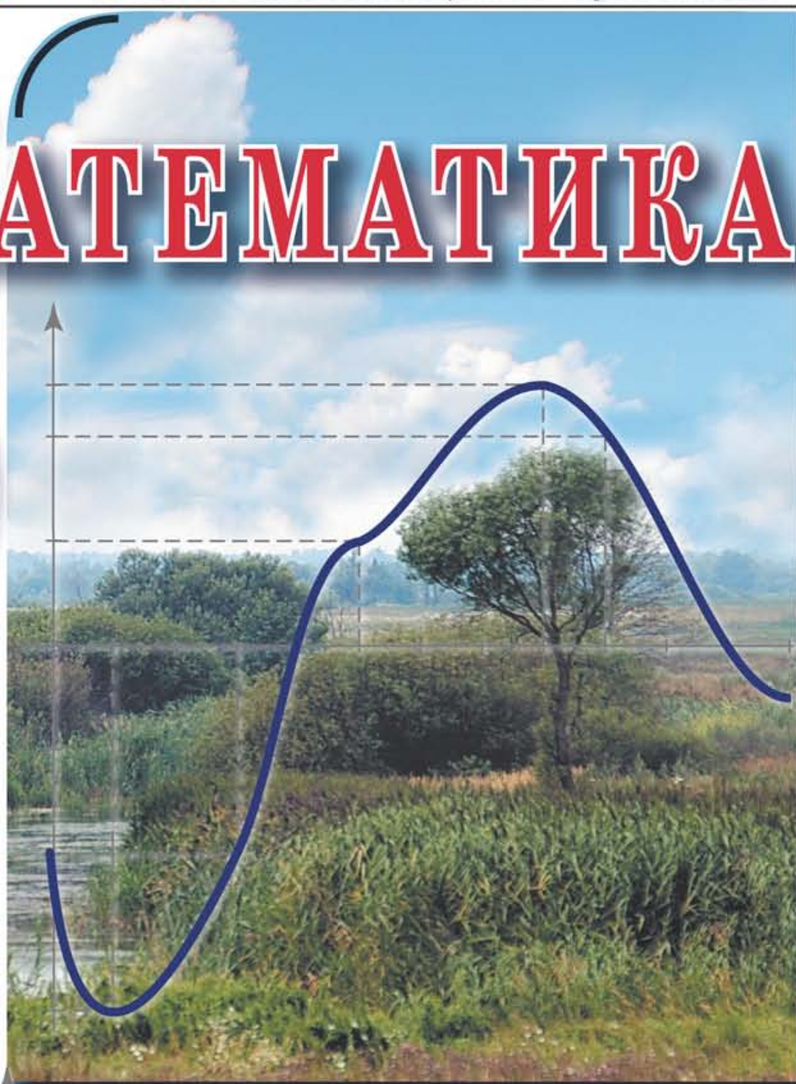
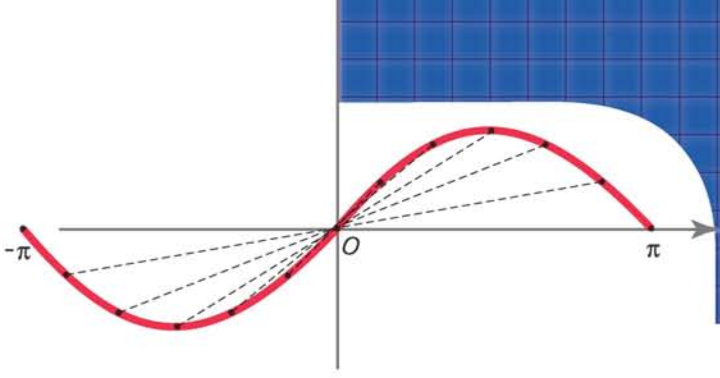
М. І. Бурда, Т. В. Колесник,
Ю. І. Мальований, Н. А. Тарасенкова

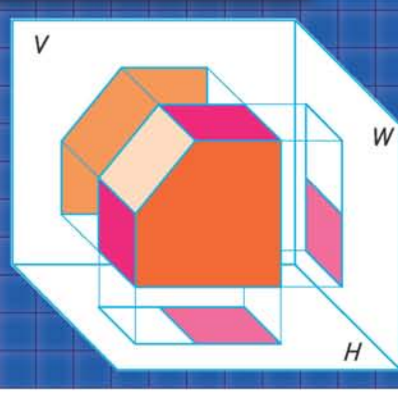
Математика

10

Рівень стандарту







Властивості арифметичного кореня n-го степеня
$(n, k \in N, n \geq 2, k \geq 2, a \geq 0, b \geq 0)$

$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, n \geq 1$; $\sqrt[2n-1]{-a} = -\sqrt[2n-1]{a}$; $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$;

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$; $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$; $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$; $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, 0 \leq a < b$

Властивості степеня з раціональним показником
($a > 0$, $b > 0$, r, s — раціональні числа)

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$; $(a^r)^s = a^{rs}$; $(ab)^r = a^r b^r$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$; $a^r > 0$;

$a^r > 1$, якщо $a > 1$, $r > 0$; $a^r < 1$, якщо $a > 1$, $r < 0$;

$a^r > a^s$ якщо $a > 1$, $r > s$; $a^r < a^s$, якщо $0 < a < 1$, $r > s$;

$a^r < b^r$ якщо $r > 0$, $a < b$; $a^r > b^r$, якщо $r < 0$, $a < b$

Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того самого аргументу

$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$; $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos x}{\sin x}}$, $\alpha \neq \pi n, n \in Z$; $\boxed{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1}$, $\alpha \neq n\dfrac{\pi}{2}, n \in Z$;

$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

$\boxed{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}}$, $\alpha \neq \pi n, n \in Z$

Формули зведення

x	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\pi\pm\alpha$	$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$

Формули додавання

$\boxed{\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;}$

$\boxed{\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta.}$

$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},}$ $\alpha, \beta, \alpha\pm\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

Формули подвійного аргументу

$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;}$

$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;}$

$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},}$ $\alpha, 2\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$

$\boxed{\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha},}$ $\alpha\neq n\frac{\pi}{2},\ n\in Z$

Найпростіші тригонометричні рівняння

$\sin x=a(|a|\leq 1) \Leftrightarrow x=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\ k\in Z;$

$\cos x=a(|a|\leq 1) \Leftrightarrow x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in Z;$

$\operatorname{tg} x=a(a\in R) \Leftrightarrow x=\operatorname{arctg} a+\pi n,\ n\in Z;$

$\operatorname{ctg} x=a(a\in R) \Leftrightarrow x=\operatorname{arcctg} a+\pi n,\ n\in Z$

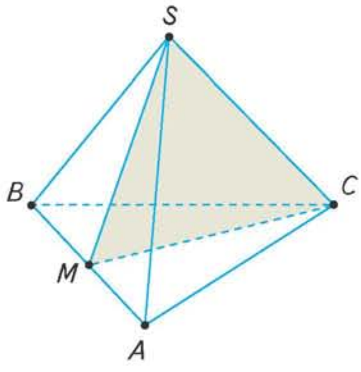
М. І. Бурда, Т. В. Колесник,
Ю. І. Мальований,
Н. А. Тарасенкова

МАТЕМАТИКА

Підручник для 10 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рівень стандарту

Рекомендовано Міністерством
освіти і науки України



Підручник — переможець
Всеукраїнського конкурсу підручників
Міністерства освіти і науки України в 2010 р.

Київ
«Зодіак-ЕКО»
2010

ББК 22.151я721
Б91

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 3 березня 2010 р. № 177)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Наукову експертизу проводив ***Інститут математики Національної академії наук України***;
психолого-педагогічну експертизу проводив ***Інститут педагогіки Національної академії педагогічних наук України***.

Експерти рукопису підручника:
В. В. Вдовенко — доцент Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка
Т. М. Дорошенко — учитель, старший учитель Смілянської ЗОШ I — III ст. № 7, Черакаська область;
О. В. Читаєва — учитель Луганської спеціалізованої школи № 57;
О. А. Калашник — завідувач МК відділу освіти Добровеличківської РДА, Кіровоградська область;
К. В. Калібреда — методист, спеціаліст вищої категорії МК відділу освіти Іванівської РДА, Херсонська область

ТВОРЧА ГРУПА РОЗРОБНИКІВ ПІДРУЧНИКА

Юрій КУЗНЕЦОВ – керівник проекту, розробник концепцій: структури, дизайну;

Михайло БУРДА, Тамара КОЛЕСНИК, Юрій МАЛЬОВАНИЙ, Ніна ТАРАСЕНКОВА — автори тексту і методичного апарату;

Наталія ДЕМИДЕНКО – редактор-організатор, контрольне редагування;

Володимир ЛИТВИНЕНКО — розробник макета, художнього оформлення, художник обкладинки;

Валентина МАКСИМОВСЬКА — організатор виробничого процесу;

Галина КУЗНЄЦОВА — економічний супровід проекту;

Роман КОСТЕНКО — маркетингові дослідження підручника;

Андрій КУЗНЕЦОВ — моніторинг апробації підручника

ISBN 978-966-7090-71-5

ЗМІСТ

Дорогі учні!

Ви приступаєте до вивчення курсу математики, який складається з двох частин — алгебри і початків аналізу та стереометрії — розділу геометрії.

У першій частині курсу математики ви систематизуєте і поглибите знання про степінь числа, властивості вже відомих функцій, ознайомитеся з новими функціями — степеневими і тригонометричними. Виробите вміння будувати графіки функціональних залежностей, застосовувати вивчені поняття і властивості до розв'язування задач та дослідження найпростіших математичних моделей.

Друга частина курсу математики присвячена стереометрії — розділу геометрії про властивості фігур у просторі. У 9 класі ви ознайомилися з деякими властивостями таких фігур. Знаєте, як можуть розміщуватися в просторі прямі та площини, як знаходити поверхні та об'єми окремих видів многогранників і тіл обертання. Тепер ви розширите і поглибите свої знання зі стереометрії. Дізнаєтеся про аксіоми стереометрії та наслідки з них, про паралельність і перпендикулярність у просторі. Виробите вміння застосовувати вивчені поняття, властивості й ознаки під час розв'язування задач та на практиці. Ви переконаєтеся, що знання й уміння зі стереометрії потрібні багатьом спеціалістам — архітекторам, будівельникам, конструкторам, токарям, фрезерувальникам та ін.

Як успішно вивчати математику за цим підручником? Весь матеріал поділено на розділи, а розділи — на параграфи. Кожний параграф містить теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, особливу увагу звертайте на текст, виділений кольором і обведений рамкою. Це найважливіші означення і властивості. Їх потрібно зрозуміти, запам'ятати і вміти застосовувати під час розв'язування задач. Інші важливі відомості надруковано **жирним** шрифтом. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви понять). У тексті параграфів ви знайдете також зразки розв'язань деяких задач і вправ.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Згадайте головне» після кожного параграфа. Наприкінці кожного розділу вміщено контрольні запитання і тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечком (°) позначають задачі та вправи середнього рівня складності. Усім треба вміти їх розв'язувати, щоб мати змогу вивчати математику далі. Номери задач і вправ достатнього рівня складності не мають позначки біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочкою (*) позначено задачі та вправи високого рівня складності. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння і наполегливість. Радість від того, що ви розв'язали складну задачу, буде вам нагородою. Відшукати шляхи до розв'язування деяких із таких задач допоможуть вказівки, вміщені у відповідях.

Розв'язавши задачі, що виділено жирним шрифтом, запам'ятайте їх формулювання. Ці математичні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач.

Скориставшись рубрикою «Дізнайтеся більше», ви зможете поглибити свої знання.

У кінці підручника ви знайдете необхідний додатковий матеріал та вправи для повторення курсу, вивченого в 10 класі, а також курсу алгебри і геометрії 7 — 9 класів.

У підручнику застосовуються спеціальні позначки (піктограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.

Прочитайте — **Як записати**

Поміркуйте — **Як діяти**

Запам'ятайте — **Типова задача**

Бажаємо вам успіхів у пізнанні нового і задоволення від навчання!

Вступ

У природі існує внутрішньо притаманна їй прихована гармонія, яка відображається в нашому розумі у вигляді простих математичних законів.

Герман Вейль

...природа формулює свої закони мовою математики.

Галілео Галілей

Усі наші знання про навколишній світ уявляються у вигляді найрізноманітніших моделей: інтуїтивних, словесних, механічних, електричних, математичних. Моделювання в широкому розумінні є одним з основних способів вивчення довкілля. Якщо йдеться про природничі науки, то найпоширенішими є фізичне та математичне моделювання.

Процес фізичного моделювання заснований, як правило, на теорії подібності. Фізична модель фактично є певним макетом досліджуваної системи зі збереженням її фізичної сутності. Разом з тим фізичний тип моделі має обмежену сферу застосування. Не для кожного явища і не для кожного об'єкта можна побудувати зменшені фізичні аналоги, а іноді це робити недоцільно. У таких випадках застосовують математичне моделювання.

Математичними моделями прийнято називати системи математичних об'єктів, що описують досліджуваний процес або явище математичною мовою. Для складання математичних моделей використовують різноманітні математичні засоби: рівняння, функції, графи, таблиці й схеми, співвідношення математичної логіки, геометричні конструкції тощо. У моделі концентрується сукупність наших знань, уявлень, гіпотез про відповідний об'єкт чи явище. Оскільки ці знання ніколи не бувають абсолютними, а гіпотези можуть іноді навмисно не враховувати деякі факти (наприклад, вплив сили тертя в механіці, тепловтрати в електротехніці тощо), то модель лише наближено описує поведінку реальної системи. Заміна вже наявних моделей на ті, в яких повніше відтворюються суттєві для дослідження властивості процесу чи явища, комбіноване застосування різних моделей — шлях пізнання дійсності.

Історія розвитку математики дає змогу зрозуміти закономірності становлення математичного моделювання та його значення в пізнанні світу. Моделювання в математиці почалося разом з її формуванням. У період, коли формувалися початкові математичні поняття та уявлення, відбувалося переважно накопичення математичних абстракцій, панували найпростіші математичні операції. Серед перших математичних систем найвідомішою є геометрія Евкліда, практичне походження якої не викликає сумніву. Геометрія Евкліда важлива тим, що в її основі були система ретельно продуманих аксіом і дедуктивно-логічний характер розвитку міркувань, що надало їй форму, характерну нині для математичних теорій взагалі. Евклідова геометрія — один з ранніх прикладів того, що математичні моделі, виникнувши, стають відносно самостійними й вивчаються в математиці незалежно від кола задач, що зумовили їх створення.

Практика і теорія обчислювальних, а потім арифметико-алгебраїчних частин математики вимагали створення моделей іншого типу. Йдеться про задачі, які зводяться до складання та розв'язування рівнянь і одночасно до розширення поняття числа. Намагання повніше вивчити реальні об'єкти приводило до побудови моделей, які допомагали глибше проникати в сутність понять величини, числа, рівняння та інших.

Математичні методи здавна широко застосовуються у фізиці, починаючи з найдавнішого її розділу — механіки. В історії науки є чимало прикладів застосування математичного моделювання до проблем фізики. Класичним прикладом може бути відкриття французьким ученим-астрономом У. Левер'є в 1846 р. нової планети Сонячної системи — Нептуна. Відкриття було зроблено математично, «на кінчику пера». Вихідною інформацією стало відхилення в русі відомої планети Уран, траєкторія якої не збігалася з обчисленою для неї кеплеровою орбітою. Левер'є припустив, що причиною цього є невідома планета і обчислив її траєкторію, виходячи з рівнянь небесної механіки. На підставі його вказівок нову планету виявив німецький астроном Й. Г. Галле. Незалежно від У. Левер'є розрахував орбіту та координати планети Нептун і англійський астроном Д. Адамс (1845 р.). Ця робота вимагала величезної кількості трудомістких обчислень, які довелося виконувати вручну. Адамс навіть винайшов новий метод чисельного розв'язування диференціальних рівнянь, який в обчислювальній математиці названий його ім'ям.

Історія суднобудування пов'язана з іменем академіка О. М. Крилова (1863 — 1945). Саме він розробив математичні моделі конструкцій суден. Математичне моделювання в цьому випадку мало яскраву практичну спрямованість, бо давало конкретні рекомендації щодо оптимального вибору конструкції. Це вимагало значної обчислювальної роботи і вдосконалення методів розрахунків. О. М. Крилову належить перший у світовій науковій літературі курс з чисельних методів «Лекції про наближені обчислення», виданий у 1911 р.

М. В. Остроградський

Ще приклад. Однією з перешкод на шляху створення швидкісних літаків було таке грізне явище, як флатер: під час експериментальних польотів у деяких критичних режимах несподівано виникали різкі вібрації конструкції — і машина буквально розвалювалася в повітрі на частини. Яка причина аварій? У техніці відомі випадки руйнування конструкцій під дією періодичних навантажень через резонансні явища, в результаті яких коливання конструкції невпинно зростають і можуть спричинити катастрофу. В разі флатера періодичні вібрації

М. М. Крилов

породжуються повітряними вихорами, які зриваються з крил і хвостового оперення літака під час обтікання їх потоком повітря. Частота поштовхів зростає разом із швидкістю і, наблизившись до частоти власних коливань елементів конструкції літака, може спричинити резонанс. Флатер детально вивчали експериментально, однак лише за допомогою методу математичного моделювання було створено надійні практичні методи боротьби з цим небезпечним явищем. Академік М. В. Келдиш побудував математичну модель для обчислення частот власних коливань елементів конструкції літака, чим збагатив не тільки механіку й літакобудування, а й математичну науку.

Значний внесок у розвиток прикладної математики зробили українські вчені-математики М. В. Остроградський (1801 — 1862), В. Я. Буняковський (1804 — 1889), Д. О. Граве (1863 — 1939), М. М. Крилов (1879 — 1955), М. П. Кравчук (1892 — 1942), М. М. Боголюбов (1909 — 1992), Ю. О. Митропольський (1917 — 2008), В. М. Остапенко (1923 — 1994) та інші.

Зокрема, М. В. Остроградський розробив математичні методи розв'язування задач аналітичної механіки, гідромеханіки, теорії пружності, небесної механіки. М. М. Крилов — засновник Київської математичної школи нелінійної механіки та математичної фізики. Наукові праці М. П. Кравчука широко застосовуються в розв'язуванні прикладних задач.

Застосування математики до розв'язування прикладних задач можна зобразити такою схемою: побудова математичної моделі → розв'язування математичної задачі → змістовий аналіз одержаних результатів.

Складність математичної моделі визначається, як правило, складністю досліджуваного об'єкта й точністю розрахунків. У період, що передував створенню потужної обчислювальної техніки, використання математичних моделей у науці й техніці було обмеженим через необхідність виконання величезного обсягу обчислень. Збільшивши в десятки й сотні мільйонів разів швидкість виконання арифметичних і логічних операцій, обчислювальні машини значно підвищили продуктивність інтелектуальної праці людини і сприяли докорінним змінам у галузі переробки інформації. У наш час обчислювальні машини застосовуються в усіх сферах інтелектуальної діяльності людини, стають одним з вирішальних чинників науково-технічного прогресу.

М. П. Кравчук

За допомогою перших електронно-обчислювальних машин вдалося розв'язати складні математичні задачі ядерної фізики, балістики, прикладної та небесної механіки. Саме під час розв'язування цих задач відбулося формування якісно нового методу теоретичних досліджень, який згодом трансформувався в нову сучасну технологію і методологію наукових пошуків — обчислювальний експеримент. Основою обчислювального експерименту є математичне моделювання, при цьому теоретичну базу становить прикладна математика, а технічну, ясна річ, — обчислювальні машини.

Зрозуміло, що цінність математики не зводиться тільки до вивчення певних явищ або процесів за допомогою певних моделей. Математика — це важлива наука, вона дає потужні методи для пізнання світу та вивчення його закономірностей.

Головна сила математики полягає в тому, що разом із розв'язуванням однієї конкретної задачі вона створює загальні прийоми та методи, що можуть бути застосовані в багатьох інших випадках, які навіть не завжди можна передбачити.

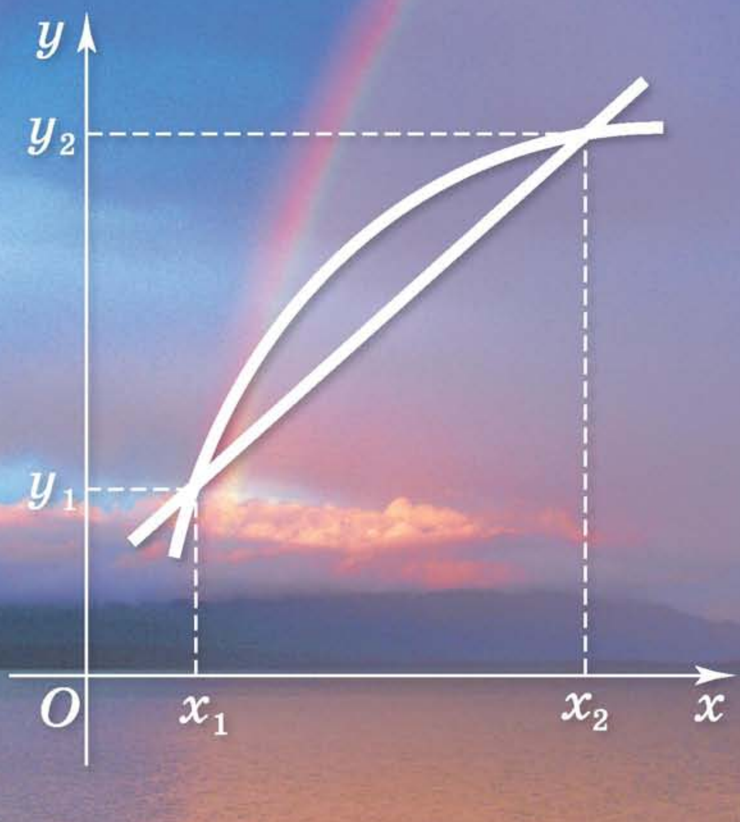
Щоб з успіхом застосовувати математичні методи під час вивчення якого-небудь іншого питання, необхідно передусім мати знання, вміти правильно користуватися математичним апаратом, знати межі допустимого використання математичної моделі, яка розглядається.

Значення вивчення математики полягає в тому, що вона вдосконалює загальну культуру міркувань, дисциплінує людину і привчає її логічно мислити, виховує точність і ґрунтовність аргументації.

Оволодіти достатньою мірою математичними методами, математичною культурою мислення, відчути силу і красу математичної науки — зовсім не прості завдання. Але для того, хто здатен цього досягти, праця не буде марною. Йому відкриються нові перспективи людської діяльності, якісно нові можливості творчості й пізнання світу. Важливо зазначити, що все це доступно кожному, хто бажає оволодіти математикою, хто серйозно і послідовно її вивчатиме.

ЧАСТИНА I

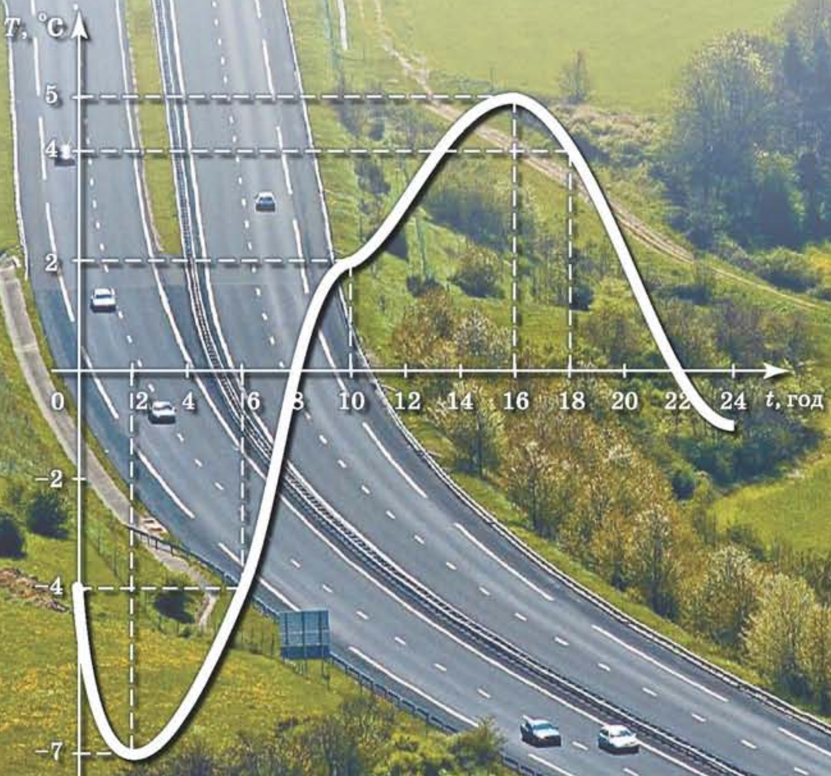
АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ



РОЗДІЛ 1

ФУНКЦІЇ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

У розділі ви:
- **повторите, систематизуєте та узагальните матеріал про дійсні числа, відсотки, степінь числа та функції;**
- **розширите знання про степінь числа, функції та їхні властивості, зокрема про степеневу функцію — математичну модель різних процесів і явищ**



§ 1 Дійсні числа та обчислення

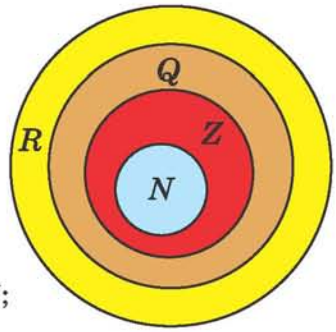
Багатовікова історія розвитку математики свідчить про те, що практичні потреби людини, насамперед вимірювання геометричних та фізичних величин, приводили до необхідності розширення поняття числа. Так, множина цілих чисел стала розширенням множини натуральних чисел унаслідок уведення цілих від'ємних чисел та числа 0. Винайдення дробів привело до множини раціональних чисел, яка є розширенням множини цілих чисел.

Проте згодом виявилося, що множини раціональних чисел недостатньо навіть для того, щоб виміряти довжину довільного відрізка прямої, тобто є відрізки, довжини яких не можна виразити жодним раціональним числом. Класичним прикладом такого відрізка є діагональ квадрата зі стороною $a = 1$.

Постало питання про розширення поняття раціонального числа. Така необхідність виникла і в самій математиці, скажімо, при розв'язуванні рівняння $x^2 = a$, де a — довільне додатне раціональне число. Було введено ірраціональні числа, які в сукупності з раціональними утворюють множину дійсних чисел.

Ви знаєте такі числові множини:

1) множина натуральних чисел
$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$;
2) множина цілих чисел
$\boldsymbol{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$;
3) множина раціональних чисел
$$\boldsymbol{Q} = \left\{\frac{p}{q}\right\},$$
де p — ціле число, $p \in \boldsymbol{Z}$, q — натуральне число, $q \in \boldsymbol{N}$;
4) множина дійсних чисел $\boldsymbol{R}$.



Мал. 1

Між цими множинами існує зв'язок:
$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$ (мал. 1).

Пригадаємо деякі відомості з теорії дійсних чисел.

Відомо, що

будь-яке дійсне число можна подати у вигляді десяткового дробу, при цьому раціональні числа зображаються у вигляді або скінченних десяткових, або нескінченних періодичних десяткових дробів, а ірраціональні числа — у вигляді нескінченних неперіодичних десяткових дробів.

Наприклад, $\frac{1}{4} = 0{,}25$; $-\frac{1}{16} = -0{,}0625$; $2\frac{1}{32} = 2{,}03125$; $\frac{5}{11} = 0{,}(45)$; $-\frac{34}{75} = -0{,}45(3)$ — раціональні числа;

$3{,}020020002\ldots$; $-0{,}010011000111\ldots$; $\pi = 3{,}1415926\ldots$;
$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$ — ірраціональні числа.

Подання звичайного дробу у вигляді десяткового здійснюється в результаті застосування алгоритму ділення. Довільне ціле число і будь-який скінченний десятковий дріб можна подати у вигляді нескінченного періодичного дробу з періодом 0.

Наприклад, $-5 = -5{,}000\ldots = -5(0)$; $1{,}25 = 1{,}25000\ldots = 1{,}25(0)$.

Отже,

кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.

Запис дійсних чисел у вигляді нескінченних десяткових дробів зручний для їхнього порівняння та виконання арифметичних дій над ними. Нескінченні десяткові дроби порівнюють так само, як і скінченні десяткові дроби.

Наприклад, порівняємо додатні дійсні числа
$a = 5{,}4135\ldots$, $b = 5{,}41(5) = 5{,}4155\ldots$.

У записах десяткових дробів, які зображують ці числа, збігаються цифри одиниць, десятих, сотих. Проте в розряді тисячних у запису числа a стоїть цифра 3, а в запису b — цифра 5, тому число a менше від числа b: $a < b$.

З двох від'ємних дійсних чисел більшим вважають те, модуль якого менший. Наприклад, $a = -2{,}(75) = -2{,}7575\ldots$, $b = -3{,}23(6) = -3{,}2366\ldots$ і $a > b$.

Кожне від'ємне дійсне число менше від нуля, а нуль менший від усякого додатного дійсного числа.

Наприклад, $a = -0{,}1121231234\ldots < 0$, $b = 1{,}1010010001\ldots > 0$.

Дійсні числа можна додавати, віднімати, множити, ділити (крім ділення на нуль), причому дії над дійсними числами мають ті самі властивості, що й дії над раціональними числами.

Виконуючи дії над дійсними числами, їх замінюють наближеними значеннями, а саме: дійсне число, зображуване нескінченним десятковим дробом, замінюють скінченним десятковим дробом. Обриваючи нескінченний десятковий дріб на деякому десятковому знаку, дістаємо наближене значення відповідного дійсного числа з точністю до 0,1, 0,01, 0,001 і т. д. з ***недостачею***. Якщо ж останній залишений десятковий знак збільшити на 1, то таке значення називають наближеним значенням числа з ***надлишком***.

Наприклад, наближеними значеннями числа 1,21(5) будуть такі скінченні десяткові дроби:

1,2; 1,21; 1,215; 1,2155 і т. д. (з недостачею);

1,3; 1,22; 1,216; 1,2156 і т. д. (з надлишком), і тому правильними є нерівності:

$1{,}2 < 1{,}21(5) < 1{,}3$; $1{,}21 < 1{,}21(5) < 1{,}22$;
$1{,}215 < 1{,}21(5) < 1{,}216$; $1{,}2155 < 1{,}21(5) < 1{,}2156$ і т. д.

Зрозуміло, що чим більше десяткових знаків у наближеному значенні даного дійсного числа, тим точнішим буде його наближення.

Перетворення нескінченного періодичного десяткового дробу в звичайний дріб здійснюється за такими правилами.

1. Для перетворення чистого періодичного десяткового дробу в звичайний дріб необхідно: в чисельнику поставити період дробу, а в знаменнику — число зі стількох дев'яток, скільки цифр у періоді дробу.

Наприклад, $0,(2) = 0,222... = \frac{2}{9}$; $0,(45) = 0,454545... = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$;

$$-0,(243) = -0,243243243... = -\frac{243}{999} = -\frac{9}{37}.$$

Ці рівності можна перевірити, виконавши ділення чисельника дробу на знаменник.

2. Для перетворення мішаного періодичного десяткового дробу в звичайний дріб необхідно: в чисельнику записати число, що є різницею між числом, яке стоїть у десятковому дробі до другого періоду, та числом до першого періоду, а в знаменнику написати стільки дев'яток, скільки цифр у періоді, і дописати до них стільки нулів, скільки цифр від коми до першого періоду.

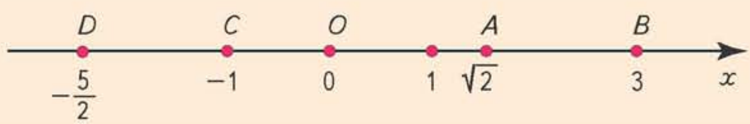
Наприклад, $0,45(3) = 0,45333... = \frac{453-45}{900} = \frac{408}{900} = \frac{34}{75}$;

$$0,027(45) = 0,027454545... = \frac{2745-27}{99000} = \frac{2718}{99000} = \frac{151}{5500};$$

$$-0,521(9) = -0,521999... = -\frac{5219-521}{9000} = -\frac{4698}{9000} = -\frac{261}{500}.$$

Правильність цих рівностей можна перевірити, виконавши ділення чисельника на знаменник.

Дійсні числа зручно зображати точками на *координатній прямій*. На цій прямій вибирають додатний напрям (його позначають стрілкою), початок відліку — точку O (вона є зображенням числа 0) та одиницю масштабу — відрізок, що є одиницею вимірювання довжин. Точка O поділяє пряму на два промені: додатний (його позначено стрілкою) та від'ємний. На додатному промені зображають додатні числа, а на від'ємному — від'ємні. Число, якому відповідає дана точка на координатній прямій, називають ***координатою цієї точки*** (мал. 2).



Мал. 2

Будь-якому дійсному числу відповідає єдина точка координатної прямої. Справедливим є й обернене твердження: будь-якій точці координатної прямої відповідає єдине дійсне число. Таку відповідність між множиною дійсних чисел і точками координатної прямої називають ***взаємно однозначною***.

? Чи має таку властивість множина: натуральних чисел; цілих чисел; раціональних чисел? Дайте відповідь і обґрунтуйте.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Важливим призначенням чисел є запис результатів вимірювання різних величин.

Будемо вимірювати довжину відрізків, розміщених на даній прямій. Вимірювання починають з вибору масштабу — одиниці вимірювання. За одиницю довжини візьмемо довжину деякого фіксованого відрізка e. Розглянемо довільний відрізок a. Можливі такі випадки.

1. Відрізок e вкладається у відрізок a рівно n разів, де n — натуральне число. В такому разі відрізку a приписують довжину, що дорівнює n у заданому масштабі.

2. Відрізок e не вкладається ціле число разів, однак існує такий відрізок b, який міститься ціле число разів як у відрізку e, так і у відрізку a. Якщо відрізок b міститься у відрізку e рівно n разів, а у відрізку a — рівно m разів, то відрізку a приписують довжину, яка дорівнює раціональному числу $\frac{m}{n}$ у масштабі b.

У цьому випадку кажуть, що відрізок a ***сумірний*** з відрізком e, а відрізок b називають спільною мірою відрізків a та e.

Зазначимо, що вибір спільної міри сумірних відрізків неоднозначний, оскільки, наприклад, половина, третина відрізка b також є спільною мірою відрізків a та e.

3. Відрізки a та e не мають спільної міри. Такі відрізки називають ***несумірними***. У цьому випадку процес вимірювання відрізка a в масштабі e буде нескінченним, і довжина відрізка a визначатиметься деяким нескінченним неперіодичним десятковим дробом, тобто ірраціональним числом. Прикладом несумірних відрізків є діагональ та сторона $a = 1$ квадрата, а саме: довжина діагоналі квадрата зі стороною $a = 1$ дорівнює ірраціональному числу $\sqrt{2}$.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Які числа називають раціональними? Наведіть приклади раціональних чисел.

2. Який є спосіб перетворення довільного раціонального числа $\frac{m}{n}$ на десятковий дріб?

3. Якими саме десятковими дробами можна подати довільне раціональне число?

4. Який зв'язок існує між множинами натуральних $\boldsymbol{N}$, цілих $\boldsymbol{Z}$ і раціональних $\boldsymbol{Q}$ чисел?

5. Назвіть кілька елементів множин: а) натуральних чисел; б) додатних дійсних чисел; в) цілих чисел; г) раціональних чисел.

6. Назвіть кілька спільних елементів: а) множини від'ємних дійсних чисел і множини раціональних чисел; б) множини натуральних чисел і множини цілих чисел.

7. Які арифметичні операції не виконуються на множині: натуральних чисел; цілих чисел; раціональних чисел?

8. Які числа називають ірраціональними? Наведіть приклади.

9. Які числа утворюють множину дійсних чисел?

10. Що таке координатна пряма?

11. Поясніть зміст твердження: між множиною дійсних чисел і множиною точок координатної прямої існує взаємно однозначна відповідність.

12. Чи є найменше та найбільше числа серед усіх раціональних чисел? Відповідь обґрунтуйте.

13. Чи є найменше число серед додатних раціональних чисел? Відповідь обґрунтуйте.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

1'. Усно. Чи правильне твердження:

1) довільне натуральне число є одночасно цілим і раціональним числом;
2) усі додатні десяткові дроби належать до множини раціональних чисел;
3) одне і те саме раціональне число можна подати у вигляді єдиного дробу виду $\frac{m}{n}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$;
4) довільне дійсне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового дробу;
5) серед усіх цілих чисел є найменше і найбільше?

2'. Усно. Які елементи множини

$$A = \left\{-5;\ -\frac{1}{2};\ -1,3(5);\ 0;\ 0,1;\ 11;\ \frac{2}{3};\ 5,023002300023\ldots;\ \pi;\ \frac{1}{5}-\pi\right\} \text{ є числами:}$$

1) натуральними; 2) цілими; 3) дробовими; 4) раціональними;
5) невід'ємними; 6) ірраціональними; 7) дійсними?

3'. Назвіть кілька значень x, при яких твердження є правильним або неправильним:
1) $x \in \boldsymbol{N}$; 2) $x \in \boldsymbol{Q}$; 3) $x \notin \boldsymbol{Z}$; 4) $x \notin \boldsymbol{R}$.

4'. Виберіть серед наведених правильні твердження:

1) $\frac{3}{7} \in \boldsymbol{Q}$; 2) $-5 \in \boldsymbol{N}$; 3) $2,1 \notin \boldsymbol{Z}$; 4) $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{R}$; 5) $a, b \in \boldsymbol{N} \Rightarrow a \pm b \in \boldsymbol{N}$;
6) $ab \in \boldsymbol{N} \Rightarrow a, b \in \boldsymbol{N}$; 7) $a + b \in \boldsymbol{Q} \Rightarrow a, b \in \boldsymbol{Q}$.

5'. Подайте дане число у вигляді скінченного або нескінченного десяткового дробу:

1) $-\frac{1}{40}$; 2) $1\frac{3}{20}$; 3) $\frac{8}{37}$; 4) $\frac{7}{12}$; 5) $-\frac{5}{11}$; 6) $2\frac{4}{11}$; 7) $\frac{7}{74}$.

6'. Доповніть речення так, щоб воно стало правильним твердженням:

1) довільне раціональне число завжди можна подати у вигляді нескінченного ... десяткового дробу;
2) множина цілих чисел є підмножиною множини ... чисел;
3) довільне ... число можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.

7'. Знайдіть числове значення виразу:

1) $\dfrac{\left(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}\right):18\frac{1}{6}}{0,002}$; 2) $\dfrac{\left(49\frac{5}{24}-46\frac{7}{20}\right)\cdot 2,(3)+0,6}{0,2}$;

3) $\dfrac{0,134+0,05}{18\frac{1}{6}-1\frac{11}{14}-0,1(3)\cdot 2\frac{6}{7}}$; 4) $\left(-6\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{\sqrt{324}}{2}\cdot\frac{\sqrt{0,16}}{0,2}\right):\sqrt{25}$.

8'. Які арифметичні операції завжди виконуються на множині:

а) натуральних чисел; б) цілих чисел; в) раціональних чисел?

9'. Порівняйте дійсні числа:

1) 5,63479... і 5,63497...; 2) –3,4833... і –3,5829...; 3) 15,25... і $\frac{61}{4}$;

4) $-\frac{3}{8}$ і –0,375...; 5) $\frac{5}{9}$ і 0,(5); 6) – 1,(27) і – 1,272.

10°. Розмістіть числа:

1) 2,371...; 3,01; 2,37; 2,(37); –2,(3) у порядку зменшення;

2) 5,04; –5,04...; 4,451; 4,(45); –4,67 у порядку збільшення.

11°. Знайдіть наближене значення суми $a + b$, різниці $a - b$, добутку ab і частки $\frac{a}{b}$ дійсних чисел a і b з точністю: а) до 0,1; б) до 0,01:

1) $a = 1{,}0539...$, $b = 2{,}0610...$; 2) $a = \frac{7}{30}$, $b = 5{,}121$; 3) $a = -\frac{20}{9}$, $b = -\frac{8}{15}$.

12°. Наведіть приклади квадратного рівняння, корені якого — ірраціональні числа.

13°. Наведіть приклади двох ірраціональних чисел:

1) сума яких є число ірраціональне; 2) сума яких є число раціональне.

14°. Чи завжди має розв'язки рівняння $a + x = b$, де a і b — задані натуральні числа, на множині всіх:

1) натуральних чисел; 2) додатних раціональних чисел; 3) цілих чисел?

15°. Чи завжди має розв'язки рівняння $ax = b$, де a і b — задані натуральні числа, на множині всіх: 1) цілих чисел; 2) раціональних чисел?

16°. Раціональним чи ірраціональним числом визначається гіпотенуза прямокутного трикутника, якщо задано його катети a і b:

1) $a = 1$, $b = 2$; 2) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

17. Числа $a + b$ і $a - b$ — раціональні. Чи раціональні числа a і b?

18. Запишіть перші три десяткових знаки нескінченного десяткового дробу для числа:

1) $3 + \sqrt{2}$; 2) $\frac{3}{7} + \sqrt{3}$; 3) $0,(6) - \sqrt{6}$; 4) $5\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{2}\sqrt{3}$; 6) $\sqrt{3}\sqrt{5}$.

19*. Що більше: $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ чи $\sqrt{3} + \sqrt{19}$?

20*. Доведіть, що сума і різниця раціонального та ірраціонального чисел є числом ірраціональним.

21*. Подайте дійсне число у вигляді звичайного дробу:

1) 3,025; 2) – 1,15; 3) 3,(6); 4) –2,(81); 5) 0,2181818...; 6) 3,12(6).

22*. Один із кутів прямокутного трикутника становить 60°, а менший катет дорівнює 1. Доведіть, що довжину більшого катета цього трикутника не можна виразити раціональним числом.

23*. Доведіть, що число $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ірраціональне.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

24*. Побудуйте квадрат, довжина сторони якого дорівнює: 1) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{14}$.

§2 Відсоткові розрахунки

Нагадаємо, що відсотком числа називають $\frac{1}{100}$ частину цього числа і позначають %. Однією з поширених задач на відсотки є знаходження відсотка від даного числа: число b, яке становить $p\,\%$ від числа a, визначають за формулою: $b = \frac{ap}{100}$.

Цю формулу можна використати для розв'язування ще двох задач:

1) знаходження числа за відомим його відсотком: якщо $p\,\%$ від числа a дорівнює b, то $a = \frac{100b}{p}$;

2) знаходження відсоткового відношення p числа b і числа a, яке визначають за формулою: $p = \frac{b}{a}\,100\,\%$.

Задача 1. Робітник протягом робочої зміни виготовив 96 деталей замість запланованих 80 деталей. На скільки відсотків він перевиконав план?

Розв'язання. Необхідно визначити, скільки відсотків число $b = 96 - 80 = 16$ становить від числа $a = 80$.

Шукане число p знайдемо за формулою: $p = \frac{100 \cdot 16}{80}\,\% = 20\,\%$.

Задача 2. Як зміниться площа прямокутника, якщо його довжину збільшити на 20 %, а ширину — на 10 %?

Розв'язання. Нехай довжина прямокутника x, а ширина — y, тоді його площа дорівнює xy. Після збільшення довжини і ширини прямокутника на 20 % і 10 % відповідно його площа дорівнюватиме $1{,}2x \cdot 1{,}1y = 1{,}32xy$, тобто площа прямокутника збільшиться на $0{,}32xy$, що становить 32 % від xy.

Задача 3. Число a становить 80 % від числа b, а число c — 140 % від числа b. Знайдіть числа a, b і c, якщо c більше від a на 72.

Розв'язання. За умовою задачі: $a = 0{,}8b$, $c = 1{,}4b$, $c - a = 72$, тоді $c - a = 1{,}4b - 0{,}8b = 0{,}6b$, звідси $0{,}6b = 72$, $b = 120$, $a = 0{,}8b = 96$, $c = 1{,}4b = 168$.

Історія розвитку математики засвідчує, що виникнення поняття відсотка відбулося через необхідність здійснення грошових розрахунків.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Розглянемо найпростіші задачі *фінансової математики*.

Нехай b — початкова грошова сума, p — річна відсоткова ставка.

1. Знайдемо формулу для обчислення нарощеної грошової суми за *простими відсотками*.

Нарощена сума становитиме:

після 1-го року $b_1 = b + b \cdot \frac{p}{100} = b\left(1 + \frac{p}{100}\right)$;

після 2-го року $b_2 = b\left(1 + \frac{p}{100}\right) + b \cdot \frac{p}{100} = b\left(1 + \frac{2p}{100}\right)$;

....

після n-го року $b_n = b\left(1 + \frac{np}{100}\right)$.

Отже, шуканою формулою є:

$$b_n = b\left(1 + \frac{np}{100}\right),\ n \in \boldsymbol{N}. \qquad (1)$$

2. Знайдемо формулу для обчислення нарощеної грошової суми за *складними відсотками*, якщо відсоток прибутку нараховується на всі грошові надходження:

після 1-го року $b_1 = b + b \cdot \frac{p}{100} = b\left(1 + \frac{p}{100}\right)$;

після 2-го року $b_2 = b_1 + b_1 \cdot \frac{p}{100} = b_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = b\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$;

....

після n-го року $b_n = b\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Отже, під час нарахування складних відсотків протягом n років нарощена грошова сума визначатиметься за формулою:

$$b_n = b\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,\ n \in \boldsymbol{N}. \qquad (2)$$

Величину $k = 1 + \frac{p}{100}$ називають *коефіцієнтом складного відсотка*.

3. Нехай відсоток нараховується *рівномірно* m разів на рік за тієї самої щорічної відсоткової ставки p. Тоді за m-ту частину року нараховуватиметься відсоток $\frac{p}{m}$, а сума надходжень за n років при mn нарахуваннях визначатиметься за формулою:

$$b_n = b\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mn},\ n \in \boldsymbol{N}. \qquad (3)$$

Задача 1. Нехай $b = 10\,000$ грн — початкова сума, яку покладено в банк під $p = 10\,\%$ річних. Знайдіть нарощування суми вкладу за різними нарахуваннями відсотків через рік; через 5 років.

Розв'язання. За простими відсотками за формулою (1) дістанемо:

$b_1 = 10\,000\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 11\,000$ (грн); $\quad b_5 = 10\,000\left(1 + \frac{5}{10}\right) = 15\,000$ (грн).

За складними відсотками за формулою (2) дістанемо:

$b_1 = 10\,000\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 11\,000$ (грн); $\quad b_5 = 10\,000\left(1 + \frac{1}{10}\right)^5 = 16\,105{,}1$ (грн).

При рівномірному нарахуванні відсотків двічі на рік за формулою (3) матимемо:

$b_1 = 10\,000\left(1 + \frac{1}{20}\right)^2 = 11\,025$ (грн); $\quad b_5 = 10\,000\left(1 + \frac{1}{20}\right)^{10} \approx 16\,288{,}95$ (грн).

Зазначимо, що операцію знаходження початкового вкладу називають *дисконтуванням*.

Задача 2. Знайдіть суму вкладу до ощадбанку, якщо 12 % цього вкладу дорівнюють 240 грн.

Розв'язання. Зрозуміло, що 1 % вкладу дорівнює $\frac{240}{12} = 20$ грн, тому загальна сума вкладу становить: $20 \cdot 100 = 2\,000$ (грн).

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що називають відсотком від числа?
2. Які є основні задачі на відсотки?
3. За якою формулою обчислюють відсоток від числа?
4. Як знаходять число за відомим відсотком?
5. Чому дорівнює відсоткове відношення двох чисел?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

25'. Знайдіть: 1) 15 % від числа 50; 2) 22 % від числа 25.

26'. Який відсоток становить число 120 від числа 300?

27'. Сторону квадрата збільшили на 10 %. На скільки відсотків збільшилася його площа?

28°. Знайдіть два числа, якщо їх сума становить 36, а 25 % одного з них дорівнюють 35 % від другого.

29°. Що більше: 38 % від 87 чи 87 % від 38?

30. Маса двох шматків латуні дорівнює 30 кг. Перший шматок містить 5 кг чистої міді, а другий — 4 кг. Скільки відсотків міді в першому шматку латуні, якщо у другому на 15 % більше, ніж у першому?

31. До розчину, що містить 40 г солі, додали 200 г води, після чого його концентрація зменшилася на 10 %. Скільки води містить розчин і якою була його концентрація?

32. У двох бочках було води порівну. Кількість води в першій бочці спочатку зменшили на 10 %, а потім збільшили на 10 %. Кількість води у другій бочці спочатку збільшили на 10 %, а потім зменшили на 10 %. У якій бочці стало більше води?

33. Три коробки наповнено горіхами. У другій коробці на 10 % горіхів більше, ніж у першій, і на 30 % більше, ніж у третій. Скільки горіхів у кожній коробці, якщо в першій на 80 горіхів більше, ніж у третій?

34. Знайдіть число, 3,6 % якого дорівнюють числу $\frac{3 + 4{,}2 : 0{,}1}{(1 : 0{,}3 - 2{,}(3)) \cdot 0{,}3125}$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

35. На товар двічі було знижено ціну, щоразу на 15 %. На інший товар, ціна якого до зниження була такою самою, як і першого, знизили ціну один раз на 30 %. Який з цих товарів після зниження став дешевшим?

36*. Вкладник поклав до ощадбанку 2000 грн під 10 % річних. Визначте величину вкладу за простими відсотками через рік і через 5 років.

37*. Нехай 2000 грн видано в кредит на 3 місяці під прості відсотки за ставкою 10 % на місяць. Визначте нарощувані суми боргу наприкінці кожного місяця.

38*. Початковий вклад 250 тис. гривень покладено на 4 роки під складні відсотки за ставкою 100 % річних. Знайдіть нарощувані суми вкладу за кожний рік.

39*. Обчисліть початковий борг, повна сума якого через 3 роки становить 7000 грн, якщо відсотки нараховуються за ставкою 140 % наприкінці року.

§3 Числові функції та їх властивості

Поняття функції є одним з найважливіших понять математики. Ідея функціональної залежності сягає в глибоку давнину, коли люди тільки почали розуміти існування різних видів залежності у природі. Як і інші, поняття функції виникло з потреб практики. У XVII — XVIII ст. з розвитком мореплавства, судно-, машинобудування, астрономії, механіки та інших технічних дисциплін постала необхідність створення математичного апарату для опису різних процесів та явищ. Це привело до появи змінних величин. Задовго до того, як були сформовані загальні поняття змінної величини і функції, їх графічно використовували в математиці. Значну роль у розвитку цих понять відіграв метод координат французьких математиків П. Ферма (1601 — 1665) і Р. Декарта (1596 — 1650). Метод координат почали використовувати для графічного дослідження функцій і графічного розв'язування рівнянь. Відтоді настав новий етап, що позначився потужним розвитком не тільки математики, а й загалом природознавства.

Термін «функція» запровадив німецький математик Г. Лейбніц (1646 — 1716), який функцію пов'язував з графіком. Академік Петербурзької Академії наук Л. Ейлер (1707 — 1783) і швейцарський математик Й. Бернуллі (1667 — 1748) вважали функцію аналітичним виразом (формулою). Згодом Л. Ейлер увів загальніший підхід до поняття функції як залежності однієї змінної величини від іншої. Цю ідею розвинули російський математик М. І. Лобачевський (1792 — 1856), німецький математик П. Діріхле (1805 — 1859) та інші вчені.


Г. Лейбніц

Подальший розвиток поняття функції пов'язаний з розглядом відповідностей між множинами, елементами яких можуть бути не тільки числа, а й об'єкти довільної природи. Вагомий внесок у розвиток теорії функцій зробили українські математики М. В. Остроградський (1801 — 1862), В. Я. Буняковський (1804 — 1889), М. П. Кравчук (1892 — 1942), Є. Я. Ремез (1896 — 1975), В. К. Дзядик (1919 — 1998) та інші.

Різноманітні процеси, що відбуваються в довкіллі, слугують прикладами явищ, у яких зміна одних величин спричиняє зміну інших. Для вивчення того чи іншого явища потрібно встановити взаємозв'язок між величинами, які його описують, і дослідити його властивості. Такий взаємозв'язок у математиці задається за допомогою функцій.

Наведемо приклади.

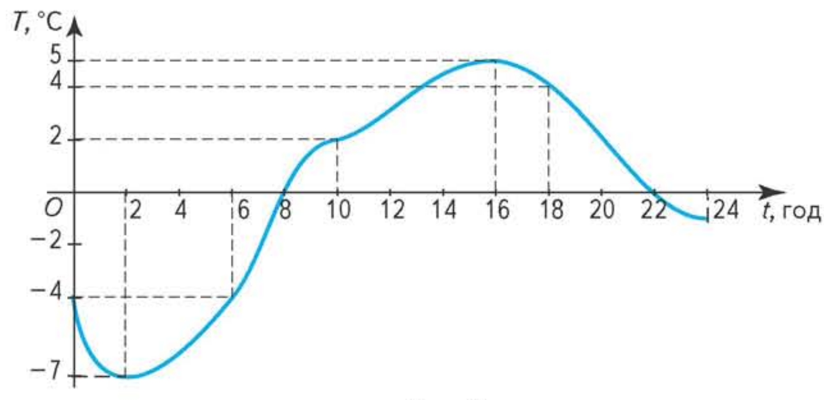
1. Площа S (см^2) круга радіуса r (см) залежить від довжини радіуса і визначається за формулою $S = \pi r^2$.
За цією формулою для кожного значення $r > 0$ можна знайти відповідне значення S.
Наприклад, якщо $r = 2$, то $S = 4\pi \approx 12,56$; якщо $r = 3,2$, то $S = 10,24\pi \approx 32,1$; якщо $r = 5,1$, то $S = 26,01\pi \approx 81,67$.

2. Потяг Київ — Донецьк на певному проміжку шляху рухається зі сталою швидкістю 80 км/год.
Шлях, пройдений потягом, залежить від часу руху.
Позначимо час руху потяга в годинах через τ, а пройдений шлях у кілометрах — через s. Залежність змінної s від змінної τ в цьому випадку наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

τ, год	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
s, км	80	120	160	200	240	280	320

3. На малюнку 3 зображено графік зміни температури повітря протягом доби.



Мал. 3

За допомогою цього графіка для кожного моменту часу t (у годинах) від 0 до 24 год можна знайти відповідне значення температури T (у градусах Цельсія).
Наприклад, якщо $t = 6$, то $T = -4$; якщо $t = 10$, то $T = 2$; якщо $t = 18$, то $T = 4$.

В усіх наведених прикладах йдеться про залежність двох змінних, причому одна з них (r, τ, t) змінюється незалежно, а друга (S, s, T) — набуває значень залежно від значень першої змінної. Величину, яка змінюється незалежно, так і називають ***незалежною змінною***, або ***аргументом***, а другу —

залежною змінною. Звернемо увагу на те, що в усіх прикладах кожному значенню незалежної змінної відповідає одне і тільки одне значення залежної змінної. Такі змінні називають ***функціонально залежними***. У розглянутих прикладах незалежні й залежні змінні виражаються дійсними числами.

Нехай D — деяка множина дійсних чисел.
Числовою функцією **з областю визначення D називають таку залежність, при якій кожному числу x з множини D відповідає одне дійсне число y, і записують $y = f(x)$.**

Змінну x називають ***незалежною змінною***, або ***аргументом***, а y — ***залежною змінною***, або ***функцією***. Число $f(x_0)$ називають значенням функції f в точці $x_0 \in D$. Множину всіх значень незалежної змінної x називають ***областю визначення функції*** f і позначають $D(f)$. Множину значень функції, яких вона набуває при всіх значеннях x з її області визначення, називають ***областю***, або ***множиною***, ***значень функції***, і позначають $E(f)$. Окрім букв x, y, f можна вживати й інші букви.

Проаналізуємо наведені вище приклади.

Областю визначення функції, розглянутої в прикладі 1, є $r > 0$, або $r \in (0; +\infty)$, а множиною значень цієї функції є $S > 0$, або $S \in (0; +\infty)$, тобто і областю визначення, і множиною значень функції є множина всіх додатних чисел.

У прикладі 2 областю визначення функції є множина $D(s) = \{1; 1{,}5; 2; 2{,}5; 3; 3{,}5; 4\}$, а множиною значень — множина $E(s) = \{80; 120; 160; 200; 240; 280; 320\}$.

У прикладі 3 областю визначення функції є значення t, що задовольняють нерівність $0 \le t \le 24$, або $t \in [0; 24]$, а множиною значень є $-7 \le T \le 5$, або $T \in [-7; 5]$. Зазначені множини можна дістати, якщо графік функції спроектувати відповідно на вісь Ot і вісь температур OT (див. мал. 3).

Основними способами задання функції є *аналітичний* (за допомогою однієї або кількох формул), *графічний* і *табличний*.

Наведені вище приклади ілюструють основні способи задання функцій: аналітичний, або за допомогою формули (приклад 1), табличний (приклад 2), графічний (приклад 3).

Якщо функцію задано формулою і не зазначено її області визначення, то під останньою розуміють множину всіх дійсних значень аргументу, при яких ця формула має зміст.

Приклад 1. Знайдіть область визначення й область значень функції $f(x) = \sqrt{x+1}$ та її значення $f(0)$, $f\left(\frac{5}{4}\right)$, $f(8)$ і з'ясуйте, чи існують значення функції в точках $x = -2; -\frac{3}{2}$.

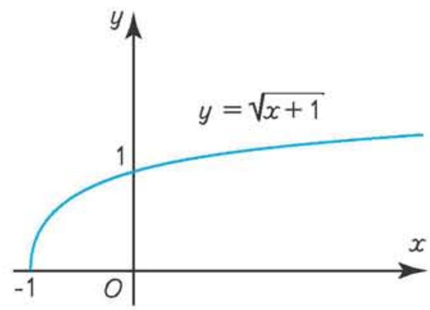
Розв'язання. З огляду на властивість квадратного кореня дана формула матиме зміст для всіх значень x, для яких $x + 1 \ge 0$, або $x \ge -1$, тобто областю визначення функції є множина $[-1; +\infty)$, $D(f) = [-1; +\infty)$. Область значень даної функції становлять значення $y = f(x) \geq 0$, тобто $E(f) = [0; +\infty)$, бо значення арифметичного квадратного кореня невід'ємні (мал. 4).

Зверніть увагу на те, що область визначення функції є проекцією її графіка на вісь Ox, а область значень — проекцією графіка на вісь Oy.

Знайдемо значення $f(0)$. Для цього в дану формулу замість x підставимо 0. Тоді одержимо: $f(0) = \sqrt{0+1} = 1$.

Аналогічно $f\left(\frac{5}{4}\right) = \sqrt{\frac{5}{4}+1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$;

$$f(8) = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3.$$



Мал. 4

Оскільки значення $x = -2$, $x = -\frac{3}{2}$ не належать області визначення функції, тобто $-2 \notin [-1; +\infty)$, $-\frac{3}{2} \notin [-1; +\infty)$, то функція в цих точках не визначена. Справді, якщо формально підставити значення $x = -2$ і $x = -\frac{3}{2}$ у задану формулу, то одержимо вирази $\sqrt{-1}$ і $\sqrt{-\frac{3}{2}}$, що на множині дійсних чисел не мають змісту.

Приклад 2. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{5x-3}{2}$; 2) $y = \frac{2x}{x+1}$; 3) $y = \frac{3x+1}{x^2-3x+2}$; 4) $y = \frac{1}{2x-1} + 6\sqrt{x}$.

Розв'язання

1) У цьому випадку змінна x може набувати довільних дійсних значень, тобто $D(f) = \boldsymbol{R} = (-\infty; +\infty)$.

2) Заданий аналітичний вираз існує для всіх дійсних значень, крім $x = -1$, тобто $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

3) Область визначення цієї функції знайдемо з умови, що знаменник дробу не дорівнює нулю. Для цього розв'яжемо рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

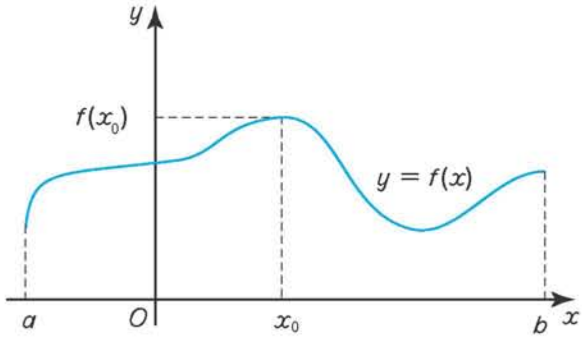
Отже, областю визначення функції є всі дійсні значення x, крім $x = 1$ і $x = 2$, тобто $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

4) Очевидно, задана функція існуватиме, якщо матимуть зміст одночасно обидва доданки суми. Перший доданок існує при всіх значеннях $x \neq \frac{1}{2}$, а другий — якщо $x \geq 0$. Тому областю визначення функції є всі невід'ємні значення x, крім $x = \frac{1}{2}$, тобто $D(f) = \left[0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

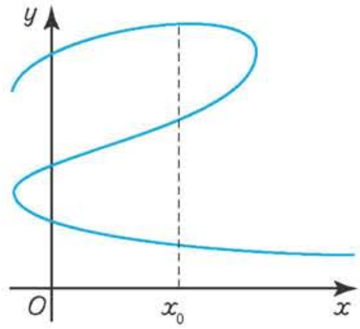
***Графіком функції f* називають множину точок $(x; y)$ координатної площини xOy, де $y = f(x)$, $x \in D(f)$.**

Зазначимо, що не будь-яка крива в прямокутній системі координат xOy задає функцію. За означенням, функцію може задавати тільки така крива, яку кожна пряма $x = x_0$, $x_0 \in D(f)$, паралельна осі Oy, перетинає лише в одній точці з ординатою $y_0 = f(x_0)$ (мал. 5).

Крива, зображена на малюнку 6, функцію не задає, бо в цьому випадку значенню x_0 відповідає не одне, як того вимагає означення функції, а три значення змінної y.



Мал. 5



Мал. 6

Розглянемо властивості функцій.

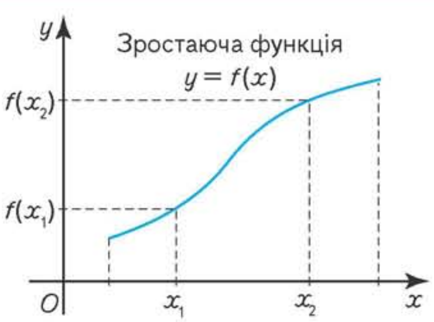
Монотонні функції

До монотонних належать зростаючі, спадні, неспадні та незростаючі функції.

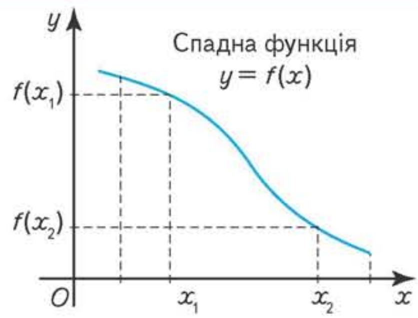
Нехай функція $f(x)$ визначена на множині D.

Функція $f(x)$ називається *зростаючою* на множині D, якщо для довільних значень x_1 та x_2 цієї множини з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, тобто більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції (мал. 7).

Функція $f(x)$ називається *спадною* на множині D, якщо для довільних значень x_1 та x_2 цієї множини з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) < f(x_1)$, тобто більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції (мал. 8).



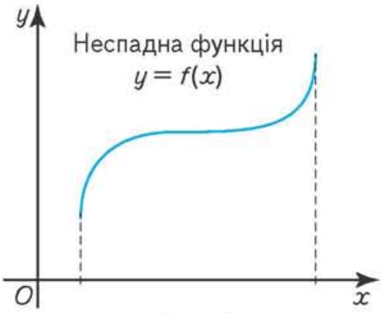
Мал. 7



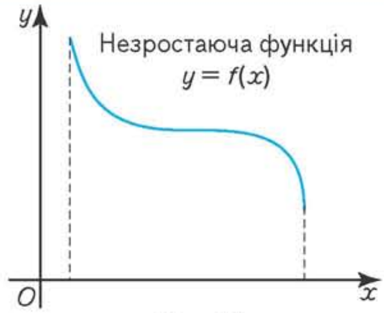
Мал. 8

Функція $f(x)$ називається *неспадною* на множині D, якщо для довільних значень x_1 та x_2 цієї множини з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) \geq f(x_1)$ (мал. 9).

Функція $f(x)$ називається *незростаючою* на множині D, якщо для довільних значень x_1 та x_2 цієї множини з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) \leq f(x_1)$ (мал. 10).



Мал. 9



Мал. 10

Якщо функція незростаюча або неспадна, то її значення на деяких проміжках є сталими. Зростаючі та спадні функції називають ще ***строго монотонними.***

Схема дослідження функції $y = f(x)$ на монотонність

1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$.

2. Дослідіть на знак різницю $f(x_2) - f(x_1)$ для довільних x_1, $x_2 \in D(f)$, якщо $x_2 > x_1$. Якщо $f(x_2) - f(x_1) > 0$, то функція буде ***зростаючою*** на множині D; якщо $f(x_2) - f(x_1) < 0$, то ***спадною*** на цій множині. Якщо жодна з цих умов не виконується, то функція не є монотонною в усій її області визначення. У такому випадку намагаються знайти окремі проміжки області визначення функції, на яких вона є монотонною.

Приклад 3. Дослідіть на монотонність функцію: $f(x) = 3x - 1$.

Розв'язання. Областю визначення заданої функції є множина всіх дійсних чисел, $D(f) = R$. Нехай x_1, $x_2 \in R$ — довільні значення аргументу, причому $x_2 > x_1$.
Відповідні значення функції $f(x_1) = 3x_1 - 1$ і $f(x_2) = 3x_2 - 1$.
Розглянемо різницю $f(x_2) - f(x_1) = 3x_2 - 1 - 3x_1 + 1 = 3(x_2 - x_1) > 0$.
Отже, $f(x_2) > f(x_1)$, і задана функція зростає в усій області визначення.

Приклад 4. Покажіть, що функція: $\varphi(x) = 2x^2 + 5$ на проміжку $(-\infty; 0]$ є спадною, а на проміжку $(0; +\infty)$ — зростаючою.

Розв'язання. Областю визначення функції $\varphi(x) = 2x^2 + 5$ є множина всіх дійсних чисел, $D(\varphi) = R$.
Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з області визначення функції, причому $x_2 > x_1$.
Тоді $\varphi(x_1) = 2x_1^2 + 5$; $\varphi(x_2) = 2x_2^2 + 5$;
$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = 2x_2^2 + 5 - 2x_1^2 - 5 = 2x_2^2 - 2x_1^2 = 2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$.

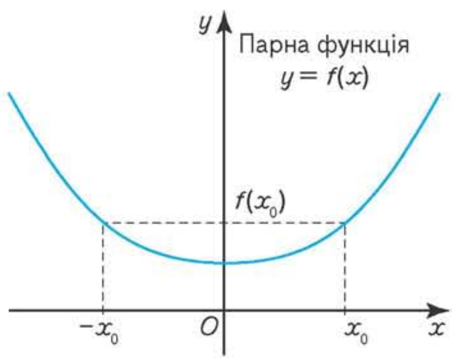
Якщо $x_1, x_2 \in (-\infty; 0]$, то $x_1 + x_2 < 0$, й оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) < 0$, або $\varphi(x_2) < \varphi(x_1)$, тобто на проміжку $(-\infty; 0]$ функція є спадною.

Аналогічно, якщо $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$, то $x_1 + x_2 > 0$, і оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) > 0$, або $\varphi(x_2) > \varphi(x_1)$, тобто на проміжку $(0; +\infty)$ функція є зростаючою.

Парні та непарні функції

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині D, причому якщо $x \in D$, то $-x \in D$.
Функція $f(x)$ називається *парною*, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in D$.
Функція $f(x)$ називається *непарною*, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in D$.

Отже, область визначення як парної, так і непарної функцій симетрична відносно точки O, і для протилежних значень аргументу значення парної функції збігаються, а непарної — є протилежними числами. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy, а графік непарної функції — відносно початку координат (мал. 11, 12).



Мал. 11

Мал. 12

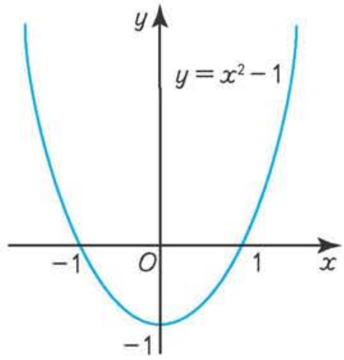
Схема дослідження функції $y = f(x)$ на парність або непарність

1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$ і переконайтеся, що вона симетрична відносно точки O. Якщо ця умова не виконується, то така функція не може бути ні парною, ні непарною.

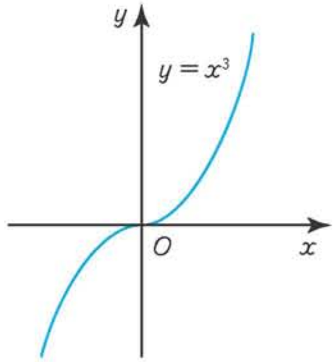
2. Знайдіть значення функції $f(-x)$ і порівняйте його з $f(x)$: якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in D(f)$, то функція ***парна***; якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in D(f)$, то функція ***непарна***. Якщо жодна з цих умов не виконується, то функція не є ні парною, ні непарною.

Приклад 5. Визначте, чи парна функція $f(x) = x^2 - 1$.

Розв'язання. $D(f) = R$, функція парна, бо $f(-x) = x^2 - 1 = f(x)$ для всіх x з множини R. Графік функції симетричний відносно осі Oy (мал. 13).



Мал. 13



Мал. 14

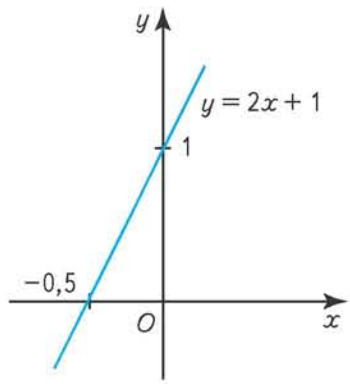
Приклад 6. Визначте, чи парна функція $\varphi(x) = x^3$.

Розв'язання. $D(\varphi) = R$, функція непарна, бо $\varphi(-x) = -x^3 = -\varphi(x)$ для всіх x з її області визначення. Графік функції симетричний відносно початку координат (мал. 14).

Приклад 7. Функція $g(x) = 2x + 1$, $D(g) = R$, не є ні парною, ні непарною, бо жодна з рівностей $g(x) = g(-x)$ і $g(x) = -g(-x)$ не справджується на множині R (мал. 15).

Приклад 8. Функція $u(x) = \sqrt{x+1}$, $D(u) = [-1; +\infty)$, не є ні парною, ні непарною, бо її область визначення не симетрична відносно точки O (див. мал. 4).

Приклад 9. Функція $v(x) = 0$, $D(v) = R$, одночасно є і парною, і непарною (обґрунтуйте). Її графіком є вісь Ox.



Мал. 15

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Функцію також можна задавати різними аналітичними виразами на окремих проміжках зміни незалежної змінної.

1. Знайдемо аналітичний вираз для функції $s = s(t)$, яка виражає шлях руху парашутиста залежно від часу t (у секундах, *с*) під час падіння з літака, якщо після стрибка парашутист вільно падає a с, а потім розкриває парашут і b с падає зі сталою швидкістю v_0.

• Очевидно, що за проміжок часу $0 \le t \le a$ шлях парашутиста визначається формулою $s = \frac{gt^2}{2}$. За a с він пролетить шлях $\frac{ga^2}{2}$, після чого кожної наступної секунди його швидкість дорівнюватиме v_0, тому за проміжок часу $a \le t \le a + b$ його шлях визначатиметься формулою: $s = \frac{ga^2}{2} + v_0(t - a)$.

Отже, дістанемо функцію:

$$s(t)=\begin{cases}\dfrac{gt^2}{2}, \text{ якщо } 0\le t\le a,\\ \dfrac{ga^2}{2}+v_0(t-a), \text{ якщо } a\le t\le a+b.\end{cases}$$

Областю визначення цієї функції є $0 \le t \le a + b$, або $t \in [0;\ a + b]$, а множиною значень — $0 \le s \le \dfrac{ga^2}{2} + v_0 b$, або $s \in \left[0; \dfrac{ga^2}{2} + v_0 b\right]$.

2. Нехай кожному натуральному числу n відповідає n-й десятковий знак наближеного значення $\sqrt{2}$. Чи задає така відповідність функцію?

• Відомо, що $\sqrt{2}$ є ірраціональним числом і $\sqrt{2} = 1,4142135...$, причому кожному $n \in \boldsymbol{N}$ відповідає один і тільки один десятковий знак цього нескінченного неперіодичного десяткового дробу. Тому дана відповідність задає функцію $y = \varphi(n)$, $n \in \boldsymbol{N}$, яку називають *числовою послідовністю*.

Наприклад, $\varphi(1) = 4$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 4$, $\varphi(4) = 2$ (мал. 16).

Зазначимо, що це приклад функції, заданої *словесно*.

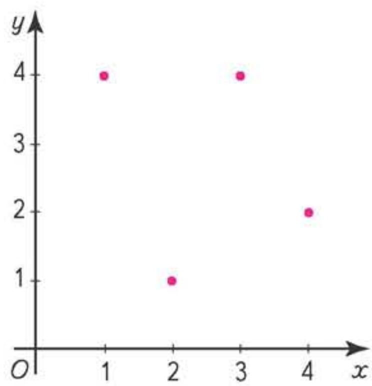
3. Обчислимо значення функції $f(x) = \dfrac{4}{x^2} + x^2$ у точках, у яких $\dfrac{2}{x} + x = 1$.

• Маємо:

$$f(x) = \frac{4}{x^2} + x^2 = \left(\frac{2}{x} + x\right)^2 - 4 = 1 - 4 = -3.$$

4. Функція $f(x)$ визначена на відрізку [0; 1]. Яка область визначення функції $f(x - 5)$?

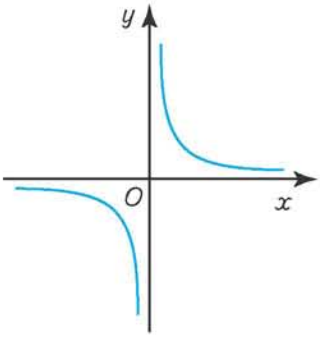
• Нехай $x - 5 = t$, тоді функція $f(x - 5) = f(t)$ визначена, якщо $t \in [0;\ 1]$, тобто $x - 5 \in [0;\ 1]$ або $0 \le x - 5 \le 1$, звідси $5 \le x \le 6$. Отже, функція $f(x - 5)$ визначена на відрізку [5; 6].



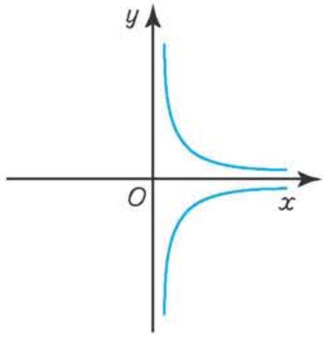
Мал. 16

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

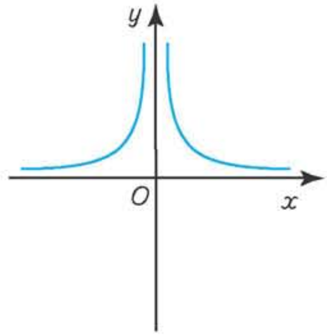
1. Дайте означення функції.
2. Що називають областю визначення та областю значень функції? Наведіть приклади.
3. Які ви знаєте способи задання функції?
4. Що таке графік функції? Чи будь-яка крива на координатній площині є графіком функції?
5. Чи завжди область визначення аналітичного виразу є областю визначення функції, яку він задає? Наведіть приклади.



Мал. 17



Мал. 18



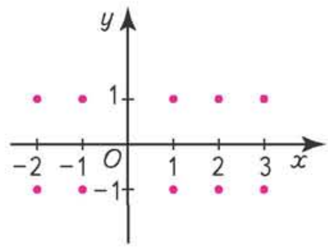
Мал. 19

6. Як для функції, заданої графічно, знайти область її визначення та область значень?

7. Яку функцію називають зростаючою (спадною), неспадною (незростаючою)? Наведіть приклади.

8. Яку функцію називають парною (непарною)? Наведіть приклади.

9. Які з множин точок на малюнках 17 — 20 задають функцію? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 20

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

40'. Усно. Чи правильне твердження:

1) будь-яка пряма $x = a$, $a \in D(f)$, перетинає графік функції $y = f(x)$ в одній точці;
2) будь-яка пряма $y = b$, $b \in E(f)$, перетинає графік функції $y = f(x)$ в одній точці;
3) якщо $f(x) = |x|$, то $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = \mathbf{R}$;
4) графік зростаючої функції не може бути симетричним відносно осі Oy?

41'. Заповніть таблицю 2, якщо функцію задано формулою $y = \dfrac{x}{2x-1}$.

Таблиця 2

x	–1			0	0,5	
y		0	1			–1

42'. Знайдіть невідому координату точки, якщо вона належить графіку функції $y = \dfrac{2x+5}{3}$: $A(0;\ y)$, $B(x;\ 0)$, $C(-2;\ y)$, $D(x;\ 0{,}5)$.

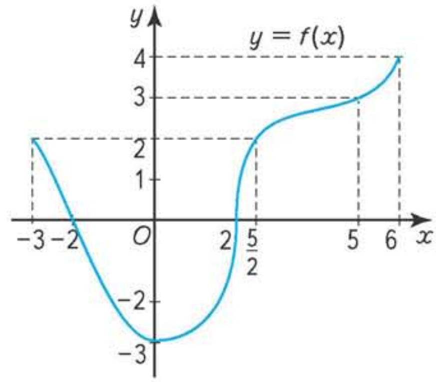
43'. За графіком функції $y = f(x)$ (мал. 21) знайдіть:

1) область визначення; 2) область значень;
3) $f(0)$, $f(-3)$, $f(5)$, $f\left(\dfrac{5}{2}\right)$; 4) точки перетину з осями координат;

5) значення x, за яких $f(x) = 4$, $f(x) = 2$, $f(x) = -2$;
6) інтервали монотонності функції.

44'. Рухаючись зі швидкістю v км/год протягом 6 год, автомобіль пройшов шлях s км. Задайте формулою залежність s від v. Користуючись цією формулою: а) знайдіть s, якщо $v = 65$ км/год; б) знайдіть v, якщо $s = 363$ км.

45°. У коло радіусом r вписано $\triangle ABC$, сторона AB якого збігається з діаметром кола. Знайдіть залежність катета $AC = b$ від катета $BC = x$, якщо вершина C трикутника пробігає півколо.



Мал. 21

46°. Знайдіть залежність довжини b одного катета прямокутного трикутника від довжини a другого катета, якщо гіпотенуза $c = 5$.

47°. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$; 2) $y = \sqrt{5-2x} + 1$;

3) $y = \dfrac{1}{x^2-x} + 2x$; 4) $y = \dfrac{3x-1}{x^2-3x+2}$.

48°. Яка із заданих функцій є парною, непарною, ні парною, ні непарною:

1) $y = 5x^2 + 1$; 2) $y = x^5 + 3x^3 - x$; 3) $y = 2x^4 - x^3 + 1$;

4) $y = 3x - \dfrac{2}{x}$; 5) $y = 4x^2 + |x|$; 6) $y = \dfrac{|x|}{2x}$;

7) $y = \sqrt[3]{x} + x$; 8) $y = \sqrt[3]{x^3+5}$; 9) $y = \sqrt{x} + 8x$?

49. Користуючись означенням, дослідіть функцію на монотонність:

1) $y = 3x + 1$; 2) $y = -2x + 3$; 3) $y = x^2 - 2$;

4) $y = -2x^2 - 1$; 5) $y = \dfrac{1}{x}$.

50. $f(x) = \begin{cases} -4, & \text{якщо } x < -1, \\ 2x - 2, & \text{якщо } -1 \le x < 3, \\ 4, & \text{якщо } x \ge 3. \end{cases}$

Яке із співвідношень є правильним:

1) $f(-2) = -f(2)$; 2) $f(0) < f(-3)$;

3) $f(4) > f(1)$; 4) $\dfrac{f(-2)}{f(2)} > 0$?

51. $f(x) = \begin{cases} x + 9, & \text{якщо } -9 \le x < 0, \\ x, & \text{якщо } \ 0 \le x \le 9. \end{cases}$

Яке із співвідношень є правильним:

1) $f(-1) < f(1)$; 2) $f(-2) \ne f(2)$;
3) $f(0) = f(9)$; 4) $f(-9) = f(0)$?

52*. Доведіть, що сума та добуток двох парних функцій є парною функцією.

53*. Нехай $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$. Знайдіть значення x, за яких:

1) $f(x) = 0$; 2) $0 < f(x) < 1$; 3) $|f(x)| \le 2$.

54*. Функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-1; 0]$. Яка область визначення функції:

1) $f(2x)$; 2) $f(-x^2)$; 3) $f(|x| + x)$?

55*. Функцію задано таблицею 3.

Таблиця 3

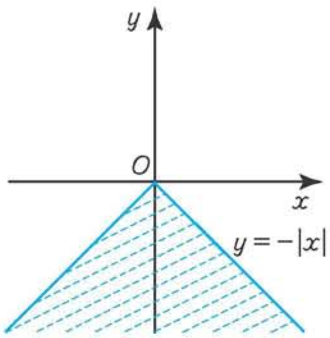
x	4	6	–10	–12	20
y	–2	–3	5	6	–10

За таблицею значень x і y знайдіть залежність y від x у вигляді формули.

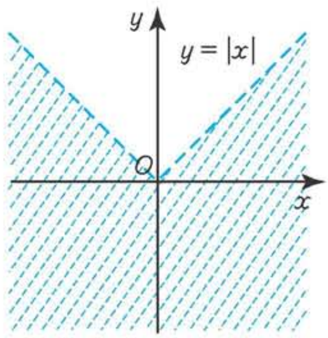
56*. Знайдіть область визначення і область значень функції:

1) $y = -x^2 + 6x - 4$; 2) $y = 2 - |x|$;
3) $y = x^2 - 8x + 13$; 4) $y = \sqrt{25 - x^2}$;
5) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$; 6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - |x|}}$.

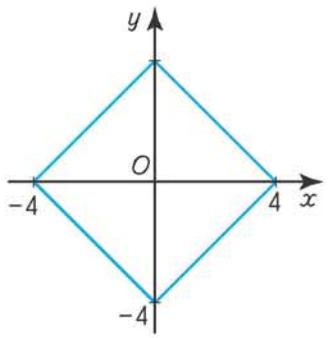
57*. Якими нерівностями пов'язані координати множин точок, обмежених графіками функцій $y = -|x|$ та $y = |x|$ і заштрихованих на малюнках 22, 23?



Мал. 22



Мал. 23



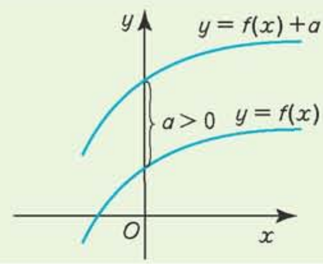
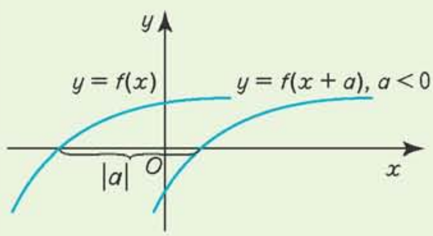
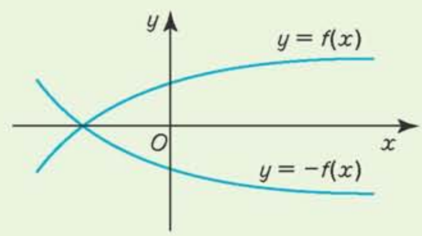
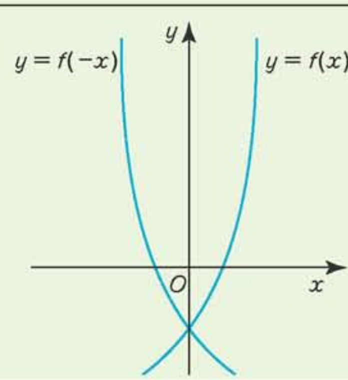
Мал. 24

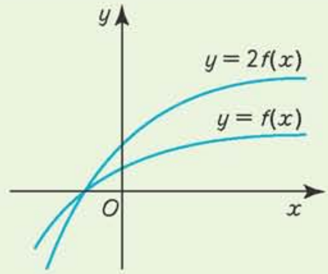
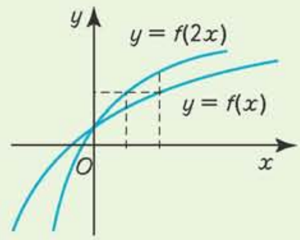
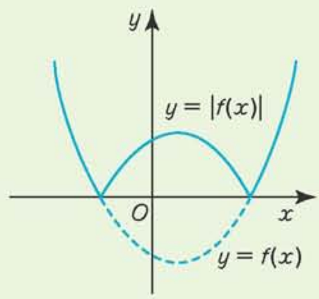
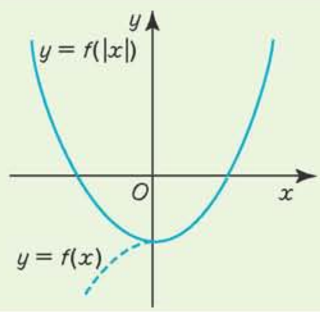
58*. Яку з множин точок наведено на малюнку 24? Поясніть, чому ця множина функцію не задає.

§4 Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

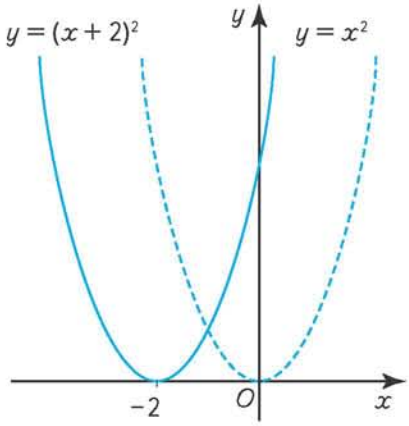
Найпростіші перетворення графіків функцій наведено в таблиці 4.

Таблиця 4

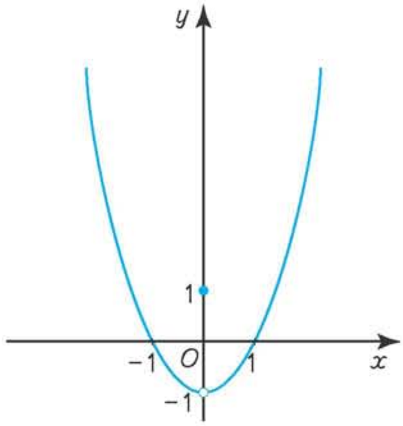
№ з/п	Функція	Геометричні перетворення графіка функції $f(x)$	Графічне зображення функції
1	$f(x)+a$	Паралельно перенести на відстань $\|a\|$ вздовж осі Oy (вгору, якщо $a>0$, і вниз, якщо $a<0$)	
2	$f(x+a)$	Паралельно перенести на відстань $\|a\|$ вздовж осі Ox (вліво, якщо $a>0$, і вправо, якщо $a<0$)	
3	$-f(x)$	Відобразити симетрично відносно осі Ox	
4	$f(-x)$	Відобразити симетрично відносно осі Oy	

№ з/п	Функція	Геометричні перетворення графіка функції $f(x)$	Графічне зображення функції
5	$kf(x)$ $(k > 0)$	Ординату кожної точки графіка збільшити в k разів, якщо $k > 1$, і зменшити в $\frac{1}{k}$ раза, якщо $0 < k < 1$	
6	$f(kx)$ $(k > 0)$	Абсцису кожної точки графіка збільшити в $\frac{1}{k}$ раза, якщо $0 < k < 1$, і зменшити у k разів, якщо $k > 1$	
7	$\lvert f(x)\rvert$	Залишити без змін ті частини графіка, де $f(x) \geq 0$, а ті частини графіка, де $f(x) < 0$, відобразити симетрично відносно осі Ox	
8	$f(\lvert x\rvert)$	Залишити без змін ту частину графіка, яка відповідає невід'ємним значенням x, і приєднати до неї її образ, симетричний відносно осі Oy	

За графіком можна встановлювати основні властивості функції: область визначення, множину значень, інтервали монотонності, парність та непарність, нулі функції (точки x, у яких $f(x) = 0$).



Мал. 25



Мал. 26

Приклад 1. Побудуйте графік функції $y = (x + 2)^2$.

Розв'язання. Графік функції $y = (x + 2)^2$ дістанемо, якщо графік функції $y = x^2$ перенесемо паралельно вздовж осі Ox на 2 одиниці вліво (геометричне перетворення 2 з табл. 4) (мал. 25).

Сформулюємо властивості функції за її графіком.

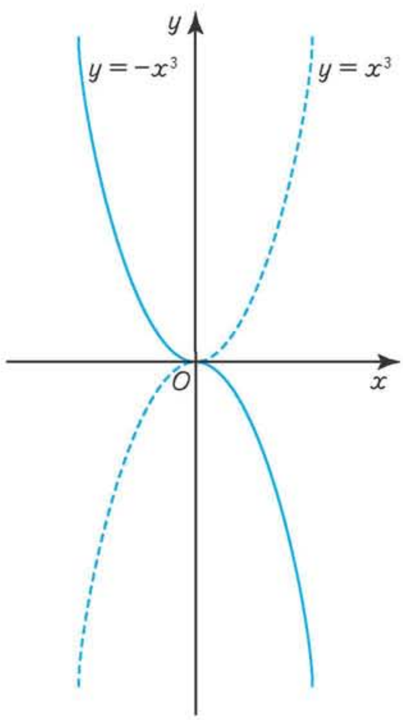
1) Область визначення: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2) Множина значень: $E(f) = [0; +\infty)$.

3) Функція спадає на інтервалі $(-\infty; -2)$ і зростає на інтервалі $(-2; +\infty)$.

4) Функція ні парна, ні непарна.

5) $x = -2$ — нуль функції.



Мал. 27

Приклад 2. Побудуйте графік функції

$$y = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Використаємо геометричне перетворення 1 (табл. 4), а саме: графік функції $y = x^2$ перенесемо паралельно вздовж осі Oy на одну одиницю вниз і виключимо точку $(0; -1)$.

Точка $(0; 1)$ належить графіку функції (мал. 26).

Властивості функції.

1) Область визначення: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2) Множина значень: $E(f) = (-1; +\infty)$.

3) Функція спадна на інтервалі $(-\infty; 0)$ і зростаюча на інтервалі $(0; +\infty)$.

4) Функція парна на множині $D(f)$, оскільки її графік симетричний відносно осі Oy.

5) Нулями функції є $x = \pm 1$.

Приклад 3. Побудуйте графік функції $y = -x^3$.

Розв'язання. Відповідно до геометричного перетворення 3 (табл. 4) графік функції $y = x^3$ симетрично відобразимо відносно осі Ox (мал. 27).

Сформулюємо властивості функції за її графіком.

1) Область визначення: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2) Множина значень: $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

3) Функція спадна на інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

4) Функція непарна на множині $D(f)$, оскільки її графік симетричний відносно початку координат.

5) $x = 0$ — нуль функції.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Розглянемо побудову графіків складніших функцій.

1. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{|x| - 1}$.

• Скориставшись графіком функції $y = \sqrt{x}$, перенесемо його на одиницю праворуч вздовж осі Ox і одержимо графік функції $y = \sqrt{x-1}$ (геометричне перетворення 2 з табл. 4). Далі виконаємо геометричне перетворення 8: залишимо частину графіка праворуч від осі Oy і приєднаємо до неї її образ, симетричний відносно осі Oy. В результаті одержимо шуканий графік (мал. 28).

Властивості функції $y = \sqrt{|x| - 1}$.

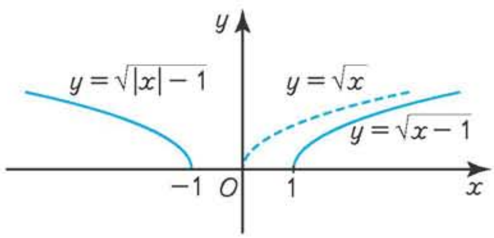
1) Область визначення:
$D(f) = (-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$.

2) Множина значень: $E(f) = [0;\ +\infty)$.

3) Функція спадна на інтервалі $(-\infty; -1)$ і зростаюча на інтервалі $(1;\ +\infty)$;

4) Функція парна на множині $D(f)$, оскільки її графік симетричний відносно осі Oy.

5) $x = \pm 1$ — нулі функції.



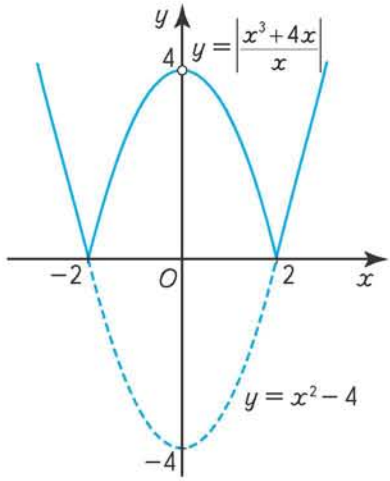
Мал. 28

2. Побудуйте графік функції $y = \dfrac{|x^3 - 4x|}{|x|}$.

