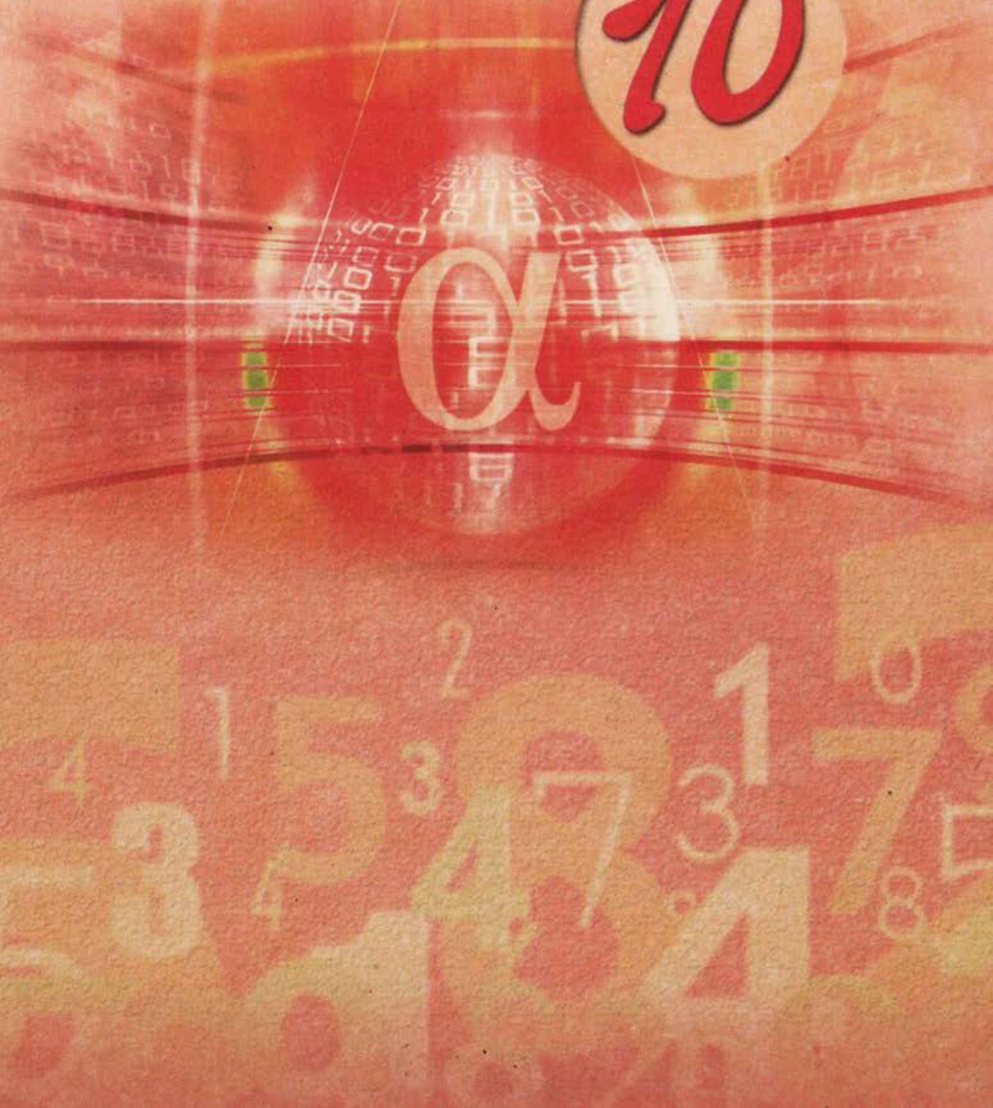
Г.П. БЕВЗ, В.Г. БЕВЗ

МАТЕМАТИКА

Рівень стандарту

10



ББК 22.1я721
Б36

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ № 177 від 03.03.2010 р.)

Наукову експертизу провів Інститут математики Національної академії наук України.

Психолого-педагогічну експертизу провів Інститут педагогіки Національної академії педагогічних наук України.

Експерти, які здійснювали експертизу:

Вдовенко В.В. – кандидат пед. наук, доцент Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка;
Калашник О.А. – завідуюча районним методкабінетом відділу освіти Добровеличківської РДА, Кіровоградська обл.;
Каліберда К.В. – методист методкабінету відділу освіти Іванківської РДА, Херсонська обл.;
Дорошенко Т.М. – старший учитель Смілянської загальноосвітньої школи I–III ст. № 7, Черкаська обл.

Бевз, Г.П.
Б36 Математика : 10 : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : рівень стандарту / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – 2-ге вид. – К. : Генеза, 2011. – 272 с. : іл. – Бібліогр. : с. 250.
ISBN 978-966-11-0004-5.

ББК 22.1я721

ISBN 978-966-11-0004-5

Передмова

Науку математику можна розглядати з різних точок зору. Одні бачать у ній насамперед своєрідний інструмент для науковців, інженерів і техніків. Бо за допомогою математичного моделювання можна порівняно легко і швидко розв'язувати дуже важливі прикладні проблеми, які іншими методами розв'язувати надто дорого або неможливо. Ось що говорили про математику відомі люди:

«У вивчення природи математика робить найбільший внесок» (Прокл, V ст.).

«Той, хто не знає математики... не може пізнати світ» (Р. Бекон, XIII ст.).

«Люди, які засвоїли великі принципи математики, мають на один орган чуття більше, ніж прості смертні» (Ч. Дарвін, XIX ст.).

Математика не тільки корисний інструмент чи засіб, а й значна частина загальнолюдської культури. Якщо історик описує тільки війни і революції, діяльність царів, полководців і митців, його історія неповна, однобічна. Homo sapiens – людина мисляча. Тому історія людства передусім має містити описи діяльності кращих мислителів, зокрема й математиків. Чи відоме вам найбільше відкриття XVII ст.? Воно стосується математики. А чи може історик обминати найважливіші відкриття? Які найістотніші зміни відбулися в другій половині XX ст.? Створення швидкодіючих електронних обчислювальних машин (ЕОМ), а на їх основі – комп'ютерів. Комп'ютеризація науки і виробництва безперечно вносить у розвиток людства зміни набагато важливіші й вагоміші, ніж зміни урядів, локальні війни і будь-що інше. Щоб правильно описати цю епоху, історик має сказати про створення ЕОМ і комп'ютерів, а для цього він повинен хоч трохи знати історію математики.

Дехто з учнів говорить: «Мені не потрібна математика, бо я не збираюся бути математиком». Подібна аргументація анітрохи не краща такої: «Мені не потрібен автомобіль, бо я не збираюся бути шофером».

Математика – це своєрідна мова, засіб спілкування. Чи ж може філолог ефективно досліджувати різні мови, не маючи уявлення про сучасну математичну мову та її історію?

Математика – основа багатьох наук, починаючи від філософії й аж до космогонії. А ще вона – логічний тренінг мислительної діяльності для фахівців з будь-якої галузі знань. Не випадково багато математиків добре виявили себе і в інших галузях. Наприклад, Піфагор, Р. Декарт, Б. Паскаль – філософи, О. Хайям – поет, П. Ферма – юрист, І. Кеплер – богослов, Г. Лейбніц –

магістр філософії, доктор права, юрист, дипломат. Цей список можна продовжувати.

Справжній математик має не тільки на один «орган чуття» більше від звичайної людини, він має також значно більше «ступенів свободи». З тривимірного простору йому зовсім не важко перейти в чотиривимірний чи в будь-який n-вимірний або в простір Банаха, Гільберта, Клейна тощо. А кожний із цих просторів – дивний своєрідний світ, багатший і корисніший від світів, вигаданих фантастами. Математика та її історія настільки багаті, що справжній філософ, історик, будь-який гуманітарій у них може знайти чимало цікавого й корисного.

У цьому підручнику пропонується інтегрований курс математики. До нього входять найважливіші теми з арифметики, алгебри, початків аналізу та з геометрії.

Окремі теми ви вже знаєте з попередніх класів, а більшість – зовсім нові. Намагайтеся опанувати їх. Читаючи теорію, основну увагу звертайте на слова, надруковані курсивом і жирним шрифтом. *Курсивом* виділено терміни, назви понять. **Жирним шрифтом** надруковано важливі твердження, теореми.

Знати математику – це насамперед уміти користуватися нею. Учитися користуватися математичними знаннями найкраще під час розв'язування задач. У підручнику є задачі до кожної теми, до кожного параграфа – різних рівнів складності. Задачі і вправи в підручнику поділено на: «Виконайте усно», рівень А, рівень Б і «Вправи для повторення». Завдання, рекомендовані для домашньої роботи, виділено кольором. У кожному параграфі підручника є рубрика «Виконаємо разом», у якій подано задачі з розв'язаннями. Радимо переглянути їх, перш ніж виконувати домашнє завдання.

Цікаві доповнення до основного матеріалу містяться в рубриках «Історичні відомості».

Для узагальнення і систематизації вивченого матеріалу призначено рубрики «Головне в розділі» і «Самостійна робота».

У додатках для тих, хто хоче дізнатися більше, пропонуються теми для робіт творчого характеру і список відповідної літератури.

Математику можна порівняти з великим і барвистим квітником, у якому кожен може дібрати собі букет за смаком. Зрозуміло, щоб зробити це, спершу треба ввійти в цей квітник.

Ласкаво просимо!

Автори

Алгебра і початки аналізу

Математика — це гімнастика розуму і підготовка до філософії.

Ісократ (IV ст. до н. е.)

Числа, функції, рівняння

1

ТЕМИ РОЗДІЛУ:

- дійсні числа та обчислення;
- відсоткові розрахунки;
- числові функції, їх властивості та графіки;
- корінь n-го степеня;
- степені з раціональними показниками, їх властивості;
- степеневі функції, їх властивості та графіки;
- ірраціональні рівняння та нерівності

§ 1. Дійсні числа

Важливу роль у математиці відіграють числа. Найпростіші з них – *натуральні числа* 1, 2, 3, 4, 5, ..., які використовують під час лічби. Вони були відомі ще в доісторичні часи. Зрозуміло, що називали і записували їх раніше не так, як тепер.

Не слід ототожнювати числа із цифрами. Цифри – це значки, якими позначають числа. Натуральних чисел існує безліч, а цифр – тільки десять: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Такі цифри називають арабськими або індійськими. Іноді числа позначають також римськими цифрами I, V, X, L, C, D, M, які відповідають числам 1, 5, 10, 50, 100, 500 і 1000. Наприклад, число 1998 римськими цифрами записується так: MCMXCVIII. Якщо тисяч багато, їх відокремлюють від одиниць літерою *m*. Запис XXVII*m*CCLXXXIV означає число 27 284.

Існують спеціальні позначення чисел в азбуці Морзе. А в рельєфно-точковому шрифті Брайля цифри позначають різними конфігураціями точок (мал. 1).

Згадаємо, як називають і позначають великі числа:

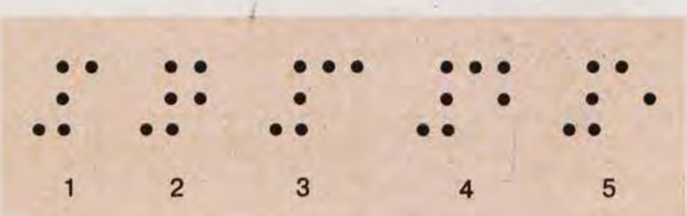
мільярд – $1\,000\,000\,000 = 10^9$;

трильйон – $1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$;

квадрильйон – $1\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{15}$;

квінтильйон – $1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{18}$.

У різних країнах великі числа називають по-різному. Наприклад, трильйоном у США, Франції називають число 10^{12}, а в Англії, Німеччині 10^{18}. Ми словами «мільярд» і «більйон» називаємо одне й те саме число 10^9, а в Німеччині більйоном прийнято називати число 10^{12}. Варто звернути увагу також на те, що ми число 0 не вважаємо натуральним, а в Італії, Франції та деяких інших країнах 0 відносять до натуральних чисел.



Мал. 1

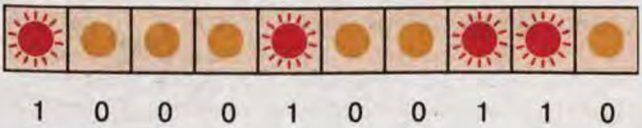
Системи числення	
двійкова	десяткова
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11

Десятьма різними цифрами записують числа у *десятковій системі*, у якій рахують одиницями, десятками, сотнями та іншими степенями числа 10. Існують також недесяткові системи числення. Найпростіша з них – *двійкова*, у якій рахують одиницями, двійками, четвірками та іншими степенями числа 2. Для позначення чисел у двійковій системі досить двох цифр: 0 і 1. Наприклад, записане в десятковій системі число 137 (або $1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 7$) можна подати у вигляді суми $1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^3 + 1$. Тому в двійковій системі його записують так: 10001001.

Навчившись записувати натуральні числа за допомогою лише двох цифр 0 і 1, учені одержали можливість позначати їх електричним струмом: цифра 0 – струм не проходить, 1 – проходить. Уявіть, наприклад, блок з десяти лампочок. Якщо в ньому увімкнено тільки першу, п'яту, восьму і дев'яту лампочки (мал. 2), то вважають, що позначено число 1000100110. Переключати такі блоки, тобто «записувати і витирати» числа, а отже, додавати і віднімати їх, можна за тисячні частки секунди. Удосконалюючи такі «суматори», фахівці створили швидкодіючі електронні обчислювальні машини. Об'єднавши ЕОМ з телевізорами, створили комп'ютери. В основі цього – запис числа тільки двома цифрами!

Крім натуральних, відомі також числа цілі, раціональні, дійсні та інші. Множина *цілих чисел* містить усі натуральні числа, усі протилежні їм числа і 0, тобто це числа

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots .$$



Мал. 2

Цілі числа разом з дробовими утворюють множину *раціональних чисел*. Раціональним називають кожне число, яке можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m – число ціле, а n – натуральне. Кожне раціональне число можна записати у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу.

Існують числа, відмінні від раціональних. Наприклад, обчислюючи значення $\sqrt{2}, \sqrt{10}, \pi$, дістають нескінченні неперіодичні десяткові дроби:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135..., \quad \sqrt{10} = 3{,}1622776..., \quad \pi = 3{,}1415926....$$

Ці числа – не раціональні.

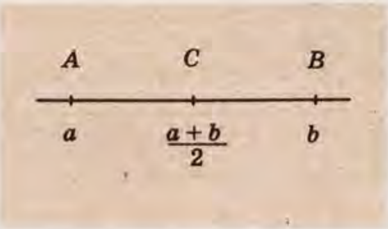
Числа, які зображаються нескінченними неперіодичними десятковими дробами, називають ***ірраціональними***. Ірраціональний – значить не раціональний (лат. *ir* відповідає заперечувальній частці *не*).

Ірраціональними називають числа, які не можна виразити у вигляді відношення двох цілих чисел. Усі раціональні й ірраціональні числа разом називають *дійсними числами*. Кожному дійсному числу на координатній прямій відповідає єдина точка і кожній точці координатної прямої – єдине дійсне число.

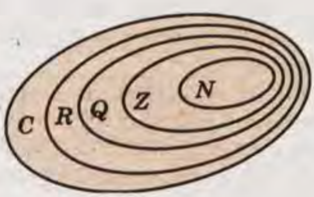
Уявіть, що на координатній прямій позначено дві довільні точки A і B з раціональними координатами a і b (мал. 3). Скільки на відрізку AB існує точок з раціональними координатами? Безліч. А точок з ірраціональними координатами? Значно більше, ніж з раціональними!

Множини натуральних, цілих, раціональних, дійсних і *комплексних чисел* позначають відповідно літерами N, Z, Q, R, C. Кожна із цих множин нескінченна і є підмножиною (частиною) наступної множини (мал. 4). Тому будь-яке натуральне число можна вважати водночас і цілим, і раціональним, і дійсним, і навіть комплексним (про комплексні числа читайте на с. 78).

Множину R дійсних чисел також називають числовою прямою, а її елементи (числа) – точками числової прямої.



Мал. 3



Мал. 4

ПІФАГОР САМОСЬКИЙ
(бл. 580–500 рр. до н. е.)

Давньогрецький математик, філософ. Організував свою школу (піфагорейський союз), яка була водночас і релігійним братством, і політичною партією. Досліджував проблеми теорії чисел, геометрії, гармонії, астрономії. Вважав, що все визначають числа. Досліджував різні види чисел: парні, трикутні, квадратні, досконалі, дружні тощо. Виявив, що сторона квадрата і його діагональ не мають спільної міри.

Дійсні числа можна порівнювати.

З двох додатних дійсних чисел більше те, у якого ціла частина більша. Якщо цілі частини рівні, більшим вважається те число, у якого перший з неоднакових десяткових знаків більший, а всі попередні однакові.

П р и к л а д и. $1{,}4148\ldots > 1{,}4139\ldots$;
$-1{,}4162\ldots < -1{,}4139\ldots$;
$-0{,}0674\ldots < 0{,}00176\ldots$.

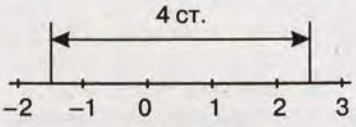
Розглянемо деякі в л а с т и в о с т і м н о ж и н и дійсних чисел. Множина дійсних чисел R нескінченна, не містить ні найменшого, ні найбільшого числа. Множини N, Z і Q є її підмножинами. Як і множина Q, множина дійсних чисел скрізь *щільна*, тобто для будь-яких двох різних дійсних чисел завжди можна назвати таке третє дійсне число, яке більше за одне з даних, але менше за друге. Це випливає з того, що коли $a < b$, то

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Як позначають натуральні числа? Наведіть приклади.
2. Наведіть приклад недесяткової системи числення.
3. Які ви знаєте назви для великих чисел? Запишіть кілька великих чисел та назвіть їх.
4. Назвіть найменше натуральне число. Чи існує найбільше натуральне число?
5. Які числа називають цілими? Як позначається множина цілих чисел?
6. Як називаються цілі додатні числа?
7. Назвіть ціле число, яке більше від найбільшого цілого від'ємного числа, але менше від найменшого додатного цілого числа.
8. Сформулюйте означення раціонального числа. Як позначається множина раціональних чисел?

Виконаємо разом



Мал. 5

1. Одна подія сталася в середині 3 ст. н. е., а друга – в середині 2 ст. до н. е. Скільки часу пройшло між цими двома подіями?

• Розв'язання. $1{,}5 + 2{,}5 = 4$ ст. (мал. 5).

Відповідь. 4 століття.

Зауваження. На традиційній осі часу відсутні нульовий вік і нульовий рік, тому вона відрізняється від математичної числової осі. І якщо одна подія відбулася в m-му році до н. е., а друга – в n-му році н. е., то між цими подіями пройшло не $m + n$, а $m + n - 1$ років.

2. Доведіть, що між будь-якими двома раціональними числами a і b на числовій прямій існує безліч раціональних чисел.

• Розв'язання. Нехай $a < b$. Тоді $2a < a + b$ і $a + b < 2b$, звідси $a < \frac{a+b}{2} < b$. Якщо a і b раціональні, то число $\frac{a+b}{2}$ також раціональне. Позначивши його літерою m, так само переконуємося, що число $\frac{a+m}{2}$ також раціональне і т. д.

3. Подайте у вигляді десяткового дробу: а) $\frac{9}{8}$; б) $\frac{4}{11}$; в) $\frac{7}{6}$.

• Розв'язання. Щоб перетворити звичайний дріб у десятковий, потрібно чисельник даного дробу поділити на його знаменник. Маємо:

а) $\frac{9}{8} = 1{,}125$; б) $\frac{4}{11} = 0{,}363636...$; в) $\frac{7}{6} = 1{,}1666...$.

Відповідь. а) 1,125; б) 0, 363636...; в) 1,1666... .

4. Більше чи менше від мільярда число 2^{30}?

• Розв'язання. $2^{30} = (2^{10})^3 = 1024^3 > 1000^3$.

Відповідь. Число 2^{30} більше від мільярда.

Виконайте усно

1. Які із чисел 35, –128, $\sqrt{25}$, $\sqrt{10}$, $-\sqrt{0{,}04}$ – раціональні, які – ірраціональні, які – дійсні?

2. Яке з тверджень правильне:

а) кожне натуральне число є дійсним;
б) кожне ціле число є дійсним;
в) кожне раціональне число є дійсним;
г) кожне ірраціональне число є дійсним;
ґ) не кожне дійсне число є раціональним;
д) не кожне дійсне число є ірраціональним?

3. Укажіть правильні твердження:

а) 2π – число дійсне; б) $-\pi$ – число ірраціональне;
в) $1 + \pi$ – число ірраціональне; г) $\pi : 2\pi$ – число раціональне.

4. Чи правильні схеми на малюнках 6 і 7?

Мал. 6

Мал. 7

5. Які із записів правильні?

а) $-3 \in N$; б) $0 \in R$; в) $0{,}5 \in Z$; г) $\sqrt{80} \in N$;
ґ) $-7 \in Q$; д) $\sqrt{5} \in R$; е) $\sqrt{0{,}4} \in Z$; є) $0{,}333 \in Q$.

6. Чи правильні твердження:

а) будь-яке натуральне число є раціональним;
б) будь-яке натуральне число є дійсним;
в) будь-яке ціле число є натуральним;
г) будь-яке раціональне число є цілим;
ґ) будь-яке ірраціональне число є дійсним?

7. Для будь-яких дійсних чисел a, b, c правильні рівності

$$a + b = b + a,\ a + (b + c) = (a + b) + c,\ ab = ba,\ a(bc) = (ab)c,$$
$$(a + b)c = ac + bc.$$

Які закони дій виражають ці рівності?

8. На скільки число 3 більше від -2? А від 2?

9. Назвіть кілька раціональних чисел. Чи є раціональними числа 5; -3; $\sqrt{49}$; 0; 2,01?

10. Назвіть кілька дійсних чисел, які не є раціональними. Як називаються такі числа?

А

11. Запишіть число, яке має 38 мільярдів, 7 тисяч і 5 одиниць.

12. Скільки хвилин пройшло від початку нашої ери до сьогодні?

13. Серце здорової людини робить у середньому 70 скорочень за хвилину. Скільки разів воно скорочується протягом 70 років?

14. Обчисліть:

а) $432 \cdot (567 - 202) + 1001 : 13 + 28$;

б) $(43 \cdot 19 - 26\,928 : 33) \cdot (16\,112 : 53 - 304)$.

15. Знайдіть суму всіх натуральних чисел, менших від 100.

16. Розгляньте рівності. Чи правильні вони? Які закономірності ви помітили? Спробуйте продовжити записи.

а) $1 + 9 \cdot 0 = 1$,
$2 + 9 \cdot 1 = 11$,
$3 + 9 \cdot 12 = 111$;

б) $1 + 8 \cdot 1 = 9$,
$2 + 8 \cdot 12 = 98$,
$3 + 8 \cdot 123 = 987$.

17. Запишіть римськими цифрами число:

а) 47; б) 109; в) 1999; г) 2009.

18. Подайте у вигляді звичайного дробу числа:

а) 0,25; б) 1,3; в) 0,333; г) 7; ґ) $5\frac{2}{3}$.

19. Подайте у вигляді десяткового дробу числа:

а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{99}{25}$; г) $\frac{5}{8}$; ґ) $\frac{65}{128}$.

20. Подайте у вигляді нескінченного десяткового дробу числа:

а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{77}{15}$; в) $\frac{21}{75}$; г) $\frac{5}{9}$; ґ) $\frac{1}{10}$.

21. Порівняйте числа:

а) $\frac{5}{6}$ і $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{4}$ і $\frac{2}{7}$; в) $-\frac{4}{9}$ і $-\frac{7}{11}$; г) $-\frac{5}{9}$ і $-\frac{7}{13}$.

22. Яке з чисел менше:

а) 0,41 чи $\frac{4}{7}$; б) $-\frac{3}{17}$ чи $-0,175$; в) $\frac{13}{11}$ чи 1,188;

г) $-0,55$ чи $-\frac{5}{9}$; ґ) $1\frac{3}{8}$ чи 1,375; д) $\frac{11}{12}$ чи 0,9090...?

23. Яке з чисел більше:

а) $\sqrt{3}$ чи 1,75; б) $\sqrt{1}$ чи 1; в) $-\sqrt{3}$ чи $-1,732$;

г) 2π чи 6,28; ґ) π чи $\sqrt{9}$; д) $-\pi$ чи $-3,1$?

24. З поданих нижче чисел випишіть: а) цілі; б) ірраціональні.

$$0{,}5;\ \frac{3}{4};\ \sqrt{-4};\ -32;\ \sqrt{3};\ 7;\ -\sqrt{49};\ \frac{12}{3};\ 0;\ 7\frac{1}{2};\ \sqrt{\frac{25}{4}};\ -1{,}111.$$

25. Які із чисел $-3;\ 5;\ -\sqrt{39};\ 6;\ 1{,}010010001...;\ \frac{2}{3};\ \sqrt{7};\ -\sqrt{1024};$ $\sqrt{15}$ раціональні?

26. Чи є серед чисел $-9;\ 1{,}21;\ 1;\ -2{,}5\sqrt{100};\ 3;\ 0;\ \sqrt{1000};\ 0{,}41$:
а) натуральні; б) дійсні?

Б

27. Числа 10 111, 1 101 110, 10 000 000 записано у двійковій системі. Запишіть їх у десятковій системі числення.

28. Спробуйте знайти суму й різницю чисел 1 011 101 і 110 100, записаних у двійковій системі числення.

29. Уявіть, що якась жінка *М* на початку нашої ери народила двох дочок, кожна з яких до 33 років народила також не менше двох дочок, а кожна з них – також не менше двох дочок і т. д. Скільки нащадків жінки *М* жило б за таких умов у наші дні? Чи могло б таке бути?

30. Задумайте будь-яке трицифрове число. Допишіть до нього таке саме, щоб утворилося шестицифрове число. Поділіть це шестицифрове число на 13, знайдену частку – на 11, а нову частку – на задумане трицифрове число. Я знаю, яке число ви одержали в результаті. На основі чого я безпомилково можу вгадати результат?

31. Поет Віргілій народився в 70 р. до н. е. У якому році треба було відзначати 2000-річчя з дня його народження?

32. За візантійською хронологією від створення світу до Різдва Христового пройшло 5508 років. У літописі зазначається, що якась подія відбулася 7168 року. Про який рік ідеться?

33. Видатний український математик Михайло Пилипович Кравчук народився 27 вересня 1892 року, а помер 9 березня 1942 року. Скільки років прожив наш співвітчизник? Скільки часу пройшло від дня його народження дотепер?

34. З'ясуйте роки життя видатних українських математиків М.В. Остроградського, В.Я. Буняковського, Г.Ф. Вороного і за цими даними складіть і розв'яжіть задачі.

35. Яке з наведених чисел $\sqrt{16};\ \sqrt{17{,}64};\ 4\sqrt{3};\ 3\sqrt{4};\ \sqrt{\frac{7}{9}};\ \sqrt{2\frac{8}{9}};$ $5-\sqrt{2};\ -0{,}30033000333...;\ -\pi;\ 2\pi$ є ірраціональним?

36. Один учень говорить, що число $\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\sqrt{2}$ ірраціональне, а другий, що раціональне. Хто з них має рацію?

37. Чи правильно, що сума двох раціональних чисел є число раціональне? А чи завжди сума двох ірраціональних чисел є число ірраціональне?

38. Чи правильно, що сума, різниця, добуток і частка двох дійсних чисел – числа дійсні?

39. Чи може бути раціональним числом:

а) сума ірраціональних чисел;
б) різниця ірраціональних чисел;
в) добуток ірраціональних чисел;
г) степінь ірраціонального числа;
ґ) частка двох ірраціональних чисел?

Відповідь обґрунтуйте.

Вправи для повторення

40. Знайдіть значення виразу:

а) $\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}+0,8\right)\cdot\left(-3+5\frac{8}{25}-0,12\right)$;

б) $\left(-2\frac{3}{4}-0,15-1\frac{8}{25}\right):\left(-1\frac{3}{4}+2\frac{1}{2}+0,05\right)$.

41. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2-7x+6=0$; б) $x^2-4x-21=0$.

42. Спростіть вираз:

а) $(x-5)(2x+3)+7x$; б) $(3a-2)(a+4)-3a^2$.

§ 2. Обчислення

Як ви вже знаєте, числа можна записувати в різних видах. Відповідно й обчислення можна здійснювати по-різному. Якщо дані числа раціональні, то дії над ними можна виконувати в звичайних або десяткових дробах – усно, письмово чи за допомогою калькуляторів. Якщо серед даних чисел є й ірраціональні, то обчислення можна вести у вигляді перетворень ірраціональних виразів або за допомогою десяткових наближень.

Для додавання і множення дійсних чисел a, b, c справджуються такі закони:

$a+b=b+a$ – переставний закон додавання;
$(a+b)+c=a+(b+c)$ – сполучний закон додавання;
$a\cdot b=b\cdot a$ – переставний закон множення;
$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ – сполучний закон множення;
$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ – розподільний закон множення.

Віднімання означується як дія, обернена додаванню, ділення – як дія, обернена множенню.

У множині раціональних чисел Q завжди виконуються дії додавання, віднімання, множення і ділення (за винятком ділення на 0). Виконуваністю дії ділення множина Q істотно відрізняється від множини цілих чисел Z, у якій ця дія виконується не завжди.

На практиці, розв'язуючи прикладні задачі, обчислення виконують не з абстрактними числами, а з числами, які виражають значення конкретних величин (маси, відстані, часу, швидкості, площі, об'єму тощо). Існують різні одиниці вимірювання цих та інших величин. Для кількісної характеристики однієї величини можна використовувати різні одиниці вимірювання. Наприклад, у метричній системі довжину вимірюють у кілометрах, метрах, сантиметрах, міліметрах. Щоб порівнювати і виконувати дії над значеннями величин, потрібно вміти перетворювати одні одиниці виміру на інші. Для цього користуються формулами або спеціальними таблицями. Наприклад:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радіан};$$

$$1\text{га} = 100 \text{ ар} = 10\,000 \text{ м}^2;$$

$$1 \text{ л} = 1 \text{ дм}^3 = 1000 \text{ см}^3 = 0{,}001 \text{ м}^3.$$

Розв'язуючи прикладні задачі, переважно мають справу не з точними, а з наближеними значеннями величин. Щоб мати найменшу похибку в таких розрахунках, слід дотримуватися такого правила округлення.

Якщо число округлюють до деякого розряду, то всі наступні за цим розрядом цифри відкидають. Якщо перша з відкинутих цифр 0, 1, 2, 3 або 4 (5, 6, 7, 8 або 9), то останню цифру, що залишається, не змінюють (збільшують на 1).

Розв'язуючи прикладні задачі, ірраціональні числа звичайно округлюють, відкидаючи їх нескінченні «хвости» десяткових знаків. Наприклад, якщо треба знайти значення суми чисел π і $\sqrt{2}$ з точністю до тисячних, пишуть: $\pi + \sqrt{2} \approx 3{,}1416 + 1{,}4142 \approx 4{,}556$.

Аналогічно можна знайти наближене значення добутку даних дійсних чисел: $\pi \cdot \sqrt{2} \approx 3{,}1416 \cdot 1{,}4142 \approx 4{,}443$.

Тепер науковцям часто доводиться виконувати обчислення над числами, записаними в стандартному вигляді.

Запис числа у вигляді $a \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a < 10$, n – ціле, називають *стандартним виглядом числа*. Число n у такому записі називають *порядком даного числа*.

Запишемо в стандартному вигляді числа, якими виражаються маси Землі, Місяця і маленької мурашки.

5 980 000 000 000 000 000 000 т = $5{,}98 \cdot 10^{21}$ т,
73 500 000 000 000 000 000 т = $7{,}35 \cdot 10^{19}$ т,
0,0000015 кг = $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ кг.

Числа, записані в стандартному вигляді, можна додавати, віднімати, множити і ділити. Наприклад, якщо $a = 4{,}2 \cdot 10^5$ і $b = 1{,}5 \cdot 10^5$, то

$a + b = 4{,}2 \cdot 10^5 + 1{,}5 \cdot 10^5 = (4{,}2 + 1{,}5) \cdot 10^5 = 5{,}7 \cdot 10^5$;
$a - b = 4{,}2 \cdot 10^5 - 1{,}5 \cdot 10^5 = (4{,}2 - 1{,}5) \cdot 10^5 = 2{,}7 \cdot 10^5$;
$a \cdot b = 4{,}2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^5 = (4{,}2 \cdot 1{,}5) \cdot 10^5 \cdot 10^5 = 6{,}3 \cdot 10^{10}$;
$a : b = (4{,}2 \cdot 10^5) : (1{,}5 \cdot 10^5) = 4{,}2 : 1{,}5 = 2{,}8$.

В останньому прикладі застосовано основну властивість відношення.

Питання про обчислення в математиці здавна було одним з найважливіших, а в окремі періоди – і найважчим. Відомий вчений середньовіччя Беда Достойний писав: «У світі є чимало важких речей, але немає нічого важчого за чотири дії арифметики». Оскільки теперішніх алгоритмів дій навіть над натуральними числами тоді люди не знали, одні рахували, користуючися квасолинами, кісточками слив чи камінцями, інші – «на лініях». На малюнку 8, узятому з книжки XVI ст., муза Арифметика спостерігає, як діють два обчислювачі: один на абаці, другий – користуючись пером.

Мал. 8

Коли з'явились арифмометри, стали і їх використовувати. З винайденням ЕОМ і особливо мікрокалькуляторів навіть найскладніші обчислення стали доступні багатьом.

Сучасні комп'ютерні технології дають змогу автоматизувати процес обчислення. Доступною і простою для виконання різного роду обчислень є програма Excel, якою оснащено сучасні комп'ютери.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які арифметичні дії вам відомі?
2. Які дії завжди можливі в множині натуральних чисел? А в множинах Z, Q, R?
3. Які ви знаєте закони дій? Сформулюйте їх.
4. Чому не можна ділити на 0?
5. Що ви розумієте під сумою двох ірраціональних чисел? А під їх добутком?

Виконаємо разом

1. Обчисліть значення виразу А.

$$A=\frac{3\frac{4}{5}:0{,}19+1\frac{1}{2}\cdot 2{,}8}{1\frac{7}{20}:0{,}25-3\frac{1}{5}}.$$

• *Розв'язання.* Перетворимо звичайні дроби в десяткові, виконаємо відповідні дії в чисельнику і знаменнику, а потім поділимо чисельник на знаменник. Маємо:

$$A=\frac{3{,}8:0{,}19+1{,}5\cdot 2{,}8}{1{,}35:0{,}25-3{,}2}=\frac{20+4{,}2}{5{,}4-3{,}2}=\frac{24{,}2}{2{,}2}=11.$$

2. Рекомендовані розміри футбольного поля 115 × 75 ярдів. Якою буде площа такого поля у м^2?

• *Розв'язання.* Ярд (англ. *yard*) – британська одиниця вимірювання відстані.

1 ярд = 3 фути = 36 дюймів = 0,9144 м,

115 ярдів = 115 · 0,9144 = 105,156 ≈ 105 (м),

75 ярдів = 75 · 0,9144 = 68,58 ≈ 69 (м).

Площа футбольного поля 105 · 69 ≈ 7245 (м^2).

3. На фарбування 7,5 м^2 підлоги потрібно 0,75 кг фарби. Скільки фарби потрібно, щоб пофарбувати підлогу, розміри якої 3,2 м і 4,5 м?

• *Розв'язання.* Площа підлоги, яку потрібно пофарбувати, 3,2 · 4,5 = 14,4 (м^2). Маса фарби пропорційна площі підлоги, тому маємо пропорцію 7,5 м^2 : 14,4 м^2 = 0,75 : x. Звідси x = 1,44 кг.

Виконайте усно

Обчисліть **(43, 44)**.

43. а) 23,5 · 10, 0,08 · 10; б) 47,96 · 100, 10 005 : 100; в) 12,077 · 1000, 0,0036 · 1000.

44. а) 345 · 0,1, 2,3 · 0,1; б) 29,5 · 0,01, 3,7 · 0,01; в) 345,8 · 0,001, 67,981 : 0,001.

45. Знайдіть значення виразу зручним способом:

а) 3,72 · 2,41 – 2,72 · 2,41; б) $2{,}25^2 - 0{,}25^2$;

в) 5, 27 · 1,45 + 4,73 · 1,45; г) $0{,}04 - 10{,}2^2$.

46. Назвіть числа, позначені крапками:

1 м = ... см; 1 м = ... дм; 1 см = ... мм;

1 м^2 = ... дм^2; 1 м^2 = ... см^2; 1 дм^2 = ... см^2;

1 т = ... ц; 1 ц = ... кг; 1 кг = ... г;

1 год = ... хв; 1 хв = ... с; 1 год = ... с.

47. Знайдіть суму всіх цілих чисел:

а) від -10 до 10; б) від -30 до 32; в) від 28 до 32.

48. На скільки сума чисел 4,35 і 2,3 більша за їх різницю?

А

49. Обчисліть зручним способом:

а) $24{,}1 \cdot 1{,}4 + 24{,}1 \cdot 1{,}01 - 24{,}1 \cdot 1{,}41$;

б) $1{,}3 \cdot 37 + 1{,}3 \cdot 63 + 2{,}3 \cdot 74 + 2{,}3 \cdot 26$.

Виконайте ділення **(50–51)**.

50. а) 250 кг : 50 кг; б) 6 ц : 75 кг;

в) 8 грн. : 40 к.; г) 7 грн. 20 к. : 80 к.

51. а) 8 м : 40 см; б) 3 м 20 см : 80 см;

в) 3 год : 45 хв; г) 5 год 20 хв : 16 хв.

52. Знайдіть невідомий член пропорції:

а) $24 : \frac{1}{8} = x : \frac{5}{36}$; б) $x : (-6{,}2) = 25 : 150$;

в) $3\frac{1}{3} : 52 = 0{,}5 : x$; г) $\sqrt{2} : (-6) = -\sqrt{8} : x$.

53. Поділіть число 600 на частини, пропорційні числам 2, 5 і 8.

54. Знайдіть середнє арифметичне і середнє геометричне чисел 2 і 18.

55. Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел 4,2 і $2\frac{1}{3}$.

56. Продовжте обчислення, подані нижче.

Трикутні числа

1

3

6

10

15

Яке наступне?
Яке десяте?
Яке *n*-не?

$9 \cdot 9 + 7 = 88$
$9 \cdot 98 + 6 = 888$
$9 \cdot 987 + 5 =$
$9 \cdot 9876 + 4 =$
$9 \cdot 98\,765 + 3 =$
$9 \cdot 987\,654 + 2 =$

$11^2 = 121$
$111^2 = 12\,321$
$1111^2 =$
$11\,111^2 =$
$111\,111^2 =$
$1\,111\,111^2 =$

Обчисліть значення виразу **(57–65)**.

57. а) $4 : 6{,}25 + \frac{1}{7} \cdot 1{,}96$; б) $\left(\frac{1}{2} - 0{,}375\right) : 0{,}125$.

58. а) $\left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right) : (0{,}35 - 0{,}1)$; б) $\left(6\frac{2}{3} + 5\frac{1}{2} + 2\frac{4}{15}\right) : \frac{1}{15}$.

59. а) $\frac{20{,}88:18+45:0{,}36}{11{,}94+19{,}6}$; б) $\frac{8{,}03+5{,}47}{(8{,}77+7{,}97):3{,}72}$.

60. а) $\sqrt{28}\cdot\sqrt{63}$; б) $\sqrt{0{,}7}\cdot\sqrt{2{,}8}$.

61. а) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}$; б) $\sqrt{0{,}8}\cdot\sqrt{0{,}018}$.

62. а) $(1+\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}$; б) $4\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})^2$.

63. а) $(3+2\sqrt{3})(2\sqrt{3}-3)$; б) $(3\sqrt{5}-2)(2+3\sqrt{5})$.

64. а) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{3}\right)^4$; б) $(\sqrt{5}-\sqrt{0{,}2})^4$.

65. а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}:\sqrt{0{,}05}$; б) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}:\sqrt{0{,}6}$.

66. Автомобіль їхав протягом a год зі швидкістю 72 км/год і b год зі швидкістю 84 км/год. Скільки кілометрів він проїхав? Обчисліть, якщо:

а) $a=3$ і $b=2{,}5$; б) $a=1{,}3$ і $b=3{,}5$; в) $a=3\frac{1}{3}$ і $b=2\frac{5}{6}$.

67. Відстань від Сонця до Землі дорівнює $1{,}5\cdot10^8$ км. За який час світло проходить цей шлях, якщо швидкість світла дорівнює $3\cdot10^5$ км/год?

68. Для фарбування підлоги площею $12{,}5\times4{,}2$ м^2 витрачено 5,78 кг фарби. Скільки потрібно фарби для фарбування підлоги в кімнаті площею $5{,}2\times4{,}6$ м^2?

69. Масу коня можна визначити за формулою так: маса (кг) = = обхват грудної клітки (см) × 6 – 620. Знайдіть масу коня, обхват грудної клітки якого наближено дорівнює: а) 180 см; б) 200 см; в) 220 см.

70. Масу коня можна визначити за іншою формулою: маса (кг) = = обхват грудної клітки (см) × K, де $K=2{,}7$ (для легких коней), $K=3{,}1$ (для середніх) і $K=3{,}5$ (для великих коней). Обчисліть масу коня, обхват грудної клітки якого наближено дорівнює: а) 180 см; б) 200 см; в) 220 см. Порівняйте результати з отриманими в попередній задачі.

71. Циркова арена у формі круга з'явилась у Лондоні в кінці XVIII ст. Її діаметр – 42 фути – було обрано таким чином, щоб для вершника, який скаче на коні, створювалася оптимальна відцентрова сила. Знайдіть площу циркової арени (у м^2) і довжину її кола (у м). Результати округліть до десятих.

Б

Знайдіть значення виразу зручним способом (72–75).

72. а) $\frac{3{,}72\cdot2{,}41-2{,}41\cdot2{,}72}{24{,}1\cdot1{,}4+24{,}1\cdot1{,}01-24{,}1\cdot1{,}41}$;

б) $\frac{1{,}3\cdot37+1{,}3\cdot63+2{,}3\cdot74+2{,}3\cdot26}{1{,}8\cdot5{,}7+1{,}8\cdot4{,}3}$.

73. а) $\dfrac{7{,}6\cdot4{,}6-6{,}7\cdot8{,}5+7{,}6\cdot5{,}4-6{,}7\cdot1{,}5}{0{,}4\cdot2{,}3-0{,}4\cdot1{,}3}$;

б) $-\dfrac{17{,}3\cdot2{,}4-3{,}27\cdot1{,}2-8{,}8\cdot3{,}27-3{,}4\cdot17{,}3}{12{,}5\cdot8{,}7+3{,}2\cdot12{,}5-10{,}9\cdot12{,}5}$.

74. а) $7^{50}\cdot5^{50}-(35^{25}-1)(35^{25}+1)$;
б) $8^{30}\cdot9^{30}+(1-72^{15})(1+72^{15})$.

75. а) $(32^{32}-2)(32^{32}+2)-8^{64}\cdot4^{64}$;
б) $(3+54^{8})(3-54^{8})+6^{16}\cdot9^{16}$.

76. Порівняйте значення величин:
а) 5 км/год і 5 м/с; б) 1250 хв і 25 год;
в) 4 дюйми і 10 см; г) 500 г і 1 фунт.

Обчисліть **(77–79)**.

77. а) $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}$; б) $(-2)^3+\dfrac{3{,}5^2-1{,}5^2}{\dfrac{2}{3}-0{,}5}$.

78. а) $\dfrac{\left(0{,}5:1{,}25+1{,}4:1\dfrac{4}{7}-\dfrac{3}{11}\right)\cdot3}{(1{,}5+0{,}25):18\dfrac{1}{3}}$;

б) $\dfrac{\left(20{,}48:25{,}6+2\dfrac{2}{3}\cdot1{,}5\right)\cdot\left(4\dfrac{1}{6}-3\dfrac{1}{8}\right)}{2{,}25\cdot2\dfrac{2}{3}:0{,}75-10{,}5:1\dfrac{3}{4}}$.

79. а) $\dfrac{\left(4\dfrac{2}{7}-2{,}5\right):2\dfrac{19}{28}}{6\dfrac{2}{3}\cdot0{,}25}+\dfrac{12\dfrac{1}{2}:1\dfrac{7}{8}}{\left(321{,}3-47\dfrac{1}{2}:27{,}38\right)}$;

б) $\dfrac{\left(\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{5}\right):\dfrac{2}{15}+2\dfrac{1}{2}\cdot\left(2\dfrac{6}{35}-\dfrac{5}{21}\right)}{2\dfrac{1}{7}:5\cdot2\dfrac{2}{3}}$.

80. Що більше: $\sqrt{5}+2$ чи $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$?

81. Доведіть, що $\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}+1}=2$.

82. Знайдіть значення виразу:
$\dfrac{ab+bc+ac}{abc}$, якщо $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{3}$, $c=\dfrac{1}{5}$.

83. В основі басейну для водного поло – прямокутник з розмірами 25 м і 15 м. Яку найменшу кількість літрів води має містити басейн, якщо відомо, що мінімальна глибина такого басейну має бути 1,8 м?

84. Ділянка електричного кола складається з трьох послідовно з'єднаних резисторів, які мають опори $R_1 \approx 3{,}869$ Ом, $R_2 \approx 4{,}455$ Ом, $R_3 \approx 1{,}61$ Ом. Знайдіть загальний опір на ділянці цього кола. Результат округліть до сотих.

85. Турист на човні рухався спочатку проти течії річки, а потім за течією. Який шлях він пройшов загалом, якщо швидкість човна в стоячій воді – 25 км/год, швидкість течії річки 2 км/год, час руху за течією $t_з$, а проти течії $t_п$? Обчисліть за умови:

а) $t_п = 30$ хв, $t_з = 1$ год 10 хв; б) $t_п = 15$ хв, $t_з = 50$ хв.

86. Вартість обладнання – A грн., а вартість його капітального ремонту – r. До капітального ремонту обладнання працює n років, а з ремонтом – m років. Відомо, що капітальний ремонт є рентабельним, якщо $r \leqslant \frac{A}{n}(m-n)$.

Визначте, в якому випадку капітальний ремонт обладнання буде рентабельним:

а) $A = 1200$ грн., $r = 300$ грн., $n = 3$ роки, $m = 4$ роки;
б) $A = 2100$ грн., $r = 800$ грн., $n = 6$ років, $m = 10$ років;
в) $A = 3500$ грн., $r = 2000$ грн., $n = 12$ років, $m = 20$ років;
г) $A = 6000$ грн., $r = 2500$ грн., $n = 10$ років, $m = 20$ років.

87. На деякий момент часу зафіксовано курси валют, подані в таблиці.

Назва	Курс НБУ	Комерційний курс
1 долар США	7,64	7,831
1 євро	10,73	10,96
1 російський рубль	0,25	0,26

Знайдіть суму грошей у національній валюті, за курсом НБУ і комерційним, якщо в наявності було:

а) 21,3 євро, 231,3 дол., 135 руб., 12 375,5 грн.;
б) 91,5 євро, 321,5 дол., 35 руб., 1237 грн.;
в) 71,2 євро, 23 дол., 535 руб., 92 375,5 грн.

Вправи для повторення

88. Одне з двох натуральних чисел на 5 більше за інше. Знайдіть ці числа, якщо їх добуток дорівнює 266.

89. Раціональним чи ірраціональним є число?

а) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$; б) $\sqrt{9-6\sqrt{2}}+\sqrt{9+6\sqrt{2}}$.

90. Знайдіть 12 % від числа: а) 45; б) 2,5.

91. Знайдіть число, 15 % якого дорівнює: а) 300; б) 0,6.

§ 3. Відсоткові розрахунки

Багатьом фахівцям часто доводиться виконувати обчислення за умови, якщо деякі значення виражено у відсотках. Коротко їх називають *відсотковими розрахунками*.

Нагадаємо, що *відсоток* – це сота частина.

1 % = 0,01, 10 % = 0,1, 100 % = 1.

Примітка. Відсотки часто називають процентами, а замість «скільки відсотків» іноді кажуть «який відсоток».

Існує три основні види задач на відсотки:

① *знаходження відсотків від числа*;

② *знаходження числа за відсотками*;

③ *знаходження відсоткового відношення двох чисел.*

Розглянемо приклади таких задач.

① Потрібно зорати поле, площа якого дорівнює 300 га. За перший день трактористи виконали 40 % завдання. Скільки гектарів зорали вони за перший день?

② За перший день трактористи зорали 120 га, що становить 40 % поля. Знайдіть площу всього поля.

③ Потрібно зорати поле, площа якого дорівнює 300 га. За перший день трактористи зорали 120 га. Скільки відсотків усього поля вони зорали за перший день?

Спробуйте розв'язати кожну із цих задач кількома способами, замінивши 40 % дробом 0,4 чи $\frac{2}{5}$.

Такі задачі зручно розв'язувати *способом пропорції*. Оформлювати розв'язання сформульованих задач можна так:

① 300 га – 100 %, $\frac{300}{x}=\frac{100}{40}$, $x=\frac{300\cdot 40}{100}=120$ (га).
x га – 40 %.

② 120 га – 40 %, $\frac{120}{x}=\frac{40}{100}$, $x=\frac{120\cdot 100}{40}=300$ (га).
x га – 100 %.

③ 300 га – 100 %, $\frac{300}{120}=\frac{100}{x}$, $x=\frac{120\cdot 100}{300}=40$ (%).
120 га – x %.

Крім трьох основних видів задач, існують також складніші задачі на відсотки. Насамперед це задачі, в яких ідеться про збільшення чи зменшення чого-небудь на кілька відсотків, і обернені до них. Розв'язуючи такі задачі, уточнюйте насамперед про відсотки від чого саме йдеться. Про це в задачі прямо не говориться, але існують домовленості про розуміння тих чи інших висловлювань.

Для прикладу розглянемо задачу.

Задача. Спочатку ціну на товар підвищили на 10 %, а потім знизили на 10 %. Як змінилася ціна на цей товар у результаті двох переоцінок?

Зверніть увагу на те, що перший раз ідеться про 10 % від початкової ціни, а другий раз – про 10 % від підвищеної ціни. А вони не однакові.

Розв'язання. Нехай спочатку товар коштував a грн.

Після підвищення ціни на 10 % він став коштувати a грн. + + $0,1a$ грн., або $1,1a$ грн.

10 % від підвищеної ціни становлять $(1,1a \cdot 0,1)$ грн., або $0,11a$ грн. Після зниження вартості товар став коштувати $(1,1a - 0,11a)$ грн., або $0,99a$ грн.

Отже, спочатку товар коштував a грн., а після двох переоцінок став коштувати $0,99a$ грн., тобто на $0,01a$ грн. менше. Це становить $0,01a : a = 0,01$, або 1 %.

Відповідь. Після двох переоцінок початкова ціна товару знизилася на 1%.

Особливо часто доводиться розв'язувати задачі на відсотки бухгалтерам і працівникам банків. Розглянемо для прикладу задачі, пов'язані з нарахуванням відсоткових грошей.

Прості відсотки – це нарахування відсотків лише на початково інвестовану суму.

Наприклад, на початку року вкладник розміщує на рахунку в банку суму P під відсоток r. Через рік він одержить суму P_1, яка дорівнює початковому вкладу (P) плюс нараховані відсотки:

$$P_1 = P + \frac{Pr}{100} = P\left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

Через два і три роки сума на рахунку складатиме:

$$P_2 = P + \frac{Pr}{100} + \frac{Pr}{100} = P\left(1 + 2\frac{r}{100}\right) \text{ і } P_3 = P\left(1 + 3\frac{r}{100}\right).$$

Аналогічно можна представити суму P_n, яку вкладник одержить через n років:

$$P_n = P\left(1 + \frac{r}{100}n\right).$$

Тут P – сума початкового вкладу, P_n – сума вкладу через n років.

Нарахування за схемою простих відсотків застосовується, як правило, в короткострокових фінансових операціях, коли після кожного інтервалу нарахування кредитору виплачуються відсотки, а також у будь-яких інших випадках за домовленістю сторін, що беруть участь в операції.

українського населення становили тоді діти віком до 10 років? А скільки діти і молодь до 20 років? Скільки новонароджених не доживало до 10 років?

• Розв'язання. Хлопчиків до 10 років тоді було близько 31 %, стільки ж і дівчаток. Отже, дітей до 10 років було трохи більше 30 %.

Молоді від 10 до 20 років було близько 22 %. Отже, разом з дітьми вони становили приблизно 52 %. Людей старшого віку було близько 48 %.

Оскільки діти віком до 10 років становили приблизно 31 % усіх українців, а молодь від 10 до 20 років – близько 22 %, то не доживали до 10-річного віку близько 30 % усіх дітей.

3. До 10 кг 3-відсоткового розчину солі долили 5 л води. На скільки відсотків зменшилася концентрація розчину?

• Розв'язання. Наявний розчин мав $10 \cdot 0{,}03 = 0{,}3$ (кг) солі. 5 л води мають масу 5 кг. Маса утвореного розчину 15 кг, він містить 0,3 кг солі. Знайдемо його концентрацію.

$0{,}3 : 15 = 0{,}02$, $0{,}02 = 2\ \%$, $3\ \% - 2\ \% = 1\ \%$.

Відповідь. Відсоткова концентрація розчину зменшилася на 1 %.

Виконайте усно

92. Знайдіть 10 % від числа: 180; 6000; 40; 8; 0,75.

93. Знайдіть число, 50 % якого дорівнюють: 8; 20; 18 000; 1.

94. Виразіть у відсотках відношення:

$9 : 100$; $6 : 10$; $7 : 20$; $13 : 10$; $\frac{21}{100}$; $\frac{9}{50}$; $\frac{6}{10}$.

95. Скільки відсотків становлять:

а) 5 від 20; б) 15 від 60;

в) $\frac{2}{13}$ від $\frac{5}{26}$; г) $1\frac{1}{2}$ від $1\frac{1}{5}$?

96. Скільки відсотків становлять:

а) 3 см відносно 12 см; б) 5 см відносно 1 дм;
в) 80 г відносно 1 кг; г) 5 хв відносно 1 год;
ґ) 0,1 м відносно 1 м; д) 0,1 г відносно 1 кг;
е) 2 с відносно 1 год; є) 3 ц відносно 1 т?

Мал. 11

97. Скільки відсотків площі всього квадрата становить площа його зафарбованої частини (мал. 11)?

98. На скільки відсотків змінилося значення величини, якщо воно: а) збільшилося вдвічі; б) збільшилося втричі; в) зменшилося вдвічі; г) зменшилося в чотири рази; ґ) зменшилося в п'ять разів?

99. У скільки разів збільшилося значення величини, якщо воно збільшилося на: а) 300 %; б) 50 %; в) 200 %; г) 150 %?

А

100. Із 120 випускників фінансового коледжу 20 % було направлено на роботу в банки, а 25 % – у заклади торгівлі. Скільки випускників ще не працевлаштовано?

101. У три цистерни розлили 30 000 т нафти. У першій цистерні 35 % усієї нафти, у другій – 40 %. Скільки тонн нафти міститься в третій цистерні?

102. Три баржі перевозили деякий вантаж. Перша перевезла 30 % усього вантажу, друга – 25 % усього вантажу, а третя решту 55 т. Яка маса всього вантажу?

103. У 10-А класі 24 учні і 25 % з них протягом навчального року не пропустили жодного заняття. У 10-Б класі 25 учнів і 20 % з них не пропустили жодного заняття протягом навчального року. Який відсоток учнів обох класів, які постійно відвідували заняття?

104. З 20 000 клієнтів банку триста звернулись із скаргами. Який відсоток клієнтів банку, задоволених його роботою?

105. Сторони прямокутника дорівнюють 12 см і 15 см. Знайдіть p % його площі, якщо:

а) $p = 18$; б) $p = 30$; в) $p = 125$.

106. Довжина однієї сторони трикутника дорівнює 6 м, а сума двох інших становить 150 % цієї сторони. Знайдіть периметр трикутника.

107. З молока виходить 10 % сиру. Скільки молока треба, щоб вийшло 50 кг сиру?

108. Із цукрових буряків виходить 15 % цукру. Скільки буряків потрібно переробити, щоб вийшло 3 т цукру?

109. Пошта обслуговує 3000 пенсіонерів. 1020 з них – чоловіки, решта – жінки. На скільки відсотків кількість жінок пенсіонерок перевищує кількість пенсіонерів чоловіків?

110. На склад центрального банку надійшло 95 найменувань бланків, які використовують центральний банк та його відділення. 20 % найменувань використовують тільки відділення. Скільки найменувань бланків використовує центральний банк?

111. Латунь – сплав 60 % міді і 40 % цинку. Скільки міді і цинку треба сплавити, щоб вийшло 200 кг латуні?

112. Бронза – сплав міді й олова. Скільки відсотків олова в бронзовому злитку, який містить 33 кг міді і 17 кг олова?

113. Англійську мову вивчають 165 студентів першого курсу фізико-математичного інституту педагогічного університету, що становить 75 % усіх першокурсників. Скільки всього першокурсників навчається на фізматі?

114. Страхова компанія обслужила 63 особи, що становить 15 % від усіх клієнтів. Скільки клієнтів має страхова компанія?

115. Який відсоток доби становлять 500 хвилин?

116. Сума коштів у 2000 гривень інвестована в десятирічний трастовий фонд під простий річний відсоток у 16 %. Якою буде величина капіталу в кінці десятиріччя?

117. Підприємству надано 50 000 грн. у кредит на шість місяців за ставкою 18 % річних. Яку суму підприємство має повернути банку через півроку?

Б

118. Малина під час сушіння втрачає 75 % своєї маси. Скільки свіжої малини потрібно висушити, щоб мати 5 кг сушеної?

119. З молока виходить 20 % вершків, а з вершків – 25 % масла. Скільки треба молока, щоб одержати 100 кг масла?

120. Руда містить 60 % заліза. З неї виплавляють чавун, який містить 98 % заліза. Із скількох тонн руди виплавляють 200 т чавуну?

121. Кам'яне вугілля містить у середньому 80 % вуглецю, а торф – 56 %. Скільки потрібно взяти торфу, щоб маса вуглецю в ньому була такою, як у 2 т вугілля?

122. Власник магазину підвищив ціну на чоловічі краватки на 25 %, але, як з'ясувалось, його товар перестали купувати за такими високими цінами, і йому довелося знизити нові ціни на 25 %. Ціна краватки тепер становить 126 грн. Якою була початкова ціна краватки?

123. Ціну на товар знизили спочатку на 20 %, а потім ще на 15 %, і в результаті він став коштувати 53,8 грн. Якою була початкова ціна товару?

124. В одному мішку крупи на 2 % менше, ніж у другому. На скільки відсотків у другому мішку крупи більше, ніж у першому?

125. У 10-му класі хлопців на 25 % більше, ніж дівчат. На скільки відсотків дівчат у цьому класі менше, ніж хлопців?

126. Ціна краму спочатку знизилася на 5 %, а потім ще раз на 10 %. На скільки відсотків змінилася вона після двох переоцінок?

127. Ціна на автомобіль спочатку знизилась на 15 %, а потім підвищилася на 10 %. Як змінилася ціна на автомобіль після цих двох переоцінок?

128. Випуск цукерок на кондитерській фабриці за перший рік зріс на 5 %, а за другий – на 8 %. Як зріс випуск продукції на заводі за ці два роки?

129. Площа поверхні Землі становить 510,1 млн км^2, з них 149,2 млн км^2 – суходіл. На скільки відсотків площа поверхні Землі, покрита водою, перевищує площу суходолу?

130. За 15 м тканини одного виду та 20 м другого заплатили 2208 грн. Скільки заплачено за тканину кожного виду, коли відомо, що ціна одного метра тканини першого виду на 12 % більша від ціни одного метра тканини другого виду?

131. Підприємець купує на заводі труби зі знижкою 10 % від їхньої оптової ціни, а продає їх за роздрібною, яка вища від оптової на 10 %. Який відсоток прибутку має підприємець?

132. Борошно подешевшало на 14 %. Скільки кілограмів його можна купити за ті самі гроші, за які раніше купували 150 кг?

133. Раніше 3 кг рису коштували стільки, скільки тепер коштують 2 кг. На скільки відсотків подорожчав рис?

134. Свіжі гриби містять 95 % води, а сухі – 12 %. Скільки вийде сухих грибів з 22 кг свіжих?

135. Свіжі гриби містять 90 % води, а сухі – 12 %. Скільки треба висушити свіжих грибів, щоб одержати 25 кг сухих?

136. Вологість свіжих грибів дорівнювала 99 %. Коли гриби підсушили, їх вологість зменшилася до 98 %. Як змінилася маса грибів?

137. Скільки грамів води потрібно додати до 50 г 35-відсоткової соляної кислоти, щоб отримати 10-відсоткову кислоту?

138. До 8 кг 70-відсоткового розчину кислоти долили 2 кг води. Визначте відсоткову концентрацію нового розчину.

139. Скільки потрібно змішати 10-відсоткового і 15-відсоткового розчинів солі, щоб мати 25 кг 12-відсоткового розчину?

140. Скільки золота 375-ї проби треба сплавити з 30 г золота 750-ї проби, щоб одержати сплав золота 500-ї проби?

141. Будівельна компанія взяла в банку кредит 1 250 000 грн. на 3 роки під простих 15 %. Визначте: а) скільки гривень компанія поверне банку через 3 роки; б) який прибуток одержить банк?

142. Підприємець вніс до банку 15 000 грн. під складні 16 % річних. Якою буде сума його вкладу через 4 роки?

143. На вклад у розмірі 100 000 грн. строком на 5 років банк нараховує 20 % річних. Яка сума буде на рахунку в кінці строку, якщо нарахування відсотків здійснюється за схемою:

а) простих відсотків; б) складних відсотків?

144. На скільки відсотків число $2{,}5 \cdot 10^8$ більше за число:

а) $5 \cdot 10^7$; б) $1{,}5 \cdot 10^8$; в) $7{,}5 \cdot 10^7$?

145. Дано два вирази:

$$\frac{ab+bc+ca}{abc} \quad \text{і} \quad \frac{ab+bc-ca}{abc}.$$

На скільки відсотків значення першого з них більше від значення другого, якщо: $a=\frac{1}{3}$; $b=\frac{1}{4}$; $c=\frac{1}{5}$?

Вправи для повторення

146. Розв'яжіть нерівність:
а) $2x + 3 > 5(x - 12)$; б) $x^2 - 4x > (x - 1)(x + 1)$.

147. Винесіть спільний множник за дужки:
а) $6a(x - 2) + 8b(x - 2) + 4c(2 - x)$;
б) $x^3(2x + 3) + 3(2x^3 + 3x^2) + 3x^3(3 + 2x)$.

148. Побудуйте графіки функцій:
а) $y = -x^2$; б) $y = 2x^2$; в) $y = x^2 - 4$; г) $y = (x + 1)^2$.

Самостійна робота № 1

Варіант 1

1. Запишіть п'ять цілих чисел, які не є натуральними.

2. У скільки разів число 5 більше від числа $\frac{1}{2}$?

3. Чи є серед чисел $(\sqrt{3} - 1)^2$, $(\sqrt{3})^2 - 1$, $\sqrt{3} - 1^2$ раціональне число?

4. Обчисліть: а) $(0,36 + 1,64)(0,36 - 1,64)$; б) $\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$.

5. Знайдіть: а) 20 % від числа 35; б) число, 35 % якого дорівнює 70.

Варіант 2

1. Запишіть п'ять раціональних чисел, які не є натуральними.

2. У скільки разів число $\frac{1}{3}$ менше від числа 6?

3. Чи є серед чисел $\sqrt{5} - 1^2$, $(\sqrt{5} - 1)^2$, $(\sqrt{5})^2 - 1$ ціле число?

4. Обчисліть: а) $(1,73 + 0,27)(1,73 - 0,27)$; б) $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$.

5. Знайдіть: а) 25 % від числа 40; б) число, 40 % якого дорівнює 80.

§ 4. Числові функції

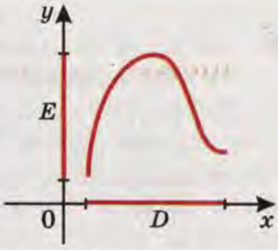
Одне з найважливіших понять математики – функція. З її допомогою моделюють і досліджують різноманітні процеси, що відбуваються навколо нас. Повторимо основні відомості про функцію, які ви знаєте з попередніх класів.

Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини D відповідає єдине значення змінної y, то таку відповідність називають *функцією*.

При цьому ***x* називають незалежною змінною**, або ***аргументом*, *y* – *залежною змінною***, або ***функцією***.

Усі значення, які може набувати аргумент функції, називають ***областю визначення*** даної функції і позначають літе-рою D.

Множину всіх значень y, яких може набувати функція, називають її ***областю значень*** і позначають літерою E (мал. 12).



Мал. 12

Дві функції вважаються різними, якщо в них різні області визначення або правила відповідності. Наприклад, функція $y = x^2$, задана на проміжку $[-3; 3]$, і функція $y = x^2$, задана на R, різні. А задані на R функції $y = 1 - x^2$ і $y = (1 - x)(1 + x)$ однакові, оскільки вирази $1 - x^2$ і $(1 - x)(1 + x)$ тотожно рівні.

Дві функції називаються рівними, якщо їх області визначення однакові і в кожній точці області визначення вони мають рівні значення. Рівними є, наприклад, такі пари функцій:

$$y = |x| \text{ і } y = \sqrt{x^2};\quad y = x^2 - 1 \text{ і } y = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}.$$

Щоб задати функцію, досить зазначити її область визначення і правило відповідності.

Задавати функції можна різними способами. Часто їх задають *формулами*. Наприклад, відповідність між довжиною a сторони квадрата і його площею S можна задати формулою $S = a^2$.

Відповідність між радіусом r кола і довжиною C кола можна задати формулою $C = 2\pi r$.

Відповідність між значеннями змінної x і значеннями виразу $2x - 1$ можна задати формулою $y = 2x - 1$.

Задання функції формулою зручне тим, що дає можливість знаходити значення функції для довільного значення аргументу. Таке задання функції досить економне: здебільшого формула займає один рядок.

Якщо функцію задають формулою і нічого не кажуть про область її визначення, то вважають, що ця область – множина всіх значень змінної, при яких формула має зміст. Наприклад, область визначення функції $y = 2x - 1$ – множина всіх дійсних чисел, а функції $y = \frac{3}{x-1}$ – множина всіх дійсних чисел, крім 1, оскільки на 0 ділити не можна.

Задавати функції можна і у вигляді *таблиці*. Наприклад, функцію $y = 2x - 1$ для перших десяти натуральних значень x можна задати у вигляді такої таблиці:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

Тут:
- область визначення: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10};
- область значень: {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}.

Табличний спосіб задання функції зручний тим, що для певних значень аргументу до таблиці вже занесено відповідні значення функції, тому не треба робити будь-яких обчислень. Незручний він тим, що таблиця займає більше місця. До того ж, як правило, містить значення функції не для всіх значень аргументу, а тільки для деяких.

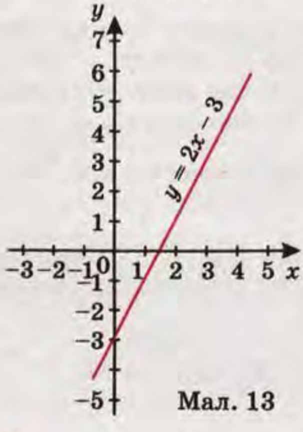
Функцію можна задавати і *словесно*. Наприклад, якщо кожному цілому числу поставити у відповідність його квадрат, то одержимо функцію, областю визначення якої є множина цілих чисел, а областю значень – множина натуральних чисел і число нуль.

Часто функції задають у вигляді графіків, побудованих у декартовій системі координат.

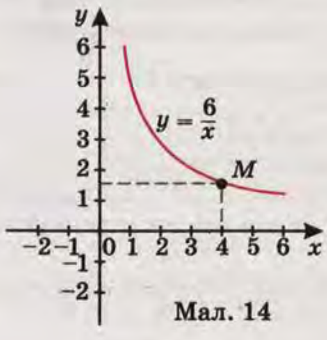
Графіком функції називається множина всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

Наприклад, на малюнку 13 зображено графік функції $y = 2x - 3$, заданої на відрізку $[-1; 5]$, а на малюнку 14 – графік функції $y=\frac{6}{x}$ на відрізку $[1; 6]$.

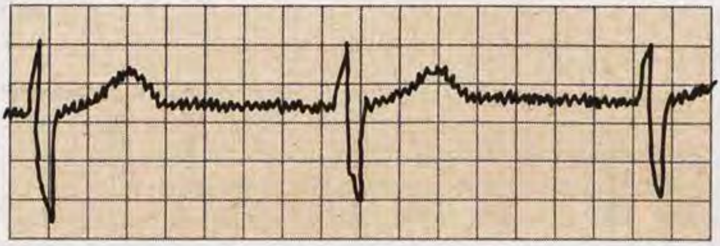
Маючи графік функції, можна для будь-якого значення аргументу (з області визначення) вказати відповідне значення функції. Для прикладу знайдемо значення функції $y=\frac{6}{x}$, якщо $x = 4$, користуючись побудованим графіком. Шукаємо на осі x точку з абсцисою 4, на графіку знаходимо точку M з абсцисою 4, а на осі ординат – ординату точки M; вона дорівнює 1,5. Отже, користуючись графіком функції, можна скласти таблицю її значень, тобто графік задає функцію. *Графічний спосіб* задання



Мал. 13



Мал. 14



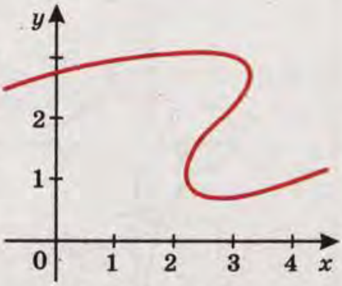
Мал. 15

функції зручний своєю наочністю. Дивлячись на графік, одразу можна з'ясувати властивості функції, яку він задає. Зокрема, можна встановити такі її характеристики:

- область визначення і область значень функції;
- при яких значеннях аргументу значення функції додатні, при яких – від'ємні, при яких дорівнюють нулю;
- на яких проміжках функція *зростає*, а на яких *спадає*.

Існують прилади – термографи, які самі креслять графік температури. Графіком функції є також кардіограма, накреслена кардіографом (мал. 15). «Читаючи» такий графік, лікар діагностує роботу серця хворого. Взагалі, багатьом фахівцям треба вміти «читати» різні графіки.

Чи задає функцію графік, зображений на малюнку 16? Ні, оскільки на цьому графіку одному значенню аргументу x (наприклад, $x = 3$) відповідають три різних значення y. А згідно з означенням функцією вважається тільки така відповідність, при якій одному значенню аргументу x відповідає єдине значення функції y.



Мал. 16

Існує багато різних видів функцій. Деякі з них ви вже знаєте:

- $y = kx$ – пряма пропорційність ($k \neq 0$);
- $y = kx + b$ – лінійна функція;
- $y = \dfrac{k}{x}$ – обернена пропорційність ($k \neq 0$);
- $y = ax^2 + bx + c$ – квадратична (або квадратна) функція ($a \neq 0$).

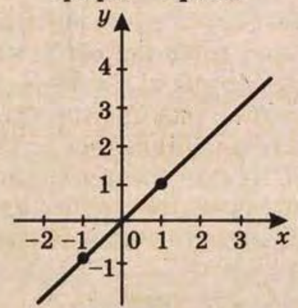
Графіки найуживаніших функцій подано в таблиці 1.

Щоб будувати графіки складніших функцій, використовують такі правила.

- Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі x.
- Щоб побудувати графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, треба графік функції $y = f(x)$ розтягнути від осі x у k разів, якщо $k > 1$, або стиснути його в $\dfrac{1}{k}$ разів до осі x, якщо $0 < k < 1$.

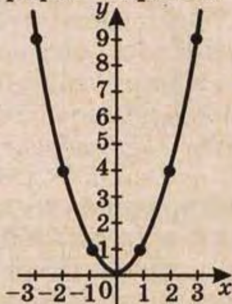
Таблиця 1

$y = x$
графік – **пряма**



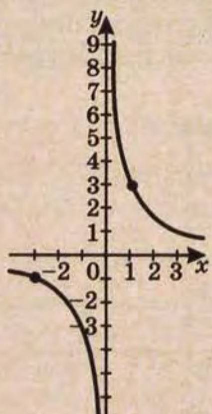
$D(y) = R$
$E(y) = R$

$y = x^2$
графік – **парабола**



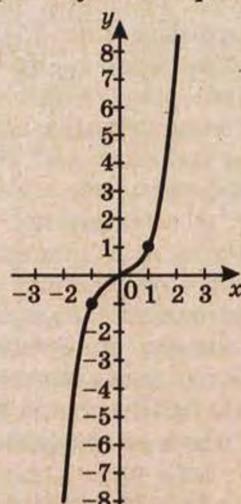
$D(y) = R$
$E(y) = [0; +\infty)$

$y = \frac{3}{x}$ графік – **гіпербола**



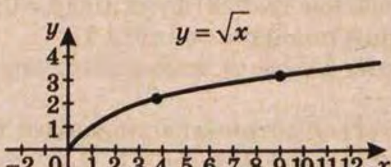
$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$y = x^3$
графік – **кубічна парабола**



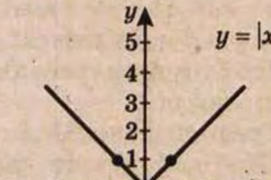
$D(y) = R$
$E(y) = R$

$y = \sqrt{x}$



$D(y) = [0; +\infty)$
$E(y) = [0; +\infty)$

$y = |x|$

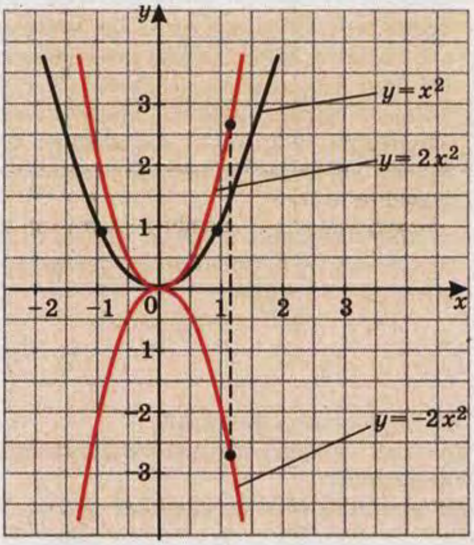


$D(y) = R$ $E(y) = [0; +\infty)$

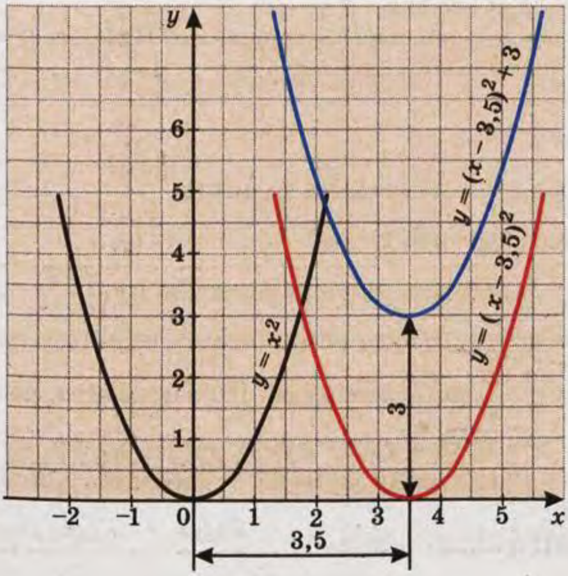
• Щоб побудувати графік функції $y = f(kx)$, де $k > 0$, треба графік функції $y = f(x)$ розтягнути від осі y в $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$, або стиснути його в k разів, якщо $k > 1$.

