З вершини A квадрата $ABCD$ зі стороною $\sqrt{3}$ см проведено перпендикуляр AS завдовжки 3 см до площини квадрата.
1°) Знайдіть кут між прямою BS і площиною ABC.
2°) Знайдіть кут між прямою CS і площиною ABC.
3°) Визначте взаємне розміщення площин ABS і BDC.
4) Знайдіть кут між прямою CS і площиною ASD.
5) Знайдіть відстань від точки B до прямої CS.

482°. З вершини прямого кута A трикутника ABC проведено перпендикуляр AP завдовжки 4 см до площини трикутника. Катет AC дорівнює 4 см, а кут $ACB = 60°$. Знайдіть кут:
1) між прямою PB і площиною ABC;
2) між прямою PB і площиною APC.

483. З центра O квадрата $ABCD$ зі стороною завдовжки 8 см встановлено перпендикуляр OP так, що кут між прямою PC і площиною ABC дорівнює 60°.
1°) Знайдіть кути між прямою PD і площинами ABC і APC.
2°) Порівняйте кути, утворені прямими PA, PB, PC, PD з площиною ABC.
3°) Знайдіть відстань від точки P до площини ABC.
4) Доведіть, що точки A і C симетричні відносно площини PBD.

484. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ зі стороною a.
1) Знайдіть кут між діагоналлю B_1D і площиною ACC_1.
2) Порівняйте кути, утворені діагоналлю B_1D з площинами його граней.
3) Знайдіть кут між діагоналлю B_1D і площиною A_1C_1D.
4) Знайдіть відстань від точки D_1 до площини A_1C_1D.

485. Рівнобедрений трикутник ABC з висотою 16 см, що проведена до його основи, перегнули по середній лінії MN, паралельній основі AC, так, що вершина B віддалена від площини чотирикутника $ACNM$ на 4 см.

1°) Знайдіть кут між площинами AMC і MBN.

2°) Побудуйте лінійний кут двогранного кута $B\underline{MN}C$ і знайдіть його кутову міру, якщо ортогональна проекція вершини B на площину чотирикутника $AMNC$ лежить за його межами.

3°) Порівняйте кутові міри двогранного кута $B\underline{MN}C$ і кута BMA.

4°) Знайдіть відстань від точки B до прямої AC.

5) Знайдіть відстань від прямої MN до площини ABC.

6) Побудуйте лінію перетину площин AMB і BNC.

486. Квадрат $ABCD$ зі стороною $4\sqrt{2}$ см перегнули по прямій, яка проходить через середини M і N сторін DC і BC, так, що вершина C віддалена від площини AMN на 1 см.

1°) Знайдіть кут між площинами ADM і CMN.

2°) Побудуйте лінійний кут двогранного кута $B\underline{MN}C$ і знайдіть його кутову міру, якщо ортогональна проекція вершини C на площину п'ятикутника $ABNMD$ лежить за його межами.

3°) Порівняйте кутові міри двогранного кута $B\underline{MN}C$ і кута CNB.

4°) Знайдіть відстань від точки C до прямої BD.

5) Знайдіть відстань від прямої MN до площини BDC.

6) Побудуйте лінію перетину площин BNC і DMC.

487°. З вершини квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр AP до площини квадрата.

1) Доведіть що кут PBA є лінійним кутом двогранного кута $P\underline{BC}A$.

2) Порівняйте кутові міри двогранних кутів $P\underline{BC}A$ і $P\underline{CD}A$.

3) Знайдіть кут між площинами APB і APD

488. Два однакових рівнобедрених трикутники ABC і ABD зі спільною основою AB лежать у різних площинах; K — середина AB .

1°) Доведіть, що CKD — лінійний кут двогранного кута $C\underline{AB}D$.

2) Побудуйте лінійний кут двогранного кута $D\underline{AC}B$.

3) Порівняйте кутові міри двогранних кутів $C\underline{AB}D$ і $A\underline{CD}B$, якщо $AB = CD$.

489. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; M — середина ребра AA_1. Обчисліть:

1) кут між діагоналлю грані $A_1B_1C_1$ і площиною MDB;

2) кути між прямою MC_1 і площинами $A_1B_1D_1$, BCC_1, DBD_1;

3) кут між прямими MC_1 і BC.

490°. Довжина ручки швабри дорівнює 1,2 м.

1) На якій відстані від підлоги розміщений кінець швабри при витиранні підлоги, якщо швабра нахилена до неї під кутом 60°?

2) Який кут утворить ручка швабри з підлогою, якщо кінець ручки віддалений від підлоги на 0,6 м?

491°. Канатна дорога протягом 15 хв піднімає лижника на вершину гори від її підніжжя зі швидкістю 2 м/с. Визначте висоту гори, вважаючи, що кут нахилу гори приблизно дорівнює 30°.

492*. Послуговуючись законами відбивання світла, доведіть, що падаючий і відбитий промені утворюють із дзеркалом однакові кути.

493°. Точка M лежить між гранями двогранного кута і віддалена від кожної з них на 8 см. Знайдіть відстань від точки M до ребра, якщо величина двогранного кута дорівнює: 1) 90°; 2) 60°; 3) 120°.

494°. Знайдіть кутову міру двогранного кута , якщо точка, що лежить на одній грані, розміщена від ребра на відстані, удвічі більшій, ніж від другої грані.

495. Кут падіння вугільного пласта дорівнює 35°. При вертикальному бурінні виявлено, що довжина шляху бура у вугіллі дорівнює 2,2 м. Обчисліть товщину пласта.

496*. Пряма a утворює рівні кути з трьома прямими, що лежать у площині α і проходять через точку перетину прямої a з площиною α. Доведіть, що $a \perp \alpha$.

497*. З вершини B ромба $ABCD$ проведено перпендикуляр BK до його площини. Сторона ромба дорівнює a, гострий кут при вершині A дорівнює α, а довжина перпендикуляра — b. Знайдіть:

1) відстань від точки A до площин KDB; KBC; KDC;

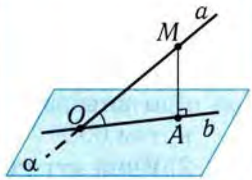
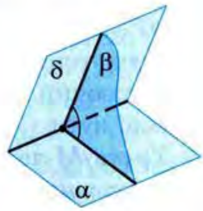
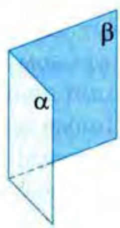
2) кути між прямою AK і прямими CD;BD;

3) кут між прямою AK і площиною BDK;

4) кути між площинами ABK і KBC; ADK і DKC; ABK і DKC.

Підсумок

Головні означення

Кутом між прямою і неперпендикулярною до неї площиною називається кут між прямою і її ортогональною проекцією на цю площину.		
Кутом між двома площинами, що перетинаються, називається кут між прямими, які утворюються при перетині даних площин третьою площиною, перпендикулярною до лінії перетину перших двох.		
Фігура, утворена двома півплощинами, що виходять з однієї прямої, називається ***двогранним кутом.* Спільна пряма півплощин називається *ребром,* а самі півплощини — *гранями двогранного кута.***		

Готуємось до тематичного оцінювання з теми «Перпендикулярність прямих і площин»

Завдання для самоконтролю

1. Сторона AB правильного трикутника ABC лежить у площині α. Чи завжди висота CD цього трикутника перпендикулярна до площини α?
2. Чи можна стверджувати, що пряма, яка перпендикулярна до діаметра кола, перпендикулярна і до його площини?
3. Чи можна за допомогою двох прямокутних пластин визначити напрям, перпендикулярний до площини стола?
4. Чи існує така пряма, через яку можна провести безліч площин, перпендикулярних до даної площини?
5. Чи можуть дві прямі бути перпендикулярними до деякої площини і перетинатися?
6. Чи можуть бути паралельними дві площини, якщо відомо, що тільки одна з них перпендикулярна до даної прямої?
7. Чи однакову форму мають перерізи куба, перпендикулярні до його діагоналі?
8. Чи правильно, що дві різні площини, які перпендикулярні до однієї прямої, не мають спільних точок?
9. Чи перпендикулярні дві площини, якщо вони перпендикулярні до третьої площини і лінії їхнього перетину з цією площиною перпендикулярні між собою?
10. Чи може ортогональною проекцією гострого кута бути розгорнутий кут?
11. Чи можуть бути рівними ортогональні проекції двох нерівних похилих?
12. Основа перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини ромба, який не є квадратом, співпадає з точкою перетину діагоналей ромба. Чи може дана точка бути рівновіддаленою від вершин ромба?
13. Чи можуть дві похилі різної довжини бути однаково нахиленими до площини?

14. Чи може кут між площинами дорівнювати 100°?
15. Чи завжди можна до невертикального стовпа прикріпити вертикальну стінку?

Зразок контрольної роботи

З центра O правильного трикутника ABC зі стороною 2 см проведено перпендикуляр OS завдовжки 2 см.

1°) Визначте взаємне розміщення прямої AB і площини OCS.

2°) Визначте взаємне розміщення площин OSC і ABC.

3°) Знайдіть відстань від точки A до площини OSC.

4°) Знайдіть кут між прямою SC і площиною ABC.

5°) Знайдіть кут між площинами SBC і ABC.

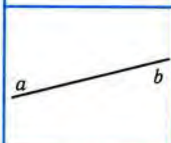
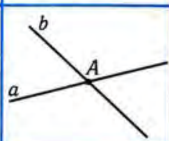
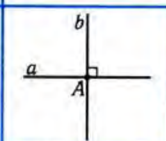
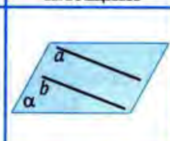
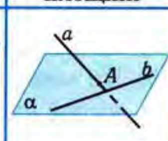
6) Побудуйте площину, яка проходить через середину відрізка AS паралельно площині SBC, і знайдіть відстань між цими площинами.