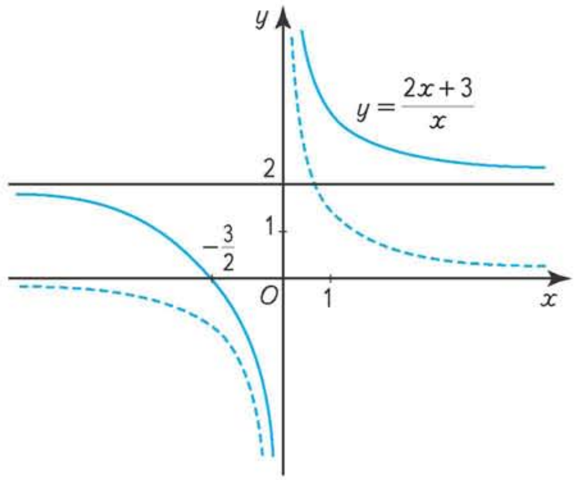
• Запишемо аналітичний вираз для функції у вигляді:

$$y = \frac{|x^3 - 4x|}{|x|} = \frac{|x||x^2 - 4|}{|x|} = |x^2 - 4|,\ \ x \neq 0.$$

Спочатку побудуємо графік функції $f(x) = x^2 - 4$. Для цього скористаємося геометричним перетворенням 1 (табл. 4) і перенесемо параболу $y = x^2$ паралельно вздовж осі Oy на 4 одиниці вниз. Далі за допомогою геометричного перетворення 7



Мал. 29



Мал. 30

дістанемо графік функції $y=|x^2-4|$ і, нарешті, виключимо з нього точку (0; 4) (мал. 29).

Властивості функції: $y=\dfrac{|x^3-4x|}{|x|}$.

1) Область визначення: $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.
2) Множина значень: $E(f)=[0;4)\cup(4;+\infty)$.
3) Функція спадна на інтервалах $(-\infty;-2)$ і $(0;2)$ та зростаюча на інтервалах $(-2;0)$ і $(2;+\infty)$.
4) Функція парна, оскільки її графік симетричний відносно осі Oy.
5) $x=\pm2$ — нулі функції.

3. Побудуйте графік функції $y=\dfrac{2x+3}{x}$.

• У цьому випадку маємо: $f(x)=\dfrac{2x+3}{x}=2+\dfrac{3}{x}$. Отже, графік даної функції можна дістати за допомогою перетворення графіка функції $y=\dfrac{1}{x}$.

Спочатку застосуємо геометричне перетворення 5 (табл. 4): ординату кожної точки гіперболи $y=\dfrac{1}{x}$ збільшимо в 3 рази, потім гіперболу $y=\dfrac{3}{x}$ за допомогою геометричного перетворення 1 перенесемо паралельно вздовж осі Oy на 2 одиниці вгору (мал. 30).

Властивості функції $y=\dfrac{2x+3}{x}$.

1) $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.
2) $E(f)=(-\infty;+\infty)$.
3) Функція спадна в своїй області визначення.
4) Функція не є ні парною, ні непарною.
5) $x=-\dfrac{3}{2}$ — нуль функції.

Зосередимо увагу ще на одній властивості функцій — *властивості неперервності.*

Інтуїтивно зрозуміло, що графіком неперервної функції є неперервна (суцільна) крива. Багато процесів різної природи описуються неперервними кривими. Такими є, наприклад, залежність тиску газу від його об'єму або залежність теплоємності твердого тіла від температури. Разом з тим можна навести приклади процесів, які з досить великою точністю описуються функціями, графіки яких — розривні криві. Очевидно, що розривні криві відповідають стрибкоподібним процесам, які досить поширені в різних галузях господарства. Наприклад, зміна кількості населення кожного міста як функція часу зображається ступінчастою кривою. Ця крива матиме розриви в точках, що відповідають збільшенню або зменшенню кількості мешканців на одиницю. У проміжках між такими моментами функція зберігає стале значення та її графіком є пряма, паралельна осі часу.

Серед розглянутих вище функцій неперервними на множині всіх дійсних чисел є функції $y = (x + 2)^2$ і $y = -x^3$; функція $y = \sqrt{|x|-1}$ неперервна на множині $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; функції $y = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } x = 0; \end{cases}$ $y = \left|\dfrac{x^3-4x}{x}\right|$; $y = \dfrac{2x+3}{x}$ розривні в одній точці $x = 0$.

Очевидно, що функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, якщо її значення як завгодно близькі до значення $f(x_0)$, коли точка x наближається до точки x_0.

Саме це і створює те зорове враження, що його виражають словами «суцільна крива», або «неперервна крива».

Точне означення неперервності функції засноване на понятті границі функції і дається в курсі математичного аналізу.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Назвіть найпростіші перетворення графіків функцій.

2. Опишіть, як за допомогою геометричних перетворень графіка функції $f(x)$ побудувати графік функції: 1) $y = f(x) + 2$; 2) $y = f(x - 1)$; 3) $y = 3f(x)$.

3. Графік якої функції дістанемо, якщо графік функції $y = f(x)$ відобразимо симетрично відносно осі Ox; відносно осі Oy?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

59'. Користуючись геометричними перетвореннями графіків функцій $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$, побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 - 1$; 2) $y = (x - 2)^2$; 3) $y = x^2 + 3$;

4) $y = 2\sqrt{x}$; 5) $y = \sqrt{2x}$; 6) $y = \sqrt{x-2}$.

60°. Задано графік функції $f(x) = x^2$. Побудуйте графік функції:

1) $f(x - 1)$; 2) $-f(x)$; 3) $f(2x)$; 4) $-f\left(\dfrac{x}{2}\right)$; 5) $f(x) + 1$.

61. Задано графік функції $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Побудуйте графік функції:

1) $f(2-x)$; 2) $-2f(x)$; 3) $f(|x|)$.

62*. Побудуйте графік функції та охарактеризуйте її властивості:

1) $y=\dfrac{1}{|x-1|}$; 2) $y=\dfrac{1}{|x|-1}$; 3) $y=x^2-2|x|+2$; 4) $y=\sqrt{x^2-2x+1}$.

63*. Графік якої функції дістанемо, якщо виконаємо такі перетворення графіка функції $y=\dfrac{1}{x}$:

1) значення ординати кожної точки графіка збільшимо в $\dfrac{3}{2}$ раза;

2) відобразимо графік симетрично відносно осі Ox;

3) перенесемо паралельно вздовж осі Ox на $\dfrac{1}{2}$ одиниці вправо?

§5 Корінь *n*-го степеня. Арифметичний корінь *n*-го степеня та його властивості

Нагадаємо, що квадратним коренем з числа a називають таке число, квадрат якого дорівнює a. Сформулюємо означення кореня будь-якого натурального степеня $n>1$.

Коренем n-го степеня з числа a називають число, n-ний степінь якого дорівнює a.

З означення випливає, що добути корінь n-го степеня з дійсного числа a — це все одно, що знайти дійсні розв'язки рівняння

$$x^n = a. \qquad (1)$$

Проаналізуємо розв'язки рівняння (1).

1. Якщо $a=0$, то за будь-якого натурального значення n рівняння (1) має єдиний корінь $x=0$.

2. Якщо n — парне число і $a<0$, то рівняння (1) не має коренів, оскільки немає жодного дійсного числа, парний степінь якого дорівнював би від'ємному числу.

Якщо n — парне число і $a>0$, то рівняння (1) має два дійсних корені, які є протилежними числами. Наприклад, $x^2=9$, $x=\pm 3$.

3. Якщо n — непарне число і $a>0$, то рівняння (1) має один дійсний додатний корінь. Наприклад, $x^3=8$, $x=2$.

Якщо n — непарне число і $a<0$, то рівняння (1) має один дійсний від'ємний корінь. Наприклад, $x^3=-27$, $x=-3$.

Отже, слід пам'ятати, що на множині дійсних чисел:
1) корінь n-го степеня з числа 0 дорівнює 0;
2) корінь парного степеня з додатного дійсного числа має два значення, що є однаковими за модулем і протилежними за знаком;
3) корінь парного степеня з від'ємного дійсного числа не існує;
4) корінь непарного степеня з довільного дійсного числа має одне значення, причому додатне, якщо число додатне, і від'ємне, якщо число від'ємне.

Розглянуті випадки розв'язування рівняння (1) показують, що це рівняння має невід'ємний дійсний корінь, як у разі парного, так і в разі непарного n, якщо $a \geq 0$. Цей корінь називають арифметичним коренем n-го степеня з числа a.

Арифметичним коренем n-го степеня з числа $a \geq 0$ називають невід'ємне число, n-ний степінь якого дорівнює a, і позначають $\sqrt[n]{a}$, де натуральне число $n > 1$ називають показником кореня, а саме число a — підкореневим виразом.

Зокрема, арифметичний корінь другого степеня з числа a називають квадратним коренем $(\sqrt{a})$, а корінь третього степеня — кубічним коренем $(\sqrt[3]{a})$.

Наприклад, $\sqrt{9}=3; \sqrt[3]{8}=2; \sqrt[5]{1}=1; \sqrt{0}=0$.

З означення арифметичного кореня n-го степеня випливає:
1) вираз $\sqrt[n]{a}$ має зміст, лише якщо $a \geq 0$;
2) вираз $\sqrt[n]{a}$ може набувати лише невід'ємних значень;
3) рівність $(\sqrt[n]{a})^n = a$ правильна за будь-якого невід'ємного значення a.

Відповідно до введеного поняття арифметичного кореня розв'язки рівняння $x^2 = 36$, що є протилежними числами, записують так:

$x_{1,2} = \pm\sqrt{36} = \pm 6$.

Крім того, для коренів парного степеня:

$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$, $a \in R$, $k \geq 1$ – **натуральне число.**

Наприклад, $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$; $\sqrt[4]{(-3)^4}=|-3|=3$.

Для коренів непарного степеня:

$\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in N$, $a \in R$.

Наприклад, $\sqrt[3]{-1}=-\sqrt[3]{1}=-1$; $\sqrt[5]{-32}=-\sqrt[5]{32}=-2$.

Приклад 1. Знайдіть арифметичне значення кореня:

1) $\sqrt[3]{125}$; 2) $\sqrt[6]{64}$; 3) $\sqrt[4]{(2-\pi)^4}$; 4) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$; 5) $\sqrt[8]{x^8}$; 6) $\sqrt{(a+1)^2}$; 7) $\sqrt[6]{a^2}$.

Розв'язання. За означенням значення арифметичного кореня невід'ємні, тому:

1) $\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$; 2) $\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$; 3) $\sqrt[4]{(2-\pi)^4}=|2-\pi|=\pi-2$;

4) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}=|\sqrt{5}-2|=\sqrt{5}-2$; 5) $\sqrt[8]{x^8}=|x|$;

6) $\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|=\begin{cases} a+1, & \text{якщо } a\ge -1, \\ -a-1, & \text{якщо } a<-1; \end{cases}$

7) $\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[3]{|a|}=\begin{cases} \sqrt[3]{a}, & \text{якщо } a\ge 0, \\ -\sqrt[3]{a}, & \text{якщо } a<0. \end{cases}$

Приклад 2. При яких значеннях букв вираз є арифметичним коренем:

1) $\sqrt[5]{x-1}$; 2) $\sqrt{a+1}$; 3) $\sqrt[6]{|x|+x^2}$?

Розв'язання. За означенням арифметичного кореня підкореневий вираз має бути невід'ємним, тому:

1) $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1 \Leftrightarrow x\in[1;+\infty)$; 2) $a+1\ge 0 \Leftrightarrow a\ge -1 \Leftrightarrow a\in[-1;+\infty)$;

3) $|x|+x^2\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;+\infty)$.

Приклад 3. Спростіть вираз:

1) $a-\sqrt{a^2-2a+1}$; 2) $\sqrt[4]{(a-b)^4}$; 3) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$.

Розв'язання.

1) $a-\sqrt{a^2-2a+1}=a-\sqrt{(a-1)^2}=a-|a-1|=\begin{cases} 1, & \text{якщо } a\ge 1, \\ 2a-1, & \text{якщо } a<1. \end{cases}$

2) $\sqrt[4]{(a-b)^4}=|a-b|=\begin{cases} a-b, & \text{якщо } a\ge b, \\ b-a, & \text{якщо } a<b. \end{cases}$

3) Подамо підкореневий вираз у вигляді квадрата різниці двочлена:

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{3-2\sqrt{15}+5}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}=$$
$$=|\sqrt{3}-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-\sqrt{3}.$$

Розглянемо властивості арифметичних коренів n-го степеня ($n>1$ — натуральне число), які узагальнюють відомі властивості квадратного кореня.

1. Якщо $a\ge 0$, $b\ge 0$, то

$$\boxed{\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}}. \qquad (1)$$

Корінь n-го степеня з добутку невід'ємних чисел дорівнює добутку коренів з цих чисел.

Доведення. Насамперед зазначимо, що кожний з виразів $\sqrt[n]{ab}$ і $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ існує, якщо $a\ge 0$ і $b\ge 0$. Крім того, $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\ge 0$, оскільки за означенням арифметичного кореня $\sqrt[n]{a}\ge 0$ і $\sqrt[n]{b}\ge 0$.

За властивістю степеня добутку маємо $\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=ab$, а з означення арифметичного кореня n-го степеня випливає, що має місце рівність (1). Властивість доведено.

Доведена властивість є правильною для будь-якої скінченної кількості невід'ємних чисел.

Справді, якщо $a\ge 0$, $b\ge 0$ і $c\ge 0$, то $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{(ab)c}=\sqrt[n]{ab}\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$, тобто $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$.

2. Якщо $a \geq 0$, $b > 0$, то $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$. (2)

Корінь n-го степеня з дробу, чисельник якого невід'ємний, а знаменник додатний, дорівнює кореню з чисельника, поділеному на корінь із знаменника.

Доведення. Якщо $a \geq 0$ і $b > 0$, то вирази в лівій і правій частинах рівності (2) існують. Крім того, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \geq 0$, оскільки $\sqrt[n]{a} \geq 0$ і $\sqrt[n]{b} > 0$ і за властивістю степеня частки дістаємо: $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$.

З означення арифметичного кореня n-го степеня випливає, що формула (2) правильна. Властивість доведено.

Якщо формули (1) і (2) записати у вигляді

$\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, $a \geq 0$ і $b \geq 0$; $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $a \geq 0$ і $b > 0$, то одержимо правила множення і ділення арифметичних коренів n-го степеня. Сформулюйте ці правила самостійно.

Приклад 4. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{64 \cdot 343 \cdot 1000}$; 2) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$; 3) $\frac{2\sqrt[3]{216} + \sqrt[5]{\frac{1}{243}} - \sqrt{5\frac{4}{9}}}{5\sqrt[4]{0{,}0016}}$.

Розв'язання. За властивостями арифметичних коренів маємо:

1) $\sqrt[3]{64 \cdot 343 \cdot 1000} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{343} \cdot \sqrt[3]{1000} = 4 \cdot 7 \cdot 10 = 280$;

2) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3}$;

3) $$\frac{2\sqrt[3]{216} + \sqrt[5]{\frac{1}{243}} - \sqrt{5\frac{4}{9}}}{5\sqrt[4]{0{,}0016}} = \frac{2\sqrt[3]{8 \cdot 27} + \frac{1}{3} - \sqrt{\frac{49}{9}}}{5\sqrt[4]{10^{-4} \cdot 16}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3} - \sqrt{\frac{49}{9}}}{5\sqrt[4]{10^{-4}} \cdot \sqrt[4]{16}} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 + \frac{1}{3} - \frac{7}{3}}{5 \cdot 0{,}1 \cdot 2} = \frac{12 - 2}{1} = 10.$$

3. Якщо $n > 1$, $k > 1$ — натуральні числа і $a \geq 0$, то

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}}. \quad (3)$$

Корінь n-го степеня з кореня k-го степеня невід'ємного числа a дорівнює кореню nk-го степеня з цього числа.

Доведення. Якщо $a \geq 0$, то вирази $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ і $\sqrt[nk]{a}$ існують і є невід'ємними.

Крім того, $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$. З означення арифметичного кореня випливає, що рівність (3) правильна.

4. Якщо $n > 1$, k і m — натуральні числа і $a \geq 0$, то

$$\boxed{\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}}. \qquad (4)$$

Якщо показник кореня і показник степеня підкореневого виразу помножити або поділити на одне й те саме натуральне число, то значення кореня не зміниться.

Доведення. За властивістю 3 дістаємо: $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{mk}}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{(a^m)^k}} = \sqrt[n]{a^m}$. Властивість доведено.

Властивість 4 іноді називають *основною властивістю арифметичного кореня.*

5. Якщо $n > 1$, $k > 1$ — натуральні числа і $a \geq 0$, то

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}}. \qquad (5)$$

Щоб піднести корінь n-го степеня до степеня k, достатньо піднести до цього степеня підкореневий вираз.

Доведення. Зазначимо, що обидві частини рівності (5) невід'ємні, якщо $a \geq 0$. За властивістю степеня з натуральним показником і за означенням арифметичного кореня n-го степеня маємо: $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k = a^k$. Властивість доведено.

6. Якщо $0 \leq a < b$, то $\boxed{\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}}$. (6)

Доведення. Виконаємо доведення методом від супротивного. Припустимо, що справедлива нерівність $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$. Тоді за властивістю степеня з натуральним показником $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \geq \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$, тобто $a \geq b$, що суперечить умові $a < b$. Властивість доведено.

Приклад 5. Порівняйте числа:

1) $\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[4]{7}$ і $\sqrt{\sqrt[4]{80}}$; 3) $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt[5]{4}$ і $\sqrt[3]{3}$.

Розв'язання. Зведемо корені в кожному завданні до одного показника, користуючись основною властивістю арифметичного кореня:

1) $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$, отже, $\sqrt{2} > \sqrt[4]{3}$;

2) $\sqrt[4]{7} = \sqrt[8]{49}$, $\sqrt{\sqrt[4]{80}} = \sqrt[8]{80}$, тобто $\sqrt{\sqrt[4]{80}} > \sqrt[4]{7}$;

3) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{4}$, $\sqrt{3} = \sqrt[6]{27}$ і $\sqrt{3} > \sqrt[3]{2}$;

4) $\sqrt[5]{4} = \sqrt[15]{64}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[15]{243}$, тобто $\sqrt[3]{3} > \sqrt[5]{4}$.

Приклад 6. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt[5]{\sqrt{33}+1} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{33}-1}$; 2) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}$.

Розв'язання. За властивостями арифметичних коренів:

1) $\sqrt[5]{\sqrt{33}+1} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{33}-1} = \sqrt[5]{(\sqrt{33}+1)(\sqrt{33}-1)} = \sqrt[5]{33-1} = 2$;

2) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} \cdot \sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3-2\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} =$
$= \sqrt[6]{\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2}$.

Приклад 7. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{108}$; 2) $\sqrt[3]{512}$; 3) $\sqrt[4]{324}$; 4) $\sqrt[5]{\dfrac{\left(5-\sqrt{5}\right)^5}{96}}$;

5) $\sqrt{(1-x)^3}$, якщо $x \le 1$; 6) $\sqrt[3]{(x-1)^4}$.

Розв'язання. Виконуючи цю дію, підкореневий вираз слід подати у вигляді добутку множників, з яких (одного або кількох) можна добути корінь.

1) $\sqrt{108}=\sqrt{36\cdot 3}=6\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[3]{512}=\sqrt{8^3}=8$;

3) $\sqrt[4]{324}=\sqrt[4]{81\cdot 4}=\sqrt[4]{3^4\cdot 2^2}=3\sqrt{2}$; 4) $\sqrt[5]{\dfrac{\left(5-\sqrt{5}\right)^5}{96}}=\dfrac{5-\sqrt{5}}{\sqrt[5]{32\cdot 3}}=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt[5]{3}}$;

5) $\sqrt{(1-x)^3}=\sqrt{(1-x)^2(1-x)}=|1-x|\sqrt{1-x}=(1-x)\sqrt{1-x}$, якщо $x \le 1$;

6) $\sqrt[3]{(x-1)^4}=\sqrt[3]{(x-1)^3(x-1)}=(x-1)\sqrt[3]{x-1}$.

Приклад 8. Внесіть множник під знак кореня:

1) $5\sqrt{3}$; 2) $6\sqrt[3]{1\frac{1}{9}}$; 3) $7a^2\sqrt{ab}$; 4) $a\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{a^3}}$.

Розв'язання. Вносячи множник під знак кореня, треба піднести його до степеня, який дорівнює показнику кореня, і записати як множник під знаком кореня.

1) $5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\cdot 3}=\sqrt{75}$; 2) $6\sqrt[3]{1\frac{1}{9}}=\sqrt[3]{6^3\cdot\dfrac{10}{9}}=\sqrt[3]{240}$;

3) $7a^2\sqrt{ab}=\sqrt{49a^5b}$; 4) $a\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{a^3}}=\sqrt[3]{a^3\dfrac{a^3+1}{a^3}}=\sqrt[3]{a^3+1}$.

Приклад 9. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$; 3) $\dfrac{a^4}{\sqrt[7]{a^5}}$; 4) $\dfrac{a^3}{x\sqrt[n]{x^{n-3}}}$; 5) $\dfrac{m-n}{\sqrt{m-n}}$; 6) $\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$; 7) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 8) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Розв'язання. Звільнюючись від ірраціональності в знаменнику дробу, необхідно чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне й те саме число або вираз, відмінний від нуля.

1) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\sqrt{3}$; 2) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^2}}=\sqrt[3]{2^2}$; 3) $\dfrac{a^4}{\sqrt[7]{a^5}}=\dfrac{a^4\sqrt[7]{a^2}}{\sqrt[7]{a^5}\sqrt[7]{a^2}}=a^3\sqrt[7]{a^2}$;

4) $\dfrac{a^3}{x\sqrt[n]{x^{n-3}}}=\dfrac{a^3\sqrt[n]{x^3}}{x\sqrt[n]{x^{n-3}}\sqrt[n]{x^3}}=\dfrac{a^3\sqrt[n]{x^3}}{x^2}$, якщо $x>0$; 5) $\dfrac{m-n}{\sqrt{m-n}}=\dfrac{(\sqrt{m-n})^2}{\sqrt{m-n}}=\sqrt{m-n}$;

6) $\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}=\dfrac{(a+b)\sqrt[3]{a+b}}{\sqrt[3]{(a+b)^2}\sqrt[3]{a+b}}=\sqrt[3]{a+b}$; 7) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\sqrt{5}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$;

8) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Приклад 10. Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}+\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Розв'язання. 1) Зведемо дроби до спільного знаменника:

$$\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{7-4\sqrt{3}}=\frac{7-4\sqrt{3}+7+4\sqrt{3}}{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}=\frac{14}{49-16\cdot 3}=14.$$

2) Виконаємо віднімання дробів:

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2-(\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}}=2\sqrt{3}.$$

Приклад 11. Спростіть вираз $\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}+\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{4}{a-1}\right)^{-3}$.

Розв'язання.

$$\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}+\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\frac{4}{a-1}\right)^{-3}=\left(\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2+\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{a-1}-\frac{4}{a-1}\right)^{-3}=\left(\frac{2(a+1)}{a-1}-\frac{4}{a-1}\right)^{-3}=\left(\frac{2(a-1)}{a-1}\right)^{-3}=$$

$$=\frac{1}{8},\ a\geq 0,\ a\neq 1.$$

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Дайте означення кореня n-го степеня з числа a.
2. Що називають арифметичним коренем n-го степеня з числа $a\geq 0$? Наведіть приклади.
3. Чи правильні такі рівності:
$\sqrt{4}=2$, $\sqrt[3]{-27}=-3$, $\sqrt{16}=-4$, $\sqrt{-9}=-3$, $\sqrt{(-2)^4}=(-2)^2$?
4. Назвіть основні властивості арифметичного кореня n-го степеня. Для яких перетворень коренів їх застосовують?
5. Яке з чисел більше: 1) $\sqrt[20]{20}$ чи $\sqrt[5]{5}$; 2) $4\sqrt[3]{3}$ чи $2\sqrt[3]{25}$?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

64'. Усно. Знайдіть арифметичне значення кореня:

1) $\sqrt[3]{27}$; 2) $\sqrt[5]{32}$; 3) $\sqrt{(-2)^2}$; 4) $\sqrt[4]{(-5)^4}$; 5) $\sqrt{(-3)^2}+\sqrt[3]{8}$; 6) $\sqrt{(\pi-4)^2}$.

65'. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{4\cdot 36}$; 2) $\sqrt[3]{-\dfrac{8}{125}}$; 3) $\left(\sqrt{5}\right)^4$; 4) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$; 5) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$;

6) $\left(3\sqrt{18}-5\sqrt{64}\right)\sqrt{2}$; 7) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2$; 8) $\sqrt{200^2-56^2}$; 9) $\sqrt[3]{16\sqrt{2}}$.

66°. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[3]{8m^3n^9}$; 2) $\dfrac{3}{x}\sqrt{\dfrac{a^5x^2}{18}}$; 3) $\sqrt{4\left(3-\sqrt{10}\right)^2}$; 4) $\sqrt[3]{27\left(1-\sqrt{3}\right)^3}$; 5) $\sqrt[3]{\sqrt{17}+3}\cdot\sqrt{\sqrt{17}-3}$.

67°. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[3]{54}$; 2) $\sqrt[4]{64}$; 3) $\sqrt{200}$; 4) $\sqrt[4]{16a}$; 5) $\sqrt[3]{\frac{2}{125}}$.

68°. Внесіть множник під знак кореня:

1) $3\sqrt{2}$; 2) $2\sqrt[3]{3}$; 3) $3\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$; 4) $\frac{1}{5}\sqrt{2}$; 5) $a\sqrt[3]{5}$.

69. Доведіть рівність:

1) $\frac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{x^3}}{a-x}=\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}$; 2) $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{7-4\sqrt{3}}=14$;

3) $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}+\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}=3$; 4) $\frac{1-\frac{1}{\sqrt{a}}}{1+\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}}{a-1}=\frac{2}{1-a}$; 5) $\left(\frac{\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}}\right)^{-4}=\frac{a}{b}$.

70. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; 2) $\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}\cdot\sqrt[6]{a^5}}{(\sqrt{a\sqrt{a}})^{-2}}$.

71*. Звільніться від ірраціональності в знаменнику:

1) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+2}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

72*. Знайдіть щорічний приріст грошового вкладу в ощадбанку, якщо через кожні 20 років вклад подвоюється.

73*. Продуктивність праці збільшується щорічно на одну й ту саму кількість відсотків порівняно з попереднім роком. На скільки відсотків збільшується продуктивність праці щорічно, якщо за 3 роки вона зросла на 27 %?

74*. На скільки відсотків потрібно щорічно збільшувати продуктивність праці, щоб за 7 років вона зросла вдвічі?

§6 Степінь з раціональним показником. Поняття про степінь з ірраціональним показником

Ви вже знаєте, який зміст має вираз a^n, де $a \neq 0$, якщо показник n — ціле число.

Наприклад, $2^4 = 2\cdot2\cdot2\cdot2$; $(-3)^2 = (-3)\cdot(-3)$; $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$; $7^0 = 1$; $4{,}3^1 = 4{,}3$,

тобто степінь a^n існує при довільному цілому n і дійсному $a \neq 0$.

Який зміст має степінь $a^{\frac{m}{n}}$ з довільним раціональним показником $\frac{m}{n}$?

Степенем числа $a > 0$ з раціональним показником $r = \frac{m}{n}$, де m — ціле, а $n > 1$ — натуральне число, називають число $\sqrt[n]{a^m}$, тобто

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}.$$

Звернемо увагу на те, що за означенням степінь $a^r = a^{\frac{m}{n}}$ існує за будь-якого дробового показника $r = \frac{m}{n}$, якщо основа $a > 0$. Якщо n — парне число, то степінь $a^{\frac{m}{n}}$ має зміст, якщо $a^m \geq 0$; якщо n — непарне число, то вираз $a^{\frac{m}{n}}$ має зміст за будь-якої основи $a \neq 0$.

Наприклад, $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$; $(-5)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-5)^3} = \sqrt[4]{-125}$ не існує;

$9^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{9^4} = \sqrt[5]{3^8} = 3\sqrt[5]{27}$; $(-243)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-243)^3} = \sqrt[5]{(-3)^{15}} = (-3)^3 = -27$.

Покажемо, що сформульоване означення степеня з раціональним показником зберігає основні властивості степеня з цілим показником.

Властивості степеня з раціональним показником

($a > 0$, $b > 0$, r, s — раціональні числа):

1) $a^r \cdot a^r = a^{r+s}$; 2) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$; 3) $(a^r)^s = a^{rs}$;

4) $(ab)^r = a^r b^r$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{a^s}$; 6) $a^r > 0$;

7) $a^r > 1$, якщо $a > 1$, $r > 0$; $a^r < 1$, якщо $a > 1$, $r < 0$;

8) $a^r > a^s$, якщо $a > 1$, $r > s$; $a^r < a^s$, якщо $0 < a < 1$, $r > s$;

9) $a^r < b^r$, якщо $r > 0$, $a < b$; $a^r > b^r$, якщо $r < 0$, $a < b$.

Для доведення цих властивостей скористаємося означенням степеня з раціональним показником і властивостями коренів.

Доведення. Нехай $r = \frac{m}{n}$ і $s = \frac{p}{q}$, де $n > 1$, $q > 1$ — натуральні числа, а m і p — цілі числа.

1) $a^r \cdot a^s = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{r+s}$.

Із властивості 1 випливає, що для довільного $a > 0$ і довільного раціонального числа r $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$. Справді, $a^{-r} \cdot a^r = a^0 = 1$.

2) $\frac{a^r}{a^s} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{np}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{r-s}$.

3) $(a^r)^s = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{rs}$.

4) $(ab)^r = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^r \cdot b^r$.

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{a^r}{b^r}$.

6) З означення степеня з раціональним показником випливає, що $a^r > 0$, якщо $a > 0$.

7) $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Якщо $r > 0$, тобто $m > 0$ і $a > 1$, то $a^m > 1$ і $a^r = \sqrt[n]{a^m} > 1$.

Аналогічно, якщо $r < 0$, тобто $m < 0$ і $a > 1$, то $a^m < 1$ і $a^r = \sqrt[n]{a^m} < 1$.

8) Зведемо раціональні числа r і s до спільного знаменника.

Нехай $r = \frac{m_1}{k}$ і $s = \frac{p_1}{k}$, де $k > 1$ — натуральне число, а m_1 і p_1 — цілі числа. З нерівності $r > s$ випливає, що $m_1 > p_1$. Якщо $a > 1$, то $a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a} > 1$ і за властивістю степеня з цілим показником $\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^{m_1} > \left(a^{\frac{1}{k}}\right)^{p_1}$, звідси $a^{\frac{m_1}{k}} > a^{\frac{p_1}{k}}$, тобто $a^r > a^s$.
Випадок $0 < a < 1$ розглядається аналогічно. Зробіть це самостійно.

9) Якщо $r > 0$, то $r = \frac{m}{n}$, де m і n — натуральні числа. З нерівності $0 < a < b$ і властивостей степеня з цілим показником маємо, що $a^m < b^m$. За властивістю кореня n-го степеня з цієї нерівності випливає, що $\sqrt[n]{a^m} < \sqrt[n]{b^m}$, тобто $a^r < b^r$.
Для випадку $r < 0$ доведення аналогічне. Проведіть його самостійно.

Приклад 1. Обчисліть значення виразу: 1) $\dfrac{8^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}$; 2) $(0{,}75)^{-1} \cdot \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2{,}5^2$.

Розв'язання. Скористаємося властивостями степеня з раціональним показником.

1) $\dfrac{8^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{5}{3}}} = 2 \cdot 3^{-1} = \dfrac{2}{3}$.

2) $(0{,}75)^{-1} \cdot \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2{,}5^2 = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{25}{4} = \frac{25}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 25 \cdot \frac{3}{16} = 4\frac{11}{16}$.

Приклад 2. Спростіть вираз:

1) $\left(a^{-\frac{1}{5}} + a^{\frac{2}{5}}\right)\left(a^{-\frac{2}{5}} + a^{\frac{4}{5}}\right)\left(a^{\frac{2}{5}} - a^{-\frac{1}{5}}\right) \cdot a^{\frac{4}{5}}$; 2) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{(a^2 - ab)^{\frac{2}{3}}} : \dfrac{a^{-\frac{2}{3}} \sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}$.

Розв'язання.

1) Винесемо спільні множники за дужки і скористаємося формулою різниці квадратів:

$$\left(a^{-\frac{1}{5}} + a^{\frac{2}{5}}\right)\left(a^{-\frac{2}{5}} + a^{\frac{4}{5}}\right)\left(a^{\frac{2}{5}} - a^{-\frac{1}{5}}\right) \cdot a^{\frac{4}{5}} = a^{-\frac{1}{5}}\left(1 + a^{\frac{3}{5}}\right)a^{-\frac{2}{5}}\left(1 + a^{\frac{6}{5}}\right)a^{-\frac{1}{5}}\left(a^{\frac{3}{5}} - 1\right)a^{\frac{4}{5}} =$$

$$= a^{-\frac{4}{5}} \cdot a^{\frac{4}{5}} \cdot \left(a^{\frac{6}{5}} - 1\right)\left(a^{\frac{6}{5}} + 1\right) = a^{\frac{12}{5}} - 1 = \sqrt[5]{a^{12}} - 1 = a^2\sqrt[5]{a^2} - 1.$$

2) Виконаємо ділення дробів, винесемо спільний множник за дужки і скористаємося формулою різниці квадратів:

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{\left(a^2-ab\right)^{\frac{2}{3}}}:\frac{a^{-\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\right)\left(a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}}=\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2,\ a>0,\ b\geq 0,\ a\neq b.$$

Поширимо введене поняття степеня з раціональним показником на степінь числа з довільним дійсним показником. Для цього достатньо з'ясувати, що слід розуміти під степенем числа з ірраціональним показником.

Розглянемо степінь a^{α}, де $a>0$, $a\neq 1$, а α — довільне ірраціональне число. Нехай α_1 — будь-яке наближене раціональне значення числа α з недостачею, α_2 — будь-яке наближене раціональне значення числа α з надлишком.

Тоді:

а) якщо $a>1$ і $\alpha>0$, то $a^{\alpha_1}<a^{\alpha}<a^{\alpha_2}$.

Наприклад, $2^{1,7}<2^{\sqrt{3}}<2^{1,8}$, бо $a=2>1, \alpha=\sqrt{3}$; $1,7<\sqrt{3}<1,8$;

$5^{1,41}<5^{\sqrt{2}}<5^{1,42}$, бо $a=5>1$, $\alpha=\sqrt{2}$; $1,41<\sqrt{2}<1,42$;

б) якщо $0<a<1$ і $\alpha>0$, то $a^{\alpha_2}<a^{\alpha}<a^{\alpha_1}$.

Наприклад, $\left(\frac{1}{7}\right)^{1,5}<\left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{2}}<\left(\frac{1}{7}\right)^{1,4}$, бо $a=\frac{1}{7}<1$, $\alpha=\sqrt{2}$; $1,4<\sqrt{2}<1,5$;

в) якщо $\alpha<0$, то $-\alpha>0$ і $a^{\alpha}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-\alpha}$, $a>0$, $a\neq 1$.

Наприклад, $3^{-\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{3}}=2^{\sqrt{3}}$.

Нерівності (а) і (б) визначають степінь з ірраціональним показником α через степені з раціональними показниками α_1 і α_2 з будь-якою необхідною точністю.

Зазначимо, що ми ввели поняття степеня з ірраціональним показником на інтуїтивному рівні. Точне означення цього поняття наводиться в курсі математичного аналізу.

Степінь з ірраціональним показником має всі ті самі властивості, що й степінь з раціональним показником.

Приклад 3. Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{27}}\cdot 16^{\sqrt{3}}}{4^{\sqrt{3}}}$; 2) $\dfrac{3^{4\pi}-3^{\pi}}{3^{2\pi}+3^{\pi}+1}:\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}-1\right)$.

Розв'язання. За властивостями степеня з ірраціональним показником дістаємо:

1) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{27}}\cdot 16^{\sqrt{3}}}{4^{\sqrt{3}}}=\dfrac{2^{-3\sqrt{3}}\cdot 2^{4\sqrt{3}}}{2^{2\sqrt{3}}}=\dfrac{1}{2^{\sqrt{3}}}$;

2) $\dfrac{3^{4\pi}-3^{\pi}}{3^{2\pi}+3^{\pi}+1}:\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}-1\right)=\dfrac{3^{\pi}(3^{3\pi}-1)}{3^{2\pi}+3^{\pi}+1}:(3^{\pi}-1)=\dfrac{3^{\pi}(3^{\pi}-1)(3^{2\pi}+3^{\pi}+1)}{(3^{2\pi}+3^{\pi}+1)(3^{\pi}-1)}=3^{\pi}$.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Як означається степінь числа з раціональним показником?
2. Чому в означенні степеня $a^{\frac{m}{n}}$ указано умову $a > 0$?
3. Чи мають зміст вирази: $2^{\frac{3}{2}}$; $2^{-\frac{3}{2}}$; $(-2)^{\frac{2}{3}}$; $1^{\frac{3}{5}}$; $(-4)^{-\frac{6}{7}}$; $(-4)^{-\frac{3}{4}}$?
4. Які властивості має степінь числа з раціональним показником? Проілюструйте їх на прикладах.
5. Як вводиться степінь з ірраціональним показником? Як слід розуміти вирази: $3^{\sqrt{2}}$; $7^{\sqrt{5}}$?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

75'. Спростіть вираз:

1) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}}$; 2) $\left(x^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{8}}$; 3) $c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{-\frac{3}{2}}$; 4) $b^{-0,1} : b^{-0,6}$; 5) $\left(a^{0.4}\right)^{-\frac{5}{4}}$; 6) $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{5}{3}}$.

76'. Обчисліть:

1) $(27 \cdot 64)^{\frac{1}{3}}$; 2) $2 \cdot 27^{-\frac{1}{3}}$; 3) $25^{0,3} \cdot 5^{1,4}$; 4) $\sqrt[4]{9} \cdot 3^{-1,5}$; 5) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\right)^{\frac{3}{2}}$; 6) $\left(\dfrac{1}{125} \cdot \dfrac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

77°. Обчисліть:

1) $\left(\dfrac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$; 2) $3^{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} \cdot 9^{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[3]{100} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{8}{3}} \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{7}{6}}$; 4) $\left(5^{\sqrt{27}}\right)^{\sqrt{3}}$;

5) $\left(2,5^{1,5} + 0,4^{1,5}\right) : \left(\sqrt{2,5} + \sqrt{0,4}\right)$; 6) $27^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,2}$; 7) $18^{\sqrt{2}} \cdot 3^{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}-1}$.

78°. Спростіть вираз:

1) $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^2 - (4xy)^{\frac{1}{2}}$; 2) $\sqrt{b} + \sqrt{c} - \left(b^{\frac{1}{4}} + c^{\frac{1}{4}}\right)^2$;

3) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)^2$; 4) $\left(x^{\frac{1}{4}} + 2\right)\left(x^{\frac{1}{4}} - 2\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + 4\right)$.

79. Спростіть і знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{a^{\frac{5}{6}} + a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{6}} - a^{\frac{1}{3}}}$, якщо $a = 1,44$; 2) $\dfrac{2x^{\frac{1}{2}}}{x-4} - \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}-2}$, якщо $x = 9$;

3) $\dfrac{m^{\frac{2}{3}}-2,25}{m^{\frac{1}{3}}+1,5}$, якщо $m = 8$; 4) $\dfrac{2}{y^{\frac{1}{4}}+3} - \dfrac{2}{y^{\frac{1}{4}}-3}$, якщо $y = 100$.

80. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\left(\sqrt[5]{x^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt[5]{x^4}\right)^3} : \dfrac{\left(\sqrt[4]{x\sqrt{y}}\right)^6}{\left(\sqrt{x\sqrt[3]{x^2 y}}\right)^4}$; 2) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1} + 1$; 3) $\dfrac{\left(1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2}\right)a^2}{\left(a^{0,5} - b^{0,5}\right)^2 + 2(ab)^{\frac{1}{2}}}$;

4) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1} : \dfrac{1}{x^{1,5}-1}$.

81*. Обчисліть значення виразу:

1) $(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}(7-4\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}$; 2) $\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}-2\right)^{\frac{1}{2}}$, якщо $x=\frac{a^3+1}{a^3-1}$;

3) $\left(2+\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(2-\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{3}}$; 4) $\frac{m-m^{-2}}{m^{\frac{1}{2}}-m^{-\frac{1}{2}}}-\frac{2}{m^{\frac{3}{2}}}-\frac{1-m^{-2}}{m^{\frac{1}{2}}+m^{-\frac{1}{2}}}$, якщо $m=4$.

82*. Доведіть рівність:

1) $\frac{\left(a+2\sqrt{a-1}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^{-\frac{1}{3}}}+\frac{\left(a-2\sqrt{a-1}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^{-\frac{1}{3}}}=2\sqrt{a-1}$; 2) $\frac{11-6\sqrt{2}}{\left(45-29\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}}=3-\sqrt{2}$;

3) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

83*. Доведіть, що значення виразу $\left(11+6\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(11-6\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ є натуральним числом.

§ 7 Ірраціональні рівняння

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Досі ви розглядали ірраціональні рівняння, в яких змінна була тільки під знаком квадратного кореня. Узагальнення поняття степеня дає змогу ввести ірраціональні рівняння загальнішого вигляду, а саме: коли змінна стоїть під знаком кореня довільного степеня або під знаком степеня з дробовим показником.

Ми розглядатимемо розв'язування ірраціональних рівнянь на множині дійсних чисел, тобто розв'язками рівнянь можуть бути лише дійсні числа. Зазначимо, що при цьому під значеннями коренів парного степеня розуміють їх арифметичні значення, тобто вираз під коренем і сам корінь невід'ємні, а під значеннями коренів непарного степеня — їх дійсні значення.

Розв'язування ірраціонального рівняння полягає в зведенні його до раціонального рівняння, що рівносильне заданому або є його наслідком.

Слід пам'ятати, що при переході до наслідку можливими є розширення області визначення рівняння і поява сторонніх розв'язків для заданого рівняння, тому в таких випадках перевірка розв'язків обов'язкова. Поява сторонніх розв'язків може статися в разі піднесення обох частин рівняння до однакового степеня.

Під час розв'язування ірраціональних рівнянь користуються такими твердженнями:

1) $f(x)=\varphi(x)\Rightarrow\left(f(x)\right)^{2k}=\left(\varphi(x)\right)^{2k}$, $k\in N$;

2) $f(x)=\varphi(x)\Leftrightarrow\left(f(x)\right)^{2k+1}=\left(\varphi(x)\right)^{2k+1}$, $k\in N$;

3) $\left(f(x)\right)^{2k} = \left(\varphi(x)\right)^{2k} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=\varphi(x), \\ f(x)=-\varphi(x), \end{array}\right.$ $k \in N$;

4) $\sqrt[2k+1]{\left(f(x)\right)} = \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) = \left(\varphi(x)\right)^{2k+1}$, $k \in N$;

5) $\sqrt[2k]{\left(f(x)\right)} = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=\left(\varphi(x)\right)^{2k}, \\ \varphi(x)\geq 0, \end{cases}$ $k \in N$.

Як приклад доведемо твердження 1) і 3).

1) Нехай $x = a$ — корінь рівняння $f(x)=\varphi(x)$, тобто $f(a)=\varphi(a)$. Тоді за властивістю степеня маємо:
$\left(f(a)\right)^{2k}=\left(\varphi(a)\right)^{2k}$, $k \in N$, а це означає, що $x = a$ є коренем рівняння $\left(f(x)\right)^{2k}=\left(\varphi(x)\right)^{2k}$. Зауважимо, що обернене твердження є неправильним, наприклад $3^2=(-3)^2$, проте $3 \neq -3$.

3) Очевидно, що кожний корінь будь-якого з рівнянь сукупності $\left[\begin{array}{l} f(x)=\varphi(x), \\ f(x)=-\varphi(x) \end{array}\right.$ є також і коренем рівняння $\left(f(x)\right)^{2k}=\left(\varphi(x)\right)^{2k}$, $k \in N$.
Доведемо обернене твердження. Нехай $x = a$ — корінь рівняння $\left(f(x)\right)^{2k}=\left(\varphi(x)\right)^{2k}$, $k \in N$, тобто правильною є рівність $\left(f(a)\right)^{2k}=\left(\varphi(a)\right)^{2k}$, $k \in N$.
Тоді
$$f(a)=\sqrt[2k]{\left(\varphi(a)\right)^{2k}}=\left|\varphi(a)\right|=\left[\begin{array}{l} \varphi(a), \\ -\varphi(a), \end{array}\right.$$
а це означає, що $x=a$ — корінь принаймні одного з рівнянь сукупності $\left[\begin{array}{l} f(x)=\varphi(x), \\ f(x)=-\varphi(x). \end{array}\right.$

Решту тверджень доводять аналогічно. Зробіть це самостійно.

Під час розв'язування ірраціональних рівнянь важливим є врахування області визначення рівняння.

Звертаємо увагу на те, що іноді знаходження області визначення рівняння відразу дає змогу одержати відповідь.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння:
1) $\sqrt{x-7}+\sqrt[4]{5-x}=2$; 2) $\sqrt[4]{5x-1}+\sqrt[6]{x-2}=-1$; 3) $\sqrt{2x-3}\sqrt{3-2x}=3$.

Розв'язання. 1) Область визначення рівняння знайдемо із системи:
$\begin{cases} x-7\geq 0, \\ 5-x\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 7, \\ x\leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$, тобто рівняння розв'язків не має.

2) Задане рівняння не має розв'язків, оскільки $\sqrt[4]{5x-1}\geq 0$ і $\sqrt[6]{x-2}\geq 0$, тому їх сума не може бути від'ємною.

3) У цьому випадку мають виконуватися умови: $\begin{cases} 2x-3\geq 0, \\ 3-2x\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \frac{3}{2}, \\ x\leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Перевірка показує, що $x=\frac{3}{2}$ не є розв'язком рівняння, тобто задане рівняння розв'язків не має.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{6-x}=x$; 2) $\sqrt[3]{x^2+15}=2\sqrt[3]{x+1}$; 3) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$;
4) $\sqrt{5x-1}=\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x+1}$; 5) $x^2-8\sqrt[4]{x^2-1}=1$.

Розв'язання.

1) Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:
$\sqrt{6-x}=x \Rightarrow 6-x=x^2 \Leftrightarrow x^2+x-6=0$, звідси $x_1=2$, $x_2=-3$ — сторонній корінь, оскільки за умовою $x\geq 0$. Отже, $x=2$.

2) Піднесемо обидві частини рівняння до куба:
$x^2+15=8(x+1) \Leftrightarrow x^2-8x+7=0$, звідси $x_1=1, x_2=7$.

3) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}=1+\sqrt{x+1} \Rightarrow 2x+3=(1+\sqrt{x+1})^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=$ $=x+1 \Rightarrow 4(x+1)=(x+1)^2 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)=0$, тобто $x_1=-1$, $x_2=3$.

4) Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата. Одержимо рівняння-наслідок:
$5x-1=3x-2+2x+1+2\sqrt{(3x-2)(2x+1)} \Leftrightarrow \sqrt{(3x-2)(2x+1)}=0 \Leftrightarrow (3x-2)(2x+1)=0$,
звідси $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{1}{2}$. Перевірка показує, що $x=-\frac{1}{2}$ — сторонній корінь рівняння. Отже, $x=\frac{2}{3}$.

5) Введемо нову змінну: $t=\sqrt[4]{x^2-1}$, тоді дістанемо рівняння $t^4-8t=0$, $t(t^3-8)=0$, $t(t-2)(t^2+2t+4)=0$, звідси $t_1=0, t_2=2$ (рівняння $t^2+2t+4=0$ дійсних розв'язків не має).
Тоді $\sqrt[4]{x^2-1}=0$, звідси $x^2=1, x_{1,2}=\pm 1$; $\sqrt[4]{x^2-1}=2$, тобто $x^2=17$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{17}$.
Отже, $x_{1,2}=\pm 1$; $x_{2,3}=\pm\sqrt{17}$.

Приклад 3. Розв'яжіть систему ірраціональних рівнянь:

1) $\begin{cases}\sqrt{\frac{x+3y}{y+5}}+2=3\sqrt{\frac{y+5}{x+3y}},\\ xy+2x=13-4y;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\frac{5}{2}\sqrt[6]{xy},\\ x+y=65.\end{cases}$

Розв'язання.

1) Введемо нову зміну $t=\sqrt{\frac{x+3y}{y+5}}>0$, тоді перше рівняння системи матиме вигляд:
$t+2=\frac{3}{t}$, або $t^2+2t-3=0$, звідси $t_1=1$, $t_2=-3$ не задовольняє умову $t>0$. Отже,
$\sqrt{\frac{x+3y}{y+5}}=1$, $\frac{x+3y}{y+5}=1$, тоді $x+2y=5$, $y\neq -5$, і матимемо систему:

$$\begin{cases}x+2y=5,\\ xy+2x=13-4y;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5-2y,\\ (5-2y)y+2(5-2y)=13-4y;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5-2y,\\ 2y^2-5y+3=0,\end{cases}$$

звідси $y_1=1$, $x_1=3$; $y_2=\frac{3}{2}$, $x_2=2$.

Відповідь. $(3;\ 1)$, $\left(2;\ \frac{3}{2}\right)$.

2) Розв'яжемо цю систему двома способами.

І спосіб. Піднесемо обидві частини першого рівняння системи до куба за формулою $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

Дістанемо: $x + y + 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = \frac{125}{8}\sqrt{xy}$, причому $xy > 0$. Підставимо сюди значення $x + y = 65$ з другого рівняння та $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{5}{2}\sqrt[6]{xy}$ — з першого рівняння. Матимемо: $65 + 3\sqrt[3]{xy}\cdot\frac{5}{2}\sqrt[6]{xy} = \frac{125}{8}\sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{xy} = 8$.

Отже, дістали систему: $\begin{cases} xy = 64, \\ x + y = 65; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(65 - x) = 64, \\ y = 65 - x; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 64; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 64, \\ y = 1. \end{cases} \end{array}\right.$

ІІ спосіб. Оскільки за умовою $y \neq 0$, то поділивши обидві частини першого рівняння на $\sqrt[3]{y} \neq 0$, дістанемо: $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} + 1 = \frac{5}{2}\sqrt[6]{\frac{x}{y}} \Leftrightarrow \left(\sqrt[6]{\frac{x}{y}}\right)^2 - \frac{5}{2}\sqrt[6]{\frac{x}{y}} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{y} = 64, \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{64}. \end{array}\right.$

І тоді з систем $\begin{cases} \frac{x}{y} = 64, \\ x + y = 65 \end{cases}$ та $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{64}, \\ x + y = 65 \end{cases}$ матимемо $x = 64$, $y = 1$ або $x = 1$, $y = 64$.

Відповідь. (64; 1); (1; 64).

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Яке рівняння називають ірраціональним? Наведіть приклади.
2. Чи має рівняння $\sqrt{x} + \sqrt[6]{x+3} + 5 = 0$ розв'язки?
3. Назвіть основні методи розв'язування ірраціональних рівнянь.
4. Яке перетворення ірраціонального рівняння може призвести до появи сторонніх коренів? Як їх виявити?
5. Чи рівносильні рівняння: 1) $\sqrt{x+2} = x$ і $x + 2 = x^2$; 2) $x - 2 = \sqrt{x}$ і $(x-2)^2 = x$?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

84'. Доведіть, що дане ірраціональне рівняння не має розв'язків:
1) $\sqrt{2x+1} + 1 = 0$; 2) $\sqrt{x+2} + \sqrt[4]{x+5} = -3$; 3) $\sqrt[6]{x+1} + \sqrt{x-3} = 0$;
4) $\sqrt{1-x} - 3\sqrt{2x+5} = x$; 5) $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+9} = 1$.

85°. Розв'яжіть рівняння піднесенням обох його частин до одного й того самого степеня:
1) $\sqrt{1-x} = 2$; 2) $\sqrt[4]{5x-4} = 4$; 3) $\sqrt{2x^2-9} = x$; 4) $\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-2} = 1$;
5) $\sqrt[3]{x^3+3x^2+1} = x+1$; 6) $\sqrt[3]{x^2+15} - 2\sqrt[3]{x+1} = 0$; 7) $\sqrt{2+x} - \sqrt{x-6} = 2$;
8) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2$; 9) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$; 10) $\sqrt[5]{\frac{2x+1}{x+3}} = 1$.

86°. Розв'яжіть рівняння введенням нової змінної:

1) $x-5\sqrt{x}+4=0$; 2) $\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+2=0$; 3) $x-5\sqrt{x+1}+7=0$;

4) $\sqrt{x^2+1}-6x^2=1$; 5) $\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}=1$; 6) $2\sqrt[4]{x-1}-5=\dfrac{3}{\sqrt[4]{x-1}}$;

7) $x^2-4x+10=3\sqrt{x^2-4x+20}$; 8) $\sqrt{x+5}+\sqrt[4]{x+5}=12$;

9) $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$.

87°. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}\sqrt{xy}=\sqrt{3},\\ x+y=4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ 2\sqrt{x}=3\sqrt{y};\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+y-2\sqrt{xy}=4,\\ x+y=10;\end{cases}$

4) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1,\\ x+y=9;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{8}{3},\\ xy=36;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=3,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5;\end{cases}$

7) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y+1},\\ \sqrt{y}+\sqrt{x+1};\end{cases}$ 8) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2},\\ xy-x-y=0.\end{cases}$

88. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sqrt{x^2-3x+11}=5+\sqrt{x^2-3x+3}$; 2) $\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x}}+2=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$;

3) $\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}=\left(\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)^{\frac{6}{5}}$; 4) $\sqrt[3]{2x-1}+2\sqrt{2x-1}=3$;

5) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3$; 6) $\sqrt[5]{(7x-3)^3}+8\sqrt[5]{3-7x}=7$;

7) $\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{2(x^2+4x+5)}$; 8) $\dfrac{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}=2$.

89*. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6,\\ x^2y+y^2x=20;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\\ x^2+y^2=65;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{5}}=35,\\ x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{5}}=5;\end{cases}$

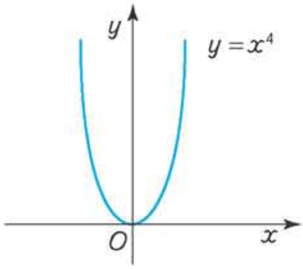
4) $\begin{cases}\sqrt[3]{\dfrac{x+y}{x-y}}-\sqrt[3]{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{3}{2},\\ x^2+y^2=32;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{y-3}=5,\\ x+y=37;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x+y=17,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=3;\end{cases}$

7) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\\ \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3;\end{cases}$ 8) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y},\\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}.\end{cases}$

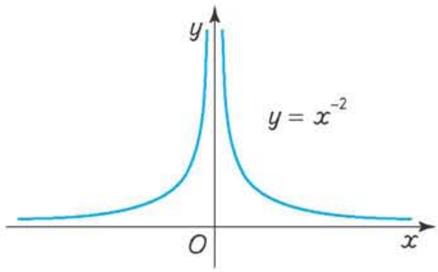
§ 8 Степенева функція та її властивості

Функцію $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$ називають *степеневою функцією* з дійсним показником α.

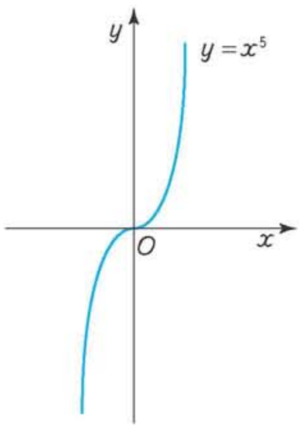
При довільному дійсному α степенева функція визначена на інтервалі $(0;\ +\infty)$. Якщо $\alpha > 0$, то функція x^{α} визначена і для $x = 0$, бо $0^{\alpha} = 0$.



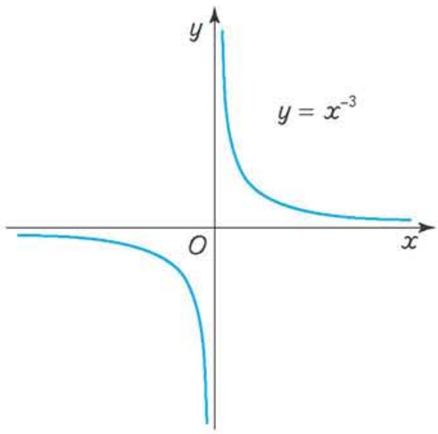
Мал. 31



Мал. 32



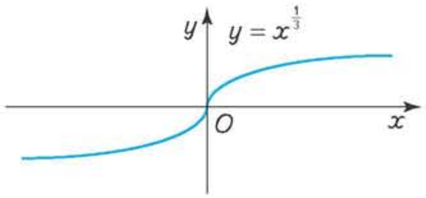
Мал. 33



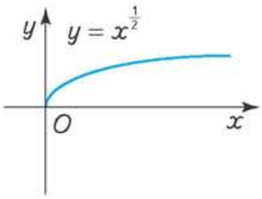
Мал. 34

Якщо α — ціле число, $\alpha \in Z$, то степенева функція визначена і для $x < 0$. Для парних α ця функція парна (мал. 31, 32), а для непарних — непарна (мал. 33, 34). Якщо α — раціональне число ($\alpha = \frac{m}{n}$, $m \in Z$, $n \in N$), то степенева функція визначена на множині R за умови, що $m > 0$, а n — непарне число і на множині $[0;\ +\infty)$ за умови, що $m > 0$, а n — парне число (мал. 35, 36).

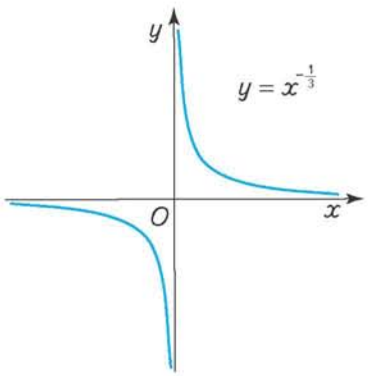
Якщо α — раціональне число ($\alpha = \frac{m}{n}$, $m \in Z$, $n \in N$), то степенева функція визначена на множині $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$ за умови, що $m < 0$, а n — непарне число і на множині $(0;\ +\infty)$ за умови, що $m < 0$, а n — парне число (мал. 37, 38).



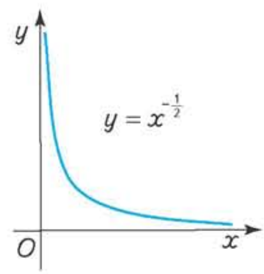
Мал. 35



Мал. 36



Мал. 37



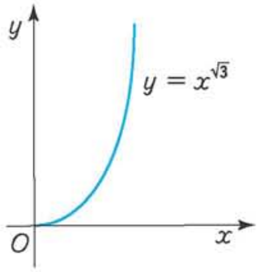
Мал. 38

Степенева функція з раціональним показником є парною, якщо m — парне число, а n — непарне, і непарною — якщо m і n — непарні числа.

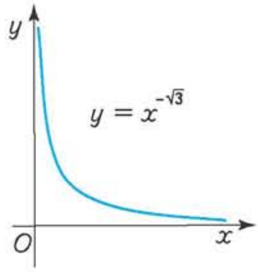
Якщо α — ірраціональне число, то степенева функція визначена на множині $[0;\ +\infty)$ за умови, що $\alpha > 0$, і на множині $(0;\ +\infty)$ за умови, що $\alpha < 0$ (мал. 39, 40).

Приклад 1. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt[4]{-x} + (x-2)^{\frac{1}{6}}$.

Розв'язання. Область визначення функції знайдемо з умови існування кожного доданка суми: $\begin{cases} -x \ge 0, \\ x - 2 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0, \\ x \ge 2; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$, тобто область визначення функції є порожньою множиною і даний аналітичний вираз функцію не задає.



Мал. 39



Мал. 40

Приклад 2. Знайдіть область визначення функції $y=(-x)^{-\frac{1}{2}}+3(2+x)^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{1}{3}}$.

Розв'язання. Останній доданок суми існує при довільному дійсному значенні x, тому область визначення функції знайдемо з умов

$$\begin{cases}-x>0,\\2+x\geq 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<0,\\x\geq -2;\end{cases} \Leftrightarrow x\in[-2;0).$$

Приклад 3. Побудуйте графік функції $f(x)=\frac{1}{x^4}$.

Розв'язання. Дослідимо дану степеневу функцію.

Область визначення:
$D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

Множина значень: $E(f)=(0;\ +\infty)$, тобто графік функції розміщений над віссю Ox.

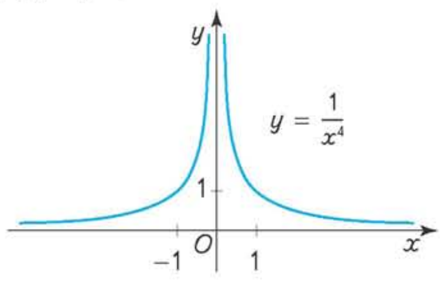
Функція парна, оскільки

$f(-x)=\frac{1}{(-x)^4}=f(x)$, $x\in D(f)$. Отже, її графік симетричний відносно осі Oy.

Якщо $x\to 0$ зліва або справа, то $f(x)\to+\infty$.

Якщо $x\to+\infty$ або $x\to-\infty$, то $f(x)\to 0$.

Ескіз графіка функції наведено на малюнку 41.



Мал. 41

Приклад 4. Побудуйте графік функції $f(x)=x^{\frac{3}{5}}$.

Розв'язання. Встановимо властивості даної степеневої функції.

Область визначення: $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$.

Множина значень: $E(f)=(-\infty;\ +\infty)$.

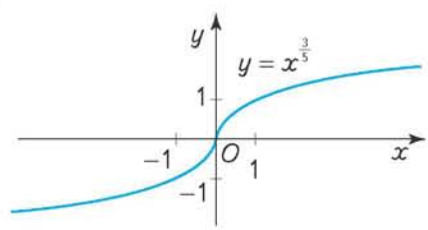
Функція непарна, оскільки

$f(-x)=\sqrt[5]{(-x)^3}=-\sqrt[5]{x^3}=-f(x), x\in D(f)$.

Отже, її графік симетричний відносно початку координат.

Графік функції перетинає вісь Ox у точці $x=0$ (нуль функції).

Якщо $x\to+\infty$, то $f(x)\to+\infty$;
якщо $x\to-\infty$, то $f(x)\to-\infty$ (мал. 42).

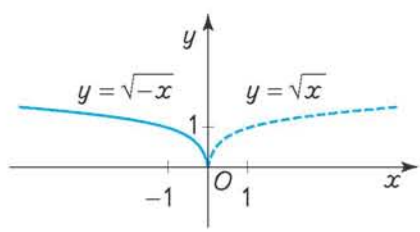


Мал. 42

Приклад 5. Побудуйте графік функції $f(x)=\sqrt{-x}$.

Розв'язання. Область визначення функції: $D(f)=(-\infty;\ 0]$.

Її графік можна одержати, симетрично відобразивши графік степеневої функції $y=\sqrt{x}$ відносно осі Oy (мал. 43).



Мал. 43

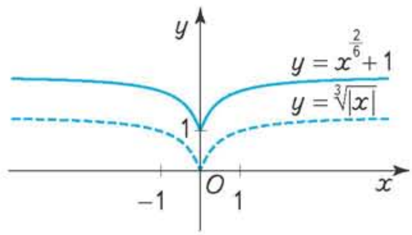
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Розглянемо побудову графіків складніших функцій.

1. Побудуємо графік функції $f(x)=x^{\frac{2}{6}}+1$.

- За властивістю степеня

$y=\sqrt[6]{x^2}+1=\sqrt[3]{|x|}+1.$



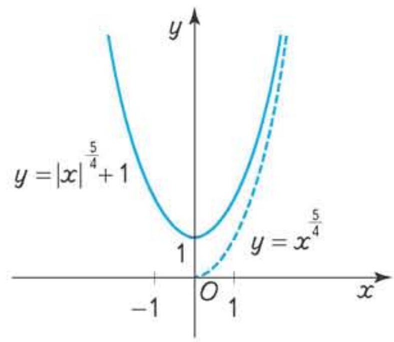
Мал. 44

Побудуємо спочатку графік функції $y=\sqrt[3]{|x|}$.

Функція визначена всюди: $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$ і є парною, оскільки

$$f(-x)=\sqrt[3]{|-x|}=\sqrt[3]{|x|}=f(x),\ x\in D(f),$$

причому $y=\sqrt[3]{x}$, якщо $x\geq 0$. Тому побудуємо графік функції $y=\sqrt[3]{x}$ і відобразимо його симетрично відносно осі Oy. Дістанемо графік функції $y=\sqrt[3]{|x|}$. Залишається перенести цей графік вздовж осі Oy на одну одиницю вгору (мал. 44).



Мал. 45

2. Побудуємо графік функції $y=|x|^{\frac{5}{4}}+1$.

- За означенням модуля маємо: $y=|x|^{\frac{5}{4}}+1=\begin{cases} x^{\frac{5}{4}}+1, & \text{якщо } x\geq 0,\\ (-x)^{\frac{5}{4}}+1, & \text{якщо } x<0.\end{cases}$

Шуканий графік можна одержати в результаті перетворення графіка функції $y=x^{\frac{5}{4}}$ (мал. 45).

Назвіть, які саме перетворення графіка функції $y=x^{\frac{5}{4}}$ використано.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Яку функцію називають степеневою? Наведіть приклади.

2. Чи правильне твердження:

1) графік функції $y=x^{\frac{3}{2}}$ не перетинає вісь Ox;

2) функція $y=x^{\frac{3}{5}}$ є непарною;

3) функція $y=x^{\sqrt{7}}$ є зростаючою на інтервалі $(0;\ +\infty)$;

4) функція $y=x^{\frac{3}{4}}$ не є ні парною, ні непарною;

5) функція $y=x^{-\frac{4}{5}}$ визначена на множині всіх дійсних чисел;

6) $x=0$ є нулем функції $y=x^{-\frac{5}{7}}$?

3. Які спільні властивості мають функції: $y=x$, $y=x^2$ та $y=x^3$?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

90'. Усно. Яка з даних функцій є степеневою:

1) $y = x^5$; 2) $y = 2x^2 + 1$; 3) $y = \frac{1}{x^3}$;

4) $y = x^3 - 5$; 5) $y = \frac{2x}{x+1}$; 6) $y = x^{-\frac{5}{3}}$;

7) $y = \frac{1}{x^{\sqrt{3}}}$?

91'. Усно. Яка з даних функцій визначена на множині всіх дійсних чисел:

1) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$; 2) $f(x) = x^{-\frac{5}{2}}$; 3) $f(x) = x^{\frac{7}{5}}$;

4) $f(x) = x^{-\frac{7}{4}}$; 5) $f(x) = x^{\sqrt{5}}$?

92'. Усно. Чи належить графіку функції задана точка:

1) $y = \sqrt[3]{x}$, $A(8; 2)$, $B(216; 6)$, $C(27; -3)$;

2) $y = \sqrt[4]{x}$, $D(81; 3)$, $E(81; -3)$, $F(-16; -2)$?

93'. Яка з даних степеневих функцій зростає на інтервалі (0; 1):

1) $f(x) = \frac{2}{x}$; 2) $f(x) = -\frac{2}{x}$; 3) $f(x) = -x^4$;

4) $f(x) = x^{-\sqrt{3}}$; 5) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$; 6) $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$?

94°. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = x^3 + 1$; 2) $y = \frac{1}{x-1}$; 3) $y = \sqrt{x^2 + 1}$;

4) $y = \sqrt[3]{2x + 1}$; 5) $y = \sqrt{x + 3} + \frac{4}{x}$; 6) $y = \sqrt{4 - x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

7) $y = \sqrt{x} + 3\sqrt{x - 2}$.

95°. Побудуйте графік функції та охарактеризуйте її властивості:

1) $y = x^4$; 2) $y = x^4 + 1$; 3) $y = -x^4 + 2$;

4) $y = (x - 1)^4$; 5) $y = \frac{2}{x}$; 6) $y = \frac{1}{x + 1}$;

7) $y = \frac{1}{x} + 1$; 8) $y = \frac{1}{|x|}$.

96°. Порівняйте значення степеневих функцій:

1) $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt[4]{5}$; 3) $\sqrt[5]{0,2}$ і $\sqrt[5]{0,3}$;

4) $(3,1)^{-4}$ і $\left(5\frac{1}{3}\right)^{-4}$; 5) $(-2,3)^{-3}$ і $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-3}$; 6) $(-0,7)^{-6}$ і $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-6}$.

97°. Знайдіть яке-небудь значення аргументу, за якого значення функції $y=\sqrt[4]{x}$ є більшим, ніж: 1) 2; 2) 3; 3) 10; 4) 10^5.

98. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^4=1$; 2) $\sqrt[3]{x}=2$; 3) $\sqrt[3]{x}=-2$; 4) $\sqrt[4]{x}=2$.

99. Розв'яжіть графічно нерівність:

1) $x^4<1$; 2) $\sqrt[4]{x}<1$; 3) $\sqrt[4]{x}>1$; 4) $\sqrt[3]{x}<-1$.

100. Побудуйте графік функції та охарактеризуйте її властивості:

1) $y=x^{\frac{3}{4}}$; 2) $y=x^{-\frac{3}{4}}$; 3) $y=x^{\frac{4}{5}}$; 4) $y=x^{-\frac{5}{7}}$;

5) $y=x^{-\sqrt{3}}$; 6) $y=\sqrt[3]{x+1}$; 7) $y=\sqrt[3]{x}+1$; 8) $y=\sqrt[3]{x}-2$.

101. Користуючись графіком функції $y=x^{\frac{1}{2}}$, знайдіть наближені значення коренів:

1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{5}$.

102. Поясніть, чому правильною є нерівність:

1) $\sqrt[10]{5}>\sqrt[10]{3}$; 2) $\sqrt[21]{3,3}<\sqrt[21]{3,5}$.

103*. Побудуйте графік функції та охарактеризуйте її властивості:

1) $y=(|x|+1)^2$; 2) $y=|x|^3$; 3) $y=|x^{-1}|$;

4) $y=\frac{1}{|x|-1}$; 5) $y=\frac{1}{|x-1|}$; 6) $y=\left|\frac{x+2}{x+1}\right|$;

7) $y=\sqrt{x^6}$; 8) $y=-\sqrt{x^4}$; 9) $y=x^{\frac{12}{8}}-1$.

104*. Порівняйте графіки функцій:

1) $y=\sqrt{(x-2)^2}$ і $y=x-2$;

2) $y=\sqrt[3]{(x+1)^3}$ і $y=x+1$;

3) $y=\sqrt{(x-3)^2(x+2)^2}$ і $y=(x-3)(x+2)$.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

Контрольні запитання

1. З яких чисел складається множина дійсних чисел R?
2. Які дії можна виконувати на множині раціональних чисел; дійсних чисел?
3. Якщо x — раціональне число, а y — ірраціональне число, то в якому випадку xy і $\frac{x}{y}$ будуть раціональними числами?
4. Назвіть кілька значень $a > 0$, за яких $\sqrt{a}$ є раціональним числом; ірраціональним числом.
5. Як знаходять відсоток від даного числа; число за відомим його відсотком; відсоткове відношення двох чисел?
6. Яку залежність між змінними x і y називають функцією? Наведіть приклади функціональних залежностей.
7. Охарактеризуйте основні способи задання функції та проілюструйте на прикладах.
8. Що таке область визначення та множина значень функції?
9. Які функції називають монотонними? Сформулюйте відповідні означення.
10. Що таке парна та непарна функції? Яку властивість мають їхні графіки?
11. Які геометричні перетворення графіка функції $y = x^3$ треба виконати, щоб побудувати графік функції $y = (x - 1)^3 + 2$?
12. Що таке корінь n-го степеня з числа a?
13. Як означається арифметичний корінь n-го степеня з числа $a \geq 0$?
14. Сформулюйте означення степеня з раціональним показником і назвіть його основні властивості.
15. Яку функцію називають степеневою? Наведіть приклади.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 1

Дійсні числа та обчислення (§ 1)

1'. Доповніть речення так, щоб воно стало правильним твердженням:
1) якщо α — ірраціональне число, то 2α — ... число;
2) рівняння $2x^4 - b = 0$ не матиме коренів на множині дійсних чисел, якщо b ... .

2'. Яке з тверджень правильне?

А. $\frac{1}{3} \in Z$.

Б. $-2 \in N$.

В. Будь-яке натуральне число є дійсним числом.

Г. Довжина довільного відрізка визначається раціональним числом.

3°. Який з десяткових дробів є зображенням числа $5\frac{1}{6}$?

А. 5,16. **Б.** 5,1(6). **В.** 5,2. **Г.** –2,7(6).

4°. Назвіть найбільше з чисел:
А. 2,521.... **Б.** –1,035.... **В.** 2,(2). **Г.** –2,7(6).

5. Назвіть найменше з чисел:
А. 1,2(3). **Б.** $\sqrt{2}$. **В.** $\sqrt{5}-\sqrt{2}$. **Г.** $\sqrt{3}$.

6. Який звичайний дріб є зображенням нескінченного десяткового дробу –0,5(3)?

А. $-\frac{4}{15}$. **Б.** $-\frac{3}{7}$. **В.** $-\frac{8}{15}$. **Г.** $-\frac{5}{9}$.

7. $\frac{\left(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}\right):18\frac{1}{6}}{0{,}002}=?$

А. 1. **Б.** 0. **В.** –10. **Г.** 50.

8. $\left(2\sqrt{38}-\sqrt{57}\right)\cdot\frac{2}{19}\sqrt{19}+\sqrt{12}=?$

А. $\sqrt{2}$. **Б.** $-\frac{1}{2}$. **В.** $4\sqrt{2}$. **Г.** 4.

9*. $\frac{172\frac{5}{6}-170\frac{1}{3}+3{,}41(6)}{0{,}8\cdot 0{,}25}=?$

А. $5\frac{1}{2}$. **Б.** –2. **В.** $29\frac{7}{12}$. **Г.** 0.

10*. $\left(75:4\frac{1}{6}-3\frac{9}{23}\cdot 3\right)(0{,}2(7)+0{,}2(6)+0{,}35)=?$

А. –1. **Б.** 7. **В.** $\frac{42}{11}$ **Г.** $-\frac{3}{7}$.

Відсоткові розрахунки (§ 2)

1'. Доповніть речення так, щоб воно стало правильним твердженням: 85 % від числа 68 дорівнюють ... .

2'. 12,5 % числа дорівнюють 0,25. Яке це число?
А. 1. **Б.** 2. **В.** 1,5. **Г.** 3.

3'. Чи правильне твердження: p % від числа a дорівнюють $\frac{ap}{100}$?
А. Так. **Б.** Ні. **В.** Не можна визначити.

4°. Який відсоток числа a становить число b?
А. $\frac{b}{a}$. **Б.** $\frac{100a}{b}$. **В.** $\frac{100b}{a}$. **Г.** $\frac{a}{b}$.

5°. Скільки тракторів має виготовити завод за 3 місяці, якщо p % річного плану дорівнюють a тракторів?
А. $\frac{25p}{a}$. **Б.** $\frac{p}{25a}$. **В.** $\frac{5a}{p}$. **Г.** $\frac{25a}{p}$.

6. Дві протилежні сторони прямокутника збільшили на 10 %, а дві інші — зменшили на 10 %. Як змінилася площа прямокутника?
А. Збільшилася. **Б.** Зменшилася на 1 %. **В.** Зменшилася. **Г.** Не змінилася.

7. У зв'язку зі зміною сезонних цін на овочі та фрукти ціни на деякі з них було підвищено на 20 %, а через деякий час знижено на 20 %. Подешевшав чи подорожчав цей товар порівняно з його початковою ціною?
А. Подешевшав на 4 %. **Б.** Подорожчав на 1 %.
В. Подешевшав на 2 %. **Г.** Ціна не змінилася.

8*. Вкладник зробив вклад 5 000 грн до ощадбанку на рахунок, за яким виплачують 12 % річних. Якою стане сума вкладу через 3 роки?
А. 7 000. **Б.** 7 024. **В.** 8 000. **Г.** 7 082.

Числові функції, їх властивості та перетворення графіків (§ 3, 4)

1'. $f(x)=\frac{3x^2}{\sqrt{2-x}}$, $D(f)=?$
А. $(-\infty; 2]$. **Б.** $(-\infty; 2)$. **В.** $(2; +\infty)$. **Г.** $[2; +\infty)$.

2'. Для якої з даних функцій $D(f)=(-\infty; +\infty)$?
А. $f(x)=(x-2)^2$. **Б.** $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$. **В.** $f(x)=\sqrt{x^2}$. **Г.** $f(x)=\frac{|x|}{x}$.

3'. $\varphi(x)=\frac{|x|}{3x+1}$. Знайдіть $\varphi(-2)$, $\varphi\left(\frac{1}{3}\right)$.
А. 0,5; $\frac{1}{3}$. **Б.** $-\frac{2}{5}$; $\frac{1}{6}$. **В.** $-\frac{2}{7}$; $-\frac{1}{6}$. **Г.** $-\frac{2}{7}$; $\frac{1}{6}$.

4⁰. Яка з таблиць визначає функцію $y = f(x)$?

А.

x	0	1	1
y	2	1	-3

Б.

x	-1	0	2
y	1	2	3

В.

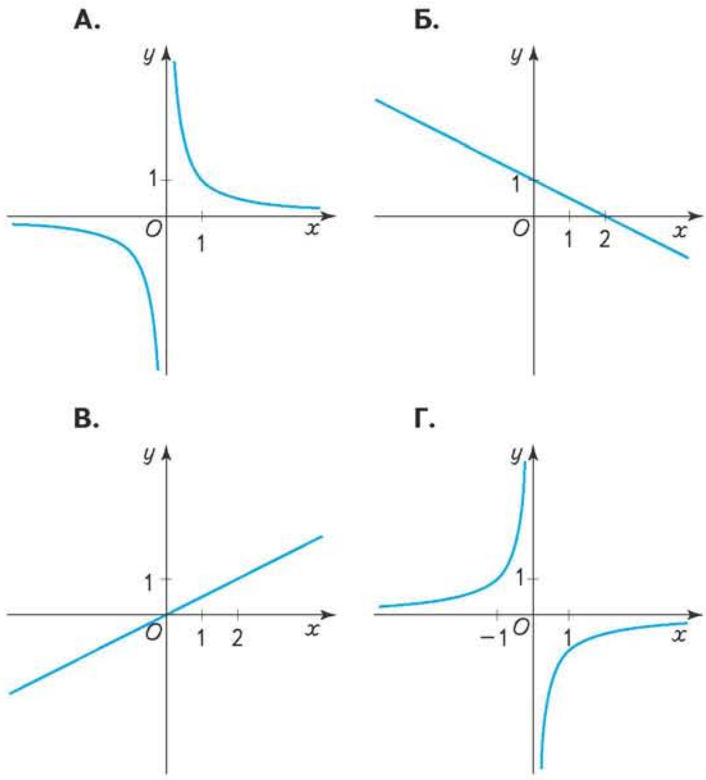
x	-2	1	3
y	0	1	-1

5⁰. Яка з функцій зростає на інтервалі (0; 1)?

А. $f(x) = \frac{1}{x}$. **Б.** $f(x) = -\frac{1}{x}$. **В.** $f(x) = 2x^2$. **Г.** $f(x) = x^3$.

6⁰. На малюнку подано графіки функцій: $y = \frac{x}{2}$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 1 - \frac{x}{2}$, $y = -\frac{1}{x}$.

Знайдіть графік кожної з них. Чи є серед даних функцій немонотонна?

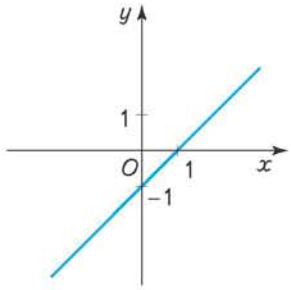


7⁰. Яка з функцій є парною?

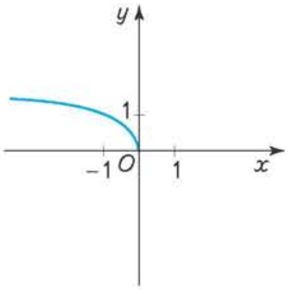
А. $y = 5x^4 - x^2 + 1$. **Б.** $y = x^3 - 3x$. **В.** $y = |x - 1|$. **Г.** $y = \sqrt{x} + x$.

8. Яка з наведених на малюнку функцій є зростаючою?

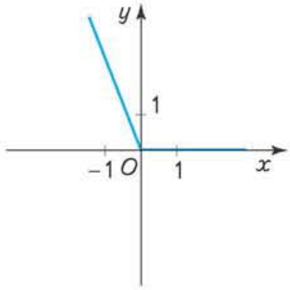
А.



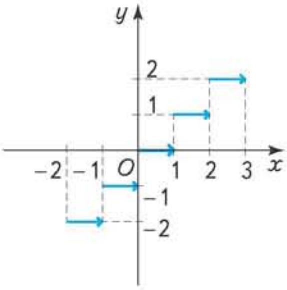
Б.



В.



Г.



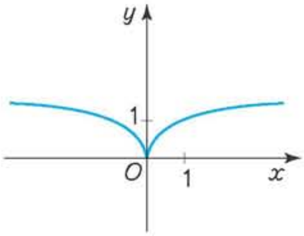
9. Графік функції $y = x$ симетрично відобразили відносно осі Oy. Графік якої функції дістали?

А. $y = -x$. **Б.** $y = \frac{1}{x}$. **В.** $y = |x|$. **Г.** $y = 2x$.

10. Графік функції $y = x^2$ перенесено паралельно вздовж осі Oy на 2 одиниці вниз. Графік якої функції одержали?

А. $y = x^2 + 2$. **Б.** $y = x^2 - 2$. **В.** $y = 2x^2$. **Г.** $y = \frac{x^2}{2}$.

11*. Графік якої функції подано на малюнку?



А. $y = \sqrt{|x|}$. **Б.** $y = \sqrt{x^2}$. **В.** $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$. **Г.** $y = |x|$.

Арифметичний корінь *n*-го степеня. Степінь з раціональним показником (§ 5, 6)

1'. $\sqrt[3]{25\cdot 1080}=?$

А. 25. **Б.** 30. **В.** 100. **Г.** -40.

2'. Який знак нерівності слід поставити замість * у виразі $\sqrt{\sqrt[3]{2}} * \sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$?

А. $>$. **Б.** $<$. **В.** $\geq$. **Г.** $\leq$.

3'. $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}\cdot\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}=?$

А. $\frac{1}{3}$. **Б.** 5. **В.** 3. **Г.** 2.

4⁰. $\sqrt[3]{a^3}+2\sqrt{a^2}=?\ (a<0)$.

А. a. **Б.** $3a$. **В.** $-a$. **Г.** $-3a$.

5⁰. $\left(\sqrt{18}-\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}=?$

А. -2. **Б.** 0. **В.** 2. **Г.** 1.

6⁰. $0{,}2a^{\frac{2}{5}}\cdot q^{-\frac{7}{8}}:0{,}1a^{-\frac{3}{5}}\cdot q^{\frac{1}{8}}=?$

А. $\frac{q}{2a}$. **Б.** $2aq$. **В.** $\frac{2a}{q}$. **Г.** $-\frac{a}{q}$.

7. $\left(1+\frac{(ab^2)^{\frac{1}{3}}}{a}+\frac{(a^2b)^{\frac{1}{3}}}{b}\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right)=?$

А. $\frac{a^2-b^2}{ab}$. **Б.** a^2+b^2. **В.** $\frac{a+b}{ab}$. **Г.** $\frac{a-b}{ab}$.

8. Яка з даних різниць додатна?

А. $4\sqrt{3}-3\sqrt{5}$. **Б.** $2\cdot 2^{\frac{1}{3}}-17^{\frac{1}{3}}$. **В.** $2\cdot 3^{\frac{1}{4}}-32^{\frac{1}{6}}$.

9*. Яка з даних рівностей правильна при будь-якому значенні a?

А. $\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^6=a$. **Б.** $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4=|a|$. **В.** $(a^2)^{\frac{1}{2}}=a$.

10*. $5^{2\sqrt{b}}+5<5^{\sqrt{b}+1}+5^{\sqrt{b}}$. Знайдіть множину значень b.

А. $(-1;\ 0)$. **Б.** $(0;\ 1)$. **В.** $[0;\ 1]$. **Г.** $(1;\ 2)$.

Степенева функція (§ 8)

1'. $f(x) = x^5$, $D(f) = ?$

А. $(-\infty; +\infty)$. **Б.** $(-\infty; 0)$. **В.** $[0; +\infty)$. **Г.** $(-\infty; 0]$.

2'. Чи належить точка $A(2; 8)$ графіку функції $y = \sqrt[3]{x}$?

А. Так. **Б.** Ні. **В.** Не можна визначити.

3°. $f(x) = x^{-\frac{2}{5}}$, $D(f) = ?$

А. $(-\infty; 0)$. **Б.** $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **В.** $(0; +\infty)$. **Г.** $\varnothing$.

4°. $f(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}} - \sqrt[4]{x-1}$, $D(f) = ?$

А. $[1; +\infty)$. **Б.** $(0; +\infty)$. **В.** $(-\infty; 1)$. **Г.** $(-\infty; 0)$.

5. Знайдіть α, якщо графік функції $y = x^{\alpha}$ проходить через точку $M(2; 4)$.

А. 1. **Б.** $\frac{1}{2}$. **В.** 2. **Г.** 0.

6*. Чи правильним є твердження: графіки степеневих функцій $y = x^{\frac{6}{4}}$ та $y = x^{\frac{3}{2}}$ збігаються?

А. Так. **Б.** Ні. **В.** Не можна визначити.

РОЗДІЛ 2

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

У розділі ви дізнаєтесь:

- **як знайти синус, косинус, тангенс, котангенс будь-якого кута;**
- **що таке тригонометричні функції числового аргументу, які вони мають властивості та які реальні процеси описують;**
- **який вигляд мають графіки тригонометричних функцій, як їх будують;**
- **які існують залежності між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу;**
- **які рівняння належать до тригонометричних і як їх розв'язують**

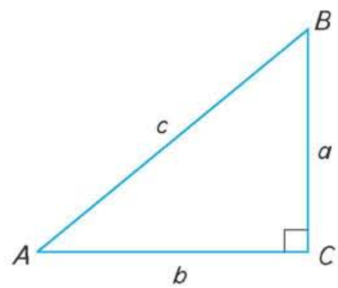
§ 9 Синус, косинус, тангенс, котангенс кутів від 0° до 180° (*повторення*)

З курсу геометрії вам відомо, що в прямокутному $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) катет a є прилеглим до кута B і протилежним куту A (мал. 46). Відповідно катет b прилеглий до кута A і протилежний куту B. Відомо, що відношення протилежного куту катета до гіпотенузи називається *синусом* цього *кута*, а відношення прилеглого до кута катета до гіпотенузи — *косинусом кута*. Тобто

$$\frac{a}{c} = \sin A,\ \ \frac{b}{c} = \sin B \ \text{ і } \ \frac{a}{c} = \cos B,\ \ \frac{b}{c} = \cos A.$$

Відношення протилежного і прилеглого до кута катетів називається *тангенсом кута*, а обернене відношення — *котангенсом кута*. Отже,

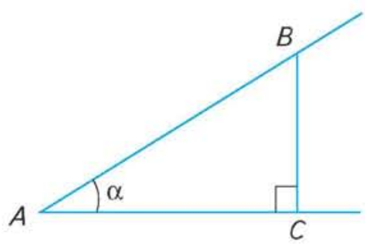
$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} A,\ \ \frac{b}{a} = \operatorname{tg} B,\ \ \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} A \ \text{і} \ \ \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} B.$$



Мал. 46

Характерно, що всі зазначені відношення залежать лише від міри відповідного кута і не залежать від довжин сторін трикутника. Це твердження було доведено у 8 класі.

З цього випливає, що будь-якому гострому куту відповідає єдине значення його синуса (косинуса, тангенса, котангенса). Отже, синус, косинус, тангенс і котангенс є *функціями гострого кута*.



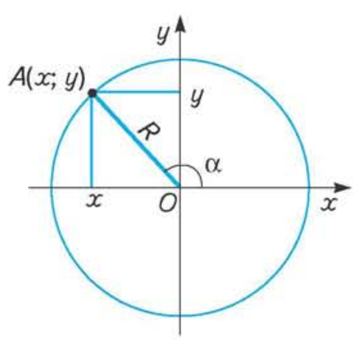
Мал. 47

З огляду на це, щоб знайти, наприклад, значення синуса даного гострого кута α, достатньо побудувати прямокутний трикутник із цим кутом (мал. 47), виміряти довжини сторін BC і AB та обчислити відношення цих довжин. Аналогічно, користуючись означенням, можна за цим самим малюнком знайти синус, косинус, тангенс і котангенс кута α.

У подальшому поняття синуса, косинуса, тангенса, котангенса було поширено і на кути α, міри яких лежать у межах від 0° до 180°. Це зроблено на основі таких означень (мал. 48):

$$\sin\alpha = \frac{y}{R},\ \ \cos\alpha = \frac{x}{R},\ \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ \ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y},$$

де R — радіус кола з центром у початку координат; x і y — відповідно абсциса і ордината точки перетину сторони OA кута α з цим колом.

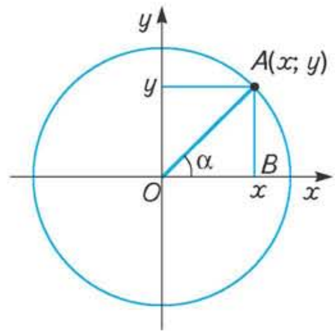


Мал. 48

Неважко помітити, що у випадку $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ такі означення за змістом збігаються з означеннями синуса, косинуса, тангенса гострого кута прямокутного трикутника, бо тоді абсциса й ордината точки A дорівнюють довжинам відповідних катетів прямокутного $\triangle AOB$, а радіус кола — його гіпотенузі (мал. 49).

Можна показати, що і для кутів $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ значення синуса, косинуса, тангенса не залежать від довжини радіуса кола, а залежать лише від міри кута.

З прийнятих означень випливає, що синус, косинус, тангенс і котангенс гострого кута додатні. Якщо кут тупий, то його синус додатний, а косинус, тангенс і котангенс — від'ємні. Обґрунтуйте ці твердження самостійно.



Мал. 49

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Дайте означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса гострого кута прямокутного трикутника.
2. Що розуміють під синусом, косинусом, тангенсом тупого кута?
3. Поясніть твердження: синус (косинус, тангенс, котангенс) є функцією гострого кута.
4. Якщо кут належить трикутнику, то значення яких його тригонометричних функцій можуть бути від'ємними і за якої умови?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

105'. Накресліть довільний прямокутний трикутник. Користуючись лише вимірювальною лінійкою, обчисліть синус, косинус, тангенс, котангенс кожного з його гострих кутів з точністю до десятих.

106'. Побудуйте за допомогою транспортира кути 30°; 50°; 45°; 80°. Користуючись відповідним означенням і вимірювальною лінійкою, знайдіть синус, косинус, тангенс кожного з цих кутів з точністю до десятих.

107°. Виконайте завдання, аналогічне до попереднього, для кутів 110°; 135°; 150°; 180°.

108°. На основі означення тригонометричних функцій кутів від 0° до 180° знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кутів: 1) 0°; 2) 90°; 3) 180°.

109°. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть значення синуса і косинуса кожного з його гострих кутів.

110. Знайдіть суму синусів і суму косинусів гострих кутів прямокутного $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$), якщо: 1) $a = 12$, $b = 5$; 2) $a = 15$, $c = 25$.

111*. Доведіть, що в будь-якому прямокутному трикутнику:
1) сума синусів його гострих кутів більша від одиниці;
2) сума косинусів його гострих кутів більша від одиниці.

112*. Знайдіть суму квадратів синусів гострих кутів будь-якого прямокутного трикутника. Зробіть висновок.

113*. Знайдіть суму квадратів косинусів гострих кутів будь-якого прямокутного трикутника. Зробіть висновок.

114'. У прямокутному $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) знайдіть:
1) AC і BC, якщо $AB = c$, $\angle B = \beta$;
2) AB і AC, якщо $BC = a$, $\angle A = \alpha$;
3) AB і BC, якщо $BC = a$, $\angle B = \beta$.

115'. Діагональ d прямокутника утворює з його більшою стороною кут β. Знайдіть сторони прямокутника.

116°. Сторони паралелограма дорівнюють a і b, його гострий кут — α. Знайдіть висоти паралелограма.

117°. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює b, а кут при основі трикутника — α. Знайдіть висоту й основу трикутника.

118°. Висота рівнобедреного трикутника дорівнює h, кут при основі — α. Знайдіть сторони трикутника.

119°. Сторона ромба дорівнює a, його гострий кут — α. Знайдіть діагоналі ромба.

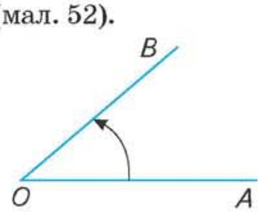
120. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, кут при вершині — β. Знайдіть висоту і бічну сторону трикутника.