• Щоб одержати графік функції $y = f(x) + n$, треба графік функції $y = f(x)$ перенести на n одиниць у напрямі осі y, якщо $n > 0$, або на $|n|$ одиниць у протилежному напрямі, якщо $n < 0$.

• Щоб одержати графік функції $y = f(x - m)$, досить графік функції $y = f(x)$ перенести на m одиниць у напрямі осі x, якщо $m > 0$, або на $|m|$ одиниць у протилежному напрямі, якщо $m < 0$.



Мал. 17



Мал. 18

Приклади побудови графіків $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = -2x^2$ подано на малюнку 17, а графіків $y = x^2$, $y = (x - 3,5)^2$, $y = (x - 3,5)^2 + 3$ – на малюнку 18.

Термін «функція» ввів у математику Г.В. Лейбніц.

ЛЕЙБНІЦ ГОТФРІД ВІЛЬГЕЛЬМ
(1646–1716)

Видатний німецький учений. За освітою юрист, працював бібліотекарем, історіографом, організував Берлінську академію наук, досліджував проблеми політичної економії, мовознавства, хімії, геології, конструював обчислювальні машини. Основоположник символічної логіки, один з творців математичного аналізу. Ввів терміни: «функція», «абсциса», «ордината», логічну символіку, знаки множення і ділення (крапку і двокрапку) та ін.

«Після Лейбніца, мабуть, уже не було людини, яка повністю охоплювала б усе інтелектуальне життя свого часу».

Н. Вінер

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке функція? Як позначають функції?
2. Що таке аргумент функції, область визначення функції?
3. Як можна задавати функцію?
4. Назвіть основні види функцій. Які їх графіки?
5. Задано графік функції $y = f(x)$. Як побудувати графік функції: а) $y = af(x)$; б) $y = f(x) + b$; в) $y = f(x + a)$?
6. Які функції називають рівними? А нерівними? Наведіть приклади.

Виконаємо разом

1. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\dfrac{x+3}{9-x^2}$;   б) $y=\sqrt{1-2x+x^2}$.

• Розв'язання. а) Проаналізуємо функцію $y=\dfrac{x+3}{9-x^2}$.

Змінна x може набувати будь-яких значень, крім тих, при яких знаменник дробу $\dfrac{x+3}{9-x^2}$ дорівнює нулю. Щоб їх знайти, розв'яжемо рівняння $9 - x^2 = 0$, $(3 - x)(3 + x) = 0$, звідси $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Отже, область визначення функції – множина дійсних чисел, крім $x = \pm 3$.

$D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$.

б) Розглянемо функцію $y=\sqrt{1-2x+x^2}$. Виконаємо тотожні перетворення: $y=\sqrt{1-2x+x^2}=\sqrt{(1-x)^2}$, отже, $y=\sqrt{(1-x)^2}$. При будь-яких значеннях змінної x вираз $(1-x)^2 \geqslant 0$, а тому область визначення функції – уся множина дійсних чисел.

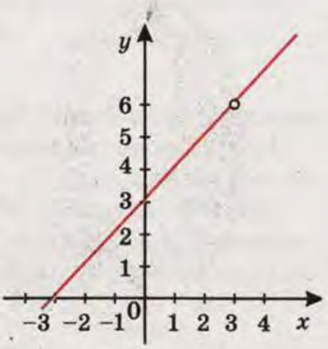
$D(y) = R$.

2. Чим різняться графіки функцій

$y=x+3$ і $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$?

Розв'язання. Праві частини даних рівностей тотожно рівні, оскільки

$\dfrac{x^2-9}{x-3}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3$. Але перший вираз має числові значення при всіх дійсних значеннях x, а другий – при всіх, крім $x = 3$. Тому графік першої функції – пряма, а другої – пряма без однієї точки (мал. 19).



Мал. 19

Виконайте усно

149. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = 3x^2 - 2$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = 2,5$; г) $y = 4 - x$.

150. Як називається графік функції, заданої формулою:

а) $y = 3x + 1$; б) $y = x^2$; в) $y = 3$; г) $y = x^{-1}$?

151. Графік якої з функцій проходить через початок координат:

а) $y = -5x$; б) $y = 3x - 2$; в) $y = 2x^2$; г) $y = x(x - 2)$?

152. Які з функцій, заданих формулами $y = 15 - x$, $y = |x|$, $y = 3(x - 2)$, $y = x^2 + 5$, не можуть мати від'ємних значень.

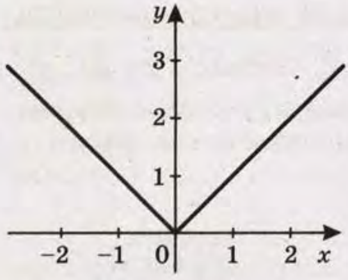
153. Чи є площа круга функцією його радіуса? А його діаметра?

154. Чи є об'єм куба функцією довжини його ребра? Спробуйте задати цю функцію формулою.

А

155. Задайте формулою функцію, яка виражає площу квадрата через його периметр P.

156. Побудуйте графік функції, яка виражає залежність периметра правильного трикутника від довжини його сторони.



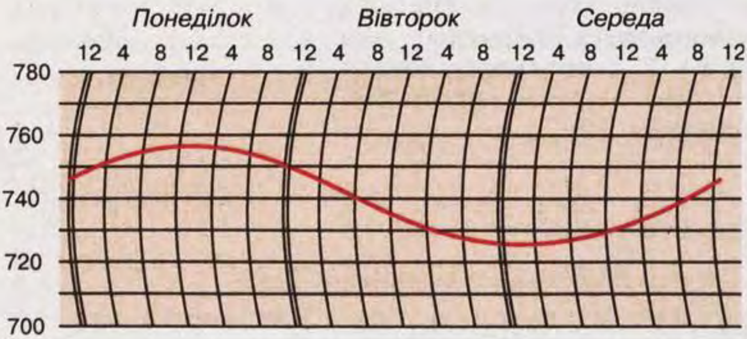
Мал. 20

157. На малюнку 20 зображено графік функції. Один учень стверджує, що цю функцію можна задати формулою $y=\sqrt{x^2}$, інший – що графіку відповідає формула $y=|x|$. Хто з них правий?

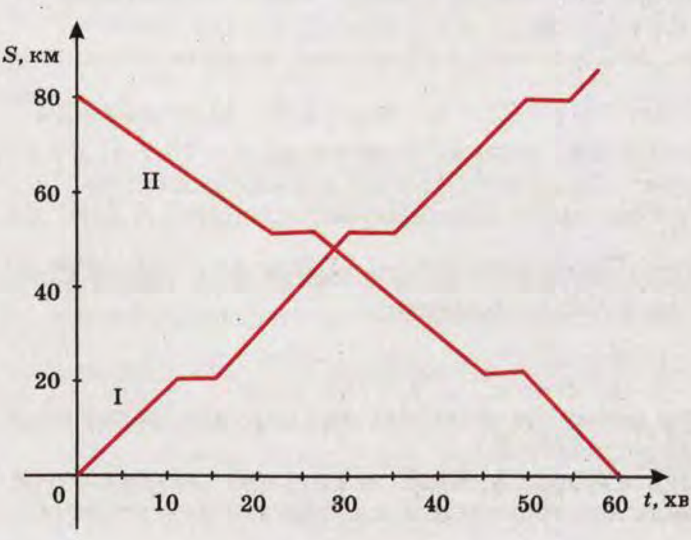
158. У США основною одиницею довжини вважається ярд, який дорівнює $\frac{3600}{3937}$ м. Задайте формулою залежність довжини L, вираженої в метрах, від числа ярдів l.

159. «Прочитайте» графік зміни атмосферного тиску, зображений на малюнку 21.

160. На малюнку 22 зображено графіки руху двох електропоїздів. Проаналізуйте ці рухи: скільки зупинок робив кожен поїзд; коли вони зустрілися; скільки часу тривала кожна зупинка?



Мал. 21



Мал. 22

161. Знайдіть $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, якщо функцію задано формулою:

а) $f(x) = 3x - 1$; б) $f(x) = 2x^2 + 3$; в) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$.

162. Функцію задано формулою $y = -0{,}5x + 2$. Знайдіть значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює -24; -10; 0; 5. При якому значенні аргументу значення функції дорівнює -6; 0; 5; $7{,}5$?

163. Знайдіть значення функції, заданої формулою:

а) $y = 8x - 5$, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює -2; 0; $1{,}5$; 12; 25;

б) $y = -\frac{x}{2} + 1$, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює -8; -1; 0; 1; 20.

164. Функцію задано формулою $y = 0{,}25x - 1$. Заповніть таблицю.

x	-10	-5							
y			-2	-1	0	1	$1{,}5$	4	25

165. Функцію задано формулою $y = \sqrt{x + 5}$ на області визначення $D = \{-4;\ -2{,}75;\ -1;\ 1{,}25;\ 4;\ 11\}$. Задайте її таблично і графічно.

166. Функцію задано таблицею.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Задайте її формулою. Укажіть її область визначення й область значень.

167. У яких точках графік функції $y = x^2 - 3x$ перетинає:

а) вісь y; б) вісь x?

168. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = 2x - 7$; б) $y = \sqrt{x + 1}$; в) $y = 2 - \sqrt{x}$;

г) $y = \frac{1}{x - 1}$; ґ) $y = \frac{x + 3}{x^2 - 9}$; д) $y = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2}$.

169. Функцію $y = x^2$ задано на проміжку $[-2; 5]$. Знайдіть її область значень.

170. Знайдіть область визначення функції $y = x^3$, якщо її область значень $[-8; 27]$.

Б

Побудуйте графік функції (171, 172).

171. а) $y = -4x$; б) $y = 4x^2$; в) $y = x + 4$;

г) $y = \frac{x}{4}$; ґ) $y = 2x - \frac{1}{2}x$; д) $y = \frac{4}{x}$.

172. а) $y=0{,}5x$; б) $y=x(x+2)+1$; в) $y=-2x^2$;

г) $y=3-2x$; ґ) $y=(1-x)(1+x)$; д) $y=\sqrt{x}$.

173. Маса порожньої бочки 40 кг, а маса 1 л бензину 0,8 кг. Виразіть формулою залежність маси m бочки з бензином від об'єму V бензину в ній. Чи є ця залежність лінійною функцією?

174. Прямокутний паралелепіпед зі сторонами основи a см, b см і висотою 6 см має об'єм, що дорівнює 72 см^3. Виразіть формулою залежність b від a.

175. Щоб пошити одну сорочку, потрібно 2,5 м тканини. Запишіть формулу для обчислення залишку тканини після пошиття x сорочок, якщо в сувої 200 м тканини. Яких значень може набувати x?

176. Знайдіть значення аргументу, при якому:

а) значення функції $y=-3x+2$ дорівнює -7; 0; 5;

б) значення функції $y=\dfrac{4}{x-3}$ дорівнює -20; 2; $\dfrac{1}{2}$;

в) значення функції $y=x(x-3)$ дорівнює -2; 0; 10;

г) значення функції $y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x-4}$ дорівнює $-\dfrac{5}{8}$; 0; 1,4.

177. Задайте формулою функцію, якщо:

а) значення функції на 4 більші від значень аргументу;

б) значення функції на 9 менші від значень аргументу;

в) значення функції втричі більші від значень аргументу;

г) значення функції протилежні значенням аргументу;

ґ) значення функції обернені до значень аргументу.

178. Функцію задано формулою $y=\dfrac{4}{1-x}$, де $-7 \leqslant x < 1$. Заповніть таблицю.

x	-7	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
y							

Побудуйте графік цієї функції.

179. Функцію задано формулою $y=\dfrac{6}{x}+3$, де $1 \leqslant x < 6$. Побудуйте графік цієї функції, склавши спочатку таблицю її значень.

180. Відомо, що графік лінійної функції проходить через точки $A(-2;\ 1)$ і $B(3;\ 6)$. Задайте цю функцію формулою.

181. Задайте формулою обернену пропорційність, графік якої проходить через точку $A(3;\ 4)$.

182. Чи проходить графік функції $y=x^2-5x+6$ через точку $A(0;\ 5)$? А через точку $B(5;\ 6)$?

183. Чи правильно, що графік функції $y = x^2 - 4x + 5$ відрізняється від графіка функції $y = x^2 - 4x$ тільки тим, що його зміщено на 5 одиниць угору вздовж осі y?

184. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 4x + 4$.

185. Побудуйте графік функції $y = x^2 + 4x - 2$.

Побудуйте в одній системі координат графіки функцій (186–188).

186. а) $y = x^3$, $y = -x^3$, $y = -x^3 + 1$;

б) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 2$, $y = \sqrt{x} - 1$;

в) $y = -3x$, $y = -3x + 2$, $y = -3x - 0{,}5$.

187. а) $y = 0{,}5x^2$, $y = 0{,}5x^2 - 1$, $y = 0{,}5x^2 + 3$;

б) $y = -\dfrac{12}{x}$, $y = -\dfrac{12}{x} + 3$, $y = -\dfrac{12}{x} - 1$;

в) $y = 2\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x} - 3$, $y = 2\sqrt{x} + 2$.

188. а) $y_1 = 2x$, $y_2 = 2(x-1)$, $y_3 = 2(x+3)$;

б) $y_1 = -x^2$, $y_2 = -(x+2)^2$, $y_3 = -(x-3)^2$;

в) $y_1 = \dfrac{4}{x}$, $y_2 = \dfrac{4}{x-3}$, $y_3 = \dfrac{4}{x+1}$.

189. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $2x - 6 = \sqrt{x}$; б) $x^2 = x + 2$; в) $x = x^3$; г) $\dfrac{3}{x} = 3x$.

190*. Вважають, що при заглибленні на кожні 30,5 м внутрішня температура Землі підвищується на 1 °C. На глибині 5 м вона дорівнює 15 °C. Задайте залежність температури t від глибини h. Яка температура на глибині 1 км? А на глибині 3 км?

191. Чим різняться поняття «графік функції» і «графік рівняння»? Наведіть приклади.

Вправи для повторення

192. Розв'яжіть рівняння:

а) $3x^2 - 5x + 2 = 0$; б) $x^2 + 6x + 6 = 0$; в) $5x^2 - x + 1 = 0$.

193. З двох розчинів солі – 10-відсоткового і 15-відсоткового – треба утворити 40 г 12-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину потрібно взяти?

194. Спростіть вираз, якщо a, b, c – додатні числа:

а) $\sqrt{9a^4b^2c^6}$; б) $\sqrt{0{,}25a^2b^6c^{10}}$;

в) $-\sqrt{16a^4b^4c^6}$; г) $-\sqrt{2{,}25a^2b^2c^8}$.

§ 5. Властивості функції

Щоб вивчати процеси і явища навколишнього світу, потрібно вміти досліджувати відповідні математичні моделі, зокрема і функції. *Дослідити функцію* – це означає виявити її найважливіші властивості:

1) вказати область визначення;
2) вказати область значень;
3) з'ясувати, чи не є дана функція парною або непарною;
4) знайти точку перетину графіка функції з віссю y;
5) знайти нулі функції та проміжки знакосталості;
6) визначити проміжки зростання чи спадання.

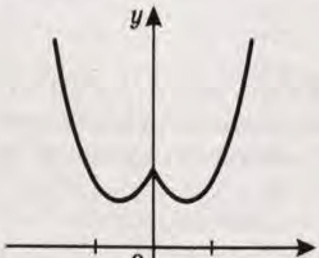
Узагальнивши все, слід побудувати графік функції.

Область визначення і область значень. Установлюючи область визначення функції, вказують усі значення, яких може набувати аргумент. Якщо функцію задано формулою, а про її область визначення нічого не сказано, то розуміють, що вона така сама, як і область допустимих значень змінної, яка входить до цієї формули.

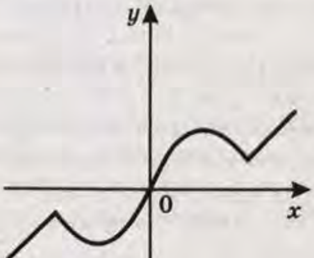
Якщо функцію задано графічно, то область визначення функції – проекція її графіка на вісь x; область значень функції – проекція її графіка на вісь y (див. мал. 12). Наприклад, область визначення функції $y = x^2$ – множина всіх дійсних чисел R, область її значень – проміжок $[0; +\infty)$.

Парність. Функція $y = f(x)$ називається ***парною***, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $f(-x) = f(x)$. Функція $y = f(x)$ називається ***непарною***, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x із області визначення $f(-x) = -f(x)$.

Існують функції ні парні, ні непарні. Це такі функції, у яких або область визначення несиметрична відносно нуля, або для яких не виконується жодна з умов $f(-x) = \pm f(x)$. Якщо функцію задано графічно, то дослідити її на парність або непарність досить просто, оскільки графік парної функції симетричний відносно осі y (мал. 23), а непарної – відносно початку координат (мал. 24).



Мал. 23



Мал. 24

Наприклад, з функцій, заданих на R, $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = |x| - 3$ – парні, $y = x^3$, $y = x^3 + x$ – непарні, а $y = 2x + 3$, $y = x^2 + x$ – ні парні, ні непарні. Побудуйте їхні графіки.

Нулі функції та проміжки знакосталості. Значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю, називають ***нулями функції***. Проміжки області визначення функції, на яких функція не змінює знака (тобто має тільки додатні або тільки від'ємні значення), називають ***проміжками знакосталості***.

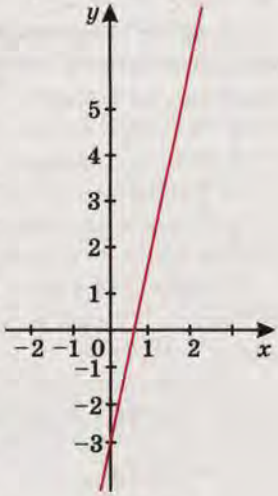
Щоб знайти нулі функції $y = f(x)$, потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$. Корені цього рівняння є нулями функції.

Щоб знайти проміжки знакосталості, потрібно розв'язати нерівності $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$. Розв'язки нерівності $f(x) > 0$ – це значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень.

Наприклад, нулями функції $y = x^2 - 9$ є числа 3 і -3, оскільки $f(3) = 0$ і $f(-3) = 0$.

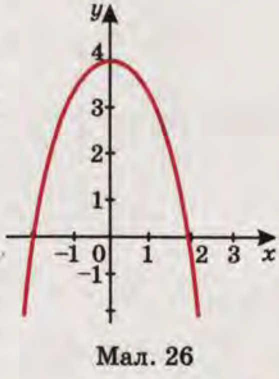
Функція набуває від'ємних значень, якщо $x^2 - 9 < 0$, тобто коли $x \in (-3; 3)$.

Монотонність. Функцію називають ***зростаючою*** на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає більше значення функції. Функцію називають ***спадною*** на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає менше значення функції.



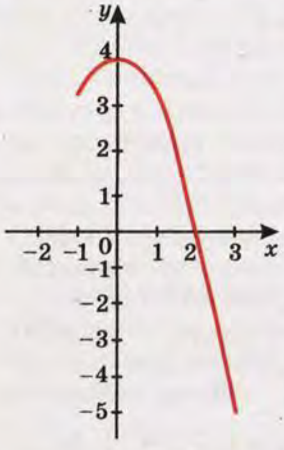
Мал. 25

Якщо функція на всій області визначення зростає або на всій області визначення спадає, її називають *монотонною*. Якщо ж функція зростає на деякому проміжку або спадає на ньому, то говорять, що вона монотонна на даному проміжку. Наприклад, монотонною є функція $y = 5x - 3$, вона на всій області визначення зростає (мал. 25). Функція $y = 4 - x^2$ монотонна на проміжку $(-\infty; 0)$, на якому зростає, і на проміжку $(0; +\infty)$, на якому спадає. На всій області визначення вона не монотонна (мал. 26).



Мал. 26

Характеризуючи властивості функції, часто зазначають також, у яких точках вона має найбільше значення, у яких – найменше. Наприклад, функція $y = 4 - x^2$, задана на проміжку $[-1; 3]$, у точці $x = 0$ має найбільше значення 4, а в точці $x = 3$ –



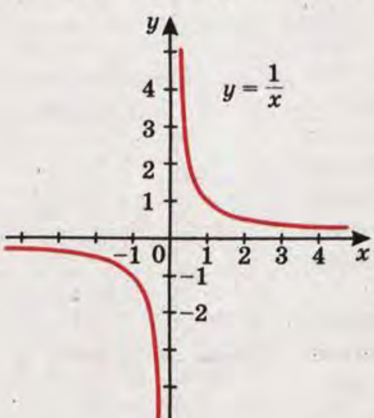
Мал. 27

найменше значення, яке дорівнює −5 (мал. 27).

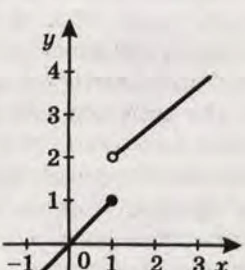
Графік функції $y = \frac{1}{x}$ складається з двох роз'єднаних віток (мал. 28). При $x = 0$ значення цієї функції не існує. Кажуть, що в точці $x = 0$ вона має *розрив*. Якщо графіком функції є неперервна лінія (її можна провести, не відриваючи олівець від паперу), то таку функцію називають ***неперервною функцією***. Приклади неперервних функцій подано на малюнках 25–27. А на малюнках 29 і 30 зображено графіки функцій, які мають розрив у точці $x = 1$. Вони не є неперервними в цій точці.

Деякі з властивостей функцій досить просто з'ясовувати, дивлячись на її графік. Наприклад, функція, графік якої зображено на малюнку 31, має такі властивості.

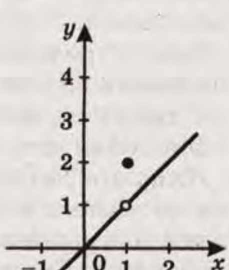
1. Область визначення $D(y) = [-2; 24]$.
2. Область значень $E(y) = [-2; 4]$.
3. Парність. Функція ні парна, ні непарна.
4. Точки перетину графіка функції з віссю y. Одна точка – $(0; 1)$.
5. Нулі функції та проміжки знакосталості. Функція має два нулі: $x_1 = 2$ і $x_2 = 9$. $f(x) > 0$, якщо $x \in (-2; 2) \cup (9; 24)$, а $f(x) < 0$, якщо $x \in (2; 9)$.
6. Монотонність. Функція спадає на двох проміжках $x \in (-2; 6)$ і $x \in (18; 24)$; зростає функція на одному проміжку $x \in (6; 18)$.



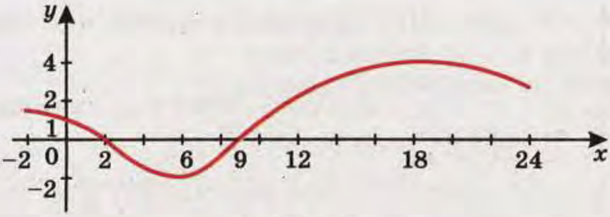
Мал. 28



Мал. 29



Мал. 30



Мал. 31

7. Функція неперервна. Має найбільше значення $y = 4$ і найменше значення $y = -2$.

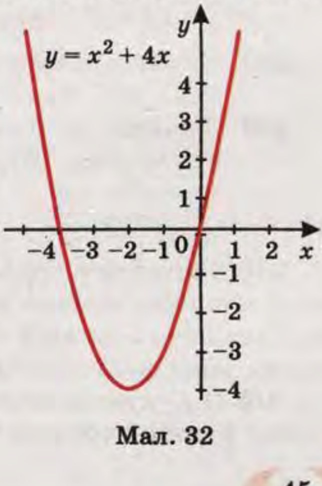
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке область визначення і область значень функції? Як їх знайти за допомогою графіка?
2. Що називають нулями функції?
3. Які функції називають зростаючими? А спадними?
4. Чи може функція на одному проміжку спадати, а на іншому – зростати?
5. Які функції називаються парними? Наведіть приклади парних функцій.
6. Які функції називаються непарними? Наведіть приклади непарних функцій.
7. Чи правильно, що кожна функція є парною або непарною?
8. Чи існують функції, які одночасно є і парними, і непарними?

Виконаємо разом

1. Побудуйте графік функції $y = x^2 + 4x$ і визначте, на якій множині значень аргументу дана функція спадає, а на якій зростає. При якому значенні x значення даної функції найменше?

● *Розв'язання.* Дана функція квадратична, її графік – парабола. Формулу $y = x^2 + 4x$ можна подати в іншому вигляді: $y = x(x + 4)$. З останньої формули видно, що значення функції дорівнюють нулю при $x = 0$ і $x = -4$. У точках з такими координатами графік даної функції перетинає вісь x. Вісь параболи проходить через точку з абсцисою $x = -2$. При такому значенні аргументу $y = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$. За знайденими координатами трьох точок будуємо параболу (мал. 32). Як видно з графіка, дана функція спадає на про-



Мал. 32

міжку $(-\infty; -2)$, зростає на проміжку $(-2; +\infty)$, а найменше значення має при $x = -2$; воно дорівнює -4.

2. Парною чи непарною є функція:

а) $y = x^2 - 9$; б) $y = \dfrac{2}{x}$; в) $y = 5x + 1$?

• Розв'язання. а) Область визначення $D(y)$ функції $y = x^2 - 9$ (множина всіх дійсних чисел R) є симетричною відносно 0 і $f(-x) = (-x)^2 - 9 = x^2 - 9 = f(x)$. Отже, $y = x^2 - 9$ – функція парна.

б) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, симетрична відносно 0 і $f(-x) = \dfrac{2}{-x} =$

$= -\dfrac{2}{x} = -f(x)$.

Отже, $y = \dfrac{2}{x}$ – функція непарна.

в) $D(y) = R$.

$f(-x) = 5(-x) + 1 = -5x + 1 = -(5x - 1) \neq \pm f(x)$.

Отже, функція $y = 5x + 1$ – ні парна, ні непарна.

Відповідь. а) Парна; б) непарна; в) ні парна, ні непарна.

Виконайте усно

195. Які з функцій визначені на всій числовій осі:

а) $y = 3x - 5$; б) $y = x^2 + 10$; в) $y = x^{-1} + 1$?

196. Функція $y = f(x)$ має найменше значення, що дорівнює 4. Яке найменше значення має функція: а) $y = f(x) + 5$; б) $y = f(x) - 7$?

197. Функція $f(x)$ має найбільше значення в точці $x = 7$. У якій точці має найбільше значення функція: а) $y = f(x) - 15$; б) $y = f(x) + 7$?

198. Які з функцій зростаючі, які спадні:

а) $y = 2x + 3$; б) $y = 7 - x$; в) $y = \dfrac{1}{x}$; г) $y = \sqrt{x}$?

199. На яких проміжках зростає і на яких спадає функція:

а) $y = x^2$; б) $y = -x^2$; в) $y = 1 + x^2$; г) $y = (x + 3)^2$?

200. Функція $y = f(x)$ – парна. Чи буде парною функція:

а) $y = -f(x)$; б) $y = f(x + a)$; в) $y = f(x) + b$?

А

201. Побудуйте графік функції $y = 0{,}5x + 3$ і визначте, на якій множині значень аргументу дана функція набуває додатних значень, а на якій – від'ємних. При якому значенні x значення даної функції дорівнює нулю?

202. Побудуйте графіки функцій $y = 0{,}1x - 2$ і $y = 1 - 2x$. Яка із цих функцій зростаюча, а яка спадна?

203. Знайдіть область значень функції $y = x + 3$, заданої на проміжку:

а) $[-3; 3]$; б) $[1; 7)$; в) $[0; +\infty)$.

204. Знайдіть область значень функції $y = 4 - x$, заданої на проміжку:

а) $[-3; 0]$; б) $[1; 5)$; в) $(-\infty; 0)$.

205. Покажіть, що функція $f(x) = 3x + 1$ ні парна, ні непарна.

206. Доведіть, що дана функція парна:

а) $y = x^2 + 3$; б) $y = 4 : x^2$; в) $y = -x^2 + 1$; г) $y = 2 + x^4$.

207. Доведіть, що дана функція непарна:

а) $y = -x^3$; б) $y = x + x^3$; в) $y = 5x$; г) $y = x^5$.

208. Покажіть, що дана функція ні парна, ні непарна:

а) $y = x^3 + 2$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = x^2 + 3x$; г) $y = (x - 3)^2$.

209. Скільки нулів має функція:

а) $y = x + 3$; б) $y = 6x$; в) $y = x^2 - 1$; г) $y = x^2 - 7x$?

210. Знайдіть нулі функції:

а) $y = 12x - 3$; б) $y = x^2 - 4$; в) $y = \sqrt{x} - 5$; г) $y = x^2 - 4x$.

211. Запишіть проміжки знакосталості функції:

а) $y = x + 3$; б) $y = x^2 - 25$; в) $y = 3x$; г) $y = -x^2 + 9$.

212. Які з функцій зростаючі, а які – спадні:

а) $y = 2x$; б) $y = -x - 2$; в) $y = x^3$; г) $y = x$?

213. Побудуйте графік функції та запишіть її властивості:

а) $y = 5x - 1$; б) $y = -2x$; в) $y = 0{,}5x^2$; г) $y = x^3 - 1$.

214. Побудуйте графік функції:

а) $y = -x^2 + 1$; б) $y = 3$; в) $y = 5x$;

г) $y = 5x - 1$; ґ) $y = \sqrt{x}$; д) $y = \dfrac{3}{x}$.

Укажіть, яка з функцій є парна, яка непарна.

Б

Знайдіть область визначення функції, заданої формулою (215–217).

215. а) $y = x(x - 5)$; б) $y = x^2 + 6x + 8$; в) $y = -2{,}5x - 0{,}5$;

г) $y = \dfrac{16 - x^2}{x + 5}$; ґ) $y = \dfrac{x^2 + 9}{3x - 1}$; д) $y = \dfrac{2}{x} + 1$.

216. а) $y = \dfrac{x + 7}{x^2 - 36}$; б) $y = \dfrac{2x}{1 - 25x^2}$; в) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$;

г) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x - 2}$; ґ) $y = \dfrac{3}{x(x + 1)}$; д) $y = x(4 + x)$.

217. а) $y = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{x + 2}}{x - 2}$; в) $y = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$;

г) $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$;   ґ) $y=2\sqrt{5+x^2}$;   д) $y=\sqrt{x^2-6x+9}$.

218. Знайдіть нулі функції y та інтервали її знакосталості, якщо:

а) $y = x^2 + 10x - 11$;   б) $y = x^2 + 18x + 81$;
в) $y = 6x^2 - 5x - 1$;   г) $y = 2x^2 + 3x - 9$;
ґ) $y = -2x^2 + 7x - 3$;   д) $y = 5 - 2x - 7x^2$;
е) $y = 6x^2 - x$;   є) $y = -2x(x + 3)$.

219. При яких значеннях x дана функція має найменше значення:

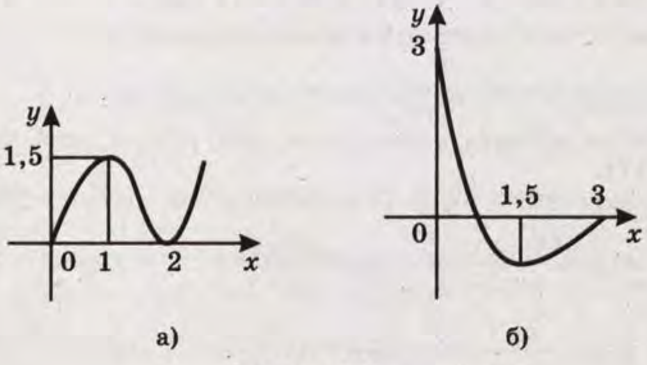
а) $y = x^2 - 6x + 9$;   б) $y = x^2 + 4x + 7$;
в) $y = 4x^2 - 12x - 3$;   г) $y = 4x^2 - 4x + 1$?

220. Знайдіть найбільше значення функції:

а) $y = 3 - (x - 2)^2$;   б) $y = -0{,}25(x + 5)^2$;
в) $y = 6x - x^2 - 10$;   г) $y = -5x^2 + 4x + 1$.

221. Зобразіть графіки (мал. 33) у зошиті. Кожний з графіків добудуйте так, щоб одержана функція була парною. Для побудованих графіків установіть: а) нулі функції; б) проміжки знакосталості; в) інтервали зростання і спадання; г) найбільше і найменше значення функції.

222. Зобразіть графіки (мал. 33) у зошиті. Кожний з графіків добудуйте так, щоб одержана функція була непарною. Для побудованих графіків установіть: а) нулі функції; б) проміжки знакосталості; в) інтервали зростання і спадання; г) найбільше і найменше значення функції.



Мал. 33

223. Не будуючи графіка функції y, встановіть, при яких значеннях x вона набуває додатних значень.

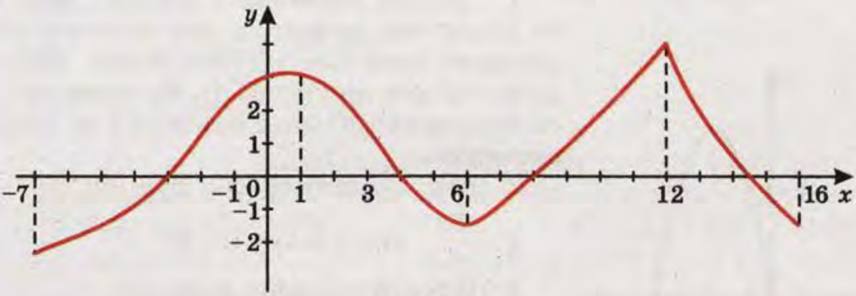
а) $y = 2x + 5$;   б) $y = 0{,}5x - 3$;   в) $y = -x + 4$;   г) $y = -3x - 2$;
ґ) $y = x^2 - 4$;   д) $y = \sqrt{x} - 5$;   е) $y = 4x^2 - 1$;   є) $y = x^2 - 7x$.

224. Побудуйте графік функції та встановіть, при яких значеннях x вона зростає або спадає.

а) $y = 5x$; б) $y = -x^2 + 4$; в) $y = (x + 1)(1 - x)$; г) $y = x^3 + 2$;

ґ) $y = x^2 - 3$; д) $y = 4 : x^2$; е) $y = \sqrt{x}$; є) $y = x^2 + 3x$.

225. На малюнку 34 зображено графік функції $y = f(x)$. Знайдіть: а) область визначення і область значень функції; б) нулі функції; в) проміжки знакосталості; г) проміжки, на яких функція зростає; ґ) проміжки, на яких функція спадає; д) найбільше і найменше значення функції.



Мал. 34

Вправи для повторення

226. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 15y - 8z = 29, \\ 3y + 2z = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 8t = 59, \\ 6x + 5t = 107. \end{cases}$

227. Які значення змінних задовольняють пропорцію:

а) $(x + 1) : 2 = 4 : (x - 1)$; б) $(x - 4) : 3 = 3 : (x + 4)$?

228. Порівняйте значення виразів:

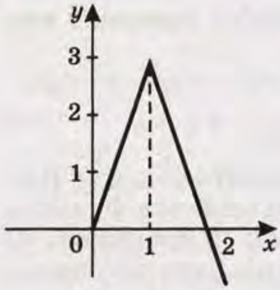
а) $3\sqrt{10}$ і $2\sqrt{22}$; б) $-5\sqrt{10}$ і $-2\sqrt{50}$;

в) $-1,5\sqrt{2}$ і $-2\sqrt{1,1}$; г) $0,2\sqrt{0,1}$ і $0,1\sqrt{0,2}$.

Самостійна робота № 2

Варіант 1

1. Тіло рухається зі швидкістю 2,5 км/год. Задайте формулою функцію, яка виражає залежність пройденого тілом шляху від часу. Побудуйте графік цієї функції. Як називається така функція? Який шлях пройде тіло за 4 години?



Мал. 35

2. Чи проходить графік функції $y = \dfrac{2x}{x-1}$ через точку (3; 3)?

3. Побудуйте графік функції:
а) $y = x^2 - 2x$; б) $y = x^2 - 2x + 3$.

4*. Зобразіть графік (мал. 35) у зошиті й добудуйте його так, щоб утворений графік задавав парну функцію.

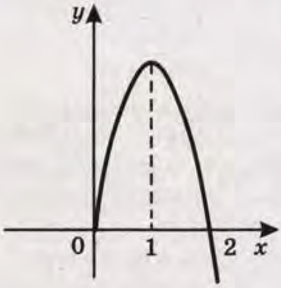
Варіант 2

1. Густина речовини 1,5 кг/м^3. Задайте формулою функцію, яка виражає залежність маси тіла від його об'єму. Побудуйте графік цієї функції. Як називається така функція? Знайдіть масу 2 м^3 даної речовини.

2. Чи проходить графік функції $y = \dfrac{3x}{x+1}$ через точку (2; 2)?

3. Побудуйте графік функції:
а) $y = x^2 + 2x$; б) $y = x^2 + 2x - 1$.

4*. Зобразіть графік (мал. 36) у зошиті й добудуйте його так, щоб утворений графік задавав непарну функцію.



Мал. 36

§ 6. Корені *n*-го степеня

Пригадаємо, що таке квадратний корінь і його арифметичне значення. *Квадратним коренем із числа a* називають число, квадрат якого дорівнює a. З додатного числа квадратних коренів існує два. Наприклад, числа 7 і −7 – квадратні корені із числа 49, оскільки $7^2 = 49$ і $(-7)^2 = 49$. Невід'ємне значення квадратного кореня із числа a називають арифметичним значенням квадратного кореня із числа a і позначають символом $\sqrt{a}$. Друге значення квадратного кореня із числа a дорівнює $-\sqrt{a}$. Квадратний корінь із числа 0 дорівнює 0. Квадратний корінь з від'ємного числа не існує.

Квадратний корінь називають ще *коренем другого степеня*.

Подібно до коренів другого степеня існують також корені третього, четвертого, ..., *n*-го степенів.

Вираз $\sqrt[n]{a}$ називають *коренем n-го степеня* із числа a. Тут a – *підкореневий вираз*, $\sqrt{}$ – *знак кореня*, n – *показник кореня*.

Залежно від показників корені бувають другого, третього і вищих степенів. Показник кореня – завжди число натуральне; замість $\sqrt[2]{a}$ пишуть $\sqrt{a}$.

Коренем n-го степеня із числа a називають число, n-й степінь якого дорівнює a. Наприклад, корінь третього степеня із числа 8 дорівнює 2, оскільки $2^3 = 8$. Числа 2 і -2 – корені 4-го степеня із числа 16, оскільки $2^4 = 16$ і $(-2)^4 = 16$.

Невід'ємний корінь n-го степеня з додатного числа a називають *арифметичним значенням кореня n-го степеня із числа a*. Його позначають символом $\sqrt[n]{a}$.

Приклади:

$\sqrt[3]{64} = 4$, оскільки $4^3 = 64$,

$\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3^4 = 81$,

$\sqrt[5]{0,00001} = 0,1$, оскільки $0,1^5 = 0,00001$.

Обчислення значень коренів n-го степеня із чисел називають *добуванням коренів* із цих чисел. З деяких чисел корені можна добувати усно, з інших – користуючись калькулятором або таблицями.

Якщо натуральне число n парне, то $\sqrt[n]{a}$ – це *арифметичний корінь* із числа $a \geqslant 0$, тобто невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a. У цьому випадку область визначення виразу $\sqrt[n]{a}$ – множина всіх невід'ємних дійсних чисел. Наприклад, для виразу $\sqrt{x-5}$ – область визначення $[5; +\infty)$, для $\sqrt[4]{x+7}$ – область визначення $[-7; +\infty)$.

При непарному натуральному n вираз $\sqrt[n]{a}$ має зміст і тоді, коли число a від'ємне, наприклад: $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[9]{0} = 0$, $\sqrt[5]{-0,00032} = -0,2$.

Для додатних підкореневих виразів і довільних показників коренів справджуються властивості, подібні до властивостей квадратних коренів:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; 4) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$;

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; 5) $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$;

3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$; 6) $\sqrt[n]{a^{nk}} = a^k$.

Довести ці властивості коренів n-х степенів можна так само, як і раніше (у 8-му класі) доводилися відповідні властивості квадратних коренів. Доведемо першу властивість (її називають *основною властивістю коренів*).

4*

Якщо a і b – довільні невід'ємні числа, то числа $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{ab}$ і $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ також невід'ємні. Крім того,

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=ab.$$

Отже, $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ – невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює ab, тобто

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.$$

Теорему про корінь з добутку можна поширити на три і більше множників. Справді, якщо числа a, b і c невід'ємні, то

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{(ab)\cdot c}=\sqrt[n]{ab}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}.$$

Якщо в наведених тотожностях поміняти місцями їхні ліві й праві частини, дістанемо:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},\qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Ці тотожності показують, як можна множити і ділити корені. Наприклад,

$$\sqrt[3]{20}\cdot\sqrt[3]{50}=\sqrt[3]{20\cdot 50}=\sqrt[3]{1000}=10,\quad \frac{\sqrt[4]{486}}{\sqrt[4]{6}}=\sqrt[4]{\frac{486}{6}}=\sqrt[4]{81}=3.$$

На основі властивостей (1–5) вирази, які містять корені, можна множити, ділити, підносити до степеня і добувати з них корені.

Зверніть увагу! $\sqrt[n]{a^n}=a$, якщо $a\geqslant 0$; $\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$; $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$.

Приклади:

$$\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{18}=\sqrt[3]{12\cdot 18}=\sqrt[3]{4\cdot 3\cdot 9\cdot 2}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3}=6,$$

$$\frac{5\sqrt[3]{16}}{6\sqrt[3]{250}}=\frac{5}{6}\cdot\sqrt[3]{\frac{16}{250}}=\frac{5}{6}\cdot\sqrt[3]{\frac{8}{125}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{3},$$

$$\left(2\sqrt[4]{9}\right)^6=2^6\cdot\left(\sqrt[4]{9}\right)^6=64\cdot\left(\sqrt{9}\right)^3=64\cdot 3^3=1728.$$

Щоб перемножити корені з різними показниками, їх спочатку зводять до спільного показника:

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{2^4}\cdot\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{2^4\cdot 3^3}=\sqrt[12]{432}.$$

Дії додавання і віднімання виконують з *подібними коренями* (у яких показники коренів і підкореневі вирази однакові).

Приклад:

а) $2\sqrt{17}+3\sqrt{17}=5\sqrt{17}$; б) $a\sqrt[5]{17}-2a\sqrt[5]{17}=-a\sqrt[5]{17}$.

Розглянемо ще деякі перетворення виразів з коренями (за умови, що $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$).

Винесення множника за знак кореня. У загальному вигляді це перетворення виконують у такий спосіб:

$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}.$

Приклади:

$\sqrt[4]{810} = \sqrt[4]{81 \cdot 10} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{10} = 3\sqrt[4]{10};$

$\sqrt[5]{64a^7 b^{10}} = \sqrt[5]{32 \cdot a^5 \cdot \left(b^5\right)^2 \cdot 2 \cdot a^2} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{\left(b^5\right)^2} \cdot \sqrt[5]{2a^2} = 2 \cdot a \times$

$\times b^2 \cdot \sqrt[5]{2a^2} = 2ab^2 \cdot \sqrt[5]{2a^2}.$

Внесення множника під знак кореня. Це перетворення, обернене до попереднього.

Приклади:

$5\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{500};$

$2a^3b\sqrt[4]{ab^3} = \sqrt[4]{\left(2a^3b\right)^4} \cdot \sqrt[4]{ab^3} = \sqrt[4]{16a^{12} \cdot b^4 \cdot a \cdot b^3} = \sqrt[4]{16a^{13} \cdot b^7}.$

Звільнення дробу від ірраціональності в знаменнику. У загальному вигляді (при $a > 0$, $m < n$) це перетворення виконують так:

$$\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}} = \frac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}.$$

Приклади:

$$\frac{15}{\sqrt[4]{3}} = \frac{15 \cdot \sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3^3}} = \frac{15 \cdot \sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{15 \cdot \sqrt[4]{3^3}}{3} = 5 \cdot \sqrt[4]{27};$$

$$\frac{b}{\sqrt[3]{2ab^2}} = \frac{b \cdot \sqrt[3]{2^2 \cdot a^2 b}}{\sqrt[3]{2ab^2} \cdot \sqrt[3]{2^2 a^2 b}} = \frac{b \cdot \sqrt[3]{4a^2 b}}{\sqrt[3]{2ab^2 \cdot 4a^2 b}} = \frac{b\sqrt[3]{4a^2 b}}{2ab} = \frac{\sqrt[3]{4a^2 b}}{2a}.$$

Увівши символи $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, ..., $\sqrt[n]{\ }$, ми тим самим розширюємо множину відомих вам виразів. Уведемо кілька назв для розглядуваних виразів. Якщо вираз, крім чисел, змінних, дужок і знаків дій додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня з раціональним показником або добування кореня, не містить нічого іншого, його називають *алгебраїчним виразом*. Алгебраїчний вираз, який містить корені, називається *ірраціональним виразом*. Усі інші алгебраїчні вирази – *раціональні*.

Вирази із числами або змінними, які не є алгебраїчними, називаються *трансцендентними*. Такими, зокрема, є тригонометричні вирази.

Зв'язки між названими видами виразів показано на схемі.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що називається коренем n-го степеня із числа a?
2. Що називається коренем п'ятого степеня із числа a?
3. Який знак має корінь непарного степеня:
   а) з додатного числа; б) з від'ємного числа?
4. Яким правилом треба скористатися при визначенні знака кореня непарного степеня?
5. Що називається арифметичним значенням кореня (або арифметичним коренем)?
6. Сформулюйте найважливіші властивості коренів n-го степеня.
7. Сформулюйте основну властивість коренів n-го степеня.

Виконаємо разом

1. Обчисліть значення виразу: а) $2\sqrt{64}+5\sqrt[3]{64}$; б) $\sqrt[6]{2\frac{1}{4}}:\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

• Розв'язання. а) $2\sqrt{64}+5\sqrt[3]{64}=2\cdot 8+5\cdot 4=36$.

$$б)\ \sqrt[6]{2\frac{1}{4}}:\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=\sqrt[6]{\frac{9}{4}}:\sqrt[6]{\left(\frac{4}{9}\right)^2}=\sqrt[6]{\frac{9}{4}}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{9}{4}\right)^2}=\sqrt[6]{\left(\frac{9}{4}\right)^3}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}.$$

2. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

• Розв'язання. $\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$.

3. Спростіть вираз $(\sqrt[4]{a}+1)(\sqrt[4]{a}-1)$.

• Розв'язання. Даний вираз – добуток суми виразів $\sqrt[4]{a}$ і 1 на їх різницю. За формулою $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ маємо:

$$(\sqrt[4]{a}+1)(\sqrt[4]{a}-1)=(\sqrt[4]{a})^2-1^2=\sqrt{a}-1.$$

Виконайте усно

Обчисліть **(229–231)**.

229. а) $\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[4]{0,0016}$; в) $\sqrt[5]{32}$;
г) $\sqrt[3]{-125}$; ґ) $\sqrt[5]{32^{-5}}$; д) $\sqrt[3]{-0,008}$.

230. а) $\sqrt[3]{8000}$; б) $\sqrt[4]{625}$; в) $\sqrt[3]{-1000}$;
г) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{8}}$; ґ) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{8}}$; д) $\sqrt[5]{-0,00001}$.

231. а) $(\sqrt[3]{12})^3$; б) $\sqrt[6]{7^6}$; в) $\sqrt[8]{9^4}$;
г) $(-\sqrt{13})^2$; ґ) $-\sqrt[4]{9^4}$; д) $\sqrt[4]{(-9)^4}$.

232. Що більше:
а) $(\sqrt[8]{90})^8$ чи $(\sqrt[9]{85})^9$; б) $\sqrt[6]{11^2}$ чи $\sqrt[3]{11}$; в) $\sqrt[9]{6}$ чи $\sqrt[18]{36}$?

233. Знайдіть ребро куба, якщо його об'єм дорівнює:
а) 1 дм^3; б) 27 см^3; в) 64 мм^3;
г) 0,008 м^3; ґ) 0,125 дм^3; д) 0,216 м^3.

234. Обчисліть значення виразу:
а) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[4]{7^5}:\sqrt[4]{7}$; в) $(\sqrt[6]{9})^3$.

А

Знайдіть арифметичний квадратний корінь із числа **(235, 236)**.

235. а) 0,81; б) 0,25; в) 2,25; г) 1,21.

236. а) $\dfrac{36}{169}$; б) $\dfrac{144}{289}$; в) $\dfrac{169}{100}$; г) $\dfrac{81}{256}$.

Знайдіть арифметичний корінь четвертого степеня із числа **(237, 238)**.

237. а) 0; б) 1; в) 16; г) 0,0016.

238. а) $\dfrac{16}{81}$; б) $\dfrac{256}{625}$; в) 0,0001; г) 0,1296.

Знайдіть кубічний корінь із числа **(239, 240)**.

239. а) 216; б) 64; в) 343; г) 8.

240. а) $\dfrac{1}{27}$; б) 0,027; в) 0,001; г) $\dfrac{64}{125}$.

Обчисліть **(241–243)**.

241. а) $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{-125}$, $\sqrt[3]{0,008}$, $\sqrt[3]{0,000216}$;

б) $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[4]{625}$, $\sqrt[4]{10\,000}$, $\sqrt[4]{0{,}0081}$, $\sqrt[4]{0{,}00000016}$, $\sqrt[4]{2401}$.

242. а) $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[5]{1024}$, $\sqrt[5]{243}$, $\sqrt[5]{0{,}03125}$, $\sqrt[5]{100\,000}$, $\sqrt[5]{0{,}00001}$;

б) $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[6]{729}$, $\sqrt[6]{15\,625}$, $\sqrt[6]{4096}$, $\sqrt[6]{0{,}046656}$.

243. а) $\sqrt[3]{-1000}$; б) $\sqrt[5]{-3125}$; в) $\sqrt[3]{-64}$;

г) $\sqrt[5]{-1024}$; ґ) $\sqrt[5]{-0{,}00032}$; д) $\sqrt[3]{-343}$.

Спростіть вираз **(244–247)**:

244. а) $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$; б) $(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)$;

в) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$; г) $(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2$.

245. а) $(2\sqrt{3}+4)(2\sqrt{3}-4)$; б) $(3\sqrt{5}-2)(3\sqrt{5}+2)$;

в) $(\sqrt{2}+1)^2$; г) $(1-\sqrt{3})^2$.

246. а) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$; б) $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$; в) $\sqrt{2\sqrt[3]{5}}$.

247. а) $\sqrt[3]{(-2)^6}$; б) $\sqrt[3]{(-4)^9}$; в) $(\sqrt[5]{7})^{10}$; г) $(\sqrt[4]{5})$.

248. Розгадайте ребус $\sqrt[3]{\frac{\bigcirc}{\boxed{7}}}$.

Винесіть множник з-під знака кореня (тут і далі $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$) **(249, 250)**.

249. а) $\sqrt[3]{3000}$; б) $\sqrt[4]{48}$; в) $\sqrt[5]{486}$; г) $\sqrt[4]{324}$.

250. а) $\sqrt[4]{162a^6}$; б) $\sqrt[3]{32a^5b^3}$; в) $\sqrt[6]{a^6b^7}$; г) $\sqrt[5]{a^{11}b^6}$.

Внесіть множник під знак кореня **(251, 252)**.

251. а) $3\sqrt[3]{3}$; б) $2\sqrt[4]{3}$; в) $2\sqrt[6]{0{,}25}$; г) $a\sqrt[5]{2}$.

252. а) $ab\sqrt[4]{5}$; б) $a^2\sqrt[3]{ab}$; в) $3a\sqrt[4]{2b}$; г) $0{,}5b\sqrt[5]{(2b)^3}$.

Звільніться від ірраціональності в знаменнику **(253, 254)**.

253. а) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$; б) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9a}}$; в) $\dfrac{10a}{\sqrt[5]{2a^2}}$; г) $\dfrac{6ab^2}{\sqrt[5]{8b}}$.

254. а) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$; б) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$; в) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{8}}$; г) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9}}$.

Розв'яжіть рівняння **(255, 256)**.

255. а) $x^2 = 64$; б) $x^2 = 0{,}49$; в) $x^2 = 121$;
г) $x^3 = 125$; ґ) $x^3 = 0{,}008$; д) $x^3 = 1000$.

256. а) $x^3 = -1$; б) $x^3 = -64\,000$; в) $x^4 = 256$;
г) $x^5 = 32$; ґ) $x^4 = 0{,}0625$; д) $x^4 = -16$.

Б

257. Обчисліть:

а) $\sqrt[4]{1296}$; б) $\sqrt[4]{2401}$; в) $\sqrt[6]{15625}$; г) $\sqrt[12]{4096}$.

Обчисліть значення виразу **(258–261)**.

258. а) $\sqrt{9}+\sqrt{4}-\sqrt[6]{64}$; б) $\sqrt{36}+\sqrt[4]{16}$;

в) $12-6\sqrt[3]{0{,}125}$; г) $1+10\sqrt[4]{0{,}0081}$.

259. а) $3\sqrt[4]{16}-4\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}+\sqrt{2{,}25}$;

в) $\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{64}+\sqrt[5]{32}$; г) $\sqrt[4]{16}-\sqrt[3]{64}$.

260. а) $\sqrt{9}+\sqrt{4}-\sqrt[6]{64}$; б) $\sqrt{36}+\sqrt[4]{16}$;

в) $\sqrt{0{,}81}+\sqrt[3]{0{,}001}$; г) $\sqrt[3]{0{,}027}-\sqrt{0{,}04}$.

261. а) $5-\sqrt[4]{256}$; б) $7+\sqrt[3]{8}-\sqrt[7]{128}$;

в) $\sqrt[5]{-32}+\sqrt[4]{16}$; г) $\sqrt[3]{-27}+\sqrt[4]{81}$.

262. Обчисліть:

а) $\sqrt[3]{27}+\sqrt[5]{32}$; б) $\sqrt[4]{81}+2\sqrt[3]{1}$; в) $3\sqrt[4]{16}+\sqrt[7]{0}$;

г) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}-\sqrt[4]{\frac{1}{625}}$; ґ) $\sqrt[4]{16^{-1}}-\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$; д) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$.

263. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{16}$; б) $\sqrt[4]{144}\cdot\sqrt{3}$; в) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{324}$.

264. Спростіть вираз:

а) $\sqrt[4]{ab}\left(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3}\right)$; б) $\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^4}\right)$;

в) $\sqrt[3]{4a}\left(\sqrt[3]{2a^2}+\sqrt[3]{2a^{-1}}\right)$; г) $\left(\sqrt[4]{a^3x}-\sqrt[4]{ax^3}\right):\sqrt[4]{ax}$.

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу **(265–268)**.

265. а) $\frac{5}{\sqrt[6]{125}}$; б) $-\frac{4}{\sqrt{12}}$; в) $-\frac{3}{2\sqrt[4]{3}}$.

266. а) $\frac{6}{0{,}5\sqrt[4]{32}}$; б) $\frac{9}{4\sqrt[8]{64}}$; в) $\frac{3}{7\sqrt[6]{81}}$.

267. а) $\frac{4}{1+\sqrt{5}}$; б) $\frac{15}{1-\sqrt{6}}$; в) $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

268. а) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-5}$; б) $\frac{7}{\sqrt{7}-7}$; в) $\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Розв'яжіть рівняння (269–272).

269. а) $x^2 = 11$; б) $x^4 = 19$; в) $x^8 = 27$.

270. а) $x^8 = 25$; б) $x^7 = 38$; в) $x^9 = -2$.

271. а) $\sqrt{x} = 0$; б) $\sqrt{x} = 1$; в) $\sqrt[3]{x} = 2$.

272. а) $\sqrt{x} = 3$; б) $\sqrt{x} = -3$; в) $\sqrt[3]{x} = -2$.

Вправи для повторення

273. Знайдіть 2,5 % від числа: а) 10; б) 250; в) $3 \cdot 10^7$.

274. Розв'яжіть нерівність:

а) $\dfrac{4,2+2x}{3} > 1,5x - 1,1$; б) $2,3a + 0,8 < \dfrac{5,8a+3,4}{2}$;

в) $\dfrac{0,6m+1,2}{12} \leqslant \dfrac{1,5m-2,5}{15}$; г) $\dfrac{1,3a-0,7}{4} - \dfrac{0,9a+0,3}{3} > 0$.

275. Спростіть вираз:

а) $\left(\dfrac{a^2b}{cd^3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{ac^4}{b^2d^3}\right)^2$; б) $\left(\dfrac{a^2b^2}{cd^3}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{c^2}{b^3d}\right)^3$.

§ 7. Степені з раціональними показниками

Повторимо і дещо розширимо відомості про степені.

1. ***Степенем числа a з натуральним показником n*** **> 1 називають добуток *n* множників, кожний з яких дорівнює *a*,** тобто

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ разів}.$$

2. *Степенем числа a з показником* 1 називають число *a*.

3. Будь-яке відмінне від нуля число в степені 0 дорівнює 1, тобто якщо $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

4. Якщо *n* – довільне натуральне число, а $a \neq 0$ – дійсне, то

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Ці означення повністю розкривають зміст поняття ***степеня із цілим показником***. Наприклад,

$$(\sqrt{2})^0 = 1,\quad 3^{-1} = \frac{1}{3},\quad a^{-3} = \frac{1}{a^3},\quad (2x)^{-4} = \frac{1}{(2x)^4}.$$

Степінь a^n має зміст при кожному цілому n і дійсному $a \neq 0$. А, наприклад, вирази 0^0, 0^{-1}, 0^{-2} і т. п. не мають змісту – це не числа.

Виявляється, можна розглядати степені також з дробовими показниками.

Степенем показника $\frac{m}{n}$ з додатного числа a називають корінь n-го степеня із числа a^m, тобто

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Для степенів додатних чисел a, b з дробовими (раціональними) показниками r і s справджуються такі властивості, як і для степенів із цілими показниками:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$;

2) $a^r : a^s = a^{r-s}$;

3) $(a^r)^s = a^{rs}$;

4) $(ab)^r = a^r b^r$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Ці властивості випливають з доведених властивостей коренів n-го степеня. Для прикладу доведемо першу властивість.

Нехай $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{t}$. Зведемо ці звичайні дроби до спільного знаменника: $r = \frac{mt}{nt}$, $s = \frac{pn}{tn}$. Тоді

$$a^r \cdot a^s = a^{\frac{mt}{nt}} \cdot a^{\frac{pn}{tn}} = \sqrt[nt]{a^{mt}} \cdot \sqrt[nt]{a^{pn}} = \sqrt[nt]{a^{mt+pn}} = a^{\frac{mt+pn}{nt}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{t}} = a^{r+s}.$$

Із цих властивостей випливає, що *вирази з дробовими показниками степенів і додатними основами можна перетворювати, як і вирази із цілими показниками*. Наприклад,

$$a^{\frac{1}{2}} + a = a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\left(1 + a^{\frac{1}{2}}\right);$$

$$\left(x^{\frac{3}{2}} - c\right)\left(x^{\frac{3}{2}} + c\right) = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 - c^2 = x^3 - c^2.$$

Таке трактування степеня з дробовим показником відповідає введеному раніше поняттю степеня із цілим показником. Тому їх можна об'єднати і говорити *про степені з раціональними показниками*.

Обчислюючи степені з раціональними показниками, можна користуватися тотожностями $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ і $a^{\frac{m \cdot k}{n \cdot k}} = a^{\frac{m}{n}}$ (доведіть їх самостійно).

Приклади:

$$8^{\frac{2}{3}} = \left(8^2\right)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = 4; \quad 32^{\frac{4}{5}} = \left(32^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 2^4 = 16; \quad 2^{\frac{9}{3}} = 2^3 = 8.$$

При будь-яких додатних основах значення степенів з дробовими показниками (здебільшого наближені) можна обчислювати, користуючись мікрокалькулятором.

Приклади. Обчисліть значення: а) $0{,}2^{-3}$; б) $5^{0{,}43}$.

• **Розв'язання.** а) 0,2 $\boxed{F}\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{-}$ $\boxed{=}$ 125. Отже, $0{,}2^{-3} = 125$.

б) 5 $\boxed{F}\boxed{y^x}$ 0,43 $\boxed{=}$ 1,99782; $5^{0{,}43} \approx 1{,}99782$.

Зверніть увагу! Степені з дробовими показниками розглядають тільки за умови, що їх основи – числа додатні. А, наприклад, вирази $0^{-0{,}5}$, $(-2)^{\frac{2}{3}}$, $(-\pi)^{1{,}3}$ не мають змісту. Це – записи, які не позначають ніяких чисел.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке n-й степінь числа a?
2. Що розуміють під степенем числа із цілим від'ємним показником?
3. Чи можна підносити число 0 до степеня з від'ємним показником?
4. Що розуміють під степенем з дробовим показником?
5. Які властивості мають степені додатних чисел з раціональними показниками?

Виконаємо разом

1. Обчисліть: $3^{0{,}5} \cdot 9^{0{,}75}$.

• **Розв'язання.** $3^{0{,}5} \cdot 9^{0{,}75} = 3^{0{,}5} \cdot 3^{2 \cdot 0{,}75} = 3^{0{,}5} \cdot 3^{1{,}5} = 3^2 = 9$.

2. Спростіть вираз: $(c^{0{,}5} - 1)(c^{0{,}5} + 1)$.

• **Розв'язання.** $(c^{0{,}5} - 1)(c^{0{,}5} + 1) = (c^{0{,}5})^2 - 1 = c - 1$.

3. Скоротіть дріб: $\dfrac{x^{0{,}75} - 25x^{0{,}25}}{x^{0{,}5} + 5x^{0{,}25}}$.

• **Розв'язання.** Розкладемо на множники чисельник і знаменник дробу та скоротимо його:

$$\frac{x^{0{,}75} - 25x^{0{,}25}}{x^{0{,}5} + 5x^{0{,}25}} = \frac{x^{0{,}25}(x^{0{,}5} - 25)}{x^{0{,}25}(x^{0{,}25} + 5)} = \frac{(x^{0{,}25} - 5)(x^{0{,}25} + 5)}{x^{0{,}25} + 5} = x^{0{,}25} - 5.$$

Виконайте усно

Обчисліть (276–278).

276. а) $16^{\frac{1}{4}}$; б) $27^{\frac{1}{3}}$; в) $625^{\frac{1}{4}}$; г) $25^{\frac{1}{2}}$; ґ) $8^{\frac{1}{3}}$.

277. а) $5 \cdot 16^{\frac{1}{4}}$; б) $3 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$; в) $-2 \cdot 27^{\frac{1}{3}}$; г) $2^{-2} \cdot 64^{\frac{1}{2}}$.

278. а) $27^{\frac{2}{3}}$; б) $9^{-\frac{3}{2}}$; в) $0,001^{-\frac{2}{3}}$; г) $0,0016^{\frac{3}{4}}$.

279. Знайдіть десятий степінь числа: а) 1; б) −1; в) 0.

280. Знайдіть значення виразу $x \cdot x^{-2}$, якщо $x = -4$.

А

Спростіть вираз **(281–286)**.

281. а) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 7^0$; б) $81^{-\frac{3}{4}} \cdot 3^4$; в) $49^{\frac{3}{2}} \cdot 49^0$.

282. а) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{5}{3}} \cdot 4^{-2}$; б) $3^{0,5} \cdot 9^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{-3}$; в) $0,4^{-\frac{2}{3}} \cdot 0,4^{-\frac{1}{3}} \cdot 0,4$.

283. а) $2^{-1} \cdot 64^{\frac{2}{3}}$; б) $3^{-2} \cdot 81^{\frac{1}{4}}$; в) $100^{-\frac{1}{2}}$.

284. а) $81^{-\frac{3}{4}}$; б) $64^{-\frac{2}{3}}$; в) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

285. а) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$; б) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$; в) $(0,008)^{-\frac{2}{3}}$.

286. а) $(27 \cdot 125)^{\frac{1}{3}}$; б) $\left(\frac{1}{36} \cdot 0,04\right)^{\frac{1}{2}}$; в) $\left(\frac{1}{16} \cdot 81^{-1}\right)^{-\frac{1}{4}}$.

Обчисліть, не користуючися калькулятором **(287–289)**.

287. а) $2^{-3} - 0,5^3$; б) $8 \cdot 2^{-4}$; в) $1,2^0 - 2^{-4} \cdot 8$.

288. а) $3^{\frac{2}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{0,1}$; б) $2^{0,3} \cdot 2^{-0,7} \cdot 2^{1,4}$; в) $-10 \cdot 32^{-1,5} \cdot 2^{\frac{5}{2}}$.

289. а) $\left(5^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(5^{\frac{1}{2}} + 1\right)$; б) $\left(2^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{2}}\right)^2$; в) $2^{\frac{1}{2}}\left(8^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\right)$.

Спростіть вираз **(290–292)**.

290. а) $\left(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)$; б) $\left(a^{0,5} + b^{0,5}\right)\left(a^{0,5} - b^{0,5}\right)$.

291. а) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2(ab)^{\frac{1}{2}}$; б) $\left(x - y^{\frac{1}{2}}\right)\left(y^{\frac{1}{2}} + x\right) + y$.

292. а) $(1 - c) : (1 - c^{0,5})$; б) $c^2 x^{-0,5}\left(c^{-1} x^{0,5} + c^{-2} x^{0,5}\right)$.

293. Яке із чисел більше:

а) $\left(64^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$ чи $\left(0,64^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$; б) $\left(32^{\frac{4}{5}}\right)^{-\frac{1}{4}}$ чи $\left(\sqrt{2}\right)^{-2}$?

294. Обчисліть за допомогою мікрокалькулятора:

а) $3,2^{0,2}$; б) $0,52^{-1,3}$; в) $13^{2,7} \cdot 2,5$; г) $3,5^{-4} \cdot 6^{2,3}$.

295. Запишіть за допомогою коренів вираз:

а) $x^{\frac{1}{5}}$; б) $(x-3)^{\frac{1}{3}}$; в) $ac^{\frac{4}{3}}$;

г) $(c-2)^{\frac{3}{4}}$; ґ) $(x^2-x+5)^{\frac{3}{2}}$; д) $c(1-b)^{-\frac{2}{3}}$.

296. Запишіть без знаків кореня вираз:

а) $\sqrt[7]{x}$; б) $\sqrt[5]{(a-2)}$; в) $a^2\sqrt{x-a}$;

г) $\sqrt[4]{3a^2+c^2}$; ґ) $3:\sqrt[5]{x+2}$; д) $\sqrt[4]{x+\sqrt{x}}$.

297. Запишіть за допомогою коренів вираз:

а) $c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{5}}$; б) $(a+b)^{\frac{2}{3}}$; в) $a^{\frac{1}{2}}-ax^{\frac{2}{3}}$; г) $\left(m^{0,5}+x^{1,5}\right)^{0,5}$.

Б

298. Спростіть вираз:

а) $(x^{0,4})^{\frac{1}{2}} \cdot x^{0,8}$; б) $x(x^{-1,2})^{\frac{3}{4}}$; в) $\left(c^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{5}} \cdot c^{1,6}$;

г) $(x^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} \cdot x^{1,5}$; ґ) $(x^{0,8})^{-\frac{3}{4}} \cdot (x^{-\frac{2}{5}})^{-1,5}$; д) $c^{\frac{5}{3}}\left(c^{-\frac{1}{3}}\right)^{4}$.

299. Подайте у вигляді степеня:

а) $c^2c^{-1,5}c^{0,3}$; б) $(a^{0,8})^{0,5} \cdot a^{0,6}$; в) $x^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{x}$;

г) $y^{1,7}y^{2,8}y^{-1,5}$; ґ) $(m^{0,3})^{1,2} \cdot (m^{-0,4})^{0,4}$; д) $\sqrt[4]{c^3} \cdot \sqrt[5]{c}$.

Обчисліть **(300–303)**.

300. а) $10^{\frac{2}{5}} \cdot 10^{-\frac{1}{2}} \cdot 10^{0,1}$; б) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{1\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{9}}$; в) $3 \cdot 9^{0,4} \cdot \sqrt[5]{3}$;

г) $8^{-\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}$; ґ) $\left(\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{2\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$; д) $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(64^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

301. а) $2^{1,3} \cdot 2^{-0,7} \cdot 2^{1,4}$; б) $7^{-\frac{4}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{12}} \cdot 7^{-\frac{3}{4}}$; в) $4^{0,7} \cdot 2^{-0,4}$;

г) $25^{0,3} \cdot 5^{1,4}$; ґ) $2 \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$; д) $\sqrt[4]{9} \cdot 3^{-1,5}$.

302. а) $(0,0001)^{-\frac{3}{4}}$; б) $3^{\frac{4}{3}} \cdot 9^{2} \cdot 27^{-\frac{5}{6}} \cdot 3^{-\frac{3}{2}}$;

в) $5^{\frac{4}{5}} \cdot 125 \cdot 25^{-0,4} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$; г) $27^{\frac{2}{3}} : (0,064)^{-\frac{1}{3}}$.

303. а) $8^{\frac{7}{3}} : 81^{1,75}$; б) $100^{\frac{1}{3}} \cdot 0,2^{\frac{5}{3}} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{8}{3}}$;

в) $\left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{2}} + 81^{-0,75} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$; г) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 27^{\frac{2}{3}} - 25^{0,5}$.

Спростіть вираз **(304–307)**.

304. а) $(a - x^{0,5})(a + x^{0,5})$; б) $\left(c^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{4}}\right)\left(c^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}}\right)$;

в) $(a - b) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$; г) $(x - 4) : (x^{0,5} + 2)$.

305. а) $\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1\right)$; б) $\left(n^{\frac{1}{3}} + 2\right)\left(n^{\frac{2}{3}} - 2n^{\frac{1}{3}} + 4\right)$;

в) $(a - 8) : \left(a^{\frac{1}{3}} - 2\right)$; г) $(1 - x) : \left(1 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)$.

306. а) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + 1}$; б) $\dfrac{x+c}{x^{\frac{2}{3}} - (xc)^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{2}{3}}}$;

в) $\dfrac{c-x}{(cx)^{0,5} + x}$; г) $\dfrac{a^{1,3}x + a^{0,3}}{ax^{1,3} + x^{0,3}}$.

307. а) $\dfrac{a-1}{a^{0,75} + a^{0,5}} \cdot \dfrac{a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} + 1}$; б) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - \dfrac{ab}{a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)$;

в) $\dfrac{c-1}{c + \sqrt{c} + 1} : \dfrac{c^{0,5} + 1}{c^{1,5} - 1} + 2c^{\frac{1}{2}}$; г) $\dfrac{2(x^{0,25} - y^{0,25})}{x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}} - x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}} - x - y$.

308. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x-y}$; в) $\dfrac{x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$.

309. Доведіть, що для натурального n:

а) $10^n=\underbrace{1\,000\ldots0}_{n \text{ нулів}}$; б) $10^{-n}=0{,}1^n=\underbrace{0{,}\,000\ldots01}_{n \text{ нулів}}$.

Вправи для повторення

310. Розв'яжіть рівняння:

а) $4x(x-1)=3$; б) $z(z-1)=20$.

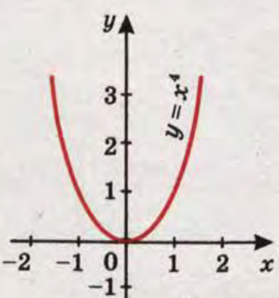
311. Зобразіть за допомогою діаграм співвідношення між поняттями «функції», «парні функції», «непарні функції».

312. Побудуйте графік функції: а) $y=3x$; б) $y=x^{-2}$; в) $y=\sqrt{x}$.

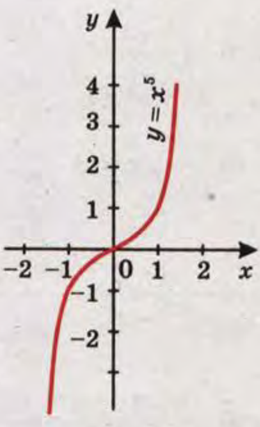
§ 8. Степеневі функції

Функція, яку можна задати формулою $y=x^\alpha$, де x – аргумент, а α – дане число, називається *степеневою*.

Уже відомі вам функції $y=x^2$ і $y=x^3$ (див. табл. 1, с. 34) – приклади степеневих функцій. Подібні властивості мають також усі інші степеневі функції з натуральними показниками α. На малюнках 37 і 38 подано графіки степеневих функцій $y=x^4$ і $y=x^5$. Кожна степенева функція з натуральним показником степеня визначена на множині всіх дійсних чисел R.



Мал. 37



Мал. 38

Властивості функції $y = x^{2k}$, $k \in N$ схожі з властивостями функції $y = x^2$, а функції $y = x^{2k+1}$, $k \in N$ схожі з властивостями функції $y = x^3$.

Якщо показник α степеневої функції – ціле від'ємне число, то вона визначена на множині всіх дійсних значень аргументу x, за винятком $x = 0$. Наприклад, функція $y = x^{-1}$ – це вже відома вам обернена пропорційність $y = \frac{1}{x}$ (див. мал. 28).

На малюнках 39 і 40 зображено графіки функцій $y = x^{-2}$ і $y = x^{-3}$.

Якщо α – від'ємне парне число, то графік функції $y = x^\alpha$ симетричний відносно осі ординат, а якщо α – від'ємне непарне, то графік симетричний відносно початку координат. Узагалі, при кожному цілому показнику степеня α функція $y = x^\alpha$ парна, якщо парне число α, і непарна при непарному α.

Якщо число α дробове, то степенева функція $y = x^\alpha$ зазвичай розглядається лише на множині додатних значень аргументу, або на множині невід'ємних значень, якщо $\alpha > 0$. Такою, зокрема, є функція $y = x^{\frac{1}{2}}$, яку можна записати ще й так: $y = \sqrt{x}$ (див. графік у табл., с. 34).

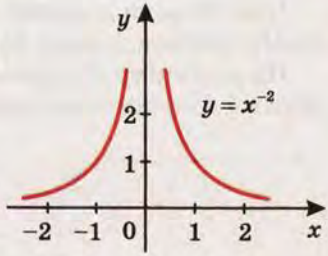
Графік функції $y = x^{-\frac{1}{2}}$ зображено на малюнку 41.

Зверніть увагу на те, який вигляд має графік степеневої функції з додатним показником степеня α на проміжку [0; 1]. На цьому проміжку графіком функції $y = x^\alpha$ (мал. 42) є:

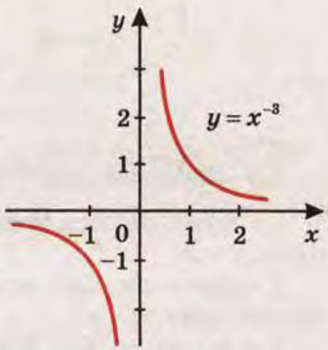
1) відрізок OA, якщо $\alpha = 1$;

2) крива, направлена опуклістю вниз, якщо $\alpha > 1$;

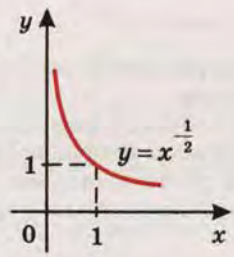
3) крива, направлена опуклістю вверх, якщо $0 < \alpha < 1$.



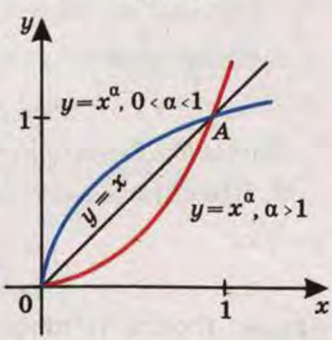
Мал. 39



Мал. 40



Мал. 41



Мал. 42

Чим більше додатне значення α, тим нижче від відрізка OA розміщується графік функції $y = x^{\alpha}$.

На малюнку 43 схематично зображено співвідношення між деякими видами функцій. Цифрами 1, 2 і 3 позначено:

Мал. 43

1 – функція, яка водночас є лінійною і степеневою, – тільки одна: $y = x$.

2 – функція, яка водночас є квадратичною і степеневою, – тільки одна: $y = x^2$.