Відповіді до завдань для самоконтролю

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Ні	Ні	Так	Так	Ні	Ні	Ні	Так	Так	Так	Так	Ні	Так	Ні	Так

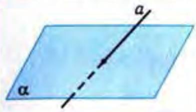
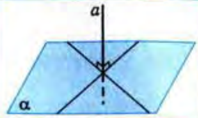
Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Таблиця 40

<table>
<tr><th colspan="5">Кількість спільних точок</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Не менше ніж дві</th><th colspan="2">Одна</th><th colspan="2">Немає</th></tr>
<tr><th>Загальний випадок</th><th>Окремий випадок</th><th>Лежать в одній площині</th><th>Не лежать в одній площині</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a і b збігаються</td><td>a і b перетинаються</td><td>a і b — перпендикулярні</td><td>a і b — паралельні</td><td>a і b — мимобіжні</td></tr>
<tr><td>$a=b$</td><td>$a \times b$</td><td>$a \perp b$</td><td>$a \parallel b$</td><td>$a \,\dot{-}\, b$</td></tr>
</table>

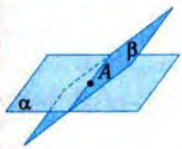
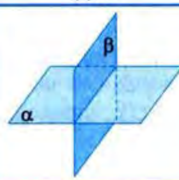
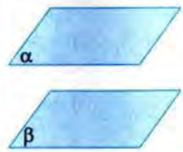
Взаємне розміщення прямої і площини

Таблиця 41

<table>
<tr><th colspan="4">Кількість спільних точок</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Не менш ніж дві</td><td colspan="2">Одна</td><td rowspan="2">Немає</td></tr>
<tr><td>Загальний випадок</td><td>Окремий випадок</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a належить α</td><td>a перетинає α</td><td>a і α — перпендикулярні</td><td>a паралельна α</td></tr>
<tr><td>$a \subset \alpha$</td><td>$a \times \alpha$</td><td>$a \perp \alpha$</td><td>$a \parallel \alpha$</td></tr>
</table>

Взаємне розміщення двох площин у просторі

Таблиця 42

<table>
<tr><th colspan="4">Кількість спільних точок</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Не менше трьох, що не лежать на одній прямій</td><td colspan="2">Не менше однієї, але всі вони лежать на одній прямій</td><td rowspan="2">Немає</td></tr>
<tr><td>Загальний випадок</td><td>Окремий випадок</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>α і β збігаються</td><td>α і β перетинаються</td><td>α і β — перпендикулярні</td><td>α і β — паралельні</td></tr>
<tr><td>$\alpha = \beta$</td><td>$\alpha \times \beta$</td><td>$\alpha \perp \beta$</td><td>$\alpha \parallel \beta$</td></tr>
</table>

Відповіді і вказівки до задач

Розділ I

1. 1) 5,000…; 2) 2,333…; 3) – 0,428571428571…; 4) 1,4000… . **2.** 1) $\frac{27}{100}$; 2) $\frac{2}{9}$; 3) $2\frac{31}{99}$; 4) $3\frac{224}{495}$. **3.** 1) $\frac{11}{315} < \frac{11}{305}$; 2) $-\frac{6}{7} < \frac{5}{7}$; 3) $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$; 4) $0{,}58 < \frac{7}{12}$. **4.** 1) 1,5; 2) –0,03(81); 3) 0,041(6); 4) $\frac{1}{24}$. **5.** Наприклад, 1) 0,54; 2) 0; 3) 0,34625; 4) $\frac{13}{42}$. **6.** Наприклад, 1) 2; 3; 5; 0,7; 2) 4; 9; 16; 0,25. **7.** (– 5; –3]; (– 2; – 1); [0; 2]. **10.** 1) $|x| \le 2$; 2) $|x - 1| \le 2$; 3) $|x + 1| \le 4$. **11.** 1) $A_1(7)$; 2) $C(6)$. **12.** 1) 1,26; 1,93; 2) 3π; $\frac{\pi}{2}$; 3) 4,28; 0,01. **14.** 1) $\frac{1}{72}$; 2) $3-\sqrt{8}$; 3) $3\sqrt{2}-4$; 4) 0,00(014). **15.** 1) –3; 2) $-\frac{13}{8}$. **16.** 1) –2; 1; 2) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$; 3) немає розв'язків; 4) $[-2; +\infty)$; 5) ±3. **17.** 1) $(-\infty; -5)\cup(-1; +\infty)$; 2) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; 3) немає розв'язків. **18.** 1) $|a| \ge a$; 2) $-|a| \le a$; 3) $|a^2| = a^2$. **19.** 1) $\frac{3}{50}$; 2) $\frac{9}{50}$; 3) $\frac{1}{150}$; 4) $\frac{3}{80}$; 5) $\frac{9}{8}$; 6) $3\frac{1}{2}$. **20.** 1) 8%; 2) 60%; 3) 200%; 4) 320%; 5) 0,43%. **21.** 44%. **22.** Богдан. **23.** 1) $7\frac{1}{6}$; 2) $1\frac{1}{30}$; 3) 261; 4) 14; 5) 32; 6) 1. **24.** 1) 8091; 2) 5041; 3) 2304; 4) 16; 5) $899\frac{72}{121}$; 6) 196; 7) 1600; 8) 91. **25.** ≈ 2,6 кг. **26.** ≈ 133 м. **27.** 1) $14{,}7 \le x \le 15{,}3$; 2) $14{,}5 \le x \le 14{,}9$; 3) $95 \le x \le 105$; 4) $5{,}1 \le x \le 5{,}3$. **28.** 1) Так. 2) Так. 3) Ні. 4) Так. **29.** 1) 1080°; 2) 3400°; 3) 2,4 Дж/(кг·К). **30.** 0,286; 3,182; 0,615. **31.** 0,11. **32.** Зменшилась на 0,4 %. **33.** 23,75%. **34.** 2 %. **35.** 860-ї проби. **36.** ≈ 32,9%; ≈ 35,8%; ≈ 23,2%; ≈ 8,1%. **37.** 32,364 г; 18,502 г; 7,134 г. **38.** 10%; 20 %. **39.** 20%. **40.** 15 т. **41.** 180 %. **42.** Приблизно на 56%. **43.** 2) (8; 0), (0; –4); 3) –6; –4; 2; 4) 10; 8; –6. **45.** У другій і четвертій; у першій і третій. **46.** 1) $f(-2) = 5$, $f(3) = 0$, $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 3\frac{3}{4}$; 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$; 3) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. **47.** 1) $x = -\frac{3}{4}$; 2) значення 2 функція не набуває; 3) $x = -2$. **48.** 1) $(-\infty; +\infty)$;

2) $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$; 3) $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$; 4) $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$; 5) $(-\infty;-3)\cup(-3;2]$; 6) $[-1;0)\cup(0;1]$. **49.** 1) $D(f)=[-2;2]$; 2) $E(f)=[-1;1]$; 3) 3; 4) $f(x)>0$ при $x\in(0;2)$, $f(x)<0$ при $x\in(-2;0)$; 5) функція непарна; 6) 1 (– 1); 7) два. **50.** 1) 12 км; 2) 6 км; 3) другий; 4) перший. **51.** Більш ніж 30 км/год. **55.** 1) $y=-1$; 2) $y=-x+2$. **56.** а) $y=\frac{2}{3}x+2$; б) $y=-2x+2$; в) $y=-x$. **57.** 1) $V=t+10$, $t\geq 0$; 2) 13 В. **58.** $y=-\frac{3}{x}$. **60.** Відносно осі y симетричні точки 3); відносно початку координат симетричні точки 2), 4). **61.** Відносно осі y симетричний графік функції 3); відносно початку координат симетричні графіки функцій 1), 4), 5). **63.** 1) $|x-2|$; 2) $|a+3|$; 3) $|a-b|$; 4) $|a+b|$. **64.** Парні функції: 2), 3), 5), 6); непарні функції: 1), 7). **66.** 1) $D(g)=[0;5]$, $D(f)=[-3;7]$; 2) $E(g)=[-2;2]$, $E(f)=[-4;3]$; 3) функція $y=g(x)$ має два нулі: $x_1=1$, $x_2=4$; $g(x)>0$ на множині $[0;1)\cup(4;5]$, $g(x)<0$ на проміжку $(1;4)$; функція $y=f(x)$ має три нулі: $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=6$; $f(x)>0$ на множині $(0;3)\cup(6;7]$, $f(x)<0$ на множині $[-3;0)\cup(3;6)$; 4) функція $y=g(x)$ спадає на проміжку $[0;3]$ і зростає на проміжку $[3;5]$; функція $y=f(x)$ зростає на кожному з проміжків $[-3;2]$, $[5;7]$ і спадає на проміжку $[2;5]$. **67.** 1) 5 км/год; 2) 0,1 год, 0,3 год, 0,5 год; 3) швидкість зростала протягом наступних проміжків часу: $0\leq t\leq 0{,}2$ і $0{,}3\leq t\leq 0{,}4$; швидкість спадала протягом наступних проміжків часу: $0{,}2\leq t\leq 0{,}3$ і $0{,}4\leq t\leq 0{,}6$; 4) 8 км/год. **69.** 1) Функція зростає на проміжку $(-\infty;2]$ і спадає на проміжку $[2;+\infty)$; 2) функція спадає на проміжку $(-\infty;1]$ і зростає на проміжку $[1;+\infty)$; 3) функція спадає на проміжку $(-\infty;0{,}5]$ і зростає на проміжку $[0{,}5;+\infty)$; 4) функція зростає у своїй області визначення $[-1;+\infty)$; 5) функція спадає на кожному з проміжків $(-\infty;-2)$, $(-2;+\infty)$; 6) функція спадає на кожному з проміжків $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$. **74.** 1) Ні; $x_1=-1{,}5$, $x_2=3$ – точки розриву; 2) у точці $x_1=-1{,}5$ функція не визначена, у точці $x_2=3$ функція визначена; 3) $f(3)=1$; 4) два. **76.** 1) Два; 2) один; 3) жодного. **78.** 1) 8; 2) 2; 3) 3. **79.** 1) $7\sqrt{10}$; 2) $-2a\sqrt{3}$. **80.** 1) $-\sqrt{3}$; 2) $a+b$. **81.** 2) Один; жодного; один. **82.** 1) Зростає на R; 2) спадає на $(-\infty;0]$, зростає на $[0;+\infty)$; 3) спадає на R; 4) зростає на $(-\infty;0]$, спадає на $[0;+\infty)$; 5) спадає на $(-\infty;1]$, зростає на $[1;+\infty)$; 6) зростає на R. **83.** 1) Парна; 2) непарна; 3) ні парна, ні непарна; 4) ні парна, ні непарна. **85.** 1) Один; 2) два; 3) два; 4) два. **86.** 1) 4; 2) –4; 3) ±5; 4) немає розв'язків. **87.** 1) 10; 2) 6; 3) $-\frac{6}{5}$; 4) 576; 5) $\frac{49}{3}$; 6) 2,7; 7) 6; 8) 6; 9) 6; 10) 3. **88.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{4}{\sqrt[3]{15}}$; 3) $\frac{\sqrt[4]{5}}{3}$; 4) $\frac{5}{4}$; 5) $\frac{\sqrt[5]{6}}{a}$. **89.** 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 4. **90.** 1) $\sqrt[9]{5}$; 2) $\sqrt[12]{10}$; 3) $\sqrt[3]{2}$; 4) $\sqrt[20]{12}$; 5) $\sqrt[6]{20}$; 6) $\sqrt[15]{192}$. **91.** 1) $\frac{1}{625}$; 2) розв'язків немає; 3) 8; 4) –27. **92.** 1) $\frac{1}{2}b$; 2) $3d^3$; 3) $2a$; 4) $-\frac{2}{3}c$. **93.** 1) $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{a}-1$; 3) $\sqrt{a}+9\sqrt{b}$; 4) $2\sqrt[3]{a}-1$. **94.** 1) $5\sqrt[3]{2}$; 2) $3\sqrt[3]{5}$; 3) $3a^2\sqrt[3]{2a}$; 4) $2|b|\sqrt[4]{2b^2}$; 5) $-a\sqrt[4]{5a^2}$; 6) $m^2\sqrt[3]{m^2n^2}$; 7) $2b^2\sqrt[4]{a^3b^3}$. **95.** 1) $\sqrt[5]{-15625}$; 2) $-\sqrt[6]{2b^6}$; 3) $-\sqrt[4]{2a^4b^4}$;