121. Менша діагональ ромба дорівнює m, а гострий кут — α. Знайдіть сторону і більшу діагональ ромба.

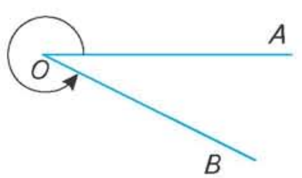
122*. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і b ($a > b$), а гострий кут — β. Знайдіть висоту і бічну сторону трапеції.

§ 10 Кути довільної градусної міри

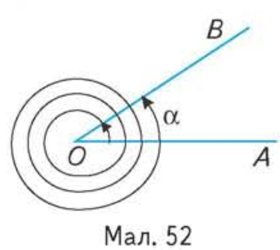
Вам відомо, що кутом називають фігуру, утворену двома променями, які мають спільний початок. У той самий час будь-який кут, наприклад AOB, може бути утворений поворотом променя OA навколо точки O в напрямку, вказаному стрілкою на малюнку 50. Очевидно, що внаслідок повороту променя може утворитися кут, більший від 180° (мал. 51). Якщо продовжити повертати промінь після положення OB, то, зробивши повний оберт (360°), він повернеться в те саме положення. Таке саме положення він займе, зробивши будь-яку кількість k повних обертів ($360^\circ k$). Кожному положенню променя OB відповідатиме певний кут. Градусну міру таких кутів можна обчислити за формулою: $\alpha + 360^\circ k$, де α — градусна міра початкового кута AOB; k — кількість обертів (мал. 52).



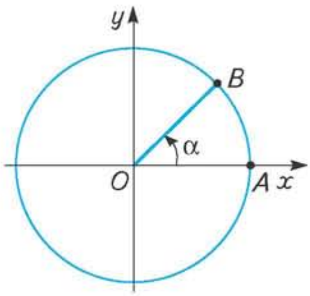
Мал. 50



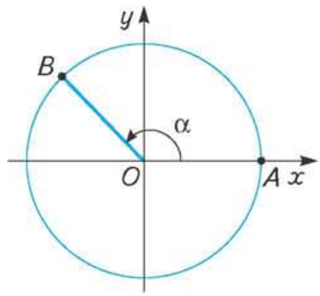
Мал. 51



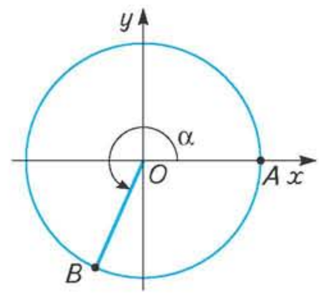
Мал. 52



Мал. 53



Мал. 54



Мал. 55

При зазначеному трактуванні кута промінь OA називатимемо початковим променем, промінь OB — кінцевим, або рухомим, променем, бо він займає різні положення залежно від кута повороту.

Позначимо на осі Ox справа від початку координат точку A і проведемо через неї коло з центром у точці O (мал. 53). Радіус OA називатимемо *початковим радіусом*. Повернемо початковий радіус OA навколо точки O проти руху годинникової стрілки на кут α. Радіус OA перейде в радіус OB, який називатимемо *рухомим радіусом*. Залежно від того, в якій координатній чверті розміщений радіус OB, кут α називають кутом цієї чверті. На малюнках 53 — 56 зображено кути I, II, III і IV чвертей відповідно.

Домовимося кут α вважати додатним, якщо він утворюється поворотом початкового радіуса проти руху годинникової стрілки, і від'ємним, якщо він утворюється поворотом початкового радіуса за рухом годинникової стрілки. На малюнках 53 — 56 кут α додатний, а на малюнку 57 — від'ємний.

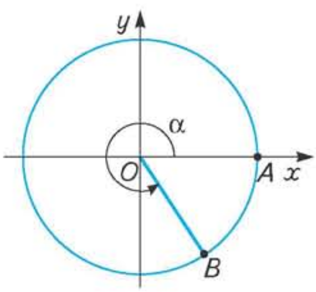
Якщо рухомий радіус займає положення OB або OB', то позначені на малюнку 58 кути дорівнюють відповідно 90° і 270°. Тим самим положенням рухомого радіуса відповідають від'ємні кути -270° і -90° (мал. 59).

На малюнку 60 зображено кути 180° і -180°, а на малюнку 61 — кути 360° і -360°.

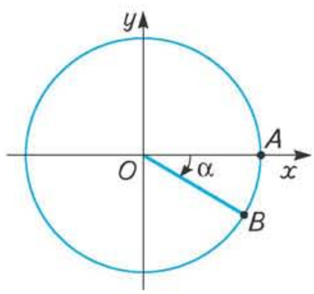
Положенню рухомого радіуса, коли він збігається з початковим, відповідає й кут 0°.

Кути $0^\circ, \pm 90^\circ, \pm 180^\circ, \pm 270^\circ, \pm 360^\circ$ не належать жодній чверті.

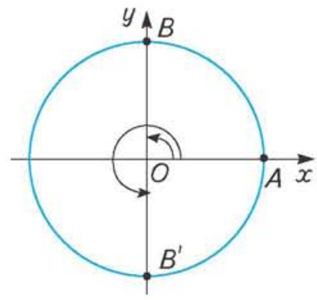
Варто пам'ятати, що множину всіх кутів, які відповідають, наприклад, положенню рухомого радіуса OB на малюнку 58, можна задати формулою: $\alpha = 90^\circ + 360^\circ k$, де k — ціле число ($k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$). Якщо k — невід'ємне чис-



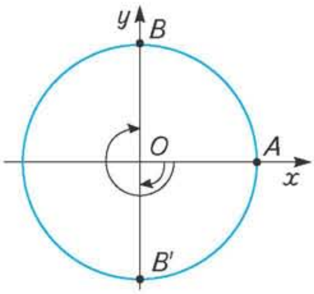
Мал. 56



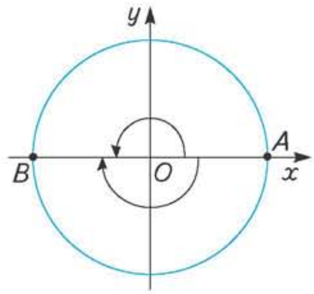
Мал. 57



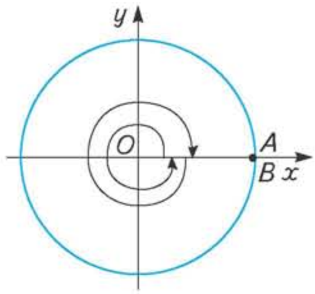
Мал. 58



Мал. 59



Мал. 60



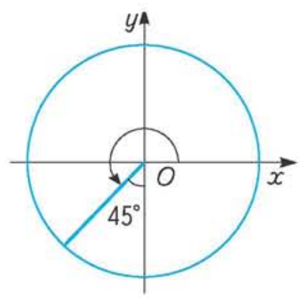
Мал. 61

ло, то маємо множину додатних кутів, зокрема, $k = 0$, $\alpha = 90° + 360° \cdot 0 = 90°$; $k = 1$, $\alpha = 90° + 360° \cdot 1 = 450°$; $k = 2$, $\alpha = 90° + 360° \cdot 2 = 810°$ і т. д.

Якщо ж k — від'ємне число, то дістанемо множину від'ємних кутів, що відповідають зазначеному положенню рухомого радіуса OB, зокрема, $k = -1$, $\alpha = 90° + 360° \cdot (-1) = -270°$; $k = -2$, $\alpha = 90° + 360° \cdot (-2) = 90° - 720° = -630°$ і т. д.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Як можна утворити кут?
2. Поясніть, що називають початковим радіусом і рухомим радіусом.
3. У якому випадку кут вважається додатним?
4. У якому випадку кут вважається від'ємним?
5. Скільки існує кутів, що відповідають певному положенню рухомого радіуса на координатній площині?
6. Рухомий радіус утворює з початковим радіусом кут α. Якою формулою можна задати множину всіх кутів β, що відповідають цьому положенню рухомого радіуса?

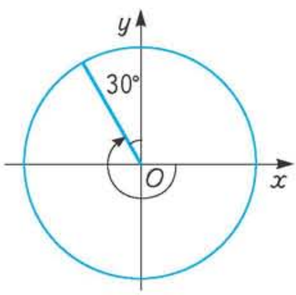


Мал. 62

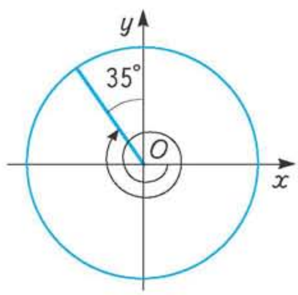
РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

123'. Користуючись малюнком кола з центром у початку координат, зобразіть кути:
1) $270°$; 2) $-270°$; 3) $135°$; 4) $300°$; 5) $-300°$; 6) $240°$; 7) $450°$.

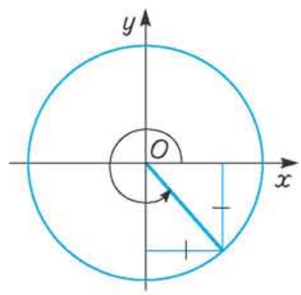
124°. Запишіть градусні міри кутів, зображених на малюнках 62 — 65.



Мал. 63

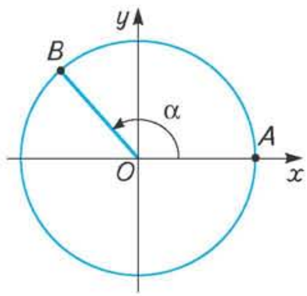


Мал. 64



Мал. 65

125°. Радіус OA, обертаючись у додатному напрямку, в положенні OB утворює з віссю Ox кут α (мал. 66). Виразіть через α градусні міри кутів, якщо радіус OA, продовжуючи обертатися, зробить після цього: а) один повний оберт; б) два повних оберти. Скільки існує кутів, кінцева сторона яких збігається з OB? Запишіть загальну формулу, що задає множину всіх таких кутів.



Мал. 66

126'. Укажіть, якій чверті належить кут:

1) 280°; 2) -310°; 3) 160°;
4) -40°; 5) 110°; 6) -310°.

127°. Які з кутів лежать в одній чверті:

1) 60°; 2) 175°; 3) -80°; 4) 300°; 5) -190°; 6) 180°; 7) -309°; 8) -95°; 9) 220°?

128°. За даною загальною формулою кута x знайдіть градусні міри додатних кутів, які менші від 360°:

1) $x = 15^\circ + 120^\circ k$; 2) $x = -30^\circ + 180^\circ k$;
3) $x = -45^\circ + 60^\circ k$; 4) $x = \pm 120^\circ + 360^\circ k$, де k — ціле число ($k \in \mathbf{Z}$).

129. Зобразіть положення рухомого радіуса, що утворює з додатною піввіссю Ox кут:

1) $\alpha = 125^\circ + 360^\circ k$; 2) $\beta = -110^\circ + 360^\circ k$;
3) $\gamma = -300^\circ + 360^\circ k$; 4) $\delta = -40^\circ + 360^\circ k$, де k — ціле число.

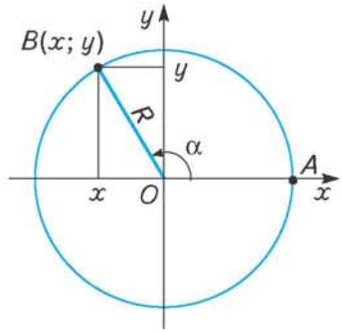
130. Рухомий радіус OB утворює з додатною піввіссю Ox кут 120°. Побудуйте точку B', симетричну точці B відносно осі абсцис. Знайдіть:

1) додатний кут, менший від 360°, який утворює радіус OB' з додатною піввіссю Ox;
2) один з від'ємних кутів, які утворює радіус OB' з додатною піввіссю Ox.

131*. Кут α є кутом II чверті. У якій чверті лежить кут $-\alpha$? Доведіть, що кінці рухомих радіусів, які утворюють з початковим радіусом кути α і $-\alpha$, симетричні відносно осі абсцис.

§ 11 Тригонометричні функції довільного кута

Досі ви мали справу з тригонометричними функціями кутів від 0° до 180°. Оскільки існують кути будь-якої градусної міри, а також додатні та від'ємні, природно ввести означення тригонометричних функцій довільного кута. При цьому слід враховувати, що вони не повинні суперечити тим, які прийнято для кутів від 0° до 180°.



Мал. 67

Нехай радіус кола з центром у початку координат дорівнює R, а координати точки B — кінця рухомого радіуса, що утворює кут α з додатною піввіссю Ox, дорівнюють x (абсциса) та y (ордината) (мал. 67).

Синусом кута **α називається відношення ординати кінця рухомого радіуса, що утворює цей кут з додатною піввіссю *Ox*, до довжини цього радіуса:** $\boxed{\sin\alpha = \frac{y}{R}.}$

Косинусом кута **α називається відношення абсциси кінця рухомого радіуса, що утворює цей кут з додатною піввіссю *Ox*, до довжини цього радіуса:** $\boxed{\cos\alpha = \frac{x}{R}.}$

Тангенсом кута **α називається відношення ординати кінця рухомого радіуса, що утворює цей кут з додатною піввіссю *Ox*, до його абсциси:** $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}.}$

Котангенсом кута **α називається відношення абсциси кінця рухомого радіуса, що утворює цей кут з додатною піввіссю *Ox*, до його ординати:** $\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.}$

Наведене вище означення тангенса кута можна замінити рівносильним йому:

тангенсом кута **α називається відношення синуса цього кута до його косинуса.**

Справді, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{y}$. Поділивши чисельник і знаменник цього дробу на додатне число R, дістанемо: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{y}{R}}{\frac{x}{R}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Аналогічно: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Дроби $\frac{x}{R}$ і $\frac{y}{R}$ мають зміст для будь-якого значення α. Отже, й $\cos\alpha$, і $\sin\alpha$ мають зміст для будь-якого α.

Для тангенса виключаються кути, для яких дріб $\frac{y}{x}$ не має змісту, тобто $x = 0$. Це кути, що дорівнюють $\pm 90°, \pm 270°, \pm 450°, \ldots$. Для котангенса виключаються кути, за яких не має змісту дріб $\frac{x}{y}$ $(y = 0)$, тобто кути, що дорівнюють $0°, \pm 180°, \pm 360°, \ldots$.

Виходячи з прийнятих означень, з'ясуємо, які знаки мають синус, косинус, тангенс і котангенс у кожній чверті.

Довжина радіуса R є додатним числом, тому

знак синуса збігається зі знаком ординати кінця рухомого радіуса, а знак косинуса — зі знаком його абсциси.

Знаки синуса, косинуса, тангенса і котангенса у чвертях подано в таблиці 5.

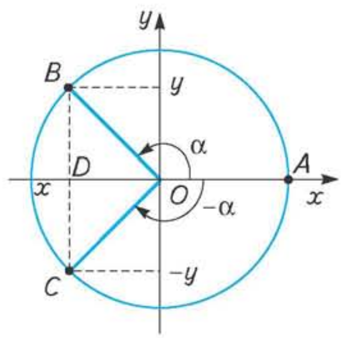
Таблиця 5

Чверть	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$
I	+	+	+
II	+	–	–
III	–	–	+
IV	–	+	–

Розглянемо залежність між синусами, косинусами, тангенсами і котангенсами протилежних кутів. На малюнку 68 зображено протилежні кути AOB і AOC. Градусні міри їх однакові, а знаки — різні. Легко встановити, що точки B і C мають однакову абсцису x та протилежні ординати y і $-y$.

Тому $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ і $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Взявши до уваги, що $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, дістанемо: $\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Якщо побудувати кут, протилежний куту AOB, який належить I чверті, то можна аналогічно переконатися у правильності встановлених співвідношень.



Мал. 68

Кожному куту α відповідають певні значення $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$. За винятком кутів $\pm 90^\circ$, $\pm 270^\circ$, $\pm 450^\circ$, ... кожному куту α відповідає цілком певне значення $\operatorname{tg}\alpha$; за винятком кутів 0°, $\pm 180^\circ$, $\pm 360^\circ$, ... кожному куту α відповідає певне значення $\operatorname{ctg}\alpha$. У кожному випадку таке значення лише одне. Справді, той самий кут не може мати два чи більше різних значень, наприклад, синуса чи тангенса, що випливає з відповідних означень, і того, що значення синуса, косинуса, тангенса одного і того самого кута не залежать від довжини радіуса кола.

Отже, синус, косинус, тангенс і котангенс є функціями кута. Ці функції називаються *тригонометричними функціями кута.*

Відомо, що положенню рухомого радіуса, який утворює кут α з додатною піввіссю Ox, відповідає множина кутів виду $\alpha + 360^\circ k$, $k \in \mathbf{Z}$, що їх цей радіус утворює з даною піввіссю. З цього випливає, що

$\sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos\alpha$, $\operatorname{tg}(\alpha + 360^\circ k) = \operatorname{tg}\alpha$,
$\operatorname{ctg}(\alpha + 360^\circ k) = \operatorname{ctg}\alpha$, де k — ціле число.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Дайте означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса довільного кута.

2. Поясніть твердження: синус (косинус, тангенс, котангенс) є функцією кута.

3. Для яких кутів значення тангенса (котангенса) вказати не можна?
4. Чи можуть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ одночасно дорівнювати нулю?
5. Як установити знаки тригонометричних функцій даного кута?
6. У яких координатних чвертях синус і тангенс мають однакові знаки?
7. У яких координатних чвертях косинус і котангенс мають протилежні знаки?
8. Чи може одне з чисел $\text{tg}\,\alpha$ і $\text{ctg}\,\alpha$ бути додатним, а інше — від'ємним?
9. Запишіть рівності, що виражають відношення між тригонометричними функціями протилежних кутів.
10. Чи існує координатна чверть, у якій значення всіх тригонометричних функцій від'ємні?
11. Які пари тригонометричних функцій мають однакові знаки в усіх чвертях?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

132'. Накресліть коло довільного радіуса з центром у початку координат. Побудуйте кути:
1) $200°$; 2) $300°$; 3) $410°$; 4) $500°$; 5) $-120°$; 6) $-250°$; 7) $270°$; 8) $-540°$.
Користуючись вимірювальною лінійкою, знайдіть синус, косинус, тангенс, котангенс кожного з них з точністю до десятих.

133'. Укажіть, якій чверті належить кут і визначте знаки його синуса, косинуса, тангенса: 1) $290°$; 2) $-240°$; 3) $130°$; 4) $260°$; 5) $-100°$.

134°. Визначте знак добутку:
1) $\sin 100°\cdot\sin 132°$; 2) $\cos 210°\cdot\sin 115°$; 3) $\text{ctg}\,300°\cdot\sin 220°$;
4) $\cos 135°\cdot\text{tg}\,135°$; 5) $\sin(-36°)\cdot\cos 36°$; 6) $\cos(-120°)\cdot\sin(-120°)$;
7) $\text{tg}(-320°)\cdot\cos 150°$; 8) $\sin 430°\cdot\text{tg}(-210°)$; 9) $\text{tg}\,100°\cdot\text{ctg}(-100°)$.

135°. Замініть вираз тотожно рівним йому, змінивши знак кута на протилежний:
1) $\cos(-18°)$; 2) $\sin(-100°)$; 3) $\text{tg}(-30°)$; 4) $\text{ctg}(-230°)$;
5) $\sin(\alpha-30°)$; 6) $\cos(180°-\alpha)$; 7) $\text{tg}(\alpha-140°)$; 8) $\cos(\alpha-\beta)$.

136°. У яких чвертях координатної площини мають однакові знаки:
1) синус і косинус кута; 2) синус і тангенс кута; 3) косинус і тангенс кута?

137. Кутом якої чверті є кут α, якщо:
1) $\sin\alpha>0$, а $\cos\alpha<0$; 2) $\sin\alpha<0$, а $\cos\alpha>0$;
3) $\text{tg}\,\alpha<0$, а $\cos\alpha>0$; 4) $\sin\alpha<0$, а $\text{tg}\,\alpha<0$?

138. Запишіть градусні міри хоча б двох від'ємних кутів, для яких:
1) синус додатний; 2) косинус від'ємний;
3) тангенс додатний; 4) синус від'ємний.

139. Визначте знак виразу:
1) $\sin 120°+\cos 40°$; 2) $\cos 205°+\text{tg}\,170°$;
3) $\text{ctg}\,315°+\text{tg}\,145°$; 4) $\cos 306°+\sin 103°$;
5) $\sin 40°-\sin 200°$; 6) $\cos 114°-\text{tg}\,250°$;
7) $\text{ctg}\,140°-\sin 110°$; 8) $\sin 220°+\text{tg}\,320°$.

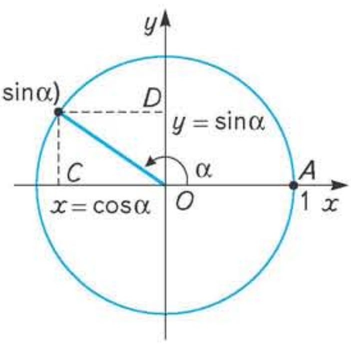
§ 12 Побудова кута за даним значенням його тригонометричної функції

Як уже вам відомо, значення тригонометричних функцій кута не залежать від довжини радіуса R. У такому разі його довжину можна задавати довільно. Найзручніше взяти $R = 1$, бо це дає змогу значно спростити обчислення.

Коло радіуса, що дорівнює 1, з центром у початку координат називається *одиничним колом*. Координатні осі ділять одиничне коло на чотири рівні частини, які називаються чвертями одиничного кола.

Якщо $R = 1$, то розглянуті вище відношення, що визначають синус і косинус кута α, спрощуються і набувають вигляду:

$$\sin\alpha = y,\ \cos\alpha = x.$$



Мал. 69

Отже, синус кута α дорівнює ординаті, а косинус — абсцисі кінця рухомого радіуса одиничного кола, що утворює цей кут з додатною піввіссю Ox (мал. 69). З цього випливає важливий висновок. Оскільки абсциса (ордината) будь-якої точки одиничного кола не може бути більшою від 1 (довжини його радіуса) і меншою від -1, тобто $-1 \le x \le 1$ і $-1 \le y \le 1$, то відповідно

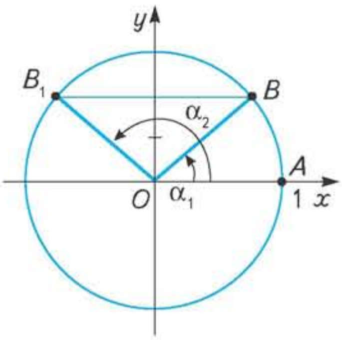
$-1 \le \cos\alpha \le 1$ і $-1 \le \sin\alpha \le 1$ для будь-якого кута α. Тобто значення синуса, як і значення косинуса будь-якого кута, належать числовому відрізку $[-1; 1]$.

Тому, наприклад, рівності виду $\cos\alpha = 1{,}5$ або $\sin\alpha = -2{,}4$ не мають змісту.

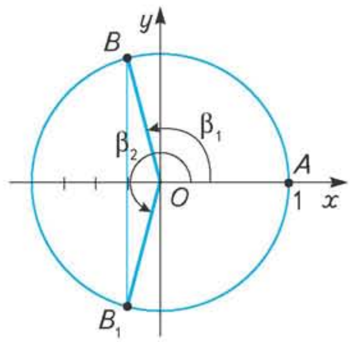
Розглянуті трактування синуса і косинуса кута для одиничного кола дають можливість будувати кут за даним значенням його синуса або косинуса. Проілюструємо таку побудову на прикладі.

Приклад 1. Побудуйте кут α, якщо $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

Побудова. Креслимо коло довільного радіуса з центром у початку координат і приймаємо довжину цього радіуса за 1 (мал. 70). Знаходимо на колі точку, ордината якої дорівнює $\frac{2}{3}$. Для цього ділимо радіус на 3 рівні частини і відкладаємо дві з них на додатній півосі Oy від точки O. Через знайдену точку проводимо перпендикуляр до цієї півосі, який перетинає одиничне коло в точках B і B_1. Ординати всіх точок перпендикуляра, в тому числі й точок B і B_1, дорівнюють $\frac{2}{3}$. Сполучаємо точки B і B_1 з точкою O.



Мал. 70



Мал. 71

Дістаємо два додатних кути: $\angle AOB = \alpha_1$ і $\angle AOB_1 = \alpha_2$, синус яких дорівнює $\frac{2}{3}$.

Зрозуміло, що існує безліч кутів, синус яких дорівнює $\frac{2}{3}$, котрі можна знайти, додаючи до α_1 і α_2 вираз $360°k$, де $k = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots$. Щоб уникнути певної невизначеності, в таких випадках на шукані кути накладають обмеження. Наприклад, побудувати додатні кути, менші від $360°$ (або кажуть: «у межах першого оберту»), синус яких дорівнює даному числу.

Приклад 2. Побудуйте і вкажіть у межах першого оберту додатні кути, косинус яких дорівнює $-\frac{1}{4}$.

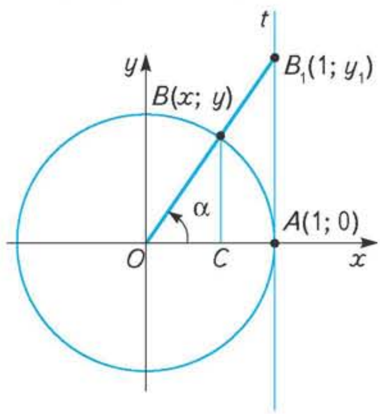
Побудова. Поясніть її самостійно за малюнком 71.

Використання одиничного кола допомагає встановити, яких значень можуть набувати тангенс і котангенс кутів.

Для унаочнення значення тангенса кута і його зміни проведемо дотичну t через кінець $A(1; 0)$ горизонтального діаметра одиничного кола (мал. 72). Легко довести, що вона паралельна осі ординат. Нехай кут α належить I чверті. Щоб знайти його тангенс, побудуємо точку перетину прямих OB і t — точку B_1. Ордината y_1 точки B_1 дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$. Покажемо це.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{BC}{OC}$. Але з подібності трикутників OBC і OB_1A маємо: $\frac{BC}{OC} = \frac{AB_1}{OA}$. Оскільки $OA = 1$, то $\frac{BC}{OC} = AB_1$. У даному випадку довжина AB_1 дорівнює ординаті y_1 точки B_1. Отже, $\operatorname{tg}\alpha = y_1$.

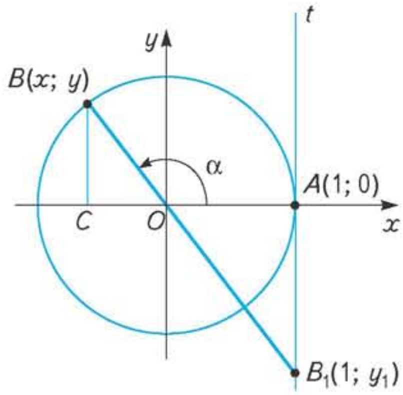
Пряма t називається ***лінією тангенсів***. За її допомогою можна знайти тангенс будь-якого кута.



Мал. 72

Якщо α — кут II чверті (мал. 73), то відповідну точку B_1 на лінії тангенсів будують аналогічно: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{BC}{OC}$. З подібності трикутників BOC і AOB_1 одержимо: $\frac{BC}{OC} = \frac{AB_1}{OA} = AB_1$. Отже, $\operatorname{tg}\alpha = -AB_1$, що дорівнює ординаті y_1 точки B_1.

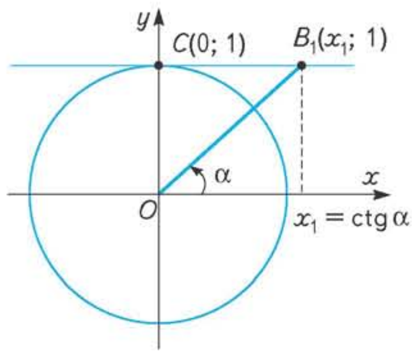
Таким чином, *тангенс кута чисельно дорівнює ординаті точки перетину лінії тангенсів і прямої, що містить рухомий радіус, який утворює цей кут з додатною піввіссю Ox.*



Мал. 73

Зазначимо ще раз, що лінія тангенсів є відповідною дотичною саме до одиничного кола і ні до жодного іншого.

Котангенс кута можна знайти аналогічно, використовуючи ***лінію котангенсів*** — дотичну до одиничного кола, що проходить через кінець $C(0; 1)$ його вертикального діаметра (мал. 74). Котангенс кута дорівнює абсцисі відповідної точки лінії котангенсів. Доведіть це самостійно.



Мал. 74

За допомогою лінії тангенсів (котангенсів) можна показати, що на відміну від синуса чи косинуса

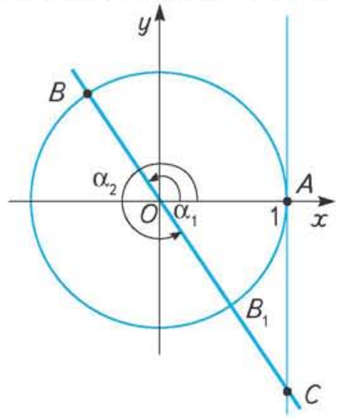
значення тангенса (котангенса) кута може бути будь-яким дійсним числом.

Обґрунтуємо це. Яким не було б дійсне число a, завжди на лінії тангенсів можна побудувати точку з ординатою a. Сполучивши цю точку з початком координат, дістанемо відрізок, який утворює з віссю Ox деякий кут α. За доведеним вище, $\operatorname{tg}\alpha = a$. Аналогічні міркування можна провести для котангенса.

Використовуючи лінію тангенсів (котангенсів) достатньо просто побудувати кут за даним значенням його тангенса (котангенса).

Приклад 3. Побудуйте кут, тангенс якого дорівнює $-1{,}5$: $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}5$.

Побудова. Креслимо коло з центром у початку координат довільного радіуса, довжину якого приймаємо за 1 (мал. 75). Знаходимо на лінії тангенсів точку з ординатою $-1{,}5$. Для

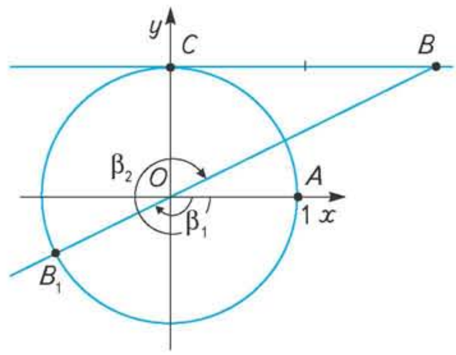


Мал. 75

цього від точки A відкладаємо вниз на цій лінії відрізок OC, довжина якого дорівнює 1,5 довжини радіуса одиничного кола. Проводимо через точки O і C пряму, яка перетинає одиничне коло в точках B і B_1. Дістаємо в межах першого оберту два додатних кути: $\angle AOB = \alpha_1$ і $\angle AOB_1 = \alpha_2$, тангенс яких дорівнює $-1{,}5$.

Приклад 4. Побудуйте і позначте в межах першого оберту від'ємні кути, котангенс яких дорівнює 2.

Побудова. Поясніть її самостійно за малюнком 76.



Мал. 76

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

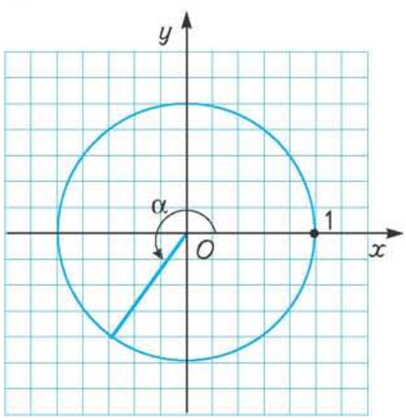
1. Як, використовуючи одиничне коло, знайти синус і косинус даного кута?
2. У яких межах змінюються значення синуса і косинуса кута?
3. Що називають лінією тангенсів? Для чого її використовують?
4. Що називають лінією котангенсів? Для чого її використовують?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

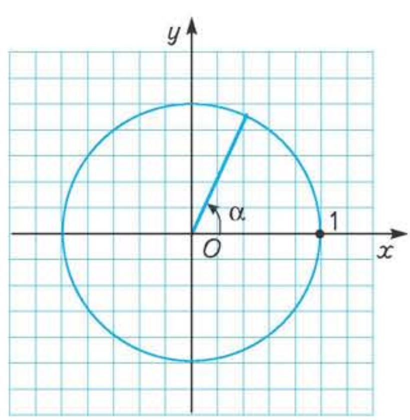
140°. Накресліть одиничне коло і кут α, як зображено на малюнку 77. Користуючись малюнком, знайдіть: $\sin\alpha$; $\cos\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha$.

141°. Накресліть одиничне коло і кут α, як зображено на малюнку 78. Користуючись малюнком, знайдіть $\cos\alpha$.

Зобразіть і позначте на малюнку ще один додатний кут β у межах першого оберту такий, що $\cos\beta = \cos\alpha$. Виразіть кут β через кут α. Позначте два від'ємних кути, що мають такі самі значення косинуса.



Мал. 77



Мал. 78

142°. Накресліть одиничне коло, обравши його радіусом відрізок, що становить 4 клітинки зошита. Побудуйте і позначте довільний додатний гострий кут α. Знайдіть наближене значення синуса цього кута. Накресліть і позначте на малюнку ще один додатний кут β іншої чверті, який має такий самий синус. Виразіть через α і β формулами усі кути, синус яких такий самий.

143'. На одиничному колі знайдіть точку, ордината якої дорівнює $\frac{2}{3}$. Скільки таких точок можна знайти? Зобразіть на малюнку і позначте додатні кути в межах першого оберту, кінцева сторона яких проходить через побудовані точки. Значення якої тригонометричної функції цих кутів дано в умові? Запишіть це у вигляді відповідних рівностей.

144'. Накресліть одиничне коло, обравши його радіусом відрізок, що становить 3 клитинки зошита. Позначте на цьому колі точку, абсциса якої дорівнює $-\frac{2}{3}$. Скільки таких точок можна знайти? Зобразіть на малюнку і позначте додатні та від'ємні кути в межах першого оберту, кінцеві сторони яких проходять через знайдені точки. Значення якої тригонометричної функції цих кутів дано в умові? Запишіть це у вигляді відповідних рівностей.

145'. Чи можливі рівності:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$; 2) $\sin x = -\frac{13}{12}$; 3) $\cos x = -0,7$;

4) $\cos x = 2,1$; 5) $\frac{1}{\sin x} = \frac{25}{18}$; 6) $\frac{1}{\cos x} = -0,7$;

7) $\sin x = 0$; 8) $\cos x = -1$; 9) $\sin x \cos x = 1,8$?

Відповіді обґрунтуйте.

146. Користуючись одиничним колом, обґрунтуйте, що $|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \geq 1$.

147. Накресліть одиничне коло, обравши його радіусом відрізок, що становить 5 клітинок зошита. Побудуйте і позначте гострий кут α, синус якого дорівнює $\frac{4}{5}$. Зобразіть на малюнку ще один додатний кут $\beta < 360°$, що задовольняє цю умову. Виразіть β через α.

148'. Накресліть одиничне коло. Побудуйте і позначте в межах першого оберту додатні кути, синус яких дорівнює: 1) 0; 2) $-0,6$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 5) 1,5.

149. Використовуючи одиничне коло, побудуйте в межах першого оберту два додатних кути, косинус яких дорівнює $-\frac{2}{3}$. Виразіть один із цих кутів через інший.

150'. Накресліть одиничне коло. Побудуйте і позначте в межах першого оберту додатні кути, косинус яких дорівнює: 1) 0,5; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{4}{5}$; 4) -1; 5) 2.

151. Користуючись лінією тангенсів, побудуйте кут, тангенс якого дорівнює 2,5. Скільки додатних кутів, що задовольняють цю умову, можна побудувати в межах першого оберту? Зобразіть їх на малюнку. Виразіть більший з них через менший.

152. Накресліть одиничне коло і проведіть лінію тангенсів. Побудуйте і позначте додатні кути в межах першого оберту, тангенс яких дорівнює:

1) $-1{,}5$; 2) 1; 3) $-0{,}5$; 4) 0.

153. Користуючись лінією котангенсів, побудуйте кут, котангенс якого дорівнює -1. Скільки ще додатних кутів, що не перевищують 360° і задовольняють цю умову, можна побудувати? Зобразіть їх на малюнку. Виразіть один з них через інший.

154°. Накресліть одиничне коло і лінію котангенсів. Побудуйте і позначте два від'ємних кути, котангенс яких дорівнює: 1) 3; 2) -2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0.

155. Побудуйте і позначте в межах першого оберту додатний кут α, що задовольняє умову:

1) $\sin\alpha = -0{,}4$, $\operatorname{ctg}\alpha > 0$; 2) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$;

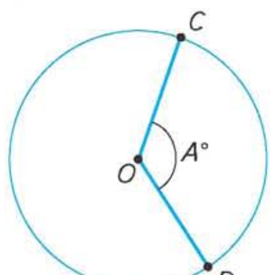
3) $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}5$, $\sin\alpha < 0$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$, $\cos\alpha < 0$.

§13 Радіанне вимірювання кутів

Відомою вам одиницею вимірювання кутів є градус — кут, що дорівнює $\frac{1}{180}$ розгорнутого кута. Отже, градусна міра прямого кута дорівнює 90°, повного — 360°.

Крім градусів існують інші одиниці вимірювання кутів. У математиці та інших науках широко використовується така одиниця вимірювання кутів, як *радіан*. Перед уведенням цього поняття пригадаємо, що градусна міра дуги кола дорівнює градусній мірі відповідного їй центрального кута. Тобто якщо $\angle COD = A^\circ$, то і градусна міра дуги CD також дорівнює A° (мал. 79).

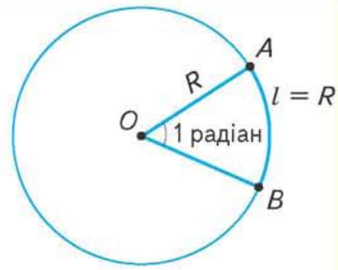
Якщо центральний кут є повним, то йому відповідає дуга всього кола з градусною мірою 360°. Отже, центральному куту мірою 1° відповідає дуга, що дорівнює $\frac{1}{360}$ кола. І, навпаки, дузі, довжина якої дорівнює $\frac{1}{360}$ довжини кола, відповідає центральний кут мірою 1°. Тому градус як одиницю вимірювання кутів можна було б означити і як центральний кут, що відповідає дузі кола, довжина якої дорівнює $\frac{1}{360}$ довжини кола.



Мал. 79

Аналогічно введено одиницю вимірювання кутів — радіан.

***Радіан* — це центральний кут, що відповідає дузі кола, довжина якої дорівнює довжині радіуса цього кола (мал. 80).**



Мал. 80

Радіанна і градусна міри кута пов'язані між собою певною залежністю. Встановимо її.

За означенням радіана міра дуги кола довжиною R дорівнює 1 радіану. Отже, все коло містить $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ радіанів (скорочено — рад).

Оскільки все коло містить $360°$, то $360° = 2\pi$ рад. Звідси випливає:

$1° = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ (рад). 1 рад $= \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$. Отже,

$$A° = \frac{A\pi}{180} \text{ рад}, \qquad \alpha \text{ рад} = \frac{\alpha \cdot 180°}{\pi}.$$

Встановлені співвідношення дають змогу переходити від градусної міри кута до радіанної і навпаки.

Передусім зазначимо, що

1 рад $= \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3{,}141592\ldots} \approx 57°18'$.

У багатьох випадках у запису радіанної міри обмежуються буквеним позначенням π, не доводячи результат до числового значення.

Наприклад, пишуть $\alpha = \frac{\pi}{8}$ рад замість $\alpha = \frac{3{,}141592\ldots}{8}$ рад $\approx 0{,}39$ рад.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Визначте радіанну міру кута $27°$.

Розв'язання. За формулою $A° = \frac{A\pi}{180}$ рад маємо: $27° = \frac{27\pi}{180} = \frac{3}{20}\pi$ (рад).

Приклад 2. Визначте градусну міру кута $\frac{5\pi}{18}$ рад.

Розв'язання. Використаємо формулу α рад $= \frac{\alpha \cdot 180°}{\pi}$. Маємо:

$\frac{5\pi}{18}$ рад $= \frac{\frac{5}{18}\pi \cdot 180°}{\pi} = 50°$.

Приклад 3. Визначте градусну міру кута 2,5 рад.

Розв'язання. Оскільки 1 рад $\approx 57°\,18'$, то 2,5 рад $\approx 57°\,18' \cdot 2{,}5 =$
$= 57° \cdot 2{,}5 + 18' \cdot 2{,}5 = 132{,}5° + 45' = 132°\,30' + 45' = 132°\,75' = 133°\,15'$.

Використовуючи формулу $A^\circ = \dfrac{A\pi}{180}$ рад, складемо таблицю 6 радіанних мір деяких найуживаніших кутів.

Таблиця 6

Градус	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
Радіан	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Існують інші одиниці вимірювання кутів, а не лише градус і радіан.

У морській справі, наприклад, для вимірювання кутів користуються румбом. *Румб* — це кут, що становить $\frac{1}{32}$ частину повного кута.

У техніці поширеною одиницею вимірювання кутів є *повний оберт* (кут 360°).

В артилерії за одиницю вимірювання кутів прийнято $\frac{1}{60}$ частину повного оберту, тобто кут $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$. Ця одиниця має назву *великої поділки кутоміра*. Сота частина великої поділки кутоміра називається *малою поділкою кутоміра*. Вона становить $6^\circ : 100 = 3'36''$.

У геометрії іноді за одиницю вимірювання кутів беруть прямий кут, позначаючи цю одиницю буквою *d*. Наприклад, сума кутів трикутника дорівнює 2*d*, а сума кутів чотирикутника — 4*d*.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Назвіть і охарактеризуйте відомі вам одиниці вимірювання кутів.
2. Дайте означення радіана.
3. Укажіть радіанну міру: повного кута; розгорнутого кута; прямого кута.
4. Використовуючи співвідношення $180^\circ = \pi$ рад, поясніть, як за градусною мірою кута визначити його радіанну міру і, навпаки, як за радіанною мірою визначити градусну міру кута.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

156'. Визначте радіанну міру кута:

1) 40°; 2) 140°; 3) 36°; 4) 18°; 5) 240°; 6) 300°; 7) –225°.

Результат подайте за допомогою числа π.

157'. Визначте градусну міру кута, наведену в радіанах:

1) $0{,}5\pi$; 2) $\frac{\pi}{12}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) $\frac{\pi}{20}$; 5) $\frac{\pi}{15}$;

6) $-\frac{7\pi}{12}$; 7) $-2\frac{3}{4}\pi$; 8) $-\frac{9\pi}{5}$; 9) 2; 10) 1,5.

158°. Знайдіть радіанну і градусну міри кута, який доповнює кут $\frac{5}{9}\pi$ до розгорнутого.

159°. Знайдіть градусну і радіанну міри кута, який доповнює кут 135° до повного.

160°. Два кути трикутника дорівнюють 59° і 69°. Знайдіть радіанну міру третього кута цього трикутника.

161°. Два кути трикутника дорівнюють $\frac{3\pi}{10}$ рад і $\frac{2\pi}{15}$ рад. Знайдіть градусну міру третього кута цього трикутника.

162. Знайдіть градусну і радіанну міри кутів трикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3 і 4.

163. Знайдіть градусну і радіанну міри кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, якщо вони відносяться, як 2 : 7.

164°. Порівняйте кути α і β, якщо:

1) $\alpha = 49^\circ$, $\beta = \frac{5}{18}\pi$ рад; 2) $\alpha = \frac{\pi}{12}$ рад, $\beta = 14^\circ 35'$;

3) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ рад, $\beta = 135^\circ$; 4) $\alpha = \frac{8\pi}{9}$ рад, $\beta = 170^\circ$.

165'. Радіус кола дорівнює 20 см. Знайдіть довжину дуги цього кола, якщо її радіанна міра дорівнює: 1) 3; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 2,4; 4) 0,8.

166. Знайдіть довжину дуги кола радіуса 22,5 см, якщо дуга містить 40°.

167'. Знайдіть радіанну міру дуги кола радіуса 12 см, якщо довжина дуги дорівнює: 1) 4 см; 2) 1,2 см; 3) 6 см; 4) 24 см.

168°. Радіанна міра дуги кола дорівнює 1,4, а її довжина — 7 см. Знайдіть радіус кола.

169. Дуга кола містить 200°. Знайдіть радіус кола, якщо довжина дуги дорівнює 50 см.

170°. Запишіть за допомогою подвійної нерівності межі градусної та радіанної мір додатних кутів, менших від 360°, що лежать у:
1) I чверті; 2) II чверті; 3) III чверті; 4) IV чверті.

171°. Укажіть, до яких чвертей належать кути, якщо їх радіанна міра дорівнює:
1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{7\pi}{4}$; 4) $\frac{7}{9}\pi$; 5) $1,7\pi$; 6) $\frac{13\pi}{12}$; 7) $-\frac{3\pi}{4}$; 8) $-\frac{\pi}{8}$.

172°. Визначте знаки синуса, косинуса, тангенса кутів, наведених у попередній задачі.

173. Обґрунтуйте правильність рівностей:
1) $\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha$; 2) $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$;
3) $\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi k) = \operatorname{tg}\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}(\alpha + 2\pi k) = \operatorname{ctg}\alpha$,
де α — радіанна міра даного кута, k — ціле число ($k \in \boldsymbol{Z}$).

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

174. Знайдіть градусну і радіанну міри кута, утвореного годинною й хвилинною стрілками годинника, якщо він показує: 1) 3 год; 2) 6 год; 3) 8 год.

175*. Колесо, рівномірно обертаючись, робить 20 обертів за хвилину. Знайдіть його кутову швидкість у радіанах за секунду.

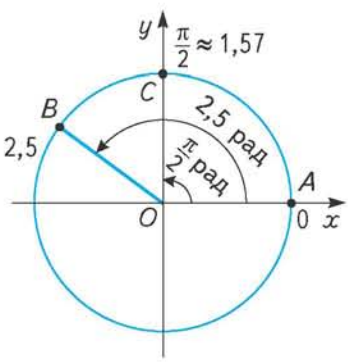
§14 Тригонометричні функції числового аргументу

Вимірюючи кути в радіанах, найменування одиниці вимірювання біля числа, що характеризує міру кута, зазвичай не пишуть. Кажуть: «кут дорівнює $\frac{\pi}{4}$» замість «кут дорівнює $\frac{\pi}{4}$ радіана»; «кут дорівнює 100» замість «кут дорівнює 100 радіанів» і т. д. Виходячи з цього, запис $\sin\frac{\pi}{2}$ слід розуміти як синус кута, що дорівнює $\frac{\pi}{2}$ рад, $\operatorname{tg} 4{,}2$ — як тангенс кута, що дорівнює 4,2 рад.

Уведення радіанної міри кута дає змогу зображати будь-яке число точкою одиничного кола. Розглянемо, як це можна зробити.

Домовилися, що точка A — кінець початкового радіуса — зображає число 0 (мал. 81). Для зображення будь-якого іншого дійсного числа a будують рухомий радіус OB, який утворює з початковим радіусом OA кут a рад. Точка B — кінець рухомого радіуса — зображає на одиничному колі число a.

Зокрема, на малюнку 81 точка B зображає число 2,5 ($\angle AOB = 2{,}5$ рад). Очевидно, що цією точкою зображається не лише число 2,5, а й усі числа виду $2{,}5 + 2\pi k$, де k — ціле число. Точка C зображає число $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, бо $\angle AOC = \frac{\pi}{2}$ рад $\approx 1{,}57$ рад. Цією самою точкою зображаються всі числа виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, де k — ціле число.



Мал. 81

Водночас, маючи точку на одиничному колі, можна знайти множину чисел, які вона зображає. Одне з таких чисел, очевидно, дорівнює радіанній мірі одного з кутів (наприклад, найменшого додатного), що їх утворює рухомий радіус, проведений до цієї точки, з початковим радіусом. Додавши до знайденого в такий спосіб числа $2\pi k$, де $k \in \boldsymbol{Z}$, одержимо вираз, що задає множину шуканих чисел. Надаючи k певного значення, діставатимемо відповідне число. Очевидно, що будь-яка точка одиничного кола зображає безліч дійсних чисел, що їх можна знайти описаним способом.

Досі ми розглядали тригонометричні функції, аргументом яких був кут. Але в багатьох процесах, які можна описати тригонометричними функціями, змінною є не лише кут, а й час, температура, довжина тощо. У зв'язку з цим домовились абстрагуватися від природи аргументу і розглядати тригонометричні функції просто як числа, розуміючи, наприклад, під синусом числа 3,7 синус кута, що дорівнює 3,7 рад; під тангенсом числа $-0{,}8$ тангенс кута, що дорівнює $-0{,}8$ рад, тощо.

З такого розуміння тригонометричних функцій числового аргументу випливає, що синус і косинус певного числа дорівнюють відповідно ординаті й абсцисі точки, що зображає це число на одиничному колі, а його тангенс і котангенс — ординаті й абсцисі відповідних точок лінії тангенсів і лінії котангенсів.

З означення випливає, що синус і косинус числового аргументу існують за будь-якого дійсного x.

Беручи до уваги, що $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, доходимо висновку, що функція тангенс не існує, якщо $\cos x = 0$. Це справедливо для всіх чисел, які зображаються на одиничному колі кінцями вертикального діаметра, тобто чисел $\pm\frac{\pi}{2}$; $\pm\frac{3\pi}{2}$; $\pm\frac{5\pi}{2}$; ... . Кожне з них можна утворити множенням $\frac{\pi}{2}$ на додатне чи від'ємне непарне число. Справді, $\pm\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot(\pm 1)$; $\pm\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot(\pm 3)$; $\pm\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot(\pm 5)$ і т. д. Відомо, що непарні числа записують у вигляді $2k + 1$, де k — ціле число. Отже, множину чисел, для яких тангенс не має змісту, можна записати у вигляді $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, де k — ціле число. Часто трапляється і такий запис цієї множини: $\frac{\pi}{2} + \pi k$, де k — ціле число. Щоб пересвідчитися, що обидва вирази позначають одну й ту саму числову множину, достатньо, наприклад, розкрити дужки у виразі $\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

Оскільки йшлося про множину чисел, косинус яких дорівнює 0, то можна сказати, що розв'язком рівняння $\cos x = 0$ є числа виду $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Зважаючи, що $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, доходимо висновку: числова функція котангенс не існує для тих x, за яких $\sin x = 0$. Ці числа зображаються кінцями горизонтального діаметра одиничного кола і дорівнюють $0; \pm\pi; \pm 2\pi; \pm 3\pi$ і т. д., тобто це числа виду πk, де k — ціле число.

Аналогічно розв'язок рівняння $\sin x = 0$ такий: $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Для будь-якого значення x, при якому існує відповідна тригонометрична функція, справджуються рівності:

$\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$,
$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$,

а також

$\sin(x + 2\pi k) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$,
$\operatorname{tg}(x + 2\pi k) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(x + 2\pi k) = \operatorname{ctg} x$, де $k \in \boldsymbol{Z}$.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Як зобразити на одиничному колі дане число? Проілюструйте на прикладі.
2. Як знайти найменше додатне число, що зображає дана на одиничному колі точка?
3. Як розуміти запис: $\sin 2$; $\cos(-1{,}5)$; $\sin 0$; $\operatorname{tg}(-1)$; $\operatorname{ctg} 8$?
4. Чи є такі кути (числа), синус яких знайти не можна?
5. Які точки одиничного кола зображають числа, тангенс яких не існує?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

176'. Накресліть одиничне коло і позначте на ньому числа:

1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{5\pi}{3}$; 4) $-\frac{4\pi}{3}$; 5) $\frac{7\pi}{6}$; 6) $\frac{11\pi}{6}$;

7) $\frac{3\pi}{4}$; 8) $-\frac{\pi}{4}$; 9) 2; 10) -1; 11) $-3{,}6$; 12) 10.

177'. Накресліть одиничне коло. Позначте верхній кінець його вертикального діаметра буквою *A*, а нижній — буквою *B*.
Скільки чисел зображає точка *A*? Запишіть одне з них.
Скільки чисел зображає точка *B*? Запишіть одне з них.

178°. Запишіть вираз, що задає множину чисел, які на одиничному колі зображає:
1) правий кінець його горизонтального діаметра;
2) лівий кінець його горизонтального діаметра.

179°. Запишіть вираз, що задає множину чисел, які на одиничному колі зображає:
1) верхній кінець його вертикального діаметра;
2) нижній кінець його вертикального діаметра.

180. Накресліть одиничне коло. Виберіть на ньому в довільному місці точку *A*. Скільки чисел позначає ця точка? Знайдіть наближене значення одного з них. Запишіть вираз, який задає множину таких чисел у загальному вигляді.

181. Виконайте завдання, аналогічне до попереднього, ще для кількох точок одиничного кола.

182. Запишіть вирази, що задають множину чисел, які зображаються точками перетину одиничного кола з бісектрисою:
1) першого і третього координатних кутів;
2) другого і четвертого координатних кутів.

183. Який знак має вираз:

1) $\sin 1$; 2) $\sin 2$; 3) $\sin(-3)$; 4) $\sin 4$; 5) $\cos 2$; 6) $\cos(-5)$;

7) $\cos\frac{5\pi}{3}$; 8) $\cos 4{,}3\pi$; 9) $\operatorname{tg} 3$; 10) $\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3}$; 11) $\operatorname{tg}(-4)$; 12) $\operatorname{tg}(-2)$?

184*. Визначте знак виразу:

1) $\sin 1{,}5 \cdot \cos 2{,}5 \cdot \operatorname{tg} 3$; 2) $\sin(-2) \cdot \cos 5 \cdot \operatorname{tg}(-4)$;

3) $\sin(-4{,}2) \cdot \cos(-5{,}6) \cdot \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; 4) $\cos(-0{,}5) \cdot \operatorname{tg}(-2{,}4) \cdot \sin(-\pi)$.

185. Використовуючи одиничне коло, знайдіть наближене значення:

1) $\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{3\pi}{4}$; 3) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; 4) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$; 5) $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}$;

6) $\sin 2{,}5$; 7) $\cos(-1{,}5)$; 8) $\operatorname{tg} 3$; 9) $\sin 10$; 10) $\operatorname{ctg} 10$.

186. Накресліть одиничне коло і позначте на ньому точки, що зображають числа, синус яких дорівнює -1. Запишіть кілька таких чисел. Укажіть загальну формулу, що задає множину всіх таких чисел.

187. Накресліть одиничне коло і позначте на ньому точки, що зображають числа, косинус яких дорівнює 0. Запишіть кілька таких чисел. Задайте множину таких чисел двома формулами або однією.

188. Чи може тангенс від'ємного числа бути додатним? Якщо так, то зобразіть кілька таких чисел на одиничному колі й знайдіть їх наближені значення.

189*. Чи можлива рівність $\sin\alpha = \sin(-\alpha)$? Якщо так, то запишіть вираз, який у загальному вигляді задає множину відповідних значень α.

§15 Формули зведення

Формулами зведення називають формули, що виражають тригонометричні функції кутів (чисел) $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ через тригонометричні функції кута (числа) α, де α — довільний кут (число).

Формули зведення мають велике практичне застосування. За їх допомогою можна подати значення тригонометричних функцій будь-якого кута (числа) через значення відповідних тригонометричних функцій гострого кута або числа з проміжку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Це дає змогу обмежитися складанням таблиць значень тригонометричних функцій тільки для гострих кутів.

У курсі геометрії було встановлено формули зведення для кутів виду $90°-\alpha$ і $180°-\alpha$. Наприклад, $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$, $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$, $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$. Звідси та на основі означення тангенса і котангенса кута дістаємо такі формули зведення:

$$\operatorname{tg}(90°-\alpha)=\frac{\sin(90°-\alpha)}{\cos(90°-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(180°-\alpha)=\frac{\sin(180°-\alpha)}{\cos(180°-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Аналогічно $\operatorname{ctg}(90°-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(180°-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$.

Використовуючи радіанну міру кута, зазначені формули можна записати у вигляді:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$; $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$;

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha;\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha;$

$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{ctg}\,\alpha;\quad \text{tg}(\pi-\alpha)=-\text{tg}\,\alpha;$

$\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{tg}\,\alpha;\quad \text{ctg}(\pi-\alpha)=-\text{ctg}\,\alpha.$

Маючи ці формули, можна дістати всі інші формули зведення. Розглянемо це на прикладі кута виду $90°+\alpha$.

Перетворимо вираз $90°+\alpha$ на такий, для якого формулу зведення вже встановлено. Це перетворення можна здійснити принаймні двома способами. Розглянемо кожен з них.

I спосіб.

Запишемо суму $90°+\alpha$ у вигляді різниці: $90°+\alpha=90°-(-\alpha)$. Увівши позначення $-\alpha=\beta$, дістанемо: $90°+\alpha=90°-\beta$. Застосуємо до кута виду $90°-\beta$ відомі формули зведення. Маємо:

$\sin(90°+\alpha)=\sin(90°-\beta)=\cos\beta,$
$\cos(90°+\alpha)=\cos(90°-\beta)=\sin\beta,$
$\text{tg}(90°+\alpha)=\text{tg}(90°-\beta)=\text{ctg}\,\beta,$
$\text{ctg}(90°+\alpha)=\text{ctg}(90°-\beta)=\text{tg}\,\beta.$

Оскільки $\beta=-\alpha$, то $\cos\beta=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, $\sin\beta=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, $\text{tg}\,\beta=\text{tg}(-\alpha)=-\text{tg}\,\alpha$, $\text{ctg}\,\beta=\text{ctg}(-\alpha)=-\text{ctg}\,\alpha$.

Остаточно маємо:

$\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha;\ \cos(90°+\alpha)=-\sin\alpha;$
$\text{tg}(90°+\alpha)=-\text{ctg}\,\alpha;\quad \text{ctg}(90°+\alpha)=-\text{tg}\,\alpha;$

II спосіб.

Оскільки $90°=180°-90°$, то $90°+\alpha=180°-90°+\alpha=180°-(90°-\alpha)$. Позначивши $90°-\alpha=\beta$, застосуємо до кута виду $180°-\beta$ відомі формули зведення, а потім знову перейдемо до кута α. Маємо:

$\sin(90°+\alpha)=\sin(180°-\beta)=\sin\beta=\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha;$
$\cos(90°+\alpha)=\cos(180°-\beta)=-\cos\beta=-\cos(90°-\alpha)=-\sin\alpha;$
$\text{tg}(90°+\alpha)=\frac{\sin(90°+\alpha)}{\cos(90°+\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\text{ctg}\,\alpha;$
$\text{ctg}(90°+\alpha)=-\text{tg}\,\alpha.$

Усі формули зведення подано в таблиці 7.

Таблиця 7

x	$90°-\alpha$ $\frac{\pi}{2}-\alpha$	$90°+\alpha$ $\frac{\pi}{2}+\alpha$	$180°-\alpha$ $\pi-\alpha$	$180°+\alpha$ $\pi+\alpha$	$270°-\alpha$ $\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$270°+\alpha$ $\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$360°-\alpha$ $2\pi-\alpha$	$360°+\alpha$ $2\pi+\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\text{tg}\,x$	$\text{ctg}\,\alpha$	$-\text{ctg}\,\alpha$	$-\text{tg}\,\alpha$	$\text{tg}\,\alpha$	$\text{ctg}\,\alpha$	$-\text{ctg}\,\alpha$	$-\text{tg}\,\alpha$	$\text{tg}\,\alpha$
$\text{ctg}\,x$	$\text{tg}\,\alpha$	$-\text{tg}\,\alpha$	$-\text{ctg}\,\alpha$	$\text{ctg}\,\alpha$	$\text{tg}\,\alpha$	$-\text{tg}\,\alpha$	$-\text{ctg}\,\alpha$	$\text{ctg}\,\alpha$

Треба пам'ятати, що розглянуті формули справедливі для будь-якого кута (числа) α.

З таблиці видно, що **для кутів (чисел) $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ назва функції, яку зводять, зберігається.** Тобто в результаті заміни, наприклад, виразу $\sin(\pi + \alpha)$ або $\mathrm{tg}\,(2\pi - \alpha)$ на простіший дістанемо відповідно синус або тангенс α. **Для кутів (чисел) $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ назва функції, яку зводять, замінюється на схожу (кажуть, на *кофункцію*)**, тобто синус на косинус, тангенс на котангенс і навпаки.

Отже, замінюючи, наприклад, вираз $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ або $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ на простіший, слід записати відповідно синус або тангенс α.

Знак результату в усіх випадках визначається за знаком функції, яку зводять, у відповідній чверті, зважаючи, що α — гострий кут $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Наприклад, кут $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ розташований у III чверті. Синус у цій чверті від'ємний. Тому $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$. Косинус тут також від'ємний, отже, $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$, а тангенс і котангенс — додатні, тому $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{ctg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{tg}\,\alpha$.

Приклад 1. Зведіть до тригонометричної функції кута, меншого від $45°$:
1) $\sin 143°$; 2) $\cos 167°$; 3) $\mathrm{tg}\,115°$; 4) $\mathrm{ctg}\,251°$.

Розв'язання.

1) Використовуючи кути, що входять до формул зведення, кут $143°$ можна подати двома способами: $143° = 90° + 53°$, або $143° = 180° - 37°$. Оскільки, за умовою, треба звести до функції кута, меншого від $45°$, то, очевидно, слід скористатися другим записом, тобто $143° = 180° - 37°$. Отже, $\sin 143° = \sin(180° - 37°)$. Далі міркуємо так: оскільки міру кута подано через $180°$, то в результаті зведення назва функції збережеться, тобто залишиться синус. Кут $180° - 37°$ є кутом II чверті, тому значення його синуса від'ємне. Остаточно $\sin 143° = \sin(180° - 37°) = -\sin 37°$.

2) $\cos 167° = \cos(180° - 13°) = -\cos 13°$;

3) $\mathrm{tg}\,115° = \mathrm{tg}\,(90° + 25°) = -\mathrm{ctg}\,25°$;

4) $\mathrm{ctg}\,251° = \mathrm{ctg}\,(270° - 19°) = \mathrm{tg}\,19°$.

Приклад 2. Функцію даного кута зведіть до тієї самої функції гострого кута:
1) $\sin 230°$; 2) $\cos 340°$; 3) $\mathrm{tg}\,198°$; 4) $\mathrm{ctg}\,251°$.

Розв'язання. Щоб зберегти назву функції, слід скористатися формулами зведення для кутів $180° \pm \alpha$ або $360° \pm \alpha$. Зробимо це.

1) $\sin 230° = \sin(180° + 50°) = -\sin 50°$;

2) $\cos 340° = \cos(360° - 20°) = \cos 20°$;

3) $\mathrm{tg}\,198° = \mathrm{tg}\,(180° + 18°) = \mathrm{tg}\,18°$;

4) $\mathrm{ctg}\,251° = \mathrm{ctg}\,(180° + 71°) = \mathrm{ctg}\,71°$.

З геометрії вам відомі значення синуса, косинуса, тангенса кутів 30°, 45°, 60°:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \qquad \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad \operatorname{tg} 45^\circ = 1; \qquad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Оскільки $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, то, знаючи тангенс зазначених кутів, можна знайти значення їх котангенса.

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}; \qquad \operatorname{ctg} 45^\circ = 1; \; \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Використовуючи ці значення, а також формули зведення, можна обчислити тригонометричні функції часто вживаних кутів у межах першого оберту. Це кути, градусні міри яких обчислюють з даних додаванням до них 90°, 180° і 270°. Наприклад, $30^\circ + 90^\circ = 120^\circ \left(\frac{2\pi}{3}\right)$; $45^\circ + 90^\circ = 135^\circ \left(\frac{3\pi}{4}\right)$; $60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $30^\circ + 180^\circ = 210^\circ \left(\frac{7\pi}{6}\right)$ і т. д.

Щоб знайти, наприклад, $\sin 120^\circ$, зведемо виконання цього завдання до знаходження значення тригонометричної функції гострого кута. Маємо:

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Аналогічно обчислюємо $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$, $\quad \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1.$

Обчислені в такий спосіб значення тригонометричних функцій усіх зазначених кутів наведено в таблиці 8. У правильності наведених значень відповідних тригонометричних функцій пропонуємо вам переконатися самостійно, зокрема і під час розв'язування прикладів і задач.

Таблиця 8

x	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{\pi}{2}$ 90°	$\frac{2\pi}{3}$ 120°	$\frac{3\pi}{4}$ 135°	$\frac{5\pi}{6}$ 150°	π 180°	$\frac{7\pi}{6}$ 210°	$\frac{5\pi}{4}$ 225°	$\frac{4\pi}{3}$ 240°	$\frac{3\pi}{2}$ 270°	$\frac{5\pi}{3}$ 300°	$\frac{7\pi}{4}$ 315°	$\frac{11\pi}{6}$ 330°	2π 360°
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не існує

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке формули зведення? Укажіть види кутів (чисел), для яких ці формули встановлено.
2. Для яких кутів (чисел) назва функції, яку зводять, не змінюється, а для яких — змінюється?
3. Як визначити знак перед функцією, до якої зводять дану функцію?
4. Чому для складання таблиць значень тригонометричних функцій достатньо безпосередньо обчислити значення цих функцій лише для додатних кутів до 45°?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

190'. Вважаючи α гострим кутом, укажіть чверть, до якої належить кут:

1) $90^\circ - \alpha$; 2) $90^\circ + \alpha$; 3) $\pi - \alpha$; 4) $180^\circ + \alpha$;

5) $270^\circ - \alpha$; 6) $\frac{3\pi}{2} + \alpha$; 7) $2\pi - \alpha$; 8) $360^\circ + \alpha$.

191'. Установіть знак виразу, якщо α — гострий кут:

1) $\sin(90^\circ + \alpha)$; 2) $\sin(\pi - \alpha)$; 3) $\sin(180^\circ + \alpha)$;

4) $\sin(270^\circ - \alpha)$; 5) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; 6) $\sin(360^\circ - \alpha)$;

7) $\sin(2\pi + \alpha)$; 8) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 9) $\cos(180^\circ - \alpha)$;

10) $\cos(\pi + \alpha)$; 11) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 12) $\cos(270^\circ + \alpha)$;

13) $\cos(2\pi - \alpha)$; 14) $\cos(360^\circ + \alpha)$; 15) $\mathrm{tg}(90^\circ + \alpha)$;

16) $\mathrm{tg}(\pi - \alpha)$; 17) $\mathrm{tg}(\pi + \alpha)$; 18) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

19) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; 20) $\mathrm{tg}(2\pi - \alpha)$; 21) $\mathrm{tg}(2\pi + \alpha)$.

192°. Спростіть вираз, скориставшись формулами зведення:

1) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\cos(\alpha - \pi)$; 3) $\sin(\alpha - \pi)$;

4) $\mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$; 5) $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; 6) $\sin(\alpha - 2\pi) \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

193. Замініть тригонометричну функцію функцією доповняльного кута:

1) $\cos 0{,}4\pi$; 2) $\sin 0{,}36\pi$; 3) $\mathrm{tg}\, 78^\circ$; 4) $\mathrm{ctg}\, \frac{2\pi}{5}$;

5) $\mathrm{ctg}\, 55^\circ$; 6) $\sin \frac{3\pi}{7}$; 7) $\cos(45^\circ + \alpha)$; 8) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$;

9) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; 10) $\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$; 11) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)$; 12) $\mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

194. Зведіть дану функцію до функції додатного гострого кута:

1) $\mathrm{tg}\,317°$; 2) $\cos 111°$; 3) $\sin 191°$; 4) $\mathrm{ctg}\,137°$; 5) $\sin\frac{10\pi}{7}$;

6) $\mathrm{tg}\frac{16\pi}{9}$; 7) $\cos\frac{7\pi}{4}$; 8) $\mathrm{ctg}(-283°)$; 9) $\sin(-96°)$; 10) $\mathrm{tg}\left(-\frac{9\pi}{5}\right)$.

195. Зведіть тригонометричну функцію до функції додатного кута, меншого від $45°\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

1) $\sin 78°$; 2) $\cos 123°$; 3) $\mathrm{tg}\,174°$;

4) $\sin 1{,}2\pi$; 5) $\cos\frac{5\pi}{6}$; 6) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

196. Зведіть тригонометричну функцію до функції додатного гострого кута, зберігши назву функції, що зводиться:

1) $\sin 290°$; 2) $\cos 200°$; 3) $\mathrm{tg}\,320°$; 4) $\cos\frac{13\pi}{8}$;

5) $\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{10}$; 6) $\sin(-213°)$; 7) $\cos(-100°)$; 8) $\mathrm{tg}\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$.

197. Якщо α, β, γ — кути трикутника, то:

1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma$; 2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\gamma$;

3*) $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$; 4*) $\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\mathrm{ctg}\,\frac{\gamma}{2}$.

Доведіть це.

198*. Обчисліть суму:

1) $\cos 20°+\cos 40°+\cos 60°+...+\cos 160°+\cos 180°$;
2) $\mathrm{tg}\,20°+\mathrm{tg}\,40°+\mathrm{tg}\,60°+...+\mathrm{tg}\,160°+\mathrm{tg}\,180°$;
3) $\sin 0°+\sin 1°+\sin 2°+...+\sin 358°+\sin 359°$;
4) $\mathrm{ctg}\,15°+\mathrm{ctg}\,30°+\mathrm{ctg}\,45°+...+\mathrm{ctg}\,150°+\mathrm{ctg}\,165°$.

199*. Доведіть тотожність:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 2) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

3) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; 4) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

200. Знайдіть $\cos x$, якщо $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

201'. Використовуючи табличні значення тригонометричних функцій кутів $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ і формули зведення, обчисліть:

1) $\sin\frac{5\pi}{6}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{4}$; 3) $\cos\frac{2\pi}{3}$; 4) $\cos\frac{7\pi}{6}$;

5) $\sin 225°$; 6) $\cos 240°$; 7) $\mathrm{tg}\frac{3\pi}{4}$; 8) $\mathrm{ctg}\,315°$.

202°. Знайдіть числове значення виразу:

1) $\sin\pi+2\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{3\pi}{2}$; 2) $6\sin\frac{\pi}{6}-5\cos 0+\sin^2\frac{\pi}{4}$;

3) $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}+5\sin\pi-4\,\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}$; 4) $\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{4}+2\cos^2\pi+\sin^2\frac{3\pi}{4}$.

203°. Знайдіть числове значення виразу:

1) $5\sin(\pi-\alpha)-2\cos(\pi+\alpha)$, якщо $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

2) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, якщо $\alpha=\pi$.

204. Обчисліть: 1) $8\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$; 2) $10\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{4}$.

205. Доведіть твердження:

1) синус суми гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 1;

2) косинус суми гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 0.

206. Косинус одного із суміжних кутів дорівнює $-\frac{1}{2}$. Знайдіть синус і тангенс іншого кута.

207°. Синуси двох кутів трикутника дорівнюють 1 і $\frac{1}{2}$. Знайдіть значення тригонометричних функцій третього кута.

208*. Синуси двох кутів трикутника дорівнюють $\frac{1}{2}$ і $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Знайдіть значення тригонометричних функцій третього кута. Скільки розв'язків має задача?

209. Тангенс кута при основі рівнобедренного трикутника дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Знайдіть значення тригонометричних функцій кута при вершині.

210. Синус тупого кута ромба дорівнює $\frac{1}{2}$. Знайдіть значення тригонометричних функцій гострого кута цього ромба.

§16 Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

Тригонометричні функції пов'язані між собою численними співвідношеннями, що виражаються відповідними тотожностями. Перша серія тотожностей описує зв'язок між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу.

З курсу геометрії вам відомо, що для будь-якого гострого кута α

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.} \qquad (1)$$

Цю рівність було встановлено за теоремою Піфагора. Використовуючи дану теорему, можна довести, що рівність (1) виконується для будь-якого кута, а отже, і числового аргументу.

За означенням тангенса і котангенса:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.} \qquad (2)$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.} \qquad (3)$$

Помноживши почленно рівності (2) і (3), дістанемо:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1.} \qquad (4)$$

Поділивши почленно рівність (1) на $\cos^2\alpha$, одержимо:

$$\boxed{\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha},} \text{ або } \boxed{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.} \qquad (5)$$

і поділивши почленно (1) на $\sin^2\alpha$, маємо:

$$\boxed{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.} \qquad (6)$$

Рівності (1) — (6) є тотожностями, оскільки вони правильні для всіх тих значень аргументу, за яких ліва і права частини мають зміст.

Рівність (1) правильна для будь-яких значень α. Рівність (2) правильна для всіх значень α, за яких $\cos\alpha \neq 0$. Рівність (3) правильна для всіх значень α, за яких $\sin\alpha \neq 0$. Рівність (4) правильна для всіх значень α, за яких обидва вирази $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ мають зміст. Рівність (5) правильна, якщо $\cos\alpha \neq 0$, а рівність (6), — якщо $\sin\alpha \neq 0$.

Розглянуті рівності називають ***основними тригонометричними тотожностями***.

Розглянемо застосування цих тотожностей.

Приклад 1. Знайдіть $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = 0{,}8$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Розв'язання. Знайдемо $\cos\alpha$. З формули $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ дістанемо: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$. Відомо, що існують два протилежних числа, квадрат яких дорівнює даному додатному числу. Яке з них узяти в нашому випадку? Оскільки α є кутом II чверті, то його косинус від'ємний.

Маємо:

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}64} = -\sqrt{0{,}36} = -0{,}6.$

Знаючи синус і косинус, знаходимо тангенс і котангенс:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}.$

Для знаходження котангенса застосуємо формулу $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1$, звідси

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. Отже, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}.$

Отже, $\cos\alpha = -0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = -1\frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$.

Приклад 2. Знайдіть значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\text{ctg}\,\alpha$, якщо $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$ і $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Розв'язання. Кут α належить до III чверті, тому синус і косинус цього кута від'ємні, а котангенс — додатний.

За формулою $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ знаходимо $\cos\alpha$. Маємо:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}; \quad \cos^2\alpha = 1 : \frac{25}{16} = \frac{16}{25},$$

а $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}}$, тобто $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

За формулою $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, враховуючи, що кут α належить до III чверті, де синус від'ємний, знаходимо:

$$\sin\alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}}, \text{ тобто } \sin\alpha = -\frac{3}{5}.$$

Нарешті, $\text{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$, отже, $\text{ctg}\,\alpha = 1 : \frac{3}{4}$; $\text{ctg}\,\alpha = \frac{4}{3}$.

Приклад 3. Спростіть вираз $\frac{\text{tg}\alpha - \text{ctg}\alpha}{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}$.

Розв'язання. Замінимо в чисельнику тангенс і котангенс відповідними відношеннями і виконаємо віднімання утворених дробів, а вираз у знаменнику розкладемо на множники як різницю квадратів $\sin^2\alpha$ і $\cos^2\alpha$. Маємо:

$$\frac{\text{tg}\alpha - \text{ctg}\alpha}{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)} = \frac{\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}}{1\cdot(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Приклад 4. Доведіть тотожність $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Розв'язання. Для доведення тотожної рівності двох виразів один із них або обидва тотожно перетворюють, намагаючись звести їх до однакового вигляду. Часто використовують ще й такий спосіб: утворюють різницю лівої та правої частин даної рівності й спрощують її. Якщо в результаті дістали нуль, то це свідчить про тотожну рівність даних виразів. Скористаємось останнім способом. Маємо:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} - \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha} = 0.$$

Отже, $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, тотожність доведено.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

211'. Знайдіть косинус гострого кута α, якщо:

1) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$; 2) $\sin\alpha = \frac{1}{6}$; 3) $\sin\alpha = \frac{2}{5}$.

212'. Знайдіть синус гострого кута β, якщо:

1) $\cos\beta = \frac{4}{5}$; 2) $\cos\beta = \frac{1}{6}$; 3) $\cos\beta = \frac{2}{3}$.

213'. Знайдіть $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо:

1) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; 2) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; 3) $\sin\alpha = \frac{1}{8}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{63}}{8}$.

214'. Знайдіть $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо: 1) $\operatorname{tg}\alpha = 4$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = -8$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{18}$; 4) $\operatorname{tg}\alpha = 3\frac{1}{2}$.

215'. Знайдіть $\operatorname{tg}\alpha$, якщо: 1) $\operatorname{ctg}\alpha = 7$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha = -12$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{17}{24}$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = 4,1$.

216'. Чи може тангенс кута дорівнювати 6, а його котангенс дорівнювати 7?

217'. Спростіть вираз:

1) $1 - \sin^2 x$; 2) $1 - \cos^2 x$; 3) $\sin^2 x - 1$; 4) $\cos^2 x - 1$; 5) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 1$;

6) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$; 7) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha$; 8) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 9) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$;

10) $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$; 11) $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$; 12) $\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

218'. Доведіть тотожність:

1) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha$.

219°. Дано: $\sin\alpha = \frac{15}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Знайдіть $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$.

220°. Дано: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$.

221°. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Знайдіть $\cos\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$.

222°. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = -10$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Знайдіть $\operatorname{tg}\alpha$ і $\sin\alpha$.

223°. Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha - 1}$; 2) $\frac{\sin 2\alpha\sin\alpha}{\cos 2\alpha\cos\alpha}$; 3) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha$;

4) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; 5) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

6) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x} + \operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x$; 7) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;

8) $(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta)^2 - (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{ctg}\beta)^2$; 9) $(1 + \operatorname{tg}\alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg}\alpha)^2$;

10) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$; 11) $\frac{1-\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$; 12) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$.

224°. Чи існує таке значення x, для якого:

1) $\sin x = \frac{2}{5}$, а $\cos x = \frac{4}{5}$; 2) $\cos x = -\frac{5}{13}$, а $\sin x = \frac{12}{13}$;

3) $\sin x = \frac{\sqrt{7}}{4}$, а $\cos x = -\frac{3}{4}$; 4) $\sin x = \frac{7}{8}$, а $\cos x = \frac{8}{7}$?

225. Обчисліть значення решти тригонометричних функцій аргументу α за даним значенням однієї з них:

1) $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; 2) $\sin\alpha = \frac{1}{6}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 4) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

5) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{7}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 6) $\operatorname{tg}\alpha = 0,1$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

7) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; 8) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

226. Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha$; 2) $\cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha}$; 3) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$;

4) $\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}$; 5) $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1+\sin x}$; 6) $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1+\cos x}$;

7) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 8) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha + \cos^4\alpha$;

9) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)$; 10) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + 1 - \sin^2\alpha$.

227. Покажіть, що значення виразу $(a\sin\beta + b\cos\beta)^2 + (a\sin\beta - b\cos\beta)^2$ не залежить від значення β.

228. Доведіть тотожність:

1) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha$; 2) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$;

3) $\frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\sin x}$; 4) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$;

5) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$; 6) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha} = 1$;

7) $\frac{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^6\alpha$; 8) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha - 1}$;

9) $\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha - 1}$; 10) $\frac{1+\operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$.

229. Якщо α і β — гострі кути прямокутного трикутника, то $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = 1$. Доведіть це.

230*. Спростіть вираз:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

231*. Обчисліть значення виразу, спочатку спростивши його:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$, якщо $\cos\alpha=-0,4$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha\sin^2\alpha}{\sin\alpha}$, якщо $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

232*. Знаючи, що $\sin\alpha=-\dfrac{1}{m^2}$ і $\cos\alpha>0$, знайдіть значення $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

233*. Знаючи, що $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{a^2}{b^2}$ і $\sin\alpha<0$, знайдіть значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

234*. Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha=p$. Знайдіть $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

235*. Дано: $\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{ctg}\varphi=m$. Знайдіть $\operatorname{tg}^2\varphi+\operatorname{ctg}^2\varphi$.

236*. Обчисліть: $\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}87^\circ\cdot\operatorname{tg}88^\circ\cdot\operatorname{tg}89^\circ$.

§17 Формули додавання для косинуса

Формулами додавання називають формули, за допомогою яких можна, маючи значення тригонометричних функцій аргументів α і β, обчислити значення тригонометричних функцій суми $\alpha+\beta$ і різниці $\alpha-\beta$ цих аргументів.

Для косинуса формули додавання мають такий вигляд:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta; \quad (1)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \quad (2)$$

Розглянемо принцип доведення формули (2).

Побудуємо одиничне коло і кути α і β (мал. 82). З малюнка видно, що $\angle AOB=\alpha-\beta$. Обчислимо скалярний добуток векторів $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$. Вектор $\overline{OA}$ має координати $x_1=\cos\alpha$ і $y_1=\sin\alpha$. Координатами вектора $\overline{OB}$ є числа $x_2=\cos\beta$, $y_2=\sin\beta$. З одного боку, за означенням скалярного добутку:

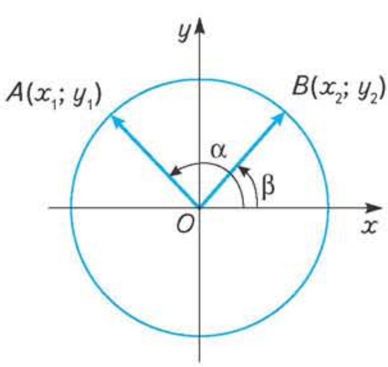
$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

З іншого боку, скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними, тобто

$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=|\overline{OA}|\cdot|\overline{OB}|\cdot\cos(\alpha-\beta)$.

Оскільки $|\overline{OA}|\cdot|\overline{OB}|=1$ як добуток довжин радіусів одиничного кола, маємо:

$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\cos(\alpha-\beta)$.



Мал. 82

Порівнюючи перший і другий результати для обчислення скалярного добутку $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$, маємо:

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Аналогічно можна обґрунтувати розглянуту формулу для всіх інших випадків розміщення кутів α і β у чвертях одиничного кола.

Для доведення формули для косинуса суми двох аргументів запишемо суму $\alpha + \beta$ як різницю $\alpha - (-\beta)$ і скористаємося формулою (2). Маємо:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta).$$

Враховуючи, що $\cos(-\beta) = \cos\beta$, а $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, дістанемо:

$$\cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

що і треба було довести.

Проілюструємо застосування встановлених формул на прикладах.

Приклад 1. Обчисліть без таблиць і калькулятора $\cos 15°$.

Розв'язання. Запишемо $15°$ як різницю $45° - 30°$ і за формулою косинуса різниці (2) маємо:

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45°\cos 30° - \sin 45°\sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Приклад 2. Обчисліть $\cos 40°\ \cos 20° - \sin 20°\ \sin 40°$.

Розв'язання. Аналіз виразу свідчить, що він є правою частиною формули косинуса суми кутів $40°$ і $20°$. Отже,

$$\cos 40°\cos 20° - \sin 20°\sin 40° = \cos(40° + 20°) = \cos 60° = \frac{1}{2}.$$

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що лежить в основі виведення формули косинуса різниці двох аргументів?
2. Як, маючи формулу косинуса різниці двох аргументів, вивести формулу косинуса їх суми?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

237'. Перевірте формули косинуса суми і різниці $\cos(\alpha \pm \beta)$, якщо:
1) $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$; 2) $\alpha = 150°$, $\beta = 120°$.

238'. Установіть формули зведення, скориставшись формулами додавання для косинуса:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 3) $\cos(\pi - \alpha)$;

4) $\cos(\pi + \alpha)$; 5) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; 6) $\cos(2\pi - \alpha)$.

239'. Доведіть тотожність: 1) $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$;
2) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$.

240°. Доведіть тотожність: 1) $\cos(120° + \alpha) + \cos(120° - \alpha) = -\cos\alpha$;
2) $\cos(120° + \alpha) - \cos(120° - \alpha) = -\sqrt{3}\sin\alpha$.

241°. Спростіть вираз:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\beta\right)$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$.

242°. Знайдіть значення виразу $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, якщо $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

243°. Спростіть вираз:

1) $\cos 5x\cos 2x+\sin 5x\sin 2x$; 2) $\cos 3\alpha\cos\alpha-\sin 3\alpha\sin\alpha$;

3) $\cos(x+2)\cos x+\sin(x+2)\sin x$; 4) $\cos 2\cos 5+\sin 2\sin 5$.

244°. Обчисліть:

1) $\cos 40^\circ\cos 20^\circ-\sin 20^\circ\sin 40^\circ$; 2) $\cos 70^\circ\cos 40^\circ+\sin 70^\circ\sin 40^\circ$;

3) $\cos 55^\circ\cos 95^\circ-\sin 55^\circ\sin 95^\circ$; 4) $\cos 37^\circ\cos 83^\circ-\sin 37^\circ\sin 83^\circ$.

245. Обчисліть:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$, якщо $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, якщо $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

3) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$, якщо $\sin\alpha=-0{,}8$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

4) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$, якщо $\cos\alpha=-0{,}5$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,
$\cos\beta=0{,}8$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

246. Спростіть вираз:

1) $\cos 10^\circ+\cos 11^\circ\cos 21^\circ+\cos 69^\circ\cos 79^\circ$;

2) $\sin 20^\circ+\sin 13^\circ\sin 57^\circ-\sin 33^\circ\sin 77^\circ$.

247. Доведіть тотожність:

1) $\cos 2\cos 3-\sin 2\sin 3=\sin 2\sin 7+\cos 7\cos 2$;

2) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cos x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\sin x=\cos x$;

3) $\cos(60^\circ+\alpha)\cos\alpha+\sin(60^\circ+\alpha)\sin\alpha=\frac{1}{2}$;

4) $\cos\alpha+\cos(120^\circ+\alpha)+\cos(120^\circ-\alpha)=0$.

248*. Дано: $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-2{,}4$, $\operatorname{tg}\beta=1\frac{7}{8}$. Обчисліть $\cos(\alpha-\beta)$.

249*. Синуси двох гострих кутів трикутника дорівнюють 0,28 і 0,8. Знайдіть косинус третього кута цього трикутника.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

250. Обчисліть, не користуючись таблицями і калькулятором: 1) $\cos 75^\circ$; 2) $\cos 105^\circ$.

§18 Формули додавання для синуса

Щоб дістати формулу для синуса суми двох аргументів, використаємо одну з уже встановлених формул для косинуса. Це неважко зробити, виразивши синус через косинус за допомогою формули зведення $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Позначивши $x = \alpha + \beta$, маємо: $\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$.

Останній вираз перетворимо за формулою (2), вважаючи $\frac{\pi}{2} - \alpha$ одним аргументом, а β — другим.

Маємо:

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Отже,

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.} \qquad (3)$$

Для виведення формули синуса різниці аргументів α і β запишемо цю різницю у вигляді суми: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ і скористаємося формулою (3).

Маємо:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Останній вираз дістали з попереднього, оскільки

$\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$.

Отже,

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.} \qquad (4)$$

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Послідовно застосовуючи формули додавання для двох аргументів, можна дістати формули додавання тригонометричних функцій для трьох і більше аргументів.

Наприклад,

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin((\alpha + \beta) + \gamma) = \sin(\alpha + \beta)\cos\gamma + \cos(\alpha + \beta)\sin\gamma =$$
$$= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\cos\gamma + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\sin\gamma =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Аналогічно можна довести, що

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Для встановлення формули синуса суми двох аргументів використовують відому вже формулу косинуса різниці двох аргументів. На основі якого співвідношення це можна зробити?
2. Яку властивість функції синус використовують для виведення формули синуса різниці двох аргументів?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

251'. Використовуючи формули додавання для синуса, доведіть формулу зведення:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$; 2) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$;

3) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$; 4) $\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$.

252'. Обчисліть значення виразу:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$.

253°. Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$; 2) $\sin(60^\circ+\alpha)-\sin(60^\circ-\alpha)$;

3) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

254. Доведіть тотожність:

1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

2) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta$.

255. Спростіть вираз:

1)° $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$; 2)° $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$;

3) $\sin(\alpha+120^\circ)-\sin(60^\circ-\alpha)$; 4) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

256. Обчисліть:

1) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$, якщо $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, якщо $\cos\alpha=-0{,}8$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

257*. Знайдіть:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{7}{24}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

2) $\sin(70^\circ+\alpha)$, якщо $\sin(40^\circ+\alpha)=a$, $0^\circ<\alpha<45^\circ$.

258. Доведіть тотожність:

1) $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$;
2) $\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha$;
3) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{1}{\sin 2\alpha}$;
4) $1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{1}{\cos 2\alpha}$.

259°. Спростіть вираз:

1) $\sin 5\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \cos 5\alpha$;
2) $\sin 3x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x$;
3) $\sin 4 \cos 6 + \sin 6 \cos 4$;
4) $\cos 7 \sin 2 - \sin 7 \cos 2$.

260. Обчисліть:

1) $\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \sin 40^\circ \cos 20^\circ$;
2) $\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{12} + \sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{6}$;
3*) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 15^\circ - \dfrac{1}{2}\sin 15^\circ$;
4*) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 75^\circ + \dfrac{1}{2}\sin 75^\circ$.

261*. Косинуси двох кутів трикутника дорівнюють 0,6 і 0,8. Знайдіть синус третього кута.

262. Доведіть тотожність:

1) $\sin(30^\circ + x)\cos x - \cos(30^\circ + x)\sin x = \dfrac{1}{2}$;
2) $\sin(45^\circ - x)\cos x + \cos(45^\circ - x)\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

263. Обчисліть, не користуючись таблицями і калькулятором:

1) $\sin 75^\circ$; 2) $\sin 15^\circ$; 3) $\sin 105^\circ$; 4) $\sin 255^\circ$.

§ 19 Формули додавання для тангенса і котангенса

Виведемо формули для $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ і $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, скориставшись відповідними формулами для синуса і косинуса і співвідношенням $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Поділимо почленно чисельник і знаменник на $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$. Дістанемо:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Отже,

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.} \qquad (5)$$

Зрозуміло, що ця формула справедлива, якщо одночасно існують $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}\beta$, тобто $\cos(\alpha+\beta) \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$.

Відповідно,

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (6)$$

Формули додавання для котангенса встановіть самостійно, скориставшись співвідношенням $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Для виведення формули тангенса суми трьох аргументів використовують той самий прийом, що й у випадку тангенса двох аргументів: почленне ділення чисельника і знаменника на $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\neq 0$.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}.$$

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

264'. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{5}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{2}$.

Обчисліть: 1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$; 2) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

265'. Знайдіть значення виразу:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=2$; 2) $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=-3\sqrt{3}$;

3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{3}$.

266'. Обчисліть:

1) $\frac{\operatorname{tg}25^\circ+\operatorname{tg}20^\circ}{1-\operatorname{tg}25^\circ\operatorname{tg}20^\circ}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}47^\circ+\operatorname{tg}13^\circ}{1-\operatorname{tg}47^\circ\operatorname{tg}13^\circ}$; 3) $\frac{\operatorname{tg}63^\circ-\operatorname{tg}33^\circ}{1+\operatorname{tg}63^\circ\operatorname{tg}33^\circ}$; 4) $\frac{\operatorname{tg}101^\circ-\operatorname{tg}56^\circ}{1+\operatorname{tg}101^\circ\operatorname{tg}56^\circ}$.

267°. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$.

268°. Обчисліть без таблиць і калькулятора: 1) $\operatorname{tg}105^\circ$; 2) $\operatorname{tg}15^\circ$; 3) $\operatorname{ctg}105^\circ$.

269°. Доведіть тотожність: 1) $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}=\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

270°. Обчисліть: 1) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{15}+\operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}}{1+\operatorname{tg}\frac{14\pi}{15}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}}$; 2) $\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}+\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}$.

271. Обчисліть:

1) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$, якщо $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$, якщо $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

3) $\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)$ і $\mathrm{tg}\,(\alpha-\beta)$, якщо $\sin\alpha=0{,}6$, $\cos\beta=\frac{15}{17}$, α і β — гострі додатні кути.

272. Знайдіть:

1) $\mathrm{tg}\,\alpha$, якщо $\mathrm{tg}\,(45^\circ-\alpha)=2$; 2) $\mathrm{ctg}\,\alpha$, якщо $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=3$.

273. Спростіть вираз:

1) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; 2) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\frac{1+\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}\,\alpha}$;

3*) $\frac{\mathrm{tg}^2 35^\circ-\mathrm{tg}^2 10^\circ}{1-\mathrm{tg}^2 35^\circ\,\mathrm{tg}^2 10^\circ}$; 4) $\frac{1-\mathrm{tg}\,70^\circ\,\mathrm{tg}\,65^\circ}{\mathrm{tg}\,70^\circ+\mathrm{tg}\,65^\circ}$.

274*. Тангенси двох кутів трикутника дорівнюють 2 і 3. Знайдіть тангенс третього кута цього трикутника.

275*. Дано: $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2}{5}$, $\mathrm{tg}\,\beta=\frac{3}{7}$; α і β — гострі кути. Доведіть, що $\alpha+\beta=45^\circ$.

276*. Тангенси двох гострих кутів дорівнюють $\frac{4}{3}$ і $\frac{1}{7}$. Доведіть, що різниця цих кутів дорівнює 45°.

277*. Якщо α і β — такі гострі кути, що $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{4}{3}$, а $\mathrm{tg}\,\beta=7$, то $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$. Доведіть це.

278*. Тангенси трьох гострих кутів відповідно дорівнюють $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ і $\frac{1}{8}$. Доведіть, що перший кут дорівнює сумі двох інших кутів.