3 – функція, яка водночас є і степеневою, і оберненою пропорційністю, також одна: $y = x^{-1}$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Сформулюйте означення степеневої функції з натуральним показником.
2. Які обмеження накладають на аргумент x функції $y = x^n$, якщо $n < 0$?
3. Які види степеневої функції вам відомі?
4. Як розташовано на координатній площині графік функції $y = x^n$, $n \in N$, якщо: а) n – непарне число; б) n – парне число?

Виконаємо разом

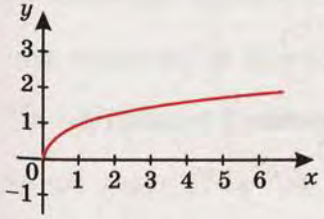
1. Чи проходить графік функції $y = x^{0,75}$ через точку M (16; 8)?

• Розв'язання. Якщо $x = 16$, то $y = 16^{0,75} = 16^{\frac{3}{4}} = 8$.

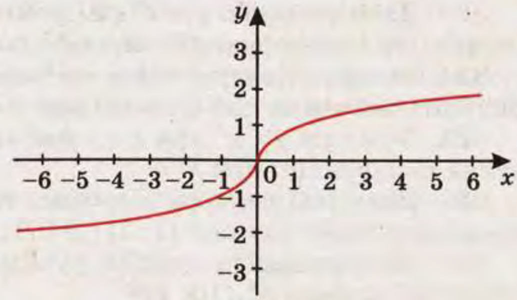
Відповідь. Проходить.

2. Що спільного і чим різняться графіки функцій $y = x^{\frac{1}{3}}$ і $y = \sqrt[3]{x}$?

• Розв'язання. $y = x^{\frac{1}{3}}$ – степенева функція з дробовим показником. Її область визначення $D = [0; +\infty)$. Графік міститься в I чверті (мал. 44).



Мал. 44



Мал. 45

Область визначення функції $y=\sqrt[3]{x}$ – множина всіх дійсних чисел R. Її графік міститься в I і III чвертях (мал. 45).

Для $x \geqslant 0$ графіки функцій $y=x^{\frac{1}{3}}$ і $y=\sqrt[3]{x}$ – однакові.

Виконайте усно

313. Наведіть приклади степеневих функцій.

314. Чи є степеневою функція, задана рівністю $y = x$?

315. Чи є степеневою функція, задана рівністю $y = -x^2$?

316. Які з наведених функцій степеневі?

а) $y=x^2$; б) $y=x^{-1}$; в) $y=x^{0,3}$; г) $y=x^{\sqrt{2}}$;

ґ) $y=3x^{-1}$; д) $y=x^2+x$; е) $y=\dfrac{1}{x^2}$; є) $y=(2x)^{-1}$.

317. Чи правильно, що графік кожної степеневої функції проходить через точку (1; 1)?

318. Чи може графік степеневої функції проходити через початок координат? Якщо може, то наведіть приклад.

319. Чи є степеневою функція $y=\dfrac{-1}{x}$? А функція $y = (-x)^{-2}$?

320. Функція $y = f(x)$ – степенева. Чи є степеневою функція:

а) $y = -f(x)$; б) $y = f(x) + 2$; в) $y = f(x) - 7$; г) $y = 2f(x)$?

321. Обчисліть значення функції $y=x^{\frac{2}{3}}$ у точках: 0, 1, 8, 1000.

А

322. Побудуйте графік функції $y = x^2$ на проміжку:

а) $[-3; 3]$; б) $[-2; 0]$; в) $[2; 3]$.

323. Дано функцію $y = x^3$ на проміжку $[-2; 1]$. Побудуйте її графік. Чи є дана функція парною або непарною?

324. Відомо, що функція $y = x^8$ при $x = c$ має значення m. Знайдіть значення цієї функції при $x = -c$.

325. Функція $y = x^7$ при $x = c$ має значення m. Знайдіть значення цієї функції при $x = -c$.

326. Доведіть, що графік кожної степеневої функції $y = x^{2n}$ проходить через точки $A\,(1; 1)$ і $B\,(-1; 1)$.

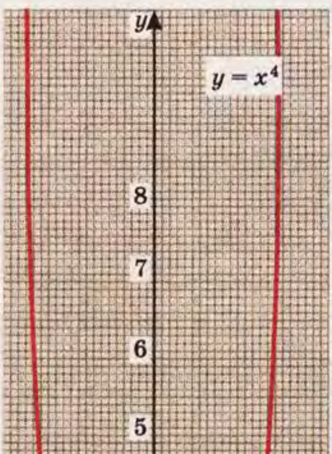
327. Чи проходить графік функції $y = x^{0,25}$ через точку $M(16; 8)$? А через $M_1(16; 2)$?

328. Які з точок належать графіку функції: а) $y = x^2$; б) $y = \sqrt{x}$?

$A\,(0,1; 0,01)$; $B\,(0,16; -0,4)$; $C\,(-10; 100)$;

$D\left(-\frac{4}{9}; -\frac{2}{3}\right)$; $E\left(2\frac{7}{9}; 1\frac{2}{3}\right)$; $F\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{9}\right)$.

329. Співставте властивості функцій $y = (-x)^2$, $y = -x^2$, $y = x^{-2}$. Які з них степеневі? Побудуйте ескізи їхніх графіків.



Мал. 46

330. Користуючись графіком функції $y = x^4$ (мал. 46), знайдіть:

а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: $-1,6$; $-1,1$; $-0,9$; $0,9$; $1,4$;

б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 2; 3; 4; 5; 6.

331. За графіком функції $y = x^4$ (мал. 46) опишіть її властивості: яка область визначення цієї функції; на яких проміжках вона зростає; на яких спадає; при якому значенні x функція має найменше значення; чи має вона найбільше значення; чи є дана функція парною або непарною.

332. За графіком функції $y = x^5$ (див. мал. 38) опишіть її властивості.

333. Побудуйте графік функції:

а) $y = x^4 + 1$; б) $y = x^4 - 1$.

334. Відомо, що графік функції $y = x^\alpha$ проходить через точку $P\left(2; \frac{1}{4}\right)$. Знайдіть значення α.

335. Функцію задано формулою $y = x^\alpha$. Знайдіть α, якщо графік функції проходить через точку:

а) $A(7; 49)$; б) $B(13; 169)$; в) $C(144; 12)$;
г) $D(81; 9)$; ґ) $M(-64; -4)$; д) $N(-216; -6)$.

336. При якому значенні α графік функції $y = x^{\alpha}$ проходить через точку $K\left(-2; \frac{1}{4}\right)$?

337. Знайдіть значення функції $f(x)$ у точці x_0, якщо

а) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $x_0 = 4$; б) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $x_0 = 4$;

в) $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$, $x_0 = 8$; г) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$, $x_0 = 16$.

338. Порівняйте вирази, якщо $\alpha > 1$:
а) $0,15^{\alpha}$ і $0,34^{\alpha}$; б) $0,17^{\alpha}$ і $0,23^{\alpha}$;
в) $3,1^{\alpha}$ і $4,52^{\alpha}$; г) $2,78^{\alpha}$ і $6,9^{\alpha}$.

339. Побудуйте схематично графік функції:
а) $y = x^{-2}$; б) $y = x^{-2,5}$; в) $y = x^{-5}$.

340. Розв'яжіть графічно рівняння:
а) $x^4 = x$; б) $x^{0,5} = 2 - x$; в) $2x^5 = 3 - x$.

Б

341. Порівняйте вирази, якщо $0 < q < 1$:
а) $0,47^q$ і $0,51^q$; б) $0,39^q$ і $0,42^q$;
в) $3,14^q$ і $4,73^q$; г) $9,2^q$ і $11,38^q$.

342. Функцію задано формулою $y = x^q$. Знайдіть q, якщо графік функції проходить через точку:

а) $A(4; 0,5)$; б) $B(16; 0,25)$; в) $C\left(27; \frac{1}{9}\right)$;

г) $K\left(625; \frac{1}{5}\right)$; ґ) $P\left(1024; \frac{1}{4}\right)$; д) $T\left(243; \frac{1}{3}\right)$.

343. Для поданих нижче функцій вкажіть нулі функції (якщо такі є) та проміжки зростання чи спадання:

а) $y = x^9$; б) $y = x^{20}$; в) $y = x^{\frac{13}{3}}$;

г) $y = x^{-7}$; ґ) $y = x^{-24}$; д) $y = x^{-\frac{17}{4}}$.

Побудуйте схематично графік функції **(344, 345)**.

344. а) $y = x^9 - 2$; б) $y = x^{-7} + 1$; в) $y = x^{-20} + 3$.

345. а) $y = x^{-12} - 1$; б) $y = x^{-0,9} + 2$; в) $y = x^{-2,5} - 3$.

346. Знайдіть значення функцій $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = x^{\frac{5}{2}}$, $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $y = x^{-\frac{3}{2}}$, $y = x^{-\frac{5}{2}}$ у точці $x = 3$, коли відомо, що $3^{\frac{1}{2}} \approx 1,73$. Отримані дані запишіть у таблицю.

$3^{\frac{1}{2}}$	$3^{\frac{3}{2}}$	$3^{\frac{5}{2}}$	$3^{-\frac{1}{2}}$	$3^{-\frac{3}{2}}$	$3^{-\frac{5}{2}}$

Яка з функцій має в точці 3 найбільше значення, а яка – найменше?

347. Знайдіть найбільше і найменше значення функцій $y=x^{\frac{3}{2}}$ і $y=x^{-\frac{3}{2}}$ на проміжку [1; 9].

348. Запишіть рівняння степеневої функції $y = f(x)$, якщо:
а) $f(-2)=4$, $f(3)=9$; б) $f(-1)=-1$, $f(2)=8$.

349. Співставте властивості функцій $y=x^{\frac{2}{3}}$ і $y=x^{\frac{3}{2}}$. Заповніть відповідну таблицю.

Вправи для повторення

350. Обчисліть значення виразу:

а) $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}}\cdot\sqrt[4]{9+\sqrt{65}}$;

б) $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

351. Якою цифрою закінчується число $a = 123^6 + 111^{12}$?

352. Морська вода містить 5 % солі. Скільки кілограмів прісної води треба додати до 40 кг морської води для того, щоб вміст солі в ній складав 2 %?

§ 9. Ірраціональні рівняння і нерівності

Рівняння називається *ірраціональним*, якщо воно містить змінні під знаком кореня або в основі степеня з дробовим показником.

Приклади ірраціональних рівнянь:

$$x-5x^{\frac{1}{2}}+4=0; \quad \sqrt{x-1}=3-x; \quad \sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5.$$

Деякі з таких рівнянь можна розв'язувати способом заміни.

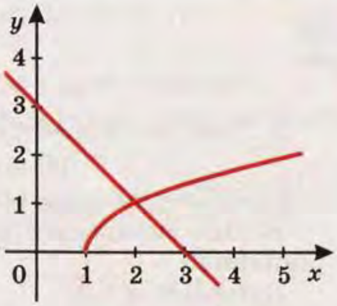
Так, замінивши в першому рівнянні $x^{\frac{1}{2}}$ на y, дістанемо квадратне рівняння $y^2-5y+4=0$, корені якого $y_1=1$, $y_2=4$.

Отже, $x^{\frac{1}{2}}=1$ або $x^{\frac{1}{2}}=4$, звідси $x_1=1$, $x_2=16$.

Рівняння $\sqrt{x-1}=3-x$ можна подати у вигляді $(x-1)+\sqrt{x-1}-2=0$, а потім, замінивши $\sqrt{x-1}$ на y, звести його до квадратного.

Неважко розв'язати його і графічним способом (мал. 47). Отримаємо: $x = 2$.

Більшість ірраціональних рівнянь розв'язують піднесенням обох їх частин до степеня з тим самим натуральним показником. При цьому можуть з'явитися сторонні розв'язки, їх відкидають у результаті перевірки.



Мал. 47

Приклад. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3x^2+x+11}=2x+1$.

• Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$3x^2 + x + 11 = 4x^2 + 4x + 1$, або $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Корені утвореного квадратного рівняння: -5 і 2.

Якщо $x = -5$, то $\sqrt{75-5+11}=-10+1$, але $\sqrt{81}\neq -9$;

якщо $x = 2$, то $\sqrt{12+2+11}=4+1$, $\sqrt{25}=5$.

Відповідь. $x = 2$.

Ірраціональною **називають нерівність, яка містить змінну під знаком кореня або в основі степеня з дробовим показником.**

Приклади:

а) $\sqrt{x-1}<10$; б) $\sqrt[3]{x^2+2}\geqslant 3$; в) $(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\leqslant 3$.

Розв'язувати такі нерівності можна на основі властивостей відповідних степеневих функцій.

а) Оскільки функція $y=\sqrt{x}$ зростає на всій множині невід'ємних чисел і $10=\sqrt{100}$, то нерівність $\sqrt{x-1}<10$ рівносильна подвійній нерівності $0\leqslant x-1<100$, звідси $1\leqslant x<101$, $x\in[1; 101)$.

б) Функція $y=\sqrt[3]{x}$ зростає на R і $3=\sqrt[3]{27}$. Тому $x^2 + 2 \geqslant 27$, $x^2 \geqslant 25$, звідси $x \geqslant 5$ або $x \leqslant -5$. Отже, $x \in (-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$.

в) Значення виразу $(x^2+9)^{\frac{1}{2}}$ не менше за 3. Тому нерівність $(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\leqslant 3$ задовольняє тільки одне значення: $x = 0$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке рівняння? А нерівність?
2. Які рівняння називають алгебраїчними?
3. Які рівняння називають ірраціональними? А раціональними?
4. Які нерівності називають ірраціональними? Наведіть приклади.
5. Як можна розв'язувати ірраціональні рівняння?

Виконаємо разом

1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{5x-2}=2$.

• Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до куба. Отримаємо рівняння, рівносильне даному: $5x-2=8$, або $5x=10$.

Корінь знайденого рівняння $x=2$ є також коренем даного рівняння.

Відповідь. $x=2$.

2. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}=1, \\ x-y=7. \end{cases}$

• Розв'язання. Нехай $x^{\frac{1}{3}}=u$ і $y^{\frac{1}{3}}=v$, тоді $u-v=1$ і $u^3-v^3=7$. З першого рівняння знаходимо: $u=v+1$. Підставивши в друге рівняння $v+1$ замість u, дістанемо: $v^3+3v^2+3v+1-v^3=7$, або $v^2+v-2=0$.

Корені утвореного квадратного рівняння: -2 і 1, але $y^{\frac{1}{3}}\geqslant 0$ (як степенева функція), тому -2 – сторонній корінь. Отже, $y^{\frac{1}{3}}=1$, звідси $y=1$. Відповідне значення x знайдемо з другого рівняння системи, $x=8$.

Відповідь. (8; 1).

3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{x+5}=2$.

• Розв'язання. Значення виразу $\sqrt{x-3}$ не може бути від'ємним, тому $\sqrt[3]{x+5}\leqslant 2$. Дане рівняння не можуть задовольняти числа, менші за 3. Тому воно рівносильне системі

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+5}\leqslant 2, \\ x\geqslant 3, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x+5\leqslant 8, \\ x\geqslant 3, \end{cases}$$

яку задовольняє єдине значення $x=3$.

Перевірка. $\sqrt{0}+\sqrt[3]{8}=2$.

Відповідь. $x=3$.

Виконайте усно

353. Які з рівнянь алгебраїчні, які ірраціональні:

а) $\sqrt{x}=x$; б) $\sqrt[5]{2}=x-3$; в) $\sqrt{x-3}=x^{\frac{1}{3}}$;

г) $x+\sqrt{x}=\sqrt[3]{x}$; ґ) $\sqrt[4]{(x-2)^4}=3$; д) $\dfrac{x}{x-2}=\sqrt{8}$?

354. Які з рівнянь мають розв'язки? Знайдіть їх:

а) $x^{\frac{1}{2}} = 2$; б) $x^{\frac{2}{3}} = 1$; в) $x^{\frac{1}{4}} = -1$; г) $x^{\frac{3}{5}} = 0$.

355. Не розв'язуючи рівнянь, установіть, які з них не мають коренів:

а) $\sqrt[4]{x} + 2 = 0$; б) $\sqrt{x} - 4 = 0$; в) $\sqrt[5]{3x} + 1 = 0$;

г) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = 0$; ґ) $\sqrt[4]{x-1} = \sqrt[4]{1-x}$.

А

Розв'яжіть рівняння (356, 357).

356. а) $\sqrt{x} = 9$; б) $\sqrt[3]{x} = 2$; в) $\sqrt[3]{x} = -2$.

357. а) $x^{\frac{2}{3}} = 4$; б) $y^{\frac{3}{2}} = 8$; в) $z^{\frac{1}{5}} = -3$.

Розв'яжіть рівняння (358, 359).

358. а) $\sqrt[3]{x-1} = 2$; б) $\sqrt[4]{2x-5} = 1$; в) $\sqrt[5]{x-2} = 1$;

г) $2\sqrt{x} - 3 = 0$; ґ) $\sqrt{x+2} = x$; д) $1 + \sqrt[3]{5-x} = 0$.

359. а) $\sqrt{x+4} = 3$; б) $5\sqrt{x-1} = 10$; в) $\sqrt[3]{x+1} = 2$;

г) $\sqrt{2x-1} = 5$; ґ) $4 - \sqrt{3x-2} = 0$; д) $3\sqrt[3]{x+3} = 9$.

Знайдіть корені рівняння (360–362).

360. а) $\sqrt{2x+5} = \sqrt{4x+1}$; б) $\sqrt{3x-1} = \sqrt{x^2+1}$;

в) $\sqrt[3]{x-50} = 9$; г) $\sqrt[3]{2x+6} = 2\sqrt[3]{2}$.

361. а) $\sqrt{4x^2+5x-2} = 2$; б) $\sqrt[3]{x^2+4x-50} = 3$;

в) $\sqrt{23+3x-5x^2} = 3$; г) $\sqrt[3]{x^2+14x-16} = -4$.

362. а) $\sqrt{x^2-16} = \sqrt{5x+8}$; б) $\sqrt{-2x-1} = \sqrt{x^2-36}$;

в) $\sqrt{14+x} = \sqrt{x^2-16}$; г) $\sqrt{3x+3} = \sqrt{x^2-25}$.

363. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{x} < 3$; б) $\sqrt{x} \leqslant 5$; в) $\sqrt{x} > 7$; г) $\sqrt{x} > -2$.

Б

Розв'яжіть рівняння (364–372).

364. а) $x^{-1,5} = 8$; б) $y^{-\frac{2}{3}} = 0,25$; в) $z^{-0,5} = 0,5$.

365. а) $(x^2+19)^{\frac{1}{2}} = 10$; б) $(x^2-28)^{\frac{1}{3}} = 2$; в) $(9-x^2)^{0,5} = \sqrt{5}$.

366. а) $x-5\sqrt{x}+6=0$; б) $y+6=5x^{\frac{1}{2}}$; в) $x^{\frac{2}{3}}=2x^{\frac{1}{3}}+3$.

367. а) $z-5\sqrt{z}+4=0$; б) $\sqrt[3]{x^2}-3=2\sqrt[3]{x}$; в) $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}=6$;

г) $x-4=\sqrt{x+8}$; ґ) $2-x=\sqrt{x}$.

368. а) $x+\sqrt{2x-5}=2$; б) $x^2+4=5\sqrt{x^2-2}$;

в) $2+\sqrt{2x-1}=x$; г) $\sqrt{3y+1}=y-3$.

369. а) $\sqrt{x^2-x-3}=\sqrt{x}$; б) $\sqrt{2z-3}-\sqrt{z+2}=0$;

в) $2+\sqrt[3]{x^2-8}=x$; г) $\sqrt[3]{y^3+y^2-6y+8}=y$.

370. а) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+6}=6$; б) $x\sqrt{x-2}=2x^{\frac{3}{2}}$;

в) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+3}}=3$; г) $\sqrt{18-\sqrt[3]{t+10}}=4$.

371. а) $(x+2)^{0,5}=2+(x-6)^{0,5}$; б) $1+(n-4)^{\frac{1}{2}}=(n-3)^{\frac{1}{2}}$;

в) $(x-3)^{\frac{1}{2}}=6+(x-3)^{\frac{1}{4}}$; г) $3(x^2-3)^{0,1}+(x^2-3)^{0,2}=4$.

372. а) $\sqrt{x+5}+\sqrt{4x-7}=6$; б) $(3x+7)^{0,5}-(x+1)^{0,5}=2$;

в) $\sqrt[3]{x-4}+\sqrt{x+1}=1$; г) $(x^2-4\sqrt{x+1})^{0,5}=x+2$.

Розв'яжіть нерівність (373–375).

373. а) $\sqrt{x-2}<1$; б) $\sqrt{x+5}<5$;

в) $(x-1)^{0,5}<4$; г) $(x+4)^{0,5}>1$.

374. а) $\sqrt[3]{x+2}<3$; б) $\sqrt[3]{7-x}>2$;

в) $(1+x)^{\frac{1}{3}}\leqslant-1$; г) $(2-x)^{\frac{1}{3}}\geqslant-3$.

375. а) $\sqrt{2x+8}<\sqrt{6}$; б) $\sqrt[3]{5-4x}<\sqrt[3]{7}$;

в) $\left(\frac{x}{2}-1\right)^{0,5}<\frac{1}{2}$; г) $\left(2-\frac{3x}{2}\right)^{0,5}>1$.

Розв'яжіть систему рівнянь (376–378).

376. а) $\begin{cases} x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}=1, \\ x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=8, \\ x^{\frac{1}{2}}-2y^{\frac{1}{2}}=5. \end{cases}$

377. а) $\begin{cases} 2x^{\frac{1}{2}} - y = 5, \\ x^{\frac{1}{2}}y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 3\sqrt{z} = 10, \\ x\sqrt{z} = 8. \end{cases}$

378. а) $\begin{cases} x - y = 16, \\ x^{0,5} + y^{0,5} = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (5x+1)^{\frac{1}{2}} + 2(y-2)^{\frac{1}{2}} = 8, \\ 2(5x+1)^{\frac{1}{2}} - 3(y-2)^{\frac{1}{2}} = 2. \end{cases}$

379. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 13 см, а периметр 30 см.

380. Периметр прямокутника дорівнює 158 см, а діагональ 65 см. Знайдіть його сторони.

Вправи для повторення

381. Виконайте дії:

а) $\left(-\frac{2}{3}x^{n-1}y^2\right)\cdot\left(\frac{3}{4}xy^{n-2}\right)$; б) $\left(-\left(-2a^3\right)^2\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}a^2\right)^{-2}$.

382. Маса коробки із цукерками становить 550 г. Коли половину цукерок з'їли, маса коробки стала 300 г. Яка маса порожньої коробки?

383. Знайдіть значення виразів:

а) $\sin 60°$, $\sin 120°$, $\sin 135°$, $\sin 150°$;

б) $\cos 60°$, $\cos 120°$, $\cos 135°$, $\cos 150°$.

Самостійна робота № 3

Варіант 1

1. Обчисліть, не користуючися калькулятором:

а) $9 \cdot 3^{-3}$; б) $(-2)^4 + (-3)^3$; в) $\sqrt[4]{54}\cdot\sqrt[4]{24}$.

2. Спростіть вираз:

а) $a^2x^{-0,4}(a^{-1}x^{0,4} - a^{-2}x^{1,4})$; б) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy}$.

3. Розв'яжіть графічно рівняння: $x^3 = 2 - x$.

4. Знайдіть корені рівняння: $\sqrt{61 - x^2} = 5$.

Варіант 2

1. Обчисліть, не користуючися калькулятором:

а) $16 \cdot 2^{-3}$; б) $(-2)^3 + (-3)^4$; в) $\sqrt[3]{48}\cdot\sqrt[3]{36}$.

2. Спростіть вираз:

а) $x^{-2}y^{0,6}(x^2y^{-1,6}+xy^{-0,6})$; б) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

3. Розв'яжіть графічно рівняння: $x^2 = 2 - x$.

4. Знайдіть корені рівняння: $\sqrt[3]{x^2 - 28} = 2$.

Історичні відомості

Числа. Поняття натурального числа існує з доісторичних часів. 5 тисячоліть тому в Єгипті вже були відомі спеціальні значки для позначення чисел. Наприклад, число 124 тоді записували так: ‖∩∩(. Шумери і вавилоняни позначали числа клиноподібними значками; їх запис ◀◀▼▼▼ означає число 23. Понад 4 тисячі років тому в Єгипті й Вавилоні були вже відомі й деякі дробові числа.

Стародавні греки спочатку користувались аттичною нумерацією, позначаючи числа 1, 5, 10, 100, 1000, 10 000 відповідно символами І, Г, Δ, Н, Х, М. Набагато зручнішу нумерацію розробили іонійці, які жили на узбережжі сучасної Туреччини. Натуральні числа вони позначали літерами алфавіту з рискою або штрихом зверху. Перед тисячами ставили штрих внизу. Наприклад, числа 388 і 5388 стародавні греки записали б так: $\overline{\tau\pi\eta}$ і $,\overline{\varepsilon\tau\pi\eta}$. Згодом іонійська нумерація поширилася на всю Стародавню Грецію, включаючи Ольвію, Херсонес та інші поліси, які існували тоді на землях сучасної України.

У Західній Європі натуральні числа тривалий час записували римськими цифрами I, V, X, L, C, D, M, які позначали відповідно 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. Число 38 284 в цій нумерації записується так: $\mathrm{XXXVIII}_{\mathrm{m}}\mathrm{CCLXXXIV}$. У Східній Європі поширенішою була іонійська нумерація. А сармати, які перекочували на землі України ще в III ст. до н. е., мали свою нумерацію.

У Київській Русі записували числа літерами кирилиці (за винятком літери Б), ставлячи над ними титли (див. табл.). Тисячі позначали значком ҂.

а҃ 1	в҃ 2	г҃ 3	д҃ 4	є҃ 5	ѕ҃ 6	з҃ 7	и҃ 8	ѳ҃ 9
і҃ 10	к҃ 20	л҃ 30	м҃ 40	н҃ 50	ѯ҃ 60	о҃ 70	п҃ 80	ч҃ 90
р҃ 100	с҃ 200	т҃ 300	ѵ҃ 400	ф҃ 500	х҃ 600	ѱ҃ 700	ѡ҃ 800	ц҃ 900

Наприклад, запис ҂а҃ц҃ч҃з означав число 1997. Ця нумерація відрізняється від іонійської тільки формою літер. Згодом у слов'янських рукописах з'явились назви великих чисел: *тьма*, *легіон*, *леодр*, *ворон*, *колода*, які відповідали числам: 10^6, 10^{12}, 10^{24}, 10^{48} і 10^{96}. Їх позначали такими символами:

Рахували здебільшого на пальцях, тому перші числа, як і пальці, називали перстами. Загнувши всі пальці лівої руки, казали «п'ять», оскільки так називали кисть руки (згадайте слова «п'ядь», «зап'ястя»). Загнувши ще й пальці правої руки, говорили «десять», бо колись «десно» означало праворуч. Десницею іноді й тепер називають праву руку. Пливучи від Києва вгору, велику притоку Дніпра, яку бачили праворуч, називали Десною, а ту, яка текла зліва, – Прип'яттю. Вірогідно, що й приказки «з п'ятого на десяте» і «п'яте через десяте» колись мали різний зміст: «зліва направо» і «вліво через праве».

Стародавні греки вміли не тільки рахувати та обчислювати, а й знали багато властивостей натуральних чисел. Наприклад, Піфагор та його учні розрізняли числа *парні*, *непарні*, *прості*, *складені*, *фігурні*, *досконалі*, *дружні* тощо. Вони також довели, що коли сторона квадрата дорівнює одиниці довжини, то довжину його діагоналі не можна виразити раціональним числом. Увести ірраціональні числа вони не здогадалися, тому вважали, що існують відрізки, які не мають довжини. Хоч Евдокс Кнідський і створив теорію відношень, чим, по суті, дав геометричний виклад теорії дійсних чисел, однак ірраціональні числа було введено тільки в XVII ст.

Ще довший шлях долали від'ємні числа. Понад 2 тисячі років тому вони з'явилися в Китаї, їх часто використовували індійські математики, проте загальне визнання вони дістали тільки в XIX ст.

У давнину різні народи створювали свої назви і способи позначення чисел, то ж існують сотні, а може, й тисячі різних усних і писемних нумерацій. А ще ж існують різні системи числення: двійкова, трійкова, вісімкова тощо. У кожній з них – свої символи і способи позначення чисел. Наприклад, для двійкової системи числення досить двох цифр, у ній перші натуральні числа записують так: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, ...

І дробові числа можна записувати по-різному: звичайними, десятковими, мішаними, ланцюговими дробами, у стандартному вигляді тощо.

Ірраціональні числа також можна записувати по-різному. Наприклад, записи $\sqrt{12}$, $2\sqrt{3}$, $\frac{6}{\sqrt{3}}$,... позначають одне й те саме число.

Поняття числа з розвитком людства уточнювалось і розширювалося. Дробові числа ввели, оскільки цього вимагала практика. Ввести від'ємні, ірраціональні та уявні числа науковців спонукала доцільність, бажання забезпечити виконання обернених дій.

У множині натуральних чисел N дія віднімання не завжди можлива. Доповнивши її нулем і цілими від'ємними числами, утворили множину цілих чисел Z, у якій віднімання завжди можливе. Проте в множині Z не завжди можливе ділення. Доповнивши її дробовими числами (додатними і від'ємними), дістали множину раціональних чисел Q, у якій ділення завжди можливе (за винятком ділення на 0). У множині Q не завжди можлива дія добування коренів з додатних чисел. Доповнивши її ірраціональними числами, утворили множину дійсних чисел R, у якій завжди можлива дія добування коренів з будь-яких додатних чисел.

У множині дійсних чисел R дія добування коренів парних степенів з від'ємних чисел неможлива. А для потреб науковців бажано мати таку числову множину, у якій і ця дія була б можливою. Довелося розширити й множину дійсних чисел, ввести комплексні числа. Міркували приблизно так. У множині R рівняння $x^2 = -1$ не має коренів. А бажано утворити таку числову множину, яка, крім усіх дійсних чисел, містила б і нові – корені рівняння $x^2 = -1$. Позначили один з них літерою i й назвали це число *уявною одиницею*. Щоб у створюваній множині дія множення завжди виконувалась, у ній повинні бути числа виду bi – добутки дійсних чисел b і уявної одиниці. А щоб завжди виконувалася дія додавання, повинні бути також числа виду $a + bi$. Виявилося, що множина всіх чисел виду $a + bi$ – саме та, яка потрібна. Вона містить усі дійсні числа, і в ній завжди можна виконувати дії додавання, віднімання, множення, ділення (за винятком ділення на 0), піднесення до степеня, добування коренів будь-яких степенів з будь-яких чисел. Таку множину називають *множиною комплексних чисел*, позначають її літерою C.

Комплексними числами називають числа, які можна подати у вигляді $a + bi$, де a і b – довільні дійсні числа, а i – уявна одиниця. Якщо $b = 0$, то число $a + bi$ дійсне (множина R є підмножиною множини C). Якщо число $b \neq 0$, то $a + bi$ уявне.

Множина комплексних чисел – об'єднання двох множин: дійсних і уявних чисел. *Уявні числа* – це такі комплексні числа, які не є дійсними.

Числа $a + bi$ і $c + di$ вважаються рівними тільки тоді, коли $a = c$ і $b = d$. Поняття «більше», «менше» на уявні числа не поширюється. Тому комплексні числа не порівнюють.

Можна продовжити розширення поняття числа: увести поняття *кватерніонів* та інших *гіперкомплексних чисел*. Із цими числовими множинами ознайомлюються в курсах вищої математики.

Функції і графіки. Поняття функції з'явилося в математиці в XVII ст. Його введенню сприяли насамперед роботи Р. Декарта, П. Ферма, І. Ньютона. Термін «функція» запропонував Г. Лейбніц. Потім І. Бернуллі, А. Лопіталь, К. Гаусс, М. Лобачевський та інші математики уточнювали і розширювали це поняття.

Основні властивості числових функцій, зокрема їх парність, непарність, періодичність, неперервність тощо, дослідив у двотомній праці «Вступ до аналізу нескінченно малих» Л. Ейлер (1707–1783). Тепер усьому світу відомі функція Ейлера, коло Ейлера, пряма Ейлера, рівняння Ейлера, числа Ейлера, формули Ейлера, підстановки Ейлера, теореми Ейлера і багато інших названих на його честь важливих математичних понять, співвідношень, методів тощо. Більшість своїх праць Ейлер створив, будучи сліпим і в похилому віці. До речі, його син Христофор, згодом генерал російської армії, був почесним воїном Запорізької Січі. Атестат про це підписав 1770 р. Петро Калнишевський.

Найзагальніше сучасне означення функції сформульовано в працях Ніколя Бурбакі. Це псевдонім, під яким велика група французьких математиків друкувала свої праці в 1937–1968 рр., усього понад 40 томів. Жартівливий «автопортрет» Н. Бурбакі зображено на малюнку. Пропонуючи малюнок, художник зазначив, що схожість з відомими вченими тут може бути тільки випадковою.

Ініціатором уведення поняття функції у шкільний курс математики був відомий український математик М.В. Остроградський. Ще в середині XIX ст., майже на 50 років раніше від німецького математика Ф. Клейна, він висловив ідеї, які згодом лягли в основу міжнародного руху за реформу навчання в школі.

МИХАЙЛО ВАСИЛЬОВИЧ ОСТРОГРАДСЬКИЙ
(1801–1862)

Славетний український математик, видатний учений, організатор наукової школи прикладної математики й механіки, талановитий педагог і прогресивний реформатор математичної освіти.

Народився в с. Пашенна Кобеляцького повіту на Полтавщині. Походив з відомого українського козацько-старшинського роду, чим завжди пишався.

Всесвітньо відомі його дослідження з математичного аналізу, математичної фізики, теоретичної механіки, теорії чисел, алгебри, теорії ймовірностей та варіаційного числення.

Член-кореспондент Паризької академії наук, Російської, Туринської, Римської, Американської академій, почесний доктор Київського, Московського та багатьох інших університетів.

У 2001 р. ЮНЕСКО внесла М. Остроградського до переліку видатних математиків світу.

Поняття степеня з натуральним показником було відомо ще вченим Вавилона і Греції. Проте у широкий вжиток воно увійшло тільки після введення коренів. Європейські математики в XIII ст. позначали корені словом Radix. Пізніше поступово запроваджувалися різні символи. Наприклад, замість теперішнього $\sqrt{12}$ писали $R^2 12$, $\sqrt{②}12$ і т. п.

Ще пізніше з'явилися знаки коренів $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$. При цьому над підкореневим виразом ставили риску, наприклад $\sqrt[3]{\overline{a+b}}$. Р. Декарт (1596–1650) перший почав сполучати цю риску із знаком кореня. Сучасні позначення кореня утвердилися тільки в XVIII ст.

Степені з дробовими показниками ввів у XIV ст. французький математик Н. Орем; степені з нульовим показником використовували в XV ст. самаркандський учений аль-Каші й французький учений Н. Шюке. Останній розглядав також степені з від'ємними показниками. Систематично їх використовував І. Ньютон. Він писав: «Як алгебраїсти замість AA, AAA і т. д. пишуть A^2, A^3, ..., так і я замість $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, ... пишу a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} і т. д.».

Графіки простіших степеневих функцій, насамперед $y = x^2$ і $y = x^3$, будували Декарт, Ферма та інші французькі математики для графічного розв'язування рівнянь.

Головне в розділі 1

Числа бувають натуральні, цілі, раціональні, дійсні і комплексні. Їх множини позначають відповідно буквами: N, Z, Q, R, C. Кожна з цих множин є частиною (підмножиною) наступної: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

У множині раціональних чисел Q завжди виконуються дії додавання, віднімання, множення і ділення (за винятком ділення на нуль).

Обчислення, за умови, що деякі значення виражені у відсотках, називають *відсотковими розрахунками*. Відсоток (процент) – це сота частина.

$$1\ \% = 0{,}01;\ 10\ \% = 0{,}1;\ 100\ \% = 1.$$

Задачі на відсотки

	Знаходження	*Формула*
1	p відсотків від числа a	$a \cdot 0{,}01p$
2	Числа, p відсотків якого дорівнюють b	$b : (0{,}01p)$
3	Відсоткового відношення	$(a : b) \cdot 100\ \%$
4	Простих відсотків	$P_n = P_0\left(1 + \frac{r}{100}n\right)$
5	Складних відсотків	$A_n = A_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

$y = f(x)$ – функція, D – її область визначення, E – область значень. Якщо D і E – множини числові, то $y = f(x)$ – функція числова.

Якщо область визначення числової функції – множина, симетрична відносно 0 і:

1) $f(-x) = f(x)$, то функція $y = f(x)$ парна;

2) $f(-x) = -f(x)$, то функція $y = f(x)$ непарна.

Коренем n-го степеня із числа a називають число, n-й степінь якого дорівнює a. Невід'ємний корінь n-го степеня із числа a називають *арифметичним значенням кореня n-го степеня* із числа a. Його позначають символом $\sqrt[n]{a}$.

Приклад. $\sqrt[3]{64} = 4$, оскільки $4^3 = 64$,

$\sqrt[5]{0{,}00001} = 0{,}1$, оскільки $0{,}1^5 = 0{,}00001$.

Обчислення значення коренів n-го степеня із чисел називають *добуванням коренів* із цих чисел.

Властивості коренів n-го степеня:

$$1)\ \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\quad 2)\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\quad 3)\ \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a};$$

$$4)\ \sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k};\quad 5)\ \sqrt[n]{a^k}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k.$$

Степені з дробовими показниками: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Властивості. Якщо r і s – числа раціональні, то:

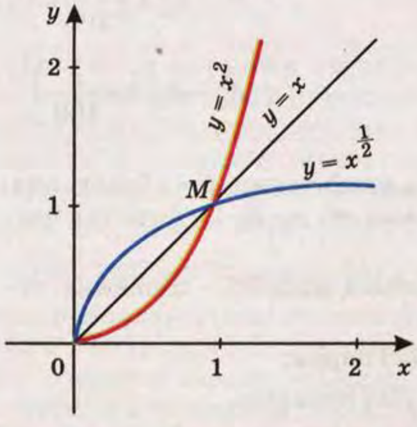
$$1)\ a^r\cdot a^s=a^{r+s};\quad 2)\ a^r:a^s=a^{r-s};\quad 3)\ \left(a^r\right)^s=a^{rs};$$

$$4)\ (ab)^r=a^r b^r;\quad 5)\ \left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}.$$

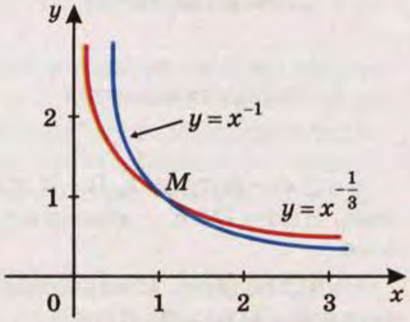
Степенева функція $y=x^\alpha$, $x\in(0;+\infty)$, $\alpha\in Q$.

Властивості: функція монотонна, ні парна, ні непарна. При $\alpha>0$ функція зростаюча, при $\alpha<0$ – спадна. Графік функції проходить через точку M (1; 1).

$y=x^\alpha,\ \alpha>0$



$y=x^\alpha,\ \alpha<0$



Рівняння називають *ірраціональним*, якщо воно містить змінну під знаком кореня або в основі степеня з дробовим показником. Найзагальніший спосіб розв'язування ірраціональних рівнянь – піднесення обох його частин до однакових степенів з наступним відкиданням сторонніх розв'язків. Багато ірраціональних рівнянь зручно розв'язувати за допомогою заміни змінної.

Розумова праця на уроках математики – пробний камінь мислення.
В. О. Сухомлинський

Тригонометричні функції

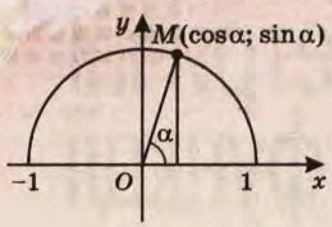
2

ТЕМИ РОЗДІЛУ:

- синус, косинус, тангенс, котангенс кута;
- радіанне вимірювання кутів;
- тригонометричні функції числового аргументу;
- основні тригонометричні формули;
- формули зведення;
- властивості та графіки тригонометричних функцій;
- періодичні функції і гармонічні коливання;
- формули додавання та наслідки з них;
- тригонометричні рівняння і нерівності

§ 10. Синус, косинус, тангенс і котангенс кута

У житті ми часто стикаємося з процесами, які відбуваються з певною періодичністю. Скажімо, на зміну зимі приходить весна, на зміну весні – літо, на зміну літу – осінь, на зміну осені – зима, знову весна, і все повторюється з року в рік. Так само змінюються ранок, день, вечір і ніч. Періодичні процеси відбуваються в багатьох механізмах (рух поршня, маятника) і в живих організмах (пульсація серця, дихання).

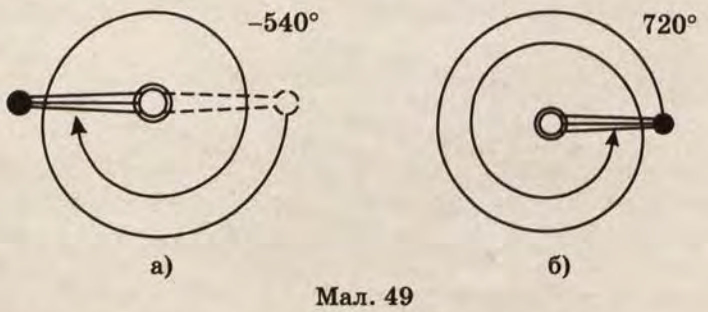


Мал. 48

Мати справу з процесами, які *періодично повторюються*, доводиться багатьом фахівцям. Моделювати такі процеси найзручніше за допомогою синуса, косинуса, тангенса і котангенса. Дещо про ці функції ви вже знаєте з уроків геометрії.

Синус (косинус) гострого або тупого кута α – це ордината (абсциса) точки одиничного півкола, яка відповідає куту α (мал. 48).

Зверніть увагу: в геометрії розглядають $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ за умови, що α – кут трикутника або опуклого многокутника, тобто коли $0° < \alpha < 180°$. Досліджуючи ж періодичні процеси, під α розуміють кут повороту (обертання). А він може бути і як завгодно великим, і від'ємним. Повороти в напрямі руху годинникової стрілки домовилися вважати від'ємними, а в протилежному напрямі – додатними. Наприклад, повернути корбу на $-540°$, на $720°$ – це означає повернути її, як показано на малюнках 49, *а* і *б*.

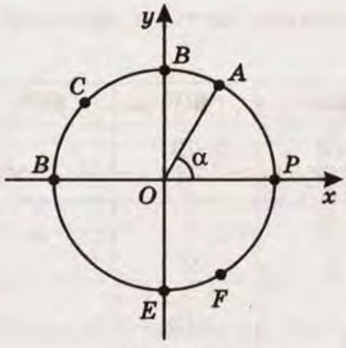


а) б)

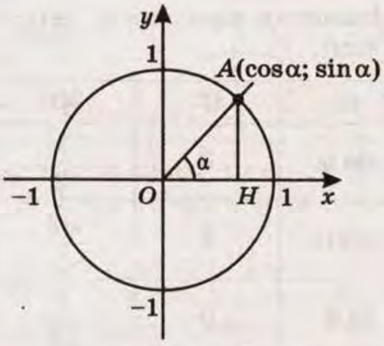
Мал. 49

Одному, двом, трьом, ..., n обертам відповідають кути $360°$, $720°$, $1080°$, ..., $360° \cdot n$.

Уведемо поняття синуса, косинуса, тангенса і котангенса будь-якого кута. Зробимо це за допомогою *одиничного кола*.



Мал. 50



Мал. 51

Якщо центром кола є початок координат, а його радіус дорівнює 1, то таке коло називають *одиничним колом*.

Нехай на координатній площині дано одиничне коло і його початковий радіус OP (мал. 50). Кажуть, що точка A одиничного кола відповідає куту α, якщо $\angle POA = \alpha$. Зображені на малюнку 50 точки P, A, B, C, D, E, F відповідають кутам 0°, 60°, 90°, 135°, 180°, 270°, 300° (у межах від 0° до 360°).

Синусом кута **α називається ордината точки одиничного кола, яка відповідає куту α.**

Косинусом кута **α називається абсциса точки одиничного кола, яка відповідає куту α (мал. 51).**

Тангенсом кута **α називається відношення синуса кута α до його косинуса.**

Котангенсом кута **α називається відношення косинуса кута α до його синуса.**

Синус, косинус, тангенс і котангенс кута α позначають відповідно символами $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Приклади.

1. Куту 135° на одиничному колі відповідає точка C із абсцисою $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ і ординатою $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (мал. 50). Тому

$$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\mathrm{tg}\,135° = -1,\ \mathrm{ctg}\,135° = -1.$$

2. Куту −90° на одиничному колі відповідає точка E (0; −1). Тому

$$\cos(-90°) = 0,\ \sin(-90°) = -1,$$
$$\mathrm{ctg}(-90°) = 0,\ \mathrm{tg}(-90°) \text{ не існує.}$$

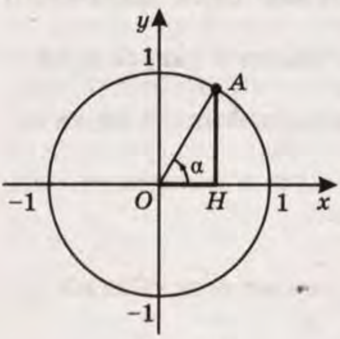
Тангенс кута α має значення (тобто існує) тоді і тільки тоді, коли $\cos\alpha \neq 0$, адже ділити на 0 не можна. Котангенс кута α має значення тільки за умови, що $\sin\alpha \neq 0$.

Значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ деяких кутів α наведено в таблиці.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Наближені значення тригонометричних функцій можна знаходити за допомогою мікрокалькулятора або спеціальних таблиць (див. додатки на с. 261).

Кожному значенню кута α відповідає єдине значення $\sin\alpha$ (див. мал. 51). Значення $\sin\alpha$ залежить від значення α. Тому $\sin\alpha$ – функція від α. Функціями від α є також $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$. Детальніше ми розглянемо їх далі, а тут звернемо увагу тільки на найважливіші властивості цих функцій.



Мал. 52

Нагадаємо, що $\sin\alpha$ – це ордината точки A одиничного кола, яка відповідає куту α (мал. 52). Якщо AH – перпендикуляр, опущений з точки A на вісь x, то довжина відрізка AH – *синус* кута α, а OH – *косинус* кута α. Якщо точка A знаходиться у I або II координатній чверті, то $\sin\alpha = AH$; якщо точка A – у III або IV чверті, то $\sin\alpha = -AH$. Кажуть, що у I і II чвертях синус кута α додатний, а в III і IV чвертях – від'ємний.

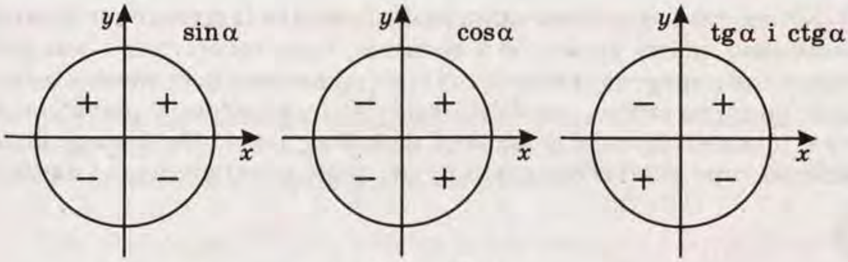
Знаки тригонометричних функцій кутів різних координатних чвертей показано на малюнку 53.

Якщо кут α збільшується від $0°$ до $90°$, то значення $\sin\alpha$ збільшується від 0 до 1. Якщо α збільшується від $90°$ до $180°$, то значення $\sin\alpha$ зменшується від 1 до 0. Якщо α збільшується від $180°$ до $270°$, то значення $\sin\alpha$ зменшується від 0 до -1. Якщо α збільшується від $270°$ до $360°$, то значення $\sin\alpha$ збільшується від -1 до 0. Отже, для будь-якого значення α:

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1 \text{ і } -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Якщо кут α продовжувати збільшувати, то всі ці властивості повторяться, тобто завжди

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 360°) = \sin(\alpha - 360°) = \sin(\alpha + 720°) = \ldots$$



Мал. 53

Узагалі, яким би не був кут α і ціле число n, то:

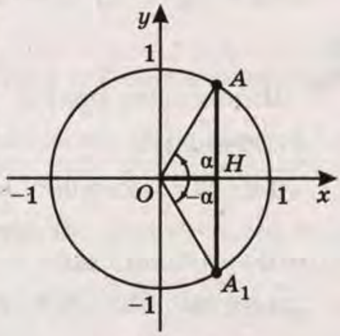
$\sin(\alpha + 360° \cdot n) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha + 360° \cdot n) = \cos\alpha$,

$\mathrm{tg}(\alpha + 360° \cdot n) = \mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}(\alpha + 360° \cdot n) = \mathrm{ctg}\,\alpha$.

Ці співвідношення дають можливість звести знаходження значень синуса, косинуса, тангенса й котангенса будь-якого кута до знаходження їх значень для невід'ємного кута, меншого від 360°. Нехай, наприклад, треба обчислити $\cos 1860°$. Поділивши 1860 на 360, дістанемо частку 5 і остачу 60. Отже,

$\cos 1860° = \cos(360° \cdot 5 + 60°) = \cos 60° = 0{,}5$.

Як видно з малюнка 54, косинуси кутів 60° і −60° однакові, оскільки точки A і A_1 симетричні відносно осі x. Тому $\cos(-60°) = \cos 60°$. І взагалі, косинуси кутів α і −α завжди однакові. Тому, який би не був кут α, завжди $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.



Мал. 54

Відрізки AH і A_1H мають однакові довжини, але розміщені по різні боки від осі x, тому їхні знаки різні. Отже, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ для кожного значення α.

Таким чином, правильні тотожності:

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$,

$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Користуючись ними, можна порівняно легко обчислювати значення тригонометричних функцій від'ємних кутів.

Приклади:

1. $\sin(-30°) = -\sin 30° = -0{,}5$;
2. $\cos(-405°) = \cos 405° = \cos(45° + 360°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Синус, косинус, тангенс і котангенс разом називають *тригонометричними функціями*. Ця назва походить від назви давньої науки *тригонометрії*. Раніше тригонометрію найчастіше використовували для розв'язування трикутників, а з їх допомогою – розв'язування багатьох геометричних і геодезичних задач.

У XX ст. такі задачі навчилися розв'язувати іншими способами й засобами, навіть простіше й точніше, тому тепер тригонометрія втратила попередню цінність і її не відносять до сучасних наук. Але поняття синус, косинус, тангенс і котангенс у різних науках продовжують відігравати важливу роль. Особливо, коли йдеться про різні обертальні рухи, періодичні процеси і явища.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке синус кута α? Якого значення він може набувати?
2. Яких значень у виразі $\sin\alpha$ може набувати α?
3. Сформулюйте означення косинуса кута.
4. За яких умов косинус кута додатний? А коли – від'ємний?
5. Що таке тангенс кута? А котангенс?
6. При яких значеннях α його тангенс не існує? А котангенс?
7. Як змінюється синус кута, якщо кут збільшується: а) від $0°$ до $90°$; б) від $90°$ до $180°$?
8. Як змінюється косинус кута, якщо кут збільшується: а) від $0°$ до $90°$; б) від $90°$ до $180°$?
9. Як змінюється тангенс кута, якщо кут збільшується: а) від $0°$ до $90°$; б) від $90°$ до $180°$?

Виконаємо разом

1. Обчисліть:

$$\sqrt{3}\sin 60° - 2\sin 90° \cdot \cos 60° + 0{,}5\operatorname{tg} 45°.$$

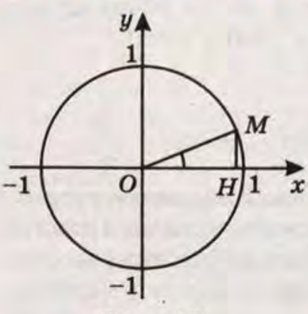
• Розв'язання. Відповідні значення синуса й косинуса знаходимо в таблиці (див. с. 86). Маємо:

$$\sqrt{3}\sin 60° - 2\sin 90° \cdot \cos 60° + 0{,}5\operatorname{tg} 45° = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} +$$

$$+0{,}5\cdot 1 = \frac{3}{2} - 1 + 0{,}5 = 1.$$

2. Що більше: $\sin 20°$ чи $\cos 20°$?

• Розв'язання. Якщо $\angle MOH = 20°$, то $\angle OMH = 70°$ (мал. 55). Оскільки в трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона, то $OH > MH$. Отже, $\cos 20° > \sin 20°$.



Мал. 55

3. Користуючись мікрокалькулятором, обчисліть $\operatorname{ctg} 42°13'$.

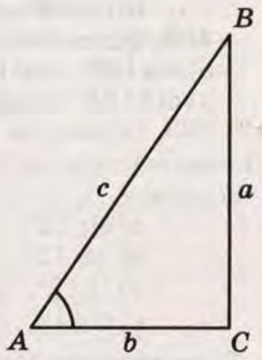
• Розв'язання.

$13\ \boxed{\div}\ 60\ \boxed{+}\ 42\ \boxed{=}\ \boxed{F}\operatorname{tg}\boxed{F}\boxed{\frac{1}{x}}\ \boxed{=}\ 1{,}1022016.$

Відповідь. $\operatorname{ctg} 42°13' \approx 1{,}1022.$

Виконайте усно

384. Дивлячись на прямокутний трикутник ABC (мал. 56), укажіть значення синуса, косинуса, тангенса й котангенса кутів A, B і C.



Мал. 56

385. Чи може абсциса або ордината точки одиничного кола дорівнювати 2?

386. Чи може синус або косинус кута дорівнювати 2? А −2?

387. Чи може синус кута, меншого від 180°, бути числом від'ємним? А косинус?

388. Тангенс якого кута дорівнює 1? А −1?

389. Укажіть значення синуса, косинуса, тангенса й котангенса прямого кута і кута 45°.

390. Якій чверті належить кут: 100°, 150°, 200°, 250°, 300°, 350°?

А

391. На скільки градусів повертається годинна стрілка протягом півдоби? А хвилинна стрілка?

392. Накресліть одиничне коло і позначте на ньому точки, які відповідають кутам: 30°, 90°, 120°, 180°, 270°, 360°, −30°, −300°.

393. Обчисліть значення кожної тригонометричної функції кутів, заданих у № 392.

394. Куту α на одиничному колі відповідає точка $M\left(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{8}}{3}\right)$. Укажіть значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$.

395. Куту β на одиничному колі відповідає точка з абсцисою 0,6. Укажіть значення $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\mathrm{tg}\,\beta$, $\mathrm{ctg}\,\beta$.

396. Як змінюється $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо α збільшується від 0° до 360°?

397. Що більше:

а) $\sin 20°$ чи $\sin 50°$; б) $\cos 40°$ чи $\cos 10°$;

в) $\sin 20°$ чи $\sin 160°$; г) $\cos 10°$ чи $\cos 100°$?

398. Обчисліть:

а) $\sin 30° + \cos 30°$; б) $\cos 60° - \sin 45°$;

в) $\sin 45° \cdot \cos 45°$; г) $2\sin 60° \cdot \cos 60°$.

399. Знайдіть значення синуса, косинуса, тангенса, котангенса кута правильного: а) трикутника; б) чотирикутника; в) шестикутника.

400. Замість зірочки поставте знак > або <:

а) $\cos 5° * \cos 7°$; б) $\sin 82° * \sin 79°$; в) $\sin 178° * \sin 108°$;

г) $\cos 113° * \cos 115°$; ґ) $\operatorname{tg} 29° * \operatorname{tg} 32°$; д) $\operatorname{tg} 97° * \operatorname{tg} 107°$.

401. Обчисліть значення виразу:

а) $\sin 45° - \cos 60° \cdot \cos 90° + \sin 120°$;

б) $\sin 30° \cdot \cos 150° - \cos 60° \cdot \operatorname{tg} 120°$.

402. Визначте знак добутку:

а) $\sin 120° \cdot \cos 155° \cdot \operatorname{tg} 85°$; б) $\sin 320° \cdot \cos 55° \cdot \operatorname{ctg} 185°$;

в) $\operatorname{ctg} 124° \cdot \cos 115° \cdot \operatorname{tg} 35°$; г) $\operatorname{ctg} 125° \cdot \cos 77° \cdot \operatorname{tg} 305°$.

403. Обчисліть значення тригонометричних функцій за допомогою таблиць і перевірте результат, використовуючи калькулятор:

а) $\sin 12°$, $\sin 33°$, $\sin 72°$, $\sin 50°$;

б) $\cos 12°$, $\cos 33°$, $\cos 72°$, $\cos 50°$;

в) $\operatorname{tg} 12°$, $\operatorname{tg} 33°$, $\operatorname{tg} 72°$, $\operatorname{tg} 50°$;

г) $\operatorname{ctg} 12°$, $\operatorname{ctg} 33°$, $\operatorname{ctg} 72°$, $\operatorname{ctg} 50°$.

Б

Визначте знак добутку **(404, 405)**.

404. а) $\cos 30° \cdot \sin 715° \cdot \cos 125° \cdot \operatorname{tg} 35°$;

б) $\sin 137° \cdot \cos 150° \cdot \operatorname{tg} 22° \cdot \cos 735°$.

405. а) $\operatorname{tg} 143° \cdot \sin 565° \cdot \operatorname{tg} 87° \cdot \cos 126°$;

б) $\cos 932° \cdot \sin 132° \cdot \cos 135° \cdot \operatorname{tg} 92°$.

406. Обчисліть значення виразу:

а) $\sin 30° \cdot \cos 60° - \cos^2 120° + \sin 135° \cdot \cos 90°$;

б) $\operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg}^2 135° + \cos 150°$.

Знайдіть значення виразів **(407, 408)**.

407. а) $\cos\alpha + 3\sin\alpha$, якщо $\alpha = 45°$;

б) $\sin\beta + \sin 2\beta + \sin 3\beta$, якщо $\beta = 60°$.

408. а) $\sin\gamma + 2\cos\gamma + 3\operatorname{tg}\gamma$, якщо $\gamma = 30°$;

б) $\sin\alpha + \cos(\alpha - \beta)$, якщо $\alpha = 90°$ і $\beta = 30°$.

409. Яке найбільше і найменше значення може мати вираз:

а) $3\sin x$; б) $-\frac{1}{2}\cos x$; в) $1 + \sin x$; г) $\sin x - 1$?

410. Чи може синус або косинус кута дорівнювати:

а) $\sqrt{2}$; б) $2 - \sqrt{2}$; в) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; г) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$?

411. Користуючись мікрокалькулятором, обчисліть:

а) $\sin 17°$; б) $\cos 35{,}7°$; в) $\sin 110°$;

г) $\operatorname{tg} 39{,}8°$; ґ) $3\cos 25°$; д) $10\operatorname{tg} 38°$;

е) $2 + \cos 49°$; є) $3 + \sin 47°$.

412. Обчисліть:

а) $\operatorname{ctg} 37{,}8°$; б) $2{,}7\operatorname{ctg} 63{,}7°$; в) $2 : \sin 36{,}3°$.

413. Користуючись таблицею (додатки на с. 261), знайдіть:

а) $1 + \sin 25°$; б) $\sin 20° - \cos 70°$; в) $2\sin 15°\cos 15°$.

414. Знайдіть міру гострого кута x, якщо:

а) $\sin x = 0{,}5$; б) $2\cos x = \sqrt{3}$.

415. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо:

а) $\operatorname{tg}\alpha = 1$; б) $\operatorname{tg}\alpha = -1$.

416. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = 0,5$ (кут α гострий).

417. Знайдіть, користуючись одиничним колом:
$\sin 0°$, $\sin 90°$, $\cos 90°$, $\sin 180°$, $\cos 180°$, $\sin 270°$, $\cos 270°$.

418. Що більше:

а) $\sin 10°$ чи $\cos 10°$; б) $\cos 45°$ чи $\sin 45°$?

419. Який з кутів більший – α чи β, якщо:

а) $\sin\alpha = 0,75$, $\sin\beta = 0,93$; б) $\cos\alpha = 0,5$, $\cos\beta = 0,6$?

420. Яких значень при різних значеннях α може набувати вираз:

$\sin^2\alpha$, $1 - \sin^2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $2\sin\alpha$?

421. Яких значень може набувати вираз:

$\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}^2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$, $2\operatorname{tg}\alpha$, $1 + \operatorname{tg}\alpha$?

422. Накресліть на міліметровому папері чверть кола радіуса 10 см, поділіть його на 30 рівних частин і складіть таблицю наближених значень синуса й косинуса кутів 3°, 6°, ... , 90°.

Вправи для повторення

423. Знайдіть довжину кола й площу круга, радіус яких дорівнює:

а) 2 м; б) 12 см; в) 2,5 дм.

424. Задача Сунь-Цзи. Знайдіть число, яке від ділення на 3 має в остачі 2, а від ділення на 5 має в остачі 3, нарешті від ділення на 7 – остача 2.

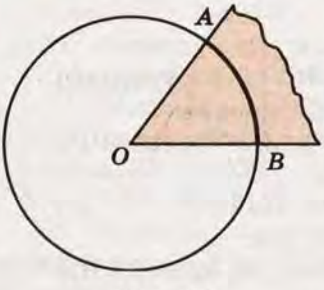
425. Побудуйте графік функції:

а) $y = 4x^{-2}$; б) $y = 4x^{-2} + 1$; в) $y = 6x^{-1}$; г) $y = 6x^{-1} - 2$.

§ 11. Тригонометричні функції числового аргументу

Досі ми розглядали тригонометричні функції кутів. При цьому вирази $x + \sin x$, $\cos x^2$ не мали змісту. Оскільки не можна до градусної міри кута додавати число. Не має змісту й квадрат міри кута. А розв'язування багатьох задач приводить до аналізу подібних виразів. Тому математики часто мають справу з виразами $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, де α – не міра кута, а абстрактне число. Що ж розуміють під синусом, косинусом, тангенсом і котангенсом дійсного числа?

Спочатку згадаємо дещо про вимірювання кутів. Кути можна вимірювати *градусами* та їх меншими частками: *мінутами* і *секундами*. А ще можна вимірювати кути *радіанами*.



Мал. 57

Міра кута AOB дорівнює одному *радіану* (1 рад), якщо на колі із центром у вершині цього кута він вирізає дугу AB, довжина якої дорівнює довжині радіуса кола (мал. 57); 1 рад ≈ 57°. Оскільки коло радіуса r має довжину $2\pi r$, то $360° = 2\pi$ рад. Звідси маємо:

$$180° = \pi\,\text{рад},\quad 90° = \frac{\pi}{2}\,\text{рад},\quad 60° = \frac{\pi}{3}\,\text{рад},$$

$$45° = \frac{\pi}{4}\,\text{рад},\quad 30° = \frac{\pi}{6}\,\text{рад}.$$

Градусна і радіанна міри кутів пов'язані такими залежностями:

$$1° = \frac{\pi}{180}\,\text{радіанів},\quad n° = \frac{\pi}{180}n\,\text{радіанів}.$$

$$1\,\text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ},\quad \alpha\,\text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\cdot\alpha.$$

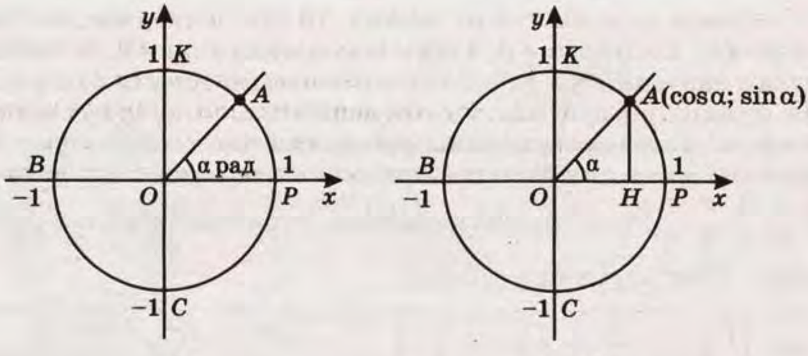
Відповідність між деякими радіанними мірами кутів бажано пам'ятати:

$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°

Використовуючи формулу $1\,\text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$, можна встановити відповідність між множиною дійсних чисел і множиною кутів повороту. А оскільки кожному значенню деякого кута α відповідає єдине значення $\sin\alpha$ ($\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$), то можна розглядати тригонометричні функції не лише кутового аргументу, а й числового.

Нехай на координатній площині дано одиничне коло і його початковий радіус OP (мал. 58, *а*). Кажуть, що точка A одиничного кола відповідає числу α, якщо кут POA дорівнює α радіанів. При цьому вважають, що кут α збільшується, якщо радіус OA рухається проти руху годинникової стрілки; кут α може бути як завгодно великим і як завгодно малим. Зображені на малюнку 58, *а* точки P, K, B, C відповідають числам 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Синусом числа α називається ордината точки одиничного кола, яка відповідає числу α. *Косинусом числа* α називається абсциса точки одиничного кола, яка відповідає числу α (мал. 58, *б*).



а) б)

Мал. 58

Синус і косинус числа α позначають відповідно: $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$. Зі зміною числа α змінюються також і значення $\sin\alpha$ та $\cos\alpha$. Тому можна говорити про функції, задані рівностями $y = \sin x$ і $y = \cos x$.

Розглянемо деякі властивості цих функцій.

Кожному дійсному числу x відповідає єдина точка одиничного кола, а їй – якась певна ордината й абсциса. Тому область визначення кожної із функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ – уся множина R дійсних чисел.

Оскільки $\sin x$ – ордината, а $\cos x$ – абсциса деякої точки одиничного кола (його радіус дорівнює 1), то $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ і $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

Якщо значення аргументу x збільшувати від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то $\sin x$ збільшується від -1 до 1. При збільшенні x від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ значення $\sin x$ зменшується від 1 до -1. При подальшому збільшенні x усе повторюється. Як змінюється значення $\cos x$ зі збільшенням x, дослідіть самостійно.

Оскільки числу 2π відповідає повний оберт точки одиничного кола, то числам x, $x + 2\pi$, $x + 4\pi$, ..., $x + 2n\pi$, де n – ціле число, на одиничному колі відповідає одна й та сама точка. Синуси всіх цих чисел рівні. Тому для кожного цілого значення n:

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x.$$

Так само

$$\cos(x + 2n\pi) = \cos x.$$

Відношення синуса числа до косинуса того самого числа називають *тангенсом* цього числа, а обернене відношення – його *котангенсом*:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Оскільки на 0 ділити не можна, то $\operatorname{tg}\alpha$ існує (має числове значення), коли $\cos\alpha \neq 0$, а $\operatorname{ctg}\alpha$ існує, коли $\sin\alpha \neq 0$. Зі зміною числа α значення $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ теж змінюються, тому $\operatorname{tg}x$ і $\operatorname{ctg}x$ також функції від аргументу x. Функції $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$ і $\operatorname{ctg}x$ називають *тригонометричними функціями* числового аргументу. Точні значення цих функцій при деяких значеннях аргументу $\left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right.$ і т. п.) можна визначати, користуючись одиничним колом. Вони наведені в таблиці.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	не існує

Наближені значення тригонометричних функцій можна знаходити, користуючися спеціальними таблицями або мікрокалькулятором. При цьому якщо значення аргументу x задано в градусах, то перемикач Г–Р ставлять на позначку Г, якщо x – абстрактне число або кут у радіанах, – на позначку Р. Наприклад, значення $\sin 1{,}2$ знаходять за такою програмою: 1,2 $\boxed{F}$ $\boxed{\sin}$; результат 0,932039, тобто $\sin 1{,}2 \approx 0{,}932039$.

Вважають, що синус, косинус, тангенс, котангенс числа α дорівнюють відповідно синусу, косинусу, тангенсу, котангенсу кута α радіанів. Отже, кожне твердження про тригонометричні функції числа α рівнозначне твердженню про тригонометричні функції кута α радіанів і навпаки. Зокрема, правильні формули

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Оскільки область визначення кожної тригонометричної функції симетрична відносно початку координат, то це означає, що функція $y = \cos x$ – парна, а функції $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg}x$, $y = \operatorname{ctg}x$ – непарні.

Знаки $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ такі, як і знаки координат точок одиничного кола, що відповідають куту α (див. мал. 53).

Символи $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ ввів у математику Л. Ейлер.

ЛЕОНАРД ЕЙЛЕР
(1707–1783)

Один з найвизначніших математиків світу. Швейцарець, багато років працював у Росії. У 16 років склав екзамен на ступінь магістра мистецтв. Написав понад 800 теоретичних праць з математики, фізики, астрономії, навігації, філософії, музики – близько 80 томів.

Увів сучасні позначення π, e, i, $f(x)$, sin, cos, tg, ctg та ін. Його ім'ям названо десятки найважливіших теорем, формул, функцій, рівнянь, інтегралів та ін.

«Немає науки, не зв'язаної з математикою».

Л. Ейлер

«Ейлер повів за собою наступні покоління...»

М.В. Остроградський

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке радіан? Скільки радіанів має прямий кут?
2. Що таке синус, косинус, тангенс і котангенс числа? Як вони позначаються?
3. Які знаки мають тригонометричні функції в різних чвертях?
4. Запишіть область визначення кожної з тригонометричних функцій.

Виконаємо разом

1. Користуючись одиничним колом, знайдіть значення тригонометричних функцій чисел: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

• Розв'язання. Даним числам на одиничному колі відповідають точки: P, K, B, C, P (див. мал. 58, *а*). Їх абсциси дорівнюють відповідно: 1, 0, −1, 0, 1. Отже,

$$\cos 0 = 1,\quad \cos\frac{\pi}{2} = 0,\quad \cos\pi = -1,\quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0,\quad \cos 2\pi = 1.$$

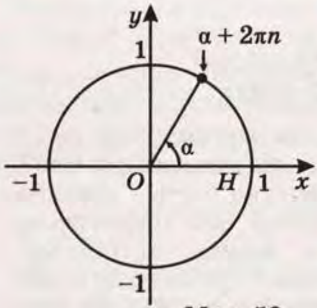
Ординати вказаних точок дорівнюють: 0, 1, 0, −1, 0. Отже,

$$\sin 0 = 0,\quad \sin\frac{\pi}{2} = 1,\quad \sin\pi = 0,\quad \sin\frac{3\pi}{2} = -1,\quad \sin 2\pi = 0;$$

$$\mathrm{tg}\,0 = \frac{0}{1} = 0,\quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{0} \text{ – не існує},\quad \mathrm{tg}\,\pi = \frac{0}{-1} = 0 \text{ і т. д.}$$

2. Чи правильно, що при будь-якому цілому n і дійсному α:

а) $\mathrm{tg}(2n\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$; б) $\mathrm{ctg}(2n\pi + \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$?



Мал. 59

Розв'язання. Якщо n – число ціле, то числам α і $2n\pi + \alpha$ на одиничному колі відповідає одна й та сама точка (мал. 59). Тому кожна з наведених рівностей правильна.

3. Обчисліть $4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Відповідні значення синуса і косинуса знаходимо у таблиці (с. 94). Маємо:

$$4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 4\cdot\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 2{,}5.$$

Виконайте усно

426. Назвіть у радіанах міри кутів: а) квадрата; б) рівностороннього трикутника; в) прямокутного рівнобедреного трикутника; г) правильного шестикутника.

427. Назвіть у градусах кут, радіанна міра якого дорівнює: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi.$

428. Які із чисел від'ємні: $\sin 2$, $\sin 4$, $\sin 5$, $\cos 2$, $\cos 3$, $\cos 6$? Відповідь аргументуйте.

429. Для яких значень x виконується рівність:

а) $\sin x = 0$; б) $\sin x = 1$; в) $\sin x = -1$; г) $\cos x = -1$?

430. Чи існують такі значення x, для яких $\cos x = 2{,}5$? А $\mathrm{tg}\, x = 2{,}5$?

А

Запишіть у радіанній мірі кути **(431, 432)**.

431. а) 15°; б) 30°; в) 45°; г) 60°; ґ) 90°; д) 135°; е) 180°; є) 270°.

432. а) 40°; б) 120°; в) 105°; г) 150°; ґ) 75°; д) 32°; е) 100°; є) 140°.

Виразіть у градусах кут, радіанна міра якого дорівнює даному числу **(433, 434)**.

433. а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{18}$; в) $\frac{\pi}{5}$; г) $\frac{\pi}{6}$; ґ) $\frac{5\pi}{6}$; д) 2π.

434. а) 2; б) 3; в) 1,5; г) 0,36; ґ) 5; д) 31,4.

435. Накресліть одиничне коло і позначте на ньому точки, які (наближено) відповідають числам: 1, 2, 3, 4, −1, −2.

436. Позначте на одиничному колі точки, які відповідають числам: $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, 2\pi, 3\pi, 4\pi, -\pi, -2\pi, -3\pi$.

437. Заповніть таблицю:

α	$0{,}5\pi$	π	$1{,}5\pi$	2π	$2{,}5\pi$	3π	$3{,}5\pi$
$\sin\alpha$							
$\cos\alpha$							
$\mathrm{tg}\,\alpha$							

438. Покажіть за допомогою малюнків кути:
а) $420°$; $540°$; $670°$; $730°$; $890°$;
б) $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{5}$; $\frac{26\pi}{9}$.

439. Які знаки мають $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, якщо α дорівнює:
а) $\frac{\pi}{5}$; б) $1{,}2\pi$; в) $\frac{7}{16}\pi$; г) $\frac{6}{17}\pi$; ґ) $\frac{16}{5}\pi$?

440. Визначте знак виразу:
а) $\sin 2\cdot\cos 3$; б) $\sin 4\cdot\mathrm{tg}\,5$;
в) $\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\pi$; г) $\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{3}\cdot\cos 2\pi$.

441. Збільшується чи зменшується значення $\sin x$ при збільшенні числа x від 0 до $\frac{\pi}{2}$? А при збільшенні x від $\frac{\pi}{2}$ до π?

442. Збільшується чи зменшується значення $\cos x$ при збільшенні числа x від 0 до 2? А при збільшенні x від 2 до π?

443. Збільшується чи зменшується значення $\mathrm{tg}\,x$ при збільшенні числа x від 0 до $\frac{\pi}{4}$? А при збільшенні x від $-\frac{\pi}{4}$ до 0?

444. Обчисліть за допомогою калькулятора:
а) $\sin 1{,}5$; б) $\sin 2{,}7$; в) $\cos 0{,}8$; г) $\mathrm{tg}\,1{,}5$.

Обчисліть **(445–447)**.

445. а) $\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\sin\pi$; б) $\sin 2\pi\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{tg}\,\pi$;
в) $2\sin\frac{\pi}{6}+\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}$; г) $\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}-\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{6}$.

446. а) $\sin 2{,}5\pi$; б) $\cos 3\pi$; в) $\cos\frac{7\pi}{3}$; г) $\sin\frac{17\pi}{4}$.

447. а) $\sin^2\frac{\pi}{2}-\cos^2\pi$; б) $\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{3}$;
в) $\cos^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{4}$; г) $\mathrm{tg}^2\,\frac{\pi}{4}-\mathrm{ctg}^2\,\frac{\pi}{3}$.

448. Знайдіть значення виразу:

а) $\sin x \cdot \cos x$, якщо $x = \frac{\pi}{6}$; б) $\sin x + \cos x$, якщо $x = \frac{\pi}{4}$.

Б

449. Що більше: а) $\sin 1°$ чи $\sin 3°$; б) $\sin 1$ чи $\sin 3$?

450. Які з чисел $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$:

а) менші за 1; б) більші за 2?

451. Які з чисел $\sin 2$; $\cos 2$; $\mathrm{tg}\, 2$; $\sin 3$; $\cos 3$ від'ємні?