4) $-\sqrt{-b^5}$. **96.** 1) 0; 2) 0; 3) $\sqrt[3]{5}$; 4) $2\sqrt{5}$; 5) –50; 6) $-2\sqrt{3}$; 7) –6; 8) 216. **97.** 1) [3; +∞); 2) (–∞; +∞); 3) (–∞; –1] ∪ [1; +∞); 4) (–∞; –1)∪(–1; +∞). **98.** $R=\sqrt[4]{\dfrac{8\eta lQ}{\pi(p_1-p_2)}}$.

99. 1) ±3; 2) $\sqrt[15]{\dfrac{91}{8}}$; 3) $\sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{\dfrac{P_n}{2^n}}$. **101.** 1) (–∞; 0)∪(0; +∞); 2) (–∞; 1)∪(1; +∞); 3) [0; +∞); 4) [1; 2)∪(2; +∞); 5) [0; +∞); 6) (–∞; +∞). **102.** 1) $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$; 2) (0; 0); 3) (2; 0); 4) (1; 0); 5) (0; 2); $\left(-\sqrt[5]{2};0\right)$; 6) (0; 1). **103.** 1) 27; 2) 8; 3) 1024; 4) 0,2; 5) 0,5.

104. 1) $a^{\frac{1}{2}}$; 2) $y^{-0,6}$; 3) $x^{\frac{1}{3}}$; 4) a^9; 5) $b^{\frac{1}{6}}$; 6) $a^{\frac{5}{4}}$; 7) b^{-2}. **105.** 1) 1 + a; 2) x^3; 3) $2a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$; 4) $\dfrac{a+b}{b}$; 5) $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$; 6) $(cy)^{-1}$. **106.** 1) ≈ 1,09; 2) ≈1,40; 3) ≈0,481; 4) ≈1,73; 5) ≈2,03. **107.** 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні. **108.** 1) Вісь x не перетинає; (0; 0,5); 2) (1; 0); вісь y не перетинає; 3) (1; 0), вісь y не перетинає; 4) (– 2; 0), $\left(0;2^{\frac{4}{3}}\right)$; 5) вісь x не перетинає, (0; 1); 6) не перетинає осей координат. **109.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) (–∞;3)∪(3;+∞); 3) [–3;+∞); 4) (–3;+∞); 5) (–∞;3); 6) (–∞;5]. **110.** 1) $y(x_1)=\dfrac{3}{2}$; $y(x_2)=2$; 2) графік функції проходить через точки A і C; 3) функція набуває значень 2 і 0, значення –2 не набуває; 4) $D(y)=[0;+\infty)$, $E(y)=[0;+\infty)$, функція зростаюча, неперервна; 5) рівняння $f(x)=-1$ коренів не має; рівняння $f(x)=3$ і $f(x)=2-x$ мають по одному кореню; 6) $\sqrt[3]{0,5}<\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$; 7) 3. **112.** 1) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{0,6}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{0,6}<\left(\dfrac{2}{5}\right)^{0,6}$; 2) $\left(\dfrac{7}{3}\right)^{-\frac{1}{7}}<1<\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-\frac{1}{7}}$. **113.** 1) Один; 2) один; 3) один. **114.** $y=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{5}}$.

115. 1) (–∞; + ∞); 2) непарна. **116.** 1) ≈ 167 м/хв.; 2) ≈0,51 м/хв.; 3) $T=\left(\dfrac{350}{v}\right)^5$; 4) не існує. **117.** 1) $V^{\frac{1}{3}}$; 2) $V^{\frac{2}{3}}$; 3) $6V^{\frac{2}{3}}$.

Розділ 2

118. ***Вказівка:*** скористайтесь тим, що поза кожною площиною існує безліч точок простору. **119.** ***Вказівки:*** 1) розгляньте площину α, яка визначається даними точкою і прямою; 2) зверніть увагу на точки прямої, що проходять через A паралельно α. **120, 121.** ***Вказівка:*** скористайтесь методом «від супротивного». **123.** ***Вказівка:*** доведіть спочатку, що точка N лежить поза площиною ABC. **124.** 1) B_1C_1; 2) A_1B_1; 3) AB; 4) AB; 5) BD; 6) B_1D_1. **125.** ***Вказівка:*** скористайтесь тим, що прямі AB і c перетинаються, а $c \subset \beta$. **126.** ***Вказівка:*** побудуйте спочатку точку перетину площини ABC з прямою l. **127.** ***Вказівка:*** з'ясуйте, чи завжди можлива така побудова. **128.** ***Вказівка:*** зверніть увагу на те, що точка A є спільною для даних площин. 129. ***Вказівка:*** запишіть умову символічно: $a = \gamma \cap \alpha, b = \gamma \cap \beta$. 130. ***Вказівка:*** визначте дані прямі за допомогою чотирьох точок, які не лежать в одній площині. 131. ***Вказівка:*** якщо фігура має три точки, що не лежать на одній прямій, то вона містить дві прямі, що проходять через ці точки. Тому і вся площина, яка визначається цими прямими, належить даній фігурі, бо вона складається із усіх прямих, що проходять через дві точки, взяті на кожній з цих прямих. Розгляньте інші випадки самостійно. 132. ***Вказівка:*** 4), 5) використайте те, що центр грані є точкою перетину діагоналей. 133. ***Вказівка:*** 2) – 4) використайте те, що центр грані є точкою перетину медіан. 134. 1) $MN \,||\, PQ$, $MP \,||\, BC$, $AB \times PQ$, $MQ \,||\, BD$; 2) паралелограм; 3) 14 см, $24\sqrt{3}$ см². 135. Так. 136. 1) Мимобіжні; 2) перетинаються; 3) паралельні; 4) перетинаються. 137. 1) Паралельні; 2) перетинаються; 3) мимобіжні; 4) перетинаються. 138. 1) Паралельні; 2) перетинаються; 3) мимобіжні. 139. ***Вказівки:*** 1) дослідіть умову існування шуканої точки; 2) з'ясуйте, чи залежить відповідь від існування точки перетину прямої AB з площиною α; 3) $CC_1 = 3{,}5$ см. 140. 2) 15 см. 141. 2) 6 см. 142. 2) 4 см. 143. 1) $AD \dot{-} BC$, $DM \times AN$, $AD \| MN$; 3) 3 : 1. 144. ***Вказівка:*** проведіть через перетинні прямі площину і застосуйте другу ознаку мимобіжності прямих. 145. ***Вказівка:*** 5) побудуйте спочатку перетин січної площини з площиною однієї з граней. 146. ***Вказівка:*** 4) розгляньте окремо випадок, коли пряма MN перетинає площину ABC і коли не перетинає. 147. ***Вказівка:*** 2) використайте те, що на площині кожна пряма, яка перетинає одну з паралельних прямих, перетинає і другу. 148. ***Вказівка:*** зверніть увагу на те, що точки A, B, C не лежать на одній прямій. 149. ***Вказівка:*** якщо існує ще одна пряма d, яка паралельна c і перетинає a і b, то вона разом з c визначає площину, в якій містяться a і b (чому?). 150. ***Вказівки:*** 1) Нехай $A \in a$, b' паралельна b і проходить через a. Спроектуйте пряму b паралельно c на площину, яка визначається прямими a і b'; 2) спробуйте спочатку через точку простору провести пряму, що перетинає дві мимобіжні прямі. 151. Не обов'язково. 152. 10 см, 15 см. 153. 24 см. 154. ***Вказівка:*** використайте те, що діагоналі ромба перпендикулярні і що два перпендикуляри до прямої на площині паралельні. 155. ***Вказівка:*** 2) використайте те, що відрізок, який з'єднує середини основ рівнобічної трапеції, перпендикулярний до основ. 156. ***Вказівки:*** 2), 3) використайте властивості бісектриси та висоти у рівносторонньому трикутнику; 4) спробуйте охарактеризувати центр кола, вписаного в рівносторонній трикутник, за допомогою медіан. 157. ***Вказівка:*** 3) використайте те, що вісь симетрії рівнобічної трапеції і висота перпендикулярні до основ. 158. ***Вказівки:*** 1) охарактеризуйте центр кола за допомогою паралельних хорд; 2), 3) скориставшись вказівкою до попереднього завдання, побудуйте два перпендикулярні діаметри. 159. ***Вказівка:*** 1) використайте те, що прямі AB і A_1B_1 лежать в одній площині, і те, що пряма A_1B_1 лежать в площині β; 2) 4 см. 160. 2) 2 см. 161. 2) 10 см. 162. 1) Паралельною проекцією; 2) паралелограм. 163. ***Вказівка:*** проаналізуйте можливість побудови. 164. ***Вказівка:*** спроектуйте точки A і B на площину верхньої основи паралельно бічному ребру. 165. ***Вказівка:*** спроектуйте точки A і B на площину відповідних граней паралельно ребрам, що перетинають ці грані. 166, 167. ***Вказівка:*** використайте розв'язання задачі 1 і прикладу 3 з § 9.