§20 Тригонометричні функції подвійного аргументу

Якщо у формулах додавання вважати $\alpha=\beta$, то дістанемо формули, що виражають тригонометричні функції подвійного аргументу 2α через функції аргументу α: $\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

Отже,

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (1)$$

Аналогічно,

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha; \qquad (2)$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}. \qquad (3)$$

Замінимо у формулі (2) $\cos^2\alpha$ на $1-\sin^2\alpha$ або $\sin^2\alpha$ на $1-\cos^2\alpha$ і дістанемо ще дві формули косинуса подвійного аргументу:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \text{ або } \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Залежно від конкретних умов використовується одна з цих формул. Розглянемо приклади застосування встановлених формул.

Приклад 1. Обчисліть $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$.

Розв'язання. За формулою (1), прочитаною справа наліво, маємо:

$$2\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin(2\cdot 15^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2. Обчисліть $\sin 75^\circ \cos 75^\circ$.

Розв'язання. Для застосування формули (1) помножимо і поділимо даний вираз на 2. Маємо:

$$\sin 75^\circ \cos 75^\circ = \frac{2\sin 75^\circ \cos 75^\circ}{2} = \frac{\sin 150^\circ}{2} = \frac{\sin(180^\circ - 30^\circ)}{2} = \frac{\sin 30^\circ}{2} = \frac{1}{4}.$$

Приклад 3. Спростіть вираз $\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha$.

Розв'язання. Розкладемо даний вираз на множники як різницю квадратів виразів $\cos^2 2\alpha$ і $\sin^2 2\alpha$. Маємо:

$$\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha = (\cos^2 2\alpha)^2 - (\sin^2 2\alpha)^2 = (\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)(\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha).$$

Різниця в перших дужках за формулою (2) дорівнює $\cos(2\cdot 2\alpha) = \cos 4\alpha$, а вираз у других дужках на основі відомої тотожності дорівнює 1.

Отже, $\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha = \cos 4\alpha$.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Крім розглянутих співвідношень між тригонометричними функціями одного і двох аргументів існують й інші співвідношення, що виражаються відповідними формулами. Наведемо дві групи таких формул.

1. Формули перетворення суми і різниці однойменних тригонометричних функцій на добуток:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

2. Формули, що виражають тригонометричні функції через тангенс половинного аргументу:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

279'. Дано: $\sin\alpha = 0,6$, $\cos\alpha = -0,8$. Знайдіть значення виразу:
1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$.

280°. Знайдіть значення виразу:
1) $\sin 2\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 2) $\cos 2\alpha$, якщо $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$;
3) $\cos 2\alpha$, якщо $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{4}$; 4) $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha = 3$.

281. Знайдіть значення виразу:
1) $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -2,4$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$;
2) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0,5$;
3) $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{tg} 4\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

282*. Знайдіть значення виразу:
1) $\sin 2x$, якщо $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$; 2) $\sin 2\alpha$, якщо $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$.

283'. Обчисліть:
1) $1 - 2\sin^2 15°$; 2) $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$; 3) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$; 4) $2\sin 22°30'\cos 22°30'$.

284°. Обчисліть:
1) $2\sin 75°\cos 75°$; 2) $2\cos^2\frac{5\pi}{6} - 1$; 3) $\cos^2\frac{5\pi}{12} - \sin^2\frac{5\pi}{12}$; 4) $\frac{1 - 2\sin^2 22°30'}{2\cos^2 15° - 1}$.

285. Обчисліть:
1) $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12}$; 2) $\sin 15°\cos 15°$; 3) $1 - 2\cos^2\frac{5\pi}{12}$; 4) $\operatorname{ctg} 15° + \operatorname{tg} 15°$.

286*. Що більше: $\sin 2\alpha$ чи $2\sin\alpha$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$?

287'. Спростіть вираз:
1) $2\cos^2 1,5x - 1$; 2) $2\sin^2\alpha - 1$; 3) $2\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}$;
4) $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha}$; 5) $\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$; 6) $\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

288°. Спростіть вираз:
1) $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \sin^2\alpha}$; 2) $\frac{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}$; 3) $\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$;
4) $\frac{2\cos^2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\sin 2\alpha}$; 5) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha}$.

289. Спростіть вираз:

1) $4\sin x\cos x\cos 2x$; 2) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; 3) $\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha$;

4)* $\sin^3\alpha\cos\alpha-\cos^3\alpha\sin\alpha$; 5) $4\cos^2\alpha\sin^2\alpha$; 6) $\cos^2\alpha-4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$;

7) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; 8) $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; 9) $\cos^4\dfrac{x}{2}-\sin^4\dfrac{x}{2}$; 10) $2\sin^2 x-1$.

290*. Спростіть вираз:

1) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$; 2) $\dfrac{\cos\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}}{2\sin^2\frac{\alpha}{4}-1}$; 3) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; 4) $\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}\alpha}-\dfrac{1}{1-\operatorname{ctg}\alpha}$.

291'. Доведіть тотожність:

1) $2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=1$; 2) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin 2\alpha$.

292°. Доведіть тотожність:

1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$; 2) $1-\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

293. Доведіть тотожність:

1) $\sin 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin 2\alpha$;

3) $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{12}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}=4$; 4) $\operatorname{tg}55^\circ-\operatorname{tg}35^\circ=2\operatorname{tg}20^\circ$.

294*. Доведіть тотожність:

1) $\sin 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ=\dfrac{1}{8}$; 2) $\sin\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5}$;

3) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$; 4) $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{5\pi}{7}=\dfrac{1}{8}$.

295°. **Доведіть тотожність:**

1) $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$; 2) $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$; 3) $1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$;

4) $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$; 5) $\dfrac{(1-\cos 2\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha}=\sin 2\alpha$; 6) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

296. Доведіть тотожність:

1) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$; 2) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$;

3) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$; 4) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=1$.

297*. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 2) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

3) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\frac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

298*. Дано: $\cos\alpha=\frac{3}{4}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Знайдіть: 1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

299*. У рівнобедреному трикутнику синус кута при основі дорівнює $\frac{5}{13}$. Знайдіть синус і косинус кута при вершині.

§21 Основні властивості тригонометричних функцій

Систематизуємо основні властивості тригонометричних функцій, що їх установлено в попередніх параграфах, а також з'ясуємо деякі нові їх властивості. Найкраще властивості функції ілюструє її графік. За графіком функції можна знайти, за яких значень аргументу значення функції додатні, від'ємні, дорівнюють нулю; на яких проміжках вона зростає чи спадає тощо. Однак для з'ясування властивостей функції не завжди можна скористатися графіком, бо часом його не так просто побудувати. Більше того, для побудови графіка незайвими бувають деякі відомості про функцію, що їх встановлюють різними способами. Розглянемо ті властивості тригонометричних функцій, які полегшать побудову їх графіків, а потім за графіками встановимо деякі інші властивості цих функцій.

Область визначення і область значень. Раніше ми встановили, що синус і косинус існують за будь-яких значень числового аргументу. Отже, областю визначення і синуса, і косинуса є множина всіх дійсних чисел: $D(\sin)=\boldsymbol{R}$, $D(\cos)=\boldsymbol{R}$. Для функції $y=\operatorname{tg}x$ $D(\operatorname{tg})$ — множина дійсних чисел, крім чисел виду $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Областю визначення котангенса є множина дійсних чисел, крім чисел виду πk, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Як уже зазначалося, виходячи з означень синуса і косинуса числа, усі їх значення належать числовому відрізку $[-1; 1]$. Причому для будь-якого числа a з цього відрізку можна знайти безліч чисел, синус або косинус яких дорівнює числу a. Отже, множиною (областю) значень функцій синус і косинус є числовий відрізок $[-1; 1]$: $E(\sin)=[-1; 1]$, $E(\cos)=[-1; 1]$.

З цього випливає, що графіки функцій $y=\sin x$ та $y=\cos x$ розміщуються в смузі, обмеженій прямими $y=1$ та $y=-1$.

На відміну від синуса і косинуса значення функцій тангенса і котангенса можуть бути будь-якими дійсними числами. Отже, областю значень цих функцій є множина всіх дійсних чисел: $E(\operatorname{tg})=\boldsymbol{R}$, $E(\operatorname{ctg})=\boldsymbol{R}$.

Приклад 1. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $1 + \sin x \cos x$.

Розв'язання. Перетворимо вираз $\sin x \cos x$, одночасно помноживши і поділивши його на 2. Маємо:

$$\sin x \cos x = \frac{2\sin x \cos x}{2} = \frac{\sin 2x}{2} = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Оскільки множиною значень синуса є відрізок $[-1; 1]$, тобто $-1 \le \sin 2x \le 1$, то $\frac{1}{2}\sin 2x$ лежить у межах $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\sin 2x \le \frac{1}{2}$. Додавши 1 до всіх частин цієї подвійної нерівності, дістанемо верхню і нижню межі значень шуканого виразу:

$$1 - \frac{1}{2} \le 1 + \frac{1}{2}\sin 2x \le \frac{1}{2} + 1 \text{ або } \frac{1}{2} \le 1 + \frac{1}{2}\sin 2x \le \frac{3}{2}.$$

Отже, найбільше значення виразу $1 + \sin x \cos x = 1 + \frac{1}{2}\sin 2x$ дорівнює $\frac{3}{2}$, а найменше значення становить $\frac{1}{2}$.

Парність і непарність. На основі співвідношень між значеннями відповідних тригонометричних функцій протилежних чисел, а саме: $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$ та враховуючи, що області визначення усіх цих функцій симетричні відносно точки O, доходимо висновку:

функція косинус — парна,
функції синус, тангенс і котангенс — непарні.

З цього випливає, що графік функції $y = \cos x$, як і будь-якої парної функції, симетричний відносно осі ординат, а графіки функцій синус, тангенс і котангенс симетричні відносно початку координат.

Приклад 2. Доведіть, що функція $y = 1 - 2\sin^2 x$ є парною.

Доведення.

I спосіб. Оскільки $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$, то маємо функцію $y = \cos 2x$, а функція косинус — парна.

II спосіб. Уведемо позначення $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$. Оскільки областю визначення цієї функції є множина всіх дійсних чисел, то для доведення, що дана функція є парною, треба показати: $f(-x) = f(x)$ для всіх x з області визначення. Знайдемо $f(-x)$. Маємо: $f(-x) = 1 - 2\sin^2(-x) = 1 - 2(\sin(-x))^2$. Оскільки $\sin(-x) = -\sin x$, бо синус — непарна функція, то після перетворення одержаний вираз набуде вигляду:

$$1 - 2(\sin(-x))^2 = 1 - 2(-\sin x)^2 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Тобто $f(-x) = f(x)$, отже, функція $y = 1 - 2\sin^2 x$ — парна.

До такого способу доведення вдаються в тому разі, якщо вираз, що задає функцію, не можна звести до такого вигляду, коли парність чи непарність функції є очевидною.

Періодичність. Багато процесів і явищ, природних і зумовлених діяльністю людини, мають повторювальний характер. Наприклад, одна й та сама фаза Місяця настає через кожні 27,3 доби, маятник годинника повертається в одне й те саме положення через рівні проміжки часу. Такі явища і процеси називають періодичними, а функції, що їх описують, — періодичними функціями. Взагалі,

функція f називається *періодичною*, якщо існує таке додатне число T, що для будь-якого x із області визначення функції числа $x - T$ і $x + T$ також належать цій області визначення, і виконується рівність $f(x) = f(x + T) = f(x - T)$.

Число T у даному випадку називають *періодом* функції.

З означення випливає: якщо T — період функції, то її періодами є числа $2T, 3T, \dots, nT, \dots$, а також $-T, -2T, -3T, \dots, -nT, \dots$, де $n \in \mathbf{N}$. Отже, періодична функція має безліч періодів. Серед них виділяють найменший додатний період, який іноді називають *основним*.

Усі тригонометричні функції є періодичними. Один із періодів кожної з них дорівнює 2π, що випливає з означення цих функцій. Можна довести, що

2π — найменший додатний період функцій синус і косинус.

А функції тангенс і котангенс мають менший від 2π додатний період, він дорівнює π. Тобто

$$\mathrm{tg}\,(x + \pi) = \mathrm{tg}\,\pi,\ \mathrm{ctg}\,(x + \pi) = \mathrm{ctg}\,\pi.$$

У цьому легко переконатися за допомогою осі тангенсів (котангенсів). Справді, всі числа, що відрізняються між собою на π, зображаються на одиничному колі діаметрально протилежними точками. Тому кожній парі таких чисел відповідає на осі тангенсів (котангенсів) одна точка. З цього випливає, що значення їх тангенсів (котангенсів) рівні між собою.

π — найменший додатний період тангенса і котангенса.

Це твердження ми приймемо без доведення.

Якщо 2π — період синуса і косинуса, то числа виду $2\pi k$, де k — ціле, відмінне від 0, також є періодами цих функцій. Аналогічно для функцій $y = \mathrm{tg}\,x$ та $y = \mathrm{ctg}\,x$ періодами є числа виду πk, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$.

Властивість періодичності тригонометричних функцій використовують, крім іншого, для обчислення значень тригонометричних функцій чисел, які набагато перевищують значення періоду. Для цього від даного числа віднімають максимально можливу кількість періодів і шукають значення відповідної функції отриманої різниці.

Приклад 3. Обчисліть $\sin 1470°$.

Розв'язання. Період синуса дорівнює $360°$. Щоб знайти, скільки періодів треба відняти від $1470°$, поділимо 1470 на 360.

Маємо: $1470 = 360 \cdot 4 + 30$.

Отже, $\sin 1470° = \sin(360° \cdot 4 + 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$.

Приклад 4. Обчисліть $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4}$.

Розв'язання. $\frac{13\pi}{4} = 3\frac{1}{4}\pi = 3\pi + \frac{\pi}{4}$. Оскільки найменший додатний період тангенса дорівнює π, то $\operatorname{tg}\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

Корисно пам'ятати і таку властивість періодичних функцій:

якщо функція $y = f(x)$ періодична і має період T, то періодичними є також функції $y = f(x + b)$ з тим самим періодом T, а також $y = f(kx)$ з періодом $\frac{T}{|k|}$ (b і k — довільні числа, $k \neq 0$).

Це твердження ми приймаємо без доведення.

З нього випливає, що найменший додатний період, наприклад, функції $y = \cos 3x$ дорівнює $\frac{2\pi}{3}$, а функції $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ відповідно $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$. Найменші додатні періоди функцій $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ і $y = \operatorname{ctg}(x + 1{,}5)$ відповідно дорівнюють 2π і π.

Виходячи із сутності періодичної функції, встановити усі її властивості і здійснити побудову графіка достатньо на проміжку, довжина якого дорівнює найменшому додатному періоду цієї функції. На всіх інших числових проміжках, які дістають з даного додаванням або відніманням відповідної кількості періодів, ці властивості й побудована частина графіка повторюватимуться.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

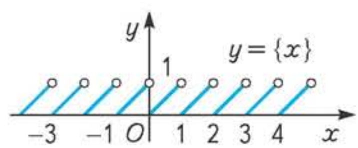
До періодичних належать не лише тригонометричні функції. Ще одним прикладом періодичної функції є функція $y = \{x\}$. Вираз $\{x\}$ означає дробову частину числа x — різницю між x і найбільшим цілим числом, яке не перевищує x.

Наприклад,

$\{2{,}5\} = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$; $\{6{,}95\} = 6{,}95 - 6 = 0{,}95$;

$\{-3{,}8\} = -3{,}8 - (-4) = 0{,}2$; $\{8\} = 8 - 8 = 0$.

Найменший додатний період цієї функції дорівнює 1. Її графік зображено на малюнку 83.



Мал. 83

Періодичною є лінійна функція $f(x) = kx + b$, якщо $k = 0$. Тоді формула, що її задає, набуває вигляду $f(x) = 0x + b$, тобто $f(x) = b$. Очевидно, що періодом цієї функції є будь-яке відмінне від нуля дійсне число. Найменшого додатного її періоду вказати не можна.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Яких значень можуть набувати функції синус і косинус?
2. Яких значень можуть набувати функції тангенс і котангенс?
3. Чи завжди можна знайти синус і косинус числа?
4. Чи завжди можна знайти тангенс (котангенс) числа? Назвіть по три числа, для яких цього зробити не можна, окремо для тангенса і для котангенса. Як записати в загальному вигляді числа, для яких не існує: тангенс; котангенс?
5. Які з тригонометричних функцій є: парними; непарними? Запишіть відповідні рівності, що виражають ці властивості тригонометричних функцій.
6. Яку властивість має графік функції: парної; непарної?
7. Опишіть поняття «періодична функція».
8. Скільки періодів має кожна періодична функція? Назвіть найменший додатний період кожної тригонометричної функції.
9. Як відображається властивість періодичності функції на її графіку?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

300. Враховуючи, що областю значень синуса і косинуса є числовий відрізок $[-1;\ 1]$, тобто $-1 \le \sin x \le 1$ і $-1 \le \cos x \le 1$, знайдіть найбільше і найменше значення виразу, записавши відповіді у вигляді подвійної нерівності:

1') $2\sin x$; 2') $\sin x + 1$; 3') $\cos x - 2$; 4°) $5\sin x + 1$;

5') $\frac{1}{3}\cos x$; 6') $\cos^2 x$; 7°) $\cos^2 x + 3$; 8°) $2\sin^2 x - 5$.

301°. Які з рівностей не можуть бути правильними ні за жодного значення x:

1) $3\sin x - 2 = 5$; 2) $\sin^2 x + 1{,}5 = 2$; 3) $\sin^2 x + 2 = 1{,}5$;
4) $2\cos x + 3 = 4$; 5) $\cos^2 x + 4 = 5{,}5$; 6) $\sin x + \cos x = 2$;
7) $\cos x \,\mathrm{tg}\, x = -1$; 8) $\sin x \,\mathrm{ctg}\, x = -1{,}2$; 9) $\sin x + \cos x = 0$?

Відповідь поясніть.

302. Доведіть, що функція $y = \sin x \cos x$ є непарною.

303. Установіть, парною чи непарною є функція:

1) $y = \cos x \,\mathrm{tg}\, x$; 2) $y = \sin^2 x$; 3) $y = \sin x \,\mathrm{tg}\, x$;
4) $y = \sin x + \mathrm{tg}\, x$; 5) $f(x) = \sin 2x \,\mathrm{tg}\, x$; 6) $f(x) = x \sin x$.

304°. Запишіть вираз, що тотожно дорівнює даному, змінивши знак аргументу на протилежний:

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)$; 2) $\mathrm{ctg}\,(-2)$; 3) $\sin(-1{,}2)$; 4) $\sin^2(-1{,}2)$; 5) $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{10}\right)$;

6) $\sin\left(\frac{\pi}{7} - \alpha\right)$; 7) $\cos(x - 1)$; 8) $\mathrm{tg}\,(2 - x)$; 9) $\mathrm{ctg}^2(2 - \beta)$; 10) $\sin^2\left(-\frac{\pi}{8} - \alpha\right)$.

305°. Спростіть вираз:

1) $\sin(x - a) - \sin(a - x)$; 2) $\cos(x - 3) + \cos(3 - x)$;

3) $\mathrm{tg}\,(\alpha - 5) + \mathrm{tg}\,(5 - \alpha)$; 4) $\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi}{10} - x\right) + \mathrm{ctg}^2\left(x - \frac{\pi}{10}\right)$.

306. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\cos(\alpha-2\pi)\,\mathrm{tg}(\alpha+\pi)\sin(\alpha-4\pi)}{3\sin(6\pi+\alpha)\,\mathrm{tg}(\alpha-3\pi)}$; 2) $\dfrac{\cos(\alpha+2\pi)\,\mathrm{tg}(\alpha-\pi)+\mathrm{ctg}(\alpha+\pi)\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(\alpha+4\pi)\cos(\alpha-2\pi)+\sin(2\pi+\alpha)\sin(\alpha-4\pi)}$.

307°. Знайдіть значення виразу:

1) $\sin\dfrac{33\pi}{4}$; 2) $\cos\dfrac{19\pi}{3}$; 3) $\mathrm{tg}\dfrac{29\pi}{6}$; 4) $\mathrm{ctg}\dfrac{13\pi}{4}$.

308. Обчисліть значення виразу:

1) $\cos\dfrac{19\pi}{3}+\sin\dfrac{25\pi}{6}$; 2) $\mathrm{tg}\dfrac{15\pi}{4}-\cos 7\pi$; 3) $2\sin\dfrac{13\pi}{4}-4\cos\dfrac{13\pi}{3}$;

4) $\sin^2\dfrac{17\pi}{6}+\mathrm{tg}^2\dfrac{17\pi}{6}$; 5) $\cos^2\dfrac{9\pi}{4}+\sin\left(-\dfrac{9\pi}{2}\right)$; 6) $\sin\dfrac{11\pi}{6}\cos\dfrac{11\pi}{6}\,\mathrm{tg}\dfrac{25\pi}{4}$.

309. Знайдіть найменший додатний період функції:

1) $y=\sin 2x$; 2) $y=\cos 4x$; 3) $y=\mathrm{tg}\,5x$;

4) $y=\mathrm{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$; 5) $y=\cos\dfrac{x}{4}$; 6) $y=\mathrm{ctg}\dfrac{x-2}{2}$.

310. Знайдіть найбільше і найменше значення функції та її період:

1) $y=\sin x\cos 2x-\cos x\sin 2x$; 2) $y=\sin 2x\cos 5x+\cos 2x\sin 5x$;

3) $f(x)=3+\cos x\cos 3x+\sin x\sin 3x$; 4) $f(x)=5-\cos 2x\cos 7x+\sin 2x\sin 7x$;

5) $y=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}$; 6) $y=\sin 2x\cos 2x$;

7) $y=4\cos^2 x-2$; 8) $y=2\,\mathrm{tg}\,3x\cos 3x$.

311*. Установіть, яка з функцій є: а) парною; б) непарною; в) ні парною, ні непарною:

1) $y=\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x$; 2) $y=\mathrm{tg}\,x+\cos x$; 3) $y=\dfrac{1-\cos x}{1+\sin^2 x}$;

4) $y=1+\sin x$; 5) $y=x^2+\cos x$; 6) $y=\dfrac{x\sin x}{1+\cos x}$.

312*. Перевірте правильність рівності $\sin\pi=\sin(\pi+\pi n)$, $n\in Z$. Чи можна з цього зробити висновок, що π є періодом функції синус? Відповідь обґрунтуйте.

313*. Визначте найменший додатний період функції:

1) $y=\sin^4 x-\cos^4 x$; 2) $y=\sin x\cos x$;

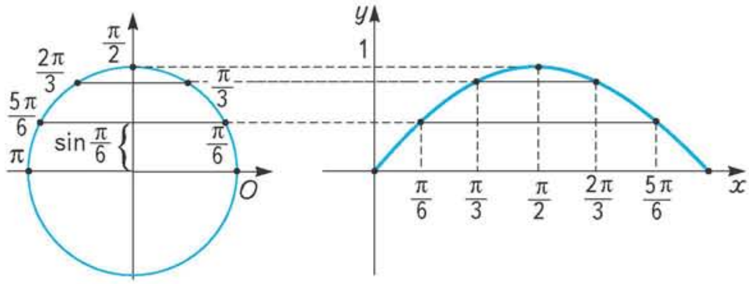
3) $y=1-8\sin^2 x\cos^2 x$; 4) $y=\cos^2 x$.

§22 Графіки функцій $y=\sin x$ та $y=\cos x$

Графік функції $y=\sin x$. Для побудови даного графіка знайдемо кілька «опорних» точок, через які він проходить, а потім проведемо через них плавну лінію. Побудувати такі точки можна принаймні двома способами:

1) традиційним, склавши таблицю значень аргументу x і відповідних значень функції, знайдених за допомогою спеціальних таблиць або калькулятора, та за встановленими координатами $(x; y)$ побудувати точки;

2) геометричним, знайшовши значення функції і точки графіка за допомогою малюнка. Скористаємося другим способом.

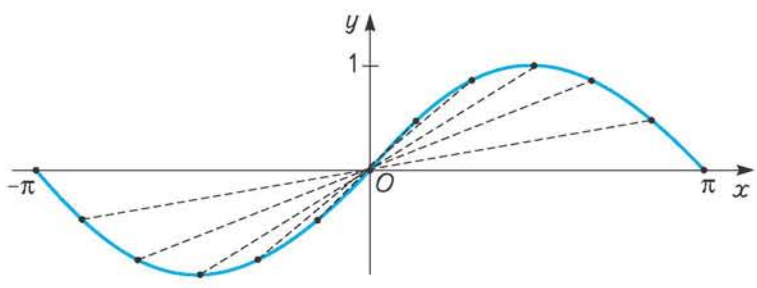


Мал. 84

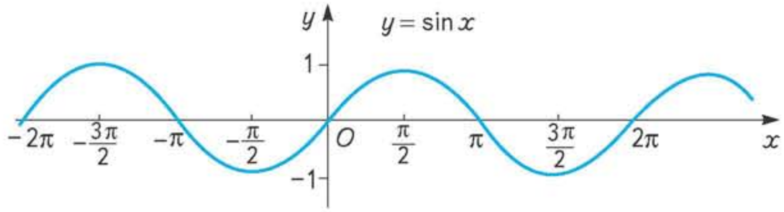
Розглянемо I і II чверті одиничного кола. Точками його дуги зображаються всі дійсні числа від 0 до π (мал. 84). Поділимо цю дугу, наприклад, на 6 рівних частин і позначимо числа, які відповідають точкам поділу. Зазначимо, що довжина перпендикуляра, проведеного з точки поділу дуги кола до горизонтального діаметра, дорівнює ординаті цієї точки, тобто синусу відповідного числа.

Відкладемо від початку координат на осі абсцис відрізок довжиною $\pi \approx 3,14$, взявши за одиницю довжини радіус одиничного кола. Поділимо його також на 6 рівних частин і запишемо біля кожної точки поділу відповідне число. Якщо $x = 0$, то $y = \sin 0 = 0$. Отже, перша точка графіка функції $y = \sin x$ на відрізку $[0; \pi]$ має координати $(0; 0)$ — тобто це початок координат. Для побудови точки графіка з абсцисою $\frac{\pi}{6}$ треба на перпендикулярі, проведеному до осі абсцис через точку $\frac{\pi}{6}$, відкласти значення $\sin\frac{\pi}{6}$. Воно дорівнює ординаті відповідної точки одиничного кола. Якщо через цю точку провести пряму, паралельну осі абсцис, до перетину із зазначеним перпендикуляром, то дістанемо шукану точку. Аналогічно будують інші точки графіка. Сполучивши їх суцільною плавною лінією, дістанемо ескіз графіка функції $y = \sin x$ на відрізку $[0; \pi]$. Слово «ескіз» підкреслює відносну точність графіка, зумовлену кількістю побудованих точок. Чим більше точок побудовано, тим точніше ескіз відображає справжню форму графіка.

Оскільки синус — непарна функція, то її графік симетричний відносно початку координат, тобто крива, що симетрична побудованій відносно початку координат, буде ескізом графіка функції $y = \sin x$ на відрізку $[-\pi; 0]$ (мал. 85).



Мал. 85



Мал. 86

Маючи графік синуса на відрізку $[-\pi; \pi]$ довжиною в період цієї функції і беручи до уваги, що найменший додатний період функції синус дорівнює 2π, можемо вказати спосіб побудови інших точок графіка. Для цього треба здійснити паралельне перенесення побудованої на проміжку $[-\pi; \pi]$ його частини на 2π, 4π, 6π і т. д. одиниць управо і вліво вздовж осі абсцис. Утворена крива (мал. 86) називається *синусоїдою.*

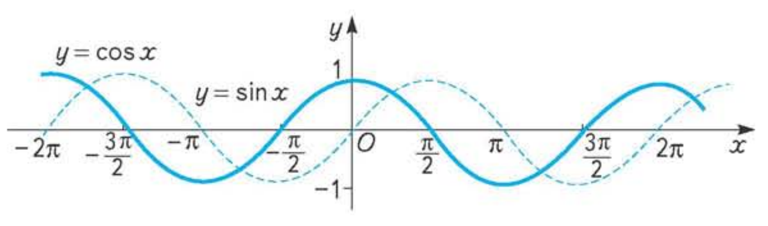
Графік функції $y = \cos x$. Графік косинуса достатньо просто побудувати, скориставшись формулою зведення: $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. А графік функції $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, враховуючи відомі правила перетворення графіків функцій, дістають паралельним перенесенням графіка функції $y = \sin x$ вздовж осі Ox на $\frac{\pi}{2}$ одиниць вліво (мал. 87).

Тому графік функції $y = \cos x$ також є синусоїдою.

За графіками синуса і косинуса можна встановити ще деякі властивості цих функцій.

З'ясуємо, наприклад, на яких проміжках синус зростає, а на яких — спадає. Для цього скористаємося таким візуальним орієнтиром: на проміжку зростання графік функції під час руху вздовж нього зліва направо (що відповідає зростанню x) піднімається вгору (що відповідає зростанню y), а графік спадної функції прямує вниз.

Аналізуючи за цією ознакою графік функції $y = \sin x$ (див. мал. 86), бачимо, що одним із проміжків зростання синуса є відрізок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. З властивості



Мал. 87

періодичності синуса випливає, що він зростає на всіх проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Відповідно проміжками спадання синуса є проміжки виду $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Приклад. Що більше: $\sin 2$ чи $\sin 3$?

Розв'язання. Числа 2 і 3 належать проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, бо $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$, $\frac{3\pi}{2} \approx 4,71$. На цьому проміжку функція синус спадає. Це означає, що більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Оскільки $3 > 2$, то $\sin 3 < \sin 2$.

Деякі інші властивості синуса і косинуса ви встановите самостійно, користуючись графіками цих функцій під час виконання відповідних вправ.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Як побудувати графік функції $y = \sin x$?
2. Як побудувати графік функції $y = \cos x$?
3. Як називається крива, що є графіком функції синус (косинус)?
4. Які властивості тригонометричних функцій використовують під час побудови графіків: синуса; косинуса?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

314'. Користуючись графіком функції $y = \cos x$, установіть і запишіть по два проміжки зростання і спадання функції $y = \cos x$.

315°. Запишіть у загальному вигляді множину проміжків зростання і проміжків спадання функції косинус.

316. Порівняйте числа:

1') $\sin\frac{1}{2}$ і $\sin\frac{1}{3}$; 2°) $\sin 3$ і $\sin 4$; 3') $\cos\frac{1}{2}$ і $\cos\frac{1}{3}$;

4') $\cos\frac{2\pi}{3}$ і $\cos\pi$; 5°) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ і $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; 6°) $\cos 1$ і $\cos 2$.

317°. За графіком функції $y = \sin x$ знайдіть три наближених значення x, за яких $\sin x = \frac{1}{2}$. Скільки існує таких значень x, що задовольняють дане рівняння?

318°. Користуючись графіком функції $y = \sin x$, запишіть два числових проміжки, на яких синус набуває додатних значень.
*Скільки таких проміжків існує? Запишіть множину цих проміжків у загальному вигляді.

319. Користуючись графіком функції $y = \sin x$, розв'яжіть нерівність $\sin x < 0$, якщо $x \in [0; 2\pi]$.

*Використовуючи здобутий результат, запишіть множину розв'язків нерівності $\sin x < 0$ у загальному вигляді.

320. За графіком функції $y = \cos x$ знайдіть і запишіть два проміжки, на яких косинус набуває додатних значень. Проаналізуйте, як, маючи один із них, дістати другий. Скільки таких проміжків існує? Запишіть їх множину в загальному вигляді.

321. Скільки існує числових проміжків, на яких косинус від'ємний? Укажіть один із них. Запишіть множину таких проміжків у загальному вигляді. Яку нерівність ви розв'язали?

322'. Користуючись графіками функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$, знайдіть нулі цих функцій (значення аргументу, за якого значення функції дорівнює нулю) на проміжку $[-2\pi; 2\pi]$.

323. Користуючись графіками функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$, запишіть у загальному вигляді нулі кожної з цих функцій.

324°. Користуючись графіком функції $y = \sin x$, знайдіть на проміжку $[-2\pi; 2\pi]$ значення аргументу, за якого:
1) синус набуває найбільшого значення;
2) синус набуває найменшого значення.

325°. Виконайте завдання, аналогічне до попереднього, для косинуса.

326. Використовуючи графік функції $y = \sin x$, побудуйте в тій самій системі координат графік функцій: 1) $y = 2\sin x$; 2) $y = \frac{1}{2}\sin x$.

327. Використовуючи графік функції $y = \cos x$, побудуйте в тій самій системі координат графік функцій: 1) $y = \cos 2x$; 2) $y = \cos\frac{x}{2}$.

328. Використовуючи графік функції $y = \sin x$, побудуйте в тій самій системі координат графік функції $y = -\sin x$.

329. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$. Знайдіть графічно кілька значень x, для яких $\sin x = \cos x$. Скільки таких значень можна вказати?

330. Накресліть і виріжте з цупкого паперу або картону шаблон графіка функції: а) $y = \sin x$; б) $y = \sin 2x$; в) $y = \sin\frac{x}{2}$. Користуючись ним, побудуйте графік функції:

1) $y = \cos 2x$; 2) $y = \cos\frac{x}{2}$; 3) $y = \sin x - 1$; 4) $y = \sin(x - 1)$;

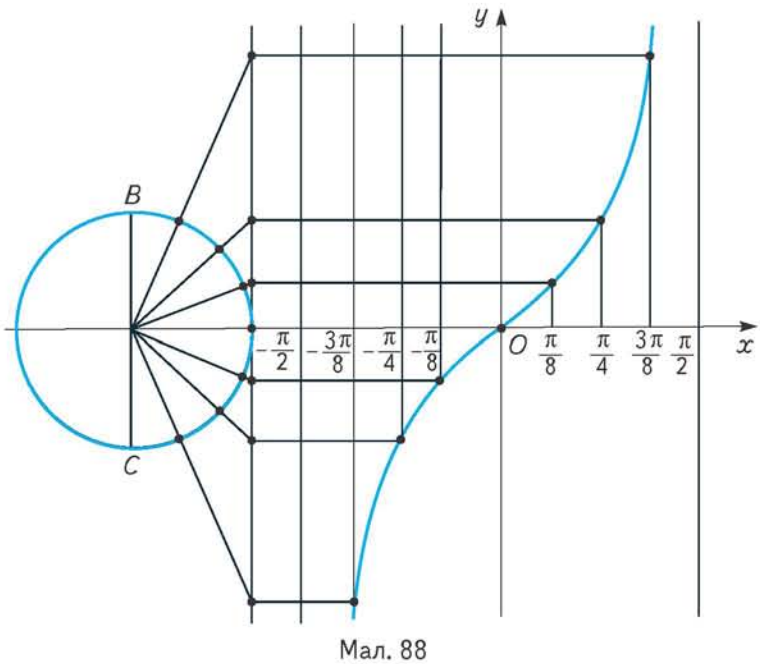
5) $y = \cos(x + 2)$; 6) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 7*) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; 8) $y = \cos 2x$;

9*) $y = \cos(2x - 3)$; 10) $y = 2\sin 2x$; 11*) $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;

12) $y = \cos\frac{x}{2}$; 13) $y = 1{,}5\cos\frac{x}{2}$; 14*) $y = 1{,}5\cos\left(\frac{x}{2} + 0{,}5\right)$.

§23 Графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$

Побудову графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ показано на малюнку 88. Тут цей інтервал поділено на 8 рівних частин і значення тангенса в кожній з точок поділу знайдено за допомогою лінії тангенсів. Зверніть увагу, що тут, як і під час побудови графіків функцій синус і косинус, за одиницю довжини обрано радіус одиничного кола. Тому, наприклад, відстань від початку координат до точки $\frac{\pi}{2}$ на осі абсцис дорівнює $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ довжини зазначеного радіуса.



Мал. 88

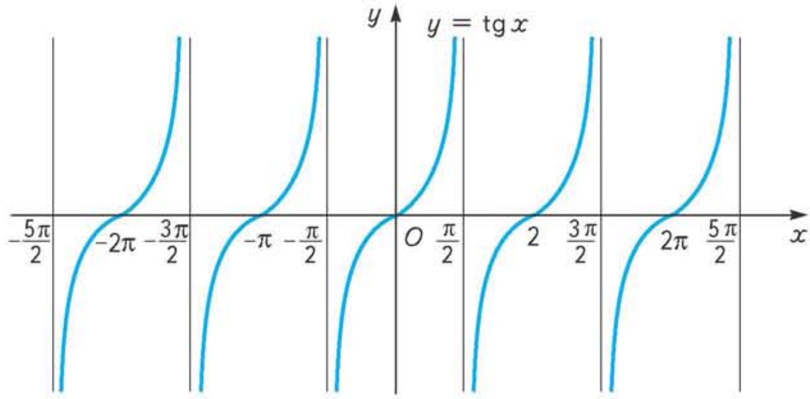
За тотожністю $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ графік тангенса на інтервалі $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right)$ можна дістати паралельним перенесенням побудованої частини графіка $y = \operatorname{tg} x$ уздовж осі Ox управо на π одиниць. Аналогічно міркуючи, можна побудувати графік функції $y = \operatorname{tg} x$ на всій області визначення (мал. 89).

Побудову графіка функції $y = \operatorname{ctg} x$ можна здійснити кількома способами. Один із них полягає у вираженні котангенса через тангенс за допомогою формули зведення:

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} x \ \text{ або } \ \operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

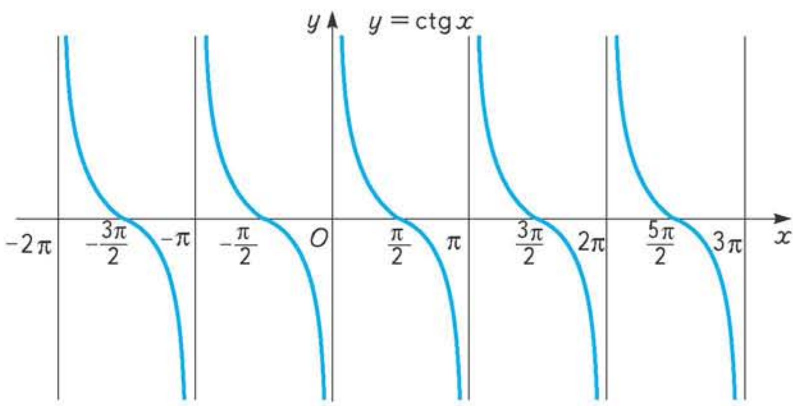
Отже, графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ збігається з графіком функції $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Побудувати останній, маючи графік функції $y = \operatorname{tg} x$, можна в такій послідов-



Мал. 89

ності: $y = \text{tg}\, x \to y = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \to y = -\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Тобто спочатку графік функції $y = \text{tg}\, x$ слід паралельно перенести вздовж осі Ox на $\frac{\pi}{2}$ одиниць вліво, а потім здійснити перетворення симетрії цього графіка відносно осі абсцис. У результаті дістанемо графік функції котангенс, зображений на малюнку 90.



Мал. 90

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

331'. Побудуйте графік функції $y = \text{ctg}\, x$ на проміжку $(0; \pi)$, скориставшись даними таблиці 9.

Таблиця 9

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$y = \text{ctg}\, x$	Не існує	2,4	1	0,4	0	–0,4	–1	–2,4	Не існує

332°. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$, знаходячи значення котангенса у відповідних точках цього проміжку за допомогою лінії котангенсів. Побудову виконуйте в такій послідовності:

1) накресліть одиничне коло і проведіть лінію котангенсів. Позначте на цьому колі числа 0 і π;

2) поділіть верхнє півколо одиничного кола на 8 рівних частин і позначте числа, які зображені утвореними точками поділу;

3) накресліть прямокутну систему координат, взявши за одиничний відрізок радіус одиничного кола, і позначте на осі абсцис число π;

4) поділіть відрізок $(0; \pi)$ на 8 рівних частин і позначте числа, які відповідають утвореним точкам поділу;

5) проведіть через кожну з цих точок перпендикуляри до осі Ox і на кожному з них побудуйте точку, ордината якої дорівнює котангенсу відповідного числа. Для цього виміряйте відповідний відрізок на лінії котангенсів і відкладіть його вгору або вниз (залежно від знака котангенса) на побудованому перпендикулярі;

6) сполучіть побудовані точки плавною лінією і продовжіть її вгору і вниз.

Порівняйте побудовану криву з відповідною частиною графіка функції $y = \operatorname{ctg} x$, зображеного на малюнку 90.

333. Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ можна дістати з графіка функції $y = \operatorname{tg} x$, використавши таку формулу зведення: $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Які перетворення графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ слід здійснити, щоб дістати графік функції $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$? Запишіть послідовність цих перетворень і охарактеризуйте їх.

334°. Користуючись графіком функції $y = \operatorname{tg} x$, установіть проміжки, на яких вона монотонна, і вкажіть характер монотонності (зростає, спадає). Запишіть кілька таких проміжків.

335°. Якою (зростаючою, спадною) є функція $y = \operatorname{ctg} x$ на інтервалі $(0; \pi)$? А на інших проміжках? Зробіть загальний висновок.

336°. Користуючись встановленими властивостями функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$, порівняйте числа:

1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}$ і $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$; 2) $\operatorname{tg}(-3)$ і $\operatorname{tg}(-2,1)$; 3) $\operatorname{tg} 0$ і $\operatorname{tg} 1$;

4) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{10}$ і $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$; 5) $\operatorname{ctg} 2$ і $\operatorname{ctg} 2,5$; 6) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ і $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

337. Користуючись графіком функції $y = \operatorname{tg} x$, знайдіть кілька значень x, для яких $\operatorname{tg} x = 0$. Скільки таких значень існує? Задайте множину цих значень формулою.

338. Виконайте завдання, аналогічне до попереднього, для функції $y = \operatorname{ctg} x$.

339°. У межах інтервалу $(-2\pi; 2\pi)$ вкажіть за графіком функції $y = \operatorname{tg} x$ проміжки, на яких ця функція: 1) набуває додатних значень; 2) набуває від'ємних значень.

340. Виконайте завдання, аналогічне до попереднього, для функції котангенс.

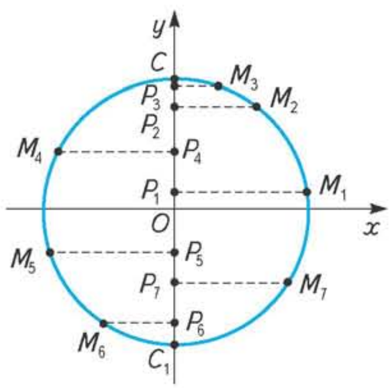
341. Розв'яжіть графічно нерівність:

1) $\operatorname{tg} x > 0$; 2) $\operatorname{tg} x < 0$; 3) $\operatorname{ctg} x > 0$; 4) $\operatorname{ctg} x < 0$.

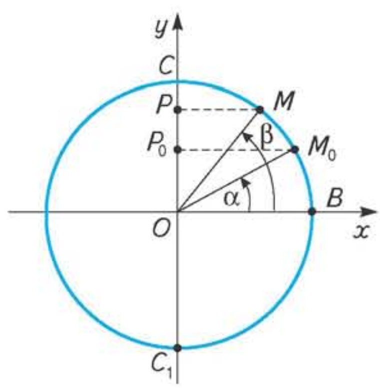
§24 Гармонічні коливання

У природі, техніці, повсякденному житті часто доводиться спостерігати коливальні рухи. Наприклад, рух маятника годинника, коливання струни музичного інструмента, коливання води від кинутого в неї предмета та ін. До найпростіших коливальних рухів належать гармонічні коливання. Такі коливання можна описати за допомогою тригонометричних функцій (інакше кажучи, математичною моделлю таких коливань є тригонометричні функції певного виду). Розглянемо це питання докладніше.

Нехай точка M (мал. 91) рухається по колу зі сталою кутовою швидкістю. Тоді її проекція P на вісь Oy рухатиметься по цій осі, коливаючись вгору і вниз відносно центрального положення O між точками C і C_1. Причому рух цієї проекції буде нерівномірним. Його швидкість зменшуватиметься в міру наближення проекції до крайніх точок C і C_1, набуваючи в них значення 0, і досягатиме максимального значення в точці O. Встановимо закон, за яким відбувається такий рух, з'ясувавши залежність шляху, пройденого точкою P, що коливається, від часу коливання.



Мал. 91



Мал. 92

Припустимо, що в початковий момент часу, тобто коли $t = 0$, рухома точка розміщується на колі в положенні M_0 (мал. 92), яке визначається кутом α: $\angle BOM_0 = \alpha$. Нехай через t с рівномірного руху по колу проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω рад/с ця точка займе положення M, яке визначається кутом β: $\angle BOM = \beta$. З малюнка видно, що $\beta = \alpha + \angle M_0OM$. При швидкості ω рад/с рухома точка за t с описує дугу M_0M, радіанна міра якої дорівнює ωt рад. Отже, міра $\angle M_0OM$ також дорівнює ωt рад, тобто $\beta = \alpha + \omega t$.

За час t с проекція точки M на вісь Oy з початкового положення P_0 зміститься по осі Oy в положення P. Відрізок OP, що характеризує відхилення проекції P від центрального положення O в момент часу t, можна знайти з $\triangle MOP : OP = OM \cdot \cos\angle MOC$. З малюнка видно, що $\angle MOC = \frac{\pi}{2} - \beta$.

Отже, $OP = OM \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = OM \cdot \sin\beta$.

Оскільки $\beta = \omega t + \alpha$, то $OP = OM \cdot \sin(\omega t + \alpha)$.

Увівши позначення $OP = y$, $OM = A$, остаточно маємо:

$$y = A\sin(\omega t + \alpha).$$

Одержали функцію, аргументом якої є час t коливання, а залежною змінною y — відхилення точки, що коливається, від початкового положення.

Рух, що описується такою функцією, називається ***простим гармонічним коливанням***.

З'ясуємо зміст параметрів, що входять до формули $y = A\sin(\omega t + \alpha)$.

A — радіус кола; характеризує найбільше відхилення точки, що коливається, від центрального положення O. Цей параметр називають ***амплітудою коливання***.

Зазначимо, що амплітуда A чисельно дорівнює найбільшому значенню функції $y = A\sin(\omega t + \alpha)$. Справді, оскільки найбільше значення синуса дорівнює 1, то найбільше значення даної функції $y_{max} = A \cdot 1 = A$.

Змінний кут $\omega t + \alpha$ визначає положення точки P на осі ординат у момент часу t. Він називається ***фазою*** точки, що коливається.

Кут α, що визначає положення точки P на осі ординат у початковий момент часу, називають ***початковою фазою коливання***.

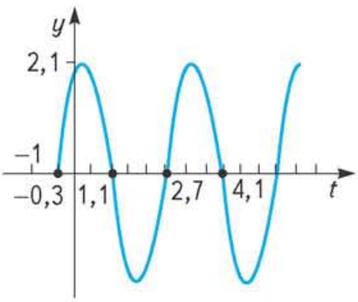
Очевидно, що при кутовій швидкості ω рад/с точка M здійснить повний оберт по колу за час $\frac{2\pi}{\omega}$, оскільки дуга кола містить 2π рад. За цей самий час точка P здійснить одне повне коливання, пройшовши через усі свої фази і повернувшись у початкове положення. Цей час $T = \frac{2\pi}{\omega}$ називають ***періодом гармонічного коливання***. Його вимірюють у секундах.

Зверніть увагу, що число $\frac{2\pi}{\omega}$ є також найменшим додатним періодом функції $y = A\sin(\omega t + \alpha)$, яка описує гармонічне коливання.

Величина, обернена до періоду коливання, $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, називається ***частотою коливання***. Вона показує, скільки коливань (n) здійснює точка за 1 с.

Наприклад, якщо точка здійснює одне коливання за 5 с, тобто період коливання T дорівнює 5 с, то за 1 с вона здійснить $n = \frac{1}{T} = \frac{1}{5}$ повного коливання. Якщо ж повне коливання точка здійснює за $\frac{1}{8}$ с $\left(T = \frac{1}{8}\right)$, то за 1 с вона здійснить $n = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$ коливань.

Оскільки будь-яке просте гармонічне коливання описує функція виду $y = A\sin(\omega t + \alpha)$, то графік цієї функції можна розглядати як графік гармонічного коливання. Як відомо, такий графік є синусоїдою. Маючи графік коливання, можна описати його, визначивши амплітуду, період, частоту та інші характеристики. Зробимо це стосовно гармонічного коливання, графік якого зображено на малюнку 93.



Мал. 93

Як уже зазначалося, амплітуда гармонічного коливання дорівнює найбільшому значенню, якого може набувати функція, що його описує. Це значення дорівнює ординаті найвищої точки графіка. У даному випадку $A = 2{,}1$.

Період коливання T дорівнює найменшому додатному періоду відповідної функції. З графіка видно, що такий період дорівнює 3 (проміжок між числами 1,1 і 4,1). Отже, $T = 3$ с. Звідси частота коливання становить $n = \frac{1}{3}$ коливань/с.

Оскільки $T = \frac{2\pi}{\omega}$, тобто $3 = \frac{2\pi}{\omega}$, то $\omega = \frac{2\pi}{3}$ рад/с.

У формулі $y = A\sin(\omega t + \alpha)$ стосовно даного коливання невизначеним залишається лише α. Формула має такий вигляд: $y = 2{,}1\sin\left(\frac{2\pi}{3}t + \alpha\right)$.

Початкову фазу α, користуючись графіком, можна знайти так. Оскільки графік функції $y = \sin(\omega x + \alpha)$ дістають зміщенням графіка функції $y = \sin\omega x$ вздовж осі Ox на $\left|\frac{\alpha}{\omega}\right|$ одиниць вліво, якщо $\frac{\alpha}{\omega} > 0$, або вправо, якщо $\frac{\alpha}{\omega} < 0$, то, помноживши зміщення на ω і врахувавши його напрямок, знаходимо значення α. У даному випадку, як видно з графіка, синусоїду $y = 2{,}1\sin\frac{2\pi}{3}t$ зміщено вліво на 0,3 одиниці. Отже, α — додатне число і дорівнює $0{,}3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 0{,}2\pi$ рад.

Тому рівняння даного коливання має вигляд: $y = 2{,}1\sin\left(\frac{2\pi}{3}t + 0{,}2\pi\right)$.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Яка функція є математичною моделлю простого гармонічного коливання?

2. Поясніть зміст понять: амплітуда, період, частота гармонічного коливання.

3. Яка залежність існує між періодом гармонічного коливання та його частотою?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

342'. Укажіть амплітуду, частоту, період і початкову фазу гармонічного коливання:

1) $y = 3\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 1{,}8\sin(2t + 1)$; 3) $y = 0{,}8\sin(\pi t - 2)$;

4) $y = 1{,}5\sin t$; 5) $y = 2{,}5\sin\frac{t}{2}$; 6) $y = 5\sin\left(\frac{t}{3} - 1\right)$.

343°. Запишіть рівняння двох різних гармонічних коливань, що мають:

1) однакові періоди;
2) однакову амплітуду;
3) однакові частоту і початкову фазу.

344. Скільки коливань за хвилину зробить точка, що коливається за законом:

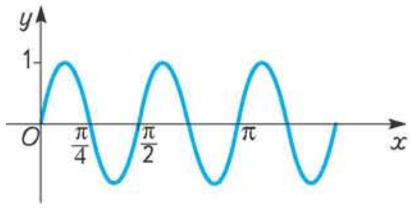
1) $y = 4\sin\frac{\pi}{3}t$; 2) $y = \sin 2\pi t$; 3) $y = 2{,}5\sin\left(\frac{\pi}{8}t - 3\right)$; 4) $y = \sin\left(\frac{5\pi}{6}t + 0{,}5\right)$?

345. Побудуйте графік гармонічного коливання:

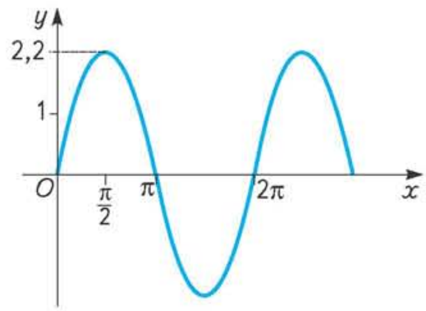
1) $y = \sin 4t$; 2) $y = \sin\frac{t}{2}$; 3) $y = \sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $y = \sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$;

5) $y = 2\sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$; 6) $y = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

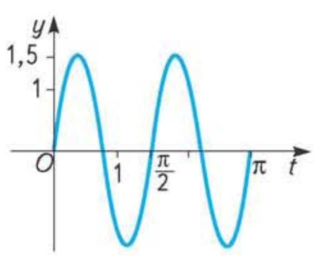
346*. За графіками гармонічних коливань, зображеними на малюнках 94 — 97, знайдіть амплітуду, період, частоту і початкову фазу кожного з них та запишіть їх рівняння.



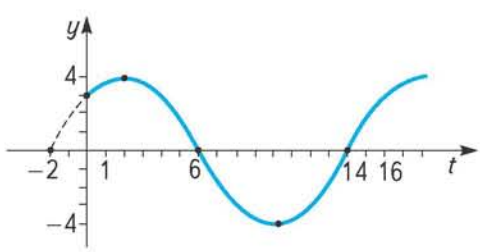
Мал. 94



Мал. 95



Мал. 96



Мал. 97

§25 Рівняння $\sin x = a$

Рівняння $\sin x = a$ належить до тригонометричних рівнянь.

Тригонометричними називають рівняння, які містять змінну лише під знаком тригонометричної функції.

Наприклад, $\cos x = 2\,\mathrm{tg}\,x$, $2\cos^2 x = 3\sin x + 2$, $\sin x\,\mathrm{tg}\,x = \frac{3}{2}$ — тригонометричні рівняння.

Розв'язати тригонометричне рівняння — означає знайти множину всіх значень змінної, що задовольняють його. Ці значення змінної називають ***розв'язками***, або ***коренями*** рівняння.

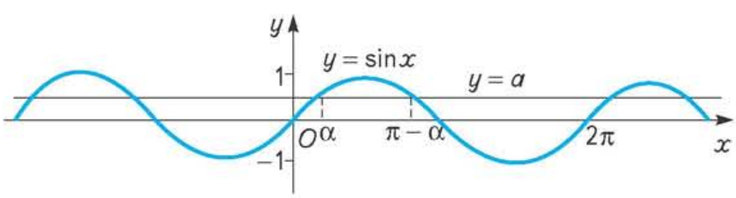
Якщо число x_0 є розв'язком тригонометричного рівняння, то з огляду на періодичність тригонометричних функцій розв'язком цього рівняння є будь-яке інше число, яке визначають, додаючи до даного або віднімаючи від нього певну кількість основних періодів.

Наприклад, число $\frac{\pi}{6}$ є розв'язком рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$, бо $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Оскільки основний період функції синус дорівнює 2π, то розв'язком даного рівняння будуть також усі числа виду $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, де n — ціле число ($n \in \mathbf{Z}$).

Якщо одним із розв'язків рівняння $\mathrm{tg}\,x = a$ є число m, то всі числа виду $m + \pi n$, де $n \in \mathbf{Z}$, є також розв'язками цього рівняння, бо основний період функції тангенс дорівнює π. Отже, тригонометричне рівняння або не має розв'язків, або має їх безліч.

Розв'язування будь-якого тригонометричного рівняння намагаються звести до розв'язування рівнянь виду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\,x = a$, $\mathrm{ctg}\,x = a$, що називаються *найпростішими тригонометричними рівняннями*. Розглянемо, як розв'язати кожне з них.

Почнемо з рівняння $\sin x = a$. Відомо, що область значень синуса — відрізок $[-1;\ 1]$. Тому якщо $|a| > 1$, то рівняння $\sin x = a$ не має розв'язків.



Мал. 98

Нехай $|a| < 1$. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = a$ та $y = \sin x$ (мал. 98). З малюнка видно, що пряма $y = a$ перетинає синусоїду безліч разів. Це означає, якщо $|a| < 1$, то рівняння $\sin x = a$ має безліч коренів. Оскільки синус має найменший додатний період 2π, то достатньо спочатку знайти всі розв'язки в межах одного періоду. За графіком на малюнку 98 видно, якщо $|a| < 1$, то на відрізку $[0; 2\pi]$ є два числа x_1 і x_2, синус яких дорівнює a. Якщо одне з них α, то друге $\pi - \alpha$. Усі інші розв'язки рівняння $\sin x = a$ ($|a| < 1$) можна дістати з двох знайдених додаванням періоду.

Отже, розв'язки цього рівняння визначаємо за формулами:

$x = \alpha + 2\pi k$ і $x = \pi - \alpha + 2\pi k = -\alpha + \pi(2k + 1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ці дві серії розв'язків можна записати однією формулою:

$x = (-1)^k \alpha + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Справді, якщо k — парне число ($k = 2n$, $n \in \boldsymbol{Z}$), то маємо:

$x = (-1)^{2n} \alpha + 2\pi n = \alpha + 2\pi n$, тобто першу підмножину розв'язків;

якщо k — непарне число ($k = 2n + 1$, $n \in \boldsymbol{Z}$), то

$x = (-1)^{2n+1} \alpha + (2n + 1)\pi = -\alpha + 2\pi n + \pi = \pi - \alpha + 2\pi n$,

тобто маємо другу підмножину розв'язків.

Розв'яжемо, наприклад, рівняння $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Один із його розв'язків дорівнює $\dfrac{\pi}{4}$. Отже, загальна формула, що задає всі розв'язки даного рівняння, така:

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \; k \in \boldsymbol{Z}.$$

Конкретні значення x дістають, підставляючи в цю формулу замість k його значення з множини цілих чисел.

Наприклад,

якщо $k = 0$, $x = (-1)^0 \cdot \dfrac{\pi}{4} + \pi \cdot 0 = \dfrac{\pi}{4}$;

якщо $k = 1$, $x = (-1)^1 \cdot \dfrac{\pi}{4} + \pi = -\dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{3\pi}{4}$;

якщо $k = 2$, $x = (-1)^2 \cdot \dfrac{\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{9\pi}{4}$;

якщо $k = -1$, $x = (-1)^{-1} \cdot \dfrac{\pi}{4} - \pi = -\dfrac{\pi}{4} - \pi = -\dfrac{5\pi}{4}$ і т. д.

Зазначимо, що встановлена загальна формула виражає множину розв'язків рівняння $\sin x = a$ через один із них — число α. Тобто замість α можна взяти будь-яке число, що задовольняє рівняння $\sin x = a$.

Наприклад, множину розв'язків рівняння $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ можна записати не лише у вигляді формули $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а й формули $x = (-1)^k \dfrac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, оскільки $\dfrac{3\pi}{4}$ — це також корінь даного рівняння. Кожна з наведених формул визначає одну і ту саму множину розв'язків. У цьому легко переконатися, знаходячи конкретні значення x у кожному з випадків.

Щоб досягти однозначності в запису розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь, домовилися вибирати значення одного з коренів α з того проміжку, на якому відповідна тригонометрична функція набуває всіх своїх значень, до того ж кожного з них лише один раз, тобто з проміжку зростання або спадання функції.

Для функції $y = \sin x$ таким проміжком обрано відрізок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тут вона зростає і набуває по одному разу всіх своїх значень від -1 до 1.

Розв'язок рівняння $\sin x = a$, взятий з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, називають *головним* і позначають $\arcsin a$ (читається «арксинус a»). Інакше кажучи,

$\arcsin a$ — це число (кут) з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a.

Наприклад, $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, бо $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, бо $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Взагалі, слід пам'ятати, що

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a,\ a > 0.$$

Отже, загальна формула розв'язків рівняння $\sin x = a$ має вигляд:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z.$$

Розглянемо приклади розв'язування окремих рівнянь.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Загальна формула розв'язків $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k,\ k \in Z$;

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$. Отже, $x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k,\ k \in Z$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\sin x = 0$.

Розв'язання. $x = (-1)^k \arcsin 0 + \pi k,\ k \in Z$; $\arcsin 0 = 0$.
Отже, $x = \pi k,\ k \in Z$.

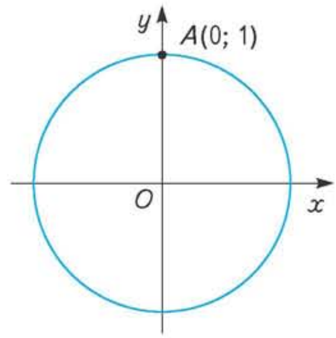
Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\sin x = \frac{3}{4}$.

Розв'язання. $x = (-1)^k \arcsin \frac{3}{4} + \pi k,\ k \in Z$. У такому вигляді розв'язки подібних рівнянь, як правило, залишають. Для обчислення конкретних значень x значення $\arcsin \frac{3}{4}$ знаходять за відповідними таблицями або за допомогою калькулятора.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $\sin x = 1$.

Розв'язання. Розв'яжемо це рівняння двома способами.

I спосіб. За загальною формулою коренів: $x = (-1)^k \arcsin 1 + \pi k,\ k \in Z$; $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, отже, $x = (-1)^k \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.



Мал. 99

II спосіб. З малюнка 99 видно, що всі числа (кути), синус яких дорівнює 1, зображаються на одиничному колі єдиною точкою A. Одне з таких чисел $\frac{\pi}{2}$, а їх множину задає формула $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Отже, розв'язками рівняння $\sin x = 1$ є числа виду $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

? Чи суперечить це результату, який одержали, розв'язуючи дане рівняння першим способом? Зовсім ні. Покажемо це.

Розглянемо першу формулу. Якщо k — парне число ($k = 2n$), то вона набуває вигляду:

$$x = (-1)^{2n} \frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Якщо k — непарне число ($k = 2n + 1$), то маємо:

$$x = (-1)^{2n+1} \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n + \pi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Тобто маємо одну і ту саму множину, що збігається з множиною коренів, яку одержали, розв'язуючи рівняння другим способом.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Які рівняння належать до тригонометричних?
2. Скільки розв'язків може мати тригонометричне рівняння?
3. За яких умов рівняння $\sin x = a$ не має розв'язків? Наведіть приклади.
4. Скільки є чисел (кутів), синус яких дорівнює $\frac{2}{3}$? Яке з них позначається так: $\arcsin \frac{2}{3}$?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

347'. Розв'яжіть рівняння $\sin x = -1$ двома способами: використовуючи відповідну загальну формулу розв'язків і за допомогою одиничного кола.
Який з одержаних записів простіший? Запам'ятайте його і використовуйте в подальшому.

348'. Який з виразів не має змісту:
1) $\arcsin 0{,}8$; 2) $\arcsin 2$; 3) $\arcsin\left(-\frac{7}{9}\right)$; 4) $\arcsin(-1{,}2)$?

349°. Чому не можна писати $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pi}{3}$, адже $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$?

350. Знайдіть і виправте помилку, якщо вона є, в запису:

1) $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\pi}{4}$; 3) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7\pi}{6}$; 4) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

351°. Позначте на одиничному колі число і відповідний кут:

1) $\arcsin\frac{1}{4}$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 3) $\arcsin\frac{3}{5}$; 4) $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$.

352. Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)$; 2) $\sin(\arcsin 0{,}6)$; 3) $\sin(\arcsin(-0{,}35))$; 4) $\sin\left(\arcsin\frac{\pi}{6}\right)$.

353. Розв'яжіть рівняння:

1') $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2°) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3') $\sin x=\frac{1}{2}$; 4°) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Знайдіть по два додатних і від'ємних розв'язки кожного з цих рівнянь.

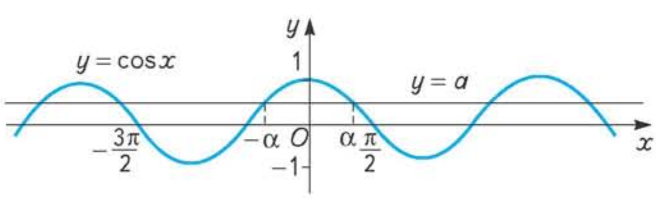
354. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x=\frac{1}{3}$; 2) $\sin x=-0{,}7$; 3) $2\sin x=-1$;

4) $\sqrt{2}\sin x=1$; 5) $3\sin x=2$; 6) $-5\sin x=3$.

§26 Рівняння $\cos x = a$

Функція косинус, як і синус, є обмеженою: всі її значення лежать у межах числового відрізка $[-1; 1]$. Тому якщо $|a|>1$, то рівняння $\cos x=a$ розв'язків не має. Розглянемо, як розв'язати це рівняння, якщо $|a|<1$. Пряма $y=a$ перетинає графік $y=\cos x$ безліч разів (мал. 100). У межах числового проміжку, що дорівнює найменшому додатному періоду косинуса 2π, наприклад $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, лежать два розв'язки цього рівняння α і $-\alpha$ (косинус — парна функція).



Мал. 100

Отже, серії розв'язків мають вигляд: $x = \alpha + 2\pi n$ та $x = -\alpha + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Їх можна подати однією формулою:

$$x = \pm\,\alpha + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ця формула виражає множину розв'язків рівняння $\cos x = a$ через один із них, тобто α. Значенням α можна довільно взяти будь-яке число, косинус якого дорівнює a. В результаті одержимо безліч формул, що задають одну й ту саму множину розв'язків даного рівняння.

Щоб досягти однозначності, домовилися значення α брати з проміжку $[0; \pi]$, на якому функція $y = \cos x$, спадаючи від 1 до -1, набуває всіх своїх значень по одному разу. Таке значення позначають $\arccos a$ (читають: «арккосинус a»).

$\arccos a$ — це число (кут) з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює a.

Наприклад, $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, бо $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ і $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$; $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, бо $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ і $\frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$.

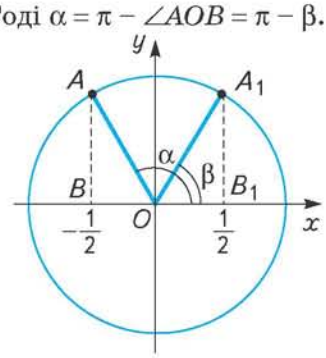
Знайдемо $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$. Часто припускаються помилки, міркуючи так: якщо $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, то $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$. Але це неправильно, бо, по-перше, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, а не $-\frac{1}{2}$; по-друге, $-\frac{\pi}{3}$ не належить проміжку $[0; \pi]$.

Щоб знайти співвідношення між $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ та $\arccos\frac{1}{2}$, вдамося до одиничного кола. Зобразимо на ньому в межах $[0; \pi]$ кут α, косинус якого дорівнює $-\frac{1}{2}$, тобто $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ (мал. 101), а також кут β, косинус якого дорівнює $\frac{1}{2}$, тобто $\arccos\frac{1}{2}$. Оскільки $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$ (за катетом $OB = OB_1 = \frac{1}{2}$ і гіпотенузою $AO = A_1O = 1$), то $\angle AOB = \angle A_1OB_1 = \beta$. Тоді $\alpha = \pi - \angle AOB = \pi - \beta$. Отже, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2}$. Взагалі,

$$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a,\ a > 0.}$$

Загальна формула розв'язків рівняння $\cos x = a$ має вигляд:

$$\boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.}$$



Мал. 101

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Загальна формула розв'язків $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$. Отже, $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. $x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z.$

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Отже, $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

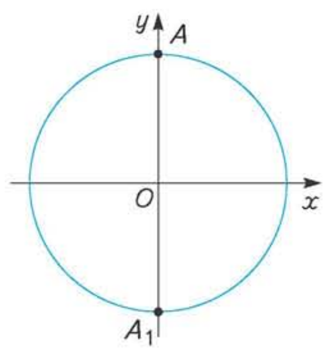
Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\cos x = 0$.

Розв'язання. $x = \pm\arccos 0 + 2\pi n,\ n \in Z.$

$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Розв'язок цього рівняння можна записати і в іншому вигляді. Розглянемо одиничне коло (мал. 102). Усі числа, косинус яких дорівнює 0, зображаються двома точками A і A_1, що є кінцями вертикального діаметра цього кола. Одне з чисел, позначене точкою A, дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Усі інші числа можна одержати з формули $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

Можна обґрунтувати, що формули $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ і $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ задають одну і ту саму множину чисел.



Мал. 102

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Скільки розв'язків може мати рівняння $\cos x = a$?
2. У яких випадках рівняння $\cos x = a$ не має розв'язків?
3. Як записати в загальному вигляді множину розв'язків рівняння $\cos x = a$?
4. Що означає запис: $\arccos a$?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

355'. Яке рівняння не має розв'язків:

1) $\cos x = -\frac{7}{8}$; 2) $\cos x = \frac{9}{8}$; 3) $\cos x = 0{,}98$; 4) $\cos x = -1{,}25$?

356'. Число b — один із розв'язків рівняння $\cos x = m$. Як виразити через b усі інші розв'язки цього рівняння?

357'. Як розуміти запис $\arccos\frac{3}{5}$?

358'. Який з виразів не має змісту:

1) $\arccos\frac{4}{9}$; 2) $\arccos(-6{,}4)$; 3) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$;

4) $\arccos\frac{\pi}{2}$; 5) $\arccos\frac{\pi}{4}$; 6) $\arccos 1$?

359°. Знайдіть і виправте помилку, якщо вона є, в запису:

1) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$;

3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$; 4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{7\pi}{6}$.

360°. Позначте на одиничному колі число і відповідний кут:

1) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$; 2) $\arccos\frac{1}{2}$; 3) $\arccos(-0{,}8)$; 4) $\arccos 1$.

361. Скільки розв'язків має рівняння $\cos x = -\frac{3}{4}$? Зобразіть ці розв'язки точками одиничного кола. Вкажіть на малюнку точку, що зображає число $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$, і відповідний кут.

362. Обчисліть:

1) $\arccos 1 + 2\arcsin\frac{1}{2}$; 2) $3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\frac{1}{2}$;

3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\arccos 1 + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 6\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

363. Знайдіть значення виразу:

1) $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$.

364. Знайдіть по два додатних і від'ємних розв'язки рівнянь, записавши спочатку загальні формули їх розв'язків:

1') $\cos x = 1$; 2°) $\cos x = -1$; 3') $\cos x = \frac{1}{2}$;

4°) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 5') $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 6°) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

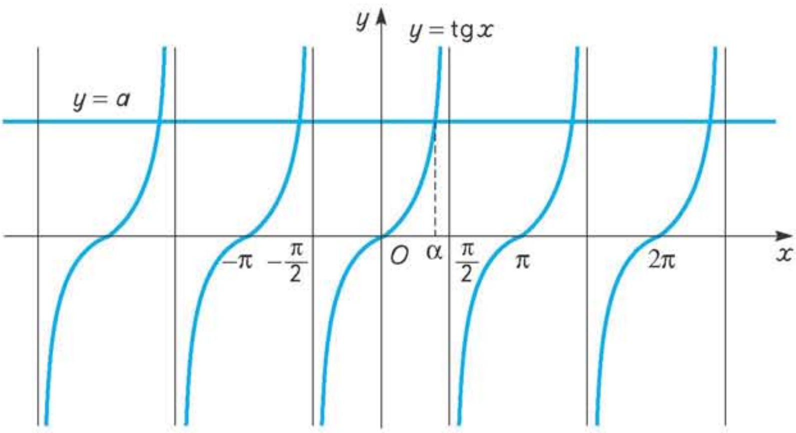
365. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x = 0{,}2$; 2) $\cos x = -\frac{9}{14}$; 3) $2\cos x = -\sqrt{2}$; 4) $2\cos 3x = -\sqrt{2}$.

§27 Рівняння $\operatorname{tg} x = a$ та $\operatorname{ctg} x = a$

Рівняння $\operatorname{tg} x = a$. Область значень тангенса — вся числова пряма. Тому рівняння $\operatorname{tg} x = a$ має розв'язки для будь-якого дійсного a. У межах найменшого додатного періоду (дорівнює π) тангенс набуває конкретного значення a тільки один раз (пряма $y = a$ перетинає криву графіка $y = \operatorname{tg} x$ у межах періоду π лише один раз) (мал. 103). Тому якщо відомий один розв'язок α рівняння $\operatorname{tg} x = a$, то всі розв'язки задає формула:

$$x = \alpha + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$



Мал. 103

Для однозначності домовилися брати α в цій формулі з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і позначати, відповідно, $\operatorname{arctg} a$ (читається: «арктангенс a»). Тобто

$\operatorname{arctg} a$ — це число (кут) з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a.

Наприклад, $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, бо $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ і $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, бо $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ і $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Загалом, як і для синуса, $\mathbf{arctg}(-a) = -\mathbf{arctg}\, a,\ a > 0$.

Отже, загальна формула розв'язків рівняння $\operatorname{tg} x = a$ має вигляд:

$$\boxed{x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.}$$

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x = 1$.

Розв'язання. $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,\ n \in Z$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Отже, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x = 2{,}5$.

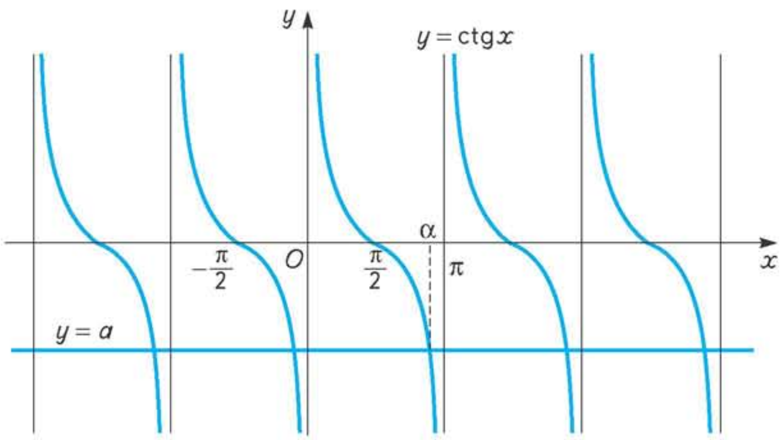
Розв'язання. $x = \operatorname{arctg} 2{,}5 + \pi n,\ n \in Z$.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x = -1$.

Розв'язання. $x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n,\ n \in Z$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$.

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Рівняння $\operatorname{ctg} x = a$. Міркуючи аналогічно до попереднього, знайдемо формулу коренів цього рівняння: $x = \alpha + \pi n,\ n \in Z$, де α — один із розв'язків рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ (мал. 104).



Мал. 104

У цьому випадку значення α домовилися брати з проміжку $(0; \pi)$ і позначати $\operatorname{arcctg} a$ (читається: «арккотангенс a»). Отже,

$\operatorname{arcctg} a$ — це число (кут) з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a.

Наприклад, $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, бо $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ і $\frac{\pi}{6} \in (0; \pi)$.

Як і для косинуса, $\mathbf{arcctg}(-a) = \pi - \mathbf{arcctg}\, a,\ a > 0$.

Зокрема, $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Отже, загальна формула розв'язків рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ має вигляд:

$$\boxed{x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z.}$$

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} x = 0$.

Розв'язання. $x = \operatorname{arcctg} 0 + \pi n,\ n \in Z$, $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} x = -1$.

Розв'язання. $x = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi n,\ n \in Z$;

$\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$; $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} x = -3$.

Розв'язання. $x = \operatorname{arcctg}(-3) + \pi n,\ n \in Z.$

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Чи завжди мають розв'язки рівняння: $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{ctg} x = a$?
2. Як записати в загальному вигляді множину розв'язків рівняння: $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{ctg} x = a$?
3. Що означає запис: $\operatorname{arctg} a$?
4. Що означає запис: $\operatorname{arcctg} a$?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

366'. Число c — один із розв'язків рівняння $\operatorname{tg} x = c$. Як виразити через c усі інші розв'язки цього рівняння?

367'. Як ви розумієте запис: $\operatorname{arctg}(-2)$? Накресліть одиничне коло і позначте на ньому точку, що зображає число $\operatorname{arctg}(-2)$, і відповідний кут, скориставшись для цього віссю тангенсів.

368'. Поясніть, що таке $\operatorname{arcctg} 3$. Зобразіть $\operatorname{arcctg} 3$ на одиничному колі.

369'. Зобразіть на одиничному колі точками розв'язки рівняння:

1) $\operatorname{tg} x = 1{,}5$; 2) $\operatorname{ctg} x = -2$; 3) $\operatorname{tg} x = -2{,}5$; 4) $\operatorname{ctg} x = 1$.

Позначте кут: $\operatorname{arctg} 1{,}5$; $\operatorname{arcctg}(-2)$; $\operatorname{arctg}(-2{,}5)$; $\operatorname{arcctg} 1$.

370. Запишіть загальні формули розв'язків рівнянь:

1') $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 2') $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; 3') $\operatorname{tg} x = -1$; 4') $\operatorname{tg} x = 1$;

5') $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 6°) $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 7°) $\operatorname{ctg} x = 1$; 8°) $\operatorname{ctg} x = -1$.

°Користуючись цими формулами, знайдіть по два додатних і від'ємних розв'язки кожного з них.

371. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\operatorname{tg} x + 2 = 0$; 2) $3\operatorname{tg} x - 6 = 1$; 3) $4 + 5\operatorname{tg} x = 2$;

4) $6\operatorname{ctg} x + 3 = 1$; 5) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + 0{,}5 = 0$; 6) $0{,}3\operatorname{ctg} x + 1 = 0{,}6$.

372*. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{3}{5}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$; 3) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$; 4) $\cos(\operatorname{arctg} 2)$.

§28 Розв'язування складніших тригонометричних рівнянь

Зведемо знайдені результати розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь для зручності використання в загальну таблицю 10.

Таблиця 10

Рівняння	Формула розв'язків	Головний розв'язок
$\sin x = a$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	$\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(-a) = -\arcsin a$
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	$\arccos a \in [0; \pi]$, $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	$\operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	$\operatorname{arcctg} a \in (0; \pi)$, $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$

Розглянемо приклади розв'язування складніших тригонометричних рівнянь.

Зазначимо, що єдиного, універсального способу розв'язування таких рівнянь немає. Але загальний підхід полягає в тому, що дане рівняння намагаються перетворити так, щоб його розв'язування звести до розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь за відомими формулами.

Наприклад, щоб розв'язати рівняння $2\sin^2 x + \sin x = 0$, його ліву частину розкладають на множники: $\sin x\,(2\sin x + 1) = 0$, а потім кожен з них прирівнюють до нуля:

$$\sin x = 0; \qquad (1)$$

$$2\sin x + 1 = 0,\ \sin x = -\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

У результаті отримали два рівняння (1) і (2), розв'язування яких утруднень не викликає.

Проілюструємо на прикладах окремі способи реалізації зазначеного підходу до розв'язування тригонометричних рівнянь.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Застосуємо загальну формулу розв'язків рівняння $\sin x = a$, беручи до уваги, що тут під знаком синуса стоїть $4x$. Маємо:

$4x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, n \in Z$, або $4x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

Звідси $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $3\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді $\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, поділивши обидві його частини на 3. Застосуємо до цього рівняння загальну формулу розв'язків рівняння $\mathrm{tg}\, x = a$, беручи до уваги, що під знаком тангенса в даному випадку стоїть вираз $x + \frac{\pi}{6}$. Маємо:

$x + \frac{\pi}{6} = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n, n \in Z$, або $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

Звідси $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi n = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$.

Розв'язання. Це рівняння є квадратним відносно $\sin x$. Уведемо позначення $\sin x = y$. Маємо: $2y^2 + 3y - 2 = 0$. Розв'яжемо це рівняння:

$D = 9 + 16 = 25$; $\sqrt{D} = 5$; $y_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$; $y_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$.

Повернемося до введеного позначення. Маємо:

$\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$;

$\sin x = -2$.

Оскільки $|\sin x| \le 1$, то це рівняння розв'язків не має.

Отже, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $2\sin^2 x + 5\cos x - 5 = 0$.

Розв'язання. Якщо рівняння містить різні тригонометричні функції, то можна спробувати виразити їх через якусь одну. В даному випадку з тотожності $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ виразимо $\sin^2 x$ через $\cos^2 x$ і підставимо в рівняння.

Маємо: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$; $2(1 - \cos^2 x) + 5\cos x - 5 = 0$.

Виконаємо перетворення його лівої частини.

Одержимо: $2 - 2\cos^2 x + 5\cos x - 5 = 0$, або $2\cos^2 x - 5\cos x + 3 = 0$.

Маємо квадратне рівняння відносно косинуса. Уведемо позначення $\cos x = y$.

Рівняння набуває вигляду: $2y^2 - 5y + 3 = 0$.

Розв'яжемо його: $D = 25 - 24 = 1$; $\sqrt{D} = 1$; $y = \frac{5 \pm 1}{4}$; $y_1 = \frac{3}{2}$; $y_2 = 1$.

Повернемося до введеного позначення. Маємо: $\cos x = \frac{3}{2}$.

Рівняння не має розв'язків, бо $\frac{3}{2} > 1$; $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$.
Отже, $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $\sin 2x + \cos x = 0$.

Розв'язання. У цьому рівнянні маємо не лише різні тригонометричні функції, а й різні аргументи: $2x$ і x. Щоб звести вираз у лівій частині рівняння до аргументу x, застосуємо формулу синуса подвійного аргументу: $\sin 2x = 2\sin x\cos x$. Маємо: $2\sin x\cos x + \cos x = 0$. Розкладемо ліву частину утвореного рівняння на множники, винісши за дужки спільний множник $\cos x$.
Маємо: $\cos x(2\sin x + 1) = 0$. Прирівняємо кожен із множників до нуля. Одержимо два рівняння $\cos x = 0$ і $2\sin x + 1 = 0$, які легко розв'язати. Зробіть це самостійно.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

373. Розв'яжіть рівняння:

1°) $\sin 2x = 1$; 2°) $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3°) $\operatorname{tg} 3x + 1 = 0$; 4') $4\sin x = -2$;

5') $2\cos x - \sqrt{2} = 0$; 6°) $5\operatorname{ctg} x - 1 = 0$; 7) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

8) $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) - 1 = 0$; 9) $\operatorname{tg}(x - 2) = 5$; 10*) $\sin x\cos x = \frac{1}{4}$;

11) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0{,}5$; 12*) $8\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x = 1$.

374. Розв'яжіть рівняння, скориставшись формулами додавання:

1) $\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x = 1$; 2) $\sin 3x\cos x + \sin x\cos 3x = -1$;
3) $\sin x\sin 2x + \cos 3x = 0$; 4) $\cos 1{,}5x = \cos 0{,}5x\cos x$.

375. Розв'яжіть рівняння, розкладаючи ліву частину на множники:

1) $\sin x - \sin x\operatorname{tg} x = 0$; 2) $2\cos^2 x + \cos x = 0$; 3) $3\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$;
4) $3\sin x\cos x + \cos x = 0$; 5) $4\cos^2 x - 1 = 0$; 6) $4\sin^2 x - 3 = 0$.

376. Розв'яжіть рівняння:

1) $1 - \cos x = \sin\frac{x}{2}$; 2) $1 + \cos x = \cos\frac{x}{2}$;

3) $\sin 2x + \sin x = 0$; 4) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 0$.

377. Розв'яжіть рівняння, розглядаючи його як квадратне рівняння відносно однієї з тригонометричних функцій:

1) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$; 2) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$;
3) $3\cos^2 x - 8\cos x - 3 = 0$; 4) $\cos^2 x + 1 = -2\cos x$;
5) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; 6) $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x = 3$;
7) $\operatorname{tg}^2 x = 4\operatorname{tg} x - 3$; 8) $\sin^2 x = 6 - \sin x$.

378. Розв'яжіть рівняння, звівши його до квадратного рівняння відносно однієї з тригонометричних функцій:

1) $4\cos^2 x + \sin x = 1$; 2) $2\cos x + \cos^2 x = 2 - \sin^2 x$; 3) $\sin^2 x - \cos x = \frac{1}{2}$;

4) $\sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$; 5) $\cos 2x + \cos x = 0$; 6) $\sin x - \cos 2x = 0$;

7) $\frac{2\cos^2 x}{7\cos x - 3} = 1$; 8) $\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} x = 6$; 9) $\cos 2x = 3\sin x - 1$.

379*. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$; 2) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$;

3) $2\sin\frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$; 4) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 3 = 0$.

§29 Приклади розв'язування тригонометричних нерівностей

Розглянемо загальні підходи до розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей, якими є нерівності виду $\sin x > a$, $\sin x < a$, $\cos x > a$, $\cos x < a$, $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$.

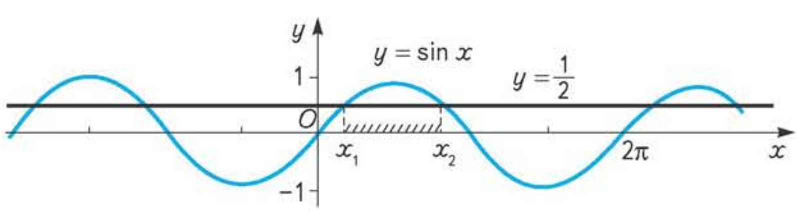
Нерівності $\sin x > a$ і $\sin x < a$. Якщо $a > 1$, то нерівність $\sin x > a$ розв'язків не має. Наприклад, $\sin x > 2{,}5$, $\sin x > 10$. Обґрунтуйте це самостійно.

Якщо $a < -1$, наприклад $a = -3$, $a = -4{,}4$, то нерівність $\sin x > a$ ($\sin x > -3$, $\sin x > -4{,}4$) задовольняє будь-яке дійсне значення x, бо найменше значення синуса дорівнює -1. Отже, розв'язком нерівності в цьому випадку є множина всіх дійсних чисел $x \in (-\infty; \infty)$.

З'ясуємо, як знайти розв'язки нерівності $\sin x > a$, якщо $-1 \le a \le 1$.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Оскільки синус є періодичною функцією з основним періодом 2π, то знайдемо спочатку розв'язки нерівності на числовому проміжку довжиною 2π, наприклад на проміжку $[0; 2\pi]$. Зробимо це графічним способом. Для цього побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ та $y = \frac{1}{2}$ (мал. 105) і встановимо, в яких точках зазначеного проміжку графік функції $y = \sin x$ лежить над прямою $y = \frac{1}{2}$. З малюнка 105 видно, що це проміжок (x_1, x_2).



Мал. 105

Оскільки в точках x_1 і x_2 значення обох функцій рівні між собою, то x_1 і x_2 є розв'язками рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$ на проміжку $[0; 2\pi]$. Неважко встановити, що це числа $\frac{\pi}{6}$ і $\frac{5\pi}{6}$. Отже, розв'язок нерівності $\sin x > \frac{1}{2}$ на цьому проміжку можна записати так: $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$.

Враховуючи періодичність функції синус, запишемо множину проміжків, на яких $\sin x > \frac{1}{2}$: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Ця множина і є розв'язком даної нерівності.

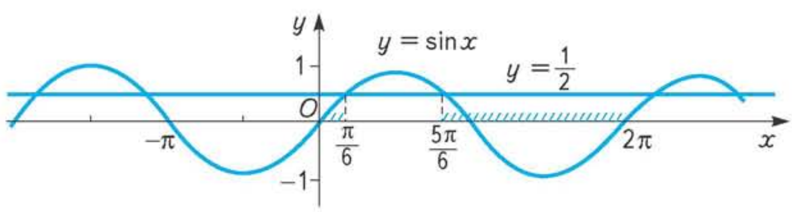
Отже, $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Розв'язування нерівності виду $\sin x < a$ проілюструємо на прикладі.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $\sin x < \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, будуємо в одній системі графіки функцій $y = \sin x$ та $y = \frac{1}{2}$, обираємо числовий проміжок довжиною 2π, наприклад $[0; 2\pi]$, і знаходимо розв'язки даної нерівності на цьому проміжку (мал. 106). Для цього встановлюємо, в яких його точках синусоїда лежить під прямою $y = \frac{1}{2}$, розв'язавши спочатку рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$ на проміжку $[0; 2\pi]$.

З малюнка видно, що це об'єднання проміжків $\left(0; \ \frac{\pi}{6}\right)$ і $\left(\frac{5\pi}{6}; \ 2\pi\right)$.



Мал. 106

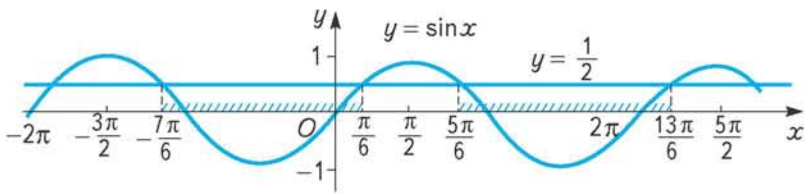
Враховуючи періодичність функції синус, знаходимо розв'язок нерівності $\sin x < \frac{1}{2}$ як об'єднання проміжків $\left(2\pi n; \ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$ і $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \ 2\pi + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Отже, $x \in \left(2\pi n; \ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \ 2\pi(n+1)\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

У розглянутому випадку розв'язком нерівності є об'єднання двох проміжків. Вигляд відповіді можна дещо спростити, якщо взяти до уваги таке.

На проміжку $[0; 2\pi]$ розв'язком нерівності $\sin x < \frac{1}{2}$ є об'єднання двох проміжків. Проте щоб одержати загальну відповідь, не обов'язково шукати розв'язки даної нерівності саме на проміжку $[0; 2\pi]$. Це може бути будь-який інший проміжок, але обов'язково довжиною 2π. Наприклад, проміжки $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$. Як видно з малюнка 107, у межах цих проміжків розв'язки нерівності $\sin x < \frac{1}{2}$ є неперервними проміжками: у першому випадку $\left(-\frac{7\pi}{6};\ \frac{\pi}{6}\right)$, у другому — $\left(\frac{5\pi}{6};\ \frac{13\pi}{6}\right)$.

Це уможливлює запис розв'язку даної нерівності в простішому вигляді: $x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ або $x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{13\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.



Мал. 107

Обидва записи задають одну й ту саму множину числових проміжків. У цьому легко переконатися, підставляючи в зазначені вирази цілі значення n.

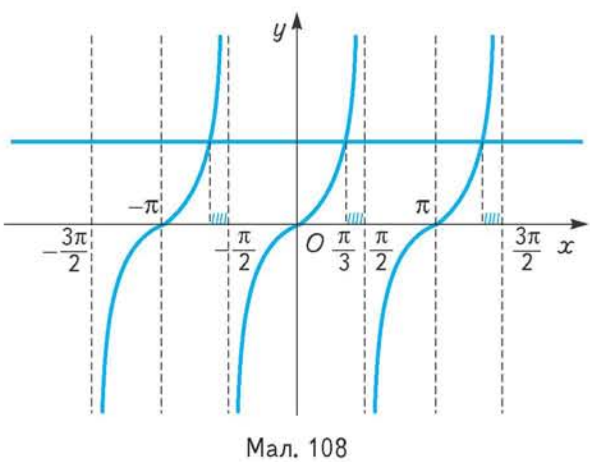
Аналогічно розв'язують нерівності виду $\cos x > a$, $\cos x < a$, якщо $-1 < a < 1$.

Нерівності $\mathrm{tg}\, x > a$ і $\mathrm{tg}\, x < a$. Оскільки значення тангенса може бути будь-яким числом, дані нерівності мають розв'язок за будь-якого дійсного a. Загальні підходи до розв'язування цих нерівностей аналогічні до розв'язування попередніх нерівностей.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність $\mathrm{tg}\, x \geq \sqrt{3}$.

Розв'язання. Розв'яжемо цю нерівність графічно.

Будуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \mathrm{tg}\, x$ та $y = \sqrt{3}$ (мал. 108)



Мал. 108

і знаходимо корені рівняння $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ на одному з проміжків довжиною π (π — основний період функції $y = \operatorname{tg} x$), наприклад на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, $x = \frac{\pi}{3}$.

На цьому самому інтервалі знаходимо розв'язки даної нерівності. З малюнка 108 видно, що це проміжок $\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Враховуючи періодичність функції $y = \operatorname{tg} x$, записуємо множину всіх розв'язків даної нерівності: $\left[\frac{\pi}{3} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

Аналогічно розв'язують і нерівності виду $\operatorname{ctg} x > a$ і $\operatorname{ctg} x < a$.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Для яких значень a нерівність $\sin x > a$ не має розв'язків?
2. Для яких значень a нерівність $\sin x < a$ не має розв'язків?
3. Для яких значень a розв'язком нерівності $\cos x > a$ є множина всіх дійсних чисел?
4. Для яких значень a розв'язком нерівності $\cos x < a$ є множина всіх дійсних чисел?
5. Чи може нерівність $\operatorname{tg} x > a$ ($\operatorname{tg} x < a$) не мати розв'язків?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

Розв'яжіть нерівність.

380°. 1) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $\cos x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 8) $\operatorname{tg} x < 1$;

9) $\operatorname{tg} x \ge 1$; 10) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$; 11) $\operatorname{tg} x \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$; 12) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$.

381. 1) $\sin 2x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos 3x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin \frac{x}{3} \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\cos \frac{x}{2} \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5*) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \ge 1$; 6*) $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \le 0$;

7*) $\sin x \cos x \le \frac{1}{4}$; 8*) $1 - 2\cos^2 x \ge 1$.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

Контрольні запитання

1. Поясніть математичний зміст запису: $\sin 2$, $\cos\frac{7\pi}{5}$, $\operatorname{tg}(-3{,}2)$, $\operatorname{ctg} 1$.
2. Що таке формули зведення? Як установити кожну з них?
3. Запишіть основні тригонометричні тотожності й обґрунтуйте кожну з них.
4. Які формули належать до формул додавання? Запишіть їх.
5. Доведіть формули додавання для косинуса, синуса, тангенса і котангенса.
6. Які формули легко дістати з формул додавання (інакше — які формули є наслідками з формул додавання)?
7. Охарактеризуйте основні властивості тригонометричних функцій і наведіть приклади їх використання.
8. Запишіть рівняння простого гармонічного коливання і поясніть зміст його параметрів.
9. Які рівняння належать до найпростіших тригонометричних рівнянь? Запишіть у загальному вигляді множини розв'язків кожного з них.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 2

Тригонометричні функції кута (§ 9 — 12)

1°. Менша діагональ ромба дорівнює m, а його гострий кут становить β. Знайдіть сторону і більшу діагональ ромба.