452. Розмістіть у порядку зростання числа:
$\sin 0$; $\cos 0$; $\sin 1$; $\cos 1$; $\sin 2$; $\cos 2$; $\sin 3$; $\cos 3$.

453. Який знак має:
$\sin 3$; $\sin 3{,}1$; $\sin 3{,}5$; $\sin 7{,}2$; $\sin(-2)$; $\cos 7$?

454. Обчисліть за допомогою мікрокалькулятора (з точністю до тисячних):
$\sin 2$; $\mathrm{tg}\, 0{,}5$; $\cos 0{,}5$; $\sin 3{,}14$; $\sin \pi$; $\sin \frac{\pi}{5}$; $\mathrm{tg}\sqrt{2}$.

455. Знайдіть значення виразу (з точністю до тисячних):

а) $\sin\alpha + \cos\alpha$, якщо $\alpha = 2$; $\alpha = 0{,}3$; $\alpha = \sqrt{2}$;

б) $2\sin\alpha\cos\alpha$, якщо $\alpha = 1$; $\alpha = 2{,}7$; $\alpha = 13$;

в) $1 + \mathrm{tg}^2\alpha$, якщо $\alpha = 0{,}7$; $\alpha = 12{,}5$; $\alpha = \sqrt{3}$.

Обчисліть значення виразу **(456–458)**.

456. а) $2\cos\frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{3\pi}{2} + 3\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} - \mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}$;

б) $\cos\frac{\pi}{4} + 3\mathrm{tg}\frac{\pi}{6} - \mathrm{tg}\pi + \mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

457. а) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 3\cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{tg}\frac{\pi}{6} + \mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}$;

б) $2\sin\frac{\pi}{6} + 3\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 4\mathrm{tg}0 - 2\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}$.

458. а) $\sin^2\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$; б) $\sin\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{6}\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}$;

в) $\sin 2{,}5\pi + \cos 2{,}5\pi$; г) $\mathrm{tg}\, 4\pi + \sin 3\pi$.

Вправи для повторення

459. Швидкість одного літака на 100 км/год більша від швидкості другого. Тому перший долає відстань 980 км на 0,4 год довше, ніж другий – відстань 600 км. Знайдіть швидкості літаків.

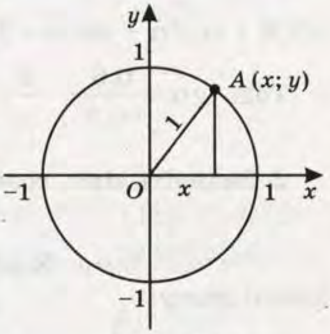
460. Розв'яжіть нерівність:

а) $5(x + 2) - 2(x - 3) < 3(x - 1) - 4(x + 3)$;

б) $3(2x - 1) - 3(x - 1) \geqslant 5(x + 2) + 2(2x - 3)$.

461. Кидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що на них випадуть очки, сума яких дорівнює: а) 5; б) 6; в) 7?

§ 12. Основні тригонометричні формули



Мал. 60

Відомо багато тотожностей, які пов'язують різні тригонометричні функції. Розглянемо найважливіші з них.

Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Пригадаємо рівняння кола. Якщо x і y – абсциса й ордината якої-небудь точки одиничного кола, то $x^2 + y^2 = 1$ (мал. 60), $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$ – абсциса й ордината деякої точки одиничного кола (мал. 58). Тому, яке не було б дійсне число α, завжди $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Це – *основна тригонометрична тотожність*. Приєднавши до неї ще формули, які випливають з означення тангенса і котангенса, дістанемо такі тотожності (за умови, що $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ – існують):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \tag{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1; \tag{4}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \tag{5}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \tag{6}$$

Формули (4) і (5) можна довести так:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Формула (6) доводиться аналогічно.

Користуючися цими формулами, можна числове значення будь-якої тригонометричної функції виразити через значення іншої тригонометричної функції такого самого аргументу. Але при цьому треба враховувати, якій чверті належить цей аргумент. Наприклад:

1. Знайдіть $\cos\alpha$ і $\mathrm{tg}\,\alpha$, якщо $\sin\alpha = 0{,}6$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

• Розв'язання. Якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos\alpha < 0$. Оскільки $\sin\alpha = 0{,}6$ і $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, то $\cos\alpha = \sqrt{1-0{,}6^2} = -0{,}8$.

Тоді $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{0{,}6}{-0{,}8} = -\frac{3}{4}$; $\quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{-0{,}8}{0{,}6} = -\frac{4}{3}$.

2. Знайдіть $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\mathrm{ctg}\,\alpha$, якщо $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{12}{5}$, $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

• Розв'язання. Відомо, що $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ і α – кут третьої чверті, тому:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{12}{5}\right)^2}} = -\frac{5}{13};$$

$$\sin\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{12}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{13};$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{5}{12}.$$

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Сформулюйте основну тригонометричну тотожність. Доведіть її.
2. Які формули пов'язують синус, косинус і тангенс або котангенс того самого числа?
3. Як пов'язані тангенс і котангенс того самого числа?
4. Чи правильно, що тангенс і котангенс того самого числа – числа одного знака?

Виконаємо разом

1. Чи правильно, що при будь-якому значенні x:

$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$; $\qquad \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$?

• Розв'язання. Якщо $\pi < x < 2\pi$, то $\sin x < 0$. У цих випадках $\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$. Якщо $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos x < 0$, і отже, $\cos x =$

$= -\sqrt{1-\sin^2 x}$. Тому наведені в задачі рівності правильні не завжди.

2. Спростіть вираз $\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$.

Розв'язання. $\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\alpha - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha = \sin\alpha - \sin\alpha = 0$.

3. Обчисліть $\sin^2 3 + \operatorname{ctg}^2 3 \cdot \sin^2 3$.

Розв'язання. $\sin^2 3 + \operatorname{ctg}^2 3 \cdot \sin^2 3 = \sin^2 3 + \dfrac{\cos^2 3}{\sin^2 3} \cdot \sin^2 3 = \sin^2 3 + \cos^2 3 = 1$.

Виконайте усно

Спростіть вираз **(462–464)**.

462. а) $1 - \sin^2\alpha$; б) $1 - \cos^2\alpha$; в) $\operatorname{tg}^2\alpha \cos^2\alpha$;
г) $5\cos^2\beta - 5$; ґ) $7\sin^2\beta - 7$; д) $\operatorname{tg}\beta \operatorname{ctg}\beta$.

463. а) $\dfrac{\cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha - 1}$; б) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$; в) $\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - 1}$.

464. а) $2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$; б) $-\sin^2 x - \sin^2 x$;
в) $\sin^2 3\alpha + \cos^2 3\alpha$; г) $1 - \sin^2 c - \cos^2 c$.

А

Доведіть тотожність **(465, 466)**.

465. а) $(1 - \sin^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$;
б) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \sin^2\alpha$.

466. а) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\cos^2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$;
б) $(1 - \cos^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \operatorname{tg}^2\alpha$.

Спростіть вираз **(467, 468)**.

467. а) $1 - \sin^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$;
в) $2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; г) $(\cos x - 1)(2 + 2\cos x)$;
ґ) $\sin\alpha \cos\alpha \operatorname{tg}\alpha$; д) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha - \cos^2\alpha$.

468. а) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; б) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha - 1}$; в) $\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \cdot \operatorname{ctg} x$;
г) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} \cdot \operatorname{tg}^2\alpha$; ґ) $\dfrac{\cos^2\alpha - \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha - \sin^4\alpha}$; д) $\dfrac{\sin^4\beta - \sin^6\beta}{\cos^4\beta - \cos^6\beta}$.

469. Відомо, що кут α гострий. Обчисліть значення:
а) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$; б) $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$;
в) $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 4$.

470. Знаючи, що $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, обчисліть значення $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$ і $\text{ctg}\,\alpha$ за умови, що:

а) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

471. Знаючи, що $\cos\alpha = 0{,}8$, обчисліть значення $\sin\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$ і $\text{ctg}\,\alpha$ за умови, що:

а) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

472. Спростіть вираз:

а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \text{tg}\,\alpha\,\text{ctg}\,\alpha$; б) $1 - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\text{tg}\,\alpha}$;

в) $1 - (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$; г) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$;

ґ) $\text{tg}\,\alpha\,\text{ctg}\,\alpha - \cos^2\alpha$; д) $\sin\alpha\cos\alpha\,\text{ctg}\,\alpha$.

473. Доведіть тотожність:

а) $(1 - \sin^2\alpha)\cdot \text{tg}^2\alpha = \sin^2\alpha$; б) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = \sin^2\alpha$;

в) $1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0$; г) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

474. Доведіть тотожність:

а) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$; б) $\frac{1 + \text{tg}\,\alpha}{1 + \text{ctg}\,\alpha} = \text{tg}\,\alpha$;

в) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$; г) $\frac{\text{ctg}\,\beta - 1}{\text{tg}\,\beta - 1} = -\text{ctg}\,\beta$.

Б

Доведіть тотожність **(475–477)**.

475. а) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \text{tg}\,\alpha = (1 + \cos\alpha)(1 + \text{tg}\,\alpha)$;

б) $(\sin\alpha + \text{tg}\,\alpha)(\cos\alpha + \text{ctg}\,\alpha) = (1 + \sin\alpha)(1 + \cos\alpha)$.

476. а) $\sin^3\alpha\,(1 + \text{ctg}\,\alpha) + \cos^3\alpha\,(1 + \text{tg}\,\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$;

б) $3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2\,(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 1$.

477. а) $\frac{2\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha + 3}{2\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha + 3} = \text{ctg}^2\alpha$; б) $1 + \frac{\cos\alpha\,\text{tg}^2\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$.

Спростіть вираз **(478–480)**.

478. а) $1 - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$; б) $1 - \sin^2\alpha + \sin^2\alpha\,\text{ctg}^2\alpha$;

в) $(1 + \text{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$; г) $(\text{tg}\,\beta\cos\beta)^2 + (\text{ctg}\,\beta\sin\beta)^2$.

479. а) $(\text{tg}\,\alpha + \text{ctg}\,\alpha)\cos^2\alpha$; б) $1 - \sin\beta\cos\beta\,\text{tg}\,\beta$;

в) $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$; г) $(\text{tg}\,\varphi + \text{ctg}\,\varphi)\sin\varphi\cos\varphi$.

480. а) $\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$; б) $\frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$;

в) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \text{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha$; г) $\frac{1}{\sin^2\alpha} - \text{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha$.

481. Знайдіть значення:

а) $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$, якщо $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ і $90° < \alpha < 180°$;

б) $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$, якщо $\sin\alpha = -0{,}8$ і $180° < \alpha < 270°$;

в) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$, якщо $\mathrm{tg}\,\alpha = -1$ і $270° < \alpha < 360°$.

Вправи для повторення

482. Побудуйте графік функції $y = 4 - x^2$. При яких значеннях вона зростає, а при яких спадає? Знайдіть її нулі і найбільше значення.

483. Спростіть вираз:

а) $\left(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}\right)^2$; б) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\right)^2$;

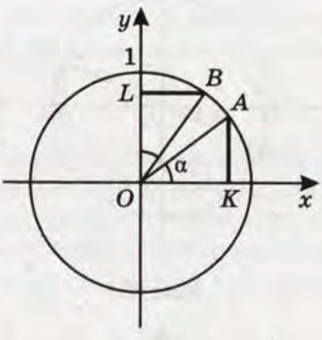
в) $\left(2\sqrt{12} - \sqrt{3}\right)^2$; г) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{18} + \frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2$.

484. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x+1}{6} - \frac{2x}{9} = 5$; б) $\frac{x-2}{3} - \frac{5x+1}{4} = \frac{11x}{12}$.

§ 13. Формули зведення

Кожну тригонометричну функцію кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ можна виразити через тригонометричну функцію кута α. Покажемо це спочатку для синусів і косинусів.

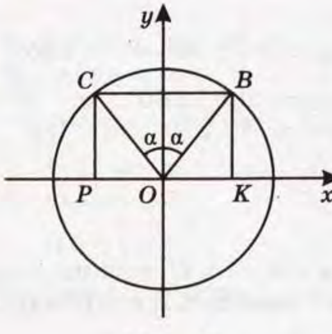


Мал. 61

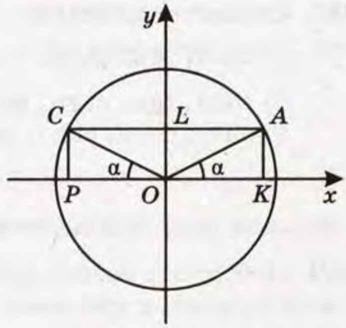
Нехай α – довільний кут, виражений у радіанах. На одиничному колі йому відповідає певна точка A, а куту $\frac{\pi}{2} - \alpha$ – точка B (мал. 61). Опустивши перпендикуляри AK на вісь x, BL на вісь y, дістанемо два рівних трикутники AOK і BOL (оскільки $\angle AOK = \angle BOL$ і $OA = OB$). Тому $OL = OK$ і $BL = AK$, тобто

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = OL = OK = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = BL = AK = \sin\alpha.$$

Кутам $\frac{\pi}{2} + \alpha$ і $\frac{\pi}{2} - \alpha$ на одиничному колі відповідають точки, симетричні відносно осі y (мал. 62). Їх ординати рівні, абсциси протилежні. Тому



Мал. 62



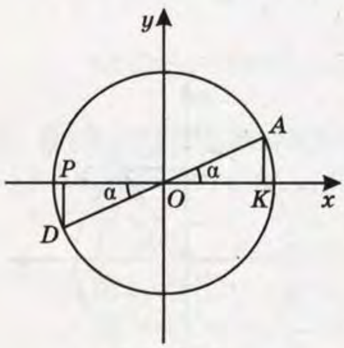
Мал. 63

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\ \ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha.$$

Кутам $\pi-\alpha$ і α також відповідають точки одиничного кола, симетричні відносно осі y (мал. 63). Тому

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha.$$

Кутам $\pi+\alpha$ і α (а також $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ і $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ і $\frac{\pi}{2}+\alpha$) відповідають точки одиничного кола, симетричні відносно початку координат (мал. 64). Їх ординати протилежні й абсциси також протилежні. Тому



Мал. 64

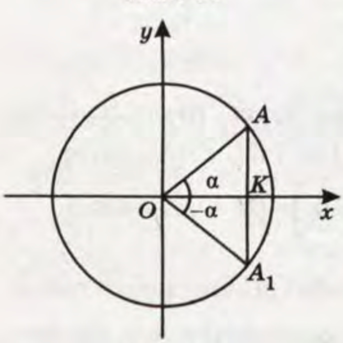
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha.$$



Мал. 65

Кутам $2\pi-\alpha$ і α відповідають точки одиничного кола, симетричні відносно осі x (мал. 65). Їх абсциси рівні, а ординати протилежні. Тому

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha.$$

Кутам $2\pi + \alpha$ і α відповідає одна й та сама точка одиничного кола, тому

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha, \qquad \cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha.$$

З попередніх міркувань маємо 16 формул.

Ще 16 подібних формул можна довести для тангенса і котангенса:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) : \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha : \sin\alpha = \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) : \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha : \cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha \text{ і т. д.}$$

Отже, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$, ...

Усі ці 32 формули називають *формулами зведення*, оскільки вони дають можливість кожну тригонометричну функцію довільного кута (а отже, і числа) звести до тригонометричної функції гострого кута. Запам'ятовувати кожну із цих формул немає потреби, краще користуватися загальним правилом.

Щоб зрозуміліше сформулювати правило, домовимося синус вважати *кофункцією* косинуса, і навпаки, а тангенс – *кофункцією* котангенса, і навпаки.

Говоритимемо також, що кут зводжуваної функції відкладається від горизонтального діаметра, якщо він має вигляд $\pi \pm \alpha$ або $2\pi \pm \alpha$, чи від вертикального діаметра, якщо він має вигляд $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$.

Правило зведення можна сформулювати так: *якщо кут даної тригонометричної функції відкладається від вертикального діаметра, то її замінюють кофункцією, якщо ж – від горизонтального діаметра, то її назву не змінюють. Знак ставлять такий, який має значення даної функції за умови, що кут α гострий.*

Приклад. Нехай треба спростити вираз $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$. Перед результатом треба поставити знак мінус, оскільки коли кут α гострий, то кут $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ належить III чверті і його косинус від'ємний. Кут $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ відкладається від вертикального діаметра, тому назву функції cos треба замінити на sin. Отже,

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha.$$

Зауваження. Користуючися правилом зведення, ми тільки для зручності приймаємо, що кут α гострий. Насправді ж у кожній із формул зведення під змінною α можна розуміти й міру довільного кута, зокрема й від'ємного, і будь-яке дійсне число.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке формули зведення?
2. Сформулюйте правило зведення.
3. Які знаки мають тригонометричні функції в кожній із чвертей?
4. Яку функцію називають кофункцією для синуса? А тангенса?
5. Чи може у формулі зведення α дорівнювати $-\frac{3}{2}$? А $120°$?

Виконаємо разом

1. Доведіть тотожність:

а) $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; б) $\sin(\alpha-\pi)=\sin(\alpha+\pi)$.

• **Розв'язання.** а) $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$ $=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; б) $\sin(\alpha-\pi)=\sin(\alpha-\pi+2\pi)=\sin(\alpha+\pi)$.

2. Дану тригонометричну функцію зведіть до найменшого додатного аргументу:

а) $\sin 845°$; б) $\cos 212°$.

• **Розв'язання.** а) $\sin 845° = \sin(360° \cdot 2 + 125°) = \sin 125° =$ $= \sin(90° + 35°) = \cos 35°$;

б) $\cos 212° = \cos(180° + 32°) = -\cos 32°$.

Виконайте усно

485. Які функції мають бути у порожніх клітинках таблиці?

Кути / Функції	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
sin					
cos					
tg					

486. Зведіть до найменшого додатного аргументу функції:
а) $\sin 94°$; б) $\cos 105°$; в) $\operatorname{tg} 192°$;
г) $\cos 269°$; ґ) $\operatorname{ctg} 179°$; д) $\sin 282°$.

Спростіть вираз **(487, 488)**.

487. а) $\sin(90° + \alpha)$; б) $\cos(90° + \alpha)$; в) $\sin(\alpha + 90°)$;
г) $\operatorname{tg}(90° + \alpha)$; ґ) $\operatorname{ctg}(90° + \alpha)$; д) $\operatorname{tg}(\alpha + 180°)$.

488. а) $\sin(180° - \alpha)$; б) $\cos(180° - \alpha)$; в) $\cos(\alpha + 90°)$;
г) $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$; ґ) $\operatorname{ctg}(180° - \alpha)$; д) $\operatorname{ctg}(\alpha + 270°)$.

А

Спростіть вираз **(489–494)**.

489. а) $\sin(360° - \alpha)$; б) $\operatorname{tg}(360° - \alpha)$;
в) $\cos(270° + \alpha)$; г) $\operatorname{tg}(270° - \alpha)$.

490. а) $\sin(270° - \alpha)$; б) $\cos(270° - \alpha)$;
в) $\cos(360° + \alpha)$; г) $\operatorname{ctg}(360° - \alpha)$.

491. а) $\sin(90° - 2\alpha)$; б) $\cos(90° + 3\alpha)$;
в) $\operatorname{tg}(180° - 2x)$; г) $\operatorname{ctg}(180° + 3x)$.

492. а) $\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)$; б) $\cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$;
в) $\operatorname{tg}\left(90° + \frac{\alpha}{3}\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(270° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

493. а) $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;
г) $\sin(\pi - \alpha)$; ґ) $\sin(\alpha + \pi)$; д) $\sin(2\pi - \alpha)$.

494. а) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; б) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$;
ґ) $\operatorname{tg}(3\pi + \alpha)$; д) $\cos(\pi + \alpha)$; е) $\operatorname{ctg}(3\pi - \alpha)$; є) $\cos(\alpha + 5\pi)$.

Спростіть вираз **(495–499)**.

495. а) $\sin^2(\pi + \alpha)$; б) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; в) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

496. а) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; б) $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; в) $\cos^2(\pi - \alpha)$.

497. а) $\sin(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; б) $\cos(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

498. а) $\sin(-\alpha) + \sin\alpha$; б) $\cos\alpha + \cos(-\alpha)$;
в) $\operatorname{tg}(-\alpha) - \operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}(-x)$.

499. а) $\sin(\alpha - \beta) : \sin(\beta - \alpha)$; б) $\cos(x - \alpha) : \cos(\alpha - x)$;
в) $\operatorname{tg}(1 - \alpha) : \operatorname{tg}(\alpha - 1)$; г) $\operatorname{ctg}(1 - 2x) : \operatorname{ctg}(2x - 1)$.

Знайдіть значення виразу (500–502).

500. а) $\sin 300°$; б) $\cos 240°$; в) $\operatorname{tg} 225°$; г) $\operatorname{ctg} 330°$.

501. а) $\sin(-210°)$; б) $\cos(-225°)$; в) $\operatorname{tg}(-240°)$; г) $\operatorname{ctg}(-315°)$.

502. а) $\sin 405°$; б) $\cos 720°$; в) $\operatorname{tg} 750°$; г) $\operatorname{ctg} 1110°$.

Б

Спростіть вираз (503, 504).

503. а) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

в) $\operatorname{tg}(\varphi - \pi)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$.

504. а) $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\cos(3\alpha - \pi)$;

в) $\cos\left(\pi - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right)$.

Знайдіть значення виразу (505–508).

505. а) $\cos 810°$; б) $\sin(-1470°)$; в) $\operatorname{ctg} 1125°$; г) $\operatorname{tg} 1830°$.

506. а) $\operatorname{ctg} 1500°$; б) $\cos(-945°)$; в) $\cos 3660°$; г) $\sin 1620°$.

507. а) $\cos 450°$; б) $\sin(-4095°)$; в) $\cos 945°$; г) $\operatorname{tg} 1215°$;
ґ) $\sin 585°$; д) $\cos 750°$; е) $\operatorname{tg}(-9405°)$; є) $\sin 1140°$.

508. а) $\sin 3{,}5\pi$; б) $\cos 2{,}5\pi$; в) $\operatorname{tg} \pi$; г) $\operatorname{ctg} 1{,}75\pi$.

Зведіть функцію до найменшого додатного аргументу (509, 510).

509. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\right)$.

510. а) $\sin(3\pi + 2)$; б) $\cos(5\pi - 3)$; в) $\operatorname{tg}(0{,}5\pi + 1)$; г) $\operatorname{ctg}(\pi - 4)$.

Спростіть вираз (511–514).

511. а) $1 - \sin^2(\pi + \alpha)$; б) $1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

в) $1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; г) $1 + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

512. а) $\sin^2(\pi - x) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; б) $\cos^2(\pi + x) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

513. а) $\mathrm{ctg}^2(2\pi - x) + \sin^2\frac{5\pi}{2}$; б) $\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^2 7\pi$.

514. а) $\frac{\mathrm{tg}(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\sin(1,5\pi+\alpha)}{\mathrm{tg}(1,5\pi+\alpha)}$; б) $\frac{\sin(\alpha-\pi)}{\mathrm{tg}(\alpha+\pi)}\cdot\frac{\mathrm{ctg}(\alpha-0,5\pi)}{\mathrm{tg}(\alpha+0,5\pi)}$.

Доведіть тотожність **(515, 516).**

515. а) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

в) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; г) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

516. а) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$; б) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;

в) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)+\mathrm{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\mathrm{tg}\,\alpha$.

517. Доведіть, що коли α, β, γ – кути трикутника, то:

а) $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$; б) $\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

Вправи для повторення

518. У скільки разів і на скільки порядків число $4\cdot10^7$ більше за $8\cdot10^6$?

519. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{3x}{4}+\frac{2(x-1)}{5}=\frac{111}{10}$; б) $\frac{2x+3}{5}+\frac{15-3x}{3}=\frac{4}{5}$.

520. Які із функцій $y = x^2$, $y = -x$, $y = 0,5x^3$, $y = 2x^2 + 3$, $y = \sqrt{x}$ парні, які – непарні?

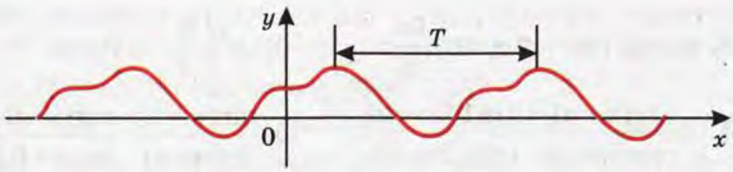
§ 14. Властивості і графіки тригонометричних функцій

Одна з найважливіших властивостей тригонометричних функцій в тому, що кожна з них – функція періодична.

Функцію $y = f(x)$ називають *періодичною*, якщо існує таке дійсне число $T \neq 0$, що для всіх значень x із області її визначення

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Число T називають *періодом* даної функції. Якщо T – період деякої функції, то nT, де $n \in Z$ і $n \neq 0$, також її період. Графік



Мал. 66

такої функції паралельним перенесенням уздовж осі x на T, $2T$, ..., nT одиниць вліво чи вправо відображається на себе (мал. 66).

Розглянемо спочатку конкретний приклад.

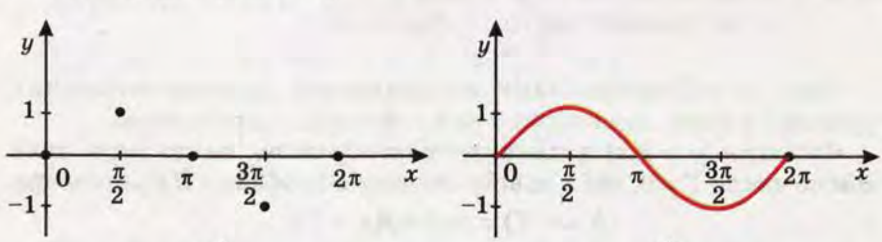
Функція $y = \sin x$. Синус числа x – ордината точки одиничного кола, яка відповідає числу x (див. § 11). Оскільки кожному дійсному числу x відповідає єдине значення $\sin x$, то $y = \sin x$ – функція, визначена на множині всіх дійсних чисел R. Щоб виявити найважливіші властивості цієї функції, побудуємо її графік. Спочатку – тільки на проміжку $[0; 2\pi]$.

Складемо таблицю значень.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	-1	0

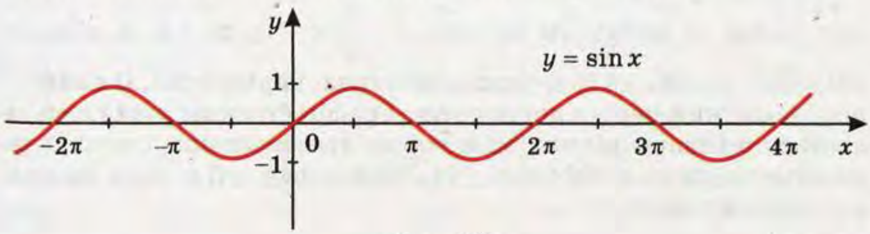
Точки з відповідними координатами нанесемо на координатну площину (мал. 67, *а*). Якщо обчислити значення $\sin x$ для всіх дійсних значень x і позначити на координатній площині всі відповідні їм точки, то дістанемо криву, зображену на малюнку 67, *б*. Це – графік функції $y = \sin x$ на $[0; 2\pi]$.

На побудованому графіку показано, як змінюється ордината точки одиничного кола, здійснюючи о д и н повний обхід цього кола. На другому, третьому і наступних обходах усе повторюється. Це випливає також із тотожності $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$. Тому, якщо криву, зображену на малюнку 67, *б*, перенести на кожний з проміжків $[2n\pi; 2(n + 1)\pi]$, де n – числа цілі, дістанемо весь графік (мал. 68).



Мал. 67

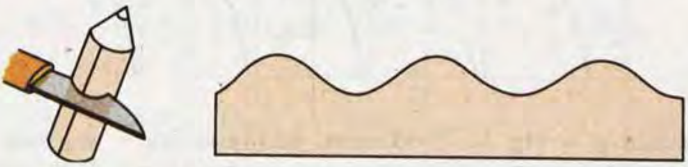
Функція $y = \sin x$ періодична з найменшим додатним періодом 2π. Це видно на графіку функції (мал. 68). Можна міркувати й інакше. Оскільки завжди $\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi)$, то 2π – період функції $y = \sin x$. А коли ця функція мала б додатний період $l < 2\pi$, тоді правильною була б рівність $\sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + l\right)$. А за умови, що $0 < l < 2\pi$, ця рівність неправильна (переконайтесь у цьому за допомогою одиничного кола). Отже, найменший додатний період функції $y = \sin x$ дорівнює 2π.



Мал. 68

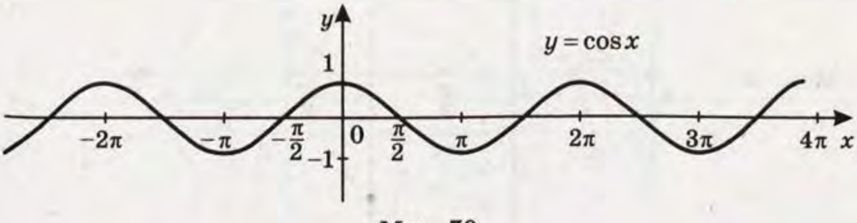
Графік функції $y = \sin x$ – синусоїда (мал. 68); вона нескінченна в обидва боки. Розглянемо одну матеріальну модель синусоїди.

Якщо обгорнути свічку кілька разів папером, потім перерізати її гострим ножем під кутом 45° до осі свічки (мал. 69) і розгорнути папір, матимемо матеріальну модель частини синусоїди.



Мал. 69

Оскільки для кожного значення x правильна рівність $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то графік функції $y = \cos x$ – така сама синусоїда, тільки зміщена вздовж осі x на $\frac{\pi}{2}$ одиниць уліво (мал. 70).



Мал. 70

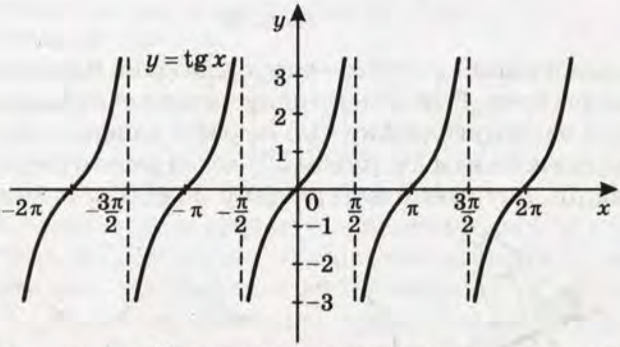
Зазначимо основні властивості тригонометричних функцій.

Функція $y = \sin x$. Її область визначення – множина всіх дійсних чисел R, а область значень – відрізок $[-1; 1]$. Функція непарна, періодична, її найменший додатний період дорівнює 2π. Графік функції зображено на малюнку 68.

Функція $y = \cos x$. Її область визначення – множина всіх дійсних чисел R, область значень – відрізок $[-1; 1]$. Функція парна, періодична, її найменший додатний період дорівнює 2π. Графік функції $y = \cos x$ зображено на малюнку 70.

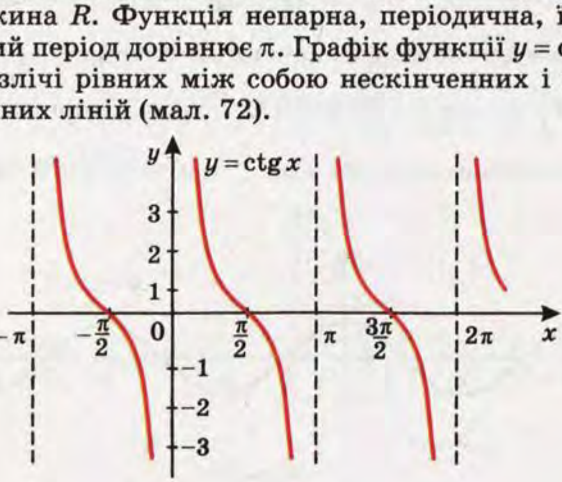
Функція $y = \operatorname{tg} x$. Її область визначення – множина всіх дійсних чисел, за винятком значень $x = \frac{\pi}{2}(n+1)$, де $n \in Z$, область значень – множина R. Функція непарна, періодична, її найменший додатний період дорівнює π. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ складається з безлічі рівних між собою нескінченних і центрально-симетричних ліній (мал. 71). Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ називають тангенсоїдою.

Мал. 71



Функція $y = \operatorname{ctg} x$. Її область визначення – множина всіх дійсних чисел, за винятком значень $x = \pi n$, де $n \in Z$, область значень – множина R. Функція непарна, періодична, її найменший додатний період дорівнює π. Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ складається з безлічі рівних між собою нескінченних і центрально-симетричних ліній (мал. 72).

Мал. 72



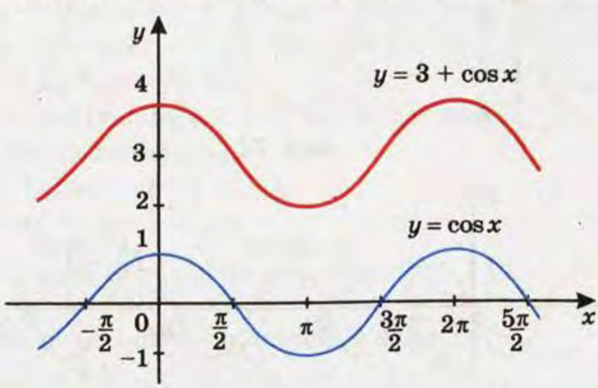
Інші властивості тригонометричних функцій (нулі, проміжки знакосталості, зростання і спадання) можна прочитати за відповідними графіками. Спробуйте це зробити самостійно.

Для порівняння всі властивості функцій зведено в одну таблицю (всюди $k \in Z$). Із часом усі вони будуть обґрунтовані і ви навчитеся визначати їх аналітично.

Таблиця

$f(x)$	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
$D(y)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x \neq \pi k$
$E(y)$	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
	непарна	парна	непарна	непарна
T	2π	2π	π	π
$y=0$	πk	$\frac{\pi}{2} + \pi k$	πk	$\frac{\pi}{2} + \pi k$
$y>0$	$(2\pi k; \pi + 2\pi k)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$	$\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$	$\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$
$y<0$	$(-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$
$y \uparrow$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$	$(-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$	–
$y \downarrow$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$	$(2\pi k; \pi + 2\pi k)$	–	$(\pi k; \pi + \pi k)$

Знаючи, який вигляд має, наприклад, графік функції $y = \cos x$, можна побудувати графік функції $y = 3 + \cos x$ (мал. 73).



Мал. 73

А дивлячись на графік, можна вказати й основні властивості функції $y = 3 + \cos x$. Її область визначення – множина R, область значень – відрізок $[2; 4]$. Функція парна, періодична з найменшим додатним періодом 2π.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Яку функцію називають періодичною?
2. Назвіть область визначення і множину значень кожної з тригонометричних функцій.
3. Назвіть основний період кожної з тригонометричних функцій.
4. Чи мають нулі тригонометричні функції?
5. Як називаються графіки основних тригонометричних функцій?

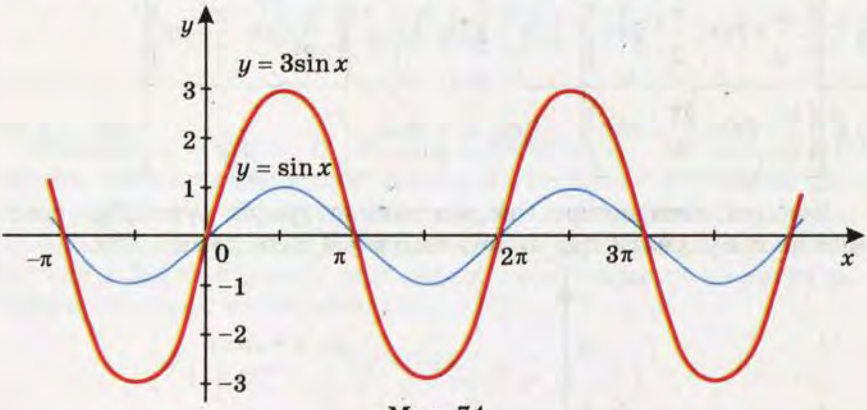
Виконаємо разом

1. Побудуйте графік функції:

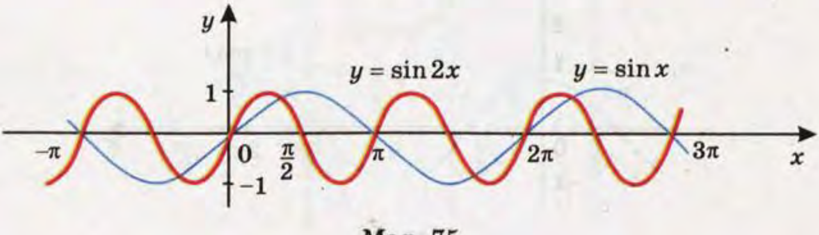
а) $y = 3\sin x$; б) $y = 3\sin 2x$; в) $y = \sin(x + 2)$.

Розв'язання. а) Щоб побудувати графік функції $y = 3\sin x$ (див. с. 33), треба графік функції $y = \sin x$ розтягнути від осі x у 3 рази (мал. 74). Чому?

б) Щоб побудувати графік функції $y = \sin 2x$ (див. с. 35), треба графік функції $y = \sin x$ стиснути до осі y вдвічі (мал. 75).

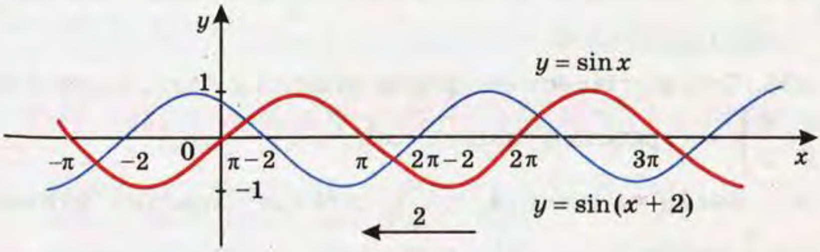


Мал. 74



Мал. 75

в) Щоб побудувати графік функції $y = \sin(x + 2)$, треба графік функції $y = \sin x$ перенести на 2 одиниці вліво (мал. 76).



Мал. 76

Так само можна перетворювати й інші графіки тригонометричних функцій. Поясніть ці перетворення самостійно.

Виконайте усно

521. Поясніть, як змінюється значення функції $y = \sin x$ при збільшенні її аргументу x від 0 до 2π.

522. Як змінюється значення функції $y = \cos x$ і $y = \operatorname{tg} x$ при збільшенні їх аргументу x від 0 до 2π?

523. Чи можна вважати парною функцію $y = \cos x$, задану на множині $(0; +\infty)$? А на множині $[-\pi; \pi]$?

524. Чи можна вважати непарною функцію $y = \sin x$, задану на множині $[-2\pi; 2\pi]$? А на множині $[0; +\infty)$?

525. Чи можна вважати непарною функцію $y = \cos(x - 1)$, задану на $[0; 20\pi]$? А на $[-20\pi; 20\pi]$?

А

Побудуйте графік функції **(526–533)**.

526. а) $y = \sin x$, $x \in [-\pi; \pi]$; б) $y = \cos x$, $x \in [-\pi; 3\pi]$.

527. а) $y = 1 + \cos x$, $x \in [0; 2\pi]$; б) $y = \sin x - 2$, $x \in [-2\pi; 2\pi]$.

528. а) $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (0; 2\pi)$; б) $y = -1 + \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi; \pi)$.

529. а) $y = \sin(x + 1)$, $x \in [-\pi; \pi]$; б) $y = \cos(x - 1)$, $x \in [0; 2\pi]$.

530. $y = 4\sin x$ на $[-\pi; \pi]$.

531. $y = -0{,}5\cos x$ на $[-\pi; \pi]$.

532. $y = \sin 3x$ на $[-3; 3]$.

533. $y = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ на $[0; 2\pi]$.

534. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; в) $y = \operatorname{tg} 3x$; г) $y = \cos(2x + 3)$.

8*

535. Знайдіть область значень функції:

а) $y = 2\sin x$; б) $y = -\sqrt{3}\cos x$; в) $y = 1 - \frac{1}{2}\sin x$; г) $y = -17\operatorname{tg} x$.

Б

536. Чим відрізняється графік функції $y = \operatorname{tg} x$, заданої на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, від графіка функції $y = x^3$?

537. Знайдіть абсциси точок перетину графіка функції $y = \sin\frac{x}{2}$ з віссю x.

538. Знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій $y = \cos 2x$ і $y = 0,5$.

539. Парною чи непарною є функція:

а) $y = \sin 2x$; б) $y = 3\cos x$; в) $y = -\operatorname{tg} x$;

г) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; ґ) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; д) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$?

540. Як можна побудувати графік функції:

а) $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$; б) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$;

в) $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$; г) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$?

Побудуйте графік і визначте основні властивості функцій **(541–546)**.

541. а) $y = 3 + \sin x$; б) $y = 2 + \cos x$; в) $y = 3 + \operatorname{tg} x$.

542. а) $y = -\sin x$; б) $y = -\cos x$; в) $y = -\operatorname{tg} x$.

543. а) $y = 1 - \sin x$; б) $y = 1 - \cos x$; в) $y = 1 - \operatorname{tg} x$.

544. а) $y = 2\sin x$; б) $y = 3\cos x$; в) $y = 0,5\operatorname{tg} x$.

545. а) $y = |\sin x|$; б) $y = |\cos x|$; в) $y = |\operatorname{tg} x|$.

546. а) $y = \sin|x|$; б) $y = \cos|x|$; в) $y = \operatorname{tg}|x|$.

547. Чи правильно, що графік функції $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ є також графіком функції $y = \sin x$?

548. Чи правильно, що графік функції $y = |1 + \cos x|$ є також графіком функції $y = 1 + \cos x$?

Вправи для повторення

549. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 - 7|x| = 0$; б) $x^2 + 3|x| - x = 0$.

550. Спростіть вираз:

а) $\frac{3x + 2 + 3xy + 2y}{2y - 2 + 3xy - 3x}$; б) $\frac{6a^2 + 15ab - 8ac - 20bc}{12a^2 - 9ab - 16ac + 12bc}$.

551. Заробітна плата токаря становила 2000 грн. Спочатку її було збільшено на 10 %, а потім через рік – ще на 20 %. На скільки відсотків збільшилася заробітна плата токаря порівняно з початковою?

§ 15. Періодичні функції і гармонічні коливання

Кожному добре відомі явища, що чергуються:
ранок, день, вечір, ніч, ранок, день...;
весна, літо, осінь, зима, весна, літо...

І маятник годинника коливається так, і струна, і значення змінного струму, і багато механізмів працюючої машини змінюють своє положення періодично і плавно. Математичне моделювання таких явищ і процесів зручно здійснювати за допомогою формули гармонічного коливання.

Коливання – ритмічні переміщення чого-небудь з одного боку в інший, зміна значень величини тощо. Можна говорити про коливання маятника, коливання температури повітря, коливання цін тощо. Коливання бувають різними, зокрема вільними, вимушеними, затухаючими (наведіть відомі вам приклади з фізики). Особливо цікаві *гармонічні коливання* – періодичні, здійснювані за законом синуса чи косинуса. Коротше їх називають *гармоніками*.

Як змінюватиметься значення функції $y = \sin x$, якщо значення аргументу x рівномірно збільшувати? Від такої зміни значення y гармонійно коливатиметься (на осі y) у межах від -1 до 1. Це – найпростіший приклад гармонічного коливання з амплітудою 1. Приклад гармонічного коливання з амплітудою A, здійснюваного залежно від зміни часу t, дає формула $y = A\sin t$.

Розглянемо загальний випадок. Нехай точка M рухається по колу радіуса A в додатному напрямі зі сталою кутовою швидкістю ω радіанів за секунду (мал. 77). Якщо в початковий момент часу (тобто коли $t = 0$) точка M займала положення M_0, яке визначається кутом φ, то через t секунд вона займе деяке положення M, яке визначається кутом $\omega t + \varphi$. Ордината точки M дорівнює $A\sin(\omega t + \varphi)$.

Мал. 77

Формула $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ визначає змінну y як функцію часу t. Це і є формула гармонічного коливання. У ній y – значення функції, t – аргумент, а числа A, ω і φ – сталі:

A – амплітуда коливання, φ – початкова фаза,
ω – кутова швидкість, $\omega t + \varphi$ – фаза коливання.

Амплітуда визначається в лінійних одиницях довжини, фаза і початкова фаза – у радіанах.

Амплітуда – це величина найбільшого відхилення від положення рівноваги.

Період T гармонічного коливання – це найменший додатний період функції $y = A\sin(\omega t + \varphi)$, тобто час, протягом якого точка M здійснює один повний оберт по колу. За цей час точка M проходить ωT радіанів, або 2π радіанів. Якщо $\omega > 0$, то

$$\omega T = 2\pi, \text{ звідси } T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Період гармонічного коливання визначається в секундах; він обернено пропорційний кутовій швидкості відповідного обертання; не залежить ні від амплітуди, ні від початкової фази коливання. Приклади простіших графіків гармонічних коливань – на малюнках 74–76.

Графік гармонічного коливання

$$y = A\sin(\omega t + \varphi),$$

де A, ω і φ – дані числа, будують у такій послідовності:

а) спочатку будують графік функції $y = \sin x$;

б) стисненням до осі y у відношенні $1 : \frac{1}{\omega}$ – дістають графік функції $y = \sin\omega x$;

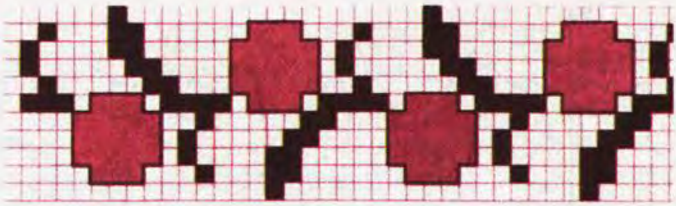
в) із цього графіка за допомогою паралельного перенесення на відстань $\frac{|\varphi|}{\omega}$ вправо при $\varphi < 0$ і вліво при $\varphi > 0$ дістають графік функції $y = \sin(\omega x + \varphi)$;

г) нарешті, з графіка цієї функції стисненням до осі x у відношенні $k = \frac{1}{A}$ дістають графік заданої функції $y = A\sin(\omega x + \varphi)$.

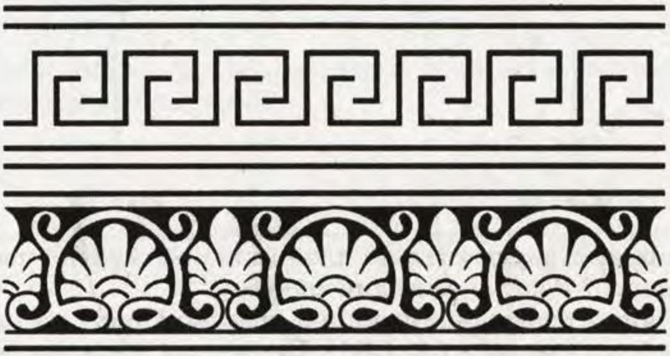
Існують періодичні функції, відмінні від гармонічних коливань. Такою є, наприклад, функція $y = \operatorname{tg} x$ (мал. 71). Узагалі, періодичними є всі функції виду $A\sin(\omega x + \varphi)$, $A\cos(\omega x + \varphi)$, $A\operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$, $A\operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$ та багато інших.

Період перших двох функцій знаходиться за формулою $T_1 = \frac{2\pi}{|\omega|}$, а двох других $T_2 = \frac{\pi}{|\omega|}$.

Періодичною є також функція, графік якої – кардіограма здорової людини (див. мал. 15). Періодичними бувають не тільки функції та їхні графіки, а й багато інших зображень: вишивки, орнаменти, візерунки на тканинах чи шпалерах тощо (мал. 78). Такими є, зокрема, давньогрецькі орнаменти *меандр* і *акант* (мал. 79), візерунки на огорожах тощо. Усе це – приклади



Мал. 78

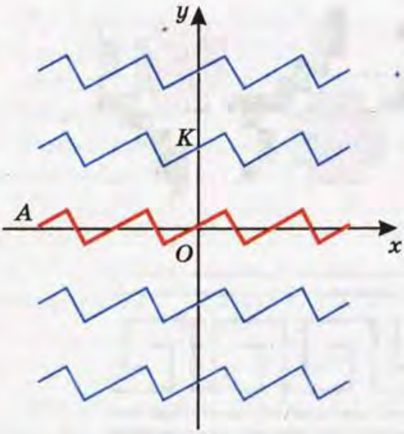


Мал. 79

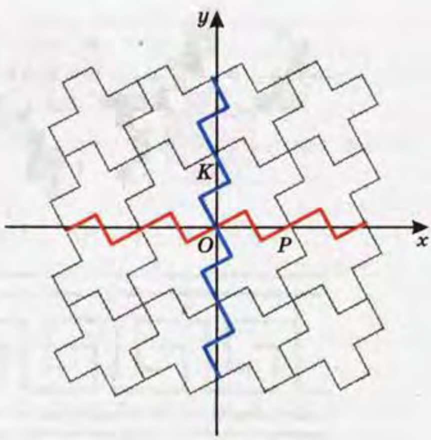
стрічкових орнаментів, періодичних в одному напрямі. А є також площинні орнаменти, періодичні в багатьох різних напрямах.

Подібні площинні орнаменти особливо поширені в країнах ісламу. Але – без зображень людей та інших живих істот, адже Коран забороняє створювати такі зображення: «Не створи собі кумира!» А голландський художник М. Ешер, ігноруючи цю заборону, створив багато оригінальних орнаментів із зображень людей і тварин. Такою є, наприклад, його мозаїка «Рицарі на конях» (мал. 80).

Мал. 80



Мал. 81



Мал. 82

Як можна створювати такі площинні орнаменти і паркети з рівних фігур? Розглянемо один спосіб.

Розгляньте періодичну функцію, графіком якої є нескінченна в обидва боки ламана A (мал. 81). Перенісши її вздовж осі ординат на вектор $n \cdot \overline{OK}$, де n пробігає множину всіх цілих чисел, утворимо безліч подібних графіків періодичних функцій. Якщо всі ці ламані повернути навколо початку координат на прямий кут, утвориться ще одна множина ламаних, яка з першою множиною розбиває всю площину на безліч періодично розташованих хрестоподібних фігур (мал. 82). Таким способом рівними періодичними лініями можна розбивати площину на безліч регулярно розташованих рівних фігур, утворюючи різні паркети, орнаменти і мозаїки.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке коливання? Які бувають коливання?
2. Яке коливання називають гармонічним?
3. У яких одиницях визначається амплітуда, період, кутова швидкість, фаза гармонічного коливання?
4. Якими можуть бути амплітуда гармонічного коливання, його період, початкова фаза?

Виконаємо разом

1. Визначте амплітуду, фазу, початкову фазу і кутову швидкість гармонічного коливання, заданого формулою:

а) $y = 6\sin\left(2t + \dfrac{\pi}{6}\right)$; б) $y = 0{,}8\sin 3t$.

Розв'язання. а) Амплітуда дорівнює 6, $2t + \frac{\pi}{6}$ – фаза, $\frac{\pi}{6}$ – початкова фаза, 2 – кутова швидкість.

б) 0,8 – амплітуда, $3t$ – фаза, 0 – початкова фаза, 3 – кутова швидкість.

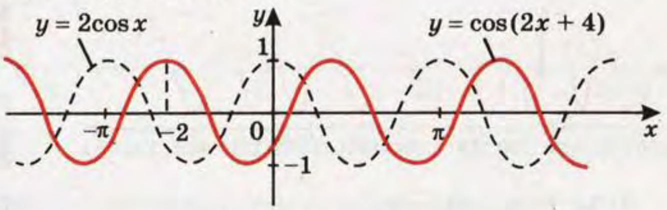
2. Побудуйте графік функції $y = 3\cos(2x + 4)$.

Розв'язання. Запишемо функцію у вигляді $y = 3\cos 2(x + 2)$.

1) Будуємо графік функції $y = \cos x$;

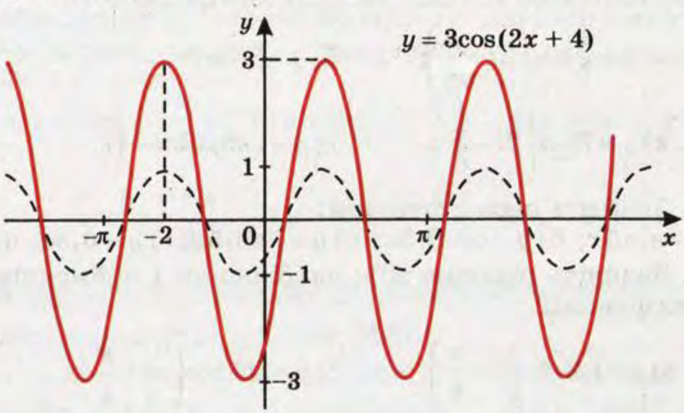
2) стискаємо його до осі y у відношенні $1 : \frac{1}{2}$;

3) отриманий графік переносимо вздовж осі x паралельно на 2 одиниці ліворуч (мал. 83);



Мал. 83

4) розтягом від осі x у 3 рази дістанемо, нарешті, потрібний графік (мал. 84).



Мал. 84

Виконайте усно

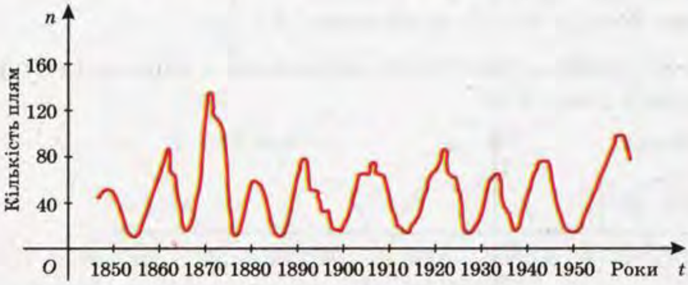
552. Знайдіть амплітуду гармонічного коливання, заданого формулою:

а) $y = 2{,}5\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \sin 2{,}5t$;

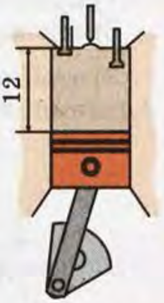
в) $y=8\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{6}\right)$; г) $y=0,8\sin\left(3t+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

553. На малюнку 85 зображено графік функції, яка виражає залежність кількості сонячних плям від часу. Чи є ця функція періодичною?

554. Хід поршня в циліндрі двигуна дорівнює 12 см (мал. 86). Знайдіть амплітуду його коливання.



Мал. 85



Мал. 86

А

555. Визначте амплітуду, фазу, початкову фазу і кутову швидкість гармонічного коливання, заданого формулою:

а) $y=\dfrac{1}{2}\sin\left(3t+\dfrac{\pi}{4}\right)$; б) $y=3\cos 3t$;

в) $y=7\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{6}\right)$; г) $y=2\sin(3\pi t+1)$.

556. Знайдіть період функцій:

а) $y=\sin 6x$; б) $y=\cos 0,5x$; в) $y=3\sin 5x$; г) $y=0,5\cos(x+1)$.

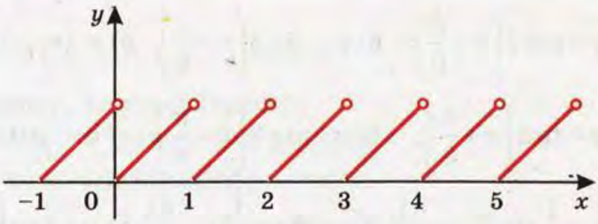
557. Знайдіть різницю між найбільшим і найменшим значеннями функції:

а) $y=1,2\sin\left(t+\dfrac{\pi}{6}\right)$; б) $y=\sqrt{2}\sin\left(\pi t+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

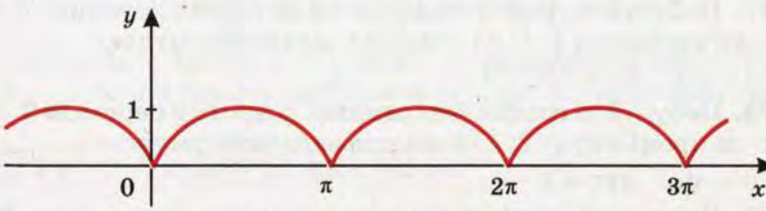
в) $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(2t-\dfrac{\pi}{5}\right)$; г) $y=133\sin\left(t-\dfrac{\pi}{12}\right)$.

558. На малюнку 87 зображено графік функції «дробова частина числа». Чи періодична ця функція? Якщо так, то який її найменший додатний період? Чи є даний графік гармонікою?

559. На малюнку 88 зображено графік функції $y=|\sin x|$. Чи періодична ця функція? Чи відповідає вона гармонічному коливанню?



Мал. 87



Мал. 88

Знайдіть період гармонічного коливання (560, 561).

560. а) $y = \sin 6x$; б) $y = \cos 2x$; в) $y = \cos 0{,}5x$.

561. а) $y = \cos 3x$; б) $y = \sin 1{,}5x$; в) $y = \sin 4x$.

Побудуйте графік гармонічного коливання (562–565).

562. а) $y = 2\sin x$; б) $y = -2\sin x$; в) $y = 0{,}5\sin x$.

563. а) $y = 2\cos x$; б) $y = -2\cos x$; в) $y = 0{,}5\cos x$.

564. а) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; в) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

565. а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; в) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Б

Знайдіть період функції (566–568).

566. а) $y = 7\sin 2x$; б) $y = 2\cos 6x$; в) $y = 0{,}2\sin(x + \pi)$.

567. а) $y = 5\sin 0{,}1x$; б) $y = \cos(2x + 3)$; в) $y = 6\sin(2 + 3x)$.

568. а) $y = \operatorname{tg} 2x$; б) $y = 3\operatorname{tg} 0{,}25x$; в) $y = \operatorname{ctg}(3x - 0{,}5\pi)$.

Побудуйте графік функції (569–573).

569. а) $y = \frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; в) $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

570. а) $y = \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; в) $y = -3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

571. а) $y=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y=\sin 3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; в) $y=\cos 0,5\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

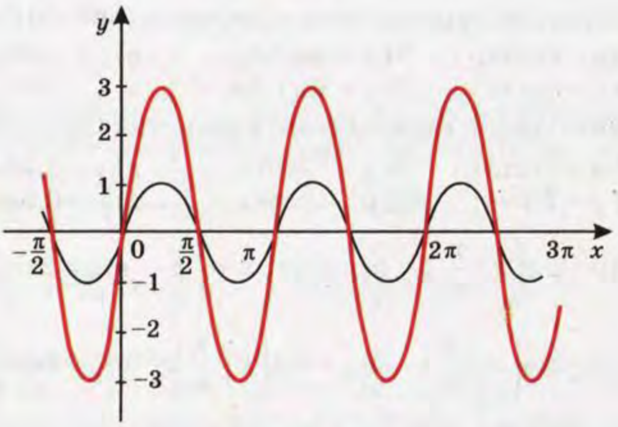
572. а) $y=\operatorname{tg} 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y=\operatorname{ctg} 3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; в) $y=\operatorname{tg} 0,5\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

573*. а) $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$; в) $y=3\operatorname{tg}\left(0,5x+\frac{\pi}{4}\right)$.

574. Побудуйте графік періодичної функції з періодом $T = 2$, якщо на проміжку $[-1; 1]$ її можна задати формулою:
а) $y = x^2$; б) $y = x^2 - 1$.

575. Побудуйте графік періодичної функції з періодом $T = 4$, якщо на проміжку $[-2; 2]$ її можна задати формулою:
а) $y = |x|$; б) $y = 1 - |x|$.

576. Дивлячись на графіки гармонічних коливань (мал. 89), напишіть відповідні їм функції.



Мал. 89

577. Електричний струм, який живить міську освітлювальну мережу, є змінним струмом. Його сила I постійно змінюється, здійснюючи гармонічне коливання

$$I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right),$$

де I_0 – максимальне значення сили струму; T – період коливання; φ – початкова фаза.

В які моменти часу сила струму досягає мінімального або максимального значення і коли його значення дорівнює нулю?

Вправи для повторення

Спростіть вираз **(578, 579)**.

578. а) $(1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha$;
б) $1-\sin\beta\cos\beta\operatorname{tg}\beta+\sin^2\alpha$.

579. а) $(a-\sqrt{b})^2$; б) $(m+\sqrt{n})^2$;
в) $(2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b})^2$; г) $(\frac{1}{4}\sqrt{xy}+2\sqrt{x})^2$.

580. Чи є число 143 членом арифметичної прогресії 3, 8, 13, ...? Якщо так, то знайдіть номер цього члена прогресії.

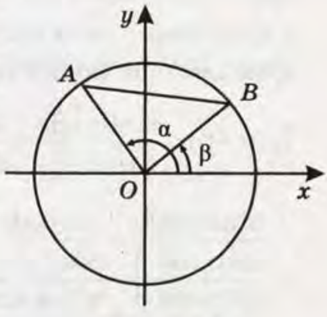
§ 16. Формули додавання

Теорема. ***Які б не були кути або числа α і β, завжди***

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Доведення. Нехай α і β – довільні кути. На одиничному колі їм відповідають точки $A(\cos\alpha; \sin\alpha)$ і $B(\cos\beta; \sin\beta)$ (мал. 90). Виразимо квадрат відстані між точками A і B двома способами. Якщо $\angle AOB=\alpha-\beta$, де $0<\alpha-\beta<\pi$, то за теоремою косинусів

$AB^2=OA^2+OB^2-2\times OA\times$
$\times OB\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$.



Мал. 90

Згідно з теоремою про квадрат відстані між двома точками

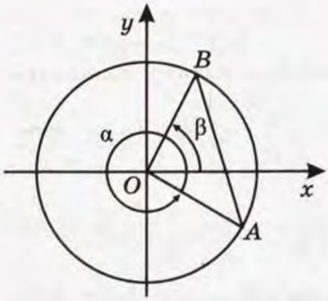
$AB^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2==$
$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=2-$
$-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$.

Отже, $2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$, звідси $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

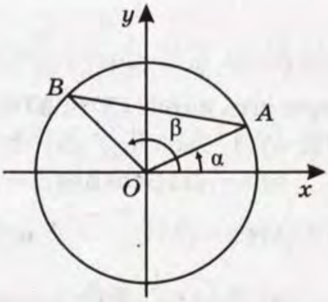
Ми розглянули випадок, коли $\angle AOB=\alpha-\beta$, де $0<\alpha-\beta<\pi$. В інших випадках кут AOB може дорівнювати $\alpha-\beta+2\pi n$ або $\beta-\alpha+2\pi n$, де $n\in N$ (мал. 91). Косинус кожного з таких кутів дорівнює $\cos(\alpha-\beta)$. Тому теорема, що доводиться, правильна для будь-яких кутів α і β, а отже, і для довільних дійсних чисел α і β.

На основі доведеної теореми і формул зведення можна вивести подібні формули для перетворення виразів $\cos(\alpha+\beta)$ і $\sin(\alpha\pm\beta)$.

$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=$
$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.



а)



б)

Мал. 91

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+$$

$$+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Доведемо ще формули для перетворення виразів $\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)$.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}(\alpha+(-\beta))=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Отже, маємо 6 формул:

$$\mathbf{\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,}$$
$$\mathbf{\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,}$$
$$\mathbf{\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.}$$

Це – *формули додавання*. Чотири перші з них правильні для будь-яких кутів або чисел α і β, дві останні – для будь-яких допустимих значень α і β (коли всі тангенси у формулі мають значення).

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які тригонометричні рівності називають формулами додавання?
2. Як визначається косинус різниці двох кутів?
3. Чи одне й те саме означає косинус суми і сума косинусів?
4. Як визначається косинус суми двох кутів?
5. Як визначається тангенс суми (різниці) двох кутів?

Виконаємо разом

1. За допомогою формул додавання перетворіть вираз:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\cos(\pi+\alpha)$; в) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-1\right)$.

• Розв'язання.

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha=1\cdot\cos\alpha-0\cdot\sin\alpha=\cos\alpha;$

б) $\cos(\pi+\alpha)=\cos\pi\cos\alpha-\sin\pi\sin\alpha=-1\cdot\cos\alpha-0\cdot\sin\alpha=-\cos\alpha;$

в) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-1\right)=\cos\frac{3\pi}{2}\cos1+\sin\frac{3\pi}{2}\sin1=0\cdot\cos1+(-1)\cdot\sin1=-\sin1.$

2. Обчисліть значення $\sin75°$.

• Розв'язання. $\sin75° = \sin(30° + 45°) = \sin30°\cos45° +$
$+ \cos30°\sin45° = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}).$

Відповідь. $\sin75°=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}).$

3. Обчисліть значення виразу $\cos35°\cos25° - \sin35°\sin25°$.

• Розв'язання. $\cos35°\cos25° - \sin35°\sin25° = \cos(35° + 25°) =$
$= \cos60° = \frac{1}{2}.$

Виконайте усно

581. Які вирази мають бути в порожніх клітинках таблиці?

	$\alpha+\beta$	$\alpha+x$	$\alpha-x$	$c+1$	$c-2$
sin					
cos					
tg					

582. Спростіть вираз:
а) $\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$; б) $\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$;
в) $\cos\alpha \cos 2 - \sin\alpha \sin 2$; г) $\cos x \cos y + \sin x \sin y$.

А

Спростіть вираз **(583, 584)**.

583. а) $\sin\alpha \cos x + \cos\alpha \sin x$; б) $\cos\beta \sin\alpha - \cos\alpha \sin\beta$;
в) $\sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha \cos\beta$; г) $\sin\alpha \sin\frac{\pi}{5} + \cos\alpha \cos\frac{\pi}{5}$.

584. а) $\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha \cos\beta$; б) $\sin\alpha \sin\beta + \cos(\alpha+\beta)$.
в) $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$; г) $\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$.

Обчисліть значення виразу **(585–587)**.

585. а) $\cos 57° \cos 27° + \sin 57° \sin 27°$;
б) $\sin 11° \cos 19° + \cos 11° \sin 19°$;
в) $\cos 51° \sin 21° - \cos 21° \sin 51°$;
г) $\sin 12° \cos 18° + \cos 12° \sin 18°$.

586. а) $\cos 58° \cos 32° - \sin 58° \sin 32°$;
б) $\sin 65° \cos 55° + \cos 65° \sin 55°$;
в) $\sin 64° \sin 19° + \cos 64° \cos 19°$;
г) $\cos 10° \cos 20° - \sin 20° \sin 10°$.

587. а) $(\operatorname{tg} 36° + \operatorname{tg} 24°) : (1 - \operatorname{tg} 36° \operatorname{tg} 24°)$;
б) $(\operatorname{tg} 70° - \operatorname{tg} 40°) : (1 + \operatorname{tg} 70° \operatorname{tg} 40°)$.

Доведіть тотожність **(588–590)**.

588. а) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha \cos\beta$;
б) $\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha \cos\beta$.

589. а) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\alpha$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sqrt{3}\sin\alpha$.

590. а) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\cos\alpha\cos\beta$;

б) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\sin\alpha\sin\beta$.

591. Обчисліть значення $\cos 75°$, $\operatorname{tg} 75°$, $\operatorname{ctg} 75°$.

Обчисліть значення виразу **(592–596)**.

592. а) $\sin 15°$; б) $\cos 15°$; в) $\operatorname{tg} 15°$; г) $\operatorname{ctg} 15°$.

593. а) $\sin 105°$; б) $\cos 105°$; в) $\operatorname{tg} 105°$; г) $\operatorname{ctg} 105°$.

Б

594. а) $\sin\frac{\pi}{12}$; б) $\cos\frac{7\pi}{12}$; в) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}$.

595. а) $\sin\frac{5\pi}{12}$; б) $\cos\frac{5\pi}{12}$; в) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$.

596. а) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ - 0{,}25$; б) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+0{,}75$.

Спростіть вираз **(597–600)**.

597. а) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\alpha$; б) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\alpha$;

в) $\sqrt{3}\cos\alpha-2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$; г) $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha$.

598. а) $0{,}5\sin x-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; б) $2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin x$;

в) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$; г) $\frac{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}$.

599. а) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha}$; б) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta}$.

600. а) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{7\pi}{30}\cos\frac{4\pi}{15}+\cos\frac{7\pi}{30}\sin\frac{4\pi}{15}}$;

б) $\dfrac{\cos 17^\circ\cos 28^\circ-\cos 107^\circ\sin 208^\circ}{\sin 34^\circ\sin 146^\circ+\sin 236^\circ\sin 304^\circ}$.

Доведіть тотожність **(601, 602)**.

601. а) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$; б) $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}$.

602. а) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$;

б) $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$.

603. Знайдіть $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ і $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{4}$.

604. Знаючи, що $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ і $\cos\beta = \frac{4}{5}$, причому $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, обчисліть значення:

а) $\sin(\alpha + \beta)$; б) $\cos(\alpha + \beta)$; в) $\cos(\alpha - \beta)$.

605. Доведіть тотожність:

а) $\mathrm{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta - 1}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta}$; б) $\mathrm{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta + 1}{\mathrm{ctg}\beta - \mathrm{ctg}\alpha}$.

606. Доведіть, що для будь-яких кутів α, β, γ трикутника $\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

Вправи для повторення

607. З двох міст, відстань між якими 500 км, виїхали назустріч один одному автомобіль і мотоцикл, які зустрілися через 5 год. Швидкість руху автомобіля у 3 рази більша, ніж швидкість руху мотоцикла. Яка швидкість руху автомобіля і яка мотоцикла?

608. Розв'яжіть нерівність:

а) $(x + 3)(x - 2) > 0$; б) $(2x - 1)(x - 5) \leqslant 0$.

609. Порівняйте:

а) $5{,}7^3$ і $5{,}4^3$; б) $1{,}6^6$ і $1{,}8^6$;

в) $(-4{,}1)^3$ і $(-4{,}2)^3$; г) $(-5{,}3)^6$ і $(-4{,}2)^6$.

§ 17. Наслідки із формул додавання

Якщо у формулах додавання:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

замість змінної β підставити α, дістанемо тотожності:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Це – *формули подвійного аргументу*. Вони правильні при будь-яких значеннях α (остання – за умови, що $\mathrm{tg}\alpha$ і $\mathrm{tg}\,2\alpha$ існують. Формули подвійного аргументу часто використовують для перетворень тригонометричних виразів. Наприклад:

1) $\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$;

2) $(1 - \mathrm{tg}^2\alpha)\cdot \mathrm{tg}\,2\alpha = (1 - \mathrm{tg}^2\alpha)\cdot \dfrac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} = 2\,\mathrm{tg}\alpha.$

Зверніть увагу на вирази $1 + \cos 2\alpha$ і $1 - \cos 2\alpha$.

$$1 + \cos 2\alpha = 1 + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha,$$
$$1 - \cos 2\alpha = 1 - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 2\sin^2\alpha.$$

Отже,

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha),\ \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

Ці тотожності називають формулами *пониження степеня*. Замінивши в них α на $\frac{\alpha}{2}$, дістанемо *формули половинного аргументу*:

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\quad \left|\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Для прикладу обчислимо $\mathrm{tg}\,15^\circ$. Оскільки $\mathrm{tg}\,15^\circ > 0$, то

$$\mathrm{tg}\,15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}.$$

Отже, $\mathrm{tg}\,15^\circ = 2-\sqrt{3}$.

Зауваження. Іноді аргумент α доцільно розглядати як подвійний відносно аргументу $\frac{\alpha}{2}$ або половинний відносно 2α. Наприклад,

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},\ \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2},$$
$$\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha.$$

Правильні і такі формули:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$
$$\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Усі ці тотожності називають *формулами перетворення суми тригонометричних функцій у добуток* (різницю вважають окремим видом суми). Дві останні формули правильні тільки за умови, що $\mathrm{tg}\alpha$ і $\mathrm{tg}\beta$ існують.

Доведемо формулу

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Припустимо, що $\alpha = x + y$ і $\beta = x - y$. Тоді $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x + y) + \sin(x - y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y + \sin x\cos y - \cos x\sin y = 2\sin x\cos y$.

З рівностей $\alpha = x + y$ і $\beta = x - y$ знаходимо, що

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2},\ \ y=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Тому

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Цю тотожність називають *формулою суми синусів двох аргументів*.

Інші з наведених вище шести формул можна довести простіше, наприклад так:

$$\sin\alpha-\sin\beta=\sin\alpha+\sin(-\beta)=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=2\sin\frac{\pi-\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\pm\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Сформулюйте формули додавання.
2. Як можна отримати формули подвійних аргументів?
3. Доведіть формули пониження степеня.
4. Які формули називають формулами половинних аргументів?
5. Сформулюйте і доведіть формулу суми синусів двох аргументів.

Виконаємо разом

1. Спростіть вираз:

а) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\alpha$; б) $\cos\frac{2\alpha}{3}-\cos^2\frac{\alpha}{3}+\sin^2\frac{\alpha}{3}$.

• Розв'язання. а) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\alpha=\sin\alpha-\sin\alpha=0$;

б) $\cos\frac{2\alpha}{3}-\left(\cos^2\frac{\alpha}{3}-\sin^2\frac{\alpha}{3}\right)=\cos\frac{2\alpha}{3}-\cos\frac{2\alpha}{3}=0$.

2. Доведіть тотожність

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$.

Розв'язання. Перетворимо праву частину тотожності за формулою суми косинусів:

$$\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)) = \frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2} =$$

$$=\cos\alpha\cos\beta.$$

Отже, рівність правильна при будь-яких значеннях α і β.

3. Запишіть у вигляді добутку вираз $1 - 2\cos\alpha$.

Розв'язання. $1 - 2\cos\alpha = 2\left(\frac{1}{2}-\cos\alpha\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\alpha\right)=$

$$=2\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$

Відповідь. $1-2\cos\alpha=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$.

4. Знайдіть найменший невід'ємний корінь рівняння $\cos^4 x - 1 = \sin^4 x$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне рівнянню $\cos^4 x - \sin^4 x = 1$, або $(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1$, звідси $\cos 2x = 1$, $2x = 0$, $x = 0$.

Виконайте усно

Спростіть вираз **(610–612)**.

610. а) $2\sin\alpha\cos\alpha$; б) $\sin x\cos x$;
в) $4\cos\beta\sin\beta$; г) $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha$.

611. а) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; б) $\sin^2 x - \cos^2 x$;
в) $\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$; г) $\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha$.

612. а) $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; б) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

А

613. Обчисліть значення виразу:

а) $2\sin 15°\cos 15°$; б) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$; в) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$;

г) $1-2\sin^2 15°$; ґ) $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$; д) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}:\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}\right)$.

Спростіть вираз **(614–617)**.

614. а) $2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha$; б) $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha$;
в) $\sin 2x-(\sin x+\cos x)^2$; г) $\cos^2\beta\,(1-\operatorname{tg}^2\beta)$.

615. а) $2\cos\frac{\pi-\alpha}{2}\sin\frac{\pi-\alpha}{2}$; б) $\cos^2\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)$;

в) $\frac{\sin 2x}{\operatorname{ctg}x\sin^2 x}$; г) $\frac{2\cos^2 x\operatorname{tg}x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$.

616. а) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$; б) $\frac{1-\cos 4x}{2\sin 2x}$;

в) $\frac{1+\cos 2\beta}{1-\cos 2\beta}$; г) $\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

617. а) $\frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{1+\cos 4x}$; б) $\frac{1-\cos 6x}{\sin 3x}$;

в) $(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{tg}2\alpha$; г) $(1-\operatorname{tg}^2\alpha):2\operatorname{tg}\alpha$.

Доведіть тотожність **(618–620)**.

618. а) $\cos 2x+\sin^2 x=\cos^2 x$;
б) $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$;
в) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin 2\alpha$;
г) $\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=1-\sin\alpha$.

619. а) $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; б) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$;

в) $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; г) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$.