168. ***Вказівка:*** використайте те, що проекція центра шестикутника симетрична проекції вершини B відносно середини проекції відрізка AC. 169, 170. ***Вказівка:*** застосуйте оборотність проектування. 171. ***Вказівка:*** побудова полегшується, коли до граней куба добудувати такі самі куби. 172. 1) 5 см; 2) 3 см; 3) 8 см; 4) $\frac{cb}{a+c}$. 173. Друга бічна сторона без її кінців. 174. ***Вказівка:*** 1), 2) використайте властивість бісектриси, проведеної з вершини рівнобедреного трикутника. 175. ***Вказівка:*** врахуйте неоднозначність розв'язку задачі. 176. ***Вказівка:*** 3) зверніть увагу на взаємне розміщення бісектриси зовнішнього кута рівностороннього трикутника і його сторін. 177. ***Вказівка:*** використайте те, що серединні перпендикуляри паралельні відповідним висотам. 178. ***Вказівки:*** 1) обґрунтуйте те, що основа бісектриси поділяє катет у відношенні 2:1; 2), 3) підрахуйте, в якому відношенні поділяють гіпотенузу основа висоти, проведеної з вершини прямого кута, та основа бісектриси кута в 30°. 179. ***Вказівка:*** використайте те, що менша діагональ поділяє цей ромб на рівносторонні трикутники. 180. ***Вказівки:*** 1) використайте те, що точкою перетину діагоналі квадрата поділяються навпіл; 2) врахуйте те, що задача має безліч розв'язків. 181. ***Вказівки:*** 2) встановіть взаємне розміщення сторін прямокутника і осі симетрії трапеції; 3) доведіть, що центр кола є перетином осі симетрії трапеції і медіани рівнобедреного трикутника, побудованого на бічній стороні трапеції та меншій основі. 182. ***Вказівки:*** 1) обґрунтуйте, що це перетин зображень осі симетрії трапеції і прямої, що проходить через середину бічної сторони і основу висоти, опущеної з вершини тупого кута; 2) центр кола лежить на перетині осі симетрії і бісектриси тупого кута трапеції. Оскільки ми вміємо будувати зображення медіани до основи (бісектриси кута при вершині) рівнобедреного трикутника, то спробуйте побудувати на заданому тупому куті трапеції рівнобедрений трикутник, бічні сторони якого дорівнюють бічній стороні трапеції. При цьому, звичайно, потрібно враховувати «спотворення» відстані за різними напрямами. 183. ***Вказівка:*** зобразіть хорду, паралельну даному діаметру. Як шуканий діаметр поділяє цю хорду? 184. 1) ***Вказівка:*** зверніть увагу на те, що одна точка перетину площин вже відома, залишилось знайти ще одну; 2) $\sqrt{\frac{3}{2}}a$. 185. 1) ***Вказівка:*** використайте те, що усі дані точки знаходяться в двох гранях; 2) $\frac{a}{3}$; 3) ***вказівка:*** знайдіть відношення, в якому шукана площина перетинає три ребра піраміди. 186. ***Вказівки:*** 3) проведіть через центр грані SBC пряму, паралельну SB; 4) переріз буде паралельним до грані ASC. 187. ***Вказівки:*** 3) скористайтесь слідом січної площини на площині грані $ABCD$; 4) знайдіть перетин січної площини з ребром CC_1. 188. 130° або 50°. 189. 1) BB_1, CC_1, DD_1; 3) ні. 190. 1) $DF \parallel ABC$, $AB \parallel MNK$, $AC \times DBF$, $MK \times BCD$; 3) 3 см. 191. 1) $EF \parallel ABC$, $MC \times DEF$, $MN \parallel CFE$, $BE \parallel ADF$; 3) 8 см. 192. 1) $CD \subset ABC$, $CD \parallel ABB_1$, $CD \times AA_1D$; 4) наприклад, пряма, що проходить через середини ребер AA_1 і CC_1; 6) 60°. 193. 1) $AD \parallel BCS$; 4) ***вказівка:*** обґрунтуйте, що шукана пряма паралельна

основам. **194.** 2) паралельні; 3) 16 см. **195.** 2) паралельна; 3) 6 см. **196.** ***Вказівка:*** скористайтесь тим, що протилежні сторони прямокутника паралельні. **197.** ***Вказівка:*** площина α перетинає площину трикутника ABC по прямій, паралельній BC. **198.** ***Вказівки:*** 1) якби таких прямих було більше, то дві з них визначили б площину, паралельну обом даним площинам, і тоді б вони були паралельні між собою; 2) поряд з прямою, паралельною другій площині, розгляньте пряму, яка лежить у другій площині і паралельна даній прямій. **199, 200.** ***Вказівка:*** врахуйте те, що такі побудови не завжди можливі. Вкажіть ці випадки. **201.** ***Вказівка:*** 1)–3) побудуйте слід площини SMN на площині ABC. **202.** 1) 45°; 2) побудовані прямі паралельні площині BB_1C_1C; площину DD_1C_1C одна з цих прямих перетинає, а друга — паралельна їй. **203.** 1) Чотирикутник ABC_1D_1; 2) трикутник BDK, де K — середина AA_1; 3) якщо M, N — середини ребер CC_1, D_1C_1, то січна площина перетинає площину AA_1B по прямій, паралельній MN. Далі скористайтесь методом слідів. **204.** 1) Трикутник SMN, де M — середина AS, N — середина AB; 2) 1 : 1. **205.** 2) Наприклад, площина ABC_1; 3) ***вказівка:*** зверніть увагу на те, що прямі AB і A_1B_1 паралельні. **206.** ***Вказівка:*** зверніть увагу на те, що така побудова не завжди можлива. Вкажіть ці випадки. **207.** 1) $MO_1O \parallel ADD_1$, $ABD_1 \times CD_1C_1$; 3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2$. **208.** 1) $ACD \parallel KLP$, $MLK \times ABC$; 3) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}a^2$. **209.** 1) $B_1D_1D \parallel LMM_1$; 4) $MA_1B_1 \parallel CDM_1$. **210.** 1) $LM \perp BC$, $LN \parallel ABD$, $LMN \parallel BDC$; 4) ***вказівка:*** перерізом є трикутник, для обчислення площі якого варто скористатися виразом $\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$, де α — кут при вершині S; b, c — прилеглі сторони. **211.** 1) $LM \perp BC$, $LN \parallel ABC$. **212.** 3) $ABB_1 \parallel DD_1C_1$. **213.** 1) Паралельні. 2) $\dfrac{(a+b+c)(m+n)}{m}$, або ж $\dfrac{(a+b+c)(m-n)}{m}$. **214.** 2) Паралелограм. **215.** 1) ML, де $L = AB \cap CD$; 2) пряма, що паралельна AD і проходить через M. **216.** 1) Наприклад, переріз, що проходить через вершину A, B_1, D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. **217.** Наприклад, в тетраедрі $SABC$ переріз, що проходить через середні лінії трикутників SAB і CAB, паралельний спільній основі AB. **218.** ***Вказівка:*** скористайтеся ознакою паралельності площин. **219.** ***Вказівка:*** дві прямі, що проходять через одну точку паралельно площині, визначають площину, паралельну даній. Потрібно довести, що ця площина і є шуканою. **220.** ***Вказівка:*** скористайтесь тим, що ці площини паралельні двом площинам, що проходять через мимобіжні прямі AB і CD. **221.** ***Вказівка:*** скористайтесь властивостями прямої, яка перетинає одну з паралельних площин. **222.** ***Вказівка:*** перерізом куба є квадрат з центром O і ребром MN. **223.** ***Вказівка:*** доцільно міркувати «від супротивного». **224.** ***Вказівка:*** у ΔADS проведіть середню лінію EF, а у ΔFCB — відрізок $DK \parallel FC$, $K \in BC$. Перерізи EFC і ADK — шукані. **225.** 1), 2) Площина. **226.** 1) $AB \parallel A_1B_1$;

$BC \times B_1C_1$; $AC \times A_1C_1$; 2) $\frac{25\sqrt{3}}{4}$. **227.** ***Вказівка:*** спроектуйте одну з прямих на площину, що проходить через другу пряму паралельно першій.