А. $\dfrac{m}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ і $m\sin\dfrac{\alpha}{2}$. **Б.** $\dfrac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ і $m\,\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. **В.** $\dfrac{m}{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$ і $m\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. **Г.** $\dfrac{m}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}$ і $\dfrac{m}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

2°. Побудуйте кут $126°$. Користуючись лише лінійкою, знайдіть наближені значення його синуса і тангенса з точністю до десятих.

А. 0,9 і 2,0. **Б.** 0,4 і 2,0. **В.** 0,4 і –2,0. **Г.** 0,9 і –2,0.

3°. Який знак має вираз: 1) $\cos 228° \sin 228° \,\mathrm{tg}\, 228°$; 2) $\sin 134° - \cos 118°$; 3) $\cos 320° - \mathrm{ctg}\, 108°$; 4) $\mathrm{tg}\, 300° + \mathrm{ctg}\, 300°$?

А. 1) +; 2) +; 3) –; 4) +. **Б.** 1) –; 2) +; 3) –; 4) +.
В. 1) +; 2) –; 3) +; 4) –. **Г.** 1) +; 2) +; 3) +; 4) –.

4. Рухомий радіус утворює з додатною піввіссю Ox кут $234°$. Укажіть у межах першого оберту додатні кути α і β, для яких $\sin\alpha = \sin 234°$, $\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}\, 234°$.

А. $\alpha = 306°$, $\beta = 54°$. **Б.** $\alpha = 54°$, $\beta = 306°$.
В. $\alpha = 126°$, $\beta = 36°$. **Г.** $\alpha = 126°$, $\beta = 54°$.

5*. Чи можлива рівність $\sin\alpha \cos\alpha = 1$?

А. Так. **Б.** Ні.

В. Можлива за умови $\sin\alpha = \cos\alpha = 1$.

Г. Можлива за умови $\sin\alpha = a$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{a}$.

Тригонометричні функції числового аргументу (§ 13 — 15)

1°. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює $40°$. Знайдіть радіанні міри кутів цього трикутника.

А. $\dfrac{\pi}{9}, \dfrac{5\pi}{18}, 1$. **Б.** $\dfrac{5\pi}{9}, \dfrac{4\pi}{9}, \pi$. **В.** $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{18}, \dfrac{2\pi}{9}$. **Г.** $\dfrac{5\pi}{9}, \dfrac{4\pi}{9}, \dfrac{\pi}{2}$.

2°. Запишіть вираз, що задає множину чисел, зображених на одиничному колі кінцем рухомого радіуса, який утворює з додатною піввіссю Ox кут $160°$.

А. $\dfrac{8\pi}{9} + \pi k,\ k \in Z$. **Б.** $\dfrac{\pi}{9} + 2\pi k,\ k \in Z$.

В. $160° + 2\pi k,\ k \in Z$. **Г.** $\dfrac{8\pi}{9} + 2\pi k,\ k \in Z$.

3°. Визначте знак добутку: 1) $\sin\dfrac{5\pi}{7} \cos\dfrac{3\pi}{10} \,\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{5}$; 2) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{10}\right)\cos\dfrac{15\pi}{8} \,\mathrm{tg}\dfrac{9\pi}{7}$.

А. 1) +; 2) +. **Б.** 1) –; 2) –. **В.** 1) +; 2) –. **Г.** 1) –; 2) +.

4. Знайдіть значення виразу $\dfrac{2\sin\alpha - 3\cos 2\alpha}{3\sin 2\alpha + 2\cos\alpha}$, якщо $\alpha = -\dfrac{\pi}{3}$.

А. $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3\sqrt{3}-2}$. **Б.** $\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3\sqrt{3}-2}$. **В.** $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{-3\sqrt{3}-2}$. **Г.** $\dfrac{-2\sqrt{3}-3}{3\sqrt{3}+2}$.

5*. Знайдіть значення виразу $\dfrac{2\sin\frac{9\pi}{5} - 3\cos\frac{7\pi}{10}}{\sin\frac{4\pi}{5} + 4\sin\frac{6\pi}{5}}$, якщо $\sin\dfrac{\pi}{5} = a$.

А. $\dfrac{5}{3}$ **Б.** $\dfrac{1}{5}$. **В.** $-\dfrac{5}{3}$. **Г.** $-\dfrac{1}{3}$.

Основні тригонометричні тотожності й формули (§ 16 — 20)

1°. Знайдіть $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ і $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

А. $-\dfrac{12}{5}$. **Б.** $-\dfrac{5}{12}$. **В.** $\dfrac{5}{12}$. **Г.** $-\dfrac{60}{169}$.

2°. Спростіть вираз: 1) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1$; 2) $\dfrac{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ}$.

А. 1) $\sin^2\alpha$; 2) $\operatorname{tg} 10^\circ$. **Б.** 1) 1; 2) 1.
В. 1) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha$; 2) $\operatorname{ctg} 80^\circ$. **Г.** 1) 1; 2) -1.

3°. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $3 + \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.
А. 3 і 2. **Б.** 4 і 3. **В.** 5 і 1. **Г.** 4 і 2.

4. Спростіть вираз: 1) $\dfrac{\cos 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha + \sin 4\alpha}$; 2) $\dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos 2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

А. 1) $-\operatorname{tg}^2 2\alpha$; 2) $-\sin 2\alpha$. **Б.** 1) -1; 2) $\sin 2\alpha$.
В. 1) $-\operatorname{tg}^2 2\alpha$; 2) $2\cos\alpha$. **Г.** 1) -1; 2) $2\cos^2\alpha$.

5*. Чи є рівність $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ тотожністю?

А. Так. **Б.** Ні.

Властивості та графіки тригонометричних функцій (§ 21 — 24)

1°. Укажіть нулі функції $y = \cos x$ на відрізку $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

А. $-\pi, 0, \dfrac{3\pi}{2}$. **Б.** $-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, 1$. **В.** $-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}$. **Г.** $-\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$.

2°. Яка нерівність є правильною:

1) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5} > \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4} > \operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{5}$; 3) $\cos\dfrac{\pi}{10} < \cos\dfrac{\pi}{5}$;

4) $\sin\dfrac{\pi}{4} > \sin\dfrac{\pi}{3}$; 5) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{7}\right) > \cos\dfrac{\pi}{6}$; 6) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) < \sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)$?

А. 5); 6). **Б.** 2); 3); 4). **В.** 1); 5). **Г.** 3); 5); 6).

3°. На яких з даних проміжків функція $y = \operatorname{tg} x$ набуває лише невід'ємних значень:

1) $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right)$; 2) $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$; 3) $\left[-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right)$; 4) $[-\pi;\ 0]$?

А. 1); 2). **Б.** 1); 3). **В.** 2); 3). **Г.** 1); 4).

4. Який найменший додатний період має функція: 1) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 2) $y = \frac{1-\cos 2x}{\sin x}$?

А. 1) 2π; 2) π. **Б.** 1) 2π; 2) 2π. **В.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 2π. **Г.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) π.

5*. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

А. $\frac{1}{2}$ і $-\frac{1}{2}$. **Б.** 1 і -1. **В.** $\frac{1}{4}$ і $-\frac{1}{4}$. **Г.** 2 і -2.

Тригонометричні рівняння і нерівності (§25 — 29)

1°. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x = 0$.

А. $2\pi n,\ n \in Z$. **Б.** $\pi n,\ n \in Z$. **В.** $\frac{\pi n}{2},\ n \in Z$. **В.** $\pi(2n+1),\ n \in Z$.

2°. Скільки розв'язків має рівняння $\cos x = -0,7$ на проміжку $\left[-\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$?

А. 3. **Б.** 4. **В.** 2. **Г.** 0.

3°. Яке рівняння не має розв'язків:

1) $2\sin x - 3 = 0$; 2) $\sin^2 x = 1$; 3) $4 - \cos x = 2$;

4) $3\cos^2 x + 1 = 0$; 5) $5\operatorname{tg} x - 20 = 0$; 6) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{8}$?

А. 1); 2); 6). **Б.** 2); 4); 6). **В.** 1); 3); 4). **В.** 2); 3); 5).

4. Знайдіть розв'язки рівняння $\sqrt{2}\sin x = -1$ на проміжку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

А. $-\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$. **Б.** $\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$.

В. $-\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}$. **Г.** $-\frac{\sqrt{2}\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$.

5*. Числа $-a$ і a є розв'язками рівняння $\cos x = m$ ($m > 0$) на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

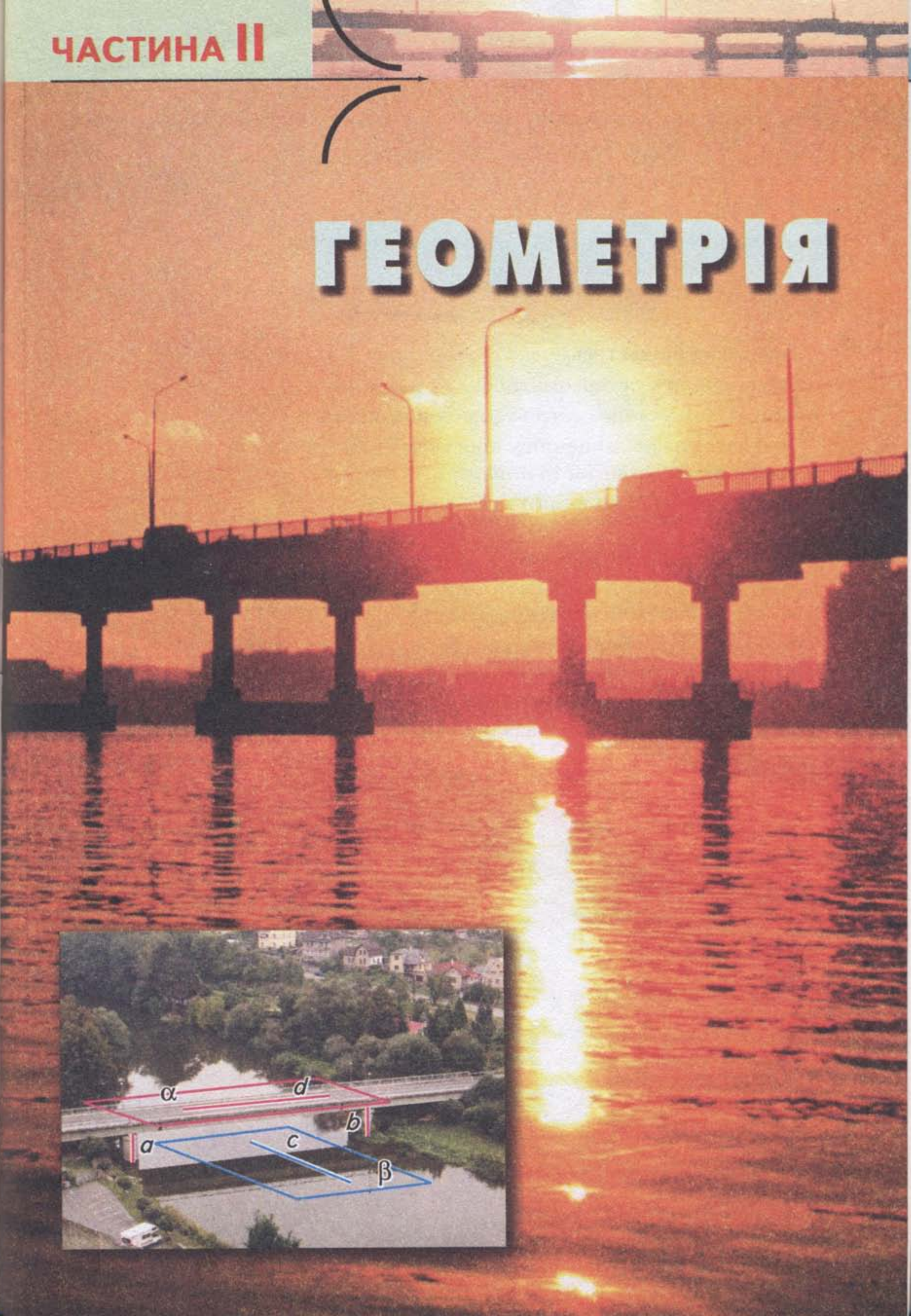
Запишіть множину розв'язків нерівності $\cos x < m$ на цьому проміжку.

А. $\left[-\frac{\pi}{2};\ -a\right] \cup \left[a;\ \frac{\pi}{2}\right]$. **Б.** $\left(-\frac{\pi}{2};\ -a\right) \cup \left(a;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

В. $\left[-\frac{\pi}{2};\ -a\right] \cup \left[a;\ \frac{3\pi}{2}\right]$. **Г.** $\left(-\frac{\pi}{2};\ -a\right) \cup \left(a;\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

ЧАСТИНА II

ГЕОМЕТРІЯ

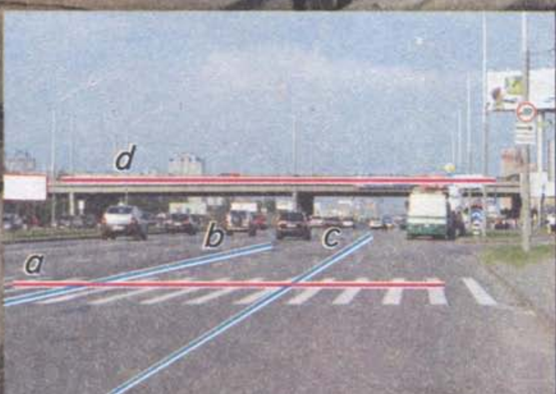


РОЗДІЛ 3

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ ТА ПЛОЩИН

У розділі ви дізнаєтесь:

- **що вивчають у стереометрії;**
- **про аксіоми стереометрії та наслідки з них;**
- **про взаємне розміщення у просторі двох прямих, прямої та площини;**
- **про паралельні площини та їх ознаку й властивості;**
- **як знайти відстань від точки до прямої та між двома паралельними прямими, кут між прямими, що перетинаються;**
- **про паралельне проектування та зображення просторових фігур на площині;**
- **як застосовувати вивчені властивості на практиці та під час розв'язування задач**



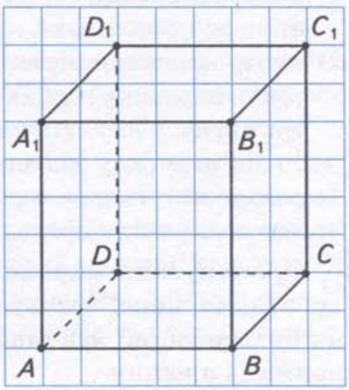
§30 Що вивчають у стереометрії

Ви знаєте, що шкільний курс геометрії складається з двох частин — *планіметрії* та *стереометрії*. У планіметрії вивчають геометричні фігури, всі точки яких лежать в одній площині, наприклад трикутник, квадрат, коло. У стереометрії вивчають властивості *просторових фігур*. У таких фігур не всі точки лежать в одній площині. Прикладами просторових фігур є многогранники. Вам уже відомі *прямокутний паралелепіпед*, *куб*, *піраміда*.

Ви знаєте, що поверхня многогранника складається з плоских многокутників, які називаються його *гранями*. Звідси і походить назва «многогранник». Вершини і сторони цих многокутників називаються відповідно *вершинами* і *ребрами* многогранника.

? Які особливості мають прямокутний паралелепіпед, куб і піраміда?

Прямокутний паралелепіпед — многогранник, поверхня якого складається з 6 граней, кожна з яких є прямокутником. У нього 8 вершин і 12 ребер. На малюнку 109 ви бачите прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, побудований за клітинками. Дві його грані $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ розміщено горизонтально. Їх називатимемо *основами* даного паралелепіпеда. Решту граней розміщено вертикально. Їх називатимемо *бічними гранями* даного паралелепіпеда. *Ребрами основ* даного паралелепіпеда називатимемо сторони прямокутників $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, а *бічними ребрами* — решту його ребер.



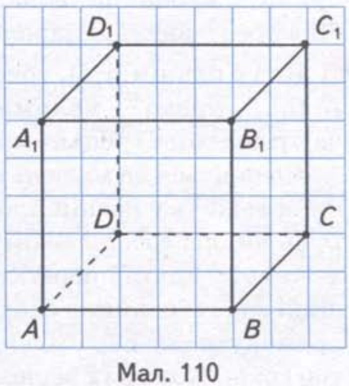
Мал. 109

У побудові зображення прямокутного паралелепіпеда за клітинками використовуємо такі його властивості:

1) протилежні грані — попарно рівні прямокутники, що лежать у паралельних площинах;
2) протилежні ребра кожної грані попарно паралельні й рівні;
3) бічні ребра рівні між собою й перпендикулярні до основ.

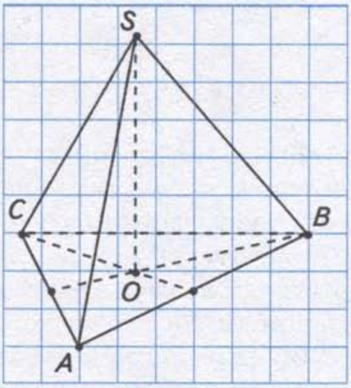
Пам'ятайте, що зображуючи многогранник, видимі лінії робимо суцільними, а невидимі — штриховими.

Куб — многогранник, поверхня якого складається з 6 граней; кожна з них є квадратом. Куб є різновидом прямокутного паралелепіпеда, тому має всі його властивості. Особливі властивості куба пов'язані з тим, що всі його грані — це рівні між собою квадрати, а всі ребра — рівні між собою відрізки. На малюнку 110 ви бачите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, побудований за клітинками.



Мал. 110

Піраміда — многогранник, поверхня якого складається з многокутника, він називається *основою* піраміди, і трикутників зі спільною вершиною, вони називаються *бічними гранями* піраміди. Спільна вершина бічних граней називається *вершиною піраміди*. На малюнку 111 ви бачите побудовану за клітинками піраміду $SABC$ з вершиною S і основою ABC.

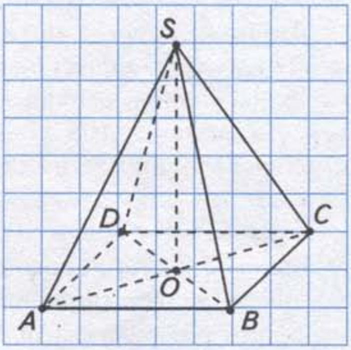


Мал. 111

Залежно від того, який многокутник є основою, піраміду називають трикутною, чотирикутною чи n-кутною.

Піраміда називається *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а її бічні ребра рівні.

Висотою піраміди називається перпендикуляр, проведений з вершини піраміди до її основи. У правильній піраміді висота проходить через центр її основи (мал. 111, 112).

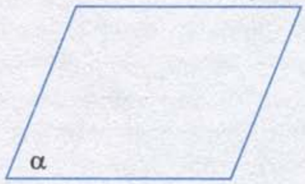


Мал. 112

У побудові правильної піраміди за клітинками використовуємо такі її властивості:

1) основа піраміди — це правильний многокутник;
2) центром основи піраміди є:
   точка перетину медіан основи, якщо піраміда трикутна;
   точка перетину діагоналей основи, якщо піраміда n-кутна, де $n > 3$;
3) висота піраміди проходить через центр основи.

Прямокутний паралелепіпед, куб і піраміду будемо використовувати для ілюстрування властивостей взаємного розміщення точок, прямих і площин.

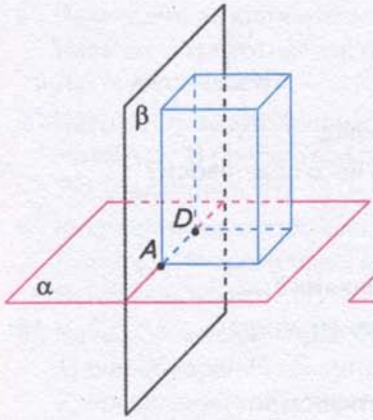


Мал. 113

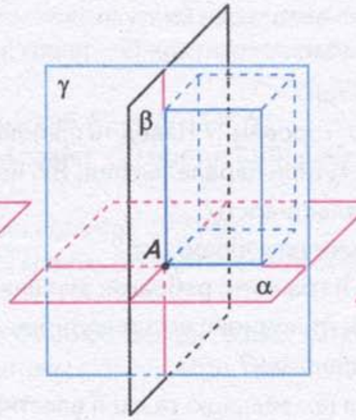
Основними фігурами у просторі є *точка*, *пряма* і *площина*. Площину зображають здебільшого у вигляді паралелограма (мал. 113).

Як і в планіметрії, точки позначають великими латинськими буквами A, B, C, ... , прямі — малими латинськими буквами a, b, c, ... Площини позначають малими грецькими буквами α (альфа), β (бета), γ (гама) ... .

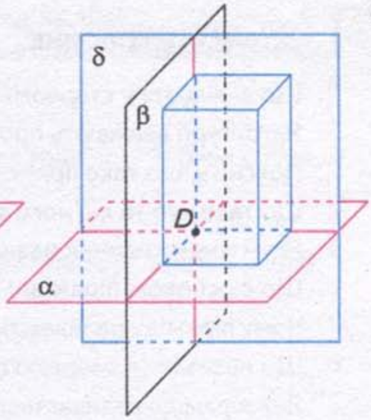
Подивіться на малюнки 114 — 116. Ви бачите, що кожна грань многогранника лежить у певній площині. Різні його грані лежать у різних площинах. Будь-які дві *сусідні грані* мають спільний відрізок — ребро (мал. 114). Воно лежить на прямій перетину двох площин, що містять ці грані. У кожній вершині многогранника сходяться принаймні три попарно сусідні його грані. У прямокутному паралелепіпеді й кубі в кожній вершині сходяться рівно по три грані. Кожна їх вершина є точкою перетину трьох площин, що містять ці



Мал. 114



Мал. 115



Мал. 116

грані (мал. 115, 116). Вершина піраміди може бути точкою перетину більш ніж трьох площин, що містять грані піраміди (див. мал. 112). У вершинах основи піраміди сходяться рівно по три грані — дві сусідні бічні грані й основа.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Предмети, що нас оточують, мають різні властивості: матеріал, з якого їх зроблено, масу, розміри, форму. В геометрії беруть до уваги лише форму предметів, їх розміри та взаємне розміщення. Решту властивостей досліджують у фізиці, хімії та інших науках. Узагалі у природі не існує геометричних фігур — вони створюються уявою людини. На папері ж одержуємо *зображення* геометричної фігури.
Залежно від геометричного завдання, що розв'язують, один і той самий предмет розглядають як точку або лінію, поверхню або тіло. Наприклад, для водія, який перевозить труби на будівництво газопроводу, вони є тілами (займають певне місце в кузові автомобіля). Для робітника, який виконує ізоляцію, ці самі труби виступають у ролі поверхонь (для нього має значення не товщина стінок труб, а площа поверхні). Проектувальник, прокладаючи трасу, розглядає газопровід як лінію (для нього має значення протяжність труб).

2. Термін «стереометрія» походить від грецьких слів στερεοξ — просторовий і μετρεο — вимірювати. Його автором вважають давньогрецького вченого Платона (427 — 347 рр. до н. е.) — засновника філософської школи в Афінах, яка називалася Академією. Головною заслугою Платона в історії математики вважають те, що він вперше висунув і всіляко обстоював ідею про необхідність знання математики кожною освіченою людиною. На дверях його Академії був напис: «Нехай не входить сюди той, хто не знає геометрії».

3. Термін «паралелепіпед» походить від грецьких слів παραλλοξ — паралельний і επιπεδον — площина. Термін «куб» (χυβοξ) також античного походження. Таку назву мала гральна кістка з вирізаними на ній вічками. Її виготовляли з баранячого суглоба, який міг падати на чотири грані, а після обточування — на шість граней. Назву «піраміда» вважають чи не єдиним терміном, який дійшов до нас від стародавніх єгиптян. Вона означає «пам'ятник», тобто обеліск, установлений славетній людині — фараонові.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що вивчають у стереометрії?
2. Які фігури вважають просторовими? Наведіть приклад.
3. Поясніть, що таке прямокутний паралелепіпед. Які його властивості?
4. Що таке куб та які його властивості?
5. Який многогранник називається пірамідою?
6. Що є основою піраміди; її гранями; ребрами; вершинами?
7. Чому піраміду називають трикутною; чотирикутною; *n*-кутною?
8. Що називають висотою піраміди?
9. Яка піраміда називається правильною та які її властивості?
10. Назвіть основні геометричні фігури у просторі. Як їх позначають?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

1'. Який з многогранників на малюнках 117 — 119 є прямокутним паралелепіпедом? Скільки в нього вершин, ребер, граней? Який многокутник є його основою? Які многокутники є його бічними гранями?

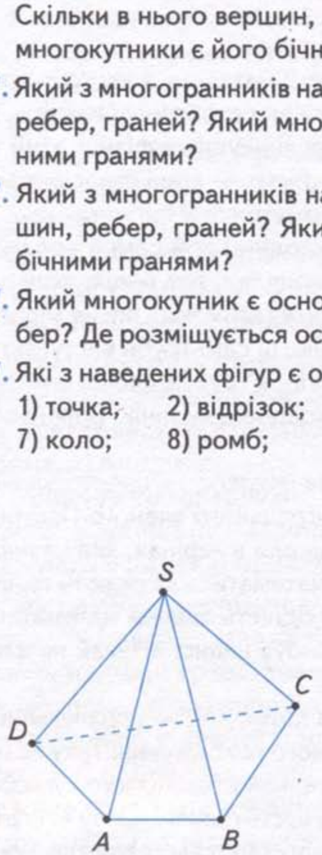
2'. Який з многогранників на малюнках 117 — 119 є кубом? Скільки в нього вершин, ребер, граней? Який многокутник є його основою? Які многокутники є його бічними гранями?

3'. Який з многогранників на малюнках 117 — 119 є пірамідою? Скільки в неї вершин, ребер, граней? Який многокутник є його основою? Які многокутники є її бічними гранями?

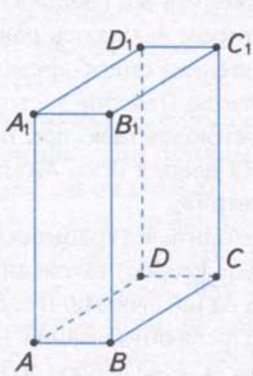
4'. Який многокутник є основою правильної піраміди? Яка властивість її бічних ребер? Де розміщується основа її висоти?

5'. Які з наведених фігур є основними в стереометрії:

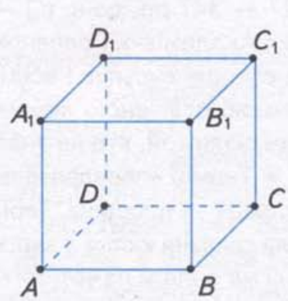
1) точка; 2) відрізок; 3) промінь; 4) пряма; 5) кут; 6) трикутник; 7) коло; 8) ромб; 9) куб; 10) куля; 11) площина; 12) призма?



Мал. 117



Мал. 118



Мал. 119

6°. Накресліть за клітинками прямокутний паралелепіпед $KLMNK_1L_1M_1N_1$.
Назвіть: 1) протилежні грані; 2) протилежні ребра граней; 3) бічні ребра. Які їх властивості?

7°. Накресліть за клітинками куб $KLMNK_1L_1M_1N_1$.
Назвіть: 1) протилежні грані; 2) протилежні ребра граней; 3) бічні ребра. Які їх властивості?

8°. Накресліть за клітинками піраміду $SKLMN$.
Назвіть: 1) протилежні грані; 2) протилежні ребра граней; 3) бічні ребра. Які їх властивості?

9°. Чи можна вважати правильною піраміду, в якої основа:
1) рівнобедрений трикутник, а бічні ребра однакової довжини;
2) правильний трикутник;
3) правильний трикутник, а бічні ребра різної довжини;
4) рівносторонній трикутник, а бічні ребра дорівнюють стороні основи?
Відповідь поясніть.

10°. За малюнками 117 — 119 поясніть для даного многогранника:
1) у якій площині лежить певна його грань;
2) у яких площинах лежать сусідні грані;
3) по якій прямій перетинаються сусідні грані;
4) які грані мають спільне ребро: а) AB; б) CD; в) BD;
5) які грані сходяться у вершині: а) A; б) B; в) C.

11. Яку найменшу кількість граней, ребер, вершин може мати піраміда?

12. Дано n-кутну піраміду.
Виведіть формулу для обчислення кількості її: 1) вершин; 2) ребер; 3) граней.

13. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задано точку: 1) P на ребрі AA_1; 2) Q на ребрі AD. Площини яких граней перетинає пряма, що лежить у площині грані куба і проходить через дану точку та одну з вершин куба? Скільки таких прямих можна провести?

14. У піраміді $SABCD$ задано точку: 1) M на ребрі SA; 2) N на ребрі BC. Площини яких граней піраміди перетинає пряма, що лежить у площині грані піраміди і проходить через дану точку та одну з вершин піраміди? Скільки таких прямих можна провести?

15*. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назвіть площини, кожна з яких проходить принаймні через три вершини куба.

16*. На трьох бічних ребрах прямокутного паралелепіпеда розміщено по дві точки. Скільки можна провести площин, кожна з яких проходитиме принаймні через три з даних точок?

17*. На трьох бічних ребрах чотирикутної піраміди розміщено по три точки. Скільки можна провести площин, кожна з яких проходитиме принаймні через три з даних точок?

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

18. З дерев'яного кубика треба виточити правильну піраміду:
1) чотирикутну; 2) трикутну. Поясніть, як це можна зробити.

§ 31 Аксіоми стереометрії

Ви вже знаєте, що властивості основних геометричних фігур, які приймають без доведення, називаються *аксіомами*.

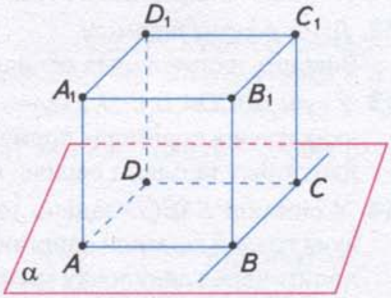
Вивчені в планіметрії аксіоми виконуються в кожній площині простору.

Введення у просторі нової геометричної фігури — площини — потребує розширення системи аксіом планіметрії. Нові аксіоми коротко називатимемо *аксіомами стереометрії*. Вони характеризують взаємне розміщення точок, прямих і площин. Сформулюємо їх.

Аксіоми стереометрії

1. **Існують точки, що лежать у даній площині, і точки, що не лежать у ній.**
2. **Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.**
3. **Якщо дві точки прямої лежать у площині, то й кожна точка цієї прямої лежить у даній площині.**
4. **Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.**

Подивіться на малюнок 120. Ви бачите, що: 1) вершина A куба лежить у площині α, а вершина A_1 не належить їй; 2) через три вершини куба A, B і C проходить єдина площина α (тому площину α можна називати інакше — площина ABC); 3) кожна точка прямої BC лежить у площині α; 4) площина ABC перетинається з площиною B_1BC по прямій BC, оскільки має з нею спільну точку B.



Мал. 120

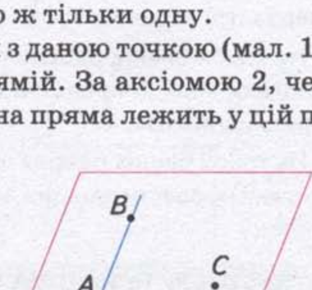
З аксіом стереометрії випливають такі наслідки.

Наслідок 1. Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Справді, будь-які дві точки даної прямої разом з даною точкою (мал. 121) утворюють три точки, що не лежать на одній прямій. За аксіомою 2, через них проходить єдина площина. За аксіомою 3, дана пряма лежить у цій площині.

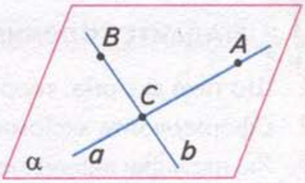
На малюнку 120 ви бачите, що площина α проходить через пряму BC, яка містить ребро куба, і точку A — його вершину.

Наслідок 2. Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину і до того ж тільки одну.



Мал. 121

Справді, якщо на кожній з даних прямих взяти по одній точці, відмінній від точки перетину даних прямих, і точку перетину (мал. 122), то утвориться три точки, що не лежать на одній прямій. За аксіомою 2, через них проходить єдина площина. За аксіомою 3, кожна з даних прямих лежить у цій площині.



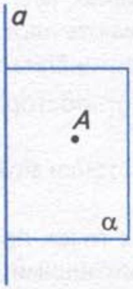
Мал. 122

На малюнку 120 ви бачите, що площина α проходить через прямі AB і BC, які містять відповідні ребра куба і перетинаються в його вершині B.

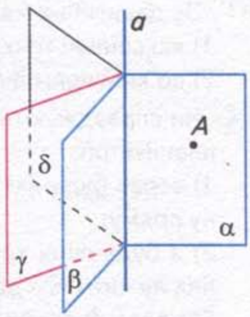
Пам'ятайте, що площину можна задати:
1) трьома точками, які не лежать на одній прямій;
2) прямою і точкою, яка не лежить на ній;
3) двома прямими, що перетинаються.

Задача. Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин. Доведіть.

Розв'язання. Через пряму a і точку A, що не лежить на ній, можна провести єдину площину, нехай α (мал. 123). Але, за аксіомою 1, у просторі існує безліч точок, що не лежать у площині α. Через кожну із цих точок і дану пряму можна провести площину, відмінну від площини α. Тому таких площин існує безліч.



Мал. 123



Мал. 124

На малюнку 124 ви бачите, що через пряму a проходять площини α, β, γ і δ.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Головна праця давньогрецького вченого Евкліда «Начала» побачила світ близько 300 р. до н. е. У ній підсумовано й систематизовано всі досягнення грецької математики, зокрема праці Гіппократа Хіоського, Євдокса Кнідського, Архіта Тарентського, Теетета Афінського та інших учених. «Начала» містять 13 книжок. У книжках I — IV подано основи планіметрії. Книжка V містить теорію пропорцій геометричних величин, VI — теорію подібності, книжки VII — IX — теорію чисел і числових пропорцій, X — теорію ірраціональних чисел. Стереометрію викладено у книжках XI — XIII. Книжку XI присвячено основам стереометрії. У ній Евклід формулює 28 означень і доводить 39 тверджень, що стосуються насамперед взаємного розміщення прямих та площин у просторі. Книжку XII присвячено круглим тілам, а XIII — правильним многогранникам.

Історичне значення «Начал» Евкліда полягає в тому, що в них уперше зроблено спробу застосувати *аксіоматичний метод* у побудові геометрії. Нині цей метод є основним для створення й обґрунтування математичних теорій.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

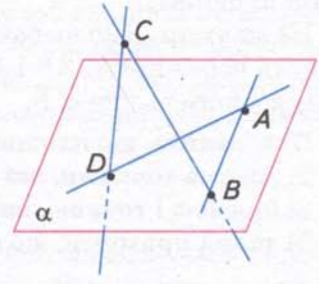
1. Що таке аксіома; теорема?
2. Сформулюйте аксіоми стереометрії.
3. Які наслідки випливають з аксіом стереометрії?
4. Як можна задати площину?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

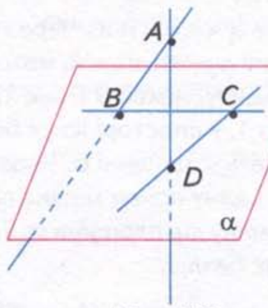
19'. Наведіть означення і приклади аксіоми; теореми.

20'. На малюнках 125, 126 зображено площину α і прямі AB, BC, AD і CD.

1) Які з точок A, B, C і D лежать у площині α?
2) Яку іншу назву можна дати площині α?
3) Які з прямих лежать у площині α?



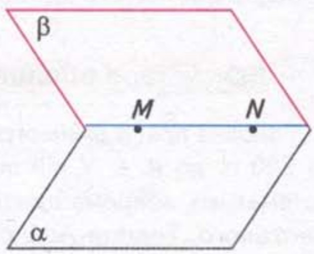
Мал. 125



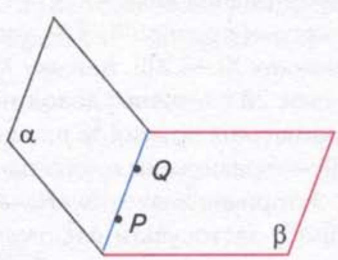
Мал. 126

21'. За даними на малюнках 127, 128 з'ясуйте:

1) які спільні точки мають площини α і β;
2) по якій прямій перетинаються площини α і β.



Мал. 127

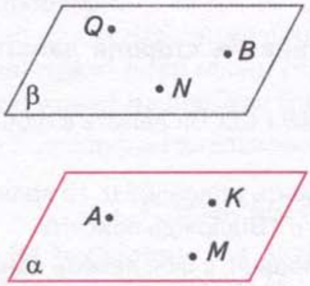


Мал. 128

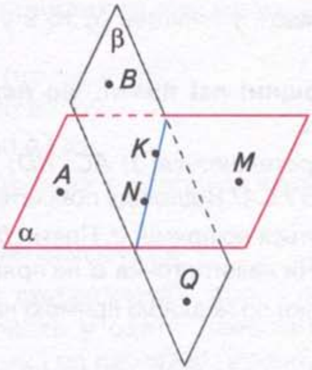
22°. Чи справджуються у просторі наведені аксіоми планіметрії:

1) через будь-які дві точки можна провести єдину пряму;
2) з будь-яких трьох точок прямої лише одна з них лежить між двома іншими;
3) через будь-яку точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній;
4) на будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок заданої довжини і до того ж тільки один;
5) кожен відрізок має певну довжину, більшу за нуль;
6) довжина відрізка дорівнює сумі довжин його частин;
7) від будь-якого променя по один бік від нього можна відкласти кут заданої градусної міри і до того ж тільки один;
8) кожен кут має градусну міру, більшу за нуль і меншу від 180°;
9) градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°;
10) градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається променем, що проходить між його сторонами?

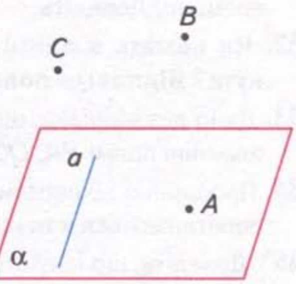
Відповідь поясніть.



Мал. 129



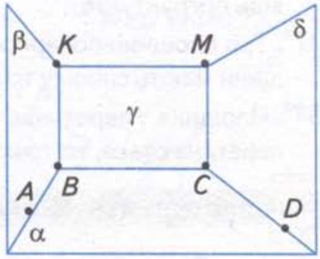
Мал. 130



Мал. 131

23°. За даними на малюнках 129, 130 визначте точки:

1) які лежать у площині α;
2) які не лежать у площині β;
3) через які не проходить площина α;
4) через які проходить площина β.



Мал. 132

24°. У площині α позначте точки *A*, *B*, *C* і *D*, а поза нею — точки *M* і *N*. Чи можна дати площині α таку назву:

1) *AN*; 2) *ADB*; 3) *BCDM*; 4) *ACD*; 5) *BAC*; 6) *CNB*; 7) *DAB*; 8) *MDC*; 9) *CAD*?

25°. Проведіть площину α. Позначте:

1) точки *B* і *C*, які лежать у площині α, і точку *A*, що не лежить у цій площині;
2) точки *A* і *C*, які лежать у площині α, і точку *B*, що не лежить у цій площині.

Проведіть прямі *AC*, *AB*, *BC*. Які з цих прямих лежать у площині α?

26°. Чи можуть пряма і площина мати тільки дві спільні точки? Чому?

27°. Пряма *a* і точка *A* лежать у площині α (мал. 131). Точки *B* і *C* не лежать у даній площині. Чи визначають площину, відмінну від площини α:

1) пряма *a* і точка *B*; 2) пряма *a* і точка *C*; 3) прямі *AB* і *AC*; 4) прямі *AB* і *BC*?

Відповідь поясніть.

28°. За даними на малюнку 132 заповніть таблицю 11 за зразком, наведеним у другому її стовпці.

Таблиця 11

Площини	α і β	α і γ	α і δ	β і γ	γ і δ
Спільні точки	*A* і *B*				
Спільна пряма	*AB*				

29°. Проведіть площини α і β, що перетинаються. Позначте точки, які лежать:

1) тільки в площині α; 2) тільки в площині β; 3) у площинах α і β.

Зробіть відповідний запис.

30. Чи завжди можна провести площину через три довільні точки простору? А через чотири? Відповідь поясніть.

31. Якщо три точки кола лежать у площині α, то й усі точки кола лежать у даній площині. Доведіть.

32. **Чи лежать в одній площині всі прямі, що перетинають сторони даного кута? Відповідь поясніть.**

33. Дано два відрізки, що перетинаються: 1) AC і BD; 2) AB і CD. Чи лежать в одній площині прямі BA, DC, DB і CA? Відповідь поясніть.

34. Площини α і β перетинаються по прямій a. Пряма b лежить у площині α. Ці прямі перетинаються в точці B. Чи лежить точка B на прямій a? Відповідь поясніть.

35*. Доведіть, що існують точки поза даною прямою на площині, в якій лежить дана пряма.

36*. Дано чотири точки, що не лежать в одній площині. Скільки площин можна провести через: 1) усі дані точки; 2) трійки даних точок; 3) пари даних точок? Відповідь обґрунтуйте.

37*. Три площини попарно перетинаються по прямих a, b і c. Доведіть: якщо ці площини мають спільну точку A, то прямі a, b і c перетинаються в точці A.

38*. Площина γ перетинає площини α і β по прямих a і b. Доведіть: якщо прямі a і b перетинаються, то точка їх перетину лежить на лінії перетину площин α і β.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

39. Чому штативи багатьох приладів (фотоапарата, теодоліта тощо) виготовляють у формі триноги?

40. Щоб перевірити, чи є дана поверхня плоскою, до неї прикладають лінійку в різних напрямках. Край лінійки, дотикаючись до поверхні у двох точках, має повністю лежати в ній. На чому ґрунтується така перевірка?

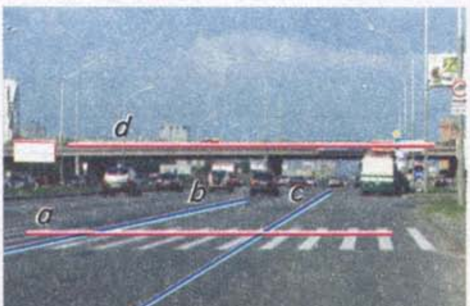
41. Перевіряючи, чи лежать кінці чотирьох ніжок стільця в одній площині, тесля користується двома нитками. Як він це робить?

§ 32 Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Ви знаєте, що в кожній площині дві прямі або мають одну спільну точку, тобто перетинаються, або не мають спільних точок, тобто паралельні.

Яке взаємне розміщення двох прямих у просторі?

Подивіться на малюнок 133. Ви бачите, що пішохідний перехід (пряма a) перетинає дві паралельні смуги руху транспорту (прямі b і c), які проходять під естакадою (пряма d).



Мал. 133

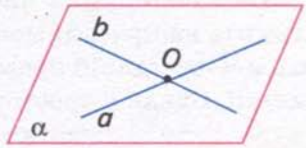
Цей приклад ілюструє три випадки взаємного розміщення двох прямих у просторі:

- дві прямі *перетинаються* (прямі a і b);
- дві прямі *паралельні* (прямі b і c);
- дві прямі *мимобіжні* (прямі b і d).

Розглянемо властивості прямих у кожному з випадків.

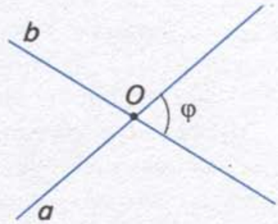
1. Прямі, що перетинаються

За наслідком 1 з аксіом стереометрії, прямі a і b, що перетинаються, лежать у одній площині (мал. 134). Тому в просторі, як і на площині, **прямі, що перетинаються, мають одну спільну точку — точку їх перетину.**



Мал. 134

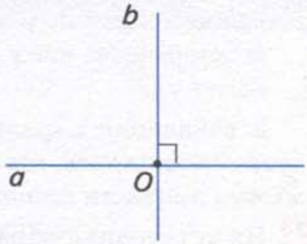
Кутом між прямими a і b вважається гострий кут, якщо прямі утворюють гострі й тупі кути (мал. 135). Якщо φ — кут між прямими a і b, то говорять, що дані прямі *перетинаються під кутом* φ.



Мал. 135

Якщо прямі a і b утворюють прямі кути (мал. 136), то кут між прямими дорівнює 90°. Такі прямі називаються *перпендикулярними*.

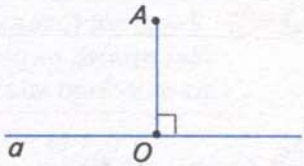
Перпендикулярність двох прямих у просторі позначають так, як у планіметрії: $a \perp b$.



Мал. 136

Промені або відрізки, що лежать на перпендикулярних прямих, також вважають перпендикулярними. *Перпендикуляром* до даної прямої у просторі називається відрізок прямої, перпендикулярної до даної прямої, який має одним із своїх кінців точку їх перетину. На малюнку 137 відрізок AO є перпендикуляром, проведеним з точки A до прямої a, точка O — основа перпендикуляра. Перпендикуляр AO є найменшим з усіх відрізків, що сполучають точку A з точками прямої a.

Відстанню від точки до прямої називається довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної прямої.



Мал. 137

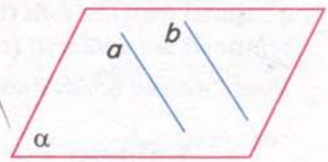
На малюнку 137 відстань від точки A до прямої a дорівнює довжині перпендикуляра AO.

2. Паралельні прямі

З курсу планіметрії ви знаєте, що на площині паралельними називаються дві прямі, які не перетинаються. Спробуйте дати відповідне означення для простору та порівняйте його з наведеним у підручнику.

Дві прямі у просторі, що лежать в одній площині й не перетинаються, називаються *паралельними*.

За означенням, паралельні прямі не мають спільних точок (мал. 138).



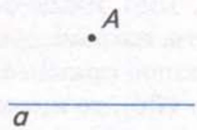
Мал. 138

Паралельність двох прямих у просторі позначають як у планіметрії: $a \| b$.

Ви знаєте, що в площині через точку, яка не лежить на прямій, можна провести єдину пряму, паралельну даній прямій. Це твердження було прийнято як аксіому в планіметрії. Однак у просторі це твердження потребує доведення.

Теорема (основна властивість паралельних прямих у просторі)
Через точку, яка не лежить на прямій, у просторі можна провести пряму, паралельну даній прямій, і до того ж тільки одну.

Дано: пряма a, точка A, що не лежить на прямій a (мал. 139).

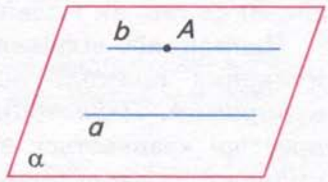


Мал. 139

Довести: існує пряма $b \| a$ і до того ж тільки одна.

Доведення. За наслідком 1 з аксіом стереометрії, через пряму a і точку A можна провести площину α і до того ж тільки одну.

У площині α, за аксіомою паралельних прямих, через точку A можна провести пряму b, паралельну прямій a, і до того ж тільки одну (мал. 140). Отже, у просторі через точку A можна провести тільки одну пряму $b \| a$.



Мал. 140

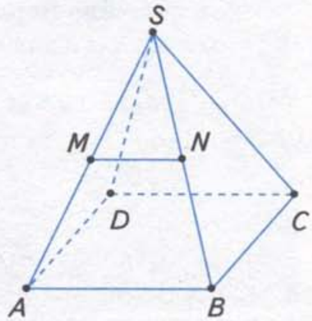
З означення паралельних прямих і доведеної теореми випливає, що **через дві паралельні прямі можна провести площину і до того ж тільки одну.**

Як установити паралельність двох прямих у просторі? Відповідь дає наступна теорема, яку приймемо без доведення.

Теорема (ознака паралельності прямих)
Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.

Задача. MN — середня лінія бічної грані SAB правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ (мал. 141). Доведіть, що $MN \| CD$.

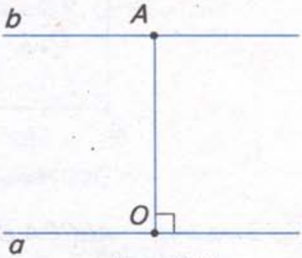
Розв'язання. Бічними гранями даної піраміди є трикутники. Тому в ΔSAB, за властивістю середньої лінії трикутника, $MN \| AB$. В основі даної піраміди лежить квадрат $ABCD$, тому $AB \| CD$. Отже, за ознакою паралельності прямих, $MN \| CD$.



Мал. 141

Щоб установити паралельність двох прямих, покажіть, що:
- **або існує пряма, якій паралельна кожна з даних прямих,**
- **або відрізки даних прямих є протилежними сторонами паралелограма (чи основами трапеції, чи основою й середньою лінією трикутника тощо).**

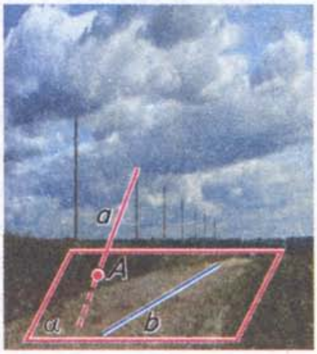
***Відстанню між паралельними прямими* називається довжина перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї прямої до другої прямої.**



Мал. 142

На малюнку 142 відстань між паралельними прямими a і b дорівнює довжині перпендикуляра AO.

3. Мимобіжні прямі



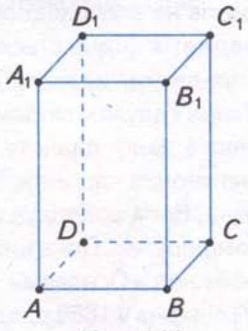
Мал. 143

Подивіться на малюнок 143. Ви бачите, що обірвана лінія електропередачі (пряма a) упирається в землю в точці A. Вона не має спільних точок з дорогою (прямою b). Іншими словами, пряма a перетинає площину в точці A, а пряма b лежить у ній, але не проходить через точку A. Прямі a і b не мають спільних точок, але вони не є паралельними. Отже, через них не можна провести площину. Саме це відрізняє мимобіжні прямі від паралельних прямих.

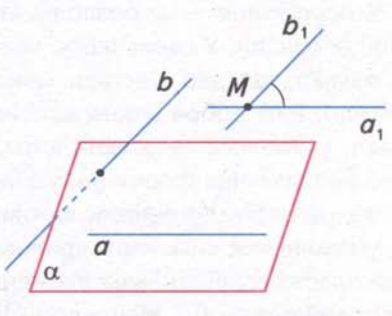
Дві прямі у просторі, що не лежать в одній площині, називаються *мимобіжними*.

На малюнку 144 ви бачите прямокутний паралелепіпед. Прямі, що містять ребра AB і CC_1, — мимобіжні.

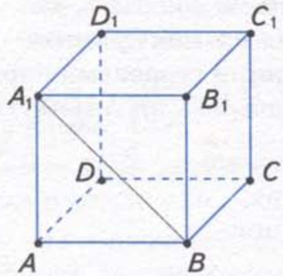
Кутом між мимобіжними прямими називається кут між прямими, що перетинаються і паралельні даним мимобіжним прямим (мал. 145). Цей кут не залежить від вибору прямих, що перетинаються.



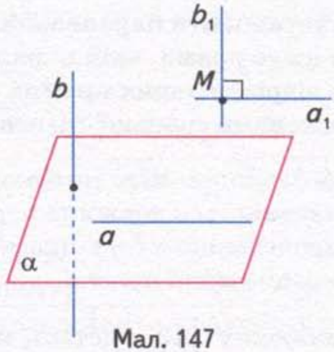
Мал. 144



Мал. 145



Мал. 146



Мал. 147

Задача. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 146). Знайдіть кут між мимобіжними прямими BA_1 і CC_1.

Розв'язання. $CC_1 \| BB_1$, оскільки грань куба — квадрат. Тоді кут між мимобіжними прямими BA_1 і CC_1 дорівнює куту між прямими BA_1 і BB_1, тобто 45°.

Щоб знайти кут між мимобіжними прямими, можна на одній з них взяти довільну точку і через неї провести пряму, паралельну другій прямій.

Якщо кут між мимобіжними прямими дорівнює 90°, то дані прямі вважають перпендикулярними (мал. 147).

Пам'ятайте, що у просторі перпендикулярні прямі можуть або перетинатися, або бути мимобіжними.

Взаємне розміщення двох прямих у просторі подано в таблиці 12.

Таблиця 12

Фігури	Взаємне розміщення		
Дві прямі a і b	Лежать в одній площині	Мають одну спільну точку	Перпендикулярні
			Неперпендикулярні
	Не лежать в одній площині	Не мають спільних точок	Паралельні
			Мимобіжні

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Термін «класифікація» походить від латинських слів *classis* — розряд і *facio* — роблю. *Класифікація* — це розподіл деяких предметів на класи відповідно до найсуттєвішої їх ознаки. У свою чергу, кожен клас предметів поділяється на підкласи. Суттєва ознака, що дає підстави класифікувати предмети, називається *основою класифікації*. Вам добре відомі класифікації в різних галузях людського знання. Наприклад, у зоології — живих істот, які населяють нашу планету, в історії — суспільно-економічних формацій, у фізиці — елементарних частинок тощо.

Наукова класифікація відіграє важливу роль у науці. Вона полегшує процес дослідження, уможливлює виявлення прихованих закономірностей. Показовим є приклад розробки класифікації хімічних елементів. Працюючи над «Основами хімії», видатний російський учений Д. І. Менделєєв (1834 — 1907) відкрив у 1869 р. один з найфундаментальніших законів природи — періодичний закон хімічних елементів. Це дало змогу вченому не лише систематизувати й уточнити дані про відомі на той час хімічні елементи, а й передбачити існування ще трьох елементів. У таблиці, що названа ім'ям Д. І. Менделєєва, вони містяться за номерами 21, 31 і 32. Галій (№ 31) відкрив у 1875 р. французький хімік П. Е. Лекок де Буабодран, скандій (№ 21) — у 1879 р. шведський хімік Л. Ф. Нільсон, германій (№ 32) — у 1886 р. німецький хімік К. О. Вінклер.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Які можливі випадки розміщення двох прямих у просторі?
2. Як у просторі визначають кут між прямими, що перетинаються?
3. Сформулюйте означення відстані від точки до прямої.
4. Які прямі у просторі називаються паралельними? Як їх позначають?
5. Що називається відстанню між паралельними прямими?
6. Дайте означення мимобіжних прямих.
7. Що таке кут між мимобіжними прямими?
8. Поясніть, які прямі у просторі вважаються перпендикулярними.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

42'. Наведіть приклади взаємного розміщення двох прямих на навколишніх предметах.

43'. На малюнках 148, 149 зображено прямокутний паралелепіпед. Назвіть прямі, які мають одну спільну точку з прямою:
1) AB; 2) BC; 3) AC.
У якій точці ці прямі перетинають дану пряму?

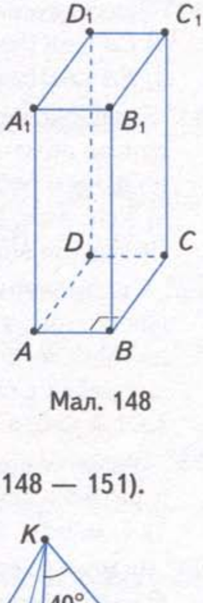
44'. Назвіть перпендикулярні прямі на малюнках 148, 149.

45'. Чи зображено перпендикулярні прямі на малюнках 150, 151?

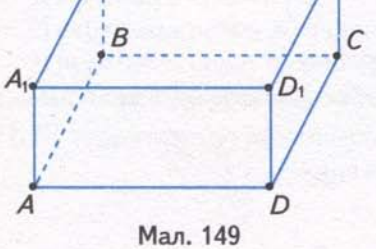
46'. Назвіть пряму і перпендикуляр до неї на малюнках 148 — 151.

47'. Довжина якого відрізка дорівнює відстані від точки A до прямої BC (мал. 148 — 151)?

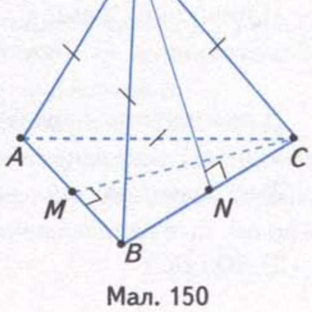
48'. На малюнках назвіть:
1) паралельні прямі (мал. 148, 149); 2) мимобіжні прямі (мал. 148 — 151).
Зробіть відповідний запис.



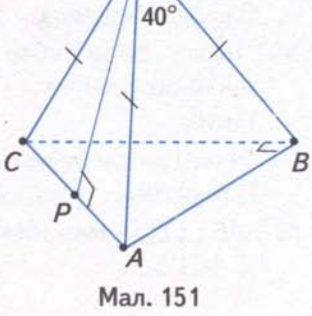
Мал. 148



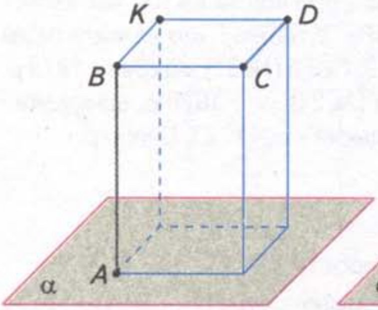
Мал. 149



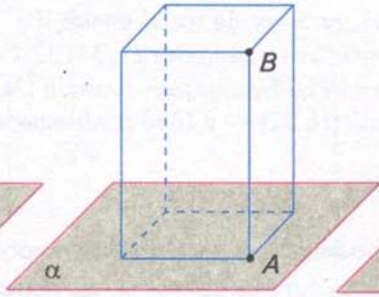
Мал. 150



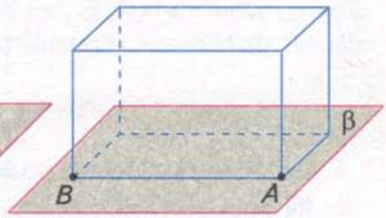
Мал. 151



Мал. 152



Мал. 153



Мал. 154

49°. Накресліть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Запишіть:

1) прямі, що перетинаються і лежать у площині нижньої основи куба;

2) прямі, що перетинаються під прямим кутом і лежать у площині верхньої основи куба;

3) перпендикулярні прямі, що проходять через точку A_1; точку C;

4) пряму і перпендикуляр, який проведено до цієї прямої з точки B; з точки D_1.

50°. Яка градусна міра кута між прямими:

1) CA і AK (мал. 150); 2) CA і AM, якщо $\triangle ABC$ — правильний (мал. 150);

3) KA і AB (мал. 151); 4) KC і KP, якщо $\triangle AKB = \triangle AKC$ (мал. 151)?

51°. Вершина верхньої основи прямокутного паралелепіпеда і ребро його нижньої основи лежать в одній бічній грані. Якою може бути відстань від даної вершини до даного ребра паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють:

1) 3 см, 4 см, 5 см; 2) 5 см, 2 см, 2 см; 3) 8 см, 8 см, 8 см?

Побудуйте відповідне зображення.

52°. У прямокутному паралелепіпеді (мал. 152) ребра AB і CD лежать на мимобіжних прямих, а ребра CD і BK — на паралельних прямих. На малюнках 153, 154 цей паралелепіпед певним чином повернуто. Скопіюйте ці малюнки і позначте на них ребра CD і BK. Яке взаємне розміщення прямих, на яких лежать ребра AB і CD? А ребра CD і BK?

53°. Знайдіть відстані між паралельними ребрами прямокутного паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють:

1) 4 см, 6 см, 9 см; 2) 5 см, 5 см, 5 см; 3) 5 см, 12 см, 12 см.

54°. Як можуть взаємно розміщатися ребра основи й бічні ребра:

1) паралелепіпеда; 2) трикутної піраміди; 3) чотирикутної піраміди?

55°. Назвіть пари ребер многогранника, які лежать на мимобіжних прямих, якщо цей многогранник:

1) куб; 2) прямокутний паралелепіпед.

56°. Назвіть пари ребер піраміди, які лежать на мимобіжних прямих, якщо піраміда:

1) трикутна; 2) чотирикутна.

57°. AB і CD — мимобіжні прямі. Чи є паралельними прямі:

1) AC і BD; 2) AD і BC?

58°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.
Назвіть пари його ребер, що лежать на перпендикулярних прямих, які:
1) перетинаються; 2) є мимобіжними.

59. Точки A і B лежать у площині α, а точка C не належить їй. Знайдіть відстань від точки C до прямої AB, якщо:
1) $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см;
2) $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 9$ см.

60. Пряма a і точка A лежать у площині α. Скільки прямих можна провести через точку A, кожна з яких:
1) перетинає пряму a; 2) паралельна прямій a; 3) мимобіжна з прямою a?
Розгляньте випадки, якщо точка A лежить на прямій a і якщо не належить їй.

61. Пряма a лежить у площині α, пряма b перетинає її, але не перетинає пряму a. Чи можна провести площину через прямі a і b?

62. Скільки пар ребер призми лежать на мимобіжних прямих, якщо призма:
1) трикутна; 2) чотирикутна?

63. Скільки пар ребер піраміди лежать на мимобіжних прямих, якщо піраміда:
1) трикутна; 2) чотирикутна?

64. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.
Знайдіть кут між прямими:
1) DA_1 і BC_1; 2) BA_1 і BC_1; 3) AD і CC_1.

65*. Доведіть: якщо дві прямі не мають спільних точок, то вони або лежать в одній площині, або не лежать в одній площині.

66*. Знайдіть відстань між паралельними ребрами правильної шестикутної піраміди, ребро основи якої дорівнює бічному ребру, що має довжину 5 см.

67*. Скільки пар мимобіжних прямих визначають пари з:
1) чотирьох точок; 2) п'яти точок; 3) n точок?

68*. Знайдіть кут між мимобіжними ребрами правильної трикутної призми, бічне ребро якої вдвічі довше за ребро основи.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

69. Як за допомогою двох ниток установити, чи стоятиме стіл з чотирма ніжками на рівній підлозі стійко?

70. На подвір'ї (площина α) розміщено колодязь (точка A), прокладено доріжку (пряма a) і встановлено стовп з ліхтарем (пряма b). У площині α проведіть пряму, яка:
1) перетинає прямі a і b;
2) перетинає пряму b і паралельна прямій a;
3) перетинає прямі a і b та проходить через точку A.
Сформулюйте відповідні практичні задачі.

71. Як визначити кут між мимобіжними прямими в класній кімнаті?

§33 Взаємне розміщення прямої та площини

Подивіться на малюнок 155. Ви бачите, що на стіні будинку (площина α) проходить труба газопостачання (пряма a), до вікна другого поверху приставлено драбину (пряма b), а поруч з будинком дорожній знак (пряма c). Цей приклад ілюструє три випадки взаємного розміщення прямої та площини:

- пряма *лежить у* площині (пряма a), вона має з площиною безліч спільних точок;
- пряма *перетинає* площину (пряма b), вона має з площиною одну спільну точку;
- пряма *не перетинає* площину (пряма c), вона не має з площиною спільних точок.

Мал. 155

Пряма й площина, які не перетинаються, називаються *паралельними*.

Записуємо: $a \parallel \alpha$ і говоримо: «пряма a паралельна площині α».

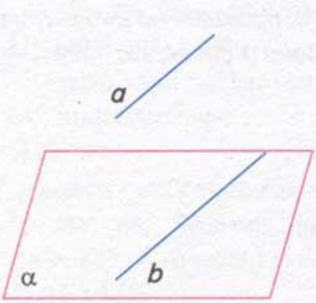
Як установити, що пряма паралельна площині? Відповідь дає така теорема.

Теорема (ознака паралельності прямої та площини)
Якщо пряма, що не лежить у площині, паралельна будь-якій прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині.

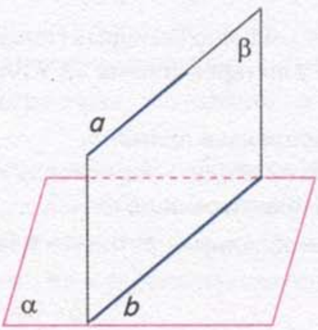
Дано: площина α; пряма a, що не лежить у площині α; пряма b, що лежить у площині α; $a \parallel b$ (мал. 156).

Довести: $a \parallel \alpha$.

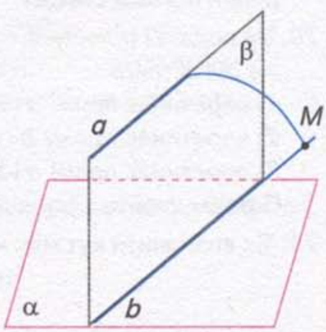
Доведення. Проведемо площину β через паралельні прямі a і b (мал. 157). Площини α і β перетинаються по прямій b. Припустимо, що пряма a перетинає площину α (мал. 158). Тоді вона має перетнути й пряму b. А це неможливо, бо $a \parallel b$ за умовою. Отже, пряма a не перетинає площину α, а тому паралельна площині α.



Мал. 156



Мал. 157

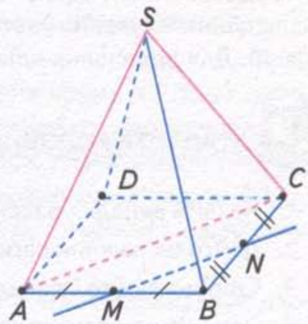


Мал. 158

Спосіб доведення від супротивного полягає в тому, що:
1) робимо припущення, протилежне тому, що треба довести;
2) міркуваннями доходимо висновку, що суперечить або умові твердження, яке доводиться, або одній з аксіом, або доведеній раніше теоремі, або припущенню;
3) робимо висновок — наше припущення неправильне, тому правильним є те, що треба було довести.

Задача. У піраміді $SABCD$ через ребра SA і SC проведено площину (мал. 159). Чи паралельна пряма MN, що проходить через середини ребер AB і BC, цій площині?

Розв'язання. Відрізок MN — середня лінія $\triangle ABC$, який не лежить у площині SAC. Оскільки $MN \parallel AC$, а AC лежить у площині SAC, то пряма MN паралельна площині SAC.



Мал. 159

Щоб установити паралельність прямої та площини, покажіть, що:
або в площині існує пряма, якій паралельна дана пряма,
або відрізки даної прямої та прямої, що лежить у даній площині, є протилежними сторонами паралелограма (чи основами трапеції, чи основою та середньою лінією трикутника тощо), який не лежить у даній площині.

Взаємні розміщення прямої та площини подано в таблиці 13.

Таблиця 13

Фігури	Взаємне розміщення	
Пряма a і площина α	Мають безліч спільних точок	Пряма лежить у площині
	Мають одну спільну точку	Пряма перетинає площину
	Не мають спільних точок	Пряма паралельна площині

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Метод доведення від супротивного ґрунтується на законі виключеного третього: із двох тверджень «T» і «не T» перше є істинним, а друге — хибним, третього не дано. Цей закон сформулював давньогрецький учений Арістотель (384 — 322 рр. до н. е.) у своїй праці «Метафізика».

2. У «Началах» Евкліда (III ст. до н. е.) метод доведення від супротивного застосовується для доведення багатьох теорем, зокрема тих, що встановлюють існування та єдиність певної геометричної фігури. Прикладом такої теореми є основна властивість паралельних прямих у просторі:

Через точку, яка не лежить на прямій, у просторі

$\underbrace{\text{можна провести пряму, паралельну даній прямій}}_{\textit{існування}}$ і $\underbrace{\text{тільки одну}}_{\textit{єдиність}}$.

У «Началах» теореми існування та єдиності відіграють ключову роль. Справа в тому, що давньогрецькі математики не припускали існування фігури незалежно від побудови. За Евклідом, геометрична фігура існує лише з моменту її побудови. Тому доведення існування часто містять правила побудови відповідних фігур чи їх комбінацій. Для доведення єдиності застосовується метод від супротивного.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Назвіть випадки взаємного розміщення прямої та площини.
2. Дайте означення паралельних прямої та площини. Як їх позначають?
3. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямої та площини.
4. Поясніть, у чому полягає спосіб доведення від супротивного.
5. Як можна встановити паралельність прямої та площини?

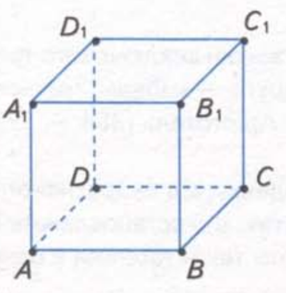
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

72'. Наведіть приклади взаємного розміщення прямої та площини на предметах у класній кімнаті.

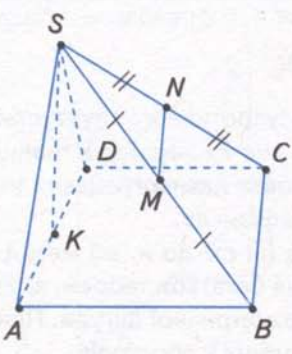
73'. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 160). Яке взаємне розміщення:
1) прямої A_1C_1 і площини ABC; 2) прямої BC_1 і площини $D_1A_1B_1$;
3) прямої AD_1 і площини BCC_1?

74'. На малюнках 161, 162 назвіть:
1) прямі, що лежать у площині ABC; 2) прямі, що перетинають площину ABC;
3) прямі, паралельні площині ABC.
Зробіть відповідні записи.

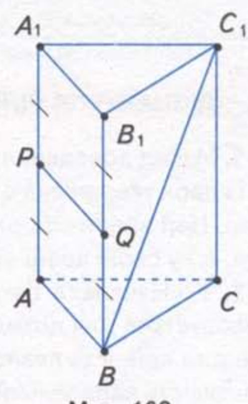
75°. Чому пряма не може перетинати площину більш ніж в одній точці? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 160



Мал. 161



Мал. 162

76°. Пряма a паралельна площині α. Чи існують у даній площині прямі, непаралельні прямій a? Проведіть одну з них.

77°. **Чи правильно, що пряма, паралельна площині, є паралельною будь-якій прямій, що лежить у даній площині?**

78°. Чи може пряма a перетинати площину α, якщо паралельні їй прямі лежать у цій площині?

79°. **Чи правильно, якщо одна з двох паралельних прямих паралельна деякій площині, то й друга пряма паралельна цій площині?**

80°. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведіть пряму KP, яка лежить у площині:

1) грані BCC_1B_1, проходить через середину ребра BB_1 і паралельна площині $A_1B_1C_1$;
2) грані $ABCD$, проходить через середину ребра CD і паралельна площині AA_1D_1;
3) грані ABB_1A_1, проходить через середину ребра A_1B_1 і паралельна площині AA_1D_1.

81°. Через середину бічного ребра чотирикутної піраміди $SABCD$ паралельно площині основи проведено пряму EF. Яка довжина відрізка EF, якщо сторони основи піраміди дорівнюють:

1) 4 см і 6 см; 2) 3 см і 7 см; 3) 2 см і 5 см?

82°. Трикутник ABC не лежить в одній площині з іншим трикутником, але має з ним спільну сторону: 1) AB; 2) BC; 3) AC. Доведіть, що одна із середніх ліній трикутника ABC паралельна площині іншого трикутника.

83°. Площина α паралельна стороні AB $\triangle ABC$ і перетинає сторони AC і BC у точках K і N, $BN = NC$. Доведіть, що $KN \parallel AB$, і знайдіть довжину сторони AB, якщо:
1) $KN = 9$ см, $AC = 24$ см, $KC = 12$ см; 2) $KN = 8$ см, $AC = 18$ см, $KC = 9$ см;
3) $KN = 11$ см, $AC = 16$ см, $KC = 8$ см.

84. **Дві прямі паралельні одній площині. Чи паралельні вони між собою?**

85. Паралельні прямі a і b не лежать у площині α. Якщо $a \parallel \alpha$, то і $b \parallel \alpha$. Доведіть.

86. Пряма a паралельна площині α. Чи правильно, що будь-яка пряма, яка проходить через деяку точку площини α паралельно прямій a, лежить у площині α?

87. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину через ребра AA_1 і CC_1. Чи паралельна вона прямій, що проходить через середини ребер: 1) AB і BC; 2) A_1D_1 і CD? Відповідь обґрунтуйте.

88. В основі піраміди з вершиною S лежить правильний шестикутник $ABCDEF$. Чи можна в грані SAB провести відрізок, паралельний площині:
1) ABC; 2) SBC; 3) SDE; 4) SAF?

89. Чи може площина, яка проходить через середини двох сторін трикутника, перетинати третю його сторону?

90. Дано: 1) квадрат; 2) правильний шестикутник. Площину α проведено паралельно одній зі сторін даного многокутника. Дослідіть, як може розміщатися площина α відносно інших сторін даного многокутника.

91*. Чи можна побудувати площину, яка проходить через дану пряму паралельно:
1) другій даній прямій; 2) двом іншим даним прямим?

92*. Площина α перетинає дві сторони трикутника і ділить їх у відношенні $m : n$. Як розміщена дана площина відносно третьої сторони трикутника, якщо: 1) $m = 1$, $n = 2$; 2) $m = 2$, $n = 3$? Скільки випадків треба розглянути?

93*. Дано довільну піраміду. Доведіть, що прямі, які проходять через середини двох бічних ребер піраміди, паралельні її основі.

94*. Побудуйте лінію перетину площин двох трикутників, у яких одна вершина спільна, а протилежні їй сторони паралельні.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

95. Яке взаємне розміщення моста через річку (прямої a), напрямку її течії (прямої b) і площини водної поверхні (площини α)?

96. Розмічаючи верхній край панелі на стіні, його вирівнюють відносно плінтуса. Чи паралельні край панелі й площина підлоги? Відповідь поясніть.

§34 Взаємне розміщення двох площин

Мал. 163

Подивіться на малюнок 163. Ви бачите журнальний столик, до бічного стояка якого (площина α) кріпиться поличка (площина β) і стільниця (площина γ). Цей приклад ілюструє можливі випадки взаємного розміщення двох площин:

- дві площини *перетинаються* (площини α і β);
- дві площини *паралельні* (площини β і γ).

Розглянемо властивості площин у кожному з випадків.

1. Площини, що перетинаються

Мал. 164

Ви знаєте, за аксіомою 4 стереометрії, якщо дві площини мають спільну точку, то вони *перетинаються* по прямій, яка проходить через цю точку. Наприклад, на малюнку 163 площини α і β перетинаються по прямій a. Кожна точка цієї прямої належить обом площинам.

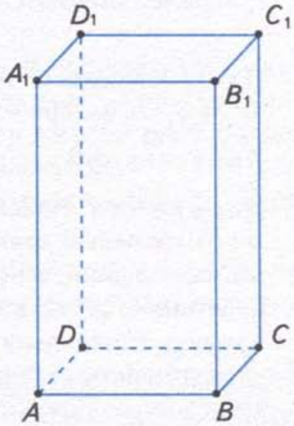
Подивіться на малюнок 164. Ви бачите, що два схили даху будинку (площини α і β) з'єднуються гребенем даху (пряма a). Край одного зі схилів (пряма b, що лежить у площині β) паралельний другому схилу (площині α), а отже, гребінь даху (пряма a) паралельний краю даху (прямій b). Вимощення однієї зі стін будинку (пряма c) паралельне обом схилам даху (площинам α і β), а отже, воно паралельне і гребеню даху (прямій a). Цей приклад ілюструє властивості площин, що перетинаються.

Властивості площин, що перетинаються
1. Якщо одна з двох площин, що перетинаються, проходить через пряму, паралельну другій площині, то пряма їх перетину паралельна даній прямій.
2. Якщо пряма паралельна кожній з двох площин, що перетинаються, то вона паралельна прямій їх перетину.

Наведені властивості площин, що перетинаються, можна вважати ознаками паралельності двох прямих у просторі.

Задача 1. Доведіть, що в прямокутному паралелепіпеді протилежні бічні ребра паралельні.

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — даний прямокутний паралелепіпед (мал. 165). Доведемо, що $AA_1 \parallel CC_1$ і $BB_1 \parallel DD_1$.
У прямокутному паралелепіпеді всі грані є прямокутниками. Тому його бічні ребра, що лежать в одній грані, паралельні одне одному. Звідси $AA_1 \parallel BB_1$ і $AA_1 \parallel DD_1$. Оскільки ребро BB_1 лежить у грані BB_1C_1C, то ребро AA_1 паралельне цій грані. Оскільки ребро DD_1 лежить у грані DD_1C_1C, то ребро AA_1 паралельне цій грані. Дістали, що ребро AA_1 паралельне двом площинам, які перетинаються по прямій CC_1. Отже, $AA_1 \parallel CC_1$. Аналогічними міркуваннями доводимо, що $BB_1 \parallel DD_1$.



Мал. 165

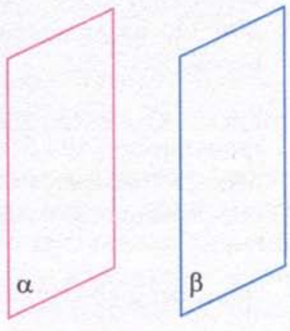
2. Паралельні площини

Дві площини, які не перетинаються, називаються *паралельними*.

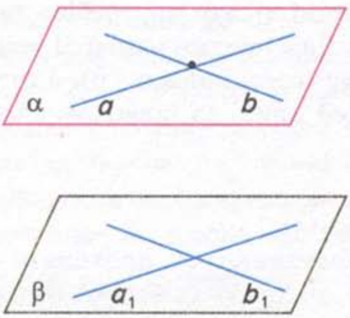
Записуємо (мал. 166): $\alpha \parallel \beta$ і говоримо: «площина α паралельна площині β».

? Як установити, що дві площини паралельні?

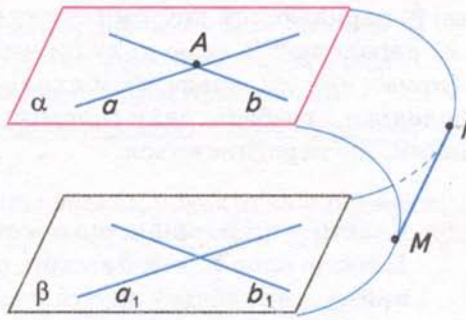
Відповідь дає така теорема.



Мал. 166



Мал. 167



Мал. 168

Теорема (ознака паралельності площин)
Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.

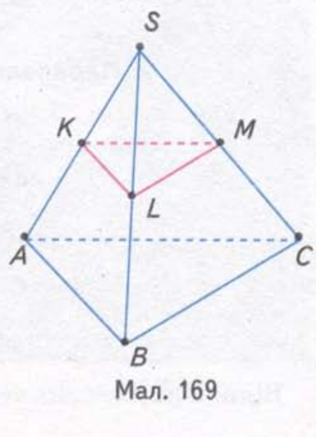
Дано: площини α і β; прямі a і b площини α, що перетинаються; прямі a_1 і b_1 площини β; $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ (мал. 167).

Довести: $\alpha \parallel \beta$.

Доведення. Нехай дані прямі a і b перетинаються в точці A. Оскільки прямі a і b паралельні прямим a_1 і b_1 площини β, то, за ознакою паралельності прямої та площини, $a \parallel \beta$ і $b \parallel \beta$. Припустимо, що площини α і β непаралельні, а перетинаються по деякій прямій MN (мал. 168). Площина α проходить через пряму a, паралельну площині β, і перетинає цю площину по прямій MN. Тоді, за властивістю площин, що перетинаються, $MN \parallel a$. Так само: площина α проходить через пряму b, паралельну площині β, і перетинає цю площину по прямій MN. Тоді $MN \parallel b$. Тобто в площині α через точку A проходять дві прямі a і b, паралельні прямій MN. А це суперечить основній властивості паралельних прямих у просторі. Отже, площини α і β не перетинаються, тобто $\alpha \parallel \beta$.

Задача. Через середини бічних ребер піраміди $SABC$ проведено площину KLM (мал. 169). Доведіть, що ця площина паралельна площині основи піраміди.

Розв'язання. Відрізки KL і LM — середні лінії трикутників SAB і SBC. Звідси $KL \parallel AB$ і $LM \parallel BC$. За ознакою паралельності площин, площина KLM паралельна площині ABC.



Мал. 169

Приймемо без доведення таку теорему.

Теорема (основна властивість паралельних площин)
Через точку, яка не лежить у площині, можна провести площину, паралельну даній площині, й тільки одну.

Взаємне розміщення двох площин наведено в таблиці 14.

Таблиця 14

Фігури	Взаємне розміщення	
Дві площини α і β	Мають спільну точку	Перетинаються
	Не мають спільних точок	Паралельні

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Математики в міркуваннях часто застосовують *аналогію.* У перекладі з грецької мови «аналогія» означає подібність, схожість предметів або явищ за певними властивостями, ознаками, відношеннями, причому ці предмети загалом різні. Багато питань стереометрії вивчають за аналогією з питаннями планіметрії.

Аналогом точки на площині є пряма у просторі, а прямої на площині — площина у просторі.

У таблиці 15 наведено деякі властивості взаємного розміщення точок і прямих на площині та властивості прямих і площин у просторі, що їх сформульовано за аналогією.

Таблиця 15

На площині	У просторі
Якщо дві прямі мають спільну точку, то вони перетинаються в цій точці	Якщо дві площини мають спільну пряму, то вони перетинаються по цій прямій
Через будь-яку точку на площині можна провести безліч прямих	Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин
Через точку, яка не лежить на прямій, можна провести пряму, паралельну даній прямій, і тільки одну	Через пряму, яка не перетинає площину, можна провести площину, паралельну даній площині, й тільки одну
Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою	Дві площини, паралельні третій площині, паралельні між собою

За аналогією іноді можна дістати хибне твердження. Наприклад, якщо в третьому з наведених тверджень для простору замість вимоги «не перетинає площину» вказати вимогу «не лежить у площині», то дістанемо хибне твердження. Справді, пряма, що не лежить у площині, може перетинати цю площину, а через таку пряму провести площину, паралельну даній площині, неможливо. Тому твердження, одержане за аналогією, потребує доведення.

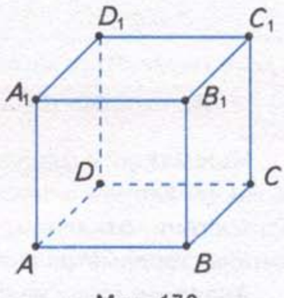
ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Яке взаємне розміщення двох площин?
2. Які властивості мають площини, що перетинаються?
3. Доведіть теорему про властивість площин, що перетинаються.
4. Дайте означення паралельних площин. Як їх позначають?
5. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності площин.
6. Як формулюється основна властивість паралельних площин?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

97'. Наведіть приклади взаємного розміщення двох площин на предметах довкілля.

98'. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 170). По якій прямій перетинаються площини:
1) ABB_1 і ABC; 2) A_1D_1D і ABB_1; 3) BCC_1 і CDD_1?
Яким прямим паралельна лінія їх перетину?



Мал. 170

99'. Які площини паралельні на малюнках 171 — 173? Назвіть пару прямих, що перетинаються і лежать в одній з даних площин, та відповідну пару прямих у другій площині. ($ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед.)

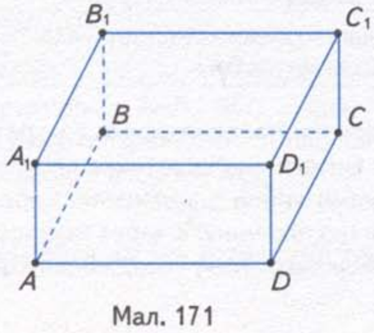
100'. Наведіть приклади з довкілля, що ілюструють ознаку паралельності площин.

101°. Проведіть площини α і β, що перетинаються. У площині α проведіть пряму a. Яке взаємне розміщення прямої a і площини β? Скільки випадків треба розглянути?

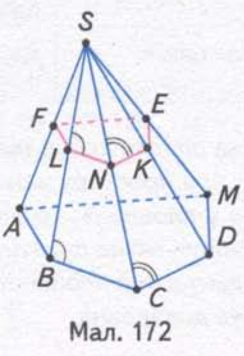
102°. Чи можуть перетинатися дві площини, які паралельні тій самій прямій?

103°. $ABCD$ — паралелограм. Площина α перетинає площину паралелограма по прямій: 1) AB; 2) BC; 3) CD.
Яким сторонам паралелограма паралельна пряма перетину двох даних площин? Відповідь поясніть.

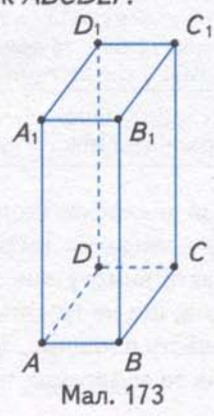
104°. Накресліть піраміду з вершиною S, в основі якої лежить:
1) трикутник ABC; 2) прямокутник $ABCD$; 3) шестикутник $ABCDEF$.



Мал. 171



Мал. 172



Мал. 173

У площині бічної грані SAB проведіть пряму, паралельну площині основи піраміди. Назвіть паралельні прямі на малюнку.

105°. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведіть площину, паралельну грані:
1) $ABCD$; 2) AA_1B_1B; 3) CDD_1C_1.

106°. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
Доведіть паралельність площин:
1) ABC і $A_1B_1C_1$; 2) ABB_1 і DCC_1; 3) B_1C_1C і D_1DA.

107°. Чи є правильним твердження:
1) якщо пряма, що лежить в одній з даних площин, паралельна прямій, яка лежить у другій площині, то дані площини паралельні;
2) якщо дві прямі, що лежать в одній площині, паралельні двом прямим, які лежать у другій площині, то дані площини паралельні?

108°. Чи можуть бути паралельними дві площини, які проходять через непаралельні прямі?

109°. Дві сторони паралелограма паралельні даній площині α. Чи можна стверджувати, що площина паралелограма паралельна площині α?

110°. Скільки площин, паралельних даній площині, можна провести через:
1) точку, що не лежить у даній площині;
2) пряму, що паралельна даній площині?

111. Площини α і β перетинаються. Доведіть, що будь-яка площина γ перетинає хоча б одну з площин α і β.

112. Площина β перетинає деяку пряму, паралельну площині α. Доведіть, що площини α і β перетинаються.

113. Площини α і β паралельні. Точка A лежить у площині α. Доведіть, що будь-яка пряма, яка проходить через точку A паралельно площині β, лежить у площині α.

114. Якщо площина α паралельна площині β, а площина β паралельна площині γ, то площина α паралельна площині γ. Доведіть.

115. Площини α і β паралельні площині γ. Чи можуть площини α і β перетинатися?

116. Площина γ перетинає площини α і β по паралельних прямих. Чи паралельні площини α і β?

117. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть паралельність площин:
1) ACB_1 і A_1C_1D; 2) B_1D_1C і BDA_1.

118. Як провести паралельні площини через дві дані мимобіжні прямі?

119. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Середини відрізків AB, BC, AC, AD, CD і BD позначено відповідно K, L, M, N, E і F. Чи паралельні площини:
1) BCD і KMN; 2) ABD і LME; 3) ACD і KLF?
Відповідь обґрунтуйте.

120*. Дано дві площини, які перетинаються. Чи можна провести площину, що перетинає дві дані площини по паралельних прямих? Скільки таких площин можна провести через дану: 1) точку; 2) пряму, яка паралельна даним площинам; 3) пряму, що паралельна одній з даних площин; 4) пряму, яка перетинає дані площини; 5) пряму, що лежить в одній з даних площин?

121*. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ побудуйте прямі перетину площин:
1) AB_1D_1 і A_1BD; 2) A_1BC і B_1BD; 3) A_1D_1C і AB_1D.

122*. Спільна вершина двох трикутників не лежить у даній площині, а протилежні цій вершині сторони трикутників лежать у даній площині. Побудуйте лінію перетину площин даних трикутників. Скільки випадків треба розглянути?

123*. Через пряму a, що лежить в одній з паралельних площин, проведено площини, які перетинають другу площину по прямих a_1, a_2, a_3, ... Яке взаємне розміщення даних прямих? Відповідь обґрунтуйте.

124*. Скільки пар відповідно паралельних площин можна провести через дві паралельні прямі у просторі?

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

125. Які випадки взаємного розміщення двох площин можна проілюструвати за допомогою зошита?

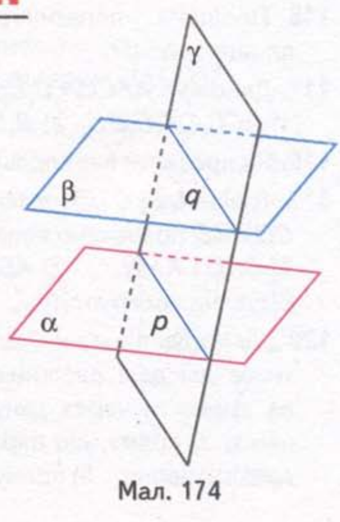
126. Яке взаємне розміщення книжок на полиці, якщо вони щільно прилягають одна до одної? А якщо взяти кілька книжок з полиці?

127. Чи можна перевірити паралельність підлоги і стелі кімнати за допомогою:
1) двох прямих у цих площинах;
2) трьох прямих у цих площинах;
3) чотирьох прямих у цих площинах?
Якщо так, то як саме? Запропонуйте власний спосіб перевірки.

128. Як напрямлені сили, що діють на важелі?

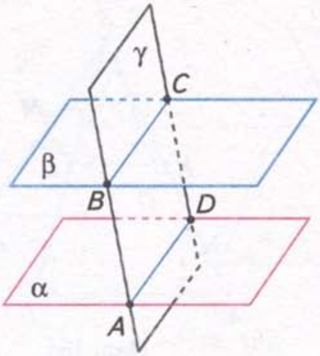
§35 Властивості паралельних площин

Важливі властивості паралельних площин пов'язані з площиною, що їх перетинає. Цю площину називатимемо *січною площиною*. Наприклад, на малюнку 174 ви бачите паралельні площини α і β та січну площину γ. Прямі p і q — прямі перетину паралельних площин січною площиною.

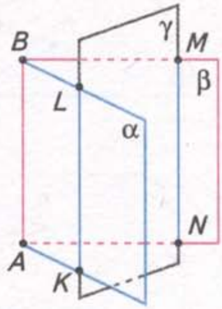


Мал. 174

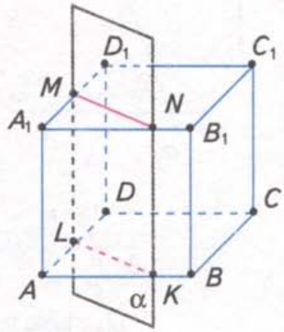
Теорема
(про паралельні площини і січну площину)
Якщо дві паралельні площини перетнути третьою, то прямі перетину будуть паралельними.



Мал. 175



Мал. 176



Мал. 177

Дано: $\alpha \| \beta$, γ — січна площина;
AD — пряма перетину площин α і γ;
BC — пряма перетину площин β і γ (мал. 175).

Довести: $AD \| BC$.

Доведення. За умовою прямі AD і BC лежать у січній площині γ. Вони не можуть перетинатися, бо інакше перетиналися б площини α і β, а це суперечить умові.

Отже, $AD \| BC$.

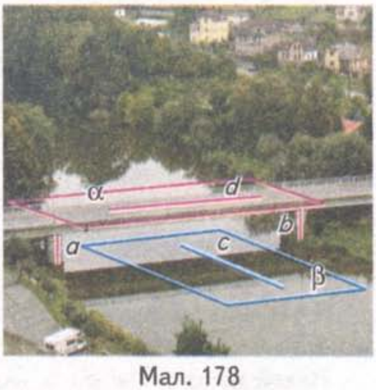
? Чи є правильним твердження, обернене до теореми про паралельні площини і січну площину? Ні. З того, що прямі перетину двох даних площин третьою паралельні, не випливає, що дані площини паралельні (мал. 176).

Задача 1. Доведіть, що **січна площина перетинає протилежні грані куба по паралельних прямих.**

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — даний куб, січна площина α перетинає його грані ABC і $A_1B_1C_1$ по прямих KL і MN (мал. 177). Доведемо, що $KL \| MN$. Оскільки гранями куба є квадрати, то $AB \| A_1B_1$ і $BC \| B_1C_1$. Тоді за ознакою паралельності площин площини граней ABC і $A_1B_1C_1$ паралельні. За теоремою про паралельні площини і січну площину прямі KL і MN перетину площин основ куба січною площиною паралельні.

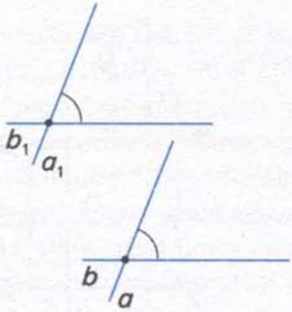
Пам'ятайте, що:

- **в прямокутному паралелепіпеді протилежні грані попарно паралельні;**
- **січна площина перетинає паралельні грані многогранника по паралельних прямих.**

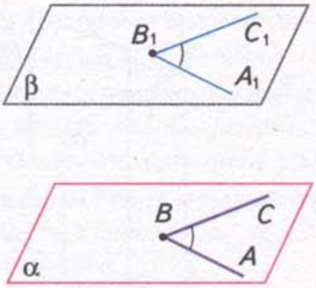


Мал. 178

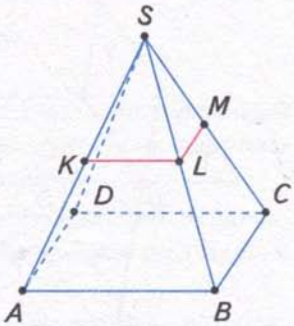
Подивіться на малюнок 178. Поверхня моста (площина α) паралельна поверхні річки (площині β). Частини його опор, що виступають над водою (відрізки паралельних прямих a і b), є рівними. Пряма c (напрям течії річки) і пряма d (лінія руху на мосту) є мимобіжними. Через кожну з них проходить єдина



Мал. 179



Мал. 180



Мал. 181

площина, що паралельна другій прямій. Ці приклади ілюструють такі властивості паралельних площин.