620. а) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha=1$;
б) $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha=1$;
в) $(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)\sin 2\alpha=2\operatorname{ctg}\alpha$;
г) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\cos 2\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha$.

621. Спростіть вираз:
а) $\sin 50°+\sin 10°$; б) $\cos 50°+\cos 10°$;
в) $\sin 50°-\sin 10°$; г) $\cos 50°-\cos 10°$.

Запишіть у вигляді добутку вираз **(622–625).**

622. а) $\sin 5\alpha + \sin\alpha$; б) $\sin 5\beta - \sin\beta$;
в) $\cos x - \cos 3x$; г) $\cos\gamma + \cos 7\gamma$.

623. а) $\sin\dfrac{\pi}{5} + \sin\dfrac{2\pi}{5}$; б) $\cos\dfrac{3\pi}{4} + \cos\dfrac{11\pi}{12}$;
в) $\cos\alpha + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)$; г) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\alpha$.

624. а) $\operatorname{tg} 2\beta + \operatorname{tg}\beta$; б) $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x$;
в) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$; г) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) + \operatorname{tg}\alpha$.

625. а) $\cos\alpha + \sin\alpha$; б) $\sin 3\alpha - \cos 2\alpha$;
в) $\sin\dfrac{x}{2} - \sin\dfrac{x}{3}$; г) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$.

Спростіть вираз **(626, 627).**

626. а) $\cos(60^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ - \alpha)$;
б) $\sin(60^\circ + x) + \sin(60^\circ - x)$.

627. а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$; б) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$

Б

Доведіть тотожність **(628–631).**

628. а) $1 + \sin 2\alpha = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$; б) $1 - \sin 2\alpha = 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

629. а) $\sin\alpha - \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \cos\alpha \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$; б) $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sin\alpha$.

630. а) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$; б) $\dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha} = \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

631. а) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha$; б) $\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha$.

Запишіть у вигляді добутку вираз **(632, 633).**

632. а) $0{,}5 + \sin\alpha$; б) $0{,}5 - \sin x$; в) $\sqrt{2} + 2\cos\varphi$;
г) $\sqrt{2} - 2\cos x$; ґ) $2\sin\alpha - \sqrt{3}$; д) $\sqrt{3} - 2\cos\alpha$.

633. а) $\cos x + \cos 2x + \cos 5x$;
б) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$;
в) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$;
г) $\cos 2x - \cos 4x - \cos 6x + \cos 8x$.

634. Доведіть тотожність:
а) $\sin\alpha \sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$;

б) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$.

635. Доведіть, що:

а) $\sin 35° \sin 55° = \frac{1}{2}\cos 20°$; б) $\cos 65° \cos 25° = \frac{1}{2}\cos 40°$;

в) $\sin^4 \frac{3\pi}{8} - \cos^4 \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

636. Дано: $\sin\alpha = 0{,}8$; $90° < \alpha < 180°$. Знайдіть $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$.

637. Дано: $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$; $270° < \alpha < 360°$. Знайдіть $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$.

638. Обчисліть значення $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}4$.

Доведіть тотожність **(639–642)**.

639. а) $(\cos 2\alpha + \cos 6\alpha)\operatorname{tg} 4\alpha = \sin 2\alpha + \sin 6\alpha$;
б) $(\cos\alpha + \cos 5\alpha)\operatorname{tg} 3\alpha = \sin\alpha + \sin 5\alpha$.

640. а) $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sin 2\alpha$; б) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \cos 2\alpha$;

в) $\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - \cos 2\alpha\cos 2\beta = 1$.

641. а) $\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$;
б) $\sin 2\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = -\cos 2\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

в) $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;

г) $\operatorname{tg}(\alpha + 45°) + \operatorname{tg}(\alpha - 45°) = 2\operatorname{tg} 2\alpha$.

642. а) $2\sin(45° + \alpha)\sin(45° - \alpha) = \cos 2\alpha$;

б) $\frac{1-\operatorname{tg}^2(45°-\alpha)}{1+\operatorname{tg}^2(45°-\alpha)} = \sin 2\alpha$.

643. Доведіть тотожності Л. Ейлера:
а) $\sin(30° + z) = \cos z - \sin(30° - z)$;
б) $\cos(30° + z) = \cos(30° - z) - \sin z$.

644. Покажіть, що всі тригонометричні функції кута α можна представити раціональними виразами через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

645. Дано: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$. Знайдіть $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

646. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2} + 1$. Знайдіть $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

647. $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ і $\operatorname{tg} 3\alpha$ виразіть відповідно через $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$.

Вправи для повторення

648. Знайдіть моду, медіану і середнє значення вибірки:
а) 2, 2, 3, 4, 4, 4, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8;
б) 12, 17, 11, 16, 13, 14, 15, 12, 15, 16, 11, 13, 13.

649. Птахоферма збільшила випуск продукції за перший рік на 10 %, а за другий – на 20 %. Як зріс випуск продукції на птахофермі за ці два роки?

650. Розкладіть многочлен на множники:
а) x^2+5x+4; б) x^2+5x+6; в) $x^2-8x+15$; г) x^2-x-6.

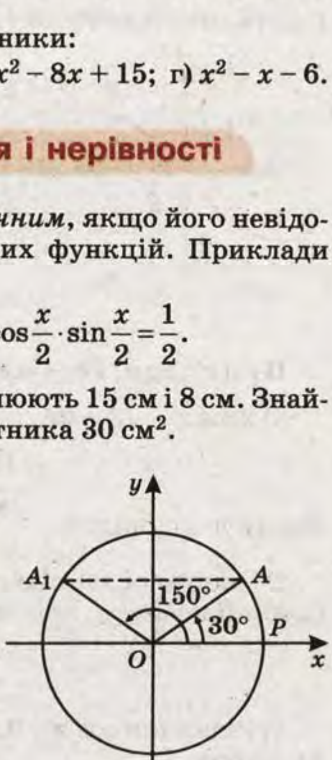
§ 18. Тригонометричні рівняння і нерівності

Рівняння називають *тригонометричним*, якщо його невідомі входять під знаки тригонометричних функцій. Приклади тригонометричних рівнянь:

$$\sin x = 0{,}5; \qquad 2\cos x = \sqrt{3}; \qquad \cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Задача. Сторони трикутника дорівнюють 15 см і 8 см. Знайдіть кут між ними, якщо площа трикутника 30 см^2.

Розв'язання. Площу S трикутника можна визначити за формулою $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$, де a, b – його сторони, а α – кут між ними. Якщо шуканий кут даного трикутника містить x градусів, то $30=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 8\cdot\sin x$, звідси $\sin x=\frac{1}{2}$.



Мал. 92

Отримали тригонометричне рівняння. Розв'яжемо його. Синус кута дорівнює 0,5, коли кут має 30° або 150° (мал. 92).

Трикутники з такими кутами існують.

Відповідь. 30° або 150°.

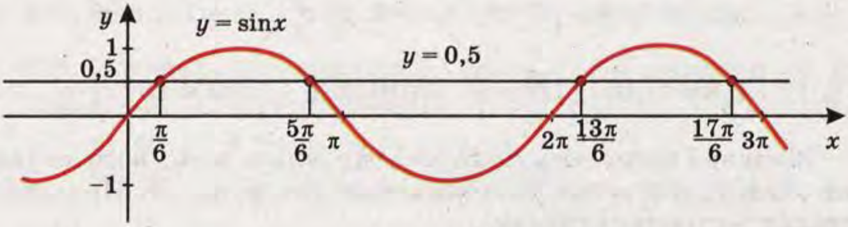
У розглянутому випадку кути не можуть бути від'ємними або більшими за 180°.

А взагалі рівняння $\sin x=\frac{1}{2}$ має безліч розв'язків: $30°+360°\cdot n$ і $150°+360°\cdot n$, де $n\in Z$.

Розв'язуючи тригонометричне рівняння, найчастіше знаходять усю множину його розв'язків. І виражають їх здебільшого не в градусах, а в абстрактних числах. Наприклад, множину розв'язків рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$ записують так:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ де } k \in Z.$$

Те, що рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$ має безліч розв'язків, видно з його графічного розв'язання: графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$ мають безліч спільних точок (мал. 93).



Мал. 93

Приклади. Розв'яжіть рівняння:

а) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$; б) $\cos x = 0{,}6$.

• Розв'язання. а) Перетворимо дане рівняння: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Косинус x дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$, коли $x = \frac{\pi}{6}$ або $x = -\frac{\pi}{6}$.

Об'єднуючи дві знайдені рівності і враховуючи періодичність функції косинус, можемо записати відповідь:

$$\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

б) Рівняння $\cos x = 0{,}6$ можна розв'язати за допомогою калькулятора:

$$0{,}6\ \boxed{F}\ \boxed{\text{arc}}\ \boxed{\cos} \approx 0{,}927.$$

Отже, маємо множину наближених розв'язків:

$$x \approx \pm 0{,}927 + 2\pi n,\ n \in Z.$$

А як знайти множину точних розв'язків такого рівняння?

Нехай $|a| \leqslant 1$. ***Арккосинусом*** **числа** $\boldsymbol{a}$ **називають кут або число з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює $\boldsymbol{a}$.** Наприклад,

$$\arccos 1 = 0,\ \arccos 0{,}5 = \frac{\pi}{3},\ \arccos 0 = \frac{\pi}{2},\ \arccos(-1) = \pi.$$

Множину розв'язків рівняння $\cos x = 0{,}6$ можна записати так:

$$x = \pm\arccos 0{,}6 + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Узагалі рівняння $\cos x = a$ при $|a| > 1$ розв'язків не має, а при $|a| \leqslant 1$ множина його розв'язків

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Подібно до арккосинуса означають арксинус і арктангенс.

Нехай $|a| \leqslant 1$. ***Арксинусом числа a*** **називають кут або число з проміжку** $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$**, синус якого дорівнює** a. Наприклад,

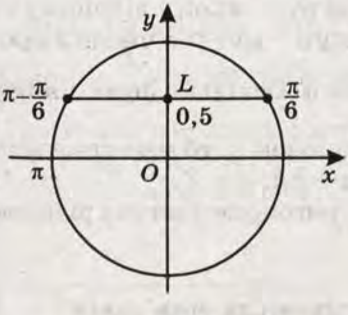
$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2},\ \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},\ \arcsin 0 = 0,\ \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Рівняння $\sin x = 0{,}5$ має розв'язки $x = \frac{\pi}{6}$ і $x = \pi - \frac{\pi}{6}$ (мал. 94).

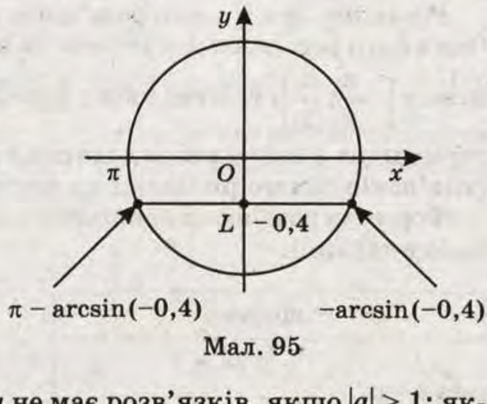
Оскільки функція $\sin x$ періодична з найменшим додатним періодом 2π, то дане рівняння має дві серії розв'язків: $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ і $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in Z$.

Розв'яжемо ще рівняння $\sin x = -0{,}4$. Два його розв'язки: $x = \arcsin(-0{,}4)$ і $x = \pi - \arcsin(-0{,}4)$ (мал. 95). Усі розв'язки:

$$x_1 = \arcsin(-0{,}4) + 2\pi n \text{ і}$$
$$x_2 = \pi - \arcsin(-0{,}4) + 2\pi n,\ n \in Z.$$



Мал. 94



Мал. 95

Узагалі рівняння $\sin x = a$ не має розв'язків, якщо $|a| > 1$; якщо $|a| \leqslant 1$, то множина його розв'язків складається з двох серій:

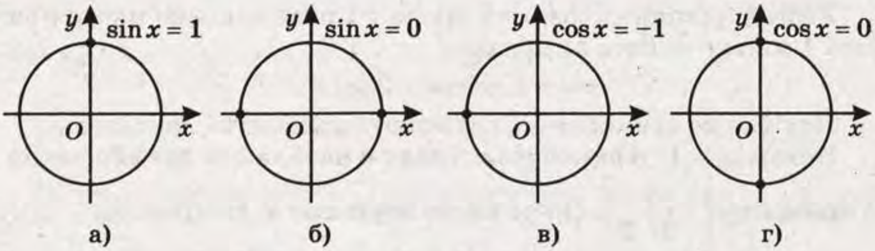
$$x_1 = \arcsin a + 2\pi n \text{ і}$$
$$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Зауваження. Дві останні формули можна об'єднати в одну:

$$x_1 = \arcsin a + \pi \cdot 2n,\ x_2 = -\arcsin a + \pi(2n + 1).$$

Отже, коли множник при π парний чи непарний, то $\arcsin a$ береться відповідно з плюсом чи мінусом. Ці випадки об'єднує рівність $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$.

Така загальна формула розв'язків рівняння $\sin x = a$, якщо $|a| \leqslant 1$.



Мал. 96

Рівняння $\sin x = a$ і $\cos x = a$, якщо a дорівнює 0, 1 або −1, можна розв'язувати і за загальними формулами, але зручніше – уявляючи одиничне коло (мал. 96). Наприклад, рівняння

$\sin x = 1$ має множину розв'язків $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$;

$\sin x = 0$ має множину розв'язків $x = \pi n$;

$\cos x = -1$ має множину розв'язків $x = \pi + 2\pi n$;

$\cos x = 0$ має множину розв'язків $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Тут і далі в подібних рівностях n – довільне ціле число.

Рівняння $\operatorname{tg} x = a$ має розв'язки при будь-якому дійсному a. Один його розв'язок $x = \operatorname{arctg} a$, де $\operatorname{arctg} \alpha$ – кут або число з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a. Оскільки функція $\operatorname{tg} x$ періодична з найменшим додатним періодом π, то множина всіх розв'язків даного рівняння $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in Z$.

Формули розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь дано в таблиці.

Рівняння		Формула розв'язків
$\sin x = a$,	$\lvert a \rvert \leqslant 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi$, $k \in Z$
	$\lvert a \rvert > 1$	розв'язків немає
$\cos x = a$,	$\lvert a \rvert \leqslant 1$	$x = \pm \arccos a + 2k\pi$, $k \in Z$
	$\lvert a \rvert > 1$	розв'язків немає
$\operatorname{tg} x = a$		$x = \operatorname{arctg} a + k\pi$, $k \in Z$

Рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ при $a = 0$ має множину розв'язків $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

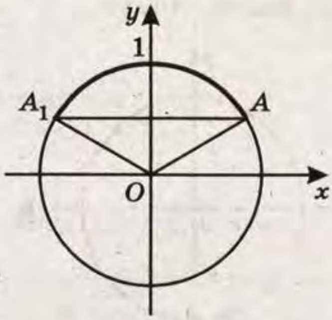
У всіх інших випадках воно рівносильне рівнянню $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$.

Розв'язуючи складніші тригонометричні рівняння, зводять їх до простіших, як це зазвичай роблять при розв'язуванні алгебраїчних рівнянь. Деякі тригонометричні рівняння зводять до квадратних.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$.

Розв'язання. Нехай $\cos x = y$. Рівняння $2y^2 + 3y - 2 = 0$ має два корені: $y = -2$ і $y = 0{,}5$. Значення косинуса не може дорівнювати -2. Отже, $\cos x = 0{,}5$, звідси $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

Відповідь. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, де $n \in Z$.



Мал. 97

А як розв'язати, наприклад, нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$?

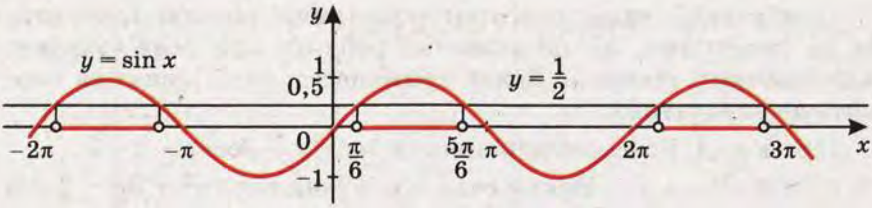
Подивимося на одиничне коло (мал. 97). Усі його точки, ординати яких більші від $\frac{1}{2}$, лежать на виділеній дузі AA_1. Точка A відповідає куту або числу $\frac{\pi}{6}$, а точка A_1 – куту або числу $\frac{5\pi}{6}$. Отже, на проміжку $[0;\ 2\pi]$ нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$ задовольняє кожне з чисел проміжку $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)$. Проте це не вся множина розв'язків. Оскільки при кожному значенні x і цілому n $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$, то дану нерівність задовольняють усі числа безлічі проміжків:

$$\ldots, \left(\frac{\pi}{6} - 2\pi;\ \frac{5\pi}{6} - 2\pi\right), \left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right),$$

$$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi\right), \left(\frac{\pi}{6} + 4\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 4\pi\right), \ldots$$

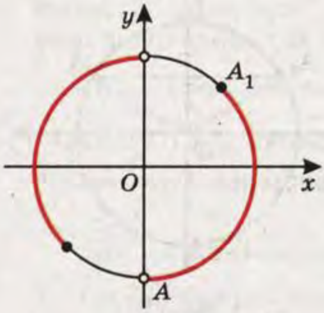
Відповідь прийнято записувати так: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, де $n \in Z$.

Дану нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$ можна розв'язати і графічно. Для цього треба побудувати в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$ (мал. 98). Ті значення x, при яких значення $\sin x$ більші за $\frac{1}{2}$, утворюють безліч проміжків. Вони і складають відповідь.



Мал. 98

Нерівності $\sin x > 1$, $\sin x < -1$, $\cos x > 1$, $\cos x < -1$ розв'язків не мають. Чому?



Мал. 99

Кожну з нерівностей $\sin x \geqslant -1$, $\sin x \leqslant 1$, $\cos x \geqslant -1$, $\cos x \leqslant 1$ задовольняє будь-яке дійсне число і будь-який кут. Чому?

Нерівності $\operatorname{tg} x \leqslant a$ і $\operatorname{tg} x \geqslant a$ мають розв'язки при будь-яких a.

Для прикладу розв'яжемо нерівність $\operatorname{tg} x \leqslant 1$.

Оскільки на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ тангенс зростає і дорівнює 1 при $x = \frac{\pi}{4}$, то на цьому проміжку нерівність має множину розв'язків $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$ (мал. 99). А оскільки $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$ для кожного значення x з області визначення і будь-якого цілого n, то загальною множиною розв'язків даної нерівності є $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, де $n \in Z$.

Спробуйте розв'язати нерівність $\operatorname{tg} x \leqslant 1$ графічно.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які рівняння називають тригонометричними?
2. Скільки розв'язків має рівняння: $\sin x = 0$, $\cos x = 2$?
3. Що таке арксинус, арккосинус, арктангенс?
4. За якою формулою розв'язують рівняння $\sin x = a$?
5. Яку множину розв'язків має рівняння: $\cos x = 1$, $\cos x = 0$, $\sin x = 1$, $\sin x = 0$?

Виконаємо разом

1. Розв'яжіть рівняння: а) $\sin 2x = -1$; б) $\cos 3\varphi = -1$.

• **Розв'язання.** а) $2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

б) $3\varphi = \pi + 2\pi n = \pi(2n+1)$, $\varphi = \frac{1}{3}\pi(2n+1)$, $n \in Z$.

2. Знайдіть корені рівняння:

а) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$; б) $\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$.

• Розв'язання. а) Оскільки $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то

$$2(1-\cos^2 x) + 3\cos x = 0,$$

звідси

$$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0.$$

Розв'язуючи це квадратне рівняння відносно $\cos x$, дістанемо два найпростіших рівняння:

$$\cos x = 2 \text{ і } \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Очевидно, рівняння $\cos x = 2$ розв'язків не має.

Розв'язками рівняння $\cos x = -\frac{1}{2}$ є

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \text{ де } k \in Z.$$

б) Оскільки корені рівняння $\cos x = 0$ не є коренями даного рівняння (при $\cos x = 0$ $\sin x = \pm\sqrt{1-0} = \pm 1$), то можна вважати, що $\cos x \neq 0$. Тому обидві частини даного рівняння можна поділити на $\cos^2 x$. Дістанемо:

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\,x - \sqrt{3} = 0.$$

Це – квадратне рівняння відносно $\mathrm{tg}\,x$. Його корені $\mathrm{tg}\,x_1 = \sqrt{3}$, звідси $x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi m$ і $\mathrm{tg}\,x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, звідси $x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi n$.

Відповідь. а) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, де $k \in Z$; б) $x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in Z$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi n$, де $n \in Z$.

3. Розв'яжіть нерівність $\sin 3x > \frac{1}{2}$.

• Розв'язання. Позначимо $3x = y$. Тоді

$$\sin y > \frac{1}{2},\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n < 3x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n < x < \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n.$$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n;\ \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n\right)$, де $n \in Z$.

Виконайте усно

Чи має розв'язки рівняння (651–653)?

651. а) $\sin x = 1{,}5$; б) $\cos x = 1$; в) $\mathrm{tg}\,x = 3{,}5$; г) $\mathrm{ctg}\,x = 0{,}5$.

652. а) $\sin x = 0{,}5$; б) $\cos x = 2{,}5$; в) $\operatorname{tg} x = 0$; г) $\operatorname{ctg} x = 5{,}5$.
653. а) $\sin x = -0{,}05$; б) $\cos x = 0{,}3$; в) $\operatorname{tg} x = -3{,}5$; г) $\operatorname{ctg} x = 1$.

Розв'яжіть рівняння (654–657).

654. а) $\sin x = 1$; б) $\cos x = -1$; в) $\operatorname{tg} x = 0$; г) $\operatorname{ctg} x = 1$.
655. а) $\sin x = 0{,}5$; б) $\cos x = 0$; в) $\operatorname{tg} x = 1$; г) $\operatorname{ctg} x = 0$.
656. а) $\sin x = -1$; б) $\cos x = 1$; в) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.
657. а) $2\sin x = 1$; б) $2\cos x = 1$; в) $3\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg} 2x = 1$.

А

Розв'яжіть рівняння (658–660).

658. а) $\cos x = 0{,}5$; б) $\cos x = 1$; в) $\sin x = -0{,}5$; г) $\sin x = -1$.
659. а) $2\sin x = \sqrt{2}$; б) $2\cos x = \sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x = 1$; г) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.
660. а) $2\cos x + \sqrt{2} = 0$; б) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$.

661. Укажіть абсциси точок перетину графіків функцій $y = \cos x$ і $y = 0{,}5$.

662. Укажіть координати точок перетину графіків функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = -1$.

Розв'яжіть рівняння (663–670).

663. а) $\sin^2 x = 3$; б) $\cos^2 x = 2$.
664. а) $\sin^2 x + \sin x = 0$; б) $\cos x - \cos^2 x = 0$.
665. а) $2\sin x + \sin 2x = 0$; б) $\cos 2x + \sin^2 x = 0$.
666. а) $\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 0{,}25$; б) $\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2} = -1$.
667. а) $\cos x - \cos^2 x = \sin^2 x$; б) $\sin x - \sin^2 x = \cos^2 x$.
668. а) $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 0$; б) $2\cos\frac{x}{2} - \sqrt{2} = 0$.
669. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$; б) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.
670. а) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 = 0$.

671. Знайдіть кути паралелограма, якщо довжини його сторін дорівнюють 4 дм і 5 дм, а площа $10\sqrt{2}$ дм^2.

672. Знайдіть кути ромба, якщо його площа дорівнює 18 дм^2, а периметр 24 дм.

Б

Розв'яжіть рівняння (673–689).

673. а) $\cos x = 0{,}43$; б) $\sin x = 0{,}8$; в) $\operatorname{tg} z = -2{,}5$.
674. а) $2\cos\frac{x}{2} = \sqrt{3}$; б) $3\operatorname{tg}\frac{x}{3} = \sqrt{3}$; в) $\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 1$.
675. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$; б) $\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; в) $\operatorname{tg}\frac{x - 2\pi}{3} = 1$.

676. а) $\cos(\frac{x}{4} - 2) = 0$; б) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$; в) $\text{tg}^2(\varphi - 1) = 0$.

677. а) $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; б) $2\cos^2(\varphi - \pi) = 1$; в) $\text{tg}^2(x - 2) = 1$.

678. а) $\sin x + \cos x = -0,5$; б) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$.

679. а) $2\sin^2 x - \sin x = 0$; б) $\cos^2 x - 2\cos x = 0$.

680. а) $\sin^2 t + 2\sin t = 3$; б) $\cos^2\varphi + 2 = 3\cos\varphi$.

681. а) $2\sin^2 x - \cos x = 1$; б) $2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = 1$.

682. а) $\sin x - \text{tg}\, x = 0$; б) $\cos y - \cos 2y = 0$.

683. а) $\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1$; б) $\cos 2t - \sin t = 0$.

684. а) $\cos 2x = 2\sin^2 x$; б) $2\text{tg}\varphi + 3\text{ctg}\varphi = 5$.

685. а) $\text{tg}\, 2x + \text{tg}\, x = 0$; б) $\text{tg}\, 2x - \text{tg}\, x = 0$.

686. а) $\sin 6x - \sin 4x = 0$; б) $\cos 4x + \cos x = 0$.

687. а) $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$; б) $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$.

688. а) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$;
б) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

689. а) $\sin x + \cos 2x + \cos x \sin 2x = 1$;
б) $\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x = 1$.

Знайдіть корені рівняння **(690–692)**.

690*. а) $\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 8\cos^2 x$;
б) $3\cos^2 x = 2\sin 2x - \sin^2 x$;
в) $2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 1 = 0$;
г) $5\sin^2 x + 3\cos^2 x = 4\sin 2x$.

691*. а) $5\sin 2x - 12\cos 2x = 13$; б) $4\sin 2x + 5\cos 2x = 6$;
в) $5\sin x - 12\cos x = 13$; г) $\sin x + 2\cos x = \sqrt{2}$.

692*. а) $\frac{\sin 2x}{\text{tg}\, 0,5x} = 0$; б) $\frac{\cos 2x}{1 - \text{tg}\, x} = 0$;

в) $\frac{1 + \cos 2x}{2\cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$; г) $\frac{1 - \cos 2x}{2\sin x} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$.

Розв'яжіть нерівність **(693–696)**.

693. а) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos x \geqslant 0,5$; в) $\text{tg}\, x < \sqrt{3}$.

694. а) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\text{tg}\, x \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

695. а) $\sin x < 1$; б) $\cos x > -1$; в) $\text{tg}\, x > 1$.

696. а) $2\cos x < 1$; б) $2\sin x > -\sqrt{2}$; в) $\sqrt{3}\,\text{tg}\, x < 1$.

Вправи для повторення

697. Спростіть вираз:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)$;   б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)$;

в) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(\pi-\alpha)$;   г) $\mathrm{ctg}(\alpha-\pi)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

698. Чи можна ввімкнути в коло прилад з опором $38\pm0{,}5$ Ом, щоб при напрузі 215 ± 15 В сила струму не перевищувала 6,5 А?

699. Які значення x допустимі для дробу:

а) $\frac{2}{x(1+x)}$;   б) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$;   в) $\frac{x^3}{4x^2-100}$;

г) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$;   ґ) $\frac{1}{x^3-x^2}$;   д) $\frac{3}{9x-x^3}$?

700. Маємо 10 торбинок з монетами, у дев'яти з них справжні монети вагою 10 г кожна, а в одному фальшиві монети вагою 9 г кожна. Є ваги, що показують загальну вагу монет. Як за допомогою одного зважування знайти мішок із фальшивими монетами?

Самостійна робота № 4

Варіант 1

1. Заповніть таблицю.

Градусна міра кута	0°	30°		90°		
Радіанна міра кута			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$

2. Спростіть вираз:

а) $(1-\sin^2\alpha)(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)$; б) $\sin 6x-\sin 4x$.

3. Обчисліть $\sin x$, $\mathrm{tg}\,x$, $\mathrm{ctg}\,x$, якщо $\cos x=-\frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$.

4. Побудуйте графік функції $y=\cos x$. Установіть за допомогою графіка, скільки коренів має рівняння $\cos x=\frac{1}{2}$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$? А на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}\right]$?

Варіант 2

1. Заповніть таблицю.

Градусна міра кута		45°		120°		
Радіанна міра кута	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$	2π

2. Спростіть вираз:

а) $(1-\cos^2\alpha)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)$; б) $\cos 3x+\cos x$.

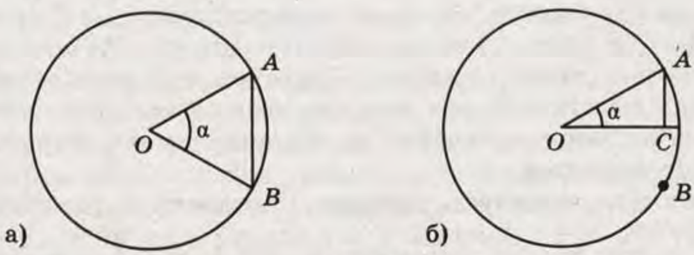
3. Обчисліть $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, якщо $\sin x=-\frac{5}{13}$, $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$.

4. Побудуйте графік функції $y=\sin x$. Установіть за допомогою графіка, скільки коренів має рівняння $\sin x=\frac{1}{2}$ на проміжку $[-\pi;\pi]$? А на проміжку $[-\pi;2\pi]$?

Історичні відомості

Термін «тригонометричні функції» вперше з'явився тільки наприкінці XVIII ст. Але саме поняття під іншими назвами було відоме набагато раніше. Давньогрецький математик і астроном Гіппарх ще в II ст. до н. е. склав таблиці, за допомогою яких визначив відстань від Землі до Місяця, розв'язав багато інших подібних задач. Такі задачі розв'язували також Менелай (I–II ст.), К. Птолемей (II ст.) та інші вчені. Щоправда, в ті далекі часи вони користувалися не таблицями синусів, а досить схожими на них таблицями хорд, у яких кожній мірі центрального кута α при певному радіусі кола ставилась у відповідність довжина хорди (мал. 100, *а*).

Теореми додавання (для хорд) були відомі ще К. Птолемею, використовував він і співвідношення, що відповідає сучасній тотожності $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$.



Мал. 100

Індійський учений Аріабхата в VI ст. перший перейшов від хорд до синусів. Він мірі кута α ставив у відповідність довжину половини хорди AB (мал. 100, *б*), називаючи її словом «ардхадджива» (половина тятиви лука). Згодом цю назву скоротили до «джива», а перекладаючи спочатку арабською, потім латинською мовою, в Європі її замінили на «синус» (лат. sinus – вигин, кривизна).

Слово «косинус» виникло в результаті скорочення латинського complementi sinus – доповняльний синус. В Європі поняття тангенса з'явилося тільки в XVI ст. Назва походить від латинського tangens – той, що дотикається, оскільки лінія тангенсів дотична до кола.

Тригонометрія створювалася в працях математиків Близького і Середнього Сходу IX–XIII ст. Найбільш ранніми були трактати видатних учених Мухаммеда ібн Муси аль-Хорезмі і Ахмада ібн Абдаллаха аль-Марвазі, які довгий час працювали в Будинку мудрості в Багдаді.

Виходець із Узбекистану (м. Хорезмі) Мухаммед аль-Хорезмі (IX ст.) уперше склав таблиці синусів.

Виходець із Туркменистану (м. Мерв) Ахмад аль-Марвазі (764–874) увів поняття тангенса і котангенса (для прямокутних трикутників) і склав таблиці цих функцій. За надзвичайні здібності до обчислень його називали Хабаш аль-Хасиб (обчислювач).

Удосконалив обчислювальні прийоми для тригонометрії і астрономії іранський математик, виходець із Хорасану Мохаммед бен Мохаммед Абу-л-Вафа (940–998). Він склав точніші від попередників таблиці синусів і тангенсів, довів теорему синусів, а також вивів формулу $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. Формули тангенса подвійного кута вивели кілька європейських математиків XVII ст.

Особливе місце в історії розвитку тригонометрії займає твір середньоазійського вченого Абу Райхана Аль-Біруні (973–1048) «Канон Мас'уда». У третій книзі цього твору тригонометрія вперше викладена як самостійна наука. Біруні не лише узагальнив результати, отримані попередниками, а й суттєво доповнив їх та виклав у вигляді стрункої теорії. Важливе значення для подальшого розвитку тригонометрії мало нововведення, зроблене Біруні: він запропонував розглядати тригонометрію на одиничному колі. У цьому випадку всі обчислення значно спрощуються.

Крім синуса, косинуса, тангенса і котангенса, раніше розглядали також секанс, косеканс і синус-верзус $\left(\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\right.$

АБУ РАЙХАН АЛЬ-БІРУНІ
(973–1048)

Вчений енциклопедист. Один з найвидатніших мислителей середньовіччя. Народився в м. Хорезмі. Писав арабською мовою. Працював у галузі математики, хронології, географії, геології, геодезії, астрономії, фізики, ботаніки, мінералогії, етнографії, історії. У математиці займався питаннями арифметики, алгебри, геометрії, тригонометрії, теорії чисел, прикладними задачами.

РЕГІОМОНТАН
(1436–1476)

Німецький математик і астроном (справжнє ім'я – Йоганн Мюллер). 1461 р. написав працю «П'ять книг про трикутники всіх видів», яка започаткувала тригонометрію як самостійну науку. У ній синус, косинус і тангенс розглядалися тільки у зв'язку з розв'язуванням трикутників, сучасних символічних позначень не було. Склав семизначні таблиці синусів і тангенсів. Брав участь у вдосконаленні календаря.

$\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$, $\operatorname{sinvers}\alpha=1-\cos\alpha\Big)$. Тепер використовувати ці функції не прийнято.

Згодом значного поширення набула книжка М. Коперника (1473–1543) «Наука про розв'язування трикутників». Користуючись нею, в XVI–XVIII ст. вивчали тригонометрію й у школах Галичини.

Про періодичність синуса і косинуса знав і Ф. Вієт.

Термін «тригонометрія» з'явився вперше в кінці XVI ст. і означав «вимірювання трикутників». У ті часи розв'язувати трикутники часто доводилося мореплавцям, геодезистам, астрономам, географам та багатьом іншим фахівцям.

Перший графік функції синус побудував Д. Валліс для двох обертів, зауваживши, що таких обертів може бути багато. Він будував також графік секанса, але неправильно. Перші графіки функцій косинус і тангенс для кутів першої чверті будував англійський математик І. Барроу (1630–1677), учитель І. Ньютона.

Математичні символи входили поступово, різні в різних авторів. Наприклад, теперішню рівність $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ англійський математик Д. Валліс (1616–1703) записував так: $S = V : 1 - \sum^2$. До речі, він перший розібрався в знаках синуса в усіх чотирьох чвертях.

Для розвитку тригонометрії багато зробив Л. Ейлер (1734–1800). До нього під синусом, косинусом і т. ін. розуміли не абстрактні числа, а довжини відрізків і пов'язували їх тільки

ВІЄТ ФРАНСУА

(1540–1603)

Французький математик, «батько алгебри» (за освітою юрист). Позначав літерами не тільки невідомі, а й коефіцієнти рівнянь, розробив основи теорії алгебраїчних рівнянь. Довів важливі тригонометричні формули, зокрема такі, що дають можливість розкладати $\sin nx$ і $\cos nx$ за степенями $\sin x$ і $\cos x$. Розглянув усі випадки розв'язування трикутників за трьома даними елементами. У книзі «Математичний канон» (1579) дав таблиці значень функцій $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$.

Розгадав секретний шифр, яким користувалися іспанці, ведучи війну з Францією. Був першим радником короля.

МИКОЛА АНДРІЙОВИЧ ЧАЙКОВСЬКИЙ

(1887–1970)

Український математик-педагог, один з творців української математичної термінології. Народився в м. Бережани Тернопільської області. Наукові дослідження стосуються теорії рівнянь, конічних перерізів та конгруенцій. Значний внесок зробив у справу створення української математичної термінології та впорядкування української математичної бібліографії. Займався популяризацією математики та її історії на сторінках українських журналів. З 1913 р. дійсний член НТШ (Наукового товариство імені Шевченка, яке довгі роки виконувало почесну роль Всеукраїнської академії наук). Автор шкільних підручників «Тригонометрія» (1921) та «Алгебра» (Т. 1, 1925 р., Т. 2, 1926 р.).

з трикутниками та колом. Радіус кола називали повним синусом. Ейлер перший ввів позначення $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, розуміючи під ними відношення довжин відповідних відрізків, розглядав їх при довільних значеннях кута α. Він перший вивів усі формули зведення.

У школах України до 1960 р. тригонометрія була окремим навчальним предметом, поряд з алгеброю та геометрією. Оригінальні підручники надрукував відомий український математик-методист М.А. Чайковський. Повний курс «Тригонометрії» опрацювали спільно і надрукували українською мовою в 1951 р. Й.Б. Погребиський (1906–1972) і П.Ф. Фільчаков (1916–1978).

Головне в розділі 2

$$1\,\text{рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 18'.$$

Основні тригонометричні формули:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Формули зведення:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha,\quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha,\quad \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Правило зведення*: якщо кут даної тригонометричної функції відкладається від вертикального діаметра, то її замінюють кофункцією, якщо ж – від горизонтального діаметра, то її назву не змінюють. Знак ставлять такий, який має значення даної функції за умови, що кут α гострий.*

Формули додавання і наслідки з них

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$	$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

Формули перетворення тригонометричних функцій

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$ $\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$	$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\sin\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ $\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

Тригонометричні функції та їхні графіки

$y = \sin x$, $D = R$, $E = [-1;\ 1]$, графік – синусоїда (див. мал. 68);

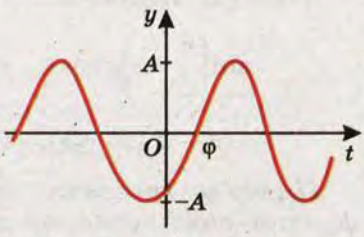
$y = \cos x$, $D = R$, $E = [-1;\ 1]$, синусоїда, зміщена на $\frac{\pi}{2}$ (див. мал. 70);

$y = \mathrm{tg}\, x$, $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $E = R$, тангенсоїда (див. мал. 71);

$y = \mathrm{ctg}\, x$, $x \neq \pi n$, $E = R$.

$y = A\sin(\omega t + \varphi)$ – гармонічне коливання.

A – амплітуда;
ω – кутова швидкість;
$\omega t + \varphi$ – фаза коливання;
φ – початкова фаза.



Формули розв'язків тригонометричних рівнянь

Рівняння		Формула розв'язків
$\sin x = a,$	$\lvert a\rvert \leqslant 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,\ k \in Z$
	$\lvert a\rvert > 1$	розв'язків немає
$\cos x = a,$	$\lvert a\rvert \leqslant 1$	$x = \pm \arccos a + 2k\pi,\ k \in Z$
	$\lvert a\rvert > 1$	розв'язків немає
$\mathrm{tg}\, x = a$		$x = \mathrm{arctg}\, a + k\pi,\ k \in Z$

Геометрія

Геометрія, учителька точності, готує наш розум до глибинних досліджень природи.

Т.Ф. Осиповський

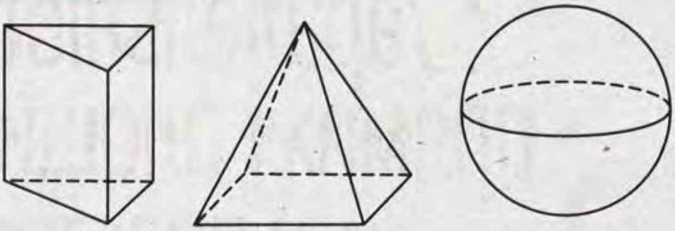
3 Паралельність прямих і площин у просторі

ТЕМИ РОЗДІЛУ:

- що вивчається в стереометрії;
- основні поняття і аксіоми стереометрії;
- наслідки з аксіом стереометрії;
- прямі в просторі;
- паралельне проектування;
- зображення фігур у стереометрії;
- паралельність прямої і площини;
- паралельність площин

§ 19. Що вивчається в стереометрії?

У 7–9 класах вивчають першу частину геометрії – *планіметрію*. Друга частина геометрії називається *стереометрією* (грец. στερεος – просторовий). У стереометрії, як і в планіметрії, розглядають властивості геометричних фігур. Але – не тільки плоских. Нагадаємо, що *геометричною фігурою* називають будь-яку множину точок. Фігуру називають неплоскою, якщо не всі її точки лежать в одній площині. Приклади неплоских фігур: призма, піраміда, куля (мал. 101).



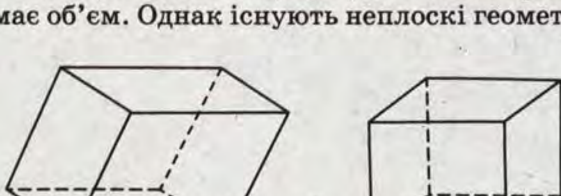
Мал. 101

Згадаємо деякі відомості про паралелепіпед і тетраедр, відомі вам з попередніх класів.

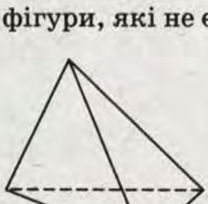
Паралелепіпед має 6 граней, 12 ребер, 8 вершин (мал. 102). Усі грані паралелепіпеда – паралелограми. Якщо всі грані паралелепіпеда – прямокутники, його називають *прямокутним паралелепіпедом*. Окремий вид прямокутного паралелепіпеда – куб. Усі грані куба – рівні квадрати. Записуючи «паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$», мають на увазі, що його основа $ABCD$, а бічні ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.

Тетраедр інакше називають трикутною пірамідою. Він має 4 грані, 6 ребер, 4 вершини (мал. 103). Кожна грань тетраедра – трикутник. Якщо всі ребра тетраедра рівні, його називають *правильним тетраедром*.

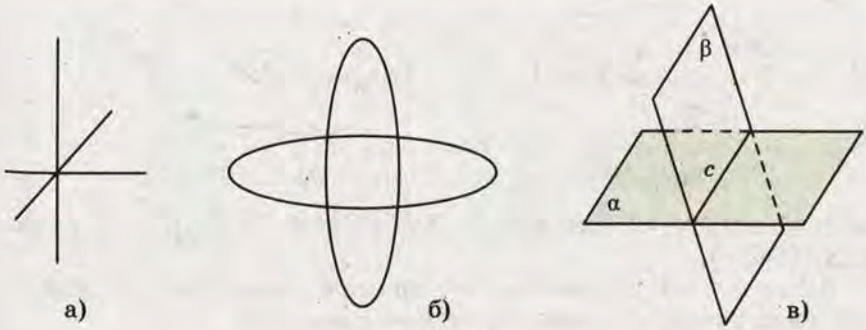
Перераховані вище фігури – *геометричні тіла*. Кожна з них має об'єм. Однак існують неплоскі геометричні фігури, які не є



Мал. 102



Мал. 103



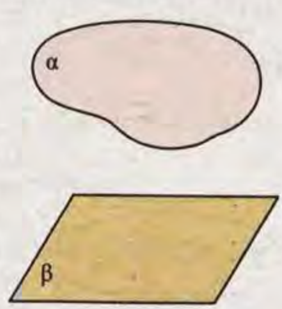
Мал. 104

тілами. Наприклад, об'єднання: трьох попарно перпендикулярних прямих, що мають спільну точку; двох різних кіл; двох площин, що перетинаються, – фігури неплоскі (мал. 104). Ці фігури об'ємів не мають.

У стереометрії важливу роль відіграє поняття «площина». Матеріальними моделями частини площини є, наприклад, поверхня шибки, дзеркала, відполірованого стола, гладінь ставка тощо. Зрозуміло, що це – лише матеріальні моделі, до того ж не всієї площини, а тільки незначної її частини. У геометрії площини вважаються необмеженими, ідеально гладенькими, без будь-якої товщини.

Зображають площини на малюнках у вигляді паралелограмів, еліпсів або довільних замкнених областей (мал. 105). Позначають їх зазвичай грецькими літерами α, β, γ, δ, ω тощо. Як і будь-яка геометрична фігура, площина є деякою множиною точок. Якщо A – точка площини α, кажуть, *що точка A лежить у площині α, а площина α проходить через точку A*. Записують: $A \in \alpha$. Запис $A \notin \omega$ означає, що точка A не лежить у площині.

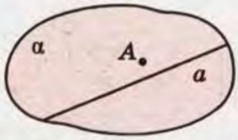
Якщо кожна точка прямої a належить площині α, то кажуть, що *пряма a лежить у площині α, а площина α проходить через пряму a*. Записують: $a \subset \alpha$. Запис $b \not\subset \alpha$ означає, що пряма b не лежить у площині α. На малюнку 106 зображено площину α, яка проходить через пряму a і точку A.



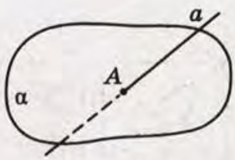
Мал. 105

Якщо пряма a і площина α мають тільки одну спільну точку A, кажуть, що вони *перетинаються в точці A*. Записують: $a \cap \alpha = A$. На відповідному малюнку невидиму частину прямої (за площиною) зображають штриховою лінією (див. мал. 107).

Якщо через пряму c проходять дві різні площини α і β, кажуть, що ці площини *пе-*



Мал. 106



Мал. 107

ретинаються по прямій c. Записують: $\alpha \cap \beta = c$ (див. мал. 104, *в*).

Запис $a \cap \alpha = \varnothing$, означає, що пряма a і площина α не мають спільних точок. $\varnothing$ – знак *порожньої множини*.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Поясніть значення слів «планіметрія» і «стереометрія».
2. Які фігури називають неплоскими?
3. Наведіть приклади плоских і неплоских фігур.
4. Наведіть приклади матеріальних об'єктів, моделями яких є точка, пряма, площина, простір.
5. Що означають записи: $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$?
6. Що означають записи: $a \subset \alpha$, $\alpha \not\subset \beta$, $a \cap \alpha = A$, $\alpha \cap \beta = \varnothing$?

Виконаємо разом

1. Дано пряму c і площину ω. Яким може бути $c \cap \omega$?

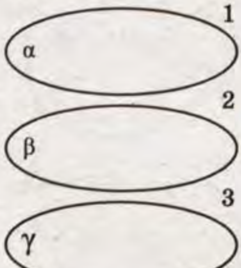
• Розв'язання. Якщо пряма c не має спільних точок з площиною ω, то $c \cap \omega = \varnothing$.

Якщо пряма c перетинає площину ω у точці A, то $c \cap \omega = A$.

Якщо пряма c лежить у площині ω, то $c \cap \omega = c$.

2. На скільки частин можуть поділити простір три різні площини?

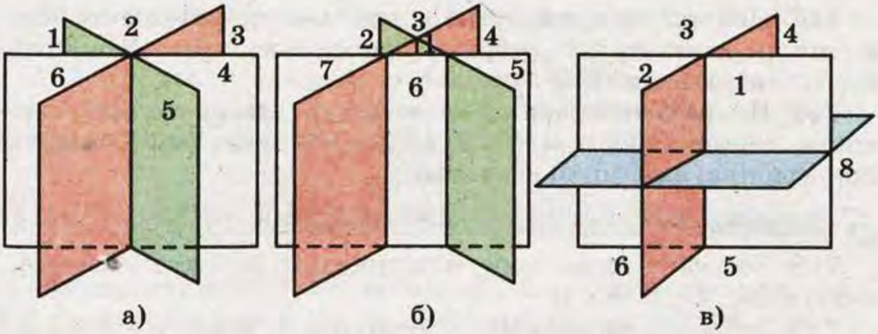
• Розв'язання. Якщо жодні дві з трьох даних площин не мають спільних точок (мал. 108), то вони поділяють простір на 4 частини. В інших випадках три площини можуть ділити простір на 6, 7 чи 8 частин (мал. 109).



Мал. 108

3. На прямій дано 27 різних точок. На скільки частин вони ділять пряму?

• Розв'язання. Одна внутрішня точка ділить пряму, промінь чи відрізок на 2 частини, дві точки – на 3 частини і т. д. Зі збільшенням на одиницю числа точок на прямій, збільшується на одиницю і кількість частин прямої. Отже, 27 різних точок прямої ділять її на 28 частин. Дві з цих частин – промені, а решта – відрізки.



Мал. 109

Виконайте усно

701. Чи є геометричними фігурами точка, пряма, площина, простір?

702. Які із зазначених фігур неплоскі: відрізок, коло, куля, прямокутний паралелепіпед, прямокутний трикутник?

703. Чим різняться поняття «площина» і «площа»?

704. Серед речей, які ви бачите в класі, покажіть або назвіть матеріальні моделі частин: а) прямих; б) площин.

705. Скільки спільних точок можуть мати: а) дві прямі; б) пряма і площина; в) дві площини?

706. Провідміняйте слова «простір», «стереометрія».

А

707. Зобразіть площину α і точку M, що лежить в α. Запишіть це за допомогою символів.

708. Зобразіть площину β, що проходить через пряму c. Запишіть це за допомогою символів.

709. Зобразіть площину γ і пряму x, які перетинаються в точці M. Скільки точок прямої x лежить у площині γ?

710. Зобразіть площини α і ω, які перетинаються по прямій m.

711. Зобразіть на малюнку пряму b, яка перетинає площину γ в точці P, і точку M, таку, що $M \in \gamma$.

712. Зобразіть площини β і γ, які перетинаються по прямій c, і точку M, таку, що $M \in \beta$ і $M \in \gamma$.

713. Зобразіть куб. Чи є грань куба площиною? А частиною площини?

714. Скільки спільних точок можуть мати: а) пряма і відрізок; б) коло і площина?

715. Як можуть бути розташовані в просторі пряма і коло, два кола? Зобразіть на малюнку.

716. Накресліть прямокутний паралелепіпед. Позначте його вершини. Запишіть його ребра: а) видимі; б) невидимі. Запишіть його грані: а) видимі; б) невидимі.

717. Накресліть правильний тетраедр. Позначте його вершини. Запишіть його ребра: а) видимі; б) невидимі. Запишіть його грані: а) видимі; б) невидимі.

Б

718. Зобразіть на малюнку площини α і β, пряму a і точку A, якщо $a \subset \alpha$, $a \subset \beta$, $A \in a$.

719. Зобразіть на малюнку площини α, β, пряму a і точку A, якщо $a \subset \alpha$, $a \subset \beta$, $A \in \beta$, $A \notin \alpha$.

720. Зобразіть на малюнку відношення:
а) $a \cap \alpha = A$; б) $\alpha \cap \beta = c$; в) $a \cap \alpha = \varnothing$.

721. Зобразіть на площині α дві паралельні прямі. На скільки частин вони розділяють її. Як би ви їх назвали? Чи є серед них рівні?

722. Зобразіть дві площини, які не мають спільних точок. На скільки частин вони розділяють простір? Як би ви назвали такі частини простору?

723. На скільки частин можуть розділити простір дві площини?

724. Накресліть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і виділіть кольором площину α, яка проходить через вершини A, B і C_1. Які з вершин куба належать площині α, а які не належать? Які з прямих, на яких лежать ребра куба, перетинають площину α, а які не перетинають її?

725. Накресліть тетраедр $ABCD$ і зафарбуйте площину α, яка проходить через ребро AB і точку D. Які з вершин тетраедра належать площині α, а які не належать? Які ребра тетраедра перетинають площину α?

726. Як можуть розташовуватися пряма і трикутник на площині? А в просторі? Покажіть на малюнках.

727. Дослідіть, як можуть бути розташовані в просторі два трикутники. Зобразіть кілька випадків на малюнках.

728. Чи може перетином двох трикутників у просторі бути трикутник, чотирикутник, п'ятикутник, шестикутник? Покажіть на малюнках.

729. Практичне завдання. Зробіть з цупкого паперу модель площин, які перетинаються.

Вправи для повторення

730. Скільки різних прямих можна провести через одну точку? А через дві? Чи завжди можна провести пряму через три точки? Відповіді зобразіть за допомогою малюнків.

731. Сформулюйте аксіому Евкліда і зробіть до неї малюнок.

732. Зобразіть прямокутний паралелепіпед. Випишіть по дві пари його ребер, які лежать на: а) паралельних прямих; б) перпендикулярних прямих.

§ 20. Основні поняття і аксіоми стереометрії

Як і в планіметрії, в стереометрії важливу роль відіграють поняття і твердження. До *геометричних понять* належать *геометричні фігури* (множини точок), *геометричні величини* (довжини, площі, об'єми, міри кутів), *геометричні перетворення* (паралельні перенесення, різні симетрії, повороти, перетворення подібності тощо), *геометричні відношення* (перпендикулярності, паралельності, рівності, подібності тощо). Зміст того чи іншого геометричного поняття звичайно розкривають за допомогою означення.

В означенні означуване поняття зводять до інших понять, уже відомих. Наприклад, формулюючи означення: «паралелограмом називається чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні», означуване поняття «паралелограм» підводять під уже відоме поняття «чотирикутник».

А під які геометричні поняття можна підвести такі поняття геометрії, як «точка», «пряма», «площина»? Оскільки на початку курсу ще немає «відомих понять», то їх уводять без означень і називають *основними* або *неозначуваними поняттями*.

У нашому підручнику неозначуваними вважаються поняття: *точка*, *пряма*, *площина* і *відношення*: *належить*, *не належить*, *лежить між*, *перетинаються* та деякі інші.

Властивості понять розкривають за допомогою певних тверджень. У справедливості математичних тверджень переконуються за допомогою доведень. Твердження, які доводять, називають *теоремами*. Не кожне геометричне твердження можна довести. Адже коли виклад геометрії тільки починається, неможливо вивести наслідки з інших тверджень, оскільки їх ще немає. Тому кілька перших тверджень приймають без доведення, їх називають *аксіомами*. За допомогою аксіом розкривають властивості неозначуваних понять.

У планіметрії за універсальну множину точок служить *площина*. У стереометрії універсальною множиною точок є *простір* (тривимірний), у ньому існує безліч різних площин.

Планіметричні аксіоми, які розглядалися в 7–9 класах, правильні для будь-якої площини, як би вона не була розташована в просторі. Але для стереометрії одних цих аксіом недостатньо.

Потрібні аксіоми, що виражають основні властивості точок, прямих і площин у просторі. Сформулюємо їх.

• C_1. *У просторі існує принаймні одна площина і точка, яка їй не належить.*

• C_2. *Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.*

• C_3. *Якщо дві точки прямої належать площині, то і вся пряма лежить у цій площині.*

• C_4. *Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.*

Зауваження. Ніяких інструментів, якими можна було б проводити у просторі площини, немає. Тому вираз «можна провести» в аксіомі C_4 вжито в розумінні «існує». В аксіомі C_2 слова «яка проходить через цю точку» необов'язкові. Але так сформульованою аксіомою зручніше користуватися.

Площину, яка проходить через точки A, B, C, які не лежать на одній прямій, позначають: (ABC).

Системи неозначуваних понять і аксіом можуть бути різними для окремих курсів геометрії. Строгі наукові курси геометрії будують за такою схемою. Спочатку називають неозначувані поняття і формулюють аксіоми. Після того за допомогою означень поступово вводять інші поняття (і відношення) і доводять інші важливіші твердження. Такий виклад геометрії називають *аксіоматичним*.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Наведіть приклади геометричних понять.
2. Які неозначувані поняття ви знаєте?
3. Наведіть приклад геометричного твердження.
4. Що таке аксіома?
5. Сформулюйте аксіоми стереометрії.

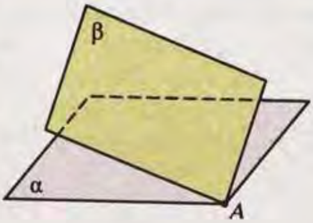
Виконаємо разом

1. Доведіть, що через будь-які дві різні точки простору можна провести пряму і до того ж тільки одну.

• Розв'язання. Нехай A і B – дві довільні точки простору. Через них і будь-яку третю точку проведемо площину α. У цій площині через точки A і B можна провести єдину пряму a.

Припустимо, що через точки A і B у просторі проходить ще пряма a_1, відмінна від a. Її точки A і B лежать у площині α, тому і пряма a_1 лежить в α (аксіома C_3). Таким чином, через точки A і B у площині α проходять дві різні прямі a і a_1. Це суперечить аксіомі планіметрії. Отже, через точки A і B у просторі можна провести тільки одну пряму.

2. Площини α і β мають спільну точку A (мал. 110). Чи мають вони ще інші спільні точки?



Мал. 110

Розв'язання. Згідно з аксіомою C_2 такі площини перетинаються по прямій. Отже, площини α і β мають безліч спільних точок. Усі вони лежать на прямій, що проходить через точку A.

Виконайте усно

733. Скільки різних площин можна провести через дану точку? А через дві дані точки? А через три?

734. Чи можна провести площину через три точки, які лежать на одній прямій? А через чотири точки однієї прямої?

735. Чому замкнені двері нерухомі, а незамкнені – легко відчинити?

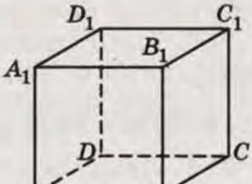
736. Чи можуть пряма і площина мати тільки одну спільну точку? А тільки дві спільні точки?

737. Точка A належить площині α, а точка B не належить. Чи належить площині α середина відрізка AB?

738. Дві різні точки відрізка не належать площині. Чи може яка-небудь точка відрізка лежати в цій площині?

А

739. Задача-жарт. Три бджоли розлетілися в різні боки. За яких умов усі вони будуть в одній площині?



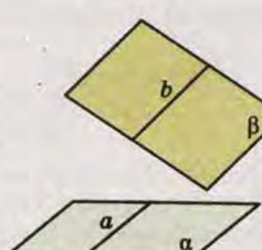
Мал. 111

740. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 111). Чи в одній площині лежать точки A, B, C і D_1? А точки A, B, C_1 і D_1?

741. Пряма a лежить у площині α, а пряма b – у площині β (мал. 112). Чи випливає з цього, що прямі a і b не лежать на одній площині?

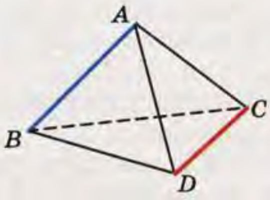
742. Пряма a проходить через точку A на площині α. Чи випливає з цього, що пряма a перетинає площину α?

743. Запишіть за допомогою символів взаємне розташування точок, прямих і площин, зображених на малюнку 112.



Мал. 112

744. Накресліть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Запишіть за допомогою символів відповіді на запитання:



Мал. 113

а) По яких прямих перетинаються площини: 1) (ABC) і (AA_1D_1); 2) (AA_1B_1) і (AA_1D_1); 3) (BB_1C_1) і (CC_1D_1)?

б) Яким площинам належать точки: 1) A; 2) C_1; 3) D?

в) Чи належить точка B_1 площині: 1) (ABC); 2) (DD_1C_1); 3) $(A_1D_1C_1)$?

745. На малюнку 113 зображено тетраедр $ABCD$. Запишіть за допомогою символів відповіді на запитання:

а) По якій прямій перетинаються площини (ABC) і (ABD)?

б) Якій площині не належить точка B?

в) Яким площинам належить пряма AC?

746. Чи існують 4 точки, які належать одній площині? А які не належать одній площині? Покажіть їх на зображенні:

а) куба; б) тетраедра.

747. Оберіть правильні твердження:

а) будь-які дві різні точки завжди лежать в одній площині;

б) будь-які три різні точки завжди лежать в одній площині;

в) будь-які дві різні точки завжди лежать на одній прямій;

г) будь-які три різні точки завжди лежать на одній прямій.

748. Оберіть неправильні твердження:

а) пряма і площина можуть мати одну спільну точку;

б) пряма і площина можуть мати три спільні точки;

в) пряма і площина можуть не мати спільної точки;

г) пряма і площина можуть мати тільки дві спільні точки.

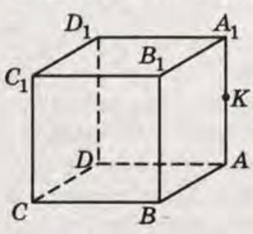
749. Дві різні площини α і β проходять через точки M, N, K. Зобразіть це на малюнку. Як розташовані точки M, N і K?

750. Три промені PA, PB і PC не лежать в одній площині. Доведіть, що точки A, B і C лежать в одній площині.

Б

751. Прямі MA, MB і MC перетинають площину α в точках A, B і C. За якої умови точки A, B і C: а) лежать на одній прямій; б) не лежать на одній прямій?

752. Точки A і B лежать у площині α, а точка C – поза нею. Зобразіть площину, у якій лежать усі три точки.



Мал. 114

753. На малюнку 114 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K – середина ребра AA_1. Чи належить грані BB_1C_1C точка D? Площини яких граней куба перетинає пряма BK? А пряма CK?

754. Дві суміжні вершини і точка перетину діагоналей паралелограма лежать у площині γ. Чи лежать у цій площині інші його вершини? Відповідь обґрунтуйте.

755. Дві вершини і точка перетину діагоналей ромба лежать у площині γ. Чи лежать у цій площині інші вершини ромба? Зобразіть на малюнку можливі випадки.

756. Три вершини трикутника лежать у площині α. Доведіть, що кожна точка цього трикутника лежить у площині α.

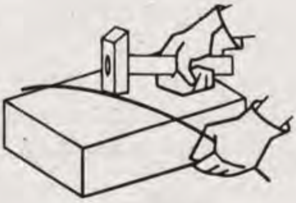
757. Три різні точки трикутника ABC лежать у площині α. Чи випливає з цього, що кожна точка $\triangle ABC$ лежить у площині α?

758. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка K – середина ребра AA_1. Побудуйте точку перетину: а) прямої DK з прямою A_1D_1; б) прямої D_1K з площиною (ABC); в) прямої BK з площиною $(B_1C_1D_1)$.

759. Накресліть трикутну піраміду $ABCD$ і площину α, яка проходить через ребро AB і точку K – середину ребра CD. Які з вершин даної піраміди належать площині α, які не належать?

Мал. 115

760. Щоб перевірити, чи добре оброблено плоску поверхню, у різних її місцях прикладають вивірену лінійку і дивляться, чи немає зазору між ними (мал. 115). У яких випадках кажуть, що поверхня «неплоска»?



Мал. 116

761. Якщо тільки деякі точки дроту дотикаються до плоскої поверхні ковадла, дріт «непрямий». Чому? Щоб вирівняти його, б'ють молотком, як показано на малюнку 116. При цьому дріт перевертають. Навіщо?

Вправи для повторення

762. Знайдіть середню лінію рівностороннього трикутника, периметр якого дорівнює 36 см.

763. Зобразіть прямокутний паралелепіпед і позначте його вершини. Випишіть ребра, які лежать в його: а) нижній основі; б) верхній основі.

764. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону на відрізки 3 см і 10 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчисліть периметр паралелограма.

§ 21. Наслідки з аксіом стереометрії

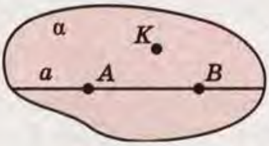
Розглянемо найважливіші наслідки з аксіом стереометрії (див. с. 159).

У просторі існує нескінченна множина точок. Адже простір містить площину (розуміється: принаймні одну), а множина точок площини нескінченна.

З аксіом C_1 і C_2 випливає, що в просторі *існує нескінченна множина різних площин*. У кожній з них існують прямі, відрізки, кути, кола та інші плоскі фігури. Отже, усі відомі з планіметрії фігури є і в просторі.

Два наслідки з аксіом стереометрії сформулюємо у вигляді теорем.

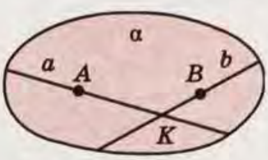
Теорема 1. ***Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну.***



Мал. 117

Доведення. Нехай дано пряму a і точку K, що не лежить на ній (мал. 117). Позначимо на прямій a довільні точки A і B. Точки A, B і K не лежать на одній прямій, тому через них можна провести площину α (аксіома C_4). Точки A і B прямої a лежать у площині α, отже, і вся пряма a лежить у цій площині (аксіома C_3). Як бачимо, через пряму a і точку K одну площину провести можна. А чи можна провести ще одну? Якби це було можливо, то через точки A, B і K проходили б дві різні площини. Останнє суперечить аксіомі C_4. Отже, через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести тільки одну площину.

Теорема 2. ***Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину і до того ж тільки одну.***



Мал. 118

Доведіть цю теорему самостійно, скориставшись малюнком 118.

З аксіоми C_4 і доведених теорем випливає, що площину можна задати:

1) трьома точками, що не лежать на одній прямій;

2) прямою і точкою, що не лежить на ній;

3) двома прямими, що перетинаються.

Якщо врахувати, що й кожні дві паралельні прямі лежать в одній площині, то можна дійти таких висновків. Площину однозначно визначають:

а) три точки, які не лежать на одній прямій;

б) дві пересічні[1] прямі;

в) пряма і точка, що не лежить на цій прямій;

г) дві паралельні прямі.

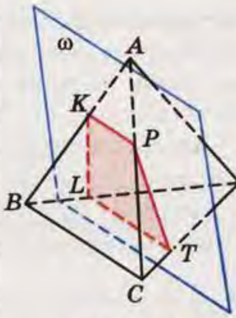
Розглянуті способи задання площини часто використовують під час побудови перерізів многогранників.

Що таке переріз многогранника?

---

[1] Слово «пересічні» означає фігури, які перетинаються, а пересічні – посередні, звичайні.

Якщо жодна з двох точок не належить площині, а відрізок, що їх сполучає, має з цією площиною спільну точку, то кажуть, що дані точки лежать по різні боки від площини. А якщо принаймні дві точки многогранника лежать по різні боки від деякої площини ω, кажуть, що площина ω перетинає многогранник. У цьому разі площину ω називають *січною площиною*. Фігура, яка складається з усіх точок, спільних для многогранника і січної площини, називається *перерізом многогранника* даною площиною. На малюнку 119 зображено тетраедр $ABCD$ і січну площину ω, їх переріз – чотирикутник $KPTL$.

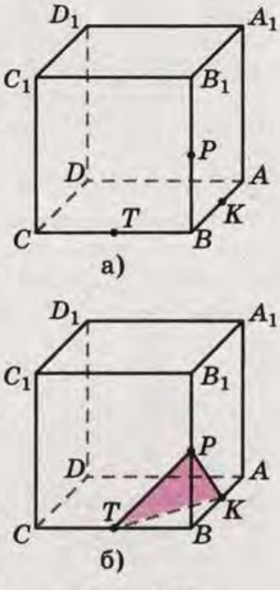


Мал. 119

Щоб побудувати переріз многогранника площиною, треба задати цю площину: трьома точками, що не лежать на одній прямій, прямою і точкою і т. ін.

Приклад. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки K, P, T – середини ребер AB, BB_1 і BC (мал. 120, *а*).

Розв'язання. Точки K, P лежать у площині грані ABB_1A_1 куба і в січній площині. Отже, ці площини перетинаються по прямій KP. Січна площина перетинає квадрат ABB_1A_1 по відрізку KP. Аналогічно переконуємося, що дві інші грані куба січна площина перетинає по відрізках KT і TP. Побудувавши їх, дістанемо трикутник KPT. Це і є шуканий переріз (мал. 120, *б*).



Мал. 120

Іноді в задачі вимагається не тільки побудувати переріз, а й знайти його площу або периметр. Для цього треба знати і розміри даного многогранника. Наприклад, якщо довжина ребра розглядуваного куба дорівнює a, то $BK = BP = BT = \frac{a}{2}$, $KP = PT = TK = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Отже, площа знайденого перерізу $S = \frac{KP^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Скільки точок, прямих і площин існує в просторі?
2. Сформулюйте наслідки з аксіом стереометрії.
3. Як можна задати площину?

4. Що таке січна площина?
5. Що таке переріз многогранника?

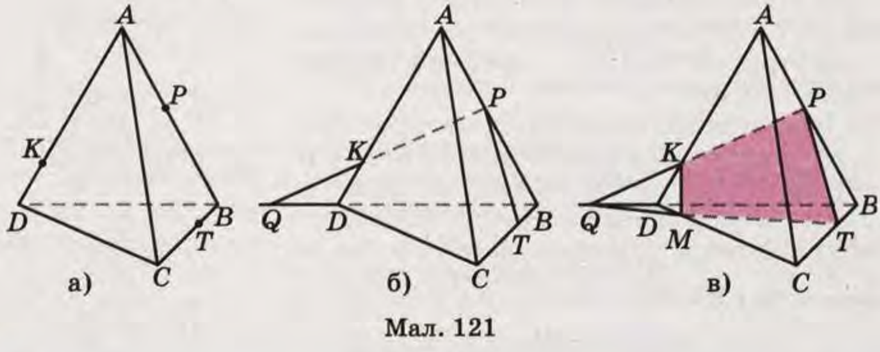
Виконаємо разом

1. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Доведіть, що ніякі три з них не лежать на одній прямій.

● Розв'язання. Припустимо, що три з даних точок, наприклад A, B, C, лежать на одній прямій. Через цю пряму і точку D можна провести площину (згідно з доведеною теоремою 1). У цій площині лежать усі чотири дані точки, що суперечить умові задачі. Отже, припущення приводить до суперечності. Тому ніякі три з даних точок не можуть лежати на одній прямій.

2. На ребрах тетраедра $ABCD$ дано точки K, P, T, як показано на малюнку 121, *а*. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через дані точки.

● Розв'язання. Проводимо відрізки KP і PT. Щоб побудувати інші сторони перерізу, знайдемо точку, в якій січна площина (KPT) перетинає ребро CD. Прямі KP і BD лежать у площині (ABD) і не паралельні, отже, перетинаються в деякій точці Q (мал. 121, *б*). Точка Q належить площинам (KPT) і (BCD). І точка T належить цим площинам. Тому кожна точка прямої QT належить січній площині, у тому числі і точка M, в якій перетинаються прямі CD і QT. Визначивши точку M, сполучаємо її відрізками з K і T. Чотирикутник $KPTM$ – шуканий переріз (мал. 121, *в*).



Мал. 121

Виконайте усно

765. Скільки існує різних площин, які містять задані пряму m і точку M, якщо: а) $M \in m$; б) $M \notin m$?

766. З поданих нижче тверджень оберіть правильні:

а) якщо прямі лежать в одній площині, то вони перетинаються;

б) якщо прямі перетинаються, то вони лежать в одній площині;

в) будь-які дві прямі завжди лежать в одній площині;

г) якщо прямі лежать в різних площинах, то вони не перетинаються;

ґ) якщо прямі не лежать в одній площині, то вони не перетинаються.

767. Прямі a і b не перетинаються. Чи випливає з цього, що через них не можна провести площину?

768. Чи перетинає відрізок AB площину, якщо її перетинає пряма AB?

769. Чи може бути перерізом куба рівнобедрений трикутник, правильний трикутник, прямокутник, квадрат, трапеція?

А

770. Як провести площину через три точки, які лежать на одній прямій?

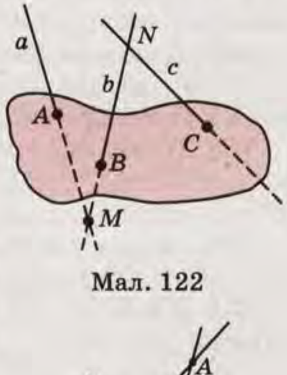
771. Скільки площин можна провести через точки A, B і C, якщо: а) $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 2$ см; б) $AB = 5$ см, $BC = 3$ см, $AC = 4$ см?

772. Точка M не лежить у площині прямокутного трикутника. Скільки площин можна провести через цю точку і: а) гіпотенузу трикутника; б) катет трикутника; в) один з катетів і гіпотенузу?

773. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Чи можуть прямі AB і CD перетинатися? А прямі AC і BD?

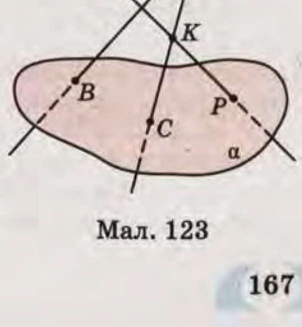
774. Прямі KL і MN не лежать в одній площині. Чи можуть прямі KM і LN перетинатися? А прямі LM і KN?

775. Чи лежать прямі a, b і c, зображені на малюнку 122, в одній площині?



Мал. 122

776. Прямі AB, AK і KP перетинають площину α у точках B, C і P, як показано на малюнку 123. Чи перетинаються прямі AB і KP?



Мал. 123

777. Відрізки AB і AC перетинають площину α. Чи перетинає її відрізок BC? А пряма BC?

778. Проведіть переріз через середини трьох ребер куба, які виходять з однієї вершини. Якою фігурою є такий переріз? Знайдіть його периметр, якщо діагональ куба дорівнює 8 см.

779. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через середини трьох бічних ребер куба. Знайдіть периметр утвореної фігури, якщо ребро куба дорівнює 10 см.

780. Точка K – середина ребра AB тетраедра $ABCD$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки B, C і K.

781. Точка M – середина ребра CD тетраедра $ABCD$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через пряму AB і точку M.

782. $ABCD$ – тетраедр. Точки K і M – середини ребер AD і CD. Побудуйте переріз тетраедра площиною (BKM).

783. Довжина ребра правильного тетраедра дорівнює a. Побудуйте його переріз площиною, що проходить через середини трьох ребер, які виходять з однієї вершини. Знайдіть периметр і площу перерізу.

Б

784. Точки K, L, M, N не лежать в одній площині. Скільки існує площин, які проходять через три з них?

785. Чотири точки є вершинами деякого куба. Скільки існує площин, які проходять через три з них?

786. Доведіть, що в просторі існує безліч різних площин. Доведіть, що в просторі існує пряма, яка перетинає дану площину.

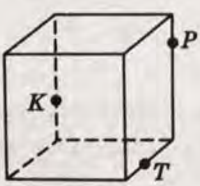
787. Доведіть, що в просторі існує площина, яка перетинає дану площину.

788. Дано пряму a і точку B, що не лежить на ній. Доведіть, що всі прямі, які проходять через точку B і перетинають a, лежать в одній площині.

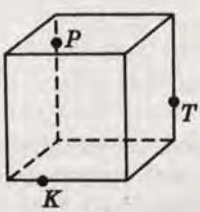
789. Прямі MA і MB перетинаються в точці M. Доведіть, що всі прямі, які їх перетинають, але не проходять через M, лежать в одній площині.

790. Накресліть малюнки 124, *а–в* у зошиті й на кожному з них побудуйте переріз многогранника площиною (KPT).

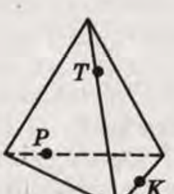
791. Доведіть, що перерізом тетраедра не може бути п'ятикутник.



а)

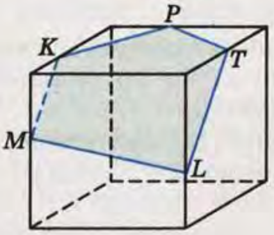


б)



в)

Мал. 124



Мал. 125

Мал. 126

792. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через: а) точки A, B_1 і D_1; б) точки A, C і середину ребра DD_1.

793. Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, дорівнюють 6 см, 6 см і 8 см. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через середини цих ребер, і знайдіть його площу.

794. Учень намалював переріз куба площиною (мал. 125). Чи є помилка на малюнку?

795. Дерев'яний куб розпилюють так, що пилка проходить через точки K, P, T (мал. 126). Яка фігура буде в перерізі?

796. Практичне завдання. Зробіть із цупкого паперу модель тетраедра.

Вправи для повторення

797. Чому дітям безпечніше їздити на триколісному велосипеді?

798. Зобразіть куб і позначте його вершини. Випишіть пару ребер, які: а) лежать в одній площині; б) не лежать в одній площині.

799. У площині α лежать три прямі a, b, c. Відомо, що $a \parallel c$. Що можна сказати про розташування прямих b і c?