Розділ 3

228. 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $\frac{3\pi}{10}$; 3) $\frac{7\pi}{6}$; 4) $\frac{11\pi}{12}$; 5) $-\frac{11\pi}{6}$; 6) $\frac{3\pi}{20}$; 7) $\frac{53\pi}{75}$. **229.** 1) 60°; 2) –150°; 3) ≈ 114,6°; 4) 540°; 5) 225°; 6) –300°; 7) 270°. **231.** 9°; 135°; 720°; 1350°. **232.** 1) –310°, 770°; 2) –220°. **233.** 1) $-\frac{13\pi}{7}$; 2) $-\frac{10\pi}{7}$. **234.** 1) 3 см; 2) 2π см; 3) 0,4 м. **235.** $\frac{\pi}{2}\frac{1}{c}$. **236.** 1) 540 000 град./с; 2) 3 000π рад/с. **237.** $\frac{11\pi}{2}$; $-\frac{84\pi}{5}$. **238.** 240π см/с. **239.** 2,5 рад/с. **240.** 6π см/с; 270π см. **242.** 1) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **243.** 1) (–1; 0); 2) (1; 0); 3) (0; 1); 4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 5) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **244.** 1) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; 2) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; 3) $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; 4) $\frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$. **245.** 1) $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$; 2) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$. **246.** Наприклад, 1) $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{6}$; 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$; 2) $\frac{11\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$; π; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; 0; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 0; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$; π; $\frac{2\pi}{3}$; 5) $\frac{5\pi}{4}$; π; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; 0; $\frac{5\pi}{3}$. **247.** 1) Безліч і чотири; 2) безліч і дві; 3) безліч і вісім; 4) безліч і дві. **248.** 1) $-\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{4}{3}$; 2) $\frac{12}{13}$; $-\frac{5}{13}$; $-\frac{12}{5}$; $-\frac{5}{12}$; 3) $\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $-\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{7}}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{\sqrt{7}}{3}$; $\frac{3}{\sqrt{7}}$.

249.

Функція \ t	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
sin t	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

t / Функція	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
$\cos t$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} t$	-1	$-\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} t$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

250.

t / Функція	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$\frac{12\pi}{7}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{9}$	$\frac{13\pi}{6}$
$\sin t$	–	+	–	+	+	+
$\cos t$	–	+	+	–	–	+
$\operatorname{tg} t$	+	+	–	–	–	+
$\operatorname{ctg} t$	+	+	–	–	–	+

251. 1) 0; 2) 1. **253.** 1) 0; π; 2π; 2) 0; 2π; 3) π; 4) $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$; 5) $\frac{3\pi}{2}$. **254.** 1) $\sqrt{1-a^2}$; $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$; 2) $-\sqrt{1-a^2}; -\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$. **255.** $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$. **257.** 1) $x=\sqrt{4-y^2}$, $y=\sqrt{4-x^2}$; 2) $x=-\sqrt{\frac{1}{1-y^2}}$, $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. **258.** 1) 60°; 26°; 80°; 90° – α ; 45° – α; $\frac{3\pi}{8}$; 2) 150°; 116°; 170°; 180° – α ; 135° – α; $\frac{7\pi}{8}$. **259.** 1) +; 2) +; 3) –; 4) +; 5) +, якщо $\frac{\pi}{2}+2\pi n<t<\frac{3\pi}{2}+2\pi n$ і –, якщо $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<t<\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **260.** 1) +; 2) –; 3) –; 4) +; 5) –; 6) –. **261.** 1) $\cos t = 0{,}6$; $\operatorname{ctg} t = -0{,}75$; $\operatorname{tg} t = -\frac{4}{3}$; 2) $\sin t=-\frac{5}{13}$; $\operatorname{ctg} t = 2{,}4$; $\operatorname{tg} t=\frac{5}{12}$; 3) $\cos t=-\frac{5}{13}$; $\sin t=\frac{12}{13}$; $\operatorname{ctg} t=-\frac{5}{12}$; 4) $\cos t=\frac{3}{\sqrt{10}}$; $\sin t=\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\operatorname{tg} t=\frac{1}{3}$; 5) $\cos t = -0{,}8$; $\operatorname{tg} t = -0{,}75$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{4}{3}$; 6) $\sin t=-\frac{12}{13}$; $\operatorname{tg} t = 2{,}4$; $\operatorname{ctg} t=\frac{5}{12}$. **262.** 1) $\left(-\frac{5}{13};\frac{12}{13}\right)$ або $\left(\frac{5}{13};-\frac{12}{13}\right)$; 2) $\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)$ або $\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$; 3) $\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2};\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)$ або $\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2};-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)$; 4) $\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$ або

$\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$. **263.** 1) $\frac{6}{5+3\sqrt{5}}$; 2) $-\frac{12}{7+4\sqrt{7}}$. **264.** 1) $-\mathrm{ctg}^2\,\alpha$; 2) $-\mathrm{tg}^2\,\alpha$; 3) 0; 4) 0; 5) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 6) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 7) $\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$; 8) $\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$; 9) $\mathrm{ctg}^2\alpha$; 10) $\mathrm{tg}^2\,\alpha$; 11) $\cos^2\alpha$; 12) $\sin^2\alpha$; 13) tg α; 14) ctg α; 15) sin α, якщо $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<\alpha<\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$ і $-\sin\alpha$, якщо $\frac{\pi}{2}+2\pi n<\alpha<\frac{3\pi}{2}++2\pi n, n\in Z$; 16) cos α, якщо $2\pi n<\alpha<\pi+2\pi n, n\in Z$ і $-\cos\alpha$, якщо $\pi+2\pi n<\alpha<2\pi+2\pi n$, $n\in Z$.

266.

	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°	390°
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
cos	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tg	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
ctg	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

267. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) –1; 4) $\sqrt{3}$; 5) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 7) $-\sqrt{3}$; 8) 1. **268.** 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-1$; 2) $-\sqrt{2}$; 3) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1$. **269.** 1) $\sin\frac{8\pi}{9}$; 2) $-\cos\frac{8\pi}{9}$; 3) $-\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}$; 4) $\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{5}$. **270.** 1) $-\cos\frac{\pi}{6}$; 2) $\cos\frac{\pi}{4}$; 3) $-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$; 4) $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}$. **271.** 1) 0; 2) 1. **272.** 1) 0; 2) 0. **273.** 1) 4; 2) –1; 3) 1; 4) –ctg α. **275.** $\frac{5}{13}$. **276.** $\frac{12}{13}$. **277.** 1) 1; 2) $\frac{m^2-1}{2}$. **278.** 1) 385°; 745°; –205°; –335°; 2) $\frac{\pi}{5};\frac{11\pi}{5};\frac{21\pi}{5}$; $-\frac{9\pi}{5};-\frac{19\pi}{5}$. **281.** 1) 0,5; 2) $-\sqrt{3}$; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sqrt{3}$. **282.** 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 4) $\mathrm{tg}^2 2\alpha$. **287.** 1) 6π; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) не існує. **290.** 1) $\pm\frac{\pi}{2}$, 0; 2) $0, \frac{\pi}{2}, \pi$. **291.** 1) R; 2) R; 3) R; 4) вся координатна пряма, крім чисел $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$; 5) вся координатна пряма, крім чисел $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; 6) об'єднання проміжків $[2\pi n;\pi+2\pi n], n\in Z$; 7) об'єднання проміжків $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right), n\in Z$. **292.** 1) Парна. 2) Парна. 3) Непарна.

4) Непарна. 5) Парна. 6) Ні парна, ні непарна. **293.** 1) $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$; $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$; 2) $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$; $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; 3) $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$; $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. **294.** 1) $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$; 3) $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$, $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. **295.** 1) Зростає на кожному з проміжків $[-\pi+2\pi n;2\pi n], n\in Z$; спадає на кожному з проміжків $[2\pi n;\pi+2\pi n]$, $n\in Z$; 2) зростає на кожному з проміжків $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$; спадає на кожному з проміжків $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$; 3) зростає на кожному з проміжків $\left[\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3};\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3}\right], n\in Z$; спадає на кожному з проміжків $\left[\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3};\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}\right]$, $n\in Z$; 4) зростає на кожному з проміжків $\left[\frac{\pi}{12}+\pi n;\frac{7\pi}{12}+\pi n\right]$, $n\in Z$; спадає на кожному з проміжків $\left[-\frac{5\pi}{12}+\pi n;\frac{\pi}{12}+\pi n\right]$, $n\in Z$; 5) зростає на кожному з проміжків $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right]$, $n\in Z$; спадає на кожному з проміжків $\left[\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in Z$; 6) зростає на кожному з проміжків $\left[\frac{2\pi}{3}+\pi n;\frac{7\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in Z$; спадає на кожному з проміжків $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{2\pi}{3}+\pi n\right]$, $n\in Z$. **296.** 1) $\sin 37°<\sin 86°$; 2) $\sin\ 220° > \sin\ 260°$; 3) $\cos\ 200° < \cos\ 230°$; 4) $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)<\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$; 5) $\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)<\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)$; 6) $\sin(-3)>\sin(-2)$; 7) $\cos\frac{\pi}{7}>\sin\frac{\pi}{7}$; 8) $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$. **297.** 1) $[-1;1]$; 2) $[-3; 3]$; 3) $[-4; 2]$; 4) $[0; 1]$; 5) $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$; 6) $[-3; 3]$; 7) $\left[-3-\frac{\pi}{6};3-\frac{\pi}{6}\right]$. **300.** 1) Вся координатна пряма, крім чисел $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$; 2) вся координатна пряма, крім чисел $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 3) вся координатна пряма, крім чисел $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 4) вся координатна пряма, крім чисел $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$.
301. 1) Непарна. 2) непарна; 3) парна; 4) парна; 5) ні парна, ні непарна; 6) парна.
302. 1) $\operatorname{tg}(-80°)<\operatorname{tg}(-50°)$; 2) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}>\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}$; 3) $\operatorname{tg}1>\operatorname{tg}1{,}6$; 4) $\operatorname{tg}(-2)>\operatorname{tg}(-3)$;

5) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{8}\right) < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{9}$; 6) $\operatorname{ctg}95° > \operatorname{ctg}117°$; 7) $\operatorname{ctg}2 > \operatorname{ctg}3$; 8) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$. **303.** 1) Спадає на кожному з проміжків $\left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$; 2) спадає на кожному з проміжків $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in Z$; 3) зростає на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$; 4) зростає на кожному з проміжків $\left(-\frac{3\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$; 5) спадає на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right]$, $n \in Z$; зростає на кожному з проміжків $\left[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$; 6) зростає на кожному з проміжків $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in Z$; спадає на кожному з проміжків $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, $n \in Z$; 7) зростає на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; 8) спадає на кожному з проміжків $\left(-\frac{3\pi}{4} + 3\pi n; \frac{9\pi}{4} + 3\pi n\right)$, $n \in Z$. **304.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(1; +\infty)$; 4) $[0; +\infty)$; 5) $\{1\}$; 6) $(-\infty; +\infty)$; 7) $(-\infty; 0]$. **305.** 1) 1; –1; 2) $\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1; 0$. **307.** 1) 3; π; $\frac{\pi}{3}$; 2 $\frac{1}{2}$; 2; $\frac{\pi}{4}$; 3) 2; 4π; 1; 4) 3; $\frac{\pi}{2}$; 0; 5) 1; 2π; –1. **308.** 1) 2,5; $\frac{2}{3}$; 3π; $\frac{5}{4}$ см; 2) 7; 0,5; 4π; $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ см; 3) 2; 1; 2π; 0 см; 4) 1,5; 6; $\frac{\pi}{3}$; $-0{,}75$ см. **309.** 1) 5; 0,2; 10π; 2) 5 А; 3) $t = 0{,}05 + 0{,}2n$ с, $n = 0, 1, 2, \ldots$. **310.** 1) 220; $\frac{1}{30}$; 60π; 2) 220 В; 3) $\frac{n}{30}$ с, $n = 0, 1, 2, \ldots$. **311.** 1) 2; π; $\frac{\pi}{3}$; 2) паралельне перенесення вздовж осі t на $\frac{\pi}{6}$ одиниць у від'ємному напрямі; стиск до осі y вдвічі; розтяг від осі t втричі. **312.** 1) $t = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; 2) $t = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; 3) $t = \frac{2\pi(n+1)}{3}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. 4) $t = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n = 0, = 0, 1, 2, \ldots$.**313.** 1) $y = \sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y = 7\sin\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. **314.** 1) +; 2) –; так. **315.** 1) 3; 2) $-3\sqrt{2}$; 3) 0; 4) 6; 5) –6. **316.** 1) ab; 2) 0; 3) $a^2 + b^2$; 4) $-a^2 - b^2$. **317.** 1) 8; 2) –12; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) 17; 5) 26; 6) 10; 7) –8. **319.** 1) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$; 5) $-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$. **320.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **321.** 1) $-\frac{297}{425}; -\frac{87}{425}$;

2) $\frac{2\sqrt{30}-1}{12}$; $\frac{-2\sqrt{30}-1}{12}$; 3) $\frac{25}{19}$; $\frac{5}{31}$; 4) $-\frac{7}{17}$. **322.** 1) $\cos\alpha$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\mathrm{tg}\alpha\mathrm{ctg}\beta$; 4) $-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta$; 5) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; 6) $\frac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha}$. **327.** $\frac{24}{145}$. **329.** 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) π; 3) π. **330.** 1) $-\frac{336}{625}$; $\frac{527}{625}$; $-\frac{336}{527}$; 2) $2a\sqrt{1-a^2}$; 3) $2a^2-1$; 4) $\frac{2a}{1-a^2}$. **331.** 1) $\approx 0{,}447$; $\approx 0{,}894$; 0,5. 2) $\approx 0{,}949$; $\approx 0{,}316$; 3. **332.** 1) $\frac{1}{2}\sin 20°$; 2) $\cos 4\alpha$; 3) $\cos 2\alpha$; 4) $\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\,2\alpha$; 5) $\frac{1}{2}\sin 4\alpha$; 6) $\sin 2\alpha$; 7) $\sin 2\alpha$; 8) $\sin 2\alpha$; 9) $\mathrm{tg}^2\gamma$; 10) $\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\gamma\right)$. **333.** 1) 1; 2) 1; 3) $\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 4) $\mathrm{tg}2\alpha$; 5) $\mathrm{tg}\,2\alpha$; 6) $\sin 3\alpha$; 7) $\cos 4\beta$; 8) $\frac{1}{8}\cos 4x$; 9) $\sin 2\alpha$; 10) $\cos 2\alpha$; 11) $\cos\alpha-\sin\alpha$; 12) $\sqrt{2}\left|\sin\alpha+\cos\alpha\right|$; 13) $-2\cos\alpha$; 14) $-2\sin\frac{\alpha}{2}$. **335.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{16}$; 3) $\frac{1}{8}$; 4) 4. **336.** 1) 0; 3; π; 2) -1; 2; π. **337.** 1) 0,96; $-0{,}28$; 2) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$; $\frac{1}{3}$; 3) h^2. **338.** 1) $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \pi$; 2) $2; 1; \frac{\pi}{2}$; 3) 2; 0; π. **339.** 1) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$; 6) $\frac{1}{4}$. **340.** 1) $\mathrm{tg}2\alpha$; 2) $\frac{\mathrm{ctg}2\alpha}{\cos\alpha}$; 3) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $\cos\alpha\cos 3\alpha$.

342. 1) $4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $-4\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 3) $\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\alpha}$; 4) $\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\alpha}$. **343.** 1) $1+\cos 2x$; 2) $\frac{1}{2}+\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x$; 3) $1-\cos 4x$; 4) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 8x$. **344.** 1) $\alpha=\pm\beta+2\pi n,\ n\in Z$; 2) $\alpha=\beta+\pi n,\ n\in Z$. **347.** 45°. **348.** 1) $\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 2\pi$; 2) $\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 2\pi$. **349.** $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. **350.** 1) π; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) 8π. **351.** 1) R; 2) $[-10; 10]$. **352.** 1) $\left(\frac{\mathrm{ctg}6}{\mathrm{tg}3}; +\infty\right)$; 2) $\left(\frac{\mathrm{ctg}5}{\mathrm{tg}4}; +\infty\right)$. **353.** 1) У першій; 2) у четвертій; 3) у першій; 4) у другій. **354.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) 0,8; 6) 0,6. **355.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2},\ n\in Z$; 2) $-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z$; 3) $\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi n,\ n\in Z$; 4) $\frac{5\pi}{12}+2\pi n$, $\frac{\pi}{12}+2\pi n,\ n\in Z$; 5) немає розв'язків; 6) немає розв'язків; 7) $(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{4}+3\pi n,\ n\in Z$; 8) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; 9) немає

розв'язків; 10) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi,\ \pi+2n\pi,\ n\in Z$; 11) $\pm\frac{\pi}{4}+2n\pi,\ n\in Z$; 12) $\pm\frac{1}{2}\arccos(-0,6)+$ $+\pi n,\ n\in Z$; 13) $3(-1)^n\arcsin 0,2+3\pi n,\ n\in Z$; 14) $-0,5\pm\arccos 0,9+2\pi n,\ n\in Z$.
356. 1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; 2) $(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; 3) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n; n\in Z$; 4) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$. **357.** 1) $2\pi n,\ n\in Z$; 2) немає розв'язків; 3) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.
358. 1) $2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; 2) немає нулів; 3) $\frac{1}{\pi n},\ n\in Z,\ n\neq 0$; 4) $\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.
359. 1) $-\frac{13\pi}{6};-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{8};\ \frac{7\pi}{8};\frac{9\pi}{8};\frac{15\pi}{8};\frac{17\pi}{8};\frac{23\pi}{8};\frac{25\pi}{8};\ \frac{31\pi}{8};$ $\frac{33\pi}{8};\frac{39\pi}{8};\ \frac{41\pi}{8};\ \frac{47\pi}{8}$; 3) $\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}$. **360.** 1) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$; 2) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n; n\in Z$.
361. 1) $\approx 83{,}6°$; $\approx 96{,}4°$; 2) $60°$ і $30°$. **362.** 1) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{4S}{c^2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{4S}{c^2}$.
Вказівка: До прямокутного трикутника прикласти рівний до нього трикутник і скористатися теоремою синусів. 2) $2R\left(1+\arcsin\frac{r}{R-r}\right)$.
363. 1) У першій; 2) у четвертій; 3) у першій; 4) у другій. **364.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) -1. **365.** 1) $-\frac{5\pi}{12}+\pi n,\ n\in Z$; 2) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$; 3) $\frac{1}{2}\text{arctg}3+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; 4) $\text{arcctg}(3-\sqrt{2})+\pi n,\ n\in Z$; 5) $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$; 6) $\frac{\pi}{6}+\pi n, \frac{5\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; 7) $\frac{1}{3}\text{arcctg}(-0,3)+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$; 8) $\frac{2\pi}{15}+\pi n,\ n\in Z$; 9) $\text{arcctg}(-3)+\pi n,\ n\in Z$; 10) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $\text{arcctg}(-0,5)+\pi n,\ n\in Z$. **366.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; 2) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; 3) $-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. **367.** 1) $\frac{1}{3}+n,\ n\in Z$; 2) $1;\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n=0,1,2,\ldots$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n;\ -\frac{\pi}{4}-\pi n$, $n=0,1,2,\ldots$. **368.** 1) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; 2) $\pi+2\pi n,\ n\in Z$; 3) $\frac{2\pi}{3}+6\pi n,\ \frac{8\pi}{3}+6\pi n,\ n\in Z$.
369. 1) $50°$; 2) $120°$; 3) $\frac{\pi-2}{5}$. **370.** 1) $\frac{5\pi}{3};-\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};-\frac{4\pi}{3}$; 2) $-\frac{7\pi}{8};\ -\frac{3\pi}{8};\ \frac{\pi}{8};\frac{5\pi}{8};\frac{9\pi}{8}$; 3) $0;\ 2\pi;\ 4\pi;\ 6\pi$; 4) $-\frac{4\pi}{3};\ -\pi;-\frac{2\pi}{3};\ -\frac{\pi}{3};0;\frac{\pi}{3}$. **371.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $(-1)^{n+1}\arcsin 0,75++\pi n,\ n\in Z$; 3) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$; $\frac{\pi}{4}+2\text{arcctg}(-4)+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\text{arctg}5+\pi n,\ n\in Z$; 5) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$. **372.** 1) πn; $(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 2) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$; $\pi+2\pi n,\ n\in Z$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $\pi n,\ n\in Z$.