Властивості паралельних площин

1. **Паралельні площини відтинають від паралельних прямих рівні відрізки.**
2. **Через кожну з двох мимобіжних прямих проходить єдина площина, паралельна другій мимобіжній прямій, причому ці дві площини паралельні.**

Спираючись на властивості паралельних площин, можна довести властивості прямих, що перетинаються. Сформулюємо їх.

1. **Якщо дві прямі, що перетинаються, відповідно паралельні двом іншим прямим, що перетинаються, то кут між першими прямими дорівнює куту між другими** (мал. 179).
2. **Дві прямі, паралельні перпендикулярним прямим, перпендикулярні одна до одної.**
3. **Два кути з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами рівні** (мал. 180).

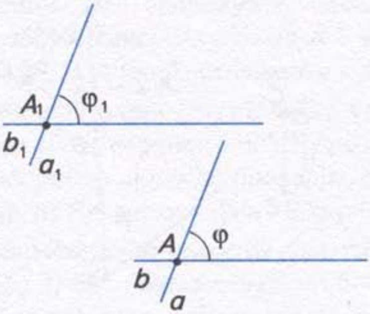
Задача 2. У бічних гранях SAB і SBC правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ проведено середні лінії KL і LM (мал. 181). Яка градусна міра кута KLM?

Розв'язання. Оскільки KL і LM — середні лінії трикутників SAB і SBC, то $KL \parallel AB$ і $LM \parallel BC$. Кути KLM і ABC мають однаково напрямлені сторони, бо лежать у відповідних площинах по один бік від прямої SB. Тому за властивістю кутів з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами $\angle KLM = \angle ABC$. За умовою дана піраміда — правильна, тому $\angle ABC = 90°$. Отже, $\angle KLM = 90°$.

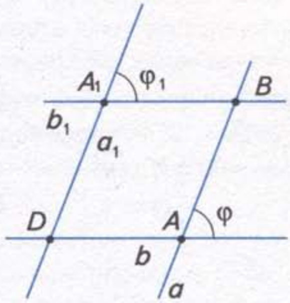
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

У вас може виникнути запитання: *Як довести властивість кутів між прямими, що перетинаються*? Поміркуємо.

Нехай дано прямі a і b, які перетинаються в точці A, і прямі a_1 і b_1, що перети-



Мал. 182

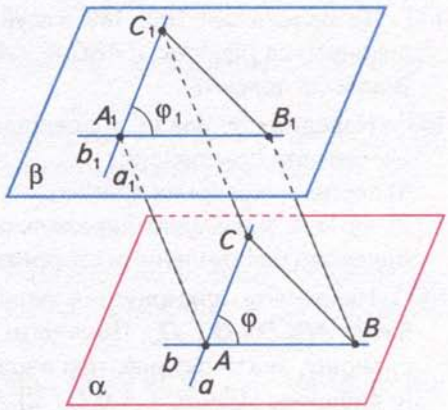


Мал. 183

наються в точці A_1; $a \| a_1$, $b \| b_1$ (мал. 182). Позначимо: φ — кут між прямими a і b, φ_1 — кут між прямими a_1 і b_1. Доведемо, що $\varphi = \varphi_1$.

Якщо прямі a, b, a_1 і b_1 лежать в одній площині, то пряма a перетинається з прямою b_1, а пряма b — з прямою a_1 (мал. 183). Позначимо точки їх перетину B і D. Чотирикутник ABA_1D лежить у даній площині. Він є паралелограмом, оскільки в нього протилежні сторони попарно паралельні. Тому $\varphi = \varphi_1$.

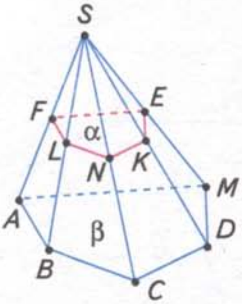
Нехай прямі a, b, a_1 і b_1 не лежать в одній площині. Через прямі a і b проведемо площину α, а через прямі a_1 і b_1 — площину β. За ознакою паралельності площин $\alpha \| \beta$. Відкладемо на даних прямих рівні відрізки $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (мал. 184) і проведемо прямі AA_1, BB_1, CC_1, BC і B_1C_1. Чотирикутник ABB_1A_1 — паралелограм, оскільки протилежні сторони AB і A_1B_1 рівні й паралельні. Тому відрізки AA_1 і BB_1 також рівні й паралельні. Аналогічно рівні й паралельні відрізки AA_1 і CC_1. Звідси $BB_1 = CC_1$, $BB_1 \| CC_1$ і чотирикутник BB_1C_1C — паралелограм. Тому $BC = B_1C_1$ і $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за трьома сторонами, звідси $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Оскільки $\angle BAC = \varphi$ і $\angle B_1A_1C_1 = \varphi_1$, то $\varphi = \varphi_1$.



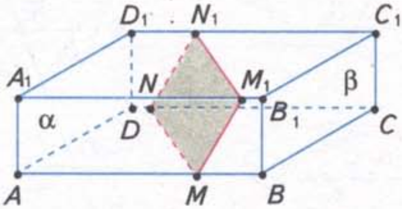
Мал. 184

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

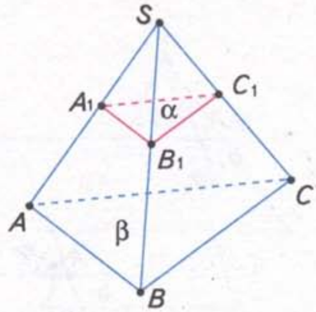
1. Поясніть, що таке січна площина для двох даних площин.
2. Сформулюйте і доведіть теорему про паралельні площини та січну площину.
3. Назвіть властивості паралельних площин.
4. Як формулюється властивість кутів між прямими, що перетинаються?
5. Назвіть властивість перпендикулярних прямих у просторі.
6. Яку властивість мають кути з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами?



Мал. 185



Мал. 186



Мал. 187

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

129'. На малюнках 185 — 187 назвіть січну площину та прямі її перетину з паралельними площинами α і β. Яке взаємне розміщення прямих перетину? Скільки січних площин для даних паралельних площин зображено на малюнках?

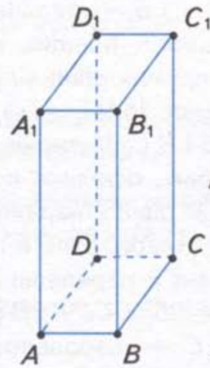
130'. Наведіть приклади паралельних площин і січної площини на предметах у класній кімнаті.

131'. За малюнками 188, 189 з'ясуйте, чи виконується рівність: $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Відповідь поясніть.

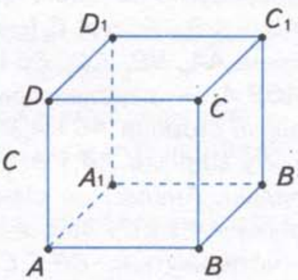
132'. Наведіть приклади з довкілля, що ілюструють властивість:

1) перпендикулярних прямих;

2) кутів з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами.



Мал. 188



Мал. 189

133°. Накресліть прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведіть січну площину, яка перетинає такі паралельні площини: 1) ABC і $A_1B_1C_1$; 2) ADD_1 і BCC_1; 3) ABB_1 і C_1CD. Чи перетинає побудована січна площина іншу пару паралельних площин? Назвіть прямі перетину січної площини з паралельними площинами. Яке їх взаємне розміщення? Зробіть відповідний запис.

134°. Паралельні площини α і β відтинають на сторонах BA і BC кута ABC відрізки: $BM = MM_1$ і $BN = NN_1$. Заповніть таблицю 16.

Таблиця 16

BM	5			10		13
BM_1		7	12		3	
BN	12		5			21
BN_1		7		18	5	
MN	13		9	17		20
M_1N_1		10			4	

135°. Накресліть: 1) прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$; 2) куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ребрі AB позначте точку K і через неї проведіть січну площину паралельно грані AA_1D_1D. Який чотирикутник утворився в перерізі? Відповідь поясніть.

136°. Накресліть трикутну піраміду, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник з кутом: 1) при вершині 110°; 2) при основі 50°; 3) при вершині 30°. Через середини бічних ребер піраміди проведіть січну площину. Який многокутник утворився в перерізі? Які в нього кути? Відповідь поясніть.

137°. Накресліть чотирикутну піраміду, в основі якої лежить ромб з кутом: 1) 100°; 2) 40°; 3) 60°. Через середини бічних ребер піраміди проведіть січну площину. Який многокутник утворився в перерізі? Які в нього кути? Відповідь поясніть.

138. Дві сторони паралелограма паралельні площині α. Чи можна стверджувати, що площина паралелограма паралельна площині α?

139. Дві сторони трикутника паралельні площині α. Доведіть, що й третя сторона трикутника паралельна площині α.

140. У кубі з ребром a проведіть площину через: 1) середини двох суміжних сторін верхньої основи і центр нижньої; 2) середини двох суміжних сторін бічної грані та центр протилежної бічної грані. Знайдіть периметр і площу перерізу.

141. Паралельні площини відтинають від двох паралельних прямих рівні відрізки. Доведіть.

142. Чи можуть паралельні площини відтинати рівні відрізки від непаралельних прямих? Відповідь обґрунтуйте.

143. Паралельні площини α і β перетинають сторону AB кута BAC у точках M і M_1, а сторону AC — відповідно в точках N і N_1. Знайдіть довжину відрізка MN, якщо:
1) $AM = 12$ см, $AM_1 = 18$ см, $M_1N_1 = 54$ см;
2) $AM = 24$ см, $AM_1 = 18$ см, $M_1N_1 = 54$ см.

144. Відрізки AA_1, BB_1 і CC_1, які не лежать в одній площині, мають спільну середину. Доведіть, що площини ABC і $A_1B_1C_1$ паралельні. Чому дорівнюють кути $\triangle A_1B_1C_1$, якщо:
1) $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$; 2) $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 70°$?

145. Точка D не лежить у площині трикутника ABC, точки M, N і P — середини відрізків DA, DB, DC. Доведіть, що площини ABC і MNP паралельні. Чому дорівнюють кути $\triangle ABC$, якщо:
1) $\angle M = 120°$, $\angle N = 25°$, $\angle P = 35°$; 2) $\angle M = 40°$, $\angle N = 40°$, $\angle P = 80°$?

146*. Доведіть, що три прямі, які перетинають кілька паралельних площин, визначають на кожній з них вершини трикутників, що є:
1) рівними, якщо дані прямі паралельні;
2) подібними, якщо дані прямі перетинаються в одній точці.

147*. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площини: 1) A_1BD і B_1CD_1; 2) AB_1D_1 і BDC_1. Доведіть, що дані площини ділять відрізок AC_1 (для другого випадку A_1C) на три рівні частини.

148*. Дано дві паралельні площини і точку O, що не належить їм. З точки O проведено три прямі, які перетинають дані площини відповідно в точках A, B, C і A_1, B_1, C_1. $OA = m$, $AA_1 = n$, $OA_1 = OA + AA_1$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $B_1C_1 = d$.
Знайдіть: 1) A_1B_1; 2) площу $\triangle A_1B_1C_1$.

149*. Два рівних рівносторонніх трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розміщені у просторі так, що сторони їх відповідних кутів паралельні й однаково напрямлені. BE і CD — висоти $\triangle ABC$, C_1D_1 — висота $\triangle A_1B_1C_1$. Знайдіть кути між прямими:
1) AC і B_1C_1; 2) AC і A_1B_1; 3) CD і A_1B_1;
4) AC і C_1D_1; 5) BE і B_1C_1; 6) BE і C_1D_1.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

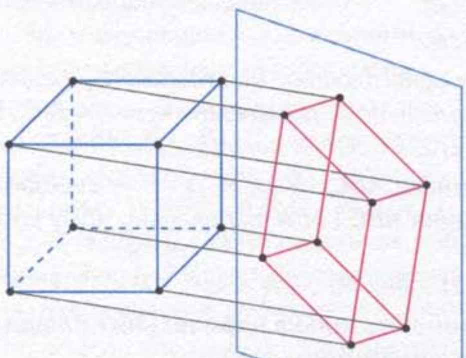
150. Чому можна одночасно висунути усі шухляди тумбочки?

151. Поясніть, як розмітити на стінках шафи місця для кріплення поличок.

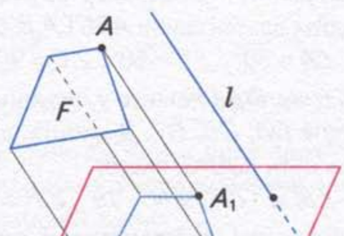
152. Як перевірити за допомогою косинця, чи правильно навісили двері? На якій властивості ґрунтується така перевірка?

§36 Паралельне проектування

Ви вже знаєте, що для вивчення просторових фігур користуються макетами цих фігур або їх зображеннями на площині. На малюнку 190 ви бачите каркасний макет куба, який розміщено перед екраном (стіною, аркушем паперу), що його освітлює сонце. Макет куба дає на екрані тінь, яка є зображенням куба на площині. Якщо сонячні промені вважати паралельними прямими, то можна сказати, що зображення куба дістали за допомогою *паралельного проектування*.



Мал. 190



Мал. 191

Подивіться на малюнок 191. Пряма l перетинає площину α. Через точку A фігури F проведено пряму, яка паралельна прямій l і перетинає площину α в точці A_1. Ця точка є *зображенням* точки A в площині α. Побудувавши в такий спосіб зображення кожної точки фігури F, дістали фігуру F_1 — зображення фігури F у площині α.

Фігура, що її проектували, називається *оригіналом*. Одержане зображення фігури називається *паралельною проекцією* цієї фігури. Пряма l задає *напрямок проектування*. Прямі, паралельні прямій l, називаються *проектувальними прямими*, а площина α — *площиною проекцій*.

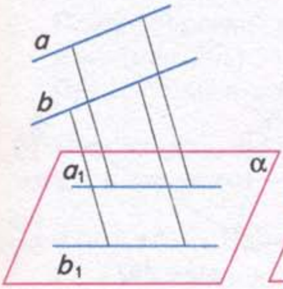
У паралельному проектуванні прямі й відрізки, що проектуються, вважають непаралельними напрямку проектування, якщо це окремо не зазначено.

Наведемо основні властивості паралельного проектування.

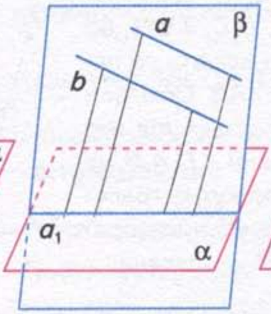
1. Паралельною проекцією точки є точка.

2. Паралельною проекцією прямої є пряма.

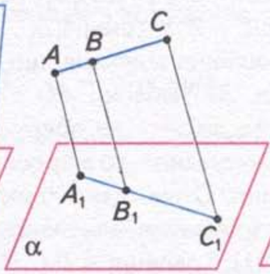
3. Проекції паралельних прямих паралельні між собою (мал. 192) **або збігаються, якщо дані прямі лежать у площині, паралельній напрямку проектування** (мал. 193).



Мал. 192

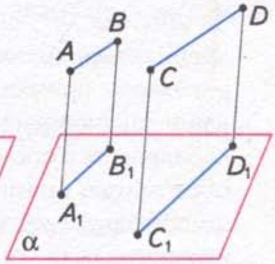


Мал. 193



$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{1}{2}$$

Мал. 194



$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{1}{2}$$

Мал. 195

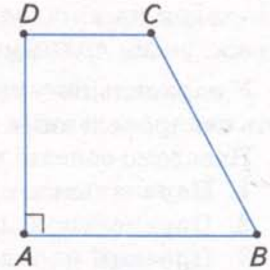
4. Якщо відрізки лежать на одній прямій (мал. 194) **або на паралельних прямих** (мал. 195), **то відношення їх проекцій дорівнює відношенню самих відрізків.**

З наведених властивостей випливає, що під час паралельного проектування деякі властивості фігур зберігаються, а деякі — ні (табл. 17).

Таблиця 17

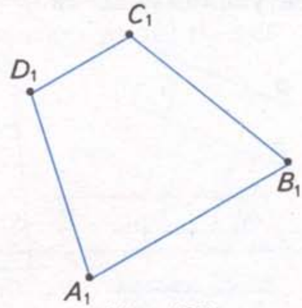
Властивості фігур під час паралельного проектування	
ЗБЕРІГАЮТЬСЯ	**НЕ ЗБЕРІГАЮТЬСЯ**
1) **Належність фігури до свого класу фігур** (точку зображають точкою, пряму — прямою, відрізок — відрізком, трикутник — трикутником тощо);	1) **Довжина відрізка**;
2) **належність точок прямій**;	2) **міра кута** (зокрема, прямий кут зображають довільним кутом);
3) **порядок розміщення точок на прямій** (внутрішню точку відрізка зображають внутрішньою точкою його проекції);	3) **перпендикулярність прямих**;
4) **паралельність прямих**;	4) **рівність (пропорційність) кутів**;
5) **рівність (пропорційність) відрізків, що лежать на паралельних прямих або на одній прямій**	5) **рівність (пропорційність) відрізків, які лежать на прямих, що перетинаються**

Задача 1. Побудуйте паралельну проекцію прямокутної трапеції $ABCD$, у якій $AD \perp AB$, $AB : DC = 2 : 1$.



Мал. 196

Розв'язання. Спочатку побудуємо оригінал даної трапеції (мал. 196). Спираючись на нього, з'ясуємо властивості шуканої проекції. Трапеція є чотирикутником, тому її проекція також є чотирикутником. Позначимо його $A_1B_1C_1D_1$. У даній трапеції: основи AB і DC паралельні, тому їх проекції A_1B_1 і D_1C_1 також паралельні; бічні сторони AD і BC непаралельні, тому їх проекції A_1D_1 і B_1C_1 також не паралельні. Отже, чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ — трапеція. За умовою, $AB : DC = 2 : 1$, тому $A_1B_1 : D_1C_1 = 2 : 1$, бо зберігається відношення відрізків, що лежать на паралельних прямих. За умовою, $AD \perp AB$. Оскільки перпендикулярність прямих не зберігається під час паралельного проектування, то в проекції $\angle D_1A_1B_1$ не обов'язково прямий. Отже, дана прямокутна трапеція зображається трапецією, але не обов'язково прямокутною (мал. 197). Трапеція $A_1B_1C_1D_1$ — шукана.



Мал. 197

Щоб побудувати паралельну проекцію плоскої фігури, спочатку побудуйте її оригінал. Потім, спираючись на оригінал, виділіть властивості фігури:

- **які зберігаються під час паралельного проектування (на них треба спиратися, будуючи проекцію);**
- **які не зберігаються під час паралельного проектування (їх не можна використовувати, будуючи проекцію).**

Як побудувати паралельну проекцію многогранника? Для цього треба з'ясувати, як зображатимуться усі його грані, потім послідовно виконати побудову проекції кожної з них. Розглянемо приклади.

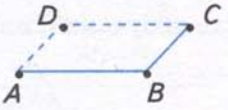
Задача 2. Побудуйте зображення прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Розв'язання. Побудову прямокутного паралелепіпеда виконуємо в три етапи: 1) будуємо зображення однієї з основ; 2) проводимо бічні ребра; 3) будуємо зображення другої основи.

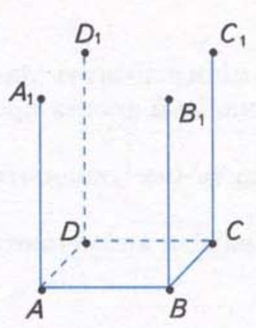
1. В основі прямокутного паралелепіпеда лежить прямокутник. Оскільки протилежні сторони прямокутника попарно паралельні й рівні, то проекцією основи є паралелограм (мал. 198).

2. Бічними гранями прямокутного паралелепіпеда є прямокутники, отже, їх проекціями є паралелограми. Тому проекції бічних ребер є рівними паралельними відрізками. Проводимо їх паралельно вертикальному краю аркуша (мал. 199).

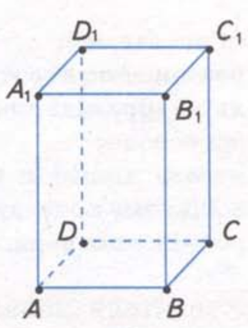
3. Будуючи зображення другої основи даного паралелепіпеда, враховуємо те, що його основи — рівні прямокутники, які лежать у паралельних площинах.



Мал. 198



Мал. 199



Мал. 200

Отже, їх проекції є рівними прямокутниками з відповідно паралельними сторонами (мал. 200).

Прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — шуканий.

Пам'ятайте, що зображуючи многогранник, видимі лінії робимо суцільними, а невидимі — штриховими.

Задача 3. Побудуйте зображення правильної трикутної піраміди *SABC*.

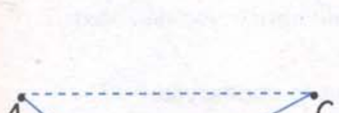
Розв'язання. Побудову піраміди виконуємо в три етапи: 1) будуємо зображення основи; 2) з'ясовуємо, де має розміщатися вершина піраміди; 3) проводимо бічні ребра.

1. В основі даної піраміди лежить правильний трикутник. Його проекцією є довільний трикутник *ABC* (мал. 201), оскільки рівність сторін правильного трикутника та рівність його кутів не зберігаються під час проектування.

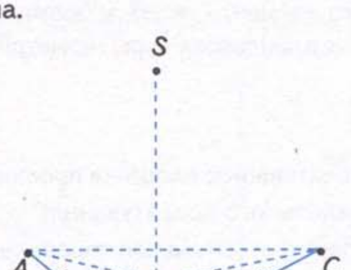
2. Вершина правильної піраміди лежить на прямій, що містить висоту піраміди. Висота даної піраміди проходить через точку *O* перетину медіан її основи. Проводимо висоту паралельно вертикальному краю аркуша. На цій прямій позначаємо довільну точку *S* — вершину піраміди (мал. 202).

3. Бічними гранями правильної піраміди є рівні рівнобедрені трикутники. Проте на зображенні рівність бічних сторін цих трикутників не зберігається. Тому проекції бічних ребер піраміди — це відрізки довільної довжини, що сполучають вершину піраміди з вершинами її основи (мал. 203).

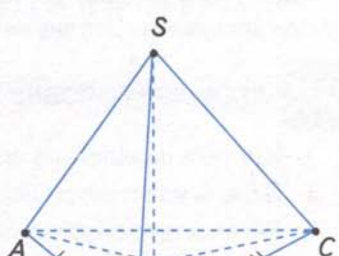
Піраміда *SABC* — шукана.



Мал. 201



Мал. 202



Мал. 203

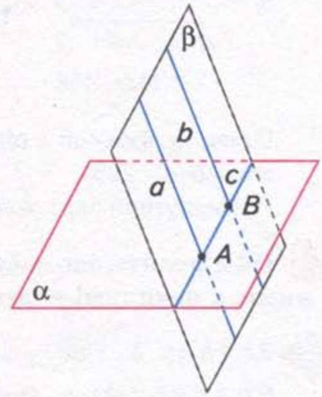
Пам'ятайте, що:

- **розміщення висоти піраміди залежить від властивостей піраміди;**
- **якщо піраміда правильна, то її висота проходить через центр многокутника основи;**
- **висоту піраміди проводять (чи уявляють проведеною) паралельно вертикальному краю аркуша;**
- **розміщення вершини піраміди визначають після побудови її висоти.**

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Побудова зображень просторових фігур під час паралельного проектування ґрунтується на такій властивості паралельних прямих: **якщо одна з паралельних прямих перетинає площину, то й друга пряма перетинає цю площину.** Доведемо цю властивість.

Нехай a і b — паралельні прямі, a перетинає площину α в точці A (мал. 204). Доведемо, що і пряма b перетинає площину α.



Мал. 204

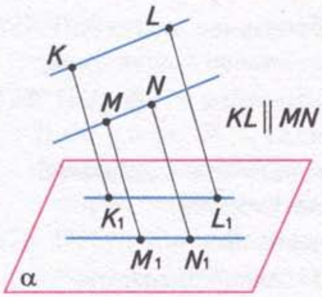
Через паралельні прямі a і b проведемо площину β. Оскільки пряма a перетинає площину α в точці A, то площини α і β перетинаються по прямій c, яка проходить через точку A. У площині β пряма c перетинає пряму a, отже, вона перетинає і пряму b. Позначимо B як точку перетину прямих b і c. Точка B належить прямій перетину площин α і β, отже, вона лежить у площині α. Дістали, що пряма b має лише одну спільну точку B з площиною α. У противному випадку пряма b збігалася б з прямою c, що неможливо. Отже, пряма b перетинає площину α.

2. Значний внесок у розвиток теорії зображень просторових фігур на площині зробив російський геометр М. Ф. Четверухін (1891 — 1974). Він обґрунтував можливість побудови наочного зображення просторових фігур простішими способами, ніж це робиться в аксонометрії. Завдяки досягненням ученого елементи теорії зображень стали доступними для вивчення в шкільному курсі геометрії.

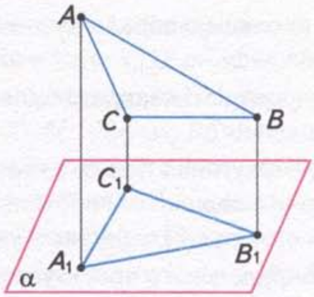

М. Ф. Четверухін

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

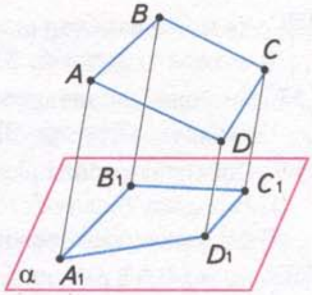
1. Що таке паралельне проектування; площина проекцій; проектувальні прямі?
2. Назвіть властивості паралельного проектування.
3. Які властивості фігур зберігаються під час паралельного проектування?
4. Назвіть властивості фігур, які не зберігаються під час паралельного проектування.
5. Якою фігурою може бути паралельна проекція трикутника; паралелограма; прямокутника; трапеції?
6. Поясніть, як побудувати зображення прямокутного паралелепіпеда; піраміди.



Мал. 205



Мал. 206



Мал. 207

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

153'. На малюнках 205 — 207 зображено фігуру-оригінал та її паралельну проекцію в площині α. Назвіть: 1) фігуру, яку проектували; 2) проектувальні прямі; 3) паралельну проекцію даної фігури.

154'. Чи може чотирикутник бути проекцією трикутника?

155'. Чи може трикутник бути проекцією чотирикутника?

156'. На промені AO відкладіть відрізки: 1) $AB = 2$ см і $BC = 3$ см; 2) $AB = 2$ см і $BC = 1$ см; 2) $AB = 3$ см і $BC = 1{,}5$ см. Чому дорівнює відношення їх проекцій?

157'. Відрізки AB і CD лежать на паралельних прямих. Як відносяться їх проекції, якщо: 1) $AB : CD = 3 : 4$; 2) $AB : CD = 7 : 1$; 3) $AB : CD = 4 : 9$?

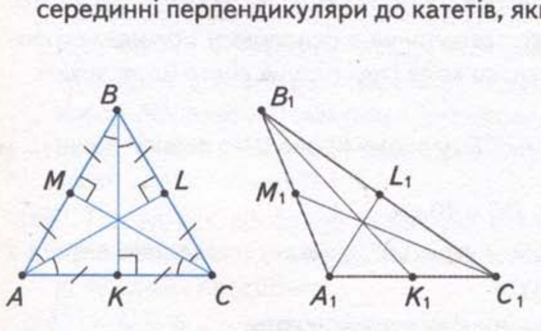
158°. На малюнках 208, 209 зображено $\triangle ABC$ та його паралельну проекцію $\triangle A_1B_1C_1$. Назвіть властивості $\triangle ABC$, які під час проектування: 1) збереглися; 2) не збереглися.

Пам'ятайте, що в прямокутному трикутнику основа висоти, проведеної до гіпотенузи, ділить гіпотенузу на відрізки, які відносяться, як квадрати катетів (мал. 209).

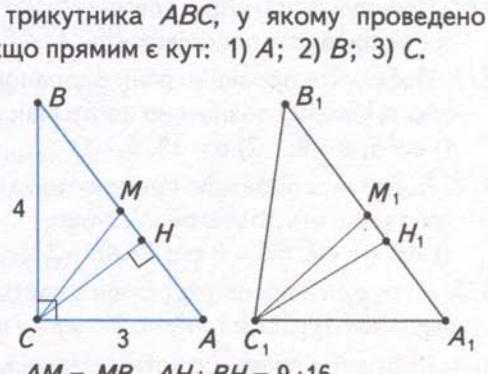
159°. Побудуйте проекцію рівнобедреного трикутника ABC, у якому проведено: 1) медіану до бічної сторони; 2) висоту до основи; 3) бісектрису кута при вершині.

160°. Побудуйте проекцію рівнобедреного прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C, у якому проведено: 1) медіани; 2) середні лінії; 3) висоту до гіпотенузи.

161°. Побудуйте проекцію прямокутного трикутника ABC, у якому проведено серединні перпендикуляри до катетів, якщо прямим є кут: 1) A; 2) B; 3) C.



Мал. 208



$AM = MB, \; AH : BH = 9 : 16$

Мал. 209

162°. Чи може паралельною проекцією паралелограма бути:
1) квадрат; 2) ромб; 3) трапеція?

163°. Чи може паралельною проекцією квадрата бути:
1) квадрат; 2) ромб; 3) трапеція?

164°. Побудуйте проекцію прямокутника *ABCD*, у якому сполучено відрізками:
1) середину більшої сторони з вершинами протилежної сторони;
2) середини протилежних сторін; 3) середини суміжних сторін.

165°. Чи можна в результаті паралельного проектування трапеції одержати:
1) трикутник; 2) ромб; 3) трапецію? Відповідь поясніть.

166°. Побудуйте проекцію рівнобічної трапеції *ABCD*, у якій проведено середню лінію, паралельну стороні: 1) *AB*; 2) *BC*; 3) *CD*.

167°. Побудуйте зображення:
1) куба; 2) прямокутного паралелепіпеда.

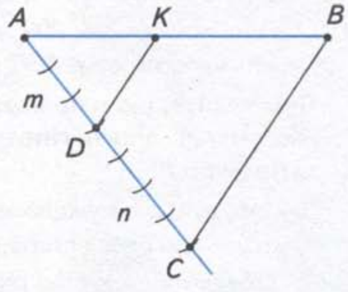
168°. Побудуйте зображення правильної піраміди:
1) трикутної; 2) чотирикутної.

169. Під час паралельного проектування деякої фігури дістали відрізок. Якою могла бути фігура-оригінал?

170. Доведіть, що проекцією середини відрізка є середина його проекції.

171. Побудуйте проекцію відрізка *AB*, що його точка *K* ділить у відношенні:
1) 1 : 3; 2) 3 : 5; 3) 3 : 1,5; 4) 2 : 0,5.

Щоб поділити відрізок *AB* у відношенні *m* : *n* (мал. 210): **1) проведіть допоміжний промінь з початком у точці *A*; 2) від точки *A* відкладіть на цьому промені *m* рівних відрізків і позначте точку *D*; 3) від точки *D* відкладіть на цьому самому промені *n* рівних відрізків і позначте точку *C* — кінець останнього відрізка; 4) проведіть пряму *CB*; 5) через точку *D* проведіть пряму, паралельну *CB*, — вона перетинає відрізок *AB* у шуканій точці *K*.**



Мал. 210

172. Побудуйте проекцію прямокутного $\triangle ABC$, у якому проведено висоту *CH* до гіпотенузи, а катети дорівнюють: 1) $AC = 5$ см, $BC = 12$ см; 2) $AC = 24$ см, $BC = 1$ см.

173. Побудуйте проекцію рівнобедреного трикутника з основою *a* і бічною стороною *b*, у якому позначено центр вписаного кола і центр описаного кола, якщо:
1) $a = 6$, $b = 8$; 2) $a = 10$, $b = 13$.

174. Побудуйте проекцію прямокутника *ABCD*, у якому проведено перпендикуляр з його вершини до діагоналі, якщо:
1) $AB = 6$ см, $BC = 8$ см; 2) $AB = 5$ см, $BC = 10$ см.

175. Побудуйте проекцію ромба з гострим кутом 60°, у якому проведено висоту з вершини: 1) гострого кута; 2) тупого кута.

176. Побудуйте проекцію чотирикутника, кути якого дорівнюють:
1) 30°, 30°, 150°, 150°; 2) 60°, 60°, 120°, 120°. Скільки випадків треба розглянути?

177. Побудуйте проекцію рівнобічної трапеції, в якій проведено висоту з вершини тупого кута, а основи дорівнюють: 1) 12 см і 24 см; 2) 8 см і 14 см.

178. Побудуйте зображення прямокутного паралелепіпеда зі сторонами основи: 1) $AC = 5$ см, $BC = 12$ см; 2) $AC = 24$ см, $BC = 1$ см. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через його вершину C_1 і пряму CH, проведену в площині основи перпендикулярно до її діагоналі.

179. Побудуйте зображення піраміди, основа якої — рівнобедрений трикутник з основою a і бічною стороною b, якщо: 1) $a = 6$, $b = 8$; 2) $a = 10$, $b = 13$. Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через вершину піраміди, вершину її основи та центр кола, вписаного в основу.

180. Побудуйте зображення піраміди, основа якої — рівнобічна трапеція з основами: 1) $AB = 12$ см, $CD = 24$ см; 2) $AC = 8$ см, $BD = 14$ см. Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через вершину піраміди і висоту основи, проведеної з вершини її тупого кута.

181*. Побудуйте проекцію прямокутного трикутника з катетами a і b та гіпотенузою c, у якому позначено центр вписаного кола і центр описаного кола, якщо: 1) $a : b : c = 3 : 4 : 5$; 2) $a : b : c = 8 : 15 : 17$.

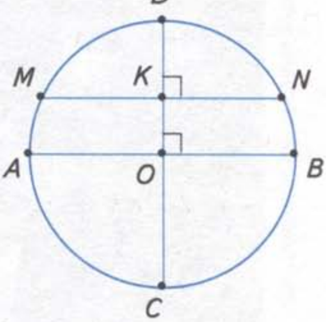
182*. Побудуйте проекцію тупокутного трикутника з кутом: 1) 120°; 2) 150°. У яку точку проектується центр вписаного кола; центр описаного кола?

183*. Квадрат $ABCD$ добудовано до рівнобічної трапеції так, що сторона CD квадрата стала однією з основ трапеції, а сторона BC — висотою трапеції. Побудуйте проекцію утвореної трапеції.

184*. Побудуйте проекцію кола і двох взаємно перпендикулярних його діаметрів.

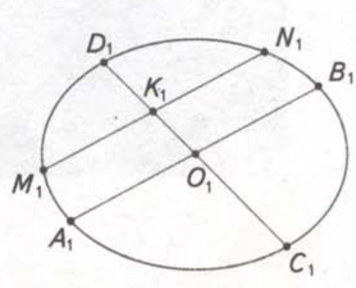
Розв'язання.

1. Побудуємо фігуру-оригінал — коло з центром O, в якому проведено діаметри $AB \perp CD$ (мал. 211). Проведемо хорду MN паралельно діаметру AB. Оскільки $AB \perp CD$, то $MN \perp CD$, а за властивістю хорди, перпендикулярної до діаметра, $MK = KN$.



Мал. 211

2. Проекцією кола є еліпс з центром O_1 (мал. 212). Проекцією діаметра AB кола є довільний діаметр A_1B_1 еліпса. Проекцією хорди MN кола є хорда M_1N_1 еліпса, яка паралельна A_1B_1. Точка K ділить хорду MN навпіл, тому точка K_1 є серединою хорди M_1N_1 еліпса. Шуканий діаметр C_1D_1 еліпса проходить через точки O_1 і K_1.



Мал. 212

185*. Побудуйте проекцію квадрата: 1) вписаного в коло; 2) описаного навколо кола. Розв'яжіть задачу двома способами.

186*. Побудуйте проекцію правильного трикутника:
1) вписаного в коло; 2) описаного навколо кола.

187*. Побудуйте зображення трикутної піраміди, основа якої — трикутник, вписаний у коло, один з кутів якого дорівнює: 1) 120°; 2) 150°. Висота піраміди проходить через центр даного кола.

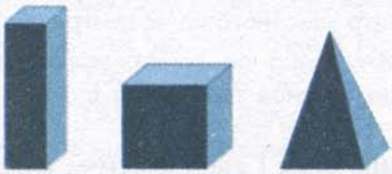
188*. Побудуйте зображення трикутної піраміди, основа якої — трикутник, вписаний у коло, що має кути: 1) 30° і 60°; 2) 40° і 50°. Висота піраміди проходить через центр даного кола.

189*. Побудуйте зображення куба. Проведіть січні площини так, щоб дістати правильну трикутну: 1) призму з найбільшою площею основи; 2) піраміду з найбільшою висотою.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

190. Яким многокутником може бути тінь споруди на площині подвір'я, якщо споруда має форму:

1) прямокутного паралелепіпеда;
2) куба;
3) правильної чотирикутної піраміди?



ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

Контрольні запитання

1. Які прямі називаються паралельними; мимобіжними?
2. Сформулюйте властивості паралельних прямих у просторі та ознаки їх паралельності.
3. Як знайти відстань від точки до прямої; між двома паралельними прямими?
4. Яким є взаємне розміщення прямої та площини? У чому полягає ознака їх паралельності?
5. Опишіть взаємне розміщення двох площин.
6. Які властивості площин, що перетинаються?
7. Сформулюйте властивості паралельних площин та ознаку їх паралельності.
8. Що таке паралельне проектування? Які його властивості?
9. Поясніть, як побудувати паралельну проекцію трикутника; паралелограма; трапеції.
10. Як побудувати зображення прямокутного паралелепіпеда; піраміди?

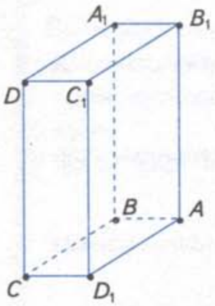
ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 3

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 — 15 хв.

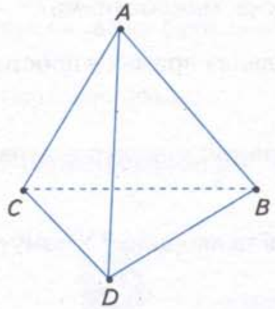
Тест I

1°. Дано зображення многогранників. На якому з малюнків прямі AB і CD не є мимобіжними?

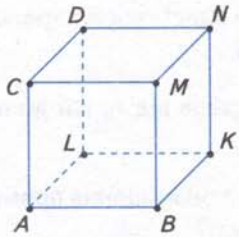
А.



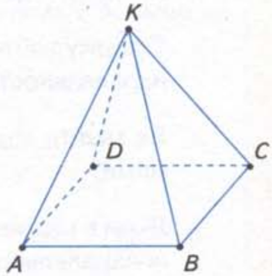
Б.



В.



Г.



2°. Пряма a не лежить у площині квадрата $ABCD$ і паралельна його стороні AB. Якому з відрізків паралельна дана пряма?

А. CD. **Б.** AD. **В.** AC. **Г.** BD.

3°. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром 2 см знайдіть відстань між ребрами AA_1 і CC_1.

А. 2 см. **Б.** $2\sqrt{2}$ см. **В.** $2\sqrt{3}$ см. **Г.** 4 см.

4. Пряма MN паралельна площині α, а пряма M_1N_1 лежить у цій площині. $MM_1 \parallel NN_1$. Яка довжина відрізка M_1N_1, якщо $MN = 10$ см?

А. 5 см. **Б.** 10 см. **В.** 15 см. **Г.** 20 см.

5*. Основа піраміди $SABC$ лежить у площині α. На її бічних ребрах SA і SB позначено точки K і N так, що $AS = 2AK$, $BN = NS$. Яке взаємне розміщення прямої KN і площини α?

А. Пряма KN лежить у площині α.
Б. Пряма KN паралельна площині α.
В. Пряма KN перетинає площину α.
Г. Не можна визначити.

Тест II

1°. Яка фігура утворюється в перетині грані многогранника із січною площиною?

А. Пряма. **Б.** Відрізок. **В.** Промінь. **Г.** Кут.

2°. Точка C є серединою відрізка AB, а точка D — серединою відрізка AC. У якому порядку розміщені точки A, B, C і D на паралельній проекції відрізка AB?

А. A, B, C, D. **Б.** A, C, B, D. **В.** A, D, C, B. **Г.** A, C, D, B.

3°. Паралельною проекцією $\triangle ABC$ є різносторонній $\triangle A_1B_1C_1$. Що є проекцією медіани $\triangle ABC$, проведеної з вершини C?

А. Медіана до сторони A_1C_1. **Б.** Висота до сторони A_1B_1.

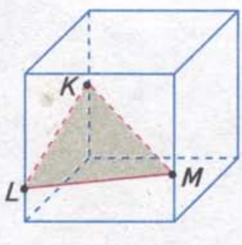
В. Бісектриса $\angle C_1$. **Г.** Медіана до сторони A_1B_1.

4. Відстані між точками A і C та B і C дорівнюють 5 см і 10 см, $AB \perp AC$. Через точки A, B і C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно в точках A_1, B_1 і C_1. Знайдіть відстань між точками A_1 і B_1, якщо $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$.

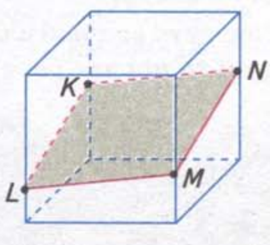
А. 5 см. **Б.** $5\sqrt{2}$ см. **В.** $5\sqrt{3}$ см. **Г.** 10 см.

5*. Грані куба перетинає січна площина KLM. Яка з побудов правильна?

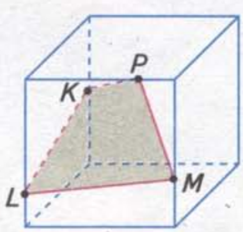
А.



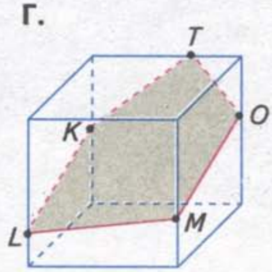
Б.



В.



Г.

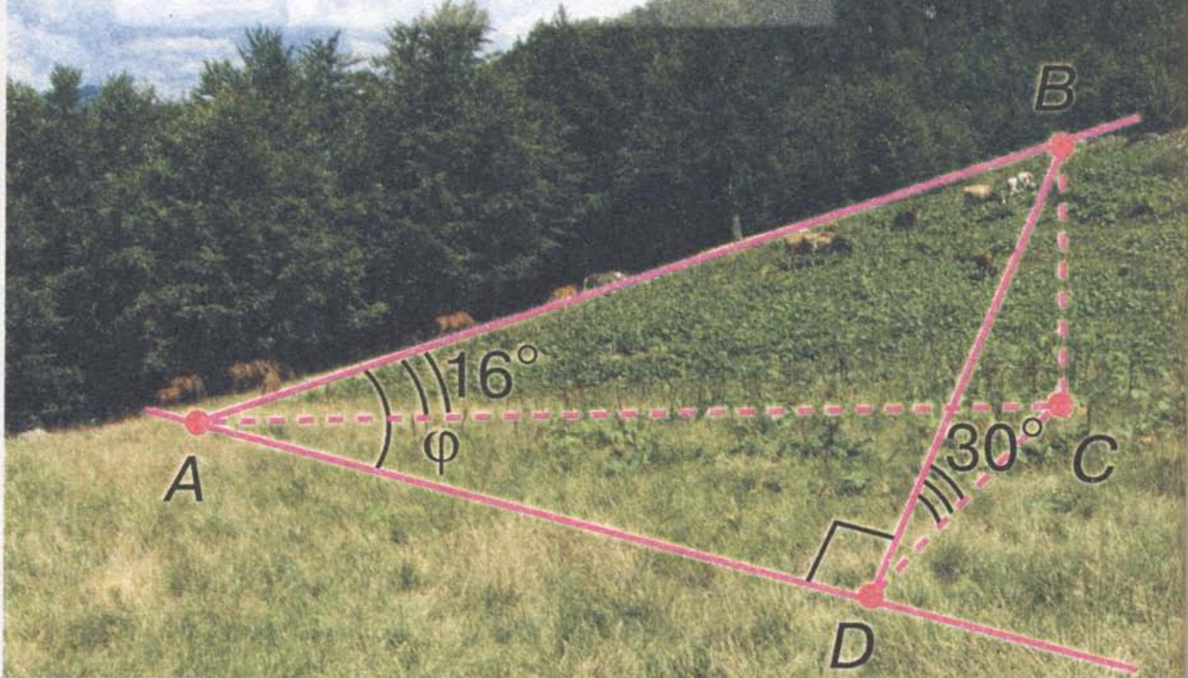


РОЗДІЛ 4

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ ТА ПЛОЩИН

У розділі дізнаєтесь:

- **про прямі, перпендикулярні до площин, перпендикулярні площини, їх властивості та ознаки;**
- **як розпізнавати і обґрунтовувати розміщення прямих та площин;**
- **про залежність між паралельністю й перпендикулярністю;**
- **про відстані й кути у просторі та їх обчислення;**
- **про ортогональне проектування та його використання для зображення просторових фігур;**
- **як застосовувати вивчені властивості й ознаки на практиці та під час розв'язування задач**



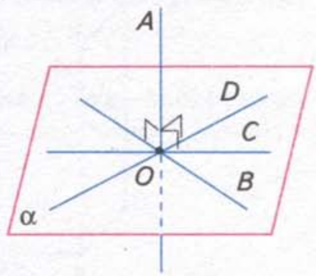
§37 Перпендикулярність прямої та площини

Ви знаєте, що коли пряма не лежить у площині й не паралельна їй, то вона перетинає площину. Якщо пряма перетинає площину, то вона може бути перпендикулярною до цієї площини.

Подивіться на малюнок 213. Якщо через основу стовпа провісити прямі на поверхні землі, то кут між стовпом і кожною з цих прямих дорівнюватиме 90°. Тобто стовп перпендикулярний до будь-якої прямої, що проходить через його основу.

Мал. 213

На малюнку 214 пряма AO перетинає площину α в точці O, а прямі OB, OC, OD, ... лежать у цій площині й проходять через точку перетину. Пряма AO перпендикулярна до кожної з цих прямих. Говорять, що пряма AO перпендикулярна до площини α.



Мал. 214

Записуємо: $AO \perp \alpha$, або $\alpha \perp AO$.

Спробуйте дати означення прямої, перпендикулярної до площини, та порівняйте його з наведеним у підручнику.

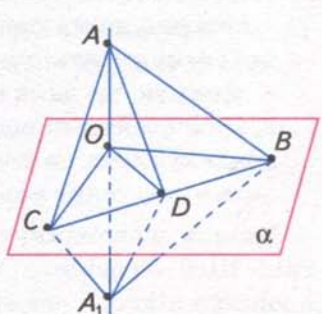
Пряма називається *перпендикулярною до площини*, якщо вона перетинає цю площину і перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у площині та проходить через точку перетину.

Теорема (ознака перпендикулярності прямої та площини)
Якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох прямих цієї площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна до площини.

Дано: пряма AA_1 перетинає площину α в точці O (мал. 215); прямі OB і OC лежать у площині α; $AA_1 \perp OB$; $AA_1 \perp OC$.

Довести: $AA_1 \perp \alpha$.

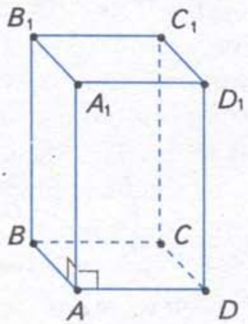
Доведення. Доведемо, що пряма AA_1 перпендикулярна до будь-якої прямої OD, що лежить у площині α і проходить через точку перетину O (див. мал. 215). Відкладемо на прямій AA_1 в різні боки від точки O рівні відрізки OA і OA_1. Проведемо довільну пряму, яка перетинає прямі OB, OD і OC у точках B, D і C. Ці точки сполучимо з точками A і A_1 відрізками. Розглянемо три пари трикутників.



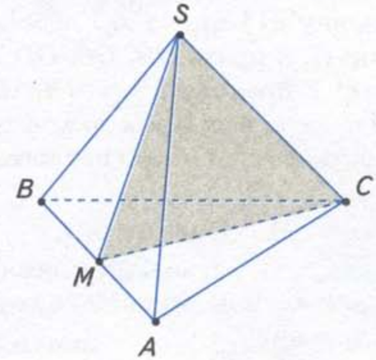
Мал. 215

1. $\triangle ABA_1$ і $\triangle ACA_1$ — рівнобедрені, оскільки відрізки OC і OB є висотами за умовою і медіанами за побудовою ($OA = OA_1$). Звідси $AB = A_1B$ і $AC = A_1C$.
2. $\triangle ABC = \triangle A_1BC$ за трьома сторонами. У них $AB = A_1B$ і $AC = A_1C$ за доведеним, BC — спільна сторона. З рівності трикутників випливає: $\angle ABD = \angle A_1BD$.
3. $\triangle ABD = \triangle A_1BD$ за двома сторонами (BD — спільна сторона, $AB = A_1B$) і кутом між ними ($\angle ABD = \angle A_1BD$). З рівності трикутників матимемо: $AD = A_1D$.
Отже, $\triangle AA_1D$ — рівнобедрений, тому його медіана OD є і висотою, тобто $AA_1 \perp OD$. За означенням пряма AA_1 перпендикулярна до площини α.

? Чому ребро AA_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 216) перпендикулярне до площини основи? Оскільки ребро AA_1 перпендикулярне до прямих AB і AD, то за ознакою перпендикулярності прямої та площини воно перпендикулярне до площини основи $ABCD$.



Мал. 216



Мал. 217

Задача. $SABC$ — правильна трикутна піраміда, точка M — середина ребра AB (мал. 217). Доведіть, що пряма AB перпендикулярна до площини SMC.

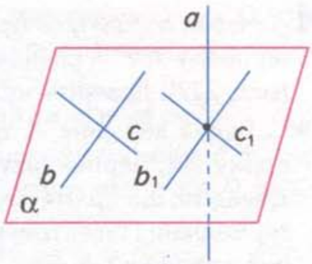
Розв'язання. Оскільки піраміда $SABC$ — правильна, то її основою є правильний трикутник, а бічні грані — рівнобедрені трикутники. Тоді медіани CM і SM трикутників ABC та ABS є їх висотами. Отже, пряма AB перетинає площину SMC і перпендикулярна до двох прямих CM і SM цієї площини, що проходять через точку M перетину. За ознакою перпендикулярності прямої та площини пряма AB перпендикулярна до площини $\triangle SMC$.

1. Щоб довести, що дана пряма перпендикулярна до площини:
- **виділіть на малюнку дві прямі, які лежать у площині й проходять через точку перетину;**
- **доведіть, що дана пряма перпендикулярна до кожної з цих прямих.**

2. Пам'ятайте: якщо пряма перпендикулярна до площини, то вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині та проходить через точку перетину.

Ознака перпендикулярності прямої та площини застосовується на практиці. Щоб перевірити, чи перпендикулярна лінія перетину стін кімнати до площини підлоги, перевіряють, чи є прямими кути між цією лінією та двома прямими, які лежать на площині підлоги і перетинають цю лінію.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ



Мал. 218

У вас може виникнути запитання: *Чи обов'язково, щоб дві прямі, про які йдеться в ознаці перпендикулярності прямої та площини, проходили через точку перетину даної прямої та площини?* Не обов'язково. На малюнку 218 пряма *a* перпендикулярна до прямих *b* і *c*, які лежать у площині α і перетинаються, але не проходять через точку перетину прямої та площини. Прямі *a* і *b*, *a* і *c* — мимобіжні. Проведемо через точку перетину прямої *a* з площиною α прямі $b_1 \| b$ і $c_1 \| c$. Тоді за означенням кута між мимобіжними прямими пряма *a* буде перпендикулярною до прямих b_1 і c_1, а отже, і до площини α. Тому ознаку перпендикулярності прямої та площини можна узагальнити і сформулювати так: **якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох прямих цієї площини, що перетинаються, то вона перпендикулярна до площини.**

Справедливе і таке твердження:

пряма, перпендикулярна до площини, перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині (хоча б і такої, що не проходить через точку перетину).

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Дайте означення прямої, перпендикулярної до площини.
2. Сформулюйте ознаку перпендикулярності прямої та площини.
3. Як довести, що дана пряма перпендикулярна до площини?

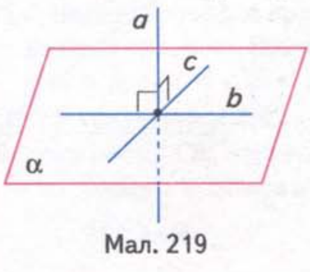
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

191'. Пряма *a* перпендикулярна до прямих *b* і *c* площини α (мал. 219). Чи випливає з цього, що $a \perp \alpha$?

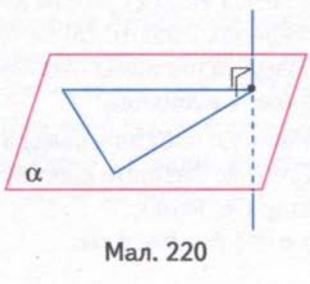
192'. Пряма перпендикулярна до двох сторін трикутника (мал. 220). Чи можна стверджувати, що ця пряма перпендикулярна до площини трикутника?

193'. На малюнку 221 $a \perp \alpha$. Чи перпендикулярна пряма *a* до прямої *b*, яка лежить у площині α?

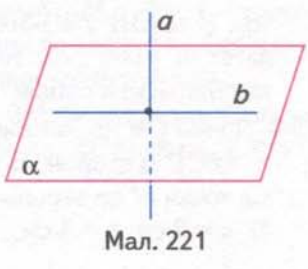
194°. Пряма *a* перетинає площину α і перпендикулярна до прямої *b*, яка лежить у цій площині (див. мал. 221). Чи може пряма *a* не бути перпендикулярною до площини α? Поясніть відповідь.



Мал. 219

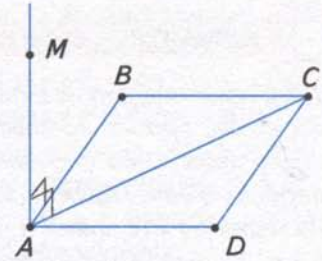


Мал. 220



Мал. 221

195°. Через вершину A прямокутника $ABCD$ проведено пряму AM, перпендикулярну до прямих AB і AC (мал. 222). Доведіть, що $AM \perp AD$.



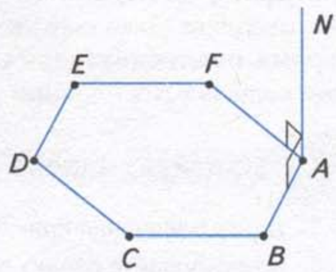
Мал. 222

196°. Через вершину A трикутника ABC проведено пряму AK, перпендикулярну до прямих AB і AC. Доведіть, що пряма AK перпендикулярна до висоти, медіани і бісектриси трикутника ABC, проведених з вершини A.

197°. Пряма BM перпендикулярна до площини трикутника ABC. На стороні AC взято довільну точку K. Якого виду трикутник KBM? Поясніть відповідь.

198°. Через точку N, що лежить поза площиною шестикутника $ABCDEF$, проведено пряму AN, перпендикулярну до прямих AB і AF (мал. 223). Доведіть, що:
1) $AN \perp AC$; 2) $AN \perp AD$; 3) $AN \perp AE$.

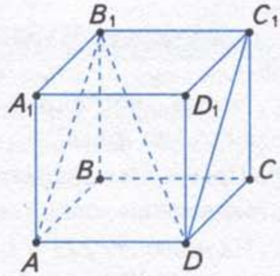
199°. Як розміщена відносно площини круга пряма, перпендикулярна до двох його діаметрів? Поясніть відповідь.



Мал. 223

200°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. Доведіть, що:
1) пряма DD_1 перпендикулярна до площини грані $ABCD$;
2) пряма AD перпендикулярна до площини грані DD_1C_1C.

201°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 224). Доведіть, що:
1) $\triangle AB_1D$ — прямокутний;
2) чотирикутник AB_1C_1D — прямокутник.



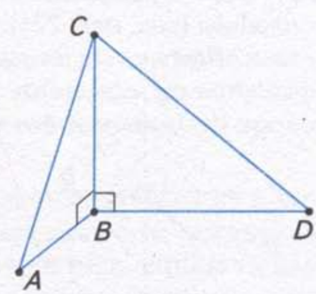
Мал. 224

202. Пряма CM перпендикулярна до площини прямокутного трикутник ABC ($\angle C = 90°$). Доведіть, що:
1) пряма BC перпендикулярна до площини прямих AC і CM;
2) пряма AC перпендикулярна до площини прямих BC і CM.

203. Пряма CD перпендикулярна до сторони BC прямокутного $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$). Назвіть пряму та площину, що перпендикулярні між собою.

204. Прямокутні трикутники ABC і BCD з прямим кутом B лежать у різних площинах і мають спільний катет BC (мал. 225). Які пряма та площина перпендикулярні між собою? Поясніть відповідь.

205. Пряма CM перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$ із стороною a, $CM = b$. Знайдіть відстань від точки M до вершин квадрата, якщо:
1) $a = 2$ см, $b = 1$ см; 2) $a = 3$ см, $b = 4$ см.



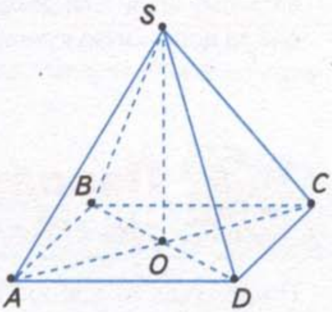
Мал. 225

206. Через вершину C прямого кута трикутника ABC проведено пряму CD, перпендикулярну до його площини. $AC = a$, $BC = b$, $CD = c$. Знайдіть відстань від точки D до середини M гіпотенузи трикутника, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $c = 12$ см; 2) $a = 12$ см, $b = 16$ см, $c = 24$ см.

207. Пряма AD перпендикулярна до площини прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C. $AC = a$, $BC = b$, $AD = c$. Знайдіть відстань від точки D до вершин B і C, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 12$ см; 2) $a = 12$ см, $b = 16$ см, $c = 15$ см.

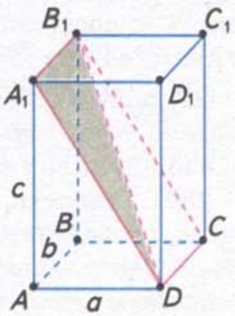
208. Через точку O перетину діагоналей ромба $ABCD$ проведено пряму OM, перпендикулярну до його площини.
Доведіть, що:
1) пряма BD перпендикулярна до площини AMC;
2) пряма AC перпендикулярна до площини BMD.

209. Точка S лежить поза площиною паралелограма $ABCD$ (мал. 226). Відомо, що $SA = SC$, $SB = SD$ і O — точка перетину діагоналей паралелограма. Доведіть, що пряма SO перпендикулярна до площини паралелограма.



Мал. 226

210. На малюнку 227 a, b, c — виміри прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть площі трикутника A_1B_1D і чотирикутника A_1B_1CD, якщо:
1) $a = 12$ см, $b = 8$ см, $c = 16$ см;
2) $a = 5$ см, $b = 10$ см, $c = 12$ см.



Мал. 227

211. Пряма OM перпендикулярна до площини кола з центром O, а точка A лежить на колі.
Знайдіть AM, якщо:
1) $OA = 6$ см, $\angle OMA = 30°$;
2) $OM = 4$ см, площа круга дорівнює 25π см^2.

212. Доведіть, що через точку, яка лежить поза площиною α, не можуть проходити дві прямі, перпендикулярні до площини α.

213*. Через вершину C прямого кута $\triangle ABC$ проведено пряму CD, перпендикулярну до його площини. $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$. Знайдіть медіану CM трикутника ABC.

214*. Через вершину A прямокутника $ABCD$ проведено пряму AM, перпендикулярну до його площини. Відстані від точки M до решти вершин прямокутника дорівнюють a, b, c ($a < c$, $b < c$). Знайдіть відрізок AM і сторони прямокутника.

215*. У трикутнику ABC кут C прямий, а кут A дорівнює 30°. Через точку C проведено пряму CM, перпендикулярну до площини трикутника. $AC = 18$ см, $CM = 12$ см. Знайдіть відстань від точки M до прямої AB.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

216. Вважаючи підлогу й двері кімнати за моделі площин, а одвірок — за модель прямої, проілюструйте на цих моделях означення прямої, перпендикулярної до площини.

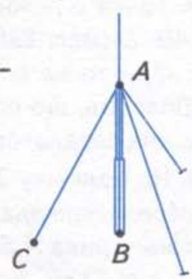
217. Як за допомогою виска можна перевірити вертикальність стовпа?

218. Перпендикулярність осі свердла до площини столу, на якому кріпиться деталь (мал. 228), слюсар перевірив за допомогою кутника. Як він це зробив?

Мал. 228

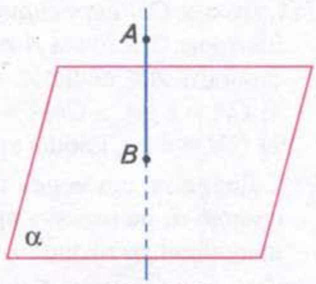
§38 Перпендикуляр і похила до площини

Подивіться на малюнок 229. Вертикально встановлена щогла, закріплена трьома стяжками, дає уявлення про перпендикуляр і похилу до площини. Так, відрізок AB на щоглі можна вважати перпендикуляром, проведеним з точки A до поверхні землі, а одну зі стяжок AC — похилою, проведеною з точки A до поверхні землі.



Мал. 229

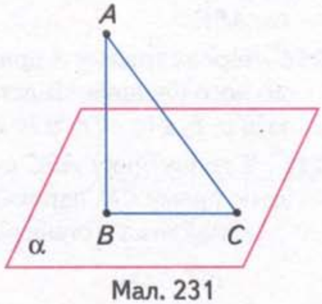
Нехай дано площину α і точку A, яка не лежить на ній. Проведемо через точку A пряму, перпендикулярну до площини, яка перетинає площину в точці B (мал. 230). Говорять, що відрізок AB є *перпендикуляром*, проведеним з точки A до площини α, а кінець B цього відрізка, який лежить у площині, — *основою перпендикуляра*.



Мал. 230

Перпендикуляром, проведеним з даної точки до даної площини, називається відрізок, що сполучає дану точку з точкою площини і лежить на прямій, перпендикулярній до площини.

Нехай AB — перпендикуляр до площини α, а C — відмінна від точки B точка цієї площини (мал. 231). Тоді відрізок AC називають *похилою*, проведеною з точки A до площини α, а точку C — *основою похилої*. Відрізок BC, який сполучає основи перпендикуляра та похилої, називають *проекцією похилої AC* у площині α.



Мал. 231

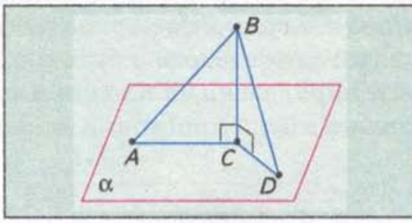
Чи існує залежність між довжинами перпендикуляра й похилої, похилої та її проекції? Відповідь дає така теорема.

Теорема (властивості перпендикуляра й похилої)
Якщо з точки, взятої поза площиною, проведено до площини перпендикуляр і похилі, то:
1) перпендикуляр коротший за будь-яку похилу;
2) проекції рівних похилих є рівними й, навпаки, похилі, що мають рівні проекції, є рівними;
3) з двох похилих більша та, проекція якої більша.

Доведіть теорему самостійно, використавши властивості прямокутного трикутника.

Твердження теореми наведено в таблиці 18.

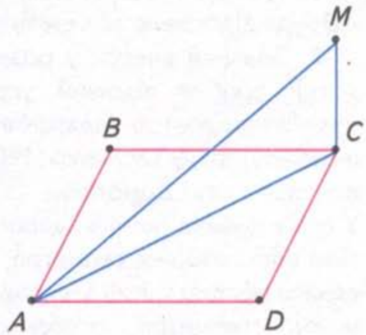
Таблиця 18

	$BC < AB,\ BC < BD$
	Якщо $\dfrac{AB = BD}{AC = CD}$, то $\dfrac{AC = CD}{AB = BD}$
	Якщо $AC > CD$, то $AB > BD$

Теорема про властивості перпендикуляра й похилої застосовується на практиці. Наприклад, якщо встановлюють щоглу на радіостанції, то стяжки беруть рівної довжини. Нижні кінці їх закріпляють на однакових відстанях від основи щогли (рівномірно по колу). Це сприяє стійкості щогли.

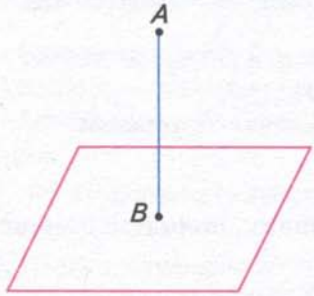
Задача. З вершини C квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр CM до його площини. Знайдіть відстань від точки M до вершини A, якщо CM дорівнює 6 см, а сторона квадрата — $4\sqrt{2}$ см.

Розв'язання. Проведемо діагональ AC квадрата $ABCD$ (мал. 232). ΔACM — прямокутний, оскільки $CM \perp AC$ за означенням прямої, перпендикулярної до площини. За даною стороною квадрата знаходимо його діагональ: $AC = AD\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 8$ (см). З трикутника ACM, за теоремою Піфагора, матимемо: $AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$ (см).

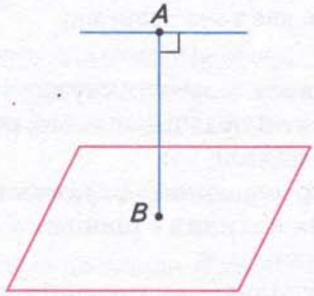


Мал. 232

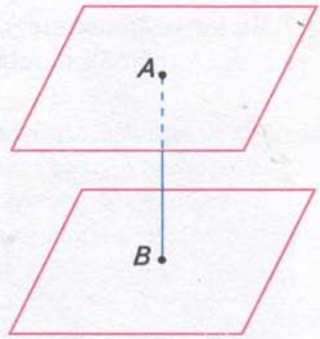
Розв'язування задач про похилу та її проекцію на площину зводиться до розв'язування прямокутного трикутника, сторонами якого є похила, її проекція на площину й перпендикуляр до площини. Якщо такого трикутника немає на малюнку, то щоб його утворити, проведіть допоміжні відрізки.



Мал. 233



Мал. 234



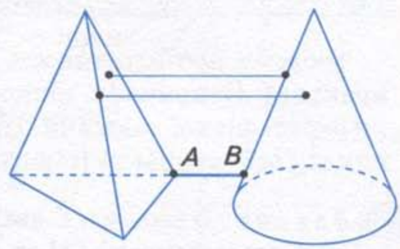
Мал. 235

Подивіться на малюнки 233 — 235. На них зображено відстані від точки до площини (мал. 233), від прямої до паралельної їй площини (мал. 234) і між паралельними площинами (мал. 235).

Відстанню від точки до площини називають довжину перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини. *Відстанню від прямої до паралельної їй площини* називають довжину перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки цієї прямої до площини. За *відстань між паралельними площинами* приймають довжину перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї площини до іншої.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Може виникнути запитання: *Що таке відстань між будь-якими двома геометричними фігурами*? Подивіться на малюнок 236. Нехай *AB* — найменша відстань між точками фігур. Тоді *AB* буде відстанню між цими фігурами.



Мал. 236

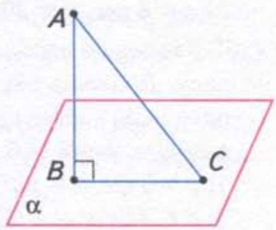
2. Значний внесок у розвиток шкільної геометрії зробив відомий український педагог-математик, доктор педагогічних наук, професор Іван Федорович Тесленко (1908 — 1994), який народився в селі Домоткань на Дніпропетровщині. У своїх працях учений запропонував систему аксіом елементарної геометрії, яка дала змогу поєднати абстрактність і наочність змісту, розкрив методи геометрії, особливості розв'язування планіметричних і стереометричних задач. Дотепер не втратили цінності його підручники та навчальні посібники, серед яких «Геометрія» (підручник для 9 — 10 класів), «Геометрія» (посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів).

І. Ф. Тесленко

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке перпендикуляр, проведений з даної точки до площини; основа перпендикуляра?
2. Що таке похила, проведена з даної точки до площини? Що таке проекція похилої?
3. Сформулюйте властивості перпендикуляра й похилої.
4. Що називається відстанню від точки до площини; від прямої до паралельної їй площини; між паралельними площинами?

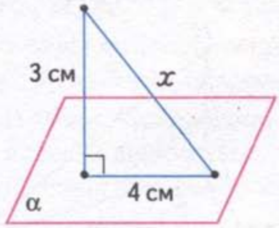
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ



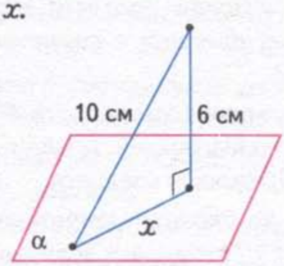
Мал. 237

219'. Назвіть на малюнку 237:
1) перпендикуляр; 2) основу перпендикуляра;
3) похилу; 4) проекцію похилої.

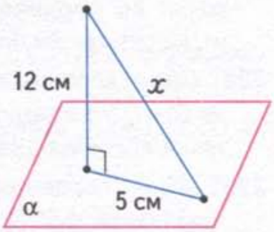
220'. За даними, наведеними на малюнках 238 — 240, знайдіть невідомий відрізок x.



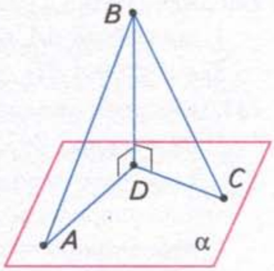
Мал. 238



Мал. 239



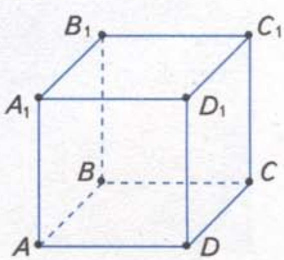
Мал. 240



Мал. 241

221'. На малюнку 241 AD і DC — проекції похилих AB і BC.
1) $AD < DC$. Яке із співвідношень правильне:
а) $AB = BC$; б) $AB > BC$; в) $AB < BC$?
2) $AB = BC$. Порівняйте довжини проекцій цих похилих.

222°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 242). Назвіть відстань:
1) від вершини A до площини грані DD_1C_1C;
2) від прямої A_1D_1 до площини грані $ABCD$;
3) між площинами граней AA_1D_1D і BB_1C_1C.



Мал. 242

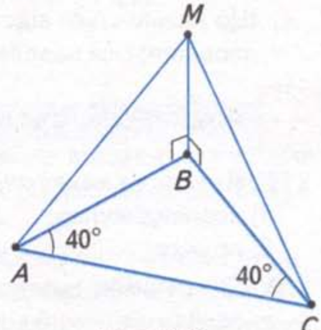
223°. Проведіть з точки O до площини α перпендикуляр OM і похилу OK. Знайдіть довжину:
1) похилої OK, якщо $OM = 12$ см, $MK = 16$ см;
2) перпендикуляра OM, якщо $MK = 12$ см, $OK = 15$ см;
3) проекції MK похилої, якщо $OM = 9$ см, $OK = 15$ см.

224°. AB — перпендикуляр, AC — похила, BC — проекція похилої. Заповніть таблицю 19.

Таблиця 19

AB	24 см	15 см	
BC	7 см		24*a*
AC		25 см	26*a*

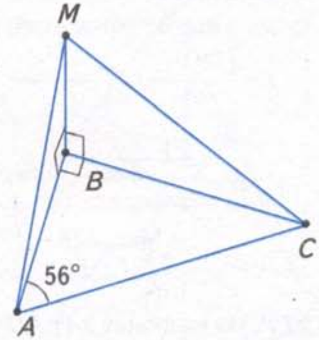
225°. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Довжина похилої дорівнює *a*, кут між похилою і перпендикуляром — α. Знайдіть довжини перпендикуляра й проекції похилої, якщо:
1) $a = 10$ см, $\alpha = 60°$; 2) $a = 12$ см, $\alpha = 45°$;
3) $a = 8$ см, $\alpha = 30°$.



Мал. 243

226°. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Довжина перпендикуляра дорівнює *a*, кут між похилою і перпендикуляром дорівнює α. Знайдіть довжину похилої та її проекцію на площину, якщо:
1) $a = 6$ см, $\alpha = 60°$; 2) $a = 5$ см, $\alpha = 45°$;
3) $a = 14$ см, $\alpha = 30°$.

227°. Скільки рівних похилих можна провести з даної точки до площини? Якою фігурою є геометричне місце основ цих похилих?



Мал. 244

228°. *OM* — перпендикуляр до площини квадрата *ABCD*, де *O* — точка перетину його діагоналей. Доведіть, що точка *M* рівновіддалена від вершин квадрата.

229°. *AK* — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника *ABC* ($\angle C = 90°$). Порівняйте довжини похилих *KC* і *KB*. Поясніть відповідь.

230°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб з ребром *a*. Знайдіть відстань:
1) від прямої AA_1 до площини BB_1D_1D;
2) від прямої *AD* до площини A_1B_1CD.

231. Порівняйте похилі *MA* і *MC* за даними, наведеними:
1) на малюнку 243; 2) на малюнку 244.

232. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Знайдіть кут між перпендикуляром і похилою, якщо довжина:
1) перпендикуляра дорівнює довжині проекції похилої;
2) проекції похилої дорівнює половині довжини похилої;
3) перпендикуляра дорівнює половині довжини похилої.

233. ***AB* — перпендикуляр, *AC* — похила, *BC* — проекція похилої, α — кут між перпендикуляром і похилою.** Заповніть таблицю 20.

Таблиця 20

AB			5 см	6 см	7 см	14 см
BC		4 см				14 см
AC	6 см	8 см		12 см		
α	30°		45°		60°	

234. З точки M до площини проведено рівні похилі MA, MB, MC, MD. Чи може чотирикутник $ABCD$ бути: 1) квадратом; 2) паралелограмом; 3) прямокутником? Поясніть відповідь.

235. Доведіть, якщо існує точка, рівновіддалена від вершин паралелограма, то цей паралелограм — прямокутник.

236. Якщо точка рівновіддалена від вершин ромба, то цей ромб — квадрат. Доведіть.

√ **237.** Точка A розміщується на відстані a від вершин рівностороннього трикутника зі стороною a. Знайдіть відстань від точки A до площини трикутника, якщо:
1) $a = \sqrt{6}$ см; 2) $a = 3$ см.

238. Із точки M поза площиною α проведено до неї три рівні похилі MA, MB, MC і перпендикуляр MO. Доведіть, що основа перпендикуляра O є центром кола, описаного навколо $\triangle ABC$.

Якщо дано кілька рівних похилих, проведених із точки до площини, то їх кінці лежать на колі, центром якого є основа перпендикуляра, проведеного на площину зі спільної точки похилих.

√ **239.** Точка D розміщується на відстані a від вершин прямокутного трикутника. Гіпотенуза трикутника дорівнює b. Знайдіть відстань від точки D до площини трикутника, якщо: 1) $a = 10$ см, $b = 12$ см; 2) $a = 20$ см, $b = 24$ см.

√ **240.** Із точки до площини проведено перпендикуляр довжиною 6 см і похилу довжиною 9 см. Знайдіть проекцію перпендикуляра на похилу.

√ **241*.** Із точки A до площини α проведено дві похилі, які дорівнюють 10 см і 17 см, а їх проекції відносяться, як 2 : 5. Знайдіть:
1) проекції похилих; 2) відстань від точки A до площини α.

Якщо в задачі йдеться про дві похилі, що їх проведено з однієї точки до площини, то розгляньте два прямокутних трикутники, спільним катетом яких є перпендикуляр, проведений з даної точки до площини.

242*. Із точки до площини проведено дві похилі. Знайдіть довжини похилих, якщо:
1) різниця їх довжин дорівнює 6 см, а проекції похилих становлять 15 см і 27 см;
2) похилі відносяться, як 5 : 8, а проекції похилих дорівнюють 7 см і 32 см.

243*. Із точки до площини проведено дві рівні похилі. Знайдіть кут між кожною похилою та її проекцією, якщо кут між похилими дорівнює 60°, а кут між їх проекціями — прямий.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

244. Щогла закріплена трьома однаковими тросами так, що їх нижні кінці віддалено від щогли на 20 м, а верхні закріплено на висоті 32 м. Які довжини тросів?

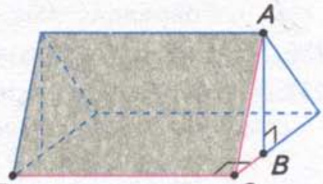
245. У підвалі, що має форму півциліндра (мал. 245), треба поставити два стояки, основи яких мають бути однаково віддалені по підлозі від найближчої стіни і розміщатися на відстані 2 м один від одного. Визначте висоту стояків, якщо ширина підвалу становить 4,6 м.

Мал. 245

§39 Теорема про три перпендикуляри

Подивіться на малюнок 246. У двосхилому даху будівлі краї покрівлі позначено DC і AC, а крокви — AB і BC.

Розглядатимемо відрізок BC як проекцію похилої AC на площину BCD, а DC — як пряму, що проходить через основу C похилої AC. Цей приклад ілюструє теорему про три перпендикуляри: якщо пряма DC перпендикулярна до проекції BC похилої AC, то вона перпендикулярна і до похилої AC.



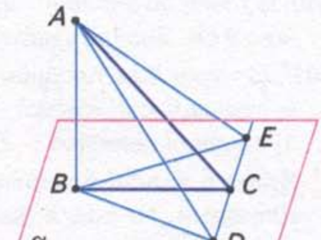
Мал. 246

Теорема (про три перпендикуляри)
Якщо пряма, проведена у площині через основу похилої, перпендикулярна до її проекції, то вона перпендикулярна і до самої похилої.

Дано: $AB \perp \alpha$ (мал. 247);
AC — похила;
BC — проекція похилої;
$C \in a$, $a \perp BC$.

Довести: $a \perp AC$.

Доведення. Відкладемо на прямій a довільні, але рівні відрізки $CD = CE$ і сполучимо відрізками точки A і B з точками D і E. Тоді матимемо: $BD = BE$ як похилі до прямої DE з рівними проекціями CD і CE. $AD = AE$ як похилі до площини α, що мають рівні проекції BD і BE. Внаслідок цього трикутник ADE є рівнобедреним, тому його медіана AC перпендикулярна до основи DE.



Мал. 247

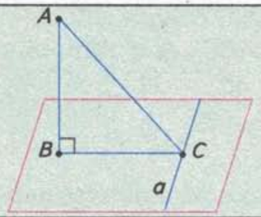
Чому теорема називається теоремою про три перпендикуляри? У ній говориться про зв'язок між такими трьома перпендикулярами: $AB \perp \alpha$, $a \perp BC$, $a \perp AC$.

Справджується й обернена теорема.

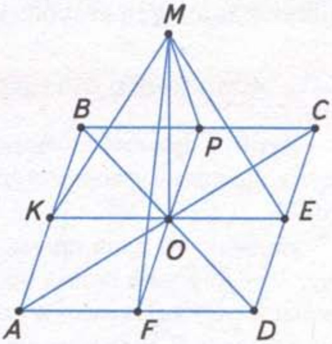
Теорема (обернена до теореми про три перпендикуляри)
Якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна й до проекції похилої.

Формулювання теореми про три перпендикуляри та теореми, оберненої до неї, наведено в таблиці 21.

Таблиця 21

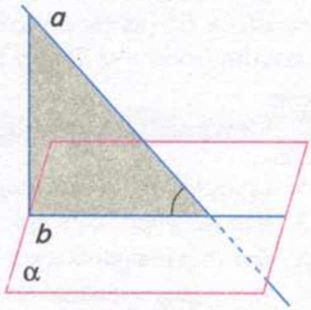
	Якщо $\dfrac{a \perp BC}{a \perp AC}$, то $\dfrac{a \perp AC}{a \perp BC}$

Задача 1. Відстань від точки M до кожної зі сторін ромба дорівнює 10 см, а до площини ромба — 8 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб.



Мал. 248

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — ромб (мал. 248), $MK = MP = ME = MF = 10$ см, $MO = 8$ см. За означенням відстані $MK \perp AB$, $MP \perp BC$, $ME \perp CD$, $MF \perp AD$. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $OK \perp AB$, $OP \perp BC$, $OE \perp CD$, $OF \perp AD$. Оскільки відстані від точки M до сторін ромба рівні, то відрізки OK, OP, OE, OF також рівні як проекції рівних похилих. Звідси точка O — основа перпендикуляра MO є центром кола, вписаного в ромб. Із прямокутного трикутника MOK знайдемо радіус цього кола: $R = OK = \sqrt{MK^2 - MO^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ (см).

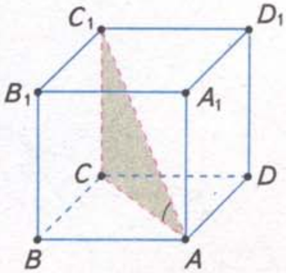


Мал. 249

Застосовуючи теорему про три перпендикуляри, пам'ятайте: якщо точка A однаково віддалена від усіх сторін многокутника, то основа перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини многокутника, також однаково віддалена від його сторін, тобто є центром вписаного в многокутник кола.

Дамо означення кута між прямою і площиною. Нехай дано площину α і пряму a, яка її перетинає і неперпендикулярна до площини α (мал. 249). Основи перпендикулярів, проведених з точок прямої a на площину α, лежать на прямій b. Ця пряма називається *проекцією прямої a на площину α*. *Кутом між прямою і площиною* називається кут між цією прямою та її проекцією на площину.

Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між нею і площиною вважається таким, що дорівнює $90°$, а між паралельними прямою і площиною — $0°$.



Мал. 250

Задача 2. У прямокутному паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 5 см і 12 см, а діагональ утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть діагональ паралелепіпеда.

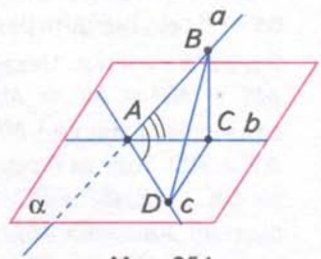
Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед (мал. 250), $AB = 12$ см, $BC = 5$ см. Проекція діагоналі AC_1 на площину основи $ABCD$ — відрізок AC. Тому $\angle CAC_1 = 60°$. З прямокутних трикутників ABC і ACC_1 матимемо:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ (см)}, \quad AC_1 = \frac{AC}{\cos 60°} = \frac{13}{\frac{1}{2}} = 26 \text{ (см)}.$$

Розв'язування задачі, в якій дано кут між прямою та площиною, нерідко зводиться до розв'язування прямокутного трикутника, гострий кут якого дорівнює даному, а сторонами є похила, її проекція і перпендикуляр до площини.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Кут між прямою і площиною — це найменший з усіх кутів, що пряма утворює з прямими, проведеними на площині.



Мал. 251

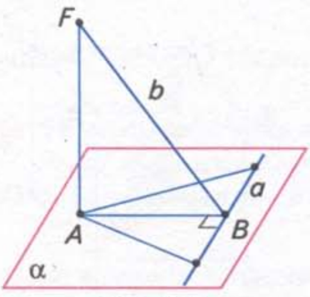
Нехай a — дана пряма, b — її проекція на площину, c — довільна пряма на площині α (мал. 251). З довільної точки B прямої a проведемо перпендикуляр BC на пряму b. Відкладемо на прямій c відрізок $AD = AC$ і сполучимо точки D і C. У трикутниках ABC і ABD сторона AB — спільна, $AC = AD$, але $BD > BC$ (за теоремою, оберненою до теореми про три перпендикуляри). Тоді й протилежний кут DAB у трикутнику ABD більший за відповідний кут CAB у $\triangle ABC$.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

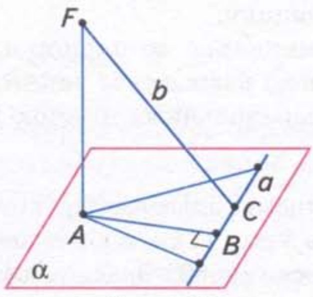
1. Сформулюйте і доведіть теорему про три перпендикуляри.
2. Що таке проекція прямої на площину?
3. Дайте означення кута між прямою та площиною.
4. Яка градусна міра кута між прямою та площиною, якщо пряма перпендикулярна до площини; пряма паралельна площині?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

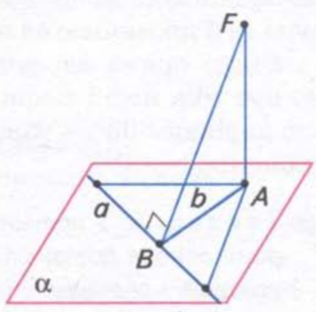
246'. На малюнках 252 — 254 $AF \perp \alpha$. Визначте взаємне розміщення прямих a і b на кожному з малюнків.



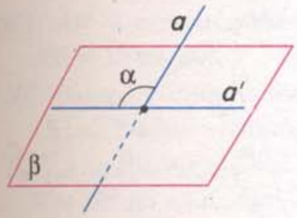
Мал. 252



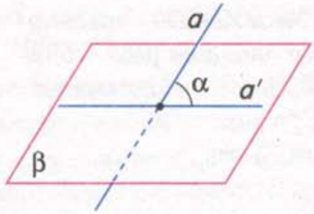
Мал. 253



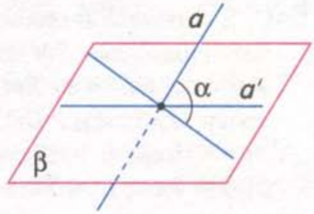
Мал. 254



Мал. 255



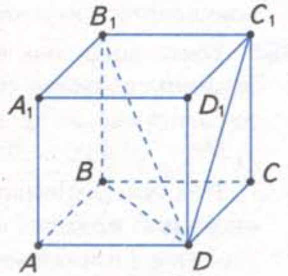
Мал. 256



Мал. 257

247′. На малюнках 255 — 257 пряма a' — проекція прямої a на площину β. На якому з малюнків кут α є кутом між прямою a і площиною β?

248′. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 258). Назвіть кут між:
1) діагоналлю DC_1 грані DD_1C_1C і площиною основи $ABCD$;
2) діагоналлю B_1D куба і площиною основи $ABCD$;
3) діагоналлю B_1D і площиною грані DD_1C_1C.



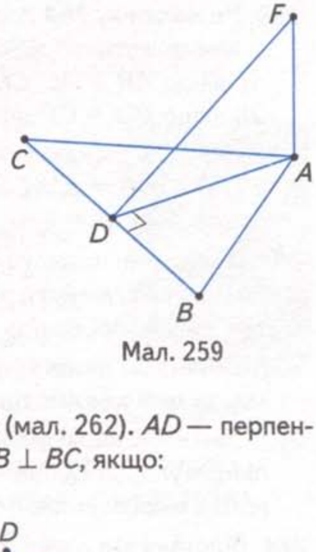
Мал. 258

249°. На малюнку 259 AF — перпендикуляр до площини $\triangle ABC$; AD — його висота. Доведіть, що $DF \perp BC$.

250°. На малюнку 260 DM — перпендикуляр до площини квадрата. Доведіть, що $OM \perp AC$.

251°. OM — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, у якому O — точка перетину діагоналей, $AB = a$, $OM = b$. Знайдіть відстань від точки M до сторони CD, якщо: 1) $a = 12$ см, $b = 8$ см; 2) $a = 16$ см, $b = 15$ см.

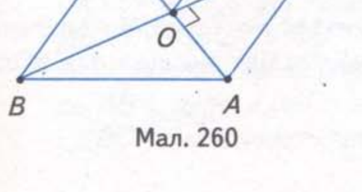
252°. На малюнку 261 AM — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Доведіть, що трикутник BMC — прямокутний.



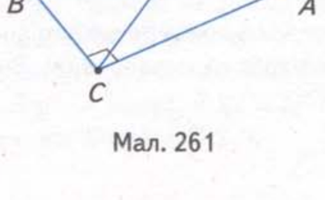
Мал. 259

253°. Із середини O гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC до його площини проведено перпендикуляр OM. Проведіть перпендикуляри з точки M до катетів AC і BC. Поясніть побудову.

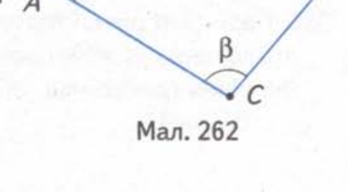
254°. У трикутнику ABC кут CAB дорівнює α, кут ACB — β (мал. 262). AD — перпендикуляр до площини трикутника ABC. Доведіть, що $DB \perp BC$, якщо:
1) $\alpha = 40°$, $\beta = 50°$; 2) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.



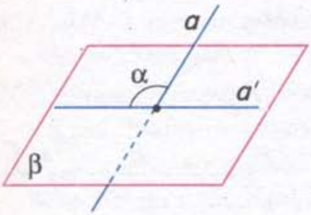
Мал. 260



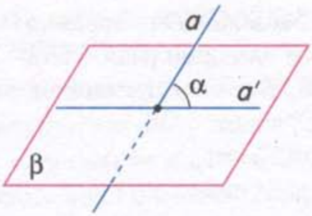
Мал. 261



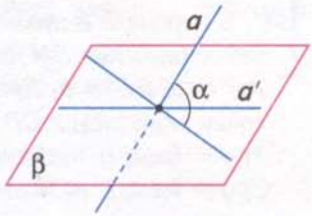
Мал. 262



Мал. 255



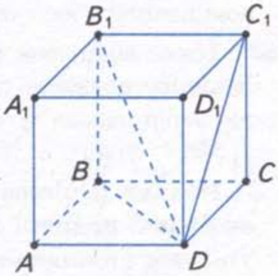
Мал. 256



Мал. 257

247'. На малюнках 255 — 257 пряма a' — проекція прямої a на площину β. На якому з малюнків кут α є кутом між прямою a і площиною β?

248'. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 258). Назвіть кут між:
1) діагоналлю DC_1 грані DD_1C_1C і площиною основи $ABCD$;
2) діагоналлю B_1D куба і площиною основи $ABCD$;
3) діагоналлю B_1D і площиною грані DD_1C_1C.

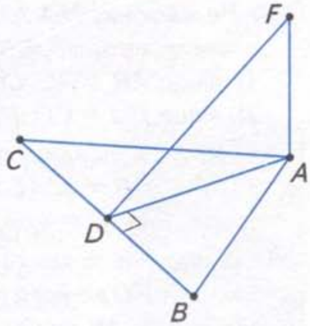


Мал. 258

249°. На малюнку 259 AF — перпендикуляр до площини $\triangle ABC$; AD — його висота. Доведіть, що $DF \perp BC$.

250°. На малюнку 260 DM — перпендикуляр до площини квадрата. Доведіть, що $OM \perp AC$.

251°. OM — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, у якому O — точка перетину діагоналей, $AB = a$, $OM = b$. Знайдіть відстань від точки M до сторони CD, якщо: 1) $a = 12$ см, $b = 8$ см; 2) $a = 16$ см, $b = 15$ см.

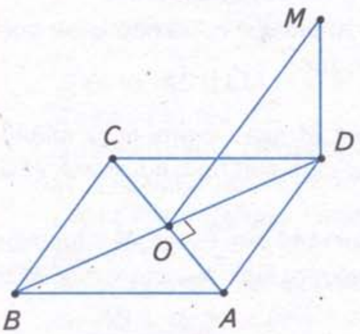


Мал. 259

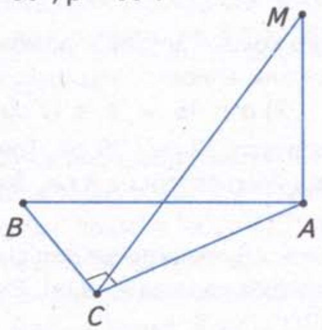
252°. На малюнку 261 AM — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Доведіть, що трикутник BMC — прямокутний.

253°. Із середини O гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC до його площини проведено перпендикуляр OM. Проведіть перпендикуляри з точки M до катетів AC і BC. Поясніть побудову.

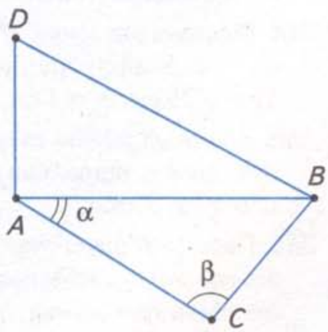
254°. У трикутнику ABC кут CAB дорівнює α, кут ACB — β (мал. 262). AD — перпендикуляр до площини трикутника ABC. Доведіть, що $DB \perp BC$, якщо:
1) $\alpha = 40°$, $\beta = 50°$; 2) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.