Самостійна робота № 5

Варіант 1

1. Накресліть площини α і β, які перетинаються по прямій a.

2. Скільки спільних точок можуть мати площина і промінь, початок якого цій площині не належить?

3. Побудуйте переріз правильного тетраедра $ABCD$, площиною, яка проходить через вершину D і середини ребер AB та AC. Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо $AB = c$.

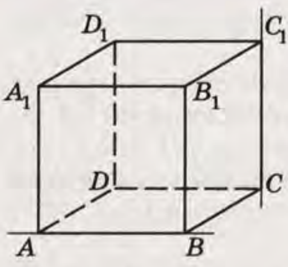
Варіант 2

1. Накресліть прямі a і b, які перетинають площу α в точці M.

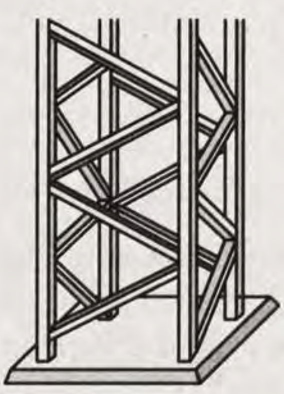
2. Три точки кута лежать у площині α. Чи правильно, що кожна точка цього кута належить площині α?

3. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки A, C і середину ребра BB_1. Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо $AB = m$.

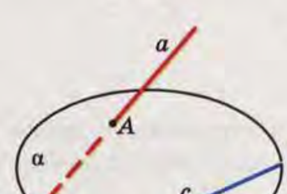
§ 22. Прямі в просторі



Мал. 127



Мал. 128



Мал. 129

Як ми вже знаємо, у просторі існує безліч різних площин, а в кожній з них – безліч різних прямих. Яким може бути взаємне розташування двох прямих у просторі?

Якщо дві прямі лежать в одній площині, то можливі два випадки: вони можуть перетинатися або бути паралельними. Однак у просторі існують і такі прямі, які не лежать в одній площині.

Дві прямі, які не лежать в одній площині, називають *мимобіжними*. Такими, наприклад, є прямі, яким належать ребра AB і CC_1 куба (мал. 127).

На малюнку 128 зображено десятки пар матеріальних моделей мимобіжних прямих. Мимобіжні також колія залізниці та перила переходу над нею і багато інших матеріальних моделей прямих.

Теорема 3 (ознака мимобіжності прямих). ***Якщо одна пряма лежить у деякій площині, а друга перетинає цю площину в точці, що не належить першій прямій, то такі дві прямі мимобіжні.***

Доведення. Нехай пряма a перетинає площину α в точці A і не перетинає пряму c, що лежить у площині α (мал. 129). Доведемо, що прямі a і c мимобіжні.

Припустимо, що прямі a і c не мимобіжні. Це означає, що вони лежать в якійсь площині β. Цій площині належать пряма c і точка A, які належать також і площині α. Оскільки пряма і точка, яка не належить їй, визначають єдину площину, то площина β – це та сама площина α. Таким чином, пряма c лежить у площині α, що суперечить умові задачі. Отже, прямі a і c не можуть лежати в одній площині; таким чином, вони мимобіжні.

Згадаємо означення паралельних прямих та розглянемо їх властивості в просторі.

Дві прямі називаються *паралельними*, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються.

Як відомо, у площині через дану точку можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій. А скільки таких прямих можна провести в просторі?

Теорема 4. ***Через будь-яку точку простору, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній і до того ж тільки одну.***

Доведення. Нехай дано пряму a і точку A, що не лежить на ній. Через них можна провести єдину площину. У цій площині можна провести пряму, паралельну a, і до того ж тільки одну. Отже, у просторі через дану точку A можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій a.

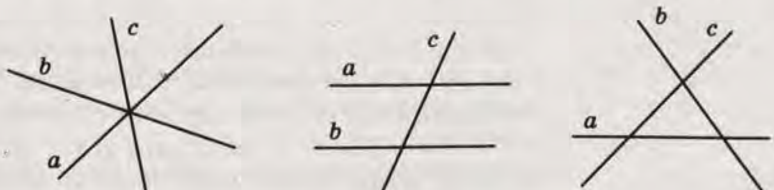
Дві паралельні прямі завжди лежать в одній площині. А три чи більше? Можуть і не лежати в одній площині. Наприклад, усі ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 куба лежать на паралельних прямих, але не належать одній площині (див. мал. 127).

Для паралельних прямих виконується властивість транзитивності.

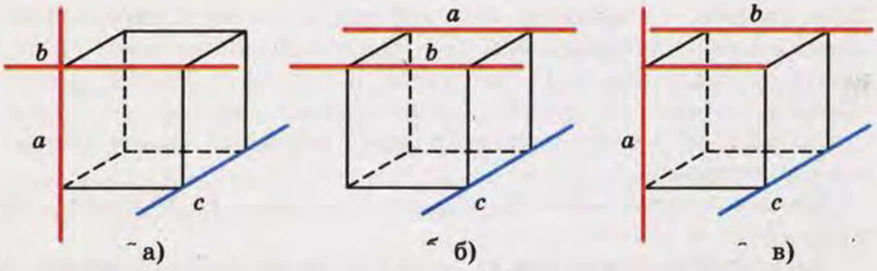
Дві прямі, паралельні третій, паралельні, тобто якщо $a \parallel b$ і $c \parallel b$, то $a \parallel c$.

Паралельними і мимобіжними бувають відрізки і промені. Два відрізки називають *паралельними* (мимобіжними), якщо вони лежать на паралельних (мимобіжних) прямих.

Три прямі в просторі можна розташувати багатьма різними способами. Усі вони можуть перетинатися в одній точці, одна з них може перетинати дві інші, що не мають спільних точок, можуть перетинатися попарно в трьох різних точках (мал. 130). У перших двох випадках усі три прямі можуть лежати або не



Мал. 130



Мал. 131

лежати в одній площині; у третьому випадку всі три прямі належать одній площині. Чому?

Якщо пряма c мимобіжна з прямими a і b, то дві останні прямі можуть перетинатися, бути паралельними або мимобіжними (мал. 131).

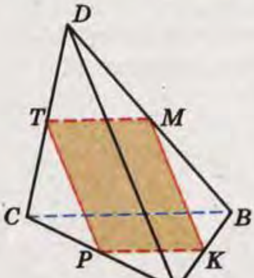
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які дві прямі називають паралельними?
2. Які дві прямі називають мимобіжними?
3. Наведіть приклади мимобіжних прямих, моделюючи їх: двома олівцями, речами, що є в класі.
4. Сформулюйте і доведіть ознаку мимобіжності прямих.
5. Скільки прямих можна провести через дану точку паралельно даній прямій?
6. Сформулюйте властивість транзитивності паралельних прямих.
7. Які відрізки чи промені називаються паралельними?

Виконаємо разом

1. Прямі AB і CD мимобіжні. Чи можуть бути паралельними прямі AC і BD? А перетинатися?

• Розв'язання. Якби прямі AC і BD були паралельними або перетиналися, то через них можна було б провести площину. У цій площині лежали б точки A, B, C, D, а отже, і прямі AB і CD, що суперечить умові задачі. Виходить, прямі AC і BD не можуть бути ні паралельними, ні перетинатися.



Мал. 132

2. K, P, T, M – середини ребер AB, AC, CD, BD тетраедра $ABCD$. Доведіть, що чотирикутник $KPTM$ – паралелограм.

• Розв'язання. Відрізки KP і MT – середні лінії трикутників ABC і DBC (мал. 132). Тому кожний з них паралельний ребру BC і дорівнює його половині. За властивістю транзитивності відрізки KP і MT паралельні і рівні. Отже, чотирикутник $KPTM$ – паралелограм.

Виконайте усно

800. У просторі дано пряму a і поза нею точку A. Скільки можна провести через точку A прямих, паралельних a? А мимобіжних з a?

801. Пряма a і площина α не перетинаються. Скільки можна провести в площині α прямих, паралельних прямій a? А мимобіжних із прямою a?

802. Чи паралельні відрізки a і c, якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$?

803. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (див. мал. 127). Назвіть його ребра, які: а) паралельні AA_1; б) перпендикулярні до AA_1; в) мимобіжні з AA_1.

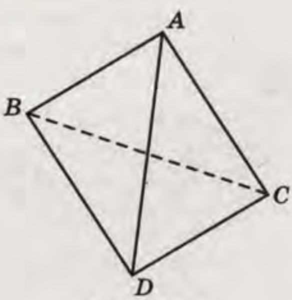
804. На малюнку 133 зображено каркас тетраедра $ABCD$. Чи паралельні його ребра AB і CD? Чи перетинаються прямі AC і BD?

805. Прямі m і n не лежать в одній площині. Чи можна провести пряму a, яка була б паралельною кожній з прямих m і n?

806. Чи можна вважати правильним таке означення: «Прямі називаються мимобіжними, якщо вони не перетинаються і не паралельні»? А таке: «Прямі називаються мимобіжними, якщо вони не лежать в одній площині і не перетинаються»?

А

807. Назвіть три пари мимобіжних прямих, на яких лежать ребра тетраедра $ABCD$ (мал. 133).



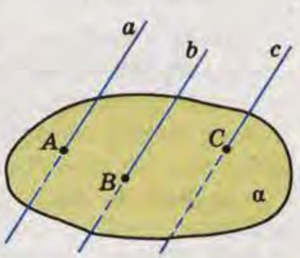
Мал. 133

808. Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведено пряму a, яка не лежить у площині паралелограма. Яке взаємне розташування прямих: а) a і AB; б) a і BC?

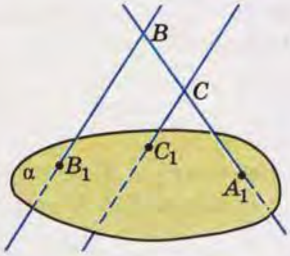
809. У тетраедрі $ABCD$ точки M і N – середини відрізків DC і DB. Яке взаємне розташування прямих: а) MN і AB; б) MN і BC; в) MN і BD?

810. Точки A, B, C і D розташовані так, що $AB \parallel CD$. Чи можуть бути мимобіжними прямі AC і BD? Чому?

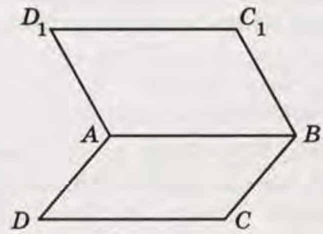
811. Попарно паралельні прямі a, b і c перетинають площину α у точках A, B, C так, як показано на малюнку 134. Чи належать дані прямі одній площині?



Мал. 134



Мал. 135



Мал. 136

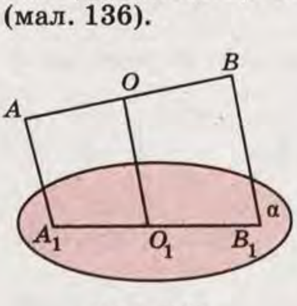
812. Прямі BB_1 і CC_1, зображені на малюнку 135, перетинають пряму A_1B у точках B і C, а площину α – у точках B_1 і C_1. Чи паралельні прямі BB_1 і CC_1?

813. Через точку M проведено пряму, яка перетинає паралельні прямі a та b. Чи лежить точка M в одній площині з прямими a і b?

814. Пряма a перетинає паралельні прямі m і n. Доведіть, що всі три прямі лежать в одній площині.

815. Відрізки OA і OB перетинають площину α в точках A_1 і B_1, які є серединами цих відрізків. Знайдіть відстань AB, якщо $A_1B_1 = 3{,}8$ см.

816. Паралелограми $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у різних площинах. Доведіть, що чотирикутник CDD_1C_1 теж паралелограм (мал. 136).



Мал. 137

817. Трапеція $ABMN$ (з основою AB) і паралелограм $ABCD$ не лежать в одній площині. Доведіть, що $MN \parallel CD$.

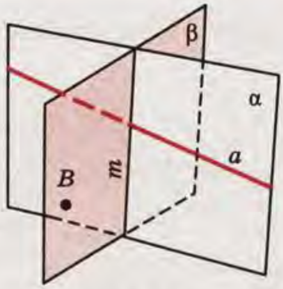
818. Через кінці відрізка AB і його середину O проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, O_1. Знайдіть довжину відрізка OO_1, якщо $AA_1 = 11$ м, $BB_1 = 33$ м і відрізок AB не перетинає площину α (мал. 137).

Б

819. Точка P не лежить у площині трикутника ABC. Яке взаємне розташування прямих PC і AB? А прямих EF і PK, якщо точки E і P лежать на прямій PC, а точки F і K – на прямій AB?

820. Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведено пряму a, яка не лежить у площині паралелограма, а через точку C – пряму b, яка паралельна BD. Доведіть, що a і b – мимобіжні.

821. Відомо, що $a \subset \alpha$, $b \parallel a$. Чи може пряма b перетинати площину α?



Мал. 138

822. Дві трапеції $ABCD$ і $ABMN$ мають спільну основу, але не лежать в одній площині. Доведіть: а) AB і MN – паралельні; б) AB і CN – мимобіжні.

823. Трикутник ABC і трапеція $AMNB$ ($AB \parallel MN$) лежать у різних площинах. E і F – середини відрізків AC і BC відповідно. Доведіть, що: а) $EF \parallel MN$; б) EF і AM – мимобіжні.

824. Площини α і β перетинаються по прямій m (мал. 138). Пряма a лежить у площині α. Через точку B площини β проведіть пряму b так, щоб вона: а) перетинала a; б) була паралельною a; в) була мимобіжною з a.

825. Через кінці відрізка AB і внутрішню його точку M проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, M_1. Знайдіть довжину відрізка MM_1, якщо відрізок AB не перетинає площину α і $AA_1 = 10$ см, $BB_1 = 30$ см, $AM : MB = 1 : 3$.

826. Вершинами трикутника ABC є середини відрізків OA_1, OB_1, OC_1. Точка O не лежить у площині $\triangle ABC$. У скільки разів периметр $\triangle A_1B_1C_1$ більший від периметра $\triangle ABC$?

827. З точок A і B площини α проведено поза нею паралельні відрізки $AK = 16$ см і $BM = 12$ см. Пряма KM перетинає площину α в точці C. Знайдіть відстань AC, якщо $AB = 9$ см. Розгляньте два випадки.

828. Через кінці відрізка AB і його середину M проведено паралельні прямі, що перетинають деяку площину в точках A_1, B_1 і M_1. Знайдіть відстань MM_1, якщо $AA_1 = 6{,}5$ м, $BB_1 = 8{,}5$ м. Розгляньте всі можливі випадки.

829. Точка C ділить відрізок AB у відношенні $AC : CB = 2 : 3$. Паралельні прямі, які проходять через точки A, C, B, перетинають площину в точках A_1, C_1 і B_1. Знайдіть відношення $A_1B_1 : A_1C_1$.

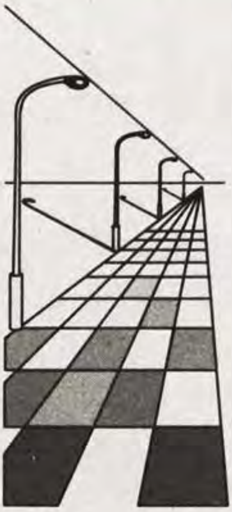
Вправи для повторення

830. П'ять різних точок не лежать в одній площині. Скільки точок із заданих п'яти може лежати на одній прямій?

831. Дано правильний тетраедр $PABC$, а на його ребрі PB точку K таку, що $PK = KB = 8$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через ребро AC і точку K. Знайдіть периметр перерізу.

832. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 м, а гострий кут 30°. Знайдіть катети трикутника і радіус кола, вписаного в цей трикутник.

§ 23. Паралельне проектування

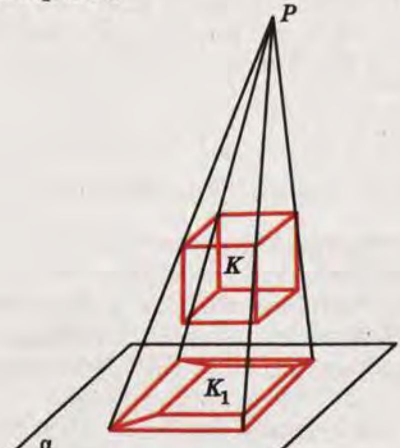


Мал. 139

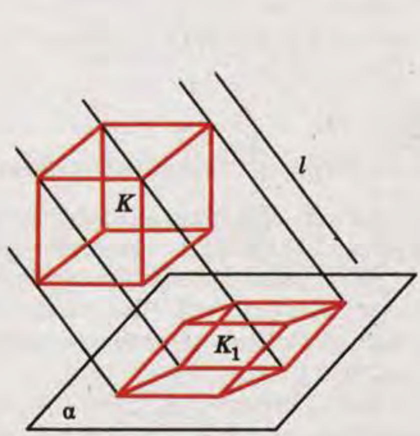
Для стереометрії багато значить уміння наочно і зручно зображати неплоскі фігури на площині. Першими з цією проблемою зіткнулися художники. Створюючи живописні полотна, вони зазвичай користуються *перспективою* – способом зображення, що ґрунтується на центральному проектуванні (мал. 139). «Художник і є той, хто за потребою свого мистецтва народив… перспективу» (Леонардо да Вінчі). «Пізнати закони перспективи я бажав більше, ніж отримати королівство» (А. Дюрер). Наочне уявлення про перспективу (центральне проектування) дає утворення тіні від предмета, освітлюваного точковим джерелом світла (мал. 140).

Геометри для зображення просторових фігур на площині частіше користуються паралельним проектуванням. Наочне уявлення про нього дає утворення тіні від предмета, освітлюваного паралельними променями. Уявіть, що через кожну точку фігури K проведено прямі, паралельні якійсь прямій l до перетину з площиною α (мал. 141). Множина K_1 точок перетину всіх таких прямих із площиною α є *паралельною проекцією* фігури K на площині α. Тут α – *площина проекцій*, а прямі, паралельні l, – *проектуючі прямі*.

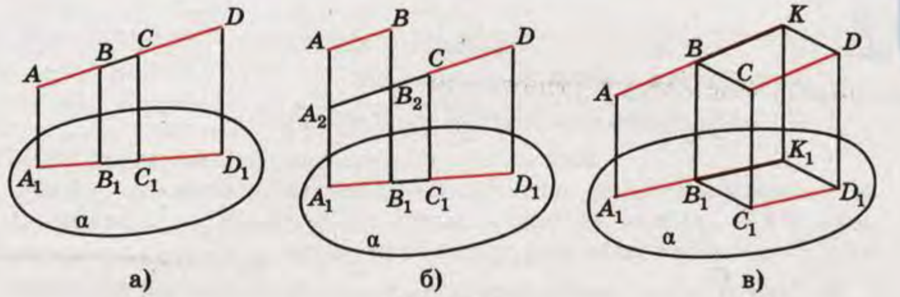
Властивості паралельного проектування випливають з такої теореми.



Мал. 140



Мал. 141



Мал. 142

Теорема 5. ***Якщо відрізки, які проектуються, не паралельні проектуючій прямій, то при паралельному проектуванні:***

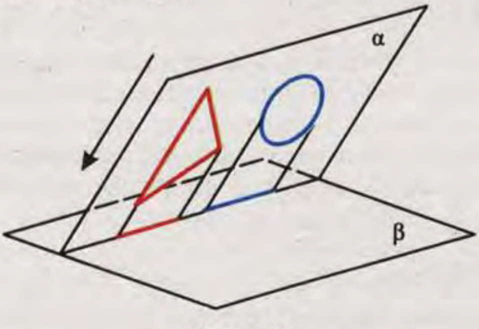
1) відрізки фігури зображаються відрізками;

2) паралельні відрізки – паралельними відрізками або відрізками однієї прямої;

3) довжини проекцій паралельних відрізків або відрізків однієї прямої відносяться, як довжини проектованих відрізків.

Доведення цієї теореми досить громіздке, тому ми його не наводимо. Третю частину теореми (якщо A_1B_1 і C_1D_1 – проекції паралельних відрізків AB і CD, то $A_1B_1 : C_1D_1 = AB : CD$) проілюстровано малюнками 142, *а–в*.

Якщо хоч одна проектуюча пряма лежить у площині плоскої фігури, то проекцією такої фігури є точка, відрізок, промінь чи пряма. Зокрема, проекцією трикутника, довільного многокутника, кола і круга може бути відрізок (мал. 143). Такі проекції називають *виродженими*. Здебільшого у стереометрії розглядають невироджені проекції.



Мал. 143

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Поясніть кількома реченнями, що таке проектування.
2. Які види проектування вам відомі?
3. Що таке паралельне проектування?
4. Сформулюйте найважливіші властивості паралельного проектування.

Виконаємо разом

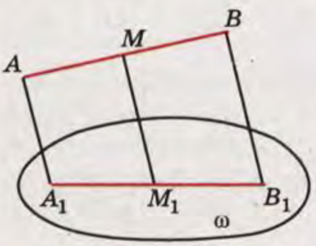
1. Якою фігурою є проекція[1] паралелограма?

• Розв'язання. Кожна сторона паралелограма паралельна протилежній стороні, а проекції паралельних відрізків – паралельні або лежать на паралельних прямих. Отже, проекцією паралелограма є паралелограм або відрізок.

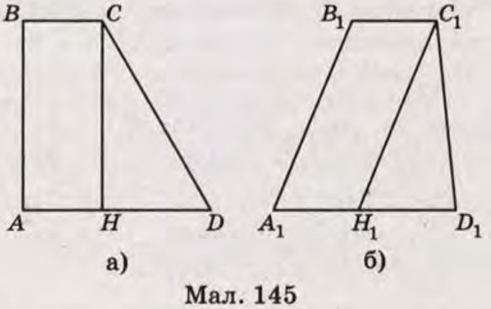
2. Доведіть, що проекцією середини відрізка є середина його проекції.

• Розв'язання. Нехай точка M – середина відрізка AB, а M_1 і A_1B_1 – проекції точки M і відрізка AB на площину ω (мал. 144). Оскільки довжини проекцій відрізків однієї прямої відносяться, як і довжини проектованих відрізків, то $A_1M_1 : M_1B_1 = AM : MB = 1 : 1$. Тому $A_1M_1 = M_1B_1$, тобто M_1 – середина відрізка A_1B_1. Що й треба було довести.

3. Нехай трапеція $A_1B_1C_1D_1$ (мал. 145) є паралельною проекцією прямокутної трапеції $ABCD$. Побудуйте проекцію висоти цієї трапеції.



Мал. 144



Мал. 145

• Розв'язання. Нехай у трапеції $ABCD$ кути A і B прямі. Тоді висота CH буде паралельна стороні AB. Оскільки при паралельному проектуванні паралельні прямі переходять у паралельні прямі, то потрібно через точку C_1 провести пряму C_1H_1, паралельну A_1B_1. Відрізок C_1H – проекція висоти CH.

Виконайте усно

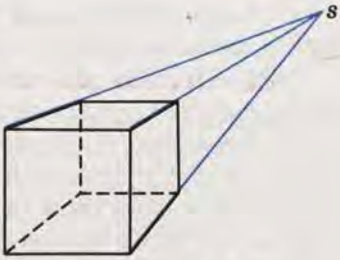
833. Чим є проекція відрізка, яка паралельна проектуючій прямій?

834. Проекція фігури – точка. Назвіть цю фігуру.

835. Чи зберігаються при паралельному проектуванні міри кутів?

---

[1] Тут і далі йдеться про паралельні проекції.



Мал. 146

836. Дві прямі перетинаються. Чи правильно, що перетинаються також їхні проекції?

837. Проекції двох прямих перетинаються. Чи правильно, що перетинаються також дані прямі? Наведіть приклади.

838. Чи завжди паралельною проекцією квадрата є квадрат? Наведіть приклади.

839. Чи може паралельною проекцією квадрата бути паралелограм з нерівними сторонами? Чи може паралельною проекцією довільного паралелограма бути квадрат?

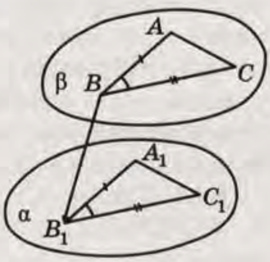
840. Чи може паралельною проекцією квадрата з периметром 4 см бути чотирикутник з периметром 40 см?

841. На малюнку 146 зображено каркасний куб. Чи в паралельній проекції виконано це зображення?

842. Учень говорить: «Якщо фігура A така, що її проекції на дві різні площини – відрізки, то A – відрізок». Чи правильно це?

843. За якої умови сонячна тінь на підлозі від шибки має таку саму форму і розміри, як і шибка?

А



Мал. 147

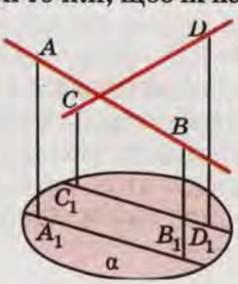
844. Кожна сторона трикутника дорівнює її проекції (мал. 147). Доведіть, що і кожний кут трикутника дорівнює його проекції.

845. Чи може довжина паралельної проекції відрізка на площину бути меншою за довжину відрізка? А більшою?

846. Якою фігурою може бути паралельна проекція на площину двох прямих, які: а) перетинаються; б) паралельні; а) мимобіжні? Розгляньте різні випадки. Виконайте малюнки.

847. Якою фігурою може бути проекція прямого кута?

848. Як потрібно розташувати в просторі три точки, щоб їх паралельними проекціями були: а) одна точка; б) дві точки; в) три точки, які лежать на одній прямій; г) три точки, які не лежать на одній прямій. Виконайте малюнки.



Мал. 148

849. Доведіть, що паралельною проекцією многокутника може бути многокутник, рівний даному.

850. Чи перетинаються прямі AB і CD, зображені на малюнку 148, якщо A_1B_1 і C_1D_1 – їхні проекції на площину α?

851. Трикутник $A_1B_1C_1$ – проекція трикутника ABC. Побудуйте проекції середніх ліній і медіан трикутника ABC.

852. BH, BM, BL – висота, медіана і бісектриса трикутника ABC. $\triangle A_1B_1C_1$ – паралельна проекція $\triangle ABC$. Чи буде паралельною проекцією відрізків BH, BM, BL висота, медіана і бісектриса $\triangle A_1B_1C_1$? Відповідь обґрунтуйте.

853. Паралельною проекцією точок A, B і C (C лежить між A і B) на площину α є точки A_1, B_1, C_1. Знайдіть A_1B_1 і A_1C_1, якщо $AB = 20$ см, $BC = 8$ см, а $B_1C_1 = 2$ см.

Б

854. Паралельною проекцією точок M, N, K, що лежать на одній прямій, на площину α є точки M_1, N_1, K_1. Знайдіть M_1N_1 і M_1K_1, якщо $MN = 6$ см, $MK = 4$ см, $N_1K_1 = 5$ см.

855. Намалюйте довільний паралелограм. Нехай він – проекція ромба з кутом 120°. Побудуйте проекцію висоти ромба, проведеної з вершини цього кута.

856. Нехай паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ – проекція квадрата $ABCD$. Побудуйте проекції осей симетрії цього квадрата.

857. Накресліть довільний паралелограм $A_1B_1C_1D_1$. Нехай він – проекція деякого прямокутника $ABCD$. Побудуйте проекції прямих, що проходять через точку перетину діагоналей, паралельно його сторонам.

858. Накресліть довільний трикутник $A_1B_1C_1$. Нехай він є паралельною проекцією рівностороннього $\triangle ABC$. Побудуйте проекції прямих, які проходять через точку M ($M \in AB$), перпендикулярно до сторін трикутника.

859. Паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ є паралельною проекцією ромба $ABCD$. Побудуйте проекції перпендикулярів, проведених з точки M ($M \in BC$) до діагоналей ромба.

860. P – внутрішня точка квадрата $ABCD$. Нехай паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ і його внутрішня точка M_1 – паралельна проекція цього квадрата і точки M. Побудуйте проекції прямих, які проходять через точку M перпендикулярно до: а) сторін квадрата; б) діагоналей квадрата.

861. Намалюйте довільну трапецію $A_1B_1C_1D_1$. Нехай вона – проекція деякої рівнобічної трапеції $ABCD$. Побудуйте проекцію висоти цієї трапеції, проведеної з вершини B.

862. Якою фігурою може бути паралельна проекція на площину: а) куба; б) тетраедра; в) чотирикутної піраміди? Виконайте відповідні малюнки.

Вправи для повторення

863. Середня лінія трапеції дорівнює 8 см і поділяється діагоналлю на два відрізки так, що різниця між ними дорівнює 2 см. Знайдіть основи трапеції.

864. Прямі a і b – мимобіжні. Точки A і B лежать на прямій a, а точки M і N – на прямій b. Яке взаємне розташування прямих AN і BM?

865. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через вершину A_1 і точки K, L – середини ребер D_1C_1, C_1B_1.

§ 24. Зображення фігур у стереометрії

У стереометрії розглядаються не тільки плоскі, а й неплоскі фігури. Зображати неплоску фігуру на площині непросто: неминуче доводиться спотворювати деякі її елементи. Для геометрів, креслярів та інших фахівців зручнішим є паралельне проектування – коли паралельні відрізки фігури-оригіналу проектуються на паралельні відрізки зображення. Такі зображення не тільки дають можливість уявляти форму розглядуваної фігури, а й додатково вказують на відношення деяких її розмірів. Адже при паралельному проектуванні зберігається відношення довжин паралельних відрізків.

Якщо маємо яку-небудь фігуру F – оригінал і її паралельну проекцію F_1 на площині, то F_1 можна вважати зображенням фігури F.

А як зображати на аркуші паперу надто великі об'єкти, наприклад куб зі стороною 10 м? Домовилися зображенням такого куба вважати його проекцію на площину, зменшену в кілька разів.

Зображенням фігури називається будь-яка фігура, подібна паралельній проекції даної фігури. При цьому маються на увазі невироджені проекції, які дають змогу однозначно визначити форму зображуваної фігури. Паралельною проекцією куба може бути квадрат або прямокутник з двома відрізками. А такі зображення не наочні і незрозумілі. Адже існує безліч різних геометричних тіл, відмінних від куба, що мають такі самі проекції.

Щоб зображення фігури було зрозумілішим, з усіх можливих її проекцій вибирають такі, на яких є зображення всіх її частин. При цьому «невидимі» лінії (розташовані за іншими частинами фігури) зображають штриховими лініями. Креслярі

Лінії	Назва
————	Суцільна
━━━━	Суцільна потовщена
– – – – – –	Штрихова
– · – · – · –	Штрихпунктирна
···············	Пунктирна

Мал. 149

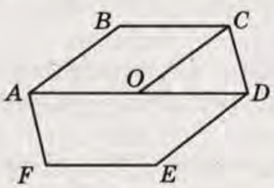
користуються й іншими видами ліній (мал. 149).

У стереометрії найчастіше доводиться мати справу із зображеннями неплоских фігур: призм, пірамід і т. п. А щоб правильно виконувати їх зображення, бажано знати, якими можуть бути зображення найпоширеніших плоских фігур.

Зображенням паралелограма може бути будь-який інший паралелограм, оскільки при паралельному проектуванні паралельні відрізки відображаються на паралельні відрізки. Зокрема, ромб, прямокутник, квадрат можна зображати будь-яким паралелограмом. І навпаки, будь-який паралелограм можна зображати у вигляді квадрата, ромба, прямокутника чи іншого паралелограма.

Зображенням трапеції може бути будь-яка інша трапеція з таким самим відношенням довжин основ, оскільки при паралельному проектуванні відношення довжин паралельних відрізків зберігаються.

Зображенням будь-якого трикутника може бути довільний трикутник. І будь-який трикутник може бути зображенням безлічі інших трикутників. Зокрема, будь-який трикутник можна зображати у вигляді трикутника правильного, рівнобедреного, прямокутного, тупокутного чи гострокутного.



Мал. 150

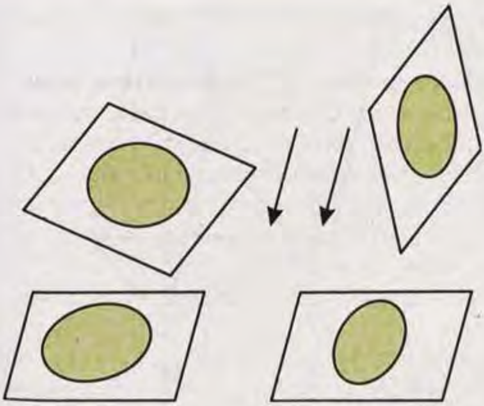
Правильний шестикутник можна зображати довільним шестикутником, кожна сторона якого паралельна протилежній стороні і одній з діагоналей, що проходить через центр шестикутника (мал. 150). Чому?

Проекція многокутника – многокутник або відрізок. А якою фігурою є проекція кола?

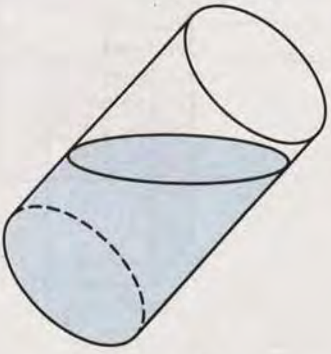
Проекцією кола може бути коло, еліпс або відрізок. Проекція того самого кола може бути різною залежно від кута між площиною проекцій і площиною кола (мал. 151). Наочні зображення циліндра, конуса та інших фігур обертання містять різні еліпси.

Траєкторії усіх планет Сонячної та інших космічних систем мають форми еліпсів. Скінченну частину площини, обмежену еліпсом, також називають еліпсом. Форму такого еліпса має, наприклад, поверхня води в нахиленому циліндричному стакані (мал. 152). Докладніше еліпси розглядають у вищій геометрії.

При зображенні многокутників, вписаних у коло або описаних навколо нього, користуються поняттям спряжених діаметрів.



Мал. 151



Мал. 152

Два діаметри еліпса називаються спряженими, якщо кожний з них ділить хорди, паралельні іншому, навпіл. На оригіналі спряженим діаметрам еліпса відповідають перпендикулярні діаметри кола. Щоб побудувати спряжені діаметри еліпса (мал. 153, *а*), потрібно:

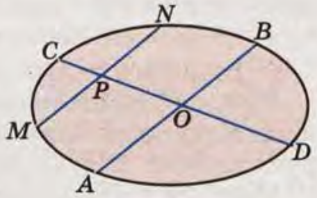
1. Провести через центр O еліпса довільний діаметр AB.

2. Провести довільну хорду $MN \parallel AB$.

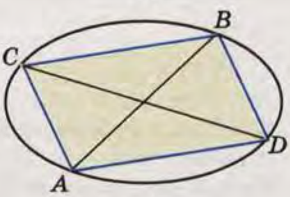
3. Знайти точку P – середину хорди MN.

4. Через точки O і P провести діаметр CD. Діаметри AB і CD спряжені.

Якщо сполучити послідовно точки A, C, B, D – кінці спряжених діаметрів, то отримаємо зображення квадрата, вписаного в коло (мал. 153, *б*). Чому?



а)



б)

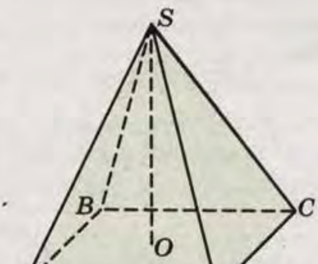
Мал. 153

Креслити просторові фігури потрібно так, щоб зображення було правильним (фігурою, подібною до паралельної проекції оригіналу) і наочним (давало правильне уявлення про форму оригіналу), швидко і легко могло виконуватися.

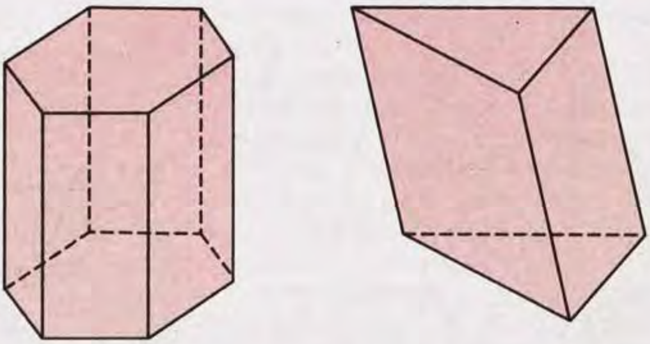
Щоб зобразити піраміду (мал. 154), потрібно:

1. Побудувати зображення многокутника, який лежить в її основі.

2. За умовою задачі знайти положення точки O – основи висоти SO (якщо



Мал. 154



а) б)

Мал. 155

піраміда правильна, то O – центр многокутника, який лежить в основі).

3. З точки O вертикально вгору провести промінь, на якому вибрати точку S – вершину піраміди.

4. Сполучити точку S з вершинами основи.

5. Виділити видимі і невидимі ребра піраміди.

Побудову призми виконують, починаючи з основи. Для наочності бічні ребра прямої призми зображають вертикальними відрізками (мал. 155, *а*), а похилої призми – похилими (мал. 155, *б*).

Різні способи зображення просторових фігур на площині розглядаються в кресленні та нарисній геометрії.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

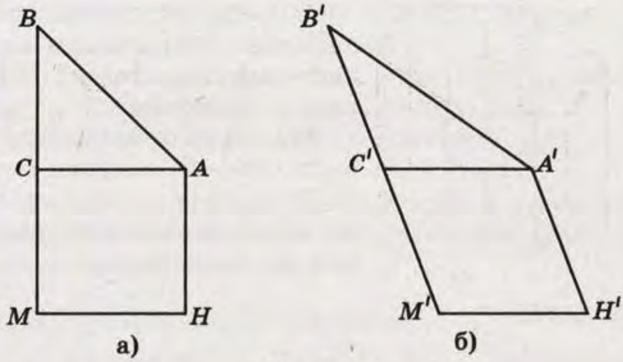
1. Що називають зображенням фігури в стереометрії?
2. Який вид проектування використовують при зображенні фігур у стереометрії?
3. Якими фігурами можна зображати паралелограм, прямокутник, квадрат, ромб, трапецію, коло?
4. Як побудувати прямокутний паралелепіпед, похилий паралелепіпед, трикутну призму, чотирикутну піраміду?

Виконаємо разом

Дано зображення прямокутного рівнобедреного трикутника. Побудуйте в його площині зображення квадрата, стороною якого є катет даного трикутника.

• Розв'язання. Нехай $ACMH$ – квадрат, побудований на катеті рівнобедреного $\triangle ABC$ (мал. 156, *а*), тоді $BC = AC = CM$, тобто C – середина відрізка BM.

Оскільки $ACMH$ – квадрат, то $MH \parallel CA$ і $MH = CA$.



Мал. 156

Враховуючи все це, можемо виконати побудову зображення (мал. 156, *б*).

1. Побудуємо довільний $\triangle A'B'C'$, який є зображенням $\triangle ABC$.
2. Побудуємо промінь $B'C'$ і позначимо на ньому точку M' таку, що $C'M' = B'C'$.
3. Проведемо відрізок $M'H'$ такий, що $M'H' \parallel C'A'$ і $M'H' = C'A'$.
4. Сполучимо точки A' і H'.

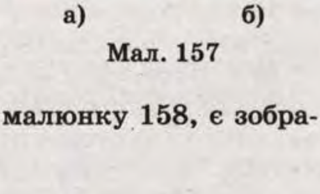
Чотирикутник $A'C'M'H'$ – зображення шуканого квадрата.

Виконайте усно

866. Чи може рівносторонній трикутник бути зображенням прямокутного трикутника? А тупокутного?

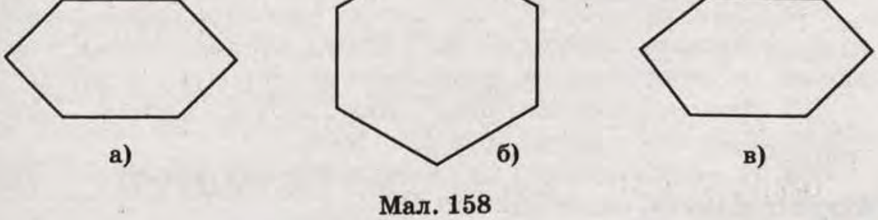
867. Чи може зображенням квадрата бути ромб? А зображенням трапеції паралелограм?

868. Яка з наведених на малюнку 157 фігур є зображенням (паралельною проекцією) куба?

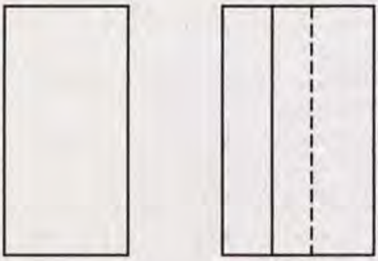


Мал. 157

869. Який із шестикутників, що на малюнку 158, є зображенням правильного шестикутника?



Мал. 158



а) б)

Мал. 159

870. Чи можна малюнок 159 вважати зображенням прямокутного паралелепіпеда? Чи наочне таке зображення?

871. Який з елементів трикутника – висота, медіана, бісектриса, середня лінія – після проектування залишається тим самим елементом трикутника?

А

872. Зобразіть пряму a і площину α такі, що:
а) $a \cap \alpha = A$; б) $a \cap \alpha = \varnothing$; в) $a \cap \alpha = a$.

873. Зобразіть площини α і β такі, що:
а) $\beta \cap \alpha = \varnothing$; б) $\beta \cap \alpha = c$.

874. Зобразіть три різні площини, які: а) мають тільки одну спільну точку; б) попарно перетинаються, але не мають спільної точки.

875. Накресліть зображення: а) куба; б) прямокутного паралелепіпеда; в) трикутної піраміди; г) чотирикутної піраміди.

876. Зобразіть куб і пряму, яка проходить через центри його граней: а) протилежних; б) сусідніх.

877. Зобразіть куб і площину, яка розрізає його на: а) два рівні паралелепіпеди; б) дві трикутні призми; в) дві чотирикутні призми.

878. Побудуйте зображення: а) медіан трикутника; б) середніх ліній трикутника.

879. Точки A_1, A_2, A_3, які не лежать на одній прямій, є паралельними проекціями двох вершин і точки перетину діагоналей паралелограма. Побудуйте зображення паралелограма. Скільки розв'язків має задача?

880. Побудуйте зображення прямих, які проходять через точку M – внутрішню точку рівностороннього $\triangle ABC$, перпендикулярно до сторін цього трикутника.

881. Трикутник $A'B'C'$ – паралельна проекція рівностороннього $\triangle ABC$. Побудуйте зображення центра вписаного в трикутник кола.

882. Трикутник $A'B'C'$ – паралельна проекція рівнобедреного прямокутного $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$). Побудуйте зображення серединних перпендикулярів, проведених до сторін трикутника.

883. Дано зображення трикутника і двох його висот. Побудуйте зображення центра описаного кола.

884. Намалюйте еліпс і проведіть довільний діаметр AB. Побудуйте діаметр, спряжений до AB.

885. Побудуйте зображення: а) квадрата, вписаного в коло; б) квадрата, описаного навколо кола.

886. Побудуйте зображення правильного трикутника: а) вписаного в коло; б) описаного навколо кола.

887. Побудуйте зображення прямокутного трикутника, вписаного в коло.

888. Побудуйте зображення прямокутника, вписаного в коло.

889. На колі дано точку M. Побудуйте зображення дотичної, проведеної до кола в цій точці.

Б

890. Трикутник $A'B'C'$ – паралельна проекція рівнобедреного прямокутного $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$). Побудуйте зображення центра вписаного в трикутник кола, якщо: а) $AC : BC = 1 : 3$; б) $BC : AB = 4 : 5$.

891. У трикутнику ABC $AB : AC = 2 : 3$. Побудуйте на його зображенні зображення бісектриси, проведеної з вершини A.

892. Основи трапеції пропорційні числам 1 і 2. Побудуйте зображення цієї трапеції, її середньої лінії та висот.

893. Гострий кут ромба дорівнює 60°. Побудуйте на його зображенні зображення висот цього ромба, проведених із вершини: а) тупого кута; б) гострого кута.

894. Діагоналі ромба відносяться як 1 : 2. Побудуйте на його зображенні зображення висоти, проведеної з вершини тупого кута.

895. Бічна сторона і основа рівнобедреного трикутника відносяться як 3 : 2. Побудуйте на його зображенні зображення центра кола, вписаного в трикутник.

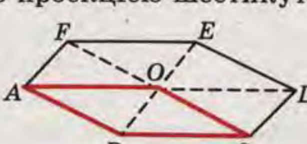
896. У рівнобедреному трикутнику ABC висота AH ділить сторону BC у відношенні $BH : HC = 3 : 1$. Побудуйте на його зображенні зображення центра кола, описаного навколо трикутника.

897. Дано зображення кола, його центра та трикутника, вписаного в це коло. Побудуйте зображення висот цього трикутника.

898. Побудуйте зображення правильного шестикутника: а) вписаного в коло; б) описаного навколо кола.

899. Щоб зобразити паралельну проекцію правильного шестикутника, учень побудував паралелограм $ABCO$, продовжив його сторони AO, CO і діагональ BO так, що $OD = AO$, $OF = CO$, $OE = BO$ (мал. 160), і вважає шуканою проекцією шестикутник $ABCDEF$. Чи правильна така побудова?

900. Побудуйте зображення паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо дані зображення точок: а) A, B, C, D_1; б) A, B, D, A_1; в) B, B_1, C_1, D.



Мал. 160

Вправи для повторення

901. Знайдіть довжини медіан прямокутного трикутника з катетами 5 м і 12 м.

902. Випишіть у дві колонки грані куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, які: а) перетинаються; б) паралельні.

903. Площини α і β перетинаються по прямій c. У площині α проведено пряму a, $a \parallel c$. Укажіть кілька способів побудови прямої b, $b \subset \beta$, $b \parallel a$.

§ 25. Паралельність прямої і площини

Як можуть розташовуватися в просторі пряма і площина? Вони можуть: 1) перетинатися, тобто мати тільки одну спільну точку; 2) кожна точка прямої може лежати в площині; 3) не мати жодної спільної точки (мал. 161). У третьому випадку говорять про паралельність прямої і площини.

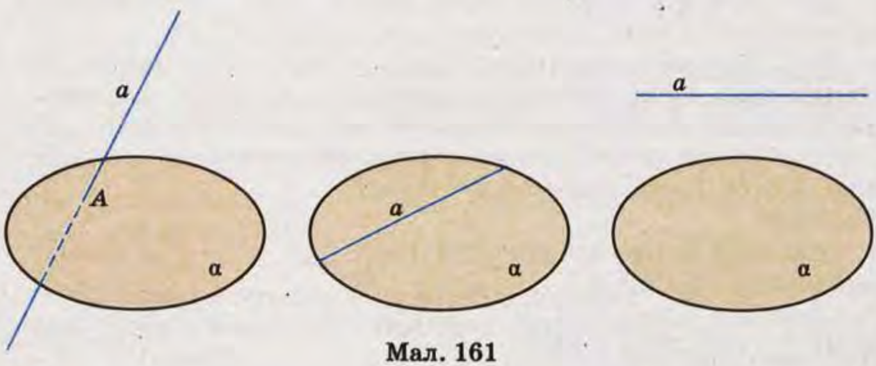
Пряма і площина називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Якщо пряма a і площина α паралельні, то пишуть: $a \parallel \alpha$.

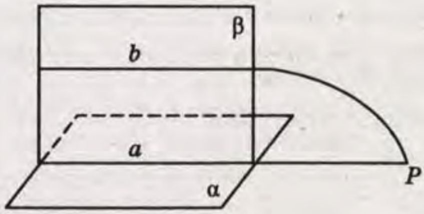
Теорема 6 (ознака паралельності прямої і площини). ***Якщо пряма паралельна якій-небудь прямій площини, то вона паралельна і самій площині.***

Доведення. Нехай пряма $b \parallel a$. Доведемо, що $b \parallel \alpha$.

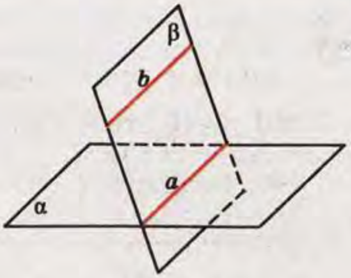
Припустимо, що пряма b не паралельна a, а перетинає площину α у деякій точці P (мал. 162). Ця точка лежить у площині α і в площині β, яка проходить через паралельні прямі a і b. Отже, точка P лежить на прямій a, по якій перетинаються площини α і β. Прийшли до суперечності: паралельні прямі a і b мають спільну точку P. Виходить, що пряма b не може перетинати площину α. Вона і не лежить у площині α. Отже, $b \parallel \alpha$.



Мал. 161



Мал. 162



Мал. 163

Теорема 7. ***Якщо площина проходить через пряму, паралельну другій площині, і перетинається з цією площиною, то пряма їх перетину паралельна даній прямій.***

Доведення. Нехай пряма b не лежить у площині α: $b \parallel \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = a$ (мал. 163). Доведемо, що $a \parallel b$. Якби прямі a і b перетиналися, точка їх перетину була б спільною для прямої b і площини α. Це неможливо, оскільки $b \parallel \alpha$. Отже, прямі a і b не перетинаються. А лежать вони в одній площині β. Тому $a \parallel b$.

Якщо $b \subset \alpha$, то теорема очевидна.

Відрізок називається *паралельним площині*, якщо він є частиною прямої, паралельної площині.

Приклади. Кожне ребро паралелепіпеда паралельне площинам двох його граней (покажіть це на малюнку).

Пряма, проведена в грані бруска за допомогою рейсмуса (мал. 164), паралельна площинам трьох його граней. Горизонтальні планки мотовила зернозбирального комбайна паралельні площині поля. Усе це – матеріальні моделі паралельності прямої і площини.

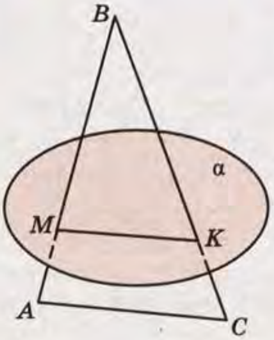
Мал. 164

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Як можуть бути розташовані в просторі пряма і площина?
2. Сформулюйте означення паралельності прямої і площини.
3. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямої і площини.
4. Чи може бути відрізок або промінь паралельний площині?
5. Який відрізок називають паралельним площині?

Виконаємо разом

1. Площина α перетинає сторони $\triangle ABC$ у точках M і K ($M \in AB$ і $K \in BC$) так, що: $AC \parallel \alpha$, $AM : MB = 2 : 5$ (мал. 165). Знайдіть AC, якщо $MK = a$.



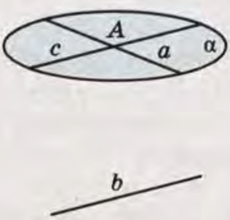
Мал. 165

● Розв'язання. Оскільки $AC \parallel \alpha$ і $AC \subset (ABC)$, то площина $\triangle ABC$ перетинає площину α по прямій, яка паралельна AC (теорема 7), тобто $MK \parallel AC$. Тоді $\triangle MBK \sim \triangle ABC$. Маємо:

$$\frac{MK}{AC} = \frac{MB}{AB}, \text{ звідси } \frac{MK}{AC} = \frac{5}{7},$$

а $AC = 1,4 \cdot MK = 1,4a$.

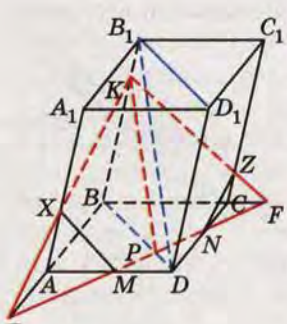
2. Доведіть, що через будь-яку з двох мимобіжних прямих a і b можна провести площину α, паралельну іншій прямій.



Мал. 166

● Розв'язання. На малюнку 166 зображено мимобіжні прямі a і b. Візьмемо на прямій a точку A і проведемо через неї пряму c, паралельну прямій b. Через прямі a і c, що перетинаються, проведемо площину α. Це і є шукана площина. Оскільки $b \parallel c$, тому $b \parallel \alpha$.

3. Через середини M і N ребер AD і CD паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину паралельно B_1D. Побудуйте переріз паралелепіпеда цією площиною.



Мал. 167

● Розв'язання. Нехай у паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M і N – середини ребер AD і CD (мал. 167). Уявимо площину BB_1D_1D, яка перетинає відрізок MN у точці P. Через точку P у площині BB_1D_1D проведемо $PK \parallel B_1D$. Знайдемо точку E – точку перетину прямих AB і MN, та проведемо відрізок EK, який перетинає ребро AA_1 у точці X. Аналогічно будуємо відрізок KZ. Провівши відрізки XM і ZN, отримаємо шуканий переріз $MXKZN$.

Виконайте усно

904. Серед речей, які ви бачите в класі, покажіть або назвіть матеріальні моделі прямої і площини, які: а) паралельні; б) не паралельні.

905. Пряма a паралельна площині α. а) Чи кожна пряма площини α паралельна прямій a? б) Скільки в площині α можна провести прямих, паралельних прямій a? в) Чи існують у площині α прямі, мимобіжні з прямою a?

906. Пряма a не паралельна площині α. Чи існують у площині α прямі, паралельні прямій a? Чи правильно, що кожна пряма, паралельна a, перетинає площину α?

907. Кожна з прямих a і b паралельна площині α. Чи випливає з цього, що прямі a і b паралельні?

908. Пряма a паралельна прямій b, а b паралельна площині α. Чи випливає з цього, що $a \parallel \alpha$?

909. Кожна з площин α і β паралельна прямій a. Чи можуть ці площини перетинатися?

910. Скільки прямих, паралельних площині α, можна провести через дану точку A, якщо $A \notin \alpha$? А якщо $A \in \alpha$?

911. Скільки площин, паралельних даній прямій, можна провести через дану точку?

А

912. $ABCD$ – паралелограм. Площина ω проходить через його вершини A, B і не проходить через вершину C. Доведіть, що $CD \parallel \omega$.

913. Доведіть, що коли площина перетинає трапецію по її середній лінії, то вона паралельна основам трапеції.

914. Точки A і B лежать у площині α, а O – поза площиною. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини відрізків AO і OB, паралельна площині α.

915. Площина α перетинає відрізки AB і AC в їх серединах – точках K і P. Доведіть, що $BC \parallel \alpha$. Як відносяться площі $\triangle ABC$ і $\triangle AKP$?

916. Дві протилежні сторони паралелограма паралельні площині. Чи паралельні цій площині й дві інші сторони? Чому?

917. Основи трапеції паралельні одній площині. Чи паралельні їй і бічні сторони трапеції? Обґрунтуйте.

918. Пряма a перетинає площину α. Скільки можна провести прямих, що: а) перетинають площину α і паралельні прямій a; б) перетинають пряму a і паралельні площині α?

919. Яким граням прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралельна пряма: а) AB; б) B_1C_1; в) DD_1?

920. Якщо P і H – середини відрізків AB_1 і B_1C на кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$, то пряма PH паралельна його грані $ABCD$. Доведіть.

921. Через середини двох ребер основи і вершину тетраедра проведено площину. Доведіть, що ця площина паралельна третьому ребру тетраедра.

922. Через точку P, середину сторони AC рівностороннього трикутника ABC, проведено площину α, яка перетинає сторону BC в точці K. Знайдіть PK, якщо $\alpha \parallel AB$, а $AC = 12$ м.

923. Площина α, паралельна основі трапеції, перетинає її бічні сторони AB і CD у точках M і N відповідно. Знайдіть MN, якщо $AD = 7$ см, $BC = 3$ см, а $AM = BM$.

Б

924. Площина α перетинає сторони AB і BC трикутника ABC відповідно в точках A_1 і C_1. Знайдіть довжину відрізка A_1C_1, якщо $AC \parallel \alpha$ і:

а) $AC = 12$ м, $BA_1 : BA = 4 : 6$;

б) $AC = 21$ м, $BA_1 : A_1A = 4 : 3$.

925. Площина α перетинає середини катетів AB і AC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC у точках M і N. Доведіть, що $BC \parallel \alpha$ і знайдіть відношення $P_{BMNC} : P_{MAN}$, якщо $MN = 2$ см.

926. Через точку M – середину гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC – проведено площину α, паралельну катету BC, яка перетинає катет AC у точці N. Знайдіть CM, якщо $BC : AC = 6 : 8$, $S_{\triangle AMN} = 24$ см.

927. Через точку M, яка лежить на стороні AB трикутника ABC, паралельно стороні AC проведено площину, яка перетинає сторону BC у точці N. Знайдіть MN, якщо: а) $AM = 10$ см, $BM = 5$ см, $AC = 12$ см; б) $AM : BM = 2 : 3$, $AC = 10$ см; в) $AM - BM = 2$ см, $AC = 16$ см, $MN = BM$.

928. Площина, проведена паралельно основі AD трапеції $ABCD$, перетинає її бічні сторони в точках M і N ($M \in AB$). Знайдіть MN, якщо: а) $BC = 10$ см, $AD = 12$ см, $AM = MB$; б) $AD = 17$ см, $BC = 5$ см, $AM = 4$ см, $BM = 2$ см; в) $AD = 18$ см, $BC = 6$ см, $BM : AB = 2 : 3$.

929. Через дану точку проведіть пряму, паралельну даній площині.

930. Дано площину і паралельну їй пряму. Через точку, взяту на площині, проведіть у цій самій площині пряму, паралельну даній прямій.

931. Точки B і C не лежать на прямій a. Скільки існує площин, паралельних a, які проходять через B і C? Розгляньте всі випадки.

932. Дано неплоску замкнену ламану $ABCDA$. Доведіть, що середини всіх її ланок лежать в одній площині.

933. $PABC$ – тетраедр, кожне ребро якого 6 см. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через середину ребра PB паралельно ребрам PA і PC. Знайдіть площу перерізу.

934. Побудуйте переріз тетраедра $PABC$ площиною, паралельною ребру AB, яка проходить через вершину P і середину ребра BC. Знайдіть площу перерізу, якщо $AB = BC = CA = a$, $PA = PB = PC = b$.

935. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребер AB, AD і паралельна прямій CC_1. Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо $AB = l$.

Вправи для повторення

936. Діагоналі ромба дорівнюють 16 см і 12 см. Знайдіть периметр і площу ромба.

937. Точка M не лежить у площині трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Доведіть, що пряма, яка проходить через середини відрізків MB і MC, паралельна середній лінії трапеції.

938. Основи трапеції пропорційні числам 1 і 2. Побудуйте зображення цієї трапеції, її середньої лінії та висот.

§ 26. Паралельність площин

Дві площини називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Якщо площини α і β паралельні, пишуть: $\alpha \parallel \beta$.

Теорема 8 (ознака паралельності площин). ***Якщо дві прямі, які перетинаються і лежать в одній площині, паралельні двом прямим другої площини, то такі площини паралельні.***

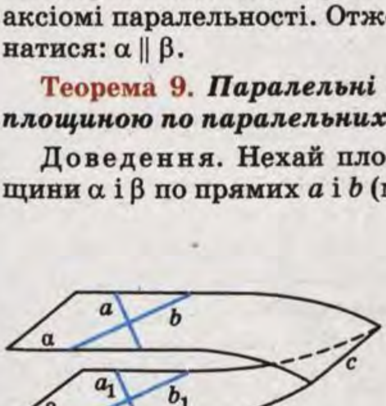
Доведення. Нехай прямі a і b, що перетинаються, лежать у площині α, а паралельні їм прямі a_1 і b_1 – у площині β (мал. 168). Доведемо, що $\alpha \parallel \beta$.

Припустимо, що площини α і β не паралельні, тобто перетинаються по якійсь прямій c. Оскільки прямі a і b паралельні прямим a_1 і b_1 площини β, то $a \parallel \beta$ і $b \parallel \beta$.

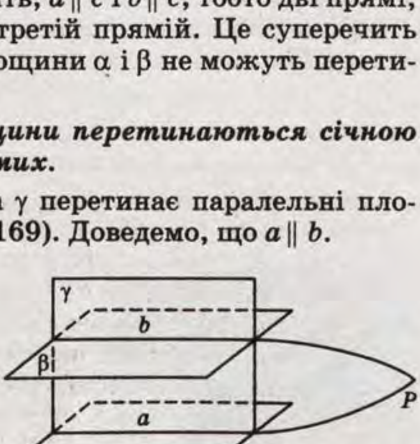
Прямі a і b не перетинають пряму c, оскільки c лежить у площині β, з якою a і b не мають спільних точок. Лежать усі ці прямі в одній площині α. Виходить, $a \parallel c$ і $b \parallel c$, тобто дві прямі, які перетинаються, паралельні третій прямій. Це суперечить аксіомі паралельності. Отже, площини α і β не можуть перетинатися: $\alpha \parallel \beta$.

Теорема 9. ***Паралельні площини перетинаються січною площиною по паралельних прямих.***

Доведення. Нехай площина γ перетинає паралельні площини α і β по прямих a і b (мал. 169). Доведемо, що $a \parallel b$.



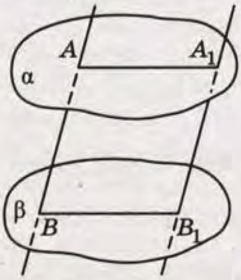
Мал. 168



Мал. 169

Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Тоді вони перетинаються в деякій точці P, оскільки лежать в одній площині γ. Точка P належить прямим a і b, отже, і площинам α і β, в яких лежать ці прямі. Прийшли до суперечності: паралельні площини α і β мають спільну точку P. Отже, прямі a і b не можуть перетинатися. А лежать вони в одній площині γ. Тому $a \parallel b$.

Теорема 10. ***Паралельні площини, перетинаючи паралельні прямі, відтинають від них рівні відрізки.***



Мал. 170

Доведення. Нехай паралельні площини α і β відтинають від паралельних прямих AB і A_1B_1 відрізки AB і A_1B_1 (мал. 170). Площина, яка проходить через дані паралельні прямі, перетинає площини α і β по паралельних прямих AA_1 і BB_1. Тому чотирикутник AA_1B_1B – паралелограм, його протилежні сторони рівні: $AB = A_1B_1$. Що й треба було довести.

Моделі паралельних площин: підлога і стеля кімнати, підлога і поверхня стола, шибки подвійних вікон. Паралельні шари фанери, протилежні грані цеглини, швелера та двотаврової балки (мал. 171), пилки пилорами (мал. 172) та ін.

Відношення паралельності площин має такі самі властивості, як і відношення паралельності прямих.

Кожна площина паралельна сама собі (рефлексивність).

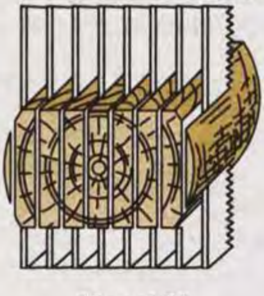
Якщо $\alpha \parallel \beta$, то $\beta \parallel \alpha$ (симетричність).

Якщо $\alpha \parallel \beta$ і $\beta \parallel \gamma$, то $\alpha \parallel \gamma$ (транзитивність).

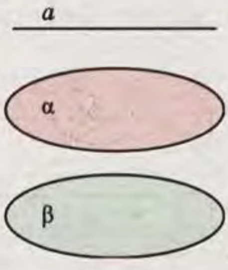
Спробуйте обґрунтувати таке твердження.

Якщо пряма a і площини α, β такі, що $a \parallel \alpha$ і $\alpha \parallel \beta$, то $a \parallel \beta$ (мал. 173).

Мал. 171



Мал. 172



Мал. 173

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які площини називають паралельними?
2. Сформулюйте ознаку паралельності площин.
3. Сформулюйте і доведіть теорему про перетин паралельних площин січною площиною.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про перетин двох паралельних площин паралельними прямими.

Виконаємо разом

1. Як через точку A поза даною площиною α провести площину, паралельну площині α?

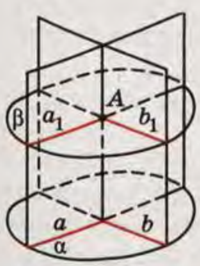
Розв'язання. У даній площині α проведемо прямі a і b, які перетинаються (мал. 174). Через дану точку A проведемо паралельні їм прямі a_1 і b_1. Прямі a_1 і b_1 перетинаються, тому через них можна провести площину β. За ознакою паралельності площин $\beta \parallel \alpha$.

2. Доведіть, що через дві будь-які мимобіжні прямі можна провести пару паралельних площин.

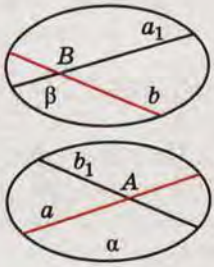
Розв'язання. Нехай дано мимобіжні прямі a і b (мал. 175). Через довільну точку A прямої a проведемо пряму b_1, паралельну b, а через пересічні прямі a і b_1 – площину α. Так само через довільну точку B прямої b проведемо пряму a_1, паралельну a, а через прямі b і a_1 – площину β. За ознакою паралельності площини α і β паралельні.

3. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через сторону нижньої основи і точку перетину діагоналей верхньої основи.

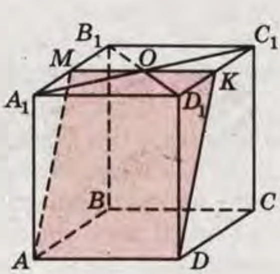
Розв'язання. Нехай переріз проходить через ребро AD та точку O перетину діагоналей A_1C_1 і B_1D_1. Оскільки основи паралельні, то січна площина перетинає їх по паралельних прямих. Тому через O проведемо відрізок MK такий, що $MK \parallel AD$, $M \in A_1B_1$, $K \in C_1D_1$. Сполучимо точки A, M, K і D. Тоді $AMKD$ – шуканий переріз (мал. 176).



Мал. 174



Мал. 175



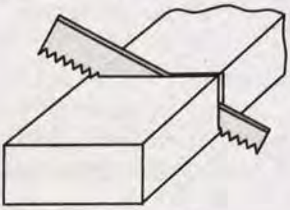
Мал. 176

Виконайте усно

939. Серед речей, які ви бачите в класі, покажіть або назвіть матеріальні моделі площин: а) паралельні; б) не паралельні.

940. Кожна діагональ ромба $ABCD$ паралельна площині α. Як розташовані площини α і (ABC)?

941. Чи буде площина трапеції паралельна площині α, якщо цій площині паралельні: а) основи трапеції; б) бічні сторони трапеції?



Мал. 177

942. Кожна грань дошки – прямокутник (мал. 177). Доведіть, що в якому напрямі не розпилювали б дошку, перетинаючи всі її поздовжні ребра, у перерізі завжди буде паралелограм.

943. Чи рівні відрізки відтинають дві паралельні площини від трьох паралельних прямих? Чому?

944. Чи можуть дві непаралельні площини відтинати рівні відрізки від трьох паралельних прямих?

945. Чи можуть дві паралельні площини відтинати рівні відрізки від трьох непаралельних прямих?

946. Площина γ перетинає площини α і β по паралельних прямих. Чи випливає з цього, що площини α і β паралельні?

947. Чи можуть перетинатися площини α і β, якщо кожна з них паралельна площині γ?

А

948. Дві прямі площини α паралельні двом прямим площини β. Чи випливає з цього, що $\alpha \parallel \beta$?

949. Площини α і β паралельні. Доведіть, що кожна пряма площини α паралельна площині β.

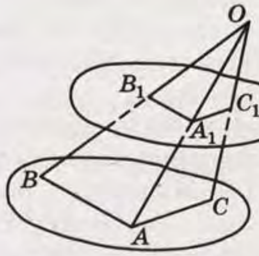
950. Відрізки OA, OB, OC не лежать в одній площині. Доведіть, що площина, яка проходить через їх середини, паралельна площині (ABC) (мал. 178).

951. Точка O – спільна середина кожного з відрізків AA_1, BB_1, CC_1, що не лежать в одній площині. Доведіть, що площини (ABC) і $(A_1B_1C_1)$ паралельні.

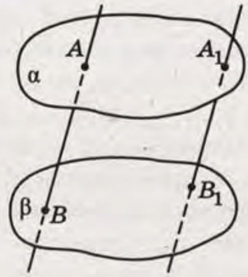
952. Пряма a паралельна площині α. Як через пряму a провести площину, паралельну α?

953. Доведіть, що коли пряма або площина перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає і другу площину.

954. З вершин трикутника ABC в один бік від його площини проведено рівні і паралельні відрізки AA_1, BB_1, CC_1. Доведіть, що площини (ABC) і $(A_1B_1C_1)$ паралельні.



Мал. 178



Мал. 179

955. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, K, P, T – середини ребер, що виходять з вершини B. Доведіть, що площини (KPT) і (AB_1C) паралельні.

956. K, P, T – середини трьох попарно паралельних ребер куба. Доведіть, що площина (KPT) ділить навпіл і четверте ребро куба.

957. Чи паралельні прямі AB і A_1B_1, якщо паралельні площини α і β перетинають їх у точках A, B, A_1, B_1, як показано на малюнку 179?

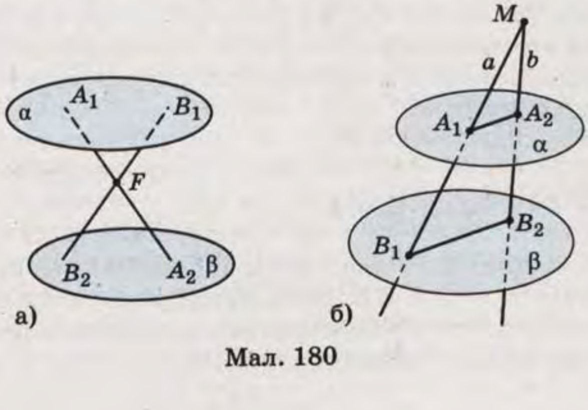
Б

958. Площини α і β перетинаються. Доведіть, що будь-яка площина простору перетинає хоча б одну з цих площин.

959. Доведіть, що коли перерізом паралелепіпеда є шестикутник, то його протилежні сторони паралельні.

960. Чи може перерізом куба бути правильний п'ятикутник?

961. Точка F лежить між паралельними площинами α і β (мал. 180, *а*). Прямі a і b, що проходять через точку F, перетинають площину α в точках A_1 і B_1, а площину β відповідно в точках A_2 і B_2. Знайдіть FB_1, якщо $A_1F : A_1A_2 = 1 : 3$, $B_1B_2 = 30$ дм.



Мал. 180

962. Через точку M проведено дві прямі a і b, що перетинають дві паралельні площини α і β (див. мал. 180, *б*). Першу в точках A_1 і A_2, другу в точках B_1 і B_2. Обчисліть MA_1 і MB_2, якщо $A_1A_2 : B_1B_2 = 3 : 4$, $A_1B_1 = 3{,}5$ м, $MA_2 = 1{,}2$ м.

963. Через точку C, яка лежить поза паралельними площинами α і β, проведено прямі a і b, що перетинають площину α в точках A і A_1, а площину β в точках B і B_1 відповідно. Знайдіть AA_1, якщо:

а) $AC = 2$ см, $AB = 6$ см, $BB_1 = 10$ см;
б) $AC : BC = 1 : 3$, $BB_1 = 9$ см;
в) $A_1C : A_1B_1 = 2 : 3$, $BB_1 = 10$ см;
г) $AC = 2$ м, $BB_1 = 8$ м, $CB = AA_1$.

964. Точка C лежить між паралельними площинами α і β. Через точку C проведено прямі a і b, що перетинають площину α в точках A і A_1, а площину β в точках B і B_1. Знайдіть AA_1, якщо:

а) $AC = 2$ см, $BC = 5$ см, $B_1B = 15$ см;
б) $AC : BC = 2 : 3$, $BB_1 = 9$ см;
в) $AC = 1$ см, $B_1B = 6$ см, $AA_1 = AB$;
г) $AC = 3$ см, $B_1B = 12$ см, $AA_1 = CB$.

965. Точка X ділить ребро AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у відношенні $AX : XB = 2 : 3$. Побудуйте переріз цього куба площиною, яка паралельна площині (AA_1C_1) і проходить через точку X. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = a$.

966. Дано три паралельні площини α, α_1, α_2, прямі a і b перетинають їх відповідно в точках A, A_1, A_2 і B, B_1, B_2. Доведіть, що $AA_1 : A_1A_2 = BB_1 : B_1B_2$.

967. Точка A_1 ділить ребро PA правильного тетраедра $PABC$ у відношенні $PA_1 : A_1A = 2 : 3$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка паралельна площині (ABC) і проходить через A_1. Знайдіть площу перерізу, якщо $AB = 20$ см.

968*. $ABCDEFA$ – неплоска замкнена ламана із шести ланок. Доведіть, що коли $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ і $CD \parallel FA$, то $AB = DE$, $BC = EF$ і $CD = FA$.

969. Практичне завдання. Зробіть з картону або цупкого паперу модель до теореми про перетин двох паралельних площин третьою площиною.

Вправи для повторення

970. На площині α по різні боки від прямої MN позначено точки A і B так, що $MA = MB$ і $NA = NB$. Доведіть, що $AB \perp MN$.

971. На зображенні рівностороннього трикутника побудуйте зображення центра описаного кола.

972. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Доведіть, що пряма AC паралельна площині, яка проходить через середини відрізків AB, BC, BD.

Самостійна робота № 6

Варіант 1

1. Прямокутники $ABCD$ і $ABKP$ лежать у різних площинах. Доведіть, що точки C, K, P, D – вершини паралелограма і що пряма AB паралельна площині цього паралелограма.

2. Побудуйте пряму трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Доведіть, що прямі AA_1 і BC – мимобіжні.

3. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки B_1, M, N, де M і N – середини ребер AA_1 і CC_1. Знайдіть периметр перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

Варіант 2

1. Ромби $ABCD$ і $ABKP$ лежать у різних площинах. Доведіть, що точки P, K, C, D – вершини паралелограма. Чи перетинає площину цього паралелограма пряма AB? Чому?

2. Побудуйте правильну чотирикутну піраміду $SABCD$. Доведіть, що прямі SA і BD – мимобіжні.

3. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки D, M, N, де M і N – середини ребер B_1C_1 і C_1D_1. Знайдіть периметр перерізу, якщо ребро куба дорівнює l.

Головне в розділі 3

Дві прямі в просторі можуть перетинатися, бути паралельними або мимобіжними. Дві прямі називають мимобіжними, якщо вони не лежать в одній площині. Якщо одна з двох прямих, що не перетинаються, лежить у деякій площині, а друга перетинає цю площину, то такі прямі мимобіжні (ознака мимобіжності прямих).

Дві прямі простору, які лежать в одній площині і не перетинаються, називають *паралельними прямими*. Два промені або відрізки, які лежать на паралельних прямих або на одній прямій, називають паралельними.

Три або більше попарно паралельних прямих простору можуть не лежати в одній площині.

Через будь-яку точку простору можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій.

Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.

Нехай через кожну точку фігури K проведено пряму, паралельну деякій прямій l. Якщо всі ці промені перетинають площину α в точках, які утворюють фігуру K_1, то K_1 – паралельна проекція фігури K на площину α. Тут α – площина проекцій, а прямі, паралельні l, – проектуючі прямі.

При паралельному проектуванні відрізки, не паралельні проектуючій прямій, зображаються відрізками, паралельні відрізки – паралельними відрізками, при цьому відношення їхніх довжин зберігається.

***Зображенням фігури* називають фігуру, подібну проекції даної фігури на деяку площину.**

***Пряма і площина називаються паралельними*, якщо вони не мають спільних точок. Якщо пряма a паралельна якій-небудь прямій площини α, то $a \parallel \alpha$ (ознака паралельності прямої і площини).**

***Дві площини називають паралельними*, якщо вони не мають спільних точок.**

Якщо дві прямі однієї площини, які перетинаються, паралельні двом прямим другої площини, то такі площини паралельні (ознака паралельності площин).

Якщо одну з паралельних площин перетинає яка-небудь пряма або площина, то вона перетинає й другу площину. Паралельні площини перетинаються січною площиною по паралельних прямих. Паралельні площини, перетинаючи паралельні прямі, відтинають від них рівні відрізки.

Головне значення перпендикуляра – це його роль у техніці і в усьому нашому вжитку.