373. 1) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$; 3) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $-\text{arctg}4+\pi n$, $n\in Z$; 4) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\text{arctg}\ 2{,}5+\pi n$, $n\in Z$; 5) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; 6) $\text{arctg}(1\pm\sqrt{3})+\pi n, n\in Z$; 7) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $-\text{arctg}\ 2+\pi n$, $n\in Z$. **374.** 1) πn; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $n\in Z$; 2) πn; $\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$; 3) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; 4) $\frac{2\pi n}{3}$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $n\in Z$; 5) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$; 6) $2\pi n$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$; 7) $\pi n; n\in Z$; 8) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$. **375.** $\approx 126°$; $\approx 54°$.

376. 1) $2\text{arcctg}\frac{4S}{c^2}$, $\frac{\pi}{2}-\text{arcctg}\frac{4S}{c^2}$; 2) $\text{arctg}\frac{4S}{a^2-b^2}$, $\pi-\text{arctg}\frac{4S}{a^2-b^2}$.

377. 1) $\text{arctg}2\approx 63°26'$, $\text{arctg}2\approx 63°26', \pi-2\text{arctg}\approx 53°8'$; 2) $2\text{arctg}\frac{1}{5}\approx 48°11'$, $2\text{arctg}\frac{1}{5}\approx 48°11'$, $\pi-4\text{arctg}\frac{1}{5}\approx 83°38'$. **378.** $\approx 75{,}5°$; $\approx 75{,}5°$; $\approx 29°$. **379.** $\approx 24°30'$; $\approx 65°30'$. **380.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n\le x\le \pi+2\pi n, n\in Z$; 2) $\pi+2\pi n\le x\le\frac{3\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$;
3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n\le x\le\frac{3\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$; 4) $\pi+2\pi n\le x\le 2\pi(n+1), n\in Z$.

381. 1) $\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$; 2) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n\le x\le\frac{5\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$;
3) $-\frac{4\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$; 4) $\frac{7\pi}{6}+2\pi n\le x\le\frac{11\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$;
5) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n\le x\le\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$; 6) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$;
7) $\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$; 8) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n\le x\le\frac{4\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$;
9) $-\frac{\pi}{3}+\pi n\le x<\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; 10) $\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$;
11) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x\le\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; 12) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<-\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$;
13) $\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in Z$. 14) $\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\pi+\pi n, n\in Z$;
15) $\pi(2n-1)<x<2\pi n, n\in Z$.

382. 1) $\frac{\pi}{8}+\pi n<x<\frac{3\pi}{8}+\pi n, n\in Z$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\pi+2\pi n, n\in Z$;
3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\pi+2\pi n, n\in Z$; 4) $\frac{3\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi n}{2}, n\in Z$.

383. 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n\le x\le\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; 2) $\pi+2\pi n\le x\le 2\pi+2\pi n, n\in Z$;

3) $\pi n \le x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. **384.** 1) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le x \le \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \le x \le$ $\le \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; 3) $-\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; 4) $\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in Z$. **385.** $\frac{1}{2} + 6n \le t \le \frac{3}{2} + 6n$; $\frac{7}{2} + 6n \le t \le \frac{9}{2} + 6n$, $n = 0,1,2,\ldots$. **386.** 1) $0 < \alpha \le \frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Розділ 4

387. 1) A_1D_1, A_1B_1, AD, AB; 3) ***вказівка:*** використайте результат виконання завдання 2); 4) ***вказівка:*** всі ці прямі лежать у площині BDD_1, яка перпендикулярна до A_1C_1. **388.** 1) SO, AC; 2) перпендикулярні; 4) SON, де N – середина AB; 5) $3\sqrt{2}$ см². **389.** 1) $CS \perp CB, CS \perp CM, CS \perp CA, CM \perp AB$; 2) перпендикулярні; 5) $\frac{\sqrt{6}}{24}a^2$. **390.** 1) A_1C_1; 2) AA_1C_1; 3) BN, де N – середина CD; 6) ADC_1; 7) A_1C. **391.** 1) SO, де O – центр квадрата $ABCD$; 2) SKO; 3) висота з вершини M трикутника SMP, де P – середина ребра AB. **392.** ≈ 4,9 м. **393.** ***Вказівка:*** врахуйте взаємне розміщення даних точки і прямої. **394.** ***Вказівка:*** використайте те, що діагональний переріз куба є прямокутником. **396.** ***Вказівка:*** проведіть через прямі a і b площину і розгляньте її перетин з площиною α. **397.** ***Вказівка:*** застосуйте метод «від супротивного». **398.** ***Вказівка:*** з'ясуйте, чим є відрізок KE для трикутників KAB і KCD. **399.** ***Вказівка:*** для прямих, що лежать в одній площині, все зрозуміло. Якщо припустити, що прямі, що мають два спільних перпендикуляри, мимобіжні, то ці перпендикуляри є перпендикулярними і до паралельних площин, в яких лежать прямі, а тому вони паралельні між собою. **400.** ***Вказівка:*** використайте те, що вказані прямі паралельні між собою. **402.** ***Вказівки:*** 1) розгляньте переріз площиною, яка проходить через середини паралельних ребер; 2) розгляньте переріз площиною, яка проходить через діагоналі протилежних граней. **403.** 2) Перерізами є трикутники SAD та ACL, де D, L — середини відрізків BC і SB, а їх перетином є відрізок, що з'єднує точку A з точкою перетину відрізків SD і BK. **404.** ***Вказівка:*** проведіть через всі пари мимобіжних прямих паралельні площини. **405.** $2a + 2b$. **406.** ***Вказівка:*** проведіть з точки C перпендикуляри до BA. **407.** 1) SOC, де O — середина AB; 2) KL, де K, L — середини відрізків AS і AC; 3) ***вказівка:*** проведіть через точку A прямі, паралельні CS і CB; 4) ***вказівка:*** з точки C проведіть перпендикуляр до прямої SO. **408.** 1) MKO, де O – середина AC; 2) пряма, що проходить через середину AM паралельно MK; 3) ***вказівка:*** проведіть через точку A прямі, паралельні BC і KM; 4) BCL, де L — середина AM. **409.** 1) AOS; 2) пряма, паралельна SO; ***вказівки:*** 3) скористайтесь тим, що пряма SO перпендикулярна до площини ABC; 4) доведіть, що пряма BC перпендикулярна до площини ASO. **410.** 1) Проходить через центри вказаних граней; 2) AA_1C; ***вказівки:*** 3) скористайтесь тим, що пряма A_1C_1 перпендикулярна до площини BDD_1; 4) проведіть через точку D пряму, паралельну прямій AC. 411. 1) $SO \perp ABC$; 2) $BC \perp ASD$. 412. $\approx 21{,}5$ м. 413. $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$. 414. ***Вказівка:*** достатньо довести, що пряма a перпендикулярна до площини MPQ. 415. ***Вказівка:*** через точку D проведіть пряму, паралельну OM. 416. ***Вказівка:*** це пряма, перпендикулярна до ортогональної проекції прямої a на площину α. 417. $YA>YB$. 418. ***Вказівка:*** через кожну точку площини проходить пряма, перпендикулярна до даної прямої. 419. ***Вказівки:*** а) побудуйте два прямокутники на даному відрізку і знайдіть точки перетину їх діагоналей; б) побудуйте два рівнобедрених трикутники, основами яких є даний відрізок. 420. 10 дм. 421. 1) Перпендикулярні; 2) перпендикулярні; 3) площина проходить через середину відрізка AB; 4) площина проходить через перпендикуляр до ABC, проведений через середину AD. 422. 1) $SDB \perp ABC, SDB \perp ABK$; 4) $\frac{1}{4}a^2$. 423. 1) Перпендикулярні; 2) перпендикулярні; 5) перпендикулярні; 6) $\frac{\sqrt{5}}{2}a^2$. 424. ***Вказівки:*** 1) скористайтеся тим, що медіана у правильному трикутнику є висотою; 2) скористайтесь завданням 1); 3) врахуйте те, що $BD \perp AMC$; 4) $\frac{4}{3}$ см; 5) навпіл. 425. 1) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см; 2) ***вказівка:*** використайте те, що зазначена площина єдина. 426. $\frac{1}{5}\sqrt{337}$ см. 427. ***Вказівка:*** розгляньте випадки, коли площини паралельні і коли перетинаються. 428. ***Вказівка:*** вкажіть ребро однієї грані, перпендикулярне до другої грані. 429. ***Вказівка:*** скористайтесь означенням перпендикулярності площин і однозначністю перпендикуляра з точки до площини. 430. ***Вказівка:*** скористайтесь тим, що площину, перпендикулярну до іншої площини, можна вважати «зітканою» з перпендикулярних прямих до іншої площини. 431. ***Вказівка:*** доведіть, що, наприклад, $BB_1 \perp \alpha$, і тоді $BB_1 \perp BX$. 432. ***Вказівка:*** розгляньте спочатку дві вказані площини і встановіть властивості їхньої лінії перетину. 433. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}b$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{6}b, \frac{\sqrt{3}}{3}b, \frac{\sqrt{3}}{2}b$. 434. 40 см. 435. 21 см, 28 см. 436. 1) $\sqrt{41}$ см; 2) 12 см. 437. 1) 13 см; 2) 4 см. 438. 1) $\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{4}}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}ab$. 439. ***Вказівка:*** спробуйте реалізувати конструкцію на прямокутному паралелепіпеді. 442. 130 см. 443. 8 см. 444. 10 см, 35 см. 445. 6 см. 446. Або $\sqrt{674}$ см, або $25+\sqrt{399}$ см, або $25-\sqrt{399}$ см. 447. $3\sqrt{5}$ см, $\arcsin\frac{2}{3}$. 448. 12 см, $3\sqrt{41}$ см, 20 см. 449. $2\sqrt{2}$ см. 450. 45°. 451. 36 см. 452. $\sqrt{15}$ см. 453. ***Вказівка:*** в усіх випадках йдеться про побудову похилої MK, перпендикулярної до прямої AB. Для цього доцільно спочатку побудувати проекцію похилої MK, перпендикулярну до AB, а потім скористатися теоремою про три перпендикуляри. 454. 12 см, $\sqrt{178}$ см, $\sqrt{185}$ см. 455. ***Вказівка:*** скористайтесь тим, що похилі, проведені з точок перпендикуляра до вершин прямокутника, своїми проекціями мають половини діагоналей. **456.** ***Вказівка:*** з'ясуйте, який вид має трикутник ABC. **457.** $\frac{1}{4}\sqrt{3a^2+\frac{1}{4}d^2}$. **458.** $\frac{a}{4}$, $\frac{\sqrt{5}}{4}a$, $\frac{\sqrt{29}}{4}a$, $\frac{7}{4}a$. **459.** Так. **460.** $3\sqrt{41}$ см. **461.** 1) ≈ 75 м; 2) $\approx 27°$; 3) ≈ 34 м. **462.** 1) 2 см; 2) $\frac{4}{3}\sqrt{11}$ см; 3) $\frac{2}{3}\sqrt{11}$ см. **463.** 1) $2\sqrt{2}$ см; 2) $\sqrt{2}$ см; 3) $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ см. **464.** 1) $4\sqrt{2}$ см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) $2\sqrt{13}$ см. **465.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; 2) a; 3) a; 4) $\sqrt{1,5}a$; 5) a; 6) a; 7) $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. **466.** 1) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; 3) $\frac{a}{2\sqrt{2}}$; 4) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$; 5) $\frac{a}{2}$. **467.** 2,5 см або 1,5 см. **468.** 10 см. **469.** 1) $\sqrt{78}$ см; 2) $\sqrt{78}$ см або $3\sqrt{6}$ см. **470.** ***Вказівка:*** порівняйте вирази похилих через перпендикуляри і проекції. **471.** ***Вказівка:*** скористайтесь теоремою про три перпендикуляри. **472.** ***Вказівка:*** слід розглянути трапеції, побудовані на перпендикулярах, проведених з протилежних вершин прямокутника до поверхні Землі. Вони мають спільну середню лінію. Оскільки порядок наступності вершин у задачі не обумовлено, то може бути три варіанти відповіді: 1; 3; 5 м. **473.** $\sqrt{37}$ см. **474.** 5 см або 4 см (останній випадок може мати місце, коли точка ортогонально проектується за межі кута, і коли відстань від вершин сторін кута дорівнює відстані від його вершини). **475.** $\frac{\sqrt{2}}{4}a$. **476.** ***Вказівка:*** розгляньте трикутники ACB і BDC. **477.** 82°. **478.** 72° і 108° або $\frac{540}{7}°$ і $\frac{720}{7}°$. **479.** ≈ 1848 м. **480.** 1) $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{15}}$; 3) $ABD \perp SKC$; 4) 30°; 5) $\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{57}}$. **481.** 1) 60°; 2) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $ABS \perp BDC$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; 5) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. **482.** 1) 30°; 2) 60°. **483.** 1) 60° і 30°; 2) рівні; 3) $4\sqrt{6}$. **484.** 1) $\approx 55°$; 2) рівні; 3) $\approx 19°$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}a$. **485.** 1) 30°; 4) $8\sqrt{2+\sqrt{3}}$ см; 5) $4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ см. **486.** 1) 30°; 4) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ см; 5) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ см. **487.** 2) Рівні; 3) 90°. **488.** 3) Рівні. **489.** 1) 45°, $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}$; 3) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$. **490.** 1) ≈ 1 м; 2) 30°. **491.** ≈ 900 м. **493.** 1) $8\sqrt{2}$ см; 2) 16 см; 3) $\frac{16}{\sqrt{3}}$ см. **494.** 30°. **495.** $\approx 1,8$ м. **496.** ***Вказівка:*** нехай $O = a \cap \alpha$. Відкладіть на трьох даних прямих площини α відрізки $OA = OB = OC$. Тоді точки прямої a рівновіддалені від вершин трикутника ABC. **497.** 1) $a\cos\frac{\alpha}{2}$, $a\sin\alpha$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, $\arccos\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{b^2+a^2}}$; 3) $\arcsin\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{b^2+a^2}}$; 4) α; $\pi-2\operatorname{arctg}\frac{b\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{b^2+4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$; $\operatorname{arctg}\frac{a\sin\alpha}{b}$.