Мал. 260

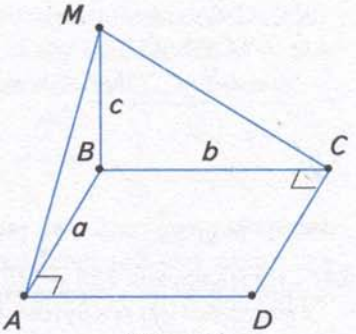


Мал. 261



Мал. 262

255°. З вершини B прямокутника $ABCD$ проведено перпендикуляр BM до його площини (мал. 263). $AB = a$, $BC = b$, $BM = c$. Знайдіть відстані від точки M до сторін CD і AD, якщо:
1) $a = 5$ см, $b = 16$ см, $c = 12$ см;
2) $a = 7$ см, $b = 10$ см, $c = 24$ см.

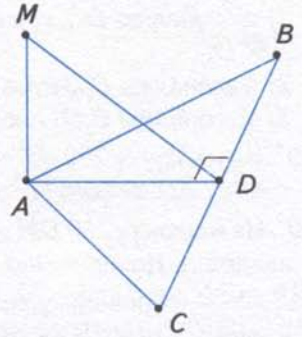


Мал. 263

256°. AM — перпендикуляр до площини рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$). Доведіть, що похилі MB і MC утворюють рівні кути із площиною даного трикутника.

257°. Точка віддалена від площини на відстань h. Знайдіть довжини похилих, проведених з цієї точки під такими кутами до площини:
1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

258°. Похила дорівнює a. Чому дорівнює проекція цієї похилої на площину, якщо похила утворює з площиною кут:
1) 30°; 2) 45°; 3) 60°?



Мал. 264

259. На малюнку 264 AM — перпендикуляр до площини трикутника ABC. Доведіть:
1) якщо $AB = AC$, $CD = BD$, то $MD \perp BC$;
2) якщо $BD = CD$, $MD \perp BC$, то $AB = AC$.

260. CM — перпендикуляр до площини рівнобедреного трикутника ABC ($AC = BC$). $CM = a$, $AB = b$, $AC = c$. Знайдіть відстань від точки M до прямої AB, якщо:
1) $a = 1$ см, $b = 2$ см, $c = 3$ см; 2) $a = 5$ см, $b = 2$ см, $c = 5$ см.

261. З вершини прямого кута C рівнобедреного трикутника ABC проведено перпендикуляр CD до його площини. $AC = a$, $CD = b$. Знайдіть відстань від точки D до гіпотенузи AB, якщо: 1) $a = 6\sqrt{2}$ см, $b = 8$ см; 2) $a = 12\sqrt{2}$ см, $b = 5$ см.

262. Доведіть, якщо існує точка, рівновіддалена від усіх сторін паралелограма, то цей паралелограм — ромб.

263. Точка F рівновіддалена від усіх сторін многокутника. Доведіть, що основа перпендикуляра FO, проведеного до площини многокутника, є центром кола, вписаного в многокутник.

264. Відстань від точки M до кожної зі сторін ромба дорівнює a, до площини ромба — b. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб, якщо:
1) $a = 25$ см, $b = 7$ см; 2) $a = 16$ см, $b = 12$ см.

265. Діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 16 см. Точка M, яка лежить поза площиною ромба, віддалена від його сторін на 8 см. Знайдіть відстань від точки M до площини ромба.

266. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює 144 см. Точка M віддалена від кожної сторони цього трикутника на 19 см. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника.

267. AM — перпендикуляр до площини прямокутника $ABCD$. Знайдіть AM, якщо $MB = 15$ см, $MC = 24$ см і $MD = 20$ см.

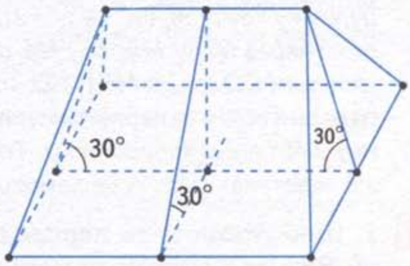
268. Виміри прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ становлять 1 см, 2 см і 8 см. Знайдіть площу трикутника A_1BD.

269*. З точки, віддаленої від площини на відстань a, проведено дві похилі під кутом 30° до площини. Знайдіть відстань між основами похилих, якщо кут між їх проекціями дорівнює 120°.

270*. З точки, віддаленої від площини на a, проведено дві похилі, які утворюють з площиною кути 45° і 30°, а між собою — прямий кут. Знайдіть відстань між основами похилих, якщо: 1) $a = 4$ см; 2) $a = 6$ см.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

271. Чотирисхилий дах будинку довжиною 12,5 м і шириною 7,2 м має схил 30° (мал. 265). Скільки квадратних метрів заліза треба на покриття, якщо витрати на згинання й обрізки становлять 6 %?



Мал. 265

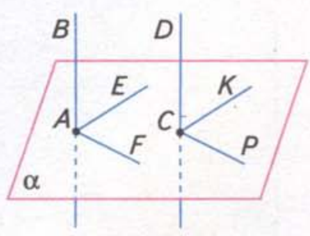
§40 Залежність між паралельністю й перпендикулярністю прямих та площин

Мал. 266

Подивіться на малюнок 266. На книжковій шафі позначено паралельні прямі a і b та площину α. Якщо площина α перпендикулярна до однієї з паралельних прямих, наприклад до a, то вона перпендикулярна й до прямої b. Зв'язок між паралельними прямими та перпендикулярною до них площиною виражається такою теоремою.

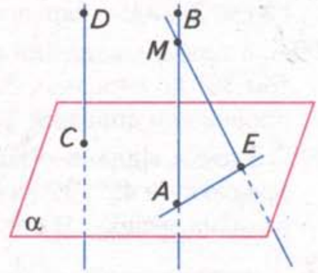
Теорема (про паралельні прямі та перпендикулярну площину)
Якщо площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої.

Дано: $AB \parallel CD$, $\alpha \perp AB$ (мал. 267).
Довести: $\alpha \perp CD$.
Доведення. Проведемо на площині α через точку A довільні прямі AE і AF, а через точку C — прямі CK і CP відповідно паралельні прямим AE і AF. Тоді $\angle BAE = \angle DCK$, $\angle BAF = \angle DCP$ як кути з паралельними й однаково напрямленими сторонами. Оскільки $AB \perp \alpha$, то $\angle BAE$ і $\angle BAF$ — прямі. Тоді $\angle DCK$ і $\angle DCP$ також будуть прямими. Отже, $CD \perp \alpha$.



Мал. 267

? Відомо, що площина перпендикулярна до однієї з основ трапеції. Як розміщена ця площина відносно другої основи? Перпендикулярно до основи. Це випливає з теореми про паралельні прямі та перпендикулярну площину, оскільки основи трапеції паралельні.



Мал. 268

Задача. Доведіть, що дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.

Розв'язання. Нехай прямі AB і CD перпендикулярні до площини α (мал. 268). Припустимо, що прямі AB і CD непаралельні. Візьмемо на прямій AB будь-яку точку M, що не лежить у площині α. Проведемо через точку M пряму ME, паралельну прямій CD. Оскільки $CD \perp \alpha$, а $ME \parallel CD$, то за теоремою про паралельні прямі та перпендикулярну площину $ME \perp \alpha$. A та E — точки перетину прямих AM і ME з площиною α. Тоді пряма AE перпендикулярна до прямих AB і ME, які перетинаються. А це неможливо. Тому прямі CD і AB паралельні.

1. Щоб установити перпендикулярність прямої та площини, перевірте, чи буде ця площина перпендикулярною до прямої, яка паралельна даній прямій.

2. Щоб обґрунтувати паралельність двох прямих, спробуйте знайти площину, перпендикулярну до кожної з даних прямих.

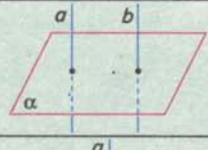
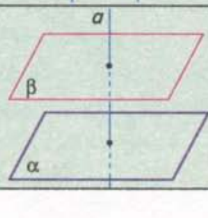
На малюнку 266 край книжкової шафи ілюструє пряму a, а дві полиці — площини α і β. Якщо пряма a перпендикулярна до площини α, то вона перпендикулярна й до площини β. Зв'язок між паралельними площинами та перпендикулярною до них прямою виражаємо теоремою, яку приймемо без доведення.

Теорема (про паралельні площини та перпендикулярну пряму)
Якщо пряма перпендикулярна до однієї з паралельних площин, то вона перпендикулярна й до другої.

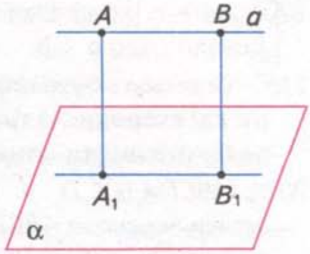
Щоб установити перпендикулярність прямої та площини, обґрунтуйте твердження, що ця пряма перпендикулярна до площини, паралельної даній.

Формулювання теорем і задачі наведено в таблиці 22.

Таблиця 22

	Якщо $a \parallel b$, $\alpha \perp a$, то $\alpha \perp b$
	Якщо $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \beta$, то $a \perp \alpha$
	Якщо $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$, то $\alpha \parallel \beta$

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ



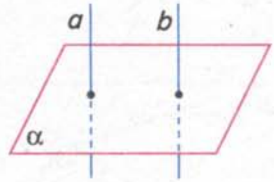
Мал. 269

Покажемо, що **відстань від прямої до паралельної їй площини не залежить від вибору точки на прямій,** тобто всі точки прямої лежать на однаковій відстані від площини. Нехай $a \parallel \alpha$ (мал. 269). Проведемо з двох довільних точок A і B прямої a перпендикуляри AA_1 і BB_1 до площини α. Доведемо, що $AA_1 = BB_1$. Оскільки $AA_1 \perp \alpha$ і $BB_1 \perp \alpha$, то $AA_1 \parallel BB_1$ (задача § 40). Проведемо через прямі AA_1 і BB_1 площину. Ця площина перетне площину α по прямій A_1B_1, паралельній AB. Отже, в чотирикутнику ABB_1A_1 протилежні сторони паралельні. Тому він є паралелограмом, а це означає, що $AA_1 = BB_1$.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Доведіть, якщо площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої прямої.
2. Доведіть, що дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.
3. Сформулюйте теорему про паралельні площини та перпендикулярну пряму.

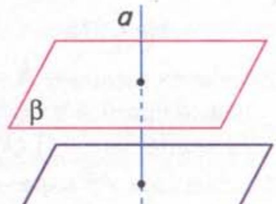
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ



Мал. 270

272'. Прямі a і b паралельні (мал. 270). Пряма a перпендикулярна до площини α. Чи можна стверджувати, що пряма b перпендикулярна до площини α?

273'. Прямі a і b перпендикулярні до площини α (див. мал. 270). Яке взаємне розміщення прямих a і b?



Мал. 271

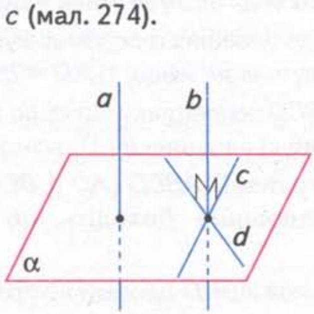
274'. Площини α і β паралельні (мал. 271). Пряма a перпендикулярна до площини β. Чи можна стверджувати, що пряма a перпендикулярна до площини α?

275°. Дано: $a \parallel b$, $a \perp \alpha$ (мал. 272). Поясніть, чому $b \perp c$.

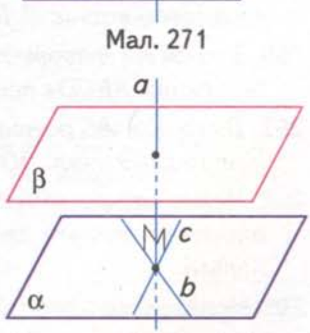
276°. Дано: $a \parallel b$, $b \perp c$ і $b \perp d$ (мал. 273). Доведіть, що $a \perp \alpha$.

277°. Дано: $\alpha \parallel \beta$, $a \perp b$ і $a \perp c$ (мал. 274). Доведіть, що $a \perp \beta$.

Мал. 272

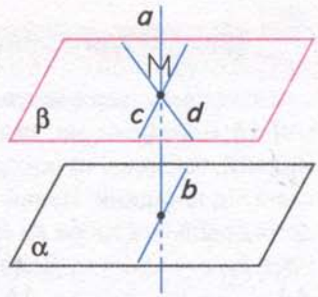


Мал. 273



Мал. 274

278°. Дано: $\alpha \parallel \beta$, $a \perp c$ і $a \perp d$ (мал. 275).
Доведіть, що $a \perp b$.



Мал. 275

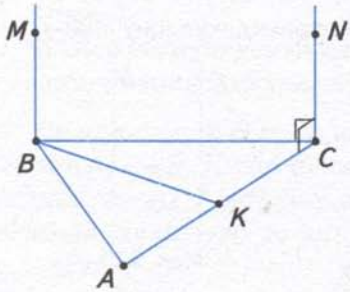
279°. Чи можуть бути перпендикулярними до площини дві сторони: 1) трикутника; 2) трапеції; 3) правильного шестикутника? Поясніть відповідь.

280°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Чи перпендикулярна до площини основи $ABCD$ пряма, що проходить через:
1) середини ребер DC і D_1C_1;
2) центри граней $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$;
3) вершину B_1 і середину ребра AB?
Поясніть відповідь.

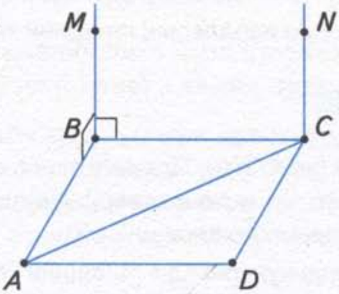
281. Дано: $CN \perp BC$, $CN \perp AC$, $CN \parallel BM$ (мал. 276).
Доведіть, що: 1) $BM \perp BK$; 2) $BM \perp AB$.

282. Дано: $CN \parallel BM$, $BM \perp BC$, $BM \perp AB$ (мал. 277).
Доведіть, що: 1) $CN \perp AC$; 2) $CN \perp CD$.

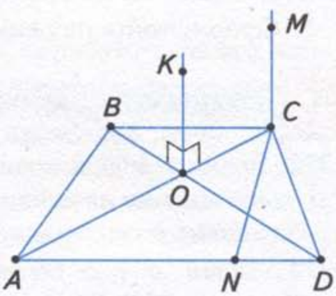
283. Дано: $OK \perp AC$, $OK \perp BD$, $OK \parallel CM$ (мал. 278).
Доведіть, що: 1) $CM \perp BC$; 2) $CM \perp CN$.



Мал. 276



Мал. 277



Мал. 278

284. Через вершину A ромба і точку O перетину його діагоналей проведено паралельні прямі AM і ON, причому $AM \perp AB$ і $AM \perp AD$.
Доведіть, що: 1) $ON \perp BD$; 2) $ON \perp AC$.

285. Відрізок AB паралельний площині α. Із точки A до площини α проведено перпендикуляр AD. Через точку B проведено пряму, паралельну AD, яка перетинає площину α в точці C. Якого виду чотирикутник $ABCD$? Поясніть відповідь.

286. З точок A і B проведено до площини α перпендикуляри AD і BC. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є прямокутником, якщо: 1) $AD = BC$; 2) прямі AB і DC паралельні.

287. Діагональ AC ромба $ABCD$ перпендикулярна до площини α. Яке взаємне розміщення діагоналі BD ромба і площини α? Поясніть відповідь.

288. Через вершини A і C трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) проведено прямі AM і CN, перпендикулярні до її площини. Доведіть, що площини DAM і BCN паралельні.

289. Через вершини A і C ромба $ABCD$ проведено прямі AM і CN, перпендикулярні до його площини. Доведіть паралельність площин: 1) MAB і NCD; 2) MAD і NCB.

290*. Площина α і пряма b, яка не лежить на площині α, перпендикулярні до прямої a. Доведіть, що $b \parallel \alpha$.

291*. Доведіть, що відстань від середини відрізка до площини, яка не перетинає його, дорівнює півсумі відстаней від кінців відрізка до цієї площини.

292*. Доведіть, що відстань між паралельними площинами не залежить від вибору точки на одній з них.

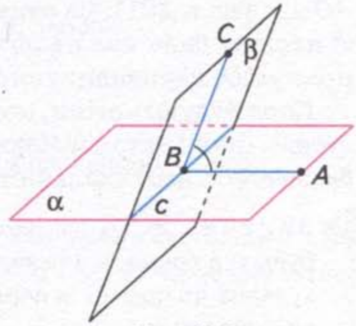
293*. З точок A і B, які розміщені по один бік від площини, проведено перпендикуляри AD і BC до площини. Знайдіть кути чотирикутника $ABCD$, якщо $AD = 21$ см, $BC = 15$ см, $DC = 6$ см.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

294. Як перевірити паралельність стелі й підлоги кімнати? Скільки кутів треба виміряти для цього?

295. Запропонуйте спосіб перевірки паралельності площин, використавши означення відстані між паралельними площинами.

§41 Перпендикулярні площини



Мал. 279

Спочатку дамо означення кута між площинами. Нехай α і β — площини, які перетинаються по прямій c (мал. 279). Проведемо в цих площинах через довільну точку B прямої c прямі AB і BC, перпендикулярні до c. Тоді кут між площинами α і β дорівнюватиме куту між прямими AB і BC.

Записуємо: $\angle(\alpha\beta) = \angle ABC$.

Чи залежить градусна міра кута ABC від вибору точки на прямій c? Не залежить, бо дістанемо два кути з паралельними й однаково напрямленими сторонами. А такі кути рівні.

Кутом між площинами, які перетинаються, називається кут між прямими, проведеними в цих площинах зі спільної точки перпендикулярно до лінії їх перетину.

Кут між паралельними площинами вважається таким, що дорівнює 0°. Якщо кут між площинами дорівнює 90°, то говорять, що площини перпендикулярні.

Записуємо: $\alpha \perp \beta$.

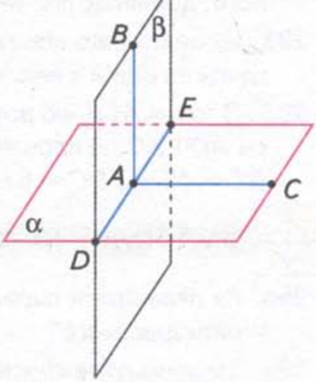
Дві площини називаються ***перпендикулярними***, якщо кут між ними дорівнює 90°.

Теорема (ознака перпендикулярності площин)
Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.

Дано: площини α і β (мал. 280);
A лежить в α; $AB \perp \alpha$; β проходить через AB.

Довести: $\beta \perp \alpha$.

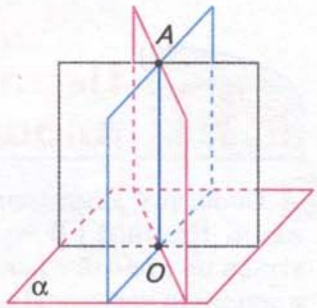
Доведення. Площини α і β мають спільну точку A. Тому вони перетинаються по прямій DE, яка проходить через цю точку. В площині α проведемо пряму AC, перпендикулярну до прямої DE. Оскільки $AB \perp \alpha$, а прямі AC і DE лежать у площині α, то $AB \perp AC$ і $AB \perp DE$. Крім того, $AC \perp DE$.
Отже, $\angle(\alpha\beta) = \angle CAB = 90°$, тобто $\beta \perp \alpha$.



Мал. 280

? Скільки площин, перпендикулярних до даної площини α, можна провести через точку A, яка не лежить у даній площині? Безліч. Проведемо пряму $AO \perp \alpha$ (мал. 281). За ознакою перпендикулярності площин будь-яка площина, яка проходить через пряму AO, перпендикулярна до площини α.

Коли будують стіни, огорожі та інші споруди, то стовпи (палі) встановлюють вертикально і цим забезпечують вертикальність стін чи огорож.



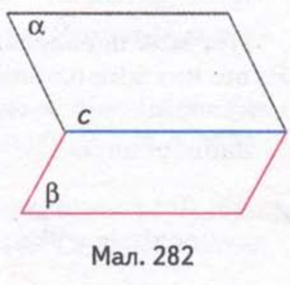
Мал. 281

Задача. Якщо дві площини перпендикулярні, то будь-яка пряма, що лежить в одній з них і перпендикулярна до прямої їх перетину, перпендикулярна до другої площини.

Розв'язання. Нехай α і β — перпендикулярні площини (див. мал. 280), пряма AB лежить у площині β і перпендикулярна до прямої DE перетину площин. Доведемо, що $AB \perp \alpha$. Проведемо в площині α пряму AC, перпендикулярну до DE — прямої перетину площин α і β. Тоді кожна з прямих AC і AB перпендикулярна до DE. Тому кут між прямими AC і AB дорівнює куту між площинами α і β. Оскільки, за умовою, $\alpha \perp \beta$, то $\angle CAB = 90°$ і $AB \perp AC$. Отже, пряма AB перпендикулярна до прямих DE і AC, які перетинаються. За ознакою перпендикулярності прямої та площини $AB \perp \alpha$.

Щоб обґрунтувати перпендикулярність двох площин, знайдіть в одній із цих площин пряму, перпендикулярну до другої площини або до лінії їх перетину.

Подивіться на малюнок 282. Пряма c ділить кожну з площин α і β на дві півплощини. Фігуру, утворену двома півплощинами, які виходять з однієї прямої, називають *двогранним кутом*. На малюнку 282 зображено двогранний кут.

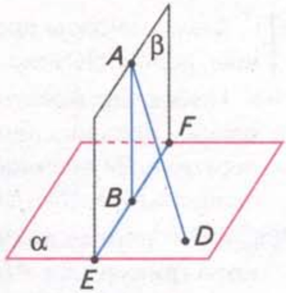


Мал. 282

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

У розв'язуванні задач використовується й таке твердження.

Якщо дві площини α і β перпендикулярні, а до площини α проведено перпендикулярну пряму, що має спільну точку з площиною β, то ця пряма лежить у площині β.



Мал. 283

Нехай $AD \perp \alpha$. Припустимо, що пряма AD не лежить у площині β (мал. 283). Проведемо на площині β пряму $AB \perp EF$, де EF — пряма перетину площин α і β. Тоді $AB \perp \alpha$ (задача § 41). Матимемо дві прямі AB і AD, які перпендикулярні до площини α і перетинаються. Але це суперечить задачі § 40. Отже, пряма AD лежить у площині β.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Дайте означення кута між площинами.
2. Яка градусна міра кута між паралельними площинами?
3. Які площини називаються перпендикулярними?
4. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності площин.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

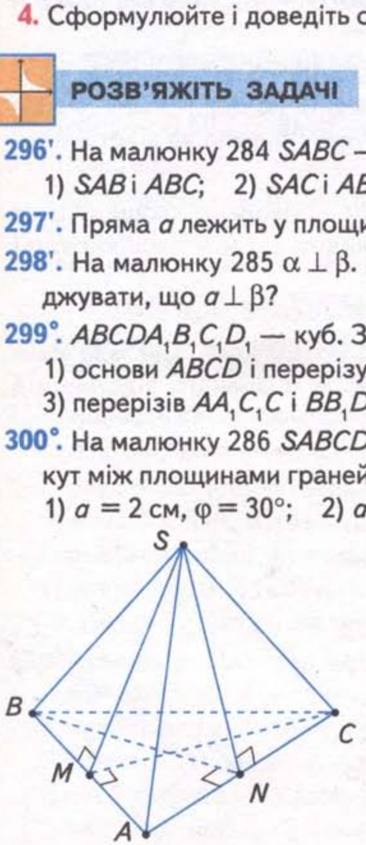
296'. На малюнку 284 $SABC$ — піраміда. Назвіть кут між площинами граней:
1) SAB і ABC; 2) SAC і ABC.

297'. Пряма a лежить у площині α і $a \perp \beta$ (мал. 285). Чи випливає з цього, що $\alpha \perp \beta$?

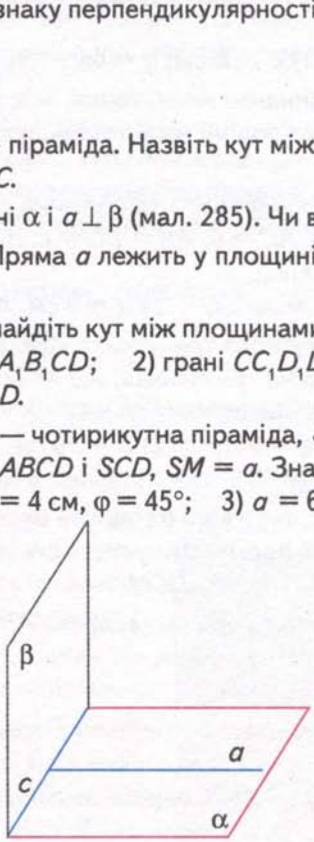
298'. На малюнку 285 $\alpha \perp \beta$. Пряма a лежить у площині α і $a \perp c$. Чи можна стверджувати, що $a \perp \beta$?

299°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між площинами:
1) основи $ABCD$ і перерізу A_1B_1CD; 2) грані CC_1D_1D і перерізу AA_1C_1C;
3) перерізів AA_1C_1C і BB_1D_1D.

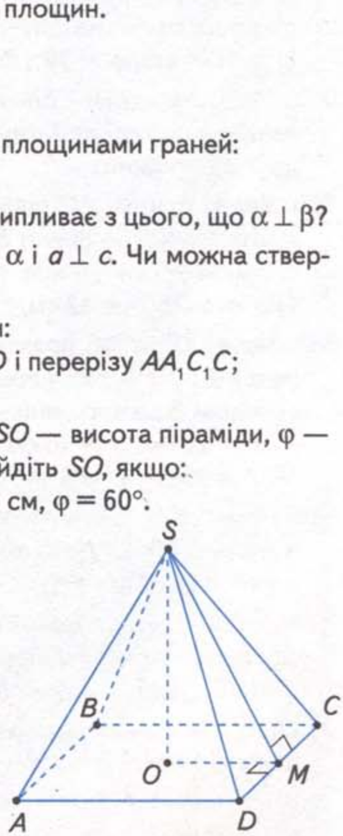
300°. На малюнку 286 $SABCD$ — чотирикутна піраміда, SO — висота піраміди, φ — кут між площинами граней $ABCD$ і SCD, $SM = a$. Знайдіть SO, якщо:
1) $a = 2$ см, $\varphi = 30°$; 2) $a = 4$ см, $\varphi = 45°$; 3) $a = 6$ см, $\varphi = 60°$.



Мал. 284



Мал. 285



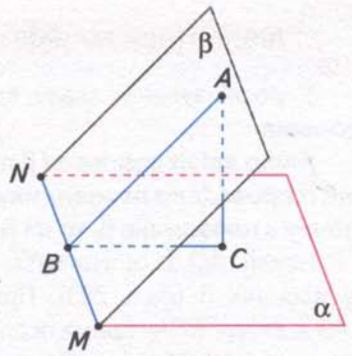
Мал. 286

301°. Скільки можна провести через дану точку площин, перпендикулярних до даної площини?

302°. Пряма, що лежить в одній із двох перпендикулярних площин, перпендикулярна до прямої їх перетину. Як розміщена ця пряма відносно другої площини? Поясніть відповідь.

303°. CD — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Доведіть, що площини $\triangle BCD$ і $\triangle ACD$ перпендикулярні.

304°. На малюнку 287 $AB \perp MN$, $AC \perp \alpha$. Доведіть, що кут ABC — це кут між площинами α і β.



Мал. 287

305°. У трикутній піраміді $SABC$ усі ребра рівні, точка M — середина ребра SC. Доведіть, що кут AMB — це кут між площинами граней SAC і SBC.

306. Площини α і β перетинаються під кутом φ. Точка A площини β віддалена від площини α на відстань a. Знайдіть відстань від точки A до прямої перетину площин, якщо: 1) $a = 10$ см, $\varphi = 30°$; 2) $a = 6$ см, $\varphi = 60°$; 3) $a = 4$ см, $\varphi = 45°$.

307. Площини α і β перетинаються під кутом φ. Відстань від точки A площини β до прямої перетину площин дорівнює a. Знайдіть відстань від точки A до площини α, якщо:
1) $a = 24$ см, $\varphi = 30°$; 2) $a = 8$ см, $\varphi = 45°$; 3) $a = 14$ см, $\varphi = 60°$.

308. Знайдіть кут між площинами, якщо точка, яка лежить на одній з них, віддалена від прямої перетину площин на відстань, що удвічі більша за відстань від другої площини.

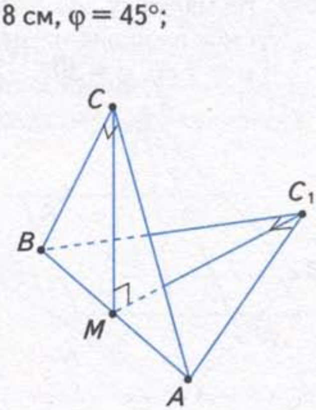
309. Через основу AC рівнобедреного трикутника ABC проведено площину α на відстані a від вершини B, $AC = b$, $AB = BC = c$. Знайдіть кут між площиною α і площиною трикутника, якщо:
1) $a = 4$ см, $b = 12$ см, $c = 10$ см; 2) $a = 8$ см, $b = 24$ см, $c = 20$ см.

310. Через катет AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) проведено площину α під кутом φ до площини трикутника, $AB = c$, $AC = b$. Знайдіть відстань від вершини B до площини α, якщо:
1) $c = 20$ см, $b = 16$ см, $\varphi = 30°$; 2) $c = 10$ см, $b = 8$ см, $\varphi = 45°$;
3) $c = 13$ см, $b = 5$ см, $\varphi = 60°$.

311. Пряма CM перпендикулярна до площини прямокутника $ABCD$. Доведіть перпендикулярність площин: 1) BCM і DCM; 2) ADM і DCM.

312. Точка M рівновіддалена від вершин квадрата $ABCD$. Доведіть перпендикулярність площин:
1) AMC і ABC; 2) AMC і BMD.

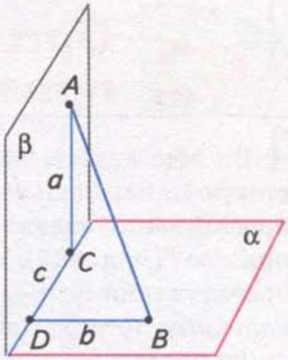
313. Площини двох прямокутних рівнобедрених трикутників зі спільною гіпотенузою $AB = a$ перпендикулярні (мал. 288). Знайдіть відстань між вершинами прямих кутів, якщо:
1) $a = 10$ см; 2) $a = 18$ см; 3) $a = 22$ см.



Мал. 288

314. Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у перпендикулярних площинах, $AB = a$. Знайдіть:
1) відстань між точками D і D_1;
2) відстань між точками C і D_1;
3) кут між діагоналями AC і AC_1.

315. Точка розміщається на відстані a від двох перпендикулярних площин. Знайдіть відстань від цієї точки до прямої перетину площин, якщо:
1) $a = 4\sqrt{2}$ см; 2) $a = 5$ см.



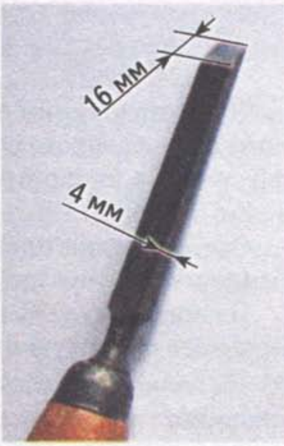
Мал. 289

316. Із точок A і B, які лежать у двох перпендикулярних площинах, проведено перпендикуляри AC і BD до прямої перетину площин (мал. 289). $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 12$ см; 2) $a = 24$ см, $b = 8$ см, $c = 6$ см.

317*. Висота правильної піраміди дорівнює половині сторони основи. Знайдіть кут між площинами основи і бічної грані, якщо основа піраміди:
1) трикутник; 2) квадрат; 3) шестикутник.

318*. Точка A знаходиться на відстанях a і b від двох площин, що перетинаються. Знайдіть відстань від точки A до прямої перетину площин, якщо кут між площинами дорівнює:
1) 90°; 2) 60°; 3) 30°.

319*. Кінці відрізка довжиною a лежать на двох перпендикулярних площинах. Відрізок утворює з однією площиною кут 45°, а з другою — кут 30°. Знайдіть частину прямої перетину площин, що розміщається між основами перпендикулярів, проведених до неї з кінців даного відрізка.



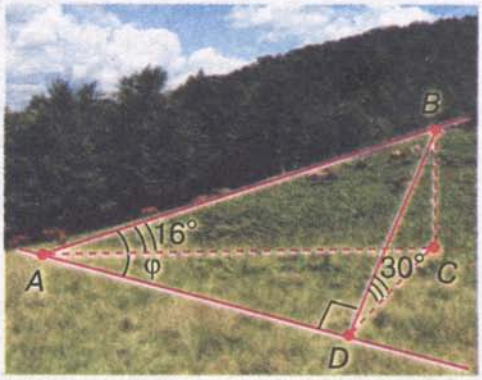
Мал. 290

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

320. Знайдіть кут загострення стамески за розмірами, наведеними на малюнку 290.

321. Вертикальність установленої плоскої поверхні (стіни, паркана тощо) можна перевірити за допомогою виска — мотузки з тягарцем. Поясніть, як це зробити. На чому ґрунтується така перевірка?

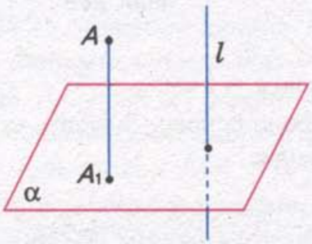
322. Кут між площинами іноді називають кутом найбільшого нахилу, або підйому. Кут найбільшого підйому гори дорівнює 30° (мал. 291). Під яким кутом φ до підошви гори треба прокласти прямолінійну дорогу AB, щоб кут її нахилу до площини горизонту дорівнював 16°?



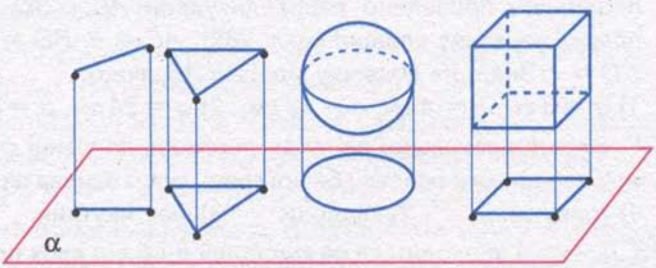
Мал. 291

§42 Ортогональне проектування

Ви вже знаєте, як зображати просторові фігури на площині, використовуючи паралельне проектування. Розглянемо окремий його вид. Нехай проектування задано площиною проекцій α і напрямком проектування — прямою l (мал. 292). Якщо пряма l перпендикулярна до площини α, то таке проектування називають *ортогональним*, або *прямокутним*. При ортогональному проектуванні усі проектувальні прямі перпендикулярні до площини проекцій.



Мал. 292



Мал. 293

Проекцією точки A під час ортогонального проектування є основа перпендикуляра A_1, проведеного з даної точки до площини (мал. 292). Проекцією фігури F на площину називають фігуру F_1, яка складається з проекцій усіх точок фігури F.

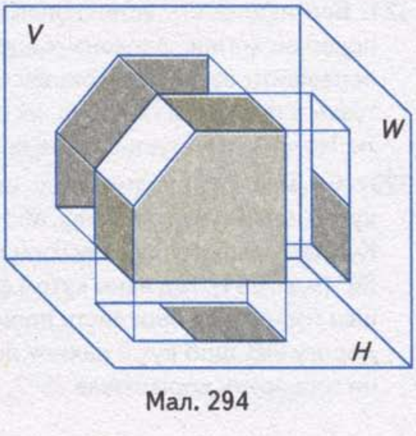
Ортогональне проектування має всі властивості паралельного проектування, оскільки є окремим його видом.

На малюнку 293 зображено деякі фігури та їх проекції під час ортогонального проектування.

? Чи може ортогональна проекція трикутника бути відрізком? Так, якщо площина трикутника перпендикулярна до площини проекцій.

Ортогональне проектування застосовується в кресленні. Воно може здійснюватися на дві або три перпендикулярні площини. Якщо таких площин три, то вони називаються фронтальною (V), горизонтальною (H) і профільною (W).

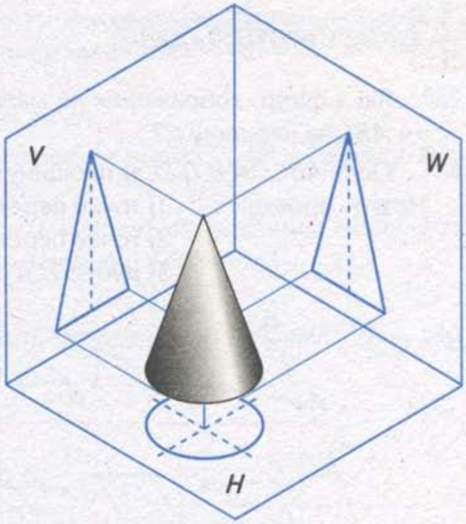
Через характерні точки (найчастіше це вершини) фігури проводять проектувальні прямі до перетину з площинами проекцій. Точки перетину сполучають прямими або кривими лініями. Утворені фігури є проекціями даної фігури на площини V, H і W (мал. 294).



Мал. 294

На малюнку 295 зображено проекції конуса, основа якого паралельна горизонтальній площині H. Тоді його проекцією на цю площину є круг. Фронтальна і профільна проекції конуса — це рівнобедрені трикутники.

Надалі розглядатимемо ортогональне проектування лише плоских геометричних фігур на одну площину. Замість ортогональної проекції коротко говоритимемо: «проекція».



Мал. 295

Розділи стереометрії, в яких вивчають **паралельність та перпендикулярність прямих і площин, має велике практичне значення.** Їх можна назвати «будівельною геометрією». Справді, в будівлях міжповерхові перекриття паралельні між собою та перпендикулярні до споруджених стін, а стіни перпендикулярні або паралельні між собою.

Ми, можна сказати, оточені перпендикулярами й паралелями: ніжки стола перпендикулярні до підлоги і паралельні між собою, краї шафи перпендикулярні до стін або паралельні їм тощо. Те саме можна сказати про стовпи, лінії електропередачі, залізничні колії тощо.

Під час обертання навколо перпендикуляра площина суміщається сама із собою. Тому вісь перпендикулярна до площини колеса. Правильно навішені двері відчиняються вільно і не зачіпають підлоги.

Вертикальність установленої плоскої поверхні (стіни, паркана тощо) перевіряють за допомогою виска — мотузки з тягарцем. Висок завжди напрямлений вертикально, тому й стіна стоїть вертикально, якщо в будь-якому місці висок, розміщуючись уздовж стіни, не відхиляється.

Паралельність та перпендикулярність застосовуються у фізиці. Тиск рідини або газу на стінку посудини напрямлений перпендикулярно до стінки; тиск вантажу на опору напрямлений перпендикулярно до неї; сили, що діють на важелі, напрямлені паралельно; перпендикуляр до поверхні фігурує в законах відбиття й заломлення світла.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Спосіб прямокутного проектування на взаємно перпендикулярні площини розробив французький учений-геометр Гаспар Монж наприкінці XVIII ст. Тому цей спосіб часто називають способом Монжа. Г. Монж започаткував розвиток науки про зображення предметів — *нарисної геометрії*.

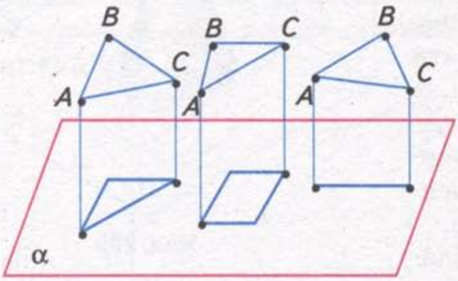
ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке ортогональне, або прямокутне, проектування?
2. Чим різняться між собою ортогональне і паралельне проектування?
3. Якою фігурою при ортогональному проектуванні є проекція точки; проекція фігури?

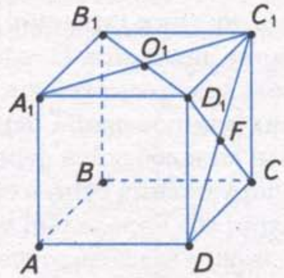
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

323'. Які з фігур, зображених на малюнку 296, можуть бути проекціями трикутника ABC на площину α?

324'. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ за площину проекцій взято площину грані $ABCD$ (мал. 297). Назвіть проекцію: 1) точки перетину діагоналей грані DD_1C_1C; 2) точки перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$; 3) ребра B_1C_1; 4) грані $A_1B_1C_1D_1$; 5) $\triangle A_1C_1D_1$.



Мал. 296



Мал. 297

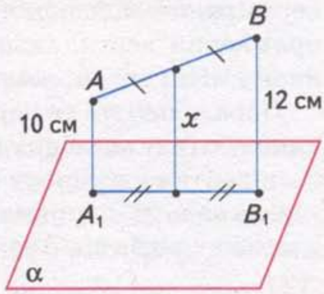
325'. Чи може проекцією кола бути: 1) коло; 2) відрізок; 3) пряма?

326°. Кінець A відрізка AB довжиною a лежить на площині α, кінець B віддалений від площини на відстань b. Знайдіть:
1) проекцію відрізка AB; 2) відстань від середини відрізка до площини.

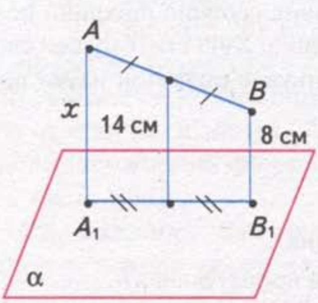
327°. Кінець A відрізка AB лежить на площині α, середина відрізка віддалена від площини на відстань a. Знайдіть відстань від кінця B відрізка до площини α, якщо:
1) $a = 7$ см; 2) $a = 5$ см; 3) $a = 11$ см.

328°. На малюнках 298, 299 відрізок A_1B_1 — проекція відрізка AB на площину α. За даними на малюнках знайдіть невідомий відрізок x.

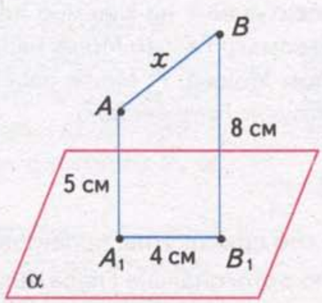
329°. Чи може проекція відрізка на площину бути:
1) меншою за відрізок; 2) дорівнювати відрізку;
3) більшою за відрізок?



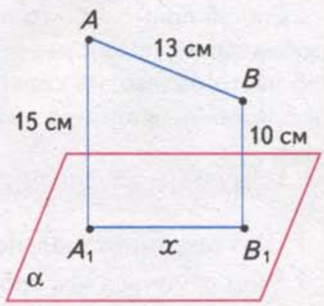
Мал. 298



Мал. 299



Мал. 300



Мал. 301

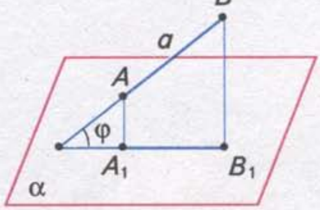
330°. Сторона $AC = a$ рівностороннього трикутника лежить у площині α, вершина B віддалена від площини на b. Знайдіть проекції сторін AB і BC на площину α, якщо:
1) $a = 20$ см, $b = 12$ см; 2) $a = 25$ см, $b = 15$ см.

331. На малюнках 300, 301 відрізок A_1B_1 — проекція відрізка AB на площину α. Знайдіть невідомий відрізок x.

332. Відрізок AB перетинає площину α. Знайдіть відстань від середини відрізка до площини α, якщо відстані від точок A і B до площини дорівнюють:
1) 10 см і 6 см; 2) 14 см і 8 см.

333. Відрізок AB перетинає площину α. Знайдіть проекцію A_1B_1 відрізка AB на площину α, якщо:
1) $AB = 26$ см, $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 2$ см;
2) $AB = 20$ см, $AA_1 = 10$ см, $BB_1 = 6$ см.

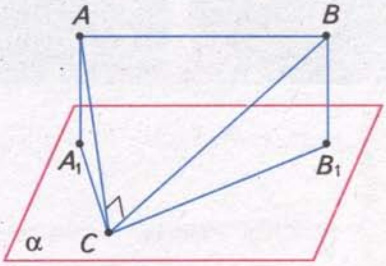
334. Відрізок $AB = a$ лежить поза площиною α, пряма AB нахилена до площини α під кутом φ (мал. 302). Знайдіть проекцію відрізка AB на площину α, якщо:
1) $a = 12$ см, $\varphi = 60°$;
2) $a = 8$ см, $\varphi = 30°$;
3) $a = 16$ см, $\varphi = 45°$.



Мал. 302

335. Відрізок AB лежить поза площиною α, $A_1B_1 = b$ — проекція відрізка AB на площину α, φ — кут між прямою AB і площиною. Знайдіть відрізок AB, якщо:
1) $b = 4$ см, $\varphi = 60°$; 2) $b = 2\sqrt{2}$ см, $\varphi = 45°$;
3) $b = 3\sqrt{3}$ см, $\varphi = 30°$.

336. Через вершину C прямого кута трикутника ABC проведено площину α, віддалену від гіпотенузи на відстань a (мал. 303). Катети трикутника дорівнюють b і c. Знайдіть проекції катетів і гіпотенузи на площину α, якщо:
1) $b = 15$ см, $c = 20$ см, $a = 12$ см;
2) $b = 10$ см, $c = 24$ см, $a = 6$ см.



Мал. 303

337*. Кінці відрізка, який не перетинає площину, віддалені від неї на a і b. Точка M ділить відрізок у відношенні $m : n$. Як віддалена від площини точка M, якщо:
1) $a = 10$ см, $b = 25$ см, $m : n = 2 : 3$;
2) $a = 4$ см, $b = 20$ см, $m : n = 3 : 5$?

338*. Сторона ромба дорівнює a, а гострий кут — 60°. Через одну зі сторін ромба проведено площину. Проекція другої сторони на площину дорівнює b. Знайдіть проекції діагоналей ромба.

339*. Через сторону AD паралелограма $ABCD$ проведено площину α. $AD = 10$ см, $AB = 15$ см, а проекції діагоналей AC і BD на площину α відповідно дорівнюють 13,5 см і 10,5 см. Знайдіть діагоналі паралелограма.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

340. Потрібно протягнути два електричних дроти від стовпа до будинку (мал. 304). На стовпі вони кріпляться на висоті 9 м, а на стіні будинку — на висоті 4 м. Скільки потрібно дроту, якщо відстань від стовпа до будинку становить 20 м, а на кріплення і провисання слід додати 6 % знайденої довжини?

Мал. 304

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

Контрольні запитання

1. Дайте означення прямої, перпендикулярної до площини.
2. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності прямої та площини.
3. Що таке перпендикуляр, проведений з даної точки до площини?
4. Що таке похила, проведена з даної точки до площини? Що таке проекція похилої?
5. Сформулюйте властивості перпендикуляра й похилої.
6. Сформулюйте теорему про три перпендикуляри.
7. Дайте означення кута між прямою та площиною.
8. Сформулюйте теорему про паралельні прямі та перпендикулярну площину.
9. Сформулюйте теорему про паралельні площини та перпендикулярну пряму.
10. Дайте означення кута між площинами. Які площини називаються перпендикулярними?
11. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності площин.
12. Що таке ортогональне проектування?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 4

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 — 15 хв.

Тест I

1°. Пряма CD перпендикулярна до сторони AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Назвіть пряму і площину, які перпендикулярні між собою.

А. Пряма CD і площина ABC.
Б. Пряма BC і площина ACD.
В. Пряма AB і площина BCD.
Г. Пряма AC і площина BCD.

2°. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу, які дорівнюють 6 см і 10 см. Знайдіть проекцію похилої.

А. 12 см.
Б. 81 см.
В. 8 см.
Г. 3 см.

3°. Точка віддалена від площини на 9 см. Знайдіть довжину похилої, проведеної з цієї точки під кутом 30° до площини.

А. 4 см.
Б. 18 см.
В. 12 см.
Г. 24 см.

4. Пряма CM перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$ зі стороною 2 см, $CM = 1$ см. Знайдіть відстань від точки M до вершини A даного квадрата.

А. 3 см.
Б. 9 см.
В. $2\sqrt{2}$ см.
Г. 5 см.

5*. OM — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, де O — точка перетину діагоналей. Знайдіть відстань від точки M до сторони квадрата, якщо $AB = 6$ см, $OM = 4$ см.

А. 10 см.
Б. 5 см.
В. 2 см.
Г. $\sqrt{5}$ см.

Тест II

1°. Відрізок AB паралельний площині α. Із точок A і B до площини α проведено перпендикуляри AD і BC. Якого виду чотирикутник $ABCD$?

А. Довільний чотирикутник.
Б. Трапеція.
В. Ромб.
Г. Прямокутник.

2°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між площинами основи $ABCD$ і перерізу A_1B_1CD.

А. 60°.
Б. 90°.
В. 45°.
Г. 30°.

3°. Кінець A відрізка AB довжиною 15 см лежить у площині α, а кінець B віддалений від площини на 9 см. Знайдіть проекцію відрізка AB.

А. 24 см.
Б. 13 см.
В. 6 см.
Г. 12 см.

4. Сторона AC рівностороннього трикутника довжиною 10 см лежить у площині α, а вершина B віддалена від площини на 8 см. Знайдіть проекції сторін AB і BC на площину α.

А. 6 см і 10 см.
Б. 4 см і 4 см.
В. 6 см і 6 см.
Г. 8 см і 12 см.

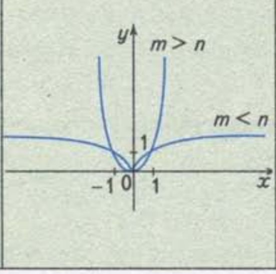
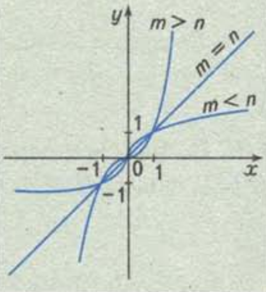
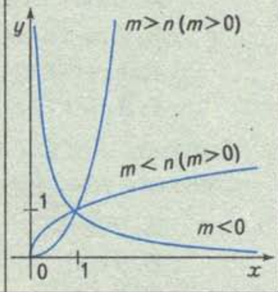
5*. Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у перпендикулярних площинах. Знайдіть відстань між точками D і D_1, якщо $AB = 9$ см.

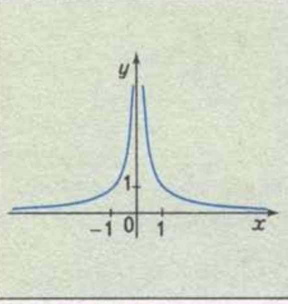
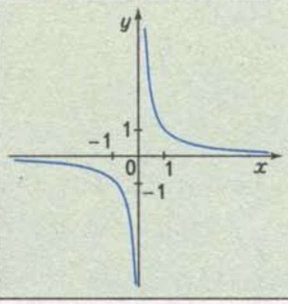
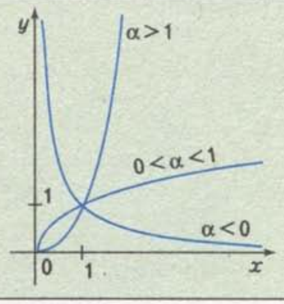
А. $9\sqrt{2}$ см.
Б. 9 см.
В. 8 см.
Г. $8\sqrt{2}$ см.

ПОВТОРЕННЯ ВИВЧЕНОГО

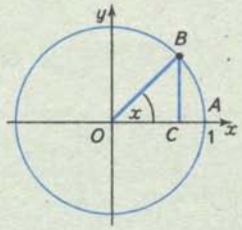
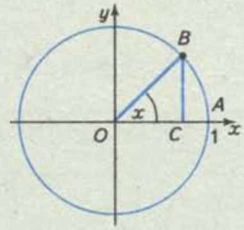
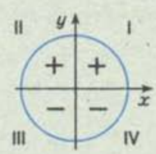
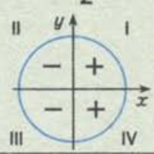
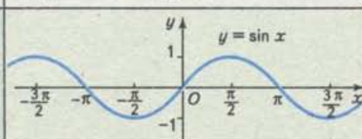
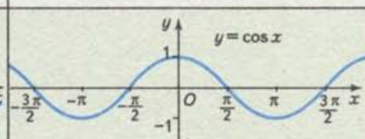
АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$

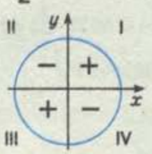
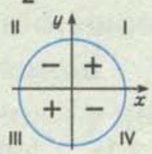
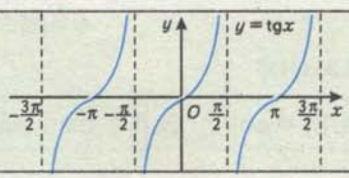
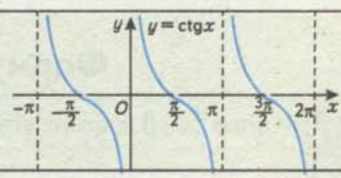
Властивості функції	$\alpha = \frac{m}{n}$, $m \in Z$, $n, k, l \in N$		
	$m = 2k$	$m = 2k - 1$, $n = 2l - 1$	$n = 2l$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$, якщо $m > 0$; $(0; +\infty)$, якщо $m < 0$
Множина значень	$[0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$, якщо $m > 0$; $(0; +\infty)$, якщо $m < 0$
Парність	Парна	Непарна	Ні парна, ні непарна
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$	$x = 0$, якщо $m > 0$
Монотонність	Спадна на проміжку $(-\infty; 0]$ і зростаюча на інтервалі $(0; +\infty)$	Зростаюча на інтервалі $(-\infty; +\infty)$	Зростаюча на проміжку $[0; +\infty)$, якщо $m > 0$; спадна на інтервалі $(0; +\infty)$, якщо $m < 0$
Графік функції			

		α — ірраціональне число	
$m = -2k$, $n = 2l - 1$	$m = -(2k - 1)$, $n = 2l - 1$	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
Парна	Непарна	Ні парна, ні непарна	Ні парна, ні непарна
Немає	Немає	$x = 0$	Немає
Зростаюча на інтервалі $(-\infty; 0)$ і спадна на інтервалі $(0; +\infty)$	Спадна на інтервалах $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	Зростаюча на проміжку $[0; +\infty)$	Спадна на інтервалі $(0; +\infty)$
			

Тригонометричні функції

Властивості функції	ФУНКЦІЯ	
	$f(x) = \sin x$	$f(x) = \cos x$
Означення	 $BC = \sin x$	 $OC = \cos x$
Область визначення $D(f)$	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$
Множина значень $E(f)$	$y \in [-1; 1]$	$y \in [-1; 1]$
Парність	Непарна	Парна
Нулі функції	$x = \pi n,\ n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$
Найменший додатний період	2π	2π
Проміжки знакосталості	$\sin x > 0$, $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n),\ n \in Z$; $\sin x < 0$, $x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n),\ n \in Z$; 	$\cos x > 0$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in Z$; $\cos x < 0$, $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in Z$ 
Монотонність	Зростає від -1 до 1 на відрізках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right],\ n \in Z$; спадає від 1 до -1 на відрізках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right],\ n \in Z$	Зростає від -1 до 1 на відрізках $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n],\ n \in Z$; спадає від 1 до -1 на відрізках $[2\pi n; \pi + 2\pi n],\ n \in Z$
Графік функції		
Найпростіші тригонометричні рівняння	$\sin x = a\ (\lvert a \rvert \le 1) \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$	$\cos x = a\ (\lvert a \rvert \le 1) \Leftrightarrow x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$

числового аргументу

$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f(x) = \operatorname{ctg} x$
$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
$x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$	$x \neq \pi n,\ n \in Z$
$y \in (-\infty; +\infty)$	$y \in (-\infty; +\infty)$
Непарна	Непарна
$x = \pi n,\ n \in Z$	$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$
π	π
$\operatorname{tg} x > 0$, $x \in \left(\pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z$; $\operatorname{tg} x < 0$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right),\ n \in Z$ 	$\operatorname{ctg} x > 0$, $x \in \left(\pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z$; $\operatorname{ctg} x < 0$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right),\ n \in Z$ 
Зростає на інтервалах $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z$	Спадає на інтервалах $(\pi n; \pi + \pi n),\ n \in Z$
	
$\operatorname{tg} x = a\ (a \in R) \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$	$\operatorname{ctg} x = a\ (a \in R) \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$

Деякі значення тригонометричних функцій

x	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{\pi}{2}$ 90°	$\frac{2\pi}{3}$ 120°	$\frac{3\pi}{4}$ 135°	$\frac{5\pi}{6}$ 150°	π 180°	$\frac{7\pi}{6}$ 210°	$\frac{5\pi}{4}$ 225°	$\frac{4\pi}{3}$ 240°	$\frac{3\pi}{2}$ 270°	$\frac{5\pi}{3}$ 300°	$\frac{7\pi}{4}$ 315°	$\frac{11\pi}{6}$ 330°	2π 360°
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\mathrm{ctg}\, x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не існує

Формули зведення

x	$90°-\alpha$ $\frac{\pi}{2}-\alpha$	$90°+\alpha$ $\frac{\pi}{2}+\alpha$	$180°-\alpha$ $\pi-\alpha$	$180°+\alpha$ $\pi+\alpha$	$270°-\alpha$ $\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$270°+\alpha$ $\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$360°-\alpha$ $2\pi-\alpha$	$360°+\alpha$ $2\pi+\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\, x$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;}$ $\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},}$ $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$

$\boxed{\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\cos x}{\sin x},}$ $\alpha\neq\pi n,\ n\in Z;$ $\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha=1,}$ $\alpha\neq n\frac{\pi}{2},\ n\in Z;$

$\boxed{1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},}$ $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$ $\boxed{1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},}$ $\alpha\neq\pi n,\ n\in Z$

Формули додавання

$\boxed{\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;}$ $\boxed{\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta.}$

$\boxed{\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta}{1\mp\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta},}$ $\alpha,\beta,\alpha\pm\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

Формули подвійного аргументу

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$;

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \alpha, 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}, \quad \alpha \neq n\frac{\pi}{2},\ n \in Z$$

Формули половинного аргументу

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \pi + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq 2\pi n,\ n \in Z$$

Формули перетворення суми та різниці тригонометричних функцій у добуток

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n,\ n \in Z$$

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

Функції, їхні властивості та графіки

1. Чи правильне твердження:

1) арифметичне значення $\sqrt[n]{a}$, $n > 1$ — натуральне число, завжди додатне;
2) корінь непарного степеня існує з довільного дійсного числа;
3) для довільних раціональних чисел m і n з нерівності $m > n$ випливає нерівність $a^m > a^n$ для довільного дійсного числа $a > 0$;
4) правильними є рівності:
$$\sqrt[3]{27} = 3;\ \sqrt[7]{-1} = -1;\ \sqrt[6]{64} = 2;\ \sqrt[4]{x^4} = x;\ (a^6)^{\frac{1}{6}} = -a;$$
5) правильними є нерівності: $\sqrt[5]{11} > \sqrt[5]{3}$; $\sqrt{7} < \sqrt[4]{35}$; $2^{-\frac{1}{6}} < 3^{-\frac{1}{5}}$;
6) не мають розв'язків ірраціональні рівняння:
$\sqrt{2x+1} - 2 = 0$; $\sqrt{3-x} + 1 = 0$; $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-x} = 5$; $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} = 0$?

2. Знайдіть x, якщо:

1) $\left(\left(1\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2^{-2}\right)x = 2$; 2) $\left(2^{\sqrt{27}}\right)^{\sqrt{3}} \cdot 2^{-3}x = 32$; 3) $\left(3^{1-\sqrt{3}}\right)^{1+\sqrt{3}}x = 1$;

4) $\dfrac{0,23(7) + \dfrac{43}{450}}{0,5(61) - \dfrac{113}{495}}x = 2$; 5) $\dfrac{0,1(6) + 0,(3)}{0,(3) + 1,1(6)}x = 10$.

3. Знайдіть число, якщо 42 % його дорівнюють 12,6.

4. Який відсоток становить число 1,3 від 39?

5. Ціну товару спочатку знизили на 24 %, а потім — на 50 % від нової ціни. Знайдіть загальний відсоток зниження ціни товару.

6. Сплав містить 18 кг цинку, 6 кг олова і 36 кг міді. Який вміст складових сплаву у відсотках?

7. Замість знака * поставте відповідний знак рівності або нерівності:

1) $2^5 * 3^5$; 2) $2^{\frac{1}{2}} * 3^{\frac{1}{2}}$; 3) $\sqrt[3]{5} * \sqrt[3]{3}$; 4) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}} * \sqrt[5]{\frac{1}{3}}$; 5) $3^{\frac{1}{3}} * 5^{\frac{1}{4}}$; 6) $\sqrt{2} * \sqrt[3]{3}$.

8. Знайдіть значення виразу:

1) $1,5^3 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$; 2) $\left(\left(1\frac{1}{3}\right)^{-1} + 2^{-2}\right)\sqrt[3]{8}$; 3) $\left(\frac{25}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$;

4) $(0,008)^{-\frac{2}{3}} \cdot 25^{-1}$; 5) $\sqrt{\dfrac{(\sqrt{2}-2)^2}{8}}$; 6) $\sqrt[3]{27(1-\sqrt{3})^3}$;

7) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$; 8) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$.

9. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{2}{a^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}$;

2) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{(1-x^{-\frac{1}{2}})(1-x)}{1+\sqrt{x}}$;

3) $(1-a^2):\left(\left(\dfrac{1-a^{\frac{3}{2}}}{1-a^{\frac{1}{2}}}+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(\dfrac{1+a^{\frac{3}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-a^{\frac{1}{2}}\right)\right)+1$;

4) $(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}):\left(\left(\dfrac{\sqrt[3]{y}}{y\sqrt{x}}+a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt[8]{y^3}}\right)^2\right)$;

5) $\left(\dfrac{m-n}{m^{\frac{3}{4}}+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}}\right)\left(\dfrac{n}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

10. Доведіть рівність:

1) $\left(\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{a^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}+\sqrt{ax}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\right)^2=1,\ x\neq a, x\geq 0, a\geq 0$;

2) $\left(\sqrt{a(1-a)}+\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{1-a}}\right):\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}}{1-a}\right)=\sqrt{a-a^2},\ 0\leq a<1$;

3) $\dfrac{a^2-a-2+(a+1)\sqrt{a^2-4}}{a^2+3a+2+(a+1)\sqrt{a^2-4}}=\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}},\ a\geq 2$; 4) $\dfrac{\sqrt{a-2\sqrt{a}+1}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a}+1}:\dfrac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt[4]{a}-1}+1=2,\ a>1$.

11. За яких значень змінної існує вираз:

1) $\sqrt{1-x^2}$; 2) $\sqrt[3]{x-1}$; 3) $\sqrt[6]{|x|+1}$; 4) $\sqrt{12-x-x^2}$;

5) $\left(x^2-5x+6\right)^{\frac{1}{4}}$; 6) $((x-5)(x-2))^{\frac{1}{8}}$; 7) $\left(-x^2+6x-8\right)^{\frac{2}{5}}$?

12. За яких значень x правильна рівність:

1) $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3=x$; 2) $x^{\frac{2}{7}}x^{-\frac{9}{7}}=x$; 3) $\left(x^4\right)^{\frac{1}{4}}=-x$; 4) $\sqrt[4]{x^2}=\sqrt{-x}$;

5) $\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[3]{-x}$; 6) $\sqrt[10]{x^{10}}=|x|$; 7) $\sqrt{(x-3)^2}=3-x$; 8) $\sqrt[4]{(2x-1)^4}=2x-1$;

9) $\sqrt[6]{x^2-16}=\sqrt[6]{x-4}\sqrt[6]{x+4}$; 10) $\sqrt[3]{(x+1)(x-2)}=\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x-2}$?

13. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{a^6}$, якщо $a>0$; 2) $\sqrt[5]{a^5}$, якщо $a>0$; 3) $\sqrt[6]{b^6}$, якщо $b<0$;

4) $\sqrt[4]{16c^8}$, якщо $c\geq 0$; 5) $\sqrt[3]{b\sqrt[3]{b}}$, якщо $b\geq 0$; 6) $\sqrt[4]{b\sqrt[5]{b^3}}$, якщо $b\geq 0$;

7) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a}}}$, якщо $a>0$; 8) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[6]{a^5\sqrt{a}}}$, якщо $a>0$; 9) $\sqrt[6]{(x-y)^6}$, якщо $x<y$.

14. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=2|x|+x^2$; 2) $y=2x-x^3$; 3) $y=\frac{1}{x^2-4x+3}$; 4) $y=\frac{1}{x-1}+\sqrt{2+x}$;

5) $y=3x+\frac{1}{\sqrt[4]{x^2}}$; 6) $y=(1+|x|)^{\frac{1}{6}}$; 7) $y=\sqrt[3]{\frac{x}{1-|x|}}$; 8) $y=\sqrt{3x^2-4x+5}$.

15. Знайдіть множину значень функції:

1) $y=x^2-4x+3$; 2) $y=\sqrt{4-x^2}$; 3) $y=-2x^2+8x-1$;

4) $y=\frac{x}{|x|}$; 5) $y=\sqrt{x-x^2}$; 6) $y=2+\frac{2}{x}$.

16. Дослідіть функцію на парність та непарність:

1) $y=3x^4+1$; 2) $y=2x-x^3$; 3) $y=4x^5+\frac{2}{x}-1$; 4) $y=\frac{1}{x^3+2x}$;

5) $y=\frac{2x^2}{x^4-1}$; 6) $y=\frac{2|x|}{x}$; 7) $y=|x+1|+|x-1|$.

17. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^{\frac{1}{3}}=x$; 2) $x^3+x^2=2$; 3) $(x+1)^{\frac{1}{3}}+0,5=0$;

4) $x^2+x^{-2}=0$; 5) $\sqrt{x}=|x-2|$; 6) $2x^{\frac{1}{2}}+x=3$.

18. Розв'яжіть графічно нерівність:

1) $\sqrt{x}>x$; 2) $\sqrt{x}<x$; 3) $\sqrt[3]{x}>x$; 4) $\sqrt[3]{x}<x$; 5) $\sqrt{x}<\sqrt[3]{x}$.

19. Побудуйте графік та охарактеризуйте властивості функції:

1) $y=(x-1)^2$; 2) $y=-x^2+2$; 3) $y=x^2+2x+2$; 4) $y=\sqrt{x-2}$;

5) $y=\sqrt{x}+1$; 6) $y=\sqrt[3]{x+1}-2$; 7) $y=\sqrt[3]{-x}$; 8) $y=-\sqrt[3]{x}$;

9) $y=\sqrt[3]{|x|}$; 10) $y=\frac{1}{x-1}$; 11) $y=\frac{x+1}{x-2}$; 12) $y=\sqrt{|x|+2}$.

Тригонометричні функції

20. Обчисліть значення виразу:

1) $\operatorname{tg}45^\circ\sin60^\circ\operatorname{ctg}30^\circ$; 2) $\cos\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;

3) $\cos5^\circ\cos55^\circ\cos65^\circ$; 4) $\frac{(\sin10^\circ+\sin80^\circ)(\cos80^\circ-\cos10^\circ)}{\sin70^\circ}$;

5) $\sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}$; 6) $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}$;

7) $\operatorname{tg}41^\circ\operatorname{tg}42^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}49^\circ$; 8) $\cos^2 15^\circ-\cos^2 75^\circ$.

21. Знайдіть:

1) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = 0{,}8$, $0 < \alpha < 90°$;

2) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $90° < \alpha < 180°$;

3) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -3\frac{15}{16}$, $180° < \alpha < 270°$;

4) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{9}{40}$, $270° < \alpha < 360°$;

5) $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = -2$.

22. Що більше:

1) $\sin 20°$ чи $\sin 40°$; 2) $\cos 10°$ чи $\cos 50°$; 3) $\sin 25°$ чи $\operatorname{tg} 25°$;
4) $\cos 75°$ чи $\operatorname{ctg} 75°$; 5) $\sin 50°$ чи $(\sin 50°)^2$; 6) $\cos 115°$чи $\cos 115° \cos 20°$?

23. Спростіть вираз:

1) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$; 2) $\frac{1-\operatorname{ctg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$; 3) $\frac{1+\sin 2x}{(\sin x + \cos x)^2}$; 4) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$;

5) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$; 6) $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$; 7) $\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$; 8) $\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

24. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

3) $\frac{\operatorname{tg}2\alpha \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \sin 2\alpha$; 4) $\frac{\sin x + \sin 5x}{\cos x + \cos 5x} = \operatorname{tg} 3x$;

5) $1 - \sin^4\alpha - \cos^2\alpha = \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$; 6) $\frac{\operatorname{tg}\beta + \sin\beta}{2\cos^2\frac{\beta}{2}} = \operatorname{tg}\beta$;

7) $\frac{1+\sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1+\sin 4\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$; 8) $\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

25. Обчисліть:

1) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$; 2) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$;

3) $(\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha)\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{1}{4}$.

26. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = x - 2\sin^2 x$; 2) $y = \frac{2\cos x}{x}$; 3) $y = \frac{1}{\sin x - 1}$;

4) $y = \cos x^2$; 5) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 6) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

27. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = 1 + \sin^2 x$; 2) $y = \cos 2x - \frac{\pi}{4}$; 3) $y = \sin^2 3x$; 4) $y = -\mathrm{tg}^2 x$;

5) $y = \mathrm{ctg}\, 2x$; 6) $y = |\cos x|$; 7) $y = 1 - 2|\sin 3x|$.

28. Дослідіть функцію на парність та непарність:

1) $y = x^2 \cos x$; 2) $y = \frac{\sin x}{x}$; 3) $y = \mathrm{tg}^2 x$; 4) $y = \mathrm{tg}^3 x$;

5) $y = x^3 + \sin x$; 6) $y = \cos x + 2\,\mathrm{ctg}\, x$; 7) $y = \frac{\sin x + x}{3 - \cos x}$.

29. Побудуйте графік функції та охарактеризуйте її властивості:

1) $y = \sin 2x$; 2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = \cos x - 1$;

4) $y = \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 5) $y = -\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$; 6) $y = \mathrm{ctg}\,|x|$.

30. Розв'яжіть найпростіше тригонометричне рівняння:

1) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 2) $\mathrm{tg}\, 3x = 1$; 3) $\mathrm{ctg}\, x = -1$;

4) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$; 5) $\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$; 6) $\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

31. Розв'яжіть тригонометричне рівняння:

1) $\sin^2 x + 2\sin x = 3$; 2) $3\sin x = 2\cos^2 x$;

3) $\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x = 0$; 4) $5\sin x = 2\cos x$;

5) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x - \pi) = 0$; 6) $\sin x \sin 2x + \cos 3x = 0$;

7) $1 - \cos x = 2\sin\frac{x}{2}$; 8) $\sin x + \cos x = 1$; 9) $\cos x = \cos 5x$.

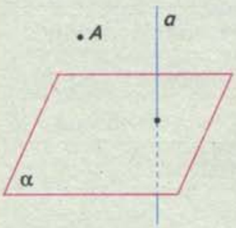
32. Розв'яжіть тригонометричну нерівність:

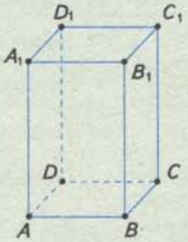
1) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\mathrm{tg}\, x < \sqrt{3}$;

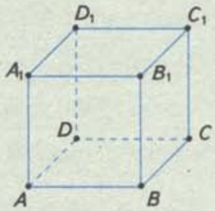
5) $\mathrm{ctg}\, x \le \frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $\sin 2x > \frac{1}{2}$; 7) $\mathrm{tg}\left(-\frac{x}{2}\right) < 1$; 8) $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{3}$.

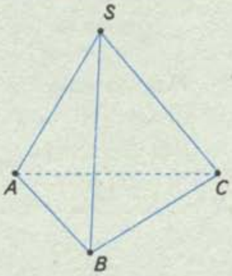
ГЕОМЕТРІЯ

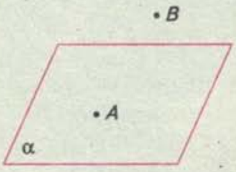
ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

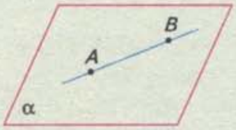
<table>
<tr><th rowspan="2">Основні фігури</th><th colspan="3">Многогранники</th></tr>
<tr><th>Прямокутний паралелепіпед</th><th>Куб</th><th>Піраміда</th></tr>
<tr>
<td>

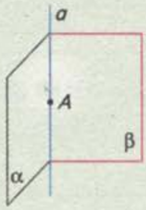
Точка A, пряма a, площина α</td>
<td>

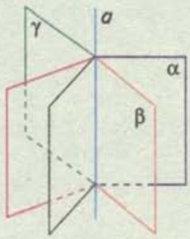
Основи — прямокутники, бічні грані — прямокутники</td>
<td>

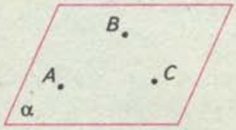
Основи — квадрати, бічні грані — квадрати</td>
<td>

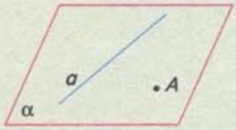
Основа — n-кутник, бічні грані — трикутники</td>
</tr>
<tr><th colspan="4">АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ ТА НАСЛІДКИ З НИХ</th></tr>
<tr>
<td>

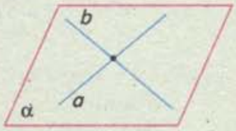
Існують точки, які лежать у даній площині, і точки, що не лежать у ній</td>
<td>

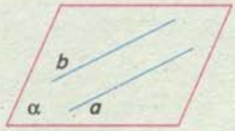
Якщо дві точки прямої лежать у площині, то й кожна точка цієї прямої лежить у даній площині</td>
<td>

Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку</td>
<td>

Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин</td>
</tr>
<tr><th colspan="4">Площину, і до того ж тільки одну, можна провести</th></tr>
<tr>
<td>

через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій</td>
<td>

через пряму і точку, що не лежить на ній</td>
<td>

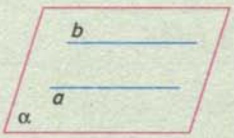
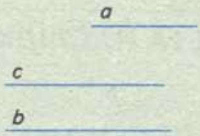
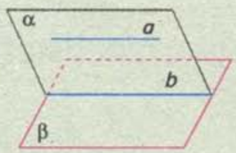
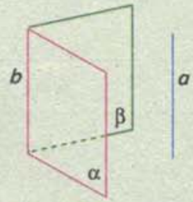
через дві прямі, що перетинаються</td>
<td>

через дві паралельні прямі</td>
</tr>
</table>

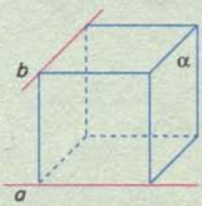
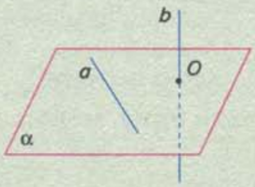
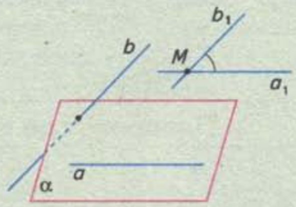
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

Фігури	Взаємне розміщення	
Дві прямі *a* і *b*	Мають одну спільну точку	Перетинаються в точці
	Не мають спільних точок	Паралельні
		Мимобіжні
Пряма *a* **та площина** α	Мають безліч спільних точок	Пряма лежить у площині
	Мають одну спільну точку	Пряма перетинає площину
	Не мають спільних точок	Пряма паралельна площині
Дві площини α і β	Мають спільні точки	Перетинаються по прямій
	Не мають спільних точок	Паралельні

ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

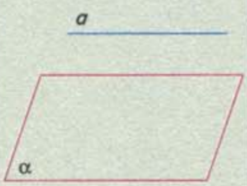
Означення	Ознаки		
			
$a \parallel b$, якщо *a* і *b* лежать в одній площині й не перетинаються	Якщо $a \parallel b$ і $a \parallel c$, то $b \parallel c$	Якщо *b* — пряма перетину α і β, *a* лежить в α і $a \parallel \beta$, то $b \parallel a$	Якщо *b* — пряма перетину α і β, $a \parallel \alpha$ і $a \parallel \beta$, то $a \parallel b$

МИМОБІЖНІ ПРЯМІ

Означення	Ознака	Кут між мимобіжними прямими
		
a і *b* — мимобіжні, якщо не лежать в одній площині	Якщо *a* лежить в α і *b* перетинає α в точці *O*, $O \notin \alpha$, то *a* і *b* — мимобіжні	*Кутом між мимобіжними прямими* називається кут між прямими, що перетинаються і паралельні даним мимобіжним прямим

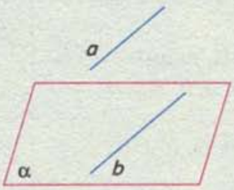
ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Означення



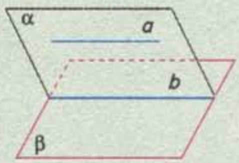
$a \parallel \alpha$,
якщо a і α
не перетинаються

Ознака

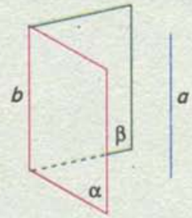


Якщо a
не лежить в α
і паралельна b,
що лежить в α,
то $a \parallel \alpha$

ВЛАСТИВОСТІ ПЛОЩИН, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ



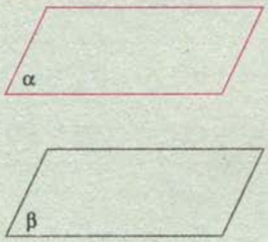
Якщо b — пряма
перетину α і β,
a лежить в α і $a \parallel \beta$,
то $b \parallel a$



Якщо b — пряма
перетину α і β,
$a \parallel \alpha$ і $a \parallel \beta$,
то $a \parallel b$

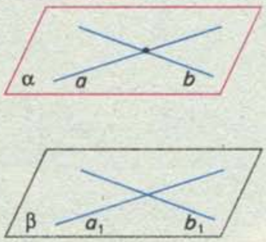
ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПЛОЩИН

Означення



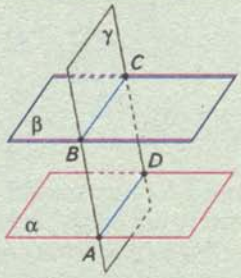
$\alpha \parallel \beta$,
якщо α і β
не перетинаються

Ознака



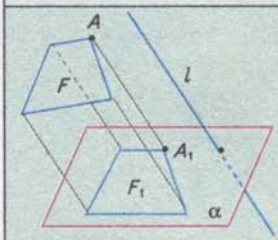
Якщо прямі a і b площини α
перетинаються і відповідно паралельні прямим a_1 і b_1
площини β,
то $\alpha \parallel \beta$

Властивість



Якщо $\alpha \parallel \beta$, γ — січна площина,
AD — пряма перетину α і γ,
BC — пряма перетину β і γ,
то $AD \parallel BC$

ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ

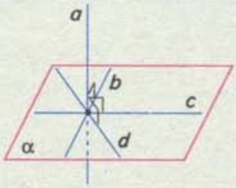
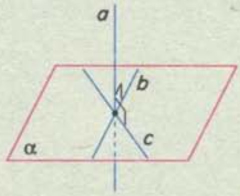


F — фігура-оригінал,
α — площина проекцій,
l — напрямок проектування,
F_1 — проекція фігури F

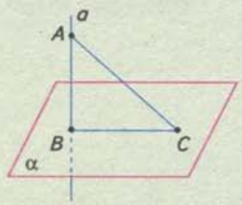
Властивості фігур під час паралельного проектування

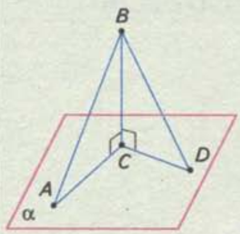
ЗБЕРІГАЮТЬСЯ	НЕ ЗБЕРІГАЮТЬСЯ
1) **Належність фігури до свого класу фігур** (точку зображають точкою, пряму — прямою, відрізок — відрізком, трикутник — трикутником тощо);	1) **Довжина відрізка;**
2) **належність точок прямій;**	2) **міра кута** (зокрема, прямий кут зображають довільним кутом);
3) **порядок розміщення точок на прямій** (внутрішню точку відрізка зображають внутрішньою точкою його проекції);	3) **перпендикулярність прямих;**
4) **паралельність прямих;**	4) **рівність (пропорційність) кутів;**
5) **рівність (пропорційність) відрізків, що лежать на паралельних прямих або на одній прямій**	5) **рівність (пропорційність) відрізків, які лежать на прямих, що перетинаються**

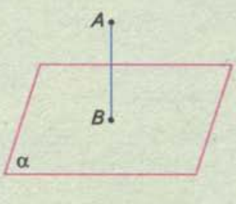
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

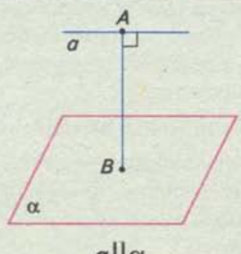
<table>
<tr><th colspan="3">ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ</th></tr>
<tr><th colspan="2">Означення</th><th>Ознака</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$a \perp \alpha$, якщо
$a \perp b$, $a \perp c$, $a \perp d$,
...
$b \in \alpha$, $c \in \alpha$, $d \in \alpha$, ...</td>
<td rowspan="2">

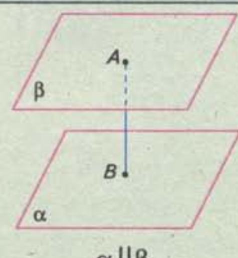
Якщо $a \perp b$ і $a \perp c$,
то $a \perp \alpha$, $b \in \alpha$, $c \in \alpha$</td>
</tr>
<tr><td colspan="2">Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перетинає площину, та перпендикулярна до кожної прямої, яка лежить у площині й проходить через точку перетину</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА ДО ПЛОЩИНИ</th></tr>
<tr><th>Означення</th><th colspan="2">Властивості</th></tr>
<tr>
<td rowspan="3">

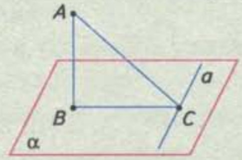
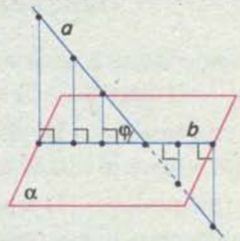
Якщо $a \perp \alpha$ і відрізок AB не лежить у площині α, то
AB — перпендикуляр, проведений з точки A до площини α,
AC — похила,
BC — проекція похилої на площину α</td>
<td rowspan="3">
</td>
<td>$BC < AB$, $BC < BD$</td>
</tr>
<tr><td>Якщо $\dfrac{AB = BD}{AC = CD}$, то $\dfrac{AC = CD}{AB = BD}$</td></tr>
<tr><td>Якщо $AC > CD$, то $AB > BD$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">ВІДСТАНЬ — ДОВЖИНА ПЕРПЕНДИКУЛЯРА AB</th></tr>
<tr><th>Відстань від точки до площини</th><th>Відстань від прямої до паралельної їй площини</th><th>Відстань між паралельними площинами</th></tr>
<tr>
<td>

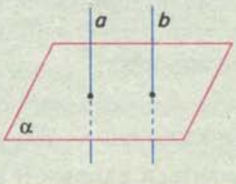
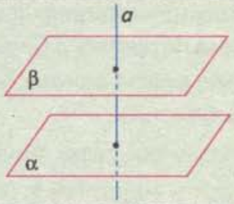
$AB \perp \alpha$</td>
<td>

$a \parallel \alpha$,
A — довільна точка прямої a,
$AB \perp \alpha$</td>
<td>

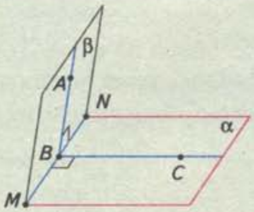
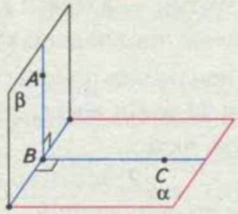
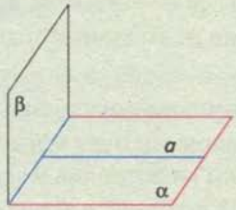
$\alpha \parallel \beta$,
A — довільна точка площини α,
$AB \perp \alpha$</td>
</tr>
</table>

ТЕОРЕМА ПРО ТРИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ	КУТ МІЖ ПРЯМОЮ Й ПЛОЩИНОЮ
 $AB \perp \alpha$	
Якщо $\dfrac{a \perp BC}{a \perp AC}$, то $\dfrac{a \perp AC}{a \perp BC}$	b — проекція прямої a на площину α, φ — кут між прямою a і площиною α

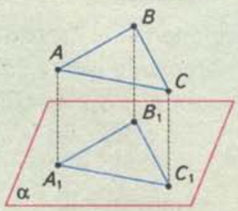
Залежність між паралельністю і перпендикулярністю прямих та площин

	
Якщо $a \parallel b$, $\alpha \perp a$, то $\alpha \perp b$ Якщо $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$	Якщо $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \beta$, то $a \perp \alpha$

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПЛОЩИНИ

Кут між площинами	Перпендикулярні площини	Ознака перпендикулярності
		
Якщо $AB \perp MN$ і $CB \perp MN$, то $\angle ABC$ — кут між площинами α і β	Якщо $\angle ABC = 90°$, то площини α і β перпендикулярні	Якщо a лежить у площині α і $a \perp \beta$, то $\alpha \perp \beta$

ОРТОГОНАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ

	Якщо проектувальні прямі перпендикулярні до площини проекцій α, то проектування називають *ортогональним*

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

Паралельність прямих та площин

1. Наведіть приклади з довкілля, які ілюструють поняття:
1) точки; 2) прямої; 3) площини.

2. Укажіть три виміри: 1) лінійки; 2) олівця; 3) мотузки.
Яку форму мають ці предмети? Який їх вимір є найбільшим?

3. Укажіть три виміри: 1) книжки; 2) зошита; 3) аркуша паперу.
Яку форму мають ці предмети? Який їх вимір є найменшим?

4. Чи лежать в одній площині середини трьох ребер трикутної піраміди, якщо ці ребра: 1) мають спільну вершину; 2) не мають спільної вершини? Відповідь поясніть.

5. Через середини трьох бічних ребер чотирикутної піраміди проведено площину. Чи лежить у цій площині:
1) середина четвертого бічного ребра піраміди;
2) середина ребра основи піраміди; 3) вершина піраміди?
Відповідь поясніть.

6. Чому незамкнені двері відчиняються (рухаються), а замкнені — ні?

7. Щоб виявити недоліки в обробці дошки, тесля дивиться вздовж її краю, який обробляє. На чому ґрунтується така перевірка?

8. Наведіть приклади взаємного розміщення двох прямих у просторі, спираючись на зображення:
1) куба; 2) правильної чотирикутної піраміди.

9. Два літаки летять на різних висотах:
1) один — з Києва до Парижа, другий — з Осло до Афін;
2) один — з Києва до Праги, другий — з Праги до Києва.
Яке розміщення прямих, за якими прокладено курс літаків?

10. У футбольному матчі суддя призначив пенальті — штрафний удар по воротах команди-порушника з відстані 11 м від воріт. За допомогою прямих накресліть напрямки руху м'яча і воротаря, якщо:
1) м'яч потрапив у ворота; 2) воротар перехопив м'яч.
Запропонуйте кілька варіантів розвитку подій.

11. Туго натягнутою ниткою послідовно обмотано три стержні: MA, MB і MC. На стержні MA нитку закріпили в двох точках K_1 і K_4 і на стержні MB у двох точках K_2 і K_5, а на стержні MC — в одній точці K_3. Побудуйте зображення та з'ясуйте:
1) якщо дві прямі перетинаються, то в якій точці;
2) чи є серед прямих паралельні; 3) які з прямих — мимобіжні.

12. Туго натягнутою ниткою послідовно обмотано три паралельних стержні: MA, DB і OC, що не лежать в одній площині. На кожному зі стержнів нитку закріпили в двох точках: на MA — у точках K_1 і K_4, на DB — у точках K_3 і K_6, на OC — у точках K_2 і K_5. Побудуйте зображення та з'ясуйте:
1) якщо дві прямі перетинаються, то в якій точці;
2) чи є серед прямих паралельні; 3) які з прямих — мимобіжні.

13. Скільки можна провести площин, паралельних двом даним паралельним прямим, і таких, що проходять через точку, яка не лежить на даних прямих?

14. Площини α і β перетинаються. Точка A лежить у площині α, точка B — у площині β. Побудуйте:

1) пряму a, що лежить у площині α, проходить через точку A паралельно площині β;
2) пряму b, що лежить у площині β, проходить через точку B паралельно площині α.

Охарактеризуйте побудовані прямі.

15. Пряма a паралельна площині α. Прямі b і c перетинають пряму a та площину α. Дослідіть взаємне розміщення прямих b і c.

16. Пряма a лежить у площині α. Площина β перетинає площину α. Дослідіть взаємне розміщення прямої a і площини β.

17. Прямі a і b лежать відповідно в площинах α і β. Дослідіть взаємне розміщення прямих a і b.

18. Що можна сказати про взаємне розміщення прямої та площини, якщо дана пряма лежить у площині, паралельній даній площині?

19. Охарактеризуйте взаємне розміщення двох прямих, які лежать відповідно в двох паралельних площинах.

20. Чи завжди через дану пряму можна провести площину, паралельну даній площині?

21. Скільки пар відповідно паралельних площин можна провести через дві прямі, що: 1) перетинаються; 2) паралельні; 3) мимобіжні?

22. Що є проекцією двох прямих, які:

1) перетинаються; 2) паралельні; 3) мимобіжні?

Розгляньте можливі випадки взаємного розміщення даних і проектувальних прямих.

23. За яких умов паралельна проекція відрізка:

1) дорівнює даному відрізку; 2) менша від даного відрізка;
3) більша за даний відрізок?

24. Які властивості сторін, кутів, медіан, бісектрис, висот, середніх ліній трикутника зберігаються під час паралельного проектування, а які — не зберігаються?

25. Які властивості трапеції, паралелограма, прямокутника, ромба, квадрата зберігаються під час паралельного проектування, а які — не зберігаються?

26. Які властивості правильних многокутників зберігаються під час паралельного проектування, а які — не зберігаються? Розгляньте відомі вам види правильних многокутників.

27. Побудуйте проекцію прямокутного трикутника з кутом 60°, у якому проведено бісектрису даного кута і зовнішнього кута трикутника при цій вершині.

28. Побудуйте проекцію квадрата $ABCD$, у якому із середини M сторони BC проведено перпендикуляри до прямих: 1) BD; 2) AC; 3) DM.

29. Чи можна провести січну площину так, щоб вона перетинала в кубі:

1) тільки три грані; 2) чотири грані;
3) точно п'ять граней; 4) усі шість граней?

30. Проведіть січну площину через бічне ребро правильної трикутної піраміди та:
1) медіану основи, проведену зі спільної з бічним ребром вершини;
2) бісектрису кута при вершині в протилежній бічній грані;
3) точку на протилежному ребрі основи, що ділить її у відношенні 2 : 1.

Перпендикулярність прямих та площин

31. $CD = b$ — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) з гіпотенузою a. CK — медіана трикутника. Знайдіть KD, якщо:
1) $a = 24$ см, $b = 16$ см; 2) $a = 10$ см, $b = 12$ см.

32. З точки O перетину діагоналей прямокутника $ABCD$ до його площини проведено перпендикуляр OM. $AB = a$, $AD = b$, $\angle MCO = \alpha$. Знайдіть довжину перпендикуляра MO, якщо:
1) $a = 16$ см, $b = 12$ см, $\alpha = 60°$;
2) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $\alpha = 30°$.

33. Катети AC і BC прямокутного трикутника дорівнюють 8 см і 12 см. Із середини O меншого катета проведено перпендикуляр OF до площини трикутника довжиною 3 см. Знайдіть відстань від точки F до вершин трикутника.

34. З точки O перетину діагоналей трапеції проведено перпендикуляр OF до її площини. Точку F сполучено з вершинами трапеції.
1) Чи можуть усі проведені похилі бути рівними?
2) Чи можуть серед проведених похилих бути рівні?

35. Відрізки AB і CD, що лежать у площині α, в точці O перетину діляться навпіл. Поза площиною позначено точку M так, що $MA = MB$ і $MC = MD$. Доведіть, що пряма OM перпендикулярна до площини α.

36. З точки до площини проведено перпендикуляр довжиною b і похилу. Проекція похилої дорівнює a. Знайдіть довжину похилої, якщо:
1) $a = 9$ см, $b = 12$ см; 2) $a = 7$ см, $b = 24$ см.

37. З точки A проведено до площини α перпендикуляр і похилу. Похила довша за перпендикуляр на a, а її проекція на площину α дорівнює b. Знайдіть довжину похилої, якщо:
1) $a = 2$ см, $b = 8$ см; 2) $a = 5$ см, $b = 10$ см.