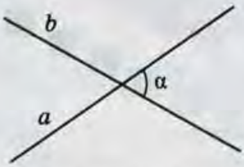
О.Д. Александров

4 Перпендикулярність прямих і площин у просторі

ТЕМИ РОЗДІЛУ:

- кут між прямими;
- перпендикулярність прямих;
- перпендикулярність прямої і площини;
- перпендикуляр і похила до площини;
- перпендикулярні площини;
- ортогональне проектування;
- відстані в просторі;
- вимірювання кутів у просторі;
- двогранний кут

§ 27. Кут між прямими. Перпендикулярність прямих



Мал. 181

Щоб увести поняття *кута між прямими* в просторі, слід розглянути три випадки: прямі перетинаються; прямі паралельні; прямі мимобіжні.

Якщо дві прямі перетинаються, вони утворюють чотири кути (мал. 181). Кутова міра не найбільшого з них називається *кутом між даними прямими, що перетинаються*. Кут між прямими, що перетинаються, не перевищує 90°.

Позначають кут між прямими a і b символом $\angle (ab)$.

Зауваження. Кут між прямими – не фігура, а кутова міра, величина.

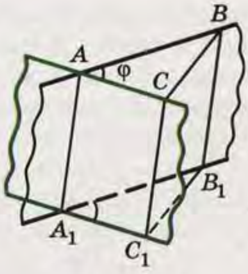
Теорема 11. ***Якщо дві прямі, які перетинаються, паралельні іншим прямим, що перетинаються, то кут між першими прямими дорівнює куту між другими.***

Доведення. Нехай прямі AB і AC, що перетинаються, паралельні відповідно прямим A_1B_1 і A_1C_1. Доведемо, що кут між прямими AB і AC дорівнює куту між прямими A_1B_1 і A_1C_1 (мал. 182).

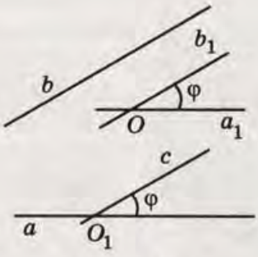
Розглянемо спочатку випадок, коли дані прямі лежать у різних площинах. Якщо $\angle BAC = \varphi$ – кут між прямими AB і AC ($\varphi \leqslant 90°$), то через довільні точки B і C його сторін проведемо прямі BB_1 і CC_1, паралельні AA_1. Нехай прямі BB_1 і A_1B_1 перетинаються в точці B_1, а прямі CC_1 і A_1C_1 – у точці C_1. Чотирикутники AA_1B_1B і AA_1C_1C – паралелограми, оскільки їх протилежні сторони попарно паралельні. Відрізки BB_1 і CC_1 паралельні та рівні, оскільки кожний з них паралельний відрізку AA_1 і дорівнює йому. Отже, чотирикутник BB_1C_1C теж паралелограм, $CB = C_1B_1$. За трьома сторонами $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, тому $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC = \varphi$. Отже, кут між прямими A_1B_1 і A_1C_1 дорівнює куту між прямими AB і AC.

У випадку, коли прямі AB, AC, A_1B_1 і A_1C_1 лежать в одній площині, можна дослівно повторити наведені міркування. Тільки точку C треба брати поза прямою BB_1, щоб паралелограм BB_1C_1C не виродився у відрізок.

Тепер введемо поняття *кута між мимобіжними прямими*. Нехай a і b – довільні мимобіжні прямі. Через будь-яку точку O простору проведемо прямі a_1 і b_1, паралельні a і b (мал. 183). Кут φ між побудованими так прямими a_1 і b_1, які



Мал. 182



Мал. 183

перетинаються, називають кутом між даними мимобіжними прямими $\angle(ab) = \angle(a_1b_1)$. Цей кут не залежить від вибору точки O. Адже, якщо через яку-небудь іншу точку простору провести прямі, паралельні прямим a і b, кут між ними теж дорівнює φ (теорема 11). Точку O можна брати і на будь-якій з даних прямих. Якщо $b \parallel c$, то завжди $\angle(ab) = \angle(ac)$.

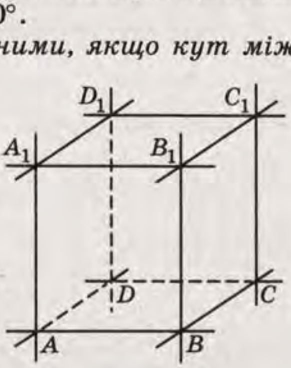
Кутом між мимобіжними прямими називають кут між прямими, які перетинаються і паралельні відповідно даним мимобіжним прямим.

Кут між мимобіжними прямими, як і між прямими однієї площини, не може мати більше від $90°$. Кут між паралельними прямими вважають таким, що дорівнює $0°$.

Дві прямі називають перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює $90°$.

Перпендикулярними можуть бути як прямі, що перетинаються, так і мимобіжні прямі. Наприклад, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, то кожна з прямих AB, BC, CD, DA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 перпендикулярна до прямої AA_1 (мал. 184).

Відрізки (промені) називають *перпендикулярними*, якщо вони належать перпендикулярним прямим.

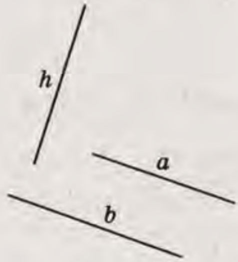


Мал. 184

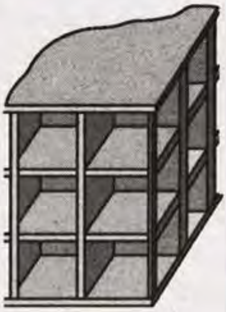
Теорема 12. ***Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.***

Доведення. Нехай прямі a і b паралельні і $h \perp a$. Доведемо, що $h \perp b$ (мал. 185).

Якщо $b \parallel a$, то завжди $\angle(hb) = \angle(ha)$. У даному випадку $\angle(ha) = 90°$, тому і $\angle(hb) = 90°$, тобто $h \perp b$. Що й треба було довести.



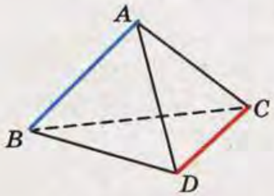
Мал. 185



Мал. 186

Коли зводять багатоповерховий будинок, то спочатку будують каркас, в якому кожна горизонтальна балка перпендикулярна до вертикальної колони (мал. 186). Під прямими кутами зварюють стальні прути в арматурі залізобетонних конструкцій, скріплюють суміжні деталі віконної рами тощо.

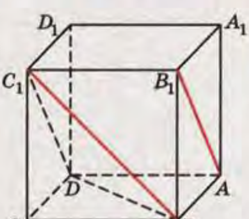
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ



Мал. 187

1. Що називають кутом між двома прямими, які перетинаються?
2. Що називають кутом між двома мимобіжними прямими?
3. Чи може кут між прямими бути тупим або розгорнутим?
4. Які дві прямі простору називають перпендикулярними?
5. Які відрізки або промені називають перпендикулярними?
6. Чому дорівнює кут між паралельними прямими? А між перпендикулярними прямими?
7. $ABCD$ – правильний тетраедр (мал. 187). З'ясуйте, чому дорівнює кут між його ребрами AB і CD, AC і BD.

Виконаємо разом

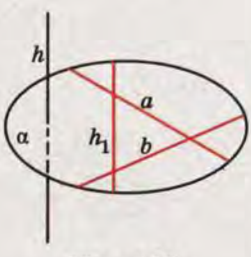


Мал. 188

1. Знайдіть кут між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба.

● Розв'язання. Знайдемо кут між діагоналями AB_1 і BC_1 граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 188). Оскільки $DC_1 \parallel AB_1$, то кут між прямими AB_1 і BC_1 дорівнює куту BC_1D. $\angle BC_1D = 60°$, оскільки $\triangle BC_1D$ рівносторонній.

Відповідь. 60°.



Мал. 189

2. Доведіть, що пряма, перпендикулярна до двох прямих, які перетинаються, перетинає площину, що проходить через них.

● Розв'язання. Припустимо, що пряма h, перпендикулярна до двох прямих a і b, які перетинаються, не перетинає площину α, що проходить через них (мал. 189). Тоді $h \parallel \alpha$ або $h \subset \alpha$. В обох випадках у площині α знайдеться пряма h_1, паралельна h.

І якщо пряма h перпендикулярна до прямих a і b, то паралельна їй пряма h_1 теж перпендикулярна до цих прямих. Прийшли до суперечності, оскільки пряма, яка лежить у площині, не може бути перпендикулярною до двох прямих цієї площини, що перетинаються. Отже, пряма h перетинає площину α.

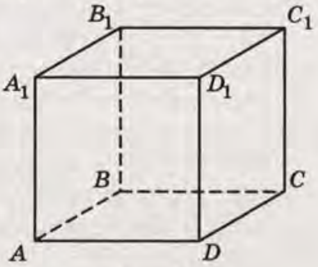
Виконайте усно

973. Скільки прямих, перпендикулярних до даної прямої, можна провести через дану на цій прямій точку? А через точку, яка не лежить на даній прямій?

974. Дано площину α і паралельну їй пряму a. Скільки прямих, перпендикулярних до прямої a, можна провести у площині α?

975. З планіметрії відомо: дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні. Чи правильне це твердження для стереометрії?

976. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 190). Знайдіть кут між прямими: а) DC і BC; б) AB і BB_1; в) AA_1 і D_1C_1; г) AA_1 і D_1C_1; ґ) A_1C_1 і AC; д) AB і B_1D_1.



Мал. 190

А

977. Зобразіть куб і позначте його вершини. Випишіть ребра, перпендикулярні до: а) одного з ребер нижньої основи; б) бічного ребра; в) діагоналі верхньої основи куба.

978. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть кут між прямими AB_1 і AD_1.

979. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. Знайдіть кут між мимобіжними прямими AD_1 і B_1C, якщо: а) $\angle B_1CB = 50°$; б) $BC = a$, $BC_1 = 2a$.

980. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть кут між прямими:
а) DC_1 і AB; б) A_1C_1 і AB; в) B_1D_1 і C_1C; г) B_1D і AC.

981. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AA_1 = 2AB$, $ABCD$ – квадрат. Знайдіть кут між прямими:
а) B_1C і AD; б) AB_1 і CD_1; в) AB_1 і A_1C_1.

982. Дано чотири прямі: $a \parallel a_1$ і $b \parallel b_1$. Доведіть, що коли $a \perp b$, то $a_1 \perp b_1$.

983. Чи можуть бути перпендикулярними прямі OB і OC, якщо $\angle AOB = \angle AOC = 60°$?

984. Прямі a і b перетинаються під кутом 30°, а прямі a і c – під кутом 40°. Чи можуть бути перпендикулярними прямі b і c?

985. Чи існує замкнена неплоска ламана з п'яти ланок, кожна ланка якої перпендикулярна до суміжної?

986. $ABCDA_1B_1C_1D_1$– куб. Доведіть, що $AB_1 \perp CD_1$.

987. A, B, C – точки на попарно перпендикулярних променях OA, OB, OC. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $OA = OB = OC$.

988. Промені OA, OB, OC попарно перпендикулярні. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо: а) $OA = OB = OC = 4$ см; б) $OA = OB = OC = a$; в) $OA = OB = 3$ дм, $OC = 4$ дм.

Б

989. Дано тетраедр $ABCD$, в якому $AC = 6$ см, $BD = 8$ см, M – середина AB, N – середина CD і $MN = 5$ см. Знайдіть кут між BD і AC.

990. Доведіть, що діагоналі протилежних граней куба або паралельні, або перпендикулярні. Чи виконується це твердження для прямокутного паралелепіпеда?

991. M – середина ребра AD правильного тетраедра $ABCD$. Опустіть перпендикуляри з точки M на прямі AB, BD, AK, де K – середина BD. Знайдіть довжину кожного перпендикуляра, якщо довжина ребра тетраедра дорівнює a.

992. K і P – середини ребер AB і AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Опустіть перпендикуляр з вершини A_1 на прямі BD, AD_1, KP, C_1D, KD_1. Знайдіть довжину кожного перпендикуляра, якщо $AB = a$.

993. Точки K і M – середини ребер AB і CD правильного тетраедра $ABCD$. Доведіть, що $KM \perp AB$ і $KM \perp CD$. Знайдіть довжину KM, якщо $AB = a$.

994. Основою прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат зі стороною a. Його бічне ребро дорівнює $a\sqrt{3}$. Знайдіть кут між прямими:

а) AB_1 і D_1C; б) AB_1 і A_1C_1; в) A_1C і BD; г) AB_1 і A_1D_1.

995. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, O – точка перетину діагоналей AC і BD. Знайдіть кут між прямими:

а) OB_1 і DD_1; б) OB_1 і A_1C_1; в) B_1O і BD_1; г) B_1O і BC.

996. $ABCD$ – тетраедр, $M \in AC$, $N \in BD$, $BC = 10{,}5$ см, $AD = 24$ см, $MN = 13$ см, $AM : MC = DN : NB = 2 : 1$. Знайдіть кут між AD і BC.

997. У тетраедрі $ABCD$ довжина кожного ребра дорівнює a і $CM = MB$ ($M \in CB$). Знайдіть кут між прямими AM і BD.

998. $ABCD$ – тетраедр, у якому $DA = DB = DC = a$, $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = 90°$. Знайдіть кут між прямими DM і AB, якщо M – середина BC.

Вправи для повторення

999. Через точку M проведіть пряму, паралельну кожній з двох площин, що перетинаються.

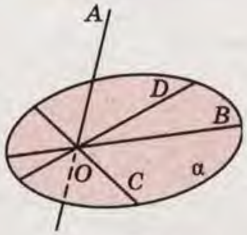
1000. Побудуйте переріз тетраедра $ABCD$ площиною, яка проходить через внутрішню точку грані AC паралельно прямим CB і CD.

1001. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 10 см, 10 см і 16 см.

§ 28. Перпендикулярність прямої і площини

Якщо пряма не лежить у площині і не паралельна їй, то вона перетинає площину.

Нехай пряма AO перетинає площину α в точці O, а прямі OB, OC, OD, ... лежать у площині α (мал. 191). Кути AOB, AOC, AOD, ... можуть бути різними. Заслуговує на увагу випадок, коли всі ці кути прямі. У цьому разі кажуть, що пряма AO перпендикулярна до площини α. Пишуть: $AO \perp \alpha$, або $\alpha \perp AO$.

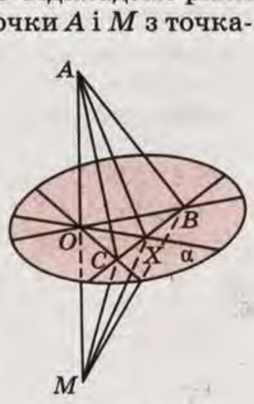


Мал. 191

Пряма називається перпендикулярною до площини, якщо вона перетинає цю площину і перпендикулярна до кожної прямої, яка лежить у площині і проходить через точку перетину.

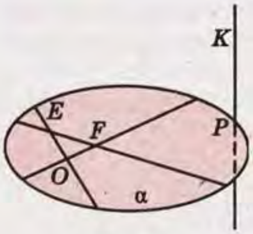
Теорема 13 (ознака перпендикулярності прямої і площини). ***Якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох різних прямих цієї площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна до площини.***

Доведення. Нехай пряма AO, яка перетинає площину α в точці O, перпендикулярна до прямих OB і OC цієї площини (мал. 192). Доведемо, що пряма AO перпендикулярна до будь-якої прямої OX, яка лежить у площині α. Для цього проведемо довільну пряму, яка перетинає прямі OB, OC і OX у точках B, C і X. На прямій OA по різні боки від O відкладемо рівні відрізки OA і OM. Сполучивши відрізками точки A і M з точками B, C, X, дістанемо кілька пар трикутників. $\triangle ABM$ і $\triangle ACM$ рівнобедрені, оскільки їх медіани BO і CO є також висотами. Отже, $AB = MB$ і $AC = MC$. За трьома сторонами $\triangle ABC = \triangle MBC$, тому $\angle ABC = \angle MBC$. Рівні також трикутники ABX і MBX – за двома сторонами і кутом між ними. Отже, $AX = MX$. Оскільки трикутник AXM рівнобедрений, то його медіана XO є і висотою, тобто $AO \perp OX$. Що й треба було довести.

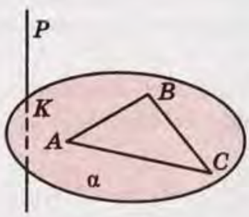


Мал. 192

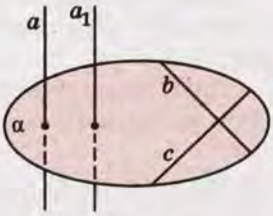
Доведену теорему можна узагальнити. На основі теореми 12 пряму AO можна замінити будь-якою прямою KP, паралель-



Мал. 193



Мал. 194



Мал. 195

ною їй, а пряму OX – будь-якою прямою EF, що лежить у площині α і паралельна OX (мал. 193). Варто також врахувати твердження задачі 2 на с. 195. Тому з доведеної теореми випливають такі наслідки.

Пряма, перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, перпендикулярна до площини, що проходить через ці дві прямі.

Пряма, перпендикулярна до площини, перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині.

Якщо пряма перпендикулярна до двох сторін трикутника, то вона перпендикулярна і до третьої його сторони (мал. 194).

Теорема 14. ***Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то і друга пряма перпендикулярна до цієї площини.***

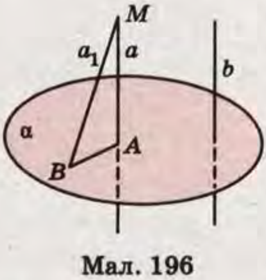
Доведення. Нехай прямі a, a_1 і площина α такі, що $a \parallel a_1$ і $a \perp \alpha$ (мал. 195). Доведемо, що $a_1 \perp \alpha$.

Оскільки $a \perp \alpha$, то в площині α знайдуться прямі b і c, які перетинаються і перпендикулярні до a. Оскільки $a \parallel a_1$, то прямі b і c перпендикулярні і до прямої a_1. Отже, пряма a_1 перпендикулярна до прямих b і c площини α, які перетинаються, тому $a_1 \perp \alpha$.

Теорема 15. ***Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.***

Доведення. Нехай прямі a, b і площина α такі, що $a \perp \alpha$ і $b \perp \alpha$ (мал. 196). Доведемо, що $a \parallel b$.

Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Тоді через яку-небудь точку M прямої a проведемо пряму a_1, паралельну b. Оскільки $b \perp \alpha$, то і $a_1 \perp \alpha$ – згідно з попередньою теоремою. За умовою $a \perp \alpha$. Якщо A і B – точки перетину прямих a і a_1 з площиною α, то з припущення випливає, що в $\triangle MAB$ два прямих кути. Цього не може бути. Тому прямі a і b паралельні.



Мал. 196

Відрізок називається перпендикулярним до площини, якщо він лежить на прямій, перпендикулярній до даної площини.

Деякі стереометричні твердження схожі на твердження планіметричні, тільки в них замість поняття *пряма* треба написати *площина*.

У планіметрії	*У стереометрії*
Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.	Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.
Через дану точку проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної прямої.	Через дану точку проходить тільки одна площина, перпендикулярна до даної прямої.

Подібних *аналогій* між твердженнями планіметрії і стереометрії можна навести багато. Корисно помічати їх. Науковці на такі аналогії звертають особливу увагу.

С. Банах: *«Математик – це той, хто вміє знаходити аналогії між твердженнями»*.

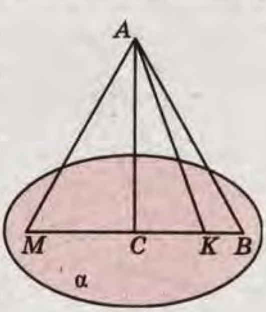
Й. Кеплер: *«Я найбільше ціную Аналогії, моїх найвірніших учителів. Вони знають усі секрети Природи, і ними найменше треба нехтувати в Геометрії»*.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Яку пряму називають перпендикулярною до площини?
2. Сформулюйте ознаку перпендикулярності прямої і площини.
3. Наведіть кілька властивостей відношення перпендикулярності прямих і площин.
4. Яке слово пропущене в реченні?
   а) Якщо один катет прямокутного трикутника перпендикулярний до площини, то другий катет ... їй.
   б) Якщо одна діагональ ромба перпендикулярна до площини, то друга ... їй.

Виконаємо разом

1. Три прямокутні трикутники мають спільний катет і спільну вершину прямого кута. Доведіть, що інші їхні катети лежать в одній площині.

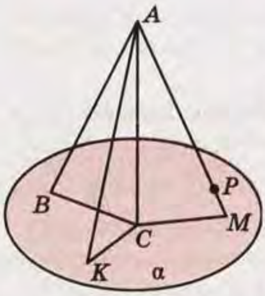


Мал. 197

Розв'язання. Нехай усі три трикутники зі спільним катетом AC і спільною вершиною прямого кута C лежать в одній площині (мал. 197). Тоді їхні другі катети CB, CK і CM лежать на одній прямій, а отже, в одній площині, яка проходить через цю пряму.

Якщо, наприклад, трикутники ACB і ACK не лежать в одній площині, то три точки C, B і K визначають деяку площину α,

14-Matematika. 10kl.



Мал. 198

перпендикулярну до AC (мал. 198). Пряма AM перетинає α в деякій точці P. Оскільки $AC \perp \alpha$ і $CP \in \alpha$, то $\angle ACP = 90°$. За умовою і $\angle ACM = 90°$. Отже, точка M збігається з точкою P, тому і катет CM лежить у площині α.

2. Як через дану на площині точку провести пряму, перпендикулярну до цієї площини?

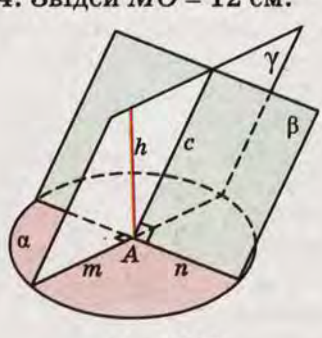
Розв'язання. Нехай точка A лежить у площині α. Пряму, перпендикулярну до площини α, через точку A можна провести так. Проводимо в площині α через точку A дві перпендикулярні прямі m і n (мал. 199). Через пряму n проводимо довільну площину β, а в ній через A – пряму c, перпендикулярну до n. Через прямі c і m проводимо площину γ, а в ній через точку A – пряму h, перпендикулярну до m.

Пряма h – та, яку треба було побудувати. Адже за побудовою $h \perp m$. Крім того, оскільки $n \perp c$ і $n \perp m$, то $n \perp \gamma$ і $n \perp h$. Отже, пряма h перпендикулярна до двох пересічних прямих площини α, тому $h \perp \alpha$.

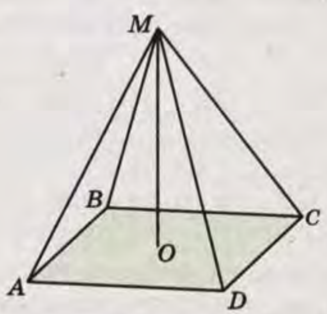
3. O – центр прямокутника $ABCD$. Точка M однаково віддалена від усіх вершин прямокутника (мал. 200). Доведіть, що пряма MO перпендикулярна до площини прямокутника. Знайдіть довжину відрізка MO, якщо сторони прямокутника мають довжини 8 см і 6 см, а $MA = 13$ см.

Розв'язання. Трикутники AMC і DMB – рівнобедрені, отже, $MO \perp AC$ і $MO \perp DB$. За ознакою перпендикулярності прямої і площини $MO \perp (ABC)$.

Якщо в даному прямокутнику $AB = 6$ см, а $BC = 8$ см, то за теоремою Піфагора $AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, або $AC = 10$ см. Оскільки $MO \perp AC$, то за теоремою Піфагора $MO^2 = MA^2 - AO^2 = 169 - 25 =$ $= 144$. Звідси $MO = 12$ см.



Мал. 199



Мал. 200

Виконайте усно

1002. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. Назвіть прямі, перпендикулярні до площини грані ABB_1A_1.

1003. Пряма a перпендикулярна до двох прямих площини α. Чи випливає з цього, що $a \perp \alpha$?

1004. Скільки: а) площин, перпендикулярних до даної прямої, можна провести через дану точку; б) прямих, перпендикулярних до даної площини, можна провести через дану точку?

1005. У якій площині обертається шліфувальний диск, якщо його вісь розташована: а) горизонтально; б) вертикально?

1006. Пряма a перпендикулярна до площини α. Чи існують у площині α прямі, не перпендикулярні до прямої a?

1007. Пряма a не перпендикулярна до площини α, але перпендикулярна до прямих l і c цієї площини. Якими є ці прямі?

А

1008. Через вершину прямого кута C трикутника ABC з катетами 6 см і 8 см до його площини проведено перпендикуляр MC. $MC = 12$ см, CL – медіана трикутника. Знайдіть ML.

1009. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. Доведіть, що AB_1C_1D – прямокутник.

1010. Трикутник ABC рівносторонній, а відрізок AM перпендикулярний до його площини. Знайдіть периметр і площу трикутника MBC, якщо: а) $AB = 3$ см, $AM = 4$ см; б) $AB = AM = c$.

1011. Площина α перпендикулярна до катета AC прямокутного трикутника ABC і ділить його у відношенні $AA_1 : A_1C = m : n$. У якому відношенні площина α ділить гіпотенузу AB?

1012. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через середину його ребра перпендикулярно до цього ребра. Знайдіть площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

1013. Відстані від точки M до всіх вершин квадрата однакові; точка O, відмінна від M, – центр квадрата. Доведіть, що пряма MO перпендикулярна до площини квадрата.

1014. Точка M рівновіддалена від вершин квадрата $ABCD$. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до площини квадрата, якщо $AM = 10$ см, $AB = 6\sqrt{2}$ см.

1015. O – центр кола, описаного навколо прямокутника $ABCD$, MO – перпендикуляр до площини прямокутника. Знайдіть відстані від точки M до вершин прямокутника, якщо $OM = a\sqrt{3}$, а довжина діагоналі AC дорівнює $2a$.

1016. Сторони прямокутника пропорційні числам 2 і 3, а його периметр 40 см. Точка P рівновіддалена від вершин прямокутника, $PA = 14$ см. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки P до площини прямокутника.

Б

1017. Трикутник ABC – рівнобедрений, $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см. Пряма MB перпендикулярна до AB і BC, K – середина AC. Доведіть, що $\triangle MBK$ і $\triangle MAK$ прямокутні. Знайдіть їх площі, якщо $MB = 15$ см.

1018. Пряма MO перпендикулярна до діагоналей паралелограма $ABCD$, які перетинаються в точці O. Установіть вид $\triangle MOK$. Знайдіть MO і MK, якщо $K \in AB$, $OK = a$, $\angle OMK = \alpha$.

1019. Точка M рівновіддалена від вершин трикутника ABC, MO – перпендикуляр до площини трикутника, $O \in (ABC)$. Доведіть, що O – центр кола, описаного навколо трикутника.

1020. Точка M рівновіддалена від вершин рівностороннього трикутника ABC. $AB = a$, $AM = 2a$. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до площини трикутника.

1021. Точка S знаходиться на відстані 13 см від вершин трикутника зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки S до площини трикутника.

1022. Відрізок AM перпендикулярний до площини рівностороннього трикутника ABC. Знайдіть периметр трикутника MBC, якщо: а) $AB = 3$ см і $AM = 4$ см; б) $AB = AM = c$.

1023. Прямі AA_1 і BB_1 перпендикулярні до площини α, перетинають її в точках A_1 і B_1, а пряма AB – у точці C. Знайдіть відстань B_1C, якщо $AA_1 = 12$ см, $A_1B_1 = BB_1 = 3$ см.

1024. З кінців відрізка AB і точки M цього відрізка до площини α, яка не перетинає відрізок AB, проведено перпендикуляри AA_1, BB_1 і MM_1. Знайдіть MM_1, якщо $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 10$ см і: а) M – середина AB; б) $AM : MB = 1 : 3$.

1025. З вершин паралелограма $ABCD$ на площину α опущено перпендикуляри AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Знайдіть DD_1, якщо:
а) $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 20$ см, $CC_1 = 13$ см; б) $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 25$ см, $CC_1 = 13$ см.

1026. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Доведіть, що пряма AC перпендикулярна до площини, яка проходить через точки B, B_1, D_1.

1027. Побудуйте переріз правильного тетраедра $ABCD$ площиною, яка перпендикулярна до ребра AB і проходить через його середину. Знайдіть площу перерізу, якщо $AB = 12$ см.

1028. BK – пряма, проведена перпендикулярно до площини квадрата $ABCD$. Знайдіть відстань від точки K до вершин квадрата, якщо $AB = a$, $BK = b$.

Вправи для повторення

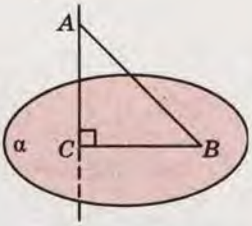
1029. Периметр паралелограма дорівнює 52 см, а його площа 60 см^2. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його гострий кут 30°.

1030. Точка C ділить відрізок AB у відношенні $AC : CB = 1 : 3$. Паралельні прямі, які проходять через точки A, C, B, перетинають площину в точках A_1, C_1 і B_1. Знайдіть відношення $A_1B_1 : A_1C_1$.

1031. $SABC$ – тетраедр. Точки K і M – середини ребер AS і CS. Побудуйте переріз тетраедра площиною (BKM).

§ 29. Перпендикуляр і похила до площини

Перпендикуляром, опущеним з даної точки на дану площину, *називають відрізок прямої, перпендикулярної до площини, що міститься між даною точкою і площиною.*



Мал. 201

Наприклад, якщо пряма AC перпендикулярна до площини α і перетинає її в точці C, то відрізок AC – перпендикуляр, опущений з точки A на площину α. Точка C – *основа перпендикуляра* (мал. 201).

Якщо AC – перпендикуляр до площини α, а B – відмінна від C точка цієї площини, то відрізок AB називають *похилою, проведеною з точки A до площини* α. Точка B – *основа похилої*, а відрізок CB – *проекція похилої AB* на площину α.

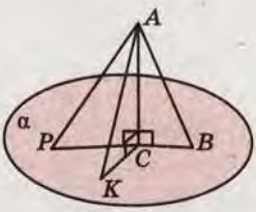
Зауважимо, що тут ідеться про *прямокутну проекцію* похилої[1]. Такі проекції дістають за умови, що всі проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій. Далі, говорячи про проекції, матимемо на увазі тільки прямокутні проекції.

Теорема 16. ***Якщо з однієї точки, взятої поза площиною, проведено до цієї площини перпендикуляр і похилі, то:***

1) проекції рівних похилих рівні;

2) з двох похилих більша та, проекція якої більша;

3) перпендикуляр коротший за будь-яку похилу.



Мал. 202

Доведення. Нехай AC – перпендикуляр, а AB, AK, AP – похилі до площини α (мал. 202).

1) Якщо $CB = CK$, то $\triangle ACB = \triangle ACK$ (за двома катетами). Тому $AB = AK$.

2) З прямокутних трикутників ACB і ACP маємо:

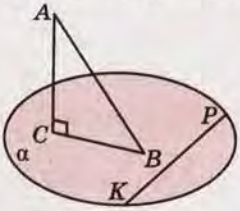
$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}, \quad AP = \sqrt{AC^2 + CP^2}.$$

Отже, якщо $CB < CP$, то $AB < AP$.

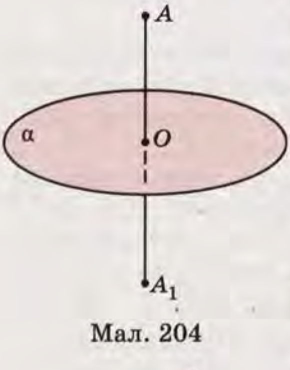
[1] Детальніше про прямокутні проекції див. на с. 223.

3) Перпендикуляр AC – катет, а будь-яка похила AB – гіпотенуза трикутника ABC. Тому $AC < AB$. Теорему доведено.

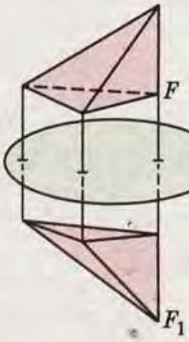
Приклади матеріальних моделей перпендикулярів до площини: стовп, телевізійна вежа. Перпендикулярно до площини зазвичай забивають палі та бурять свердловини. Будуючи багатоповерховий будинок, спочатку зводять каркас, в якому кожна вертикальна колона перпендикулярна до площини горизонту і до кожної горизонтальної балки.



Мал. 203



Мал. 204



Мал. 205

Теорема 17 (про три перпендикуляри). ***Пряма, проведена на площині перпендикулярно до проекції похилої, перпендикулярна до цієї похилої. І навпаки, якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.***

Доведення. Нехай AC і AB – перпендикуляр і похила до площини α (мал. 203). Якщо пряма KP лежить у площині α, то $KP \perp AC$. Якщо, крім того, пряма KP перпендикулярна до BC або AB, то вона перпендикулярна до площини трикутника ABC. Тобто якщо $KP \perp BC$, то $KP \perp AB$, а якщо $KP \perp AB$, то $KP \perp BC$. Що й вимагалося довести.

З наведених міркувань випливає, що коли пряма KP не перпендикулярна до BC, то вона не перпендикулярна і до AB. Тому теорему про три перпендикуляри можна сформулювати й одним реченням.

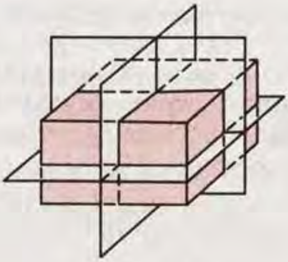
Пряма, яка лежить у площині, перпендикулярна до похилої тоді і тільки тоді, коли ця пряма перпендикулярна до проекції похилої.

Теоремою про три перпендикуляри її називають, маючи на увазі перпендикуляри $AC \perp \alpha$, $BC \perp KP$, $AB \perp KP$.

На основі перпендикулярності прямої і площини можна ввести поняття симетрії в просторі.

Точки A і A_1 називають *симетричними відносно площини*, якщо вона перпендикулярна до відрізка AA_1 і проходить через його середину (мал. 204). Фігури F і F_1 називають симетричними відносно площини, якщо кожна точка фігури F симетрична відносно площини деякій точці фігури F_1, і навпаки (мал. 205).

Існують фігури, які відносно деяких площин симетричні самі собі. Наприклад, кожний прямокутний паралелепіпед має три площини симетрії (мал. 206), а куб – 9. Зобразіть на малюнку кілька площин симетрії куба, які проходять через: а) середини його паралельних ребер; б) його протилежні ребра.



Мал. 206

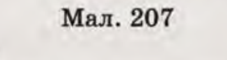
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке перпендикуляр до площини?
2. Що таке похила, проведена з даної точки до площини? А проекція похилої на площину?
3. Укажіть найважливіші властивості перпендикуляра, похилої та її проекції на площину.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про три перпендикуляри.

Виконаємо разом

1. MA – перпендикуляр до площини ромба $ABCD$, $\angle BAD = 60°$. Побудуйте висоту MH трикутника MCD.

● Розв'язання. Треба побудувати перпендикуляр MH до прямої CD (мал. 207). За теоремою про три перпендикуляри $AH \perp CD$. Оскільки $\angle ADH = 60°$, то точка H повинна лежати на прямій CD поза відрізком CD так, що $HD = 0{,}5\, CD$. Побудувавши точку H, проводимо відрізок MH. Він і є висотою трикутника MCD, яку треба було побудувати.



Мал. 207

2. Відрізки $OA = 15$ см, $OB = 20$ см, $OC = 35$ см попарно перпендикулярні (мал. 208). Знайдіть площу трикутника ABC.

● Розв'язання. Основу AB $\triangle ABC$ знайдемо за теоремою Піфагора з трикутника AOB:

$AB^2 = 15^2 + 20^2 = 625$,

$AB = 25$ см.

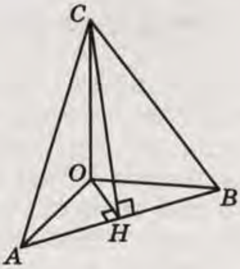
Проведемо висоту CH $\triangle ABC$ і точку H з O сполучимо відрізком. За теоремою про три перпендикуляри $OH \perp AB$.

Щоб знайти довжину OH, виразимо подвійну площу $\triangle AOB$ двома способами:

$OH \cdot AB = OA \cdot OB$,

$OH \cdot 25 = 15 \cdot 20$,

звідси $OH = 12$ (см).



Мал. 208

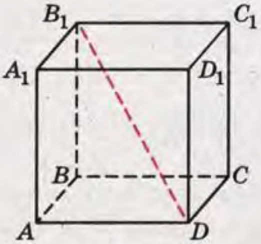
З прямокутного $\triangle COH$ за теоремою Піфагора
$CH^2 = 35^2 + 12^2 = 1369$, $CH = 37$ см.
Отже, шукана площа $\triangle ABC$: $S = 0,5 \cdot 25 \cdot 37 = 462,5$ (см^2).

Виконайте усно

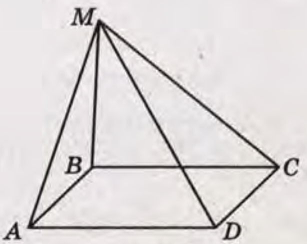
1032. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 209). Укажіть проекції відрізка B_1D на площини $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1, BCC_1B_1.

1033. Доведіть, що в кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 209) $DC_1 \perp BC$, $A_1C \perp BD$, $AC \perp BD_1$.

1034. BM – перпендикуляр до площини чотирикутника $ABCD$ (мал. 210). Які з пар прямих MA і AD, MC і CD, MD і AC перпендикулярні, якщо: а) $ABCD$ – прямокутник, відмінний від квадрата; б) $ABCD$ – ромб, відмінний від квадрата; в) $ABCD$ – квадрат?



Мал. 209



Мал. 210

1035. Через точку перетину діагоналей трапеції проходить перпендикуляр до площини трапеції. Точку на цьому перпендикулярі сполучено з усіма вершинами трапеції. Чи можуть серед проведених похилих бути рівні? Чи можуть усі похилі бути рівними?

А

1036. З точки A до площини α проведено перпендикуляр $AC = 40$ см і похилу $AB = 50$ см. Знайдіть довжину проекції похилої.

1037. З точки A до площини α проведено перпендикуляр AC і похилу $AB = l$, причому $\angle BAC = 30°$. Знайдіть довжину перпендикуляра і проекції похилої.

1038. З точки S до площини проведено перпендикуляр і похилу, кут між якими α. Знайдіть: а) довжину перпендикуляра і проекції похилої, якщо довжина похилої l; б) довжину похилої і її проекції, якщо перпендикуляр дорівнює h; в) довжину похилої і перпендикуляра, якщо довжина проекції дорівнює a.

1039. З точки M поза площиною проведено до цієї площини перпендикуляр і похилу. Знаючи, що похила довша за перпендикуляр на 25 см, а її проекція на площину дорівнює 65 см, знайдіть довжину похилої.

1040. З точки M до площини проведено перпендикуляр MO і похилі MA та MB. $\angle AMO = 60°$, $\angle BMO = 45°$. Знайдіть довжини похилих, якщо проекція меншої похилої дорівнює a.

1041. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AC_1 \perp BD$. Доведіть, що грань $ABCD$ – квадрат.

1042. Учень каже: «Пряма, перпендикулярна до похилої, перпендикулярна і до проекції цієї похилої». Наведіть контрприклад.

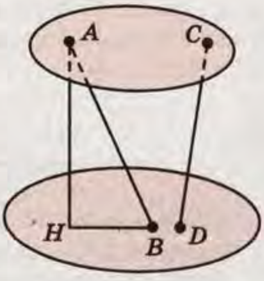
1043. MA – перпендикуляр до площини рівностороннього трикутника ABC. K – середина сторони BC. Доведіть, що $MK \perp BC$.

1044. Трикутник ABC – рівнобедрений, $AB = BC$, BM – перпендикуляр до площини трикутника. Побудуйте $MK \perp AC$, $K \in AC$.

1045. $ABCD$ – прямокутник, O – точка перетину його діагоналей, MO – перпендикуляр до площини прямокутника. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки M до сторін прямокутника.

1046. Через точку O перетину медіан рівностороннього трикутника проведено перпендикуляр MO до його площини. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки M до сторін трикутника.

1047. Два відрізки, довжини яких 13 дм і 37 дм, упираються кінцями у дві паралельні площини (мал. 211). Проекція меншого з них на площину дорівнює 5 дм. Знайдіть довжину проекції другого відрізка.



Мал. 211

Б

1048. Основою тетраедра $SABC$ є прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$). Ребро AS перпендикулярне до площини основи. Доведіть, що всі бічні грані піраміди – прямокутні трикутники.

1049. Доведіть, що в правильному тетраедрі протилежні ребра перпендикулярні.

1050. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точки K, L, M – середини ребер AA_1, CC_1, AD відповідно, O – точка перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що $OM \perp AB$ і $OD \perp KL$.

1051. K – середина сторони ромба, $MK = 12$ см – перпендикуляр, проведений до площини ромба. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки M до діагоналей ромба. Знайдіть довжини цих перпендикулярів, якщо сторона ромба 20 см, а кут 60°.

1052. O – середина гіпотенузи прямокутного трикутника з катетами 10 см і 18 см. OS – перпендикуляр до площини трикутника, $OS = 12$ см. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки S до катетів трикутника, і знайдіть їх довжину.

1053. Сторони трикутника ABC дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см, O – центр вписаного в трикутник кола, MO – перпендикуляр до площини трикутника. Знайдіть довжини перпендикулярів, проведених з M до сторін трикутника, якщо $MO = 3$ см.

1054. У трикутнику ABC $AB = BC = 10$ см, $\angle ABC = 120°$. MB – перпендикуляр, проведений до площини трикутника. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до AC, якщо $MC = 15$ см.

1055. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = 12$ см, $BC = 16$ см. CM – перпендикуляр до площини трикутника. Знайдіть CM, якщо $MK \perp AB$, $K \in AB$ і $MK = 10$ см.

1056. Через вершину C прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) проведено площину α, $\alpha \parallel AB$. Проекція меншого катета на площину дорівнює 8 см. Знайдіть проекції інших сторін трикутника на площину α, якщо $AB = 26$ см, а різниця катетів 14 см.

1057. З вершин B і C ромба $ABCD$ до площини α, яка проходить через сторону AD, проведено перпендикуляри BB_1 і CC_1. Знайдіть проекції діагоналей і сторін ромба на площину α, якщо $AC = 16$ см, $BD = 12$ см, $BB_1 = 8$ см.

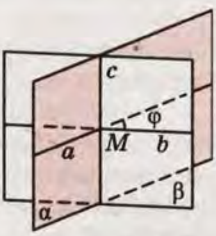
Вправи для повторення

1058. Прямі a і b – мимобіжні. Точки A і B лежать на прямій a, а точки M і N – на прямій b. Як розташовані прямі AN і BM?

1059. Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у різних площинах. Доведіть, що чотирикутник CDD_1C_1 – теж паралелограм.

1060. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки A, B_1 і D_1.

§ 30. Перпендикулярні площини



Мал. 212

Спочатку введемо поняття кута між площинами. Нехай α і β – площини, які перетинаються по прямій c (мал. 212). Проведемо в цих площинах через точку M прямі a і b, перпендикулярні до c. Нехай кут між ними $\angle(ab) = \varphi$. Якщо в площинах α і β провести які-небудь інші прямі, перпендикулярні до c, то кут між ними також дорівнюватиме φ. (Чому?) Отже, можна прийняти таке означення.

***Кутом між площинами**, які перетинаються, називається кут між прямими, проведеними в цих площинах перпендикулярно до лінії їх перетину.*

Якщо площини паралельні, то вважають, що кут між ними дорівнює 0°. Кут між площинами α і β позначають: $\angle(\alpha\beta)$, $0° \leqslant \angle(\alpha\beta) \leqslant 90°$.

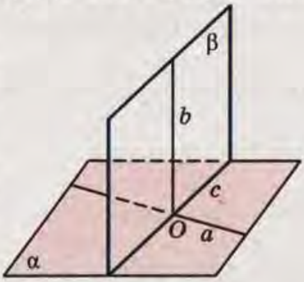
*Дві площини називаються **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°.*

Якщо площини α і β перпендикулярні, пишуть: $\alpha \perp \beta$.

Теорема 18 (ознака перпендикулярності площин). ***Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то такі площини перпендикулярні.***

Доведення. Нехай площина β проходить через пряму b, перпендикулярну до площини α (мал. 213). Доведемо, що $\beta \perp \alpha$.

Пряма b перетинає площину α в деякій точці O. Ця точка спільна для площин α і β. Тому дані площини перетинаються по прямій c, яка проходить через точку O. Проведемо у площині α через O пряму a, перпендикулярну до c. Оскільки $b \perp \alpha$, а прямі a і c лежать у площині α, то $b \perp a$ і $b \perp c$. Крім того, $a \perp c$. Отже, $\angle(\alpha\beta) = \angle(ab) = 90°$, тобто $\beta \perp \alpha$. Що й треба було довести.



Мал. 213

Який існує зв'язок між перпендикулярністю і паралельністю площин? *Площина, перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, перпендикулярна і до другої площини.* Тобто якщо $\alpha \parallel \beta$ і $\gamma \perp \alpha$, то $\gamma \perp \beta$.

Цю властивість можна й узагальнити. *Січна площина нахилена до паралельних площин під рівними кутами.* Спробуйте довести ці властивості самостійно.

Властивості паралельних і перпендикулярних площин використовують у багатьох сферах науки і виробництва, зокрема у будівництві. Стелю і підлогу, протилежні стіни роблять найчастіше паралельними, стіну і підлогу, стіну і стелю – перпендикулярними. І протилежні грані цеглини, бруска, дошки найчастіше роблять паралельними, а суміжні – перпендикулярними. Окремі поверхи будинку роблять не тільки паралельними, а й горизонтальними, а різні колони – вертикальними. Чому?

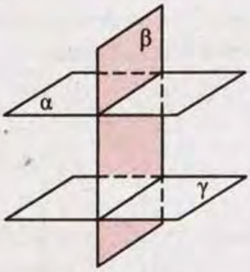
Під однаковими кутами до горизонтальної площини бувають нахилені вугільні пласти, стіни каналів, відкоси насипів, скати дахів тощо.

Теорему 18 можна ілюструвати таким наочним прикладом. Якщо пряма, яка проходить через центри петель дверей, перпендикулярна до площини підлоги, то як би не повертали двері, їх площина буде перпендикулярною до площини підлоги.

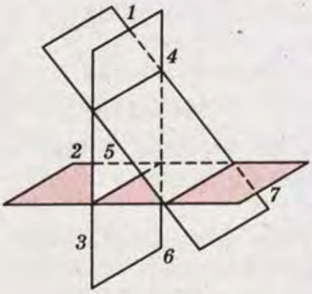
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке кут між двома площинами?
2. У яких межах може змінюватися кут між площинами?
3. Чому дорівнює кут між паралельними площинами?
4. Які площини називають перпендикулярними?
5. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності площин.

Виконаємо разом



Мал. 214



Мал. 215

1. Кут між двома площинами – це фігура?

• Розв'язання. Ні. Кут між площинами – не фігура, не множина точок, а величина, міра нахилу однієї площини до другої.

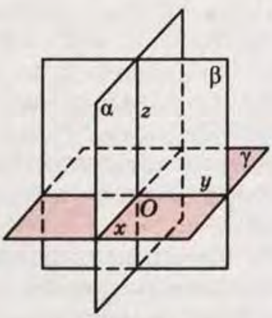
2. На скільки частин простір може поділятися трьома площинами, принаймні дві з яких перпендикулярні?

• Розв'язання. Такі площини можуть поділити простір на 6, 7 або 8 частин (мал. 214–216).

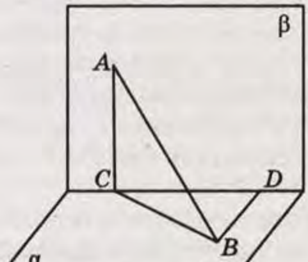
3. Кінці відрізка AB лежать у перпендикулярних площинах (мал. 217). AC і BD – перпендикуляри, проведені до лінії перетину цих площин, $AC = 5\sqrt{11}$ см, $BD = 24$ см, $CD = 7$ см. Знайдіть довжину відрізка AB.

• Розв'язання. З $\triangle CDB$ ($\angle D = 90°$) за теоремою Піфагора знайдемо BC:

$$BC^2 = BD^2 + CD^2,\ BC = \sqrt{576+49} = \sqrt{625} = 25.$$



Мал. 216



Мал. 217

Оскільки площини α та β перпендикулярні і $AC \perp CD$, то $\angle ACB = 90°$. Тоді за теоремою Піфагора з $\triangle ACB$ знайдемо AB:

$AB^2 = AC^2 + CB^2$, $AB = \sqrt{275+625} = \sqrt{900} = 30$.

Отже, $AB = 30$ см.

Виконайте усно

1061. Знайдіть міру кута між двома: а) суміжними гранями куба; б) протилежними гранями куба.

1062. Чи можна через пряму a, перпендикулярну до площини α, провести площину, не перпендикулярну до α?

1063. Чи правильно, що площина, перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, перпендикулярна і до другої площини?

1064. Чи правильно, що дві площини, перпендикулярні до третьої, паралельні?

1065. Чи можуть бути не перпендикулярними дві площини, які проходять через дві перпендикулярні прямі?

1066. Площини α і β не перпендикулярні. Чи існує площина, перпендикулярна до кожної з них?

1067. Дано площину α і точку A. Скільки існує площин, перпендикулярних до α, які проходять через точку A?

1068. На скільки частин ділять простір дві перпендикулярні площини? А три попарно перпендикулярні площини?

1069. Чи кожна трійка попарно перпендикулярних площин має спільну точку? Чи мають вони спільну пряму?

1070. Чи існує чотири попарно перпендикулярні площини?

А

1071. Скільки площин, які перетинають дану площину під кутом 50°, можна провести через дану точку?

1072. Пряма a перетинає площину α під кутом 45°. Чи можна через пряму a провести площину, яка перетинається з α під кутом 30°?

1073. Чи можна через дві перпендикулярні прямі провести площини, які перетинаються під кутом 30°?

1074. Скільки пар перпендикулярних площин можна провести через дві паралельні прямі?

1075. Точка M рівновіддалена від вершин квадрата $ABCD$. Доведіть, що площини (MAC) і (MBD) перпендикулярні.

1076. O – точка перетину діагоналей ромба, OM – перпендикуляр до площини ромба. Доведіть, що площини, які проходять через точку M і діагоналі ромба, – перпендикулярні.

1077. Трикутник ABC і прямокутник $ABMN$ лежать у взаємно перпендикулярних площинах. Доведіть, що кут CAN прямий.

1078. Доведіть, що коли дві площини, які перетинаються, перпендикулярні до третьої, то лінія їх перетину перпендикулярна до цієї площини.

1079. Точка P знаходиться на відстані 12 см і 16 см від двох перпендикулярних площин, які перетинаються по прямій m. Знайдіть відстань від точки P до прямої m.

1080. Відстані від точки M до кожної з двох перпендикулярних площин пропорційні числам 2 і 3. Знайдіть ці відстані, якщо точка M віддалена від лінії перетину площин на $2\sqrt{13}$ см.

Б

1081. Кінці відрізка AB лежать у перпендикулярних площинах. AC і BD – перпендикуляри, проведені до лінії перетину цих площин. Знайдіть CD, якщо: а) $AC = 6$ см, $BD = 8$ см, $AB = 12$ см; б) $AD = 4$ см, $BC = 7$ см, $AB = 8$ см; в) $AC = BD = a$, $AB = 2a$.

1082. Кінці відрізка AB лежать у перпендикулярних площинах. AC і BD – перпендикуляри, проведені до лінії перетину цих площин, $AC = 6$ м, $BD = 3\sqrt{3}$ м. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $\angle DBC = 30°$.

1083. Дві перпендикулярні площини перетинаються по прямій a. У одній з площин паралельно a проведено відрізок AB, який віддалений від a на 6 см. Точка K другої площини віддалена від a на 9,1 см. Знайдіть відстань від точки K до AB.

1084. Через паралельні прямі a і b проведено дві перпендикулярні площини, які перетинаються по прямій c. Відстані від прямих a і b до прямої c дорівнюють відповідно 8 см і 15 см. Знайдіть відстань між прямими a і b.

1085. Розв'яжіть попередню задачу, якщо кут між площинами дорівнює 60°.

1086. Квадрат $ABCD$ перегнули по діагоналі AC так, що площини (ABC) і (ADC) стали перпендикулярними. Знайдіть відстань між точками B і D, якщо $AB = a$.

1087. Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у площинах, кут між якими 60°. Знайдіть відстань між їх центрами, якщо $AB = 2m$.

1088. Площини квадратів $ABCD$ і ABC_1D_1 перпендикулярні, $AB = a$. Знайдіть: а) відстань CC_1; б) відстань C_1D; в) кут між діагоналями AC і AC_1.

1089. Площини рівносторонніх трикутників ABC і ABD перпендикулярні, $AB = a$. Знайдіть відстань CD і кут $\varphi = \angle CAD$.

1090. Знайдіть довжини сторін правильних трикутників ABC і ABD, якщо їх площини перпендикулярні і $CD = a$.

1091. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. Точки M, N і K – середини ребер AB, B_1C_1 і BC відповідно. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки M, N і K. Доведіть, що площина основи і площина перерізу перпендикулярні. Обчисліть периметр і площу перерізу, якщо $BB_1 = 16$ м, $B_1D = 20$ м.

Вправи для повторення

1092. У прямокутному паралелепіпеді ребра $AA_1 = 5$, $AB = 4$, $BC = 3$. Знайдіть довжину похилої A_1C і кут її нахилу до площини (ABC).

1093. Побудуйте зображення квадрата, вписаного в рівнобедрений прямокутний трикутник, якщо вони мають спільний прямий кут.

1094. Точка K – середина ребра AS тетраедра $SABC$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки B, C і K.

§ 31. Ортогональне проектування

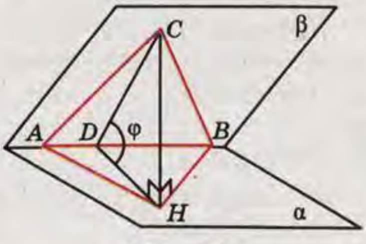
Про паралельне проектування йшлося в § 23. Якщо проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій, то таке проектування називають *прямокутним*, або *ортогональним*.

Ортогональне проектування – окремий вид паралельного проектування, тому воно має всі властивості паралельного проектування. У кресленні воно – основне. І ми, говорячи далі про проекції, матимемо на увазі тільки ортогональні проекції. Тобто *проекцією точки* називатимемо основу перпендикуляра, опущеного з даної точки на площину. Якщо точка лежить на площині проекцій, то вона збігається зі своєю проекцією.

Проекцією фігури на площину називають множину проекцій усіх точок даної фігури на дану площину. Зокрема, проекцією n-кутника є n-кутник (якщо площини проекцій і многокутника не перпендикулярні).

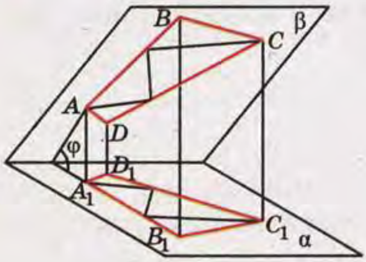
Теорема 19. ***Площа проекції многокутника дорівнює площі проектованого многокутника, помноженій на косинус кута між їх площинами.***

Тобто якщо S і $S_{пр}$ – площі многокутника і його проекції, а кут між їх площинами дорівнює φ, то $S_{пр} = S\cos\varphi$.



Мал. 218

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли даний многокутник – трикутник ABC, сторона AB якого лежить у площині проекцій α (мал. 218). Якщо CH – перпендикуляр до площини α і $CD \perp AB$, то $HD \perp AB$. (Чому?)



Мал. 219

Мал. 220

Отже, $S_{ABH} = \frac{1}{2} AB \cdot HD = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cos\varphi = S_{ABC} \cos\varphi$.

Якщо за площину проекцій взяти будь-яку іншу площину, паралельну α, то результат буде такий самий. Оскільки проекції тієї самої фігури на паралельні площини рівні, а рівні фігури мають рівні площі.

Тепер розглянемо загальний випадок. Нехай дано довільний многокутник (на мал. 219 – це чотирикутник *ABCD*). Його можна розбити на скінченне число трикутників таких, що одна із сторін кожного з них паралельна площині проекцій. Якщо площі таких трикутників S_1, S_2, ..., S_m, то площі їх проекцій $S_1\cos\varphi$, $S_2\cos\varphi$, ..., $S_m\cos\varphi$, де φ – кут між площиною даного многокутника і площиною проекцій. Отже,

$$S_{\text{пр}} = S_1\cos\varphi + S_2\cos\varphi + \ldots + S_m\cos\varphi =$$
$$= (S_1 + S_2 + \ldots + S_m)\cos\varphi = S\cos\varphi,$$

тобто

$$S_{\text{пр}} = S\cos\varphi.$$

Наслідок. **Якщо S і Q – площі многокутників площини α, а $S_{\text{пр}}$ і $Q_{\text{пр}}$ – площі їх проекцій на площину α, то $S_{\text{пр}} : Q_{\text{пр}} = S : Q$.**

Поняття проектування, паралельне проектування і ортогональне проектування пов'язані між собою, як показано на діаграмі (мал. 220). Тобто ортогональне проектування – окремий вид паралельного проектування, а паралельне проектування – вид проектування. Інший вид останнього – центральне проектування (перспектива).

Зображати фігури при ортогональному проектуванні можна різними способами, докладно їх розглядають у кресленні і нарисній геометрії.

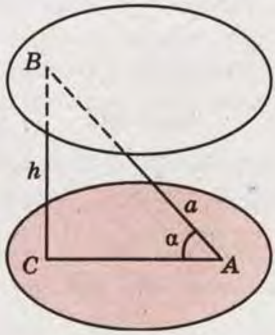
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Чим відрізняється ортогональне проектування від паралельного проектування?
2. Що називають проекцією фігури на площину?

3. Перерахуйте найважливіші властивості паралельного проектування.
4. Сформулюйте та доведіть теорему про площу многокутника і його ортогональної проекції.
5. Сформулюйте наслідок про відношення площ многокутників і їх проекцій.

Виконаємо разом

1. Кінці відрізка AB завдовжки a лежать на двох паралельних площинах, відстань між якими дорівнює h. Знайдіть тангенс кута між похилою і однією з площин.



Мал. 221

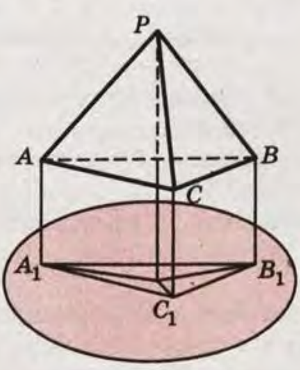
Розв'язання. Якщо AC – проекція похилої AB на площину α, то трикутник ABC прямокутний (мал. 221). За теоремою Піфагора

$AC = \sqrt{a^2 - h^2}$, тому $\operatorname{tg} A = BC : AC = \frac{h}{\sqrt{a^2 - h^2}}$.

2. Якою може бути проекція правильного тетраедра?

Розв'язання. Проекція правильного тетраедра на площину може бути трикутником (мал. 222, *а*), зокрема правильним трикутником, якщо площина проекцій паралельна якій-небудь грані тетраедра. Вона може бути і чотирикутником (мал. 222, *б*), зокрема паралелограмом, якщо площина проекцій паралельна двом протилежним ребрам тетраедра.

3. Ортогональною проекцією $\triangle ABC$ є прямокутний трикутник $A_1B_1C_1$ з гіпотенузою 15 см і різницею катетів 3 см. Знай-

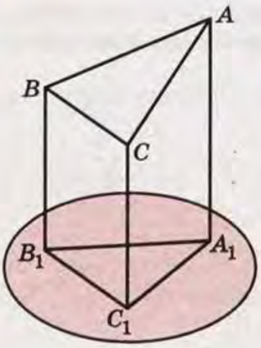


а)

б)

Мал. 222

15-Matematika 10kl



Мал. 223

діть площу даного трикутника, якщо кут між площинами дорівнює 30°.

Розв'язання. На малюнку 223 $\triangle A_1B_1C_1$ ($\angle C_1 = 90°$) – ортогональна проекція $\triangle ABC$. Нехай $A_1C_1 = x$, тоді $B_1C_1 = x + 3$. За теоремою Піфагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$. Тоді

$$x^2 + (x + 3)^2 = 225,$$
$$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 225,$$
$$2x^2 + 6x - 216 = 0,$$
$$x^2 + 3x - 108 = 0;\ x_1 = 9,\ x_2 = -12.$$

Отже, $A_1C_1 = 9$ см, тоді $B_1C_1 = 12$ см. Площа $\triangle A_1B_1C_1$

$S_1 = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1C_1$, тобто $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$ (см^2). Тоді площа $\triangle ABC$

$$S = \frac{S_1}{\cos 30°},\quad S = \frac{54 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{54 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{3} = 36\sqrt{3}\ (\text{см}^2).$$

Виконайте усно

1095. Чи може площа паралельної проекції фігури бути більшою за площу самої фігури?

1096. Чи може площа ортогональної проекції фігури бути більшою за площу самої фігури? А дорівнювати?

1097. Чи може проекцією кута бути промінь? А пряма?

1098. Проекцією яких прямих може бути пара паралельних прямих?

1099. Чи може проекцією довільного трикутника бути: а) відрізок; б) рівносторонній трикутник; в) прямокутний трикутник; г) тупокутний трикутник?

1100. Чи є катет прямокутного трикутника проекцією його гіпотенузи?

1101. Чи можна одну сторону рівностороннього трикутника вважати ортогональною проекцією другої його сторони?

1102. Чи може пара паралельних прямих бути проекцією пари мимобіжних прямих?

1103. Чи може бути квадрат проекцією: а) прямокутника; б) ромба; в) паралелограма; г) трапеції; ґ) довільного чотирикутника?

1104. Чи може трапеція бути проекцією: а) квадрата; б) ромба; в) прямокутника; г) паралелограма; ґ) іншої трапеції?

1105. Сторона квадрата дорівнює 6 см, а площа його ортогональної проекції 18 см^2. Знайдіть кут між площинами квадрата і його проекції.

1106. Площа трикутника дорівнює S. Знайдіть площу ортогональної проекції цього трикутника на площину, яка утворює з площиною трикутника кут $60°$.

А

1107. Знайдіть довжину проекції відрізка AB на площину α, якщо $AB = 9$ см, а пряма AB нахилена до площини α під кутом $30°$.

1108. Кінці відрізка довжиною 25 см віддалені від площини α на 13 см і 20 см. Знайдіть довжину його проекції на площину α.

1109. Відрізок, довжина якого 10 см, перетинає площину. Знайдіть довжину проекції даного відрізка на цю площину, якщо його кінці віддалені від площини на 3 см і 5 см.

1110. Відрізок AB паралельний площині α і дорівнює m. Точка A_1 – проекція точки A. Знайдіть довжину відрізка A_1B, якщо він утворює з площиною α кут $60°$.

1111. Дві похилі, проведені з однієї точки, мають довжини 15 см і 20 см. Проекція однієї з них 16 см. Знайдіть проекцію другої похилої.

1112. З точки M до площини проведено похилі MA і MB, довжини яких дорівнюють 10 см і $8\sqrt{2}$ см. Знайдіть проекції похилих, якщо їх різниця дорівнює 2 см.

1113. Відрізки двох прямих лежать між паралельними площинами і відносяться як 20 : 13. Проекція одного відрізка на одну з площин дорівнює 16 см, а іншого відрізка на іншу площину – 5 см. Знайдіть довжини цих відрізків.

1114. Відрізок завдовжки 26 см опирається кінцями на дві взаємно перпендикулярні площини. Довжини перпендикулярів, опущених з кінців відрізка до лінії перетину площин, дорівнюють 10 см і 20 см. Знайдіть проекцію відрізка на кожну з площин.

1115. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу, довжини яких дорівнюють 16 см і 20 см. Обчисліть проекцію перпендикуляра на похилу.

1116. Площа трикутника дорівнює 48 см^2, а його проекції – 24 см^2. Знайдіть кут між площиною проекцій і площиною даного трикутника.

1117. Знайдіть площу проекції фігури F на площину α, яка з площиною даної фігури утворює кут $60°$, якщо фігурою F є:

а) квадрат, діагональ якого дорівнює 2 см;

б) трикутник зі сторонами 3 дм, 4 дм і 5 дм;

в) правильний трикутник зі стороною a;

г) ромб, сторона якого дорівнює c, а кут $45°$;

ґ) правильний шестикутник зі стороною a.

1118. Ортогональною проекцією прямокутника, сторони якого дорівнюють 6 см і 4 см, є чотирикутник, площа якого 12 см^2.

Обчисліть кут між площинами чотирикутників. Чи може дана проекція бути квадратом?

Б

1119. Ортогональною проекцією прямокутника є квадрат. Площа прямокутника 128 см^2, а кут між площинами 60°. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його сторона паралельна площині проекцій.

1120. Ортогональною проекцією правильного трикутника зі стороною 20 см на площину, що містить одну з його вершин і паралельна одній зі сторін, є рівнобедрений трикутник з бічною стороною $5\sqrt{13}$ см. Знайдіть кут між площинами трикутників.

1121. Ортогональною проекцією правильного трикутника є трикутник зі сторонами 13 м, 14 м, 15 м. Кут між площинами трикутників 30°. Знайдіть периметр даного трикутника.

1122. Ортогональною проекцією трапеції, площа якої $52\sqrt{2}$ см^2, є рівнобічна трапеція з основами 16 см і 10 см та бічною стороною 5 см. Знайдіть кут між площинами трапецій.

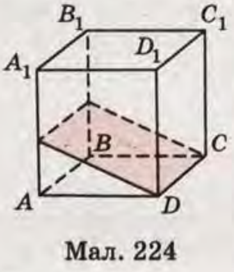
1123. Чотирикутник $AB_1C_1D_1$ – ортогональна проекція ромба $ABCD$ на площину, паралельну меншій діагоналі. Знайдіть довжини проекцій діагоналей, якщо $AB = 20$ см, $BB_1 = 10$ см, $\angle B = 120°$.

1124. Ортогональною проекцією паралелограма $ABCD$ на площину, яка проходить через вершину A паралельно BD, є чотирикутник $AB_1C_1D_1$. Обчисліть AC, якщо $BD = 3\sqrt{21}$ м, $CC_1 = 10$ м, $AD_1 = 12$ м, $D_1C_1 = 9$ м.

1125. $ABCD$ – правильний тетраедр, ребро якого дорівнює a. Побудуйте проекцію грані CDB на площину (ABC). Знайдіть площу проекції та кут між площинами (ABC) і (CDB).

1126. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 3$, $M \in CC_1$, $CM : MC_1 = 2 : 1$. Знайдіть кут між площиною BMD та її проекцією на площину: а) (ABC); б) (BB_1D).

1127. Побудуйте проекцію діагоналі куба на площину, яка проходить через дві діагоналі його суміжних граней. Знайдіть довжину проекції, якщо довжина діагоналі дорівнює d.



Мал. 224

1128. У кубі через ребро основи і середини двох бічних ребер проведено площину (мал. 224). Знайдіть кут між даною площиною і площиною основи та площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

1129. В основі тетраедра лежить правильний трикутник зі стороною l. Через ребро основи і середину протилежного ребра проведено площину, яка утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу перерізу, якщо всі бічні ребра тетраедра рівні.

1130. В основі прямого паралелепіпеда лежить квадрат зі стороною a. Через середини двох суміжних сторін основи проведена площина, яка перетинає три бічні ребра паралелепіпеда і утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу перерізу.

Мал. 225

1131. Намалюйте або опишіть фігури, проекції яких на дві взаємно перпендикулярні площини зображені на малюнку 225.

Вправи для повторення

1132. Через точку перетину прямих AB і AC проведено пряму l, яка не лежить з ними в одній площині. Доведіть, що прямі l і BC мимобіжні.

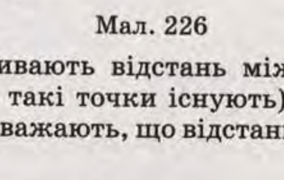
1133. AP – перпендикуляр до площини паралелограма $ABCD$, $PC \perp BD$. Доведіть, що $ABCD$ – ромб.

1134. З точок A і B, які лежать у перпендикулярних площинах, опущено перпендикуляри AC і BD на пряму CD перетину цих площин. Знайдіть довжину AB, якщо $AC = 12$, $CD = 3$, $BD = 4$.

§ 32. Відстані в просторі

Що таке відстань між точками, вам уже відомо. Узагальнимо це поняття на випадок довільних фігур.

Нехай дано дві фігури F і F_1 (мал. 226). Точки $A \in F$ і $B \in F_1$ називають найближчими точками цих фігур, якщо для будь-яких точок $A_1 \in F$ і $B_1 \in F_1$ виконується нерівність $AB \leqslant A_1B_1$.



Мал. 226

Відстанню між двома фігурами називають відстань між найближчими точками цих фігур (якщо такі точки існують). Якщо дві фігури мають спільні точки, то вважають, що відстань між ними дорівнює 0.

Зауваження. Не будь-які дві фігури мають найближчі точки. Але ми вивчатимемо тільки такі фігури, для яких найближчі точки існують.

Розглянемо конкретні приклади.

Відстань від точки до прямої. Перпендикуляр, опущений з точки на пряму, коротший від будь-якого відрізка, що сполучає цю точку з даною прямою. Тому відстань від точки до прямої дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму.

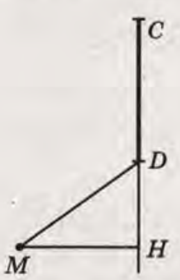
Відстань від точки до відрізка не завжди дорівнює відстані від точки до прямої, якій належить цей відрізок. Вона може дорівнювати відстані від даної точки до кінця відрізка. Подивіться на малюнок 227. Відстань від точки M до відрізка DC дорівнює MD, а не MH.

Відстань від точки до площини. Оскільки перпендикуляр коротший від похилої (теорема 16), то відстань від точки до площини дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з даної точки на площину. Наприклад, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром a, то відстань від точки A_1 до площини грані $ABCD$ дорівнює a. Але якщо A_1 – середина відрізка B_1P, то відстань від точки P до квадрата $ABCD$ дорівнює $a\sqrt{2}$. Узагалі, відстань від точки до плоскої фігури не завжди дорівнює відстані від цієї точки до площини, в якій лежить дана фігура.

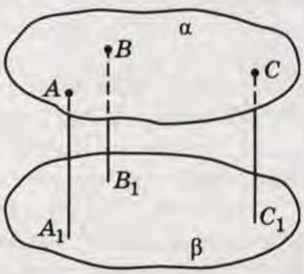
Відстань між паралельними площинами. Якщо площини α і β паралельні, то перпендикуляри, опущені з точок однієї з цих площин на другу, рівні (мал. 228). Справді, всі ці перпендикуляри паралельні один одному, а відрізки паралельних прямих, які містяться між паралельними площинами, рівні (теорема 10). Довжина перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки площини на паралельну їй площину, є відстанню між даними паралельними площинами.

З тієї ж причини відстань між прямою і паралельною їй площиною дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки прямої на дану площину.

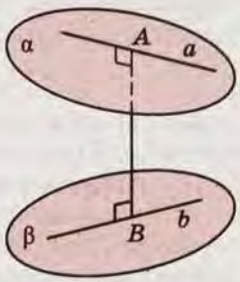
Відстань між мимобіжними прямими. Нехай дано мимобіжні прямі a і b (мал. 229). Існує відрізок AB, перпендикулярний до кожної з даних мимобіжних прямих a і b, його називають *спільним перпендикуляром мимобіжних прямих.* Для будь-яких мимобіжних прямих існує єдиний їх спільний перпендикуляр. Спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих коротший від будь-якого відрізка, що сполучає довільні точки цих прямих. Тому відстань між двома мимобіжними прямими дорівнює довжині їх спільного перпендикуляра.



Мал. 227



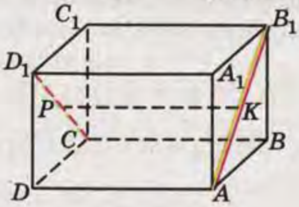
Мал. 228



Мал. 229

Корисно пам'ятати таке. Дві мимобіжні прямі визначають пару паралельних площин (див. задачу 2, с. 190). Відстань між цими площинами дорівнює відстані між даними прямими.

Приклад. Якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, то спільним перпендикуляром мимобіжних прямих AB_1 і CD_1 є відрізок, який сполучає середини відрізків AB_1 і CD_1 (мал. 230). Довжина цього спільного перпендикуляра дорівнює BC і дорівнює відстані між даними мимобіжними прямими.



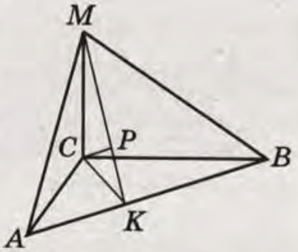
Мал. 230

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що називається відстанню між двома фігурами?
2. Чому дорівнює відстань від точки до: а) прямої; б) відрізка; в) площини?
3. Як знайти відстань між паралельними площинами? А між прямою і паралельною їй площиною?
4. Що називається спільним перпендикуляром двох мимобіжних прямих?
5. Як знайти відстань між мимобіжними прямими?

Виконаємо разом

1. Через вершину прямого кута C трикутника ABC проведено перпендикуляр CM до площини трикутника (мал. 231). $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, $CM = 6,4$ см. Знайдіть відстань: а) від точки M до прямої AB; б) від точки C до площини (AMB).



Мал. 231

• Розв'язання. Проведемо $CK \perp AB$ і точку K сполучимо з точкою M. За теоремою про три перпендикуляри $MK \perp AB$. Значить, довжина відрізка MK – відстань від точки M до AB.

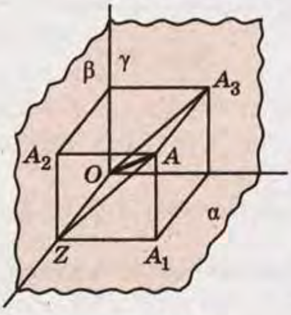
З $\triangle ABC$ за теоремою Піфагора знайдемо, що $AB = 10$ см. Тоді за методом площ $CK = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$ (см). З $\triangle MCK$ за теоремою Піфагора знайдемо MK:

$$MK = \sqrt{MC^2 + CK^2} = \sqrt{6,4^2 + 4,8^2} = 8 \text{ (см)}.$$

Отже, відстань від точки M до прямої AB дорівнює 8 см.

Оскільки $KC \perp AB$ і $KM \perp AB$, то $AB \perp (MKC)$, а значить, площини (AMB) і (MKC) перпендикулярні, MK – лінія їх перетину. У площині (MKC) проведемо $CP \perp MK$, тоді за властивістю перпендикулярних площин $CP \perp (AMB)$. Значить CP – відстань від точки M до площини (AMB). Знайдемо її. З $\triangle MCK$ за методом площ $CP = \dfrac{CK \cdot CM}{KM} = \dfrac{4{,}8 \cdot 6{,}4}{8} = 3{,}84$ (см).

Отже, $CP = 3{,}84$ см.



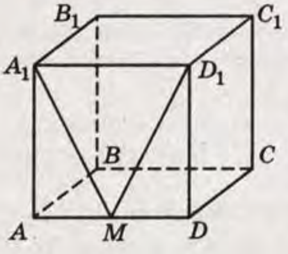
Мал. 232

2. Кожна з трьох попарно перпендикулярних площин проходить через точку O. Точка A віддалена від цих площин на 90 см, 120 см і 80 см. Знайдіть відстань OA.