Предметний покажчик

Аксіоми стереометрії 131
Амплітуда гармонічного
коливання 287
Арифметичний квадратний корінь 15
– корінь n-го степеня 85
Арккосинус 325
Арккотангенс 332
Арксинус 320
Арктангенс 330
Асимптота вертикальна 77

Бічна грань піраміди 134

Вершина паралелепіпеда 134
– піраміди 134
– тетраедра 134
Відсоток 36
Відстань між фігурами 426

Гармонічні коливання 286
Гіпербола 55
Головна властивість кореня 91
Грань двогранного кута 446
– многогранника 133
– паралелепіпеда 134
– тетраедра 134
Графік гармонічного коливання 287
– косинуса 275
– котангенса 282
– синуса 275
– тангенса 281
– функції 53
Графічний спосіб задання функції 47

Двогранний кут 446
Дроби нескінченні десяткові 19
– періодичні 19

Еліпс 167

Значення функції в точці 46
Зображення фігури 180

Квадратична функція 46
Квадратний корінь 85
Координатна пряма 23
Корінь n-го степеня 85
Косинус 241
Котангенс 241
Кругова частота гармонічного коливання 287
Куб 133
Кубічний корінь 86
Куля 135
Кути з однаково напрямленими
сторонами 445
Кут між площинами 441
– – прямими 438
– – прямою і площиною 438
Кут обертання 228
Кутовий коефіцієнт прямої 53

Лінійна функція 46
Лінійний кут двогранного кута 447
Лінія котангенса 244
– тангенса 244

Математична модель 8
Мимобіжні прямі146
Множина значень функції 46
Модуль числа25

Напрям проектування 161

Обернена пропорційність 46
Область визначення функції 46
Окіл точки 26

Округлення чисел 33
Ортогональне проектування 406
Основа перпендикуляра 414
Основна властивість дійсних чисел 24
– тригонометрична тотожність 251
Осьова симетрія 369

Парабола 54
Паралелепіпед 134
– прямокутний134
Паралельна проекція точки на площину 161
– – фігури на площину162
Паралельне перенесення графіка функції 57
Паралельне проектування 161
Паралельні площини 206
– пряма і площина 194
– прямі 146
Переріз 139
Перетворення графіків функцій 57
Період функції 266
– – основний 270
Перпендикуляр до площини 363
Перпендикулярність площин 393
– прямих 362
– прямої і площини 363
Піраміда 134
– n-кутна 135
– правильна 135
Площина проекцій 161
– січна 139
Поворот навколо прямої 366
Показник кореня 89
Похила до площини 414
Початкова фаза гармонічного коливання 287
Природна область визначення функції 46
Проектуючі площини 162
– прямі 161
Проекція похилої 414

Радіан 229
Ребро двогранного кута 446
– многогранника 133
– паралелепіпеда 134
– піраміди 134
– тетраедра 134
Рівняння однорідне тригонометричне 334
Розтяг графіка функції 59

Симетрія відносно площини 409
– осьова 369
– просторової фігури 409
Синус 241
Синусоїда 275
Слід площини 191
Степінь з натуральним показником 15
– – раціональним показником 97
– – цілим від'ємним показником 15
Стиск графіка функції 59
Суміжні грані паралелепіпеда 134

Табличний спосіб задання функції 49
Тангенс 241
Тангенсоїда 281
Теорема косинусів 224
– синусів 224
Тетраедр 134
– правильний 134
Точка розриву функції 75
Тригонометричне коло 234

Формули додавання 298
– зведення 256
– подвійного кута 302
– половинного аргументу 303
– універсальної підстановки 305
Функціональна залежність 45
Функція 45
– зростаюча 67
– квадратична 46
– лінійна 46
– монотонна 67
– непарна 71
– неперервна 74
– парна 71
– періодична 266
– спадна 66
– степенева 82
– тригонометрична 241

Числа дійсні 23
– ірраціональні 22
– натуральні 18
– раціональні 19
– цілі 18

Зміст

Звернення до читача 3
Вступ 5

РОЗДІЛ 1. Функції, їхні властивості та графіки 11

§1. Числові множини 18
§2. Обчислення і розрахунки 31
§3. Функціональні залежності 45
§4. Основні властивості функцій 66
§5. Корені n-го степеня 82
§6. Степеневі функції з раціональними показниками 97

РОЗДІЛ 2. Паралельність прямих і площин 117

§ 7. Основні поняття й аксіоми стереометрії 127
§8. Взаємне розміщення двох прямих у просторі 145
§9. Паралельне проектування 160
§10. Зображення фігур у стереометрії 179
§11. Паралельність прямих і площин 193
§12. Паралельність площин 205

РОЗДІЛ 3. Тригонометричні функції 221

§13. Тригонометричні функції числового аргументу 227
§14. Основні співвідношення між тригонометричними функціями 251
§15. Властивості і графіки тригонометричних функцій 266
§16. Тригонометричні формули додавання та наслідки з них 298
§17. Найпростіші тригонометричні рівняння і нерівності 317

РОЗДІЛ 4. Перпендикулярність прямих і площин 357

§18. Перпендикулярність прямої і площини 362
§19. Зв'язок між паралельністю і перпендикулярністю прямих і площин 378
§20. Перпендикулярність площин 392
§21. Ортогональне проектування 406
§22. Перпендикуляр і похила 414
§23. Вимірювання відстаней у просторі 425
§24. Вимірювання кутів у просторі 437
Відповіді і вказівки до задач 460
Предметний покажчик 477