38. З точки M до площини α проведено перпендикуляр $MO = 4$ см і похилі MA, MB, MC під кутами 30°, 45°, 60° до перпендикуляра MO. Знайдіть довжини похилих.

39. З точки до площини проведено дві похилі, кожна з яких дорівнює a. Кут між похилими дорівнює 60°, а кут між їх проекціями на площину — прямий. Знайдіть:
1) відстань від даної точки до площини;
2) відстань між основами похилих.

40. Сторона ромба дорівнює a, а кут — α. З точки O перетину діагоналей ромба проведено перпендикуляр $OF = b$ до його площини. Знайдіть відстань від точки F до сторін ромба, якщо:
1) $a = 12$ см, $b = 4$ см, $\alpha = 30°$;
2) $a = 16$ см, $b = 4$ см, $\alpha = 60°$.

41. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює P. Точка M віддалена від кожної сторони трикутника на b. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника, якщо:
1) $P = 18$ см, $b = 13\sqrt{2}$ см;
2) $P = 9\sqrt{3}$ см, $b = 3$ см.

42. Відстань між паралельними прямими a і b площини α дорівнює 28 см. Пряма c, що лежить поза площиною, паралельна прямій a і віддалена від неї на 17 см, а від площини α — на 15 см. Знайдіть відстань між прямими b і c.

43. Похила утворює кути по $60°$ зі сторонами прямого кута. Знайдіть кут, який утворює ця похила з площиною прямого кута.

44. Катети прямокутного трикутника ABC дорівнюють a і b, точка F віддалена від кожної з його вершин на c. Знайдіть кути між прямими FA, FB, FC і площиною даного трикутника, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $c = 10$ см;
2) $a = 12$ см, $b = 16$ см, $c = 10\sqrt{2}$ см.

45. Через катет BC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) проведено площину α. $BC = a$, $AC = b$, а вершина A віддалена від площини α на c. Знайдіть кут між гіпотенузою і площиною, якщо:
1) $a = 5$ см, $b = 12$ см, $c = 26$ см;
2) $a = 12$ см, $b = 16$ см, $c = 10$ см.

46. Доведіть, що площина α і пряма a, яка не лежить у площині α, перпендикулярні до прямої b, є паралельними.

47. Через основу BC трикутника ABC проведено площину α під кутом φ до площини трикутника. Знайдіть відстань від вершини A до площини α, якщо:
1) $\angle A = 90°$, $\varphi = 30°$, $AB = 20$ см, $AC = 15$ см;
2) $AB = 7$ см, $AC = 13$ см, $BC = 10$ см, $\varphi = 60°$.

48. Через сторону ромба проведено площину α на відстані 4 см від протилежної сторони. Знайдіть проекції сторін ромба на площину α, якщо проекції його діагоналей дорівнюють 2 см і 8 см.

49. Доведіть, що суми відстаней протилежних вершин паралелограма від площини рівні між собою.

50. Відстані трьох вершин паралелограма $ABCD$ від площини α дорівнюють $AA_1 = 17$ см, $BB_1 = 22$ см, $CC_1 = 12$ см. Знайдіть відстань четвертої вершини від площини α.

51. Кут між площинами рівнобедрених трикутників ABC і ABM зі спільною основою AB дорівнює $60°$. Знайдіть відстань між точками C і M, якщо:
1) $AB = 16$ см, $AC = 10$ см, $AM = 17$ см;
2) $AB = 24$ см, $AC = 13$ см, $AM = 15$ см.

ВІДОМОСТІ З КУРСУ АЛГЕБРИ 7 – 9 класів

Формули скороченого множення

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$; $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.

Степінь з цілим показником

$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n}$, $n\in N$, $n\neq 1$. $a^n=\dfrac{1}{a^{-n}}$, $n\in Z$, $a\neq 0$.

Якщо $m, n\in Z$, $a, b\in R$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, то

$a^m a^n=a^{m+n}$, $a^m : a^n=a^{m-n}$, $(a^m)^n=a^{mn}$, $(ab)^n=a^n b^n$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$.

Арифметичний квадратний корінь

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$, $a\geq 0$, $b\geq 0$; $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a\geq 0$, $b>0$; $\sqrt{x^2}=|x|$, $x\in R$.

Функції

1. *Лінійна функція* $y=kx+b$, $k\neq 0$, $b\in R$. Графіком є пряма лінія.
2. *Обернена пропорційність* $y=\dfrac{k}{x}$, $k\in R$, $k\neq 0$. Графіком є гіпербола.
3. *Квадратична функція* $y=ax^2+bx+c$.

   Графік — парабола з вершиною в точці $\left(-\dfrac{b}{2a};\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

Рівняння та нерівності

1. *Лінійне рівняння*

   $ax+b=0$, $a, b\in R$, $a\neq 0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{a}$.

2. *Квадратне рівняння*

   $$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,\ b, c\in R,\ D=b^2-4ac \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, & \text{якщо } D\geq 0,\\ \varnothing, & \text{якщо } D<0;\end{cases}$$

   $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$; $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$ — **теорема Вієта.**

3. *Лінійні нерівності*

$$ax < b,\ a > 0\ (a < 0) \Leftrightarrow x < \frac{b}{a}\ \left(x > \frac{b}{a}\right),\ a \neq 0,\ b \in R;$$

$$ax > b,\ a > 0\ (a < 0) \Leftrightarrow x > \frac{b}{a}\ \left(x < \frac{b}{a}\right),\ a \neq 0,\ b \in R;$$

$$ax \leq b,\ a > 0\ (a < 0) \Leftrightarrow x \leq \frac{b}{a}\ \left(x \geq \frac{b}{a}\right),\ a \neq 0,\ b \in R;$$

$$ax \geq b,\ a > 0\ (a < 0) \Leftrightarrow x \geq \frac{b}{a}\ \left(x \leq \frac{b}{a}\right),\ a \neq 0,\ b \in R.$$

4. *Раціональні нерівності*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} * 0 \Leftrightarrow P(x)\,Q(x) * 0,$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ — задані многочлени,
* — один зі знаків нерівності ($>$ або $<$).

Розв'язують методом інтервалів.

У випадку нестрогої нерівності до розв'язків приєднують корені многочленна $P(x)$.

Модуль дійсного числа

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0, \end{cases} \quad a \in R.$$

Властивості:

$$|a| \geq 0,\ a \in R;\ |a+b| \leq |a| + |b|;\ |ab| = |a||b|;\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0;\ |a-b| \geq |a| - |b|.$$

Прогресії

Арифметична прогресія (a_1 — перший член, $d \neq 0$ — різниця, n — кількість членів, a_n — n-й член, S_n — сума перших n членів):

$$a_n = a_1 + d(n-1);\quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n;$$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2},\ k = 2, 3, \ldots, n-1;\quad a_k + a_m = a_p + a_q,\ k + m = p + q.$$

Геометрична прогресія (b_1 — перший член, $q \neq 0$ — знаменник, n — число членів, b_n — n-й член, S_n — сума перших n членів):

$$b_n = b_1 q^{n-1};\quad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q},\ q \neq 1;$$

$$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1},\ k = 2, 3, \ldots, n-1;\quad b_k b_m = b_p b_q,\ k + m = p + q;$$

$$S = \frac{b_1}{1-q},\ |q| < 1 \text{ (сума нескінченної геометричної прогресії).}$$

РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

Обчислення

1. Обчисліть значення виразу:

1) $5-(3\sqrt{\frac{4}{9}}+\sqrt{0,25})$; 2) $(\sqrt{225}+3\sqrt{121}):\left(\frac{2}{3}\sqrt{0,09}+0,78\sqrt{100}\right)$;

3) $\sqrt{\frac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}$; 4) $\sqrt{\frac{145,5^2-96,5^2}{193,5^2-31,5^2}}$; 5) $0,3\sqrt{10}\cdot0,2\sqrt{15}\cdot0,5\sqrt{6}$;

6) $\frac{5}{3+2\sqrt{2}}+\frac{5}{3-2\sqrt{2}}$; 7) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 8) $0,5\sqrt{24}+10\sqrt{\frac{3}{8}}$.

2. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{a^2-12b}{a^2-3ab}-\frac{3ab-4a}{a^2-3ab}$, якщо $a=-0,8$, $b=-1,75$;

2) $\frac{x^2-2y}{x^2+xy+2x}-\frac{4-xy}{x^2+xy+2x}$, якщо $x=20$, $y=22,5$.

3. Розмістіть у порядку зростання числа:

1) $\frac{2}{3}\sqrt{72}$, $\sqrt{30}$ і $7\sqrt{2}$; 2) $5\sqrt{\frac{7}{2}}$, $\sqrt{17}$ і $\frac{1}{2}\sqrt{62}$;

3) $8\sqrt{0,2}$, $\sqrt{41}$ і $\frac{2}{5}\sqrt{250}$; 4) $12\sqrt{0,5}$, $\sqrt{89}$ і $\frac{3}{4}\sqrt{160}$.

Алгебраїчні перетворення

4. Спростіть вираз:

1) $\left(p-\frac{1-2p^2}{1-p}+1\right):\left(1-\frac{1}{1-p}\right)$; 2) $\left(\frac{a^2-ab}{a^2+ab}-ab+b^2\right)\cdot\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}$;

3) $\left(x+2y+\frac{4y^2}{x-2y}\right):\left(x-\frac{2xy}{x+2y}\right)+1$; 4) $\left(x-\frac{4xy}{x+y}+y\right)\left(x+\frac{4xy}{x-y}-y\right)$;

5) $\frac{3}{x+y}-\frac{3x-3y}{2x-3y}\left(\frac{2x-3y}{x^2-y^2}-2x+3y\right)$; 6) $0,3a^{-2}b^3\cdot1,5a^2b^{-1}$;

7) $(-0,2m^2n^3)^{-3}\cdot0,1m^6n^9$; 8) $\frac{2\sqrt{2}-x\sqrt{x}}{2+\sqrt{2x}+x}$; 9) $\frac{a-\sqrt{3a}+3}{a\sqrt{a}+3\sqrt{3}}$.

5. Доведіть, що за всіх допустимих значень змінних значення виразу не залежить від значень цих змінних:

1) $\frac{2}{mn}:\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)^2-\frac{m^2+n^2}{(m-n)^2}$; 2) $\frac{\frac{3}{2}a^2-2ab+\frac{2}{3}b^2}{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{9}b^2}+\frac{6b}{\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b}$;

3) $\frac{5^{n+1}\cdot 2^{n-2}+5^{n-2}\cdot 2^{n-1}}{10^{n-2}}$, n — ціле число; 4) $\frac{5^m4^n}{5^{m-2}2^{2n}+5^m2^{2n-1}}$, n, m — цілі числа.

6. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{a}{0,5a+1}+\frac{\frac{2}{3}a}{2-a}+\frac{2a}{\frac{1}{4}a^2-1}\right)\cdot\frac{0,5a-1}{0,5a-2}$; 2) $\left(\frac{1}{x+x\sqrt{y}}+\frac{1}{x-x\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{y-1}{2}$;

3) $\left(\frac{3,6xy+2,1y^2}{1,44x^2-0,49y^2}+\frac{2x}{2,4x-1,4y}\right)\cdot\frac{12x^2-7xy}{x+3y}$; 4) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{(b-a)^2}{2}$;

5) $\frac{6^n}{2^{n-1}\cdot 3^{n+1}}$, n — ціле число; 6) $\frac{x^5+x^{12}}{x^{-5}+x^{-12}}$; 7) $\frac{a^5+a^6+a^7}{a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}}$.

7. Подайте у вигляді раціонального дробу:

1) $\frac{x-\frac{yz}{y-z}}{y-\frac{xz}{x-z}}$; 2) $\frac{\frac{a-x}{a}+\frac{x}{a-x}}{\frac{a+x}{a}-\frac{x}{a+x}}$; 3) $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$; 4) $\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$.

8. Знайдіть такі значення a і b, за яких виконується тотожність:

1) $\frac{5x}{(x-2)(x+3)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+3}$; 2) $\frac{5x+31}{(x-5)(x+2)}=\frac{a}{x-5}-\frac{b}{x+2}$.

9. За яких цілих n значення дробу є цілим числом:

1) $\frac{5n^2+2n+3}{n}$; 2) $\frac{(n-3)^2}{n}$; 3) $\frac{3n}{n+2}$; 4) $\frac{7n}{n-4}$?

10. За яких значень змінних правильна рівність:

1) $\sqrt{x^2}=(\sqrt{x})^2$; 2) $\sqrt{x^4}=x^2$; 3) $\sqrt{x^{12}}=x^6$;

4) $\sqrt{c^{10}}=-c^5$; 5) $\sqrt{a^{14}}=-a^7$; 6) $x\sqrt{3}=\sqrt{3x^2}$;

7) $y\sqrt{5}=-\sqrt{5y^2}$; 8) $\sqrt{7c^2}=-c\sqrt{7}$; 9) $\sqrt{3a^2}=-a\sqrt{3}$?

11. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a^4b^4}$; 2) $\sqrt{b^6c^8}$, де $b \ge 0$; 3) $\sqrt{16x^4y^{12}}$;

4) $\sqrt{0{,}25p^2y^6}$, де $p \ge 0$, $y \le 0$; 5) $\sqrt{\dfrac{p^4}{a^8}}$; 6) $\sqrt{\dfrac{16a^{12}}{b^{10}}}$, де $b > 0$;

7) $\sqrt{\dfrac{4x^2}{y^6}}$, де $x < 0$, $y < 0$; 8) $\sqrt{\dfrac{c^6}{9a^2}}$, де $c < 0$, $a > 0$.

Рівняння та нерівності

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $3x(x-1)-17=x(1+3x)+1$; 2) $2x-(x+2)(x-2)=5-(x-1)^2$;

3) $\dfrac{3x+1}{2}=\dfrac{2x-3}{5}$; 4) $\dfrac{x-3}{6}+x=\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{4-x}{2}$.

13. Розв'яжіть квадратне рівняння:

1) $2{,}5x^2+4x=0$; 2) $6y^2-0{,}24=0$; 3) $0{,}2t^2-t-4{,}8=0$; 4) $3\dfrac{1}{3}u^2-3u-3=0$.

14. Чи існує значення змінної t, за якого значення квадратного тричлена t^2-t+2 дорівнює:

1) 10; 2) 0; 3) 1; 4) 3?

15. За яких значень t рівняння не має дійсних коренів:

1) $5x^2-4x-t=0$; 2) $tx^2-2x-6=0$;

3) $x^2-tx+1=0$; 4) $4x^2+tx+1=0$?

16. За яких значень a рівняння має хоча б один дійсний корінь:

1) $ax^2-12x+9=0$; 2) $5x^2-x+a=0$;

3) $18x^2+ax+8=0$; 4) $(a-1)x^2-6x-3=0$?

17. Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}3x(x+13)-2x(0{,}9-0{,}2x)=0$;

2) $1{,}5(x+4)-x(7-0{,}5x)=0{,}5(10-2x)$;

3) $\dfrac{(2-x)^2}{3}-2x=\dfrac{(7+2x)^2}{5}$; 4) $\dfrac{(2x+1)^2}{25}-\dfrac{x-1}{3}=x$;

5) $\dfrac{(3x+2)^2}{11}-\dfrac{x+5}{4}=x^2$; 6) $\dfrac{(6-x)^2}{8}+x=7-\dfrac{(2x-1)^2}{3}$.

18. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{x-3}-\frac{5}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$; 2) $\frac{70}{x^2-16}-\frac{17}{x+3}=\frac{3x}{x+4}$; 3) $\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{3x-x^2}=\frac{3}{2x+6}$;

4) $\frac{2}{4-x^2}-\frac{1}{2x-4}-\frac{7}{2x^2+4x}=0$; 5) $\frac{3}{(2-x)^2}-\frac{5}{(x+2)^2}=\frac{14}{x^2-4}$;

6) $\frac{2}{1-x^2}-\frac{1}{1-x}+\frac{4}{(x+1)^2}=0$; 7) $\frac{2}{x^2+5x}+\frac{3}{2x-10}=\frac{15}{x^2-25}$.

19. Розв'яжіть біквадратне рівняння:

1) $9x^4-13x^2+4=0$; 2) $4x^4+17x^2+4=0$;

3) $x^4-21x^2-100=0$; 4) $3x^4+2x^2-1=0$.

20. Розв'яжіть рівняння введенням нової змінної:

1) $(3x+2)^2+5(3x+2)=0$; 2) $4(5-x^2)^2-9(5-x^2)+2=0$;

3) $(x^2+6x)^2-5(x^2+6x)=24$; 4) $(x^2+3x-25)^2-2(x^2+3x-25)=-7$;

5) $(x^2-2x-5)^2-2(x^2-2x-5)=3$; 6) $(y+2)^4-(y+2)^2=12$;

7) $(x^2-x-16)(x^2-x+2)=88$; 8) $\frac{x^2-3x}{x-2}+\frac{x-2}{x^2-3x}=2{,}5$.

21. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4-16x^2=0$; 2) $x=x^3$; 3) $1{,}2x^3+x=0$;

4) $0{,}4x^4=x^3$; 5) $x^3+6x^2-16x=0$; 6) $x^4+x^3-6x^2=0$;

7) $x^3+x^2=9x+9$; 8) $2x^3+8x=x^2+4$.

22. Розв'яжіть рівняння графічно:

1) $x^2=2x-1$; 2) $\sqrt{x}=x-2$; 3) $\frac{4}{x}=3x-4$; 4) $4-x^2=\frac{1}{x}$.

23. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}\frac{x-y}{2}+\frac{x+y}{3}=1,\\ \frac{x-y}{3}+\frac{x+y}{4}=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\frac{x+y+4}{5}+\frac{x-y-4}{7}=y,\\ \frac{x+y+4}{11}-\frac{x-y-4}{7}=1;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x^2+y+8=xy,\\ y-2x=0;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2-y^2=16,\\ x+y=8;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x+y=5,\\ x^2-xy+y^2=13;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x^2+y^2+3xy=1,\\ 3y+x=0;\end{cases}$

7) $\begin{cases}x+xy+y=11,\\ x-xy+y=1;\end{cases}$ 8) $\begin{cases}x^2-y^2=12,\\ xy=8.\end{cases}$

24. Розв'яжіть систему рівнянь графічно:

1) $\begin{cases} 3x-2y=4, \\ -x+y=-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+5y=-1, \\ 2x-3y=-2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ 3x+2y=2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y=x^2-3, \\ 2y-x=0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy=1, \\ -x+y=0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} xy=-2, \\ y+8=\frac{1}{2}x^2. \end{cases}$

25. Доведіть нерівність:

1) $a^2+b^2\geq 2ab$; 2) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2, ab>0$; 3) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq -2, ab<0$;

4) $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$; 5) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\leq|a|+|b|+|c|$; 6) $\sqrt{x-y}>\sqrt{x}-\sqrt{y}$, $x>y>0$.

26. Чи рівносильні нерівності:

1) $-3x+4<0$ і $3x-4>0$; 2) $(x+2)(x^2+1)>0$ і $x+2>0$;

3) $x-2<1$ і $x-2-\frac{1}{x}<1-\frac{1}{x}$; 4) $\frac{x-3}{x+1}\geq 0$ і $(x-3)(x+1)\geq 0$;

5) $\frac{x+5}{x-8}\leq 0$ і $(x+5)(x-8)\leq 0$?

27. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x+1}{2}-\frac{x+2}{3}<2+\frac{x}{6}$; 2) $\frac{3x+5}{4}-1\leq\frac{x-2}{3}+x$; 3) $\frac{37-3x}{2}+9<\frac{2x-7}{4}-2x$;

4) $\frac{x+1}{x-2}-\frac{1}{2}>\frac{3}{x-2}$; 5) $(x-2)(x^2+2)>0$; 6) $\frac{2x-1}{x^2-5x+7}<0$.

28. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 2x+1>3x+4, \\ 5x+3\geq 8x+21; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x-2>2x+1, \\ 2x+3<18-3x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-1>2x-3, \\ 4x+5>x+17. \end{cases}$

29. Розв'яжіть нерівність:

1) $(6-x)(x+5)(x+4)<0$; 2) $(x+2)(x+4)(x-5)(x-3)>0$; 3) $\frac{2x-5}{x-2}>0$;

4) $\frac{4-2x}{3-2x}<1$; 5) $x-2<\frac{3}{x}$; 6) $\frac{7x-5}{x+1}>x$; 7) $\frac{x^2+1}{x^2+3x-10}<0$.

30. Знайдіть цілі розв'язки системи нерівностей:

1) $\begin{cases} 2(3x-4)<3(4x-3)+16, \\ 4(1+x)<3x+5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x>2-\frac{2x-13}{11}, \\ \frac{x}{6}+\frac{2}{3}(x-7)<\frac{3x-20}{9}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}\geq\frac{x-3}{4}-x, \\ 1-0{,}5x>x-4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-\frac{x-1}{2}-\frac{x+2}{3}\leq\frac{x-3}{4}, \\ 1{,}5x-5{,}05<x. \end{cases}$

Текстові задачі

31. Тіло кинули вертикально вгору з початковою швидкістю 40 м/с. Через скільки секунд воно буде на висоті 60 м?

32. Знайдіть сторони прямокутника, якщо одна з них на 14 см більша від другої, а діагональ прямокутника дорівнює 34 см.

33. У прямокутному трикутнику один з катетів на 3 см, а другий — на 6 см менші від гіпотенузи. Знайдіть гіпотенузу.

34. У кінотеатрі кількість місць у ряді на 8 більша від кількості рядів. Скільки рядів у кінотеатрі, якщо в ньому є 884 місця?

35. Дві бригади майстрів, працюючи разом, закінчили ремонт квартир у будинку за 6 днів. Скільки днів потрібно було б кожній бригаді на виконання цієї роботи, якщо першій бригаді треба на 5 днів більше, ніж другій?

36. Садову ділянку прямокутної форми необхідно огородити парканом. Визначте довжину паркана, якщо відомо, що довжина ділянки на 15 м більша за її ширину, а площа дорівнює 700 м^2.

37. Знайдіть два натуральних числа, якщо відомо, що перше з них на 6 менше подвоєного другого, а їх добуток дорівнює 20.

38. Цифра десятків двозначного числа на 3 менша від цифри одиниць, а добуток цього двозначного числа і суми його цифр дорівнює 70. Знайдіть це число.

39. Площа фермерського саду становить 29,25 га. Знайдіть периметр саду, якщо він має форму прямокутника, одна сторона якого на 200 м довша за іншу.

40. Два мотоциклісти виїхали одночасно з одного пункту в інший, відстань між якими 160 км. Швидкість першого була на 8 км/год більша за швидкість другого, тому він приїхав до місця призначення на 40 хв раніше. Знайдіть швидкість кожного мотоцикліста.

41. Моторний човен пройшов 28 км за течією річки та 25 км — проти течії, затративши на весь шлях стільки часу, скільки йому знадобилося б на проходження 54 км у стоячій воді. Знайдіть власну швидкість човна, якщо відомо, що швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

42. Катер пройшов за течією річки 160 км і стільки само проти течії, затративши на весь шлях 26 год. Знайдіть швидкість катера в стоячій воді, якщо швидкість течії річки становить 3 км/год.

43. Швидкий потяг має пройти відстань *MN*, що дорівнює 300 км, з деякою середньою швидкістю. Проте спочатку його швидкість була менша від розрахункової на 8 км/год, і тому, щоб прийти в *N* за розкладом, він їхав від станції *K*, яка розташована від *M* на відстані 180 км, зі швидкістю, що перевищує розрахункову на 16 км/год. Який час затратив потяг на шлях із *M* у *N*?

44. Від станції до фермерського господарства, відстань до якого 12 км, виїхав трактор, а через півгодини від станції в тому самому напрямку виїхала вантажівка. Коли вона прибула до фермерського господарства, трактору залишалося їхати до ферми ще 3 км. Знайдіть швидкість трактора і вантажівки, якщо швидкість автомобіля на 20 км/год більша за швидкість трактора.

45. Із пункту M у пункт N, відстань до якого 42 км, виїхав велосипедист, а через годину назустріч йому із N у M зі швидкістю, що перевищувала швидкість велосипедиста на 48 км/год, виїхав мотоцикліст. Знайдіть швидкість велосипедиста та мотоцикліста, знаючи, що вони зустрілися за 17 км від пункту M.

46. Довжина обводу колеса вантажівки більша за довжину обводу колеса велосипеда на 75 см. На відстані 440 м колесо велосипеда робить на 60 обертів більше, ніж колесо вантажівки. Знайдіть довжину обводів коліс велосипеда і вантажівки.

47. Вал з меншим діаметром робить за одну хвилину на 400 обертів більше і здійснює один оберт на 0,2 с швидше, ніж вал з більшим діаметром. Скільки обертів робить кожний вал за одну хвилину?

48. У двозначному числі цифра одиниць на дві більша за цифру десятків, а саме число більше, ніж 30 і менше, ніж 40. Знайдіть це число.

49. Якби велосипедист проїжджав за день на 5 км більше, ніж насправді, то за 6 днів він проїхав би менш ніж 400 км. Якби він проїжджав на 10 км менше, ніж насправді, то за 12 днів він проїхав би понад 400 км. Скільки кілометрів проїжджав велосипедист за день?

50. Одна сторона трикутника дорівнює 4 см, а сума двох інших — 10 см. Знайдіть ці сторони, якщо вони виражаються цілими числами.

51. Якою має бути температура 10 л води, щоб при змішуванні із 6 л води з температурою 15 °C одержати воду з температурою, не меншою за 30 °C і не більшою від 40 °C?

Функції

52. Побудуйте графік функції та охарактеризуйте її властивості:

1) $y=2x-3$; 2) $y=-5$; 3) $y=-x+4$; 4) $y=x^2+1$;

5) $y=-x^2-2$; 6) $y=\frac{2}{x}$; 7) $y=-\frac{2}{x}$; 8) $y=\sqrt{x-2}$.

53. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

1) $y=2x-1$ і $y=-5x+3$; 2) $y=-3x-10$ і $y=x^2-13x+6$;

3) $y=\frac{2,5}{x}$ і $y=-2x+4$; 4) $y=-\frac{3}{x}$ і $y=-x$;

5) $y=-3x^2+x-3$ і $y=-x^2+x-5$; 6) $y=4x^2+3x+6$ і $y=3x^2-3x-3$.

54. Які з точок $A(-4; 1)$, $B(8; 0,5)$, $C(0; 0)$, $D(0,01; -400)$, $E(16; \frac{1}{4})$, $F(40; 0,1)$ належать графіку функції $y=-\frac{4}{x}$?

55. Відомо, що графік функції $y=\frac{k}{x}$ проходить через точку $A(10; 2,4)$. Чи проходить графік цієї функції через точку:

1) $A(1; 24)$; 2) $B(-\frac{1}{5}; -120)$; 3) $C(-2; 12)$?

56. Знайдіть лінійну функцію, графіком якої є пряма, що проходить через точку $A(2; 3)$ і паралельна графіку функції $y = 1{,}5x - 3$.

57. Побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 + 4x - 3$; 2) $y = -x^2 - 2x + 1$; 3) $y = x^2 - x|x|$; 4) $y = |x^2 + 2x|$;

5) $y = \dfrac{1}{|x|}$; 6) $y = -\dfrac{2}{|x|}$; 7) $y = |x|x$; 8) $y = -\dfrac{x}{x^2}$; 9) $y = -\dfrac{x^2}{x}$; 10) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$.

58. За яких значень k і b гіпербола $y = \dfrac{k}{x}$ та пряма $y = kx + b$ проходять через точку: 1) $A(2; 1)$; 2) $B(-2; 3)$; 3) $C(-1; 1)$?

59. Чи можуть графіки функцій $y = \dfrac{k}{x}$ та $y = ax + b$ перетинатися:

1) тільки в одній точці; 2) тільки в двох точках; 3) у трьох точках?

60. Чи можуть графіки функцій $y = \dfrac{k}{x}$ та $y = ax + b$ перетинатися в двох точках, що лежать: 1) в одній чверті; 2) у I та II чвертях; 3) у I та III чвертях?

61. Графіки лінійних функцій $y = 3x + 2$, $y = -2x + 3$ та $y = 0{,}5x - 2$ обмежують трикутник. Чи лежить початок координат усередині цього трикутника?

62. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{1-3x}}$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{2x-1}{x-3}}$; 3) $y = \sqrt{2 - x - x^2}$; 4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{9x^2 - 3x - 2}}$;

5) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$; 6) $y = \dfrac{4}{\sqrt{(3x-1)(6x+1)}}$; 7) $y = \sqrt{12x - 3x^2}$.

Числові послідовності та прогресії

63. (Усно). Знайдіть кілька членів числової послідовності (y_n):

1) $y_n = 2 - 5n$; 2) $y_n = 2$; 3) $y_n = (-1)^n n$; 4) $y_n = \dfrac{3n}{2n-1}$; 5) $y_n = 2 \cdot 3^n$;

6) $y_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; 7) $y_n = \begin{cases} n, \text{ якщо } n \text{ — парне число,} \\ -n, \text{ якщо } n \text{ — непарне число.} \end{cases}$

64. В арифметичній прогресії (a_n):

1) $a_n = -3 + 4n$, знайдіть S_{12}; 2) $a_6 = 8$, $a_8 = 16$, знайдіть a_1 і d;
3) $a_5 = 19$, $a_9 = 35$, знайдіть d; 4) $a_1 = 0$, $d = -2$, знайдіть a_{17};
5) $a_7 = 3\dfrac{5}{6}$, $d = \dfrac{3}{4}$, знайдіть a_1; 6) $a_1 = 0{,}2$, $d = 0{,}(3)$, знайдіть S_{13};
7) $a_1 = d = n$, $a_n = 2601$, знайдіть S_n.

65. Скільки потрібно взяти членів арифметичної прогресії (x_n), щоб їх сума дорівнювала даному числу S:

1) $x_1 = 36$, $d = -12$, $S = 60$; 2) $x_4 = 5$, $x_9 = 10$, $S = 39$;
3) $x_3 = 10$, $x_8 = 30$, $S = 242$; 4) $x_8 = 0{,}4x_4$, $x_8 + x_4 = 2{,}8$, $S = 14{,}3$?

66. У геометричній прогресії (b_n):

1) $b_4 = b_2 + 24$, $b_2 + b_3 = 6$, знайдіть b_1 і q;
2) $b_4 - b_1 = 52$, $b_1 + b_2 + b_3 = 26$, знайдіть S_6;
3) $b_1 = q + \frac{25}{3}$, $b_1 + b_2 = 15$, знайдіть b_4;
4) $b_1 + b_2 + b_3 = 35$, $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 525$, знайдіть b_1, b_2, b_3;
5) $b_1 + b_2 + b_3 = 13$, $b_1 b_2 b_3 = 27$, знайдіть S_5.

67. Обчисліть суму:

1) $5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \ldots + 5\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \ldots$; 2) $\frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \ldots$;
3) $\frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{2} + \frac{8}{27} + \frac{1}{4} + \ldots$; 4) $\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \frac{n-3}{n} + \ldots + \frac{n-10}{n}$.

68. Знайдіть суму перших двадцяти непарних чисел, які при діленні на 3 дають в остачі 1.

69. Перший член арифметичної прогресії дорівнює 7, а другий і третій — відповідно квадратам двох послідовних натуральних чисел. Знайдіть цю прогресію.

70. Арифметична прогресія містить 8 членів. Сума її членів на парних місцях дорівнює 28, а на непарних — 16. Знайдіть цю прогресію.

71. Покажіть, що числа, які виражають суми внутрішніх кутів трикутника, чотирикутника, п'ятикутника тощо, утворюють арифметичну прогресію.

72. Два тіла почали вільно падати з певної висоти одне після другого через 6 с. Через скільки секунд після початку руху першого тіла воно буде на відстані 294 м від другого тіла?

73. Відрізки паралельних прямих між сторонами кута утворюють арифметичну прогресію, різниця якої дорівнює 5 см. Знайдіть кількість членів цієї прогресії, якщо найменший відрізок дорівнює 2 см, а сума довжин усіх відрізків — 245 см.

74. Довжини сторін многокутника утворюють арифметичну прогресію, різниця якої дорівнює 3 см. Найбільша сторона многокутника дорівнює 38 см, а його периметр — 258 см. Знайдіть кількість сторін цього многокутника.

75. На дослідній ділянці щорічний приріст деревини становить 10 %. Скільки деревини буде на ділянці через 6 років, якщо її початковий об'єм становить 20 000 м^3?

76. Потяг при відході від станції рівномірно збільшує швидкість, і через 20 хв його швидкість становить 60 км/год. Чому дорівнює прискорення потягу за хвилину?

77. Для поливу 20 дерев, розміщених по прямій лінії на відстані 2 м одне від одного, садівник приносить воду до кожного дерева з колодязя, розташованого на тій самій прямій на відстані 10 м від першого дерева. Скільки метрів подолає садівник, щоб полити усі дерева і повернутися до колодязя?

78. Між числами 243 і 1 записати такі чотири числа, які разом із даними числами утворять геометричну прогресію.

79. Три числа, сума яких дорівнює 28, утворюють геометричну прогресію. Якщо більше з цих чисел зменшити на 4, то числа становитимуть арифметичну прогресію. Знайдіть ці числа.

80. Сума трьох перших членів геометричної прогресії дорівнює 42. Ті самі числа є одночасно першим, другим і шостим членами зростаючої арифметичної прогресії. Які ж ці числа?

81. Три числа, сума яких дорівнює 76, можна розглядати як три послідовних члени геометричної прогресії або як перший, четвертий і шостий члени арифметичної прогресії. Скільки членів цієї арифметичної прогресії потрібно взяти, щоб їх сума дорівнювала 176?

82. Сума трьох перших членів спадної арифметичної прогресії дорівнює 54. Якщо її перший член залишити без зміни, другий зменшити на 9, а третій — на 6, то нові числа утворять геометричну прогресію. Знайдіть арифметичну прогресію.

83. Подайте десятковий періодичний дріб у вигляді звичайного дробу:
1) 0,(19); 2) 0,(901); 3) 5,(002); 4) 2,3(24);
5) 3,20(3); 6) 1,06(32); 7) 1,0(7); 8) 3,7(288).

84. Відстань між автомобілем і пішоходом дорівнює 1 км. Швидкість автомобіля в 10 разів більша за швидкість пішохода. Який шлях має проїхати автомобіль, щоб наздогнати пішохода, якщо вони рухаються рівномірно?

85. О 12 год годинникова та хвилинна стрілки збігаються. Через який час знову відбудеться такий збіг?

86. З висот правильного трикутника зі стороною a будують новий трикутник, з висот якого знову будують трикутник і т. д. Знайдіть суму площ цих трикутників.

ВІДОМОСТІ З КУРСУ ПЛАНІМЕТРІЇ

Аксіоми планіметрії

1. Існують точки, які належать прямій, і точки, що їй не належать.

2. Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.

3. З трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.

4. Будь-яка фігура F накладанням суміщається сама із собою.

5. Якщо фігура F_1 накладанням суміщається з фігурою F_2, то і фігура F_2 накладанням суміщається з фігурою F_1.

6. Якщо фігура F_1 накладанням суміщається з фігурою F_2, а фігура F_2 — з фігурою F_3, то фігура F_1 накладанням суміщається з фігурою F_3.

7. $\frac{\text{Довжина}}{\text{Градусна міра}}$ кожного $\frac{\text{відрізка}}{\text{кута}}$ більша за нуль.

8. $\frac{\text{На промені від його початку}}{\text{Від променя по один бік від нього}}$ можна відкласти тільки один $\frac{\text{відрізок даної довжини}}{\text{кут даної градусної міри}}$.

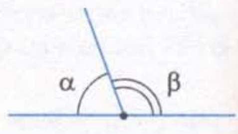
9. $\frac{\text{Довжина відрізка}}{\text{Градусна міра кута}}$ дорівнює сумі $\frac{\text{довжин відрізків}}{\text{градусних мір кутів}}$, на які він розбивається $\frac{\text{будь-якою його точкою}}{\text{будь-яким променем, що проходить між сторонами кута}}$.

10. Аксіома паралельних прямих: через будь-яку точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Кути і паралельні прямі

Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Вертикальні кути рівні.



$\alpha + \beta = 180°$

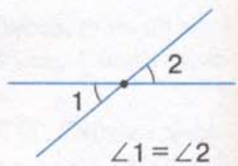
Властивості паралельних прямих

Якщо дві паралельні прямі перетинає третя, то:

1) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°;

2) внутрішні різносторонні кути рівні;

3) відповідні кути рівні.



$\angle 1 = \angle 2$

Ознаки паралельності прямих

Якщо дві прямі перетинає третя та:

сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°,

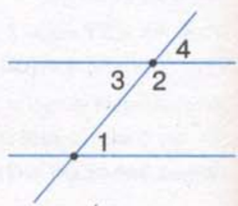
або

внутрішні різносторонні кути рівні,

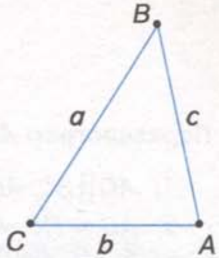
або

відповідні кути рівні,

то дані прямі паралельні.



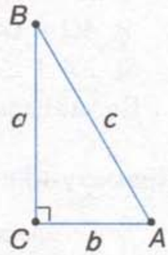
Трикутники. Коло



У будь-якому трикутнику ABC:

1) $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ (теорема про суму кутів трикутника);
2) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ (теорема косинусів);
3) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ (теорема синусів),

де R — радіус описаного кола.



У прямокутному трикутнику $ABC (\angle C = 90°)$:

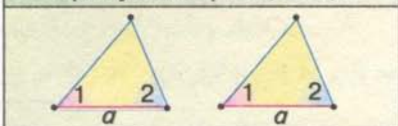
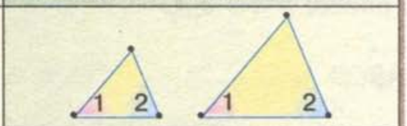
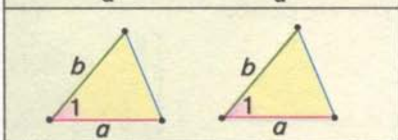
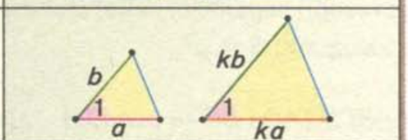
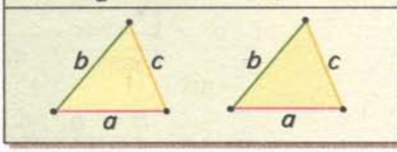
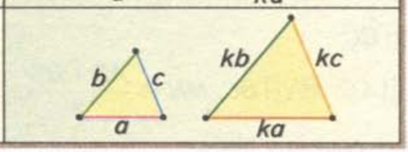
1) $\angle A + \angle B = 90°$;
2) $c^2 = a^2 + b^2$ (теорема Піфагора);
3) $a = c\sin A = c\cos B = b\,\mathrm{tg}\,A$.

Периметр трикутника дорівнює сумі довжин його сторін.

Площа трикутника ABC

1) $S = ah_a$;
2) $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$;
3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де p — півпериметр (формула Герона);
4) $S = pr$, де p — півпериметр, r — радіус вписаного кола;
5) $S = \dfrac{abc}{4R}$, де R — радіус описаного кола.

Ознаки рівності, подібності трикутників

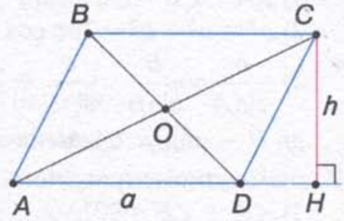
Трикутники рівні, якщо:	Трикутники подібні, якщо:
	
	
	

Довжина кола і площа круга

$C = 2\pi R = \pi D$, $S = \pi R^2 = \dfrac{\pi D^2}{4}$, де R — радіус кола, D — його діаметр.

Чотирикутники

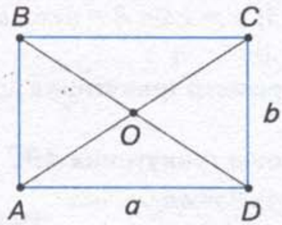
Паралелограм *ABCD*:



1) $AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$;
2) $AB = DC$, $AD = BC$;
3) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$;
4) $AO = OC$, $BO = OD$;
5) $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle A + \angle D = 180°$.

Площа паралелограма: $S = ah$.

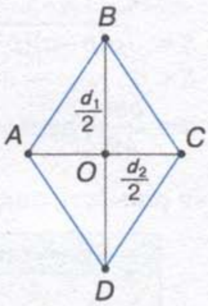
Прямокутник *ABCD*



1) Усі властивості паралелограма;
2) $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$;
3) $AC = BD$.

Площа прямокутника: $S = ab$.

Ромб *ABCD*:



1) Усі властивості паралелограма;
2) $AB = BC = CD = DA$;
3) $AC \perp BD$;
4) $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle BAC = \angle DAC$.

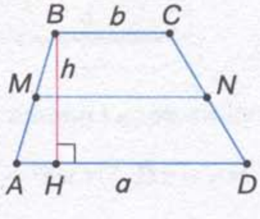
Площа ромба: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

Квадрат *ABCD*

Усі властивості паралелограма, прямокутника, ромба.

Площа квадрата: $S = a^2$.

Трапеція *ABCD* (*AD* і *BC* — *основи*)



1) $AD \parallel BC$;
2) $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \frac{AD + BC}{2}$,

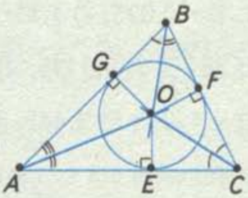
де MN — середня лінія.

Площа трапеції: $S = \frac{(a+b)h}{2}$.

Вписані та описані многокутники

Многокутник називається $\dfrac{\text{вписаним у коло}}{\text{описаним навколо кола}}$, якщо всі його $\dfrac{\text{вершини лежать на колі}}{\text{сторони дотикаються до кола}}$.

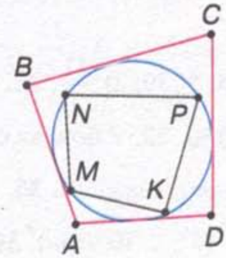
ВПИСАНІ ТРИКУТНИКИ	ОПИСАНІ ТРИКУТНИКИ
Центр *O* кола — точка перетину	
серединних перпендикулярів	*бісектрис кутів*
$R = OA = OB = OC$	$r = OE = OF = OG$



$\dfrac{\text{Навколо будь-якого трикутника}}{\text{У будь-який трикутник}}$ можна $\dfrac{\text{описати}}{\text{вписати}}$ коло і до того ж тільки одне

Властивості вписаних та описаних чотирикутників

У вписаному чотирикутнику *MNPK*:
$\angle M + \angle P = 180°$, $\angle N + \angle K = 180°$;
в описаному чотирикутнику *ABCD*:
$AB + CD = AD + BC$.



Правильні многокутники

У правильному *n*-кутнику *ABCD ... F*:

1) $AB = BC = ... = AF$ і $\angle A = \angle B = ... = \angle F$;

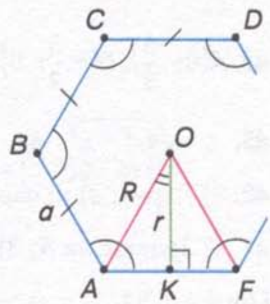
2) точка *O* є центром описаного кола і вписаного кола;

3) $\angle AOF = \dfrac{360°}{n}$;

4) $\angle A + \angle B + ... + \angle F = 180°(n - 2)$;

5) $r = \dfrac{AK}{\operatorname{tg}\angle AOK} = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}}$;

6) $R = \dfrac{AK}{\sin\angle AOK} = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$.



ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

Частина І. АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Розділ 1

§ 1

5. 1) $-0{,}025$; 2) $1{,}15$; 3) $0{,}(216)$; 4) $0{,}58(3)$; 5) $-0{,}(45)$; 6) $2{,}(36)$; 7) $0{,}0(945)$. **7.** 1) 50; 2) $36\frac{25}{72}$; 3) 0,0115; 4) 3. **14.** 1), 2) ні; 3) так. **15.** 1) Ні; 2) так. **17.** Так. **18.** 1) 4,414; 3) $-1{,}782$; 5) 2,449. **19.** $\sqrt{7}+\sqrt{10}<\sqrt{3}+\sqrt{19}$. **20.** *Вказівка*: скористайтеся методом доведення від супротивного. **21.** 1) $\frac{121}{40}$; 3) $\frac{11}{3}$; 5) $\frac{12}{55}$. **22.** *Вказівка*: доведіть, що число $\sqrt{3}$ не є раціональним. **23.** *Вказівка*: скористайтеся методом доведення від супротивного. **24.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою Піфагора.

§ 2

25. 1) 30; 2) $\frac{11}{2}$. **26.** 40 %. **27.** 21 %. **28.** 21; 15. **29.** Числа рівні. **30.** 25 %. **31.** 160 г; 20 %. **32.** У бочках стало води порівну. **33.** 520; 572; 440. **34.** 4000. **35.** Інший товар став дешевшим. **36.** 2200 грн, 3000 грн. **37.** 2200; 2400; 2600 (грн). **38.** $5\cdot10^5$; 10^6; $2\cdot10^6$; $4\cdot10^6$ (грн). **39.** $\approx 506{,}4$ грн.

§ 3

42. $A\left(0;\ \frac{5}{3}\right)$; $B\left(-\frac{5}{2};\ 0\right)$; $C\left(-2;\ \frac{1}{3}\right)$; $D\left(-\frac{7}{4};\ 0{,}5\right)$. **44.** $s=6V$; а) 390 км; б) 60,5 км/год. **45.** $b=\sqrt{4r^2-x^2}$. **46.** $b=\sqrt{25-a^2}$. **47.** 1) $(-\infty;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$. **48.** 1) Парна; 3) ні парна, ні непарна; 5) парна; 7) непарна; 9) ні парна, ні непарна. **49.** 1) Зростає на R; 3) спадає на $(-\infty;\ 0]$ і зростає на $(0;\ +\infty)$; 5) спадає на $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$. **53.** 1) $x=-1$; 3) $\left(-\infty;\ \frac{5}{3}\right]\cup[7;\ +\infty)$. **54.** 1) $\left[-\frac{1}{2};\ 0\right]$; 2) $[-1;\ 1]$; 3) $[-1;\ 0]$. **55.** $y=-\frac{x}{2}$. **56.** 1) $D(y)=R$, $E(y)=(-\infty;\ 5]$; 3) $D(y)=R$, $E(y)=[-3;\ +\infty)$; 5) $D(y)=E(y)=R$. **57.** $y\le-|x|$; $y<|x|$. **58.** $|x|+|y|=4$.

§ 4

63. $y=-\frac{3}{2x-1}$.

§ 5

65. 1) 12; 3) 25; 5) 4; 7) $8-4\sqrt{3}$; 9) $2\sqrt{2}$. **66.** 1) $2mn^3$; 3) $2(\sqrt{10}-3)$; 5) 2. **67.** 1) $3\sqrt[3]{2}$; 3) $10\sqrt{2}$; 5) $\frac{\sqrt[3]{2}}{5}$. **68.** 1) $\sqrt{18}$; 3) $\sqrt[4]{27}$; 5) $\sqrt[3]{5a^3}$. **70.** 1) $\frac{x+y}{x-y}$; 2) $2+\sqrt{3}$; 3) a^3, $a>0$. **71.** 1) $\sqrt{\sqrt{5}-2}$; 2) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$; 3) $4+\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{45}$. **72.** $100(\sqrt[20]{2}-1)\%$. **73.** $100(\sqrt[3]{1{,}27}-1)\%$. **74.** $100(\sqrt[7]{2}-1)\%$.

§ 6

75. 1) a^2; 3) $\frac{1}{c}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{a}}$. **76.** 1) 12; 3) 25; 5) $\frac{2}{3}$. **77.** 1) $\frac{9}{625}$; 3) $\frac{4}{\sqrt{5}}$; 5) 1,9; 7) 54. **78.** 1) $x+y$; 3) $4\sqrt[3]{ab}$. **79.** 1) 11; 3) 0,2. **80.** 1) $\frac{1}{\sqrt[12]{x^2y}}$; 3) $a-b$. **81.** 1) 1; 3) 1. **83.** *Вказівка*: подайте підкореневі вирази як квадрат суми та різниці чисел.

§ 7

85. 1) –3; 3) 3; 5) 0; 7) 7; 9) 4. **86.** 1) 1; 16; 3) 3; 8; 5) 4; 7) –1; 5; 9) 1. **87.** 1) (3; 1); (1; 3); 3) (9; 1); (1; 9); 5) (18; 2); (–18; –2); 7) (0; 0). **88.** 1) 1; 2; $-\frac{2}{3}$; $\frac{11}{3}$; 3) 1; 5) 64; 7) –2. **89.** 1) (1; 4); (4; 1) 3) (16; 243); (81; 32); 5) (7; 30); (26; 11); 7) (1; 8); (8; 1).

§ 8

93. 2), 5). **94.** 1) R; 3) R; 5) $[-3; 0)\cup(0; +\infty)$; 7) $[2; +\infty)$. **96.** 1) $\sqrt[3]{3}>\sqrt[3]{2}$; 3) $\sqrt[5]{0{,}2}<\sqrt[5]{0{,}3}$; 5) $(-2{,}3)^{-3}>(-\frac{1}{5})^{-3}$.

Розділ 2

§ 9

109. $\frac{3}{5}$ і $\frac{4}{5}$; $\frac{4}{5}$ і $\frac{3}{5}$. **110.** 1) $1\frac{4}{13}$; 2) 1,4. **113.** 1. **115.** $d\sin\beta$, $d\cos\beta$. **119.** $2a\sin\frac{\alpha}{2}$, $2a\cos\frac{\alpha}{2}$. **121.** $\frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, $m\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **122.** $\frac{a-b}{2}\operatorname{tg}\beta$, $\frac{a-b}{2\cos\beta}$.

§ 11

134. 1) >0; 2) <0; 3) >0; 4) >0; 6) >0; 8) >0. **139.** 2) <0; 4) >0; 6) <0; 8) <0.

§ 13

156. 1) $\frac{2\pi}{9}$; 3) $\frac{\pi}{5}$; 6) $\frac{5\pi}{3}$; 7) $-\frac{5\pi}{4}$. **157.** 2) 15°; 7) –495°; 9) ≈ 114°36′. **160.** $\frac{13\pi}{45}$.

161. 102°. **162.** 40°, 60°, 80°; $\frac{2\pi}{9}$ рад, $\frac{\pi}{3}$ рад, $\frac{4\pi}{9}$ рад. **165.** 1) 60 см; 2) 10 см. **166.** $5\pi \approx 15{,}7$ (см). **167.** 2) 0,1 рад; 3) 0,5 рад. **168.** 5 см. **169.** $\frac{45}{\pi}$ см. **175.** $\frac{2\pi}{3}$ рад/с.

§ 14

178. 1) $2\pi k$, $k \in Z$; 2) $(2k+1)\pi$, $k \in Z$. **179.** 1) $\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $k \in Z$, або $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$. **182.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$, або $\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $k \in Z$. **184.** 1) > 0; 2) > 0. **187.** 1) $a_1 = \frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$ і $a_2 = -\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$, або $a = \pm\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$, або $a = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in Z$.

§ 15

192. 1) $-\cos\alpha$; 3) $-\sin\alpha$; 5) $-\sin^2\alpha$. **193.** 1) $\sin 0{,}1\pi$; 3) $\operatorname{ctg} 12°$; 4) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}$; 7) $\sin(45° - \alpha)$; 9) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; 10) $\cos\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)$; 11) $-\sin 2\alpha$. **194.** 1) $-\operatorname{tg} 43°$. *Вказівка*: завдання можна виконати двома способами. Наприклад, $\operatorname{tg} 317° = \operatorname{tg}(360° - 43°) = -\operatorname{tg} 43°$, або $\operatorname{tg} 317° = \operatorname{tg}(270° + 47°) = -\operatorname{ctg} 47°$. 2) $-\sin 21°$; 5) $-\sin\frac{3\pi}{7}$; 10) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$. **195.** 2) $-\sin 33°$; 4) $-\sin\frac{\pi}{5}$; 6) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$. **196.** 1) $-\sin 70°$; 2) $-\cos 20°$; 4) $\cos\frac{3\pi}{8}$; 8) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$. **198.** 1) -1; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **200.** $\frac{1}{2}$. **202.** 2) $-1{,}5$; 3) -1; 4) 3,5. **203.** 1) $3{,}5\sqrt{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. **204.** 1) 2; 2) 5. **207.** $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$. *Вказівка*: за даними значеннями синусів знайдіть спочатку кути трикутника. **209.** $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. **210.** $\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

§ 16

211. 2) $\frac{\sqrt{35}}{6}$; 3) $\frac{\sqrt{21}}{5}$. **212.** 3) $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **213.** 3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{63}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{63}$. **214.** 1) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{2}{7}$. **217.** 3) $-\cos^2 x$; 5) 2; 7) $2\sin\alpha$; 8) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; 12) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$. **219.** $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1\frac{7}{8}$. **220.** $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$. **221.** $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$. **223.** 2) $\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha$; 3) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 5) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 6) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 7) 2; 8) 4; 9) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$; 10) $1 - \cos\alpha$. **224.** 1) Hi; 2) так; 3) так; 4) ні.

225. 1) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$; 3) $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha=3\frac{3}{7}$; 6) $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{101}}$, $\cos\alpha=\frac{10}{\sqrt{101}}$; 7) $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$. **226.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $-\sin^2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}^6\alpha$; 5) $\frac{1}{\cos x}$; 6) $\frac{1}{\sin x}$; 7) 1; 8) 1; 9) $\operatorname{ctg}\alpha$; 10) $\operatorname{ctg}^6\alpha$. **231.** 1) 0,84; 2) $-\frac{2}{3}$. **232.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{m^4-1}}{m^2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{m^4-1}}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\sqrt{m^4-1}$. **233.** $\sin\alpha=-\frac{b^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$, $\cos\alpha=-\frac{a^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{b^2}{a^2}$. **234.** $\frac{p^2-1}{2}$. *Вказівка*: піднесіть обидві частини даної рівності до квадрата. **235.** m^2-2. **236.** 1.

§ 17

241. 1) $\cos x$; 2) $\sqrt{2}\sin\alpha$. **242.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **243.** 3) $\cos 2$; 4) $\cos 3$. **244.** 1) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$. **245.** 1) $\frac{12\sqrt{3}+5}{26}$; 4) $-\frac{3\sqrt{3}}{5}$. **246.** 1) $2\cos 10°$; 2) 0. **248.** $\frac{140}{221}$. **249.** $-0{,}352$. **250.** 1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

§ 18

252. 1) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **253.** 1) $\cos\alpha$; 3) $\sin\alpha$. **254.** *Вказівка*: покажіть, що різниця лівої та правої частин рівності дорівнює нулю. **255.** 1) $\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$; 4) $\operatorname{tg}\alpha$. **256.** 1) $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$; 2) $-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$. **257.** 1) $\frac{17\sqrt{2}}{50}$; 2) $\frac{a\sqrt{3}+\sqrt{1-a^2}}{2}$. *Вказівка*: запишіть $70°+\alpha$ як $30°+(40°+\alpha)$. **260.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. *Вказівка*: запишіть $\frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\frac{1}{2}$ як синус і косинус відповідного кута. 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **261.** 0,96. **263.** 1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 4) $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

§ 19

265. 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{5}$. **266.** 1) 1; 2) $\sqrt{3}$; 4) 1. **268.** 1) $-2-\sqrt{3}$; 2) $2-\sqrt{3}$. **270.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 1. **271.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{5}$; 2) $\frac{4-3\sqrt{3}}{3+4\sqrt{3}}$; 3) $2\frac{5}{36}$ і $\frac{13}{84}$. **272.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) 2. **273.** 1) 1; 2) 0; 3) $\operatorname{tg} 25°$; 4) -1. **274.** 1. **275.** *Вказівка*: для цього достатньо показати, що $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}45°=1$.

§ 20

280. 1) $\frac{24}{25}$; 2) $-\frac{119}{169}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{3}{4}$. **281.** 1) $-\frac{120}{169}$ і $-\frac{119}{169}$; 2) $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $1\frac{1}{3}$ і $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{4}{3}$, $-3\frac{3}{7}$.

282. 1) $\frac{24}{25}$. *Вказівка*: піднесіть обидві частини рівності $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$ до квадрата. 2) $-\frac{8}{9}$. **283.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **284.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **285.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$; 4) 4. **287.** 3) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 5) $\cos\alpha$. **288.** 1) $2\operatorname{tg}\alpha$; 2) 1; 4) 1; 5) 1. **289.** 1) $\sin 4x$; 2) $\cos\alpha - \sin\alpha$; 3) $\frac{1}{4}\sin 2\alpha$; 4) $-\frac{1}{4}\sin 4\alpha$; 6) $\cos 2\alpha$; 7) $\cos 2\alpha$. **290.** 1) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 2) $-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

294. 1) *Вказівка*: перетворіть ліву частину рівності, помноживши і поділивши її на $2\cos 10°$. **298.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. *Вказівка*: скористайтеся тотожністю $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. 2) $\frac{\sqrt{14}}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **299.** $\frac{120}{169}$ і $-\frac{119}{169}$.

§ 21

300. 3) $-3 \le \cos x - 2 \le -1$; 7) $3 \le \cos^2 x + 3 \le 4$; 8) $-5 \le 2\sin^2 x - 5 \le -3$. **305.** 2) $2\cos(x - 3)$; 3) 0. **306.** 2) $\sin\alpha - \cos\alpha$. **307.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **308.** 1) 1; 2) 0; 3) $-2-\sqrt{2}$; 4) $\frac{7}{12}$; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **309.** 1) π; 4) π; 5) 8π; 6) 2π. **310.** 1) 1, −1 і 2π; 2) 1, −1 і $\frac{2\pi}{7}$; 4) 6, 4 і $\frac{2\pi}{9}$; 5) 1, −1 і 2π; 6) $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$; 7) 2, −2 і π. **313.** 1) π; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) π.

§ 22

316. 1) $\sin\frac{1}{2} > \sin\frac{1}{3}$; 2) $\cos\frac{1}{2} < \cos\frac{1}{3}$; 4) $\cos\frac{2\pi}{3} > \cos\pi$; 5) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) > \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. **319.** $x \in (\pi; 2\pi)$; $x \in (\pi(2n-1); 2\pi n)$, $n \in Z$. **323.** $\sin x : \pi n$, $n \in Z$; $\cos x : \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in Z$.

§ 23

335. 1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{10} > \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$; 2) $\operatorname{tg}(-3) < \operatorname{tg}(-2{,}1)$; 5) $\operatorname{ctg} 2 > \operatorname{ctg} 2{,}5$; 6) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) < \operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$. **336.** $x = \pi n$, $n \in Z$. **337.** $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in Z$. **338.** 1) $\left(-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. **340.** 1) $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$ або $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2}(2n+1)\right)$, $n \in Z$; 2) $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right)$, $n \in Z$ або $x \in \left(\frac{\pi}{2}(2n+1); \pi(n+1)\right)$, $n \in Z$.

§ 24

341. 1) 3, $\frac{1}{2\pi}$, 2π, $\frac{\pi}{4}$; 2) 1,8, $\frac{1}{\pi}$, π, 1; 3) 0,8, $\frac{1}{2}$, 2, −2; 4) 1,5, $\frac{1}{2\pi}$, 2π, 0; 5) 2,5, $\frac{1}{4\pi}$, 4π, 0; 6) 5, $\frac{1}{6\pi}$, 6π, −1. **343.** 1) 10; 2) 60; 3) 3,75; 4) 25. **345.** Мал. 94: $y = \sin 4t$; мал. 95: $y = 2{,}2\sin t$; мал. 96: $y = 1{,}5\sin 4t$; мал. 97: $y = 4\sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right)$.

§ 25

351. 1) $\frac{3}{4}$; 2) 0,6; 3) −0,35; 4) $\frac{\pi}{6}$. **352.** 1) $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; 2) $x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi k$, $k \in Z$; 3) $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; 4) $x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k$, $k \in Z$. **353.** 3) $x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k$, $k \in Z$; 4) $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; 5) $x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{3} + \pi k$, $k \in Z$.

§ 26

357. 2); 4). **361.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{11\pi}{6}$; 3) $\frac{7\pi}{6}$; 4) $-\frac{17\pi}{4}$. **364.** 1) $x = \pm\arccos 0{,}2 + 2\pi n$, $n \in Z$; 3) $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}n$, $n \in Z$.

§ 27

369. 1) $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 6) $x = \frac{2\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.
370. 1) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $x = -\mathrm{arctg}\frac{2}{5} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n$, $n \in Z$.
371. 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) $-\frac{5}{12}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

§ 28

372. 1) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $x = \pm\frac{\pi}{2} + 4\pi n$, $n \in Z$; 3) $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; 4) $x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n$, $n \in Z$; 5) $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; 6) $x = \mathrm{arcctg}\frac{1}{5} + \pi n$, $n \in Z$; 7) $x = \frac{\pi}{2}(2n+1) + \frac{\pi}{3}$, $n \in Z$; 8) $x = \frac{3\pi}{8} + 2\pi n$, $n \in Z$; 10) $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$; 11) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 12) $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}n$, $n \in Z$. **373.** 1) $x = 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$; 3) $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in Z$ і $x = \frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in Z$; 4) $x = \pi n$, $n \in Z$. **374.** 1) $x = \pi n$, $n \in Z$ і $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in Z$ і $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; 3) $x = \pi n$, $n \in Z$ і $x = -\mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$,

$n \in \mathbf{Z}$ і $x=(-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 5) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ і $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,$ $n \in \mathbf{Z}$; 6) $x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ і $x=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **375.** 1) $x=2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ і $x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 2) $x=\pi(2n+1),\ n \in \mathbf{Z}$ і $x=\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 3) $x=\pi n,$ $n \in \mathbf{Z}$ і $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 4) $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **376.** 1) $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 2) $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 3) $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 4) $x=\pi(2n+1),$ $n \in \mathbf{Z}$; 5) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ і $x=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 6) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,$ $n \in \mathbf{Z}$ і $x=\operatorname{arctg} 3+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 7) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ і $x=\operatorname{arctg} 3+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 8) немає розв'язків. **377.** 1) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ і $x=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 3) $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 4) $x=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n,$ $n \in \mathbf{Z}$; 5) $x=\pi(2n+1),\ n \in \mathbf{Z}$ і $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 6) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ і $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 7) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 8) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ і $x=\operatorname{arctg} 5+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **378.** 1) $x=\pi(2n+1),\ n \in \mathbf{Z}$ і $x=\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 3) $x=2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ і $x=-\pi+4\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 4) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,$ $n \in \mathbf{Z}$ і $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

§ 29

379. 1) $x \in \left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$; 2) $x \in \left[-\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right],\ n \in \mathbf{Z}$; 4) $x \in \left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$; 7) $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right],\ n \in \mathbf{Z}$; 8) $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$; 11) $x \in \left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right],\ n \in \mathbf{Z}$;
380. 1) $x \in \left(-\frac{5\pi}{8}+\pi n;\ \frac{\pi}{8}+\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$; 3) $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}+6\pi n;\ \frac{15\pi}{4}+6\pi n\right],\ n \in \mathbf{Z}$; 5) $x \in \left[\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$; 7) $x \in \left[-\frac{7\pi}{12}+\pi n;\ \frac{\pi}{12}+\pi n\right],\ n \in \mathbf{Z}$.

Частина II. ГЕОМЕТРІЯ

Розділ 3

§ 30

4. Правильний многокутник. Бічні ребра рівні. Основа висоти — центр многокутника. **5.** Точка, пряма, площина. **9.** 1) Ні; 2) не завжди. **11.** 4 грані, 4 вершини, 6 ребер. **16.** 11.

§ 31

26. Ні. *Вказівка*: скористайтеся третьою аксіомою стереометрії. **30.** Через три точки завжди можна провести площину, через чотири — не завжди. **32.** Так. **33.** 1) Так. **36.** 1) Жодної; 2) чотири; 3) безліч. **41.** *Вказівка*: для обґрунтування скористайтеся фактом: прямі, що перетинаються, лежать в одній площині.

§ 32

50. 1) 60°; 2) 60°; 3) 70°; 4) 20°. **51.** 1) 3 см, або 4 см, або 5 см; 2) 5 см або 2 см; 3) 8 см. **53.** 1) 4 см, 6 см, 9 см, $2\sqrt{13}$ см, $3\sqrt{13}$ см, $\sqrt{97}$ см; 2) 5 см, $5\sqrt{2}$ см; 3) 5 см, 12 см, 13 см, $12\sqrt{2}$ см. **54.** 1) Перетинаються або мимобіжні; 2) перетинаються або мимобіжні; 3) перетинаються або мимобіжні. **57.** 1) Ні; 2) ні. **58.** 1) Наприклад, AA_1 і AD, AA_1 і AB; 2) наприклад, AA_1 і BC, AA_1 і CD. **59.** 1) $\frac{168}{13}$ см; 2) $4\sqrt{2}$ см. *Вказівка*: розгляньте два випадки. **60.** Якщо $A \notin a$, то: 1) безліч; 2) одну; 3) безліч. Якщо $A \in a$, то: 1) безліч; 2) жодної; 3) жодної. **62.** 1) 12 пар; 2) 24 пари. **63.** 1) 3 пари; 2) 8 пар. **64.** 1) 45°; 2) 60°; 3) 90°. **67.** 1) 3 пари; 2) 15 пар; 3) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

§ 33

73. 1) Паралельні; 2) перетинаються; 3) паралельні. **76.** Так. **77.** Ні. **78.** Ні. **79.** Так. **81.** 1) 2 см або 3 см; 2) 1,5 см або 3,5 см; 3) 1 см або 2,5 см. **82.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю середньої лінії трикутника та ознакою паралельності прямої і площини. **83.** 1) 18 см; 2) 16 см; 3) 22 см. **84.** Не завжди. **86.** Так. **87.** 1) Так; 2) так. **88.** 1) Так; 2) так; 3) так; 4) так. **89.** Ні. **91.** 1) Так; 2) не завжди. **92.** 1) Паралельні або сторона трикутника перетинає площину.

§ 34

98. 1) AB; 2) AA_1; 3) CC_1. **101.** Перетинаються або паралельні. **102.** Так. **107.** 1) Не завжди; 2) не завжди. **108.** Так, якщо прямі мимобіжні. **109.** Не можна. **110.** 1) Одну; 2) одну. **115.** Ні. **116.** Не завжди. **117.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою паралельності площин. **119.** 1) Так; 2) так; 3) так. **120.** Так. 1) Одну; 2) безліч; 4) одну. **122.** *Вказівка*: розгляньте два випадки. **123.** Паралельні. **124.** Безліч. **126.** Паралельні. Можуть бути непаралельні.

§ 35

131. 2) Так (мал. 188), так (мал. 189). **134.** 1) $BM_1 = 10$, $BN_1 = 24$, $M_1N_1 = 26$; 3) $BM = 6$, $BN_1 = 10$, $M_1N_1 = 18$; 5) $BM = 1{,}5$, $BN = 2{,}5$, $MN = 2$. **135.** 1) Прямокутник; 2) квадрат. **136.** Рівнобедрений трикутник. 1) 35°, 35°, 110°; 2) 50°, 50°, 80°; 3) 75°, 75°, 30°.

137. Ромб. 1) 100°, 80°, 100°, 80°; 2) 40°, 140°, 40°, 140°; 3) 60°, 120°, 60°, 120°. **138.** Не завжди. **140.** 1) $P=a\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{5}\right)$, $S=\frac{9a^2}{8}$. **142.** Так. **143.** 1) 36 см; 2) 72 см. **144.** 1) 30°, 60°, 90°; 2) 50°, 60°, 70°. **145.** 1) 120°, 25°, 35°; 2) 40°, 40°, 80°. **148.** 1) $\frac{c}{m}(m+n)$; 2) $\frac{d^2}{a^2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$. **149.** 1) 60°; 2) 60°; 3) 90°; 4) 30°; 5) 30°; 6) 60°.

§ 36

154. Ні. **156.** 1) 2 : 3; 2) 2 : 1; 3) 3 : 1,5. **157.** 1) 3 : 4; 2) 7 : 1; 3) 4 : 9. **162** 1) Так; 2) так; 3) ні. **163.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **165.**) Ні; 2) ні; 3) так. **169.** Відрізок або многокутник. **172.** 1) Проекцією прямокутного $\triangle ABC$ буде довільний $\triangle A_1B_1C_1$, у якого висота C_1H_1 ділить гіпотенузу A_1B_1 у відношенні 25 : 144, починаючи від вершини A_1. **174.** 1) Проекцією прямокутника *ABCD*, у якого перпендикуляр *BH* проведений до діагоналі *BD*, є паралелограм $A_1B_1C_1D_1$, у якого відрізок B_1H_1, проведений до діагоналі B_1D_1, ділить її у відношенні 9 : 16, починаючи від вершини B_1. **177.** 1) Проекцією рівнобічної трапеції *ABCD*, у якої висота *BH* проведена до більшої основи *AD*, буде трапеція $A_1B_1C_1D_1$, у якої відрізок B_1H_1, проведений до більшої основи A_1D_1, ділить її у відношенні 1 : 3, починаючи від вершини A_1. **185.** 1) Проекцією квадрата, вписаного в коло, буде паралелограм, уписаний в еліпс, з вершинами в кінцях його двох взаємно перпендикулярних діаметрів. *Вказівка*: скористайтеся побудовою в задачі 32. **190.** 1) Прямокутний паралелепіпед або довільний паралелепіпед; 3) правильна чотирикутна піраміда або чотирикутна піраміда, в основі якої лежить ромб чи паралелограм.

Розділ 4

§ 37

191. Так. **192.** Так. **193.** Так. **194.** Так. **195.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою перпендикулярності прямої та площини. **196.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою перпендикулярності прямої та площини. **197.** Прямокутний. **199.** Перпендикулярна. **200.** *Вказівка*: врахуйте, що грані куба — квадрати. **201.** 1) *Вказівка*: врахуйте, що $AD \perp AB$ і $AD \perp AA_1$; 2) *вказівка*: обґрунтуйте, що в чотирикутнику AB_1C_1D усі кути прямі. **203.** Пряма BC і площина ACD. **204.** Пряма BC і площина ABD. **205.** 1) $\sqrt{5}$ см, $\sqrt{5}$ см, 3 см; 2) 5 см, 5 см, $\sqrt{34}$ см. **206.** 1) 13 см; 2) 26 см. **207.** 1) 13 см, $3\sqrt{17}$ см; 2) 25 см, $3\sqrt{41}$ см. **209.** *Вказівка*: обґрунтуйте, що SO — медіана. **210.** 1) 80 см², 160 см²; 2) 65 см², 130 см². **211.** 1) 12 см; 2) $\sqrt{41}$ см. **213.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-2c^2}$.

214. $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, $\sqrt{c^2-a^2}$, $\sqrt{c^2-b^2}$. **215.** 15 см.

§ 38

219. 1) AB; 2) B; 3) AC; 4) BC. **220.** 1) 5 см; 2) 8 см; 3) 13 см. **221.** 1) $AB<BC$; 2) $AD=DC$. **222.** 1) AD; 2) AA_1; 3) DC. **223.** 1) 20 см; 2) 9 см; 3) 12см. **224.** 1) 25 см; 2) 20 см; 3) $10a$ см. **225.** 1) 5 см, $5\sqrt{3}$ см; 2) $6\sqrt{2}$ см, $6\sqrt{2}$ см; 3) $4\sqrt{3}$ см, 4 см. **226.** 1) 12 см, $6\sqrt{3}$ см; 2) $5\sqrt{2}$ см, 5 см; 3) $14\frac{\sqrt{3}}{3}$ см, $\frac{28\sqrt{3}}{3}$ см. **227.** 1) Безліч; коло. **228.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що рівні похилі мають рівні проекції. **229.** $KB>KC$. **230.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **231.** 1) $MA=MC$; 2) $MA>MC$. **232.** 1) 45°; 2) 30°; 3) 60°. **233.** 1) 3 см, $3\sqrt{3}$ см; 2) $4\sqrt{3}$ см, 30°; 3) 5 см, $5\sqrt{2}$ см; 4) $6\sqrt{3}$ см, 60°; 5) $7\sqrt{3}$ см, 14 см; 6) $14\sqrt{2}$ см, 45°. **234.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **237.** 1) 2 см; 2) $\sqrt{6}$ см. **238.** *Вказівка*: спочатку доведіть, що точка O рівновіддалена від основ даних похилих. **239.** 1) 8 см; 2) 16 см. **240.** 4 см. **241.** 1) 6 см, 15 см; 2) 8 см. **242.** 1) 39 см, 45 см; 2) 25 см, 40 см. **243.** 45°. **244.** 37,7 м. **245.** $\approx 2{,}1$ м.

§ 39

248. 1) $\angle CDC_1$; 2) $\angle BDB_1$; 3) $\angle B_1DC_1$. **249.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою про три перпендикуляри. **250.** *Вказівка*: врахуйте, що діагоналі квадрата перпендикулярні, та скористайтеся теоремою про три перпендикуляри. **251.** 1) 10 см; 2) 17 см. **254.** *Вказівка*: покажіть, що $\angle B$ — прямий, та скористайтеся теоремою про три перпендикуляри. **255.** 1) 13 см, 20 см; 2) 25 см, 26 см. **256.** *Вказівка*: спочатку обґрунтуйте, що трикутники ABM і ACM рівні. **257.** 1) $2h$; 2) $h\sqrt{2}$; 3) $\frac{2h}{\sqrt{3}}$. **258.** 1) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{a}{2}$. **260.** 1) 3 см; 2) 7 см. **261.** 1) 13 см; 2) 26 см. **262.** *Вказівка*: обґрунтуйте, що основа перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини паралелограма, є центром вписаного кола. **263.** *Вказівка*: обґрунтуйте, що основа перпендикуляра O рівновіддалена від сторін многокутника. **264.** 1) 24 см; 2) $4\sqrt{7}$ см. **265.** 6,4 см. **266.** 13 см. **267.** 7 см. **268.** 9 см^2. **269.** $3a$. **270.** 1) $4\sqrt{6}$ см; 2) $6\sqrt{6}$ см.

§ 40

272. Так. **273.** Паралельні. **274.** Так. **279.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **280.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **285.** Прямокутник. **286.** 1) *Вказівка*: спочатку доведіть, що $ABCD$ — паралелограм, у якого кут ADC (або BCD) прямий; 2) *вказівка*: спочатку обґрунтуйте, що кути ADC і BCD прямі. **287.** Діагональ паралельна площині або лежить у ній.

288. *Вказівка*: обґрунтуйте паралельність AM і CN і скористайтеся теоремою про паралельні площини і перпендикулярну пряму. **289.** *Вказівка*: обґрунтуйте паралельність AM і CN та скористайтеся теоремою про паралельні площини і перпендикулярну пряму. **290.** *Вказівка*: через прямі a і b проведіть площину β та доведіть, що пряма перетину площин α і β паралельна прямій b. **291.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю середньої лінії трапеції. **292.** 90°, 45°, 135°, 90°.

§ 41

296. 1) $\angle SMC$; 2) $\angle SNB$. **297.** Так. **298.** Так. **299.** 1) 45°; 2) 45°; 3) 90°. **300.** 1) 1 см; 2) $2\sqrt{2}$ см; 3) $3\sqrt{3}$ см. **301.** Безліч. **302.** Перпендикулярна до площини. **303.** *Вказівка*: покажіть, що BC є перпендикуляром до площини трикутника, та скористайтеся ознакою перпендикулярності площин. **304.** *Вказівка*: спочатку обґрунтуйте, що BC і MN перпендикулярні. **306.** 1) 20 см; 2) $4\sqrt{3}$ см; 3) $4\sqrt{2}$ см. **307.** 1) 12 см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) $7\sqrt{3}$ см. **308.** 30°. **309.** 1) 30°; 2) 30°. **310.** 1) 6 см; 2) $3\sqrt{2}$ см; 3) $6\sqrt{3}$ см. **312.** *Вказівка*: обґрунтуйте, що основа перпендикуляра MO є точкою перетину діагоналей квадрата, та скористайтеся ознакою перпендикулярності площин. **313.** 1) $5\sqrt{2}$ см; 2) $9\sqrt{2}$ см; 3) $11\sqrt{2}$ см. **314.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) $a\sqrt{3}$; 3) 60°. **315.** 1) 8 см; 2) $5\sqrt{2}$ см. **316.** 1) 13 см; 2) 26 см. **317.** 1) 60°; 2) 45°; 3) 30°. **318.** 1) $\sqrt{a^2+b^2}$; 2) $\frac{2\sqrt{a^2+ab+b^2}}{3}$; 3) $2\sqrt{a^2+ab\sqrt{3}+b^2}$. **319.** $\frac{a}{2}$. **320.** 14°29'. **322.** ≈33°.

§ 42

323. Трикутник, відрізок. **325.** 1) Так; 2) так; 3) так. **326.** 1) $\sqrt{a^2-b^2}$; 2) $\frac{b}{2}$. **327.** 1) 14 см; 2) 10 см; 3) 22 см. **328.** 1) 11 см; 2) 20 см. **329.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **330.** 1) 16 см; 2) 20 см. **331.** 1) 5 см; 2) 12 см. **332.** 1) 2 см; 2) 3 см. **333.** 1) 24 см; 2) 12 см. **334.** 1) 6 см; 2) $4\sqrt{3}$ см; 3) $8\sqrt{2}$ см. **335.** 1) 8 см; 2) 4 см; 3) 6 см. **336.** 1) 9 см, 16 см, 25 см; 2) 8 см, $6\sqrt{15}$ см, 26 см. **337.** 1) 6 см або 9 см; 2) 6 см або 10 см. **338.** b, $\sqrt{b^2+2a}$. **339.** 19 см, 17 см. **340.** 21,8 м.

ПОВТОРЕННЯ ВИВЧЕНОГО

Алгебра і початки аналізу

2. 1) 4; 3) 9; 5) 30. **3.** 30. **4.** $3\frac{1}{3}$%. **5.** 62 %. **6.** 30 %; 10 %; 60 %. **8.** 1) 6; 3) 4,9; 5) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$; 7) 2; 8) 2. *Вказівка*: підкореневі вирази подайте у вигляді куба суми та різниці двох чисел. **9.** 1) $\sqrt{a}$; 3) $\frac{2}{1-a}$; 5) $\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}$. **11.** 1) $[-1;\ 1]$; 3) R; 5) $(-\infty;\ 2]\cup[3;\ +\infty)$; 7) R. **12.** 1) R; 3) $(-\infty;\ 0]$; 5) $(-\infty;\ 0]$; 7) $(-\infty;\ 3]$; 9) $[4;\ +\infty)$. **13.** 1) a; 3) $-b$; 5) $\sqrt[9]{b^4}$; 7) 1; 9) $y-x$. **14.** 1) R; 3) $(-\infty;\ 1]\cup(1;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; 7) $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$. **15.** 1) $[-1;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ 7]$; 5) $\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$. **16.** 1), 5), 7) — парні; 2), 4), 6) — непарні; 3) ні парна, ні непарна. **20.** 1) 1,5; 3) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{16}$; 5) $\frac{1}{2}$; 7) 1. **21.** 1) 0,6; $\frac{4}{3}$; 0,75; 3) $-\frac{63}{65}$; $-\frac{16}{65}$; $\frac{16}{63}$; 5) -3. **22.** 1) $\sin 40° > \sin 20°$; 3) $\sin 25° < \operatorname{tg} 25°$; 5) $\sin 50° > (\sin 50°)^2$. **23.** 1) $\sin^2\alpha$; 3) 1; 5) 2; 7) $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **25.** 1) 5; 3) $\frac{225}{128}$. **26.** 1) R; 3) $x \neq \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in Z$; 5) $x \neq -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in Z$. **27.** 1) $[0;\ 2]$; 3) $[0;\ 1]$; 5) R; 7) $[-1;\ 1]$. **28.** 1), 2), 3) — парні; 4), 5), 7) — непарні; 6) ні парна, ні непарна. **30.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k \in Z$; 3) $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k \in Z$; 5) $\frac{3\pi}{20}+\frac{2\pi k}{5},\ k \in Z$. **31.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in Z$; 3) πk; $\operatorname{arctg} 3+\pi k$, $k \in Z$; 5) $\pi k-\frac{\pi}{4},\ k \in Z$; 7) $2\pi k$; $4\pi(k+1),\ k \in Z$; 9) $\frac{\pi k}{3}$; $\pi k+\frac{\pi}{2},\ k \in Z$.

32. 1) $\left(-\frac{4\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right),\ k \in Z$; 3) $\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right),\ k \in Z$; 5) $\left[\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \pi+\pi k\right],\ k \in Z$; 7) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right),\ k \in Z$.

Геометрія

4. 1) Так. **5.** 1) Так; 2) ні. **6.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що через пряму і точку можна провести площину й тільки одну. **13.** Безліч. **15.** Перетинаються або паралельні. **16.** Пряма a або лежить у площині β, або перетинає її, або їй паралельна. **18.** Паралельні. **19.** Або паралельні, або мимобіжні. **20.** Ні, якщо пряма перетинає дану площину. **21.** 2) Безліч; 3) одну. **22.** 1) Дві прямі, що перетинаються, або одна пряма; 2) дві паралельні прямі, або одна пряма, або дві точки. **23.** 1) Відрізок, паралельний площині, на яку він проектується. **32.** 1) $10\sqrt{3}$ см; 2) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ см. **33.** 5 см, 5 см, 13 см. **34.** 1) Ні; 2) можна, якщо трапеція рівнобічна чи прямокутна. **35.** *Вказівка*: обґрунтуйте, що OM — медіана ΔAMC, тоді $OM \perp AB$. Аналогічно $OM \perp CD$. Далі скористайтеся ознакою перпендикулярності прямої та площини. **37.** 1) 17 см; 2) 7,5 см. **38.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см, $4\sqrt{2}$ см, 8 см. **40.** 1) 5 см; 2) 8 см. **41.** 1) $\sqrt{166}$. **43.** 45°. **46.** *Вказівка*: проведіть площину через прямі a і b. **47.** 1) 6 см. **48.** 3 см, 5 см. **49.** *Вказівка*: з точки перетину діагоналей паралелограма проведіть перпендикуляр до площини і покажіть, що його довжина дорівнює півсумі довжин перпендикулярів, проведених з протилежних вершин паралелограма до цієї площини. **50.** 7 см.

Відомості з курсу алгебри 7 – 9 класів

1. 1) 2,5; 3) $\frac{15}{29}$; 5) 0,9; 7) 8. **2.** 1) –4; 2) 0,9. **4.** 1) $-p$; 3) $\frac{2x}{x-2y}$; 5) $3(x-y)$; 7) –12,5; 9) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}$. **6.** 1) $\frac{4a}{3a-12}$; 2) $-\frac{1}{x}$; 5) $\frac{2}{3}$; 7) a^{12}. **7.** 1) $\frac{x-z}{y-z}$; 3) $\frac{x+1}{2x+1}$. **8.** 1) $a=2$, $b=3$; 2) $a=8$, $b=3$. **9.** 1) ±1, ±3; 3) –8, –5, –4, –3, –1, 0, 1, 4. **10.** 1) $x \ge 0$; 3) $x \in \mathbf{R}$; 5) $a \le 0$; 7) $y \le 0$; 9) $a \le 0$. **11.** 1) a^2b^2; 3) $4x^2y^2$; 5) $\frac{p^2}{a^4}$; 7) $\frac{2x}{y^3}$. **12.** 1) 4, 5; 3) – 1. **13.** 1) 0; $-\frac{8}{5}$; 3) –3; 8. **15.** 1) $t < -0{,}8$; 3) $t \in (-2;\ 2)$. **16.** 1) $a \le 4$; 3) $a \le -24$; $a \ge 24$. **17.** 1) 0; –3; 3) $-18\frac{1}{7}$; –1; 5) $1\frac{5}{8}$; 3. **18.** 1) –1; 3) 1; 2; 5) –1; 3; 7) $-\frac{4}{3}$. **19.** 1) $\pm\frac{2}{3}$; ±1; 3) ±5. **20.** 1) $-\frac{7}{3}$; $-\frac{2}{3}$; 3) $-3\pm\sqrt{6}$; $-3\pm\sqrt{17}$; 5) –2; 4; $1\pm\sqrt{5}$; 7) –4; 5. **21.** 1) 0; ±4; 3) 0; 5) – 8; 0; 2; 7) –1; ±3. **23.** 1) (3; 9); 3) (–2; –4); (4; 8); 5) (1; 4);(4; 1); 7) (1; 5);(5; 1). **27.** 1) **R**; 3) $\varnothing$; 5) $(2;\ +\infty)$. **28.** 1) $(-\infty;\ -6]$; 3) $\varnothing$. **29.** 1) $(-5;-4)\cup(6;+\infty)$; 3) $(-\infty;\ 2)\cup(2{,}5;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ -1)\cup(0;\ 3)$; 7) $(-5;\ 2)$. **30.** 1) 0; –1; –2; 3) –1; 0; 1; 2; 3; 5) –3; –2; –1; 0. **31.** 2с; 6с. **32.** 16 см; 30 см. **33.** 15 см. **34.** 26. **35.** 10 днів; 15 днів. **36.** 110 м. **37.** 4; 5. **38.** 14. **39.** 2,2 км. **40.** 48 км/год; 40 км/год. **41.** 12 км/год. **42.** 13 км/год. **43.** $3\frac{3}{4}$ год. **44.** 10 км/год; 30 км/год. **45.** 12 км/год; 60 км/год. **46.** 2 м; 2,75 м. **47.** 200; 600.

48. 35. **49.** $41\frac{1}{3} < x < 61\frac{2}{3}$ (км). **50.** $b = 6; 5; 4$; $c = 4; 5; 6$. **51.** $39^\circ \le t \le 55^\circ$. **53.** 1) (2; −7); 3) точок перетину немає; 5) (−1; −7); (1; −5). **56.** $y = 1{,}5x$. **58.** 1) $k = 2$; $b = -3$. **61.** Так. **62.** 1) $\left(\frac{1}{3};\ 2\right]$; 3) [−2; 1]; 5) [−1; 0)∪(0; 1]; 7) [0; 4]. **64.** 1) 276; 3) 4; 5) $-\frac{2}{3}$; 7) 67 626. **65.** 1) 2 або 5; 3) 11. **66.** 1) $\frac{1}{5}$; 5; 3) $\frac{8}{3}$ або $\frac{5000}{3}$; 5) 121. **67.** 1) 3; 3) 4. **68.** 1280. **69.** 7; 16; 25; .... **70.** −5; −2; 1; .... **72.** 8 с. **73.** 10. **74.** 12. **75.** 35,4 тис. м³. **76.** 50 м/хв². **77.** 1 160 м. **78.** 81; 27; 9; 3. **79.** 4; 8; 16. **80.** 2; 8; 32. **81.** 8 або 11. **82.** 27; 18; 9. **83.** 1) $\frac{19}{99}$; 3) $5\frac{2}{999}$; 5) $3\frac{61}{300}$; 7) $1\frac{7}{90}$. **84.** $1111\frac{1}{9}$ м. **85.** $65\frac{5}{11}$ хв. **86.** $a^2\sqrt{3}$.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Навчальне видання

Михайло Іванович БУРДА,
Тамара Всеволодівна КОЛЕСНИК,
Юрій Іванович МАЛЬОВАНИЙ,
Ніна Анатоліївна ТАРАСЕНКОВА

МАТЕМАТИКА

Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів
Рівень стандарту

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Редактори: *В. М. Кириченко, Н. В. Демиденко*
Художній редактор *В. П. Литвиненко*
Технічний редактор *Л. І. Аленіна*
Коректор *Є. С. Святицька*

Малюнки художників *Е. Авраменка, О. Дядика*

Фото: *Е. Авраменко, А. Віксенко, В. Корюненко, В. Соловйов*;
з альбому "Дніпропетровщина" (Дніпропетровськ: Дніпрокнига, 2001)

Формат 70×100 1/16. Умов. друк. арк. 23,4 + 0,33 форзац.
Обл.-вид. арк. 24,0 + 0,4 форзац. Наклад 2000 пр. Зам. 11-0085

Видавничий дім «Освіта»
Свідоцтво «Про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготовників і розповсюджувачів видавничої продукції» Серія ДК № 4073 від 26. 05. 2011 р.

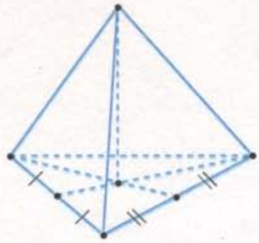
Адреса видавництва: 04053 Київ, вул. Артема, 37-41
Тел.: (044) 496-85-95, (044) 496-85-98. Факс.: (044) 496-85-96
Наш сайт: www.osvita-ukrainy.com.ua
Віддруковано з готових діапозитивів
ТОВ «Побутелектротехніка»
Св. ДК № 3179 від 08.05.2008 р.
61024, м. Харків, вул. Ольмінського, 17.

ФОРМУЛИ

Назва формули	Формула	Позначення
Сума суміжних кутів	$\alpha + \beta = 180^\circ$	α, β – суміжні кути
Сума кутів трикутника	$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$	A, B, C – кути трикутника
Сума кутів чотирикутника	$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$	A, B, C, D – кути чотирикутника
Сума кутів n-кутника	$\angle A + \angle B + \ldots + \angle F = 180^\circ(n-2)$	A, B, ... F – кути n-кутника
Периметр n-кутника	$P = AB + BC + \ldots + FA$	P – периметр, AB, BC, ... FA – сторони n-кутника
Довжина середньої лінії трикутника	$m = \frac{a}{2}$	m – середня лінія, a – сторона, якій паралельна середня лінія
Довжина середньої лінії трапеції	$n = \frac{a+b}{2}$	n – середня лінія, a, b – основи
Площа квадрата	$S = a^2$	a – сторона
	$S = \frac{1}{2}d^2$	d – діагональ
Площа прямокутника	$S = ab$	a, b – сторони
Площа паралелограма і ромба	$S = ah$	a – сторона, h – висота, проведена до цієї сторони
Площа ромба (інший вигляд формули)	$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$	d_1, d_2 – діагоналі

ПЛАНІМЕТРІЇ

Назва формули	Формула	Позначення
Площа трикутника	$S=\frac{1}{2}ah$	a — сторона, h — висота, проведена до цієї сторони
	$S=mh$	m — середня лінія, h — висота, проведена до сторони, якій паралельна середня лінія
	$S=pr$	p — півпериметр, r — радіус вписаного кола
Площа трапеції	$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$	a, b — основи, h — висота
	$S=nh$	n — середня лінія, h — висота
Середні пропорційні у прямокутному трикутнику	$h_c^2=a_c b_c$	h_c — висота, проведена до гіпотенузи, a_c, b_c — проекції катетів на гіпотенузу
	$a^2=c\,a_c$	a — катет, c — гіпотенуза, a_c — проекція катета на гіпотенузу
Теорема Піфагора	$c^2=a^2+b^2$	c — гіпотенуза, a, b — катети
Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника	$\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $a=c\sin\alpha$, $c=\frac{a}{\sin\alpha}$	c — гіпотенуза, a — катет, протилежний куту α
	$\cos\alpha=\frac{b}{c}$, $b=c\cos\alpha$, $c=\frac{b}{\cos\alpha}$	c — гіпотенуза, b — катет, прилеглий до кута α
	$\mathrm{tg}\alpha=\frac{a}{b}$, $a=b\,\mathrm{tg}\alpha$, $b=\frac{a}{\mathrm{tg}\alpha}$	a — катет, протилежний куту α, b — катет, прилеглий до кута α



ПІДРУЧНИКИ, ЩО НАВЧАЮТЬ ДУМАТИ!

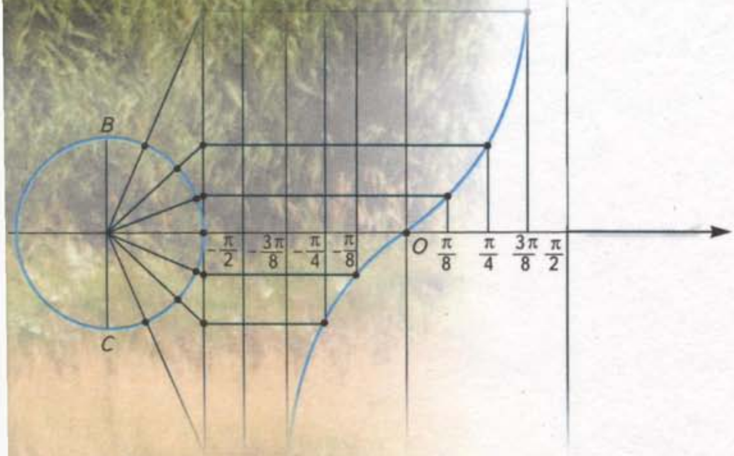
Автори підручників для профільної школи:

Михайло БУРДА,
Тамара КОЛЕСНИК,
Юрій МАЛЬОВАНИЙ,
Ніна ТАРАСЕНКОВА

- **МАТЕМАТИКА.**
  Рівень стандарту. **10 клас**

- **МАТЕМАТИКА.**
  Рівень стандарту. **11 клас**

Видавничий дім «Освіта»
04053, Київ, вул. Артема, 37-41
Тел.: **(044) 496-85-98.** *Факс.:* **(044) 496-85-96**
www.osvita-dom.com.ua



ISBN 978-617-656-017-3
9 786176 560173