● **Розв'язання.** Нехай $AA_1 = 80$ см, $AA_2 = 90$ см і $AA_3 = 120$ см – відстані від даної точки A до площин α, β і γ (мал. 232). Площина, яка проходить через точки A, A_1 і A_2, перетинає пряму перетину площин α і β у такій точці Z, що чотирикутник AA_1ZA_2 – прямокутник. Чотирикутник AA_3OZ – теж прямокутник. За теоремою Піфагора:

$$OA = \sqrt{AA_3^2 + AZ^2} = \sqrt{AA_3^2 + AA_2^2 + AA_1^2} =$$
$$= \sqrt{120^2 + 90^2 + 80^2} = 170 \text{ (см)}.$$

Виконайте усно



Мал. 233

1135. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром a, M – середина AD (мал. 233).

а) Знайдіть відстані AC, MC, MD_1.

б) Яка з відстаней AC, MC, BC найбільша, а яка – найменша?

в) Порівняйте відстані MC, MD_1, MA_1.

г) Знайдіть відстань від точки M до прямих A_1D_1, B_1C_1, до площин $A_1B_1C_1D_1$, DD_1C_1C.

ґ) Знайдіть відстань між площинами $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$.

д) Знайдіть відстань від прямої A_1M до площини BB_1C_1C.

е) Знайдіть відстань між прямими AD і B_1C_1, CC_1 і A_1D_1.

А

1136. Через середину відрізка AB проведено площину. Доведіть, що відстані від точок A і B до даної площини рівні.

1137. Через діагональ паралелограма проведено площину. Доведіть, що кінці другої діагоналі однаково віддалені від цієї площини.

1138. Кінці відрізка, який не перетинає площину, віддалені від неї на 7 см і 13 см. Як віддалена від площини середина відрізка?

1139. Точки C і D, які ділять відрізок AB на три рівні частини, віддалені від площини на 4 см і 8 см. Як віддалені від площини кінці відрізка?

1140. Відрізок завдовжки a перетинає площину, а його кінці віддалені від неї на b і c. Знайдіть довжину проекції відрізка на площину.

1141. MA – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Знайдіть відстань від точки M до прямих AB і BC, якщо $AB = 3$ дм, $MA = 4$ дм.

1142. До площини трикутника з центра вписаного в нього кола радіуса r проведено перпендикуляр завдовжки h. Знайдіть відстань від кінця цього перпендикуляра до сторін трикутника.

1143. З вершини B рівнобедреного трикутника ABC до його площини проведено перпендикуляр $BK = 12$ см. Знайдіть відстань від точки K до сторони AC, якщо $AC = 24$ см, $AB = BC = 20$ см.

1144. З вершини B рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) до його площини проведено перпендикуляр BM. Відстань від точки M до сторони AC дорівнює 15 см, а до точки A – $3\sqrt{34}$ см. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника.

1145. З центра O кола, описаного навколо прямокутного трикутника з кутом 30°, до площини трикутника проведено перпендикуляр OK. Точка K віддалена від більшого катета на 10 см. Знайдіть відстань від точки K до меншого катета, якщо $OK = 8$ см.

1146. AK – перпендикуляр, проведений до площини трикутника ABC. Знайдіть відстань від точки K до сторони BC, якщо $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см, $AK = 16$ см.

1147. Через вершину B трикутника ABC проведено перпендикуляр BM до площини трикутника. Точка M рівновіддалена від вершин A і C. Знайдіть відстань від точки M до сторони AC, якщо $AC = a$, $BM = \frac{a}{2}$, $\angle B = 60°$.

1148. Точка M знаходиться на відстані 26 см від усіх сторін прямокутного трикутника. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника, якщо його висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 24 см і ділить гіпотенузу у відношенні 9 : 16.

1149. Точка R знаходиться на відстані $2a$ від усіх сторін правильного трикутника зі стороною a. Знайдіть відстань від точки R до площини трикутника.

1150. Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 17 см, 21 см. Точка простору O знаходиться на відстані 12,5 см від усіх сторін трикутника. Знайдіть відстань від O до площини трикутника.

1151. Більша діагональ ромба дорівнює d, а гострий кут α. Точка простору M рівновіддалена від сторін ромба і знаходиться на відстані $2d$ від його площини. Знайдіть відстань від точки M до сторін ромба.

Б

1152. З точки P до площини проведено дві рівні похилі PM і PN, кут між якими $60°$, а кут між їх проекціями $120°$. Знайдіть відстань від точки P до площини і до прямої MN, якщо $MN = a$.

1153. З точки до площини проведено дві похилі, які дорівнюють 17 м і 10 м. Різниця проекцій цих похилих 9 м. Знайдіть відстань від даної точки до площини.

1154. Точка A віддалена від однієї з двох перпендикулярних площин на x, а від другої – на y. Знайдіть відстань від точки A до прямої перетину даних площин.

1155. Площина α проходить через сторону AB паралелограма $ABCD$ і віддалена на d від точки перетину його діагоналей. Знайдіть відстань від прямої CD до площини α.

1156. Вершини A, B, C квадрата $ABCD$ віддалені від площини, яка не перетинає його, відповідно на 13 м, 14 м, 17 м. Як віддалені від площини центр квадрата і вершина D?

1157. Вершини трикутника віддалені від площини, яка не перетинає його, відповідно на 6 м, 8 м, 10 м. Знайдіть відстань від точки перетину медіан трикутника до площини.

1158. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть відстань від його вершини до протилежної грані.

1159. Дві вершини трикутника і точка перетину медіан віддалені від площини, яка не перетинає його, на 40 см, 24 см і 38 см відповідно. Знайдіть відстань від третьої вершини до площини.

1160. Відстань між двома паралельними площинами дорівнює 40 см. Відрізок завдовжки 50 см своїми кінцями впирається в ці площини. Знайдіть довжини проекцій відрізка на кожну з площин.

Мал. 234

1161. Задача з несподіваною відповіддю. На книжковій полиці стоїть тритомник (мал. 234). Товщина кожної книжки 40 мм, а книжки без обкладинки 35 мм. Знайдіть відстань від першої сторінки першого тому до останньої сторінки третього тому.

1162. З точки K, розміщеної по один бік від паралельних площин α і β, проведено дві прямі, які перетинають α у точках A і C, а β – у точках B і D відповідно. Знайдіть відстань між площинами, якщо точка K віддалена від β на 14 м, $AK = 9$ м, $CD = 16$ м, $KC = AB$.

1163. Через точку O, яка лежить між паралельними площинами α і β, проведено дві прямі, які перетинають α в точках A і C, а β – у точках B і D відповідно. $AO = OD$, $OC = 18$ м, $OB = 32$ м. Знайдіть відстань між площинами, якщо O віддалена від β на 16 м.

1164. M, N, K – середини ребер PA, PB, PC правильного тетраедра $PABC$. Знайдіть відстань між площинами (MNK) і (ABC), якщо $AB = a$.

1165. AK – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, $AB = a$, $AK = 2a$. Знайдіть відстань між прямими KB і CD, KB і AD.

1166. Ребро куба дорівнює 6 см. Знайдіть відстань між діагоналлю куба і мимобіжною з нею діагоналлю основи.

1167. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Знайдіть відстань між CC_1 і BD.

1168. Ребро правильного тетраедра a. Знайдіть відстань між його протилежними ребрами.

1169. Ребро куба a. Знайдіть відстань між мимобіжними діагоналями його протилежних граней.

1170. Знайдіть відстань між діагоналлю куба, ребро якого дорівнює a, і будь-яким ребром, мимобіжним з цією діагоналлю.

Вправи для повторення

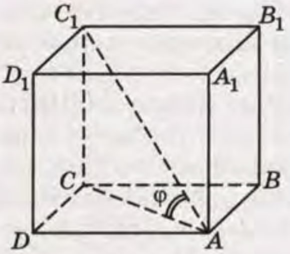
1171. Зобразіть паралельні площини α, β і прямі a, b, які перетинають площину α в точках M, N, а площину β – у точці K.

1172. З точок A і B площини α перпендикулярно до неї проведено відрізки $AK = 25$ см і $BM = 20$ см. Пряма KM перетинає площину α в точці C. Знайдіть відстань AC, якщо $AB = 16$ см. Розгляньте два випадки.

1173. Точка M – середина ребра CS тетраедра $ABCS$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через пряму AB і точку M.

§ 33. Вимірювання кутів у просторі

З планіметрії ви вже знаєте, що таке кут, кут між двома прямими однієї площини. Знаєте також, що розуміють під кутом між мимобіжними прямими (с. 203). Розглянемо ще кілька стереометричних понять, пов'язаних з кутами.



Мал. 235

Кут між прямою і площиною. Що розуміють під кутом між прямою і площиною?

Якщо пряма паралельна площині, то вважають, що кут між такою прямою і площиною дорівнює 0°. Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між ними дорівнює 90°. У решти випадків *кутом між прямою і площиною* називають кут між прямою і її ортогональною проекцією на площину.

Приклад. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 235). Знайдіть кут між прямою AC_1 і площиною його грані $ABCD$.

Проекція відрізка AC_1 на площину грані $ABCD$ – відрізок AC. Тому шуканий кут $\varphi = \angle C_1AC$. Його тангенс

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{CC_1}{CA} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707, \text{ звідси } \varphi \approx 35^\circ 16'.$$

До кута між прямою і площиною близьке поняття кута між похилою і площиною. ***Кутом між похилою і площиною*** *називають кут між похилою і її проекцією на площину.*

Йдеться про прямокутну (ортогональну) проекцію. Якщо φ – кут між прямою і площиною, то $0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 90^\circ$; якщо φ – кут між похилою і площиною, то $0^\circ < \varphi < 90^\circ$.

Можна довести, що **кут між похилою і площиною найменший з усіх кутів, які похила утворює з прямими, проведеними на площині через основу похилої.**

Кути між прямими і площинами часто доводиться вимірювати астрономам, геодезистам, географам, маркшейдерам, працівникам транспорту. Найпростіший саморобний прилад для вимірювання кутів між горизонтальною площиною і похилими – *екліметр* (мал. 236). Бувають екліметри і фабричного виготовлення (мал. 237). У його циліндричному корпусі при натиснутій кнопці вільно обертається і встановлюється за виском градуйований диск. Якщо кнопку відпустити, диск закріплюється, і на

Мал. 236

Мал. 237

Мал. 238

його шкалі можна прочитати градусну міру кута, який вимірюють. Якщо потрібна більша точність, кути вимірюють *теодолітами* (мал. 238).

Теодоліт має два круги з градусними поділками (лімби). Користуючись горизонтальним лімбом, визначають кути в горизонтальній площині, вертикальний лімб дає змогу вимірювати кут між горизонтальною площиною і похилими до неї напрямами.

Кут між площинами. Якщо дві площини паралельні, то вважається, що кут між ними дорівнює 0°. Якщо площини α і β перетинаються по прямій c, то, щоб визначити кут між цими площинами, у кожній з них через довільну точку M прямої c можна провести прямі a і b, перпендикулярні до прямої c (мал. 212). Кут між прямими a і b приймають за кут між даними площинами α і β. Можна довести, що міра цього кута φ не залежить від вибору точки O на прямій c. Кут між двома площинами, як і між двома прямими, знаходиться в межах від 0° до 90°.

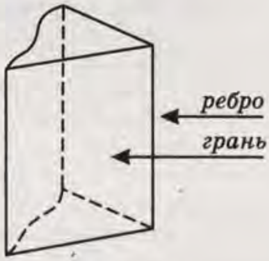
Якщо кут між двома площинами дорівнює 90°, то площини перпендикулярні.

Якщо дві площини перетинаються, то вони весь простір поділяють на 4 частини, які називають двогранними кутами.

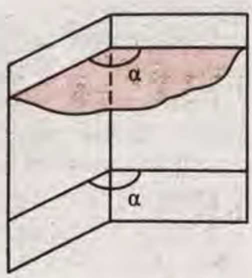
***Двогранним кутом** називається частина простору, обмежена двома півплощинами, які виходять з однієї прямої.*

Півплощини, які обмежують двогранний кут, називають його гранями, а їх спільну пряму – *ребром* двогранного кута (мал. 239).

Кут, утворений перетином двогранного кута з площиною, перпендикулярною до його ребра, називають *лінійним кутом* даного двогранного кута. Будь-які два лінійні кути двогранного кута рівні (мал. 240). Тому двогранні кути можна характеризувати відповідними лінійними кутами. Якщо, наприклад, лінійний кут деякого двогранного кута дорівнює 60°, то кажуть, що це – двогранний кут 60°. Двогранний кут називають гострим, прямим, тупим, розгорнутим чи більшим від розгорнутого залежно від того, чи є його лінійний кут гострим, прямим, тупим, розгорнутим чи більшим від розгорнутого (мал. 241).



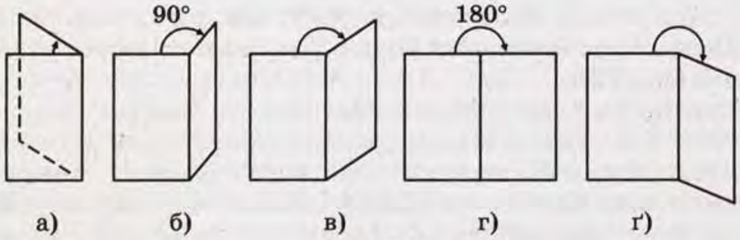
Мал. 239



Мал. 240

Не слід ототожнювати міру двогранного кута з кутом між площинами. Кут між площинами може змінюватися в межах від 0° до 90°, а міра двогранного кута – від 0° до 360°.

Замість «двогранний кут, міра якого дорівнює α» нерідко кажуть коротше:



Мал. 241

Мал. 242

«двогранний кут α». У таких випадках під двогранним кутом розуміють і певну фігуру, і відповідне її числове значення.

Найпростішими матеріальними моделями двогранного кута є краї різальних інструментів: зубил, стамесок, різців для токарних верстатів тощо. Вони бувають більш або менш гострими. Вимірюють такі кути *кутомірами* (мал. 242).

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке кут? Які бувають кути?
2. Що таке кут між прямою і площиною?
3. Яким може бути кут між прямою і площиною?
4. Що таке кут між похилою і площиною?
5. Що таке кут між двома площинами?
6. Якими приладами вимірюють кут між прямою і горизонтальною площиною?
7. Що таке двогранний кут? Які бувають двогранні кути?
8. На скільки двогранних кутів розбивають простір дві непаралельні площини?
9. Що таке лінійний кут двогранного кута?
10. Який з двох двогранних кутів більший?
11. У яких межах може змінюватися міра двогранного кута?

Виконаємо разом

1. Учень говорить: «Кути бувають плоскі і двогранні». Чи це правильно?

Відповідь. Ні, неправильно. Кутом називається частина площини, обмежена двома променями із спільною вершиною. Жоден з двогранних кутів не підходить під це означення, тому не є кутом.

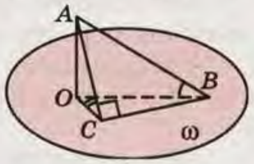
2. Один з катетів рівнобедреного прямокутного трикутника лежить у площині ω, а другий нахилений до неї під кутом 45°. Знайдіть кут між гіпотенузою і площиною ω.

Розв'язання. Нехай ABC – трикутник, у якого $\angle ACB = 90°$, $AC = CB$, а AO – перпендикуляр до площини ω, яка проходить через BC (мал. 243). Тоді $\angle ACO = 45°$. Якщо $AC = a$, то $BC = a$, $AB = a\sqrt{2}$, $AO = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Маємо $\sin \angle ABO = \frac{AO}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}} : a\sqrt{2} = \frac{1}{2}$.

Отже, $\angle ABO = 30°$.

Відповідь. 30°.



Мал. 243

Виконайте усно

1174. Чи може бути від'ємним косинус кута нахилу похилої до площини?

1175. На малюнку 235 AC_1 – діагональ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Під яким кутом нахилена діагональ куба до кожної його грані?

1176. Похила AB завдовжки d нахилена до площини α під кутом 30°. Знайдіть відстань від точки A до площини α.

1177. Чи правильно, що дві непаралельні площини ділять простір на чотири двогранні кути?

1178. Кут між двома площинами дорівнює 100°. Укажіть міру меншого з утворених двогранних кутів.

1179. Є два двогранні кути, лінійні кути яких дорівнюють 100° і 120°. Чи може їх об'єднання бути двогранним кутом?

1180. Є два двогранні кути, лінійні кути яких дорівнюють по 200°. Чи може їх об'єднання бути двогранним кутом?

1181. Є рівні двогранні кути, міра кожного з яких дорівнює 30°. Скількома такими двогранними кутами можна заповнити простір?

1182. Якою площиною можна розрізати двогранний кут на два рівні двогранні кути? А на дві рівні фігури?

1183. Скількома площинами двогранний кут можна розрізати на 4 рівні фігури? А на 4 рівні двогранні кути?

1184. Три площини, які проходять через одну пряму, ділять простір на рівні двогранні кути. Знайдіть міру одного з них.

1185. Скільки прямих, які перетинають дану площину під кутом 50°, можна провести через дану точку?

А

1186. Похила вдвічі довша за її проекцію на площину. Знайдіть кут між похилою і площиною.

1187. Точка A віддалена від площини α на 2 м. Знайдіть довжину похилої AB, нахиленої до α під кутом 30°.

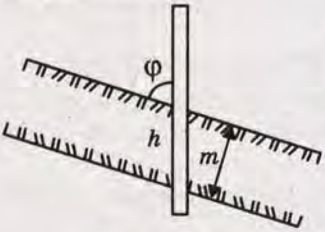
1188. Знайдіть кут між похилою і площиною, якщо вершина похилої віддалена від площини на відстань, що дорівнює довжині проекції похилої.

1189. Пряма AB з площиною α утворює кут $60°$. Знайдіть довжину проекції похилої AB на площину α, якщо $AB = 48$ см.

1190. Довжина похилої AB дорівнює 50 см, а точка A віддалена від площини на 25 см. Знайдіть кут між похилою і площиною.

1191. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних площин під кутом α, то і другу площину вона перетинає під кутом α.

1192. Доведіть, що паралельні прямі нахилені до однієї і тієї самої площини під рівними кутами. Чи правильне обернене твердження?



Мал. 244

1193. Знайдіть товщину m вугільного пласта, якщо вертикальна свердловина нахилена до нього під кутом $\varphi = 72°$ і проходить по вугіллю відстань $h = 2{,}5$ м (мал. 244).

1194. На якій глибині знаходиться станція метро, якщо її ескалатор довжиною 85 м нахилений до площини горизонту під кутом $42°$?

1195. Кут між двома площинами $70°$. Знайдіть градусні міри двогранних кутів, утворених перетином цих площин.

1196. Дано двогранний кут $60°$. Точка A однієї його грані віддалена на 12 см від другої. Знайдіть відстань від точки A до ребра даного двогранного кута.

1197. Точка A прямого двогранного кута віддалена від його граней на 3 дм і 4 дм. Знайдіть її відстань від ребра двогранного кута.

1198. На зображенні правильного тетраедра побудуйте зображення лінійного кута одного з його двогранних кутів.

1199. З точки C на ребрі двогранного кута $90°$ у його гранях проведено перпендикуляри до ребра: $CA = 3{,}5$ дм і $CB = 1{,}2$ дм. Знайдіть відстань від A до B.

1200. Знайдіть кут між двома прямими, перпендикулярними до граней двогранного кута $100°$.

1201. Знайдіть кут між однією гранню двогранного кута $100°$ і прямою, перпендикулярною до другої грані.

1202. Визначте міру двогранного кута, якщо точка, взята на одній грані, віддалена від ребра вдвічі далі, ніж від другої грані.

1203. З точки, взятої всередині двогранного кута, опущено перпендикуляр на ребро; він утворює з гранями кути $38°24'$ і $71°36'$. Визначте міру двогранного кута.

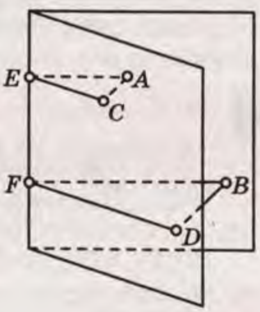
1204. Точка, взята всередині двогранного кута 60°, віддалена від обох граней на відстань a. Знайдіть відстань від точки до ребра.

1205. A і B – точки на ребрі прямого двогранного кута; AC і BD – перпендикуляри до ребра, проведені в різних гранях. Визначте відстань CD, якщо $AB = 6$ см, $AC = 3$ см і $BD = 2$ см.

1206. Розв'яжіть попередню задачу, замінивши прямий двогранний кут кутом 120° і взявши: а) $AB = AC = BD = a$; б) $AB = 3$, $AC = 2$, $BD = 1$.

Б

1207. На одній грані двогранного кута дано дві точки A і B (мал. 245); з них опущено перпендикуляри на другу грань: $AC = 1$ дм, $BD = 2$ дм та на ребра: $AE = 3$ дм і BF. Знайдіть BF.



Мал. 245

1208. На одній грані двогранного кута взято дві точки, що віддалені від ребра на 51 см і 34 см. Відстань від першої точки до другої грані дорівнює 15 см. Визначте відстань від другої точки.

1209. Двогранний кут дорівнює 45°. На одній грані дано точку на відстані a від другої грані. Знайдіть відстань від цієї точки до ребра.

1210. Якщо рівнобедрений прямокутний трикутник ABC перегнути по висоті BD так, щоб площини (ABD) і (CBD) утворили прямий двогранний кут, то лінії DA і DC стануть взаємно перпендикулярними, а BA і BC утворять кут 60°. Доведіть.

1211. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть міру двогранного кута BAC_1D.

1212. У тетраедрі $ABCD$ ребра AB, AC і AD попарно перпендикулярні і рівні. Знайдіть міри його двогранних кутів при ребрах BC, CD, BD.

1213. Кінці відрізка лежать на гранях прямого двогранного кута і віддалені від його ребра на 12 см і 16 см. Знайдіть відстань від даного відрізка до ребра двогранного кута.

1214. З точок A і B однієї грані гострого двогранного кута опущено перпендикуляри AA_1 і BB_1 на другу грань і AA_2, BB_2 – на ребро. Знайдіть довжину BB_2, якщо $AA_1 = 3$ дм, $AA_2 = 5$ дм, $BB_1 = 9$ дм.

1215. Доведіть, що всі двогранні кути правильного тетраедра рівні.

1216. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з площиною його основи кут 45°. Сторони основи дорівнюють 10 см і 24 см. Визначте висоту паралелепіпеда.

1217. AH – перпендикуляр до площини трикутника ABC, $AB = AC$. Доведіть, що похилі HB і HC з площиною трикутника утворюють рівні кути.

1218. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 6 см, точка M знаходиться на відстані 6 см від кожної з його вершин. Знайдіть кут між прямою MA і площиною квадрата.

1219. Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює $3a$, точка M віддалена від кожної з його вершин на $2a$. Під якими кутами нахилені прямі MA, MB і MC до площини даного трикутника?

1220. Практичне завдання. Зробіть із цупкого паперу модель поверхні двогранного кута, накресліть будь-який його лінійний кут і продемонструйте, як змінюється двогранний кут зі зміною його лінійного кута.

Вправи для повторення

1221. Діагоналі паралелограма дорівнюють 12 см і 32 см, а одна зі сторін – 14 см. Знайдіть периметр паралелограма.

1222. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки M, N, K – середини ребер AB, BC і BB_1.

1223. Побудуйте зображення прямокутного трикутника, вписаного в коло.

1224. До площини прямокутника $ABCD$ проведено перпендикуляр BM завдовжки 12 см. Знайдіть довжини MA, MC, MD, якщо $AB = 5$ см, $BC = 9$ см.

1225. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки A, C і середину ребра DD_1.

1226. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, $AK = KB$, CM – перпендикуляр до площини трикутника. Знайдіть CM, якщо $MK = 12{,}25$ см.

Самостійна робота № 7

Варіант 1

1. Доведіть, що пряма, перпендикулярна до діагоналей паралелограма, перпендикулярна і до його сторін.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть кут між прямими: а) BC і AA_1; б) AC і B_1D_1.

3. Точки A і B віддалені від площини α на 13 см і 25 см. Як віддалена від площини α середина відрізка AB? Відрізок AB площину α не перетинає.

4. З точки M до площини α проведені похилі MA і MB завдовжки 13 см і 20 см. Знайдіть відстань від точки M до площини α, якщо проекції похилих пропорційні числам 5 і 16.

Варіант 2

1. Доведіть, що пряма, перпендикулярна до бічних сторін трапеції, перпендикулярна і до її основ.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть кут між прямими: а) BC_1 і CD; б) BC_1 і A_1D.

3. Кінці відрізка віддалені від площини на 8 м і 14 м. Знайдіть відстань від середини даного відрізка до площини. Відрізок перетинає площину.

4. З точки M до площини α проведені похилі MA і MB, різниця довжин яких дорівнює 7 см. Знайдіть відстань від точки M до площини α, якщо проекції похилих дорівнюють 5 см і 16 см.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке стереометрія?
2. Які фігури називають неплоскими? Наведіть приклади.
3. Сформулюйте аксіоми стереометрії.
4. Сформулюйте і доведіть наслідки з аксіом стереометрії.
5. Як можна задати площину в просторі?
6. Накресліть паралелепіпед. Назвіть його елементи.
7. Який паралелепіпед називають прямокутним? Що таке куб?
8. Накресліть тетраедр. Назвіть його елементи.
9. Який тетраедр називають правильним?
10. Що таке переріз многогранника площиною? Наведіть приклади.
11. Які прямі називають мимобіжними?
12. Які прямі називають паралельними?
13. Сформулюйте теорему про транзитивність паралельних прямих.
14. Дайте означення прямої, паралельної площині.
15. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямої і площини.
16. Сформулюйте означення паралельних площин.
17. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності двох площин.
18. Сформулюйте і доведіть властивості паралельних площин.
19. Що таке паралельне проектування?
20. Перелічіть властивості паралельних проекцій відрізків.
21. Дайте означення кута між прямими в просторі.
22. Які прямі називають перпендикулярними?
23. Яку пряму називають перпендикулярною до площини?
24. Доведіть ознаку перпендикулярності прямої і площини.
25. Сформулюйте наслідки з ознаки перпендикулярності прямої і площини.
26. Що таке перпендикуляр до площини, основа перпендикуляра?
27. Що таке похила, основа похилої, проекція похилої на площину?
28. Сформулюйте і доведіть теорему про три перпендикуляри.
29. Що таке відстань між фігурами?
30. Як знаходять відстань між мимобіжними прямими?
31. Що таке кут між прямою і площиною?
32. Якими приладами вимірюють кути в просторі?
33. Сформулюйте означення перпендикулярних площин.
34. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності площин.

Головне в розділі 4

Кут між прямими. Кут між двома прямими, що перетинаються, – менший із утворених ними чотирьох кутів. Кут між паралельними прямими дорівнює 0°. Кутом між мимобіжними прямими називають кут між прямими, що перетинаються і які паралельні даним прямим.

Дві прямі називають *перпендикулярними*, якщо кут між ними дорівнює 90°. Якщо пряма перпендикулярна до однієї з паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.

Пряма називається *перпендикулярною до площини*, якщо вона перетинає цю площину і перпендикулярна до кожної прямої, що лежить у площині, і проходить через точку перетину (означення). Якщо пряма перетинає площину і перпендикулярна до двох різних прямих цієї площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна і до площини (ознака перпендикулярності прямої і площини).

Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то й друга пряма перпендикулярна до неї. Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.

Перпендикуляром, опущеним з даної точки на дану площину, називають відрізок прямої, перпендикулярної до площини, що міститься між даною точкою і площиною.

Пряма, яка лежить у площині, перпендикулярна до похилої тоді і тільки тоді, коли вона перпендикулярна до проекції похилої (теорема про три перпендикуляри).

Кутом між прямою і площиною називають кут між прямою і її ортогональною проекцією на площину. Якщо пряма паралельна (перпендикулярна) площині, то кут між ними дорівнює 0° (90°). *Кутом між площинами* називають кут між прямими, проведеними в цих площинах перпендикулярно до лінії їх перетину. Кут між паралельними площинами дорівнює 0°.

Дві площини називають перпендикулярними, якщо кут між ними прямий. Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої, то такі площини перпендикулярні (ознака перпендикулярності площин).

Проектування називають прямокутним, або ортогональним, якщо проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій. Якщо S і $S_{пр}$ – площі многокутника і його ортогональної проекції, а кут між їх площинами φ, то

$$S_{пр} = S \cos \varphi.$$

Історичні відомості

Зародилася геометрія як наука про вимірювання земельних ділянок; у перекладі з грец. «геометрія» – землемірство. Але згодом давньогрецькі геометри відірвали геометрію від землі, перетворивши її на абстрактну науку. На геометричному матеріалі вони почали досліджувати означення, доведення, формальні побудови тощо. Оскільки потреба в удосконаленні вимірювань земельних ділянок залишалася, то виникла нова наука – *геодезія* (γῆ – земля, δαίω – поділяю). У ній розглядаються різні способи вимірювання відстаней, кутів, площ та інших геометричних величин, спеціальні вимірювальні засоби і т. ін. Згодом від геодезії відійшла ще одна окрема гілка прикладної геометрії – *маркшейдерія* (нім. Mark – межа, scheiden – розділяти), яка займається геометричними вимірюваннями в шахтах та інших гірничих виробках. Наочно ці розгалуження можна зобразити такою схемою:

$$\begin{tikzcd} & \text{геометрія} \arrow[r] & \text{геометрія} \\ \text{геометрія} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{геодезія} \\ & \text{геодезія} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & \text{маркшейдерія} \end{tikzcd}$$

Геодезія і маркшейдерія – дві гілки прикладної геометрії, їх теоретичною базою є наука геометрія.

Сучасну геометрію науковці звичайно будують на аксіоматичній основі. Тобто спочатку наводять неозначувані геометричні поняття, а потім на їх основі формулюють означення всіх інших геометричних понять. Так само спочатку формулюють аксіоми, потім на їх основі доводять всі інші твердження. Отже, геометрія складається з двох досить довгих і розгалужених ланцюгів: один містить означення геометричних понять, другий – доведення геометричних тверджень. Ці ланцюги не ізольовані один від одного, бо в кожному геометричному твердженні розглядаються ті чи інші геометричні поняття. До геометричних понять відносимо і геометричні відношення: паралельність, перпендикулярність, симетричність тощо.

Майже всі поняття і теореми з геометрії, що є в цьому підручнику, були відомі старогрецьким геометрам. В «Основах» Евкліда (III ст. до н. е.) про паралельність прямих і площин у просторі доведено 9 теорем, про перпендикулярність – 11. Це значно більше, ніж у нашому підручнику. Звичайно, означення, аксіоми і теореми формулювали інакше. Наприклад, аксіоми C_3 і C_4 відповідають першому і другому твердженням книги XI «Основ» Евкліда: «Частини прямої лінії не можуть лежати одна над площиною, а друга – у самій площині», «Дві площини перетинаються по прямій лінії». Тетраедри, паралелепіпеди, куби та багато інших геометричних тіл також були добре відомі стародавнім грецьким геометрам. І вивченням перерізів вони також займалися. Так, понад 22 століття тому Аполлоній Пергський написав праці «Про просторові перерізи» і «Конічні перерізи».

Зрозуміло, що геометрію тоді вивчали далеко не всі греки, однак такі були. У Стародавній Греції існували школи трьох рівнів: 1) школи граматиста або кифариста; 2) палестри; 3) гімнасії. У школах першого рівня діти ознайомлювалися з початками арифметики, в палестрах – з геометрією. До гімнасіїв ішли люди, які вже знали геометрію. Над входом до гімнасію Платона був напис: «Хай не ввійде сюди той, хто не знає геометрії!». Математика в античних школах була основоположним навчальним предметом, бо слово «математика» означало тоді знання, науку. Гімнасії існували в Ольвії, Херсонесі, а школи нижчих рівнів і в багатьох інших містах сучасного українського узбережжя Чорного моря.

ЕВКЛІД
(бл. 365–300 до н. е.)

Давньогрецький математик, учень Платона, автор праці «Основи», у якій систематизовано майже всі попередні математичні відомості. Після 1482 р. цю книгу передруковували понад 500 разів багатьма мовами. В Англії і деяких інших країнах «Основи» Евкліда аж до XX ст. були підручником геометрії для середніх шкіл.

Про життя Евкліда відомостей мало. Він народився в Афінах і навчався у Платона. На запрошення Птолемея I переїхав працювати до Александрії, яка на той час була центром наукової думки. Папп Александрійський зображає Евкліда як людину лагідну і скромну, виключно чесну і незалежну.

Основну свою працю Евклід грецькою мовою називав "Στοιχεῖα", тобто стихії. Латинською мовою її називали «Elementa» (елементи), російською – «Начала», тобто початки, або основи.

Праця Евкліда складається з 13 книжок. Планіметричний матеріал викладено в п'яти книжках (I–IV, VI). Стереометричний – у книжках XI, XII і XIII. Матеріал, що розглядається зараз у 10-му класі, викладено в книжці XI. Спочатку подається 28 означень, серед яких означення прямої, перпендикулярної до площини, і двох перпендикулярних площин, піраміди, призми, сфери, конуса, циліндра, куба, октаедра, ікосаедра, додекаедра. А потім розглядаються 39 положень. Зокрема, положення про паралельні і перпендикулярні прямі та площини, про кути, утворені прямими і площинами. Тут досліджуються також паралелепіпед і призма.

Не слід думати, що автор «Основ» першим відкрив і довів усі викладені ним теореми. Багато з них було відомо і його попередникам. Але Евклід настільки вдало систематизував математичні відомості, що його «Основи» були головним підручником математики майже для всього світу протягом більш як 2000 років. Книжка Евкліда цікава не тільки своїм багатим змістом, а й формою викладу. У ній спочатку сформульовані означення і аксіоми, а всі наступні твердження доведені як теореми. Це – перша спроба аксіоматичної побудови геометрії.

«Основи» Евкліда були зразком логічної строгості до XIX ст., аж поки не виявилися суттєві недоліки в їх побудові. Системі аксіом та постулатів Евкліда бракує повноти та аксіом порядку.

Сучасна геометрія займається здебільшого дослідженням абстрактних геометричних фігур, розміщених в абстрактних геометричних просторах. Таких просторів відомо багато: двовимірні, тривимірні, чотиривимірні, n-вимірні, евклідові, неевклідові тощо.

Стереометрія – це розділ геометрії про властивості фігур тривимірного евклідового простору.

Ортогональне проектування європейським математикам було відоме в XVIII ст. Французький геометр і громадський діяч Г. Монж запропонував здійснювати ортогональне проектування одночасно на дві взаємно перпендикулярні площини, створивши тим самим окрему галузь геометричної науки – *нарисну геометрію*. Метод Монжа виявився настільки важливим і корисним для військової справи, що його впродовж багатьох років було засекречено, як військову таємницю. Розсекретили тільки в 1794 р. Тепер нарисну геометрію вивчають у кожному вищому технічному навчальному закладі.

ГАСПАР МОНЖ

(1746–1818)

Французький геометр і політичний діяч, творець нарисної геометрії і один з основоположників диференціальної геометрії. Досліджував проблеми креслення, математичного аналізу, метрології, хімії, механіки. Палкий прихильник Французької революції, морський міністр, організатор національної оборони, товариш Наполеона. Математичну освіту здобував самостійно, навчався, а потім і працював у школі військових інженерів.

Багато для розвитку геометрії зробили також Л. Ейлер, К.Ф. Гаусс, Ж. Лагранж, Ж. Понселе, А. Мебіус, Д. Гільберт, Г. Ріман, Г. Мінковський та десятки інших учених.

Особливо великий внесок у розвиток геометрії М.І. Лобачевського. Він відкрив у 1892 р. існування зовсім нової геометрії, пізніше названої на його честь геометрією Лобачевського.

МИКОЛА ІВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСЬКИЙ (1792–1856)

Народився у Нижньому Новгороді, навчався у Казанському університеті, пізніше був викладачем, деканом, ректором цього університету. Його рід походив з Волині. Його відкриття нової геометрії було настільки глибоким і несподіваним, що деякі видатні вчені висміювали автора.

Геометрію Лобачевського вивчають у вищих навчальних закладах. У школі ж розглядають лише евклідову геометрію. Логічно строгі обґрунтування різних геометрій вперше було здійснено наприкінці XIX ст. в роботах італійського математика Маріо Пієрі (1860–1904), професора Геттінгенського університету Давида Гільберта (1862–1943) і приват-доцента Новоросійського (Одеського) університету Веніаміна Федоровича Кагана (1869–1953). В.Ф. Каган побудував «метричну» систему аксіом евклідової геометрії. Векторну аксіоматику евклідової геометрії створив Герман Вейль (1885–1955).

Багато зробив для розвитку геометрії відомий український математик Г.Ф. Вороний (1868–1908) – творець геометричної теорії чисел. Зокрема він досліджував різні заповнення простору рівними многогранниками. Значний внесок у розвиток геометричної науки зробили українські математики М.Є. Ващенко-Захарченко (1825–1912), С.Й. Шатуновський (1859–1929), О.С. Смогоржевський (1896–1969), М.І. Кованцов (1924–1987) та багато інших.

ГЕОРГІЙ ФЕОДОСІЙОВИЧ ВОРОНИЙ

Український математик. Народився в с. Журавка Чернігівської області. Досліджував проблеми геометричної теорії чисел, геометрії многогранників. Математики всього світу все частіше використовують поняття: алгоритм Вороного, клітини Вороного, метод Вороного, многокутники Вороного, діаграми Вороного, розбиття Вороного, мозаїка Вороного та ін.

Додатки

Теми для завдань творчого характеру

1. Нумерації та системи числення – 22[1], 23
2. Фалес Мілетський – 2, 12, 18
3. Піфагор і його школа – 2, 12, 22, 23
4. Платон і геометрія – 2
5. Прості числа – 10, 22, 23
6. Магічні квадрати – 23
7. Що є число? – 10, 18
8. Математичні софізми – 23
9. Число π – 5, 18, 23
10. Математика і календар – 23
11. Ейлер і геометрія – 5, 23, 26
12. Діофантові рівняння – 5, 10, 12, 23
13. Перспектива в геометрії і мистецтві – 17, 23
14. Неевклідові геометрії – 5
15. Що таке топологія? – 6, 23
16. Задачі Наполеона – 23
17. Математика в Стародавній Греції – 5, 6
18. Математика в Європі до Відродження – 5
19. Омар Хайям – математик і поет – 2, 5, 12
20. Декарт – математик і філософ – 2, 5, 10, 12
21. Ферма – математик і юрист – 2, 5, 12, 23
22. Паскаль і психологія моралі – 2, 12
23. Галуа – математик і політик – 2, 6, 10, 23
24. Геометрія і Марсельєза – 7
25. Бібліотекар та історіограф Лейбніц – 2, 6, 12, 23
26. Ковалевська – математик і літератор – 2, 23
27. Що таке математика? – 11, 18, 22
28. Математика і шахи – 23
29. Що таке математична логіка? – 22, 23
30. Як творилась кібернетика? – 10, 14, 23
31. Розвиток математики в Україні – 1, 13, 24
32. Остроградський – математик і патріот – 23
33. Ймовірності – 22, 23
34. Клітини Вороного – 2, 14
35. Комбінаторні задачі і комбінаторика – 6, 22, 23
36. Множини в сучасній математиці – 10, 23
37. Математика і романтика – 9
38. Геометрія паркетів і орнаментів – 23, 25
39. Доля академіка М. Кравчука – 1, 2, 16

---

[1] Числа відповідають номерам книг зі списку літератури, в яких висвітлено названі теми.

Література

1. Аксіоми для нащадків: Українські імена у світовій науці/ Упоряд. О.К. Романчук. – Львів, 1992.

2. Бородін О.І., Бугай А.С. Біографічний словник діячів у галузі математики. – К., 1973.

3. Василенко О. Серенада математиці. – К., 1996.

4. Вірченко Н.О. Математика в афоризмах і висловлюваннях. – К., 1974.

5. Глейзер Г.И. История математики в школе. VII–VIII классы. – М., 1982.

6. Глейзер Г.И. История математики в школе. IX–X классы. – М., 1983.

7. Демьянов В. Геометрия и Марсельеза. – М., 1979.

8. Игнатьев Е.И. Хрестоматия по математике. – Ростов, 1995.

9. Кованцов Н.И. Математика и романтика. – К., 1980.

10. Кованцов М.І. Математична хрестоматія. – К., 1977.

11. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. – М., 1991.

12. Конфорович А.Г. Колумби математики. – К., 1982.

13. Конфорович А., Сорока М. Остроградський. – К., 1980.

14. Конфорович А.Г. У пошуках інтеграла. – К., 1990.

15. Ліо Кі. Ломиголовки. – К., 1996.

16. Сорока М. Колимська теорема Кравчука. – К., 1991.

17. Тадеев В.А. От живописи к проективной геометрии. – К., 1988.

18. Тадеєв В.О. Математика: Тлумачний словник-довідник. – Тернопіль, 1989.

19. У світі математики. – К., 1968–1991. – Вип. 1–20.

20. У світі математики: Журнал для школярів.

21. Шафаревич И. Есть ли у России будущее? – М., 1991.

22. Шляхами математики / Упоряд. Т.М. Хмара. – К., 1999.

23. Энциклопедический словарь юного математика. – М., 1985.

24. Шмигевський М.В. Видатні математики. – Харків, 2004.

25. Бевз Г.П. Геометрія паркетів. – К., 2008.

26. Бевз Г.П. Геометрія трикутника і тетраедра. – К., 2009.

27. Тадеєв В.О. Геометрія, 10 клас. – Тернопіль, 2003.

Відомості з математики 5–9 класів

Пригадаємо найважливіші відомості з попередніх класів, які часто використовуються.

Закони дій

$$a + b = b + a$$
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$ab = ba$$
$$(ab)c = a(bc)$$
$$a(b + c) = ab + ac$$

Властивості дробів

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$$
$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}$$
$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}$$
$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}$$

Формули скороченого множення

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Степені і корені

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$
$$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$$
$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

Рівняння

Рівняння $ax = b$ має:
1 корінь, якщо $a \neq 0$;
0 коренів, якщо $a = 0$, $b \neq 0$;
безліч коренів, якщо $a = 0$ і $b = 0$.

Квадратні рівняння

$ax^2 + bx + c = 0$ – рівняння,

$D = b^2 - 4ac$ – дискримінант,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a},\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a};$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

$x^2 + px + q = 0$ – зведене рівняння,

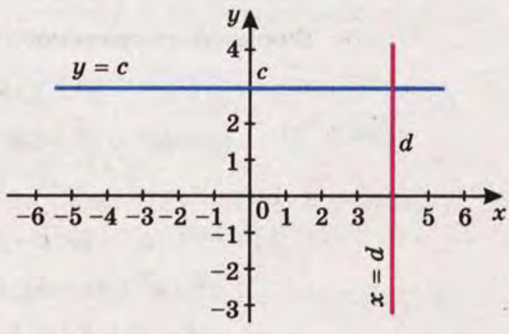
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$ – його корені,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}$$ – теорема Вієта.

Рівняння з двома змінними

Лінійне рівняння з двома змінними $ax + by = c$ має безліч розв'язків або не має жодного (якщо $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$).

Графіки рівнянь $y = c$, $x = d$.

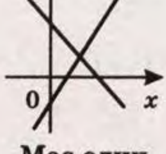


Система лінійних рівнянь

Система лінійних рівнянь:

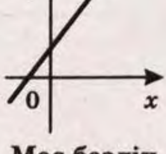
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$



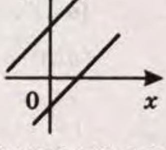
Має один розв'язок

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



Має безліч розв'язків

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$



Не має жодного розв'язку

Прогресії

Арифметична прогресія:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Геометрична прогресія:

$$b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, b_1q^4, \ldots$$

$$b_n = b_1q^{n-1},$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

$$S_n = \frac{b_1}{q-1}, \text{ якщо } |q| < 1.$$

Нерівності

$a > b$, якщо число $a - b$ додатне,

$a < b$, якщо число $a - b$ від'ємне.

Властивості числових нерівностей

Якщо $a < b$, то $b > a$.

Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

Якщо $a < b$, то $a + c < b + c$.

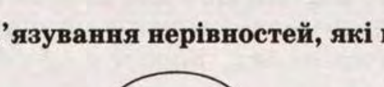
Якщо $a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$.

Якщо $a < b$ і $c < 0$, то $ac > bc$.

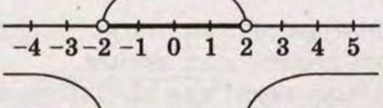
Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

Якщо $0 < a < b$ і $0 < c < d$, то $ac < bd$.

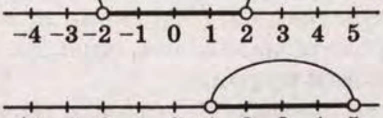
Розв'язування нерівностей, які містять модуль

$|x| < 2$ 

$(-2; 2)$

$|x| > 2$ 

$(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

$|x - 3| < 2$ 

$(1; 5)$

Аксіоми планіметрії. Основне в геометрії – її поняття і твердження. Для більшості понять формулюються означення, але існують поняття *неозначувані*. Це – *точка*, *пряма*, *площина* та деякі інші.

Переважну більшість геометричних тверджень доводять, тобто показують, що вони як логічні наслідки випливають з інших істинних тверджень. А як бути, коли на початку курсу ще немає «інших тверджень»? У цих випадках кілька тверджень приймають за істинні без доведень. Їх називають *аксіомами*. А твердження, що доводяться, – *теоремами*.

Для планіметрії можна обирати різні системи аксіом. Одна з них може бути такою.

1. *Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.*
2. *Через будь-які дві різні точки можна провести пряму і тільки одну.*
3. *З трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.*
4. *Кожний відрізок має певну довжину.*
5. *Кожний кут має певну міру.*
6. *Пряма розбиває площину на дві півплощини.*
7. *На будь-якій прямій від заданої точки у заданому напрямі можна відкласти відрізок даної довжини і тільки один.*
8. *Від будь-якого променя у даній півплощині можна відкласти даний кут з вершиною у початку променя і тільки один.*
9. *Який би не був трикутник, існує рівний йому трикутник у заданому розміщенні відносно заданої прямої.*
10. *Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій (аксіома Евкліда).*

Розділи про геометричні величини, геометричні перетворення і побудови потребують додаткових аксіом.

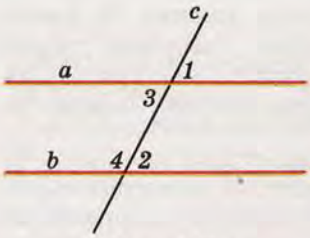
Паралельні і перпендикулярні прямі. Дві прямі однієї площини називаються *паралельними*, якщо вони не перетинаються. Два відрізки або промені називають *паралельними*, якщо вони належать паралельним прямим.

Ознаки паралельності прямих. Дві прямі a і b однієї площини паралельні (мал. 246), якщо їх січна утворює з ними:

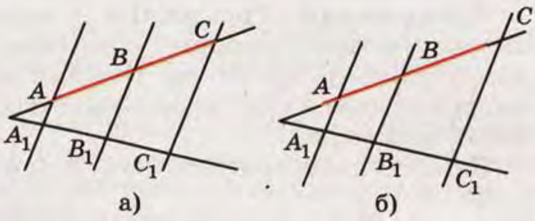
а) рівні відповідні кути ($\angle 1 = \angle 2$); або

б) рівні внутрішні різносторонні кути ($\angle 2 = \angle 3$); або

в) внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює $180°$ ($\angle 3 + \angle 4 = 180°$).



Мал. 246



Мал. 247

Властивості паралельних прямих. Якщо прямі a і b паралельні, то виконуються всі три рівності, зазначені вище в пунктах а) – в).

Відношення паралельності прямих транзитивне: якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Дві прямі називаються *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом. Відрізки або промені називають *перпендикулярними*, якщо вони належать перпендикулярним прямим.

Дві прямі однієї площини, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

Теорема Фалеса. Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута і на одній стороні відтинають рівні відрізки, то і на другій стороні вони відтинають рівні відрізки.

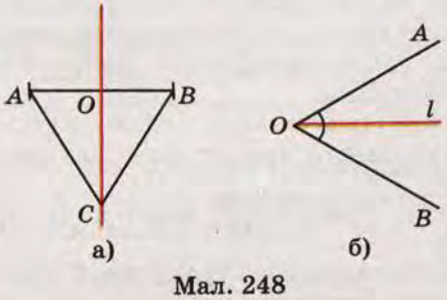
Якщо $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ і $AB = BC$, то $A_1B_1 = B_1C_1$ (мал. 247, *а*).

Узагальнена теорема Фалеса. Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від них пропорційні відрізки.

Якщо $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, то $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$ (мал. 247, *б*).

Геометричне місце точок – це множина усіх точок, які задовольняють певну умову.

Геометричним місцем точок площини, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр цього відрізка (мал. 248, *а*).



Мал. 248

Якщо $AO = BO$ і $CO \perp AB$, то $AC = BC$.

Геометричне місце точок кута, рівновіддалених від його сторін, – бісектриса цього кута (мал. 248, *б*).

Трикутники. *Трикутник* – замкнена ламана із трьох ланок. Частина площини, обмежена такою ламаною, також називається трикутником. Кожний трикутник має три сторони, три вершини і три кути. Суму сторін трикутника називають його *периметром*.

Якщо сторони трикутника a, b, c, а протилежні їм кути α, β, γ, то:

$$|b-c| < a < b + c;$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Ознаки рівності трикутників. Два трикутники рівні, якщо:

1) дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника; або

2) сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і прилеглим до неї кутам другого трикутника; або

3) три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника.

У кожному трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута – більша сторона.

Відрізок, який сполучає середини двох сторін трикутника, – його *середня лінія*. Середня лінія трикутника паралельна його третій стороні і дорівнює її половині.

Трикутники, в яких усі відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні, називаються *подібними*.

Основна теорема про подібність трикутників. Січна пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному.

Ознаки подібності трикутників. Два трикутники подібні, якщо:

1) два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника; або

2) дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника, а кути між ними рівні; або

3) три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого трикутника.

Два прямокутні трикутники подібні, якщо:

1) гострий кут одного трикутника дорівнює куту другого трикутника; або

2) катети одного трикутника пропорційні катетам другого трикутника; або

3) катет і гіпотенуза одного трикутника пропорційні катету і гіпотенузі другого трикутника.

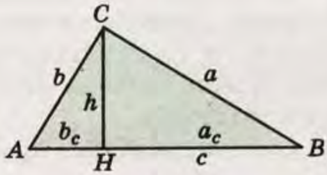
З ознак подібності трикутників випливають такі теореми.

Бісектриса трикутника ділить його протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам.

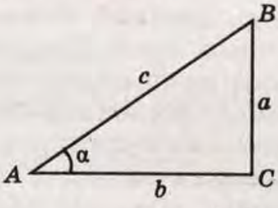
Медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну медіану у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника.

Катет прямокутного трикутника – середнє пропорційне гіпотенузи c і його проекції на гіпотенузу. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, – середнє пропорційне відрізків, на які висота ділить гіпотенузу (мал. 249).

$$a^2 = a_c \cdot c; \quad b^2 = b_c \cdot c; \quad h^2 = a_c \cdot b_c.$$



Мал. 249



Мал. 250

Якщо c – гіпотенуза, а a, b – катети прямокутного трикутника (мал. 250), то:

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ – } \textit{теорема Піфагора};$$

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha; \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha; \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha; \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Якщо a, b, c – сторони трикутника, а α, β, γ – протилежні їм кути, то завжди

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \text{ – } \textit{теорема косинусів};$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \text{ – } \textit{теорема синусів}.$$

Кожний з трьох останніх дробів дорівнює $2R$, де R – радіус кола, описаного навколо даного трикутника.

Навколо кожного трикутника можна описати коло і до того ж тільки одне. Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів його сторін. У кожний трикутник можна вписати коло і до того ж тільки одне. Центром кола, вписаного в трикутник, є точка перетину його бісектрис.

Площа трикутника. Кожний трикутник (як частина площини, обмежена замкненою ламаною) має площу. Формули для визначення площі трикутника:

$$S = \frac{1}{2}ah_a; \; S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma; \; S = rp; \; S = \frac{abc}{4R}.$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ – } \textit{формула Герона}, \text{ де } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Для прямокутних і рівносторонніх трикутників формули простіші:

Прямокутний трикутник	Рівносторонній трикутник
$S = \frac{1}{2}ab$; $r = \frac{a+b-c}{2}$; $R = \frac{c}{2}$	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Чотирикутники. *Чотирикутник* – проста замкнена ламана з чотирьох ланок. Частина площини, обмежена такою ламаною, також називається чотирикутником. Сума всіх кутів кожного чотирикутника дорівнює 360°. Кожна сторона чотирикутника менша від суми трьох інших його сторін.

Чотирикутник, кожна сторона якого паралельна протилежній стороні, – *паралелограм.*

Ознаки паралелограма. Чотирикутник є паралелограмом, якщо:

1) кожна його сторона дорівнює протилежній стороні; або
2) дві його сторони паралельні й рівні; або
3) його діагоналі точкою перетину діляться навпіл.

Властивості паралелограма:

- кожна сторона паралелограма паралельна протилежній стороні і дорівнює їй;
- кожний кут паралелограма дорівнює протилежному куту;
- кожна діагональ паралелограма точкою перетину ділиться навпіл;
- сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.

Окремі види паралелограмів – *прямокутники*, *ромби*, *квадрати* – мають додаткові властивості:

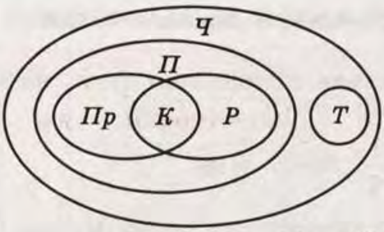
– діагоналі прямокутника (квадрата) рівні;

– діагоналі ромба (квадрата) перпендикулярні і належать бісектрисам його кутів.

Чотирикутник, тільки дві сторони якого паралельні, – *трапеція*. Паралельні сторони трапеції – її основи, дві інші – бічні сторони. Окремі види трапецій – рівнобічні і прямокутні трапеції. Відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції, – її *середня лінія*. Середня лінія трапеції паралельна її основам і дорівнює їх півсумі.

Співвідношення між окремими видами чотирикутників показано на схемі (мал. 251).

Площі чотирикутників. Площа прямокутника дорівнює добутку двох його сусідніх сторін $S = ab$.



Ч — *чотирикутники*
П — *паралелограми*
Пр — *прямокутники*
Р — *ромби*
К — *квадрати*
Т — *трапеції*

Мал. 251

Площа паралелограма

$$S = ah_a \text{ або } S = ab\sin\gamma,$$

де a, b – його сторони, γ – кут між ними, h_a – висота, опущена на сторону a.

Якщо діагоналі чотирикутника дорівнюють d_1 і d_2, а кут між ними α, то його площа $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$.

Площа ромба дорівнює $S = \frac{1}{2}d_1d_2$.

Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Коло. Кути та відрізки, пов'язані з колом. *Коло* – фігура, що складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки – *центра кола*. Частина площини, обмежена колом, – *круг*. *Радіус* – відрізок, що сполучає будь-яку точку кола з його центром. Відрізок, що сполучає дві довільні точки кола, називають *хордою*. Хорда, що проходить через центр кола, – *діаметр*.

Пряма, яка має з колом тільки одну спільну точку і лежить у площині кола, називається *дотичною* до кола.

а) б)

Мал. 252

Мають місце такі властивості:

- діаметр кола, проведений через середину хорди, відмінної від діаметра, перпендикулярний до неї;
- дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику (мал. 252, *а*);

- відрізки дотичних, проведених до кола з однієї точки, рівні;
- вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається (мал. 252, *б*):

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}.$$

Довжину кола C радіуса r визначають за формулою $C = 2\pi r$. Довжину l дуги кола радіуса r, яка має n градусів, можна визначити за формулою $l = \frac{\pi r n}{180}$.

Площу S круга радіуса r знаходять за формулою $S = \pi r^2$.

Частину круга, обмежену двома його радіусами, називають *сектором*, а частину круга, обмежену його хордою і дугою, – *сегментом* (мал. 253). Сегмент може бути півкругом, меншим від півкруга або більшим. Півкруг – один з видів сектора. Якщо сектор круга радіуса r має n градусів, то його площа $S_{\text{сек}} = \frac{\pi r^2 n}{360}$. Площа довільного сегмента дорівнює сумі або різниці площ сектора і трикутника.

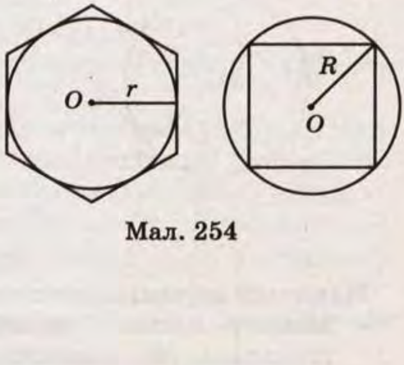
Сторона a_n правильного n-кутника через радіус R описаного кола і радіус r вписаного кола (мал. 254) виражається формулами:

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} \text{ і } a_n = 2r\,\text{tg}\,\frac{180^\circ}{n};$$

$$a_3 = R\sqrt{3},\ a_4 = R\sqrt{2},\ a_6 = R;$$

$$a_3 = 2r\sqrt{3},\ a_4 = 2r,\ a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

Мал. 253



Мал. 254

Таблиця значень тригонометричних функцій

Градуси	Синуси	Косинуси	Тангенси	Котангенси	Градуси
0	0,00000	1,00000	0,00000	∞	90
1	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	89
2	0,03490	0,99939	0,03492	28,63698	88
3	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	87
4	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	86
5	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	85
6	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	84
7	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	83
8	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	82
9	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	81
10	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	80
11	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	79
12	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	78
13	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	77
14	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	76
15	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	75
16	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	74
17	0,29237	0,95630	0,30573	3,27685	73
18	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	72
19	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	71
20	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	70
21	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	69
22	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	68
23	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	67
24	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	66
25	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	65
26	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	64
27	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	63
28	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	62
29	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	61
30	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60
31	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	59
32	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	58
33	0,54464	0,83867	0,64941	1,53987	57
34	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	56
35	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	55
36	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	54
37	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	53
38	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	52
39	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	51
40	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	50
41	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	49
42	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	48
43	0,68200	0,73135	0,93252	1,07239	47
44	0,69466	0,71934	0,96569	1,03553	46
45	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	45
	cos	sin	tg	ctg	

Таблиця квадратів чисел

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	764	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	34814
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801
10	10000	10201	10404	10609	10816	11025	11236	11449	11664	11881
11	12100	12321	12544	12769	12996	13225	13456	13689	13924	14161
12	14400	14641	14884	15129	15376	15625	15876	16129	16384	16641
13	16900	17161	17424	17689	17956	18225	18496	18769	19044	19321
14	19600	19881	20164	20449	20736	21025	21316	21609	21904	22201
15	22500	22801	23104	23409	23716	24025	24336	24649	24964	25281

Предметний покажчик

Ф

Ч

Ц

Відповіді

4. Ні. **11.** 38 000 007 005. **15.** 4950. **17.** а) XLVII. **18.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{13}{10}$. **19.** б) 0,75. **20.** б) 5,133... . **21.** б) $\frac{1}{4}<\frac{2}{7}$. **27.** $10\,111_2 = 23$. **28.** Сума дорівнює 10 010 001. **29.** Цього не могло бути. **30.** $\overline{abcabc} = 1001\overline{abc}$, де a, b, c – цифри, а $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. **31.** У 1931 р. **32.** 1659 р. **37.** Сума двох ірраціональних чисел може бути як раціональним, так і ірраціональним числом. **38.** Правильно. **41.** а) 1 і 6. **49.** а) 24,1. **51.** а) 20. **52.** в) 7,8. **54.** 10; 6. **57.** а) 0,92. **59.** а) 4. **61.** а) 28. **63.** а) 3. **65.** а) 20. **66.** а) 426 км. **68.** 2,64 кг. **72.** б) 20. **73.** а) 22,5. **75.** а) −4. **77.** а) 1,6; б) 52. **79.** б) 7. **83.** 675 000 л. **84.** 9,93 Ом. **85.** а) 43 км. **88.** 19 і 14. **91.** а) 2000. **101.** 7500 т. **102.** 100 т. **103.** ≈ 22 %. **106.** 15 м. **107.** 500 кг. **109.** На 32 %. **110.** 76 найменувань. **112.** 34 %. **113.** 220 студентів. **114.** 420 клієнтів. **116.** 5200 грн. **119.** 2000 кг. **120.** ≈ 327 т. **122.** 134,4 грн. **125.** На 20 %. **126.** На 14,5 %. **127.** Знизилася на 6,5 %. **130.** 67,2 грн. і 60 грн. **131.** ≈ 22 %. **133.** На 50 %. **134.** 1,25 кг. **135.** 220 кг. **136.** Зменшилась удвічі. **137.** 125 г. **140.** 60 г. **144.** а) На 400 %. **146.** а) $(-\infty; 21)$. **155.** $S = \frac{1}{16}P^2$. **157.** Обидва говорять правильно. **158.** $L = \frac{3937}{3600}l$. **161.** в) 1; 0; 1; 2; 3. **163.** б) 5; 1,5; 1; 0,5; −9. **167.** а) (0; 0). **168.** б) $[-1; +\infty)$; г) $x \neq 1$. **169.** [0; 25]. **170.** [−2; 3]. **173.** $m = 0{,}8V + 40$. **175.** $y = 200 - 2{,}5x$, $x \in [0; 80]$. **177.** в) $y = 3x$. **180.** $y = x + 3$. **182.** Через точку (0; 5) графік не проходить. **190.** $t = \frac{2}{61}h + 14\frac{51}{61}$. **194.** а) $3a^2bc^3$. **203.** а) [0; 6]. **204.** а) [4; 7]. **209.** а) Один; в) два. **210.** в) 25. **211.** а) $y > 0$, якщо $x > -3$; $y < 0$, $x < -3$. **212.** б) Спадна. **218.** а) $y = 0$, якщо $x = -11$ і $x = 1$; $y < 0$, якщо $x \in (-11; 1)$. **219.** б) −2. **220.** в) −1. **223.** а) $x > -2{,}5$. **226.** а) (3; 2). **227.** а) 3 і −3. **229.** а) 3; д) −0,2. **235.** в) 1,5. **238.** б) 0,8. **239.** в) 7. **243.** б) −5. **244.** в) $5+2\sqrt{6}$. **246.** в) $\sqrt[6]{40}$. **247.** а) 4. **249.** а) $10\sqrt[3]{3}$. **250.** б) $2ab\sqrt[3]{4a^2}$. **251.** б) $\sqrt[4]{48}$. **252.** а) $\sqrt[4]{5a^4b^4}$. **253.** в) $5\sqrt[5]{16a^3}$. **254.** г) $\sqrt[3]{3}$. **255.** а) 8 і −8. **256.** в) 4 і −4. **257.** в) 5. **258.** в) 9. **259.** в) 0. **260.** в) 1. **261.** в) 0. **262.** ґ) −0,25. **263.** б) 6. **264.** а) $a\sqrt[4]{b}+b\sqrt[4]{a}$. **265.** а) $\sqrt{5}$. **266.** а) $3\sqrt[4]{8}$. **267.** б) $-3\left(1+\sqrt{6}\right)$. **269.** $\sqrt{11}$ і $-\sqrt{11}$. **270.** в) $\sqrt[9]{-2}$. **271.** в) 8.

272. в) −8. **273.** в) $7{,}5 \cdot 10^5$. **274.** а) $(-\infty; 3)$. **281.** в) 343. **282.** в) 1. **283.** а) 8. **284.** в) 2. **285.** в) 25. **286.** в) 6. **287.** б) 0,5. **288.** а) 3. **289.** а) 4. **291.** б) x^2. **292.** б) $c+1$. **295.** б) $\sqrt[3]{x-3}$. **296.** в) $a^2(x-a)^{0,5}$. **297.** а) $\sqrt[3]{c}+\sqrt[5]{c}$. **298.** в) $c^{2,2}$. **299.** б) a^1. **300.** б) 4. **301.** в) 2. **302.** а) 1000. **303.** б) 0,8. **304.** а) a^2-x. **305.** б) $n+8$. **306.** б) $x^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$. **307.** в) $c+1$; г) $-\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2$. **308.** в) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$. **310.** б) 5 і −4. **323.** Ні. **325.** $-m$. **335.** а) 2; г) 0,5. **337.** б) 8. **340.** б) 1. **342.** г) −0,25. **350.** а) 2. **352.** 60 кг. **356.** а) 81. **357.** а) 8. **358.** а) 9. **359.** а) 5; б) 5. **360.** а) 2; г) 5. **361.** а) 0,75 і −2; б) 7 і −11; в) 2 і −1,4. **362.** а) 8. **363.** а) $[0; 9)$; в) $(49; +\infty)$. **364.** а) 0,25. **365.** а) 9 і −9. **366.** а) 4 і 9. **367.** б) −1 і 27. **368.** в) 5. **369.** а) 3; в) 0, 3 і 4. **370.** а) 3; в) 61. **371.** а) 7; в) 84. **372.** а) 4; в) 3. **373.** а) $[2; 3)$. **374.** а) $(-\infty; 25)$. **375.** а) $[-4; -1)$. **376.** а) $(8; 1)$. **377.** а) $(9; 1)$. **378.** а) $(25; 9)$. **379.** 5 см і 12 см. **380.** 16 см і 63 см. **391.** 360°; 4320°. **395.** $\sin\alpha = 0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = 1\frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$ або $\sin\alpha = -0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha=-1\frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{3}{4}$. **397.** б) $\cos 10° > \cos 40°$; в) $\sin 20° = \sin 160°$. **398.** а) $0{,}5\left(1+\sqrt{3}\right)$; в) 0,5. **399.** б) $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\operatorname{ctg} 90° = 0$. **400.** а) $\cos 5° > \cos 7°$. **401.** б) $0{,}25\sqrt{3}$. **402.** а) Мінус; г) плюс. **404.** а) Плюс. **406.** а) 0. **407.** а) $2\sqrt{2}$. **409.** в) 2 і 0. **410.** в) Ні. **414.** а) 30°. **415.** а) $0{,}5\sqrt{2}$ або $-0{,}5\sqrt{2}$. **419.** а) $\beta > \alpha$. **431.** д) $\frac{3\pi}{4}$. **432.** в) $\frac{7\pi}{12}$. **433.** а) 120°. **434.** а) ≈ 114°. **440.** а) Мінус. **445.** а) 0. **446.** в) 0,5. **447.** б) 1,25. **448.** б) $\sqrt{2}$. **449.** б) $\sin 1 > \sin 3$. **456.** а) 2. **458.** в) 1. **467.** а) $\sin^2\alpha$; в) 1. **468.** а) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; в) $\operatorname{tg} x$. **469.** б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **470.** б) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{3}{4}$. **471.** б) $\sin\alpha = -0{,}6$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$. **472.** а) 0. **478.** а) $2\sin^2\alpha$. **479.** а) $\operatorname{ctg}\alpha$. **480.** б) $\frac{2}{\sin\alpha}$. **489.** а) $-\sin\alpha$. **491.** а) $\cos 2\alpha$. **494.** а) $-\operatorname{ctg}\alpha$. **495.** б) $\sin^2\alpha$. **497.** а) $\sin x + \cos x$. **498.** а) 0. **499.** а) −1. **500.** в) 1. **501.** а) 0,5. **502.** б) 1. **503.** а) $-\cos\alpha$. **504.** б) $-\cos 3\alpha$. **505.** а) 0; в) 1. **506.** в) 0,5. **508.** а) −1. **511.** а) $\cos^2\alpha$. **512.** а) 1. **514.** а) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **534.** а) R; б) $x \neq \pi n$, $n \in Z$. **535.** а) $[-2; 2]$; в) $[0{,}5; 1{,}5]$. **537.** а) $2\pi n$, $n \in Z$. **539.** а) Непарна; б) парна.

547. Так. **549.** б) 0. **551.** На 32 %. **560.** б) π. **561.** в) $0{,}5\pi$. **566.** а) π. **567.** а) 20π. **568.** б) 4π. **583.** а) $\sin(\alpha + x)$. **584.** а) $\cos\alpha \sin\beta$. **585.** в) $-0{,}5$. **586.** а) 0. **587.** а) $\sqrt{3}$. **592.** а) $0{,}25\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$. **593.** б) $0{,}25\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$. **594.** г) $2+\sqrt{3}$. **595.** б) $0{,}25\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$. **596.** а) 0. **597.** а) $\sin\alpha$. **598.** а) $-0{,}5\sqrt{3}\cos x$; в) $-\mathrm{ctg}\beta$. **599.** а) 1. **600.** а) $0{,}5\sqrt{3}$. **603.** $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = 2{,}375$. **607.** 75 км/год і 25 км/год. **608.** б) $[0{,}5; 5]$. **613.** а) $0{,}5$; б) $0{,}5\sqrt{2}$. **614.** а) 1; г) $\cos 2\beta$. **615.** а) $\sin\alpha$. **616.** а) $\mathrm{tg}\alpha$. **617.** б) $2\sin 3x$. **621.** а) $\cos 20°$. **622.** а) $2\sin 3\alpha \cos 2\alpha$. **625.** а) $\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)$. **626.** а) $\cos\alpha$. **627.** а) $\sqrt{2}\sin x$. **632.** в) $4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\varphi}{2}\right)$. **633.** а) $4\cos 2x\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{3x}{2}\right)$. **636.** а) $\sin 2\alpha = -0{,}96$; $\cos 2\alpha = -0{,}28$. **647.** $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. **659.** в) $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$. **660.** а) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$. **663.** а) Розв'язків немає. **664.** а) $\pi n,\ n \in Z$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$. **665.** а) $\pi k,\ k \in Z$. **666.** а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$. **667.** а) $2\pi n,\ n \in Z$. **668.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$. **669.** а) $\frac{\pi}{2} - 2\pi n,\ n \in Z$. **670.** а) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$. **671.** 45° і 135°. **672.** а) 30° і 150°. **674.** а) $\pm\frac{\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in Z$. **680.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. **682.** а) $\pi k,\ k \in Z$. **686.** а) $\pi k,\ k \in Z$; $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5},\ n \in Z$. **687.** а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$. **692.** в) Розв'язків немає. **693.** а) $(\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k),\ k \in Z$. **695.** а) $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$. **701.** Так. **714.** а) Безліч, одну або жодної. **723.** На три або чотири частини. **741.** Ні. **744.** а) 1) AD; в) 1) ні. **745.** а) $(ABC) \cap (ABD) = AB$. **757.** Ні. **762.** 6 см. **764.** 32 см. **771.** а) Безліч. **772.** а) Одну. **773.** Ні. **775.** Ні. **776.** Ні. **777.** Відрізок BC не перетинає α, а пряма BC може перетинати. **784.** Чотири. **794.** Так. **795.** Шестикутник. **808.** а) $a \cap AB = A$. **809.** б) $MN \parallel BC$. **810.** Ні. **811.** Ні. **812.** Ні. **815.** 7,6 см. **818.** 22 м. **825.** 15 см. **826.** У 2 рази. **827.** 36 см; $5\frac{1}{7}$ см. **828.** 1 м; 7,5 м. **829.** 5 : 2. **847.** Променем, прямою або довільним кутом, який менший від розгорнутого. **850.** Ні. **853.** $A_1B_1 = 5$ см; $A_1C_1 = 3$ см. **854.** 15 см і 10 см, або 3 см і 2 см. **863.** 10 см і 6 см. **915.** 4 : 1. **922.** 6 см. **923.** 5 см. **924.** б) 12 см. **925.** $(2\sqrt{2}-1):1$. **926.** 10 см. **927.** а) 4 см; в) 7 см. **928.** а) 11 см; б) 9 см. **933.** $2{,}25\sqrt{3}$ см^2. **934.** $\frac{a}{16}\sqrt{16b^2-5a^2}$. **935.** $(2+\sqrt{2})l$; $\frac{l^2\sqrt{2}}{2}$. **936.** 40 см і 96 см^2. **948.** Ні. **957.** Ні. **960.** Ні. **961.** 10 дм. **962.** 10,5 дм і 1,6 дм. **963.** в) 4 см; г) 4 м. **964.** б) 6 см; г) 6 см. **965.** $2a+1{,}2\sqrt{2}a$. **967.** $16\sqrt{3}$ см^2. **978.** 60°. **979.** а) 80°. **980.** а) 45°. **983.** Можуть. **984.** Ні. **985.** Так. **987.** По 60°. **988.** а) $12\sqrt{2}$ см. **994.** б) $\arccos\frac{3}{4}$. **997.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$. **998.** 60°. **1008.** 13 см. **1011.** $m : n$. **1012.** a^2. **1014.** 8 см. **1015.** $2a$. **1016.** 12 см. **1020.** $\frac{a\sqrt{33}}{3}$. **1021.** $\frac{3\sqrt{231}}{4}$ см. **1022.** 13 см. **1024.** б) 7 см. **1025.** а) 2 см. **1036.** 30 см. **1039.** 97 см. **1040.** $2a$ і $a\sqrt{2}$. **1047.** 35 см. **1052.** 13 см і 15 см. **1053.** 5 см. **1054.** $5\sqrt{6}$ см. **1055.** 2,8 см. **1073.** Ні. **1074.** Безліч. **1079.** 20 см. **1080.** 4 см і 6 см. **1081.** а) $2\sqrt{11}$ см; б) 1 см. **1082.** $6\sqrt{2}$ см. **1086.** a. **1087.** m або $\sqrt{3}m$. **1088.** а) $a\sqrt{2}$; б) $a\sqrt{3}$; в) 60°. **1089.** $a\sqrt{1{,}5}$; $\cos\varphi = 0{,}25$. **1091.** 44 см; 96 см^2. **1107.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **1111.** 9 см. **1117.** а) 1 см^2; б) 3 дм^2. **1119.** 48 см. **1121.** $12\sqrt{14}$ см. **1123.** 20 см; $20\sqrt{2}$ см. **1124.** 19 см. **1129.** $\frac{l^2\sqrt{3}}{6\cos\beta}$. **1130.** $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$. **1140.** $\sqrt{a^2-(b+c)^2}$. **1141.** 4 дм і 5 дм. **1144.** 12 см. **1148.** 24 см. **1151.** $\frac{\alpha}{2}\sqrt{16+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **1157.** 8 м. **1158.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **1160.** 30 см. **1161.** 45 мм. **1163.** 28 м. **1166.** $\sqrt{6}$ см. **1168.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **1170.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **1193.** $\approx 2{,}38$ м. **1195.** 70°, 110°, 70°, 110°. **1196.** $8\sqrt{3}$ см. **1197.** 5 см. **1199.** 3,7 дм. **1200.** 80°. **1216.** 26 см. **1218.** 45°. **1219.** 30°.

ЗМІСТ

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна

МАТЕМАТИКА
10 клас

Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів

Рівень стандарту

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

2-ге видання

Редактор *О. Мовчан*. Обкладинка, макет, ілюстрації *В. Соловйова*. Технічний редактор *В. Олійник*. Коректори *І. Іванюсь*, *Л. Леуська*. Комп'ютерна верстка *К. Шалигіної, Ю. Лебедєва*

Формат $60\times90/_{16}$. Умовн. друк. арк. 17. Обл.-вид. арк. 16,05. Тираж 5023 пр. Вид. № 1050. Зам. № 323.

Видавництво «Генеза», вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212. Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 3966 від 01.02.2011.

Віддруковано з готових позитивів на ДП «Видавництво і друкарня "Таврида"», вул. Генерала Васильєва, 44, м. Сімферополь, АРК, 95000 Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 1174 від 25.12.2002.

E-mail: marketing@tavridabook.com.ua

Висновок санітарно-епідеміологічної експертизи № 05.03.02-04/27643 від 27.04.2010 р.